UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

WANDERSON MENDES DE LARA

PROBLEMAS DE CONTAGEM NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA EXPERIÊNCIA COM TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Sorocaba
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

WANDERSON MENDES DE LARA

PROBLEMAS DE CONTAGEM NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA EXPERIÊNCIA COM TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Antonio Noel Filho

Sorocaba
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Wanderson Mendes de Lara, realizada em 29/06/2017:

Prof. Dr. Antonio Noel Filho
IFSP

Prof. Dr. Robson dos Santos Ferreira
UNISO

Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela
UFSCar

Aos meus pais, que dedicaram suas vidas à minha formação, minha saúde, meu bem-estar, minha educação e, além disso, muito me apoiaram na realização deste trabalho, incentivando-me a sempre prosseguir vencendo os obstáculos.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

A meu orientador Noel, pela dedicação, empenho, ensinamentos e incentivos fundamentais para a realização desse trabalho.

À minha namorada, que sempre esteve ao meu lado.

À minha família, pelo amor e compreensão, sempre me orientando a seguir em frente.

A todos os meus professores e amigos do PROFMAT e PPGECE com quem tanto aprendi.

À banca avaliadora que se debruçou sobre meu trabalho e apresentou valiosas contribuições.

Aos amigos e incentivadores Cirilo e Rui, pelo companheirismo.

Aos meus alunos pela colaboração e disposição para desenvolver as tarefas propostas.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Esta pesquisa originou-se a partir de inquietações relacionadas ao ensino e aprendizagem de Problemas de Contagem no Ensino Fundamental. Com a intenção de contribuir para a construção de conceitos básicos de Combinatória, elaboramos tarefas de natureza exploratório-investigativas e procuramos por meio destas, analisar as respostas produzidas por estudantes de um 8º ano do Ensino Fundamental, com o intuito de responder a seguinte questão de investigação: que aprendizagem ocorre com a mobilização de registros de representação semiótica para a realização de contagens em um cenário de tarefas exploratório-investigativas num 8º ano do Ensino Fundamental? O referencial teórico e metodológico é constituído pela teoria dos registros de representação semiótica proposta por Duval e pela teoria das Investigações Matemáticas, proposta Ponte et al. Além disso o trabalho também contou com a colaboração de Pessoa e Borba. Realizamos um breve retrospecto histórico sobre o tema, além de uma análise previa de outros trabalhos na área, e documentos oficiais voltados para o ensino e aprendizagem da Matemática no que diz respeito a conteúdos relacionados a Problemas de Contagem no Ensino Fundamental. A pesquisa foi desenvolvida em uma turma de 25 alunos do 8º ano Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de ensino do estado de São Paulo, no ano de 2016. A coleta de dados se deu por meio de notas de campo (diário de bordo), e dos registros produzidos pelos estudantes ao logo do desenvolvimento da sequência de tarefas. Através desta investigação, pudemos verificar que o estudo de Problemas de Contagem por meio de tarefas exploratório-investigativas possibilita a articulação entre diferentes registros de representação semiótica, o que leva a um melhor entendimento desse tema.

Palavras-chave: Ensino Fundamental. Problemas de contagem. Registros de representação semiótica. Tarefas exploratório-investigativas.

ABSTRACT

This research was started because of concerns regarding the teaching and learning of Counting Problems in Elementary School. With the intent of contributing to the construction of basic Combinatorial concepts, we elaborated exploratory-investigative tasks and we tried through these tasks, to analyze the answers that were made by students of an 8th grade of Elementary School, in order to answer the following investigative question: what learning occurs with the mobilization of registers of semiotic representation theory to do counting in a scenario of exploratory-investigative tasks in an 8th grade of Elementary School? The theoretical and methodological reference is constituted by the registers of semiotic representation theory propounded by Duval; by the theory of Mathematical Investigations, Ponte et al. Besides that the research also had the collaboration of Pessoa and Borba. We present a brief historical retrospective on the subject, besides a previous analysis of other works in the area and official documents aimed at teaching and learning of Mathematics subject regarding to contents of Counting Problems in Elementary School. The research was developed with a group of 25 students of the 8th grade Elementary School in a public school in São Paulo state, in the year 2016. The data collection was done through field notes (logbook), and from the records written by the students during the development of the sequence of tasks. Through this investigation, we could verify that the study of Counting Problems through exploratory-investigative tasks allows the articulation of different registers of semiotic representation, leading to a better understanding of this topic.

Keywords: Elementary School. Counting problems. Registers of semiotic representation theory. Exploratory-investigative tasks.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.C. - Antes de Cristo

AP - Árvore de Possibilidades

E - Esquemática

F - Figuras

IDESP - Índice de Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo

IFBA - Instituto Federal da Bahia

LN - Linguagem Natural

LP - Listagem das Possibilidades

N - Numérica

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PUC-MG - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

PUC-SP - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

SARESP - Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo

T - Tabelas

UECE - Universidade Estadual do Ceará

UESC - Universidade Estadual de Santa Cruz

UFMS - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

UFPE - Universidade Federal de Pernambuco

UNIVASF - Universidade Federal do Vale do São Francisco

UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A estratégia que um professor utiliza para ministrar determinada aula direciona o aprendizado e contribui para a construção do conhecimento dos alunos. Para Ponte (2005) é verificável duas estratégias básicas no ensino da Matemática: “o ensino direto” e o “ensino-aprendizagem exploratório”. No “ensino direto” as aulas são expositivas e tradicionais, e os alunos assumem a postura de ouvinte, onde praticam os conceitos e técnicas expostos pelo professor através de exercícios similares aos apresentados. Já no “ensino-aprendizagem exploratório”, a aprendizagem emana de uma reflexão sobre tarefas que exigem exploração e investigação.

As aprendizagens realizadas, durante as aulas de Matemática, devem possibilitar o desenvolvimento de habilidades capazes de responder ao ímpeto das mudanças sociais e econômicas emergentes no mundo atual. Contudo, exercícios que podem ser executados mecanicamente, na maioria das vezes, não evidenciam aplicabilidade, e conseguintemente, não apresentam significado plausível para os estudantes, o que impede o acesso dos mesmos a uma aprendizagem efetiva.

A Combinatória, tema deste trabalho, é um ramo da Matemática que desenvolve métodos para resolver Problemas de Contagem com eficiência. A aprendizagem deste conteúdo pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades pertinentes no universo escolar, no mundo do trabalho e na vida. Para Trotta (1988), a Combinatória atua em múltiplos domínios e fornece fundamentação para a contagem de possibilidades de eventos do cotidiano.

Alguns documentos oficiais destacam que a Combinatória deve ser abordada desde o Ensino Fundamental (BRASIL, 1997) e (BRASIL, 1998). Além disso, para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, em relação aos Problemas de Contagem, preconiza-se que “o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para aplicação no cálculo de probabilidade” (BRASIL, 1998, p.52). Para Pessoa e Borba (2009, p. 72) “o raciocínio combinatório é um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elemento de um conjunto”. Logo, tal pensamento deve ser valorizado no meio escolar, pois pode contribuir para o desenvolvimento de diversas habilidades relacionadas, ou não, a Matemática.

Por outro lado, é fundamental que este conteúdo seja apresentado de maneira interativa e com incentivo à exploração e investigação, tornando o estudante um sujeito ativo e participante dos procedimentos que envolvem o ensino e aprendizagem. Para que ao longo de sua escolarização ocorra um entendimento sequencial dos conteúdos e também não despontem problemas de aprendizagem conforme a escolaridade avança. Nesse sentido, concordamos com Borba (2013, p. 6):

> haverá possibilidade de um mais amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório se ocorrer o trabalho com os variados problemas desse campo conceitual desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, por meio de representações simbólicas apropriadas que possibilitem uma gradual construção de procedimentos mais formais e compreensão das propriedades invariantes do conceito existente, até se chegar ao uso consciente das fórmulas de Análise Combinatória do Ensino Médio.

Como já observado, a Combinatória não é importante apenas em si mesma, além de compor parte de um dos centros da Matemática Discreta, a mesma é essencial em muitas áreas do conhecimento cientifico, Roa e Navarro-Pelayo (2001, p.1) destacam que:

> Os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, teoria dos números, a teoria dos autônomos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias.

Contar é um dos atos mais antigos da espécie humana. Pesquisas recentes apontam que desde muito cedo a criança consegue efetuar pequenas contagens, nesse aspecto Morgado (2004, p.17) frisa que:

> [...] a primeira técnica Matemática aprendida por uma criança é contar, ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas através de sua aplicação em Problemas de contagem.

Através de nossa experiência e observação da abordagem dada nos livros didáticos, percebemos que o ensino de Problemas de Contagem na Educação Básica tem sido tradicionalmente trabalhado através da “fórmula-aplicação”, deixando lacunas na compreensão dos significados combinatoriais. Está forma de abordagem, em nossa perspectiva, não é adequada, pois induz os estudantes a tomarem decisões equivocadas na hora de atacar problemas relacionados ao conteúdo. Uma abordagem pautada na construção de significados tende a produzir melhores resultados, visto que estruturam o pensamento do indivíduo, capacitando-o para entender e interpretar situações, e para se apropriar de linguagens específicas, conjecturar, tomar decisões e generalizar. O ensino, como é comumente implementado, através da memorização de fórmulas e procedimentos algoritmizaveis pode não fazer sentido, o que dificulta o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

MOTIVAÇÃO E QUESTÃO DA PESQUISA

Os Problemas de Contagem sempre despertaram meu interesse, e como, de modo geral, existe muita dificuldade no ensino e aprendizagem dos mesmos, resolvi desenvolver meus estudos nessa área. Tais dificuldades ficam evidentes nos resultados de avaliações externas nos âmbitos nacional e estadual, e também são relatadas, informalmente, nos diálogos com colegas docentes.

Ao longo dos últimos cinco anos de docência trabalhei com turmas do 2º ano do Ensino Médio, onde verifiquei uma enorme dificuldade dos discentes com os Problemas de Contagem. Esta constatação levou-me a questionar se as dificuldades apresentadas no Ensino Médio não poderiam ser amenizadas, se o tema fosse abordado adequadamente ainda no Ensino Fundamental.

A análise de como eu próprio havia aprendido, na escola, também me fizeram refletir sobre novas possibilidades de abordagem desse tema.

Considerando o exposto, elaboramos tarefas de natureza exploratório-investigativa voltadas para a valorização do raciocínio combinatório, no sentido de desenvolver habilidades que contribuam para a construção de conceitos e para resolução de problemas que envolvem contagens. Por meio da produção dos alunos provindas do trabalho em sala de aula, procuramos responder a seguinte questão de investigação: **que aprendizagem ocorre com a mobilização de registros de representação semiótica para a realização de contagens em um cenário de tarefas exploratório-investigativas num 8º ano do Ensino Fundamental?**

Para Duval (1993, p. 39), os registros de representação semiótica podem ser definidos como: “... produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento”. Em sua teoria Duval (1993) explica que os registros de representação são modos usuais de representar um determinado objeto matemático.

Em nossa perspectiva, para desenvolver o raciocínio combinatório dos discentes e auxiliar na construção de conceitos relacionados ao tema, o ensino e aprendizagem dos Problemas de Contagem devem acontecer, a princípio, por meio de processos intuitivos, levando em consideração as percepções que os estudantes possuem do cotidiano.

OBJETIVOS

Neste trabalho foram estabelecidos os seguintes objetivos:

Objetivo Geral

Desvendar as contribuições que um conjunto de tarefas de natureza exploratório-investigativas oferecem para a construção de conceitos relacionados a Problemas de Contagem num 8º ano do Ensino Fundamental.

Objetivo Específicos

i) elaborar e aplicar um conjunto de tarefas exploratório-investigativas sobre Problemas de Contagem;

ii) incentivar o estudante a resolver diversas situações-problema que envolvem contagens;

iii) contribuir para exploração de diferentes registros de representação (tabelas, figuras, linguagem natural, árvore das possibilidades, listagem das possibilidades, etc.) e também viabilizar as transformações destas representações como meio para aprimorar o processo de ensino e aprendizagem;

iv) contribuir para a construção, de maneira intuitiva, dos conceitos presentes em Combinatória.

DESCRIÇÃO DA ARQUITETURA DO TEXTO

Este trabalho é composto de quatro capítulos.

No primeiro capítulo apresentamos um breve estudo dos aspectos históricos dos Problemas de Contagem com o intuito de observar a contagem como uma das noções mais simples, e mostrar sua origem e desenvolvimento, também discorremos sobre o surgimento da Teoria Combinatória. Além disso, foram analisados os Problemas de Contagem no Ensino Fundamental II nos documentos oficiais: Currículo do Estado de São Paulo e Parâmetros Curriculares Nacionais. E finalmente, no capítulo um, analisamos nove pesquisas realizadas sobre os processos de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Fundamental II.

O segundo capítulo traz os referenciais teóricos e metodológicos que deram suporte a pesquisa: a teoria dos registros de representação semiótica, proposta por Duval (2003, 2009, 2011), que pode favorecer o entendimento mais amplo de um objeto matemático, além de permitir a análise da produção escrita dos alunos; e as atividades investigativas propostas por Ponte et al. (2015) que guiaram a elaboração e aplicação das tarefas.

No terceiro capítulo apresentamos a escolha metodológica da pesquisa; a elaboração das tarefas, destacando a caracterização dos significados de problemas combinatórios; o universo da pesquisa de campo; e os participantes.

O quarto capítulo foi dedicado a análise da produção escrita dos alunos, onde apresentamos detalhadamente o conteúdo de cada uma das quatro tarefas constituídas por 4 Problemas de Contagem. Além disso, pontuamos a análise a priori e a posteriori de cada tarefa, e a produção escrita de cada um dos grupos em todas as tarefas.

Por fim, expomos as considerações finais, que contempla uma reflexão desta investigação com objetivo de buscar respostas a nossa questão de pesquisa.

1. O DESENVOLVIMENTO DA COMBINATÓRIA

Neste capítulo apresentamos um breve estudo dos aspectos históricos dos Problemas de Contagem, onde o ato de contar é tido como uma das noções mais simples, discorremos sobre a origem e desenvolvimento de tais problemas, assim como o surgimento e alguns dos primeiros objetivos da teoria Combinatória. Além disso, foram analisados os Problemas de Contagem no Ensino Fundamental II propostos pelos documentos oficiais: Currículo do Estado de São Paulo e Parâmetros Curriculares Nacionais. E por fim, analisamos nove pesquisas realizadas sobre os processos de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Fundamental II.

1.1. A NOÇÃO MATEMÁTICA MAIS SIMPLES

Recentemente, há menos de uma década, pode-se constatar que o ser humano possui habilidades naturais para pensar noções quantitativas elementares. Segundo Keith (2009), o resultado de uma pesquisa feita pela professora pesquisadora Karen Wynn, da Universidade de Yale (Connecticut, Estados Unidos da América), mostrou que bebês de apenas quatro meses podiam realizar pequenas contagens. Nessa pesquisa a professora verificou que apesar dos bebês ainda não terem internalizado o conceito formal de número, já conseguiam distinguir diferentes quantidades. A pesquisadora pontuou o seguinte:

> 1. As crianças que ela examinou identificavam a diferença entre um único objeto, um par de objetos e um conjunto de mais de dois objetos.
> 2. Elas sabiam que se você pegar, digamos, dois objetos e colocá-los juntos, o conjunto resultante terá exatamente 2 objetos, e não um ou 3.
> 3. Elas sabiam que se você pegar, por exemplo, 2 objetos e remover 1 deles, você ficará com um objeto. Não terminará com 2 objetos nem com nenhum. (KEITH, 2009, p. 10).

O trabalho causou espanto por apresentar dados que corroboram o argumento de que a noção de quantidade nasce com o ser humano ou surge muito cedo, com apenas algumas semanas de vida. A pesquisa foi reproduzida com sucesso em vários lugares do planeta.

1.2. ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS DOS PROBLEMAS DE CONTAGEM

1.2.1. As origens dos Problemas de Contagem

Historicamente, é difícil identificar o surgimento dos primeiros Problemas de Contagem, entretanto acredita-se que tenham sido originados na antiguidade, antes da escrita.

Passou-se a ter conhecimento a respeito dos Problemas de Contagem através do matemático grego Arquimedes, que viveu entre 287 a.C. e 212 a.C., e há mais de 2200 anos apresentou um problema de combinação de peças em um tabuleiro: o Stomachion (Figura 1), não se sabe o significado preciso dessa palavra, curiosamente tem a mesma raiz da palavra grega estômago. O Stomachion é um quebra-cabeça constituído por um conjunto de 14 peças planas com determinadas formas poligonais, essas peças podem ser unidas de modo a formar um quadrado (objetivo do jogo), além disso, a área de cada uma das 14 peças é comensurável com a área do quadrado constituído pela totalidade das peças.

Figura 1 - Stomachion

Fonte: Google imagens - 1

Acredita-se que Arquimedes estava interessado em contar a quantidade de maneiras diferentes de se juntar todas as peças para que formem um quadrado, entretanto, apesar de seu emprenho, não existem evidencias de que tenha encontrado a solução.

Ao longo da história, Problemas de Contagem frequentemente despertaram o interesse de matemáticos, para ilustrar esse fato destaca-se o problema 79 encontrado no Papiro Egípcio de Rhind, que é datado de cerca de 1650 anos a. C., o problema é o seguinte: *Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat*[1] *de grãos; quantos itens têm ao todo?*

Em relação a solução do problema anterior, o Papiro Egípcio de Rhind apresenta o seguinte conjunto de dados (EVES, 2004, p.75):

BENS	
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2401
Hectares de grãos	16807
Total	19607

A princípio entendeu-se que o conjunto de dados era uma notação simbólica para potências de 7, no entanto, mais tarde verificou-se uma relação entre o problema 79 e outro bastante semelhante, encontrado no *Líber Abaci* de Leonardo Fibonacci, que possuí o seguinte enunciado:

> Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma? (EVES, 2004, p.76)

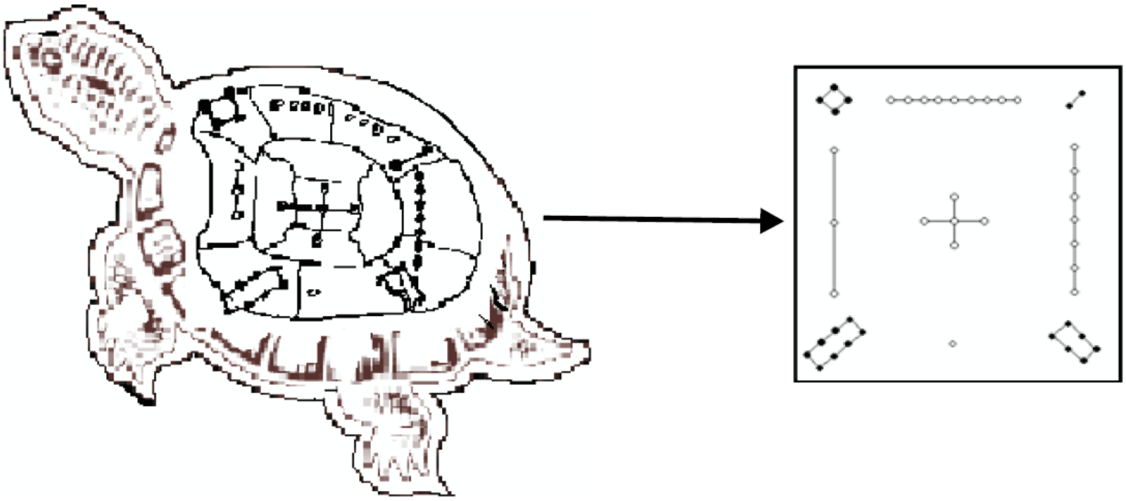
Do ponto de vista da Combinatória, o problema proposto por Fibonacci deixa claro o uso do princípio multiplicativo como uma técnica para realizar contagens.

Os Problemas de Contagem também foram observados nos quadrados mágicos. Acredita-se que a princípio os quadrados mágicos foram investigados pelos chineses, a menos de cinco séculos antes de nossa era, o primeiro quadrado mágico conhecido é Lo Shu (rio livre).

[1] Hekat é uma unidade de medida de grãos utilizada no Egito Antigo.

Reza a lenda que o imperador da antiga China, conhecido como Yu (2800 a. C.), estava meditando as margens do Rio Lo, e em algum momento emergiu uma tartaruga com marcas incomuns no casco.

Figura 2 – A tartaruga sagrada e o Lu Shu



Fonte: Google imagens - 2

As marcas correspondiam a um quadrado mágico de ordem 3, ou seja, um arranjo dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 em quadrado 3 x 3, onde em cada linha, coluna e diagonal do quadrado, a soma resulta em 15. Como observado abaixo:

Quadro 1 – Quadrado mágico de Lo Shu

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

Fonte: Arquivo do autor

No século IX, em um dos templos de Khajuraho, na Índia, foi encontrado um quadrado mágico 3 x 3, similar ao quadrado de Lo Shu, entretanto a soma de cada linha, coluna e diagonal resultava em 72.

Quadro 2 – Quadrado mágico similar ao de Lo Shu

23	**28**	**21**
22	**24**	**26**
27	**20**	**25**

Fonte: Arquivo do autor

No ocidente os quadrados mágicos chegaram com árabes, que por sua vez, os conheceram através do contato e influência da cultura Indu.

1.2.3. O surgimento da Teoria Combinatória

Apesar dos matemáticos já realizarem estudos sobre Problemas de Contagem muitos séculos antes de Cristo, segundo Silva e Filho (2003) foi com os franceses Blaise Pascal (1623-1622) e Pierre de Fermat (1601-1665); com o alemão Gottfried Leibniz (1646-1716); e o com britânico John Wallis (1616-1703), que tais estudos adquiriram uma roupagem mais científica.

O século XVII, do ponto de vista matemático, foi muito produtivo. Surgiram novas áreas da Matemática e outras foram aperfeiçoadas, entre estas estava a Combinatória. Nesse período, acredita-se que a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes de resultados de determinados jogos, impulsionou os estudos dos Problemas de Contagem. Para Boyer (2010, p.250):

> Enquanto Pascal em 1654 trabalhava em sua *As cônicas*, seu amigo, o Chevalier de Méré, propôs-lhe questões como está: Em oito lances de um dado um jogador deve tentar lançar um, mas depois de três tentativas infrutíferas o jogo é interrompido. Como deveria ele ser indenizado?

Pascal escreveu a Fermat sobre o problema, e conforme Boyer (2010), tal correspondência foi o ponta pé inicial para a moderna teoria das probabilidades, e conseguintemente para os estudos mais elaborados de Problemas de Contagem.

Pascal também associou o estudo das probabilidades com o triângulo aritmético, que atualmente leva seu nome. O arranjo triangular ficou conhecido como triângulo de Pascal. Apesar de na época o triângulo ter mais de meio milênio, Pascal descobriu propriedades novas, como a seguinte:

> Em todo triângulo aritmético, se duas células são contíguas na mesma base, a superior está para a inferior como o número de células desde a superior até o topo da base está para o número de células da inferior, até o ponto mais baixo inclusive” (PASCAL apud Boyer, 2010, p. 250).

Em 1654, Pascal desenvolveu uma explicação detalhada para provar essa propriedade, utilizando o método da indução, que acabou se tornando mais importante que a própria propriedade.

Particularmente, os trabalhos de Combinatória de Pascal e Fermat acabaram delineando o cálculo de probabilidades.

Leibniz, ainda em sua juventude, redigiu um pequeno texto onde apresentou as noções que iriam dar suporte à Combinatória como método para tratar diversos tipos de questões cotidianas ou não. Segundo Fortes (2009, p. 135):

> Pode-se pensar em exemplos cotidianos, como casos de combinatória envolvendo cores de roupas, distribuição dos assentos em uma sala de aula ou formação de duplas de jogadores em jogos de cartas. Da mesma forma, é possível combinar números, notas musicais e até mesmo conceitos. Neste último caso, a combinatória entre conceitos ou noções simples levaria ao que Leibniz chamou Característica Universal, a qual permitiria estabelecer cálculos precisos com tais noções.

Em 1666, Leibniz escreveu *De Arte Combinatória*, no qual apresentou um modelo científico, que em muitos aspectos serviu de base para a computação moderna, onde utiliza o seguinte princípio: todo raciocínio pode ser reduzido a uma combinação ordenada de elementos, e esses elementos podem pertencer a um conjunto de números, cores, sons, palavras, etc.

O inglês Wallis, foi um estudioso que se preocupou muito com o desenvolvimento formal da Matemática em sua época. Uma de suas contribuições para a teoria Combinatória está relacionada com o desenvolvimento do Binômio de Newton, Wallis propôs a utilização de expoentes fracionários para escrever expansões como $(x - x^2)^{\frac{1}{2}}$ ou para $(3 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Em 1676 o Teorema Binomial foi publicado por Willes dando credito a Newton.

Morgado et al. (2004) realizaram um levantamento histórico a respeito do desenvolvimento da Combinatória, e constataram que o binômio $(1 + x)^n$ foi um dos primeiros problemas propostos que utilizava conceitos de Combinatória, e que o caso para n = 2 já tinha sido apresentado nos *Elementos de Euclides,* por volta de três séculos antes de Cristo.

Em 1666 Leibniz definiu a Combinatória como sendo “o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos”. Para Morgado et al. (2004 p. 1) “ a Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas”.

Hazzan (2004, p. 1) afirma que “A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos agrupamentos formados sob certas condições”.

A Combinatória no Ensino Básico, essencialmente, se ocupa da formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, sob certas circunstâncias, com os objetos de respectivos conjuntos. Esses agrupamentos são essencialmente de quatro naturezas diferentes: produto cartesianos, permutações, arranjos, e combinações, e podem ser constituídos de objetos distintos ou não.

Desde o século XVII, os estudos de Combinatória desenrolaram-se principalmente em torno dos problemas de probabilidades que envolviam jogos, visto que o homem sempre procurou maneiras seguras de ganhar.

Nos dias atuais, a Combinatória serve de suporte a inúmeros ramos da Matemática: probabilidade, geometria, aritmética, determinantes, teoria dos grupos, teoria dos grafos, inteligência artificial, topologia, etc. Além disso, as operações combinatórias são fundamentais para o desenvolvimento cognitivo, por isso seria de extrema importância que o estudante tivesse acesso a esse conteúdo desde o Ensino Fundamental.

1.3. PROBLEMAS DE CONTAGEM NO ENSINO FUNDAMENTAL II NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

1.3.1. Problemas de Contagem nos Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) foram concluídos em 1998, nele constam orientações que buscam nortear a educação básica em nosso país. As informações mais pertinentes a esta pesquisa se encontram no caderno de Matemática, relativos aos 3º e 4º ciclos, que equivalem aos anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano).

O documento inicia fazendo um breve relato de como era o ensino de Matemática antes do final do século XX. Foi considerado mecanicista e conteudista, fato que comprometia a compreensão da maioria dos alunos e tornava o ensino elitista.

No sentido de minimizar tais problemas, os PCN indicaram a inclusão de vários temas no Ensino Fundamental II, dentre eles podemos destacar estatística, probabilidade e combinatória, pois havia estudos que mostravam uma demanda social crescente de carência de um contato com esses temas.

O documento também considera que as situações-problema devem ser o ponto de partida para abordagens dos conteúdos:

> [...] a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las; (BRASIL, 1998, p.40)

Além disso, menciona a importância da investigação no ensino e aprendizagem da Matemática:

> É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. (BRASIL, 1998, p. 117).

Nos PCN os conteúdos que são abordados no Ensino Fundamental II estão divididos em quatro grandes blocos temáticos: Números, Geometria, Grandeza e Medidas, e Tratamento de Informações. No último bloco citado, aparecem os Problemas de Contagem, onde se destacam o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio fundamental da contagem que serve de apoio ao tema probabilidade. O documento sinaliza para uma abordagem que não enfatize o uso abusivo das fórmulas, e sim a apresentação de situações-problema que possam ser entendidas e resolvidas utilizando o princípio multiplicativo e aditivo.

É evidenciado nos cadernos do 3º e 4º ciclos, uma organização cíclica dos conteúdos, onde prevê retomada periódica com aumento no grau de dificuldade e complexibilidade.

Os objetivos relacionados aos Problemas de Contagem que estão direcionados aos 6º e 7º anos, tratam de resolução de situações-problema que utilizem o raciocínio combinatório para determinar probabilidades de sucesso de determinados eventos, associando a isso uma razão entre as possibilidades de acontecimentos e o espaço amostral:

> - coletar, organizar e analisar informações, construir e interpretar tabelas e gráficos, formular argumentos convincentes, tendo por base a análise de dados organizados em representações matemáticas diversas;
>
> - resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão. (BRASIL, 1998, p. 65)

Já os objetivos pertinentes aos Problemas de Contagem que estão direcionados aos 8º e 9º anos, dizem respeito a estatística e cálculo de probabilidades:

> - construir tabelas de frequência e representar graficamente dados estatísticos, utilizando diferentes recursos, bem como elaborar conclusões a partir da leitura, análise, interpretação de informações apresentadas em tabelas e gráficos;
>
> - construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos. (BRASIL, 1998, p. 82)

Os Problemas de Contagem têm se tornado um grande desafio para professores, devido ao fato dos alunos considerarem um assunto de difícil compreensão.

Para reduzir estas dificuldades é imprescindível uma abordagem logo nas séries iniciais, segundo os PCN:

> A resolução de problemas de contagem, no ensino fundamental, coloca o aluno diante de situações em que é necessário agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizando os agrupamentos feitos. Ao tentar solucionar essas situações, ele poderá aperfeiçoar a maneira de contar os agrupamentos e desenvolver, assim, o raciocínio combinatório. (BRASIL, 1998, p.136)

Os conceitos e procedimentos que viabilizarão os objetivos sugerem a adoção de estratégias variadas para resolver os Problemas de Contagem, como a construção de diagramas, tabelas ou esquemas.

No entanto, observa-se que, de modo geral, o tema serve de apoio a outros conteúdos, por exemplo, na construção de espaços amostrais (probabilidade) e tabelas de frequência (estatística). Assim, pelo fato do assunto não ser explorado por si só, mas como um instrumento para outros conteúdos, pode acabar sendo visto de forma superficial, não sendo tratado adequadamente.

Acreditamos que os PCN deveriam ter colocado em maior evidência as questões relativas ao ensino de Problemas de Contagem, pois possuem um papel essencial na formação do cidadão, visto que possibilitam a análise de dados e a tomada de decisões importantes diante de problemas complexos.

1.3.2. Currículo de Matemática do Estado de São Paulo

O Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, implementado a partir de 2008, tem como principal objetivo o desenvolvimento de competências que são apresentadas em eixos complementares: eixo expressão/compreensão, eixo argumentação/decisão e eixo contextualização/abstração.

No primeiro eixo, ao lado da língua materna, a Matemática compõe um par complementar como meio de expressão e de compreensão da realidade.

No eixo expressão/compreensão, o papel da Matemática está relacionado com a construção do pensamento lógico, seja ele indutivo ou dedutivo, visto que a

Matemática e a língua materna partilham fraternalmente a função de desenvolvimento do raciocínio.

A respeito do terceiro eixo de competências, o documento afirma que a Matemática é uma instância bastante adequada para se aprender a lidar com os elementos do par concreto/abstrato, pois apesar dos objetos matemáticos serem considerados especialmente abstratos, são os exemplos mais facilmente imagináveis para se compreender a permanente articulação entre as abstrações e a realidade concreta.

Analogamente aos PCN, os conteúdos que são abordados no Ensino Fundamental II estão divididos em quatro grandes blocos temáticos: Números, Geometria, Grandeza e Medidas, e Tratamento de Informações. Os Problemas de Contagem, conteúdo que será contemplado neste trabalho, encontra-se no bloco temático Tratamento de Informações, e por sua vez, esse bloco está diretamente relacionado com o eixo argumentação/decisão:

> [...] podem compor esse bloco de conteúdos o estudo das matrizes, amplamente usado na programação de computadores; o planejamento de uma pesquisa estatística que utilize técnicas de elaboração de questionários e amostragem; a investigação de temas de estatística descritiva e de inferência estatística; o estudo de estratégias de contagem e do cálculo de probabilidades etc. (SÃO PAULO, 2011, p.44)

No dia a dia, para os professores, o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, está basicamente representado na forma dos *Cadernos do Aluno e do Professor,* que são organizados de acordo com a série, ano e semestre. Neles, são apresentadas Situações de Aprendizagem para orientar o trabalho do professor no ensino dos conteúdos.

As Situações de Aprendizagem são sequências didáticas permeadas por vários conteúdos matemáticos que objetivam desenvolver nos discentes competências e habilidades matemáticas, e desdobram-se sobre contextos variados, sendo as aplicações do cotidiano uma das possibilidades recorrentes.

As abordagens sugeridas nas Situações de Aprendizagem são, de certa forma, diferentes da tradicional, com pouca ênfase ao trabalho de formação conceitual.

No *Caderno do Professor*, no início de cada Situação de Aprendizagem há um quadro com as competências e habilidades esperadas que os alunos desenvolvam com aplicação da sequência didática (Quadro 3).

Quadro 3 – Descrição inicial de uma situação de Aprendizagem

Conteúdos e temas: potências; propriedades de potências.

Competências e habilidades: conhecer e operar com as propriedades das operações com potências de expoentes inteiros; reconhecer a potenciação em situações contextualizadas; transformação de unidades.

Sugestão de estratégias: construção de tabelas e árvores de possibilidades; construção e análise de gráficos e tabelas; uso de calculadora.

Fonte: Caderno do Professor 8º Ano Ensino Fundamental Volume 1 (p. 35)

Em contrapartida, as mesmas habilidades e competências também aparecem na Matriz de Referência para Avaliação (Quadro 4), do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP).

Quadro 4 - Matriz de Referência para Avaliação

TEMA 4

Tratamento da informação.

H33 Resolver problemas que envolvam probabilidades simples. **(GIII)**

H34 Aplicar os raciocínios combinatórios aditivo e/ou multiplicativo na resolução de situações-problema. **(GIII)**

Fonte: Matriz de Referência para Avaliação (p. 88)

O SARESP é um dos indicadores que compõe o Índice de Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo (IDESP), portanto para que a escola tenha um resultado satisfatório no IDESP é fundamental que se cumpra o currículo na ordem estritamente apresentada nos *Caderno do Professor e Aluno.*

Esta forma de organização do processo de ensino e aprendizagem, apresentada pelo Currículo, pode engessar a atuação do professor, pois impõe conteúdos previamente formatados.

Diante desses fatos, nota-se que muitas vezes o professor deixa de apresentar novos temas e utilizar novas metodologias em momentos oportunos, em detrimento da orientação de seguir a ordem explicitada no Currículo.

1.3.3. O Currículo do Estado de São Paulo e os Problemas de Contagem no Ensino Fundamental II

No Ensino Fundamental II, os Problemas de Contagem encontram-se no bloco temático Tratamento de Informações, por outro lado, os autores do documento afirmam que o bloco de conteúdos chamado Números tem como principal finalidade um enriquecimento do escopo da linguagem numérica, inicialmente restrita a situações e problemas envolvendo a contagem e a medida, logo, indiretamente, o tema permeia quase todo o currículo.

No documento existe um quadro com os conteúdos e habilidades de Matemática indicados para cada bimestre e ano, nele os Problemas de Contagem aparecem pela primeira vez no 4º bimestre do 6º ano:

Quadro 5 – Conteúdos e Habilidades de Matemática 6º ano, 4º Bimestre

4º Bimestre	**Números/Relações** Estatística • Leitura e construção de gráficos e tabelas • Média aritmética • Problemas de contagem	• Compreender informações transmitidas em tabelas e gráficos • Saber construir gráficos elementares (barras, linhas, pontos) utilizando escala adequada • Saber calcular, interpretar e utilizar informações relacionadas às medidas de tendência central (média, mediana, moda) • Saber utilizar diagramas de árvore para resolver problemas simples de contagem • Compreender a ideia do princípio multiplicativo de contagem

Fonte: Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (p. 58), grifo nosso.

Analisando os *cadernos do aluno e professor* nota-se que os Problemas de Contagem não foram explorados diretamente, as contagens estiveram em um segundo plano. Um dos objetivos principais era trabalhar com poliminós[2], que segundo os autores, permitem investigar as várias perspectivas de uma figura espacial, e contribuem para o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo.

---

[2] Poliminós são figuras geométricas planas formadas por quadrados iguais.

Ainda em segundo plano, os Problemas de Contagem servem de apoio, a conteúdos como leitura e interpretação de informações estatísticas; coleta; organização; resumo e apresentação de informações; construção e análise de tabelas e gráficos; e cálculo e interpretação das principais medidas de centralidade.

Após o 4º Bimestre do 6º ano, os Problemas de Contagem são sugeridos novamente no 1º Bimestre do 8º ano:

Quadro 6 – Conteúdos e Habilidades de Matemática 8º ano, 1º Bimestre

1º Bimestre	**Números** Números racionais • Transformação de decimais finitos em fração • Dízimas periódicas e fração geratriz Potenciação • Propriedades para expoentes inteiros • Problemas de contagem	• Compreender a ideia de número racional em sua relação com as frações e as razões • Conhecer as condições que fazem com que uma razão entre inteiros possa se expressar por meio de dízimas periódicas; saber calcular a geratriz de uma dízima • Compreender a utilidade do uso da linguagem das potências para representar números muito grandes e muito pequenos • Conhecer as propriedades das potências e saber realizar de modo significativo as operações com potências (expoentes inteiros)

Fonte: Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (p. 61), grifo nosso.

Neste ano, os Problemas de Contagem aparecem brevemente, e estão relacionados à contagem de algarismos de potências de 2, e alguns problemas de geometria, ainda em segundo plano.

Por fim, o tema é encerrado no Ensino Fundamental II, no 4º Bimestre do 9º ano:

Quadro 7 – Conteúdos e Habilidades de Matemática 9º ano, 4º Bimestre

4º Bimestre	**Geometria/Números** Corpos redondos • O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo • Volume e área do cilindro Probabilidade • Problemas de contagem e introdução à probabilidade	• Conhecer a circunferência, seus principais elementos, suas características e suas partes • Compreender o significado do π como uma razão e sua utilização no cálculo do perímetro e da área da circunferência • Saber calcular de modo compreensivo a área e o volume de um cilindro • Saber resolver problemas envolvendo processos de contagem – princípio multiplicativo • Saber resolver problemas que envolvam ideias simples sobre probabilidade

Fonte: Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (p. 64), grifo nosso.

Neste último ano do Ensino Fundamental, os Problemas de Contagem aparecem dando suporte a conceitos de probabilidade associado à geometria, onde a intenção é apresentar a ideia de probabilidade através da experimentação. Além disso, são sugeridas atividades de calcular empiricamente o número de ocorrências da face "cara" em lançamentos sucessivos de uma moeda, ou a ocorrência de números pares em uma série de lançamentos de um dado.

É notório no Currículo de São Paulo no Ensino Fundamental II, que o tema é abordado sempre associados a outros conteúdos, por exemplo, como instrumental para o cálculo de probabilidades.

Nas Situações de Aprendizagem, analogamente as orientações dos PCN, o objetivo não é a exploração dos Problemas de Contagem por si só, mas a apresentação de uma ferramenta para outros cálculos, o que faz com que o conteúdo seja não seja tratado adequadamente.

Além disto, acreditamos que a abordagem apresentada no documento para os Problemas de Contagem é feita de maneira resumida, o que pode comprometer ainda mais sua compreensão.

1.4. PESQUISAS SOBRE OS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL II

Apresentamos uma breve análise de teses e dissertações sobre o ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Fundamental II. É importante ressaltar que não existem muitos trabalhos sobre o tema. Nesse estudo foram analisados os trabalhos de Esteves (2001), Pessoa (2009), Alves (2010), Aquino (2013), Dutra (2014), Miotto (2014), Magalhães Junior (2015), Maciel (2015) e Silva (2016).

Esteves (PUC-SP – 2001) – Investigando os fatores que influenciam o Raciocínio Combinatório em adolescentes de 14 anos - 8ª série do Ensino Fundamental. O objetivo desta pesquisadora consistiu em estudar a aquisição e o desenvolvimento dos primeiros conceitos de Combinatória em adolescentes de 14 anos de idade cursando a última série do Ensino Fundamental. A autora construiu uma sequência de ensino, fundamentada em teorias psicológicas e educacionais, que parte de situações-problema para contagem direta.

Esteves (2001) afirma que o interesse da pesquisa centrou-se na formação do conceito, ligado a operação combinatória, onde procurou investigar mais amiúde a existência de problemas na formação desse conceito.

A questão norteadora da pesquisa foi: “Em função do ensino oferecido, os sujeitos demonstram progresso verificável no que tange o campo conceitual considerado?” E como questão derivada: “Tal observação se diferencia daquela observada no grupo de referência?”

O estudo foi desenvolvido com dois grupos, um experimental e outro de referência. Para o grupo de referência utilizou uma abordagem tradicional com a utilização de fórmulas, já no grupo experimental, utilizou-se uma sequência elaborada pelo autor em que não foram apresentadas as fórmulas, o método utilizado para formação da sequência experimental foi basicamente a criação de situações-problema que se aproximavam da realidade dos alunos.

Em pesquisas com grupo experimental e grupo de referência é necessário determinar o objeto de estudo e as variáveis que podem influenciá-lo, particularmente, em pesquisas na área da educação, selecionar as variáveis que podem afetar o objeto de estudo em questão nem sempre é uma tarefa fácil.

Os dois grupos da pesquisa de Esteves (2001) foram submetidos a testes individuais: um antes de ser introduzido o ensino de Combinatória, o outro, após a introdução. A pesquisadora também realizou uma entrevista com alguns alunos que não apresentaram uma resolução completamente explícita para ela.

Após analisar os protocolos de pesquisa Esteves (2001) constatou algumas concepções que afetavam a aprendizagem do tema, onde destacou: a falta de um procedimento recursivo que levasse a formulação de todas as possibilidades; resposta errônea injustificada; o não uso da árvore de possibilidades ou sua construção inadequada; entendimento da palavra distribuir como dividir; e confusão sobre a importância da ordem nos problemas de interpretação e arranjo.

A pesquisadora também observou que após os alunos aprenderem um procedimento aritmético ou algébrico, eles abandonam as representações.

No grupo experimental, a autora considerou a sequência bastante produtiva, visto que constatou uma evolução passo-a-passo envolvendo as representações das soluções com as discussões relativas ao processo de resolução usado.

Os resultados do trabalho de Esteves (2001) deixaram evidente que os alunos, partícipes da pesquisa, apresentam dificuldades em resolver problemas de Combinatória, as principais causas de fracasso foram referentes à confusão sobre a relevância da ordem, principalmente em problemas de combinação, falta de organização para enumerar os dados sistematicamente, duvidas na identificação da operação aritmética equivalente e interpretação incorreta do problema, quando este apresenta mais de uma etapa.

Finalizando, Esteves (2001) frisou ser de vital importância desenvolver o estudo de Combinatória de forma significativa, apresentando-a desse modo desde o Ensino Fundamental, sem a utilização de fórmulas, para que no Ensino Médio os alunos possam ter esse conteúdo institucionalizado, e consequentemente as fórmulas sejam entendidas plenamente e não apenas como um algoritmo que os levem a mecanizar e associar palavra-chave.

Pessoa (UFPE – 2009) - Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Pessoa (2009), em sua tese de doutorado, analisou o desempenho e as estratégias de alunos da Educação Básica em seus três níveis de escolarização (Ensino Fundamental I e II e Ensino Médio), em relação à resolução de problemas que envolvem raciocínio combinatório. Participaram do estudo 568 alunos de quatro escolas de Pernambuco, duas públicas e duas particulares. Os alunos partícipes da pesquisa responderam, individualmente, a um questionário constituído por 8 questões envolvendo, segundo a autora, os quatro tipos de problemas combinatórios: arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano, dois de cada tipo.

Os quatro primeiros problemas apresentados envolviam números que levavam à um maior número de possibilidades, por outro lado, os quatro últimos levavam a um número menor de resultados.

Os alunos foram orientados a resolver os problemas da forma que eles quisessem e considerassem melhor, como por exemplo, poderiam utilizar: desenhos, tabelas, gráficos, operações numéricas ou quaisquer outras formas.

A análise dos dados coletados foi realizada de forma quantitativa e qualitativa. Na avaliação quantitativa analisou-se o desempenho dos estudantes a partir das variáveis gênero (masculino, feminino), tipo de escola (pública, particular), nível de ensino (Ensino Fundamental I e II e Ensino Médio), significados dos problemas (arranjo, permutação, combinação e produto cartesiano) e ordem de grandeza dos números apresentados nos problemas (que levam a maiores ou a menores possibilidades nos resultados). Na análise qualitativa foram apresentados vários protocolos dos alunos, observando as estratégias e os tipos de respostas.

Em relação às variáveis, a autora concluiu que o gênero não influencia no aprendizado de matemática. A respeito do tipo de escola (particular, publica), a pesquisadora verificou um desempenho semelhante dos alunos no início do ensino fundamental, entretanto à medida que a escolarização avança, os estudantes de escola pública apresentaram um desempenho inferior aos de escola particular. Em relação ao nível de ensino, em todas as escolas, os alunos apresentaram grandes diferenças no nível de desempenho, quando avança a escolarização.

Pessoa (2009) esperava que o maior avanço ocorresse no Ensino Médio, entretanto constatou um avanço grande de desempenho no Ensino Fundamental II se comparado com o Ensino Fundamental I, tal avanço não ocorreu quando comparado o Ensino Médio com Ensino Fundamental II. A autora ainda verificou que, entre os alunos dos anos finais do Ensino Médio, existe um misto de conhecimento formal com experiências informais.

Em relação aos significados dos problemas de Combinatória (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação), a pesquisadora constatou que à medida que a escolarização avança, ocorre um progresso no nível de entendimento dos mesmos. Os resultados também mostraram que os problemas do tipo cartesiano são os que os alunos apresentaram melhor desempenho, e o de combinação simples são os que apresentaram maior dificuldade

A última variável analisada, a ordem de grandeza numérica dos problemas, influenciou diretamente o desempenho dos alunos, visto que nas primeiras questões, o desempenho dos alunos foi menor que nas quatro últimas, Pessoa (2009) acreditou que isso ocorreu pelo fato de ser mais fácil manipular um menor número possibilidades.

A respeito da produção dos discentes, a autora afirmou que mesmo não tendo estudando formalmente os conceitos de combinatória, os alunos dos anos iniciais resolveram os problemas de forma criativa, utilizando-se de lógica e coerência. Os alunos dos anos que já foram ou deveriam ter sido trabalhados formalmente os problemas combinatórios ainda utilizam algumas estratégias semelhantes às dos alunos dos anos iniciais, como o desenho, por exemplo, entretanto de forma mais elaborada.

Em relação às estratégias e ao tipo de resposta que os alunos apresentaram, a autora concluiu que os estudantes demonstram compreender os problemas combinatórios, pois apresentaram diversas estratégias e respostas variadas para as questões, isso aconteceu até mesmo com os alunos que ainda não tinham visto o conteúdo.

Pessoa (2009) ainda ressaltou a importância do reconhecimento da escola e professores no sentido de buscar e aproveitar as pistas fornecidas pelas diversas formas que o aluno utiliza para resolver e responder problemas combinatórios.

A pesquisadora também concluiu que o pensamento combinatório se desenvolve durante um grande período de tempo, e está relacionado diretamente aos conhecimentos adquiridos formalmente e também as experiências extraescolares, relacionadas ou não a situações que envolvem contagens. Por fim, enfatizou a relevância do trabalho formal que deve ser realizado pela escola com a finalidade de sistematizar os conteúdos de Combinatória.

Alves (PUC-MG – 2010) - Uma Introdução ao Pensamento Combinatório no 9º Ano do Ensino Fundamental. Em sua pesquisa Alves (2010) explorou, através da metodologia da engenharia didática, a introdução do pensamento combinatório e sua relação com o cálculo de probabilidades, em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental.

As reflexões norteadoras do trabalho de Alves (2010) foram: de que forma seria possível abordar os conceitos básicos da Análise Combinatória junto a alunos do Ensino Fundamental? Que estratégias didáticas poderiam ser usadas para a implementação deste conteúdo no Ensino Fundamental?

O pesquisador analisou quatro coleções de livros didáticos onde percebeu que no Ensino Fundamental o conteúdo é tratado geralmente vinculado a outros conteúdos, fato que pode limitar a sua abordagem. Após a análise dos livros, e de algumas pesquisas relacionadas com o pensamento combinatório o autor relatou que procurou meios para responder à pergunta norteadora do trabalho: Quais as estratégias de ensino-aprendizagem que podem viabilizar uma introdução dos conceitos básicos de Análise Combinatória e Probabilidade no Ensino Fundamental?

Para a investigação o pesquisador elaborou um módulo de ensino composto de quatro sequências de atividades. O objetivo foi que os alunos identificassem as formas combinatórias de contagem se sua relação com os estudos de probabilidade utilizando diferentes registros de representação.

Alves (2010) buscou atingir seu objetivo através de uma metodologia qualitativa estruturada em quatro fases: análises preliminares; concepção e análise a priori; experimentação, ou condução do módulo de ensino; análise a posteriori e avaliação.

A princípio o pesquisador realizou um estudo piloto, onde aplicou atividades em duplas para os alunos, e constatou que ao invés de utilizarem fórmulas para resolver problemas de arranjo e combinação, utilizavam diferentes estratégias de resolução como à listagem das possibilidades. Os discentes foram orientados a socializarem suas resoluções e nesse momento perceberam quando a ordenação é ou não importante para a formação do agrupamento.

Em seguida tendo por base a teoria de Duval (2003, 2009), o autor explorou e analisou os diferentes tipos de representações e transformações produzidas pelos alunos onde constatou que à medida que conhecem diferentes tipos de registros de representação, melhoram a percepção das diferentes possibilidades nos cálculos de Análise Combinatória.

Além disso, Alves (2010), a partir da produção dos alunos, considerou satisfatórios os resultados obtidos, pois a grande maioria da sala conseguiu compreender a diferença entre arranjo e combinação e as diferentes formas de calcular as possibilidades através dos diferentes registros de representação.

O autor destacou como importante a socialização das ideias, visto que geram oportunidades de questionar e ser questionado e conseguintemente levam a reflexões.

Ao finalizar a pesquisa, Alves (2010) afirmou que no Ensino Fundamental a Combinatória é vista de forma superficial, sem explorar conceitos básicos, tais como permutação, arranjo e combinação. Além disso, o pesquisador frisou a importância da atenção às pesquisas desenvolvidas no campo educacional, visto que as mesmas permitem a incorporação de novas metodologias, levando a reflexão da prática docente.

Aquino (UNIVASF – 2013) - Introduzindo o Pensamento Combinatório nos Anos Finais do Ensino Fundamental: uma proposta de ensino. Aquino (2013), em sua dissertação elaborou uma proposta de ensino voltada a abordagem de Combinatória nos anos finais dos Ensino Fundamental. O principal objetivo foi propor o estudo de Combinatória na respectiva modalidade de ensino, com a finalidade de possibilitar aos alunos a interação com o conteúdo de modo integrador, visto que este tema está presente em diversas situações cotidianas. A autora acredita que a Combinatória não deve ser abordada apenas no Ensino Médio, visto que muitos alunos possuem grandes dificuldades em compreender o assunto, e abordá-lo no Ensino Fundamental pode contribuir para um melhor entendimento ao longo da vida escolar.

A pesquisadora fundamentou o trabalho em uma proposta de ensino que visa a princípio averiguar os conhecimentos prévios dos alunos acerca de Combinatória. A metodologia adotada para a proposta foi o trabalho em grupo, onde Aquino (2013) sugeriu atividades de sondagem envolvendo problemas combinatórios de quatro tipos (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação), em seguida propôs duas outras sequências de atividades envolvendo esses conceitos, e sugere a resolução de diversas maneiras, sem o uso de fórmulas. A autora ressaltou que a motivação que levou a elaboração da proposta está relacionada com a relevância da

Combinatória na formação dos alunos, e também para enriquecer a proposta buscou embasamento em outros autores, livros e documentos oficiais.

Através de seu estudo, a pesquisadora concluiu que é imprescindível o trabalho com Combinatória ao longo do Ensino Fundamental, utilizando princípios simples, sem a utilização de fórmulas, explorando situações que valorize os conhecimentos prévios de cada educando, com o intuito de se construir um "*embasamento"* para auxiliar os alunos na compreensão da Combinatória quando está for explorada no Ensino Médio.

Finalizando, Aquino (2013) destacou a importância do que chamou de os pilares fundamentais para a aprendizagem da Combinatória: a listagem de possibilidades, o destaque para os invariantes de cada tipo de problema combinatório, a sistematização e a generalização. A autora também espera que sua proposta possa auxiliar professores do Ensino Fundamental na abordagem do tema, e conseguintemente contribua para a uma efetiva aprendizagem, e para a solução de problemas que permeiam suas vidas. Além disso, destaca a importância da formação de uma base no Ensino Fundamental, para um melhor entendimento do assunto quando esse for trabalhado no Ensino Médio.

Dutra (UESC – 2014) - Análise Combinatória: Uma proposta para o seu ensino na Educação Básica com ênfase no princípio fundamental da contagem. Nessa dissertação, Dutra (2014), realizou um estudo teórico a respeito de alguns trabalhos desenvolvidos em torno do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória e apresentou uma proposta de ensino, com o intuito de permitir participação efetiva do aluno na construção dos conceitos de arranjo, permutação e combinação, enfatizando o princípio fundamental da contagem na resolução de problemas.

Para recolha de dados o autor considerou o Curso Técnico de Nível Médio Integrado em Informática do Instituto Federal da Bahia (IFBA), Campus de Eunápolis, onde analisou o livro didático adotado pela instituição indicado para o ensino de Combinatória, e identificou um vazio didático, que tentou contornar com o desenvolvimento de uma sequência didática constituída de oito problemas que julgou fundamental no estudo de Combinatória.

Como resultado da pesquisa Dutra (2014), destacou a importância de o estudante participar da construção das fórmulas e perceber que o uso das mesmas não é um conhecimento mecânico, pois requer o desenvolvimento de competências necessárias para alcançar os resultados esperados a partir dos cálculos, passando pela interpretação dos problemas. E ressaltou a importância da análise das representações necessárias (tabelas, enumeração, árvore de possibilidades, etc.).

O autor considerou importante a presença da Análise Combinatória no ensino de Matemática, além de destacar a relevância da escolha adequada da metodologia, tal como a resolução de problemas, para que haja um engajamento dos alunos em situações-problemas do seu cotidiano, influenciando desta forma o desenvolvimento do seu modo de pensar matemático.

Miotto (UTFPR – 2014) - A Análise Combinatória e seu ensino. Nesta dissertação a motivação do autor está pautada na sua própria experiência, onde observou que alunos e professores têm apresentado grande dificuldade em compreender e aplicar os conceitos combinatoriais em problematizações.

O pesquisador afirma que o respectivo trabalho possui dois objetivos: o primeiro está relacionado ao ensino de Análise Combinatória no Ensino Fundamental II e Ensino Médio. O segundo objetivo é buscar aprofundar os próprios conhecimentos relacionados aos conceitos combinatoriais.

No que tange aprofundar o próprio conhecimento, Miotto (2014) dedicou uma parte do estudo a conceitos combinatoriais mais complexos, não abordados junto aos alunos, mas que permitem compreender situações mais elaboradas.

Em relação ao primeiro objetivo, o pesquisador construiu e aplicou dois questionários que procuravam responder algumas dúvidas que possuía em relação à profundidade do conhecimento adquirido pelo aluno. Os questionários também objetivavam comprovar ou refutar a tese de que os estudantes possuem a capacidade de entende conceitos combinatoriais avançados.

No primeiro questionário os alunos foram instigados a resolver algumas situações problema que envolvia combinação e permutação com repetição, tais problemas preparariam o terreno para aplicação do segundo questionário, que versava sobre identidades combinatoriais. A pesquisa foi aplicada a 145 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola de Curitiba, estado do Paraná.

Miotto (2014), também realizou uma rápida pesquisa em livros didáticos e constatou que muitos conceitos combinatoriais são apresentados apenas no 2º ano do Ensino Médio, e afirma que uma opção a esse modelo seria a introdução desses conceitos desde as primeiras séries do Ensino Fundamental.

O pesquisador concluiu que os alunos possuem a capacidade de compreender conceitos mais avançados da Análise Combinatória, desde que haja um bom domínio dos conceitos por parte do professor. E que é possível, partindo de situações-problema, como foi apresentado na pesquisa, orientar os alunos para que consigam compreender e generalizar algumas identidades combinatoriais. Em relação ao segundo objetivo, Miotto (2014) destacou que obteve êxito no aprofundamento dos próprios conhecimentos sobre o tema, e afirma que suas aulas ganharam mais qualidade após os respectivos estudos.

Magalhães Junior (UECE - 2015) - Uma discussão intuitiva sobre o princípio multiplicativo da Análise Combinatória. O objetivo desse autor é incentivar professores e alunos a usar o princípio multiplicativo como meio de interpretar, compreender e solucionar alguns problemas de Análise Combinatória.

Magalhães Junior (2015), selecionou oito problemas de Análise Combinatória, e, em seguida, resolveu cada um deles de dois modos diferentes. Para primeira resolução utilizou estratégias mecanizadas, aplicando algumas fórmulas conhecidas no ensino de Análise Combinatória. Na segunda utilizou a proposta do trabalho, ou seja, o Princípio Multiplicativo.

O autor sugeriu que para resolução de problemas de Análise Combinatória pode-se utilizar o Princípio Multiplicativo como um facilitador na realização de contagens. E destaca uma sequência de atitudes, que considera importante, na hora de atacar problemas de Combinatória: pensar, concentrar-se, colocar-se no lugar da pessoa que vai realizar a situação proposta no problema, transformar determinada decisão a ser tomada em uma sequência de decisões mais simples que permita o uso do Princípio Multiplicativo. E, caso as decisões forem divididas em etapas, é fundamental que as mais complexas sejam tomadas em primeiro lugar.

O pesquisador também frisou a relação existente entre as definições de arranjo, permutação e combinação, além disso, afirmou que os estudantes podem participar da construção das respectivas fórmulas e entender que o uso das mesmas não é um conhecimento mecânico. O autor ressaltou que o uso do Princípio Multiplicativo proporciona um melhor desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Magalhães Junior (2015) considerou importante o ensino de Análise Combinatória desde as séries inicias da educação básica. Entretanto, destacou que é imprescindível, para a construção do conceito, a utilização de meios que estimule o raciocínio.

Maciel (UFMS – 2015) - Conceitos de Análise Combinatória e suas aplicações por meio de situações problemas. O objetivo deste pesquisador é introduzir conceitos básicos de Análise Combinatória, Probabilidade e Probabilidade Condicional no Ensino Básico, a partir do 9º ano do Ensino Fundamental, enfatizando a resolução de problemas com o mínimo de fórmulas exaustivas. O autor propôs o desenvolvimento dos conteúdos a partir de exemplos, questões de concursos e do Exame Nacional do Ensino Médio.

Maciel (2015) começou abordando a essência da Análise Combinatória, que é o Princípio Fundamental da Contagem, em seguida mostrou os agrupamentos de maior aplicabilidade, a permutação e a combinação, destacando a diferença entre eles, pois considerou uma das maiores dificuldades dos discentes, quando na Resolução de Problemas.

O autor expôs os conceitos e alguns problemas de Probabilidade e Probabilidade Condicional, por entender que os alunos sentem muitas dificuldades em interpretar e aplicar esse tema.

O pesquisador também apresentou um jogo que pode ser aplicado a partir do 8º ano do Ensino Fundamental, que possibilita a união entre o mesmo e a resolução de problemas, auxiliando na construção do conceito matemático. O jogo denominado Mini-Bozó requer apenas um conhecimento básico de probabilidade.

Maciel (2015) afirmou que escolheu o respectivo tema, pelo fato de ser pouco tratado nos livros didáticos e acredita que deve haver uma efetiva ação para pelo menos amenizar essa situação. Ao fim, concluiu que se faz necessário a diversificação das abordagens a cerca de um determinado tema, com a utilização de várias atividades que auxiliem de forma significativa o processo de aprendizagem, pois acredita que a Análise Combinatória é um tema que merece dedicação, disciplina e vontade de aprender as diversas aplicabilidades nos diversos campos de atuação.

Silva (UFPE – 2016) – A COMBINATÓRIA: abordagem em documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do Ensino Fundamental. O objetivo desta autora foi analisar a abordagem da Combinatória em orientações curriculares de documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do Ensino Fundamental e se existe consonância entre tais abordagens. Em sua fundamentação teórica, a pesquisadora discutiu sobre a importância de cada um dos elementos citados e suas respectivas relações com a Combinatória, além disso, Silva (2016) apoiou seu trabalho na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986) para análise dos livros.

A pesquisadora analisou os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática dos anos inicias e finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997 e 1998) e Parâmetros Curriculares de Matemática para Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012). Complementando, também analisou pesquisas recentes publicadas em eventos nacionais e internacionais ocorridos no Brasil no período de 2009 a 2013, as quais estudaram sobre sondagem de alunos e intervenções de ensino em Combinatória. Por fim, analisou o livro didático, na qual considerou coleções aprovados pelo PNLD 2013, dos anos iniciais e PNLD 2014, dos anos finais do Ensino Fundamental. A autora apresentou a análise da abordagem da Combinatória em cada um desses documentos, confrontando-os de forma gradativa a mediada que cada elemento foi apresentado.

A pesquisa foi de cunho qualitativo e quantitativo, do ponto de vista dos procedimentos de coleta de dados, o trabalho caracteriza-se como uma pesquisa documental feita a partir de análise de materiais já publicados.

A partir dos resultados, Silva (2016) constatou que os documentos oficiais tratam claramente do ensino de Combinatória desde o período de alfabetização matemática, envolvendo os quatro significados do conceito (produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação), e que devem estar relacionados com os campos de Números e Operações e Tratamento da Informação. Os documentos também orientam que ao longo de todo o Ensino Fundamental sejam utilizadas diferentes estratégias de resolução, que irão levar ao uso do princípio fundamental da contagem nos anos finais, sem que haja a utilização de fórmulas.

Em relação aos estudos recentes, Silva (2016) identificou que desde cedo os alunos são capazes de resolver Problemas de Contagem, utilizando desenhos, listagem e árvores de possibilidades, etc. Entretanto, a autora verificou que é preciso superar alguns obstáculos de resolução relacionados à compreensão dos invariantes, elemento este que, segundo os estudos, precisam ser explicitados para os estudantes por meio de um ensino sistemático, que vise à organização das estratégias de resolução.

A respeito das representações simbólicas, Silva (2016) observou que as coleções se relacionam diretamente com as orientações curriculares analisadas, assim como nas pesquisas.

A pesquisadora destacou que as coleções sugerem em boa parte das atividades o uso de uma estratégia não formal para resolução, e também as apresentam com diferentes representações junto aos enunciados das questões, no qual os desenhos, quadros e tabelas, por exemplo, podem servir como um apoio ao pensamento dos alunos na compreensão das atividades e para a mobilização de uma estratégia.

Silva (2016) destaca que a análise dos livros didáticos aponta a necessidade de maior atenção na abordagem da Combinatória nos anos iniciais, envolvendo todos os significados do conceito, e a relação com o Campo do Tratamento da Informação com a Probabilidade e a Estatística. Finalizando, em relação aos livros didáticos, a autora destaca que é necessário apresentar orientações mais concisas no manual do professor para o trabalho desse conteúdo.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentamos os referenciais teóricos e metodológicos que deram suporte a pesquisa: a teoria dos registros de representação semiótica, proposta por Duval (2003, 2009 e 2011), que trata da mobilização de registros de representação semiótica e as atividades investigativas propostas por Ponte et al. (2015) que contribuíram para o desenvolvimento e aplicação das tarefas.

2.1. UM OLHAR SOBRE A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Há alguns milênios, na pré-história, o homem começou a confeccionar objetos que o auxiliavam nas atividades diárias, e também passou a observar o mundo a sua volta em termos de quantidades, para se ter noções sobre os recursos que lhes garantiam a subsistência, tais como alimentos e água. Foi nesse período que o homem se apropriou dos números para facilitar e registrar suas atividades cotidianas. Segundo Bezerra (2013, p. 1):

> Antes de dominar o fogo ou inventar a roda certamente o homem aprendeu a contar. A percepção de quantidade nos acompanha há milhares de anos e foi essa capacidade que permitiu a manutenção de grande parte dos conceitos que hoje nos permitem viver em sociedade.

Os primeiros registros de representação de contagem aconteceram em diferentes épocas e lugares, com procedimentos variados, por exemplo, os pastores de ovelhas usavam pedras para administrar seu rebanho, associando a cada pedra um animal, logo havia uma relação biunívoca entre pedras e ovelhas. Para efeito de registros de representação, da mesma forma, eram usados nós em cordas, marcas nas paredes, riscos em ossos, gravuras nas cavernas entre outras marcações. Os primeiros registros relacionados à contagem foram encontrados por arqueólogos em 1937 na Europa: um osso de lobo contendo pequenos riscos.

A noção de representação frequentemente auxilia nos estudos dos fenômenos ligados ao conhecimento humano, particularmente, em relação aos objetos matemáticos, por serem abstratos, necessitam de uma determinada mediação para se tornarem acessíveis ao indivíduo, nesse sentido Duval (2003, p. 21) afirma que:

> [...] os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou microscopicamente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida, etc.). O acesso aos objetos passa necessariamente por representação semiótica. Além do que, isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação.

Portanto, para acessar o objeto matemático é fundamental utilizar suas representações como tabelas, registros algébricos, gráficos, diagramas, esquemas, desenhos, figuras geométricas, entre outros. Duval (2009) denomina essas representações de representações semióticas.

Para Santaella (2002), a semiótica é uma ciência que investiga todas as linguagens que existem, com objetivo de examinar a constituição dos fenômenos de produção de significados e sentidos.

Segundo Duval (2009, p. 16), “de modo mais geral os indivíduos estão agora mergulhados em um meio cultural que diversifica os modos de representação e que multiplica o recurso a essa diversidade de modos”.

Como há uma extensa diversidade de modos de representação, é importante não confundir o objeto com sua representação, o autor afirma que confundir o objeto com sua representação pode ao longo do tempo levar a uma perda considerável da sua compreensão. Conforme Duval (2011, p. 47):

> [...] fundamental jamais confundir uma representação e o objeto representado. Pois, corremos o risco de considerar duas representações diferentes de um mesmo objeto por dois objetos diferentes ou, ao contrário, arriscamos a considerar duas representações de um mesmo objeto porque seus conteúdos são quase parecidos.

Ademais, é relevante enfatizar que um objeto matemático pode ser representado de inúmeras maneiras. Se considerarmos o princípio fundamental da contagem um procedimento que está presente em algumas representações de objetos matemáticos, podemos representá-lo de modo esquemático, com uma árvore de possibilidades, entretanto esse registro de representação não tem o mesmo conteúdo que o registro semiótico via lista, ou seja, listar todas as possibilidades.

A relação entre objeto e representação é essencial para os estudos de Problemas de Contagem, dado que “toda comunicação em matemática se estabelece com base nessas representações” (MACHADO, 2002, p. 8).

Para Duval (2009), a aprendizagem de um conceito matemático está intimamente ligada à capacidade do estudante de distinguir o objeto de seus variados registros.

Além de constituírem um sistema de comunicação, os registros de representação semiótica também possibilitam a organização das informações relacionadas ao objeto representado.

No estudo dos Problemas de Contagem pode-se visualizar um objeto destacado do seu sistema semiótico e seu registro de representação:

Quadro 8 - Representação numérica de um arranjo de 4 elementos tomados 2 a 2

$$\frac{4.3.2.1}{2.1}$$

Objeto matemático: Arranjo de 4 elementos tomados 2 a 2

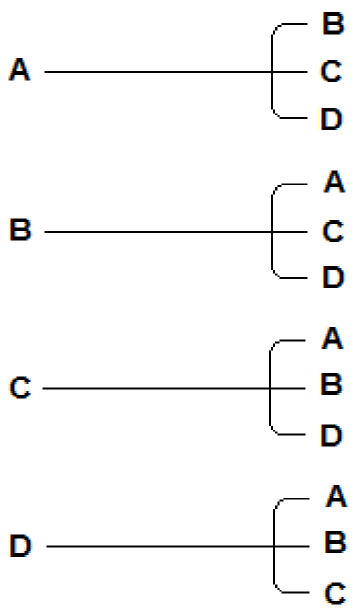
Sistema semiótico: Simbólico

Representação: Numérica

Fonte: Arquivo do autor

O exemplo acima corresponde a apenas uma das formas de representação, existem outros sistemas semióticos com outras representações, como o seguinte:

Quadro 9 - Representação esquemática de um arranjo de 4 elementos tomados 2 a 2



Objeto matemático: Arranjo de 4 elementos tomados 2 a 2

Sistema semiótico: Figural

Representação: Árvore de possibilidades

Fonte: Arquivo do autor

Geralmente pode-se representar um objeto matemático com várias representações, conforme Duval (2003, p. 14), para que ocorra a construção do conhecimento é necessária a mobilização dessas representações:

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação.

Segundo Duval (2003), na teoria dos registros de representação semiótica há duas transformações de representações semióticas fundamentais, que são consideravelmente diferentes: os tratamentos e as conversões.

Os tratamentos estão relacionados com operações internas a um mesmo registro, onde os registros permanecem num mesmo sistema de representações, Duval (2003, p.16), afirma que “Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação”.

Já as conversões, estão relacionadas com a passagem de uma representação para outra, como mudança no sistema de registro, segundo Duval (2003, p.16):

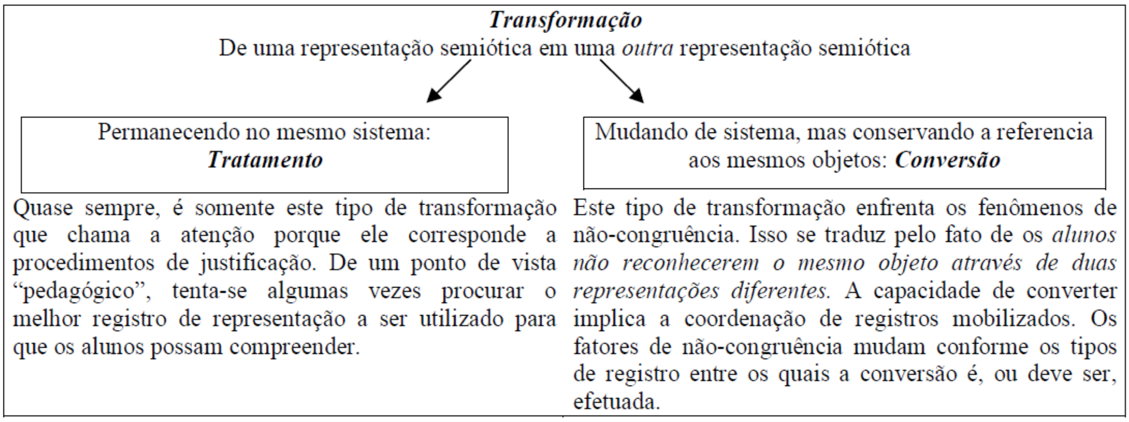
> As conversões são transformações de representação que consistem em mudança de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, reconhecer a escrita algébrica de uma equação em sua representação gráfica.

A conversão permiti ao aluno transitar por diversos tipos de registo, gerando um maior entendimento do objeto matemático em questão, já o tratamento não permite essa transitividade. Nesse sentido, Damm (1999, p. 147) destaca que:

> A conversão é um passo fundamental no trabalho com representações semióticas, pois a transformação de um registro em outro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático que está sendo representado, não pode ser confundido com o tratamento. O tratamento é interno ao registro, já a conversão se dá entre os registros, ou seja, é exterior ao registro de partida.

As distinções entre as transformações de uma representação semiótica podem ser observadas no quadro a seguir:

Quadro 10 – Transformação de uma representação semiótica para outra



Transformação
De uma representação semiótica em uma *outra* representação semiótica

Permanecendo no mesmo sistema: ***Tratamento***	Mudando de sistema, mas conservando a referencia aos mesmos objetos: ***Conversão***
Quase sempre, é somente este tipo de transformação que chama a atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação. De um ponto de vista "pedagógico", tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender.	Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não-congruência. Isso se traduz pelo fato de os *alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes.* A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não-congruência mudam conforme os tipos de registro entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada.

Fonte: Duval, 2003, p.15

Ainda em relação à conversão, para analisá-la é necessário que haja uma comparação entre o registro de representação de partida com o registro de representação de chegada, e essa comparação determina dois fenômenos importantes na teoria dos registros de representação semiótica: o da congruência e o da não congruência, Duval (2003) indica três critérios para identificar uma congruência:

> 1. correspondência semântica, ou correspondência uma a uma entre os elementos significantes: para cada elemento simples no registro de saída tem um elemento simples correspondente no registro de chegada.
> 2. unicidade semântica terminal: cada unidade significante no registro de saída tem uma única unidade significante no registro de chegada.
> 3. ordem que compõe cada uma das representações: diz respeito à forma de apresentação de cada uma das representações. (DUVAL apud Rosa, 2009, p. 30)

Para Duval (2003), quando uma das três condições descritas acima não está satisfeita a conversão é não congruente.

A representação de um objeto matemático e a conversão de representações entre registros do mesmo, são extremamente importantes no ensino aprendizagem de matemática. Nesse sentido, é relevante frisar que a conversão está diretamente relacionada com a representação do objeto e não com o registro, nesse sentido, Henriques e Almouloud (2016, p. 471) destacam que:

> [...] não se converte o registro, mas a representação do objeto em questão de um registro para outro. Para compreender melhor [...], é suficiente fazer uma analogia, considerando as duas janelas (algébrica e geométrica) do software GeoGebra, como registros distintos, o objeto sendo, por exemplo, a Função Quadrática, sendo a representação de uma função quadrática específica, inicialmente formulada na janela algébrica, e a conversão sendo a transformação ou a representação gráfica dessa função na janela geométrica. Logo, quem se transforma ou muda de registro não é a janela, mas a representação formulada nessa janela. Assim, insiste-se em afirmar, [...], que não se podem converter registros, mas as representações de objetos neles formuladas.

A teoria dos registros de representação semiótica tem uma importante função nesse trabalho, pois esperamos que os estudantes utilizem diversos registros para entender e resolver as tarefas propostas.

Além disso, acreditamos que trabalho com a utilização de diferentes formas de representação semiótica, através do desenvolvimento de tratamentos e conversões, contribuem para a construção dos conceitos presentes nos Problemas de Contagem.

2.2. UM OLHAR SOBRE AS TAREFAS DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

No presente trabalho utilizaremos as tarefas de Investigação Matemática, na perspectiva de Ponte et al. (2015). Nessas tarefas são enfatizados determinados processos matemáticos, como por exemplo, identificar regularidades, testar hipóteses, conjecturar, refletir e generalizar. São situações dinâmicas de contextos variados. Podem ter como ponta pé inicial uma questão ou uma situação proposta pelo professor ou pelos próprios alunos. Em nossa pesquisa a tarefa foi formulada pelo professor e ofertadas aos estudantes.

Aprender matemática não é simplesmente aprender técnicas, algoritmos, definições e conceitos. Para que ocorra uma efetiva aprendizagem, o aluno deve construir o próprio conhecimento, edificando os pilares da sua experiência matemática com a desconstrução e reconstrução de ideias fundamentais dessa ciência. Assim sendo, o estudante se torna um investigador e acaba percebendo de modo natural as aplicações da matemática e conseguintemente melhora a sua compreensão do mundo.

Conforme Ponte et al. (2015), investigar não implica trabalhar com problemas difíceis, e sim, levar os estudantes a procederem como matemáticos, no sentido de estudar questões que geram determinadas dúvidas, muitas vezes instigadoras.

No que tange aos processos de ensino e aprendizagem, a Investigação Matemática pode ser muito produtiva, especialmente quando os educandos mostram interesse por questões que não possuem uma resposta pronta, no entanto, normalmente, para que a curiosidade seja despertada é fundamental uma boa compreensão do problema, para então iniciar uma possível investigação de forma organizada, e eventualmente encontrar uma ou mais soluções da questão.

Segundo Ponte et al. (2015, p. 23), a investigação matemática pode trazer para sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, despertando no aluno interesses e atitudes de um matemático:

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor.

A Investigação Matemática contribui para que o estudante abandone aos poucos a crença de que o pensamento matemático está estritamente relacionado a relembrar e aplicar fatos e fórmulas.

Ponte et al. (2015) coloca que a realização de uma Investigação Matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro está relacionado com o reconhecimento da situação e a formulação de indagações que contribuíram para o entendimento do problema. O segundo com a construção de conjecturas. O terceiro diz respeito ao ataque a conjectura através de testes, com objetivo de verificar a consistência da mesma. E, por fim, inclui uma reflexão objetivando a justificação e avaliação do trabalho. Esses momentos podem incluir várias atividades como se observa no quadro 11.

Quadro 11 – Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problemática • Explorar a situação problemática • Formular questões
Conjecturas	• Organizar dados • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre as conjecturas)
Testes e reformulação	• Realizar testes • Refinar as conjecturas
Justificação e avaliação	• Justificar as conjecturas • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte et al., 2015, p. 21

Segundo Oliveira et al*.* (1996, p. 2), uma atividade de investigação é aquela “em que é dada ênfase a processos matemáticos, tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, reflectir e generalizar”.

Ainda nessa perspectiva, Ponte et al*.* (2015), destaca que a investigação matemática pode possuir características próprias dentro da matemática, contribuindo para uma formulação de conjecturas, que devem ser testadas e provadas.

É importante destacar que exercícios, problemas e atividades investigativas divergem em vários aspectos.

Os exercícios são comumente propostos pelos professores, é uma atividade que induz a utilização de um conhecimento matemático já internalizado, normalmente um algoritmo ou uma fórmula, e serve principalmente para automatizar técnicas, habilidades e procedimentos. Um exemplo de exercício seria, efetue as operações:

$$\frac{4.3.2.1}{2.1}$$

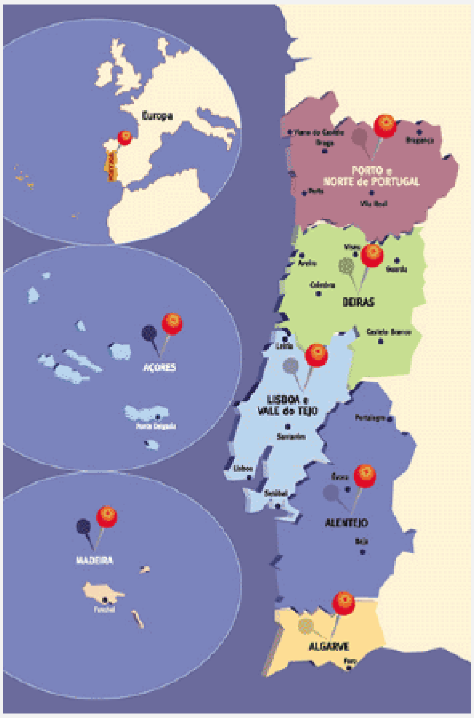
Segundo Ponte et al. (2015), problemas e os exercícios possuem, no enunciado, dados suficientes para se responder o que é pedido, de forma clara e objetiva, sem ambiguidades. Especificamente no exercício, a resposta é binária, ou seja, está certa ou errada.

A resolução de um problema não envolve simplesmente a aplicação direta e imediata de fórmulas e procedimentos já conhecidos e exercitados anteriormente, frequentemente exige alguma reflexão e tomadas de decisão. Exemplificando, um problema seria: Quantos grupos diferentes de 3 pessoas podem ser formados com 8 pessoas?

Já uma atividade investigativa, para Ponte et al. (2015), dissemelha do exercício e do problema, por ser uma situação mais ampla, pouco definida, e que depende dos caminhos escolhidos pelo investigador para atacar o problema. Assim podem surgir resultados diferentes de uma mesma atividade investigativa. Exemplificando, uma atividade investigativa seria:

Figura 3 - Tarefa de natureza investigativa aplicada durante um estudo realizado por Magda Pereira

Viagens pelo Mundo



Pretende-se fazer um passeio por Portugal, visitando as sete zonas assinaladas no mapa.

Vamos chamar de "um percurso" o caminho mais curto que une duas regiões quaisquer de Portugal.

- Quantos percursos diferentes podem ser formados entre as sete regiões de Portugal?
- E se considerarmos os percursos entre as cidades de cada uma dessas regiões?
- Existe alguma lei geral que nos permita considerar todos os percursos que unem todas as cidades de um país? E do mundo?

Fonte: PEREIRA apud Morais, 2010, p. 13

Ainda segundo Ponte et al. (2015), o início da tarefa investigativa pode ser programável, mas por outro lado, não se pode prever como irá terminar. São inúmeros os percursos que os estudantes poderão trilhar, podendo ocorrer avanços, retrocessos e divergências. Erros conceituais são comuns nessa enorme multiplicidade de cenários.

Um bom problema matemático além de representar um desafio, nos coloca a frente de várias descobertas, que podem se revelar muito importantes. Tais descobertas tendem a surgir mesmo quando não solucionamos o problema, logo as tentativas sempre são validas.

As tarefas de investigações matemáticas têm relevante função nesse trabalho, pois foram utilizadas como suporte para elaboração das atividades, e para o desenvolvimento das mesmas em sala de aula.

Algumas tarefas que envolvem contagens, apesar de elementares, conseguiram despertar o interesse e a curiosidade nos estudantes, que tentavam de diversas maneiras buscar a solução com suas próprias técnicas, visto que não conheciam de antemão procedimentos ou algoritmos que lhes desse uma resposta de forma imediata. Os alunos tiveram a oportunidade de investigar e sentir o sabor de realizar a própria descoberta.

3. O PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Dedicamos este capítulo para apresentar a escolha metodológica da pesquisa, a elaboração das tarefas, o universo da pesquisa de campo e os participantes. Expomos as intenções das tarefas exploratório-investigativas, assim como a caracterização dos significados de problemas combinatórios. Descrevemos aspectos da unidade escolar onde ocorreu a pesquisa e também dos seus estudantes partícipes da investigação.

3.1 ESCOLHA METODOLÓGICA DE PESQUISA

Este estudo foi realizado no âmbito de uma sequência de ensino, na busca de respostas para as possíveis contribuições que a mobilização de registros de representação semiótica traz para a realização de contagens, num cenário de tarefas exploratório-investigativas. Também houve uma preocupação no sentido de entender como os estudantes articulavam a capacidade de generalização nas resoluções das tarefas.

Desenvolvemos um estudo de natureza qualitativa e interpretativa, por estarmos empenhados em entender noções de compreensão, significado e ação (COUTINHO, 2008). Segundo esta autora estávamos interessados em compreender como os alunos participantes da pesquisa interpretam as tarefas propostas, e analisar a produção matemática oriunda desse processo.

O professor-pesquisador procurou observar com um mínimo de interferência o desenrolar das aulas, apenas houve incentivo a investigação e às testagens de resultados, sempre privilegiando a autonomia de raciocínio dos estudantes. A produção de informações para a presente pesquisa foi obtida através dos registros escritos produzidos pelos alunos e notas de campo (diário de bordo)[3].

[3] Diário de bordo é um instrumento em que o investigador registra as notas retiradas das suas observações.

3.2. ELABORAÇÃO E APLICAÇÃO DAS TAREFAS

As tarefas foram elaboradas de forma a possibilitar ao estudante, além de ser protagonista em uma experiência matemática, sentir o sabor da descoberta de algumas propriedades, promovendo a construção de novos conhecimentos. A respectiva elaboração seguiu a abordagem teórico-metodológica das Investigações Matemáticas.

Ao elaborar as tarefas deu-se prioridade ao uso dos seguintes registros de representação: numéricos, figuras, esquemas, listagem de possibilidades, tabelas, etc. E, no momento da aplicação, foi dado aos estudantes a liberdade de escolha de estratégias, para que se sentissem mais à vontade dentro do grupo para buscar as soluções dos problemas.

Há, assim, a intenção de auxiliar no processo construção de conceitos relacionados aos Problemas de Contagem e conduzir a reflexão, compreensão e análise das situações-problema propostas.

Como instrumento de recolha de dados foi utilizado notas de campo (diário de bordo) e as próprias tarefas, constituídas por 4 problemas de contagem, envolvendo, segundo Pessoa e Borba (2009), os significados presentes em Combinatória (tipos de problemas): produto cartesiano, permutação simples, arranjo simples e combinação simples (Quadro 12). Foi aplicado um problema de cada tipo.

Quadro 12 - Caracterização dos *significados* (tipos) de problemas combinatórios, exemplos de situações-problema e de *invariantes*.

	Exemplos de *Situações-problema*	*Invariantes*
Produto Cartesiano	Ana Paula vai viajar e levará em sua mala 4 blusas (verde, amarela, rosa e vermelha) e duas calças (preta e azul). Quantas combinações de roupas diferentes ela pode formar combinando cada calça com cada blusa?	- Dado dois (*ou mais*) conjuntos distintos (com n e com p elementos), os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto. - A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto.
Permutação simples (sem repetição)	Calcule o número de anagramas da palavra AMOR.	- Todos os **n** elementos do conjunto serão usados; - A ordem dos elementos gera novas possibilidades.
Arranjo simples (sem repetição)	O quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?	- Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **0**< **p** < **n** - A ordem dos elementos gera novas possibilidades.
Combinação simples (sem repetição)	Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas iguais. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?	- Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **0**< **p** < **n** - A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Fonte: Pessoa e Borba (2009)

Em cada problema incluiu-se quatro alíneas de dificuldade crescente:

a) a primeira envolvia um pequeno número de elementos, podendo ser resolvida rapidamente por listagem de todos os casos possíveis;

b) a segunda envolvia um número um pouco maior de elementos, implicando numa maior dificuldade de resolução;

c) a terceira envolvia um número ainda maior de elementos que a segunda, implicando numa maior dificuldade de resolução através da listagem de todos os casos possíveis;

d) a quarta, referia-se ao caso geral, assim nessa última alínea pretendia-se que os estudantes estabelecessem uma lei geral adequada a situação descrita no problema.

A aplicação das quatro tarefas para os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental ocorreu no mês de outubro de 2016, no terceiro bimestre. A aplicação de cada tarefa ocorreu em duas aulas de 50 minutos em grupos de 4 ou 5 alunos. Foi dada aos estudantes a liberdade de definir os membros de cada grupo.

No início das aulas foi ofertado aos alunos uma folha com as questões da respectiva tarefa, em seguida o professor-pesquisador fez uma introdução oral, para garantir que todos entendessem os problemas propostos e aquilo que se esperava deles no decurso da atividade, ou seja, a realização das contagens utilizando diversos registros de representação.

Os estudantes tiveram um pequeno contato com Problemas de Contagem e estratégias de resolução dos mesmos no início do bimestre anterior, através de problemas que constavam no *Caderno do Aluno.* Entretanto a realização das tarefas não exigia nenhum conhecimento prévio de Combinatória, pois poderiam ser resolvidas com estratégias intuitivas de enumeração.

3.3. UNIVERSO DA PESQUISA DE CAMPO

A pesquisa foi realizada em uma escola estadual, localizada no município de Ribeirão Grande, interior do estado de São Paulo, pertencente à Diretoria Regional de Ensino de Itapeva. Nessa escola, de acordo com os dados de 2016, estavam matriculados 642 estudantes sendo 465 matriculados no ensino Fundamental II, 18 na Educação de Jovens e Adultos (EJA), Fundamental II e 275 no Ensino Médio.

A unidade escolar funciona em três períodos, manhã, tarde e noite, atendendo estudantes do 6º Ano do Ensino Fundamental Regular a 3ª série do Ensino Médio Regular e EJA nos anos finais do Ensino Fundamental. O horário de funcionamento do período da manhã é das 07h00min às 12h20min, no período da tarde das 12h50min às 18h10min, e no noturno das 19h00min às 23h00min.

No período da manhã existiam três turmas de 9º Ano, e seis turmas do Ensino Médio, sendo três de 1º ano, duas de 2º ano e duas de 3º ano. Já no período da tarde frequentavam os estudantes do Ensino Fundamental do 6º ao 8º ano, compostos por três turmas de 6º ano, quatro de 7º ano e três de 8º ano. Por fim, o período noturno era composto por apenas uma turma de 3ª série do Ensino Médio e uma de EJA.

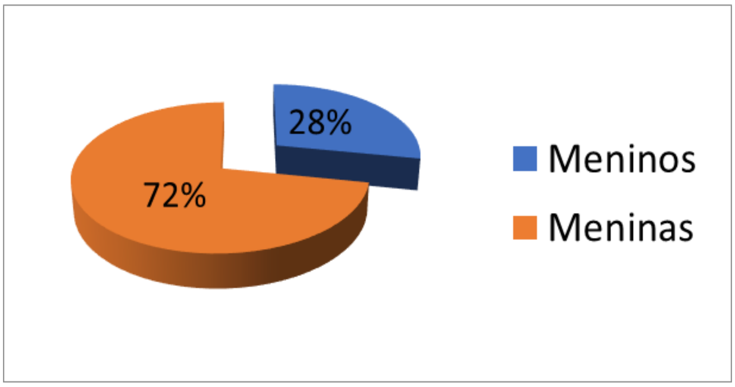
Ao todo existem treze salas de aula, um laboratório de informática, uma sala de vídeo, sala de leitura, sala de professores, refeitório, quadra coberta e um amplo espaço de área externa com muito verde. A grande maioria dos estudantes residiam na zona rural. O corpo discente era composto por um coordenador pedagógico e um professor mediador, 27 professores efetivos, sendo um readaptado (professor que não ministra aulas em função de alteração na sua capacidade de trabalho, e está exercendo outras atividades), 21 docentes na categoria contratados, sendo dois readaptados.

O quadro administrativo consistia em um diretor, um vice-diretor, um vice-diretor da escola da família, seis agentes de organização escolar e seis agentes de serviço escolar.

3.4. PARTICIPANTES

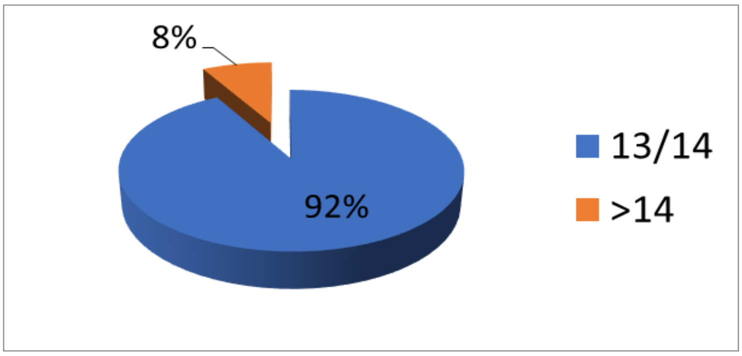
A turma em estudo era uma turma do 8º ano constituída inicialmente por 26 alunos, 8 meninos e 18 meninas. Durante o 1º bimestre um aluno deixou de fazer parte integrante da turma, portanto, a mesma ficou constituída por 7 (28%) meninos e 18 (72%) meninas (Figura 4). No que diz respeito à idade, a maioria dos alunos possuía entre 13 e 14 anos, existindo apenas dois que saem deste padrão (Figura 5).

Figura 4 – Gênero dos alunos (%)



Fonte: Arquivo do autor

Figura 5 – Idade dos alunos (%)



Fonte: Arquivo do autor

É importante destacar que a maior parte dos estudantes se envolveu significativamente nas tarefas, tanto em termos de desenvolvimento das suas atividades matemáticas quanto nas interações com os demais integrantes do grupo.

4. ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA DOS ALUNOS

Neste capítulo apresentamos o conteúdo de cada uma das quatro tarefas constituídas por 4 problemas de contagem, envolvendo os significados, segundo Pessoa e Borba (2009), presentes em Combinatória: produto cartesiano (tarefa 1), permutação simples (tarefa 2), arranjo simples (tarefa 3) e combinação simples (tarefa 4).

A princípio analisaremos individualmente as tarefas e, posteriormente realizaremos a análise da produção dos estudantes, nesta última, apresentamos o desempenho dos 5 grupos, e também a análise qualitativa da produção matemática.

Todos os grupos efetuaram transformações de representações semióticas, a maioria realizou conversões do registro língua natural (enunciado da tarefa) para um ou dois outros registros. Durante as análises destacaremos algumas conversões que não partem diretamente dos enunciados e alguns tratamentos que partem ou não dos enunciados. Nesse aspecto, Duval (2003, p. 18) considera que “a passagem de um enunciado em língua natural a uma representação em outro registro toca um conjunto complexo de operações para designar os objetos”.

Através da análise das estratégias e dos registros de representação utilizados pelos alunos é possível identificar particularidades na aprendizagem de Problemas de Contagem. As tarefas foram apresentadas em Linguagem Natural ***(LN)***, para resolvê-las os estudantes poderiam realizar conversões, utilizando outras representações, como: Numérica ***(N)***, Esquemática ***(E)***, Árvore de Possibilidades ***(AP)***, Tabelas ***(T)***, Figuras ***(F)***, Listagem das Possibilidades ***(LP)***, etc. Também poderiam efetuar tratamentos mantendo o registro de representação em Linguagem Natural. Identificaremos os grupos pelas letras do alfabeto (V, W, X, Y e Z).

4.1. ANÁLISE A PRIORI DA TAREFA 1: PRODUTO CARTESIANO

Para Pessoa e Borba (2009), nos problemas de produto cartesiano as seguintes relações e propriedades se mantêm constantes:

- Dado dois ou mais conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto;
- A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado.

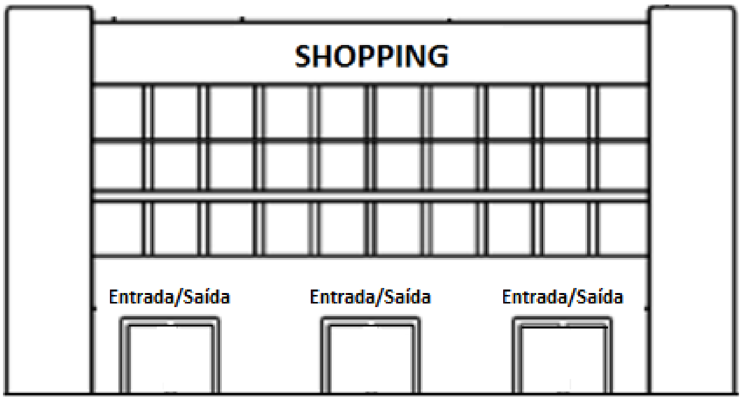
No caso da primeira tarefa ofertada aos alunos, os conjuntos disjuntos são o conjunto dos modos de entrar e o conjunto dos modos de sair do shopping, que foram combinadas para formarem um novo conjunto de terceira natureza, o das maneiras de entrar e sair do futuro edifício.

Esta tarefa teve por finalidade desenvolver o cálculo das possibilidades por meio da escrita das opções e também conduzir a observação da regularidade que permeia os três primeiros itens, para elaboração da conjectura da lei geral e construção do conceito de produto cartesiano. Além disso, nos itens (1), (2) e (3) esperava-se que os estudantes registrassem os modos distintos de entrar e sair do shopping, por exemplo, enumerando as maneiras, utilizando algum tipo de registro de representação, como árvore de possibilidades, tabelas, listagem das possibilidades, etc.

A tarefa é finalizada com uma situação onde se supõe que o shopping terá n entradas/saídas, com o objetivo de conduzir a uma generalização das situações realizadas anteriormente.

TAREFA 1: ENTRADAS/SAÍDAS

Um engenheiro pretende construir um shopping com várias entradas/saídas.



De quantas maneiras distintas uma pessoa poderá entrar e sair do futuro edifício se:

1. O shopping possuir apenas 1 entrada/saída?
2. O shopping possuir 2 entradas/saídas?
3. O shopping possuir 3 entradas/saídas?
4. Existe alguma lei geral, que nos permita contar de quantas maneiras distintas uma pessoa pode entrar e sair do shopping se ele possuir n entradas/saídas?

INVESTIGUEM ...

Para realização da tarefa 1 é imprescindível uma boa leitura, a fim de que se compreenda plenamente o problema. Em relação à generalização requerida no item (4), espera-se algumas dificuldades, pois exige um pensamento abstrato mais desenvolvido do que aquele utilizado no pensamento aritmético.

4.2. ANÁLISE A POSTERIORI DA TAREFA 1

No sentido de contribuir para entendimento da análise da atividade matemática dos grupos, sistematizamos, na tabela abaixo, as conversões realizadas nas três primeiras alíneas da tarefa 1.

Tabela 1: Conversões na tarefa de produto cartesiano

	Conversões
Grupo V	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{T}) \Rightarrow (\boldsymbol{N})$
Grupo W	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{F})$
Grupo X	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{AP}) \Rightarrow (\boldsymbol{N})$
Grupo Y	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{AP}) \Rightarrow (\boldsymbol{N})$
Grupo Z	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{LP}) \Rightarrow (\boldsymbol{N})$

Fonte: Arquivo do pesquisador

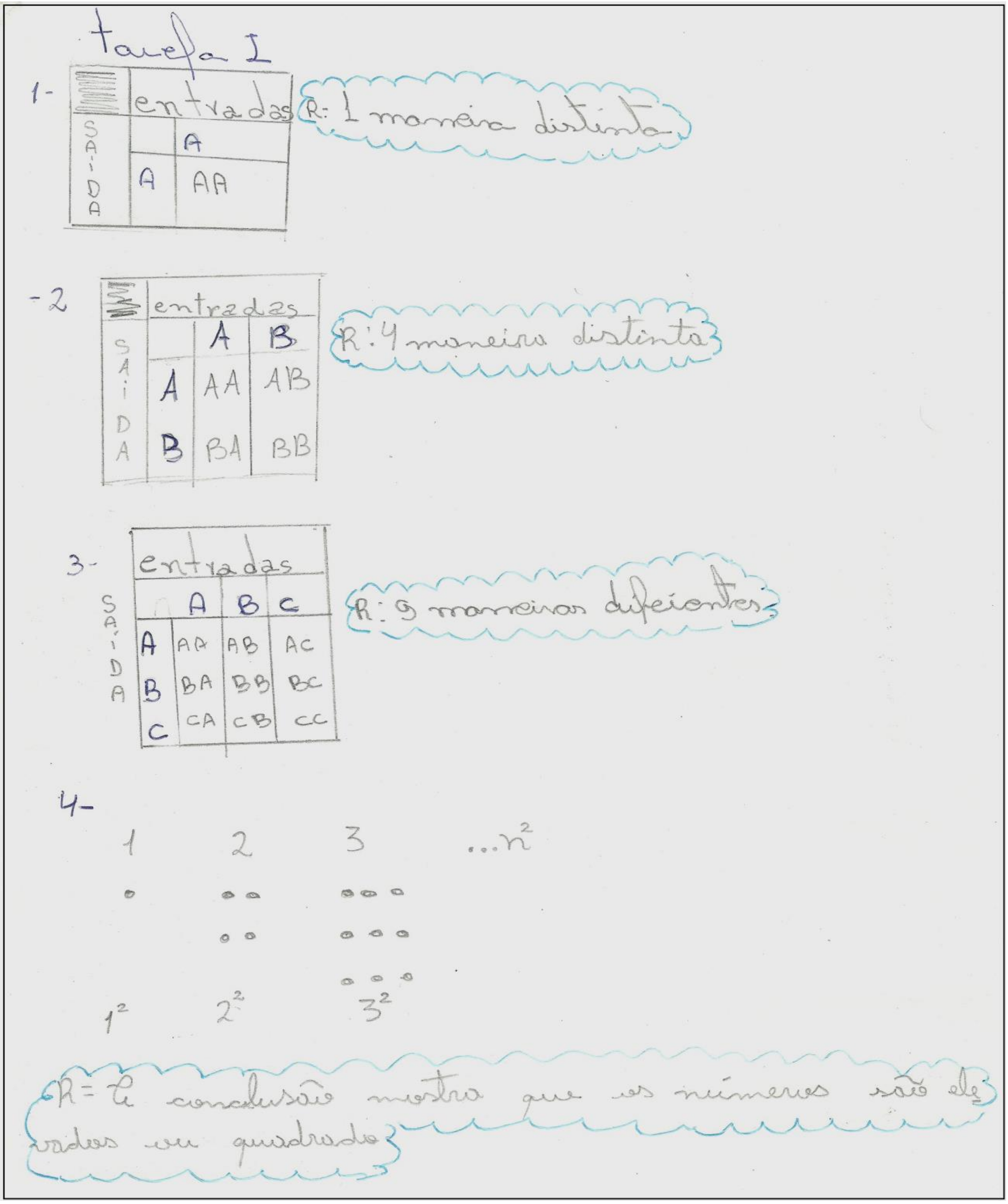
Todos os grupos realizaram a conversão da representação em linguagem natural (enunciado da tarefa), e produziram uma ou duas outras representações.

4.2.1. Análise da produção do grupo V na tarefa 1

Nos três primeiros itens da tarefa 1, o grupo V teve um bom desempenho, os estudantes construíram uma tabela de dupla entrada para cada item, colocando nas linhas da tabela as possíveis saídas e nas colunas as possíveis entradas, inserindo em cada célula da tabela os possíveis modos de entrar e sair do shopping. Através dessa representação tabular sistemática e organizada o grupo V conseguiu realizar a investigação e responder corretamente os itens (1), (2) e (3).

Para responder o último item, o grupo observou que poderia construir uma sequência de bolinhas, onde cada bolinha representaria uma possibilidade de entrar/sair na respectiva tabela. Os integrantes do grupo verificaram que conseguiriam organizar as bolinhas em quadrados perfeitos, e dessa forma conjecturam a lei geral. Segue a transcrição da resposta do item (4) do grupo V, “a conclusão mostra que os números são elevados ao quadrado”.

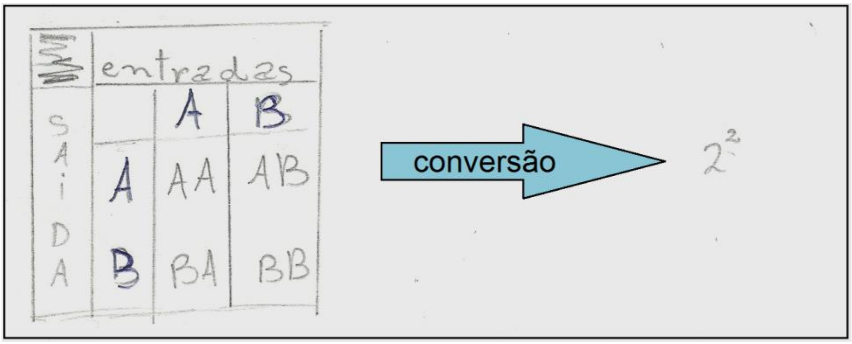
Figura 6 – Produção da tarefa 1 do grupo V



Fonte: Arquivo do pesquisador

Pode-se notar, através do recorte da tarefa 1 (Figura 7), que os estudantes pertencentes a esse grupo realizaram uma conversão da representação do objeto matemático produto cartesiano, coordenando registros tabulares e numéricos, Duval (2003) destaca que é a conversão entre representações que constitui uma condição essencial para a compreensão do objeto matemático.

FIGURA 7 – Conversão: representação tabular para representação numérica

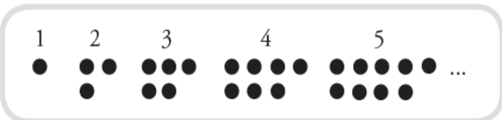


Fonte: Arquivo do pesquisador

Em relação à generalização que requeria o item (4), os alunos do grupo utilizaram uma estratégia que lhes foi apresentada no *Caderno do Aluno 8º ano – Volume 1*, onde o mesmo, para o desenvolvimento de novas habilidades de cálculo algébrico, utilizou atividades que possibilitavam o entendimento das propriedades de operações algébricas através de recursos geométricos, como por exemplo na seguinte atividade:

Figura 8 – Atividade da situação de aprendizagem 5

1. Observe a sequência de bolinhas e crie uma fórmula que expresse o total de bolinhas em função do número da figura. (**Observação**: chame o número da figura de **n**.)



Fonte: Caderno do Aluno 8º Ano Ensino Fundamental Volume 1 (p. 42)

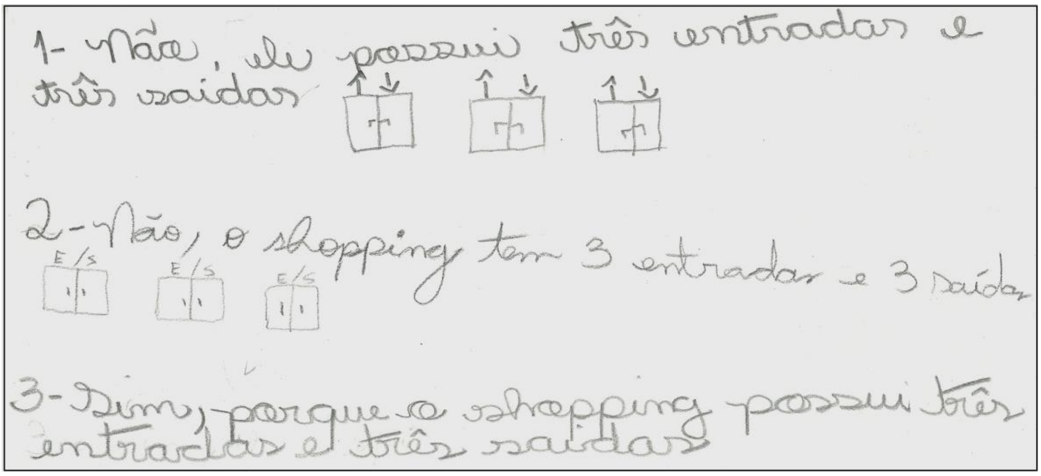
Ao observar no item (4), percebe-se que a lei geral surgiu naturalmente em decorrência da sistematização dos itens anteriores.

4.2.2. Análise da produção do grupo W na tarefa 1

Na primeira tarefa o grupo W não apresentou um bom desempenho, pode-se inferir que os integrantes não entenderam as questões propostas no problema.

Segue a transcrição das respostas: “1) Não, ele possuí três entradas e três saídas. 2) Não, o shopping tem 3 entradas e 3 saídas. 3) Sim, por que o shopping possui três entradas e três saídas”.

Figura 9 – Produção da tarefa 1 do grupo W


1- Não, ele possui três entradas e três saídas

2- Não, o shopping tem 3 entradas e 3 saídas

E/S E/S E/S

3- Sim, porque o shopping possui três entradas e três saídas

Fonte: Arquivo do pesquisador

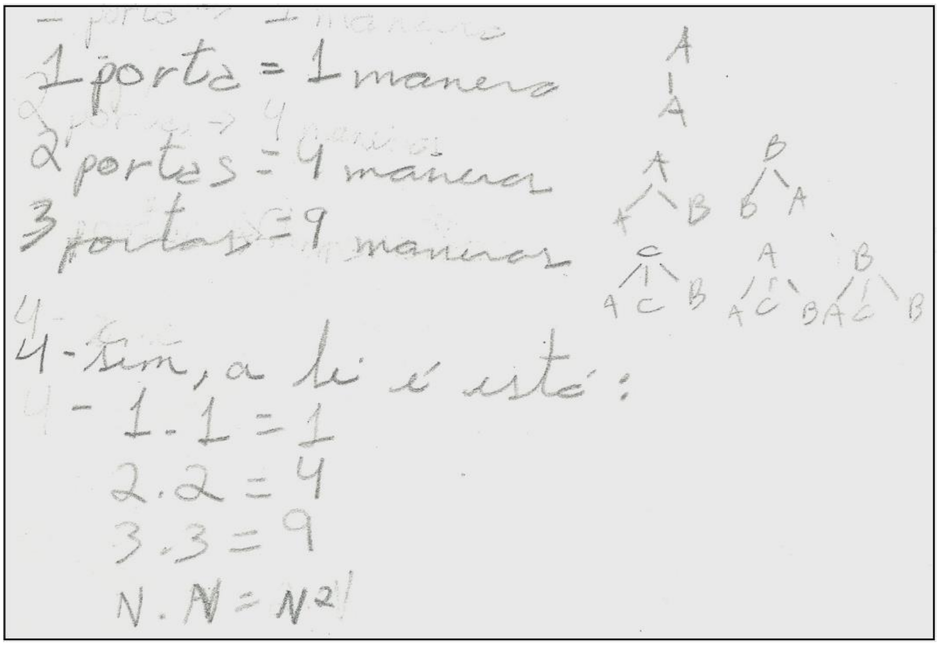
Aparentemente, os alunos desse grupo imaginaram apenas a possibilidade de três entradas/saídas para o edifício, provavelmente se concentraram na imagem da tarefa, e não realizaram uma leitura mais atenta, essa atitude levou a respostas equivocadas.

4.2.3. Análise da produção do grupo X na tarefa 1

O grupo X construiu uma árvore de possibilidades para cada um dos três primeiros itens, identificando por A, B e C as possíveis entradas/saídas. Através desse registro, os estudantes obtiveram êxito nos itens (1), (2) e (3).

Para construção da lei geral, o grupo organizou em linhas os registros das numéricos, e identificou a regularidade que permitiu a generalização para n entradas/saídas.

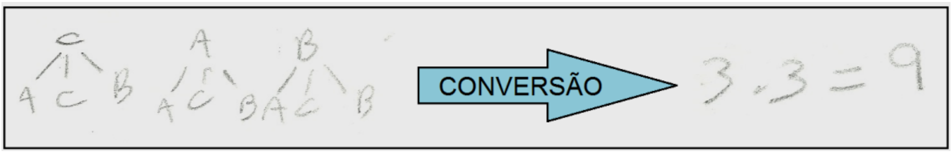
Figura 10 – Produção da tarefa 1 do grupo X



Fonte: Arquivo do pesquisador

Também pode-se notar, por meio do recorte da tarefa 1 (Figura 11), que os discentes do respectivo grupo realizaram uma conversão da representação do objeto matemático produto cartesiano, coordenando os registros numéricos e árvore de possibilidades.

FIGURA 11 – Conversão: representação árvore de possibilidades para representação numérica



Fonte: Arquivo do pesquisador

Usar diversos registros de representações para resolver o mesmo problema pode contribuir significativamente para construção do conhecimento matemático, nesse sentido, Pessoa e Borba (2009, p.11) afirmam que:

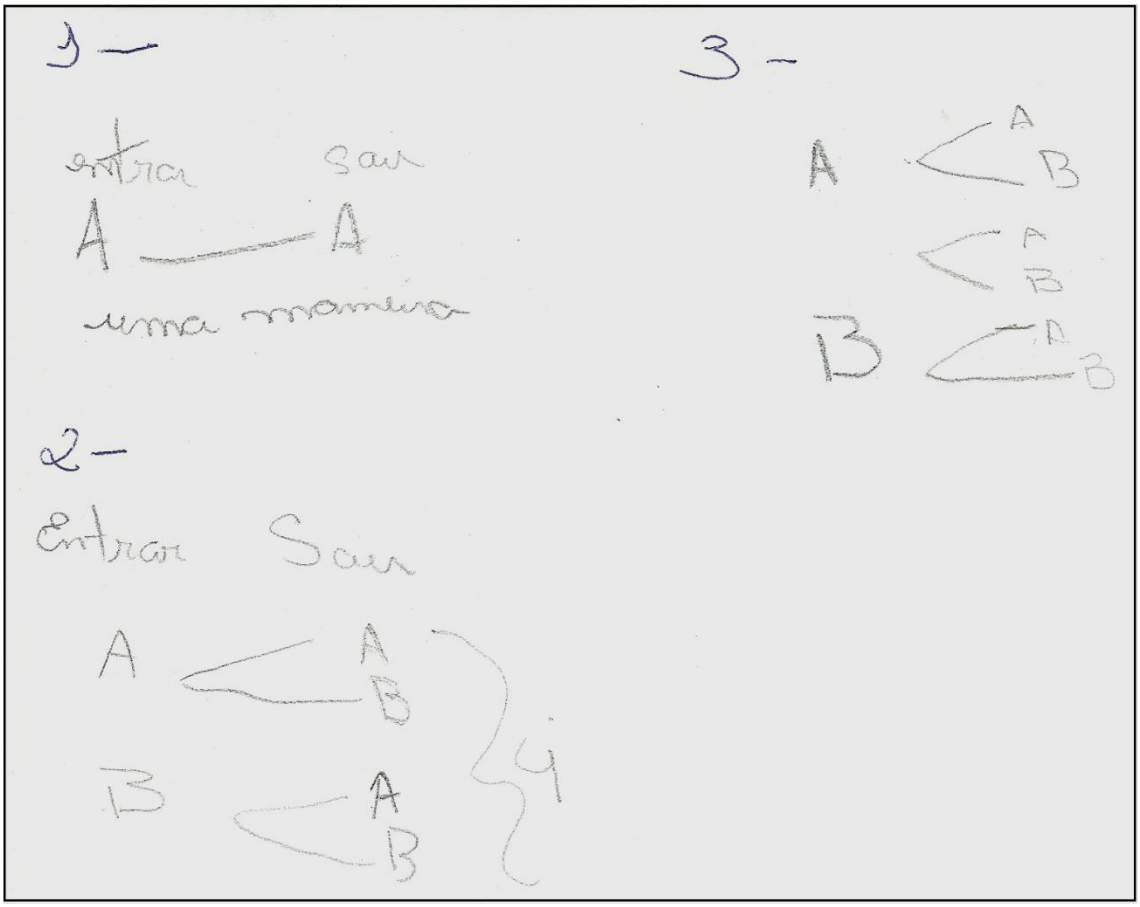
> As diferentes formas de representação simbólica apresentadas pelos alunos refletem as diferentes maneiras de pensar sobre um mesmo problema. É importante que a escola esteja atenta a estas representações e as levem em consideração no trabalho com estes e outros tipos de problemas. Ou seja, eles desenvolvem interessantes estratégias que devem ser aproveitadas pela escola para ajudá-los a avançar na compreensão dos diversos tipos de problemas e no seu desenvolvimento conceitual.

A utilização da árvore de possibilidades pode resultar em grandes avanços na compreensão de problemas de contagem, pois permite a observação organizada do esgotamento de todas as maneiras possíveis de realizar determinado agrupamento.

4.2.4. Análise da produção do grupo Y na tarefa 1

O grupo Y também utilizou a representação de árvore de possibilidades, através dela resolveu corretamente os itens (1) e (2), fazendo a contagem direta das possíveis maneiras de entrar e sair do edifício. No item (3) o grupo até tentou resolver o problema através da árvore de possibilidades, mas não realizou corretamente a contagem.

Figura 12 – Produção da tarefa 1 do grupo Y



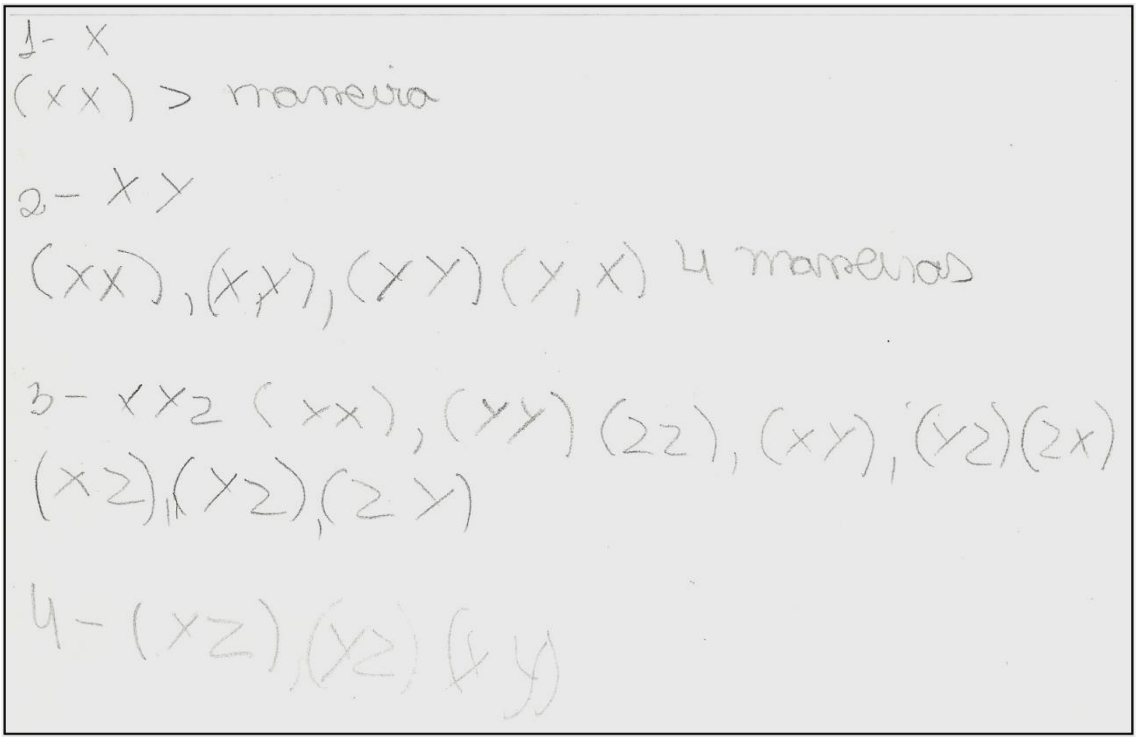
Fonte: Arquivo do pesquisador

Já o item (4) não foi respondido, pode-se notar que apenas no item (2), os alunos realizaram a conversão da representação árvore de possibilidades para representação numérica, esse fato pode ter comprometido a observação da regularidade presente nos três primeiros itens.

4.2.5. Análise da produção do grupo Z na tarefa 1

Na produção do grupo Z, observou-se que os integrantes do mesmo coordenaram o registro de representação numérico e listagem das possibilidades. Nomearam de “x” a primeira entrada/saída, “y” a segunda e “z” a terceira. Houve uma listagem correta para o caso de uma entrada/saída e duas entradas/saídas, entretanto, para a determinação das maneiras distintas de entrar e sair para o caso de três entradas/saídas, os estudantes listaram 9 possibilidades, mas houve repetição da possibilidade “(y,z)”. Além disso, não apresentaram a generalização que requeria o item (4), provavelmente não “enxergaram” o padrão presente nos três primeiros itens.

Figura 13 – Produção da tarefa 1 do grupo Z



Fonte: Arquivo do pesquisador

A representação do objeto matemático produto cartesiano do item (3), possuí apenas um elemento repetido, a solução correta seria: {Entradas}X{Saídas} = {{x, x}, {x, y}, {x, z}, {y, x}, {y, y}, {y, z}, {z, x}, {z, y}}.

4.3. CONCLUSÃO DA ANÁLISE DA PRODUÇÃO DOS GRUPOS NA PRIMEIRA TAREFA

Os alunos gostaram de estudar em grupos, e comentaram que a tarefa 1 era simples quando comparada com os exercícios e problemas trabalhados no dia a dia em sala de aula.

De modo geral, os estudantes tiveram um bom desempenho no problema de produto cartesiano. Através dos registros pode-se perceber que diferentes estratégias foram utilizadas adequadamente para a solução do problema.

Segundo Pessoa (2009), os problemas de produto cartesiano são trabalhados na escola desde os anos inicias do Ensino Fundamental, esse fato pode contribuir para que ao longo da escolarização os alunos percebam que é possível atacar esses problemas com diferentes estratégias, utilizando diversos registros de representação.

Pode-se verificar, nas análises anteriores, que os grupos utilizaram figuras, tabelas, listas, árvore de possibilidades, entre outros registros de representação, demostrando compressão da relação existente entre o conjunto das entradas e o conjunto das saídas. A utilização de tais registros para representar a situação, e através dos mesmos gerar um procedimento de solução, é uma boa maneira de se compreender melhor as relações envolvidas no problema, e consequentemente entender o conceito de produto cartesiano.

Todos os grupos realizaram conversões, deixando de trabalhar com a linguagem natural para trabalhar com tabelas, figuras, árvore de possibilidades e listagem de possibilidades, além disso, quatro grupos ainda realizaram uma segunda conversão para representação numérica.

Com a utilização de uma variedade de registros de representação, o estudante podo construir mais facilmente o conceito de produto cartesiano. Nesse sentido concordamos com Damm (1999, p. 135):

> Em matemática, toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para seu ensino, precisamos levar em consideração as diferentes formas de representações de um mesmo objeto matemático.

Constata-se por meio das análises que os estudantes se sentiram seguros para escrever as possibilidades através das representações que julgaram mais adequadas. Logo observa-se, assim, a importância de deixar os alunos a vontade para escolherem seus próprios caminhos de resolução.

4.4. ANÁLISE A PRIORI DA TAREFA 2: PERMUTAÇÃO SIMPLES

Para Pessoa e Borba (2009), nos problemas de permutação simples as seguintes relações e propriedades se mantêm constantes:

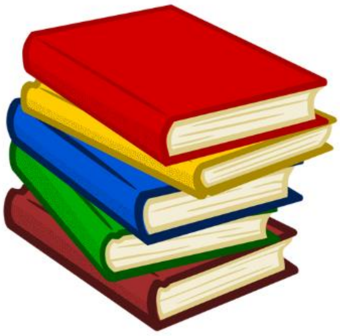
- Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição);
- A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

A tarefa 2 é caracterizada como permutação simples, pois pode-se considerar os livros como elementos do conjunto pilha, onde cada livro é utilizado apenas uma vez para construir a respectiva pilha, e a ordem dos livros gera novas possibilidades de pilhas. Os objetivos desta tarefa eram desenvolver o cálculo das possibilidades por meio da escrita das opções, conduzir a observação da regularidade que permeia os três primeiros itens, para elaboração da conjectura da lei geral e construção do conceito de permutação simples. Além disso, nos itens (1), (2) e (3) esperava-se que os estudantes registrassem os modos distintos de formar a pilha, por exemplo, enumerando as maneiras, utilizando algum tipo de registro de representação, como árvore de possibilidades, tabelas, listagem das possibilidades, etc.

A tarefa é finalizada com uma situação onde se supõe que a biblioteca receberá n livros, com o objetivo de conduzir a generalização das situações realizadas anteriormente.

TAREFA 2: LIVROS

Uma biblioteca recebe doações de livros que são colocados, um sobre o outro, de modo a formar uma única pilha de livros. Quantas pilhas diferentes poderão ser formadas se a biblioteca:



1. Receber 2 livros diferentes?
2. Receber 3 livros diferentes?
3. Receber 4 livros diferentes?
4. Existe alguma lei geral que nos permita contar quantas pilhas distintas poderão ser formadas se a biblioteca receber n livros diferentes?

INVESTIGUEM ...

Para compreensão da tarefa 2, é necessário assumir a postura de quem busca as soluções, procurando superar dificuldades e obstáculos que possam surgir. Os três primeiros itens poderiam ser resolvidos fazendo uma contagem direta sem a utilização de fórmulas, já no item (4) é fundamental que os estudantes trabalhem com as operações e relações envolvidas anteriormente, lançando mão da aritmética aplicada nos primeiros itens.

4.5. ANÁLISE A POSTERIORI DA TAREFA 2

Na tabela abaixo sistematizamos as conversões realizadas pelos grupos nas três primeiras alíneas da tarefa 2:

Tabela 2: Conversões na tarefa de permutação simples

	Conversões
Grupo V	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{F}) \Rightarrow (\boldsymbol{N})$
Grupo W	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{T}) \Rightarrow (\boldsymbol{N})$
Grupo X	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{LP}) \Rightarrow (\boldsymbol{N})$
Grupo Y	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{F}) \Rightarrow (\boldsymbol{N})$
Grupo Z	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{LP}) \Rightarrow (\boldsymbol{N})$

Fonte: Arquivo do pesquisador

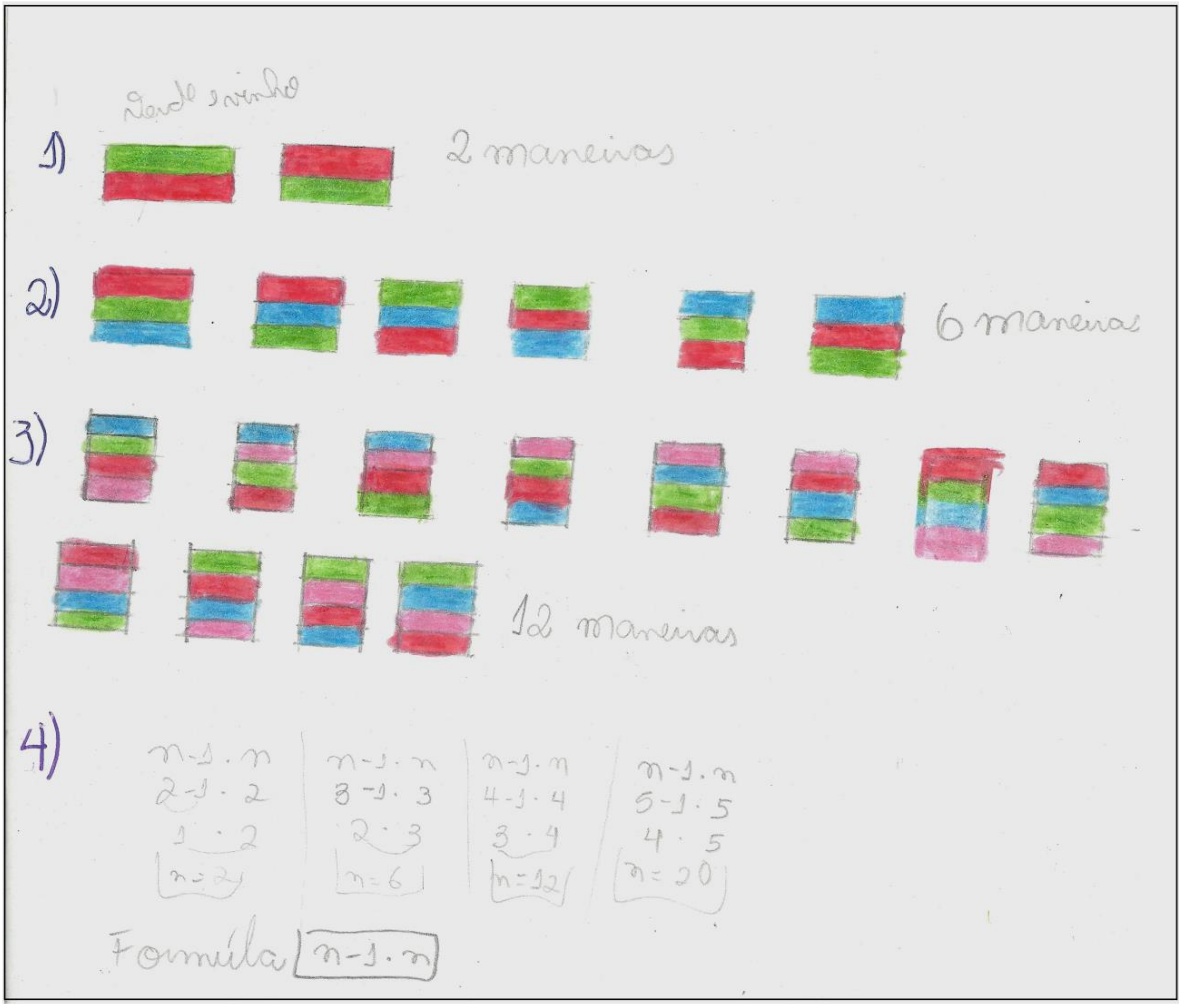
Todos os grupos realizaram a conversão da representação em linguagem natural (enunciado da tarefa), e produziram duas outras representações.

4.5.1. Análise da produção do grupo V na tarefa 2

Nos três primeiros itens da tarefa 2, o grupo V desenhou as pilhas, realizando uma distinção dos livros através de diferentes cores. Nos itens (1) e (2), os estudantes efetuaram uma contagem correta, representando todos os casos possíveis, entretanto, no item (3) o grupo não esgotou todas as possibilidades, considerou apenas metade das possíveis pilhas.

Para responder o último item, os integrantes deste grupo, construíram uma fórmula que gerava as respostas dos itens anteriores, mas como a contagem do item (3) estava errada, o grupo não conseguiu construiu de forma correta a generalização.

Figura 14 – Produção da tarefa 2 do grupo V



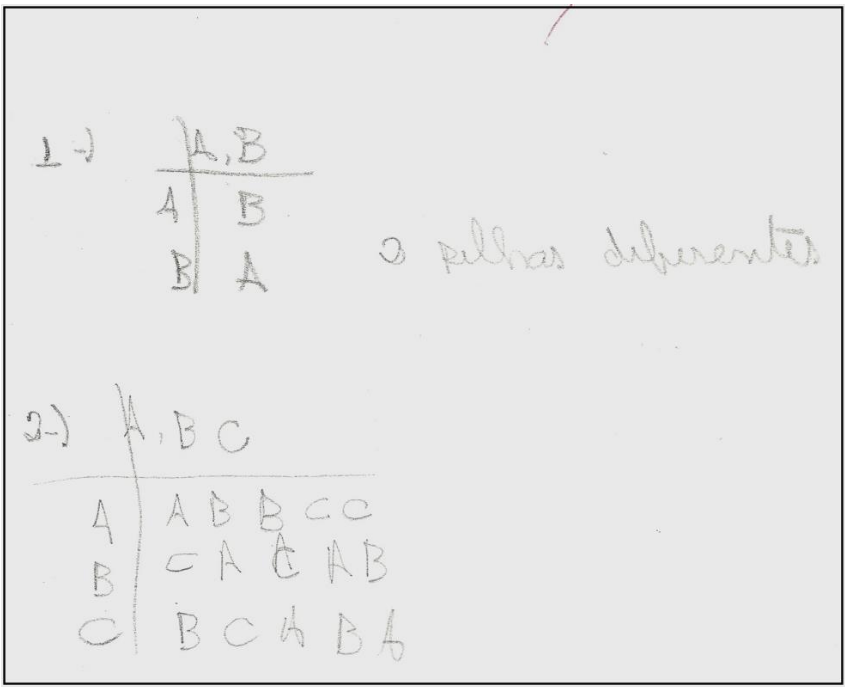
Fonte: Arquivo do pesquisador

Através do recorte da tarefa 2 (Figura 14), nota-se que os estudantes substituíram os elementos citados no enunciado por outros, criando uma nova representação através de figuras que os auxiliaram na realização da contagem.

4.5.2. Análise da produção do grupo W na tarefa 2

Na segunda tarefa, o grupo W optou por utilizar a representação tabular, construindo uma tabela de dupla entrada. Apesar de as possibilidades não ficarem evidentes na tabela, o item (1) foi respondido corretamente. No item (2), os estudantes tentaram sistematizar a situação utilizando a representação tabular, mas não obtiveram a resposta correta.

Figura 15 – Produção da tarefa 2 do grupo W



Fonte: Arquivo do pesquisador

Os itens (3) e (4) não foram respondidos, pode-se inferir que os alunos perceberam que a representação tabular de dupla entrada não era suficiente para construir as possibilidades de pilhas com três e quatro livros, no entanto, não produziram outras representações para realizar a contagem.

4.5.3. Análise da produção do grupo X na tarefa 2

O grupo X realizou uma listagem organizada, esgotando todas as possibilidades para cada um dos três primeiros itens, identificando por A, B, C e D os possíveis livros recebidos pela biblioteca. Através dessa representação de lista obtiveram êxito nos itens (1), (2) e (3).

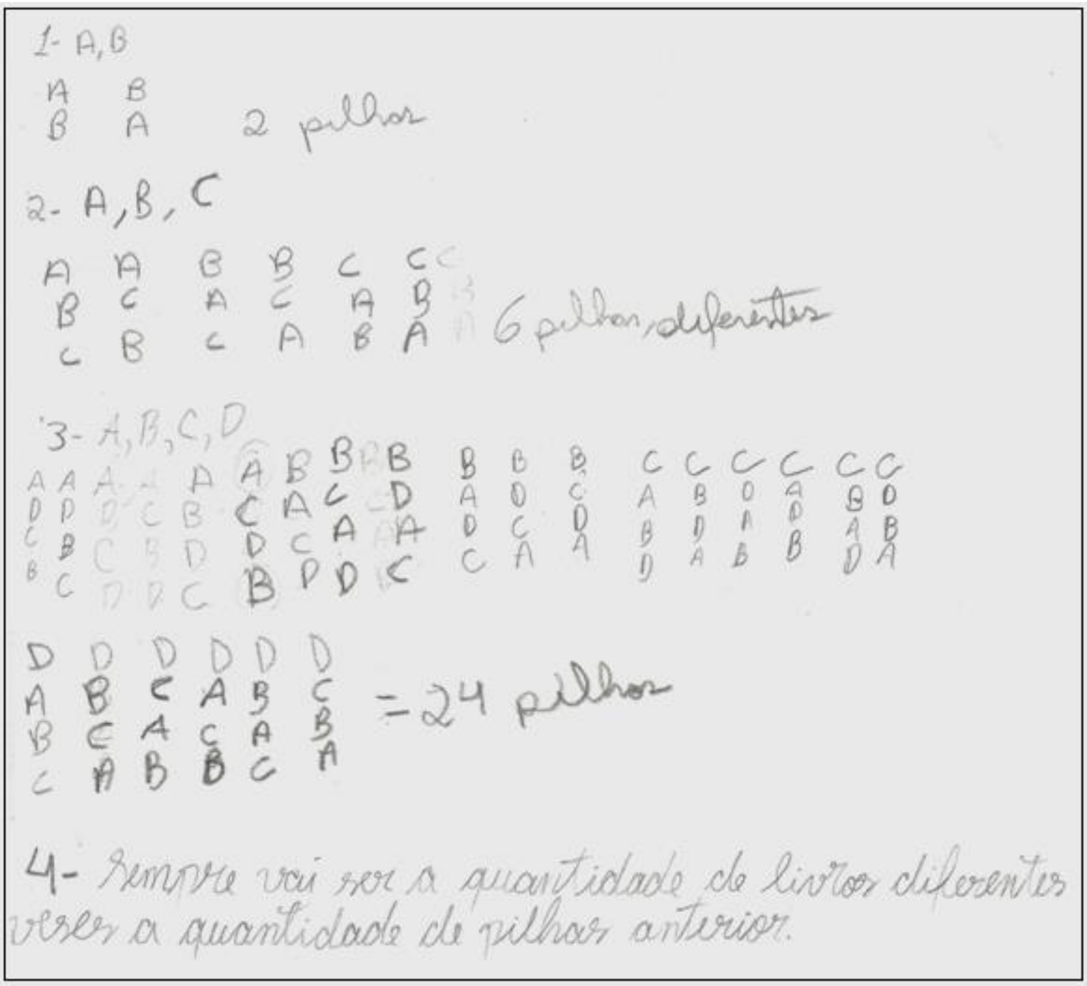
Em relação ao item (4), os estudantes apresentaram a generalização em linguagem natural, segue a transcrição da resposta: “sempre vai ser a quantidade de livros diferentes vezes a quantidade de pilhas anterior”. Pode-se observar nessa resposta um raciocínio recursivo, onde que para se obter o número de possibilidades de pilhas com n livros é necessário conhecer o número de pilhas possíveis com (n-1) livros. Segundo Pacheco (2013, p.11):

> O raciocínio recursivo, também chamado de recursão, permite a resolução de inúmeros problemas estruturados em etapas,

> onde o procedimento a ser empregado em uma determinada etapa caracteriza-se pela repetição completa do raciocínio utilizado na etapa anterior. Um procedimento caracterizado pela recursão é dito recursivo.

Através da resolução, nota-se que os alunos utilizaram os casos com menores quantidades de livros para conjecturar o procedimento recursivo.

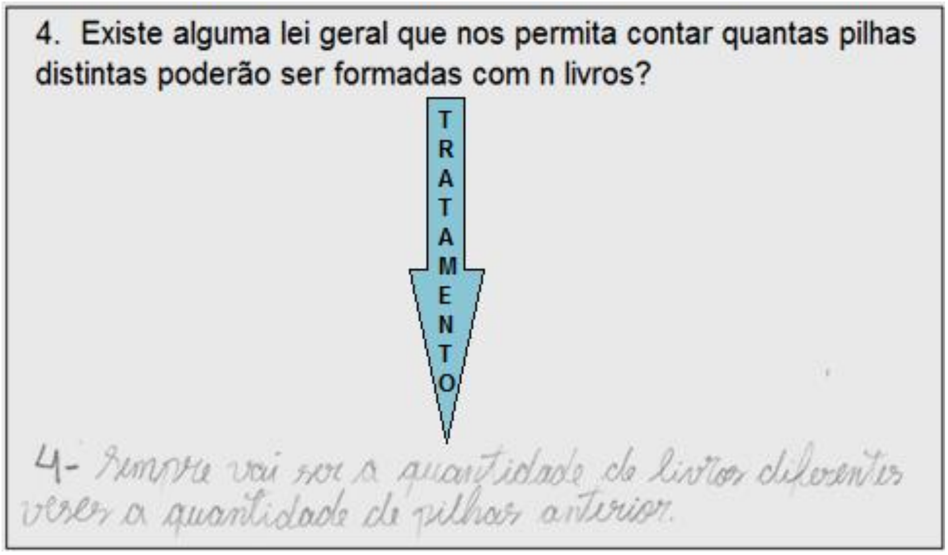
Figura 16 – Produção da tarefa 2 do grupo X



Fonte: Arquivo do pesquisador

Através do recorte da tarefa 1 (Figura 17), nota-se que os estudantes não realizaram uma mudança de representação no item (4), pois o problema foi proposto em linguagem natural e a solução também foi apresentada em linguagem natural, esse tipo de transformação é caracterizada por Duval (2003) como tratamento.

FIGURA 17 – Tratamento: representação em linguagem natural para representação em linguagem natural



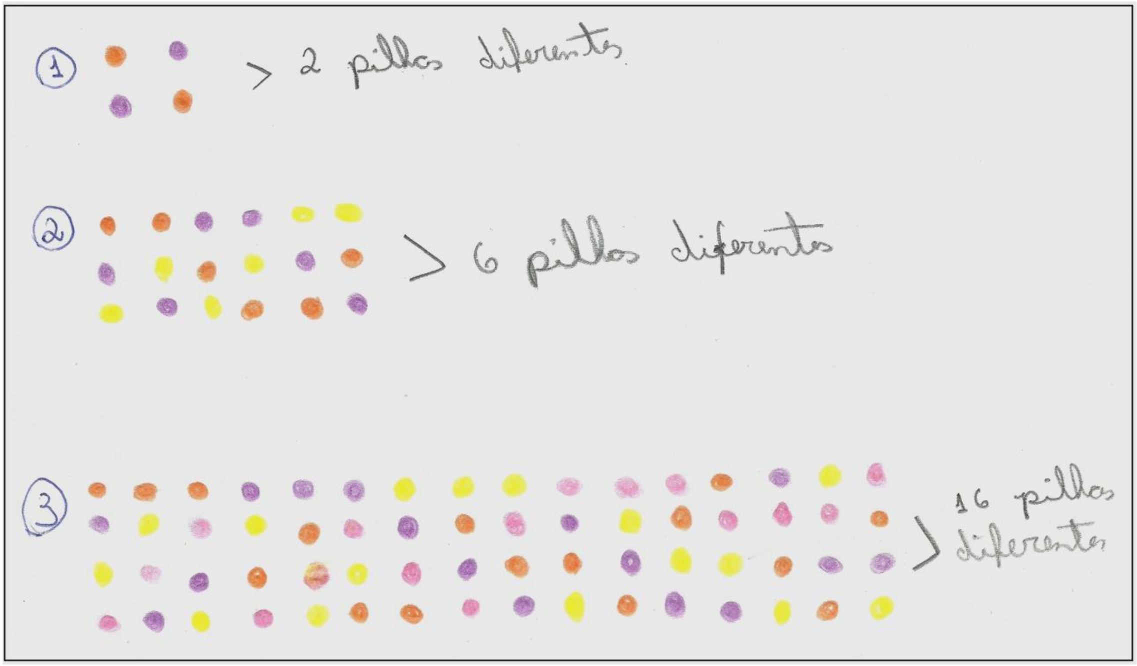
Fonte: Arquivo do pesquisador

Apesar de Duval (2003) deixar claro que é a conversão de representações que estabelece uma condição essencial para a compreensão do objeto matemático, os tratamentos em atividades matemáticas também são importantes para a construção do conceito.

4.5.4. Análise da produção do grupo Y na tarefa 2

Para resolução da tarefa 2, o grupo Y também utilizou representações por meio de figuras, onde fez corresponder a cada possível livro uma bolinha de cor diferente. A contagem foi realizada corretamente nos itens (1) e (2).

Figura 18 – Produção da tarefa 2 do grupo Y



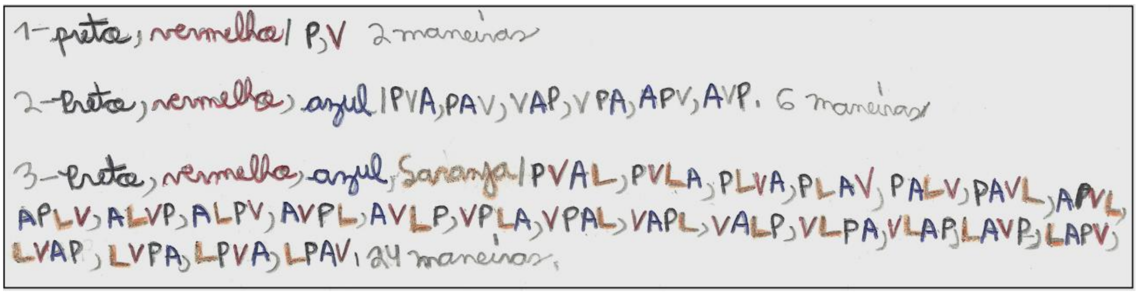
Fonte: Arquivo do pesquisador

No item (3) o grupo utilizou a mesma estratégia, mas não conseguiu esgotar todas as possibilidades. Observa-se nos dois primeiros itens que, através das figuras, os estudantes realizaram uma listagem sistemática da situação. No primeiro item começaram por vermelho seguido de roxo, já no segundo item começaram por vermelho seguido, respectivamente, de roxo e amarelo. No entanto, no terceiro item não nota-se essa sistematização metódica. O item (4) não foi respondido, provavelmente os estudantes não “enxergaram” a regularidade para construção da conjectura da lei geral.

4.5.5. Análise da produção do grupo Z na tarefa 2

Na produção do grupo Z, observou-se que os integrantes do mesmo mobilizaram registros de representação via lista. Nomearam de “P”, “V”, “A” e “L”, os possíveis livros que a biblioteca poderia receber e também relacionaram tais livros com as cores preto, vermelho, azul e laranja. Houve uma listagem correta, esgotando todos os casos para os três primeiros itens.

Figura 19 – Produção da tarefa 2 do grupo Z



Fonte: Arquivo do pesquisador

Para realizar as contagens do item (3), alínea com maior número de possibilidades, os discentes utilizaram a seguinte estratégia, listaram todas as possibilidades partindo de “P”, depois todas as possibilidades partindo de “A”, todas as possibilidades partindo de “V” e, por fim, todas as possibilidades partindo de “L”.

4.6. CONCLUSÃO DA ANÁLISE DA PRODUÇÃO DOS GRUPOS NA SEGUNDA TAREFA

A tarefa 2 foi elaborada pensando na possibilidade do uso de material concreto, visto que os alunos levam livros de diferentes componentes curriculares para as aulas. Logo, poderiam fazer simulações das possíveis pilhas com seus respectivos livros, essa estratégia foi observada nos grupos V e X. Os estudantes podem ter um ganho significativo de aprendizagem, se aliado a teoria estudada, puderem ter contato com um objeto concreto, manipulável, onde possa relacionar o concreto com o modelo abstrato em questão.

De modo geral, os resultados obtidos na tarefa 2 foram considerados satisfatórios, uma vez que todos os grupos produziram registros de representações que permitiram executar as contagens de forma correta na maioria dos itens.

Os cinco grupos realizaram conversões da representação em linguagem natural (enunciado da tarefa), e produziram duas novas representações. É interessante destacar que a terceira representação foi a mesma em todos grupos, como pode-se observar na tabela 2, onde verifica-se que utilizaram a representação numérica para finalizar a contagem.

Uma das grandes dificuldades na construção do conceito de permutação simples reside em entender que todos os elementos devem ser utilizados e organizados em ordens variadas. A maioria dos grupos conseguiram, com seus múltiplos registros de representação, sistematizar e ordenar as possíveis pilhas de livros, logo pode-se concluir que visualizaram diversos aspectos do objeto matemático permutação simples.

Ademais, foi notório no grupo X a presença de um pensamento recursivo, que pode contribuir significativamente para o desenvolvimento do raciocínio lógico, e consequentemente viabilizar as generalizações de situações como as apresentadas nos problemas.

4.7. ANÁLISE A PRIORI DA TAREFA 3: ARRANJO SIMPLES

Para Pessoa e Borba (2009), nos problemas de arranjo simples as seguintes relações e propriedades se mantêm constantes:

- Tendo **n** elementos poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... **p** elementos, com **$0 < p < n$**, sendo **p** e **n** números naturais;
- A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

A terceira tarefa ofertada aos estudantes é caracterizada como arranjo simples, pois de um grupo maior de elementos (lápis de cores), alguns subgrupos são organizados e a ordem dos elementos gera novas possibilidades, ou seja, o colorido azul, vermelho é diferente do vermelho, azul.

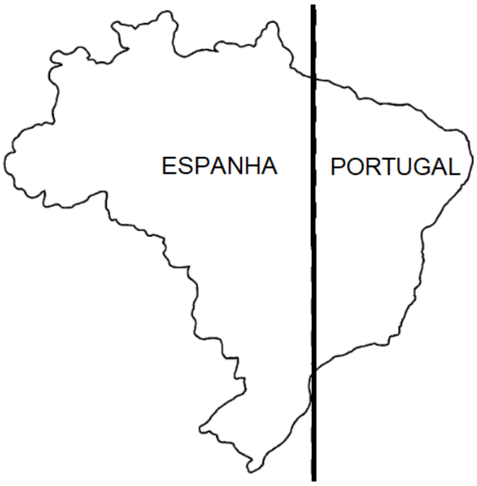
É importante frisar que na composição das pinturas a ordem gera novas possibilidades, por exemplo, no item (2) tem-se três lápis de cor e busca-se saber quantas são as possibilidades de pintar o mapa, de modo que das três cores disponíveis, serão escolhidas duas, considerando-se a forma como se ordenam esses dois elementos (lápis de cores) escolhidos.

Os objetivos da tarefa 3 eram proporcionar aos alunos o contato com problemas envolvendo arranjos, desenvolver o cálculo das possibilidades por meio da escrita das opções, conduzir a observação da regularidade que permeia os três primeiros itens para elaboração da conjectura da lei geral e construção do conceito de arranjo simples. Além disso, nos itens (1), (2) e (3) esperava-se que os estudantes registrassem os modos distintos de pintar o mapa, por exemplo, enumerando as maneiras, utilizando algum tipo de registro de representação, como árvore de possibilidades, tabelas, listagem das possibilidades, etc.

A tarefa é finalizada com uma situação onde se supõe que existem n lápis de cores diferentes disponíveis para pintara o mapa, com a intenção de conduzir a generalização das situações realizadas anteriormente.

TAREFA 3: REGIÕES

O Tratado de Tordesilhas (1494) estabeleceu uma linha de limite, um meridiano imaginário que dividiu o Brasil em duas regiões, as terras que ficavam a leste desse meridiano eram de Portugal e as que ficavam a oeste pertenciam à Espanha. Pretende-se pintar com duas cores diferentes essas duas regiões em um mapa do Brasil.



1. De quantas maneiras distintas o mapa poderá ser pintado com 2 lápis de cores diferentes?
2. E com 3 lápis de cores diferentes?
3. E com 4 lápis de cores diferentes?
4. Existe alguma lei geral, que nos permita contar de quantas maneiras distintas o mapa poderá ser pintado com n lápis de cores diferentes?

INVESTIGUEM ...

Os meios necessários para desempenhar uma boa compreensão da tarefa 3 estão relacionados com autoquestionamentos e discussões entre os estudantes do grupo, do tipo: O que a tarefa está solicitando? Quais são os dados apresentados?

Quais são as condições? É sempre possível satisfazer as condições? Faltam dados? Que fórmulas e/ou algoritmos podemos utilizar?

No processo de compreensão do problema, muitas vezes é fundamental construir figuras, tabelas, esquemas, entre outros, para representar a situação proposta.

4.8. ANÁLISE A POSTERIORI DA TAREFA 3

Na tabela abaixo sistematizamos as conversões realizadas pelos grupos nos três primeiros itens da tarefa 3:

Tabela 3: Conversões na tarefa de arranjo simples

	Conversões
Grupo V	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{T}) \Rightarrow (\boldsymbol{N}) \Rightarrow (\boldsymbol{LP})$
Grupo W	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{AP}) \Rightarrow (\boldsymbol{N})$
Grupo X	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{T}) \Rightarrow (\boldsymbol{N})$
Grupo Y	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{F}) \Rightarrow (\boldsymbol{N})$
Grupo Z	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{E}) \Rightarrow (\boldsymbol{N})$

Fonte: Arquivo do pesquisador

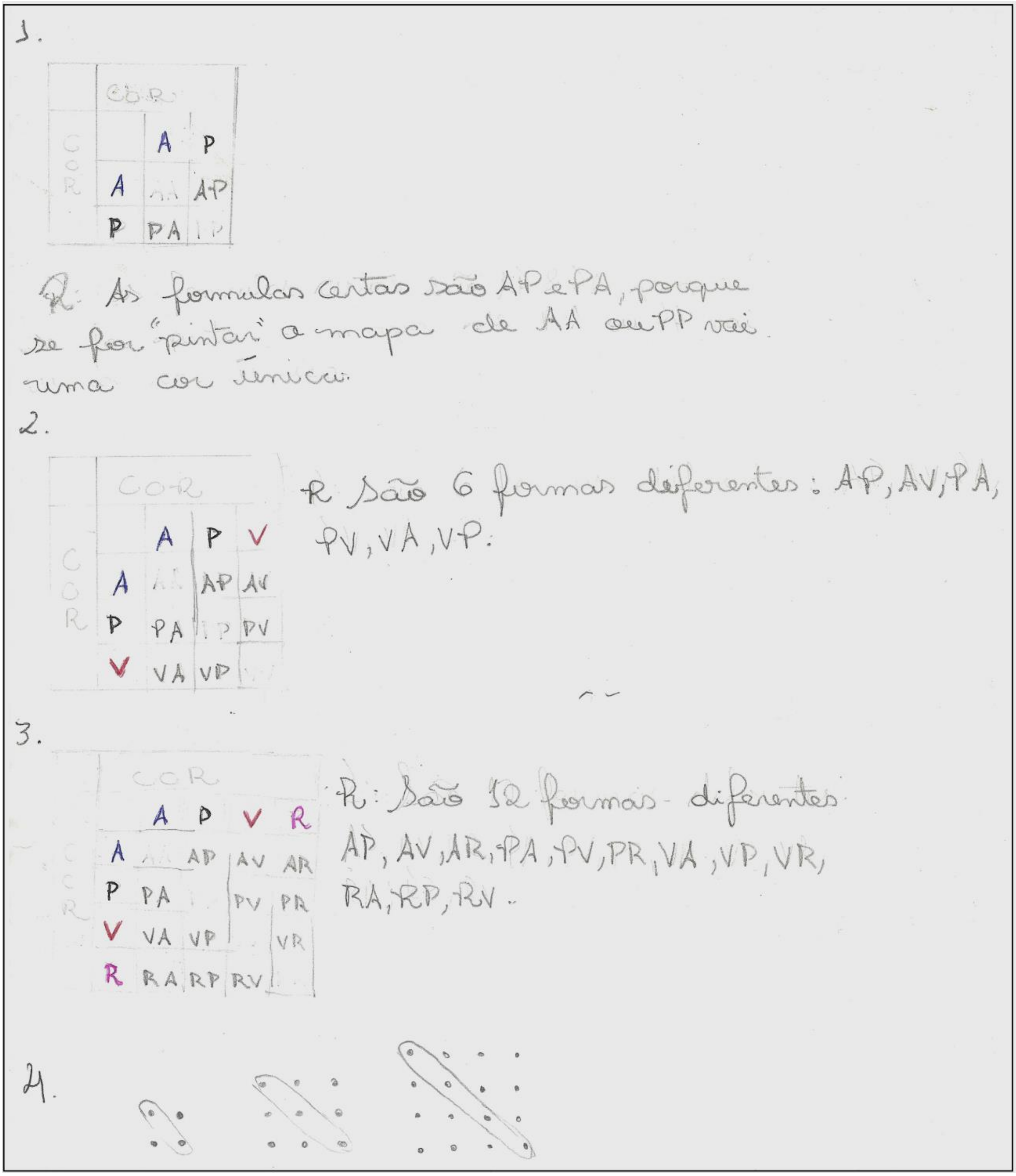
Todos os grupos realizaram a conversão da representação em linguagem natural (enunciado da tarefa), e produziram duas ou três outras representações.

4.8.1. Análise da produção do grupo V na tarefa 3

Nas três primeiras alíneas da terceira tarefa esse grupo foi bem, esgotaram todas as possibilidades, utilizando uma tabela de dupla entrada, que continha as possíveis cores dos lápis nas colunas e nas linhas.

É interessante observar nas tabelas que as células que poderiam acomodar cores iguais foram deixadas vazias, pois uma das condições da tarefa era utilizar cores diferentes.

Figura 20 – Produção da tarefa 3 do grupo V

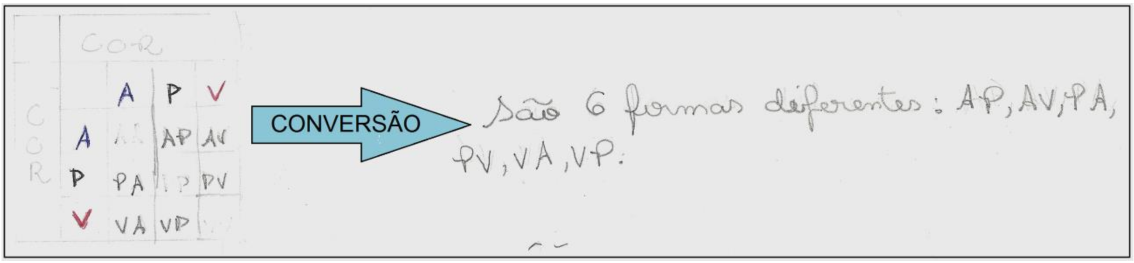


Fonte: Arquivo do pesquisador

No item (4) os estudantes tentaram através de desenhos conjecturar a lei geral. Analogamente a tarefa 1, organizaram um esquema de bolinhas para representar as células preenchidas das tabelas, também é possível notar uma tentativa de excluir as células vazias no intuito de entender o padrão.

Através do recorte da tarefa 3 (Figura 21), fica evidente que os alunos desse grupo realizaram uma conversão da representação do objeto matemático arranjo simples, coordenando os registros tabular e listagem das possibilidades.

FIGURA 21 – Conversão: representação tabular para representação listagem das possibilidades



Fonte: Arquivo do pesquisador

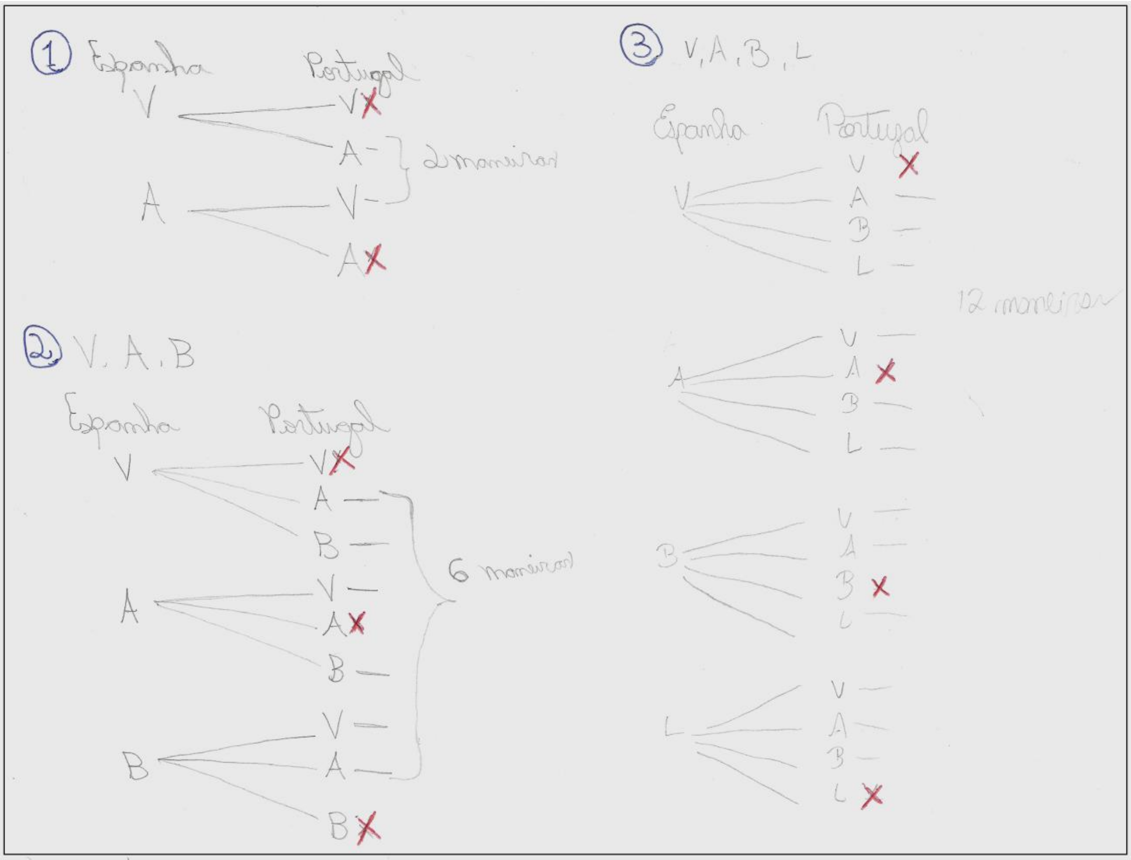
4.8.2. Análise da produção do grupo W na tarefa 3

Na terceira tarefa o grupo W optou por utilizar uma árvore de possibilidades, colocando no início de cada ramo as possíveis cores disponíveis para colorir a área correspondente a Espanha e no final de cada ramo as possíveis cores disponíveis para colorir a área correspondente a Portugal. Os estudantes utilizaram letras maiúsculas para representar estas cores.

Em árvore de possibilidades a correspondência entre dois elementos fica bastante evidente. Particularmente, na solução do grupo W a correspondência entre as cores escolhidas é explicitada através dos ramos da árvore, o que deixa claro que determinados ramos não podem ser considerados, pois possuem cores iguais.

Com essa estratégia o grupo conseguiu esgotar todas as possibilidades requeridas nos três primeiros itens, e tomaram o devido cuidado para não considerar cores iguais para os países.

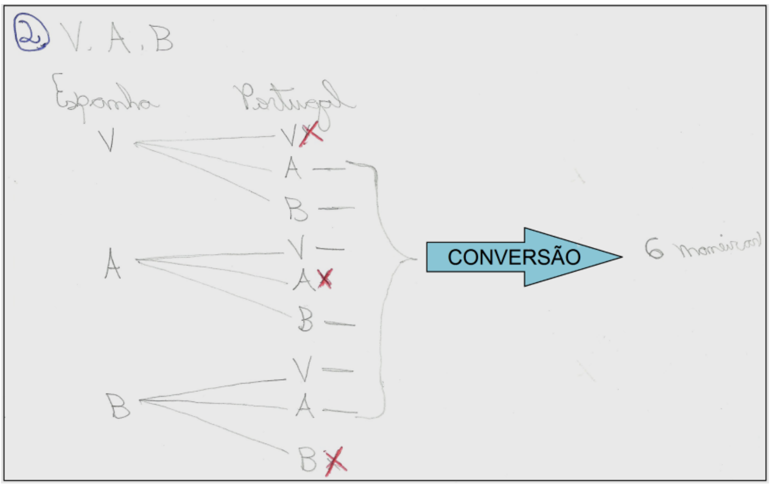
Figura 22 – Produção da tarefa 3 do grupo W



Fonte: Arquivo do pesquisador

Em relação às transformações definidas por Duval (2003), os integrantes desse grupo realizaram uma conversão do objeto matemático arranjo simples, coordenando registros de árvore de possibilidades e numéricos (Figura 23).

FIGURA 23 – Conversão: representação árvore de possibilidades para representação numérica



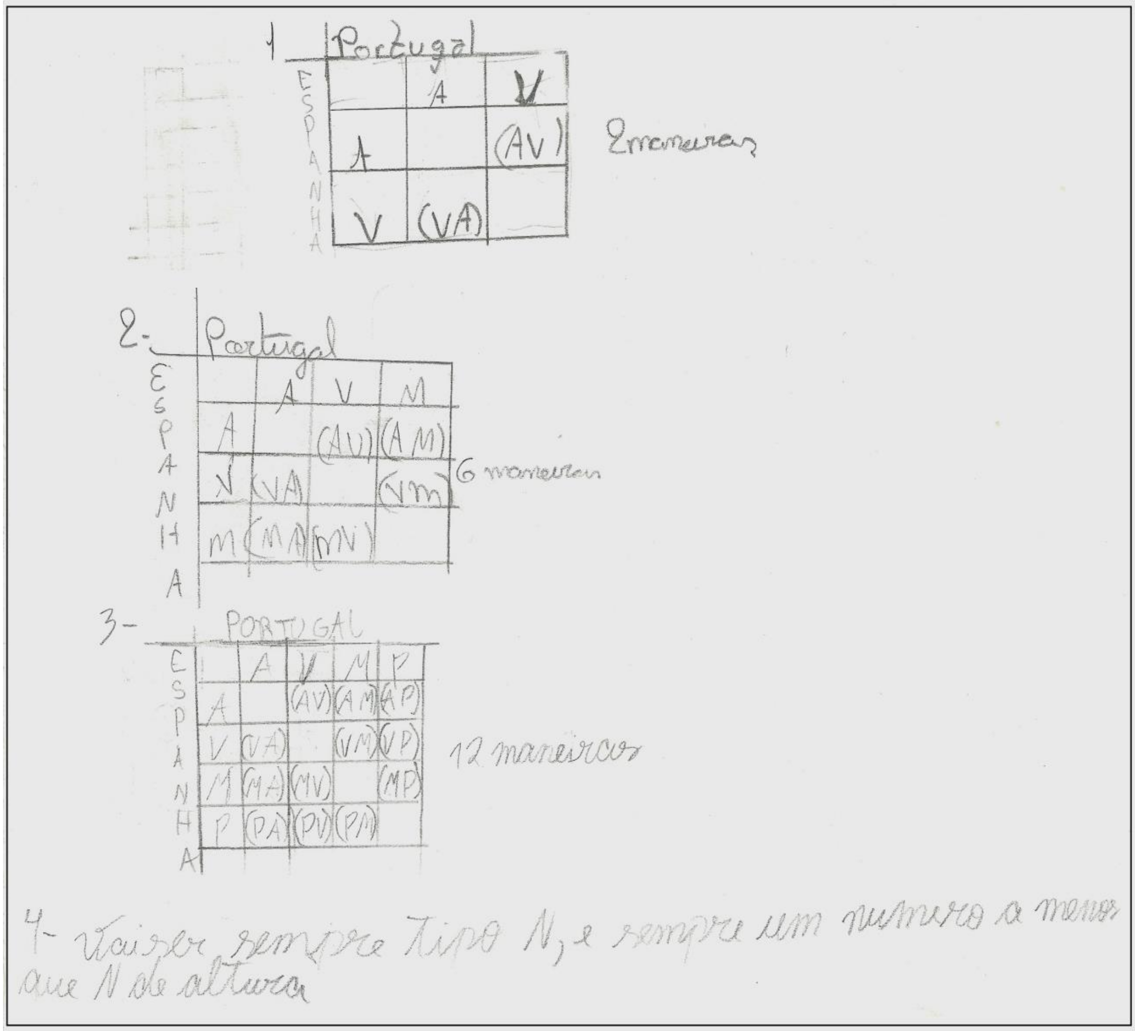
Fonte: Arquivo do pesquisador

4.8.3. Análise da produção do grupo X na tarefa 3

Semelhantemente ao grupo V, este grupo construiu uma tabela de dupla entrada, colando nas colunas as possíveis cores que Portugal poderia receber e nas linhas as possíveis cores que poderiam ser atribuídas à Espanha.

Através da organização tabular o grupo realizou corretamente as contagens que requeriam os três primeiros itens.

Figura 24 – Produção da tarefa 3 do grupo X



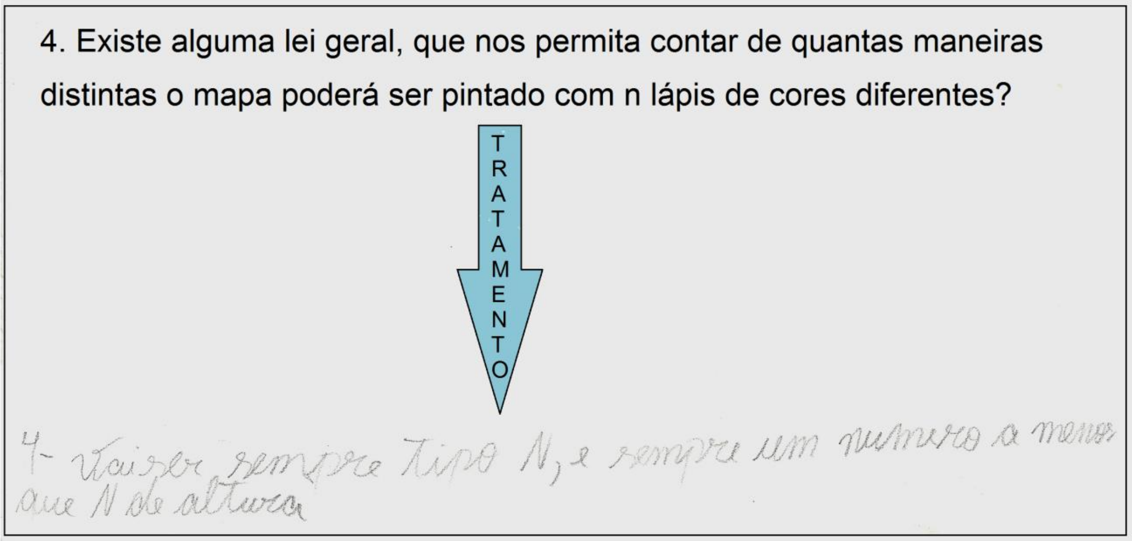
Fonte: Arquivo do pesquisador

Em relação ao item (4), os estudantes apresentaram uma conjectura em linguagem natural, segue a transcrição da resposta: “Vai ser sempre tipo n, e sempre um número menor que n de altura”.

Aparentemente os estudantes indicaram que a lei geral que permitiria contar de quantas maneiras distintas o mapa poderia ser pintado com n lápis de cores diferentes, seria a multiplicação de n cores por (n-1) cores, entretanto não explicitaram que se referiam a uma multiplicação.

De modo análogo ao que fizeram na tarefa 2, o grupo realizou conversões nos três primeiros itens e um tratamento (Figura 25) no item (4).

FIGURA 25 – Tratamento: representação em língua natural

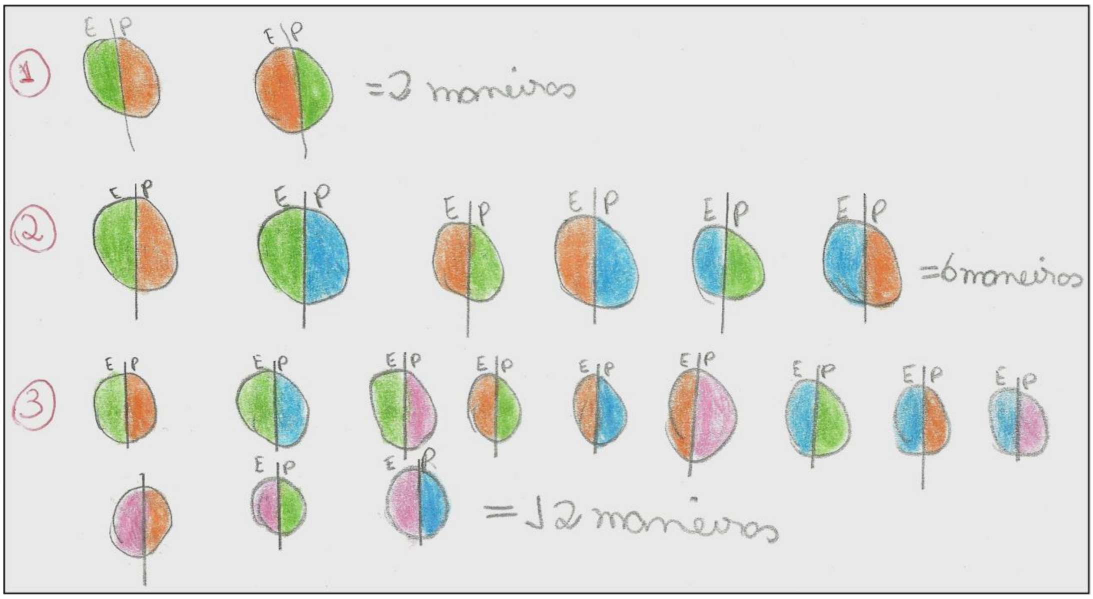


Fonte: Arquivo do pesquisador

4.8.4. Análise da produção do grupo Y na tarefa 3

Para resolução da tarefa 3 o grupo Y coordenou registros de representação na forma de figuras e numéricos.

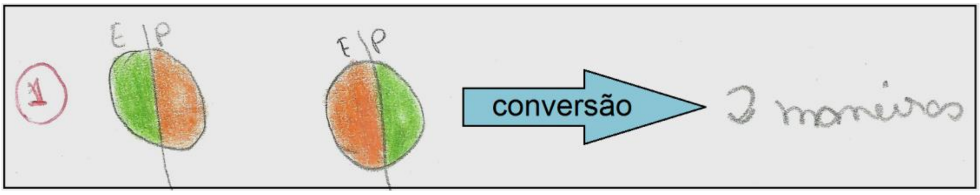
Figura 26 – Produção da tarefa 3 do grupo Y



Fonte: Arquivo do pesquisador

Nota-se que o grupo realizou um tratamento para auxiliar as contagens, pois transformaram o desenho do mapa do Brasil apresentado no enunciado da questão em figuras mais simples, mantendo o mesmo sistema de representação. Em seguida os estudantes realizaram uma conversão da representação de figuras para representação numérica (Figura 27).

FIGURA 27 – Conversão: representação de figuras para representação numérica



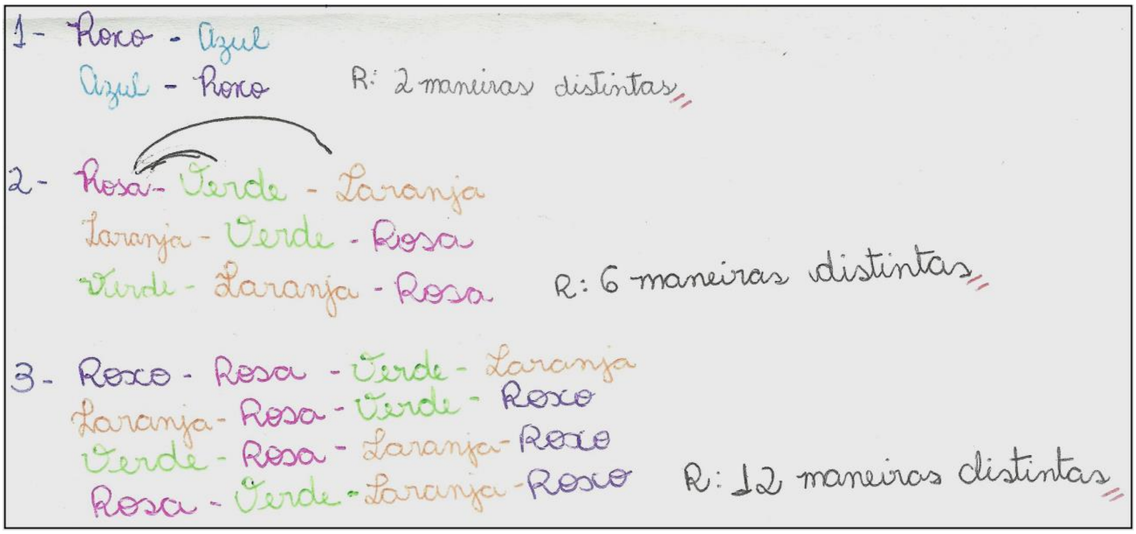
Fonte: Arquivo do pesquisador

A estratégia utilizada pelo grupo foi eficaz, pois permitiu realizar as contagens, nas três primeiras alíneas, corretamente.

4.8.5. Análise da produção do grupo Z na tarefa 3

Na produção do grupo Z, observou-se que os integrantes do mesmo mobilizaram registros em língua natural, supondo cores disponíveis, como rosa, verde, laranja, etc., caracterizando assim um tratamento.

Figura 28 – Produção da tarefa 3 do grupo Z



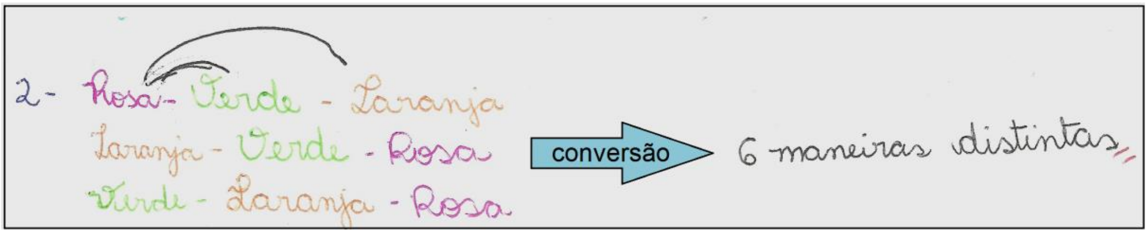
Fonte: Arquivo do pesquisador

Os estudantes sistematizaram a escrita de opções partindo de uma primeira cor para em seguida compor as possibilidades de pinturas, por exemplo, no item (2) obtiveram: rosa e verde, rosa e laranja, laranja e verde, laranja e rosa, verde e laranja, verde e rosa.

A estratégia foi bastante producente. Houve esgotamento de todas as possibilidades nos três primeiros itens.

É possível notar que o grupo realizou uma conversão do objeto matemático arranjo simples, partindo da representação esquemática para a representação numérica (Figura 29).

FIGURA 29 – Conversão: representação esquemática para representação numérica



Fonte: Arquivo do pesquisador

4.9. CONCLUSÃO DA ANÁLISE DA PRODUÇÃO DOS GRUPOS NA TERCEIRA TAREFA

Nesta tarefa verifica-se que todos os grupos resolveram os três primeiros itens corretamente. Dois grupos (V e X), perceberam que poderiam resolver as atividades utilizando uma representação tabular; o grupo W utilizou uma árvore de possibilidades; o grupo Y optou pela representação por meio de figuras; e o grupo Z representou esquematicamente a situação.

Todas as representações citadas acima foram convertidas para representação numérica. Como o problema consistia em contar maneiras de pintar um mapa, é natural que os alunos procurem emitir uma resposta final com uma representação numérica, pois contar consiste em associar a quantidade de elementos de um dado conjunto a um número pertencente ao conjunto dos números naturais.

Nota-se que os alunos não tiveram dificuldades para representar a situação do problema, além disso, conseguiram contornar a restrição da tarefa, que não permitia a pintura com cores iguais. Os grupos V e X deixaram vazias a células que abrigariam as possibilidades de cores iguais. O grupo W restringiu com um “x” o ramo da árvore de possibilidades que implicava em cores idênticas. O grupo Y não pintou nenhuma figura com uma única cor. Já o grupo Z teve o cuidado de não registrar cores iguais nas linhas do esquema que articulou a contagem.

Através das análises da tarefa 3, pode-se inferir que os estudantes, por meio de diferentes representações, conseguiram compreender o conceito de arranjo simples, pois perceberam intuitivamente os invariantes segundo Pessoa e Borba (2009), desse tipo de problema.

4.10. ANÁLISE A PRIORI DA TAREFA 4: COMBINAÇÃO SIMPLES

Para Pessoa e Borba (2009), nos problemas de combinação simples as seguintes relações e propriedades se mantêm constantes:

- Tendo **n** elementos poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... **p** elementos, com **0 < p < n**, sendo **p** e **n** números naturais;
- A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Semelhantemente aos problemas de arranjo simples, de um conjunto maior são retiradas possibilidades para formar subconjuntos, entretanto, de modo diferente, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

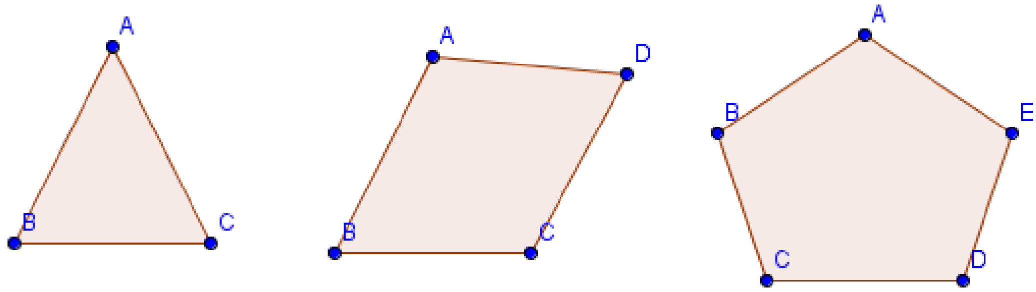
A quarta tarefa aplicada aos grupos é caracterizada como combinação simples, pois de um grupo maior de elementos (vértices), alguns subgrupos são organizados e a ordem dos elementos não gera novas possibilidades, ou seja, a diagonal AB de um polígono, não é diferente da diagonal BA do mesmo.

Os objetivos da tarefa 4 eram proporcionar aos alunos um contato com problemas envolvendo combinações, desenvolver o cálculo das possibilidades por meio da escrita das opções, conduzir a observação da regularidade que permeia os três primeiros itens, para elaboração da conjectura da lei geral e construção do conceito. E ainda, nos itens (1), (2) e (3) esperava-se que os estudantes registrassem as contagens das diagonais, por exemplo, enumerando as maneiras, utilizando algum tipo de registro de representação, como árvore de possibilidades, tabelas, listagem das possibilidades, etc.

A tarefa é finalizada com uma situação onde se supõe um polígono de n lados, com a intenção de conduzir a generalização das situações realizadas anteriormente.

TAREFA 4: DIAGONAIS DE UM POLÍGONO

Sabemos que diagonal de um polígono é o segmento que une dois vértices não consecutivos do mesmo. Pretendemos contar quantas diagonais possuem determinados polígonos, como triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc.:



Para tanto, responda as questões a seguir:

1. Quantas diagonais têm um triângulo?
2. E um quadrilátero?
3. E um pentágono?
4. Existe alguma lei geral, que nos permita contar as quantas diagonais possuí um polígono de n lados?

INVESTIGUEM ...

Analogamente as tarefas anteriores, para realização da tarefa 4 é fundamental uma boa leitura, a fim de que se tenha uma boa compreensão do problema.

4.11. ANÁLISE A POSTERIORI DA TAREFA 3

Na tabela abaixo sistematizamos as conversões realizadas pelos grupos nas três primeiras alíneas da tarefa 4:

Tabela 4: Conversões na tarefa de combinação simples

	Conversões
Grupo V	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{F}) \Rightarrow (\boldsymbol{N}) \Rightarrow (\boldsymbol{LP})$
Grupo W	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{F}) \Rightarrow (\boldsymbol{N})$
Grupo X	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{F}) \Rightarrow (\boldsymbol{N}) \Rightarrow (\boldsymbol{LP})$
Grupo Y	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{F}) \Rightarrow (\boldsymbol{N}) \Rightarrow (\boldsymbol{LP})$
Grupo Z	$(\boldsymbol{LN}) \Rightarrow (\boldsymbol{F}) \Rightarrow (\boldsymbol{N})$

Fonte: Arquivo do pesquisador

Os cinco grupos realizaram a conversão da representação em linguagem natural (enunciado da tarefa), e produziram duas ou três outras representações.

4.11.1. Análise da produção do grupo V na tarefa 4

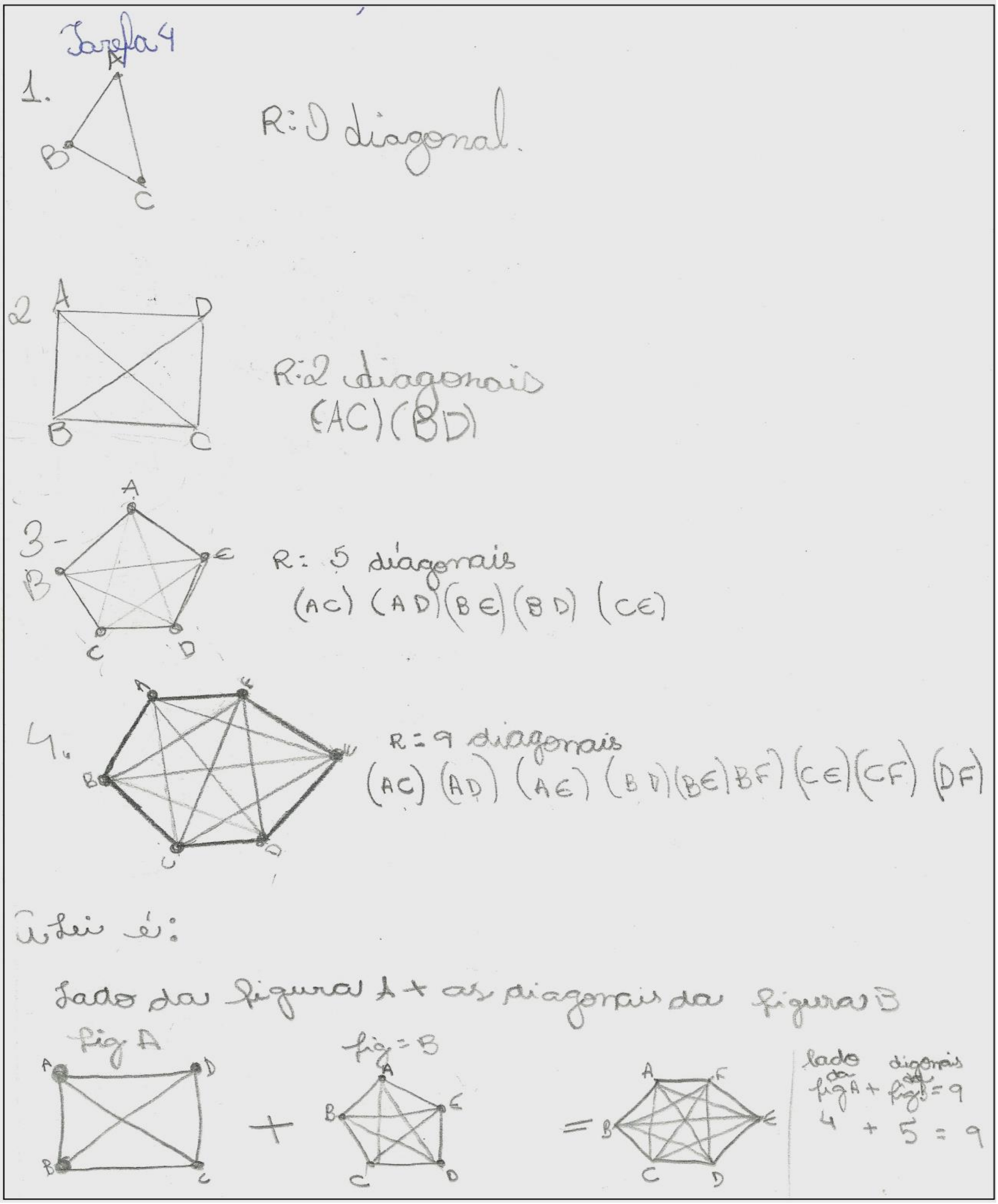
O grupo V, nos três primeiros itens, desenhou as respectivas figuras e traçou as diagonais de forma correta, tal estratégia permitiu o esgotamento de todas as possibilidades de diagonais.

No quarto item, os alunos mobilizaram registros em língua natural e registros de figuras. Através destes, fica evidente um raciocínio recursivo, onde que para se obter o número de diagonais de um polígono com n lados é necessário somar o número de diagonais de um polígono com (n-1) lados, com o número de lados de um polígono de (n-2) lados.

Para Jesus e Silva (2006), é fundamental que os estudantes aprendam a trabalhar com equações matemáticas provenientes de recorrências, e os autores (2006, p. 5) ainda destacam que: “muitos algoritmos são baseados em relações recorrentes e problemas combinatórios considerados difíceis à primeira vista, podem ser resolvidos mais facilmente quando escritos na forma de relações de recorrência”.

Ainda nesse sentido, Santos, Mello e Murari (1998, p. 155), afirmam que “a formulação de relações de recorrência é uma arma poderosa e versátil na resolução de problemas combinatórios”. Os autores enfatizam que soluções de muitos problemas a princípio considerados difíceis podem ser obtidas com considerável facilidade utilizando-se esta ferramenta matemática.

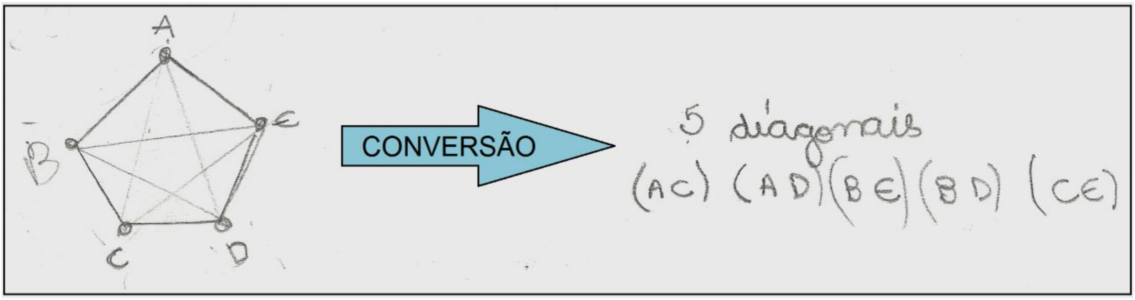
Figura 30 – Produção da tarefa 4 do grupo V



Fonte: Arquivo do pesquisador

Através do recorte da tarefa 4 (Figura 31), pode-se observar que os alunos realizaram uma conversão da representação do objeto matemático combinação simples, coordenando registros de figuras e listagem das possibilidades.

FIGURA 31 – Conversão: representação de figuras para representação listagem das possibilidades

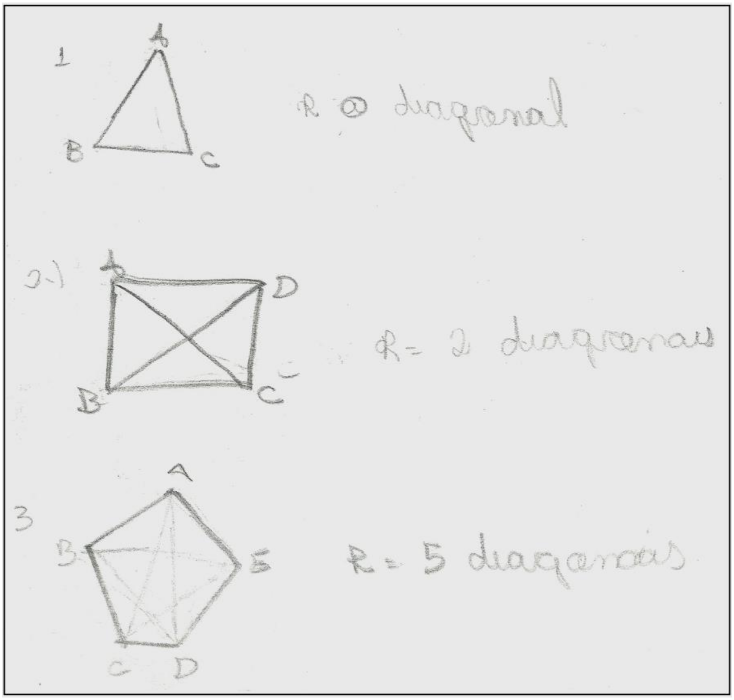


Fonte: Arquivo do pesquisador

4.11.2. Análise da produção do grupo W na tarefa 4

Na quarta tarefa, este grupo também optou por desenhar os polígonos em questão, e contar as respectivas diagonais dos mesmos.

Figura 32 – Produção da tarefa 4 do grupo W



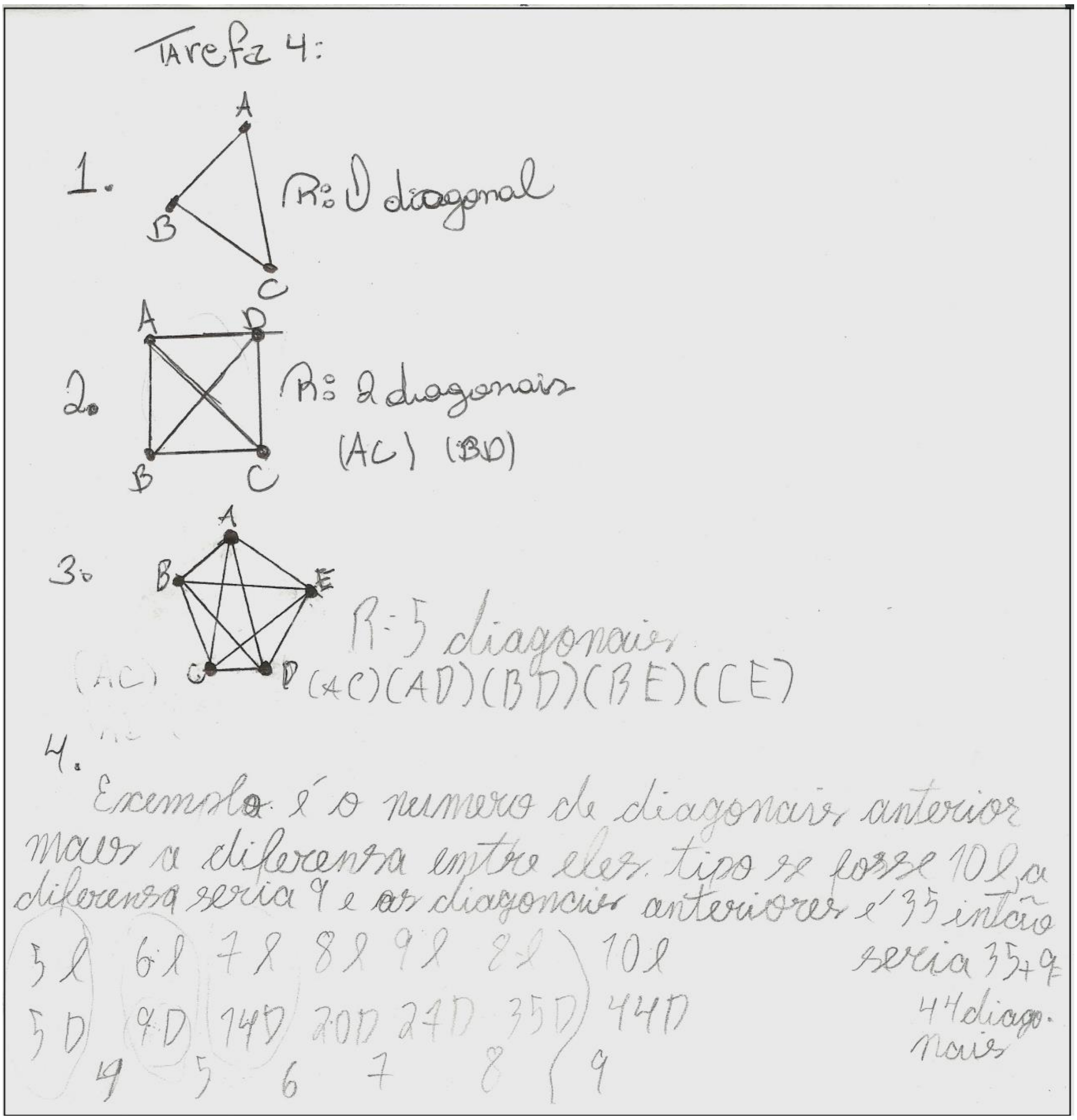
Fonte: Arquivo do pesquisador

A contagem foi realizada corretamente nos primeiros itens, esgotando todas as possibilidades através de representações numéricas e de figuras, que deixaram evidentes o número de diagonais. Pode-se observar que os estudantes construíram a solução do problema tendo clareza dos seus raciocínios.

4.11.3. Análise da produção do grupo X na tarefa 4

O grupo X construiu os polígonos de modo sistemático, esta estratégia encaminhou-os para o esgotamento de todas as possibilidades requeridas nos três primeiros itens.

Figura 33 – Produção da tarefa 4 do grupo X



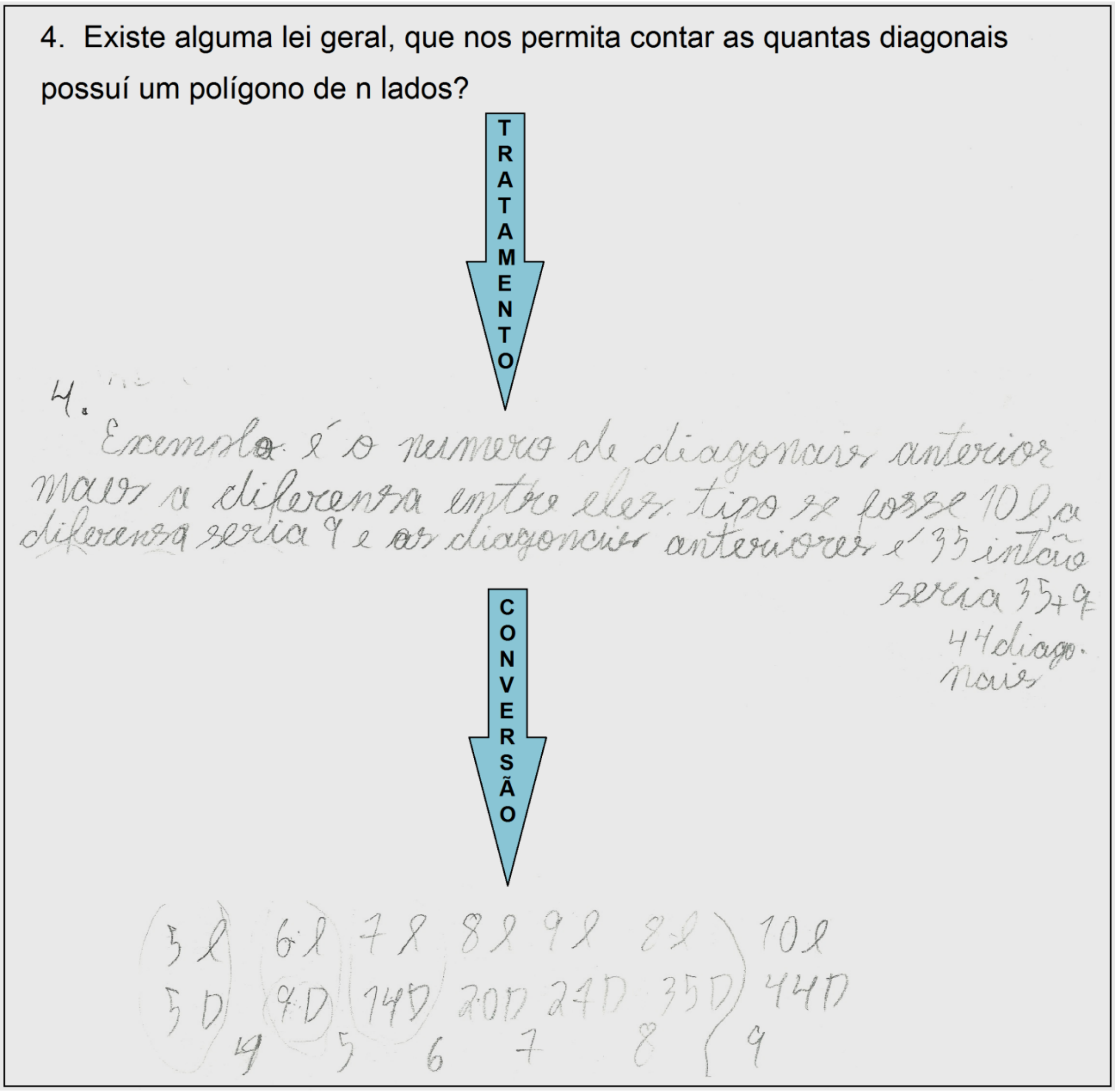
Fonte: Arquivo do pesquisador

Em relação ao item (4), apresentaram a resposta utilizando-se de registros em língua natural e registro tabular, segue a transcrição da resposta, “é o número de diagonais anterior mais a diferença entre eles, tipo se fosse 10 l, a diferença seria 9 e as diagonais anteriores é 35 então seria 35 + 9 = 44 diagonais”.

Novamente, esse grupo apresentou um pensamento recursivo, onde supostamente é possível determinar o número de diagonais de um polígono de n lados somando-se as diagonais do polígono de (n – 1) lados com o número de lados menos 1 do polígono em questão. Apresentaram o raciocínio recursivo em uma tabela que evidencia a contagem correta de diagonais para polígonos de 5 a 9 lados.

É notório que os estudantes realizaram tratamentos e conversões nesta tarefa (Figura 34).

FIGURA 34 – Tratamento seguido de conversão



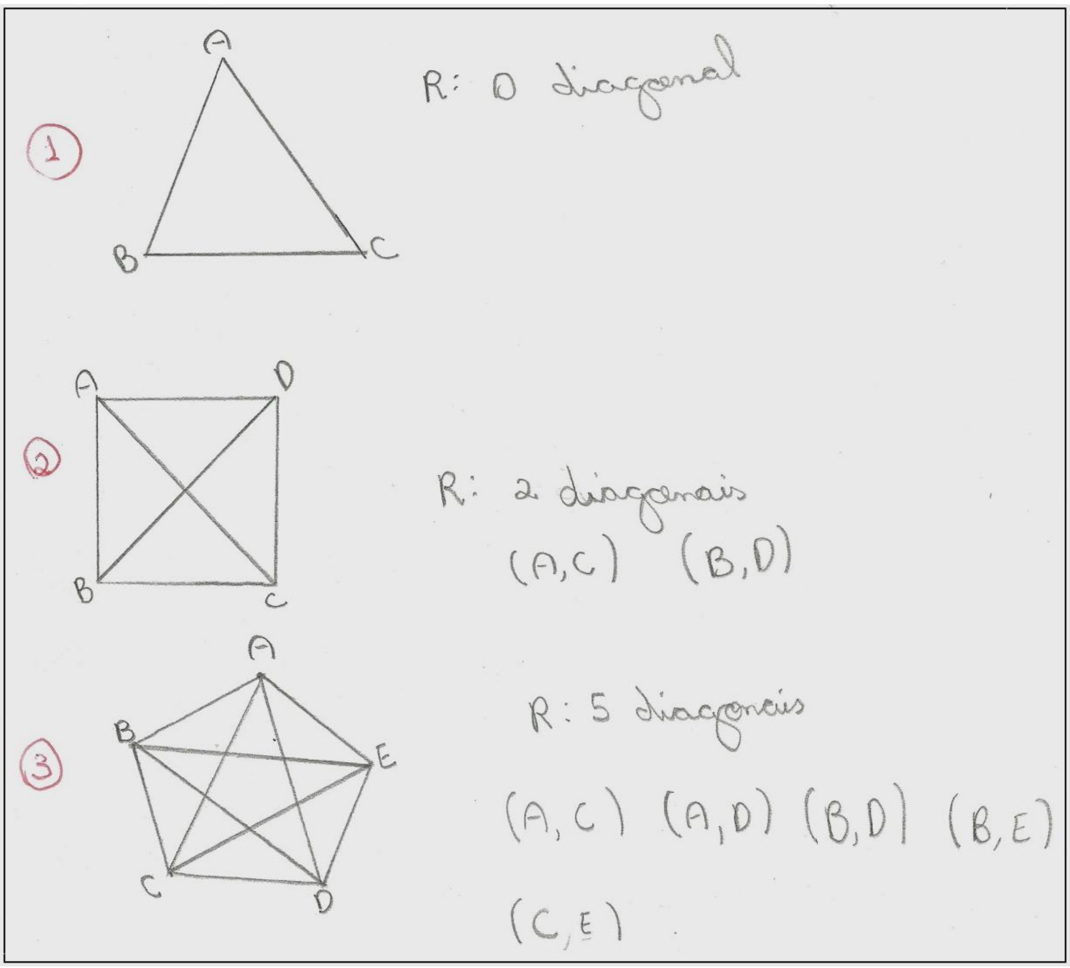
Fonte: Arquivo do pesquisador

Tratar e converter distintas representações de um mesmo objeto matemático pode viabilizar o entendimento mais detalhado das características do mesmo, contribuindo assim, para uma aprendizagem mais efetiva.

4.11.4. Análise da produção do grupo Y na tarefa 4

De modo similar aos outros grupos, os estudantes do grupo Y mobilizaram registros numéricos e de desenhos.

Figura 35 – Produção da tarefa 4 do grupo Y



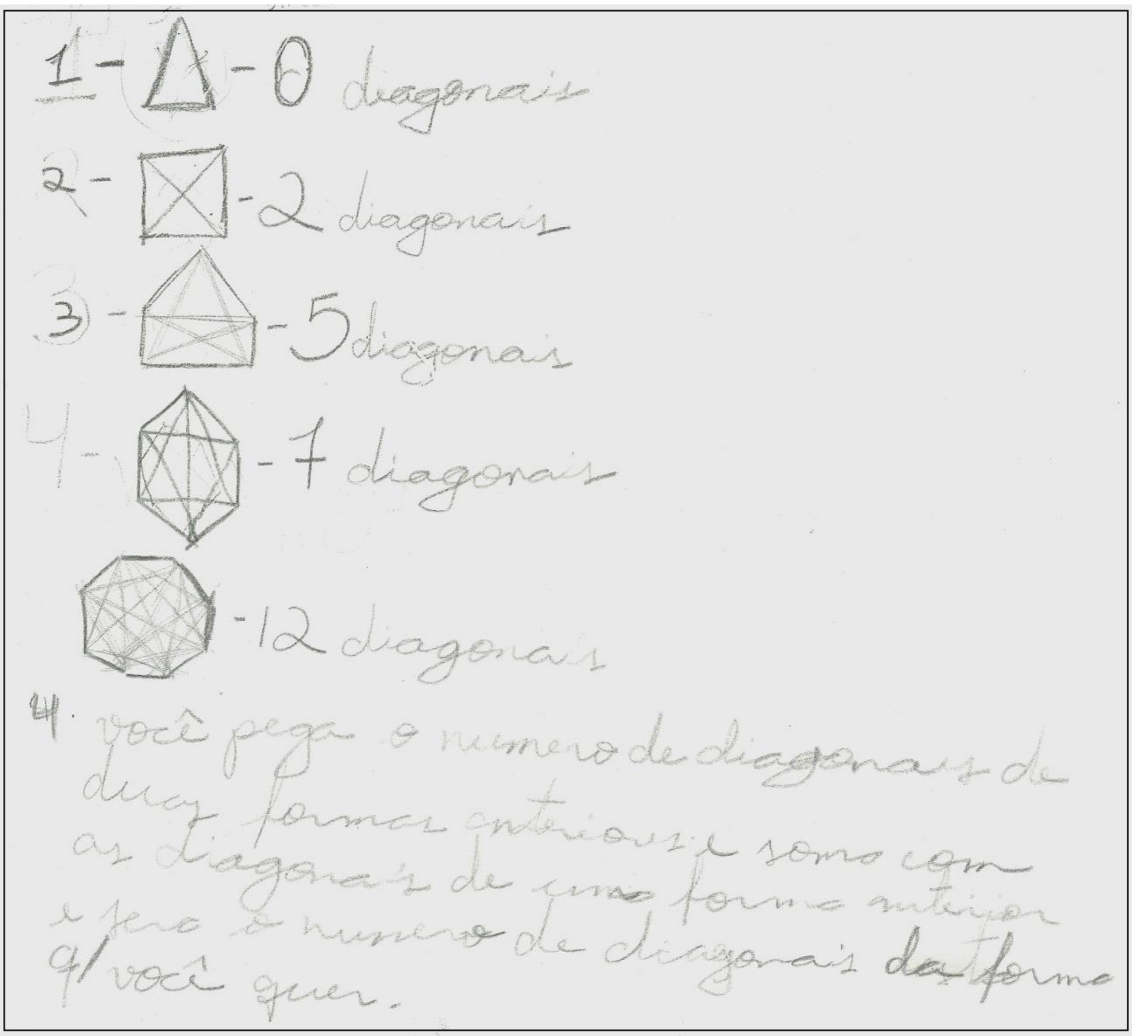
Fonte: Arquivo do pesquisador

A estratégia utilizada foi eficaz para os três primeiros itens, pois permitiu realizar as contagens de forma correta. A associação da representação de desenhos e numérica não contribuiu para que os alunos desse grupo visualizassem a regularidade requerida no item (4).

4.11.5. Análise da produção do grupo Z na tarefa 4

Na produção da quarta tarefa deste grupo notou-se que os integrantes do mesmo coordenaram registros em língua natural, registros numéricos e registros de figuras dos polígonos.

Figura 36 – Produção da tarefa 4 do grupo Z



Fonte: Arquivo do pesquisador

Analogamente aos grupos anteriores a estratégia de desenhar os polígonos conduziu a resolução correta dos três primeiros itens.

No item (4) os estudantes desenharam polígonos de seis e oito lados, provavelmente para auxiliá-los na construção da generalização, que apresentaram em língua natural, segue a transcrição da resposta “você pega o número de diagonais de duas formas anteriores e soma com as diagonais de uma forma anterior e será o número de diagonais da forma que você quer”. Pode-se inferir que o grupo tentou construir uma relação de recorrência de segunda ordem da forma $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, onde a_n seria o número de diagonais de um polígono na posição n, a_{n-1} seria o número de diagonais de um polígono na posição (n – 1), e a_{n-2} seria o número de diagonais de um polígono na posição (n – 2). Este raciocínio recursivo justifica-se quando se observa a contagem realizada pelo grupo, entretanto o número de diagonais do quarto e do quinto polígono não foram contadas corretamente, além disso, os alunos não consideram as possíveis diagonais do polígono de sete lados. Estes erros comprometeram a solução do último item. Apesar do equívoco, nota-se que o raciocínio recursivo esteve fortemente presente na investigação, e nesse sentido, concordamos com Santos, Mello e Murari (1998), para estes autores, a construção de relações de recorrência pode contribuir significativamente para a resolução de Problemas de Contagem.

4.12. CONCLUSÃO DA ANÁLISE DA PRODUÇÃO DOS GRUPOS NA QUARTA TAREFA

Nesta última tarefa, todos os grupos optaram, inicialmente, pela representação por meio de figuras. Foi possível notar que os alunos perceberam os invariantes da combinação simples, pois consideraram apenas uma vez cada diagonal dos polígonos desenhados para realização das contagens.

De modo análogo a tarefa de arranjo simples, a segunda conversão, invariavelmente, produziu uma representação numérica.

Três grupos (V, X e Y), realizaram uma terceira conversão, com a qual justificaram a contagem listando as possíveis diagonais dos polígonos representados, a princípio, através de figuras.

O grupo Z no intuito de entender melhor o comportamento da sequência iniciada, respectivamente, com o número de diagonais do triângulo, quadrilátero e pentágono, desenharam também um hexágono e um octógono. Porém, ignoraram o heptágono, e não traçaram todas as diagonais dos polígonos de seis e oito lados, estes erros comprometeram a construção da conjectura.

Durante a aplicação, um dos alunos pertencentes ao grupo W fez o seguinte comentário: “a diferença entre a tarefa 3 e a tarefa 4, é que na tarefa 3, AB é diferente de BA, já na tarefa 4, AB é igual a BA”. Mostrando, assim, que percebeu a diferença entre arranjo simples e combinação simples.

É interessante destacar o raciocínio recursivo observado nos grupos V, X e Z, pois identificaram regularidades que, segundo os integrantes destes grupos, permitiriam o cálculo das diagonais de um polígono qualquer. Os grupos V e X construíram leis de recorrências, notadamente, bem elaboradas, através das quais é possível contar as diagonais de um polígono de n lados.

Os estudantes souberam reconhecer com clareza a formação da quantidade de diagonais e da não importância da ordem dos vértices na situação. Analogamente as outras tarefas, pode-se considerar que os alunos construíram o conceito, antes de ser apresentado formalmente.

Ademais, é importante destacar, que nesta tarefa, perguntas relevantes sobre geometria plana foram levantadas pelos estudantes, que, de modo geral, assimilaram com bastante rapidez os conceitos relacionados aos polígonos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação efetuada nesta pesquisa procurou planejar e aplicar uma sequência de tarefas de natureza exploratório-investigativas relacionadas a Problemas de Contagem, com a intenção de analisar a aprendizagem dos alunos, e contribuir para a construção de conceitos presentes em Combinatória. Nesse sentindo, procuramos responder a seguinte questão de investigação: *que aprendizagem ocorre com a mobilização de registros de representação semiótica para a realização de contagens em um cenário de tarefas exploratório-investigativas num 8º ano do Ensino Fundamental?*

Para isso, construímos a parte teórica e metodológica da pesquisa nos baseando na teoria dos registros de representação semiótica proposta por Duval (2003, 2009); nas atividades investigativas propostas por Ponte et al. (2015); e nos significados, segundo Pessoa e Borba (2009), presentes em Combinatória (tipos de problemas): produto cartesiano, permutação simples, arranjo simples e combinação simples. Para a viabilização do presente trabalho também foi necessário um breve tratamento histórico acerca do tema, com uma trajetória dos Problemas de Contagem no passar do tempo, além de uma análise previa de outros trabalhos nessa área e documentos oficiais voltados para o ensino da Matemática no que diz respeito a conteúdos relacionados a Problemas de Contagem.

Para responder à questão de investigação, foi adotada a opção metodológica da pesquisa qualitativa, onde a produção de informações deu-se através da produção escrita dos alunos e de notas de campo (diário de bordo).

Cada tarefa, que explorava um significado diferente presente em Combinatória, foi aplicada em duas aulas seguidas, de 50 minutos cada uma, em grupos de 4 ou 5 alunos, onde o professor-pesquisador fez apenas uma introdução oral, no sentido de garantir que todos os discentes entendessem aquilo que se esperava deles no decurso da atividade, visto que havia a intenção de incentiva-los a investigação e a exploração.

Com base nos resultados obtidos, e a partir da análise da produção dos discentes realizada no capítulo anterior, observamos que os estudantes, de modo geral, buscaram produzir e coordenar diversos registros de representação semiótica, realizando tratamentos e conversões.

Nas três primeiras alíneas de cada tarefa os grupos desenvolveram várias estratégias de enumeração com diferentes registros de representação semióticos, que lhes permitiram, na maioria dos itens, esgotar todas as possibilidades levando-os as respostas corretas. Dessa forma, fica evidente que o trabalho com tarefas exploratório-investigativas proporcionou aos discentes a visualização de diferentes registros representações de um mesmo objeto matemático, fato este que possibilitou a coordenação de tais registros e, conseguintemente, contribuiu para a construção de conceitos de Combinatória.

Por outro lado, ao considerarmos as respostas dos grupos na quarta alínea de cada tarefa, constatamos que existiu uma grande dificuldade em extrair informações das respostas das alíneas anteriores e representa-las na forma algébrica. A conversão necessária, neste caso, quando se exige a passagem da representação numérica para a representação algébrica, aparenta não ser uma transformação imediata para os alunos, visto que a maioria dos itens que exigiam essa conversão não foram respondidos ou foram respondidos de forma equivocada. Duval (2003) considera que representações diferentes de um mesmo objeto causam dificuldades para os alunos, pois não apresentam o mesmo conteúdo.

Apesar do baixo índice de acertos no item que requeria a conjectura da lei geral, nota-se que durante as explorações e investigações matemáticas realizadas pelos grupos, houve um grande número de testes com a intenção de se construir a fórmula que permitiria contar a totalidade de agrupamentos para uma quantidade genérica de elementos e consequentemente um entendimento mais amplo do objeto matemático estudado, entretanto, em noventa porcento dos casos, os discentes não conseguiram formular uma generalização que resistisse a sucessivos testes. Em contrapartida, parte dos grupos apresentaram uma compreensão de relações entre padrões numéricos e geométricos, onde ficou claro a utilização de conceitos geométricos para simplificar a extração de dados numéricos, com a finalidade de entender as relações que permeavam os três primeiros itens das tarefas.

Ao observar os protocolos nota-se que os estudantes articularam tratamentos e conversões de registros de representação semiótica, dando ênfase às conversões em relação aos tratamentos, fato este que vem a favorecer o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Nesse sentido, Duval (2003, p. 24), afirma que “os fenômenos cognitivos reveladores da atividade matemática concernem à mobilização de vários registros de representação semiótica e à conversão dessas representações”.

Assim, pode-se inferir, através da observação dos registros, que alguns estudantes partiram de um simples processo de contar diretamente elementos e evoluíram até a utilização de um raciocínio recursivo combinatório, que propiciou a identificação de padrões, e a construção de conjecturas com registros, principalmente, em linguagem natural. Nesse aspecto, concordamos com Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997), que afirmam que no ensino da Combinatória, é fundamental levar-se em conta o raciocínio recursivo e os procedimentos sistemáticos de enumeração, ao invés de enfatizar aspectos algorítmicos e definições combinatórias.

A análise das respostas dos alunos mostrou uma aprendizagem efetiva no que diz respeito às contagens que envolvem um pequeno número de elementos, onde uma estratégia de enumeração proporcionou uma contagem de forma correta. Entretanto, em questões com um número um pouco maior de elementos surgiram algumas dificuldades, e nos itens que careciam de registro algébrico os discentes apresentaram grandes dificuldades, uma aprendizagem bem limitada.

Os estudantes participaram ativamente nas tarefas, produziram diversos registros, desenharam, criaram, estimaram os possíveis agrupamentos, com bastante interesse, e passaram isso para o papel, como pode-se notar no capítulo anterior. Pudemos verificar algumas dificuldades, no entanto, o problema de aprendizado pode não estar correlacionado simplesmente com o conhecimento limitado de um assunto matemático abordado, e sim ao reconhecimento de um objeto matemático em diferentes registros de representação semiótica. Como professores de Matemática, com certa experiência e considerável carga de estudos, chegamos a pensar que algumas conexões são obvias para os discentes, entretanto, na verdade, podem não ser. Nesse sentido, concordamos com as considerações de Duval (2009), que afirma que a passagem de um sistema de representação para outro sistema pode ocorrer com grande frequência na atividade matemática, porém, não tem nada de evidente e espontâneo para os estudantes. Além disso, o autor também destaca que a coordenação entre representações semióticas não resulta automaticamente de aprendizagens clássicas muito diretamente centradas em conteúdos de ensino e sim através de um trabalho de aprendizagem especifico centrado sobre a diversidade de representações e suas possibilidades de transformações.

Em consonância com as ideias de Ponte et al. (2015), a sequência de tarefas buscou explorar o trabalho intuitivo enfatizando os métodos de investigação matemática, deixando a escolha da estratégia de resolução a cargo dos estudantes, pois acreditamos que com essa atitude estamos contribuindo para o desenvolvimento de uma postura mais autônoma. Graças a essa liberdade de escolha estratégica, pudemos observar a experimentação de variados registros de representação semiótica, e as transformações dos mesmos, que contribuíram significativamente para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e de uma melhor compreensão do tema.

Com a aplicação das tarefas de natureza exploratório-investigativa, percebemos que os alunos ganharam mais autonomia. Na primeira tarefa notamos certo mal-estar, por parte dos discentes, que não estavam familiarizados com o trabalho em grupo e com a exploração-investigação, no entanto com o desdobramento das tarefas seguintes foram percebendo que eram capazes de produzir registros eficientes que possibilitavam as contagens de forma sistemática e compreensível. Desta forma, concluímos que os estudantes desenvolveram aprendizagens relacionadas ao raciocínio combinatório.

Numa análise geral, através dos resultados encontrados na pesquisa, pode-se considerar que a sequência de tarefas representou um recurso profícuo no processo de ensino de Problemas de Contagem, pois promoveram, a partir de uma abordagem intuitiva, a aprendizagem dos conceitos de produto cartesiano, permutação simples, arranjo simples e combinação simples. Os registros de representação semiótica, produzidos e transformados pelos estudantes, possibilitaram a visualização de vários aspectos dos objetos matemáticos estudados nas atividades, o que corroborou a construção da aprendizagem dos conceitos presentes em Combinatória.

REFERÊNCIAS

ALVES, Alessandro Caldeira. **Uma Introdução ao Pensamento Combinatório no 9º Ano do Ensino Fundamental**. 2010. 158f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

AQUINO, Claudivania de Alencar. **Introduzindo o Pensamento Combinatório nos Anos Finais do Ensino Fundamental: uma proposta de ensino.** 2013. 77f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2013.

BATANERO, María del Carmem; GODINO, Juan Diáz; NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria**. Virgínia: Educación Matemática, 1997.

BEZERRA, José Rauryson Alves. **Uma ferramenta didática para ajudar na fixação dos conceitos introdutórios de análise combinatória**. 2013. 37f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: ENEM, 2013.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 3 ed. São Paulo: Blücher, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. (1º e 2º ciclos do ensino fundamental). v.3. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental (Matemática). Brasília: MEC, 1998.

COUTINHO, Clara Pereira. A qualidade da investigação educativa de natureza qualitativa: questões relativas à fidelidade e validade. Educação Unisinos, v.12, n.1, p.5-15, jan./abr. 2008.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. et al. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: Educ, p.135-154, 1999.

DUTRA, Enexandro Nobre. **Análise Combinatória: Uma proposta para o seu ensino na Educação Básica com ênfase no princípio fundamental da contagem.** 2014. 78f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2014.

DUVAL. Raymond. **Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.** Annales de Didactique et Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM – ULP, vol. 5, p. 37-65. 1993.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.) **Aprendizagem em matemática**: Registros de representações semióticas. Campinas: Papirus, 2003.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros Semióticos e aprendizagens intelectuais.** (Fascículo I). São Paulo. Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. São Paulo, PROEM, 2011.

ESTEVES, Inez. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescente de 14 anos – 8ª série do Ensino Fundamental**. 2001. 203f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2001.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Higyno H. Domingues. Campinas. Editora Unicamp. 2004.

FORTES, Fabrício Pires. **"Combinatória e Pensamento Simbólico Musical em Leibniz".** In: O Que Nos Faz Pensar, 25, p. 125-140, 2009.

GOOGLE IMAGENS - 1. Disponível em: http://www.math.cornell.edu/~mec/GeometricDissections/pictures/Stomachion.JPG. Acesso em 03 de janeiro de 2017.

GOOGLE IMAGENS - 2. Disponível em: http://2.bp.blogspot.com/-rxNIbYpcN2k/Ua01kkPHvCI/AAAAAAAAAFk/D3W1IU-JJQI/s400/Lo+shu.bmp. Acesso em 11 de janeiro de 2017.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar**, vol. 5 – Combinatória e Probabilidade. 7ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

HENRIQUES, Afonso; ALMOULOUD, Saddo Ag. **Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple**. Ciência Educação, v. 22, p. 465-487, Bauru 2016.

JESUS, Eliane Alves de; SILVA, Elisa Fonseca Sena e. **Relações de recorrência**. 2006. 28f. Monografia (proposta de apresentação de trabalho nas Jornadas de Iniciação Científica) – Universidade federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

MAGALHÃES JUNIOR, José Maria. **Uma discussão intuitiva sobre o princípio multiplicativo da Análise Combinatória.** 2015. 39f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

KEITH, D. **O Instinto Matemático**. Record, 2009.

LIMA, Elon Lages de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. (2002). **Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro, SBM. (coleção do professor de Matemática , v.2)

MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação Matemática: uma introdução.** 2a ed. São Paulo: EDUC, 2002. p. 197 a 208.

MACIEL, Wagner da Silva. **Conceitos de Análise Combinatória e suas aplicações por meio de situações problemas.** 2015. 58f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

MIOTTO, Eder. **A Análise Combinatória e seu ensino.** 2014. 85f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2014

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática.** 1 ed. Belo Horizonte: CAED – UFMG, 2013.

MORAIS, Patrícia Ramalho. **Tarefas de natureza exploratória e investigativa: Contributos para a compreensão dos conceitos matemáticos no tema das Sucessões.** 2010. 133f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade de Lisboa, 2010.

MORGADO, Augusto Cesar et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 6ª ed. Coleção Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Rio de Janeiro, 2004.

OLIVEIRA, Hélia Margarida; SEGURADO, Maria Irene; PONTE, João Pedro da. **Explorar, Investigar e Discutir na Aula de Matemática**. Lisboa, 1996. Disponível em: http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto9.PDF. Acesso em 16 de maio de 2017.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções e perspectivas. (org.). São Paulo. Editora UNESP, 1999.

PACHECO, Adriano Mendes. **Modelagem matemática no ensino de equações de recorrência.** 2013. 133f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2013.

PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio**. 2009. 207f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. **A compreensão do raciocínio combinatório por alunos do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio**. Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Brasília, 2009.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia Margarida. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2015. 159 p.

PONTE, João Pedro da. **Gestão curricular em Matemática**. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM. 2005.

ROA, Rafael; NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad**. In: JORNADAS EUROPEAS DE ESTADÍSTICA: La enseñanza y ladifusión de la estatística, 2001, Palma (Ilhas Baleares).

ROSA, Claudia Carreira da. **Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de modelagem matemática no ensino médio.** 2009. 142f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade de Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

SALDANHA, Mayara de Araújo. Resolução de problemas: uma metodologia alternativa para o ensino e a aprendizagem de matemática nas escolas do CASE. In: **Anais da III EIEMAT - Escola de Inverno de Educação Matemática**, Santa Maria - RS, 2012.

SANTAELLA, Lúcia. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2002.

SANTOS, José Plínio de Oliveira; MELLO, Margarida Pinheiro; MURARI, Idani Theresinha Calzolari. **Introdução à Análise Combinatória**. 2 ed. Campinas, São Paulo: UNICAMP, 1998.

SÃO PAULO. **Matrizes de referência para a avaliação Saresp**: documento básico/Secretaria da Educação. Coordenação geral, Maria Inês Fini. – São Paulo: SEE, 2009.

SÃO PAULO. **Saresp 2010: Relatório Pedagógico:** Matemática/Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini. – São Paulo: SEE, 2011.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do Aluno**: 8º Ano do Ensino Fundamental, Volume 2, Matemática. São Paulo: SE, 2014.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática – Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Coordenação geral, Maria Inês Fini. – São Paulo: SEE, 2011.

SILVA, Claudio Xavier da; FILHO, Benigno Barreto. **Matemática – Aula por aula** - Obra em 3 V. 2ª Série do Ensino Médio. 1ª ed. Editora FTD, 2003.

SILVA, Monalisa Cardoso. **A COMBINATÓRIA: abordagem em documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do Ensino Fundamental.** 2016. 200f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

TROTTA, Fernando. **Matemática por assunto**. Volume 4. Análise Combinatória. São Paulo: Scipione, 1988.