UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Conjunto frente de ondas em classe de funções ultradiferenciáveis de soluções de equações diferenciais parciais lineares

Renata de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi

São Carlos - SP
31 de Março de 2017.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Conjunto frente de ondas em classe de funções ultradiferenciáveis de soluções de equações diferenciais parciais lineares

Renata de Oliveira

Dissertação apresentada ao PPGM da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi

São Carlos - SP
31 de Março de 2017.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Renata de Oliveira, realizada em 04/03/2016:

Rafael F. Barostichi

Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi
UFSCar

Petronilho

Prof. Dr. Gerson Petronilho
UFSCar

Éder Ritis Aragão Costa

Prof. Dr. Éder Ritis Aragão Costa
USP

Ao meu futuro esposo,
Rafael Figueira.

"Pois a sabedoria entrará em seu coração e o conhecimento será agradável à sua alma."
Provérbios 2;10.

Agradecimentos

Rendo toda a minha gratidão ao mestre dos mestres, o único senhor de minha vida, ao misericordioso Deus que me conduziu por este caminho. Sou grata à Imaculada Virgem Maria que sempre esteve comigo e passou a frente de todos os meus passos.

Se cheguei até aqui é porque estive apoiada em grandes ombros. Agradeço:

À minha família, meu pai Reginaldo, minha mãe Luzia, meus irmãos Rogério e Érica e meus maravilhosos sobrinhos Pedro, Maria e Renan, pessoas que eu me orgulho e admiro muito por tudo que são e pelo que fazem por mim. Também, à minha família de coração, meu sogro José, minha sogra Ana Keyla e meu cunhado Gustavo por me acolherem de uma forma inexplicável.

Ao meu noivo Rafael, para o qual não cabem palavras, apenas o silêncio de um coração feliz e eternamente grato.

À Comunidade Santo Sacrifício da Cruz e todos os seus membros (Vini, Daia, Do, Bêa, Dani, Neide, Manoel, Dona Lúcia, Karina) por serem o travesseiro consolador de Nossa Senhora em minha vida.

À todos os meus amigos da UFSCar que enfrentaram comigo esta jornada. Em especial a galera da pizza nas segundas, terças, quartas, quintas e sextas-feiras (rs), Flávia, Marcos, Maykel, Rodrigo e Ronaldo, que aguentaram todas as minhas reclamações, dúvidas e me deram apoio em diversos momentos.

Ao professor Rafael, não apenas por sua exepcional orientação, disponibilidade e dedicação ao longo desses anos, mas também por ser um grande exemplo de pessoa, professor e matemático. Agradeço também à sua esposa Liane pela amizade.

Aos professores Gerson e Eder que aceitaram compor a banca para a defesa deste trabalho, assim como, ao professor Luís Antônio que participou de minha qualificação.

Ao Programa de Pós-graduação em Matemática da UFSCar e à todo o seu corpo docente. Aqui tive grandes mestres que me incentivaram e acreditaram em minhas capacidades.

Por fim, à CNPq (Centro Nacional de Pesquisa) pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, introduzimos o conjunto frente de ondas $WF_*(u)$ de uma distribuição clássica com respeito às classes de funções ultradiferenciáveis dos tipos Beurling e Romieu. Nosso principal objetivo é apresentar uma prova detalhada da inclusão

$$WF_*(u) \subset WF_*(Pu) \cup \mathrm{Char}(P), \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Na expressão acima, Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, P é um operador diferencial parcial linear com coeficientes em uma classe de funções ultradiferenciáveis adequada e $\mathrm{Char}(P)$ é o conjunto característico de P.

Abstract

In this work, we introduce the wave front set $WF_*(u)$ of a classical distribuition with respect to the ultradifferentiable classes of Beurling and Romieu type. Our main goal is to present a detailed proof of the inclusion

$$WF_*(u) \subset WF_*(Pu) \cup \operatorname{Char} P, \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

In the above expression, Ω is an open subset of $\mathbb{R}^n$, P is a linear partial differential operator with coefficients in a suitable ultradifferentiable class and $\operatorname{Char} P$ is the characteristic set of P.

Sumário

Introdução

Em 1945, Laurent Schwartz criava uma teoria que viria revolucionar o estudo das equações diferenciais parciais (EDP's). A generalização do conceito de função permitiu com que os matemáticos, físicos e engenheiros trabalhassem em um universo ideal onde "tudo valia", no sentido de que obtiveram um espaço em que a derivação estava sempre bem definida, as séries podiam ser derivadas ou integradas termo a termo sem alguma restrição, etc. Tal generalização foi proporcionada pelo surgimento da teoria das distribuições devida a Schwartz. Este avanço despertou, ao longo dos anos, o interesse de muitos matemáticos e contribuiu para que o estudo das equações diferenciais parciais se tornasse uma das áreas com mais intensa pesquisa em matemática da atualidade.

Providos desta teoria, os métodos para encontrar soluções de EDP's foram consideravelmente ampliados, uma vez que o ambiente de procura por estas soluções se tornou mais vasto e repleto de significativas propriedades.

Esta nova ferramenta nos possibilita sair do contexto das chamadas soluções clássicas e buscar obter soluções de equações dadas por distribuições. Entretanto, se a EDP descreve um problema físico, o que significa tal solução? Como estudar o seu comportamento? Isto nos motiva a procurar as regiões onde uma distribuição é uma função suave, o que caracteriza o objetivo central dos nossos estudos: regularidade de soluções. Estamos interessados em uma análise microlocal, que nos proporcionará não só a identificação das singularidades, mas também encontrar as direções de alta frequência, isto é, as direções em que se propagam estas singularidades.

Sabemos dos teoremas de Paley-Wiener que o decaimento no infinito da transformada de Fourier de uma distribuição é traduzido em regularidade da mesma. Para uma análise microlocal, utilizamos a definição de conjunto frente de ondas dada por Lars Hörmander em 1970. O conjunto frente de ondas de uma distribuição é constituído de pares ordenados, nos quais a primeira coordenada é uma singularidade da distribuição e a segunda é uma direção onde a transformada de Fourier não possui decaimento rápido.

Neste trabalho, nos dedicamos a responder a seguinte questão: Se P é um operador diferencial parcial linear com coeficientes em uma classe de funções $\boldsymbol{C}$ e u é uma distribuição definida em um aberto do $\mathbb{R}^n$ e solução da equação

$$Pu = f$$

e se f também está nesta classe $\boldsymbol{C}$, é possível inferir algum tipo de regularidade atrelada à classe $\boldsymbol{C}$ com respeito a distribuição u? Mais precisamente, provaremos a inclusão

$$WF_*(u) \subset WF_*(Pu) \cup \mathrm{Char}(P), \tag{0.1}$$

em que $\mathrm{Char}(P)$ é o conjunto característico do operador P e $WF_*(u)$ é o conjunto frente de ondas da distribuição u relacionado a classe $\boldsymbol{C}$. A classe $\boldsymbol{C}$ com a qual trabalharemos será as funções C^∞ ou as funções ultradiferenciáveis tipo Beurling e tipo Romieu.

Há duas maneiras para definir estes espaços de funções ultradiferenciáveis que são frequentemente utilizadas. A mais antiga, apresentada por Maurice Gevrey em 1918, consiste em medir o comportamento do crescimento de funções em C^∞ em termos de uma sequência peso $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$. No caso das funções Gevrey de ordem $s \geq 1$, por exemplo, utilizamos a sequência $(p!^s)_{p\in\mathbb{N}}$. Mais recentemente em 1991, Arne Beurling observou que também podemos usar as chamadas funções peso para estudar o mesmo tipo de crescimento proveniente das sequências peso. Em [9] foi mostrado que sob fortes condições ambas definições geram a mesma classe de ultradiferenciabilidade. Contudo, no caso geral, existem espaços definidos por sequências peso que não podem ser definidos por funções peso, e reciprocamente. Encontramos em [3] um estudo comparativo sobre estes dois métodos. Neste trabalho, adotamos as funções peso para caracterizar ultradiferenciabilidade.

O texto está dividido em quatro capítulos. No primeiro, trazemos os conceitos básicos, notações e alguns resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho. O segundo capítulo consiste da prova da inclusão (0.1) no caso mais rudimentar, isto é, a classe considerada é formada pelas funções infinitamente diferenciáveis. Apresentamos no terceiro capítulo a definição e principais propriedades das classes de funções ultradiferenciáveis tipo Beurling e tipo Romieu. Por fim, com as ferramentas do capítulo 3, provamos a inclusão (0.1) para a classe das funções ultradiferenciáveis do tipo Beurling e do tipo Romieu. Findamos os nossos estudos investigando algumas aplicações.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduziremos a teoria básica necessária para a compreensão dos capítulos subsequentes. Apresentaremos alguns resultados, sem demonstração, os quais serão utilizados livremente ao longo do texto. As referências [7], [8] e [14] retratam esta teoria detalhadamente.

1.1 Notações e Conceitos Básicos

Uma n-upla com entradas inteiras e não negativas, isto é, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ é chamada de multi-índice. O módulo e o fatorial de um multi-índice α são definidos por

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \quad \text{e} \quad \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!,$$

respectivamente. Ainda, dados α e β em $\mathbb{Z}_+^n$, dizemos que $\beta \leq \alpha$ se ocorrer $\beta_j \leq \alpha_j$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Com isto, o coeficiente binominal entre dois multi-índices α e β com $\beta \leq \alpha$ é dado por

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!\beta!}.$$

Notemos que

$$2^{|\alpha|} = 2^{\alpha_1} \ldots 2^{\alpha_n} = \binom{\alpha}{\beta}.$$

Usaremos o fato que o total de multi-índices α que satisfazem $|\alpha| \leq k$ é igual a $\binom{k+n}{n}$, enquanto que o número de multi-índices α com $|\alpha| = k$ é dado por $\binom{k+n-1}{n-1}$.

A cada multi-índice associamos o operador diferencial

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial_{x_n}^{\alpha_n},$$

em que $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial_{x_j}}$. Denotando por $D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$, obtemos que

$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot D_{x_n}^{\alpha_n} = i^{-|\alpha|}\partial^\alpha.$$

Usando estas notações, a regra de Leibniz para a derivada do produto de duas funções assume o formato

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta g.$$

Sejam f e g funções definidas em $\mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}^n$. Escrevemos

$$f(t) = O\big(g(t)\big), \quad \text{quando} \quad t \to \infty,$$

se, e somente se, existem constantes $C > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ satisfazendo $|f(t)| \le C|g(t)|$, para qualquer $t \ge t_0$. Se, para cada $\varepsilon > 0$ existir $t_\varepsilon \in \mathbb{R}$ de modo que $|f(t)| < \varepsilon|g(t)|$, para todo $t \ge t_\varepsilon$, escrevemos

$$f(t) = o\big(g(t)\big), \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

Se $g(t) \neq 0$ para t suficientemente grande, a relação $f(t) = o\big(g(t)\big)$ é equivalente a $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$.

Se f e g estão em $L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a convolução de f por g, a qual denotamos $f * g$, da seguinte maneira

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ainda, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, o produto tensorial de f por g, denotado por $f \otimes g$, é definido como

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

1.2 Funções Teste

Denotamos por $C^\infty(\Omega)$, sendo Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, o espaço vetorial das funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ que são contínuas e possuem derivadas de todas as ordens. O suporte de uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é definido por

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}}.$$

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é constituído pelas funções em $C^\infty(\Omega)$ que possuem suporte compacto. Tal espaço é comumente chamado de espaço das funções teste.

A seguir, enunciamos um resultado que garante a existência de funções teste com interessantes propriedades. Para a demonstração da próxima proposição, consultar [12].

Proposição 1.2.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $K \subset \Omega$ compacto com $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. Dado um aberto V tal que $V \subset \overline{V} \subset \operatorname{int} K$, existe sequência $\{\chi_N\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo:*

(i) $\chi_N(x) = 1$, *para todo* $x \in V$;

(ii) $\operatorname{supp} \chi_N \subset K$, *para todo* $N \in \mathbb{N}$ *e;*

(iii) Para cada $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, *existe* $C_\alpha > 0$ *tal que*

$$\sup_{x \in K} |D^{\alpha+\beta}\chi_N(x)| \leq C_\alpha (C_\alpha N)^{|\beta|}, \quad \forall |\beta| \leq N \ e \ \forall N \in \mathbb{N},$$

em que C_α *não depende de* N *nem de* β.

Agora, trataremos de forma abreviada sobre as topologias de $C^\infty(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega)$ (para mais detalhes e definições, ver [15]).

A cada compacto $K \subset \Omega$ e a cada inteiro não negativo m, associamos a seguinte seminorma em $C^\infty(\Omega)$

$$p_{m,K}(f) = \sup_{|\alpha| \leq m,\ x \in K} |\partial^\alpha f(x)|.$$

Denotamos por $\mathbf{P}$ a família formada por todas estas seminormas. A topologia em $C^\infty(\Omega)$ é definida pela seguinte base de vizinhanças

$$\mathcal{B} = \{B_p(f,r);\ f \in C^\infty(\Omega),\ r > 0 \text{ e } p \in \mathbf{P}\},$$

em que $B_p(f,r)$ representa a semibola refente à seminorma p, isto é, $B_p(f,r) = \{g \in C^\infty(\Omega);\ p(f-g) < r\}$.

Topologias que advém de seminormas e preservam a estrutura vetorial do espaço (ou seja, as operações de soma e multiplicação por escalar são contínuas) são chamadas de **localmente convexas**. O espaço $C^\infty(\Omega)$ com a topologia descrita acima é um espaço localmente convexo.

Escrevendo $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, em que $\{K_i\}$ é uma família crescente de compactos, podemos gerar a topologia de $C^\infty(\Omega)$ apenas com uma quantidade enumerável de seminormas, a saber, $\{p_{m,K_i};\ m, i \in \mathbb{N}\}$.

É conhecido da teoria de espaços vetoriais topológicos que espaços localmente convexos definidos por uma quantidade enumerável de seminormas é metrizável. Desta forma, é possível concluir que $C^\infty(\Omega)$ é um **espaço de Fréchet,** ou seja, um espaço localmente convexo, metrizável e completo. A convergência neste espaço é caracterizada pela seguinte definição.

Definição 1.2.2. *Uma sequência $\{f_N\}$ converge a 0 em $C^\infty(\Omega)$ se, e somente se, as sequências $\{\partial^\alpha f_N\}$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{N}^n$, convergem uniformemente a 0 sobre cada compacto $K \subset \Omega$.*

Neste momento, introduziremos a topologia do espaço $C_0^\infty(\Omega)$. Seja E um espaço vetorial e sejam E_j subespaços de E tais que

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \ldots E_j \subset \ldots \quad \text{e} \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = E.$$

Assumimos que cada E_j possui uma topologia $\mathfrak{J}_i$ localmente convexa satisfazendo a condição

$$\mathfrak{J}_i\Big|_{E_{j-1}} = \{U \cap E_{j-1};\ U \in \mathfrak{J}_i\} = \mathfrak{J}_{j-1}.$$

Definimos em E uma topologia $\mathfrak{J}$ do seguinte modo: A base das vizinhanças da origem é constituída pelos conjuntos $V \subset E$ tais que $V \cap E_j$ é uma vizinhança da origem em E_j. A topologia assim definida em E é chamada **limite indutivo** das topologias $\mathfrak{J}_i$.

Dado K um compacto de Ω, definimos o conjunto

$$C_0^\infty(K) = \{f \in C^\infty(\Omega);\ \operatorname{supp} f \subset K\},$$

o qual é um subespaço vetorial de $C_0^\infty(\Omega)$. Ainda, conseguimos munir $C_0^\infty(K)$ com uma topologia que o torna espaço de Fréchet.

Desta forma, a topologia que consideramos em $C_0^\infty(\Omega)$ é a topologia limite indutivo construída a partir de uma sequência de espaços de Fréchet contidos em $C_0^\infty(\Omega)$, a saber,

$$\{0\} \subset C_0^\infty(K_1) \subset C_0^\infty(K_2) \subset \ldots,$$

em que $\{K_j\}$ é uma família crescente de compactos com $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_j$. Descrevemos a convergência nesta topologia na definição abaixo.

Definição 1.2.3. *Uma sequência $\{\varphi_N\}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge a zero se, e somente se, as duas condições se verificam:*

1. *Todas as funções φ_N tem suporte em um mesmo compacto $K \subset \Omega$.*

2. *As funções φ_N, juntamente com suas derivadas, convergem uniformemente a zero.*

1.3 Distribuições

Definição 1.3.1. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Uma distribuição sobre Ω é definida como sendo um funcional linear contínuo sobre o espaço $C_0^\infty(\Omega)$. O dual $(C_0^\infty(\Omega))'$, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, é chamado o espaço das distribuições sobre Ω.*

Uma caracterização do espaço $\mathcal{D}'(\Omega)$ é dada por: Um funcional linear $u : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é contínuo se, e somente se, para cada compacto $K \subset \Omega$, existem constantes $C > 0$ e $M \in \mathbb{N}$ que dependem de K tais que

$$| \langle u, \varphi \rangle | \leq C \sum_{|\alpha| \leq M} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.1}$$

(usualmente denotamos $\langle u, \varphi \rangle$ para indicar $u(\varphi)$). Neste caso, chamamos de M a ordem de u em vizinhança de K.

De uma forma geral, quando ocorrer a desigualdade (1.1) para um M fixo que não depende do compacto K, dizemos que u tem ordem menor ou igual a M. O espaço das distribuições de ordem M é denotado por $\mathcal{D}'^M(\Omega)$.

Para definirmos operações no espaço das distribuições, utilizamos o conceito de transposto formal. Supomos que existam dois operadores lineares contínuos L e L' de $C_0^\infty(\Omega)$ em $C_0^\infty(\Omega)$ tais que

$$\int (L\varphi)(x)\psi(x)dx = \int \varphi(x)(L'\psi)(x)dx, \ \ \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Neste caso, dizemos que L' é o transposto formal de L e denotamos $L' = {}^tL$. Desta forma, podemos estender L a um operador $\tilde{L} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ dado por

$$\left\langle \tilde{L}u, \varphi \right\rangle = \left\langle u, {}^tL\varphi \right\rangle, \ \ \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ e } \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Sendo assim, para cada $f \in C^\infty(\Omega)$, consideremos $L_f : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$ dado por $L_f\varphi = f\varphi$. É imediato que o transposto formal de L_f é ele próprio e, portanto, o produto de uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ por f é definido como segue

$$\langle fu, \varphi \rangle = \langle u, f\varphi \rangle, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Similarmente, tomamos $L = \partial_{x_j}$. Utilizando integração por partes, vemos que ${}^tL = -\partial_{x_j}$ e, deste modo, a derivação de uma distribuição u fica definida por

$$\left\langle \partial_{x_j} u, \varphi \right\rangle = - \left\langle u, \partial_{x_j} \varphi \right\rangle, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Agora, supomos que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é igual a zero em um aberto $U \subset \Omega$ quando ocorrer $\langle u, \varphi \rangle = 0$, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\operatorname{supp} \varphi \subset U$. Posto isto, temos a seguinte definição:

Definição 1.3.2. *O suporte de uma distribuição u é definido como sendo o complementar do maior aberto onde u é igual a zero e denotado por* $\operatorname{supp} u$. *Além disso, definimos o suporte singular da distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ como sendo o complementar do maior aberto onde u é uma função C^∞ e denotado por* $\operatorname{suppsing} u$.

O espaço das distribuições em $\mathcal{D}'(\Omega)$ com suporte compacto é representado por $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Também denotamos $\mathcal{E}'^M(\Omega) = \mathcal{D}'^M(\Omega) \cap \mathcal{E}'(\Omega)$ o espaço constituído das distribuições com suporte compacto e ordem menor ou igual a M.

1.4 Transformada de Fourier

Dada uma função f integrável, definimos a transformada de Fourier de f por

$$(\mathcal{F}f)(\xi) \doteq \widehat{f}(\xi) \doteq \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx,$$

em que $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$.

É conhecido da teoria das distribuições o fato que não é possível definirmos a transformada de Fourier de uma distribuição qualquer. Como visto previamente, podemos estender a $\mathcal{D}'(\Omega)$ qualquer operador contínuo definido em $C_0^\infty(\Omega)$ que possua transposto formal. Entretanto, a aplicação $\mathcal{F}$ não é um operador linear de $C_0^\infty(\Omega)$ em $C_0^\infty(\Omega)$, uma vez que $\mathcal{F}\varphi$ não tem suporte compacto a menos que $\varphi = 0$. Disto, surge a necessidade em defiinirmos o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.4.1. *Denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o subespaço formado pelas funções $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty, \ \ \forall \alpha, \ \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

A topologia de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é dada pela coleção enumerável de seminormas

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

A demonstração do próximo teorema pode ser encontrada em [8].

Teorema 1.4.2. *A transformada de Fourier é um operador linear continuamente inversível de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, para quaisquer φ e ψ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ocorrem as seguintes propriedades:*

(a) $\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

(b) $\widehat{x^\alpha \varphi}(\xi) = (-1)^{|\alpha|}\widehat{\varphi}(\xi)$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

(c) $\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \varphi(\xi)\psi(\xi)$.

(d) $\widehat{\varphi\psi}(\xi) = (2\pi)^{-n}\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}(\xi)$.

(e) $\displaystyle\int \widehat{\varphi}(x)\psi(x)dx = \int \varphi(x)\widehat{\psi}(x)dx$.

(f) $\displaystyle\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi$.

Definição 1.4.3. *Um funcional linear contínuo* $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ *é chamado de distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas é denotado por* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Observamos que o item (e) do Teorema 1.4.2 nos remete a ideia de transposto formal, neste caso sobre o espaço de Schwartz. Em vista disto, definimos a transformada de uma distribuição temperada u por

$$\langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle \,,$$

para qualquer $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Como pode ser visto em [8], se u é uma distribuição sobre $\mathbb{R}^n$ de suporte compacto, então $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e, além disso,

$$\widehat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \;\text{ com }\; \widehat{u}(\xi) = \left\langle u, e^{-ix\cdot\xi} \right\rangle.$$

Para o próximo resultado, recordemos que um conjunto B é limitado em um espaço vetorial topológico, se para cada vizinhança da origem U existir $\lambda \geq 0$ satisfazendo $B \subset \lambda U$. Na página 359 da referência [14] é apresentado o teorema abaixo, o qual decorre do Princípio da Limitação Uniforme.

Teorema 1.4.4. *Seja* B *um subconjunto limitado de* $\mathcal{E}'(\Omega)$. *Existem um compacto* K *de* Ω *e um inteiro* $M \geq 0$ *tais que* $B \subset \mathcal{E}'^M(\Omega)$ *e o suporte de cada distribuição em* $\mathcal{B}$ *está contido em* K.

A seguir, exibimos uma importante consequência deste último teorema, esta será de grande serventia nos principais teoremas deste trabalho.

Corolário 1.4.5. *Se* $\{u_N\}$ *é uma sequência limitada em* $\mathcal{E}'(\Omega)$, *então existem* $C > 0$ *e* $M \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$|\widehat{u}_N(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^M,$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ *e todo* $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Segue do Teorema 1.4.4 que existem compacto K e inteiro postivo M tais que $\{u_N\} \subset \mathcal{E}'^M(\Omega)$ e $\operatorname{supp} u_N \subset K$, para todo natural N. Agora, sendo u_N distribuição de suporte compacto e ordem M, obtemos que existe $C_0 > 0$ que depende somente do compacto K satisfazendo

$$\begin{aligned}
|\widehat{u}_N(\xi)| &= \left|\left\langle u_N, e^{-ix\cdot\xi} \right\rangle\right| \\
&\leq C_0 \sum_{|\alpha|\leq M} \sup_{x\in K} |D_x^\alpha(e^{-ix\cdot\xi})| \\
&\leq C(1 + |\xi|)^M,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade utilizamos a regra da cadeia. ∎

Capítulo 2

O caso C^∞

Neste capítulo mostraremos uma primeira versão do nosso principal resultado. Concluiremos a inclusão

$$WF(u) \subset WF(Pu) \cup \mathrm{Char}(P),$$

em que $WF(u)$ é o conjunto frente de ondas C^∞ da distribuição u, P um operador diferencial parcial linear com coeficientes C^∞ e $\mathrm{Char}(P)$ o conjunto característico de P. Veremos adiante que o caminho feito para provarmos este resultado nos auxiliará no caso mais geral, quando consideraremos as classes de funções ultradiferenciáveis. Todo este capítulo é baseado em [7].

2.1 O Conjunto Frente de Ondas C^∞

Esta seção tem como objetivo definir o conjunto frente de ondas C^∞ de uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, sendo Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Para este fim, recordemos o Teorema de Paley-Wiener, o qual é importante ferramenta no estudo de singularidades de uma distribuição, uma vez que traduz decaimento da tranformada de Fourier em regularidade.

A demonstração do resultado a seguir pode ser encontrada em [7].

Teorema 2.1.1 (Paley-Wiener)**.** *Sejam Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$ e $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Se para cada $N \in \mathbb{N}$ existe C_N tal que*

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

então $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Este resultado nos motiva a definir o conjunto frente de ondas de uma distribuição. Antes, necessitamos de alguns conceitos.

Definição 2.1.2. *Se $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, definimos $\Sigma(v)$ como sendo o conjunto de todos os pontos $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que não possuem vizinhança cônica Γ tal que é válido*

$$|\widehat{v}(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \ \ \forall N \in \mathbb{N} \ e \ \forall \xi \in \Gamma.$$

Observamos que o Teorema de Paley-Wiener garante que $\Sigma(v) = \emptyset$ se, e somente se, $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ainda, os pontos η que não estão em $\Sigma(v)$ caracterizam as direções em que a transformada de Fourier de v tem bom comportamento, ou seja, satisfaz a desigualdade do Teorema de Paley-Wiener.

Definição 2.1.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Para cada $x \in \Omega$, definimos*

$$\Sigma_x(u) = \bigcap_{\phi \in S} \Sigma(\phi u),$$

em que $S = \{\phi \in C_0^\infty(\Omega) \ ; \ \phi(x) \neq 0\}$.

Por fim, se u é uma distribuição sobre o aberto Ω de $\mathbb{R}^n$ definimos o seu **conjunto frente de ondas C^∞** por

$$WF(u) = \{(x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \ ; \ \xi \in \Sigma_x(u)\}.$$

Os pontos do conjunto frente de ondas C^∞ de u são formados por um par ordenado, em que a primeira coordenada é uma singularidade de u e a segunda uma direção a qual caracteriza a propagação da singularidade.

Notemos que $(x_0,\xi_0) \notin WF(u)$ significa que existe $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\phi(x_0) \neq 0$ e cone aberto Γ contendo ξ_0 de modo que

$$|\widehat{\phi u}(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \ \ \forall N \in \mathbb{N} \text{ e } \forall \xi \in \Gamma.$$

Neste caso, dizemos que u é **microrregular** no ponto (x_0,ξ_0).

2.2 Propagação de Singularidades

Dedicamos esta seção à demonstração do teorema abaixo, o qual é o principal resultado deste capítulo.

Teorema 2.2.1 (O caso C^∞)**.** *Seja P um operador diferencial de ordem m com coeficientes em $C^\infty(\Omega)$, sendo Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Então,*

$$WF(u) \subset WF(Pu) \cup \mathrm{Char}(P), \ \ \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Definição 2.2.2 (Conjunto Característico)**.** *Seja* $P = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha$ *um operador diferencial parcial linear com* $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*, para todo* $|\alpha| \le m$*. Definimos o conjunto característico de* P *por*

$$\mathrm{Char}(P) = \{(x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \; ; \; P_m(x,\xi) = 0\},$$

em que $P_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$.

Para nos auxiliar na prova do teorema acima, apresentamos o seguinte lema.

Lema 2.2.3. *Se* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$*, então* $\Sigma(\phi v) \subset \Sigma(v)$.

Demonstração. A transformada de Fourier de $u = \phi v$ é dada por

$$\widehat{u}(\xi) = \widehat{\phi v}(\xi) = (2\pi)^{-n}\widehat{\phi} * \widehat{v}(\xi) = (2\pi)^{-n}\int \widehat{\phi}(\eta)\widehat{v}(\xi-\eta)d\eta.$$

Tomamos $0 < c < 1$ e dividimos a integral acima em duas partes

$$\int \widehat{\phi}(\eta)\widehat{v}(\xi-\eta)d\eta = \int_{|\eta|<c|\xi|} \widehat{\phi}(\eta)\widehat{v}(\xi-\eta)d\eta + \int_{|\eta|\ge c|\xi|} \widehat{\phi}(\eta)\widehat{v}(\xi-\eta)d\eta.$$

Como $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, segue do Teorema de Paley-Wiener que existem $M \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que

$$|\widehat{v}(\xi)| \le C(1+|\xi|)^M, \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Desta forma, usando o fato que $\widehat{\phi} \in \mathcal{S} \subset L^1$, obtemos

$$\begin{aligned}(2\pi)^n|\widehat{u}(\xi)| &\le \int_{|\eta|<c|\xi|} |\widehat{\phi}(\eta)||\widehat{v}(\xi-\eta)|d\eta + \int_{|\eta|\ge c|\xi|} |\widehat{\phi}(\eta)||\widehat{v}(\xi-\eta)|d\eta \\ &\le \|\widehat{\phi}\|_{L^1}\left(\sup_{|\eta|\le c|\xi|} |\widehat{v}(\xi-\eta)|\right) + \int_{|\eta|\ge c|\xi|} |\widehat{\phi}(\eta)|C(1+|\xi-\eta|)^M d\eta.\end{aligned}$$

Observamos que $|\eta| \ge c|\xi|$ implica em

$$|\xi-\eta| \le |\eta| + |\xi| \le |\eta| + c^{-1}|\eta| = (1+c^{-1})|\eta|,$$

assim,

$$\begin{aligned}(2\pi)^n|\widehat{u}(\xi)| &\le \|\widehat{\phi}\|_{L^1}\left(\sup_{|\xi-\eta|\le c|\xi|} |\widehat{v}(\eta)|\right) + \int_{|\eta|\ge c|\xi|} |\widehat{\phi}(\eta)|C(1+|\eta|(1+c^{-1}))^M d\eta \\ &\le \|\widehat{\phi}\|_{L^1}\left(\sup_{|\xi-\eta|\le c|\xi|} |\widehat{v}(\eta)|\right) + \int_{|\eta|\ge c|\xi|} |\widehat{\phi}(\eta)|C(1+|\eta|)^M(1+c^{-1})^M d\eta, \quad (2.1)\end{aligned}$$

uma vez que

$$1+(1+c^{-1})|\eta| \leq (1+c^{-1})+(1+c^{-1})|\eta| = (1+c^{-1})(1+|\eta|).$$

Se $\xi_0 \notin \Sigma(v)$, então existe um cone aberto Γ contendo ξ_0 de modo que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $C_N > 0$ tal que

$$|\widehat{v}(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad \forall \xi \in \Gamma.$$

Dado um cone fechado $\Gamma_1 \subset \Gamma \cup \{0\}$ contendo ξ_0 é possível escolhermos $0 < c < 1$ de modo que $\eta \in \Gamma$ sempre que $\xi \in \Gamma_1$ e $|\xi - \eta| < c|\xi|$. De fato, é suficiente tomarmos

$$0 < c < \min\left\{\operatorname{dist}(\Gamma_1 \cap \ S^{n-1}, \ \mathbb{R}^n \setminus \ \Gamma), \ 1\right\},$$

pois $\xi \in \Gamma_1 \cap S^{n-1}$ e $|\xi - \eta| < c|\xi| = c$ implicam que $\eta \in \Gamma$ e, assim,

$$\xi \in \Gamma_1 \quad \Rightarrow \quad |\xi - \eta| < c|\xi| \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\eta}{|\xi|}\right| < c \quad \Rightarrow \quad \frac{\eta}{|\xi|} \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad \eta \in \Gamma.$$

Dado $N \in \mathbb{N}$, queremos estimar $|\widehat{u}(\xi)|(1+|\xi|)^N$ com $\xi \in \Gamma_1$. Para tanto, vamos analisar os termos do lado direito da desigualdade (2.1). Se $\xi \in \Gamma_1$, já sabemos que $|\xi - \eta| \leq c|\xi|$ implica em $\eta \in \Gamma$, então

$$(1+|\xi|)^N \sup_{|\xi-\eta|\leq c|\xi|} |\widehat{v}(\eta)| \leq (1+|\xi|)^N C_N \sup_{|\xi-\eta|\leq c|\xi|} (1+|\eta|)^{-N}.$$

Para $|\xi - \eta| \leq c|\xi|$, temos que $|\eta| \geq (1-c)|\xi|$ e neste caso

$$(1+|\xi|)^N \leq \left(1+\frac{|\eta|}{1-c}\right)^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{|\eta|^k}{(1-c)^k} \leq (N+1)(1+|\eta|)^N(1-c)^{-N},$$

ou seja, $(1+|\eta|)^{-N} \leq (1+|\xi|)^{-N}(N+1)(1-c)^{-N}$. Sendo assim,

$$(1+|\xi|)^N \sup_{|\xi-\eta|\leq c|\xi|} |\widehat{v}(\eta)| \leq C_N(N+1)(1-c)^{-N}. \tag{2.2}$$

Quanto ao segundo termo, dado $N' = N + M + n + 1$, como $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, existe $C_{N'} > 0$

tal que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|\eta|\geq c|\xi|} |\widehat{\phi}(\eta)|(1+|\eta|)^M d\eta &\leq C_{N'} \int\limits_{|\eta|\geq c|\xi|} (1+|\eta|)^{-N'}(1+|\eta|)^M d\eta \\
&= C_{N'} \int\limits_{|\eta|\geq c|\xi|} (1+|\eta|)^{-N}(1+|\eta|)^{-n-1} d\eta \\
&\leq C_{N'}(1+c|\xi|)^{-N} \int\limits_{|\eta|\geq c|\xi|} (1+|\eta|)^{-n-1} d\eta.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int\limits_{|\eta|\geq c|\xi|} |\widehat{\phi}(\eta)| C(1+|\eta|)^M (1+c^{-1})^M d\eta \leq C'_N (1+c^{-1})^M c^{-N}(1+|\xi|)^{-N}. \tag{2.3}$$

Unindo (2.1), (2.2) e (2.3), concluímos que

$$\sup_{\xi\in\Gamma_1} |\widehat{u}(\xi)|(1+|\xi|)^N \leq C''_N,$$

em que C''_N é uma constante positiva que depende apenas de N. A última desigualdade nos garante que $\xi_0 \notin \Sigma(\phi v)$ finalizando a prova. ■

O lema acima nos diz que se multiplicarmos uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ por uma função C^∞ não modificamos as direções de decaimento da transformada de Fourier, isto é, as propagações das singularidades continuam as mesmas.

Demonstração do Teorema 2.2.1. Tomamos $(x_0, \xi_0) \notin (WF(Pu) \cup \operatorname{Char} P)$. Em particular, $P_m(x_0, \xi_0) \neq 0$. Afirmamos que existe vizinhança $U \subset \Omega$ de x_0 e um cone aberto $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ contendo ξ_0 tal que

$$|\xi|^m \leq C|P_m(x,\xi)|, \quad \forall x \in U \text{ e } \forall \xi \in \Gamma,$$

para alguma constante $C > 0$. De fato, como $|P_m(x_0,\xi_0)|/|\xi_0|^m > 0$ e

$$(x,\xi) \longrightarrow \frac{P_m(x,\xi)}{|\xi|^m}$$

é uma função em $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, segue que existem abertos limitados $U \subset \Omega$ e $V \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ contendo x_0 e ξ_0, respectivamente, e constante $B > 0$ satisfazendo

$$B \leq \frac{|P_m(x,\xi)|}{|\xi|^m}, \quad \forall x \in U \text{ e } \forall \xi \in V.$$

Consideremos $\Gamma = \{\lambda\eta\ ;\ \lambda > 0 \text{ e } \eta \in V\}$, desta forma se $\xi = \lambda\eta \in \Gamma$ temos que

$$P_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(\lambda\eta)^\alpha = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\lambda^{|\alpha|}\eta^\alpha = \lambda^m\left(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\eta^\alpha\right) = \lambda^m P_m(x,\eta).$$

Assim, denotando $C = B^{-1}$,

$$|\xi|^m = \lambda^m|\eta|^m \leq \lambda^m C|P_m(x,\eta)| = C|P_m(x,\xi)|,\quad \forall x \in U \ \text{ e } \ \forall \xi \in \Gamma,$$

e nossa afirmação está demonstrada.

Seja $\phi \in C_0^\infty(U)$ com $\phi(x_0) \neq 0$. Nosso objetivo é mostrar que $(x_0,\xi_0) \notin WF(u)$, para tanto vamos estimar $|\widehat{\phi u}(\xi)|$ quando $\xi \in \Gamma$. Primeiramente notemos que

$${}^tPv(x) = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha v)(x)$$

é o transposto formal de P, pois

$$\langle Pu,\varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle a_\alpha D^\alpha u,\varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \left\langle u,(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(a_\alpha\varphi)\right\rangle = \left\langle u,{}^tP\varphi\right\rangle,\quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Com isto, se $Pu = f$, então $\langle u,{}^tP\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle$. Se encontrarmos $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ que satisfaz

$${}^tP\psi(x) = \phi(x)e^{-ix\cdot\xi}, \tag{2.4}$$

teremos que $\langle f,\psi\rangle = \langle u,{}^tP\psi\rangle = \left\langle u,\phi(x)e^{-ix\cdot\xi}\right\rangle = \widehat{\phi u}(\xi)$. Consideremos

$$\psi(x) = \frac{w(x)e^{-ix\cdot\xi}}{P_m(x,\xi)},$$

com w a determinar. Supondo que ψ dada acima é solução de (2.4), devemos ter

$$\phi(x)e^{-ix\cdot\xi} = {}^tP\psi(x) = {}^tP\left(\frac{w(x)e^{-ix\cdot\xi}}{P_m(x,\xi)}\right),$$

ou seja,

$$\phi(x) = e^{ix\cdot\xi}\,{}^tP\left(\frac{w(x)e^{-ix\cdot\xi}}{P_m(x,\xi)}\right) = e^{ix\cdot\xi}\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\left(\frac{a_\alpha(x)w(x)e^{-ix\cdot\xi}}{P_m(x,\xi)}\right).$$

Usando a Regra de Leibniz podemos escrever

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\left(\frac{a_\alpha(x)w(x)e^{-ix\cdot\xi}}{P_m(x,\xi)}\right) &= \sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\beta}\left(\frac{a_\alpha(x)w(x)}{P_m(x,\xi)}\right)D^{\alpha-\beta}(e^{-ix\cdot\xi}) \\ &= e^{-ix\cdot\xi}\sum_{\beta\le\alpha}\left[\binom{\alpha}{\beta}(-1)^{|\alpha|-|\beta|}\xi^{\alpha-\beta}D^{\beta}\left(\frac{a_\alpha(x)w(x)}{P_m(x,\xi)}\right)\right], \end{aligned}$$

com

$$D^{\beta}\left(\frac{a_\alpha(x)w(x)}{P_m(x,\xi)}\right) = \sum_{\gamma\le\beta}\binom{\beta}{\gamma}D^{\beta-\gamma}\left(\frac{a_\alpha(x)}{P_m(x,\xi)}\right)D^{\gamma}w(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\left\{\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(-1)^{|\alpha|-|\beta|}\xi^{\alpha-\beta}\left[\sum_{\gamma\le\beta}\binom{\beta}{\gamma}D^{\beta-\gamma}\left(\frac{a_\alpha(x)}{P_m(x,\xi)}\right)D^{\gamma}w(x)\right]\right\} \\ &= \sum_{|\alpha|\le m}\left[\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(-1)^{|\beta|}\xi^{\alpha-\beta}\left(\sum_{\gamma\le\beta,\ \gamma\ne0}\binom{\beta}{\gamma}D^{\beta-\gamma}\left(\frac{a_\alpha(x)}{P_m(x,\xi)}\right)D^{\gamma}w(x)\right)\right]+ \\ &+ \underbrace{\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(-1)^{|\beta|}\xi^{\alpha-\beta}D^{\beta}\left(\frac{a_\alpha(x)}{P_m(x,\xi)}\right)w(x)}_{A}. \end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} A &= \sum_{|\alpha|\le m}\left[\frac{a_\alpha(x)\xi^{\alpha}}{P_m(x,\xi)}w(x)+\sum_{\beta\le\alpha,\ \beta\ne0}\binom{\alpha}{\beta}(-1)^{|\beta|}\xi^{\alpha-\beta}D^{\beta}\left(\frac{a_\alpha(x)}{P_m(x,\xi)}\right)w(x)\right] \\ &= \sum_{|\alpha|\le m}\left[\sum_{\beta\le\alpha,\ \beta\ne0}\binom{\alpha}{\beta}(-1)^{|\beta|}\xi^{\alpha-\beta}D^{\beta}\left(\frac{a_\alpha(x)}{P_m(x,\xi)}\right)w(x)\right]+ \\ &+ \sum_{|\alpha|=m}\frac{a_\alpha(x)\xi^{\alpha}}{P_m(x,\xi)}w(x)+\sum_{|\alpha|<m}\frac{a_\alpha(x)\xi^{\alpha}}{P_m(x,\xi)}w(x) \\ &= w(x)+\sum_{|\alpha|\le m}\left[\sum_{\beta\le\alpha,\ \beta\ne0}\binom{\alpha}{\beta}(-1)^{|\beta|}\xi^{\alpha-\beta}D^{\beta}\left(\frac{a_\alpha(x)}{P_m(x,\xi)}\right)w(x)\right]+\sum_{|\alpha|<m}\frac{a_\alpha(x)\xi^{\alpha}}{P_m(x,\xi)}w(x). \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= w(x)+\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(-1)^{|\beta|}\xi^{\alpha-\beta}\left[\sum_{\gamma\le\beta,\gamma\ne0}\binom{\beta}{\gamma}D^{\beta-\gamma}\left(\frac{a_\alpha(x)}{P_m(x,\xi)}\right)D^{\gamma}w(x)\right]+ \\ &+ \sum_{|\alpha|<m}\frac{a_\alpha(x)\xi^{\alpha}}{P_m(x,\xi)}w(x)+\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{\beta\le\alpha,\ \beta\ne0}\binom{\alpha}{\beta}(-1)^{|\beta|}\xi^{\alpha-\beta}D^{\beta}\left(\frac{a_\alpha(x)}{P_m(x,\xi}\right)w(x). \end{aligned}$$

Definimos o operador R de modo que a expressão acima seja escrita da forma

$$\phi(x) = w(x) - Rw(x).$$

Assim, $R = R_1 + \cdots + R_m$, em que R_j é dado por

$$\begin{aligned} -R_j w \;=\; & \sum_{|\alpha|\leq m}\Bigg[\sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ |\alpha|-|\beta|=m-j}}\binom{\alpha}{\beta}(-1)^\beta\xi^{\alpha-\beta}\left(\sum_{\gamma\leq\beta,\,\gamma\neq 0}\binom{\beta}{\gamma}D^{\beta-\gamma}\left(\frac{a_\alpha(x)}{P_m(x,\xi)}\right)D^\gamma w(x)\right) + \\ & + \sum_{\substack{\beta\leq\alpha,\,\beta\neq 0, \\ |\alpha|-|\beta|=m-j}}\binom{\alpha}{\beta}(-1)^\beta\xi^{\alpha-\beta}D^\beta\left(\frac{a_\alpha(x)}{P_m(x,\xi)}\right)w(x)\Bigg] + \sum_{|\alpha|=m-j}\frac{a_\alpha(x)\xi^\alpha}{P_m(x,\xi)}w(x). \end{aligned}$$

É simples notar que R_j é um operador linear de ordem no máximo j e, além disso, $|\xi|^j R_j$ visto como uma função da variável ξ é homogênea de grau zero. Observamos, ainda, que as derivadas em relação a x dos coeficientes de $|\xi|^j R_j$, a menos de constantes, são da forma

$$|\xi|^j\xi^{\alpha-\beta}D^\rho\left(\frac{a_\alpha(x)}{P_m(x,\xi)}\right), \quad \text{com } |\alpha|-|\beta| = m-j.$$

Assim,

$$\left||\xi|^j\xi^{\alpha-\beta}D^\rho\left(\frac{a_\alpha(x)}{P_m(x,\xi)}\right)\right| \leq |\xi|^m\left|D^\rho\left(\frac{a_\alpha(x)}{P_m(x,\xi)}\right)\right|$$

e, portanto (diminuindo U se necessário), as derivadas em relação a x dos coeficientes de $|\xi|^j R_j$ são limitadas em $U \times \Gamma$.

Formalmente, a equação $w - Rw = \phi$ é satisfeita por $w = \sum\limits_{k=0}^{\infty} R^k\phi$. Contudo, não sabemos se $\sum\limits_{k=0}^{\infty} R^k\phi$ está bem definido. Para contornar este problema, consideremos uma soma parcial desta série

$$w_N = \sum_{k=0}^{N-1} R^k\phi,$$

com N suficientemente grande. Temos que

$$w_N - Rw_N = \sum_{k=0}^{N-1} R^k\phi - \sum_{k=0}^{N-1} R^{k+1}\phi = \phi - R^N\phi, \tag{2.5}$$

em que

$$R^N = (R_1 + \ldots + R_m)^N = \sum_{n_1+\ldots+n_m=N} R_1^{n_1}R_2^{n_2}\ldots R_m^{n_m}.$$

Como cada R_j tem fator $|\xi|^{-j}$, segue que R^N é uma soma na qual cada termo é da ordem $|\xi|^{-k}$ para algum $k \geq N$.

Pelos cálculos acima, temos que

$$e^{ix\cdot\xi}\,{}^tP\left(\frac{e^{-ix\cdot\xi}w_N(x)}{P_m(x,\xi)}\right) = w_N - Rw_N.$$

A equação (2.5) implica em

$${}^tP\left(\frac{e^{-ix\cdot\xi}w_N(x)}{P_m(x,\xi)}\right) = e^{-ix\cdot\xi}\phi - e^{-ix\cdot\xi}R^N\phi.$$

Denotando $v_N = \big(e^{-ix\cdot\xi}w_N(x)\big)/P_m(x,\xi)$ obtemos que

$$e^{-ix\cdot\xi}\phi = {}^tPv_N + e^{-ix\cdot\xi}R^N\phi.$$

Assim,

$$\widehat{\phi u}(\xi) = \left\langle u, \phi e^{-ix\cdot\xi}\right\rangle = \left\langle u, {}^tPv_N\right\rangle + \left\langle u, e^{-ix\cdot\xi}R^N\phi\right\rangle = \langle f, v_N\rangle + \left\langle u, e^{-ix\cdot\xi}R^N\phi\right\rangle. \quad (2.6)$$

Sendo $\operatorname{supp}\phi$ compacto e u distribuição, existem constantes $B > 0$ e $\mu \in \mathbb{N}$ tais que

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq B \sum_{|\alpha|\leq\mu} \sup_{x\in\operatorname{supp}\phi} |D^\alpha\varphi(x)|, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

em particular,

$$\left|\left\langle u, e^{-ix\cdot\xi}R^N\phi\right\rangle\right| \leq B \sum_{|\alpha|\leq\mu} \sup|D^\alpha(e^{-ix\cdot\xi}R^N\phi)(x)|.$$

Observamos que

$$\begin{aligned}\left|D^\alpha(e^{-ix\cdot\xi}R^N\phi)\right| &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|D^{\alpha-\beta}(e^{-ix\cdot\xi})||D^\beta(R^N\phi)| \\ &\leq B_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha}|\xi|^{|\alpha|-|\beta|}|D^\beta(R^N\phi)|.\end{aligned}$$

Como $\operatorname{supp}\phi \subset U$, as derivadas em relação a x dos coeficientes de R^N são limitadas em $U \times \Gamma$ e os termos de R^N possuem fatores da forma $|\xi|^{-k}$ com $k \geq N$, segue que

$$\left|D^\alpha(e^{-ix\cdot\xi}R^N\phi)\right| \leq O(|\xi|^{\mu-N}), \quad \forall\xi \in \Gamma \text{ e } |\xi| \geq 1. \quad (2.7)$$

De fato, basta observarmos que

$$|\xi|^{|\alpha|-|\beta|}|D^\beta(R^N\phi)| \leq |\xi|^{|\alpha|-|\beta|}O(|\xi|^{-k}) \;\text{ com }\; k \geq N,$$

e então para todos $\beta \leq \alpha$, $|\alpha| \leq \mu$ e $|\xi| \geq 1$ obtemos que

$$|\xi|^{|\alpha|-|\beta|}|D^\beta(R^N\phi)| \leq |\xi|^{|\alpha|}O(|\xi|^{-N}) \leq O(|\xi|^{\mu-N}).$$

Agora, $(x_0,\xi_0) \notin WF(f)$ implica que existe $\tilde{\phi} \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\tilde{\phi}(x_0) \neq 0$ tal que $\xi_0 \notin \Sigma(\tilde{\phi}f)$. Então, fazendo uso da demonstração do Lema 2.2.3 temos que existem vizinhança cônica Γ_1 (a qual está contida em Γ) de ξ_0 e constante $M \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sup_{\xi\in\Gamma_1}|\xi|^k|\widehat{\psi f}(\xi)| \leq C_k \sum_{|\alpha|\leq k+M} \sup|D^\alpha\psi|, \ \ \forall k \in \mathbb{N} \text{ e } \forall \psi \in C_0^\infty(U),$$

diminuindo U se necessário. Tomando $\psi = w_N/P_m(\cdot,\xi)$, concluímos que

$$|\langle f, v_N\rangle| = |\langle f, e^{-ix\cdot\xi}\psi\rangle| = |\widehat{\psi f}(\xi)| \leq O(|\xi|^{-k}), \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por fim, recordando que em (2.7) podemos tomar N suficientemente grande, obtemos de (2.6) que

$$|\widehat{\phi u}(\xi)| \leq O(|\xi|^{-k}), \ \ \forall \xi \in \Gamma_1 \ \text{ e } \ k = 1,2,\ldots.$$

Portanto, $(x_0,\xi_0) \notin WF(u)$ o que conclui o teorema. ■

Vejamos a seguir duas classes de operadores.

Definição 2.2.4 (Operador Elíptico). *Um operador* $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$ *definido em* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é elíptico se ocorrer*

$$P_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \neq 0, \ \ \forall (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

ou seja, se $\mathrm{Char}(P) = \emptyset$.

Definição 2.2.5 (Operador Hipoelíptico). *Um operador* $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$ *definido em* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é* C^∞*-hipoelíptico (ou apenas hipoelíptico) se ocorrer*

$$\operatorname{suppsing} Pu = \operatorname{suppsing} u.$$

Agora, segue do Teorema 2.2.1 que se P é um operador elíptico, então

$$WF(u) \subset WF(Pu).$$

Este fato implica que $\operatorname{suppsing} u \subset \operatorname{suppsing} Pu$. Sendo P um operador com coeficientes em $C^\infty(\Omega)$, a inclusão $\operatorname{suppsing} Pu \subset \operatorname{suppsing} u$ sempre ocorre. Desta forma, concluímos que todo operador elíptico é um operador hipoelíptico. Este resultado que motiva a nomenclatura hipoelíptico.

Capítulo 3

Classes de Funções Ultradiferenciáveis

Apresentaremos neste capítulo as classes de funções ultradiferenciáveis tipo Romieu e tipo Beurling, as quais denotamos por $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ e $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$, respectivamente, definidas a partir de uma função peso ω.

Munidos da definição e principais propriedades dos espaços $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ e $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$, partimos para a Seção 3.3, onde concentraremos nossos estudos no conjunto frente de ondas relacionado a estes espaços.

3.1 Funções Peso

Nesta seção veremos a definição e algumas propriedades das chamadas funções peso. As referências utilizadas foram [1] e [10].

Definição 3.1.1. *Uma função não decrescente $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função peso se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(I) Existe constante $L \geq 0$ tal que $\omega(2t) \leq L(\omega(t)+1), \ \ \forall t \geq 0.$

(II) $\omega(t) = O(t)$ quando $t \to \infty$.

(III) $\log(t) = o(\omega(t))$ quando $t \to \infty$.

(IV) $\varphi : t \to \omega(e^t)$ é convexa.

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **convexa** se

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ \forall t \in [0,1].$$

Dizemos que f é **côncava** se a desigualdade acima ocorrer com "$\geq$" no lugar de "$\leq$".

Exemplo 3.1.2. *Alguns exemplos de funções peso são:*

(1) $\omega(t) = t$. De fato, as propriedades (I), (II) e (IV) são imediatas. A propriedade (III) também é satisfeita, uma vez que $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\log t = 0$.

(2) $\omega(t) = t^\alpha,\ 0 < \alpha < 1$. Ora, $\omega(2t) = 2^\alpha t^\alpha \leq 2^\alpha(\omega(t)+1)$, o que garante (I). Quanto a (II), basta observarmos que $\lim\limits_{t\to\infty} t^{\alpha-1} = 0$, pois $0 < \alpha < 1$. Ainda, usando a Regra de L'Hospital, temos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t^\alpha} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\alpha t^\alpha} = 0$$

e, portanto, (III) é válido. Uma vez que propriedade (IV) é imedita, concluímos o fato que ω é função peso.

(3) $\omega(t) = (\log(1+t))^\beta$, $\beta > 1$. Vejamos,

$$\big(\log(1+2t)\big)^\beta \leq \big(\log 2 + \log(1+t)\big)^\beta \leq \log(1+t)^\beta \left(\frac{1}{\log(1+t)} + 1\right)^\beta, \quad \forall t \geq 0.$$

Visto que $\lim\limits_{t\to\infty} (\log(1+t))^{-1} = 0$, existe constante $L \geq 0$ satisfazendo

$$\left(\frac{1}{\log(1+t)} + 1\right)^\beta \leq L,$$

para todo $t > 0$. Desta forma, obtemos que (I) é realizada por ω. Tomamos N o menor natural maior que β. Aplicando a Regra de L'Hospital N vezes, mostramos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\big(\log(1+t)\big)^\beta}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-N+1)\big(\log(1+t)\big)^{\beta-N}}{1+t} = 0,$$

ou seja, a função ω também satisfaz (II). Com respeito a propriedade (III), basta observarmos que

$$0 \leq \frac{\log t}{\big(\log(1+t)\big)^\beta} \leq \frac{\log t}{\big(\log t\big)^\beta} \to 0, \quad \text{quando } t \to \infty,$$

desde que $\beta > 1$. Por fim, a função $\varphi(t) = \omega(e^t)$ possui segunda derivada dada por

$$\varphi''(t) = \beta e^t \left(\big(\log(1+e^t)\big)^{\beta-1} + (\beta-1)\big(\log(1+t)\big)^{\beta-2}\right) \geq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

o que nos proporciona a convexidade de φ. Em consequência disto, concluímos que ω é uma função peso.

Mais adiante, usaremos as funções peso para definirmos espaços de funções, a saber, as funções ultradiferenciáveis. Será necessário identificarmos as funções peso que determinam o mesmo espaço. Para tanto, introduzimos a seguinte relação de equivalência.

Definição 3.1.3. *Duas funções não decrescentes ω_1 e ω_2 são equivalentes, escrevemos $\omega_1 \sim \omega_2$, se ocorre*

$$0 < \liminf_{t\to\infty} \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} < \infty.$$

Exemplo 3.1.4. *As funções peso $\omega(t) = t$ e $\omega_a(t) = at$ são equivalentes, para todo $a \in (0,\infty)$. Enquanto que ω não é equivalente a $\sigma_\alpha(t) = t^\alpha$, para qualquer $0 < \alpha < 1$, pois*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{\sigma_\alpha(t)} = \lim_{t\to\infty} t^{1-\alpha} = \infty.$$

Outro exemplo de funções peso não equivalentes é dado por ω e $\vartheta_\beta(t) = (\log(1+t))^\beta$, para todo $\beta > 1$, uma vez que $\vartheta(t) = o(\omega(t))$ quando $t \to \infty$ (vide item (3) *do Exemplo 3.1.2).*

Proposição 3.1.5. *Seja $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ função não decrescente. As seguintes condições são equivalentes*

(1) Existe função não decrescente $\omega_0 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\omega_0 \sim \omega$ e ω_0 é subaditiva, ou seja, $\omega_0(t+s) \leq \omega_0(t) + \omega_0(s)$.

(2) $\displaystyle\sup_{\lambda\geq 1}\left(\limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(\lambda t)}{\lambda\omega(t)}\right) < \infty.$

(3) Existe função não decrescente e côncava $\omega_0 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ com $\omega_0 \sim \omega$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2). Para $\lambda \geq 1$ escolhemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq \lambda < n+1$. Como ω_0 é não decrescente e subaditiva

$$\omega_0(\lambda t) \leq \omega_0((n+1)t) \leq (n+1)\omega_0(t) \leq 2nw_0(t) \leq 2\lambda\omega_0(t),$$

ou seja, $\omega_0(\lambda t) \leq 2\lambda\omega_0(t)$ para todo $t \geq 0$ e $\lambda \geq 1$. Sendo $\omega_0 \sim \omega$, isto é,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(\lambda t)}{\omega_0(\lambda t)} < \infty \quad \text{e} \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{\omega_0(t)} > 0,$$

e

$$\frac{\omega(\lambda t)}{\lambda\omega(t)} = \frac{\omega_0(\lambda t)}{\lambda\omega_0(t)}\left(\frac{\omega(\lambda t)/\omega_0(\lambda t)}{\omega(t)/\omega_0(t)}\right) \leq 2\left(\frac{\omega(\lambda t)/\omega_0(\lambda t)}{\omega(t)/\omega_0(t)}\right)$$

concluímos que

$$\sup_{\lambda\geq 1}\left(\limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(\lambda t)}{\lambda\omega(t)}\right) < \infty.$$

Logo, (2) é satisfeito.

(2) $\Rightarrow$ (3). Por ω ser não decrescente e satisfazer (2), temos que

$$\omega(s) \leq C \max\left\{1, \frac{s}{t}\right\} \omega(t), \quad \forall s, t \in (0, \infty),$$

para alguma constante $C > 0$. Definimos

$$\omega_0(t) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega(t_i); \quad m \in \mathbb{N}, \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i t_i = t \text{ e } \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Observamos que ω_0 está bem definida, pois

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega(t_i) \leq C \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \max\left\{1, \frac{t_i}{t}\right\} \omega(t) \leq C \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i t_i \right) \omega(t) = 2Cw(t),$$

o que implica também

$$\frac{1}{2C} \leq \frac{\omega(t)}{\omega_0(t)}, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Por outro lado, tomando $m = 1$, $\lambda_1 = 1$ e $t_1 = t$ temos que

$$\omega_0(t) \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega(t_i) = \omega(t), \quad \forall t \in [0, \infty), \text{ isto é, } \frac{\omega(t)}{\omega_0(t)} \leq 1, \forall t \in [0, \infty)$$

e, portanto, $\omega_0 \sim \omega$. O fato que ω_0 é côncava e não decrescente é imediato.

(3) $\Rightarrow$ (1). Basta recordarmos que toda função côncava e não negativa é subaditiva. De fato, notemos primeiramente que

$$w_0(\lambda t) = w_0(\lambda t + (1-t)0) \geq \lambda w_0(t) + (1-\lambda) w_0(0) \geq \lambda w_0(t),$$

para todo $\lambda \geq 0$ e $t > 0$. Com isto,

$$\begin{aligned} w_0(t) + w_0(s) &= w_0\left((t+s) \frac{t}{t+s} \right) + w_0\left((t+s) \frac{s}{t+s} \right) \\ &\geq \frac{t}{t+s} w_0(t+s) + \frac{s}{t+s} w_0(t+s) \\ &= w_0(t+s), \end{aligned}$$

para quaisquer $s, t \in [0, \infty)$. ■

Devido a esta proposição, concluímos que uma função peso ω é equivalente a uma função peso subaditiva se, e somente se, ω satisfaz

$$\sup_{\lambda \geq 1} \left(\limsup_{t \to \infty} \frac{\omega(\lambda t)}{\lambda \omega(t)} \right) < \infty. \tag{3.1}$$

Observemos que todas as funções peso dadas no Exemplo 3.1.2 realizam a propriedade acima.

Definição 3.1.6. *Dada uma função peso ω, definimos a conjugada de Young $\varphi^* : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ da função $\varphi : t \to \omega(e^t)$ por*

$$\varphi^*(s) \doteq \sup\{st - \varphi(t);\ t \geq 0\}.$$

Não há perda de generalidade em considerarmos ω identicamente nula em $[0,1]$. De fato, dada uma função peso ω, tomamos

$$\omega_0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,1] \\ \omega(t), & t \in (1,\infty), \end{cases}$$

a qual é uma função peso equivalente à ω. Neste caso, $\varphi^*(0) = \sup\{-\omega_0(e^t);\ t \geq 0\} = 0$ e φ^* assume apenas valores não negativos. Além disso, ocorrem as seguintes propriedades:

a) A função φ^* é convexa. Com efeito,

$$\begin{aligned} \varphi^*(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2) &= \sup\{(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2)t - \varphi(t);\ t \geq 0\} \\ &\leq \sup\{\lambda s_1 t - \lambda\varphi(t);\ t \geq 0\} + \sup\{(1-\lambda)s_2 + (1-\lambda)\varphi(t);\ t \geq 0\} \\ &= \lambda\varphi^*(s_1) + (1-\lambda)\varphi^*(s_2). \end{aligned}$$

b) Temos que $\dfrac{\varphi^*(s)}{s}$ é não decrescente e $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{\varphi^*(s)}{s} = \infty$. Ora,

$$\frac{\varphi^*(s)}{s} = \frac{\sup\{st - \varphi(t);\ t \geq 0\}}{s} = \sup\left\{t - \frac{\varphi(t)}{s};\ t \geq 0\right\}.$$

Se $0 < s_1 \leq s_2$, então $-\varphi(t)/s_1 \leq -\varphi(t)/s_2$, para todo $t \geq 0$. Logo, $\dfrac{\varphi^*(s_1)}{s_1} \leq \dfrac{\varphi^*(s_2)}{s_2}$.. Observamos que $(t - \varphi(t)/s) \to t$ quando $s \to \infty$, para todo $t \geq 0$ fixo. Dado $M > 0$, escolhemos $t_0 = 2M$, sabemos que existe $s_0 \geq 0$ tal que

$$s \geq s_0 \ \Rightarrow\ -M + t_0 < t_0 - \frac{\varphi(t_0)}{s} < M + t_0.$$

Assim, $\varphi^*(s)/s = \sup\{t - \varphi(t)/s;\ t \geq 0\} \geq -M + t_0 = M$ para todo $s \geq s_0$.

c) $\varphi^{**} = \varphi$. Observamos que, para todo $s \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\varphi^{**}(s) &= \sup_{t\geq 0}\{ts - \varphi^*(t)\} = \sup_{t\geq 0}\left\{ts - \sup_{r\geq 0}\{rt - \varphi(r)\}\right\} \\
&= \sup_{t\geq 0}\left\{ts + \inf_{r\geq 0}\{-rt + \varphi(r)\}\right\} \\
&= \sup_{t\geq 0}\inf_{r\geq 0}\{t(s-r) + \varphi(r)\} \\
&\geq \sup_{t\geq 0}\{t(s-s) + \varphi(s)\} = \varphi(s).
\end{aligned}$$

Por outro lado, supomos que exista $s \geq 0$ tal que $\varphi^{**}(s) > \varphi(s)$. Então, existe $t_0 \in [0, \infty)$ tal que $t_0 s - \varphi^*(t_0) > \varphi(s)$, ou seja,

$$t_0 s - \varphi(s) > \varphi^*(t_0) = \sup\{t_0 t - \varphi(t);\ t \geq 0\},$$

absurdo. Portanto, para todo $s \geq 0$, $\varphi^{**}(s) \leq \varphi(s)$ o que nos garante a igualdade $\varphi^{**} = \varphi$.

d) A função φ^* é superaditiva, isto é, $\varphi^*(t) + \varphi^*(s) \leq \varphi^*(t+s)$ para todos $t, s \in [0, \infty)$. De fato, pela convexidade de φ^*,

$$\varphi^*(\lambda s) = \varphi^*(\lambda s + (1-\lambda)0) \leq \lambda\varphi^*(s), \quad \forall s \geq 0 \text{ e } \forall 0 \leq \lambda \leq 1,$$

uma vez que $\varphi^*(0) = 0$. Sendo assim, para quaisquer $t, s \geq 0$,

$$\varphi^*(s) + \varphi^*(t) = \varphi^*\left(\frac{s}{s+t}(s+t)\right) + \varphi^*\left(\frac{t}{s+t}(s+t)\right) \leq \varphi^*(s+t),$$

o que prova a afirmação.

3.2 Classes Beurling e Roumieu

Neste ponto, trabalharemos com a definição dos espaços de funções ultradiferenciáveis e abordaremos alguns dos importantes resultados desta teoria. Esta seção está fundamentada em [1].

Definição 3.2.1. *Seja ω uma função peso. Para um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definimos*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) &\doteq \{f \in C^\infty(\Omega);\ \forall K \subset\subset \Omega \text{ e } \forall\lambda > 0,\ \|f\|_{K,\lambda} < \infty\} \text{ e} \\
\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega) &\doteq \{f \in C^\infty(\Omega);\ \forall K \subset\subset \Omega,\ \exists\lambda > 0 \text{ tal que } \|f\|_{K,\lambda} < \infty\},
\end{aligned}$$

chamado espaço das funções ω-ultradiferenciáveis do tipo Beurling e do tipo Roumieu, *respectivamente, em que*

$$\|f\|_{K,\lambda} \doteq \sup_{x\in K}\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}\left\{|\partial^\alpha f(x)|\exp\left(-\lambda\varphi^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda}\right)\right)\right\}.$$

A topologia que consideramos em $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ é a topologia localmente convexa dada pela família de seminormas

$$\left\{\|\cdot\|_{K_n,\frac{1}{n}};\ K_n \subset\subset \Omega,\ \ \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \ \text{ e } \ K_1 \subset K_2 \subset \cdots\right\},$$

a qual torna $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ um espaço reflexivo de Fréchet.

Sobre a topologia de $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$, consideremos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K) &\doteq \{f\in C^\infty(K);\ \exists m\in\mathbb{N} \text{ tal que } \|f\|_{K,\frac{1}{m}}<\infty\} \ \text{ e}\\ \mathcal{E}_\omega^\lambda(K) &\doteq \{f\in C^\infty(K);\ \|f\|_{K,\lambda}<\infty\},\end{aligned}$$

em que $K \subset \Omega$ é compacto de interior não vazio e $\lambda > 0$ são quaisquer. O espaço $\mathcal{E}_\omega^\lambda(K)$, assim definido, é um espaço de Banach, de modo que podemos equipar o espaço $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)$ com a topologia limite indutivo dos espaços $\left\{\mathcal{E}_\omega^{\frac{1}{m}}(K)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$. Por fim, a topologia em $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ é dada pelo limite projetivo da seguinte sequência

$$\left\{\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K_n);\ K_n \subset\subset \Omega,\ \ \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \ \text{ e } \ K_1 \subset K_2 \subset \cdots\right\}.$$

Definição 3.2.2. *Dizemos que uma função peso é quaseanalítica se*

$$\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt = \infty.$$

Quando ω é quaseanalítica chamamos os elementos de $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ e $\mathcal{E}'_{\{\omega\}}(\Omega)$ de funcionais quaseanalíticos tipo Beurling e tipo Roumieu, respectivamente.

Quando ω é quaseanalítica, os elementos de $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ e $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ que possuem suporte compacto são apenas os triviais. Entretanto, se ω não é quaseanalítica temos que

$$\mathcal{D}_{(\omega)}(K) \doteq \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)\cap C_0^\infty(K) \neq \{0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_{\{\omega\}}(K) \doteq \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)\cap C_0^\infty(K) \neq \{0\},$$

para todo compacto $K \subset \Omega$ de interior não vazio. Neste caso, os espaços duais $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ e $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$ são chamados de espaço das ultradistribuições do tipo Roumieu e do tipo Beurling, respectivamente. Para mais detalhes, consultar [4].

Afirmamos anteriormente que funções peso equivalentes determinariam os mesmos espaços de funções. Validaremos este fato com a próxima proposição.

Proposição 3.2.3. *Sejam ω e ω_0 duas funções peso e Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$.*

(a) Se $\omega(t) = O(\omega_0(t))$, quando $t \to \infty$, então

$$\mathcal{E}_{\{\omega_0\}}(\Omega) \subset \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega) \quad e \quad \mathcal{E}_{(\omega_0)}(\Omega) \subset \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega). \tag{3.2}$$

(b) Se ω e ω_0 são equivalentes, então $\mathcal{E}_{\{\omega_0\}}(\Omega) = \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ e $\mathcal{E}_{(\omega_0)}(\Omega) = \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$.

(c) Se $\omega(t) = o(\omega_0(t))$, quando $t \to \infty$, então $\mathcal{E}_{\{\omega_0\}}(\Omega) \subset \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$. Além disso, se $\omega_0(t) = t$, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k > 0$ tal que

$$s \log s \leq s + k\varphi^*\left(\frac{s}{k}\right) + C_k,$$

para todo $s \geq 1$.

Demonstração. Supomos que $\omega(t) = O(\omega_0(t))$ quando $t \to \infty$, isto é, existem $t_0 > 0$ e $A > 0$ tais que $\omega(t) \leq A\omega_0(t)$, $\forall t \geq t_0$. Sendo ω uma função não decrescente e $B = \omega(t_0)$, temos que

$$\omega(t) \leq A\omega_0(t) + B, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{então} \quad \varphi(t) \leq A\varphi_0(t) + B, \quad \forall t \geq 0,$$

em que $\varphi(t) = \omega(e^t)$ e $\varphi_0(t) = \omega_0(e^t)$. Assim, para todo $s \geq 0$,

$$\begin{aligned} A^{-1}\varphi^*(As) &= A^{-1}\sup_{t\geq 0}\{Ast - \varphi(t)\} = \sup_{t\geq 0}\{st - A^{-1}\varphi(t)\} \\ &\geq \sup_{t\geq 0}\{st - \varphi_0(t)\} - BA^{-1} = \varphi_0^*(s) - BA^{-1}. \end{aligned}$$

A desigualdade

$$C\exp\left(\lambda\varphi_0^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda}\right)\right) \leq Ce^{\lambda BA^{-1}}\exp\left(\frac{\lambda}{A}\varphi^*\left(\frac{A|\alpha|}{\lambda}\right)\right), \quad \forall\lambda > 0 \text{ e } \forall C > 0,$$

garante as inclusões em (3.2).

O item (b) é uma aplicação imediata do item anterior, uma vez que ω e ω_0 serem equivalentes implica que $\omega(t) = O(\omega_0(t))$ e $\omega_0(t) = O(\omega(t))$, quando $t \to \infty$.

Com respeito ao item (c), consideremos $f \in \mathcal{E}_{\{\omega_0\}}(\Omega)$ e $K \subset \Omega$ compacto. Existem $\tilde{\lambda} > 0$ e $C > 0$ satisfazendo

$$\sup_{x\in K}|\partial^\alpha f(x)| \leq C\exp\left(\tilde{\lambda}\varphi_0^*\left(\frac{|\alpha|}{\tilde{\lambda}}\right)\right), \quad \forall\alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$

em que $\varphi_0(t) = \omega_0(e^t)$. Como ω é não decrescente e $\omega(t) = o(\omega_o(t))$, quando $t \to \infty$, segue que dado $\lambda > 0$, existe $t_{0,\lambda} \geq 0$ de modo que

$$\omega(t) \leq \tilde{\lambda}\lambda^{-1}\omega_0(t) + \omega(t_{0,\lambda}), \quad \forall t \geq 0.$$

Denotamos $\varphi(t) = \omega(e^t)$ e $B = \tilde{\lambda}\lambda^{-1}$, temos que

$$\begin{aligned} B^{-1}\varphi^*(Bs) &= B^{-1} \sup_{t \geq 0}\{Bst - \varphi(t)\} \\ &\geq B^{-1} \sup_{t \geq 0}\{Bst - B\varphi_0(t) - \omega(t_{0,\lambda})\} \\ &= \varphi_0^*(s) - B^{-1}\omega(t_{0,\lambda}). \end{aligned}$$

Então, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)| &\leq C \exp\left(\tilde{\lambda}\varphi_0^*\left(\frac{|\alpha|}{\tilde{\lambda}}\right)\right) \\ &\leq Ce^{\omega(t_{0,\lambda})B^{-1}} \exp\left(\tilde{\lambda}B^{-1}\varphi\left(\frac{B|\alpha|}{\tilde{\lambda}}\right)\right) \\ &\leq C_0 \exp\left(\lambda\varphi^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda}\right)\right), \end{aligned}$$

o que conclui o fato que $f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$.

Agora, assumamos que $\omega_0(t) = t$. Como vimos acima, para todo $B > 0$ existe $t_0 \geq 0$ satisfazendo

$$\varphi_0^*(s) \leq B^{-1}\varphi^*(Bs) + B^{-1}\omega(t_0), \quad \forall s \geq 0.$$

Por outro lado, observamos que

$$\varphi_0^*(s) = \sup_{t \geq 0}\{ts - \varphi_0(t)\} \geq s\log s - \varphi_0(\log s) = s\log s - s, \quad \forall s \geq 1.$$

Logo, dado $k \in \mathbb{N}$ e escrevendo $B = \frac{1}{k}$ obtemos que

$$s\log s \leq s + k\varphi^*\left(\frac{s}{k}\right) + C_k,$$

para todo $s \geq 1$. ■

Recordemos que $f \in C^\infty(\Omega)$ é uma função Gevrey de ordem $s \in [1, \infty)$, ou que $f \in G^s(\Omega)$, se para cada compacto $K \subset \Omega$ existir uma constante positiva C tal que

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1}(|\alpha|)^{|\alpha|s}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \text{ e } \forall x \in K.$$

A seguinte proposição mostra que os espaços de funções ultradiferenciáveis tipo Roumieu estendem os espaços Gevrey.

Proposição 3.2.4. *Se $s \in [1, \infty)$ e $\omega(t) = t^a$ com $a = s^{-1}$, então $G^s(\Omega) = \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$. Dado um compacto $K \subset \Omega$, existem $\lambda > 0$ e $C > 0$

tais que
$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C \exp\left(\lambda\varphi^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda}\right)\right), \quad \forall x \in K \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$
em que $\varphi^*(s) = \sup\limits_{t\geq 0}\{ts - e^{at}\}$. Para estimarmos o valor de $\varphi^*(\frac{|\alpha|}{\lambda})$, vamos estudar o máximo da função $\sigma(t) = t\frac{|\alpha|}{\lambda} - e^{at}$. Observamos que $\sigma'(t_0) = 0$ se, e somente se, $\frac{|\alpha|}{\lambda} = ae^{at_0}$, isto é, $t_0 = \log\left(\frac{|\alpha|}{\lambda a}\right)^{\frac{1}{a}}$. Como $\sigma''(t) = -a^2e^{at} < 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que t_0 é um ponto de máximo da função σ. Ainda, para os multi-índices α satisfazendo $|\alpha| \geq \lambda a$, temos que $t_0 \geq 0$. Portanto,
$$\varphi^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda a}\right) = \sigma(t_0) = \frac{1}{\lambda}\log\left(\frac{|\alpha|}{\lambda a}\right)^{\frac{|\alpha|}{a}} - \frac{|\alpha|}{\lambda a}, \quad \forall |\alpha| \geq \lambda a.$$
Com isto obtemos que, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e todo $x \in K$,
$$\begin{aligned}|\partial^\alpha f(x)| &\leq C \exp\left(\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\log\left(\frac{|\alpha|}{\lambda a}\right)^{\frac{|\alpha|}{a}}\right)\right)\exp\left(-\lambda\frac{|\alpha|}{\lambda a}\right)\\ &\leq C'\left(\frac{|\alpha|}{\lambda a}\right)^{|\alpha|s} \leq C_0^{|\alpha|}|\alpha|^{|\alpha|s},\end{aligned}$$
ou seja, $f \in G^s(\Omega)$.

Reciprocamente, se $f \in G^s(\Omega)$ e $K \subset \Omega$ é um compacto qualquer, então existe $C > 0$ (o qual podemos tomar maior que 1) tal que
$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1}|\alpha|^{|\alpha|s}, \quad \forall x \in K \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$
Para garantirmos que $f \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$, basta mostrarmos que existe $\lambda > 0$ satisfazendo
$$C^{|\alpha|+1}|\alpha|^{|\alpha|s} \leq \exp\left(\lambda\varphi^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda}\right)\right), \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{3.3}$$
Já sabemos que
$$\exp\left(\lambda\varphi^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda}\right)\right) = \left(\frac{|\alpha|}{\lambda a}\right)^{|\alpha|s}\exp\left(-\frac{|\alpha|}{a}\right), \quad \forall |\alpha| \geq \lambda a,$$
então (3.3) ocorre para todo $|\alpha| \geq \lambda a$ se, e somente se,
$$(\lambda a)^{|\alpha|s} \leq C^{-|\alpha|}\exp\left(-\frac{|\alpha|}{a}\right), \quad \text{isto é,} \quad \lambda \leq \frac{e^{-1}C^{-a}}{a}.$$
Portanto, para $0 < \lambda \leq se^{-1}C^{-\frac{1}{s}}$,
$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C_0 \exp\left(\lambda\varphi^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda}\right)\right), \quad \forall x \in K \text{ e } \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$

em que $C_0 \geq \sup\limits_{|\alpha|\leq \lambda a}\left(\sup\limits_{x\in K}|\partial^\alpha f(x)|\right)$. Deste modo, concluímos a igualdade dos espaços $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega) = G^s(\Omega)$. ■

Outro fato importante sobre os espaços Gevrey é que $G^1(\Omega)$ coincide com o espaço das funções analíticas em Ω. Como $\omega(t) = O(t)$, quando $t \to \infty$, para qualquer função peso ω, segue das Proposições 3.2.3 e 3.2.4 que todas as classes de funções ultradiferenciáveis tipo Roumieu contém o espaço das funções analíticas.

Apresentaremos, a seguir, alguns lemas que nos auxiliarão nos cálculos futuros.

Lema 3.2.5. *Seja ω uma função peso. Denotamos por $L \in \mathbb{N}$ a constante que aparece na Definição 3.1.1.*

(a) $\varphi(x+j) \leq 2jL^{2j}(1+\varphi(x))$, $\forall x \geq 0$ e $\forall j \in \mathbb{N}$.

(b) Dados $p \in \mathbb{N}$ e $k \geq 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{k}\varphi^*(ky) + yp \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{m}\varphi^*(ym).$$

Demonstração. Provaremos (a) por indução em j. Ora,

$$\begin{aligned}\varphi(x+1) &= \omega(e^{x+1}) \leq \omega(4e^x) \leq L(1+\omega(2e^x)) \\ &\leq L(1+L(1+\omega(e^x))) \leq L^2(2+\omega(e^x)) \\ &\leq 2L^2(1+\omega(e^x))\end{aligned}$$

e, portanto, o caso $j = 1$ está demonstrado. Supomos válido para $j \in \mathbb{N}$ e mostremos o resultado para $j+1$. Pelo que fizemos acima, $\varphi(x+(j+1)) \leq L^2(2+\varphi(x+j))$, usando a hipótese de indução obtemos que

$$\varphi(x+(j+1)) \leq L^2(2+2jL^j(1+\varphi(x))) \leq 2(j+1)L^{2(j+1)}(1+\varphi(x)).$$

Quanto ao item (b), escolhemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq 4pL^{2p}k$. Segue do item anterior que, para todo $x \geq p$,

$$\frac{1}{m}\varphi(x) = \frac{1}{m}\varphi(x-p+p) \leq \frac{2pL^{2p}}{m}(1+\varphi(x-p)) \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}\varphi(x-p). \tag{3.4}$$

Dado $y \geq 0$, consideremos $x_0 = x_0(y) \geq p$ o qual realiza $\sup\limits_{x\geq p}\{xy - \frac{1}{2k}\varphi(x-p)\} = x_0 y - \frac{1}{2k}\varphi(x_0-p)$. Observamos que $py + \frac{1}{2k}\varphi^*(2ky) = \sup\limits_{x\geq 0}\left\{y(x+p) - \frac{1}{2k}\varphi(x)\right\}$ que por sua vez é igual a

$$\sup_{x\geq p}\left\{yx - \frac{1}{2k}\varphi(x-p)\right\}.$$

Assim, pela escolha de x_0 e por (3.4),

$$\begin{aligned} py + \frac{1}{2k}\varphi^*(2ky) &= x_0 y - \frac{1}{2k}\varphi(x_0 - p) \\ &\le x_0 y + \frac{1}{2k} - \frac{1}{m}\varphi(x_0) \\ &\le \frac{1}{2k} + \frac{1}{m}\varphi^*(ym). \end{aligned}$$

Da convexidade de φ^* e do fato que $\varphi^*(0) = 0$, temos que $\varphi^*(ty) \le t\varphi^*(y)$, para todo $0 \le t \le 1$ e todo $y \ge 0$. Portanto,

$$py + \frac{1}{k}\varphi^*(ky) = py + \frac{1}{k}\varphi^*\left(\frac{2ky}{2}\right) \le py + \frac{1}{2k}\varphi^*(2ky),$$

o que finaliza a prova. ■

Lema 3.2.6. *Sejam ω uma função peso e f uma função contínua definida em um cone $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ com valores em $[0, \infty)$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(i) Existem constantes $C, \varepsilon > 0$ tais que $f(\xi) \le Ce^{-\varepsilon\omega(|\xi|)}$, $\forall \xi \in \Gamma$.

(ii) Existe constante $C > 0$ de modo que $f(\xi) \le C^{N+1} N!\omega(|\xi|)^{-N}$, $\forall N \in \mathbb{N}$ e $\forall \xi \in \Gamma$.

(iii) Existe constante $C > 0$ tal que $f(\xi) \le C\left(\frac{CN}{\omega(|\xi|)}\right)^N$, $\forall N \in \mathbb{N}$ e $\forall \xi \in \Gamma$.

(iv) Existem constantes $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $|\xi|^N f(\xi) \le Ce^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)}$, $\forall N \in \mathbb{N}$ e $\forall \xi \in \Gamma$.

(v) Existem constantes $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $|\xi|^N f(\xi) \le C^{N+1} e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)}$, $\forall N \in \mathbb{N}$ e $\forall \xi \in \Gamma$.

Demonstração. Inicialmente iremos mostrar que (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Ora, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$e^{-\varepsilon\omega(|\xi|)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon\omega(|\xi|))^j}{j!}\right)^{-1} \le \left(\frac{(\varepsilon\omega(|\xi|))^N}{N!}\right)^{-1} = (\varepsilon^{-1})^N N!\omega(|\xi|)^{-N}$$

e, portanto, (i) implica em (ii). O fato que (ii) garante (iii) é imediato, uma vez que $N! \le N^N$. Também, $N^N \le e^N N!$ mostrando que (iii) acarreta em (ii). Supomos válido (ii), ou seja, $f(\xi)\omega(|\xi|)^N (C^N N!)^{-1} \le C$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Se $\varepsilon = (2C)^{-1}$, então

$$f(\xi)\exp(\varepsilon\omega(|\xi|)) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^N}\frac{f(\xi)\omega(|\xi|)^N}{C^N N!} \le \sum_{N=0}^{\infty}\frac{C}{2^N} = 2C,$$

concluindo, assim, que o item (i) é satisfeito.

Agora, para mostrarmos que (i) equivale a (iv) é suficiente garantirmos as seguintes desigualdades

$$e^{-\frac{1}{k}\omega(|\xi|)} \leq \inf_{N\in\mathbb{N}} |\xi|^{-N} e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)} \leq e^{-\frac{1}{k}\omega(|\xi|)+\log|\xi|}, \tag{3.5}$$

para todo $\xi \in \Gamma$ com $|\xi|$ suficientemente grande. De fato, assumindo (3.5) e supondo que (iv) é válido, temos

$$f(\xi) \leq C \inf_{N\in\mathbb{N}} |\xi|^{-N} e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)} \leq Ce^{-\frac{1}{k}\omega(|\xi|)+\log|\xi|}.$$

Seja $0 < \varepsilon < \frac{1}{k}$. Usando a propriedade $\log(t) = o(\omega(t))$ quando $t \to \infty$, segue que existe ξ_0 tal que $\log|\xi| \leq \left(\frac{1}{k} - \varepsilon\right)\omega(|\xi|)$, para todo $|\xi| \geq |\xi_0|$. Desta forma, $e^{-\frac{1}{k}\omega(|\xi|)+\log|\xi|} \leq e^{-\varepsilon\omega(|\xi|)}$ o que implica em (i). Se (i) ocorre, escolhemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \varepsilon$, segue que

$$f(\xi) \leq Ce^{-\varepsilon\omega(|\xi|)} \leq Ce^{-\frac{1}{k}\omega(|\xi|)} \leq C \inf_{N\in\mathbb{N}} |\xi|^{-N} e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)}.$$

Logo, $|\xi|^N f(\xi) \leq C' e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)}$, para todo $N \in \mathbb{N}$ e $\xi \in \Gamma$. A respeito de (3.5), notemos que

$$\omega(|\xi|) = \varphi(\log|\xi|) = \varphi^{**}(\log|\xi|) = \sup_{s\geq 0}\{s\log|\xi| - \varphi^*(s)\} \geq \sup_{N\in\mathbb{N}}\{Nk\log|\xi| - \varphi^*(Nk)\},$$

e, portanto,

$$\frac{1}{k}\omega(|\xi|) \geq \sup_{N\in\mathbb{N}}\left\{N\log|\xi| - \frac{1}{k}\varphi^*(Nk)\right\}, \text{ isto é, } -\frac{1}{k}\omega(|\xi|) \leq \inf_{N\in\mathbb{N}}\left\{-N\log|\xi| + \frac{1}{k}\varphi^*(Nk)\right\},$$

o que implica em $e^{-\frac{1}{k}\omega(|\xi|)} \leq \inf_{N\in\mathbb{N}} |\xi|^{-N} e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)}$. Por outro lado, para $|\xi| > 1$,

$$\begin{aligned}
\omega(|\xi|) &= \varphi^{**}(\log|\xi|) = \sup_{s\geq 0}\{s\log|\xi| - \varphi^*(s)\} \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}}\left(\sup_{Nk\leq s\leq (N+1)k}\{s\log|\xi| - \varphi^*(s)\}\right) \\
&\leq \sup_{N\in\mathbb{N}}\{(N+1)k\log|\xi| - \varphi^*(Nk)\} \\
&= k\log|\xi| + k\sup_{N\in\mathbb{N}}\left\{N\log|\xi| - \frac{1}{k}\varphi^*(Nk)\right\}.
\end{aligned}$$

Logo, $\frac{1}{k}\omega(|\xi|) - \log|\xi| \leq \sup_{N\in\mathbb{N}}\left\{N\log|\xi| - \frac{1}{k}\varphi^*(Nk)\right\}$, ou seja,

$$\inf_{N\in\mathbb{N}}\left\{-N\log|\xi| + \frac{1}{k}\varphi^*(Nk)\right\} \leq \log|\xi| - \frac{1}{k}\omega(|\xi|) \;\Rightarrow\; \inf_{N\in\mathbb{N}} |\xi|^{-N} e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)} \leq e^{-\frac{1}{k}\omega(|\xi|)+\log|\xi|}.$$

Concluímos, assim, as desigualdades em (3.5).

Por fim, resta mostrarmos que (v) acarreta em (iv), uma vez que (iv) implica em (v) é imediato. Supomos que (v) é válido e tomamos $p \in \mathbb{N}$ tal que $C \leq e^p$. Dado $k \in \mathbb{N}$, usando o Lema 3.2.5, temos que existe $m \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\frac{1}{k}\varphi^*(ky) + yp \leq \frac{1}{m}\varphi^*(ym) + \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{m}\varphi^*(ym) + 1, \quad \forall y \geq 0.$$

Fazendo $y = N$, segue que

$$f(\xi) \leq C^{N+1} e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)} \leq Ce^{Np+\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)} \leq (Ce)e^{\frac{1}{m}\varphi^*(Nm)}, \quad \forall \xi \in \Gamma$$

e, portanto, (iv) ocorre. ■

Lema 3.2.7. *Sejam ω uma função peso e f uma função contínua definida em um cone $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ com valores em $[0, \infty)$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(i) Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k > 0$ tal que $f(\xi) \leq C_k e^{-k\omega(|\xi|)}$, $\forall \xi \in \Gamma$.

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k > 0$ tal que $f(\xi) \leq C_k N!(k\omega(|\xi|))^{-N}$, $\forall N \in \mathbb{N}$ e $\forall \xi \in \Gamma$.

(iii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k > 0$ tal que $f(\xi) \leq C_k \left(\frac{N}{k\omega(|\xi|)}\right)^N$, $\forall N \in \mathbb{N}$ e $\forall \xi \in \Gamma$.

(iv) Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k > 0$ tal que $|\xi|^N f(\xi) \leq C_k e^{k\varphi^*\left(\frac{N}{k}\right)}$, $\forall N \in \mathbb{N}$ e $\forall \xi \in \Gamma$.

(v) Existe $C > 0$ tal que dado $k \in \mathbb{N}$ existe $C_k > 0$ satisfazendo $|\xi|^N f(\xi) \leq C_k C^N e^{k\varphi^*\left(\frac{N}{k}\right)}$, $\forall N \in \mathbb{N}$ e $\forall \xi \in \Gamma$.

Demonstração. As equivalências (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) são análogas ao do lema anterior.

Por (3.5), temos que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$e^{-k\omega(|\xi|)} \leq \inf_{N\in\mathbb{N}} |\xi|^{-N} e^{k\varphi^*\left(\frac{N}{k}\right)} \quad \text{e} \quad \inf_{N\in\mathbb{N}} |\xi|^{-N} e^{2k\varphi^*\left(\frac{N}{2k}\right))} \leq e^{-2k\omega(|\xi|)+\log|\xi|}. \tag{3.6}$$

Ainda, como $\log(t) = o(\omega(t))$, existe ξ_k satisfazendo $\log|\xi| < k\omega(|\xi|)$, para todo $|\xi| \geq |\xi_k|$. Desta forma, se (iv) ocorre, então dado $k \in \mathbb{N}$

$$f(\xi) \leq C_{2k} \inf_{N\in\mathbb{N}} |\xi|^{-N} e^{2k\varphi^*\left(\frac{N}{2k}\right)} \leq C_{2k} e^{-2k\omega(|\xi|)+\log|\xi|} \leq C_{2k} e^{-k\omega(|\xi|)},$$

para todo $|\xi| \geq |\xi_k|$. Logo, (i) também acontece. Reciprocamente, basta usarmos a primeira desigualdade em (3.6) para garantirmos que (i) implica em (iv).

Vejamos agora que (v) $\Rightarrow$ (iv). Tomamos $p \in \mathbb{N}$ satisfazendo $C \leq e^p$. Dado $k \in \mathbb{N}$, pelo Lema 3.2.5, sabemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{k}\varphi^*(N\tilde{k}^{-1}) + Np \leq \frac{\tilde{k}}{2} + \frac{1}{m}\varphi^*(Nm)$, para todo natural N, em que $\tilde{k} = 4pL^{2p}k$. Observamos que na demonstração do Lema 3.2.5, podemos tomar qualquer $m \geq 4pL^{2p}\tilde{k}^{-1}$, neste caso escolhemos $m = 4pL^{2p}\tilde{k}^{-1} = k^{-1}$. Com isto, obtemos que

$$\tilde{k}\varphi^*\left(\frac{N}{\tilde{k}}\right) + Np \leq 2pL^{2p}k + k\varphi^*\left(\frac{N}{k}\right), \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Sendo assim, dado $k \in \mathbb{N}$,

$$f(\xi) \leq C_{\tilde{k}} C^N e^{\tilde{k}\varphi^*\left(\frac{N}{\tilde{k}}\right)} \leq C_{\tilde{k}} e^{Np+\tilde{k}\varphi^*\left(\frac{N}{\tilde{k}}\right)} \leq C_k e^{k\varphi^*\left(\frac{N}{k}\right)}, \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

o que mostra (iv). Uma vez que (iv) $\Rightarrow$ (v) é imediato, o lema está demonstrado. ∎

3.3 O Conjunto Frente de Ondas $WF_*(u)$

Para simplicar notações, escrevemos $*$ para denotar $\{\omega\}$ ou (ω) quando não houver diferenças entre estes dois casos. Similar à definição de suporte singular C^∞ de uma distribuição u, definimos também:

Definição 3.3.1. *O suporte $*$-singular de uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, denotado por* $\operatorname{suppsing}_* u$, *é o complementar em Ω do maior conjunto aberto $U \subset \Omega$ que realiza*

$$u\big|_U \in \mathcal{E}_*(\Omega).$$

A proposição seguinte nos traz uma caracterização dos pontos que não estão no suporte $*$-singular por meio do decaimento da transformada de Fourier.

Proposição 3.3.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ e ω função peso.*

(a) O ponto x_0 não está em $\operatorname{suppsing}_{\{\omega\}} u$ *se, e somente se, existem vizinhança $U \subset \Omega$ de x_0 e sequência limitada $\{u_N\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ que satisfaz $u_N\big|_U = u$ e, para alguma constante $C > 0$ e algum $k \in \mathbb{N}$,*

$$|\xi|^N |\widehat{u}_N(\xi)| \leq C e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)}, \tag{3.7}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(b) Suponha que $\omega(t) = o(t)$ quando t tende ao infinito. Nestas condições, o ponto x_0 não está em $\operatorname{suppsing}_{(\omega)} u$ *se, e somente se, existem vizinhança $U \subset \Omega$ de x_0 e sequência limitada $\{u_N\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ com $u_N\big|_U = u$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k > 0$ satisfazendo*

$$|\xi|^N |\widehat{u}_N(\xi)| \leq C_k e^{k\varphi^*\left(\frac{N}{k}\right)}, \tag{3.8}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Supomos que $x_0 \notin \operatorname{suppsing}_{\{\omega\}}$, então existe aberto $U \subset \Omega$ contendo x_0, o qual podemos escolher $U = B(x_0, 3r)$, de modo que $u \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(U)$. Para cada $N \in \mathbb{N}$, consideremos $\chi_N \in C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo $\chi_N \equiv 1$ em $B(x_0, r)$, $\operatorname{supp} \chi_N \subset B(x_0, 2r)$ e

$$\sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \chi_N(x)| \leq (C_1 N)^{|\alpha|}, \quad \forall |\alpha| \leq N,$$

em que C_1 depende apenas da dimensão de $\mathbb{R}^n$.

Definimos $u_N = \chi_N u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, mostremos que esta sequência (u_N), a qual já é limitada por construção, realiza a estimativa (3.7). Para todo $N \in \mathbb{N}$ e todo $|\alpha| \leq N$, segue da Regra de Leibniz e da escolha de χ_N que

$$|\partial^\alpha u_N(x)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^\alpha \chi_N(x)||\partial^{\alpha-\beta} u(x)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (C_1 N)^{|\beta|} |\partial^{\alpha-\beta} u(x)|, \quad \forall x \in \Omega.$$

Desde que $u \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(U)$, para $K = \overline{B(x_0, 2r)} \supset \operatorname{supp} u_N$, existem $m \in \mathbb{N}$ e $D_r > 0$ tais que

$$|\partial^\alpha u(x)| \leq D_r e^{\frac{1}{m}\varphi^*(m|\alpha|)}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_+ \text{ e } \forall x \in K.$$

Assim,

$$|\partial^\alpha u_N(x)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (C_1 N)^{|\beta|} D_r e^{\frac{1}{m}\varphi^*(m|\alpha-\beta|)}.$$

Recordemos que φ^* é superaditiva, desta forma $\varphi^*(m|\alpha - \beta|) + \varphi^*(|\beta|) \leq \varphi^*(m|\alpha|)$, para quaisquer multi-índices β e α com $\beta \leq \alpha$. Então, para $|\alpha| \leq N$,

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha u_N(x)| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (C_1 N)^{|\beta|} D_r e^{\frac{1}{m}\varphi^*(m|\alpha|)} e^{-\frac{1}{m}\varphi^*(m|\beta|)} \\
&\leq 2^N D_r e^{\frac{1}{m}\varphi^*(m|\alpha|)} \sup_{|\beta| \leq N} \left\{ e^{|\beta| \log(C_1 N) - \frac{1}{m}\varphi^*(m|\beta|)} \right\} \\
&\leq D_r e^{N + \frac{1}{m}\varphi^*(m|\alpha|)} \exp\left(\frac{1}{m} \sup_{\beta \in \mathbb{Z}^n_+} \left\{ \log(C_1 N) m|\beta| - \varphi^*(m|\beta|) \right\} \right).
\end{aligned}$$

No supremo acima trocamos $m|\beta|$ por $t \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\sup_{\beta \in \mathbb{Z}^n_+} \{\log(C_1 N) m|\beta| - \varphi^*(m|\beta|)\} \leq \sup_{t \geq 0} \{\log(C_1 N) t - \varphi^*(t)\} = \varphi^{**}(\log C_1 N) = \omega(C_1 N).$$

Logo, para todo $|\alpha| \leq N$,

$$|\xi^\alpha \widehat{u}_N(\xi)| = |\widehat{D^\alpha u}_N(\xi)| \leq \int_{B(x_0, 2r)} |D^\alpha u_N(x)| dx \ \leq \ C D_r \exp\left(N + \frac{1}{m}\varphi^*(m|\alpha|) + \frac{1}{m}\omega(C_1 N) \right),$$

em que C é a medida da bola $B(x_0, 2r)$. Agora, tomamos i tal que $|\xi_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j|$ e $\alpha = N e_i$ (e_i denota o i-ésimo termo da base canônica de $\mathbb{R}^n$). Assim, $|\xi|^N \leq (\sqrt{n})^N |\xi^\alpha|$ e, portanto,

$$|\xi|^N |\widehat{u}_N(\xi)| \leq n^{\frac{N}{2}} |\xi^\alpha \widehat{u}_N(\xi)| \leq C D_r \exp\left(\frac{N}{2} \log n + N + \frac{1}{m}\varphi^*(m|\alpha|) + \frac{1}{m}\omega(C_1 N) \right).$$

Podemos encontrar $C_2 > 0$ de modo que $\omega(t) \leq C_2 t + C_2$, para todo $t \geq 0$, basta usarmos o fato que $\omega(t) = O(t)$ quando t tende ao infinito. Aplicando o Lema 3.2.5 para $p \geq 1 + \frac{\log n}{2} + \frac{C_1 C_2}{m}$, temos

$$\frac{1}{m}\varphi^*(Nm) + Np \leq \frac{1}{k}\varphi^*(Nk) + \frac{1}{2m},$$

para algum $k \in \mathbb{N}$. Por fim,

$$\begin{aligned} |\xi|^N |\widehat{u}_N(\xi)| &\leq CD_r \exp\left(N\left(\frac{\log n}{2} + 1 + C_2 C_1\right) + C_2 + \frac{1}{m}\varphi^*(Nm)\right) \\ &\leq CD_r \exp\left(Np + C_2 + \frac{1}{m}\varphi^*(Nm)\right) \\ &\leq (CD_r e^{\frac{1}{2m}+C_2}) e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)} \end{aligned}$$

o que conclui a necessidade do item (a).

Quanto à suficiência de (a), notemos primeiramente que $u \in C^\infty(U)$. De fato, para todo $N \in \mathbb{N}$ temos, por hipótese, que

$$|\xi|^N |\widehat{u}(\xi)| = |\xi|^N |\widehat{u}_N(\xi)| \leq C e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)} = C_N.$$

Deste modo, segue diretamente do Teorema de Paley-Wiener que $u \in C^\infty(U)$. Por outro lado, se $N \geq |\alpha| + n + 1$, então

$$|\xi^\alpha \widehat{u}_N(\xi)| \leq |\xi|^{|\alpha|} |\widehat{u}_N(\xi)| \leq |\xi|^{-n-1} |\xi|^N |\widehat{u}_N(\xi)| \leq \frac{C_N}{|\xi|^{n+1}},$$

e, portanto, $\xi^\alpha \widehat{u}_N(\xi)$ é integrável para todo $N \geq |\alpha| + n + 1$. Assim, dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, escolhemos $N \geq |\alpha| + n + 1$ e temos que

$$|D^\alpha u(x)| = |D^\alpha u_N(x)| = |\mathcal{F}^{-1}\big(\xi^\alpha \widehat{u}_N(\xi)\big)(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int |\xi^\alpha \widehat{u}_N(\xi)| d\xi, \tag{3.9}$$

para todo $x \in U$, em que $\mathcal{F}^{-1}$ denota a transformada de Fourier inversa. Usando novamente o Teorema de Paley-Wiener, para cada $N \in \mathbb{N}$, existem $D_N > 0$ e $M_N \in \mathbb{N}$ tais que $|\widehat{u}_N(\xi)| \leq D_N(1 + |\xi|)^{M_N}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Sendo $\{u_N\}$ limitado, decorre do Corolário 1.4.5 a existência de $C_1 > 0$ e $M \in \mathbb{N}$ de modo que

$$|\widehat{u}_N(\xi)| \leq C_1 (1 + |\xi|)^M, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall N \in \mathbb{N}.$$

Retornando à (3.9), escrevemos

$$\int |\xi^\alpha \widehat{u}_N(\xi)| d\xi \leq \int_A |\xi|^{|\alpha|} |\widehat{u}_N(\xi)| d\xi + \int_{\mathbb{R}^n \setminus A} |\xi|^{|\alpha|} |\widehat{u}_N(\xi)| d\xi, \tag{3.10}$$

com $A = \{\xi \in \mathbb{R}^n;\ |\xi| \leq e^{\frac{1}{kN}\varphi^*(kN)}\}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\int_A |\xi|^{|\alpha|}|\widehat{u}_N(\xi)|d\xi &\leq \int_A e^{\frac{|\alpha|}{kN}\varphi^*(kN)} C_1(1+|\xi|)^M d\xi \\
&\leq m(A)e^{\frac{|\alpha|}{kN}\varphi^*(kN)} \sup_{\xi\in A} C_1(1+|\xi|)^M \\
&\leq m(A)C_1 e^{\frac{|\alpha|}{kN}\varphi^*(kN)}\left(1+e^{\frac{1}{kN}\varphi^*(kN)}\right)^M,
\end{aligned}$$

em que $m(A)$ é a medida de Lebesgue do conjunto A. Denotando $r = e^{\frac{1}{kN}\varphi^*(kN)}$, segue que

$$m(A) = m(B(0,r)) \leq m\left(\left\{\xi \in \mathbb{R}^n;\ \max_{1\leq j\leq n}|\xi_j| \leq r\right\}\right) = (2r)^n = 2^n e^{\frac{n}{Nk}\varphi^*(Nk)}.$$

Além disso, $\left(1+e^{\frac{1}{kN}\varphi^*(kN)}\right)^M = \sum_{j=0}^{M}\binom{M}{j}e^{\frac{j}{kN}\varphi^*(kN)} \leq 2^M e^{\frac{M}{kN}\varphi^* kN}$. Portanto, unindo estas desigualdades e escolhendo $N = n+|\alpha|+M \geq |\alpha|+n+1$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_A |\xi|^{|\alpha|}|\widehat{u}_N(\xi)|d\xi &\leq C_1 2^{n+M}\exp\left(\frac{n+|\alpha|+M}{kN}\varphi^*(Nk)\right) \\
&= C_1 2^{n+1}\exp\left(\frac{1}{k}\varphi^*\Big((n+|\alpha|+M)k\Big)\right).
\end{aligned}$$

Agora, queremos uma estimativa similar a esta para a segunda integral do lado direito de (3.10). Para tanto, usaremos a desigualdade (3.7) da hipótese com $N = n+|\alpha|+M$. Seguindo desta forma, garantimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus A} |\xi^\alpha||\widehat{u}_N(\xi)|d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus A} |\xi|^{N-n-M}|\xi|^{-N}Ce^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)}d\xi = C_2\exp\left(\frac{1}{k}\varphi^*\Big(k(|\alpha|+n+M)\Big)\right),$$

em que $C_2 = C\int \frac{1}{|\xi|^{n+M}}d\xi$. Denotamos $C_3 = \max\{2^{n+M}C_1, C_2\}$, assim

$$\begin{aligned}
\int |\xi^\alpha||\widehat{u}_N(\xi)|d\xi &\leq C_3\exp\left(\frac{1}{k}\varphi^*\Big(k(|\alpha|+n+M)\Big)\right) \\
&\leq C_3\exp\left(\frac{1}{2k}\Big(\varphi^*(2k|\alpha|)+\varphi^*(2k(n+M))\Big)\right),
\end{aligned}$$

uma vez que φ^* é convexa. Por fim, se $m = 2k$ e $C' = (2\pi)^n C_3 e^{\frac{1}{m}\varphi^*(m(n+M))}$, segue de (3.9) que

$$|D^\alpha u(x)| \leq C' e^{\frac{1}{m}\varphi^*(m|\alpha|)}, \quad \forall x \in U \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_+,$$

ou seja, $u \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(U)$. Isto nos permite concluir que $x_0 \notin \operatorname{suppsing}_{\{\omega\}} u$, o que finaliza a demonstração do item (a).

A prova do item (b) segue as mesmas ideias do item anterior, destacaremos os pontos mais pertinentes. Da mesma forma, se $x_0 \notin \operatorname{suppsing}_{(\omega)} u$, definimos $u_N = \chi_N u$ com χ_N satisfazendo as mesmas propriedades requeridas no item (a). Com isto, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$|\xi|^N |\widehat{u}_N(\xi)| \leq m(B(x_0, 2r)) C_k \exp\left(\frac{N}{2}\log n + N + k\varphi^*\left(\frac{N}{k}\right) + k\omega(C_1 N)\right),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e todo $N \in \mathbb{N}$. Agora, como $\omega(t) = o(t)$, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $A_k > 0$ satisfazendo $\omega(t) \leq \frac{1}{k}(t + A_k)$, qualquer que seja $t \geq 0$. Denotando $C_k' = m(B(x_0, 2r))C_k A_k$ e $B = \exp(\frac{\log n}{2} + 1 + C_1)$, obtemos que

$$|\xi|^N |\widehat{u}_N(\xi)| \leq C_k' B e^{k\varphi^*\left(\frac{N}{k}\right)}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall N \in \mathbb{N}.$$

Decorre do Lema 3.2.7 que $\{u_N\}$ realiza (3.8). Em relação a recíproca de (b), com os mesmos argumentos acima, temos que $u \in C^\infty(U)$ e dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int |\xi|^{|\alpha|} |\widehat{u}_N(\xi)| d\xi, \quad \forall N \geq |\alpha| + n + 1.$$

Separamos a integral da seguinte maneira

$$\int |\xi|^{|\alpha|} |\widehat{u}_N(\xi)| d\xi = \int_{A'} |\xi|^{|\alpha|} |\widehat{u}_N(\xi)| d\xi + \int_{\mathbb{R}^n \setminus A'} |\xi|^{|\alpha|} |\widehat{u}_N(\xi)| d\xi,$$

em que $A' = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n;\ |\xi| \leq \exp\left(\frac{2k}{N}\varphi^*\left(\frac{N}{2k}\right)\right)\right\}$. Novamente, sabemos que existem $C_1 > 0$ e $M \in \mathbb{N}$ tais que $|\widehat{u}_N(\xi)| \leq C_1(1 + |\xi|)^M$, para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^n$ e qualquer natural N. Neste caso, dado $k \in \mathbb{N}$, ocorre que

$$\begin{aligned}
|D^\alpha u(x)| &\leq C_{2k} \exp\left(2k\varphi^*\Big(\frac{|\alpha| + n + M}{2k}\Big)\right) \\
&\leq C_{2k} \exp\left(k\varphi^*\Big(\frac{|\alpha|}{k}\Big) + k\varphi^*\Big(\frac{n + M}{k}\Big)\right) \\
&\leq C_k' \exp\left(k\varphi^*\Big(\frac{|\alpha|}{k}\Big)\right),
\end{aligned}$$

em que $C_k' = C_{2k} e^{k\varphi^*\left(\frac{n+M}{k}\right)}$, para todo $x \in U$ e todo multi-índice α. Logo, $u \in \mathcal{E}_{(\omega)}(U)$, o que conclui a prova de (b). ■

A proposição acima nos motiva a definir o conjunto $*$-frente de ondas de uma distribuição com respeito as classes de funções ultradiferenciáveis $\mathcal{E}_*(\Omega)$.

Definição 3.3.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e ω uma função peso.*

- *O conjunto $\{\omega\}$-frente de ondas de u, $WF_{\{\omega\}}(u)$, é o complementar em $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ do conjunto dos pontos (x_0, ξ_0) tais que existem vizinhança $U \subset \Omega$ de x_0, um cone aberto Γ contendo ξ_0 e uma sequência limitada $\{u_N\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ com $u_N\big|_U = u$, $\forall N \in \mathbb{N}$, e satisfazendo (3.7), para todo $\xi \in \Gamma$.*

- *O conjunto (ω)-frente de ondas de u, $WF_{(\omega)}(u)$, é o complementar em $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ do conjunto dos pontos (x_0, ξ_0) tais que existem vizinhança $U \subset \Omega$ de x_0, um cone aberto Γ contendo ξ_0 e uma sequência limitada $\{u_N\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ com $u_N\big|_U = u$, $\forall N \in \mathbb{N}$, e satisfazendo (3.8), para todo $\xi \in \Gamma$.*

O próximo resultado é uma versão análoga do Lema 2.2.3 no ambiente das funções ultradiferenciáveis.

Lema 3.3.4. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $K \subset\subset \Omega$ com $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, F cone fechado em $\mathbb{R}^n$, ω função peso e $\{\chi_N\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e todo $N \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{x \in K} |D^{\alpha+\beta}\chi_N(x)| \leq C_\alpha (C_\alpha N)^{|\beta|}, \quad \forall |\beta| \leq N. \tag{3.11}$$

Nestas condições, $\{\chi_N u\}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{E}'^M(\Omega)$, em que M é a ordem de u em vizinhança de K. Além disso,

(a) Se $WF_{\{\omega\}}(u) \cap (K \times F) = \emptyset$, então existem $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$|\xi|^N |\widehat{\chi_N u}(\xi)| \leq C^{N+1} e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)},$$

para todo $\xi \in F$ e todo $N \in \mathbb{N}$.

(b) Se $WF_{(\omega)}(u) \cap (K \times F) = \emptyset$ e $\omega(t) = o(t)$ quando $t \to \infty$, segue que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k > 0$ satisfazendo

$$|\xi|^N |\widehat{\chi_N u}(\xi)| \leq C_k C^N e^{k\varphi^*\left(\frac{N}{k}\right)},$$

para quaisquer $\xi \in F$ e $N \in \mathbb{N}$.

Demonstração. A desigualdade (3.11) implica em

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha \chi_N(x)| \leq C_\alpha, \quad \forall N \in \mathbb{N} \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{Z}_n^+.$$

Desta forma, se $u \in \mathcal{D}'^M(V)$ com V vizinhança de K, usando Leibniz, obtemos que

$$|\langle \chi_N u, \varphi \rangle| = |\langle u, \chi_N \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq M} \sup_{x \in K} |D^\alpha(\chi_N \varphi)(x)| \leq C_M \sum_{|\alpha| \leq M} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Portanto, $\{\chi_N u\}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{E}'^M(\Omega)$.

Agora, supomos que $WF_{\{\omega\}}(u)$ e $K \times F$ são disjuntos. Se $(x_0, \xi_0) \in K \times F$, então existem U vizinhança de x_0, cone aberto Γ contendo ξ_0 e sequência limitada $\{u_N\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ que é igual a u em U e satisfaz

$$|\xi|^N |\widehat{u}_N(\xi)| \leq D_1 e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)}, \quad \forall N \in \mathbb{N} \text{ e } \forall \xi \in \Gamma, \tag{3.12}$$

para algum $D_1 > 0$ e algum $k \in \mathbb{N}$.

Assumamos, por enquanto, o caso mais específico em que $\operatorname{supp} \chi_N \subset U$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Nestas condições, $\chi_N u = \chi_N u_N$ e, assim,

$$|\widehat{\chi_N u}(\xi)| = |\widehat{\chi_N u_N}(\xi)| = \frac{1}{(2\pi)^n} |\widehat{\chi}_N * \widehat{u_N}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int |\widehat{\chi}_N(\eta)||\widehat{u}_N(\xi - \eta)| d\eta, \tag{3.13}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dividimos a integral acima da seguinte maneira,

$$\int |\widehat{\chi}_N(\eta)||\widehat{u}_N(\xi-\eta)|d\eta \leq \int\limits_{|\eta|\leq c|\xi|} |\widehat{\chi}_N(\eta)||\widehat{u}_N(\xi-\eta)|d\eta + \int\limits_{|\eta|>c|\xi|} |\widehat{\chi}_N(\eta)||\widehat{u}(\xi-\eta)|d\eta,$$

em que $0 < c < 1$ será convenientemente escolhido.

Observamos que

$$\int\limits_{|\eta|\leq c|\xi|} |\widehat{\chi}_N(\eta)||\widehat{u}_N(\xi-\eta)|d\eta \leq \|\widehat{\chi}_N\|_{L^1} \sup_{|\eta|\leq c|\xi|} |\widehat{u}_N(\xi-\eta)| = \|\widehat{\chi}_N\|_{L^1} \sup_{|\xi-\eta|\leq c|\xi|} |\widehat{u}_N(\eta)|.$$

Dado um cone fechado $\Gamma_1 \subset \Gamma \cup \{0\}$ contendo ξ_0, tomamos $0 < c < 1$ tal que $\xi \in \Gamma_1$ e $|\xi - \eta| \leq c|\xi|$ implicam em $\eta \in \Gamma$. Com isto, para todo $\xi \in \Gamma_1$, segue de (3.12) que

$$\begin{aligned} \int\limits_{|\eta|\leq c|\xi|} |\widehat{\chi}_N(\eta)||\widehat{u}_N(\xi-\eta)|d\eta &\leq \|\widehat{\chi}_N\|_{L^1} D_1 e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)} \sup_{|\xi-\eta|\leq c|\xi|} |\eta|^{-N} \\ &\leq C_1^{N+1} e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)} (1+|\xi|)^{-N}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Por outro lado, o Teorema de Paley-Wiener garante, para cada $N \in \mathbb{N}$, a existência de $M_N \in \mathbb{N}$ e $A_N > 0$ tais que $|\widehat{u}_N(\xi)| \leq A_N(1+|\xi|)^{M_N}$, para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^n$. Pelo Corolário 1.4.5, existem $D_2 > 0$ e $M \in \mathbb{N}$ de modo que

$$|\widehat{u}_N(\xi)| \leq D_2(1+|\xi|)^M, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \text{ e } \forall N \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\int\limits_{|\eta|>c|\xi|} |\widehat{\chi}_N(\eta)||\widehat{u}_N(\xi-\eta)|d\eta \leq D_2(1+c^{-1})^M \int\limits_{|\eta|>c|\xi|} |\widehat{\chi}_N(\eta)|(1+|\eta|)^M d\eta. \tag{3.15}$$

Além disso, decorre da desigualdade (3.11) que

$$\sup_{x\in K}|D^{\alpha+\beta}\chi_N(x)| \leq C'_\alpha\big(C'_\alpha e^{\frac{1}{Nm}\varphi^*(Nm)}\big)^{|\beta|}, \quad \forall\alpha\in\mathbb{Z}^n_+, \quad \forall|\beta|\leq N \text{ e } \forall m\in\mathbb{N}. \tag{3.16}$$

De fato, existe $A>0$ satisfazendo $\omega(t)\leq At+A$, para qualquer $t\geq 0$, uma vez que $\omega(t)=O(t)$ quando t tende ao infinito. Logo, para cada $N\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\varphi^*(N)}{N} = \sup_{t\geq 0}\left\{t-\frac{\varphi(t)}{N}\right\} \geq \log N - \frac{\varphi(\log N)}{N} \geq \log N - A - \frac{A}{N}.$$

Sendo assim,

$$N \leq e^{2A}e^{\frac{1}{N}\varphi^*(N)} \leq e^{2A}e^{\frac{1}{Nm}\varphi^*(Nm)},$$

pata todo $m\in\mathbb{N}$, e isto prova (3.16).

Notemos que, para todo $\eta\in\mathbb{R}^n$ e $N\in\mathbb{N}$,

$$|\eta|^{N+M+n+1}|\widehat{\chi}_N(\eta)| = C'|\eta^{\alpha+\beta}\widehat{\chi}_N(\eta)| = C'|\widehat{D^{\alpha+\beta}\chi_N}(\eta)|,$$

em que $|\alpha|=M+n+1$ e $|\beta|=N$. Então, usando (3.16), obtemos que

$$|\eta|^{N+M+n+1}|\widehat{\chi}_N(\eta)| \leq C'\int_K |D^{\alpha+\beta}\chi_N(x)|dx \leq m(K)C'C'_\alpha\big(C'_\alpha e^{\frac{1}{Nk}\varphi^*(Nk)}\big)^N.$$

Desde que α depende apenas de M e n, a constante $D_3=\max\{1,m(K)C'C'_\alpha\}$ não depende de N e satisfaz

$$|\eta|^{N+M+n+1}|\widehat{\chi}_N(\eta)| \leq D_3^{N+1}\big(e^{\frac{1}{Nk}\varphi^*(Nk)}\big)^N$$

para todo $N\in\mathbb{N}$. Retornando em (3.15), temos que

$$\int_{|\eta|>c|\xi|} |\widehat{\chi}_N(\eta)||\widehat{u}_N(\xi-\eta)|d\eta \leq D_2D_3^{N+1}(1+c^{-1})^M e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)}\int_{|\eta|>c|\xi|}(1+|\eta|)^{-n-1-N}d\eta.$$

Como $|\eta|>c|\xi|$ implica em $(1+|\xi|)^N\leq(1+c^{-1})(1+|\eta|)^N$, conseguimos a estimativa

$$\int_{|\eta|>c|\xi|} |\widehat{\chi}_N(\eta)||\widehat{u}_N(\xi-\eta)|d\eta \leq C_2^{N+1}e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)}(1+|\xi|)^{-N}, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n. \tag{3.17}$$

Portanto, fixado $x_0\in K$ e unindo (3.13), (3.14) e (3.17), mostramos que se $\operatorname{supp}\chi_N$ está contido em U e $\xi_0\in F$, existem cone aberto $\Gamma_{\xi_0}\subset F$ contendo ξ_0, constante $C>0$ e $k\in\mathbb{N}$ de modo que

$$|\xi|^N|\widehat{\chi_N u}(\xi)| \leq C^{N+1}e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)}, \quad \forall\xi\in\Gamma_1 \text{ e } \forall N\in\mathbb{N}. \tag{3.18}$$

Logo, $F = \bigcup_{\xi_0 \in F} \Gamma_{\xi_0}$. Uma vez que $F \cap S^{n-1}$ é compacto, sabemos que existem $\Gamma_{\xi_1}, \cdots, \Gamma_{\xi_p}$ tais que $F \cap S^{n-1} \subset \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_{\xi_j} \cap S^{n-1}$, o que implica em $F \subset \Gamma_{\xi_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\xi_p}$. Para cada $j = 1, \ldots, p$, existem $C_j > 0$ e $k_j \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$|\xi|^N |\widehat{\chi_N u}(\xi)| \leq C_j^{N+1} e^{\frac{1}{k_j}\varphi^*(Nk_j)}, \quad \forall \xi \in \Gamma_{\xi_j} \text{ e } \forall N \in \mathbb{N}.$$

Sendo $C \geq C_j$ e $k \geq k_j$, para todo $j = 1, \ldots, p$, concluímos que (3.18) ocorre para qualquer $\xi \in F$, desde que $\operatorname{supp} \chi_N \subset U$.

Para o caso geral, dado $x \in K$ existe vizinhança U_x tal que a desigualdade (3.18) é satisfeita no cone F, para qualquer sequência $\{\chi_N\} \subset C_0^\infty(U_x)$ que realiza (3.11). A compacidade de K nos garante que $K \subset U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_q}$. Desta forma, para cada $j = 1, \ldots, q$, escolhemos uma sequência $\{\chi_{N,j}\} \subset C_0^\infty(U_{x_j})$ satisfazendo (3.11) e de modo que $\sum_{j=1}^{q} \chi_{N,j} \equiv 1$ em K.

Por fim, seja $\{\chi_N\}$ uma sequência de funções em $C_0^\infty(K)$ satisfazendo (3.11). Logo, para cada $j = 1, \ldots, q$, as funções $\tilde{\chi}_{N,j} = \chi_N \chi_{N,j}$ também satisfazem (3.11) e, além disso, $\operatorname{supp} \tilde{\chi}_{N,j} \subset U_{x_j}$. Portanto, pelo feito acima, a desigualdade (3.18) acontece para todo $\xi \in F$ com $\tilde{\chi}_{N,j}$ no lugar de χ_N. O fato que $\chi_N = \sum_{j=1}^{N} \tilde{\chi}_{N,j}$ conclui a demonstração do item (a).

A demonstração do item (b) segue os mesmos passos que fizemos em (a), exceto na limitação de $|\widehat{\chi}_N(\eta)|$. Como vimos acima, para todo $\eta \in \mathbb{R}^n$ e todo $N \in \mathbb{N}$, temos que

$$|\eta|^{N+M+n+1} |\widehat{\chi}_N(\eta)| \leq C' |\widehat{D^{\alpha+\beta}\chi_N}| \leq C' m(K) C_\alpha \big(C_\alpha N\big)^{|\beta|},$$

com $|\alpha| = M + n + 1$ e $|\beta| = N$. Então,

$$|\widehat{\chi}_N(\eta)| \leq C^{N+1} \frac{N^N}{(1+|\eta|)^{N+M+n+1}}, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall N \in \mathbb{N}.$$

Como $\omega(t) = o(t)$ quando t tendo ao infinito, segue da Proposição 3.2.3 que dado $k \in \mathbb{N}$ existe $A_k > 0$ satisfazendo

$$N \log N \leq N + k\varphi^* \left(\frac{N}{k}\right) + A_k, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Com isto, temos que $N^N = e^{N \log N} \leq e^N e^{A_k} e^{k\varphi^*\left(\frac{N}{k}\right)}$ e, portanto,

$$|\widehat{\chi}_N(\eta)| \leq \frac{B^{N+1} B_k e^{k\varphi^*\left(\frac{N}{k}\right)}}{(1+|\eta|)^N}, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall N \in \mathbb{N}.$$

Com esta limitação fazemos os mesmos cálculos do item (a) e obtemos o desejado. ■

A Proposição 3.3.2 e o Lema 3.3.4 proporcionam algumas propriedades do conjunto $*$-frente de ondas, as quais apresentamos a seguir.

Teorema 3.3.5. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e ω função peso. Então, a projeção de $WF_*(u)$ em Ω é igual a* $\operatorname{suppsing}_* u$, *para qualquer $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. No caso $* = (\omega)$, adicionamos a hipótese $\omega(t) = o(t)$ quando $t \to \infty$.*

Demonstração. Denotamos por $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a projeção na primeira coordenada, isto é, $\pi_1(x, y) = x$. Dado $x_0 \notin \operatorname{suppsing}_{\{\omega\}} u$, mostraremos que x_0 não pertence a $WF_{\{\omega\}}(u)$ o que acarretará na seguinte inclusão

$$\pi_1(WF_{\{\omega\}}(u)) \subset \operatorname{suppsing}_{\{\omega\}} u.$$

Ora, decorre da Proposição 3.3.2 que existe sequência limitada $\{u_N\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$, igual a u em vizinhança de x_0, de modo que (3.7) é válido, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Isto implica que $(x_0, \xi) \notin WF_{\{\omega\}}(u)$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, ou seja, $x_0 \notin \pi_1(WF_{\{\omega\}}(u))$.

Reciprocamente, se $x_0 \in \Omega \setminus \pi_1(WF_{\{\omega\}}(u))$, existe vizinhança compacta $K \subset \Omega$ de x_0 tal que $K \cap \pi_1(WF_{\{\omega\}}(u)) = \emptyset$, uma vez que $\Omega \setminus \pi_1(WF_{\{\omega\}}(u))$ é aberto em Ω. Então,

$$(K \times \mathbb{R}^n) \cap WF_{\{\omega\}}(u) = \emptyset.$$

Segue do Lema 3.3.4 que existe sequência limitada $\{u_N\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ que é igual a u em vizinhança de x_0 e a desigualdade (3.7) acontece para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Usando novamente a Proposição 3.3.2, concluímos que $x_0 \notin \operatorname{suppsing}_{\{\omega\}} u$. Isto finaliza a prova do caso Roumieu. O caso Beurling é totalmente análogo. ∎

Ressaltamos o fato que toda função $f \in \mathcal{E}_*(\Omega)$ cujo suporte está contido em um compacto $K \subset \Omega$ satisfaz a desigualdade (3.11). Com efeito, se $f \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$, então $D^\alpha f \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Assim, para cada multi-índice α, existem $C_\alpha > 0$ e $k_\alpha \in \mathbb{N}$ tais que

$$|D^{\alpha+\beta} f(x)| = |D^\beta (D^\alpha f)(x)| \leq C_\alpha e^{\frac{1}{k_\alpha}\varphi^*(k_\alpha|\beta|)}, \quad \forall x \in K \text{ e } \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Agora, recordemos da desigualdade (3.5) obtida na demonstração do Lema 3.2.6 a qual garante que

$$\inf_{\beta \in \mathbb{Z}_+^n} t^{-|\beta|} e^{\frac{1}{k_\alpha}\varphi^*(|\beta| k_\alpha)} \leq e^{-\frac{1}{k_\alpha}\omega(t) + \log t}, \quad \forall t > 1.$$

Então, substituindo t por $N \in \mathbb{N}$ temos que

$$e^{\frac{1}{k_\alpha}\varphi^*(|\beta| k_\alpha)} \leq e^{-\frac{1}{k_\alpha}\omega(N) + \log N} N^{|\beta|} = N^{|\beta|+1} e^{-\frac{1}{k_\alpha}\omega(N)}.$$

Usando que $\log(t) = o(\omega(t))$ quando $t \to \infty$, encontramos constante $A_{k_\alpha} > 0$ de modo que $\log N < k_\alpha^{-1}\omega(N) + A_{k_\alpha}$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Por fim, concluímos que

$$\sup_{x\in K} |D^{\alpha+\beta} f(x)| \leq C_\alpha N^{|\beta|+1} e^{-\log N + A_{k_\alpha}} \leq C'_\alpha (C'_\alpha N)^{|\beta|},$$

para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. Deste fato decorre a seguinte proposição.

Proposição 3.3.6. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e ω uma função peso não quaseanalítica. Então, $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ não está em $WF_*(u)$ se, e somente se, existem vizinhança $U \subset \Omega$ de x_0, cone aberto Γ contendo ξ_0 e $v \in \mathcal{E}'_*(\Omega)$ que é igual a u em U e tem transformada de Fourier satisfazendo* (3.7) *ou* (3.8), *no caso em que $* = \{\omega\}$ ou $* = (\omega)$, respectivamente.*

Demonstração. A suficiência é imedita pela própria definição de conjunto $*$-frente de ondas. Supomos que $(x_0, \xi_0) \notin WF_*(u)$. Então, existem vizinhança compacta $K \subset \Omega$ de x_0 e vizinhança cônica Γ de ξ_0 tal que $K \times \Gamma \cap WF_*(u) = \emptyset$. Tomamos $f \in \mathcal{E}_*(\Omega) \cap C_0^\infty(K)$ que é identicamente 1 em vizinhança $U \subset K$ de x_0. Como vimos acima, a sequência $\{\chi_N = f\}$ satisfaz as hipóteses do Lema 3.3.4. Logo, $v = \chi_N u = fu \in \mathcal{E}'_*(\Omega)$ está nas propriedades requeridas. ∎

Proposição 3.3.7. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se ω e σ são funções peso tais que $\omega(t) = O(\sigma(t))$ quando $t \to \infty$, então*

$$WF_{\{\omega\}}(u) \subset WF_{\{\sigma\}}(u) \ \ e \ \ WF_{(\omega)}(u) \subset WF_{(\sigma)}(u).$$

Demonstração. Na Proposição 3.2.3 mostramos que a hipótese $\omega(t) = O(\sigma(t))$ quando t tende ao infinito implica que, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, existem $A > 0$ e $C_\lambda > 0$ satisfazendo

$$\exp\left(\lambda \varphi_\sigma^*\left(\frac{N}{\lambda}\right)\right) \leq C_\lambda \exp\left(\frac{\lambda}{A}\varphi_\omega^*\left(\frac{NA}{\lambda}\right)\right), \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

A desigualdade acima garante as inclusões desejadas. ∎

No próximo corolário, denotamos por $WF_A(u)$ o conjunto frente de ondas analítico de uma distribuição u, ou seja, $WF_A(u) = WF_{\{\omega\}}(u)$ quando $\omega(t) = t$ (vide Proposição 3.2.4).

Corolário 3.3.8. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

(a) As inclusões $WF(u) \subset WF_{\{\omega\}}(u) \subset WF_A(u)$ ocorrem para qualquer função peso ω.

(b) Se $\omega(t) = o(t)$ quando $t \to \infty$, então $WF(u) \subset WF_{\{\omega\}}(u) \subset WF_{(\omega)}(u) \subset WF_A(u)$.

Demonstração. A segunda inclusão do item (a) segue da Proposição 3.3.2, uma vez que $\omega(t) = O(t)$ quando $t \to \infty$, para toda função peso ω.

Com respeito a primeira inclusão de (a), tomamos $(x_0, \xi_0) \notin WF_{\{\omega\}}(u)$. Então, existem vizinhança U de x_0, cone aberto Γ contendo ξ_0 e sequência limitada $\{u_N\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ com $u_N = u$ em U satisfazendo

$$|\xi|^N |\widehat{u}_N(\xi)| \leq C e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)}, \quad \forall \xi \in \Gamma \text{ e } \forall N \in \mathbb{N},$$

para algum $C > 0$ e algum $k \in \mathbb{N}$. Observamos que $C_N = Ce^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)}$ é uma constante que depende apenas de N. Portanto,

$$|\widehat{u}_N(\xi)| \leq \frac{C_N}{(1 + |\xi|)^N}, \quad \forall \xi \in \Gamma.$$

Retornando às notações do Capítulo 2, isto mostra que $\xi_0 \notin \Sigma(u_N)$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Segue do Lema 2.2.3 que $\xi_0 \notin \Sigma(\chi u_N)$, para qualquer $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Escolhemos χ em $C_0^\infty(U)$ com $\chi \equiv 1$ em vizinhança $U' \subset U$ de x_0. Desta forma, $\chi u = \chi u_N$, para todo natural N. Ainda, existe cone aberto $\tilde{\Gamma}$ contendo ξ_0 tal que, para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $A_N > 0$ satisfazendo

$$|\widehat{\chi u}(\xi)| \leq \frac{A_N}{(1 + |\xi|)^N}, \quad \forall \xi \in \tilde{\Gamma},$$

uma vez que $\xi_0 \notin \Sigma(\chi u_N)$. Logo, $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ e isto garante a primeira inclusão do item (a).

Agora, sobre o item (b), a inclusão $WF(u) \subset WF_{\{\omega\}}(u)$ é garantida pelo item (a) e $WF_{\{\omega\}}(u) \subset WF_{(\omega)}$ sempre ocorre. Resta mostrarmos que $WF_{(\omega)}(u) \subset WF_A(u)$.

Como vimos na Proposição 3.2.3, o fato que $\omega(t) = o(t)$ quando $t \to \infty$ implica que, fixados $k_0 \in \mathbb{N}$ e $C > 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$, existem $B_k > 0$ e $C_k > 0$ de modo que

$$C \exp\Big(k_0 \varphi_0^*\Big(Nk_0\Big)\Big) \leq C_k \exp\bigg(kB_k \varphi^*\Big(\frac{N}{kB_k}\Big)\bigg), \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

em que φ^* está associada a ω e φ_0^* está associada a $\omega_0(t) = t$. Este fato é suficiente para deduzirmos a inclusão $WF_{(\omega)}(u) \subset WF_A(u)$. ∎

Proposição 3.3.9. *Se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e S um cone fechado em $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, então existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ com $WF(u) = WF_{\{\omega\}}(u) = S$ (respectivamente $WF(u) = WF_{(\omega)}(u) = S$), para toda função peso ω (respectivamente para toda ω com $\omega(t) = o(t)$ quando $t \to \infty$).*

Demonstração. Do Teorema 8.4.14 de [7] sabemos que existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$WF(u) = WF_A(u) = S.$$

O resultado segue do Corolário 3.3.8. ∎

Proposição 3.3.10. *Sejam Ω aberto de $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e ω função peso.*

(a) Se $a \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$, então $WF_{\{\omega\}}(au) \subset WF_{\{\omega\}}(u)$. Se $a \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ e $\omega(t) = o(t)$ quando $t \to \infty$, então $WF_{(\omega)}(au) \subset WF_{(\omega)}(u)$.

(b) A inclusão $WF_*(\partial_{x_j} u) \subset WF_*(u)$ ocorre para todo $j = 1, \dots, n$.

Demonstração. Supomos que $(x_0, \xi_0) \notin WF_*(u)$. Então, existe vizinhança compacta K de x_0 contida em Ω e cone fechado Γ contendo ξ_0 de modo que $K \times \Gamma \cap WF_*(u) = \emptyset$.

Seja $\{\chi_N\} \subset C_0^\infty(K)$ uma sequência que vale 1 em vizinhança $U \subset K$ de x_0 e satisfaz (3.11). Como $a \in \mathcal{E}_*(\Omega)$, temos que $\{a\chi_N\} \subset C_0^\infty(K)$ também satisfaz (3.11). Portanto, segue do Lema 3.3.4 que a sequência $\{v_N = a\chi_N u\}$ realiza (3.7), se $* = \{\omega\}$, ou (3.8), no caso em que $* = (\omega)$. Logo, a sequência limitada $\{v_N\}$ em $\mathcal{E}'(\Omega)$, que é igual a au em U, garante que $(x_0, \xi_0) \notin WF_*(au)$. Desta forma, a inclusão $WF_*(au) \subset WF_*(u)$ está provada.

Quanto ao item (b), basta observarmos que se $\{u_N\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ realiza a desigualdade (3.7), então

$$\left| \widehat{\frac{\partial u_{N+1}}{\partial x_j}}(\xi) \right| = |\xi_j \widehat{u}_{N+1}(\xi)| \leq C|\xi| e^{\frac{1}{k}\varphi^*((N+1)k)} |\xi|^{-N-1}.$$

Da convexidade de φ^* obtemos $\varphi^*((N+1)k) \leq \frac{1}{2}(\varphi^*(2Nk) + \varphi^*(2k))$ e, portanto,

$$\left| \widehat{\frac{\partial u_{N+1}}{\partial x_j}}(\xi) \right| \leq C|\xi|^{-N} C_k e^{\frac{1}{2k}\varphi^*(2Nk)}.$$

Sendo assim, a sequência $\{\partial_{x_j} u_{N+1}\}$ satisfaz (3.7). Donde, obtemos que $WF_{\{\omega\}}(\partial_{x_j} u)$ está contido em $WF_{\{\omega\}}(u)$. A inclusão $WF_{(\omega)}(\partial_{x_j} u) \subset WF_\omega(u)$ é inteiramente análoga. ■

Como consequência imedita desta última proposição, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.3.11. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, ω uma função peso e*

$$P = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

um operador diferencial parcial linear com coeficientes em $\mathcal{E}_*(\Omega)$. Então,

(a) $WF_{\{\omega\}}(Pu) \subset WF_{\{\omega\}}(u)$, para qualquer $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

(b) $WF_{(\omega)}(Pu) \subset WF_{(\omega)}(u)$, sempre que $\omega(t) = o(t)$ quando $t \to \infty$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Capítulo 4

Os casos Beurling e Roumieu

Dedicamos este capítulo à demonstração do nosso principal resultado, o qual é uma releitura do Teorema 2.2.1 no ambiente da classe de funções ultradiferenciáveis tipo Beurling e tipo Roumieu. Mais precisamente, mostraremos a inclusão

$$WF_*(u) \subset WF_*(Pu) \cup \operatorname{Char} P,$$

em que $*$ denota (ω) ou $\{\omega\}$. Neste caso, P é um operador diferencial parcial linear com coeficientes em uma certa classe de funções ultradiferenciáveis. Todos os resultados aqui apresentados foram baseados na referência [1].

4.1 O caso Beurling

Objetivamos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 4.1.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, σ e ω funções peso tais que σ satisfaz* (3.1) *e $\omega(t) = o(\sigma(t))$ quando $t \to \infty$. Seja*

$$P \doteq P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

um operador diferencial parcial linear com coeficientes em $\mathcal{E}_{\{\sigma\}}(\Omega)$. Então,

$$WF_{(\omega)}(u) \subset WF_{(\omega)}(Pu) \cup \operatorname{Char}(P),$$

para qualquer distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Seguiremos os mesmos passos da demonstração do Teorema 2.2.1, o que demandará algumas adaptações. Posto isto, apresentamos dois lemas que nos auxiliarão neste propósito.

Antes, afim de evitarmos confusões, fixamos as notações:

$$\varphi_\sigma(t) = \sigma(e^t) \quad \text{e} \quad \varphi_\omega(t) = \omega(e^t).$$

Lema 4.1.2. *Sejam $K \subset \Omega$ compacto, $\{\chi_N\} \subset C_0^\infty(K)$ satisfazendo* (3.11) *e σ uma função peso com a propriedade* (3.1). *Se $a_1, \dots, a_j$ são funções em $\mathcal{E}_{\{\sigma\}}(\Omega)$ tais que*

$$\sup_{x\in K} |D^\alpha a_s(x)| \leq C e^{\frac{1}{h}\varphi_\sigma^*(h|\alpha|)}, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \ e \ \forall s = 1, \dots, j,$$

para algum $C > 0$ e algum natural $h \in \mathbb{N}$. Então, existe $C_1 > 0$ que depende somente de C e da sequência $\{\chi_N\}$ satisfazendo

$$\sum_{k_1+\dots k_{j+1}=j+1} \sum_{|\alpha_i|=k_i} |D^{\alpha_1} a_1(x)| \dots |D^{\alpha_j} a_j(x)||D^{\alpha_{j+1}}\chi_N(x)| \leq C_1^{j+2} \exp\left(\frac{j+1}{hN}\varphi_\sigma^*(hN)\right), \tag{4.1}$$

para todo $x \in K$ e todo $N \geq j+1$.

Demonstração. Como $\sigma(t) = O(t)$ quando $t \to \infty$, existe $A \geq 0$ tal que $\sigma(t) \leq At + A$, para todo $t \geq 0$. Assim, para qualquer $N \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_\sigma^*(N) = \sup_{t\geq 0}\{Nt - \varphi_\sigma(t)\} \geq N\log N - \varphi_\sigma(\log N) \geq N \log N - AN - A.$$

Desta forma, $N^N \leq C_2^N e^{\varphi_\sigma^*(N)}$ para algum $C_2 > 0$ e qualquer $N \in \mathbb{N}$. Visto que $\{\chi_N\}$ satisfaz (3.11), para $\alpha = 0$ e $|\beta| \leq N$, temos que

$$|D^\beta \chi_N(x)| \leq C_0(C_0 N)^{|\beta|} \leq C_0'\big(e^{\frac{1}{N}\varphi_\sigma^*(N)}\big)^{|\beta|}, \ \ \forall x \in K.$$

Por outro lado, segue da hipótese que

$$\sup_{x\in K} |D^{\alpha_m} a_m(x)| \leq C e^{\frac{1}{h}\varphi_\sigma^*(hk_m)},$$

para todo $m = 1, \dots, j$ e $|\alpha_m| = k_m$. Agora, o número de multi-índices α_m tais que $|\alpha_m| = k_m$ é dado por $\binom{k_m+n-1}{n-1}$. Denotamos

$$C_{k_1,\dots,k_{j+1}} = \binom{k_1+n-1}{n-1} \cdot \binom{k_2+n-1}{n-1} \cdots \binom{k_{j+1}+n-1}{n-1},$$

o total de $(j+1)$-uplas $(\alpha_1, \dots, \alpha_{j+1})$ tais que $|\alpha_m| = k_m$, para todo $m = 1, \dots, j$.

Logo, denotando por A a soma do lado esquerdo de (4.1), podemos estimar

$$A \leq \sum_{k_1+\dots k_{j+1}=j+1} C_{k_1,\dots,k_{j+1}} C^j e^{\frac{1}{h}\varphi_\sigma^*(hk_1)} \dots e^{\frac{1}{h}\varphi_\sigma^*(hk_j)} C_0' \big(C_0' e^{\frac{1}{N}\varphi_\sigma^*(N)}\big)^{k_{j+1}},$$

pois $k_{j+1} \leq j+1 \leq N$. Escrevemos a expressão acima da seguinte maneira

$$\sum_{k_1+\ldots+k_{j+1}=j+1} C_{k_1,\ldots,k_{j+1}} k_1!\ldots k_j! C^j C_0'^{k_{j+1}+1} \left(\frac{e^{\frac{1}{h}\left(\varphi_\sigma^*(hk_1)+\ldots+\varphi_\sigma^*(hk_j)\right)}}{k_1!\ldots k_j!} \right) e^{\frac{k_{j+1}}{N}\varphi_\sigma^*(N)}.$$

Afirmamos que

$$\frac{e^{\frac{1}{h}\left(\varphi_\sigma^*(hk_1)+\ldots+\varphi_\sigma^*(hk_j)\right)}}{k_1!\ldots k_j!} \leq \frac{e^{\frac{1}{h}\varphi_\sigma^*(h(j+1-k_{j+1}))}}{(j+1-k_{j+1})!}. \tag{4.2}$$

Ora, notemos que $\varphi_\sigma^*(hk_1)+\varphi_\sigma^*(hk_2) = \sup_{t\geq 0}\{ht(k_1+k_2) - 2\varphi_\sigma(t)\}$. Usando que σ é subaditiva (vide Proposição 3.1.5), obtemos que $-2\varphi_\sigma(t) \leq -\sigma(2e^t) = -\varphi_\sigma(\log 2 + t)$, para todo $t \geq 0$. Então,

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma^*(hk_1)+\varphi_\sigma^*(hk_2) &\leq \sup_{t\geq 0}\{h(k_1+k_2)t - \varphi_\sigma(\log 2 + t)\} \\ &= \sup_{s\geq \log 2}\{h(k_1+k_2)(s-\log 2) - \varphi_\sigma(s)\} \\ &= h\log 2^{-(k_1+k_2)} + \varphi_\sigma^*(h(k_1+k_2)). \end{aligned}$$

De uma forma geral,

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma^*(hk_1)+\ldots+\varphi_\sigma^*(hk_j) &\leq h\log\left(j^{-(k_1+\ldots+k_j)}\right) + \varphi_\sigma^*\big(h(k_1+\ldots+k_j)\big) \\ &\leq h\log 2^{-(k_1+\ldots+k_j)} + \varphi_\sigma^*\big(h(j+1-k_{j+1})\big), \end{aligned}$$

o que implica em

$$\frac{e^{\frac{1}{h}\left(\varphi_\sigma^*(hk_1)+\ldots+\varphi_\sigma^*(hk_j)\right)}}{k_1!\ldots k_j!} \leq \frac{2^{-(k_1+\ldots+k_j)}}{k_1!\ldots k_j!} e^{\frac{1}{h}\varphi_\sigma^*(h(j+1-k_{j+1}))}.$$

Recordemos que $(l+m)! \leq 2^{l+m} l! m!$, para quaisquer $l, m \in \mathbb{N}$. Assim,

$$(k_1+\ldots+k_j)! \leq 2^{k_1+\ldots+k_j} k_1!\ldots k_j!$$

e, portanto, a desigualdade em (4.2) está demonstrada.

Observamos que, para $k_1+\ldots+k_{j+1} = j+1$,

$$\frac{k_1!\ldots k_j!}{(j+1-k_{j+1})!} = \frac{k_1!\ldots k_{j+1}!(j+1)!}{(j+1-k_{j+1})!k_{j+1}!(j+1)!} = \binom{j+1}{k_{j+1}} \frac{k_1!\ldots k_{j+1}!}{(j+1)!} \leq \frac{2^{j+1}k_1!\ldots k_{j+1}!}{(j+1)!}.$$

Deste modo, por (4.2),

$$
\begin{aligned}
A &\leq \sum_{k_1+\ldots+k_{j+1}=j+1} C_{k_1,\ldots,k_{j+1}} k_1!\ldots k_j! C^j (C_0')^{k_{j+1}+1} \left(\frac{e^{\frac{1}{h}\left(\varphi_\sigma^*(hk_1)+\ldots+\varphi_\sigma^*(hk_j)\right)}}{k_1!\ldots k_j!} \right) e^{\frac{k_{j+1}}{N}\varphi_\sigma^*(N)} \\
&\leq \sum_{k_1+\ldots+k_{j+1}=j+1} C_{k_1,\ldots,k_{j+1}} k_1!\ldots k_j! C^j (C_0')^{k_{j+1}+1} \left(\frac{e^{\frac{1}{h}\varphi_\sigma^*(h(j+1-k_{j+1}))}}{(j+1-k_{j+1})!} \right) e^{\frac{k_{j+1}}{N}\varphi_\sigma^*(N)} \\
&\leq \sum_{k_1+\ldots+k_{j+1}=j+1} C_2^{j+2} \frac{2^{j+1}}{(j+1)!} k_1!\ldots k_{j+1}! C_{k_1,\ldots,k_{j+1}} \left(e^{\frac{1}{h}\varphi_\sigma^*(h(j+1-k_{j+1}))} \right) e^{\frac{k_{j+1}}{N}\varphi_\sigma^*(N)}.
\end{aligned}
$$

Como $\frac{\varphi_\sigma^*(s)}{s}$ é não decrescente, $h(j+1-k_{j+1}) \leq hN$ e $N \leq Nh$, obtemos que

$$
A \leq \sum_{k_1+\ldots+k_{j+1}=j+1} C_2^{j+2} \frac{2^{j+1}}{(j+1)!} k_1!\ldots k_{j+1}! C_{k_1,\ldots,k_{j+1}} e^{\frac{j+1}{hN}\varphi_\sigma^*(hN)}.
$$

Visto que $C_{k_1,\ldots,k_{j+1}} \leq 2^{k_1+\ldots k_{j+1}+(j+1)(n-1)} = 2^{n(j+1)}$, temos

$$
\sum_{k_1+\ldots+k_{j+1}=j+1} k_1!\ldots k_{j+1}! C_{k_1,\ldots,k_{j+1}} \leq C_3 2^{n(j+1)}(j+1)!,
$$

pois $k_1!\ldots k_{j+1}! \leq (k_1+\ldots+k_{j+1})! = (j+1)!$ e a soma acima é finita. Por fim,

$$
A \leq C_2^{j+2} \frac{2^{j+1}}{(j+1)!} e^{\frac{j+1}{hN}\varphi_\sigma^*(hN)} C_3 2^{n(j+1)}(j+1)! \leq C_1^{j+2} \exp\left(\frac{j+1}{hN}\varphi_\sigma^*(hN) \right),
$$

ou seja, a desigualdade (4.1) é satisfeita. ∎

Lema 4.1.3. *Sejam $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, ω e σ funções peso com $\omega(t) = o(\sigma(t))$ quando t tende ao infinito. Considere $K \subset \Omega$ um conjunto compacto e $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ um cone fechado tais que $WF_{(\omega)}(f) \cap (K \times \Gamma) = \emptyset$. Além disso, suponha que $\{\vartheta_N\} \subset C_0^\infty(K)$ realiza, para algum $B_0 > 0$ e algum $h \in \mathbb{N}$,*

$$
|D^\beta \vartheta_N(x)| \leq B_0^{N+1} \exp\left(\frac{|\beta|}{2hN}\varphi_\sigma^*(2hN) \right), \quad \forall |\beta| \leq N, \quad \forall \xi \in \Gamma \text{ com } |\xi| \geq N. \tag{4.3}
$$

Nestas condições, existe $C_2 > 0$ de modo que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k > 0$ satisfazendo

$$
\left| \widehat{f\vartheta_N}(\xi) \right| \leq C_k C_2^N \exp\left(k\varphi_\omega^*\Big(\frac{N-M'-n-1}{k} \Big) \right) |\xi|^{-N+M'+n+1},
$$

para todo $\xi \in \Gamma$ com $|\xi| \geq N$ e $N > M'+n$, em que M' é a ordem de f em vizinhança de K.

Demonstração. Pelo Lema 3.3.4, encontramos sequência $\{f_N\} \subset (\mathcal{E}')^{M'}(\Omega)$ com $f_N = f$ em vizinhança de K e garantimos a existência de $D > 0$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe

$D_k > 0$ satisfazendo

$$|\widehat{f}_N(\eta)| \leq |\eta|^{-N} D_k D^N e^{k\varphi^*_\omega\left(\frac{N}{k}\right)}, \quad \forall \eta \in \Gamma \text{ e } \forall N \in \mathbb{N}.$$

Então, $\vartheta_N f = \vartheta_N f_{N'}$, em que N' será escolhido de forma conveniente. Assim,

$$|\widehat{\vartheta_N f}(\xi)| \leq |\widehat{\vartheta_N f_{N'}}(\xi)| = (2\pi)^n |\widehat{\vartheta_N} * \widehat{f_{N'}}(\xi)|$$

Como $\{f_N\} \subset \mathcal{E}'^{M'}(\Omega)$ é limitada, temos que

$$|\widehat{f}_N(\eta)| \leq C(1+|\eta|)^{M'}, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n,$$

para alguma constante $C > 0$.

Prosseguimos como na demonstração do Lema 3.3.4 e escrevemos

$$\begin{aligned}
|\widehat{\vartheta_N} * \widehat{f}_{N'}(\eta)| &\leq \int\limits_{|\eta|\leq c|\xi|} |\widehat{\vartheta}_N(\eta)||\widehat{f}_{N'}(\xi-\eta)|d\eta + \int\limits_{|\eta|>c|\xi|} |\widehat{\vartheta}_N(\eta)||\widehat{f}_{N'}(\xi-\eta)|d\eta \\
&\leq \|\widehat{\vartheta}_N\|_1 \sup_{|\eta|\leq c|\xi|} |\widehat{f}_{N'}(\xi-\eta)| + C \int\limits_{|\eta|>C|\xi|} |\widehat{\vartheta}_N(\eta)|(1+|\xi-\eta|)^{M'} d\eta.
\end{aligned}$$

Análogo ao que fizemos antes, dado um cone fechado $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$, a constante $0 < c < 1$ é escolhida de tal forma que se $\xi \in \tilde{\Gamma}$ e $|\xi - \eta| \leq c|\xi|$, então $\eta \in \tilde{\Gamma}$. Assim,

$$\|\widehat{\vartheta}_N\|_1 \sup_{|\eta|\leq c|\xi|} |\widehat{f}_{N'}(\xi-\eta)| \leq \|\widehat{\vartheta}_N\|_1 \sup_{|\xi-\eta|\leq c|\xi|} |\widehat{f}_{N'}(\eta)| \leq \|\widehat{\vartheta}_N\|_1 D_k D^{N'} e^{k\varphi^*_\omega\left(\frac{N'}{k}\right)} (1+|\eta|)^{-N'},$$

para todo $\eta \in \tilde{\Gamma}$. Por outro lado, segue da propriedade (4.3) que, para todo $\eta \in \Gamma$ com $|\eta| \geq N$,

$$|\eta|^N |\widehat{\vartheta}_N(\eta)| \leq \sqrt{n} |\eta^\beta \widehat{\vartheta}(\eta)| = \sqrt{n} |\widehat{D^\beta \vartheta}(\eta)| \leq (\sqrt{n}) m(K) B_0^{N+1} \exp\left(\frac{1}{2h}\varphi^*_\sigma(2hN)\right),$$

em que $|\beta| = N$. Desta forma,

$$C \int\limits_{|\eta|>c|\xi|} |\widehat{\vartheta}_N(\eta)|(1+|\xi-\eta|)^{M'} d\eta \leq C_0^{N+1} \exp\left(\frac{1}{2h}\varphi^*_\sigma(2hN)\right) \int\limits_{|\eta|>c|\xi|} (1+|\eta)^{M'-N} d\eta.$$

Agora, escolhemos $N' = N - M' - n - 1$ e obtemos que

$$\int\limits_{|\eta|>c|\xi|} (1+|\eta)^{M'-N} d\eta \leq \int\limits_{|\eta|>c|\xi|} \frac{(1+|\eta|)^{-N'}}{(1+|\eta|)^{n+1}} d\eta \leq D_1^{N+1}(1+|\xi|)^{-N'}.$$

Com isto, concluímos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $D'_k > 0$ tal que

$$|\xi|^{N'}|\widehat{\vartheta_N f}(\xi)| \leq D'_k (D')^N \left(e^{k\varphi^*_\omega\left(\frac{N'}{k}\right)} + e^{\frac{1}{2h}\varphi^*_\sigma(2hN)} \right), \tag{4.4}$$

para qualquer $\eta \in \tilde{\Gamma}$ com $|\xi| > N$. Da convexidade de φ^*_σ, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h}\varphi^*_\sigma(2hN) &\leq \frac{1}{4h}\varphi^*_\sigma\big(4h(N - M' - n - 1)\big) + \frac{1}{4h}\varphi^*_\sigma\big(4h(M' + n + 1)\big) \\ &= \frac{1}{4h}\varphi^*_\sigma(4hN') + C_1. \end{aligned}$$

Sabemos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $D''_k > 0$ tal que

$$\frac{1}{4h}\varphi^*_\sigma(4hN') \leq D''_k + k\varphi^*_\omega\left(\frac{N'}{k}\right), \quad \forall N' \in \mathbb{N},$$

uma vez que $\omega(t) = o(\sigma(t))$ quando $t \to \infty$. Em consequência disto, segue de (4.4) que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k > 0$ satisfazendo

$$|\widehat{\vartheta_N f}(\xi)| \leq C_k C_2^N \exp\left(k\varphi^*_\omega\Big(\frac{N - M' - n - 1}{k}\Big)\right) |\xi|^{-N+M'+n+1}, \quad \forall \xi \in \tilde{\Gamma} \text{ com } |\xi| \geq N,$$

para alguma constante $C_2 > 0$. Visto que esta última desigualdade ocorre para qualquer cone fechado $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$, concluímos a prova. ■

Enfim, partimos para a demonstração do nosso principal objetivo.

Demonstração do Teorema 4.1.1. Tomamos $(x_0, \xi_0) \notin WF_{(\omega)}(Pu) \cup \mathrm{Char}(P)$. Se $\xi_0 = 0$ é imediato que $(x_0, \xi_0) \notin WF_{(\omega)}(u)$, então supomos $\xi_0 \neq 0$. Como (x_0, ξ_0) não está em $\mathrm{Char}\, P$, segue que existem vizinhanças $K \subset\subset \Omega$ de x_0 e V de ξ_0 tais que $P_m(x, \xi) \neq 0$, para todo $(x, \xi) \in K \times V$. Definimos $\Gamma = \{\lambda\xi;\ \xi \in V \text{ e } \lambda > 0\}$, temos que

$$P_m(x, \xi) \neq 0, \quad \forall (x, \xi) \in K \times \Gamma,$$

uma vez que $P_m(x, \lambda\xi) = \lambda^m P_m(x, \xi)$. Por outro lado, usando que $(x_0, \xi) \notin WF_{(\omega)}(Pu)$, podemos assumir $K \times \Gamma \cap WF_{(\omega)}(Pu) = \emptyset$ (diminuindo K e Γ se necessário).

Escolhemos sequência $\{\chi_N\} \subset C_0^\infty(K)$ que realiza (3.11) e tal que cada χ_N é identicamente 1 em vizinhança $U \subset K$ de x_0. Com esta escolha, temos que a sequência $\{u_N = \chi_{2N} u\}$ é limitada em $\mathcal{E}'(\Omega)$ e $u_N = u$ em U, para todo $N \in \mathbb{N}$. O teorema estará provado se mostrarmos que existe $C > 0$ de modo que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k > 0$ satisfazendo

$$|\xi|^N |\widehat{u}_N(\xi)| \leq C_k C^N e^{k\varphi^*\left(\frac{N}{k}\right)}, \quad \forall \xi \in \Gamma \text{ com } |\xi| \geq N \text{ e } \forall N \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

De fato, para $|\xi| \leq N$ argumentamos da seguinte maneira: Utilizando o Teorema de

Paley-Wiener e o Corolário 1.4.5, obtemos

$$|\widehat{u}_N(\xi)| \leq C_1(1+|\xi|)^M, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

para algum $C_1 > 0$ e algum $M \in \mathbb{N}$. Então, para $N \geq M$ segue que

$$|\widehat{u}_N(\xi)| \leq C_1(1+|\xi|)^M \leq C_1(1+N)^N \leq C_1(2N)^N, \quad \forall |\xi| \leq N.$$

Sendo $\omega(t) = o(t)$ quando $t \to \infty$, decorre da Proposição 3.2.3 que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $A_k > 0$ de modo que

$$N \log N \leq N + k\varphi_\omega^*\left(\frac{N}{k}\right) + A_k,$$

para qualquer $N \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|\widehat{u}_N(\xi)| \leq C_1 e^{A_k}(2e)^N e^{k\varphi_\omega^*\left(\frac{N}{k}\right)}, \quad \forall N \geq M.$$

Desta forma, basta provarmos (4.5) para que tenhamos

$$|\widehat{u}_N(\xi)| \leq C_k C^N e^{k\varphi_\omega^*\left(\frac{N}{k}\right)}, \quad \forall \xi \in \Gamma \text{ e } \forall N \in \mathbb{N}.$$

Em vista disto, seguirá do Lema 3.3.4 que (x_0, ξ_0) não está em $WF_{(\omega)}(u)$. Portanto, nosso objetivo é mostrar a desigualdade em (4.5).

Fixado $\xi \in \Gamma$, se $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ é tal que ${}^tP\psi = \chi_{2N}e^{-ix\cdot\xi}$, então

$$\widehat{u}_N(\xi) = \left\langle u_N, e^{-ix\cdot\xi}\right\rangle = \left\langle u, \chi_{2N}e^{-ix\cdot\xi}\right\rangle = \left\langle u, {}^tP\psi\right\rangle = \left\langle Pu, \psi\right\rangle.$$

Prosseguimos para encontrar $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ solução de

$${}^tP\psi = \chi_{2N}e^{-ix\cdot\xi}. \tag{4.6}$$

Para tanto, escrevemos $\psi(x) = \left(e^{-ix\cdot\xi}w(x)\right)/P_m(x,\xi)$, para todo $x \in K$. Seguindo os mesmos passos do Teorema 2.2.1, se ψ satisfaz (4.6), então w deve realizar

$$w - Rw = \chi_{2N}. \tag{4.7}$$

Este operador diferencial R é da forma $R = R_1 + \ldots + R_m$, em que cada $R_j|\xi|^j$ é um operador diferencial com coeficientes em $\mathcal{E}_{\{\sigma\}}(\Omega)$ de ordem menor ou igual a j e homogêneo de grau zero com respeito a variável ξ.

Uma solução formal para (4.7) é dada por $w = \sum_{j=0}^{\infty} R^j\chi_{2N}$, porém não sabemos se esta série converge. Denotamos por R_0 o operador identidade e definimos

$$w_N = \sum_{k=1}^{N-m} \left(\sum_{j_1+\ldots+j_k \leq N-m} R_{j_1} \cdot R_{j_2} \cdot \ldots \cdot R_{j_k} \chi_{2N} \right).$$

Notemos que

$$w_N - Rw_N = \chi_{2N} - \sum_{k=2}^{N-m} \left(\sum_{j_2+\ldots j_k \leq N-m < j_1+\ldots j_k} R_{j_1} \cdot R_{j_2} \cdot \ldots \cdot R_{j_k} \chi_{2N} \right) = \chi_{2N} - r_N.$$

Com efeito, se $j_2 + \ldots j_k \leq N - m - j_1$, temos que o termo $R_{j_1} \cdot R_{j_2} \cdot \ldots \cdot R_{j_k} \chi_{2N}$ está na expressão de w_N e Rw_N e, portanto, é eliminado quando fazemos $w_N - Rw_N$. Logo, em $w_N - Rw_N$ só restam os termos em que $j_2, \ldots, j_k \leq N - m$ e

$$j_2 + \ldots + j_k > N - m - j_1, \text{ isto é, } j_1 + j_2 + \ldots + j_k > N - m.$$

Com os mesmos cálculos do Teorema 2.2.1, obtemos que

$$e^{ix\cdot\xi}\, {}^tP \left(\frac{e^{-ix\cdot\xi} w_N(x)}{P_m(x,\xi)} \right) = w_N(x,\xi) - Rw_N(x,\xi) = \chi_{2N} - r_N(x,\xi).$$

Portanto, $\widehat{\chi_{2N} u}(\xi) = \langle u, \chi_{2N} e^{-ix\cdot\xi} \rangle = \left\langle u, {}^tP \left(\frac{e^{-ix\cdot\xi} w_N(x)}{P_m(x,\xi)} \right) \right\rangle + \langle u, e^{-ix\cdot\xi} r_N(x,\xi) \rangle$.

Doravante, nosso intuito é estimar as duas parcelas do lado direito de

$$|\widehat{\chi_{2N} u}(\xi)| \leq \left| \left\langle u, {}^tP \left(\frac{e^{-ix\cdot\xi} w_N(x)}{P_m(x,\xi)} \right) \right\rangle \right| + \left| \langle u, e^{-ix\cdot\xi} r_N(x,\xi) \rangle \right|. \tag{4.8}$$

Com respeito ao segundo membro, observamos que $\operatorname{supp}\big(r_N(\cdot,\xi)\big) \subset K$. Denotando por M a ordem da distribuição u em vizinhança de K, temos

$$\left| \langle u, e^{-ix\cdot\xi} r_N(x,\xi) \rangle \right| \leq B \sum_{|\alpha| \leq M} (1 + |\xi|)^{M-|\alpha|} \sup_{x\in K} |D_x^\alpha (r_N(x,\xi))|. \tag{4.9}$$

Notemos que $D_x^\alpha(r_N(x,\xi))$ é uma soma de termos da forma $D_x^\alpha\big(R_{j_1} \cdot R_{j_2} \cdot \ldots \cdot R_{j_k} \chi_{2N}(x)\big)$. Para conseguirmos uma boa estimativa de $D_x^\alpha(r_N(x,\xi))$, usaremos o seguinte lema:

Lema 4.1.4. *Existem constantes $h \in \mathbb{N}$ e $C' > 0$ tais que, para cada $j = j_1 + \ldots + j_k$ e $j + |\beta| \leq 2N$,*

$$\sup_{x\in K} \left| D_x^\beta \big(R_{j_1} \cdot \ldots \cdot R_{j_k} \chi_{2N}\big)(x) \right| \leq (C')^{N+1} \left(\exp\left(\frac{j + |\beta|}{2hN} \varphi_\sigma^*(2hN) \right) \right) |\xi|^{-j},$$

para todo $\xi \in \Gamma$.

Demonstração. Como $j = j_1 + \ldots + j_k$, temos que

$$|\xi|^j \left| D_x^\beta \big(R_{j_1} \cdot \ldots \cdot R_{j_k} \chi_{2N} \big)(x) \right| = \left| D_x^\beta \big(|\xi|^{j_1} R_{j_1} \cdot |\xi|^{j_2} R_{j_2} \cdot \ldots \cdot |\xi|^{j_k} R_{j_k} \chi_{2N} \big)(x) \right|.$$

Pela homogeneidade de $|\xi|^{j_i} R_{j_i}$, basta provarmos o caso em que $|\xi| = 1$ o qual é consequência do Lema 4.1.2. Com efeito, sendo $P_m(x,\xi) \neq 0$ para todo $(x,\xi) \in K \times \Gamma$, podemos limitar $|P_m(x,\xi)|^{-1}$ em K, para cada $\xi \in \Gamma$ fixo, e concluir que $\frac{a_\alpha(x)}{P_m(x,\xi)} \in \mathcal{E}_{\{\sigma\}}(K)$, para qualquer $|\alpha| \leq m$. Denotamos

$$\{b_1, \ldots, b_m\} = \left\{ \frac{a_\alpha(x)}{P_m(x,\xi)}; \ \ |\alpha| \leq m \right\}.$$

Uma vez que $\{b_1, \ldots, b_m\}$ é uma família finita em $\mathcal{E}_{\{\sigma\}}(K)$, segue que existem constantes $C > 1$ e $h \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha b_l(x)| \leq C \exp\left(\frac{1}{h} \varphi_\sigma^*(h|\alpha|) \right), \ \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \text{ e } l = 1, \ldots, m.$$

Notemos que $R_{j_k} \chi_{2N}$ é, a menos de constantes, uma soma finita de termos da seguinte forma

$$\sum_{r_1 + r_2 = p} \left(\sum_{|\alpha_i| = r_i} D^{\alpha_1} b_{l_1} D^{\alpha_2} \chi_{2N} \right), \text{ com } p \leq j_k.$$

Quando aplicamos $R_{j_{k-1}}$ em $R_{j_k} \chi_{2N}$, usando a Regra de Leibniz, obtemos uma soma finita de parcelas dadas por

$$\sum_{r_1 + r_2 + r_3 = p} \left(\sum_{|\alpha_i| = r_i} D^{\alpha_1} b_{l_1} D^{\alpha_2} b_{l_2} D^{\alpha_3} \chi_{2N} \right), \text{ com } p \leq j_{k-1} + j_k.$$

De um modo geral, $R_{j_1} \cdot \ldots \cdot R_{j_k} \chi_{2N}$ possui termos, a menos de constantes, dados por

$$\sum_{r_1 + \ldots + r_{k+1} = p} \left(\sum_{|\alpha_i| = r_i} D^{\alpha_1} b_{l_1} D^{\alpha_2} b_{l_2} \ldots D^{\alpha_{k+1}} \chi_{2N} \right), \text{ com } p \leq j_1 + \ldots + j_k = j.$$

Logo, a expressão $D^\beta \big(R_{j_1} \cdot \ldots \cdot R_{j_k} \chi_{2N} \big)$ é, a menos de constantes, uma soma finita constituída por parcelas do seguinte tipo

$$\sum_{r_1 + \ldots + r_{k+1} = p} \left(\sum_{|\alpha_i| = r_i} D^{\alpha_1} b_{l_1} \ldots D^{\alpha_k} b_{l_k} D^{\alpha_{k+1}} \chi_{2N}, \right) \text{ com } p \leq j + |\beta|. \tag{4.10}$$

Agora, para $r_1 + \ldots + r_{k+1} = p$, definimos $r_{k+2} = \ldots = r_p = 0$, $b_{l_{k+1}} = \ldots = b_{l_{p-1}} = 1$ e

$$\gamma_j = \begin{cases} \alpha_j, & j \in \{1, \ldots, k\}; \\ 0, & j \in \{k+1, \ldots, p-1\}; \\ \alpha_{k+1}, & j = p. \end{cases}$$

Donde, a expressão em (4.10) pode ser escrita como

$$\sum_{r_1+\ldots+r_p=p} \left(\sum_{|\gamma_i|=r_i} D^{\gamma_1} b_{l_1} \ldots D^{\gamma_{p-1}} b_{l_{p-1}} D^{\gamma_p} \chi_{2N} \right).$$

Logo, segue do Lema 4.1.2 que existe $C_1 > 1$ tal que, para quaisquer $j + |\beta| \leq 2N$,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} \left| D^\beta \big(R_{j_1} \cdot \ldots \cdot R_{j_k} \chi_{2N} \big)(x) \right| &\leq \sum_{p=1}^{j+|\beta|} C_1^{p+1} \exp\left(\frac{p}{h2N} \varphi_\sigma^*(2hN) \right) \\ &\leq (j+|\beta|) C_1^{1+j+|\beta|} \exp\left(\frac{j+|\beta|}{2hN} \varphi_\sigma^*(2hN) \right) \\ &\leq (4C_1^2)^N \exp\left(\frac{j+|\beta|}{2hN} \varphi_\sigma^*(2hN) \right), \end{aligned}$$

o que finaliza a prova do Lema 4.1.4. ■

Retornando à desigualdade (4.9), vejamos quantos termos possui $D_x^\alpha r_N(x,\xi)$. Para cada $k = 2, \ldots, m$ fixo, o número de possíveis escolhas de $j_2 + \ldots + j_k \leq N - m$ é dado por $\binom{N-m+k-1}{N-m}$. Destas escolhas, para cada $j_1 = 1, \ldots, N-m$, devemos eliminar aquelas que realizam

$$j_1 + \ldots + j_k \leq N - m, \text{ isto é, } j_2, \ldots, j_k \leq N - m - j_1.$$

Logo, para cada k fixo, temos um total de

$$\sum_{j_1=1}^{m} \binom{N-m+k-1}{N-m} - \binom{N-m-j_1+k-1}{N-m-j_1}$$

possíveis escolhas para $j_1, \ldots, j_k$ satisfazendo $j_2 + \ldots + j_k \leq N - m < j_1 + \ldots + j_k$. Assim, $D_x^\alpha r_N(x,\xi)$ possui no máximo 2^{3N} termos, uma vez que

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{N=m} \left(\sum_{j_1=1}^{m} \binom{N-m+k-1}{N-m} - \binom{N-m-j_1+k-1}{N-m-j_1} \right) &\leq \sum_{k=2}^{N-m} m \binom{N-m+k-1}{N-m} \\ &\leq \sum_{k=2}^{N-m} 2^m 2^{N-m+k-1} \\ &\leq (N-m) 2^{2N-m-1}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 4.1.4, para todo $|\alpha| + j \leq 2N$ segue que

$$|D_x^\alpha r_N(x,\xi)| \leq (2^3C')^{N+1} \exp\left(\frac{N+|\alpha|}{2hN}\varphi_\sigma^*(2hN)\right)(1+|\xi|)^{-N+m}. \tag{4.11}$$

De fato, notemos que $j_2 + \ldots j_k \leq N - m$ implica que $j \leq j_1 + N - m \leq N$ e, ainda, como $j > N - m$ é válido que $-N + m > -j$.

Tomamos $N \geq M$, com isto, a desigualdade (4.11) ocorre para todo $|\alpha| \leq 2N - j$ com $2N - j \geq M$. Por fim, concluímos de (4.9) que

$$\begin{aligned} \left|\left\langle u, e^{-ix\cdot\xi} r_N(x,\xi)\right\rangle\right| &\leq B(2^3C')^{N+1} \sum_{|\alpha|\leq M} (1+|\xi|)^{M-|\alpha|}(1+|\xi|)^{m-N} \exp\left(\frac{N+|\alpha|}{2hN}\varphi_\sigma^*(2hN)\right) \\ &\leq B(2^4C')^{N+M+1}(1+|\xi|)^{M+m-N} \exp\left(\frac{N+M}{2hN}\varphi_\sigma^*(2hN)\right), \end{aligned}$$

para todo $N \geq M$. Como $\varphi_\sigma^*(s)/s$ é não decrescente e φ_σ^* é convexa, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{N+M}{2hN}\varphi_\sigma^*(2hN) &\leq \frac{1}{2h}\varphi_\sigma^*(2h(N+M)) \\ &\leq \frac{1}{4h}\varphi_\sigma^*(4hN) + \frac{1}{4h}\varphi_\sigma^*(4hM). \end{aligned}$$

Desse modo, conseguimos a seguinte estimativa para o primeiro membro do lado direito de (4.8)

$$\left|\left\langle u, e^{-ix\cdot\xi} r_N(x,\xi)\right\rangle\right| \leq C_0 C^N \exp\left(\frac{1}{4h}\varphi_\sigma^*(4hN)\right)(1+|\xi|)^{-N+M+m}, \quad \forall \xi \in \Gamma, \tag{4.12}$$

para qualquer $N \geq M$. Agora, para $N' = N + M + m$ obtemos que

$$\begin{aligned} \left|\left\langle u, e^{-ix\cdot\xi} r_{N'}(x,\xi)\right\rangle\right| &\leq C_0 C^{N'} \exp\left(\frac{1}{4h}\varphi_\sigma^*(4hN')\right)(1+|\xi|)^{-N} \\ &\leq C_0 C^{N'} \exp\left(\frac{1}{8h}\varphi_\sigma^*(8hN) + \frac{1}{8h}\varphi_\sigma^*(8h(M+m))\right)(1+|\xi|)^{-N}, \end{aligned}$$

onde usamos a convexidade de φ_σ^*. Sabemos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $d_k > 0$ tal que

$$\frac{1}{8h}\varphi_\sigma^*(8hN) \leq d_k + k\varphi_\omega^*\left(\frac{N}{k}\right), \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

uma vez que $\omega(t) = o(\sigma(t))$ quando $t \to \infty$. Com isto, concluímos que existe $D > 0$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $D_k > 0$ satisfazendo

$$\left|\left\langle u, e^{-ix\cdot\xi} r_{N'}(x,\xi)\right\rangle\right| \leq D^N D_k \exp\left(k\varphi_\omega^*\left(\frac{N}{k}\right)\right)(1+|\xi|)^{-N} \tag{4.13}$$

e, portanto, a primeira parcela de (4.8) está bem estimada.

Olhamos, agora, para o segundo membro de (4.8), isto é,

$$\left|\left\langle Pu, \frac{e^{-ix\cdot\xi}w_N(x)}{P_m(x,\xi)}\right\rangle\right| = \left|\left\langle Pu, e^{-ix\cdot\xi}v_N\right\rangle\right| = \left|\widehat{Pu\cdot v_N}(\xi)\right|.$$

Afirmamos que existe uma constante $B_0 > 0$ satisfazendo, para todo $|\beta| \leq N$,

$$|D_x^\beta w_N(x,\xi)| \leq B_0^{N+1}\exp\left(\frac{|\beta|}{2hN}\varphi_\sigma^*(2hN)\right), \quad \forall x \in K \text{ e } \xi \in \Gamma \text{ com } |\xi| \geq N, \tag{4.14}$$

ou seja, w_N realiza a hipótese (4.3) do Lema 4.1.3. De fato, decorre do Lema 4.1.4 que, para quaisquer $j = j_1 + \ldots + j_k$ e $|\beta|$ com $j + |\beta| \leq 2N$,

$$\sup_{x\in K}|D^\beta(R_{j_1}\cdot\ldots\cdot R_{j_k}\chi_{2N})(x)| \leq (C')^{N+1}\exp\left(\frac{j+|\beta|}{2hN}\varphi_\sigma^*(2hN)\right)N^{-j},$$

para todo $\xi \in \Gamma$ com $|\xi| \geq N$. Recordemos que $\sigma(t) = O(t)$, quando $t \to \infty$, resulta em

$$\varphi_\sigma^*(N) \geq N\log N - \varphi(\log N) \geq N - A - A\sigma(N),$$

para alguma constante $A > 1$. Logo,

$$N \leq A' e^{\frac{1}{N}\varphi_\sigma^*(N)}, \text{ isto é, } N^{-j} \leq \exp\left(\frac{-j}{2hN}\varphi_\sigma^*(2hN)\right),$$

visto que $\varphi_\sigma^*(s)/s$ é não decrescente e $(A')^{-j} \leq 1$. Sendo assim,

$$\sup_{x\in K}|D^\beta(R_{j_1}\cdot\ldots\cdot R_{j_k}\chi_{2N})(x)| \leq (C')^{N+1}\exp\left(\frac{|\beta|}{2hN}\varphi_\sigma^*(2hN)\right).$$

Em consequência disto, para qualquer $\xi \in \Gamma$ com $|\xi| \geq N$,

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K}|D_x^\beta w_N(x,\xi)| &\leq \sum_{k=1}^{N-m}\left(\sum_{j_1+\ldots+j_k\leq N-m}\sup_{x\in K}\left|D^\beta\big(R_{j_1}\cdot\ldots\cdot R_{j_k}\chi_{2N}\big)(x)\right|\right)\\ &\leq B_0^{N+1}\exp\left(\frac{|\beta|}{2hN}\varphi_\sigma^*(2hN)\right),\end{aligned}$$

o que garante (4.14). Ainda, conseguimos uma limitação para $v_N = w_N/P_m(x,\xi)$ similiar a (4.14).

Para finalizar a prova, usaremos o Lema 4.1.3 com $f = Pu$ e a sequência de funções em $C_0^\infty(K)$ dada por $\vartheta_N = v_N|\xi|^m$. Antes, observamos que sendo M a ordem da distribuição u em vizinhança de K e P um operador diferencial de ordem m, segue que a ordem de Pu em vizinhança de K é $M' = M + m$.

Desta forma, decorre do Lema 4.1.3 a existência de uma constante $C_2 > 0$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $C'_k > 0$ satisfazendo

$$|\widehat{Pu \cdot v_N}(\xi)| \leq C_k C_2^N \exp\left(k\varphi_\omega^*\Big(\frac{N - M' - n - 1}{k}\Big)\right) |\xi|^{-N+M'+n+1},$$

para todo $\xi \in \Gamma$ com $|\xi| \geq N$ e $N > M + m + n$. Escolhemos $N'' = N + M' + n + 1$ e concluímos que

$$\left|\left\langle Pu, e^{-ix\cdot\xi} v_{N''}\right\rangle\right| \leq C'_k C_2^{N''} e^{\frac{1}{k}\varphi_\omega^*\left(\frac{N}{k}\right)}, \tag{4.15}$$

para todo $\xi \in \Gamma$ com $|\xi| \geq N$.

Portanto, unindo (4.8), (4.13) e (4.15) obtemos a estimativa

$$|\widehat{u_{N''}}(\xi)| \leq C C_k^N e^{\frac{1}{k}\varphi_\omega^*\left(\frac{N}{k}\right)}, \quad \forall \xi \in \Gamma \text{ com } |\xi| \geq N,$$

ou seja, a desigualdade (4.5) ocorre para a sequência $\{u_{N''}\}$. Isto é suficiente para concluirmos que $(x_0, \xi_0) \notin WF_{(\omega)}(u)$ e, desta maneira, a inclusão

$$WF_{(\omega)}(u) \subset WF_{(\omega)}(Pu) \cup \mathrm{Char}(P)$$

está demonstrada. ■

Com este teorema finalizamos esta seção. Apesar da demonstração do Teorema 4.1.1 ser facilmente adaptada para uma versão no caso Roumieu, com ω uma função peso satisfazendo (3.1) e P um operador diferencial parcial linear com coeficientes em $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$, optamos por traçar um outro caminho no qual usaremos a Proposição 4.2.1 (apresentada na seção seguinte).

4.2 O Caso Roumieu

Dadas duas funções peso ω_0 e ω tais que $\omega_0(t) = o(\omega(t))$ quando $t \to \infty$, definimos o conjunto

$$S \doteq \{\sigma \text{ função peso } ; \;\; \omega_0 \leq \sigma = o(\omega)\}. \tag{4.16}$$

Destinamos esta seção à prova da seguinte proposição.

Proposição 4.2.1. *Sejam ω e ω_0 como acima. Nestas condições,*

$$WF_{\{\omega\}}(u) = \overline{\bigcup_{\sigma \in S} WF_{(\sigma)}(u)}, \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Neste momento, vamos apresentar alguns lemas que nos auxiliarão na demonstração da proposição acima. A prova do próximo lema pode ser encontrada em [13].

Lema 4.2.2. *Se $\varphi : I \to \mathbb{R}$ é uma função convexa, sendo I um intervalo de $\mathbb{R}$, então φ é contínua no interior de I e possui, em cada ponto, derivadas laterais à direita e à esquerda, as quais satisfazem a seguinte desigualdade*

$$\varphi'_-(x) \le \varphi'_+(x) \le \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \le \varphi'_-(y) \le \varphi'_+(y).$$

Lema 4.2.3. *Seja ω uma função peso. Existe uma função peso ρ equivalente a ω e de modo que $\rho\big|_{(R,\infty)}$ é C^1, para algum $R > 0$.*

Demonstração. Escolhemos uma função $\chi \ge 0$ com

$$\chi \in C^1(0,\infty), \ \ \operatorname{supp}\chi \subset (0, \log 2) \ \text{ e } \ \int \chi(s)ds = 1.$$

Definimos

$$\psi(x) = \int \varphi(s+x)\chi(s)ds, \ \ \forall x \in [0,\infty) \quad \text{e} \quad \rho(t) = \begin{cases} \psi(\log t), & t \ge 1; \\ 0, & 0 < t < 1. \end{cases}$$

É imediato que ρ é uma função não decrescente e C^1 em $(1,\infty)$, já que φ é contínua em $(0,\infty)$ (isto segue do Lema 4.2.2).

Vejamos, agora, que ρ assim definida é uma função peso equivalente a ω. Notemos que para todo $x \in [0,\infty)$,

$$\varphi(x) = \int \varphi(x)\chi(s)ds \le \int \varphi(x+s)\chi(s)ds = \psi(x).$$

Por outro lado, sendo ω uma função não decrescente e $\operatorname{supp}\chi \subset (0,\log 2)$, temos que

$$\psi(x) = \int \omega(e^{x+s})\chi(s)ds \le \int_0^{\log 2} \omega(e^{x+\log 2})\chi(s)ds = \omega(2e^x) \le L(1+\varphi(x)),$$

onde na última desigualdade usamos a propriedade (I) da Definição 3.1.1. Devido a $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$, existe $x_0 > 0$ tal que $\varphi(x) \ge 1$, para todo $x \ge x_0$. Assim, $\psi(x) \le 2L\varphi(x)$, para qualquer $x \ge x_0$. Portanto, conseguimos a seguinte desigualdade

$$1 \le \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \le 2L, \ \ \forall x \in (x_0,\infty),$$

ou ainda,

$$\omega(t) \le \rho(t) \le 2L\omega(t), \forall t \ge t_0,$$

em que $t_0 = e^{x_0}$. Disto decorre que $\omega(t) = O(\rho(t))$ e $\rho(t) = O(\omega(t))$ quando $t \to \infty$, ou seja, ω e ρ são equivalentes. Além disso, para todo $t \geq t_0$, temos que

$$0 \leq \frac{\log t}{\rho(t)} \leq \frac{\log t}{\omega(t)},$$

e, portanto, $\log t = o(\rho(t))$ quando $t \to \infty$, uma vez que $\log t = o(\omega(t))$ quando $t \to \infty$. Observamos também que

$$\begin{aligned}\rho(2t) &= \int \varphi(s + \log 2t)\chi(s)ds = \int \omega(2te^s)\chi(s)ds \leq \int L(1 + \omega(te^s))\chi(s)ds \\ &= L\bigg(\int \chi(s)ds + \int \varphi(s + \log t)\chi(s)ds \bigg) = L(1 + \rho(t)).\end{aligned}$$

Ainda,

$$\rho(t) \leq 2L\omega(t) \leq 2LCt, \quad \forall t \geq \max\{t_0, t_1\},$$

em que $t_1 > 0$ satisfaz $\omega(t) \leq Ct$ sempre que $t \geq t_1$. Com isto, concluímos que as propriedades (I), (II) e (III) da Definição 3.1.1 ocorrem para ρ. Para garantirmos que ρ é, de fato, uma função peso, resta mostrarmos que ρ também realiza (IV). Ora, sendo φ convexa temos que

$$\begin{aligned}\lambda\varphi(s + x) + (1 - \lambda)\varphi(s + y) &\geq \varphi\big(\lambda(s + x) + (1 - \lambda)(s + y)\big) \\ &= \varphi\big(\lambda x + \lambda s + (1 - \lambda)s + (1 - \lambda)y\big) \\ &= \varphi\big(s + \lambda x + (1 - \lambda)y\big),\end{aligned}$$

para quaisquer $x, y \in [0, \infty)$ e $\lambda \in [0, 1]$. Deste modo,

$$\begin{aligned}\lambda\psi(x) + (1 - \lambda)\psi(y) &= \int \big[\lambda\varphi(s + x) + (1 - \lambda)\varphi(s + y)\big]\chi(s)ds \\ &\geq \int \varphi\big(s + \lambda x + (1 - \lambda)y\big)\chi(s)ds \\ &= \psi\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big),\end{aligned}$$

para todos $x, y \in [0, \infty)$ e $\lambda \in [0, 1]$. Portanto, ρ é uma função peso C^1 e é equivalente a ω. ■

Lema 4.2.4. *Sejam ω e σ funções peso tais que $\sigma(t) = o(\omega(t))$, quando t tende ao infinito. Então, existe uma função peso σ_0 com as seguintes propriedades:*

(a) $\sigma(t) = o(\sigma_0(t))$, quando $t \to \infty$;

(b) $\sigma_0(t) = o(\omega(t))$, quando $t \to \infty$.

Demonstração. Em vista do Lema 4.2.3, sem perda de generalidade, assumimos que ω é C^1 em (R, ∞), para algum $R > 0$. Denotamos $\varphi \doteq \varphi_\omega$.

Colocamos $x_1 = y_1 = z_1 = 0$. Lembremos que $\sigma(t) = o(\omega(t))$, portanto é possível escolhermos $x_2 > \max\{R, 2\}$ de modo que

$$\varphi'(x_2) > 0 \ \text{ e } \ \sigma(e^x) \leq \frac{\varphi(x)}{2^2}, \ \ \forall x \geq x_2.$$

Como $\varphi \geq 0$ e $\varphi(0) = 0$, temos que $\varphi(x_2) \geq \varphi(z_1)$. Ainda, sendo φ convexa e C^1 em (R, ∞), temos que $\varphi'\big|_{(R,\infty)}$ é não decrescente e contínua. Em particular, usando a Regra de L'Hospital e o fato que $\log t = o(\omega(t))$, obtemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\varphi(x)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{\omega(t)} = 0.$$

Logo, $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi'(x) = \infty$ o que resulta em $\varphi'([0,\infty)) \supset [\varphi'(R), \infty)$. Desta forma, podemos tomar y_2 satisfazendo

$$\varphi'(y_2) = 2\varphi'(x_2).$$

Com isto, obtemos que $y_2 > x_2$, pois $\varphi'(y_2) > \varphi'(x_2)$ e φ' é não decrescente. Como φ é contínua em $[R, \infty)$ e $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$, também temos que $\varphi([0,\infty)) \supset [\varphi(R).\infty)$. Observamos que

$$\begin{aligned}
2\varphi(x_2) - \varphi(y_2) + 2(y_2 - x_2)\varphi'(x_2) &= (y_2 - x_2)\left[2\left(\frac{\varphi(x_2)}{y_2 - x_2}\right) + 2\varphi'(x_2) - \left(\frac{\varphi(y_2)}{y_2 - x_2}\right)\right] \\
&= (y_2 - x_2)\left[\frac{\varphi(x_2)}{y_2 - x_2} + \varphi'(y_2) - \left(\frac{\varphi(y_2) - \varphi(x_2)}{y_2 - x_2}\right)\right] \\
&\geq \varphi(x_2) \geq \varphi(R),
\end{aligned}$$

já que $x_2 \leq y_2$ e φ é uma função convexa. Então, é possível escolhermos z_2 tal que

$$\varphi(z_2) = 2\varphi(x_2) - \varphi(y_2) + 2(y_2 - x_2)\varphi'(x_2).$$

Indutivamente definimos (x_n), (y_n) e (z_n) por

(I) $x_2 > R$ e $x_n > y_{n-1} + n$;

(II) $\sigma(e^x) \leq \dfrac{\varphi(x)}{n^2}$, $\ \forall x \geq x_n$;

(III) $\varphi(x_n) \geq n \sum\limits_{i=1}^{n-1} \varphi(z_i)$;

(IV) $\varphi'(y_n) = \dfrac{n}{n-1}\varphi'(x_n)$;

(V) $\varphi(z_n) = n\varphi(x_n) - (n-1)\varphi(y_n) + n(y_n - x_n)\varphi'(x_n)$.

Afirmamos que $x_n \leq z_n \leq y_n$. De fato, decorre do Lema 4.2.2 que

$$\varphi'(x_n) \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(x_n)}{y - x_n} \leq \varphi'(y), \quad \forall y > x_n. \tag{4.17}$$

Desta forma, por (IV) e (V) temos que $x_n < y_n$ e

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(z_n) - \varphi(x_n)}{y_n - x_n} &= -(n-1)\left(\frac{\varphi(y_n) - \varphi(x_n)}{y_n - x_n}\right) + n\varphi'(x_n) \\ &= (n-1)\left(\varphi'(y_n) - \frac{\varphi(y_n) - \varphi(x_n)}{y_n - x_n}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, $\varphi(z_n) \geq \varphi(x_n)$. Por outro lado,

$$\frac{\varphi(y_n) - \varphi(z_n)}{y_n - x_n} = n\left(\frac{\varphi(y_n) - \varphi(x_n)}{y_n - x_n}\right) - n\varphi'(x_n) = n\left(\frac{\varphi(y_n) - \varphi(x_n)}{y_n - x_n} - \varphi'(x_n)\right) \geq 0.$$

Então, $\varphi(y_n) \geq \varphi(z_n)$ e, portanto, obtemos a seguinte desigualdade

$$\varphi(x_n) \leq \varphi(z_n) \leq \varphi(y_n). \tag{4.18}$$

Agora, supomos por absurdo que $z_n > y_n$. Neste caso, por (4.18) e pelo fato de φ ser não decrescente, segue que $\varphi(z_n) = \varphi(y_n)$. Logo, se $w = \lambda z_n + (1-\lambda) y_n \in (y_n, z_n)$ para algum $\lambda \in (0,1)$, então

$$\varphi(w) \geq \varphi(y_n) \quad \text{e} \quad \varphi(w) \leq \lambda\varphi(z_n) + (1-\lambda)\varphi(y_n) = \varphi(y_n),$$

ou seja, $\varphi(w) = \varphi(y_n) = \varphi(z_n)$. Por outro lado, temos também que $w \in (x_n, z_n)$ e, com isto, existe $\lambda' \in (0,1)$ de modo que $w = \lambda' x_n + (1-\lambda') z_n$. Desta forma,

$$\varphi(z_n) = \varphi(w) \leq \lambda'\varphi(x_n) + (1-\lambda')\varphi(z_n),$$

e isto implica em

$$0 \leq \lambda'(\varphi(x_n) - \varphi(z_n)), \ \text{ ou ainda, } \ \varphi(z_n) \leq \varphi(x_n).$$

Como $x_n < y_n$ e φ é não decrescente, temos que $\varphi(x_n) = \varphi(z_n) = \varphi(y_n)$. Agora, segue do item (V) que

$$\varphi(y_n) = n\varphi(x_n) - (n-1)\varphi(y_n) + n(y_n - x_n)\varphi'(x_n),$$

e, portanto, $\varphi'(x_n) = 0$ o que é um absurdo para $n \geq 2$. Desta forma, obtemos que $z_n \leq y_n$. De modo análogo, mostramos que $z_n < x_n$ também não ocorre concluindo, assim, o fato que $x_n \leq z_n \leq y_n$.

Definimos $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ por

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}\varphi(x_n) + \sum\limits_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i(i+1)}\varphi(z_{i+1}) + \frac{x-x_n}{n-1}\varphi'(x_n), & x_n \leq x < y_n; \\ \frac{1}{n}\varphi(x) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)}\varphi(z_{i+1}), & y_n \leq x < x_{n+1}, \end{cases} \tag{4.19}$$

para $n \geq 2$ e $\psi(x) = 0$ para todo $x \in [0, x_2)$. Observamos que ψ está bem definida, pois $x_n > y_{n-1} + n$ e $x_n \to \infty$. Além disso, ψ é uma função C^1 em (x_2, ∞). De fato, notemos que

$$\lim_{x \to y_n^-} \psi(x) = \frac{1}{n-1}\varphi(x_n) + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i(i+1)}\varphi(z_{i+1}) + \frac{y_n - x_n}{n-1}\varphi'(x_n).$$

Agora, pelo item (V),

$$\frac{\varphi(z_n)}{n(n-1)} = \frac{\varphi(x_n)}{n-1} - \frac{\varphi(y_n)}{n} + \frac{(y_n - x_n)}{n-1}\varphi'(x_n).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to y_n^-} \psi(x) &= \frac{\varphi(y_n)}{n} + \frac{\varphi(z_n)}{n(n-1)} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i(i+1)}\varphi(z_{i+1}) \\ &= \frac{\varphi(y_n)}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)}\varphi(z_{i+1}) \\ &= \lim_{x \to y_n^+} \psi(x), \end{aligned}$$

e isto garante que ψ é contínua em (x_2, ∞) (a continuidade em cada x_n é imediata). Quanto à continuidade da derivada de ψ, basta observarmos que

$$\psi'(x) = \begin{cases} \frac{\varphi'(x_n)}{n-1}, & x_n \leq x < y_n; \\ \frac{\varphi'(x)}{n}, & y_n \leq x < x_{n+1}, \end{cases}$$

e, usando o item (IV),

$$\lim_{x \to y_n^-} \psi'(x) = \frac{\varphi'(x_n)}{n-1} = \frac{\varphi'(y_n)}{n} = \lim_{x \to y_n^+} \psi'(x).$$

Ademais, a convexidade de φ implica em ψ ser também uma função convexa.

A partir disto, definimos $\sigma_0 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ por

$$\sigma_0(t) = \psi(\max\{0, \log t\}),$$

a qual é uma função não decrescente e C^1 em (e^{x_2}, ∞) com $\sigma_0(e^t)$ convexa.

Mostraremos que, para todo $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{(n-1)}, \quad \forall x \in [x_n, x_{n+1}]. \tag{4.20}$$

Tendo em vista o que fizemos no Lema 4.2.3, a desigualdade (4.20) implica que σ_0 é uma função peso. Para demonstrar (4.20), notemos que se $x \in [y_n, x_{n+1})$, então

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} \varphi(z_{i+1}) \geq \frac{\varphi(x)}{n}.$$

Se $x \in [x_n, y_n)$, segue do item (IV) e da convexidade de φ que

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{\varphi(x_n)}{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i(i+1)} \varphi(z_{i+1}) + \frac{x - x_n}{n-1} \varphi'(x_n) \\
&\geq \frac{\varphi(x_n)}{n} + \frac{(x - x_n)}{n} \varphi'(y_n) \\
&\geq \frac{\varphi(x_n)}{n} + \frac{(x - x_n)}{n} \varphi'(x) \\
&\geq \frac{\varphi(x_n)}{n} + \frac{(x - x_n)}{n} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(x_n)}{x - x_n} \right) = \frac{\varphi(x)}{n}.
\end{aligned}$$

Agora, se $x \in [y_n, x_{n+1})$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} &= \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} \frac{\varphi(z_{i+1})}{\varphi(x)} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} \frac{\varphi(z_n)}{\varphi(x)} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i(i+1)} \frac{\varphi(z_{i+1})}{\varphi(x)} \\
&\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} \frac{\varphi(z_n)}{\varphi(x)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varphi(z_i)}{\varphi(x)}.
\end{aligned}$$

Usando o item (III) e o fato que $x \geq y_n \geq z_n \geq x_n$, obtemos

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} \frac{\varphi(z_n)}{\varphi(x)} + \frac{1}{n} \frac{\varphi(x_n)}{\varphi(x)} \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{(n-1)},$$

para todo $x \in [y_n, x_{n+1})$. Por outro lado, se $x \in [x_n, y_n)$, decorre do item (III) e da convexidade de φ que

$$\begin{aligned}
\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{\varphi(x_n)}{\varphi(x)}\right) + \frac{1}{\varphi(x)}\left(\sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{i(i+1)}\varphi(z_{i+1})\right) + \frac{(x-x_n)}{(n-1)\varphi(x)}\varphi'(x_n) \\
&\leq \frac{1}{n-1}\left(\frac{\varphi(x_n)}{\varphi(x)}\right) + \frac{1}{\varphi(x)}\left(\frac{\varphi(x_n)}{n}\right) + \frac{(x-x_n)}{(n-1)\varphi(x)}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(x_n)}{x-x_n}\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)} + \frac{1}{n}\frac{\varphi(x_n)}{\varphi(x)} \\
&\leq \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1},
\end{aligned}$$

isto finaliza a prova da desigualdade (4.20).

Resta mostrarmos que σ_0 satisfaz as propriedades (a) e (b). Ora, o item (II) e (4.20) implicam em

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma_0(t)} = \frac{\sigma(t)}{\psi(\log t)} \leq n\frac{\sigma(t)}{\varphi(\log t)} \leq \frac{1}{n}, \quad \forall t \in [e^{x_n}, e^{x_{n+1}}].$$

Portanto, $\sigma(t) = o(\sigma_0(t))$ quando $t \to \infty$. Quanto à propriedade (b), segue de (4.20) que

$$\frac{\sigma_0(t)}{\omega(t)} = \frac{\psi(\log t)}{\varphi(\log t)} \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{(n-1)}, \quad \forall t \in [e^{x_n}, e^{x_{n+1}}],$$

e com isto, temos que (b) também é satisfeito. ■

O Lema 4.2.4 pode ser facilmente adaptado para a seguinte versão: *Sejam ω função peso e $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tais que $g(t) = o(\omega(t))$, quando $t \to \infty$. Então, existe função peso σ_0 com $g(t) = o(\sigma_0(t))$ e $\sigma_0(t) = o(\omega(t))$, quando $t \to \infty$.*

Com isto, se escolhermos $g(t) = \log(1+t)$, concluímos que para qualquer função peso ω, existe função peso σ_0 satisfazendo $\sigma_0 = o(\omega)$. Portanto, o conjunto S dado em (4.16) está bem definido, para toda função peso ω. Partimos, agora, para a prova da Proposição 4.2.1.

Demonstração da Proposição 4.2.1. Como $\sigma = o(\omega)$, para qualquer $\sigma \in S$ segue da Proposição 3.2.3 que

$$\bigcup_{\sigma\in S} WF_{(\sigma)}(u) \subset WF_{\{\omega\}}(u).$$

Além disso, $WF_{\{\omega\}}(u)$ é fechado o que implica em

$$\overline{\bigcup_{\sigma\in S} WF_{(\sigma)}(u)} \subset WF_{\{\omega\}}(u).$$

Resta provarmos a inclusão contrária. Denotamos $\Gamma = \overline{\bigcup_{\sigma\in S} WF_{(\sigma)}(u)}$ e tomamos (x_0, ξ_0)

em $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$. Sendo Γ fechado, podemos considerar uma vizinhança compacta K de x_0 e uma vizinhança fechada V de ξ_0 tais que

$$K \times V \cap \Gamma = \emptyset.$$

Agora, definindo $F = \{\lambda\xi;\ \lambda \geq 0 \ \text{ e } \ \xi \in V\}$ temos que $K \times F \cap \Gamma = \emptyset$. Note que F é uma vizinhança cônica de ξ_0.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, escolhemos $\chi_N \in C_0^\infty(K)$ com $\chi_N \equiv 1$ em U (U vizinhança aberta de x_0 contida em K) e satisfazendo, para cada $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$\left|D^{\alpha+\beta}\chi_N\right| \leq C_\alpha (C_\alpha N)^{|\beta|}, \ \ \forall |\beta| \leq N.$$

Decorre do item (b) do Lema 3.3.4 que $\{\chi_N u\}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ de modo que para cada $\sigma \in S$ e $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k^\sigma > 0$ tal que

$$|\xi|^N |\widehat{\chi_N u}(\xi)| \leq C_k^\sigma e^{k\varphi_\sigma^*\left(\frac{N}{k}\right)}, \ \ \forall \xi \in F \ \text{ e } \ \forall N \in \mathbb{N}. \tag{4.21}$$

Queremos mostrar que (4.21) resulta na existência de constantes $C_0 > 0$ e $h \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$|\xi|^N |\widehat{\chi_N u}(\xi)| \leq C_0 e^{\frac{1}{h}\varphi_\omega^*(hN)}, \ \ \forall \xi \in F \ \text{ e } \ \forall N \in \mathbb{N}, \tag{4.22}$$

isto garantirá que $(x_0, \xi_0) \notin WF_{\{\omega\}}(u)$ finalizando a prova da proposição. Fixamos $k \in \mathbb{N}$ e $\sigma \in S$. Para cada $r > 0$ definimos

$$g_N(r) \doteq r^N \sup_{|\xi|=r,\, \xi \in F} |\widehat{\chi_N u}(\xi)|.$$

Por (4.21),

$$a_N \doteq \log\left(\sup_{r>0} g_N(r)\right) \leq k\varphi_\sigma^*\left(\frac{N}{k}\right) + \log C_k^\sigma. \tag{4.23}$$

Observamos que se existe $h \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$a_N \leq \frac{1}{h}\varphi_\omega^*(Nh) + C, \ \ \forall N \in \mathbb{N}, \tag{4.24}$$

em que $C = \log C_k^\sigma$, então (4.22) será válido. De fato, supondo que ocorra (4.24) temos que

$$\log(g_N(r)) \leq \frac{1}{h}\varphi_\omega^*(Nh) + C, \ \ \forall N \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ \forall r > 0,$$

o que resulta em

$$\log\left(|\xi|^N|\widehat{\chi_N u}(\xi)|\right) \leq \frac{1}{h}\varphi_\omega^*(Nh) + C, \quad \forall N \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ \forall \xi \in F.$$

Portanto, escolhendo $C_0 = e^C$ obtemos que (4.24) implica em (4.22).

Para provarmos a desigualdade (4.24) seguiremos por absurdo. Assumamos que para cada $h \in \mathbb{N}$ existe $N(h) \in \mathbb{N}$ de modo que

$$a_{N(h)} > \frac{1}{h}\varphi_\omega^*(N(h)h) + h. \tag{4.25}$$

Podemos tomar $\{N(h)\}_{h\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente. Ainda, de acordo com o Lema 4.2.3, é possível considerarmos ω uma função C^1 em (R, ∞), para algum $R > 0$. Desta forma, $\varphi \doteq \varphi_\omega$ é uma função C^1 em (R, ∞) e, além disso, φ' é uma função contínua que satisfaz $(\varphi'(R), \infty) \subset \varphi'((0, \infty))$. Consequentemente, existe sequência crescente $\{x_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ em $(0, \infty)$ satisfazendo

$$x_h \to \infty \quad \text{e} \quad \varphi'(x_h) = N(h)h, \ \ \forall h \in \mathbb{N}.$$

Procedendo como na prova do Lema 4.2.4, construímos sequências $\{h(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $h(1) = 1$, $y_1 = z_1 = x_1 = 0$, $y_2 = z_2 = x_{h(2)}$ e satisfazendo, para todo $n \geq 3$,

(I) $N(h(n)) > \dfrac{N(h(n-1))h(n-1)}{h(n-3)}$;

(II) $x_{h(n)} > y_{n-1} + n$;

(III) $\sigma(e^x) \leq \dfrac{\varphi(x)}{[h(n-1)]^2}$;

(IV) $\varphi(x_{h(n)}) \geq h(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n-1}\varphi(z_i)$;

(V) $\varphi'(y_n) = \dfrac{h(n-1)}{h(n-2)}\varphi'(x_{h(n)})$;

(VI) $\varphi(z_n) = \dfrac{h(n-1)\varphi(x_{h(n)}) - h(n-2)\varphi(y_n) + h(n-1)(y_n - x_{h(n)})\varphi'(x_{h(n)})}{h(n-1) - h(n-2)}$.

Deste modo, temos que $x_{h(n)} \leq z_n \leq y_n$. Seguindo os mesmos passos da demonstração do Lema 4.2.4, definimos

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{h(n-1)}\varphi(x_{h(n)}) + \sum\limits_{i=1}^{n-2}\frac{h(i)-h(i-1)}{h(i)h(i-1)}\varphi(z_{i+1}) + \frac{x-x_{h(n)}}{h(n-2)}\varphi'(x_{h(n)}), & x_{h(n)} \leq x < y_n; \\ \frac{1}{h(n-1)}\varphi(x) + \sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{h(i)-h(i-1)}{h(i)h(i-1)}\varphi(z_{i+1}), & y_n \leq x < x_{h(n+1)}, \end{cases}$$

e a função peso $\sigma_0(t) = \psi(\max\{\log t, 0\})$. Já sabemos que $\sigma(t) = o(\sigma_0(t))$ e $\sigma_0(t) = o(\omega(t))$, quando $t \to \infty$.

Notemos, agora, que

$$\varphi^*(N(h(n))h(n)) = N(h(n))h(n)x_{h(n)} - \varphi(x_{h(n)}), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.26}$$

De fato, temos que se $0 \leq s \leq x_{h(n)}$, então $N(h(n))h(n) - \varphi'(s) \geq 0$, uma vez que $\varphi'(x_{h(n)}) = N(h(n))h(n)$ e φ' é não decrescente. Com isto, segue que a função $\gamma_n(s) = N(h(n))h(n)s - \varphi(s)$ é não decrescente em $[0, x_{h(n)}]$ com $\gamma_n(0) = 0$ e, além disso,

$$\lim_{s\to\infty} \gamma_n(s) = \lim_{s\to\infty} s\left(N(h(n))h(n) - \frac{\varphi(s)}{s}\right) = -\infty$$

Então, $x_{h(n)}$ é um ponto de máximo da função γ_n e, portanto, (4.26) é válido.

A escolha da função ψ nos permite deduzir que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi^*(N(h(n))) = N(h(n))\zeta_n - \psi(\zeta_n), \tag{4.27}$$

em que $\zeta_n \in [y_{n-1}, x_{h(n)}]$ e satisfaz $\psi'(\zeta_n) = N(h(n))$. Com efeito, $\delta_n(s) = N(h(n))s - \psi(s)$ é C^1 com derivada $\delta_n'(s) = N(h(n)) - \psi'(s)$. Neste caso, sendo ψ' não decrescente, $\delta'(s) \geq 0$ sempre que $N(h(n)) \geq \psi'(s)$. Desde que $\lim_{x\to\infty} \psi'(x) = \infty$, podemos escolher ζ_n de modo que $\psi'(\zeta_n) = N(h(n))$ e, assim, ζ_n é um ponto de máximo da função δ_n, ou seja, ζ_n realiza (4.27). Para garantirmos que $\zeta_n \in [y_{n-1}, x_{h(n)}]$, observamos que se $x \in [y_{n-1}, x_{h(n)}]$, então

$$\frac{\varphi'(y_{n-1})}{h(n-2)} \leq \psi'(x) \leq \frac{\varphi'(x_{h(n)})}{h(n-2)},$$

entretanto,

$$\frac{\varphi'(y_{n-1})}{h(n-2)} = \frac{h(n-2)}{h(n-2)h(n-3)}\varphi'(x_{h(n-1)}) = \frac{N(h(n-1))h(n-1)}{h(n-3)} < N(h(n))$$

e

$$\frac{\varphi'(x_{h(n)})}{h(n-2)} = \frac{h(n)N(h(n))}{h(n-2)} \geq N(h(n)).$$

Logo, se $\zeta_n \notin [y_{n-1}, x_{h(n)}]$ temos que

$$\psi'(\zeta_n) < \frac{\varphi'(y_{n-1})}{h(n-2)} < N(h(n)) \quad \text{ou} \quad \psi'(\zeta_n) > \frac{\varphi'(x_{h(n)})}{h(n-2)} \geq N(h(n)),$$

o que contradiz a escolha de ζ_n.

Como $\sigma_0(t) = o(\omega(t))$, segue do Lema 4.2.4 que existe uma função peso ϑ satisfazendo $\sigma_0(t) = o(\vartheta(t))$, $\vartheta(t) = o(\omega(t))$, quando $t \to \infty$. Donde, obtemos que $\vartheta \in S$ e $\psi \leq \varphi_\vartheta$ e isto implica que

$$\varphi_\vartheta^*(t) \leq \psi^*(t), \tag{4.28}$$

para todo t suficientemente grande. Então, usando (4.23) e (4.25) temos que

$$\frac{1}{h(n)}\varphi^*(N(h(n))h(n)) + h(n) < a_{N(h(n))} \leq \varphi_\vartheta^*(N(h(n))) + \log C_1^\vartheta, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, por (4.28),

$$\frac{1}{h(n)}\varphi^*(N(h(n))h(n)) + h(n) < \psi^*(N(h(n))) + \log C_1^\vartheta, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Segue de (4.26) e (4.27) que

$$\begin{aligned} N(h(n))x_{h(n)} - \frac{\varphi(x_{h(n)})}{h(n)} + h(n) &= \frac{1}{h(n)}\varphi^*(N(h(n))h(n)) + h(n) \\ &< \psi^*(N(h(n))) + \log C_1^\vartheta \\ &= N(h(n))\zeta_n - \psi(\zeta_n) + \log C_1^\vartheta. \end{aligned}$$

Posto isto, obtemos que

$$\begin{aligned} N(h(n))(x_{h(n)} - \zeta_n) + h(n) &< \frac{\varphi(x_{h(n)})}{h(n)} - \psi(\zeta_n) + \log C_1^\vartheta \\ &= \frac{\varphi(x_{h(n)})}{h(n)} - \frac{\varphi(\zeta_n)}{h(n-2)} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{h(i) - h(i-1)}{h(i)h(i-1)}\varphi(z_{i+1}) + \log C_1^\vartheta \\ &< \frac{\varphi(x_{h(n)})}{h(n)} - \frac{\varphi(\zeta_n)}{h(n)} + \log C_1^\vartheta. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Agora, sendo φ' não decrescente,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x_{h(n)})}{h(n)} - \frac{\varphi(\zeta_n)}{h(n)} + \log C_1^\vartheta &= \int_{\zeta_n}^{x_{h(n)}} \frac{\varphi'(s)}{h(n)} ds + \log C_1^\vartheta \\ &\leq \frac{\varphi'(x_{h(n)})}{h(n)}(x_{h(n)} - \zeta_n) + \log C_1^\vartheta \\ &= N(h(n))(x_{h(n)} - \zeta_n) + \log C_1^\vartheta, \end{aligned} \tag{4.30}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Unindo (4.29) e (4.30), concluímos que

$$h(n) < \log C_1^\sigma, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que é um absurdo, pois $h(n) \to \infty$. Desta maneira, estabelecemos a validade de (4.24) e, com isto, a prova da proposição está terminada. ∎

A seguir, apresentamos um corolário imediato da Proposição 4.2.1.

Corolário 4.2.5. *Sejam ω uma função peso satisfazendo* (3.1) *e Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Então,*

(a) $\operatorname{suppsing}_{\{\omega\}}(u) = \overline{\bigcup_{\sigma\in S} \operatorname{suppsing}_{(\omega)} u}$.

(b) $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega) = \bigcap_{\sigma\in S} \mathcal{E}_{(\sigma)}(\Omega)$.

Demonstração. Do Teorema 3.3.5 e da Proposição 4.2.1, obtemos que

$$\operatorname{suppsing}_{\{\omega\}} u = \pi_1\big(WF_{\{\omega\}}(u)\big) = \pi_1\left(\overline{\bigcup_{\sigma\in S} WF_{(\sigma)}(u)}\right) \subset \overline{\bigcup_{\sigma\in S} \pi_1\big(WF_{(\sigma)}(u)\big)} = \overline{\bigcup_{\sigma\in S} \operatorname{suppsing}_{(\omega)} u},$$

em que π_1 é a projeção de $\Omega \times \mathbb{R}^n$ em Ω. Por outro lado, pela Proposição 3.2.3, sabemos que $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega) \subset \mathcal{E}_{(\sigma)}(\Omega)$, para toda $\sigma \in S$. Assim, $\operatorname{suppsing}_{(\sigma)} u \subset \operatorname{suppsing}_{\{\omega\}}(u)$, para qualquer $\sigma \in S$, e então

$$\overline{\bigcup_{\sigma\in S} \operatorname{suppsing}_{(\omega)} u} \subset \operatorname{suppsing}_{\{\omega\}}(u),$$

uma vez que $\operatorname{suppsing}_{\{\omega\}} u$ é fechado. Isto finaliza a prova do item (a).

Para provarmos (b), tomamos $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Temos que $u \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ se, e somente se, $\operatorname{suppsing}_{\{\omega\}} u$ é vazio. Mas, pelo item anterior, $\operatorname{suppsing}_{\{\omega\}} u = \emptyset$ é equivalente a $\operatorname{suppsing}_{(\sigma)} u = \emptyset$, para qualquer $\sigma \in S$. Assim, $u \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ se, e somente se, $u \in \mathcal{E}_{(\sigma)}(\Omega)$, para toda função peso $\sigma \in S$ e isto garante o item (b). ∎

Finalizamos esta seção com o principal resultado deste trabalho na versão Roumieu. Uma vez provada a inclusão

$$WF_*(u) \subset WF_*(Pu) \cup \operatorname{Char}(P),$$

no ambiente das funções ultradiferenciáveis tipo Beurling, o caso Roumieu torna-se uma aplicação direta da Proposição 4.2.1.

Teorema 4.2.6 (O caso Roumieu). *Sejam ω uma função peso satisfazendo* (3.1) *e Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Se $P(x, D)$ é um operador diferencial parcial linear cujos coeficientes estão em $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$, então*

$$WF_{\{\omega\}}(u) \subset WF_{\{\omega\}}(Pu) \cup \operatorname{Char}(P), \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega). \tag{4.31}$$

Demonstração. Ora, segue do Teorema 4.1.1 e da Proposição 4.2.1 que

$$WF_{\{\omega\}}(u) = \overline{\bigcup_{\sigma\in S} WF_{(\sigma)}(u)} \subset \overline{\bigcup_{\sigma\in S} WF_{(\sigma)}(Pu) \cup \operatorname{Char}(P)} = \overline{\bigcup_{\sigma\in S} WF_{(\sigma)}(Pu)} \cup \operatorname{Char}(P),$$

e, portanto, a inclusão (4.31) ocorre. ∎

4.3 Aplicações

Como aplicação direta dos teoremas 4.1.1 e 4.2.6, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.3.1. *Seja $P = P(x, D)$ um operador diferencial parcial linear elíptico definido em um aberto Ω de $\mathbb{R}^n$. Então,*

(a) Se ω é uma função peso satisfazendo (3.1) e os coeficientes de P pertencem a $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$, então

$$WF_{\{\omega\}}(u) = WF_{\{\omega\}}(Pu), \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

e assim,

$$\operatorname{suppsing}_{\{\omega\}} u = \operatorname{suppsing}_{\{\omega\}} Pu, \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

(b) Se ω e σ são funções peso tais que ω satisfaz a propriedade (3.1) e $\omega = o(\sigma)$, e os coeficientes de P pertencem a $\mathcal{E}_{\{\sigma\}}(\Omega)$, então

$$WF_{(\omega)}(u) = WF_{(\omega)}(Pu), \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

e assim,

$$\operatorname{suppsing}_{(\omega)} u = \operatorname{suppsing}_{(\omega)} Pu, \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Similar à definição de operador C^∞-hipoelíptico, também temos a noção de hipoelipticidade tipo Beurling e tipo Roumieu.

Definição 4.3.2 (Operador $*$-hipoelíptico)**.** *Um operador $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com $a_\alpha \in \mathcal{E}_*(\Omega)$ é $*$-hipoelíptico se ocorrer*

$$\operatorname{suppsing}_* Pu = \operatorname{suppsing}_* u, \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Assim como tínhamos no caso C^∞, o item (a) do Corolário 4.3.1 garante que elipticidade implica em hipoelipticidade neste contexto das funções ultradiferenciáveis tipo Roumieu.

Observação 4.3.3. *Outra importante consequência dos teoremas 4.1.1 e 4.2.6 é que se $f \in \mathcal{E}_*(\Omega)$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ satisfaz de $Pu = f$, então*

$$WF_*(u) \subset \operatorname{Char}(P),$$

visto que $WF_*(Pu) = WF_*(f) = \emptyset$. Neste caso, conseguimos uma significativa localização da região onde a distribuição u é microrregular.

Concluiremos este texto estudando o conjunto frente de ondas do seguinte operador diferencial parcial linear em $\mathbb{R}^n$

$$P = \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Observamos que o conjunto característico de P é dado por

$$\mathrm{Char}(P) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n};\ \xi_n = 0 \ \text{ e } \ \xi \neq 0\}.$$

Além do mais, uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é solução da equação $Pu = 0$ se, e somente se, $u = v \otimes 1$, para alguma distribuição $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$, em que 1 denota a função constante igual a um na variável x_n (para mais detalhes sobre este fato, consultar [7]).

Podemos, agora, afirmar o seguinte resultado.

Proposição 4.3.4. *Sejam ω uma função peso não quaseanalítica satisfazendo* (3.1) *e $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ uma solução da equação $Pu = 0$. Se $(x_0, \xi_0) \in WF_*(u)$, então $(x_0, \xi_0) \in \mathrm{Char}(P)$ e denotando $\mathbb{R}^n \ni x = (x', x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, temos que*

$$L = \{(x_0', x_n, \xi_0);\ x_n \in \mathbb{R}\} \subset WF_*(u).$$

Além disso, se ω é não quaseanalítica, para cada $(x_0, \xi_0) \in \mathrm{Char}(P)$ existe uma solução $u \in \mathcal{D}_*'(\mathbb{R}^n)$ de $Pu = 0$ cujo conjunto $*$-frente de ondas é dado por

$$WF_*(u) = \tilde{L} = \{(x_0', x_n, \lambda\xi_0);\ x_n \in \mathbb{R} \ \ e \ \ \lambda > 0\}.$$

Demonstração. Faremos o caso Beurling, o caso Roumieu é inteiramente análogo. Dada $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ solução de $Pu = 0$, temos que

$$WF_{(\omega)}(u) \subset WF_{(\omega)}(Pu) \cup \mathrm{Char}\, P = \mathrm{Char}\, P,$$

e ainda, $u = v \otimes 1$, para alguma $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$. Afirmamos que

$$WF_{(\omega)}(u) = \{(x, \xi) \in \mathrm{Char}(P);\ (x', \xi') \in WF_{(\omega)}(v)\}. \tag{4.32}$$

De fato, seja $(\overline{x}, \overline{\xi}) \in \mathrm{Char}(P)$. Se $(\overline{x}', \overline{\xi}') \notin WF_{(\omega)}(v)$, então existem U' vizinhança de $\overline{x}'$, Γ' vizinhança cônica de $\overline{\xi}'$ e sequência limitada $\{v_N\} \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n-1})$ com $v_N = v$ em U' e, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k > 0$ satisfazendo

$$|\xi'|^N |\widehat{v_N}(\xi')| \leq C_k e^{k\varphi^*\left(\frac{N}{k}\right)}, \ \ \forall \xi' \in \Gamma' \ \text{ e } \ \forall N \in \mathbb{N}. \tag{4.33}$$

Tomamos $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ com $\chi \equiv 1$ em vizinhança I de $\overline{x}_n$. Então, $u_N = v_N \otimes \chi$ forma uma sequência limitada em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ de modo que $u_N = u$ em $U = U' \times I$ e U contém $\overline{x} = (\overline{x}', \overline{x}_n)$.

Para algum $C_1 > 0$, definimos o cone $\Gamma = \{\xi \in \mathbb{R}^n;\ \xi' \in \Gamma' \ \text{ e } \ |\xi_n| \leq C_1|\xi'|\}$ o qual contém $\overline{\xi}$, pois $\overline{\xi} = (\overline{\xi}', 0)$. Notemos que

$$\Gamma \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};\ \xi_n = 0\} = \Gamma' \times \{0\}.$$

Usando a definição de produto tensorial de distribuições (vide [7]), obtemos que

$$\widehat{u}_N(\xi) = \left\langle u_N, e^{-ix\cdot\xi}\right\rangle = \left\langle v_N \otimes \chi, e^{-ix'\cdot\xi'} e^{-ix_n\cdot\xi_n}\right\rangle = \left\langle v_N, e^{-ix'\cdot\xi'}\right\rangle \left\langle \chi, e^{-ix_n\cdot\xi_n}\right\rangle.$$

Portanto, $\widehat{u}_N(\xi) = \widehat{v}_N(\xi')\widehat{\chi}(\xi_n)$. Deste modo, para todo $\xi \in \Gamma$ e todo $k \in \mathbb{N}$ ocorre

$$\begin{aligned} |\xi|^N |\widehat{u}_N(\xi)| &\leq (|\xi'| + |\xi_n|)^N |\widehat{v}_N(\xi')||\widehat{\chi}(\xi_n)| \\ &\leq (1 + C_1)^N |\xi'|^N |\widehat{v}_N(\xi)||\widehat{\chi}(\xi_n)| \\ &\leq (1 + C_1)^N \|\chi\|_1 C_k \varphi^* \left(\frac{N}{k}\right). \end{aligned}$$

Portanto, $(\overline{x}, \overline{\xi}) \notin WF_{(\omega)}(u)$ e isto conclui a inclusão

$$WF_{(\omega)}(u) \subset \{(x, \xi) \in \mathrm{Char}(P);\ (x', \xi') \in WF_{(\omega)}(v)\}.$$

Reciprocamente, seja $(\overline{x}, \overline{\xi}) \in \mathrm{Char}(P)$ tal que $(\overline{x}, \overline{\xi}) \notin WF_{(\omega)}(u)$. Com isto, existem vizinhança U de $\overline{x}$, vizinhança cônica Γ de $\overline{\xi}$ e sequência $\{u_N\} \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ limitada com $u_N = u$ em U e, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k > 0$ tal que

$$|\xi|^N |\widehat{u}_N(\xi)| \leq C_k e^{k\varphi^*\left(\frac{N}{k}\right)}, \ \ \forall \xi \in \Gamma \ \text{ e } \ N \in \mathbb{N}.$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir $u_N = v_N \otimes \chi_N$. Com efeito, como $(\overline{x}, \overline{\xi}) \notin WF_{(\omega)}(u)$, existem vizinhança compacta K de $\overline{x}$ e cone fechado F tais que $(\overline{x}, \overline{\xi}) \in K \times F$ e $K \times F \cap WF_{(\omega)}(u) = \emptyset$. Diminuindo K se necessário, escrevemos $K = K' \times I$ com $K' \subset \mathbb{R}^n$ e $I \subset \mathbb{R}$. Tomamos $\{\chi'_N\} \subset C_0^\infty(K')$ e $\{\chi_N\} \subset C_0^\infty(I)$ satisfazendo $\chi'_N \equiv 1$ em $U' \subset K'$, $\chi_N \equiv 1$ em $J \subset I$,

$$|D^{\alpha'+\beta'}\chi'_N| \leq C_{\alpha'}(C_{\alpha'}N)^{|\beta|}, \ \ \forall \alpha' \in \mathbb{Z}_+^{n-1} \ \text{ e } \ |\beta'| \leq N$$

e

$$|D^{j+k}\chi_N| \leq C_{\alpha_n}(C_{\alpha_n}N)^k, \ \ \forall j \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ k \leq N.$$

Temos que

$$\tilde{\chi}_N = \chi'_N \otimes \chi_N \in C_0^\infty(K') \otimes C_0, \infty(I) \subset C_0^\infty(K) \quad \text{e} \quad |D^{\alpha+\beta}\tilde{\chi}_N| \leq D_\alpha(D_\alpha N)^{|\beta|},$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e $|\beta| \leq N$. Segue do Lema 3.3.4 que a sequência formada por

$u_N = \tilde{\chi}_N u$ satisfaz (3.8). Mas,

$$\tilde{\chi}_N u = (\chi'_N \otimes \chi_N)(v \otimes 1) = (\chi'_N v) \otimes \chi_N = v_N \otimes \chi_N,$$

com $v_N = \chi'_N v = v$ em U'. Logo, podemos considerar $u_N = v_N \otimes \chi_N$.

Desta forma, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|\xi|^N |\widehat{v}_N(\xi')||\widehat{\chi}_N(\xi_n)| = |\xi|^N |\widehat{u}_N(\xi)| \leq C_k e^{k\varphi^*\left(\frac{N}{k}\right)}, \quad \forall \xi \in \Gamma. \tag{4.34}$$

Notemos que para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\widehat{\chi}_N(0) = \int \chi_N(x)dx \geq \int_J \chi_N(x) = m(J) > 0,$$

em que $m(J)$ denota a medida de J. Definimos o cone $\Gamma' = \{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\};\ (\xi', 0) \in \Gamma\}$ o qual contém $\overline{\xi} = (\overline{\xi}', 0)$. Assim, por (4.34),

$$|\xi'|^N |\widehat{v}_N(\xi')| \leq \frac{C_k}{m(J)} e^{k\varphi\left(\frac{N}{k}\right)}, \quad \forall \xi' \in \Gamma'.$$

Logo, $(\overline{x}', \overline{\xi}') \notin WF_{(\omega)}(v)$ o que finaliza a prova de (4.32).

Se $(x_0, \xi_0) \in WF_{(\omega)}(u)$, segue de (4.32) que $(x'_0, \xi'_0) \in WF_{(\omega)}(v)$ e, portanto, (x'_0, x_n, ξ_0) pertence a $WF_{(\omega)}(u)$, para todo $x_n \in \mathbb{R}^n$. Com isto, concluímos que

$$L = \{(x'_0, x_n, \xi_0);\ x_n \in \mathbb{R}^n\} \subset WF_{(\omega)}(u).$$

Agora, fixamos $(x_0, \xi_0) \in \mathrm{Char}(P)$. É possível construirmos $v \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^{n-1})$ satisfazendo

$$WF_{(\omega)}(v) = \{(x', \xi') \in \mathbb{R}^{n-1} \times (\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\});\ x' = x'_0, \xi' = \lambda \xi'_0 \text{ e } \lambda > 0\}$$

(para esta construção consultar o Exemplo 1 de [5]). Definimos $u = v \otimes 1$, deste modo, temos que $u \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^n)$ e $Pu = 0$. Ainda, por (4.32),

$$WF_{(\omega)}(u) = \{(x, \xi);\ (x', \xi') \in WF_{(\omega)}(v)\} = \{(x'_0, x_n, \lambda\xi_0);\ x_n \in \mathbb{R} \text{ e } \lambda > 0\},$$

o que termina a demonstração. ■

Bibliografia

[1] Albanese, A. A., Jornet, D. and Oliaro, A., *Quasianalytic wave front sets for solutions of linear partial differential operators.* Integr. Equ. Oper. Theory, 66, 153-181, (2010).

[2] Albanese, A. A., Jornet, D. and Oliaro, A., *Wave front sets for ultra distribution solutions of linear partial differential operators with coefficients in non-quasianalytic classes.* Math. Nachr., 285, No. 4, 411-425, (2012).

[3] Bonet, J., Meise, R. and Melikhov, S. N. *A comparison of two different ways to define classes of ultradifferentiable functions*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin ,14 , 424–444 ,(2007).

[4] Braun, R.W., Meise, R. and Taylor, B.A., *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis.* Results Math., 17, 206-237, (1990).

[5] Fernández, A.C., Galbis, A. and Jornet, D., *Pseudodifferential operators of Beurling type and the wave front set.* J. Math. Anal. Appl., 340, 1153-1170, (2008).

[6] Heinrich, T., Meise, R., *A support theorem for quasianalytic functionals.* Math. Nachr., 280, No.4, 364-387, (2007)

[7] Hörmander, L.*The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1983).

[8] Hounie, J.G., *Teoria Elementar das Distribuições*, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).

[9] Meise, R., Taylor, B.A., *Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type* , Ark. Mat., 26, 265-287 (1988).

[10] Peetre, J., *Concave marjorants of positive functions.* Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 21, 327-33, (1970).

[11] Petzsche, H.J., Vogt, D., *Almost analytic extension of ultradifferentiable functions and the boundary values of holomorphic functions.* Math. Ann., 267, 17-35, (1984).

[12] Rodino, L., *Linear Partial Differential operators in Gevrey Spaces*, World Scientific, (1993).

[13] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Singapore, (1987).

[14] Treves, F., *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* New York: Academic Press, (1967).

[15] Treves,J. F., *Analytic hypoellipticity for partial differential equations of principal type.* Comm. on Pure and Appl. Math., 24 (1971).