UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Rodrigo Antonio Samprogna

Atratores para Processos Generalizados e Aplicações a um Problema Não Autônomo com Dinâmica na Fronteira

São Carlos - SP
Março de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Rodrigo Antonio Samprogna
Bolsista CNPq
Orientadora: Karina Schiabel
Coorientadora: Cláudia Buttarello Gentile Moussa

Atratores para Processos Generalizados e Aplicações a um Problema Não Autônomo com Dinâmica na Fronteira

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, área de concentração: Análise Matemática.

São Carlos - SP
Março de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Rodrigo Antonio Samprogna, realizada em 17/03/2017:

____
Profa. Dra. Karina Schiabel
UFSCar

____
Profa. Dra. Claudia Buttarello Gentile Moussa
UFSCar

____
Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho
USP

____
Prof. Dr. Antonio Luiz Pereira
USP

____
Prof. Dr. Ma To Fu
USP

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

Gostaria primeiramente de agradecer a Deus e a toda a minha família. Um agradecimento especial aos meus pais, Antonio Samprogna Sobrinho e Terezinha Alair Ferreira Moreira Samprogna, pelo apoio em todos os momentos e aspectos da minha vida.

À minha companheira, Betina Cambi pelo amor, carinho, incentivo, paciência e ajuda para escrever e sua família por todo apoio.

Às minhas orientadoras, Karina Schiabel e Cláudia Buttarello Gentile Moussa, pela oportunidade, ajuda e orientação durante estes anos. Agradeço também ao professor Tomás Caraballo, da Universidade de Sevilla, que me orientou, apoiou e auxiliou durante o período que passei na Espanha desenvolvendo este trabalho.

Ao CNPq e ao Programa Ciência Sem Fronteiras pelo apoio financeiro.[1]

Agradeço a todos os professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFSCar.

A todos os meus amigos da graduação, da pós-graduação, do ICMC-USP, e aos amigos que não são matemáticos, pela troca de conhecimento, apoio e companheirismo.

[1]CNPq processo 140943/2013-7, CNPq/CsF processo 200493/2015-9

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo do comportamento assintótico de problemas de evolução não autônomos sem unicidade de solução. Mais especificamente, à existência de atratores, em diferentes contextos, para sistemas dinâmicos que representam o comportamento de tais problemas. São consideradas também aplicações de tais estudos a um problema não autônomo associado ao operador p-Laplaciano com dinâmica na fronteira.

Abstract

This work is dedicated to the study of the asymptotic behavior of nonautonomous evolution problems without uniqueness of solution. More specifically, to the existence of attractors, in different contexts, for dynamical systems that represent the behavior of such problems. We also consider applications for a class of p-Laplacian nonautonomous problems with dynamical boundary conditons.

Sumário

Introdução

O comportamento assintótico de problemas de evolução não autônomos multívocos pode ser abordado sob três diferentes pontos de vista, como é feito para sistemas multívocos autônomos. A primeira abordagem envolve um processo multívoco, ou seja, uma família de operadores multívocos $\{U(t,s)\}_{t\geq s}$, que depende de dois parâmetros, e que, a cada condição inicial $u_0 \in X$, associa o conjunto de soluções avaliadas no instante t, com condição inicial u_0 imposta no instante s. Isto significa que, se considerarmos, por exemplo, o problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u &= F(t,u) \\ u(s) &= u_0 \in X, \end{cases} \tag{1}$$

tal que, para cada $s \in \mathbb{R}$ e u_0 em um espaço de Banach X, possui ao menos uma solução definida em $[s,+\infty)$, definimos $U(t,s)u_0 = \{u(t,s,u_0)\}$, onde $u(t,s,u_0)$ denota uma solução de (1) com condição inicial $u(s) = u_0$ avaliada no tempo t, [15, 50]. Podemos também considerar um processo generalizado, isto é, o conjunto de curvas $\psi(\cdot) = u(\cdot,s,u_0)$, e então definimos um processo multívoco determinado pelo processo generalizado como o conjunto $U(t,s)u_0 = \{u(t,s,u_0)\}$. Essa segunda abordagem nos permite impor condições apropriadas sobre as curvas, ao invés de requerer as propriedades desejadas somente em cada instante avaliado, [7, 26, 57]. Um terceiro modo de lidar com sistemas multívocos consiste em olhar para o espaço de todas as soluções como um espaço de fase (munido de uma topologia adequada) e estudar o comportamento assintótico do sistema considerando o semigrupo de translações nesse espaço de trajetórias, [23, 24].

A primeira e a última abordagens mencionadas têm sido privilegiadas na literatura; a primeira delas tanto para a análise da dinâmica *forward* quanto da dinâmica *pullback*, e a última predominantemente para o estudo da dinâmica *forward*. Este trabalho é conduzido de forma a seguir a segunda proposta, que é menos explorada e que, acreditamos, pode adicionar novas informações na descrição da dinâmica assintótica de problemas multívocos não autônomos.

Para problemas bem postos, há outras abordagens teóricas a partir das quais é possível estudar as dinâmicas *forward* e *pullback*, e uma descrição detalhada, incluindo relações entre os atratores associados a cada uma, podem ser encontradas em [10, 18].

A dinâmica assintótica das soluções de problemas de evolução vem sendo extensivamente estudada nos últimos anos, em particular no que concerne à existência de atratores, [5, 18, 52]. Há um interesse crescente no estudo da dinâmica assintótica de equações não autônomas, e existem diferentes propostas de definição de atrator neste contexto. De fato, é bem conhecido hoje que o estudo da dinâmica *forward*, [19, 23, 24], e o estudo da dinâmica *pullback* (no qual se faz o instante inicial $s \to -\infty$), [18, 19], levam a concentrações assintóticas, em geral, distintas. Em [19] pode-se encontrar uma comparação detalhada entre atratores *pullback* e atratores uniformes (*forward*), assim como outras propostas de atratores envolvendo diferentes *frameworks* para tratar a evolução de problemas não autônomos.

Com relação à parte abstrata, apresentamos aqui uma teoria para o $\mathscr{D}$-atrator pullback no caso multívoco, com base em [17, 18], usando a abordagem multívoca de processos generalizados desenvolvidas em [7, 57]. O $\mathscr{D}$-atrator pullback caracteriza-se por atrair uma família pré-estipulada de conjuntos. Em geral, é um atrator que atrai uma família mais ampla de objetos do que os atratores tradicionais, que atraem conjuntos limitados. Adaptamos também a teoria de atratores de trajetórias para o contexto de processos multívocos. O atrator de trajetórias desenvolvido em [23, 24] já aparece naturalmente em um contexto multívoco, pois é um atrator que atua em um espaço formado por curvas soluções de um dado problema, porém, em geral, nas aplicações são considerados problemas com unicidade de solução. Outro fator importante dessa teoria é que ela está atrelada à teoria de processos multívocos quando se assume a unicidade de solução, de forma que em [24] os autores mostram que é possível garantir a existência de um atrator global uniforme para um processo multívoco a partir da projeção de um atrator de trajetórias sobre o espaço de fase. De fato, em [25], os autores mencionam que é possível fazer o mesmo no contexto multívoco, considerando-se a teoria de processos multívocos adequada. Com isso em mente, tomamos a teoria de processos generalizados como base para garantir a existência de uma atrator global uniforme a partir de um atrator de trajetórias.

A teoria de processos generalizados, no entanto, mostrou-se improdutiva no momento de garantir a invariância do atrator global uniforme. Porém, um estudo aprofundado da teoria de processos multívocos desenvolvida em [50] nos levou a perceber os requisitos necessários para se obter um atrator global uniforme invariante para o contexto multívoco. Levando essas informações para o contexto de atratores de trajetórias, encontramos as condições necessárias para a existência de um atrator de trajetórias que gera, em certo sentido, um atrator global uniforme invariante para um processo generalizado.

Para aplicarmos a teoria abstrata, escolhemos o desafio de trabalhar com equações diferenciais não autônomas com dinâmica na fronteira. Este tipo de equação aparece em diversas diversas áreas da ciência, como hidrodinâmica e transferência de calor, e referências para aplicações desta classe de problemas podem ser encontradas, por exemplo, em [1]. Estudos acerca de problemas com dinâmica na fronteira vêem surgindo na literatura, ainda que de forma esparsa, ao menos desde o início da década de setenta, [31, 38, 39, 47], mas foi em 2002, em [33], que desenvolveu-se uma abordagem que possibilitou um tratamento mais simples de tais problemas, o que alavancou o volume de estudos no tema. Com essa nova abordagem, Gal e Warma, em [34], estudaram uma equação autônoma com dinâmica na fronteira da forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u + f_1(u) = g_1(x), & \text{em } \Omega \\ u_t + |\nabla u|^{p-2}\partial_{\vec{n}} u + f_2(u) = g_2(x), & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ e Δ_p é o operador p-Laplaciano. Usando a abordagem desenvolvida em [33] e a técnica de Faedo-Galerkin (veja [59]), os autores mostram em [34] a existência e a unicidade de solução para um problema associado a equacao (2), e estudam a dinâmica assintótica de tal solução.

Introduzindo termos não autônomos na equação (2), consideramos neste trabalho o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u + f_1(t,u) = g_1(t,x), & \text{em } \Omega, \\ u_t + |\nabla u|^{p-2}\partial_{\vec{n}} u + f_2(t,u) = g_2(t,x), & \text{em } \partial\Omega, \\ u(\tau) = u_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde as funções f_1, f_2, g_1, g_2 satisfazem hipóteses que especificaremos adiante.

A existência de atrator pullback para problemas com fronteira dinâmica foi tratada em [1] para um problema semilinear. Em [44, 61] foi obtida a existência de um atrator mais forte, o $\mathscr{D}$-atrator pullback, para problemas muito similares a (P), envolvendo o operador

p-Laplaciano. Em [62], os autores estabeleceram a existência do atrator uniforme para o problema com o termo não autônomo apenas nas forças externas, $g_i, i = 1, 2,$.

A unicidade de solução, entretanto, não pode ser sempre garantida para esta classe de problemas e, a depender das relações entre os termos perturbativos na fronteira e no interior do domínio, problemas como (P) podem gerar semigrupos (ou processos, no caso não autônomo) multívocos, [35].

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1 apresentamos uma coletânea de pré-requisitos para o desenvolvimento do trabalho, com um estudo mais aprofundado sobre espaços de funções definidas sobre a fronteira suave de um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, bem como resultados de topologia amplamente difundidos na literatura. No Capítulo 2 desenvolvemos um estudo detalhado do problema (P). Em particular, fazemos uma análise das soluções geradas e, usando uma abordagem como a proposta em [33] e a teoria de operadores maximais monótonos, garantimos a existência de solução através do método de Faedo-Galerkin. Desenvolvemos também neste capítulo um resultado de comparação. A comparação de soluções tem se mostrado uma ferramenta bastante útil para se obter estimativas para as soluções em normas mais fortes e, como por exemplo é feito em [4, 53], obter e aprimorar os resultados sobre a dinâmica assintótica do problema. Os Capítulos 3 e 4 foram dedicados, respectivamente, à teoria abstrata de $\mathscr{D}$-atratores pullback para processos generalizados, e sua aplicação ao Problema (P). Finalmente, no Capítulo 6, provamos a existência do atrator de trajetórias para o problema proposto, e, consequentemente, garantimos a existência do atrator global uniforme para (P), de acordo com a teoria desenvolvida no Capítulo 5.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos notações, definições e resultados utilizados ao longo deste trabalho. Todo o conteúdo deste capítulo está referenciado ou demonstrado, e são resultados amplamente difundidos na literatura.

1.1 Resultados Preliminares

Lema 1.1 (Desigualdade de Tartar)**.** [30, Lema 4.4, p.13] *Seja* $p \geq 2$. *Então, para quaisquer* $a, b \in \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, *temos*

$$\left\langle \|a\|^{p-2}a - \|b\|^{p-2}b, a - b \right\rangle \geq \gamma_0 \|a - b\|^p,$$

onde γ_0 *é positivo e depende apenas de* p *e de* N.

Se $1 < p < 2$, *então, para quaisquer* $a, b \in \mathbb{R}^N$, *temos*

$$\left\langle \|a\|^{p-2}a - \|b\|^{p-2}b, a - b \right\rangle \leq \gamma_1 \|a - b\|^p,$$

onde γ_1 *é positivo e depende apenas de* p *e de* N.

Lema 1.2. [8, Lema 15.2, p.133] *Se* $a, b \geq 0$ *e* $1 \leq p < \infty$, *então*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Lema 1.3. [52, Lema 8.3, p.218] *Seja* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^N$, *e seja* $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *tal que*

$$\|g_i\|_{L^p(\Omega)} \leq C, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante positiva. Se $g \in L^p(\Omega)$ e $g_i \to g$ q.t.p. em Ω, então $g_i \rightharpoonup g$ em $L^p(\Omega)$.

Sejam E_0 e E_1 espaços de Banach tais que $E_1 \subset E_0$. Consideremos o espaço

$$W_{p_1,p_0}(\tau,T;E_1,E_0) := \{\varphi : [\tau,T] \to E_1; \varphi \in L^{p_1}(\tau,T;E_1),\ \varphi' \in L^{p_0}(\tau,T;E_0)\}$$

com a norma

$$\|\varphi\|_{W_{p_1,p_0}} := \left(\int_\tau^T \|\varphi(t)\|_{E_1}^{p_1} dt\right)^{1/p_1} + \left(\int_\tau^T \|\varphi'(t)\|_{E_0}^{p_0} dt\right)^{1/p_0},$$

onde $1 \leq p_1, p_0 < \infty$. No caso $W_{\infty,p_0}(\tau,T;E_1,E_0)$, onde $p_1 = \infty$, consideramos a norma

$$\|\varphi\|_{W_{\infty,p_0}} := supess\{\|\varphi(t)\|_{E_1}; t \in [\tau,T]\} + \left(\int_\tau^T \|\varphi'(t)\|_{E_0}^{p_0} dt\right)^{1/p_0}.$$

Teorema 1.4. [24, Teorema 1.4, p.32] *Suponha que $E_1 \subset\subset E \subset E_0$ onde E é um espaço de Banach. Se $1 \leq p_1 < \infty$ e $1 < p_0 < \infty$, então a seguinte imersão é compacta:*

$$W_{p_1,p_0}(\tau,T;E_1,E_0) \hookrightarrow L^{p_1}(\tau,T;E).$$

Teorema 1.5. [24, Lema 1.5, p.32] *Suponha que $E_1 \subset\subset E \subset E_0$ onde E é um espaço de Banach. Se $1 < p_0 < \infty$, então a seguinte imersão também é compacta:*

$$W_{\infty,p_0}(\tau,T;E_1,E_0) \hookrightarrow C([\tau,T];E).$$

Lema 1.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado. Se $1 < p \leq q < \infty$, então existem constantes $\kappa > 0$ e $C_\kappa > 0$ tais que*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \kappa \|f\|_{L^q(\Omega)}^q + C_\kappa.$$

Demonstração: De fato, pela Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p(\Omega)}^p &\leq C\|f\|_{L^q(\Omega)}^p \\ &\leq \varepsilon \left(C\|f\|_{L^q(\Omega)}^p\right)^{\frac{q}{p}} + C_\varepsilon.1^{\left(\frac{q}{p}\right)'} = \kappa\|f\|_{L^q(\Omega)}^q + C_\kappa,\end{aligned}$$

onde $\left(\dfrac{q}{p}\right)' = \dfrac{\frac{q}{p}}{\frac{q}{p}-1}$. ∎

Lema 1.7 (Desigualdade de Gronwall)**.** [24, Desigualdade Diferencial, p.35] *Seja* $y(t) \in C^1([t_0, t_1])$, $y \geq 0$, *e suponha que a seguinte desigualdade é satisfeita:*

$$y'(t) + \gamma y(t) \leq h(t),$$

com $\gamma \geq 0$. *Então*

$$y(t) \leq y(t_0)e^{-\gamma t} + \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}h(s)ds,$$

para todo $t_0 < t \leq t_1$.

Lema 1.8 (Lema uniforme de Gronwall)**.** [13, Lema 1.1.2, p.5] *Sejam* $\tau \in \mathbb{R}$ *e* g, h, y *funções positivas com* y', g, h *e* y *localmente integráveis em* $[\tau, \infty)$, *suponha*

$$y' \leq gy + h.$$

Seja $R > 0$ *fixo e suponha que para cada* $t \geq \tau$ *fixo, tenhamos*

$$\int_t^{t+R} g(s)ds \leq a_1(t), \int_t^{t+R} h(s)ds \leq a_2(t) \text{ e } \int_t^{t+R} y(s)ds \leq a_3(t).$$

Então, para cada $t \geq \tau$, *temos*

$$y(t+R) \leq \left(\frac{a_3(t)}{R} + a_2(t)\right) e^{a_1(t)}.$$

Lema 1.9. [12, Exercício 5.28, p.154] *Seja* H *um espaço de Hilbert separável. Seja* $V \subset H$ *um subespaço linear denso em* H, *então* H *possui uma base ortonormal contida em* V.

1.1.1 Topologias Fracas

A seguir apresentaremos dois resultados de topologias fraca e fraca estrela que serão utilizados neste trabalho.

Teorema 1.10. [12, Teorema 3.18, p.69] *Seja* E *um espaço de Banach reflexivo e seja* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada em* E. *Então existe uma subsequência* $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *convergente na topologia fraca de* E.

Teorema 1.11. [12, Corolário 3.30, p.76] *Seja* E *um espaço de Banach separável e* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada em* E^*. *Então existe uma subsequência* $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *convergente na topologia fraca estrela de* E^*.

1.1.2 Teorema de Carathéodory

Apresentaremos alguns resultados de EDO que serão utilizados posteriormente. Tais resultados foram transcritos de [27], mas podem ser encontrados também em [37].

Definição 1.12. *Seja $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ um subconjunto aberto. Dizemos que $F : D \to \mathbb{R}^N$ satisfaz as* ***condições de Carathéodory*** *em D se:*

- *$F(t, x)$ é mensurável em $t \in \mathbb{R}$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ fixo;*
- *$F(t, x)$ é contínua em $x \in \mathbb{R}^N$, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo;*
- *se $C \subset D$ é um conjunto compacto, então existe uma função real integrável $m_C(t)$ tal que $\|F(t, x)\|_{\mathbb{R}^N} \leq m_C(t)$, para todo $(t, x) \in C$.*

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

Teorema 1.13 (Carathéodory)**.** [27, Teorema 1.1, p.43] *Se $F : D \to \mathbb{R}^N$ satisfaz as condições de Carathéodory. Então existe $\beta > 0$ e uma solução $x(t)$ de* (1.1) *no intervalo* $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$.

Teorema 1.14. [27, Teorema 1.3, p.47] *Sejam $b > 0$, $\tau < t_0 < T < +\infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^N ; \|x\|_{\mathbb{R}^N} < b\}$, $\|x_0\|_{\mathbb{R}^N} \leq b$ e $0 < M < b$. Consideremos $D = (\tau, T) \times B$ e $F : D \to \mathbb{R}^N$ nas condições de Carathéodory. Se $x : [t_0 - \beta, t_0 + \beta] \to \mathbb{R}^N$ é a solução do problema de valor inicial* (1.1) *dada pelo Teorema 1.13 e $\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M$, para todo $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, então $x(t)$ tem um prolongamento em (τ, T).*

1.2 Operadores Máximais Monótonos em Espaços de Banach

Neste capítulo apresentaremos a teoria básica sobre operadores maximais monótonos em espaços de Banach reflexivos, também conhecida como a teoria de operadores maximais monótonos de Minty-Browder.

Sejam X e Y espaços lineares. Se $A : X \to \mathcal{P}(Y)$ é um operador multívoco, podemos identificar A com um subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$:

$$A = \{(x, y) \in X \times Y;\ y \in Ax\}.$$

Reciprocamente, se $A \subset X \times Y$, então podemos identificá-lo com um operador multívoco de $A : X \to \mathcal{P}(Y)$ definindo por

$$Ax = \{y \in Y;\ (x, y) \in A\}.$$

Definição 1.15. *Se $A : X \to \mathcal{P}(Y)$ é um operador multívoco, definimos:*

- *o **domínio** de A por*
$$D(A) = \{x \in X; Ax \neq \emptyset\};$$
- *a **imagem** de A por*
$$R(A) = \bigcup_{x \in D(A)} Ax;$$
- *e a **imagem inversa** de A por*
$$A^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in A\}.$$

Desta forma, podemos identificar operadores de X em $\mathcal{P}(Y)$ com seus gráficos em $X \times Y$ e equivalentemente falar sobre subconjuntos de $X \times Y$ ao invés de operadores de X em $\mathcal{P}(Y)$. A mesma identificação pode ser obviamente aplicada a operadores unívocos de X em Y.

Apesar da grande utilidade da teoria de operadores maximais monótonos no caso multívoco, neste trabalho estamos especialmente interessados no caso unívoco com domínio em um espaço de Banach e imagem no respectivo dual do espaço. Para casos mais gerais, veja [9], e, para o caso de espaços de Hilbert, veja [11].

Seja V um espaço de Banach munido da norma $\|\cdot\|_V$ e V^* seu dual, com a norma $\|\cdot\|_{V^*}$. Se $y \in V^*$ e $x \in V$, denotaremos por $\langle y, x\rangle$ o valor de y em x.

Definição 1.16. *O operador $A : V \to \mathcal{P}(V^*)$ (equivalentemente o conjunto $A \subset V \times V^*$) é chamado de **monótono** se*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0, \quad \forall\ (x_i, y_i) \in A,\ i = 1, 2.$$

*Um conjunto monótono $A \subset V \times V^*$ é **maximal monótono** se não está propriamente contido em nenhum outro subconjunto monótono de $V \times V^*$.*

Note que se A é um operador unívoco de V em V^*, então A é monótono se

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0, \quad \forall\, x_1, x_2 \in D(A).$$

Definição 1.17. *Seja $A : V \to V^*$ um operador unívoco com $D(A) = V$.*

- *O operador A é* ***hemicontínuo*** *se, para quaisquer $x, y \in V$, temos*

$$w - \lim_{\lambda \to 0} A(x + \lambda y) = Ax,$$

onde $w - \lim$ denota o limite na topologia fraca de V^*.

- *A é* ***coercivo*** *se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle Ax_n, x_n \rangle}{\|x_n\|_V} = \infty,$$

para toda sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_V = \infty$.

Teorema 1.18. [9, Teorema 2.4, p.36] *Sejam V um espaço de Banach reflexivo e $A : V \to V^*$ um operador unívoco, monótono e hemicontínuo. Então A é maximal monótono.*

Corolário 1.19. [9, Corolário 2.2, p.36] *Sejam V um espaço de Banach reflexivo e $A : V \to V^*$ um operador unívoco, maximal monótono e coercivo. Então A é sobrejetor, isto é, $R(A) = V^*$.*

Corolário 1.20. [9, Corolário 2.4, p.41] *Sejam V um espaço de Banach reflexivo e $A : V \to V^*$ um operador unívoco e maximal monótono. Seja $\{(x_n, Ax_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V \times V^*$ uma sequência tal que $x_n \rightharpoonup x$ em V, $Ax_n \rightharpoonup y$ em V^* e*

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n \rangle \leq \langle y, x \rangle .$$

Então $Ax = y$.

1.3 O Espaço $L^p(\Gamma)$

Nesta seção introduziremos uma definição apropriada para o espaço $L^p(\Gamma)$, onde $\Gamma := \partial\Omega$ é a fronteira de um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com fronteira suave. Os conceitos apresentados aqui são motivados pelas teorias desenvolvidas em [2, 29, 47].

Definição 1.21. *Um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um* ***domínio de Lipschitz*** *se:*

1. *Existe uma cobertura de abertos* $(\Omega_i)_{i\geq 0}$ *de* Ω *tal que*

   - $d(\Omega_0, \partial\Omega) > 0$*;*
   - *para* $i \geq 1$, Ω_i *é limitado e* $\Omega_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$*;*
   - *a família* $\{\Omega_i\}$ *é finita ou*

$$\exists k \geq 2,\ |i-j| \geq k \Longrightarrow \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset.$$

2. *Para cada* $i \geq 1$, *existem um subconjunto aberto* O_i' *de* $\mathbb{R}^{N-1}$, *uma função* $a_i : O_i' \to \mathbb{R}$ *que é Lipschitz, e um sistema de coordenadas tais que, depois de reordenar as coordenadas se necessário,*

$$\Omega_i \cap \Omega \subset \{(x', x_N)|x' \in O_i', x_N > a_i(x')\},$$

$$\Omega_i \cap \partial\Omega = \{(x', a_i(x'))|x' \in O_i'\}.$$

3. *Existem uma partição da unidade* $(\theta_i)_i$ *subordinada a* $(\Omega_i)_{i\geq 0}$, *e constantes* C_1 *e* C_2 *tais que*

$$\|\theta_i\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \quad e \quad \|a_i\|_{W^{1,\infty}(O_i')} \leq C_2,\ \forall i.$$

Definição 1.22. *Dizemos que um conjunto aberto é um* ***domínio de classe*** C^k *(ou possui fronteira de classe* C^k*),* $k \in \mathbb{N}$*, se ele é um domínio de Lipschitz com as funções* a_i *de classe* C^k*. Dizemos que um domínio é* ***de classe*** C^∞ ***ou suave (ou de fronteira suave)*** *se ele é um domínio de classe* C^k*, para todo* $k \in \mathbb{N}$*.*

Denotemos por $\mathscr{D}(\Gamma)$ o espaço vetorial das funções reais definidas em Γ e que possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

Como Ω é limitado e tem fronteira suave, sua fronteira Γ é uma $(N-1)-variedade$ suave compacta. Logo, existe um atlas coerente com um número finito de cartas, ou seja, existe um conjunto de cartas coerentes $((U_1, \varphi_1), \cdots, (U_K, \varphi_K))$ de $\mathbb{R}^N$, com $K \in \mathbb{N}$, de forma que $\Gamma \subset \cup_{j=1}^K U_j$ e, para cada $j \in \{1, ..., k\}$, a carta

$$\varphi_j : U_j \subset \mathbb{R}^N \to B := \{(y', y_N);\ \|y'\|_{\mathbb{R}^{N-1}} < 1,\ -1 < y_N < 1\}$$

tem a propriedade de fatia, ou seja,

$$\varphi_{j|U_j\cap\Gamma} : U_j \cap \Gamma \to B_0 := B \cap \{(y', y_N); y_N = 0\}$$

é um difeomorfismo.

Note que na parametrização da fronteira, podemos tomar as cartas φ_j de modo que a norma do determinante do jacobiano de φ_j^{-1} seja igual a 1, $j \in \{1, ..., K\}$, assim como em [32], página 629.

Seja $\{\sigma_j\}_{j\in\{1,...,K\}}$ uma partição da unidade associada a $\{U_j \cap \Gamma\}_{j\in\{1,...,K\}}$. Então σ_j tem as seguintes propriedades

$$\begin{cases} \sigma_j \in \mathscr{D}(\Gamma); \\ supp(\sigma_j) \subset U_j \cap \Gamma; \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{K} \sigma_j(x) = 1, \ \forall \ x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1.2}$$

tal fato pode ser comprovado em [47], página 35.

Seja f uma função definida em Γ. Pelas propriedades de partição da unidade, podemos decompor

$$f(x) = \sum_{j=1}^{K} \sigma_j(x) f(x), \ \forall x \in \Gamma.$$

Definindo

$$f_j(y', 0) = \begin{cases} \left((f \cdot \sigma_j) \circ \varphi_j^{-1}\right)(y', 0) & \text{se } (y', 0) \in B_0, \\ 0 & \text{se } (y', 0) \in \mathbb{R}^{N-1} \setminus B_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

podemos definir a integral de f sobre Γ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(x) dS &:= \sum_{j=1}^{K} \int_{U_j \cap \Gamma} f(x) \sigma_j(x) dS \\ &= \sum_{j=1}^{K} \int_{\varphi_j(U_j\cap\Gamma)} (f \cdot \sigma_j) \circ \varphi_j^{-1}(y', 0) |J(\varphi_j^{-1})(y', 0)| dy' \\ &= \sum_{j=1}^{K} \int_{\varphi_j(U_j\cap\Gamma)} (f \cdot \sigma_j) \circ \varphi_j^{-1}(y', 0) dy' \\ &= \sum_{j=1}^{K} \int_{\varphi_j(U_j\cap\Gamma)} f_j(y', 0) dy', \end{aligned}$$

onde $x = \varphi_j^{-1}(y', 0)$. Note que com S estabelecemos uma medida em Γ, da seguinte forma: dado $D \subset \Gamma$, seja

$$\chi_D(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in D, \\ 0 & \text{se } x \in \Gamma \setminus D, \end{cases}$$

assim

$$S(D) = \int_\Gamma \chi_D(x) dS.$$

Denominamos S de **medida de superfície**.

Definamos o espaço

$$L^p(\Gamma) := \left\{ f : \Gamma \to \mathbb{R}; \quad \sum_{j=1}^{K} \|f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} < \infty \right\},$$

e consideramos em $L^p(\Gamma)$ a norma

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{K} \|f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Note que, para $1 \leq p \leq q < \infty$, temos $L^q(\Gamma) \subset L^p(\Gamma)$ e

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Gamma)} &= \sum_{j=1}^{K} \|f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} = \sum_{j=1}^{K} \|f_j\|_{L^p(B_0)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{K} C\|f_j\|_{L^q(B_0)} \leq C \sum_{j=1}^{K} \|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^{N-1})} = C\|f\|_{L^q(\Gamma)}, \end{aligned}$$

com $C > 0$.

Proposição 1.23. *O espaço $\mathscr{D}(\Gamma)$ é denso em $L^p(\Gamma)$ para todo $1 \leq p < +\infty$.*

Demonstração: Seja $f \in L^p(\Gamma)$. Então $f_j \in L^p(\mathbb{R}^{N-1})$, para cada $j \in \{1, ..., K\}$. Observe que, pela definição de f_j, temos $f_{j|B_0} \in L^p(B_0)$. Logo, existe $\{u_j^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(B_0)$ tal que $u_j^m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} f_{j|B_0}$ em $L^p(B_0)$, para cada $j \in \{1, ..., K\}$. Estendendo u_j^m por zero fora de B_0 em $\mathbb{R}^{N-1}$, segue que $u_j^m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ e, como f_j se anula fora de B_0, temos $u_j^m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} f_j$ em $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$.

Então

$$f \cdot \sigma_j = \lim_{m\to+\infty} u_j^m \circ \varphi_j \text{ em } L^p(\Gamma).$$

Com efeito,

$$\|(f \cdot \sigma_j) - u_j^m \circ \varphi_j\|_{L^p(\Gamma)} = \sum_{i=1}^{K} \left\| \left[(f \cdot \sigma_j) - u_j^m \circ \varphi_j \right]_i \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}$$

e temos

$$\begin{aligned}
\big\|\big[(f\cdot\sigma_j)-u_j^m\circ\varphi_j\big]_i\big\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} &= \big\|\sigma_i\cdot\big[(f\cdot\sigma_j)-u_j^m\circ\varphi_j\big]\circ\varphi_i^{-1}\big\|^p_{L^p(B_0)}\\
&= \big\|(\sigma_i\circ\varphi_i^{-1})\cdot\big[(f\cdot\sigma_j)\circ\varphi_i^{-1}-(u_j^m\circ\varphi_j)\circ\varphi_i^{-1}\big]\big\|^p_{L^p(B_0)}\\
&= \big\|(\sigma_i\circ\varphi_i^{-1})\cdot\big[(f\cdot\sigma_j)\circ(\varphi_j^{-1}\circ\varphi_j)\circ\varphi_i^{-1}-u_j^m\circ\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}\big]\big\|^p_{L^p(B_0)}\\
&= \int_{B_0}\left|(\sigma_i\circ\varphi_i^{-1})\cdot\Big(\big[(f\cdot\sigma_j)\circ(\varphi_j^{-1})-u_j^m\big]\circ(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1})\Big)\right|^p dy'\\
&\leq \int_{R^{N-1}}\big|\big[(f\cdot\sigma_j)\circ(\varphi_j^{-1})-u_j^m\big]\circ(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1})\big|^p dy'\\
&= \frac{1}{det(J_{ij})}\int_{(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1})(B_0)}|f_j-u_j^m|^p dy' \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $m\to+\infty$, pois $|\sigma_i\circ\varphi_i^{-1}|\leq 1$, as funções $\big[(f\cdot\sigma_j)-u_j^m\circ\varphi_j\big]_i$ se anulam fora de B_0 e, pela coerência do atlas, o Jacobiano de $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$, denotado por J_{ij}, tem determinante positivo.

Portanto, $f\cdot\sigma_j=\lim\limits_{m\to+\infty}u_j^m\circ\varphi_j$ em $L^p(\Gamma)$.

Observe que $supp(u_j^m\circ\varphi_j)=\varphi_j^{-1}(supp(u_j^m))$ é compacto em $U_j\cap\Gamma$, pois φ_j^{-1} é homeomorfismo, e o suporte de u_j^m é compacto em B_0. Podemos então estender $u_j^m\circ\varphi_j$ por zero fora de $U_j\cap\Gamma$ em Γ, e assim $u_j^m\circ\varphi_j\in\mathscr{D}(\Gamma)$, para todo $j\in\{1,...,K\}$ e todo $m\in\mathbb{N}$.

Logo, temos

$$f=\sum_{j=1}^{K}(\sigma_j\cdot f)=\sum_{j=1}^{K}\lim_{m\to+\infty}u_j^m\circ\varphi_j=\lim_{m\to+\infty}\sum_{j=1}^{K}u_j^m\circ\varphi_j,$$

com $\sum\limits_{j=1}^{K}u_j^m\circ\varphi_j\in\mathscr{D}(\Gamma)$.

Portanto, $\mathscr{D}(\Gamma)$ é denso em $L^p(\Gamma)$.

■

Note que o espaço $L^2(\Gamma)$, munido do produto interno

$$\langle f,g\rangle_{2,\Gamma}:=\sum_{i=1}^{K}\langle f_i,g_i\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})}$$

é um espaço de Hilbert.

Uma forma equivalente e mais comum de definir o espaço $L^p(\Gamma)$ para $1\leq p<\infty$, é simplesmente usar a medida de superfície S:

$$L^p(\Gamma)=\left\{f:\Gamma\to\mathbb{R};\ \int_\Gamma|f(x)|^p dS<+\infty\right\}$$

com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |f(x)|^p \, dS\right)^{\frac{1}{p}},$$

e o espaço $L^\infty(\Gamma)$ é formado pelas funções $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ tais que existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ q.t.p. em Γ em relação à medida S, com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Gamma)} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Gamma\}.$$

Para mostrar a equivalência das normas precisaremos do seguinte lema:

Lema 1.24. [51, Lema 2.1.3, p.12] *Para todo $p \in [1, +\infty)$ e $n \in \mathbb{N}$, existem constantes positivas α e β tais que*

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right) \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^p \leq \beta\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right),$$

para todo $a_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$.

Observação 1.25. *Note que, para f_j definida em* (1.3) *e $1 \leq p < \infty$, temos*

$$\begin{aligned}
\|f_j\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f_j|^p dy' \\
&= \int_{B_0} |(f \cdot \sigma_j) \circ \varphi_j^{-1}(y', 0)|^p dy' = \int_{B_0} |f \cdot \sigma_j|^p \circ \varphi_j^{-1}(y', 0) dy'.
\end{aligned}$$

Provemos a equivalência das normas para $1 \leq p < \infty$. Como $0 \leq \sigma_j \leq 1$, pelo Lema 1.24 e pela Observação 1.25, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma |f(x)|^p dS &= \sum_{j=1}^K \int_{B_0} (|f|^p \cdot \sigma_j) \circ \varphi_j^{-1}(y', 0) dy' \\
&\geq \sum_{j=1}^K \int_{B_0} (|f|^p \cdot |\sigma_j|^p) \circ \varphi_j^{-1}(y', 0) dy' \\
&= \sum_{j=1}^K \|f_j\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \geq \frac{1}{\beta}\left(\sum_{j=1}^K \|f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}\right)^p,
\end{aligned}$$

para algum β positivo. Portanto,

$$\left(\int_\Gamma |f(x)|^p dS\right)^{1/p} \geq \frac{1}{\beta^{1/p}} \|f\|_{L^p(\Gamma)}.$$

Por outro lado, pelas propriedades da partição da unidade e pelo Lema 1.24, temos

$$|f(x)|^p = \left|\sum_{j=1}^K f(x)\sigma_j(x)\right|^p \leq \beta \sum_{j=1}^K |f(x)\sigma_j(x)|^p,$$

para algum β positivo. Então, usando novamente o Lema 1.24 e a Observação 1.25, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma |f(x)|^p dS &= \int_\Gamma \left|\sum_{j=1}^K f(x)\sigma_j(x)\right|^p dS \leq \int_\Gamma \beta \sum_{j=1}^K |f(x)\sigma_j(x)|^p \, dS \\
&= \beta \int_\Gamma \sum_{j=1}^K |f(x)\sigma_j(x)|^p \, dS = \beta \sum_{j=1}^K \int_{B_0} |f \cdot \sigma_j|^p \circ \varphi_j^{-1}(y',0)dy' \\
&= \beta \sum_{j=1}^K \|f_j\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \frac{\beta}{\alpha}\left(\sum_{j=1}^K \|f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}\right)^p = \frac{\beta}{\alpha}\|f\|^p_{L^p(\Gamma)},
\end{aligned}$$

para algum α positivo. Portanto,

$$\left(\int_\Gamma |f(x)|^p dS\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Gamma)},$$

garantindo assim a equivalência das normas.

No caso em que $p = \infty$, note que

$$\begin{aligned}
S(\Gamma) &= \int_\Gamma 1 dS = \sum_{j=1}^K \int_{\varphi_j(U_j \cap \Gamma)} \sigma_j \circ \varphi_j^{-1}(y',0)dy' \\
&= \sum_{j=1}^K \int_{B_0} \sigma_j \circ \varphi_j^{-1}(y',0)dy' = \int_{B_0} \sum_{j=1}^K \sigma_j \circ \varphi_j^{-1}(y',0)dy' \\
&= \int_{B_0} 1 dy' = m(B_0),
\end{aligned}$$

onde m é a medida relativa a dy'.

Suponha que $\|\!|f|\!\|_{L^\infty(\Gamma)} = C$ e $\|f\|_{L^\infty(\Gamma)} = \sum_{j=1}^K \|f_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})} = \sum_{j=1}^K C_j$, então

$$\int_\Gamma |f| dS = \sum_{j=1}^K \int_{B_0} |f_j(y',0)|dy' \leq \sum_{j=1}^K C_j m(B_0) = S(\Gamma)\|f\|_{L^\infty(\Gamma)},$$

portanto

$$\|\!|f|\!\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq S(\Gamma)\|f\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

Por outro lado,

$$\sum_{j=1}^K \int_{R^{N-1}} |f_j(y',0)|dy' = \sum_{j=1}^K \int_{B_0} |f_j(y',0)|dy' = \int_\Gamma |f| dS \leq S(\Gamma)C,$$

portanto

$$\|f\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq S(\Gamma)\|\!|f|\!\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

Logo, as normas são equivalentes.

1.4 Espaços de Sobolev

Reunimos nesta seção alguns resultados sobre espaços de Sobolev. Uma teoria completa sobre esses espaços pode ser encontrada em [2, 12, 29], entre outros.

1.4.1 Função Regularizante

Definição 1.26. *Seja* $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $0 \leq \rho \leq 1$, *supp*$\{\rho\} \in B_{\mathbb{R}^N}(0,1)$ *e* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)dx = 1$. *Para* $\varepsilon > 0$, *definimos*

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon dx = 1 \qquad \text{e} \qquad supp\{\rho_\varepsilon\} \subset B(0,\varepsilon).$$

Lema 1.27. [32, Teorema 6, p.630] *Seja* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *localmente integrável e definamos*

$$f^\varepsilon(x) = (\rho_\varepsilon * f)(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon$$

onde $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$, *ie,*

$$f^\varepsilon(x) = \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)f(y)dy = \int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y)f(x-y)dy, \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

Então:

(i) $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$;

(ii) se $1 \leq p < \infty$ *e* $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, *então* $f^\varepsilon \to f$ *em* $L^p_{loc}(\Omega)$ *quando* $\varepsilon \to 0$.

1.4.2 Espaços de Sobolev

Para $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, definimos $|\alpha| = \displaystyle\sum_{i=1}^N \alpha_i$ e denotamos

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial^{\alpha_1}u \cdots \partial^{\alpha_N}u}.$$

Desta forma definimos,

Definição 1.28 (Espaço de Sobolev)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto, para* $k \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p \leq +\infty$. *O* ***espaço de Sobolev*** *é dado por*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) | \forall\alpha \in \mathbb{N}^N, \ |\alpha| \leq k \Rightarrow D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}. \tag{1.4}$$

Note que o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, é composto por funções de $L^p(\Omega)$ cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k, no sentido distribucional, podem ser identificadas como funções de $L^p(\Omega)$.

O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a seguinte norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{0\leq\alpha\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} .$$

É bem conhecido que o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$, e o espaço $W^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Para detalhes, veja [12].

Teorema 1.29 (Rellich-Kondrachov)**.** [12, Teorema 9.15, p.285] *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio de classe C^1. Então as seguintes imersões são compactas:*

1. *Se $p < N$, então*
$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$
para $1 \leq q < Np/(N-p)$;

2. *Se $N = p$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para $p \leq q < \infty$;*

3. *Se $p > N$, então*
$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ compactamente para quaisquer p e N.

Teorema 1.30. [32, Teorema 1, p.250] *Dado $u \in W^{k,p}(\Omega)$, definamos $u^\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$ em Ω_ε (ρ_ε e Ω_ε como na Seção 1.4.1). Então:*

(i) $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$;

(ii) $u^\varepsilon \to u$ *em* $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ *quando* $\varepsilon \to 0$.

O próximo resultado mostra que podemos aproximar funções de $W^{1,p}(\Omega)$ por funções de $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Teorema 1.31. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado de classe C^1 tal que $\Gamma = \partial\Omega$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, para algum $1 \leq p < \infty$, então existe uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$.*

A prova desse teorema pode ser encontrada em [32], página 252. O autor apresenta um caso mais geral com $W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Vamos dar um esboço da prova no caso em que $k = 1$.

Demonstração: Como Ω é de classe C^1 e limitado, podemos considerar $\{\Omega_i\}$ uma família finita, $\mathcal{O}_i$, θ_i e a_i como na Definição 1.21.

Fixemos $x^0 \in \Gamma$ e seja i tal que $x^0 \in \Omega_i$. Então existem um raio $r > 0$ e uma função $a_i : \mathcal{O}_i \subset \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tais que (reordenando a orientação dos eixos se necessário)

$$\Omega \cap B(x^0, r) = \{X \in B(x^0, r);\ x_N > a(x_1, ..., x_{N-1})\}$$

Seja $V = B(x^0, r/2) \cap \Omega$.

Definamos $x^\varepsilon = x + \lambda\varepsilon e_N$, para cada $x \in V$, onde $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ e $e_N = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^N$. Para todo ε suficientemente pequeno, existe λ suficientemente grande tal que $B(x^\varepsilon, \varepsilon) \subset \Omega \cap B(x^0, r)$.

Definamos $u^\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon)$, $x \in V$, e seja $v^\varepsilon = \rho^\varepsilon * u^\varepsilon$, onde $\{\rho^\varepsilon\}$ é uma sequência regularizante. Então $v^\varepsilon \in C^\infty(\overline{V})$.

Temos que $v^\varepsilon \to u$ em $W^{1,p}(V)$. Com efeito, para $1 \leq i \leq N$,

$$\begin{aligned}
\|\partial_{x_i} v^\varepsilon - \partial_{x_i} u\|_{L^p(V)} &\leq \|\partial_{x_i} v^\varepsilon - \partial_{x_i} u^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|\partial_{x_i} u^\varepsilon - \partial_{x_i} u\|_{L^p(V)} \\
&= \|\rho^\varepsilon * \partial_{x_i} u^\varepsilon - \partial_{x_i} u^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|\rho^\varepsilon * \partial_{x_i} u^\varepsilon - \partial_{x_i} u\|_{L^p(V)} \overset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Portanto $v^\varepsilon \to u$ em $W^{1,p}(V)$.

Seja $\delta > 0$. Como Γ é compacta, então existem $x_1^0, ..., x_m^0 \in \Gamma$ e reais $r_1, ..., r_m > 0$ tais que $\Gamma \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i^0, r_i/2)$.

Sejam $V_i = \Omega \cap B(x_i^0, r_i/2)$, para cada $i = 1, ..., m$ e $V_0 = \Omega \setminus \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} V_i$. Escolhamos usando o argumento anterior, funções $v_i \in C^\infty(\overline{V_i})$ tais que $\|v_i - u\|_{W^{1,p}(V_i)} < \delta$, para todo $i = 1, ..., m$.

Seja agora $\psi_0, ..., \psi_m$ uma partição da unidade subordinada aos abertos V_i, $i = 0, ..., m$, ou seja, $\psi_i \in C_0^\infty(V_i)$, $0 \leq \psi_i \leq 1$ e $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \psi_i = 1$ em $\cup_{i=0}^m V_i$.

Definamos $v(x) := \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \psi_i(x) v_i(x)$, então $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Além disso, para $i = 1, ..., N$

temos

$$
\begin{aligned}
\|\partial_{x_i} v - \partial_{x_i} u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \sum_{i=0}^{m} \|\partial_{x_i}(\psi_i v) - \partial_{x_i}(\psi_i u)\|_{L^p(V_i)} \\
&\leq C \sum_{i=0}^{m} \|\psi_i v - \psi_i u\|_{W^{1,p}(V_i)} \leq C(m+1)\delta.
\end{aligned}
$$

Portanto existe $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $\|v-u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ é tão pequena quanto desejado.

■

1.4.3 Teorema do Traço

Nesta seção, consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe C^1 e $\Gamma = \partial\Omega$.

Teorema 1.32. [32, Teorema 1, p.258] *Suponha $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe C^1. Então existe um operador linear limitado*

$$\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Gamma)$$

tal que

- $\gamma(u) = u_{|\Gamma}$, *se* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$;
- $\|\gamma(u)\|_{L^p(\Gamma)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

  sendo C uma constante que depende apenas de p e Ω.

Na demonstração do teorema acima o operador traço é definido da seguinte forma:

Definição 1.33 (Operador Traço)**.** *Dado $u \in W^{1,p}(\Omega)$, pelo Teorema 1.31 existe uma sequência $\{u_n\} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Definimos*

$$\gamma(u)(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x), \quad \forall\, x \in \Gamma. \tag{1.5}$$

Lema 1.34. *Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $u \geq 0$ q.t.p em Ω, então $\gamma(u) \geq 0$ em Γ.*

Demonstração: Note que, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $u \geq 0$ q.t.p em Ω, no Teorema 1.31 construímos uma aproximação $v^\varepsilon = \rho^\varepsilon * u^\varepsilon$ de u em $V \subset \Omega$, onde $u^\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon) \geq 0$ q.t.p em V e $\rho^\varepsilon \geq 0$ por definição, logo $v^\varepsilon \geq 0$ q.t.p. em V. Porém, como $v^\varepsilon \in C^\infty(V)$, temos que $v^\varepsilon \geq 0$ em V.

A aproximação de u em Ω é uma combinação de funções do tipo v^{ε} multiplicadas por funções da partição da unidade $\{\psi_i\}$, que são funções positivas. Logo, essa combinação é positiva em Ω. Assim, se $u \geq 0$ q.t.p em Ω, aproximamos u por uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^{\infty}(\overline{\Omega})$ de funções não-negativas em Ω.

Portanto,

$$\gamma(u)(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in \Gamma.$$

■

Definição 1.35. *Seja Ω um domínio C^1 de $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, e considere um número real $1 < p < \infty$. O **Espaço de Sobolev Fracionário** $W^{1-1/p,p}(\Gamma)$ é o subespaço de $L^p(\Gamma)$ definido por*

$$W^{1-1/p,p}(\Gamma) = \left\{ u \in L^p(\Gamma);\ \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{p+N-2}} dS_x dS_y < \infty \right\}. \tag{1.6}$$

Teorema 1.36. [29, Proposição 4.24, p.192] *O espaço $W^{1-1/p,p}(\Gamma)$, com a norma*

$$\|u\|_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Gamma)} + \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{p+N-2}} dS_x dS_y \right)^{1/p} \tag{1.7}$$

é um espaço de Banach.

Teorema 1.37. [29, Teorema 3.31, p.130] *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe C^1 e $1 < p < \infty$, então a imagem do traço de $W^{1,p}(\Omega)$ satisfaz*

$$\gamma(W^{1,p}(\Omega)) = W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma).$$

No decorrer da prova desta proposição, o autor deixa claro que, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\left(\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|\gamma(u)(x)-\gamma(u)(y)|^p}{|x-y|^{p+N-2}} dS_x dS_y \right)^{1/p} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \tag{1.8}$$

onde C é uma constante positiva.

Logo, o Teorema 1.32 e a Desigualdade 1.8 garantem que

$$\|\gamma(u)\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} \leq C'\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \tag{1.9}$$

e portanto o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ está imerso continuamente no espaço $W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.

Teorema 1.38. [29, Teorema 3.81, p.163] *Seja Ω um aberto limitado de classe C^1 em $\mathbb{R}^N$. Então temos as seguintes imersões contínuas:*

- *Se $p < N$, então*

$$W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \hookrightarrow L^{(N-1)p/(N-p)}(\Gamma);$$

- *Se $p = N$, então*

$$W^{1-\frac{1}{p},p(\Gamma)} \hookrightarrow L^q(\Gamma), \quad \forall\ 1 \leq q < \infty;$$

- *Se $p > N$, então*

$$W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \hookrightarrow C(\Gamma).$$

Além de [29] e [32], uma teoria completa e que dá suporte aos resultados apresentados aqui sobre o operador traço em espaços de Sobolev pode ser encontrada em [2].

1.5 Atratores em Espaços de Hausdorff

Apresentaremos alguns conceitos básicos de topologia e da teoria de atratores para semigrupos em espaços de Hausdorff.

1.5.1 Preliminares Topológicas

As demonstrações dos resultados de topologia apresentados nesta subseção podem ser encontrados nas referências [43] e [56].

Teorema 1.39. *Seja $\mathcal{T}$ um espaço topológico com base enumerável. Então qualquer cobertura por abertos de um conjunto $X \subset \mathcal{T}$ tem subcobertura enumerável.*

Definição 1.40. *Seja $\mathcal{T}$ um espaço topológico. Se, para todo ponto de aderência x de um subconjunto M, existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em M que converge para x, então $\mathcal{T}$ é denominado de **espaço de Fréchet-Urysohn**.*

Teorema 1.41. *Seja $\mathcal{T}$ um espaço de Fréchet-Urysohn. Então F é fechado em $\mathcal{T}$ se, e somente se, toda sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ que converge para algum x, implica que $x \in F$.*

Definição 1.42. *Um subconjunto K de $\mathcal{T}$ é **contavelmente compacto** em $\mathcal{T}$ se toda cobertura enumerável de abertos contém subcobertura finita.*

1.5.2 Semigrupos e Atratores em Espaços Topológicos

Seja $\mathcal{T}$ um espaço topológico. Considere um **semigrupo** $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em $\mathcal{T}$, ou seja, uma família de aplicações $S(t) : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, $t \geq 0$ tal que

$$S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2) \ \forall \ t_1, t_2 \geq 0;$$
$$S(0) = Id_{\mathcal{T}}.$$

Definição 1.43. *Um conjunto P de $\mathcal{T}$ **atrai um conjunto** B de $\mathcal{T}$ com respeito a $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se, para toda vizinhança V de P, existe $T > 0$ tal que $S(t)B \subset V$ para todo $t \geq T$.*

Definição 1.44. *O conjunto **ω-limite** de um conjunto B em $\mathcal{T}$ é definido por*

$$\omega(B) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{h\geq t} S(h)B}^{\mathcal{T}}. \tag{1.10}$$

Proposição 1.45. [24, Proposição 2.1, p.215] *Um ponto $y \in \omega(B)$ se, e somente se, para toda vizinhança de $V(y) = V$ de y existem sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \to +\infty$, tais que $S(t_n)x_n \in V$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Observação 1.46. *Note que se $\mathcal{T}$ é um espaço métrico, então*

$$\omega(B) = \left\{ \ y \in \mathcal{T}; \ \textit{existem sequências} \ \ t_n \to +\infty, \ \{x_n\} \subset B, \ \textit{tais que} \ y = \lim_{n\to\infty} S(t_n)x_n \ \right\}.$$

Proposição 1.47. [24, Proposição 2.2, p.215] *Seja $\mathcal{T}$ espaço de Hausdorff. Seja K um conjunto que atrai B. Suponha que K é contavelmente compacto em $\mathcal{T}$. Então*

(i) $\omega(B) \neq \emptyset$;

(ii) $\omega(B)$ atrai B em $\mathcal{T}$.

Proposição 1.48. [24, Proposição 2.3, p.216] *Com as mesmas hipóteses da Proposição 1.47, se K é compacto em $\mathcal{T}$, então*

(i) $\omega(B) \subset K$, $\omega(B)$ é compacto, e;

(ii) $\omega(B)$ é o minimal compacto que atrai B, ou seja, todo compacto que atrai B contém $\omega(B)$.

Proposição 1.49. [24, Proposição 2.4, p.216] *Seja $\mathcal{T}$ um espaço de Hausdorff e K um compacto que atrai B. Assuma que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é* ***contínuo*** *em $\mathcal{T}$, ou seja, para cada $t \geq 0$, a aplicação $S(t) : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ é contínua. Então*

$$S(t)\omega(B) = \omega(B), \ \forall \ t \geq 0.$$

A partir de agora considere $\mathcal{B}$ uma família de conjuntos de $\mathcal{T}$.

Definição 1.50. *Um conjunto K* ***atrai a família*** *$\mathcal{B}$ se K atrai qualquer conjunto B da família $\mathcal{B}$.*

Definição 1.51. *Um conjunto $\mathcal{A}$ é* ***o atrator da família*** *$\mathcal{B}$ em $\mathcal{T}$ se*

(i) $\mathcal{A}$ é compacto em $\mathcal{T}$ e $\mathcal{A}$ atrai a família $\mathcal{B}$;

(ii) $\mathcal{A}$ é o minimal compacto que atrai $\mathcal{B}$, ou seja, todo compacto que atrai $\mathcal{B}$ contém $\mathcal{A}$.

Teorema 1.52. [24, Teorema 2.1, p.217] *Seja $\mathcal{T}$ um espaço de Hausdorff e suponha que exista um conjunto K compacto que atrai a família $\mathcal{B}$. Então a família $\mathcal{B}$ possui atrator $\mathcal{A}$.*

A prova de desse teorema consiste em utilizar as proposições anteriores para mostrar que o conjunto

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcap_{B \subset \mathcal{B}} \omega(B)}^{\mathcal{T}} \tag{1.11}$$

é o atrator da família $\mathcal{B}$. Assim, em particular, temos a caracterização (1.11) para o atrator de $\mathcal{B}$.

Teorema 1.53. [24, Teorema 2.2, p.217] *Seja $\mathcal{T}$ um espaço de Hausdorff e seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo contínuo em $\mathcal{T}$. Assuma que existe um conjunto K compacto que atrai a família $\mathcal{B}$. Então o atrator $\mathcal{A}$ é invariante com respeito ao semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, ou seja,*

$$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \ \forall \ t \geq 0.$$

Corolário 1.54. *Sejam $\mathcal{T}$ um espaço de Hausdorff compacto e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo contínuo em $\mathcal{T}$. Seja $\mathcal{B}$ a família de todos os subconjuntos de $\mathcal{T}$. Então o atrator desta família é dado por*

$$\mathcal{A} = \omega(\mathcal{T}).$$

1.6 Funções de Translação Compacta

Esta seção é composta por uma coletânea de resultados sobre funções de translação compacta. As demonstrações e um estudo mais detalhado sobre tais funções podem ser encontrados em [23] e [24].

Sejam Ψ um espaço de Banach e $\Xi = \{\xi : \mathbb{R} \to \Psi;\ \xi(s) \in \Psi \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}\}$ um conjunto de funções reais munido de uma topologia com relação a qual Ξ é um espaço de Hausdorff.

Consideremos o operador de translação $T(h)$ em Ξ: para $\xi \in \Xi$, temos

$$T(h)\xi(s) = \xi(h+s),\ s \in \mathbb{R},\ h \in \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

Suponha que $T(h)\Xi \subset \Xi$ e que $T(h)$ é contínua em Ξ, para todo $h \in \mathbb{R}$.

Dado $\sigma_0 \in \Sigma$, definimos a **envoltória** da função σ_0 em Ξ por

$$\mathcal{H}(\sigma_0) := \overline{\{T(h)\sigma_0; h \in \mathbb{R}\}}^{\Xi}. \tag{1.13}$$

Evidentemente, $T(h)\mathcal{H}(\sigma_0) = \mathcal{H}(\sigma_0)$, para todo $h \in \mathbb{R}$.

Definição 1.55. *Uma função $\sigma_0 \in \Xi$ é de* ***translação compacta (tr.c.)*** *em Ξ se a envoltória $\mathcal{H}(\sigma_0)$ é compacta em Ξ.*

Para as aplicações neste trabalho estamos interessados em funções de translação compacta em $C(\mathbb{R};\mathcal{M})$ e $L^{p,w}_{loc}(\mathbb{R};V)$, as quais são os objetos de estudos nas próximas duas seções.

1.6.1 Funções de Translação Compacta em $C(\mathbb{R};\mathcal{M})$

Seja $\mathcal{M}$ um espaço métrico completo com a métrica $\rho_{\mathcal{M}}(\cdot,\cdot)$. Considere o espaço $\Xi = C(\mathbb{R};\mathcal{M})$ de funções contínuas definidas em $\mathbb{R}$ tomando valores em $\mathcal{M}$. Em $C(\mathbb{R};\mathcal{M})$ considere a topologia da convergência uniforme local: uma sequência $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\mathbb{R};\mathcal{M})$ converge para uma função σ em $C(\mathbb{R};\mathcal{M})$ na topologia da convergência uniforme local se, para todo intervalo $[t_1,t_2] \subset \mathbb{R}$, temos que

$$\max_{s\in[t_1,t_2]} \rho_{\mathcal{M}}(\sigma_n(s),\sigma(s)) \to 0\ (n \to +\infty). \tag{1.14}$$

O espaço $C(\mathbb{R};\mathcal{M})$ com tal topologia é metrizável, pela métrica

$$\mu_1(\sigma_1,\sigma_2)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{\mu_1^{(n)}(\sigma_1,\sigma_2)}{1+\mu_1^{(n)}(\sigma_1,\sigma_2)}, \tag{1.15}$$

onde

$$\mu_1^{(n)}(\sigma_1,\sigma_2)=\max_{s\in[-R_n,R_n]}\rho_{\mathcal{M}}(\sigma_1(s),\sigma_2(s)),$$

e $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência não-decrescente arbitrária, $R_n>0$, $R_n\to+\infty$ e $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$. Note que, a topologia correspondente não depende das sequências $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. O conjunto $C(\mathbb{R};\mathcal{M})$ munido da métrica (1.15) é um espaço métrico completo e será denotado por $C_{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$. Para detalhes, veja [24, Seção V.2], ou [50, Lema 8, p.388].

Proposição 1.56. [24, Preposição 2.1, p.98] *Um conjunto $P\subset C_{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$ é pré-compacto em $C_{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$ se, e somente se, a restrição $\Pi_{[t_1,t_2]}P$ de P ao intervalo $[t_1,t_2]$ é pré-compacto em $C([t_1,t_2];\mathcal{M})$, para todo $[t_1,t_2]\subset\mathbb{R}$.*

Proposição 1.57. [24, Proposição 2.2, p.98] *Uma função $\sigma(\cdot)$ é de tr.c. em $C_{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$ se, e somente se, valem as seguintes condições:*

(i) o conjunto $\{\sigma(t);\ t\in\mathbb{R}\}$ é pré-compacto em $\mathcal{M}$;

(ii) $\sigma(\cdot)$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$, ou seja, existe uma função positiva α, com $\alpha(s)\to 0$ quando $s\to 0^+$, tal que

$$\rho(\sigma(t_1),\sigma(t_2))\le\alpha(|t_1-t_2|),\ \forall\ t_1,t_2\in\mathbb{R}. \tag{1.16}$$

Proposição 1.58. [24, Proposição 2.3, p.99] *Seja $\sigma(\cdot)$ uma função de translação compacta em $C_{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$. Então*

(i) toda função $\sigma_1\in\mathcal{H}(\sigma)$ também é de tr.c. em $C_{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$. Além disso, $\mathcal{H}(\sigma_1)\subset\mathcal{H}(\sigma)$;

(ii) o conjunto $\mathcal{H}(\sigma)$ é limitado em $C(\mathbb{R};\mathcal{M})$, ou seja, existem $R>0$ e $a\in\mathcal{M}$ tais que $\rho_{\mathcal{M}}(\sigma_1(s),a)\le R$ para todo $s\in\mathbb{R}$ e todo $\sigma_1\in\mathcal{H}(\sigma)$, onde a e R são independentes de σ_1;

(iii) o conjunto $\mathcal{H}(\sigma)$ é equicontínuo em $\mathbb{R}$, ou seja, qualquer função $\sigma_1\in\mathcal{H}(\sigma)$ satisfaz (1.16) para a mesma função α;

(iv) o operador de translação $T(h)$ é contínuo em $\mathcal{H}(\sigma)$ na topologia de $C_{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$ para todo $h \in \mathbb{R}$;

(v) $T(h)\mathcal{H}(\sigma) = \mathcal{H}(\sigma)$, para todo $h \in \mathbb{R}$.

Vamos estudar uma classe especial de funções de translação compacta em $C_{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M}_0)$, onde $\mathcal{M}_0 = C_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$, que é um dos espaços que utilizaremos nas aplicações. O espaço $C_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ é o espaço $C(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ munido da topologia da convergência uniforme em toda bola $B_R = \{v \in \mathbb{R};\ |v| \leq R\}$, ou seja, $f_n(\cdot) \to f(\cdot)$ em $C_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ se

$$\|f_n - f\|_{C(B_R;\mathbb{R}^2)} = \max_{|v|\leq R} \|f_n(v) - f(v)\|_{\mathbb{R}^2} \to 0,\ (n \to \infty) \tag{1.17}$$

para todo $R > 0$. De maneira similar à descrita no início desta seção, tal topologia é metrizável e o espaço métrico resultante é completo, para detalhes veja [24, Seção V.2].

Denotemos $f(\cdot,\cdot) \in C_{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M}_0)$ para representar uma função $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_0$ tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$, temos $f(t,\cdot) \in \mathcal{M}_0$.

Proposição 1.59. [24, Proposição 2.5, p.101] *Uma função $f(\cdot,\cdot) \in C_{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M}_0)$ é de tr.c. em $C_{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M}_0)$ se, e somente se, para todo $R > 0$, a função $f(\cdot,\cdot)$ é limitada e uniformemente contínua em todo cilindro $Q(R) = \{(t,s); t \in \mathbb{R},\ s \in [-R,R]\}$, ou seja, $\|f(t,s)\|_{\mathbb{R}^2} \leq C(R)$ para $(t,s) \in Q(R)$ e existe uma função $\alpha_0(l,R)$, com $\alpha_0(l,R) \to 0$ quando $l \to 0^+$, tal que*

$$\|f(t_1,s_1) - f(t_2,s_2)\|_{\mathbb{R}^2} \leq \alpha_0(|t_1 - t_2| + |s_1 - s_2|, R) \tag{1.18}$$

para todo $(t_i,s_i) \in Q(R)$, $i = 1,2$.

1.6.2 Funções de Translação Compacta em $L^{p,w}_{loc}(\mathbb{R};V)$

Seja V um espaço de Banach reflexivo e separável. Para $p > 1$, denote por $\Xi = L^{p,w}_{loc}(\mathbb{R};V)$ o espaço $L^p_{loc}(\mathbb{R};V)$ munido da topologia da convergência fraca local: uma sequência $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para σ quando $n \to +\infty$ em $L^{p,w}_{loc}(\mathbb{R};V)$ se, e somente se,

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle v(s), \sigma_n(s) - \sigma(s)\rangle \to 0,\ \forall [t_1,t_2] \subset \mathbb{R},\ (n \to +\infty),$$

e para todo $v \in L^{p'}(t_1,t_2;V^*)$.

Proposição 1.60. [24, Proposição 4.1, p.105] *Sejam V um espaço de Banach reflexivo e separável e $p > 1$. A função $\sigma \in L^p_{loc}(\mathbb{R}; V)$ é de tr.c. em $L^{p,w}_{loc}(\mathbb{R}; V)$ se, e somente se, σ é de* ***translação limitada*** *em $L^p_{loc}(\mathbb{R}; V)$, ou seja,*

$$\|\sigma\|^p_{L^p_b(\mathbb{R};V)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|\sigma(s)\|^p_V ds < \infty. \tag{1.19}$$

Lema 1.61. [24, Lema 4.1, p.105] *Se σ é uma função de tr.c. em $L^{p,w}_{loc}(\mathbb{R}; V)$, então o espaço $\mathcal{H}(\sigma)$ com a topologia de $L^{p,w}_{loc}(\mathbb{R}; V)$ é metrizável, e o correspondente espaço métrico é completo.*

Proposição 1.62. [24, Proposição 4.2, p.106] *Seja σ uma função de tr.c. em $L^{p,w}_{loc}(\mathbb{R}; V)$. Então*

(i) toda função $\sigma_1 \in \mathcal{H}(\sigma)$ também é de translação compacta em $L^{p,w}_{loc}(\mathbb{R}; V)$, além disso, $\mathcal{H}(\sigma_1) \subset \mathcal{H}(\sigma)$;

(ii) o conjunto $\mathcal{H}(\sigma)$ é limitado em $L^p_b(\mathbb{R}; V)$, e

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|\sigma_1\|^p_V ds \le \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|\sigma\|^p_V ds,$$

para toda $\sigma_1 \in \mathcal{H}(\sigma)$;

(iii) o operador de translação $T(h)$ é contínuo em $\mathcal{H}(\sigma)$ com a topologia de $L^{p,w}_{loc}(\mathbb{R}; V)$, para todo $h \in \mathbb{R}$;

(iv) $T(h)\mathcal{H}(\sigma) = \mathcal{H}(\sigma)$ para todo $h \in \mathbb{R}$.

1.6.3 Outras Funções de Translação Compacta

Nas aplicações que faremos, as funções σ serão da forma $\sigma(t) = (\sigma^{(1)}(t), \sigma^{(2)}(t))$, onde $\sigma^{(1)}$ é de tr.c. em $C_{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{M})$, enquanto $\sigma^{(2)}$ é de tr.c. em $L^{p,w}_{loc}(\mathbb{R}; V)$, o que garante que σ é uma função de tr.c. em $\Xi = C_{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{M}) \times L^{p,w}_{loc}(\mathbb{R}; V)$, e as envoltórias $\mathcal{H}(\sigma^{(i)})$ satisfazem todas as propriedades descritas nas Proposições 1.58 e 1.62, respectivamente. (Para detalhes veja [24, Seção V.5]).

Portanto, segue do início da Seção 1.6.1 e do Lema 1.61, que o espaço $\Sigma := \mathcal{H}(\sigma)$ é um espaço métrico compacto.

Capítulo 2

Existência e Comparação de Soluções

Apresentaremos neste capítulo o problema que nos propomos a estudar e utilizar como exemplo para aplicações da teoria abstrata. Garantiremos neste momento a existência de soluções fracas e estudaremos alguns aspectos de tais soluções, como por exemplo uma comparação entre soluções para o mesmo problema com diferentes perturbações e forças externas.

2.1 O Problema

Dado $\tau \in \mathbb{R}$, consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u + f_1(t,u) = g_1(t,x), & (t,x) \in (\tau, +\infty) \times \Omega, \\ u_t + |\nabla u|^{p-2} \partial_{\vec{n}} u + f_2(t,u) = g_2(t,x), & (t,x) \in (\tau, +\infty) \times \Gamma, \\ u(\tau) = u_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, com fronteira suave $\Gamma := \partial\Omega$, $p \geq 2$, o operador Δ_p denota o operador p-Laplaciano, definido como $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, e as perturbações satisfazem as seguintes hipóteses:

(H1) Sejam $g_1 \in L^{p'}_{loc}(\mathbb{R}; L^{r_1'}(\Omega))$, $g_2 \in L^{p'}_{loc}(\mathbb{R}; L^{r_2'}(\Gamma))$, onde s' denota o expoente conjugado de s, ou seja, $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$, com

$$r_1 \in \begin{cases} (p, pN/(N-p)], & \text{se } p \in [2, N), \\ (p, +\infty), & \text{se } p = N, \\ [p, +\infty), & \text{se } p > N \end{cases}$$

e

$$r_2 \in \begin{cases} (2,(N-1)p/(N-p)], & \text{se } p \in [2,N), \\ (2,+\infty), & \text{se } p = N, \\ [2,+\infty), & \text{se } p > N. \end{cases}$$

(H2) $f_i \in C(\mathbb{R}^2)$ para $i = 1,2$, e satisfazem as seguintes condições de crescimento

$$\begin{cases} a_1(t)|s|^{r_1} - k_1(t) \leq f_1(t,s)s, \\ a_2(t)|s|^{r_2} - k_2(t) \leq f_2(t,s)s, \end{cases} \tag{2.1}$$

q.t.p. para $t \in \mathbb{R}$ e todo $s \in \mathbb{R}$, onde $a_i \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ são funções reais satisfazendo $a_i(t) \geq a_0 > 0$ para algum $a_0 \in \mathbb{R}$ e $k_i \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ são funções positivas, para $i = 1,2$.

(H3) Existem funções $C_i \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, $i = 1,2$, tais que $|f_i(t,s)| \leq C_i(t)(|s|^{r_i-1}+1)$ q.t.p. para $t \in \mathbb{R}$ e todo $s \in \mathbb{R}$.

Observação 2.1. *Embora a função u dependa de $x \in \overline{\Omega}$ e de $t \in [\tau,+\infty)$, quando não houver confusão, omitiremos a dependência de x e t na notação.*

2.2 Existência de Solução

2.2.1 Espaço Base

Nesta seção introduziremos os espaços adequados para estudarmos o problema apresentado na seção anterior, seguindo [33].

O espaço base a ser considerado é dado por

$$\mathbb{X}^p := L^p(\Omega, dx) \times L^p(\Gamma, dS) = \{F = (f,g); f \in L^p(\Omega) \text{ e } g \in L^p(\Gamma)\},$$

com a norma

$$\|F\|_{\mathbb{X}^p} = \left(\int_\Omega |f|^p dx + \int_\Gamma |g|^p dS\right)^{\frac{1}{p}},$$

para $1 \leq p < \infty$, e

$$\|F\|_{\mathbb{X}^\infty} := \max\left\{\|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}\right\},$$

para $p = +\infty$. Tal espaço pode ser identificado com o espaço $L^p(\overline{\Omega}, d\mu)$ onde $d\mu = dx \oplus dS$, isto é, se $A \subset \overline{\Omega}$ é $\mu-$ mensurável, então $\mu(A) = |A \cap \Omega| + S(A \cap \Gamma)$.

Note que o espaço $\mathbb{X}^2$, com o produto interno

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{X}^2} := \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle \cdot, \cdot \rangle_2 + \langle \cdot, \cdot \rangle_{2,\Gamma}$$

é um espaço de Hilbert.

Consideremos, para $1 < p < \infty$, o espaço vetorial

$$W^{1,p}(\Omega) \times W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) = \left\{ (u, v) : u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e } v \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \right\},$$

e o subespaço vetorial de $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, dado por

$$\mathbb{V}^p = \{U = (u, v); u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e } v = \gamma(u)\}.$$

Em $\mathbb{V}^p$, podemos considerar a norma usual

$$\|U\|_{\mathbb{V}^p} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|\gamma(u)\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)},$$

ou a norma

$$|||U|||_{\mathbb{V}^p} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Observe que, como o operador traço $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ é contínuo, as normas $\| \cdot \|_{\mathbb{V}^p}$ e $||| \cdot |||_{\mathbb{V}^p}$ são equivalentes.

Proposição 2.2. *Para $1 < p < \infty$, o espaço $\mathbb{V}^p$ é reflexivo e separável.*

Demonstração: Consideremos o operador $T : (\mathbb{V}^p, ||| \cdot |||_{\mathbb{V}^p}) \to (W^{1,p}(\Omega), \| \cdot \|_{W^{1,p}(\Omega)})$ definido por

$$T(U) = T(u, \gamma(u)) := u, \quad \forall\, U \in \mathbb{V}^p.$$

Então temos uma isometria sobrejetora de $\mathbb{V}^p$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Como $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo e separável, temos que $\mathbb{V}^p$ é reflexivo e separável.

$\blacksquare$

O espaço $\mathbb{V}^p$ está contido densamente no espaço de Hilbert $\mathbb{X}^2$, para $2 \leq p < \infty$. De fato, basta mostrarmos que $\mathbb{X}^2 \subset \overline{\mathbb{V}^p}^{\mathbb{X}^2}$. Para verificarmos isto, seja $f \in \mathscr{D}(\Gamma)$. Então existe uma sequência $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_{k|\Gamma} = f$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $u_{k|\Omega} \to 0$ em $L^2(\Omega)$ quando $k \to +\infty$.

Como $u_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, então $u_{k|\Omega} \in C^\infty(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$, e assim

$$(u_{k|\Omega}, \gamma(u_{k|\Omega})) \in \mathbb{V}^p.$$

Pela continuidade do traço, concluímos que $(0, f) \in \overline{\mathbb{V}^p}^{\mathbb{X}^2}$. Pela densidade de $\mathscr{D}(\Gamma)$ em $L^2(\Gamma)$, temos

$$\{0\} \times L^2(\Gamma) \subset \overline{\mathbb{V}^p}^{\mathbb{X}^2},$$

pois um elemento $g \in L^2(\Gamma)$ é limite de uma sequência $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\Gamma)$, de acordo com a Proposição 1.23. Logo, $(0, g_k) \in \overline{\mathbb{V}^p}^{\mathbb{X}^2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\overline{\mathbb{V}^p}^{\mathbb{X}^2}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{X}^2$, decorre que $(0, g) \in \overline{\mathbb{V}^p}^{\mathbb{X}^2}$.

Além disso, dado $u \in W^{1,p}(\Omega)$, temos

$$(u, 0) = (u, \gamma(u)) - (0, \gamma(u)) \in \overline{\mathbb{V}^p}^{\mathbb{X}^2},$$

pois $(u, \gamma(u)) \in \mathbb{V}^p \subset \overline{\mathbb{V}^p}^{\mathbb{X}^2}$, e acabamos de mostrar que os elementos da forma $(0, \gamma(u)) \in \{0\} \times L^2(\Gamma)$ estão contidos em $\overline{\mathbb{V}^p}^{\mathbb{X}^2}$. Logo, como $\overline{\mathbb{V}^p}^{\mathbb{X}^2}$ é fecho de um subespaço linear de $\mathbb{X}^2$, $(u, 0) \in \overline{\mathbb{V}^p}^{\mathbb{X}^2}$, e então

$$L^2(\Omega) \times \{0\} \subset \overline{\mathbb{V}^p}^{\mathbb{X}^2},$$

pela densidade de $W^{1,p}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$.

Assim, temos $\mathbb{X}^2 = \big(L^2(\Omega) \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times L^2(\Gamma)\big) \subset \overline{\mathbb{V}^p}^{\mathbb{X}^2}$, e portanto

$$\overline{\mathbb{V}^p}^{\mathbb{X}^2} = \mathbb{X}^2.$$

Note que a imersão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta, e pela continuidade do operador traço temos

$$\mathbb{V}^p \subset\subset \mathbb{X}^2 \subset (\mathbb{V}^p)^*. \tag{2.2}$$

Proposição 2.3. *O espaço $\mathbb{X}^2$ é separável.*

Demonstração: Segue da Proposição 2.2 que o espaço $\mathbb{V}^p$, $2 \leq p < \infty$, é separável. Seja então $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um conjunto enumerável e denso em $\mathbb{V}^p$. Dados $\varepsilon > 0$ e $f \in \mathbb{X}^2$, pela densidade de $\mathbb{V}^p$ em $\mathbb{X}^2$ existe $\tilde{f} \in \mathbb{V}^p$ tal que $\|f - \tilde{f}\|_{\mathbb{X}^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\tilde{f} - v_{n_0}\|_{\mathbb{V}^p} < \dfrac{\varepsilon}{2C}$, onde C é a constante da imersão $\mathbb{V}^p \hookrightarrow \mathbb{X}^2$. Portanto,

$$\begin{aligned}\|f - v_{n_0}\|_{\mathbb{X}^2} &\leq \|f - \tilde{f}\|_{\mathbb{X}^2} + \|\tilde{f} - v_{n_0}\|_{\mathbb{X}^2} \\ &\leq \|f - \tilde{f}\|_{\mathbb{X}^2} + C\|\tilde{f} - v_{n_0}\|_{\mathbb{V}^p} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C\varepsilon}{2C} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo, o conjunto $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em $\mathbb{X}^2$, provando que $\mathbb{X}^2$ é separável.

■

2.2.2 Solução Fraca do Problema (P)

Definiremos o conceito de solução fraca para o Problema (P).

Definição 2.4 (Solução fraca do Problema (P))**.** *Dados $U_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{X}^2$, $\tau \in \mathbb{R}$ e $T > \tau$, o par $U(t) = (u(t), v(t))$ é solução fraca do Problema (P) em $[\tau, T]$ se $v(t) = \gamma(u(t))$ q.t.p. em (τ, T) e U satisfaz as seguintes propriedades:*

(i)

$$\begin{cases} (u, v) \in C([\tau, T]; \mathbb{X}^2) \cap L^\infty(\tau, T; \mathbb{X}^2); \\ (u, v) \in L^p(\tau, T; \mathbb{V}^p); \end{cases}$$

(ii)

$$\partial_t U \in L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*), \;\; s = min(r_1', r_2', p');$$

(iii) para toda $\Psi = (\varphi, \gamma(\varphi)) \in \mathbb{V}^p$,

$$\begin{aligned} \langle \partial_t U, \Psi \rangle_{\mathbb{X}^2} + \left\langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \varphi \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle f_1(t, u), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle f_2(t, v), \gamma(\varphi) \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ = \langle g_1(t), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g_2(t), \gamma(\varphi) \rangle_{L^2(\Gamma)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

q.t.p. em (τ, T);

(iv) $U(\tau) = (u_0, v_0)$ em $\mathbb{X}^2$, ou seja, $u(\tau) = u_0$ q.t.p. em Ω e $v(\tau) = v_0$ q.t.p. em Γ.

Antes de mostrarmos a existência de solução fraca para o Problema (P), vamos obter uma estimativa a priori para tal solução.

Proposição 2.5. *Suponha que as Hipóteses (H1)-(H3) estejam satisfeitas e seja $U(t) = (u(t), \gamma(u(t)))$ uma solução fraca do Problema (P). Então temos*

$$\begin{aligned} \|U(\lambda)\|^2_{\mathbb{X}^2} + K \int_\tau^\lambda \|u(t)\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} dt + \frac{a_0}{2} \int_\tau^\lambda \|u(t)\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} dt + a_0 \int_\tau^\lambda \|\gamma(u)(t)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)} dt \\ \leq \|U(\tau)\|^2_{\mathbb{X}^2} + C \int_\tau^\lambda \left(\|g_1(t)\|^{p'}_{L^{r_1'}(\Omega)} + \|g_2(t)\|^{p'}_{L^{r_2'}(\Gamma)} \right) dt + M(\lambda) \end{aligned} \tag{2.4}$$

para todo $\tau < \lambda \leq T$, onde C e K são constantes independentes do tempo e da condição inicial e $M(\lambda) < \infty$ para todo $\tau < \lambda \leq T$.

Demonstração: Observemos inicialmente que

(1) como $r_1 \geq p$, pelo Lema 1.6, existe $\kappa > 0$ tal que $\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \kappa \|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + C_\kappa$, onde C_κ é uma constante positiva,

(2) as constantes r_1 e r_2 foram tomadas de forma que

$$\begin{cases} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \hookrightarrow L^{r_2}(\Gamma), \\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{r_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{p}(\Omega). \end{cases}$$

Supondo que U é solução fraca do Problema (P), então, para cada $V \in \mathbb{V}^p$, U satisfaz

$$\begin{aligned}\langle \partial_t U, V\rangle_{\mathbb{X}^2} + \left\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla v\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle f_1(t,u), v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle f_2(t,\gamma(u)), \gamma(v)\rangle_{L^2(\Gamma)} \\ = \langle g_1(t), v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g_2(t), \gamma(v)\rangle_{L^2(\Gamma)},\end{aligned}$$

q.t.p. para $t \in [\tau, T]$. Tomando, em particular, $V = U$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U(t)\|^2_{\mathbb{X}^2} + \left\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle f_1(t,u), u\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle f_2(t,\gamma(u)), \gamma(u)\rangle_{L^2(\Gamma)} \\ = \langle g_1(t), u\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g_2(t), \gamma(u)\rangle_{L^2(\Gamma)},\end{aligned}$$

q.t.p. para $t \in [\tau, T]$.

Da Hipótese (H2), segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U(t)\|^2_{\mathbb{X}^2} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega \big(a_1(t)|u|^{r_1} - k_1(t)\big)dx + \int_\Gamma \big(a_2(t)|\gamma(u)|^{r_2} - k_2(t)\big)dS \\ \leq \langle g_1(t), u\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g_2(t), \gamma(u)\rangle_{L^2(\Gamma)}.\end{aligned}$$

Note que, por (H2), $\tilde{k}_1(t) := \int_\Omega k_1(t)dx = k_1(t)|\Omega| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $\tilde{k}_2(t) := \int_\Gamma k_2(t)dS = k_2(t)S(\Gamma) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Portanto, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U(t)\|^2_{\mathbb{X}^2} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + a_1(t)\|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + a_2(t)\|\gamma(u)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)} \\ \leq \langle g_1(t), u\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g_2(t), \gamma(u)\rangle_{L^2(\Gamma)} + (\tilde{k}_1(t) + \tilde{k}_2(t)).\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U(t)\|^2_{\mathbb{X}^2} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + a_1(t)\|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + a_2(t)\|\gamma(u)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)} \\ \leq \|g_1(t)\|_{L^{r'_1}(\Omega)}\|u\|_{L^{r_1}(\Omega)} + \|g_2(t)\|_{L^{r'_2}(\Gamma)}\|\gamma(u)\|_{L^{r_2}(\Gamma)} + (\tilde{k}_1(t) + \tilde{k}_2(t)).\end{aligned}$$

Dados $\varepsilon, \delta > 0$, segue da Desigualdade de Young que existem constantes positivas C_ε e C_δ tais que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U(t)\|^2_{\mathbb{X}^2} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + a_1(t)\|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + a_2(t)\|\gamma(u)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)} \\ \leq C_\varepsilon\|g_1(t)\|^{p'}_{L^{r'_1}(\Omega)} + \varepsilon\|u\|^p_{L^{r_1}(\Omega)} + C_\delta\|g_2(t)\|^{p'}_{L^{r'_2}(\Gamma)} + \delta\|\gamma(u)\|^p_{L^{r_2}(\Gamma)} + (\tilde{k}_1(t) + \tilde{k}_2(t)).\end{aligned}$$

De (1) e (2), do início da demonstração, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U(t)\|_{\mathbb{X}^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{a_1(t)}{2\kappa}\|u\|_{L^p(\Omega)}^p - \frac{a_1(t)}{2}\frac{C_\kappa}{\kappa} + \frac{a_1(t)}{2}\|u\|_{L^{r_1}(\Omega)}^{r_1}\\ + a_2(t)\|\gamma(u)\|_{L^{r_2}(\Gamma)}^{r_2}\\ \leq C_\varepsilon\|g_1(t)\|_{L^{r_1'}(\Omega)}^{p'} + \varepsilon M_\Omega^p\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p + C_\delta\|g_2(t)\|_{L^{r_2'}(\Gamma)}^{p'} + \delta M_\Gamma^p\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p\\ + (\tilde{k}_1(t) + \tilde{k}_2(t)),\end{aligned}$$

onde M_Ω e M_Γ são as respectivas constantes de imersões de $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{r_1}(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{r_2}(\Gamma)$, respectivamente, agora, apenas reordenando a expressão e usando que $a_1(t) > a_0$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U(t)\|_{\mathbb{X}^2}^2 + \left(\min\left\{1, \frac{a_0}{2\kappa}\right\} - \varepsilon M_\Omega^p - \delta M_\Gamma^p\right)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p + \frac{a_0}{2}\|u\|_{L^{r_1}(\Omega)}^{r_1} + a_0\|\gamma(u)\|_{L^{r_2}(\Gamma)}^{r_2}\\ \leq C_\varepsilon\|g_1(t)\|_{L^{r_1'}(\Omega)}^{p'} + C_\delta\|g_2(t)\|_{L^{r_2'}(\Gamma)}^{p'} + (\tilde{k}_1(t) + \tilde{k}_2(t)) + \frac{a_1(t)}{2}\frac{C_\kappa}{\kappa}.\end{aligned}$$

Assim, tomando ε e δ de forma que $K := \left(\min\left\{1, \frac{a_0}{2\kappa}\right\} - \varepsilon M_\Omega^p - \delta M_\Gamma^p\right) > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U(t)\|_{\mathbb{X}^2}^2 + K\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p + \frac{a_0}{2}\|u\|_{L^{r_1}(\Omega)}^{r_1} + a_0\|\gamma(u)\|_{L^{r_2}(\Gamma)}^{r_2}\\ \leq C_\varepsilon\|g_1(t)\|_{L^{r_1'}(\Omega)}^{p'} + C_\delta\|g_2(t)\|_{L^{r_2'}(\Gamma)}^{p'} + |\tilde{k}_1(t) + \tilde{k}_2(t)| + \frac{a_1(t)C_\kappa}{2\kappa},\end{aligned}$$

q.t.p. para $t \in [\tau, T]$.

Integrando de τ a λ e observando as hipóteses sobre $a_1(t)$, $\tilde{k}_1(t)$ e $\tilde{k}(t)$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|U(\lambda)\|_{\mathbb{X}^2}^2 + K\int_\tau^\lambda \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p dt + \frac{a_0}{2}\int_\tau^\lambda \|u\|_{L^{r_1}(\Omega)}^{r_1} dt + a_0\int_\tau^\lambda \|\gamma(u)\|_{L^{r_2}(\Gamma)}^{r_2} dt\\ \leq \frac{1}{2}\|U(\tau)\|_{\mathbb{X}^2}^2 + \int_\tau^\lambda \left(C_\varepsilon\|g_1(t)\|_{L^{r_1'}(\Omega)}^{p'} + C_\delta\|g_2(t)\|_{L^{r_2'}(\Gamma)}^{p'}\right) dt + M(\lambda),\end{aligned}$$

onde $M(\lambda) = \displaystyle\int_\tau^\lambda \left[|\tilde{k}_1(t) + \tilde{k}_2(t)| + \frac{a_1(t)C_\kappa}{2\kappa}\right] dt$. Tomando $C := \max\{C_\varepsilon, C_\delta\}$, temos a desigualdade desejada para todo $\lambda \in (\tau, T]$.

■

2.2.3 Reformulando o Problema (P)

Para simplificar a análise de existência de solução fraca, vamos definir operadores apropriados para uma formulação funcional da equação em $(\mathbb{V}^p)^*$. Após encontrarmos a solução para esta nova formulação, garantiremos que tal solução é de fato a solução fraca desejada. Para isto, denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto de dualidade entre $(\mathbb{V}^p)^*$ e $\mathbb{V}^p$.

Defina, para $U = (u, \gamma(u)), V = (v, \gamma(v)) \in \mathbb{V}^p$, a aplicação

$$\beta_p(U, V) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx.$$

Mostraremos que tal aplicação gera, para cada $U \in \mathbb{V}^p$, um operador $\beta_p U \in (\mathbb{V}^p)^*$. Este é um dos operadores que queremos considerar.

Lema 2.6. *Dado $U \in \mathbb{V}^p$ fixo, o funcional $V \mapsto \beta_p(U, V)$ está em $(\mathbb{V}^p)^*$. Além disso, $\beta_p : \mathbb{V}^p \to (\mathbb{V}^p)^*$ é monótono, hemicontínuo e coercivo.*

Demonstração: Para $U \in \mathbb{V}^p$, é fácil ver que $\beta_p(U, \cdot) : \mathbb{V}^p \to \mathbb{R}$ é linear. Para $V \in \mathbb{V}^p$, segue da Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
|\beta_p(U, V)| &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| dx + \int_\Omega |u|^{p-1} |v| dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |u|^{(p-1)p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|v\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \left(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{p-1} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} + \left(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{p-1} \|v\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \left(\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} + \|\gamma(v)\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} \right) \\
&\leq \|u\|_{W^{1,p}}^{p-1} \|V\|_{\mathbb{V}^p}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\beta_p(U, \cdot) \in (\mathbb{V}^p)^*$. Adiante denotaremos, por conveniência, $\beta_p U := \beta_p(U, \cdot)$.

Vamos verificar que $\beta_p : \mathbb{V}^p \to (\mathbb{V}^p)^*$ é monótono: dados $U, V \in \mathbb{V}^p$ temos $\beta_p U, \beta_p V \in (\mathbb{V}^p)^*$, assim

$$\begin{aligned}
&\langle \beta_p U - \beta_p V, U - V \rangle_{(\mathbb{V}^p)^*, \mathbb{V}^p} \\
&= \langle \beta_p U, U - V \rangle_{(\mathbb{V}^p)^*, \mathbb{V}^p} - \langle \beta_p V, U - V \rangle_{(\mathbb{V}^p)^*, \mathbb{V}^p} \\
&= \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla(u - v) + |u|^{p-2} u(u - v) \right) dx \\
&\qquad\qquad - \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla(u - v) + |v|^{p-2} v(u - v) \right) dx \\
&= \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v \right) \nabla(u - v) dx + \int_\Omega (|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v)(u - v) dx \\
&= \left\langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla(u - v) \right\rangle_2 + \left\langle |u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v, u - v \right\rangle_2 \\
&\geq \gamma_0 |\nabla u - \nabla v|^p + \gamma_0 |u - v|^p \geq 0,
\end{aligned}$$

pelo Lema 1.1, onde $\gamma_0 > 0$ depende apenas de p e N, o que garante a monotonicidade de β_p.

Dados $U, V \in \mathbb{V}^p$ e $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
\|\beta_p(U+tV) - \beta_p U\|_{(\mathbb{V}^p)^*} & \\
&= \sup_{\|W\|_{\mathbb{V}^p} \leq 1} \left| \langle \beta_p(U+tV), W \rangle_{(\mathbb{V}^p)^*, \mathbb{V}^p} - \langle \beta_p U, W \rangle_{(\mathbb{V}^p)^*, \mathbb{V}^p} \right| \\
&\leq \sup_{\|W\|_{\mathbb{V}^p} \leq 1} \int_\Omega \left| \left(|\nabla(u+tv)|^{p-2} \nabla(u+tv) - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) \right| |\nabla w| dx \\
&\qquad + \int_\Omega \left| \left(|(u+tv)|^{p-2}(u+tv) - |u|^{p-2} u \right) \right| |w| dx.
\end{aligned}$$

Pela continuidade da norma e do gradiente em $W^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\|\beta_p(U+tV) - \beta_p U\|_{(\mathbb{V}^p)^*} \to 0,$$

quando $t \to 0$. Portanto, β_p é hemicontínuo.

Resta verificar que β_p é coercivo. Note que, para $U \in \mathbb{V}^p$,

$$\begin{aligned}
\beta_p(U, U) &= \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u + |u|^{p-2} uu \right) dx \\
&= \int_\Omega \left(|\nabla u|^p + |u|^p \right) dx = \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como a norma em $W^{1,p}(\Omega)$ é equivalente à norma de $\mathbb{V}^p$, segue que existe $C_2 > 0$ tal que $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq C_2 \|U\|_{\mathbb{V}^p}$. Assim

$$\lim_{\|U\|_{\mathbb{V}^p} \to +\infty} \frac{\beta_p(U, U)}{\|U\|_{\mathbb{V}^p}} = \lim_{\|U\|_{\mathbb{V}^p} \to +\infty} \frac{\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|U\|_{\mathbb{V}^p}} \geq \lim_{\|U\|_{\mathbb{V}^p} \to +\infty} \frac{C_2^p \|U\|^p_{\mathbb{V}^p}}{\|U\|_{\mathbb{V}^p}} = +\infty,$$

e portanto β_p é coercivo.

■

Assim, temos que o operador $\beta_p : \mathbb{V}^p \to (\mathbb{V}^p)^*$ está bem definido e, pelo Teorema 1.18, é maximal monótono.

Proposição 2.7. *Se $U_n \to U$ em $\mathbb{V}^p$, então $\beta_p U_n \overset{*}{\rightharpoonup} \beta_p U$ em $(\mathbb{V}^p)^*$.*

Demonstração: Sabemos, pelo início da demonstração do Lema 2.6, que

$$| \langle \beta_p U, V \rangle | \leq \|u\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)} \|V\|_{\mathbb{V}^p}.$$

Logo, β_p leva conjuntos limitados de $\mathbb{V}^p$ em limitados de $(\mathbb{V}^p)^*$.

Sejam $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{V}^p$ e $U \in \mathbb{V}^p$ tais que $U_n \to U$. Como $\{\beta_p U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, do Teorema 1.11 segue que existe $f \in (\mathbb{V}^p)^*$ e uma subsequência $\{\beta_p U_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\beta_p U_{n_j} \rightharpoonup f$$

em $(\mathbb{V}^p)^*$, pois $\mathbb{V}^p$ é separável.

Note que,

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \beta_p U_{n_j}, U_{n_j}\right\rangle - \langle f, U\rangle\right| &= \left|\left\langle \beta_p U_{n_j}, U_{n_j}\right\rangle + \left\langle \beta_p U_{n_j}, U\right\rangle - \left\langle \beta_p U_{n_j}, U\right\rangle - \langle f, U\rangle\right| \\ &\leq \left|\left\langle \beta_p U_{n_j} - f, U\right\rangle\right| + \|\beta_p U_{n_j}\|_{(\mathbb{V}^p)^*}\|U_{n_j} - U\|_{\mathbb{V}^p} \to 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\left\langle \beta_p U_{n_j}, U_{n_j}\right\rangle \to \langle f, U\rangle$. Logo,

$$\limsup_{j\to\infty} \left\langle \beta_p U_{n_j}, U_{n_j}\right\rangle \leq \langle f, U\rangle .$$

Assim, como β_p é um operador maximal monótono pelo Corolário 1.20, segue que $\beta_p U = f$.

■

Definimos o operador β_p para uma formulação funcional do problema, agora apresentaremos a técnica para definir os demais operadores. Um elemento

$$B \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^* \times \left(W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)\right)^* \subset (\mathbb{V}^p)^*$$

pode ser interpretado como um par da forma

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

que, por sua vez, age em um elemento $W = (w_1, w_2) \in \mathbb{V}^p$, da seguinte maneira:

$$\langle B, W\rangle = \langle b_1, w_1\rangle_{(W^{1,p}(\Omega))^*, W^{1,p}(\Omega)} + \langle b_2, w_2\rangle_{\left(W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)\right)^*, W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} .$$

Assim, consideremos

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} \in L^{r_1'}(\Omega) \times L^{r_2'}(\Gamma) \subset (\mathbb{V}^p)^*;$$

$$U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ \gamma(u)_t \end{pmatrix}, \text{ com } U = \begin{pmatrix} u \\ \gamma(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{V}^p;$$

$$\mathcal{F}(t,U) = \begin{pmatrix} f_1(t,u) - |u|^{p-2}u \\ f_2(t,\gamma(u)) \end{pmatrix}.$$

Verifiquemos que $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{V}^p \to (\mathbb{V}^p)^*$ está bem definida e é contínua de $\mathbb{R} \times \mathbb{V}^p$ (com a topologia forte) em $(\mathbb{V}^p)^*$ (com a topologia fraca estrela).

Proposição 2.8. *Seja $U \in \mathbb{V}^p$, então $\mathcal{F}(t,U) \in (\mathbb{V}^p)^*$ q.t.p. em $\mathbb{R}$. Se $U_n \to U$ em $\mathbb{V}^p$, então $\mathcal{F}(t,U_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{F}(t,U)$ em $(\mathbb{V}^p)^*$ q.t.p. em $\mathbb{R}$.*

Demonstração:

Para mostrar que $\mathcal{F}(t,U) \in (\mathbb{V}^p)^*$, com $U \in \mathbb{V}^p$, devemos observar primeiro as particularidades das funções f_i, para $i = 1, 2$. Com relação a f_1, segue de (H3) que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f_1(t,u)|^{r_1'} dx &\leq \int_\Omega C(t)^{r_1'} (|u|^{r_1-1} + 1)^{r_1'} dx \\
&\leq C(t)^{r_1'} \int_\Omega 2^{r_1'-1} \left(|u|^{(r_1-1)r_1'} + 1^{r_1'} \right) dx = C(t)^{r_1'} 2^{r_1'-1} \left(\|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + |\Omega| \right) \\
&\leq C(t)^{r_1'} 2^{r_1'-1} \left(M_\Omega \|u\|^{r_1}_{W^{1,p}(\Omega)} + |\Omega| \right),
\end{aligned}$$

q.t.p. em $t \in \mathbb{R}$, onde M_Ω é constante de imersão de $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{r_1}(\Omega)$. Logo, $f_1(t,u) \in L^{r_1'}(\Omega)$.

Analogamente, é possível mostrar que $f_2(t,\gamma(u)) \in L^{r_2'}(\Gamma)$.

Consideremos agora

$$\tilde{f}_1(t,u) := f_1(t,u) - |u|^{p-2}u. \tag{2.5}$$

Neste caso, pelo Lema 1.2, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{f}_1(t,u) \right\|^{r_1'}_{L^{r_1'}(\Omega)} &= \int_\Omega \left| f_1(t,u) - |u|^{p-2}u \right|^{r_1'} dx \\
&\leq 2^{r_1'-1} \int_\Omega \left(\left| f_1(t,u) \right|^{r_1'} + |u|^{(p-1)r_1'} \right) dx \\
&= 2^{r_1'-1} \left(\|f_1(t,u)\|^{r_1'}_{L^{r_1'}(\Omega)} + \|u\|^{(p-1)r_1'}_{L^{(p-1)r_1'}(\Omega)} \right),
\end{aligned}$$

de onde segue que $\tilde{f}_1(t,u) \in L^{r_1'}(\Omega)$, pois $(p-1)r_1' \leq (r_1-1)r_1' = r_1$, assim existe $\tilde{C}$, uma constante positiva que depende de Ω, tal que

$$\|u\|_{L^{(p-1)r_1'}(\Omega)} \leq \tilde{C} \|u\|_{L^{r_1}(\Omega)} \leq \tilde{C} M_\Omega \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Desta forma, concluímos que

$$\mathcal{F}(t,U) \in L^{r_1'}(\Omega) \times L^{r_2'}(\Gamma) \subset (L^{r_1}(\Omega) \times L^{r_2}(\Gamma))^* \subset (\mathbb{V}^p)^*,$$

q.t.p. em $t \in \mathbb{R}$.

Mostremos que $\mathcal{F}(t, U_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{F}(t, U)$, para $U_n \to U$ em $\mathbb{V}^p$ e q.t.p. em $t \in \mathbb{R}$. Como $U_n \to U$ em $\mathbb{V}^p$, então $u_n \to u$ q.t.p. em Ω e $\gamma(u_n) \to \gamma(u)$ q.t.p. em Γ. Da continuidade das funções f_i, $i = 1, 2$, da função $x \mapsto |x|^{p-2}x$ e do operador traço, temos

$$\begin{aligned} &f_1(t, u_n) \to f_1(t, u) \text{ q.t.p em } \Omega; \\ &|u_n|^{p-2}u_n \to |u|^{p-2}u \text{ q.t.p em } \Omega; \\ &f_2(t, \gamma(u_n)) \to f_2(t, \gamma(u)) \text{ q.t.p em } \Gamma. \end{aligned}$$

Retomando $\tilde{f}_1(t, u) := f_1(t, u) - |u|^{p-2}u$, já sabemos que

$$\|\tilde{f}_1(t, u_n)\|_{L^{r_1'}(\Omega)} \text{ e } \|f_2(t, \gamma(u_n))\|_{L^{r_2'}(\Gamma)}$$

são limitadas uniformemente em n, a menos de uma quantidade finita de termos, e em $t \in \mathbb{R}$. Portanto, pelo Lema 1.3, temos

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_1(t, u_n) \rightharpoonup \tilde{f}_1(t, u) \text{ em } L^{r_1'}(\Omega), \\ &f_2(t, \gamma(u_n)) \rightharpoonup f_2(t, \gamma(u)) \text{ em } L^{r_2'}(\Gamma), \end{aligned}$$

q.t.p. em $t \in \mathbb{R}$ e, como $L^{r_1'}(\Omega) \hookrightarrow (W^{1,p}(\Omega))^*$ e $L^{r_2'}(\Gamma) \hookrightarrow (W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma))^*$, concluímos

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_1(t, u_n) \rightharpoonup \tilde{f}_1(t, u) \text{ em } (W^{1,p}(\Omega))^*, \\ &f_2(t, \gamma(u_n)) \rightharpoonup f_2(t, \gamma(u)) \text{ em } (W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma))^*, \end{aligned} \tag{2.6}$$

q.t.p. em $t \in \mathbb{R}$.

Com tal conclusão, garantimos que $\mathcal{F}(t, U_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{F}(t, U)$ em $(\mathbb{V}^p)^*$ q.t.p. em $t \in \mathbb{R}$. Com efeito, seja $V \in \mathbb{V}^p$. Então

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{F}(t, U_n), V \rangle \, dt \\ &\quad = \lim_{n\to\infty} \Bigg(\left\langle \tilde{f}_1(t, u_n), v \right\rangle_{(W^{1,p}(\Omega))^*, W^{1,p}(\Omega)} \\ &\qquad\qquad + \langle f_2(t, \gamma(u_n)), \gamma(v) \rangle_{\left(W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)\right)^*, W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} \Bigg) \\ &\quad = \left\langle \tilde{f}_1(t, u), v \right\rangle_{(W^{1,p}(\Omega))^*, W^{1,p}(\Omega)} + \langle f_2(t, \gamma(u)), \gamma(v) \rangle_{\left(W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)\right)^*, W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} \\ &\quad = \langle \mathcal{F}(t, U), V \rangle, \end{aligned} \tag{2.7}$$

por (2.6).

$\blacksquare$

Agora temos condições de formular uma expressão com esses operadores. Queremos encontrar uma função $U(t,x)$ que tenha a regularidade requerida na Definição 2.4, ou seja, queremos que, dado $T > \tau$,

$$\begin{aligned}
&U \in C([\tau,T];\mathbb{X}^2) \cap L^\infty(\tau,T;\mathbb{X}^2),\\
&U \in L^p(\tau,T;\mathbb{V}^p),\\
&\partial_t U \in L^s(\tau,T;(\mathbb{V}^p)^*) \text{ com } s = \min\{r_1', r_2', p'\},
\end{aligned}$$

e que U satisfaça a seguinte expressão

$$\begin{cases} \partial_t U + \beta_p U + \mathcal{F}(t,U) = G(t) \\ U(\tau) = U_0, \end{cases} \quad \text{em } (\mathbb{V}^p)^*, \tag{PF}$$

no seguinte sentido: para todo $V \in \mathbb{V}^p$, vale

$$\begin{aligned}
&\langle \partial_t U + \beta_p U + \mathcal{F}(t,U), V\rangle = \langle G(t), V\rangle\\
&\langle U(\tau), V\rangle = \langle U_0, V\rangle .
\end{aligned}$$

q.t.p. em $t \in [\tau,T]$.

Observação 2.9. *Note que a solução do Problema (PF) tem a regularidade requerida para a solução fraca do Problema (P). Para mostrar que tal solução é a solução fraca do Problema (P), resta mostrar que a solução do Problema (PF) satisfaz a expressão* (2.3).

Vamos analisar termo a termo. Primeiramente consideremos o caso do operador $\mathcal{F}(t,U) \in L^s(\tau,T;(\mathbb{V}^p)^*)$, com U solução do Problema (PF). As imersões $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{r_1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, $W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \hookrightarrow L^{r_2}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$, o Teorema de Representação de Riez para os espaços L^p e o fato de $\mathcal{F}(t,U) \in L^{r_1'}(\Omega) \times L^{r_2'}(\Gamma)$ (segue da demonstração da Proposição 2.8) *garantem que*

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{F}(t,U), V\rangle_{(\mathbb{V}^p)^*,\mathbb{V}^p}\\
&\quad = \left\langle f_1(t,u) - |u|^{p-2}u, v\right\rangle_{(W^{1,p}(\Omega))^*,W^{1,p}(\Omega)} + \langle f_2(t,\gamma(u)),\gamma(v)\rangle_{\left(W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)\right)^*,W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)}\\
&\quad = \left\langle f_1(t,u) - |u|^{p-2}u, v\right\rangle_{(L^p(\Omega))^*,L^p(\Omega)} + \langle f_2(t,\gamma(u)),\gamma(v)\rangle_{(L^2(\Gamma))^*,L^2(\Gamma)}\\
&\quad = \left\langle f_1(t,u) - |u|^{p-2}u, v\right\rangle_2 + \langle f_2(t,\gamma(u)),\gamma(v)\rangle_{2,\Gamma},
\end{aligned}$$

para todo $V = (v,\gamma(v)) \in \mathbb{V}^p$.

No caso de $G(t) \in L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*)$, as mesmas imersões garantem que

$$\langle G(t), V\rangle_{(\mathbb{V}^p)^*,\mathbb{V}^p} = \langle g_1(t), v\rangle_{(W^{1,p}(\Omega))^*,W^{1,p}(\Omega)} + \langle g_2(t), \gamma(v)\rangle_{\left(W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)\right)^*,W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)}$$

$$= \langle g_1(t), v\rangle_2 + \langle g_2(t), \gamma(v)\rangle_{2,\Gamma}$$

para todo $V \in \mathbb{V}^p$.

Para $\partial_t U = (u_t, \gamma(u)_t) \in L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*)$, temos

$$\langle \partial_t U, V\rangle_{(\mathbb{V}^p)^*,\mathbb{V}^p} = \langle u_t, v\rangle_{(W^{1,p}(\Omega))^*,W^{1,p}(\Omega)} + \langle \gamma(u)_t, \gamma(v)\rangle_{\left(W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)\right)^*,W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)}$$

$$= \langle u_t, v\rangle_2 + \langle \gamma(u)_t, \gamma(v)\rangle_{2,\Gamma},$$

para todo $V \in \mathbb{V}^p$.

No caso do operador $\beta_p U \in L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*)$ temos, por definição, que

$$\langle \beta_p U, V\rangle = \left\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla v\right\rangle_2 + \left\langle |u|^{p-2}u, v\right\rangle_{2,\Gamma},$$

para todo $V \in \mathbb{V}^p$.

Portanto uma solução U para o Problema (PF) satisfaz

$$\begin{aligned}\langle \partial_t U, V\rangle_{\mathbb{X}^2} + \left\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla v\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle f_1(t,u), v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle f_2(t,\gamma(u)), \gamma(v)\rangle_{L^2(\Gamma)} \\ = \langle g_1(t), v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g_2(t), \gamma(v)\rangle_{L^2(\Gamma)},\end{aligned} \tag{2.8}$$

para todo $V \in \mathbb{V}^p$ e q.t.p. em $[\tau, T]$. Portanto tal solução é solução fraca do Problema (P).

2.2.4 Existência de Solução Fraca do Problema (P)

Para encontrar uma solução do Problema (PF), usaremos o método de aproximação de Faedo-Galerkin, veja [59], que consiste em desenvolver, para cada $n \in \mathbb{N}$, um esquema de projeção do problema em um espaço de dimensão n, onde localmente resolveremos um sistema de equações diferenciais ordinárias para um problema de Cauchy e obteremos uma solução U_n, depois mostraremos que a sequência de soluções $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, passando a uma subsequência se necessário, é convergente e mostraremos que tal limite é a solução procurada.

Como $\mathbb{X}^2$ é separável e $\mathbb{V}^p$ é denso em $\mathbb{X}^2$, pelo Lema 1.9, existe uma base ortonormal de $\mathbb{X}^2$ contida em $\mathbb{V}^p$. Denotemos tal base por $\{\Phi_n = (\phi_n, \psi_n) \in \mathbb{X}^2; n \in \mathbb{N}\}$.

Sejam

$$K_n = span\{\Phi_1, ..., \Phi_n\}, \quad K_\infty = \cup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

e $Pr_n : \mathbb{X}^2 \to K_n$ a projeção ortogonal referente à base $\{\Phi_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Dado $U_0 \in \mathbb{X}^2$, tomemos a sequência $\{U_{0n} := Pr_n U_0\} \subset \mathbb{V}^p$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{0n} = U_0$ em $\mathbb{X}^2$. Dado $T > \tau$, queremos encontrar $U_n \in K_n$ tal que, para cada $V \in K_n$, tenhamos

$$\begin{cases} \langle \partial_t U_n, V\rangle + \langle \beta_p U_n, V\rangle + \langle \mathcal{F}(t, U_n), V\rangle = \langle G(t), V\rangle \\ \langle U_n(\tau), V\rangle = \langle U_{0n}, V\rangle\,, \end{cases} \tag{P_n}$$

q.t.p. em $[\tau, T]$.

Note que isso é equivalente a encontrar U_n que satisfaça as seguintes equações:

$$\langle \partial_t U_n, \Phi_i\rangle + \langle \beta_p U_n, \Phi_i\rangle + \langle \mathcal{F}(t, U_n), \Phi_i\rangle = \langle G(t), \Phi_i\rangle \quad \forall\ 1 \leq i \leq n,$$

com a condição inicial $U_n(\tau) = U_{0n}$. Para tanto, observe que $U_{0n} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Phi_i$, ou seja, queremos resolver o seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{cases} \langle \partial_t d_1(t)\Phi_1, \Phi_1\rangle + \langle \beta_p U_n, \Phi_1\rangle + \langle \mathcal{F}(t, U_n), \Phi_1\rangle = \langle G(t), \phi_1\rangle \\ \langle \partial_t d_2(t)\Phi_2, \Phi_2\rangle + \langle \beta_p U_n, \Phi_2\rangle + \langle \mathcal{F}(t, U_n), \Phi_2\rangle = \langle G(t), \phi_2\rangle \\ \qquad\qquad \vdots \\ \langle \partial_t d_n(t)\Phi_n, \Phi_n\rangle + \langle \beta_p U_n, \Phi_n\rangle + \langle \mathcal{F}(t, U_n), \Phi_n\rangle = \langle G(t), \phi_n\rangle \\ d_i(\tau) = \xi_i,\ 1 \leq i \leq n. \end{cases} \tag{2.9}$$

Garantir a existência de solução para o sistema (2.9) é mostrar a existência de funções $d_i \in C^1([\tau, T])$, $i = 1, ..., n$, tais que a solução $U_n = (u_n, v_n)$ é de tal forma que $u_n = \sum_{i=1}^{n} d_i(t)\phi_i$ e $v_n = \sum_{i=1}^{n} d_i(t)\psi_i$, ou seja, $U_n = \sum_{i=1}^{n} d_i(t)\Phi_i$ e satisfaz (P_n).

Pelas Proposições 2.7 e 2.8, temos

$$\begin{aligned} U_n &\mapsto \langle \beta_p U_n, \Phi_i\rangle\,, \\ (t, U_n) &\mapsto \langle \mathcal{F}(t, U_n), \Phi_i\rangle \end{aligned}$$

contínuas e $t \mapsto \langle G(t), \Phi_i\rangle$ mensurável. O Teorema 1.13 garante a existência de $t_n \in (\tau, T)$ e de uma solução U_n de (2.9) no intervalo (τ, t_n), com $d_i \in C^1([\tau, t_n])$, $1 \leq i \leq n$. No entanto, segue da Observação 2.9 e da Proposição 2.5 que tal solução é limitada e assim, pelo Teorema 1.14, podemos estendê-la ao intervalo $[\tau, T]$.

Das imersões $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{r_1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, da continuidade do operador traço e da Proposição 2.5, segue que existe uma constante C que depende de $|\Omega|$, $S(\Gamma)$, T, p, r_i, u_0 e v_0, mas independe de n e t, tal que

$$\begin{cases} \|U_n(t)\|_{L^\infty(\tau,T;\mathbb{X}^2)} \leq C \\ \|U_n(t)\|_{L^p(\tau,T;\mathbb{V}^p)} \leq C \\ \|u_n(t)\|_{L^{r_1}(\tau,T;L^{r_1}(\Omega))} \leq C, & \text{se } p \leq N \\ \|\gamma(u_n(t))\|_{L^{r_2}(\tau,T;L^{r_2}(\Gamma))} \leq C, & \text{se } p \leq N \\ \|u_n(t)\|_{L^p(\tau,T;C(\overline{\Omega}))} \leq C, & \text{se } p > N. \end{cases} \tag{2.10}$$

As estimativas anteriores aliadas aos Teoremas 1.10 e 1.11 garantem, passando a uma subsequência se necessário, que existe U tal que

$$\begin{aligned} &U_n \overset{*}{\rightharpoonup} U \text{ em } L^\infty(\tau,T;\mathbb{X}^2); \\ &U_n \rightharpoonup U \text{ em } L^p(\tau,T;\mathbb{V}^p). \end{aligned} \tag{2.11}$$

De fato, é a mesma função U no limite em (2.11), já que

$$\begin{aligned} &U_n \rightharpoonup U \text{ em } L^p(\tau,T;\mathbb{V}^p) \\ &\Rightarrow U_n \rightharpoonup U \text{ em } L^p(\tau,T;\mathbb{X}^2) \\ &\Rightarrow U_n \overset{*}{\rightharpoonup} U \text{ em } L^p(\tau,T;\mathbb{X}^2) \\ &\Rightarrow U_n \overset{*}{\rightharpoonup} U \text{ em } L^\infty(\tau,T;\mathbb{X}^2). \end{aligned}$$

Para garantir que U satisfaz a equação funcional $\partial_t U + \beta_p U + \mathcal{F}(t,U) = G(t)$ em $L^s(\tau,T;(\mathbb{V}^p)^*)$, mostraremos que

$$\partial_t U_n + \beta_p U_n + \mathcal{F}(t,U_n) - G(t) \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t U + \beta_p U + \mathcal{F}(t,U) - G(t) \tag{2.12}$$

em $L^s(\tau,T;(\mathbb{V}^p)^*)$. Analisaremos a convergência termo a termo.

No próximo resultado as estimativas em (2.10) garantirão limitações uniformes para $\beta_p U_n$ e $\mathcal{F}(t,U_n)$.

Proposição 2.10. *Dado $s = \min\{r_1', r_2', p'\}$, temos que $\beta_p U_n$ e $\mathcal{F}(t,U_n)$ são limitados em $L^s(\tau,T;(\mathbb{V}^p)^*)$ uniformemente para $t \in [\tau,T]$ e $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração:

Com efeito, assim como fizemos no início do Lema 2.6, temos

$$\begin{aligned}\|\beta_p U_n\|_{(\mathbb{V}^p)^*} &= \sup_{\|V\|_{\mathbb{V}^p}\le 1} |\langle \beta_p U_n, V\rangle| \\ &\le \sup_{\|V\|_{\mathbb{V}^p}\le 1} |\langle \beta_p U_n, V\rangle| \le \|u_n\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)}\|V\|_{\mathbb{V}^p} \\ &\le \left(\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|\gamma(u_n)\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)}\right)^{p-1}\|V\|_{\mathbb{V}^p} \le \|U_n\|^{p-1}_{\mathbb{V}^p},\end{aligned}$$

de modo que as limitações em (2.10) garantem que

$$\|\beta_p U_n\|_{L^{p'}([\tau,T];(\mathbb{V}^p)^*)} \le C,$$

uniformemente em n e t.

Para limitar $\mathcal{F}(t,U_n)$, como feito no início da demonstração da Proposição 2.8, temos

$$\int_\Omega |f_1(t,u_n)|^{r_1'}dx \le C(t)^{r_1'}2^{r_1'-1}\left(\|u_n\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + |\Omega|\right),$$

logo,

$$\begin{aligned}\int_\tau^T \|f_1(t,u_n)\|^{r_1'}_{L^{r_1'}(\Omega)}dt &\le \int_\tau^T C_1(t)^{r_1'}2^{r_1'-1}\left(\|u_n\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + |\Omega|\right)dt \\ &\le 2^{r_1'-1}\|C_1(t)^{r_1'}\|_{L^\infty(\tau,T)}\left(\|u_n\|_{L^{r_1}(\tau,T;L^{r_1}(\Omega))} + (T-\tau)|\Omega|\right).\end{aligned}$$

Portanto, $f_1(t,u_n) \in L^{r_1'}(\tau,T;L^{r_1'}(\Omega))$ e é uniformemente limitada em n e t, $t \in [\tau,T]$.

Analogamente, é possível mostrar que $f_2(t,\gamma(u_n))$ é limitada em $L^{r_2'}(\tau,T;L^{r_2'}(\Omega))$ uniformemente para $n \in \mathbb{N}$ e $t \in (\tau,T)$.

Consideremos agora $\tilde{f}_1(t,u) := f_1(t,u) - |u|^{p-2}u$. Neste caso temos

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{f}_1(t,u_n)\right\|^{r_1'}_{L^{r_1'}(\Omega)} &= \int_\Omega \left|f_1(t,u_n) - |u_n|^{p-2}u\right|^{r_1'}dx \\ &\le 2^{r_1'-1}\int_\Omega \left(\left|f_1(t,u_n)\right|^{r_1'} + |u_n|^{(p-1)r_1'}\right)dx \\ &= 2^{r_1'-1}\left(\|f_1(t,u_n)\|^{r_1'}_{L^{r_1'}(\Omega)} + \|u_n\|^{(p-1)r_1'}_{L^{(p-1)r_1'}(\Omega)}\right),\end{aligned}$$

de onde obtemos uma limitação uniforme, pelo que fizemos anteriormente e pelo fato de que $(p-1)r_1' \le (r_1-1)r_1' = r_1$. Assim, existe uma constante positiva $\tilde{C}$ tal que $\|u_n\|_{L^{(p-1)r_1'}(\Omega)} \le \tilde{C}\|u_n\|_{L^{r_1}(\Omega)}$, que por (2.10) é limitada uniformemente em n e t.

Desta forma, concluímos que $\mathcal{F}(t,U_n)$ é limitado uniformemente em $L^s(\tau,T;L^{r_1'}(\Omega)\times L^{r_2'}(\Gamma)) \subset L^s(\tau,T;(L^{r_1}(\Omega)\times L^{r_2}(\Gamma))^*)$, para $s = \min\{r_1', r_2', p'\}$.

Como

$$(L^{r_1}(\Omega) \times L^{r_2}(\Gamma))^* \hookrightarrow (\mathbb{V}^p)^*,$$

temos $\mathcal{F}(t, U_n)$ uniformemente limitado em $L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*)$.

■

Assim, como U_n é solução da equação funcional em (P_n), pelo Lema 2.10, temos

$$\partial_t U_n = -\beta_p U_n - \mathcal{F}(t, U_n) + G \in L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*),$$

é uniformemente limitado para n e t. Então, pelo Teorema 1.11, temos, passando a uma subsequência se necessário, que $\partial_t U_n$ converge na topologia fraca estrela para algum W em $L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*)$. Observe que $W = \partial_t U$, pois,

$$\int_\tau^T \langle \partial_t U_n, \Psi \rangle \, dt \to \int_\tau^T \langle W, \Psi \rangle \, dt \quad \forall \Psi \in L^p(\tau, T; \mathbb{V}^p),$$

quando $n \to +\infty$. Temos também

$$\begin{aligned} \int_\tau^T \langle \partial_t U_n, \Psi \rangle \, dt &= -\int_\tau^T \langle U_n, \partial_t \Psi \rangle \, dt \\ &\to -\int_\tau^T \langle U, \partial_t \Psi \rangle \, dt, \end{aligned} \tag{2.13}$$

pela convergência fraca de U_n. Logo,

$$\int_\tau^T \langle W, \Psi \rangle \, dt = -\int_\tau^T \langle U, \partial_t \Psi \rangle \, dt \text{ para toda } \Psi \in L^p([\tau, T]; \mathbb{V}^p),$$

por conseguinte, $W = \partial_t U$.

Portanto, já obtivemos que

$$\partial_t U_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} \partial_t U \text{ em } L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*). \tag{2.14}$$

Por (2.10) e por $\partial_t U_n$ ser limitada em $L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*)$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [\tau, T]$, segue do Teorema 1.4 que

$$U_n \to U \text{ em } L^p(\tau, T; \mathbb{X}^2), \tag{2.15}$$

e, pelo Teorema 1.5, temos

$$U_n \to U \text{ em } C([\tau, T]; \mathbb{X}^2). \tag{2.16}$$

Note que isto garante $U_{0n} = U_n(\tau) \to U(\tau)$ em $\mathbb{X}^2$, e portanto $U(\tau) = U_0$.

Nosso próximo passo é estudarmos as convergências dos outros elementos da equação (P_n), ou seja, $\mathcal{F}(t, U_n)$ e $\beta_p U_n$.

Proposição 2.11. *Para U_n solução de (P_n) e U obtida em (2.11), temos a seguinte convergência:*

$$\mathcal{F}(t, U_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{F}(t, U) \ (n \to +\infty)$$

na topologia fraca estrela de $L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*)$, $s = \min\{r_1', r_2', p'\}$.

Demonstração: No início da demonstração da Proposição 2.10 mostramos que $\tilde{f}_1(t, u_n)$ e $f_2(t, \gamma(u_n))$ são limitadas em $L^{r_1'}(\tau, T; L^{r_1'}(\Omega)) = L^{r_1'}([\tau, T] \times \Omega)$ e $L^{r_2'}(\tau, T; L^{r_2'}(\Gamma)) = L^{r_2'}([\tau, T] \times \Gamma)$ uniformemente em $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [\tau, T]$. Pela convergência (2.15), temos que $U_n \to U$ q.t.p em $[\tau, T] \times \overline{\Omega}$, pelas continuidades de f_1, f_2 e do módulo, temos que

$$\tilde{f}_1(t, u_n) \to \tilde{f}_1(t, u) \text{ q.t.p. em } [\tau, T] \times \Omega,$$
$$f_2(t, \gamma(u_n)) \to f_2(t, \gamma(u)) \text{ q.t.p. em } [\tau, T] \times \Gamma.$$

Portanto, pelo Lema 1.3, temos

$$\tilde{f}_1(t, u_n) \rightharpoonup \tilde{f}_1(t, u) \text{ em } L^{r_1'}(\tau, T; L^{r_1'}(\Omega)),$$
$$f_2(t, \gamma(u_n)) \rightharpoonup f_2(t, \gamma(u)) \text{ em } L^{r_2'}(\tau, T; L^{r_2'}(\Gamma)),$$

e, como $s \leq \{r_1', r_2'\}$, obtemos

$$\tilde{f}_1(t, u_n) \rightharpoonup \tilde{f}_1(t, u) \text{ em } L^s(\tau, T; L^{r_1'}(\Omega)),$$
$$f_2(t, \gamma(u_n)) \rightharpoonup f_2(t, \gamma(u)) \text{ em } L^s(\tau, T; L^{r_2'}(\Gamma)).$$

Também, das imersões contínuas $L^{r_1'}(\Omega) \hookrightarrow (W^{1,p}(\Omega))^*$ e $L^{r_2'}(\Gamma) \hookrightarrow (W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma))^*$, concluímos

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_1(t, u_n) \rightharpoonup \tilde{f}_1(t, u) \text{ em } L^s(\tau, T; (W^{1,p}(\Omega))^*), \\ &f_2(\gamma(t, u_n)) \rightharpoonup f_2(t, \gamma(u)) \text{ em } L^s(\tau, T; (W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma))^*). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Com tal conclusão garantimos que $\mathcal{F}(t, U_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{F}(t, U)$ em $L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*)$. Com efeito, seja $V \in L^{s'}(\tau, T; \mathbb{V}^p)$, $V(t) = (v(t), \gamma(v)(t)) \in \mathbb{V}^p$ q.t.p. para $t \in [\tau, T]$. Então, como $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{r_1}(\Omega)$ e $W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \hookrightarrow L^{r_2}(\Gamma)$, temos

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_\tau^T \langle \mathcal{F}(t, U_n), V \rangle \, dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\tau^T \left(\left\langle \tilde{f}_1(t, u_n), v \right\rangle_{(L^{r_1}(\Omega))^*, L^{r_1}(\Omega)} + \langle f_2(t, \gamma(u_n)), \gamma(v) \rangle_{(L^{r_2}(\Gamma))^*, L^{r_2}(\Gamma)} \right) dt \\ &= \int_\tau^T \left\langle \tilde{f}_1(t, u), v \right\rangle_{(L^{r_1}(\Omega))^*, L^{r_1}(\Omega)} + \langle f_2(t, \gamma(u)), \gamma(v) \rangle_{(L^{r_2}(\Gamma))^*, L^{r_2}(\Gamma)} \, dt \\ &= \int_\tau^T \langle \mathcal{F}(t, U), V \rangle_{\mathbb{X}^2} \, dt, \end{aligned} \tag{2.18}$$

por (2.17).

■

Para mostrar a próxima convergência precisamos do seguinte lema técnico:

Lema 2.12 (Integração Por Partes). [5, p.43] *Para* $t \in [\tau, T]$, $V_i \in L^p(\tau, T; \mathbb{V}^p) \cap L^\infty(\tau, T; \mathbb{X}^2)$ *e* $\partial_t V_i \in L^{p'}(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*)$, $i = 1, 2$, *vale a seguinte fórmula de integração por partes:*

$$\int_\tau^T \big(\langle \partial_t V_1, V_2 \rangle + \langle \partial_t V_2, V_1 \rangle \big) ds = \langle V_1(T), V_2(T) \rangle - \langle V_1(\tau), V_2(\tau) \rangle \,. \tag{2.19}$$

Proposição 2.13. *Para* U_n *solução de* (P_n) *e* U *obtida em* (2.11), *temos a seguinte convergência:*

$$\beta_p U_n \overset{*}{\rightharpoonup} \beta_p U \ (n \to +\infty),$$

na topologia fraca estrela de $L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*)$, $s = \min\{r_1', r_2', p'\}$.

Demonstração:

Observe que, assim como fizemos para obter a limitação uniforme de $\beta_p U_n$ na Proposição 2.10, conseguimos a estimativa

$$\|\beta_p U_n\|_{L^{p'}(\tau,T;(\mathbb{V}^p)^*)} \leq C,$$

uniformemente em n e t, o que garante que, passando a uma subsequência se necessário, existe $\Xi \in L^{p'}(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*)$ tal que

$$\beta_p U_n \overset{*}{\rightharpoonup} \Xi \text{ em } L^{p'}(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*).$$

Como $s \leq p'$, temos

$$\beta_p U_n \overset{*}{\rightharpoonup} \Xi \text{ em } L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*). \tag{2.20}$$

Queremos provar que $\Xi = \beta_p U$ em $L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*)$. Para isto, note que, pela convergência (2.15), temos que $u_n \to u$ q.t.p em $[\tau, T] \times \Omega$ e $\gamma(u_n) \to \gamma(u)$ q.t.p. em $[\tau, T] \times \Gamma$. Portanto, pelas continuidades das funções f_1, f_2 e do módulo, temos

$$f_1(t, u_n) \to f_1(t, u) \text{ q.t.p em } [\tau, T] \times \Omega;$$

$$|u_n|^{p-2} u_n \to |u|^{p-2} u \text{ q.t.p em } [\tau, T] \times \Omega;$$

$$f_2(t, \gamma(u_n)) \to f_2(t, \gamma(u)) \text{ q.t.p em } [\tau, T] \times \Gamma.$$

Além disso, por (H3), temos

$$\begin{aligned}\int_\tau^T\int_\Omega f_1(t,u_n)u_n dxdt &\leq \int_\tau^T\int_\Omega C_1(t)(|u_n|^{r_1-1}+1)|u_n|dxdt\\ &= \int_\tau^T\int_\Omega C_1(t)(|u_n|^{r_1}+|u_n|)dxdt\\ &\leq \|C_1\|_{L^\infty(\tau,T)}\int_\tau^T\left(\|u_n\|_{L^{r_1}(\Omega)}^{r_1}+\|u_n\|_{L^1(\Omega)}\right)dt\\ &\leq \|C_1\|_{L^\infty(\tau,T)}M_\Omega\int_\tau^T\left(\|u_n\|_{L^{r_1}(\Omega)}^{r_1}+\|u_n\|_{L^2(\Omega)}\right)dt,\end{aligned}$$

e então, por (2.10) e (2.15), a integral é limitada uniformemente em n.

Analogamente, por (H3), temos

$$\int_\tau^T\int_\Gamma f_2(t,\gamma(u_n))\gamma(u_n)dSdt \leq \|C_2\|_{L^\infty(\tau,T)}M_\Gamma\int_\tau^T\left(\|\gamma(u_n)\|_{L^{r_2}(\Gamma)}^{r_2}+\|\gamma(u_n)\|_{L^2(\Gamma)}\right)dt,$$

e então, por (2.10) e (2.15), é limitada uniformemente em n.

Note também que,

$$\int_\tau^T\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_nu_n dxdt = \int_\tau^T\int_\Omega |u_n|^p dxdt \leq \int_\tau^T \|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p dt \leq \int_\tau^T \|U_n\|_{\mathbb{V}^p}^p dt,$$

e então, por (2.10), é limitada uniformemente em n.

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\begin{aligned}&\int_\tau^T \langle \mathcal{F}(t,U_n),U_n\rangle\, dt\\ &\quad= \int_\tau^T\int_\Omega \left(f_1(t,u_n)u_n-|u_n|^{p-2}u_nu_n\right)dxdt+\int_\tau^T\int_\Gamma\left(f_2(t,\gamma(u_n))\gamma(u_n)\right)dSdt\\ &\quad\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_\tau^T\int_\Omega\left(f_1(t,u)u-|u|^{p-2}uu\right)dxdt+\int_\tau^T\int_\Gamma\left(f_2(t,\gamma(u))\gamma(u)\right)dSdt\\ &\quad= \int_\tau^T\langle\mathcal{F}(t,U),U\rangle\,dt.\end{aligned} \tag{Q1}$$

Além disso, por (2.11), temos

$$\int_\tau^T\langle G(t),U_n\rangle\,dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_\tau^T\langle G(t),U\rangle\,dt. \tag{Q2}$$

Como $U_n(\tau)\to U(\tau)$ em $\mathbb{X}^2$, temos

$$\|U_n(\tau)\|_{\mathbb{X}^2}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\|U(\tau)\|_{\mathbb{X}^2}. \tag{Q3}$$

Por (2.16), temos $U_n(t)\to U(t)$ q.t.p. em $\overline{\Omega}$ para todo $t\in[\tau,T]$ e $\|U_n(t)\|_{\mathbb{X}^2}$ é limitada uniformemente em n. Pelo Lema 1.3, temos as convergências fracas $u_n(t)\rightharpoonup u(t)$

em $L^2(\Omega)$ e $\gamma(u_n)(t) \rightharpoonup \gamma(u)(t)$ em $L^2(\Gamma)$, logo $U_n(t) \rightharpoonup U(t)$ em $\mathbb{X}^2$, e assim

$$\|U(t)\|_{\mathbb{X}^2}^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|U_n(t)\|_{\mathbb{X}^2}^2,$$

portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} -\|U_n(t)\|_{\mathbb{X}^2}^2 \leq -\|U(t)\|_{\mathbb{X}^2}^2. \tag{Q4}$$

Considerando $V_1 = V_2 = U_n$ na identidade (2.19), obtemos

$$\int_\tau^T \langle \partial_t U_n, U_n \rangle \, dt = \frac{1}{2}\|U_n(T)\|_{\mathbb{X}^2}^2 - \frac{1}{2}\|U_n(\tau)\|_{\mathbb{X}^2}^2.$$

Como U_n é solução de (P_n), temos

$$\int_\tau^T \langle G(t) - \beta_p U_n - \mathcal{F}(t, U_n), U_n \rangle \, dt = \frac{1}{2}\|U_n(T)\|_{\mathbb{X}^2}^2 - \frac{1}{2}\|U_n(\tau)\|_{\mathbb{X}^2}^2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_\tau^T \langle \beta_p U_n, U_n \rangle \, dt = &- \int_\tau^T \langle -G(t) + \mathcal{F}(t, U_n), U_n \rangle \, dt \\ &- \frac{1}{2}\|U_n(T)\|_{\mathbb{X}^2}^2 + \frac{1}{2}\|U_n(\tau)\|_{\mathbb{X}^2}^2.\end{aligned} \tag{Q5}$$

Considerando agora $V_1 = V_2 = U$ na identidade (2.19), obtemos

$$\int_\tau^T \langle \partial_t U, U \rangle \, ds = \frac{1}{2}\|U(T)\|_{\mathbb{X}^2}^2 - \frac{1}{2}\|U(\tau)\|_{\mathbb{X}^2}^2.$$

Pelas convergências de $\partial_t U_n$, $\beta_p U_n$ e $\mathcal{F}(t, U_n)$ temos que $\partial_t U + \Xi + \mathcal{F}(t, U) = G(t)$ é a equação limite de $\partial_t U_n + \beta_p U_n + \mathcal{F}(t, U_n) = G(t)$ na topologia fraca estrela de $L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*)$. Assim temos

$$\int_\tau^T \langle G(t) - \Xi - \mathcal{F}(t, U), U \rangle \, dt = \frac{1}{2}\|U(T)\|_{\mathbb{X}^2}^2 - \frac{1}{2}\|U(\tau)\|_{\mathbb{X}^2}^2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_\tau^T \langle \Xi, U \rangle \, dt = &- \int_\tau^T \langle -G(t) + \mathcal{F}(t, U), U \rangle \, dt \\ &- \frac{1}{2}\|U(T)\|_{\mathbb{X}^2}^2 + \frac{1}{2}\|U(\tau)\|_{\mathbb{X}^2}^2.\end{aligned} \tag{Q6}$$

Por (Q1)-(Q6), obtemos

$$
\begin{aligned}
\limsup \int_\tau^T & \langle \beta_p U_n, U_n \rangle \, dt \\
&= \limsup \left(-\int_\tau^T \langle -G(t) + \mathcal{F}(t, U_n), U_n \rangle \, dt - \frac{1}{2}\|U_n(T)\|_{\mathbb{X}^2}^2 + \frac{1}{2}\|U_n(\tau)\|_{\mathbb{X}^2}^2 \right) \\
&\leq -\int_\tau^T \langle -G(t) + \mathcal{F}(t, U), U \rangle \, ds - \frac{1}{2}\|U(T)\|_{\mathbb{X}^2}^2 + \frac{1}{2}\|U(\tau)\|_{\mathbb{X}^2}^2 \\
&= \int_\tau^T \langle \Xi, U \rangle \, ds.
\end{aligned}
$$

Portanto, como o operador $\beta_p : \mathbb{V}^p \to (\mathbb{V}^p)^*$ é maximal monótono, pelo Corolário 1.20 temos que $\Xi = \beta_p U$ em $L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*)$.

■

Agora temos condições de mostrar a existência de solução fraca para o Problema (P).

Teorema 2.14 (Existência de Solução fraca para o Problema (P))**.** *Suponha que as Hipóteses (H1)-(H3) estejam satisfeitas. Dados $\tau \in \mathbb{R}$, $T > \tau$ e $U_0 \in \mathbb{X}^2$, existe uma solução fraca do Problema (P) com condição inicial U_0.*

Demonstração: Por (2.14) e pelas Proposições 2.11 e 2.13, temos que a equação funcional $\partial_t U + \beta_p U + \mathcal{F}(t, U) = G(t)$ é a equação limite de $\partial_t U_n + \beta_p U_n + \mathcal{F}(t, U_n) = G(t)$ na topologia fraca estrela de $L^s(\tau, T; (\mathbb{V}^p)^*)$. Assim, temos uma solução para o Problema (PF). Note que, por (2.14), (2.11) e (2.16), temos as regularidades desejadas.

A existência de solução para o Problema (PF) e a Observação 2.9 garantem o resultado desejado.

■

Como T é arbitrário, a solução é claramente globalmente definida.

Proposição 2.15. *A família $\mathscr{G} = \{\mathscr{G}(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{R}}$, onde*

$$
\mathscr{G}(\tau) := \left\{ \begin{array}{c} U : [\tau, +\infty) \to \mathbb{X}^2;\ U \text{ é solução fraca do Problema } (P), \text{ gerada} \\ \text{pelo processo de Faedo-Galerkin, com condição inicial em } \tau \end{array} \right\},
$$

é um processo generalizado exato em $\mathbb{X}^2$.

Demonstração: De fato, pelo Teorema 2.14, (C1) está garantido. Podemos ver que (C2) está satisfeita, pois, se $U : [\tau, +\infty) \to \mathbb{X}^2$ é solução fraca do Problema (P) com condição inicial em τ, dado $s \in \mathbb{R}$ e $s \geq 0$, então $U_{|[\tau+s,+\infty)} : [\tau + s, +\infty) \to \mathbb{X}^2$ é solução fraca do Problema (P) com condição inicial em $\tau + s$. Portanto $U^{+s} \in \mathscr{G}(\tau + s)$.

Para mostrar a propriedade (C4), suponha que existam $U \in \mathscr{G}(\tau)$ e $V \in \mathscr{G}(r)$, $-\infty < \tau \leq r \leq s$, tais que $U(s) = V(s)$. É fácil ver que a função

$$\Theta(t) := \begin{cases} U(t), & t \in [\tau, s] \\ V(t), & t \in (s, \infty) \end{cases} \tag{2.21}$$

satisfaz, q.t.p. em $[\tau, \infty)$, as condições da solução fraca. Portanto $\Theta \in \mathscr{G}(\tau)$.

Para a propriedade (C3), suponha que, para algum $\tau \in \mathbb{R}$ e algum $Z \in \mathbb{X}^2$, exista uma sequência $\{U_j\} \subset \mathscr{G}(\tau)$ tal que $U_j(\tau) \to Z$ em $\mathbb{X}^2$. Similarmente ao que foi feito para obter (2.10) temos que para cada $T > \tau$ existe $C > 0$ independente de j e $t \in (\tau, T)$, tal que

$$\begin{cases} \|U_j(t)\|_{L^\infty(\tau,T;\mathbb{X}^2)} \leq C \\ \|U_j(t)\|_{L^p(\tau,T;\mathbb{V}^p)} \leq C \\ \|u_j(t)\|_{L^{r_1}(\tau,T;L^{r_1}(\Omega))} \leq C, & \text{se } p \leq N \\ \|u_j(t)\|_{L^p(\tau,T;C(\overline{\Omega}))} \leq C, & \text{se } p > N. \end{cases} \tag{2.22}$$

Isto garante que, a menos de subsequências, existe U tal que

$$\begin{aligned} &U_j \overset{*}{\rightharpoonup} U \text{ em } L^\infty(\tau, T; \mathbb{X}^2); \\ &U_j \rightharpoonup U \text{ em } L^p(\tau, T; \mathbb{V}^p). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Com o raciocínio análogo ao utilizado no Teorema 2.14, podemos garantir que U goza da propriedade de ser uma solução fraca, $U(\tau) = Z$ e $U_j(t) \to U(t)$ em $\mathbb{X}^2$, para todo $t > \tau$. Portanto, $U \in \mathscr{G}(\tau)$, garantindo assim (C3).

■

Portanto, garantimos que o Problema (P) gera um $\mathscr{G}$-processo multívoco $U(\cdot, \cdot)$ em $\mathbb{X}^2$.

2.3 Resultado de Comparação de Soluções

Dado $\tau \in \mathbb{R}$, consideremos os seguintes problemas:

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u + f_1(t, u) = g_1(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (\tau, +\infty), \\ u_t + |\nabla u|^{p-2} \partial_{\vec{n}} u + f_2(t, u) = g_2(t, x), & (x, t) \in \Gamma \times (\tau, +\infty), \\ u(\tau) = u_0, \end{cases} \tag{2.24}$$

$$
\begin{cases}
u_t - \Delta_p u + \tilde{f}_1(t,u) = \tilde{g}_1(t,x), \quad (x,t) \in \Omega \times (\tau, +\infty), \\
u_t + |\nabla u|^{p-2}\partial_{\vec{n}} u + \tilde{f}_2(t,u) = \tilde{g}_2(t,x), \qquad (x,t) \in \Gamma \times (\tau, +\infty), \\
u(\tau) = v_0,
\end{cases}
\tag{2.25}
$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fronteira $\Gamma := \partial\Omega$ suave, $p \in [2, +\infty)$, o operador Δ_p denota o operador p-Laplaciano, definido como $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, e as perturbações satisfazem as seguintes hipóteses:

(CR1) Sejam $g_1, \tilde{g}_1 \in L^{p'}_{loc}(\mathbb{R}; L^{r_1'}(\Omega))$, $g_2, \tilde{g}_2 \in L^{p'}_{loc}(\mathbb{R}; L^{r_2'}(\Gamma))$, com

$$
r_1 \in \begin{cases}
(p, pN/(N-p)], & \text{se } p \in [2, N), \\
(p, +\infty), & \text{se } p = N, \\
[p, +\infty), & \text{se } p > N
\end{cases}
\tag{2.26}
$$

e

$$
r_2 \in \begin{cases}
(2, (N-1)p/(N-p)], & \text{se } p \in [2, N), \\
(2, +\infty), & \text{se } p = N, \\
[2, +\infty), & \text{se } p > N;
\end{cases}
\tag{2.27}
$$

(CR2) $f_i, \tilde{f}_i \in C(\mathbb{R}^2)$ para $i = 1, 2$ e satisfazem as seguintes condições de crescimento

$$
\begin{cases}
a_i(t)|s|^{r_i} - k_i(t) \leq f_i(t,s)s, \\
\tilde{a}_i(t)|s|^{r_i} - \tilde{k}_i(t) \leq \tilde{f}_i(t,s)s,
\end{cases}
\tag{2.28}
$$

q.t.p. para $t \in \mathbb{R}$ e todo $s \in \mathbb{R}$, onde $a_i, \tilde{a}_i \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ são funções reais satisfazendo $a_i(t), \tilde{a}_i \geq a_0 > 0$ para algum $a_0 \in \mathbb{R}$ e $k_i \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ são funções positivas, para $i = 1, 2$.

(CR3) Existem funções $C_i, \tilde{C}_i \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, tais que $|f_i(t,s)| \leq C_i(t)(|s|^{r_i - 1} + 1)$, $|\tilde{f}_i(t,s)| \leq \tilde{C}_i(t)(|s|^{r_i-1} + 1)$ q.t.p. para $t \in \mathbb{R}$ e todo $s \in \mathbb{R}$.

(CR4) Suponha $g_1(t,x) \leq \tilde{g}_1(t,x)$ q.t.p em Ω e suponha $g_2(t,x) \leq \tilde{g}_2(t,x)$ q.t.p em Γ, ambas q.t.p. em $t \in \mathbb{R}$;

(CR5) Suponha que $f_1(t,s) \geq \tilde{f}_1(t,s)$ e $f_2(t,s) \geq \tilde{f}_2(t,s)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e q.t.p para $s \in \mathbb{R}$.

Observação 2.16. *Dados $u \in W^{1,p}(\Omega)$, definamos*

$$u^+ := \begin{cases} u(x), & \text{se } u(x) > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.29}$$

Observe que podemos definir $u^+ = uH(u)$, onde H é a função de Heaviside, ou seja,

$$H(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } s > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Segundo [55], para $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, temos que $(u-v)^+ \in W^{1,p}(\Omega)$ e vale a fórmula

$$\nabla(u-v)^+ = H(u-v)\nabla(u-v) = \begin{cases} \nabla u - \nabla v & \text{se } u - v > 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.30}$$

Note que

$$\left\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla(u-v)^+ \right\rangle_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)\left(\nabla(u-v)^+\right) dx \\ &= \int_{(u-v)>0} \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) . (\nabla u - \nabla v))\, dx \\ &\geq \int_{(u-v)>0} \gamma_0 |\nabla u - \nabla v|^p dx \geq 0, \end{aligned}$$

pela Desigualdade de Tartar, onde $\gamma_0 > 0$.

Observação 2.17. *Para $U = \begin{pmatrix} u \\ \gamma(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{V}^p$, definamos*

$$U^+ := \begin{pmatrix} u^+ \\ \gamma(u^+) \end{pmatrix} \in \mathbb{V}^p.$$

Observe que, pelo Lema 1.34, $\gamma(u^+) \geq 0$ em $\Gamma = \partial\Omega$.

Observação 2.18. *Note que, dados $U, V \in \mathbb{V}^p$, temos*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(U-V)^+\|^2_{\mathbb{X}^2} = \left\langle \frac{d}{dt}(U-V), (U-V)^+ \right\rangle_{\mathbb{X}^2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\langle (U-V)^+,(U-V)^+\right\rangle_{\mathbb{X}^2} &= \left\langle \frac{d}{dt}(U-V)^+,(U-V)^+\right\rangle_{\mathbb{X}^2}\\
&= \int_{\overline{\Omega}} \frac{d}{dt}(U-V)^+(U-V)^+d\mu\\
&= \int_{U-V>0} \frac{d}{dt}(U-V)(U-V)^+d\mu\\
&\qquad + \int_{U-V\leq 0} \frac{d}{dt}(U-V)(U-V)^+d\mu\\
&= \left\langle \frac{d}{dt}(U-V),(U-V)^+\right\rangle_{\mathbb{X}^2},
\end{aligned}$$

pois $\displaystyle\int_{U-V\leq 0} \frac{d}{dt}(U-V)(U-V)^+d\mu = 0.$

2.3.1 Resultado de Comparação

Definição 2.19. *Sejam $U:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ e $V:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$. Se $U\leq V$ q.t.p. em $\overline{\Omega}$, então denotamos $U\leq V$.*

Teorema 2.20. *Suponha que as hipóteses (CR1)-(CR3) estejam satisfeitas, e sejam U solução fraca do Problema (2.24) e V solução fraca do Problema (2.25). Com as Hipóteses (CR4) e (CR5), temos que, se $U(\tau)=U_0\leq V_0=V(\tau)$, então $U\leq V$ para todo $t\in[\tau,\infty)$.*

Demonstração: Tomando $\Psi=(U-V)^+$ na expressão (2.3), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \partial_t U,(U-V)^+\right\rangle_{\mathbb{X}^2} + \left\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u,\nabla(u-v)^+\right\rangle_{L^2(\Omega)}\\
&\quad + \left\langle f_1(t,u),(u-v)^+\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle f_2(t,\gamma u),\gamma((u-v)^+)\right\rangle_{L^2(\Gamma)}\\
&\quad = \left\langle g_1(t),(u-v)^+\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle g_2(t),\gamma((u-v)^+)\right\rangle_{L^2(\Gamma)},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\left\langle \partial_t V,(U-V)^+\right\rangle_{\mathbb{X}^2} + \left\langle |\nabla v|^{p-2}\nabla v,\nabla(u-v)^+\right\rangle_{L^2(\Omega)}\\
&\quad + \left\langle \tilde{f}_1(t,v),(u-v)^+\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle \tilde{f}_2(t,\gamma v),\gamma((u-v)^+)\right\rangle_{L^2(\Gamma)}\\
&\quad = \left\langle \tilde{g}_1(t),(u-v)^+\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle \tilde{g}_2(t),\gamma((u-v)^+)\right\rangle_{L^2(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

Subtraindo uma expressão da outra, temos

$$\begin{aligned}
&\left\langle \partial_t U - \partial_t V, (U-V)^+ \right\rangle_{\mathbb{X}^2} + \left\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla(u-v)^+ \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \left\langle f_1(t,u) - \tilde{f}_1(t,v), (u-v)^+ \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle f_2(t,\gamma u) - \tilde{f}_2(t,\gamma v), \gamma((u-v)^+) \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \\
&\quad = \left\langle g_1(t) - \tilde{g}_1(t), (u-v)^+ \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle g_2(t) - \tilde{g}_2(t), \gamma((u-v)^+) \right\rangle_{L^2(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

Logo, pela Observação 2.18, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(U-V)^+\|_{\mathbb{X}^2}^2 + \left\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla(u-v)^+ \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&\quad = -\left\langle f_1(t,u) - \tilde{f}_1(t,v), (u-v)^+ \right\rangle_{L^2(\Omega)} - \left\langle f_2(t,\gamma u) - \tilde{f}_2(t,\gamma v), \gamma((u-v)^+) \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \\
&\qquad + \left\langle g_1(t) - \tilde{g}_1(t), (u-v)^+ \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle g_2(t) - \tilde{g}_2(t), \gamma((u-v)^+) \right\rangle_{L^2(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

Portanto, das Hipóteses (CR4) e (CR5) e das Observações 2.16 e 2.17, segue que

$$\frac{d}{dt}\|(U-V)^+\|_{\mathbb{X}^2}^2 \leq 0.$$

Integrando de τ a t, obtemos

$$\|(U-V)^+(t)\|_{\mathbb{X}^2}^2 \leq \|(U-V)^+(\tau)\|_{\mathbb{X}^2}^2.$$

Como $U_0 \leq V_0$, então $(U-V)^+(\tau) = 0$ q.t.p em $\overline{\Omega}$, assim $(U-V)^+(t) = 0$ q.t.p em $t \in [\tau, \infty)$, portanto $V \geq U$ para todo $t \in [\tau, \infty)$.

■

Capítulo 3

Atrator Pullback para Processos Generalizados

3.1 Processos Generalizados

Essa seção é baseada no trabalho [57]. Nossa definição de processo generalizado é ligeiramente diferente da definição em [57], porém as demonstrações dos resultados desta seção são exatamente iguais às demonstrações de resultados equivalentes em [57]. Apresentaremos as demonstrações para a completude do trabalho.

Seja (X, ρ) um espaço métrico completo. Denotemos respectivamente por $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{B}(X)$ e $\mathcal{K}(X)$ as famílias de conjuntos não vazios, não vazios limitados e não vazios compactos de X, respectivamente. Para $x \in X$, $A, B \in \mathcal{P}(X)$, e $\varepsilon > 0$, definimos

$$\rho(x, A) := \inf_{a \in A}\{\rho(x, a)\};$$

$$dist(A, B) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B}\{\rho(a, b)\};$$

$$\mathcal{O}_\varepsilon(A) := \{z \in X; \rho(z, A) < \varepsilon\}.$$

Definição 3.1 (Processo Generalizado). *Um* ***processo generalizado*** $\mathscr{G} = \{\mathscr{G}(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ *em* X *é uma família de conjuntos* $\mathscr{G}(\tau)$ *que são constituídos de funções, chamadas de soluções,* $\varphi : [\tau, \infty) \to X$*, satisfazendo as seguintes condições:*

(C1) - Para cada $\tau \in \mathbb{R}$ *e* $z \in X$ *existe ao menos uma* $\varphi \in \mathscr{G}(\tau)$ *com* $\varphi(\tau) = z$*;*

(C2) - Se $\varphi \in \mathscr{G}(\tau)$ *e* $s \geq 0$*, então* $\varphi^{+s} \in \mathscr{G}(\tau + s)$*, onde* $\varphi^{+s} := \varphi_{|[\tau+s,\infty)}$*;*

(C3) - Se $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}(\tau)$ *e* $\varphi_j(\tau) \to z$, *então existem uma subsequência* $\{\varphi_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *e* $\varphi \in \mathscr{G}(\tau)$ *com* $\varphi(\tau) = z$ *e tais que* $\varphi_{j_k}(t) \to \varphi(t)$ *quando* $k \to \infty$, *para cada* $t \geq \tau$.

Observação 3.2. *Em geral, nas aplicações, queremos que o conjunto* $\mathscr{G}(\tau)$ *seja formado por soluções do tipo* $\varphi : [\tau, +\infty) \to X$, *com* $\tau \in \mathbb{R}$, *de um determinado problema não autônomo com condição inicial em* τ, *ou seja, que* φ *satisfaça*

$$\begin{cases} \varphi_t = F(t, \varphi), \ \forall t > \tau, \\ \varphi(\tau) = x_0, \end{cases}$$

para alguma condição inicial $x_0 \in X$, *e que tal solução não seja necessariamente única. Se tais soluções têm as propriedades desejadas, obtemos um processo generalizado* $\mathscr{G}$. *O fato de as soluções de um problema não autônomo gerarem um processo generalizado ou não, vai depender de cada problema.*

Definição 3.3 (Processo Generalizado Exato ou Estrito). *Seja* $\mathscr{G} = \{\mathscr{G}(\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ *um processo generalizado que satisfaz:*

(C4) - (Concatenação) Seja $\varphi \in \mathscr{G}(\tau)$ *e* $\psi \in \mathscr{G}(r)$ *tais que* $\varphi(s) = \psi(s)$, *para algum* $s \geq r \geq \tau$. *Se* θ *é definida por*

$$\theta(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in [\tau, s] \\ , \psi(t), & t \in (s, \infty), \end{cases}$$

então $\theta \in \mathscr{G}(\tau)$.

Tal processo generalizado é denominado ***processo generalizado exato (ou estrito)***.

Definição 3.4 (Processo Generalizado Contínuo). *Dizemos que um processo generalizado* $\mathscr{G}$ *é* ***contínuo*** *se, para cada* $\tau \in \mathbb{R}$, *as funções* $\varphi \in \mathscr{G}(\tau)$ *são contínuas de* $[\tau, \infty)$ *em* X.

Definição 3.5 ($\mathscr{G}$-processo multívoco). *Um* ***processo multívoco*** $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ ***associado a*** $\mathscr{G}$ *(ou* $\mathscr{G}$***-processo multívoco****) é uma família de operadores multívocos* $U(t, \tau) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, *com* $-\infty < \tau \leq t < +\infty$, *definidos por*

$$U(t, \tau)D := \{\varphi(t); \varphi \in \mathscr{G}(\tau), \text{ com } \varphi(\tau) \in D\},$$

para cada $\tau \in \mathbb{R}$, $t \geq \tau$ *e* $D \subset X$.

Teorema 3.6. *Seja $\mathscr{G}$ um processo generalizado exato e $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ um processo multívoco associado a $\mathscr{G}$. Então $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ tem as seguintes propriedades:*

1. $U(t,t) = Id_{\mathcal{P}(X)}$;

2. $U(t,\tau)D = U(t,s)U(s,\tau)D$, *para todo* $-\infty < \tau \leq s \leq t < \infty$ *e* $D \subset X$.

Demonstração:

1. Sejam $D \subset X$ e $z \in U(t,t)D$. Pela definição de $\mathscr{G}$-processo multívoco, existe $\varphi \in \mathscr{G}(t)$ tal que $\varphi(t) = z$ e $\varphi(t) \in D$. Portanto, $z \in D$.

   Por outro lado, se $z \in D$, por (C1), para cada $t \in \mathbb{R}$, existe $\varphi \in \mathscr{G}(t)$ tal que $\varphi(t) = z$. Logo, por definição, $z \in U(t,t)D$.

2. Sejam $t, s, \tau \in \mathbb{R}$ tais que $t \geq s \geq \tau$. Note que, se $s = t_2 \geq \tau$, existe $t_1 \geq 0$ tal que $s + t_1 = t_2 + t_1 = t$. Portanto, provar que

$$U(t,\tau)D = U(t,s)U(s,\tau)D$$

   é equivalente a provar que

$$U(t_1+t_2,\tau)D = U(t_1+t_2,t_2)U(t_2,\tau)D.$$

   Provemos então que $U(t_1+t_2,\tau)D = U(t_1+t_2,t_2)U(t_2,\tau)D$. Sejam $v \in D$, $z \in U(t_1+t_2,\tau)v$ e $t_1, t_2, \tau \in \mathbb{R}$ como acima. Então existe $\varphi \in \mathscr{G}(\tau)$ tal que $\varphi(t_1+t_2) = z$ e $\varphi(\tau) = v$. Pela definição de $\mathscr{G}$-processo multívoco, $\varphi(t_2) \in U(t_2,\tau)v$.

   Note que, por (C2), $\varphi^{+(t_2-\tau)} \in \mathscr{G}(t_2)$ e, além disso, $\varphi^{+(t_2-\tau)}(t_2) = \varphi(t_2) \in U(t_2,\tau)v$. Assim, como $t_1 + t_2 \geq t_2$, temos

$$z = \varphi(t_1+t_2) = \varphi^{+(t_2-\tau)}(t_1+t_2) \in U(t_1+t_2,t_2)U(t_2,\tau)v.$$

   Portanto,

$$U(t_1+t_2,\tau)v \subset U(t_1+t_2,t_2)U(t_2,\tau)v.$$

   Como $v \in D$ é arbitrário, concluímos que

$$U(t_1+t_2,\tau)D \subset U(t_1+t_2,t_2)U(t_2,\tau)D.$$

Por outro lado, dados $v \in D$, $z \in U(t_1 + t_2, t_2)U(t_2, \tau)v$, t_1, t_2 e τ como anteriormente, segue que existe $\varphi \in \mathscr{G}(t_2)$ tal que $\varphi(t_1 + t_2) = z$ e $\varphi(t_2) \in U(t_2, \tau)v$.

Então, existe $\psi \in \mathscr{G}(\tau)$ tal que $\psi(t_2) = \varphi(t_2)$ com $\psi(\tau) = v$. Defina

$$\theta(t) := \begin{cases} \psi(t), & t \in [\tau, t_2] \\ \varphi(t), & t \in (t_2, \infty). \end{cases}$$

Por (C4), $\theta \in \mathscr{G}(\tau)$ com $\theta(\tau) = \psi(\tau) = v$.

Logo,

$$z = \varphi(t_1 + t_2) = \theta(t_1 + t_2) \in U(t_1 + t_2, \tau)v.$$

Portanto,

$$U(t_1 + t_2, t_2)U(t_2, \tau)v \subset U(t_1 + t_2, \tau)v.$$

Como $v \in D$ é arbitrário, o teorema está provado.

■

Observação 3.7. *Segue da demonstração do teorema anterior que, se o processo generalizado $\mathscr{G}$ não é exato, então podemos garantir que o processo multívoco satisfaz apenas a inclusão abaixo*

$$U(t, \tau)D \subset U(t, s)U(s, \tau)D$$

para todo $-\infty < \tau \leq s \leq t < \infty$ e $D \subset X$. Ou seja, se $\mathscr{G}$ não satisfizer a condição de concatenação (C4), então não podemos garantir que o processo determinado por $\mathscr{G}$ é exato.

Observação 3.8. *Se $\mathscr{G}$ é um processo generalizado e $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ o $\mathscr{G}$-processo multívoco, então segue diretamente da definição de $\mathscr{G}$-processo multívoco que $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é monótono com respeito à inclusão de conjuntos, i.e., $E \subset F$ implica $U(t,\tau)E \subset U(t,\tau)F$, para todo $-\infty < \tau \leq t < +\infty$.*

Proposição 3.9. *Sejam $\mathscr{G}$ um processo generalizado e $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ o $\mathscr{G}$-processo multívoco, então $U(t,\tau)x$ é compacto, para cada $x \in X$ e $-\infty < \tau \leq t < +\infty$.*

Demonstração: Seja $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $U(t,\tau)x$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\varphi_n \in \mathscr{G}(\tau)$ tal que $\varphi_n(t) = z_n$ e $\varphi_n(\tau) = x$. Logo, $\varphi_n(\tau) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Por (C3), existem subsequência $\{\varphi_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\varphi \in \mathscr{G}(\tau)$ com $\varphi(\tau) = x$, tais que $\varphi_{n_j}(s) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(s)$, para cada $s \geq \tau$. Então, $z_{n_j} = \varphi_{n_j}(t) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(t) \in U(t,\tau)x$. Portanto, a sequência $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem subsequência convergente.

■

Definição 3.10. *Sejam X e Y espaços métricos.*

- *Uma função multívoca $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ é **semicontínua superiormente (s.c.s.)** se, dada uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x$ quando $n \to \infty$, toda sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ satisfazendo $y_n \in F(x_n)$ possui subsequência convergente para um elemento de $F(x)$.*

Teorema 3.11. *Seja $\mathscr{G}$ um processo generalizado e $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ um $\mathscr{G}$-processo multívoco, então $U(t,\tau) : X \to \mathcal{K}(X)$ é uma função semicontínua superiormente e tem gráfico fechado, para todo $-\infty < \tau \leq t < +\infty$.*

Demonstração:

A semicontinuidade superior de $U(t,\tau)$ decorre diretamente da propriedade (C3) e da definição de processo multívoco determinado por $\mathscr{G}$.

Para mostrar que $U(t,\tau)$ possui a propriedade de gráfico fechado, seja $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que $y_n \in U(t,\tau)x_n$, $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ em X. Pela s.c.s., a sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente para algum elemento de $U(t,\tau)x$, e portanto $y \in U(t,\tau)x$.

■

3.2 $\mathscr{D}-$Atrator Pullback

Uma teoria completa para o caso unívoco do atrator pullback e do $\mathscr{D}$-atrator pullback pode ser encontrada em [18]. O atrator pullback tradicional atrai conjuntos limitados, enquanto o $\mathscr{D}$-atrator pullback atrai uma coleção pré-determinada de conjuntos, que, em geral, inclui os conjuntos limitados, veja [1, 18, 61]. Desta forma, embora não seja uma regra, em geral o $\mathscr{D}$-atrator pullback é mais abrangente que o atrator pullback.

O conceito de atrator pullback para o caso multívoco pode ser encontrado em [57]. Nesta seção apresentaremos o conceito de $\mathscr{D}$-atrator pullback para o caso multívoco, e apresentaremos condições que garantem sua existência.

Ao longo desta seção, $\mathscr{G}$ denotará um processo generalizado (não necessariamente exato) e $U(\cdot,\cdot)$ o $\mathscr{G}$-processo multívoco associado.

Definição 3.12. *Seja $A = \{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ uma família de subconjuntos de X.*

- *A é **positivamente invariante** se $U(t,\tau)A(\tau) \subset A(t)$, para todo $-\infty < \tau \leq t < \infty$;*
- *A é **negativamente invariante** se $A(t) \subset U(t,\tau)A(\tau)$, para todo $-\infty < \tau \leq t < \infty$;*
- *A é **invariante** se $U(t,\tau)A(\tau) = A(t)$, para todo $-\infty < \tau \leq t < \infty$.*

Seja $\mathcal{M}$ a coleção de todas as famílias de subconjuntos não vazios de X dependentes do tempo, denotadas por

$$D(\cdot) = \{D(t);\ D(t) \subset X,\ D(t) \neq \emptyset\}_{t\in\mathbb{R}}.$$

Se $D(\cdot)$ e $D'(\cdot)$ são elementos de $\mathcal{M}$, então a notação $D'(\cdot) \subset D(\cdot)$ significa $D'(t) \subset D(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Dizemos que $D(\cdot) \in \mathcal{M}$ é limitado (respectivamente, fechado, compacto) se $D(t)$ é limitado (respectivamente, fechado, compacto), para cada $t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.13. *Um subconjunto $\mathscr{D}$ de $\mathcal{M}$ é **fechado para inclusão** se, para quaisquer $D(\cdot) \in \mathscr{D}$ e $D'(\cdot) \in \mathcal{M}$ tais que $D'(\cdot) \subset D(\cdot)$, tem-se $D'(\cdot) \in \mathscr{D}$. Neste caso, chamamos $\mathscr{D}$ de **universo**.*

Daqui em diante, $\mathscr{D}$ sempre denotará um universo.

Observação 3.14. *Note que, se $D(\cdot) \in \mathcal{M}$ e $t \geq \tau \in \mathbb{R}$, temos*

$$U(t,\tau)D(\tau) = \{\varphi(t);\ \varphi \in \mathscr{G}(\tau) \text{ e } \varphi(\tau) \in D(\tau)\}.$$

Definição 3.15.

1. *Uma família $A(\cdot) \in \mathcal{M}$ **atrai no sentido pullback** uma família $B(\cdot) \in \mathscr{D}$ se*

$$dist(U(t,s)B(s), A(t)) \to 0 \text{ quando } s \to -\infty, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

2. *Uma família $C(\cdot) \in \mathcal{M}$ é **$\mathscr{D}$-absorvente no sentido pullback** se, para cada $D(\cdot) \in \mathscr{D}$ e $t \in \mathbb{R}$ existe $\tau_0(t, D) \leq t$ tal que*

$$U(t,\tau)D(\tau) \subset C(t), \text{ para todo } \tau \leq \tau_0(t, D).$$

Definição 3.16. *Uma família de conjuntos compactos $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}(\cdot)$ é um **$\mathscr{D}$-atrator pullback** do $\mathscr{G}$-processo multívoco $U(\cdot,\cdot)$ se*

(i) $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}(\cdot)$ *é invariante;*

(ii) $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}(\cdot)$ *atrai no sentido pullback todo $D(\cdot) \in \mathscr{D}$, ou seja,*

$$\lim_{s \to -\infty} dist(U(t,s)D(s), \mathscr{A}_{\mathscr{D}}(t)) = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R};$$

(iii) $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}(\cdot)$ *é a família minimal fechada com a propriedade (ii), i.e., se $C(\cdot)$ é fechado e tem a propriedade (ii), então $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}(\cdot) \subset C(\cdot)$.*

Definição 3.17. *Dizemos que existe uma **trajetória completa** por $x \in X$ em $\tau \in \mathbb{R}$ se existe uma função $\psi : \mathbb{R} \to X$ com $\psi(\tau) = x$ e, para todo $s \in \mathbb{R}$, temos $\psi_{|[s,+\infty)} \in \mathscr{G}(s)$. Neste caso, a **órbita** completa é dada por*

$$\gamma(\psi) := Im(\psi) = \{\psi(t);\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Definição 3.18. *Seja $D(\cdot) \in \mathscr{D}$. Dado $t \in \mathbb{R}$, definimos a **órbita** de $D(\cdot)$ em t a partir de $\xi \leq t$ como*

$$\gamma^{\xi}(t, D(\cdot)) = \bigcup_{s \leq \xi} U(t,s)D(s);$$

*e definimos o **conjunto ω-limite** de $D(\cdot)$ em $t \in \mathbb{R}$ como*

$$\omega(t, D) = \omega(t, D(\cdot)) := \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\gamma^{\sigma}(t, D(\cdot))}^{X} = \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} U(t,s)D(s)}^{X}.$$

Uma forma equivalente de caracterizar o conjunto ω-limite é

$$\omega(t, D) = \left\{ \begin{array}{l} z \in X;\ \text{existem } \ s_k \to -\infty,\ x_k \in D(s_k) \text{ e} \\ \xi_k \in U(t, s_k)x_k \ \text{ tais que } z = \lim\limits_{k \to \infty} \xi_k \end{array} \right\}.$$

Ou ainda, em termo de processo generalizado $\mathscr{G}$,

$$\omega(t, D) = \left\{ \begin{array}{l} z \in X; \ \ \text{existem } \ s_k \to -\infty \text{ e } \ \varphi_k \in \mathscr{G}(s_k) \\ \text{com } \ \varphi_k(s_k) \in D(s_k) \ \text{ e } \ z = \lim\limits_{k \to \infty} \varphi_k(t) \end{array} \right\}. \tag{3.1}$$

De fato, dados $t \in \mathbb{R}$ e $D(\cdot) \in \mathscr{D}$, seja $z \in X$ tal que existem sequências $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, t]$ e $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}$ tais que $\varphi_k \in \mathscr{G}(s_k)$, $\varphi_k(s_k) \in D(s_k)$, $s_k \to -\infty$ quando $k \to \infty$ e

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(t) = z.$$

Dado $\sigma \leq t$, existe k_0 tal que, se $k > k_0$, então $s_k < \sigma$ e

$$\begin{aligned}
&\varphi_k(t) \in U(t, s_k)D(s_k) \\
&\Rightarrow \varphi_k(t) \in \bigcup_{s\leq\sigma} U(t,s)D(s), \quad \forall\, k > k_0, \\
&\Rightarrow z \in \overline{\bigcup_{s\leq\sigma} U(t,s)D(s)}^X .
\end{aligned}$$

Logo, como $\sigma \leq t$ é arbitrário, temos $z \in \omega(t, D)$.

Reciprocamente, dados $t \in \mathbb{R}$ e $D(\cdot) \in \mathscr{D}$, seja $z \in \omega(t, D)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $-n \leq t$, existe uma sequência $\{y_k^n\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \bigcup_{s\leq -n} U(t,s)D(s)$ tal que $y_k^n \to z$ quando $k \to \infty$.

Ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $-n \leq t$, existem sequências $\{s_k^n\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, -n]$ tais que $y_k^n \in U(t, s_k^n)D(s_k^n)$ e sequências $\{\varphi_k^n\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}$ tais que $\varphi_k^n \in \mathscr{G}(s_k^n)$ e $y_k^n = \varphi_k^n(t)$. Portanto,

$$z = \lim_{k\to\infty} \varphi_k^n(t), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } -n \leq t.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $-n \leq t$, seja $k_n = k(n)$ satisfazendo

$$d(z, \varphi_{k_n}^n(t)) < \frac{1}{n}.$$

Seja $\varphi^n := \varphi_{k_n}^n$ e $s^n := s_{k_n}^n$, logo $\varphi^n \in D(s^n)$, $\varphi^n(t) \in U(t, s^n)D(s^n)$, com $s^n \leq -n$. Portanto, $s^n \to -\infty$ quando $n \to \infty$ e

$$z = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(t),$$

assim como queríamos demonstrar.

Definição 3.19. *O processo generalizado $\mathscr{G}$ é* ***$\mathscr{D}$-assintoticamente compacto no sentido pullback ($\mathscr{D}$-PAC)*** *se, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $D(\cdot) \in \mathscr{D}$, se $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}$ é tal que $\varphi_n \in \mathscr{G}(\tau_n)$ e $\varphi_n(\tau_n) \in D(\tau_n)$, com $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, t]$ e $\tau_n \to -\infty$, então a sequência $\{\varphi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem subsequência convergente.*

Equivalentemente a essa definição, o processo generalizado $\mathscr{G}$ é $\mathscr{D}$-PAC em t se, para todo $D(\cdot) \in \mathscr{D}$, toda sequência $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, com $\xi_n \in U(t, \tau_n)D(\tau_n)$ e $\tau_n \to -\infty$, tem subsequência convergente.

Os dois próximos resultados estão demonstrados no contexto multívoco (processos multívocos) em [14]. No entanto, apresentamos demonstrações que utilizam a ferramenta do processo generalizado, que nos permite utilizar as características das curvas para obter os resultados.

Teorema 3.20. *Seja $\mathscr{G}$ um processo generalizado $\mathscr{D}$-PAC e $U(\cdot,\cdot)$ o $\mathscr{G}$-processo multívoco. Então, para todo $D(\cdot) \in \mathscr{D}$ e $t \in \mathbb{R}$, $\omega(t,D)$ é não vazio, compacto, atrai $D(\cdot)$ e é negativamente invariante, i.e., $\omega(t,D) \subset U(t,s)\omega(s,D)$ para todo $s \leq t$.*

Demonstração: Provemos inicialmente que $\omega(t,D) \neq \emptyset$. Seja $\{\varphi_k\} \subset \mathscr{G}$ tal que $\varphi_k \in \mathscr{G}(\tau_k)$, com $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (-\infty,t]$, $\tau_k \to -\infty$ e $\varphi_k(\tau_k) \in D(\tau_k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, $\varphi_k(t) \in U(t,\tau_k)D(\tau_k)$. Como $\mathscr{G}$ é $\mathscr{D}$-PAC, a sequência $\{\varphi_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente e, por definição, o limite dessa subsequência pertence a $\omega(t,D)$. Portanto, $\omega(t,D) \neq \emptyset$.

Além disso, $\omega(t,D)$ atrai $D(\cdot)$ no sentido pullback, pois, caso contrário, existiriam sequências $\{\varphi_k\} \subset \mathscr{G}$, $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (-\infty,t]$ e $\varepsilon > 0$ tais que $\varphi_k \in \mathscr{G}(\tau_k)$, $\tau_k \to -\infty$ e $\varphi_k(t) \in U(t,\tau_k)D(\tau_k)$, satisfazendo

$$dist(\varphi_k(t),\omega(t,D)) > \varepsilon, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Porém, como $\mathscr{G}$ é $\mathscr{D}$-PAC, a sequência $\{\varphi_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem subsequência convergente e, por definição, o limite dessa subsequência pertence a $\omega(t,D)$. Logo, (3.2) é um absurdo.

Mostremos que $\omega(t,D)$ é compacto. Seja $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\omega(t,D)$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, existem sequências $\{\varphi_n^k\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}$ e $\{\tau_n^k\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty,t]$ tais que $\varphi_n^k \in \mathscr{G}(\tau_n^k)$, $\varphi_n^k(\tau_n^k) \in D(\tau_n^k)$, $\tau_n^k \to -\infty$ e $\varphi_n^k(t) \to x_k$, quando $n \to \infty$.

Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n(k) \in \mathbb{N}$ de forma que podemos tomar um elemento $\varphi_k(t) := \varphi_{n(k)}^k(t)$ associado a $\tau_k := \tau_{n(k)}^k < -k$ com $\varphi_k \in \mathscr{G}(\tau_k)$ e $\varphi_k(\tau_k) \in D(\tau_k)$, tais que

$$d(\varphi_k(t),x_k) \leq \frac{1}{k}.$$

Como $\mathscr{G}$ é $\mathscr{D}$-PAC, a sequência $\{\varphi_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem subsequência convergente. Portanto, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem subsequência convergente, e o limite desta subsequência pertence ao conjunto $\omega(t,D)$.

Resta mostrarmos que $\omega(t,D) \subset U(t,s)\omega(s,D)$, para todo $s \leq t$.

Dado $x \in \omega(t,D)$, existem sequências $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}$ e $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (-\infty,t]$ tais que $\varphi_k \in \mathscr{G}(\tau_k)$, $\tau_k \to -\infty$, $\varphi_k(\tau_k) \in D(\tau_k)$ e $\varphi_k(t) \to x$.

Note que, pela Observação 3.7, temos

$$\begin{aligned}\varphi_k(t) &\in U(t,\tau_k)\varphi_k(\tau_k)\\ &\subset U(t,s)U(s,\tau_k)\varphi_k(\tau_k),\end{aligned}$$

para todo s tal que $\tau_k \leq s \leq t$. Logo, $\varphi_k^{+(s-\tau_k)} \in \mathscr{G}(s)$ e $\varphi_k^{+(s-\tau_k)}(s) = \varphi_k(s)$, assim

$$\varphi_k(t) = \varphi_k^{+(s-\tau_k)}(t) \in U(t,s)\varphi_k(s). \tag{3.3}$$

Como $\mathscr{G}$ é $\mathscr{D}$-PAC, a sequência $\{\varphi_k(s)\}_{k\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $\{\varphi_{k_j}(s)\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\varphi_{k_j}(s) \to y$, para algum $y \in X$.

Logo, como $\varphi_k(t) \to x$, segue de (3.3) e do Teorema 3.11 que $x \in U(t,s)y$ e, pela definição do conjunto ω-limite, temos $y \in \omega(s,D)$. Portanto, $x \in U(t,s)\omega(s,D(\cdot))$.

■

O próximo teorema apresenta hipóteses que garantem quando um processo generalizado $\mathscr{G}$ exato possui o $\mathscr{D}$-atrator pullback.

Teorema 3.21. *Seja $\mathscr{G}$ um processo generalizado exato e $\mathscr{D}$-PAC. Seja $B(\cdot) \in \mathscr{D}$ uma família $\mathscr{D}$-absorvente no sentido pullback. Então $\omega(\cdot,B) \in \mathscr{D}$ é o $\mathscr{D}$-atrator pullback do $\mathscr{G}$-processo multívoco $U(\cdot,\cdot)$.*

Demonstração: Dado $t \in \mathbb{R}$, $B(t)$ absorve $D(\cdot) \in \mathscr{D}$ em t, ou seja,

$$\lim_{s\to-\infty} dist(U(t,s)D(s), B(t)) = 0,$$

e então $\omega(t,D) \subset B(t)$, para todo $D(\cdot) \in \mathscr{D}$.

Em particular,

$$\omega(t,B) \subset B(t), \tag{3.4}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, logo $\omega(t,B) \in \mathscr{D}$.

Pelo Teorema 3.20, $\omega(\cdot,D)$ é negativamente invariante, então

$$\omega(t,D) \subset U(t,s)\omega(s,D) \subset U(t,s)B(s), \tag{3.5}$$

para todo $-\infty < s \leq t < \infty$, pela Observação 3.8, pois $\omega(s,D(\cdot)) \subset B(s)$.

Além disso, pelo Teorema 3.20, sabemos que $\omega(t,B)$ atrai $B(\cdot)$, ou seja,

$$\lim_{s\to-\infty} dist(U(t,s)B(s), \omega(t,B)) = 0. \tag{3.6}$$

Logo, por (3.5) e (3.6), temos

$$\lim_{s\to-\infty} dist(\omega(t,D),\omega(t,B)) = 0,$$

o que implica

$$\omega(t,D) \subset \omega(t,B). \tag{3.7}$$

Como $\omega(\cdot,D)$ atrai $D(\cdot)$, então $\omega(\cdot,B)$ atrai $D(\cdot)$.

Para mostrar a invariância de $\omega(\cdot,B)$, note que, pelo Teorema 3.20, temos $\omega(t,B) \subset U(t,s)\omega(s,B)$, para todo $-\infty < s \leq t < \infty$. Então basta mostrarmos a outra inclusão.

Seja $z \in U(t,s)\omega(s,B)$, com $s \leq t$. Então existe $\varphi \in \mathscr{G}(s)$ tal que $\varphi(t) = z$ e $\varphi(s) = y \in \omega(s,B)$.

Dada uma sequência $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty,s)$ tal que $\tau_n \to -\infty$, segue do Teorema 3.20 que

$$y \in \omega(s,B) \subset U(s,\tau_n)\omega(\tau_n,B), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\psi_n \in \mathscr{G}(\tau_n)$ tal que $\psi_n(s) = y = \varphi(s)$ e, por (3.4), $\psi_n(\tau_n) \in \omega(\tau_n,B) \subset B(\tau_n)$. Definamos

$$\theta_n(l) = \begin{cases} \psi_n(l), & \text{se } l \in [\tau_n,s], \\ \varphi(l), & \text{se } l \in (s,+\infty) \end{cases}.$$

Então, por $(C4)$, $\theta_n \in \mathscr{G}(\tau_n)$ e $z = \varphi(t) = \theta_n(t)$, logo

$$z = \lim_{n\to\infty} \theta_n(t),$$

com $\theta_n(\tau_n) = \psi_n(\tau_n) \in \omega(\tau_n,B) \subset B(\tau_n)$, por (3.4), e $\tau_n \to -\infty$. Pela definição de conjunto ω-limite, temos $z \in \omega(t,B)$.

Para mostrar a minimalidade, suponha que exista uma família de fechados $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ que atraia todos $D(\cdot) \in \mathscr{D}$. Como $B(\cdot) \in \mathscr{D}$, então

$$\lim_{s\to-\infty} dist(U(t,s)B(t),C(t)) = 0.$$

Portanto, $\omega(t,B) \subset C(t)$.

■

Corolário 3.22. *Suponha que as hipóteses dos Teorema 3.21 sejam válidas. Então, para $B(\cdot)$ como no Teorema 3.21, $\omega(\cdot,B)$ é maximal invariante em $\mathscr{D}$.*

Demonstração: Suponha que $C(\cdot) \in \mathscr{D}$ e que $U(t,s)C(s) = C(t)$, para todo $-\infty < s \leq t < \infty$. Então

$$\lim_{s\to-\infty} dist(C(t), \omega(t,B)) = \lim_{s\to-\infty} dist(U(t,s)C(s), \omega(t,B)) = 0,$$

logo $C(t) \subset \omega(t, B(\cdot))$.

■

O próximo teorema mostra que os conjuntos ω-limites em $t \in \mathbb{R}$ relativos a um universo $\mathscr{D}$ e a um processo generalizado $\mathscr{D}$-assintoticamente compacto no sentido pullback são formados por imagens em t de órbitas completas. Em particular, o $\mathscr{D}$-atrator pullback obtido no Teorema 3.21 possui a imagem de todas as órbitas completas.

Teorema 3.23. *Seja $\mathscr{G}$ um processo generalizado $\mathscr{D}$-PAC. Então a família $\{\omega(t,D)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é **quasi-invariante**, ou seja, para $t \in \mathbb{R}$ e $z \in \omega(t,D)$, existe uma órbita completa ψ sobre z em t e $\psi(l) \in \omega(l,D)$, para todo $l \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja $z \in \omega(t,D)$, para algum $t \in \mathbb{R}$ fixo. Logo existem sequências $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}$ e $\{\tau_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, t]$ tais que $\varphi_j \in \mathscr{G}(\tau_j)$, $\varphi_j(\tau_j) \in D(\tau_j)$, $\tau_j \to -\infty$ e $\varphi_j(t) \to z$, quando $j \to \infty$.

Por (C2), para cada $j \in \mathbb{N}$, temos $\varphi_j^{+(t-\tau_j)} \in \mathscr{G}(\tau_j + t - \tau_j) = \mathscr{G}(t)$. Além disso,

$$\varphi_j^{+(t-\tau_j)}(t) = \varphi_{j|_{[\tau_j+t-\tau_j,+\infty)}}(t) = \varphi_j(t) \to z, \text{ quando } j \to \infty.$$

Por (C3), passando a uma subsequência se necessário, existe $\psi_0 \in \mathscr{G}(t)$ tal que $\psi_0(t) = z$ e $\varphi_j^{+(t-\tau_j)}(l) = \varphi_j(l) \to \psi_0(l)$ para todo $l \geq t$.

Como $\varphi_j(\tau_j) \in D(\tau_j)$, $\tau_j \to -\infty$ e $\varphi_j(l) \to \psi_0(l)$, então

$$\psi_0(l) \in \omega(l,D), \quad \forall \quad l \geq t.$$

Observe que, a menos de uma quantidade finita de $j's$, $t - \tau_j - 1 \geq 0$. Consideremos a sequência $\{\varphi_j^{+(t-\tau_j-1)}\}_{j\in\mathbb{N}}$. Por (C2),

$$\varphi_j^{+(t-\tau_j-1)} \in \mathscr{G}(\tau_j + t - \tau_j - 1) = \mathscr{G}(t-1),$$

para cada $j \in \mathbb{N}$.

Como $\mathscr{G}$ é $\mathscr{D}$-PAC e $t - 1 \geq \tau_j$, a sequência $\{\varphi_j(t-1)\}_{j\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente que ainda denotaremos da mesma forma, ou seja, existe $z_1 \in X$ tal que

$\varphi_j(t-1) \to z_1$. Portanto,

$$\varphi_j^{+(t-\tau_j-1)}(t-1) = \varphi_j(t-1) \to z_1.$$

Por (C3) existe $\psi_1 \in \mathscr{G}(t-1)$ tal que $\psi_1(t-1) = z_1$ e, passando a uma subsequência se necessário,

$$\varphi_j^{+(t-\tau_j-1)}(l) = \varphi_j(l) \to \psi_1(l), \quad \forall \quad l \geq t-1.$$

Analogamente,

$$\psi_1(l) \in \omega(l, D), \quad \forall \quad l \geq t-1.$$

Note que, se $l \geq t$, temos

$$\psi_1(l) = \lim_{j\to\infty} \varphi_j^{+(t-\tau_j-1)}(l) = \lim_{j\to\infty} \varphi_j(l) = \lim_{j\to\infty} \varphi_j^{+(t-\tau_j)}(l) = \psi_0(l).$$

Logo, $\psi_1(l) = \psi_0(l)$ para todo $l \geq t$.

Indutivamente para $r = 1, 2, ...$, existem $\psi_r \in \mathscr{G}(t-r)$ tais que

$$\psi_r(l) = \psi_{r-1}(l), \quad \forall \quad l \geq t-(r-1),$$

e $\psi_r(l) \in \omega(l, D)$ para todo $l \geq t-r$.

Dado $l \in \mathbb{R}$, existe $\tilde{r} \in \mathbb{N}$ tal que $l \geq t - \tilde{r}$, e definimos $\psi : \mathbb{R} \to X$ por

$$\psi(l) := \psi_{\tilde{r}}(l).$$

Note que, $\psi_{\tilde{r}}(s)$ é um valor comum a todas as $\psi_r(s)$ tais que $r \leq \tilde{r}$ e $s \geq t-r$.

Como $\psi(t) = \psi_0(t) = z$, temos que ψ é uma órbita completa por z em t, e ainda

$$\psi(l) \in \omega(l, D) \quad \forall \quad l \in \mathbb{R}.$$

■

Uma coletânea completa de resultados para atratores pullback no caso multívoco pode ser encontrada em [58], onde os autores também se dedicam a estudar a caracterização do $\mathscr{D}$-atrator pullback como união das trajetórias completas em $\mathscr{D}$.

Capítulo 4

Atrator Pullback para o Problema (P)

Além das Hipóteses (H1), (H2) e (H3) da Seção 2.1, assumiremos o seguinte:

(H4) Suponha $g_1 \in L^{2r-2}_{loc}\left(\mathbb{R}; L^{2r-2}(\Omega)\right)$, $g_2 \in L^{2r-2}_{loc}\left(\mathbb{R}; L^{2r-2}(\Gamma)\right)$, onde $r = max\{r_1, r_2\}$, e, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\lambda} e^{\theta s}\left(\|g_1(s)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \|g_2(s)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)}\right) ds < +\infty, \tag{4.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\lambda} e^{\theta s}(k_1(s) + k_2(s))ds < +\infty \tag{4.2}$$

e

$$\int_{-\infty}^{\lambda} e^{\theta s}(k_1(s)^{r-1} + k_2(s)^{r-1})ds < +\infty, \tag{4.3}$$

onde $\theta > 0$ será determinado oportunamente e k_i, $i = 1, 2$, são as funções da Hipótese (H2).

Observação 4.1. *Note que $2r - 2 > 2$, portanto, usando o Lema 1.6 e a expressão* (4.1) *garantimos que, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{-\infty}^{\lambda} e^{\theta s}\left(\|g_1(s)\|^{2}_{L^{2}(\Omega)} + \|g_2(s)\|^{2}_{L^{2}(\Gamma)}\right) ds < +\infty.$$

Com as hipóteses estabelecidas, definimos o seguinte Universo de atração:

Definição 4.2 (Universo de atração)**.** *Seja $\mathscr{D}$ a classe das famílias $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos não vazios de $L^{2r-2}(\Omega) \times L^{2r-2}(\Gamma) \subset L^2(\overline{\Omega}, d\mu)$ tal que*

$$\lim_{s\to-\infty} e^{\theta s}[D(s)] = 0,$$

onde $[D(s)] = \sup\left\{\|u\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \|v\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} : (u, v) \in D(s)\right\}$.

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que o processo generalizado exato gerado pelo Problema (P) é $\mathscr{D}$-PAC e provar a existência de uma família de conjuntos $\mathscr{D}$-absorventes no sentido pullback. Observe que, com isso garantiremos a existência do $\mathscr{D}$-atrator pullback, conforme o Teorema 3.21.

Observação 4.3. *Observe que como $2r-2>2$, o Lema 1.6 garante que os elementos de $\mathscr{D}$ também têm a propriedade*

$$\lim_{s\to-\infty} e^{\theta s}\sup\Big\{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|v\|^2_{L^2(\Gamma)}:(u,v)\in D(s)\Big\}=0.$$

4.1 Estimativas

Nesta seção desenvolveremos algumas estimativas que serão úteis para garantir a existência do $\mathscr{D}$-atrator pullback para o Problema (P).

Lema 4.4. *Dados $\tau\in\mathbb{R}$, $t>\tau$ e $U_\tau\in\mathbb{X}^2$, se U é solução fraca do Problema (P) com $U(\tau)=U_\tau$, temos a seguinte estimativa:*

$$\begin{aligned}\|U(t)\|^2_{\mathbb{X}^2}\le{}&\|U_\tau\|^2_{\mathbb{X}^2}e^{-\theta_1(t-\tau)}\\&+e^{-\theta_1 t}M\int_{-\infty}^t e^{\theta_1 s}\Big(\|g_1(s)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|g_2(s)\|^2_{L^2(\Gamma)}+k_1(s)+k_2(s)\Big)\,ds+C,\end{aligned}\tag{4.4}$$

com θ_1 e C constantes positivas independentes de τ.

Demonstração: Em primeiro lugar, observemos que, pelo Lema 1.6, existem constantes positivas κ_1,κ_2 e κ_3 tais que

(i) $\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\le\kappa_1\|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)}+C_{\kappa_1}$;

(ii) $\|\gamma(u)\|^2_{L^2(\Gamma)}\le\kappa_2\|\gamma(u)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)}+C_{\kappa_2}$;

(iii) $\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\le\kappa_3\|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)}+C_{\kappa_3}$,

com C_{κ_i} constantes positivas, $i=1,2,3$.

Tomando $\Psi = U$ na expressão (2.3) e procedendo como nas primeiras etapas da demonstração da Proposição 2.5, segue das Desigualdades de Hölder de Young que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2_{\mathbb{X}^2} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega (a_1(t)|u|^{r_1} - k_1(t))\, dx + \int_\Gamma (a_2(t)|\gamma(u)|^{r_2} - k_2(t))\, dS \\ \leq \langle g_1(t), u\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g_2(t), \gamma(u)\rangle_{L^2(\Gamma)} \leq \|g_1(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g_2(t)\|_{L^2(\Gamma)}\|\gamma(u)\|_{L^2(\Gamma)} \\ \leq M_\varepsilon\|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + M_\varepsilon\|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + \varepsilon\|\gamma(u)\|^2_{L^2(\Gamma)},\end{aligned}$$

onde $\varepsilon > 0$ será escolhido posteriormente.

Assim, como $a_1(t), a_2(t) \geq a_0$, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|U\|^2_{\mathbb{X}^2} + 2\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + 2a_0\|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + 2a_0\|\gamma(u)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)} \\ \leq 2M_\varepsilon\|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2M_\varepsilon\|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + 2\varepsilon\|\gamma(u)\|^2_{L^2(\Gamma)} \\ + 2k_1(t)|\Omega| + 2k_2(t)S(\Gamma).\end{aligned}$$

Usando as observações (i) e (ii) do início da demonstração, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|U\|^2_{\mathbb{X}^2} + 2\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \left(\frac{a_0}{\kappa_1} - 2\varepsilon\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ + \left(\frac{a_0}{\kappa_2} - 2\varepsilon\right)\|\gamma(u)\|^2_{L^2(\Gamma)} + a_0\|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + a_0\|\gamma(u)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)} \\ \leq 2M_\varepsilon\|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2M_\varepsilon\|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + 2k_1(t)|\Omega| + 2k_2(t)S(\Gamma) + \frac{a_0 C_{\kappa_1}}{\kappa_1} + \frac{a_0 C_{\kappa_2}}{\kappa_2}.\end{aligned}$$

Agora, seja $\varepsilon > 0$ tal que $\left(\frac{a_0}{\kappa_1} - 2\varepsilon\right) > 0$ e $\left(\frac{a_0}{\kappa_2} - 2\varepsilon\right) > 0$, $\theta_1 = \min\left\{\frac{a_0}{\kappa_1} - 2\varepsilon, \frac{a_0}{\kappa_2} - 2\varepsilon\right\}$. Usando a observação (iii) do início da demonstração, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|U\|^2_{\mathbb{X}^2} + \theta_1\|U\|^2_{\mathbb{X}^2} + 2\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{a_0}{\kappa_3}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \\ \leq 2M_\varepsilon\|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2M_\varepsilon\|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + 2k_1(t)|\Omega| + 2k_2(t)S(\Gamma) + \frac{a_0 C_{\kappa_1}}{\kappa_1} + \frac{a_0 C_{\kappa_2}}{\kappa_2} + \frac{a_0 C_{\kappa_3}}{\kappa_3}.\end{aligned}$$

Tomando $\eta = \min\left\{2, \frac{a_0}{\kappa_3}\right\}$, $C = \frac{a_0 C_{\kappa_1}}{\kappa_1} + \frac{a_0 C_{\kappa_2}}{\kappa_2} + \frac{a_0 C_{\kappa_3}}{\kappa_3}$ e $M = \max\{2M_\varepsilon,\ 2|\Omega|,\ 2S(\Gamma)\}$, obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|U\|^2_{\mathbb{X}^2} + \theta_1\|U\|^2_{\mathbb{X}^2} + \eta\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \\ \leq M\left(\|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + k_1(t) + k_2(t)\right) + C.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Pelo Lema 1.7 temos

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_{\mathbb{X}^2}^2 &\leq \|U_\tau\| e^{-\theta_1(t-\tau)} \\
&\quad + \int_\tau^t e^{-\theta_1(t-s)} \left[M \left(\|g_1(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g_2(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + k_1(s) + k_2(s) \right) + C \right] ds \\
&\leq \|U_\tau\| e^{-\theta_1(t-\tau)} + e^{-\theta_1 t} M \int_{-\infty}^t e^{\theta_1 s} \left(\|g_1(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g_2(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + k_1(s) + k_2(s) \right) ds + \frac{C}{\theta_1},
\end{aligned}$$

de forma que (4.4) está satisfeita.

■

Observação 4.5. *Note que, para $U_0 = (u_o, v_0) \in \mathbb{X}^{2r-2} \subset \mathbb{X}^2$ e $n \in \mathbb{N}$, pela propriedades de projeção, temos*

$$\int_\Omega |Pr_n u_o|^2 dx = \|Pr_n u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega |u_o|^2 dx,$$

e

$$\int_\Gamma |Pr_n v_0|^2 dS = \|Pr_n v_0\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \|v_0\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \int_\Gamma |v_0|^2 dS.$$

Logo, como $r - 1 > 1$, temos

$$\|Pr_n u_o\|_{L^{2r-2}(\Omega)}^{2r-2} = \int_\Omega |Pr_n u_o|^{2(r-1)} dx \leq \int_\Omega |u_o|^{2(r-1)} dx = \|u_o\|_{L^{2r-2}(\Omega)}^{2r-2},$$

analogamente,

$$\|Pr_n v_o\|_{L^{2r-2}(\Gamma)}^{2r-2} \leq \|v_0\|_{L^{2r-2}(\Gamma)}.$$

Lema 4.6. *Sejam $\tau \in \mathbb{R}$, $t > \tau$ e $U_\tau \in L^{2r-2}(\Omega) \times L^{2r-2}(\Gamma) = \mathbb{X}^{2r-2} \subset \mathbb{X}^2$. Se U_n é solução do Problema (P_n), obtida pelo método de Feado-Galerkin na Seção 2.2.4, com $U_n(\tau) = Pr_n U_\tau$, temos a seguinte estimativa*

$$\begin{aligned}
&\|u_n(t)\|_{L^{2r-2}(\Omega)}^{2r-2} + \|\gamma(u_n)(t)\|_{L^{2r-2}(\Gamma)}^{2r-2} \\
&\quad \leq \left(\|u(\tau)\|_{L^{2r-2}(\Omega)}^{2r-2} + \|\gamma(u)(\tau)\|_{L^{2r-2}(\Gamma)}^{2r-2} \right) e^{-\theta_2(t-\tau)} + C \\
&\qquad + e^{-\theta_2 t} M \int_{-\infty}^t e^{\theta_2 s} \left(\|g_1(s)\|_{L^{2r-2}(\Omega)}^{2r-2} + \|g_2(s)\|_{L^{2r-2}(\Gamma)}^{2r-2} + k_1(s)^{r-1} + k_2(s)^{r-1} \right) ds,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

com θ_2 e C constantes positivas independentes de τ.

Demonstração: Note que, dado $T > t$, temos $u_n = \sum_{i=1}^n d_i(t) \phi_i$ e $\gamma(u_n) = \sum_{i=1}^n d_i(t) \psi_i$, onde $d_i \in C^1(\tau, T)$. Tomando

$$V = \begin{pmatrix} |u_n|^{2(r-1)-2} u_n \\ |\gamma(u_n)|^{2(r-1)-2} \gamma(u_n) \end{pmatrix} \in K_n \tag{4.7}$$

na primeira equação em (P_n), pela Observação 2.9, obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle \partial_t u_n, |u_n|^{2r-4}u_n\right\rangle_2 + \left\langle \partial_t\gamma(u_n), |\gamma(u_n)|^{2r-4}\gamma(u_n)\right\rangle_{2,\Gamma} + \left\langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n, \nabla\left(|u_n|^{2r-4}u_n\right)\right\rangle_2 \\ + \left\langle f_1(t,u_n), |u_n|^{2r-4}u_n\right\rangle_2 + \left\langle f_2(t,\gamma(u_n)), |\gamma(u_n)|^{2r-4}\gamma(u_n)\right\rangle_{2,\Gamma} \\ = \left\langle g_1(t), |u_n|^{2r-4}u_n\right\rangle_2 + \left\langle g_2(t), |\gamma(u_n)|^{2r-4}\gamma(u_n)\right\rangle_{2,\Gamma}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Vamos estudar cada termo da equação (4.8) separadamente. Note que

$$\left\langle \partial_t u_n, |u_n|^{2r-4}u_n\right\rangle_2 = \frac{1}{2r-2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} \tag{I1}$$

e

$$\left\langle \partial_t\gamma(u_n), |\gamma(u_n)|^{2r-4}\gamma(u)\right\rangle_{2,\Gamma} = \frac{1}{2r-2}\frac{d}{dt}\|\gamma(u_n)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)}. \tag{I2}$$

Além disso,

$$\left\langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n, \nabla\left(|u_n|^{2r_1-4}u_n\right)\right\rangle_2 = (2r-3)|\nabla u_n|^p|u_n|^{2r-4} \geq 0. \tag{I3}$$

Por (H2), temos

$$\left\langle f_1(t,u_n), |u_n|^{2r-4}u_n\right\rangle_2 \geq \int_\Omega \left(a_0|u_n|^{r_1}|u_n|^{2r-4} - k_1(t)|u_n|^{2r-4}\right)dx.$$

Observe que $\displaystyle\int_\Omega a_0|u_n|^{r_1}|u_n|^{2r_1-4}dx = a_0\|u_n\|^{r_1+2r-4}_{L^{r_1+2r-4}(\Omega)}$ e, como $r_1 > 2$, temos $r_1+2r-4 > 2r-2$. Portanto, pelo Lema 1.6, existe $\eta_1 > 0$ tal que $\|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} \leq \eta_1\|u_n\|^{r_1+2r-4}_{L^{r_1+2r-4}(\Omega)} + C_{\eta_1}$, e assim obtemos

$$a_0\|u_n\|^{r_1+2r-4}_{L^{r_1+2r-4}(\Omega)} \geq \frac{a_0}{\eta_1}\|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} - \frac{a_0C_{\eta_1}}{\eta_1}. \tag{I4}$$

Analogamente, por (H2), temos

$$\left\langle f_2(t,\gamma(u_n)), |\gamma(u_n)|^{2r-4}\gamma(u_n)\right\rangle_{2,\Gamma} \geq \int_\Gamma \left(a_0|\gamma(u_n)|^{r_2}|\gamma(u_n)|^{2r-4} - k_2(t)|\gamma(u_n)|^{2r-4}\right)dS.$$

De modo similar ao que fizemos em (I4), existe η_2 tal que

$$a_0\|\gamma(u_n)\|^{r_2+2r-4}_{L^{r_2+2r-4}(\Gamma)} \geq \frac{a_0}{\eta_2}\|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} - \frac{a_0C_{\eta_2}}{\eta_2}. \tag{I5}$$

Com (I1)-(I5), a expressão (4.8) torna-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2r-2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \frac{1}{2r-2}\frac{d}{dt}\|\gamma(u_n)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} + (2r-3)|\nabla u_n|^p|u_n|^{2r-4} \\ + \frac{a_0}{\eta_1}\|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \frac{a_0}{\eta_2}\|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} \leq \left\langle g_1(t), |u_n|^{2r-4}u\right\rangle_2 + \left\langle g_2(t), |\gamma(u_n)|^{2r-4}\gamma(u_n)\right\rangle_{2,\Gamma} \\ + \int_\Omega k_1(t)|u_n|^{2r-4}dx + \int_\Gamma k_2(t)|\gamma(u_n)|^{2r-4}dS + \frac{a_0C_{\eta_1}}{\eta_1} + \frac{a_0C_{\eta_2}}{\eta_2}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Para estimar $\int_\Omega k_1(t)|u_n|^{2r-4}dx$, usamos a Desigualdade de Hölder com $\mu = \dfrac{2r-2}{2r-4} > 1$ e $\mu' = r-1$, obtendo

$$\int_\Omega k_1(t)|u_n|^{2r-4}dx \leq \|k_1(t)\|_{L^{\mu'}(\Omega)}\||u_n|^{2r-4}\|_{L^{\mu}(\Omega)} = \|k_1(t)\|_{L^{\mu'}(\Omega)}\|u_n\|^{2r-4}_{L^{2r-2}(\Omega)},$$

e, usando a Desigualdade de Young com μ_1 e μ_1', temos

$$\int_\Omega k_1(t)|u_n|^{2r-4}dx \leq C_\varepsilon\|k_1(t)\|^{\mu'}_{L^{\mu'}(\Omega)} + \varepsilon\|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} = C_\varepsilon k_1(t)^{\mu'}|\Omega| + \varepsilon\|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)}. \tag{I6}$$

Analogamente, estimamos $\int_\Gamma k_2(t)|\gamma(u_n)|^{2r-4}dS$:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma k_2(t)|\gamma(u_n)|^{2r-4}dS &\leq C_\varepsilon\|k_2(t)\|^{\mu'}_{L^{\mu'}(\Gamma)} + \varepsilon\|\gamma(u_n)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)}\\ &= C_\varepsilon k_2(t)^{\mu'}S(\Gamma) + \varepsilon\|\gamma(u_n)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)}.\end{aligned} \tag{I7}$$

Agora, para estimar $\left\langle g_1(t), |u|^{2r-4}u\right\rangle_2$, tomamos $l = \dfrac{2r-2}{2r-3} > 1$, de modo que $l' = 2r-2$. Usando a Desigualdade de Hölder, temos

$$\left\langle g_1(t), |u_n|^{2r-4}u_n\right\rangle_2 \leq \|g_1(t)\|_{L^{l'}(\Omega)}\||u_n|^{2r-4}u\|_{L^{l}(\Omega)} = \|g_1(t)\|_{L^{l'}(\Omega)}\|u_n\|^{2r-3}_{L^{2r-2}(\Omega)},$$

e então, da Desigualdade de Young com l e l', obtemos

$$\left\langle g_1(t), |u_n|^{2r-4}u_n\right\rangle_2 \leq C_\varepsilon\|g_1(t)\|^{l'}_{L^{l'}(\Omega)} + \varepsilon\|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)}. \tag{I8}$$

Procedendo analogamente para $\left\langle g_2(t), |\gamma(u_n)|^{2r_2-4}\gamma(u_n)\right\rangle_{2,\Gamma}$, obtemos

$$\left\langle g_2(t), |\gamma(u_n)|^{2r-4}\gamma(u_n)\right\rangle_{2,\Gamma} \leq C_\varepsilon\|g_2(t)\|^{l'}_{L^{l'}(\Gamma)} + \varepsilon\|\gamma(u_n)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}}. \tag{I9}$$

Agora, escolhemos $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{a_0}{\eta_1} - 2\varepsilon > 0 \quad \text{e} \quad \frac{a_0}{\eta_2} - 2\varepsilon > 0.$$

Assim, com (I6)-(I9) e tomando $C = \dfrac{a_0 C_{\eta_1}}{\eta_1} + \dfrac{a_0 C_{\eta_2}}{\eta_2}$, a expressão (4.9) torna-se

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2r-2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \frac{1}{2r-2}\frac{d}{dt}\|\gamma(u_n)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)}\\ &\qquad + \left(\frac{a_0}{\eta_1} - 2\varepsilon\right)\|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \left(\frac{a_0}{\eta_2} - 2\varepsilon\right)\|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)}\\ &\quad \leq C_\varepsilon\left(\|g_1(t)\|^{l'}_{L^{l'}(\Omega)} + \|g_2(t)\|^{l'}_{L^{l'}(\Gamma)} + k_1(t)^{\mu'}|\Omega| + k_2(t)^{\mu'}S(\Gamma)\right) + C.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Tomando $\theta_2 = \min\left\{\frac{a_0}{\eta_1} - 2\varepsilon, \frac{a_0}{\eta_2} - 2\varepsilon\right\} > 0$ e $K = \frac{1}{2r-2}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
K\frac{d}{dt}&\left(\|u_n\|_{L^{2r-2}(\Omega)}^{2r-2} + \|\gamma(u_n)\|_{L^{2r-2}(\Gamma)}^{2r-2}\right)\\
&\qquad\qquad + \theta_2\left(\|u_n\|_{L^{2r-2}(\Omega)}^{2r-2} + \|u_n\|_{L^{2r-2}(\Gamma)}^{2r-2}\right)\\
&\leq C_\varepsilon\left(\|g_1(t)\|_{L^{l'}(\Omega)}^{l'} + \|g_2(t)\|_{L^{l'}(\Gamma)}^{l'} + k_1(t)^{\mu'}|\Omega| + k_2(t)^{\mu'}S(\Gamma)\right) + C.
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

Multiplicando (4.11) por $\frac{1}{K}$, agregando as contantes, do Lema 1.7 e da Observação 4.5, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|u_n(t)\|_{L^{2r-2}(\Omega)}^{2r-2} + \|\gamma(u_n)(t)\|_{L^{2r-2}(\Gamma)}^{2r-2}\\
&\leq \left(\|u_n(\tau)\|_{L^{2r-2}(\Omega)}^{2r-2} + \|\gamma(u_n)(\tau)\|_{L^{2r-2}(\Gamma)}^{2r-2}\right)e^{-\theta_2(t-\tau)}\\
&\quad + e^{-\theta_2 t}M\int_{-\infty}^{t} e^{\theta_2 s}\left(\|g_1(s)\|_{L^{2r-2}(\Omega)}^{2r-2} + \|g_2(s)\|_{L^{2r-2}(\Gamma)}^{2r-2} + k_1(s)^{r-1} + k_2(s)^{r-1}\right)ds + \frac{C}{\theta_2}\\
&= \left(\|Pr_n u(\tau)\|_{L^{2r-2}(\Omega)}^{2r-2} + \|Pr_n\gamma(u)(\tau)\|_{L^{2r-2}(\Gamma)}^{2r-2}\right)e^{-\theta_2(t-\tau)}\\
&\quad + e^{-\theta_2 t}M\int_{-\infty}^{t} e^{\theta_2 s}\left(\|g_1(s)\|_{L^{2r-2}(\Omega)}^{2r-2} + \|g_2(s)\|_{L^{2r-2}(\Gamma)}^{2r-2} + k_1(s)^{r-1} + k_2(s)^{r-1}\right)ds + \frac{C}{\theta_2}\\
&\leq \left(\|u(\tau)\|_{L^{2r-2}(\Omega)}^{2r-2} + \|\gamma(u)(\tau)\|_{L^{2r-2}(\Gamma)}^{2r-2}\right)e^{-\theta_2(t-\tau)}\\
&\quad + e^{-\theta_2 t}M\int_{-\infty}^{t} e^{\theta_2 s}\left(\|g_1(s)\|_{L^{2r-2}(\Omega)}^{2r-2} + \|g_2(s)\|_{L^{2r-2}(\Gamma)}^{2r-2} + k_1(s)^{r-1} + k_2(s)^{r-1}\right)ds + \frac{C}{\theta_2}
\end{aligned}
$$

com $M = \max\{C_\varepsilon, C_\varepsilon|\Omega|, C_\varepsilon S(\Gamma)\}$.

■

Observação 4.7. *Se $\theta = \min\{\theta_1, \theta_2\}$, onde θ_1 e θ_2 foram definidos nas demonstrações dos Lemas 4.4 e 4.6 respectivamente, as demonstrações continuam válidas com $\theta_1 = \theta$ e $\theta_2 = \theta$, de modo que temos um $\theta > 0$ comum nas estimativas* (4.4) *e* (4.6)*. Definimos*

$$
M_1(t) = e^{-\theta t}\int_{-\infty}^{t} e^{\theta s}\left(\|g_1(s)\|_{L^{2r-2}(\Omega)}^{2r-2} + \|g_2(s)\|_{L^{2r-2}(\Gamma)}^{2r-2} + k_1(s) + k_2(s)\right)ds \tag{4.12}
$$

e

$$
M_2(t) = e^{-\theta t}\int_{-\infty}^{t} e^{\theta s}\left(\|g_1(s)\|_{L^{2r-2}(\Omega)}^{2r-2} + \|g_2(s)\|_{L^{2r-2}(\Gamma)}^{2r-2} + k_1(s)^{r-1} + k_2(s)^{r-1}\right)ds. \tag{4.13}
$$

Note que, pelos Lemas 4.4 e 4.6, para $t \in \mathbb{R}$ fixo e $U_\tau = (u_\tau, v_\tau) \in D(\tau)$, existe $\tau_0(t, D) \leq t$ e uma constante $C_0 > 0$, tal que para $\tau \leq \tau_0(t, D) < t$, temos

$$
\|U(t)\|_{\mathbb{X}^2}^2 \leq 1 + M_1(t) + C \leq C_0\left(1 + M_1(t)\right), \tag{4.14}
$$

e, pelo Lema 1.6, temos

$$\begin{aligned}
&\|u_n(t)\|^{2r_1-2}_{L^{2r_1-2}(\Omega)} + \|\gamma(u_n)(t)\|^{2r_2-2}_{L^{2r_2-2}(\Gamma)} \\
&\qquad \leq \kappa_1 \|u_n(t)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + C_{\kappa_1} + \kappa_2 \|\gamma(u_n)(t)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} + C_{\kappa_2} \qquad (4.15)\\
&\qquad \leq 1 + M_2(t) + C \leq C_0\left(1 + M_2(t)\right),
\end{aligned}$$

com $\kappa_1, C_{\kappa_1}, \kappa_2, C_{\kappa_2} > 0$ constantes, $C_0\left(1+M_1(t)\right)$ e $C_0\left(1+M_2(t)\right)$ independentes de n.

Observação 4.8. *Note que, dado $\tau \in \mathbb{R}$ e $T > \tau$, integrando a expressão (4.11) de τ até $t \leq T$, multiplicando por $\dfrac{1}{K}$ e incorporando as constantes, temos*

$$\begin{aligned}
&\|u_n(t)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \|\gamma(u_n)(t)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} + \theta_2 \int_\tau^t \left(\|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} \right) ds \\
&\quad \leq \|u_n(\tau)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \|\gamma(u_n)(\tau)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} \\
&\quad + \int_\tau^t \left(C_\varepsilon \left(\|g_1(s)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \|g_2(s)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} + k_1(s)^{r-1}|\Omega| + k_2(s)^{r-1}S(\Gamma) \right) + C \right) ds,
\end{aligned}$$

o que garante que existem $\tilde{C} > 0$ tal que $\|U_n\|_{L^{2r-2}(\tau,T,\mathbb{X}^{2r-2})} \leq \tilde{C}$ e uma subsequência, a qual não renomearemos, com a seguinte propriedade

$$U_n \rightharpoonup U \ \text{ em } L^{2r-2}(\tau, T; \mathbb{X}^{2r-2}),$$

como em (2.10)-(2.11). Segue da informação acima que, $U_n \rightharpoonup U$ em $\mathbb{X}^{2r-2}$ q.t.p. em $[\tau, T]$, e então, pelo Lema 4.6, temos

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \|\gamma(u)(t)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} \leq \liminf_n \left(\|u_n(t)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \|\gamma(u_n)(t)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} \right) \\
&\leq \left(\|u(\tau)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \|\gamma(u)(\tau)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} \right) e^{-\theta_2(t-\tau)} + C \\
&\quad + e^{-\theta_2 t} M \int_{-\infty}^t e^{\theta_2 s} \left(\|g_1(s)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \|g_2(s)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} + k_1(s)^{r-1} + k_2(s)^{r-1} \right) ds.
\end{aligned}$$

Com isso, garantimos que a família

$$K(t) := \left\{ y \in \mathbb{X}^2 : \|y\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \|y\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} \leq h(t) \right\}, \qquad (4.16)$$

onde

$$h(t) := 1 + C + e^{-\theta t} M \int_{-\infty}^t e^{\theta s} \left(\|g_1(s)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \|g_2(s)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} + k_1(s)^{r-1} + k_2(s)^{r-1} \right) ds$$

é absorvente, fechada em $\mathbb{X}^2$ e pertence ao universo $\mathscr{D}$.

4.2 $\mathscr{D}$-Atrator Pullback para o Problema (P)

O próximo resultado irá garantir a existência do $\mathscr{D}$-atrator pullback.

Teorema 4.9. *Suponha que as hipóteses (H1)-(H4) estejam satisfeitas. Então o processo multívoco $U(t,\tau)$ correspondente ao Problema (P) possui uma família $B = \{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \in \mathscr{D}$ de conjuntos $\mathscr{D}$-absorventes no sentido pullback em $\mathbb{V}^p$.*

Demonstração: Dado $t \in \mathbb{R}$ fixo, tome $\tau \leq \tau_0(t, D)$ como na Observação 4.7. Note que existe $T > t+1$ e, pela Seção 2.2.4, existe U_n solução de (P_n) no intervalo $[\tau, T]$.

Primeiro observemos que se U_n é solução de (P_n), segue de (H3) que

$$\begin{aligned}\|f_1(t,u_n)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \int_\Omega \left[C_1(t)\left(|u_n|^{r_1-1}+1\right)\right]^2 dx\\ &\leq 2C_1(t)^2\left(\int_\Omega (|u_n|^{2r_1-2}+1)dx\right),\end{aligned}$$

portanto

$$\|f_1(t,u_n)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2C_1(t)^2\left(\|u_n\|^{2r_1-2}_{L^{2r_1-2}(\Omega)} + |\Omega|\right). \tag{4.17}$$

Analogamente, temos

$$\|f_2(t,\gamma(u_n))\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq 2C_1(t)^2\left(\|\gamma(u_n)\|^{2r_2-2}_{L^{2r_2-2}(\Omega)} + S(\Gamma)\right). \tag{4.18}$$

Pela expressão (4.5) da demonstração do Lema 4.4, que vale em particular para U_n, temos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|U_n\|^2_{\mathbb{X}^2} + \theta_1\|U_n\|^2_{\mathbb{X}^2} + \eta\|u_n\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}\\ &\qquad\leq M\left(\|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + k_1(t) + k_2(t)\right) + C.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Integrando (4.19) de t a $t+1$, obtemos

$$\begin{aligned}&\|U_n(t+1)\|^2_{\mathbb{X}^2} - \|U_n(t)\|^2_{\mathbb{X}^2} + \eta\int_t^{t+1}\|u_n\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}ds\\ &\qquad\leq \int_t^{t+1}\left[M\left(\|g_1(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_2(s)\|^2_{L^2(\Gamma)} + k_1(s) + k_2(s)\right) + C\right]ds.\end{aligned}$$

De (H2) segue que o segundo membro da expressão acima é majorado por uma constante, agreguemos tal constante a C. Da Observação 4.7, como $\tau \leq \tau_0(t, D)$, temos

$$\eta\int_t^{t+1}\|u_n\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}ds \leq 2C_0\left(1 + M_1(t+1)\right) + C. \tag{4.20}$$

Multiplicando por $\frac{1}{\eta}$ e agregando as constantes, obtemos

$$\int_t^{t+1} \|u_n\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} ds \leq 2C_0\left(1 + M(t+1)\right) + C. \tag{4.21}$$

Agora queremos uma estimativa para $\frac{d}{dt}\left(\|u_n\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}\right)$. Para isso, note que $\partial_t U_n = \sum_{i=1}^n d_i'(t)\Phi_i$. Consideremos

$$V = U_{n_t} = \begin{pmatrix} u_{n_t} \\ \gamma(u)_{n_t} \end{pmatrix} \in K_n \tag{4.22}$$

na expressão (P_n), obtendo

$$\begin{aligned} \|\partial_t U_n\|_{\mathbb{X}^2} + \left\langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n, \partial_t \nabla u_n\right\rangle_2 + \langle f_1(t,u_n), \partial_t u_n\rangle_2 + \langle f_2(t,\gamma(u_n)), \partial_t\gamma(u_n)\rangle_{2,\Gamma} \\ = \langle g_1(t), \partial_t u_n\rangle_2 + \langle g_2(t), \partial_t \gamma(u_n)\rangle_{2,\Gamma}. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\left\langle |u_n|^{p-2}u_n, \partial_t u_n\right\rangle_2$, reordenando a expressão e usando as Desigualdades de Hölder e de Young, obtemos

$$\begin{aligned} &\|\partial_t U_n\|_{\mathbb{X}^2} + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla u_n\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)} \\ &= \left\langle |u_n|^{p-2}u_n, \partial_t u_n\right\rangle_2 - \langle f_1(t,u_n), \partial_t u_n\rangle_2 - \langle f_2(t,\gamma(u_n)), \partial_t\gamma(u_n)\rangle_{2,\Gamma} \\ &\qquad + \langle g_1(t), \partial_t u_n\rangle_2 + \langle g_2(t), \partial_t\gamma(u_n)\rangle_{2,\Gamma} \\ &\leq \||u_n|^{p-2}u_n\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)} + \|f_1(t,u_n)\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\qquad + \|f_2(t,\gamma(u_n))\|_{L^2(\Gamma)}\|\partial_t\gamma(u_n)\|_{L^2(\Gamma)} + \|g_1(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\qquad + \|g_2(t)\|_{L^2(\Gamma)}\|\partial_t\gamma(u_n)\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq C_{\varepsilon/3}\|u_n\|^{2p-2}_{L^{2p-2}(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{3}\|\partial_t u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\qquad + C_{\varepsilon/3}\|f_1(t,u_n)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{3}\|\partial_t u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{\varepsilon/2}\|f_2(t,\gamma(u_n))\|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\varepsilon}{2}\|\gamma(u_n)_t\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\qquad + C_{\varepsilon/3}\|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{3}\|\partial_t u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{\varepsilon/2}\|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\varepsilon}{2}\|\partial_t\gamma(u_n)\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Note que $2p-2, 2r_1-2, 2r_2-2 \leq 2r-2$, portanto, pelo Lema 1.6, existem $\kappa_p, \kappa_1, \kappa_2 > 0$ e $K_p, K_1, K_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \|u\|^{2p-2}_{L^{2p-2}(\Omega)} &\leq \kappa_p\|u\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + K_p, \\ \|u\|^{2r_1-2}_{L^{2r_1-2}(\Omega)} &\leq \kappa_1\|u\|^{2r-2}_{L^{2r_1-2}(\Omega)} + K_1, \\ \|u\|^{2r_2-2}_{L^{2r_2-2}(\Omega)} &\leq \kappa_2\|u\|^{2r-2}_{L^{2r_1-2}(\Omega)} + K_2. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Portanto, para $\varepsilon < 1$, das desigualdades (4.17), (4.18) e (4.24), podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
(1-\varepsilon)\|\partial_t U_n\|_{\mathbb{X}^2} &+ \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u_n\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq C_{\varepsilon/3}\kappa_p\|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + C_{\varepsilon/3}K_p \\
&\quad + C_{\varepsilon/3}2C_1(t)^2\left(\kappa_1\|u_n\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + K_1 + |\Omega|\right) \\
&\quad + C_{\varepsilon/2}2C_1(t)^2\left(\kappa_2\|\gamma(u_n)\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + K_2 + S(\Gamma)\right) \\
&\quad + C_{\varepsilon/3}\|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{\varepsilon/2}\|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)}.
\end{aligned}
$$

Logo, pela Observação 4.7, multiplicando por p e agregando as constantes, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|u_n\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_{\varepsilon/3}\eta C_0\left(1+M_2(t)\right) + C_{\varepsilon/3}C_\eta \\
&+ C_{\varepsilon/3}2C_1(t)^2\big(C_0\left(1+M_2(t)\right) + |\Omega|\big) + C_{\varepsilon/2}2C_2(t)^2\big(C_0\left(1+M_2(t)\right) + S(\Gamma)\big) \\
&+ C_{\varepsilon/3}\|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{\varepsilon/2}\|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)}.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Seja $C_\varepsilon = \max\left\{2C_{\varepsilon/2}, 2C_{\varepsilon/3}, \eta C_{\varepsilon/3}, C_0, C_{\varepsilon/3}C_\eta\right\}$. Então a expressão (4.25) pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u_n\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_\varepsilon\Bigg(&\left(1+C_1(t)^2+C_2(t)^2\right)\left(1+M_2(t)\right) \\
&+ 1 + C_1(t)^2|\Omega| + C_2(t)^2S(\Gamma) + \|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{\varepsilon/2}\|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)}\Bigg).
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Integrando o termo à direita da expressão (4.26) de t até $t+1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&C_\varepsilon\int_t^{t+1}\Bigg(\left(1+C_1(\lambda)^2+C_2(\lambda)^2\right)\left(1+M_2(\lambda)\right) \\
&\qquad + 1 + C_1(\lambda)^2|\Omega| + C_2(\lambda)^2S(\Gamma) + \|g_1(\lambda)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_2(\lambda)\|^2_{L^2(\Gamma)}\Bigg)d\lambda \\
&\leq C_\varepsilon\int_t^{t+1}\Bigg(\left(1+C_1(\lambda)^2+C_2(\lambda)^2\right)\left(1+M_2(\lambda)\right) + \|g_1(\lambda)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_2(\lambda)\|^2_{L^2(\Gamma)}\Bigg)d\lambda \\
&\qquad + C_\varepsilon\left(1 + \|C_1^2\|_{L^\infty(t,t+1)}|\Omega| + \|C_2^2\|_{L^\infty(t,t+1)}S(\Gamma)\right).
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Defina $\tilde{C}(t) := C_\varepsilon\left(1 + \|C_1^2\|_{L^\infty(t,t+1)}|\Omega| + \|C_2^2\|_{L^\infty(t,t+1)}S(\Gamma)\right)$. Note que, como $\lambda \in$

$[t,t+1]$, temos

$$
\begin{aligned}
&C_\varepsilon \int_t^{t+1} \Big(\left(1 + C_1(\lambda)^2 + C_2(\lambda)^2\right)(1 + M_2(\lambda)) + \|g_1(\lambda)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_2(\lambda)\|^2_{L^2(\Gamma)} \Big) d\lambda \\
&\quad = C_\varepsilon \int_t^{t+1} \Bigg(\left(1 + C_1(\lambda)^2 + C_2(\lambda)^2\right) \Bigg(1 \\
&\qquad\qquad + e^{-\theta\lambda} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{\theta s} \left(\|g_1\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \|g_2\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} + k_1(s)^{r-1} + k_2(s)^{r-1} \right) ds \Bigg) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \|g_1(\lambda)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_2(\lambda)\|^2_{L^2(\Gamma)} \Bigg) d\lambda \\
&\quad \le C_\varepsilon \left(1 + \|C_1^2\|_{L^\infty(t,t+1)} + \|C_2^2\|_{L^\infty(t,t+1)}\right) \Bigg(1 \\
&\qquad + \frac{(1-e^{-\theta})}{\theta} e^{-\theta t} \int_{-\infty}^{t+1} e^{\theta s} \left(\|g_1\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Omega)} + \|g_2\|^{2r-2}_{L^{2r-2}(\Gamma)} + k_1(s)^{r-1} + k_2(s)^{r-1} \right) ds \Bigg) \\
&\qquad\qquad\qquad + \int_t^{t+1} \left(\|g_1(\lambda)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_2(\lambda)\|^2_{L^2(\Gamma)} \right) d\lambda \\
&\quad = C_\varepsilon \left(1 + \|C_1^2\|_{L^\infty(t,t+1)} + \|C_2^2\|_{L^\infty(t,t+1)}\right) \left(1 + \frac{(1-e^{-\theta})}{\theta} M_2(t+1)\right) \\
&\qquad\qquad\qquad + \int_t^{t+1} \left(\|g_1(\lambda)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_2(\lambda)\|^2_{L^2(\Gamma)} \right) d\lambda.
\end{aligned}
$$

Sejam

$$L(t) := \tilde{C}(t) + C_\varepsilon \left(1 + \|C_1^2\|_{L^\infty(t,t+1)} + \|C_2^2\|_{L^\infty(t,t+1)}\right)$$

e

$$\tilde{L}(t) := C_\varepsilon \left(1 + \|C_1^2\|_{L^\infty(t,t+1)} + \|C_2^2\|_{L^\infty(t,t+1)}\right) \frac{(1-e^{-\theta})}{\theta}.$$

Então

$$
\begin{aligned}
&C_\varepsilon \int_t^{t+1} \Big(\left(1 + C_1(\lambda)^2 + C_2(\lambda)^2\right)(1 + M(\lambda)) \\
&\qquad + 1 + C_1(\lambda)^2|\Omega| + C_2(\lambda)^2 S(\Gamma) + \|g_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_2\|^2_{L^2(\Gamma)} \Big) d\lambda \\
&\qquad\qquad \le L(t) + \tilde{L}(t) M_2(t+1) + \int_t^{t+1} \left(\|g_1(\lambda)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_2(\lambda)\|^2_{L^2(\Gamma)} \right) d\lambda.
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Logo, pelo Lema Uniforme de Gronwall com (4.26) e (4.21), temos

$$
\begin{aligned}
\|u_n(t+1)\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} &\le 2C_0 \left(1 + M_1(t+1)\right) + C + L(t) + \tilde{L}(t) M_2(t+1) \\
&\quad + \int_t^{t+1} \left(\|g_1(\lambda)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_2(\lambda)\|^2_{L^2(\Gamma)} \right) d\lambda < +\infty.
\end{aligned}
$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$ q.t.p em $[\tau, T]$, temos

$$\|u(t+1)\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n(t+1)\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\|u(t+1)\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leq 2C_0\left(1 + M_1(t+1)\right) + C + L(t) + \tilde{L}(t)M_2(t+1) + \int_t^{t+1} \left(\|g_1(\lambda)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_2(\lambda)\|^2_{L^2(\Gamma)}\right) d\lambda < +\infty.$$

Note que o que acabamos de mostrar é que, dados t e uma família $D \in \mathscr{D}$, existem $\tau_0(t, D) \leq t$ e

$$R(t) := \left[2C_0\left(1 + M_1(t+1)\right) + C + L(t) + \tilde{L}(t)M_2(t+1) + \int_t^{t+1} \left(\|g_1(\lambda)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_2(\lambda)\|^2_{L^2(\Gamma)}\right) d\lambda\right]^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R},$$

tais que se $\tau \leq \tau_0(t, D)$ então

$$U(t,\tau)U_\tau \in B_{\mathbb{V}^p}(0, R(t)), \tag{4.29}$$

onde $U_\tau \in D(\tau)$ e $B_{\mathbb{V}^p}(0, R(t))$ é a bola fechada de raio $R(t)$ em $\mathbb{V}^p$. Defina

$$B := \{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}} := \left\{B_{\mathbb{V}^p}(0, R(t)) \bigcap K(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}, \tag{4.30}$$

a família $\{K(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ foi definida em (4.16).

Segue de (4.29) e da Observação 4.8 que,

$$U(t,\tau)U_\tau \in B(t), \text{ for } \tau \leq \tau_0.$$

Portanto B é uma família $\mathscr{D}$-absorvente no sentido pullback do $\mathscr{G}$-processo multívoco associado ao Problema (P).

■

Corolário 4.10. *Com as hipóteses do Teorema 4.9, o processo multívoco $U(t,\tau)$ do Problema (P) possui um único $\mathscr{D}$-atrator pullback $\mathcal{A} = \{A(t); t \in \mathbb{R}\}$ em $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$.*

Demonstração: Como $\mathbb{V}^p$ está compactamente imerso em $\mathbb{X}^2$ garantimos que $U(\cdot,\cdot)$ é $\mathscr{D}$-PAC. De fato, dados $t \in \mathbb{R}$ e $D \in \mathscr{D}$, seja $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, t]$ com $\tau_n \to -\infty$ quando $n \to \infty$. Tomando qualquer sequência da forma $\{U_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}^2$ tal que $U_{\tau_n} \in D(\tau_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, segue do Teorema 4.9, existem $R(t)$ e τ_0, que depende de t e D, tal que, se $\tau \leq \tau_0$,

$$U(t,\tau)U_\tau \in B_{\mathbb{V}^p}(0, R(t)),$$

para $U_\tau \in D(\tau)$.

A sequência $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge para $-\infty$, portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \leq n_0$, então $\tau_n \leq \tau_0$, garantido que

$$U(t,\tau_n)U_{\tau_n} \in B_{\mathbb{V}^p}(0, R(t)),$$

para todo $n \leq n_0$. Logo, a sequência $\{U(t,\tau_n)U_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem subsequência convergente em $\mathbb{X}^2$, como queríamos demonstrar.

Note que a família $B := \{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ definida em (4.30) é uma família $\mathscr{D}$-pullback absorvente e fechada em $\mathbb{X}^2$, veja Observação 4.8. Portanto, o Teorema 3.21 garante o resultado.

■

Os resultados obtidos neste capítulo contribuiram para a produção do artigo [54].

Capítulo 5

Atrator de Trajetórias para Processos Generalizados

Redefiniremos o conceito de processo generalizado, levando agora em consideração mais um parâmetro além do instante inicial. Esse novo parâmetro está relacionado com a parte não autônoma do problema, que sofrerá alterações ao considerarmos translações. Estudaremos o comportamento das soluções de problemas de evolução sem unicidade, mais especificamente, definiremos e garantiremos a existência do atrator de trajetórias uniforme para o caso não autônomo multívoco, bem como a existência de um atrator global uniforme no caso multívoco gerado pelo atrator de trajetórias. Para o caso autônomo unívoco, veja [24] e, para o caso autônomo multívoco, veja [40].

5.1 Processo Generalizado

Considere a família de operadores de translação $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ agindo sobre qualquer função com domínio sobre a reta real, i.e., dada uma função $f:\mathbb{R}\to A$, onde $A\neq\emptyset$ é um conjunto arbitrário, definimos $T(t)f(s):=f(t+s),\ \forall s\in\mathbb{R}$.

Seja $\Xi=\{\sigma;\sigma:\mathbb{R}\to\Psi\}$, onde Ψ é um espaço de Banach, e assuma que Ξ é um espaço topológico. A família de operadores $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ agindo em Ξ define um grupo.

Seja $\Sigma\subset\Xi$ um subconjunto que é invariante por translações, ou seja, $T(t)\Sigma=\Sigma$, e suponha que Σ é um espaço métrico completo com a topologia proveniente de Ξ.

Definição 5.1 (Processo Generalizado)**.** *Um **processo generalizado** $\mathscr{G}=\{\mathscr{G}_\sigma(\tau)\}_{\sigma\in\Sigma,\tau\in\mathbb{R}}$*

em X é uma família de conjuntos $\mathscr{G}_\sigma(\tau)$ consistindo de funções $\varphi : [\tau, \infty) \to X$, chamadas de soluções, satisfazendo as seguintes condições

C1 -Para cada $\sigma \in \Sigma$, $\tau \in \mathbb{R}$ e $z \in X$, existe ao menos uma $\varphi \in \mathscr{G}_\sigma(\tau)$ com $\varphi(\tau) = z$;

C2 -Se $\varphi \in \mathscr{G}_\sigma(\tau)$ e $s \geq 0$, então $\varphi^{+s} \in \mathscr{G}_\sigma(\tau + s)$, onde $\varphi^{+s} := \varphi_{|[\tau+s,\infty)}$;

C3 - Se $\varphi \in \mathscr{G}_\sigma(\tau)$ e $s \in \mathbb{R}$, então $T(s)\varphi \in \mathscr{G}_{T(s)\sigma}(\tau - s)$;

C4 -Se $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}_\sigma(\tau)$ e $\varphi_j(\tau) \to z$, então existem uma subsequência $\{\varphi_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\varphi \in \mathscr{G}_\sigma(\tau)$ com $\varphi(\tau) = z$ e tais que $\varphi_{j_k}(t) \to \varphi(t)$ quando $k \to \infty$, para cada $t \geq \tau$.

Observação 5.2. *Note que, se $\mathscr{G}$ é um processo generalizado, para cada $\varphi \in \mathscr{G}_\sigma(\tau)$, temos $T(s)(\varphi^{+s}) \in \mathscr{G}_{T(s)\sigma}(\tau)$ e $T(s)(\varphi^{+s}) = (T(s)\varphi)^{+s}$, $s \geq 0$,.*

De fato, para $s \geq 0$ e $t \geq \tau$, temos

$$(T(s)(\varphi^{+s}))(t) = (\varphi^{+s})(t+s) = \varphi_{|[\tau+s,+\infty)}(t+s) = \varphi(t+s),$$

e, por outro lado,

$$(T(s)\varphi)^{+s}(t) = (T(s)\varphi)_{|[\tau-s+s,+\infty)}(t) = \varphi_{|[\tau,+\infty)}(t+s) = \varphi(t+s).$$

Definição 5.3. *Dizemos que um processo generalizado $\mathscr{G} = \{\mathscr{G}_\sigma(\tau)\}_{\sigma\in\Sigma,\tau\in\mathbb{R}}$ é **localmente uniformemente semicontínuo superiormente (LUSS)** se satisfaz a condição:*

(C4') - Se $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência tal que $\varphi_j \in \mathscr{G}_{\sigma_j}(\tau)$ e $\varphi_j(\tau) \to z$, então existem $\sigma \in \Sigma$ e $\varphi \in \mathscr{G}_\sigma(\tau)$ com $\varphi(\tau) = z$, e subsequências $\{\sigma_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{\varphi_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tais que $\sigma_{j_k} \to \sigma$ em Σ e $\varphi_{j_k} \to \varphi$ uniformemente em compactos de $[\tau, +\infty)$ quando $k \to \infty$.

*Dizemos que um processo generalizado $\mathscr{G} = \{\mathscr{G}_\sigma(\tau)\}_{\sigma\in\Sigma,\tau\in\mathbb{R}}$ é **exato** se satisfaz a condição:*

(C5) - (Concatenação) Sejam $\varphi \in \mathscr{G}_\sigma(\tau)$ e $\psi \in \mathscr{G}_\sigma(r)$ tais que $\varphi(s) = \psi(s)$ para algum $s \geq r \geq \tau$. Se θ é definida por

$$\theta(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in [\tau, s], \\ \psi(t), & t \in (s, \infty), \end{cases}$$

então $\theta \in \mathscr{G}_\sigma(\tau)$.

De agora em diante, o símbolo $\mathscr{G}$ sempre denotará um processo generalizado (não necessariamente exato ou LUSS).

Definição 5.4. *Definimos a família de operadores $\{H(t); t \geq 0\}$, tal que, para cada $t \geq 0$, $\sigma \in \Sigma$ e $\varphi \in \mathscr{G}_\sigma(\tau)$, temos*

$$H(t)\varphi = (T(t)\varphi)^{+t} \in \mathscr{G}_{T(t)\sigma}(\tau).$$

Definição 5.5. *Seja $\mathscr{G}$ um processo generalizado. Dado $\tau \in \mathbb{R}$, definimos o* ***espaço de trajetórias*** *(associado a $\mathscr{G}$) por*

$$\mathscr{G}_\Sigma(\tau) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \mathscr{G}_\sigma(\tau). \tag{5.1}$$

Em [22, 23, 24] e [25] os autores definem o espaço de trajetórias, denotado por $\mathcal{K}_\Sigma^+$, o qual nós podemos identificar com $\mathscr{G}_\Sigma(0)$, i.e.,

$$\mathcal{K}_\Sigma^+ = \mathscr{G}_\Sigma(0).$$

Nos trabalhos supracitados, apesar de lidar com problemas não autônomos, todas as trajetórias são consideradas começando no instante zero, ou seja, existe uma restrição implícita no domínio de cada curva depois de ser transladada. Neste trabalho preferimos explicitar ambos os procedimentos, translação e restrição. Recorrendo ao operador H ao invés de somente ao operador de translação T (como é usual no estudo de atratores de trajetórias), podemos considerar cada curva começando a partir de qualquer $\tau \in \mathbb{R}$.

Claramente, segue que:

Lema 5.6. *Dado $\tau \in \mathbb{R}$, temos*

$$H(t)\mathscr{G}_\Sigma(\tau) \subset \mathscr{G}_\Sigma(\tau).$$

Lema 5.7. *A família de operadores $\{H(t)\}_{t\geq 0}$ define um semigrupo agindo em $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$.*

Demonstração: De fato, dada $\varphi \in \mathscr{G}_\Sigma(\tau)$, por definição existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $\varphi \in \mathscr{G}_\sigma(\tau)$ e

- $H(0)\varphi = \varphi$, portanto $H(0) = Id$;

- dados $t_1, t_2 \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} H(t_1)H(t_2)\varphi(t) &= H(t_1)(T(t_2)\varphi)^{+t_2}(t) = H(t_1)(T(t_2)\varphi)_{|[\tau-t_2+t_2,+\infty)}(t) \\ &= H(t_1)\varphi_{|[\tau-t_2+t_2,+\infty)}(t_2+t) = (T(t_1)\varphi_{|[\tau-t_2-t_1+t_2,+\infty)})^{+t_1}(t_2+t) \\ &= (T(t_1)\varphi_{|[\tau-t_2-t_1+t_2+t_1,+\infty)})(t_2+t) = \varphi_{|[\tau-t_2-t_1+t_2+t_1,+\infty)}(t_1+t_2+t) \\ &= T(t_1+t_2)\varphi_{|[\tau-t_2-t_1+t_2+t_1,+\infty)}(t) = (T(t_1+t_2)\varphi)^{t_1+t_2}(t) = H(t_1+t_2)\varphi(t), \end{aligned}$$

para todo $t \geq \tau$.

■

Sejam $\mathcal{F}_\tau$ um espaço métrico e Θ_τ um espaço de Hausdorff e Fréchet-Urysohn, tais que (como conjuntos) $\mathcal{F}_\tau \cap \Theta_\tau \neq \emptyset$, mas não existe necessariamente nenhuma relação topológica entre eles. Suponha que

$$\mathscr{G}_\Sigma(\tau) \subset \mathcal{F}_\tau \cap \Theta_\tau. \tag{5.2}$$

Nosso objetivo é definir um atrator para as trajetórias de $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$, limitadas em $\mathcal{F}_\tau$, cuja atração ocorra na topologia de Θ_τ.

Definição 5.8. *Dado $\tau \in \mathbb{R}$, um conjunto $P \subset \Theta_\tau$ é um* ***atrator uniforme*** *(com respeito a $\sigma \in \Sigma$) do espaço de trajetórias $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ na topologia de Θ_τ se, para todo limitado $\mathbf{B} \subset \mathcal{F}_\tau$ tal que $\mathbf{B} \subset \mathscr{G}_\Sigma(\tau)$, o conjunto P atrai $\mathbf{B}$ sob $H(t)$ quando $t \to +\infty$ na topologia de Θ_τ, i.e., para toda vizinhança $\mathcal{O}(P)$ em Θ_τ, existe $t_1 \geq 0$ tal que $H(t)\mathbf{B} \subset \mathcal{O}(P)$ se $t \geq t_1$.*

Definição 5.9 (Atrator de Trajetórias Uniforme)**.** *Um conjunto compacto $\mathcal{U}_\Sigma \subset \Theta_\tau$ é o atrator de trajetórias uniforme (c.r.a $\sigma \in \Sigma$) do semigrupo $\{H(t)\}_{t\geq 0}$ em $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ na topologia de Θ_τ se:*

i) $\mathcal{U}_\Sigma$ é um atrator uniforme;

ii) $H(t)\mathcal{U}_\Sigma = \mathcal{U}_\Sigma$ para todo $t \geq 0$;

iii) $\mathcal{U}_\Sigma$ é o conjunto minimal fechado que atrai uniformemente.

Definição 5.10. *O espaço de trajetórias $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ é (Θ_τ, Σ)-**fechado** se o conjunto $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathscr{G}_\sigma(\tau) \times \{\sigma\}$ é fechado no espaço $\Theta_\tau \times \Sigma$ com a topologia produto usual.*

Proposição 5.11. [24, Proposição 2.1, p.262] *Seja Σ um espaço métrico compacto e o conjunto $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ é (Θ_τ, Σ)-fechada. Então o conjunto $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ é fechado em Θ_τ.*

A prova desta proposição pode ser encontrada também em [22, 23, 24] e [25]. Os autores provam esta proposição mostrando que o conjunto em questão é fechado usando sequências, o que justifica a hipótese de Θ_τ ser Frécht-Urysohn.

Teorema 5.12. *Suponha que Σ seja um espaço métrico compacto, que a translação $T(t) : \Sigma \to \Sigma$ seja contínua para todo $t \in \mathbb{R}$, que o espaço de trajetórias $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ seja (Θ_τ, Σ)-fechado e que a aplicação $H(t) : \Theta_\tau \to \Theta_\tau$ seja contínua, para cada $t \geq 0$. Se existe um atrator uniforme P do espaço de trajetórias $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ em Θ_τ tal que P é compacto em Θ_τ e P é limitado em $\mathcal{F}_\tau$, então o semigrupo $\{H(t), t \geq 0\}$ agindo em $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ possui o atrator de trajetórias uniforme $\mathcal{U}_\Sigma \subset \mathscr{G}_\Sigma(\tau) \cap P$. O conjunto $\mathcal{U}_\Sigma$ é limitado em $\mathcal{F}_\tau$.*

Demonstração: Seja

$$\mathcal{B} = \{B \subset \mathscr{G}_\Sigma(\tau); B \text{ é limitado em } \mathcal{F}_\tau\}. \tag{5.3}$$

Segue do Teorema 1.52 que existe o atrator $\mathcal{U}_\Sigma$ da família $\mathcal{B}$, compacto em Θ_τ. Pela minimalidade do atrator, temos $\mathcal{U}_\Sigma \subset P$, logo $\mathcal{U}_\Sigma$ é limitado em $\mathcal{F}_\tau$.

Como $H(t) : \Theta_\tau \to \Theta_\tau$ é contínua, o Teorema 1.53 garante a invariância do atrator.

Segundo a caracterização (1.11), temos que o atrator é dado por

$$\mathcal{U}_\Sigma := \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)}^{\Theta_\tau},$$

a Proposição 1.45 mostra que, como $H(t)\mathscr{G}_\Sigma(\tau) \subset \mathscr{G}_\Sigma(\tau)$, os elementos de $\omega(B)$ são pontos de aderência do conjunto $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$. Pela Proposição 5.11, o conjunto $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ é fechado, logo $\mathcal{U}_\Sigma \subset \mathscr{G}_\Sigma(\tau)$.

■

A demonstração desse teorema pode ser encontrada também em [23] e [24], onde é requerido que $\mathcal{F}_\tau$ seja Banach e $\mathcal{F}_\tau \subset \Theta_\tau$. No entanto, a demonstração segue de maneira análoga.

5.2 Atrator Global Uniforme

Seja X um espaço de Banach e considere, para cada $\tau \in \mathbb{R}$ o conjunto $\mathbb{R}_\tau := \{t \in \mathbb{R}; t \geq \tau\}$ e para cada $\sigma \in \Sigma$, o conjunto

$$\mathscr{G}_\sigma(\tau) \subset C(\mathbb{R}_\tau; X) \cap L^\infty(\mathbb{R}_\tau; X).$$

Nesta seção, consideraremos $\Theta_\tau = C_{loc}(\mathbb{R}_\tau; X)$ e $\mathcal{F}_\tau = L^\infty(\mathbb{R}_\tau; X)$, ou seja, procuramos um conjunto $\mathcal{U}_\Sigma \subset \mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ que é limitado em $L^\infty(\mathbb{R}_\tau; X)$, compacto em $C_{loc}(\mathbb{R}_\tau; X)$, estritamente invariante com respeito ao semigrupo $\{H(t)\}_{t\geq 0}$ e tal que, para todo $\mathbf{B} \subset \mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ limitado em $L^\infty(\mathbb{R}_\tau; X)$, e para todo $M \geq \tau$, tem-se

$$dist_{C([\tau,M];X)}\left(\Pi_{[\tau,M]}H(t)\mathbf{B}, \Pi_{[\tau,M]}\mathcal{U}_\Sigma\right) \to 0, \quad \text{quando } t \to +\infty, \tag{5.4}$$

onde, $\Pi_{[\tau,M]}f := f_{|[\tau,M]}$ para $f \in C_{loc}(\mathbb{R}_\tau; X)$. O espaço $C_{loc}(\mathbb{R}_\tau; X)$ é um espaço métrico completo, conforme a Seção 1.6.1.

A topologia em $C_{loc}(\mathbb{R}_\tau; X)$ é tal que $f_n \to f$ se, e somente se,

$$\sup_{t\in[\tau,M]} \|f_n(t) - f(t)\|_X \to 0 \text{ quando } n \to +\infty, \ \forall\ M \geq \tau.$$

Note que, dados $M \geq \tau$ e $0 \leq t \leq M - \tau$, se $f \in C([\tau, M]; X)$, então

$$\begin{aligned} H(t)f(s) &= (T(t))^{+t}f(s) \\ &= T(t)f_{|[\tau+t,M]}(s) = f_{|[\tau+t,M]}(t+s), \end{aligned}$$

que, pelo domínio de f, faz sentido para todo $s \in [\tau, M - t]$ e é contínua. Portanto, estão bem definidas as seguintes aplicações

$$H(t) : C([\tau, M]; X) \to C([\tau, M - t]; X), \quad \forall\ 0 \leq t \leq M - \tau.$$

Além disso, tais aplicações são contínuas. De fato, sejam $0 \leq t \leq M - \tau$ e $f_n \to f$ em $C([\tau, M]; X)$, então temos

$$\sup_{s\in[\tau,M]} \|f_n(s) - f(s)\|_X \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Se $s \in [\tau, M - t]$, então $t + s \in [\tau + t, M] \subset [\tau, M]$, logo

$$\sup_{s\in[\tau,M-t]} \|f_n(t + s) - f(t + s)\|_X \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Portanto, $H(t)f_n \to H(t)f$ em $C([\tau, M - t]; X)$.

Proposição 5.13. [24, Proposição 1.3, p.222] *O semigrupo $\{H(t)\}_{t\geq 0}$ é contínuo no espaço topológico $C_{loc}(\mathbb{R}_\tau; X)$.*

Teorema 5.14. *Seja Σ um espaço métrico compacto em Ξ. Suponha que $T(t) : \Sigma \to \Sigma$ seja contínua, para todo $t \in \mathbb{R}$, e que $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ seja $(C_{loc}(\mathbb{R}_\tau; X), \Sigma)$-fechado. Se existe um* *atrator uniforme P do espaço de trajetórias $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ em $C_{loc}(\mathbb{R}_\tau;X)$ tal que P é compacto em $C_{loc}(\mathbb{R}_\tau;X)$ e limitado em $L^\infty(\mathbb{R}_\tau,X)$, então o semigrupo $\{H(t);t\geq 0\}$ agindo em $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ possui o atrator de trajetórias uniforme $\mathcal{U}_\Sigma$, ou seja, para todo $\mathbf{B}\subset\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ limitado em $L^\infty(\mathbb{R}_\tau,X)$, temos*

$$dist_{C([\tau,M];X)}(\Pi_{[\tau,M]}H(t)\mathbf{B},\Pi_{[\tau,M]}\mathcal{U}_\Sigma)\to 0,\quad quando\quad t\to+\infty, \tag{5.5}$$

para todo $M\geq\tau$.

Demonstração: Pela proposição anterior, $H(t)$ é contínuo. Assim, pelo Teorema 5.12, existe o atrator de trajetórias $\mathcal{U}_\Sigma$ de limitados (em $L^\infty(\mathbb{R}_\tau,X)$) de $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$. A atração ocorre na topologia de $C_{loc}(\mathbb{R}_\tau;X)$, o que garante a convergência (5.5) para todo $M\geq\tau$.

∎

Proposição 5.15. *Se o processo generalizado $\mathscr{G}$ é LUSS, então o espaço de trajetórias $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ é $(C_{loc}(\mathbb{R}_\tau;X),\Sigma)$-fechado.*

Demonstração: Sejam $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\Sigma$ com $\varphi_n\in\mathscr{G}_{\sigma_n}(\tau)$, e $\sigma\in\Sigma$ e $\varphi\in\mathscr{G}_\sigma(\tau)$ tais que

$$\begin{aligned}&\varphi_n\to\varphi \text{ em } C_{loc}(\mathbb{R}_\tau;X) \text{ e}\\&\sigma_n\to\sigma \text{ em } \Sigma.\end{aligned}$$

Assim, temos $\varphi_n(\tau)\to\varphi(\tau)$ em X. Como $\mathscr{G}$ é LUSS, existem $\tilde\sigma\in\Sigma$ e $\tilde\varphi\in\mathscr{G}_{\tilde\sigma}(\tau)$ tais que, a menos de subsequências, $\tilde\varphi(\tau)=\varphi(\tau)$, $\varphi_n\to\tilde\varphi$ em compactos de $[\tau,+\infty)$ e $\sigma_n\to\tilde\sigma$.

Portanto, $\tilde\varphi=\varphi$ e $\tilde\sigma=\sigma$, o que garante que

$$\varphi\in\mathscr{G}_\sigma(\tau).$$

∎

Teorema 5.16. *Seja Σ um espaço métrico compacto em Ξ. Suponha que $T(t):\Sigma\to\Sigma$ seja contínua, para todo $t\in\mathbb{R}$, e que o processo generalizado $\mathscr{G}$ seja LUSS. Se existe um atrator uniforme P de $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ em $C_{loc}(\mathbb{R}_\tau;X)$ tal que P é compacto em $C_{loc}(\mathbb{R}_\tau;X)$ e limitado em $L^\infty(\mathbb{R}_\tau,X)$, então o semigrupo $\{H(t);t\geq 0\}$ agindo em $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ possui o atrator de trajetórias uniforme $\mathcal{U}_\Sigma$.*

Demonstração: A Proposição 5.15 assegura que o espaço de trajetórias $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ é $(C_{loc}(\mathbb{R}_\tau; X), \Sigma)$-fechado. Portanto, o resultado segue do Teorema 5.14.

■

Para todo $\mathbf{B} \subset \mathscr{G}_\Sigma(\tau)$, definimos as seções

$$\mathbf{B}(t) := \{\varphi(t); \varphi \in \mathbf{B}\},\ \forall\ t \geq \tau$$

e

$$\mathcal{U}_\Sigma(t) := \{\varphi(t); \varphi \in \mathcal{U}_\Sigma\},\ \forall\ t \geq \tau.$$

Definição 5.17. *Um conjunto $\mathcal{A}_\Sigma \subset X$ é um **atrator global uniforme** em X para o processo generalizado $\mathscr{G}$ se*

i) o conjunto $\mathcal{A}_\Sigma$ é compacto em X;

ii) para todo $\mathbf{B} \subset \mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ limitado em $L^\infty(\mathbb{R}_\tau, X)$ temos que

$$dist_X(\mathbf{B}(t), \mathcal{A}_\Sigma) \to 0\ (t \to +\infty); \tag{5.6}$$

iii) $\mathcal{A}_\Sigma$ é o conjunto minimal fechado com a propriedade ii).

Corolário 5.18. *Suponha as hipóteses do Teorema 5.14 válidas. Então o conjunto*

$$\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{U}_\Sigma(\tau)$$

é o atrator global uniforme do processo generalizado $\mathscr{G}$ em X.

Demonstração: Como $\mathcal{U}_\Sigma$ é compacto em $C_{loc}(\mathbb{R}_\tau, X)$ temos que $\mathcal{U}_\Sigma(\tau)$ é compacto em X. De fato, defina $J : C_{loc}(\mathbb{R}_\tau, X) \to X$ por $J(f) := f(\tau)$, a função J é contínua e $J(\mathcal{U}_\Sigma) = \mathcal{U}_\Sigma(\tau)$. Portanto, $\mathcal{U}_\Sigma(\tau)$ é compacto em X.

Tomando $M = \tau$ em (5.5), obtemos (5.6), e portanto $\mathcal{U}_\Sigma(\tau)$ atrai limitados (em $L^\infty(\mathbb{R}_\tau; X)$) de $\mathcal{G}_\Sigma(\tau)$.

Para a minimalidade, suponha que exista um conjunto fechado U_1 que atraia limitados de $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$. Como $\mathcal{U}_\Sigma \subset \mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ e é limitado em $L^\infty(\mathbb{R}_\tau, X)$, temos

$$dist_X(\mathcal{U}_\Sigma(t), U_1) \to 0\ (t \to +\infty).$$

Mas, se $t \geq \tau$, $\mathcal{U}_\Sigma(t) = \mathcal{U}_\Sigma(\tau)$, pois $\mathcal{U}_\Sigma$ é invariante por $H(\cdot)$. De fato, se $t \geq \tau$, seja $s \geq 0$ tal que $\tau + s = t$, note que

$$H(s)\mathcal{U}_\Sigma = \{\varphi(s + \cdot); \varphi \in \mathcal{U}_\Sigma\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_\Sigma(t) = \mathcal{U}_\Sigma(\tau + s) &= \{\varphi(\tau + s); \varphi \in \mathcal{U}_\Sigma\} \\ &= (H(s)\mathcal{U}_\Sigma)(\tau) = \mathcal{U}_\Sigma(\tau).\end{aligned} \tag{5.7}$$

Portanto,

$$\mathcal{U}_\Sigma(\tau) \subset U_1.$$

■

Em [23] e [24], os autores demonstram esse corolário com a hipótese de unicidade de solução, em [25] os autores enunciam esse corolário sem a hipótese de unicidade, mas omitem a demonstração.

Observação 5.19. *É óbvio que se substituirmos a hipótese do espaço de trajetórias $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ ser $(C_{loc}(\mathbb{R}_\tau; X), \Sigma)$-fechado por um processo generalizado LUSS também garantimos o resultado do Corolário 5.18, observe o Teorema 5.16.*

5.2.1 Atrator Global Uniforme para Processos Multívocos

Em [50], para lidar com problemas de evolução não autônomos sem unicidade de solução, os autores desenvolveram uma teoria envolvendo uma família de operadores multívocos, os quais denominaram processos multívocos. Nesta seção, apresentaremos uma breve exposição dos elementos da teoria de processos multívocos e, então, descreveremos como conectar processos multívocos com processos generalizados de forma que, combinando ambas as teorias, possamos efetivamente construir um atrator global para problemas de evolução não autônomos sem unicidade de solução, por meio de seções do atrator de trajetórias uniforme.

Definição 5.20. *Dados $\tau \in \mathbb{R}$ e $t \geq \tau$, a aplicação $U(t, \tau) : X \to P(X)$ é um **processo multívoco** se:*

1. *$U(\tau, \tau) = Id_X$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$;*

2. $U(t,\tau)x \subset U(t,s)U(s,\tau)x$, $\forall\ t \geq s \geq \tau$ *e* $x \in X$.

Dizemos que um processo multívoco é ***exato*** *se:*

2'. $U(t,\tau)x = U(t,s)U(s,\tau)x$, $\forall\ t \geq s \geq \tau$ *e* $x \in X$.

Observação 5.21. *Note que, para cada $\sigma \in \Sigma$ fixo, pela Definição 3.5, temos um processo multívoco associado a $\mathscr{G}$, dado por*

$$U_\sigma(t,\tau)D := \{\varphi(t); \varphi \in \mathscr{G}_\sigma(\tau),\ com\ \varphi(\tau) \in D\},\ \tau \in \mathbb{R},\ t \geq \tau,$$

para cada $D \subset X$. Do Teorema 3.6 e da Observação 3.7, segue que tal operador é um processo multívoco.

Considere a família de processos multívocos $\{U_\sigma; \sigma \in \Sigma\}$ associados a $\mathscr{G}$.

Note que, tomando

$$\mathbb{U}_\Sigma(t,\tau)x := \bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma(t,\tau)x, \tag{5.8}$$

temos que a família $\{\mathbb{U}_\Sigma(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é, também, um processo multívoco associado a $\mathscr{G}$. Além disso, no caso em que o processo generalizado $\mathscr{G}$ é exato, a família $\{\mathbb{U}_\Sigma(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é um processo multívoco exato.

Segundo [50], temos o seguinte atrator para a família de processos multívocos $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ em X:

Definição 5.22. *O conjunto $\mathbb{O}_\Sigma$ é um* ***atrator global uniforme*** *para a família de processos multívocos $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ se:*

1. *para todo $B \subset X$ limitado e $\tau \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{t\to+\infty} dist_X\left(\mathbb{U}_\Sigma(t,\tau)B, \mathbb{O}_\Sigma\right) = 0;$$

2. $\mathbb{O}_\Sigma \subset \mathbb{U}_\Sigma(t,\tau)\mathbb{O}_\Sigma$, $\forall\ t \geq \tau$;

3. *Se Y é fechado e satisfaz 1, então $\mathbb{O}_\Sigma \subset Y$.*

Teorema 5.23. *Suponha as hipóteses do Teorema 5.14. Suponha também que, para todo limitado $B \subset X$, o conjunto*

$$\mathbb{B} = \{\varphi \in \mathscr{G}_\Sigma(\tau); \varphi(\tau) \in B\},$$

seja limitado em $L^\infty(\mathbb{R}_\tau; X)$. Então $\mathbb{O}_\Sigma = \mathcal{U}_\Sigma(\tau)$ é o atrator global uniforme em X para a família de processos multívocos $\{\mathbb{U}_\Sigma(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$. Além disso $\mathbb{O}_\Sigma$ é compacto em X.

Demonstração: Como,

$$\mathbb{B}(t) = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma(t,\tau)B,$$

segue do Corolário 5.18 que o conjunto $\mathcal{U}_\Sigma(\tau)$ é o minimal compacto que atrai os limitados de X.

Resta mostrar a invariância negativa. Note que para todo $s \geq 0$ temos

$$H(s)\mathcal{U}_\Sigma = \left\{\varphi_{|[\tau,+\infty)}(s+\cdot); \varphi \in \mathcal{U}_\Sigma\right\}.$$

Logo, para todo $t \geq \tau$, tome $s \geq 0$ tal que $s + \tau = t$,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\Sigma(\tau) = \left(H(s)\mathcal{U}_\Sigma\right)(\tau) &= \left\{\varphi_{|[\tau,+\infty)}(s+\tau); \varphi \in \mathcal{U}_\Sigma\right\} \\ &= \left\{\varphi_{|[\tau,+\infty)}(t); \varphi \in \mathcal{U}_\Sigma\right\} \\ &\subset \{\varphi(t); \varphi \in \mathscr{G}_\Sigma(\tau) \text{ e } \varphi(\tau) \in \mathcal{U}_\Sigma(\tau)\} \\ &= \bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma(t,\tau)\mathcal{U}_\Sigma(\tau) = \mathbb{U}_\Sigma(t,\tau)\mathcal{U}_\Sigma(\tau). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Como $t \geq \tau$ é arbitrário o teorema está provado.

■

Observação 5.24. *Note que, neste teorema também podemos substituir a hipótese do espaço $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ ser $(C_{loc}(\mathbb{R}_\tau; X), \Sigma)$-fechado por um processo generalizado LUSS.*

5.2.2 Atrator Global Uniforme Invariante para Processos Generalizados Exatos

Vamos descrever resumidamente alguns resultados de [50] com o intuito de garantir que o atrator global uniforme do processo multívoco $\mathbb{U}_\Sigma$ associado a um processo generalizado exato $\mathscr{G}$ seja invariante. Realizaremos isto combinando as teorias de processos multívocos e de processos generalizados.

Nesta seção assumiremos que $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ é uma família de processos multívocos com a seguinte propriedade

$$U_\sigma(t,\tau)x = U_{T(h)\sigma}(t-h, \tau-h)x, \forall\ h \in \mathbb{R} \text{ e } x \in X, \tag{5.10}$$

para cada $\sigma \in \Sigma$.

Definição 5.25. *Para $B \subset X$ e $\tau \in \mathbb{R}$ definimos o* ***conjunto*** ω***-limite*** *de B em τ como*

$$\omega_{\tau,\Sigma}(B) = \bigcap_{t \geq \tau} \overline{\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcup_{s \geq t} U_\sigma(s,\tau)B} = \bigcap_{t \geq \tau} \overline{\bigcup_{s \geq t} \mathbb{U}_\Sigma(s,\tau)B}.$$

Definição 5.26. *A família de processos $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ é* ***uniformemente assintoticamente semicompacta superiormente (UASS)*** *se, dados um conjunto $B \subset X$ limitado e $\tau \in \mathbb{R}$ para os quais existe $T = T(B,\tau)$ tal que o conjunto*

$$\bigcup_{t \geq T} \mathbb{U}_\Sigma(t,\tau)B$$

é limitado em X, toda sequência $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $\xi_n \in U_{\sigma_n}(t_n,\tau)B$, $\sigma_n \in \Sigma$ e $t_n \to +\infty$ é uma sequência pré-compacta em X.

Definição 5.27. *Uma família de processos multívocos $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ é* ***ponto dissipativa*** *se existe B_0 limitado em X tal que*

$$dist_X\left(\mathbb{U}_\Sigma(t,\tau)x, B_0\right) \to 0 \text{ quando } t \to +\infty.$$

Definição 5.28. *Sejam X, Y espaços métricos. Um operador multívoco $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ é* w***-semicontinua superiormente (***w***-s.c.s.)*** *em x_0 se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$F(x) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(F(x_0)), \ \forall\, x \in \mathcal{O}_\delta(x_0).$$

O operador F é w-s.c.s. se é w-s.c.s. para todo $x \in X$.

Se trocarmos as vizinhanças $\mathcal{O}_\varepsilon$ por vizinhanças arbitrárias $\mathcal{O}$ então F é semicontinuo superiormente.

Observação 5.29. *Note que, em espaços métricos a definição de semicontinuidade superior da definição anterior é equivalente a da Definição 3.10 da seção 3.1, ver Lema 1.1 de [21].*

Teorema 5.30. [50, Teoremas 1 e 2] *Seja Σ um espaço métrico compacto. Suponha que $T(h) : \Sigma \to \Sigma$ é contínua, para todo $h \in \mathbb{R}_+$, que para todo $B \subset X$ limitado e $\tau \in \mathbb{R}$ existe $T = T(B,\tau)$ tal que*

$$\bigcup_{t \geq T} \mathbb{U}_\Sigma(t,\tau)B$$

seja limitado em X. Se

(i) a família $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ *é UASS is UASS;*

(ii) para todo $t \geq \tau$ *a aplicação* $X \times \Sigma \ni (x,\sigma) \mapsto U_\sigma(t,\tau)x$ *tem valores fechados em* X *e gráfico fechado,*

então a família $\{U_\sigma\}$ *possui atrator global uniforme* $\mathbb{O}_\Sigma \neq X$.

Além disso, se ao invés de assumirmos (i) e (ii) supomos

(i') a família $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ *é UASS e ponto dissipativa;*

(ii') para todo $t \geq \tau$ *a aplicação* $X \times \Sigma \ni (x,\sigma) \mapsto U_\sigma(t,\tau)x$ *tem valores fechados em* X *e é semicontínua superiormente.*

então a família $\{U_\sigma\}$ *possui atrator global uniforme* $\mathbb{O}_\Sigma \neq X$ *e* $\mathbb{O}_\Sigma$ *é compacto.*

Em [50], na demonstração do teorema anterior, os autores definem um operador multívoco $G : \mathbb{R}_+ \times X \times \Sigma \to \mathcal{P}(X \times \Sigma)$ por

$$G(t,(x,\sigma)) = (U_\sigma(t,0)x, T(t)\sigma)\,. \tag{5.11}$$

Eles garantem que o operador G é um semifluxo multívoco (no sentido de [49]) o qual possui um atrator global $\mathcal{R}$, tal que

- $\mathcal{R} \neq X \times \Sigma$;
- $\mathcal{R} \subset G(t,\mathcal{R})$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$;
- para todo $C \subset X \times \Sigma$ limitado, temos

  $$dist_{X\times\Sigma}(G(t,C),\mathcal{R}) \to 0,$$

  quando $t \to +\infty$;
- se P é fechado e satisfaz as propriedades acima, então $\mathcal{R} \subset P$.

É consequência da demonstração supracitada que

$$\mathcal{R} = \mathbb{O}_\Sigma \times \omega(\Sigma), \tag{5.12}$$

onde $\mathbb{O}_\Sigma$ é o atrator global uniforme e $\omega(\Sigma)$ é o conjunto ω-limite de Σ sob $\{T(h)\}$.

Neste trabalho fizemos pequenas mudanças na abordagem acima, de modo que $\tau \in \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R}_+ \times X \times \Sigma \to \mathcal{P}(X)$ dado por

$$G(t,(x,\sigma)) = (U_\sigma(t+\tau,\tau)x, T(t)\sigma)\,. \tag{5.13}$$

É fácil ver que, com essa pequena adaptação nas demonstrações, é possível garantir o Teorema 5.30.

Observe que a invariância de $\mathcal{R}$ é uma consequência da exatidão do semifluxo multívoco G, ou seja, a seguinte propriedade

$$G(t_1+t_2,\xi) = G(t_1, G(t_2,\xi)),\ \forall\ t_1,t_2 \in \mathbb{R}_+,$$

mais a compacidade de $\mathcal{R}$ garantem que

$$G(t,\mathcal{R}) = \mathcal{R},\ \forall\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{5.14}$$

(veja [49, Remark 8, p.91]).

Até agora definimos diferentes sistemas dinâmicos que estão, de alguma forma, conectados. Vale a pena organizá-los agora.

1. O processo generalizado $\mathscr{G} = \{\mathscr{G}_\sigma(\tau)\}_{\sigma\in\Sigma,\tau\in\mathbb{R}}$ é uma família de conjuntos de trajetórias em X (Definição 5.1);
   (a) Cada conjunto $\mathscr{G}_\sigma(\tau)$ contém as trajetórias iniciando em $\tau \in \mathbb{R}$, as quais correspondem a um índice σ específico;
   (b) $\mathscr{G}_\Sigma(\tau) = \cup_{\sigma\in\Sigma}\mathscr{G}_\sigma(\tau)$ (Definição 5.5).
   (c) Também usamos a notação $\mathscr{G}_\sigma = \cup_{\tau\in\mathbb{R}}\mathscr{G}_\sigma(\tau)$.
2. $\{H(\cdot)\}$ é um semigrupo agindo em $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ e seu atrator, um atrator de trajetórias, é denotado por $\mathcal{U}_\Sigma$ (Definições 5.4 e 5.9);
3. A seção $\mathcal{U}_\Sigma(\tau)$ de $\mathcal{U}_\Sigma$ no espaço de fase X é um atrator uniforme para $\mathscr{G}$, o qual denotamos por $\mathcal{A}_\Sigma$. Então temos $\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{U}_\Sigma(\tau)$ (Definição 5.17 e Corolário 5.18);
4. Para cada $\sigma \in \Sigma$, associamos o processo multívoco $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ a $\mathscr{G}_\sigma$;
5. Um processo multívoco "maior"está associado a $\mathscr{G}$, considerando $\mathbb{U}_\Sigma(t,\tau) = \cup_{\sigma\in\Sigma}U_\sigma(t,\tau)$ (Observação 5.21 e (5.8));

6. Denotamos por $\mathbb{O}_\Sigma$ o atrator global uniforme para $\mathbb{U}_\Sigma(t,\tau)$ (Definição 5.22).

   Agora, note que Σ tem sua própria dinâmica determinada pela translação $\{T(h)\}$, e então definimos

7. $G(t,(x,\sigma)) = (U_\sigma(t+\tau,\tau)x, T(t)\sigma)$, o qual é um semifluxo multívoco (5.13);

8. Sob condições apropriadas, existe um atrator global $\mathcal{R} \subset X \times \Sigma$ para $G(t,(x,\sigma))$ e $\mathcal{R} = \mathbb{O}_\Sigma \times \omega(\Sigma)$, onde $\omega(\Sigma)$ é o conjunto ω-limite de Σ sob $T(\cdot)$.

9. Vamos mostrar que $\mathbb{O}_\Sigma = \mathcal{A}_\Sigma$ e a invariância deste atrator.

Primeiramente provemos que a família de processos multívocos $\{U_\sigma;\sigma\in\Sigma\}$, associada a um processo generalizado $\mathscr{G}$, satisfaz (5.10), e que a exatidão do processo generalizado $\mathscr{G}$ implica na exatidão do semifluxo multívoco $G(t,(x,\sigma))$.

Lema 5.31. *A família de processos multívocos $\{U_\sigma;\sigma\in\Sigma\}$ associados a um processo generalizado $\mathscr{G}$ tem a propriedade* (5.10).

Demonstração: De fato, segundo [15] p. 164 , basta provar que

$$U_\sigma(t,\tau)x \subset U_{T(h)\sigma}(t-h,\tau-h)x, \forall\ h\in\mathbb{R} \text{ e } x\in X.$$

Sejam $x\in X$ e $z\in U_\sigma(t,\tau)x$, então existe $\varphi\in\mathscr{G}_\sigma(\tau)$, para algum $\sigma\in\Sigma$, tal que $\varphi(\tau)=x$ e $\varphi(t)=z$.

Por (C3), sabemos que, dado $h\in\mathbb{R}$, $T(h)\varphi\in\mathscr{G}_{T(h)\sigma}(\tau-h)$ e $T(h)\varphi(\tau-h)=\varphi(\tau)=x$, logo

$$T(h)\varphi(t-h)\in U_{T(h)\sigma}(t-h,\tau-h)x.$$

Portanto,

$$z=\varphi(t+h-h)=T(h)\varphi(t-h)\in U_{T(h)\sigma}(t-h,\tau-h)x.$$

■

Lema 5.32. *Seja $\mathscr{G}$ um processo generalizado exato e $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ uma família de processos multívocos associados a $\mathscr{G}$. Então o operador G definido em* (5.13) *é um semifluxo exato, isto é,*

1. $G(0,\cdot)=Id_X$;

2. $G(t_1 + t_2, \cdot) = G(t_1, G(t_2, \cdot)), \ \forall \ t_1, t_2 \geq 0.$

Demonstração: A demonstração de 1 pode ser encontrada em [50], p. 380.

Para o item 2, sejam $t_1, t_2 \geq 0$ e $(x, \sigma) \in X \times \Sigma$, então

$$\begin{aligned} G(t_1 + t_2, (x, \sigma)) &= (U_\sigma(t_1 + t_2 + \tau, \tau)x, T(t_1 + t_2)\sigma) \\ &= (U_\sigma(t_1 + t_2 + \tau, t_2 + \tau)U_\sigma(t_2 + \tau, \tau)x, T(t_1)T(t_2)\sigma), \end{aligned}$$

pois o processo generalizado é exato, veja Teorema 3.6. Pela propriedade (5.10), temos

$$\begin{aligned} &(U_\sigma(t_1 + t_2 + \tau, t_2 + \tau)U_\sigma(t_2 + \tau, \tau)x, T(t_1)T(t_2)\sigma) \\ &= (U_{T(t_2)\sigma}(t_1 + \tau, \tau)U_\sigma(t_2 + \tau, \tau)x, T(t_1)T(t_2)\sigma) \\ &= G(t_1, (U_\sigma(t_2 + \tau, \tau)x, T(t_2)\sigma)) \\ &= G(t_1, G(t_2, (x, \sigma))). \end{aligned}$$

■

Teorema 5.33. *Seja $\tau \in \mathbb{R}$ e suponha que $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ é uma família de processos multívocos exatos e para todo $B \subset X$ limitado e $\tau \in \mathbb{R}$ existe $T = T(B, \tau)$ tal que, o conjunto*

$$\bigcup_{t \geq T} \mathbb{U}_\Sigma(t, \tau)B$$

é limitado em X e $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ satisfaz as hipóteses (i') e (ii') do Teorema 5.30. Além disso, assuma que Σ é um espaço métrico compacto, $T(h) : \Sigma \to \Sigma$ é contínua, para todo $h \in \mathbb{R}_+$. Então existe o atrator global uniforme $\mathbb{O}_\Sigma$ o qual é compacto e invariante, i.e.

$$\mathbb{U}_\Sigma(t, \tau)\mathbb{O}_\Sigma = \mathbb{O}_\Sigma, \ \forall t \geq \tau.$$

Demonstração: As hipóteses do Teorema 5.30 garantem que existe o atrator global uniforme compacto $\mathbb{O}_\Sigma$. Além disso, o atrator global do semifluxo generalizado G é caracterizado por

$$\mathcal{R} = \mathbb{O}_\Sigma \times \omega(\Sigma). \tag{5.15}$$

Note que, como $T(h)\Sigma = \Sigma$ para todo $h \in \mathbb{R}$, temos

$$\omega(\Sigma) = \Sigma. \tag{5.16}$$

Como $\mathscr{G}$ é um processo generalizado exato, pelo Lema 5.32 e por (5.14), temos

$$G(t, \mathcal{R}) = \mathcal{R}, \ \forall t \geq 0.$$

Observe que

$$G(t, \mathbb{O}_\Sigma \times \Sigma) = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \left(U_\sigma(t+\tau,\tau)\mathbb{O}_\Sigma, T(t)\sigma\right).$$

Portanto,

$$\mathbb{O}_\Sigma = \Pi_1\mathcal{R} = \Pi_1 G(t,\mathcal{R}) = \Pi_1 G(t, \mathbb{O}_\Sigma \times \Sigma) = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma(t+\tau,\tau)\mathbb{O}_\Sigma == \mathbb{U}_\Sigma(t+\tau,\tau)\mathbb{O}_\Sigma.$$

■

Resultados análogos podem ser encontrados em [41] e [42], onde a abordagem se baseia na caracterização dos atratores globais uniformes como união de conjuntos ω-limites. No resultado anterior, assim como em todo este trabalho, estamos considerando processos generalizados ao invés de processos multívocos, de forma que podemos considerar as propriedades de cada trajetória, e impondo condições adequadas em tais trajetórias podemos concluir as propriedades desejadas para o processo generalizado e também para os processos multívocos e para os semifluxos multívocos associados a essas trajetórias.

Por exemplo, o fato do semifluxo G ser exato segue da exatidão do processo multívoco $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, o qual, por sua vez, segue da exatidão do processo generalizado $\mathscr{G}$. Uma das vantagens de se trabalhar com o processo generalizado é que podemos obter tal exatidão por meio da propriedade de concatenação das curvas, veja Lema 5.32. Isto será utilizado no próximo resultado, onde provaremos que se $\mathscr{G}$ é um processo generalizado exato e LUSS, então a família de processos multívocos $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ associada a $\mathscr{G}$ possui um atrator global uniforme compacto e invariante.

Teorema 5.34. *Sejam X um espaço de Banach de dimensão infinita, Σ um espaço métrico compacto e $T(h) : \Sigma \to \Sigma$ contínuo, para todo $h \in \mathbb{R}_+$. Suponha que $\mathscr{G}$ seja um processo generalizado exato e LUSS. Além disso, suponha que, para todo $B \subset X$ limitado, o conjunto*

$$\mathbb{B} = \{\varphi; \varphi \in \mathscr{G}_\Sigma(\tau) \text{ e } \varphi(\tau) \in B\}$$

seja limitado em $L^\infty(\mathbb{R}_\tau; X)$. Se existe um atrator uniforme de trajetórias P de $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ em $C_{loc}(\mathbb{R}_\tau; X)$ tal que P é compacto em $C_{loc}(\mathbb{R}_\tau; X)$ e limitado em $L^\infty(\mathbb{R}_\tau; X)$, então existe o atrator global uniforme compacto $\mathcal{A}_\Sigma$ e $\mathcal{A}_\Sigma$ é invariante, ou seja,

$$\mathbb{U}_\Sigma(t,\tau)\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{A}_\Sigma, \ \forall\ t \geq \tau.$$

Demonstração: Segue do Corolário 5.18 que se existe um atrator P como descrito acima, então existe o atrator global uniforme compacto $\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{U}_\Sigma(\tau)$.

Mostremos que a família $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ de processos multívocos associados ao processo generalizado $\mathscr{G}$ tem a propriedade de que, para todo limitado $B \subset X$, existe $T = T(B,\tau)$, tal que o conjunto

$$\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\bigcup_{t\geq T} U_\sigma(t,\tau)B$$

é limitado em X e também provaremos que $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ é UASS.

Seja B um limitado em X, o conjunto $\mathbb{B}$ associado a B é limitado em $L^\infty(\mathbb{R}_\tau; X)$, então existe $R > 0$ tal que, para cada $\varphi \in \mathbb{B}$, temos $\|\varphi(t)\|_X \leq R$ q.t.p. em $\mathbb{R}_\tau$. Entretanto, $\mathbb{B} \subset \mathscr{G}_\Sigma(\tau)$, que é formado por funções contínuas, logo $\|\varphi(t)\|_X \leq R$ em todo $\mathbb{R}_\tau$. Portanto, o conjunto $\mathbb{B}(t)$ é limitado em X uniformemente para $t \in \mathbb{R}_\tau$. Assim, tome $T > \tau$, o conjunto

$$\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\bigcup_{t\geq T} U_\sigma(t,\tau)B \tag{5.17}$$

é limitado em X.

Agora, seja $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ uma sequência tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n \in U_{\sigma_n}(t_n,\tau)B$, $\sigma_n \in \Sigma$ e $t_n \to +\infty$.

Sabemos que o conjunto $\mathcal{A}_\Sigma$ é um compacto que atrai uniformemente B, então, como $t_n \to +\infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$dist_X(U_{\sigma_{n_k}}(t_{n_k},\tau)B, \mathcal{A}_\Sigma) < \frac{1}{k}.$$

Ou seja, existe uma sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_\Sigma$ tal que

$$dist_X(U_{\sigma_{n_k}}(t_{n_k},\tau)B, x_k) < \frac{1}{k}.$$

Pela compacidade do conjunto $\mathcal{A}_\Sigma$, a sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente, o que garante que a sequência $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ também possui subsequência convergente.

Portanto, o conjunto em (5.17) é limitado em X e a família $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ é UASS.

Note que o conjunto $U_\sigma(t,\tau)x$ é fechado, para todo $x \in X$, veja Proposição 3.9. Como o processo generalizado $\mathscr{G}$ é LUSS, a aplicação $X \times \Sigma \ni (x,\sigma) \to U_\sigma(t,\tau)x$ é w-s.c.s. e a ponto dissipatividade segue do fato da existência do atrator compacto $\mathcal{A}_\Sigma$ em X.

Essas propriedades mostram que as hipóteses do Teorema 5.33 estão satisfeitas, o que garante que existe o atrator global uniforme $\mathbb{O}_\Sigma$, compacto e invariante. Pela minimalidade dos atratores, temos

$$\mathcal{A}_\Sigma = \mathbb{O}_\Sigma,$$

e o resultado segue.

■

5.2.3 Independência dos Atratores em Relação ao Instante Inicial

De acordo com [24], o atrator de trajetórias uniforme $\mathcal{U}_\Sigma$ é caracterizado por

$$\mathcal{U}_\Sigma = \Pi_\tau \mathcal{K}_\Sigma = \left\{\varphi_{|[\tau,+\infty)};\ \varphi \in \mathcal{K}_\Sigma\right\}, \tag{5.18}$$

onde $\mathcal{K}_\Sigma$ é o conjunto de todas as trajetórias completas, ou seja, este conjunto é composto por funções $\varphi : \mathbb{R} \to X$ tais que, para cada $\tau \in \mathbb{R}$, temos $\varphi_{|[\tau,+\infty)} \in \mathscr{G}_\Sigma(\tau) \subset \Theta_\tau \cap \mathcal{F}_\tau$ (veja Definição 3.17), e os espaços Θ_τ e $\mathcal{F}_\tau$ contêm somente restrições a $[\tau, +\infty)$ de curvas em espaços mais gerais Θ e $\mathcal{F}$, de forma que $\mathcal{K}_\Sigma \subset \Theta \cap \mathcal{F}$.

Note que,

$$\mathcal{U}_\Sigma(\tau) = \mathcal{K}_\Sigma(\tau).$$

Com as hipóteses do Teorema 5.34, podemos reescrever a expressão (5.9) como

$$\mathcal{U}_\Sigma(\tau) = \mathcal{A}_\Sigma = \mathbb{U}_\Sigma(t,\tau)\mathcal{A}_\Sigma = \mathbb{U}_\Sigma(t,\tau)\mathcal{U}_\Sigma(\tau). \tag{5.19}$$

A caracterização (5.18) e a informação acima mostram que, para todo $\tau \in \mathbb{R}$ e $t \geq \tau$, temos

$$\left\{\varphi_{|[\tau,+\infty)}(\tau); \varphi \in K_\Sigma\right\} = \mathcal{U}_\Sigma(\tau) = \mathbb{U}_\Sigma(t,\tau)\mathcal{U}_\Sigma(\tau) = \{\phi(t); \phi \in \mathcal{K}_\Sigma \text{ and } \phi(\tau) \in \mathcal{U}_\Sigma(\tau)\},$$

e então

$$\mathcal{K}_\Sigma(\tau) = \{\varphi(\tau); \varphi \in K_\Sigma\} = \{\phi(t); \phi \in \mathcal{K}_\Sigma \text{ and } \phi(\tau) \in \mathcal{U}_\Sigma(\tau)\} = \mathcal{K}_\Sigma(t).$$

Portanto, embora em (5.7) o atrator de trajetórias tenha sido considerado começando em um instante especifico, agora temos uma independência em relação ao instante inicial, ou seja, o atrator de trajetórias uniforme $\mathcal{U}_\Sigma$ é o mesmo para qualquer restrição das curvas de $\Theta \cap \mathcal{F}$ no instante inicial τ.

Outro fato interessante que motivou o estudo desta independência é encontrado em [50], onde os autores provam que, para cada $B \subset X$ limitado, temos

$$\omega_{\tau,\Sigma}(B) \subset \omega_{0,\Sigma}(B),\ \tau \geq 0,$$

onde $\omega_{\tau,\Sigma}$ é como na Definição 5.25. Posteriormente, os autores provam que o atrator global uniforme é caracterizado por

$$\Theta_\Sigma = \bigcup_{\{B \subset \beta(X)\}} \omega_{0,\Sigma}(B),$$

onde $\beta(X)$ denota a família de conjuntos não vazios e limitados de X. Note a independência do atrator em relação ao instante inicial. Apesar de os autores trabalharem com o instante inicial positivo, este fato nos fez pensar sobre a independência do atrator de trajetórias em nosso contexto mais geral.

Capítulo 6

Atratores de Trajetórias e Global para o Problema (P)

Garantiremos a existência do atrator de trajetórias e de do atrator global uniforme invariante para o Problema (P). Suponha as seguintes hipóteses para o Problema (P):

(H1) Sejam $g_1 \in L^{p'}_{loc}(\mathbb{R}; L^{r'_1}(\Omega))$, $g_2 \in L^{p'}_{loc}(\mathbb{R}; L^{r'_2}(\Gamma))$,

$$r_1 \in \begin{cases} (p, pN/(N-p)], & \text{se } p \in [2, N), \\ (p, +\infty), & \text{se } p = N, \\ [p, +\infty), & \text{se } p > N \end{cases}$$

e

$$r_2 \in \begin{cases} (2, (N-1)p/(N-p)], & \text{se } p \in (2, N), \\ (2, +\infty), & \text{se } p = N, \\ [2, +\infty), & \text{se } p > N; \end{cases}$$

(H2) $f_i \in C(\mathbb{R}^2)$ para $i = 1, 2$ e satisfazem as seguintes condições de crescimento

$$\begin{cases} a_1(t)|s|^{r_1} - k_1 \leq f_1(t, s)s, \\ a_2(t)|s|^{r_2} - k_2 \leq f_2(t, s)s, \end{cases} \tag{6.1}$$

q.t.p. para $t \in \mathbb{R}$ e todo $s \in \mathbb{R}$, onde $a_i \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ são funções reais satisfazendo $a_i(t) \geq a_0 > 0$ para algum $a_0 \in \mathbb{R}$ e k_i são constantes positivas, para $i = 1, 2$.

(H3) Existem constantes C_i, $i = 1, 2$, tais que $|f_i(t, s)| \leq C_i(|s|^{r_i - 1} + 1)$ q.t.p. para $t \in \mathbb{R}$ e todo $s \in \mathbb{R}$.

(H5) As funções g_1 e g_2 satisfazem

$$\|G\|_a^2 := \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \|g_1(l)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_2(l)\|^2_{L^2(\Gamma)} dl \right) < \infty; \tag{6.2}$$

(H6) Suponha que para cada f_i, $i = 1, 2$, e $R > 0$ as funções f_i são limitadas no cilindro $Q(R)$, definido na Proposição 1.59, e existem funções $\alpha_i(l, R)$, tais que $\alpha_i(l, R) \to 0$ quando $l \to 0^+$ e satisfazem

$$|f_i(t_1, s_1) - f_i(t_2, s_2)| \leq \alpha_i(|t_1 - t_2| + |s_1 - s_2|, R),\ \forall\ (t_1, s_1), (t_2, s_2) \in Q(R). \tag{6.3}$$

Note que as hipóteses (H1)-(H3) garantem a existência de solução fraca para o Problema (P) (veja Teorema 2.14, Seção 2.2.4).

6.1 Estimativas

As próximas estimativas serão ferramentas para garantirmos a existência do atrator de trajetórias.

Lema 6.1. *Sejam $\tau \in \mathbb{R}$, $t > \tau$ e $U_\tau \in \mathbb{X}^2$. Se U é solução fraca do Problema (P) com $U(\tau) = U_\tau$, temos as seguintes estimativas:*

$$\|U(t)\|^2_{\mathbb{X}^2} \leq \|U_\tau\|^2_{\mathbb{X}^2} e^{\theta(\tau - t)} + M\|G\|_a^2 + \frac{C}{\theta}, \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} \eta \int_h^{h+1} \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} ds + \frac{a_0}{2} \int_h^{h+1} \|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} ds + a_0 \int_h^{h+1} \|\gamma(u)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)} ds& \\ \leq \|U_\tau\|^2_{\mathbb{X}^2} e^{\theta(\tau - h)} + 2M\|G\|_a^2 + \frac{C}{\theta}&, \end{aligned} \tag{6.5}$$

para todo $h \geq \tau$, com θ, η, M e C constantes positivas independentes de τ, t e h.

Demonstração: Em primeiro lugar, observemos que, pelo Lema 1.6, existem constantes positivas κ_1, κ_2 e κ_3 tais que

(i) $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \kappa_1 \|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + C_{\kappa_1}$;

(ii) $\|\gamma(u)\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq \kappa_2 \|\gamma(u)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)} + C_{\kappa_2}$;

(iii) $\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \kappa_3 \|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + C_{\kappa_3}$, com C_{κ_i} constantes positivas, $i = 1, 2, 3$.

Tomando $\Psi = U$ na expressão (2.3) e procedendo como nas primeiras etapas da Proposição 2.5, segue das Desigualdades de Hölder e de Young que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2_{\mathbb{X}^2} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega (a_1(t)|u|^{r_1} - k_1(t))\,dx + \int_\Gamma (a_2(t)|\gamma(u)|^{r_2} - k_2(t))\,dS \\
&\quad\le \langle g_1(t), u\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g_2(t), \gamma(u)\rangle_{L^2(\Gamma)} \le \|g_1(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g_2(t)\|_{L^2(\Gamma)}\|\gamma(u)\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\quad\le M_\varepsilon\|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + M_\varepsilon\|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + \varepsilon\|\gamma(u)\|^2_{L^2(\Gamma)},
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon > 0$ será escolhido posteriormente.

Como $a_1(t), a_2(t) \ge a_0$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|U\|^2_{\mathbb{X}^2} + 2\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + 2a_0\|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + 2a_0\|\gamma(u)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)} \\
&\qquad\le 2M_\varepsilon\|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2M_\varepsilon\|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + 2\varepsilon\|\gamma(u)\|^2_{L^2(\Gamma)} \\
&\qquad\quad + 2k_1|\Omega| + 2k_2 S(\Gamma).
\end{aligned}$$

Usando as observações (i) e (ii) do início da demonstração, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|U\|^2_{\mathbb{X}^2} + 2\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \left(\frac{a_0}{\kappa_1} - 2\varepsilon\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{a_0}{\kappa_2} - 2\varepsilon\right)\|\gamma(u)\|^2_{L^2(\Gamma)} \\
&\qquad + a_0\|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + a_0\|\gamma(u)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)} \\
&\quad\le 2M_\varepsilon\|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2M_\varepsilon\|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + 2k_1|\Omega| + 2k_2S(\Gamma) + \frac{a_0C_{\kappa_1}}{\kappa_1} + \frac{a_0C_{\kappa_2}}{\kappa_2}.
\end{aligned}$$

Tome $\varepsilon > 0$ tal que $\left(\dfrac{a_0}{\kappa_i} - 2\varepsilon\right) > 0$, para $i = 1, 2$, e tome $\theta = \min\left\{\dfrac{a_0}{\kappa_1} - 2\varepsilon, \dfrac{a_0}{\kappa_2} - 2\varepsilon\right\}$, e então

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|U\|^2_{\mathbb{X}^2} + \theta\|U\|^2_{\mathbb{X}^2} + 2\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + a_0\|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + a_0\|\gamma(u)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)} \\
&\quad\le 2M_\varepsilon\|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2M_\varepsilon\|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + 2k_1|\Omega| + 2k_2S(\Gamma) + \frac{a_0C_{\kappa_1}}{\kappa_1} + \frac{a_0C_{\kappa_2}}{\kappa_2}.
\end{aligned}$$

Da observação (iii), segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|U\|^2_{\mathbb{X}^2} + \theta\|U\|^2_{\mathbb{X}^2} + 2\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{a_0}{2\kappa_3}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{a_0}{2}\|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + a_0\|\gamma(u)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)} \\
&\le 2M_\varepsilon\|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2M_\varepsilon\|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + 2k_1|\Omega| + 2k_2S(\Gamma) + \frac{a_0C_{\kappa_1}}{\kappa_1} + \frac{a_0C_{\kappa_2}}{\kappa_2} + \frac{a_0C_{\kappa_3}}{2\kappa_3}.
\end{aligned}$$

Tomando $\eta = \min\left\{2, \dfrac{a_0}{2\kappa_3}\right\}$, $M = 2M_\varepsilon$ e $C = \dfrac{a_0C_{\kappa_1}}{\kappa_1} + \dfrac{a_0C_{\kappa_2}}{\kappa_2} + \dfrac{a_0C_{\kappa_3}}{2\kappa_3} + 2|\Omega|k_1 + 2S(\Gamma)k_2$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|U\|^2_{\mathbb{X}^2} + \theta\|U\|^2_{\mathbb{X}^2} + \eta\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} + \frac{a_0}{2}\|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + a_0\|\gamma(u)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)} \\
&\qquad\le M\left(\|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)}\right) + C.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Multiplicando por $e^{\theta t}$, temos

$$\frac{d}{dt}\left(\|U\|_{\mathbb{X}^2}^2 e^{\theta t}\right) \leq M\left(\|g_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g_2(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2\right) e^{\theta t} + Ce^{\theta t}.$$

e integrando de τ até t, obtemos

$$\|U(t)\|_{\mathbb{X}^2}^2 e^{\theta t} - \|U(\tau)\|_{\mathbb{X}^2}^2 e^{\theta \tau} \leq M \int_\tau^t \left(\|g_1(l)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g_2(l)\|_{L^2(\Gamma)}^2\right) e^{\theta l} dl + \frac{C}{\theta}\left(e^{\theta t} - e^{\theta \tau}\right).$$

Note que, assumindo que $0 \leq t - \tau \leq k$, onde $1 \leq k < \infty$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\tau^t \left(\|g_1(l)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g_2(l)\|_{L^2(\Gamma)}^2\right) e^{\theta l} dl \\
&\quad \leq e^{\theta t} \int_{t-1}^t \left(\|g_1(l)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g_2(l)\|_{L^2(\Gamma)}^2\right) dl \\
&\qquad\qquad + e^{\theta(t-1)} \int_{t-2}^{t-1} \left(\|g_1(l)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g_2(l)\|_{L^2(\Gamma)}^2\right) dl \\
&\qquad\qquad\qquad + \ldots + e^{\theta(t-(k-1))} \int_\tau^{t-(k-1)} \left(\|g_1(l)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g_2(l)\|_{L^2(\Gamma)}^2\right) dl \\
&\quad \leq \|G\|_a^2 e^{\theta t}\left(1 + e^{-\theta} + e^{-2\theta} + \ldots + e^{-(k-1)\theta}\right) \\
&\quad \leq \|G\|_a^2 e^{\theta t}\left(1 - e^{-\theta}\right)^{-1},
\end{aligned}$$

veja [22].

Portanto,

$$\|U(t)\|_{\mathbb{X}^2}^2 \leq \|U_\tau\|_{\mathbb{X}^2}^2 e^{\theta(\tau - t)} + M\|G\|_a^2\left(1 - e^{-\theta}\right)^{-1} + \frac{C}{\theta},$$

garantindo (6.4).

Para provar (6.5), tomando $h \geq \tau$, integramos (6.6) de h até $h+1$, e por (6.4), temos que

$$\begin{aligned}
\eta \int_h^{h+1} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p dl + \frac{a_0}{2}\int_h^{h+1} \|u\|_{L^{r_1}(\Omega)}^{r_1} dl + a_0 \int_h^{h+1} \|\gamma(u)\|_{L^{r_2}(\Gamma)}^{r_2} dl \\
\leq \|U_\tau\|_{\mathbb{X}^2}^2 e^{\theta(\tau-h)} + M\|G\|_a^2 + \frac{C}{\theta} + M\|G\|_a^2 + C.
\end{aligned}$$

Incorporando as constantes, temos

$$\begin{aligned}
\eta \int_h^{h+1} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p dl + \frac{a_0}{2}\int_h^{h+1} \|u\|_{L^{r_1}(\Omega)}^{r_1} dl + a_0 \int_h^{h+1} \|\gamma(u)\|_{L^{r_2}(\Gamma)}^{r_2} dl \\
\leq \|U_\tau\|_{\mathbb{X}^2}^2 e^{\theta(\tau-h)} + 2M\|G\|_a^2 + \frac{C}{\theta}.
\end{aligned}$$

■

Observação 6.2. *Note que, se* $1 \leq s \leq 2$, *então* $0 \leq s-1 \leq 1$ *e, assim,* $1 \leq 2^{s-1} \leq 2$. *Portanto, pelo Lema 1.2, temos*

$$(a+b+c)^s \leq 2^{s-1}a^s + 2^{s-1}(b+c)^s \leq 2^{s-1}(a^s + 2^{s-1}(b^s+c^s)) \leq 4(a^s+b^s+c^s).$$

Lema 6.3. *Dados* $\tau \in \mathbb{R}$, $h > \tau$ *e* $U_\tau \in \mathbb{X}^2$. *Se* U *é solução fraca do Problema* (P) *com* $U(\tau) = U_\tau$, *temos a seguinte estimativa:*

$$\|\partial_t U\|^s_{L^s(h,h+1;(\mathbb{V}^p)^*)} \leq \tilde{M}\|U_\tau\|^2_{\mathbb{X}^2} e^{\theta(\tau-h)} + \tilde{M}\|G\|^2_a + \tilde{C}. \tag{6.7}$$

onde $s = \min\{p', r_1', r_2'\}$ *e com* θ, $\tilde{M}$ *e* $\tilde{C}$ *constantes positivas independentes de* τ *e* h.

Demonstração: Sabemos que

$$\partial_t U = -\beta_p U - \mathcal{F}(t,U) + G(t) \text{ em } L^s(h,h+1;(\mathbb{V}^p)^*).$$

Logo,

$$\|\partial_t U\|_{L^s(h,h+1;(\mathbb{V}^p)^*)} = \|-\beta_p U - \mathcal{F}(t,U) + G(t)\|_{L^s(h,h+1;(\mathbb{V}^p)^*)},$$

assim,

$$\begin{aligned}
\int_h^{h+1} \|\partial_t U\|^s_{(\mathbb{V}^p)^*} &= \int_h^{h+1} \|-\beta_p U - \mathcal{F}(t,U) + G(t)\|^s_{(\mathbb{V}^p)^*} dl \\
&\leq \int_h^{h+1} \left(\|\beta_p U\|_{(\mathbb{V}^p)^*} + \|\mathcal{F}(t,U)\|_{(\mathbb{V}^p)^*} + \|G(t)\|_{(\mathbb{V}^p)^*}\right)^s dl \qquad (6.8)\\
&\leq 4\int_h^{h+1} \left(\|\beta_p U\|^s_{(\mathbb{V}^p)^*} + \|\mathcal{F}(t,U)\|^s_{(\mathbb{V}^p)^*} + \|G(t)\|^s_{(\mathbb{V}^p)^*}\right) dl.
\end{aligned}$$

Vamos estudar cada termo da última linha da expressão (6.8) separadamente. Observe que (veja início da demonstração do Lema 2.6)

$$\|\beta_p U\|_{(\mathbb{V}^p)^*} \leq \|u\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)},$$

logo

$$\|\beta_p U\|^s_{(\mathbb{V}^p)^*} \leq \|u\|^{(p-1)s}_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} + 1,$$

pois $(p-1)s \leq (p-1)p' = p$.

Portanto,

$$\int_h^{h+1} \|\beta_p U\|^s_{(\mathbb{V}^p)^*} dl \leq \int_h^{h+1} \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} dl + 1, \tag{6.9}$$

Agora, sabemos que

$$\|G(t)\|_{(\mathbb{V}^p)^*} \leq \|g_1(t)\|_{L^{r'_1}(\Omega)} + \|g_2(t)\|_{L^{r'_2}(\Gamma)},$$

logo

$$\begin{aligned}\|G(t)\|^s_{(\mathbb{V}^p)^*} &\leq 2^{s-1}\left(\|g_1(t)\|^s_{L^{r'_1}(\Omega)} + \|g_2(t)\|^s_{L^{r'_2}(\Gamma)}\right)\\ &\leq 2^{s-1}\left(\|g_1(t)\|^{r'_1}_{L^{r'_1}(\Omega)} + 1 + \|g_2(t)\|^{r'_2}_{L^{r'_2}(\Gamma)} + 1\right).\end{aligned} \tag{6.10}$$

Note que, como $r'_i \leq 2$ para $i = 1, 2$, pelo Lema 1.6, existem constantes positivas κ_i e C_{κ_i} tais que

1. $\|g_1\|^{r'_1}_{L^{r'_1}(\Omega)} \leq \kappa_1 \|g_1\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{\kappa_1}$;
2. $\|g_2\|^{r'_2}_{L^{r'_2}(\Omega)} \leq \kappa_2 \|g_2\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{\kappa_2}$.

Portanto, tomando $\kappa = \max\{\kappa_1, \kappa_2\}$, temos

$$\begin{aligned}\int_h^{h+1} \|G(t)\|^s_{(\mathbb{V}^p)^*} dl &\leq 2^{s-1}\left(\int_h^{h+1} \|g_1(t)\|^{r'_1}_{L^{r'_1}(\Omega)} + \|g_2(t)\|^{r'_2}_{L^{r'_2}(\Gamma)} dl + 2\right)\\ &\leq 2\left(\int_h^{h+1} \kappa_1 \|g_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \kappa_2\|g_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} dl + (2 + C_{\kappa_1} + C_{\kappa_2})\right)\\ &\leq 2\left(\kappa \|G\|^2_a + (2 + C_{\kappa_1} + C_{\kappa_2})\right).\end{aligned} \tag{6.11}$$

Por último, temos

$$\|\mathcal{F}(t, U)\|_{(\mathbb{V}^p)^*} \leq \|\tilde{f}_1(t, u)\|_{L^{r'_1}(\Omega)} + \|f_2(t, \gamma(u))\|_{L^{r'_2}(\Gamma)},$$

logo, como na demonstração da Proposição 2.8, temos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(t, U)\|^s_{(\mathbb{V}^p)^*} &\leq 2^{s-1}\left(\|\tilde{f}_1(t, u)\|^s_{L^{r'_1}(\Omega)} + \|f_2(t, \gamma(u))\|^s_{L^{r'_2}(\Gamma)}\right)\\ &\leq 2^{s-1}\left(\|\tilde{f}_1(t, u)\|^{r'_1}_{L^{r'_1}(\Omega)} + 1 + \|f_2(t, \gamma(u))\|^{r'_2}_{L^{r'_2}(\Gamma)} + 1\right)\\ &\leq 2^{s-1}\Bigg(2^{r'_1-1}\left(C_1^{r'_1} 2^{r'_1-1}\left(M_\Omega \|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + |\Omega|\right) + \|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} + 1\right) + 1\\ &\qquad + C_2^{r'_2} 2^{r'_2-1}\left(\|\gamma(u)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)} + S(\Gamma)\right) + 1\Bigg).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_h^{h+1} \|\mathcal{F}(t, U)\|^s_{(\mathbb{V}^p)^*} dl &\leq 8\Bigg[C_1^{r'_1}\left(\int_h^{h+1} \|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} dl\right)\\ &\quad + \int_h^{h+1} \|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} dl + C_2^{r'_2}\left(\int_h^{h+1} \|\gamma(u)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)} dl\right)\Bigg] + \bar{M},\end{aligned} \tag{6.12}$$

onde $\bar{M}$ depende de $|\Omega|$ e $S(\Gamma)$.

Portanto,

$$\int_h^{h+1} \|\partial_t U\|^s_{(\mathbb{V}^p)^*} dl \leq \int_h^{h+1} \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} + 8\left(C_1^{r_1'} + 1\right) \int_h^{h+1} \|u\|^{r_1}_{L^{r_1}(\Omega)} dl$$
$$+ \left(8C_2^{r_2'}\right) \int_h^{h+1} \|\gamma(u)\|^{r_2}_{L^{r_2}(\Gamma)} dl + 2\kappa \|G\|_a^2 + \tilde{K},$$

onde $\tilde{K}$ depende de $|\Omega|, S(\Gamma), C_1^{r_1'}, C_2^{r_2'}, C_{\kappa_1}$ e C_{κ_2}.

Tomando constantes apropriadas, segue de (6.5) que

$$\int_h^{h+1} \|\partial_t U\|^s_{(\mathbb{V}^p)^*} dl \leq \tilde{M} \|U_\tau\|^2_{\mathbb{X}^2} e^{\theta(\tau - h)} + \tilde{M} \|G\|_a^2 + \tilde{C}.$$

■

6.2 Atrator de Trajetórias para o Problema (P)

Vamos analisar alguns aspectos das funções f_i e g_i, para $i = 1, 2$, para definirmos o conjunto Σ adequado para o Problema (P).

Note que, como $1 \leq p', r_1', r_2' < 2$, a hipótese (H5) garante que

$$\sup_{h \in \mathbb{R}} \left(\int_h^{h+1} \|g_1(l)\|^{p'}_{L^{r_1'}(\Omega)} + \|g_2(l)\|^{p'}_{L^{r_2'}(\Gamma)} dl \right) < \infty. \tag{6.13}$$

Por (6.10) e (6.13), temos

$$\begin{aligned} &\sup_{h \in \mathbb{R}} \left(\int_h^{h+1} \|G\|^s_{(\mathbb{V}^p)^*} dl \right) \\ &\quad \leq \sup_{h \in \mathbb{R}} \left(2 \left[\int_h^{h+1} \|g_1(l)\|^{p'}_{L^{r_1'}(\Omega)} + \|g_2(l)\|^{p'}_{L^{r_2'}(\Gamma)} dl \right] + 4 \right) < \infty, \end{aligned} \tag{6.14}$$

o que garante que G é uma função de tr.c. em $L^{s,w}_{loc}(\mathbb{R}; (\mathbb{V}^p)^*)$ (veja Proposição 1.60).

Observação 6.4. *As limitações nas hipóteses (H2) e (H3) com as constantes positivas k_i e C_i são uniformes com respeito a translações das funções f_i na primeira variável, para $i = 1, 2$, ou seja,*

1. $a_0 |s|^{r_i} - k_i \leq f_i(h + t, s)s = T(h) f_i(t, s)s, \ \forall h \in \mathbb{R};$

2. $|T(h) f_i(t, s)| = |f_i(h + t, s)| \leq C_i(|s|^{r_i - 1} + 1), \ \forall h \in \mathbb{R}.$

Consideremos a seguinte função

$$\tilde{\mathcal{F}}(t,s) = \begin{pmatrix} f_1(t,s) \\ f_2(t,s) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

para $(t,s) \in \mathbb{R}^2$. Note que a função $\tilde{\mathcal{F}}$ representa a parte não autônoma da função $\mathcal{F}$, ou seja, a parte da função $\mathcal{F}$ que é afetada por translações. Isto nos permite trabalhar com $\sigma_0 = (\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{G})$ ao invés de $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ quando for conveniente. Pela continuidade dos operadores envolvidos, para cada $t \in \mathbb{R}$, temos $\tilde{\mathcal{F}}(t,\cdot) \in C_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$, e portanto $\tilde{\mathcal{F}} \in C_{loc}(\mathbb{R}; C_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2))$.

Com a hipótese (H6), temos que, para todo $R > 0$ e $(t_1,s_1),(t_2,s_2) \in Q(R)$,

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{\mathcal{F}}(t_1,s_1) - \tilde{\mathcal{F}}(t_2,s_2)\|^2_{\mathbb{R}^2} \\
&\quad = (f_1(t_1,s_1) - f_1(t_2,s_2))^2 + (f_2(t_1,s_1) - f_2(t_2,s_2))^2 \\
&\quad \leq \alpha_1(|t_1-t_2| + |s_1-s_2|, R)^2 + \alpha_2(|t_1-t_2| + |s_1-s_2|, R)^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad =: \alpha_3(|t_1-t_2| + |s_1-s_2|, R)^2.
\end{aligned}$$

Logo, tomando $\alpha_3(l,R) = \sqrt{\alpha_1(l,R)^2 + \alpha_2(l,R)^2}$, e temos que

$$\|\tilde{\mathcal{F}}(t_1,s_1) - \tilde{\mathcal{F}}(t_2,s_2)\|_{\mathbb{R}^2} \leq \alpha_3(|t_1-t_2| + |s_1-s_2|, R), \tag{6.15}$$

com $\alpha_3(l,R) \to 0$, quando $l \to 0^+$, e $\tilde{\mathcal{F}}$ é limitada em $Q(R)$.

Portanto, $\tilde{\mathcal{F}}$ é de tr.c. em $C_{loc}(\mathbb{R}; C_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2))$ (veja Proposição 1.59).

Tome $\Xi = C_{loc}(\mathbb{R}; C_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)) \times L^{s,w}_{loc}(\mathbb{R}; (\mathbb{V}^p)^*)$. Logo, pela Seção 1.6.3, a função $\sigma_0 = (\tilde{\mathcal{F}}, G)$ é de tr.c. em Ξ. Seja $\Sigma := \mathcal{H}(\sigma_0)$, note que Σ é compacto em Ξ, e o operador de translação $T(t)$ é contínuo em Σ. Além disso, Σ é um espaço métrico compacto com $T(t)\Sigma = \Sigma$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Proposição 6.5. *Para toda $\sigma_1 = (\tilde{\mathcal{F}}^{(1)}, G^{(1)}) \in \Sigma$, temos*

(i) $\|G^{(1)}\|^s_a = \sup_{h\in\mathbb{R}} \int_h^{h+1} \|G^{(1)}\|^s_{(\mathbb{V}^p)^*} dl \leq \|G\|^s_a$;

(ii) a função $\tilde{\mathcal{F}}^{(1)}$ satisfaz (6.15) *com a mesma função α_3.*

Demonstração: Os itens (i) e (ii) seguem diretamente das Proposições 1.60 e 1.59, respectivamente.

■

Note que para cada $\sigma \in \Sigma$ existe $h \in \mathbb{R}$ tal que $T(h)\sigma_0 = \sigma$. Se U é solução fraca do Problema (P) com as funções f_i e g_i, $i = 1, 2$ tomadas no início do capítulo, dizemos que U é uma solução associada as funções $\tilde{\mathcal{F}}$ e G. Note que $T(h)U$ é solução do Problema (P) associado às funções $T(h)\tilde{\mathcal{F}}$ e $T(h)G$, que designaremos por P_σ.

Proposição 6.6. *A família $\mathscr{G} = \{\mathscr{G}_\sigma(\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma}$, onde*

$$\mathscr{G}_\sigma(\tau) := \left\{ \begin{array}{c} U : [\tau, +\infty) \to \mathbb{X}^2;\ U \text{ é solução fraca do} \\ \text{Problema } (P_\sigma) \text{ com condição inicial em } \tau \end{array} \right\},$$

é um processo generalizado exato em $\mathbb{X}^2$.

A demonstração dessa proposição é análoga à prova da Proposição 2.15. Note que na Proposição 2.15 pedimos que o processo generalizado $\mathscr{G}$ fosse formado por soluções obtidas pelo processo de Faedo-Galerkin, devido à necessidade de que as sequências geradas tivessem determinadas propriedades imprescindíveis à demonstração da existência do atrator pullback para o Problema (P) (veja Capítulo 4). Para obter o atrator de trajetórias, não precisaremos de tais características, ou seja, podemos considerar que o processo generalizado $\mathscr{G}$ é formado por todas as soluções fracas do Problema (P). O método de Faedo-Galerkin garantiu a existência de solução (veja Capítulo 2), porém não temos garantia de que todas as soluções fracas são, de fato, limite de soluções do Problema (P_n), portanto podemos considerar aqui um processo generalizado mais abrangente.

Proposição 6.7. *O processo generalizado $\mathscr{G}$ é LUSS.*

Demonstração:

Sejam $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ e $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ sequências tais que $U_n \in \mathscr{G}_{\sigma_n}(\tau)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observe que $\sigma_n = (\tilde{\mathcal{F}}_n, G_n)$ e

$$\mathcal{F}_n(t, u) = \tilde{\mathcal{F}}_n(t, u) + \begin{pmatrix} -|u|^{p-2}u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Suponha $U_n(\tau) \to z \in \mathbb{X}^2$.

Note que, a menos de um número finito de elementos da sequência, existe um conjunto limitado $B_0 \subset \mathbb{X}^2$, tal que $\{U_n(\tau)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_0$. Assim, pelo Lema 6.1, dado $T > \tau$, temos

$$\|U_n\|_{L^\infty(\tau,T;\mathbb{X}^2)} \leq C;$$
$$\|U_n\|_{L^p(\tau,T;\mathbb{V}^p)} \leq C.$$

Então, assim como foi feito com a sequência de soluções obtidas pelo processo de Faedo-Galerkin da Seção 2.2.4, temos que existe W tal que

$$U_n \overset{*}{\rightharpoonup} W \text{ em } L^\infty(\tau,T;\mathbb{X}^2) \text{ e}$$
$$U_n \rightharpoonup W \text{ em } L^p(\tau,T;\mathbb{V}^p).$$

Como $U_n \in \mathscr{G}_{\sigma_n}(\tau)$, temos

$$\partial_t U_n + \beta_p U_n + \mathcal{F}_n(t,U_n) = G_n(t),$$

em $L^s(\tau,T;(\mathbb{V}^p)^*)$. O fato de $s \leq 2$ garante que $G_n \overset{*}{\rightharpoonup} G$ em $L^s(\tau,T;(\mathbb{V}^p)^*)$.

Como consequência do processo de Faedo-Galerkin para existência de solução, sabemos que $U_n \to W$ q.t.p. em $\overline{\Omega} \times [\tau,T]$, logo $\mathcal{F}_n(t,U_n) \to \mathcal{F}(t,W)$ q.t.p em $\overline{\Omega} \times [\tau,T]$. Note que cada f_{in} satisfaz o item 2 da Observação 6.4, uniformemente. Logo, de (6.12) e (6.5), segue que $\mathcal{F}_n$ é uniformemente limitada em $L^s(\tau,T;(\mathbb{V}^p)^*)$. Pelo Lema 1.3, temos

$$\mathcal{F}_n(t,U_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{F}(t,W) \text{ em } L^s(\tau,T;(\mathbb{V}^p)^*).$$

Com isso, assim como na demonstração da Proposição 2.13, temos que $\beta_p U_n \overset{*}{\rightharpoonup} \beta_p W$ em $L^s(\tau,T;(\mathbb{V}^p)^*)$.

Como no processo de convergência utilizado na demonstração de existência de solução, podemos garantir que W é solução do problema limite e $U_n \to W$ em $C(\tau,T;\mathbb{X}^2)$. Portanto, como $T > \tau$ é arbitrário, temos que $W \in \mathscr{G}_\sigma(\tau)$.

Logo $\mathscr{G}$ é LUSS.

■

Corolário 6.8. *O espaço de trajetórias $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ é $(C_{loc}([\mathbb{R}_\tau,+\infty);\mathbb{X}^2),\Sigma)$-fechado.*

Demonstração: Segue da Proposição 5.15. ■

Teorema 6.9. *Suponha que as hipóteses (H1)-(H3), (H5) e (H6) sejam validas. Então o semigrupo $\{H(t)\}_{t\geq 0}$ agindo em $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ possui atrator de trajetórias uniforme, que atrai elementos de $\mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ limitados em $L^\infty(\tau,+\infty;\mathbb{X}^2)$, na topologia de $C_{loc}([\tau,+\infty);\mathbb{X}^2)$.*

Demonstração: Para aplicar o Teorema 5.14, precisamos encontrar um atrator $P \subset \mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ limitado em $L^\infty(\tau,+\infty;\mathbb{X}^2)$ e compacto em $C_{loc}([\tau,+\infty);\mathbb{X}^2)$. Consideremos

$$P = \left\{U \in \mathscr{G}_\Sigma(\tau); esssup_{h\geq\tau}\left(\|U\|_{L^\infty(h,h+1;\mathbb{X}^2)} + \|\partial_t U\|_{L^s(h,h+1;(\mathbb{V}^p)^*)}\right) \leq 2R\right\}, \tag{6.16}$$

onde $R := 1 + \tilde{M} + 2M\|G\|_a^2 + \dfrac{2C}{\theta}$.

Mostremos que P é um conjunto absorvente. Seja $\mathbb{B} \subset \mathscr{G}_\Sigma(\tau)$ limitado em $L^\infty(\tau,+\infty;\mathbb{X}^2)$, então existe $R_0 > 0$ tal que $\|U\|_{L^\infty(\tau,+\infty;\mathbb{X}^2)} < R_0$, para cada trajetória $U \in \mathbb{B}$. Escolha $t_0 \geq \tau$ tal que $R_0 e^{\theta(\tau-t_0)} + R \leq 2R$. Logo, pelas estimativas (6.4) e (6.7), para todo $t > t_0$, temos

$$\|U\|_{L^\infty(t,t+1;\mathbb{X}^2)} + \|\partial_t U\|_{L^s(t,t+1;(\mathbb{V}^p)^*)} \leq 2R.$$

Assim, $H(t)U \in P$, ou seja, $H(t)\mathbb{B} \subset P$ para todo $t > t_0$. É evidente que o conjunto P é limitado em $L^\infty(\tau,+\infty;\mathbb{X}^2)$.

Resta mostrarmos então que o conjunto P é compacto em $C_{loc}([\tau,+\infty);\mathbb{X}^2)$. Para tanto, basta mostrarmos que $\Pi_{[\tau,T]}P$ é compacto em $C(\tau,T;\mathbb{X}^2)$, para todo $T \geq \tau$ (veja Proposição 1.56). De fato, pelo Teorema 1.4, temos que $\Pi_{[\tau,T]}P$ é pré-compacto em $C(\tau,T;\mathbb{X}^2)$. Temos que garantir que $\Pi_{[\tau,T]}P$ é fechado em $C(\tau,T;\mathbb{X}^2)$. Seja $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset P$ uma sequência tal que $U_n \to U$ em $C_{loc}([\tau,+\infty);\mathbb{X}^2)$, logo $\Pi_{[\tau,T]}U_n \to \Pi_{[\tau,T]}U$ em $C(\tau,T;\mathbb{X}^2)$. A sequência $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(\tau,+\infty;\mathbb{X}^2)$, pelo Corolário 6.8 temos que $U \in \mathscr{G}_\Sigma(\tau)$, e procedendo como na demonstração da Proposição 6.7, garantimos que

$$\begin{aligned} &U_n \overset{*}{\rightharpoonup} U \text{ em } L^\infty(\tau,T;\mathbb{X}^2) \text{ e}\\ &\partial_t U_n \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t U \text{ em } L^s(\tau,T;(\mathbb{V}^p)^*), \end{aligned}$$

para todo $T > \tau$, logo

$$\begin{aligned} \|U\|_{L^\infty(h,h+1;\mathbb{X}^2)} &+ \|\partial_t U\|_{L^s(h,h+1;(\mathbb{V}^p)^*)} \\ &\leq \liminf\left(\|U_n\|_{L^\infty(h,h+1;\mathbb{X}^2)} + \|\partial_t U_n\|_{L^s(h,h+1;(\mathbb{V}^p)^*)}\right) \leq 2R. \end{aligned}$$

Portanto, $\Pi_{[\tau,T]}U \in \Pi_{[\tau,T]}P$. Ou seja, $\Pi_{[\tau,T]}P$ é fechado em $C([\tau,T);\mathbb{X}^2)$. Portanto P é compacto em $C_{loc}([\tau,+\infty);\mathbb{X}^2)$.

■

Teorema 6.10. *Supondo as hipóteses do Teorema 6.9, a família de processos multívocos $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ associados ao processo generalizado $\mathscr{G}$ possui o atrator global uniforme compacto e invariante em $\mathbb{X}^2$.*

Demonstração: Note que o espaço $\mathbb{X}^2$ e o conjunto Σ satisfazem as hipóteses iniciais do Teorema 5.34, e na demonstração do teorema anterior o conjunto P definido em (6.16) é um atrator uniforme de trajetórias compacto em $C_{loc}([\mathbb{R}_\tau, +\infty); \mathbb{X}^2)$ e limitado em $L^\infty(\tau, +\infty; \mathbb{X}^2)$.

Então, para garantir a existência do atrator global uniforme invariante para a família de processos multívocos $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ associados ao processo generalizado $\mathscr{G}$ gerado pelo Problema (P), resta mostrar que para todo limitado $B \subset \mathbb{X}^2$, o conjunto

$$\mathbb{B} = \{U; U \in \mathscr{G}_\Sigma(\tau) \text{ e } U(\tau) \in B\}$$

é limitado em $L^\infty(\mathbb{R}_\tau; \mathbb{X}^2)$. Mas isto segue diretamente da estimativa (6.4).

Pela Proposição 6.7, temos que o processo generalizado $\mathscr{G}$ é LUSS.

Portanto, pelo Teorema 5.34, existe o atrator global uniforme invariante para o processo $\mathscr{G}$.

$\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] ANGUIANO, M.; MARÍN-RUBIO, P.; REAL, J. *Pullback attractors for non-autonomous reaction-diffusion equations with dynamical boundary conditions.* J. Math. Anal. Appl., 383 608–618, (2011).

[2] ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces.* Academic Press, (1975).

[3] ANGUIANO, M.; CARABALLO, T.; REAL, J.; VALERO, J. *Pullback attractors for a nonautonomous integro-differential equation with memory in some unbounded domains* . Int. J. of Bifurcation and Chaos, Vol. 23, No. 3, 1350042 (24 pages) (2013).

[4] ARRIETA, J. M.; CARVALHO, A. N.; RODRÍGUEZ-BERNAL. A. *Attractors of parabolic problems with nonlinear boundary conditions. Uniform bounds.* Communications in Partial Differential Equations, vol. 25, no. 1-2, pp. 1–37, (2000).

[5] BABIN, A. V.; VISHIK M.I. *Attractors of Evolution Equations.* North-Holland, Amsterdam, (1992).

[6] BALL, J. M. *Continuity properties and global attractors of generelized semiflows and the Navier-Stokes equations.* J. Nonlinear Sci. 7, no. 5 475–502, (1997).

[7] BALL, J.M. *On the asymptotic behavior of generalized process with applications to nonlinear evolution equations*, Journal of Differential Equations, **27**, 224 - 265, (1978).

[8] BASS, R. F. *Real Analysis for Graduate Students: Measure and Integration Theory.* Copyright 2011 Richard F. Bass, (2011).

[9] BARBU, V. *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces.* Springer, (2010).

[10] BORTOLAN, M. C., CARVALHO, A. N., LANGA, J. A., *Structure of attractors for skew product semiflows.* Journal of Differential Equations, 257(2), 490 - 522, (2014).

[11] BREZIS, H. *Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert.* North-Holland, Amasterdam, (1973).

[12] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer , (2010).

[13] CAPELATO, É. *Atrator no sentido pullback e trajetórias completas extremas para problemas governados pelo p-Laplaciano.* Tese de Doutorado-Universidade Federal de São Carlos, (2011).

[14] CARABALLO, T.; KLOEDEN, P. E. *Non-autonomous attractors for integro-differential evolution equations.* Discrete Continuous Dynamical Systems, V.2, 17-36, (2009).

[15] CARABALLO, T.; LANGA, J. A.; MELNIK. V.S.; VALERO, J. *Pullback attractors of nonautonomous and stochastic multivalued dynamical systems* . Set-Valued Anal. 11 (2), 153–201, (2003).

[16] CARABALLO, T.; LANGA, J. A.; VALERO, J. *The dimension of attractors of nonautonomous partial differential equations.* ANZIAM J. 45 207–222, (2003).

[17] CARABALLO, T.; LUKASIEWICZ, G.; REAL, J. *Pullback attractors for asymptotically compact non-autonomous dynamical systems.* Nonlinear Anal. 64, 484–498, (2006).

[18] CARVALHO, A.N.; LANGA, J. A.; ROBINSON, J. C. *Attractos for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, Springer, (2013).

[19] CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; ROBINSON, J. C.; *Non-autonomous dybamical systems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B, 20(3), 703 - 747, (2015).

[20] CARVALHO, A. N.; GENTILE, C. B. *Asymptotic behaviour of non-linear parabolic equations with monotone principal part*, Journal of mathematical analysis and applications, 280(2), 252-272, (2003).

[21] CARVALHO, A. N.; PISKAREV, S. *A general approximation scheme for attractors of abstract parabolic problems*, Numerical functional analysis and optimization, v.27, no.7-8, 785-829, (2006).

[22] CHEPYZHOV, V. V.; VISHIK, M.I. *Trajectory Attractors for Reaction-Diffusion Systems*, Topo. Meth. in Nonline. Anal., Vol. 7, pp. 49-76, (1996).

[23] CHEPYZHOV, V. V.; VISHIK, M. I. *evolution equations and their trajectory attractors*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 76(10), 913-964, (1997).

[24] CHEPYZHOV, V. V.; VISHIK, M.I. *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2002).

[25] CHEPYZHOV, V. V.; VISHIK, M.I. *Trajectory and Global Attractors of Three-Dimensional Navier-Stokes Systems*, Math. Notes, vol. 71, no.2, pp. 177-193, (2002).

[26] CHESKIDOV, A.; KAVLIE, L. *Pullback attractors for generalized evolutionary systems*, arXiv preprint arXiv:1310.4917. (2013).

[27] CODDINGTON, E. A.; LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, (1955).

[28] CZAJA, R. *Pullback exponential attractors with admissible exponential growth in the past.* Nonlinear Analysis 104 90–108, (2014).

[29] DEMENGEL, F.; DEMENGEL, G. *Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations.* Springer , (2007).

[30] DIBENEDETTO, E. *Degenerate Parabolic Equations.* New York: Springer-Verlag, (1993).

[31] ESCHER, J. *Quasilinear parabolic systems with dynamical boundary conditions*, Communications in partial differential equations, 18(7-8), 1309-1364, (1993).

[32] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society , (1998).

[33] FAVINI, A.; GOLDSTEIN, G. R.; GOLDSTEIN. J. A.; ROMANELLI, S. *The heat equation with generalized Wentzell boundary condition* . J. Evol. Equations 2, 1–19, (2002).

[34] GAL, C. G.; WARMA, M. *Well posedness and the global attractor of some quasi-linear parabolic equations with nonlinear dynamic boundary conditions.* Diff. and Int. Equations, vol. 23, no. 3-4, 327–358, (2010).

[35] GAL, C. G., *On a class of degenerate parabolic equations with dynamic boundary conditions*, Journal of Differential Equations, 253(1), 126-166, (2012).

[36] GENTILE, C. B.; SINSEM, J. *On attractors for multivalued semigrups defined by generelized semiflows.* Set-Valued Anal. 16, no. 1, 105–124, (2008).

[37] HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations.* Interscience, New York , (1969).

[38] HINTERMANN, T., *Evolution equations with dynamic boundary conditions*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 113(1-2), 43-60, (1989).

[39] KACUR, J., *Nonlinear parabolic equations with the mixed nonlinear and nonstationary boundary conditions*, Mathematica Slovaca, 30(3), 213-237, (1980).

[40] KAPUSTYAN, O. V.; VALERO, J. *Comparison Between Trajectory and Global Attractors for Evolution Systems Without Uniqueness of Solutions*, Int. Journal of Bifurcation and Caos, vol. 20, no.9, pp. 2723-2734, (2010).

[41] KAPUSTYAN, O. V.; VALERO, J. *On the Kneser Property for the Complex Ginzburg-Landau Equation and the Lotka-Volterra System with Diffusion*, Journal of Math. Analysis and Applications,357, pp. 254-272, (2009).

[42] KAPUSTYAN, O. V.; KASYANOV, P. O.; VALERO, J.; ZGUROVSKY, M. Z. *Structure of Uniform Global Attractor for General Non-Autonomous Reaction-Diffusion System*, Continuous and Distributed Systems Theory and Applications, Chapter 12, Springer, pp. 163-180, (2014).

[43] KOLMOGOROV, A. N.; FOMIN, S. V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Nauka, Moscow, (1981).

[44] LI, F.; YOU, B. *Pullback attractors for non-autonomous p-laplacian equations with dynamic flux boundary conditions.* Elet. J. of Diff. Equations, Vol. 2014, No. 74, 1-11, (2014).

[45] LI, Y.; ZHONG, C. K. *Pullback attractors for the norm-to-weak continuous process and application to the nonautonomous reaction–diffusion equations.* Appl. Math. Comput. 190 1020–1029, (2007).

[46] LIONS, J. L. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires.* Dunod, Paris, (1969).

[47] LIONS, J. L.; MEGENES, E. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications Vol. I.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York , (1972).

[48] MARION, M.; TEMAM, R. *Nonlinear galerkin methods* . SIAM. J. NUMER. ANAL., Vol. 26, No. 5, pp. 1139-1157 (1989).

[49] MELNIK, V. S.; VALERO, J. *On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions*, Set-Valued Analysis, 6(1), 83-111, (1998).

[50] MELNIK, V. S.; VALERO, J. *On global attractors of multivalued semiprocesses and nonautonomous evolution inclusions*, Set-Valued Analysis 8.4, 375-403, (2000).

[51] NITTKA, R. *Elliptc and Parabolic Problems with Robin Boundary Conditions on Lipschitz Domains* . Doctoral dissertation at the Faculty of Mathematics and Economics at the University of Ulm (Germany), (2010).

[52] ROBINSON, J. C. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems.* North-Holland, Amsterdam, (1992).

[53] ROBINSON, J. C.; RODRÍGUEZ-BERNAL, A.; VIDAL-LOPEZ, A. *Pullback attractors and estremal complete trajectories for non-autonomous reaction-diffusion problems.* J. Differential Equations 238 289–337, (2007).

[54] SAMPROGNA, R. A.; SCHIABEL, K.; GENTILE MOUSSA, C. B. *Pullback attractors for multivalued process and application to nonautonomous problem with dynamic boundary conditions.* Set-Valued and Variational Analysis, accepted for publication.

[55] SAVARÉ, G. *On the regularity of the positive part of functions* . Nonlinear Anal., Theory, Meth., & Applic. , Vol. 27, No. 9, pp. 1055-1074 (1996).

[56] SCHAEFER, H. H. *Topological Vector Spaces* . Graduate texts in mathematics 3, New York: Springer, (1999).

[57] SIMSEN, J.; CAPELATO, É. *Some Properties for Exact Generalized Processes.* Continuous and Distributed Systems II, Chapter 12, 209-219, (2015).

[58] SIMSEN, J.; VALERO, J. *Characterization of pullback attractors for multivalued nonautonomous dynamical systems.* In "Advances in Dynamical Systems and Control (V.A. Sadovnichiy and Z. Zgurovsky eds.)", Studies in Systems, Decision and Control 659, Springer, 179-195, (2016).

[59] TEMAM, R. *Infinite-Dimencional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.* Springer-Verlag, New York, (1997).

[60] VALERO, J. *A Weak Comparison Principle for Reaction-Diffusion Systems.* J. of Funct. Spaces and Appl., 1–30, (2012).

[61] YANG, L.; YANG, M.; KLOEDEN, P. E. *Pullback attractors for non-autonomous quasilinear parabolic equations with dynamical boundary conditions.* Disc. and Cont. Dynamical Systems B, Vol. 17, No. 7, 1-11, (2012).

[62] YANG, L.; YANG, M.; WU, J. *On uniform attractors for non-autonomous p-Laplacian equation with a dynamic boundary condition.* Disc. and Cont. Dynamical Systems B, Vol. 17, No. 7, 1-11, (2012).

Índice Remissivo