UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CARLOS GONÇALVES DO REI FILHO

HIPERSUPERFÍCIES CONFORMEMENTE EUCLIDIANAS COM CURVATURA MÉDIA OU ESCALAR CONSTANTE

São Carlos
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CARLOS GONÇALVES DO REI FILHO

HIPERSUPERFÍCIES CONFORMEMENTE EUCLIDIANAS COM CURVATURA MÉDIA OU ESCALAR CONSTANTE

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, área de concentração: Geometria diferencial

Orientação: Prof Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior

São Carlos
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Carlos Gonçalves do Rei Filho, realizada em 10/11/2016:

Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior
UFSCar

Prof. Dr. Marcos Dajczer
IMPA

Francesco Mercuri

Prof. Dr. Francesco Mercuri
UNICAMP

Fernando Manfio

Prof. Dr. Fernando Manfio
USP

Prof. Dr. Alexandre Paiva Barreto
UFSCar

À Kellyane Gonçalves.

Agradecimentos

Primeiro de tudo, agradeço a Deus por me proteger, orientar e me dar tranquilidade para correr em busca dos meus objetivos e não desanimar com as dificuldades. Agradeço a Ele também por manter minha família ao meu lado. Agradeço-Lhe por tudo.

Agradeço aos meus irmãos Ana Carla, Tamiri e José Lucas, aos meus sobrinhos Grazyelly e Augusto e, principalmente, à minha mãe Maria Cicera, que sempre me motivou, entendeu os meus momentos de afastamento e me mostrou o quanto é importante estudar, mesmo não tendo tido ela a mesma oportunidade no passado. Reconheço os sacrifícios que fizestes para que teus filhos tivessem acesso aos estudos.

Agradeço à minha esposa, Kellyane Gonçalves, a qual Deus me presenteou, por todo o apoio que me dá. Lembro que, nos momentos de dificuldades, ela me tranquilizava, e quando eu pensava que não dava mais para avançar nas contas, quando eu estava sem ideias, quando eu estava a ponto de desistir, ela conseguia me acalmar e mudar meu foco. Agradeço-te por isso e por todas as outras atitudes que em ti admiro.

Agradeço a orientação do Prof. Dr. Ruy Tojeiro. Sempre que precisava de orientações, sempre que precisava conversar, ele estava disponível. Agradeço-lhe pela amizade, dedicação, profissionalismo, incentivo e esforço a mim dedicado. Admiro-lhe pelo compromisso com a profissão, com a família e com os amigos.

Agradeço pela participação e contribuições dos componentes da banca examinadora da defesa, Prof. Dr. Marcos Dacjzer, Prof. Dr. Francesco Mercuri, Prof. Dr. Fernando Manfio e Prof. Dr. Alexandre Paiva Barreto.

Agradeço ao Prof. Dr. Feliciano Vitório pelo constante incentivo aos estudos, pelos valiosos conselhos, desde a graduação, e pela amizade.

Agradeço aos colegas e amigos que fiz durante este período no Departamento de Matemática, pelas agradáveis conversas nas pausas para o café e nos momentos de descontração. Deixo registrados alguns deles, dos quais mais me aproximei e com os quais sempre conversei sobre este trabalho: Daniel Guimarães, Samuel Canevari, Elard Juares, Juan Carlos, Sérgio Ura, Sergio Aguirri, Renan Medrado e Amanda Ferreira. Agradeço também aos amigos e colegas que fiz fora do Departamento.

Agradeço aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFSCar pelo agradável convívio.

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesta tese estudamos hipersuperfícies conformemente euclidianas $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$, com três curvaturas principais distintas e curvatura média H ou curvatura escalar S constante, em formas espaciais com curvatura seccional c. No caso em que a curvatura média H é constante, inicialmente estendemos para c arbitrário um resultado provado por Defever [10] quando $c = 0$ e mostramos que uma tal hipersuperfície não existe se $H \neq 0$. Nossos principais resultados são para o caso mínimo $H = 0$. Se $c \neq 0$, mostramos que $f(M^3)$ é um subconjunto aberto de um cone generalizado sobre um toro de Clifford em uma hipersuperfície umbílica $\mathbb{Q}^3(\tilde{c}) \subset \mathbb{Q}^4(c)$, $\tilde{c} > 0$, com $\tilde{c} \geq c$ se $c > 0$. Para $c = 0$, mostramos que, além do cone sobre o toro de Clifford em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, existe precisamente uma família a 1-parâmetro de hipersuperfícies conformemente euclidianas com três curvaturas principais distintas duas a duas não congruentes, sendo o cone sobre o toro de Clifford o elemento singular da família. No caso em que a curvatura escalar é constante, estudamos apenas o caso $c = 0$. Mostramos, nesse caso, que $f(M^3)$ é um subconjunto aberto de um cilindro sobre uma superfície de curvatura Gaussiana constante do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$.

Palavras-chave: Hipersuperfícies conformemente euclidianas. Hipersuperfícies mínimas. Curvaturas principais distintas. Curvatura média constante. Curvatura escalar constante.

Abstract

In this work we study conformally flat hypersurfaces $f\colon M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ with three distinct principal curvatures in a space form with constant sectional curvature c, under the assumption that either its mean curvature H or its scalar curvature S is constant. In case H is constant, first we extend to any $c \in \mathbb{R}$ a theorem due to Defever when $c = 0$ and show that there is no such hypersurface if $H \neq 0$. Our main results are for the minimal case $H = 0$. If $c \neq 0$, we prove that $f(M^3)$ is an open subset of a generalized cone over a Clifford torus in an umbilical hypersurface $\mathbb{Q}^4(\tilde{c}) \subset \mathbb{Q}^4(c)$, $\tilde{c} > 0$, with $\tilde{c} \geq c$ if $c > 0$. For $c = 0$, we show that, besides the cone over the Clifford torus in $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, there exists precisely a one-parameter family of (congruence classes of) minimal isometric immersions $f\colon M^3 \to \mathbb{R}^4$ with three distinct principal curvatures of simply-connected conformally flat Riemannian manifolds. Assuming S to be constant, we only study the case $c = 0$. We prove that $f(M^3)$ is an open subset of a cylinder over a surface of nonzero constant Gauss curvature in $\mathbb{R}^3$.

Keywords: Conformally flat hypersurfaces. Minimal hypersurfaces. Distinct principal curvatures. Constant mean curvature. Constant scalar curvature.

Sumário

Introdução

Uma variedade Riemanniana é conformemente euclidiana se cada um de seus pontos possui uma vizinhança aberta conforme a um subconjunto aberto do espaço euclidiano. Foi provado por Cartan [5] que se $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$ é uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M^n, de dimensão $n \geq 4$, em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$, de dimensão $n+1$ e curvatura seccional constante c, então M^n é conformemente euclidiana se, e somente se, f tem uma curvatura principal de multiplicidade[1] pelo menos $n-1$. Uma hipersuperfície de $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ com uma curvatura principal de multiplicidade $n-1$ é localmente a envoltória de uma família a 1-parâmetro de hipersuperfícies umbílicas de $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$. Cartan também provou que toda hipersuperfície $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ com uma curvatura principal de multiplicidade dois é conformemente euclidiana, e observou que a recíproca não vale nesse caso.

O estudo de hipersuperfícies conformemente euclidianas de dimensão três com três curvaturas principais distintas, iniciado por Cartan, foi retomado recentemente por Hertrich-Jeromin [17], o qual, inspirado em uma caracterização dada por Cartan [5], provou que uma hipersuperfície conformemente euclidiana $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas admite localmente coordenadas principais (u_1, u_2, u_3) com respeito às quais a métrica é dada por $ds^2 = \sum_{i=1}^{3} v_i^2 du_i^2$, com $v_2^2 = v_1^2 + v_3^2$. Como consequência desse resultado, ele obteve uma série de aplicações, ver [18]. Um resultado recente, demonstrado por Canevari e Tojeiro [4], completa o resultado de Hertrich-Jeromin, estabelecendo que hipersuperfícies conformemente euclidianas $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas são caracterizadas pela existência de tais coordenadas principais com algumas condições adicionais, ver Proposição 1.9. Tal caracterização foi o ponto de partida para a obtenção dos resultados desta tese.

Em [12], do Carmo e Dajczer mostraram que se $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, tem uma curvatura principal $\lambda \neq 0$ com multiplicidade $n-1$ e a outra curvatura principal

[1] Hipersuperfícies $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$ com uma curvatura principal de multiplicidade $n-1$ são conhecidas na literatura como hipersuperfícies quasi-umbílicas.

μ é tal que $\mu \neq \lambda$ e $\mu = \mu(\lambda)$, então f é uma hipersuperfície de rotação sobre uma curva plana. Em particular, se $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, é uma hipersuperfície conformemente euclidiana com curvatura média constante e sem pontos umbílicos, com uma curvatura principal de multiplicidade dois se $n = 3$, então ou $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de uma hipersuperfície de rotação com curvatura média constante ou $c = 0$ e $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{S}^1(\tilde{c}) \times \mathbb{R}^{n-1}$, $\tilde{c} > 0$. Da mesma forma, se $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, é uma hipersuperfície conformemente euclidiana com curvatura escalar constante sem pontos umbílicos ou pontos com curvatura seccional constante c, com uma curvatura principal de multiplicidade dois se $n = 3$, então $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de uma hipersuperfície de rotação com curvatura escalar constante.

As curvas geratrizes das hipersuperfícies de rotação $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, com curvatura média constante, foram descritas em [12], como soluções de um certo sistema de equações diferenciais ordinárias, enquanto que aquelas das hipersuperfícies de rotação $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, com curvatura escalar constante foram classificadas por Leite [24]. Portanto, no estudo de hipersuperfícies conformemente euclidianas $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$ com curvatura média ou escalar constante, o caso não completamente entendido ocorre quando $n = 3$ e a hipersuperfície tem três curvaturas principais distintas.

Foi mostrado por Defever [11] que se $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ é uma hipersuperfície conformemente euclidiana com três curvaturas principais distintas e curvatura de Gauss-Kronecker K constante, então $K = 0$, isto é, f tem uma curvatura principal identicamente zero. Daí decorre que $f(M^3)$ é um subconjunto aberto de um cone sobre uma superfície de curvatura Gaussiana constante em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ou de um cilindro sobre uma superfície de curvatura Gaussiana constante em $\mathbb{R}^3$, ver Proposição 1.3. Ele também provou, em [10], que uma hipersuperfície conformemente euclidiana do espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas e curvatura média constante é necessariamente mínima.

Nesta tese estudamos hipersuperfícies conformemente euclidianas $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ com curvatura média ou escalar constante e três curvaturas principais distintas. No caso em que a curvatura média é constante, inicialmente estendemos o teorema de Defever [10] para $c \neq 0$, mostrando que se $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ é uma hipersuperfície conformemente euclidiana com curvatura média constante e três curvaturas principais distintas, então f é necessariamente mínima (Teorema A).

Exemplos de hipersuperfícies conformemente euclidianas mínimas $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas podem ser construídos do modo seguinte. Considere um toro de Clifford $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{Q}^3(\tilde{c})$, $\tilde{c} > 0$, com $\tilde{c} \geq c$ se $c > 0$, em uma hipersuperfície umbílica $\mathbb{Q}^3(\tilde{c}) \subset \mathbb{Q}^4(c)$, e considere o cone generalizado sobre g em $\mathbb{Q}^4(c)$, isto é, a hipersuperfície parametrizada pela aplicação $G : \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{Q}^4(c)$ dada por $G(x,t) = \exp_{g(x)}(t\xi(g(x)))$, em que ξ é um campo de vetores unitário normal à inclusão $i : \mathbb{Q}^3(\tilde{c}) \to \mathbb{Q}^4(c)$, exp é a aplicação exponencial de $\mathbb{Q}^4(c)$ e I é o intervalo aberto $(0, \infty)$, se $c \leq 0$ e $(0, \frac{\pi}{\sqrt{c}})$, se $c > 0$. Mostramos que, se $c \neq 0$, então esses são todos os exemplos possíveis, ou seja, uma hipersuperfície conformemente euclidiana mínima de $\mathbb{Q}^4(c)$, $c \neq 0$, com três curvaturas principais distintas é necessariamente um subconjunto aberto de um cone generalizado sobre um toro de Clifford em uma hipersuperfície umbílica $\mathbb{Q}^3(\tilde{c}) \subset \mathbb{Q}^4(c)$, $\tilde{c} \geq c$ se $c > 0$ (Teorema B).

O caso mais interessante, a respeito das hipersuperfícies conformemente euclidianas mínimas com três curvaturas principais distintas de uma forma espacial $\mathbb{Q}^4(c)$, ocorre quando $c = 0$. Nesse caso, mostramos que, além do cone sobre um toro de Clifford em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, existe precisamente uma família a 1-parâmetro de (classes de congruências de) imersões isométricas mínimas $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas de variedades Riemannianas simplesmente conexas conformemente euclidianas (Teorema C).

Nosso estudo das hipersuperfícies conformemente euclidianas em $\mathbb{R}^4$ com curvatura escalar constante, além de visar uma completa classificação das hipersuperfícies conformemente euclidianas em $\mathbb{R}^4$ com uma função simétrica constante de suas curvaturas principais, teve ainda uma outra forte motivação. Variedades conformemente euclidianas M^3 de dimensão três com curvatura escalar constante são precisamente as variedades Riemannianas que têm tensor de curvatura harmônico, isto é, aquelas cuja divergência d^* de seu tensor curvatura R satisfaz $d^*R = 0$, em que R é considerado como um elemento de $\Omega^2(M, \Lambda^2 M)$, ou seja, como uma 2-forma em M tomando valores em $\Lambda^2 M$. Tendo em vista a segunda identidade de Bianchi $dR = 0$, em que d é a diferencial exterior, $d^*R = 0$ é equivalente a $\Delta R = (dd^* + d^*d)R = 0$. Em qualquer dimensão, a identidade $d^*R = -d\,\mathrm{Ric}$ implica que uma variedade Riemanniana tem tensor de curvatura harmônico se, e somente se, seu tensor de Ricci é um tensor de Codazzi. Assim, variedades Riemannianas com tensor de curvatura harmônico são, em particular, generalizações naturais de variedades de Einstein e de variedades cujo tensor de Ricci é paralelo.

Hipersuperfícies de dimensão arbitrária com tensor de curvatura harmônico em formas espaciais foram estudadas por alguns autores (ver [28] e suas referências), porém, uma classificação está longe de ser obtida. Por outro lado, hipersuperfícies com tensor de Ricci paralelo em formas espaciais foram classificadas por Reckziegel [32], depois de trabalhos anteriores devidos a Lawson [27] e Ryan [33]. Em particular, se $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície com tensor de Ricci paralelo, então ou M^n tem tensor de curvatura nulo ou $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de uma esfera $\mathbb{S}^n(c) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, um $(n-k)$-cilindro sobre uma esfera $\mathbb{S}^k(c) \subset \mathbb{R}^{k+1}$ ou um $(n-2)$-cilindro sobre uma superfície em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana constante $c \neq 0$. Note que as duas últimas hipersuperfícies não são de Einstein e que apenas a última tem três curvaturas principais distintas. Apesar do fato de que a hipótese do tensor de Ricci ser um tensor de Codazzi ser, a priori, uma hipótese muito mais fraca do que aquela de o tensor de Ricci ser paralelo, provamos que para hipersuperfícies $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas não existe nenhum exemplo satisfazendo a primeira condição mas não a segunda. Mais precisamente, mostramos que se $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ é uma hipersuperfície conformemente euclidiana com três curvaturas principais distintas e curvatura escalar constante, então $f(M^3)$ é um subconjunto aberto de um cilindro sobre uma superfície em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana constante não nula (Teorema D). Como mencionado anteriormente, hipersuperfícies conformemente euclidianas em $\mathbb{R}^4$ com curvatura escalar constante e uma curvatura principal com multiplicidade dois ou têm curvatura seccional constante igual a zero ou são hipersuperfícies de rotação, e estas são classificadas em [24]. Portanto, nosso resultado completa a classificação das hipersuperfícies conformemente euclidianas em $\mathbb{R}^4$ com curvatura escalar constante ou, equivalentemente, das hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$ com tensor de curvatura harmônico.

Apresentamos a seguir uma breve descrição dos capítulos que formam esta tese. No Capítulo 1 descrevemos alguns resultados sobre hipersuperfícies conformemente euclidianas em formas espaciais $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$. Recordamos a noção de hipersuperfícies holonômicas e exibimos a caracterização dada por Canevari e Tojeiro [4] das hipersuperfícies conformemente euclidianas com três curvaturas principais distintas, ver Teorema 1.9. Determinamos que relação deve existir entre os pares associados a hipersuperfícies conformemente euclidianas congruentes de $\mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas (um resultado técnico usado no capítulo subsequente), ver Proposição 1.2. Em seguida, damos uma descrição das hipersuperfícies conformemente euclidianas de $\mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas em que uma delas é identicamente nula, ver Proposição 1.3. Finalizamos apresentando resultados a respeito de hipersuperfícies de Einstein, hipersuperfícies com tensor de Ricci paralelo e hipersuperfícies com tensor de curvatura harmônico.

Os resultados principais desta tese encontram-se nos capítulos 2 e 3. No Capítulo 2 apresentamos os resultados acerca das hipersuperfícies conformemente euclidianas $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ com curvatura média constante e três curvaturas principais distintas, ver Teoremas A, B e C. Para obter os resultados, adaptamos a caracterização dada por Canevari e Tojeiro, mostrando que hipersuperfícies conformemente euclidianas em $\mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas e curvatura média constante determinam soluções particulares de um dado sistema de equações diferenciais parciais. A partir do estudo das propriedades das soluções desse sistema de equações foi possível demonstrar os Teoremas A e B. Para provar o Teorema C , mostramos que, reciprocamente, soluções do sistema dão origem a hipersuperfícies conformemente euclidianas mínimas de $\mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas e, em seguida, associamos a cada tal solução uma folha de uma distribuição involutiva em uma certa subvariedade algébrica de dimensão quatro do espaço euclidiano $\mathbb{R}^6$. No Capítulo 3 apresentamos a prova do Teorema D, seguindo uma linha de raciocínio análoga àquela da demonstração do Teorema A.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem o objetivo de contextualizar os problemas estudados nesta tese, assim como introduzir os conceitos com os quais trabalhamos.

1.1 Hipersuperfícies conformemente euclidianas

Seja M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n, com métrica $\langle\, ,\, \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇. A menos de menção em contrário, as variedades neste trabalho serão sempre conexas. Seja $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M^n e $C^\infty(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis em M^n. O tensor de curvatura R, o tensor de Ricci Ric e a curvatura escalar S de M^n são definidos por

$$\mathrm{R}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \to \mathrm{R}(Z,X)Y),$$

$$\mathrm{S} = \frac{1}{n(n-1)}\mathrm{tr}(Z \to \mathrm{Ric}(Z,Z)),$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, em que tr é o operador traço com respeito à métrica de M^n. O *tensor de Weyl* C de M^n é definido por

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{C}(X,Y,Z), W\rangle &= \langle \mathrm{R}(X,Y)Z, W\rangle - \mathrm{L}(X,W)\langle Y,Z\rangle - \mathrm{L}(Y,Z)\langle X,W\rangle \\ &\quad + \mathrm{L}(X,Z)\langle Y,W\rangle + \mathrm{L}(Y,W)\langle X,Z\rangle,\end{aligned}$$

em que L é o *tensor de Schouten* de M^n definido por

$$\mathrm{L}(X,Y) = \frac{1}{n-2}\left(\mathrm{Ric}\,(X,Y) - \frac{n}{2}\mathrm{S}\langle X,Y\rangle\right).$$

Uma variedade Riemanniana M^n é *conformemente euclidiana* se cada ponto de M^n admite uma vizinhança que é conformemente difeomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^n$.

Equivalentemente, se cada ponto $p \in M^n$ admite uma vizinhança coordenada $x : M \supset U \to \mathbb{R}^n$ na qual a métrica g de M^n é dada por $g|_U = e^{2\varphi} \sum_{i=1}^n dx_i^2$, em que $\varphi \in C^\infty(U)$.

Toda variedade Riemanniana M^2 de dimensão dois é conformemente euclidiana, pois isso é equivalente à existência de coordenadas locais isotérmicas, ou seja, coordenadas locais (x, y) com respeito às quais a métrica de M^2 é expressa por $e^{2\varphi}(dx^2 + dy^2)$. Esse resultado foi provado primeiro por Gauss [16], no caso analítico, e então por Korn [20] e Lichtenstein [25], no caso C^∞, ver Spivak [37], pag. 314, para uma demonstração.

Toda variedade Riemanniana com curvatura seccional constante é conformemente euclidiana. Por exemplo, a projeção estereográfica é um difeomorfismo conforme do complementar de um ponto em $\mathbb{S}^n$ no espaço euclidiano. Por outro lado, o modelo do semi-espaço (ou o modelo da bola) exprime o espaço hiperbólico como um subconjunto aberto do espaço euclidiano munido de uma métrica conforme à euclidiana.

Um produto Riemanniano $M_1 \times M_2$ é conformemente euclidiano se, e somente se, uma das seguintes possibilidades ocorrer:

(a) Um dos fatores tem dimensão um e o outro tem curvatura seccional constante.

(b) Ambos os fatores têm dimensão maior do que um e têm curvaturas seccionais constantes ou ambas nulas ou de mesmo módulo e sinais opostos.

Assim, por exemplo, se M^n é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional não constante, então $\mathbb{R} \times M^n$ não é uma variedade conformemente euclidiana.

As variedades Riemannianas M^n, $n \geq 3$, conformemente euclidianas foram caracterizadas em termos dos tensores de Weyl e Schouten, por Schouten [35], como segue:

Teorema 1.1. *Uma variedade Riemanniana M^n de dimensão $n \geq 3$ é conformemente euclidiana se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $C = 0$.

(ii) *L é um tensor de Codazzi, ou seja,*

$$(\nabla_X L)(Y, Z) = (\nabla_Y L)(X, Z), \quad \textit{para quaisquer } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Além disso, (i) implica (ii) quando $n \geq 4$, e (i) é automaticamente satisfeita se $n = 3$.

Em [21], Kuiper mostrou o seguinte resultado global.

Teorema 1.2. *Seja M^n, $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana conformemente euclidiana simplesmente conexa. Então, M^n pode ser conformemente imersa na esfera euclidiana $\mathbb{S}^n$ e essa imersão é única, a menos de transformações conformes de $\mathbb{S}^n$. Em particular, se M^n é compacta, então M^n é conforme a $\mathbb{S}^n$.*

Variedades Riemannianas conformemente euclidianas M^n, $n \geq 3$, admitem também a seguinte caracterização, veja [1].

Teorema 1.3. *Seja M^n, $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana simplesmente conexa. Então, M^n é conformemente euclidiana se, e somente se, ela pode ser imersa isometricamente como hipersuperfície do cone de luz $\mathbb{V}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$.*

Em particular, $M^{n+m} = \mathbb{S}^n(c) \times \mathbb{H}^m(-c)$ é conformemente euclidiana para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}_+$. De fato, a imagem do mergulho canônico

$$\mathbb{S}^n(c) \times \mathbb{H}^m(-c) \to \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{L}^{m+1} \subset \mathbb{L}^{n+m+2}$$

é um subconjunto aberto do cone de luz $\mathbb{V}^{n+m+1} \subset \mathbb{L}^{n+m+2}$.

Uma hipersuperfície $f : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$ de uma variedade Riemanniana $\tilde{M}^{n+1}$ é conformemente euclidiana se, com a métrica induzida por f, a variedade M^n é conformemente euclidiana. Indicaremos por $\mathbb{Q}^n(c)$ uma forma espacial Riemanniana de dimensão n e curvatura seccional constante c. A seguinte caracterização de hipersuperfícies conformemente euclidianas $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 4$, foi dada por Cartan [5], veja também [35] e [29].

Teorema 1.4. *Se $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, é uma hipersuperfície que tem uma curvatura principal de multiplicidade pelo menos $n-1$, então M^n é conformemente euclidiana. Reciprocamente, se $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 4$, é uma hipersuperfície conformemente euclidiana, então f tem uma curvatura principal de multiplicidade pelo menos $n-1$.*

Uma hipersuperfície de $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ com uma curvatura principal de multiplicidade $n-1$ é localmente a envoltória de uma família a 1-parâmetro de hipersuperfícies umbílicas de $\mathbb{Q}^n(c) \subset \mathbb{Q}^{n+1}(c)$. Em $\mathbb{R}^n$, elas podem ser explicitamente parametrizadas como segue, ver [13] ou [8], pag. 127, para maiores detalhes.

Sejam $c : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma curva imersa, com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, e $r : I \to \mathbb{R}$ uma função suave positiva com $|r'(t)| < \|c'(t)\|$ para todo $t \in I$. Sejam

$$S = \frac{rr'}{\|c'\|^2}, \qquad R = r\left[1 - \left(\frac{r'}{\|c'\|}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Para cada t, considere o hiperplano afim de $\mathbb{R}^{n+1}$ ortogonal a $c'(t)$ que passa pelo ponto $\gamma(t) = c(t) - S(t)c'(t)$ e, nesse hiperplano, considere a esfera $\mathbb{S}_t^{n-1}$ de raio $R(t)$ e centro em $\gamma(t)$. Quando t varia em I, então $\mathbb{S}_t^{n-1}$ descreve o conjunto imagem da aplicação $g : I \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$g(t, p) = c(t) - S(t)c'(t) + R(t)\phi(t, p), \tag{1.1}$$

em que $\phi : I \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma aplicação diferenciável tal que, para cada $t \in I$ fixo, a aplicação $\phi_t : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\phi_t(p) = \phi(t, p)$, é uma imersão que satisfaz $\langle \phi_t, c'(t) \rangle = 0$ e $\|\phi_t\|^2 = 1$. Qualquer que seja a aplicação ϕ satisfazendo as condições acima, o conjunto imagem de g será o mesmo. Além disso, uma mudança $s = s(t)$, do parâmetro de t, com $s'(t) \neq 0$, não afeta a condição $|r'| < \|c'\|$ ou o conjunto imagem de g.

Teorema 1.5. *Suponha que g em (1.1) seja uma hipersuperfície imersa e que $n \geq 4$. Então g é uma hipersuperfície conformemente euclidiana sem pontos umbílicos com uma curvatura principal λ de multiplicidade $n-1$, com $\lambda \neq 0$ em todos os pontos.*

Reciprocamente, toda hipersuperfície conformemente euclidiana $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, sem pontos umbílicos com uma curvatura principal λ de multiplicidade $n-1$, com $\lambda \neq 0$ em todos os pontos, é localmente parametrizada por uma aplicação da forma (1.1).

O próprio Cartan [5] observou que a recíproca da Proposição 1.4 não vale se $n = 3$ e que esse caso merecia uma atenção especial. De fato, ele obteve exemplos de hipersuperfícies conformemente euclidianas com três curvaturas principais distintas e exibiu uma caracterização para as hipersuperfícies $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ conformemente euclidianas com três curvaturas principais distintas, ver [5], página 92, [18], cap. 2 ou [22], para ver a caracterização e uma demonstração.

Hipersuperfícies conformemente euclidianas compactas de $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, foram descritas por do Carmo, Dajczer e Mercuri [13]. Geometricamente, elas são compostas por (possivelmente infinitas) subvariedades não umbílicas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que são folheadas por esferas $\mathbb{S}^{n-1}(c)$ e são unidas através de seus bordos por um dos seguintes três tipos de subvariedades umbílicas de $\mathbb{R}^{n+1}$: um aberto de uma esfera $\mathbb{S}^n(c)$; um n-plano delimitado por uma esfera $\mathbb{S}^{n-1}(c)$; uma esfera $\mathbb{S}^n(c)$; um ponto.

A seguir é dada uma caracterização devida a do Carmo e Dajczer [12] de uma subclasse da classe das hipersuperfícies conformemente euclidianas de $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$.

Teorema 1.6. *Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície. Suponha que as curvaturas principais de f satisfaçam $k_1 = ... = k_{n-1} = \lambda \neq 0$, $k_n = \mu = \mu(\lambda)$ e $\lambda - \mu \neq 0$. Então $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de uma hipersuperfície de rotação*[1].

Tendo em vista os teoremas 1.4 e 1.6, as hipersuperfícies conformemente euclidianas $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$ de dimensão $n \geq 4$ com curvatura média constante, assim como as hipersuperfícies $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ com curvatura média constante e uma curvatura principal de multiplicidade pelo menos dois, são caracterizadas como segue.

Corolário 1.1. *Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície conformemente euclidiana com curvatura média constante sem pontos umbílicos. Se $n = 3$, suponha que f tenha uma curvatura principal com multiplicidade pelo menos dois. Então ou $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de uma hipersuperfície de rotação com curvatura média constante ou $c = 0$ e $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{S}^1(\tilde{c}) \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

As curvas geratrizes das hipersuperfícies de rotação $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, com curvatura média constante foram descritas em [12], a partir das soluções de uma certa equação diferencial ordinária, ver expressão (3.13) no referido artigo. Em particular, se $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 4$, é uma hipersuperfície conformemente euclidiana

[1] ver artigo [12], página 687 para definição de hipersuperfície de rotação em formas espaciais

mínima e sem pontos totalmente geodésicos, mostrou-se que $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de um catenóide generalizado.

Hipersuperfícies conformemente euclidianas $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c),\ n \geq 4$, com curvatura escalar constante, assim como hipersuperfícies $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ com curvatura escalar constante e uma curvatura principal de multiplicidade pelo menos dois, também são caracterizadas como segue.

Corolário 1.2. *Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c),\ n \geq 3$, uma hipersuperfície conformemente euclidiana com curvatura escalar constante sem pontos umbílicos ou pontos com curvatura seccional constante c. Se $n = 3$, suponha que f tenha uma curvatura principal com multiplicidade pelo menos dois. Então $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de uma hipersuperfície de rotação com curvatura escalar constante.*

As curvas geratrizes de hipersuperfícies de rotação $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, com curvatura escalar constante foram descritas por Leite [24], em termos das soluções de uma certa equação diferencial ordinária, ver expressão (2.1) no artigo referido. Em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, a classificação é a seguinte:

Teorema 1.7.

(i) Existe, precisamente, uma família a um parâmetro de hipersuperfícies de rotação completas de curvatura escalar constante $S = 0$, convergindo para um hiperplano. Em $\mathbb{R}^4$ a curva geratriz é uma parábola, em $\mathbb{R}^5$ é uma catenária e em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 6$, ela assintota duas retas. Em todos os casos, as hipersuperfícies são mergulhadas.

(ii) Para cada $S > 0$, existe uma família a um parâmetro de hipersuperfícies de rotação completas e mergulhadas de curvatura escalar constante S, todas periódicas e cilindricamente limitadas, as quais convergem para uma sequência de esferas, duas a duas verticalmente tangentes.

(iii) Não existem hipersuperfícies de rotação completas com curvatura escalar constante $S < 0$.

1.2 Hipersuperfícies conformemente euclidianas com três curvaturas principais distintas

Nesta seção apresentamos alguns resultados locais a respeito das hipersuperfícies conformemente euclidianas de $\mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas.

1.2.1. Uma caracterização local

Antes de apresentar os resultados desta seção precisamos recordar a noção de hipersuperfície holonômica.

Uma hipersuperfície $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$ é *holonômica* se M^n admite um sistema de coordenadas ortogonais global $(u_1, ..., u_n)$ tal que os campos de vetores coordenados $\partial_j := \frac{\partial}{\partial u_j}$ são, em cada ponto, auto-vetores do operador de Weingarten $A = A_\xi$ de f, em relação ao campo de vetores normal $\xi \in \Gamma(N_f M)$ globalmente definido. Seja $v_j = \|\partial_j\|$, e defina $V_j \in C^\infty(M),\ 1 \leq j \leq n$, por

$$A\partial_j = \frac{V_j}{v_j}\partial_j.$$

Em termos desse sistema de coordenadas, a *primeira e segunda formas fundamentais* de f são expressas, respectivamente, por

$$I = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 du_i^2 \qquad \text{e} \qquad I\!I = \sum_{i=1}^{n} V_i v_i du_i^2. \tag{1.2}$$

Denote $v = (v_1, ..., v_n)$ e $V = (V_1, ..., V_n)$. Chamamos (v, V) *o par associado* a f.

Dizemos que f é *localmente holonômica* se cada ponto $p \in M^n$ está contido em um subconjunto aberto $U \subset M^n$ tal $\tilde{f} = f|_U : U \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$ é holonômica.

Proposição 1.1. *Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície holonômica com par associado (v, V). Então a tripla (v, h, V), onde $h_{ij} = \frac{1}{v_i}\frac{\partial v_j}{\partial u_i}$, satisfaz o sistema de EDP's*

$$\begin{cases} (i)\ \dfrac{\partial v_i}{\partial u_j} = h_{ji}v_j, \qquad (ii)\ \dfrac{\partial h_{ij}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} + \displaystyle\sum_{k\neq i,j} h_{ki}h_{kj} + V_iV_j + cv_iv_j = 0, \\ (iii)\ \dfrac{\partial h_{ik}}{\partial u_j} = h_{ij}h_{jk}, \qquad (iv)\ \dfrac{\partial V_i}{\partial u_j} = h_{ji}V_j, \qquad 1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq n. \end{cases} \tag{1.3}$$

Reciprocamente, se (v, h, V) *é uma solução do sistema* (1.3) *em um aberto simplesmente conexo* $U \subset \mathbb{R}^n$, *com* $v_i > 0$ *em todo ponto, para todo* $1 \leq i \leq n$, *então existe uma hipersuperfície* $f : U \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$ *cuja primeira e segunda formas fundamentais são dadas pelas equações em* (1.2).

O próximo resultado é devido a E. Cartan. Uma demonstração pode ser encontrada em [22], p. 84. Ele foi fundamental para a obtenção dos Teoremas 1.8 e 1.9.

Lema 1.1. *Seja* $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ *uma hipersuperfície com três curvaturas principais distintas. Sejam* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *as curvaturas principais de* f *e* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *o correspondente referencial ortonormal de direções principais. São equivalentes:*

(a) M^3 *é conformemente euclidiana,*

(b) As seguintes equações são satisfeitas:

$$\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle = 0 \tag{1.4}$$

e

$$(\lambda_j - \lambda_k)e_i(\lambda_i) + (\lambda_i - \lambda_k)e_i(\lambda_j) + (\lambda_j - \lambda_i)e_i(\lambda_k) = 0, \tag{1.5}$$

sempre que $1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq 3$.

Observe que a equação (1.4) implica que f é localmente holonômica. Inspirado na caracterização dada por Cartan [5], Jeromin [17] mostrou que

Teorema 1.8. *Uma hipersuperfície conformemente euclidiana* $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$, *com três curvaturas principais distintas, é localmente holonômica e a métrica induzida*

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} v_i^2 du_i^2$$

satisfaz $v_2^2 = v_1^2 + v_3^2$.

Como consequência desse resultado, Jeromin obteve uma série de aplicações ao estudo local de hipersuperfícies conformemente euclidianas de $\mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas, ver [18]. Note que o resultado de Jeromin dá apenas condições necessárias para uma hipersuperfície $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas ser conformemente euclidiana. Em [4] os autores completam o resultado de Jeromin, dando condições necessárias e suficientes. Eles estabelecem que hipersuperfícies conformemente euclidianas $f: M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas são caracterizadas por serem holonômicas com par associado (v, V) satisfazendo algumas equações algébricas.

Teorema 1.9. *Seja $f: M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ uma hipersuperfície holonômica cujo par associado (v, V) satisfaz*

$$\sum_{i=1}^{3} \delta_i v_i^2 = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} \delta_i v_i V_i = 0 \quad e \quad \sum_{i=1}^{3} \delta_i V_i^2 = 1, \tag{1.6}$$

onde $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (1, -1, 1)$. Então, M^3 é conformemente euclidiana e f tem três curvaturas principais distintas.

Reciprocamente, toda hipersuperfície conformemente euclidiana $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas é localmente holonômica com o par associado (v, V) satisfazendo as equações em (1.6).

Observação 1.1. Podemos produzir hipersuperfícies conformemente euclidianas de $\mathbb{Q}^4(c)$, com três curvaturas principais distintas, a partir da Proposição (1.1) e do Teorema (1.9), da maneira seguinte. Considere o sistema de EDP's obtido do sistema (1.3) (para $n = 3$) adicionando as equações

$$\delta_i \frac{\partial v_i}{\partial u_i} + \delta_j h_{ij} v_j + \delta_k h_{ik} v_k = 0 \qquad \text{e} \qquad \delta_i \frac{\partial V_i}{\partial u_i} + \delta_j h_{ij} V_j + \delta_k h_{ik} V_k = 0,$$

com $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (1, -1, 1)$, ou seja, considere o sistema

$$\begin{cases} \text{(i)}\ \dfrac{\partial v_i}{\partial u_j} = h_{ji} v_j, \qquad \text{(ii)}\ \dfrac{\partial h_{ij}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} + h_{ki} h_{kj} + V_i V_j + c v_i v_j = 0, \\ \text{(iii)}\ \dfrac{\partial h_{ik}}{\partial u_j} = h_{ij} h_{jk}, \qquad \text{(iv)}\ \dfrac{\partial V_i}{\partial u_j} = h_{ji} V_j, \quad 1 \le i \ne j \ne k \ne i \le 3, \\ \text{(v)}\ \delta_i \dfrac{\partial v_i}{\partial u_i} + \delta_j h_{ij} v_j + \delta_k h_{ik} v_k = 0, \qquad \text{(vi)}\ \delta_i \dfrac{\partial V_i}{\partial u_i} + \delta_j h_{ij} V_j + \delta_k h_{ik} V_k = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Tal sistema tem as integrais primeiras

$$\sum_{i=1}^{3} \delta_i v_i^2 = K_1, \quad \sum_{i=1}^{3} \delta_i v_i V_i = K_2 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{3} \delta_i V_i^2 = K_3, \tag{1.8}$$

com K_1, K_2 e K_3 constantes. Cada solução (v, h, V), $v_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, em um aberto simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^3$, do sistema (1.7) satisfazendo as equações em (1.8), com $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ e $K_3 = 1$, determina uma hipersuperfície $f : U \to \mathbb{Q}^4(c)$ cuja métrica induzida é conformemente euclidiana e f tem três curvaturas principais distintas.

A seguir, descrevemos a relação que devem satisfazer duas soluções do sistema (1.7) que determinam hipersuperfícies conformemente euclidianas com três curvaturas principais distintas congruentes. Tal resultado será usado na demonstração do Teorema C. Apresentamos uma demonstração na Seção 1.4.

Sejam (v, h, V) e $(\tilde{v}, \tilde{h}, \tilde{V})$ soluções do sistema (1.7), em abertos simplesmente conexos $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^3$ com coordenadas (u_1, u_2, u_3) e $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$, respectivamente, como na Observação 1.1. Indiquemos por $f : U \to \mathbb{Q}^4(c)$ a hipersuperfície conformemente euclidiana com três curvaturas principais distintas, determinada pela solução (v, h, V), e por

$$I = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 du_i^2 \qquad \text{e} \qquad I\!I = \sum_{i=1}^{n} V_i v_i du_i^2,$$

a primeira e segunda formas fundamentais de f. Similarmente, indiquemos por $\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{Q}^4(c)$ a hipersuperfície conformemente euclidiana com três curvaturas principais distintas, determinada pela solução $(\tilde{v}, \tilde{h}, \tilde{V})$, e por

$$\tilde{I} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i^2 d\tilde{u}_i^2 \qquad \text{e} \qquad \tilde{I\!I} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{V}_i \tilde{v}_i d\tilde{u}_i^2,$$

a primeira e segunda formas fundamentais de $\tilde{f}$. Suponha que f e $\tilde{f}$ sejam congruentes, ou seja, que exista um difeomorfismo $\Psi : \tilde{U} \to U$ tal que

$$\tilde{I} = \Psi^* I \qquad \text{e} \qquad \widetilde{I\!I} = \Psi^* I\!I.$$

Proposição 1.2. *Com as considerações do último parágrafo, vale o seguinte:*

(i) *Ou* $\Psi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) = (\epsilon_1 \tilde{u}_1, \epsilon_2 \tilde{u}_2, \epsilon_3 \tilde{u}_3) + C$, $\forall\, \tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) \in \tilde{U}$, $C \in \mathbb{R}^3$, *e* $\epsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3$. *Neste caso,* $\tilde{v}_i = v_i \circ \Psi$, $i = 1, 2, 3$.

(ii) *Ou* $\Psi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) = (\epsilon_3 \tilde{u}_3, \epsilon_2 \tilde{u}_2, \epsilon_1 \tilde{u}_1) + C$, $\forall\, \tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) \in \tilde{U}$, $C \in \mathbb{R}^3$, *e* $\epsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3$. *Neste caso,* $\tilde{v}_1 = v_3 \circ \Psi$, $\tilde{v}_2 = v_2 \circ \Psi$, $\tilde{v}_3 = v_1 \circ \Psi$.

A seguir, damos uma descrição das hipersuperfícies conformemente euclidianas de $\mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas em que uma delas é identicamente nula. Antes disso, precisamos relembrar algumas definições.

Dada uma imersão isométrica $g : M^{n-k} \to \mathbb{R}^{m-k}$, defina $M^n = M^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ e $f : M^n \to \mathbb{R}^m$ por $f = g \times id$, em que $id : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ é a aplicação identidade. Chamamos f um *k-cilindro sobre* g, ou simplesmente, um cilindro sobre g.

Sejam $g\colon M^{n-k} \to \mathbb{Q}^{m-k}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica e $i\colon \mathbb{Q}^{m-k}(\tilde{c}) \to \mathbb{Q}^m(c)$, $\tilde{c} \geq c$, uma inclusão umbílica. O fibrado normal de $\tilde{g} = i \circ g$ se decompõe como

$$N_{\tilde{g}}M^n = i_* N_g M^{n-k} \oplus N_i \mathbb{Q}^{m-k}(\tilde{c}).$$

Assim, podemos considerar $N_i\mathbb{Q}^{m-k}(\tilde{c})$ como um subfibrado vetorial de $N_{\tilde{g}}M^n$. Agora, defina $f\colon N_i\mathbb{Q}^{m-k}(\tilde{c}) \to \mathbb{Q}^m(c)$ por

$$f(p, v) = \exp_{g(p)} v,$$

em que exp é a aplicação exponencial de $\mathbb{Q}^m(c)$. Chamamos f o *cone generalizado* sobre g. Geometricamente, quando $k = 1$, o cone generalizado sobre g é obtido tomando, por cada ponto $\tilde{g}(p)$, a geodésica em $\mathbb{Q}^m(c)$ que passa por $\tilde{g}(p)$ e é ortogonal a $\mathbb{Q}^{m-1}(\tilde{c})$.

Proposição 1.3. *Seja $f\colon M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ uma hipersuperfície conformemente euclidiana com três curvaturas principais distintas. Se uma das curvaturas principais é identicamente nula, então ou $c = 0$ e f é localmente um cilindro sobre uma superfície $g : M^2(\bar{c}) \to \mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana constante $\bar{c} \neq 0$ ou f é localmente um cone generalizado sobre uma superfície $g\colon M^2(\bar{c}) \to \mathbb{Q}^3(\tilde{c})$ com curvatura Gaussiana constante $\bar{c} \neq \tilde{c}$ em uma hipersuperfície umbílica $\mathbb{Q}^3(\tilde{c}) \subset \mathbb{Q}^4(c)$, $\tilde{c} \geq c$, com $\tilde{c} > 0$ se $c = 0$. Se, além disso, f é mínima, então $f(M^3)$ é um subconjunto aberto de um cone generalizado sobre um toro de Clifford em uma hipersuperfície umbílica $\mathbb{Q}^3(\tilde{c}) \subset \mathbb{Q}^4(c)$, $\tilde{c} > 0$, com $\tilde{c} \geq c$ se $c > 0$.*

Demonstração. Sejam e_1, e_2, e_3 campos de vetores locais unitários que são direções principais correspondentes às curvaturas principais distintas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente. Pelo Lema 1.1, para $1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq 3$, temos que

$$\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle = 0 \tag{1.9}$$

e

$$(\lambda_j - \lambda_k)e_i(\lambda_i) + (\lambda_i - \lambda_k)e_i(\lambda_j) + (\lambda_j - \lambda_i)e_i(\lambda_k) = 0. \tag{1.10}$$

Segue da equação de Codazzi para f e da equação (1.9) que

$$\nabla_{e_i} e_i = \sum_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)^{-1} e_j(\lambda_i) e_j. \tag{1.11}$$

Se, digamos, $\lambda_2 = 0$, então a equação (1.10) implica em

$$\lambda_3^{-1} e_2(\lambda_3) = \lambda_1^{-1} e_2(\lambda_1) := \varphi,$$

portanto, a distribuição $\{e_2\}^\perp$ gerada pelos campos e_1 e e_3 é umbílica[2] em M^3, por (1.11).

Se φ é identicamente zero em M^3, então $\{e^\perp\}$ é uma distribuição totalmente geodésica[3] e, portanto, M^3 é localmente isométrica a um produto Riemanniano $I \times M^2$, pela versão local de um teorema de de Rham. Desde que M^3 é conformemente euclidiana, segue que M^2 tem curvatura Gaussiana constante. Além disso, por um teorema de Molzan, ver Corolário 17 em [30], f é localmente um produto extrínseco de imersões isométricas de seus fatores, o que não é possível se $c \neq 0$, pois f tem três curvaturas principais distintas. Portanto, $c = 0$ e f é localmente um cilindro sobre uma superfície com curvatura Gaussiana constante em $\mathbb{R}^3$.

Se φ não é identicamente zero em M^3, dado $x \in M^3$, sejam σ uma folha de $\{e_2\}^\perp$ contendo x e $j\colon \sigma \to M^3$ a inclusão de σ em M^3. Denote $\tilde{g} = f \circ j$. Então o fibrado normal $N_{\tilde{g}}\sigma$ de $\tilde{g}$ se decompõe como

$$N_{\tilde{g}}\sigma = f_* N_j \sigma \oplus N_f M = \operatorname{span}\{f_* e_2\} \oplus N_f M$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X f_* e_2 &= f_* \nabla_X e_2 + \alpha^f(j_* X, e_2) \\ &= -\varphi \tilde{g}_* X, \end{aligned}$$

[2]Uma distribuição E em uma variedade Riemanniana M^n é dita ser *umbílica* se existe uma seção suave $\delta \in \Gamma(E)$ de E, chamada campo *curvatura média* de E, tal que $\langle \nabla_T S, X\rangle = \langle T, S\rangle\langle \delta, X\rangle$, para quaisquer T, $S \in \Gamma(E)$ e $X \in \Gamma(E^\perp)$.

[3]Uma distribuição E em uma variedade Riemanniana M^n é dita ser *totalmente geodésica* se $\nabla_T S \in \Gamma(E)$, sempre que $S, T \in \Gamma(E)$.

para todo $X \in \mathfrak{X}(\sigma) = \Gamma(\{e_2\}^\perp)$, em que $\tilde{\nabla}$ é a conexão induzida em $\tilde{g}^*T\mathbb{Q}^4(c)$. Decorre disso que o campo de vetores normal $\eta = f_*e_2$ de $\tilde{g}$ é paralelo com relação a conexão normal de $\tilde{g}$, e que o operador de Weingarten de $\tilde{g}$ com respeito a η é dado por

$$A^{\tilde{g}}_\eta = \varphi I.$$

É um fato conhecido que isso implica que $\tilde{g}(\sigma)$ está contido em uma hipersuperfície umbílica $\mathbb{Q}^3(\tilde{c}) \subset \mathbb{Q}^4(c)$, $\tilde{c} \geq c$, isto é, existe uma hipersuperfície umbílica $i : \mathbb{Q}^3(\tilde{c}) \to \mathbb{Q}^4(c)$ e uma imersão isométrica $g \colon M^2 = \sigma \to \mathbb{Q}^3(\tilde{c})$ tais que $\tilde{g} = i \circ g$. Além disso, desde que em todo ponto $y \in \sigma$ a fibra $L(y) = \text{span}\{\eta(y)\}$ coincide com o espaço normal de i em $g(y)$, segue que f coincide com o cone generalizado sobre $\tilde{g}$ em uma vizinhança de x. Em particular, M^3 é um produto warped $I \times_\rho M^2$ e, sendo M^3 conformemente euclidiana, M^2 tem curvatura Gaussiana constante.

Se, além disso, f é mínima, então g é um toro de Clifford em uma hipersuperfície umbílica $\mathbb{Q}^3(\tilde{c}) \subset \mathbb{Q}^4(c)$, $\tilde{c} > 0$, com $\tilde{c} \geq c$ se $c > 0$, e o argumento precedente mostra que $f(M^3)$ é um subconjunto aberto de um cone generalizado sobre o toro de Clifford g. □

Observação 1.2. Uma demonstração alternativa da última afirmação da Proposição 1.3 foi dada em [15]. Em [6] mostrou-se, mais geralmente que, se $f \colon M^3 \to \mathbb{R}^4$ é uma hipersuperfície conformemente euclidiana com três curvaturas principais distintas com a propriedade de que as linhas de curvatura correspondentes a uma das curvaturas principais são segmentos de círculos ou retas, então existe uma transformação conforme T de $\mathbb{R}^4$ tal que $T(f(M^3)$ é um subconjunto aberto de um cilindro sobre uma superfície $g : M^2(\bar{c}) \to \mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana constante $\bar{c} \neq 0$, um cone sobre uma superfície $g \colon M^2(\bar{c}) \to \mathbb{S}^3$ com curvatura Gaussiana constante $\bar{c} \neq 1$ ou de uma hipersuperfície de rotação sobre uma superfície $g \colon M^2(\bar{c}) \to \mathbb{H}^3$ com curvatura Gaussiana constante.

1.2.2. Hipersuperfícies com uma função simétrica constante

A seguir apresentamos os resultados conhecidos sobre hipersuperfícies conformemente euclidianas de $\mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas e com a propriedade de que uma das funções simétricas das curvaturas principais, ou seja, a curvatura média, a curvatura escalar ou a curvatura de Gauss-Kronecker, é constante. Como veremos, o único caso em que se tem uma classificação completa é aquele em que a curvatura de Gauss-Kronecker é constante e $c = 0$.

Curvatura média constante

Hipersuperfícies conformemente euclidianas de $\mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas e curvatura média constante foram estudadas por Defever [10], quando $c = 0$. Ele mostrou que

Teorema 1.10. *Uma hipersuperfície conformemente euclidiana $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ com curvatura média constante e três curvaturas principais distintas é necessariamente mínima.*

Cones sobre toros de Clifford em $\mathbb{S}^3(\tilde{c}) \subset \mathbb{R}^4$ são exemplos de hipersuperfícies conformemente euclidianas $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ mínimas com três curvaturas principais distintas. De fato, seja $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ um toro de Clifford parametrizado por

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\sqrt{2}x_1), \operatorname{sen}(\sqrt{2}x_1), \cos(\sqrt{2}x_2), \operatorname{sen}(\sqrt{2}x_2)). \tag{1.12}$$

Então, o cone canônico $F \colon (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ sobre g é dado por

$$F(s, x) = sg(x),$$

em que $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. A primeira e segunda formas fundamentais de F com respeito ao campo de vetores normal e unitário

$$\eta(s, x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\sqrt{2}x_1), \operatorname{sen}(\sqrt{2}x_1), -\cos(\sqrt{2}x_2), -\operatorname{sen}(\sqrt{2}x_2))$$

são

$$I = ds^2 + s^2(dx_1^2 + dx_2^2) \qquad \text{e} \qquad I\!I = s(-dx_1^2 + dx_2^2).$$

Em termos das novas coordenadas u_1, u_2, u_3, relacionadas com s, x_1, x_2 por

$$u_2 = \log s, \quad u_1 = \sqrt{2}x_1 \quad \text{e} \quad u_3 = \sqrt{2}x_2,$$

a primeira e segunda formas fundamentais de F tomam a forma

$$I = \frac{e^{2u_2}}{2}(du_1^2 + 2du_2^2 + du_3^2) \quad \text{e} \quad I\!I = \frac{e^{u_2}}{2}(-du_1^2 + du_3^2). \tag{1.13}$$

Portanto, segue de 1.13 que F é uma hipersuperfície conformemente euclidiana mínima com três curvaturas principais distintas, sendo uma delas identicamente nula.

O exemplo anterior pode ser generalizado para uma forma espacial $\mathbb{Q}^4(c)$ qualquer, produzindo exemplos de hipersuperfícies $f\colon M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ conformemente euclidianas mínimas com três curvaturas principais distintas também para $c \neq 0$.

Começamos com o toro de Clifford $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ parametrizado por (1.12). Se $c > 0$, defina $F\colon (0, \pi/\sqrt{c}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^4(c) \subset \mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$ por

$$F(s, x) = \frac{1}{\sqrt{c}}(\cos(\sqrt{c}s)e_5 + \operatorname{sen}(\sqrt{c}s)g(x)),$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e e_5 é um vetor unitário gerado pelo fator $\mathbb{R}$ na decomposição ortogonal $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$. Note que, para cada $s = s_0$ fixado, a aplicação $F_{s_0}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^4(c)$, dada por $F_{s_0}(x) = F(s_0, x)$, é um toro de Clifford em uma hipersuperfície umbílica $\mathbb{S}^3(\tilde{c}) \subset \mathbb{S}^4(c)$ com curvatura $\tilde{c} = c/\operatorname{sen}^2(\sqrt{c}s_0)$, a qual tem

$$N_{s_0} = F_* \frac{\partial}{\partial s}|_{s=s_0} = -\operatorname{sen}(\sqrt{c}s_0)e_5 + \cos(\sqrt{c}s_0)g$$

como campo de vetores normal e unitário ao longo de F_{s_0}. Desde que

$$F(s + s_0, x) = \cos(\sqrt{c}s)F_{s_0}(x) + \operatorname{sen}(\sqrt{c}s)N_{s_0}(x),$$

concluímos que a aplicação $s \mapsto F(s, x)$ parametriza a geodésica em $\mathbb{S}^4(c)$ passando por $F_{s_0}(x)$ tangente a $N_{s_0}(x)$ em $F_{s_0}(x)$. Portanto, F é, por definição, um cone generalizado sobre F_{s_0}. A primeira e segunda formas fundamentais de F com respeito ao campo de vetores normal e unitário

$$\eta(s, x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\sqrt{2}x_1), \operatorname{sen}(\sqrt{2}x_1), -\cos(\sqrt{2}x_2), -\operatorname{sen}(\sqrt{2}x_2), 0)$$

são

$$I = ds^2 + \frac{1}{c}\,\mathrm{sen}^2(\sqrt{c}s)(dx_1^2 + dx_2^2) \qquad \text{e} \qquad I\!I = \frac{\mathrm{sen}\,(\sqrt{c}s)}{\sqrt{c}}(-dx_1^2 + dx_2^2).$$

Em termos das novas coordenadas u_1, u_2, u_3, relacionadas com s, x_1, x_2 por

$$\frac{du_2}{ds} = \frac{\sqrt{c}}{\mathrm{sen}\,(\sqrt{c}s)}, \quad u_1 = \sqrt{2}x_1 \quad \text{e} \quad u_3 = \sqrt{2}x_2, \tag{1.14}$$

a primeira e segunda formas fundamentais de F tomam a forma

$$I = \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{2c}(du_1^2 + 2du_2^2 + du_3^2) \quad \text{e} \quad I\!I = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{2\sqrt{c}}(-du_1^2 + du_3^2), \tag{1.15}$$

em que $\theta = \sqrt{c}s$, a qual, em virtude da primeira equação em (1.14), satisfaz

$$\frac{d\theta}{du_2} = \mathrm{sen}\,\theta.$$

Segue de (1.15) que F é uma hipersuperfície conformemente euclidiana mínima com três curvaturas principais distintas, sendo uma delas identicamente nula.

Se $c < 0$, defina $F\colon (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}^4(c) \subset \mathbb{L}^5$ por

$$F(s,x) = \frac{1}{\sqrt{-c}}(\cosh(\sqrt{-c}s)e_5 + \mathrm{senh}\,(\sqrt{-c}s)g(x)),$$

em que $x = (x_1, x_2)$, e_5 é um vetor unitário tipo-tempo em $\mathbb{L}^5$ e $e_5^\perp$ é identificado com $\mathbb{R}^4$. Como no caso anterior, para cada $s = s_0$ fixado, a aplicação $F_{s_0}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}^4(c)$, dada por $F_{s_0}(x) = F(s_0, x)$, é um toro de Clifford em uma hipersuperfície umbílica $\mathbb{S}^3(\tilde{c}) \subset \mathbb{H}^4(c)$ com curvatura $\tilde{c} = -c/\,\mathrm{senh}^2(\sqrt{c}s_0)$, e F é um cone generalizado sobre F_{s_0}. A primeira e segunda formas fundamentais de F com respeito ao campo de vetores normal e unitário

$$\eta(s,x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\sqrt{2}x_1), \mathrm{sen}\,(\sqrt{2}x_1), -\cos(\sqrt{2}x_2), -\mathrm{sen}\,(\sqrt{2}x_2), 0)$$

são

$$I = ds^2 + \frac{1}{-c}\,\mathrm{senh}^2(\sqrt{-c}s)(dx_1^2 + dx_2^2) \qquad \text{e} \qquad I\!I = \frac{\mathrm{senh}\,(\sqrt{-c}s)}{\sqrt{-c}}(-dx_1^2 + dx_2^2).$$

Em termos das novas coordenadas u_1, u_2, u_3, relacionadas com s, x_1, x_2 por

$$\frac{du_2}{ds} = \frac{\sqrt{-c}}{\mathrm{senh}\,(\sqrt{-c}s)}, \quad u_1 = \sqrt{2}x_1 \quad \text{e} \quad u_3 = \sqrt{2}x_2, \tag{1.16}$$

temos que

$$I = \frac{\operatorname{senh}^2\theta}{-2c}(du_1^2 + 2du_2^2 + du_3^2) \quad \text{e} \quad I\!I = \frac{\operatorname{senh}\theta}{2\sqrt{-c}}(-du_1^2 + du_3^2), \tag{1.17}$$

em que $\theta(s) = \sqrt{-c}s$ satisfaz, em virtude da primeira equação em (1.16),

$$\frac{d\theta}{du_2} = \operatorname{senh}\theta.$$

Segue de (1.17) que F é uma hipersuperfície conformemente euclidiana mínima com três curvaturas principais distintas, sendo uma delas identicamente nula.

Curvatura de Gauss-Kronecker constante

Hipersuperfícies conformemente euclidianas de $\mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas e curvatura de Gauss-Kronecker constante foram estudadas por Defever [11], quando $c = 0$. Ele mostrou que

Proposição 1.4. *Para uma hipersuperfície conformemente euclidiana $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ com curvatura de Gauss-Kronecker K constante e três curvaturas principais distintas, o valor dessa constante é necessariamente zero.*

Uma hipersuperfície $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ com curvatura de Gauss-Kronecker identicamente nula tem uma curvatura principal identicamente nula. Pela Proposição 1.3, $f(M^3)$ é um subconjunto aberto ou de um cilindro sobre uma superfície de curvatura Gaussiana constante em $\mathbb{R}^3$ ou de um cone sobre uma superfície de curvatura Gaussiana constante em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$.

Curvatura escalar constante

Os únicos exemplos conhecidos de hipersuperfícies conformemente euclidianas $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ com curvatura escalar constante e três curvaturas principais distintas são os cilindros sobre superfícies $g : M^2 \to \mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana constante. Segue da Proposição 1.3 que esses são os únicos exemplos com uma curvatura principal identicamente nula.

Variedades conformemente euclidianas com curvatura escalar constante podem ser vistas, em dimensão três, como as variedades cujo tensor de curvatura é harmônico, as quais, por sua vez, são aquelas cujo tensor de Ricci é um tensor de Codazzi. Estas são generalizações naturais das variedades de Einstein e das variedades cujo tensor de Ricci é paralelo. Essas relações são discutidas na próxima seção.

1.3 Algumas classes particulares de variedades

Uma variedade Riemanniana M^n é *Einstein* se existe uma constante real λ tal que

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \lambda\langle X,Y\rangle,$$

para todo $p \in M^n$ e $X, Y \in T_pM$. Uma variedade Riemanniana de dimensão dois M^2 é Einstein se, e somete se, tem curvatura de Gauss constante. Também é verdade que uma variedade Riemanniana de dimensão $n = 3$ é de Einstein se, e somente se, tem curvatura seccional constante. Em geral, todo espaço de curvatura constante $M^n(c)$ é uma variedade de Einstein, mas a recíproca deixa de ser verdade se $n \geq 4$. Um produto Riemanniano $M^r(c_1) \times M^{n-r}(c_2)$, de variedades Riemannianas de curvatura seccional constante, é de Einstein se, e somente se, $(r-1)c_1 = (n-r-1)c_2$. Variedades Einstein foram amplamente estudadas, em [2] se encontra uma descrição de vários resultados a esse respeito.

Em se tratando de hipersuperfícies, os trabalhos de Ryan [34], juntamente com aqueles de Thomas [38] e Fialkow [14], caracterizam as hipersuperfícies de Einstein.

Proposição 1.5. *Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de Einstein.*

(a) Se $c \leq 0$, então $\lambda \geq (n-1)c$ e M^n é um espaço de curvatura constante $\frac{\lambda}{n-1}$.

(b) Se $c = 0$, então ou $\lambda = 0$ e M^n tem tensor curvatura nulo, ou $\lambda > 0$ e a hipersuperfície é um subconjunto aberto de uma esfera redonda. Além disso, se a hipersuperfície

é completa, então ou é a esfera redonda, ou um $(n-1)$-cilindro sobre uma curva plana completa.

(c) Se $c > 0$ e f é completa, então ou f é umbílica ou um produto de esferas.

Uma generalização natural das variedades de Einstein são aquelas cujo tensor de Ricci é paralelo, ou seja, $\nabla \mathrm{R}ic = 0$. Hipersuperfícies com tensor de Ricci paralelo foram estudadas por Lawson [27], Ryan [33] e Reckziegel [32]. De forma concisa, temos que

Proposição 1.6. *Se $f\colon M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$ tem segunda forma fundamental paralela, então, a menos de isometrias de $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de*

(i) $\mathbb{S}^k(\tilde{c}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{c-\tilde{c}})$, $\tilde{c} \geq c$ e $k = 0, \ldots, n$, se $c > 0$;

(ii) $\mathbb{S}^k(\tilde{c}) \times \mathbb{R}^{n-k}$, $\tilde{c} \geq 0$ e $k = 0, \ldots, n$, se $c = 0$;

(iii) $\mathbb{S}^k(\tilde{c}) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{c+\tilde{c}})$, $\tilde{c} \geq 0$ e $k = 0, \ldots, n$, se $c < 0$.

Em particular, as curvaturas principais de f são constantes e no máximo duas.

Proposição 1.7. *Se $f\colon M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$ é uma hipersuperfície não Einstein, com tensor de Ricci paralelo e segunda forma fundamental não paralela, então $c = 0$ e $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é um subconjunto aberto de um $(n-2)$-cilindro sobre uma superfície $g : M^2 \to \mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana constante $\tilde{c} \neq 0$.*

Segue da Proposição 1.7 que, se $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ é uma hipersuperfície conformemente euclidiana com três curvaturas principais distintas e tensor de Ricci paralelo, então $c = 0$ e $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ é um subconjunto aberto de um cilindro sobre uma superfície $g : M^2 \to \mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana constante $\tilde{c} \neq 0$.

Uma generalização natural das variedades cujo tensor de Ricci é paralelo são as variedades M cujo tensor de Ricci é um tensor de Codazzi, ou seja,

$$(\nabla_X \mathrm{Ric})(Y, Z) = (\nabla_Y \mathrm{Ric})(X, Z),$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Essa classe de variedades coincide com a classe das variedades cujo tensor curvatura é harmônico, isto é, as variedades cuja divergência d^* de seu tensor de curvatura R satisfaz $d^*R = 0$, em que R é considerado como um elemento de $\Omega^2(M, \Lambda^2 M)$, ou seja, como uma 2-forma em M tomando valores em $\Lambda^2 M$. Com efeito, tendo em vista a segunda identidade de Bianchi $dR = 0$, em que d é a diferencial exterior, $d^*R = 0$ é equivalente a

$$\Delta R = (dd^* + d^*d)R = 0.$$

Em qualquer dimensão, a identidade $d^*R = -d\,\mathrm{Ric}$ implica que uma variedade Riemanniana tem tensor de curvatura harmônico se, e somente se, seu tensor de Ricci é um tensor de Codazzi. Assim, variedades Riemannianas com tensor de curvatura harmônico são, em particular, generalizações naturais de variedades de Einstein e de variedades cujo tensor de Ricci é paralelo.

O estudo das variedades com tensor de curvatura harmônico é um tópico bastante amplo em geometria. Propriedades clássicas são resumidas na seguinte proposição, ver [2], pag. 435, ou [36].

Proposição 1.8. *Seja M^n uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$. Então, valem as seguintes propriedades:*

(a) M^n tem tensor de curvatura harmônico se, e somente se, seu tensor de Ricci de M^n é um tensor de Codazzi.

(b) Se $n = 3$, então M^3 tem tensor de curvatura harmônico se, e somente se, M^3 é conformemente euclidiana com curvatura escalar constante.

(c) Se $n \geq 4$, então M^n tem tensor de curvatura harmônico se, e somente se, M^n tem tensor de Weyl harmônico e curvatura escalar constante.

Hipersuperfícies com tensor de curvatura harmônico foram estudadas por Umehara em [39], por Ki, Nakagawa e Umehara em [19], e por Meumertzheim, Reckziegel e Sachaaf em [28]. Algumas propriedades podem ser resumidas a seguir.

Proposição 1.9. *Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície com tensor de curvatura harmônico. Então vale o seguinte:*

(a) f é localmente holonômica.

(b) Se toda curvatura principal de M^n tem multiplicidade maior do que um então f tem curvatura média constante.

(c) Se alguma função curvatura principal de f for constante, não nula, e tiver multiplicidade maior do que um, então f tem curvatura média constante.

(d) Se f tem curvatura média constante, então f tem segunda forma fundamental paralela.

Além do item (a) da Proposição 1.9, não encontramos trabalhos sobre hipersuperfícies com tensor de curvatura harmônico e três curvaturas principais distintas.

1.4 Demonstração da Proposição 1.2

A seguir, exibimos a demonstração da Proposição 1.2.

Demonstração da Proposição 1.2: Seja $\Psi : \tilde{U} \to U$, $\Psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$ e denote

$$\tilde{\partial}_i|_{\tilde{u}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{u}_i}|_{\tilde{u}} \qquad \text{e} \qquad \partial_i|_{\Psi(\tilde{u})} = \frac{\partial}{\partial u_i}|_{\Psi(\tilde{u})}.$$

Desde que

$$\Psi_* \tilde{\partial}_i|_{\tilde{u}} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \psi^k}{\partial \tilde{u}_i}(\tilde{u}) \partial_k|_{\Psi(\tilde{u})},$$

obtemos,

$$\delta_{ij} \tilde{v}_i^2(\tilde{u}) = \tilde{I}(\tilde{\partial}_i|_{\tilde{u}}, \tilde{\partial}_j|_{\tilde{u}}) = I(\Psi_* \tilde{\partial}_i|_{\tilde{u}}, \Psi_* \tilde{\partial}_j|_{\tilde{u}}) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \psi^k}{\partial \tilde{u}_i}(\tilde{u}) \frac{\partial \psi^k}{\partial \tilde{u}_j}(\tilde{u}) v_k^2(\Psi(\tilde{u}))$$

e

$$
\begin{aligned}
\delta_{ij}\tilde{v}_i(\tilde{u})\tilde{V}_i(\tilde{u}) &= \tilde{I\!I}(\tilde{\partial}_i|_{\tilde{u}}, \tilde{\partial}_j|_{\tilde{u}}) \\
&= I\!I(\Psi_*\tilde{\partial}_i|_{\tilde{u}}, \Psi_*\tilde{\partial}_j|_{\tilde{u}}) \\
&= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\psi^k}{\partial\tilde{u}_i}(\tilde{u})\frac{\partial\psi^k}{\partial\tilde{u}_j}(\tilde{u})v_k(\Psi(\tilde{u}))V_k(\Psi(\tilde{u})).
\end{aligned}
$$

As igualdades anteriores determinam o seguinte sistema de equações:

$$
A = \left\{
\begin{array}{l}
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 v_1^2 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 v_2^2 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 v_3^2 & = & \tilde{v}_1^2, \\
\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2} v_1^2 & + & \dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} v_2^2 & + & \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} v_3^2 & = & 0, \\
\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} v_1^2 & + & \dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} v_2^2 & + & \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} v_3^2 & = & 0, \\
\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 v_1^2 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 v_2^2 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 v_3^2 & = & \tilde{v}_2^2, \\
\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} v_1^2 & + & \dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} v_2^2 & + & \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} v_3^2 & = & 0, \\
\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 v_1^2 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 v_2^2 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 v_3^2 & = & \tilde{v}_3^2,
\end{array}
\right. \\
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 v_1V_1 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 v_2V_2 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 v_3V_3 & = & \tilde{v}_1\tilde{V}_1, \\
\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2} v_1V_1 & + & \dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} v_2V_2 & + & \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} v_3V_3 & = & 0, \\
\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} v_1V_1 & + & \dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} v_2V_2 & + & \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} v_3V_3 & = & 0, \\
\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 v_1V_1 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 v_2V_2 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 v_3V_3 & = & \tilde{v}_2\tilde{V}_2, \\
\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} v_1V_1 & + & \dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} v_2V_2 & + & \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} v_3V_3 & = & 0, \\
\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 v_1V_1 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 v_2V_2 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 v_3V_3 & = & \tilde{v}_3\tilde{V}_3.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

Como $v_3^2 = v_2^2 - v_1^2$ e $v_3V_3 = v_2V_2 - v_1V_1$, o sistema A implica no sistema

$$
B = \left\{
\begin{array}{l}
\left\{
\begin{array}{lcrcl}
f_1 : \left[\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2\right]v_1^2 & + & \left[\left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2\right]v_2^2 & = & \tilde{v}_1^2, \\
f_2 : \left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2} - \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)v_1^2 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)v_2^2 & = & 0, \\
f_3 : \left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} - \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)v_1^2 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)v_2^2 & = & 0, \\
f_4 : \left[\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2\right]v_1^2 & + & \left[\left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2\right]v_2^2 & = & \tilde{v}_2^2, \\
f_5 : \left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} - \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)v_1^2 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)v_2^2 & = & 0, \\
f_6 : \left[\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2\right]v_1^2 & + & \left[\left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2\right]v_2^2 & = & \tilde{v}_3^2,
\end{array}
\right. \\
\left\{
\begin{array}{lcrcl}
g_1 : \left[\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2\right]v_1V_1 & + & \left[\left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2\right]v_2V_2 & = & \tilde{v}_1\tilde{V}_1, \\
g_2 : \left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2} - \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)v_1V_1 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)v_2V_2 & = & 0, \\
g_3 : \left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} - \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)v_1V_1 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)v_2V_2 & = & 0, \\
g_4 : \left[\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2\right]v_1V_1 & + & \left[\left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2\right]v_2V_2 & = & \tilde{v}_2\tilde{V}_2, \\
g_5 : \left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} - \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)v_1V_1 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)v_2V_2 & = & 0, \\
g_6 : \left[\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2\right]v_1V_1 & + & \left(\left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2\right]v_2V_2 & = & \tilde{v}_3\tilde{V}v_3.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

Faça $h_i := f_iV_1 - g_iv_1$. Então, o sistema B implica no sistema

$$C = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{lcl} f_1 : \left[\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2\right]v_1^2 & + & \left[\left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2\right]v_2^2 \;=\; \tilde{v}_1^2, \\ f_2 : \left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2} - \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)v_1^2 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)v_2^2 \;=\; 0, \\ f_3 : \left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} - \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)v_1^2 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)v_2^2 \;=\; 0, \\ f_4 : \left[\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2\right]v_1^2 & + & \left[\left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2\right]v_2^2 \;=\; \tilde{v}_2^2, \\ f_5 : \left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} - \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)v_1^2 & + & \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)v_2^2 \;=\; 0, \\ f_6 : \left[\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2\right]v_1^2 & + & \left[\left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2\right]v_2^2 \;=\; \tilde{v}_3^2, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} h_1 : \left[\left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2\right]\big(v_1V_2 - v_2V_1\big)v_2 = \tilde{v}_1\big(v_1\tilde{V}_1 - \tilde{v}_1V_1\big), \\ h_2 : \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)\big(v_1V_2 - v_2V_1\big)v_2 = 0, \\ h_3 : \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)\big(v_1V_2 - v_2V_1\big)v_2 = 0, \\ h_4 : \left[\left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2\right]\big(v_1V_2 - v_2V_1\big)v_2 = \tilde{v}_2\big(v_1\tilde{V}_2 - \tilde{v}_2V_1\big), \\ h_5 : \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)\big(v_1V_2 - v_2V_1\big)v_2 = 0, \\ h_6 : \left[\left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2\right]\big(v_1V_2 - v_2V_1\big)v_2 = \tilde{v}_3\big(v_1\tilde{V}_3 - \tilde{v}_3V_1\big). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Desde que $v_1V_2 - v_2V_1 = \lambda v_3,\ \lambda = \pm 1$, ver equação (2.3), o sistema C implica no sistema

$$D = \begin{cases} \begin{cases} h_1: \left[\left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2\right]\lambda v_2 v_3 = \tilde{v}_1\big(v_1\tilde{V}_1 - \tilde{v}_1 V_1\big), \\ h_2: \dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} = 0, \\ h_3: \dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} = 0, \\ h_4: \left[\left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2\right]\lambda v_2 v_3 = \tilde{v}_2\big(v_1\tilde{V}_2 - \tilde{v}_2 V_1\big), \\ h_5: \dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} = 0, \\ h_6: \left[\left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2\right]\lambda v_2 v_3 = \tilde{v}_3\big(v_1\tilde{V}_3 - \tilde{v}_3 V_1\big), \end{cases} \\ \begin{cases} f_1: \left[\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2\right]v_1^2 \quad + \quad \dfrac{\tilde{v}_1 v_2}{\lambda v_3}\big(v_1\tilde{V}_1 - \tilde{v}_1 V_1\big) = \tilde{v}_1^2, \\ f_2: \dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2} - \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} = 0, \\ f_3: \dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} - \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} = 0, \\ f_4: \left[\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2\right]v_1^2 \quad + \quad \dfrac{\tilde{v}_2 v_2}{\lambda v_3}\big(v_1\tilde{V}_2 - \tilde{v}_2 V_1\big) = \tilde{v}_2^2, \\ f_5: \dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} - \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} = 0, \\ f_6: \left[\left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2\right]v_1^2 \quad + \quad \dfrac{\tilde{v}_3 v_2}{\lambda v_3}\big(v_1\tilde{V}_3 - \tilde{v}_3 V_1\big) = \tilde{v}_3^2. \end{cases} \end{cases}$$

Note que

$$f_4 - f_1 - f_6: \left(\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2$$

e

$$h_4 - h_1 - h_6: \left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 = -\left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2.$$

Vamos resolver o sistema E abaixo, o qual é um sistema formado por algumas equações do sistema D. Em seguida verificamos quais das soluções do sistema E servem para resolver o sistema A.

$$E = \begin{cases} j_1 : \dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} = 0, & j_4 : \dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2} - \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} = 0, \\ j_2 : \dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} = 0, & j_5 : \dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} - \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} = 0, \\ j_3 : \dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} + \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} = 0, & j_6 : \dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} - \dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} = 0, \\ j_7 : \left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2, \\ j_8 : \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 = -\left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2. \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema E, lembrando que Ψ é um difeomorfismo, ou seja, $\det\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial u_j}\right) \neq 0$. Resolveremos o sistema dividindo em casos: para que se tenha

$$\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} + \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} = 0,$$

é necessário que valha um dos dez casos abaixo:

$$(1)\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1} = \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} = \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1} = \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} = 0;$$

$$(2)\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1} = \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} = \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} \neq 0;$$

$$(3)\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1} = \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} = \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1} \neq 0;$$

$$(4)\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1} = \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1} = \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} \neq 0;$$

$$(5)\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} = \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1} = \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1} \neq 0;$$

$$(6)\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1} = \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1} = 0,\ \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} \neq 0;$$

$$(7)\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1} = \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} = 0,\ \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1} \neq 0;$$

$$(8)\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}=\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}=0,\ \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\neq 0;$$

$$(9)\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}=\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}=0,\ \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\neq 0;$$

$$(10)\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\neq 0,\ \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\neq 0,\ \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\neq 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\neq 0.$$

Estudaremos caso a caso.

Caso (1): Este caso não pode ocorrer, pois $\det\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial u_j}\right)=0$.

Caso (2): $\left\{\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}=\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}=\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}=0,\ \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\neq 0 \text{ e } \det\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial u_j}\right)\neq 0\right\} \Longrightarrow \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\neq 0 \text{ e } \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}\neq 0.$
Atribuindo essas restrições ao sistema E, ficamos com

$$j_3:\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}=0$$

$$j_4:\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}=0$$

$$j_5:\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}=0$$

$$j_7:\left(\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2=-\left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2.$$

Portanto, esse caso não admite solução real.

Caso (3): $\left\{\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}=\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}=\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}=0,\ \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\neq 0 \text{ e } \det\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial u_j}\right)\neq 0\right\} \Longrightarrow \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\neq 0 \text{ e } \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}\neq 0.$
Atribuindo essas restrições ao sistema E, ficamos com

$$j_2:\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}=0$$

$$j_4:\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}=0$$

$$j_6:\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}=0$$

$$j_7:-\left(\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2=\left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2.$$

Portanto, esse caso não admite solução real.

Caso (4): $\left\{\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}=\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}=\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}=0,\ \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\neq 0 \text{ e } \det\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial u_j}\right)\neq 0\right\}\Longrightarrow \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\neq 0 \text{ e } \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\neq 0.$
Atribuindo essas restrições ao sistema E, ficamos com

$$j_3:\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}=0$$

$$j_4:\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}=0$$

$$j_5:\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}=0$$

$$j_7:(\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1})^2=(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3})^2$$

$$j_8:(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3})^2=(\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2})^2.$$

Portanto, o sistema E tem solução

$$\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}=\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}=\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}=\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}=\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}=\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}=0 \quad\text{e}\quad \left(\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2=\left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2=\left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2\neq 0.$$

Caso (5): $\left\{\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}=\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}=\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}=0,\ \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\neq 0 \text{ e } \det\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial u_j}\right)\neq 0\right\}\Longrightarrow \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\neq 0 \text{ e } \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\neq 0.$
Atribuindo essas restrições ao sistema E, ficamos com

$$j_2:\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}=0$$

$$j_4:\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}=0$$

$$j_6:\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}=0$$

$$j_7:-\left(\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2=\left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2.$$

Portanto, esse caso não admite solução real.

Caso (6): $\left\{\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}=\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}=0,\ \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\neq 0,\ \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\neq 0 \text{ e } \det\big(\frac{\partial\psi^i}{\partial u_j}\big)\neq 0\right\} \Longrightarrow \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\neq 0.$
Atribuindo essas restrições ao sistema E, ficamos com

$$j_4 : \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}=0$$

$$j_5 : \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}=0$$

$$j_6 : \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}=0$$

$$j_3 : \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}=0.$$

Note que isso implica $\det\big(\frac{\partial\psi^i}{\partial u_j}\big)=0$. Portanto, esse caso não pode ocorrer.

Caso (7): $\left\{\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}=\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}=0,\ \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\neq 0,\ \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\neq 0 \text{ e } \det\big(\frac{\partial\psi^i}{\partial u_j}\big)\neq 0\right\}.$
Atribuindo essas restrições ao sistema E, ficamos com

$$j_2 : \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}=0$$

$$j_3 : \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}=0$$

$$\det\big(\frac{\partial\psi^i}{\partial u_j}\big)\neq 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}\neq 0$$

$$j_5 : \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}=0$$

$$j_6 : \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}=0.$$

$$j_7 : \left(\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2=\left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2$$

$$j_8 : \left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2=\left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2$$

Portanto, o sistema E tem solução

$$\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}=\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}=\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}=\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3}=\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}=\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}=0 \quad e \quad \big(\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}\big)^2=\big(\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\big)^2=\big(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\big)^2\neq 0.$$

Caso (8): $\left\{\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} = \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1} = 0,\ \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1} \neq 0,\ \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} \neq 0 \text{ e } \det\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial u_j}\right) \neq 0\right\}$.
Atribuindo essas restrições ao sistema E, ficamos com

$$j_2 : \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} = 0$$

$$j_3 : \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} = 0$$

$$\det\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial u_j}\right) \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} \neq 0$$

$$j_5 : \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1} = 0$$

$$j_6 : \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2} = 0.$$

$$j_7 : \left(\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 = -\left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2$$

Portanto, esse caso não admite solução real.

Caso (9): $\left\{\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} = \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} = 0,\ \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1} \neq 0,\ \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1} \neq 0 \text{ e } \det\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial u_j}\right) \neq 0\right\} \Longrightarrow \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2} \neq 0.$
Atribuindo essas restrições ao sistema E, ficamos com

$$j_4 : \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1} = 0$$

$$j_5 : \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} = 0$$

$$j_6 : \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} = 0$$

$$j_2 : \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} = 0.$$

Note que isso implica $\det\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial u_j}\right) = 0$. Portanto, esse caso não pode ocorrer.

Caso (10): $\left\{\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1} \neq 0,\ \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1} \neq 0,\ \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2} \neq 0,\ \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} \neq 0 \text{ e } \det\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial u_j}\right) \neq 0\right\}$.
Atribuindo essas restrições ao sistema E, ficamos com

$$j_1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1} = -\left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)\Big/\left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)$$

$$j_3 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} = -\left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)\Big/\left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)$$

$$j_2 : \left[\left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)\Big/\left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)\right]\left[\left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)\Big/\left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)\right] + \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\left[\left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2\right] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} = 0$$

$$j_3 : \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} = 0$$

$$\det\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial u_j}\right) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} \neq 0$$

$$j_5 : \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1} = 0$$

$$j_6 : \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2}\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2} = 0$$

$$j_4 : \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} = 0.$$

Isso contradiz a hipótese. Portanto, esse caso não pode ocorrer.

Assim, vemos que o sistema E possui apenas as seguintes soluções:

$$a : \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2} = \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3} = \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1} = \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} = \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1} = \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} = 0 \;\; e \;\; \left(\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 \neq 0$$

e

$$b : \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_1} = \frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_2} = \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_1} = \frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_3} = \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_2} = \frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_3} = 0 \;\; e \;\; \left(\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}\right)^2 \neq 0.$$

Usando a solução "a" no sistema A, obtemos que $\tilde{v}_i = |\frac{\partial\psi^i}{\partial\tilde{u}_i}|v_i$ e $\tilde{V}_i = |\frac{\partial\psi^i}{\partial\tilde{u}_i}|V_i$, $i = 1,2,3$. Desde que $V_1^2 - V_2^2 + V_3^2 = 1 = \tilde{V}_1^2 - \tilde{V}_2^2 + \tilde{V}_3^2$, concluímos que $\frac{\partial\psi^i}{\partial\tilde{u}_i} \equiv \pm 1$, $i = 1,2,3$. Isto prova a afirmação (i) da proposição.

De forma similar, usando a solução "b" no sistema A, obtemos que $\tilde{v}_1 = |\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}|v_3$, $\tilde{v}_2 = |\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}|v_2$, $\tilde{v}_3 = |\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}|v_1$ e $\tilde{V}_1 = |\frac{\partial\psi^3}{\partial\tilde{u}_1}|V_3$, $\tilde{V}_2 = |\frac{\partial\psi^2}{\partial\tilde{u}_2}|V_2$, $\tilde{V}_3 = |\frac{\partial\psi^1}{\partial\tilde{u}_3}|V_1$. Como $V_1^2 - V_2^2 + V_3^2 = 1 = \tilde{V}_1^2 - \tilde{V}_2^2 + \tilde{V}_3^2$, segue que $\frac{\partial\psi^i}{\partial\tilde{u}_i} \equiv \pm 1$, $i = 1,2,3$. Isto prova a afirmação (ii) da proposição. $\square$

Capítulo 2

Hipersuperfícies conformemente euclidianas com curvatura média constante e três curvaturas principais distintas em $\mathbb{Q}^4(c)$

Seja $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ uma hipersuperfície conformemente euclidiana com curvatura média constante e três curvaturas principais distintas. Inicialmente, estendemos um resultado provado por Defever [10] quando $c = 0$, mostrando que não existem tais hipersuperfícies com curvatura média constante não nula.

Teorema A. *Se $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ é uma hipersuperfície conformemente euclidiana com curvatura média constante e três curvaturas principais distintas, então f é necessariamente mínima.*

Exemplos de hipersuperfícies conformemente euclidianas mínimas $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas são os cones generalizados sobre toros de Clifford, ver capítulo precedente. Quando $c \neq 0$, provamos que não existem outros exemplos.

Teorema B. *Se $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c),\ c \neq 0$, é uma hipersuperfície conformemente euclidiana mínima com três curvaturas principais distintas, então $f(M^3)$ é um subconjunto aberto de um cone generalizado sobre um toro de Clifford em uma hipersuperfície umbílica $\mathbb{Q}^3(\tilde{c}) \subset \mathbb{Q}^4(c),\ \tilde{c} \geq c$ se $c > 0$.*

O caso mais interessante ocorre no espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$. Mostramos que, além do cone sobre um toro de Clifford em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, existe precisamente uma família a 1-parâmetro de outros exemplos.

Teorema C. *Existe precisamente uma família a* 1*-parâmetro (de classes de congruências) de imersões isométricas mínimas* $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ *com três curvaturas principais distintas de variedades Riemannianas* M^3 *simplesmente conexas conformemente euclidianas.*

Mais precisamente, mostramos que existem uma variedade algébrica $\mathcal{M}^4 \subset \mathbb{R}^6$, a qual contém um par de retas ℓ_- e ℓ_+, tal que $\widetilde{\mathcal{M}}^4 = \mathcal{M}^4 \setminus (\ell_- \cup \ell_+)$ é uma subvariedade regular do $\mathbb{R}^6$, sendo $(\ell_- \cup \ell_+)$ o conjunto singular de $\mathcal{M}^4$, uma distribuição involutiva $\mathcal{D}$ de codimensão 1 em $\widetilde{\mathcal{M}}^4$ e um grupo finito G de involuções de $\widetilde{\mathcal{M}}^4$ isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, cujos elementos preservam a distribuição $\mathcal{D}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) A cada folha σ de $\mathcal{D}$ estão associadas uma aplicação de recobrimento $\phi_\sigma : U_\sigma \to \sigma$, de um aberto simplesmente conexo $U_\sigma \subset \mathbb{R}^3$, e uma imersão mínima $f_\sigma : U_\sigma \to \mathbb{R}^4$, com três curvaturas principais distintas, cuja métrica induzida é conformemente euclidiana. O conjunto singular $\ell_- \cup \ell_+$ de $\mathcal{M}^4$ corresponde ao cone sobre um toro de Clifford em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$.

(ii) Se σ e $\tilde{\sigma}$ são folhas distintas de $\mathcal{D}$, então f_σ é congruente a $f_{\tilde{\sigma}}$ se, e somente se, existe um difeomorfismo $\psi : U_\sigma \to U_{\tilde{\sigma}}$ e $\Theta \in G$, tal que $\phi_{\tilde{\sigma}} \circ \psi = \Theta \circ \phi_\sigma$. Em particular, $\tilde{\sigma} = \Theta(\sigma)$.

(iii) Se $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ é uma imersão isométrica mínima, com três curvaturas principais distintas, de uma variedade Riemanniana simplesmente conexa conformemente euclidiana, então ou $f(M^3)$ é um subconjunto aberto de um cone sobre um toro de Clifford em $\mathbb{S}^3$ ou existe uma folha σ de $\mathcal{D}$ e um difeomorfismo local, $\rho : M^3 \to V$, sobre um subconjunto aberto $V \subset U_\sigma$ tal que f é congruente a $f_\sigma \circ \rho$.

A ideia fundamental para a obtenção desses teoremas é usar a caracterização das hipersuperfícies conformemente euclidianas, dada no Teorema 1.9, como hipersuperfícies holonômicas cujo par associado satisfaz certas expressões e, a partir da Proposição 1.1, obter um sistema de equações diferenciais parciais para as hipersuperfícies conformemente euclidianas com curvatura média constante e três curvaturas principais distintas.

2.1 Uma caracterização local

Para o que segue, será conveniente usar a seguinte versão equivalente do Teorema 1.9. Neste capítulo, entendemos por curvatura média a curvatura média não normalizada.

Corolário 2.1. *Seja $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ uma hipersuperfície holonômica, cujo par associado (v, V) satisfaz as equações*

$$\begin{aligned} &v_2^2 = v_1^2 + v_3^2, && V_2 = \frac{\lambda}{3}\left(\frac{v_3}{v_1} - \frac{v_1}{v_3}\right) + \frac{v_2}{3}H, \\ &V_1 = -\frac{\lambda}{3}\left(\frac{v_2}{v_3} + \frac{v_3}{v_2}\right) + \frac{v_1}{3}H, && V_3 = \frac{\lambda}{3}\left(\frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1}\right) + \frac{v_3}{3}H, \end{aligned} \tag{2.1}$$

em que $\lambda = \pm 1$ e H é a função curvatura média de f. Então, M^3 é conformemente euclidiana e f tem três curvaturas principais distintas.

Reciprocamente, toda hipersuperfície conformemente euclidiana $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ com três curvaturas principais distintas é localmente uma hipersuperfície holonômica cujo par associado (v, V) satisfaz as equações em (2.1)*, em que H é a função curvatura média de f.*

Demonstração. Desde que a função curvatura média H de f fica expressa, em termos do par (v, V), por

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i}{v_i}, \tag{2.2}$$

será suficiente mostrar que as equações em (1.6), juntamente com a equação (2.2), são equivalentes às equações em (2.1).

Para isso, seja $\mathbb{L}^3$ o espaço de Minkowski munido com o produto escalar Lorentziano

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

As equações em (1.6) implicam que $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $V = (V_1, V_2, V_3)$ são ortogonais com respeito a tal produto escalar, v é tipo-luz e V é unitário tipo-espaço. Desde que $w = (-v_3, 0, v_1)$ é ortogonal a v, temos que $v^\perp = Span\{v, w\}$. Como $V \in v^\perp$, existem $a, b \in C^\infty(M^3)$ tais que

$$V = av + bw.$$

Note que $V_2 = av_2$. Para determinar b podemos usar as equações em (1.6) e obter

$$1 = \langle V, V\rangle = \langle av + bw, av + bw\rangle = b^2\langle w, w\rangle = b^2 v_2^2.$$

Assim,

$$V = \frac{V_2}{v_2}v + \frac{\lambda}{v_2}w,$$

com $\lambda = \pm 1$. Portanto,

$$V_1 = \frac{1}{v_2}(V_2 v_1 - \lambda v_3) \qquad \text{e} \qquad V_3 = \frac{1}{v_2}(V_2 v_3 + \lambda v_1). \tag{2.3}$$

Substituindo as equações em (2.3) na equação (2.2), obtemos

$$V_2 = \frac{\lambda}{3}\left(\frac{v_3}{v_1} - \frac{v_1}{v_3}\right) + \frac{v_2}{3}H. \tag{2.4}$$

Concluímos, substituindo a equação (2.4) nas equações em (2.3), que as equações em (1.6) e (2.2) implicam nas equações em (2.1). Reciprocamente, o fato de que as equações em (2.1) implicam nas equações em (1.6) e (2.2) segue por um cálculo direto. □

Segundo o Corolário 2.1, estudar propriedades locais das hipersuperfícies conformemente euclidianas $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ com curvatura média constante H e três curvaturas principais distintas é equivalente a estudar hipersuperfícies holonômicas cujo par associado (v, V) satisfaz (2.1), com H constante. Ou seja, precisamos estudar as soluções (v, h, V) do sistema (1.3) que satisfazem as equações em (2.1) com $v_i > 0$ e H constante.

Na proposição a seguir, mostramos que soluções (v, h, V) do sistema (1.3) que satisfazem as equações em (2.1) com $v_i > 0$ e H constante correspondem a soluções de um novo sistema de EDP's envolvendo um número menor de funções.

Proposição 2.1. *Seja $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ uma hipersuperfície holonômica com curvatura média constante H, cujo par associado (v, V) satisfaz as equações em (2.1). Sejam*

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\frac{1}{v_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}, \frac{1}{v_3}\frac{\partial v_3}{\partial u_2}, \frac{1}{v_1}\frac{\partial v_1}{\partial u_3}\right)$$

e $\phi = (v_1, v_2, v_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Então ϕ satisfaz o seguinte sistema de EDP's:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial u_1} = \Big(\dfrac{v_1}{v_2^4}(v_2^4 + v_2^2 v_3^2 + v_3^4)\alpha_1, v_2\alpha_1, \dfrac{v_3^5}{v_2^4}\alpha_1, \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u_1}, 2\dfrac{v_1^2}{v_2^2}\alpha_1\alpha_2, 2\dfrac{v_3^2}{v_2^4}(4v_3^2 + v_1^2)\alpha_1\alpha_3\Big), \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial u_2} = \Big(\dfrac{v_1^5}{v_3^4}\alpha_2, \dfrac{v_2}{v_3^4}(v_1^4 - v_1^2 v_3^2 + v_3^4)\alpha_2, v_3\alpha_2, 2\dfrac{v_1^2}{v_3^4}(4v_1^2 - v_2^2)\alpha_1\alpha_2, \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial u_2}, 2\dfrac{v_2^2}{v_3^2}\alpha_2\alpha_3\Big), \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial u_3} = \Big(v_1\alpha_3, \dfrac{v_2^5}{v_1^4}\alpha_3, \dfrac{v_3}{v_1^4}(v_1^4 + v_1^2 v_2^2 + v_2^4)\alpha_3, -2\dfrac{v_3^2}{v_1^2}\alpha_1\alpha_3, 2\dfrac{v_2^2}{v_1^4}(4v_2^2 - v_3^2)\alpha_2\alpha_3, \dfrac{\partial \alpha_3}{\partial u_3}\Big), \end{cases} \tag{2.5}$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_1} &= \frac{1}{v_2^4}(3v_2^4 - v_3^4)\alpha_1^2 - \frac{v_1^6}{v_3^8}(3v_1^2 - 2v_3^2)\alpha_2^2 + \frac{v_2^4}{v_1^2 v_3^4}(3v_1^2 + 2v_2^2)\alpha_3^2 \\ &\quad + \frac{1}{9v_3^4}(5v_1^4 + 2v_2^2 v_3^2) - \frac{v_1^2 v_2^2}{v_3^2}c + \frac{v_1 v_2}{18 v_3^3}(v_2^2 + v_3^2 - 2v_1 v_2 v_3 H)H, \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_2} &= -\frac{v_3^4}{v_1^4 v_2^2}(3v_2^2 + 2v_3^2)\alpha_1^2 - \frac{1}{v_3^4}(v_1^4 - 3v_3^4)\alpha_2^2 - \frac{v_2^6}{v_1^8}(2v_1^2 + 3v_2^2)\alpha_3^2 \\ &\quad - \frac{1}{9v_1^4}(5v_2^4 - 2v_1^2 v_3^2) + \frac{v_2^2 v_3^2}{v_1^2}c - \frac{v_2 v_3}{18 v_1^3}(v_1^2 - v_3^2 - 2v_1 v_2 v_3 H)H, \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial u_3} &= \frac{v_3^6}{v_2^8}(2v_2^2 + 3v_3^2)\alpha_1^2 + \frac{v_1^4}{v_2^4 v_3^2}(2v_1^2 - 3v_3^2)\alpha_2^2 + \frac{1}{v_1^4}(3v_1^4 - v_2^4)\alpha_3^2 \\ &\quad + \frac{1}{9v_2^4}(5v_3^4 + 2v_1^2 v_2^2) - \frac{v_1^2 v_3^2}{v_2^2}c - \frac{v_1 v_3}{18 v_2^3}(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 v_3 H)H. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Além disso, as seguintes relações algébricas são satisfeitas:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{30 v_1}{v_2 v_3^9}F - \frac{4v_1^4 v_2^2}{v_3^6}(v_1^2 - v_3^2)c + \frac{v_1^3 v_2}{18 v_3^7}m_2 H\right)\alpha_2 = 0, \\ &\left(\frac{30 v_2}{v_1^9 v_3}F + \frac{4v_2^4 v_3^2}{v_1^6}(v_1^2 + v_2^2)c + \frac{v_3 v_2^3}{18 v_1^7}m_3 H\right)\alpha_3 = 0, \\ &\left(\frac{30 v_3}{v_1 v_2^9}F - \frac{4v_1^2 v_3^4}{v_2^6}(v_2^2 + v_3^2)c + \frac{v_1 v_3^3}{18 v_2^7}m_1 H\right)\alpha_1 = 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

em que

$$\begin{aligned}
m_1 &= (v_2^2+4v_3^2)(4v_2^2+v_3^2)-8v_1v_2v_3(v_2^2+v_3^2)H,\\
m_2 &= (v_1^2-4v_3^2)(4v_1^2-v_3^2)-8v_1v_2v_3(v_1^2-v_3^2)H,\\
m_3 &= (v_1^2+4v_2^2)(4v_1^2+v_2^2)+8v_1v_2v_3(v_1^2+v_2^2)H,\\
F &= \frac{1}{27v_1v_2v_3}\big[9v_1^2v_3^8(v_2^2+v_3^2)\alpha_1^2+9v_1^8v_2^2(v_1^2-v_3^2)\alpha_2^2-9v_2^8v_3^2(v_1^2+v_2^2)\alpha_3^2\\
&\quad -\ v_1^2v_2^2v_3^2(2v_1^2v_2^4-2v_1^2v_3^4-2v_2^2v_3^4-v_1^2v_2^2v_3^2)\big].
\end{aligned}$$

Demonstração. A tripla (v,h,V), em que $h_{ij}=\frac{1}{v_i}\frac{\partial v_j}{\partial u_i}$, satisfaz o sistema de EDP's

$$\begin{cases}
\text{(i)}\quad \dfrac{\partial v_i}{\partial u_j}=h_{ji}v_j, \qquad \text{(ii)}\quad \dfrac{\partial h_{ij}}{\partial u_i}+\dfrac{\partial h_{ji}}{\partial u_j}+h_{ki}h_{kj}+V_iV_j+cv_iv_j=0,\\[2mm]
\text{(iii)}\quad \dfrac{\partial h_{ik}}{\partial u_j}=h_{ij}h_{jk}, \qquad \text{(iv)}\quad \dfrac{\partial V_i}{\partial u_j}=h_{ji}V_j, \quad 1\le i\neq j\neq k\neq i\le 3,\\[2mm]
\text{(v)}\quad \delta_i\dfrac{\partial v_i}{\partial u_i}+\delta_jh_{ij}v_j+\delta_kh_{ik}v_k=0, \qquad \text{(vi)}\quad \delta_i\dfrac{\partial V_i}{\partial u_i}+\delta_jh_{ij}V_j+\delta_kh_{ik}V_k=0,
\end{cases} \tag{2.8}$$

em que as equações (i), (ii), (iii) e (iv) seguem do fato de f ser uma hipersuperfície holonômica com par associado (v,V), ver Proposição (1.1), enquanto que (v) e (vi) são obtidas derivando as equações em (1.6). Usando as equações em (2.1) e as equações (i), (v) e (vi) em (2.8) podemos calcular $\frac{\partial V_i}{\partial u_i}$ para verificar que

$$v_j^5h_{ki}=v_i^5h_{kj},\quad 1\le i\neq j\neq k\neq i\le 3. \tag{2.9}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
0 &\overset{\text{(vi)}}{=} \frac{\partial V_1}{\partial u_1}-V_2h_{12}+V_3h_{13} \overset{(2.1),(i),(v)}{=} \frac{\lambda v_2(v_1^2+v_3^2)}{3v_1v_3^2}h_{13}-\frac{\lambda v_3(v_2^2-v_1^2)}{3v_1v_2^2}h_{12}\\
&= \frac{\lambda v_2^3}{3v_1v_3^2}h_{13}-\frac{\lambda v_3^3}{3v_1v_2^2}h_{12}=\frac{\lambda}{3v_1v_2^2v_3^2}(v_2^5h_{13}-v_3^5h_{12}),
\end{aligned}$$

$$0 = \frac{\partial V_2}{\partial u_2}-V_1h_{21}-V_3h_{23}=\frac{\lambda}{3v_1^2v_2v_3^2}(v_1^5h_{23}-v_3^5h_{21}),$$

$$0 = \frac{\partial V_3}{\partial u_3}-V_2h_{32}+V_1h_{31}=\frac{\lambda}{3v_1^2v_2^2v_3}(v_1^5h_{32}-v_2^5h_{31}).$$

A partir da equação (2.9) e a definição dos $\alpha_{i's}$, podemos escrever as funções h_{ij} assim:

$$\begin{aligned} h_{12} &= \frac{v_2}{v_1}\alpha_1, & h_{21} &= \frac{v_1^5}{v_2 v_3^4}\alpha_2, & h_{31} &= \frac{v_1}{v_3}\alpha_3, \\ h_{13} &= \frac{v_3^5}{v_1 v_2^4}\alpha_1, & h_{23} &= \frac{v_3}{v_2}\alpha_2, & h_{32} &= \frac{v_2^5}{v_3 v_1^4}\alpha_3. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Substituindo as equações de (2.10) nas equações (i) e (v) do sistema (2.8) obtemos os $\frac{\partial v_i}{\partial u_j}$, $i, j = 1, 2, 3$ do sistema (2.5). Os $\frac{\partial \alpha_i}{\partial u_j}$, $i, j = 1, 2, 3$ e $i \neq j$ são obtidos a partir da equação (iii) do sistema (2.8), usando as equações $\frac{\partial v_i}{\partial u_j}$ do sistema (2.5), e as equações de (2.10). Para obter os $\frac{\partial \alpha_i}{\partial u_i}$, $i = 1, 2, 3$, observamos que a equação (ii) do sistema (2.8), juntamente com as equações já obtidas do sistema (2.5) e as equações de (2.10), determinam o sistema de equações lineares abaixo nas variáveis $\frac{\partial \alpha_i}{\partial u_i}$:

$$M.P = -B, \tag{2.11}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 9v_1^2v_2^4v_3^2 & \dfrac{9v_1^8v_2^2}{v_3^2} & 0 \\ \dfrac{9v_1^2v_3^8}{v_2^2} & 0 & 9v_1^4v_2^2v_3^2 \\ 0 & 9v_1^2v_2^2v_3^4 & \dfrac{9v_2^8v_3^2}{v_1^2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial \alpha_3}{\partial u_3} \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} -9v_1^2v_3^4(v_2^2+v_3^2)\alpha_1^2 + \dfrac{9v_1^8v_2^2}{v_3^6}(4v_2^2+v_3^2)(v_1^2-v_3^2)\alpha_2^2 + 9v_2^8\alpha_3^2 - v_1^2v_2^2(2v_3^4 - v_1^2v_2^2) \\ \hfill + 9v_1^4v_2^4v_3^2c - v_1^3v_2^3v_3(v_1^2+v_2^2 - v_1v_2v_3H)H \\ -\dfrac{9v_1^2v_3^8}{v_2^6}(4v_1^2+v_2^2)(v_2^2+v_3^2)\alpha_1^2 + 9v_1^8\alpha_2^2 - 9v_2^4v_3^2(v_1^2+v_2^2)\alpha_3^2 - v_1^2v_3^2(2v_2^4 + v_1^2v_3^2) \\ \hfill + 9v_1^4v_2^2v_3^4c + v_1^3v_2v_3^3(v_1^2 - v_3^2 + v_1v_2v_3H)H \\ 9v_3^8\alpha_1^2 - 9v_1^4v_2^2(v_1^2-v_3^2)\alpha_2^2 + \dfrac{9v_2^8v_3^2}{v_1^6}(4v_3^2-v_1^2)(v_1^2+v_2^2)\alpha_3^2 - v_2^2v_3^2(2v_1^4 - v_2^2v_3^2) \\ \hfill + 9v_1^2v_2^4v_3^4c + v_1v_2^3v_3^3(v_2^2+v_3^2+v_1v_2v_3H)H \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{\text{(ii)}}{=} \frac{\partial h_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial h_{21}}{\partial u_2} + h_{31}h_{32} + V_1V_2 + cv_1v_2 \\
&\overset{(2.10)}{=} \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{v_2}{v_1}\alpha_1\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{v_1^5}{v_2v_3^4}\alpha_2\right) + \frac{v_2^5}{v_3^2v_1^3}\alpha_3^2 + V_1V_2 + cv_1v_2 \\
&\overset{(2.5)}{=} \frac{1}{9v_1^3v_2^3v_3^2}\left[9v_1^2v_2^4v_3^2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_1} + \frac{9v_1^8v_2^2}{v_3^2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_2} - 9v_1^2v_3^4(v_2^2+v_3^2)\alpha_1^2\right. \\
&\quad + \frac{9v_1^8v_2^2}{v_3^6}(4v_2^2+v_3^2)(v_1^2-v_3^2)\alpha_2^2 + \ 9v_2^8\alpha_3^2 - v_1^2v_2^2(2v_3^4 - v_1^2v_2^2) \\
&\quad \left. + \ 9v_1^4v_2^4v_3^2c - v_1^3v_2^3v_3(v_1^2+v_2^2 - v_1v_2v_3H)H\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial h_{13}}{\partial u_1} + \frac{\partial h_{31}}{\partial u_3} + h_{21}h_{23} + V_1V_3 + cv_1v_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{v_3^5}{v_1v_2^4}\alpha_1\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{v_1}{v_3}\alpha_3\right) + \frac{v_1^5}{v_2^2v_3^3}\alpha_2^2 + V_1V_3 + cv_1v_3 \\
&= \frac{1}{9v_1^3v_2^2v_3^3}\left[\frac{9v_1^2v_3^8}{v_2^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_1} + 9v_1^4v_2^2v_3^2\frac{\partial\alpha_3}{\partial u_3} - \frac{9v_1^2v_3^8}{v_2^6}(4v_1^2+v_2^2)(v_2^2+v_3^2)\alpha_1^2\right. \\
&\quad - 9v_2^4v_3^2(v_1^2+v_2^2)\alpha_3^2 + 9v_1^8\alpha_2^2 - v_1^2v_3^2(2v_2^4 + v_1^2v_3^2) \\
&\quad \left. + \ 9v_1^4v_2^2v_3^4c + v_1^3v_2v_3^3(v_1^2 - v_3^2 + v_1v_2v_3H)H\right]
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial h_{23}}{\partial u_2} + \frac{\partial h_{32}}{\partial u_3} + h_{12}h_{13} + V_2V_3 + cv_2v_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{v_3}{v_2}\alpha_2\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{v_2^5}{v_3v_1^4}\alpha_3\right) + \frac{v_3^5}{v_1^2v_2^3}\alpha_1^2 + V_2V_3 + cv_2v_3 \\
&= \frac{1}{9v_1^2v_2^3v_3^3}\left[9v_1^2v_2^2v_3^4\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_2} + \frac{9v_2^8v_3^2}{v_1^2}\frac{\partial\alpha_3}{\partial u_3} - 9v_1^4v_2^2(v_1^2 - v_3^2)\alpha_2^2\right. \\
&\quad + \frac{9v_2^8v_3^2}{v_1^6}(4v_3^2 - v_1^2)(v_1^2+v_2^2)\alpha_3^2 + 9v_3^8\alpha_1^2 - v_2^2v_3^2(2v_1^4 - v_2^2v_3^2) \\
&\quad \left. + \ 9v_1^2v_2^4v_3^4c + v_1v_2^3v_3^3(v_2^2 + v_3^2 + v_1v_2v_3H)H\right].
\end{aligned}
$$

Em seguida, verificando que $\det(M) = -1458v_1^8v_2^8v_3^8 \neq 0$, podemos concluir que o sistema (2.11) tem uma única solução dada pelas equações em (2.6).

Resta-nos mostrar que as relações em (2.7) são satisfeitas. Calculando as derivadas mistas $\frac{\partial^2\alpha_i}{\partial u_j\partial u_k}=\frac{\partial^2\alpha_i}{\partial u_k\partial u_j}$, $i,j,k=1,2,3$ a partir das equações do sistema (2.5), obtemos

$$0 = \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial u_2\partial u_1}-\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial u_1\partial u_2} = \left(\frac{30v_1}{v_2v_3^9}F-\frac{4v_1^4v_2^2}{v_3^6}(v_1^2-v_3^2)c+\frac{v_1^3v_2}{18v_3^7}m_2H\right)\alpha_2,$$

$$0 = \frac{\partial^2\alpha_2}{\partial u_3\partial u_2}-\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial u_2\partial u_3} = \left(\frac{30v_2}{v_1^9v_3}F+\frac{4v_2^4v_3^2}{v_1^6}(v_1^2+v_2^2)c+\frac{v_3v_2^3}{18v_1^7}m_3H\right)\alpha_3$$

e

$$0 = \frac{\partial^2\alpha_3}{\partial u_1\partial u_3}-\frac{\partial^2\alpha_3}{\partial u_3\partial u_1} = \left(\frac{30v_3}{v_1v_2^9}F-\frac{4v_1^2v_3^4}{v_2^6}(v_2^2+v_3^2)c+\frac{v_1v_3^3}{18v_2^7}m_1H\right)\alpha_1.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial u_2\partial u_1} &= \frac{1}{18v_2^4v_3^{12}}\Big[36v_1^2v_3^8(27v_1^6+48v_1^4v_3^2+v_1^2v_3^4-16v_3^6)\alpha_1^2\\
&\quad -36v_1^8v_2^4(9v_1^4-4v_1^2v_3^2-3v_3^4)\alpha_2^2+36v_2^8v_3^4(25v_1^4+16v_1^2v_3^2+3v_3^4)\alpha_3^2\\
&\quad +4v_1^2v_2^4v_3^4(25v_1^6+16v_1^4v_3^2-11v_1^2v_3^4-12v_3^6)-36v_1^4v_2^6v_3^6(5v_1^2-3v_3^2)c\\
&\quad +v_1^5v_2^5v_3^5(10v_1^2-7v_3^2)H-4v_1^6v_2^8v_3^6(5v_1^2-3v_3^2)H^2\Big]\alpha_2,\\
\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial u_1\partial u_2} &= \frac{1}{9v_2^4v_3^{12}}\Big[18v_1^2v_3^8(27v_1^6+53v_1^4v_3^2+16v_1^2v_3^4-6v_3^6)\alpha_1^2\\
&\quad -18v_1^8v_2^4(9v_1^4-9v_1^2v_3^2+2v_3^4)\alpha_2^2+18v_2^8v_3^4(15v_1^4+v_1^2v_3^2-2v_3^4)\alpha_3^2\\
&\quad +2v_1^2v_2^4v_3^4(15v_1^6+v_1^4v_3^2+4v_1^2v_3^4-2v_3^6)-18v_1^4v_2^6v_3^6(3v_1^2-v_3^2)c\\
&\quad -v_1^3v_2^5v_3^5(-3v_1^4-5v_1^2v_3^2+2v_3^4)H-2v_1^4v_2^6v_3^6(3v_1^2-v_3^2)H^2\Big]\alpha_2,\\
\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial u_2\partial u_1}-\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial u_1\partial u_2} &= \Big[-\frac{10}{9v_2^2v_3^{10}}\Big(9v_1^2v_3^8(v_2^2+v_3^2)\alpha_1^2+9v_1^8v_2^2(v_1^2-v_3^2)\alpha_2^2\\
&\quad -9v_2^8v_3^2(v_1^2+v_2^2)\alpha_3^2-v_1^2v_2^2v_3^2(2v_1^2v_2^4-2v_1^2v_3^4-2v_2^2v_3^4-v_1^2v_2^2v_3^2)\Big)\\
&\quad -\frac{4v_1^4v_2^2}{v_3^6}(v_1^2-v_3^2)c+\frac{v_1^3v_2}{18v_3^7}\Big((v_1^2-4v_3^2)(4v_1^2-v_3^2)\\
&\quad -8v_1v_2v_3(v_1^2-v_3^2)H\Big)H\Big]\alpha_2\\
&= \left(\frac{30v_1}{v_2v_3^9}F-\frac{4v_1^4v_2^2}{v_3^6}(v_1^2-v_3^2)c+\frac{v_1^3v_2}{18v_3^7}m_2H\right)\alpha_2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial u_3\partial u_2} &= \frac{-1}{18v_1^{12}v_3^4}\Big[36v_1^4v_3^8(12v_1^4+34v_1^2v_3^2+25v_3^4)\alpha_1^2\\
&\quad+36v_1^8v_2^2(4v_1^6+14v_1^4v_3^2-33v_1^2v_3^4-27v_3^6)\alpha_2^2+36v_2^8v_3^4(10v_1^4+22v_1^2v_3^2+9v_3^4)\alpha_3^2\\
&\quad+4v_1^4v_2^2v_3^4(10v_1^6+32v_1^4v_3^2+59v_1^2v_3^4+25v_3^6)-36v_1^6v_2^4v_3^6(8v_1^2+5v_3^2)c\\
&\quad-v_1^5v_2^5v_3^5(17v_1^2+10v_3^2)H-4v_1^6v_2^4v_3^6(8v_1^2+5v_3^2)H^2\Big]\alpha_3,\\
\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial u_2\partial u_3} &= \frac{-1}{9v_1^{12}v_3^4}\Big[18v_1^4v_3^8(12v_1^4+29v_1^2v_3^2+15v_3^4)\alpha_1^2\\
&\quad+18v_1^8v_2^2(4v_1^6+9v_1^4v_3^2-28v_1^2v_3^4-27v_3^6)\alpha_2^2+18v_2^8v_3^4(20v_1^4+27v_1^2v_3^2+9v_3^4)\alpha_3^2\\
&\quad+2v_1^4v_2^2v_3^4(20v_1^6+47v_1^4v_3^2+44v_1^2v_3^4+15v_3^6)-18v_1^6v_2^4v_3^6(4v_1^2+3v_3^2)c\\
&\quad+v_1^5v_2^3v_3^5(v_1^2-v_3^2)(4v_1^2+3v_3^2)H-2v_1^6v_2^4v_3^6(4v_1^2+3v_3^2)H^2\Big]\alpha_3,\\
\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial u_3\partial u_2}-\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial u_2\partial u_3} &= \Big[-\frac{10}{9v_1^{10}v_3^2}\Big(9v_1^2v_3^8(v_2^2+v_3^2)\alpha_1^2+9v_1^8v_2^2(v_1^2-v_3^2)\alpha_2^2\\
&\quad-9v_2^8v_3^2(v_1^2+v_2^2)\alpha_3^2-v_1^2v_2^2v_3^2(2v_1^2v_2^4-2v_1^2v_3^4-2v_2^2v_3^4-v_1^2v_2^2v_3^2)\Big)\\
&\quad+\frac{4v_2^4v_3^2}{v_1^6}(v_1^2+v_2^2)c+\frac{v_3v_2^3}{18v_1^7}\Big((v_1^2+4v_2^2)(4v_1^2+v_2^2)\\
&\quad+8v_1v_2v_3(v_1^2+v_2^2)H\Big)H\Big]\alpha_3\\
&= \left(\frac{30v_2}{v_1^9v_3}F+\frac{4v_2^4v_3^2}{v_1^6}(v_1^2+v_2^2)c+\frac{v_3v_2^3}{18v_1^7}m_3H\right)\alpha_3,\\
\frac{\partial^2\alpha_3}{\partial u_1\partial u_3} &= \frac{-1}{18v_1^4v_2^{12}}\Big[36v_1^4v_3^8(3v_1^4+2v_1^2v_3^2-10v_3^4)\alpha_1^2\\
&\quad+36v_1^8v_2^4(3v_1^4-10v_1^2v_3^2+12v_3^4)\alpha_2^2-36v_2^8v_3^2(16v_1^6+49v_1^4v_3^2+2v_1^2v_3^4-4v_3^6)\alpha_3^2\\
&\quad-4v_1^4v_2^4v_3^2(12v_1^6+25v_1^4v_3^2-2v_1^2v_3^4+10v_3^6)+36v_1^6v_2^6v_3^4(3v_1^2+8v_3^2)c\\
&\quad-v_1^5v_2^5v_3^5(7v_1^2+17v_3^2)H+4v_1^6v_2^6v_3^4(3v_1^2+8v_3^2)H^2\Big]\alpha_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\alpha_3}{\partial u_1\partial u_3} &= \frac{1}{9v_1^4v_2^{12}}\Big[18v_1^4v_3^8(2v_1^4+13v_1^2v_3^2+20v_3^4)\alpha_1^2\\
&+18v_1^8v_2^4(2v_1^4+5v_1^2v_3^2-12v_3^4)\alpha_2^2-18v_2^8v_3^2(-6v_1^6-34v_1^4v_3^2+3v_1^2v_3^4+4v_3^6)\alpha_3^2\\
&+2v_1^4v_2^4v_3^2(2v_1^6+10v_1^4v_3^2+13v_1^2v_3^4+20v_3^6)-18v_1^6v_2^6v_3^4(v_1^2+4v_3^2)c\\
&-v_1^5v_2^5v_3^3(2v_1^4+9v_1^2v_3^2+4v_3^4)H-2v_1^6v_2^6v_3^4(v_1^2+4v_3^2)H^2\Big]\alpha_1,\\
\frac{\partial^2\alpha_3}{\partial u_1\partial u_3}-\frac{\partial^2\alpha_3}{\partial u_1\partial u_3} &= \Big[-\frac{10}{9v_1^2v_2^{10}}\Big(9v_1^2v_3^8(v_2^2+v_3^2)\alpha_1^2+9v_1^8v_2^2(v_1^2-v_3^2)\alpha_2^2\\
&-9v_2^8v_3^2(v_1^2+v_2^2)\alpha_3^2-v_1^2v_2^2v_3^2(2v_1^2v_2^4-2v_1^2v_3^4-2v_2^2v_3^4-v_1^2v_2^2v_3^2)\Big)\\
&-\frac{4v_1^2v_3^4}{v_2^6}(v_2^2+v_3^2)c+\frac{v_1v_3^3}{18v_2^7}\Big((v_2^2+4v_3^2)(4v_2^2+v_3^2)\\
&-8v_1v_2v_3(v_2^2+v_3^2)H\Big)H\Big]\alpha_1\\
&= \Big(\frac{30v_3}{v_1v_2^9}F-\frac{4v_1^2v_3^4}{v_2^6}(v_2^2+v_3^2)c+\frac{v_1v_3^3}{18v_2^7}m_1H\Big)\alpha_1.
\end{aligned}
$$

□

Nos lemas a seguir supomos que as hipóteses da Proposição 2.1 são satisfeitas e usamos suas notações.

Lema 2.1. *Se $v_1 = v_3$ em todo ponto de M^3, então $H = 0$.*

Demonstração. Como $v_2^2 = v_1^2 + v_3^2$, temos que $v_2 = \sqrt{2}v_1$ e obtemos a partir das equações do sistema (2.5) que

$$\frac{\partial v_1}{\partial u_2} = v_1\alpha_2 \qquad \text{e} \qquad \alpha_1 = \alpha_3 = 0, \tag{2.12}$$

assim como

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_2} = 2(\alpha_2^2+\frac{1}{9}H^2v_1^2+cv_1^2-1),\\
&18\alpha_2^2+4v_1^2H^2-3\sqrt{2}v_1H+36v_1^2c-18=0,\\
&18\alpha_2^2+4v_1^2H^2+3\sqrt{2}v_1H+36v_1^2c-18=0.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Comparando as duas últimas equações em (2.13), podemos concluir que $H = 0$. □

Lema 2.2. *Não existe um subconjunto aberto em M^3 no qual as funções $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se anulam simultaneamente.*

Demonstração. Suponha que exista um subconjunto aberto $U \subset M^3$ de sorte que $\alpha_1(p) = \alpha_2(p) = \alpha_3(p) = 0$, para todo $p \in U$. Então, as equações em (2.6) se reduzem às seguintes equações em U:

$$2(5v_1^4 + 2v_2^2v_3^2) - 18v_1^2v_2^2v_3^2c + v_1v_2v_3(v_2^2 + v_3^2 - 2v_1v_2v_3H)H = 0, \tag{2.14}$$

$$2(5v_2^4 - 2v_1^2v_3^2) - 18v_1^2v_2^2v_3^2c + v_1v_2v_3(v_1^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3H)H = 0 \tag{2.15}$$

e

$$2(5v_3^4 + 2v_1^2v_2^2) - 18v_1^2v_2^2v_3^2c - v_1v_2v_3(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2v_3H)H = 0. \tag{2.16}$$

Comparando a equação (2.14) com as equações (2.15) e (2.16), respectivamente, obtemos que

$$H = \frac{2(v_1^2 + v_2^2)}{v_1v_2v_3} \qquad \text{e} \qquad H = -\frac{2(v_1^2 - v_3^2)}{v_1v_2v_3},$$

o que implica em uma contradição. □

Lema 2.3. *Não existe um subconjunto aberto de M^3 no qual $\alpha_1 = 0 = \alpha_3$ e $v_1 - v_3 \neq 0$.*

Demonstração. Suponha que $\alpha_1 = 0 = \alpha_3$ e $v_1 - v_3 \neq 0$ em todo ponto de um subconjunto aberto $U \subset M^3$. Pelo Lema 2.2, a função α_2 não se anula em nenhum ponto de um subconjunto aberto e denso $\tilde{U} \subset U$. Então, as equações em (2.5) se reduzem às seguintes, em $\tilde{U}$:

$$\frac{\partial v_i}{\partial u_1} = \frac{\partial v_i}{\partial u_3} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial u_j} = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3$$

e

$$\frac{\partial v_1}{\partial u_2} = \frac{v_1^5}{v_3^4}\alpha_2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial u_2} = \frac{v_2}{v_3^4}(v_1^4 - v_1^2v_3^2 + v_3^4)\alpha_2, \quad \frac{\partial v_3}{\partial u_2} = v_3\alpha_2. \tag{2.17}$$

Além disso, como $\alpha_1 = 0 = \alpha_3$, as equações em (2.6) tornam-se, respectivamente,

$$0 = \frac{v_1^6}{v_3^8}(3v_1^2 - 2v_3^2)\alpha_2^2 + \frac{1}{9v_3^4}(5v_1^4 + 2v_2^2v_3^2) - \frac{v_1^2v_2^2}{v_3^2}c + \frac{v_1v_2}{18v_3^3}(v_2^2 + v_3^2 - 2v_1v_2v_3H)H, \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial u_2} = -\frac{1}{v_3^4}(v_1^4 - 3v_3^4)\alpha_2^2 - \frac{1}{9v_1^4}(5v_2^4 - 2v_1^2v_3^2) + \frac{v_2^2v_3^2}{v_1^2}c - \frac{v_2v_3}{18v_1^3}(v_1^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3H)H \tag{2.19}$$

e

$$0 = \frac{v_1^4}{v_2^4 v_3^2}(2v_1^2 - 3v_3^2)\alpha_2^2 + \frac{1}{9v_2^4}(5v_3^4 + 2v_1^2 v_2^2) - \frac{v_1^2 v_3^2}{v_2^2}c - \frac{v_1 v_3}{18 v_2^3}(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 v_3 H)H. \quad (2.20)$$

Multiplicando a equação (2.18) por $2v_3^8$, a equação (2.20) por $3v_1^2 v_2^4 v_3^2$ e, em seguida, subtraindo-as, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_2^2 \;=\; & \frac{1}{90v_1^6}\Big[-2v_1^2 v_2^2 v_3^2(3v_1^2 + 2v_3^2)H^2 - v_1 v_2 v_3(6v_1^4 + v_1^2 v_3^2 - 4v_3^4)H \\ & - 18v_1^2 v_2^2 v_3^2(3v_1^2 + 2v_3^2)c + 2(6v_1^6 + 16v_1^4 v_3^2 + 19v_1^2 v_3^4 + 4v_3^6)\Big]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Por um lado, substituindo a equação (2.21) na equação (2.19), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_2} \;=\; & \frac{1}{90v_1^6 v_3^4}\Big[2v_1^2 v_2^2 v_3^2(3v_1^6 + 2v_1^4 v_3^2 - 4v_1^2 v_3^4 - 6v_3^6)H^2 \\ & + v_1 v_2 v_3(6v_1^8 + v_1^6 v_3^2 - 27v_1^4 v_3^4 + 2v_1^2 v_3^6 + 12v_3^8)H \\ & + 18v_1^2 v_2^2 v_3^2(3v_1^6 + 2v_1^4 v_3^2 - 4v_1^2 v_3^4 - 6v_3^6)c \\ & - 4(v_1^4 - v_3^4)(3v_1^6 + 8v_1^4 v_3^2 + 16v_1^2 v_3^4 + 6v_3^6)\Big]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Por outro lado, derivando a equação (2.21) em relação a u_2 e usando as equações em (2.17), obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_2} \;=\; & -\frac{\alpha_2}{180 v_1^6 v_2 v_3^3}\Big[v_2^2(-4v_1^2 v_2 v_3^3(5v_1^4 - 4v_1^2 v_3^2 - 6v_3^4)H^2 \\ & - v_1 v_3^2(8v_1^6 - 27v_1^4 v_3^2 - 8v_1^2 v_3^4 + 24v_3^6)H \\ & - 36v_1^2 v_2 v_3^3(5v_1^4 - 4v_1^2 v_3^2 - 6v_3^4)c \\ & + 8v_2 v_3(v_1^2 - v_3^2)(v_2^2 + v_3^2)(8v_1^2 + 3v_3^2)\Big]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Desde que $\alpha_2 \neq 0$ em $\tilde{U}$, podemos eliminá-lo da equação (2.23), em seguida subtrair os membros à direita das igualdades em (2.22) e (2.23), e usar a hipótese $v_1 - v_3 \neq 0$ para obter

$$H^2 + \frac{4v_1^6 - 2v_1^4 v_3^2 - 9v_1^2 v_3^4 + 4v_3^6}{4v_1^3 v_2 v_3 (v_1^2 - v_3^2)}H - \frac{2v_2^2(v_1^2 - v_3^2)}{v_1^4 v_3^2} + 9c = 0. \quad (2.24)$$

Derivando a equação (2.24) em relação à variável u_2 e usando as equações em (2.17), obtemos

$$v_1 v_3(22v_1^6 - 11v_1^4 v_3^2 - 4v_1^2 v_3^4 + 8v_3^6)H = -16v_2^3(v_1^2 - v_3^2)^2. \quad (2.25)$$

Como $v_1 - v_3 \neq 0$, deve-se ter

$$(22v_1^6 - 11v_1^4v_3^2 - 4v_1^2v_3^4 + 8v_3^6) \neq 0$$

em $\tilde{U}$. Portanto, a equação (2.25) implica em

$$H = -\frac{16v_2^3(v_1^2 - v_3^2)^2}{v_1v_3(22v_1^6 - 11v_1^4v_3^2 - 4v_1^2v_3^4 + 8v_3^6)}. \tag{2.26}$$

Finalmente, podemos derivar a equação (2.26), em relação a u_2, e usar as equações em (2.17) para obter

$$0 = -\frac{1680v_1^5v_2^3(v_1^2 - v_3^2)^2}{v_3(22v_1^6 - 11v_1^4v_3^2 - 4v_1^2v_3^4 + 8v_3^6)^2}\alpha_2, \tag{2.27}$$

o que nos leva a uma contradição, pois o lado direito da igualdade (2.27) é não nulo. □

Lema 2.4. *Não existe um subconjunto aberto de M^3 no qual $\alpha_2 = 0 = \alpha_j$, $j \in \{1, 3\}$.*

Demonstração. Suponha que $\alpha_2 = 0 = \alpha_1$ em todo ponto de um subconjunto aberto $U \subset M^3$. Pelo Lema 2.2, a função α_3 não se anula em nenhum ponto de um subconjunto aberto e denso $\tilde{U} \subset U$. Então, restritas a $\tilde{U}$, a primeira e a segunda equações em (2.6) podem ser reescritas assim:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{v_2^4}{v_1^2v_3^4}(3v_1^2 + 2v_2^2)\alpha_3^2 + \frac{1}{9v_3^4}(5v_1^4 + 2v_2^2v_3^2) \\ &- \frac{v_1^2v_2^2}{v_3^2}c + \frac{v_1v_2}{18v_3^3}(v_2^2 + v_3^2 - 2v_1v_2v_3H)H, \\ 0 &= \frac{v_2^6}{v_1^8}(2v_1^2 + 3v_2^2)\alpha_3^2 + \frac{1}{9v_1^4}(5v_2^4 - 2v_1^2v_3^2) \\ &- \frac{v_2^2v_3^2}{v_1^2}c + \frac{v_2v_3}{18v_1^3}(v_1^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3H)H. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Eliminando α_3^2 das equações em (2.28), obtemos

$$H^2 - \frac{7v_1^4 + 7v_1^2v_3^2 + 2v_3^4}{2v_1v_2v_3(v_1^2 + v_2^2)}H - \frac{2v_3^2}{v_1^2v_2^2} + 9c = 0. \tag{2.29}$$

Derivando a equação (2.29), com respeito a u_3, e usando que $\alpha_3 \neq 0$, obtemos

$$H = \frac{8v_3^3(v_1^2 + v_2^2)}{v_1v_2(21v_1^4 + 21v_1^2v_3^2 + 4v_3^4)}. \tag{2.30}$$

Por fim, derivando a equação (2.30), com respeito a u_3, e usando o fato de que H é constante, obtemos a seguinte contradição:

$$0 = \frac{120v_3^3v_2(v_1^2+v_2^2)(7v_1^4+7v_1^2v_3^2+2v_3^4)}{v_1^3(21v_1^4+21v_1^2v_3^2+4v_3^4)^2}.$$

Analogamente, suponha que $\alpha_2 = 0 = \alpha_3$ em todo ponto de um subconjunto aberto $V \subset M^3$. Pelo Lema 2.2, a função α_1 não se anula em nenhum ponto de um subconjunto aberto e denso $\tilde{V} \subset V$. Então, restritas a $\tilde{V}$, a segunda e a terceira equações em (2.6) podem ser reescritas assim:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{v_3^4}{v_1^4v_2^2}(3v_2^2+2v_3^2)\alpha_1^2 + \frac{1}{9v_1^4}(5v_2^4 - 2v_1^2v_3^2) \\
&\quad - \frac{v_2^2v_3^2}{v_1^2}c + \frac{v_2v_3}{18v_1^3}(v_1^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3H)H, \\
0 &= \frac{v_3^6}{v_2^8}(2v_2^2+3v_3^2)\alpha_1^2 + \frac{1}{9v_2^4}(5v_3^4 + 2v_1^2v_2^2) \\
&\quad - \frac{v_1^2v_3^2}{v_2^2}c - \frac{v_1v_3}{18v_2^3}(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2v_3H)H.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Eliminando α_1^2 das equações em (2.31), obtemos

$$H^2 + \frac{2v_1^4+7v_1^2v_3^2+7v_3^4}{2v_1v_2v_3(v_2^2+v_3^2)}H - \frac{2v_1^2}{v_2^2v_3^2} + 9c = 0. \tag{2.32}$$

Derivando a equação (2.32), com relação a u_1, e usando que $\alpha_1 \neq 0$, obtemos

$$H = -\frac{8v_1^3(v_2^2+v_3^2)}{v_2v_3(4v_1^4+21v_1^2v_3^2+21v_3^4)}. \tag{2.33}$$

Por fim, derivando (2.33), com relação a u_1, e usando o fato de que H é constante, obtemos a seguinte contradição:

$$0 = -\frac{120v_1^3v_3(v_2^2+v_3^2)(2v_1^4+7v_1^2v_3^2+7v_3^4)}{v_2^3(4v_1^4+21v_1^2v_3^2+21v_3^4)^2}.$$

□

Lema 2.5. *Se existem $p \in M^3$ e $1 \leq i \neq j \leq 3$ tais que $\alpha_i(p) \neq 0 \neq \alpha_j(p)$, então $H = c = 0$.*

Demonstração. Primeiro, mostraremos que a conclusão do lema vale no caso $i = 1$ e $j = 2$. Seja $p \in M^3$ tal que $\alpha_1(p) \neq 0$ e $\alpha_2(p) \neq 0$. Por continuidade, existe uma vizinhança aberta $U \subset M^3$ de p de sorte que α_1 e α_2 não se anulam em nenhum ponto de U. Restritas ao aberto U, a primeira e a terceira equações em (2.7) implicam que

$$\frac{30v_3}{v_1v_2^9}F - \frac{4v_1^2v_3^4}{v_2^6}(v_2^2 + v_3^2)c + \frac{v_1v_3^3}{18v_2^7}m_1H = 0$$

e

$$\frac{30v_1}{v_2v_3^9}F - \frac{4v_1^4v_2^2}{v_3^6}(v_1^2 - v_3^2)c + \frac{v_1^3v_2}{18v_3^7}m_2H = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} F = -\dfrac{v_1^2v_2^2v_3^2}{540}[m_1H - 72cv_1v_2v_3(v_2^2 + v_3^2)], \\ F = -\dfrac{v_1^2v_2^2v_3^2}{540}[m_2H - 72cv_1v_2v_3(v_1^2 - v_3^2)]. \end{cases} \tag{2.34}$$

Subtraindo as duas equações em (2.34), obtemos

$$H^2 - \frac{7(v_1^2 + v_2^2)}{8v_1v_2v_3}H + 9c = 0. \tag{2.35}$$

Derivando a equação (2.35), em relação a u_2, obtemos

$$\frac{21v_1}{8v_2v_3}H\alpha_2 = 0. \tag{2.36}$$

Desde que $\alpha_2 \neq 0$, a equação (2.36) implica que $H = 0$. Pela equação (2.35), $c = 0$.

Agora, mostraremos que a conclusão do lema também vale se $i = 1$ e $j = 3$. Seja $U \subset M^3$ uma vizinhança aberta de p tal que α_1 e α_3 não se anulam em nenhum ponto de U. Restritas ao aberto U, a segunda e a terceira equações em (2.7) implicam em

$$\frac{30v_3}{v_1v_2^9}F - \frac{4v_1^2v_3^4}{v_2^6}(v_2^2 + v_3^2)c + \frac{v_1v_3^3}{18v_2^7}m_1H = 0$$

e

$$\frac{30v_2}{v_1^9v_3}F + \frac{4v_2^4v_3^2}{v_1^6}(v_1^2 + v_2^2)c + \frac{v_3v_2^3}{18v_1^7}m_3H = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} F = -\dfrac{v_1^2v_2^2v_3^2}{540}[m_1H - 72cv_1v_2v_3(v_2^2 + v_3^2)], \\ F = -\dfrac{v_1^2v_2^2v_3^2}{540}[m_3H + 72cv_1v_2v_3(v_1^2 + v_2^2)]. \end{cases} \tag{2.37}$$

Subtraindo as duas equações em (2.37) obtemos

$$H^2 + \frac{7(v_1^2 - v_3^2)}{8v_1v_2v_3}H + 9c = 0. \tag{2.38}$$

Se $v_1 = v_3$ em um subconjunto aberto $\tilde{U} \subset U$, segue do Lema 2.1 que $H = 0$, consequentemente $c = 0$ pela equação (2.38). Assim, podemos supor que $v_1^2 - v_3^2 \neq 0$ em todo ponto de U. Derivando a equação (2.38), em relação a u_1, obtemos

$$\frac{21v_3}{8v_1v_2}H\alpha_1 = 0. \tag{2.39}$$

Como $\alpha_1 \neq 0$, a equação (2.39) implica que $H = 0$. Pela equação (2.38), $c = 0$.

Para finalizar, mostraremos que a conclusão do lema vale se $i = 2$ e $j = 3$. Seja $U \subset M^3$ uma vizinhança aberta de p tal que α_2 e α_3 não se anulam em nenhum ponto de U. Restritas ao aberto U, a primeira e a segunda equações em (2.7) implicam em

$$\frac{30v_1}{v_2v_3^9}F - \frac{4v_1^4v_2^2}{v_3^6}(v_1^2 - v_3^2)c + \frac{v_1^3v_2}{18v_3^7}m_2H = 0$$

e

$$\frac{30v_2}{v_1^9v_3}F + \frac{4v_2^4v_3^2}{v_1^6}(v_1^2 + v_2^2)c + \frac{v_3v_2^3}{18v_1^7}m_3H = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} F = -\dfrac{v_1^2v_2^2v_3^2}{540}[m_2H - 72cv_1v_2v_3(v_1^2 - v_3^2)], \\ F = -\dfrac{v_1^2v_2^2v_3^2}{540}v_1^2v_2^2v_3^2[m_3H + 72cv_1v_2v_3(v_1^2 + v_2^2)]. \end{cases} \tag{2.40}$$

Subtraindo as duas equações em (2.40), obtemos

$$H^2 + \frac{7(v_2^2 + v_3^2)}{8v_1v_2v_3}H + 9c = 0. \tag{2.41}$$

Derivando a equação (2.41), em relação a u_3, obtemos

$$\frac{21v_2}{8v_1v_3}H\alpha_3 = 0. \tag{2.42}$$

Como $\alpha_3 \neq 0$, a equação (2.42) implica que $H = 0$. Pela equação (2.41), $c = 0$. $\square$

Lema 2.6. *Se $v_1 \neq v_3$ em algum ponto de M^3, então $H = c = 0$.*

Demonstração. Suponha que $v_1(p_0) \neq v_3(p_0)$ em algum ponto p_0 de M^3. Por continuidade, existe uma vizinhança aberta $U \subset M^3$ de p_0 tal que $v_1 \neq v_3$ em todos os pontos de U. Pelo Lema 2.2, existem um subconjunto aberto $U' \subset U$ e $i \in \{1, 2, 3\}$ tais que $\alpha_i(p) \neq 0$ para todo $p \in U'$. Segue dos Lemas 2.3 e 2.4 que existem um ponto $q \in U'$ e $j \in \{1, 2, 3\}$, $j \neq i$, tais que $\alpha_j(q) \neq 0$. Assim, existe $q \in M^3$, tal que $\alpha_i(q) \neq 0$ e $\alpha_j(q) \neq 0$, $i \neq j$, e a conclusão segue do Lema 2.5. □

Corolário 2.2. *Seja $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ uma hipersuperfície holonômica com curvatura média constante H, cujo par associado (v, V) satisfaz as equações em* (2.1)*. Vale o seguinte:*

(a) Se $v_1 = v_3$ em todo ponto de M^3, então $H = 0$.

(b) Se $v_1 \neq v_3$ em algum ponto de M^3, então $H = c = 0$.

2.2 Demonstrações dos Teoremas A e B

Nesta seção apresentamos as demonstrações dos teoremas A e B.

Demonstração do Teorema A: Pelo Corolário 2.1, cada ponto $x \in M^3$ está contido em um subconjunto aberto $U \subset M^3$ de M^3 tal que $f|_U : U \to \mathbb{Q}^4(c)$ é uma hipersuperfície holonômica cujo par associado (v, V) satisfaz as equações em (2.1), em que H é a curvatura média de f. Assim, $f|_U$ satisfaz as hipóteses da Proposição 2.1 e, portanto, a conclusão do Corolário 2.2, isto é, $H = 0$. □

Demonstração do Teorema B: Dado $x \in M^3$, existe um subconjunto aberto $U \subset M^3$ contendo x tal que $f|_U : U \to \mathbb{Q}^4(c)$ é uma hipersuperfície holonômica com par associado

(v, V). Como $c \neq 0$, segue do Lema 2.6 que $v_1 = v_3$ em U. Assim, $V_2 = 0$ em U e, portanto, $\lambda_2 = 0$ em U. Por analiticidade, λ_2 é identicamente zero em M^3, ou seja, f tem uma curvatura principal identicamente nula. A conclusão do teorema segue portanto da Proposição 1.3. □

2.3 Hipersuperfícies conformemente euclidianas mínimas com três curvaturas principais distintas em $\mathbb{R}^4$

Para a demonstração do Teorema C precisamos obter mais informações a respeito do sistema (2.5). Primeiro, vamos reescrever a Proposição 2.1, com $H = 0 = c$, e estabelecer uma recíproca.

Proposição 2.2. *Seja $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície holonômica cujo par associado (v, V) satisfaz as equações*

$$v_2^2 = v_1^2 + v_3^2 \tag{2.43}$$

e

$$V_1 = -\frac{\lambda}{3}\left(\frac{v_2}{v_3} + \frac{v_3}{v_2}\right), \quad V_2 = -\frac{\lambda}{3}\left(\frac{v_1}{v_3} - \frac{v_3}{v_1}\right), \quad V_3 = \frac{\lambda}{3}\left(\frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1}\right), \quad \lambda = \pm 1. \tag{2.44}$$

Seja

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\frac{1}{v_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}, \frac{1}{v_3}\frac{\partial v_3}{\partial u_2}, \frac{1}{v_1}\frac{\partial v_1}{\partial u_3}\right). \tag{2.45}$$

Então, $\phi = (v_1, v_2, v_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ satisfaz o seguinte sistema de EDP's:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial u_1} = \left(\dfrac{v_1}{v_2^4}(v_2^4 + v_2^2 v_3^2 + v_3^4)\alpha_1, v_2\alpha_1, \dfrac{v_3^5}{v_2^4}\alpha_1, \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u_1}, 2\dfrac{v_1^2}{v_2^2}\alpha_1\alpha_2, 2\dfrac{v_3^2}{v_2^4}(4v_3^2 + v_1^2)\alpha_1\alpha_3\right), \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial u_2} = \left(\dfrac{v_1^5}{v_3^4}\alpha_2, \dfrac{v_2}{v_3^4}(v_1^4 - v_1^2 v_3^2 + v_3^4)\alpha_2, v_3\alpha_2, 2\dfrac{v_1^2}{v_3^4}(4v_1^2 - v_2^2)\alpha_1\alpha_2, \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial u_2}, 2\dfrac{v_2^2}{v_3^2}\alpha_2\alpha_3\right), \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial u_3} = \left(v_1\alpha_3, \dfrac{v_2^5}{v_1^4}\alpha_3, \dfrac{v_3}{v_1^4}(v_1^4 + v_1^2 v_2^2 + v_2^4)\alpha_3, -2\dfrac{v_3^2}{v_1^2}\alpha_1\alpha_3, 2\dfrac{v_2^2}{v_1^4}(4v_2^2 - v_3^2)\alpha_2\alpha_3, \dfrac{\partial \alpha_3}{\partial u_3}\right), \end{cases} \tag{2.46}$$

em que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_1} &= \frac{1}{v_2^4}(3v_2^4 - v_3^4)\alpha_1^2 - \frac{v_1^6}{v_3^8}(3v_1^2 - 2v_3^2)\alpha_2^2 \\
&+ \frac{v_2^4}{v_1^2 v_3^4}(3v_1^2 + 2v_2^2)\alpha_3^2 + \frac{1}{9v_3^4}(5v_1^4 + 2v_2^2 v_3^2), \\
\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_2} &= \frac{-v_3^4}{v_1^4 v_2^2}(3v_2^2 + 2v_3^2)\alpha_1^2 - \frac{1}{v_3^4}(v_1^4 - 3v_3^4)\alpha_2^2 \\
&- \frac{v_2^6}{v_1^8}(2v_1^2 + 3v_2^2)\alpha_3^2 - \frac{1}{9v_1^4}(5v_2^4 - 2v_1^2 v_3^2), \\
\frac{\partial\alpha_3}{\partial u_3} &= \frac{v_3^6}{v_2^8}(2v_2^2 + 3v_3^2)\alpha_1^2 + \frac{v_1^4}{v_2^4 v_3^2}(2v_1^2 - 3v_3^2)\alpha_2^2 \\
&+ \frac{1}{v_1^4}(3v_1^4 - v_2^4)\alpha_3^2 + \frac{1}{9v_2^4}(5v_3^4 + 2v_1^2 v_2^2).
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

Além disso, a seguinte equação algébrica é satisfeita:

$$
\begin{aligned}
&9v_1^2 v_3^8(v_2^2 + v_3^2)\alpha_1^2 + 9v_1^8 v_2^2(v_1^2 - v_3^2)\alpha_2^2 - 9v_2^8 v_3^2(v_1^2 + v_2^2)\alpha_3^2 \\
&\quad - v_1^2 v_2^2 v_3^2(2v_1^2 v_2^4 - 2v_1^2 v_3^4 - 2v_2^2 v_3^4 - v_1^2 v_2^2 v_3^2) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

Reciprocamente, se $\phi_U = (v_1, v_2, v_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $v_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ *é uma solução do sistema* (2.46) *satisfazendo* (2.43) *em um aberto simplesmente conexo* $U \subset \mathbb{R}^3$, *então a equação* (2.48) *é satisfeita e a tripla* (v, h, V), *em que* $v = (v_1, v_2, v_3)$, $V = (V_1, V_2, V_3)$ *e* $h = (h_{ij})$, *com* V_i *definido por* (2.44) *e* $h_{ij} = \frac{1}{v_i}\frac{\partial v_j}{\partial u_i}$, $1 \geq i \neq j \geq 3$, *é solução do sistema* (1.3) *e, portanto, dá origem a uma hipersuperfície holonômica mínima* $f : U \to \mathbb{R}^4$ *cujo par associado* (v, V) *satisfaz* (1.6).

Demonstração. O sistema (2.46) segue do sistema (2.5) fazendo $H = 0 = c$. As equações em (2.7), com $H = 0 = c$, implicam que

$$
F\alpha_1 = 0, \qquad F\alpha_2 = 0 \qquad \text{e} \qquad F\alpha_3 = 0. \tag{2.49}
$$

Suponha, por absurdo, que F não se anule em algum ponto de M^3. Como F é contínua, existe um subconjunto aberto $U \subset M^3$ tal que $F(p) \neq 0$ para todo $p \in U$. Assim, segue das equações em (2.49) que α_1, α_2 e α_3 são identicamente nulas no aberto U e, portanto, as equações em (2.47) implicam que

$$\begin{cases} 5v_1^4 + 2v_2^2v_3^2 = 0, \\ 5v_2^4 - 2v_1^2v_3^2 = 0, \\ 5v_3^4 + 2v_1^2v_2^2 = 0. \end{cases} \tag{2.50}$$

Subtraindo as duas primeiras equações de (2.50) e usando a equação (2.43), obtemos a seguinte contradição:

$$0 = -3v_3^2(v_1^2 + v_2^2) \neq 0.$$

Logo, $F(p) = 0$, para todo $p \in M^3$ e, portanto, a equação (2.48) é satisfeita.

Reciprocamente, seja $\phi_U = (v_1, v_2, v_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $v_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ uma solução do sistema (2.46) satisfazendo (2.43) em um aberto simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^3$. Seja $V = (V_1, V_2, V_3)$ em que V_i é definido em (2.44) e $h = (h_{ij})$, $h_{ij} = \frac{1}{v_i}\frac{\partial v_j}{\partial u_i}$, $1 \geq i \neq j \geq 3$. Vamos verificar que (v, h, V) satisfaz o sistema (1.3). Note que (i) no sistema (1.3) segue da definição dos h_{ij}. A verificação das demais equações segue uma linha de raciocínio análoga a um dos três casos a seguir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial u_2} - h_{21}V_2 &= \frac{\lambda}{3}\left[-\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{v_2}{v_3} + \frac{v_3}{v_2}\right) + \left(\frac{v_1}{v_3} - \frac{v_3}{v_1}\right)h_{21}\right] \\ &= \frac{\lambda v_1^2}{3v_2v_3^5}(v_1^4 - v_1^2v_2^2 + v_2^2v_3^2 - v_3^4)\alpha_2 \\ &= \frac{\lambda v_1^2}{3v_2v_3^5}(v_1^2 - v_3^2)(v_1^2 - v_2^2 + v_3^2)\alpha_2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{12}}{\partial u_3} - h_{13}h_{32} &= \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{1}{v_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\right) - \left(\frac{1}{v_1}\frac{\partial v_3}{\partial u_1}\right)\left(\frac{1}{v_3}\frac{\partial v_2}{\partial u_3}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{1}{v_1}v_2\alpha_1\right) - \left(\frac{1}{v_1}\frac{v_3^5}{v_2^4}\alpha_1\right)\left(\frac{1}{v_3}\frac{v_2^5}{v_1^4}\alpha_3\right) \\ &= -\frac{v_2}{v_1^5}(v_1^4 - v_2^4 + v_3^4 + 2v_1^2v_3^2)\alpha_1\alpha_3 \\ &= -\frac{v_2}{v_1^5}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(v_1^2 - v_2^2 + v_3^2)\alpha_1\alpha_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial h_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial h_{21}}{\partial u_2} + h_{31}h_{32} + V_1V_2 \\
= \; & \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{v_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{v_2}\frac{\partial v_1}{\partial u_2}\right) - \left(\frac{1}{v_3}\frac{\partial v_1}{\partial u_3}\right)\left(\frac{1}{v_3}\frac{\partial v_2}{\partial u_3}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{v_2}{v_3} + \frac{v_3}{v_2}\right)\left(\frac{v_1}{v_3} - \frac{v_3}{v_1}\right) \\
= \; & \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{v_2\alpha_1}{v_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{v_1^5\alpha_2}{v_2v_3^4}\right) - \left(\frac{v_2^5}{v_1^3v_3^2}\alpha_3^2\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{v_2}{v_3} + \frac{v_3}{v_2}\right)\left(\frac{v_1}{v_3} - \frac{v_3}{v_1}\right) \\
= \; & \frac{1}{9v_1^3v_2^3v_3^8}\Bigg[9v_1^2v_2^4v_3^8\frac{\partial \alpha_1}{\partial u_1} + 9v_1^8v_2^2v_3^4\frac{\partial \alpha_2}{\partial u_2} - 9v_1^2v_3^{10}(v_2^2+v_3^2)\alpha_1^2 \\
& + 9v_1^8v_2^2(4v_2^2+v_3^2)(v_1^2-v_3^2)\alpha_2^2 + \; 9v_2^8v_3^6\alpha_3^2 - v_1^2v_2^2v_3^6(2v_3^4 - v_1^2v_2^2)\Bigg] \\
= \; & \frac{(v_1^2 - v_2^2 + v_3^2)}{9v_1^3v_2^3v_3^8}\Bigg[v_1^2v_2^2v_3^4(5v_1^2v_2^2 + 2v_1^2v_3^2 - 2v_2^2v_3^2 - v_3^4) - 9v_1^2v_3^8(3v_2^2+2v_3^2)\alpha_1^2 \\
& + 9v_1^8v_2^2(3v_1^2 - 2v_3^2)\alpha_2^2 + 9v_2^8v_3^4\alpha_3^2\Bigg] \\
= \; & 0.
\end{aligned}
$$

Assim, (v, h, V) satisfaz o sistema (1.3) e, pela Proposição 1.1, determina uma hipersuperfície holonômica $f : U \to \mathbb{R}^4$ cuja primeira e segunda formas fundamentais são dadas por (1.2). Desde que o par (v, V) satisfaz as equações (2.43) e (2.44), é imediato verificar que f é mínima e que o par (v, V) satisfaz as equações em (1.6). □

As duas proposições seguintes mostram que de fato o sistema (2.46) admite soluções $\phi = (v_1, v_2, v_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ satisfazendo (2.43) e (2.48). Mais que isso, tais soluções estão em correspondência com as folhas de uma folheação de codimensão 1 de uma dada variedade algébrica $\widetilde{\mathcal{M}}^4$. Portanto, hipersuperfícies conformemente euclidianas mínimas do $\mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas existem e estão em correspondência com folhas dessa folheação, a qual construiremos a seguir.

Proposição 2.3. *Sejam $G, F : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ funções definidas por $G(x,y) = x_2^2 - x_1^2 - x_3^2$ e*

$$
\begin{aligned}
F(x,y) = \; & 9x_1^2x_3^8(x_2^2+x_3^2)y_1^2 + 9x_1^8x_2^2(x_1^2-x_3^2)y_2^2 - 9x_2^8x_3^2(x_1^2+x_2^2)y_3^2 \\
& - x_1^2x_2^2x_3^2(2x_1^2x_2^4 - 2x_1^2x_3^4 - 2x_2^2x_3^4 - x_1^2x_2^2x_3^2).
\end{aligned}
$$

Sejam $\mathcal{M}^4 := F^{-1}(0) \cap G^{-1}(0) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^6; x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0 \text{ e } y \neq 0\}$ *e* $\ell_\pm$ *as retas*

$$\ell_\pm = \{(x,y) \in \mathcal{M}^4; x = (s, \sqrt{2}s, s), s \in \mathbb{R}, \text{ e } y = (0, \pm 1, 0)\} \subset \mathcal{M}^4. \tag{2.51}$$

Então $\widetilde{\mathcal{M}}^4 = \mathcal{M}^4 \smallsetminus (\ell_- \cup \ell_+)$ *é uma subvariedade regular do* $\mathbb{R}^6$ *e* $\ell_- \cup \ell_+$ *é o conjunto singular de* $\mathcal{M}^4$.

Demonstração. Se $p \in \mathcal{M}^4$, então os campos gradientes das funções G e F são, respectivamente, dados por

$$\nabla G(p) = \big(-2x_1, 2x_2, -2x_3, 0, 0, 0\big)$$

e

$$\nabla F(p) = \Big(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3}, 18x_1^2x_3^8(x_2^2 + x_3^2)y_1, 18x_1^8x_2^2(x_1^2 - x_3^2)y_2, -18x_2^8(x_1^2 + x_2^2)x_3^2y_3\Big),$$

em que

$$x_1\frac{\partial F}{\partial x_1}(p) = 18x_1^8x_2^2(4x_1^2 - 3x_3^2)y_2^2 + 18x_2^{10}x_3^2y_3^2 - 2x_1^4x_2^2x_3^2(2x_2^4 - x_2^2x_3^2 - 2x_3^4),$$

$$x_2\frac{\partial F}{\partial x_2}(p) = -18x_1^2x_3^{10}y_1^2 - 18x_2^8x_3^2(3x_1^2 + 4x_2^2)y_3^2 - 2x_1^2x_2^4x_3^2(4x_1^2x_2^2 - x_1^2x_3^2 - 2x_3^4)$$

e

$$x_3\frac{\partial F}{\partial x_3}(p) = 18x_1^2x_3^8(3x_2^2 + 4x_3^2)y_1^2 - 18x_1^{10}x_2^2y_2^2 + 2x_1^2x_2^2x_3^4(x_1^2x_2^2 + 4x_1^2x_3^2 + 4x_2^2x_3^2).$$

A conclusão de que $\widetilde{\mathcal{M}}^4$ é uma subvariedade regular do $\mathbb{R}^6$ e $\ell_- \cup \ell_+$ é o conjunto singular de $\mathcal{M}^4$ é consequência dos dois fatos seguintes.

Fato 1: $\nabla F(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathcal{M}^4$.

Prova: Se $\nabla F(p) = 0$ em $p = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{M}^4$, então as igualdades $\frac{\partial F}{\partial y_1}(p) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y_2}(p) = 0$ implicam que $y_1 = y_3 = 0$. Assim, $y_2 \neq 0$ e segue de $\frac{\partial F}{\partial y_3}(p) = 0$ que $x_3 = x_1$. Portanto, $x_2 = \sqrt{2}x_1$ e então $0 = \frac{\partial F}{\partial x_2}(p) = -20\sqrt{2}x_1^{11}$, o que contradiz o fato de ser $x_1 > 0$. *cqd.*

Fato 2: O subconjunto $\{p \in \mathcal{M}^4; \nabla F(p) = a\nabla G(p),\ a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}\}$ coincide com $\ell_- \cup \ell_+$.

Prova: Suponha que, para algum $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\nabla F(p) = a \nabla G(p). \tag{2.52}$$

A igualdade vetorial (2.52) é composta por seis equações escalares, das quais as três últimas implicam em $y_1 = y_3 = 0$ e $x_3 = x_1$. Desde que $x_2^2 = x_1^2 + x_3^2$, obtemos que $x_2 = \sqrt{2}x_1$. Usando essas informações e a segunda equação de (2.52), concluímos que $a = -10x_1^{10}$. Finalmente, a primeira equação de (2.52) implica que $y_2^2 = 1$. *cqd.* □

A proposição a seguir mostra que os campos X_1, X_2 e X_3, definidos abaixo, determinam, em particular, uma distribuição involutiva de dimensão três em $\widetilde{\mathcal{M}}^4$.

Proposição 2.4. *Sejam $X_1, X_2, X_3 : \mathcal{M}^4 \to \mathbb{R}^6$ definidos por*

$$X_1(p) = \frac{1}{x_2^4}\Big((x_2^4 + x_2^2x_3^2 + x_3^4)x_1y_1, x_2^5y_1, x_3^5y_1, x_2^4A_1(p), 2x_1^2x_2^2y_1y_2, (8x_3^2 + 2x_1^2)x_3^2y_1y_3\Big),$$

$$X_2(p) = \frac{1}{x_3^4}\Big(x_1^5y_2, (x_1^4 - x_1^2x_3^2 + x_3^4)x_2y_2, x_3^5y_2, (8x_1^2 - 2x_2^2)x_1^2y_1y_2, x_3^4A_2(p), 2x_2^2x_3^2y_2y_3\Big),$$

$$X_3(p) = \frac{1}{x_1^4}\Big(x_1^5y_3, x_2^5y_3, (x_1^4 + x_1^2x_2^2 + x_2^4)x_3y_3, -2x_1^2x_3^2y_1y_3, (8x_2^2 - 2x_3^2)x_2^2y_2y_3, x_1^4A_3(p)\Big),$$

em que $p = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{M}^4$ e

$$A_1(p) = \frac{1}{x_2^4}(3x_2^4 - x_3^4)y_1^2 - \frac{x_1^6}{x_3^8}(3x_1^2 - 2x_3^2)y_2^2 + \frac{x_2^4}{x_1^2x_3^4}(3x_1^2 + 2x_2^2)y_3^2 + \frac{1}{9x_3^4}(5x_1^4 + 2x_2^2x_3^2),$$

$$A_2(p) = -\frac{x_3^4}{x_1^4x_2^2}(3x_2^2 + 2x_3^2)y_1^2 - \frac{1}{x_3^4}(x_1^4 - 3x_3^4)y_2^2 - \frac{x_2^6}{x_1^8}(2x_1^2 + 3x_2^2)y_3^2 - \frac{1}{9x_1^4}(5x_2^4 - 2x_1^2x_3^2),$$

$$A_3(p) = \frac{x_3^6}{x_2^8}(2x_2^2 + 3x_3^2)y_1^2 + \frac{x_1^4}{x_2^4x_3^2}(2x_1^2 - 3x_3^2)y_2^2 + \frac{1}{x_1^4}(3x_1^4 - x_2^4)y_3^2 + \frac{1}{9x_2^4}(5x_3^4 + 2x_1^2x_2^2).$$

Então, as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) $\{p \in \mathcal{M}^4;\ X_1(p) = 0\} = \ell_- \cup \ell_+ = \{p \in \mathcal{M}^4;\ X_3(p) = 0\}$ *e* $X_2(p) \neq 0,\ \forall\, p \in \mathcal{M}^4$;

(ii) Os vetores $X_1(p), X_2(p), X_3(p)$ são linearmente independentes em cada $p \in \widetilde{\mathcal{M}}^4$;

(iii) Os campos de vetores X_1, X_2, X_3 são tangentes a $\mathcal{M}^4$;

(iv) As curvas $\gamma_\pm : \mathbb{R} \to \mathcal{M}^4$, dadas por $\gamma_\pm(t) = (e^t, \sqrt{2}e^t, e^t, 0, \pm 1, 0)$, são curvas integrais do campo X_2 com $\gamma_\pm(\mathbb{R}) = \ell_\pm$;

(v) $[X_i, X_j] = 0$ em $\widetilde{\mathcal{M}}^4$ para todo $1 \leq i \neq j \leq 3$.

Demonstração. (i) Primeiro, note que $X_2(p) = 0$ se, e somente se, $y_2 = 0$ e $A_2(p) = 0$. Desde que $A_2(p) < 0$, sempre que $y_2 = 0$, concluímos que $X_2(p) \neq 0$, para todo $p \in \mathcal{M}^4$.

Agora, observe que $X_1(p) = 0$ se, e somente se, $y_1 = 0$ e $A_1(p) = 0$. Assim, se $p = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{M}^4$ é tal que $X_1(p) = 0$, então, desde que $F(p) = 0$, $G(p) = 0$, $A_1(p) = 0$ e $y_1 = 0$, temos que

$$\begin{cases} ay_2^2 + by_3^2 = c, \\ dy_2^2 + ey_3^2 = f, \\ x_2^2 = x_1^2 + x_3^2, \end{cases} \tag{2.53}$$

em que

$$a = 9x_1^8x_2^4(3x_1^2 - 2x_3^2), \qquad d = 9x_1^8x_2^2(x_1^2 - x_3^2),$$

$$b = -9x_2^8x_3^4(3x_1^2 + 2x_2^2), \qquad e = -9x_2^8x_3^2(x_1^2 + x_2^2),$$

$$c = x_1^2x_2^4x_3^4(5x_1^4 + 2x_2^2x_3^2), \qquad f = x_1^2x_2^2x_3^2(2x_1^2x_2^4 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^4 - x_1^2x_2^2x_3^2).$$

Desde que

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = -486x_1^{14}x_2^{10}x_3^2 \neq 0, \qquad det\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} = 54x_1^{10}x_2^{10}x_3^2(x_1^2 - x_3^2)^2$$

e

$$det\begin{pmatrix} c & b \\ f & e \end{pmatrix} = -54x_1^2x_2^{10}x_3^{10}(x_1^2 + x_2^2)^2,$$

o sistema (2.53) tem uma única solução dada por

$$y_2^2 = \frac{x_3^8(x_1^2 + x_2^2)^2}{9x_1^{12}} \qquad \text{e} \qquad y_3^2 = -\frac{(x_1^2 - x_3^2)^2}{9x_1^4}.$$

Assim, $y_3 = 0$ e, portanto, $x_1 = x_3$ e $y_2 = \pm 1$. Isso mostra que o subconjunto $\{p \in \mathcal{M}^4;\ X_1(p) = 0\}$ coincide com $\ell_- \cup \ell_+$.

Similarmente, $X_3(p) = 0$ se, e somente se, $y_3 = 0$ e $A_3(p) = 0$, ou seja, se, e somente se, $p = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{M}^4$ satisfaz

$$\begin{cases} ay_1^2 + by_2^2 = c, \\ dy_1^2 + ey_2^2 = f, \\ x_2^2 = x_1^2 + x_3^2, \end{cases} \tag{2.54}$$

em que

$$a = 9x_1^4x_3^8(2x_2^2 + 3x_3^2), \qquad d = 9x_1^2x_3^8(x_2^2 + x_3^2),$$

$$b = 9x_1^8x_2^4(2x_1^2 - 3x_3^2), \qquad e = 9x_1^8x_2^2(x_1^2 - x_3^2),$$

$$c = -x_1^4x_2^4x_3^2(5x_3^4 + 2x_1^2x_2^2), \qquad f = x_1^2x_2^2x_3^2(2x_1^2x_2^4 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^4 - x_1^2x_2^2x_3^2).$$

Desde que

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = 486x_1^{10}x_2^2x_3^{14} \neq 0, \qquad det\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} = 54x_1^{10}x_2^2x_3^{10}(x_2^2 + x_3^2)^2$$

e

$$det\begin{pmatrix} c & b \\ f & e \end{pmatrix} = -54x_1^{10}x_2^{10}x_3^2(x_1^2 - x_3^2)^2,$$

o sistema (2.53) tem uma única solução dada por

$$y_1^2 = -\frac{x_2^8(x_1^2 - x_3^2)^2}{9x_3^{12}} \qquad \text{e} \qquad y_2^2 = \frac{(x_2^2 + x_3^2)^2}{9x_3^4}.$$

Assim, $y_1 = 0$, $x_1 = x_3$ e $y_2 = \pm 1$. Isso mostra que o subconjunto $\{p \in \mathcal{M}^4;\ X_3(p) = 0\}$ coincide com $\ell_- \cup \ell_+$, e a prova de (i) está concluída.

(ii) Primeiro, note que $X_1(p), X_2(p), X_3(p)$ são dois a dois linearmente independentes. Isso implica que se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\lambda_1 X_1(p) + \lambda_2 X_2(p) + \lambda_3 X_3(p) = 0, \tag{2.55}$$

então ou $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ou $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_3 \neq 0$. Mostraremos que a última possibilidade não pode ocorrer. Suponha que $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_3 \neq 0$. A equação(2.55) implica no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x_2^2x_3^4y_1\lambda_1 + x_1^6y_2\lambda_2 = 0, \\ x_1^4x_3^2y_2\lambda_2 + x_2^6y_3\lambda_3 = 0, \\ \left[A_1(p) - \dfrac{2}{x_2^4}(3x_2^4 + x_3^4 + 2x_2^2x_3^2)y_1^2\right]\lambda_1 = 0, \\ \left[A_2(p) - \dfrac{2}{x_3^4}(x_1^4 + 3x_3^4 - 2x_1^2x_3^2)y_2^2\right]\lambda_2 = 0, \\ \left[A_3(p) - \dfrac{2}{x_1^4}(3x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2)y_3^2\right]\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Se mostrarmos que o sistema

$$\begin{cases} A_1(p) - \dfrac{2}{x_2^4}(3x_2^4 + x_3^4 + 2x_2^2x_3^2)y_1^2 = 0, \\ A_2(p) - \dfrac{2}{x_3^4}(x_1^4 + 3x_3^4 - 2x_1^2x_3^2)y_2^2 = 0, \\ A_3(p) - \dfrac{2}{x_1^4}(3x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2)y_3^2 = 0, \end{cases} \tag{2.56}$$

não tem solução em M^4, estaremos provando que $\lambda_i = 0$, para algum $i \in \{1, 2, 3\}$, o que contradirá a hipótese. O sistema de equações (2.56) pode ser escrito como um sistema linear nas variáveis y_1^2, y_2^2 e y_3^2, como segue:

$$\begin{cases} a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + a_3y_3^2 = a_4, \\ b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + b_3y_3^2 = b_4, \\ c_1y_1^2 + c_2y_2^2 + c_3y_3^2 = c_4, \end{cases}$$

em que

$$\begin{aligned}
&a_1 = 9x_1^2x_3^8(3x_1^4 + 10x_2^2x_3^2), && b_1 = 9x_1^4x_3^8(3x_2^2 + 2x_3^2), && c_1 = 9x_1^4x_3^8(2x_2^2 + 3x_3^2), \\
&a_2 = 9x_1^8x_2^4(3x_1^2 - 2x_3^2), && b_2 = 9x_1^8x_2^2(3x_2^4 - 10x_1^2x_3^2), && c_2 = 9x_1^8x_2^4(2x_1^2 - 3x_3^2), \\
&a_3 = -9x_2^8x_3^4(3x_1^2 + 2x_2^2), && b_3 = 9x_2^8x_3^4(2x_1^2 + 3x_2^2), && c_3 = -9x_2^8x_3^2(3x_3^4 + 10x_1^2x_2^2), \\
&a_4 = x_1^2x_2^4x_3^4(5x_1^4 + 2x_2^2x_3^2), && b_4 = -x_1^4x_2^2x_3^4(5x_2^4 - 2x_1^2x_3^2), && c_4 = -x_1^4x_2^4x_3^2(5x_3^4 + 2x_1^2x_2^2).
\end{aligned}$$

Desde que

$$det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = 656100x_1^{12}x_2^{12}x_3^{12}(x_3^4+x_1^2x_2^2)(x_1^2-x_2^2+x_3^2)=0$$

e

$$det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{pmatrix} = -29160x_1^{14}x_3^{18}x_2^{6}(x_3^4+x_1^2x_2^2)\neq 0,$$

tal sistema não tem soluções. Com isso, provamos (ii).

(iii) Para $p\in\mathcal{M}^4$, temos que

$$\langle\nabla F(p),X_1(p)\rangle = \frac{10y_1}{x_2^4}(x_2^4+x_3^4)F(p), \qquad \langle\nabla G(p),X_1(p)\rangle = \frac{2y_1}{x_2^4}(x_2^4+x_2^2x_3^2+x_3^4)G(p),$$

$$\langle\nabla F(p),X_2(p)\rangle = \frac{10y_2}{x_3^4}(x_1^4+x_3^4)F(p), \qquad \langle\nabla G(p),X_2(p)\rangle = \frac{2y_2}{x_3^4}(x_1^4-x_1^2x_3^2+x_3^4)G(p),$$

$$\langle\nabla F(p),X_3(p)\rangle = \frac{10y_3}{x_1^4}(x_1^4+x_2^4)F(p), \qquad \langle\nabla G(p),X_3(p)\rangle = \frac{2y_3}{x_1^4}(x_1^4+x_1^2x_2^2+x_2^4)G(p).$$

Desde que $F(p)=G(p)=0$, as expressões acima mostram que os campos X_1,X_2 e X_3 são tangentes a $\mathcal{M}^4$.

(iv) É imediato verificar que $\gamma'_\pm(t)=X_2(\gamma_\pm(t))$.

(v) Para mostrar que $[X_i,X_j](p)=0$, para todo $i,j=1,2,3$ e $p\in\widetilde{\mathcal{M}}^4$, basta observar que $F(p)=G(p)=0$ e, portanto,

$$\begin{aligned}[X_1,X_2](p) \;=\; &\bigg(\frac{2x_1^3(3x_1^2+5x_3^2)y_1y_2}{x_2^4x_3^2}G(p),\frac{2x_1^2y_1y_2}{x_2x_3^2}G(p),\frac{4x_1^2x_3y_1y_2}{x_2^4}G(p),\\ &\frac{10y_2}{9x_2^2x_3^{10}}F(p),\frac{10y_1}{9x_1^6x_2^4x_3^2}F(p),\frac{8(3x_2^4-2x_3^4)y_1y_2y_3}{x_2^4x_3^2}G(p)\bigg)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[X_1,X_3](p) \;=\; -&\bigg(\frac{2x_3^2y_1y_3}{x_1x_2^2}G(p),\frac{4x_2x_3^2y_1y_3}{x_1^4}G(p),\frac{2x_3^3(5x_1^2+2x_3^2)y_1y_3}{x_1^4x_2^2}G(p),\\ &\frac{10y_3}{9x_1^4x_2^2x_3^6}F(p),-\frac{8(3x_1^4-2x_2^4)y_1y_2y_3}{x_1^4x_2^2}G(p),\frac{10y_1}{9x_1^2x_2^{10}}F(p)\bigg)=0\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
[X_2, X_3](p) \;=\; & \Bigg(-\frac{4x_1x_2^2y2y3}{x_3^4}G(p), -\frac{2(2x_1^2-3x_3^2)x_2^3y_2y_3}{x_1^2x_3^4}G(p), \frac{2x_2^2y_2y_3}{x_1^2x_3}G(p), \\
& -\frac{8(2x_1^4-3x_3^4)y_1y_2y_3}{x_1^2x_3^4}G(p), \frac{10y_3}{9x_1^{10}x_3^2}F(p), \frac{10y_2}{9x_1^2x_2^6x_3^4}F(p)\Bigg) = 0.
\end{aligned}
$$

□

A demonstração da proposição a seguir é obtida por um cálculo direto.

Proposição 2.5. *Valem as seguintes propriedades:*

(i) Para cada $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$, $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$, $1 \leq j \leq 3$, *a aplicação* $\Phi^\epsilon \colon \widetilde{\mathcal{M}}^4 \to \widetilde{\mathcal{M}}^4$ *definida por*

$$\Phi^\epsilon(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3, \epsilon_1 y_1, \epsilon_2 y_2, \epsilon_3 y_3), \tag{2.57}$$

satisfaz

$$\Phi^\epsilon_* X_j(p) = \epsilon_j X_j(\Phi^\epsilon(p))$$

para todo $p \in \widetilde{M}^4$.

(ii) A aplicação $\Psi \colon \widetilde{\mathcal{M}}^4 \to \widetilde{\mathcal{M}}^4$ *definida por*

$$\Psi(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = \left(x_3, x_2, x_1, \frac{x_2^4}{x_1^4}y_3, \frac{x_1^4}{x_3^4}y_2, \frac{x_3^4}{x_2^4}y_1\right) \tag{2.58}$$

satisfaz

$$\Psi_* X_1(p) = X_3(\Psi(p)), \quad \Psi_* X_2(p) = X_2(\Psi(p)) \quad e \quad \Psi_* X_3(p) = X_1(\Psi(p))$$

para todo $p \in \widetilde{\mathcal{M}}^4$.

(iii) As aplicações Ψ *e* Φ^ϵ, $\epsilon \in \{-1, 1\} \times \{-1, 1\} \times \{-1, 1\}$, *geram um grupo* G *de involuções de* $\widetilde{M}^4$ *isomorfo a* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *que preserva a distribuição* $\mathcal{D}$ *gerada pelos campos de vetores* X_1, X_2 *e* X_3, *definidos na Proposição* 2.4.

2.4 Demonstração do Teorema C

Mostramos na seção anterior que existe uma variedade algébrica $\mathcal{M}^4 \subset \mathbb{R}^6$, a qual contém um par de retas ℓ_- e ℓ_+, tal que $\widetilde{\mathcal{M}}^4 = \mathcal{M}^4 \smallsetminus (\ell_- \cup \ell_+)$ é uma subvariedade regular do $\mathbb{R}^6$ e $(\ell_- \cup \ell_+)$ é o conjunto singular de $\mathcal{M}^4$, ver Proposição 2.3. Mostramos, também, que existem uma distribuição involutiva $\mathcal{D}$ de codimensão 1 em $\widetilde{\mathcal{M}}^4$, ver Proposição 2.4, e um grupo finito G de involuções de $\widetilde{\mathcal{M}}^4$ isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ que preserva a distribuição $\mathcal{D}$, ver Proposição 2.5.

A conclusão da demostração do Teorema C será obtida a partir de uma série de lemas, os quais apresentamos a seguir.

Lema 2.7. *A cada folha σ de $\mathcal{D}$ estão associadas uma aplicação de recobrimento $\phi_\sigma : U_\sigma \to \sigma$, de um aberto simplesmente conexo $U_\sigma \subset \mathbb{R}^3$, e uma imersão mínima $f_\sigma : U_\sigma \to \mathbb{R}^4$, com três curvaturas principais distintas, cuja métrica induzida é conformemente euclidiana. O conjunto singular $(\ell_- \cup \ell_+)$ de $\mathcal{M}^4$ corresponde ao cone sobre um toro de Clifford em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$.*

Demonstração. Para todo $q \in \widetilde{\mathcal{M}}^4$ e para $1 \leq i \leq 3$ indique por $\tau_q^i : J_q^i \to \widetilde{\mathcal{M}}^4$ a curva integral maximal de X_i passando por q, isto é, $0 \in J_q^i$, $\tau_q^i(0) = q$, $(\tau_q^i)'(t) = X_i(\tau_q^i(t))$ para todo $t \in J_q^i$, e J_q^i é maximal com essa propriedade. Sejam

$$\mathcal{D}(X_i) = \{(t, q) \in \mathbb{R} \times \widetilde{\mathcal{M}}^4;\ t \in J_q^i\}$$

e $\varphi^i : \mathcal{D}(X_i) \to \widetilde{\mathcal{M}}^4$ o fluxo de X_i, dado por $\varphi^i(t, q) = \tau_q^i(t)$.

Dada uma folha σ de $\mathcal{D}$, fixe $p \in \sigma$ e defina $U_\sigma = U_\sigma(p)$ por

$$U_\sigma = \{(u_1, u_2, u_3);\ u_1 \in J_p^1,\ u_2 \in J^2_{\varphi^1(u_1,p)},\ u_3 \in J^3_{\varphi^2(u_2,\varphi^1(u_1,p))}\}$$

e $\phi_\sigma = \phi_\sigma^p$ por

$$\phi_\sigma(u_1, u_2, u_3) = \varphi^3(u_3, \varphi^2(u_2, \varphi^1(u_1, p))).$$

Então, $0 \in U_\sigma$, $\phi_\sigma(0) = p$ e, para todo $u \in U_\sigma$, temos que

$$\frac{\partial \phi_\sigma}{\partial u_i}(u) = X_i(\phi_\sigma(u)), \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Mostraremos que ϕ_σ é uma aplicação de recobrimento sobre σ. Dado $x \in \sigma$, seja $\tilde{B}_{2\epsilon}(0) \subset \mathbb{R}^3$ uma bola aberta de raio 2ϵ centrada na origem tal que $\phi_\sigma^x|_{\tilde{B}_{2\epsilon}(0)}$ é um difeomorfismo sobre $B_{2\epsilon}(x) = \phi_\sigma^x(\tilde{B}_{2\epsilon}(0))$. Observe que se $t = (t_1, t_2, t_3)$ e $s = (s_1, s_2, s_3)$, então

$$\phi_\sigma^p(t+s) = \varphi^3(t_3, (\varphi^2(t_2, \varphi^1(t_1, \phi_\sigma^p(s))))) = \phi_\sigma^{\phi_\sigma^p(s)}(t), \tag{2.59}$$

sempre que ambos os lados estiverem definidos. Assim, se $x = \phi_\sigma^p(s)$, $s = (s_1, s_2, s_3) \in U_\sigma$, então para todo $y = \phi_\sigma^x(t) \in B_{2\epsilon}(x)$, $t = (t_1, t_2, t_3) \in \tilde{B}_{2\epsilon}(0)$, temos que

$$y = \phi_\sigma^x(t) = \phi_\sigma^{\phi_\sigma^p(s)}(t) = \phi_\sigma^p(s+t).$$

Isso mostra que $B_{2\epsilon}(x) \subset \phi_\sigma^p(U_\sigma)$ se $x \in \phi_\sigma^p(U_\sigma)$ e, portanto, $\phi_\sigma^p(U_\sigma)$ é aberto em σ. Porém, desde que $y = \phi_\sigma^x(t)$ se, e somente se, $x = \phi_\sigma^y(-t)$, como segue de (2.59), o mesmo argumento mostra que $x \in \phi_\sigma^p(U_\sigma)$ se $y \in \phi_\sigma^p(U_\sigma)$ para algum $y \in B_{2\epsilon}(x)$ e, portanto, $\sigma \setminus \phi_\sigma^p(U_\sigma)$ é também aberto. Segue disso que ϕ_σ^p é sobrejetora, ou seja, $\phi_\sigma^p(U_\sigma) = \sigma$.

Agora, para cada $x \in \sigma$, escreva

$$(\phi_\sigma^p)^{-1}(x) = \cup_{\alpha \in A} \tilde{x}_\alpha$$

e, para cada $\alpha \in A$, seja $\tilde{B}_{2\epsilon}(\tilde{x}_\alpha)$ a bola de raio 2ϵ centrada em $\tilde{x}_\alpha$. Defina uma aplicação $\psi_\alpha \colon B_{2\epsilon}(x) \to \tilde{B}_{2\epsilon}(\tilde{x}_\alpha)$ por

$$\psi_\alpha(y) = \tilde{x}_\alpha + (\phi_\sigma^x)^{-1}(y).$$

Por (2.59) obtemos que

$$\begin{aligned}
\phi_\sigma^p(\psi_\alpha(y)) &= \phi_\sigma^p(\tilde{x}_\alpha + (\phi_\sigma^x)^{-1}(y)) \\
&= \phi_\sigma^{\phi_\sigma^p(\tilde{x}_\alpha)}((\phi_\sigma^x)^{-1}(y)) \\
&= \phi_\sigma^x((\phi_\sigma^x)^{-1}(y)) \\
&= y,
\end{aligned}$$

para todo $y \in B_{2\epsilon}(x)$. Assim, ϕ_σ^p é um difeomorfismo de $\tilde{B}_{2\epsilon}(\tilde{x}_\alpha)$ sobre $B_{2\epsilon}(x)$ sendo ψ_α sua inversa. Em particular, isso implica que $\tilde{B}_\epsilon(\tilde{x}_\alpha)$ e $\tilde{B}_\epsilon(\tilde{x}_\beta)$ são disjuntas se α e β

são índices distintos em A. Finalmente, resta verificar que se $\tilde{y} \in (\phi_\sigma^p)^{-1}(B_\epsilon(x))$, então $\tilde{y} \in \tilde{B}_\epsilon(\tilde{x}_\alpha)$ para algum $\alpha \in A$. Isso segue de

$$\phi_\sigma^p(\tilde{y} - (\phi_\sigma^x)^{-1}(\phi_\sigma^p(\tilde{y}))) = \phi_\sigma^{\phi_\sigma^p(\tilde{y})}(-(\phi_\sigma^x)^{-1}(\phi_\sigma^p(\tilde{y}))) = x.$$

Para a última igualdade observe que, por (2.59), para quaisquer $x, y \in \sigma$ temos que $\phi_\sigma^x(t) = y$ se, e somente se, $\phi_\sigma^y(-t) = x$. Assim, $\phi_\sigma : U_\sigma \to \sigma$ é uma aplicação de recobrimento.

Escrevendo $\phi_\sigma = (v_1, v_2, v_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, tem-se que ϕ_σ é uma solução do sistema (2.46) e satisfaz (2.43). Pela Proposição 2.2, definindo $h_{ij} = \frac{1}{v_i}\frac{\partial v_j}{\partial u_i}$, $1 \geq i \neq j \geq 3$, e V_1, V_2, V_3 pelas equações em (2.44), a tripla (v, h, V), em que $v = (v_1, v_2, v_3)$, $V = (V_1, V_2, V_3)$ e $h = (h_{ij})$, satisfaz o sistema (1.3) e, portanto, determina uma hipersuperfície conformemente euclidiana mínima $f_\sigma : U_\sigma \to \mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas, pela Proposição 2.2.

Resta mostrar que o conjunto singular $(\ell_- \cup \ell_+)$ de $\mathcal{M}^4$ corresponde ao cone sobre um toro de Clifford em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$. Para isso, observe que a aplicação $\phi_+ : \mathbb{R}^3 \to \ell_+$, definida por $\phi_+(u_1, u_2, u_3) = (e^{u_2}, \sqrt{2}e^{u_2}, e^{u_2}, 0, 1, 0)$, é uma solução do sistema (2.46) e satisfaz (2.43), donde determina uma hipersuperfície conformemente euclidiana mínima $f_+ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas, com uma curvatura principal identicamente zero. Pela Proposição 1.3, $f_+(\mathbb{R}^3)$ é um cone sobre um toro de Clifford em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$. $\square$

Lema 2.8. *Se σ e $\tilde{\sigma}$ são folhas distintas de $\mathcal{D}$, então f_σ é congruente a $f_{\tilde{\sigma}}$ se, e somente se, existem um difeomorfismo $\psi : U_\sigma \to U_{\tilde{\sigma}}$ e $\Theta \in G$ tais que $\phi_{\tilde{\sigma}} \circ \psi = \Theta \circ \phi_\sigma$. Em particular, $\tilde{\sigma} = \Theta(\sigma)$.*

Demonstração. Dadas duas folhas distintas σ e $\tilde{\sigma}$ da distribuição $\mathcal{D}$, as correspondentes imersões f_σ e $f_{\tilde{\sigma}}$, dadas pelo Lema 2.7, são congruentes se existe um difeomorfismo $\psi \colon U_\sigma \to U_{\tilde{\sigma}}$ tal que

$$\psi^* I_{\tilde{\sigma}} = I_\sigma \quad \text{e} \quad \psi^* I\!I_{\tilde{\sigma}} = I\!I_\sigma, \tag{2.60}$$

em que I_σ e $I\!I_\sigma$ são a primeira e segunda formas fundamentais de f_σ, respectivamente, e $I_{\tilde\sigma}$, $I\!I_{\tilde\sigma}$ aquelas de $f_{\tilde\sigma}$. Segue da Proposição 1.2 que, a menos de translações, ou ψ coincide com a aplicação dada por

$$\psi_\epsilon(u_1,u_2,u_3)=(\epsilon_1u_1,\epsilon_2u_2,\epsilon_3u_3),$$

para algum $\epsilon=(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$, com $\epsilon_i\in\{-1,1\}$, $1\le i\le 3$, ou ψ é a composição de uma tal aplicação com a aplicação dada por

$$\theta(u_1,u_2,u_3)=(u_3,u_2,u_1).$$

Agora, não é difícil verificar que existe $\Theta\in G$ tal que $\phi_{\tilde\sigma}\circ\psi=\Theta\circ\phi_\sigma$. De fato, indiquemos por $\phi_\sigma=(v_1,v_2,v_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ e $\phi_{\tilde\sigma}=(\tilde v_1,\tilde v_2,\tilde v_3,\tilde\alpha_1,\tilde\alpha_2,\tilde\alpha_3)$ as aplicações associadas a σ e $\tilde\sigma$, respectivamente, dadas pelo Lema 2.7. Se

$$\psi(u_1,u_2,u_3)=(\epsilon_1u_1,\epsilon_2u_2,\epsilon_3u_3),\quad \epsilon_i\in\{-1,1\},\ 1\le i\le 3,$$

então $v_i=\tilde v_i\circ\psi,\ i=1,2,3$ e, já que ϕ_σ e $\phi_{\tilde\sigma}$ são soluções do sistema (2.46), e portanto $\alpha_i=\epsilon_i\tilde\alpha_i\circ\psi$. Assim, $\phi_\sigma=\Phi^\epsilon\circ\phi_{\tilde\sigma}\circ\psi$, em que $\Phi^\epsilon:\widetilde{\mathcal{M}}^4\to\widetilde{\mathcal{M}}^4$, é definido como em (2.57). Fazendo $\Theta=\Phi^{-\epsilon}$, obtemos que $\phi_{\tilde\sigma}\circ\psi=\Theta\circ\phi_\sigma$, em particular $\tilde\sigma=\Theta(\sigma)$. Se

$$\psi(u_1,u_2,u_3)=(\epsilon_3u_3,\epsilon_2u_2,\epsilon_1u_1),\quad \epsilon_i\in\{-1,1\},\ 1\le i\le 3,$$

então $v_1=\tilde v_3\circ\psi$, $v_2=\tilde v_2\circ\psi$ e $v_3=\tilde v_1\circ\psi$ e, já que ϕ_σ e $\phi_{\tilde\sigma}$ são soluções do sistema (2.46), e portanto

$$\alpha_1=\epsilon_1\frac{\tilde v_2^4}{\tilde v_1^4}\tilde\alpha_3,\quad \alpha_2=\epsilon_2\frac{\tilde v_1^4}{\tilde v_3^4}\tilde\alpha_2\quad\text{e}\quad \alpha_3=\epsilon_3\frac{\tilde v_3^4}{\tilde v_2^4}\tilde\alpha_1.$$

Assim, $\phi_\sigma=\Phi^\epsilon\circ\Psi\circ\phi_{\tilde\sigma}\circ\psi$, em que $\Phi^\epsilon:\widetilde{\mathcal{M}}^4\to\widetilde{\mathcal{M}}^4$ é definido como em (2.57) e $\Psi:\widetilde{\mathcal{M}}^4\to\widetilde{\mathcal{M}}^4$, é definido como em (2.58). Fazendo $\Theta=(\Phi^\epsilon\circ\Psi)^{-1}$, obtemos que $\phi_{\tilde\sigma}\circ\psi=\Theta\circ\phi_\sigma$, em particular $\tilde\sigma=\Theta(\sigma)$.

Reciprocamente, suponha que existam um difeomorfismo $\psi:U_\sigma\to U_{\tilde\sigma}$ e $\Theta\in G$ tais que $\phi_{\tilde\sigma}\circ\psi=\Theta\circ\phi_\sigma$. Então, verificando para cada elemento de G, concluímos que, a menos de translações, ou $\psi(u_1,u_2,u_3)=(\epsilon_1u_1,\epsilon_2u_2,\epsilon_3u_3)$ ou $\psi(u_1,u_2,u_3)=(\epsilon_3u_3,\epsilon_2u_2,\epsilon_1u_1)$, $\epsilon_i\in\{-1,1\}$, $1\le i\le 3$, e em ambos os casos ψ satisfaz as relações em (2.60), donde $f_{\tilde\sigma}$ é congruente a f_σ. $\square$

Lema 2.9. *Se $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ é uma hipersuperfície conformemente euclidiana mínima com três curvaturas principais distintas, com M^3 simplesmente conexa, então ou $f(M^3)$ é um subconjunto aberto de um cone sobre um toro de Clifford em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, ou existe uma folha σ de $\mathcal{D}$ e um difeomorfismo local $\rho : M^3 \to V$, sobre um subconjunto aberto $V \subset U_\sigma$, tal que f é congruente a $f_\sigma \circ \rho$.*

Demonstração. Primeiro, vamos associar a f uma aplicação $\phi_f : M^3 \to \mathcal{M}^4$ da maneira seguinte. Fixe um campo de vetores suave e globalmente definido ξ, normal e unitário ao longo de f, o qual existe pelo fato de que M^3 é orientável. Denote por $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ as curvaturas principais de f com respeito a ξ e sejam $v_j : M^3 \to \mathbb{R}$ funções definidas por

$$v_j = \sqrt{\frac{\delta_j}{(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)}}, \quad \delta_j = \frac{(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)}{|(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)|}, \quad 1 \leq j \neq i \neq k \neq j \leq 3.$$

Para cada $1 \leq j \leq 3$, os auto-espaços $T_{\lambda_j} = \ker(A_\xi - \lambda_j I)$ associados a λ_j, em que A_ξ é o operador de Weingarten de f com respeito a ξ e I é o endomorfismo identidade, determinam uma distribuição 1-dimensional em M^3. Desde que M^3 é simplesmente conexa, existe um campo de vetores unitário E_j, globalmente definido em M^3, tal que $\text{span}\{E_j\} = T_{\lambda_j}$. Os campos $E_1, E_2, E_3 \in \mathfrak{X}(M^3)$ são direções principais de f com respeito a ξ, ou seja,

$$A_\xi E_j = \lambda_j E_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Sejam $\alpha_i : M^3 \to \mathbb{R}$ funções definidas por

$$\alpha_1 = \frac{v_1}{v_2} E_1(v_2), \quad \alpha_2 = \frac{v_2}{v_3} E_2(v_3) \quad \text{e} \quad \alpha_3 = \frac{v_3}{v_1} E_3(v_1). \tag{2.61}$$

Defina $\phi_f : M^3 \to \mathbb{R}^6$ por $\phi_f = (v_1, v_2, v_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Agora, vamos mostrar que ou $f(M^3)$ é um subconjunto aberto de um cone sobre um toro de Clifford em $\mathbb{S}^3$ ou $\phi_f(M^3)$ é um aberto de uma folha σ da distribuição $\mathcal{D}$. Pela recíproca do Teorema 1.9, todo ponto $p \in M^3$ admite uma vizinhança aberta conexa $U \subset M^3$, munida com coordenadas locais (u_1, u_2, u_3), tal que $E_j = \frac{1}{v_j}\frac{\partial}{\partial u_j}$. Restritas a U, as equações em (2.61) são escritas como

$$\alpha_1 = \frac{1}{v_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{v_3}\frac{\partial v_3}{\partial u_2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{v_1}\frac{\partial v_1}{\partial u_3}$$

e, portanto, a aplicação $\phi_{_U} : U \to \mathbb{R}^6$, definida por $\phi_{_U} = \phi_f|_U$, é solução do sistema (2.46) e satisfaz a equação algébrica (2.48), pela Proposição 2.2. Assim, $\phi_{_U}(U) \subset \mathcal{M}^4$ e

$$\frac{\partial \phi_{_U}}{\partial u_i}(q) = X_i(\phi_{_U}(q)), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

para todo $q \in U$. Portanto, ou $\phi_{_U}(U)$ é um aberto de uma folha σ da distribuição $\mathcal{D}$ ou $\phi_{_U}(U)$ é um segmento aberto de uma das retas ℓ_- ou ℓ_+. Se ocorrer a última possibilidade para algum subconjunto aberto conexo $U \subset M^3$, então $v_3 = v_1$ em U e, portanto, $\lambda_2 = 0$ em U. Por analiticidade, $\lambda_2 = 0$ em M^3 e, pela Proposição 1.3, $f(M^3)$ é um subconjunto aberto de um cone sobre um toro de Clifford em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$.

Se esse não for o caso, temos que cada ponto $p \in M^3$ admite uma vizinhança aberta $U \subset M^3$ tal que $\phi_f(U)$ está contido em alguma folha $\sigma_{_U}$ de $\mathcal{D}$. Por conexidade, $\phi_f(M^3)$ é um subconjunto aberto de alguma folha σ de $\mathcal{D}$. Se $\rho : M^3 \to U_\sigma$ é um levantamento de ϕ_f com relação a ϕ_σ, isto é, $\phi_f = \phi_\sigma \circ \rho$, então ρ é um difeomorfismo local tal que f e $f_\sigma \circ \rho$ têm as mesmas primeira e segunda formas fundamentais. Portanto, f é congruente a $f_\sigma \circ \rho$. □

Corolário 2.3. *Se $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ é uma imersão isométrica mínima, com três curvaturas principais distintas, de uma variedade Riemanniana conexa conformemente euclidiana, então ou $f(M^3)$ é um subconjunto aberto de um cone sobre um toro de Clifford em $\mathbb{S}^3$ ou existe uma folha σ de $\mathcal{D}$ e uma isometria $\tau : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\tau(f(M^3)) \subset f_\sigma(U_\sigma)$.*

Demonstração. Seja $\pi : \tilde{M}^3 \to M^3$ o recobrimento universal de M^3 com a métrica do recobrimento. Então, $\tilde{f} : \tilde{M}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\tilde{f} = f \circ \pi$, satisfaz as hipóteses do Lema 2.9. Portanto, ou $f(M^3)$ é um subconjunto aberto de um cone sobre um toro de Clifford em $\mathbb{S}^3$ ou existe uma folha σ de $\mathcal{D}$ e uma isometria linear $\tau : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tal que $\tau(\tilde{f}(\tilde{M}^3)) \subset \tilde{f}_\sigma(U_\sigma)$. Agora, basta observar que $f(M^3) = \tilde{f}(\tilde{M}^3)$, para concluir. □

Capítulo 3

Hipersuperfícies conformemente euclidianas com curvatura escalar constante e três curvaturas principais distintas em $\mathbb{R}^4$

Neste capítulo apresentamos a seguinte descrição local das hipersuperfícies conformemente euclidianas em $\mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas e curvatura escalar constante.

Teorema D. *Se $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ é uma hipersuperfície conformemente euclidiana com três curvaturas principais distintas e curvatura escalar constante, então $f(M^3)$ é um subconjunto aberto de um cilindro sobre uma superfície em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana constante não nula.*

Em particular, decorre do teorema acima que, se o tensor de Ricci de uma hipersuperfície $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas é um tensor de Codazzi, então ele é necessariamente paralelo.

Para a demonstração do Teorema D, usamos a caracterização obtida no Teorema 1.9 das hipersuperfícies conformemente euclidianas em $\mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas como hipersuperfícies holonômicas cujo par associado satisfaz as condições algébricas (1.6) e, com a hipótese de que a curvatura escalar é constante e a Proposição 1.1, mostramos que uma das curvaturas principais de f deve ser identicamente nula. O resultado segue então da Proposição 1.3.

3.1 Uma caracterização local

Será conveniente usar a seguinte versão equivalente do Teorema 1.9.

Corolário 3.1. *Seja $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície holonômica cujo par associado (v, V) satisfaz as equações*

$$\begin{aligned}
&v_2^2 = v_1^2 + v_3^2,\\
&V_1 = \frac{-1}{3v_2v_3}\left[\lambda(v_2^2 + v_3^2) + \delta\sqrt{v_1^4 + v_2^2v_3^2 + 3v_1^2v_2^2v_3^2S}\;\right],\\
&V_2 = \frac{-1}{3v_1v_3}\left[\lambda(v_1^2 - v_3^2) + \delta\sqrt{v_1^4 + v_2^2v_3^2 + 3v_1^2v_2^2v_3^2S}\;\right],\\
&V_3 = \frac{1}{3v_1v_2}\left[\lambda(v_1^2 + v_2^2) - \delta\sqrt{v_1^4 + v_2^2v_3^2 + 3v_1^2v_2^2v_3^2S}\;\right],
\end{aligned} \tag{3.1}$$

em que $\lambda, \delta \in \{-1, 1\}$ e S é a curvatura escalar de f. Então, M^3 é conformemente euclidiana e f tem três curvaturas principais distintas.

Reciprocamente, toda hipersuperfície conformemente euclidiana $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas é localmente holonômica e seu par associado (v, V) satisfaz as equações em (3.1)*, em que S é a curvatura escalar de f.*

Demonstração. Desde que a curvatura escalar S de f fica expressa, em termos do par (v, V), por

$$V_1V_2v_3 + V_1V_3v_2 + V_2V_3v_1 = v_1v_2v_3S, \tag{3.2}$$

é suficiente mostrar que as equações em (1.6), juntamente com a equação (3.2), são equivalentes às equações em (3.1). Para isso, recorde que as equações em (1.6) implicam em

$$V_1 = \frac{1}{v_2}(V_2v_1 - \lambda v_3) \quad e \quad V_3 = \frac{1}{v_2}(V_2v_3 + \lambda v_1), \tag{3.3}$$

ver equação (2.3). Substituindo as duas últimas equações em (3.2), obtemos que

$$V_2^2 + \frac{2\lambda}{3v_1v_3}(v_1^2 - v_3^2)V_2 - \frac{1}{3}(1 + v_2^2S) = 0, \tag{3.4}$$

a qual é uma equação quadrática em V_2. Desde que a equação (3.4) tem raízes reais, então

$$\Delta = \frac{4}{9v_1^2v_3^2}(v_1^4 + v_2^2v_3^2 + 3v_1^2v_2^2v_3^2S) \geq 0$$

e

$$V_2 = -\frac{1}{3v_1v_3}\left[\lambda(v_1^2 - v_3^2) + \delta\sqrt{v_1^4 + v_2^2v_3^2 + 3v_1^2v_2^2v_3^2S}\;\right],$$

com $\delta \in \{-1,1\}$. Para obter as outras equações de (3.1) basta substituir a equação anterior nas equações em (3.3).

Por uma substituição direta, verifica-se que as equações em (3.1) implicam nas equações em (1.6) e (3.2). $\square$

Segue do Corolário 3.1 que estudar propriedades locais das hipersuperfícies conformemente euclidianas $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ com curvatura escalar constante S e três curvaturas principais distintas é equivalente a estudar hipersuperfícies holonômicas cujo par associado (v,V) satisfaz as equações em (3.1), com S constante. Assim, precisamos estudar as soluções (v,h,V) do sistema (1.3) que satisfazem as equações em (3.1) com $v_i > 0$ e S constante.

Proposição 3.1. *Seja $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície holonômica, com curvatura escalar constante S, cujo par associado (v,V) satisfaz as equações em* (3.1). *Suponha que a curvatura de Gauss-Kronecker de f não se anule em nenhum ponto de M^3. Seja $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \left(\frac{1}{v_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}, \frac{1}{v_3}\frac{\partial v_3}{\partial u_2}, \frac{1}{v_1}\frac{\partial v_1}{\partial u_3}\right)$ e $X = (v_1,v_2,v_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. Então X satisfaz o seguinte sistema de equações diferenciais parciais:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u_1} = \left(\dfrac{v_2^5V_2 - v_3^5V_3}{v_1v_2^3V_2}\alpha_1, v_2\alpha_1, \dfrac{v_3^4V_3}{v_2^3V_2}\alpha_1, \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u_1}, \dfrac{v_1^3V_1 + v_2^3V_2 - v_3^3V_3}{v_2^3V_2}\alpha_1\alpha_2, \dfrac{\partial \alpha_3}{\partial u_1}\right), \\ \dfrac{\partial X}{\partial u_2} = \left(\dfrac{v_1^4V_1}{v_3^3V_3}\alpha_2, \dfrac{v_1^5V_1 + v_3^5V_3}{v_2v_3^3V_3}\alpha_2, v_3\alpha_2, \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u_2}, \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial u_2}, \dfrac{-v_1^3V_1 + v_2^3V_2 + v_3^3V_3}{v_3^3V_3}\alpha_2\alpha_3\right), \\ \dfrac{\partial X}{\partial u_3} = \left(v_1\alpha_3, \dfrac{v_2^4V_2}{v_1^3V_1}\alpha_3, -\dfrac{v_1^5V_1 - v_2^5V_2}{v_1^3v_3V_1}\alpha_3, \dfrac{v_1^3V_1 - v_2^3V_2 + v_3^3V_3}{v_1^3V_1}\alpha_1\alpha_3, \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial u_3}, \dfrac{\partial \alpha_3}{\partial u_3}\right), \end{cases} \tag{3.5}$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_3}{\partial u_1} &= \frac{-v_2^4 + v_3^2(2v_2^2 + v_3^2)V_1^2 - v_1v_3(v_2^2 - 4v_3^2)V_1V_3 + v_1^2(v_2^2 + v_3^2)V_3^2}{v_1v_2^3V_1V_2}\alpha_1\alpha_3, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_2} &= \frac{v_3^4 + v_2^2(v_1^2 - v_3^2)V_1^2 + v_1v_2(4v_1^2 + v_3^2)V_1V_2 + v_1^2(v_1^2 - 2v_3^2)V_2^2}{v_2v_3^3V_2V_3}\alpha_1\alpha_2, \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_3} &= \frac{-v_1^4 + v_3^2(v_1^2 + v_2^2)V_2^2 - v_2v_3(v_1^2 - 4v_2^2)V_2V_3 + v_2^2(2v_1^2 + v_2^2)V_3^2}{v_1^3v_3V_1V_3}\alpha_2\alpha_3, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_1} &= -\frac{(v_1^4 - v_1^2v_2^2 - v_2^4)V_1 - v_1v_2(v_1^2 + v_2^2)V_2}{v_1v_2^3V_2}\alpha_1^2\\ &- \frac{v_1^5(2v_1v_2V_1 + (v_1^2 - 2v_3^2)V_2)V_1}{v_2v_3^6V_3^2}\alpha_2^2\\ &- \frac{v_2^3(3v_1^3V_1 - v_2(v_1^2 + 2v_2^2)V_2)V_2}{v_1v_3^5V_1V_3}\alpha_3^2 - \frac{v_1v_2V_1V_2}{v_3^2},\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_2} &= -\frac{v_3^3(3v_2^3V_2 - v_3(v_2^2 + 2v_3^2)V_3)V_3}{v_1^5v_2V_1V_2}\alpha_1^2\\ &- \frac{(v_2^4 - v_2^2v_3^2 - v_3^4)V_2 - v_2v_3(v_2^2 + v_3^2)V_3}{v_2v_3^3V_3}\alpha_2^2\\ &- \frac{v_2^5(2v_2v_3V_2 + (2v_1^2 + v_2^2)V_3)V_2}{v_1^6v_3V_1^2}\alpha_3^2 + \frac{v_2v_3V_2V_3}{v_1^2},\end{aligned} \tag{3.8}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha_3}{\partial u_3} &= \frac{v_3^5((2v_2^2 + v_3^2)V_1 + 2v_1v_3V_3)V_3}{v_1v_2^6V_2^2}\alpha_1^2\\ &+ \frac{v_1^3(v_1(2v_1^2 - v_3^2)V_1 - 3v_3^3V_3)V_1}{v_2^5v_3V_2V_3}\alpha_2^2\\ &+ \frac{v_1v_3(v_1^2 - v_3^2)V_1 + (v_1^4 - v_1^2v_3^2 - v_3^4)V_3}{v_1^3v_3V_1}\alpha_3^2 - \frac{v_1v_3V_1V_3}{v_2^2}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Além disso, as seguintes equações algébricas são satisfeitas:

$$\alpha_1F_1 = 0, \qquad \alpha_2F_2 = 0 \qquad e \qquad \alpha_3F_3 = 0, \tag{3.10}$$

em que as funções $F_1, F_2, F_3 : M^3 \to \mathbb{R}$ estão definidas na Seção 3.3.

Demonstração. Inicialmente, observe que a curvatura de Gauss-Kronecker de f é diferente de zero em um ponto $p \in M^3$ se, e somente se, $V_1(p) \neq 0$, $V_2(p) \neq 0$ e $V_3(p) \neq 0$.

A tripla (v, h, V), em que $h_{ij} = \frac{1}{v_i}\frac{\partial v_j}{\partial u_i}$, satisfaz o seguinte sistema de EDP's:

$$\begin{cases} \text{(i) } \dfrac{\partial v_i}{\partial u_j} = h_{ji}v_j, \qquad \text{(ii) } \dfrac{\partial h_{ij}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} + h_{ki}h_{kj} + V_iV_j = 0, \\ \text{(iii) } \dfrac{\partial h_{ik}}{\partial u_j} = h_{ij}h_{jk}, \qquad \text{(iv) } \dfrac{\partial V_i}{\partial u_j} = h_{ji}V_j, \quad 1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq 3, \\ \text{(v) } \delta_i\dfrac{\partial v_i}{\partial u_i} + \delta_j h_{ij}v_j + \delta_k h_{ik}v_k = 0, \qquad \text{(vi) } \delta_i\dfrac{\partial V_i}{\partial u_i} + \delta_j h_{ij}V_j + \delta_k h_{ik}V_k = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

em que as equações (i), (ii), (iii) e (iv) seguem do fato de f ser uma hipersuperfície holonômica com par associado (v, V), ver Proposição 1.1, enquanto que (v) e (vi) são obtidas derivando as equações em (1.6). Usando as equações em (3.1) e (3.11), podemos calcular $\frac{\partial V_i}{\partial u_i}$ e verificar que

$$V_jv_j^4h_{ki} = V_iv_i^4h_{kj}, \quad 1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq 3. \tag{3.12}$$

A partir das equações (i) e (v) do sistema (3.11) e da equação (3.12) obtemos os $\frac{\partial v_i}{\partial u_j}$, $i, j = 1, 2, 3$, do sistema (3.5). De modo similar, podemos usar as equações (i) e (iii) do sistema (3.11), a equação (3.12) e as equações já obtidas do sistema (3.5) para obter os $\frac{\partial \alpha_i}{\partial u_j}$, $i, j = 1, 2, 3$ e $i \neq j$ do sistema (3.5). Para obter os $\frac{\partial \alpha_i}{\partial u_i}$, $i = 1, 2, 3$ do sistema (3.5), observe que a equação (ii), do sistema (3.11), juntamente com as equações já obtidas do sistema (3.5) e as equações em (3.12), determinam o sistema de equações lineares abaixo nas variáveis $\frac{\partial \alpha_i}{\partial u_i}$, $i = 1, 2, 3$:

$$M.P = -B, \tag{3.13}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} v_1^2v_2^4v_3^6V_1V_2V_3^2 & v_1^7v_2^2v_3^3V_1^2V_2V_3 & 0 \\ v_1^2v_2^3v_3^7V_1V_2V_3^2 & 0 & v_1^4v_2^6v_3^2V_1V_2^2V_3 \\ 0 & v_1^6v_2^2v_3^4V_1^2V_2V_3 & v_1^3v_2^7v_3^2V_1V_2^2V_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial \alpha_3}{\partial u_3} \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1^2 + a_{12}\alpha_2^2 + a_{13}\alpha_3^2 + a_{14} \\ a_{21}\alpha_1^2 + a_{22}\alpha_2^2 + a_{23}\alpha_3^2 + a_{24} \\ a_{31}\alpha_1^2 + a_{32}\alpha_2^2 + a_{33}\alpha_3^2 + a_{34} \end{pmatrix},$$

sendo

$$a_{12} = -v_1^7 V_1^2 V_2 \big[v_1^3 (v_1^2 - 4v_2^2) V_1 - v_2^3 (v_1^2 - v_3^2) V_2 + v_3^3 (3v_2^2 + v_3^2) V_3 \big];$$

$$a_{21} = -v_3^7 V_1 V_3^2 \big[v_1^3 (v_2^2 + v_3^2) V_1 + v_2^3 (3v_1^2 + v_2^2) V_2 - v_3^3 (4v_1^2 + v_3^2) V_3 \big];$$

$$a_{33} = v_2^7 V_2^2 V_3 \big[v_1^3 (v_2^2 - 4v_3^2) V_1 - v_2^3 (v_2^2 - 4v_3^2) V2 + v_3^3 (v_1^2 + v_2^2) V_3 \big];$$

$$a_{11} = -v_2 v_3^8 V_1 V_3^2 (v_2^3 V_2 - v_3^3 V_3); \qquad a_{13} = v_1 v_2^7 v_3^4 V_2^2 V_3^2; \qquad a_{14} = v_1^3 v_2^3 v_3^6 V_1^2 V_2^2 V_3^2;$$

$$a_{22} = v_1^7 v_2^4 v_3 V_1^2 V_2^2; \qquad a_{23} = v_1 v_2^8 (v_1^3 V_1 - v_2^3 V_2) V_2^2 V_3; \qquad a_{24} = v_1^3 v_2^6 v_3^3 V_1^2 V_2^2 V_3^2;$$

$$a_{31} = v_1^4 v_2 v_3^7 V_1^2 V_3^2; \qquad a_{32} = -v_1^8 v_3 V_1^2 V_2 (v_1^3 V_1 - v_3^3 V_3); \qquad a_{34} = v_1^6 v_2^3 v_3^3 V_1^2 V_2^2 V_3^2.$$

Em seguida, verificando que $\det(M) = -2v_1^{12} v_2^{12} v_3^{12} V_1^4 V_2^4 V_3^4 \neq 0$, concluímos que o sistema (3.13) tem uma única solução, a qual é dada pelas equações em (3.7), (3.8) e (3.9).

Resta mostrar que as equações em (3.10) são satisfeitas. Calculando as derivadas mistas $\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial u_j \partial u_k} = \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial u_k \partial u_j}$, $i, k, j = 1, 2, 3$, a partir das equações do sistema (3.5), obtemos que

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial u_2 \partial u_1} - \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{-2\alpha_2 F_2}{6561 v_1^5 v_2^6 v_3^{13} V_1 V_2^2 V_3^3}; \qquad \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial u_2 \partial u_3} - \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial u_3 \partial u_2} = \frac{2\alpha_2 F_2}{6561 v_1^7 v_2^9 v_3^8 V_1 V_2^3 V_3^2};$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial u_3 \partial u_1} - \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial u_1 \partial u_3} = \frac{2\alpha_3 F_3}{6561 v_1^8 v_2^7 v_3^9 V_1^2 V_2 V_3^3}; \qquad \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial u_3 \partial u_2} - \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial u_2 \partial u_3} = \frac{-2\alpha_3 F_3}{6561 v_1^{13} v_2^5 v_3^6 V_1^3 V_2 V_3^2};$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial u_2 \partial u_1} = \frac{2\alpha_1 F_1}{6561 v_1^9 v_2^8 v_3^7 V_1^3 V_2^2 V_3}; \qquad \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial u_1 \partial u_3} - \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial u_3 \partial u_1} = \frac{-2\alpha_1 F_1}{6561 v_1^6 v_2^{13} v_3^5 V_1^2 V_2^3 V_3}.$$

□

Nos lemas a seguir supomos que as hipóteses da Proposição 3.1 sejam satisfeitas e usamos suas notações.

Lema 3.1. *Não existe aberto $U \subset M^3$ tal que $\alpha_1(p) = 0,\ \alpha_2(p) = 0,\ \alpha_3(p) = 0,\ \forall p \in U$.*

Demonstração. Suponha que exista um subconjunto aberto $U \subset M^3$ tal que $\alpha_1(p) = 0$, $\alpha_2(p) = 0$ e $\alpha_3(p) = 0$ para todo $p \in U$. Neste caso, as equações em (3.7), (3.8) e (3.9) se resumem a $V_1 V_2 = 0,\ V_2 V_3 = 0$ e $V_1 V_3 = 0$. Mas isso é um absurdo, pois, por hipótese, $V_i \neq 0$ em todos os pontos de M^3, $i = 1, 2, 3$. □

Lema 3.2. *$S \neq 0$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $S = 0$. Então, as funções F_{ik} satisfazem

$$F_{11}^2 - F_{12}^2 = 19683 v_1^8 v_2^{14} v_3^{14}; \qquad F_{13}^2 - F_{14}^2 = 2187 v_1^4 v_2^{14} v_3^{10}; \tag{3.14}$$

$$F_{15}^2 - F_{16}^2 = 2187 v_1^4 v_2^{10} v_3^{14}; \qquad F_{17}^2 - F_{18}^2 = 2187 v_1^8 v_2^{10} v_3^{10}; \tag{3.15}$$

$$F_{21}^2 - F_{22}^2 = -19683 v_1^{14} v_2^8 v_3^{14}; \qquad F_{23}^2 - F_{24}^2 = -2187 v_1^{10} v_2^8 v_3^{10}; \tag{3.16}$$

$$F_{25}^2 - F_{26}^2 = -2187 v_1^{10} v_2^4 v_3^{14}; \qquad F_{27}^2 - F_{28}^2 = -2187 v_1^{14} v_2^4 v_3^{10}; \tag{3.17}$$

$$F_{31}^2 - F_{32}^2 = 19683 v_1^{14} v_2^{14} v_3^8; \qquad F_{33}^2 - F_{34}^2 = 2187 v_1^{10} v_2^{14} v_3^4; \tag{3.18}$$

$$F_{35}^2 - F_{36}^2 = 2187 v_1^{10} v_2^{10} v_3^8; \qquad F_{37}^2 - F_{38}^2 = 2187 v_1^{14} v_2^{10} v_3^4. \tag{3.19}$$

Segue das equações em (3.14)-(3.19) que $F_{ik} + \lambda\delta F_{i(k+1)} \neq 0, \quad i = 1,2,3$ e $k = 1,3,5,7$. Observe que as funções F_{ik} estão definidas no conjunto $\{(v_1(p), v_2(p), v_3(p)) \in \mathbb{R}^3;\ p \in M^3\}$, o qual é um subconjunto do cone $C_+ = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0\}$. Vistas como funções definidas em C_+, elas satisfazem as equações em (3.14)-(3.19) e

$$\begin{aligned} &F_{1k} + \lambda\delta F_{1(k+1)} > 0, \quad k = 1,3,5,7 \\ &F_{2k} + F_{2(k+1)} > 0, \quad k = 1,3,5,7 \\ &F_{2k} - F_{2(k+1)} < 0, \quad k = 1,3,5,7 \\ &F_{3k} + \lambda\delta F_{3(k+1)} > 0, \quad k = 1,3,5,7, \end{aligned} \tag{3.20}$$

em todo ponto de C_+. De fato, as F_{ik} são contínuas, C_+ é conexo e, no ponto $x = (1, \sqrt{5}, 2)$, temos que

$$F_{11} + \lambda\delta F_{12} = 5184(1269 - 179\sqrt{21}\lambda\delta); \qquad F_{13} + \lambda\delta F_{14} = 432(1293 + 187\sqrt{21}\lambda\delta);$$

$$F_{15} + \lambda\delta F_{16} = 1728(363 + 67\sqrt{21}\lambda\delta); \qquad F_{17} + \lambda\delta F_{18} = 432(657 - 137\sqrt{21}\lambda\delta);$$

$$F_{21} + \lambda\delta F_{22} = 5184(-5283 + 1153\sqrt{21}\lambda\delta); \qquad F_{23} + \lambda\delta F_{24} = 432(-1101 + 241\sqrt{21}\lambda\delta);$$

$$F_{27} + \lambda\delta F_{28} = 432(-3249 + 709\sqrt{21}\lambda\delta); \qquad F_{25} + \lambda\delta F_{26} = 1728(-141 + 31\sqrt{21}\lambda\delta);$$

$$F_{31} + \lambda\delta F_{32} = 648(114903 - 25073\sqrt{21}\lambda\delta); \qquad F_{35} + \lambda\delta F_{36} = 216(3081 - 671\sqrt{21}\lambda\delta);$$

$$F_{33} + \lambda\delta F_{34} = 54(23991 - 5231\sqrt{21}\lambda\delta); \qquad F_{37} + \lambda\delta F_{38} = 54(70659 - 15419\sqrt{21}\lambda\delta).$$

Assim, segue das equações em (3.20) que $F_i \neq 0$ em todos os pontos de M^3. Portanto, as equações em (3.10) dizem que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ em todos os pontos de M^3, o que é um absurdo pelo Lema 3.1. □

Lema 3.3. *Nenhuma das funções* $1 - Sv_1^2,\ 1 + Sv_2^2,\ 1 - Sv_3^2$ *pode se anular em abertos de* M^3*.*

Demonstração. Suponha que exista um subconjunto aberto $U \subset M^3$ em que $1 + Sv_2^2 \equiv 0$. Em particular, v_2 é constante em U. Como $V_2 \neq 0$, segue da equação (3.4) que $v_1^2 - v_3^2 \neq 0$ e

$$V_2 = -\frac{2\lambda}{3v_1v_3}(v_1^2 - v_3^2).$$

Portanto,

$$V_1 = -\frac{\lambda}{3v_2v_3}(v_1^2 + v_2^2), \quad V_3 = \frac{\lambda}{3v_1v_2}(v_2^2 + v_3^2)$$

e

$$v_1^5V_1 + v_3^5V_3 = -\frac{\lambda}{3v_1v_2}v_2(v_1^2 - v_3^2)(2v_1^4 + v_1^2v_3^2 + 2v_3^4) \neq 0.$$

Assim, como v_2 é constante, as equações do sistema (3.5) dizem que

$$0 = \frac{\partial v_2}{\partial u_1} = v_2\alpha_1, \qquad 0 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_2} = \frac{v_1^5V_1 + v_3^5V_3}{v_2v_3^3V_3}\alpha_2 \qquad \text{e} \qquad 0 = \frac{\partial v_2}{\partial u_3} = \frac{v_2^4V_2}{v_1^3V_1}\alpha_3,$$

ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, o que contradiz o Lema 3.1.

Os demais casos seguem de forma completamente análoga, uma vez que V_1 e V_3 satisfazem equações do tipo (3.4), a saber,

$$V_1^2 + \frac{2\lambda}{3v_2v_3}(v_2^2 + v_3^2)V_1 + \frac{1}{3}(1 - v_1^2S) = 0$$

e

$$V_3^2 - \frac{2\lambda}{3v_1v_2}(v_1^2 + v_2^2)V_3 + \frac{1}{3}(1 - v_3^2S) = 0.$$

□

Lema 3.4. *A função $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ é identicamente nula em M^3.*

Demonstração. Suponha que exista um ponto de M^3 no qual α_1, α_2 e α_3 não se anulem. Por continuidade, existe um subconjunto aberto $U \subset M^3$ em que $\alpha_i(p) \neq 0$, para todo $p \in U$ e $i = 1, 2, 3$. Diminuindo o aberto U, se necessário, podemos supor que as funções $-1 + Sv_1^2$, $1 + Sv_2^2$ e $-1 + Sv_3^2$ não se anulem em nenhum ponto de U, pelo Lema 3.3.

Desde que as funções α_1, α_2 e α_3 não se anulam em nenhum ponto de U, segue das equações em (3.10) que $F_i \equiv 0$ em U, $i = 1, 2, 3$ e, portanto, α_1^2, α_2^2 e α_3^2 satisfazem o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} A_1\alpha_1^2 + A_2\alpha_2^2 + A_3\alpha_3^2 = -A_0, \\ B_1\alpha_1^2 + B_2\alpha_2^2 + B_3\alpha_3^2 = -B_0, \\ C_1\alpha_1^2 + C_2\alpha_2^2 + C_3\alpha_3^2 = -C_0, \end{cases} \tag{3.21}$$

em que

$$A_0 = v_1^2v_2^2v_3^2(F_{11} + \lambda\delta F_{12}); \quad B_0 = v_1^2v_2^2v_3^2(F_{21} + \lambda\delta F_{22}); \quad C_0 = v_1^2v_2^2v_3^2(F_{31} + \lambda\delta F_{32});$$

$$A_1 = 9v_1^2v_3^8(F_{13} + \lambda\delta F_{14}); \quad B_1 = 9v_1^2v_3^8(F_{23} + \lambda\delta F_{24}); \quad C_1 = 9v_1^2v_3^8(F_{33} + \lambda\delta F_{34});$$

$$A_2 = 9v_1^8v_2^2(F_{15} + \lambda\delta F_{16}); \quad B_2 = 9v_1^8v_2^2(F_{25} + \lambda\delta F_{26}); \quad C_2 = 9v_1^8v_2^2(F_{35} + \lambda\delta F_{36});$$

$$A_3 = 9v_2^8v_3^2(F_{17} + \lambda\delta F_{18}); \quad B_3 = 9v_2^8v_3^2(F_{27} + \lambda\delta F_{28}); \quad C_3 = 9v_2^8v_3^2(F_{37} + \lambda\delta F_{38}).$$

Note que

$$det\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad det\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & C_1 & C_2 \end{pmatrix} = x_1 + \lambda\delta y_1,$$

em que,

$$\begin{aligned}
x_1 \;=\; & -2^2 3^{12} S^2 v_1^{18} v_2^{10} v_3^{22} (v_1^2 - v_3^2)\Big[\big(128v_1^{24} + 1152v_1^{22}v_3^2 + 4608v_1^{20}v_3^4 + 10864v_1^{18}v_3^6 \\
& + 17127v_1^{16}v_3^8 + 20124v_1^{14}v_3^{10} + 20298v_1^{12}v_3^{12} + 20124v_1^{10}v_3^{14} + 17127v_1^8v_3^{16} \\
& + 10864v_1^6v_3^{18} + 4608v_1^4v_3^{20} + 1152v_1^2v_3^{22} + 128v_3^{24}\big) - 3Sv_1^2v_2^2v_3^2\big(64v_1^{20} + 560v_1^{18}v_3^2 \\
& + 2136v_1^{16}v_3^4 + 4671v_1^{14}v_3^6 + 6612v_1^{12}v_3^8 + 6906v_1^{10}v_3^{10} + 6612v_1^8v_3^{12} + 4671v_1^6v_3^{14} \\
& + 2136v_1^4v_3^{16} + 560v_1^2v_3^{18} + 64v_3^{20}\big) - 9S^2v_1^4v_2^4v_3^4\big(80v_1^{16} + 512v_1^{14}v_3^2 + 1349v_1^{12}v_3^4 \\
& + 1946v_1^{10}v_3^6 + 1946v_1^8v_3^8 + 1946v_1^6v_3^{10} + 1349v_1^4v_3^{12} + 512v_1^2v_3^{14} + 80v_3^{16}\big) \\
& + 81S^3v_1^6v_2^6v_3^6\big(24v_1^{12} + 145v_1^{10}v_3^2 + 344v_1^8v_3^4 + 414v_1^6v_3^6 + 344v_1^4v_3^8 + 145v_1^2v_3^{10} \\
& + 24v_3^{12}\big) - 81S^4v_1^8v_2^8v_3^8\big(14v_1^8 + 94v_1^6v_3^2 + 189v_1^4v_3^4 + 94v_1^2v_3^6 + 14v_3^8\big) \\
& - 243S^5v_1^{10}v_2^{10}v_3^{10}\big(4v_1^4 + v_1^2v_3^2 + 4v_3^4\big) + 1458S^6v_1^{12}v_2^{12}v_3^{12}\Big]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
y_1 = 2^2 3^{12} S^2 v_1^{18} v_2^{10} v_3^{22}\Big[& - 2\big(64v_1^{24} + 480v_1^{22}v_3^2 + 1464v_1^{20}v_3^4 + 2228v_1^{18}v_3^6 + 1557v_1^{16}v_3^8 \\
& + 144v_1^{14}v_3^{10} - 210v_1^{12}v_3^{12} + 144v_1^{10}v_3^{14} + 1557v_1^8v_3^{16} + 2228v_1^6v_3^{18} + 1464v_1^4v_3^{20} \\
& + 480v_1^2v_3^{22} + 64v_3^{24}\big) + 3Sv_1^2v_2^2v_3^2\big(128v_1^{20} + 880v_1^{18}v_3^2 + 2304v_1^{16}v_3^4 + 2541v_1^{14}v_3^6 \\
& + 420v_1^{12}v_3^8 - 882v_1^{10}v_3^{10} + 420v_1^8v_3^{12} + 2541v_1^6v_3^{14} + 2304v_1^4v_3^{16} + 880v_1^2v_3^{18} + 128v_3^{20}\big) \\
& - 81S^2v_1^6v_2^4v_3^6(v_1^2 - v_3^2)^2\big(8v_1^8 + 43v_1^6v_3^2 + 78v_1^4v_3^4 + 43v_1^2v_3^6 + 8v_3^8\big) \\
& - 81S^3v_1^6v_2^6v_3^6\big(16v_1^{12} + 59v_1^{10}v_3^2 + 70v_1^8v_3^4 + 70v_1^6v_3^6 + 70v_1^4v_3^8 + 59v_1^2v_3^{10} + 16v_3^{12}\big) \\
& + 405S^4v_1^8v_2^8v_3^8\big(5v_1^8 + 16v_1^6v_3^2 + 12v_1^4v_3^4 + 16v_1^2v_3^6 + 5v_3^8\big) \\
& - 729S^5v_1^{10}v_2^{10}v_3^{10}(v_1^2 + v_2^2)(v_2^2 + v_3^2) + 729S^6v_1^{12}v_2^{12}v_3^{12}\Big]\sqrt{v_1^4 + v_2^2v_3^2 + 3v_1^2v_2^2v_3^2S}.
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$x_1^2 - y_1^2 = 2^4 3^{33} v_1^{40} v_2^{36} v_3^{50} S^4 (-1 + Sv_1^2)^5 (1 + Sv_2^2)^3 (-1 + Sv_3^2)^5.$$

Desde que $S \neq 0$, pelo Lema 3.2, segue da equação anterior que $x_1 + \lambda\delta y_1 \neq 0$. Portanto, o sistema (3.21) não admite solução, o que é uma contradição. $\square$

Lema 3.5. *Não existe um aberto $U \subset M^3$ tal que $\alpha_i(p) = 0 = \alpha_j(p)$ e $\alpha_k(p) \neq 0$, para todo $p \in U$, $1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq 3$.*

Demonstração. Novamente, diminuindo o aberto U, se necessário, podemos supor que as funções $-1 + Sv_1^2$, $1 + Sv_2^2$ e $-1 + Sv_3^2$ não se anulem em nenhum ponto de U, pelo Lema 3.3. Vamos dividir a demonstração em três casos distintos.

Caso 1: $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$ e $\alpha_3 \neq 0$.

Suponha que exista um subconjunto aberto $U \subset M^3$ tal que $\alpha_1(p) = 0 = \alpha_2(p)$ e $\alpha_3(p) \neq 0$ para todo $p \in U$. Nesse caso, segue das equações (3.7) e (3.8) que

$$\begin{cases} v_1^2 v_3^3 V_1^2 V_3 + (3v_1^3 v_2^2 V_1 - v_1^2 v_2^3 V_2 - 2v_2^5 V_2)\alpha_3^2 = 0, \\ v_1^4 v_3^2 V_1^2 V_3 - (2v_2^5 v_3 V_2 + 2v_1^2 v_2^4 V_3 + v_2^6 V3)\alpha_3^2 = 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

Segue de (3.22) que

$$det \begin{pmatrix} v_1^2 v_3^3 V_1^2 V_3 & (3v_1^3 v_2^2 V_1 - v_1^2 v_2^3 V_2 - 2v_2^5 V_2) \\ v_1^4 v_3^2 V_1^2 V_3 & -(2v_2^5 v_3 V_2 + 2v_1^2 v_2^4 V_3 + v_2^6 V3) \end{pmatrix} = 0.$$

Calculando o determinante acima e usando as expressões de V_1, V_2 e V_3, dadas em (3.1), obtemos que

$$a_1 + \lambda\delta b_1 = 0,$$

em que

$$\begin{aligned} a_1 &= v_3^2(13v_1^6 + 12v_1^4 v_3^2 + 9v_1^2 v_3^4 + 2v_3^6) - 3Sv_1^2 v_2^2(2v_1^6 + 15v_1^4 v_3^2 + 6v_1^2 v_3^4 + v_3^6) \\ &\quad + 9S^2 v_1^4 v_2^4 v_3^2(v_1^2 + v_2^2) \end{aligned}$$

e

$$b_1 = -2\big(v_3^2(7v_1^4 + 4v_1^2 v_3^2 + v_3^4) + 3Sv_1^2 v_2^2(v_1^4 - 2v_1^2 v_3^2 - v_3^4)\big)\sqrt{v_1^4 + v_2^2 v_3^2 + 3v_1^2 v_2^2 v_3^2 S}.$$

Note que

$$0 = a_1^2 - b_1^2 = 27v_1^4 v_2^8 v_3^2(-1 + Sv_1^2)^2(-1 + Sv_3^2)\big(v_3^2 + 3S(v_1^2 + v_2^2)^2\big).$$

Assim, como as funções $1 - Sv_1^2$ e $1 - Sv_3^2$ não se anulam em nenhum ponto de M^3, concluímos que

$$S = -\frac{v_3^2}{3(v_1^2 + v_2^2)^2}, \tag{3.23}$$

em todos os pontos do aberto U. Em particular,

$$\sqrt{v_1^4 + v_2^2 v_3^2 + 3v_1^2 v_2^2 v_3^2 S} = \frac{2v_1^4 + 2v_1^2 v_3^2 + v_3^4}{v_1^2 + v_2^2}. \tag{3.24}$$

Derivando a equação (3.23), em relação a u_3, e usando as equações do sistema (3.5) obtemos

$$0 = \frac{\partial S}{\partial u_3} = \frac{2(v_1^5 V_1(2v_1^2 + 3v_3^2) - v_2^5 V_2(2v_1^2 - v_3^2))}{3v_1^3 V_1(v_1^2 + v_2^2)^3}\alpha_3.$$

Substituindo as expressões de V_1 e V_2, dadas em (3.1), e (3.24) na expressão anterior, obtemos que

$$0 = \frac{\partial S}{\partial u_3} = -\frac{2v_3(2v_1^4 + 2v_1^2 v_3^2 + v_3^4)\big(\lambda(2v_1^4 + 2v_1^2 v_3^2 - v_3^4) - \delta(v_1^4 + v_1^2 v_3^2 - v_3^4)\big)}{9v_1^4 v_2 V_1(v_1^2 + v_2^2)^3}\alpha_3,$$

o que implica

$$\lambda(2v_1^4 + 2v_1^2 v_3^2 - v_3^4) - \delta(v_1^4 + v_1^2 v_3^2 - v_3^4) = 0,$$

pois $\alpha_3 \neq 0$ por hipótese. Desde que $\lambda, \delta \in \{-1, 1\}$, obtemos da última equação que

$$0 = (\lambda(2v_1^4 + 2v_1^2 v_3^2 - v_3^4))^2 - (\delta(v_1^4 + v_1^2 v_3^2 - v_3^4))^2 = v_1^2 v_2^2(3v_1^4 + 3v_1^2 v_3^2 - 2v_3^4),$$

ou seja,

$$3v_1^4 + 3v_1^2 v_3^2 - 2v_3^4 = 0.$$

Note que a última equação é equivalente, em presença de $v_2^2 = v_1^2 + v_3^2$, a

$$3(v_1^2 + v_2^2)^2 = 11v_3^4.$$

Substituindo a última equação em (3.23) concluímos que

$$S = -\frac{1}{11v_3^4},$$

ou seja, v_3 é constante em U e, portanto, v_1 e v_2 também são constantes em U. Isso é um absurdo, pois pelo sistema (3.5),

$$\frac{\partial v_1}{\partial u_3} = v_1 \alpha_3 \neq 0.$$

Caso 2: $\alpha_2 = 0 = \alpha_3$ e $\alpha_1 \neq 0$.

Esse caso é completamente análogo ao caso anterior.

Caso 3: $\alpha_1 = 0 = \alpha_3$ e $\alpha_2 \neq 0$.

Suponha que exista um subconjunto aberto $U \subset M^3$ tal que $\alpha_1(p) = 0 = \alpha_3(p)$ e $\alpha_2(p) \neq 0$, para todo $p \in U$. Segue das equações (3.7) e (3.8) que

$$\begin{cases} v_2^2 v_3^4 V_2 V_3^2 + (2v_1^5 v_2 V_1 + v_1^6 V_2 - 2v_1^4 v_3^2 V_2)\alpha_2^2 = 0 \\ -v_2^3 v_3^2 V_2 V_3^2 + (2v_1^5 V_1 - v_1^3 v_3^2 V_1 - 3v_1^2 v_3^3 V_3)\alpha_2^2 = 0. \end{cases}$$

Decorre das duas equações acima que

$$det \begin{pmatrix} v_2^2 v_3^4 V_2 V_3^2 & (2v_1^5 v_2 V_1 + v_1^6 V_2 - 2v_1^4 v_3^2 V_2) \\ -v_2^3 v_3^2 V_2 V_3^2 & (2v_1^5 V_1 - v_1^3 v_3^2 V_1 - 3v_1^2 v_3^3 V_3) \end{pmatrix} = 0.$$

Calculando o determinante acima e usando as expressões de V_1, V_2 e V_3, dadas em (3.1), obtemos que

$$a_1 + \lambda\delta b_1 = 0,$$

onde

$$a_1 = v_2^2(2v_1^6 - 3v_1^4 v_3^2 - 8v_3^6) - 3Sv_1^2 v_3^2(v_1^6 - 3v_1^4 v_3^2 + 6v_1^2 v_3^4 + 8v_3^6) + 9S^2 v_1^4 v_2^2 v_3^4 (v_1^2 - v_3^2),$$

e

$$b_1 = 2\big(v_2^2(v_1^4 - 2v_1^2 v_3^2 + 4v_3^4) - 3Sv_1^2 v_3^2(v_1^4 - 2v_3^4)\big)\sqrt{v_1^4 + v_2^2 v_3^2 + 3v_1^2 v_2^2 v_3^2 S}.$$

Note que

$$0 = a_1^2 - b_1^2 = 27 v_1^8 v_2^2 v_3^4 (-1 + Sv_3^2)^2 (1 + Sv_2^2)\big(- v_2^2 + 3S(v_1^2 - v_3^2)^2\big),$$

ou seja,

$$S = \frac{v_2^2}{3(v_1^2 - v_3^2)^2}. \tag{3.25}$$

Em particular,

$$\sqrt{v_1^4 + v_2^2 v_3^2 + 3v_1^2 v_2^2 v_3^2 S} = \sqrt{\frac{(v_1^4 + v_3^4)^2}{(v_1^2 - v_3^2)^2}} = \kappa\left(\frac{v_1^4 + v_3^4}{v_1^2 - v_3^2}\right), \qquad \kappa = \pm 1. \tag{3.26}$$

Derivando a equação (3.25), em relação a u_3, e usando as equações do sistema (3.5) obtemos

$$\frac{\partial S}{\partial u_2} = -\frac{2(v_1^7V_1 + 3v_1^5v_3^2V_1 - 3v_1^2v_3^5V_3 - v_3^7V_3)}{3v_3^3(v_1^2 - v_3^2)^3V_3}\alpha_2.$$

Substituindo, na equação anterior, as expressões de V_1 e V_3, dadas em (3.1), e (3.26), obtemos que

$$\frac{\partial S}{\partial u_2} = \frac{2\lambda v_2^2(v_1^4 + v_3^4)\big((v_1^4 + 4v_1^2v_3^2 + v_3^4) + \lambda\delta\kappa(v_1^4 + 3v_1^2v_3^2 + v_3^4)\big)}{9v_1v_3^4(v_1^2 - v_3^2)^3V_3}\alpha_2 \neq 0,$$

o que contradiz o fato de S ser constante. □

Lema 3.6. *Não existe um aberto $U \subset M^3$ tal que $\alpha_i(p) = 0$, $\alpha_j(p) \neq 0$ e $\alpha_k(p) \neq 0$, para todo $p \in U$, $1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq 3$.*

Demonstração. Suponha que exista um subconjunto aberto $U \subset M^3$ em que $\alpha_1(p) = 0$, $\alpha_2(p) \neq 0$ e $\alpha_3(p) \neq 0$, para todo $p \in U$. Assim, segue das equações em (3.10) e da equação (3.7) que $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ e $\frac{\partial \alpha_1}{\partial u_1} = 0$, ou seja, α_2^2 e α_3^2 satisfazem o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 9v_1^8v_2^2(F_{25} + \lambda\delta F_{26})\alpha_2^2 + 9v_2^8v_3^2(F_{27} + \lambda\delta F_{28})\alpha_3^2 = -v_1^2v_2^2v_3^2(F_{21} + \lambda\delta F_{22}), \\ 9v_1^8v_2^2(F_{35} + \lambda\delta F_{36})\alpha_2^2 + 9v_2^8v_3^2(F_{37} + \lambda\delta F_{38})\alpha_3^2 = -v_1^2v_2^2v_3^2(F_{31} + \lambda\delta F_{32}), \\ \dfrac{v_1^5\big(2v_1v_2V_1 + (v_1^2 - 2v_3^2)V_2\big)V_1}{v_2v_3^6V_3^2}\alpha_2^2 + \dfrac{v_2^3\big(3v_1^3V_1 - v_2(v_1^2 + 2v_2^2)V_2\big)V_2}{v_1v_3^5V_1V_3}\alpha_3^2 = -\dfrac{v_1v_2V_1V_2}{v_3^2}, \end{cases}$$

o qual implica que

$$det\begin{pmatrix} 9v_1^8v_2^2(F_{25} + \lambda\delta F_{26}) & 9v_2^8v_3^2(F_{27} + \lambda\delta F_{28}) & v_1^2v_2^2v_3^2(F_{21} + \lambda\delta F_{22}) \\ 9v_1^8v_2^2(F_{35} + \lambda\delta F_{36}) & 9v_2^8v_3^2(F_{37} + \lambda\delta F_{38}) & v_1^2v_2^2v_3^2(F_{31} + \lambda\delta F_{32}) \\ \frac{v_1^5\left(2v_1v_2V_1 + (v_1^2 - 2v_3^2)V_2\right)V_1}{v_2v_3^6V_3^2} & \frac{v_2^3\left(3v_1^3V_1 - v_2(v_1^2 + 2v_2^2)V_2\right)V_2}{v_1v_3^5V_1V_3} & \frac{v_1v_2V_1V_2}{v_3^2} \end{pmatrix} = 0.$$

Calculando o determinante podemos concluir que

$$x_2 + \lambda\delta y_2 = 0,$$

em que x_2 e y_2 estão definidos na Seção 3.3. Note que

$$0 = x_2^2 - y_2^2 = 2^2 3^{19} v_1^{50} v_2^{26} v_3^{26} S^2(-1 + Sv_1^2)^4(1 + Sv_2^2)^4(-1 + Sv_3^2)^3 P_1(v_1, v_2),$$

onde

$$\begin{aligned} P_1(v_1, v_2) &= \Big(S^2(24 + 15Sv_2^2 + 100S^2v_2^4)\Big)v_1^{10} - \Big(5S^2v_2^2(9 + 23Sv_2^2 + 40S^2v_2^4)\Big)v_1^8 \\ &\quad + \Big((8 - 3Sv_2^2 + 45S^2v_2^4 + 200S^3v_2^6 + 100S^4v_2^8)\Big)v_1^6 \\ &\quad - \Big(v_2^2(7 + 25Sv_2^2 + 100S^3v_2^6)\Big)v_1^4 + \Big(7v_2^4(1 + 8Sv_2^2)\Big)v_1^2 - 28Sv_2^8. \end{aligned}$$

Diminuindo o aberto U, se necessário, podemos supor que as funções $-1 + Sv_1^2$, $1 + Sv_2^2$ e $-1 + Sv_3^2$ não se anulem em nenhum ponto de U, pelo Lema 3.3. Desde que $S \neq 0$, a função $P_1(v_1, v_2)$ é identicamente zero em U. Note que a aplicação $(v_1, v_2) : U \to \mathbb{R}^2$, $u \longmapsto (v_1(u), v_2(u))$ tem posto 2 em todos os pontos de U e, portanto, tem como imagem um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. De fato, segue das equações em (3.5) que

$$det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial v_2}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial u_3} & \dfrac{\partial v_2}{\partial u_3} \end{pmatrix} = -\frac{3\delta v_1^3 v_2}{v_3^2 V_3}\sqrt{v_1^4 + v_2^2v_3^2 + 3v_1^2v_2^2v_3^2 S} \neq 0.$$

Desde que $P_1(v_1, v_2)$ é um polinômio em v_1, seus coeficientes devem ser todos iguais a zero, em particular

$$28Sv_2^8 = 0,$$

o que é um absurdo, já que $S \neq 0$ e $v_2 > 0$. □

3.2 Demonstração do Teorema D

A demonstração do teorema D segue da Proposição 1.3 e dos resultados obtidos na seção anterior:

Demonstração do Teorema D: Basta provar que a curvatura de Gauss-Kronecker de f é identicamente zero, o que implica em f ter uma curvatura principal identicamente zero, e usar a Proposição 1.3 para concluir a demonstração do teorema.

Suponha que exista um ponto de M^3 no qual a curvatura de Gauss-Kronecker de f seja não nula. Por continuidade e pela recíproca do Corolário 3.1, existe um subconjunto aberto $U \subset M^3$ tal que a curvatura de Gauss-Kronecker de f não se anula em nenhum ponto do aberto U e $f|_U : U \to \mathbb{R}^4$ é uma hipersuperfície holonômica com par associado (v, V) satisfazendo as equações em (3.1). Assim, $f|_U$ satisfaz as hipóteses da Proposição 3.1 e, portanto, seu par associado (v, α) satisfaz as condições dos Lemas 3.1-3.6.

Pelo Lema 3.1, existem um subconjunto aberto $U_1 \subset U$ e $i \in \{1, 2, 3\}$, tais que $\alpha_i(p) \neq 0$ para todo $p \in U_1$. Segue do Lema 3.5 que existe um subconjunto aberto $U_2 \subset U_1$ e $j \in \{1, 2, 3\}$, $j \neq i$, tal que $\alpha_j(q) \neq 0$ para todo $q \in U_2$. Finalmente, segue do Lema 3.6 que existe um ponto $p_0 \in U_2$ tal que $\alpha_k(p_0) \neq 0$, $k \neq i, j$. Assim, mostramos que existe $p_0 \in U$ tal que $\alpha_1(p_0) \neq 0$, $\alpha_2(p_0) \neq 0$ e $\alpha_3(p_0) \neq 0$, o que contradiz o Lema 3.4. Portanto, a curvatura de Gauss-Kronecker de f é identicamente nula. □

3.3 As funções F_1, F_2 e F_3

Nesta seção apresentamos as funções F_i e F_{ik}, $i = 1, 2, 3$ e $k = 1, ..., 8$, assim como as funções x_2 e y_2.

$$
\begin{aligned}
F_1 &= v_1^2 v_2^2 v_3^2 (F_{11} + \lambda\delta F_{12}) + 9 v_1^2 v_3^8 (F_{13} + \lambda\delta F_{14}) \alpha_1^2 \\
&\quad + 9 v_1^8 v_2^2 (F_{15} + \lambda\delta F_{16}) \alpha_2^2 + 9 v_2^8 v_3^2 (F_{17} + \lambda\delta F_{18}) \alpha_3^2; \\
F_2 &= v_1^2 v_2^2 v_3^2 (F_{21} + \lambda\delta F_{22}) + 9 v_1^2 v_3^8 (F_{23} + \lambda\delta F_{24}) \alpha_1^2 \\
&\quad + 9 v_1^8 v_2^2 (F_{25} + \lambda\delta F_{26}) \alpha_2^2 + 9 v_2^8 v_3^2 (F_{27} + \lambda\delta F_{28}) \alpha_3^2; \\
F_3 &= v_1^2 v_2^2 v_3^2 (F_{31} + \lambda\delta F_{32}) + 9 v_1^2 v_3^8 (F_{33} + \lambda\delta F_{34}) \alpha_1^2 \\
&\quad + 9 v_1^8 v_2^2 (F_{35} + \lambda\delta F_{36}) \alpha_2^2 + 9 v_2^8 v_3^2 (F_{37} + \lambda\delta F_{38}) \alpha_3^2;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{11} &= (v_2^2+v_3^2)\big[(64v_2^{16}-208v_2^{14}v_3^2+280v_2^{12}v_3^4-277v_2^{10}v_3^6+286v_2^8v_3^8-277v_2^6v_3^{10}\\
&+280v_2^4v_3^{12}-208v_2^2v_3^{14}+64v_3^{16})+\ 3Sv_1^2v_2^2v_3^2\big(2(16v_2^{12}-42v_2^{10}v_3^2+30v_2^8v_3^4\\
&-13v_2^6v_3^6+30v_2^4v_3^8-42v_2^2v_3^{10}+16v_3^{12})-3Sv_1^2v_2^2v_3^2(28v_2^8-35v_2^6v_3^2+9v_2^4v_3^4\\
&-35v_2^2v_3^6+28v_3^8)-9S^2v_1^4v_2^4v_3^4(v_1^2+v_2^2)(v_1^2-v_3^2)+54S^3v_1^6v_2^6v_3^6\big)\big];\\
F_{12} &= \big[(64v_2^{16}-112v_2^{14}v_3^2-8v_2^{12}v_3^4+29v_2^{10}v_3^6+46v_2^8v_3^8+29v_2^6v_3^{10}-8v_2^4v_3^{12}\\
&-112v_2^2v_3^{14}+64v_3^{16})+9Sv_1^2v_2^4v_3^4\big(-2(v_1^2+v_2^2)(v_2^2+v_3^2)^2(v_1^2-v_3^2)\\
&-Sv_1^2(20v_2^8-v_2^6v_3^2-15v_2^4v_3^4-v_2^2v_3^6+20v_3^8)\\
&+3S^2v_1^4v_2^2v_3^2(4v_2^4+5v_2^2v_3^2+4v_3^4)\big)\big]\sqrt{v_1^4+v_2^2v_3^2+3v_1^2v_2^2v_3^2S};\\
F_{13} &= (16v_2^{14}+4v_2^{12}v_3^2-3v_2^{10}v_3^4-10v_2^8v_3^6-13v_2^6v_3^8+24v_2^4v_3^{10}-80v_2^2v_3^{12}+64v_3^{14})\\
&+9Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((2v_2^{10}-5v_2^8v_3^2-17v_2^6v_3^4+8v_2^4v_3^6-32v_2^2v_3^8+40v_3^{10})\\
&-3Sv_1^2v_2^2v_3^2(3v_2^6+3v_2^4v_3^2+4v_2^2v_3^4-20v_3^6)+15S^2v_1^4v_2^4v_3^4(v_2^2+v_3^2)\big);\\
F_{14} &= \big[(16v_2^{12}+12v_2^{10}v_3^2-3v_2^8v_3^4-19v_2^6v_3^6-24v_2^4v_3^8-48v_2^2v_3^{10}+64v_3^{12})\\
&+9Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((2v_2^{10}-5v_2^8v_3^2-17v_2^6v_3^4+8v_2^4v_3^6-32v_2^2v_3^8+40v_3^{10})\\
&-3Sv_1^2v_2^2v_3^2(3v_2^6+3v_2^4v_3^2+4v_2^2v_3^4-20v_3^6)\\
&+15S^2v_1^4v_2^4v_3^4(v_2^2+v_3^2)\big)\big]\sqrt{v_1^4+v_2^2v_3^2+3v_1^2v_2^2v_3^2S};\\
F_{15} &= (64v_2^{14}-80v_2^{12}v_3^2+24v_2^{10}v_3^4-13v_2^8v_3^6-10v_2^6v_3^8-3v_2^4v_3^{10}+4v_2^2v_3^{12}+16v_3^{14})\\
&+9Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((40v_2^{10}-48v_2^8v_3^2+4v_2^6v_3^4-8v_2^4v_3^6-3v_2^2v_3^8+16v_3^{10})\\
&+6Sv_1^2v_2^2v_3^2(10v_2^6-13v_2^4v_3^2-4v_2^2v_3^4+v_3^6)+15S^2v_1^4v_2^4v_3^4(v_1^2-v_3^2)\big);\\
F_{16} &= \big[(64v_2^{12}-48v_2^{10}v_3^2-24v_2^8v_3^4-19v_2^6v_3^6-3v_2^4v_3^8+12v_2^2v_3^{10}+16v_3^{12})\\
&+3Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((88v_2^8-92v_2^6v_3^2-39v_2^4v_3^4+v_2^2v_3^6+40v_3^8)\\
&+36Sv_1^2v_2^2v_3^2(2v_2^4-3v_2^2v_3^2-v_3^4)\big)\big]\sqrt{v_1^4+v_2^2v_3^2+3v_1^2v_2^2v_3^2S};\\
F_{17} &= (v_2^2+v_3^2)(16v_2^{12}-60v_2^{10}v_3^2+93v_2^8v_3^4-94v_2^6v_3^6+93v_2^4v_3^8-60v_2^2v_3^{10}+16v_3^{12})\\
&+9Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((16v_2^{10}-47v_2^8v_3^2+44v_2^6v_3^4+4v_2^4v_3^6-11v_2^2v_3^8+2v_3^{10})\\
&+3Sv_1^2v_2^2v_3^2(2v_2^6-4v_2^4v_3^2+6v_2^2v_3^4-3v_3^6)-15S^2v_1^4v_2^4v_3^4(v_1^2+v_2^2)\big);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{18} &= \Big[(16v_2^{12} - 36v_2^{10}v_3^2 + 9v_2^8v_3^4 + 14v_2^6v_3^6 + 9v_2^4v_3^8 - 36v_2^2v_3^{10} + 16v_3^{12}) \\
&+ 3Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((40v_2^8 - 107v_2^6v_3^2 + 69v_2^4v_3^4 - 20v_2^2v_3^6 - 2v_3^8) \\
&- 18Sv_1^2v_2^2v_3^2(2v_2^4 - 4v_2^2v_3^2 + v_3^4)\big)\Big]\sqrt{v_1^4 + v_2^2v_3^2 + 3v_1^2v_2^2v_3^2S}; \\
F_{21} &= (v_1^2 - v_3^2)\Big[(64v_1^{16} + 208v_1^{14}v_3^2 + 280v_1^{12}v_3^4 + 277v_1^{10}v_3^6 + 286v_1^8v_3^8 + 277v_1^6v_3^{10} \\
&+ 280v_1^4v_3^{12} + 208v_1^2v_3^{14} + 64v_3^{16}) + 3v_1^2v_2^2v_3^2S\big(2(16v_1^{12} + 42v_1^{10}v_3^2 + 30v_1^8v_3^4 \\
&+ 13v_1^6v_3^6 + 30v_1^4v_3^8 + 42v_1^2v_3^{10} + 16v_3^{12}) - 3Sv_1^2v_2^2v_3^2(28v_1^8 + 35v_1^6v_3^2 + 9v_1^4v_3^4 \\
&+ 35v_1^2v_3^6 + 28v_3^8) - 9S^2v_1^4v_2^4v_3^4(v_1^2 + v_2^2)(v_2^2 + v_3^2) + 54S^3v_1^6v_2^6v_3^6\big)\Big]; \\
F_{22} &= \Big[(64v_1^{16} + 112v_1^{14}v_3^2 - 8v_1^{12}v_3^4 - 29v_1^{10}v_3^6 + 46v_1^8v_3^8 - 29v_1^6v_3^{10} - 8v_1^4v_3^{12} \\
&+ 112v_1^2v_3^{14} + 64v_3^{16}) + 9Sv_1^4v_2^2v_3^4\big(2(v_1^2 - v_3^2)^2(v_1^2 + v_2^2)(v_2^2 + v_3^2) \\
&- Sv_2^2(20v_1^8 + v_1^6v_3^2 - 15v_1^4v_3^4 + v_1^2v_3^6 + 20v_3^8) \\
&+ 3S^2v_1^2v_2^4v_3^2(4v_1^4 - 5v_1^2v_3^2 + 4v_3^4)\big)\Big]\sqrt{v_1^4 + v_2^2v_3^2 + 3v_1^2v_2^2v_3^2S}; \\
F_{23} &= (v_1^2 - v_3^2)(16v_1^{12} + 60v_1^{10}v_3^2 + 93v_1^8v_3^4 + 94v_1^6v_3^6 + 93v_1^4v_3^8 + 60v_1^2v_3^{10} + 16v_3^{12}) \\
&+ 9Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((2v_1^{10} + 11v_1^8v_3^2 + 4v_1^6v_3^4 - 44v_1^4v_3^6 - 47v_1^2v_3^8 - 16v_3^{10}) \\
&- 3Sv_1^2v_2^2v_3^2(3v_1^6 + 6v_1^4v_3^2 + 4v_1^2v_3^4 + 2v_3^6) + 15S^2v_1^4v_2^4v_3^4(v_2^2 + v_3^2)\big); \\
F_{24} &= \Big[(16v_1^{12} + 36v_1^{10}v_3^2 + 9v_1^8v_3^4 - 14v_1^6v_3^6 + 9v_1^4v_3^8 + 36v_1^2v_3^{10} + 16v_3^{12}) \\
&- 3Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((2v_1^8 - 20v_1^6v_3^2 - 69v_1^4v_3^4 - 107v_1^2v_3^6 - 40v_3^8) \\
&+ 18Sv_1^2v_2^2v_3^2(v_1^4 + 4v_1^2v_3^2 + 2v_3^4)\big)\Big]\sqrt{v_1^4 + v_2^2v_3^2 + 3v_1^2v_2^2v_3^2S}; \\
F_{25} &= (64v_1^{14} + 80v_1^{12}v_3^2 + 24v_1^{10}v_3^4 + 13v_1^8v_3^6 - 10v_1^6v_3^8 + 3v_1^4v_3^{10} + 4v_1^2v_3^{12} - 16v_3^{14}) \\
&+ 9Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((40v_1^{10} + 32v_1^8v_3^2 + 8v_1^6v_3^4 + 17v_1^4v_3^6 - 5v_1^2v_3^8 - 2v_3^{10}) \\
&+ 3Sv_1^2v_2^2v_3^2(20v_1^6 + 4v_1^4v_3^2 - 3v_1^2v_3^4 + 3v_3^6) + 15S^2v_1^4v_2^4v_3^4(v_1^2 - v_3^2)\big); \\
F_{26} &= \Big[(64v_1^{12} + 48v_1^{10}v_3^2 - 24v_1^8v_3^4 + 19v_1^6v_3^6 - 3v_1^4v_3^8 - 12v_1^2v_3^{10} + 16v_3^{12}) \\
&+ 3Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((88v_1^8 + 44v_1^6v_3^2 - 3v_1^4v_3^4 + 26v_1^2v_3^6 - 2v_3^8) \\
&+ 18Sv_1^2v_2^2v_3^2(4v_1^4 - v_1^2v_3^2 - v_3^4)\big)\Big]\sqrt{v_1^4 + v_2^2v_3^2 + 3v_1^2v_2^2v_3^2S};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{27} = {} & (16v_1^{14} - 4v_1^{12}v_3^2 - 3v_1^{10}v_3^4 + 10v_1^8v_3^6 - 13v_1^6v_3^8 - 24v_1^4v_3^{10} - 80v_1^2v_3^{12} - 64v_3^{14}) \\
& + 9Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((16v_1^{10} + 3v_1^8v_3^2 - 8v_1^6v_3^4 - 4v_1^4v_3^6 - 48v_1^2v_3^8 - 40v_3^{10}) \\
& + 6Sv_1^2v_2^2v_3^2(v_1^6 + 4v_1^4v_3^2 - 13v_1^2v_3^4 - 10v_3^6) - 15S^2v_1^4v_2^4v_3^4(v_1^2 + v_2^2)\big); \\
F_{28} = {} & \big[(16v_1^{12} - 12v_1^{10}v_3^2 - 3v_1^8v_3^4 + 19v_1^6v_3^6 - 24v_1^4v_3^8 + 48v_1^2v_3^{10} + 64v_3^{12}) \\
& + 3Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((40v_1^8 - v_1^6v_3^2 - 39v_1^4v_3^4 + 92v_1^2v_3^6 + 88v_3^8) \\
& - 36Sv_1^2v_2^2v_3^2(v_1^4 - 3v_1^2v_3^2 - 2v_3^4)\big)\big]\sqrt{v_1^4 + v_2^2v_3^2 + 3v_1^2v_2^2v_3^2S}; \\
F_{31} = {} & (v_1^2 + v_2^2)\big[(64v_1^{16} - 208v_1^{14}v_2^2 + 280v_1^{12}v_2^4 - 277v_1^{10}v_2^6 + 286v_1^8v_2^8 - 277v_1^6v_2^{10} \\
& + 280v_1^4v_2^{12} - 208v_1^2v_2^{14} + 64v_2^{16}) - 3Sv_1^2v_2^2v_3^2\big(-2(16v_1^{12} - 42v_1^{10}v_2^2 + 30v_1^8v_2^4 \\
& - 13v_1^6v_2^6 + 30v_1^4v_2^8 - 42v_1^2v_2^{10} + 16v_2^{12}) + 3Sv_1^2v_2^2v_3^2(28v_1^8 - 35v_1^6v_2^2 + 9v_1^4v_2^4 \\
& - 35v_1^2v_2^6 + 28v_2^8) - 9S^2v_1^4v_2^4v_3^4(v_1^2 - v_3^2)(v_2^2 + v_3^2) - 54S^3v_1^6v_2^6v_3^6\big)\big]; \\
F_{32} = {} & \big[-(64v_1^{16} - 112v_1^{14}v_2^2 - 8v_1^{12}v_2^4 + 29v_1^{10}v_2^6 + 46v_1^8v_2^8 + 29v_1^6v_2^{10} - 8v_1^4v_2^{12} \\
& - 112v_1^2v_2^{14} + 64v_2^{16}) - 9Sv_1^4v_2^4v_3^2\big(2(v_1^2 - v_3^2)(v_1^2 + v_2^2)^2(v_2^2 + v_3^2) \\
& - Sv_3^2(20v_1^8 - v_1^6v_2^2 - 15v_1^4v_2^4 - v_1^2v_2^6 + 20v_2^8) \\
& + 3S^2v_1^2v_2^2v_3^4(4v_1^4 + 5v_1^2v_2^2 + 4v_2^4)\big)\big]\sqrt{v_1^4 + v_2^2v_3^2 + 3v_1^2v_2^2v_3^2S}; \\
F_{33} = {} & (64v_1^{14} - 80v_1^{12}v_2^2 + 24v_1^{10}v_2^4 - 13v_1^8v_2^6 - 10v_1^6v_2^8 - 3v_1^4v_2^{10} + 4v_1^2v_2^{12} + 16v_2^{14}) \\
& - 9Sv_1^2v_2^2v_3^2\big(-(40v_1^{10} - 48v_1^8v_2^2 + 4v_1^6v_2^4 - 8v_1^4v_2^6 - 3v_1^2v_2^8 + 16v_2^{10}) \\
& + 6Sv_1^2v_2^2v_3^2(-10v_1^6 + 13v_1^4v_2^2 + 4v_1^2v_2^4 - v_2^6) + 15S^2v_1^4v_2^4v_3^4(v_2^2 + v_3^2)\big); \\
F_{34} = {} & \big[-(64v_1^{12} - 48v_1^{10}v_2^2 - 24v_1^8v_2^4 - 19v_1^6v_2^6 - 3v_1^4v_2^8 + 12v_1^2v_2^{10} + 16v_2^{12}) \\
& + 3Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((-88v_1^8 + 92v_1^6v_2^2 + 39v_1^4v_2^4 - v_1^2v_2^6 - 40v_2^8) \\
& + 36Sv_1^2v_2^2v_3^2(-2v_1^4 + 3v_1^2v_2^2 + v_2^4)\big)\big]\sqrt{v_1^4 + v_2^2v_3^2 + 3v_1^2v_2^2v_3^2S}; \\
F_{35} = {} & (v_1^2 + v_2^2)(16v_1^{12} - 60v_1^{10}v_2^2 + 93v_1^8v_2^4 - 94v_1^6v_2^6 + 93v_1^4v_2^8 - 60v_1^2v_2^{10} + 16v_2^{12}) \\
& + 9Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((16v_1^{10} - 47v_1^8v_2^2 + 44v_1^6v_2^4 + 4v_1^4v_2^6 - 11v_1^2v_2^8 + 2v_2^{10}) \\
& + 3Sv_1^2v_2^2v_3^2(2v_1^6 - 4v_1^4v_2^2 + 6v_1^2v_2^4 - 3v_2^6) - 15S^2v_1^4v_2^4v_3^4(v_1^2 - v_3^2)\big);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{36} \;=\;& \Big[-(16v_1^{12}-36v_1^{10}v_2^2+9v_1^8v_2^4+14v_1^6v_2^6+9v_1^4v_2^8-36v_1^2v_2^{10}+16v_2^{12})\\
&+3Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((-40v_1^8+107v_1^6v_2^2-69v_1^4v_2^4+20v_1^2v_2^6+2v_2^8)\\
&+18Sv_1^2v_2^2v_3^2(2v_1^4-4v_1^2v_2^2+v_2^4)\big)\Big]\sqrt{v_1^4+v_2^2v_3^2+3v_1^2v_2^2v_3^2S};\\
F_{37} \;=\;& (16v_1^{14}+4v_1^{12}v_2^2-3v_1^{10}v_2^4-10v_1^8v_2^6-13v_1^6v_2^8+24v_1^4v_2^{10}-80v_1^2v_2^{12}+64v_2^{14})\\
&-9Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((-2v_1^{10}+5v_1^8v_2^2+17v_1^6v_2^4-8v_1^4v_2^6+32v_1^2v_2^8-40v_2^{10})\\
&+3Sv_1^2v_2^2v_3^2(3v_1^6+3v_1^4v_2^2+4v_1^2v_2^4-20v_2^6)-15S^2v_1^4v_2^4v_3^4(v_1^2+v_2^2)\big);\\
F_{38} \;=\;& \Big[-(16v_1^{12}+12v_1^{10}v_2^2-3v_1^8v_2^4-19v_1^6v_2^6-24v_1^4v_2^8-48v_1^2v_2^{10}+64v_2^{12})\\
&-3Sv_1^2v_2^2v_3^2\big((-2v_1^8-26v_1^6v_2^2-3v_1^4v_2^4-44v_1^2v_2^6+88v_2^8)\\
&+18Sv_1^2v_2^2v_3^2(-v_1^4+v_1^2v_2^2+4v_2^4)\big)\Big]\sqrt{v_1^4+v_2^2v_3^2+3v_1^2v_2^2v_3^2S};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 =\;& 18Sv_1^{17}v_2^4v_3^3\Big[\big(-2048v_1^{30}-14592v_1^{28}v_3^2-44352v_1^{26}v_3^4-74672v_1^{24}v_3^6-75408v_1^{22}v_3^8\\
&-45441v_1^{20}v_3^{10}-13976v_1^{18}v_3^{12}-261v_1^{16}v_3^{14}+432v_1^{14}v_3^{16}-427v_1^{12}v_3^{18}-13776v_1^{10}v_3^{20}\\
&-38511v_1^8v_3^{22}-49240v_1^6v_3^{24}-33744v_1^4v_3^{26}-12096v_1^2v_3^{28}-1792v_3^{30}\big)\\
&-9Sv_1^4v_2^2v_3^2\big(256v_1^{24}+768v_1^{22}v_3^2-1776v_1^{20}v_3^4-11680v_1^{18}v_3^6-21987v_1^{16}v_3^8\\
&-18891v_1^{14}v_3^{10}-6213v_1^{12}v_3^{12}+198v_1^{10}v_3^{14}-225v_1^8v_3^{16}+29v_1^6v_3^{18}+609v_1^4v_3^{20}\\
&+480v_1^2v_3^{22}+112v_3^{24}\big)+\;27S^2v_1^4v_2^4v_3^4\big(192v_1^{22}+1424v_1^{20}v_3^2+4336v_1^{18}v_3^4+6858v_1^{16}v_3^6\\
&+5808v_1^{14}v_3^8+2337v_1^{12}v_3^{10}+126v_1^{10}v_3^{12}-282v_1^8v_3^{14}+570v_1^6v_3^{16}+1167v_1^4v_3^{18}\\
&+664v_1^2v_3^{20}+128v_3^{22}\big)-27S^3v_1^6v_2^6v_3^6(592v_1^{18}+4032v_1^{16}v_3^2+10854v_1^{14}v_3^4\\
&+13902v_1^{12}v_3^6+7326v_1^{10}v_3^8-189v_1^8v_3^{10}-609v_1^6v_3^{12}+387v_1^4v_3^{14}+513v_1^2v_3^{16}+128v_3^{18}\big)\\
&+729S^4v_1^8v_2^8v_3^8\big(32v_1^{14}+75v_1^{12}v_3^2-20v_1^{10}v_3^4-166v_1^8v_3^6-100v_1^6v_3^8+41v_1^4v_3^{10}\\
&+128v_1^2v_3^{12}+46v_3^{14}\big)+729S^5v_1^{10}v_2^{10}v_3^10\big(63v_1^{10}+247v_1^8v_3^2+368v_1^6v_3^4+177v_1^4v_3^6\\
&-142v_1^2v_3^8-92v_3^{10}\big)-1458S^6v_1^{12}v_2^{12}v_3^{12}\big(62v_1^6+96v_1^4v_3^2+18v_1^2v_3^4-23v_3^6\big)\\
&+32805S^7v_1^{16}v_2^{14}v_3^{14}\Big];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2 = {} & 18Sv_1^{17}v_2^4v_3^3\big[\big(-2048v_1^{28} - 13568v_1^{26}v_3^2 - 36800v_1^{24}v_3^4 - 51568v_1^{22}v_3^6 - 38320v_1^{20}v_3^8 \\
& - 13405v_1^{18}v_3^{10} - 1029v_1^{16}v_3^{12} + 726v_1^{14}v_3^{14} + 6v_1^{12}v_3^{16} - 529v_1^{10}v_3^{18} + 14447v_1^8v_3^{20} \\
& + 31640v_1^6v_3^{22} + 27472v_1^4v_3^{24} + 11200v_1^2v_3^{26} + 1792v_3^{28}\big) \\
& + 3Sv_1^2v_2^2v_3^2\big(256v_1^{24} + 3840v_1^{22}v_3^2 + 18192v_1^{20}v_3^4 + 40736v_1^{18}v_3^6 + 46125v_1^{16}v_3^8 \\
& + 21537v_1^{14}v_3^{10} - 1974v_1^{12}v_3^{12} - 1062v_1^{10}v_3^{14} + 3033v_1^8v_3^{16} - 1915v_1^6v_3^{18} - 6864v_1^4v_3^{20} \\
& - 4368v_1^2v_3^{22} - 896v_3^{24}\big) + 27S^2v_1^4v_2^4v_3^4\big(64v_1^{20} + 336v_1^{18}v_3^2 + 720v_1^{16}v_3^4 + 978v_1^{14}v_3^6 \\
& + 1287v_1^{12}v_3^8 + 1260v_1^{10}v_3^{10} - 42v_1^8v_3^{12} - 990v_1^6v_3^{14} - 117v_1^4v_3^{16} + 296v_1^2v_3^{18} + 96v_3^{20}\big) \\
& - 81S^3v_1^6v_2^6v_3^6\big(176v_1^{16} + 1088v_1^{14}v_3^2 + 2618v_1^{12}v_3^4 + 2834v_1^{10}v_3^6 + 875v_1^8v_3^8 - 637v_1^6v_3^{10} \\
& - 301v_1^4v_3^{12} + 179v_1^2v_3^{14} + 80v_3^{16}\big) + 243S^4v_1^8v_2^8v_3^8\big(160v_1^{12} + 525v_1^{10}v_3^2 + 507v_1^8v_3^4 \\
& - 35v_1^6v_3^6 - 390v_1^4v_3^8 - 165v_1^2v_3^{10} - 44v_3^{12}\big) - 729S^5v_1^{10}v_2^{10}v_3^{10}\big(21v_1^8 + v_1^6v_3^2 - 135v_1^4v_3^4 \\
& - 123v_1^2v_3^6 - 70v_3^8\big) - 729S^6v_1^{12}v_2^{12}v_3^12\big(41v_1^4 + 65v_1^2v_3^2 + 80v_3^4\big) \\
& + 21870S^7v_1^{14}v_2^{14}v_3^{14}\big]\sqrt{v_1^4 + v_2^2v_3^2 + 3v_1^2v_2^2v_3^2S}.
\end{aligned}
$$

Referências Bibliográficas

[1] Asperti, A., Dajczer, M., *Conformally fat Riemannian manifolds as hypersurfaces of the light cone,* Canadian Math. Bull. 32 (1989), 281-285.

[2] Besse, A. L., *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 10. Springer. New-York, Berlin (1987).

[3] Blair, D., *A generalization of the catenoid*, J. Math. 27 (1975), $231 - 236$.

[4] Canevari, S., Tojeiro, R., *Hypersurfaces of two space forms and conformally flat hypersurfaces*, In preparation.

[5] Cartan, É., *La déformation des hypersurfaces dans l'éspace conforme réell à $n \geq 5$ dimensions,* Bull. Soc. Math. France 45, (1917) 57-121.

[6] Dajczer, M., Florit, L., Tojeiro, R., *On a class of submanifolds carrying an extrinsic totally umbilical foliation*, Israel Journal of Math. 125 (2001), 203-220.

[7] Dajczer, M., Tojeiro, R., *An extension of the classical Ribaucour transformation*, Proc. London Math. Soc. (3) 85, 1 (2002), $211 - 232$.

[8] Dajczer, M. et al., *Submanifolds and isometric immersions.* Matematics Lecture Series 13, Publish or Perish Inc., Houston-Texas, 1990.

[9] Dajczer, M. and Tojeiro, R., *Submanifolds of constant sectional curvature with parallel or constant mean curvature*, Tohoku Math. J. 45 (1993), 43-49.

[10] Defever, F., *Conformally flat hypersurfaces of $\mathbb{E}^4$ with constant mean curvature*, Result. Math. 37 (2000), $p.\ 322 - 330$.

[11] Defever, F., *Conformally flat hypersurfaces with constant Gauss-Kronecker curvature*, Bull. Austral. Math. Soc., 61 (2000), $p.\ 207 - 216$.

[12] do Carmo, M. P., Dajczer, M., *Rotational hipersurfaces in spaces of constant curvature*, Transactions of the American Mathematical Society, 277, nº 2, (1983), p. $685 - 709$.

[13] do Carmo, M. P., Dajczer, M. and Mercuri, F., *Compact conformally flat hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 288 (1985), 189-203.

[14] Fialkow, A., *Hypersurfaces of a space of constant curvature*, Ann. of Math. 39 (1938), 762-785.

[15] Fukuoka, R., *Hipersuperfícies no Espaço Euclideano com condições sobre a geometria intrínseca*, Tese de doutorado, UNICAMP, 1999.

[16] Gauss, C. F., *Allgemeine Auflösung des Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*, Opera omnia t. *IV* (1825), p. 193.

[17] Herthich-Jeromin, U., *On conformally flat hypersurfaces and Guichard's nets*, Beitr. Algebra Geom. 35 (1994), $315 - 331$.

[18] Hertrich-Jeromin, U., *Introduction to Möbius differential geometry*, London Mathematical Society, 300 (2003).

[19] Ki. U., Nakagawa, H., Umehara, M., *On complete hypersurfaces wth harmonic curvature in a Riemannian manifold of constant curvature*, Tsukuba J. Math. 11 (1987), 61-76.

[20] Korn, A., *Zwei Anwendungen der Methode der suksessiven Annäherungen*, Scwarz Festschrift, Berlin, (1919), 215-229.

[21] Kuiper, N. H., *On conformally-flat spaces in the large*, Ann. of Math., 50 (1949), 916-924.

[22] Lafontaine, J., *Conformal geometry from the Riemannian viewpoint*, Aspects of Mathematics, 12 (1988), p. $65 - 92$.

[23] Lancaster, G., *Canonical metrics for certain conformally euclidean spaces of dimension three and codimension one*, Duke Math. J. 40 (1973), 1-8.

[24] Leite, M. L., *Rotational hipersurfaces of space forms with constant scalar curvature*, Manuscripta Math. 67 (1990), p. $285 - 304$.

[25] Lichtenstein, L., *neuere Entwicklung des Theorie partieller Differenzialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptichen Typus*, in Ens. d. Math. Wiss. 2.3.2, (1924), 1277-1334.

[26] Lichtenstein, L., *Zur theorie der konformen abbildung nichtanalytischer, singularitätenfreier Flächenstücke auf ebene gebiete*, Krak. Anz. (1916), 192-217.

[27] Lawson, H. B. Jr., *Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces*, Ann. Math. 89 (1969), 187-197.

[28] Meumertzheim, M., Reckziegel, H. and Schaaf, M., *Decomposition of twisted and warped product nets*. Result. Math. 36 (1999), 297-312.

[29] Nishikawa, S. and Maeda, Y., *Conformally flat hypersurfaces in a conformally flat manifold*, Tôhoku Math. J., 26 (1974), 159-168.

[30] Nölker, S., *Isometric immersions of warped products*, Diff. Geom. and Appl. 6 (1996), 1-30.

[31] Otsuki, T., *Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature*, Amer. J. Math. 92 (1970), 145-173.

[32] Reckziegel, H., *Hypersurfaces with parallel Ricci tensor in space of constant curvature*, Result. Math. 27 (1995), 113-116.

[33] Ryan, P. J., *Hypersurfaces with parallel Ricci tensor*, Osaka J. Math. 8 (1971), 251-259.

[34] Ryan, P., *Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces*, Tôhoku Math. J. 21 (1969), 363-388.

[35] Schouten, A. J., *Konforme abbildung $n-$dimensionaler mannigfaltigkeiten,* Math. Z. 11 (1921), 58-88.

[36] Shouten, A. J., *Ricci Calculus*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, (1954).

[37] Spivak, M., *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish, vol. 4, ed. 3, (1999).

[38] Thomas, T., *On closed spaces of constant mean curvature*, Amer. J. of Math. 58 (1936), 702-704.

[39] Umehara, M., *Hypersurfaces with harmonic curvature*, Tsukuba J. Math. 10 (1986), 79-88.