

Amauri Antunes Filho

**Restauração de imagens com precisão subpixel
utilizando restrições convexas**

Sorocaba, SP

09 de Dezembro de 2016

Amauri Antunes Filho

Restauração de imagens com precisão subpixel utilizando restrições convexas

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação (PPGCC-So) da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação. Linha de pesquisa: Teoria Aplicada à Computação.

Universidade Federal de São Carlos – UFSCar

Centro de Ciências em Gestão e Tecnologia – CCGT

Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação – PPGCC-So

Orientador: Prof. Dr. Murillo Rodrigo Petrucelli Homem

Sorocaba, SP

09 de Dezembro de 2016

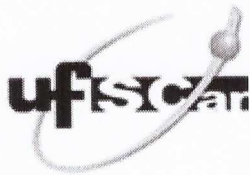
Filho, Amauri Antunes

Restauração de imagens com precisão subpixel utilizando restrições convexas / Amauri Antunes Filho. -- 2016.
109 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador: Prof. Dr. Murillo Rodrigo Petrucelli Homem
Banca examinadora: Prof. Dr. Márcio Alexandre Marques, Prof. Dr. Carlos Henrique da Silva Santos
Bibliografia

1. Super-Resolução. 2. Abordagem Espacial e Espectral. 3. Abordagem Híbrida. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências em Gestão e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Amauri Antunes Filho, realizada em 09/12/2016:

Prof. Dr. Murillo Rodrigo Petrucelli Homem
UFSCar

Prof. Dr. Márcio Alexandre Marques
UNESP

Prof. Dr. Carlos Henrique da Silva Santos
IFSP

*Dedico este trabalho a minha família,
por serem minha motivação, meu incentivo e meu porto seguro.*

Agradecimentos

Agradeço,

... ao meu orientador Prof. Dr. Murillo Rodrigo Petrucelli Homem por toda dedicação e paciência, incentivo e encorajamento para a conclusão deste trabalho.

... ao Prof. Dr. César Candido Xavier por todo o apoio e incentivo para iniciar o mestrado.

... a minha mãe que sempre deu apoio, incentivo, perseverando junto comigo em frente as dificuldades.

... a meu irmão e minha irmã, também pelo apoio, por serem também os meus motivadores, e também pela paciência em momentos de dificuldade.

... a todos professores e colegas com os quais convivi nesse período.

... aos membros da banca de defesa, Prof. Dr. Márcio Alexandre Marques e Prof. Dr. Carlos Henrique da Silva Santos.

... a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

*“O que prevemos raramente ocorre;
o que menos esperamos geralmente acontece.”
(Benjamin Disraeli)*

Resumo

A super-resolução tem por objetivo a obtenção de uma imagem de maior resolução, utilizando informações de uma ou mais imagens de baixa resolução. Existem diferentes aplicações onde a utilização da super-resolução é empregada, como imagens médicas e forenses. A proposta deste trabalho é o estudo e desenvolvimento de algoritmos, baseados no algoritmo de Tekalp e Sezan, que utilizam a teoria de projeções sobre conjuntos convexos com o objetivo de super-resolução, obtendo uma imagem de maior resolução a partir de um conjunto de imagens com informações subpixel. Propomos também, uma restrição convexa baseada no algoritmo de Richardson-Lucy, modificado para ser ponderado pelo filtro de Canny, juntamente com regularização *total variation*, com o intuito de restaurar frequências perdidas durante os processos de decimação e degradação das imagens de alta resolução. Com isso temos uma abordagem híbrida, que implementa super-resolução espacial e espectral simultaneamente, baseada em projeções sobre conjuntos convexos. Os resultados obtidos pelos algoritmos propostos foram comparados com o algoritmo base de Tekalp e Sezan. Para as comparações, levou-se em consideração a análise visual das imagens juntamente com o erro quadrático médio. No desenvolvimento, foram utilizadas imagens em tons de cinza, mas os métodos são extensíveis para imagens coloridas. Os resultados apresentaram melhoria nas imagens obtidas em relação as imagens de baixa resolução, minimizando o ruído, o borramento e melhor definição das bordas. Concluímos que a abordagem possui potencial para aplicações médicas e em computação forense.

Palavras-chaves: Super-Resolução. POCS. Abordagem Espectral. Abordagem Híbrida.

Abstract

The super-resolution aims to obtain a higher resolution image, using information from one or more low resolution images. There are different applications where super-resolution may be used, such as medical and forensic images. This work proposes a study and development of algorithms, based on Tekalp and Sezan's algorithm, using the projection onto convex sets theory, in order to obtain super-resolution, therefore obtaining a higher resolution image, from a low resolution images set, with subpixel informations. We proposed the addition of a convex restriction based on Richardson-Lucy's algorithm, modified to be weighted by Canny's filter, along with total variation regularization, aiming to restore frequencies lost during high resolution images decimation and degradation processes . Therefore, we have a hybrid approach, that implements spatial and spectral super-resolution simultaneously, based on projection onto convex sets. The obtained results by the proposed algorithms were compared to Tekalp and Sezan's base algorithm. The visual analysis of the images, along with the mean square error were taken in consideration for comparisons. In development, grayscale images were used, but the methods are extensible for color images. Results showed improvement in the obtained images, with less noise, blurring and more edge definition than the low resolution images. We conclude that the approach has potential for medical applications and forensic computation.

Key-words: Super-Resolution. POCS. Spectral Approach. Spectral Approach. Hybrid Approach.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Interpolação a partir de uma grade não uniforme.	40
Figura 2 – (a) o <i>pixel</i> (i, j) está completamente dentro do <i>pixel</i> (k, l) e completamente fora do <i>pixel</i> $(k + 1, l + 1)$; (b) o <i>pixel</i> (i, j) está parcialmente dentro do <i>pixel</i> (k, l)	42
Figura 3 – Processo de obtenção da imagem de baixa resolução.	43
Figura 4 – Frequências após a aplicação de um operador de média de diferentes dimensões.	44
Figura 5 – Ilustração do conceito de convexidade para conjuntos no plano: (a) convexo; (b) não convexo.	48
Figura 6 – Ilustração do processo iterativo do algoritmo de POCS.	51
Figura 7 – Ilustração do comportamento do algoritmo de POCS sequencial para o caso de dois conjuntos que não se intersectam.	51
Figura 8 – Conjunto de imagens EIA - (a) Imagem Original e (b) Versão LR degradada e ruidosa.	65
Figura 9 – Imagens decimadas utilizadas como imagem inicial para os algoritmos.	66
Figura 10 – Imagens interpoladas utilizadas como imagem inicial para os algoritmos.	66
Figura 11 – Imagens de baixa resolução em escala.	67
Figura 12 – Diagrama com a sequência de projeções para o POCS1.	71
Figura 13 – Diagrama com a sequência de projeções para o POCS2.	71
Figura 14 – Diagrama com a sequência de projeções para o POCS3.	72
Figura 15 – Imagens obtidas pelo POCS1, POCS2 e POCS3.	73
Figura 16 – Diagrama com a sequência de projeções para o POCS4.	75
Figura 17 – Imagens obtidas pelo POCS4 para o conjunto com 10 imagens.	76
Figura 18 – Imagens obtidas pelo POCS4 para o conjunto com 16 imagens.	76
Figura 19 – Diagrama com a sequência de projeções para o POCS5.	77
Figura 20 – Imagens obtidas pelo POCS5 com $\lambda = 0.1$	78
Figura 21 – Imagens obtidas pelo POCS5 com 50 iterações e valores de λ com 0.001 e 0.0001	79
Figura 22 – Imagens obtidas pelo POCS5 com 10 iterações e valores de λ com 0.001 e 0.0001	80
Figura 23 – Diagrama com a sequência de projeções para o POCS6.	82
Figura 24 – Resumo de imagens obtidas pelo POCS6.	83
Figura 25 – Diagrama com a sequência de projeções para o POCS7.	84
Figura 26 – Imagens obtidas pelo POCS7 com 50 iterações e valores de λ com 0.1	85
Figura 27 – Imagens obtidas pelo POCS7 com 50 iterações e valores de λ com 0.001 e 0.0001	86

Figura 28 – Imagens obtidas pelo POCS7 com 10 iterações e os 3 valores de λ	87
Figura 29 – Diagrama com a sequência de projeções para o POCS8.	89
Figura 30 – Imagens obtidas pelo POCS8, com 10 e 50 iterações para $\lambda = 0.1$ e 50 iterações para os demais valores de λ , para o conjunto com 10 imagens.	90
Figura 31 – Imagens obtidas pelo POCS8, com 10 e 50 iterações para $\lambda = 0.1$ e 50 iterações para os demais valores de λ , para o conjunto com 16 imagens.	91
Figura 32 – Imagens obtidas pelo POCS8, com 10 iterações para $\lambda = 0.001$ e $\lambda = 0.0001$ para os conjuntos com 10 e 16 imagens.	92
Figura 33 – Melhores resultados obtidos por POCS1, POCS2 e POCS3.	94
Figura 34 – Melhores resultados obtidos por POCS4, POCS5, POCS7 e POCS8 . .	95

Lista de tabelas

Tabela 1 – Resultados do MSE para POCS1, POCS2 e POCS3 com o conjunto de 10 imagens.	74
Tabela 2 – Resultados do MSE para POCS1, POCS2 e POCS3 com o conjunto de 16 imagens.	74
Tabela 3 – Resultados do MSE para o POCS4	77
Tabela 4 – Resultados MSE para POCS5 com o conjunto de 10 imagens.	81
Tabela 5 – Resultados MSE para POCS5 com o conjunto de 16 imagens.	81
Tabela 6 – Resultados MSE para POCS6 com o conjunto de 10 imagens.	83
Tabela 7 – Resultados MSE para POCS6 com o conjunto de 16 imagens.	84
Tabela 8 – Resultados MSE para POCS7 com o conjunto de 10 imagens.	88
Tabela 9 – Resultados MSE para POCS7 com o conjunto de 16 imagens.	88
Tabela 10 – Resultados MSE para POCS8 com o conjunto de 10 imagens.	93
Tabela 11 – Resultados MSE para POCS8 com o conjunto de 16 imagens.	93
Tabela 12 – Valores de MSE para os melhores resultados obtidos.	96

Lista de abreviaturas e siglas

CCD	<i>Charge-Coupled Device</i>
CMOS	<i>Complementary Metal-Oxide-Semiconductor</i>
FC	Filtro de Canny
HR	<i>High Resolution</i>
ICM	<i>Iterated Conditional Modes</i>
LR	<i>Low Resolution</i>
MAP	<i>Maximum a Posteriori</i>
ML	<i>Maximum Likelihood</i>
MRF	<i>Markov Random Fields</i>
MSE	<i>Mean Square Error</i>
POCS	<i>Projection Onto Convex Sets</i>
PSF	<i>Point Spread Function</i>
RGB	<i>Red Green Blue</i>
RISR	Reconstrução de Imagens por Super Resolução
RL	Richardson-Lucy
SR	<i>Super Resolution</i>
TV	<i>Total Variation</i>

Sumário

1	INTRODUÇÃO	25
2	OBJETIVOS	29
3	REVISÃO DA LITERATURA	31
4	SUPER-RESOLUÇÃO	37
4.1	Reconstrução de imagens por super-resolução	38
4.2	Modelo de formação das imagens	40
4.2.1	Mal condicionamento do problema	45
4.3	Deslocamentos subpixel	45
5	PROJEÇÃO SOBRE CONJUNTOS CONVEXOS	47
6	METODOLOGIA	55
6.1	Aplicação do modelo de formação da imagem	55
6.2	Algoritmo base	57
6.3	Descrição da abordagem híbrida utilizando POCS	58
6.3.1	Algoritmo de Richardson e Lucy regularizado com <i>Total Variation</i>	59
6.4	Algoritmos utilizados para comparação	61
6.5	Algoritmos desenvolvidos	62
6.6	Imagens utilizadas para os testes	64
6.7	Medidas e critérios de comparação	65
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	69
7.1	Considerações sobre critério de parada e imagem inicial	69
7.2	Ambiente de testes e desenvolvimento	70
7.3	Parametrização	70
7.4	Resultados dos algoritmos para comparação	70
7.5	Resultados algoritmos desenvolvidos	74
7.5.1	Resultados POCS 4	75
7.5.2	Resultados POCS 5	77
7.5.3	Resultados POCS 6	81
7.5.4	Resultados POCS 7	84
7.5.5	Resultados POCS 8	88
7.6	Comparação dos melhores resultados	93

Conclusão	99
Referências	101

1 Introdução

Em processamento de imagens, o termo resolução espacial pode ser definido como o menor detalhe perceptível ou discernível em uma imagem digital, estando relacionado com a qualidade visual e a fidelidade do que é representado. Em relação a uma cena real (GONZALES; WOODS, 2006; CHAUDHURI, 2001). Quanto maior for a resolução espacial de uma imagem, maior será a quantidade de *pixels* em uma determinada área e menores serão as dimensões de um único *pixel* a ser representado, o que permite uma melhor definição dos detalhes e uma transição mais suave entre as cores (CHAUDHURI, 2001).

Conforme Milanfar (2010), a resolução de uma imagem é limitada principalmente pelos sensores de captura e pelo dispositivo de aquisição. Atualmente, o CCD (*Charge-coupled device*) e o CMOS (*complementary metal-oxide-semiconductor*) são os sensores utilizados pelos diversos mecanismos de captura, sendo dispostos, normalmente, numa matriz bidimensional para a obtenção de sinais.

Chaudhuri (2001), complementa que os sensores respondem às fontes luminosas (fótons) e, portanto, um sensor que tenha uma alta densidade de fotodetectores consegue obter imagens com alta resolução espacial. Contudo, um sensor com características opostas, geram imagens de baixa resolução com pixelização, no qual os *pixels* individuais podem ser vistos a olho nu, degradando a qualidade visual da mesma.

Embora a tecnologia atual seja adequada para uma grande variedade de aplicações, a capacidade de resolução atual e o alto custo para seu desenvolvimento, é um grande entrave para as necessidades e demandas futuras (PARK; PARK; KANG, 2003). Considerando que quanto menor o tamanho do fotodetector (menor a dimensão do *pixel*) maior a resolução espacial, uma possível abordagem seria reduzir a dimensão dos detectores conforme a necessidade. Porém, a redução indiscriminada do tamanho do *pixel*, gera o surgimento de um efeito indesejado conhecido como *shot noise* (CHAUDHURI, 2001). Esse tipo de ruído está relacionado a quantidade variável de fótons que o detector pode receber em determinado intervalo de tempo de exposição. Essa variação se deve a características físicas da luz e pode ser modelado em uma distribuição de Poisson.

Nasrollahi e Moeslund (2014) destacam que além da redução da luz que atinge a célula associada ao *pixel* no sensor, *pixels* de menor dimensão são mais sensíveis aos efeitos da difração em comparação aos maiores. Isso, muitas vezes ocasiona uma acentuada degradação da imagem. Por outro lado, a abordagem alternativa seria aumentar o tamanho do chip/sensor, mas isso, é pouco efetivo devido ao aumento da capacitância, que gera um acréscimo significativo nas taxas de transferência de carga.

Considerando as dificuldades descritas para se obter uma melhor resolução, novas técnicas são necessárias para contornar esse problema. Uma abordagem muito promissora, que vem gerando resultados bastante apreciáveis, utilizando processamento digital de imagens é conhecida como Super-Resolução, sendo este o tema principal deste trabalho.

A Super-Resolução tem o compromisso de recuperar informações perdidas ou imperceptíveis, porém presentes na cena original. No caso da Super-Resolução explorada neste trabalho, são utilizadas informações subpixel contidas na sobreposição entre os *pixels* de imagens de uma mesma cena, porém deslocadas, com o intuito de gerar uma imagem de maior resolução incorporando essas informações no resultado final.

No processo de captura ocorre a perda de frequências, e a recuperação destas também pode ser utilizada para se obter a Super-Resolução. Tanto as informações subpixel quanto a recuperação de frequências são exploradas neste trabalho. Os resultados obtidos pela Super-Resolução tem o compromisso com a realidade das imagens, onde se tem a garantia de que os resultados obtidos não contém informações que não estivessem nas imagens originais.

Assim, será apresentado uma metodologia para a obtenção de uma estimativa de alta resolução, considerando imagens de baixa resolução através da Projeção sobre Conjuntos Convexos (POCS – *Projections Onto Convex Sets*) em uma abordagem híbrida, na qual a Super-Resolução ocorrerá no contexto espacial e espectral, ou seja, além de aumentar a dimensão da imagem de baixa resolução utilizando informações subpixel, também buscará recuperar as altas frequências perdidas, enquanto que ao mesmo tempo se diminui o borramento e a degradação. Dessa forma o objetivo é verificar o impacto do aprimoramento da abordagem POCS através de técnicas de restauração e que podem ser modeladas dentro de um conjunto convexo, para futuras aplicações em análises médicas ou forenses.

Outra questão importante demonstrada é a possibilidade de agregar métodos clássicos na abordagem POCS com outras abordagens já existentes na literatura, através de conjuntos convexos que podem permitir obter resultados que atendam as necessidades desejadas.

O principal resultado são as análises das imagens obtidas com os algoritmos para Super-Resolução, ou seja, a recuperação de informações e detalhes através das informações subpixels não visíveis nas imagens de menor resolução. Nesse sentido, questões como desempenho computacional entre tecnologias utilizadas para o desenvolvimento e execução dos algoritmos não são consideradas. Não temos por objetivo comparar a execução dos algoritmos entre diferentes linguagens de programação e arquiteturas de hardware. Para a implementação foi utilizado o ambiente de programação Octave, que é bastante similar ao matlab, sendo *open source*. Focamos na simplicidade do código sendo implementado, ocasionando que as implementações não estejam otimizadas para a linguagem. Com isso,

questões sobre a análise de complexidade dos algoritmos também não foram exploradas.

As imagens utilizadas para testes estão em escala de cinza. Entretanto, todas as abordagens são extensíveis para imagens coloridas, em RGB por exemplo. As técnicas de Super-Resolução exploradas possuem diferentes aplicações como em imagens médicas, forenses, imagens de satélite (sensoriamento remoto) e vídeos de câmeras de segurança.

Seguindo a estrutura do trabalho, no [Capítulo 2](#) apresentamos os objetivos e no [Capítulo 3](#) a revisão da literatura utilizada para fundamentar o trabalho. No [Capítulo 4](#) apresentamos os principais conceitos sobre Super-Resolução, discorrendo inclusive sobre a reconstrução de imagens por Super-Resolução, o modelo de formação das imagens e sobre os deslocamentos subpixel. No [Capítulo 5](#) os principais conceitos teóricos sobre a Projeção sobre Conjuntos Convexos são explorados. A metodologia utilizada é apresentada no [Capítulo 6](#), discorrendo sobre o algoritmo utilizado como base para o trabalho, uma descrição da abordagem híbrida desenvolvida e os algoritmos desenvolvidos. Por fim apresentamos no [Capítulo 7](#) as discussões sobre os resultados e a conclusão do trabalho.

2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é propor algoritmos baseados na teoria de projeções sobre conjuntos convexos, capazes de promover simultaneamente o aumento da resolução espacial e a recuperação parcial de frequências espaciais perdidas durante o processo de degradação e decimação de uma imagem digital de maior resolução. A abordagem proposta é híbrida considerando que ambos os conceitos de super-resolução são explorados no mesmo algoritmo.

A base para o algoritmo é a formulação original proposta por [Tekalp, Ozkan e Sezan \(1992\)](#) para a super-resolução espacial utilizando restrições convexas onde são explorados os deslocamentos subpixels de imagens degradadas de menor resolução de uma mesma cena. As informações provenientes desses deslocamentos são incorporadas como dados *a priori* em conjuntos convexos e a teoria de projeções sequenciais ou simultâneas promove um caminho adequado para estimar uma imagem de maior resolução que satisfaz simultaneamente os conjuntos de restrições.

O método proposto modifica a abordagem original com a incorporação de uma nova restrição, baseada no algoritmo de Richardson-Lucy, bem conhecido na literatura por ser capaz de recuperar parcialmente frequências espaciais perdidas.

Dessa forma, como consequência do objetivo geral, propõe-se um novo conjunto convexo incorporando a metodologia de Richardson-Lucy como uma restrição convexa, modificada pelo filtro de Canny para minimizar os efeitos da amplificação de artefatos gerados pelo processo iterativo desse algoritmo. Essa implementação foi utilizada no trabalho de mestrado “Uma abordagem híbrida baseada em projeções sobre conjuntos convexos para super-resolução espacial e espectral”, do discente Bruno Aguilar da Cunha, sob orientação do Prof. Dr. Murillo Rodrigo Petrucelli Homem, que foi desenvolvido paralelamente a este trabalho. Com isso também, temos por objetivo, estender essa abordagem e propor uma modificação para incorporar a regularização *total variation*, com o intuito de ponderar os efeitos do filtro de Canny na execução do algoritmo. Dessa forma, outro objetivo é a análise comparativa dos resultados, obtidos pela abordagem proposta, em comparação com os resultados obtidos pelo algoritmo base e no trabalho citado.

3 Revisão da Literatura

A literatura sobre super-resolução (no sentido de reconstrução de alta resolução) é relativamente extensa (PARK; PARK; KANG, 2003; BORMAN; STEVENSON, 1998a) e inclui as mais diversas aplicações como vídeos de segurança, imageamento por satélites, restauração e melhora da qualidade de vídeos, conversão entre padrões de formatos de vídeos, remoção do borramento devido ao tempo de abertura do obturador da câmera utilizada, entre outras. Este tópico se restringe a uma breve revisão apenas com o intuito de delinear as principais abordagens encontradas na literatura e as referências que estão relacionadas ao contexto deste trabalho.

De maneira geral é possível classificar os algoritmos em dois grandes grupos. No primeiro encontram-se os métodos derivados no domínio espacial e no segundo os derivados no domínio da frequência. Os algoritmos que se encontram no segundo grupo são mais simples e possuem mecanismos mais intuitivos para realização de super-resolução do que os derivados no domínio do espaço (PARK; PARK; KANG, 2003).

Tsai e Huang (1984) foram os primeiros a tratar, no domínio da frequência, o problema de reconstruir uma imagem de maior resolução a partir de um conjunto de imagens de resoluções menores da mesma cena. Eles utilizaram uma abordagem onde os deslocamentos globais da cena de interesse foram modelados com base na propriedade de deslocamentos da transformada de Fourier. Posteriormente, a abordagem foi complementada adicionando-se ruído aditivo à formulação do problema e descrito por Kim, Bose e Valenzuela (1990). Após esses trabalhos, foram propostos diversos algoritmos para resolver o problema, com a grande maioria utilizando abordagens no contexto do domínio espacial.

Considerando o contexto das abordagens no domínio de frequência, a definição mais precisa para super-resolução, segundo Sementilli, Hunt e Nadar (1993), é a restauração do espectro de frequências do objeto, para aquelas frequências inferiores à frequência de corte e à extrapolação do espectro acima desta.

A restauração espectral até o limite fornecido pela frequência de corte é obtida pela solução do problema linear inverso e a super-resolução, propriamente dita, corresponde à reconstrução do espectro para além da frequência de corte. Dessa forma, a não linearidade é necessária para super-resolução. Sementilli, Hunt e Nadar (1993) definiram a máxima frequência obtida pela solução de Tikhonov (TIKHONOV; ARSENIN, 1977) para caracterizar o limiar acima do qual se deseja a extrapolação do espectro.

O debate sobre a possibilidade de super-resolução tem mais de 50 anos. Alguns autores, como Harris (1964), descrevendo o problema levando em consideração o teorema de continuação analítica, mostram que na ausência de ruído é possível uma

extensão infinita da largura de banda espectral. Além disso, que esta pode ser estendida de forma única para qualquer imagem. Por outro lado, autores como [Francia \(1969\)](#) teorizaram que a informação contida na imagem seria insuficiente para permitir a perfeita reconstrução do objeto, uma vez que diferentes objetos podem produzir a mesma imagem, fazendo com que o problema se tornasse ambíguo. Contudo, [Frieden \(1971\)](#), [Bertero et al. \(1984\)](#) demonstraram que o problema da super-resolução é limitado pelo número de Shannon da imagem ([KOSAREV, 1990](#)).

[Sementilli, Hunt e Nadar \(1993\)](#) também obtiveram indicações de que o problema em geral é limitado, uma vez que, frequentemente, o conhecimento da informação *a priori* é parcial, e derivou limites superiores para as frequências que podem ser recuperadas. Apesar das discussões teóricas sobre as possibilidades efetivas de super-resolução, na prática, autores como [Gerchberg \(1974\)](#), [Papoulis \(1975\)](#), [Carrington et al. \(1995\)](#), [Conchello \(1998\)](#) entre outros ([WALSH; NIELSEN-DELANEY, 1994](#); [MIURA; BABA, 1996](#)), demonstraram experimentalmente a possibilidade real da super-resolução. Atualmente, sabe-se que super-resolução parcial é possível sendo, contudo, limitada pelos fatores como amostragem e informação *a priori* parcial. Segundo [Hunt \(1995\)](#), as informações *a priori* frequentemente incorporadas são: conhecimento sobre o contorno do objeto, tamanho, limites inferiores e superiores sobre a intensidade e outras estatísticas do objeto verdadeiro. Neste último caso, por exemplo, supondo um modelo estatístico para a imagem verdadeira, um conhecimento adequado da matriz de covariância ou da média do sinal podem fornecer a informação necessária para realizar super-resolução. Para mencionar apenas os algoritmos mais importantes no contexto de super-resolução, devemos começar pelos trabalhos pioneiros de [Slepian e Pollak \(1961\)](#), [Gerchberg \(1974\)](#) e [Papoulis \(1975\)](#).

A metodologia, que nos dias de hoje é conhecida como algoritmo de Gerchberg-Papoulis, e foi derivada de forma independente pelos dois autores, foi um dos primeiros algoritmos com a capacidade reconhecida de recuperar componentes de frequências perdidas além do limite de difração. Esse método assume restrições sobre o objeto conjuntamente no domínio da frequência e no domínio espacial. Para a restrição espacial, se supõe que o objeto possui uma extensão finita, satisfazendo dessa forma a condição de analiticidade (como descrita por Harris). Ainda podem ser incorporadas outras restrições no domínio do espaço, como a positividade. Entretanto, o conhecimento do espectro de frequências abaixo do limite de difração, é a restrição no domínio de Fourier. A imposição das restrições espaciais modifica o espectro no domínio de Fourier abaixo do limite de difração, ao mesmo tempo em que expande as frequências espaciais. A restrição no domínio de Fourier restaura as frequências até o limite de difração que são modificadas pelas restrições parciais, enquanto mantém as frequências extrapoladas. Verifica-se que a imposição destas restrições de forma iterativa, converge para uma solução satisfazendo todas as restrições. Uma variante do algoritmo Gerchberg-Papoulis foi proposta por [Walsh e Nielsen-Delaney \(1994\)](#), com a introdução de uma forma de computar diretamente no domínio espacial

os componentes de frequência espacial acima do limite de difração. Mesmo podendo ser considerado como um procedimento *ad-hoc*, a convergência do Gerchberg-Papoulis é garantida. Posteriormente, esse algoritmo foi revisto no contexto de Projeções sobre Conjuntos Convexos (COMBETTES, 1996; STARK; YANG, 1998), dessa forma tendo as propriedades de convergência formalizadas.

Uma das abordagens consideradas neste trabalho consiste em utilizar uma abordagem híbrida através da junção da proposta por Tekalp, Ozkan e Sezan (1992) no domínio espacial, incorporando uma outra abordagem derivada de forma distinta da Gerchberg-Papoulis no domínio de Fourier, proposto também de forma independente por Richardson (1972) e Lucy (1974), na qual justificaram o uso do método através de uma abordagem bayesiana. O método desenvolvido por ambos trata-se de uma abordagem iterativa baseada na estimativa por máxima verossimilhança, na qual demonstraram que o algoritmo pode recuperar parcialmente componentes de frequência perdidos. Hirani e Totsuka (1996) utilizaram uma abordagem híbrida combinando domínio de frequência e espacial, utilizando projeção sobre conjuntos convexos, para a remoção de ruído. O algoritmo resultante foi capaz de reconstruir vários *pixels* ruidosos contínuos, reconstruir texturas, manter a nitidez e manter a continuidade de características, como por exemplo linhas, através de regiões ruidosas.

Embora as abordagens no domínio da frequência sejam mais simples, podem ser citadas algumas desvantagens, como por exemplo, não permitirem a incorporação de modelos mais gerais para a determinação do movimento da cena (MARCEL; BRIOT; MURRIETA, 1997; TIAN; MA, 2011). As abordagens no domínio espacial permitem modelos de estimação de situações mais genéricas, permitindo dessa forma movimentos arbitrários. Modelos de degradação mais complexos também podem ser incorporados, principalmente com a inclusão de informações *a priori* mais efetivamente.

A maioria dos algoritmos propostos na literatura seguem essa abordagem. Por exemplo, métodos baseados em Projeções sobre Conjuntos Convexos (POCS) impõem o conhecimento *a priori* (PANDA; PRASAD; JENA, 2011a) na forma de conjuntos fechados e convexos. Essa abordagem computacional está baseada no fato de que o processo de projeção, de forma iterativa ou paralela, sobre os conjuntos, converge para a intersecção de todos os conjuntos, ou para uma solução que é a mais próxima possível dos conjuntos (quando não há intersecção) segundo alguma métrica. Observamos que o próprio processo iterativo pode ser visto como uma forma de regularização do problema inverso.

O primeiro algoritmo baseado em teoria de projeções de conjuntos, para reconstrução de imagens de alta resolução foi derivado por Stark e Oskoui (1989), onde os autores se basearam no trabalho de Frieden e Aumann (1987). Posteriormente foram propostas soluções para vários problemas desse primeiro algoritmo, nos trabalhos de Tekalp, Ozkan e Sezan (1992), Patti, Sezan e Tekalp (1994). Esses trabalhos estenderam a abordagem

anterior para incorporar a presença de ruído, além do movimento relativo existente entre a sequência de imagens de baixa resolução. O modelo para o movimento proposto por [Patti, Sezan e Tekalp \(1994\)](#) assume apenas translações globais entre as imagens adquiridas e não considera o efeito do borramento, devido ao tempo de abertura do obturador da câmera durante o processo de aquisição. Entretanto, eles utilizaram o mesmo modelo para as observações e a mesma formulação POCS para a solução de um sistema de equações lineares, e aperfeiçoaram o trabalho anterior incluindo os efeitos de uma função de espalhamento pontual variante no espaço. O modelo também inclui os efeitos causados pela amostragem de baixa resolução assim como os efeitos do movimento relativo da cena. Outras extensões deste método, considerando a detecção do movimento, podem ser encontradas na referência ([PATTI; SEZAN; TEKALP, 1997](#)). Observamos que os trabalhos acima são baseados na mesma formulação do algoritmo POCS sendo que todos os efeitos das degradações são modelados em um único operador de degradação.

Métodos de regularização determinísticos se utilizam das informações para estabilizar o problema inverso. Frequentemente, nesses casos, restrições de suavização são impostas assumindo que as imagens possuem frequências limitadas. Consequentemente, essas abordagens modelam as informações de uma maneira desfavorável ao processo de super-resolução ([MILANFAR, 2010](#)). Contudo, em muitos casos, outras informações *a priori* tendem a preservar informações de alta frequência de uma forma mais adequada. O algoritmo proposto por [Shen et al. \(2007\)](#), que maximiza sequencialmente as probabilidades condicionais locais é capaz de fornecer resultados apreciáveis com uma rápida taxa de convergência. Abordagens probabilísticas usualmente incorporam o conhecimento sobre o problema de forma mais natural, sendo os métodos bayesianos os mais usuais, como, por exemplo, os estimadores de máxima probabilidade *a posteriori* (MAP) ([TIAN; MA, 2010](#); [VILLENA et al., 2013](#)). Também podemos citar trabalhos baseados em modelos de campos aleatórios Markovianos (MRF – *Markov Random Fields*) ([MARTINS; HOMEM; MASCARENHAS, 2007](#); [MARTINS et al., 2009](#)), que são mais flexíveis e realísticos, desde que permitam a inclusão do conhecimento utilizando relações de vizinhanças entre os *pixels* próximos.

Uma restrição muito usual no contexto de super-resolução é a suavização, com o objetivo de diminuir o ruído, uma vez que, frequentemente, existem apenas observações ruidosas. Essa restrição é descrita em uma abordagem MAP como uma probabilidade sobre a imagem de alta resolução, a qual é unicamente determinada por suas distribuições condicionais. Neste sentido, a restrição de suavização pode ser imposta apenas sobre valores na imagem, onde seus vizinhos não tenham uma variação abrupta. Mais ainda, devido à complexidade computacional dessa abordagem, algoritmos como o ICM (*Iterated Conditional Modes*) promovem soluções aproximadas viáveis ao processo ([MARTINS et al., 2009](#)).

Chen, Nunez-Yanez e Achim (2012), seguindo uma abordagem MAP com base na Gaussiana generalizada, propuseram um algoritmo para imagens dinâmicas, onde demonstram que o modelo pode descrever de forma muito mais efetiva a distribuição da imagem de alta resolução, ao mesmo tempo em que é capaz de preservar descontinuidades (bordas) na imagem, inclusive controlando o nível de ruído na mesma. Embora tenha apresentado resultados interessantes, o método apresenta, até onde podemos concluir, instabilidade quando os *frames* não são bem comportados, ou seja, quando existem movimentos arbitrários dos objetos entre os *frames*.

Nesse ponto é importante salientar que embora muitos trabalhos da literatura considerem valores já determinados quanto aos deslocamentos subpixel entre as imagens utilizadas no processo de reconstrução por alta resolução, vale mencionar a abordagem proposta nos trabalhos de Keren, Peleg e Brada (1988a) e Peleg, Keren e Schweitzer (1987) que fixaram as ideias iniciais dos métodos baseados em “simulação e correção”. Os algoritmos propostos nesses trabalhos consideram o registro de imagens transladadas e rotacionadas com uma precisão subpixel razoável. Posteriormente, estas ideias foram estendidas no trabalho de Irani e Peleg (1991) e, conforme observado por Lim (2003), muitos dos algoritmos atuais para super-resolução também são baseados nesta metodologia. A ideia fundamental, neste caso, é simular um conjunto de imagens de menor resolução a partir de uma estimativa inicial para a imagem de alta resolução desejada e, posteriormente, usar a diferença entre este conjunto e o de imagens observadas para atualizar a estimativa anterior. Verifica-se que este processo define um algoritmo iterativo que minimiza uma função de erro pré-definida.

A super-resolução em *frames* de vídeo também vem sendo objeto de trabalhos, onde os métodos se baseiam em reconstruir com melhor resolução cada *frame*. Para isso são utilizadas várias versões de baixa resolução, entretanto, outras abordagens podem ser encontradas também, como os algoritmos simultâneos de super-resolução, que estimam a sequência inteira do vídeo, ou seja, todos os *frames* de alta resolução são estimados em um único processo. (ZIBETTI; MAYER, 2005).

Xiang, Jie e Du (2007) destacam as limitações ao utilizar vídeos com compressão para aplicação da maioria das técnicas de super-resolução, dado que as abordagens no domínio espacial não costumam apresentar bons resultados quando aplicadas a vídeos compactados, em especial, para os que possuem graves erros de quantização. Outro ponto a ser considerado se refere ao fato de a compressão descartar dados que podem ser valiosos no processo da estimativa da imagem de alta resolução. Contudo, tentando contornar esse problema, novas técnicas foram criadas para aplicação de super-resolução em vídeos com compressão (SEGALL et al., 2004).

Tian e Ma (2011) consideram que os maiores desafios na super-resolução de vídeos é a escolha da técnica ideal para extrair informações dos *frames* de baixa resolução e a

escolha de uma técnica de estimação de movimento confiável para o processo.

O uso da janela deslizante para super-resolução de vídeos tem mostrado bons resultados (NARAYANAN et al., 2007; NG et al., 2007). Ng et al. (2007) utilizou essa abordagem juntamente com a técnica de *Total Variation* (TV) para a reconstrução de vídeos e obteve resultados eficientes que amenizaram o mal condicionamento dos *frames*, contudo, deixa claro a necessidade de testar adaptações quanto ao tamanho da janela e o número de *frames* a ser considerado para a geração da estimativa de alta resolução para que se possa obter melhores resultados. O *Total Variation* não é utilizado apenas em super-resolução de vídeos, como no trabalho de Homem, Zorzan e Mascarenhas (2011), que utiliza para aplicações de deconvolução em imagens de microscopia. Esse trabalho, inclusive, apresenta a formulação do algoritmo de Richardson-Lucy com *Total Variation* que utilizamos para nossa implementação.

Muitos outros algoritmos propostos para super-resolução foram propostos nos últimos anos (BABU; MURTHY, 2011; PHAM; VLIET; SCHUTTE, 2006; CHU, 2013; BELEKOS; GALATSANOS; KATSAGGELOS, 2010; XIONG; SUN; WU, 2010). Para complementar existem também vários outros (ZOMET; RAV-ACHA; PELEG, 2001; MOALLEM; ISFAHANI; HADDADNIA, 2013; VILLENA et al., 2013). De fato, algoritmos de super-resolução ainda não são capazes de tratar esse tipo de problema de forma adequada, o que torna o problema de reconstrução por super-resolução, seja para imagens estáticas ou para imagens dinâmicas, um problema ainda sem solução, mesmo em aplicações particulares (PATANAVIJIT, 2009) sendo objeto de pesquisas atuais (LIU et al., 2016; THAPA et al., 2015), inclusive utilizando novos métodos tentando extrair melhores resultados, considerando a abordagem com projeções sobre conjuntos convexos (WANG et al., 2015; GE et al., 2015).

4 Super-Resolução

Super-Resolução (SR - *Super Resolution*) (PARK; PARK; KANG, 2003) é uma conhecida técnica de processamento de sinais, que visa obter uma imagem de alta resolução (HR - *High Resolution*) através de uma ou mais imagens de baixa resolução de uma mesma cena. O termo “super” faz alusão à capacidade da técnica de superar as limitações inerentes aos sistemas de aquisição de imagens de baixa resolução (LR - *Low Resolution*). Um grande diferencial da técnica é justamente a possibilidade de obter as imagens com melhor resolução espacial a partir de imagens destes sistemas já existentes, sem a necessidade de melhorias no processo de aquisição. Sendo assim, a Super-Resolução, tem como objetivo, aumentar o tamanho da imagem (aumentando também o número de *pixels* e a resolução da mesma) e reduzir as degradações inerentes às imagens LR utilizadas (MILANFAR, 2010).

Na vasta literatura existente sobre o tema (PARK; PARK; KANG, 2003; BORMAN; STEVENSON, 1998a; HOMEM, 2003) observa-se que o termo é utilizado de duas maneiras distintas (ANDREWS; HUNT, 1977), embora exista o ponto em comum entre ambos os casos quanto a tentativa de recuperar componentes de frequência espacial perdidos, contudo, a razão da perda de resolução, assim como o resultado obtido diferem entre elas e frequentemente esses conceitos são encontrados sem distinções.

O primeiro conceito diz respeito à restauração de uma única imagem a partir da recuperação de frequências espaciais que estão além do limite de difração por uma frequência de corte estabelecida (HOMEM, 2003). Algoritmos que se utilizam dessa ideia, buscam efetuar a extrapolação parcial do espectro de potências da mesma. Essa abordagem pode ser definida como um método de restauração por Super-Resolução, geralmente encontrada em pesquisas de imageamento óptico (HOMEM, 2003), sendo os trabalhos desta área mais antigos.

O outro conceito já está relacionado à reconstrução da imagem de alta resolução a partir de um conjunto de imagens de baixa resolução geralmente deslocadas em relação a uma imagem de referência (PARK; PARK; KANG, 2003). Os algoritmos que seguem essa abordagem são conhecidos como métodos de reconstrução por super-resolução, reconstrução de alta resolução ou, simplesmente, realce por super-resolução. As duas denominações são encontradas na literatura e são objeto de pesquisas mais recentes, por ainda ser um tema em aberto e que necessita de uma atenção especial, tendo em vista a vasta quantidade de imagens já existentes com resolução insatisfatória e também devido ao fato que estamos próximos de uma limitação física dos hardwares existentes nos dispositivos de captura que podem cercear o crescimento e a fabricação de dispositivos de captura com resoluções cada vez maiores (MILANFAR, 2010).

Considerando que a abordagem utilizada neste trabalho tem como base a reconstrução a partir de imagens LR, é salutar complementar que, no tocante aos deslocamentos entre as imagens em relação a de referência, a necessidade de supor que há um deslocamento subpixel entre elas. Esse é um tema de extrema importância para bons resultados com algoritmos de Super-Resolução, embora, na literatura, poucos trabalhos discutam e abordam o tema (KEREN; PELEG; BRADA, 1988a; PELEG; KEREN; SCHWEITZER, 1987; BERENSTEIN et al., 1987; UR; GROSS, 1992). Deslocamentos inteiros ou unitários representariam as mesmas informações já existentes que foram simplesmente deslocadas e não complementaríamos o processo de reconstrução. As informações subpixel precisam ser alimentadas no processo para que o resultado final seja obtido.

Ainda considerando essa suposição, cabe diferenciar também a abordagem de outra técnica bastante utilizada em processamento de imagens denominada interpolação que tem como objetivo aumentar a imagem através de operações efetuadas a partir dos *pixels* e informações já existentes, geralmente obtendo uma imagem com dimensão maior, contudo se apresenta de forma mais degradada em relação à original, pela falta de informações *a priori* que possam aumentar a qualidade visual da mesma.

Os algoritmos discutidos e implementados neste trabalho referem-se à reconstrução por super-resolução que tem como objetivo restaurar/reconstruir uma imagem de alta resolução a partir de um conjunto de imagens de baixa resolução degradadas e corrompidas por *aliasing* e com informações subpixel.

4.1 Reconstrução de imagens por super-resolução

Um dos fatores que determinam a qualidade de uma imagem digital é a quantidade de *pixels* por unidade de área e tal atributo é definido como a resolução espacial da imagem. Devido a maior densidade de *pixels* contida numa imagem de alta resolução espacial, ela possui uma quantidade maior de detalhes se comparada com uma imagem de menor resolução (MOSLEH; BOUGUILA; HAMZA, 2015).

No processamento de imagens os dados são obtidos, normalmente, por sensores que possuem em sua constituição diversos detectores individuais. Sendo assim, os dados adquiridos permitem que uma imagem possa ser composta diretamente, como no exemplo de imagens adquiridas por câmeras CCD (*charged-couple device*). Também é possível gerar imagens indiretamente como, por exemplo, uma imagem tomográfica que é obtida a partir de um conjunto de projeções (BERTERO; BOCCACCI, 1998). Um primeiro método possível, considerado para obter imagens de maior resolução, seria diminuir os detectores individuais presentes nos sensores, além de incrementar a quantidade deles. Entretanto, os detectores não podem ser reduzidos arbitrariamente, por diversas limitações práticas (PARK; PARK; KANG, 2003).

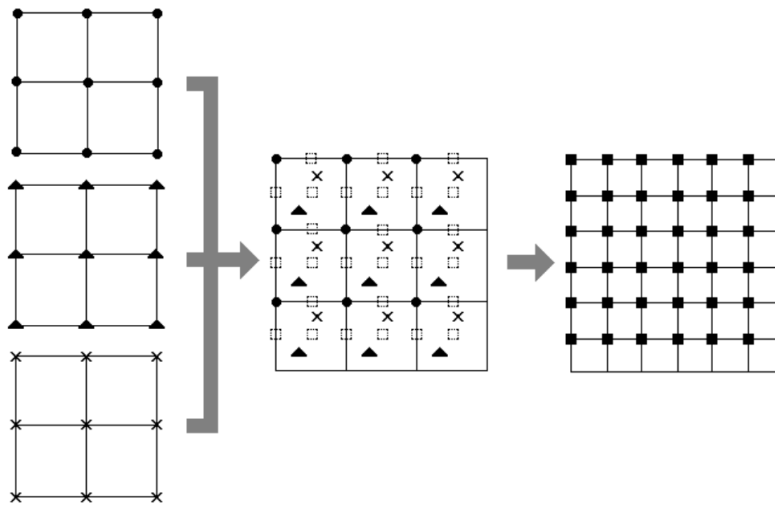
Reconstrução de imagens por super resolução (RISR) consiste na aplicação de técnicas com o objetivo de, a partir de um conjunto de imagens de menor resolução espacial, obtermos uma imagem com resolução maior. O alto custo da sofisticação de componentes e limitações de hardware faz com que técnicas de SR sejam opções mais viáveis (YANG; HUANG, 2010). O conjunto de imagens de menor resolução mencionado, consiste em imagens de uma mesma cena com um ligeiro deslocamento entre elas. Se as imagens possuem deslocamento subpixel em relação umas às outras e na presença de *aliasing*¹, não se pode obter uma a partir das demais e, com isso, as informações em cada uma podem contribuir para obter uma imagem com maior resolução.

A metodologia para obter a RISR é composta por três processos básicos (PARK; PARK; KANG, 2003): Primeiro devemos alinhar as imagens de baixa resolução com precisão subpixel, em comparação, geralmente, com uma imagem de baixa resolução disponível selecionada como referência. Em seguida, construímos uma grade de maior resolução a partir das imagens alinhadas e como último processo, a restauração da imagem de alta resolução passa pela remoção do borramento, originado no procedimento de aquisição (BERTERO; BOCCACCI, 1998).

Na Figura 1 temos a ilustração das duas primeiras etapas. Assumindo que a “imagem” posicionada no canto superior esquerdo é a de referência, as demais são alinhadas em relação a mesma para que, em seguida, seja gerada uma grade de maior resolução com base no alinhamento. No centro temos a representação da grade não uniforme gerada pelo alinhamento e, por fim, a última imagem representa o resultado do processo de interpolação.

¹ De fato, observamos que toda imagem digital é inerentemente corrompida por *aliasing*

Figura 1 – Interpolação a partir de uma grade não uniforme.



Fonte: Park, Park e Kang (2003)

Observamos que a interpolação ocorre sobre uma grade uniforme se os deslocamentos não são inteiros, contudo possuem valores iguais para todas as imagens (ou seja, as imagens estão deslocadas uniformemente). Entretanto, no caso mais geral é necessária a interpolação sobre uma grade não uniforme, pois as imagens possuem deslocamentos arbitrários.

Abordagens estocásticas estão entre os métodos de maior sucesso no domínio do espaço, como por exemplo o método de *Maximum Likelihood* (ML) e *Maximum a Posteriori* (MAP) e POCS (SHEN et al., 2004). O algoritmo de POCS vem sendo amplamente utilizado pela sua simplicidade, possibilidade de aplicação na ocasião de movimento suave e ruído aditivo não uniforme, além de poder se juntar facilmente com informações *a priori* (PANDA; PRASAD; JENA, 2011b).

4.2 Modelo de formação das imagens

Devido a limitações de hardware, ocorrem diversos tipos de degradações durante o processo de aquisição de imagens digitais, fazendo com que os sistemas de captura sejam imperfeitos (MILANFAR, 2010). Podemos citar o exemplo do borramento óptico, gerado pela abertura finita durante a captação da cena pelo equipamento. Tal tipo de borramento, encontrado também em vídeos, é modelado e representado como a função de espalhamento pontual (PSF - *Point Spread Function*).

Consideramos que $f[i, j]$, com dimensões $M \times N$, $0 \leq i \leq M$ e $0 \leq j \leq N$, é uma imagem ideal, sem degradações e amostrada respeitando o limite de Nyquist, a partir de uma cena de interesse $f : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ que, no caso mais realístico, é também corrompida por

algum tipo de ruído. Em processamento de imagens digitais, restaurar uma imagem é a tentativa de remover e, na impossibilidade, minimizar essas interferências, buscando obter uma imagem mais próxima possível da imagem ideal (GONZALEZ; WOODS, 2000). O modelo discreto para uma imagem digital que incorpora essas características é (BANHAM; KATSAGGELOS, 1997)

$$g[i, j] = h[i, j] * f[i, j] + n[i, j], \quad (4.1)$$

onde $g[i, j]$, com dimensões $M \times N$, é a imagem borrada e com ruído, $h[i, j]$ representa a função de espalhamento pontual do sistema de imageamento, $n[i, j]$ é o ruído aditivo, $f[i, j]$, é a imagem ideal da cena e $*$ denota uma convolução bidimensional.

Partindo desse modelo de formação para a imagem, podemos estendê-lo com o objetivo de termos um modelo de formação das imagens de baixa resolução, relacionando-as com suas respectivas versões de alta resolução.

Uma cena de interesse pode ser representada como um sinal contínuo bidimensional $f: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$. Uma imagem dessa cena é gerada, utilizando um sensor que contém $N \times N$ detectores onde, para simplificar a notação, consideramos uma grade quadrada de detectores e não nos importa a natureza deles. Assumimos também que o sensor tem a abrangência sobre toda a cena, enquanto que cada detector atua apenas sobre uma pequena área.

Dessa forma considerando que o n -ésimo detector incorpora uma resposta espacial característica, denotada por $\delta_n(x, y)$, a saída para a imagem $f(x, y)$ sendo capturada é dada por (BORMAN; STEVENSON, 1998b; STARK; YANG, 1998)

$$d_n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \delta_n(x, y) dx dy, \quad 0 \leq n < N^2. \quad (4.2)$$

Cada componente da formulação contínua pode ser discretizado, resultando que $f[i, j]$ e $\delta_{k,l}[i, j]$ são as versões discretas de $f(x, y)$ e $\delta_n(x, y)$ respectivamente, com $n = k \cdot N + l$. Consideramos também que essas versões são definidas sobre uma grade de alta resolução de $M \times M$ pixels, sendo que $M > N$, com isso, permitindo que a integral dupla relacionada com as variáveis espaciais contínuas (x, y) utilizadas na Equação 4.2, possam ser aproximadas por somatórias sobre a grade de alta resolução, para o n -ésimo detector, resultando em

$$d[k, l] \cong \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M f[i, j] \cdot \delta_{k,l}[i, j], \quad 0 \leq k, l < N \text{ e } M > N. \quad (4.3)$$

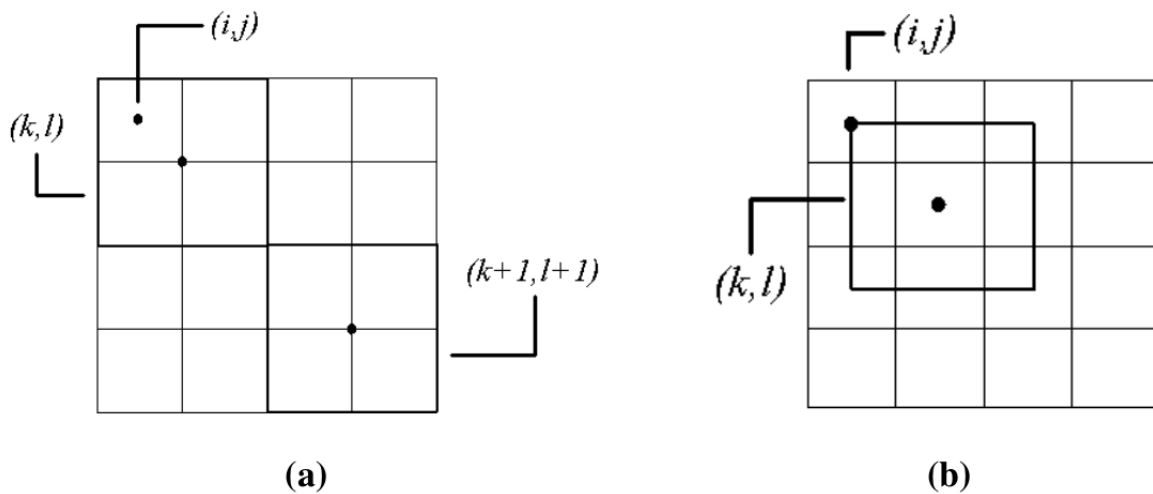
Dessa maneira a imagem discreta $d[k, l]$, que é formada pela resposta dos $N \times N$ detectores, representa uma versão de baixa resolução da imagem $f[i, j]$ de alta resolução, com $0 \leq i, j < M$. Vale destacar que, só faz sentido falar em imagem de alta resolução, quando comparada com uma ou mais imagens de baixa resolução, e vice-versa.

A resposta que se assume para os detectores, representada na função $\delta_{k,l}[i,j]$, é uniforme e unitária, podendo ser definida como (BORMAN; STEVENSON, 1998b)

$$\delta_{k,l}[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se o pixel } (i,j) \text{ está completamente fora do pixel } (k,l) \\ 1 & \text{se o pixel } (i,j) \text{ está completamente dentro do pixel } (k,l) \\ r_{k,l} & \text{se o pixel } (i,j) \text{ está parcialmente dentro do pixel } (k,l), \end{cases} \quad (4.4)$$

sendo que $0 < r_{k,l} < 1$ é a representação da “contribuição” do *pixel*. Este valor, pode ser considerado como a fração da sobreposição do *pixel* na posição (i,j) e o detector na posição (k,l) , em relação às grades de alta e baixa resolução, respectivamente. Ou seja, somas ponderadas dos *pixels* de alta resolução que recaiam dentro ou parcialmente na área de resposta dos detectores, definem os *pixels* de baixa resolução. A Figura 2 ilustra essas situações.

Figura 2 – (a) o *pixel* (i,j) está completamente dentro do *pixel* (k,l) e completamente fora do *pixel* $(k+1,l+1)$; (b) o *pixel* (i,j) está parcialmente dentro do *pixel* (k,l) .



Fonte: Produzido pelos autores

Ordenando-se lexicograficamente $f[i,j]$, $0 \leq i,j < M$, e $d[k,l]$, $0 \leq k,l < N$, temos que a Equação 4.3 pode ser escrita em notação matriz-vetor como

$$\mathbf{d} = \mathbf{\Sigma} \mathbf{f}, \quad (4.5)$$

onde $\mathbf{d} \in \mathfrak{R}^{M \times M}$ é o vetor cujo os componentes são obtidos por $d_n = \sum_{m=0}^{M \times M} \delta_{n,m} \cdot f_m$, os componentes de f_m são definidos no vetor $\mathbf{f} \in \mathfrak{R}^{M \times M}$ e $\delta_{n,m}$ são os elementos que compõem a matriz de sub-amostragem $\mathbf{\Sigma}$, com dimensão $N^2 \times M^2$ composta pelos elementos de

$\delta_{k,l}[i, j]$. Dessa forma temos que, o vetor de observações \mathbf{d} é o resultado da decimação da imagem \mathbf{f} , pelo operador Σ . Outra maneira de se dizer é que a matriz Σ , sub-amostra a imagem por um fator s , dependente dos valores de M e N , em cada direção.

Com a presença de ruído, podemos estender o modelo da [Equação 4.5](#) resultando em

$$\mathbf{d} = \Sigma \mathbf{f} + \mathbf{n}, \quad (4.6)$$

com \mathbf{n} representando o ruído nas observações e sendo aplicado um modelo aditivo.

Podemos também incorporar o borramento do processo de degradação, e por simplicidade assumimos que seja modelado por um sistema linear espacialmente invariante. Com isso a imagem borrada é dada por

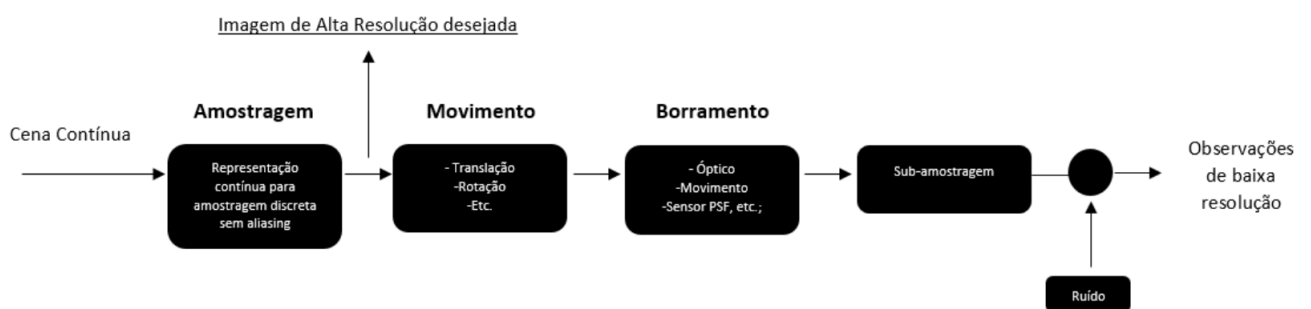
$$\mathbf{b} = \mathbf{H} \mathbf{f}, \quad (4.7)$$

sendo que \mathbf{H} é uma matriz bloco-circulante com dimensões $M^2 \times M^2$. Em outras palavras, utilizamos um operador linear espacialmente invariante, cujos elementos são amostras da função de espalhamento pontual. Após o borramento, uma versão de baixa resolução da imagem \mathbf{f} pode ser modelada como

$$\mathbf{d} = \Sigma \mathbf{H} \mathbf{f} + \mathbf{n} = \Sigma \mathbf{b} + \mathbf{n}, \quad (4.8)$$

e o processo descrito é ilustrado na [Figura 3](#).

Figura 3 – Processo de obtenção da imagem de baixa resolução.

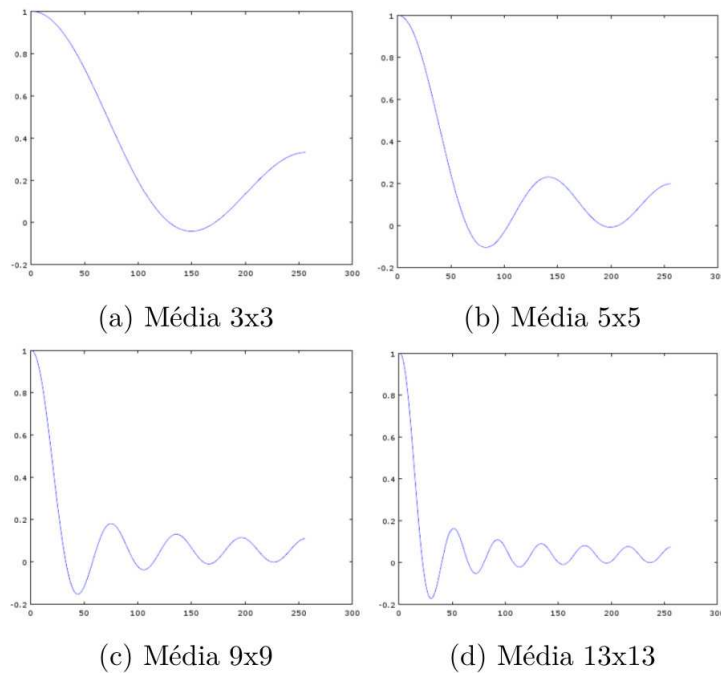


Fonte: Extraído e modificado de [Park, Park e Kang \(2003\)](#).

Dependendo da posição dos sensores de aquisição, o operador de decimação Σ pode causar deslocamentos subpixel entre as observações de baixa resolução. É válido destacar que a operação de decimação na maior parte da literatura utiliza um modelo simplificado para representar o processo ([PARK; PARK; KANG, 2003](#)). Tal simplificação é feita constantemente utilizando-se um operador de média. Considerando diferentes

dimensões para esse operador, a [Figura 4](#) mostra os gráficos com os respectivos valores das frequências.

Figura 4 – Frequências após a aplicação de um operador de média de diferentes dimensões.



Fonte: Produzido pelos autores.

Podemos notar que conforme aumenta a matriz do operador, mais ocorrências temos de frequências com valor zero ou mesmo valores negativos. Mostrando, dessa forma, que frequências que podem ser importantes para o processo de super-resolução acabam sendo descartadas devido as características do modelo usado para a decimação.

Com a proposta híbrida deste trabalho buscamos recuperar justamente essas frequências parciais perdidas, que podem ser muito importantes na obtenção de uma boa estimativa de alta resolução.

Algoritmos de reconstrução de imagens por super-resolução tem por objetivo amenizar os borramentos ou mal-condicionamentos da imagem utilizando soluções regularizadas, sendo possível aplicação de abordagens tanto no domínio espacial quanto no espectral da imagem, fazendo uso da estimativa dos movimentos existentes de forma que seja possível obter a imagem de alta resolução o mais próximo possível do resultado desejado.

Com isso, a super-resolução é definida como um processo mal condicionado, no sentido de que pode ser que não exista uma solução ou pode existir mais de uma, ou ainda, pode ser independente dos dados de forma contínua (HOMEM, 2003). Algumas considerações se fazem necessárias, com o intuito de complementar o modelo aqui descrito,

sobre o mal condicionamento do problema, e tais considerações serão importantes na compreensão da aplicação dos algoritmos de restauração, na abordagem deste trabalho.

4.2.1 Mal condicionamento do problema

Considerando a ordenação lexográfica utilizada na formulação da [Equação 4.7](#), temos que \mathbf{H} é a matriz quadrada de borrimento, com tamanho $M^2 \times M^2$, que gera os efeitos da degradação da difração, onde seus elementos são amostras da PSF.

Na ausência de qualquer tipo de ruído, a [Equação 4.7](#) poderia ser resolvida apenas utilizando a inversão direta da matriz \mathbf{H} , ou seja

$$\mathbf{f} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{b}. \quad (4.9)$$

Contudo, a inversa da matriz \mathbf{H} de borrimento, \mathbf{H}^{-1} , não existe na maioria dos casos, uma vez que seus autovalores são nulos. Mesmo na presença de ruído, autovalores diferentes de zero teriam valores pequenos e o processo de inversão poderia ocasionar uma amplificação do ruído, de forma que o resultado produzido não seria aceitável. São situações como essa que determinam os problemas de natureza mal condicionada. Esse processo de inversão, onde se estima a imagem desejada \mathbf{f} utilizando observações borradas e ruidosas, na literatura é bastante conhecido como deconvolução.

Mesmo utilizando outros métodos para a solução da equação linear, como o artifício da pseudo-inversa, produziriam estimativas de \mathbf{f} instáveis na presença de ruído ([HOMEM, 2003](#)). Nesse contexto, o modelo de reconstrução é um problema mal condicionado ([PARK; PARK; KANG, 2003](#)) e soluções regularizadas utilizando informações *a priori*, são necessárias ([BABU; MURTHY, 2011](#)).

4.3 Deslocamentos subpixel

Embora muito importante para os algoritmos de SR, constatamos que os trabalhos da literatura negligenciam os métodos utilizados para a obtenção dos deslocamentos subpixel entre as imagens. Os trabalhos, ou suprimem os algoritmos propostos ou não consideram um algoritmo/fase responsável por gerar esses dados. Na verdade, na maioria dos casos é considerado o conhecimento *a priori* dos valores de deslocamentos relativos, entre as imagens degradadas de baixa resolução ([LIM, 2003](#)).

Neste trabalho fazemos uso dos valores de deslocamentos na formulação da PSF das imagens. Com isso, se faz necessário o uso de uma abordagem para estimar os deslocamentos a nível subpixel, que seja relevante para ser aplicado ao problema discutido nos trabalhos de [Keren, Peleg e Brada \(1988b\)](#) e [Irani e Peleg \(1991\)](#).

No método iterativo escolhido para aplicação (Irani - Peleg), são consideradas apenas as imagens de baixa resolução degradadas e, com os deslocamentos relativos entre elas, seguindo um movimento de translação global. Mesmo sem considerar nenhum outro tipo de movimento, as necessidades do trabalho são preenchidas, levando-se em consideração o conjunto de imagens utilizado na geração dos resultados.

Com isso, consideremos dois sinais contínuos $f, g : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$, sendo que f representa a imagem de referência e g a imagem ligeiramente deslocada em relação à primeira. É necessário que encontremos valores, denotados por x_0 e y_0 , que minimizem uma função de similaridade definida como

$$s(x_0, y_0) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} [f(x, y) - g(x - x_0, y - y_0)]^2, \quad (4.10)$$

sendo que X e Y são conjuntos finitos de pontos. Se supormos $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sendo funções analíticas, além de expandirmos $g(x, y)$ para o primeiro termo de sua Série de Taylor, é possível mostrar que o cálculo dos valores x_0^* e y_0^* , que minimizam a [Equação 4.10](#), são obtidos pelas equações

$$x_0^* = \frac{\sum_x \sum_y [(f - g)(x, y) - y_0^* g_y(x, y)] g_x(x, y)}{\sum_x \sum_y g^2 x(x, y)}, \quad (4.11)$$

$$y_0^* = \frac{\sum_x \sum_y [(f - g)(x, y) - x_0^* g_x(x, y)] g_y(x, y)}{\sum_x \sum_y g^2 y(x, y)}, \quad (4.12)$$

onde $g_x(x, y)$ e $g_y(x, y)$ representam a primeira derivada de $g(x, y)$ em relação aos eixos x e y , respectivamente. Sendo assim, podemos obter os deslocamentos tanto na direção horizontal quanto na vertical, que serão usados neste trabalho pelo algoritmo de POCS.

5 Projeção sobre conjuntos convexos

Com base na teoria dos conjuntos e projeções em espaços vetoriais, a projeção sobre conjuntos convexos (POCS - *Projection onto Convex Sets*) é uma ferramenta tradicional que vem sendo utilizada, na grande maioria dos casos, em situações onde se deseja modelar, recuperar ou determinar uma quantidade desconhecida, fazendo uso de informações em forma de restrições *a priori*.

Remontam há década de 60 os primeiros trabalhos relacionados ao método, sendo que [Breg \(1965\)](#) foi o pioneiro abordando o método considerado clássico. Porém, logo em seguida [Gubin, Polyak e Raik \(1967\)](#), contribuíram introduzindo a formulação do algoritmo POCS iterativo, cuja base teórica foi essencial para o aperfeiçoamento da abordagem, fazendo inclusive que ela adquirisse grande popularidade, especialmente na área de processamento de imagens e sinais, devido ao fato do desenvolvimento de diversos trabalhos posteriores, onde podemos destacar [Youla \(1978\)](#), [Youla e Webb \(1982\)](#), [Sezan e Stark \(1982\)](#), que além de aplicar, aprimoraram a metodologia de forma pioneira na reconstrução e restauração de imagens médicas.

[Oskoui e Stark \(1989\)](#) realizaram o primeiro trabalho utilizando POCS no contexto de reconstrução de imagens de alta resolução, utilizando as versões de baixa resolução, tendo como ponto de partida contribuições anteriores de [Oskoui-Fard e Stark \(1988\)](#). Entretanto, as abordagens não levavam em consideração o ruído presente nas imagens utilizadas, deficiência essa que foi suprida no trabalho posterior de [Tekalp, Ozkan e Sezan \(1992\)](#). Desde então o algoritmo de POCS vem sendo aplicado extensivamente em diferentes áreas como, por exemplo, redes neurais, teoria das comunicações, óptica e processamento de imagens e sinais, sendo que se destacam principalmente as aplicações voltadas para processamento de imagens médicas, inclusive como no caso de imagens tomográficas.

Um dos resultados mais importantes da teoria de projeções de conjuntos convexos é o teorema fundamental de POCS ([HOMEM, 2003](#)). Para que o teorema possa ser apresentado, é necessário fazermos algumas definições com o objetivo de fornecer ferramentas e conceitos matemáticos necessários para o enunciado do problema. A teoria de projeções é bem estabelecida e formalizada sobre uma classe especial de espaços vetoriais denominadas como Espaços de Hilbert.

Definição 5.1 (Espaço de Hilbert) *Um espaço de Hilbert Ξ é um espaço vetorial com produto interno que é completo em relação à norma induzida deste produto interno.*

Lembramos que uma sequência $\{\mathbf{f}_n\}$ em um espaço vetorial é de Cauchy se

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}_m - \mathbf{f}_n\| = 0, \quad (5.1)$$

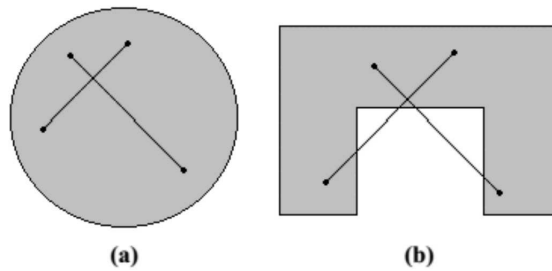
e que um espaço vetorial normado é chamado de completo quando toda sequência de Cauchy no espaço for convergente. Sendo assim, um espaço vetorial com produto interno é de Hilbert se e somente se toda sequência de Cauchy converge respeitando à norma induzida pelo produto interno.

Dentro do contexto de espaços de Hilbert, temos ainda outros dois pontos de extrema importância para nossos objetivos, que são os conceitos de convexidade e fechamento. A Definição 5.2 especifica o conceito de conjunto convexo enquanto que a Definição 5.3 o de conjunto fechado.

Definição 5.2 *Um conjunto $C \subset \Xi$, onde Ξ é um espaço de Hilbert, é convexo se e apenas se para quaisquer $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in C$ arbitrários, o vetor $\mathbf{f} = \mu \cdot \mathbf{f}_1 + (1 - \mu) \cdot \mathbf{f}_2$, também está em C para $0 \leq \mu \leq 1$, ou seja $\mathbf{f} \in C$.*

A Definição 5.2 diz que um conjunto só é convexo se, e somente se, um segmento de reta formado conectando-se dois pontos arbitrários em C está totalmente em C . A Figura 5 ilustra esse conceito, utilizando dois conjuntos no \mathfrak{R}^2 (o espaço euclidiano é um espaço de Hilbert), sendo que um é convexo e o outro não.

Figura 5 – Ilustração do conceito de convexidade para conjuntos no plano: (a) convexo; (b) não convexo.



Fonte: Produzido pelos autores.

Definição 5.3 *Um conjunto $C \subset \Xi$, onde Ξ é um espaço de Hilbert, é fechado se e somente se toda sequência convergente $\{\mathbf{f}_n\}$ contida em C , ou seja, $\mathbf{f}_n \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, converge para um vetor em C . Isto é $\mathbf{f}_n \rightarrow \mathbf{f} \in C$.*

Se um conjunto convexo é fechado, então ele é denominado um conjunto convexo fechado, e a esses conjuntos no espaço de Hilbert existe um conceito fundamental associado, o operador de projeção, que é caracterizado pelo teorema 5.1.

Teorema 5.1 *Seja $C \subset \Xi$ um conjunto convexo fechado, onde Ξ é um espaço de Hilbert. Então para cada $\mathbf{f} \in \Xi$, existe um único $\underline{\mathbf{f}} \in C$ que é o ponto mais próximo de \mathbf{f} em C . Ou seja*

$$\|\mathbf{f} - \underline{\mathbf{f}}\| = \min_{\mathbf{g} \in C} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|. \quad (5.2)$$

Em [Stark e Yang \(1998\)](#) é possível encontrar a demonstração desse resultado, que será omitido aqui. Com esse teorema temos uma importante propriedade dos conjuntos convexos e fechados em um espaço de Hilbert. Com ele temos uma regra que associa para todos os $\mathbf{f} \in \Xi$ o seu vizinho mais próximo, e único, em C , que é denominado de projeção de \mathbf{f} sobre C . Tal regra é totalmente determinada pelo conjunto C chamada de operador de projeção, ou projetor, sobre C , sendo denotado por \mathbf{P}_C . Portanto, dado $\mathbf{f} \in \Xi$, sua projeção $\mathbf{P}_C \cdot \mathbf{f}$ sobre C é definida pelo \mathbf{g} satisfazendo

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{P}_C \cdot \mathbf{f}\| = \min_{\mathbf{g} \in C} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|. \quad (5.3)$$

.

Temos na Definição 5.4 uma extensão da definição de projeção, o projetor relaxado.

Definição 5.4 (Projetor relaxado) *Para cada constante $\eta \in (0, 2)$ o operador de projeção relaxado sobre $C \subset \Xi$ é definido por*

$$\mathbf{T}_C = \mathbf{I} + \eta \cdot (\mathbf{P}_C - \mathbf{I}), \quad (5.4)$$

com \mathbf{I} sendo o operador identidade em Ξ . Sendo assim, para cada $\mathbf{f} \in \Xi$, o operador relaxado \mathbf{T}_C produz

$$\mathbf{T}_C \cdot \mathbf{f} = \mathbf{f} + \eta \cdot (\mathbf{P}_C \cdot \mathbf{f} - \mathbf{f}) = (1 - \eta) \cdot \mathbf{f} + \eta \cdot \mathbf{P}_C \cdot \mathbf{f}. \quad (5.5)$$

É possível se observar que quando $\eta = 1$, o operador relaxado \mathbf{T}_C se resume ao operador \mathbf{P}_C . Dessa forma, frequentemente o operador \mathbf{P}_C é chamado de operador puro e sua respectiva operação de projeção pura.

Como última definição temos a convergência fraca, necessária para se caracterizar o teorema fundamental de POCS.

Definição 5.5 (Convergência Fraca) *Em um espaço de Hilbert Ξ , uma sequência $\{\mathbf{f}_n\}$ converge fracamente para $\mathbf{f} \in \Xi$ se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{f}_n, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle, \quad \forall \mathbf{g} \in \Xi. \quad (5.6)$$

Utilizando as definições anteriores, além do Teorema 5.1, consideremos agora M conjuntos convexos e fechados denotados por C_1, C_2, \dots, C_M em um espaço de Hilbert Ξ e $C = \bigcap_{k=1}^M C_k$.

Para todos os conjuntos C_k , $k \in I = \{1, \dots, M\}$, onde I é uma família de índices, existe um operador de projeção pura \mathbf{P}_{C_k} sobre C_k , além do seu operador correspondente relaxado \mathbf{T}_{C_k} , para $\eta_k \in (0, 2)$. Considere ainda a composição de projetores dada por

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{C_M} \cdot \mathbf{T}_{C_{M-1}} \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_{C_1}. \quad (5.7)$$

Assim, pode-se enunciar o seguinte resultado:

Teorema 5.2 (Teorema fundamental de POCS) *Assuma que $C \neq \emptyset$. Então para cada $\mathbf{f} \in \Xi$ e para cada $\eta_k \in (0, 2)$, $k = 1, \dots, M$ a sequência $\{\mathbf{T}^{(n)} \cdot \mathbf{f}\}$, $n \in \mathbb{N}$, converge fracamente para um ponto de C .*

A importância do Teorema 5.2 é que ele define um algoritmo numérico sistemático para achar um ponto na intersecção não vazia de vários conjuntos convexos fechados. Este teorema foi primeiramente demonstrado por Gubin, Polyak e Raik (1967) e posteriormente, Youla e Webb (1982) sugeriram uma prova alternativa. Omitimos a demonstração do teorema, contudo esta pode ser encontrada nas referências citadas.

Dessa forma, podemos afirmar que, para um ponto inicial arbitrário $\mathbf{f}^{(0)}$, contido em um espaço de Hilbert Ξ , e M conjuntos convexos e fechados como descrito acima, sendo que $C \neq \emptyset$, a sequência $\{\mathbf{f}^{(n)}\}$, $n \in \mathbb{N}$ gerada pela relação recursiva

$$\mathbf{f}^{(n+1)} = \mathbf{T}_{C_M} \cdot \mathbf{T}_{C_{M-1}} \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_{C_1} \cdot \mathbf{f}^{(n)}, \quad (5.8)$$

onde, \mathbf{T}_{C_k} , $k = 1, \dots, M$ é definido por $\mathbf{T}_{C_k} = \mathbf{I} - \eta_{n,k} \cdot (\mathbf{P}_{C_k} - \mathbf{I})$ para $\eta_{n,k} \in (0, 2)$ converge fracamente para um ponto de C .

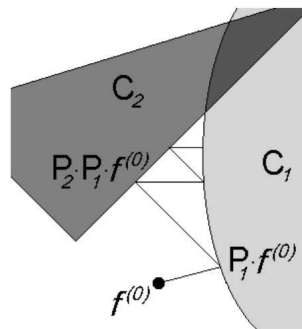
No caso geral, o parâmetro de relaxação $\eta_{n,k}$ pode depender especificamente do projetor \mathbf{T}_{C_k} e também do passo da iteração n .

Um caso particular para o Teorema 5.2 é quando $\eta_{n,k} = 1$ para todos os operadores \mathbf{T}_{C_k} e para todas as iterações. Nesta hipótese, a Equação 5.8 se resume ao algoritmo POCS cíclico (COMBETTES, 1993; MARKS; ROBERT, 1996) expresso por

$$\mathbf{f}^{(n+1)} = \mathbf{P}_{C_M} \cdot \mathbf{P}_{C_{M-1}} \cdot \dots \cdot \mathbf{P}_{C_1} \cdot \mathbf{f}^{(n)}. \quad (5.9)$$

A Figura 6 ilustra o comportamento da Equação 5.9 para os casos de dois conjuntos convexos fechados.

Figura 6 – Ilustração do processo iterativo do algoritmo de POCS.



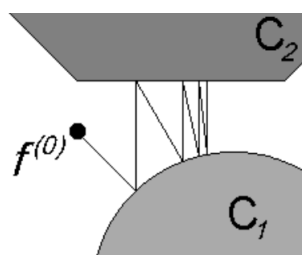
Fonte: Produzido pelos autores.

Considerações práticas podem ser levantadas: (i) o impacto do ponto inicial selecionado sobre o ponto de convergência; (ii) possibilidade de conjuntos de restrições sem ponto de interseção, ocasionado por imprecisões na informação *a priori* durante a definição dos conjuntos, e (iii) os valores escolhidos para os parâmetros de relaxação.

Estratégias ótimas para selecionar os parâmetros de relaxação são geralmente um problema de difícil solução (SEZAN, 1992; STARK; SEZAN, 1994). Frequentemente possuem dependência do contexto onde o algoritmo será aplicado. Na maioria das aplicações são utilizados operadores de projeções puras juntamente com parâmetros de relaxação unitários, em casos com mais de duas restrições. Quando efetivamente se deseja utilizar relaxação, a definição dos parâmetros é feita heurísticamente.

A Figura 7 ilustra um problema mais sério, onde não existe interseção entre os conjuntos de restrições, ou seja, onde $C = \emptyset$. O problema é representado com dois conjuntos e, nesta situação, o algoritmo acaba oscilando entre os mesmos e não consegue chegar em um ponto de convergência.

Figura 7 – Ilustração do comportamento do algoritmo de POCS sequencial para o caso de dois conjuntos que não se intersectam.



Fonte: Produzido pelos autores.

É possível generalizar a teoria de projeções com o objetivo de incorporar os casos em que a intersecção é vazia (STARK; YANG, 1998). Nesse caso, é conveniente utilizar o algoritmo de projeções simultâneas definido como

$$\mathbf{f}^{(n+1)} = \sum_k w_k \cdot \mathbf{P}_{C_k} \cdot \mathbf{f}^{(n)}, \quad (5.10)$$

nesse caso w_k são constantes positivas que satisfaçam $\sum_k w_k = 1$. Aqui temos que o procedimento iterativo irá convergir para um ponto que satisfaça, no sentido de mínimos quadrados ponderados, todas as restrições. É possível verificar que a Equação 5.10 minimiza a expressão

$$\hat{\mathbf{f}} = \sum_k w_k d^2(\hat{\mathbf{f}}, C_k), \quad (5.11)$$

sendo que $d(\hat{\mathbf{f}}, C_k)$ é a distância entre $\hat{\mathbf{f}}$, que é o ponto de convergência, e C_k .

A convergência do algoritmo de POCS pode ser dependente do ponto inicial escolhido caso o conjunto $C \neq \emptyset$ não seja unitário, ou seja, se houver mais de uma resposta possível, não ocorrerá a convergência para uma que seja ótima. Inclusive, esse fato é uma crítica frequente ao método de projeções (COMBETTES, 1993). A questão é que, dentro da filosofia de POCS, isso é aceitável pois, uma vez que o ponto pertença a C ele é uma resposta factível do problema.

Isso se deve ao fato de que, a proposta da teoria dos conjuntos, é chegar a uma solução que atenda de forma consistente toda a informação que se tem disponível, mesmo que não seja única. O objetivo é que a solução seja consistente com todo o conhecimento *a priori* sobre o problema e não a “melhor” solução, colocando ênfase na factibilidade e não na optimabilidade.

Métodos tradicionais em processamento de imagens buscam uma solução ótima, estabelecendo assim um critério objetivo (COMBETTES, 1993) como, por exemplo, minimização do erro quadrático médio ou critérios de máxima entropia, máxima verossimilhança ou máximo *a posteriori*. Entretanto, formulações estatísticas ótimas esbarram em questões como a tratabilidade matemática e computacional. Isso normalmente requeira que simplificações drásticas sejam necessárias, dificultando, se não impossibilitando, a incorporação de toda informação *a priori* disponível (COMBETTES, 1992).

As soluções “ótimas” encontradas violam restrições conhecidas como, por exemplo valores de identidade negativos, uma vez que toda informação *a priori* não pode ser incorporada. Mais ainda, com frequência as soluções encontradas são subótimas, devido a limitações práticas como, por exemplo, é necessário estimar parâmetros e para isso se tem disponível apenas os dados observados (HOMEM, 2003).

Contudo, estas considerações não implicam que não se deva levar em consideração critérios estatísticos. Pelo contrário, embora o algoritmo POCS não requer um modelo

probabilístico para os dados, pode-se perfeitamente incorporar estes critérios ao problema (HOMEM, 2003).

No problema específico de restauração de imagens, o algoritmo deve buscar por uma imagem que é consistente com um número definido de restrições *a priori*, descritas na forma de conjuntos convexos fechados, que por sua vez, representam o conhecimento adicional sobre o problema. Cada membro da intersecção dos conjuntos é considerado uma solução factível para o problema de restauração e o processo de regularização pode ser visto como o procedimento de forçar o resultado a satisfazer todas as restrições definidas *a priori*.

6 Metodologia

Neste capítulo são apresentadas as metodologias utilizadas para a geração dos resultados obtidos. A abordagem que propomos tem como base a teoria de Projeções sobre Conjuntos Convexos (POCS), mais especificamente utilizando o algoritmo proposto por Tekalp, Ozkan e Sezan (1992), do qual será descrito somente as definições que são de fundamental importância para a compreensão dos resultados obtidos, e descritos no Capítulo 7, contudo, maiores detalhes da abordagem e da metodologia original podem ser encontrados nas referências citadas. O teorema fundamental de POCS já foi amplamente abordado no Capítulo 5. A seção 6.1 aborda como o modelo de formação das imagens, descrito na seção 4.2, é aplicado na formulação dos algoritmos discutidos no presente trabalho. Na seção 6.2 é descrito o algoritmo utilizado como base para todas as implementações aqui utilizadas. Temos na seção 6.3 a definição de como a abordagem híbrida, envolvendo o domínio espacial e espectral, será aplicada. As seções 6.4 e 6.5 descrevem as variações implementadas do algoritmo de POCS, para base de comparação e as propostas como diferencial do trabalho. Finalmente, nas seções 6.6 e 6.7 temos descrito a contextualização das ferramentas que serão utilizadas para a geração dos resultados, descrevendo os conjuntos de imagens a serem submetidas aos algoritmos e as ferramentas utilizadas para comparar os resultados.

6.1 Aplicação do modelo de formação da imagem

Como definido no Capítulo 4, o principal conceito da super-resolução é utilizar um conjunto de imagens baixa resolução (LR) de uma determinada cena e que possuam deslocamentos subpixel entre elas, combinando-as de forma a obtermos uma imagem de alta resolução (HR). Tekalp, Ozkan e Sezan (1992) estenderam o problema que havia sido inicialmente descrito por Oskoui-Fard e Stark (1988), considerando agora a presença de ruído aditivo nas imagens LR, além da utilização de um algoritmo de estimação de movimento para determinar os deslocamentos entre essas imagens.

Na literatura de super-resolução, encontramos muitos algoritmos que consideram na modelagem do problema o conhecimento prévio destes deslocamentos, entretanto, no algoritmo utilizado por Tekalp, Ozkan e Sezan (1992) e no presente trabalho, é necessário a utilização de um algoritmo que estime os deslocamentos para que assim seja possível um melhor desempenho dos resultados.

A modelagem matemática para o processo (STARK; YANG, 1998) leva em consideração que temos disponível uma quantidade J de imagens LR, denominadas também por *frames*, com dimensões de $N \times N$ pixels. Com esse conjunto, buscamos a reconstrução de

uma imagem de maior resolução com dimensões de $M \times M$ *pixels*, levando em consideração que $M > N$. Os *frames* LR serão denotados por $d_j(m, n)$, sendo que $m, n = 0, 1, \dots, N - 1$ e $j = 1, 2, \dots, J$.

A imagem HR desconhecida, que temos por objetivo encontrarmos uma estimativa, será denotada por $f(k, l)$, com $k, l = 0, 1, \dots, M - 1$. Dessa forma, temos então M^2 valores desconhecidos a serem estimados, sendo M^2 valores de escala de cinza, M^2 localizações e também JN^2 equações que precisam ser estimadas. Na presença de ruído temos então

$$d_j(m, n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} f(k, l) h_j(m, n; k, l) + \mathbf{n}_j(m, n), \quad j = 1, \dots, J, \quad (6.1)$$

onde $h_j(m, n; k, l)$ é a função de espalhamento pontual (PSF) variante no espaço e $\mathbf{n}_j(m, n)$ é o ruído aditivo, sendo que o índice j existente em ambos é referente ao número do *frame* sendo considerado, ou seja, esses valores podem variar entre os *frames*.

Sobre a PSF é necessário fazermos algumas considerações (STARK; YANG, 1998). Para o entendimento do mecanismo relacionado a ela, faremos a suposição de que possuímos a imagem HR f , para assim explicarmos a geração da mesma segundo o modelo. Considerando o modelo apresentado na seção 4.2 e a formulação da Equação 6.1, é possível notarmos que $d_j(m, n)$ é resultado da sobreposição ponderada dos *pixels* HR, f com $k, l = 0, 1, \dots, M - 1$. Sendo assim, podemos assumir que os *pixels* HR são na verdade, representados por quadrados de lado Δ e que o *pixel* LR possui portanto área de $L^2 \Delta^2$.

Para manter o brilho médio tanto na imagem HR quanto na LR, é necessário normalizar por $L^2 \Delta^2$ (a área do *pixel*), a energia acumulada pelo *pixel* LR. Dos M^2 *pixels* da imagem HR, é necessário destacar que poderão existir quatro possibilidades para a contribuição da formação do *pixel* LR: o *pixel* HR está quase fora da área; em uma região de fronteira; completamente dentro; ou fora da área de contribuição. No que se diz respeito ao brilho do *pixel* LR, os *pixels* HR que contribuem totalmente na formação do *pixel* LR, contribuirão também totalmente com o brilho, e proporcionalmente nos demais casos.

Dessa forma podemos então calcular de maneira equivalente a PSF $h_j(m, n; k, l)$

$$h_j(m, n; k, l) = \frac{A_j(m, n; k, l)}{A_L}, \quad (6.2)$$

sendo que $A_j(m, n; k, l)$ é a área de sobreposição entre os *pixels* LR e o HR, com centros em (m, n) e (k, l) respectivamente, e A_L é a área do *pixel* LR.

Tendo como base um determinado *frame* de referência, é necessário conhecer os valores dos deslocamentos dos *frames*, para que possamos determinar a área de sobreposição dos *pixels* HR, em relação aos LR. Se esses valores não são conhecidos, é necessária a utilização de algoritmos de estimação de movimento para gerar esses valores e, no caso do presente trabalho, foi utilizado o algoritmo proposto por Irani e Peleg (1991).

Os valores determinados dos deslocamentos, além de serem utilizados na construção da PSF, serão também aplicados no processo POCS de reconstrução de imagens HR.

Mesmo que seja conhecido que os algoritmos de estimação de movimento possam interferir no resultado da super-resolução, não temos por objetivo aqui discutir comparações ou, verificar possíveis mudanças ocasionadas nos resultados, com a utilização de outras abordagens, sendo assim, um possível tema que podemos apontar para trabalhos futuros.

6.2 Algoritmo base

O algoritmo utilizado como base para a proposta deste trabalho é o desenvolvido por [Tekalp, Ozkan e Sezan \(1992\)](#), que executa o processo de reconstrução de uma imagem utilizando POCS. Para detalharmos esse processo, precisamos considerar a [Equação 6.1](#) com modificações

$$0 = d_j(m, n) - \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} f(k, l) h_j(m, n; k, l), \quad j = 1, \dots, J, \quad (6.3)$$

onde $d_j(m, n)$ são os *frames* de baixa resolução (LR) conhecidos e, consideramos que $h_j(m, n; k, l)$ também já foi calculada e tem seus valores conhecidos. Se não conhecemos $f(k, l)$ podemos tentar encontrá-la através das diferentes versões de $y(k, l)$ que serão estimadas em cada iteração do processo regularizador do POCS, considerando a [Equação 6.4](#)

$$\varepsilon'_j(m, n; y) \triangleq d_j(m, n) - \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} y(k, l) h_j(m, n; k, l), \quad (6.4)$$

onde $\varepsilon'_j(m, n; y)$ representa o resíduo entre a versão y e os *frames* LR $d_j(m, n)$.

Uma boa escolha referente a y é a qual o resultado da [Equação 6.4](#) seja o menor possível. Por outro lado, uma escolha ruim faria gerar um erro maior em relação a imagem desejada $f(k, l)$. O melhor resultado será aquele em que através de $y(k, l)$ possa obter $f(k, l)$ ou aproximar ao máximo, o que faria com que ε'_j esteja o mais aproximado possível de zero. Considerando a presença do ruído, ε'_j será representado por:

$$\varepsilon'_j(m, n; y) \triangleq \varepsilon'_j(m, n; y) + \mathbf{n}_j(m, n). \quad (6.5)$$

Considerando o exposto até o momento, uma abordagem para resolver o problema é forçar com que ε'_j em relação a y seja restringido, ou seja, os valores terão uma magnitude limitada. Considerando este raciocínio, podemos então representar essa modelagem através de um conjunto convexo dado por:

$$C_j(m, n) \triangleq y : |\varepsilon'_j(m, n; y)| \leq \eta \quad (6.6)$$

onde η é uma constante convenientemente escolhida, sendo sugerida a utilização de $\eta = 3\sigma$, conforme sugerido por [Tekalp, Ozkan e Sezan \(1992\)](#), onde σ é desvio padrão do ruído $\mathbf{n}(m, n)$.

Tendo assim a definição do principal conjunto de restrição da abordagem POCS na qual baseamos nosso trabalho, podemos então definir como calcular os projetores que serão utilizados para estimar a imagem de alta resolução (HR) que desejamos.

Para a modelagem matemática dos projetores, precisamos considerar três casos: (i) $\varepsilon'_j > \eta$; (ii) $\varepsilon'_j < -\eta$; e (iii) $-\eta \leq \varepsilon'_j \leq \eta$. Omitimos os cálculos que deverão ser realizados para formular o projetor, contudo eles podem ser encontrados em Stark e Yang (1998). Sendo assim, o projetor que será utilizado para o caso (i), será:

$$y^*(k, l) = q(k, l) + \frac{\varepsilon'_j(m, n, y) - \eta}{\|h_j\|_F^2} h_j(m, n; k, l). \quad (6.7)$$

Para o caso (ii), o projetor será de forma similar:

$$y^*(k, l) = q(k, l) + \frac{\varepsilon'_j(m, n, y) + \eta}{\|h_j\|_F^2} h_j(m, n; k, l). \quad (6.8)$$

Já para o caso (iii), como os valores estão dentro da magnitude considerada, simplesmente não faremos modificações no valor do *pixel* analisado. Sendo assim, $y^*(k, l) = q(k, l)$. É importante esclarecer também que $\|h_j\|_F^2$ é a norma de Frobenius da PSF.

Salientamos que $C_j(m, n)$ é um conjunto de restrição pontual, ou seja, imposta em todos os *frames* utilizados no processo, assim como também em cada um dos seus M^2 *pixels*. Por isso, a solução a ser encontrada é imposta por uma restrição global que representa a intersecção dos JM^2 conjuntos existentes, sendo assim, a solução precisa atender às restrições de todos os conjuntos. Podemos assim denotar por \tilde{P} , ou de forma mais generalizada por \tilde{T} (representando a versão relaxada do projetor), como a composição de todos as JM^2 projeções pontuais.

6.3 Descrição da abordagem híbrida utilizando POCS

Considerando o exposto quanto ao algoritmo de projeção sobre conjuntos convexos desenvolvido por Tekalp, Ozkan e Sezan (1992), conforme foi definido, todas as imagens de baixa resolução (LR) utilizadas no processo de super-resolução, são consideradas no contexto iterativo do POCS um conjunto de restrições convexas pontuais, que forçam o resultado desejado da imagem de alta resolução (HR) a não se distanciar de uma intersecção entre essas imagens. Uma das grandes vantagens do POCS é a possibilidade de inclusão de mais conjuntos de restrições que permitam acrescentar informações ao processo, com o intuito de ter uma aproximação melhor do resultado desejado. Portanto, propomos a inclusão de um conjunto de restrição convexa, considerando uma abordagem espectral, utilizando-se das propriedades e de operações no domínio de frequência da imagem a ser estimada em cada iteração.

Considerando que as imagens LR possuem *aliasing*, podem conter borramentos de diversas naturezas, outros problemas inerentes ao processo de captura e de decimação,

além da situação descrita no [Capítulo 4](#), em relação ao mal condicionamento do problema da Super-Resolução, justifica-se a utilização de informações *a priori*, através de técnicas de regularização a serem acrescentadas ao problema inverso para que seja possível obter um resultado mais adequado e próximo da imagem HR desejada. A regularização pode ser considerada como qualquer procedimento que seja capaz de estabilizar a inversão da matriz mal condicionada existente no modelo de formação da imagem. Métodos de regularização, muito utilizados em algoritmos de Super-Resolução, são aqueles encontrados no arcabouço de técnicas de restauração de imagens ([HOMEM, 2003](#)).

Considerando a metodologia proposta, o objetivo é verificar o impacto do aprimoramento da abordagem POCS, através de técnicas de restauração, que podem ser modeladas dentro de um conjunto de restrição convexo. Uma vez que o algoritmo POCS implementado já considera informações oriundas das imagens LR e da PSF que foi modelada através da sobreposição dos *pixels*, é preciso também condicionar a estimativa em cada iteração de tal forma que se busque regularizar o mal condicionamento e recupere frequências que foram perdidas pelo processo de decimação das imagens utilizadas, preservando as bordas e os detalhes que são importantes para se obter bons resultados. Desta forma, a abordagem proposta aqui, utiliza o algoritmo de Richardson-Lucy, modificado através da utilização conjunta com o filtro de Canny, tendo como objetivo que o filtro de Canny limite a operação da regularização *total variation* na remoção de ruído, de forma que não opere sobre as bordas da imagem, e impedindo o surgimento de artefatos que ocorrem no algoritmo de Richardson-Lucy.

Tal abordagem já foi objeto de estudo da dissertação de mestrado “Uma abordagem híbrida baseada em projeções sobre conjuntos convexos para super-resolução espacial e espectral”¹, sendo que aqui o objetivo é estendê-la, também à uma abordagem baseada em um critério de penalização *total-variation*, o qual tenta preservar as bordas das imagens ao mesmo tempo que as suaviza ([HOMEM; ZORZAN; MASCARENHAS, 2011](#)).

6.3.1 Algoritmo de Richardson e Lucy regularizado com *Total Variation*

O algoritmo de Richardson-Lucy (RL), proposto por [Richardson \(1972\)](#) e [Lucy \(1974\)](#), é uma técnica amplamente utilizada na restauração de imagens, geralmente para recuperação parcial de frequências, sendo derivado da expressão de máxima verossimilhança, para imagens onde o ruído aditivo possui uma distribuição de Poisson ou Gaussiana. O algoritmo RL com *total-variation* para a solução iterativa de $\hat{f}_n(x, y)$, para um ruído

¹ Dissertação de mestrado do discente Bruno Aguilar da Cunha, orientado pelo Prof. Dr. Murillo Rodrigo Petrucelli Homem, apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação (PPGCC-So) da Universidade Federal de São Carlos, aprovado em 10 de novembro de 2016, Sorocaba -SP

gaussiano é dado por

$$\hat{f}_{n+1}(x, y) = \left\{ \left[\frac{g(x, y)}{\hat{f}_n(x, y) * h(x, y)} \right] \right\} \cdot \frac{\hat{f}_n(x, y)}{1 - \lambda \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \hat{f}_n(x, y)}{|\hat{f}_n(x, y)|} \right)}, \quad (6.9)$$

onde n é o índice referente ao número da iteração, $g(x, y)$ é uma versão borrada e ruidosa da imagem observada, div é o operador de divergência e λ uma constante.

Tendo em vista a definição para a técnica RL, destacamos que o Filtro de Canny (CANNY, 1986) tem como função, a detecção de bordas na imagem, baseado na primeira derivada de uma função gaussiana. O filtro, portanto, pode ser dado pela seguinte equação:

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \quad (6.10)$$

O algoritmo RL é utilizado na abordagem proposta para recuperação parcial de frequências que são perdidas pelo modelo de decimação da imagem e que, conforme foi discutido no Capítulo 4, geralmente leva em consideração uma abordagem simplificada através de um operador de média, o que acaba ocasionando a perda de frequências que podem estar relacionadas a detalhes da imagem e ser de extrema importância para a obtenção de uma estimativa HR adequada. O método RL é bastante conhecido e aplicado em restauração de imagens, devido a sua capacidade de remoção de ruído dos *pixels* sem degradar a resolução original da imagem. Contudo, em seu processo iterativo há uma tendência em enfatizar artefatos indesejados, principalmente em regiões uniformes que podem comprometer a estimativa desejada. Considerando esse problema, inserimos em sua formulação uma modificação, utilizando o filtro de Canny para detecção de bordas e tendo seus valores sido normalizados. Assim o filtro de Canny passa a condicionar de forma proporcional e ponderada a utilização do algoritmo RL, juntamente com o *total variation*, que com seu parâmetro λ faz com que a ponderação do *pixel* seja mais ou menos efetiva através do parâmetro p dado em 6.11. Essa condicionalidade se refere justamente às transições da imagem, de tal forma que em regiões onde bordas forem detectadas pelo filtro, o algoritmo RL irá atuar de forma mais efetiva, o que pode tornar as bordas mais definidas, ao mesmo tempo em que nas regiões uniformes o filtro resultará em valores próximos a zero, ou seja, o algoritmo RL terá pouca efetividade, evitando o aparecimento indesejado dos artefatos citados, tornando assim a abordagem elegante e funcional e utilizando-se da qualidade e características de ambos os algoritmos. Considerando a Equação 6.11, $f_{n+1}(x, y)$ é a imagem a ser obtida através do algoritmo RL-TV-CANNY, ponderado pelo parâmetro p (filtro de Canny normalizado) entre a imagem original e a imagem gerada pelo algoritmo de Richardson-Lucy.

$$f_{n+1}(x, y) = f_n(x, y) * p + g(x, y) * (1 - p). \quad (6.11)$$

Essa abordagem RL-TV-CANNY, será adicionada no algoritmo POCS onde seu projetor é representado pela Equação 6.12 e o conjunto de restrição formulado na Equ-

ção 6.13. As demonstrações sobre a convexidade do conjunto e a formulação do projetor foram omitidas, mas podem ser encontradas na referência (STARK; YANG, 1998).

$$O_n = \left[\frac{\left(\left(\frac{g}{\hat{f}_{n-1} * h} \right) * h \right)}{1 - \lambda \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \hat{f}_n(x,y)}{|\hat{f}_n(x,y)|} \right)} \right]. \quad (6.12)$$

$$C_n = \{ \hat{f}_n : O_n \cdot \hat{f}_{n-1} \}. \quad (6.13)$$

Vale destacar que o parâmetro λ surge da funcional de Lagrange para a derivação da função de minimização para o *total variation*, as variações de valores implica se haverá mais ou menos regularização no processo, sendo que quanto mais alto o valor de λ , mais regularização é incorporada. Maiores informações sobre a derivação do total variation podem ser encontradas na referência (STARK; YANG, 1998).

6.4 Algoritmos utilizados para comparação

Para a discussão dos resultados são utilizados três implementações distintas da abordagem POCS para reconstrução de imagens. Todas possuem como estrutura básica o algoritmo proposto por Tekalp, Ozkan e Sezan (1992), conforme descrito na seção 6.2, mas com algumas modificações. O objetivo é produzir resultados com as mesmas entradas e que serão submetidas ao algoritmo proposto no presente trabalho, com o intuito de poder comparar os resultados de abordagens já estabelecidas na literatura e assim aferir a qualidade dos resultados obtidos por essa proposta.

A partir desse momento iremos nos referir a essas implementações como POCS1, POCS2 e POCS3. O POCS1 foi implementado de forma fiel ao proposto no trabalho citado como referência, inclusive considerando a projeção sequencial. Já no caso do POCS2 a proposta é semelhante a do POCS1, mas com uma alteração transformando a implementação em uma abordagem POCS paralela, como mencionado no Capítulo 5. No final de cada processo iterativo foi realizada uma média da estimativa de cada imagem gerada, considerando a projeção em cada conjunto e que é utilizada como base para a próxima iteração, até que as condições sejam satisfeitas ou o número de iterações estabelecido para o processo seja alcançado. Por fim, o POCS3 é a implementação da abordagem proposta no trabalho de mestrado citado na Capítulo 2, o qual considera o POCS sequencial e uma abordagem espectral para recuperar parcialmente frequências espaciais perdidas e diminuir o borramento do operador de média considerado na decimação das imagens de baixa resolução. Vale ressaltar que o trabalho mencionado obteve resultados apreciáveis em comparação ao trabalho de Milanfar (2010), que propõe um dos melhores algoritmos para super-resolução. Com isso, se o presente trabalho puder atingir resultados, no mínimo, equivalentes ao trabalho de mestrado citado, estes demonstrarão sua eficiência.

Os conjuntos convexos que são considerados nas três implementações são as imagens de baixa resolução, onde para esse trabalho temos dois conjuntos distintos, com 10 e 16 imagens respectivamente. Entretanto, para o POCS 3 é considerada uma restrição convexa a mais implementada na forma do algoritmo de Richardson-Lucy com o filtro de Canny. As provas de convexidade desses conjuntos serão omitidas, podendo ser encontradas na referência (STARK; SEZAN, 1994)

Abaixo segue um resumo com as descrições.

POCS1 - Algoritmo proposto por Tekalp *et al.* originalmente em sua forma sequencial.

POCS2 - Algoritmo baseado em Tekalp *et al.* modificado para projeções simultâneas/paralelas dos *pixels* nos conjuntos convexos (Equação 5.10 do Capítulo 5)

POCS3 - Algoritmo baseado em Tekalp *et al.* com acréscimo de um conjunto de restrição convexo, utilizando o algoritmo de Richardson-Lucy, modificado pela contribuição ponderada do filtro de Canny. Desenvolvido no trabalho de mestrado “Uma abordagem híbrida baseada em Projeções sobre Conjuntos Convexos para Super-Resolução espacial e espectral”.

6.5 Algoritmos desenvolvidos

Nesse trabalho, fazemos a proposta de uma abordagem híbrida de reconstrução de imagens por super-resolução, onde além de trabalharmos no domínio espacial das imagens executamos operações no domínio espectral. Utilizando o algoritmo de POCS de Tekalp, Ozkan e Sezan (1992) propomos a utilização do algoritmo de Richardson-Lucy com regularização *total variation*, com o intuito de estender o trabalho de mestrado citado na seção 6.3, bem como verificar a eficiência da abordagem híbrida, recuperando frequências perdidas devido o processo de decimação, nas imagens resultantes.

Entretanto, propomos também uma outra implementação não híbrida, igualmente tendo como base o algoritmo de Teckalp *et al.*, porém utilizando a abordagem de POCS paralelo implementado no POCS2, descrito na seção 6.4. Essa proposta contém uma modificação nas equações 6.7 e 6.8 implementando replicação de *pixels*. No restante do trabalho iremos nos referir ao algoritmo resultante dessa proposta como POCS4.

Destacamos que para todas as implementações aqui propostas, os conjuntos de restrições utilizados foram os mesmos dos algoritmos de base de comparação para os resultados descritos na seção 6.4. Sendo assim, temos os conjuntos de imagens de baixa resolução e a restrição espectral do algoritmo de Richardson-Lucy com o acréscimo da regularização.

Com base na abordagem híbrida implementamos ainda quatro variações, onde para descrevê-las denotaremos por POCS5, POCS6, POCS7 e POCS8. O POCS5 é a

implementação híbrida, utilizando Richardson-Lucy ponderado com o filtro de Canny, regularizado com *total variation* e aplicando a abordagem de POCS sequencial. No POCS6 temos a implementação do POCS5, entretanto sem a ponderação do filtro de Canny. Com o POCS7 usando também a implementação do POCS5, porém aqui com a diferença do uso de projeções paralelas. Finalmente, o POCS8 é uma proposta que mescla a abordagem de POCS paralelo com sequencial. Nessa abordagem, para as projeções nos conjuntos das imagens de baixa resolução, são utilizadas projeções paralelas com a média calculada dos resultados, e em seguida, fazemos de maneira sequencial a projeção no conjunto referente ao domínio espectral.

Algo em comum a todos os algoritmos que implementam Richardson-Lucy é que existe um parâmetro que pode ser configurado com diferentes valores, afetando assim, o desempenho do resultado. Esse parâmetro é o λ e vai implicar na importância da regularização durante as execuções. Sua origem vem da formulação do *total variation*, descrita juntamente com a formulação do algoritmo Richardson-Lucy na [Equação 6.9](#).

Segue o resumo com todas as descrições.

POCS4 - Algoritmo baseado em Tekalp *et al.*, utilizando projeções paralelas e replicação de *pixels*.

POCS5 - Algoritmo híbrido, baseado em Tekalp *et al.*, utilizando a restrição convexa do algoritmo de Richardson-Lucy com regularização *total variation*, ponderado pelo filtro de Canny e utilizando projeções sequenciais.

POCS6 - Algoritmo híbrido, baseado em Tekalp *et al.*, utilizando a restrição convexa do algoritmo de Richardson-Lucy com regularização *total variation*, sem ponderação do filtro de Canny e utilizando projeções sequenciais.

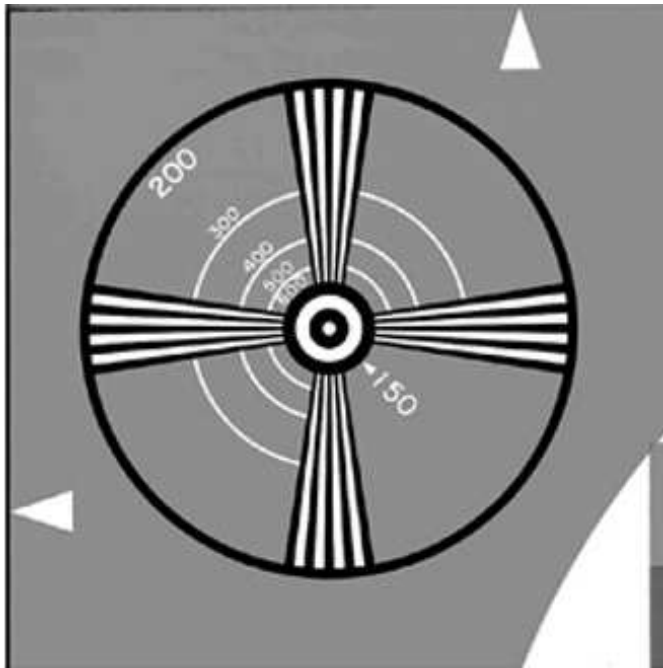
POCS7 - Algoritmo híbrido, baseado em Tekalp *et al.*, utilizando a restrição convexa do algoritmo de Richardson-Lucy com regularização *total variation*, ponderado pelo filtro de Canny e utilizando projeções paralelas.

POCS8 - Algoritmo híbrido, baseado em Tekalp *et al.*, utilizando a restrição convexa do algoritmo de Richardson-Lucy com regularização *total variation*, ponderado pelo filtro de Canny e utilizando projeção mista, onde primeiro projeta paralelamente nos conjuntos de imagens e sequencialmente na restrição espectral.

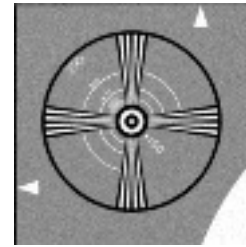
6.6 Imagens utilizadas para os testes

Para a execução dos testes com os algoritmos, foram utilizadas imagens LR (LR) derivadas do conjunto denominado EIA, empregadas nos trabalhos de [Farsiu et al. \(2004a\)](#), [Farsiu et al. \(2004b\)](#), [Farsiu, Elad e Milanfar \(2006b\)](#), [Farsiu, Elad e Milanfar \(2006a\)](#)

Figura 8 – Conjunto de imagens EIA - (a) Imagem Original e (b) Versão LR degradada e ruidosa.



(a) Imagem Original



(b) Versão LR degradada e ruidosa

Fonte: Produzido pelos autores

e disponibilizadas na internet pelos autores². O conjunto é considerado pelos autores como uma experiência simulada, devido a natureza sintética das imagens. Foi criada uma sequência de quadros LR utilizando a imagem original de alta resolução (HR). Para isso, primeiramente deslocaram a imagem HR por um *pixel*, na direção vertical. Em seguida, tentando simular o efeito da função de espalhamento pontual (PSF) referente à câmera e ao processo de captura, a imagem deslocada passou pelo processo de convolução, com um filtro passa-baixa gaussiano simétrico, de tamanho 4×4 com desvio padrão igual a 1. Da imagem obtida, foi realizada a decimação pelo fator 4 em cada direção (reduzindo as dimensões), criando então uma primeira imagem LR pertencente ao conjunto. A mesma abordagem foi realizada com diferentes vetores de movimento (deslocamentos) na vertical e na horizontal, produzindo assim 16 imagens LR a partir da imagem original. Eles adicionam ainda, um ruído gaussiano às imagens LR resultantes, para obter uma relação sinal-ruído (SNR) igual a 7dB. Apresentamos na [Figura 8](#) a imagem original (a) e uma imagem LR (b) que foi criada conforme a descrição. A imagem original possui a dimensão de 360×360 *pixels*, e cada versão LR, que foi derivada desta a partir do método descrito, possui dimensão 90×90 *pixels*.

As imagens na [Figura 8](#), foram mantidas em seus tamanhos originais para que se possa ilustrar bem o problema com o qual estamos trabalhando. O objetivo da super-

² <<https://users.soe.ucsc.edu/milanfar/software/sr-datasets.html>> Acessado em: 14/06/2016

resolução espacial e, por consequência, deste trabalho é de se obter estimativas o mais próximas possível da imagem (a), com o princípio que temos apenas conjuntos de imagens semelhantes a imagem (b), porém deslocadas e com informação subpixel. Desse ponto em diante as imagens apresentadas serão colocadas em escala.

Desse conjunto descrito, foram utilizadas 10 imagens LR, sendo que o parâmetro de seleção foi dada uma determinada imagem como referência, que tivessem deslocamentos positivos.

Um segundo conjunto foi gerado, tendo como base a imagem original do conjunto EIA. Foi simulada uma degradação de maneira semelhante a utilizada pelos autores citados e também foi incorporado um ruído gaussiano aditivo, com média 0 e variância de 0,0005. Nesse conjunto foram adicionadas 16 imagens e, como no outro, apenas deslocamentos positivos foram considerados. As imagens LR obtidas, tiveram as dimensões de 82×82 *pixels*.

Nos testes para ambos os conjuntos a super-resolução espacial foi aplicada utilizando um fator dois de aumento. Em outras palavras, as estimativas geradas pelos algoritmos possuíam o dobro de tamanho que as imagens LR utilizadas no processo, gerando o primeiro conjunto de estimativas HR de dimensões 180×180 *pixels* e para o segundo conjunto dimensões de 164×164 *pixels*.

6.7 Medidas e critérios de comparação

Para comparação das imagens, obtidas nos resultados, utilizamos o Erro Quadrático Médio (EMQ)(MSE - *Mean Square Error*) com a formulação

$$EMQ = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} |f_1(m, n) - f_2(m, n)|^2, \quad (6.14)$$

onde $f_1(m, n)$ é a imagem a ser comparada e $f_2(m, n)$ a estimativa sem ruído. Aqui a estimativa sem ruído que será considerada é a imagem original do conjunto EIA apresentada na [Figura 8](#) e a imagem a ser comparada são as estimativas produzidas pelos algoritmos executados.

Uma observação importante que devemos fazer ao analisar a [Equação 6.14](#) é que para calcular o MSE, tanto a imagem a ser comparada como a estimativa sem ruído devem possuir as mesmas dimensões. Entretanto, como mencionado na [seção 6.6](#), a imagem original do conjunto EIA possui dimensões de 360×360 enquanto que os conjuntos de testes produzem saídas com dimensões 180×180 e 164×164 . Devido à isso, mais duas imagens foram geradas à partir da imagem original do conjunto EIA onde cada uma foi decimada para atender um dos conjuntos de testes respectivamente. A [Figura 9](#) mostra o resultado da decimação.

Figura 9 – Imagens decimadas utilizadas como imagem inicial para os algoritmos.



(a) Imagem original decimada de 164×164 pixels (b) Imagem original decimada de 180×180 pixels

Fonte: Produzido pelos autores.

Além do fator numérico a ser considerado na comparação dos resultados entre os algoritmos, também serão feitas análises visuais com o objetivo de verificar as características das imagens obtidas em comparação com as originais. Para essas análises, serão utilizadas duas imagens como referência. A primeira é a versão decimada da imagem original do conjunto EIA utilizada no cálculo do MSE de cada conjunto e apresentadas na [Figura 9](#), enquanto que a segunda é a uma imagem interpolada por replicação de *pixels*, de uma das imagens de baixa resolução do conjunto sendo analisado. A [Figura 10](#) apresenta essas imagens, uma para cada conjunto de testes.

Figura 10 – Imagens interpoladas utilizadas como imagem inicial para os algoritmos.

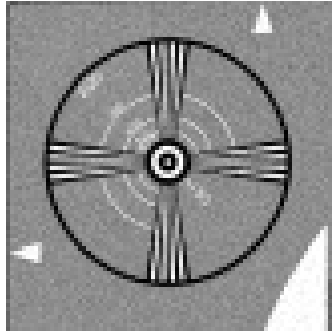
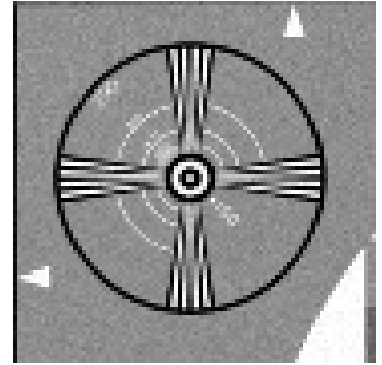


(a) Imagem LR interpolada 164×164 pixels (b) Imagem LR interpolada 180×180 pixels

Fonte: Produzido pelos autores.

Como a imagem (b) de baixa resolução da [Figura 8](#) em seu tamanho original dificulta a comparação, será utilizada uma imagem em escala para se realizar as análises, cada uma para um conjunto de imagens, apresentadas na [Figura 11](#).

Figura 11 – Imagens de baixa resolução em escala.

(a) Imagem LR de 82×82 *pixels* escalonada.(b) Imagem LR de 90×90 *pixels* escalonada.

Fonte: Produzido pelos autores.

7 Resultados e Discussões

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com as execuções dos algoritmos descritos na metodologia. na [seção 7.1](#) são discutidas questões sobre o critério de parada e a escolha da imagem inicial para os algoritmos. A [seção 7.2](#) descreve brevemente o ambiente computacional onde os testes foram executados, enquanto que a [seção 7.3](#) discute quais parâmetros e quais valores foram variados nas execuções. Os resultados obtidos pelos algoritmos para referência de comparação, são comentados na [seção 7.4](#), enquanto que a [seção 7.5](#) apresenta os resultados dos algoritmos propostos para este trabalho. A [seção 7.6](#) discute os melhores resultados obtidos entre todos os algoritmos abordados.

7.1 Considerações sobre critério de parada e imagem inicial

Conforme foi definido no [Capítulo 6](#), o critério de parada das iterações do POCS será quando os valores da imagem de alta resolução (HR) y a ser estimada, estiver dentro da magnitude estabelecida na [Equação 6.6](#) ou considerando um número definido de iterações. Aqui a equação mencionada é repetida para auxiliar as considerações

$$C_j(m, n) \triangleq y : |\varepsilon'_j(m, n; y)| \leq \eta, \quad (7.1)$$

onde η é uma constante convenientemente escolhida, sendo sugerida a utilização de $\eta = 3\sigma$ ([STARK; YANG, 1998](#)), onde σ é desvio padrão do ruído $\mathbf{n}(m, n)$.

Embora Tekalp et al. tenham realizado uma modelagem na qual estabelece que as imagens de baixa resolução (LR) possam ter níveis de ruído diferentes entre elas, consideramos razoável definir um valor único de desvio padrão do ruído, para todas as imagens, simplificando assim o processo, levando em consideração que, a forma de obtenção das imagens LR são semelhantes e com isso os níveis de ruído não tendem a ter discrepâncias significativas entre as imagens.

O algoritmo POCS precisa de uma estimativa inicial da imagem HR. Nos resultados obtidos, utilizamos como estimativa inicial para o processo sequencial ou paralelo do POCS, uma imagem de baixa resolução do conjunto considerado, interpolada através de uma interpolação de ordem 0 (replicação de *pixels*) evitando assim, borramento ocasionado por outras abordagens, e que pode influenciar no processo de estimação da imagem HR.

Para os testes, foram considerados 10 e 50 iterações para o algoritmo de POCS, valendo destacar que, em nenhum dos testes executados, o algoritmo atingiu a condição de parada que não fosse o fim das iterações.

7.2 Ambiente de testes e desenvolvimento

Os algoritmos POCS propostos por este trabalho, foram desenvolvidos no Octave, um software livre sob licença GPL para cálculos matemáticos, com linguagem de alto nível, muito semelhante ao MATLAB. Os testes e resultados obtidos, foram gerados utilizando um computador com processador Intel I7-4510U (4MB de Cache com 2.00 GHz de Clock) e 12Gb de Memória RAM DDR3 com sistema Operacional linux Mint.

7.3 Parametrização

Além das variantes de algoritmo de POCS aqui propostas, algumas variações de parametrização dos algoritmos podem ser feitas, com o objetivo de ajustar as execuções e obter diferentes resultados para os algoritmos. No caso de todos os algoritmos descritos nas seções 6.4 e 6.5, o parâmetro de quantidade de iterações foi utilizado assumindo dois valores, 10 e 50 iterações, respectivamente.

No caso dos algoritmos POCS5, POCS6, POCS7 e POCS8, devido à formulação da regularização *total variation* da abordagem híbrida descrita na seção 6.3, temos um parâmetro a mais, que é o valor de λ . Nesse caso, três valores foram utilizados: $\lambda = 0.1$; $\lambda = 0.001$; e $\lambda = 0.0001$.

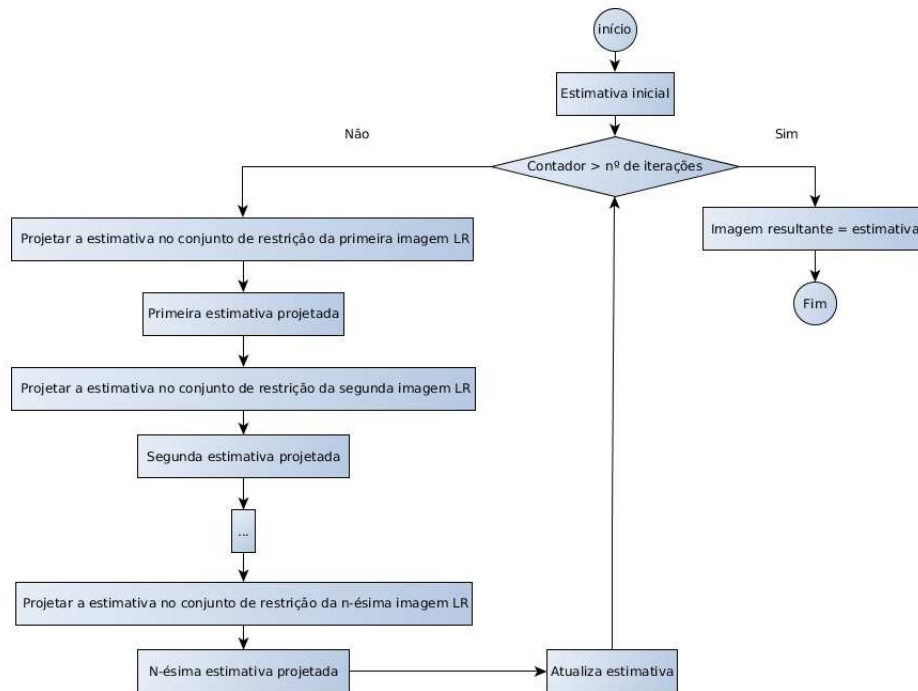
Conforme já foi dito, dois conjuntos distintos de imagens de baixa resolução foram considerados, um com 10 e outro com 16 imagens. Os testes foram realizados com os dois conjuntos separadamente, combinando-se as variações dos parâmetros descritos.

7.4 Resultados dos algoritmos para comparação

Aqui apresentaremos os resultados, das execuções dos algoritmos descritos na seção 6.4. Estes resultados serão utilizados, para comparar com os produzidos pelos algoritmos propostos como diferencial deste trabalho. As análises levarão em consideração também, as imagens das figuras 9 e 10. Também serão levadas em consideração, os parâmetros descritos na seção 7.3.

Para a produção dos resultados, as projeções foram feitas seguindo os algoritmos descritos. A Figura 12 mostra a sequência de projeções implementada no algoritmo do POCS1. A partir de uma estimativa inicial, que no caso é a imagem interpolada, são feitas as projeções nos conjuntos das imagens de baixa resolução sequencialmente.

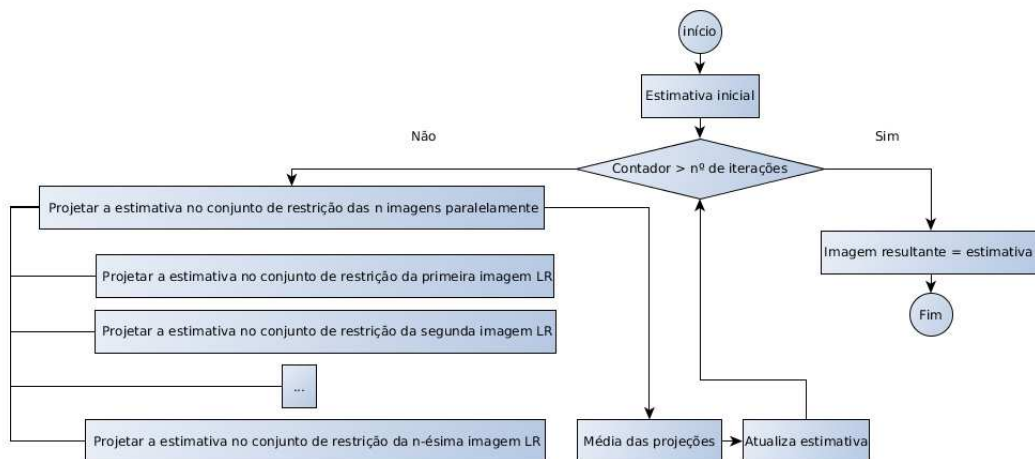
Figura 12 – Diagrama com a sequência de projeções para o POCS1.



Fonte: Produzido pelos autores

A Figura 13 mostra o diagrama ilustrando as projeções para o POCS2, onde as projeções são feitas de forma paralela.

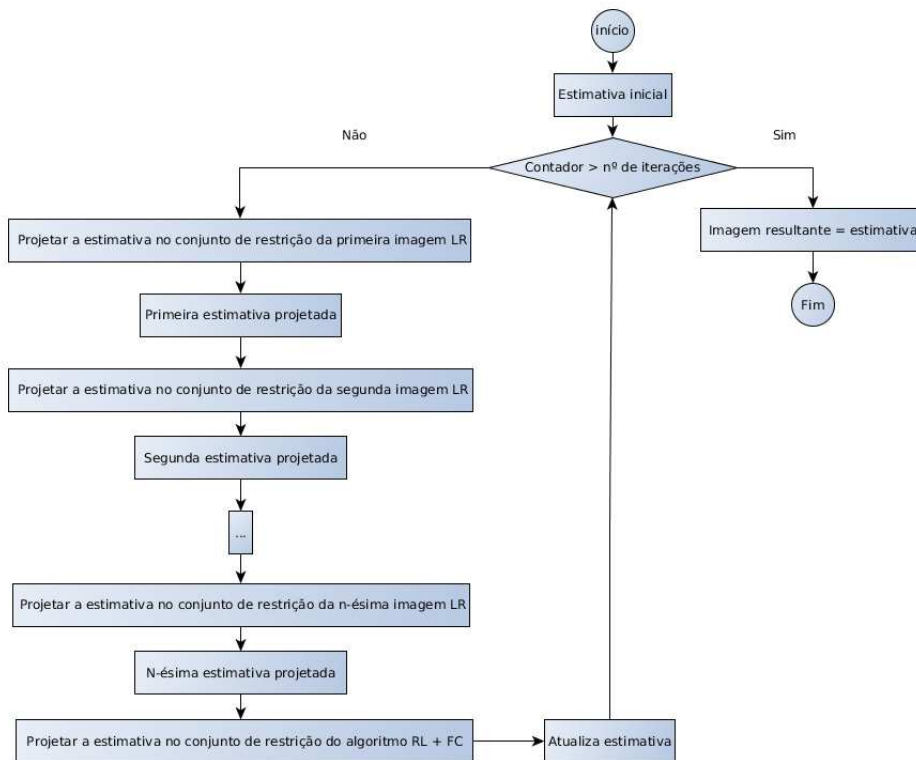
Figura 13 – Diagrama com a sequência de projeções para o POCS2.



Fonte: Produzido pelos autores

A [Figura 14](#) ilustra as projeções sequenciais do POCS3, onde temos a projeção em mais um conjunto, referente ao algoritmo de Richardson-Lucy modificado com o filtro de Canny (RL + FC).

Figura 14 – Diagrama com a sequência de projeções para o POCS3.



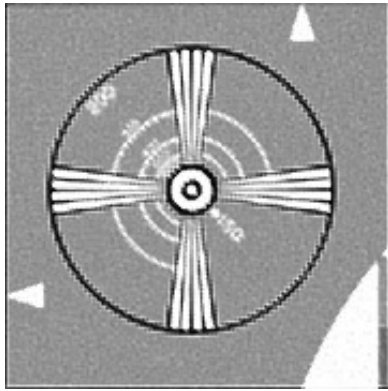
Fonte: Produzido pelos autores

Todas as imagens geradas pelos POCS1, POCS2 e POCS3, para os dois conjuntos e para as duas quantidades de iterações, apresentaram melhora em relação à imagem inicial submetida aos algoritmos, na [Figura 10](#), principalmente na diminuição do borramento.

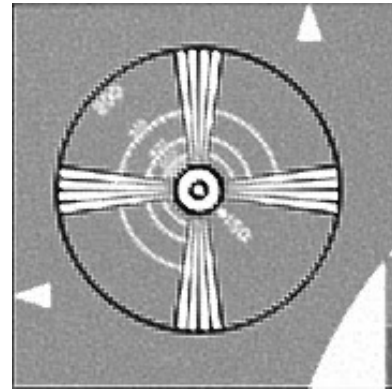
Entre os dois conjuntos de imagens os resultados obtidos visualmente foram equivalentes, tanto os positivos quanto os negativos. Devido a isso, para ilustrar os resultados inserimos apenas as imagens para o conjunto com 10 imagens de 90×90 pixels com saída de 180×180 pixels.

Não houve grande diferença, entre a variação de quantidades de iterações para o POCS1. O POCS2, com 10 iterações, teve uma melhor definição das bordas, em relação à sua execução com 50 iterações. Nenhum dos algoritmos atingiu bordas iguais às imagens originais da [Figura 9](#). O POCS3 apresentou um resultado significativamente pior em sua execução com 50 iterações com bordas mal definidas e bastante pixelização, enquanto que com 10 iterações apresentou um resultado melhor, como é possível visualizar na [Figura 15](#).

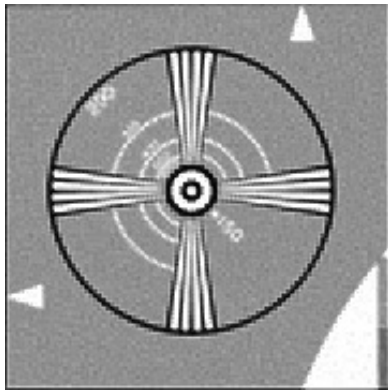
Figura 15 – Imagens obtidas pelo POCS1, POCS2 e POCS3.



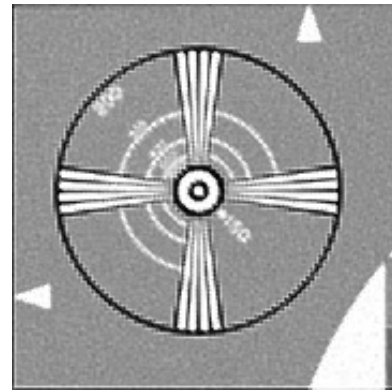
(a) 10 iterações POCS1.



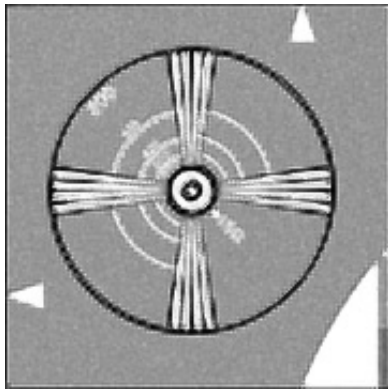
(b) 50 iterações POCS1.



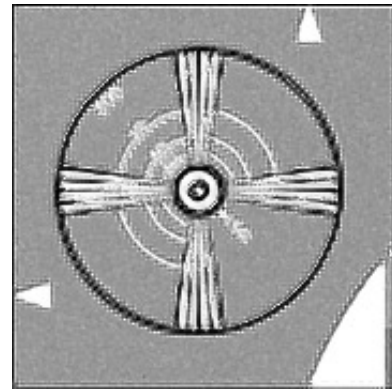
(c) 10 iterações POCS2.



(d) 50 iterações POCS2.



(e) 10 iterações POCS3.



(f) 50 iterações POCS3.

Fonte: Produzido pelos autores.

Numericamente, os melhores resultados obtidos pelo Erro Quadrático Médio (MSE - *Mean Square Error*) foram com 50 iterações, apesar do fato de que visualmente com 10 iterações terem tido um desempenho melhor, com exceção do POCS1, que ficou estável com o aumento de iterações. A [Tabela 1](#) apresenta os resultados do MSE para o conjunto com 10 imagens.

Tabela 1 – Resultados do MSE para POCS1, POCS2 e POCS3 com o conjunto de 10 imagens.

POCS	Iterações	MSE
1	10	23,38
2	10	31,62
3	10	26,04
1	50	22,94
2	50	25,97
3	50	30,33

Fonte: Produzido pelos autores.

A [Tabela 2](#) apresenta os resultados do MSE para o conjunto de 16 imagens, onde é possível observar que os valores seguiram o que ocorreu com o conjunto de 10 imagens, uma vez que os resultados com 50 iterações tiveram valores menores.

Tabela 2 – Resultados do MSE para POCS1, POCS2 e POCS3 com o conjunto de 16 imagens.

POCS	Iterações	MSE
1	10	23,34
2	10	32,55
3	10	28,04
1	50	23,19
2	50	26,41
3	50	33,95

Fonte: Produzido pelos autores.

Comparando os resultados dos três algoritmos, embora o borramento e as regiões brancas (como por exemplo os números presentes na imagem original) tenham ficado melhor definidas, quando comparadas com a imagem de baixa resolução ainda não são distinguíveis. Bordas são melhores definidas nos POCS2 e POCS3 (levando em consideração o resultado com 10 iterações). Por esse critério o POCS1 acaba tendo um melhor desempenho.

7.5 Resultados algoritmos desenvolvidos

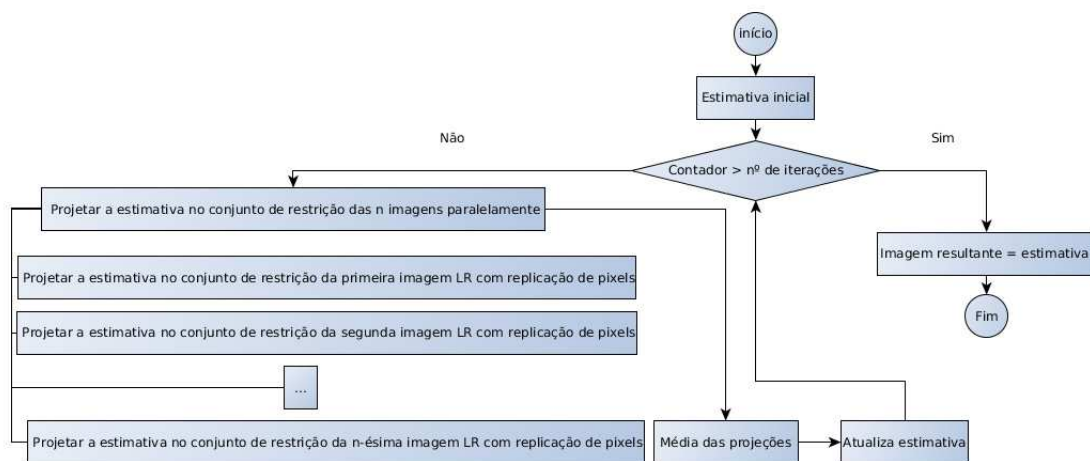
Aqui serão discutidos os resultados, obtidos pelos algoritmos propostos como principal foco deste trabalho. O objetivo dessa seção é fundamentar as discussões sobre o

desempenho dos algoritmos propostos, da [subseção 7.5.1](#) à [subseção 7.5.5](#), uma vez que uma análise mais abrangente é feita na [seção 7.6](#).

7.5.1 Resultados POCS 4

A sequência de projeções executada pelo algoritmo é ilustrada na [Figura 16](#), onde podemos observar a similaridade com o POCS2. A diferença está no projetor dos conjuntos das imagens de baixa resolução (LR), que utiliza replicação de pixels.

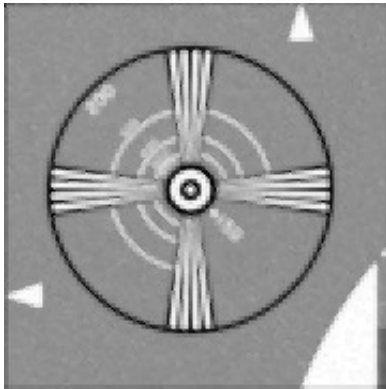
Figura 16 – Diagrama com a sequência de projeções para o POCS4.



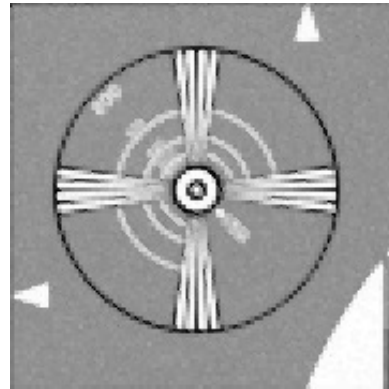
Fonte: Produzido pelos autores

Entre as duas quantidades de iterações, foram constatadas diferenças. Bordas ficaram um pouco mais definidas na execução com 10 iterações, uma vez que com 50 tivemos bordas mais finas. Em ambas as execuções o número 200 em branco na imagem está quase distinguível. Entretanto, com 10 iterações parecem ter definido melhor os zeros do número. A versão que apresentou mais borramento foi com 50 iterações. A seguir, apresentamos as imagens obtidas e seus resultados estão nas Figuras 17 e 18. Na [Figura 17](#), a imagem (a) é o resultado obtido para o primeiro conjunto de imagens com 10 iterações, enquanto que o (b) é o resultado com 50 iterações. Na [18](#), são os resultados do segundo conjunto de imagens, com a imagem (a) sendo o resultado com 10 iterações e a imagem (b) o resultado com 50.

Figura 17 – Imagens obtidas pelo POCS4 para o conjunto com 10 imagens.



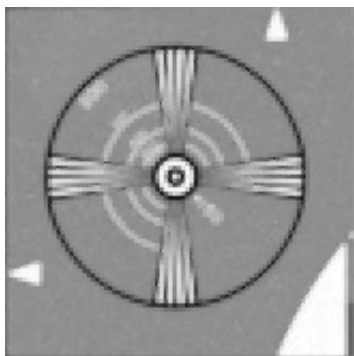
(a) 10 iterações.



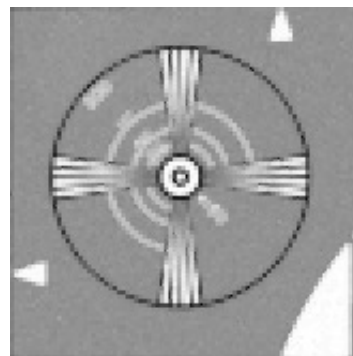
(b) 50 iterações.

Fonte: Produzido pelos autores.

Figura 18 – Imagens obtidas pelo POCS4 para o conjunto com 16 imagens.



(a) 10 iterações.



(b) 50 iterações.

Fonte: Produzido pelos autores.

O menor MSE, mostrado na [Tabela 3](#), foi para 50 iterações para os dois conjuntos e com uma grande diferença, embora esse fato não necessariamente esteja refletido nas análises visuais. Uma possível justificativa está na replicação de *pixels* implementada no processo de POCS. Como a imagem tem grandes áreas lisas em cinza a replicação consegue uniformizar consideravelmente essas áreas e como a pixelização inerente do método é mais perceptível em bordas e isso acaba levando o MSE para valores mais baixos. Isso conduz a possibilidade que, devido a esse mesmo fator, o método é menos eficiente em remover o borramento quando considerado o conjunto com imagens de menor dimensão, uma vez que ele acaba por tentar uniformizar mais as imagens.

Tabela 3 – Resultados do MSE para o POCS4

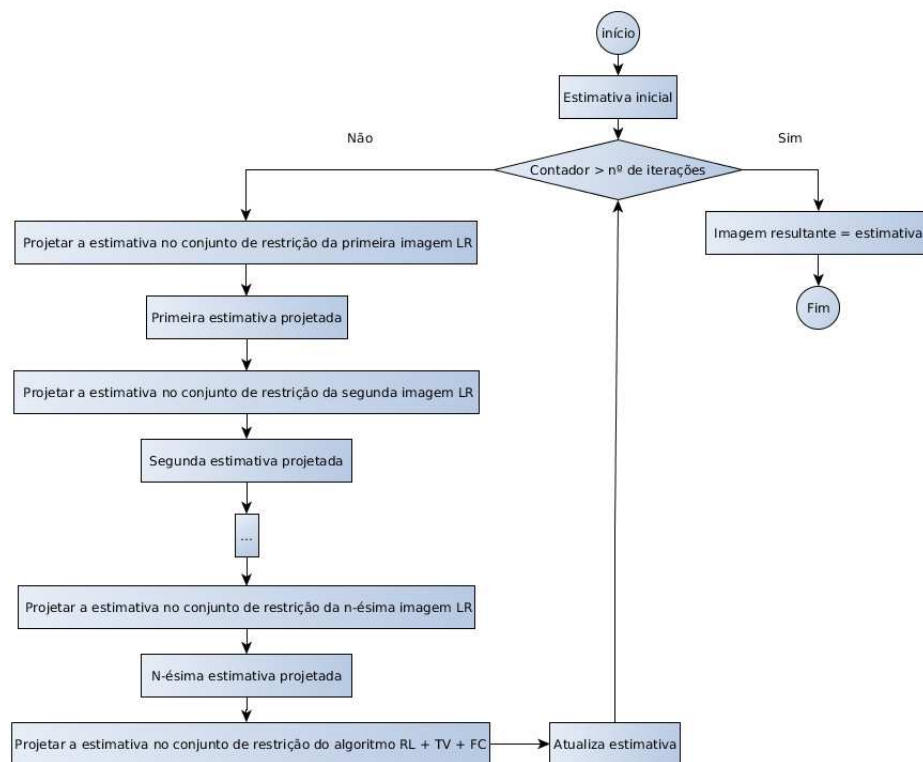
Quantidade de imagens no conjunto	Iterações	MSE
10	10	31,009
10	50	19,888
16	10	28,184
16	50	20,953

Fonte: Produzido pelos Autores

7.5.2 Resultados POCS 5

Na [Figura 19](#) é ilustrada a sequência de projeções implementada pelo algoritmo, tanto nos conjuntos das imagens de baixa resolução (LR) quando no algoritmo de Richardson-Lucy com regularização *total variation* e filtro de Canny (RL + TV + FC).

Figura 19 – Diagrama com a sequência de projeções para o POCS5.

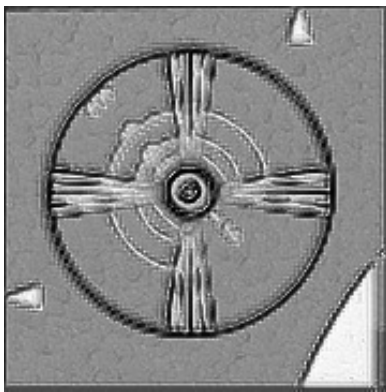


Fonte: Produzido pelos autores

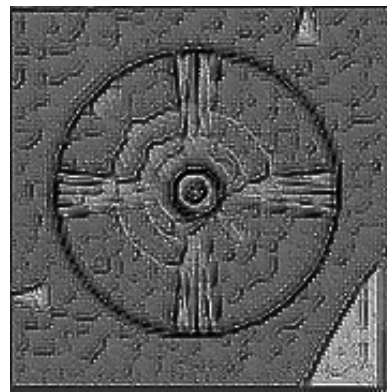
A utilização do valor de $\lambda = 0.1$ como o mais alto mostrou impacto negativo sobre os resultados. As imagens apresentaram alto nível de pixelização e com intensificação do

ruído e o surgimento de artefatos na imagem, como as ondulações nas áreas uniformes em cinza. O resultado tem essas características negativas intensificadas quando o número de iterações aumenta. A [Figura 20](#) mostra esses resultados, onde (a) e (b) são as imagens para o primeiro conjunto de imagens, com 10 e 50 iterações respectivamente, com $\lambda = 0.1$, enquanto que (c) e (d) são as imagens para o segundo conjunto de imagens, com 10 e 50 iterações respectivamente para o valor de $\lambda = 0.1$.

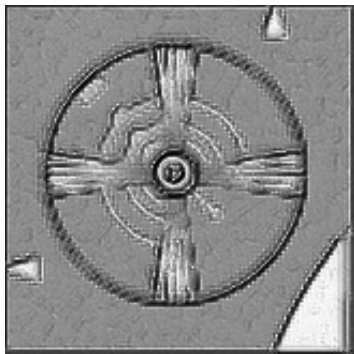
Figura 20 – Imagens obtidas pelo POCS5 com $\lambda = 0.1$.



(a) 10 iterações, conjunto com 10 imagens.



(b) 50 iterações, conjunto com 10 imagens.



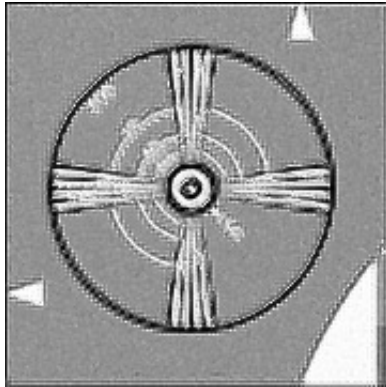
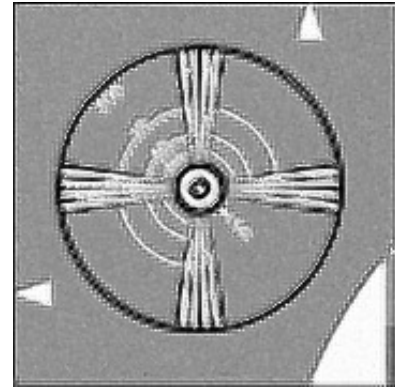
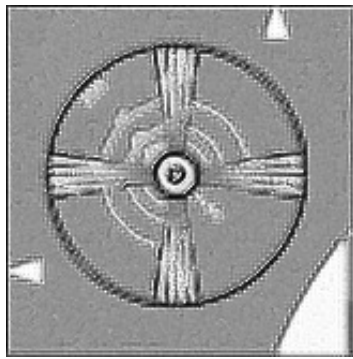
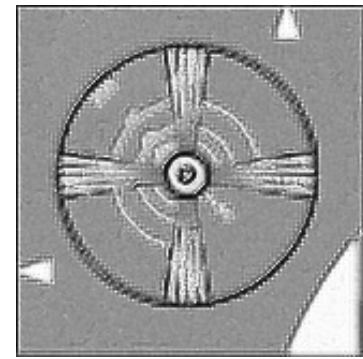
(c) 10 iterações, conjunto com 16 imagens.



(d) 50 iterações, conjunto com 16 imagens.

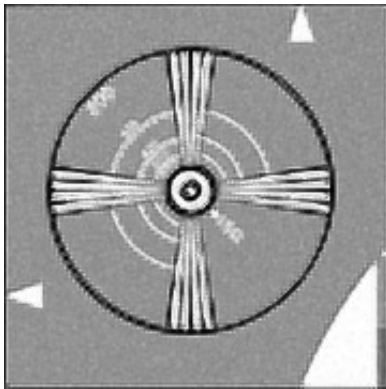
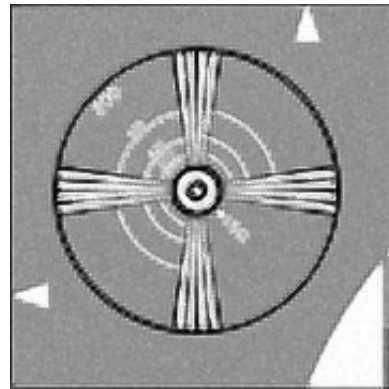
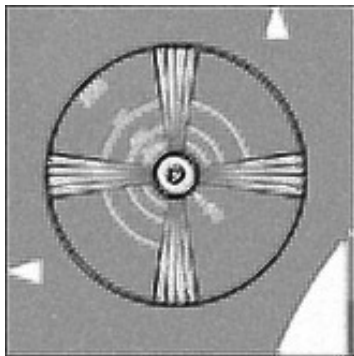
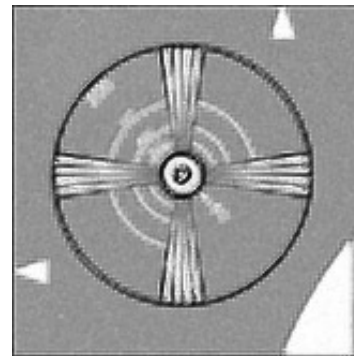
Fonte: Produzido pelos autores.

Os resultados com 50 iterações para $\lambda = 0.001$ e $\lambda = 0.0001$, embora melhores que os já citados, possuem maior pixelização que os resultados com 10 iterações para os mesmos valores de λ . Os números presentes na imagem não estão bem definidos. Na [Figura 21](#) temos essas imagens apresentadas, onde (a) e (b) são os resultados para o primeiro conjunto de imagens, com $\lambda = 0.001$ e $\lambda = 0.0001$ respectivamente, para 50 iterações, enquanto que (c) e (d) são as imagens para o segundo conjunto de imagens, com $\lambda = 0.001$ e $\lambda = 0.0001$ respectivamente, para 50 iterações.

Figura 21 – Imagens obtidas pelo POCS5 com 50 iterações e valores de λ com 0.001 e 0.0001(a) Conjunto 10 imagens, $\lambda = 0.001$.(b) Conjunto 10 imagens, $\lambda = 0.0001$.(c) Conjunto 16 imagens, $\lambda = 0.001$.(d) Conjunto 16 imagens, $\lambda = 0.0001$.

Fonte: Produzido pelos autores.

Os melhores resultados foram obtidos com 10 iterações e com resultados bem semelhantes entre os valores de $\lambda = 0.001$ e $\lambda = 0.0001$, onde, em comparação com a imagem de baixa resolução e a utilizada como inicial para o algoritmo, possuem consideravelmente menos borramento e, embora as bordas estejam mais definidas, ainda são mais finas em relação à original. A [Figura 22](#) apresenta esses resultados, com (a) e (b) sendo os resultados para o primeiro conjunto de imagens e (c) e (d) para o segundo conjunto.

Figura 22 – Imagens obtidas pelo POCS5 com 10 iterações e valores de λ com 0.001 e 0.0001(a) Conjunto 10 imagens, $\lambda = 0.001$.(b) Conjunto 10 imagens, $\lambda = 0.0001$.(c) Conjunto 16 imagens, $\lambda = 0.001$.(d) Conjunto 16 imagens, $\lambda = 0.0001$.

Fonte: Produzido pelos autores.

Numericamente os resultados seguiram a análise visual com 10 iterações e λ em 0.001 e 0.0001, tendo valores próximos e consideravelmente mais baixos que os demais. Com isso, o aumento de iterações parece agregar pouca melhora, enquanto que um λ mais alto causa impacto significativamente negativo. Os valores obtidos de MSE para o conjunto com 10 imagens são apresentados na [Tabela 4](#).

Tabela 4 – Resultados MSE para POCS5 com o conjunto de 10 imagens.

Iterações	λ	MSE
10	0,1	75,72
10	0,001	29,92
10	0,0001	29,33
50	0,1	212,31
50	0,001	40,65
50	0,0001	39,12

Fonte: Produzido pelos autores.

Na [Tabela 5](#) temos os resultados do MSE para o conjunto com 16 imagens, onde podemos observar que as análises feitas entre os dois conjuntos são equivalentes.

Tabela 5 – Resultados MSE para POCS5 com o conjunto de 16 imagens.

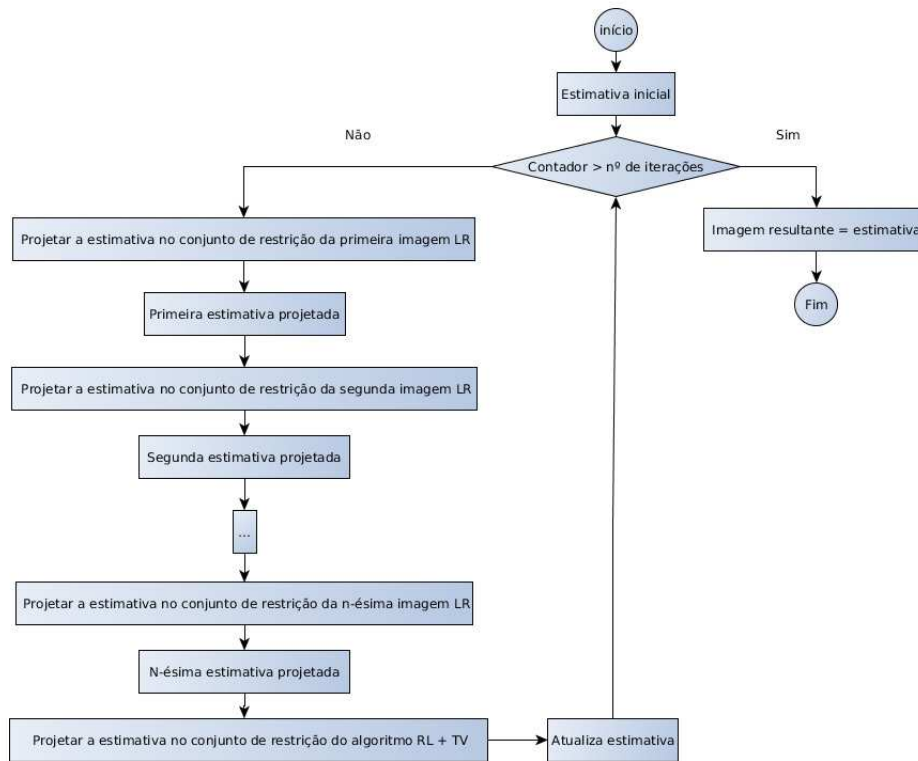
Iterações	λ	MSE
10	0,1	80,28
10	0,001	32,31
10	0,0001	31,80
50	0,1	219,47
50	0,001	45,97
50	0,0001	44,35

Fonte: Produzido pelos autores.

7.5.3 Resultados POCS 6

Na [Figura 23](#) é ilustrada a sequência de projeções implementada pelo algoritmo, tanto nos conjuntos das imagens de baixa resolução (LR) quando no algoritmo de Richardson-Lucy com regularização *total variation* (RL + TV). A principal diferença aqui é a ausência do filtro de Canny na projeção do algoritmo de Richardson-Lucy.

Figura 23 – Diagrama com a sequência de projeções para o POCS6.

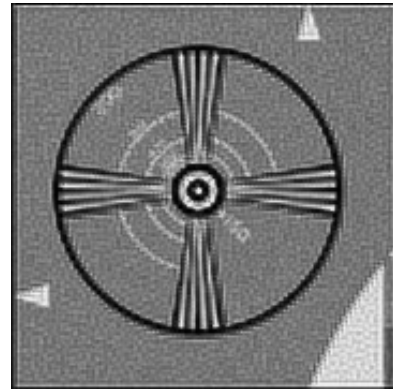
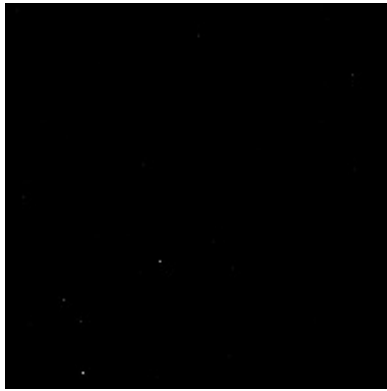
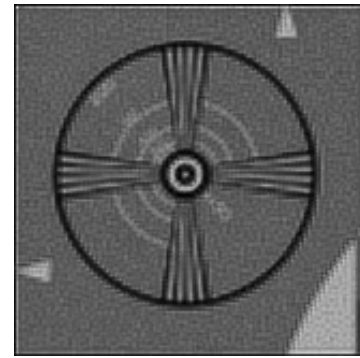
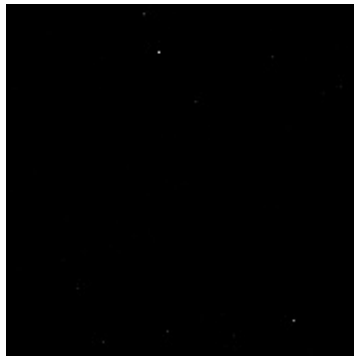


Fonte: Produzido pelos autores

Todos os resultados deste algoritmo foram negativos. Entretanto, pode ser utilizado como um exemplo extremo do impacto negativo de um valor de λ mais alto.

As imagens com o $\lambda = 0.1$ ficaram quase que completamente pretas, apenas com alguns *pixels* mais claros. Os demais tiveram resultados ruins também, mas é possível visualizar a imagem. O ruído ficou muito enfatizado, deixando a imagem extremamente escura. Fazendo com que as bordas em preto ficassem mais destacadas. Entretanto, o restante da imagem como por exemplo os números, ficaram muito prejudicados. As imagens com $\lambda = 0.1$ ficaram igualmente pretas entre os dois conjuntos de imagens, e os demais resultados variando a quantidade de iterações e os $\lambda \neq 0.1$, ficaram muito semelhantes entre eles. Por isso vamos adicionar apenas uma com $\lambda = 0.1$ e uma com $\lambda \neq 0.1$ de cada conjunto na [Figura 24](#), sendo que (a) e (b) são os resultados para o primeiro conjunto de imagens e (c) e (d) para o segundo. A [Tabela 6](#) apresenta os resultados para o MSE das imagens obtidas para o conjunto de 10 imagens.

Figura 24 – Resumo de imagens obtidas pelo POCS6.

(a) Conjunto 10 imagens, 10 iterações, $\lambda = 0.1$. (b) Conjunto 10 imagens, 10 iterações, $\lambda = 0.001$.(c) Conjunto 16 imagens, 10 iterações $\lambda = 0.1$. (d) Conjunto 16 imagens, 10 iterações $\lambda = 0.001$.

Fonte: Produzido pelos autores.

Tabela 6 – Resultados MSE para POCS6 com o conjunto de 10 imagens.

Iterações	λ	MSE
10	0,1	239,09
10	0,001	186,05
10	0,0001	189,56
50	0,1	239,06
50	0,001	210,39
50	0,0001	214,06

Fonte: Produzido pelos autores.

Na [Tabela 7](#) temos os resultados do MSE para o conjunto com 16 imagens, onde podemos observar que os resultados foram tão altos quanto os do conjunto de 10 imagens.

Tabela 7 – Resultados MSE para POCS6 com o conjunto de 16 imagens.

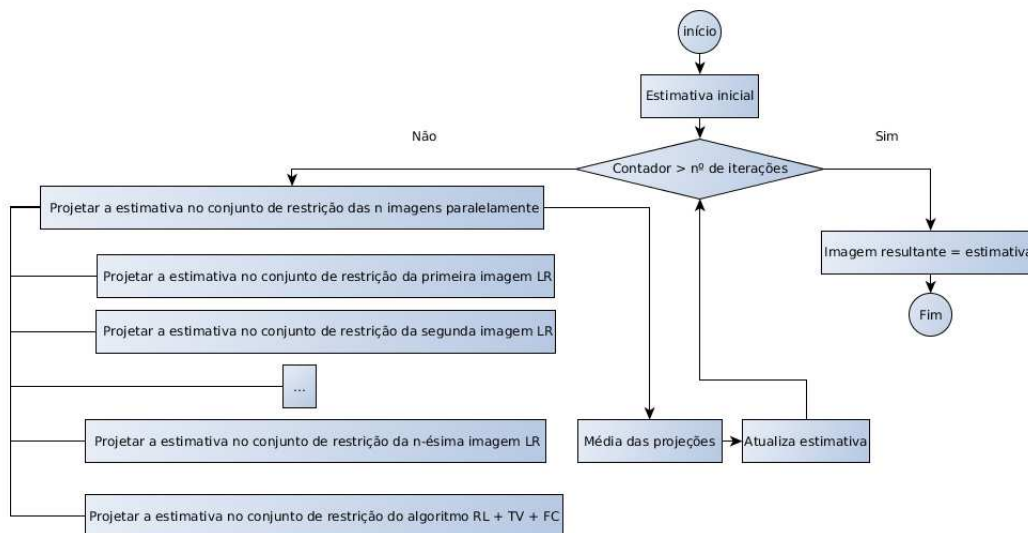
Iterações	λ	MSE
10	0,1	240,62
10	0,001	226,55
10	0,0001	226,30
50	0,1	240,62
50	0,001	229,30
50	0,0001	229,29

Fonte: Produzido pelos autores.

7.5.4 Resultados POCS 7

Na Figura 25 é ilustrada a sequência de projeções implementada pelo algoritmo, tanto nos conjuntos das imagens de baixa resolução (LR) quando no algoritmo de Richardson-Lucy com regularização *total variation*, filtro de Canny e projeções paralelas (RL + TV + FC).

Figura 25 – Diagrama com a sequência de projeções para o POCS7.

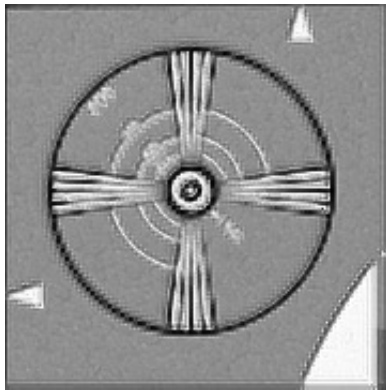


Fonte: Produzido pelos autores

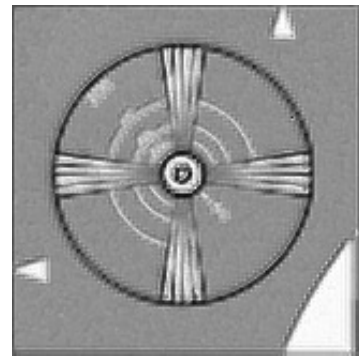
O resultado com 50 iterações e $\lambda = 0.1$ foi o pior resultado, uma vez que incorporou mais pixelização que as demais. Apesar disso, obteve redução do borramento e uma boa definição das bordas, em relação à imagem inicial interpolada e a de baixa resolução. As

regiões dos números ficaram definidas, embora não seja possível distinguir quais sejam. A [Figura 26](#) apresenta esse resultado para os dois conjuntos de imagens.

Figura 26 – Imagens obtidas pelo POCS7 com 50 iterações e valores de λ com 0.1 .



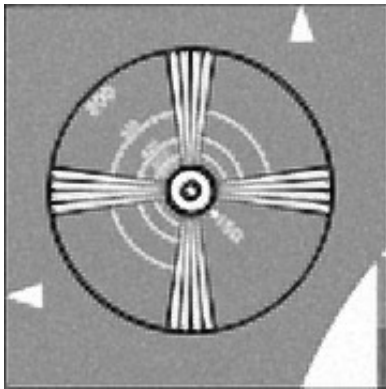
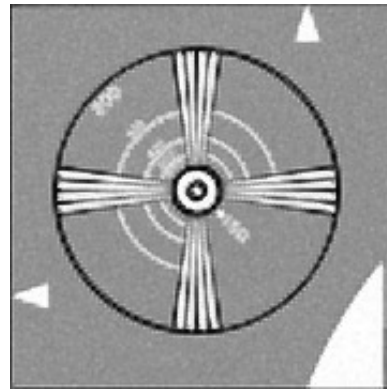
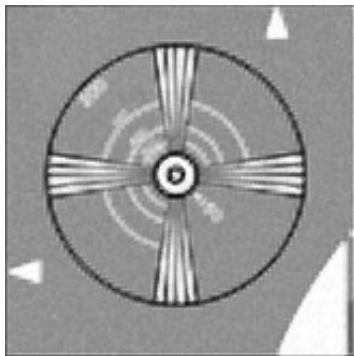
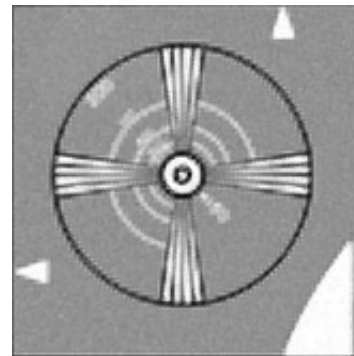
(a) Conjunto 10 imagens.



(b) Conjunto 16 imagens.

Fonte: Produzido pelos autores.

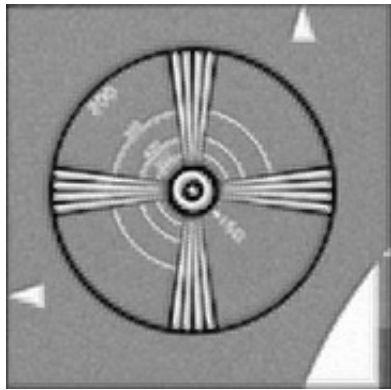
As demais imagens apresentaram bons resultados, com redução significativa do borramento e na definição das bordas. Entretanto, os resultados com 50 iterações apresentaram resultados um pouco inferiores com bordas um pouco menos definidas e a região do número 200, por exemplo, embora destacada, não é possível definir o que é apresentado. Na [Figura 27](#) temos as imagens obtidas para 50 iterações com $\lambda \neq 0.1$.

Figura 27 – Imagens obtidas pelo POCS7 com 50 iterações e valores de λ com 0.001 e 0.0001(a) Conjunto 10 imagens, $\lambda = 0.001$.(b) Conjunto 10 imagens, $\lambda = 0.0001$.(c) Conjunto 16 imagens, $\lambda = 0.001$.(d) Conjunto 16 imagens, $\lambda = 0.0001$.

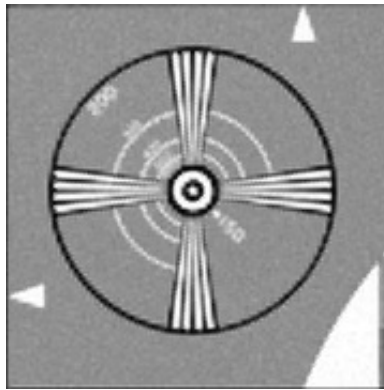
Fonte: Produzido pelos autores.

Nas execuções com 10 iterações, o número 200 e 150, estão praticamente identificáveis. As bordas dos raios partindo do círculo central, estão equivalentes em todas, já o círculo central apresenta um pouco mais de borramento para $\lambda = 0.001$. O círculo central com $\lambda = 0.0001$ está mais próximo do original, uma vez que está um pouco mais grosso. A [Figura 28](#) mostra os resultados.

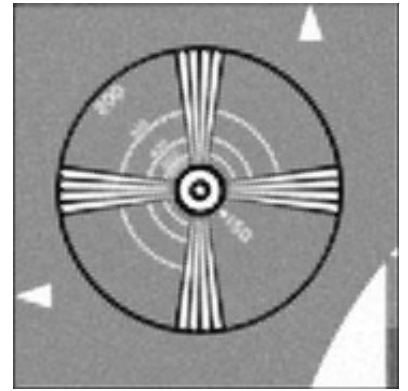
Figura 28 – Imagens obtidas pelo POCS7 com 10 iterações e os 3 valores de λ .



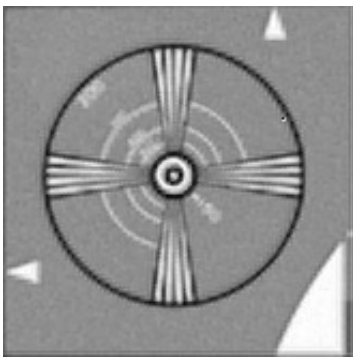
(a) Conjunto 10 imagens, $\lambda = 0.1$.



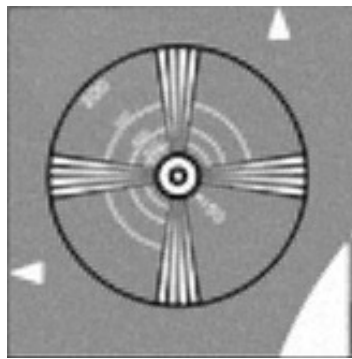
(b) Conjunto 10 imagens, $\lambda = 0.001$.



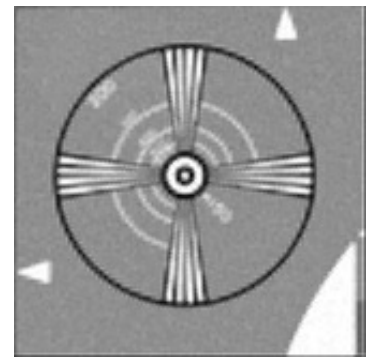
(c) Conjunto 10 imagens, $\lambda = 0.0001$.



(d) Conjunto 16 imagens, $\lambda = 0.1$.



(e) Conjunto 16 imagens, $\lambda = 0.001$.



(f) Conjunto 16 imagens, $\lambda = 0.0001$.

Fonte: Produzido pelos autores.

Numericamente as execuções com $\lambda = 0.1$ foram consideravelmente piores que as demais, que acabaram variando pouco.

O conjunto com 16 imagens apresentou resultados semelhantes tanto numericamente, quanto visualmente. Entretanto, em nenhuma das variações de execução, obtiveram a mesma definição dos números das imagens. A [Tabela 8](#) apresenta os valores de MSE obtidos para o conjunto com 10 imagens.

Tabela 8 – Resultados MSE para POCS7 com o conjunto de 10 imagens.

Iterações	λ	MSE
10	0,1	46,51
10	0,001	29,08
10	0,0001	28,99
50	0,1	54,80
50	0,001	27,42
50	0,0001	27,24

Fonte: Produzido pelos autores.

Na [Tabela 9](#) temos os resultados do MSE para o conjunto com 16 imagens, onde podemos observar que as mesmas considerações feitas sobre o conjunto com 10 imagens é possível fazer para o conjunto com 16.

Tabela 9 – Resultados MSE para POCS7 com o conjunto de 16 imagens.

Iterações	λ	MSE
10	0,1	40,29
10	0,001	29,36
10	0,0001	29,31
50	0,1	46,38
50	0,001	27,10
50	0,0001	26,95

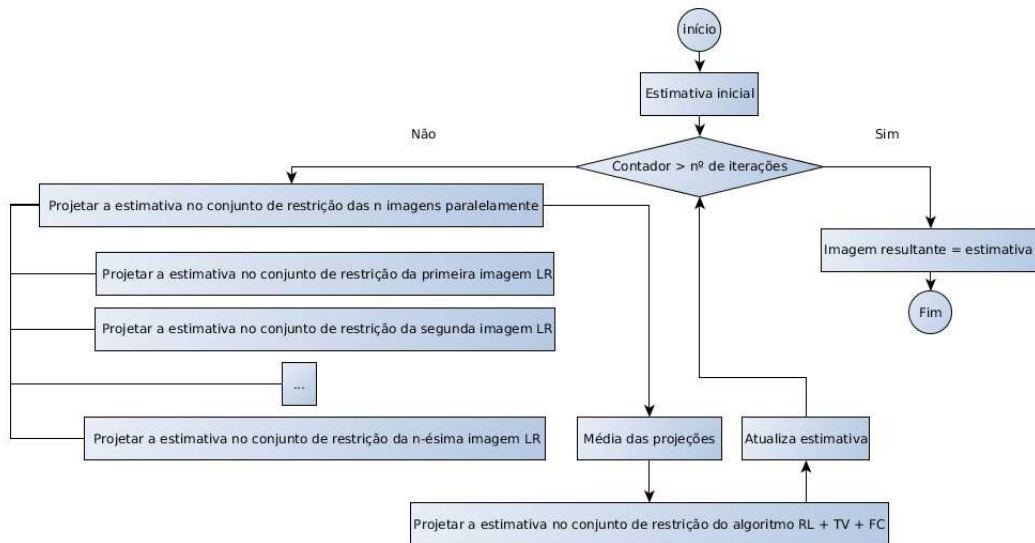
Fonte: Produzido pelos autores.

Apesar das diferenças mencionadas, pode-se perceber que de maneira geral, esse método se manteve estável para as variações de parâmetros.

7.5.5 Resultados POCS 8

Na [Figura 29](#) é ilustrada a sequência de projeções implementada pelo algoritmo. É possível observar que as projeções nos conjuntos das imagens de baixa resolução (LR) são feitas paralelamente, e que após o cálculo da média das projeções é feito sequencialmente a projeção no algoritmo de Richardson-Lucy com regularização *total variation* e o filtro de Canny.

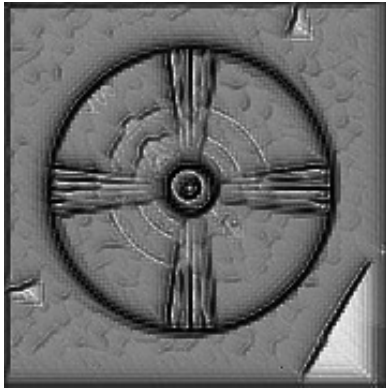
Figura 29 – Diagrama com a sequência de projeções para o POCS8.



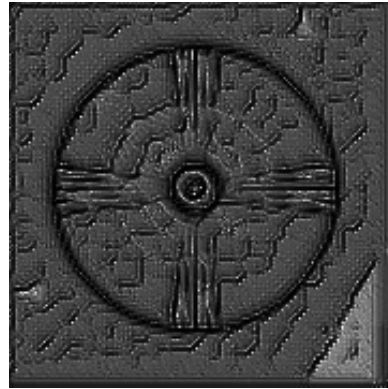
Fonte: Produzido pelos autores

Nesta implementação, a maior quantidade de iterações causou aumento significativo da pixelização e gerando estimativas ruins. Esse fato é ainda mais enfatizado quando considerado juntamente com o maior valor de λ em 0.1. As Figuras 30 e 31 apresentam esses resultados para os conjuntos com 10 e 16 imagens, respectivamente.

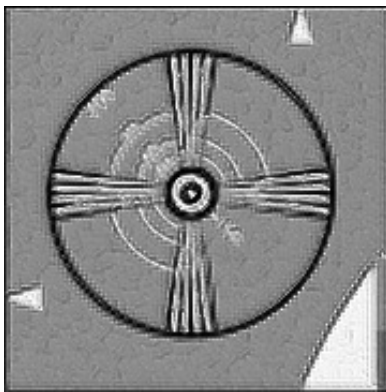
Figura 30 – Imagens obtidas pelo POCS8, com 10 e 50 iterações para $\lambda = 0.1$ e 50 iterações para os demais valores de λ , para o conjunto com 10 imagens.



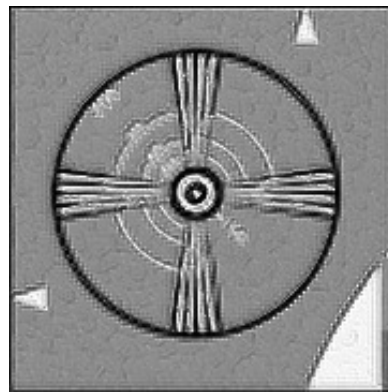
(a) 10 iterações e $\lambda = 0.1$.



(b) 50 iterações e $\lambda = 0.1$.



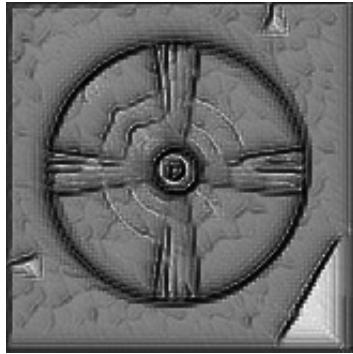
(c) 50 iterações e $\lambda = 0.001$.



(d) 50 iterações e $\lambda = 0.0001$.

Fonte: Produzido pelos autores.

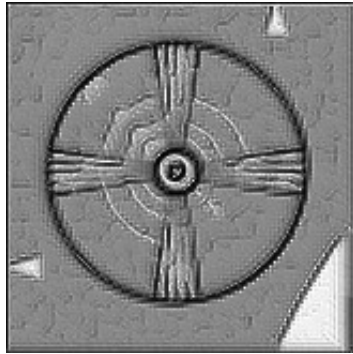
Figura 31 – Imagens obtidas pelo POCS8, com 10 e 50 iterações para $\lambda = 0.1$ e 50 iterações para os demais valores de λ , para o conjunto com 16 imagens.



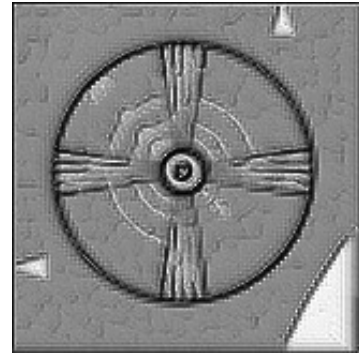
(a) 10 iterações e $\lambda = 0.1$.



(b) 50 iterações e $\lambda = 0.1$.



(c) 10 iterações e $\lambda = 0.001$.

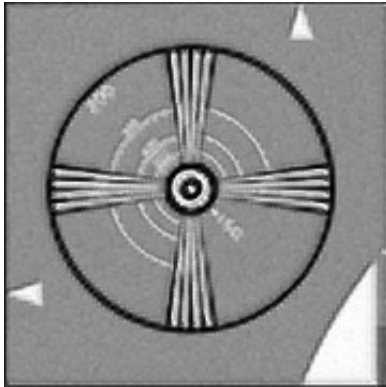


(d) 50 iterações e $\lambda = 0.0001$.

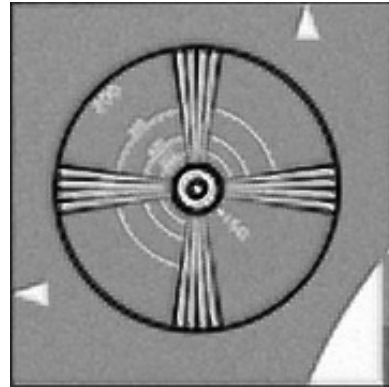
Fonte: Produzido pelos autores.

Com o uso de 10 iterações, os resultados apresentaram melhor definição de bordas e diminuição do borramento em relação à imagem interpolada inicial e a imagem de baixa resolução. Porém, os números das imagens não ficaram bem definidos. Esses resultados foram muito semelhantes com $\lambda = 0.001$ e $\lambda = 0.0001$. Na [Figura 32](#) temos as imagens para esses resultados.

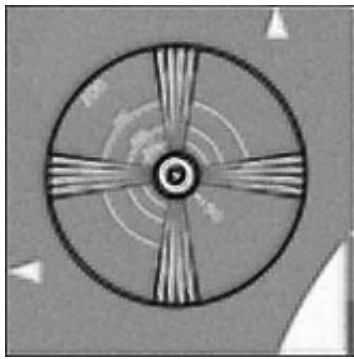
Figura 32 – Imagens obtidas pelo POCS8, com 10 iterações para $\lambda = 0.001$ e $\lambda = 0.0001$ para os conjuntos com 10 e 16 imagens.



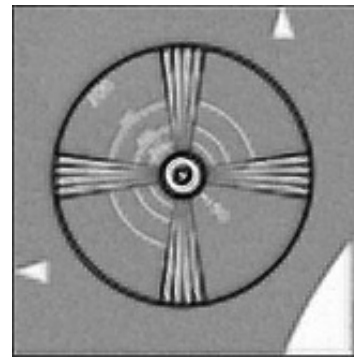
(a) Conjunto 10 imagens e $\lambda = 0.001$.



(b) Conjunto 10 imagens e $\lambda = 0.0001$.



(c) Conjunto 16 imagens e $\lambda = 0.001$.



(d) Conjunto 16 imagens e $\lambda = 0.0001$.

Fonte: Produzido pelos autores.

Os resultados do MSE acompanharam as análises visuais, uma vez que os resultados com $\lambda = 0.1$ ficaram maiores que dos demais. Os valores com 10 iterações com $\lambda = 0.001$ e $\lambda = 0.0001$ tiveram melhor desempenho, sendo que o valor mais baixo foi obtido com $\lambda = 0.0001$. Essas observações valem aos dois conjuntos de imagens, e na [Tabela 10](#) temos os resultados do MSE para o conjunto com 10 imagens.

Tabela 10 – Resultados MSE para POCS8 com o conjunto de 10 imagens.

Iterações	λ	MSE
10	0,1	191,48
10	0,001	49,76
10	0,0001	48,03
50	0,1	229,32
50	0,001	78,01
50	0,0001	71,69

Fonte: Produzido pelos autores.

A [Tabela 11](#) mostra que as análises feitas para o conjunto com 10 imagens também são válidas para o conjunto com 16, demonstrando assim a equivalência entre os resultados.

Tabela 11 – Resultados MSE para POCS8 com o conjunto de 16 imagens.

Iterações	λ	MSE
10	0,1	202,96
10	0,001	49,05
10	0,0001	47,84
50	0,1	228,28
50	0,001	109,46
50	0,0001	103,62

Fonte: Produzido pelos autores.

7.6 Comparação dos melhores resultados

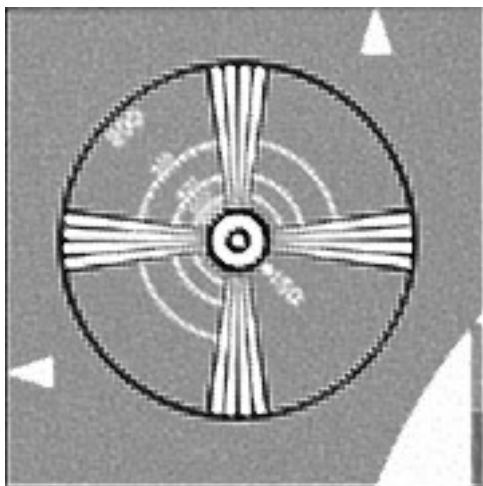
Nesta seção, faremos as comparações entre os resultados obtidos pelos POCS1, POCS2 e POCS3, com os demais, desenvolvidos para este trabalho. Além disso, considerações serão feitas às diferenças de cada abordagem, e os efeitos que ocorrem nos resultados.

Para as comparações serão considerados apenas os resultados, para cada algoritmo, aqueles que obtiveram melhor desempenho na tarefa de reconstrução da imagem. Devido aos resultados negativos obtidos pelo POCS6, ele não será considerado para as comparações.

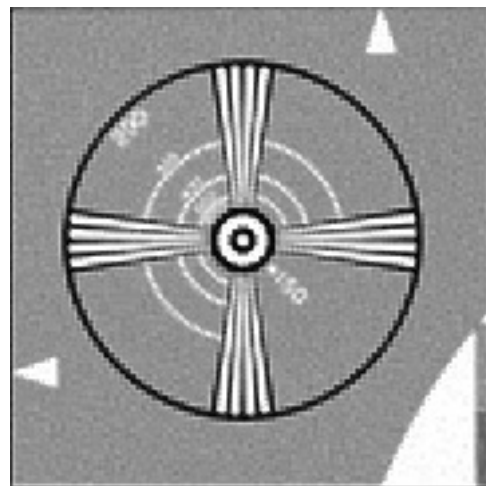
A seleção das imagens foram feitas baseadas nas considerações já realizadas nas seções [7.4](#) e [7.5](#). Para todas implementações foram selecionados resultados com 10 iterações e nos casos onde o λ era pertinente, utilizou-se o valor de $\lambda = 0.0001$. Como os resultados foram similares entre os dois conjuntos de imagens com 10 e 16, respectivamente, as

discussões serão feitas de maneira global, sendo que posteriormente considerações sobre o impacto dos diferentes conjuntos serão discutidos. A [Figura 33](#) apresenta as imagens selecionadas dos POCS1, POCS2 e POCS3 enquanto que a [Figura 34](#) ilustra as demais.

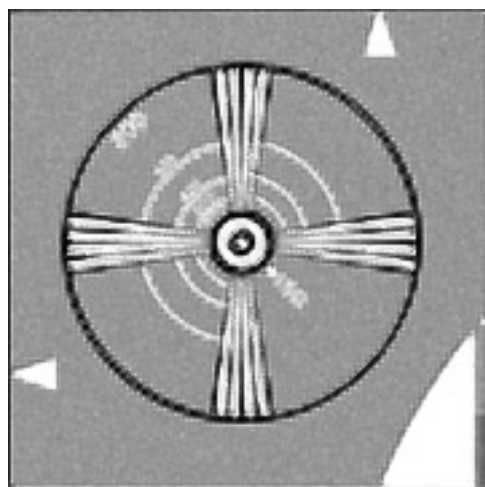
Figura 33 – Melhores resultados obtidos por POCS1, POCS2 e POCS3.



(a) POCS1.



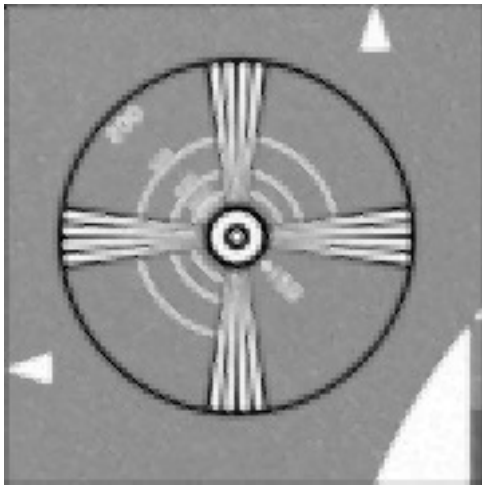
(b) POCS2.



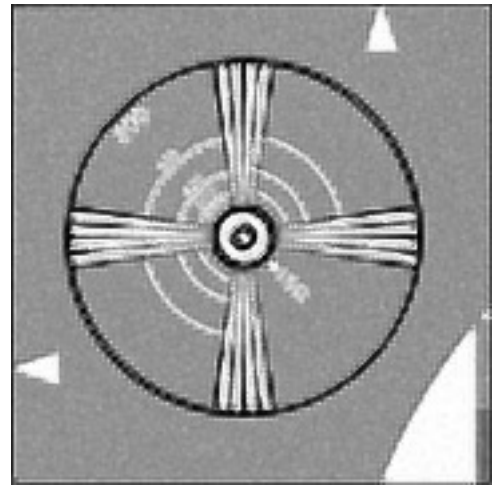
(c) POCS3.

Fonte: Produzido pelos autores.

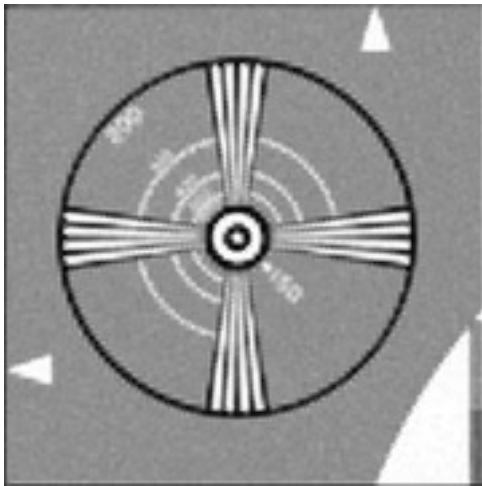
Figura 34 – Melhores resultados obtidos por POCS4, POCS5, POCS7 e POCS8 .



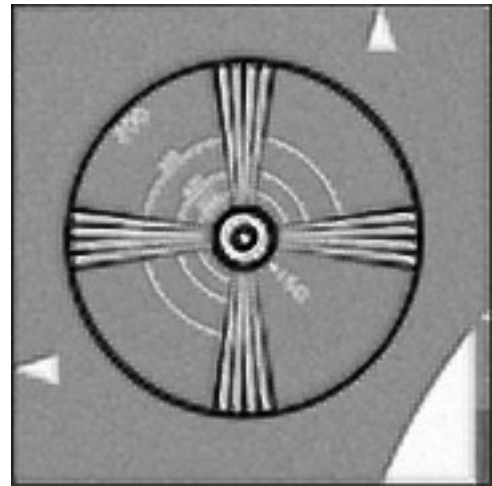
(a) POCS4.



(b) POCS5.



(c) POCS7.



(d) POCS8.

Fonte: Produzido pelos autores.

Analisando os resultados obtidos entre as implementações usadas como base de comparação e as propostas neste trabalho, temos que as propostas apresentam as áreas uniformes com menos ruído em relação ao POCS1 e POCS2, bastante semelhante aos apresentados no POCS3. O POCS8 apresenta bordas pretas mais suavizadas, dentre as implementações propostas semelhantes também às apresentadas pelo POCS3. Entretanto a imagem do POCS8 é mais escura e com pouca definição das áreas brancas.

O POCS7 apresenta um resultado mais suavizado, podendo ser observado principalmente nas bordas do círculo central e do círculo externo também mais bem definidas, embora um borramento mais perceptível em torno do círculo central. Resultado próximo ao do POCS3 que tem menor borramento no centro, embora bordas menos definidas.

Considerando as características de maneira global, visualmente existe uma equi-

valência entre os resultados. Porém, os algoritmos propostos tem resultados com maior contorno e suavização das bordas. Em contrapartida, o borramento é mais visível que nos POCS1 e POCS2, semelhante ao encontrado no POCS3.

Na [Tabela 12](#), que está ordenada em ordem crescente pelo MSE, vemos que numericamente, o POCS1 e POCS3 tem melhores resultados, com valores significativamente mais baixos que os demais, embora a análise visual aponte proximidade com o POCS7, e até mesmo com os demais.

Tabela 12 – Valores de MSE para os melhores resultados obtidos.

POCS	MSE
1	23,382
3	26,041
7	28,998
5	29,335
4	31,009
2	31,621
8	48,034
6	189,566

Fonte: Produzido pelos autores

Vale destacar que o MSE mais baixo obtido foi pelo POCS4 com 50 iterações e que não foi tratado como melhor resultado nesta seção. Isso se deve ao fato de ser inferior visualmente do que a versão com 10 iterações. Como foi discutido na [subseção 7.5.1](#), isso possivelmente ocorre devido ao comportamento da abordagem de replicação de *pixels* utilizada para esta implementação e que tende a uniformizar mais as áreas lisas como as grandes partes em cinza com mais iterações. Como essas áreas são predominantes na imagem temos essa discrepância de valores com a qualidade visual. Isso talvez possa significar que ao ser aplicado em um contexto mais específico, onde áreas uniformes sejam predominantes, seu resultado possa ser superior. Ou, ainda, combinar com a abordagem híbrida utilizando o Richardson-Lucy com *total variation* proposto, para tentar tratar a perda das bordas e talvez obter resultados melhores. Esse pode, inclusive, ser um apontamento para trabalho futuro.

Algumas observações podem ser feitas também em relação ao comportamento das abordagens propostas em relação à mudança dos parâmetros. Os POCS5 e POCS8 (o POCS6 também tem essa característica, mas conforme dito no início da seção, ele será desconsiderado), no contexto dos testes aqui realizados se mostraram sensíveis à parametrização da quantidade de iterações e ao valor do λ . Entretanto, a utilização de um conjunto com mais imagens não tenha produzido grande impacto nos resultados. Já

o POCS7 se mostrou mais estável entre as variações de parâmetros com resultados mais próximos entre eles.

Uma importante observação que se deve fazer aos resultados, levando em consideração a quantidade de imagens em cada conjunto de testes que, embora esperada a melhora com o conjunto maior uma vez que mais informações *a priori*, não foi isso que foi constatado. Pelo contrário, embora resultados equivalentes com o do outro conjunto, os resultados apresentaram um pouco mais de borramento. Isso pode ser devido ao fato das imagens serem de menor dimensão, com 82×82 *pixels*.

Sobre a concepção de cada abordagem também é possível destacar que as implementações que utilizam a versão paralela de POCS tiveram melhores resultados que as abordagens sequenciais. Vale destacar também que o uso do algoritmo de Richardson-Lucy, com regularização *total variation*, sem a ponderação do filtro e Canny, torna os resultados inviáveis, o que é o caso do POCS6.

Conclusão

Considerando os resultados apresentados as abordagens híbridas propostas por este trabalho e a abordagem com replicação de *pixels* obtiveram bom desempenho quando, comparadas com os resultados utilizados das implementações de referência.

As diferentes implementações tiveram melhorias em alguns aspectos em relação aos resultados usados para comparação, como suavização e definição de bordas. Porém, em alguns momentos, algumas perdas ocorriam no que diz respeito ao borramento. Sendo assim, dependendo da característica sendo observada, os resultados foram tão bons quanto, ou melhores que os resultados de referência.

Dessa maneira, podemos constatar a dificuldade do problema de super-resolução. Encontrar uma abordagem que se mostre eficiente em todas as situações, é uma tarefa difícil e diversos fatores devem ser levados em consideração. Entretanto, soluções satisfatórias podem ser obtidas, quando o contexto do objetivo for bem estabelecido. Com as abordagens que trabalhamos, quando se teve um ganho em algum aspecto da imagem, se obteve uma perda em algum outro. Uma definição precisa do contexto de uso e dos objetivos, pode auxiliar na escolha de um método mais apropriado. De maneira geral, todas as abordagens, com exceção do POCS6, apresentaram resultados aplicáveis, dado um determinado contexto. Um exemplo mais específico que pode ser citado, é o caso do POCS4. Em um contexto, onde o objetivo seja obter uma maior definição em áreas uniformes, talvez ele possa ser uma boa opção. O POCS7 é o que apresentou nos testes o resultado mais genérico, no sentido de realçar bordas, suavizar e definir as áreas uniformes, em contrapartida de um borramento na imagem.

Pôde-se constatar também o potencial da metodologia híbrida proposta e a utilização de outras restrições convexas ou complementações à abordagem espectral com outras técnicas, analisando como elas podem agregar mais informação, *a priori*, permitindo também resultados melhores. As abordagens aqui propostas, possuem potencial para serem exploradas e estendidas para outros contextos de aplicação, como em imagens médicas e computação forense.

Uma consideração que podemos fazer é que a escolha da imagem inicial influencia no resultado final e a utilização de técnicas mais sofisticadas, com o intuito de gerar uma estimativa inicial mais promissora, pode agregar melhora ao processo. Um outro fator que devemos destacar é a possibilidade de expansão da metodologia e das implementações, para considerar imagens não só de escala de cinza, mas com três componentes (RGB).

As possibilidades de melhorias, que podem ser baseadas na metodologia e nas implementações propostas, em trabalhos futuros, mostram o potencial de produção de

resultados ainda mais apreciáveis, podendo contribuir cada vez mais na área de super-resolução.

Isso se mostra ainda mais evidente quando se constata a quantidade de trabalhos futuros que podem ser derivados deste trabalho. Análises sobre a complexidade dos algoritmos desenvolvidos, buscando otimizações, além também de explorar o tema do desempenho computacional, explorando diferentes linguagens, ou mesmo arquiteturas para as implementações dos algoritmos, incluindo a exploração explícita das capacidades de paralelismo das arquiteturas mais atuais. A combinação da abordagem de replicação de *pixels* juntamente com a abordagem híbrida do algoritmo de Richardson-Lucy também seria algo para ser explorado em um trabalho futuro, além de diferentes combinações entre as abordagens, como por exemplo variando as projeções paralelas e sequenciais em diferentes conjuntos, como feito no POCS8. A flexibilidade da Projeção sobre conjuntos convexos permite que além de adicionar novos conjuntos, possamos também variar as projeções, como feito ao longo do trabalho, entretanto outras combinações ainda podem ser feitas. Utilização de outras técnicas de detecção de bordas, ou de outros métodos para o cálculos dos deslocamentos entre as imagens, podem gerar estudos sobre os impactos de diferentes técnicas em diferentes etapas do processo.

Referências

- ANDREWS, H. C.; HUNT, B. R. Digital image restoration. *Prentice-Hall Signal Processing Series, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1977*, v. 1, 1977. Citado na página 37.
- BABU, R. S.; MURTHY, K. S. A survey on the methods of super-resolution image reconstruction. *Int. J. Comput. Appl*, Citeseer, v. 15, n. 2, p. 1–6, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 45.
- BANHAM, M. R.; KATSAGGELOS, A. K. Digital image restoration. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 14, n. 2, p. 24–41, Mar 1997. Citado na página 41.
- BELEKOS, S. P.; GALATSANOS, N. P.; KATSAGGELOS, A. K. Maximum a posteriori video super-resolution using a new multichannel image prior. *IEEE Transactions on Image Processing*, IEEE, v. 19, n. 6, p. 1451–1464, 2010. Citado na página 36.
- BERENSTEIN, C. A. et al. A geometric approach to subpixel registration accuracy. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Elsevier, v. 40, n. 3, p. 334–360, 1987. Citado na página 38.
- BERTERO, M.; BOCCACCI, P. *Introduction to inverse problems in imaging*. [S.l.]: CRC press, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.
- BERTERO, M. et al. Resolution in diffraction-limited imaging, a singular value analysis. *Journal of Modern Optics*, Taylor & Francis, v. 31, n. 2, p. 181–201, 1984. Citado na página 32.
- BORMAN, S.; STEVENSON, R. Spatial resolution enhancement of low-resolution image sequences—a comprehensive review with directions for future research. *Lab. Image and Signal Analysis, University of Notre Dame, Tech. Rep*, Citeseer, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 37.
- BORMAN, S.; STEVENSON, R. Spatial resolution enhancement of low-resolution image sequences—a comprehensive review with directions for future research. *Tech. Rep, University of Notre Dame*, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- BREG, L. Finding the common point of convex sets by the method of successive projections. *Dokl. Akad. Mousk SSSR*, p. 487–490, 1965. Citado na página 47.
- CANNY, J. A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, IEEE, n. 6, p. 679–698, 1986. Citado na página 60.
- CARRINGTON, W. A. et al. Superresolution three-dimensional images of fluorescence in cells with minimal light exposure. *Science*, The American Association for the Advancement of Science, v. 268, n. 5216, p. 1483, 1995. Citado na página 32.
- CHAUDHURI, S. *Super-resolution imaging*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001. Citado na página 25.

- CHEN, J.; NUNEZ-YANEZ, J.; ACHIM, A. Video super-resolution using generalized gaussian markov random fields. *IEEE Signal Processing Letters*, IEEE, v. 19, n. 2, p. 63–66, 2012. Citado na página 35.
- CHU, C.-H. Super-resolution image reconstruction for mobile devices. *Multimedia systems*, Springer, v. 19, n. 4, p. 315–337, 2013. Citado na página 36.
- COMBETTES, P. The convex feasibility problem in image recovery. *Advances in imaging and electron physics*, Elsevier, v. 95, p. 155–270, 1996. Citado na página 33.
- COMBETTES, P. L. Convex set theoretic image recovery: history, current status, and new directions. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, Elsevier, v. 3, n. 4, p. 307–315, 1992. Citado na página 52.
- COMBETTES, P. L. The foundations of set theoretic estimation. *Proceedings of the IEEE*, v. 81, n. 2, p. 182–208, Feb. 1993. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 52.
- CONCHELLO, J.-A. Superresolution and convergence properties of the expectation-maximization algorithm for maximum-likelihood deconvolution of incoherent images. *JOSA A*, Optical Society of America, v. 15, n. 10, p. 2609–2619, 1998. Citado na página 32.
- FARSIU, S.; ELAD, M.; MILANFAR, P. Multiframe demosaicing and super-resolution of color images. *IEEE Transactions on Image Processing*, IEEE, v. 15, n. 1, p. 141–159, 2006. Citado na página 64.
- FARSIU, S.; ELAD, M.; MILANFAR, P. Video-to-video dynamic super-resolution for grayscale and color sequences. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, Springer, v. 2006, n. 1, p. 1–15, 2006. Citado na página 64.
- FARSIU, S. et al. Advances and challenges in super-resolution. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, Wiley Online Library, v. 14, n. 2, p. 47–57, 2004. Citado na página 64.
- FARSIU, S. et al. Fast and robust multiframe super resolution. *IEEE transactions on image processing*, IEEE, v. 13, n. 10, p. 1327–1344, 2004. Citado na página 64.
- FRANCIA, G. T. D. Degrees of freedom of an image. *JOSA*, Optical Society of America, v. 59, n. 7, p. 799–804, 1969. Citado na página 32.
- FRIEDEN, B. R. Viii evaluation, design and extrapolation methods for optical signals, based on use of the prolate functions. *Progress in optics*, Elsevier, v. 9, p. 311–407, 1971. Citado na página 32.
- FRIEDEN, B. R.; AUMANN, H. H. Image reconstruction from multiple 1-d scans using filtered localized projection. *Applied optics*, Optical Society of America, v. 26, n. 17, p. 3615–3621, 1987. Citado na página 33.
- GE, Z.-J. et al. A fast-convergence pocs seismic denoising and reconstruction method. *Applied Geophysics*, Springer, v. 12, n. 2, p. 169–178, 2015. Citado na página 36.
- GERCHBERG, R. Super-resolution through error energy reduction. *Journal of Modern Optics*, Taylor & Francis, v. 21, n. 9, p. 709–720, 1974. Citado na página 32.

GONZALES, R.; WOODS, R. *Digital Image Processing*. 3rd. ed. Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 2006. Citado na página 25.

GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. *Processamento de imagens digitais*. São Paulo, SP: Edgard Blucher, 2000. Citado na página 41.

GUBIN, L.; POLYAK, B.; RAIK, E. The method of projections for finding the common point of convex sets. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 7, n. 6, p. 1 – 24, 1967. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 50.

HARRIS, J. L. Resolving power and decision theory*†. *JOSA*, Optical Society of America, v. 54, n. 5, p. 606–611, 1964. Citado na página 31.

HIRANI, A. N.; TOTSUKA, T. Combining frequency and spatial domain information for fast interactive image noise removal. In: *Proceedings of the 23rd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*. New York, NY, USA: ACM, 1996. (SIGGRAPH '96), p. 269–276. Citado na página 33.

HOMEM, M. R.; ZORZAN, M. R.; MASCARENHAS, N. D. Poisson noise reduction in deconvolution microscopy. *Journal of Computational Interdisciplinary Sciences*, v. 2, n. 3, p. 173–177, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 59.

HOMEM, M. R. P. *Reconstrução tridimensional de imagens com o uso de deconvolução a partir de seções bidimensionais obtidas em microscopia óptica*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, USP, São Carlos, SP, 2003. Citado 7 vezes nas páginas 37, 44, 45, 47, 52, 53 e 59.

HUNT, B. R. Super-resolution of images: Algorithms, principles, performance. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, Wiley Online Library, v. 6, n. 4, p. 297–304, 1995. Citado na página 32.

IRANI, M.; PELEG, S. Improving resolution by image registration. *CVGIP: Graphical models and image processing*, Elsevier, v. 53, n. 3, p. 231–239, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 56.

KEREN, D.; PELEG, S.; BRADA, R. Image sequence enhancement using sub-pixel displacements. In: IEEE. *Computer Vision and Pattern Recognition, 1988. Proceedings CVPR'88., Computer Society Conference on*. [S.l.], 1988. p. 742–746. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 38.

KEREN, D.; PELEG, S.; BRADA, R. Image sequence enhancement using sub-pixel displacements. In: IEEE. *Computer Vision and Pattern Recognition, 1988. Proceedings CVPR'88., Computer Society Conference on*. [S.l.], 1988. p. 742–746. Citado na página 45.

KIM, S.; BOSE, N. K.; VALENZUELA, H. Recursive reconstruction of high resolution image from noisy undersampled multiframes. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, IEEE, v. 38, n. 6, p. 1013–1027, 1990. Citado na página 31.

KOSAREV, E. Shannon's superresolution limit for signal recovery. *Inverse problems*, IOP Publishing, v. 6, n. 1, p. 55, 1990. Citado na página 32.

LIM, D. *Achieving accurate image registration as the basis for super-resolution*. Dissertação (Mestrado) — The University of Western Australia, 2003. Citado na página 45.

- LIU, J. et al. An improved pocs super-resolution infrared image reconstruction algorithm based on visual mechanism. *Infrared Physics & Technology*, Elsevier, v. 78, p. 92–98, 2016. Citado na página 36.
- LUCY, L. B. An iterative technique for the rectification of observed distributions. *The astronomical journal*, v. 79, p. 745, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 59.
- MARCEL, B.; BRIOT, M.; MURRIETA, R. Calcul de translation et rotation par la transformation de fourier. *TS. Traitement du signal*, Lavoisier, v. 14, n. 2, p. 135–149, 1997. Citado na página 33.
- MARKS, I.; ROBERT, J. Alternating projections onto convex sets. In: ACADEMIC PRESS, INC. *Deconvolution of images and spectra (2nd ed.)*. [S.l.], 1996. p. 476–501. Citado na página 50.
- MARTINS, A. L. et al. Map-mrf super-resolution image reconstruction using maximum pseudo-likelihood parameter estimation. In: IEEE. *2009 16th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*. [S.l.], 2009. p. 1165–1168. Citado na página 34.
- MARTINS, A. L. D.; HOMEEM, M. R.; MASCARENHAS, N. D. Super-resolution image reconstruction using the icm algorithm. In: IEEE. *2007 IEEE International Conference on Image Processing*. [S.l.], 2007. v. 4, p. IV–205. Citado na página 34.
- MILANFAR, P. *Super-resolution imaging*. [S.l.]: CRC press, 2010. Citado 6 vezes nas páginas 25, 34, 37, 38, 40 e 62.
- MIURA, N.; BABA, N. Superresolution for a nonnegative band-limited image. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 21, n. 15, p. 1174–1176, 1996. Citado na página 32.
- MOALLEM, P.; ISFAHANI, S. M. M.; HADDADNIA, J. Facial image super resolution using weighted patch pairs. *International Journal of Image, Graphics and Signal Processing*, Modern Education and Computer Science Press, v. 5, n. 3, p. 1, 2013. Citado na página 36.
- MOSLEH, A.; BOUGUILA, N.; HAMZA, A. B. Image and video spatial super-resolution via bandlet-based sparsity regularization and structure tensor. *Signal Processing: Image Communication*, Elsevier, v. 30, p. 137–146, 2015. Citado na página 38.
- NARAYANAN, B. et al. A computationally efficient super-resolution algorithm for video processing using partition filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, IEEE, v. 17, n. 5, p. 621–634, 2007. Citado na página 36.
- NASROLLAHI, K.; MOESLUND, T. B. Super-resolution: a comprehensive survey. *Machine vision and applications*, Springer, v. 25, n. 6, p. 1423–1468, 2014. Citado na página 25.
- NG, M. K. et al. A total variation regularization based super-resolution reconstruction algorithm for digital video. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, Springer, v. 2007, n. 1, p. 1–16, 2007. Citado na página 36.
- OSKOUI-FARD, P.; STARK, H. Tomographic image reconstruction using the theory of convex projections. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, IEEE, v. 7, n. 1, p. 45–58, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 55.

- OSKOUI, P.; STARK, H. A comparative study of three reconstruction methods for a limited-view computer tomography problem. *IEEE transactions on medical imaging*, IEEE, v. 8, n. 1, p. 43–49, 1989. Citado na página 47.
- PANDA, S. S.; PRASAD, M.; JENA, G. Pocs based super-resolution image reconstruction using an adaptive regularization parameter. *arXiv preprint arXiv:1112.1484*, 2011. Citado na página 33.
- PANDA, S. S.; PRASAD, M. S. R. S.; JENA, G. POCS Based Super-Resolution Image Reconstruction Using an Adaptive Regularization Parameter. v. 8, n. 5, p. 155–158, 2011. Citado na página 40.
- PAPOULIS, A. A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation. *IEEE Transactions on Circuits and systems*, IEEE, v. 22, n. 9, p. 735–742, 1975. Citado na página 32.
- PARK, S. C.; PARK, M. K.; KANG, M. G. Super-resolution image reconstruction: a technical overview. *IEEE signal processing magazine*, IEEE, v. 20, n. 3, p. 21–36, May 2003. Citado 7 vezes nas páginas 25, 31, 37, 39, 40, 43 e 45.
- PATANAVIJIT, V. Super-resolution reconstruction and its future research direction. *AU J*, v. 12, n. 3, p. 149–163, 2009. Citado na página 36.
- PATTI, A. J.; SEZAN, M. I.; TEKALP, A. M. High-resolution image reconstruction from a low-resolution image sequence in the presence of time-varying motion blur. In: *IEEE. Image Processing, 1994. Proceedings. ICIP-94., IEEE International Conference*. [S.l.], 1994. v. 1, p. 343–347. Citado na página 34.
- PATTI, A. J.; SEZAN, M. I.; TEKALP, A. M. Superresolution video reconstruction with arbitrary sampling lattices and nonzero aperture time. *IEEE Transactions on Image Processing*, IEEE, v. 6, n. 8, p. 1064–1076, 1997. Citado na página 34.
- PELEG, S.; KEREN, D.; SCHWEITZER, L. Improving image resolution using subpixel motion. *Pattern recognition letters*, Elsevier, v. 5, n. 3, p. 223–226, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 38.
- PHAM, T. Q.; VLIET, L. J. V.; SCHUTTE, K. Robust fusion of irregularly sampled data using adaptive normalized convolution. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, Springer, v. 2006, n. 1, p. 1–12, 2006. Citado na página 36.
- RICHARDSON, W. H. Bayesian-based iterative method of image restoration. *JOSA*, Optical Society of America, v. 62, n. 1, p. 55–59, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 59.
- SEGALL, C. A. et al. Bayesian resolution enhancement of compressed video. *IEEE Transactions on image processing*, IEEE, v. 13, n. 7, p. 898–911, 2004. Citado na página 35.
- SEMENTILLI, P.; HUNT, B. R.; NADAR, M. Analysis of the limit to superresolution in incoherent imaging. *JOSA A*, Optical Society of America, v. 10, n. 11, p. 2265–2276, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

- SEZAN, M. I. An overview of convex projections theory and its application to image recovery problems. *Ultramicroscopy*, Elsevier, v. 40, n. 1, p. 55–67, 1992. Citado na página 51.
- SEZAN, M. I.; STARK, H. Image restoration by the method of convex projections: Part 2—applications and numerical results. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 1, n. 2, p. 95–101, Oct. 1982. Citado na página 47.
- SHEN, H. et al. A map algorithm to super-resolution image reconstruction. In: IEEE. *Image and Graphics (ICIG'04), Third International Conference on*. [S.l.], 2004. p. 544–547. Citado na página 40.
- SHEN, H. et al. A map approach for joint motion estimation, segmentation, and super resolution. *IEEE Transactions on Image processing*, IEEE, v. 16, n. 2, p. 479–490, 2007. Citado na página 34.
- SLEPIAN, D.; POLLAK, H. O. Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis and uncertainty—i. *Bell System Technical Journal*, Wiley Online Library, v. 40, n. 1, p. 43–63, 1961. Citado na página 32.
- STARK, H.; OSKOUI, P. High-resolution image recovery from image-plane arrays, using convex projections. *JOSA A*, Optical Society of America, v. 6, n. 11, p. 1715–1726, 1989. Citado na página 33.
- STARK, H.; SEZAN, M. I. Image processing using projection methods. *Real-Time Optical Information Processing*, Academic, San Diego, Calif, p. 185–232, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 62.
- STARK, H.; YANG, Y. *Vector Space Projections: A Numerical Approach to Signal and Image Processing, Neural Nets, and Optics*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1998. ISBN 0471241407. Citado 9 vezes nas páginas 33, 41, 49, 52, 55, 56, 58, 61 e 69.
- TEKALP, A. M.; OZKAN, M. K.; SEZAN, M. I. High-resolution image reconstruction from lower-resolution image sequences and space-varying image restoration. In: IEEE. *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1992. ICASSP-92., 1992 IEEE International Conference on*. [S.l.], 1992. v. 3, p. 169–172. Citado 9 vezes nas páginas 29, 33, 34, 47, 55, 57, 58, 61 e 62.
- THAPA, D. et al. A performance comparison among different super-resolution techniques. *Computers & Electrical Engineering*, Elsevier, 2015. Citado na página 36.
- TIAN, J.; MA, K.-K. Stochastic super-resolution image reconstruction. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, Elsevier, v. 21, n. 3, p. 232–244, 2010. Citado na página 34.
- TIAN, J.; MA, K.-K. A survey on super-resolution imaging. *Signal, Image and Video Processing*, Springer, v. 5, n. 3, p. 329–342, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.
- TIKHONOV, A. N.; ARSEININ, V. Y. *Solutions of ill-posed problems*. Winston, 1977. Citado na página 31.
- TSAI, R.; HUANG, T. S. Multiframe image restoration and registration. *Advances in computer vision and Image Processing*, v. 1, n. 2, p. 317–339, 1984. Citado na página 31.

- UR, H.; GROSS, D. Improved resolution from subpixel shifted pictures. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, Elsevier, v. 54, n. 2, p. 181–186, 1992. Citado na página 38.
- VILLENA, S. et al. Bayesian combination of sparse and non-sparse priors in image super resolution. *Digital Signal Processing*, Elsevier, v. 23, n. 2, p. 530–541, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.
- WALSH, D. O.; NIELSEN-DELANEY, P. A. Direct method for superresolution. *JOSA A*, Optical Society of America, v. 11, n. 2, p. 572–579, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.
- WANG, T. et al. Adaptive patch-based pocs approach for super resolution reconstruction of 4d-ct lung data. *Physics in medicine and biology*, IOP Publishing, v. 60, n. 15, p. 5939, 2015. Citado na página 36.
- XIANG, Z.; JIE, Y.; DU, S.-D. Super-resolution reconstruction of image sequences compressed with dwt-based techniques. In: IEEE. *2007 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition*. [S.l.], 2007. v. 2, p. 555–560. Citado na página 35.
- XIONG, Z.; SUN, X.; WU, F. Robust web image/video super-resolution. *IEEE Transactions on Image Processing*, IEEE, v. 19, n. 8, p. 2017–2028, 2010. Citado na página 36.
- YANG, J.; HUANG, T. Image super-resolution: Historical overview and future challenges. *Super-resolution imaging*, CRC Press, p. 20–34, 2010. Citado na página 39.
- YOULA, D. Generalized image restoration by the method of alternating orthogonal projections. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. 25, n. 9, p. 694–702, Sep. 1978. Citado na página 47.
- YOULA, D. C.; WEBB, H. Image restoration by the method of convex projections: Part 1 - theory. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 1, n. 2, p. 81–94, Oct. 1982. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 50.
- ZIBETTI, M. V. W.; MAYER, J. Simultaneous super-resolution for video sequences. In: IEEE. *IEEE International Conference on Image Processing 2005*. [S.l.], 2005. v. 1, p. I–877. Citado na página 35.
- ZOMET, A.; RAV-ACHA, A.; PELEG, S. Robust super-resolution. In: IEEE. *Computer Vision and Pattern Recognition, 2001. CVPR 2001. Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on*. [S.l.], 2001. v. 1, p. I–645. Citado na página 36.