UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO - PPGPE

GIRLEIDE MARIA DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE O USO DO GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

SÃO CARLOS – SP
2016

GIRLEIDE MARIA DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE O USO DO GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Profissional em Educação da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação.

Área de concentração: Ensino-Aprendizagem

Linha de pesquisa: Processos educativos – Linguagens, Currículo e Tecnologias.

Orientadora: Prof.ª Dra. Miriam Cardoso Utsumi

SÃO CARLOS - SP

2016

UM ESTUDO SOBRE O USO DO GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Educação e Ciências Humanas
Programa de Pós-Graduação Profissional em Educação

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Girleide Maria da Silva, realizada em 12/02/2016:

Profa. Dra. Miriam Cardoso Utsumi
USP

Prof. Dr. Barbara Lutaif Bianchini
PUC-SP

Profa. Dra. Denise Silva Vilela
UFSCar

A minha família, em memória ao meu pai, Joaquim, e a minha irmã, Leide.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por conceder-me, vida, saúde e sabedoria. Compreendendo que, através de Jesus teremos a possibilidade de vivermos em um mundo de paz, sem invejas, ganancias e pré-conceitos.

Aos meus familiares, em especial a minha mãe e irmã, que me apoiaram imensamente na trajetória desta etapa da minha história de vida.

A orientadora Prof.ª Dra. Miriam Cardoso Utsumi pela paciência, compreensão e dedicação que serviram como fator motivador para chegarmos à conclusão desta dissertação.

Aos professores do curso que dedicaram seu tempo proporcionando meios que promoveram situações favoráveis para ampliarmos nossos conhecimentos.

Ao Prof. Me. Gerson dos Santos Correia por conceder as suas aulas para aplicação da sequência de atividades.

Aos estudantes participantes da pesquisa de campo, que se desempenharam ao solucionar as atividades, proporcionando a coleta de dados.

As Professoras Dra. Barbara Lutaif Bianchini e Dra. Denise Silva Vilela, por dedicarem-se a leitura deste estudo, sugerindo mudanças que propiciaram melhorias significativas na redação final desta dissertação.

Aos idealizadores, organizadores e colaboradores do curso de Mestrado Profissional em Educação, por acreditarem que nós educadores, poderemos sempre melhorar nossas práticas de ensino.

Agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente com a elaboração desta dissertação.

"Se vós estiverdes em mim, e as minhas palavras estiverem em vós, pedireis tudo o que quiserdes, e vos será feito."

(João 15:7)

"Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas, mas ao tocar uma alma humana, seja apenas outra alma humana."

Carl Jung

SILVA, G.M. **Um Estudo Sobre o Uso do GeoGebra na Aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio.** São Carlos, SP: UFSCar, 2016. 179f**.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação) – Universidade Federal de São Carlos.

RESUMO

Este estudo investigou, em uma abordagem quanti-qualitativa de natureza descritiva, a influência do ensino de Matemática aliado a recursos tecnológicos na aprendizagem de alguns conteúdos de Geometria Analítica. O objetivo foi analisar em que medida o *software* GeoGebra contribuiu para a aprendizagem dos conteúdos de ponto e reta. Participaram do estudo, duas turmas do período diurno do 3º ano do Ensino Médio, de uma escola pública da Grande São Paulo. Ambas as turmas foram submetidas a uma Sequência de Atividades que consideravam os diferentes Registros de Representação Semiótica, conforme Teoria de Raymond Duval. A primeira turma (T1), trabalhou com atividades em abordagens instrucionista e construcionista utilizando o GeoGebra, enquanto a outra (T2) trabalhou as atividades em ambiente lápis e papel. Os dados foram obtidos a partir de um questionário sobre o perfil dos participantes, um Pré-Teste, Avaliação Intermediária e um Pós -Teste. A Turma 1 iniciou a sequência com 0,15 pontos de vantagem em relação à média dos participantes da Turma 2, e terminou com 0,71 pontos, ou seja, relativamente próximos. Consideramos que, para as duas turmas, ocorreu a aprendizagem dos conceitos, pois as médias no Pós-Teste foram de 7,90 e 7,19 respectivamente. Verificamos que nas questões que abordavam as habilidades de visualização (localize, identifique) e construção (trace, represente) a Turma 1 apresentou médias superiores às dos participantes da Turma 2, contudo nas questões que exigiam habilidade de cálculo, a Turma 2 obteve médias melhores. Desta forma, consideramos que o GeoGebra, contribuiu para aprendizagem dos conteúdos de ponto e reta, favorecendo a representação dos objetos matemáticos em diferentes registros. Porém, acreditamos que ele deva ser associado a outras metodologias que deem conta da compreensão e apropriação da habilidade de cálculo pelos alunos, a qual apenas o uso do *software* não contribuiu para desenvolver.

Palavras-chave: Educação Matemática. Aprendizagem. Registros de Representação Semiótica. GeoGebra.

SILVA, G.M. **A Study of the Use of GeoGebra in Analytical Geometry Learning in High School.** São Carlos, SP: UFSCar, 2016. 179f. Dissertation (Professional Master of Education) - Federal University of São Carlos.

ABSTRACT

This study investigated, in a quantitative-qualitative approach of a descriptive nature, the influence of Mathematics teaching combined with technological resources in the learning of some contents of Analytical Geometry. The aim of this study was to analyze the extent to which the software GeoGebra contributed to the learning of the content of point and line. Two groups of the daytime period of the 3rd grade of high school participated in the study of a public school in a city of São Paulo. Both classes were submitted to a Sequence of Activities that considered the different Registers of Semiotic Representation, according to Raymond Duval's Theory. The first group (T1), worked with activities in instructional and constructional approaches using GeoGebra, while the other (T2) worked the activities using pencil and paper. The data were obtained from a questionnaire about the participants' profile, a Pre-Test, Intermediate Evaluation and a Post-Test. Group 1 started the sequence with 0.15 points in relation to the average of the participants of Class 2, and ended with 0.71 points, that is, very close. We consider that for the two classes, the concepts were learned, since the averages in the post-test were 7.90 and 7.19, respectively. It was verified that in the questions that approached the abilities of visualization (locate, identify) and construction (trace, represent), Group 1 presented higher averages than the participants of Group 2, however in the questions that required calculation ability, Group 2 obtained better averages . In this way, we consider that GeoGebra contributed to the learning of point and straight contents, favoring the representation of mathematical objects in different registers. However, we believe that it should be associated with other methodologies that account for the students' comprehension and appropriation of calculation ability, which only the use of the software did not contribute to develop.

Key-words: Mathematics Education. Learning. Semiotics Representation Registers. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

APM - Associação de Pais e Mestres.

BDTD - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.

CAI - Instrução Auxiliada por Computador.

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

CAS - Sistema de Computação Algébrico.

CPTM - Companhia Paulista de Trens Metropolitanos.

FDE - Fundação para o Desenvolvimento da Educação.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisa Educacional – Anísio Teixeira.

LDBEN - Lei de Diretrizes e Bases do Ensino Médio.

METRÔ - Companhia do Metropolitano de São Paulo.

MIT - Massachusetts Institute of Technology.

NTIC - Novas Tecnologias da Informação e Comunicação.

PCN - Parâmetros Curriculares Nacional.

PNAD - Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios.

PUC – Pontifícia Universidade Católica.

SENAC - Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial.

SGD ou DGS - Sistema de Geometria Dinâmico.

SPSS – Statistical Package for Social Science.

TDIC - Tecnologias Digitais da Informática e Comunicação.

TelEduc – Plataforma de Ambiente Virtual de Aprendizagem.

TFC - Teorema Fundamental do Cálculo.

TIC - Tecnologias da Informação e Comunicação.

UFSCar - Universidade Federal de São Carlos.

UNESP - Universidade Estadual Paulista - “Júlio de Mesquita Filho”.

UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas.

UNIMONTES - Universidade Estadual de Montes Claros – MG

USP - Universidade de São Paulo.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática como ciência se universalizou servindo dentre outros meios, como estímulo ao pensamento lógico e racional do homem. Entendemos, que o diferencial entre o ser humano e outras espécies é a capacidade de ter consciência que está inserido em uma sociedade, que faz parte dela, interagindo com o meio. Para D'Ambrósio (1996, p. 64) "essa característica única da espécie humana deve ser cultivada, estimulada, auxiliada pelo processo educacional, e não estrangulada pela ministração de conteúdos programáticos, disciplinares, motivados pelo próprio conteúdo programático das várias disciplinas".

Uma sociedade em constante inovação, os aspectos culturais, sociais, políticos e econômicos integrados às tecnologias modificam-se em progressões mais elevadas que o seu sistema educacional, que se transforma a passos lentos, principalmente no que diz respeito às práticas pedagógicas e seus recursos. Segundo Moran (2012, p. 8), "A sociedade evolui mais do que a escola e, sem mudanças profundas, consistentes e constantes, não avançaremos rapidamente como nação".

A Educação Matemática, também passa por transformações, pois se faz necessário reinventá-la para adequar seu papel educacional à sociedade. Com essa visão, há forte tendência para um ensino de Matemática voltado ao uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), diversificando os métodos de ensino a partir da sua utilização, propondo uma aprendizagem mais dinâmica e almejando um ensino com índices menores de fracasso escolar. Moran (2012) acrescenta que, com o avanço das tecnologias, uma escola sem conexão com o mundo virtual e as multimídias é uma escola incompleta.

Neste âmbito, a Lei de Diretrizes e Bases do Ensino Nacional – LDBEN, nº 9394/96 foi promulgada atribuindo ao Ensino Médio a orientação tecnológica básica, e em seu Art. 35, parágrafo IV. Entre outras finalidades destaca "a compreensão dos fundamentos científico tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina", para que, ao finalizar o ciclo de três anos o aluno tenha "domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna" (Art. 36).

Analogamente, o currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012a) relaciona educação à tecnologia, enfatizando dois aspectos: a alfabetização tecnológica onde se aprende a lidar com computadores entendendo que as tecnologias estão inseridas na cultura humana como parte das práticas sociais e produtivas e, estão ligadas diretamente aos "conhecimentos científicos, artísticos e linguísticos que os fundamentam" (p.21). Como segundo aspecto, cabe a todas as áreas do conhecimento no Ensino Médio introduzir a tecnologia de forma que relacione o "currículo ao mundo de produção e serviços" (p. 22).

Dentre as tecnologias informáticas, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998), apontam o computador como recurso didático dinâmico que favorece o processo de ensino–aprendizagem possibilitando o desenvolvimento cognitivo do aluno. O uso do computador no ensino pode auxiliar na construção do conhecimento de acordo com o ritmo de aprendizagem do aluno, além de propiciar a interação com seus colegas trocando experiências e aprendendo com seus próprios erros. Porém, não basta apenas possuirmos recursos tecnológicos sem atrelarmos a estes, os objetivos e as metodologias, integrando as ferramentas multimídias ou computacionais para um fim didático, prático e facilitador no processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com Kenski (2012, p.38), “as novas TICs não são apenas meros suportes tecnológicos. Elas têm suas próprias lógicas, suas linguagens e maneiras particulares de comunicar-se com as capacidades perceptivas, emocionais, cognitivas, intuitivas e comunicativas das pessoas”, apresentando-se como nova forma de “gerar, dominar e disseminar o conhecimento”.

Anteriormente, Miskulin (2010, p.153), já asseverava que era inaceitável, neste momento histórico, “que a educação seja pautada no modelo tradicional de ensino”.

Vivemos na fronteira entre as metodologias usuais comumente disseminadas e as novas tendências de ensino que surgem com o advento tecnológico digital. Adentrarmos nestas fronteiras, no sentido de nos apropriarmos em sala de aula dos recursos tecnológicos existentes e possíveis de serem integrados aos conteúdos das disciplinas das áreas curriculares, em específico a Matemática, depende de vários fatores. Entre eles estão, a ruptura da visão tradicional como único método de ensino capaz de garantir uma qualidade eficaz de aprendizagem e oferta de cursos para formação de professores estruturados com recursos tecnológicos que realmente capacitem os profissionais à utilizarem tais ferramentas com seus alunos em sala de aula. Além, de melhorias na infraestrutura das escolas que garantam o acesso real da maioria dos alunos aos computadores e o estimulo a pesquisas que vinculem tecnologias ao ensino e a aprendizagem.

O acesso a outros métodos e estratégias de ensino que vinculem o uso das tecnologias atuais aos conhecimentos específicos das disciplinas, garantem maior diversidade de recursos, promovendo possibilidades de ensino e consequentemente, ampliando o universo de alternativas para a aprendizagem, proporcionando ao aluno um ambiente mais atraente para construção de conhecimentos, seja pelo acréscimo de mais uma ferramenta facilitadora ao processo de ensino e aprendizagem, como também, a utilização pela escola de instrumentos compatíveis com a realidade dessa geração de educandos, uma vez que nós educadores fomos alfabetizados em uma geração onde não existiam recursos tecnológicos digitais e a nossa formação acadêmica inicial ocorreu em meio ao desenvolvimento expressivo da tecnologia computacional, mas, a margem da sua utilização.

Segundo Moran (2012, p.8), os modelos de ensino e aprendizagem atuais são "engessados, padronizados, repetitivos, monótonos, previsíveis e asfixiantes". Portanto, tais modelos são merecedores de transformações que descaracterizem esta visão tão precária do ensino.

Um dos tópicos favoráveis à uma transformação na qualidade de ensino encontramos nas variedades de recursos educacionais que podem ser usados com o auxílio do computador. Os *softwares*, por exemplo, na atualidade têm se destacado como ferramentas que podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. O GeoGebra é um dos *softwares* que vem sendo utilizado nesse processo por ser dinâmico, permitindo a exploração geométrica e algébrica, além de ser gratuito e aplicável do ensino fundamental ao superior.

Segundo Miskulin (2010), para auxiliar no processo de ensino aprendizagem, a escolha do *software* educativo deve estar relacionada com "aspectos teórico-metodológicos", sendo fundamental a mediação do professor, pois um ambiente tecnológico pode "criar situações desafiantes" que possibilitem ao aluno percorrer novos caminhos e, ao mesmo tempo, "reavaliar suas estratégias e objetivos". Desta forma, o recurso tecnológico trabalhado com as turmas em sala de aula deve ser fundamentado em suas características computacionais e educacionais, podendo ser administrados como, *softwares* de repetição e prática, de sistemas tutoriais, de simulação, de resolução de problemas, de ferramenta, de programação e de sistemas de aprendizagem integrados.

Nos PCNs (BRASIL, 1998), em relação a escolha de *softwares* educacionais, encontramos recomendações aos educadores sobre a sua utilização de acordo com os objetivos que pretendem atingir. Tal recomendação nos possibilita utilizar *softwares* que se prestam a um trabalho mais dirigido, como forma de testar conhecimentos, num enfoque mais instrucionista, ou aqueles que auxiliam na construção do conhecimento com uma abordagem construcionista. Também, é possível alternar o ensino de matemática entre estas duas formas de abordagens (instrucionista e construcionista) utilizando apenas um recurso tecnológico digital que permita tal aplicação, como o GeoGebra tem se apresentado nas pesquisas revisadas neste estudo.

Neste contexto, com olhar para as pesquisas presentes no capítulo da revisão da literatura que integram o uso do *software* GeoGebra a conteúdos matemáticos, buscamos por um conteúdo que possibilitasse o uso gráfico e algébrico, e que favorecesse a construção de atividades elaboradas com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica os quais encontramos no conteúdo de Geometria Analítica, que segundo o currículo do estado de São Paulo é destinado ao 3º ano do Ensino Médio.

Anteriormente em outros anos letivos, já havíamos administrado este conteúdo, sem o auxílio de recursos tecnológicos digitais; a partir destas experiências no ambiente lápis e papel, procuramos investigar neste estudo a sua aplicabilidade, em um ambiente de aprendizagem dinâmico, para analisamos **em que medida o GeoGebra contribui para a aprendizagem do conteúdo de Geometria Analítica: ponto e reta.**

A metodologia alicerçou-se em pesquisa de campo descritiva por detalhar a existência de um fato, seus fenômenos e suas variáveis que, neste âmbito, compreendeu o desempenho dos participantes através de técnicas padronizadas de coleta de dados. Tais dados, foram recolhidos em condições naturais, onde ocorreu o fenômeno, no lócus dos 2 grupos pesquisados: uma escola pública da rede estadual de ensino, localizada no município de Taboão da Serra, por meio da observação direta da professora pesquisadora, da aplicação de questionário, Pré-Teste, Sequência de Atividades, Pós-Teste. Os dados obtidos foram analisados em uma abordagem quanti-qualitativa.

O estudo foi elaborado em 6 capítulos. No primeiro capítulo, destinado à introdução, são apresentados os argumentos que justificam a sua construção, com o problema de pesquisa, seus objetivos e metodologia, e resumidamente especificamos os escritos dos próximos capítulos.

No segundo capítulo, apresentamos a revisão da literatura, realizada a partir de pesquisas em teses e dissertações de mestrados acadêmicos e profissionais, desenvolvidas em várias regiões do Brasil e em Portugal, nos últimos cinco anos. As pesquisas abordaram a utilização das TICs na aprendizagem desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior e a aplicação do GeoGebra como recurso tecnológico em diversos conteúdos matemáticos, como por exemplo, Funções e Geometria Plana. Destacando-as como fontes norteadoras para o nosso estudo.

O capítulo três, destinamos ao referencial teórico: tratamos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2013) e as abordagens Construcionista e Instrucionista de Papert (1994), que utilizamos para a elaboração e análise da Sequência de Atividades.

No capítulo quatro, apontamos os referenciais metodológicos que apoiaram este estudo, seus objetivos, o local de aplicação, o perfil dos participantes, os recursos e especificamos os procedimentos para coleta e análise dos dados.

O capítulo cinco foi destinado a análise dos dados obtidos por meio dos instrumentos, Questionário/Perfil dos Participantes, Pré-Teste, Sequência de Atividades e Pós-Teste. Descrevemos as resoluções das atividades apresentando as respostas de alguns participantes, e suas opiniões sobre o recurso didático e a sequência. Analisamos ainda o desempenho dos participantes por questões e respondemos em que medida o *software* GeoGebra contribuiu para a aprendizagem do conteúdo matemático, caracterizando a sua aplicabilidade.

No sexto capítulo realizamos as considerações finais do estudo, onde tratamos das tendências tecnológicas vinculadas à aprendizagem em Matemática junto aos pareceres conclusivos das contribuições da aplicação da Sequência de atividades embasados no desempenho dos participantes, relacionando tais resultados com o referencial teórico e as pesquisas revistas.

Acreditamos que a pesquisa contribui para que ações que vinculem os conteúdos matemáticos aos recursos tecnológicos sejam uma prática constante em sala de aula, com fins de proporcionar melhorias na aprendizagem, adequando-se aos recursos presentes nas unidades escolares e incentivando a aquisição de novos recursos uma vez confirmada a necessidade de sua utilização.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo apresentamos a revisão da literatura abrangendo o período de 2011 a 2015, que se baseia em pesquisas oriundas do Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), dos periódicos científicos: Bolema e E-Curriculum, e das bibliotecas digitais das universidades: USP, UFSCar, UNESP, UNICAMP e PUC.

Para tal revisão, utilizamos como palavras chaves: educação tecnológica, a utilização do GeoGebra no ensino, *software* GeoGebra, matemática e tecnologia, atividades com o GeoGebra, Registros de Representação Semiótica de Duval, Geometria Analítica, GeoGebra e Geometria Analítica, recursos tecnológicos e Geometria Analítica.

Para este estudo, buscamos nas pesquisas fatores que convergissem especificamente no aspecto da utilização do *software* GeoGebra na elaboração de atividades principalmente relacionadas ao conteúdo de Geometria Analítica e na contribuição da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, como referencial teórico.

Com a análise, observamos que a ênfase das pesquisas está na inserção das novas tecnologias no campo da Educação, o que tem sido motivo de grande inquietação no meio acadêmico, como também, no que diz respeito à questão das políticas públicas. Tal inquietação se evidencia nas abordagens que norteiam os temas das pesquisas atuais, ganhando destaque em nossa revisão o uso de ferramentas tecnológicas empregadas como recursos pedagógicos nas aulas de Matemática, vinculando a aplicação do *software* GeoGebra à conteúdos que são ministrados desde as séries iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Superior.

Inicialmente localizamos trinta e duas pesquisas. Após a leitura do resumo e sumário, verificamos que cinco daquelas não estavam de acordo com a nossa ferramenta tecnológica e também não apresentavam o referencial teórico semelhante ao nosso. Elencamos então, vinte e oito trabalhos acadêmicos, sendo vinte e duas dissertações, duas teses e quatro artigos.

Os estudos foram desenvolvidos prioritariamente em território brasileiro nas regiões Norte, Nordeste, Sul e principalmente Sudeste do país; apenas um dos estudos ocorreu em Lisboa, Portugal.

A seguir, passaremos a especificar aspectos relevantes que obtivemos em nossa análise. Em ordem decrescente em relação a quantidade de vezes que o tema foi abordado, apresentamos os conteúdos mais abordados nas pesquisas: Funções (ALMEIDA, 2014; FERREIRA, 2013; LIMA, 2013; MELO, 2013; MOREIRA, 2012; SIQUEIRA, 2013) ; Fractais (MALTEMPI e FARIA, 2012; PADILHA, 2012; FARIA, 2012) ; Geometria plana

(KITAOCA, 2013; NASCIMENTO, 2012; PEREZ, 2015; PROCÓPIO, 2011) ; Trigonometria (AGUIAR, 2011; CASSOL, 2012) ; Cálculo Diferencial e Integral (MOLON, 2013; RICHT e MISKULIN, 2012) ; Geometria Analítica (SANTOS, 2011) ; Inequações (CONCEIÇÃO JUNIOR, 2011) ; Integrais definidas (GRANDE, 2013) ; Paralelogramos (MENOGOTTO e LARA, 2011) ; Perímetro e Área (LOPES, 2013) ; Inequações (DIAS, 2014) e Sistemas de equações de 1º grau com duas variáveis (SILVA, 2014).

As funções são os objetos de estudo que obtiveram o maior grau de frequência nas pesquisas, destacamos os seguintes tipos: funções afim, quadráticas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Quatro pesquisas abrangeram todos os tipos citados de funções, duas trabalharam apenas com funções exponenciais e logarítmicas, uma com função quadrática, outra com funções trigonométricas e uma com funções afim e quadrática.

Observando os conteúdos matemáticos que foram estudados nas pesquisas analisadas, verificamos que Geometria Analítica (ponto e reta), além de oportunizar a relação entre os registros de representações algébricas e os gráficos, fato que percebemos em aulas ministradas em anos anteriores, também apresentou baixo índice de utilização nas pesquisas elaboradas no período especificado e nos repositórios aos quais nos reportamos; motivos que proporcionaram a nossa escolha viabilizando o uso da ferramenta tecnológica GeoGebra, como recurso adicional para aprendizagem na disciplina de Matemática.

Baldini e Cyrino (2012), também fizeram levantamento no Banco de Dados da Capes em um estudo documental qualitativo de caráter interpretativo, analisando trinta e seis trabalhos, entre teses e dissertações de mestrado profissional e acadêmico, cujas publicações, ocorreram de 2008 a 2010 com o objetivo de investigar o uso do *software* GeoGebra na formação de professores de Matemática. Em análises preliminares as autoras elencaram os dez conteúdos matemáticos mais contemplados e dentre eles estavam: Geometria Plana, Trigonometria e Cálculo. Neste *ranking*, a Geometria Analítica ocupou a quinta posição com quatro estudos que abordavam o conteúdo.

Segundo Baldini e Cyrino (2012), são poucas as pesquisas na área de formação de professores propondo o uso das tecnologias. Na maioria dos trabalhos, inclusive neste, as potencialidades pedagógicas do *software* GeoGebra na sala de aula, são objetos de análise pelos pesquisadores, e em geral os eixos temáticos apontam para contribuição do *software* nos processos de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. As autoras enfatizam a necessidade de formação tecnológica para os professores sejam no currículo de formação inicial ou continuada, destacando que ainda há a ausência de tal ferramenta nos cursos de formação acadêmica atuais.

As pesquisadoras citam entre outros objetivos, que ao elaborarem as características dos cursos de formação sejam acadêmicos ou de formação continuada, deverão estabelecer análises e experimentações de diferentes formas de pensamento e de registros, proporcionadas pelo uso do *software*. Elas destacam que, apesar do “GeoGebra viabilizar o estabelecimento de relações entre a Geometria e a Álgebra, e a percepção de diferentes tipos de registro de representação de um mesmo objeto matemático, esses não foram muito explorados nas propostas analisadas” (BALDINI e CYRINO, 2012, p.55).

Para Baldini (2014), há a necessidade de cursos de formação que favoreçam a implementação de espaços de discussões e reflexões para professores, desencadeados através da utilização de ferramentas tecnológicas, enfatizando a utilização do GeoGebra, para dar suporte aos professores em suas práticas pedagógicas.

A autora é favorável à criação de comunidades de práticas para professores e futuros professores de matemática, que permitam a realização de discussões que viabilizem a construção ou reconstrução de suas práticas pedagógicas, resultando em níveis mais satisfatórios em relação a cursos focados apenas em conhecimento tecnológico. Esta afirmação surgiu como resultado da pesquisa com um grupo de professores e futuros professores os quais denominou de comunidade de prática em um contexto que integra conhecimento pedagógico, conhecimento tecnológico e conhecimento do conteúdo.

Segundo a pesquisadora a formação de comunidades deverão ajudar os professores em suas elaborações de tarefas para aplicação nas aulas e na escolha de atividades que ultrapassem a tecnologia lápis e papel e adentre as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC), considerando as características, como a forma de linguagem e as representações que o objeto tecnológico digital possibilita ao ser implementado junto ao objeto matemático.

No entanto, na comunidade de prática houve alguns pontos desfavoráveis na sua aplicação presencial como, morosidade na inicialização e no acesso às atividades devido ao sistema implantado na sala de informática, problemas técnicos em computadores, obrigando alguns participantes a utilizarem seus *notebooks,* o que gerou um novo conflito devido às versões existentes do GeoGebra. Na aplicação à distância em forma de fórum para discussão entre os encontros presenciais, um ponto desfavorável ocorreu na participação de alguns integrantes que não postaram comentários. Ao trabalharem com as tecnologias digitais, estavam propensos a imprevistos. Porém, em uma comunidade de prática tais imprevistos podem contribuir como pauta para discussão e reflexão sobre a ação, de modo a servir como exemplo a ser evitado ou serem trabalhadas soluções que se antecipem aos imprevistos.

Richit e Miskulin (2012), já sinalizavam a necessidade de cursos de formação continuada para professores universitários ou comunidades de investigações, com a utilização do GeoGebra, para possibilitar a troca de experiências, como sugere Baldini (2014), principalmente na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Tal tema norteou a pesquisa de Richit e Miskulin (2012), que analisou as discussões das atividades e das práticas pedagógicas em um curso de extensão à distância, com a utilização do *software* GeoGebra, enfatizando a noção de conhecimento da prática proposta por Cochran-Smith e Lytle (1999), com o objetivo de apontar perspectivas para a formação continuada de professores. A coleta dos dados ocorreu por meio de atividades referentes aos estudos do conceito de integral, especificamente o conceito de Soma de Riemann.

A análise dos dados evidenciou que em um ambiente virtual, entre fóruns, *e-mail* e salas de bate-papos (*chat*) as reflexões sobre a importância da Tecnologia da Informação e Comunicação no desenvolvimento de atividades com Funções, Limites, Derivadas e Integrais, com o uso do *software* ganharam destaque. Os participantes ressaltaram que o curso propiciou momentos de formação no contexto das tecnologias digitais, ampliando e relembrando os conceitos matemáticos e acrescendo sugestões que proporcionaram mudanças em suas práticas pedagógicas no elo teoria e prática.

Richit e Miskulin (2012) sugerem que ao serem criadas as comunidades de investigações, uma das propostas para discussão seja a relação entre teoria e prática, propondo ações para a prática, na prática e sobre a prática. Neste contexto, as autoras destacam que nas discussões entre os participantes da sua pesquisa, esses informaram que a comunidade de investigação favoreceu mudanças significativas nas aulas de matemática com tarefas já discutidas e possivelmente experimentadas, diminuindo o índice de rejeição, erros durante a aplicação e prováveis imprevistos.

A necessidade de cursos de formação para professores, também foi identificada por Molon (2013) como uma abordagem possível e necessária para a integração da tecnologia ao ensino de cálculo aplicado aos estudos de funções quadráticas. O estudo destacou ainda que a concepção de conceitos introdutórios ao Cálculo deveria ser ministrada desde o primeiro ano do Ensino Médio de forma a ampliar os estudos sobre funções envolvendo problemas simples. E para que essa adequação ao currículo ocorresse, antes seriam necessários o estudo, a compreensão, a experimentação, a análise, a discussão e a reflexão do conteúdo matemático e a integração com os recursos tecnológicos digitais por parte da comunidade de educadores. Assim, os estudantes ao cursarem o Ensino Superior na disciplina de Cálculo de Diferencial e Integral teriam menos dificuldades e maior índice de aprovação, segundo Molon (2013).

Para a pesquisadora o ensino superficial das funções no currículo do Ensino Médio dificultou o entendimento dos estudantes ao chegarem ao nível superior, onde o tema é introduzido de maneira mais aprofundada e geralmente sem contextualização. A proposta de sua pesquisa é trazer atividades que contribuam com a extensão entre funções quadráticas e conceitos introdutórios ao cálculo, trabalhando áreas de regiões limitadas por curvas, a relação coeficiente angular e a reta tangente em um ensino baseado na experimentação, visualização e na aplicação dos conceitos estudados.

Semelhante à nossa pesquisa, o estudo foi aplicado com uma turma do Ensino Médio, porém, com a proposta de análise mais aproximada ao ensino do que à aprendizagem. No entanto, a pesquisadora também identificou a necessidade de contextualizar o conteúdo, utilizando conceitos da Física em suas atividades e constatou que os estudantes dão mais atenção quando o tema abordado envolve situações reais e vivenciadas em seus cotidianos e estão envolvidos com outras disciplinas.

Além da presença do *software* GeoGebra como recurso didático que contribui para o ensino e a aprendizagem nas aulas de Matemática, percebemos que este vem sendo utilizado em outras disciplinas como em Física, de acordo com os estudos apresentados por Santos (2013) que abordou a utilização do GeoGebra para o ensino do movimento oscilatório de pêndulos em cursos de graduação. Segundo a autora, o *software* possibilita a mudança de parâmetros dos cálculos oscilatórios do pêndulo no que diz respeito ao seu comprimento, massa e amplitude. Dessa forma, no estudo, o *software* propiciou um ambiente de simulação e análise detalhada para experimentação do movimento do pêndulo simples em uma perspectiva de aprendizagem contextualizada, encaminhando o educador a objetos de aprendizagem cujas metodologias são diferenciadas das já utilizadas tradicionalmente.

Além da contextualização citada por Santos (2013), outro aspecto que se assemelha ao nosso estudo é o tempo para aplicação da pesquisa. Segundo Molon (2013), houve pouco tempo para a aplicação das atividades em sua pesquisa, embora tenha utilizado vinte horas aulas. Contudo, foi possível verificar que, com as ferramentas tecnológicas digitais, a eficácia e o aproveitamento do tempo, foram mais significativos à medida que o aprendiz foi ganhando experiência com a utilização do *software.*

A experiência que a prática de atividades com o *software* produz, levou os participantes da pesquisa realizada por Grande (2013), a utilizarem a intuição e conjecturarem sobre as possíveis soluções em algumas atividades. Em sua pesquisa qualitativa, cujo objetivo era realizar um estudo didático e epistemológico sobre o Teorema Fundamental do Cálculo – TFC, Grande (2013) destacou que o uso do GeoGebra facilitou a visualização no contexto das atividades matemáticas e contribuiu favoravelmente para explorar os componentes intuitivos, algorítmicos e formais na construção do conhecimento em se tratando do Cálculo Diferencial e Integral.

A visualização e mobilidade com objetos matemáticos que o *software* disponibiliza, foi motivo de estudo para Maltempi e Faria (2012), que desenvolveram o artigo a partir dos dados da dissertação de Faria (2012), buscando compreender a ação do GeoGebra em atividades com Padrões Fractais. Tais ações foram desenvolvidas em um curso denominado "A utilização de Padrões Fractais no processo de generalização do conhecimento matemático por meio de um *software* de Geometria Dinâmica (SGD). " Para as análises usaram como base as categorias de investigação de padrões de Herbert e Brown (2000), que possuem três fases: Procura do Padrão, Reconhecimento do Padrão e Generalização.

Para responder às atividades, os participantes utilizaram a ferramenta apoiando-se no que visualizavam, de maneira que através da manipulação e análise dos padrões pudessem identificar aspectos comuns dos conteúdos trabalhados como, por exemplos, áreas de quadrados, comparação entre raios de circunferências e entre segmentos, criação de expressões gerais, frações, uso de tabelas, perímetros, potências, progressões aritméticas e geométricas, sequências e o Teorema de Pitágoras. Para cada atividade foi trabalhado um padrão especifico de fractais: Árvore Pitagórica, Triângulo de Sierpinski, Curva de Koch, Tetra Círculo, Lunda-Design e hexagonal tipo Dürer com o auxílio do *software* GeoGebra.

Deste modo, os pesquisadores observaram que houve motivação espontânea dos alunos não somente em manipular, mas em aprender a construir Funções e os Padrões Fractais com o uso do GeoGebra. Desta forma, consideraram que a ferramenta atuou no processo interativo de construção, manipulação e análise de Padrões Fractais contribuindo para o entendimento dos conteúdos matemáticos, fazendo com que as "conjecturas validadas" fizessem sentido aos participantes.

Neste âmbito dos Fractais, Padilha (2012), desenvolveu uma intervenção pedagógica com o intuito de investigar como a construção de Fractais com o uso do *software* GeoGebra pode suscitar a produção de conhecimentos geométricos e algébricos. Investigando livros didáticos, a pesquisadora concluiu que o tema Fractais é pouco explorado e sua construção é vinculada a recursos tecnológicos, devido ao detalhamento e repetições de sequências necessárias para a sua formação. Também constatou, analisando as respostas dos questionários, que os professores possuem pouco conhecimento sobre o tema, o que ocasiona a não aplicação em aula.

O destaque da sua pesquisa está para as atividades relacionando o campo visual com o operacional, iniciando com a visualização da imagem da Curva de Koch e do Triângulo de Sierpinski, onde os participantes da pesquisa observaram quais são os seus padrões, quais figuras estão presentes nas construções e seguindo um roteiro foram construindo uma réplica das imagens. Paralelamente às construções, a pesquisadora propôs a representação algébrica das sequências na forma escrita em um quadro com o campo para ilustração e outros para a representação da escrita fracionária chegando-se a um padrão estabelecido por uma expressão algébrica. Por fim, houve fractais construídos pelos alunos de forma independente dos já estudados, mas utilizando os recursos e as habilidades adquiridas durante o processo.

Verificamos nas pesquisas com Padrões Fractais de Maltempi e Faria (2012), Faria (2012) e Padilha (2012) que houve diferentes tipos de representações como as algébricas, geométricas e numéricas em trabalho simultâneo proporcionando indiretamente tratamentos e conversões, embora o referencial teórico de tais pesquisas não tenha sido Duval. Compreendemos que esta característica decorra em parte do próprio conteúdo que permite relações entre representações e pela forma que os pesquisadores integraram o conteúdo ao recurso tecnológico.

Conceição Junior (2011), em uma pesquisa de caráter investigativo descritivo, elaborou, aplicou e analisou cinco atividades com o objetivo de diagnosticar se o ensino do conteúdo de inequações por meio de uma abordagem funcional gráfica, com o auxílio do GeoGebra, favorece e possibilita as conversões dos registros de representação da língua natural para os registros de representação algébricos, utilizando a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval. A pesquisa foi aplicada em duas sessões, sendo a primeira com o uso do *software* e a segunda em uma abordagem tradicionalmente já utilizada pelos participantes com recurso lápis e papel.

Para o pesquisador, os resultados foram satisfatórios e favoráveis à utilização do GeoGebra para o ensino de inequações utilizando as conversões dos registros de representação gráficos para os registros da língua natural e os registros algébricos. Segundo o pesquisador os participantes tiveram dificuldades em interpretar, problemas e gráficos, e explicar os procedimentos utilizados para a resolução dos problemas, ou seja, não adquiriram o hábito de justificarem via texto suas resoluções.

Na perspectiva de investigar como os autores de livros didáticos têm trabalhado com os tratamentos e conversões no conteúdo de sistemas de inequações lineares com duas incógnitas, Silva (2014), utilizando como referencial teórico a Teoria de Duval, observou que em alguns livros, os autores só tratam das conversões dos registros da língua natural para os registros do sistema de escrita algébrico e numérico. Dias (2014), assim como Silva (2014), abordou o tema inequações, verificando com um grupo de professores, por meio de questões aplicadas sobre o tema, que estes, resolveram estas questões utilizando apenas os registros de representação algébricos.

Estes estudos convergem quando relatam que ainda há de se aprimorar a relação entre registros e conteúdos matemáticos em livros didáticos e na formação de professores, demostrando que as conversões entre os diferentes registros de representação semiótica, precisam ser trabalhadas desde as séries iniciais do Ensino Básico. Contribuindo com este aspecto Silva (2014), elaborou uma sequência de atividades que evidenciaram os tratamentos nos registros algébricos e geométricos e as conversões dos registros algébrico para o geométrico, aplicando-as com o auxílio do GeoGebra, que, segundo o autor, é um instrumento facilitador que integra simultaneamente alguns dos registros de representação semiótica.

Outro conteúdo que permite aplicação simultânea no GeoGebra, são as funções, e Lima (2013), utilizando-se de análises bibliográficas, investigou seu uso para o ensino em funções ímpar, par, injetiva, sobrejetiva, quadrática, polinomial, exponencial, logarítmica e trigonométrica. Tal investigação decorreu das dificuldades que os alunos apresentavam ao trabalhar com gráficos, no que diz respeito a sua interpretação e identificação de propriedades e por ser um tema relevante para o currículo do Ensino Básico.

Quanto a aplicabilidade da ferramenta e as vantagens e desvantagens de seu uso a partir do referencial teórico de Duval (2003) e das pesquisas que estão relacionadas ao uso de tecnologias na Educação Matemática realizadas por Kenski (2003), o pesquisador concluiu que o uso do GeoGebra une os recursos da Geometria Dinâmica aos sistemas de comando algébricos, com isso, viabiliza a manipulação e o dinamismo dos diferentes registros.

Em relação ao tempo gasto, assim como Lima (2013), consideramos uma vantagem da ferramenta, comparado à construção do gráfico em lápis e papel, pois essa proporciona dinamismo que permite construir, explorar, visualizar, experimentar situações e manipular dados, o que não ocorre em uma abordagem tradicional. Como desvantagem se apresenta o tempo gasto para elaboração das atividades.

Lima (2013) afirma que atualmente há um grande interesse pela utilização de novas tecnologias em sala de aula como recurso adicional para o ensino de conteúdos matemáticos, entre estas tecnologias digitais, estão o uso dos *softwares* de Geometria Dinâmica, principalmente o GeoGebra.

Neste mesmo eixo temático Siqueira (2013), buscou compreender as manifestações dos alunos ao realizarem atividades sobre funções usando os recursos computacionais. Para isso, trabalhou com quinze atividades elaboradas e aplicadas sobre Funções lineares, afins, quadráticas, exponenciais e logarítmicas. O estudo foi realizado em uma escola da rede pública do estado de São Paulo com duração de uma semana, totalizando cinco horas-aula semanais.

Por meio de uma abordagem qualitativa, desenvolveu a pesquisa-ação, com os dados coletados através dos registros dos alunos e das observações do diário de bordo. No desenvolver da pesquisa, foram notórias, segundo Siqueira (2013), as dificuldades que os alunos encontraram em compreender os conceitos de função e a relação com um exemplo real de forma tradicional, ou seja, usando como recurso lápis e papel.

Tal observação também é feita por Lima (2013), Ferreira (2013), Almeida (2014) e Moreira (2012). Porém, as atividades propostas com o uso do *software* GeoGebra ampliaram e aprofundaram a compreensão de alguns aspectos das funções. Por exemplo, a visualização gráfica, possibilitando a identificação do domínio e da imagem das funções.

Para Siqueira (2013), um ponto que precisa ser bem refletido está relacionado com as adequações, pois neste tipo de atividade, o professor precisa propor, avaliar e reorganizar sempre que for preciso, evitando grande quantidade de atividades sobre o mesmo tema ou atividades extensas. Já nas observações feitas pelos alunos, as contribuições do *software* GeoGebra para o ensino foram além de conhecimentos específicos, pois propiciaram novos estímulos ao ensino e aprendizagem da Matemática, embora alguns tenham achado cansativo e ficado com dúvidas em relação a algumas interpretações gráficas devido a um grande número de participantes para apenas um professor. Outro fato relevante abordado na pesquisa foi a autonomia proporcionada em sua utilização e a interação entre os membros do grupo.

Ferreira (2013) também comentou que houve maior interação entre alunos e entre alunos e professor em seu estudo que analisou as contribuições do GeoGebra para a aprendizagem de Funções Afim e Quadrática, já que o *software* é uma ferramenta que permite trabalhar com duas janelas simultâneas, o que propicia realizar conversões entre diferentes registros de representação semiótica.

A pesquisa foi realizada com estudantes do primeiro período do Curso de Licenciatura em Matemática da UNIMONTES – Universidade Estadual de Montes Claros – MG. Para a investigação foram elaboradas, implementadas e analisadas uma sequência de atividades com o uso da ferramenta GeoGebra, onde estavam inseridos todos os suportes para executar as construções propostas. Um fato relevante foi que, embora tivesse havido algumas dificuldades relacionadas ao conteúdo, os resultados dos alunos nas atividades foram satisfatórios, o que parece evidenciar a importância do uso do GeoGebra no ensino, sendo um aliado ao aprendizado.

Melo (2013) e Almeida (2014) realizaram pesquisas com o conteúdo de funções aplicado em turmas do Ensino Médio. Almeida (2014), em sua pesquisa, teve por objetivo experimentar métodos alternativos que pudessem contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem, como a utilização do GeoGebra em ambiente virtual *Moodle* para o estudo de funções elementares.

O ambiente virtual *Moodle*, foi utilizado para elaboração e aplicação das atividades, que foram realizadas de forma presencial e os comentários foram realizados a distância através dos fóruns.

As atividades da sequência experimentada pelos participantes da pesquisa de Almeida (2014) foram apoiadas por comandos escritos no *Moodle*, onde também se apresentavam suas notas nas atividades e comentários sobre os erros, tendo sido tratado inicialmente com eles um contrato pedagógico para não acessarem outros meios e não se distraírem com outras atividades para poderem completar suas atividades em aula. Além da ansiedade e apreensão que o pesquisador sofreu na expectativa dos alunos distraírem-se com as novidades e recursos encontrados no computador, houve problemas de compatibilidade e instalação do *software*, local inseguro (no sentido de outros alterarem as atividades) para armazenamento de atividades.

O autor relata que inicialmente teria se programado para realizar a pesquisa sobre Geometria Analítica e posteriormente verificou que o tema sobre frações seria mais relevante. No entanto, em sua sequência se nota que as três primeiras atividades estão voltadas de forma superficial à localização de pontos, distância entre pontos, ponto médio, retas concorrentes e paralelas, equação da reta e coeficientes angulares e lineares temas abordados nos estudos de Geometria Analítica (ponto e reta).

Assim como em nosso estudo, nas atividades que trataram de localização, o pesquisador utilizou mapas. Nas atividades seguintes foram exploradas as imagens gráficas das funções e seu domínio, pontos de máximo e mínimo e o sinal das funções polinomiais de primeiro grau e das funções de segundo grau.

Almeida (2014) não utilizou muitos cálculos e fórmulas, e verificou que esta estratégia fez com que os alunos que possuíam dificuldades nas aulas de Matemática e que eram apáticos tornarem-se mais participativos, destacando-se em relação aos outros, devido a facilidade de resolução, o trabalho em dupla e o diálogo mais aproximado com o professor.

Melo (2013) teve por objetivo identificar e analisar as relações entre as linguagens da Matemática e da Informática na aprendizagem da Função Quadrática. O pesquisador também constatou que houve interação entre os alunos, ao ter aplicado sua pesquisa por cerca de dez horas em um minicurso realizado no contra turno. Semelhante ao nosso estudo, na pesquisa do Moreira (2012) os participantes não eram alunos do pesquisador e outro fator que se assemelha está no tempo que foi relativamente curto para a aplicação da sequência.

Para Melo (2013), a linguagem matemática é um componente dificultador para o processo de aprendizagem. A linguagem utilizada pelo professor advém de sua formação que foi formalizada em outra geração e muitas vezes pela prática e repetição ao longo de sua profissão, o que leva o aluno a não compreensão da explicação. Então, se fazem necessárias outras linguagens que tratem de temas matemáticos e que possam aproximar a relação linguagem e conhecimento matemático.

A linguagem tecnológica por estar mais próxima da atual geração, segundo Melo (2013), pode trazer mais significados e resultados, se associada aos estudos na área do conhecimento matemático. No entanto, alerta o pesquisador que esta relação requer estudos e formação por parte dos educadores e habilidades que se adquirem com a utilização por parte dos educandos. Estando os alunos habituados com a utilização da ferramenta, as aplicações das atividades ficarão mais rápidas e o índice de dúvidas decrescerá à medida que os estudantes vão adquirindo autonomia. Porém, assim como o excessivo uso de simbologias e termos específicos da linguagem matemática causam desinteresse, a aplicação inadequada das tecnologias informáticas, no sentido apenas de inovação tecnológica, também provoca a mesma reação.

Moreira (2012), utilizando a estratégia do ensino à distância apoiado na metodologia da Engenharia Didática elaborada por Artigue, realizou uma pesquisa-ação aplicada aos alunos do primeiro ano do Ensino Médio, com o objetivo de analisar se uma sequência didática para o ensino de funções trigonométricas, utilizando o *software* GeoGebra, favoreceria estratégias didático – pedagógicas de ensino. A coleta de dados desta pesquisa se aproxima da realizada por Aguiar (2011) com exceção da utilização da plataforma TelEduc, de onde o pesquisador obteve todos os dados apresentados inclusive os resultados das atividades do Pré e Pós - Teste e os relatos dos participantes.

O autor identificou quatro dificuldades que os alunos tiveram ao trabalhar com os exercícios da sequência, que foram: “dificuldade no uso de diversas ferramentas do *software*; conhecimentos geométricos insuficientes; domínio insuficiente de técnicas algébricas;

dificuldade em mesclar geometria e álgebra na formação da trigonometria” (AGUIAR, 2011, p.79).

Em geral todos tiveram dificuldades, mas aprovaram e gostaram de trabalhar com o *software*. Porém, lendo as mensagens, verificamos que alguns sentiram a necessidade da presença real do professor, uma vez que a sequência foi trabalhada virtualmente e destacaram que a facilidade na construção e a diminuição da necessidade de realizar cálculos manualmente dificultou a compreensão dos procedimentos para chegarem a soluções dos problemas em situações que não pudessem utilizar o GeoGebra. Quanto ao *software* o autor relatou que seus pontos desfavoráveis estavam na necessidade de instalação do Java e na versão em português apresentar ferramentas na língua inglesa, fato que dificultou o uso.

Da mesma forma que Moreira (2012), Kitaoka (2013) também realizou uma pesquisa sobre os pontos notáveis de um triângulo, em particular o circuncentro, utilizando como referencial os estudos de Artigue (1996), observando as quatro principais fases da Engenharia Didática conhecidas como: *análise prévia, análise a priori, experimentação e análise a posteriori.*

A observação e o conhecimento adquirido através do relacionamento com a turma fizeram Kitaoka (2013) verificar que a pesquisa trouxe mudanças no comportamento da turma que antes era mais agitada, tornando-se mais participativos e atentos com a escrita, se preocupando em terminar as atividades, porque, eram recolhidas ao final da aula. A autora destaca que houve interrupções na sequência, devido ao calendário escolar, motivo que dispersou a atenção da maioria da turma, diminuindo o índice de acertos e a qualidade das respostas em uma das atividades. Relata também, que por questões burocráticas os professores deixam de utilizar em suas aulas as tecnologias e nos livros didáticos ainda há a prática de deixarem os conteúdos geométricos para os capítulos finais.

Nascimento (2012), em sua pesquisa, definiu como objetivo a averiguação da eficiência do *software* GeoGebra no ensino da matemática em um estudo de caso quase experimental mediante uma abordagem quanti-qualitativa. De acordo com o pesquisador, as utilizações de tais recursos não devem substituir a lousa e o giz em um ensino tradicional tecnológico, e sim, ajudar o aprendiz a ter uma postura investigativa para que sejam construtores de seus conhecimentos.

No contexto da educação atual, analisando os índices de avaliações externos principalmente na disciplina de Matemática, há necessidade urgente de serem aplicadas novas metodologias com novas estratégias e novos recursos. Novos no sentido de diferentes dos já utilizados que em geral se limitam a aulas explicativas e a resolução de exercícios.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais há menções sobre a utilização de recursos tecnológicos para melhorar a qualidade do ensino. Nesse aspecto, Nascimento (2012) propõe mudanças para o ensino, mas acrescenta que não bastam apenas termos professores com conhecimento pedagógico e tecnológico capacitados para integrarem ferramentas tecnológicas digitais ao ensino de matemática. São necessárias mudanças na estrutura escolar a começar pela presença de profissional capacitado para manutenção das máquinas e materiais pedagógicos que já estejam vinculados ao ambiente digital.

O GeoGebra se destaca como um material pedagógico possível de ser vinculado a conteúdos matemáticos, proporcionando interação, manipulação, criação e armazenamento; dispensando as tecnologias artesanais como régua, transferidor e compasso que tornam as construções geométricas mais morosas e menos precisas. Porém, por não apresentar atividades já elaboradas requer que o professor disponha de tempo para construir as atividades de forma a desenvolver ou aprimorar habilidades educacionais.

Procópio (2011) já havia atentado para esta necessidade e desenvolveu atividades elaboradas a partir do Currículo do Estado de São Paulo, apresentando os seus respectivos planos de aula com a aplicação do GeoGebra em situações de aprendizagem do Caderno do Professor de Matemática. Estas atividades se encontram em sua pesquisa realizada nos moldes de uma revisão bibliográfica e documental com o objetivo de analisar as Situações de Aprendizagem de Geometria e apresentar uma proposta para articular as Situações de Aprendizagem encontradas no Caderno do Professor de Matemática do 4º bimestre da primeira série do Ensino Médio, publicado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (2009).

Para Procópio (2011), as TICs têm alterado o cenário cultural e desta forma a escola deve preparar o aluno para uma sociedade onde as informações são transmitidas por vias quase que instantâneas. O material pedagógico do estado apresenta, sempre que possível, fontes de enriquecimento bibliográfico apontando para o uso de recursos tecnológicos para as aulas de matemática. Entretanto, no conteúdo de Geometria Plana, segundo constatou o autor, não há indicações para o uso de tecnologias. A pesquisa identificou que ainda há possibilidade de articular as Situações de Aprendizagem de geometria com o uso do GeoGebra de forma satisfatória, e que tal articulação contribuiu com suas atividades.

Aguiar (2011) trabalhou com o Currículo do Estado de São Paulo, identificando o conteúdo e a série a serem aplicados em sua sequência de atividades, assim como fizemos em nosso estudo. O pesquisador analisou os Cadernos provenientes do Currículo e suas análises foram ao encontro das observações de Procópio (2011) ao mencionarem que professores e alunos em seus Cadernos, em consonância com o Currículo do Estado, recebem sugestões sobre *softwares* e *sites* que podem enriquecer o processo ensino e aprendizagem.

Com o objetivo de enriquecer a aprendizagem, Aguiar (2011), na plataforma de trabalho do Sistema Moodle do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, desenvolveu as atividades de seus módulos com a utilização do GeoGebra, elaborando-as e aplicando-as segundo a filosofia instrucionista e construcionista de Seymour Papert (1994). Os participantes utilizaram o GeoGebra como visualizador dos movimentos realizados com os objetos matemáticos, referentes ao conteúdo de trigonometria, seguidos de textos explicativos sobre o conteúdo e na maior parte das atividades utilizou questões com alternativas que poderiam ser refeitas, aplicando-as de forma presencial e a distância. Assim como Moreira (2012), Aguiar (2011) também relatou que nas aulas a distância os alunos sentiram a necessidade da presença do professor, mas não se inibiram em realizá-las.

Em vários aspectos, o nosso estudo assemelhasse ao estudo realizado por Aguiar (2011), na utilização do Currículo, nas abordagens utilizadas, e no espaço físico da sala de informática, onde houve a necessidade de trabalharmos em duplas por falta de computadores. O autor enfatiza que o ambiente poderia ser melhor equipado, em se tratando de uma escola com mais de mil alunos.

Cassol (2012), ao analisar as dissertações e tese defendidas no período de cinco anos a começar de 2008, relata que também não obteve êxito ao procurar teses que envolvessem a trigonometria e os recursos tecnológicos. A autora analisou as vantagens e desvantagens da utilização dos recursos tecnológicos no ensino e na aprendizagem de Trigonometria. A investigação concluiu que o *software* GeoGebra está entre os mais utilizados, contribuindo favoravelmente para manipulação e visualização e ainda possibilita diferentes registros de uma mesma representação de forma simultânea. Quanto aos aspectos desfavoráveis, relatou que houve dificuldade de instalação do *software* e observou que o GeoGebra contribuiu para reforçar algumas ideias matemáticas tratadas de forma errônea pelos participantes.

As contribuições do GeoGebra, também foram objeto de análise por Menegotto e Lara (2011) nas construções dos conceitos relacionados aos paralelogramos. As autoras justificaram que o ensino de Geometria tem lugar de destaque no âmbito da Educação Matemática. Porém, ainda são apresentados nos finais dos livros didáticos, pouco abordados pelos professores e quando ministrados os fazem de modo estático, fato corroborado também pelos estudos de Kitaoka (2013).

Os participantes foram 18 alunos do 7° ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual localizada na região metropolitana de Porto Alegre – RS. Nesta abordagem o grupo de alunos foi dividido em dois, o grupo experimental (GE) com sete alunos, e o grupo controle (GC) com os demais. Os alunos do grupo GE tiveram suas aulas ministradas em laboratório de informática com o apoio da ferramenta GeoGebra. Para os participantes do grupo GC as aulas foram tradicionais com apoio do livro didático de Andrini e Vasconcellos.

Os dados foram obtidos por meio de atividades utilizando a técnica comparativa entre os grupos e com base nos resultados sugeriram mudanças nas ações metodológicas dos docentes em relação ao ensino de Geometria na Educação Básica, pois os resultados demonstraram que os usos de figuras geométricas, de forma estática, induziram os participantes a identificar apenas figuras geométricas prototípicas. Entretanto, com o uso de um *software* de Geometria Dinâmica, ficou evidente a contribuição para a construção de conceitos relacionados a esses quadriláteros e a verificação de suas propriedades. Destacaram que os resultados poderiam ser mais satisfatórios se o tempo com as práticas pedagógicas fosse maior.

Outra aplicação para os recursos tecnológicos foi a de utilizá-los como ferramenta para aprendizagem na construção de avaliações formativas. Perez (2015), em um estudo sobre avaliações com o uso de tecnologias, aplicou uma sequência de atividades sobre ângulos e polígonos, utilizando jogos digitais, *software* de Geometria e *WebQuest* para dois grupos de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental com o objetivo de investigar as relações entre avaliações formativas e o uso das tecnologias.

Com este estudo o pesquisador evidenciou que houve maior estímulo por parte dos alunos em questionar e dialogar, descentralizando a figura do professor durante a atividade que aplicou com o uso do software GeoGebra para que seus alunos pudessem manipular e compreender as propriedades dos quadriláteros notáveis: paralelogramo, trapézio, retângulo, losango e quadrado. Destaca que houve mudanças de concepção sobre a aprendizagem em matemática por parte dos alunos; melhor *feedback* para o professor identificar avanços e dificuldades e retomar os objetivos de ensino e mudanças de visão sobre avaliação pelos alunos. Este estudo corrobora com o nosso em alguns fatores como a execução em duplas, de abordagem quanti-qualitativa e pesquisa descritiva.

No contexto das figuras geométricas, Lopes (2013) investigou como os alunos do 6º. ano do Ensino Fundamental desenvolveram os conceitos de área e perímetro e que dificuldades experienciaram, tendo por base uma unidade de ensino, com uma abordagem de cunho exploratório e apoio de um ambiente de geometria dinâmica – o GeoGebra. Para a coleta de dados o pesquisador se utilizou de observação participante, registros em diário de bordo, entrevistas e análise documental. A pesquisa foi realizada em 28 aulas de 45 minutos cada, com 27 alunos do 5º ano de uma escola básica do ensino público em Portugal (correspondente ao 6º ano no Brasil) e com idades entre 10 e 14 anos.

O estudo foi dividido em 4 etapas: Pré-Teste (diagnóstico e entrevista para analisar conhecimentos prévios), realização de experiência de ensino, teste final de unidade para avaliar a aprendizagem e Pós-Teste com questões do Pré-Teste e do teste final.

Apesar de a pesquisadora sugerir a necessidade de melhor conhecimento de usabilidade dos computadores por parte dos alunos, os resultados indicaram melhoria na compreensão dos conceitos de Perímetro e Área com o uso do GeoGebra. Além de conseguirem distinguir perímetro de área, os alunos reconheceram a equivalência de figuras planas, destacando o *software* como aliado da aprendizagem no que diz respeito a compreensão de conceitos, o desempenho na resolução de problemas e o raciocínio lógico dedutivo dos educandos. Assim como Baldini e Cyrino (2012), a autora evidência como tarefa do professor, agir neste processo de integração, promovendo mudanças didático – pedagógicas. Nesse sentido, tornam-se necessários espaços onde os alunos possam lidar com tais recursos e assim, refletir e discutir sobre sua utilização.

A proposta destes autores é criar ambientes que favoreçam as ações reflexivas contribuindo para a utilização das tecnologias digitais na aprendizagem, no ensino e no desenvolvimento do currículo. Neste âmbito, Almeida e Silva (2011), em seu artigo, tem como objetivo central integrar as tecnologias ao currículo, desenhando o termo *Web* currículo para cunhar esse conceito em construção.

No cenário de discussões e debates, no que diz respeito a importância de integrar tecnologia ao ensino e ao currículo Almeida e Silva (2011), observaram por meio de relatos de experiências que o uso das tecnologias passou a fazer parte do espaço escolar e os índices apontam para maiores aproximações em relação a tríade Tecnologia, Currículo e Formação de Professores.

Podemos dizer que todas as pesquisas aqui revisadas apontam, explícita ou implicitamente, para a necessidade de cursos de formação de professores que integrem tecnologias nas aulas de matemática, sejam elas digitais ou não, demonstrando de maneira relevante que o enfrentamento das complexidades cotidianas, referentes a sua prática pedagógica no contexto das tecnologias, devem ser refletidas e compartilhadas com seus pares. Santos (2011) acrescenta que para a introdução de tecnologias no currículo em sua efetiva prática não basta apenas a relação professor e aluno, e sim o envolvimento da comunidade escolar (gestores, funcionários, pais e responsáveis).

O estudo de Santos (2011) foi o que mais se aproximou do nosso em relação ao conteúdo em questão. O desenvolvimento de sua pesquisa ocorreu com uma turma do 1º ano de um curso de licenciatura em Matemática na forma presencial no período de sessenta horas/aulas, sendo cinquenta de observação e dez para aplicação das atividades. Como a maioria das dissertações analisadas, essa também utilizou análise qualitativa com métodos descritivos em um delineamento de pesquisa de campo. Semelhante ao nosso estudo, o pesquisador não era o professor da turma, o conteúdo escolhido foi Geometria Analítica, as atividades foram de abordagem construcionista e aplicadas em grupos.

Santos (2011), com objetivo de discutir o Ensino de Geometria Analítica Plana na perspectiva da Educação Matemática no Ensino Médio e Superior, elaborou e aplicou aos seus participantes cinco atividades que compreenderam os conteúdos de retas, circunferências, elipses, hipérboles e parábolas, partindo do pressuposto de que os alunos já haviam estudado este assunto no ensino médio e nas suas cinquenta aulas teóricas ministradas no ensino superior.

No presente estudo, não podemos tratar o conteúdo de forma mais ampla como na pesquisa de Santos (2011), porque as turmas do 3º ano do Ensino Médio ao iniciarmos o estudo, ainda não tinham conhecimentos sobre Geometria Analítica e tiveram a oportunidade de aprenderem sobre esse tema nas atividades que abordaram os conteúdos de ponto e reta.

O pesquisador constatou que na aplicação das atividades de cunho exploratório a utilização do GeoGebra favoreceu a construção do conhecimento matemático por permitir visualizações para verificação de conceitos e análises de propriedades e conexões entre a geometria e a álgebra. Em relação às ações comportamentais, houve a percepção de autonomia e reprodução da estratégia ofertada para serem usadas futuramente, uma vez que os alunos da turma serão futuros professores.

Em suma, segundo os pesquisadores, temos o GeoGebra auxiliando na mobilidade e rapidez na construção de estruturas geométricas, na integração entre a janela de visualização algébrica e geométrica, na autonomia da manipulação dos comandos, na verificação e observação de propriedades matemáticas.

Evidenciamos que, mesmo de forma prematura, as aplicações tecnológicas em cursos de licenciatura de matemática estão sendo incorporadas ao currículo. Lima (2013), por exemplo, alerta que para que tais tecnologias sejam inseridas como recurso pedagógico é necessária maior abordagem de tais ferramentas em cursos de formação docente. No entanto, a maioria dos professores das instituições de ensino são frutos de uma educação tradicional. Mesmo que atualmente os caminhos socioculturais nos remetam a um processo de ensino e aprendizagem voltado às tecnologias digitais, a falta de formação docente adequada, o espaço físico inadequado e a estrutura educacional, contribuem para que os recursos tecnológicos digitais não sejam bem aplicados nas aulas de Matemática.

Como ponto em comum, todos os estudos convergem para a busca por melhorias na qualidade de ensino em razão de uma aprendizagem diferenciada das utilizadas tradicionalmente pelos educadores matemáticos em sala de aula. Na busca por este diferencial em meio as pesquisas analisadas, extraímos alguns aspectos que vinculamos ao nosso estudo, os quais passaremos a descrevê-los além de consultarmos também, as contribuições de Kenski, Valente, Baldini e Miskulin que abordam as tendências pedagógicas apontando para inserção de Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) e Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC's) ao ensino de Matemática.

Em relação ao delineamento das pesquisas revisadas, no que se assemelha ao nosso estudo, verificamos que houve apenas uma pesquisa de campo de caráter descritivo com variáveis quanti-qualitativas. Embora as de caráter qualitativo tenham se apresentado com maior frequência, os objetivos são identificados com sentido mais interpretativos como: investigar, conhecer, compreender, discutir, analisar, integrar e perceber.

Quanto aos instrumentos de coleta de dados, os estudos analisados nos trouxeram uma série de indicativos como, análises documentais, entrevistas, questionários, registro de atividades dos participantes e gravações em áudio e vídeo. Entre estes escolhemos o questionário e o registro das atividades dos participantes.

Desta forma, a revisão realizada nos serviu como indicativo para nortear o processo de construção do presente estudo, possibilitando-nos definir os instrumentos de coleta de dados, a metodologia, e o referencial teórico que abordaremos no próximo capítulo que trata da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico é o fundamento estrutural da pesquisa, constituindo um dos principais elementos para interpretação das análises e conclusões, proporcionando à pesquisa embasamento teórico de modo a verificar as hipóteses, respondendo as suas questões ou o problema da pesquisa. Os autores Laville e Dionne (2008, p.93) expressam o valor da teoria na seguinte afirmação:

> O valor de uma teoria é, primeiramente, explicativo: é uma generalização de explicações concordantes tiradas dos fatos que foram estudados para sua construção. Mas, para o pesquisador, seu valor é sobretudo analítico, pois ela lhe servirá para o estudo e a análise de outros fatos de mesma ordem.

Os autores asseveram que a teoria tem finalidade elucidativa e criteriosa, o que ficou evidente nas pesquisas em análise que compõem a nossa revisão da literatura. Embora, difiram entre si, em relação as suas hipóteses, e diferenciem-se quanto ao seu referencial teórico. Outro fator preponderante foi a presença da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, cuja ênfase está nos registros de representação possíveis de serem trabalhados junto aos conteúdos matemáticos, o que nos motivou a investir nos estudos de tal teoria.

A revisão da literatura também nos apresentou estudos relacionados a utilização das Novas Tecnologias da Informação e Comunicação - NTIC no ambiente escolar, em particular nas aulas de Matemática, que nos proporcionaram além da escolha do referencial teórico uma visão mais ampla do recurso tecnológico para nossa pesquisa, e neste capítulo, destacaremos como o software GeoGebra, aplicado como instrumento tecnológico para aprendizagem nas aulas de matemática através das abordagens Instrucionista e Construcionista, se relaciona com a Teoria de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Fundamentada em Duval (2013), abordaremos as contribuições que o *software* GeoGebra proporciona no sentido de diversificar as possibilidades de utilização de registros de representações para a aprendizagem do objeto matemático Geometria Analítica através de uma sequência de atividades.

3.1 Informática na Educação

A tecnologia na educação tem a finalidade de aprimorar a técnica, visto que a técnica se refere primariamente a um modo de ação. Em uma aula expositiva, por exemplo, ocorre a utilização da técnica de exposição oral sem necessariamente a presença de elementos materiais, nem mesmo, um quadro de giz ou projetores multimídia.

Segundo Cysneiros (2000), para aperfeiçoar as técnicas utilizadas em sala de aula podemos nos remeter a instrumentos tecnológicos almejando relações entre o educador e a tecnologia ou entre o aprendiz e a tecnologia com a finalidade de ensinar ou aprender.

O emprego da ferramenta tecnológica para fins educativos, administrados com objetivos específicos pertencentes a um conteúdo disciplinar é quem vai atribuir a ela, status de recurso didático. É a relação do instrumento tecnológico com a prática do ensinar ou a ação do aprender nas ações na escola ou em qualquer outro ambiente, que dá ao objeto a identidade de tecnologia educacional. Possuirmos, no ambiente escolar, instrumentos tecnológicos não é sinônimo de qualidade de ensino, nem de sucesso na aprendizagem, pois os mesmos podem ser utilizados para outros fins quando não fazem parte do conjunto de ações educativas.

Nas ações educativas em nossas escolas contamos com o uso de instrumentos tecnológicos como: lousa, giz, livros, revistas, jornais, televisão, máquinas fotográficas, calculadoras, computadores, celulares e tantos outros objetos que foram sendo criados ou aperfeiçoados ao longo do processo histórico das civilizações. Mas, com o avanço das tecnologias digitais que vem ocorrendo em processo acelerado em níveis sociais, culturais e econômicos o computador vem ganhando destaque no meio social e educacional, galgando espaços também, nos setores de serviços, industriais, e das telecomunicações.

Em nosso estudo o instrumento tecnológico, computador, também ganha destaque ao utilizarmos como recurso didático, por ser uma ferramenta multifuncional com a sua parte física, *hardware*, agregando o sistema lógico que são programas e *softwares*, dando-nos a possibilidade para instalação livre e gratuita do *software* GeoGebra, a partir de *download* feitos por meio da internet ou de dispositivos para armazenamento de dados como CDs, *pen drives* e cartão de memória.

Segundo Valente (1993), a informática educativa exprime a integração do computador no processo de aprendizagem dos conteúdos curriculares em todos os níveis e áreas dos saberes. Na educação, em específico na área da Matemática e suas Tecnologias, o GeoGebra e consequentemente, o computador, vem sendo objeto de estudos em pesquisas acadêmicas relacionadas principalmente aos conteúdos de Funções, Geometria Plana e Cálculo Diferencial e Integral.

Para Almeida, (2000, p. 19), a "Informática na Educação é um novo domínio da ciência que em seu próprio conceito traz embutido a ideia de pluralidade, de inter-relação e de intercâmbio crítico entre saberes e ideias desenvolvidas por diferentes pensadores [...]".

Nesse contexto, para algumas escolas e muitos professores, a utilização das tecnologias no processo educacional tem causado grande desconforto, visto que a formação acadêmica de muitos dos professores, ocorreu nas décadas que estavam se desenvolvendo os microcomputadores. Na década de 1970 surge a primeira fase dos microcomputadores, os *personal computer* - PC. Já nas décadas de 80 e 90 com o advento da internet houve a comercialização do computador em larga escala e atualmente o antigo PC dá espaço a instrumentos tecnológicos que agregam mobilidade, como *notebooks*, *tablets*, celulares comuns e *smartphones* entre outros. Em contrapartida nossos alunos já nascem em uma geração tecnológica e crescem usando meios e linguagens digitais.

A geração de estudantes que frequenta atualmente a educação básica na rede estadual de ensino, em específico os alunos do terceiro ano do Ensino Médio, nasceu no final da década de 90, em sua maioria. Segundo Indalécio (2016), são integrantes da geração Y, propensos a estarem conectados com o mundo virtual diuturnamente, dialogando e compartilhando tudo que desejam a um clique das informações presentes na *internet* e utilizando-se desta conexão mundial, entre recursos tecnológicos digitas, de modo a favorecer as relações interpessoais por meio de aplicativos e redes sociais.

Para Indalécio (2016), a geração Y é aquela que principia os nativos digitais que são os indivíduos nascidos após 1983. Pescador (2010) identifica estes estudantes como nativos digitais por terem nascidos em meio a uma década que já se utilizava recursos tecnológicos digitais e por estarem frequentemente com seus dispositivos móveis, conectados à rede mundial de computadores – internet, se utilizando dos meios digitais para estudo, trabalho e principalmente entretenimento. A autora acrescenta:

> Na verdade, é possível observar que esses jovens são do tipo multitarefa, sendo-lhes típico e habitual fazer duas ou três coisas ao mesmo tempo, como, por exemplo, fazer o *download* de arquivos de suas músicas favoritas, episódios de séries de TV ou filmes, enquanto fazem as tarefas escolares E se comunicam via ferramentas de mensagem de texto com seus amigos, reais e virtuais. (PESCADOR, 2010, s.p.)

Concomitantemente à geração de nativos digitais, na sala de aula, estamos nós educadores, categorizados por Indalécio (2016) como imigrantes digitais pelo fato de termos nascido em anos anteriores a 1983, décadas que antecedem a utilização de recursos tecnológicos digitais, e também, por estarmos aprendendo, em fase adulta, a utilizar tais meios em nossa rotina diária. Para Pescador (2010, s.p.), "imigrantes digitais são aquelas pessoas que aprenderam a usar as tecnologias digitais ao longo de sua vida adulta [...]".

Segundo o Portal do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), em 2013 totalizávamos no Brasil cerca de dois milhões, cento e quarenta e oito mil e vinte três professores atuantes no Ensino Básico, com faixa etária variando conforme podemos observar na Tabela 1.

Tabela 1 – Faixa Etária dos Professores no Brasil e em São Paulo – Ano 2013

Brasil			São Paulo	
Faixa Etária	Educação Básica	Ensino Médio	Educação Básica	Ensino Médio
Até 24 anos	105 603	17 247	12 818	3 042
De 25 a 32 anos	486 549	115 449	94 183	21 696
De 33 a 40 anos	606 649	136 037	116 406	27 487
De 41 a 50 anos	632 376	151 466	138 751	38 437
Mais de 50 anos	316 846	89 204	81 420	25 584

Fonte: MEC/ Inep/ Deed

Na coluna 1 da Tabela 1, correspondente à faixa etária, podemos constatar que a maioria dos professores estão em uma faixa de idade entre vinte e cinco e cinquenta anos em um quadro geral em relação a Educação Básica brasileira, como também em dados referentes ao Estado de São Paulo. O mesmo acontece quando dissociamos o Ensino Médio da Educação Básica e ainda surge um dado que remete a professores com mais idade no Estado de São Paulo lecionando para turmas do Ensino Médio.

Em suma, tínhamos em 2013, no estado de São Paulo trabalhando com turmas do Ensino Médio, noventa e um mil quinhentos e oito professores com idade acima de 33 anos que nas suas fases de infância e adolescência não tiveram contato com objetos tecnológicos digitais, porque os mesmos ainda não existiam ou estavam em fase de aceitação no mercado consumidor e por serem objetos de custo elevado não estavam presentes na maioria dos lares brasileiros.

Os adolescentes da geração Y tem propensão a estarem conectados a todo tempo, vinte e quatro horas por dia, sete dias por semana. Para esta geração, os principais mediadores das conexões entre pessoas são os recursos como computadores, *tablets* e, principalmente, os *smartphones*. Estão a apenas um clique das respostas que procuram, e a Internet é sua principal aliada ao acesso e compartilhamento de tudo que desejam. O conjunto de práticas comuns que unem os jovens Y, como a linguagem, o tempo conectado, a forma com que se expressam, como usufruem e utilizam as informações, contribuem para a consolidação da grande nuance de seu comportamento, a conduta multitarefa.

Na educação atual podemos perceber com muita nitidez as diferenças entre as gerações dos nativos digitais e dos imigrantes digitais. Nós imigrantes, fomos educados em um ambiente escolar baseado em uma aprendizagem de transmissão de conhecimentos e com relação as tecnologias de comunicação nós, alunos, não passávamos de meros expectadores. Em contrapartida, os nossos atuais alunos não se enquadram neste ambiente de passividade. Eles buscam por interação, e dão preferência a objetos tecnológicos digitais que permitam ação, no sentido de atuarem na dinâmica do produto final realizado pelo objeto.

Segundo Pescador (2010, s.p.):

> [...] de um lado, temos a geração dos imigrantes digitais, vindos de uma cultura de passividade em seu meio escolar, em que a aprendizagem se dava pela transmissão de conhecimentos do professor ao aluno e de mero expectador/ouvinte em relação às tecnologias de comunicação de sua época (rádio e televisão). Do outro lado, temos os nativos digitais que querem ser usuários e não simplesmente ouvintes ou observadores [...].

Em virtude da evolução tecnológica, a sociedade ao longo do processo histórico está se transformando. O conhecimento ultrapassou os prédios escolares por meio das tecnologias de comunicação e informação - TICs, o que evidencia com mais clareza a necessidade de redefinição do papel da escola. A transformação da escola entra em sala de aula através da reestruturação do papel do professor na era digital. Nesse cenário, modificam-se “os eixos do ensinar para optar pelos caminhos do aprender”, onde professores e alunos estão engajados no processo de aprender a aprender. (BEHRENS, 2013, p.79).

Um dos papeis da escola na era digital é o de implementar o instrumento computador como uma ferramenta não apenas capaz de obter informações e conhecimentos ou promover o acesso a comunicação, mas de favorecer a produção de novos conhecimentos. A ideia de sermos apenas usuários dos meios tecnológicos deve ser reavaliada pela escola.

Mais do que dominar o conhecimento operacional, o profissional educador deve criar condições de aprendizagem. Segundo Valente (1993, p.6), “o professor precisa deixar de ser o repassador de conhecimento [...] e passar a ser criador de ambientes de aprendizagem e o facilitador do processo de desenvolvimento intelectual do aluno”. Nesse contexto, cabe ao professor buscar conhecimentos que possam ser utilizados como recursos auxiliadores, que favoreçam positivamente as suas aulas, tornando-o mediador no processo ensino aprendizagem.

O conhecimento aqui mencionado “não se reduz a entidades fundamentais dissociadas, como blocos justapostos de conhecimento; sua compreensão reside nas interconexões estabelecidas, que têm como base a consistência e usam elementos de análise coerentemente articulados entre si” (ALMEIDA, 2000, p.21-22). A barreira do método tradicional pedagógico se rompe e paralelamente se abre espaço para o questionamento, o diálogo, a flexibilidade, a interatividade e a reflexão. Contudo, isso não significa negar o método tradicional, mas encontrar alternativas que o redirecione.

No processo de desenvolvimento dessa nova forma de pensar a educação, há duas grandes linhas para o uso da Informática na Educação: o próprio ensino da informática incluindo o desenvolvimento de programas computacionais em disciplinas de cursos, como por exemplo, na área de Ciências da Computação, e o ensino através da informática, em que o educador inclui em seus planos de aula o recurso tecnológico, computador, como estratégia para implementar sua metodologia objetivando a compreensão do conteúdo.

O ensino pela informática abrange as diferentes áreas do conhecimento por intermédio da presença do computador que segundo Almeida (2000, p.23), "são empregados em diferentes níveis e modalidades, assumindo funções definidas segundo a tendência educacional adotada". Para Gomes (2002, p.123), o emprego do computador no ambiente escolar é caracterizado por duas formas de aprendizagem:

> 1. Para tornar mais fácies as rotinas de ensinar e aprender; nesse caso o computador estaria sendo empregado como máquina de ensinar e repetindo os mesmos esquemas do ensino tradicional;
>
> 2. Como organizador de ambientes de aprendizagem em que os alunos são encorajados a resolver situações-problema e o professor é capaz de identificar e respeitar o estilo de pensamento de cada um, ao mesmo tempo em que os convida a refletirem sobre o seu pensar (pensamento reflexivo) ; neste caso o ensino estará sendo inovador.

Temos o ensino da informática e pela informática com suas origens no método tradicional. Neste âmbito, temos uma perspectiva instrucionista, dando ao computador a característica de máquina de ensinar que, para Gomes (2002, p.126), proporciona à metodologia tradicional uma "proposta modernizadora".

Segundo Almeida (2000, p.27), os *softwares* do tipo CAI (Instrução Auxiliada por Computador) por serem instrucionista possuem o conceito de conhecimento de um "produto acabado, que apresenta o conteúdo a ser ensinado conforme a estrutura do pensamento de quem o elaborou, com o objetivo de instruir o aluno sobre determinado assunto" em forma de "tutorial, exercício-e-prática, jogos educacionais ou mesmo algumas simulações". São *softwares* que conduzem a atividades mecânicas e repetitivas.

As categorias dos *softwares* educacionais, que estariam incluídas em uma abordagem instrucionista, segundo Valente (1993), são:

1. Programas tutoriais. Possuem a mesma característica do livro didático, trazendo informações sobre um determinado tema, se diferenciando através das imagens animadas, descaracterizações de padrões de formatações dos textos e incorporações de sons e

movimentos, além de possibilitar ao usuário a escolha de um assunto que se apresenta no tema sem necessariamente estudar todo o conteúdo. Por exemplo, em um tutorial sobre Geometria Analítica, poderíamos estudar a inclinação da reta sem antes termos visto o ponto médio. Está ação ocorre através de ícones específicos que são acionados com um simples clique ou utilizando a tecla *Enter* do computador.

2. Exercício-e-prática. São *softwares* que podem ser apresentados na forma de jogos, sendo utilizados tipicamente para revisão de conteúdo, que apresentam perguntas objetivas com respostas curtas. Estas perguntas geralmente possuem alternativas, e ao final, o usuário passa a saber pelo próprio programa quais respostas eram as corretas. Quando este tipo de *software* seleciona as questões identificando as respostas dos alunos, proporciona ao professor, dados para análise do grau de compreensão da turma em relação ao conteúdo, fato que é observado como uma vantagem, pois, com estes dados o professor poderá retomar o conteúdo a partir do ponto não compreendido pela maioria da turma.

3. Jogos educacionais. Trazem o conteúdo implícito em uma proposta lúdica, em que seu usuário aprende brincando, sendo imperceptível a instrução. Geralmente o jogo ocorre através de competições entre o jogador e a máquina ou entre jogadores. A dificuldade ocorre quando os competidores se preocupam apenas em vencer o jogo, e deixam de pensar em estratégias para vencer, ou não refletem no porquê estão perdendo ou ganhando. Aqui, cabe ao professor administrar estratégias que permitam ao aluno refletir sobre o que está aprendendo enquanto joga ou o que o jogo lhe acrescentou de conhecimento sobre um determinado assunto.

4. Simulações. São *softwares* que buscam reproduzir situações reais que em geral seriam impossíveis como, ações da natureza e desastres ecológicos, situações que necessitem de recursos financeiros elevados, situações de alto risco como, manuseio com produtos químicos e aquelas reações que requer muito tempo para serem obtidas. Os programas desta modalidade podem apenas simular a ação ou o fato sem a interferência do usuário e sem a necessidade de uma reflexão sobre o acontecimento. Ou podem necessitar da interferência do usuário proporcionando caminhos diferentes dependendo da tomada de decisão, propiciando ao observador da simulação momento para reflexão sobre os acontecimentos. Tais fatos destacam-no como modalidade de *software* que poderá ser instrucionista ou construcionista dependendo da relação que o simulador terá com o observador.

Assim como os recursos audiovisuais, quadro de giz, cartaz, *flip-chart*, modelos e objetos, flanelógrafo, cartaz de pregas, mural didático, diorama[1], álbum seriado, TV caixote

---

[1] Diorama: é um modo de apresentação artística tridimensional, de maneira muito realista, de cenas da vida real para exposição com finalidades de instrução ou entretenimento.

ou cineminha, fantoches, maquete, gravuras, retroprojetor, projetor multimídia, TV e vídeo, por exemplo, o computador no ambiente escolar utilizado em uma abordagem instrucionista, estão inseridos como transmissores de informações, dando ao aprendiz a possibilidade de adquirir conhecimento, mas com limites restritos à reflexão e a construção sobre o conhecimento. (ALMEIDA, 2000)

O que caracteriza o instrumento pedagógico tecnológico digital, computador, em instrucionista ou construcionista é a ação que o indivíduo realiza sobre ele. Se nossa ação for apenas de expectadores ou seguidores de comandos programados, onde a máquina possui a resposta e interage conosco apenas dizendo se está correto, nos pontuando ou demonstrando situações de um determinado fenômeno, estamos tratando de uma aprendizagem em modalidade instrucionista.

Na abordagem construcionista, disseminada pelo Sul-africano Seymour Papert, considerado um dos maiores visionários do uso da tecnologia na educação, o computador adquire características de servir como intermediário para que o aprendiz construa o seu próprio conhecimento.

O construcionismo de Papert, desenvolvido no ano de 1986 em *Massachusetts Institute of Technology-MIT*, reporta-se às ideias de pensadores contemporâneos como Dewey, que formulou o método educacional por descoberta; Freire, que defendeu a educação progressista e emancipadora; Piaget, que afirmou que o conhecimento é construído progressivamente através de ações e suas coordenações, e Vigotsky, que atribui ao homem total capacidade de interagir com o meio e construir seu conhecimento através desta interação. Para Papert as contribuições desses pensadores são inter-relacionadas sem contraposição em um diálogo inserido ao processo de descrição - execução - reflexão - depuração. (ALMEIDA, 2000; GOMES, 2002)

Schlünzen Junior (2003), detalha esse processo como um ciclo em que o computador passa a ser uma ferramenta e o conhecimento do aprendiz é formalizado e explicitado.

> Nesse ciclo, o aprendiz, por meio do *software*, é capaz de dar numa descrição precisa de suas ideias e em seguida observar se essas ideias são corretas com o produto apresentado pelo computador, fruto da execução da descrição do aprendiz.Com isso, é possível refletir sobre o resultado obtido e, se não for o esperado, identificar e corrigir em um processo de depuração do conhecimento. (SCHLÜNZEN JUNIOR, 2003, p. 68)

No construcionismo o conceito da aprendizagem está nas relações que o aluno faz ao levantar hipótese, testar e criar, provocados pelas indagações, sugeridas pelo professor e comparações realizadas pelos próprios alunos. Já na abordagem instrucionista a aprendizagem ocorre por transmissão de informações processadas. “O conteúdo apresentado segundo os critérios de precisão, clareza e objetividade, somados a recursos sensoriais, como imagens e sons penetram na mente do aluno através dos sentidos [...]". (ALMEIDA, 2000, p. 27).

Destacamos que nas duas abordagens há a presença do computador como instrumento de aprendizagem e que sua utilização em sala de aula deve ocorrer através de mediações que diversifiquem as dinâmicas metodológicas no sentido de direcionar o conteúdo disciplinar a uma abordagem instrucionista, sob as orientações constantes do professor que está mais próximo do ensino tradicional informatizado ou a um ambiente tecnológico provedor de meios facilitadores onde os alunos possam construir seus conhecimentos através de estímulos externos, com o professor como mediador, que é característica construcionista.

Nessa perspectiva, quem define a abordagem a ser aplicada é o professor/mediador conhecedor de conceitos básicos em informática e na área pedagógica para oferecer oportunidades de aprendizagens, se apropriando conscientemente das duas abordagens conforme a necessidade da turma e integração do conteúdo.

Segundo Scheffer (2010, p.100):

> [...] há necessidade de uma reorientação pedagógica dos métodos, currículos e práticas, levando-se em conta os impactos da tecnologia no currículo e na pedagogia. Portanto, o grande desafio com que se defronta o professor nos dias de hoje está em redirecionar o uso desses recursos no ensino.

Neste sentido, o *software* GeoGebra se inclui na abordagem instrucionista como um simulador, no qual, por exemplo, o aluno descreve o segmento e o programa identifica o ponto médio. Ou na construcionista, quando há uma problematização em que o aluno precisa localizar um ponto e buscar em sua malha, ou na relação entre os eixos, o ponto; e em seguida, observar na janela algébrica se o ponto está correto. Caso haja erro, o aluno refaz a localização.

Assim, acreditamos que o *software* GeoGebra como ferramenta dinâmica nos oferece condições para tratarmos de conteúdos matemáticos em ambas abordagens, além de possibilitar, como verificamos em Lima e Ferreira (2013), a construção de um ambiente favorável para aplicarmos os princípios da Teoria das Representações Semióticas de Duval.

3.2 Registros de Representação Semiótica

A matemática utiliza símbolos para representar seus objetos, por ser uma ciência que possui seus elementos de aspecto intuitivo no campo abstrato, o que a torna na maioria das vezes de difícil compreensão para o aprendiz. Na tentativa de aproximar o abstrato ao físico é necessário dar representantes aos objetos matemáticos e estes são identificados como símbolos que representam o objeto, mas não são o objeto. Por exemplo, o ponto, o segmento, a reta, um quadrado são signos que representam o objeto, assim como, a escrita, o número e uma notação.

Segundo Santaella (1983, p. 13), “Semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno de produção de significação e de sentido. ” Portanto, a semiótica se utiliza dos sistemas de sinais que expressem aos indivíduos ideias, opiniões e sentimentos.

A semiótica possui como essência o estudo dos signos presentes nos tipos de atos de comunicação que são: símbolos, sons, gestos e regras com sinais convencionados como a escrita, por exemplo. Os signos são definidos por Santaella (1983) como tudo que nos faz lembrar de algo que é perceptível aos nossos sentidos e tem como função ou poder, representar ou substituir o objeto. A representação de um objeto matemático por um signo é convencionada por representação semiótica, que são essenciais para fins de comunicação e da atividade cognitiva do pensamento.

Os registros de representação diversificados por meio da presença de signos são apresentados pelo filósofo e psicólogo Raymond Duval (2013) como fator favorecedor de melhor aprendizagem em matemática. Sua teoria trata principalmente das relações cognitivas que o aluno realiza ao ser apresentado às atividades matemáticas cujas resoluções ocorrerão com maior facilidade e acertos, se os conceitos tiverem sido tratados com ao menos dois registros de representações diferentes, contribuindo para que os educandos sejam capazes de transitar livremente entre estes dois tipos de registros de representação.

As dificuldades de compreensão que os alunos possuem em matemática ocorrem muitas vezes pela falta de acesso a variedades de registros de representação semiótica, desde as séries iniciais do Ensino Básico. Segundo o pesquisador, o pensamento está ligado às operações semióticas capazes de serem realizadas pela estruturação, pelo grau de compreensão e pela relação com os objetos por meio dos recursos de tais registros de representação.

Segundo Duval (2013) há quatro tipos de registros de representação semiótica, a saber: a língua natural, os sistemas de escritas, as figuras geométricas e os gráficos cartesianos. Esses tipos estão representados no Quadro 1.

Quadro 1: Classificação dos tipos de registros de representação semiótica

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	**Língua natural** Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças, ...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	**Figuras geométricas planas ou em perspectivas** (Configurações em dimensão 0,1,2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	**Sistemas de escritas**: • numéricas (binária, decimal, fracionária, ...) • algébricas; • simbólicas (línguas formais) Cálculo.	**Gráficos cartesianos**. • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2013, p.14)

De acordo com o Quadro 1, observa-se que um objeto matemático poderá ser representado de forma diferenciada dependendo da sua necessidade ou uso, podendo ser registrado por representações linguísticas, simbólicas, numéricas, geométricas ou gráficas.

Machado (2013), assevera que a Teoria dos Registros de Representação de Duval é um importante instrumento de pesquisa para estudar a complexidade da aprendizagem em matemática, à medida que compreendemos e integramos mais signos as resoluções em situações matemáticas, maior domínio teremos sobre o conteúdo.

Duval (2013) destaca que a originalidade de uma abordagem cognitiva não parte dos erros cometidos pelos alunos, sejam eles algébricos ou geométricos, de forma a definir concepções e a procurar a origem das suas dificuldades. Tampouco, amenizarmos estas falhas com explicações das definições matemáticas reportando-nos a história e as suas descobertas irá solucionar os bloqueios existentes na aprendizagem matemática.

A originalidade e a especificidade do funcionamento do pensamento matemático não devem ser procuradas nos conceitos, pois o desenvolvimento da compreensão em qualquer área do conhecimento requer domínio gradual dos seus conceitos, que para Papert ocorre de forma cíclica por meio do processo de descrição-execução-reflexão-depuração.

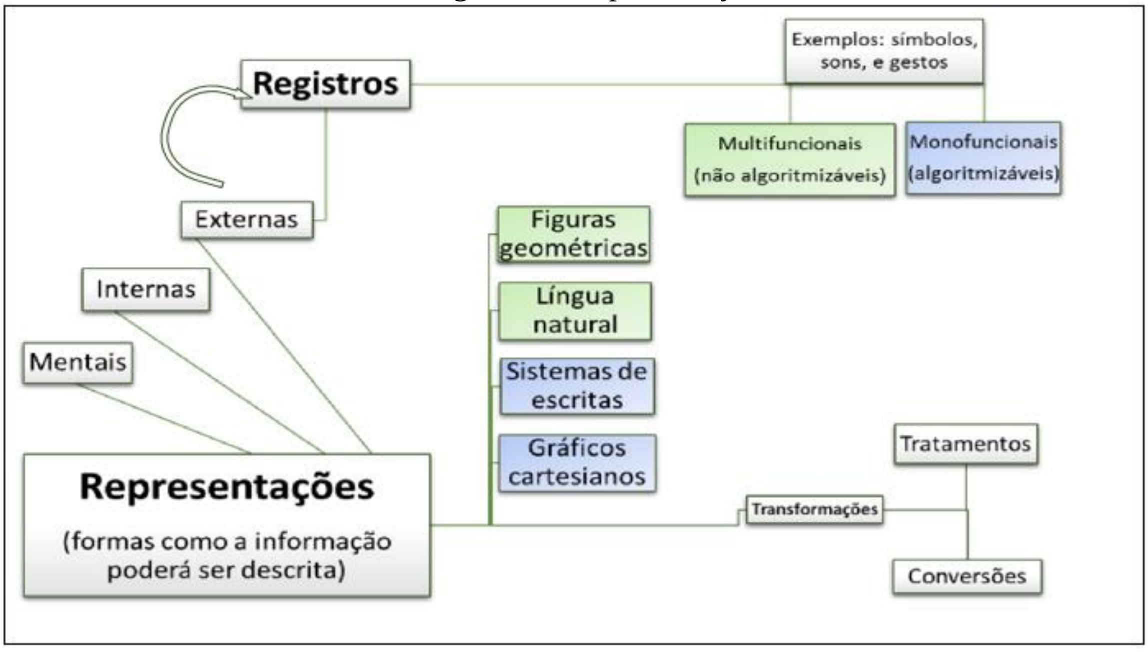
Na realidade o que caracteriza a qualidade da atividade cognitiva do pensamento matemático é a capacidade de transitar entre os registros de representações semióticas e a sua variedade em um mesmo sistema de registro de representação (tratamento) ou na alternância entre eles (conversão), conforme afirma Souza (2008, p.64 e 65):

> Com relação ao tratamento, é preciso distinguir entre registros monofuncionais e registros multifuncionais. Os registros monofuncionais são aqueles que foram desenvolvidos para um tipo de tratamento que é, quase sempre, algoritmizável. É o caso da linguagem de programação, dos sistemas de numeração, dos gráficos cartesianos. Os registros multifuncionais são aqueles que são usados em todos os campos de cultura e que, por isso, têm tratamento não algoritmizável. É o caso da língua natural, das figuras geométricas, da argumentação. Além disso, podemos ainda considerar as representações discursivas e as não discursivas. [...] A representação é discursiva quando é um encadeamento lógico de símbolos, palavras ou gestos, por exemplo na linguagem algébrica, nos textos da língua natural, na comunicação dos surdos-mudos, nos sistemas de numeração. No caso das figuras geométricas não existe esse encadeamento, é uma única figura representando o que se quer representar.

Segundo Duval (2013, p.14), a "originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de converter a todo o momento de registro de representação. "

Esta mobilização simultânea de registros ocorre no tratamento de uma representação semiótica que para Souza (2008) "é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema" (p.64). Já a conversão "é uma transformação de representação em um registro para um outro registro, de um mesmo objeto, de uma mesma situação ou de uma mesma informação" (p.65). No Quadro 2 apresentamos uma síntese das Representações Semióticas de Duval.

Quadro 2 – Síntese dos registros de representação semióticas de Duval



Fonte: Autoria Própria

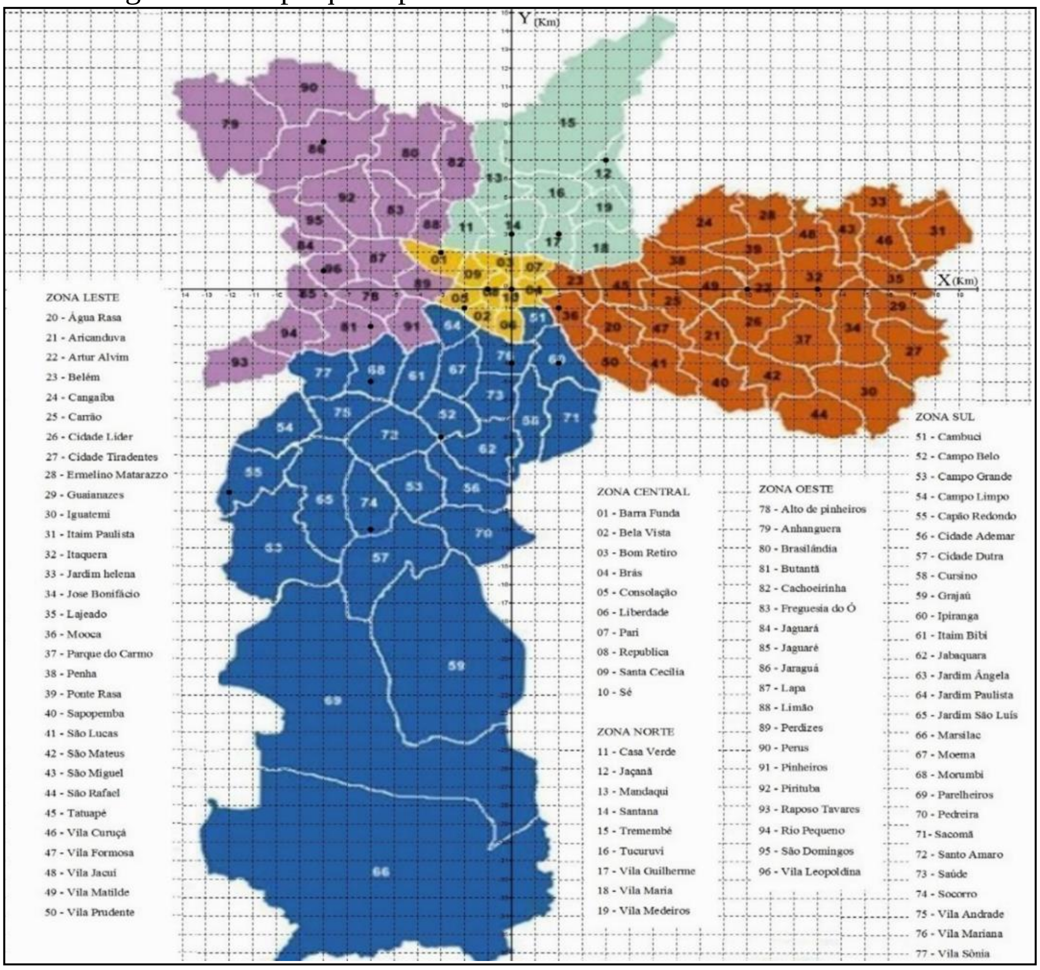
Em suma, como mostrado no Quadro 2, a forma como a informação poderá ser descrita, ocorre por processos mentais, internos ou externos. Os processos de representações externos necessitam de registros para serem compreendidos e para Duval estes registros ocorrem através da representação semiótica.

Os registros podem ser monofuncionais ou multifuncionais cujas representações são classificadas em figuras geométricas, língua natural, sistema de escritas e gráfico cartesiano. No uso dos registros de representação ocorrem os tratamentos e as conversões. Quanto mais tratamentos e conversões o indivíduo souber realizar com determinado objeto matemático, mais conhecimento terá sobre este objeto.

3.2.1 Exemplificando o referencial teórico

Em Geometria Analítica a proposta de trabalharmos com ao menos dois tipos de registros de representação está inserida no próprio conteúdo, facilitando-nos na utilização de tratamentos e conversões. Para exemplificarmos o conteúdo matemático Geometria Analítica - ponto e reta, apresentamos situações problemas envolvendo localizações e mapas, conforme Figura 1, que foram inseridos nas atividades da sequência.

Figura 1 – Mapa que representa os bairros da cidade de São Paulo



Fonte: Adaptado do Google Imagens

Desse modo, contextualizamos a localização de pontos no plano cartesiano e a escrita de pares ordenados através da observação de pontos no plano, inicialmente pela representação do mapa das regiões Norte, Sul, Leste, Oeste e Central de São Paulo. Constituímos uma legenda de números para cada bairro junto ao mapa e neste sobrepusemos o plano cartesiano com escala em quilômetros (Km). A escala da imagem não representa as medidas reais

Desenvolvemos a atividade em uma abordagem instrucionista, com perguntas dissertativas, com o objetivo de fazer o aluno perceber que uma coordenada errada nos leva a desviarmos do percurso e pararmos em outro bairro. E que o ponto possui significado e ordem em uma representação cartesiana, necessitando do sistema de escrita numérico para ser representado.

Como estamos tratando do tema localização em São Paulo, a próxima figura é uma imagem do local que possui variadas representações, por onde passam representantes de diversos setores e diversificadas culturas. As imagens podem expressar sentimentos, momentos, fatos, ações ou simplesmente representar a arquitetura local em uma visão real do momento impresso.

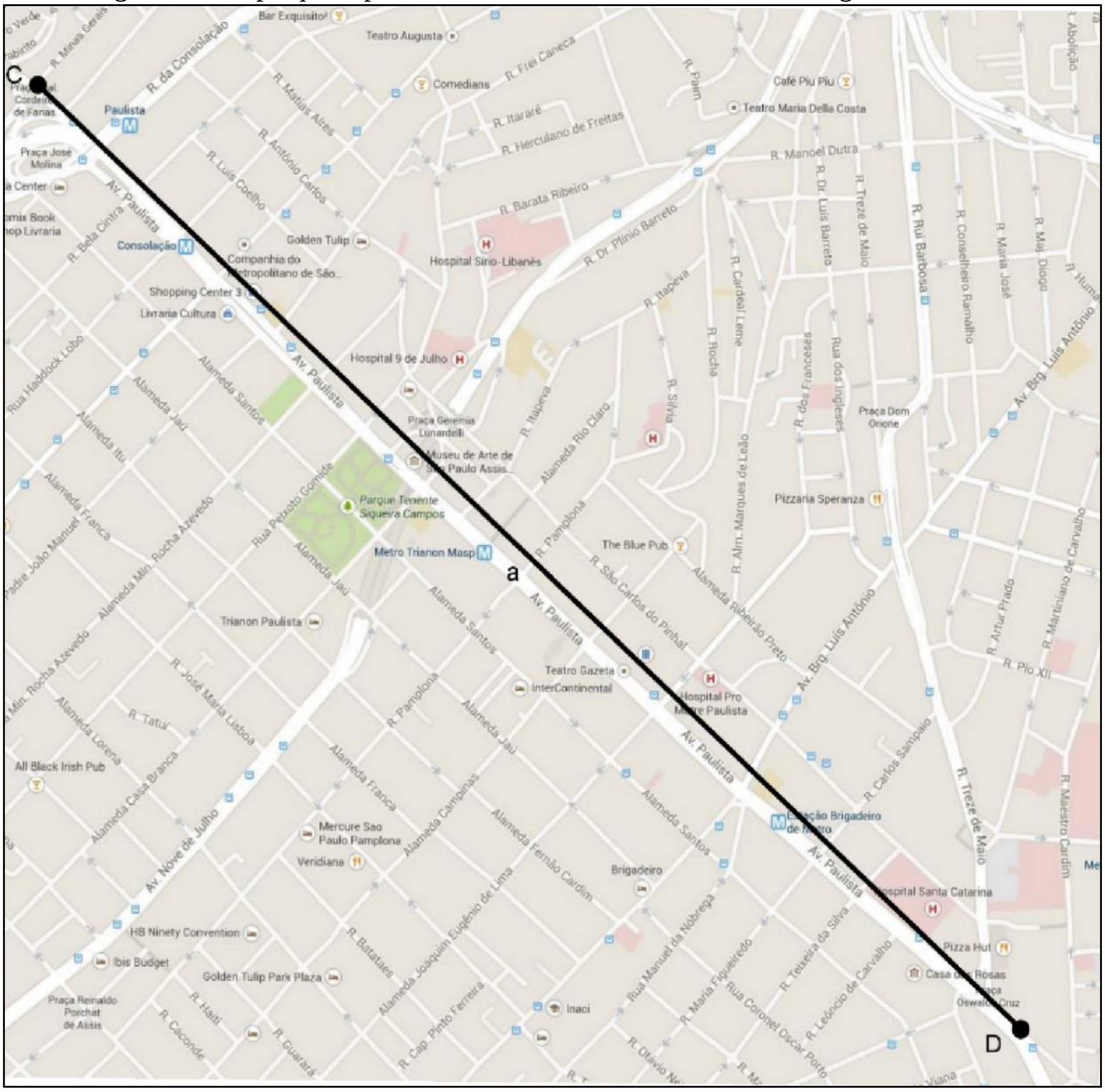
Figura 2 – Imagem aérea da Avenida Paulista.

Fonte: Google Imagens

A imagem também pode sugerir ideia de movimento ou remetermos a outras imagens, a outros momentos, a símbolos e figuras. Observando a imagem aérea da Avenida Paulista na Figura 2 podemos associá-la a diversos significados ou relacioná-la a vários conceitos.

Quando mencionamos o nome Avenida Paulista, nos reportamos a imagens de edifícios, veículos, trânsito e movimento. Além disso, relacionarmos a valores, negócios e pluralidade cultural. Porém, em uma abordagem geométrica, ao olharmos para a avenida em seus aproximados 2800 metros de extensão, em vista aérea, percebemos um segmento de reta, que começa no ponto C, onde há o cruzamento da avenida com a Rua Minas Gerais, e termina no ponto D, onde ocorre uma bifurcação. Na inclinação para esquerda a avenida se prolonga e recebe a denominação de Rua Paraiso e na inclinação para a direita, recebe o nome de Avenida Bernardino de Campos, como identificado na Figura 3.

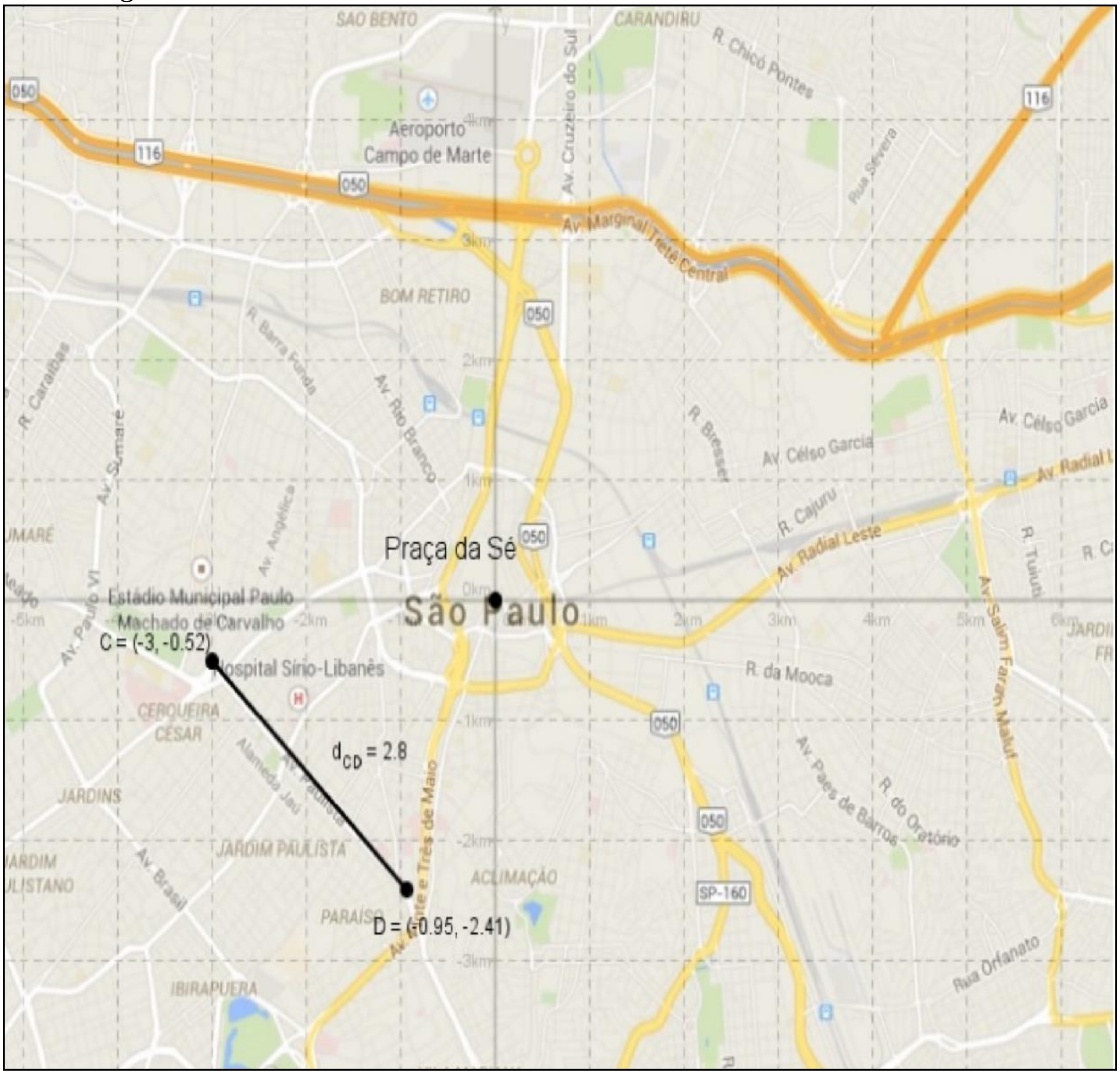
Figura 3 – Mapa que representa a Avenida Paulista como um segmento de reta.



Fonte: Adaptado do Google Maps.

O mapa que representa a avenida, se projetado em um plano cartesiano cuja origem está no marco zero da Cidade de São Paulo, que é a Praça da Sé, conforme Figura 4, poderá ser representado por registros monofuncionais no sistema de escritas ou gráfico cartesiano que foram mencionados no Quadro 1.

Figura 4 – Mapa que representa o marco zero de São Paulo e a Avenida Paulista no sistema gráfico cartesiano



Fonte: Adaptado do Google Maps.

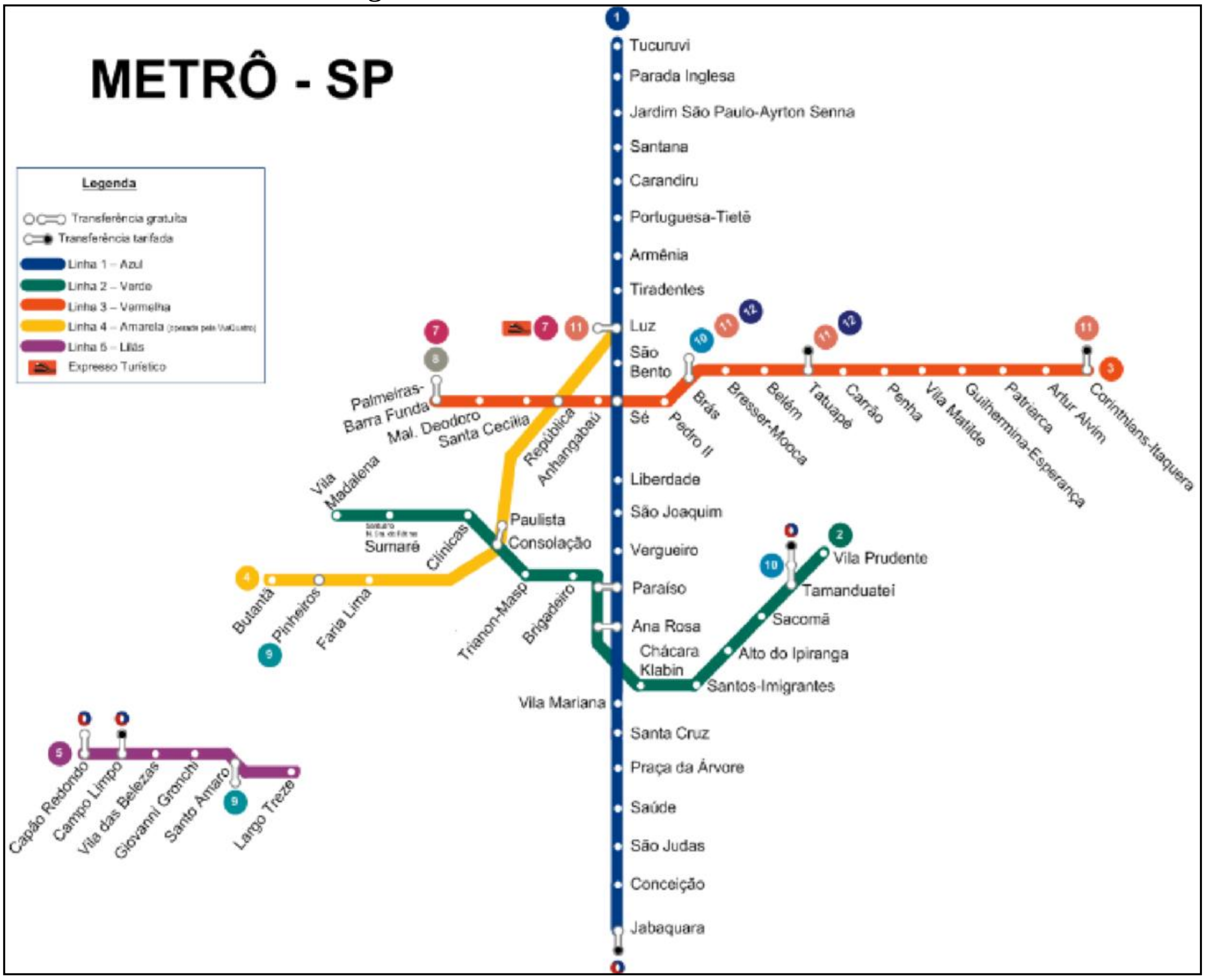
Ao relacionarmos a Figura 4 com os diferentes Registros de Representações Semióticas (Quadro1), teremos a Avenida Paulista representada no sistema gráfico cartesiano, com registro simbólico numérico em coordenadas que são as extremidades do segmento de reta CD, com os seguintes pares ordenados: C (-3; -0,52) e D (-0,95; -2,41).

O segmento CD também poderá ser representado por uma função, por exemplo, f(x) = - 0,92x - 3,29, com $x \in \mathbb{R}$ / -3 < x < -0,95 e $y \in \mathbb{R}$/ -2,41 <y < - 0,52 . , havendo neste caso, conversão da representação gráfico cartesiana para a escrita algébrica e ocorrendo tratamento no sistema de escrita para calcularmos os pontos que pertencem ao segmento ou estão compreendidos dentro dos limites da função.

Desta forma, exemplificamos tratamentos e conversões: o mesmo objeto - a Avenida Paulista - está representado geometricamente, através dos pontos e do segmento, graficamente, por ser representado em uma função com limites no segmento CD. Assim, temos registros semióticos que mostram o mesmo objeto em forma de imagens, mapas de localizações, mapas sobre o plano cartesiano e representações algébricas.

Na Figura 5, identificamos apenas as estações do metrô e suas respectivas linhas de forma ilustrativa, o que significa que não possuem as inclinações proporcionais à realidade nem as suas medidas em escalas reais.

Figura 5 – Linhas do Metrô de São Paulo

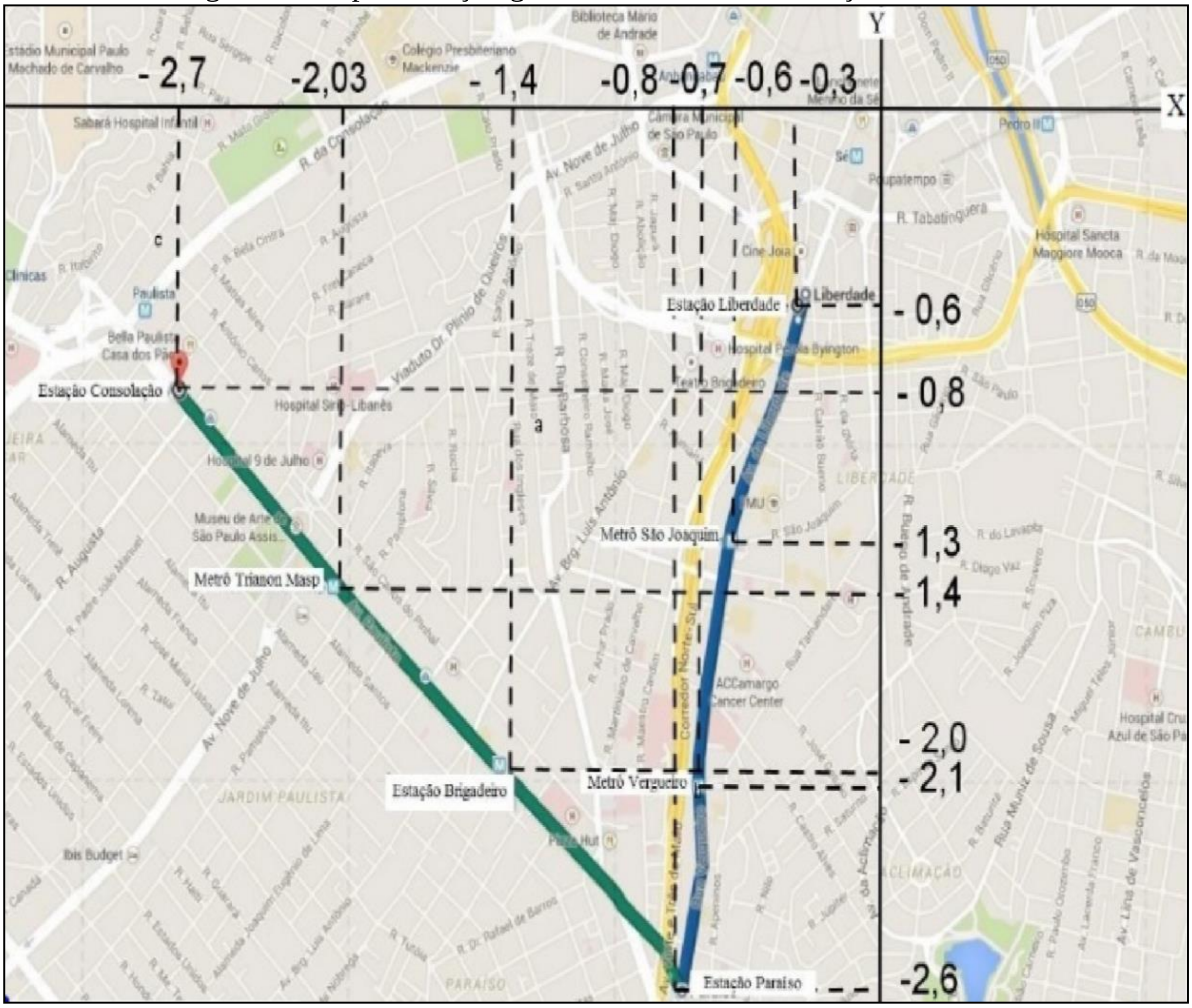


Fonte: Adaptado de http://www.metro.sp.gov.br/

As linhas do metrô são representadas por cores e observamos que na Avenida Paulista passa a composição da linha verde do metrô. A seguinte situação problema foi a atividade avaliativa do primeiro módulo, onde estava sendo avaliada a capacidade de o aluno localizar pontos no plano cartesiano, a distância entre dois pontos, o ponto médio e o baricentro do triângulo.

João e Pedro são amigos e utilizam o metrô de segunda a sexta-feira e se encontram na Avenida Paulista em frente à estação Trianon Masp. João utiliza a linha azul do metrô, saindo da estação Liberdade e faz baldeação na estação Paraíso seguindo pela linha verde, até a estação Trianon Masp. Já, Pedro, sai da estação Consolação se dirigindo ao ponto de encontro. Considerando a Praça da Sé como marco zero, determine a coordenada do ponto onde os amigos se encontram. Represente o trajeto percorrido pelos amigos em segmentos de retas. Se o ponto de encontro fosse na estação Paraíso será que seria a metade do caminho para João?

Figura 6 – Representação gráfico cartesiana das estações do metrô



Fonte: Adaptado do Google Maps.

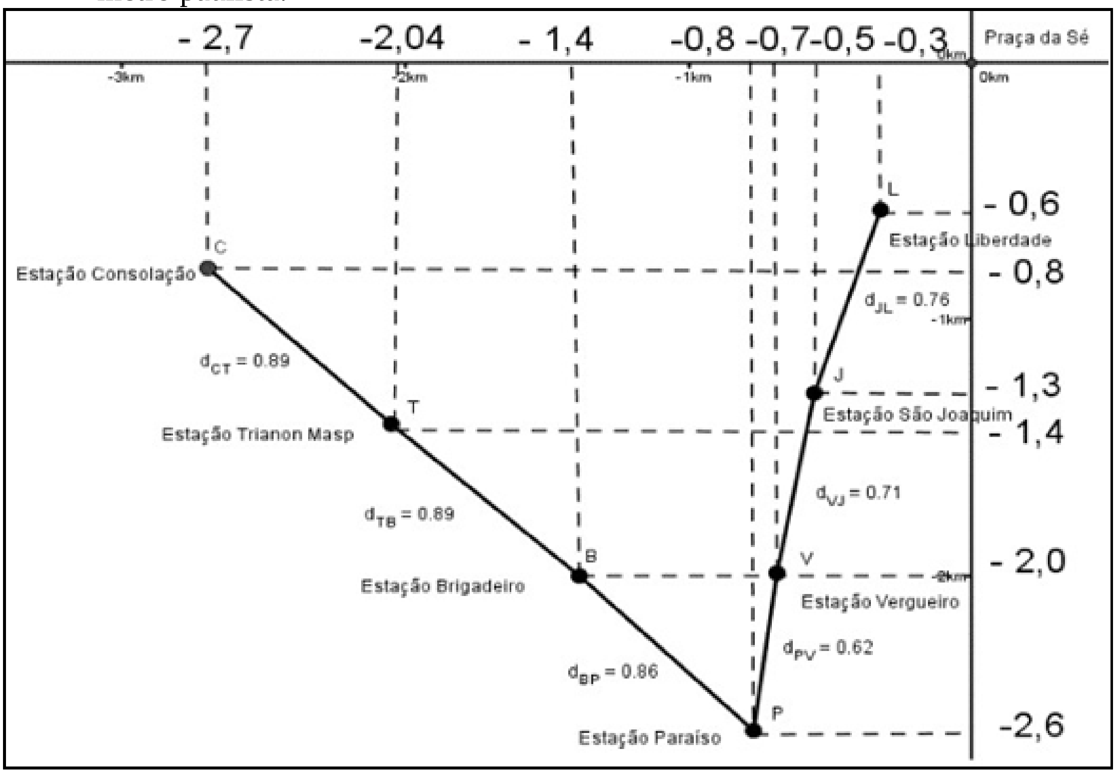
Inicialmente, para estruturação da situação descrita, nos apropriamos de uma forma de registro de representação não algoritmizável que é a língua natural.

Segundo Souza (2008), o registro da língua natural por ser multifuncional serve como pano de fundo para todas as outras representações semióticas. Uma vez conhecedores dos símbolos presentes da língua natural, há um tratamento levando-nos a compreender o que está escrito.

A Figura 6 complementa o texto indicando ao leitor os locais de forma ordenada onde se encontram as estações do Metrô, auxilia a compreensão, principalmente para aqueles que não conhecem o trajeto. Traz também, informações para respondermos ao questionamento "Se o ponto de encontro fosse na estação Paraíso, será que seria a metade do caminho para João?". Visualizar a situação através de imagens, pode torna-la mais compreensível. No entanto, segundo Souza (2008, p. 47), "Ao decidirmos quais elementos precisamos determinar, estamos praticando uma visualização". Ao optarmos, por exemplo, por transformar as linhas do Metrô em segmentos de retas e as estações em pontos, estamos praticando uma visualização porque, a partir do texto verbal, decidimos por esboçar a situação nas "unidades representacionais que interessam".

Após visualizarmos a situação, passamos a trabalhar com outros registros de representação semiótica. Inicialmente a geométrica, que exige edificações com instrumentos, construímos no GeoGebra, ocultando o mapa cuja representação está na Figura 7. Os pontos são: C que representa a estação Consolação, T representa a estação Trianon Masp, B estação Brigadeiro, P estação Paraíso, V estação Vergueiro, J estação São Joaquim e por fim, o ponto L que representa a estação Liberdade do Metrô. Temos também, os segmentos de reta que estão representando o percurso que as composições do metrô fazem para se deslocarem entre as estações.

Figura 7 – Representação dos registros gráfico e numérico de trechos da linha verde e azul do metrô paulista.



Fonte: Autoria própria

Quanto aos pares ordenados, os obtivemos por meio do registro gráfico, proporcionado pelo plano cartesiano localizado sobre o mapa. As coordenadas cartesianas correspondentes aos pontos já mencionados são: C(-2,7; -0,8), T(-2,04; -1,4), B(-1,4; -2,0), P(-0,8; -2,6), V(-0,7; -2,0), J(-0,5; -1,3) e L(-0,3; -0,6).

O deslocamento das composições do metrô está representado em segmentos, como: CT, TB, BP, PV, VJ e JL no sentido centro, Praça da Sé, e no sentido inverso LJ, JV, VP, PB, BT e TC para Avenida Consolação.

O registro gráfico se apoia no registro de escrita numérico e a partir dele são calculadas todas as medidas dos segmentos. Para representar as coordenadas desta situação problema utilizamos os registros do sistema de escrita numérico decimal. Com auxílio do GeoGebra obtivemos os comprimentos dos segmentos que podemos representar pelo sistema simbólico de escrita algébrico e numérico, sendo essa transformação um tratamento, segui:

d_{CT} = 0,89 Km d_{TB} = 0,89 Km d_{BP} = 0,86 Km d_{PV} = 0,62 Km d_{VJ} = 0,71 Km d_{JL} = 0,76Km

Outra forma de obtermos as medidas dos comprimentos dos segmentos é utilizando a fórmula para o cálculo de distância entre pontos que passaremos a representar exemplificando apenas com o cálculo do comprimento do segmento de reta CT.

$$d_{CT} = \sqrt{(x_T - x_C)^2 + (y_T - y_C)^2}$$

$$d_{CT} = \sqrt{(-2{,}04 - (-2{,}7))^2 + (-1{,}4 - (-0{,}8))^2}$$

$$d_{CT} = \sqrt{(-2{,}04 + 2{,}7)^2 + (-1{,}4 + 0{,}8)^2}$$

$$d_{CT} = \sqrt{(0{,}66)^2 + (-0{,}6)^2}$$

$$d_{CT} = \sqrt{0{,}4356 + 0{,}36}$$

$$d_{CT} = \sqrt{0{,}7956}$$

$$d_{CT} = 0{,}89$$

Então, a distância do segmento CT é de aproximadamente 0,89 Km.

Observemos que a passagem de uma linha para outra é exemplo de tratamento pois permanece dentro do mesmo tipo de registro: sistema de escritas de natureza numérico.

Poderemos também representar a medida dos comprimentos entre as estações de Metrô utilizando a régua para medir os segmentos, partindo do princípio que a escala gráfica está de 10 centímetros para 1 quilômetro em ambos os eixos. Assim, teremos o mesmo resultado em proporções para as medidas dos comprimentos dos segmentos de reta e a figura não ficará pequena para acrescentarmos as informações. Portanto, apresentamos três possíveis formas de registros para obtermos a distância entre dois pontos, podendo ser trabalhadas em uma mesma situação problema, ampliando e agregando conhecimentos externos aos dados matemáticos. Mas, não solucionamos o problema apenas com os dados já obtidos, teremos que responder se ao chegar na estação Paraíso do Metrô, João estará na metade do trajeto percorrido por ele de segunda a sexta-feira.

Utilizamos o registro no sistema de escrita na forma numérica e adicionamos os segmentos que compreendem da estação Liberdade até a estação Paraíso e da estação Paraíso até a Trianon Masp, da seguinte forma: para o percurso da estação Paraíso até a estação Liberdade, passamos por três segmentos consecutivamente d_{PV} = 0,62 Km, d_{VJ} = 0,71 Km, d_{JL} = 0,76Km. A soma destes segmentos resulta em 2,09 Km. Partindo da estação Trianon Masp até a estação Paraíso percorreremos dois segmentos de reta consecutivos somando as seguintes distâncias d_{TB} = 0,89 Km e d_{BP} = 0,86 Km, totalizando 1,75 Km.

Concluímos que João ao chegar na estação Paraíso já percorreu a metade do seu trajeto. Dessa forma, buscamos exemplificar com a situação - problema, os registros de representação semiótica, discursivas e não discursivas propiciando algumas formas de tratamentos e conversões. Duval (2013) menciona que o "enclausuramento" de registros, impede que o aluno reconheça um mesmo objeto em diferentes formas de representações. O que nos leva a concluir que a dificuldade é maior, para trabalharmos com as conversões.

No decorrer da sequência apresentamos outros exemplos e atividades que serão expostos no próximo capítulo. Refletindo sobre a nossa experiência em sala de aula constatamos que não é comum a utilização dos dois tipos de transformação de registros de representação nas atividades de formação matemática. Sendo assim, acreditamos que introduzir no cenário das aulas de Matemática, não apenas os tratamentos, mas principalmente as conversões é uma necessidade para melhorarmos a aprendizagem e consequentemente o ensino.

De acordo com Duval (2013), precisamos ter sujeitos com capacidade de transitar em pelo menos dois registros de representação semiótico para um mesmo objeto matemático. Porque, quanto mais registros de um mesmo objeto o indivíduo compreender e utilizar, mais domínio terá sobre o conteúdo matemático.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos os fundamentos metodológicos que nortearam o estudo, caracterizando-o quanto ao tipo, a abordagem e o método, utilizando as contribuições de André (1995), Gil (2002 e 2008) e Goldenberg (2004). Também anunciamos o problema da pesquisa, os objetivos, o processo de seleção dos participantes, os critérios para escolha do cenário da aplicação, os instrumentos, os materiais e os procedimentos para coleta e análise de dados.

4.1 Fundamentos Metodológicos

Ao passo que o homem se tornou sujeito do conhecimento, o paradigma epistemológico da verdade única foi rompido devido as novas relações sujeito/objeto. Esta ruptura propiciou vieses ao método científico acadêmico vigente, atribuindo a pesquisa um caráter social, que se apoia em relações humanas e culturais, tornando os estudos acadêmicos passíveis de serem estruturados com o rigor científico em meio às relações sociais.

Segundo Gil (2008), define-se pesquisa social como um processo racional e sistemático que se utiliza de métodos, técnicas e procedimentos científicos, permitindo a constatação de hipóteses, o estudo do comportamento humano em seus múltiplos relacionamentos com outros humanos e das suas relações com o meio, e proporcionando a obtenção de novos conhecimentos no campo da realidade social ou corroborando com os já estudados.

Nessa perspectiva, imerso nos parâmetros da pesquisa social, o nosso estudo decorre dos interesses e objetivos do curso, por se tratar, de mestrado profissional, e da nossa trajetória acadêmica e profissional na área da Educação.

No contexto da pesquisa social, no sentido de conhecer para agir, temos vários delineamentos que vão ao encontro da pesquisa aplicada como por exemplo a pesquisa ação, o estudo de caso, pesquisa ex-pos-facto, o levantamento e a pesquisa participante. Porém, entre os delineamentos citados quanto à natureza da fonte para abordagem e tratamento de seu objeto, escolhemos o estudo de campo. Optamos por este tipo de estudo por realizar-se com a participação direta do pesquisador, proporcionando maior aprofundamento das questões na análise das variáveis de forma descritiva ou mais analítica. Em seu desenvolvimento há observação direta das atividades do grupo participante em seu habitat natural (GIL, 2002).

Observamos nos estudos analisados no capítulo da revisão da literatura, que além das pesquisas possuírem as características de pesquisa aplicada, ainda que de forma implícita, o nível descritivo está presente de modo significativo em relação ao exploratório e ao explicativo. Esta tríade é utilizada distintamente pelos meios acadêmicos, dependendo da questão de investigação que norteia a pesquisa e dos objetivos que almejam atingir.

Destacamos a pesquisa descritiva como aquela que consiste em abordar detalhadamente a existência de um fato, seus fenômenos e suas variáveis. Na nossa descrição, utilizamos variáveis quantitativas e qualitativas, que advém da análise realizada no Currículo da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo com enfoque ao Caderno do Professor e do Aluno (SÃO PAULO, 2012a) que apresentam as habilidades e competências trabalhadas na Sequência de Atividades que são descritas no capítulo 5, Análise de Dados.

Ainda no âmbito das variáveis, descrevemos as características dos grupos pesquisados por intermédio dos dados coletados no questionário e perfil dos participantes, como por exemplo, idade, sexo, quantidade de vezes que utiliza o computador, o local onde é utilizado e a finalidade, a fim de identificarmos se os participantes nas disciplinas da grade curricular utilizam ou já utilizaram recursos tecnológicos digitais e qual é o nível de conhecimento ou familiaridade que possuíam em relação ao uso do software GeoGebra.

Desse modo, coletamos dados subjetivos e mensuráveis nos remetendo respectivamente aos dois tipos de abordagens qualitativa e quantitativa. Segundo André (1995, p.17), a pesquisa qualitativa "em oposição a uma visão empiricista de ciência, busca a interpretação em lugar da mensuração, a descoberta em lugar da constatação, valoriza a indução e assume que fatos e valores estão intimamente relacionados, tornando-se inaceitável uma postura neutra do pesquisador. "

Goldenberg (2004, p.63) em um comparativo das duas abordagens, destaca:

> Enquanto os métodos quantitativos pressupõem uma população de objetos de estudo comparáveis, que fornecerá dados que podem ser generalizáveis, os métodos qualitativos poderão observar, diretamente, como cada indivíduo, grupo ou instituição experimenta, concretamente, a realidade pesquisada. A pesquisa qualitativa é útil para identificar conceitos e variáveis relevantes de situações que podem ser estudadas quantitativamente.

Combinar as análises dos dados de uma pesquisa por métodos qualitativos e quantitativos atribui ao estudo mais estrutura. Goldenberg (2004), afirma que a integração entre as abordagens qualitativas e quantitativas contribuem para a pesquisa por agregar diferentes pontos de vista e maneiras de coletar e analisar dados, permitindo o cruzamento de informações que fornecem a conclusão maior segurança e confiabilidade, com dados que não são resultados de um procedimento específico ou de alguma situação particular.

Nesta dinâmica, onde as duas abordagens se complementam, apresentamos um estudo com características quanti-qualitativas, observando os aspectos que contribuem para aprendizagem do conteúdo matemático de Geometria Analítica com o auxílio do *software* GeoGebra, destacando os aspectos favoráveis e desfavoráveis à sua utilização.

Destarte as considerações realizadas até o momento, classificamos essa pesquisa como descritiva, quanto aos seus objetivos e como pesquisa de campo, quanto ao seu delineamento, cujos instrumentos de coleta de dados foram administrados por técnicas padronizadas e obtidos no ambiente natural, na unidade escolar onde os participantes estudam; por meio de observações diretas da pesquisadora aos grupos estudados, com a aplicação do questionário e das atividades elaboradas pela pesquisadora.

4.2 Problema e Objetivos

Este estudo buscou investigar o seguinte problema de pesquisa: **em que medida o software GeoGebra contribui para a aprendizagem de alguns conteúdos de Geometria Analítica?**

Para responder ao problema da pesquisa, delineamos os seguintes objetivos:

- **Identificar** como se apresenta o conteúdo matemático de Geometria Analítica no livro didático (BARROSO, 2010), e no Caderno do Professor e do Aluno, que são destinados ao terceiro ano do Ensino Médio, distribuídos pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo;
- **Analisa**r os aspectos que contribuem favoravelmente para aprendizagem, quando utilizada uma sequência de atividades com o uso do GeoGebra, aplicada aos participantes que estão matriculados no terceiro ano do Ensino Médio, e aqueles que não se adéquam a utilização do software para o conteúdo tratado nesta pesquisa;
- **Caracterizar** a aplicabilidade do software como ferramenta facilitadora do processo de aprendizagem de alguns conteúdos da Geometria Analítica

4.3 Participantes da Pesquisa

Participaram deste estudo duas turmas do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino do período matutino localizada na cidade de Taboão da Serra/SP.

A pesquisa ocorreu com todos os alunos das duas turmas, onde ambas tiveram acesso ao software GeoGebra, porém em momentos diferentes. A primeira turma utilizou o *software* durante a aplicação da sequência sobre Geometria Analítica, a segunda turma utilizou após o ensino dos mesmos conteúdos.

Os participantes da pesquisa foram selecionados segundo dois critérios: a devolutiva do termo de consentimento livre e esclarecido assinado pelo responsável, e terem participado das aulas entregando, no mínimo dez das onze atividades da Sequência de Atividades desenvolvida com a turma.

Com base nesses critérios tivemos 20 alunos participantes oriundos da Turma 1 e 16 da Turma 2. A escolha da Turma 1 para utilizar o GeoGebra durante o ensino dos conteúdos foi decidida ao acaso.

4.4 Lócus de realização da Pesquisa

A unidade escolar foi escolhida entre as 70 escolas que fazem parte da Diretoria de Ensino de Taboão da Serra, onde, segundo dados do seu próprio site, possui sob sua administração 27 escolas localizadas no município de Taboão e 43 escolas localizadas no município de Embu das Artes.

Para escolha desta unidade utilizamos alguns critérios. Primeiramente definimos o município, uma vez que a Diretoria de Ensino abrange dois municípios, sendo a pesquisadora professora locada no município de Taboão da Serra, escolheu-se este município. O segundo critério foi a existência da sala do Acessa Escola funcionando e possuir classes de 3º ano do Ensino Médio. O terceiro critério foi a localização da escola em relação ao seu entorno, quanto aos índices de criminalidade como depredação de veículos, assaltos e furtos. Como quarto e último critério, a aceitação da aplicação da pesquisa por parte da direção e do professor.

Devido a tais fatos a escolha do local para aplicação da pesquisa, e consequentemente, dos participantes se caracteriza por acessibilidade ou conveniência, já que tínhamos uma lista de escolas que poderiam ser lócus da pesquisa, mas ao primeiro contato com a escola participante, obtivemos o retorno favorável, não havendo motivos para continuarmos a busca.

Utilizamos os recursos presentes da sala do Acessa Escola, que faz parte da estrutura arquitetônica da unidade escolar. Neste contexto, usamos o espaço físico da sala do Acessa Escola e das salas de aula.

A sala do Acessa Escola possui dezesseis computadores instalados em rede com acesso à internet, mesas e cadeiras que acomodam dezesseis pessoas. E para coordenar o uso das máquinas, há um aluno do Ensino Médio do período noturno, que é estagiário e administra o acesso aos computadores, sendo ele responsável por garantir o cumprimento das regras prescritas e a permanência do usuário nas dependências da sala.

As salas com computadores estão presentes segundo os dados do relatório de Gestão da Fundação para o Desenvolvimento da Educação – FDE, (2014) em 4217 escolas de 643 municípios do Estado de São Paulo, e foi implantado na rede estadual de ensino desde 04 de agosto de 2008, com mais de 75 mil computadores. Sua finalidade é promover a inclusão digital dando oportunidade aos alunos, professores e funcionários para utilizarem o computador.

4.5 Instrumentos

Os instrumentos de coleta de dados utilizados foram: o questionário/perfil do participante, o Pré-Teste, Pós-Teste, cinco atividades da sequência, uma atividade avaliativa intermediária, uma atividade com exercícios do Caderno do Aluno, e os protocolos das observações.

4.5.1 Questionário

No questionário/perfil dos participantes (Apêndice C) há espaços para identificação como: escrita do nome, número de chamada e série, para fins de organização durante a aplicação da pesquisa. Além de idade, sexo e naturalidade, logo após destacam-se as sete questões formuladas sobre o tempo de utilização, a finalidade e o nível de conhecimento sobre o uso do computador. Questiona-se quanto a relação tecnologia e aprendizagem, verificando qual o grau de importância que o participante atribui para uma formação com a utilização do computador, sobre seus conhecimentos na utilização do *software* GeoGebra e quais as experiências que os educadores estão proporcionando em suas disciplinas ao introduzirem recursos tecnológicos ao conteúdo e ao aplicarem em sala de aula.

4.5.2 Pré-Teste

O Pré-Teste (Apêndice D) contém 10 questões. As duas primeiras, referem-se a localização de pontos no plano cartesiano, a terceira trata da distância entre pontos, a quarta e a quinta, do ponto médio. A mediana e o baricentro é o tema da sexta questão, já o alinhamento de três pontos é trabalhado na sétima e décima e a inclinação da reta na oitava e nona questões. Todas, com o objetivo de verificar quais habilidades os participantes já possuíam sobre o conteúdo, anteriormente à aplicação da sequência.

4.5.3 Pós-Teste

As questões do Pós-Teste (Apêndice L) foram semelhantes às questões do Pré-Teste quanto a quantidade e a apresentação dos conteúdos. A diferença ocorreu apenas em relação aos pontos localizados no plano cartesiano e aos valores dos pares ordenados, embora os números pertencessem ao mesmo conjunto numérico. As alterações nestes aspectos fizeram as respostas serem diferentes, mas a dinâmica das avaliações em relação ao texto e sua interpretação foram exatamente iguais.

Entretanto, o objetivo do Pós-Teste foi verificar a ocorrência da compreensão e entendimento de modo a exercerem a autonomia para realização das questões demonstrando que ocorreu o desenvolvimento das habilidades esperadas para cada uma das atividades e consequentemente um resultado satisfatório de aprendizagem.

O diferencial se apresenta ao final do processo da aplicação da sequência, em como estes indivíduos se comportaram em relação a aprendizagem se apropriando de recursos tecnológicos usuais ou com recursos tecnológicos digitais, em específico, o *software* GeoGebra; e em quais aspectos o recurso tecnológico foi favorável a aprendizagem.

4.5.4 Atividades 1, 2, 3, 4, 5

A atividade 1 (Apêndice E), composta por sete questões, possuiu como objetivos identificar pares ordenados representados no plano cartesiano e localizar coordenadas no plano com o gráfico cartesiano sobre o mapa da cidade de São Paulo, que se apresentou dividido por regiões: central, norte, sul, oeste e leste. A atividade integrou dados reais como nome de bairros e locais conhecidos na cidade pelo público em geral, com as representações de gráfico cartesianas.

A atividade 2 (Apêndice F) foi elaborada com seis questões sendo a primeira composta por doze pares de coordenadas para serem localizados no plano cartesiano e traçados seus respectivos segmentos. A segunda questão foi direcionada ao cálculo da medida do segmento com a proposta de verificação dos resultados observando a distância entre os valores presentes nos eixos. Já as questões seguintes trataram dos segmentos verticais, horizontais e inclinados onde foi sugerido que o participante observasse os valores das coordenadas e verificasse se havia relações entre os dados numéricos e a posição relativa do segmento. Houve também um espaço denominado “para refletir” sobre como associar o Teorema de Pitágoras aos cálculos da medida dos segmentos inclinados, não sendo uma questão em específico, mas um tópico introdutório para a próxima atividade da sequência.

A atividade 3 (Apêndice G) iniciou-se com a relação entre a medida dos segmentos inclinados e o Teorema de Pitágoras, resultando na construção de um triângulo retângulo, onde os catetos foram os segmentos verticais e ou horizontais e a hipotenusa, o segmento inclinado. A atividade foi totalizada em sete questões que solicitavam o cálculo da distância entre dois pontos por meio da Fórmula e do Teorema de Pitágoras.

A atividade 4 (Apêndice H) possuía oito questões que tratavam do ponto médio, mediana e baricentro. Por meio de repetidas, porém, diversificadas localizações de segmentos no plano cartesiano e suas observações quanto a movimentação dos valores numéricos dos seus pontos extremos e do ponto médio, foi pedido para que o participante representasse de forma geométrica e buscasse uma forma para generalizar o cálculo do ponto médio. Ao ser identificada a forma genérica ou fórmula na sexta questão, houve a necessidade de calcular o ponto médio.

As duas últimas questões da atividade sugeriram uma pesquisa para localizar a definição da mediana e do baricentro de um triângulo, a representação geométrica das medianas e do baricentro, além do cálculo do baricentro.

A atividade 5 (Apêndice I), composta por quatro questões, trataram do tema alinhamento de três pontos com o objetivo de identificar por meio de representações distintas a existência de alinhamentos.

4.5.5 Avaliação Intermediária

A avaliação intermediária (Apêndice J) foi composta de cinco questões, todas dependendo da imagem do mapa com os indicadores das estações do metrô sobre o plano cartesiano e da problematização. E uma sexta questão pedindo ao participante que expressasse comentários sobre a aplicação da sequência, identificando os pontos positivos, negativos, sugestões e reclamações, escrevendo espontaneamente a sua opinião.

Esta avaliação continha questões que compreendiam o conteúdo do primeiro módulo, a saber: localização, distância entre dois pontos, ponto médio, mediana e baricentro.

Quanto ao alinhamento de três pontos e inclinação foram conteúdos pertencentes ao segundo módulo.

4.5.6 Exercício

Para cada módulo realizamos um recorte do Caderno do Aluno e os incluímos no Anexo A (Exercício 1). Estes recortes foram tratados na pesquisa como exercícios, com o objetivo de promover questionamentos e inserir perguntas em um contexto que envolvesse todos os conteúdos pertinentes a cada módulo. Porém, devido à baixa frequência dos participantes no período da realização do Exercício 2, o aplicamos, mas, não o consideramos como instrumento da pesquisa.

Para o Exercício 1, sobre o primeiro módulo, foram selecionadas duas questões: a primeira exigia a identificação de dois pares de coordenadas e solicitava que, por meio do cálculo algébrico, fosse representada a distância entre os dois pontos. A segunda questão solicitava a representação de pontos no sistema de coordenadas inclusive os pontos médios dos segmentos e a determinação das coordenadas destes pontos médios em pares ordenados. Além disso, fizeram um comparativo entre as medidas das distâncias entre dois segmentos, verificando se a medida de um segmento compreendia o dobro da medida do outro segmento.

4.5.7 Protocolo das Observações

As observações foram realizadas inicialmente no espaço físico comum destinado às salas de aula e posteriormente na sala do Acessa Escola. Observamos o comportamento dos alunos em cada módulo quanto ao relacionamento das duplas, a interação com o computador, as reações na realização das atividades, a forma de resolução dos participantes em algumas atividades e o tempo destinado a cada atividade, após cada aula ministrada nas duas turmas. Desta forma, por ser uma sequência, utilizamos onze instrumentos para coleta de dados.

4.6 Materiais

Para a elaboração da Sequência de Atividades aplicadas, consultamos o Currículo do Estado de São Paulo (2012a) e um livro didático (BARROSO, 2010) com a finalidade de obtermos informações sobre as definições, propriedades e fórmulas inerentes ao conteúdo de Geometria Analítica. Instituímos o GeoGebra e o e-mail como recursos às aulas e planejamos a estratégia para sua aplicação.

Desenvolvido em 2008 por meio da Coordenadoria de Gestão da Educação Básica, o Currículo do Estado de São Paulo foi elaborado para apoiar o trabalho do professor em sala de aula. Este documento pedagógico surge por intermédio de levantamentos do acervo documental e técnico pedagógico e de consultas às escolas e professores para identificar e sistematizar boas práticas, com o objetivo, de criar um currículo de base comum de conhecimentos e de competências para que as escolas públicas estaduais funcionem como uma rede.

De forma complementar para auxiliar o Currículo, temos um conjunto de documentos com orientações para a gestão do Currículo escolar, intitulado Caderno do Gestor, direcionado aos professores coordenadores, diretores, professores coordenadores dos núcleos pedagógicos e supervisores. Com a finalidade específica de estimular e orientar a implementação do Currículo, além, do Caderno do Gestor, temos outro conjunto de documentos específicos para professores e alunos: os Cadernos do Professor e do Aluno, organizados por disciplina, série/ano e bimestre (SÃO PAULO, 2012a).

No currículo do Estado de São Paulo, de forma geral é priorizada a competência leitora e escritora às áreas do conhecimento. A esta competência se vincula todas as outras aqui relacionadas como: a “capacidade de expressão pessoal, de compreensão de fenômenos, de argumentação consistente, de tomada de decisões consciente e refletida, de problematização e enraizamento dos conteúdos estudados em diferentes contextos e imaginação de situações novas.” (SÃO PAULO, 2012a, p.35).

As competências em destaque são para todas as áreas do conhecimento incluindo a área de Matemática e Suas Tecnologias. Estas estão vinculadas às atividades da disciplina de Matemática e aos seus conteúdos, que são articuladas de modo a desenvolver as competências individuais, que podem ser trabalhadas segundo as orientações citadas em São Paulo (2012a, p.54) da seguinte forma:

- **Capacidade de expressão**, que pode ser avaliada por meio da produção de registros, relatórios, trabalhos orais e/ou escritos etc.;
- **Capacidade de compreensão**, de elaboração de resumos, de sínteses, de mapas, da explicação de algoritmos etc.;
- **Capacidade de argumentação**, de construção de analises, justificativas de procedimentos, demonstrações etc.;
- **Capacidade propositiva**, de ir além dos diagnósticos e intervir na realidade de modo responsável e solidário;
- **Capacidade de contextualizar**, de estabelecer relações entre os conceitos e teorias estudados e as situações que lhes dão vida e consistência;
- **Capacidade de abstrair**, de imaginar situações fictícias, de projetar situações ainda não existentes.

A relação competência conteúdo é intermediada pela habilidade, mantendo estreitos laços que funcionam como indicadores para o ensino. Estes conteúdos são apresentados por meio de situações de aprendizagens organizadas por série/ano possuindo suas habilidades e competências destinadas ao desenvolvimento do ensino para obtenção da aprendizagem. Podemos verificar a relação habilidades, conteúdos e bimestres, na figura 8, que é um recorte dos conteúdos indicados no Currículo para cada série/ano.

Figura 8 – Conteúdos e habilidades para o 1º bimestre do 3º ano do Ensino Médio

3ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º Bimestre	**Geometria/Relações** Geometria analítica • Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos • Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares • Ponto e reta: distância • Circunferência: equação • Reta e circunferência: posições relativas • Cônicas: noções, equações, aplicações	• Saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações • Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas • Compreender a representação de regiões do plano por meio de inequações lineares • Saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares • Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas

Fonte: Adaptado (SÃO PAULO, 2012a, p.19)

Os volumes dos Cadernos obedecem ao regime de semestralidade, e o conteúdo da figura 8 se apresenta nas páginas iniciais do volume 1 do Caderno do Professor e do Aluno, destinado ao terceiro ano do ensino médio, indicado conforme cronograma, a ser aplicado no primeiro bimestre. Dessa forma, Geometria Analítica deve ser trabalhada no início do ano letivo.

Este recorte traz em linhas gerais o conteúdo de Geometria Analítica e as habilidades básicas que devem ser desenvolvidas ao serem trabalhadas as situações de aprendizagens presentes nos Cadernos do Professor e do Aluno.

Estas situações de aprendizagem estão distribuídas das páginas doze a cinquenta e nove, no Caderno do Professor, em quatro temas intitulados como: 1- A geometria e o método das coordenadas, 2- A reta, a inclinação e a proporcionalidade, 3- Problemas lineares – máximos e mínimos e 4- Circunferências e cônicas: significados, equações, aplicações. Já no Caderno do Aluno, os temas estão distribuídos da página cinco até a cinquenta.

A presente pesquisa não tem por objetivo tratar de todo o conteúdo que o Currículo destina ao 1º bimestre, pois a escolha tornaria a pesquisa demasiadamente extensa, dificultando, entre outros aspectos, a própria autorização para sua aplicação. Trabalhamos apenas o primeiro item da figura 8, “Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos. ” (SÃO PAULO 2012a, p.69).

Estes conteúdos no Caderno do Professor (2014) se encontram na Situação de Aprendizagem1 com o título “A Geometria e o Método das Coordenadas”, totalizando dez páginas distribuídas com o roteiro para aplicação da Situação de Aprendizagem1 e as considerações sobre a avaliação. Quanto ao Caderno do Aluno (2012b), a Situação de Aprendizagem 1 é desenvolvida entre as páginas cinco e dezoito, com seções intituladas por “Você Aprendeu?” e “Lição de Casa” com quatorze questões, havendo duas interrupções. A primeira ocorre entre as questões sete e oito com a proposta de um desafio que trata da distância de um ponto a uma reta, assunto que é novamente abordado na última questão. E a segunda, ocorre entre as questões dez e doze, onde os autores separaram a questão onze destacando-a como lição de casa. Destas quatorze questões, selecionamos para a nossa sequência as questões 1-a, 1-b, 10-a, 11-a, 11-c, 12-a.

Os apontamentos do Currículo indicam que, para a série/ano, a parte do conteúdo que trabalhamos neste estudo exige localização de pontos, realizando a identificação de suas respectivas coordenadas no plano cartesiano; representação dos pontos no plano cartesiano, registrando suas representações em coordenadas escritas na forma numérica; mensuração e cálculos de distâncias entre objetos geométricos localizados no plano cartesiano; definições realizadas de forma escrita ou oral sobre as observações ocorridas nas movimentações de pontos, segmentos de retas e retas; construções e análise de segmentos de retas através de interpretação de situações problema; verificação de pontos colineares no plano cartesiano utilizando os registros de cálculo numérico e algébrico.

No Caderno do Professor, como sugestões e estratégias, os autores indicam introduzir como conteúdo a “retomada do uso de sistemas de coordenadas já iniciado na 6ª série/7ºano do Ensino Fundamental e apresentação de problemas geométricos simples, que podem ser resolvidos por meio da linguagem das coordenadas. ” (SÃO PAULO, 2014, p.12).

Quanto ao livro didático, adicionamos a coleção Conexões com a Matemática como mais um recurso pedagógico que nos proporcionou o acesso às definições, propriedades, fórmulas, exemplos e exercícios. Este inicia as apresentações dos conteúdos com situações contextualizadas, textos teóricos, sugestões para leituras e explora a teoria intercalando exercícios resolvidos e exercícios propostos. Há também o guia do professor que traz, entre outros aspectos, sugestões para consultas em livros, publicações oficiais, artigos, revistas e periódicos.

Os temas abordados nos Cadernos constam no livro didático ocupando dezesseis páginas do quarto capítulo que inicia com ilustrações no sistema de coordenadas, referindo-se à construção de Brasília e o método de localização de pontos por coordenadas, compreendido como uma evolução da proposta de René Descartes.

Assim, como a representação de Brasília é exemplificada por imagens de quarteirões, há outro exemplo contextualizado com a imagem do sistema de coordenadas onde o eixo x é representado pelo sentido Norte-Sul e o eixo y o sentido Leste-Oeste. Essas, entre outras aplicações, ganharam destaque e foram citadas na aula introdutória durante a aplicação da sequência por poderem ser utilizadas com exemplificações mais reais e presentes na sociedade atual.

No livro também nos atentamos para as definições e fórmulas, retomando alguns dos trabalhos de séries anteriores como o direcionamento dos eixos, a forma que estão dispostos os quadrantes, a localização dos pontos no plano e sua representação em pares de coordenadas. Esses assuntos se apresentam no livro em textos, em gráficos cartesianos, em três exercícios resolvidos e em nove exercícios propostos.

A conversão do registro de representação gráfico cartesiano para a representação de sistemas de escrita numérica (DUVAL, 2013) foi o foco principal dos exercícios. Alguns exercícios tratavam do cálculo algébrico para identificar valores e expressá-los em abscissas e ordenadas.

No tema sobre distância entre dois pontos são apresentados quatro exercícios resolvidos e dezesseis exercícios propostos, retomando o exemplo das páginas iniciais e utilizando o Teorema de Pitágoras para calcular a distância que o helicóptero está em relação às pessoas a serem resgatadas, exemplo que após ser resolvido serve como início para desenvolvimento da fórmula para o cálculo da distância. Os exercícios não se apresentam em situações problemas, são elaborados de modo a envolverem a geometria dos triângulos e alguns quadriláteros, como o trapézio, no sentido de obter a medida das distâncias dos segmentos das diagonais das figuras planas, seus perímetros e os valores das coordenadas de pontos equidistantes.

Quando o assunto é ponto médio de um segmento de reta, o exemplo inicial é um segmento escrito no plano cartesiano com os valores dos eixos na forma algébrica em que ocorrem as observações e as relações com o Teorema de Tales. Uma vez especificada a fórmula do ponto médio nos três exercícios resolvidos que seguem, são introduzidos os significados de mediana e de baricentro e sua fórmula, e na sequência temos treze exercícios propostos. As condições de alinhamento de três pontos assemelham-se a forma como é exemplificado o ponto médio, porém a relação para determinar o alinhamento é obtida pela regra de Sarrus utilizada para calcular o determinante de matrizes. Para este tema são apresentados dois exercícios resolvidos e onze exercícios propostos.

A inclinação da reta é trabalhada junto com o coeficiente angular de uma reta por meio do cálculo da tangente e pela fórmula da inclinação com apenas dois exercícios resolvidos. A relação inclinação e valores da tangente do ângulo é apresentada com exemplos e a fórmula da inclinação é representada por gráfico cartesiano e demonstrada algebricamente.

No livro não há a relação entre o cálculo da inclinação da reta e o alinhamento de três pontos, como ocorreu na sequência didática. O coeficiente angular da reta e o cálculo da inclinação utilizando o valor da tangente do ângulo não foi trabalhado na sequência, porque não houve tempo para realizarmos esta atividade que seria a de número seis.

Nos Cadernos do Professor e do Aluno, assim como no livro didático, ocorrem relações entre a Geometria e a Álgebra. Estes documentos se complementam e foram utilizados para a elaboração da sequência que passaremos a destacar.

Planejamos as aulas da sequência para os dois grupos de participantes. Porém, para a primeira turma, associamos o *software* GeoGebra, às atividades 1, 2, 3, 4 e 5, diferenciando a aplicação das atividades entre as turmas conforme o recurso e a metodologia. Para a segunda turma, utilizamos o GeoGebra com as atividades 7 e 8 que não foram instrumentos de coleta de dados para pesquisa.

Devido a quantidade de computadores na sala do Acessa Escola, optamos por trabalhar em duplas com as duas turmas, tanto na sala do Acessa como na sala de aula. Além dos dezesseis computadores que fazem parte do acervo da unidade escolar, por iniciativa própria, necessitamos complementar com mais dois computadores para viabilizar a aplicação da sequência. Apenas as avaliações foram feitas individualmente e sem nenhum tipo de consulta ou utilização do *software*, uma vez que as cinco atividades e os exercícios que foram instrumentos utilizados para trabalhar os conteúdos e as avaliações, serviram para verificar se houve aprendizagem.

Identificamos as ações da sequência da seguinte forma, conforme sua aplicação:

Questionário/Perfil do participante- QP;

Pré-Teste – PT1;

1 º Atividade –AT1- Localização;

2ª Atividade – AT2 - Distância entre dois pontos – segmentos verticais e horizontais;

3 ª Atividade –AT3 - Distância entre dois pontos – segmentos inclinados;

4ª Atividade –AT4 - Ponto Médio, Mediana e Baricentro;

EX1- Exercício do Caderno do Aluno;

AVI - Avaliação intermediária;

5ª Atividade –AT5- Alinhamento de três pontos e inclinação;

EX2- Exercício do Caderno do Aluno;

Pós-Teste – PT2.

As atividades 7 e 8 foram aplicadas apenas para a segunda turma e suas questões foram elaboradas de forma condensada de modo a garantir aos participantes a utilização do GeoGebra com as mesmas habilidades trabalhadas durante a sequência com a primeira turma.

7ª Atividade – Localização, distância entre dois pontos – segmentos verticais e horizontais, distância entre dois pontos – segmentos inclinados;

8ª Atividade - Ponto Médio, Mediana e Baricentro, Alinhamento de três pontos e inclinação.

Nessa sequência priorizamos a competência leitora e escritora com atividades impressas ou em arquivos enviados via correio eletrônico da sala. Esses recursos foram escolhidos com o objetivo de introduzir a leitura e interpretação de textos nas aulas de matemática, com ênfase na capacidade de compreensão de mapas, de explicações para aplicação de fórmulas, de imagens que representam percursos e de definições para tomada de decisões na escolha de qual operação realizar. A capacidade de expressão ocorreu por intermédio das respostas dissertativas, dos cálculos e dos questionamentos orais.

As aulas foram planejadas em dois módulos. No primeiro módulo utilizamos a AT1, AT2, AT3, AT4, EX1 e AVI. No segundo módulo, a AT5 e o EX2. Como a aplicação da sequência ocorreu em dois grupos distintos, tínhamos um planejamento de aula com objetivos gerais e específicos, conteúdos, cronograma e avaliações semelhantes, porém, os recursos e a metodologia foram diferenciados entre os grupos.

Quanto ao primeiro módulo, como objetivo geral e de modo sistemático no plano cartesiano, buscamos desenvolver representações de pontos, segmentos de reta, distância entre dois pontos, ponto médio do segmento, mediana e baricentro de um triângulo.

Como objetivos específicos, os alunos deveriam construir o plano cartesiano com os elementos numéricos do Conjunto dos Números Reais, representar pontos do plano cartesiano como coordenadas, representar as coordenadas dos pontos no plano cartesiano, traçar segmentos entre dois pontos, medir a distância dos segmentos por contagem das unidades na representação gráfica geométrica e por cálculo da forma algébrica para numérica, determinar o ponto médio do segmento utilizando a representação geométrica e algébrica, localizar o baricentro de um triângulo traçando as medianas e por meio de cálculos utilizando os registros de representação algébrico e numérico.

Para o segundo módulo tínhamos preparado a 5ª e a 6ª atividades. Porém, com a greve dos professores e apesar do professor da disciplina não participar do grupo grevistas, os alunos diminuíram a frequência, ocasionando a finalização sem a aplicação da 6ª atividade e da avaliação do módulo. Houve também baixa frequência no dia da realização do Exercício 2, pertencente ao segundo módulo, que tratava de alinhamento de três pontos e inclinação, as questões foram três. Com o mesmo enunciado da primeira questão do módulo anterior, os alunos deveriam calcular a inclinação do segmento formado por dois pares de coordenadas. Já na segunda questão, foi pedido aos participantes que mostrassem que os quatros pontos definidos e identificados por coordenadas eram vértices de um paralelogramo.

Na terceira questão foram apresentados três pares de coordenadas, com o terceiro par formado por um valor numérico na abscissa e uma letra na ordenada, sendo indagado ao participante o valor desta letra, de modo que os três pontos ficassem alinhados.

Iniciamos e concluímos o módulo com a atividade 5, cujo objetivo foi verificar se três pontos eram colineares. Finalizado o módulo, aplicamos o Pós-Teste, e para a segunda turma continuamos por mais quatro aulas, nas quais utilizamos o GeoGebra com outras atividades semelhantes às trabalhadas em sala.

Elaboramos o cronograma da intervenção, estimando a aplicação em aproximadamente quatro semanas, correspondendo inicialmente a vinte aulas para ambos os grupos e distribuímos nos módulos. Todavia, ao desenvolvermos a sequência, necessitamos de trinta e uma aulas, como apresentamos no Quadro 3.

Quadro 3 – Cronograma de realização da intervenção

Ação		Quantidade de aulas planejadas	Quantidade de aulas dadas
Questionário/Perfil dos participantes e Pré-teste		1	1
1º Módulo	1ª Atividade – Localização	2	2
	2ª Atividade – Distância entre dois pontos (segmentos horizontais e verticais)	1	3
	3ª Atividade – Distância entre dois pontos (segmentos inclinados)	1	3
	4ª Atividade – Ponto médio, mediana e baricentro	2	3
	Exercício do Caderno do Aluno	1	2
	1ª Atividade Avaliativa	1	3
2º Módulo	5ª Atividade – Alinhamento de três pontos e inclinação.	2	2
	6ª Atividade – Inclinação	1	Não ocorreu
	Exercício do Caderno do Aluno	1	3
	2ª Atividade Avaliativa	1	Não ocorreu
Pré-teste		2	4
Aulas adicionais	7 ª e 8ª Atividades	4	5
Total de aulas		20	31

Fonte: Autoria própria

Para o desenvolvimento das atividades do cronograma utilizamos dois grupos de recursos, os tecnológicos digitais, como o computador com acesso à internet, *software* GeoGebra e o *e-mail*, e os tecnológicos convencionais como papel quadriculado, régua, lápis, borracha e caneta.

4.7 Recursos Tecnológicos Digitais

Entre os recursos tecnológicos audiovisuais, lúdicos, musicais, textuais e da telemática, optamos pela telemática que é um conjunto de tecnologias resultante da junção da eletrônica, informática e das telecomunicações aplicados a sistemas de comunicação que possibilitam o processamento, a transmissão e o armazenamento de informações nos formatos de textos, imagens e sons.

Nesse âmbito, buscamos por intermédio da rede mundial de computadores – internet, recursos digitais que pudessem servir como auxiliadores para melhoria da aprendizagem de Geometria Analítica. Nesse aspecto, reportamo-nos ao *software* GeoGebra para realização de situações apresentadas em uma sequência de atividades, ao correio eletrônico - *e-mail*, para transmissão e armazenamento das atividades e suas soluções, e o contato entre a pesquisadora, o professor e os alunos. Utilizamos, além desses recursos tecnológicos digitais, alguns slides, referentes ao conteúdo, construídos no *PowerPoint* que faz parte do pacote *office* da *Microsoft*, instalado no computador e transmitido por imagem e textos através do projetor multimídia.

4.7.1 O GeoGebra

O *software* GeoGebra que abrange tópicos Matemáticos é classificado como livre e dinâmico. Livre, por permitir sua reprodução ou *download* sem a necessidade de obtenção de registros, sob forma de pagamento prévio ou pré-determinado. Dinâmico, por possuir uma plataforma que unifica o sistema de geometria dinâmico (DGS) com o sistema de computação algébrico (CAS). Elaborado por Markus Hohenwarter em 2001 na Universidade Austríaca de Salzburg.

O GeoGebra é um aplicativo que pode ser utilizado em ambiente escolar por todos os níveis de ensino por meio do modo de instalação denominado *Web Start*, que o disponibiliza para *download* sendo utilizado *offline*, ou *Applet Start*, que o disponibiliza sem a necessidade de instalação utilizando-o diretamente da *internet* (AGUIAR, 2011). Ele, reúne recursos que permitem aplicações na Geometria, na Álgebra, na Probabilidade, na Estatística e no Cálculo em um sistema dinâmico, com visualizações simultâneas de um mesmo objeto, fato que constatamos em nossa revisão da literatura. Além disso, se trata de um software que permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas como com funções, dando total possibilidade de construção por intermédio das suas ferramentas, da caixa de entrada e da planilha, movimentação e visualização simbólico numérica e simbólico algébrica, sendo o diferencial entre os outros softwares. Por ser construído em *Java* pode ser instalado em computadores com sistema *Windows*, *Linux* ou *Macintosh*, estando disponível para *download* na Internet no *site* http://www.geogebra.org/download (LIMA, 2013).

A versão do arquivo 5.0.119.0 do produto GeoGebra 5 está disponível em mais de 50 idiomas, inclusive em português, podendo ser instalado em *tablets* e *iPads*. É um arquivo do tipo aplicativo (.exe) com tamanho de 50.2 MB (52.658.528 bytes), com sistema que permite modificar, ler, executar e gravar.

Nos computadores da sala do Acessa Escola, por serem interligados a uma única rede, o tempo para instalação ultrapassou os cinco minutos.

O aplicativo possui várias disposições como a geométrica, a planilha de cálculos, a janela CAS, a janela 3D e a probabilidade, que podem ser dispostas de forma interligada em uma mesma página, diminuindo o seu tamanho, para dar espaço a outras janelas de disposições diferentes. No entanto, dependendo da atividade, como o campo visual das janelas fica reduzido poderá dificultar o estudo.

Como já mencionamos, optamos por utilizar apenas a disposição Álgebra que se apresenta em duas janelas: a algébrica e a de visualizações, e os seguintes ícones da barra de ferramentas: mover, ponto, ponto médio ou centro, reta, segmento, texto, mover janela de visualização, ampliar, reduzir e apagar.

Como o GeoGebra permite alterações, construções e simulações, utilizamo-lo como objeto pedagógico para o estudo e a aprendizagem numa abordagem instrucionista e ou construcionista (VALENTE, 1993), dependendo dos objetivos idealizados para as atividades das aulas.

4.7.2 O *E-mail*

Com o objetivo de salvar as atividades realizadas na sala do Acessa Escola, uma vez que os computadores ao serem desligados não armazenavam os arquivos salvos, abrimos uma conta no Gmail especificamente para este fim. O correio eletrônico – *e-mail,* assumiu o papel de transmissor e armazenador das informações.

As transmissões do *e-mail* para o computador da pesquisadora ocorreram no final de cada aula, sendo excluídas do *e-mail* ao finalizar os procedimentos de cópia dos arquivos.

As perguntas de todas as atividades foram impressas, mas as imagens inseridas no GeoGebra foram salvas e enviadas via *e-mail* para que os alunos pudessem responder as questões, fazendo suas observações e anotações.

Na Atividade 1, por exemplo, inserimos o mapa dos bairros da cidade de São Paulo. Esse arquivo foi aberto pelos alunos, e por meio de observações responderam a atividade na folha impressa. Já, para realizarem as atividades seguintes, houve a necessidade de resolverem as questões de forma intercalada na folha impressa e questões no GeoGebra. Para isso os alunos receberam a orientação de salvar na área de trabalho do computador e ao finalizar as atividades, enviar como anexo para o endereço eletrônico.

4.8 Procedimento de Coleta de Dados

O contato inicial com a gestora responsável pela unidade escolar ocorreu nos primeiros dias do mês de Fevereiro de 2015, via telefone. Nesta ocasião, agendamos uma reunião com a gestora e o professor responsável pelas turmas, na qual apresentamos a proposta para aplicação da pesquisa. Estabelecemos ao acaso a divisão das turmas indicando qual iria utilizar a sala do Acessa Escola na fase inicial da pesquisa e obtivemos a autorização da diretora (Apêndice A).

Por ser início do ano letivo, prevendo alterações nos horários das aulas e possíveis desencontros, a pedido do professor das turmas, prorrogamos para a última quinta-feira de Fevereiro o começo da aplicação da sequência, uma vez que a permanência em sala de aula estava condicionada ao horário das aulas do professor. Naquele período o professor por conveniência, realizou revisões do conteúdo de probabilidade, assunto visto nas semanas finais do 4º bimestre do 2º ano do Ensino Médio.

Após essa etapa, começamos a frequentar a unidade escolar todas as segundas, terças e quintas-feiras, seguindo o cronograma curricular do Estado para disciplina de Matemática, que compreende cinco aulas semanais com duração de cinquenta minutos cada aula. Inicialmente apresentamos aos alunos a proposta para aplicação da pesquisa e entregamos o termo de consentimento livre e esclarecido (Apêndice B) a ser assinado pelos responsáveis e entregue posteriormente. Entretanto, embora contivesse no documento esclarecimentos que os isentavam de quaisquer compromissos financeiros e sigilo quanto a divulgação dos seus dados, alguns participantes (por esquecimento ou receio por ser um documento que requeria assinatura e vinha de fontes alheias aos seus conhecimentos, ou por simplesmente não quererem colaborar com a pesquisadora) deixaram de entregar. Apesar disso, não houve recusa dos participantes em relação a realização das atividades em sala, pois, os conteúdos programados para a série/ano já eram do conhecimento dos alunos por meio do contrato didático estabelecido pelo professor na primeira aula do ano letivo e relembrado ao iniciarmos a aplicação da sequência, que teve duração mais extensa que o programado. A nossa previsão inicial para finalização da sequência compreendia quinze aulas, no entanto, necessitamos de vinte e seis aulas, excluindo a aula para aplicação do questionário/perfil dos participantes e a avaliação diagnóstica.

A diferença entre o previsto e o real deu-se por vários imprevistos, desde o horário do estagiário da sala do Acessa que diferia do novo horário do professor, questionamentos dos participantes que necessitaram de atendimento individualizado e faltas coletivas dos participantes por motivo de greve dos professores.

A partir da apresentação dos objetivos da pesquisa e do conteúdo programático, prosseguimos com a aplicação o questionário/perfil dos participantes (Apêndice C) e após isso, o recolhimento do instrumento, o Pré-Teste (Apêndice D). Ambos ocorreram na mesma aula com duração de cinquenta minutos e na presença do professor das turmas, que acompanhou todo o desenvolvimento da sequência. Estes instrumentos foram aplicados no mesmo dia, para as duas turmas, porém, em momentos diferentes.

Para elaboração e aplicação da sequência para Turma 1, fizemos uso de atividades com abordagens construcionista e instrucionista, que propõem o ensino com recursos informatizados, com o computador utilizado como objeto motivador de aprendizagem. Sendo na abordagem construcionista um auxiliador na construção do conhecimento e na instrucionista, transmissor de conhecimento (ALMEIDA, 2000).

Quanto à Turma 2, as atividades foram as mesmas da Turma 1, as quais aplicamos com recursos convencionais, como folha de papel quadriculada, régua, lápis e borracha. Entretanto, após o Pós-Teste esta turma também utilizou os computadores durante cinco aulas, realizando atividades referentes ao mesmo conteúdo e utilizando o mesmo *software*, no caso o GeoGebra.

O distanciamento em relação ao contato do grupo se deu com a finalidade de verificarmos a eficácia do recurso tecnológico em relação ao método convencional de aprendizagem. Embora haja distinção em relação aos momentos de utilização do recurso tecnológico digital na aplicação das atividades às turmas, trouxemos para ambas, diferentes registros de representações semióticas.

Finalizamos o primeiro módulo em treze aulas, o tempo estimado para este módulo era de sete aulas, mas como na primeira semana de aplicação tivemos desencontros entre o horário de trabalho do estagiário e as aulas para esta turma, necessitamos prorrogar por três aulas o início da utilização da sala do Acessa Escola, uma vez que a direção só autorizou o seu uso na presença do aluno responsável.

No final do primeiro módulo, aplicamos uma avaliação intermediária em três aulas. A realização efetiva da avaliação foi em duas aulas. A aula excedente foi ocasionada pelo fato de que durante as explicações e atividades não se tinha a presença de números decimais nas coordenadas cartesianas e por ocasião da avaliação estes valores estavam presentes, fato que dificultou a resolução, provocando questionamentos. Solucionamos o problema anulando a avaliação e transformando-a em exercício preparatório para outra avaliação intermediária (Apêndice J), dada na aula seguinte.

O módulo dois foi aplicado em cinco aulas. Para este módulo tivemos que cancelar a Atividade 6, o Exercício 2 e a Avaliação, devido à greve dos professores que proporcionou mudanças desde o final do primeiro módulo, quanto a frequência dos participantes. Os alunos começaram a faltar e o horário do professor foi modificado de última hora para adequar as aulas, conforme a presença dos professores e dos alunos. Diante dos imprevistos optamos por encerrar a sequência.

Ao término do segundo módulo, os participantes foram submetidos ao Pós-Teste (Apêndice K) em quatro aulas. Para esta avaliação havíamos previsto duas aulas, porém, no dia agendado para avaliação, a turma não compareceu por ser véspera de feriado e por alguns professores ainda estarem em greve. Dessa forma, finalizamos a sequência com a aplicação da avaliação que ocorreu após o feriado e com um número menor de participantes.

4.9 Procedimento de análise de dados

A partir do objetivo de identificar como o conteúdo Geometria Analítica é trabalhado no Currículo do Estado de São Paulo e no livro didático, analisando como o GeoGebra poderia contribuir para aprendizagem desse conteúdo, caracterizando os aspectos favoráveis da sua utilização com o intuito de responder ao problema da pesquisa, analisamos os instrumentos atribuindo notas as questões em todas as atividades, exercícios e avaliações.

Estes instrumentos foram corrigidos imediatamente após suas aplicações e entregues aos participantes com a finalidade de verificarem seus erros e acertos, possibilitando questionamentos e solucionando as possíveis dúvidas sobre o conteúdo.

As notas foram instituídas apenas para fins da pesquisa, com exceção da avaliação intermediária que teve sua nota utilizada pelo professor nos registros das turmas para fins de compor a nota bimestral dos alunos.

Em toda a sequência para ambas as turmas, sem distinção na quantidade e valores atribuídos a cada questão, foram especificadas notas de zero a dez correspondendo a somatória das questões por instrumento. As notas possíveis por questão em cada instrumento constam na Tabela 2.

Tabela 2 - Valores das questões por instrumento

Instrumentos/ Números das questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
PT1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
AT 1	1,0	1,0	1,0	1,0	2,0	2,0	2,0			
AT 2	3,0	3,0	1,0	1,0	1,0	1,0				
AT 3	1,0	1,0	1,0	2,0	2,0	2,0	1,0			
AT 4	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	2,0	1,0	2,0		
EX1	2,5	5,0	2,5							
AVI	2,0	1,0	2,0	3,0	2,0					
AT5	1,5 1,5 1,5	0,5	2,5	2,5						
PT2	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Fonte: Autoria própria

Em todos os instrumentos consideramos as questões parcialmente corretas e atribuímos valores fracionados em relação aos apresentados na tabela 2. Por exemplo, na primeira questão do Pré-Teste era para escrever as coordenadas cartesianas de três pontos distintos apresentados no plano cartesiano. Caso o participante respondesse corretamente apenas uma coordenada, o valor da questão seria 0,33, ou seja, cada coordenada correspondia a um terço do valor que consta na tabela. E assim fizemos com outras questões que nos permitiam fracionar os acertos ou erros resultantes das ações dos participantes na realização dos instrumentos.

As notas em cada avaliação foram cruzadas com outras variáveis tais como: habilidades e médias por questões. Utilizamos o *software* estatístico SPSS para gerar as tabelas de frequência de acertos por turmas, compararmos as médias e os desvios padrão, identificamos os valores mínimos e máximos, utilizando como nível de significância $\alpha = 0{,}05$ por ser o mais comum nas pesquisas sociais.

Relacionamos as notas por questões entre as avaliações, comparando as questões do Pré-Teste com as do Pós-Teste, com a finalidade de cruzar os dados entre as turmas.

Apresentamos a análise quanti-qualitativa, por questão, no questionário/perfil dos participantes no primeiro módulo e na Atividade 5. Identificamos qualitativamente quais as características ou habilidades que podiam ser atendidas satisfatoriamente em relação ao conteúdo trabalhado nesta pesquisa.

No próximo capítulo iremos descrever detalhadamente os procedimentos analisando os dados obtidos. Segundo Gil (2008), a interpretação dos dados associada as análises tem o objetivo de responder ao problema da pesquisa, cujos resultados devem ser organizados por categorias, codificações, tabulações, análises estatísticas, avaliações das generalizações obtidas e inferências de relações casuais. Nesse contexto, apresentaremos os dados, analisaremos seus resultados e caracterizaremos a aplicabilidade do *software*.

5 ANÁLISE DE DADOS

Analisamos neste capítulo, os dados obtidos por meio do Questionário, do Pré-Teste, da Sequência de Atividades, da Avaliação Intermediária e do Pós-Teste, com o objetivo de caracterizar em que medida o *software* GeoGebra auxilia a aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica. Esta análise foi realizada de modo quanti-qualitativo, no qual apresentamos o perfil dos participantes, o nível de conhecimento adquirido sobre o conteúdo com a aplicação da sequência e como o GeoGebra influenciou a aprendizagem dos participantes.

5.1 Perfil dos Participantes

Trabalhamos com duas turmas, formadas por meninas e meninos, cuja faixa etária variou entre dezesseis e dezessete anos, conforme Tabela 3.

Tabela 3: Distribuição dos participantes por turma, gênero e idade

Variáveis: Idade (em anos)	**Gênero da Turma 1**		**Gênero da Turma 2**		**Total**
	Meninas	**Meninos**	**Meninas**	**Meninos**	
16	7	3	4	5	19
17	5	5	3	4	17
Total	12	8	7	9	36

Fonte: Autoria própria

Assim, temos um total de trinta e seis participantes, sendo dezenove do gênero feminino e dezessete do gênero masculino, o que evidencia um equilíbrio na distribuição geral, ainda que a Turma 1 tenha 50% a mais de meninas.

Com relação a variável idade, observamos que as turmas estão dentro da margem esperada para finalizar a Educação Básica. Segundo a Lei nº 12 796, de 2013 que altera a Lei de Diretrizes e Bases do Ensino Nacional, a faixa etária esperada para realização do Ensino Básico compreende dos quatro aos dezessete anos de idade, o que demonstra a promoção dos participantes de ano/séries sem interrupções, por repetências ou evasões.

Segundo o professor, que trabalha na unidade escolar há dezoito anos, todos os participantes são seus alunos desde o 6º ano/5ª série do Ensino Fundamental e são moradores do bairro onde a escola está localizada. Fator relevante por evidenciar uma aprendizagem matemática com os mesmos parâmetros para todos os participantes, considerando a presença de um único professor desde o Ensino Fundamental. Complementando a informação, segundo os dados do Questionário/Perfil dos Participantes, 95% dos participantes são nascidos no próprio município ou no município vizinho, São Paulo.

Com o objetivo de identificarmos as relações existentes entre os participantes da pesquisa e a utilização dos computadores, além de tratarmos no questionário das variáveis de perfil, analisamos também, quatro questões com respostas alternativas, cujas variáveis estão em torno da utilização, da frequência, do local, da finalidade que os participantes destinam ao uso do computador e da opinião quanto à eficácia como recurso para a sua aprendizagem. Indagamos ainda, em três questões dissertativas, quanto aos conhecimentos prévios adquiridos em cursos na área computacional, sobre a utilização de recursos tecnológicos em aulas das disciplinas da grade curricular e verificamos se obtiveram contato com o *software* GeoGebra em ocasiões anteriores.

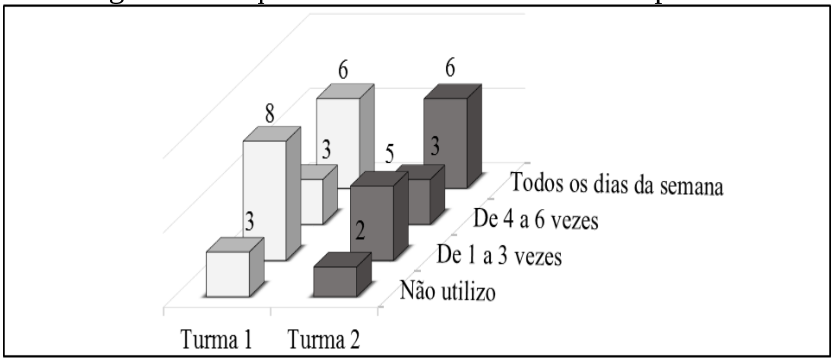
Quanto a utilização do computador, identificamos que 85% dos participantes da primeira turma faziam uso da ferramenta, sendo que 13 utilizavam em casa, 1 no trabalho, 1 em casa e no trabalho, 1 em casa e na *Lan House* e 1 em casa e outros (especificando que outros seria a casa de amigos). O percentual da segunda turma em relação a utilização do computador foi de 87,5%, com 10 participantes relatando que utilizavam o computador em casa, 3 em casa e no trabalho e 1 apenas no trabalho.

Verificamos que somando os dados das duas turmas temos, 80,55% dos participantes utilizando o computador em suas residências, fato que acreditamos permitir ao professor trabalhar com este recurso em atividades extraclasse, indicando aos 19,45% dos participantes que não possuíssem computador em suas residências, a utilização da sala do Acessa Escola no contra turno, uma vez que todos moram nas proximidades da escola.

Com relação a frequência de uso da ferramenta tecnológica, obtivemos índice de 58,7% entre aqueles que utilizam o computador, considerando os itens referentes ao uso de 4 a 6 vezes por semana e todos os dias. Atribuímos este índice de utilização do computador ao fato dos participantes possuírem acesso em suas residências.

Na Figura 9, ilustramos a quantidade de participantes em relação a utilização semanal do computador para ambas as turmas, e nela pudemos observar que aproximadamente 13,88 % dos participantes não utilizam computadores e os demais fazem seu uso alternadamente no decorrer da semana.

Figura 9: Frequência semanal de uso do computador



Fonte: Autoria própria

Com os dados da Figura 9, constatamos que 86,11% dos participantes eram usuários do recurso tecnológico. Ao investigarmos qual a finalidade que os fazia recorrer ao uso com tanta frequência, computamos o entretenimento associado ao estudo (38,88%), apenas entretenimento (22,22%) e o entretenimento vinculado ao trabalho (2,77%), e as três finalidades em conjunto (16,66%) como principais respostas.

A utilização da ferramenta tecnológica com enfoque principal para o entretenimento aliado ao baixo índice de conhecimento formal adquirido em cursos na área de informática, podem justificar o número elevado de participantes que possuíam computador em casa e o utilizavam quase todos os dias, mas, ao necessitarem enviar o arquivo com as soluções das atividades e acessarem o *e-mail* da sala, apresentaram dificuldades demonstrando não saber fazê-lo.

Observamos que possuir a ferramenta tecnológica não significa saber utilizá-la, tampouco, utilizá-la significa ter formação em cursos específicos da área. Tal afirmação é proveniente dos resultados que obtivemos ao questionarmos se os participantes possuíam algum curso na área de informática, resultando com respostas negativas em 45% dos participantes da primeira turma e 62,5% da segunda turma.

Os 44,4% que se declararam possuidores de cursos básicos na área de informática, citaram os relacionados ao Pacote *Office* da *Microsoft*, designados na página eletrônica do Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial – Senac, como informática para escritório: Formação *Office Professional, Excel, PowerPoint* e *Word*; e outros como *Web Design* e Redes. Com parcela inferior a 50%, estimamos que o baixo índice tenha, entre outros motivos, a frequência reduzida em relação a utilização dos conhecimentos provenientes da realização destes cursos nos ambientes residenciais e escolares.

Segundo os dados, a escola tem oportunizado a utilização de recursos tecnológicos digitais tais como, computadores e celulares, em aulas de diferentes disciplinas. As aulas de Língua Inglesa foram as mais indicadas por ambas as turmas e em sequência mencionaram as aulas de Física, Educação Física, Geografia, História, Artes e Matemática. Tais utilizações ocorreram por meio de apresentações em projetores multimídia, por videoconferências e em dispositivos móveis, como celulares e outros, com fins de pesquisa escolar.

A partir da afirmação escrita do participante, em que 26 relataram a utilização dos recursos tecnológicos digitais para pesquisa escolar, inferimos seu uso em atividades extraclasse e a utilização com frequência da sala do Acessa Escola.

Na primeira turma ocorreu um dado curioso quando oito participantes afirmaram que não haviam tido aulas com a utilização de recursos tecnológicos digitais, embora, estivessem juntos desde o Ensino Fundamental. Em contrapartida, 100% da segunda turma, alegaram fazer uso, porém, em nenhuma das turmas os participantes identificaram o conteúdo trabalhado em conjunto com o recurso.

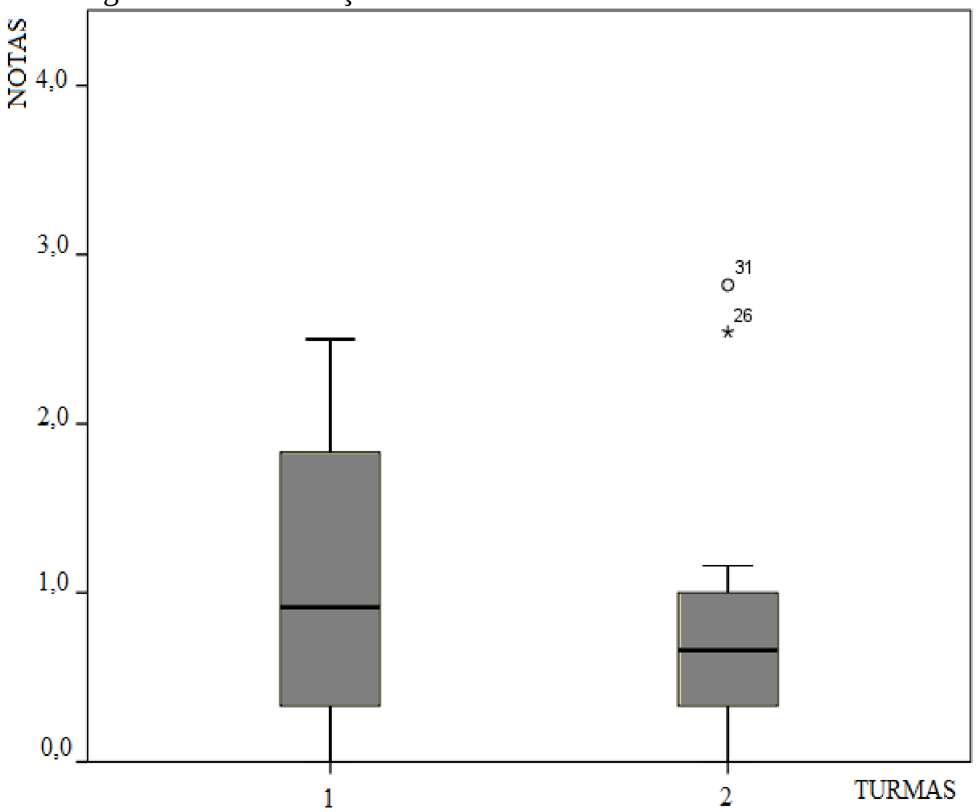
Outra resposta unânime, foi o desconhecimento sobre a existência e o uso do *software* GeoGebra. Quando perguntamos se os recursos tecnológicos digitais contribuíam como auxiliadores ao processo de aprendizagem, 80,5% concordaram plenamente e 16,6% parcialmente, com apenas um participante, não respondendo à questão. Como não houve respostas desfavoráveis ao uso de recursos tecnológicos como auxiliadores em suas aprendizagens, inferimos que os participantes consideraram conveniente o seu uso e que possivelmente os recursos acrescentaram-lhes conhecimentos em suas trajetórias de aprendizagens.

Em suma, tivemos turmas homogêneas em relação ao gênero, com idade entre 16 e 17 anos, morando nas proximidades da unidade escolar, estudando na mesma escola desde o início do segundo ciclo do Ensino Fundamental. Aproximadamente 80% possuía computadores em suas residências, utilizando em sua maioria de uma a três vezes semanais, para entretenimento, destacando-se em relação ao estudo e trabalho. Acreditavam que a inserção de recursos tecnológicos digitais auxiliava satisfatoriamente em suas aprendizagens e já haviam tido experiências na utilização destes recursos nas disciplinas das quatro áreas do conhecimento, a saber: Ciências da Natureza e Suas Tecnologias, Matemática e Suas Tecnologias, Linguagens, Códigos e Suas Tecnologias, Ciências Humanas e Suas Tecnologias, por meio de apresentações no *Power Point*, em videoconferências, em pesquisas e não conheciam o *software* GeoGebra.

5.2 Resultados do Pré -Teste

A avaliação foi organizada em dez questões, contendo a localização de pontos no plano cartesiano, as representações dos pontos em coordenadas cartesianas, o cálculo da distância entre dois pontos, a identificação do ponto médio de um segmento no plano cartesiano, o cálculo do ponto médio, a representação do baricentro no plano e seu cálculo desenvolvido a partir da fórmula, o alinhamento de três pontos e a inclinação da reta, com cada questão valendo um ponto. A Figura 10 ilustra as notas das duas turmas no Pré-Teste. Nela observamos que o desempenho da Turma 2 foi inferior e mais homogêneo que o da Turma 1. Contudo, a Turma 2 possuía dois alunos com notas superiores aos demais, que contribuíram para elevar a média da turma.

Figura 10 - Distribuição das notas do Pré-Teste das duas Turmas



Fonte: Autoria própria

Na primeira turma a nota variou entre 0,0 e 2,5, com moda de 0 e mediana de 0,915. Na segunda turma as notas foram de 0 a 1,16, com moda e mediana valendo 0,66, onde os participantes 26 e 31 destacaram-se do grupo com notas 2,5 e 2,82, respectivamente.

No total de participantes, um deixou todas as respostas em branco, oito ficaram com nota zero não obtendo êxito nas suas respostas, treze não conseguiram responder nenhuma questão por completo e os demais não ultrapassaram três pontos, significando que não houve participantes que tivessem solucionado três questões por completo. Dessa forma, temos médias esperadas, por tratar-se de um Pré-Teste de conteúdos que ainda seriam vistos. A distribuição das notas das turmas se apresenta de maneira mais completa na Tabela 4.

Tabela 4 – Distribuição das médias das notas das turmas no Pré-Teste

Turma	Média	Desvio padrão	Nota mínima	Nota máxima
1	1,06	0,85	0,00	2 , 50
2	0,91	0,82	0,00	2 , 82
Total	0,97	0,82	0,00	2 , 82

Fonte: Autoria própria

Apesar de o conteúdo no momento da aplicação não ser do conhecimento das turmas, esperávamos que ao menos as duas primeiras questões fossem realizadas com sucesso, devido ao fato de no 1º ano do Ensino Médio a localização de pontos no plano cartesiano e a representação das coordenadas dos pontos serem amplamente contemplados no Currículo do Estado de São Paulo, quando trabalhamos com o conteúdo de Funções.

Verificamos que entre todos os participantes apenas o número 13 pertencente a Turma 1 e o 26 representante da Turma 2, conseguiram resolver plenamente as questões 1 e 2, demonstrando nível satisfatório nas habilidades de localizar no plano as coordenadas do ponto e representar os pares ordenados, identificando os valores numéricos presentes no plano cartesiano, sugerindo relação com conteúdos anteriores ao solucionarem as questões e demonstrando que estavam aptos a realizarem conversões (DUVAL, 2013) dos registros de representação gráfico cartesiano para o sistema de escritas numérico ou no sentido inverso.

Como já identificamos no capítulo anterior, enumeramos os participantes do número 1 ao 20, como Turma 1, e do 21 ao 36, como integrantes da Turma 2.

Na questão 1, perguntamos quais as coordenadas dos pontos D, E e F de uma figura e 5% dos participantes da Turma 1 acertaram totalmente a questão, 15% não apresentaram respostas, 30% responderam parcialmente certo e 50% responderam totalmente errado.

Analisamos qualitativamente os protocolos e observamos que ocorreram basicamente dois tipos de erros, a inversão dos números correspondentes aos valores das ordenadas com os das abcissas, conforme apresentamos no extrato do participante 4 na Figura 11.

Figura 11 - Resposta do participante 4 a questão 1 do Pré -Teste

Fonte: Protocolo do participante 4

E a escrita das coordenadas com um único valor sem atentarem-se que, os valores das coordenadas são representados aos pares presentes no extrato da resposta do participante 18 na Figura 12.

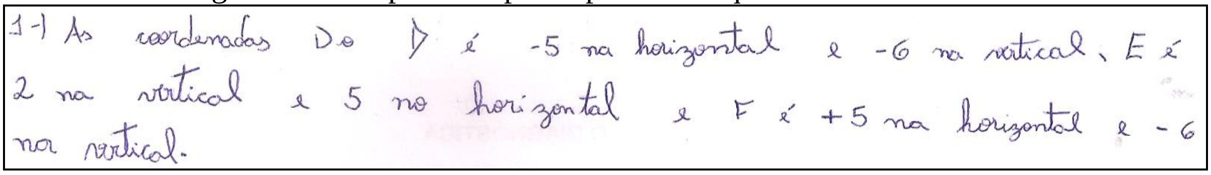
Figura 12 – Resposta do participante 18 a questão 1 do Pré - Teste

Fonte: Protocolo do participante 18

A resposta correta deveria ser D(-5, -6), E(5, 2) e F(5, -6). Porém, analisando as respostas da segunda turma verificamos que 12,5% acertaram completamente a questão, 43,75% acertaram parcialmente e 43,75% erraram totalmente. Os erros foram os mesmos cometidos pela Turma 1.

O participante 24 respondeu à questão descrevendo as coordenadas de acordo com as suas posições no plano, no sentido vertical e horizontal, convertendo do registro gráfico cartesiano para o sistema de escritas simbólico, conforme a Figura 13.

Figura 13 – Resposta do participante 24 a questão 1 do Pré -Teste


1-) As coordenadas Do D é -5 na horizontal e -6 na vertical, E é 2 na vertical e 5 no horizontal e F é +5 na horizontal e -6 na vertical.

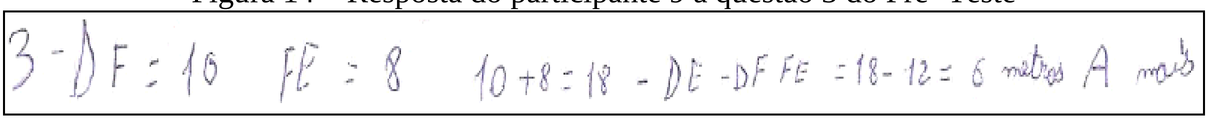
Fonte: Protocolo do participante 24

Já na questão 2, como o objetivo era localizar os pontos no plano cartesiano dados os pares de coordenadas A(-5, 2), B(-5, -6) e C(5, 2), houve também a inversão de ordenadas por abcissas conforme ocorrido na questão anterior. Os resultados foram os seguintes: na primeira turma, 10% dos participantes não apresentaram nenhuma solução, 15% acertaram, 20% erram parcialmente e 55% tentaram solucionar, mas não obtiveram êxito. Na segunda turma, 6,25% não solucionaram a questão, 12,5% acertaram totalmente, 31,25% acertaram parcialmente e 50% solucionaram de forma totalmente errada.

Na questão 3, buscamos verificar se os participantes possuíam a habilidade de calcular a medida de um segmento ou a distância entre dois pontos. Para esta questão esperava-se que, utilizassem o Teorema de Pitágoras, conteúdo presente no Currículo do Estado de São Paulo, destinado as séries finais do Ensino Fundamental, uma vez que ainda não tinham o conhecimento da fórmula da distância, nem havíamos tradado do cálculo da diferença entre o ponto final e o inicial de um segmento. Entretanto, para utilizarem o Teorema de Pitágoras precisavam observar as distâncias do segmento vertical e horizontal no plano cartesiano e encontrar o valor do segmento inclinado ou a hipotenusa do triângulo retângulo DÊF. Após isso, o cálculo da hipotenusa era necessário somar as medidas dos segmentos DF com o FE e subtrair do segmento DE.

Para esta questão não houve acertos em ambas as turmas, contudo, 15% dos participantes da Turma 1 e 12,5% da Turma 2, apresentaram indícios que evidenciam a tentativa de solucionarem a questão. O participante 9 observou que uma das formas de resolução, era contar as unidades que compunham os segmentos, escrevendo diretamente, sem cálculos, os resultados dos segmentos DF e FE, mas não conseguiu finalizar corretamente, como se observa na Figura 14.

Figura 14 – Resposta do participante 9 à questão 3 do Pré -Teste


3-) DF = 10 FE = 8 10+8 = 18 - DE -DF FE = 18-12 = 6 metros A mais

Fonte: Protocolo do participante 9

De fato, o segmento DF mede 10 metros e o segmento FE mede 8 metros. Mas, solucionando a questão por meio do Teorema de Pitágoras, com registros de representação em conversão do sistema algébrico para o numérico, com o segmento DE correspondendo a hipotenusa, o EF e o FD os catetos, temos uma distância de D para E valendo 12,806 metros. Portanto, partindo do ponto D para chegar no ponto E passando por F, percorria-se 18 metros e saindo do ponto D dirigindo-se diretamente ao E percorria-se 12,806 metros, ou 5,194 metros a menos.

Na questão 4, o participante deveria observar os pontos D e E que eram os extremos do segmento representado na figura, e identificar com a letra M, o ponto que compreendia a metade do segmento DE. Houve 30% de acertos pelos participantes da primeira turma e 6% de acertos para a segunda turma.

No entanto, observando os protocolos dos participantes, verificamos que 22% responderam da seguinte forma: (-2), estes perceberam que o meio do segmento estava sobre o número -2 do eixo y e transcreveram este valor como resposta. Não observaram que a pergunta pedia apenas para identificar o ponto médio M na figura, sendo desnecessário escrever o valor da ordenada e da abscissa.

Entre os participantes, 5,5% identificaram o ponto M na figura em locais distantes do próprio segmento DE, enquanto outros 5,5% responderam à questão da seguinte forma: (6, -5), fazendo-nos conjecturar que não houve a identificação entre a palavra segmento e a sua representação geométrica ou ocorreram dificuldades em relacionar a escrita a sua representação geométrica.

O objetivo da questão 5 era calcular as coordenadas dos pontos médios dos segmentos DF e FE, não havendo acertos para ambas as turmas. Porém, entre os participantes da primeira turma, 30% realizaram a questão apenas identificando corretamente os pontos médios N e H na figura, 65% deixaram a resposta da questão em branco e 5% responderam escrevendo os pares de coordenadas invertendo a abscissa e a ordenada da seguinte forma: (-6, 0) = N e (-2, 5) = H. As coordenadas dos pontos médios dos segmentos DF e FE eram respectivamente N(0, -6) e H(5, -2). Não podemos esquecer que a questão pedia para calcular o ponto médio e o cálculo neste momento ainda não havia sido ensinado.

Na segunda turma, 87,5% não responderam à questão 5. Os que responderam representando os pontos médios na imagem foram 6,25%, e ainda houve o participante 33 que respondeu identificando os pontos da seguinte forma: N = -6 e H = (6, -2), ele corresponde a 6,25% da turma. Nesta turma o participante 24 identificou os pontos médios N e H na imagem de forma correta, entretanto, era para ser calculada as coordenadas do ponto médio e não localizar as coordenadas do ponto médio no plano cartesiano.

Para a questão 6 não houve acertos e nem tentativas de resolução. Nesta questão havia as palavras mediana e baricentro que não eram do conhecimento das turmas. O objetivo da questão era traçar as medianas dos triângulos DEF e DEA e identificar no plano cartesiano os pontos correspondentes aos baricentros dos triângulos. Para responderem a esta questão os participantes necessitavam possuir conhecimento das suas definições.

Dados três pontos F, E e G representados em uma imagem, a questão 7 perguntava se estes pontos estavam alinhados e pedia para justificar a resposta. Na primeira turma, 55% não responderam, 25% erraram e 20%, acertaram. Na segunda turma, 62,5% não realizaram a questão, 25% erraram, e 12,5%, acertaram. Para solucioná-la era preciso conhecer o significado da palavra alinhado e o participante 14 respondeu à questão justificando conforme a Figura 15.

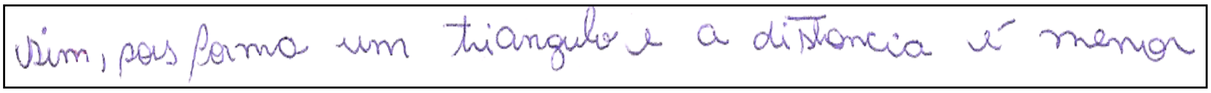
Figura 15 - Resposta do participante 14 à questão 7 do Pré -Teste


não porque somente o pontos F e E estão alinhados

Fonte: Protocolo do participante 14

Analisamos o extrato do participante 14, inferimos que houve compreensão da definição de alinhamento. Já o participante 20, percebeu que com os pontos F, E e G era possível formar um triângulo e o comparou com outras medidas não identificadas por ele (vejamos sua resposta na Figura 16). Dessa forma, inferimos que o participante relaciona o alinhamento de três pontos a formação de um triângulo.

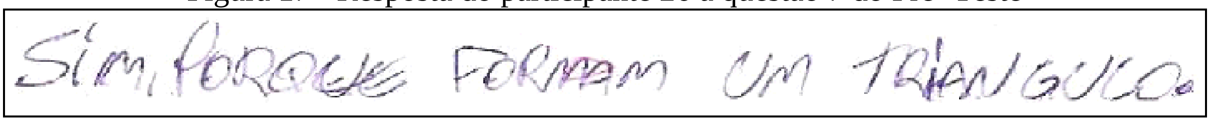
Figura 16 – Resposta do participante 20 à questão 7 do Pré-Teste


sim, pois forma um triangulo e a distancia é menor

Fonte: Protocolo do participante 20

Alguns participantes da Turma 2 também utilizaram a ideia de que se os pontos formam um triângulo é porque estão alinhados, não compreendendo o significado do termo alinhamento. Este fato foi evidenciado pelo extrato do protocolo do participante 26 na Figura 17.

Figura 17 - Resposta do participante 26 à questão 7 do Pré- Teste


SIM, PORQUE FORMAM UM TRIANGULO.

Fonte: Protocolo do participante 26

O participante 31, em sua justificativa afirma que os três pontos não seguem uma linha reta (Figura18), evidenciou que reconhecia o que é alinhamento e sabia identificar no plano cartesiano quando três pontos estão alinhados.

Figura 18 - Resposta do participante 31 à questão 7 do Pré -Teste


-Não, pois eles não seguem um reta.

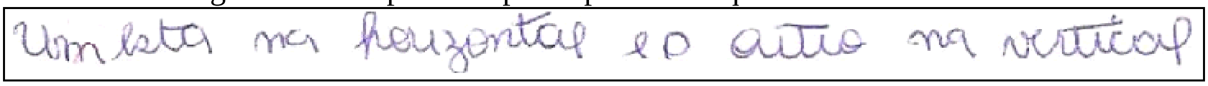
Fonte: Protocolo do participante 31

Para resolverem a questão 8, era necessário identificar os segmentos AD e FE no plano cartesiano, comparando seus coeficientes de inclinação ou angulares. Observando as suas posições no plano poderiam responder que os dois possuíam a mesma inclinação por serem paralelos, ou os dois segmentos ao cruzarem–se com o eixo x formam ângulos de 90 graus e por esta razão, possuíam a mesma inclinação.

Quanto aos resultados, os participantes das duas turmas não responderam, erraram ou responderam parcialmente sem escreverem a justificativa, estes percentuais são respectivamente, 55%, 30% e 15% para a Turma 1 e 62,5%, 25% e 12,5% para a Turma 2.

Esta é uma questão que exigia a localização correta do ponto A apresentado na questão 2 e também o conhecimento do termo segmento e comparações por intermédio das observações entre os segmentos. A Figura 19, exemplifica a resposta de um participante que não localizou o ponto A corretamente e traçou o segmento AD, deixando-o na horizontal. A partir de respostas como esta, ou outras semelhantes, podemos dizer que estes participantes compreendem que a inclinação dos segmentos está diretamente relacionada a direção que os segmentos apresentam no plano cartesiano.

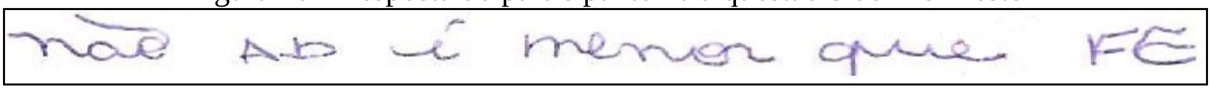
Figura 19 – Resposta do participante 35 à questão 8 do Pré -Teste



Fonte: Protocolo do participante 35

Outros participantes, conforme a Figura 20, relacionaram a inclinação dos segmentos às suas medidas.

Figura 20 - Resposta do participante 20 à questão 8 do Pré -Teste



Fonte: Protocolo do participante 20

Como o segmento AD era menor que o FE, então a inclinação era diferente. Dessa forma parece que para este participante se os segmentos possuírem medidas iguais, independentemente das suas posições no plano, possuirão a mesma inclinação. Para ele a medida do segmento está relacionada a inclinação.

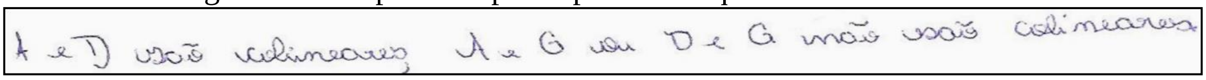
Na questão 9 pedia-se o valor da inclinação da reta **t**, dado um texto introdutório apresentando a equação geral da reta **y = m.x + n**, o seu coeficiente angular **m** e o coeficiente linear **n,** designando que o coeficiente angular **m** e a inclinação da reta possuíam o mesmo valor.

Caso os participantes relacionassem a inclinação da reta com os valores da tangente dos ângulos apresentados no Currículo do Estado de São Paulo para o 2º ano do Ensino Médio, haveriam de perceber que a reta **t** estava na horizontal em um ângulo de 90º com o eixo x. Assim, responderiam que não há valores, porque não há inclinação. Mediante a falta de relação entre o tema da questão e os conteúdos tratados em anos anteriores, não houve acerto para esta questão. 90% da Turma 1 deixou a questão sem resposta e 10% da turma tentou responder, porém, sem sucesso. Na Turma 2, foram 87,5% que não realizaram a questão e 12,5% que solucionaram, porém, sem êxito.

Finalizamos o Pré- Teste com a questão 10, onde explicamos o que são pontos colineares e pedimos para calcularem o determinante dos três pontos A(-5, 2), D(-5, -6) e G(-2, 5) com o objetivo de verificar se estes pontos eram colineares, sugerindo que realizassem a verificação por meio do cálculo do determinante de matrizes. Assim como em outras questões, recorremos a conhecimentos adquiridos em séries/anos anteriores. Então, se a habilidade de calcular determinantes fosse recordada pelos participantes, estes teriam conseguido responder que os pontos não eram colineares, pois o valor do determinante é diferente de zero.

Outra forma para solucionar a questão era localizarem os pontos no plano cartesiano, traçando segmentos e verificando que os três pontos não pertenciam ao mesmo segmento de reta e, por este motivo, não eram colineares. Porém, apenas o participante 10 acertou a questão escrevendo a resposta como consta na Figura 21.

Figura 21 - Resposta do participante 10 à questão 10 do Pré -Teste


A e D são colineares A e G ou D e G não são colineares

Fonte: Protocolo do participante 10

O participante não realizou o cálculo do determinante sugerido na questão, mas observou que os três pontos não eram colineares, sendo possível estarem no mesmo segmento de reta se fossem aos pares.

Como esperado, os participantes obtiveram médias aproximadas a 1 ponto, uma vez que no momento da aplicação do Pré-Teste não haviam estudado o conteúdo de Geometria Analítica. Mesmo nesse contexto de incertezas por não possuírem conhecimentos suficientes para solucionarem as questões de modo satisfatório, apresentaram indícios, com exceção da questão 6, de relações dos conhecimentos adquiridos anteriormente com o que estava sendo pedido, principalmente nas questões iniciais. Porém, não foi o suficiente. Assim, a proposta a que se destinou o Pré-Teste atingiu o seu objetivo ao identificarmos que os participantes não eram conhecedores do conteúdo aplicado na Sequência de Atividades, com diferença de 0,15 pontos entre as médias das duas turmas.

5.3 A Aplicação da Sequência

Iniciamos a sequência introduzindo em dois módulos o conteúdo apresentado em cinco atividades e um exercício do Caderno do Aluno, administrado em duplas e com o mínimo de aulas expositivas. Ao final do primeiro módulo, aplicamos uma Avaliação Intermediária e finalizada a sequência, o Pós-Teste, que contemplou todo o conteúdo.

5.3.1 Atividade 1

Iniciamos a aplicação da Sequência com a Atividade 1 que teve duração de duas aulas, com os participantes trabalhando em duplas, nas duas turmas. Durante 20 minutos em uma aula expositiva, apresentamos o plano cartesiano, seus quadrantes, a orientação dos seus eixos e a ordem que se apresentam os valores das coordenadas, identificando a sua utilização nos dias atuais e o matemático que é indicado no livro didático (BARROSO, 2010) como idealizador do sistema de coordenadas cartesianas. Menegotto e Lara (2011) fundamentam a aprendizagem dos seus grupos de participantes em um livro didático, assim como fizemos com a base teórica do conteúdo que ministramos nas aulas expositivas.

Na sala do Acessa Escola, utilizando o computador, a Turma 1 fez a leitura da atividade entregue em folha impressa e procedeu a sua realização. Percebendo que havia a necessidade do mapa dos bairros de São Paulo para solucionarem a Atividade 1, os participantes abriram o *e-mail* da sala fazendo o *download* deste arquivo e salvando-o, para utilizarem como fonte de consulta e local para as respostas da questão 6.

Ao finalizarem a atividade enviaram o arquivo com seus respectivos nomes na área destinada ao assunto da caixa do *e-mail* e entregaram a folha impressa. Assim, tivemos parte da atividade resolvida no arquivo e parte escrita na folha de sulfite. As aulas para a Turma 2 seguiram o mesmo procedimento explicativo inicial, porém a Atividade 1 foi realizada na sala de aula comum.

Para a Atividade 1 em uma abordagem instrucionista, com o computador servindo como instrumento de apoio ao tema de localização, esperávamos desenvolver as habilidades de localizar pontos no plano cartesiano e representar as coordenadas cartesianas dos pontos, trabalhando com sete questões e com o mapa dos bairros da cidade de São Paulo. Almeida (2014), investigou as mesmas habilidades em uma das suas atividades desenvolvidas com suas turmas do 3º ano do Ensino Médio, contextualizando uma situação problema com o mapa das cidades e capitais da Ásia.

Partimos da representação de figuras em perspectivas e inserimos o mapa como imagem de fundo sob o plano gráfico cartesiano no arquivo do GeoGebra como fez Almeida (2014), e os participantes realizaram conversões para o sistema de escritas nas questões 1, 2, 3 e 4 ao localizarem o quadrante e determinarem por escrito os nomes dos bairros ou a região a que pertenciam. Para a Turma 1 as perguntas estavam impressas e o mapa estava salvo no arquivo enviado via *e-mail*; para a Turma 2, as perguntas e o mapa foram impressos em folha de sulfite.

Na sobreposição do mapa no plano cartesiano, o marco zero da cidade, que é a Praça da Sé, ficou localizado no ponto de origem do plano. As zonas foram definidas por cores: a Zona Central ficou na cor amarela, a Zona Norte na cor verde claro, a Zona Leste na cor laranja, a Zona Sul na cor azul e a Zona Oeste na cor lilás. Os bairros foram definidos por números, iniciando no número 1 com o bairro da Barra Funda, pertencente a zona central e finalizando a legenda ao lado do mapa com o bairro da Vila Leopoldina, no número 96.

Na questão 5, em cada item do "a" ao "f", trouxemos algumas informações sobre os bairros e os localizamos em pontos no mapa, para que os participantes representassem suas coordenadas. Na questão 6 as coordenadas dos pontos foram escritas e pedimos para localizarem estes pontos escrevendo os nomes de alguns lugares importantes da cidade de São Paulo no plano cartesiano.

Na questão 7 os pontos já estavam sob o plano e pedimos para escreverem as suas coordenadas como nas questões 5, 6 e 7, onde alternamos localização de pontos com representações de coordenadas realizando conversões do sistema de escritas simbólico e numérico para o gráfico cartesiano. Na Tabela 5 apresentamos os resultados das médias e desvio padrão por turma e por questões da Atividade 1

Tabela 5 – Médias e desvio padrão das notas por turma e questões da Atividade 1

Turma	Medida	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	GERAL
1	**Média**	0,90	0,90	0,90	0,90	2,00	1,80	1,83	9,23
	DP	0,31	0,31	0,31	0,31	0,00	0,61	0,27	1,36
2	**Média**	0,75	0,87	0,87	0,00	1,31	1,05	1,09	5,95
	DP	0,45	0,34	0,34	0,00	0,65	0,28	0,89	2,42
GERAL	**Média**	0,83	0,88	0,88	0,50	1,69	1,46	1,50	7,77
	DP	0,37	0,32	0,32	0,51	0,55	0,62	0,71	2,49

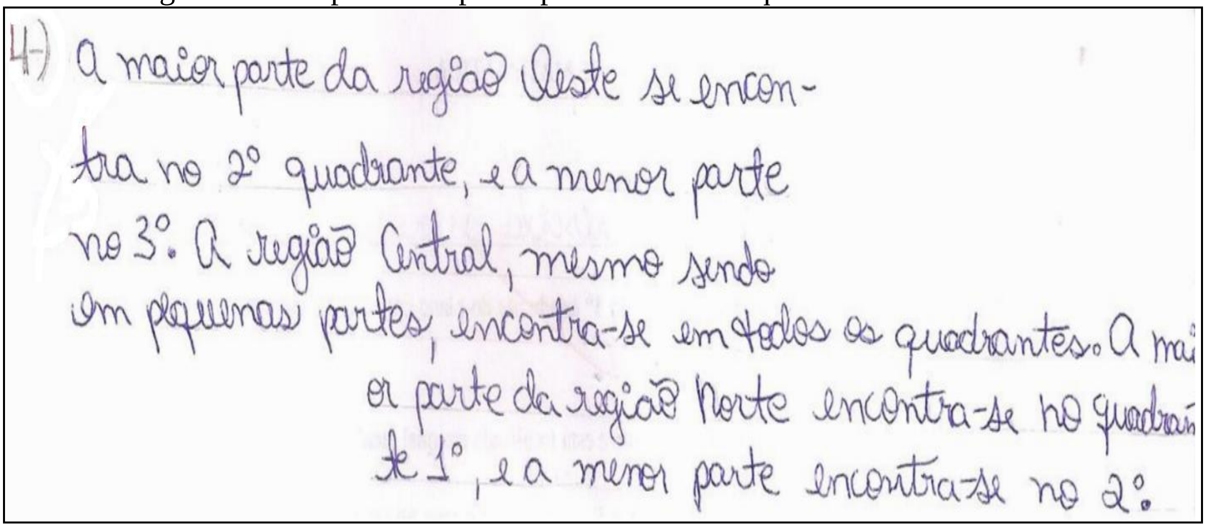
Fonte: Autoria própria

Observamos na Tabela 5 em um comparativo das médias por questões das turmas que a Turma 1, que realizou as atividades com o computador, apresentou um quadro melhor de notas em relação a Turma 2 em todas as questões, resultando em médias para a Atividade 1 de 9,23 para a primeira turma e 5,95 para a segunda.

Na questão 4 a média da Turma 2 foi 0. Os participantes explicaram que não entenderam o texto da questão que perguntava em qual quadrante se encontrava partes das regiões Oeste, Central e Norte de São Paulo. Esta questão requeria leitura da pergunta como todas as outras, e leitura da imagem, além do conhecimento sobre a disposição numérica determinada a cada quadrante.

O segundo quadrante era o único que abrangia as três regiões citadas na questão 4. Mas, os participantes da Turma 2 entenderam que era para identificar os quadrantes onde estavam localizadas cada uma das regiões. Vejamos um trecho na Figura 22 escrito pelos participantes 30 e 31.

Figura 22 - Resposta dos participantes 30 e 31 à questão 4 da Atividade 1


4-) A maior parte da região Oeste se encon-
tra no 2º quadrante, e a menor parte
no 3º. A região Central, mesmo sendo
em pequenas partes, encontra-se em todos os quadrantes. A mai
or parte da região Norte encontra-se no quadran
te 1º, e a menor parte encontra-se no 2º.

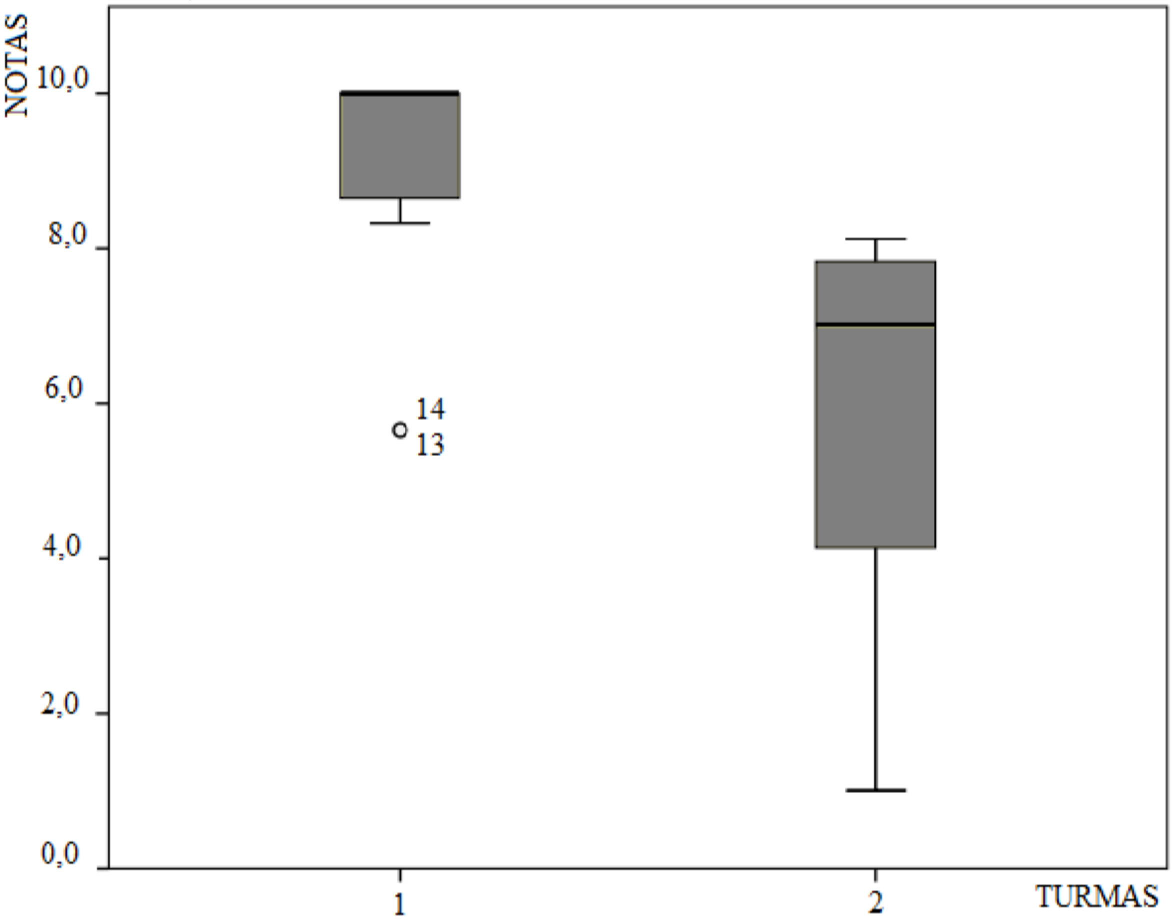
Fonte: Protocolo dos participantes 30 e 31

Como na pergunta a palavra quadrante estava escrita no singular e eram partes das regiões, entendemos que houve dificuldade na interpretação. No entanto, o texto da Figura 22 evidencia que os participantes sabiam identificar a ordem numérica dos quadrantes e relacionar a ordem aos nomes das regiões.

Considerada a divergência na interpretação da questão 4 e admitindo a média desta questão obtida pela Turma 1 semelhantemente à Turma 2, a média da segunda turma ficaria 6,85, distante da primeira turma em 2,38 pontos. A provável motivação para esta diferença ocorreu pela praticidade ao solucionarem a atividade utilizando as janelas algébrica, que possuía a representação numérica dos pares de coordenadas indicado por letras, e a de visualização, que continha o mapa e os pontos fixos no plano. A manipulação simultânea entre os pontos e suas coordenadas ocasionou aos participantes da Turma 1 acesso a informações que não são possíveis de serem obtidos durante a resolução com lápis e papel.

A Figura 23 apresenta o panorama geral de notas das turmas para a Atividade 1. Observamos que a Turma 1 obteve desempenho satisfatório com notas superiores a 8,5, exceto os participantes 13 e 14 que obtiveram notas inferiores a 6,0. Na Turma 2, o desempenho também foi satisfatório, com uma distribuição de notas entre 1,0 e 8,5, fazendo-nos entender que houve participantes com notas muito abaixo da média da turma. Comparando as duas turmas, a nota mínima da maioria dos participantes da Turma 1 é basicamente a nota máxima dos participantes da Turma 2, ou seja, 8,5.

Figura 23 - Distribuição das notas da Atividade 1 das duas Turmas



Fonte: Autoria própria

Os dados numéricos desta 1ª atividade da sequência foram consideravelmente maiores para a Turma 1, que apresentou resultados mais homogêneos em comparação com a Turma 2, indicando uma provável compreensão do conteúdo ao tema de localização de pontos e representação de pontos em coordenadas cartesianas, sugerindo maior entendimento com a utilização do GeoGebra. As notas dos participantes 13 e 14, conforme podemos observar na Figura 21, fizeram a média da Turma 1 diminuir. Estes participantes, segundo as observações da pesquisadora, por formarem dupla, apresentaram dificuldade de relacionamento e trabalho em equipe, tornando a realização da atividade mais morosa, fato que impediu a realização da questão 6.

Na Turma 2 não houve problemas entre seus integrantes, a dificuldade apresentada por alguns participantes ficou por conta da sobreposição da imagem do mapa, que ao serem reproduzidos, os valores dos eixos não ficaram nítidos. Mas, o problema foi solucionado durante a realização da atividade com as informações da pesquisadora as duplas de participantes.

Esta atividade requeria observações, dos valores nos eixos, dos bairros no mapa, da legenda e conhecimento da ordem que se apresenta os valores das abcissas e ordenadas. Nesse aspecto, realizá-la utilizando o GeoGebra facilitou porque o campo visual do *software* permite ampliar e reduzir a imagem, representar na janela algébrica as coordenadas dos pontos identificados na janela de visualização e promove a autocorreção, caso o participante fizesse a relação entre os resultados inseridos na folha impressa e os que apareceram nas janelas do *software*.

5.3.2 Atividade 2

A Atividade 2 foi desenvolvida em três aulas, sendo duas aulas seguidas em um dia e a terceira no dia seguinte. Inicialmente ao planejarmos a atividade tínhamos preparado a aula para ser aplicada em uma aula, mas necessitamos de aproximadamente 30 minutos para discutir a atividade anterior, principalmente a questão 4 com a Turma 2 e exemplificarmos as coordenadas de pontos que ficam sobre os eixos, definindo as suas localizações no plano. O restante da aula, foi destinado a orientações e recados do professor à turma sobre a Avaliação em Processo[2] que os participantes fariam na semana seguinte.

O momento foi oportuno às explicações porque, naquele dia a gestora ainda não tinha conversado com o aluno monitor para mudar o seu horário de trabalho das 8 horas, para as 7 horas da manhã, horário de início das aulas da turma.

Para evitar interpretações que pudessem prejudicar os participantes e como o objetivo principal em todas as áreas do conhecimento é o desenvolvimento da competência leitora e escritora, realizamos a leitura da Atividade 2 utilizando o final da aula anterior e cerca de 10 minutos da segunda aula. Assim, questionamos se estavam compreendendo o enunciado da questão e ouvimos ao menos um participante, esclarecer ao seu modo, o que compreendeu com a leitura.

[2] A avaliação em processo é uma avaliação bimestral padronizada, realizada em unidades escolares da rede estadual de ensino, com o objetivo de verificar o conhecimento dos alunos em conteúdos indicados no Currículo de bimestres anteriores. É aplicada a toda escola nas disciplinas de Português e Matemática, sendo uma em cada dia.

Dirigindo-nos a sala do Acessa Escola, iniciamos a aula sem o principal problema que tivemos na atividade anterior, a instalação do *software*. Segundo Baldini (2014), ao ser aplicada a sua pesquisa na sala de informática, também passou por problemas técnicos inclusive de instalação do *software*.

A orientação que recebemos do monitor da sala foi instalarmos o GeoGebra a cada vez que precisássemos utilizá-lo, porque ao desligarmos as máquinas tudo que salvamos seria deletado da memória. Como na Atividade 1 utilizamos quase 15 minutos só para concluirmos a instalação, isto passaria a ser um problema, principalmente nos dias que as aulas da turma iniciassem às 7 horas.

Após realizarmos um teste de instalação do *software* e reinício da máquina, observamos que o ícone de atalho salvo na área de trabalho não estava mais no local. Com o teste e a orientação do monitor, nos propusemos, a chegar sempre mais cedo para instalarmos o programa, uma vez que os participantes já haviam experimentado a situação de instalação. Entretanto, durante a instalação no período da Atividade 1, os participantes, angustiados com a lentidão para conclusão da instalação, pesquisaram nos aplicativos já instalados e verificaram que este *software* já estava entre os aplicativos disponibilizados da sala.

Enquanto os participantes da Turma 1 realizaram a atividade parcialmente no GeoGebra, os da Turma 2, além de utilizarem a folha impressa, também receberam folhas de papel quadriculado para construção dos eixos e dos segmentos horizontais e verticais. Esta construção para a Turma 1 foi diretamente no *software*, com os arquivos salvos e enviados via *e-mail*.

Como na atividade anterior, surgiram muitas perguntas e pedidos para verificarmos se estavam realizando corretamente a localização dos pontos. Respondidas as perguntas, alguns ainda confundiam ordenadas com abscissas e invertiam os valores das coordenadas. Por este motivo, na Atividade 2, questão 1, estavam presentes doze pares de coordenadas para serem localizados no plano e serem construídos segmentos entre eles.

A atividade era composta por seis questões em uma perspectiva construcionista, a primeira questão tratava da construção de segmentos a partir da localização das coordenadas no plano, na segunda pedíamos para calcularem a distância entre os pontos, utilizando a diferença entre os valores finais e os iniciais e em seguida pedíamos para realizarem a contagem nos eixos.

A leitura e interpretação da atividade, inteirando-se sobre o modo de resolução, foi o primeiro passo do ciclo descrição-execução-reflexão- depuração que Almeida (2000) destaca como ocorrido nas atividades construcionista. O *software* serviu como instrumento facilitador para a prática (execução) da observação na janela algébrica dos valores das coordenadas que estavam representando em forma de pontos. Ao observarem as coordenadas e compararem com os valores presentes na folha impressa, conseguiam perceber se estavam agindo corretamente (reflexão) e em caso de erros movimentavam os pontos para outro local no plano ou apagavam e recolocavam no plano (depuração) após analisarem em dupla, o porquê do erro.

Nesse aspecto, o GeoGebra possibilitou o ato de experimentação ao serem movimentados os pontos, algo que para a Turma 2 foi estático com o campo reduzidíssimo para a aprendizagem com tentativas e erros.

Na questão 2, o GeoGebra não auxiliou no desenvolvimento dos cálculos, uma vez que a habilidade nela apresentada, era a de calcular a medida dos segmentos. Mas, com as ferramentas do *software,* os participantes puderam confrontar seus resultados. Sabedores das respostas, analisaram qual o método e contaram as unidades entre os pontos, observaram que para estes segmentos que estavam posicionados horizontalmente e verticalmente no plano não havia a necessidade de realização de cálculos, apenas a contagem nos eixos era o suficiente para obterem as medidas dos segmentos.

Para a Turma 2, a questão 2 foi favorável ao desenvolvimento dos cálculos embora não possuíssem o recurso da resposta antes de calcularem. Mas ao passo que foram despertados para contarem as unidades nos eixos entre os pontos que representam os segmentos, ficaram atentos para conferirem as soluções sem a necessidade de realizarem perguntas a professora pesquisadora.

Nas questões 3, 4 e 5 o objetivo inicial foi fazer com que os participantes percebessem que segmentos horizontais possuíam os valores iguais no eixo do y e segmentos verticais possuem valores iguais no eixo do x, fato que faz zerar um dos valores ao ser aplicado o Teorema de Pitágoras ou a fórmula da distância entre dois pontos. A sexta questão foi elaborada para introduzir a terceira atividade, com o objetivo de escrever um exemplo de pares de coordenadas que ao traçarmos um segmento entre eles, o mesmo ficasse inclinado, e sugerir reflexão para associarem o Teorema de Pitágoras à fórmula do cálculo da distância entre dois pontos.

A Turma 2 alcançou resultados melhores que a Turma 1, devido a realização dos cálculos que foram desenvolvidos na questão 2. O GeoGebra pouco auxiliou a primeira turma nesta questão, apenas apresentou os resultados das medidas dos segmentos, mas não os ajudou a operar números e sinais. Podemos verificar na Tabela 6 que as médias das questões

2, 5 e 6 para a Turma 2 foram melhores, com médias por turmas para esta atividade de 7,32 para primeira e 7,76 para a segunda.

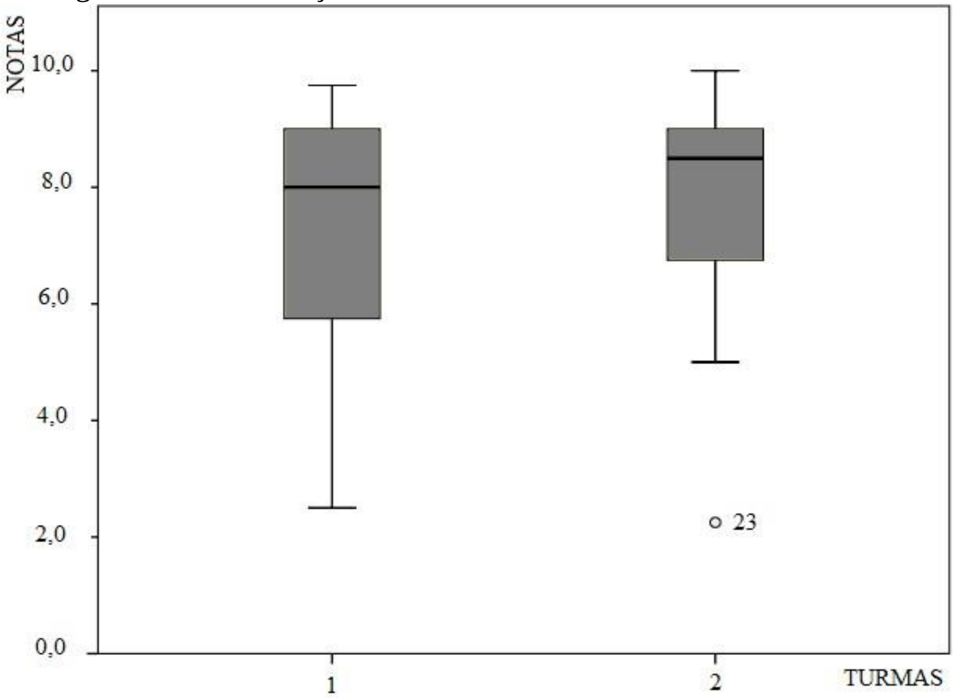
Tabela 6 – Médias e desvio padrão das notas por Turma e questões da Atividade 2

Turma	Medida	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	GERAL
1	**Média**	2,47	2,05	0,80	0,70	0,55	0,75	7,32
	DP	1,01	1,08	0,41	0,47	0,48	0,41	2,17
2	**Média**	2,40	2,64	0,75	0,50	0,59	0,87	7,76
	DP	0,77	0,73	0,45	0,52	0,45	0,34	2,03
Geral	**Média**	2,44	2,31	0,78	0,61	0,57	0,81	7,52
	DP	0,90	1,10	0,42	0,49	0,45	0,38	2,09

Fonte: Autoria própria

A Figura 24, mostra esta distribuição de pontos da Atividade 2 por turma. Na Turma 1, a distribuição ocorreu de forma heterogênea com valores mínimos de 2,50 e máximos de 9,75. Para a Turma 2, as notas entre os participantes foram mais aproximadas com valores variando entre 5 e 10 e mediana 8,5. Porém, a nota 2,25 do participante 23 fez a média da turma baixar, mas mesmo com esta desvantagem a Turma 2 ficou com 0,44 pontos a mais.

Figura 24 - Distribuição das notas da Atividade 2 das duas Turmas

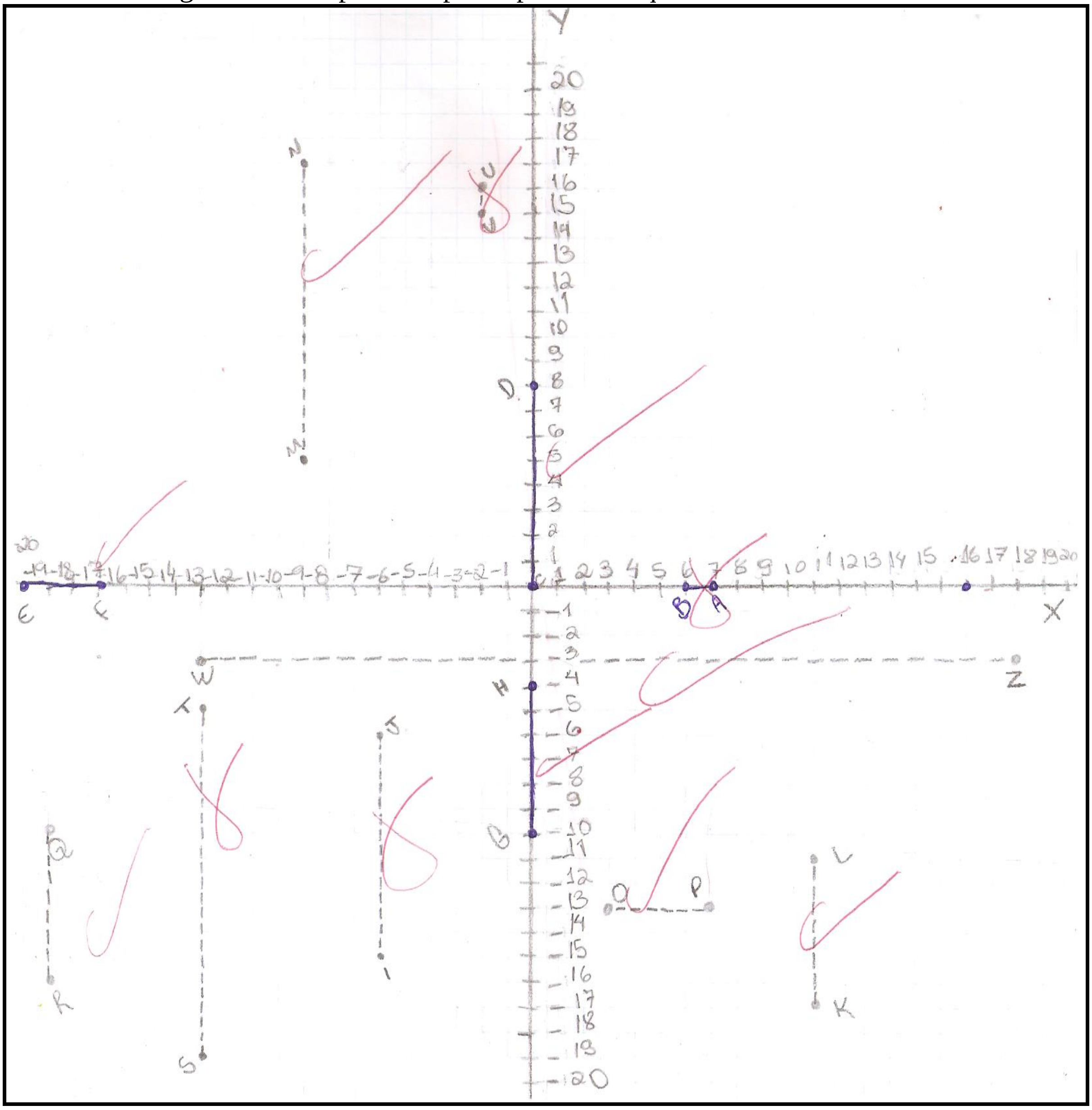


Fonte: Autoria própria

Conforme os dados do boxplot, nota do participante 23 ficou em torno de dois, e segundo as observações em sala de aula, este participante, além de possuir dificuldades na interpretação e nos cálculos com números inteiros, realizava atividades de outras disciplinas durante a aula de Matemática se distraindo mais facilmente que os outros participantes. Essas foram as prováveis razões que o fizeram não desenvolver as atividades completamente e como consequência o levou a uma nota inferior aos demais da sua turma.

Analisando os protocolos dos participantes, principalmente entre os integrantes da Turma 2, as dificuldades na questão 1 apresentaram-se na localização dos pontos que ocorreram em locais diferentes dos registrados nas coordenadas. Exemplificamos esta situação na Figura 25, que é o extrato da resolução do participante 32. Este participante, utilizando-se de papel quadriculado, escreveu os eixos, os numerou construindo os segmentos e como não localizou corretamente os pontos B(16, 0), I(-15, -6), S(-19, 13),T(-5, 13) e V(-2, -15) errou ao representar os segmentos AB, IJ, ST e UV no sistema de eixos cartesianos.

Figura 25 – Resposta do participante 32 à questão 1 da Atividade 2.



Fonte: Protocolo do participante 32

As coordenadas dos segmentos que foram representados em locais diferentes do esperado podem ser melhor visualizadas no Quadro 4, em que podemos comparar as coordenadas da questão 1 e as que foram localizadas pelo participante.

Quadro 4 - Resposta da questão 1 da Atividade 2.

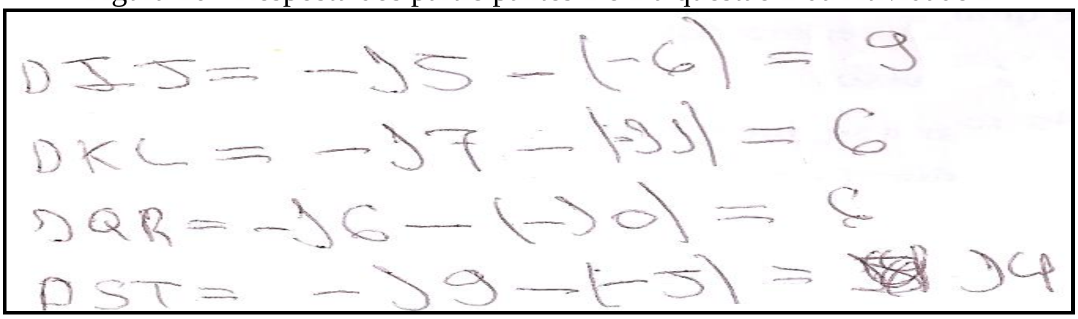
Segmentos	Valores das coordenadas da questão 1		Valores das coordenadas localizadas pelo participante 32	
AB	A(7, 0)	B(16, 0)	A(7, 0)	B(6, 0)
IJ	I(-15, -6)	J(-6, -6)	I(-6, -15)	J(-6, -6)
ST	S(-19, 13)	T(-5, 13)	S(-13, -19)	T(-13, -5)
UV	U(-2, 16)	V(-2, -15)	U(-2, 16)	V(-2, 15)

Fonte: Autoria própria

Houve troca dos valores das abscissas com os das ordenadas, consideração de números negativos como positivos ou mudanças totalmente de valores numéricos. Este fato nos alerta que neste momento da Sequência, ainda havia participantes da Turma 2 com dificuldades na habilidade de representar os pontos no plano cartesiano. Além destas dificuldades, outros erros cometidos por alguns dos participantes da Turma 2, foram a ausência de ordem numérica presente nos eixos. Como os eixos foram escritos na malha quadriculada, alguns participantes não estabeleceram critérios para relacionarem quantidade de quadrados com valores numéricos, ou seja, não foram atentos quanto a escala gráfica.

Na questão 2, os problemas que fizeram os participantes da Turma 2 errarem, estavam relacionados ao cálculo com números inteiros, como ocorreu com os participantes 1 e 2, ilustrado na Figura 26.

Figura 26 - Resposta dos participantes 1 e 2 à questão 2 da Atividade 2



Fonte: Protocolo dos participantes 1 e 2

Ao percebermos que o problema da maioria dos participantes estava centralizado na subtração de números inteiros, revisamos o conteúdo e pedimos que refizessem os cálculos com a finalidade de reconhecerem os erros e identificarem os resultados corretos, comparando-os com os valores adquiridos por meio da contagem das unidades entre os pontos.

As questões 3, 4, 5 e 6 foram introduzidas na Atividade 2 para que os participantes pudessem se atentar para outras possibilidades de cálculo como o Teorema de Pitágoras e a fórmula do cálculo das distâncias. Caso os valores das ordenadas ou os das abscissas fossem iguais nas extremidades dos segmentos não haveria necessidade de trabalharmos com os dois valores, porque sempre um deles resultaria em zero e os segmentos seriam horizontais ou verticais. Apenas os segmentos inclinados requeriam utilização dos dois valores das coordenadas. Dessa forma, apresentamos resultados satisfatórios para esta atividade em que os participantes tornaram-se conhecedores de duas possibilidades diferentes de resolução para identificarem os valores das medidas dos segmentos, quando estiverem no sentido vertical ou horizontal.

Os participantes 30 e 31, na Figura 27, escreveram o que compreenderam ao responderem à questão 3.

Figura 27 – Resposta dos participantes 30 e 31 à questão 3 da Atividade 2

3-) Para calcularmos os valores da vertical utilizamos o eixo Y. E para calcularmos os valores da horizontal, utilizamos o eixo X.

Fonte: Protocolo dos participantes 30 e 31.

Com a resposta da Figura 27, verificamos que os participantes compreenderam que existem situações em que podemos calcular as medidas dos segmentos utilizando os valores de um dos eixos e esta relação depende da sua posição no plano. Na questão 5 (Figura 28), eles observaram que as coordenadas dos segmentos da questão 2 possuíam valores comuns nas abscissas ou nas ordenadas e, por essa razão, não poderiam ser segmentos inclinados.

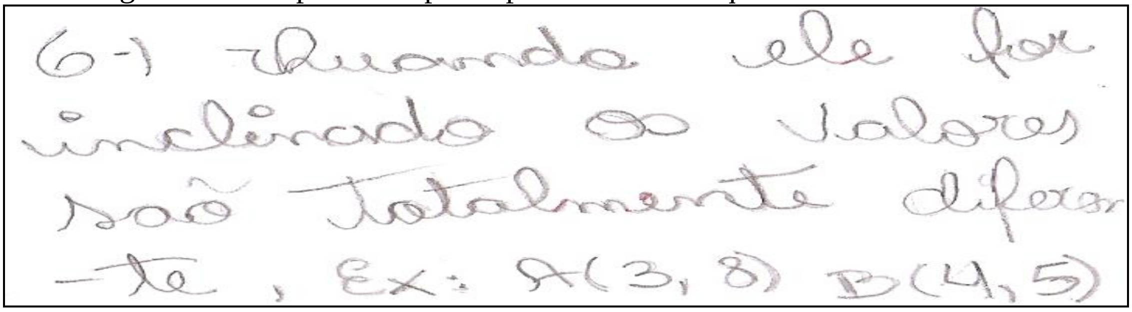
Figura 28 – Resposta dos participantes 30 e 31 à questão 5 da Atividade 2

5-) F=(10,16); H=(15,5) Como podemos ver aqui, não poderíamos realizar os cálculos conforme o exercício 2, pois eles não possuem números em comum, para podermos realizar o cálculo. Se os valores do eixo X forem iguais, daria para identificar, e assim teríamos um segmento vertical.

Fonte: Protocolo dos participantes 30 e 31

Os participantes 11 e 12 também identificaram as diferenças numéricas das coordenadas observando a relação entre os seus valores e a posição do segmento no plano, exemplificando os dois pares de coordenadas com abscissas e ordenadas totalmente distintas, conforme podemos observar na Figura 29.

Figura 29 – Resposta dos participantes 11 e 12 à questão 6 da Atividade 2



6-) Quando ele for inclinado os valores são Totalmente diferen-te, Ex: A(3, 8) B(4, 5)

Fonte: Protocolo dos participantes 11 e 12

5.3.3 Atividade 3

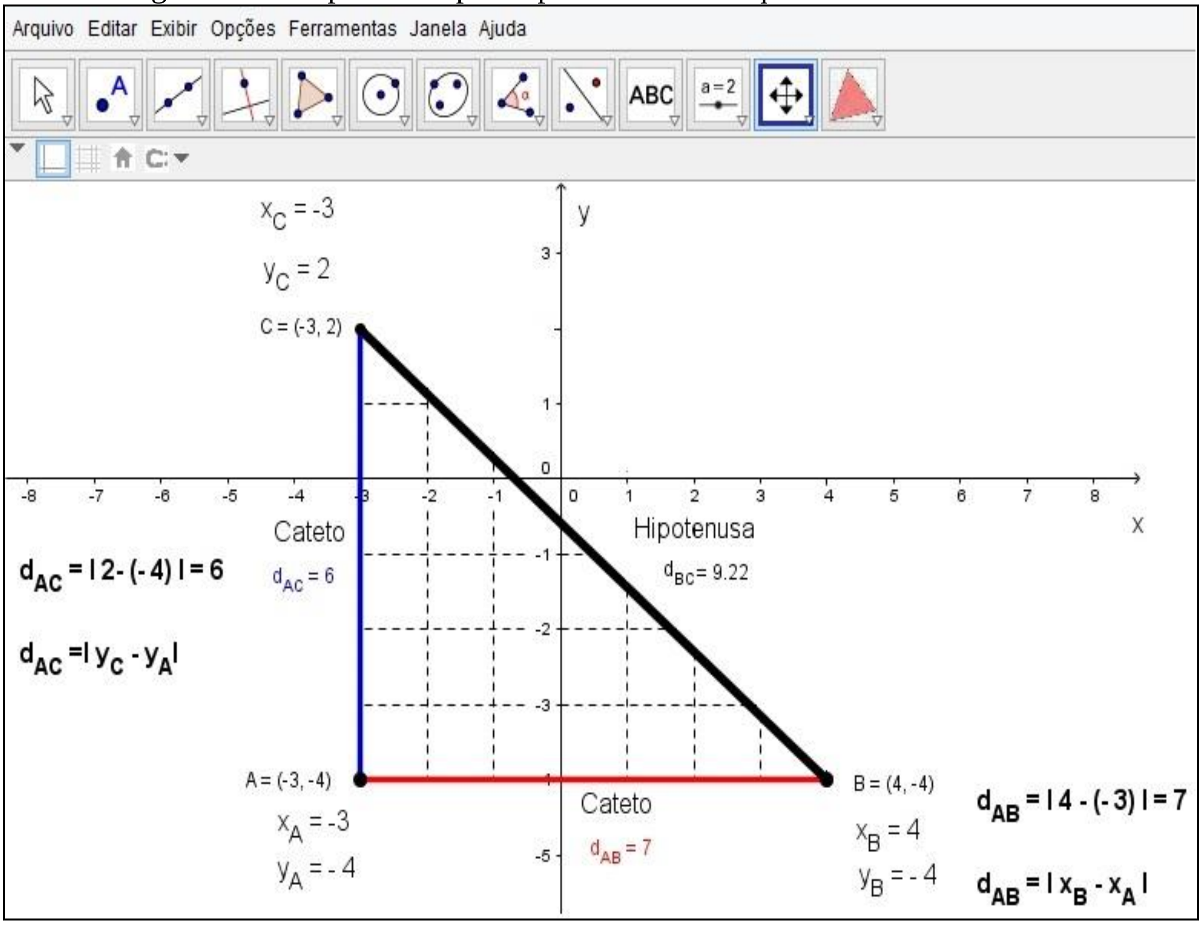
Por se tratar de uma sequência de atividades, também destinamos a Atividade 3 ao conteúdo de distância entre dois pontos e iniciamos com a reflexão da atividade anterior, desenvolvendo a habilidade de representar um segmento inclinado, com o objetivo de fazer o participante perceber que todo segmento inclinado pode ser transformado em um triângulo retângulo, onde os segmentos horizontais e verticais são os catetos e os segmentos inclinados, a hipotenusa.

O tempo planejado inicialmente para realização da Atividade 3 foi de 1 aula. Mas, o professor necessitou participar da Reunião da Associação de Pais e Mestres da Unidade Escolar - APM, que ocorreu durante o período das aulas e por essa razão, realizamos a atividade em 3 aulas.

Foram sete questões impressas e iguais para as duas turmas. Porém, para a Turma 1, acrescentamos o arquivo do GeoGebra contendo a imagem do triângulo que foi impresso para a Turma 2. Com o arquivo salvo no *e-mail* e reproduzido para a Turma 1, os participantes tiveram a oportunidade de movimentar a imagem e construir outros triângulos semelhantes para verificarem as medidas dos seus lados e validarem as respostas por meio do Teorema de Pitágoras.

Nas questões 1 a 4, o objetivo era introduzir o cálculo da fórmula da distância entre dois pontos, indicando o cálculo da diferença entre o ponto final e o inicial, remetendo a este procedimento a parte da fórmula onde se desenvolve os valores dos catetos. A questão 5 pedia que localizassem na imagem os locais correspondentes aos catetos e a hipotenusa. A Figura 30 ilustra a resposta dos participantes 11 e 12 para esta questão.

Figura 30 – Resposta dos participantes 11 e 12 à questão 5 da Atividade 3.



Fonte: Protocolo dos participantes 11 e 12

A questão 6 era para comparar o valor da hipotenusa na Figura 30 com o resultado obtido no cálculo da medida do segmento BC a fim de validar a resposta obtida. Na sétima questão foi expresso o Teorema de Pitágoras fazendo relação com a fórmula da distância entre dois pontos, de modo a representar duas formas diferentes para resolução quando os segmentos fossem inclinados. Assim, os participantes ficaram cientes que havia pelo menos duas formas de registros de representação para obtermos os valores de segmentos inclinados: a que utilizamos o Teorema de Pitágoras de modo a construirmos um triângulo retângulo em uma malha quadriculada cujo segmento inclinado seja a hipotenusa, e a que aplicamos os valores das coordenadas de dois pontos na fórmula da distância entre dois pontos e calculamos a distância do segmento.

As questões 1, 2, 3 e 7 valiam 1 ponto, e a 4, 5 e 6 valiam 2 pontos cada. As médias das notas por questão constam na Tabela 7, onde o desvio padrão aponta que todos os participantes da Turma 1, acertaram por completo as questões 1, 2 e 3. Entretanto, esta turma apresentou desempenho inferior se comparado a Turma 2 nas questões 4, 5, 6 e 7, o que ocasionou índices satisfatórios com média de 8,15 para a Turma 1 e 9,28 para a Turma 2.

Tabela 7 - Médias e desvio padrão das notas por turma e questões da Atividade 3

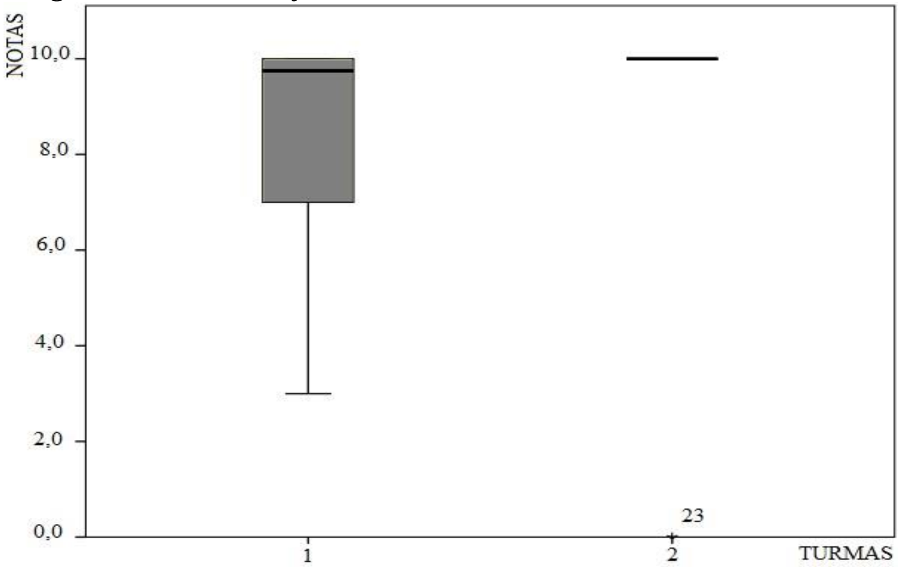
Turma	Medida	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	GERAL
1	**Média**	1,0	1,0	1,0	1,8	1,6	1,2	0,55	8,15
	DP	0,0	0,0	0,0	0,61	0,82	1,00	0,48	2,47
2	**Média**	0,93	0,93	0,93	1,85	1,85	1,85	0,93	9,28
	DP	0,28	0,28	0,27	0,53	0,53	0,53	0,28	2,67
Geral	**Média**	0,97	0,97	0,97	1,82	1,70	1,47	0,70	8,62
	DP	0,17	0,17	0,17	0,57	0,72	0,89	0,44	2,58

Fonte: Autoria própria

As três primeiras questões da Atividade 3 retomavam ao tema das questões 3 e 4 da Atividade 2, acrescentando o módulo da diferença na forma algébrica entre as abscissas e ordenadas de dois pontos. A Turma 1, nestas questões, obteve médias maiores que a Turma 2, indicando que houve melhor compreensão na relação entre os valores das coordenadas com os sentidos dos segmentos. Observa-se que a Turma 2 apresenta médias maiores quando as questões estão relacionadas ao cálculo como nas questões 4, 5, 6 e 7 e quando fazem menções ou utilizam o Teorema de Pitágoras.

Na Figura 31, temos a nota da Turma 1 com valor mínimo igual a 3 e máximo igual a 10. A maioria dos participantes ficaram com as notas entre 7 e 10 e uma mediana maior que nove, e 25% obtiveram notas inferiores a 7. Já na Turma 2, todos ficaram com a nota 10, com exceção do participante 23 que teve sua atividade zerada, fazendo a nota da turma diminuir em 0,72 pontos. Na aula destinada a realização da Atividade 3 ocorreu a falta de dois participantes. Portanto, os cálculos estatísticos da Turma 2 foram realizados com 14 participantes.

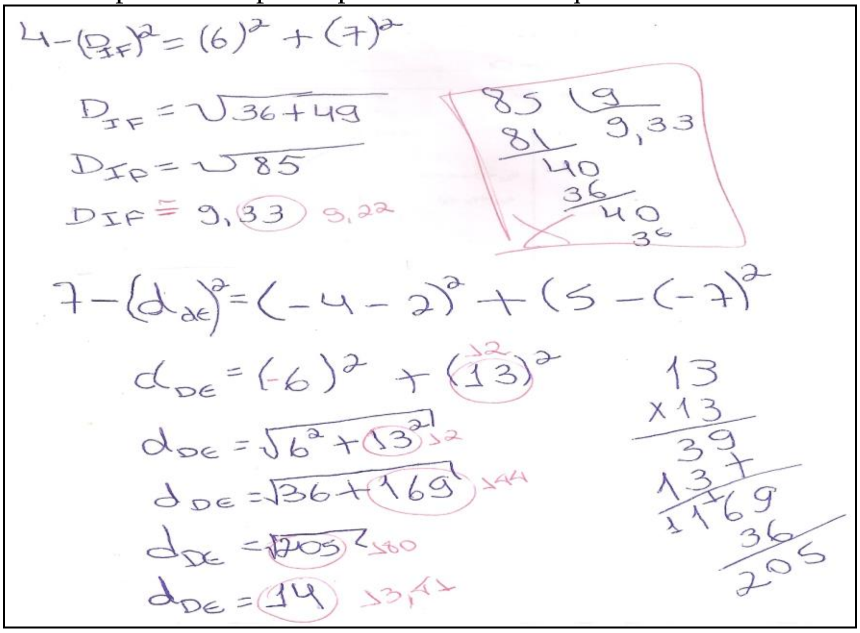
Figura 31 - Distribuição das notas da Atividade 3 das duas Turmas



Fonte: Autoria própria

O desempenho inferior da Turma 1 está relacionado aos erros de cálculos semelhantes aos apresentados nas respostas dadas pelos participantes 19 e 20 que constam na Figura 32.

Figura 32 - Respostas dos participantes 19 e 20 às questões 4 e 7 da Atividade 3



Fonte: Protocolos dos participantes 19 e 20

Os erros foram de cálculos em três situações. Na questão 4, ao realizarem o cálculo da raiz quadrada de 85, os participantes dividiram 85 por 9. Supusemos que tenham iniciado a divisão por nove pelo fato de saberem que 9 vezes o 9 tem como resultado 81, que é aproximado de 85. No entanto, no restante da divisão ocorreu um erro ao multiplicar 9 por 3 e obterem como resultado 36. Outro erro houve ao fazerem o cálculo de raiz utilizando o processo de divisão. Na questão 7, o erro aconteceu quando na subtração de (5 – (-7)) o participante escreveu 13. São erros simples de conteúdos trabalhados no Ensino Fundamental que ainda não foram completamente compreendidos.

Verificamos que os participantes realizaram corretamente os cálculos para potenciação, utilizando a multiplicação em fatores iguais, embora o valor correto devesse ser 12 e não 13. E para calcular a raiz quadrada utilizaram a divisão, o que demonstra não fazerem relação entre potenciação e radiciação. Dedicamos um espaço de aproximadamente 25 minutos, durante a aplicação desta atividade para de forma expositiva explicar como realizar o cálculo de raízes quadradas com a finalidade de esclarecermos as dúvidas e amenizarmos tais dificuldades.

Quando Duval (2013) se refere as conversões, está indicando aos educadores matemáticos a utilizarem registros de representação diferentes para um mesmo objeto. Nesse contexto, se ao serem trabalhados o cálculo de raízes quadradas com figuras geométricas planas quadradas divididas em partes iguais na vertical e horizontal em conversões com o sistema de escritas, associando a quantidade de quadrados dos lados da figura a valores numéricos, expressando estes valores em parcelas iguais, fazendo correspondência com a potência de expoente dois e a raiz quadrada, possivelmente os participantes não calculariam a raiz quadrada realizando uma divisão como a apresentada na Figura 32.

Nas Atividades 2 e 3 procuramos trabalhar com as conversões quando os participantes identificaram as medidas dos catetos de um triângulo por meio de contagem das unidades dos segmentos inseridos no plano cartesiano e pelos cálculos da diferença entre o ponto final e o inicial utilizando as coordenadas dos pontos. Ao trabalharmos com segmentos inclinados nestas atividades, utilizamos o que Duval (2013) denominou por conversões. Iniciou-se com a representação da diferença entre os pontos no sistema de escritas algébrico, encaminhando-se para o sistema de escritas numérico e assim se desenvolvendo entre estes dois sistemas. O cálculo utilizando o Teorema de Pitágoras e a fórmula da distância entre dois pontos.

5.3.4 Atividade 4

Para abordar o conteúdo ponto médio, mediana e baricentro de um triângulo, elaboramos 8 questões planejadas para serem realizadas em 2 aulas. Mas, devido as dúvidas e perguntas dos participantes, utilizamos 3 aulas. Para a Turma 1, esta foi uma atividade de abordagem construcionista, o que diferiu em relação a parte escrita entregue aos participantes das turmas, pois a folha impressa da Turma 1 faz menção as construções e observações no arquivo do GeoGebra e a da Turma 2, para as construções na folha quadriculada.

Representar segmentos formando um triângulo, identificar os pontos médios dos segmentos, traçar as medianas dos triângulos e identificar as coordenadas do baricentro, realizar os cálculos das coordenadas dos pontos médios dos segmentos e do baricentro do triângulo foram as habilidades necessárias para esta atividade.

Inicialmente os participantes representaram segmentos no plano cartesiano utilizando a janela de visualização do GeoGebra ou a representação gráfico-cartesiana na malha quadriculada. Estes segmentos construídos para formar um triângulo foram divididos ao meio contando as unidades da malha ou utilizando a ferramenta do *software*. Após perceberem que nos segmentos divididos ao meio estavam localizados novos pontos, os identificaram como o ponto médio, definindo-os com letras, e escreveram a forma algébrica que pudessem generalizar sua aplicação ao realizarem seus cálculos.

Nas questões cinco e seis voltamos a falar em localização de pontos, porém, dos pontos médios e dos vértices da figura. Os pontos foram expressos na forma numérica por meio da observação da representação gráfico cartesiana e na sequência por meio de cálculos, partindo da forma algébrica para a numérica. Na questão sete e oito priorizamos a pesquisa e foi indicado ao participante o site para procurar a definição de mediana e construir na sua figura os segmentos e o ponto do baricentro. Para a Turma 2, a definição de mediana e baricentro constavam na folha impressa. Nessas questões trabalhamos com a representação da construção geométrica por meio da definição de mediana e baricentro e com os cálculos em conversões do sistema de escritas algébrico para o numérico.

A Tabela 8 apresenta os valores das médias de cada questão e da atividade para as duas turmas, ficando as questões 6 e 8 com valor de 2 pontos e as outras, 1 ponto**.**

Tabela 8 - Médias e desvio padrão das notas por turma e questões da Atividade 4

Turma	Medida	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	GERAL
1	**Média**	0,94	0,89	0,87	1,00	0,67	1,11	1,00	1,89	8,37
	DP	0,23	0,32	0,33	0,00	0,49	1,02	0,00	0,32	1,70
2	**Média**	1,00	0,73	0,93	1,00	0,67	1,27	0,87	1,20	7,67
	DP	0,00	0,46	0,26	0,00	0,49	0,94	0,36	0,94	2,79
Geral	**Média**	0,97	0,82	0,89	1,00	0,66	0,18	0,94	1,57	8,04
	DP	0,17	0,39	0,30	0,00	0,48	0,97	0,24	0,75	2,25

Fonte: Autoria própria

A média da primeira turma foi inferior na questão 1, porque esqueceram de identificar os nomes dos pontos na representação gráfica cartesiana.

A questão 6 dependia da relação entre os valores das ordenadas e abscissas e uma possível fórmula para calcular o ponto médio sugerida na questão 3. Os participantes deveriam observar que o resultado da soma das abscissas de dois pontos dividido por dois, era exatamente igual ao valor da abscissa do ponto médio do segmento, e que utilizando o mesmo procedimento com as ordenadas, teriam a coordenada do ponto médio. Esta observação deveria ser representada na forma algébrica na questão 3. E na questão 6, utilizando-se da forma algébrica do ponto médio, realizariam os cálculos. A Turma 2 obteve médias melhores nestas questões, porque apresentou os registros de representação algébricos na questão 3 e os cálculos com coordenadas negativas na questão 6, com índices menores de erros.

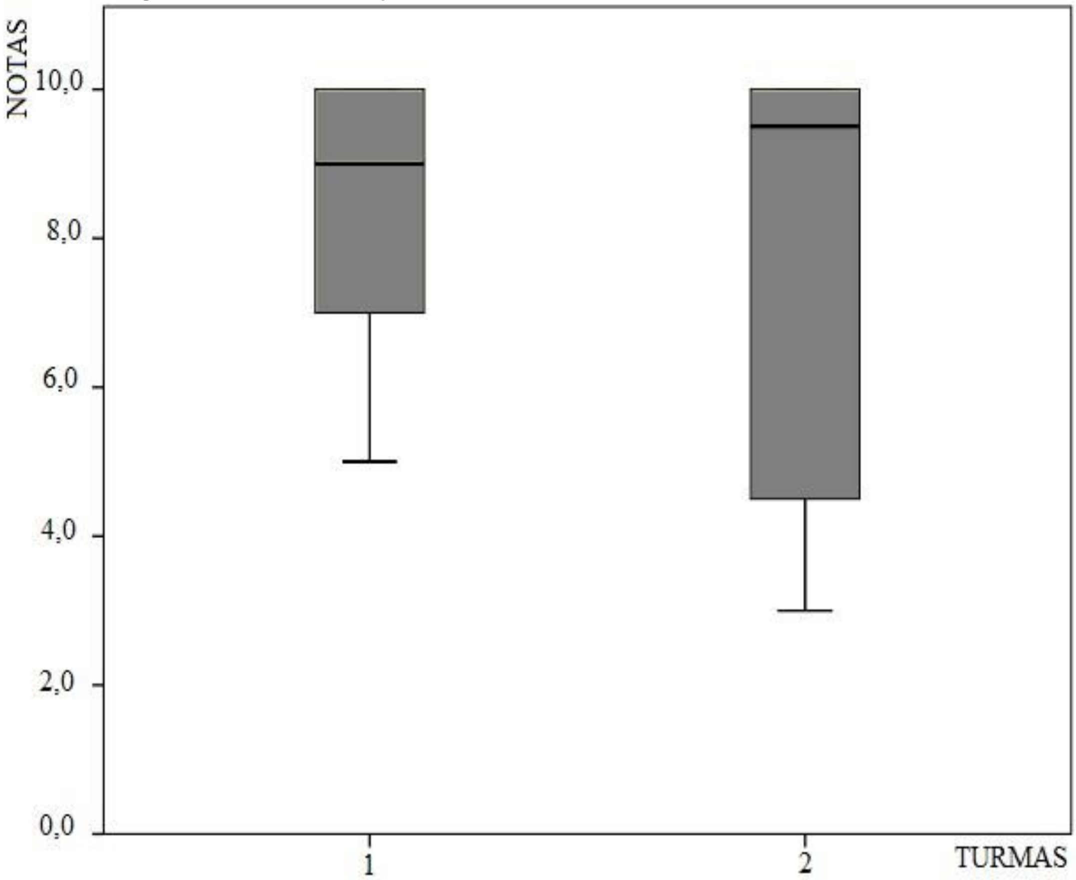
Quanto às questões 7 e 8, os participantes da Turma 1 pesquisaram a definição de mediana e a fórmula do baricentro no site indicado na atividade, e para a Turma 2, a definição já estava na folha. Nestas questões a Turma 1 interpretou melhor os dados que obtiveram com a pesquisa e alcançaram médias maiores.

A média da atividade para a Turma 1 foi superior em relação a Turma 2, com seus respectivos valores de 8,37 e 7,67. No entanto, as médias entre as questões das duas turmas foram se alternando na Q1, Q2, Q3, Q6, Q7 e Q8 e nas Q4 e Q5 as médias foram iguais. O desvio padrão de 2,79 para a Turma 2, indica que as notas estão mais dispersas em relação à média, com ocorrência mais acentuada entre o mínimo 3 e a mediana 9,5, segundo a ilustração da Figura 33.

As questões Q6 e Q8 tratavam da habilidade de calcular as coordenadas do ponto médio e do baricentro. Na Q6, a Turma 2 destacou-se com média superior a Turma 1. Quanto a Q8, a média apresentou-se contrária, porque antes dos cálculos, os participantes deveriam reconhecer que as coordenadas do baricentro são obtidas por meio da soma dos valores das três abscissas e das três ordenadas dos pontos que compreendiam os vértices do triângulo, dividindo o resultado de cada soma por três, escrevendo assim um novo ponto denominado por baricentro.

A Figura 33 ilustra que a Turma 1 apresentou notas mais homogêneas variando entre 5 e 10, enquanto a Turma 2 variou de 3 a 10, significando que o desempenho dessa turma foi heterogêneo na Atividade 4.

Figura 33 - Distribuição das notas da Atividade 4 das duas Turmas



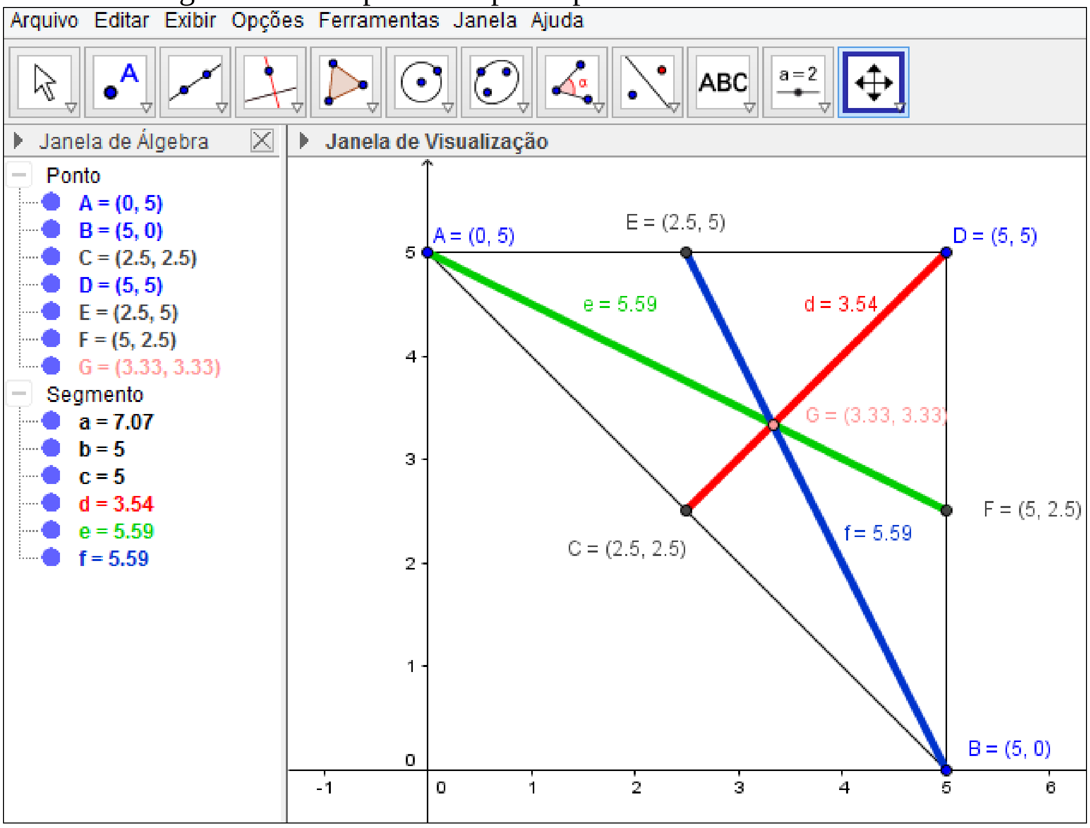
Fonte: Autoria própria

Outro indicativo expresso na Figura 33 que mostra superioridade da Turma 1 na aprendizagem desta atividade, está representado nas notas iguais ou superiores a 7 da maioria dos participantes desta turma.

As questões 1, 2, 4, 5 e 7 a Turma 1 respondeu no GeoGebra traçando segmentos como teste para identificar os pontos médios e após estas tentativas definiram os três segmentos que deixariam como resposta. A Turma 2, respondeu da mesma forma, na folha quadriculada.

Por serem questões abertas em que cada participante poderia escolher os pontos para formar a figura, não obtivemos uma resposta única, o que dificultou a correção, mas, os deixaram autônomos para realizarem toda a atividade sem espaços para comparação de resultados com as atividades dos colegas, como ocorrido em atividades anteriores. Na Figura 34 estão representadas as coordenadas, os segmentos, as medianas e o baricentro da atividade dos participantes 13 e 14 que utilizaram o GeoGebra.

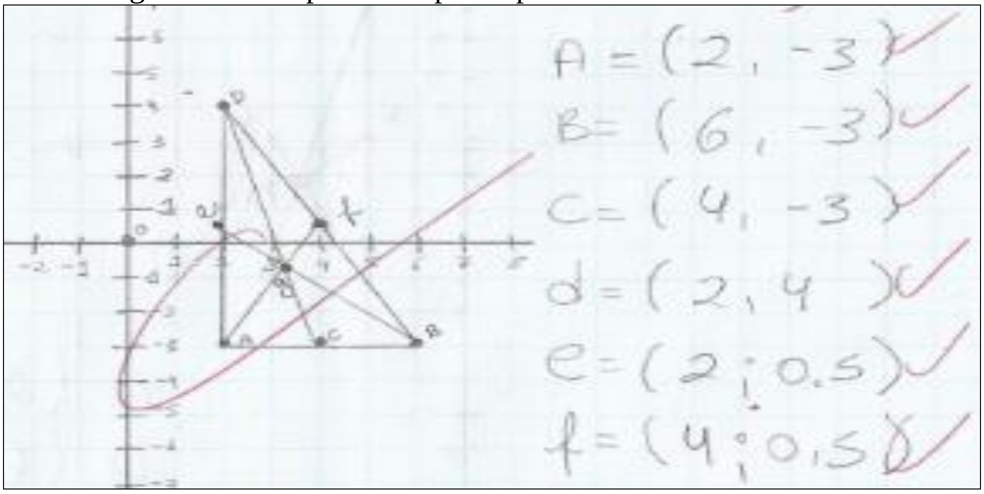
Figuras 34 - Resposta dos participantes 13 e 14 à Atividade 4



Fonte: Protocolo dos participantes 13 e 14

Para esta atividade temos o GeoGebra facilitando a construção da figura e a localização dos pontos médios e do baricentro, inclusive fornecendo suas coordenadas que serviram como fonte de consulta ao serem realizados os cálculos para conferência dos resultados. Já os participantes da Turma 2, para obterem os valores das coordenadas dos pontos médios dos segmentos e o baricentro do triângulo, necessitaram realizar os cálculos, primeiramente sem fontes de consultas para análise dos resultados. A Figura 35 representa um exemplo da atividade realizada na folha quadriculada dos participantes 30 e 31.

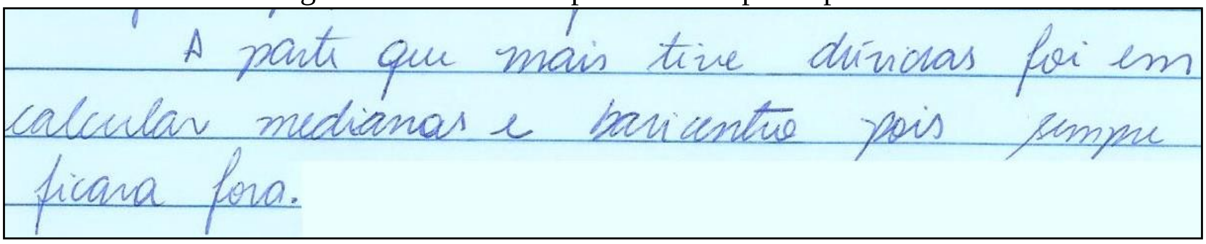
Figura 35 – Resposta dos participantes 30 e 31 à Atividade 4



Fonte: Protocolo dos participantes 30 e 31

A maior dificuldade para a Turma 2 ficou por conta de identificar os pontos médios no segmento, porque um erro de localização fazia as medianas não se cruzarem sobre o ponto do baricentro. Este obstáculo não ocorreu com a Turma 1, pois o ponto médio foi identificado utilizando a ferramenta ponto médio, sendo introduzido sobre o segmento automaticamente. Mas, na realização dos cálculos para conferência da localização dos pontos, comparando valores calculados com valores apresentados pelo *software*, os participantes da Turma 1 apresentaram dificuldades. O participante 18 escreveu a seguinte observação:

Figura 36 – Extrato do protocolo do participante 18


A parte que mais tive dúvidas foi em calcular medianas e baricentro pois sempre ficava fora.

Fonte: Protocolo do participante 18

O participante estava errando o cálculo das coordenadas do baricentro e por essa razão, os valores das coordenadas do ponto não conferiam com as do ponto no plano.

5.3.5 Exercício do Caderno do Aluno

Quanto aos exercícios do Caderno dos Alunos o objetivo foi realizar as questões como estão sendo propostas pelos documentos oficiais do Estado, observando se ao apresentarmos o conteúdo por meio de atividades, os alunos conseguiriam solucionar tais exercícios com facilidade e qual seria o desempenho nesta situação. Para isso, trabalhamos a cada final de módulo com duas questões, selecionadas de acordo com o tema já estudado e reproduzidas em folhas avulsas para facilitar o manuseio e a correção. A Turma 1, solucionando-as com o auxílio do *software* e folha impressa e a Turma 2, somente na folha impressa. Estas questões constam no Anexo B.

A realização dos exercícios estava planejada para uma aula, mas como ocorreram dúvidas, utilizamos os dados dos exercícios para fazermos a correção e ao mesmo tempo uma revisão dos conteúdos, como preparação para a Avaliação Intermediária. Então, concluímos os exercícios em duas aulas. As dúvidas eram em relação à forma de resolução. Verificamos que as perguntas eram sempre questionando como é para resolver, por exemplo, a distância entre dois pontos é para utilizar o Teorema de Pitágoras ou a fórmula da distância?

Refletimos sobre estas perguntas após observarmos que a apresentação das possíveis formas de resolução causou confusão para os participantes decidirem qual caminho seguirem ao solucionarem os problemas. Por esta razão resolvemos ao final dos exercícios, retomarmos ao conteúdo pontuando os temas trabalhados e as possibilidades de resolução.

No exercício **1) a**, que exigia a habilidade de calcular a distância entre dois pontos a partir dos pontos A(2, 3) e B(5, 7), a primeira turma obteve, 89,47% de acertos e 10,53 de acertos parciais. Já na segunda turma, a porcentagem foi de 100% de acertos.

Para a questão 2 **a** e **b**, as habilidades necessárias foram representar os pontos A(0, 0), B(3, 7) e C(-2, 13), sendo M o ponto médio de AC, e N o ponto médio de BC e determinar as coordenadas M e N as representando no plano cartesiano, calculando as distancias entre d_{AB} e d_{MN} , verificando que $d_{AB} = 2.d_{MN.}$ Na questão **a** que valia 5 pontos, os participantes da Turma 1 obtiveram os seguintes resultados: 68,42% de acertos e 31,58% de acertos parciais. Na questão **b**, 89,47% de acertos e 10,52% de acertos parciais.

Quanto à Turma 2, os resultados foram os seguintes: para a questão **a**, 86,67% de acertos, 6,67% de acertos parciais e 6,66% de erros. Já para a questão **b**, foram 86,67% de acertos e 10,52% de erros e 2,81% de acertos parciais.

A distribuição das notas ocorreu conforme grau de dificuldade das questões. Por exemplo, na questão 2 **a** foi pedido para determinar as coordenadas N e M, porém, anteriormente era pedido para representar no sistema de coordenadas cartesianas três pontos distintos A(0,0), B(3,7) e C(-2,13). A partir destas coordenadas os participantes calcularam e determinaram os pontos médios N e M, e também traçaram os segmentos AB, AC, BC e NM. Dessa forma, a questão tornou-se mais extensa e complexa que as outras.

Embora o Exercício tenha seguido o mesmo método de resolução das atividades da Sequência, é notório por meio das médias das duas turmas que o conteúdo foi compreendido quando avaliado pela perspectiva do Caderno do Aluno.

Entre todos os instrumentos, o Exercício do Caderno do Aluno foi aquele em que os participantes obtiveram médias maiores e mais próximas. Na Tabela 9, apresentamos a média das turmas por questões com 9,16 para a primeira turma, e 9,13, para a segunda.

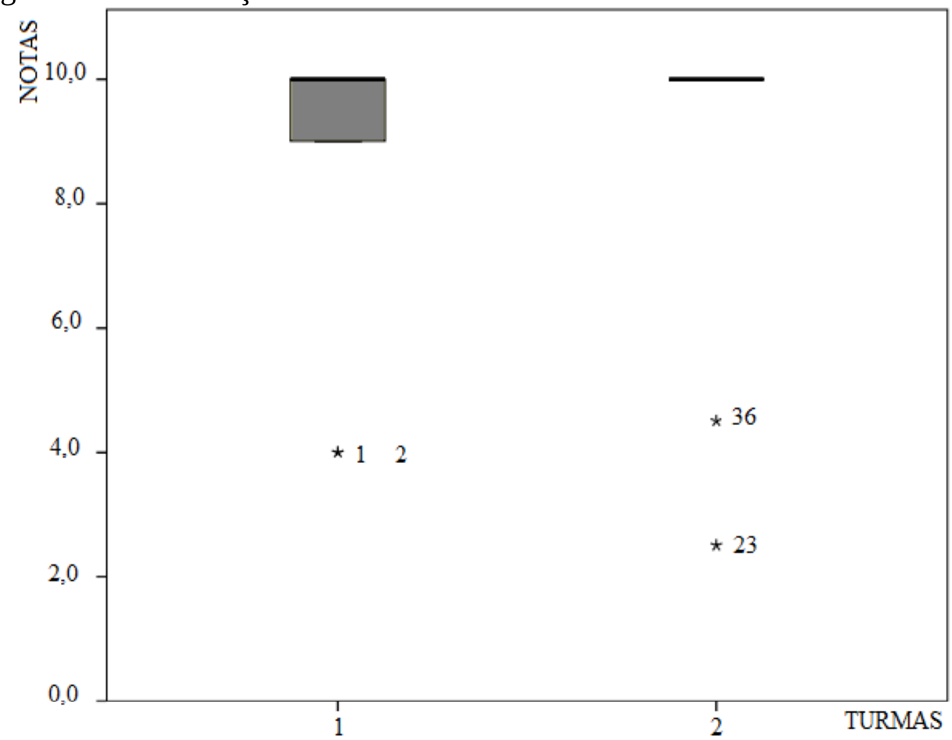
Tabela 9 - Médias e desvio padrão das notas por turma e questões do Exercício

Turma	Medida	Q1	Q2a	Q2b	GERAL
1	**Média**	2,45	4,47	2,24	9,16
	DP	0,16	0,96	0,79	1,86
2	**Média**	2,50	4,47	2,17	9,13
	DP	0,00	1,46	0,88	2,32
Geral	**Média**	2,47	4,47	2,20	9,15
	DP	0,12	1,19	0,82	2,04

Fonte: Autoria própria

Constatamos que a sequência proporcionou às duas turmas resultados satisfatórios, com médias muito próximas, mas ao observarmos as médias por questões, podemos mais uma vez identificarmos que, em questões onde a habilidade era exclusivamente calcular como na primeira questão, a Turma 2 apresenta vantagem. E quando a habilidade era localizar coordenadas ou representar pontos e traçar segmentos para posteriormente resolver os cálculos, ela apresentou desvantagem em relação a Turma 1. Contudo, como a Figura 37 ilustra, a Turma 2 apresentou resultados mais homogêneos que a Turma 1; excetuando-se para os quatro participantes destacados na figura.

Figura 37 - Distribuição das notas do Exercício do Caderno do Aluno das duas Turmas



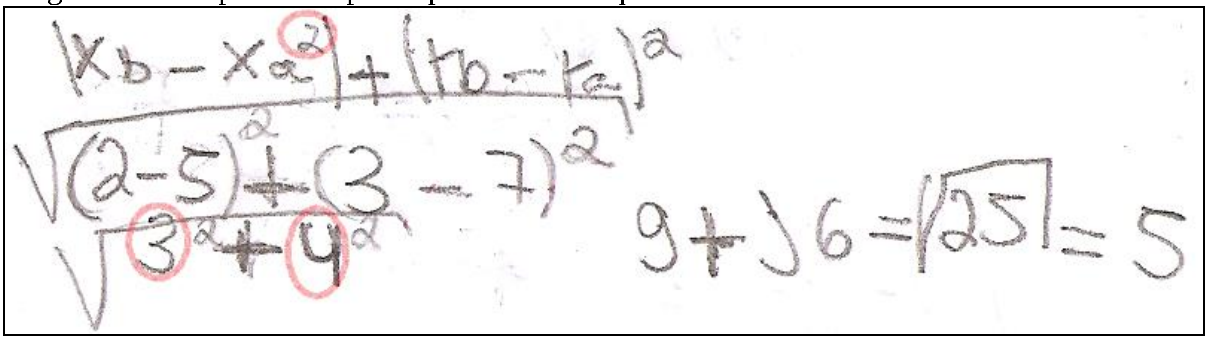
Fonte: Autoria própria

O participante 23 não realizou a questão **2 a** e **b**, e o 36 realizou parcialmente a questão 2 **a** e não realizou a questão **2 b** fazendo a média da Turma 2 ser inferior à da Turma

1. Já na primeira turma os participantes 1 e 2 contribuíram para o rebaixamento da nota, deixando de solucionar a questão **2 b** e errando parcialmente as demais. Segundo observações ao realizarem o Exercício o participante 23 optou por fazê-lo individualmente recusando-se a sentar com o seu par, não explicando o motivo, e o participante 36 também ficou sozinho, porque o seu companheiro de atividades faltou neste dia.

Os dados fazem-nos concluir que o tema distância entre dois pontos foi plenamente compreendido pelas turmas, apenas os participantes 1 e 2 cometeram alguns erros durante a resolução, que podem ser observados na Figura 38.

Figura 38 - Resposta dos participantes 1 e 2 à questão 1 do Exercício do Caderno do Aluno

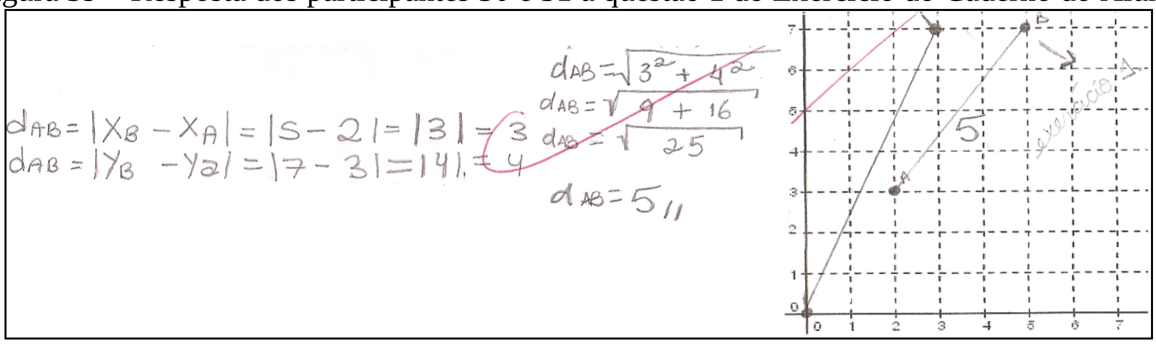


Fonte: Protocolo dos participantes 1 e 2

Os círculos na figura identificam os erros nos registros, como o expoente dentro dos parênteses apenas para a abscissa x_A e os resultados que deveriam ser negativos nas operações com os números inteiros, tornando-se positivos apenas após a resolução da potenciação. Entretanto, esses erros não alteraram o resultado final da questão.

Os demais participantes foram mais atentos aos registros ou tiveram melhor compreensão do processo operacional, detalhando o procedimento. Identificaram quais os pontos que estavam utilizando para o cálculo da distância do segmento e foram além do que estava sendo pedido, representaram o segmento no sistema gráfico cartesiano. Exemplificamos a questão na Figura 39 com a resposta dos participantes 30 e 31.

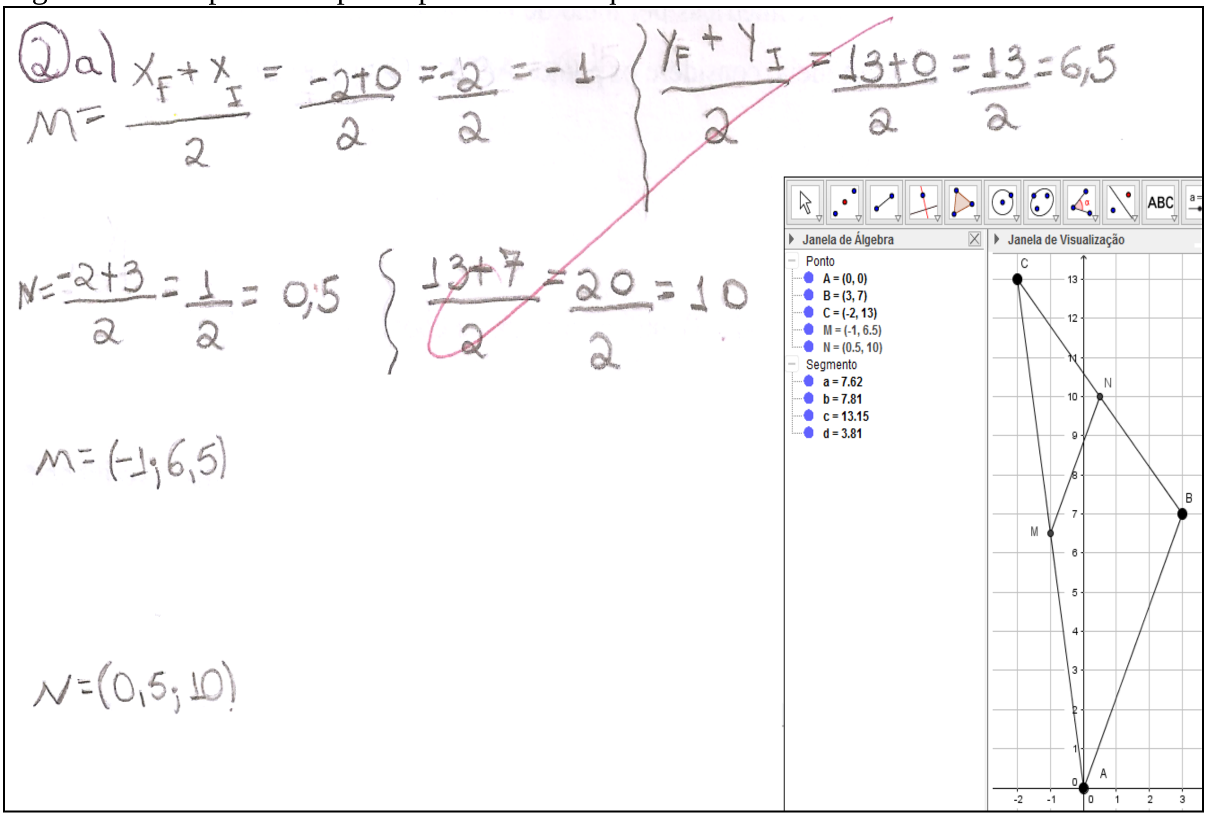
Figura 39 – Resposta dos participantes 30 e 31 à questão 1 do Exercício do Caderno do Aluno



Fonte: Protocolo dos participantes 30 e 31

Nos registros ilustrados da Figura 39 se apresentam conversões e tratamentos. Os participantes iniciaram a resolução com pares de coordenadas, representando-os algebricamente. Converteram para o sistema de escritas numérico realizando o cálculo do módulo da diferença entre abscissas e ordenadas de dois pontos, encontrando os valores dos catetos e os aplicaram na fórmula da distância entre dois pontos em tratamentos com operações com somas, potenciações e radiciações no conjunto dos números inteiros. Converteram as coordenadas em pontos, representando o segmento no sistema gráfico cartesiano e identificaram a sua medida. Procedimentos semelhantes foram realizados na questão 2 **a** com o tema ponto médio. Um exemplo, são os registros dos participantes 7 e 8 que mostraram em suas resoluções, compreensão ao tema, representaram os pontos no sistema cartesiano, calcularam e determinaram as coordenadas dos pontos médios. A Figura 40 é um extrato do protocolo destes participantes com registro no sistema de escritas numérico, algébrico e gráfico cartesiano.

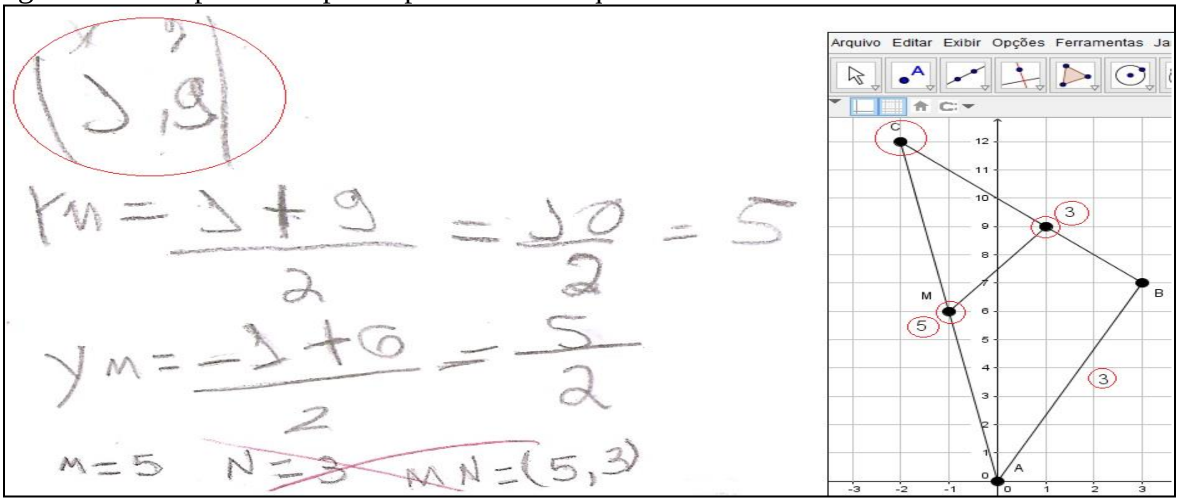
Figura 40 – Resposta dos participantes 7 e 8 à questão 2 **a** do Exercício do Caderno do Aluno



Fonte: Protocolo dos participantes 7 e 8

Os participantes 1 e 2 também utilizaram o GeoGebra ao resolverem a questão 2) **a.** Porém, não expandiram a janela algébrica (Figura 41) que serviria como meio facilitador para resolução. Além de demostrarem pouca compreensão sobre o significado do ponto médio e os cálculos, apresentando erros parciais na localização de coordenadas no plano.

Figura 41 – Resposta dos participantes 1 e 2 à questão 2 **a** do Exercício do Caderno do Aluno



Fonte: Protocolo dos participantes 1 e 2

A sucessão de erros provavelmente iniciou-se ao localizarem o ponto C(-2, 12) cujas coordenadas eram (-2, 13). Além disso, não utilizaram a ferramenta ponto médio, e localizaram os pontos M e N nas proximidades do meio dos segmentos. Também não realizaram os cálculos para obterem as coordenadas, e apenas fizeram uso das coordenadas que acreditaram ser os pontos médios utilizando o cálculo do ponto médio para determinarem coordenadas que escreveram como MN. O GeoGebra sem a compreensão das definições matemáticas, como ponto, coordenadas, distância entre dois pontos e ponto médio, não proporciona sucesso ao processo de aprendizagem, e a utilização das duas janelas de forma simultânea ajudam nas observações evitando ao menos erros nas localizações dos pontos.

5.3.6 Avaliação Intermediária

A Avaliação Intermediária teve duração de duas aulas e foi aplicada individualmente, sem a utilização de fontes para consulta, intervenção do professor das turmas e tampouco da professora pesquisadora. Seu objetivo foi de verificar o nível de conhecimento dos participantes adquirido até aquele momento de finalização do primeiro módulo da Sequência de Atividades.

O conteúdo desta avaliação foi apresentado em cinco questões, sendo avaliado neste momento a localização de pontos no plano cartesiano, as representações dos pontos em coordenadas cartesianas, o cálculo da distância entre dois pontos, a identificação do ponto médio de um segmento no plano cartesiano, o cálculo do ponto médio, a representação do baricentro no plano e o cálculo de suas coordenadas desenvolvido a partir da fórmula.

O desempenho das turmas por questões é apresentado na Tabela 10, com média de 9,02 para a Turma 1 e 7,68 para Turma 2, com uma diferença de 1,34 pontos percentuais.

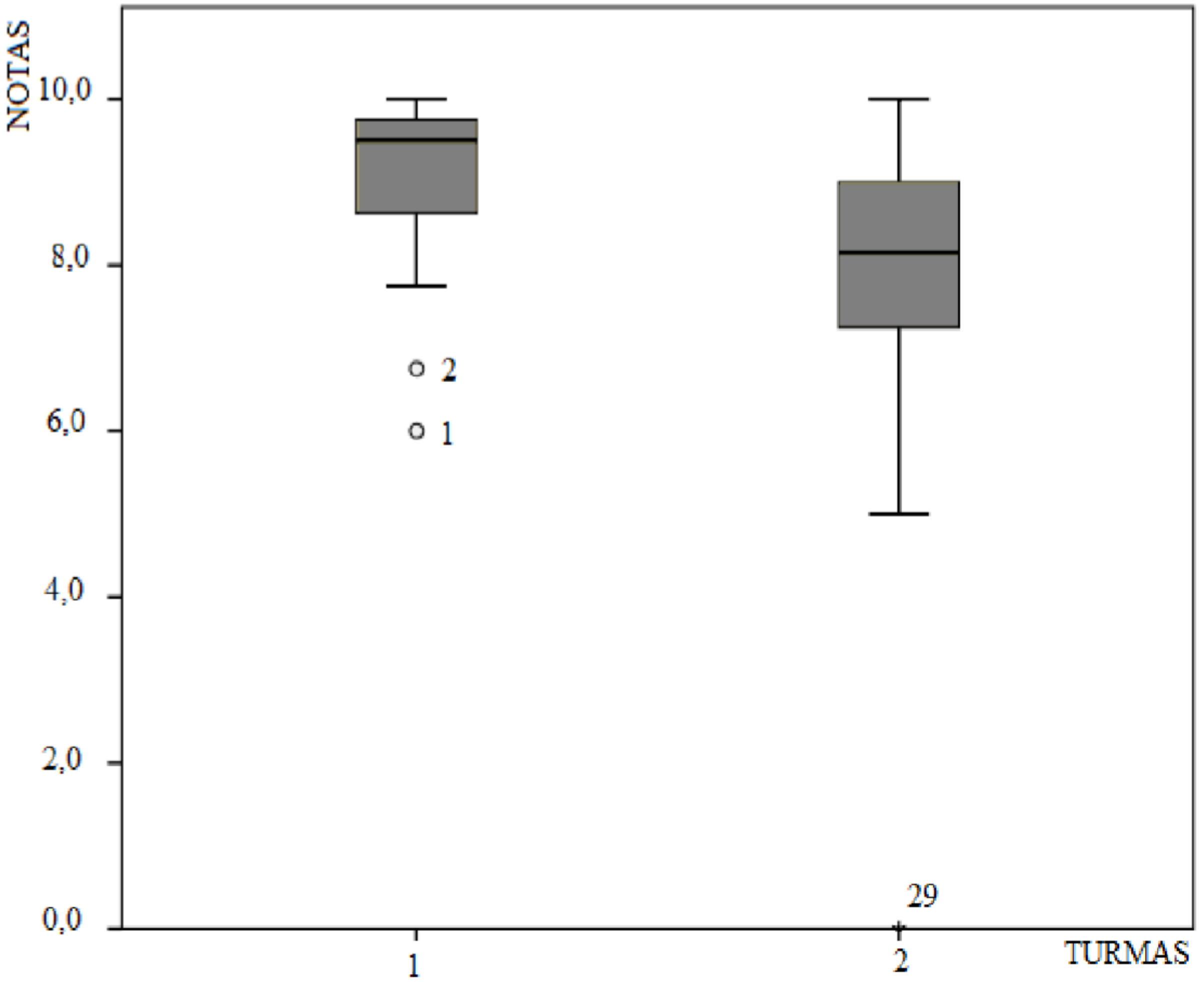
Tabela 10 – Médias e desvio padrão das notas por turma e questões da Avaliação Intermediária.

Turma	Medida	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	GERAL
1	**Média**	1,93	0,99	1,70	2,58	1,83	9,02
	DP	0,13	0,58	0,55	0,62	0,25	1,16
2	**Média**	1,64	0,92	1,36	2,31	1,45	7,68
	DP	0,66	0,25	0,79	0,85	0,63	2,41
Geral	**Média**	1,80	0,95	1,54	2,45	1,66	8,41
	DP	0,47	0,18	0,68	0,74	0,49	1,93

Fonte: Autoria própria

Comparamos estas médias com as do Pré -Teste que eram de 1,06 para a Turma 1 e 0,91 para a Turma 2 e julgamos expressivo e satisfatório o resultado desta avaliação, o que conforme o esperado, significou haver aprendizagem nas duas turmas. Dentre os participantes da Turma 1, três alunos obtiveram nota máxima (10), contribuindo para elevar a média das notas da turma, cuja distribuição consta na Figura 42.

Figura 42 – Distribuição das notas da Avaliação Intermediária das duas Turmas.



Fonte: Autoria própria

As notas da Turma 1 foram mais homogêneas. Apenas os participantes 1 e 2 diferenciaram-se da turma, porque, o participante 1 não realizou a questão 3 e teve nota parcial na questão 4. O participante 2, conseguiu quase por unanimidade notas parciais em todas as questões, acertando totalmente apenas a questão 3. Já o participante 29 não acertou nenhuma questão, embora tenha solucionado todas as questões com coordenadas diferentes das que foram mencionadas na avaliação.

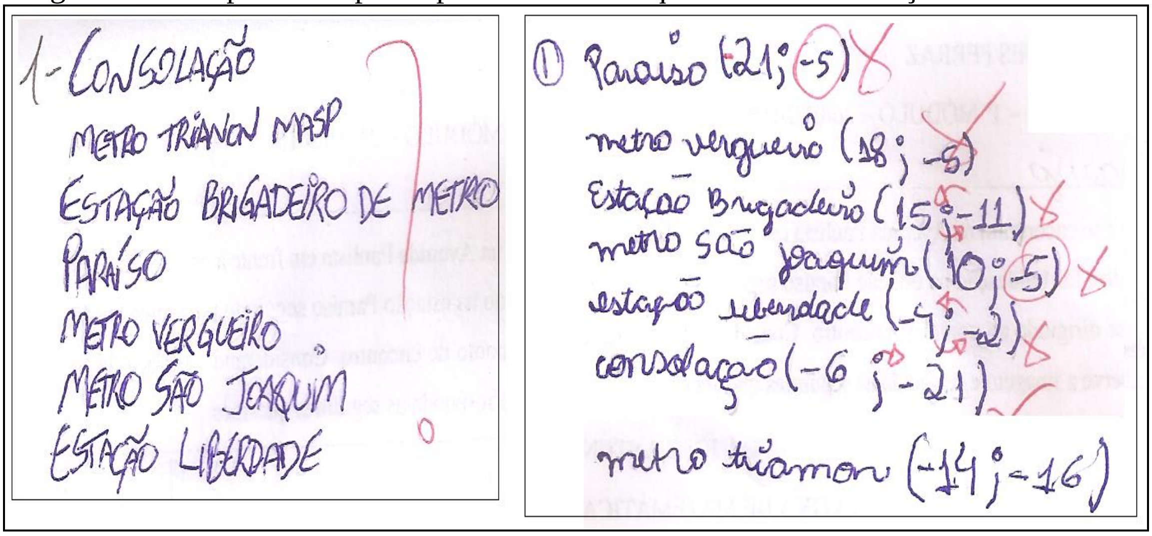
As notas da Turma 1 situaram-se entre 6 e 10 pontos. Já as notas da Turma 2, variaram entre 0 e 10 pontos. O que explica a prevalência da Turma 1, são as representações corretas das coordenadas cartesianas que eram a base para solucionar a avaliação. Inferimos que a visualização e a observação do comportamento das coordenadas ao movimentar dos pontos sobre a malha quadriculada, proporcionada pelo *software* durante a sequência, foi um dos diferenciais para obtermos resultados mais expressivos.

A Avaliação Intermediária foi idealizada com uma situação problema que se utilizava de um mapa semelhante ao apresentado na Figura 6, porém, com coordenadas cartesianas no conjunto dos números inteiros. Para solucionar as questões, os participantes precisavam localizar as estações que estavam parte na linha azul e parte na linha verde do metrô de São Paulo, com ligações entre as estações Liberdade, Paraíso e Consolação, considerando o marco zero de São Paulo, a Praça da Sé, como ponto central para os eixos cartesianos que foram expressos em quilômetros (Km).

Na questão 1, que valia dois pontos, os participantes precisavam escrever as coordenadas dos pontos que representavam sete estações do metrô, a saber: Consolação, Trianon Masp, Brigadeiro, Paraíso, Vergueiro, São Joaquim e Liberdade. Após análise, observamos que 73,68% dos participantes da Turma 1, responderam à questão corretamente e 26,32%, responderam-na parcialmente correta. Já 50 % dos participantes da Turma 2 solucionaram a questão corretamente, 37,5% responderam parcialmente corretas e 12,5% com respostas totalmente erradas.

Desde o início da sequência, ao examinarmos qualitativamente os protocolos, observamos que ocorreram basicamente dois tipos de erros: a inversão dos números correspondentes as ordenadas com as abcissas e a escrita das coordenadas com um único valor. Nesse contexto, ao analisarmos a Avaliação Intermediária, constatamos que os participantes das Turmas 1 e 2, apresentaram melhoria nesse aspecto. Mas, a exemplo da Figura 43 em que apresentamos extratos das respostas dos participantes 26 e 29 ainda havia aqueles que cometeram tais erros.

Figura 43 – Resposta dos participantes 26 e 29 à questão 1 da Avaliação Intermediária



Fonte: Protocolo dos participantes 26 e 29

As respostas corretas para esta questão deveriam ser as seguintes: Consolação:(-21, -6); Trianon–Masp:(-10, -11); Brigadeiro:(-11, -15); Paraíso:(-5,-21); Vergueiro: (-5, -16) São Joaquim: (- 4, -10) e Liberdade: (-2, -4).

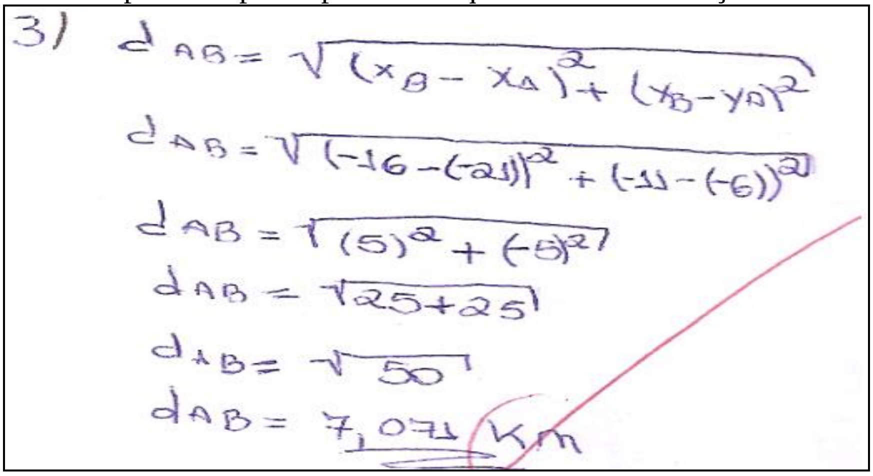
O participante 26 escreveu apenas os nomes das estações e o participante 29, escreveu as coordenadas de forma incorreta e ou invertidas. Tais erros apresentados pelo participante 29 o levaram a resolver as outras questões da avaliação de forma errada, pois as mesmas dependiam de dados da primeira questão para serem solucionadas.

Na questão 2, o objetivo era localizar no plano cartesiano os pontos correspondentes às três estações de metrô, sendo Consolação: C(-21, -6), Paraíso: P(- 5, -21) e Liberdade: L(-2, -4). Na primeira turma, 94,74% realizaram-na corretamente e 5,26% solucionaram-na parcialmente. Para a Turma 2, os resultados foram de 87,50% de acertos, 6,25% de resoluções parcialmente certas e 6,25% com resolução totalmente errada.

Na situação da questão 3, os participantes deveriam verificar a distância do trajeto realizado pelo usuário do metrô - Pedro, que sai da estação Consolação para a estação Trianon - Masp, onde encontra com o João. Para desenvolver esta questão, os participantes poderiam contar as unidades entre os pontos aplicando estes valores ao Teorema de Pitágoras ou a fórmula da distância entre dois pontos.

Analisamos os protocolos e constatamos que entre os 35 participantes presentes houveram respostas diferentes para esta questão. 8,57% não responderam à questão, 68,93% responderam por meio da fórmula da distância entre dois pontos, 14,28% solucionaram utilizando o módulo da diferença entre os valores finais e iniciais, finalizando com o Teorema de Pitágoras e 8,57% observaram as distâncias contando as unidades nos eixos e introduzindo estes valores no Teorema de Pitágoras. Tais realizações podem ser observadas nas Figuras 44, 45 e 46, que são extratos dos protocolos dos participantes 20, 15 e 36.

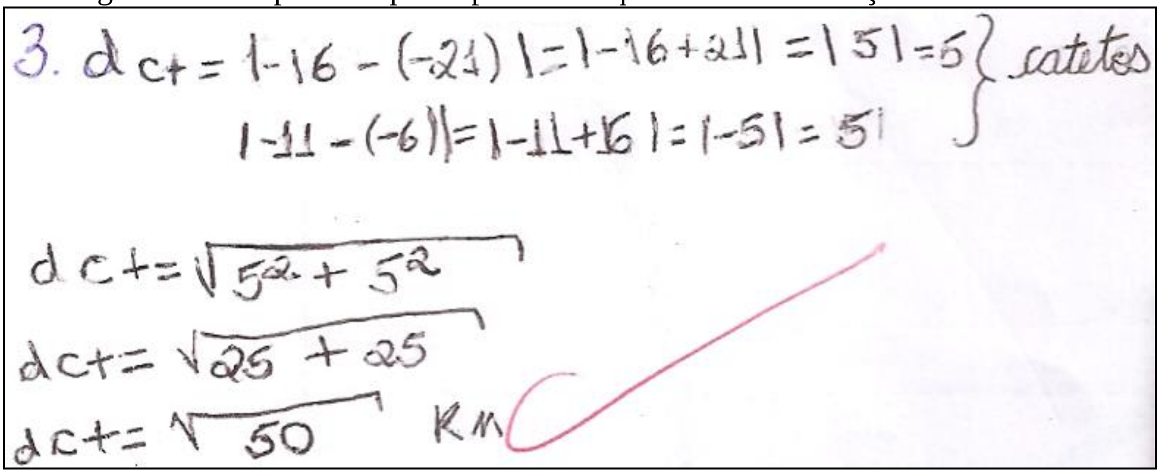
Figura 44- Resposta do participante 20 à questão 3 da Avaliação Intermediária



Fonte: Protocolo do participante 20

O participante 20 solucionou a questão por meio da fórmula da distância entre dois pontos, substituindo a forma algébrica pelos valores correspondentes às abcissas e ordenadas dos pontos referentes às estações Consolação e Trianon- Masp de modo a identificar a medida do trajeto realizado por Pedro. Já o participante 15 utilizou parcialmente a mesma fórmula, conforme ilustra a Figura 45.

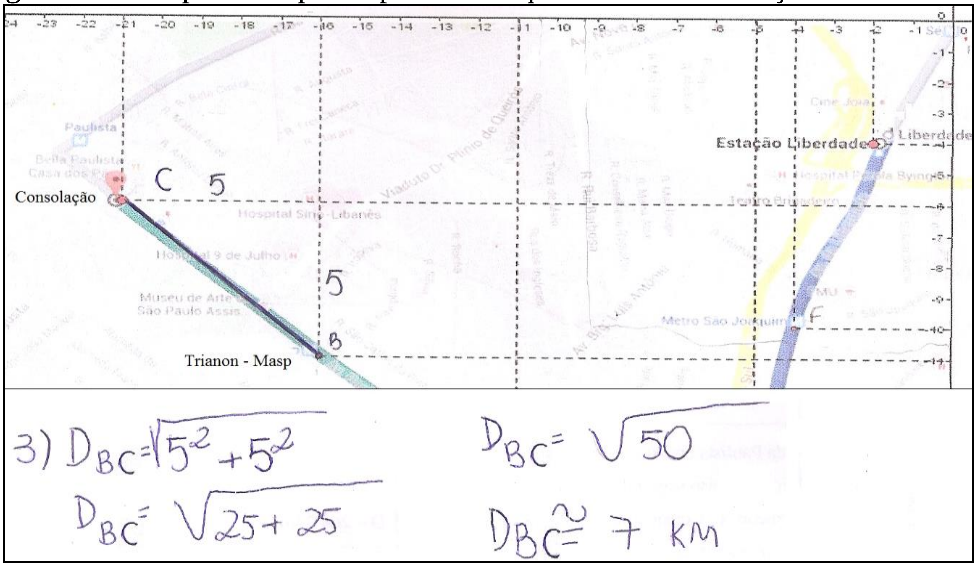
Figura 45 – Resposta do participante 15 à questão 3 da Avaliação Intermediária



Fonte: Protocolo do participante 15

A resolução se deu por tratamentos no sistema de escritas numérico, sendo iniciada pelo módulo da diferença das abscissas e ordenadas dos pontos, que resultaram nos valores dos catetos, aplicados à fórmula da distância. O participante 36, observou a partir da imagem do mapa das estações do metrô que o trajeto realizado por Pedro era um segmento inclinado que sugeriu a formação de um triângulo retângulo; e contando as unidades no próprio eixo, identificou os valores dos dois lados do triângulo e os chamou de catetos. A Figura 46, ilustra os dois modos de registros utilizados pelo participante.

Figura 46 – Resposta do participante 36 à questão 3 da Avaliação Intermediária

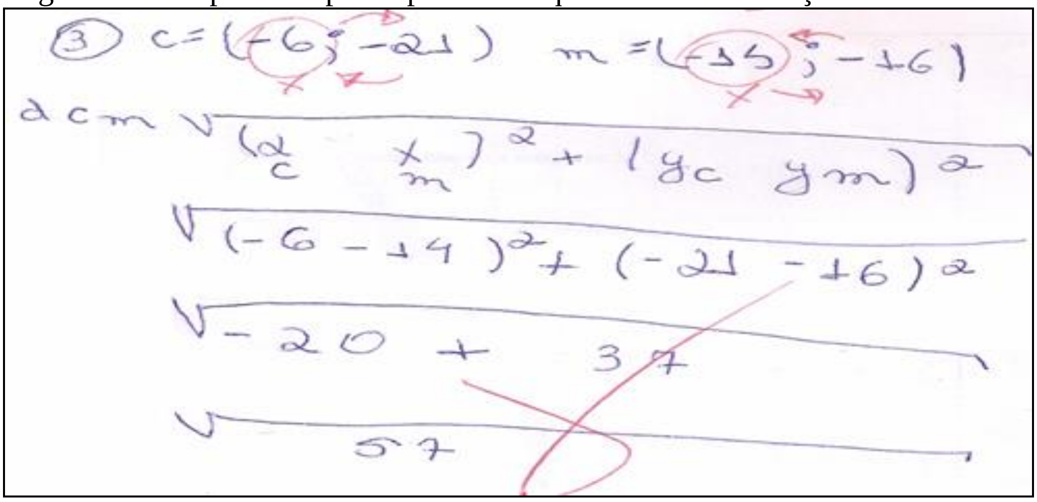


Fonte: Protocolo do participante 36

A Figura 46, trata de conversões do sistema gráfico cartesiano para o sistema de escritas numérico, entre as outras formas de resoluções, essa necessitou de menos cálculos, mas integrou de forma mais evidente o conhecimento geométrico na relação entre o triângulo retângulo, o Teorema de Pitágoras e os registros de representação numéricos dos eixos cartesianos, incluindo os tratamentos em registros com potenciação, adição e radiciação.

Verificamos que a compreensão de partes do processo do cálculo da medida do comprimento dos segmentos, como o ocorrido com o participante 29, mesmo aplicando a fórmula da distância, por inverter os valores das coordenadas e escrever a fórmula incorretamente, faltando os sinais negativos, como se observa na Figura 47, não há possibilidade de acertos independente do processo de resolução. Ou seja, a estrutura para as questões nesta Avaliação ou no conteúdo de Geometria Analítica são as coordenadas. Por meio delas desenvolvemos todos os temas deste conteúdo matemático.

Figura 47 - Resposta do participante 29 à questão 3 da Avaliação Intermediária



Fonte: Protocolo do participante 29

A habilidade de calcular as coordenadas do ponto médio e representá-las sobre o segmento era o objetivo da questão 4. A resolução iniciava-se ao representar no plano cartesiano os segmentos de reta que compreendiam da estação Consolação a estação Paraíso (CP), da estação Paraíso à Liberdade (PL) e da estação Liberdade à Consolação (LC), determinando os seus respectivos pontos médios M, N e H. Nessa questão, os participantes da Turma 1 alcançaram 52,63% de acertos totais e 47,37% acertaram parcialmente. Na segunda turma, 37,50% conseguiram solucionar a questão corretamente, 56,25% solucionaram parcialmente e 6,25% não conseguiram solucionar.

Na questão 5, era solicitado ao participante a construção de um triângulo com vértices nas estações Consolação, Paraíso e Liberdade, para calcular e localizar no plano as coordenadas do baricentro do triângulo, além de identificar se o baricentro se localizava próximo à Avenida Brigadeiro Luís Antônio. Após análise dos resultados, a Turma 1 apresentou 52,63% de acertos totais e 47,37% de acertos parciais. Já para a Turma 2, os resultados alcançados foram 37,5% de respostas corretas, 56,25% de respostas parcialmente corretas e 6,25% de respostas incorretas para a questão.

Confrontando os dados das questões por turma com base na Tabela 10, podemos afirmar que os objetivos e habilidades esperados para a Avaliação Intermediária foram atingidos satisfatoriamente, principalmente com a turma que fez uso do GeoGebra durante a Sequência de Atividades. O campo visual e manipulável das ações entre as janelas do *software* nas construções dos pontos e segmentos favoreceu a aprendizagem.

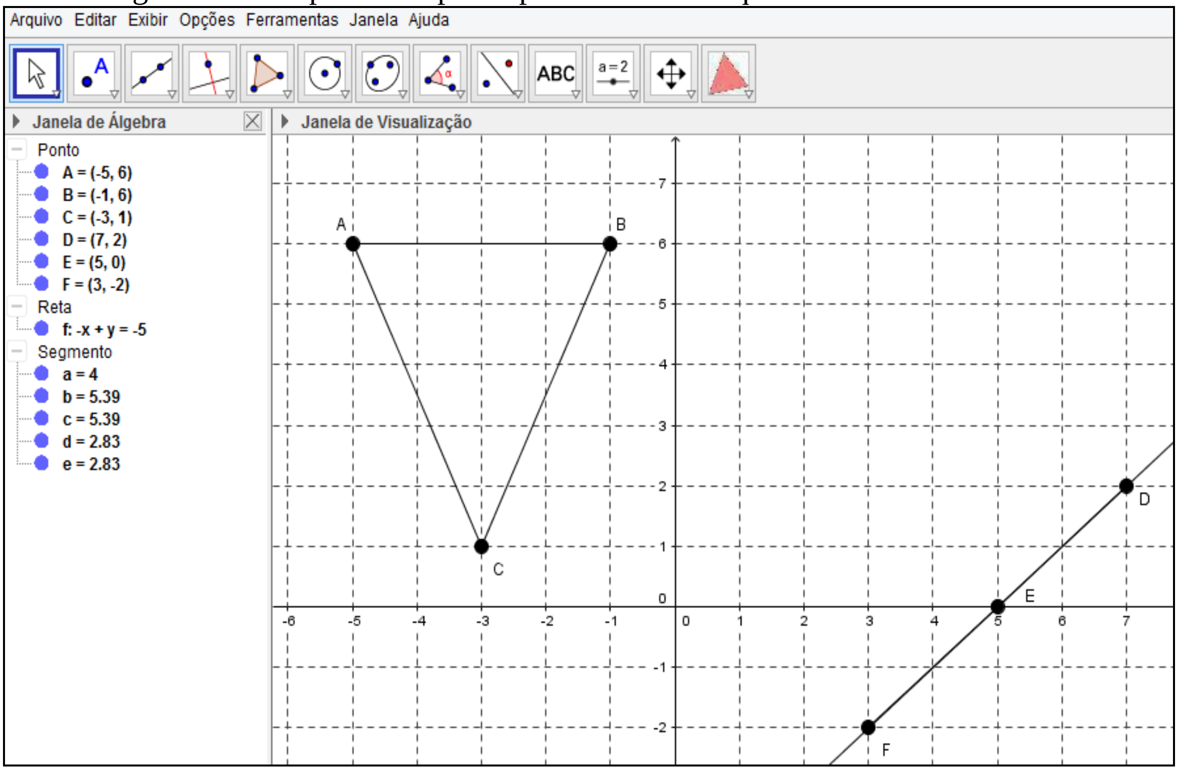
Outro fato relevante que ficou evidente foi a realização de conversões (DUVAL, 2013), em que utilizamos um contexto real, identificando as estações do metrô e parte do trajeto das linhas verde e azul com representações geométricas sobre o plano cartesiano de modo a apresentar ao participante uma problemática contextualizada. Nessa situação, o participante interpretou reconhecendo os seus símbolos e comparou-os aos estudos anteriores. Então, partiu do sistema gráfico cartesiano (onde as estações eram apenas um ponto e o trajeto entre elas, segmentos) para o sistema de escritas, representando as estações em coordenadas, realizando, portanto, conversões entre registros e tratamentos ao calcularem as medidas, os segmentos, o ponto médio e o baricentro.

5.3.7 Atividade 5

Estiveram presentes 18 participantes da Turma 1 e 14 participantes da Turma 2, para realização da Atividade 5, desenvolvida em quatro questões com duração de duas aulas, cujo objetivo era utilizar Registros de Representações Semióticas (DUVAL, 2013), diferenciados, destacando a habilidade de identificar o alinhamento de três pontos.

Na primeira questão, utilizamos a representação gráfico cartesiana, no qual por meio do *software* GeoGebra, de modo instrucionista, os participantes da Turma 1 escreveram três pontos ao acaso e traçaram uma única reta, observando se os três pontos pertenciam a reta. Não sendo possível esta relação entre a reta e os três pontos, identificaram-nos como desalinhados. Nesta situação, a Turma 1 fez principal uso da janela de visualização do GeoGebra. Os participantes 17 e 18, na Figura 48, apresentaram a resposta da questão 1 **a** em duas situações, uma com três pontos alinhados formando uma reta e outra com três pontos desalinhados formando um triângulo.

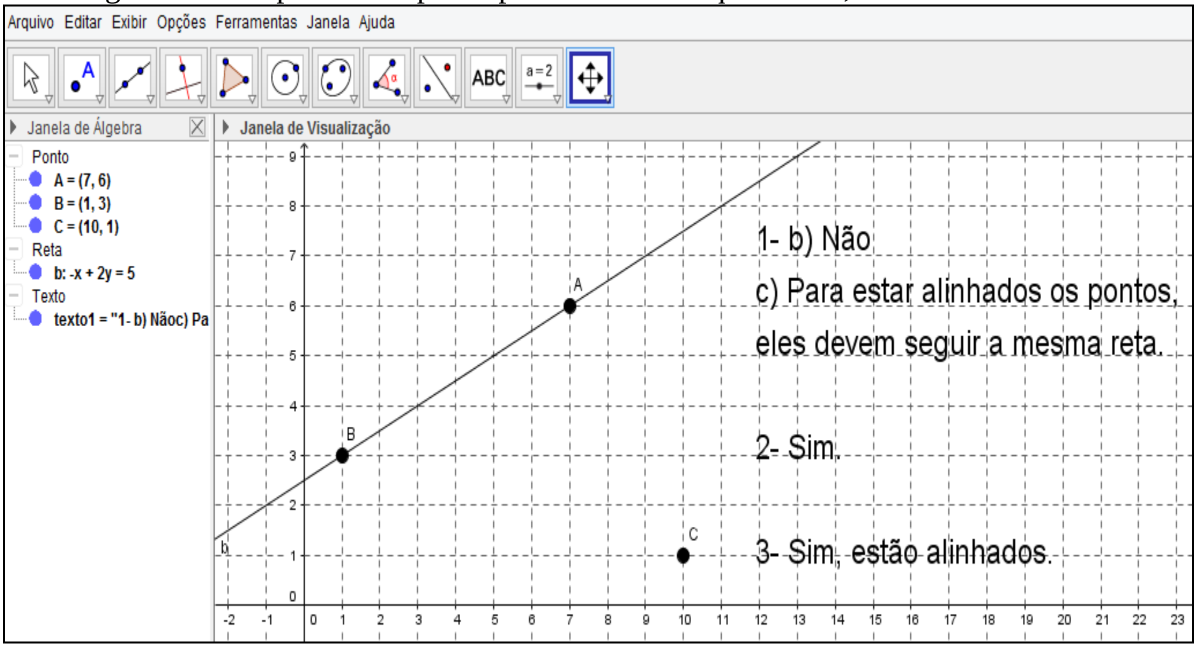
Figura 48 – Resposta dos participantes 17 e 18 à questão 1 a da Atividade 5



Fonte: Protocolo dos participantes 17 e 18

Na Figura 48, os participantes diferenciaram a forma alinhada e desalinhada de representar três pontos, construindo no plano cartesiano figuras geométricas planas. Já os participantes 9 e 10 fizeram exatamente como estava sendo pedido no enunciado da questão. Representaram três pontos no plano e passaram uma única reta ficando o ponto C(10, 1) fora do trajeto da reta. Dessa forma, concluíram que para haver alinhamento, os pontos devem estar na mesma reta, afirmação que consta na Figura 49 em que os participantes optaram por apresentarem as questões 1, 2 e 3 diretamente na janela de visualização. Porém, a forma escrita dos cálculos com matrizes e frações no editor de texto do GeoGebra, apresentava-se como mais um complicador para resolução e por não ser o objetivo do estudo, os procedimentos referentes aos cálculos foram realizados na folha impressa.

Figura 49 - Respostas dos participantes 9 e 10 às questões 1, 2 e 3 da Atividade 5



Fonte: Protocolo dos participantes 9 e 10

Independente das escolhas dos participantes para exemplificarem situações de alinhamentos, a Turma 1, na questão 1 **a,** obteve melhor rendimento na representação gráfica. Embora a Turma 2 também não tenha cometido erros na questão, o motivo da média inferior se dá pelo fato de alguns participantes não terem realizado a questão.

A resposta da questão 1 **b** e **c**, dependia da observação gráfica da questão 1 **a**. E o texto da questão 1 **b** complementava com a seguinte afirmação: se com uma única reta consigo passar sobre três pontos é porque eles estão alinhados. Já na questão 1**c**, perguntava-se o que era necessário para sabermos se três pontos estavam alinhados. A resposta que já estava na questão anterior, dependia de interpretação, e neste aspecto, a Turma 2 foi bem-sucedida. Este sucesso permaneceu ao realizarem os cálculos das questões 2, 3 e 4, conforme podemos observar na Tabela 11.

Tabela 11 - Médias e desvio padrão das notas por turma e questões da Atividade 5

Turma	**Medida**	**Q1a**	**Q1b**	**Q1c**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**GERAL**
1	**Média**	1,50	1,50	1,17	0,44	1,80	1,39	7,80
	DP	0,00	0,00	0,64	0,17	1,15	1,28	2,12
2	**Média**	1,29	1,50	1,29	0,50	2,50	2,50	9,58
	DP	0,54	0,00	0,54	0,00	0,00	0,00	0,70
Geral	**Média**	1,40	1,50	1,22	0,47	2,11	1,87	8,58
	DP	0,37	0,00	0,59	0,12	0,92	1,11	1,86

Fonte: Autoria própria

Na Tabela 11, os resultados das médias demonstram que as turmas atingiram índices satisfatórios com 7,80 e 9,58 para as Turmas 1 e 2 respectivamente. O desempenho mais expressivo da Turma 2, na Atividade 5, ocorreu devido a todos terem a habilidade de calcular determinante de matrizes, (na questão 2 afirmaram lembrar como faziam para realizarem o cálculo do determinante, no ano letivo anterior) e comprovaram saber resolver nas questões 3 e 4. Esse modo de resolução compreendia 25% da Atividade 5 e outros 25% daria para serem resolvidos por este método. Portanto, a Turma 1 esteve em desvantagem porque alguns participantes apresentaram problemas no cálculo.

Utilizando os registros de escrita numérico na questão 3, abordamos o alinhamento de três pontos por meio do cálculo do determinante de matrizes a partir de coordenadas cartesianas. Segundo o livro didático (BARROSO, 2010), uma vez que o resultado do determinante seja igual a zero, comprovamos que os pontos estão alinhados. Essa firmação foi impressa na folha de questões para o conhecimento dos participantes, em conjunto com três pares de coordenadas para serem identificados como alinhados ao desalinhados, e um exemplo totalmente resolvido com detalhes dos procedimentos de cálculos.

A questão 10 do Pré-Teste citava o cálculo do determinante de matrizes, mas não apresentava um exemplo detalhando como na Atividade 5. O exemplo sem dúvidas, ajudou-lhes a recordarem.

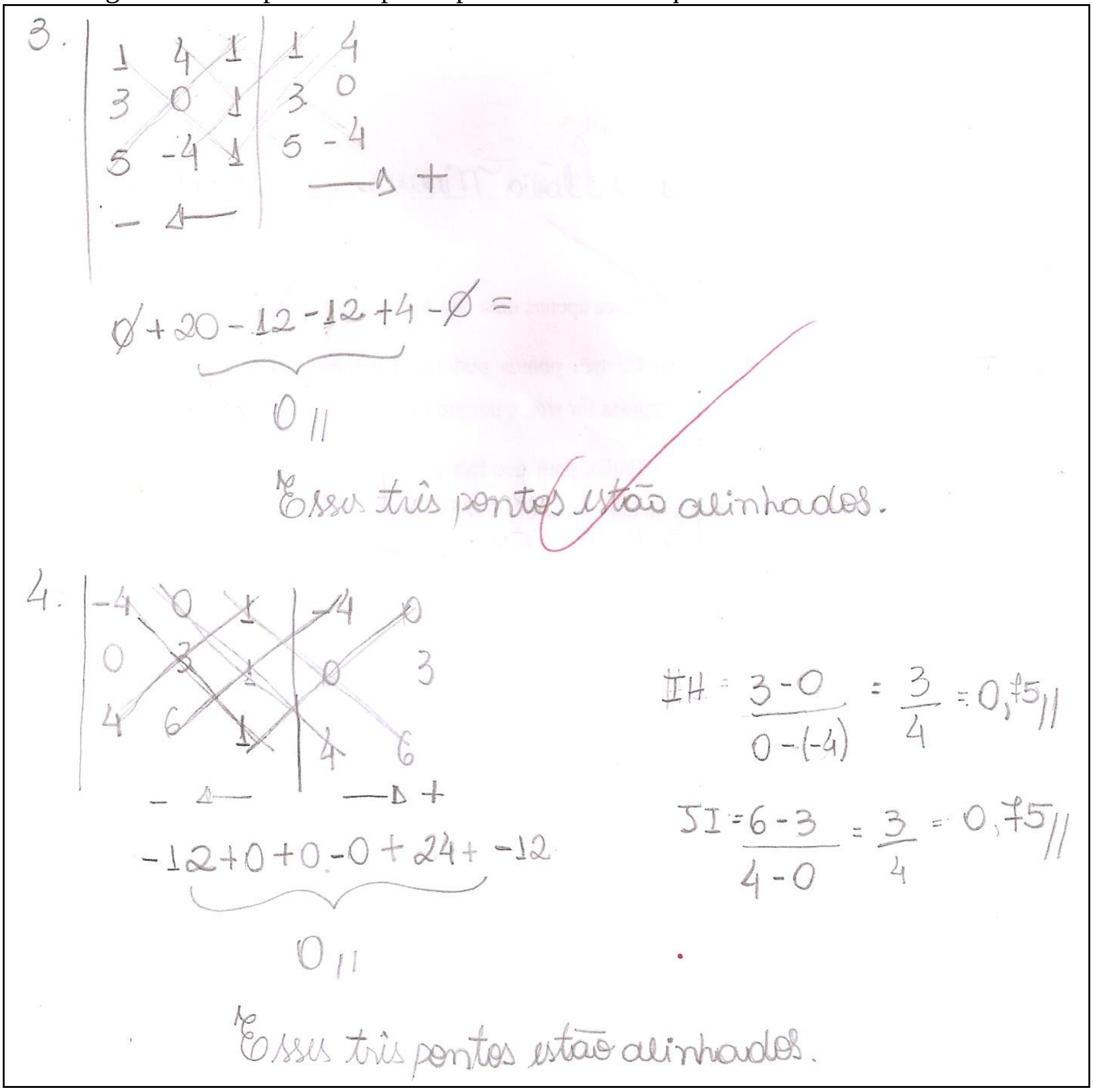
Na quarta questão, introduzimos a fórmula da inclinação e fizemos uma breve relação da tangente do ângulo localizado entre a reta e o eixo x com o valor da inclinação da reta. Esta questão tratava de cálculos realizados com no mínimo três coordenadas distintas em conversões do sistema de escrita algébrico para o numérico, utilizando a fórmula da inclinação de modo a obter igualdades nos valores resultantes dos cálculos para que os três pontos pudessem estar alinhados.

Durante a realização das questões 3 e 4, as turmas fizeram os cálculos com determinante de matrizes e não se atentaram para a necessidade de utilização da fórmula da inclinação da reta, cujo objetivo era determinar se as coordenadas dos três pontos os deixavam em condições de alinhamento e por pertencerem a mesma reta possuíam a mesma inclinação.

Conforme observações da pesquisadora, a leitura dos participantes na questão 4 foi superficial e como já possuíam habilidade em determinar o alinhamento de três pontos por cálculo de determinante de matrizes, simplesmente fizeram pelo caminho que dominavam, como foi o caso dos participantes 17 e 18, sendo necessária a devolução da folha e a indicação de releitura desta questão.

A Figura 50 ilustra as questões 3 e 4 resolvidas no primeiro momento da atividade, e a questão 4 após a releitura.

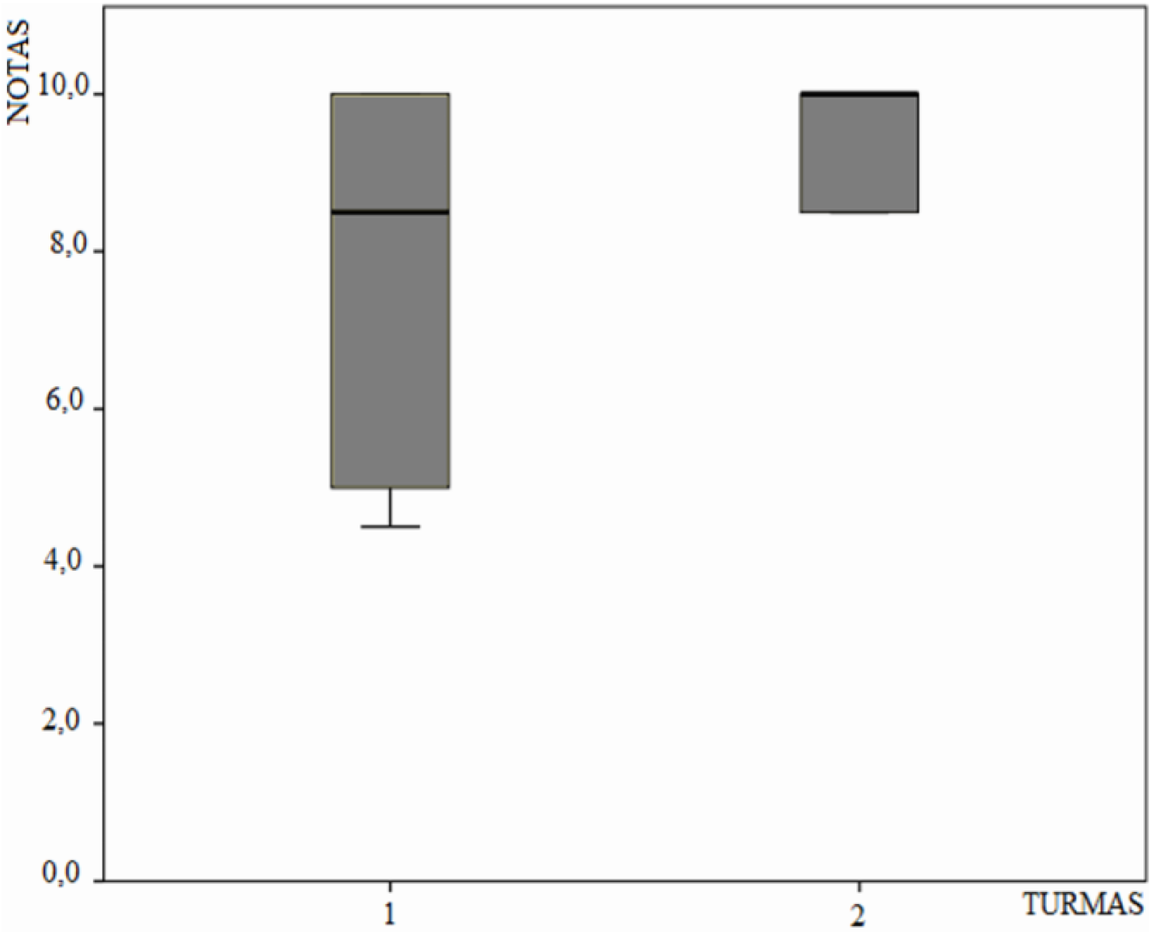
Figura 50 - Resposta dos participantes 17 e 18 às questões 3 e 4 da Atividade 5



Fonte: Protocolo dos participantes 17 e 18

Como a Atividade 5 era também um momento de aprendizagem, os participantes tiveram a oportunidade de refazerem a última questão por meio da fórmula da inclinação da reta, como outra forma de registro para resolução deste tema. Embora tenham refeito a questão, consideramos como correta a primeira resolução, à medida que responderam ao principal objetivo que era identificar se os três pontos estavam alinhados. Portanto, conforme a Figura 51, a distribuição das notas da Turma 2 ficou condensada em torno da mediana que atingiu o valor máximo da atividade com nota mínima de 8,5; enquanto a mínima da Turma 1 foi 4,5.

Figura 51 - Distribuição das notas da Atividade 5 das duas Turmas



Fonte: Autoria própria

Possivelmente, seja conveniente não construirmos questões longas como a questão 4, principalmente no final das atividades por verificarmos que as questões finais são realizadas quando o tempo para término da aula está mais próximo do fim e a atenção dispensada à realização da questão já não é a mesma do início da atividade. Verificamos que na primeira turma, 25% dos participantes não realizaram a questão 3 e 40%, a questão 4. A dificuldade para esta Turma foi a presença do cálculo do determinante de matrizes e, segundo eles, excesso de informações na questão 4.

A representação gráfica, da Atividade 5 acrescentou aos participantes em suas construções mais conhecimento geométrico. Alguns estavam associando que três pontos, independente das suas coordenadas, sempre formam um triângulo, e na Figura 48, observamos que podem também formar retas. Outros estavam fazendo linhas curvadas para passarem sobre os três pontos, dizendo que eram retas. A Turma 1 que utilizou o GeoGebra não fez uso desta estratégia, porque estavam com a ferramenta reta ativada. O que fizeram foram testes com várias retas que só contemplavam pares de pontos e ao perceberem o que estavam fazendo, começaram a apagar as retas e movimentarem os pontos, percebendo que o alinhamento só ocorre quando os pontos ficam sobre as retas.

Ao finalizarem a atividade, fizemos uma síntese das três formas de representações na lousa com duração de aproximadamente 20 minutos, explicando para as duas Turmas a definição de reta e o objetivo da atividade: verificar em qual situação três pontos ficam alinhados, utilizando a representação gráfico cartesiana, o sistema de escrita algébrico e o numérico em conversões e tratamentos com o cálculo de determinantes e com a fórmula da inclinação da reta.

Saber se três pontos estão alinhados pelos valores da tangente das retas, também seria uma possibilidade. Porém, na Atividade 5, introduzimos superficialmente este tema que seria tratado na Atividade 6.

5.4 Pós - Teste

Ao final dos dois módulos, após a aplicação da Sequência de Atividades, realizamos uma avaliação denominada Pós-Teste, com o objetivo de verificar o nível de acertos em um quadro de notas por questão das turmas.

A realização efetiva do instrumento durou duas aulas. No momento da aplicação ocorreu a falta de um participante em cada turma, ficando a Turma 1 com 19 participantes e a Turma 2 com 15 participantes.

O Pós-Teste compreendeu dez questões, sobre os seguintes conteúdos: plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, baricentro de um triângulo, alinhamento de três pontos e inclinação da reta. Foram requeridas habilidades como, a localização de pontos no plano cartesiano, as representações dos pontos em coordenadas cartesianas, o cálculo das coordenadas dos pontos médios e as suas localizações no plano cartesiano, a representação das medianas e do baricentro do triângulo no plano e seu cálculo desenvolvido a partir da fórmula, o alinhamento de três pontos por meio da representação geométrica, do cálculo do determinante de matrizes e do cálculo algébrico iniciando-se pela fórmula da inclinação da reta.

O desempenho da Turma 1 foi discretamente melhor que o da Turma 2, em relação a todas as medidas de tendência central. Por exemplo, as médias obtidas pelas turmas foram de 7,90 e 7 ,19, as medianas 8,75 e 8,25 e as modas foram 8,75 e 8,00, respectivamente.

Verificamos que para a primeira turma os valores das notas foram mais homogêneos, concentrando-se em torno da média. Na Tabela 12, a medida de dispersão confirma esta homogeneidade, com desvio padrão de 1,88 comparado ao da segunda turma, que obteve seus valores desviando da média em 2,40 pontos.

Tabela 12 – Médias e desvio padrão das notas por turma e questões do Pós -Teste

Turma	Medida	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	GERAL
1	**Média**	0,95	0,95	0,72	1,00	0,91	0,92	0,63	0,64	0,68	0,53	7,90
	DP	0,17	0,13	0,26	0,00	0,21	0,20	0,39	0,37	0,36	0,42	1,88
2	**Média**	0,89	0,91	0,73	0,77	0,85	0,78	0,65	0,50	0,53	0,57	7,19
	DP	0,28	0,15	0,22	0,42	0,28	0,30	0,34	0,37	0,41	0,43	2,40
Geral	**Média**	0,92	0,93	0,73	0,89	0,88	0,86	0,64	0,58	0,62	0,54	7,58
	DP	0,22	0,13	0,24	0,29	0,24	0,25	0,36	0,37	0,38	0,42	2,12

Fonte: Autoria própria

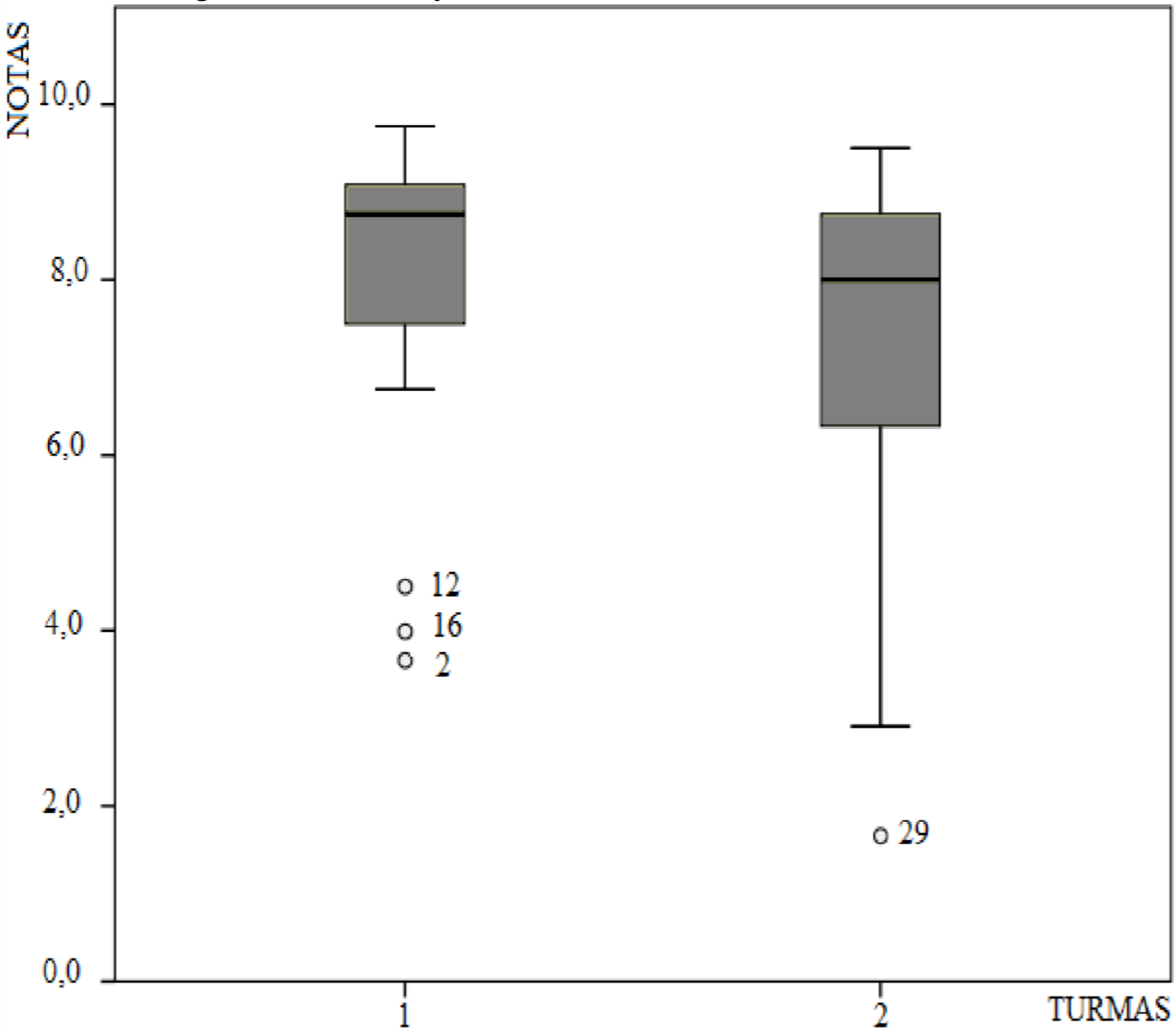
Segundo dados da Tabela 12, nota-se que nas questões 1 a 6, os participantes de ambas turmas foram melhores com médias por questão maiores que 0,72. Nas questões finais do Pós-Teste a média variou entre 0,50 e 0,68. Hipoteticamente, podemos interpretar este fato recorrendo a algumas possibilidades. A avaliação exigiu cálculos, representações e localizações no plano cartesiano requerendo atenção e concentração por um período de duas aulas, podendo ter havido ao final, dispersão ou desatenção.

Outra possiblidade está relacionada à incompreensão dos temas alinhamento e inclinação que foram trabalhados no segundo módulo. Para esses não houve uma avaliação intermediária como a aplicada no final do primeiro módulo. Mas, ao realizaram a Atividade 5, que abordou o mesmo tema, obtiveram média geral satisfatória de 8,58.

Em um panorama geral, a média do teste foi satisfatória em aproximadamente 7,58 pontos, com valor máximo de 9,75, mínimo de 1,66 e desvio de 2,12. Na Figura 52, observamos na distribuição das notas do Pós-Teste que não houve participantes com 100% de acertos em ambas as turmas, assim como, nenhum participante errou 100% da avaliação. As notas foram bem diversificadas, com valores mínimos de 3,66 e 1,66, e máximos de 9,75 e 9,50 para as Turmas 1 e 2, respectivamente.

O desvio padrão do Pré-Teste representa que os valores das notas dos participantes da Turma 1 estão mais próximos da média (7,90). A Figura 52 ilustra este fato, porém, os participantes 12, 16 e 2 ficaram distantes dos demais com notas inferiores a cinco, contribuindo para redução da média da turma.

Figura 52 - Distribuição das notas do Pós -Teste das duas Turmas.



Fonte: Autoria própria

As notas da Turma 2 foram mais dispersas como podemos verificar na Figura 52 em que a maioria dos participantes estão com notas inferiores a mediana de 8,25 e o participante 29 diferenciou-se apresentando sua média no limite mínimo da turma de 1,66. As dificuldades foram intercalando-se entre não saber representar as coordenadas no plano e falhas nos cálculos.

As médias por Turmas nas atividades da sequência já sinalizam para os dados por questões do Pós-Teste. Por exemplo, nas questões 1 e 2 do Pós-Teste e na Atividade 1, a Turma 1 apresentou melhores médias e estes dois instrumentos tratavam das mesmas habilidades. As questões 4, 5 e 6 do Pós-Teste e a Atividade 4 abordavam o conteúdo ponto médio, mediana e baricentro do triângulo e a Turma 1 foi melhor que a Turma 2.

Já a Turma 2 foi mais habilidosa no cálculo da distância entre dois pontos que apresentamos nas Atividades 2 e 3 e no cálculo do determinante de matrizes na Atividade 5.

Estes conteúdos estiveram presentes nas questões 3, 7 e 10 do Pós-Teste com suas médias melhores que a Turma 1.

Na questão 1, os participantes deveriam representar as coordenadas dos pontos D, E e F que estavam localizados no plano cartesiano, em que 89,48% dos participantes da Turma 1, acertaram totalmente e 10,52% acertaram parcialmente a questão. Na Turma 2, o percentual de participantes que acertaram a questão foi de 80%, 13,33% acertaram parcialmente e 6,67% erraram.

O objetivo da questão 1 era desenvolver a habilidade de representar coordenadas cartesianas dos pontos presentes no plano. Conferindo os protocolos, evidenciamos que os dois erros cometidos no Pré-Teste foram significativamente solucionados, onde os participantes faziam inversões dos números correspondentes as ordenadas com os das abcissas ou escreviam as coordenadas com um único valor. Entretanto, a média geral para esta questão foi de 0,92, indicando que ainda há alguns participantes invertendo as posições das coordenadas.

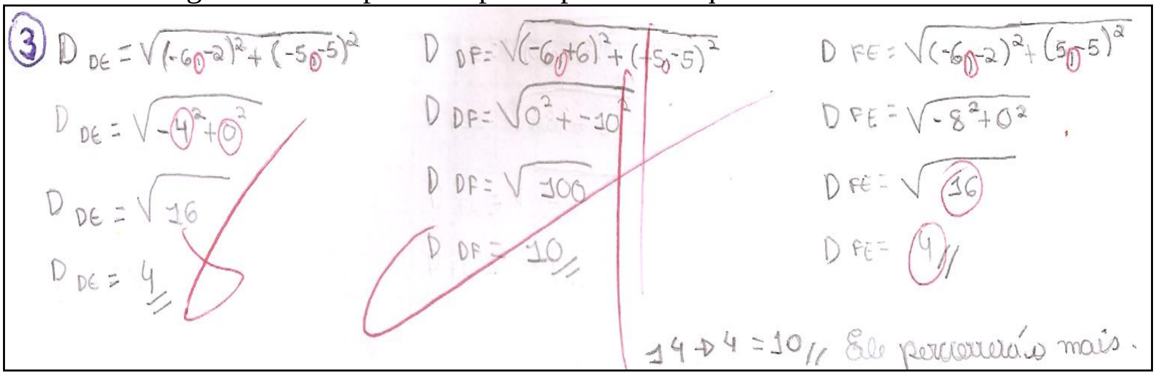
Averiguamos que os erros para essa questão foram provenientes da inversão dos valores dos eixos e da falta do sinal para os valores negativos.

Na questão 2, o objetivo era localizar os pontos A(-8, 4); B(-5, -2) e C(3, 6) no plano cartesiano, e 84,21% dos participantes da Turma 1 responderam corretamente a questão e apenas 15,79% acertaram parcialmente. Na Turma 2, o índice de acertos foi de 73,33% e 26,76% dos participantes acertaram parcialmente a questão.

A questão 3, tinha como objetivo determinar a distância dos segmentos DE, DF e FE apresentado na imagem. Para isso, os participantes deveriam calcular a medida de um segmento ou a distância entre dois pontos e comparar o resultado das somas dos segmentos DF e FE com o segmento DE. Analisando os resultados, observamos que as turmas apresentaram resultados relativamente próximos. A Turma 1 obteve 31,58% de acertos e 68,42% de acertos parciais. Já a Turma 2, obteve os seguintes resultados: 26,67% acertaram a questão e 73,33% acertaram parcialmente.

Os índices de acertos parciais foram relativamente altos, superiores a 65%. A ocorrência dos erros se deram em sua maioria por falha na interpretação da pergunta, em que os participantes calcularam as medidas dos segmentos, mas, não determinaram qual a diferença entre os resultados, ou realizaram os cálculos da diferença entre os segmentos de modo incorreto. Houve também, trocas de valores das coordenadas ao aplicarem a fórmula da distância entre os dois pontos, erros nas operações com números inteiros e nas potenciações. Um exemplo de alguns dos erros está na Figura 53.

Figura 53 – Resposta do participante 23 à questão 3 do Pós-Teste

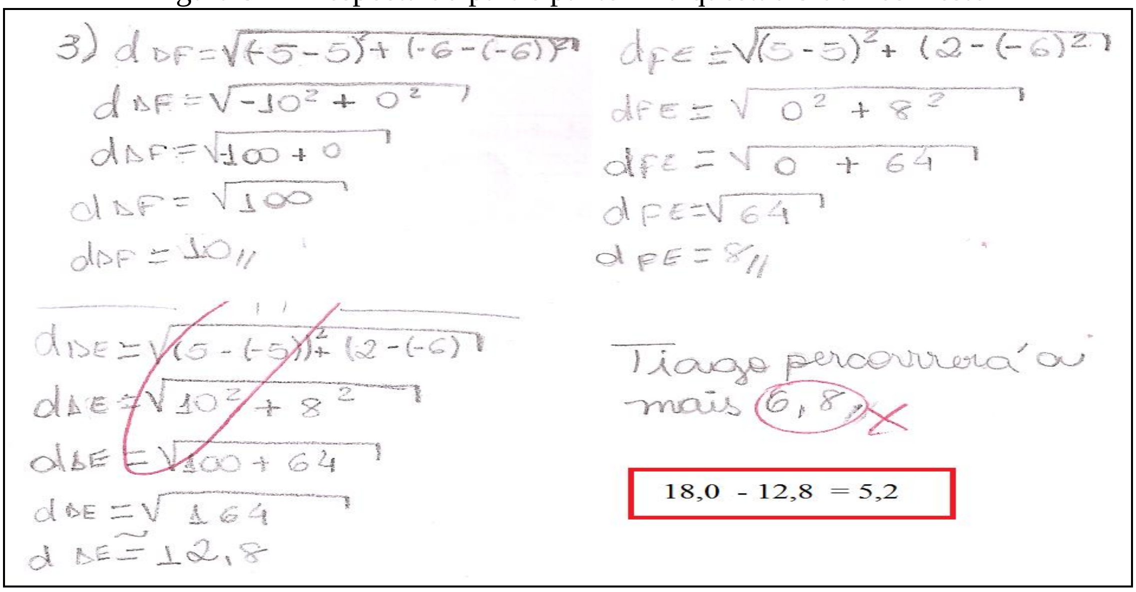


Fonte: Protocolo do participante 23

O participante representa os valores ao aplicar a fórmula, utilizando vírgulas como se estivesse representando as coordenadas do ponto. Ao calcular a distância do segmento DE e FE para os mesmos $(-6, -2)^2$ ele determina resultados diferentes, ora resulta em -4^2, ora em 8^2. E para potência $(-8)^2$ como resultado determina que é 16. Compreendemos por meio deste fato, que o participante ainda não possuía domínio do cálculo da potenciação com expoente dois, nem efetuava com total segurança o cálculo com números inteiros.

Quando a habilidade se refere ao cálculo com números decimais, as dificuldades apresentam-se em maior quantidade entre os participantes. Houve participantes que calcularam corretamente todas as medidas dos segmentos, mas, se equivocaram no cálculo da diferença, tão somente porque um dos valores era decimal, como ocorrido com o participante 17 (Figura 54), que acertou cálculos com um nível de complexidade aparentemente superior a subtração entre 18 e 12,8.

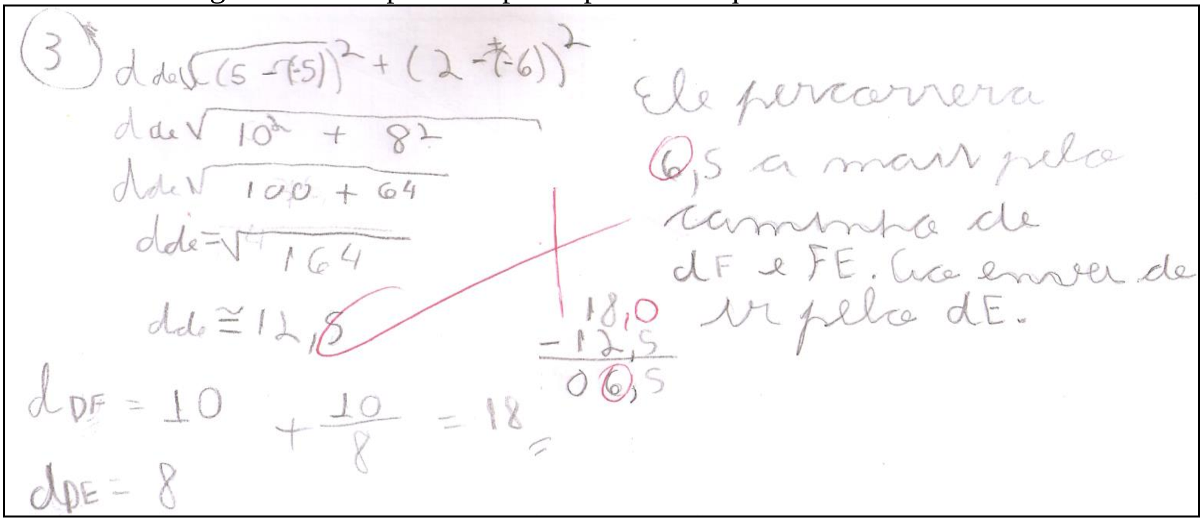
Figura 54 – Resposta do participante 17 à questão 3 do Pós-Teste



Fonte: Protocolo do participante 17

Já o participante 13 (Figura 55) errou ao calcular por aproximação a raiz quadrada de 164 e a subtração com números decimais.

Figura 55 – Resposta do participante 13 à questão 3 do Pós-Teste

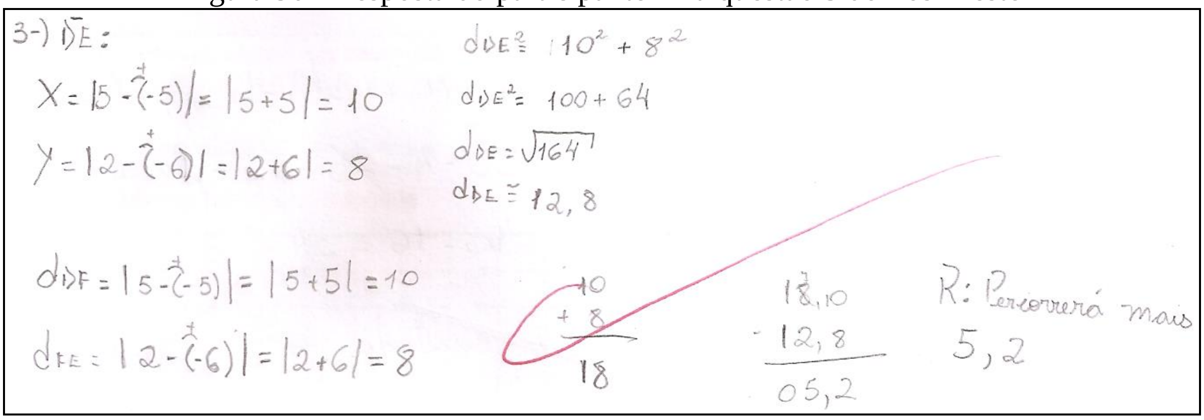


Fonte: Protocolo do participante 13

Ao observarmos as Figuras 54 e 55, nos remetemos as Representações Semióticas do Duval (2013), onde os participantes aplicaram em uma mesma questão métodos diferenciados de resolução. O participante 13 iniciou a questão por meio da contagem das unidades entre os pontos no próprio plano cartesiano e para o segmento inclinado ele utilizou a fórmula da distância entre dois pontos. Portanto, fez uso de conversões entre o sistema gráfico cartesiano e o sistema de escritas numérico ao elucidar as medidas dos segmentos DF e DE, e ao aplicar os valores das coordenadas aos dados da fórmula do sistema de escritas algébrico para o numérico.

Semelhantemente ao participante 17, alguns deram preferência as conversões desenvolvidas por meio da fórmula da distância, houve outros que optaram pelo módulo da diferença entre o ponto final e o inicial para as ordenadas e abscissas e depois aplicaram os valores no Teorema de Pitágoras, como o participante 24 (Figura 56).

Figura 56 - Resposta do participante 24 à questão 3 do Pós -Teste



Fonte: Protocolo do participante 24

Os tratamentos e conversões introduzidas nas atividades das aulas proporcionaram caminhos diversificados que fizeram parte da aprendizagem, na qual os participantes tiveram a liberdade para escolher a estratégia que melhor lhe conviessem. Para esta questão as duas turmas obtiveram índices satisfatórios, com médias de 0,72 para a Turma 1 e 0,73 para a Turma 2.

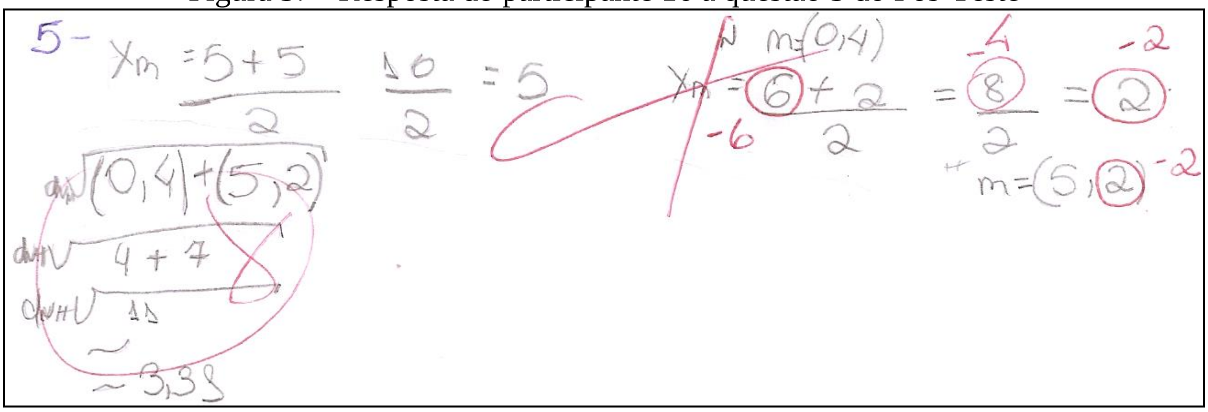
O objetivo da questão 4 era identificar na imagem o ponto médio M do segmento DE. Para desenvolver a questão, os participantes deveriam reconhecer o segmento e localizá-lo na imagem, associando o termo ponto médio do segmento, com a representação de sua metade. Observando as resoluções dos participantes da Turma 1, constatamos que houve 100% de acertos na questão. Já para a Turma 2, houve 73,33% de acertos, 6,66% de acertos parciais e 20% de respostas incorretas.

Os 20% de respostas incorretas se referem a dificuldades na interpretação, pois era para identificar na imagem o ponto médio e os participantes optaram por calcular o ponto médio do segmento. Portanto, mesmo os cálculos estando totalmente corretos não contemplaram a habilidade exigida na questão.

Na questão 5, partindo dos pontos médios N para o segmento DF e H para o segmento FE, os participantes deveriam calcular as coordenadas de N e H com os dados presentes na imagem. Nesse contexto, a Turma 1 apresentou 78,95% de acertos na questão e 21,05% de resoluções parcialmente corretas e a Turma 2, ficou com 66,67% acertos na questão, 26,66 de resoluções parciais e 6,67% de erros totais.

As resoluções incorretas ou parcialmente corretas se deram ao fato dos participantes, ao realizarem a conversão do sistema algébrico para o numérico, não transcreverem corretamente os dados, esquecendo dos valores negativos ou trocando os números das ordenadas com os das abscissas. O participante 16, por exemplo, cometeu algumas falhas circuladas na Figura 57.

Figura 57 - Resposta do participante 16 à questão 5 do Pós-Teste



Fonte: Protocolo do participante 16

O participante, além de esquecer o sinal do número seis, cometeu erros na divisão, identificando o ponto médio H com coordenada (5, 2), onde o correto seria (5, -2). Também não calculou o ponto médio N do segmento DF que seria (0, -6). Outro fato relevante, verificado no protocolo do participante 16, foi a utilização do ponto M(0,4) calculado erroneamente no exercício anterior com a resposta de outro ponto M (5, 2) em um cálculo de distância entre pontos realizado também de forma incorreta. Isso pareceu indicar que o participante não compreendeu os conceitos de ponto médio, nem de distância entre dois pontos e possui sérias dificuldades na realização de operações básicas com divisões. Em suma, apesar das dificuldades, a Turma 1 apresentou na questão a média de 0,91 e a Turma 2 de 0,85.

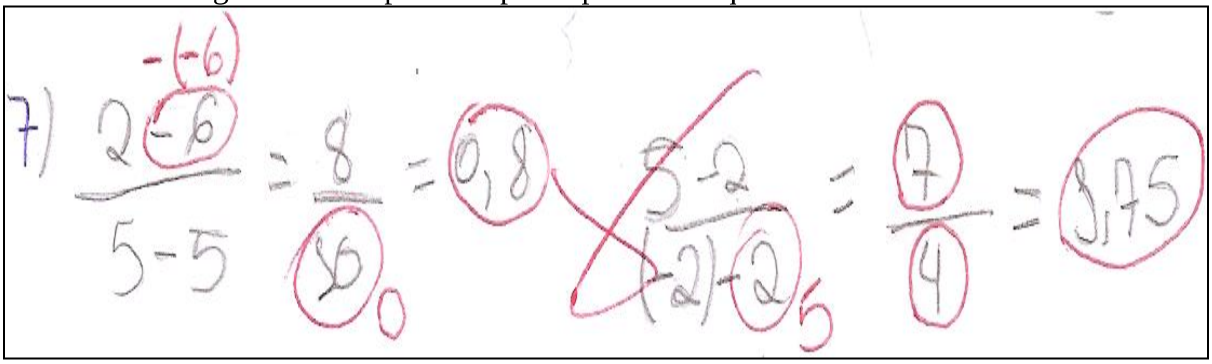
O desenvolvimento da questão 6 deu-se, ao delinear na imagem as medianas do triângulo DEF, localizando o ponto do baricentro na figura e ao realizarem o cálculo das coordenadas deste ponto. Portanto, as habilidades eram, representar os segmentos medianos e o ponto do baricentro de um triângulo, e calcular o baricentro de modo a representar suas coordenadas. A Turma 1 apresentou os seguintes resultados, 84,21% acertaram totalmente a questão e 15,79% acertaram-na parcialmente, ficando na questão com uma média de 0,92 pontos. Já na a Turma 2, os resultados foram 53,33% de acertos totais, 40% de acertos parciais e 6,67% que não solucionaram a questão, totalizando uma média de 0,78 pontos. Os erros cometidos pelos participantes em geral foram, transcreverem os números negativos sem os sinais e colocarem nas fórmulas coordenadas diferentes daquelas pertencentes a questão.

Analisando a questão 7, em que os participantes precisavam responder se os pontos F, E e G representados na imagem estavam alinhados e justificarem suas respostas por meio da representação gráfica e numérica, obtivemos os seguintes resultados: 36,84% dos participantes da Turma 1 acertaram corretamente a questão, 42,11% solucionaram parcialmente e 21,05% não solucionaram corretamente. Na Turma 2, os resultados apresentados foram, 33,34% de acertos totais para a questão, 53,33% de acertos parciais e 13,33% de erros totais na questão.

Para essa questão os participantes utilizaram diversas formas de resolução, alguns fizeram uso da fórmula da inclinação da reta, para justificar numericamente que os pontos não estavam alinhados e outros recorreram ao cálculo do determinante de matriz. Quanto à justificativa por meio da representação gráfica, traçaram segmentos de retas do ponto F para o E, e do ponto E para o G e outros ainda escreveram que não há alinhamento dos três pontos, porque os três não pertencem ao mesmo segmento ou a mesma reta.

Os que optaram por realizar a questão por meio do cálculo da inclinação da reta, em sua maioria cometeram erros ao dividirem oito por zero e resultar em zero ou em oito; ao subtraírem cinco por cinco e resultar em dez ou acrescentarem sinais onde não deveriam existir. Exemplificamos, com um recorte do protocolo do participante 16 que cometeu vários erros, desde a transcrição das coordenadas até as operações básicas ensinadas nas séries iniciais do Ciclo I do Ensino Fundamental (Figura 58).

Figura 58 - Resposta do participante 16 à questão 7 do Pós -Teste



Fonte: Protocolo do participante 16

Esta foi mais uma questão que retratou resoluções por diferentes registros. Coube ao participante escolher aquele que melhor lhe conviesse. Constatamos que a maioria dos participantes da Turma 2 preferiram solucionar a questão pelo cálculo do determinante de matrizes e obtiveram média de 0,65. Já Turma 1 solucionou pela fórmula da inclinação ou apenas justificaram por escrito e não numericamente, e obtiveram média de 0,63. Os participantes poderiam também observar que o segmento FE está na vertical em um ângulo de 90° com o eixo x, portanto, não há inclinação; e calcularem apenas a inclinação do segmento EG como forma de justificarem o desvio de percurso do ponto G, concluindo que os três pontos se encontram desalinhados.

Para a questão 8, a habilidade requerida era de reconhecer a inclinação dos segmentos realizando comparações entre eles. Nesta questão, pedia-se para encontrarem as inclinações dos segmentos AE e DE e justificarem as respostas. Os resultados encontrados para a Turma 1 foram 31,58% de acertos totais, 47,37% de respostas com acertos parciais e 21,05% de erros totais, e para Turma 2 os resultados foram, 13,33% que solucionaram totalmente a questão, 60% responderam parcialmente correta e 26,67% erraram totalmente a questão.

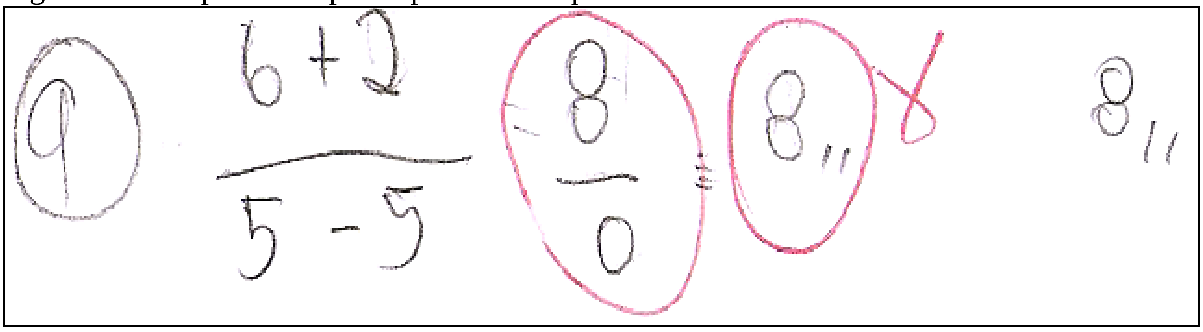
A maioria dos participantes recorreram ao cálculo da inclinação e compararam os resultados entre os segmentos, concluindo que não havia igualdade entre eles. Outros delinearam os segmentos no plano e observaram que as inclinações estavam em lados opostos, portanto, não poderiam ser iguais. Na Turma 2, houve participantes em maior número, que confundiram o cálculo da inclinação com o da distância entre os pontos e determinaram as medidas dos segmentos comparando-os.

Percebemos, que houve falta de compreensão ao realizarem cálculos em uma questão que não requeria necessariamente valores numéricos, e muitos calcularam as inclinações e não responderam à questão. Provavelmente acreditaram que os resultados por si só, responderiam a indagação. As razões para tais respostas resultam basicamente em problemas de interpretação. Esta foi a questão do Pós-Teste, em que os participantes da Turma 2 obtiveram menor rendimento, com média de 0,50. Já para Turma 1, a média foi de 0,64.

Utilizar a habilidade de reconhecer a inclinação da reta identificando o seu valor, foi o objetivo da questão 9. Porém, para encontrar a resposta, bastava observar a posição da reta no plano. Este reconhecimento da solução por meio da observação no plano, só podemos constatar no protocolo do participante 19, que respondeu à questão sem apresentar cálculos, dizendo que não existia inclinação. Pelas observações durante a aplicação do Pós-Teste, o comportamento do participante e as suas respostas nas outras questões, podemos concluir que não houve cópia da resposta de outro participante. Mas, a questão necessitaria de reformulação incluindo o pedido de justificativa para resposta. Desse modo dificultaria a reprodução de respostas entre os participantes.

Calcular, era outro caminho para identificar o valor da inclinação. Esta forma de resolução foi utilizada por 76,47% do total de participantes que chegaram a uma inclinação de m = 8/0. No entanto, entre os que solucionaram por meio do cálculo, 19,23% não responderam qual o valor da inclinação, finalizando a questão em m = 8/0. Outros 23,07% disseram que o valor da inclinação era oito (Figura 59), e 19,23% responderam que a inclinação era zero (Figura 60).

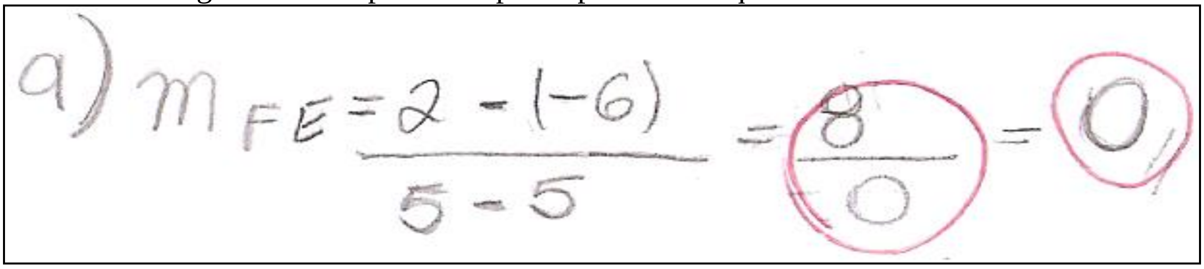
Figura 59 - Resposta dos participantes 22 à questão 9 do Pós -Teste



Fonte: Protocolo do participante 22

Verificamos que aproximadamente 40% dos participantes entre os 76,47% que optaram por solucionar a questão 9 por meio do cálculo da inclinação, possuíam dificuldades conceituais na divisão por zero. Estes participantes provavelmente não relacionaram a divisão a sua operação inversa e não perceberam que zero multiplicado por zero jamais será oito, nem oito multiplicado por zero será oito. Também não observaram que a reta **t** estava na vertical, não possuindo inclinação.

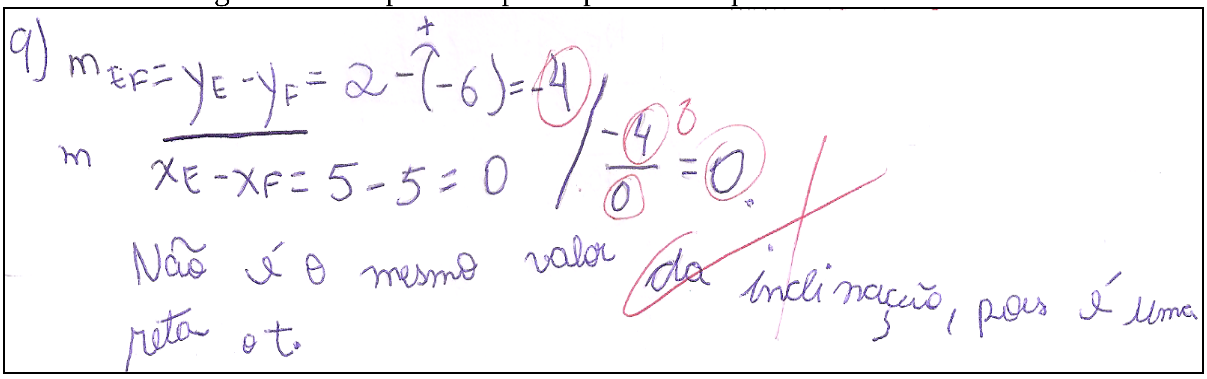
Figura 60 - Resposta dos participantes 17 à questão 9 do Pós -Teste



Fonte: Protocolo do participante 17

Entre o percentual de participantes que responderam que a inclinação da reta **t** era zero, estão aqueles que cometeram erros na subtração de números inteiros, como foi o caso do participante 31, que realizou conversão do sistema algébrico para o numérico utilizando as subtrações das ordenadas separadamente das abscissas, finalizando com a divisão dos resultados das subtrações. Além dos erros nos cálculos, verificamos por meio da parte escrita que o conceito de inclinação não foi completamente compreendido pelo participante (Figura 61).

Figura 61 - Resposta do participante 31 à questão 9 do Pós-Teste



Fonte: Protocolo do participante 31

Durante a aplicação do Pós -Teste os participantes apresentaram dificuldades de compreensão para identificar o que estava sendo pedido na questão. Estas dificuldades ocorreram devido ao texto inicial, que expunha a equação da reta y = **m**.x + **n**, onde, **m** é o coeficiente angular e **n** o coeficiente linear, afirmando que os valores dos coeficientes angulares correspondiam aos valores da inclinação das retas. Alguns perguntaram o que era para fazer nesta questão e precisamos ler a questão com estes participantes que achavam estar sendo pedido a equação da reta, assunto esse que não trabalhamos na Sequência de Atividades. O objetivo em introduzir na questão 9 a equação da reta, era o de despertar a atenção ao próximo tema fazendo os participantes relacionarem o coeficiente angular da reta ao valor da sua inclinação.

A dificuldade na interpretação pode ter sido um dos motivos do baixo desempenho na questão 9, além do tempo destinado a atividade que tratava do tema inclinação da reta, ou até mesmo por ser apresentado nas questões finais do Pós-Teste. Examinamos os resultados entre as duas turmas e tivemos 26,47% do total de participantes não respondendo à questão 9.

Observamos que na primeira turma, 42,11% dos participantes solucionaram corretamente a questão, 42,11% solucionaram parcialmente e 15,78% erraram totalmente. Já na segunda turma, os resultados foram, 20% dos participantes acertaram totalmente a questão, 53,33% acertaram parcialmente e 26,67% erraram totalmente. Portanto, as médias da questão por turmas foram, 0,68 e 0,53 pontos, respectivamente.

Verificar se os pontos A(-5, 2), D(-5, -6) e G(-2, 5) eram colineares, utilizando o cálculo do determinante de matrizes era a habilidade a ser empregada na questão 10. Entretanto, ao verificarmos os protocolos, identificamos que os participantes 3 e 6 solucionaram a questão por observação, já o participante 17, usou a fórmula da inclinação da reta e comparou os resultados, enquanto os demais empregaram a habilidade determinada no enunciado da questão. Apesar destes participantes citados não realizarem o cálculo do determinante, consideramos seus resultados como parcialmente corretos, porque concluíram que os pontos não são colineares.

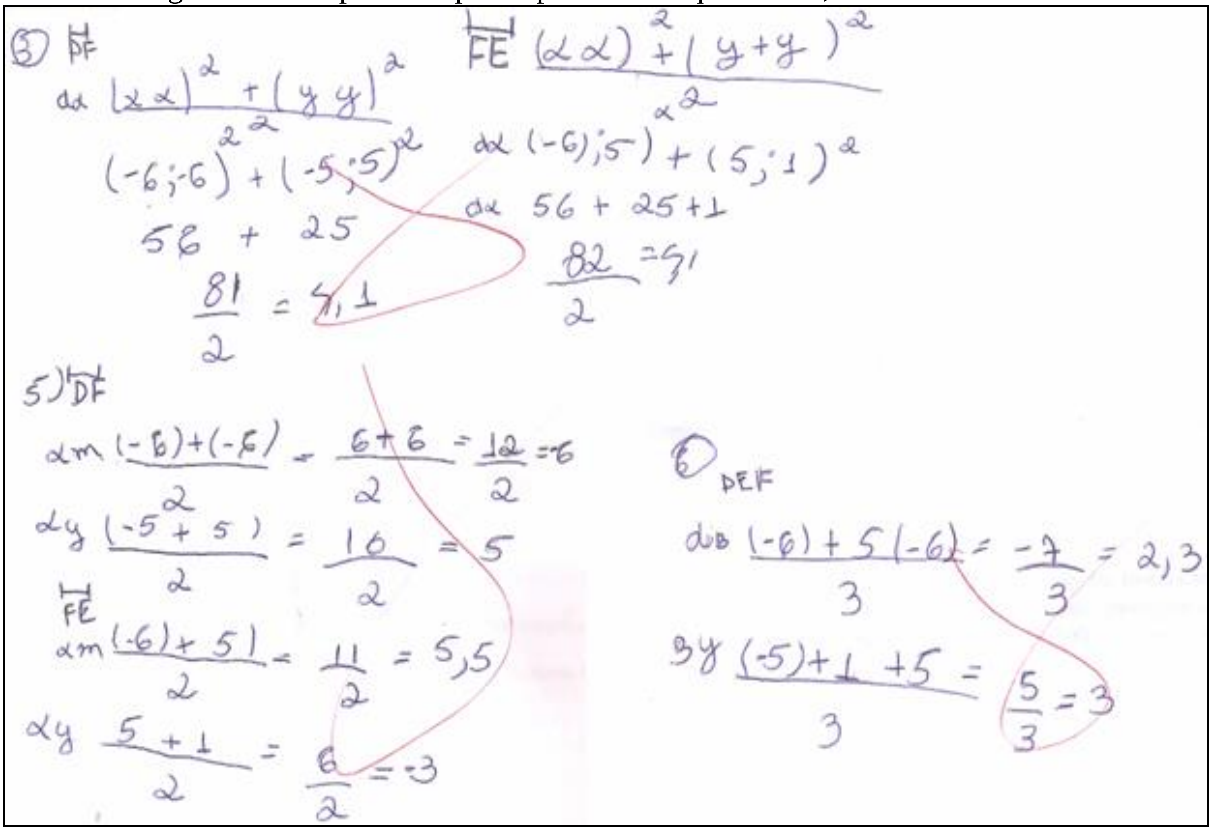
Nesse contexto, os resultados apresentados para a primeira turma foram 26,32% de acertos totais, 42,10% de acertos parciais e 31, 58% de soluções incorretas. Já para a segunda turma, os resultados foram 26,66% de acertos totais, 40% de acertos parciais e 33,34% de erros totais para a questão. Dentre os que erraram parcialmente estão aqueles que se confundiram com os sinais e os que só realizaram os cálculos, não respondendo se os pontos eram colineares.

Onze participantes não solucionaram esta questão, totalizando 32,35%. O fato, explica a média da questão por turmas ter se apresentado com valores abaixo do esperado. Para a Turma 1 a média foi 0,53 e para Turma 2 foi de 0,57. Como o cálculo do determinante foi trabalhado na questão 3 da Atividade 5, onde a Turma 2 obteve 100% de acertos e a Turma 1, 90%, não é compreensível esta quantidade de participantes não terem realizado a questão por falta de conhecimento.

Mas, analisando os protocolos, percebemos que em questões anteriores onde esses alunos poderiam ter utilizado o cálculo do determinante (por exemplo, nas questões 7 e 8 do Pós -Teste), não o fizeram por este método. Isso nos fez pensar que talvez tenha sido pelo fato de a Atividade 5 ter sido realizada em dupla, com exemplo e com consulta, favorecendo alguns participantes. Assim, ao realizarem o Pós -Teste individualmente e sem consulta, apresentaram resultados que poderiam ter sido mais satisfatórios.

O ocorrido com o participante 29 exemplifica a situação favorável ao realizarem as atividades em duplas. No Pós-Teste as questões 3, 5 e 6 (Figura 62) foram realizadas com coordenadas diferentes, os valores eram D(-5, -6), E(5, 2) e F(5, -6) e ele utilizou D(-6, -5), E(5, 1) e F(-6,5).

Figura 62 - Resposta do participante 29 às questões 3, 5 e 6 do Pós-Teste



Fonte: Protocolo do participante 29

Este participante, além de inverter os valores das coordenadas, confundiu-se na questão 3 ao aplicar as fórmulas da distância entre dois pontos e a fórmula do ponto médio. Apresentou também, diversos erros nos cálculos das quatro operações básicas com números inteiros, sendo o participante que obteve menor nota entre as duas turmas, errando 100% da Avaliação Intermediária e 80% do Pós-Teste. Porém, nas cinco atividades da Sequência seu desempenho foi satisfatório, ficando com notas bem acima de sete, parecendo indicar que por serem trabalhadas em duplas, conforme análise dos protocolos do outro integrante da dupla, tais níveis satisfatórios de aprendizagem eram tão somente do participante 30.

Outro aspecto relevante, foi a quantidade de questões. Finalizado as análises do Pós -Teste, comparando as médias por questões entre as turmas, constatamos que ocorreram oscilações de resultados com tendências decrescentes, principalmente após as seis primeiras questões. Foram dez questões para serem respondidas em duas aulas. Em média foram 10 minutos para cada questão e na Avaliação Intermediária foram 5 questões para duas aulas, em média 20 minutos para cada questão. Ao compararmos as médias por turmas temos na Avaliação Intermediária a Turma 1 com 9,02 e no Pós -Teste 7,90; e a Turma 2 com 7,68 na Intermediária e 7,19 no Pós -Teste. Possivelmente o tempo em relação a quantidade de questões tenha sido um fator negativo para os participantes no Pós-Teste.

5.5 A influência do GeoGebra na aprendizagem

A ênfase para aprendizagem ocorreu durante a aplicação das atividades da sequência, em que tratamos os temas com aulas expositivas alternadas à aplicação das atividades, com a presença do GeoGebra em abordagens instrucionista ou construcionista e sem a utilização do GeoGebra, com explicações entre as duplas e individualizadas. No primeiro momento, as explicações foram mais frequentes com a Turma 2, em relação as construções do sistema cartesiano, a interpretação das questões, e aos tratamentos para realização dos cálculos. Para a Turma 1, inicialmente tivemos problemas de adaptação com a utilização do *software* e do *e-mail*, mas no decorrer da aula as dificuldades foram se esvaindo. Então, após isso, surgiram problemas de interpretação e na prática dos cálculos.

O prévio e breve conhecimento de algumas ferramentas do *software* foi necessário, porque nenhum participante conhecia o instrumento tecnológico digital. Passada esta fase esperada, frente as respostas do questionário/perfil do participante, as atividades foram sendo desenvolvidas à medida que reconheciam algumas ferramentas do GeoGebra, sem muitos questionamentos sobre temas técnicos e básicos como abrir o *software*, acrescentar os eixos, seus valores e as linhas de grade; construir e movimentar pontos, segmentos e retas; salvar arquivos no GeoGebra, enviá-lo para o *e-mail* e baixar arquivos do *e-mail* salvando na área de trabalho do computador.

A ansiedade e expectativa eram sentimentos facilmente detectados, por ser o início da sequência em um ambiente pouco utilizado pelas turmas durante o período de aula, a sala do Acessa Escola. Para a Turma 2, o sentimento era de expectativa por não ser comum trabalharem em duplas nas aulas de Matemática, com folhas impressas e papel quadriculado. Outro fato que lhes causou estranheza, foi a presença simultânea de dois professores em sala.

Conhecer a ferramenta foi o primeiro objetivo das aulas, embora não tivéssemos instituído um momento específico para o seu acontecimento. A própria dinâmica da Sequência contribuiu para esta aprendizagem. Assim, a própria estrutura do conteúdo nos proporcionou apresentarmos nas atividades as habilidades por questões.

Para a Atividade 1 as habilidades faziam referências a representações de coordenadas cartesianas e suas localizações no plano. Como utilizamos o arquivo com o mapa, a leitura das questões na folha impressa e a manipulação do mapa sobre o plano cartesiano aconteceram de forma simultânea. Por ser a primeira atividade, fizeram perguntas sobre como aumentar e arrastar a imagem e como escrever no próprio arquivo.

Além, das perguntas referentes às ferramentas do *software*, surgiram as perguntas referentes ao conteúdo, e a dúvida geral era com relação a ordem da escrita das coordenadas cartesianas. Alguns escreviam o par ordenado conforme estavam observando, sem regras e assim ora escreviam o valor das ordenadas primeiro e ora era o das abscissas, e outros, ainda, escreviam apenas um valor. Na questão 5 precisamos alertar as duplas para observarem atentamente os valores nos eixos e obedecerem a regra localizando e escrevendo primeiro os valores das abscissas e depois os das ordenadas.

Como na questão 7 havia a necessidade de representar os pontos que não tinham sido utilizados em nenhuma questão, pedi para ativarem a janela algébrica e verificarem os pares de coordenadas. Naquele momento, os participantes perceberam que algumas coordenadas escritas por eles na questão 3 estavam erradas, porque os nomes dos pontos associados à legenda da figura e aos pontos da janela algébrica eram diferentes. Alguns pontos indicavam o local em outras zonas da cidade de São Paulo. Neste aspecto, o GeoGebra auxiliou na retomada da questão, servindo como verificador de soluções, reforçando as orientações dadas sobre a ordem ao representar as coordenadas.

Os participantes 5 e 6 para responderem à questão 7, ocultaram no arquivo todos os outros pontos que haviam escrito como respostas das questões anteriores e dessa forma, encontraram a resposta da questão. A possibilidade de desfazer ações ou ocultar para analisar soluções ou para solucionar questões são pontos favoráveis no uso do *software*. Os participantes da Turma 2 também desfrutaram da oportunidade de refazer as questões, utilizando o recurso de solucionar suas dúvidas perguntando à professora pesquisadora.

Quanto à segunda atividade, a dificuldade da Turma 2 ocorreu desde o seu início. Devido às construções dos eixos na folha quadriculada, alguns não souberam sobrepor as retas dos eixos nas linhas da folha, deixando os espaços com medidas diferentes. Outros identificaram os valores nos eixos de forma desordenada e por este motivo orientamos às duplas a refazerem. Esta problemática não ocorreu com a primeira turma por não haver a necessidade desta construção inicial.

Dessa forma, na questão 1 da Atividade 2, a habilidade era de construir segmentos no plano cartesiano. A primeira turma apresentou um quadro mais favorável ao utilizar o GeoGebra, principalmente no que se refere a agilidade na construção dos segmentos, reforçando mais uma vez o benefício da prática de comparar a parte gráfico cartesiana com a algébrica.

Ainda na mesma atividade, na segunda questão em que a habilidade era calcular as medidas dos segmentos, o proveito da Turma 1 limitou-se apenas em saber o resultado final das medidas, porque o GeoGebra não contribui para o desenvolvimento das etapas dos cálculos.

Na Atividade 3, para a Turma 2 a relação dos valores dos catetos com os da hipotenusa foi estática, não havendo a mobilidade dos segmentos e o espaço facilitador para a construção de outros triângulos retângulos que poderiam servir de auxiliar na análise do Teorema de Pitágoras. Embora o GeoGebra promovesse o recurso de mobilidade, este não foi bem explorado pelos participantes da Turma 1, porque a atividade não proporcionou favoravelmente esta perspectiva, tratando a habilidade de calcular a distância entre pontos como fator preponderante.

As construções dos segmentos e identificação dos seus pontos médios são as habilidades das questões iniciais da Atividade 4. As observações no GeoGebra dos valores dos pontos médios em relação aos valores das coordenadas para a Turma 1 foi de fundamental importância para representação da fórmula do ponto médio. Com o recurso da ferramenta "construir pontos médios", os valores das coordenadas do ponto médio se apresentam na janela algébrica. Ao compararem com os valores das abscissas e das ordenadas dos pontos que estavam nas extremidades do segmento, concluíram que os valores do par ordenado era a metade da soma de suas abscissas e das suas ordenadas, sendo exatamente os valores já calculados e apresentados pelo *software*. Para a segunda turma, o cálculo do ponto médio foi desenvolvido por meio da interpretação da palavra médio ou metade, e do ponto localizado pela medida de uma régua.

Na Atividade 5, as habilidades foram identificar o alinhamento de três pontos utilizando recursos geométricos e de cálculo. A colaboração do GeoGebra na primeira questão ocorreu no registro da representação gráfico geométrica, proporcionando mobilidade dos pontos, e autonomia para realizarem tentativas que forneceram ao participante espaços para realização de variedades, de posições de pontos e de inclinações de retas. Porém, esta questão compreendia apenas um quarto da atividade, sendo o cálculo do determinante da matriz e o cálculo da inclinação da reta as habilidades mais exigidas para a atividade.

Em suma, tivemos o GeoGebra influenciando na aprendizagem do conteúdo desta sequência, à medida que as habilidades requeriam visualização, construção, reconstrução, agilidade, observação, comparação, mobilidade, autonomia, representações simultâneas, análises de resultados, reforços para definições e verificação de soluções. Porém, não houve contribuições diretas no desenvolver dos cálculos, fossem eles de quaisquer conteúdos trabalhados nas atividades. Assim, apresentamos atividades cujas notas das turmas apontam para utilização do *software* com tendências satisfatórias e outras que identificam a utilização de recursos tradicionalmente utilizados no meio educacional, como beneficiadores para aprendizagem.

Alguns autores (MALTEMPI e FARIA, 2012; FARIA, 2012; PADILHA, 2012 e NASCIMENTO, 2012) em relação ao uso do GeoGebra aplicado a conteúdos matemáticos, também indicaram aspectos semelhantes em seus estudos, como construção, criação, armazenamento, interação, exploração, visualização, experimentação de situações e manipulação de dados.

A ênfase das atividades era a aprendizagem, que teria resultado próximo dos reais se aplicada individualmente. Porém, devido as condições estruturais dos lócus da pesquisa, precisamos aplicá-las em duplas, cujos instrumentos foram as atividades da sequência (AT1, AT2, AT3, AT4, AT5) e o Exercício do Caderno do Aluno. Os instrumentos individuais verificadores de aprendizagens foram a Avaliação Intermediária e o Pós-Teste. As médias destes instrumentos constam na Tabela 13 na ordem que foram aplicados.

Tabela 13 – Média das turmas por instrumentos da pesquisa

Turma	Medida	Pré -Teste	AT 1	AT 2	AT 3	AT 4	EX	AVI	AT 5	Pós -Teste
1	**Média**	1,06	9,23	7,32	8,15	8,36	9,16	9,02	7,80	7,90
	DP	0,85	1,36	2,17	2,47	1,70	1,86	1,16	2,12	1,88
	Mínimos	0,00	5,65	2,5	3,00	5,00	4,00	6,00	4,50	3,66
	Máximos	2,50	10,00	9,75	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	9,75
2	**Média**	0,91	5,95	7,76	9,28	7,67	9,13	7,68	9,57	7,19
	DP	0,96	2,42	2,03	2,67	2,79	2,32	2,41	0,70	2,40
	Mínimos	0,00	1,00	2,25	0,00	3,00	2,50	0,00	8,5	1,66
	Máximos	2,82	8,12	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	9,50
Geral	**Média**	0,99	7,77	7,52	8,61	8,04	9,15	8,41	8,58	7,58
	DP	0.89	2,50	2,09	2,58	2,25	2,04	1,93	1,86	2,12
	Mínimos	0,00	1,00	2,25	0,00	3,00	2,50	0,00	4,50	1,66
	Máximos	2,82	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	9,75

Fonte: Autoria própria

Conforme a Tabela 13, no Pré -Teste a diferença entre as turmas era de 0,15 pontos e no Pós-Teste, 0,71 pontos, significando que a Turma 1, iniciou a sequência com vantagem em relação ao número de acertos e esta vantagem foi aumentando, principalmente na Avaliação Intermediária onde a diferença chegou a 1,34 pontos. Os pontos mínimos e máximos do Pós -Teste indicam que os participantes da Turma 1, têm a menor e a maior nota da amostra.

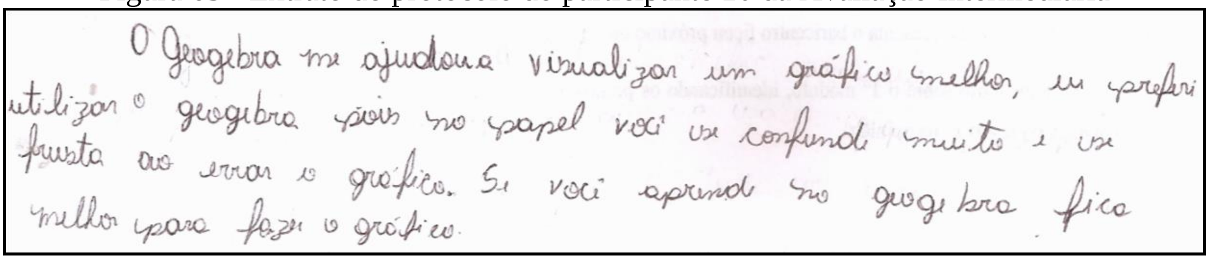
Constatamos por meio das médias uma gradativa elevação do nível de aprendizagem com índices satisfatórios para as duas turmas. Os dados apresentados no Pós-Teste em relação as atividades da sequência confirmaram a atuação do GeoGebra como facilitador de aprendizagem nas habilidades relacionadas às questões que não necessitaram diretamente dos cálculos. Por exemplo, nas Atividades 2 e 3 nas questões 2 e 6 e, na Atividade 5 nas questões 3 e 4, como prevaleceu o cálculo, a segunda turma obteve resultados melhores, isto ocorreu também nas questões 3, 7 e 10 do Pós-Teste que tratavam da mesma habilidade.

Na Avaliação Intermediária, por apresentar pontuação diferenciada do Pós-Teste e contemplar parte do conteúdo, não fizemos comparações diretas com as demais. Mas, corroborou com nossas análises quando na questão 1 os participantes da primeira turma apresentaram melhores resultados ao representarem as coordenadas dos pontos que identificavam as estações do metrô. Estas coordenadas foram utilizadas para os cálculos nas questões 4 e 5, no entanto, a Turma 2 cometeu erros ao identificá-las, realizando os cálculos com valores diferenciados. Portanto, não obtiveram êxito sobre a Turma 1.

Analogamente aos estudos de Cassol (2012) e Lima (2013), reafirmamos as colaborações que o GeoGebra traz à aprendizagem, destacamos que o *Software* de Geometria Dinâmica, une recursos em seu ambiente, propiciando novas tendências de ensino, viabilizando a manipulação e o dinamismo dos diferentes registros.

Na Avaliação Intermediária, sexta questão, os participantes expressaram suas opiniões sobre a aprendizagem com o recurso tecnológico como se observa na Figura 63.

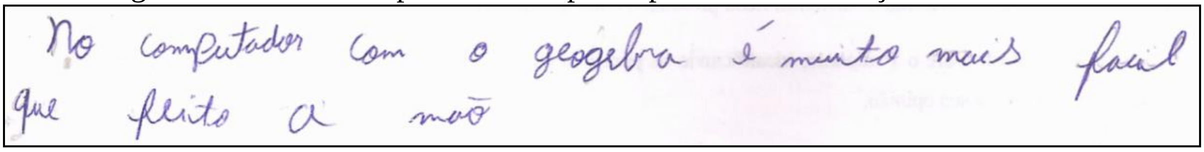
Figura 63 - Extrato do protocolo do participante 10 da Avaliação Intermediária


O Geogebra me ajudou a visualizar um gráfico melhor, eu prefiri utilizar o geogebra pois no papel você se confunde muito e se frusta ao errar o gráfico. Se você aprende no geogebra fica melhor para fazer o gráfico.

Fonte: Protocolo do participante 10

O participante foi favorável a aprendizagem com o GeoGebra, porque visualizou melhor a estrutura do plano cartesiano e a partir da observação alega que ficou melhor para reproduzi-lo. Acrescentou que ao errar o sentimento foi de frustração. O participante 9, compara na Figura 64 as possiblidades de realizarem as atividades com os recursos lápis, papel e GeoGebra, identificando-o como facilitador.

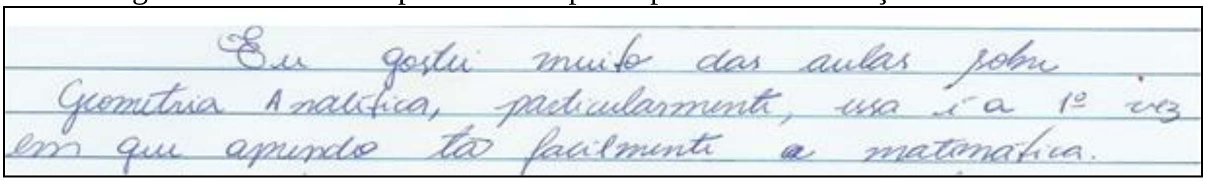
Figura 64 - Extrato do protocolo do participante 9 da Avaliação Intermediária


No computador com o geogebra é muito mais facil
que feito a mão

Fonte: Protocolo do participante 9

Já os participantes 2, 15 e 17, nas Figuras 65, 66 e 67 dizem que aprenderam mais utilizando a ferramenta, porque, o GeoGebra facilitou alguns trajetos.

Figura 65 - Extrato do protocolo do participante 2 da Avaliação Intermediária


Eu gostei muito das aulas sobre
Geometria Analitica, particularmente, essa é a 1º vez
em que aprendo tão facilmente a matematica.

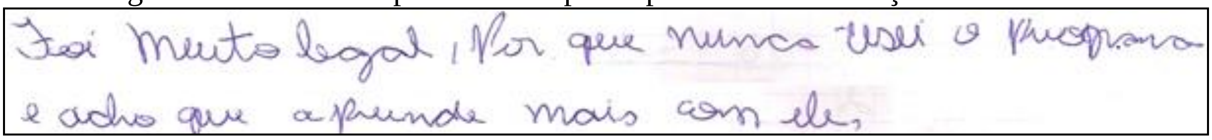
Fonte: Protocolo do participante 2

Figura 66 - Extrato do protocolo do participante 15 da Avaliação Intermediária


As atividades feitas foram fáceis, pois
o Geogebra facilitou alguns trajetos.

Fonte: Protocolo do participante 15

Figura 67 - Extrato do protocolo do participante 17 da Avaliação Intermediária


Foi muito legal, Por que nunca usei o programa
e acho que aprendi mais com ele,

Fonte: Protocolo do participante 17

Para verificarmos se houve indícios da aprendizagem mencionada nos extratos, observamos as notas dos participantes nos instrumentos individuais, Avaliação Intermediária e Pós-Teste e calculamos a média aritmética destas notas. Apresentamos estes dados na Tabela 14, com as notas do Pré-Teste e incluímos as notas dos participantes 4 e 20 que criticaram ao uso do GeoGebra, afirmando que o *software* facilita a construção dos pontos e segmentos, pois tal facilidade não teriam em atividades avaliativas.

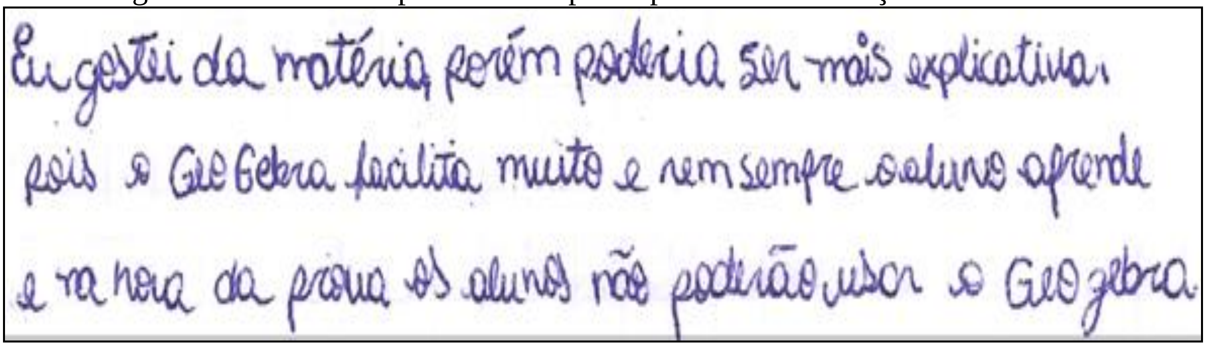
Tabela 14 – Nota dos participantes 2, 4, 9, 10, 15, 17 e 20 nos instrumentos individuais

Participantes	**2**	**4**	**9**	**10**	**15**	**17**	**20**
Pré-Teste	0	0,83	1,16	1	1,16	2,5	1,66
Avaliação Intermediária	6	9,75	10	10	9,25	7,75	9,75
Pós-Teste	4,32	6,75	8,75	8,5	9,25	9,5	8,75
Média dos instrumentos avaliativos	5,16	8,25	9,375	9,25	9,25	8,625	9,25

Fonte: Protocolo dos participantes 2, 4, 9, 10, 15, 17 e 20

Considerando as médias dos instrumentos avaliativos individuais, a aprendizagem mencionada pelos participantes de fato ocorreu, mesmo entre os participantes que não eram favoráveis a utilização do GeoGebra e fizeram críticas a aplicação da sequência. Pelo fato de as aulas não se centralizarem em exposições dos conteúdos, e por ocorrerem vários momentos de atendimento às duplas para responder as suas dúvidas sobre a utilização de alguma ferramenta do *software*, de compreensão do conteúdo ou de resolução dos cálculos, alguns participantes não se sentiram confortáveis, por estarem acostumados as aulas com explanação do conteúdo, exercícios, correções, avaliações e uma forma única de interação. As Figuras 68 e 69 ilustram as opiniões dos participantes 4 e 20.

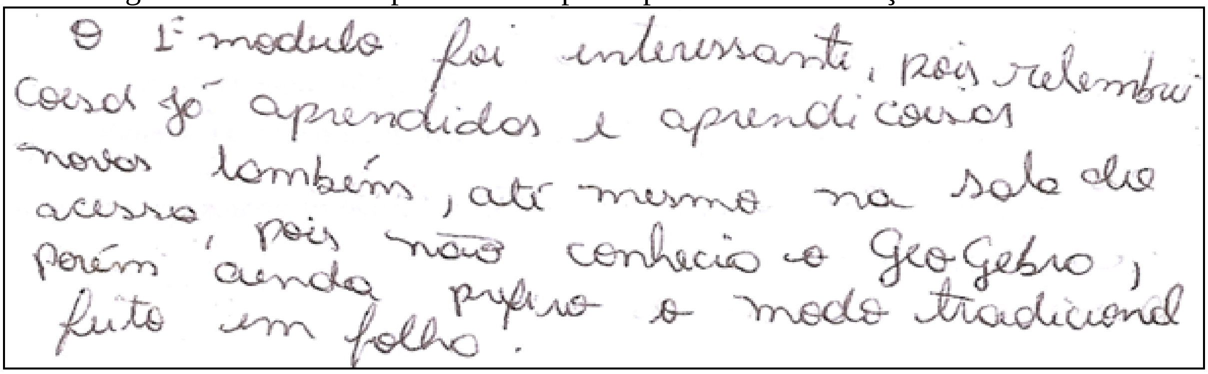
Figura 68 - Extrato do protocolo do participante 4 da Avaliação Intermediária



Eu gostei da matéria porém poderia ser mais explicativa, pois o GeoGebra facilita muito e nem sempre o aluno aprende e na hora da prova os alunos não poderão usar o Geogebra

Fonte: Protocolo do participante 4

Figura 69 - Extrato do protocolo do participante 20 da Avaliação Intermediária



O 1º modulo foi interessante, pois relembrei coisas já aprendidas e aprendi coisas novas também, até mesmo na sala de acesso, pois não conhecia o GeoGebra, porém ainda prefiro o modo tradicional feito em folha.

Fonte: Protocolo do participante 20

As aulas com método diferente das aplicadas pelo professor das turmas com o uso do *software* e com o recurso lápis e papel foram agradáveis de serem aplicadas e os participantes em geral gostaram da Sequência de Atividades por ser algo diferenciado do que costumeiramente tratavam nas aulas de Matemática. A Turma 2 foi favorável as atividades devido a frequência de explicações às duplas. A Turma1 gostou da utilização do GeoGebra por proporcionar facilidade na realização das construções e ajudar na visualização possibilitando maior autonomia. Por fim, temos médias totais excluindo o Pré-Teste de 8,36 para a Turma 1 e 8,02 para a Turma 2.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As transformações ocorridas devido as necessidades humanas, sejam elas por razões ambientais, políticas, econômicas, sociais ou culturais nos remetem a pensarmos em meios que ocasionem mudanças também no ensino, para que a transformação social ocorra paralelamente a um rearranjo educacional. Essa reorganização torna-se ainda mais necessária com o advento tecnológico digital, potencializando as relações sociais e sendo objeto de estudo em pesquisas acadêmicas.

O momento histórico, segundo Miskulin (2010), é favorável a mudanças, e por estarmos descontentes com os métodos comumente utilizados no ensino de Matemática que raramente contextualizam e se utilizam de recursos tecnológicos digitais, ou ainda integrem conhecimentos formais e vivência prática, aproximando-se das relações cotidianas dos educandos com o meio sociocultural, é que nos dispomos a mudança.

O desdobramento da nossa inquietação em relação a mudança de ações frente ao ensino na disciplina de Matemática culminou com o presente estudo, onde nos dedicamos a responder **em que medida o *software* GeoGebra contribuiu para aprendizagem do conteúdo de Geometria Analítica: ponto e reta?**

Ao buscarmos por respostas, inicialmente identificamos como este conteúdo se apresentava nos materiais oficiais indicados para o terceiro ano do Ensino Médio. Passamos a analisar os pontos favoráveis e desfavoráveis à aprendizagem do conteúdo ponto e reta, em uma sequência de atividades elaborada considerando os registros de representações semióticas algébricos, geométricos e principalmente cartesianos segundo a Teoria de Raymond Duval, para dois grupos de participantes: Turma 1 com a utilização do GeoGebra em atividades instrucionistas e construcionistas e Turma 2 sem a utilização do GeoGebra. Ao término da coleta de dados do estudo a Turma 2 também se beneficiou das atividades com o uso do *software*. Por fim, caracterizamos a aplicabilidade do *software* para o estudo deste conteúdo.

O conteúdo, a série/ano e as habilidades foram provenientes do Currículo e optamos pela utilização dos documentos oficiais do estado, porquê, a pesquisa foi aplicada em uma unidade pública da rede estadual de ensino, e a pesquisadora possui a prática de utilização do material da Secretária da Educação do Estado de São Paulo.

A opção pelo recurso tecnológico digital, referencial teórico e elaboração das atividades em sequência foi influenciada pelas contribuições da revisão da literatura. Os artigos, dissertações e teses nos deram um panorama de como está sendo tratada no meio acadêmico e profissional a relação conteúdo matemático e recursos tecnológicos digitais.

Entre as 28 pesquisas revisadas, 50% fizeram uso de conteúdos destinados ao Ensino Médio, utilizando-se basicamente das Funções dos tipos: Afim, Quadráticas, Exponenciais, Logarítmicas e Trigonométricas; da Geometria Euclidiana e dos Fractais. Apenas a pesquisa de Santos (2011), aproxima-se do nosso estudo no que se refere ao conteúdo de Geometria Analítica. Porém, fora aplicada a uma turma do 1° semestre para um curso de Licenciatura em Matemática, visando promover ligações entre temas ensinados e temas a serem aprendidos. Por este motivo, foi além do estudo do ponto e da reta, incluindo a circunferência, a hipérbole, as elipses e as parábolas.

As pesquisas que optaram por aplicar seus conteúdos o fizeram em uma sequência de atividades com o GeoGebra como recurso para suas estratégias, investigando, analisando, verificando ou identificando as contribuições da ferramenta como um recurso metodológico que beneficia a aprendizagem para estudantes em todos os níveis de ensino. É consensual mesmo entre as pesquisas documentais que a utilização de recursos tecnológicos favorece a aprendizagem desde que tenham seus objetivos determinados em planejamentos que integrem o recurso a ações quando possíveis contextualizadas, dando à aplicação da ferramenta objetivos específicos e estruturados quanto as suas finalidades.

O computador foi o instrumento primordial para aproximadamente 70% das pesquisas revisadas, por conta da integração do GeoGebra como recurso pedagógico na aplicação de suas atividades. A nossa estratégia metodológica também incluiu o uso do *software* nas cinco atividades da sequência para Turma 1. A Sequência, o Pré-Teste, a Avaliação Intermediária, o Exercício e o Pós-Teste foram os instrumentos que serviram como fontes de dados.

Os dados foram analisados por questão em cada instrumento, onde os valores das médias entre as turmas alternaram-se conforme a habilidade tratada na questão ou a habilidade requerida por atividade. A Turma 1, no Pré-Teste, iniciou a sequência com 0,15 pontos de vantagem em relação à média da Turma 2, e terminou a sequência, no Pós-Teste com uma diferença na média de 0,71 pontos à frente. Para as duas turmas ocorreu aprendizagem independente do recurso utilizado, pois iniciaram com médias de 1,06 e 0,91 e terminaram com 7,90 e 7,19, respectivamente. As médias na Avaliação Intermediária foi de 9,02 para a Turma 1 e 7,68 para a Turma 2. Entretanto, a evolução da Turma 1 não foi constante em todas as atividades e assim, a Turma 2 atingiu índices discretamente maiores que a Turma 1 em algumas atividades que exigiam cálculo.

Verificamos que nas questões que tratavam das habilidades de visualização (localize e identifique) e nas relacionadas a construção (trace e represente), a Turma 1 apresentou média superior, e nas atividades que envolviam a habilidade de calcular, a Turma 2 obteve médias relativamente melhores.

A relação entre as janelas algébrica e de visualização do GeoGebra facilitou a observação dos valores dos pares de coordenadas dos pontos; representá-los na forma escrita e localizá-los no plano, foi uma das principais dificuldades durante o desenvolvimento das atividades iniciais da sequência, sendo compreendida mais rapidamente pela Turma 1, o que facilitou o desenvolvimento das outras atividades por ser esta a base estrutural para o desenvolvimento de todo o conteúdo.

Outro favorecimento que a ferramenta proporcionou foi o deslocamento dos objetos na janela de visualização e a possibilidade de fazer e refazer as construções ocupando menos tempo e com mais facilidade que nas construções com papel, lápis e régua.

Os resultados das médias da Sequência de Atividades nos indicam que, quando o tema da aula é predominantemente cálculo, a utilização do GeoGebra fica reduzida a constatação, verificação e análise do resultado, não contribuindo efetivamente para a prática de calcular, como visto em Grande (2013) que trabalhou com o Teorema Fundamental do Cálculo em atividades com perguntas que foram tratadas no campo intuitivo e com componentes algoritmizáveis e formais, utilizando o campo visual do GeoGebra, que deste modo facilitou o entendimento.

Este dinamismo possível de ser trabalhado com o conteúdo em representações simultâneas entre as janelas do *software*, favoreceu o desenvolvimento das atividades que se utilizavam de diferentes Registros de Representações Semióticas (DUVAL, 2013), embora tenhamos feito uso dessas atividades também com os participantes que não utilizaram o GeoGebra no primeiro momento. Neste sentido, a ferramenta, por ser de Geometria Dinâmica, propiciou mais rapidez na verificação do mesmo objeto, pontos, segmentos e retas, em duas maneiras diferentes de registro de representação, permitindo a realização de conversões.

Para Duval (2013), há compreensão cognitiva dos objetos matemáticos quando o indivíduo reconhece pelo menos dois tipos de registros de um mesmo objeto de modo a conseguir transitar entre eles. A Atividade 5 foi mais expressiva neste propósito, onde buscamos identificar as condições para o alinhamento de três pontos nos registros de representações gráfico cartesiano, algébrico e numérico em tratamentos e conversões.

Na Atividade 3 e 4, também trouxemos modos diferenciados para determinarmos as medidas dos segmentos em conversões do sistema de escritas algébrico para o numérico, ao apresentarmos o cálculo do módulo da diferença entre o ponto final e o inicial, o Teorema de Pitágoras e a fórmula da distância entre os pontos.

Já na Atividade 1, a contextualização com o mapa dos bairros da cidade de São Paulo trazendo informações de localidades e localizações não usuais nas aulas de Matemática sob o plano cartesiano, proporcionou conversões do sistema gráfico cartesiano para o sistema de escritas como uma via de mão dupla com questões que abrangeram as habilidades de localizar pontos no plano cartesiano e representar os pares de coordenadas. Aguiar (2011), também usou mapas em suas atividades identificando-as como construcionista e instrucionista conforme a abordagem e a forma de utilização do GeoGebra.

A contextualização nas aulas de matemática fazendo relação com outros temas já havia sido identificada por Santos (2013) em sua pesquisa que envolveu conceitos da Física nas atividades e constatou que os estudantes deram mais atenção quando o assunto abordado envolvia situações reais e vivenciadas em seus cotidianos e estão envolvidos com outras disciplinas.

Neste aspecto, observamos que nas questões, que traziam ou abordavam situações com informações reais, os participantes, interagiram com mais motivação e propriedade por se tratar de algo concreto e próximo a sua vivência, como a existência dos bairros e as estações do metrô. Embora, as atividades contextualizadas favoreçam a aprendizagem, seus planejamentos e aplicações requerem mais tempo e associá-las ao uso do *software* pode minimizar ao menos o tempo gasto com a aplicação, pois o GeoGebra agiliza o processo de construção dos objetos matemáticos.

Durante o processo de construção dos segmentos para identificação das suas medidas, segundo nossas observações de aula, o GeoGebra permitiu ao participante o que Almeida (2000) chama de descrição-execução-reflexão-depuração, onde o participante observou qual o ícone da ferramenta que poderia estar utilizando para construção do segmento, realizou a construção, e durante a reflexão comparando os dados iniciais com os da janela algébrica em uma abstração pseudoempírica refletiu sobre sua ação, refazendo a construção a partir de uma nova hipótese levantada ou formulada pelo diálogo entre a dupla.

Quanto a aplicação da sequência, houveram algumas restrições que nos incomodaram e fizeram a trajetória da aplicação e a elaboração da Sequência serem diferenciadas por conta da quantidade de computadores disponíveis à utilização pelos participantes.

A quantidade de máquinas, inferior ao número de participantes, a disposição dos assentos, a estrutura física da sala e a dinâmica dos regulamentos para uso do local, foram empecilhos que comprometeram o estudo. Segundo *e-mail* informativo da FDE – Fundação para o Desenvolvimento da Educação na data base de 27 de Abril de 2015 haviam 4231 escolas da Rede Estadual de Ensino com sala do Acessa Escola com 76 087 computadores para 3 321 519 alunos, significando que em média são 44 alunos para cada computador; e ainda temos os funcionários e a comunidade que também podem fazer uso da ferramenta.

A escassez do recurso para a nosso estudo foi um dos empecilhos, e é um fator comentado na maioria das pesquisas que tiveram aplicação em unidades de ensino público. Esta limitação nos impediu de aplicarmos os instrumentos individualmente, ainda que o trabalho em duplas promova o trabalho coletivo ele pode camuflar os resultados da aprendizagem como verificamos com alguns participantes.

Em geral, nas atividades que foram realizadas em duplas as médias foram maiores para as duas turmas em relação ao Pós-Teste, pelos seguintes motivos: o Pós-Teste foi realizado individualmente e sem consulta, enquanto nas atividades os participantes puderam discutir com o colega, perguntar para a professora pesquisadora ou refazer a questão.

A utilização da Sequência de Atividades e os instrumentos aplicados nos remetem à seguinte conclusão, o GeoGebra é um software facilitador para aprendizagem, auxiliando na localização de pontos no sistema cartesiano, na representação escrita das coordenadas cartesianas, na construção de segmentos, na análise de suas medidas com dados já calculados ou verificação da posição do segmento em relação aos eixos, na representação do ponto médio de um segmento identificando suas coordenadas e agilizando a construção das medianas de um triângulo e a localização do baricentro. Assim o caracterizamos, como recurso favorável a aprendizagem por possibilitar a visualização, construção, reconstrução, movimentação, reflexão sobre a ação e durante a ação sendo mais um recurso que o educador poderá agregar a outros para ser utilizado em sua prática.

Contudo enfatizamos a necessidade de utilizarmos conjuntamente outros materiais e metodologias que contribuam para compreensão e apropriação da habilidade de cálculo pelos alunos, em situações em que o uso do *software* não favoreceu o desenvolvimento.

Os relatos dos participantes fazem-nos perceber que houve mudanças de concepções sobre a prática de atividades com a utilização do GeoGebra: há quem tenha sido favorável e há quem tenha preferido o método usual. Entretanto, mesmo quem preferiu o uso do recurso lápis e papel, não descartou totalmente a presença do *software*.

Embora consideremos que tenhamos obtido êxito na aplicação da sequência é notório que os métodos no decorrer das aulas precisam ser alternados para não caírem na rotina, e quanto as atividades da sequência, faríamos alguns ajustes para diminuir o tempo de aplicação que foi extenso, compreendendo 31 aulas.

A aplicação da sequência estendeu-se além do esperado demandando tempo. Porém, a experiência em trabalhar com turmas que não conhecia e na presença de outro professor foi agradável e desafiadora. Agradável, porquê todos foram receptivos e se dispuseram a realizar as atividades. Desafiadora, por ser uma experiência em teste, cujos módulos ainda não havia vivenciado.

Como sugestão para futuras pesquisas indicamos o estudo das posições das retas no plano e suas respectivas equações, de modo, a utilizar a visualização do software, para observar as mudanças ocorridas nos valores de seus coeficientes angulares e lineares.

REFERÊNCIAS

AGUIAR. A. L. **Moodle e GeoGebra como apoio virtual ao ensino de Trigonometria segundo a nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo**. 2011. 153f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011. Disponível em http://www.bdtd.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4631. Acesso em 15 de Janeiro de 2015.

ALMEIDA, A. P. **Estudo de Funções utilizando GeoGebra e Moodle**. 2014. 223f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014. Disponível em http://www.bdtd.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=8203. Acesso em 20 de Janeiro de 2015.

ALMEIDA, M. E. B; SILVA, M. G. M. Currículo, Tecnologias e Cultural Digital: espaços e templos de web currículo. **Revista e-curriculum.** v. 7, n. 1, p. 2-19, 2011. Disponível em http://revistas.pucsp.br/index.php/curriculum/article/view/5676/5573. Acesso em 10 de Junho de 2014.

ALMEIDA, M. E. **Informática e Formação de Professores: volume 1**. Brasília. Distrito Federal: Ministério da Educação, Seed, 2000.

ANDRÉ, M.C.D.A. A abordagem qualitativa da pesquisa. In: Etnografia da Prática Escolar. Campinas: Papirus, 1995. p.15-33.

BALDINI, L. A. F. **Elementos de uma Comunidade de Prática que permitem o Desenvolvimento Profissional de Professores e futuros Professores de Matemática na utilização de *Software* GeoGebra**. 2014. 220f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014. Disponível em http://www.uel.br/pos/mecem/arquivos_pdf/Tese_Loreni_300814.pdf. Acesso em 20 de Janeiro de 2015.

BALDINI, L. A. F; CYRINO, M. C. C. T. O software GeoGebra na formação de professores de Matemática – Uma visão a partir de dissertações e teses. Disponível em: http://www.fecilcam.br/rpem/documentos/v1n1/Software%20Geogebra.pdf. Acesso em 21 de Abril de 2014.

BARROSO, J. M. Geometria Analítica: Conceitos básicos e a reta. In: **Conexões com a Matemática**. São Paulo: Editora Moderna, 2010. v.3, p. 82 -117.

BEHRENS, M. A. Projetos de Aprendizagem Colaborativa num Paradigma Emergente. In: Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica. Campinas: Papirus, 2013, p. 73-140.

BRASIL. Lei 12.796, de 04 de Abril de 2013. Estabeleceu as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF, 04 de Abril de 2013. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2013/lei/l12796.htm. Acesso em 15 de Outubro de 2014.

BRASIL. Lei nº 9. 394, de 20 de Dezembro de 1996. Estabeleceu as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF, 20 de Dez. de 1996. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm. Acesso em 15 de Outubro de 2014.

BRASIL. Secretária de Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Mec/ SEE, 1998.

CASSOL, V. J. **Tecnologias no ensino de aprendizagem de Trigonometria: Uma meta-análise de dissertações e teses brasileiras nos últimos cinco anos**. 2012. 84f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/3110/1/000446987Texto%2bCompleto-0.pdf . Acesso em 20 de Janeiro de 2015.

CONCEIÇÃO JUNIOR, F. S. **Uma abordagem funcional para o ensino de Inequações no Ensino Médio**. 2011. 196f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=12905. Acesso em 14 de Março de 2015.

CYSNEIROS, P.G. Novas Tecnologias no Cotidiano da Escola. In: Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 23., 2000, Caxambu. **Anais** da 23ª Reunião Anual da ANPED. Minas Gerais: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2000. P. 1-15. Disponível em www.23reunião.anped.org.br. Acesso em 10 de Abril de 2015.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: Da Teoria à Prática**. São Paulo: Papirus, 1996.

DIAS, R. A. X. G. **Análise do conhecimento de professores sobre o Ensino de Inequações**. 2014. 136f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=17637&PHPSESSID=4039495ab5707338dc262dde2b721bd8. Acesso em 15 de Fevereiro de 2015.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: Aprendizagem Matemática Registro da Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2013. p. 11 – 33.

FARIA, R. W. S. **Padrões Fractais: Contribuições ao processo de Generalização de conteúdos matemáticos**. 2012. 195f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012. Disponível em http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/dissetacoes/faria_rejane_me_rcla.pdf. Acesso em 15 de Janeiro de 2015.

FERREIRA, R. D. **Contribuições do GeoGebra para o estudo de funções afim e quadrática em um curso de licenciatura em matemática.** 2013. 213f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, PUC, São Paulo, 2013. Disponível em: http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=16257. Acesso em 15 de Março de 2014.

FUNDAÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO. Relatório de Gestão 2011-2014. São Paulo, 2014. (Relatório Técnico)

GEOGEBRA: Software de Geometria Dinâmico. Versão 4.0. Boca Raton: Florida Atlantic University, 2015. Disponível em http://wiki.geogebra.org/pt/Manual. Acesso em 15 de Janeiro de 2015.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. São Paulo: Atlas, 2008.

_________ **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.** Rio de Janeiro. RJ: Editora Record, 2004.

GOMES, N.G. Computadores na escola: novas tecnologias e inovações educacionais. In: A formação na sociedade do espetáculo. São Paulo: Edições Loyola, 2002. p. 119-134.

GOOGLE IMAGENS. Disponível em https://www.google.com.br/imghp?hl=pt-PT. Acesso em 10 de Julho de 2015.

GRANDE, A. L. **Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino.** 2013. 324f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=16607. Acesso em 14 de Março de 2015.

INDALÉCIO, A. B.; CAMPOS, D. A. **Reflexões sobre o educar em um mundo nativo digital**. Votuporanga/SP: Fundação Educacional de Votuporanga, 2016. 106p. Disponível em: https://mundonativodigital.files.wordpress.com/2016/04/reflexoes_sobre_o_educar_em_um_mundo_nativo_digital.pdf. Acesso em 25 Maio de 2016.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS - ANÍSIO TEIXEIRA. Sinopses Estatísticas da Educação Básica 2013. Brasília, 2013. Disponível em http://portal.inep.gov.br/basica-censo-escolar-sinopse-sinopse. Acesso em 30 de Maio de 2015.

KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologias: O Novo Ritmo da Informação**. Campinas. SP: Papirus, 2012.

KITAOKA, A. C. **O uso de tecnologias como ferramenta de apoio às aulas de Geometria**. 2013. 93f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013. Disponível em http://www.bdtd.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=6636. Acesso em 20 de Janeiro de 2015.

LAVILLE, C; DIONNE, J. **A CONSTRUÇÃO DO SABER: Manual de metodologia de pesquisa em Ciências humanas.** Revisão técnica e adaptação da obra Lana Mara Siman. Porto Alegre: Artmed; Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008.

LIMA, C. E. O. **A utilização do software GeoGebra como ferramenta para o ensino de funções.** 2013. 61f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/5815/1/2013_dis_ceolima.pdf. Acesso em 11 de Janeiro de 2014.

LOPES, C. L. M. **A Aprendizagem de Perímetros e Áreas com GeoGebra: uma experiências de ensino**. 2013. 304f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/10240>. Acesso em 20 de Abril de 2014.

MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem Matemática Registro da Representação Semiótica.** Campinas: Papirus, 2013.

MALTEMPI, M. V.; FARIA, R. W. S. Manipulação e Análise de Padrões Fractais no Processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos por meio do Software GeoGebra. In: 1ª Conferência Latino Americana de GeoGebra, 2012, São Paulo. **Anais**... São Paulo. 2012.p.1-15. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8393>. Acesso em 25 de Maio de 2014.

MELO, L. A. S. **Dois jogos de linguagens: a Informática e a Matemática na aprendizagem de Função Quadrátic**a. 2013. 152f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto de Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2013. Disponível em http://www.repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/4540/1/Dissertacao_DoisJogosLinguagem.pdf. Acesso em 10 de Abril de 2015.

MENEGOTTO, G.; LARA, C.M. Contribuição do Software GeoGebra para o Estudo de Paralelogramos. **Alexandria**, v. 4, n. 2, p. 31 – 55, 2011. Disponível em https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37559/28852. Acesso em 10 de Fevereiro 2015.

METRO. Companhia do Metropolitano de São Paulo. Disponível em http://www.metro.sp.gov.br/. Acesso em 15 de Janeiro de 2015.

MOLON, J. **Cálculo no Ensino Médio: Uma abordagem possível e necessária com o auxílio do *Software* GeoGebra**. 2013. 195f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013. Disponível em: http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/165/2011_00024_JAQUELINE_MOLON.pdf?sequence=1. Acesso em 15 de Janeiro de 2015.

MORAN, J. M. **A EDUCAÇÃO QUE DESEJAMOS: Novos desafios e como chegar lá.** Campinas: Papirus, 2012.

MOREIRA, M. W. L. **A Geometria Dinâmica como ferramenta para o ensino de Funções Trigonométricas em um ambiente virtual de aprendizagem**. 2012. 125f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012. Disponível em http://www.teses.ufc.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=8143. Acesso em 20 de Janeiro de 2015.

MYSKULIN, R. G. S. As potencialidades didático-pedagógicas de um laboratório em educação matemática mediado pelas TICs na formação de professores. In: O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Campinas: Autores Associados, 2010, p. 153-178.

NASCIMENTO, E. G. A. **Avaliação do *Software* GeoGebra como instrumento Psicopedagógico de ensino em Geometria**. 2012. 112f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012. Disponível em:

http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/3081/1/2012_Dis_EGANascimento.pdf . Acesso em 20 de Janeiro 2015.

PADILHA, T. A. F. **Conhecimento Geométricos e Algébricos a partir da construção de Fractais com uso do *software* GeoGebra**. 2012. 140f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 2012. Disponível em: http://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/287/1/TeresinhaPadilha.pdf . Acesso em 20 de Janeiro de 2015.

PAPERT, S. **A Máquina das crianças: repensando a escola na era da informática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PEREZ, L. A. **Um estudo sobre o uso de avaliações apoiadas pelas tecnologias**. 2015. 199f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

PESCADOR, C.M. Tecnologias Digitais e Ações de Aprendizagem dos Nativos Digitais. In: Congresso Internacional de Filosofia e Educação, 5., 2010, Caxias do Sul. **Anais** do V Congresso Internacional de Filosofia e Educação. Rio Grande do Sul: Universidade de Caxias do Sul, 2010. Disponível em http://www.ucs.br/ucs/tplcinfe/eventos/cinfe/artigos/artigos/arquivos/eixo_tematico7/TECNOLOGIAS%20DIGITAIS%20E%20ACOES%20DE%20APRENDIZAGEM%20DOS%20NATIVOS%20DIGITAIS.pdf. Acesso em 10 de Abril de 2015.

PROCÓPIO, W. **O Currículo de Matemática do Estado de São Paulo: sugestões de atividades com o uso do GeoGebra**. 2011. 193f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em http://diadematematica.com/docentes/wp-content/uploads/2013/03/O-Curr%C3%ADculo-de-Matem%C3%A1tica-do-Estado-de-S%C3%A3o-Paulo-sugest%C3%B5es-de-atividades-com-o-uso-do-GeoGebra.pdf. Acesso em 20 de Janeiro de 2015.

RICHIT, A.; MISKULIN, R. G. S. Possibilidades didático-pedagógicas do software GeoGebra no estudo de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral: Perspectivas na formação continuada de professores de matemática. In: 1ª Conferência Latino Americana de GeoGebra, 2012, São Paulo. São Paulo. p. 216-229. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8384. Acesso em 25 de Maio de 2014.

SANTAELLA, L. **O que é Semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 1983.

SANTOS, I. N. **Explorando conceitos de Geometria Analítica Plana utilizando Tecnologias da Informática e Comunicação: uma ponte do Ensino Médio para o Ensino Superior construída na formação inicial de Professores de matemática**. 2011. 163f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011. Disponível em http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/dissertacoes_2011/Diss_Ivan_Nogueira_dos_Santos.pdf. Acesso em 10 de Abril em 2015.

SANTOS, R. C. A. **Utilizando o Software GeoGebra como Recurso Didático para o Ensino do Movimento oscilatório de Pêndulos**. 2013. 173f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) – Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2013. Disponível em http://www2.fc.unesp.br/BibliotecaVirtual/ArquivosPDF/DIS_MEST/DIS_MEST20130222_

SANTOS%20ROSANA%20CAVALCANTI%20MAIA.pdf. Acesso em 15 de Fevereiro de 2015.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Caderno do Aluno: Matemática, Ensino Médio: Volume 1. Secretaria da Educação; Nilson José Machado. São Paulo: SEE, 2012a.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Cadernos do professor: Matemática, Ensino Fundamental e Médio. Secretaria da Educação; Nilson José Machado; et al. São Paulo: SEE, 2014.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias. Secretaria da Educação; Coordenação geral, Maria Inês Finl; Coordenação de área, Nilson José Machado. 1 ed – Atual. São Paulo: SE. 2012b. p. 72.

SCHEFFER, N. F. O LEM na Discussão de conceitos de geometria e partir das mídias: dobradura e software dinâmico. In: O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Campinas: Autores Associados, 2010, p. 93-112.

SCHLÜNZEN JUNIOR, K. **Aprendizagem, cultura e tecnologia. Desenvolvendo potencialidades corporativas**. São Paulo: Editora UNESP, 2003.

SENAC – Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial. Disponível em http://www.sp.senac.br/jsp/default.jsp?newsID=0. Acesso em 10 de Agosto de 2015.

SILVA, M. J. **Registros de Representações Semióticas no Estudo de Sistemas de Equações de 1º Grau com duas variáveis usando o *Software* GeoGebra**. 2014. 169f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/101414. Acesso em 15 de Janeiro de 2015.

SIQUEIRA, D. M. **Elaboração de atividades de ensino de funções utilizando recursos computacionais no ensino médio**. 2013. 61f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Instituto de Ciências Matemática e de Computação – ICMC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013. Disponível em: http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-07062013-154736/pt-br.php. Acesso em 20 de Maio de 2014.

SOUZA, V. H. G. **O uso de vários registros na resolução de inequações: Uma abordagem funcional gráfica**. 2008. 292f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, PUC, São Paulo, 2008. Disponível em http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Tese_Giusti.pdf. Acesso em 10 de Outubro de 2014.

VALENTE. J. A. **Computadores e conhecimento: repensando a educação**. Campinas. São Paulo: Gráfica Central da Unicamp, 1993.

APÊNDICE A - Declaração de consentimento para aplicação da pesquisa

DECLARAÇÃO

Eu, ____ RG: ________________, Diretora da Escola Estadual ____, CNPJ ___________________________, localizada na cidade de Taboão da Serra - SP, na Rua________________________________, _______. Jardim ____________________. CEP: _______________. Telefone: (11) ____________. E-mail: ___________________, declaro para os devidos fins de pesquisa, ter ciência do Projeto de Pesquisa Um Estudo Sobre o Uso do GeoGebra na Aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio e dou consentimento para sua execução na referida escola pela pesquisadora Girleide Maria da Silva, RG: 27.030.567-1, professora de Matemática da Rede Estadual de Ensino.

Taboão da Serra, ____ de _____________ de 2015.

____

Assinatura do(a) diretor(a)

APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

(AOS PAIS E ALUNOS)

PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO

Eu Girleide Maria da Silva, responsável pela pesquisa: **Um estudo sobre o uso do GeoGebra na aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio,** estou convidando você (ou seu filho) para participar como voluntário deste estudo.

Investigar a utilidade do software GeoGebra aplicado a Geometria Analítica em uma sequência de atividades para o terceiro ano do Ensino Médio é o objetivo central desse estudo, que acreditamos ser de grande valia por proporcionar novos meios de aprendizagem aos participantes, unindo tecnologia ao conteúdo matemático presente no Currículo Escolar do Estado de São Paulo.

A participação está totalmente vinculada ao ambiente escolar, sendo neste lócus que ocorrerá todo estudo, sob a supervisão da gestora escolar, da coordenação pedagógica e da professora/pesquisadora. Ao participante da pesquisa caberá apenas responder aos questionários e realizar as atividades com o auxílio do software matemático educativo - GeoGebra, sob a orientação da professora/pesquisadora.

Enfatizo, mesmo que o aluno não deseje participar da pesquisa deverá participar das atividades pois estas serão as atividades de aula, e com base nas quais avaliarei o desempenho no 1º bimestre do corrente ano letivo.

A participação é de caráter voluntária, isento de quaisquer riscos civis ou criminais, sem gastos ou benefícios financeiros. Porém, de extrema importância para o seu aperfeiçoamento educacional e para contribuição social. O participante poderá desistir de sua participação em qualquer etapa da pesquisa, sem quaisquer implicações pessoais, o que significa apenas que eu não poderei utilizar as atividades dele na minha pesquisa, mas elas deverão ser realizadas para que eu consiga avaliá-lo na disciplina de Matemática.

Para alunos maiores de idade

Eu ____, RG:____, concordo em participar de forma voluntária da pesquisa: **Um estudo sobre o uso do GeoGebra na aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio,** que ocorrerá durante as aulas de matemática no decorrer do 1º Bimestre do corrente ano letivo, sendo garantido o sigilo dos meus dados e o uso da imagem apenas para fins da pesquisa.

Para alunos menores de idade

Eu ____, RG:____, concordo que meu filho(a) ____ participe de forma voluntária da pesquisa: **Um estudo sobre o uso do GeoGebra na aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio,** que ocorrerá durante as aulas de matemática no decorrer do 1º Bimestre do corrente ano letivo, sendo garantido o sigilo dos dados e o uso da imagem apenas para fins da pesquisa.

São Paulo, _________de __________________________________de 2015.

____

(Assinatura do responsável)

____

(Assinatura do aluno (a)

Pesquisadora: Prof.ª Girleide Maria da Silva

E-mail: girleidedasilva@gmail.com

Fone: (11) 4138 4167

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Miriam Cardoso Utsumi

E-mail: mutsumi@gmail.com

Fone: (16) 3373 9722

APÊNDICE C – Questionário e Perfil do Participante

QUESTIONÁRIO E PERFIL DO PARTICIPANTE

Instruções:

- ✓ O questionário possui 7 perguntas, mais o 1º item que se refere ao perfil do participante.
- ✓ Ainda que você esteja se identificando, essa identificação não será utilizada em nenhum momento na pesquisa.
- ✓ Responda todas as questões com sinceridade e tranquilidade.

Nome: ____nº: ____ série:_______

Idade:______ Sexo:_______________ Naturalidade (cidade / estado):___________________

1) Você utiliza o computador? ( ) não ( ) sim. Onde:

( ) em casa ( ) no trabalho ( ) na Lan House ( ) outros__________________

2) Quantas vezes por semana você utiliza o computador?

( ) não utilizo ( ) de 1 a 3 vezes ( ) de 4 a 6vezes ( ) todos os dias da semana

3) Quanto ao uso do computador, qual a finalidade? (Você poderá escolher mais de uma alternativa)

( ) estudo ( ) trabalho ( ) entretenimento

4) Você possui algum curso na área de informática? Qual? ___________________________.

5) Você acha que o uso das “novas” tecnologias auxiliam no seu aprendizado? (Computador, internet, *softwares* educativos entre outros).

( ) sim ( ) não ( ) parcialmente

6) Seus professores em séries anteriores utilizaram recursos tecnológicos para trabalharem algum conteúdo? Em Qual disciplina? Qual recurso tecnológico? Qual conteúdo? ____.

7) Você conhece o *software* GeoGebra? Já realizou alguma atividade utilizando esta ferramenta?

____.

APÊNDICE D - Pré - Teste

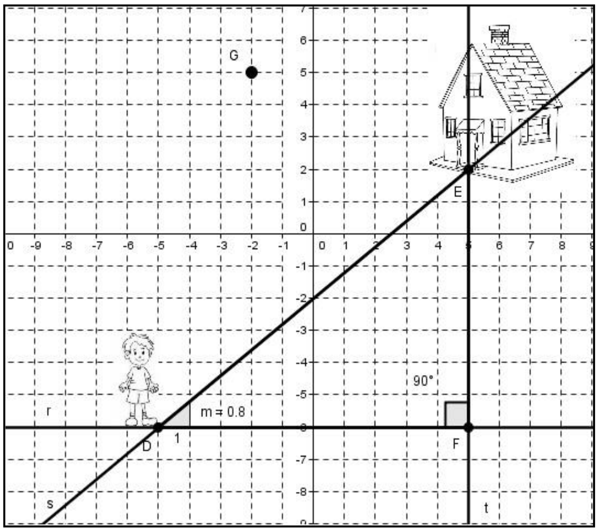
PRÉ - TESTE

Este teste possui a finalidade de identificar seus conhecimentos prévios sobre o conteúdo de Geometria Analítica: ponto e reta. Terá duração de 1 hora aula (50 minutos) e deverá ser realizado individualmente e sem consultas.

Nome: ________________________________Nº: ____ Série: ____ Data: _____/____/_____.

Observando a imagem no plano cartesiano a seguir, responda:

1) Quais as coordenadas dos pontos D, E e F?



2) Localize os pontos A(-5, 2), B(-5, -6) e C(5, 2) no plano ao lado.

3) O menino Tiago da imagem irá para casa pelo segmento DE. Determine a distância que irá percorrer. Caso deseje ir pelo segmento DF e FE, quanto percorrerá a mais?

4) Seguindo pelo segmento DE identifique na imagem, qual o ponto que o deixará na metade do caminho ou no ponto médio M?

5) Sendo N o ponto médio de DF e H o ponto médio de FE, calcule as coordenadas de N e H.

6) Trace as medidas dos triângulos DEF e DEA identificando no plano cartesiano os respectivos baricentros.

7) Os pontos F, E e G estão alinhados? Justifique

8) A inclinação do segmento AD e a mesma inclinação do segmento FE? Justifique.

9) A equação geral da reta é determinada pela seguinte expressão **y = m.x + n**, sendo **m** o coeficiente angular e **n** o coeficiente linear. O valor do coeficiente angular da equação da reta é o mesmo valor da inclinação da reta. A reta **t** da imagem acima possui qual valor de inclinação?

10) Pontos colineares são pontos que pertencem à mesma reta, cuja verificação ocorre através do cálculo do determinante de matrizes. Quando o valor do determinante for igual a zero significa que os pontos são colineares. Verifique se os pontos A(-5, 2); D(-5, -6) e G(-2, 5) são colineares.

APENDICE E - Atividade 1

ATIVIDADE 1

Nome: ____nº _____

1) Localize um bairro que pertença totalmente ao 1º quadrante do plano cartesiano e escreva seu nome no espaço ao lado. ___________________________.

2) Sapopemba pertence a qual região de São Paulo e está localizado em qual quadrante?

3) Localize no mapa os bairros de Cidade Dutra e Rio Pequeno. Escreva no espaço ao lado a que quadrante eles pertencem. ________________________.

4) Em qual quadrante se encontram partes das regiões Oeste, Central e Norte de São Paulo?

5) Identifique os pares ordenados dos pontos presentes no plano cartesiano conforme as informações. Os nomes dos bairros estão em negrito.

a) O Pico do **Jaraguá** é o ponto mais alto da cidade de São Paulo, elevando-se a uma altitude de 1.135 metros.

b) Inaugurada em maio de 2014 a Arena Corinthians, popularmente conhecida como Ita querão, é um estádio de futebol localizado no distrito de **Itaquera**, com capacidade para cerca de 60 mil pessoas.

c) Localizado na **Vila Leopoldina** o terceiro maior mercado atacadista do mundo e primeiro da América Latina, a **Companhia de Entrepostos e Armazéns Gerais de São Paulo** (Ceagesp) ou **Ceasa** surgiu em 1969 como resultado de uma fusão entre duas empresas do governo de São Paulo.

d) Situado no bairro do **Campo Belo** com um sítio aeroportuário de aproximadamente 1,5 km² de área, Congonhas é considerado o aeroporto executivo do país.

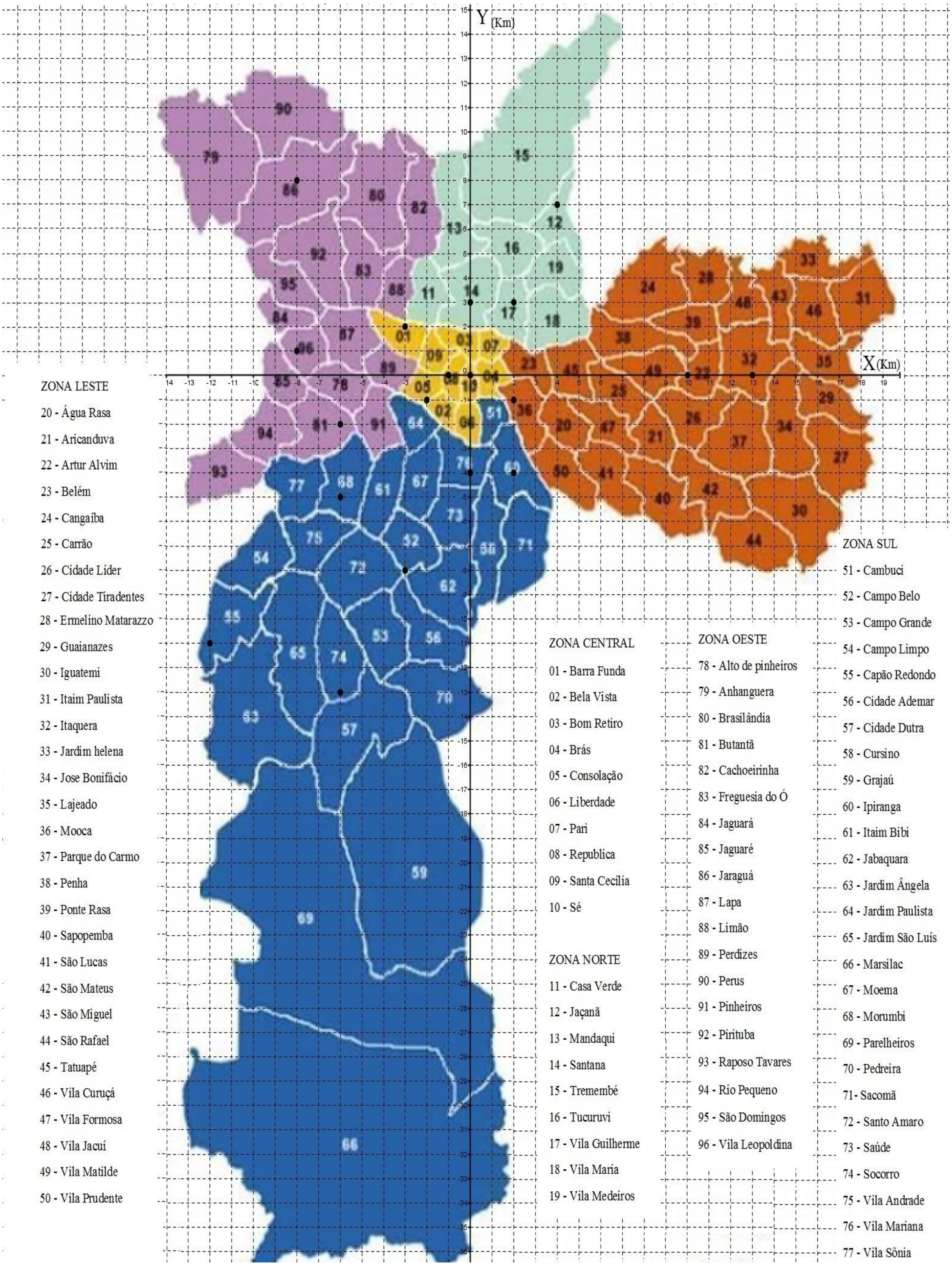
e) Localizada no bairro do **Socorro** a represa de Guarapiranga só existe há pouco mais de oitenta anos e em tupi-guarani essa palavra significa garça vermelha.

f) Um dos mais tradicionais bairros de São Paulo, a **Mooca** é um conhecido reduto de famílias descendentes de italianos.

6) Os pares ordenados a seguir, representam alguns pontos importantes da cidade de São Paulo. Identifique estes pontos no plano cartesiano.

USP Leste (10, 0), Terminal Barra Funda (-3, 2), Unifesp (0, -4), Museu do Ipiranga (2, -4), Praça da Sé (0, 0), Campo de Marte (2, 3) e Terminal Rodoviário Tietê (0, 3).

7) Há alguns pontos no mapa dos bairros que não foram utilizados nas questões anteriores. Identifique estes pontos e escreva seus pares ordenados no espaço abaixo.


Y (Km)
X (Km)
ZONA LESTE
20 - Água Rasa
21 - Aricanduva
22 - Artur Alvim
23 - Belém
24 - Cangaíba
25 - Carrão
26 - Cidade Líder
27 - Cidade Tiradentes
28 - Ermelino Matarazzo
29 - Guaianazes
30 - Iguatemi
31 - Itaim Paulista
32 - Itaquera
33 - Jardim helena
34 - Jose Bonifácio
35 - Lajeado
36 - Mooca
37 - Parque do Carmo
38 - Penha
39 - Ponte Rasa
40 - Sapopemba
41 - São Lucas
42 - São Mateus
43 - São Miguel
44 - São Rafael
45 - Tatuapé
46 - Vila Curuçá
47 - Vila Formosa
48 - Vila Jacuí
49 - Vila Matilde
50 - Vila Prudente
ZONA CENTRAL
01 - Barra Funda
02 - Bela Vista
03 - Bom Retiro
04 - Brás
05 - Consolação
06 - Liberdade
07 - Pari
08 - Republica
09 - Santa Cecília
10 - Sé
ZONA NORTE
11 - Casa Verde
12 - Jaçanã
13 - Mandaqui
14 - Santana
15 - Tremembé
16 - Tucuruvi
17 - Vila Guilherme
18 - Vila Maria
19 - Vila Medeiros
ZONA OESTE
78 - Alto de pinheiros
79 - Anhanguera
80 - Brasilândia
81 - Butantã
82 - Cachoeirinha
83 - Freguesia do Ó
84 - Jaguará
85 - Jaguaré
86 - Jaraguá
87 - Lapa
88 - Limão
89 - Perdizes
90 - Perus
91 - Pinheiros
92 - Pirituba
93 - Raposo Tavares
94 - Rio Pequeno
95 - São Domingos
96 - Vila Leopoldina
ZONA SUL
51 - Cambuci
52 - Campo Belo
53 - Campo Grande
54 - Campo Limpo
55 - Capão Redondo
56 - Cidade Ademar
57 - Cidade Dutra
58 - Cursino
59 - Grajaú
60 - Ipiranga
61 - Itaim Bibi
62 - Jabaquara
63 - Jardim Ângela
64 - Jardim Paulista
65 - Jardim São Luís
66 - Marsilac
67 - Moema
68 - Morumbi
69 - Parelheiros
70 - Pedreira
71- Sacomã
72 - Santo Amaro
73 - Saúde
74 - Socorro
75 - Vila Andrade
76 - Vila Mariana
77 - Vila Sônia

APENDICE F - Atividade 2

ATIVIDADE 2

Nome:____n.º_______

1) Localize no plano cartesiano os pontos e trace os segmentos aos pares conforme a lista abaixo:

a) A(7, 0) B(16, 0)

b) C(0, 0) D(0, 8)

c) E(-20, 0) F(-17, 0)

d) G(0, -10) H(0, -4)

e) I(-15, -6) J(-6, -6)

f) K(11,-17) L(11,-11)

g) M(-9, 5) N(-9, 17)

h) O(3, -13) P(7, -13)

m) Q(-19, -10) R(-19, -16)

n) S(-19, 13) T(-5, 13)

o) U(-2, 16) V(-2, -15)

p)W(-13, -3) Z(18, -3)

2) Determine a distância dos segmentos utilizando os cálculos exemplificados em aulas anteriores, como ponto final menos o ponto inicial e faça a verificação dos resultados através da contagem nos eixos.

Exemplo: $d_{QR} = |-16 - (-10)| = |-16 + 10| = |-6| = 6$

3) Para os segmentos verticais, ao calcularmos a distância entre os pontos, utilizamos valores de qual eixo? E para os segmentos horizontais quando calculamos as medidas dos segmentos, utilizamos valores de qual eixo?

4) Escolha um segmento vertical e repita o cálculo realizado no exercício 2. Porém, com os valores do eixo que não foi utilizado. O que aconteceu com o resultado? Será que ao repetir o mesmo procedimento com todos os segmentos verticais e horizontais os valores serão os mesmos?

5) Se tivéssemos segmentos inclinados será que os cálculos poderiam ser realizados conforme o exemplo do exercício 2? E se os pontos não estivessem no plano, como eu saberia se o segmento é posicionado verticalmente, horizontalmente ou inclinado?

6) Exemplifique escrevendo as coordenadas de dois pontos que ao traçarmos um segmento entre eles, este ficará inclinado.

Para refletir...

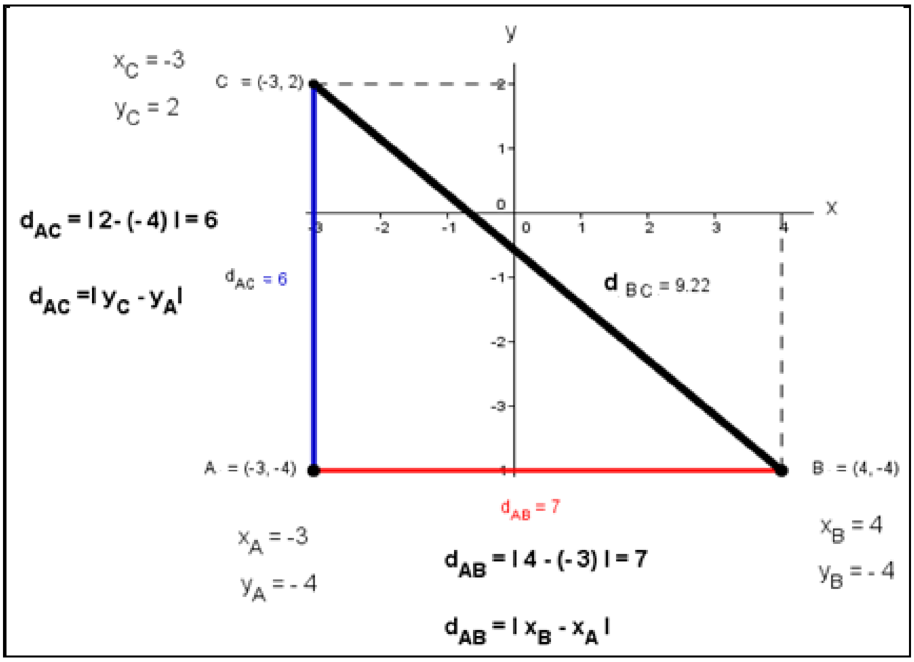
Quando os segmentos são inclinados associamos o Teorema de Pitágoras com o cálculo da distância entre dois pontos. Como podemos fazer esta associação?

APÊNDICE G - Atividade 3

ATIVIDADE 3

Nome: ____n.º _________

Observe a imagem e com base em seus valores faça os cálculos e responda as perguntas.



Na atividade anterior calculamos a distância entre pontos de segmentos verticais e horizontais. Nesta mesma atividade tínhamos a seguinte pergunta:

Quando os segmentos são inclinados associamos o Teorema de Pitágoras com o cálculo da distância entre dois pontos. Como podemos fazer esta associação?

Enquanto você reflete sobre o assunto, vamos responder algumas perguntas:

1) Por que para encontrarmos a medida do segmento AB não houve a necessidade de calcularmos $d_{AB} = |y_B - y_A|$, ou seja, de utilizarmos os valores das ordenadas?

2) Por que para encontrarmos a medida do segmento AC não houve a necessidade de calcularmos $d_{AC} = |x_C - x_A|$, ou seja, de utilizarmos os valores da abscissas?

3) Será que para calcularmos a medida do segmento BC, precisaremos utilizar os valores das ordenadas e das abscissas?

4) Você concorda que para calcularmos as medidas dos segmentos estamos sempre utilizando o valor final do segmento menos o valor inicial, o que nos remeteria a um início de uma formula, assim: $d_{BC} = |x_C – x_B|$ $d_{BC} = |y_C – y_B|$? Mas, se os cálculos fossem apenas estes, ficaríamos com o resultado da distância entre os dois pontos valendo 9,22?

5) Você lembra do Teorema de Pitágoras? No Teorema fala-se de hipotenusa e catetos. Escreva na imagem onde eles estão localizados.

6) A hipotenusa e os catetos são todos elevados ao quadrado. Mas, a hipotenusa é igual à soma dos catetos. Escreva como fica este Teorema aplicando-o aos valores dos segmentos AC = 6 e AB = 7, identificando ao final o valor do segmento BC. O valor de $\overline{BC}$ ficou igual ao que aparece na imagem?

7) O Teorema de Pitágoras é expresso da seguinte forma: hipotenusa^2 = cateto^2 + cateto ^{2}.

Neste problema queremos encontrar a medida do segmento BC ou d_{BC} que para o Teorema é a hipotenusa. Conforme a imagem, possuímos a medida dos dois catetos, que foram calculados pela diferença entre o valor final e o valor inicial dos segmentos. Então, utilizando o início da fórmula que está no exercício 4 temos:

Hipotenusa^2 = cateto^2 + cateto ^{2}	$(d_{BC})^2 = (x_C – x_B)^2 + (y_C – y_B)^2$

$d_{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

Agora utilizando a fórmula da distância entre dois pontos verifique se realmente teremos como resultado d_{BC} = 9,22 ou $\overline{BC}$ = 9,22.

Escreva esta fórmula no caderno e como atividade de casa calcule a distância entre os pontos D(-4, 5) e E(2, -7).

APÊNDICE H - Atividade 4 – (Turma 2)

ATIVIDADE 4

Nome: ____nº: ____

1) Na malha quadriculada trace um segmento de reta em qualquer posição (vertical, horizontal ou inclinado). Identifique os pontos do segmento e escreva suas coordenadas.

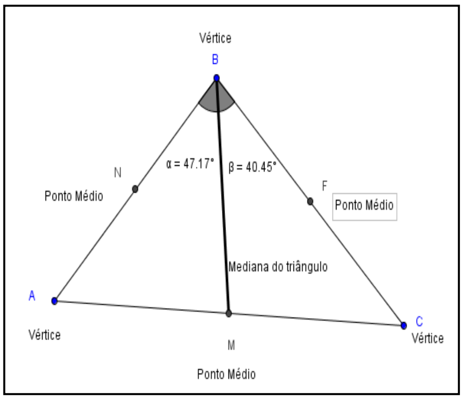
2) Com régua ou contando os quadrados da malha, localize o meio do segmento. Identifique o meio do segmento ou o ponto médio e escreva suas coordenadas.

3) Observe os valores das abscissas e das ordenadas e busque alguma relação entre seus valores e o valor da coordenada do ponto médio. Escreva uma fórmula que represente o cálculo para o ponto médio.

4) Trace três segmentos, o primeiro será o que já está pronto do exercício 1, o segundo deverá ter um dos seus pontos na extremidade do primeiro segmento e o terceiro segmento deverá fechar a figura. Que figura formou?

5) Identifique os pontos na figura e escreva seus pares ordenados, localize e escreva também, os pontos médios dos segmentos.

6) Faça os cálculos para determinar os pontos médio dos segmentos utilizando a fórmula do exercício 3. Mediana é um segmento que divide as bases do triângulo em duas partes iguais. Dessa forma temos que mediana é um segmento de reta com origem em um dos vértices do triângulo e extremidade no ponto médio do lado oposto ao vértice. Observe a figura:



7) Trace as três medianas do triângulo formado no exercício 4 e identifique as coordenadas do seu baricentro. Baricentro é o ponto onde há o encontro das três medianas do triângulo.

8) Como poderemos fazer os cálculos para identificar as coordenadas do baricentro do triângulo? Pense, descubra, e faça os cálculos.

APÊNDICE H - Atividade 4 - (Turma 1)

ATIVIDADE 4

Nome:____Nº:_____

1) No GeoGebra trace um segmento de reta em qualquer posição (vertical, horizontal ou inclinado). Identifique os pontos do segmento e escreva suas coordenadas. Observe sempre a janela algébrica e faça um comparativo com a janela gráfica.

2) Identifique o meio do segmento ou o ponto médio e escreva suas coordenadas. (Há um ícone específico para localizar ponto médio).

3) Observe os valores das abscissas e das ordenadas e busque alguma relação entre seus valores e o valor da coordenada do ponto médio. Escreva uma fórmula que represente o cálculo para o ponto médio.

4) Trace três segmentos, o primeiro será o que já está pronto do exercício 1, o segundo deverá ter um dos seus pontos na extremidade do primeiro segmento e o terceiro segmento deverá fechar a figura. Que figura formou?

5) Identifique os pontos na figura e escreva seus pares ordenados, localize e escreva também, os pontos médios dos segmentos.

6) Faça os cálculos para determinar os pontos médio dos segmentos utilizando a fórmula do exercício 3.

7) Pesquise em http://www.brasilescola.com/matematica/mediana-bissetriz-altura-um-triangulo.htm o significado de mediana de um triângulo e trace as três medianas do triângulo formado no exercício 4, identificando com um ponto o baricentro e representando as coordenadas deste ponto. Baricentro é o ponto onde há o encontro das três medianas do triângulo.

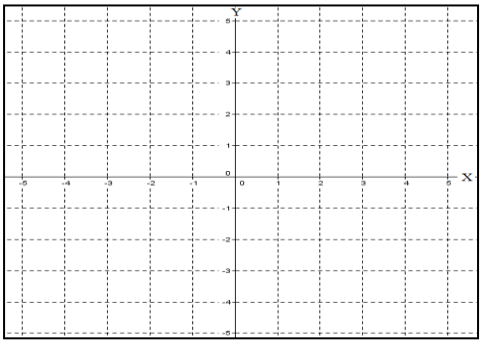
8) Como poderemos fazer os cálculos para identificar as coordenadas do baricentro do triângulo? Pesquise, descubra e faça os cálculos.

APÊNDICE I - Atividade 5 - (Turma 2)

ATIVIDADE 5

Nome: ____nº _____

1) No espaço abaixo localize três pontos distintos.



A) Trace uma reta sobre os três pontos.

B) Os três pontos pertencem a mesma reta? Se a resposta for sim, é porque estão alinhados.

C) Então, para que três pontos estejam alinhados o que é necessário?

2) Ao representarmos os três pontos na forma gráfica, podemos perceber que só estão alinhados se traçarmos uma reta e todos os pontos pertencerem a esta reta. Outra forma de sabermos se os pontos estão alinhados, é calculando o determinante da matriz. Você lembra como calculamos o determinante de matrizes?

3) Veja um exemplo de como calculamos o determinante para sabermos se os pontos estão alinhados. Dados os pontos A(3, 2), B(5, 0) e C(7, -2), os organizamos em forma de matriz quadrada de ordem três; na primeira coluna, localizamos os valores das abscissas; na segunda coluna, os valores das ordenadas; e na terceira coluna, o elemento neutro da multiplicação. A matriz e os cálculos ficarão assim:

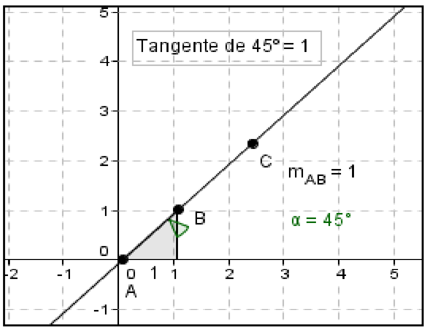
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 7 & -2 & 1 & 7 & -2 \end{bmatrix} = 0 + 14 - 10 - (0 - 6 + 10) = 4 - 4 = 0$$

Para que os pontos estejam alinhados o resultado do determinante deverá ser zero.

Realize o cálculo e verifique se estes três pontos estão alinhados. D(1, 4), E(3, 0) e F(5, -4)

4) A terceira forma de sabermos se os pontos estão alinhados é verificando se a inclinação é a mesma para cada par de pontos. Observando o exemplo da questão 3: Se a inclinação da reta que passa pelos pontos A e B forem a mesma da reta que passam por B e C, então, os pontos estão alinhados. A inclinação é calculada da seguinte forma: $\mathbf{m}_{AB} = \frac{yB - yA}{xB - xA}$

Outra forma de sabermos se os pontos estão alinhados é observando os valores da tangente do ângulo que a reta forma com o eixo das abscissas. Observe a imagem: **O valor da inclinação é o mesmo da tangente do ângulo.**



Utilizando a fórmula da inclinação, verifique se os pontos H(-4, 0), I(0, 3) e J(4, 6) estão alinhados.

APÊNDICE I – ATIVIDADE 5 - (Turma 1)

ATIVIDADE 5

Nome: ____nº _____

1) No espaço gráfico do GeoGebra represente três pontos distintos.

A) Trace apenas uma reta sobre os três pontos.

B) Os três pontos pertencem a mesma reta? Se a resposta for sim, é porque estão alinhados.

C) Então, para que três pontos estejam alinhados o que é necessário?

2) Ao representarmos os três'1 pontos na forma gráfica, podemos perceber que só estão alinhados se traçarmos uma reta e todos os pontos pertencerem a esta reta. Outra forma de sabermos se os pontos estão alinhados, é calculando o determinante da matriz. Você lembra como calculamos o determinante de matrizes?

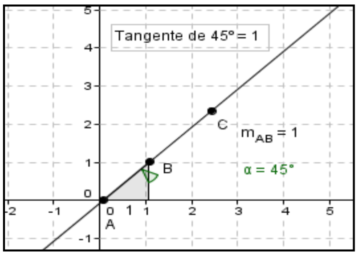
3) Veja um exemplo de como calculamos o determinante para sabermos se os pontos estão alinhados. Dados os pontos A(3, 2), B(5, 0) e C(7, -2) os organizamos em forma de matriz quadrada de ordem três; na primeira coluna, localizamos os valores das abscissas; na segunda coluna, os valores das ordenadas; e na terceira coluna, o elemento neutro da multiplicação. A matriz e os cálculos ficarão assim:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 7 & -2 & 1 & 7 & -2 \end{bmatrix} = 0 + 14 - 10 - (0 - 6 + 10) = 4 - 4 = 0$$

Para que os pontos estejam alinhados o resultado do determinante deverá ser zero.

Realize o cálculo e verifique se estes três pontos estão alinhados. D(1, 4), E(3, 0) e F(5, -4)

4) A terceira forma de sabermos se os pontos estão alinhados é verificando se a inclinação é a mesma para cada par de pontos. Observando o exemplo da questão 3: Se a inclinação da reta que passa pelos pontos A e B forem a mesma da reta que passam por B e C, então, os pontos estão alinhados. A inclinação é calculada da seguinte forma: $\mathbf{m}_{AB} = \frac{yB - yA}{xB - xA}$



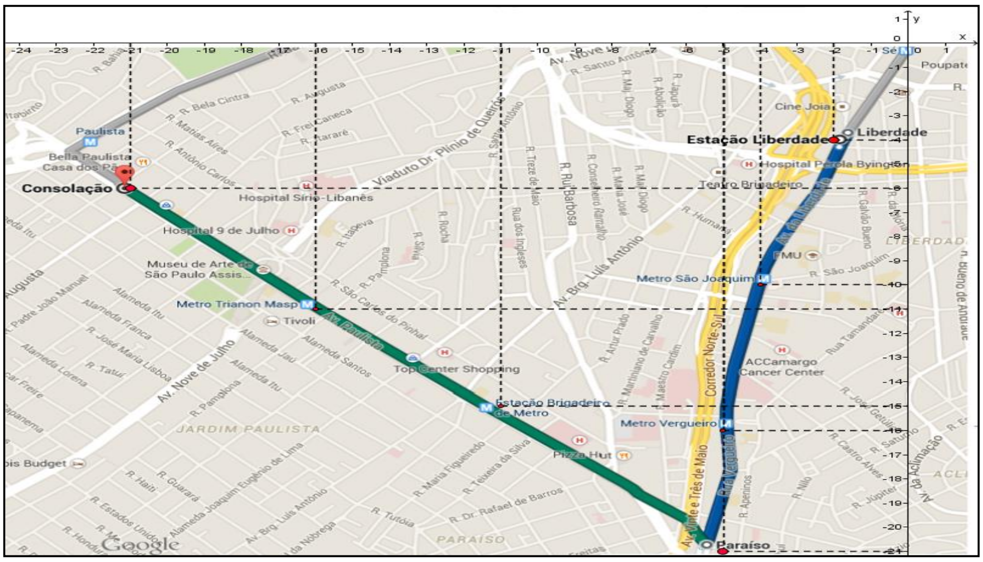
Outra forma de sabermos se os pontos estão alinhados é observando os valores da tangente do ângulo que a reta forma com o eixo das abscissas. Observe a imagem: **O valor da inclinação é o mesmo da tangente do ângulo.** Utilizando a fórmula da inclinação, verifique se os pontos H(-4, 0), I(0, 3) e J(4, 6) estão alinhados.

APÊNDICE J – Avaliação Intermediária

ATIVIDADE AVALIATIVA DE MATEMÁTICA – 1º MÓDULO

Nome:____Nº: __________

João e Pedro são amigos e utilizam o metrô de segunda a sexta-feira e se encontram na Avenida Paulista em frente à estação Trianon Masp. João utiliza a linha azul do metrô, saindo da estação Liberdade e faz baldeação na estação Paraíso seguindo pela linha verde, até a estação Trianon Masp. Já Pedro, sai da estação Consolação se dirigindo ao ponto de encontro. Considerando a Praça da Sé como marco zero e a unidade de medida em quilômetros (Km), observe a imagem e responda as seguintes questões:



Fonte: Google Maps

1) Escreva as coordenadas dos pontos que representam as sete estações do metrô.

2) Represente no plano cartesiano os pontos correspondentes as três estações do metrô e as identifique da seguinte forma: C, para estação Consolação; P, para estação Paraíso; e L para estação Liberdade.

3) Qual a distância do trajeto realizado por Pedro?

4) Represente no plano cartesiano os segmentos de reta $\overline{CP}$, $\overline{PL}$ e $\overline{LC}$ e determine os seus respectivos pontos médios M, N e H através de cálculos e de pontos sobre os segmentos.

5) Calcule e localize no plano o baricentro do triângulo, cujos vértices, correspondem as três estações: Consolação, Paraíso e Liberdade. O ponto que representa o baricentro ficou próximo ou na Avenida Brigadeiro Luís Antônio?

6) Faça um comentário sobre o 1º módulo, identificando os pontos negativos e positivos, de sugestões ou reclamações, fique à vontade para expressar a sua opinião.

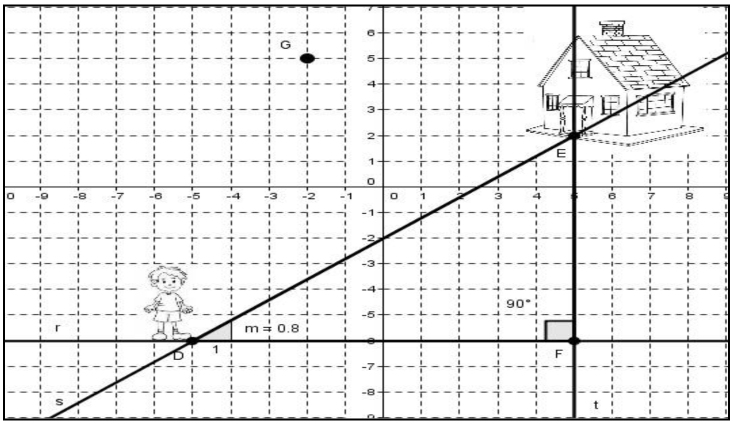
APÊNDICE K - PÓS - TESTE

AVALIAÇÃO FINAL

Este teste possui a finalidade de identificar seus conhecimentos sobre o conteúdo de Geometria Analítica: ponto e reta. Terá duração de 2 horas aula (50 minutos) e deverá ser realizado individualmente e sem consultas.

Nome: ___________________________________Nº: ___________ Data:_____/____/_____.

Observando o plano cartesiano a seguir, responda:



1) Quais as coordenadas dos pontos D, E e F?

2) Localize os pontos A(-8,4), B(-5,-2) e C(3,6) no plano.

3) O menino Tiago da imagem irá para casa pelo segmento DE. Determine a distância que irá percorrer. Caso deseje ir pelo segmento DF e FE, quanto percorrerá a mais?

4) Seguindo pelo segmento DE identifique na imagem, qual o ponto que o deixará na metade do caminho ou no ponto médio M.

5) Sendo N o ponto médio de DF e H o ponto médio de FE calcule as coordenadas de N e H.

6) Trace as medianas do triângulo DEF. Calcule o baricentro e identifique o seu ponto no plano cartesiano.

7) Os pontos F, E e G estão alinhados? Justifique utilizando a representação gráfica e numérica.

8) A inclinação do segmento AE e a mesma inclinação do segmento DE? Justifique.

9) A equação geral da reta é determinada pela seguinte expressão y = **m**.x + **n** sendo **m** o coeficiente angular e **n** o coeficiente linear. O valor do coeficiente angular da equação da reta é o mesmo valor da inclinação da reta. A reta **t** da imagem possui qual valor de inclinação?

10) Pontos colineares são pontos que pertencem a mesma reta, cuja verificação ocorre através do cálculo do determinante de matrizes. Quando o valor do determinante for igual a zero significa que os pontos são colineares. Verifique se os pontos A(-5,2), D(-5,-6) e G(-2,5) são colineares.

ANEXO A - Exercícios do Caderno do Aluno.

EXERCÍCIOS PARA O 1º MÓDULO

(Caderno do Aluno página 5 exercício **1 a**, página 14 e 15 exercício **11 a** e **c**)

1) Na Geometria Analítica Plana, representamos os pontos de um plano por coordenadas (x, y) e fazemos cálculos relativos a figuras geométricas por meio de operações algébricas sobre os pares de coordenadas. Partindo dessa ideia, considere os pontos A(2,3) e B(5,7), e calcule:

a) A distância entre esses dois pontos.

2) Represente os pontos A(0,0), B(3,7) e C(-2,13) em um sistema de coordenadas, sendo M o ponto médio de $\overline{AC}$ e N o ponto médio de $\overline{BC}$

a) Determine as coordenadas M e N.

b) Calcule as distâncias d_{AB} e d_{MN}, verificando que $d_{AB} = 2.d_{MN}$.