

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS
EXATAS - PPGECE**

LEANDRO APARECIDO ALVES CUSTÓDIO

**LETRAMENTO PROBABILÍSTICO: UM OLHAR SOBRE AS
SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM DO CADERNO DO PROFESSOR**

**SOROCABA
2017**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS
EXATAS - PPGECE**

LEANDRO APARECIDO ALVES CUSTÓDIO

**LETRAMENTO PROBABILÍSTICO: UM OLHAR SOBRE AS
SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM DO CADERNO DO PROFESSOR**

**Leandro Aparecido Alves Custódio
ORIENTADOR: Prof. Dr. Paulo César Oliveira**

**SOROCABA
2017**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS
EXATAS - PPGECE**

LEANDRO APARECIDO ALVES CUSTÓDIO

**LETRAMENTO PROBABILÍSTICO: UM OLHAR SOBRE AS
SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM DO CADERNO DO PROFESSOR**

Dissertação elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

**SOROCABA
2017**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Leandro Aparecido Alves Custódio, realizada em 21/03/2017:



Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira
UFSCar



Prof. Dr. Maria Ogécia Drigo
UNISO



Prof. Dr. Antonio Luis Venezuela
UFSCar

Dedico este trabalho a minha amada avó ***Benedicta Salvador Alves, “Vó Dita”***, a qual me criou com amor e carinho, e me deu os primeiros ensinamentos para a vida; aos meus filhos queridos: ***Júlia Valentim Custódio*** e ***Felipe Valentim Custódio*** e especialmente à minha companheira ***Daniela Valentim Dos Santos*** pelo apoio, motivação, incentivo, cuidado e carinho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus,

A minha avó Dona **Benedicta** que mesmo na dificuldade me acolheu, me deu abrigo, carinho, bons exemplos e me fez acreditar que vale a pena sonhar, e o sonho dela era que eu me tornasse um “cobrador” de ônibus, pois eu era muito bom Matemática.

A minha companheira **Daniela Valentim dos Santos** que acreditou em meu talento, me motivou em momentos difíceis, me deu apoio, estrutura e conselhos. Minha parceira que sem a qual, talvez não conseguisse ter chegado até aqui.

Aos meus filhos **Júlia e Felipe**, pelos momentos em que estudamos juntos cada qual o seu material, por me ensinarem a ter fé, esperança, a ser curioso, querer aprender sempre...

Agradeço também, minha professora **Dra. Maria Ogécia Drigo**, que durante a graduação foi um exemplo de postura, de organização, rigor, de busca pela perfeição, que em dezembro de 2004 me disse que eu tinha potencial para fazer mestrado em uma universidade Estadual ou Federal, aquelas palavras ecoam na minha mente até os dias de hoje!!!

Durante este percurso fiz muitas amizades e gostaria de destacar e agradecer o meu parceiro e futuro Mestre **Marcelo Silva**, amigo das madrugadas, dos estudos, das discussões, dos trabalhos, parceiro que me motivou, me corrigiu e sempre esteve ao meu lado.

Gostaria de agradecer ao corpo docente do PPGECE – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, em especial aos Professores Doutores: **Antônio Luís Venezuela, Deisimara Ferreira, Magda da Silva Peixoto, Renato Fernandes Cantão, Silvia Maria Simões de Carvalho, Wladimir Seixas**, faltam palavras para expressar minha gratidão ao Professor **Dr. Paulo Cesar Oliveira**, figura a qual aprendi admirar e tenho profundo respeito, além de muito orgulho de ter sido aluno, orientado e agora partilho de sua amizade. Profissional exemplar, empenhado, dedicado, preocupado, responsável e ser humano ímpar, quando aluno de disciplinas oferecidas no curso e como orientando, me propiciou vários momentos de reflexões ora como estudante e ora como professor.

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo avaliar o conceito de probabilidade por meio da diversidade de registros de representação semiótica dispostos no enunciado das tarefas (situações de aprendizagem) contidas no segundo volume do Caderno do Professor para a segunda série do ensino médio e, suas possíveis contribuições para o desenvolvimento do letramento probabilístico. O estudo fundamentou-se na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval e no Letramento Probabilístico de Ildo Gal. Buscou-se responder as seguintes questões de investigação: Quais e como são articulados os registros de representação semiótica nas situações de aprendizagem propostas no Caderno do professor? Tais registros contribuem para o desenvolvimento do letramento probabilístico? Para o cumprimento dos propósitos do nosso trabalho, recorreremos à pesquisa bibliográfica e documental e com base em nossos aportes teóricos, analisamos o conteúdo de quatro situações de aprendizagem. Entre os diversos registros de representação semiótica, o diagrama de árvore foi pouco explorado nas tarefas propostas. A mobilização e coordenação de registros dessa natureza tem a função de contribuir na construção de conceitos, porém, no caso dos problemas de análise combinatória, os mesmos não apresentaram contribuições ao desenvolvimento do letramento probabilístico, devido a ausência de conexões internas entre as noções básicas de combinatória com o cálculo das probabilidades.

Palavras-chave: Ensino médio, Caderno do Professor, ensino de probabilidade, letramento, concepção de probabilidade.

ABSTRACT

The aim of this research was to analyze the concept of probability through the diversity of semiotic representation records arranged in the statement of the tasks (learning situations) contained in the second volume of the Teacher's notebook for the second high school series and their possible contributions to the development of probabilistic literacy. The study was based on Raymond Duval's Theory of Semiotic Representations and on the Probabilistic Letters of Iddo Gal. We sought to answer the following research questions: What and how are the records of semiotic representation in the learning situations proposed in the teacher's book? Do such records contribute to the development of probabilistic literacy? In order to fulfill the purposes of our work, we resorted to bibliographical and documentary research and based on our theoretical contributions, we analyzed the content of four learning situations. Among the several records of semiotic representation, the tree diagram was little explored in the proposed tasks. The mobilization and coordination of records of this nature has the function of contributing to the construction of concepts, but in the case of problems of combinatorial analysis, they did not present contributions to the development of probabilistic literacy, due to the absence of internal connections between the basic notions of With the calculation of probabilities.

Keywords: High school, Teacher's Notebook, probability teaching, literacy, probability conception.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Árvore de probabilidades na versão completa	25
Figura 2: Árvore de possibilidades construída a partir da tabela de dupla entrada exposta na resolução do problema nº1	46

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Histograma	57
Gráfico 2: Representação gráfica da tarefa 12.....	57

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Elementos Cognitivos do modelo de Iddo Gal.....	27
Quadro 2: Conteúdo das situações de aprendizagem	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Registro figural do problema 2, item 'a'	45
Tabela 2: Tabela de dupla entrada exposta na resolução do problema nº1	46
Tabela 3: Informações sobre os problemas 4 ao 8.....	47
Tabela 4: Tabela de dupla entrada do problema 7	48

Sumário

1. INTRODUÇÃO	15
2. PERCURSO TEÓRICO	21
2.1 Os registros de representação semiótica	21
2.2 O letramento probabilístico	26
2.3 Revisão bibliográfica: um olhar sobre a produção acadêmica em nível de teses e dissertações	27
3. UM OLHAR SOB O ENSINO DE PROBABILIDADE NOS DOCUMENTOS CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO	35
3.1 PCN+ Ensino Médio	35
3.2 Análise das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM)..	36
3.3 Análise do Currículo do Estado de São Paulo (CESP).....	38
4.1 Procedimentos metodológicos	41
4.2 O Caderno do Professor e as situações de aprendizagem sobre Probabilidade.....	42
4.2.1 Análise da Situação de Aprendizagem (S1)	43
4.2.2 Análise da Situação de Aprendizagem (S2)	49
4.2.3 Análise da Situação de Aprendizagem (S3)	52
4.2.4 Análise da Situação de Aprendizagem (S4)	54
5. Considerações finais	60
6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	62

1. INTRODUÇÃO

No Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática (GEPLAM) vinculado aos dois mestrados profissionalizantes (PPGECE – Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas e o PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática), ofertados pela UFSCar (campus Sorocaba), tivemos até 2016, cinco dissertações defendidas com o aporte teórico desenvolvido por Raymond Duval, a teoria dos registros de representação semiótica, sob a orientação do Prof Dr. Paulo César Oliveira. Dessas pesquisas, uma envolveu o tema Probabilidade, a qual foi desenvolvida por Leila Canaveze sob o título ‘O ensino-aprendizagem de probabilidade em uma escola pública de Sorocaba/SP’.

Essa investigação de natureza qualitativa teve por objetivo descrever e analisar um cenário de ensino-aprendizagem do conceito de Probabilidade em três classes de segunda série do Ensino Médio, em uma escola da rede pública estadual. O olhar sobre este cenário de investigação foi norteado pela seguinte questão de investigação: “como ocorre o ensino-aprendizagem em um contexto de tarefas envolvendo diferentes concepções probabilísticas?” (CANAVEZE, 2013, p.11).

Para responder este problema de pesquisa, Canaveze (2013) apoiou-se na teoria dos registros de representação semiótica. Os resultados obtidos com a análise da produção de informações obtidas no trabalho de campo revelou a necessidade de investir na apropriação de termos pertinentes à linguagem probabilística.

A opção de Canaveze (2013) por minimizar o uso de fórmulas fez com que os alunos recorressem ao uso da língua natural e do registro numérico como formas predominantes de expressar a escrita nos protocolos de suas atividades. O uso dos registros figurais, tais como, diagrama de árvores e tabela de dupla entrada teve um papel coadjuvante no processo de escrita dos alunos, ficando restrito aos enunciados das tarefas que explicitamente exigiam da atividade do aluno o uso de tais formas de registro ou pelo incentivo da professora-pesquisadora.

No decorrer do ano letivo de 2014, pudemos acompanhar por meio de apresentações, discussões, leituras críticas ocorridas nos encontros semanais do GEPLAM, as fases do desenvolvimento e defesa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do licenciando Lucas Soares Cobello, o qual envolveu aspectos históricos a partir de 1960 até 2010, sobre o currículo oficial da disciplina de Matemática para o Ensino Fundamental II e Médio das escolas públicas do Estado de São Paulo.

O grupo de pesquisa GEPLAM proporciona aos seus participantes estudos de textos (artigos, capítulos de livros, teses e dissertações) de acordo com o desenvolvimento das pesquisas sob a orientação do Prof. Dr. Paulo César Oliveira. Uma dinâmica adotada no decorrer dos encontros é a apresentação, por parte dos orientandos, seja em nível de Mestrado, TCC ou Iniciação Científica, o desenvolvimento da respectiva pesquisa. Nessas apresentações é simulada uma banca avaliadora do trabalho, a qual tem por objetivo dialogar e contribuir com o apresentador na redação do seu relatório de pesquisa.

No caso do TCC de Lucas Soares Cobello, ocorreu uma comunicação científica do mesmo no 4^o Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (COBELLO; OLIVEIRA, 2015). A leitura deste trabalho foi importante para a nossa pesquisa por conta dos marcos históricos curriculares sobre os conteúdos envolvendo os temas Estatística e Probabilidade. A elaboração e implantação do documento relativo à Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008) propiciou a ampliação dos blocos temáticos já contemplados na Proposta Curricular anterior (números, geometria, medidas), introduzindo um quarto bloco, denominado 'Tratamento da Informação'; o qual completou a atualização curricular nesse documento e abriu espaço para a incorporação crítica das tecnologias no ensino.

É importante salientar que o campo do tratamento da informação estende-se para além das fronteiras da organização e análise de dados, como geralmente é abordado no Ensino Fundamental. Numa perspectiva curricular que se estenda ao Ensino Médio, podem compor esse eixo o estudo das matrizes, amplamente usado na programação de computadores, o planejamento de uma pesquisa estatística que utilize técnicas de elaboração de questionários e amostragem, a investigação de temas de estatística descritiva e de inferência estatística, o estudo de

estratégias de contagem e do cálculo de probabilidade etc. (SÃO PAULO, 2008, p.47)

O atual Currículo do Estado de São Paulo publicado inicialmente em 2010 e revisado em 2012, contém um texto muito semelhante à Proposta Curricular (SÃO PAULO, 2008); exceto pelo reagrupamento de conteúdos devido à retirada do bloco temático denominado Tratamento da Informação. Argumenta-se neste Currículo (SÃO PAULO, 2012) que tem sido frequente rotular conteúdos de estatística descritiva como Tratamento da Informação. De acordo com Cobello e Oliveira (2015, p.9), é pertinente questionar “qual o rótulo que deve ser dado aos conteúdos de estatística inferencial?”

No atual documento curricular do Estado de São Paulo ratifica-se o reconhecimento pelo destaque dado aos conteúdos de estatística descritiva, porém, considera-se “necessário evidenciar aqui o fato de que todos os conteúdos estudados na escola básica, em todas as disciplinas, podem ser classificados como ‘Tratamento da Informação’” (SÃO PAULO, 2012, p.36). Neste sentido, não há um porquê de agrupar um determinado conjunto de conteúdos da disciplina de Matemática em um bloco temático com a referida denominação, já que a “transformação da informação em conhecimento, é a meta comum de todas as disciplinas escolares e, em cada disciplina, de todos os conteúdos a serem ensinados” (SÃO PAULO, 2012, p.36).

Cobello e Oliveira (2015) argumentaram que o fato de justificar que os conteúdos estudados na escola básica, em todas as disciplinas, podem ser classificados como tratamento da informação, descaracteriza o papel de sua existência contemplado na Proposta Curricular (SÃO PAULO, 2008); pelo fato de que no contexto escolar há conteúdos cuja aprendizagem se desenvolve numa perspectiva determinística e outros, cuja natureza é aleatória. Neste sentido, será que a formação do aluno como cidadão não pode ficar comprometida, ocorrendo apenas pela visão determinista de mundo?

Canaveze (2013, p.18-19) destacou que

esta desqualificação do bloco temático Tratamento da Informação contradiz as orientações curriculares em nível nacional, em especial, no que diz respeito aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998). Neste documento, o ensino da Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória está previsto no bloco Tratamento da Informação, cuja inclusão é

justificada pelo frequente uso de conhecimentos estatísticos e probabilísticos na sociedade contemporânea e pela necessidade do indivíduo compreender as informações divulgadas, tomar decisões e fazer previsões que influenciam sua vida pessoal e em comunidade.

Em função do reconhecimento das possibilidades formativas e transformadoras presentes no trato desses conhecimentos, a literatura acadêmica nomeou a Educação Estatística para além de um ensino em estatística e probabilidade.

Lopes (2010) em seu ensaio teórico, subsidiado pelas pesquisas realizadas, pelas práticas apresentadas na literatura e por nossas experiências na formação inicial e contínua de professores, uma Educação Estatística para ser praticada nas aulas de matemática, é desejável que as tarefas de sala de aula envolvam a proposta de problemas estatísticos, a realização de projetos de investigação estatística, a realização de experimentos e de confronto com simulações para exercitar a tomada de decisão. Ao desenvolver um projeto de investigação estatística a pessoa mobiliza conhecimentos sobre combinatória, probabilidade e estatística, pois, define o tema, elabora a questão de investigação, determina a metodologia para coleta de dados, explora os dados e realiza a interpretação dos resultados.

Ainda, segundo Lopes (2010), a Educação estatística não apenas auxilia na leitura e interpretação de dados, mas fornece uma habilidade para que uma pessoa possa analisar/relacionar criticamente os dados apresentados, questionando/ponderando até mesmo sua veracidade.

Canaveze (2013) alertou que o olhar sobre as diferentes visões de mundo é importante, pois o contexto escolar do desenvolvimento da maior parte dos conteúdos da Educação Básica (aritmética, álgebra e geometria) proporciona ao aluno uma educação formal determinista. No entanto, a escala do menos ao muito provável é algo associado à linguagem do cotidiano, atrelada a uma visão aleatória de mundo; a qual deve ser contemplada na educação formal de nossos alunos.

Os resultados dos estudos de Canaveze (2013) e do trabalho de conclusão de curso (TCC) de Lucas Soares Cobello atrelado a publicação de Cobello, Oliveira (2015) constituíram em fatores motivadores para a elaboração de quatro projetos de pesquisa, três em nível de mestrado profissionalizante e um na forma de TCC. Como os projetos partilham de um mesmo referencial

teórico (registros de representação semiótica e o letramento estatístico e probabilístico proposto por Iddo Gal (2005, 2012); passamos a discutir no GEPLAM, a partir do primeiro semestre letivo de 2015, textos sobre o tema letramento.

Nosso objetivo nesta investigação foi avaliar o conceito de probabilidade por meio da diversidade de registros de representação semiótica dispostos no enunciado das tarefas (situações de aprendizagem) contidas no Caderno do Professor e, suas possíveis contribuições para o desenvolvimento do letramento probabilístico.

Para o desenvolvimento metodológico desta pesquisa optamos por uma investigação qualitativa na modalidade de pesquisa documental sobre as Situações de Aprendizagem do Caderno do Professor da segunda série do Ensino Médio (SÃO PAULO, 2014-2017) da rede pública do Estado de São Paulo. A análise do referido material foi feita avaliando a multiplicidade de registros de representação semiótica e as contribuições das tarefas no desenvolvimento do letramento probabilístico.

Desenvolvemos a dissertação de Mestrado em seis capítulos, dentre os quais consideramos a Introdução como primeiro capítulo.

No capítulo 2 abordamos o referencial teórico da pesquisa: os registros de representação semiótica e o letramento probabilístico. Apresentamos também a revisão bibliográfica pautadas em teses e dissertações desenvolvidas no Brasil até 2015, cuja triagem levou em conta os temas do referencial teórico e o estudo na modalidade de Estado da Arte desenvolvido por Santos (2015) em sua tese de doutorado que conta com dados atualizados até 2012 (inclusive). A partir desse estudo, buscamos no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior (CAPES) e da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) para atualizar os dados até 2015 (inclusive).

No capítulo 3 elaboramos uma análise dos documentos curriculares vigentes no Ensino Médio (BRASIL, 2002, 2006) em comparação ao Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012); cujo foco é o ensino da probabilidade.

No capítulo 4 dedicamos à apresentação da metodologia da pesquisa qualitativa na modalidade documental e a análise de quatro situações de aprendizagem envolvendo probabilidade e proporcionalidade, análise combinatória e probabilidades e raciocínio combinatório.

No capítulo 5 (Considerações Finais), descrevemos nossas reflexões sobre o processo de pesquisa desenvolvido, bem como as implicações da pesquisa para o ensino de Probabilidade, tomando por base nosso referencial teórico.

Finalizamos a redação deste relatório de pesquisa apresentando as referências bibliográficas pertinentes à investigação.

2. PERCURSO TEÓRICO

Neste capítulo apresentamos a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, o letramento probabilístico na concepção de Iddo Gal e as teses e dissertações utilizadas em nossa revisão bibliográfica, as quais contemplam estes dois aportes teóricos.

2.1 Os registros de representação semiótica

A semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno suscetível de produção de significado e sentido (SANTAELLA, 1983).

No caso da matemática, a linguagem extrapola o uso da língua materna, principalmente via registros escritos, pois nos comunicamos também por meio de gráficos, tabelas, simbologias algébricas, entre outras formas de registros de representação semiótica.

A teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003, 2009) é um dos pilares teóricos-metodológicos utilizados nas produções acadêmicas vinculadas ao nosso grupo de pesquisa GEPLAM (Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática), por concentrar seus estudos na aprendizagem da matemática, segundo os aspectos cognitivos para a compreensão da mesma. Do ponto de vista cognitivo, o processo de aprendizagem requer a mobilização de diferentes registros semióticos de representação para que não haja confusão entre o objeto matemático e a representação do mesmo, bem como, a coordenação entre os diferentes registros.

Duval (2009) afirma que não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação. Em termos de registros de representação semiótica, temos o signo que é relacionado com um objeto concreto, para especificidade matemática, o símbolo (signo) representa o objeto abstrato por meio da ação do sujeito do conhecimento (significante ou conceito). Em relação ao objeto e sua representação: “não se pode ter

compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação” (DUVAL, 2009, p. 14).

Se considerarmos o conceito de probabilidade na condição de objeto, podemos representá-lo sob diversos enfoques: clássico, frequentista, subjetivo e axiomático. Por exemplo, no enfoque clássico, a probabilidade é definida como a razão entre o número de casos favoráveis em relação ao número total de casos possíveis, desde que todos os resultados sejam admitidos como igualmente prováveis de ocorrer (GODINO, BATANERO, CAÑIZARES, 1996). No contexto frequentista, na qual a probabilidade é definida a partir do cálculo das frequências relativas de ocorrências de sucessos provenientes de repetidos experimentos, nas mesmas condições. A principal característica deste enfoque é que o valor matemático da probabilidade emerge do processo de experimentação (GODINO, BATANERO, CAÑIZARES, 1996).

Cada forma de apresentar um registro de representação semiótica possui um conteúdo diferente estabelecido pelo sistema no qual ele foi produzido, nos exemplos dados, o sistema está vinculado ao enfoque ilustrado. A apreensão das características diferentes só terá sucesso quando o indivíduo que aprende for capaz de efetuar distintas transformações nos registros (tratamento e conversão), bem como coordená-los adequadamente.

Para Duval (2009), os registros de representação são formas de representar um objeto matemático, e ainda o sistema que podemos representar um objeto matemático, o autor denomina: registro semiótico. O acesso ao objeto matemático, segundo ao autor, deve ser enfatizado por meio de duas transformações de representação semiótica, e essas são profundamente diferentes: os tratamentos e as conversões.

Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação. As conversões são transformações de representação que consistem em mudança de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, reconhecer a escrita algébrica de uma equação em sua representação gráfica (DUVAL, 2003, p.16).

No caso do nosso objeto de estudo, a probabilidade, Canaveze (2013) e Oliveira (2014) utilizaram os seguintes registros para efetuar e coordenar as

conversões: registro da língua natural materna (conteúdos dos enunciados ou abordagem de termos probabilísticos), registro figural (tabela de dupla entrada ou de contingência, além do diagrama de árvore) e registro simbólico na forma algébrica (uso de fórmulas) ou numérico (razão para quantificar a probabilidade).

Na perspectiva de Duval (2012), quando abordamos a conversão de representações, tratamos de fatores de congruência e não congruência. Não vamos mencionar a palavra semântica, devido às orientações elaboradas por Raymond Duval: após a publicação desse artigo original em 1988, “eu não mais falei de congruência semântica e de não congruência semântica”, e, sim, “de fatores de congruência e não congruência na conversão de representações” (DUVAL, 2012, p.98).

O discurso em matemática desenvolve-se principalmente por substituição; seja em uma atividade intra-registro (interna ao registro) ou inter-registro (entre registros); o que difere do discurso em linguagem natural. A cada passo do desenvolvimento do raciocínio, do cálculo ou de um procedimento de resolução, a nova expressão vem, ao contrário, substituir a expressão do passo anterior, em virtude das definições, dos axiomas, dos teoremas e das tabelas de operações, entre outros procedimentos, para que o pensamento progrida a partir dos dados iniciais. A substituição é uma característica fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento matemático, denotando importância aos fenômenos de congruência e não congruência (DUVAL, 2012).

Em termos de probabilidade destacamos o estudo de Oliveira (2014, p.46) que tratou o fenômeno de congruência propondo aos estudantes, sujeitos da sua pesquisa, “a construção e o desenvolvimento de uma estrutura que denominamos árvore de probabilidades na versão completa”. Nesta proposta, destacou-se a “forma explícita nas quais as probabilidades são expressas nessa representação e a facilidade do acesso às probabilidades simples, condicionais e principalmente as da intersecção”.

Como exemplo desse estudo, destacamos a situação problema a seguir:

Um teste é usado para identificar uma determinada doença. Se uma pessoa que possui a doença realiza o teste, há uma chance de 80% que o teste seja positivo. Se uma pessoa que não está doente e realiza o teste há 10% de chance de que o teste

apresente positivo com resultado. Aproximadamente 1% de a população está doente. Smith realiza o teste e tem como resultado positivo. Qual a probabilidade de que ele esteja doente?

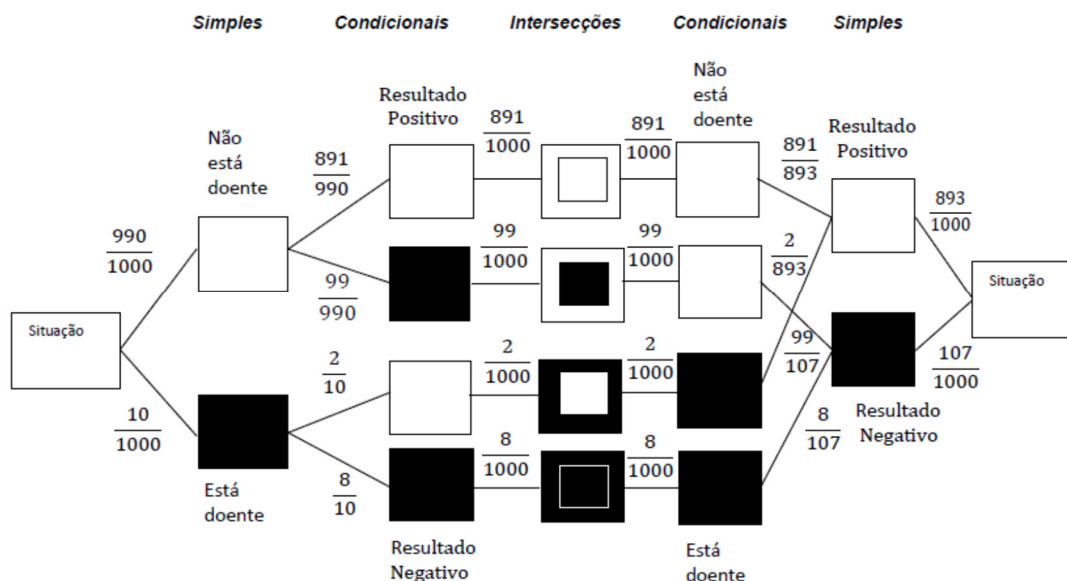
Com relação a esta tarefa, Oliveira (2014) propôs uma árvore de probabilidades na qual foram nomeadas as variáveis em cada nível de bloco. O autor chamou de ramo cada segmento que interligou os vários níveis.

As variáveis são encontradas dentro de cada nível e as probabilidades são encontradas nos ramos, sendo que as probabilidades simples se encontram nos primeiros ramos e as condicionais nos ramos seguintes. Para obter as probabilidades utilizando o método Laplaciano, o resultado presente em cada ramo é obtido pela razão entre a frequência do valor do bloco desejado pela frequência do bloco anterior (OLIVEIRA, 2014, p.47).

No respectivo diagrama de probabilidades exposto na Figura 1, em termos de congruência, Oliveira (2014) obedeceu o critério que envolve a ordem dentro da organização das unidades de composição (variáveis e probabilidades calculadas sob o enfoque clássico de cada uma das representações (níveis de blocos).

De acordo com Oliveira (2014, p.46), há diferenciais na árvore de probabilidades na versão completa quando comparada ao modelo convencional: “destacam-se a forma explícita nas quais as probabilidades são expressas nessa representação e a facilidade do acesso às probabilidades simples, condicionais e principalmente as da intersecção”.

Figura 1: Árvore de probabilidades na versão completa



Fonte: Oliveira (2014, p.47)

Dois critérios, segundo Oliveira (2014) com base na teoria de Raymond Duval, são utilizados na verificação de uma congruência em uma conversão: a associação de cada unidade do significante de partida (variável) com cada unidade significativa da representação de chegada (probabilidade). Já a unicidade ocorre quando cada unidade significativa de representação de saída corresponde a uma só unidade significativa do registro de chegada. Neste caso, cada valor de probabilidade no método Laplaciano levou em conta o tipo de probabilidade (simples, condicional ou de intersecção).

Na pesquisa de Oliveira (2014) o diagrama de árvore na versão completa também foi utilizado para abordar o critério de unicidade, invertendo o sentido das unidades significantes de representação, ou seja, do registro de chegada para o registro de saída. Mais especificamente, tal diagrama permitiu também explorar o cálculo das inversas das probabilidades condicionais. Considerando o enunciado da situação problema que apresentamos, ilustramos uma questão sobre a inversa da probabilidade condicional: “Partindo da representação da árvore, determine a probabilidade de o aluno sorteado gostar de leitura, sabendo que ele não pratica esporte. Explique como pensou.” (OLIVEIRA, 2014, p.98)

2.2 O letramento probabilístico

Historicamente, Soares (2004) situa-nos que, em meados dos anos de 1980, se dá, simultaneamente, a invenção do letramento no Brasil, da literacia em Portugal, entre outros, para nomear fenômenos distintos daquele denominado alfabetização.

No Brasil a discussão do letramento surge sempre enraizada no conceito de alfabetização, no entanto, é importante o reconhecimento de que a alfabetização e o letramento têm diferentes dimensões, o que em termos de aprendizagem inicial da língua escrita, exige múltiplas metodologias.

Em termos de processo de ensino, Soares (2004, p.15) associa o letramento como “imersão das crianças na cultura escrita, participação em experiências variadas com a leitura e a escrita, conhecimento e interação com diferentes tipos e gêneros de material escrito”. Já a alfabetização envolve a

consciência fonológica e fonêmica, identificação das relações fonema–grafema, habilidades de codificação e decodificação da língua escrita, conhecimento e reconhecimento dos processos de tradução da forma sonora da fala para a forma gráfica da escrita (SOARES (2004, p.15)).

Na nossa pesquisa não temos a pretensão de apresentar uma discussão sobre as múltiplas facetas envolvendo os termos letramento e alfabetização como foi muito bem tratado por Soares (2004). Nosso objetivo foi avaliar o conceito de probabilidade por meio da diversidade de registros de representação semiótica dispostos no enunciado das tarefas (situações de aprendizagem) contidas no Caderno do Professor e, suas possíveis contribuições para o desenvolvimento do letramento probabilístico.

Com relação ao letramento probabilístico, Gal (2005, 2012) afirmou que os estudantes devem se familiarizar com as diferentes formas de cálculo da probabilidade de um evento, para que, desta maneira, possam entender as afirmações probabilísticas feitas por outras pessoas, gerar estimativas sobre a probabilidade de eventos e ter condições de se comunicar.

Nestas condições, para avaliar se um aluno atingiu o letramento probabilístico, Gal (2005) propôs um modelo composto por elementos cognitivos e de disposição (atitudes do estudante em relação ao conhecimento: criticidade,

crenças e atitudes e sentimentos pessoais). Em nossa pesquisa valorizamos apenas a análise dos elementos cognitivos, destacados no quadro a seguir:

Quadro 1: Elementos Cognitivos do modelo de Iddo Gal

Grandes Ideias: variação, aleatoriedade, independência, previsibilidade e incerteza.
Cálculos Probabilísticos: formas de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos.
Linguagem: Os termos e os métodos utilizados para comunicar resultados probabilísticos.
Contexto: compreensão do papel e dos significados de mensagens probabilísticas em diferentes contextos.
Questões críticas: reflexões sobre assuntos no contexto de Probabilidade.

Fonte: Gal (2005, p.51, tradução nossa)

2.3 Revisão bibliográfica: um olhar sobre a produção acadêmica em nível de teses e dissertações

As pesquisas denominadas estado da arte tem identificado um conjunto de produções acadêmicas significativas em vários campos do conhecimento. O resultado dessa modalidade de trabalho acadêmico tem sido utilizado como fonte documental para diversos trabalhos científicos, pois parte da atividade do pesquisador se encontra executada, dessa forma elimina-se ou reduz etapas como por exemplo, a discussão e o mapeamento, além da verificação das formas e condições que certas dissertações e teses tem sido produzidas, Ferreira (2002) destaca algumas características das pesquisas denominadas “estado da arte”:

Definidas como de caráter bibliográfico, elas parecem trazer em comum o desafio de mapear e discutir uma certa produção acadêmica em diferentes campos do conhecimento, tentando responder que aspectos e dimensões vêm sendo destacados e privilegiados em diferentes épocas e lugares, de que formas e em que condições têm sido produzidas certas dissertações de mestrado, teses de doutorado, publicações em periódicos e comunicação em anais de congressos e de seminários. (FERREIRA, 2002, p. 258)

No que tange às teses e dissertações, o estado da arte realizado por Santos (2015), a partir do Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior (CAPES), da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e do acervo de currículos da

Plataforma Lattes, até 2012 (inclusive), contou com 31 teses e 227 dissertações totalizando 258 pesquisas das quais foram produzidas em 56 instituições de Ensino Superior.

Em nossa revisão bibliográfica, estamos interessados nas pesquisas realizadas em contextos de Ensino Médio, sob a perspectiva do Letramento probabilístico. Do montante de trabalhos da tese de Santos (2015), encontramos apenas a dissertação de Ferreira (2011).

Demos continuidade ao levantamento das produções acadêmicas feita por Santos (2015), no período de 2013 a 2015 (inclusive), tendo em vista nosso interesse de pesquisa. Conseguimos obter as dissertações de Caberlim (2015), Ody (2013), Oliveira (2014) e Serra (2015), cuja descrição fazemos a seguir.

Caberlim (2015) desenvolveu sua dissertação de mestrado 'Letramento probabilístico no ensino médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos', relacionando o enfoque clássico e frequentista do conceito de probabilidade em um contexto de probabilidade geométrica e o letramento probabilístico por meio da análise da mobilização de invariantes operatórios (objetos, propriedades e relações), os quais promovem o significado do conceito.

O trabalho de campo desenvolvido por Caberlim (2015) envolveu alunos de terceira série do Ensino Médio, em sequências didáticas ocorridas com a oferta de aulas extracurriculares para que os alunos pudessem realizar as tarefas propostas.

Em termos de pesquisa, a autora buscou responder à seguinte questão: "Que elementos do letramento probabilístico identificamos na mobilização de invariantes operatórios por alunos da terceira série do Ensino Médio ao resolver problemas que articulam o enfoque clássico e frequentista do conceito de probabilidade?" (CABERLIM, 2015, p.18)

Como resultados de pesquisa, Caberlim (2015) identificou invariantes que foram mobilizados de forma estável, tais como:

- a) a percepção da reprodutibilidade, ou seja, em um experimento aleatório o aluno deve identificar "a descrição completa das condições para a realização de um experimento, e conseqüentemente a sua reprodução com as mesmas condições" (CABERLIM, 2015, p.22);

- b) associação da ideia de razão com a concepção clássica de probabilidade, bem como sua articulação com a concepção frequentista de probabilidade;
- c) para uma experiência aleatória há a delimitação do espaço amostral;
- d) “apropriação do conhecimento sobre a experiência de Bernoulli (um experimento aleatório que admite apenas dois resultados: o sucesso e o fracasso)” (CABERLIM, 2015, p.124);
- e) “Aquisição de um vocabulário de termos probabilísticos” (CABERLIM, 2015, p.124).

De acordo com Caberlim (2015), os invariantes mobilizados se relacionaram com os cinco elementos de conhecimentos propostos por Iddo Gal:

- 1) Grandes ideias: situações em que os alunos efetuaram simulações e analisaram os resultados;
- 2) Figurando probabilidades: maneiras de estimar e/ou calcular probabilidades;
- 3) Idioma: uso de termos e métodos utilizados para comunicar sobre chance, os quais foram ficando mais apropriados com o avanço das situações propostas no decorrer do trabalho de campo;
- 4) Contexto: situações do cotidiano dos alunos sujeitos da pesquisa;
- 5) Questões críticas: reflexões sobre as resoluções das atividades dos alunos envolvendo o enfoque clássico e frequentista de probabilidade.

A pesquisa de Ody (2013) com o título ‘Literacia estatística e probabilística no ensino médio’, teve como objetivo investigar a literacia no Tratamento da Informação e da Incerteza, o qual remete ao uso dos conteúdos vinculados à Estatística e à Probabilidade na Educação Básica.

Foram várias causas que motivaram por pesquisar sobre este assunto: Durante o trabalho em sala de aula com turmas de Ensino médio, percebeu o desinteresse dos alunos pelas aulas tradicionais; desconhecimento do estudo de estatística e probabilidade; dificuldade dos alunos em interpretar situações-problemas, além da preocupação em educar aqueles que não darão continuidade em seus estudos.

Ody (2013) dedicou um capítulo discutindo os conceitos de Alfabetização, Letramento e Literacia. Como síntese de suas discussões, optou pela utilização do conceito de Literacia.

A opção se dá pelo fato de que a palavra Letramento, desde que foi introduzida no Brasil, está associada à aprendizagem inicial da língua escrita, o que tem levado a atribuir a ela um conceito restrito, escolarizado, limitado à designação de competências de uso adequado da leitura e da escrita em seus usos sociais.

A proposta, então, pelo uso da Literacia ocorre pela complexidade que envolve uso de competências, pensamento crítico, leitura, interpretação, análise e argumentação sobre fatos que ocorrem diariamente – no caso da Estatística e da Probabilidade – para o exercício da cidadania (ODY, 2013, p.33).

Ody (2013, p85) envolveu em sua pesquisa 444 alunos, entre ingressantes e concluintes do Ensino Médio de duas escolas públicas para tratar a seguinte questão de investigação: “quais as habilidades e competências que os alunos devem ter ao concluir o Ensino Médio e o que de fato eles têm com relação ao Tratamento da Informação e da Incerteza?”

Os dados foram coletados por meio de questionário contendo 30 questões abertas (para análise qualitativa) e fechadas (para análise quantitativa), aplicado em duas etapas. A primeira parte contou com 20 questões abertas e fechadas, com o propósito de avaliar, identificar e analisar a Literacia Estatística e Probabilística dos alunos ingressantes e concluintes do Ensino Médio. A segunda parte contou com 10 questões abertas e fechadas (questões 21 a 30) elaboradas com o objetivo de levantar dados de variáveis intervenientes e biográficas dos alunos, tais como: idade, quantidade de reprovação na disciplina de matemática, o que se entende por Probabilidade e Estatística, entre outras.

Ody (2013, p.148) considerou que os alunos ingressantes e concluintes devem ter ao final da educação básica as seguintes habilidades e competências com relação à Estatística:

identificar formas adequadas para descrever e representar dados numéricos e informações de natureza social, econômica, política, científico-tecnológica ou abstrata; ler, construir e interpretar diferentes tipos de informações de caráter estatístico apresentados em diferentes linguagens e representações na mídia ou em outros textos e meios de comunicação; identificar formas de coletar, organizar e registrar dados, compreendendo-os enquanto informação; fazer estimativas a partir de dados organizados; utilizar porcentagens nos cálculos estatísticos; compreender frequência absoluta e relativa; diferenciar variáveis qualitativas e quantitativas; reconhecer e diferenciar população e amostra; conhecer as formas de criação e esboço de gráficos; compreender e utilizar adequadamente as medidas de tendência central (média, moda e mediana) e as medidas de dispersão

(desvio médio, variância e desvio padrão) e extrair conclusões de informações contidas em gráficos.

Em relação à probabilidade cabe destacar as habilidades e competências para:

reconhecer e relacionar experiências de caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais com a probabilidade como meio de prever resultados; compreender o conceito de probabilidade; compreender e aplicar a ideia de chance; quantificar e fazer previsões em situações aplicadas em diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvem o pensamento probabilístico; utilizar números decimais, frações e porcentagem para expressar probabilidades; resolver problemas de probabilidade relacionando com situações reais (ODY, 2013, p.148).

Entre os resultados de pesquisa de Ody (2013), cabe destacar que os alunos da terceira série demonstraram agregar habilidades e algumas competências em Literacia.

Podem ser citadas as habilidades na leitura textual, gráfica e tabular, assim como a interpretação das mesmas, fato que ocorre quando não são exigidos conceitos pontuais de Estatística e Probabilidade, tais como medidas de centralidade, medidas de dispersão, cálculos envolvendo porcentagens e probabilidade. Percebe-se que os alunos concluintes apresentam a compreensão da média aritmética como medida de centralidade e habilidades no cálculo dessa medida (ODY, 2013, p.150).

Oliveira (2014) em sua pesquisa 'Probabilidade condicional: proposta de um experimento de ensino envolvendo registros de representações semióticas', teve como objetivo investigar a aprendizagem de estudantes sobre probabilidade condicional numa abordagem experimental envolvendo a utilização do software R, com a exploração de registros de representações semióticas, focando principalmente as relações entre as representações algébrica, da língua natural, da tabela de dupla entrada e da árvore de probabilidades. e com a utilização do software R. Este software "é ao mesmo tempo uma linguagem de programação e um ambiente para computação estatística e gráfica" (OLIVEIRA, 2014, p.75).

Além disso, essa pesquisa se baseou no Letramento Probabilístico proposto por Iddo Gal,

o qual aponta a importância da formação do estudante como cidadão crítico diante dos diferentes tipos de informações presentes no cotidiano, tornando-o capaz de ler, interpretar e lidar com uma série de situações reais que envolvam

interpretação ou geração de mensagens probabilísticas, auxiliando-o na tomada de decisões (OLIVEIRA, 2014, p.21).

O estudo contou com oito sujeitos voluntários de uma turma de 2ª série de uma escola estadual do estado de São Paulo, com faixa etária entre quinze e dezesseis anos. Em termos de pesquisa, o autor buscou responder a seguinte questão: “em que aspectos uma abordagem com uso de material concreto que prioriza um trabalho de relação entre representações de diversos registros influencia o estudante na compreensão do conteúdo de Probabilidade Condicional?”(OLIVEIRA, 2014, p. 179).

Os resultados obtidos por Oliveira (2014) apontaram avanço na compreensão das probabilidades simples, na construção das probabilidades da intersecção e condicionais e na habilidade de efetuar conversões entre as representações da língua natural, numérica, gráfica, tabular e da árvore.

Dentre as representações citadas, convém enfatizar a representação da árvore de probabilidades proporcionou ao estudante da educação básica uma estratégia de resolução adicional, contribuindo, assim, para o avanço em seu nível de Letramento Probabilístico.

Serra (2015) desenvolveu sua dissertação de mestrado intitulada ‘A contribuição da prova de Matemática do ENEM para o Ensino de Probabilidade e Estatística’, analisando questões referente à estatística e probabilidade do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) realizadas nos anos de 2009 a 2014. O objetivo do trabalho foi resolver e comentar as questões da prova de Matemática, especificamente questões que envolviam conteúdos de estatística, probabilidade e representação gráfica (tabelas, quadros ou figuras).

Em termos de pesquisa, o autor buscou responder duas questões de investigação:

1. A solução comentada das questões do ENEM de 2009 a 2013 envolvendo os conteúdos de probabilidade e estatística poderá trazer contribuições para o Ensino destes conteúdos no Ensino Médio?
2. Os alunos participantes de uma sequência didática sobre o ensino de probabilidade e estatística terão uma melhoria no número de acertos nas questões envolvendo estes conteúdos na prova do ENEM 2014 em comparação às questões de 2009 a 2013? (SERRA, 2015, p.18)

O percurso teórico traçado pelo autor pautou-se na na descrição da “organização semiótica e cognitiva das representações em tabelas e gráficos”

sob a perspectiva da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, “além das classificações sobre os tipos de tabelas segundo Wainer e gráficos segundo Curcio” (SERRA, 2015, p.23).

De acordo com o pesquisador a distribuição dos conteúdos permaneceu estável e ultrapassaram 20% a participação das questões da área de interesse desse estudo. Ainda segundo o autor, a leitura direta de dados em gráficos, tabelas ou quadros, foram as principais competências exploradas nas provas. Em relação as habilidades, o trabalho destaca a resolução de problemas, inferência e aleatoriedade.

Uma sequência didática foi elaborada a partir desse estudo e aplicada a 15 alunos do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia Sul-Rio-Grandense(IF-Sul) na cidade de Charqueadas-RS. Foram desenvolvidos 8 encontros semanais com 90 minutos de duração, sendo realizado um pré-teste com questões do período de 2009 até 2013 e um pós-teste com questões relacionadas à Estatística e Probabilidade do ENEM de 2014, e no final, foram corrigidas as questões com os alunos.

Os encontros foram realizados em laboratório ambiente estruturado com computador, acesso à internet, projetor de lousa branca, foi utilizado o software Excel como facilitador na representação de planilhas em formas de tabelas e gráficos.

Na verificação do autor, o mesmo constatou que na maioria das questões a representação semiótica foi direta e com poucos dados envolvidos, o trecho a seguir destaca a análise a respeito: “(...) usa-se apenas um símbolo, contrariando Duval (2003), que define que a utilização de mais de um registro de representação contribui para a melhoria na interpretação cognitiva e pode levar a um sucesso matemático.”

Serra (2015) restringiu a exposição das resoluções matemáticas de cada uma das questões das referidas edições do ENEM analisando apenas a forma de apresentação dos dados, sem levar em conta todo o conteúdo do enunciado e a demanda da atividade matemática envolvida para analisar a mobilização e coordenação dos registros de representação semiótica. Esse autor não avaliou o fato de que na maioria das questões ocorreu a conversão do registro gráfico ou tabular para um registro numérico ou na língua natural.

Em suas considerações finais, o autor destacou a influência do ENEM em relação ao ensino na Educação Básica, pois, conteúdos negligenciados anteriormente, ganham destaque em função da utilização da nota do ENEM para vários processos seletivos. Recebeu destaque também o padrão das questões, que utilizaram em sua maioria a exposição dos dados em gráficos ou tabelas. No entanto, Serra (2015) não resgatou as questões de investigação na busca de respondê-las.

Avaliamos que a redação das considerações finais de Serra (2015) diz respeito à análise do conteúdo dos enunciados das questões do ENEM, a qual não contribui para responder as questões de investigação. Em suas argumentações restantes, Serra (2015) abordou a contextualização, destacando que em várias questões foi forjada uma determinada situação. Dentre os casos, o autor destacou uma questão que envolveu a probabilidade de capturar da mesma forma, ao acaso, uma espécie dentre quatro delas muito distintas: peixe, mamífero, réptil ou borboleta.

O correto nesta questão, por exemplo, seriam quatro espécies diferentes de peixes, qual a probabilidade de se pescar uma espécie específica de peixe, pois neste caso teríamos a mesma forma de captura e somente a sorte poderia estar relacionada à sua captura. (SERRA, 2015, p.138)

Ao término desta revisão bibliográfica observamos que apenas a dissertação de Oliveira (2014) buscou articular o aporte teórico dos registros de representação semiótica com o letramento probabilístico de Iddo Gal (2005, 2012), mostrando que seus resultados de pesquisa apontaram que a mobilização dos registros de língua natural materna, registro tabular (tabela de dupla entrada e árvore de possibilidades) e registro simbólico (forma algébrica e numérica) contribuíram no desenvolvimento do letramento probabilístico para a aprendizagem de probabilidade.

3. UM OLHAR SOB O ENSINO DE PROBABILIDADE NOS DOCUMENTOS CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO

Neste capítulo apresentamos uma análise sobre o que é proposto para o ensino de probabilidade nas orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ Ensino Médio) (BRASIL, 2002), no segundo volume das Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (BRASIL, 2006) e no Currículo do Estado de São Paulo – CESP (SÃO PAULO, 2012).

Para nortear a nossa análise buscamos explicitar os conteúdos designados para o ensino de probabilidade e as orientações metodológicas dadas ao professor.

3.1 PCN+ Ensino Médio

As orientações curriculares complementares aos Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio, o denominado PCN+ (BRASIL, 2002, p.112), priorizam que “o aluno seja competente em resolução de problemas, se não de todos, pelo menos daqueles que permitam desenvolver formas de pensar em Matemática”. Embora o documento não explicita uma concepção de resolução de problemas, o documento informa procedimentos pertinentes aquilo que se entende por pensar e fazer matemática.

O desenvolvimento desta competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois os mesmos cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades. É necessário o tratamento de situações complexas e diversificadas, pois as mesmas dão oportunidade do aluno “pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução” (BRASIL, 2002, p.110).

Três eixos estruturadores (álgebra, geometria e análise de dados) compõem as orientações curriculares complementares aos Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio. A análise de dados contém as unidades temáticas estatística, contagem e probabilidade.

A abordagem da estatística e probabilidade ocorre “com dados e informações em conjuntos finitos e utilizam procedimentos que permitem controlar com certa segurança a incerteza e mobilidade desses dados” (BRASIL, 2002, p.126). No caso da probabilidade, podemos citar o confronto entre a probabilidade teórica envolvendo o cálculo das possibilidades no lançamento de um dado cúbico e a probabilidade frequentista, cujo cálculo das probabilidades envolve um processo de experimentações com o objeto citado.

A estatística, por sua vez, pode ser desenvolvida através de pesquisa, “que envolve amostras, levantamento de dados e análise das informações obtidas” (BRASIL, 2002, p.126).

A contagem tem como foco o desenvolvimento do raciocínio combinatório, o qual envolve “decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis” através da identificação de regularidades com a minimização do uso de fórmulas matemáticas (BRASIL, 2002, p.126).

3.2 Análise das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM)

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) tem um enfoque voltado para o ensino cujas finalidades são: consolidação e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o ensino fundamental, preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, formação ética, desenvolvimento da autonomia intelectual e compreensão dos processos produtivos.

A constituição desse documento curricular envolveu a escolha e a forma de trabalhar conteúdos e a organização curricular. Algumas competências e habilidades são esperadas dos alunos ao final do Ensino Médio, em relação à Matemática: saber usar o conhecimento matemático para resolver problemas práticos do cotidiano; modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreender que a Matemática é uma ciência com características próprias; perceber a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saber apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

A forma de trabalhar os conteúdos deve agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático, o professor deve atuar como um mediador entre o saber e o aluno que é o protagonista do processo. Nesse sentido, o propósito da OCEM tem como “princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o pensar matematicamente” (BRASIL, 2006, p.70).

Neste documento curricular, os conteúdos básicos estão organizados em quatro blocos, porém, a abordagem deve contemplar a articulação entre os mesmos. São eles: números e operações, funções, geometria, análise de dados e probabilidade.

Os conteúdos do bloco Análise de dados e probabilidade têm sido recomendados para todos os níveis da educação básica, de modo que, ao término do ensino médio, o aluno tenha condições de ampliar e formalizar saberes sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico.

Coutinho, Silva e Almouloud (2011, p.511) orienta que o “desenvolvimento do raciocínio com modelos estatísticos, ocorre, particularmente, pela análise da forma, da dispersão e das medidas estatísticas, na busca da construção de uma linguagem própria”, junto ao conceito-chave de variabilidade presente nos dados.

O raciocínio combinatório, segundo Lopes (2012, p.167), “se refere aos fazeres da combinatória, a qual pode ser definida como um princípio de cálculo que envolve a seleção e a disposição dos objetos em um conjunto finito”.

A combinatória estabelece uma estreita relação com a probabilidade, levando em conta “as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias. Por exemplo, ao extrair aleatoriamente três bolas de uma urna com quatro possibilidades”, podemos dispor do diagrama de árvores como uma forma de representação semiótica que permite a visualização da estrutura dos múltiplos passos do experimento (BRASIL, 2006, 79).

De acordo com Lopes (2012) o raciocínio probabilístico é interligado ao raciocínio combinatório, pois com a enumerabilidade das possibilidades de ocorrência de um evento aleatório, pode-se analisar a chance e fazer previsões.

No estudo e cálculo das probabilidades é necessário o domínio de uma linguagem pertinente composta por termos como chance, possibilidade e probabilidade. De acordo com as OCEM, “a probabilidade é uma medida de incerteza” (BRASIL, 2006, p.79).

O termo possibilidade é próprio do raciocínio combinatório e diz respeito à enumerabilidade de casos possíveis na análise de um determinado evento. Chance é um termo próprio do raciocínio probabilístico e diz respeito à avaliação qualitativa do grau de ocorrência de determinado evento, enquanto que sua medida expressa a probabilidade (OLIVEIRA, 2003).

Em termos de definição de probabilidade, esse documento curricular apresenta um avanço em relação à usual concepção clássica, na qual a probabilidade é definida como a proporção entre o número de casos favoráveis em relação ao número total de casos possíveis, desde que todos os resultados sejam admitidos como igualmente prováveis de ocorrer. A proposta visa valorizar a concepção frequentista de probabilidade que nas OCEM, consiste em “associar a estatística dos resultados observados e as frequências dos eventos correspondentes, e utilizar a estatística de tais frequências para estimar a probabilidade de um evento dado” (BRASIL, 2006, p.80).

3.3 Análise do Currículo do Estado de São Paulo (CESP)

A partir de 2008, o estado de São Paulo, através da Secretaria da Educação propôs um currículo básico para as escolas da rede estadual nos níveis de Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio em sua Proposta Curricular (SÃO PAULO, 2008). Em 2010, com algumas mudanças, o referido documento passou a ser denominado de Currículo do Estado de São Paulo, com a sua primeira edição atualizada em 2012 (SÃO PAULO, 2012). Em termos educacionais, o CESP tem como objetivo nortear a ação do docente no que tange o desenvolvimento de competências e habilidades dos estudantes. Considera-se que junto com a língua materna, a disciplina Matemática partilha fraternalmente a função do desenvolvimento do raciocínio lógico, a capacidade de expressão, compreensão, argumentação, abstração, entre outras.

Diferente dos documentos abordados em âmbito nacional (BRASIL, 2002, 2006), os conteúdos de estatística, combinatória e probabilidade no CESP não

são agrupados em um bloco temático específico, mas são distribuídos nos blocos temáticos Números, Geometria, Relações (SÃO PAULO, 2012).

O Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) contém um quadro de conteúdos e habilidades por ano ou série, de acordo com o segmento escolar, levando em conta quatro bimestres. No Ensino Fundamental (Ciclo II), os conteúdos de estatística (leitura e construção de gráficos e tabelas, medidas de tendência central e construção de gráficos de setores) não são distribuídos de modo a promover o raciocínio estatístico, bem como o estabelecimento de conexões com os conteúdos de probabilidade e combinatória.

Os conteúdos de análise combinatória nesse segmento escolar restringem aos processos de contagem no 4º bimestre do 6º ano, cuja habilidade é a compreensão da ideia do princípio multiplicativo de contagem.

Já no 1º bimestre do 8º ano encontramos novamente ‘problemas de contagem’, porém, como um item do conteúdo ‘potenciação’. No entanto, não há nenhuma habilidade associada a este item.

Finalmente, no 4º bimestre do 9º ano encontramos o item ‘problemas de contagem e introdução à probabilidade’ como tópico do conteúdo ‘probabilidade’. No que diz respeito às habilidades, as mesmas não promovem conexões entre o raciocínio combinatório e probabilístico. Almeja-se que o aluno saiba “resolver problemas envolvendo processos de contagem – princípio multiplicativo”, assim como saiba “resolver problemas que envolvam ideias simples sobre probabilidade” (SÃO PAULO, 2012, p.64).

No texto do Currículo do Estado de São Paulo não há explicação sobre o que significa resolver problemas, em especial, que envolvam ideias simples de probabilidade. Apenas explicita que “problematizar é explicitar perguntas bem formuladas a respeito de determinado tema. E, uma vez formuladas as perguntas, para respondê-las, é necessário discernir o que é relevante e o que não é relevante no caminho para a resposta” (SÃO PAULO, 2012, p.46-47).

No Ensino Médio, o tema probabilidade volta a ser trabalhado somente no 3º bimestre da 2ª série, com o conteúdo ‘análise combinatória e probabilidade’, a partir dos tópicos “princípios multiplicativo e aditivo; probabilidade simples; arranjos, combinações e permutações; probabilidade da união e/ou intersecção de eventos; probabilidade condicional e distribuição binomial de probabilidades”.

Apenas neste período letivo, o CESP estabeleceu conexão entre o raciocínio combinatório e probabilístico, ao almejar como habilidade o cálculo de "probabilidades de eventos em diferentes situações-problema, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de fórmulas específicas" (SÃO PAULO, 2012, p.68).

Nesse documento curricular não há evidências sobre a finalidade da abordagem das noções probabilísticas junto aos estudantes, no entanto, de forma geral, o que se espera dos conteúdos de Matemática é preparar o aluno para o exercício de atividades profissionais, por exemplo.

O protagonismo do aluno em relação ao conteúdo também é destaque no documento, no qual o professor passa a atuar como um mediador do saber, e o papel do docente passa a ser desafiar o aluno a refletir, argumentar com o grupo, criar suas hipóteses a partir de discussões em sala de aula, bem como elaborar seus próprios procedimentos extrapolando as aplicações e situações em sala de aula e estar apto para enfrentar novas situações dentro e fora da sala de aula.

4. PERCURSO METODOLÓGICO

A seguir resgatamos nosso problema de pesquisa para justificar o tipo de metodologia aplicada, além de apresentar o material avaliado, os critérios de análise e a análise propriamente dita.

4.1 Procedimentos metodológicos

O objetivo dessa pesquisa foi avaliar o conceito de probabilidade por meio da diversidade de registros de representação semiótica dispostos no enunciado das tarefas denominadas de 'Situações de Aprendizagem', as quais estão contidas no material complementar ao Currículo Oficial de nosso Estado, o denominado Caderno do Professor.

Avaliamos no Currículo do Estado de São Paulo que as habilidades almejadas para os alunos no decorrer da aprendizagem não estabelecem conexões entre conteúdos da estatística, combinatória e probabilidade do ensino Fundamental (ciclo II). Já no Ensino Médio, o conceito de probabilidade apresenta conexão com a análise combinatória através das habilidades apresentadas nesse documento curricular e o foco dessa abordagem deve ocorrer no 3º bimestre da 2ª série do Ensino Médio.

Delimitamos nosso objeto de pesquisa como sendo as tarefas contidas no segundo volume do Caderno do Professor para a segunda série do Ensino Médio. Nosso interesse é avaliar se essa conexão entre a análise combinatória e probabilidade leva em conta a multiplicidade de registros de representação semiótica, quando pensamos nas diferentes formas de cálculo das probabilidades. A mobilização e coordenação de tais registros contribuem para o desenvolvimento do letramento probabilístico, para que, desta maneira, os alunos possam entender as afirmações probabilísticas feitas por outras pessoas, gerar estimativas sobre a probabilidade de eventos e ter condições de se comunicar?

Analisar o referido volume do Caderno do Professor conduziu-nos ao desenvolvimento de uma qualitativa na modalidade de pesquisa documental que, de acordo com Gil (2012), se assemelha muito à pesquisa bibliográfica. A diferença entre as duas modalidades está justamente na natureza das fontes.

Enquanto a pesquisa bibliográfica se utiliza fundamentalmente das contribuições dos diversos autores sobre determinado assunto, a pesquisa documental vale-se de materiais que não receberam ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetivos da pesquisa (GIL, 2012, p.51).

A seguir apresentamos o Caderno do Professor, mais especificamente, o segundo volume utilizado na 2ª série do Ensino Médio.

4.2 O Caderno do Professor e as situações de aprendizagem sobre Probabilidade

Em 2012 ocorreu a primeira edição atualizada do Currículo do Estado de São Paulo e como consequência, houve alteração na formatação dos Cadernos do Professor e do aluno, passando a ser dois volumes para cada ano do Ensino Fundamental II, bem como para as séries correspondentes ao Ensino Médio.

O Caderno do Professor é considerado um material complementar ao Currículo Oficial de nosso Estado, que na versão atual válida até 2017, é semestral. O objetivo de tal material é apresentar orientações didático-pedagógicas por meio de oito Situações de Aprendizagem em cada um dos seus volumes.

As quatro primeiras Situações de Aprendizagem (S1, S2, S3 e S4) relativas à segunda série do Ensino Médio, diz respeito ao estudo da probabilidade e análise combinatória, conforme apresentamos no quadro a seguir:

Quadro 2: Conteúdo das situações de aprendizagem (S1 a S4)

	Título	Objetivo
S1	Probabilidade e proporcionalidade: no início era o jogo	Explorar a noção teórica de Probabilidade por intermédio de jogos pedagógicos
S2	Análise combinatória: raciocínios aditivo e multiplicativo	Resolução de situações-problema que envolvam simultaneamente raciocínio combinatório e cálculo de probabilidades
S3	Probabilidades e raciocínio combinatório	Problemas que envolvam o cálculo de probabilidades sob dois aspectos: a independência de dois ou mais eventos para os quais se quer calcular a Probabilidade e as

		diferentes possibilidades de ordenação para ocorrência simultânea.
S4	Probabilidades e raciocínio combinatório: o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal	Cálculo de Probabilidade e o raciocínio combinatório envolvendo o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal.

Fonte: adaptado de Oliveira (2010, p.64)

A seguir descrevemos como foi composto as tarefas de cada Situação de Aprendizagem. Concomitantemente, apresentamos a avaliação do conteúdo de cada uma das tarefas com base nas categorias de análise pautada nos diferentes registros de representação semiótica, bem como nos elementos cognitivos que constituem o letramento probabilístico.

4.2.1 Análise da Situação de Aprendizagem (S1)

Essa Situação de Aprendizagem é composta por 11 tarefas, sendo que a formulação do enunciado das duas primeiras tarefas levou em conta o fato histórico que impulsionou o desenvolvimento do estudo das probabilidades. Mais especificamente, foi resgatado que

a origem organizada do estudo da probabilidade remonta à correspondência trocada entre os matemáticos Blaise Pascal e Pierre de Fermat, que viveram no século XVII, na qual discutiam as chances associadas aos jogos de azar, notadamente aos jogos envolvendo baralhos (SÃO PAULO, 2014-2017, p.13).

A explicação sobre a forma como se discutiam tais jogos gerou duas tarefas iniciais. Levar em conta a premissa de que “o desenvolvimento da teoria sobre o cálculo de probabilidades esteve diretamente associado aos jogos de azar” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.13), mostra-nos um comprometimento no desenvolvimento do letramento; dada a necessidade de compreensão do papel e dos significados de mensagens probabilísticas em diferentes contextos.

A associação exclusiva aos jogos de azar, não abre possibilidades de outros contextos como, por exemplo, o sorteio de um ganhador de um prêmio entre todos os alunos de uma determinada turma.

Ao mencionarmos a palavra ‘sorteio’ esbarramos no caráter determinista presente na segunda premissa quanto à ideia de que a fração que expressa a

probabilidade pode ser entendida como uma razão entre a parte e o todo. No entanto, quando pensamos no conceito de probabilidade é necessário levarmos em conta o sorteio como uma forma de experimento no contexto de aleatoriedade. Essa premissa também não colabora para o desenvolvimento do letramento probabilístico proposto por Iddo Gal (2005) por ferir dois elementos cognitivos do modelo: grandes ideias e cálculos probabilísticos.

Entre as páginas 16 e 18 há duas tarefas com o mesmo enunciado, porém a segunda tarefa apresenta um custo cognitivo maior; dada a formulação das questões. No que diz respeito à multiplicidade de registros de representação semiótica, a segunda tarefa explora dois tipos de registros figurais: tabela de dupla entrada e árvore de possibilidades.

Segue o enunciado comum às duas tarefas, complementado com o que será utilizado nas duas questões do segundo problema:

Em uma partida de tênis programada para 5 sets, o vencedor ganharia 40 pontos no ranking da confederação. Para isso, um dos jogadores precisaria vencer primeiro 3 sets e ganhar o jogo. Entretanto, a partida foi interrompida pela chuva no momento em que terminava o 4º set, com o placar apontando 2 sets para o jogador **A** e 1 set para o jogador **B**. Para piorar a situação, o tal jogo estava sendo disputado no último dia possível daquele ano, não havendo mais possibilidade de continua-lo em outro dia do ano. (SÃO PAULO, 2014-2017, p.16).

Suponha que o jogo estivesse programado para melhor de 7, isto é, o jogo acabaria quando um dos tenistas ganhasse 4 sets. Nesse caso, qual é a probabilidade de vitória para cada um deles no caso de o jogo ser interrompido quando o placar apontar:

a) 3x1 a favor de **A**? **b)** 2x1 a favor de **A**? (SÃO PAULO, 2014-2017, p.17).

A orientação dada ao professor para a resolução destes problemas restringe à leitura do enunciado e em discussão coletiva com seus alunos, deve-se partir para a resolução das questões utilizando o registro de representação semiótico exposto em cada um dos dois itens. O aluno é induzido a utilizar tais registros, impossibilitando a sua mobilização e coordenação quanto aos registros de representação semiótica.

A utilização do registro figural na forma de tabela de dupla entrada é comum no contexto escolar (item 'a'), porém a utilização do registro figural árvore de possibilidades (item 'b') é pertinente ao contexto probabilístico, especialmente, quando discutimos probabilidade condicional.

Segue a estrutura da tabela de dupla entrada preenchida com registros numéricos incluindo a representação das chances na forma de porcentagem:

Tabela 1: Registro figural do problema 2, item 'a'

1º set	2º set	3º set	4º set	5º set (não ocorreu)	6º set (não ocorreu)	7º set (não ocorreu)
A vence (1 x 0)	A vence (2 x 0)	B vence (2 x 1)	A vence (3 x 1)	50% de chance de A vencer (4 x 1) Acaba o jogo		
				50% de chance de B vencer (3 x 2)	25% de chance de A vencer (4 x 2) Acaba o jogo	
					25% de chance de B vencer (3 x 3)	12,5% de chance de A vencer
						12,5% de chance de B vencer

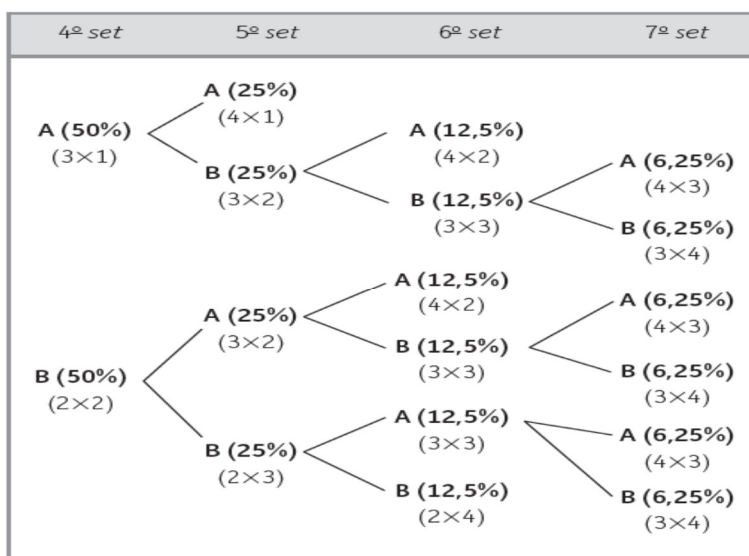
Fonte: (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 17)

No item 'b' (2x1 a favor de **A**? Organize a resolução) há a seguinte orientação para o professor: “representando a resolução de outra maneira, partindo do resultado até o momento, 2x1 para **A** em três sets disputados” ((SÃO PAULO, 2014-2017, p. 18). Na sequência é apresentado o diagrama de árvore, sem fazer a menção que este registro de representação semiótica é uma conversão do registro figural apresentado anteriormente na página 17. Para que esta conversão seja bem sucedida é necessário interpretar o conteúdo das informações dispostas na tabela de dupla entrada de modo que haja uma coordenação na mudança de registro permitindo a continuidade do preenchimento das informações necessárias. Neste sentido, vamos apresentar os registros de representação semiótica citados, adequando-os à sua conversão e coordenação:

Tabela 2: Tabela de dupla entrada exposta na resolução do problema nº1

1º set	2º set	3º set	4º set (não ocorreu)	5º set (não ocorreu)
A vence (1 x 0)	B vence (1 x 1)	A vence (2 x 1)	50% de chance de A vencer (3 x 1) Acaba o jogo	
			50% de chance de B vencer (2 x 2) e continua jogo	Se A vencer 3 x 2 chance de 50% de 50% ou de 25% para A Se B vencer 2 x 3 chance de 50% de 50% ou de 25% para B

Fonte: (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 17)

Figura 2: Árvore de possibilidades construída a partir da tabela de dupla entrada exposta na resolução do problema nº1

Fonte: (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 18)

O material disponibiliza uma terceira tarefa envolvendo o processo de experimentação no lançamento de dois dados com o objetivo de posteriormente tratar a concepção clássica de probabilidade, aquela cujo cálculo é estabelecido pela razão entre a parte e o todo. Segue enunciado e instruções sobre o material para o exercício da realização de um experimento aleatório:

Nesta atividade, sua sorte estará em jogo e, principalmente, sua habilidade em calcular com rapidez a probabilidade de

ocorrência de alguns eventos relacionados ao lançamento de dois dados.

Material do jogo: Dois dados: um deles com as faces contendo os números ímpares pintados de azul e os pares, de vermelho; e o outro com as faces contendo os números pares pintados de azul e os ímpares, de vermelho (SÃO PAULO, 2014-2017, p.18-19).

Na sequência do Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2014 - 2017), encontramos situação-problemas para o cálculo de probabilidades (problemas 4 a 10). Elaboramos uma tabela sobre o conteúdo destes problemas, cuja solução envolveu o enfoque clássico da Probabilidade, porém, sem destacar a condição da equiprobabilidade.

Tabela 3: Informações sobre os problemas 4 ao 8

Nº	Registro de entrada	Objeto	Considerações
4	figural (tabela de dupla entrada)	Peças geométricas com cores e formatos distintos	Há cálculos envolvendo eventos complementares (item 'c' ao 'f'), porém, não é abordado no Caderno do Professor.
5, 6	figural (tabela de dupla entrada)	Distribuição de alunos por série do Ensino Médio	Os cálculos solicitados contêm um custo cognitivo maior. No problema 5, é necessário que o aluno preste a atenção que o total de alunos mencionado na tabela são valores parciais.
7, 8	Língua natural	Percentual de alunos de uma escola por sexo e faixa etária	É esperado que o aluno faça uma conversão de registros, mobilizando o registro na língua natural para o registro figural (tabela de dupla entrada). Para obter a resposta esperada é importante trabalhar com os registros numéricos, a partir do cálculo da proporcionalidade.

Fonte: arquivo do pesquisador

Ressaltamos que os problemas 9 e 10 contêm duas questões, relacionadas diretamente aos problemas 4 e 5, respectivamente.

Mais precisamente, em relação ao problema 8, solicita-se o cálculo da probabilidade condicional, porém, sem recorrer ao seu formalismo algébrico, conforme enunciado adaptado a seguir:

Dos 300 alunos de uma escola, 45% são meninas e apenas 20% delas têm idade acima de 16 anos. Já entre os meninos, a porcentagem de alunos maiores de 16 anos é 40%. Considere o

caso do sorteio de uma pessoa que, sabe-se de antemão, terá idade acima de 16 anos. Nessa condição:

- a) qual é a probabilidade de que seja sorteada uma menina?
- b) qual é a probabilidade de ser um menino?
- c) qual é a probabilidade de sortear um menino e ele ter 16 anos de idade ou menos? (SÃO PAULO, 2014-2017, p.22-23)

Em nível de custo cognitivo, conforme a teoria dos registros de representação semiótica, é necessário que o aluno preste a atenção que no cálculo da razão entre a parte e o todo para calcular a probabilidade, o todo em questão é o total parcial para cada intervalo de idade, de acordo com o registro figural a seguir:

Tabela 4: Tabela de dupla entrada do problema 7

Idade	Meninos	Meninas	Total
Acima de 16 anos	(40%) 66	(20%) 27	93
16 anos ou menos	(60%) 99	(80%) 108	207
Total	(55%) 165	(45%) 135	300

Fonte: Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2014-2017, p.23)

Para finalizarmos a análise dessa Situação de Aprendizagem enfatizamos que nesse conjunto de problemas (4 ao 10) não é abordado o conceito de aleatoriedade, sobre o qual destaca-se que experimentos são aqueles que, se repetidos sob as mesmas condições, não necessariamente produzem resultados iguais. Mais uma vez, temos em mãos um conjunto de problemas deficitários para o desenvolvimento do letramento probabilístico, quando pensamos o quão é importante os alunos realizarem experimentos aleatórios que propiciam um conjunto de resultados cuja análise permitiria confrontar com os conceitos aqui destacados.

No Caderno do Professor sugerimos a inclusão de orientações que estimulassem os docentes a formular problemas ou escolher alguns deles propostos, para serem submetidos a um processo de experimentação. Tal proposta tem um forte apelo potencial para gerar resultados como aqueles apontados pela investigação de Caberlim (2015): associação da ideia de razão com a concepção clássica de probabilidade, bem como sua articulação com a concepção frequentista de probabilidade; em uma experiência aleatória há a delimitação do espaço amostral.

4.2.2 Análise da Situação de Aprendizagem (S2)

O conteúdo dessa situação de aprendizagem envolve a resolução de situações-problema da análise combinatória. No Currículo do Estado de São Paulo o raciocínio combinatório deve estabelecer conexões com o conceito de probabilidade ao recomendar o uso de “raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de fórmulas específicas” (SÃO PAULO, 2012, p.68).

No Caderno do Professor a primeira situação de aprendizagem envolveu o cálculo de probabilidade simples, sem a necessidade do raciocínio combinatório. No entanto, na segunda situação de aprendizagem, propõe-se como competências e habilidades a identificação em diferentes agrupamentos sobre a necessidade de ordenação ou não dos seus elementos, com o objetivo de calcular e associar um valor de probabilidade para o problema dado.

Na segunda situação de aprendizagem são propostos 38 problemas de análise combinatória que “envolvem a contagem de casos em situações de agrupamentos de determinado número de elementos” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.24). De acordo com esse material, 100% dos problemas que envolvem agrupamentos são resolvidos por intermédio de operações entre números naturais. As operações exigem “a mobilização de estratégias de raciocínio semelhantes, quase sempre envolvendo uma das principais ideias da operação de multiplicação, a saber, o raciocínio combinatório” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.25).

Em relação às estratégias didáticas, considera-se que um ensino de análise combinatória e probabilidade que abandona a ideia da representação da solução por meio do diagrama de árvores e priorizam a classificação dos problemas (permutações, arranjos e combinações),

deixa de favorecer a diversidade de estratégias de resolução e, conseqüentemente, de percursos de aprendizagem, uma vez que a representação da solução do problema por intermédio de desenhos, diagramas e/ou tabelas é um dos comportamentos heurísticos reconhecidos como um dos mais importantes a serem mobilizados pelos estudantes quando enfrentam situações que são de fato problemas (SÃO PAULO, 2014-2017, p.25).

Dos 38 problemas propostos apenas dois envolvem o cálculo de probabilidade. As questões são oriundas de uma mesma situação redigida a partir de um desenho envolvendo

12 pessoas sentadas em uma arquibancada. Na fileira de trás estão 5 homens e uma mulher. Na fileira da frente estão 4 homens e duas mulheres. Entre as pessoas deste grupo, duas, da fileira da frente, usam óculos, e duas, da fileira de trás, também (SÃO PAULO, 2014-2017, p.42).

No problema 37 “Uma das pessoas sentadas será sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de que seja sorteado um homem da fileira da frente?” A resolução não envolve o raciocínio combinatório, apenas a razão entre o número de homens sentados na fileira da frente (4) em relação ao total de pessoas (12) (SÃO PAULO, 2014-2017, p.43).

No problema 38 “Se forem sorteadas duas pessoas, uma da fileira da frente e outra da fileira de trás, qual é a probabilidade de que sejam sorteadas duas pessoas de óculos?” A resolução envolve dois eventos independentes, cuja probabilidade é $2/6 \times 2/6 = 1/9$.

O diagrama de árvore foi utilizado em quatro situações. No problema 1, o diagrama foi utilizado para promover a escrita da multiplicação indicando o total de possibilidades de uma menina combinar quatro saias e cinco blusas diferentes. Em termos de letramento probabilístico, este tipo de problema convencional não traz contribuições ao aprendizado, pois suscita uma questão crítica: todas as combinações atende o gosto da menina?

Nos outros casos adotaram a “representação das resoluções por intermédio das árvores ilustra os dois principais tipos de raciocínio envolvidos na totalidade dos problemas de análise combinatória: o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo” (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 28). Um exemplo clássico envolveu a contagem do número de anagramas. Em outra situação, foi abordada “a representação de uma parte da árvore de possibilidades para o seguinte problema: quantos grupos ordenáveis (filas) de 3 elementos podemos formar com 7 pessoas?” (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 34).

No problema (número 21) envolvendo o uso do diagrama de árvore, o mesmo constituiu uma solução alternativa: “Há 10 bolas em uma caixa, todas

iguais com exceção da cor, sendo 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Quantos conjuntos de 4 bolas podem ser formados sendo duas brancas e duas pretas?” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.35-36).

Nesse tipo de problema, em que mais de uma categoria está presente no grupo (homem/mulher, bola branca/bola preta etc.), é importante calcular a quantidade de agrupamentos de cada categoria para, depois, mostrar aos alunos que a quantidade total, envolvendo todas as categorias, pode ser obtida pelo produto das quantidades parciais. Nesses casos, para eliminar dúvidas, sugerimos que o professor recorra novamente à árvore (SÃO PAULO, 2014-2017, p.36).

Após a resolução do problema 26, as orientações didáticas apresentadas induzem às relações algébricas para agrupamentos ordenáveis e não ordenáveis. Na formulação do problema 27, não é fornecido o número total de pessoas. O objetivo é que para um valor ‘n’, seja possível a utilização do fatorial:

Em uma sala há n pessoas, com as quais formaremos grupos, ordenáveis ou não. De quantas maneiras diferentes poderemos formar o grupo se ele tiver:

a) apenas 1 elemento? b) 2 elementos? c) 3 elementos?
d) 4 elementos? e) p elementos, $p < n$? (SÃO PAULO, 2014-2017, p.39).

A premissa inicial “sobre a ineficácia da aplicação de fórmulas de cálculo para um grande número de problemas de agrupamentos” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.29) foi modificada a partir do problema 27. Para este problema, por exemplo, passou-se adotar a expressão “sem maiores formalizações algébricas”; como forma de justificar a indução “do raciocínio dos alunos para a relação entre os arranjos simples e as combinações, isto é, $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$ ” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.35).

Essa mudança de metodologia aplicada até o problema 36 foi acompanhada do seguinte alerta:

enfaticamente que o estímulo à clássica categorização dos problemas em tipos – permutações, arranjos e combinações – e, conseqüentemente, o uso de fórmulas matemáticas, não devem ser tomados como preocupação central nesse momento da resolução de problemas. (SÃO PAULO, 2014-2017, p.43)

Em termos de registros de representação semiótica, a resolução desse conjunto de problemas de análise combinatória mobilizou e coordenou registro de língua natural (enunciado e respostas dos problemas), registros numéricos (aplicação do princípio aditivo e multiplicativo com ou sem a utilização do

fatorial), registro algébrico (aplicação de fórmulas pertinentes aos agrupamentos) e registro figural (diagrama de árvores).

No que diz respeito ao letramento probabilístico, os problemas praticamente não trouxeram contribuições ao seu desenvolvimento, exceto pelos dois problemas (37 e 38) que envolveram o cálculo das probabilidades associado às noções básicas de combinatória. Em termos de linguagem, as palavras chance e possibilidade foram as mais utilizadas; o que tem ocorrido desde a primeira situação de aprendizagem.

4.2.3 Análise da Situação de Aprendizagem (S3)

O conjunto de dez problemas propostos não valorizou o diagrama de árvore como forma de registro figural em suas resoluções. Apresentamos em nosso aporte teórico, bem como na revisão bibliográfica, o estudo de Oliveira (2014), que tratou o fenômeno de congruência articulando a fórmula da probabilidade condicional com o desenvolvimento uma estrutura de árvore de probabilidades na versão completa. Na proposta dessa autora, houve a facilidade do acesso às probabilidades simples, condicionais e principalmente as da intersecção.

Os organizadores do Caderno do Professor não utilizaram nas resoluções a fórmula convencional da probabilidade condicional. O objetivo das soluções foi “caracterizar a necessidade de mobilizar raciocínio combinatório; identificar as semelhanças e as diferenças entre os diversos casos de probabilidade, no que diz respeito à ordenação ou não dos elementos que compõem os eventos” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.44).

Em termos de probabilidade, o texto não explicita o que quer dizer com as diferenças entre os diversos casos de probabilidade. Avaliamos que mais uma vez o enfoque probabilístico foi o clássico, pautado no raciocínio proporcional e multiplicativo.

Apenas o problema 8 apresentou em sua resolução o cálculo da probabilidade envolvendo o uso de eventos complementares, o qual mais uma vez não foi tratado conceitualmente.

A seguir apresentamos o enunciado e a resolução do referido problema, mais especificamente, o item 'a' que envolveu o cálculo da probabilidade de eventos complementares:

Em uma caixa há 20 bolas iguais, a não ser pela cor. Dessas bolas, $\frac{1}{4}$ é verde, $\frac{2}{5}$ são amarelas e o grupo restante é formado apenas por bolas da cor rosa. Serão realizados três sorteios com reposição de uma bola a cada vez. Nessa condição, uma mesma bola pode ser sorteada mais de uma vez. Qual é a chance de serem sorteadas:

a) bolas de uma única cor?

As frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$ determinam as razões na caixa de bolas, respectivamente, das cores verde e amarela. A razão referente às bolas da cor rosa é: $1 - (\frac{1}{4} + \frac{2}{5}) = \frac{7}{20}$.

Essas frações correspondem, portanto, à probabilidade de cada cor em um sorteio. No caso de sorteios de bolas de uma única cor, podemos ter bolas verdes, bolas amarelas ou bolas da cor rosa. Assim, trata-se de calcular a chance de cada cor e apenas somar os três resultados, visto não haver qualquer interseção entre eles.

$$P(3 \text{ verdes}) = (\frac{1}{4})^3$$

$$P(3 \text{ amarelas}) = (\frac{2}{5})^3$$

$$P(3 \text{ rosas}) = (\frac{7}{20})^3$$

$$P(3 \text{ bolas de única cor}) = (\frac{1}{4})^3 + (\frac{2}{5})^3 + (\frac{7}{20})^3 \text{ (SÃO PAULO, 2014-2017, p.48-49)}$$

Entendemos que não há diversos casos de probabilidade, pois a natureza dos problemas é determinística; devido a ausência de experimentos aleatórios que propiciam aos alunos o contato com a concepção frequentista de probabilidade.

Concordamos que as resoluções dos problemas no que diz respeito à ordenação ou não dos elementos que compõem os eventos, cumpre o objetivo proposto pelos organizadores desse material.

No que diz respeito ao letramento probabilístico essa situação de aprendizagem contribui com três problemas (5 ao 7) envolvendo discussões sobre o jogo de loteria oficial Mega-Sena. As orientações didáticas contribuem significativamente para o desenvolvimento desse letramento, principalmente quanto ao elemento contexto; por envolver uma situação real:

Podemos, nesse sentido, pedir que os alunos consigam volantes de alguns jogos, normalmente expostos em casas lotéricas, pois neles estão registradas algumas das chances nos sorteios. Realizando seus próprios cálculos, com a ajuda de uma calculadora, os alunos poderão conferir a correção das

probabilidades registradas nos volantes. Não é objetivo de um trabalho pedagógico desse tipo, de forma alguma, estimular a prática em jogos de loterias. Pelo contrário, a correta orientação do trabalho por parte do professor poderá servir para ressaltar alguns aspectos que visam desestimular tais práticas (SÃO PAULO, 2014-2017, p.47).

4.2.4 Análise da Situação de Aprendizagem (S4)

Essa situação de aprendizagem intitulada “Probabilidade e raciocínio combinatório: o binômio de Newton e o triângulo de Pascal”, foi elaborada a partir da “resolução de problemas exemplares contextualizados” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.52).

Esse bloco de atividades tem como objeto levar o aluno a interpretar o resultado da probabilidade de ocorrência de um evento em n repetições de um mesmo experimento nas mesmas condições; sabendo que há apenas duas possibilidades, sucesso e fracasso. “Daí o termo **binômio** que tem como um dos exemplos mais comuns o lançamento de uma moeda certo número de vezes” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.52).

Além da moeda (problema 1), outros objetos com simetria geométrica foram utilizados: dado cúbico (problema 2, 3 e 4), bola (problema 6), baralho com 52 cartas (problema 14), dado na forma de tetraedro regular (problema 11), comparação entre o dado cúbico e a moeda (problema 7).

Em relação a este conjunto de problemas encontramos as expressões ‘moeda comum’ (problema 1) e ‘baralho normal’ (problema 14). Tais expressões são comumente associadas com a palavra ‘honesto’, o que implica em pensarmos em eventos equiprováveis, cujas probabilidades são calculadas com base na concepção clássica: a probabilidade de cada face da moeda honesta é $\frac{1}{2}$ e de cada carta do baralho honesto é $\frac{1}{52}$. Os demais problemas já mencionados levam em conta a probabilidade teórica (concepção clássica ou de Laplace) como base para os cálculos necessários.

O problema 5 contém um enunciado envolvendo dois eventos: sucesso (o televisor apresenta problema) e fracasso (o televisor funciona corretamente), cujo enunciado apresentamos a seguir:

Estatisticamente, 1 em cada 10 televisores de determinada marca apresenta problemas de funcionamento. Uma loja de eletrodomésticos acaba de comprar 6 desses televisores para revender. Supondo que todos sejam vendidos, qual é a probabilidade de a loja receber reclamações de:

a) nenhum comprador? **b)** apenas de 1 comprador? **c)** apenas de 2 compradores? **d)** 3 compradores? **e)** 4 compradores? **f)** 5 compradores? **g)** todos os compradores? (SÃO PAULO, 2014-2017, p.54).

A resolução presente nesse material para este problema envolveu

os coeficientes binomiais, cuja abordagem metodológica sugerida para o professor faz referência ao fato de que esses coeficientes na forma $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, passam a significar a quantidade de ordenações possíveis entre o número de resultados esperados (p) e o de não esperados (n – p), e podem, assim, ser apresentados sem sobressaltos (SÃO PAULO, 2014-2017, p.54).

Em termos de registros de representação semiótica, foi mobilizado até esse problema a conversão do registro da língua natural para o registro numérico, cujo tratamento deste último registro envolveu a notação de fatorial.

Nos problemas 6, 7, 8, 10 até 12, a conversão da língua natural levou em conta implicitamente o registro algébrico envolvendo a generalização da “expressão do termo geral do binômio sem, todavia, amarrá-la diretamente à resolução de problemas” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.54).

No problema 9 a resolução pautou-se no conceito de probabilidade binomial levando em conta a chance do aluno ser sorteado (sucesso) e seu complemento (fracasso). O enunciado desse problema é: “Quatro prêmios iguais serão sorteados entre os 20 alunos de uma classe e há a possibilidade de qualquer aluno ser sorteado mais de uma vez. Qual é a probabilidade de Haroldo ser sorteado apenas no 2º sorteio?” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.57).

Detectamos erros conceituais no problema 12, cujo enunciado apresentamos abaixo:

Utilize um gráfico de barras para representar todas as probabilidades envolvidas em 8 lançamentos seguidos de uma moeda, com a observação da ocorrência do evento cara na face superior (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 58).

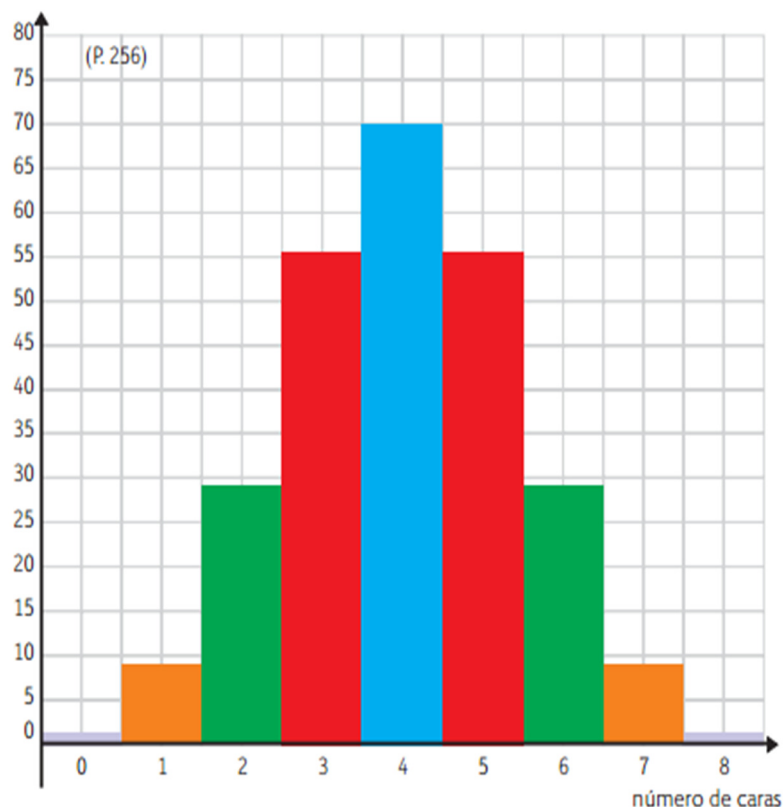
A solução sugerida pelo Caderno do Professor foi dividida em duas etapas, sendo a primeira o cálculo por meio dos coeficientes binomiais e

posteriormente a construção do gráfico de barras. Em relação aos cálculos probabilísticos,

As frequências dos números de caras, que poderão ser observadas em 8 lançamentos de uma moeda, coincidem com os números da linha 8 do triângulo de Pascal. Assim por exemplo, a probabilidade de que apareça em 5 dos 8 lançamentos é: $P(5 \text{ caras em } 8 \text{ lançamentos}) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$.
 $\binom{8}{5} = \frac{56}{256}$, dividindo por 256 cada um dos termos da linha 8 do triângulo de Pascal, teremos todas as probabilidades possíveis para esse experimento (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 58).

Assim como em todas as tarefas presentes nessa situação de aprendizagem, não há orientação quanto à realização do experimento aleatório, o qual propiciaria a abordagem das frequências da quantidade de caras e coroas em oito lançamentos de uma mesma moeda. O que se verifica na resolução é a associação teórica das frequências com a oitava linha do triângulo de Pascal, a qual o professor precisa estimular o alunos a identificar os referidos números e verificar que a soma é 256, ou seja, $1+8+28+56+70+56+28+8+1 = 256$.

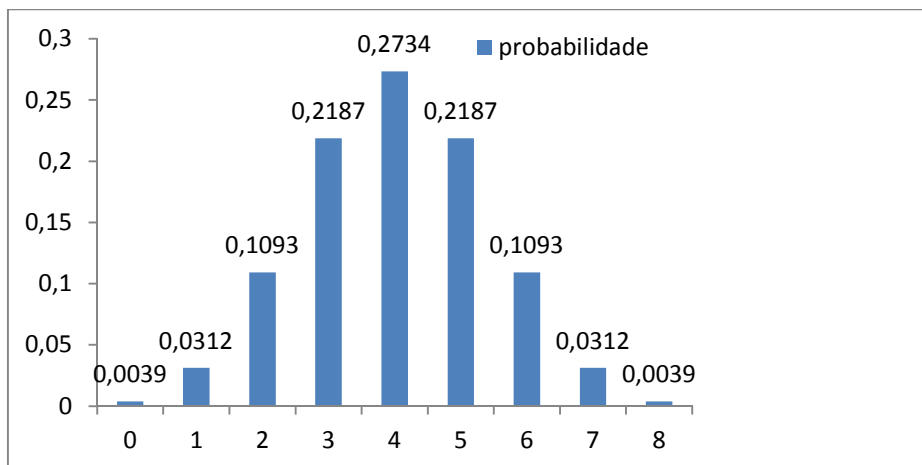
Feito este percurso, em termos de registros de representação semiótica, há uma conversão do registro de língua natural (enunciado) para um registro figural (construção do Triângulo de Pascal), que por sua vez converte no registro algébrico (aplicação da fórmula para os cálculos da probabilidade na distribuição binomial). A última conversão partiu do registro algébrico para o registro gráfico (SÃO PAULO, 2014-2017, p 58), o qual apresentamos a seguir:

Gráfico 1: Histograma

Fonte: (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 58)

No entanto, quando observamos esse gráfico encontramos erros conceituais. O 'gráfico 1' apresentado no Caderno do Professor, contém colunas justapostas que é correto quando associado a uma variável aleatória contínua. No caso de uma distribuição binomial a variável aleatória é discreta, cuja representação gráfica correta seria associar para cada valor do número de caras (variável x) a respectiva probabilidade ($P(x)$) produzindo, assim, um gráfico de colunas, conforme apresentado por Oliveira (2010):

Gráfico 2: Representação gráfica da tarefa 12



Fonte: adaptado de Oliveira (2010)

Nos problemas 13 e 14, o conteúdo da resolução envolveu o raciocínio combinatório desprovido da Probabilidade. Foi abordado o princípio multiplicativo em duas situações envolvendo formas distintas de agrupamentos.

Todas as tarefas propostas nesta situação de aprendizagem possuem a mesma estrutura, ou seja, o enunciado está na forma textual. As atividades matemáticas empregadas nas resoluções vão demandar a mobilização dos conhecimentos apreendidos anteriormente, principalmente referente ao raciocínio combinatório.

No aspecto do letramento probabilístico proposto por GAL (2005), as tarefas não atendem o elemento contexto. Especificamente, faltou mais uma vez, orientações para o professor sobre a importância do delineamento do experimento probabilístico. O enunciado do problema 6 ilustra muito bem esta situação:

Serão realizados 5 sorteios sucessivos utilizando-se 20 bolas e sendo 4 delas vermelhas. Haverá reposição de uma bola a cada vez. Escreva a probabilidade de saírem:

- 5 bolas vermelhas;
- 4 bolas vermelhas e uma não vermelha;
- 3 bolas vermelhas e duas não vermelhas;
- duas bolas vermelhas e 3 não vermelhas;
- uma bola vermelha e 4 não vermelhas;
- nenhuma bola vermelha.

No contexto do problema em questão há determinados cuidados necessários para a garantia de que tenhamos um experimento probabilístico, cujas bolas tenham a mesma chance de serem sorteadas a cada nova extração: as bolas precisam ser do mesmo material, formato e tamanho; o recipiente no

qual as bolas são colocadas deve ter uma estrutura opaca para que a aleatoriedade seja preservada. Também é importante ressaltar a implicação da reposição da bola a cada sorteio realizado na composição do espaço amostral.

5. Considerações finais

Neste trabalho, buscamos respostas para duas questões de investigação. A primeira que diz respeito sobre os registros de representação semiótica mobilizados e coordenados nas diversas tarefas contidas nas Situações de Aprendizagem (S1 a S4) propostas no Caderno do professor. De modo geral, a resolução das tarefas demandou a conversão do registro na língua natural para o registro numérico. Esta limitação quanto ao uso de outros registros de representação semiótica como o registro figural na forma do diagrama de árvore, foi decorrente da ausência de conexões entre o raciocínio combinatório e probabilístico.

O privilégio pela concepção clássica de probabilidade inibe a realização de processos de experimentação probabilística, o qual poderia instigar o confronto e a análise do cálculo de probabilidades decorrentes das diferentes concepções probabilísticas. A realização do experimento promove a necessidade do aluno em raciocinar sobre as condições de tratar a aleatoriedade, o que demanda estratégias para a apresentação e interpretação dos resultados obtidos, os quais culminam no cálculo da probabilidade a partir das frequências.

A restrição na mobilização de registros de representação semiótica comprometeu o desenvolvimento do letramento estatístico, no que diz respeito aos elementos cognitivos. A ausência de tarefas que poderiam exigir o tratamento do registro de língua natural em tarefas envolvendo o uso do vocabulário próprio da probabilidade (chance, aleatório, provável, entre outros termos) comprometeu a aquisição da linguagem probabilística.

O contexto foi outro elemento cognitivo do desenvolvimento do letramento que foi pouco abordado, exceto pelo tratamento histórico da probabilidade que gerou algumas das tarefas contidas na Situação de Aprendizagem (S1).

O uso do registro gráfico no estudo da probabilidade é um recurso de representação semiótica que pode promover conexões com a estatística e a análise combinatória, promovendo o exercício do letramento estatístico na leitura e interpretação das informações obtidas em pesquisas estatísticas.

Para uma pesquisa futura é interessante adequar ou elaborar novos enunciados frente às tarefas propostas no segundo volume do Caderno do Professor para a 2ª série do Ensino Médio, de modo que ao aplicar tarefas em sala de aula, seja possível analisar o desenvolvimento do letramento probabilístico através da mobilização dos diferentes registros de representação semiótica.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+: Ensino médio - orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC, 2002.141p.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 135p., 2006, v.2.

CABERLIM, Cristiane Candido Luz. **Letramento probabilístico no ensino médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos**. 2015. 141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2015.

CANAVEZE, Leila. **O ensino-aprendizagem de probabilidade em uma escola pública de Sorocaba/SP**. 2013. 209f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas). Sorocaba: Universidade Federal de São Carlos, 2014.

COBELLO, Lucas Soares; OLIVEIRA, Paulo César. História e análise do currículo de matemática na escola básica no Estado de São Paulo. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2015, Ilhéus. **Anais...** 12p. Ilhéus: UESC, 2015. CD-ROM.

COLOMBO, Janecler Aparecida Amorin; BUEHRING, Roberta Schnorr; MORETTI, Mércles Thadeu. Registros de representação semiótica, tarefas e análise de dados: articulações em torno do currículo de matemática. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v.4, n.8, p. 90-113, 2009.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva; SILVA, Maria José Ferreira da; ALMOULOU, Saddo Ag. Desenvolvimento do Pensamento Estatístico e sua Articulação com a Mobilização de Registros de Representação Semiótica. **Bolema**, Rio Claro, v.24, n.39, p.495-514, 2011.

DUVAL, Raymond. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução de Mércles Thadeu Moretti. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v.7, n.1, p.97-117, 2012.

FERREIRA, Norma Sandra de Almeida. As pesquisas denominadas “estado da arte”. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 23, n. 79, p. 257-272, ago. 2002.

FERREIRA, Robson dos Santos. **Ensino de probabilidade com o uso do programa estatístico R numa perspectiva construcionista**. 2011. 155f.

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Universidade Bandeirante de São Paulo, 2011.

GAL, Iddo. Developing probability literacy: Needs and pressures stemmings from framewoks of adult competencies an mathematics curricula. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12., 2012, Seoul. **Anais...** Seoul: COEX, 2012.

GAL, Iddo. Towards 'probability literacy' for all citizens. In: Graham A. Jones (ed.). **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2005, p. 43-71.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2012.

GODINO, Juan Diaz, BATANERO, Carmen; CAÑIZARES, Maria Jesus. **Azar y Probabilidad.** España: Editorial Síntesis, 1996.

LOPES, Celi Espasandin. A educação estocástica na infância. **Revista eletrônica de educação**, v.6, n.1, p.160-174, 2012.

LOPES, Celi Espasandin. A educação estatística no currículo de matemática: um ensaio teórico. In: Reunião Anual da ANPED, 33ª, 2010, Caxambu. **Anais...** 15p. Rio de Janeiro: Anped, 2010. GT 19.

ODY, Magnus Cesar. **Literacia estatística e probabilística no ensino médio.** 2013. 169f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2013.

OLIVEIRA, Fábio Francisco de. **Probabilidade condicional:** proposta de um experimento de ensino envolvendo registros de representações semióticas. 2014. 223f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Universidade Anhanguera de São Paulo, 2014.

OLIVEIRA, Paulo César. **O processo de aprender noções de Probabilidade e suas relações no cotidiano das séries iniciais do Ensino Fundamental:** uma história de parceria. 2003. 199f. Tese (Doutorado em Educação). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2003.

OLIVEIRA, Priscila Glauce de. **Probabilidade:** concepções construídas e mobilizadas por alunos do Ensino Médio à luz da teoria das concepções (CKc). 2010. 197f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010.

SANTAELLA, L. **O que é Semiótica.** São Paulo: Brasiliense, 1983.

SANTOS, Rodrigo Medeiros dos. **Estado da arte e história da pesquisa em**

educação estatística em programas brasileiros de pós-graduação. 2015. 348f. Tese (Doutorado em Educação). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2015.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Proposta curricular do Estado de São Paulo: Matemática.** Coord. Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2008. 64p.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias – Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio.** Coordenação de área: Nilson José Machado. 1ª ed. atual. São Paulo, SEE, 2012. 72p.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor: 2ª série do Ensino Médio, Matemática.** São Paulo: SEE, 2014-2017, v.2.

SERRA, Diego da Silva. **A contribuição da prova de Matemática do ENEM para o Ensino de Probabilidade e Estatística.** 2015. 192f . Dissertação (Mestrado em Ensino de matemática). Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015.

SOARES, Magda. Letramento e alfabetização: as muitas facetas. **Revista Brasileira de Educação**, n.25, p.5-17, jan-abr. 2004.