

Bruno Aguilar da Cunha

**Uma abordagem híbrida baseada em Projeções
sobre Conjuntos Convexos para
Super-Resolução espacial e espectral**

Sorocaba, SP

10 de Novembro de 2016

Bruno Aguilar da Cunha

Uma abordagem híbrida baseada em Projeções sobre Conjuntos Convexos para Super-Resolução espacial e espectral

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação (PPGCC-So) da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação. Linha de pesquisa: Teoria Aplicada à Computação.

Universidade Federal de São Carlos – UFSCar

Centro de Ciências em Gestão e Tecnologia – CCGT

Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação – PPGCC-So

Orientador: Prof. Dr. Murillo Rodrigo Petrucelli Homem

Sorocaba, SP

10 de Novembro de 2016

Cunha, Bruno Aguilar da

Uma abordagem híbrida baseada em Projeções sobre Conjuntos Convexos para Super-Resolução espacial e espectral / Bruno Aguilar da Cunha. -- 2016.
79 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador: Murillo Rodrigo Petrucelli Homem

Banca examinadora: Antonio Cesar Germano Martins, Fernando Vernal Salina

Bibliografia

1. Super-Resolução de imagens. 2. Projeção sobre Conjuntos Convexos. 3. Abordagem espectral e espacial. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências em Gestão e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Bruno Aguilar da Cunha, realizada em 10/11/2016:

Prof. Dr. Murillo Rodrigo Petrucelli Homem
UFSCar

Prof. Dr. Antonio César Germano Martins
UNESP

Prof. Dr. Fernando Vernal Salina
IFSP - São Carlos

*Dedico este trabalho a Deus por nortear a minha vida,
à minha mãe Sueli e à minha irmã Daiane, pelo apoio incondicional,
pelo exemplo, pelo carinho e pelo amor.*

Agradecimentos

Agradeço,

...ao meu orientador Prof. Dr. Murillo Rodrigo Petrucelli Homem por toda dedicação, paciência, esforço, incentivo e conhecimento compartilhado para realização deste trabalho.

...à minha mãe Sueli e à minha irmã Daiane que estiveram sempre ao meu lado, não me deixando desistir diante das dificuldades, me apoiando em minhas escolhas, sempre com muito carinho, dedicação e amor em cada palavra.

...aos professores, colegas e amigos com os quais convivi e fiz valorosas amizades durante o período do mestrado.

...aos membros da banca de qualificação, Profa. Dra. Katti Faceli e Prof. Dr. Jurandy G. Almeida Jr. que fizeram considerações valiosas e contribuíram de forma muito positiva para o desenvolvimento do trabalho.

...aos membros da banca de defesa, Prof. Dr. Antonio Cesar Germano Martins e Prof. Dr. Fernando Vernal Salina.

...à CAPES pelo auxílio financeiro através da bolsa fornecida.

...a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

*“Ninguém ignora tudo.
Ninguém sabe tudo.
Todos nós sabemos alguma coisa.
Todos nós ignoramos alguma coisa.
Por isso aprendemos sempre.”
(Paulo Freire)*

Resumo

Este trabalho visa o estudo e o desenvolvimento de um algoritmo para super-resolução de imagens digitais baseado na teoria de projeções sobre conjuntos convexos. O método é baseado em um algoritmo clássico de projeções sobre restrições convexas para super-resolução espacial onde se busca, considerando as informações subpixel presentes em um conjunto de imagens de menor resolução, gerar uma imagem de maior resolução e com melhor qualidade visual. Propomos a incorporação de uma nova restrição baseada no algoritmo de Richardson-Lucy para restaurar e recuperar parte das frequências espaciais perdidas durante o processo de degradação e decimação das imagens de alta resolução. Nesse sentido o algoritmo provê uma abordagem híbrida baseada em projeções sobre conjuntos convexos que é capaz de promover simultaneamente a super-resolução espacial e a espectral. A abordagem proposta foi comparada com o algoritmo original de Sezan e Tekalp e posteriormente com um método baseado em um *framework* de super-resolução robusta, considerado um dos métodos mais eficazes na atualidade. Os resultados obtidos, considerando as análises visuais e também através do erro médio quadrático, demonstram que o método proposto possui grande potencialidade promovendo o aumento da qualidade visual das imagens estudadas.

Palavras-chaves: Super-Resolução de imagens. Projeção sobre Conjuntos Convexos. Abordagem Espectral e Espacial. Abordagem Híbrida.

Abstract

This work proposes both a study and a development of an algorithm for super-resolution of digital images using projections onto convex sets. The method is based on a classic algorithm for spatial super-resolution which considering the subpixel information present in a set of lower resolution images, generate an image of higher resolution and better visual quality. We propose the incorporation of a new restriction based on the Richardson-Lucy algorithm in order to restore and recover part of the spatial frequencies lost during the degradation and decimation process of the high resolution images. In this way the algorithm provides a hybrid approach based on projections onto convex sets which is capable of promoting both the spatial and spectral image super-resolution. The proposed approach was compared with the original algorithm from Sezan and Tekalp and later with a method based on a robust framework that is considered nowadays one of the most effective methods for super-resolution. The results, considering both the visual and the mean square error analysis, demonstrate that the proposed method has great potential promoting increased visual quality over the images studied.

Key-words: Image Super-Resolution. Projection Onto Convex Sets. Spectral and Spatial Approach. Hybrid Approach.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Interpolação a partir de uma grade não uniforme.	26
Figura 2 – Esquematização do modelo de observação da imagem	27
Figura 3 – Gráfico de frequências de um operador de média em diferentes dimensões	28
Figura 4 – Representação da janela deslizante para Super-Resolução em vídeos . .	35
Figura 5 – Ilustração do conceito de convexidade para conjuntos no plano: (a) convexo; (b) não convexo.	38
Figura 6 – Ilustração do algoritmo POCS para dois conjuntos. Verifica-se que para um ponto inicial arbitrário, a sequência gerada pela relação recursiva apresentada na Eq.2.9 converge para a intersecção $C_1 \in C_2$	41
Figura 7 – Ilustração do comportamento do algoritmo POCS sequencial para o caso de dois conjuntos que não se intersectam.	42
Figura 8 – MDSP Resolution Enhancement Program desenvolvido por Farsiu et al.	53
Figura 9 – Conjunto de imagens EIA - (a) Imagem Original 360x360 e (b) versão LR degradada 90x90	58
Figura 10 – Conjunto de imagens Surveillance (small) 115x118 - Versão LR utilizada	58
Figura 11 – Comparativo entre a imagem original HR (a), sua versão de baixa resolução (b) e as versões interpoladas de (b) através da Técnica Bilinear (c) e Replicação de Pixels (d)	61
Figura 12 – Comparativo entre as imagens EIA: (a) Original HR, (b) Versão de baixa resolução (LR), (c) a imagem LR interpolada (Replicação de Pixels) e (d) Resultado da Estimativa obtida pelo algoritmo POCS1 . .	62
Figura 13 – Comparativo entre as imagens EIA: (a) Original HR, (b) Versão de baixa resolução (LR), (c) a imagem LR interpolada (Replicação de Pixels), (d) Resultado da Estimativa obtida pelo algoritmo POCS1 e (d) Resultado da Estimativa obtida pelo algoritmo POCS2	63
Figura 14 – Comparativo entre as imagens EIA: (a) Original HR, (b) Versão de baixa resolução (LR), (c) a imagem LR interpolada (Replicação de Pixels), (d) Resultado da Estimativa obtida pelo algoritmo POCS3 . .	65
Figura 15 – Comparativo entre as imagens EIA: (a) Original HR, (b) Resultado da Estimativa obtida pelo algoritmo POCS1, (c) Resultado da Estimativa obtida pelo algoritmo POCS2 e (d) Resultado da Estimativa obtida pelo algoritmo POCS3	66
Figura 16 – Comparativo entre as imagens EIA:(a) Original HR, (b) Shift and Add (S&A), (c) Shift and Add (S&A) com Deconvolução, (d) Norma L2, (e) Zoomet, (f) Zoomet com Regularização, (g) POCS3 (180x180) e (f) L1 + BilateralTV (Super-Resolução Robusta) (360x360)	67

Figura 17 – Comparativo entre as imagens EIA: (a) Original HR, (b) Versão de baixa resolução (LR) e (c) Resultado obtido L1 + Bilateral TV (180x180) (d) Resultado da Estimativa obtida pelo algoritmo POCS3 (180x180), que foram gerados com o mesmo fator de ampliação (igual a 2)	68
Figura 18 – Comparativo entre as imagens do conjunto Surveillance(small): (a) Versão de baixa resolução (LR), (b) Resultado obtido pelo POCS3 (180x180) e o (c) Resultado obtido pelo algoritmo de Super-Resolução Robusta (L1+Bilateral TV) (360x360)	69
Figura 19 – Comparativo entre as imagens do conjunto Surveillance(small): (a) Versão de baixa resolução (LR), (b) resultado obtido pelo POCS3 (180x180) e (c) Algoritmo de Super-Resolução Robusta (L1+BilateralTV) (180x180), que foram gerados com o mesmo fator de ampliação (igual a 2)	69

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores MSE em relação a imagem EIA original redimensionada	65
--	----

Sumário

	Prefácio	21
1	SUPER-RESOLUÇÃO DE IMAGENS	23
1.1	Objetivos	23
1.2	Definições	23
1.3	Processo de reconstrução da imagem de alta resolução	25
1.4	Modelo de Observação da imagem	26
1.4.1	Mal condicionamento do problema	29
1.5	Revisão da literatura	30
2	PROJEÇÃO SOBRE CONJUNTOS CONVEXOS	37
2.1	Histórico	37
2.2	Teorema fundamental de POCS	37
3	METODOLOGIA	45
3.1	Deslocamentos subpixel entre as imagens	45
3.2	Algoritmo POCS de referência	46
3.2.1	O processo de reconstrução utilizando POCS	48
3.3	Descrição da abordagem híbrida utilizando POCS	50
3.3.1	O algoritmo de Richardson e Lucy modificado	51
3.4	Comparação dos resultados	52
3.4.1	O algoritmo de Super-Resolução robusta	53
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	57
4.1	Imagens utilizadas para comparação	57
4.1.1	Conjunto de imagens EIA	57
4.1.2	Conjunto de imagens Surveillance (small)	58
4.2	Variações do algoritmo POCS proposto	59
4.3	Medidas e critérios para avaliação dos resultados	59
4.4	Considerações sobre critério de parada e a imagem inicial	60
4.5	Desempenho dos algoritmos POCS	60
4.6	Resultados POCS1	61
4.7	Resultados POCS2	63
4.8	Resultados POCS3	64
4.8.1	Resultados - Imagens Surveillance (small)	68
	Conclusão	71

Referências	73
------------------------------	-----------

Prefácio

O termo resolução espacial em processamento de imagens, pode ser definido como o menor detalhe perceptível ou discernível em uma imagem digital e está estritamente relacionado com a qualidade visual e com a fidelidade do que é representado, em relação a uma cena real (GONZALEZ; WOODS, 2006; CHAUDHURI, 2001). Quanto maior for a resolução espacial de uma imagem, maior será a quantidade de pixels em uma determinada área e menor serão as dimensões de um único pixel a ser representado, o que permite uma melhor definição dos detalhes e uma transição mais suave entre as cores (CHAUDHURI, 2001).

Conforme Milanfar (2010), a resolução de uma imagem é limitada principalmente pelos sensores de captura e pelo dispositivo de aquisição. Atualmente, o CCD (*Charge-coupled device*) e o CMOS (*complementary metal-oxide-semiconductor*) são os sensores utilizados pelos diversos mecanismos de captura, sendo dispostos, normalmente, numa matriz bidimensional para a obtenção de sinais.

Chaudhuri (2001), complementa que os sensores respondem às fontes luminosas (fótons) e, portanto, um sensor que tenha uma alta densidade de fotodetectores consegue obter imagens com alta resolução espacial. Contudo, um sensor com características opostas, geram imagens de baixa resolução com pixelização, no qual os pixels individuais podem ser vistos a olho nu, degradando a qualidade visual da mesma.

Embora a tecnologia atual seja adequada para uma grande variedade de aplicações, a capacidade de resolução atual e o alto custo para seu desenvolvimento é um grande entrave para as necessidades e demandas futuras (PARK; PARK; KANG, 2003a). Considerando que quanto menor o tamanho do fotodetector (menor a dimensão do pixel) maior a resolução espacial, uma possível abordagem, seria reduzir a dimensão dos detectores conforme a necessidade. Porém, a redução indiscriminada do tamanho do pixel, gera o surgimento de um efeito indesejado conhecido como *shot noise* (CHAUDHURI, 2001).

Nasrollahi e Moeshund (2014) destacam que além da redução da luz que atinge a célula associada ao pixel no sensor, pixels de menor dimensão são mais sensíveis aos efeitos da difração, em comparação aos maiores, ocasionando muitas vezes, uma acentuada degradação da imagem. Por outro lado, a abordagem alternativa, seria aumentar o tamanho do chip/sensor, contudo, é pouco efetivo, devido ao aumento da capacitância, que gera um acréscimo significativo das taxas de transferência de carga.

Considerando as dificuldades descritas para se obter uma melhor resolução, novas técnicas são necessárias para contornar esse problema. Uma abordagem muito promissora, que vem gerando resultados bastante apreciáveis, utilizando processamento digital de

imagens é conhecida como Super-Resolução, sendo o tema principal deste trabalho.

Será apresentado uma metodologia para obtenção de uma estimativa de alta resolução considerando imagens de baixa resolução através da Projeção sobre Conjuntos Convexos (POCS – *Projections Onto Convex Sets*) considerando uma abordagem híbrida, na qual a Super-Resolução irá ocorrer no contexto espacial e também espectral, ou seja, além de aumentar a dimensão da imagem de alta resolução, também buscará recuperar altas frequências perdidas, enquanto ao mesmo tempo diminui o borramento e a degradação com o objetivo de se aproximar ou superar uma técnica escolhida na qual os resultados são bastante apreciáveis (FARSIU et al., 2004b; FARSIU et al., 2004a), utilizando um framework de Super-Resolução Robusta. Outra questão importante a ser demonstrada é a possibilidade de agregar métodos clássicos na abordagem POCS com outras abordagens existentes na literatura através de conjuntos convexos que podem permitir obter resultados que atendam as necessidades desejadas, além de discutir os algoritmos e estudos realizados para elaboração da metodologia a ser proposta neste trabalho para alcançar os objetivos propostos.

1 Super-Resolução de imagens

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é propor um algoritmo baseado na teoria de projeções sobre conjuntos convexos capaz de promover simultaneamente o aumento da resolução espacial e a recuperação parcial de frequências espaciais perdidas durante o processo de degradação e decimação de uma imagem digital de maior resolução. A abordagem proposta é híbrida considerando que ambos os conceitos de super-resolução são explorados no mesmo algoritmo, a super-resolução espacial e a espectral.

A base para o algoritmo é a formulação original proposta por Sezan e Tekalp (TEKALP; OZKAN; SEZAN, 1992) para super-resolução espacial utilizando restrições convexas onde são explorados os deslocamentos subpixels de imagens degradadas de menor resolução de uma mesma cena. As informações provenientes desses deslocamentos são incorporadas como informações *a priori* em conjuntos convexos e a teoria de projeções sequenciais ou simultâneas promove um caminho adequado para estimar uma imagem de maior resolução que satisfaz simultaneamente os conjuntos de restrições.

O método proposto modifica a abordagem original com a incorporação de uma nova restrição baseada no algoritmo de Richardson-Lucy (RICHARDSON, 1972; LUCY, 1974), bem conhecido na literatura por ser capaz de recuperar parcialmente frequências espaciais perdidas.

Dessa forma, como consequência do objetivo geral, propõe-se um novo conjunto convexo, incorporando a metodologia de Richardson-Lucy como uma restrição convexa, modificada pelo filtro de Canny (CANNY, 1986) para minimizar os efeitos da amplificação de artefatos gerados pelo processo iterativo desse algoritmo.

Como objetivos específicos, o trabalho realiza um estudo da teoria de projeções sobre conjuntos convexos e uma revisão da literatura sobre o tema e sobretudo verifica a potencialidade da abordagem de projeções sobre o problema em foco em comparação com outro algoritmo de super-resolução considerado como um dos mais eficazes na atualidade.

1.2 Definições

Super-Resolução (SR - *Super Resolution*) (PARK; PARK; KANG, 2003a) é uma conhecida técnica de processamento de sinais, que visa obter uma imagem de alta resolução (HR - High Resolution) através de uma ou mais imagens de baixa resolução de uma mesma cena. O termo “super” faz alusão a capacidade da técnica de superar as limitações inerentes

aos sistemas de aquisição de imagens de baixa resolução (LR - *Low Resolution*). Um grande diferencial da técnica, é justamente a possibilidade de se obter as imagens com melhor resolução espacial, a partir de imagens destes sistemas já existentes, sem a necessidade de melhorias no processo de aquisição. Sendo assim, a Super-Resolução, tem como objetivo, aumentar o tamanho da imagem (aumentando também o número de pixels e a resolução da mesma) e reduzir as degradações inerentes às imagens LR utilizadas (MILANFAR, 2010).

Um adendo ao conceito se faz necessário. Na vasta literatura existente sobre o tema (PARK; PARK; KANG, 2003a; BORMAN; STEVENSON, 1998a; HOMEM, 2003), observa-se que o termo é utilizado de duas maneiras distintas (ANDREWS; HUNT, 1977). Embora exista o ponto em comum entre ambos os casos quanto a *tentativa de recuperar componentes de frequência espacial perdidos*, a razão da perda de resolução, assim como o resultado obtido diferem entre as abordagens, contudo, frequentemente, esses conceitos são encontrados sem distinções.

O primeiro conceito diz respeito à restauração de uma única imagem a partir da recuperação de frequências espaciais que estão além do limite de difração por uma frequência de corte estabelecida (HOMEM, 2003). Algoritmos que se utilizam dessa ideia, buscam efetuar a extrapolação parcial do espectro de potências da mesma. Essa abordagem pode ser definida como um método de *restauração por Super-Resolução*, geralmente encontrada em pesquisas de imageamento óptico (HOMEM, 2003), sendo os trabalhos desta área mais antigos.

O outro conceito já está relacionado a *reconstrução* da imagem de alta resolução a partir de um conjunto de imagens de baixa resolução geralmente deslocadas em relação a uma imagem de referência (PARK; PARK; KANG, 2003a). Os algoritmos que seguem essa abordagem são conhecidos como métodos de *reconstrução por super-resolução*, *reconstrução de alta resolução* ou, simplesmente, *realce* por super-resolução. Essas três denominações são encontradas na literatura e são objeto de pesquisas mais recentes, por ainda ser um tema em aberto e que necessita de uma atenção em especial, tendo em vista a vasta quantidade de imagens já existentes com resolução insatisfatória e também devido ao fato que estamos próximos de uma limitação física dos hardwares existentes nos dispositivos de captura que podem cercear o crescimento e a fabricação de dispositivos de captura com resoluções cada vez maiores (MILANFAR, 2010). Considerando que a abordagem utilizada neste trabalho tem como base a reconstrução a partir de imagens LR, é salutar complementar no tocante aos deslocamentos entre as imagens em relação a de referência, a necessidade de supor que há um deslocamento subpixel entre elas. Esse é um tema de extrema importância para bons resultados com algoritmos de Super-Resolução, embora, na literatura, não exista um elevado número de trabalhos que abordam o tema (KEREN; PELEG; BRADA, 1988a; PELEG; KEREN; SCHWEITZER, 1987; BERENSTEIN et al.,

1987; UR; GROSS, 1992). Deslocamentos inteiros ou unitários representariam as mesmas informações já existentes que foram simplesmente deslocadas e não complementaríamos para o processo de reconstrução. As informações subpixel precisam ser alimentadas no processo para que o resultado final possa ser obtido. Ainda considerando essa suposição, cabe diferenciar também a abordagem de outra técnica bastante utilizada em processamento de imagens, denominada interpolação, que tem como objetivo aumentar a imagem através de operações efetuadas a partir dos pixels e informações já existentes, geralmente obtendo uma imagem com dimensão maior, contudo se apresenta de forma mais degradada em relação à original pela falta de informações *a priori* que possam aumentar a qualidade visual da mesma.

Os algoritmos discutidos e implementados neste trabalho referem-se a *reconstrução por super-resolução* que tem como objetivo restaurar uma imagem de alta resolução a partir de um conjunto de imagens de baixa resolução degradadas e corrompidas por *aliasing*.

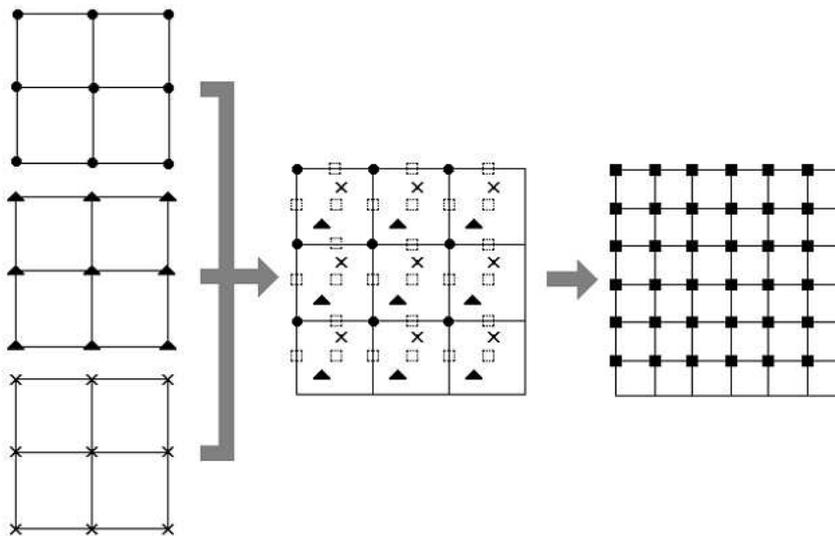
1.3 Processo de reconstrução da imagem de alta resolução

De acordo com Park, Park e Kang (2003b), a metodologia para reconstrução de imagens por super-resolução pode ser vista como um processo de três estágios. A primeira etapa consiste em registrar¹ de forma a alinhar as imagens de baixa resolução com precisão subpixel em relação a uma imagem de referência que, usualmente, corresponde a uma das imagens de baixa resolução disponível. Na sequência, o próximo passo consiste na construção de uma grade de maior resolução a partir das imagens alinhadas e, finalmente, a restauração da imagem de alta resolução é conduzida para a remoção do borramento proveniente do processo de aquisição. A Figura 1, ilustra as duas primeiras fases deste processo. Considerando que a imagem do canto superior esquerdo seja a imagem de referência, as outras duas são alinhadas em relação a esta e, na sequência, uma grade de maior resolução é gerada a partir do alinhamento.

Se os deslocamentos são não inteiros, contudo possuem os mesmos valores para todas as imagens, a interpolação será sobre uma grade uniforme (PARK; PARK; KANG, 2003a; BORMAN; STEVENSON, 1998a; HOMEM, 2003). Por outro lado, no caso mais geral, quando as imagens possuem deslocamentos arbitrários, é necessária uma interpolação não uniforme. Este procedimento é um dos mecanismos mais intuitivos para a realização da super-resolução. Contudo, embora seja capaz de produzir resultados apreciáveis em algumas aplicações, este não considera um modelo para a formação das imagens de baixa resolução. Observamos que um ponto de fundamental importância é o alinhamento destas imagens. A maioria dos artigos sobre super-resolução não aborda este tema com profundidade. De fato, de maneira geral, muitas vezes se assume o conhecimento dos deslocamentos

¹ Alguns autores não utilizam em língua Portuguesa o termo *registro* com esse sentido.

Figura 1 – Interpolação a partir de uma grade não uniforme.



Fonte: Produzido pelos autores

relativos entre as mesmas. Por outro lado, alguns trabalhos também sugerem métodos para estimar o movimento relativo entre estas. Ainda, embora a literatura sobre registro de imagens seja extensa (ZITOVA; FLUSSER, 2003; BROWN, 1992), poucos trabalhos fazem menção à precisão subpixel, necessária para o sucesso dos algoritmos de super-resolução (IRANI; PELEG, 1991; KEREN; PELEG; BRADA, 1988b). Embora não seja o foco deste trabalho, é fundamental o conhecimento que algoritmos para alinhamento subpixel interferem no resultado final dos algoritmos de super-resolução. Buscar novos métodos para o alinhamento das imagens de baixa resolução com precisão subpixel se faz necessário, por ser um dos fatores que podem possibilitar melhores resultados (MILANFAR, 2010).

1.4 Modelo de Observação da imagem

Segundo Milanfar (2010), o sistema de imagem digital é imperfeito. Devido a limitações de hardware, durante o processo de aquisição, ocorrem diversos tipos de degradações. Um exemplo, é o borramento óptico, ocasionado pela abertura finita durante a captação da cena pelo equipamento. Esse tipo de borramento, bastante presente também em vídeos, é modelado e representado pela Função de Espalhamento Pontual (PSF – *Point Spread Function*).

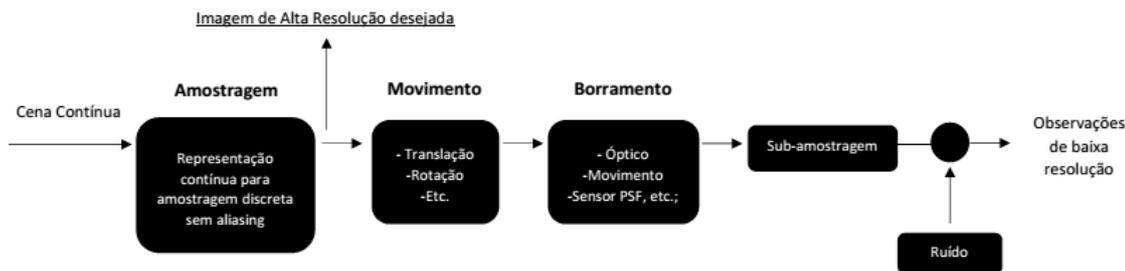
Considere $f[i, j]$, $0 \leq i, j \leq M$, uma imagem ideal, sem degradações e amostrada convenientemente conforme o limite de *Nyquist*, a partir de uma cena de interesse $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Em uma situação realística, a imagem digital é usualmente borrada pelo sistema de aquisição e também corrompida por algum tipo de ruído.

Neste sentido, a partir de uma ordenação dos pixels, uma versão degradada e de baixa resolução $g_k[k, l]$, $0 \leq k, l \leq N$, $N \leq M$, de uma imagem de alta resolução f , pode ser modelada por (BABU; MURTHY, 2011)

$$g_k = H_k D_k f + n_k, \quad (1.1)$$

onde n_k representa o ruído na observação g_k , seguindo um modelo aditivo.

Figura 2 – Esquemática do modelo de observação da imagem



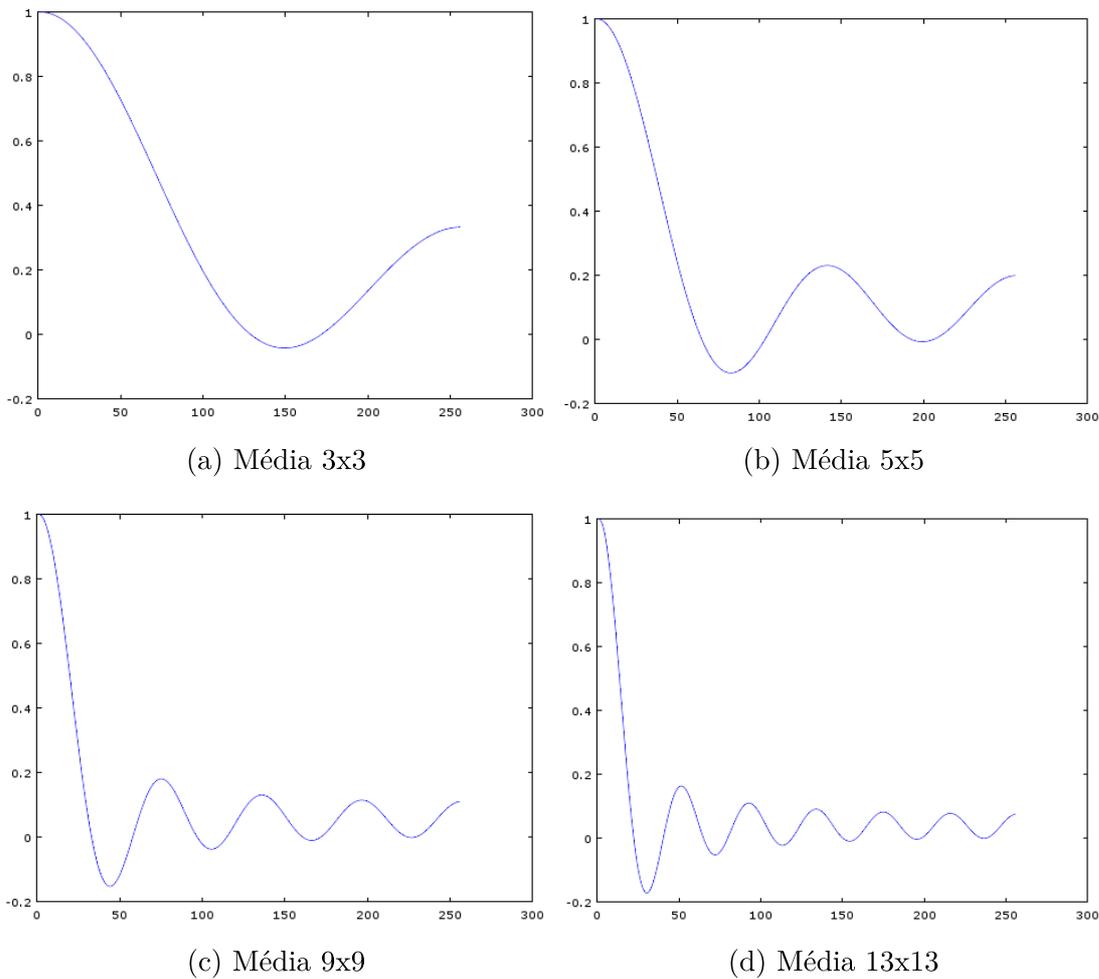
Fonte: Produzido pelos autores

Para o operador de *borramento* H_k , uma matriz bloco-circulante de dimensão $N^2 \times N^2$, é frequentemente considerada. Em outras palavras, utilizamos um operador linear espacialmente invariante, onde os elementos são amostras da função de espalhamento pontual (PSF) que representa o mecanismo de degradação (PARK; PARK; KANG, 2003b). A Figura 2, mostra de forma esquematizada as etapas do modelo de observação, demonstrando o processo de captura de uma cena contínua, seguida da amostragem, do movimento, borramento e o acréscimo do ruído aditivo na última etapa, gerando as observações de baixa resolução.

Observamos que de acordo com a posição dos sensores de aquisição, o operador de decimação $D_k[u, v]$, $0 \leq u \leq N^2$ e $0 \leq v \leq M^2$, pode ser responsável pela presença de deslocamentos subpixel entre as observações de baixa resolução. É preciso também destacar que a operação de decimação adotada e descrita na maioria dos casos da literatura (PARK; PARK; KANG, 2003a) segue um modelo simplificado para representar a natureza do processo. Essa abordagem simplificada é feita constantemente pela utilização de um operador de média. A Figura 3 mostra o gráfico dos valores de frequência considerando operadores de diferentes dimensões. É possível notar que quanto maior foi a matriz do operador de média, mais vezes as frequências possuem valor zero ou até mesmo assumem valores negativos, mostrando claramente que frequências que podem ser importantes para o processo de Super-Resolução acabam sendo descartadas pela caracterização do modelo adotado no processo de decimação. A proposta híbrida deste trabalho tem como objetivo justamente recuperar as frequências perdidas que podem ser valiosas para obter uma boa estimativa de alta resolução.

O intuito do processo de super-resolução é (PARK; PARK; KANG, 2003a), dado um conjunto de imagens de baixa resolução², g_k , determinar ou estimar a imagem original descrita por f (MILANFAR, 2010). Algoritmos de reconstrução por super-resolução são necessários para amenizar os borramentos ou mal condicionamentos da imagem através de soluções regularizadas e com abordagens sejam no domínio espacial ou espectral da imagem, juntamente com uma estimativa dos movimentos existentes que levem a um resultado o mais próximo possível da imagem de alta resolução desejada.

Figura 3 – Gráfico de frequências de um operador de média em diferentes dimensões



Fonte: Produzido pelos autores

O problema da super-resolução é definido como um processo mal condicionado, ou seja, no sentido de que a solução pode não existir, ou pode não ser única ou, ainda, pode não depender dos dados de forma contínua (HOMEM, 2003). Complementando o modelo de observação descrito, precisamos tecer algumas considerações quanto ao

² Obviamente, a ideia do que vem a ser uma imagem de baixa resolução é fortemente dependente do problema.

mal condicionamento do problema, que será de grande importância para compreender a utilização de algoritmos de restauração na abordagem proposta neste trabalho.

1.4.1 Mal condicionamento do problema

Considerando uma ordenação lexicográfica, é possível denotar de forma mais simplificada o modelo de formação de uma imagem através de notação vetorial

$$b = Hf \quad (1.2)$$

onde b (versão degradada de f) e f (imagem obtida da cena real) são vetores de tamanhos $N \times 1$, onde $N = M \cdot M$, assumindo que a imagem tenha dimensão $M \cdot M$ pixels e que b e f são construídos empilhando os elementos de $b(x, y)$ e $f(x, y)$ respectivamente. Neste caso, H é a matriz quadrada de *borramento* de tamanho $N \cdot N$ que gera os efeitos da degradação pela difração, onde os elementos são amostras da PSF.

Considerando a ausência de qualquer tipo de ruído, poderíamos resolver a equação simplesmente pela inversão direta da matriz H , ou seja

$$f = H^{-1}b \quad (1.3)$$

Entretanto, a inversa da matriz de borramento H^{-1} não existe na maioria dos casos, devido aos autovalores da mesma serem nulos, e mesmo na presença de ruído, os autovalores diferentes de zero seriam valores pequenos e o processo de inversão poderia ocasionar uma amplificação do ruído existente de tal forma que produziria um resultado não aceitável. São justamente situações como essa, que determinam os problemas de natureza mal condicionada. Na literatura, esse processo de inversão estimando a imagem desejada f a partir de observações ruidosas e borradas é considerado um problema linear inverso, bastante conhecido como *deconvolução*. Outras tentativas de solução da equação linear poderiam ser utilizadas, como por exemplo, recorrendo ao artifício da pseudo-inversa. De qualquer forma a estimação de f seria instável na presença de ruído, considerando que H seja mal condicionada (HOMEM, 2003).

Sedo assim, no contexto do problema, é de extrema importância observar que o modelo de reconstrução é um problema mal condicionado (PARK; PARK; KANG, 2003b) e que soluções regularizadas que utilizam informações ou restrições *a priori* são necessárias (BABU; MURTHY, 2011).

1.5 Revisão da literatura

A literatura sobre super-resolução (no sentido de reconstrução de alta resolução) é extensa (PARK; PARK; KANG, 2003a; BORMAN; STEVENSON, 1998a; MILANFAR, 2010) e inclui as mais diversas aplicações como vídeos de segurança, imageamento por satélites, restauração e melhora da qualidade de vídeos, conversão entre padrões de formatos de vídeos, remoção do borramento devido ao tempo de abertura do obturador da câmera utilizada, entre outras. Para uma revisão detalhada, sugerimos os trabalhos de Tian e Ma (2011b) e Milanfar (2010) que descrevem os trabalhos mais relevantes, vantagens e desvantagens dos principais algoritmos existentes e discutem as direções futuras sobre o tema. Esse tópico se restringe a uma breve revisão apenas com o intuito de delinear as principais abordagens encontradas na literatura e os trabalhos na qual as contribuições estão relacionadas ao contexto do trabalho.

De maneira geral, como uma classificação preliminar, os algoritmos podem ser divididos em duas grandes categorias. Na primeira estão os métodos derivados no domínio espacial e, na segunda, aqueles derivados no domínio da frequência. Os algoritmos desta última classe são mais simples e possuem um mecanismo mais intuitivo na realização da super-resolução do que aqueles derivados no domínio do espaço (PARK; PARK; KANG, 2003a).

No domínio de frequência, Tsai e Huang (1984) foram os primeiros a tratar o problema de reconstruir uma imagem de maior resolução a partir de um conjunto de imagens de resoluções menores da mesma cena. Os autores utilizaram uma abordagem baseada na propriedade do deslocamento da transformada de Fourier para modelar deslocamentos globais na cena de interesse. Kim, Bose e Valenzuela (1990) complementaram os trabalhos acrescentando o ruído aditivo na formulação do problema. Posteriormente, diversos algoritmos foram propostos para resolver o mesmo problema, contudo, em sua grande maioria, no contexto do domínio espacial. Borman e Stevenson (1998b) também fornecem uma valiosa e vasta revisão dos diferentes métodos existentes para o problema da super-resolução.

Considerando o contexto das abordagens no domínio de frequência, a definição mais precisa para super-resolução segundo Sementilli, Hunt e Nadar (1993), é a restauração do espectro de frequências do objeto para aquelas frequências inferiores à frequência de corte e à extrapolação do espectro acima desta.

A restauração espectral até o limite fornecido pela frequência de corte é obtida pela solução do problema linear inverso e a super-resolução propriamente dita, corresponde à reconstrução do espectro para além da frequência de corte. Dessa forma, a não linearidade é necessária para super-resolução. Sementilli, Hunt e Nadar (1993) definiu a máxima frequência obtida pela solução de Tikhonov (TIKHONOV; ARSENIN, 1977) para

caracterizar o limiar acima do qual se deseja a extrapolação do espectro.

O problema da possibilidade de super-resolução vem sendo debatido há mais de 50 anos. Autores como [Harris \(1964\)](#) descrevem o problema levando em consideração o teorema da continuação analítica para mostrar que, na ausência de ruído, uma extensão infinita da largura da banda espectral é possível e que esta pode ser estendida unicamente para qualquer imagem. Por outro lado, autores como [Francia \(1969\)](#) teorizaram que diferentes objetos podem produzir a mesma imagem tornando o problema ambíguo. Dessa forma, a informação contida na imagem seria insuficiente para permitir a perfeita reconstrução dos elementos presentes na mesma. Posteriormente, [Bertero et al. \(1984\)](#) e [Frieden \(1993\)](#) demonstraram que o problema da super-resolução é limitado pelo número de Shannon da imagem ([KOSAREV, 1990](#)).

[Sementilli, Hunt e Nadar \(1993\)](#) também obteve indicações de que o problema em geral é limitado, uma vez que, frequentemente, o conhecimento da informação *a priori* é parcial, e derivou limites superiores para as frequências que podem ser recuperadas. Apesar das discussões teóricas sobre as possibilidades efetivas de super-resolução, na prática, autores como [Gerchberg \(1974\)](#), [Papoulis \(1975\)](#), [Carrington et al. \(1995\)](#) e [Conchello \(1998\)](#), entre outros ([WALSH; NIELSEN-DELANEY, 1994](#); [MIURA; BABA, 1996](#)), demonstraram experimentalmente a possibilidade real da super-resolução. Atualmente, sabe-se que super-resolução parcial é possível sendo, contudo, limitada pelos fatores como amostragem e informação *a priori* parcial. Segundo [Hunt \(1995\)](#), as informações *a priori* frequentemente incorporadas são: conhecimento sobre o contorno do objeto, tamanho, limites inferiores e superiores sobre a intensidade de quais outras estatísticas do objeto verdadeiro. Neste último caso, por exemplo, supondo um modelo estatístico para a imagem verdadeira, um conhecimento adequado da matriz de covariância ou da média do sinal podem fornecer a informação necessária para realizar super-resolução. Para mencionar apenas os algoritmos mais importantes no contexto de super-resolução, devemos começar pelos trabalhos pioneiros de [Slepian e Pollak \(1961\)](#), [Gerchberg \(1974\)](#) e [Papoulis \(1975\)](#).

Particularmente, [Gerchberg](#) e [Papoulis](#) derivaram, de forma independente, uma metodologia que nos dias de hoje é conhecida como algoritmo de *Gerchberg-Papoulis*, sendo um dos primeiros algoritmos reconhecidamente capaz de recuperar os componentes de frequências perdidas além do limite de difração. Esse método assume restrições sobre a imagem conjuntamente no domínio da frequência e no domínio espacial. Para a restrição espacial, há uma suposição de que um objeto presente possui uma extensão finita, satisfazendo dessa forma a condição de analiticidade (como descrita por [Harris \(HARRIS, 1964\)](#)). Outras restrições no domínio do espaço como positividade podem ainda ser incorporadas. Por outro lado, a restrição no domínio de Fourier é conhecimento do espectro de frequências abaixo do limite de difração. A imposição das restrições espaciais modifica o espectro no domínio de Fourier abaixo do limite de difração, ao mesmo tempo em que expande

as frequências espaciais. A restrição no domínio de Fourier restaura as frequências até o limite de difração que são modificadas pelas restrições parciais, enquanto mantém as frequências extrapoladas. Verifica-se que a imposição destas restrições de forma iterativa converge para uma solução satisfazendo todas as restrições. Podemos ainda mencionar uma variante proposta por [Walsh e Nielsen-Delaney \(1994\)](#), que introduziu uma modificação do algoritmo de Gerchberg-Papoulis de forma a computar os componentes de frequência espacial acima do limite de difração diretamente no domínio espacial. Embora podendo ser considerado, a princípio, um procedimento *ad hoc*, a convergência do algoritmo de Gerchberg-Papoulis é garantida. Mais tarde, este algoritmo foi revisto no contexto de Projeções sobre Conjuntos Convexos ([COMBETTES, 1996](#); [STARK; YANG; YANG, 1998](#)) formalizando dessa forma as propriedades de convergência.

Uma das abordagens consideradas nesse trabalho consiste em utilizar uma abordagem híbrida através da junção da proposta por [Tekalp, Ozkan e Sezan \(1992\)](#) no domínio espacial, incorporando uma outra abordagem derivada de forma distinta da Gerchberg-Papoulis no domínio de Fourier, proposto também de forma independente por [Richardson \(1972\)](#) e [Lucy \(1974\)](#), na qual justificaram o uso do método através de uma abordagem bayesiana. O método desenvolvido por ambos trata-se de uma abordagem iterativa baseada na estimativa por máxima verossimilhança, na qual demonstraram que o algoritmo pode recuperar parcialmente componentes de frequência perdidos.

Apesar da simplicidade das abordagens no domínio da frequência, estas possuem desvantagens. Por exemplo, não permitem incorporar modelos mais gerais para a determinação do movimento presente na cena ([MARCEL; BRIOT; MURRIETA, 1997](#); [TIAN; MA, 2011a](#)). Abordagens no domínio espacial permitem modelos para estimação de situações mais genéricas, permitindo movimentos arbitrários. Também permitem incorporar modelos de degradações mais complexos e principalmente a inclusão de informações *a priori* de forma mais efetiva.

A maioria dos algoritmos propostos na literatura seguem essa abordagem. Por exemplo, métodos baseados em Projeções sobre Conjuntos Convexos (POCS) impõem o conhecimento *a priori* ([PANDA; PRASAD; JENA, 2011](#)) na forma de conjuntos fechados e convexos. Essa abordagem computacional está baseada no fato que o processo de projeção, de forma iterativa ou paralela, sobre os conjuntos, converge para a intersecção de todos os conjuntos, ou para uma solução que é a mais próxima possível dos conjuntos (quando não há intersecção) segundo alguma métrica. Observamos que o próprio processo iterativo pode ser visto como uma forma de regularização do problema inverso.

[Stark e Oskoui \(1989\)](#), baseados no trabalho anterior de [Frieden e Aumann \(1987\)](#) derivaram o primeiro algoritmo utilizando a teoria de projeções para reconstrução de imagens de alta resolução. [Tekalp, Ozkan e Sezan \(1992\)](#), [Patti, Sezan e Tekalp \(1994\)](#) propuseram soluções posteriormente, para vários dos problemas encontrados na abordagem

de Oskoui e Stark. Particularmente, estenderam o método para incorporar a presença do ruído e o movimento relativo entre a sequência de imagens de baixa resolução. O modelo para o movimento proposto por [Patti, Sezan e Tekalp \(1994\)](#) assume apenas translações globais entre as imagens adquiridas e não considera o efeito do borramento, devido ao tempo de abertura do obturador da câmera durante o processo de aquisição. Por outro lado, [Patti, Sezan e Tekalp \(1994\)](#) utilizaram o mesmo modelo para as observações e mesma formulação POCS, para a solução de um sistema de equações lineares, e aperfeiçoaram o trabalho anterior incluindo os efeitos de uma função de espalhamento pontual variante no espaço. O modelo também inclui os efeitos causados pela amostragem de baixa resolução assim como os efeitos do movimento relativo da cena. Outras extensões deste método, considerando a detecção do movimento, podem ser encontradas na referência([PATTI; SEZAN; TEKALP, 1997](#)). Observamos que os trabalhos acima são baseados na mesma formulação do algoritmo POCS sendo que todos os efeitos das degradações são modelados em um único operador de degradação.

Métodos de regularização determinísticos se utilizam das informações para estabilizar o problema inverso. Frequentemente, nesses casos, restrições de suavização são impostas assumindo que as imagens possuem frequências limitadas. Conseqüentemente, essas abordagens modelam as informações de uma maneira desfavorável ao processo de super-resolução ([MILANFAR, 2010](#)). Contudo, em muitos casos, outras informações *a priori* tendem a preservar informações de alta frequência de uma forma mais adequada. O algoritmo proposto por [Shen et al. \(2007\)](#), que maximiza sequencialmente as probabilidades condicionais locais é capaz de fornecer resultados apreciáveis com uma rápida taxa de convergência. Abordagens probabilísticas usualmente incorporam o conhecimento sobre o problema de forma mais natural, sendo os métodos bayesianos os mais usuais, como, por exemplo, os estimadores de máxima probabilidade *a posteriori* (MAP) ([JING; KAI-KUANG, 2010; VILLENA et al., 2013](#)). Como exemplo, podemos citar trabalhos baseados em modelos de Campos Aleatórios Markovianos (MRF – *Markov Random Fields*) ([MARTINS; HOMEM; MASCARENHAS, 2007; MARTINS et al., 2009](#)), que são mais flexíveis e realísticos, desde que permitem a inclusão do conhecimento utilizando relações de vizinhanças entre pixels próximos.

No contexto de super-resolução, frequentemente, existem apenas observações ruidosas de baixa resolução e uma restrição muito usual é a suavização, para minimizar o ruído. Em uma abordagem MAP, esta restrição é expressa como uma probabilidade sobre a imagem de alta resolução, a qual é unicamente determinada por suas distribuições condicionais locais. Neste sentido, a restrição de suavização pode ser imposta apenas sobre valores na imagem onde seus vizinhos não tenham uma variação abrupta. Mais ainda, devido a complexidade computacional dessa abordagem, algoritmos como o ICM (*Iterated Conditional Modes*) promovem soluções aproximadas viáveis ao processo ([MARTINS et al., 2009](#)).

Recentemente, [Chen, Nunez-Yanez e Achim \(2012\)](#), propuseram um algoritmo para imagens dinâmicas seguindo uma abordagem MAP baseado na Gaussiana generalizada demonstrando que o modelo pode descrever a distribuição da imagem de alta resolução de forma muito efetiva, enquanto é capaz de preservar descontinuidades (bordas) na imagem, além de controlar o nível de ruído presente na mesma. Contudo, apesar de resultados apreciáveis, até onde podemos concluir, o método apresenta instabilidades quando os frames não são bem comportados, isto é, quando os objetos presentes nos frames se movem em direções arbitrárias.

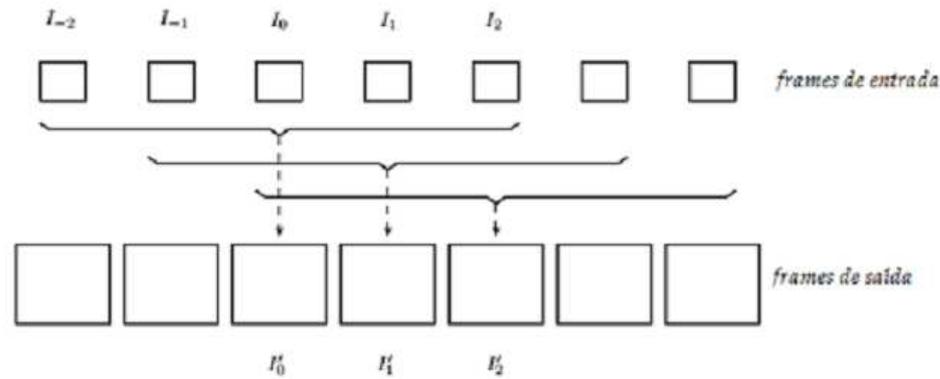
É importante salientar que embora muitos trabalhos da literatura considerem valores já determinados quanto aos deslocamentos subpixel entre as imagens utilizadas no processo de reconstrução por alta resolução, vale mencionar a abordagem proposta nos trabalhos de [Keren, Peleg e Brada \(1988a\)](#) e [Peleg, Keren e Schweitzer \(1987\)](#) que fixaram as ideias iniciais dos métodos baseados em simulação e correção. Os algoritmos propostos nestes trabalhos consideram o registro de imagens transladadas e rotacionadas com uma precisão subpixel razoável. Posteriormente, estas ideias foram estendidas no trabalho de [Irani e Peleg \(1991\)](#) e, conforme observado por [Lim \(2003\)](#), muitos dos algoritmos para super-resolução também são baseados nesta metodologia. A ideia fundamental, neste caso, é simular um conjunto de imagens de menor resolução a partir de uma estimativa inicial para a imagem de alta resolução desejada e, posteriormente, usar a diferença entre este conjunto e o de imagens observadas para atualizar a estimativa anterior. Verifica-se que este processo define um algoritmo iterativo que minimiza uma função de erro pré-definida.

Muitos trabalhos atuais também passaram a estudar e aprimorar técnicas variadas para super-resolução em frames de vídeos. Os métodos se baseiam em reconstruir com melhor resolução cada frame, através de várias versões de baixa resolução. Abordagens alternativas também são encontradas, como os algoritmos simultâneos de super-resolução que estimam a sequência inteira do vídeo, ou seja, todos os frames de alta resolução são estimados, em um único processo ([ZIBETTI; MAYER, 2005](#)).

[Xiang, Jie e Du \(2007\)](#) destacam as limitações ao se utilizar vídeos com compressão para aplicação da maioria das técnicas de super-resolução, dado que as abordagens no domínio espacial não costumam apresentar bons resultados quando aplicadas a vídeos compactados, em especial, para os que possuem graves erros de quantização. Outro ponto a ser considerado se refere ao fato de a compressão descartar dados que podem ser valiosos no processo da estimativa da imagem de alta resolução. Contudo, tentando contornar esse problema, novas técnicas foram criadas para aplicação de super-resolução em vídeos com compressão ([SEGALL et al., 2004](#)).

Conforme mostrado na Figura 4, um dos frames de entrada, por exemplo, I_0 é considerado como frame de referência em relação aos outros frames da janela para a realização da super-resolução obtendo o frame de saída I'_0 . Este então é adicionado à

Figura 4 – Representação da janela deslizante para Super-Resolução em vídeos



Fonte: Produzido pelos autores

sequência de saída e o procedimento é repetido, tendo o próximo quadro de entrada I_1 como referência para a continuação do processo.

Tian e Ma (2011a) consideram que os maiores desafios na super-resolução de vídeos é a escolha da técnica ideal para extrair informações dos frames de baixa resolução e a escolha de uma técnica de estimação de movimento confiável para o processo.

O uso da janela deslizante para super-resolução de vídeos tem mostrado bons resultados (NARAYANAN et al., 2007; NG et al., 2007). Ng et al. (2007) utilizou essa abordagem juntamente com a técnica de *Total Variation* (TV) para a reconstrução de vídeos e obteve resultados eficientes que amenizaram o mal condicionamento dos frames, contudo, deixa claro a necessidade de testar adaptações quanto ao tamanho da janela e o número de frames a ser considerado para a geração da estimativa de alta resolução para que se possa obter melhores resultados.

Muitos outros algoritmos propostos para super-resolução foram propostos nos últimos anos (BABU; MURTHY, 2011; PHAM; VLIET; SCHUTTE, 2006; CHUNG-HUA, 2013; BELEKOS; GALATSANOS; KATSAGGELOS, 2010; XIONG; SUN; WU, 2010; ZOMET; RAV-ACHA; PELEG, 2001; MOALLEM; ISFAHANI; HADDADNIA, 2013; VILLENA et al., 2013). Algumas abordagens podem ser encontradas livremente na internet. Neste trabalho foi utilizado para comparação dos resultados os algoritmos propostos por Farsiu et al.³ (FARSIU et al., 2004b; FARSIU et al., 2004a; FARSIU; ELAD; MILANFAR, 2006a). Os algoritmos implementados por Farsiu et al. são baseados em abordagens globais no domínio da frequência. O software foi desenvolvido para MATLAB⁴.

De fato, algoritmos de super-resolução ainda não são capazes de tratar o problema

³ <http://users.soe.ucsc.edu/~milanfar/software/superresolution.html>. Data de acesso: 19/10/2015.

⁴ <http://www.mathworks.com/products/matlab/>. Data de acesso: 20/10/2015.

de forma adequada, o que torna a reconstrução por super-resolução, seja para imagens estáticas ou para imagens dinâmicas, um problema ainda em aberto, mesmo em aplicações particulares (PATANAVIJIT, 2009), sendo objeto de pesquisas atuais (LIU et al., 2016; THAPA et al., 2015), inclusive utilizando novas abordagens que buscam extrair melhores resultados considerando a abordagem com projeções sobre conjuntos convexos (WANG et al., 2015; GE et al., 2015).

2 Projeção sobre Conjuntos Convexos

2.1 Histórico

A Projeção sobre conjuntos Convexos (POCS) é uma ferramenta tradicional, baseado na teoria dos Conjuntos e de projeções em espaços vetoriais, sendo utilizada, em sua grande maioria, nas aplicações em que se deseja modelar, recuperar ou determinar uma quantidade desconhecida, através de informações em forma de restrições *a priori* (STARK; YANG; YANG, 1998).

Os primeiros trabalhos relativos a técnica, remontam há meados da década de 60. Breg (1965) foi pioneiro ao abordar o método de projeção considerado clássico, contudo, logo em seguida, houve a contribuição de Gubin, Polyak e Raik (1967), que introduziu a formulação do algoritmo POCS iterativo, cuja base teórica foi essencial para o aperfeiçoamento da abordagem, que passou a possuir grande popularidade, principalmente na área de processamento de imagens e sinais, devido a diversos trabalhos posteriores, com destaque para Youla (1978), Youla e Webb (1982) e Sezan e Stark (1982), que aplicaram e aprimoraram a metodologia de forma pioneira para a utilização na reconstrução e restauração de imagens médicas.

No contexto de reconstrução de imagens de alta resolução a partir de suas versões de baixa resolução, o primeiro trabalho a utilizar POCS foi o de Oskoui e Stark (1989), a partir de contribuições anteriores realizadas por Oskoui-Fard e Stark (1988). Contudo, a metodologia e abordagem utilizada não considerava o ruído observado das imagens utilizadas, deficiência na qual foi suprida, pelo trabalho posterior de Tekalp, Ozkan e Sezan (1992). Desde então, o algoritmo POCS vem sendo extensivamente aplicado em diferentes áreas como, por exemplo, redes neurais, teoria de comunicações, óptica e processamento de imagens e sinais, sendo que se destacam principalmente as aplicações voltadas para reconstrução de imagens tomográficas e no processamento de imagens médicas.

2.2 Teorema fundamental de POCS

O objetivo deste tópico é apresentar um dos resultados mais importante da teoria de projeções em conjuntos convexos: o teorema fundamental de POCS. Para isso, apresentamos algumas definições de forma a fornecer as ferramentas e conceitos matemáticos necessários para o enunciado do teorema. As provas destes resultados não serão apresentadas uma vez que estão fora do escopo deste texto. Contudo, estas podem ser encontradas na literatura citada. Fundamentalmente, a teoria de projeções em Conjuntos Convexos é bem

estabelecida e formalizada sobre uma classe especial de espaços vetoriais conhecidos como Espaços de Hilbert.

Definição 1: (Espaço de Hilbert) Um espaço de Hilbert Ξ é um espaço vetorial com produto interno que é completo em relação à norma induzida deste produto interno.

Lembramos que uma sequência $\{\mathbf{f}_n\}$ em um espaço vetorial é de Cauchy se

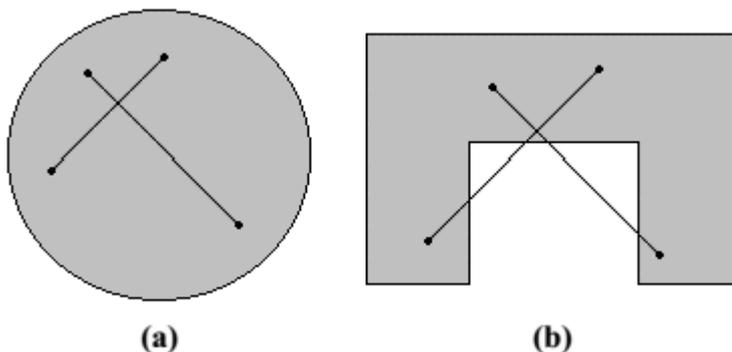
$$\lim_{m,n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{f}_m - \mathbf{f}_n\| = 0 \quad (2.1)$$

e que um espaço vetorial normado é *completo* quando toda sequência de Cauchy neste espaço for convergente. Dessa forma, um espaço vetorial com produto interno é de Hilbert *se e só se* toda sequência de Cauchy converge com respeito à norma induzida pelo produto interno. Sobre um espaço de Hilbert, outros dois pontos de extrema importância para os nossos propósitos são os conceitos de convexidade e fechamento. A definição 2 estabelece o conceito de um conjunto convexo e a definição 3 o de conjunto fechado.

Definição 2: Um conjunto $C \subset \Xi$, onde Ξ é um espaço do Hilbert, é convexo se e apenas se para quaisquer $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in C$ arbitrários, o vetor $\mathbf{f} = \mu \cdot \mathbf{f}_1 + (1 - \mu) \cdot \mathbf{f}_2$, também está em C para $0 \leq \mu \leq 1$, ou seja $\mathbf{f} \in C$.

A definição 2 diz que um conjunto é convexo se e apenas se o segmento de reta unindo dois pontos arbitrários de C está totalmente contido em C . A Figura 5 ilustra este conceito para dois conjuntos contidos no \mathfrak{R}^2 (o espaço euclidiano é de Hilbert) sendo que um é convexo e outro é não convexo.

Figura 5 – Ilustração do conceito de convexidade para conjuntos no plano: (a) convexo; (b) não convexo.



Fonte: Produzido pelos autores

Definição 3: Um conjunto $C \subset \Xi$, onde Ξ é um espaço de Hilbert, é fechado se e apenas se toda sequência convergente $\{\mathbf{f}_n\}$ contida em C , ou seja, $\mathbf{f}_n \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, converge para um vetor em C . Isto é $\mathbf{f}_n \rightarrow \mathbf{f} \in C$.

Um conjunto convexo que é fechado é chamado de *conjunto convexo fechado*. Um conceito fundamental que é associado a um conjunto convexo fechado em um espaço de Hilbert é o *operador de projeção*. Este é caracterizado pelo **Teorema 1**.

Teorema 1: Seja $C \subset \Xi$ um conjunto convexo fechado, onde Ξ é um espaço de Hilbert. Então para cada $\mathbf{f} \in \Xi$, existe um único $\underline{\mathbf{f}} \in C$ que é o ponto mais próximo de \mathbf{f} em C . Ou seja,

$$\|\mathbf{f} - \underline{\mathbf{f}}\| = \min_{\mathbf{g} \in C} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| \quad (2.2)$$

Omitimos a demonstração deste resultado, contudo esta pode ser encontrada em [Stark, Yang e Yang \(1998\)](#). Este teorema revela uma importante propriedade que é associada a conjuntos convexos e fechados em um espaço de Hilbert. Ele define uma regra que associa para cada $\mathbf{f} \in \Xi$ o seu vizinho mais próximo (e único) em C , que é chamado de projeção de \mathbf{f} sobre C . Esta regra é completamente determinada pelo conjunto C e é chamada de operador de projeção (ou projetor) sobre C , sendo denotado por \mathbf{P}_c . Portanto, dado $\mathbf{f} \in \Xi$, sua projeção $\mathbf{P}_c \cdot \mathbf{f}$ sobre C é definida pelo \mathbf{g} satisfazendo

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{P}_c \cdot \mathbf{f}\| = \min_{\mathbf{g} \in C} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| \quad (2.3)$$

Por sua vez, a definição 4 apresenta uma extensão da definição de projeção.

Definição 4: (*Projetor Relaxado*) Para cada constante $\eta \in (0, 2)$, o operador de projeção relaxado sobre $C \subset \Xi$ é definido por

$$\mathbf{T}_c = \mathbf{I} + \eta \cdot (\mathbf{P}_c - \mathbf{I}) \quad (2.4)$$

onde \mathbf{I} é o operador identidade em Ξ .

Dessa forma, para cada $\mathbf{f} \in \Xi$, o operador relaxado \mathbf{T}_c produz

$$\mathbf{T}_c \cdot \mathbf{f} = \mathbf{f} + \eta \cdot (\mathbf{P}_c \cdot \mathbf{f} - \mathbf{f}) = (1 - \eta) \cdot \mathbf{f} + \eta \cdot \mathbf{P}_c \cdot \mathbf{f} \quad (2.5)$$

Claramente, quando $\eta = 1$, o operador relaxado \mathbf{T}_c se resume ao operador \mathbf{P}_c . Em contraste ao operador relaxado, o operador \mathbf{P}_c frequentemente é chamado de operador *puro* e a sua operação de projeção *pura*.

Uma última definição se faz necessária de forma a caracterizar o teorema fundamental de POCS. É o conceito de convergência fraca.

Definição 5: (Convergência Fraca) Em um espaço de Hilbert Ξ , uma sequência $\{\mathbf{f}_n\}$ converge fracamente para $\mathbf{f} \in \Xi$ se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{f}_n, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \quad (2.6)$$

para todo $\mathbf{g} \in \Xi$.

Com base nas definições apresentadas acima e também com a ajuda do Teorema 1, podemos considerar M conjuntos convexos e fechados denotados por C_1, C_2, \dots, C_M em um espaço de Hilbert Ξ e $C = \bigcap_{k=1}^M C_k$

Para cada um dos conjuntos $C_k, k \in I = \{1, \dots, M\}$, onde I é uma família de índices, existe um operador de projeção pura \mathbf{P}_{C_k} sobre C_k , e seu correspondente operador relaxado \mathbf{T}_{C_k} , para $\eta_k \in (0, 2)$. Ainda considere a composição de projetores dada por

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{C_M} \cdot \mathbf{T}_{C_{M-1}} \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_{C_1} \quad (2.7)$$

Assim, pode-se enunciar o seguinte resultado:

Teorema 2: (*Teorema fundamental do POCS*) assumamos que $C \neq \emptyset$. Então, para cada $\mathbf{f} \in \Xi$ e para cada $\eta_k \in (0, 2), k = 1, \dots, M$ a sequência $\mathbf{T}^{(n)} \cdot \mathbf{f}, n \in \mathbb{N}$, converge fracamente para um ponto de C .

A importância do Teorema 2 é que ele define um algoritmo numérico sistemático para achar um ponto na interseção não vazia de vários conjuntos convexos fechados.

Este teorema foi primeiramente demonstrado por [Gubin, Polyak e Raik \(1967\)](#) e posteriormente, [Youla e Webb \(1982\)](#) sugeriram uma prova alternativa. Omitimos a demonstração do teorema, contudo esta pode ser encontrada nas referências citadas.

Dessa forma, podemos afirmar que, para um ponto inicial arbitrário $\mathbf{f}^{(0)}$, contido em um espaço de Hilbert Ξ , e M conjuntos convexos e fechados como descrito acima, sendo que $C \neq \emptyset$, a sequência $\{\mathbf{f}^{(n)}\}, n \in \mathbb{N}$, gerada pela relação recursiva

$$\mathbf{f}^{(n+1)} = \mathbf{T}_{C_M} \cdot \mathbf{T}_{C_{M-1}} \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_{C_1} \cdot \mathbf{f}^{(n)} \quad (2.8)$$

onde $\mathbf{T}_{C_k}, k = 1, \dots, M$, é definido por $\mathbf{T}_{C_k} = \mathbf{I} - \eta_{n,k} \cdot (\mathbf{P}_{C_k} - \mathbf{I})$, para $\eta_{n,k} \in (0, 2)$, converge fracamente para um ponto de C .

No caso geral, o parâmetro de relaxação $\eta_{n,k}$ pode depender especificamente do projetor \mathbf{T}_{C_k} e também do passo da iteração n .

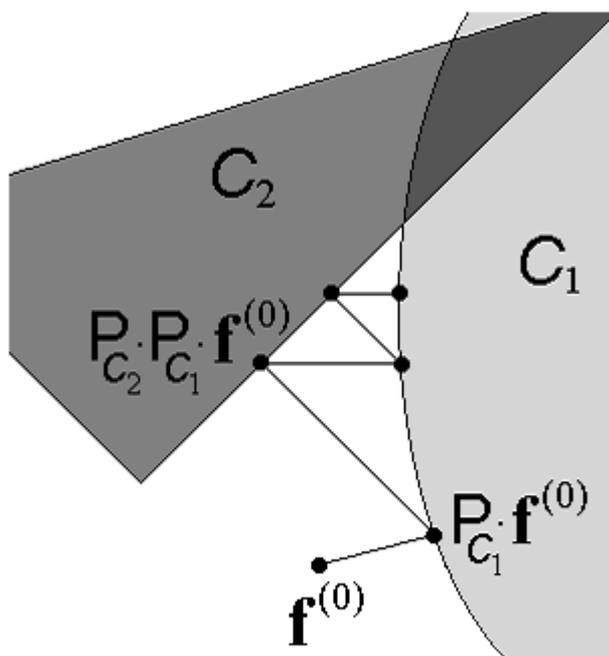
Um caso particular para o Teorema 2 é quando $\eta_{n,k} = 1$ para todos os operadores \mathbf{T}_{C_k} e para todas as iterações. Nesta hipótese, a equação 2.8 se resume ao algoritmo POCS

cíclico (COMBETTES, 1993) (MARKS; ROBERT, 1996) expresso por:

$$\mathbf{f}^{(n+1)} = P_{C_M} \cdot P_{C_{M-1}} \cdots P_{C_1} \cdot \mathbf{f}^{(n)} \quad (2.9)$$

A Figura 6 ilustra o comportamento da Eq. 2.9 para os caso de dois conjuntos convexos fechados.

Figura 6 – Ilustração do algoritmo POCS para dois conjuntos. Verifica-se que para um ponto inicial arbitrário, a sequência gerada pela relação recursiva apresentada na Eq.2.9 converge para a intersecção $C_1 \cap C_2$

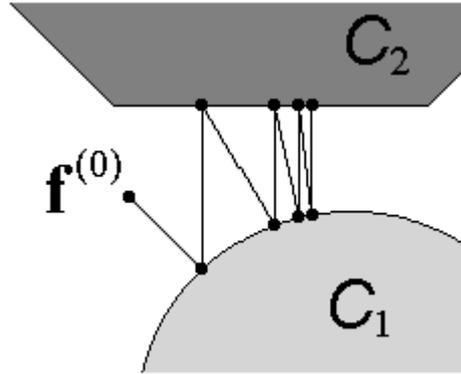


Fonte: Produzido pelos autores

Algumas considerações práticas podem ser mencionadas: (i) efeito da escolha do ponto inicial sobre o ponto de convergência; (ii) existência de conjuntos de restrições que não se interceptam devido a imprecisões na informação *a priori* durante a definição dos conjuntos Sezan (SEZAN, 1992) (iii) escolha dos valores dos parâmetros de relaxação. Achar estratégias ótimas para a escolha dos parâmetros de relaxação é em geral um problema difícil de se resolver (SEZAN, 1992) (STARK; YANG; YANG, 1998). Frequentemente, são extremamente dependentes do contexto de aplicação do algoritmo. Na maioria das aplicações onde existem mais de duas restrições, são usados os operadores de projeções puras, ou seja, com os parâmetros de relaxação unitários. Para os casos onde se prefere o uso de relaxação, frequentemente os parâmetros são determinados heurísticamente (SEZAN, 1992) (STARK; SEZAN, 1994). Um problema mais sério é quando os conjuntos de restrições não se interceptam, ou seja, $C = \emptyset$. A Figura 7 ilustra um exemplo típico

para dois conjuntos. Neste caso, o algoritmo não converge e a solução fica oscilando entre os conjuntos de restrições.

Figura 7 – Ilustração do comportamento do algoritmo POCS sequencial para o caso de dois conjuntos que não se intersectam.



Fonte: Produzido pelos autores

A teoria de projeções pode ser generalizada para incorporar casos onde a intersecção dos conjuntos é vazia (STARK; YANG; YANG, 1998). Nesta circunstância, é conveniente usar o algoritmo de projeções simultâneas (ou também chamado de algoritmo de projeções paralelas) definido por

$$\mathbf{f}^{n+1} = \sum_k w_k \cdot P_{C_k} \cdot \mathbf{f}^{(n)} \quad (2.10)$$

sendo que os w_k são constantes positivas, onde $\sum_k w_k = 1$. Esta iteração convergirá para um ponto que satisfaz todas as restrições no sentido de mínimos quadrados ponderado.

Verifica-se que a Eq. 2.10 minimiza a expressão

$$\hat{\mathbf{f}} = \sum_k w_k \cdot d^2(\hat{\mathbf{f}}, C_k) \quad (2.11)$$

onde $d(\hat{\mathbf{f}}, C_k)$ é a distância de $\hat{\mathbf{f}}$ (o ponto de convergência) a C_k .

Finalmente, quando o conjunto $C = \emptyset$ não é unitário, a solução para a qual o algoritmo POCS converge depende fortemente do ponto inicial escolhido. Frequentemente, esta é uma crítica ao método de projeções (COMBETTES, 1993). Contudo, dentro da filosofia de POCS, qualquer ponto que pertença a C é uma solução factível para o problema. Na teoria de projeções, o objetivo é produzir uma solução (que pode não ser única) que é consistente com toda a informação disponível, isto é, consistente com os dados e com a informação *a priori* sobre o problema (COMBETTES, 1992). Neste sentido, a meta não é produzir a melhor solução mas uma que satisfaça toda a informação disponível

(COMBETTES, 1993). A ênfase é colocada na *factibilidade* da solução e não na sua *otimalidade*. De fato, os métodos tradicionais em processamento de imagens buscam uma solução que é ótima em relação a algum critério objetivo (COMBETTES, 1993), como por exemplo, minimizar o erro médio quadrático ou, ainda, critérios de máxima entropia, máxima verossimilhança ou máximo *a posteriori*.

Frequentemente, uma das questões fundamentais com as formulações estatísticas ótimas é a tratabilidade matemática e computacional, as quais, muitas vezes, requerem simplificações drásticas, tornando difícil (se não impossível) a incorporação de toda informação *a priori* disponível (COMBETTES, 1992).

Uma vez que a informação *a priori* pode não ser incorporada de forma adequada ao problema, muitas vezes, seguindo estes critérios, as soluções ótimas encontradas violam restrições conhecidas (como por exemplo, valores de intensidades negativos). Mais ainda, devido a limitações práticas, frequentemente as soluções encontradas são sub-ótimas. Isto pode acontecer, por exemplo, quando se precisa estimar parâmetros e as únicas informações disponíveis para isso são os dados observados (HOMEM, 2003).

Contudo, estas considerações não implicam que não se deva levar em consideração critérios estatísticos. Pelo contrário, embora o algoritmo POCS não requer um modelo probabilístico para os dados, pode-se perfeitamente incorporar estes critérios ao problema (HOMEM, 2003).

No problema específico de restauração de imagens, o algoritmo deve buscar por uma imagem que é consistente com um número definido de restrições *a priori*, descritas na forma de conjuntos convexos fechados, que por sua vez, representam o conhecimento adicional sobre o problema. Cada membro da interseção dos conjuntos é considerado uma solução factível para o problema de restauração e o processo de regularização pode ser visto como o procedimento de forçar o resultado a satisfazer todas as restrições definidas *a priori*.

3 Metodologia

Neste capítulo serão apresentadas as metodologias utilizadas para a geração dos resultados obtidos. A abordagem que propomos tem como base a teoria de Projeções sobre Conjuntos Convexos (POCS), mais especificadamente, utilizamos o algoritmo proposto por [Tekalp, Ozkan e Sezan \(1992\)](#), na qual será descrita a seguir somente as definições que são de fundamental importância para a compreensão dos resultados obtidos e descritos no capítulo 4, contudo, maiores detalhes da abordagem e da metodologia original podem ser encontrados nas referências citadas. Os principais pontos do teorema fundamental de POCS já foram abordados no capítulo 2.

3.1 Deslocamentos subpixel entre as imagens

Um assunto de extrema importância para os algoritmos de Super-Resolução diz respeito ao deslocamento subpixel existente entre as imagens. Considerando os trabalhos encontrados na literatura ([TIAN; MA, 2011b](#)), notamos que a abordagem muitas vezes é negligenciada por não considerarem um algoritmo ou fase responsável por esta etapa do problema, utilizando-se de valores definidos *a priori* para os deslocamentos relativos entre as imagens degradadas de baixa resolução ([LIM, 2003](#)). Contudo, neste trabalho os deslocamentos são utilizados para a geração dos valores da PSF das imagens e, portanto, é necessária uma abordagem para estimar o movimento a nível subpixel e que se mostre útil para a necessidade do problema discutido neste trabalho ([KEREN; PELEG; BRADA, 1988a](#); [IRANI; PELEG, 1991](#)). O algoritmo iterativo escolhido (Irani-Peleg) somente considera as imagens de baixa resolução degradadas e com deslocamentos relativos entre elas seguindo um movimento de translação global. A abordagem supre as necessidades considerando os conjuntos de imagens que foram utilizadas para os experimentos. Sendo assim, considere dois sinais contínuos $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que representa uma imagem de referência e uma versão ligeiramente deslocada da mesma, respectivamente. Sendo assim, precisamos encontrar x_0 e y_0 que minimizam uma função de similaridade dada por

$$s(x_0, y_0) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} [f(x, y) - g(x - x_0, y - y_0)]^2 \quad (3.1)$$

onde X e Y são conjuntos finitos de pontos. Através da suposição de que $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são funções analíticas e, expandindo $g(x, y)$ para o primeiro termo de sua Série de Taylor, é fácil mostrar que x_0^* e y_0^* que minimizam a equação 3.1 é dado pelas equações 3.2 e 3.3,

respectivamente,

$$x_0^* = \frac{\sum_x \sum_y [(f - g)(x, y) - y_0^* g_y(x, y)] g_x(x, y)}{\sum_x \sum_y g^2 x(x, y)} \quad (3.2)$$

$$y_0^* = \frac{\sum_x \sum_y [(f - g)(x, y) - x_0^* g_x(x, y)] g_y(x, y)}{\sum_x \sum_y g^2 y(x, y)} \quad (3.3)$$

sendo que $g_x(x, y)$ e $g_y(x, y)$ representam a primeira derivada de $g(x, y)$ em relação a x e y , respectivamente.

Dessa forma, é possível obter os deslocamentos em ambas as direções, vertical e horizontal, para serem usados no algoritmo POCS proposto neste trabalho.

3.2 Algoritmo POCS de referência

Como já foi definido no primeiro capítulo, a ideia principal da super-resolução é que dado um conjunto de imagens de baixa resolução de uma determinada cena e que possuem deslocamentos subpixel entre elas, precisamos combiná-las e utilizá-las de forma com que possamos obter uma imagem de alta resolução dessa mesma cena. [Tekalp, Ozkan e Sezan \(1992\)](#) estendeu o problema já descrito inicialmente por [Oskoui-Fard e Stark \(1988\)](#), considerando a presença do ruído aditivo existentes nas imagens de baixa resolução, como também considerando a utilização de um algoritmo de estimação de movimento para determinar os deslocamentos existentes entre a sequência de imagens de baixa, que também podemos chamar de frames. Muitos algoritmos encontrados na literatura de super-resolução de imagens consideram na modelagem do problema o conhecimento destes movimentos *a priori*, contudo, no caso do algoritmo utilizado por [Tekalp, Ozkan e Sezan \(1992\)](#) e também neste trabalho, a estimação de movimento por um algoritmo se faz necessária, para um melhor desempenho nos resultados.

Para explicarmos a modelagem matemática do processo ([STARK; YANG; YANG, 1998](#)), consideramos que temos disponíveis uma quantidade J de frames de baixa resolução com dimensões de $M \times M$ pixels, tendo como objetivo reconstruir baseada nelas uma imagem de alta resolução com dimensões de $N \times N$ pixels, considerando que $M < N$, ou seja, a imagem HR obtida terá dimensões maiores do que as imagens LR consideradas. Os frames de baixa resolução serão denotados por $d_j(m, n)$, $m, n = 0, 1, \dots, M - 1$ e $j = 1, 2, \dots, J$. A imagem a ser estimada e, portanto, ainda desconhecida, de alta resolução será denotada por $f(k, l)$, $k, l = 0, \dots, N - 1$. Temos, portanto, N^2 valores desconhecidos a serem estimados (sendo N^2 valores de escala de cinza e N^2 localizações) e JM^2 equações a serem estimadas. Desconsiderando inicialmente a presença de ruído, cada frame de baixa resolução pode ser

obtido em relação a uma imagem de alta resolução a partir da equação 3.4,

$$d_j(m, n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f(k, l) h_j(m, n; k, l) \quad (3.4)$$

sendo $j = 1, \dots, J$.

Especificamos que $h_j(m, n; k, l)$ é a função de espalhamento pontual (PSF) variante no espaço. A partir da equação 3.4, podemos notar que $JM^2 = N^2$, sendo assim é possível determinar exatamente os N^2 pixels com nível de cinza da imagem HR $f(k, l)$. Incluindo o ruído aditivo na formulação do frame de baixa resolução, a equação 3.4, pode ser estendida para a equação 3.5.

$$d_j(m, n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f(k, l) h_j(m, n; k, l) + v_j(m, n) \quad (3.5)$$

O índice j existente em h_j e v_j se referem ao número do frame a ser considerado, estabelecendo assim que os valores da PSF e do ruído podem ser diferentes em cada frame.

Algumas considerações em relação a PSF $h_j(m, n; k, l)$ são necessárias neste momento (STARK; YANG; YANG, 1998). Para o entendimento do mecanismo relacionado a ela, faremos a suposição de que possuímos a imagem de alta resolução $f(k, l)$, para explicarmos como uma imagem de baixa resolução é gerada segundo o modelo. Se considerarmos a equação 3.5, podemos notar que $d_j(m, n)$ é construída a partir de uma sobreposição ponderada dos pixels HR, $f(k, l)$, $k, l = 0, 1, \dots, N - 1$. Podemos considerar que os pixels de alta resolução são representados por quadrados de lado Δ e que o pixel LR, portanto, possui área $L^2 \Delta^2$. Para manter o nível médio de brilho em ambas as imagens (HR e LR), a energia acumulada pelo pixel LR deve ser normalizada por $L^2 \Delta^2$, ou seja, pela área. É importante notar que dos N^2 pixels da imagem de alta resolução, alguns ficarão quase fora de uma possível contribuição no pixel de baixa, outros ficarão em uma região de fronteira e também haverá casos em que o pixel HR estará completamente dentro da região do pixel LR. Pixels que estiverem fora da área do pixel LR não irão contribuir para a obtenção de $d_j(m, n)$. Em relação ao brilho do pixel LR, pixels HR que contribuem em sua totalidade em relação ao LR, também contribuirão em sua totalidade quanto ao brilho e de forma proporcional a sua área nos outros casos.

Podemos então calcular de forma equivalente, a função de espalhamento pontual (PSF) $h_j(m, n; k, l)$ da seguinte maneira:

$$h_j(m, n; k, l) = \frac{A_j(m, n; k, l)}{A_L} \quad (3.6)$$

onde $A_j(m, n; k, l)$ é a área de sobreposição entre o pixel LR com centro em (m, n) e o pixel HR com centro em (k, l) e A_L é a área do pixel LR.

Para que possamos determinar a área de sobreposição do pixel HR em relação ao pixel LR, é preciso que se conheça o deslocamento entre os frames utilizados em relação a um frame de referência. Quando esses deslocamentos não são conhecidos precisamos utilizar algoritmos de estimação de movimento para obtenção dos valores. Na abordagem que estamos descrevendo, foi usado o algoritmo de estimação de movimento de Fogel (STARK; YANG; YANG, 1998). Entretanto, para a obtenção dos deslocamentos entre as imagens utilizadas neste trabalho, destacamos que utilizamos o algoritmo de estimação de movimento desenvolvido por Irani e Peleg (IRANI; PELEG, 1991). Embora seja conhecido que os algoritmos de estimação de movimento podem interferir no resultado da super-resolução, não é objetivo do trabalho discutir comparações ou verificar as possíveis mudanças que podem ocasionar no resultado com a aplicação de outras abordagens, sendo um possível tema que apontamos para trabalhos futuros. Para maiores detalhes sobre o processo de estimação e do algoritmo escolhido, as referências suprem essas informações (STARK; YANG; YANG, 1998; TEKALP; OZKAN; SEZAN, 1992). Os valores determinados dos deslocamentos, além da utilização para a construção da PSF serão de grande importância para o processo POCS de reconstrução da imagem de alta resolução.

3.2.1 O processo de reconstrução utilizando POCS

Para detalharmos o processo de reconstrução pelo POCS, precisamos reconsiderar a equação 3.4, inserindo modificações,

$$0 = d_j(m, n) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f(k, l) h_j(m, n; k, l) \quad (3.7)$$

onde $d_j(m, n)$ são os frames LR conhecidos e consideramos que $h_j(m, n; k, l)$ também já foi calculada e tem seus valores conhecidos. Se não conhecemos $f(k, l)$ podemos tentar encontrá-la através das diferentes versões de $y(k, l)$, que serão estimadas em cada iteração do processo regularizador do POCS, considerando a equação 3.8.

$$\varepsilon'_j(m, n; y) \triangleq d_j(m, n) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} y(k, l) h_j(m, n; k, l) \quad (3.8)$$

Uma boa escolha referente a y é aquela em que o resultado da equação acima seja o menor possível, por outro lado, uma escolha ruim faria gerar um erro maior em relação a imagem desejada $f(k, l)$. A melhor escolha será aquela em que através de $y(k, l)$, possa obter $f(k, l)$ ou se aproximar ao máximo, o que faria com que ε'_j esteja o mais próximo possível de zero. Considerando a presença do ruído, ε'_j será representado por:

$$\varepsilon'_j(m, n; y) \triangleq \varepsilon'_j(m, n; y) + v_j(m, n) \quad (3.9)$$

Considerando o exposto até o momento, uma abordagem para resolver o problema, é forçar com que ε'_j em relação a y seja restringido, ou seja, os valores terão uma magnitude limitada. Considerando este raciocínio podemos então representar essa modelagem através de uma conjunto convexo dado por:

$$C_j(m, n) \triangleq y : |\varepsilon'_j(m, n; y)| \leq \eta \quad (3.10)$$

onde η é uma constante convenientemente escolhida, sendo sugerida a utilização de $\eta = 3\sigma$, onde σ é desvio padrão do ruído $v(m, n)$.

Tendo assim, a definição do principal conjunto de restrição da abordagem POCS na qual baseamos nosso trabalho, podemos então definir como calcular os projetores que serão utilizados para estimar a imagem de alta resolução que desejamos.

Para a modelagem matemática dos projetores, precisamos considerar três casos: (i) $\varepsilon'_j(m, n; y) > \eta$, (ii) $\varepsilon'_j(m, n; y) < -\eta$ e (iii) $-\eta \leq \varepsilon'_j(m, n; y) \leq \eta$. Omitimos os cálculos que deverão ser realizados para formular o projetor, contudo eles podem ser encontrados na referência (STARK; YANG; YANG, 1998). Sendo assim, o projetor que será utilizado para o caso (i), será:

$$y^*(k, l) = q(k, l) + \frac{\varepsilon'_j(m, n; y) - \eta}{\|h_j\|_F^2} h_j(m, n; k, l) \quad (3.11)$$

Para o caso (ii), o projetor será de forma similar:

$$y^*(k, l) = q(k, l) + \frac{\varepsilon'_j(m, n; y) + \eta}{\|h_j\|_F^2} h_j(m, n; k, l) \quad (3.12)$$

Já para o caso (iii) como os valores estão dentro da magnitude considerada, simplesmente não faremos modificações no valor do pixel analisado, sendo assim, $y^*(k, l) = q(k, l)$. É importante esclarecer também que $\|h_j\|_F^2$ é a norma de Frobenius da PSF.

Salientamos que $C_j(m, n)$ é um conjunto de restrição pontual, ou seja, a restrição é imposta em todos os frames utilizados no processo, assim como também em cada um dos seus M^2 pixels. Por isso a solução a ser encontrada, é imposta por uma restrição global que representa a intersecção dos JM^2 conjuntos existentes, ou seja, a solução precisa atender as restrições de todos os conjuntos. Podemos assim denotar por \tilde{P} ou de forma mais generalizada por \tilde{T} (representando a versão relaxada do projetor), como a composição de todos as JM^2 projeções pontuais.

A estimativa dada pela reconstrução de alta resolução usada por Tekalp, Ozkan e Sezan (1992) é dada por

$$f_{n+1} = P_{nn} \tilde{T} f_n \quad (3.13)$$

onde P_{nn} é a restrição de não negatividade do conjunto de restrição C_{nn} correspondente (STARK; YANG; YANG, 1998).

3.3 Descrição da abordagem híbrida utilizando POCS

De acordo com o exposto quanto ao algoritmo de projeção sobre conjuntos convexos desenvolvido por Tekalp, Ozkan e Sezan (1992), cada imagem de baixa resolução a ser utilizada no processo de super-resolução é considerada no contexto iterativo do POCS, um conjunto de restrições convexas pontuais que forçam o resultado desejado da estimativa de alta resolução a não se distanciar de uma intersecção entre essas imagens. Salientamos que uma das grandes vantagens do POCS é a possibilidade de inclusão de mais conjuntos de restrições que permitam acrescentar informações ao processo para obter uma estimativa mais próxima da desejada. Sendo assim, é proposto a inclusão de uma conjunto de restrição convexo considerando uma abordagem espectral, utilizando-se das propriedades e de operações no domínio de frequência da imagem a ser estimada em cada iteração.

Considerando que as imagens de baixa resolução possuem *aliasing* e que podem conter borramentos de diversas naturezas, além de outras degradações inerentes ao processo de captura e de decimação que estão estritamente relacionadas a situação descrita no capítulo 1 em relação ao mal condicionamento do problema da Super-Resolução, justifica-se para contornar o problema, a utilização de informações *a priori* através de técnicas de regularização a serem acrescentadas ao problema inverso para que seja possível obter um resultado mais adequado e próximo da imagem de alta resolução desejada. A regularização, portanto, pode ser considerada como qualquer procedimento que seja capaz de estabilizar a inversão da matriz mal condicionada existente no modelo de formação da imagem. Métodos de regularização muito utilizados em algoritmos de Super-Resolução são aqueles encontrados no arcabouço de técnicas de restauração de imagens (HOMEM, 2003).

A partir da metodologia proposta, o objetivo é aprimorar a abordagem POCS através de técnicas de restauração que podem ser modeladas dentro de um conjunto de restrição convexo. Considerando que o algoritmo POCS implementado já considera informações oriundas das imagens LR e da PSF que foi modelada através da sobreposição dos pixels, é preciso também ir condicionando a estimativa em cada interação de tal forma que regularize o mal condicionamento e recupere frequências que foram perdidas pelo processo de decimação das imagens utilizadas, preservando bordas e detalhes que são importantes para obter bons resultados. Desta forma, a abordagem espectral utiliza o algoritmo de Richardson-Lucy, contudo, modificado através da utilização conjunta com o filtro de Canny.

3.3.1 O algoritmo de Richardson e Lucy modificado

O algoritmo de Richardson-Lucy (RL), proposto por Richardson (1972) e Lucy (1974), é uma técnica amplamente utilizada na restauração de imagens, geralmente para recuperação parcial de frequências, sendo derivado da expressão de máxima verossimilhança em imagens onde o ruído aditivo possui uma distribuição de Poisson ou Gaussiana. O algoritmo RL para a solução iterativa de $f(x, y)$, que possui um ruído gaussiano, é dado por

$$\hat{f}_{n+1}(x, y) = \left\{ \left[\frac{g(x, y)}{\hat{f}(x, y) * h(x, y)} \right] * h(x, y) \right\} \cdot \hat{f}_n(x, y) \quad (3.14)$$

onde n é o índice referente a número da iteração, $g(x, y)$ é uma versão borrada e ruidosa da imagem observada e $h(x, y)$ é a função de espalhamento pontual (PSF).

Tendo em vista a definição para a técnica RL, destacamos que o Filtro de Canny (CANNY, 1986) tem como função a detecção de bordas na imagem, baseado na primeira derivada de uma função gaussiana. O filtro, portanto, pode ser dado pela seguinte equação:

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \quad (3.15)$$

O algoritmo RL, portanto, é utilizado para recuperação parcial de frequências espaciais, com o objetivo de amenizar os efeitos do modelo de decimação discutido que ocasiona a perda de frequências que podem estar relacionadas a detalhes da imagem, sendo de extrema importância para a obtenção de uma estimativa de alta resolução adequada. O método RL é bastante conhecido e aplicado em restauração de imagens pela capacidade de remoção do ruído dos pixels, sem degradar a resolução original, contudo, em seu processo iterativo, há uma tendência em enfatizar artefatos indesejados, principalmente em regiões uniformes, que pode comprometer a estimativa desejada. Considerando esse problema, inserimos em sua formulação uma modificação utilizando o filtro de Canny para detecção de bordas, tendo os valores normalizados. Através da normalização dos valores, o filtro de Canny passa a condicionar de forma proporcional e ponderada a utilização do algoritmo RL, através do parâmetro p (conforme equação 3.16). Essa condicionalidade se refere justamente às transições da imagem, de tal forma que em regiões onde bordas forem detectadas pelo filtro, o algoritmo RL irá atuar de forma mais efetiva, o que pode tornar as bordas mais definidas, ao mesmo tempo em que nas regiões uniformes, o filtro resultará em valores próximos a zero, ou seja, o algoritmo RL terá pouca efetividade, o que evitará o aparecimento indesejado dos artefatos citados, tornando assim a abordagem elegante e funcional, utilizando-se da qualidade e características de ambos os algoritmos.

$$f(x, y) = f_n(x, y) * p + g(x, y) * (1 - p) \quad (3.16)$$

Considerando a equação 3.16, $f(x, y)$ é a imagem a ser obtida pela abordagem RL-CANNY, através do filtro ponderador p (filtro de Canny normalizado) entre a imagem original e a imagem gerada pelo algoritmo de Richardson-Lucy. Essa abordagem RL-CANNY será considerada como um conjunto de restrição convexo a ser adicionado na formulação do POCS e, portanto, seu projetor pode ser representado pela equação 3.17,

$$O_n = \left[\left(\frac{g}{\hat{f}_{n-1} * h} \right) * h \right] \quad (3.17)$$

e o seu conjunto de restrição é formulado pela 3.18.

$$C_{rl}^m = \{ \hat{f}_n : O_n \cdot \hat{f}_{n-1} \} \quad (3.18)$$

As demonstrações sobre a convexidade do conjunto e a formulação do projetor foram omitidas mas podem ser encontradas na referência (STARK; YANG; YANG, 1998).

3.4 Comparação dos resultados

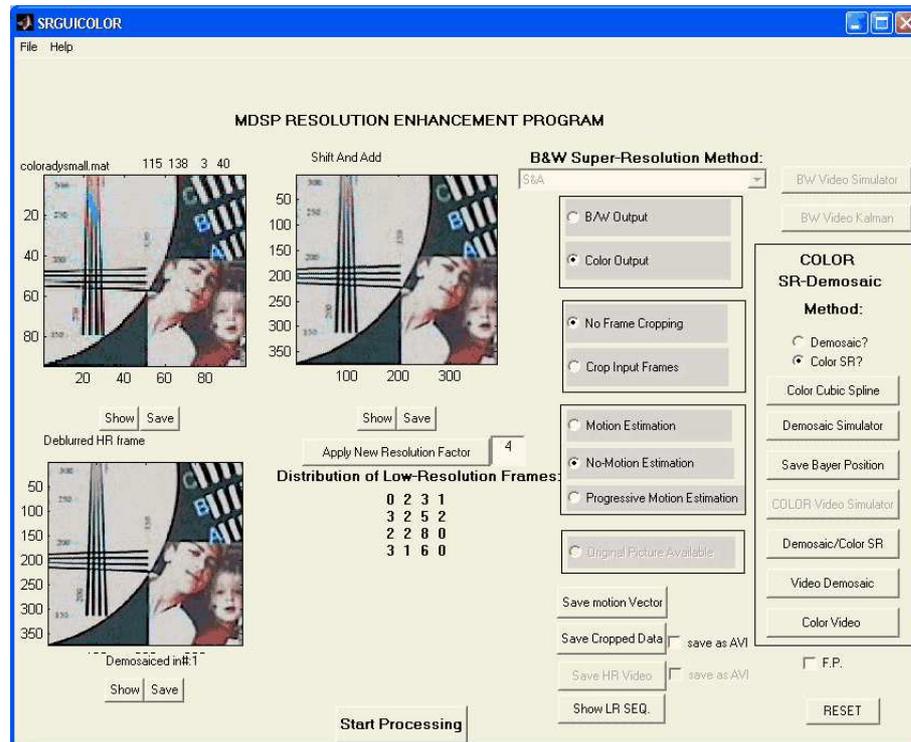
Considerando a metodologia proposta, escolhemos os trabalhos de Farsiu et al. (FARSIU et al., 2004a; FARSIU et al., 2004b) que foram desenvolvidos pelo laboratório de pesquisa em processamento de sinais da Universidade da Califórnia em Santa Cruz, para realizar a comparação dos resultados deste trabalho. Através da abordagem que desenvolveram e aprimoraram foi criado um software ¹ desenvolvido em MATLAB (FARSIU; ELAD; MILANFAR, 2006b; FARSIU; ELAD; MILANFAR, 2006a) com diversas ferramentas implementadas para aplicação dos algoritmos de Super-Resolução. Entre algumas das características da ferramenta, é interessante destacar que a estimação de movimento é feita automaticamente, existindo também a possibilidade do usuário especificar a região de interesse de uma imagem a ser processada. As imagens para serem processadas podem estar em escala de cinza ou coloridas (RGB), assim como também é permitido como entrada do processo, vídeos no formato avi. A figura 8, mostra a tela inicial do software na qual o usuário pode inserir o conjunto de imagens a serem processadas (ou vídeo) e realizar ajustes em diversas configurações, entre elas, a possibilidade de definição do algoritmo de super-resolução a ser escolhido, a opção de estimar ou não o movimento das imagens envolvidas no processo, assim como também escolher o fator de ampliação que será utilizado para gerar a imagem de alta resolução. O software também acompanha um manual para facilitar a utilização pelo usuário em configurações mais específicas dos parâmetros existentes².

Os algoritmos implementados e listados pelo software são: *S&E*, *Bilateral S&E*, *S&E with iterative deblurring*, *Bilateral S&E with iterative deblurring*, *Median S&E*,

¹ MDSP Resolution Enhancement Program

² <https://users.soe.ucsc.edu/~milanfar/software/SR-MANUAL-GUI.pdf>. Acesso em: 08/09/2016

Figura 8 – MDSP Resolution Enhancement Program desenvolvido por Farsiu et al.



Fonte: Produzido pelos autores

Median S&A with iterative deblurring, Iterative Norm 2, Iterative Norm 1, Norm 2 data with L1 Regularization, Robust(Median Gradient) with L2 regularization, Robust(Median Gradient) with L2 regularization, Robust(Median Gradient) with L1 regularization e Cubic Spline Interpolation.

Além dos artigos publicados que fornecem maiores explicações sobre as técnicas de super-resolução disponíveis para testes utilizando o software, as motivações para a escolha da técnica desenvolvida por Farsiu et al. para comparação, foram os resultados bastante promissores tendo em vista os conjuntos de imagens utilizados, como também a disponibilização gratuita destes conjuntos, permitindo uma discussão mais sólida para os resultados obtidos pelo algoritmo de super-resolução híbrida proposto neste trabalho. Embora não tenham utilizado nenhuma abordagem com projeção sobre conjuntos convexos, consideramos enriquecedora a possibilidade de avaliarmos o quanto a metodologia proposta por este trabalho se aproxima ou supera técnicas encontradas na literatura e que foram utilizadas nos trabalhos referenciados.

3.4.1 O algoritmo de Super-Resolução robusta

Considerando os resultados obtidos por Farsiu et al., entre as técnicas disponíveis e que deram origem ao software MDSP foi escolhida a abordagem denominada como

Super-Resolução Robusta (*Robust Super-Resolution*), baseado na teoria de estatísticas robustas (HUBER, 2011) para comparar com a abordagem híbrida proposta neste trabalho. Os parâmetros tais como o movimento relativo entre os frames (imagens) e a própria PSF, devem ser assumidos e/ou estimados a partir das imagens obtidas para a construção do modelo de Super-Resolução. A abordagem robusta é considerada devido a determinados pontos dos dados analisados fugirem das modelagens que geralmente são propostas na literatura, ou seja, muitas vezes, os dados não seguem as características distributivas do modelo assumido, sendo esses os chamados *outliers* de dados, que não são tratados quando abordagens não robustas são utilizadas. Sendo assim, Farsiu et al. (FARSIU et al., 2004a; FARSIU et al., 2004b) desenvolveram um *framework* através da combinação de um termo de fidelidade de dados e outro termo de regularização robusto para obtenção de um algoritmo de Super-Resolução que proporcione um melhor desempenho e também seja eficiente. Foi proposto então uma fidelidade de dados alternativa com base na norma L1, que segundo testes dos autores, resultaram em uma robustez satisfatória em relação a norma L2. Já quanto ao termo de regularização, foi proposto uma abordagem nova chamada *Bilateral-TV*, sendo uma generalização da abordagem já bastante conhecida na literatura de Super-Resolução chamada *Total Variation* (RUDIN; OSHER; FATEMI, 1992), na tentativa de preservar o conteúdo de borda comum às sequências de imagens utilizadas. Considerando esses dois termos combinados, formularam então a estimativa robusta considerando a função da equação 3.19 (função de custo):

$$J(\underline{X}) = \left[\sum_t \|D(t)H(t)F(t)\underline{X} - \underline{Y}(t)\|_1 + \lambda \sum_{l=-P}^P \sum_{m=0}^P \alpha^{|m|+|l|} \|\underline{X} - S_x^l S_y^m \underline{X}\|_1 \right]. \quad (3.19)$$

Sendo $l + m \geq 0$, o primeiro termo da soma, está relacionado com medições da imagem desejada \underline{X} através da abordagem de robustez descrita. S_x^l e S_y^m são os operadores correspondentes ao deslocamento da imagem representada por X com dimensões de l pixels na horizontal e m pixels na vertical, respectivamente. O escalar α é um valor de peso no qual $0 < \alpha < 1$, sendo utilizado para dar origem a um efeito de decaimento espacial ao somatório do termo de regularização.

Os autores destacam que para o caso considerado especial do movimento de translação e do operador de borrimento (ambos invariantes no espaço) as operações de movimento e borrimento comutam e devido a isto, um método eficiente de cinco estágios é sugerido (FARSIU et al., 2004a). A primeira fase busca estimar a imagem $\hat{\underline{Z}}$ de alta resolução borrada através das imagens de baixa resolução disponíveis, conforme definido pela equação 3.20.

$$\hat{\underline{Z}} = \underset{\underline{Z}}{\operatorname{argmin}} [\|DF(t)\underline{Z} - \underline{Y}(t)\|_1] \quad (3.20)$$

Em trabalhos anteriores, foi mostrado por Farsiu et al. (FARSIU et al., 2004a) que para um dado pixel de alta resolução a função de custo é minimizada pela realização de uma mediana de todos os cálculos realizados após o adequado preenchimento com zeros e a compensação de movimento das imagens. Essa operação foi nomeada como *Shift-And-Add* (S&A), que segundo os autores possuem semelhança com o algoritmo proposto por Zomet, Rav-Acha e Peleg (2001) baseado na mediana. O segundo estágio citado é descrito como uma fase de interpolação e também de atenuação de borramentos e artefatos da imagens, na qual é utilizado um método de minimização iterativo. Salienta-se que a etapa pode ser tanto de interpolação como deconvolução, pela possibilidade de não ter medidas associadas com alguns pixels na imagem $\widehat{\underline{Z}}$ estabelecida numa grade de alta resolução. A expressão demonstra o critério de minimização utilizado para a obtenção de $\widehat{\underline{X}}$ a partir de $\widehat{\underline{Z}}$:

$$\widehat{\underline{X}} = \underset{\underline{x}}{\operatorname{argmin}} \left[\left\| B \left(H \underline{X} - \widehat{\underline{Z}} \right) \right\|_1 \right] + \lambda \sum_{l=-P}^P \sum_{m=0}^P \alpha^{|m|+|l|} \left\| \underline{X} - S_x^l S_y^m \underline{X} \right\|_1 \quad (3.21)$$

Assim como na função de custo utilizada pelos autores, na equação 3.19 o primeiro termo da soma faz com que haja uma fidelidade robusta em relação a imagem alinhada $\widehat{\underline{Z}}$ e o segundo termo representa o termo de regularização robusta, considerada como diferencial do método. Destaca-se que a matriz B é uma matriz diagonal, na qual os valores são iguais à raiz quadrada do número de cálculos que contribuiram para se obter cada elemento de $\widehat{\underline{Z}}$, tratando-se de uma ponderação que penaliza os pixels que foram obtidos por um maior número de cálculos em relação aos pixels que tiveram pouco ou nenhum cálculo efetuado. Assim, pixels que tenham sido produzidos a partir de inúmeras medições tem um efeito mais forte na estimativa de alta resolução.

Considerando o exposto, os autores aprimoraram o *framework* de Super-Resolução Robusta, utilizando-se dos conceitos desenvolvidos através da fidelidade de dados e do algoritmo Bilateral TV, além da Norma L1 na qual basearam para modelar a obtenção da estimativa de alta resolução $\widehat{\underline{X}}$, obtendo uma minimização utilizando o gradiente descendente,

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{X}}_{n+1} = \widehat{\underline{X}}_n - \beta \left\{ \sum_{k=1}^N F_k^T H_k^T D_k^T \operatorname{sign}(D_k^T H_k^T F_k^T \widehat{\underline{X}}_n - \underline{Y}_k) + \right. \\ \left. \lambda \sum_{l=-P}^P \sum_{m=0}^P \alpha^{|m|+|l|} \left[I + S_y^{-m} S_x^{-l} \right] \operatorname{sign}(\widehat{\underline{X}}_n - S_x^l S_y^m \widehat{\underline{X}}_n) \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde β é um escalar que define o tamanho do passo (*step size*) na direção do gradiente. S_x^{-l} e S_y^{-m} são as matrizes transpostas de S_x^l e S_y^m , respectivamente, que possuem um efeito de deslocamento no sentido contrário de S_x^l e S_y^m . As matrizes F, H, D, S e suas versões transpostas podem ser interpretadas exatamente como os operadores de imagem, borramento, decimação e deslocamento. Os resultados obtidos por esta técnica e comparada

pelo método proposto neste trabalho são apresentados e discutidos no capítulo 4. Para um maior detalhamento do framework de Super-Resolução Robusta, as referências explicam todos os passos e análises realizadas para a obtenção do modelo ([FARSIU et al., 2004a](#); [FARSIU et al., 2004b](#)).

4 Resultados e Discussões

Esta seção apresenta os resultados obtidos pela aplicação da metodologia proposta utilizando uma abordagem híbrida para o problema de super-resolução de imagens, utilizando um método de regularização iterativo através da Projeção Sobre Conjuntos Convexos (POCS) e de técnicas no domínio espectral da imagem para a inclusão de um conjunto convexo baseado no algoritmo de Richardson e Lucy (RL), modificado pela inclusão do filtro de Canny.

4.1 Imagens utilizadas para comparação

Conforme já foi mencionado no capítulo 3, escolhemos os trabalhos de Farsiu et al. (FARSIU et al., 2004a; FARSIU et al., 2004b; FARSIU; ELAD; MILANFAR, 2006b; FARSIU; ELAD; MILANFAR, 2006a) que foram desenvolvidos pelo laboratório de pesquisa em processamento de sinais da Universidade da Califórnia em Santa Cruz, para realizarmos estudos comparativos entre a abordagem proposta neste trabalho e os estudos desenvolvidos pelo grupo de pesquisa citado. As imagens utilizadas estão disponibilizadas na internet pelos autores ¹, assim como também os vídeos no formato avi, tendo em vista que os autores também possuem trabalhos considerando métodos de super-resolução de vídeos.

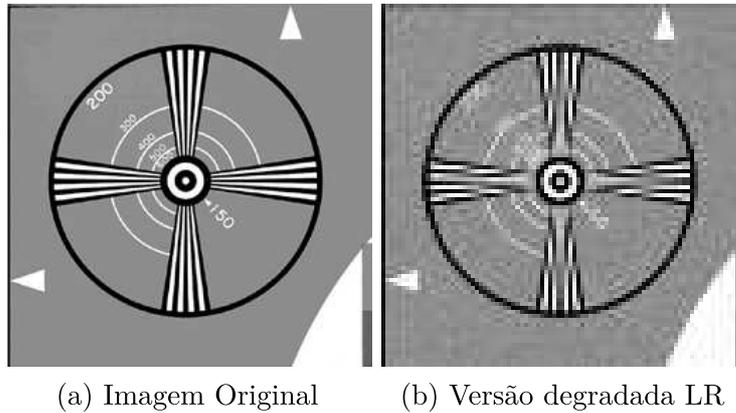
4.1.1 Conjunto de imagens EIA

O conjunto de imagens EIA é considerada pelos autores como uma experiência simulada, devido a natureza sintética das imagens. Foi criada uma sequência de quadros de baixa resolução (LR) utilizando a imagem original de alta resolução (HR). Para isso, primeiramente deslocaram a imagem HR por um pixel na direção vertical. Em seguida, tentando simular o efeito da função de espalhamento pontual (PSF) referente a câmera e ao processo de captura, a imagem deslocada passou pelo processo de convolução com um filtro passa-baixa gaussiano simétrico de tamanho 4x4 com desvio padrão igual a 1. Da imagem obtida foi realizada a decimação pelo fator 4 em cada direção (reduzindo as dimensões), criando então uma primeira imagem de baixa resolução pertencente ao conjunto. A mesma abordagem foi realizada com diferentes vetores de movimento (deslocamentos) na vertical e na horizontal produzindo assim 16 imagens LR a partir da imagem original. Eles acrescentam ainda o fato de adicionarem um ruído gaussiano as imagens LR resultantes para obter uma relação sinal-ruído (SNR) igual a 7dB. Apresentamos na Figura 9 a imagem original (a) e uma imagem de baixa resolução (b) que foi criada conforme a descrição. A

¹ <https://users.soe.ucsc.edu/~milanfar/software/sr-datasets.html> Acesso em: 14/06/2016

imagem original possui a dimensão de 360x360 e cada versão de baixa resolução que foi derivada desta a partir do método descrito possui dimensão 90x90 pixels.

Figura 9 – Conjunto de imagens EIA - (a) Imagem Original 360x360 e (b) versão LR degradada 90x90

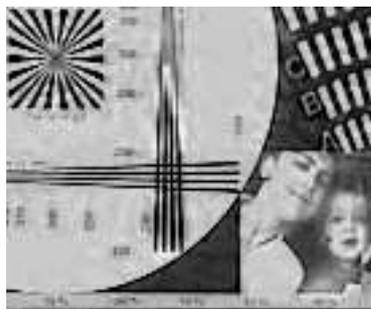


Fonte: Produzido pelos autores

4.1.2 Conjunto de imagens Surveillance (small)

O conjunto de imagens Surveillance (small) conforme foi nomeado pelos autores e proprietários das imagens possui dimensão de 115x138, totalizando 40 imagens de baixa-resolução que foram retiradas de um vídeo no formato avi. Não existem descrições sobre a câmera e as condições nas quais as imagens foram obtidas, contudo, também foram utilizadas para comparação com os trabalhos de Farsiu et al. sobre Super-Resolução Robusta. Quanto aos deslocamentos das imagens, seguem um modelo de deslocamento de translação global.

Figura 10 – Conjunto de imagens Surveillance (small) 115x118 - Versão LR utilizada



Fonte: Produzido pelos autores

4.2 Variações do algoritmo POCS proposto

Para discussão dos resultados utilizaremos três versões diferentes da abordagem POCS (Projeção Sobre Conjuntos Convexos). Conforme foi relatado na metodologia, os algoritmos POCS utilizados são baseados no trabalho de [Tekalp, Ozkan e Sezan \(1992\)](#), contudo eles possuem algumas modificações.

Na exposição dos resultados iremos nos referir ao POCS1, POCS2 e POCS3. O POCS1 foi implementado de forma muito semelhante e fiel ao proposto no artigo ao qual foi baseado, inclusive considerando a projeção sequencial e como conjuntos convexos somente as imagens de baixa resolução disponíveis. Já no POCS2, a proposta é semelhante ao POCS1, contudo, foi realizada uma modificação transformando o algoritmo numa abordagem POCS paralela. No final de cada processo iterativo, é realizada uma média da estimativa de cada imagem gerada considerando a projeção em cada conjunto representado pelas imagens de baixa resolução, sendo a base para a próxima iteração, até que as condições sejam satisfeitas ou alcance o número de iterações estabelecido para o processo. Finalmente, o POCS3, trata da abordagem principal proposta neste trabalho com o POCS sequencial, com a inclusão de um conjunto de restrição convexa com uma abordagem espectral para recuperar parcialmente frequências espaciais perdidas e diminuir o borramento do operador de média realizado na decimação das imagens de baixa resolução, implementando assim a Super-Resolução espacial e espectral discutida na metodologia.

POCS1 - Algoritmo proposto baseado em [Tekalp, Ozkan e Sezan \(1992\)](#) originalmente em sua forma sequencial.

POCS2 - Algoritmo proposto baseado em [Tekalp, Ozkan e Sezan \(1992\)](#) modificado para projeção simultânea/paralela nos conjuntos convexos (Equação 2.10 do capítulo 2).

POCS3 - Algoritmo proposto baseado em [Tekalp, Ozkan e Sezan \(1992\)](#) com o acréscimo de mais um conjunto de restrição convexo contendo a abordagem utilizando o algoritmo de Richardson-Lucy modificado pela contribuição ponderada do filtro de Canny.

4.3 Medidas e critérios para avaliação dos resultados

Para comparação entre as estimativas de alta resolução obtidas nos resultados, foi utilizado o Erro Médio Quadrático (MSE – *Mean Square Error*) para avaliação da evolução dos algoritmos POCS1, POCS2 e POCS3. Considerando as discussões referentes a comparações do POCS3 com os resultados obtidos por Farsiu et al. que utilizam fatores de ampliação para a criação da estimativa de alta resolução maiores do que as utilizadas pela abordagem proposta pelo trabalho, a discussão das comparações será feita somente levando em consideração a análise visual.

4.4 Considerações sobre critério de parada e a imagem inicial

Conforme foi definido no capítulo 3, o critério de parada das iterações do POCS será quando os valores da imagem de alta resolução a ser estimada y estiver dentro da magnitude estabelecida na equação 4.1 ou considerando um número definido de iterações.

$$C_j(m, n) \triangleq y : |\varepsilon' j(m, n; y)| \leq \eta \quad (4.1)$$

onde η é uma constante convenientemente escolhida, na qual foi sugerida a utilização de $\eta = 3\sigma$ (STARK; YANG; YANG, 1998), e σ é o desvio padrão do ruído $v(m, n)$.

Embora Tekalp, Ozkan e Sezan (1992) tenha realizado uma modelagem na qual estabelece que as imagens de baixa resolução possam ter níveis de ruído diferentes entre elas, consideramos razoável definir um valor único de desvio padrão do ruído para todas as imagens, simplificando assim o processo, levando em consideração que a forma de obtenção das imagens LR são semelhantes e, portanto, os níveis de ruído não tendem a ter discrepâncias significativas entre as imagens. Salientamos também que não utilizamos o conjunto de não negatividade.

O algoritmo POCS precisa de uma estimativa inicial da imagem de alta resolução. Nos resultados obtidos, utilizamos como estimativa inicial para o processo sequencial ou paralelo do POCS, uma imagem de baixa resolução do conjunto considerado, interpolada através de uma interpolação de ordem 0 (replicação de pixels) evitando o borramento ocasionado por outras abordagens que pode influenciar no processo de estimação da imagem de alta resolução.

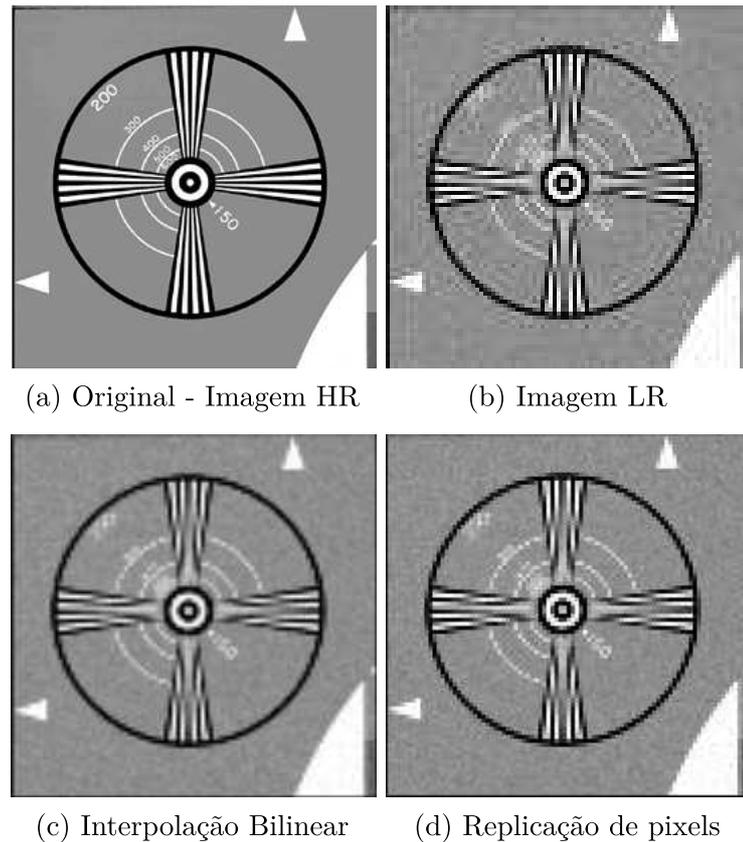
4.5 Desempenho dos algoritmos POCS

Os algoritmos POCS propostos por este trabalho foram desenvolvidos em *Octave*, um software livre sob licença GPL para cálculos matemáticos, com linguagem de alto nível muito semelhante ao *MATLAB*. Os testes e resultados obtidos foram gerados utilizando um computador com processador Intel i5-2320 (6MB de Cache com 3.00 GHz de Clock) e 4Gb de Memória RAM DDR3 com sistema Operacional linux Ubuntu.

Inicialmente, é salutar demonstrar os resultados obtidos comparando a imagem de baixa de resolução interpolada através da replicação de pixels (Figura 11(d)) e a técnica bilinear (Figura 11(c)). Foi realizada a interpolação considerando um fator de ampliação igual a 2, ou seja, a imagem LR considerada tem dimensões 90x90 e as imagens resultantes possuem dimensão 180x180 pixels. Nota-se que a interpolação bilinear em relação a interpolação utilizando a replicação de pixels, tende a borrar e a degradar ainda mais a imagem de baixa resolução considerada. Como as técnicas de interpolação não utilizam nenhuma informação *a priori*, além dos pixels da imagem considerada, não há nenhuma

melhora na degradação já existente. Em relação a imagem de baixa resolução interpolada pela replicação de pixels podemos notar que a mesma permanece sem borramento e mantém características visuais da imagem LR original, sendo, portanto, escolhida como estimativa inicial das abordagens POCS.

Figura 11 – Comparativo entre a imagem original HR (a), sua versão de baixa resolução (b) e as versões interpoladas de (b) através da Técnica Bilinear (c) e Replicação de Pixels (d)



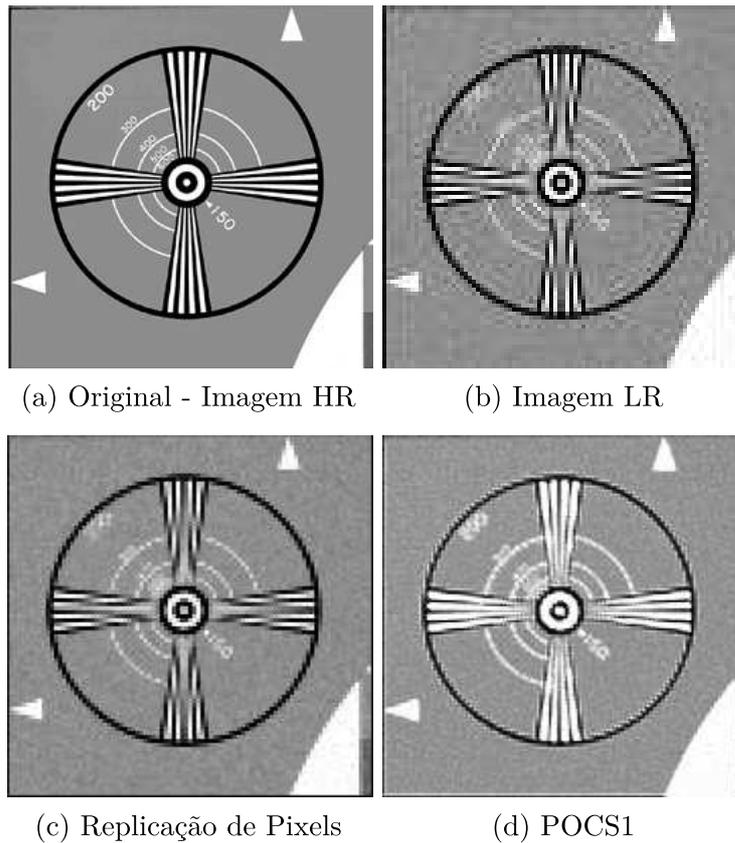
Fonte: Produzido pelos autores

4.6 Resultados POCS1

A abordagem POCS1 como já foi definida, se trata do algoritmo em sua concepção sequencial. Realizamos testes considerando 7 (sete) imagens de baixa resolução do conjunto de imagens EIA. Das 7 imagens consideradas, uma foi escolhida para ser considerada a imagem de referência na obtenção dos valores de deslocamentos entre ela e as outras 6 imagens restantes através do algoritmo de estimação de movimento. Essas sete imagens foram, portanto, consideradas como conjuntos convexos no algoritmo POCS. Para os testes, consideramos que o desvio padrão do ruído das imagens σ é igual a 1 e portanto valor de η é 3, ou seja, $3 * \sigma$, valor que foi obtido de forma heurística após diversos testes

efetuados. Para a geração da estimativa de alta resolução foi considerada 15 iterações. Não notamos mudanças significativas considerando um maior número de iterações.

Figura 12 – Comparativo entre as imagens EIA: (a) Original HR, (b) Versão de baixa resolução (LR), (c) a imagem LR interpolada (Replicação de Pixels) e (d) Resultado da Estimativa obtida pelo algoritmo POCS1



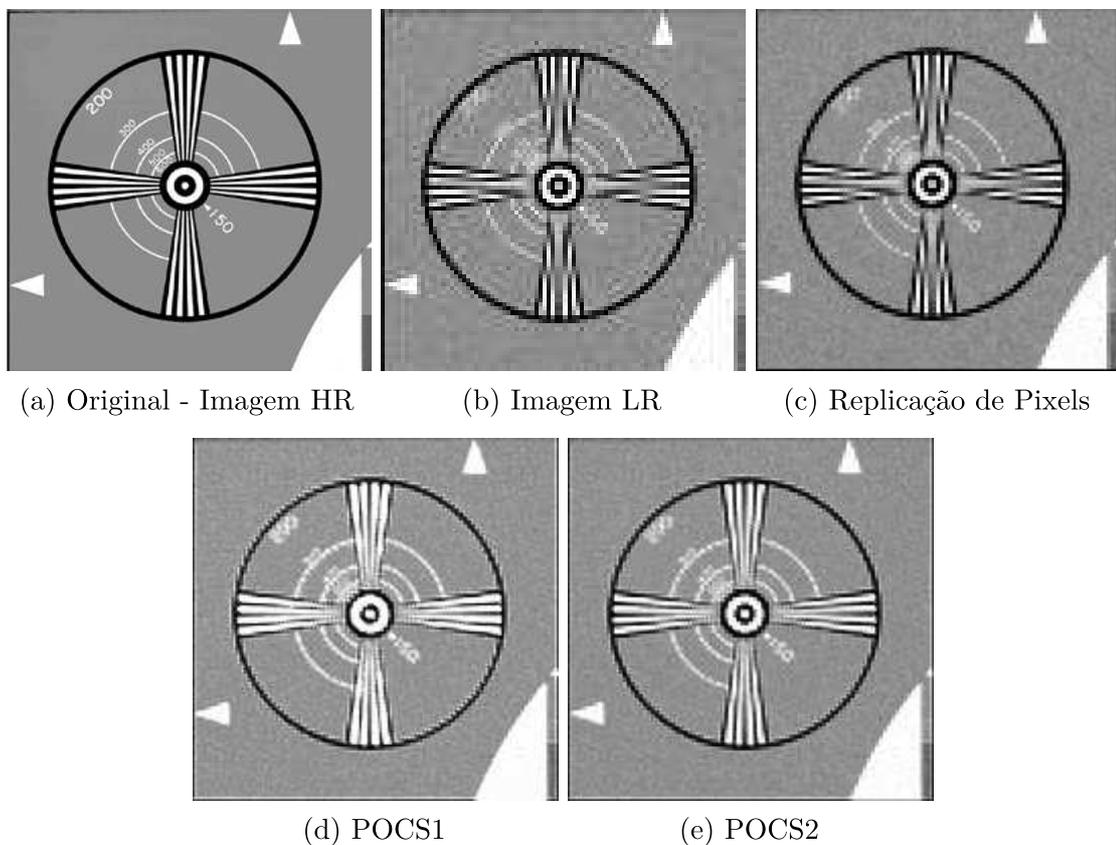
Fonte: Produzido pelos autores

Analisando as imagens da Figura 12, percebemos que o POCS1(d) apresenta uma melhora significativa considerando a imagem de baixa resolução (b) e a imagem utilizada como estimativa inicial do algoritmo (c). Nota-se que as regiões em branco na imagem (d) estão apresentando contornos mais definidos, assim como a parte principal da imagem bastante degradada pelo processo de formação das imagens LR, já se mostra mais próxima da imagem original (a). Contudo, os números encontrados na imagem original ainda não aparecem de forma definida na estimativa, assim como os raios paralelos partindo do círculo central da imagem apresentam bordas finas em relação as bordas mais grossas da imagem de alta resolução.

4.7 Resultados POCS2

Considerando a abordagem do POCS2, os ajustes são semelhantes para a obtenção dos resultados para o POCS1, mas o número de iterações foi menor (10 iterações). Testes com um maior número de iterações não resultaram em uma melhora significativa. Salientamos que assim como o POCS1, o valor η é o mesmo para as 7 imagens utilizadas.

Figura 13 – Comparativo entre as imagens EIA: (a) Original HR, (b) Versão de baixa resolução (LR), (c) a imagem LR interpolada (Replicação de Pixels), (d) Resultado da Estimativa obtida pelo algoritmo POCS1 e (e) Resultado da Estimativa obtida pelo algoritmo POCS2



Fonte: Produzido pelos autores

Ao compararmos o resultado do POCS2(e) com o resultado obtido pelo POCS1(d) na figura 13, visualmente percebemos que as diferenças são bastante discretas, entretanto, as linhas que partem do centro da imagem na qual possui um círculo, parecem estar levemente mais definidas. Em relação as regiões brancas da imagem dentro do círculo maior, como, por exemplo, os números e linhas circulares próximas a eles, notamos que no POCS1, os números estão com contornos mais definidos, permitindo uma visualização razoável do número 200 e 150, o que não acontece com tanta facilidade no resultado obtido através do POCS2.

4.8 Resultados POCS3

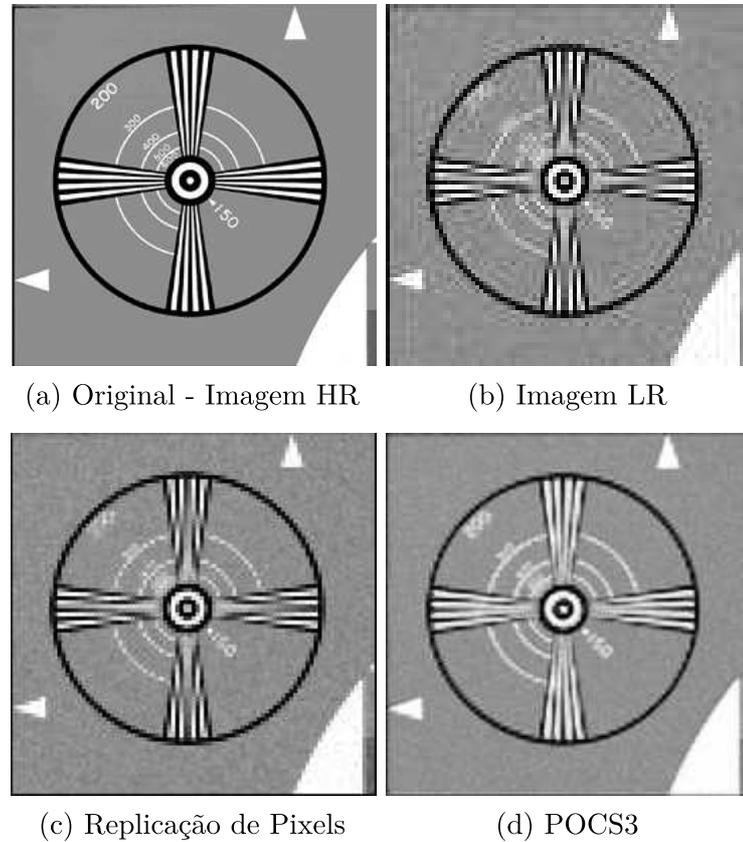
Nesta sessão apresentaremos os resultados referentes ao POCS3, que trata justamente da proposta principal deste trabalho, considerando a abordagem híbrida através da inclusão do conjunto convexo representado pelo algoritmo modificado de Richardson-Lucy. Além da comparação com as outras versões do POCS proposto, iremos comparar também como já foi relatado, com os resultados obtidos e publicados pelo Farsiu et al. (FARSIU et al., 2004a; FARSIU et al., 2004b). Teceremos maiores considerações levando em consideração o conjunto de imagem EIA e ao final, iremos comparar também o desempenho do algoritmo de Super-Resolução Robusta ($L1 + Bilateral TV$) com o resultado obtido pela abordagem híbrida proposta considerando o conjunto de imagens Surveillance (small). Salientamos que todos os resultados da abordagem proposta neste trabalho possuem dimensões duas vezes maiores do que os frames/imagens de baixa resolução, ou seja, 180x180 pixels. Já os resultados referentes ao algoritmo de Super-Resolução Robusta ($L1+Bilateral TV$), assim como os outros obtidos por Farsiu et al. possuem dimensões quatro vezes maiores do que os frames de baixa resolução considerados. Haverá uma discussão também com resultados gerados considerando o mesmo fator de ampliação para ambas as técnicas. Com relação a obtenção do resultado do POCS3, a configuração foi a mesma utilizada para o POCS1.

A Figura 14 mostra o comparativo do resultado POCS3 (d) em comparação com a imagem original (a), uma versão de baixa resolução (b) e a interpolação da mesma por replicação de pixels (c).

Resultado importante é mostrado na Figura 15, mostrando o comparativo entre a imagem original (a) e os resultados dos algoritmos POCS1 (b), POCS2 (c) e POCS3 (d). A partir da análise visual, percebemos que o POCS3 tende a preservar melhor as bordas e atenuar variações nas intensidades dos pixels nas regiões cinzas e uniformes da imagem. A Tabela 1 mostra os valores obtidos pelo MSE das três abordagens POCS em relação a imagem original redimensionada para 180x180. Os valores mostram que o POCS3 tende a se aproximar mais da imagem de alta resolução em comparação com o POCS1 e POCS2, o que também é notório considerando a análise visual das imagens. Embora tenha sido avaliado visualmente que o POCS2 é inferior ao POCS1, os valores do MSE demonstram a evolução dos algoritmos POCS1, POCS2 e POCS3. O algoritmo POCS3 possui uma redução significativa do MSE em comparação com as outras abordagens.

A Figura 16 mostra os resultados aos quais Farsiu et al. realizou comparações com o algoritmo de Super-Resolução Robusta ($L1+Bilateral TV$) em seus trabalhos publicados. Para maiores detalhes quanto as abordagens citadas na imagem e não discutidas neste trabalho, as referências suprem essa necessidade (FARSIU et al., 2004a; FARSIU et al., 2004b). Salientamos que o objetivo principal da discussão deste resultado é comparar a abordagem híbrida proposta neste trabalho com os resultados obtidos pela Super-Resolução

Figura 14 – Comparativo entre as imagens EIA: (a) Original HR, (b) Versão de baixa resolução (LR), (c) a imagem LR interpolada (Replicação de Pixels), (d) Resultado da Estimativa obtida pelo algoritmo POCS3



Fonte: Produzido pelos autores

Tabela 1 – Valores MSE em relação a imagem EIA original redimensionada

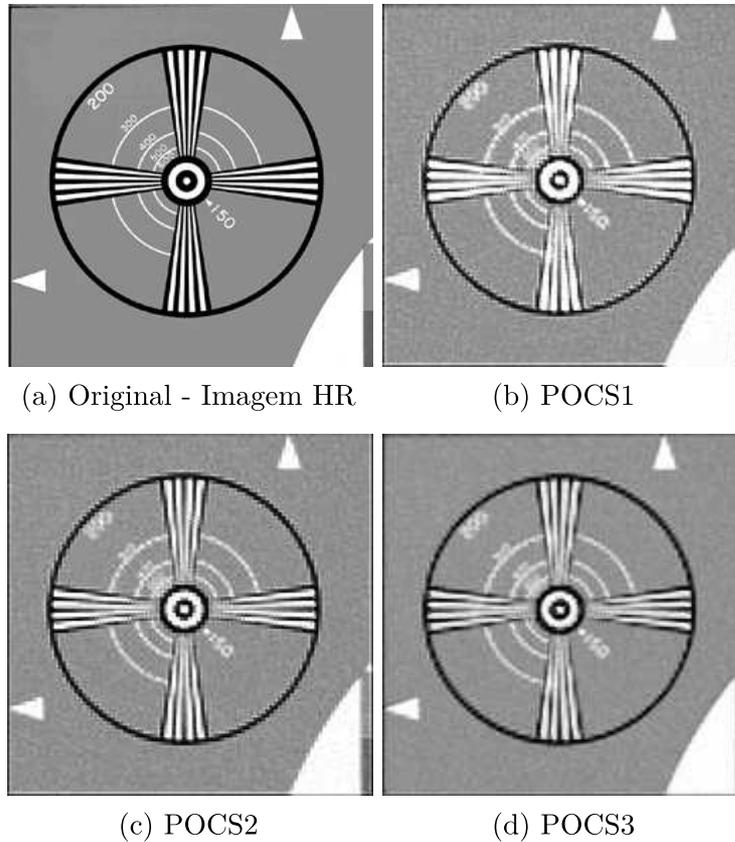
Resultados	<i>POCS1</i>	<i>POCS2</i>	<i>POCS3</i>
MSE	2713,3	2410,9	1754,8

Fonte: Produzido pelos autores

Robusta (L1+BilateralTV). Considerando o exposto no Capítulo 3 nas definições da Super-Resolução Robusta, Farsiu et al. utilizou os seguintes parâmetros para a geração dos resultados mostrado na letra (h) da Figura 16: fator de regularização $\lambda = 0.005$, tamanho do Kernel de regularização $P = 2$, tamanho do passo *Step Size* $\beta = 110$ e o coeficiente de decaimento espacial $\alpha = 0.6$, utilizando 50 iterações para obtenção do resultado com ampliação de 4 vezes o tamanho das imagens de baixa resolução.

Analisando visualmente os resultados da Figura 16, percebemos que o método POCS3(g) abordado neste trabalho recupera informações importantes, como, por exemplo, os números 200 e 150 presentes na imagem, assim como também atenua os efeitos do

Figura 15 – Comparativo entre as imagens EIA: (a) Original HR, (b) Resultado da Estimativa obtida pelo algoritmo POCS1, (c) Resultado da Estimativa obtida pelo algoritmo POCS2 e (d) Resultado da Estimativa obtida pelo algoritmo POCS3



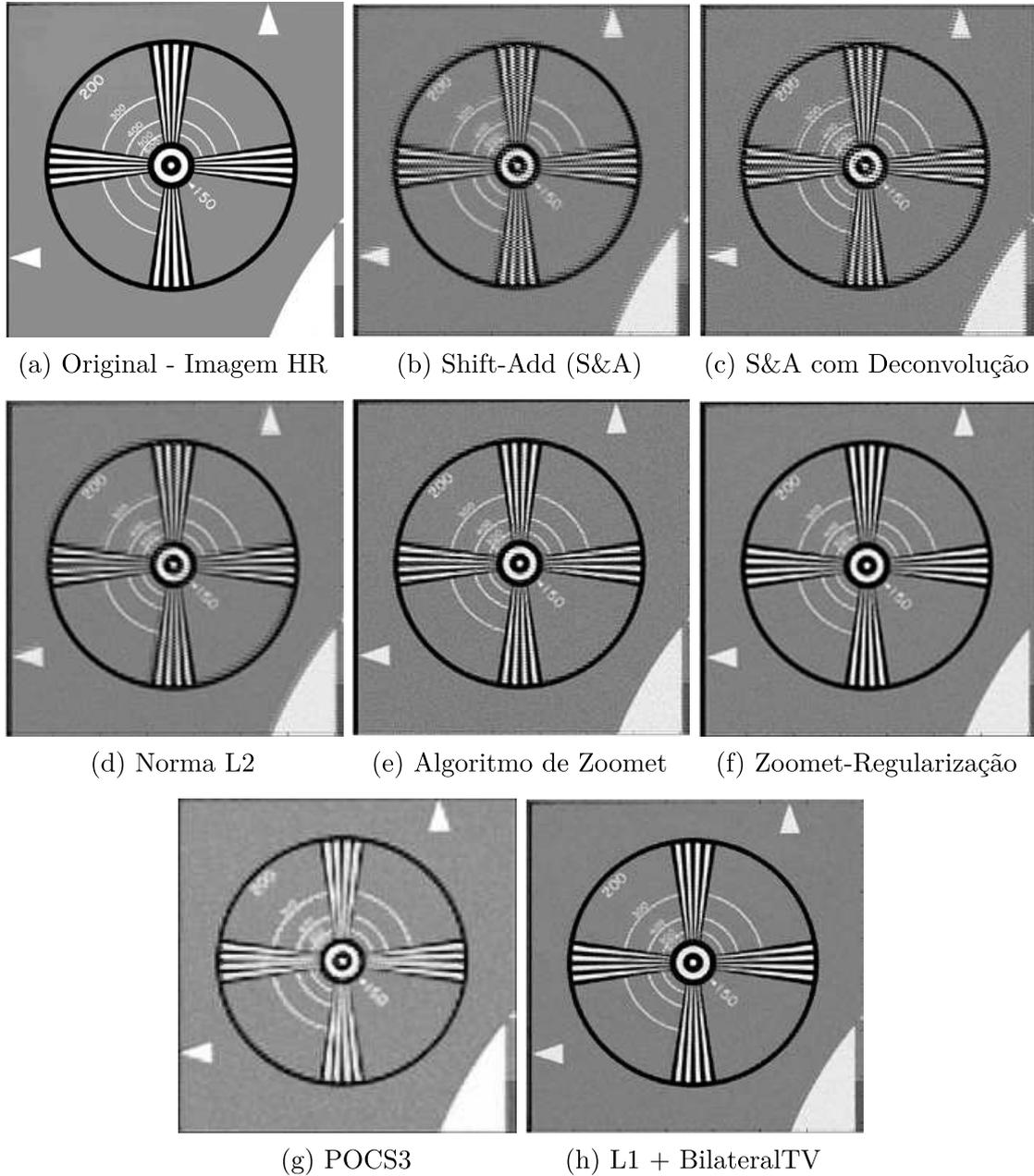
Fonte: Produzido pelos autores

borramento, do ruído e principalmente reduz a degradação relacionada ao movimento existente nas amostras consideradas para o processo iterativo.

É preciso levar em consideração para análise, o fator de ampliação considerado em relação as imagens de baixa resolução e a estimativa de alta resolução obtida. Conforme já foi relatado, os algoritmos desenvolvidos e estudados neste trabalho (POCS1, POCS2 e POCS3) ampliam em duas vezes a estimativa em relação as imagens LR, enquanto os outros resultados, foram obtidos considerando a ampliação de quatro vezes a imagem de baixa resolução.

Uma possível justificativa para o resultado utilizando o conjunto de imagens EIA pela abordagem proposta ainda se distanciar do resultado obtido por Farsiu et al. através da Super-Resolução Robusta, seriam esses fatores de ampliação. Embora seja uma comparação desvantajosa, devido aos parâmetros para obtenção dos resultados estarem descritos nos artigos, consideramos que esses sejam os melhores resultados obtidos utilizando a abordagem robusta pelos autores e, portanto, permitiriam uma análise consistente dos

Figura 16 – Comparativo entre as imagens EIA:(a) Original HR, (b) Shift and Add (S&A), (c) Shift and Add (S&A) com Deconvolução, (d) Norma L2, (e) Zoomet, (f) Zoomet com Regularização, (g) POCS3 (180x180) e (f) L1 + BilateralTV (Super-Resolução Robusta) (360x360)

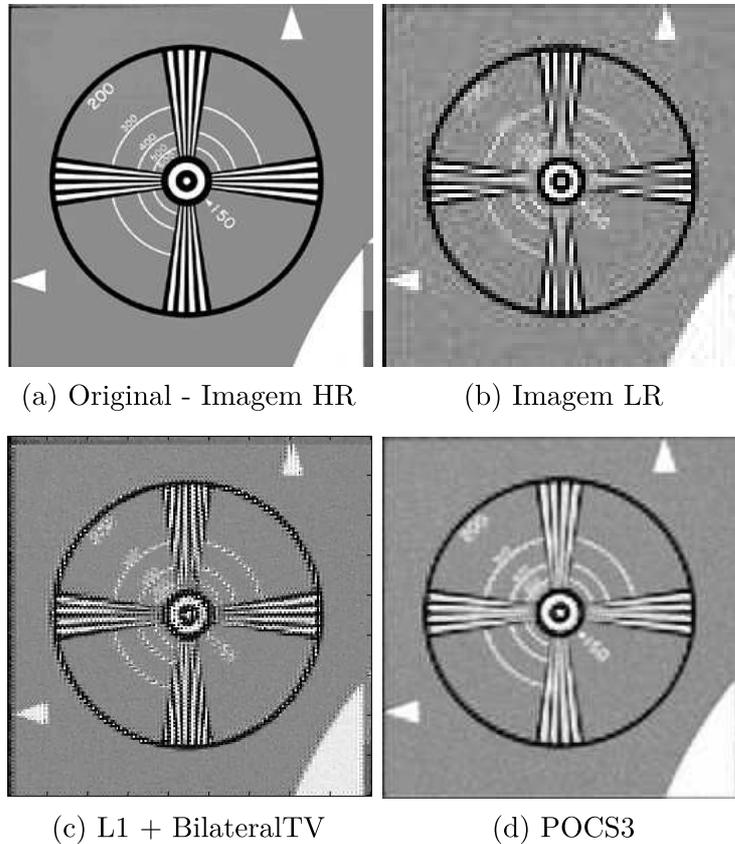


Fonte: Produzido pelos autores

resultados.

Entretanto, realizamos alguns testes utilizando o software desenvolvido pelos autores do *framework* para gerar o resultado da imagem EIA considerando um fator de ampliação igual a 2. Os parâmetros considerados foram: fator de regularização $\lambda = 0.01$, o tamanho do Kernel de regularização $P = 2$, o tamanho do passo (*Step Size*) $\beta = 2$ e o coeficiente de

Figura 17 – Comparativo entre as imagens EIA: (a) Original HR, (b) Versão de baixa resolução (LR) e (c) Resultado obtido L1 + Bilateral TV (180x180) (d) Resultado da Estimativa obtida pelo algoritmo POCS3 (180x180), que foram gerados com o mesmo fator de ampliação (igual a 2)



Fonte: Produzido pelos autores

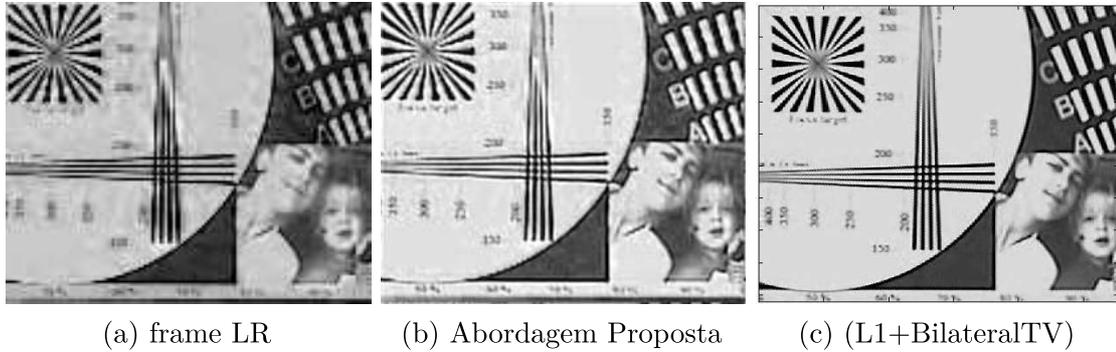
decaimento espacial = 0.6, utilizando 30 iterações para obtenção do resultado. Salientamos que esses valores foram obtidos após diversos testes.

A partir dos parâmetros informados, notamos pelo resultado L1 + Bilateral TV(c) da Figura 17 que o resultado é bem aquém do esperado. Salientamos que se buscou utilizar os mesmos parâmetros anteriores (considerado para a ampliação em 4 vezes), contudo, os resultados foram ainda menos promissores. Uma justificativa para essa piora, seria que as informações a priori neste caso são menores e prejudicam o desempenho do algoritmo robusto. Desta forma, considerando a abordagem POCS3 obteve a estimativa considerando a mesma ampliação, o resultado obtido pela abordagem híbrida proposta neste caso é superior à abordagem robusta.

4.8.1 Resultados - Imagens Surveillance (small)

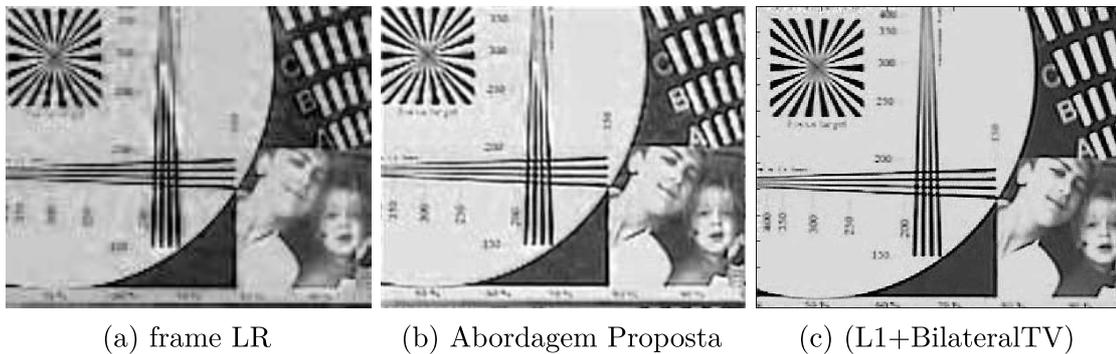
Foram também realizados testes com a abordagem híbrida proposta neste trabalho (POCS3) com os resultados da Super-Resolução Robusta (L1 + BilateralTV), conside-

Figura 18 – Comparativo entre as imagens do conjunto Surveillance(small): (a) Versão de baixa resolução (LR), (b) Resultado obtido pelo POCS3 (180x180) e o (c) Resultado obtido pelo algoritmo de Super-Resolução Robusta (L1+Bilateral TV) (360x360)



Fonte: Produzido pelos autores

Figura 19 – Comparativo entre as imagens do conjunto Surveillance(small): (a) Versão de baixa resolução (LR), (b) resultado obtido pelo POCS3 (180x180) e (c) Algoritmo de Super-Resolução Robusta (L1+BilateralTV) (180x180), que foram gerados com o mesmo fator de ampliação (igual a 2)



Fonte: Produzido pelos autores

rando o conjunto de imagens Surveillance (small). Para geração dos resultado pela técnica (l1+Bilateral TV) foi utilizado os seguintes valores para os parâmetros: fator de regularização $\lambda = 0.01$, tamanho do Kernel de regularização $P = 2$, o tamanho do passo (*Step Size*) $\beta = 2$ e o coeficiente de decaimento espacial = 0.6, utilizando 30 iterações na obtenção do resultado. Para o POCS3, assim como nos experimentos com as imagens EIA, realizamos testes considerando 7 (sete) imagens de baixa resolução do conjunto de imagens considerado. Os outros parâmetros também são os mesmos utilizados nas comparações anteriores. Para a geração da estimativa de alta resolução pelo POCS3 neste caso, foi considerada 20 iterações somente, na qual não notamos mudanças significativas considerando um maior número de iterações.

É possível notar através da comparação visual das imagens (b) POCS3 e (c)

L1+Bilateral TV (Super-Resolução Robusta) na Figura 18 que o algoritmo proposto apresenta um bom resultado para o conjunto de imagens Surveillance (small) com desempenho próximo ao obtido pela técnica L1+Bilateral TV. Notamos que alguns números existentes na imagem podem ser visualizados e detectados, assim como as bordas existentes tiveram sua pixelização reduzida. Podemos destacar também que o fundo e outras regiões da imagem possuem uma transição mais suave entre os níveis de cinza em comparação com a versão de baixa resolução (a). Considerando a região onde existem linhas paralelas próximas ao centro da imagem em que elas não estão totalmente definidas, ainda assim, o resultado do contexto geral pode ser considerado bem interessante, ao comparar com a técnica L1+Bilateral TV (Super-Resolução Robusta) que assim como em resultados anteriores, utilizou da ampliação de 4 vezes o tamanho da versão de baixa resolução (a) apresentada.

Foram realizados testes com fator de ampliação igual a 2, para o caso da técnica L1+Bilateral TV (Super-Resolução Robusta) utilizando os mesmos valores para os parâmetros. O resultado mostrado na Figura 19, não possui uma piora muito significativa, mas é preciso destacar que considerando um fator menor de ampliação, as linhas paralelas presentes na imagem (c) possuem uma definição de contornos menos precisa do que considerando uma ampliação maior na Figura 18.

Conclusão

Considerando os resultados apresentados, o método proposto por este trabalho obteve um bom desempenho mostrando uma evolução interessante na comparação entre as abordagens POCS1, POCS2 e POCS3. Analisando a comparação realizada com outros algoritmos, a abordagem proposta (POCS3) teve desempenho superior quando comparada com o algoritmo de Super-Resolução Robusta (L1+Bilateral TV) considerando o mesmo fator de ampliação. Contudo, a comparação com resultados considerando uma ampliação maior, em quatro vezes o tamanho da imagem de baixa resolução, demonstra que o desempenho do algoritmo proposto foi inferior ao algoritmo da Super-Resolução Robusta (L1+Bilateral TV) para o caso do conjunto de imagens EIA, que possui uma degradação maior. Ressaltamos que é preciso levar em consideração a diferença significativa entre os fatores de ampliação, devido a abordagem proposta só aumentar o tamanho da imagem de baixa resolução em duas vezes em todos os casos comparados. Em relação ao conjunto de imagens Surveillance (small), embora não possua uma degradação tão acentuada, possui aspectos importantes a serem recuperados na estimativa de alta resolução, em que o algoritmo híbrido proposto se mostrou bastante próximo do algoritmo ao qual foi comparado, se aproximando ainda mais, considerando os resultados com o mesmo fator de ampliação.

Acreditamos que a metodologia híbrida proposta possui potencial para se aproximar ou até mesmo superar a técnica de Farsiu et al. se considerarmos que os algoritmos POCS que foram desenvolvidos aumentam em duas vezes o tamanho da imagem, enquanto a abordagem robusta só apresenta resultados apreciáveis considerando uma ampliação duas vezes maior do que a abordagem proposta, o que naturalmente já permite uma visualização melhor de detalhes das imagens testadas. De qualquer forma, os resultados obtidos só demonstram que algoritmos de Super-Resolução baseados em Projeções sobre Conjuntos Convexos (POCS) podem gerar resultados apreciáveis através de poucas iterações e possui uma flexibilidade importante que permite agregar outros métodos que possam ser formulados como conjuntos convexos que podem acrescentar e melhorar ainda mais os resultados obtidos.

É preciso considerar que uma boa estimativa de alta resolução geralmente é resultado de diversas informações que são acrescentadas ao processo, ou seja, quanto mais se sabe sobre a PSF das imagens de baixa resolução, os operadores de decimação e borramento, maiores são as chances de se obter estimativas que se aproximem mais da imagem original ou do resultado desejado para uma determinada aplicação. Considerando a abordagem híbrida, uma possibilidade futura é acrescentar outros conjuntos de restrição convexos ao algoritmo ou complementar a abordagem espectral com outras técnicas para buscar uma melhor

estimativa, e incrementar a abordagem espacial através da geração de estimativas de alta resolução com fatores de ampliação maiores. Pontuamos também, que os resultados obtidos foram baseados na utilização de 7 imagens de baixa resolução que foram consideradas como conjuntos convexos no processo iterativo. Sendo assim, uma proposta para trabalhos futuros, seria considerar um número maior de imagens de baixa resolução para que, conseqüentemente, o processo tenha mais conjuntos convexos que ampliem o conhecimento do processo quanto a imagem a ser obtida.

A estimativa inicial do processo iterativo também pode ser melhorada considerando outras técnicas mais elaboradas, assim como é possível expandir o método proposto considerando não só imagens em escala de cinza, como também imagens coloridas, trabalhando com as três componentes (RGB).

As sugestões de melhoria para trabalhos futuros que podem se basear na metodologia proposta, mostram o quanto a técnica pode ter um desempenho ainda maior e produzir resultados ainda mais apreciáveis, demonstrando assim ser uma técnica poderosa que pode contribuir ainda mais para a literatura e para as pesquisas a serem realizadas no contexto de Super-Resolução de imagens.

Referências

- ANDREWS, H. C.; HUNT, B. R. Digital image restoration. *Prentice-Hall Signal Processing Series, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1977*, v. 1, 1977. Citado na página 24.
- BABU, R. S.; MURTHY, K. E. S. A survey on the methods of super-resolution image reconstruction. *International Journal of Computer Applications*, v. 15, n. 2, p. 1–6, February 2011. Citado 3 vezes nas páginas 27, 29 e 35.
- BELEKOS, S. P.; GALATSANOS, N. P.; KATSAGGELOS, A. K. Maximum a posteriori video super-resolution using a new multichannel image prior. *IEEE transactions on image processing*, v. 19, n. 6, p. 1451–1464, 2010. Citado na página 35.
- BERENSTEIN, C. A. et al. A geometric approach to subpixel registration accuracy. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Elsevier, v. 40, n. 3, p. 334–360, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- BERTERO, M. et al. Resolution in diffraction-limited imaging, a singular value analysis. *Journal of Modern Optics*, Taylor & Francis, v. 31, n. 2, p. 181–201, 1984. Citado na página 31.
- BORMAN, S.; STEVENSON, R. Spatial resolution enhancement of low-resolution image sequences—a comprehensive review with directions for future research. *Lab. Image and Signal Analysis, University of Notre Dame, Tech. Rep, Citeseer*, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 30.
- BORMAN, S.; STEVENSON, R. L. Super-resolution from image sequences—a review. In: *Circuits and Systems, 1998. Proceedings. 1998 Midwest Symposium on*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 374–378. Citado na página 30.
- BREG, L. Finding the common point of convex sets by the method of successive projections. *Dokl. Akad. Mousk SSSR*, p. 487–490, 1965. Citado na página 37.
- BROWN, L. G. A survey of image registration techniques. *ACM Comput. Surv.*, ACM, New York, NY, USA, v. 24, n. 4, p. 325–376, dez. 1992. ISSN 0360-0300. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/146370.146374>>. Citado na página 26.
- CANNY, J. A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, IEEE, n. 6, p. 679–698, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 51.
- CARRINGTON, W. A. et al. Superresolution three-dimensional images of fluorescence in cells with minimal light exposure. *Science*, The American Association for the Advancement of Science, v. 268, n. 5216, p. 1483, 1995. Citado na página 31.
- CHAUDHURI, S. *Super-Resolution Imaging*. Norwell, MA, USA: Kluwer Academic Publishers, 2001. ISBN 0792374711. Citado na página 21.
- CHEN, J.; NUNEZ-YANEZ, J.; ACHIM, A. Video super-resolution using generalized gaussian markov random fields. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 19, n. 2, p. 63–66, 2012. Citado na página 34.

- CHUNG-HUA, C. Super-resolution image reconstruction for mobile devices. *Multimedia Systems*, Springer-Verlag, v. 19, n. 4, p. 315–337, 2013. ISSN 0942-4962. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00530-012-0276-y>>. Citado na página 35.
- COMBETTES, P. The convex feasibility problem in image recovery. *Advances in imaging and electron physics*, Elsevier, v. 95, p. 155–270, 1996. Citado na página 32.
- COMBETTES, P. L. Convex set theoretic image recovery: history, current status, and new directions. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, Elsevier, v. 3, n. 4, p. 307–315, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.
- COMBETTES, P. L. The foundations of set theoretic estimation. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 81, n. 2, p. 182–208, 1993. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 43.
- CONCHELLO, J.-A. Superresolution and convergence properties of the expectation-maximization algorithm for maximum-likelihood deconvolution of incoherent images. *JOSA A*, Optical Society of America, v. 15, n. 10, p. 2609–2619, 1998. Citado na página 31.
- FARSIU, S.; ELAD, M.; MILANFAR, P. Multiframe demosaicing and super-resolution of color images. *IEEE Transactions on Image Processing*, IEEE, v. 15, n. 1, p. 141–159, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 35, 52 e 57.
- FARSIU, S.; ELAD, M.; MILANFAR, P. Video-to-video dynamic super-resolution for grayscale and color sequences. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, Hindawi Publishing Corp., v. 2006, p. 232–232, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 57.
- FARSIU, S. et al. Fast and robust multiframe super resolution. *IEEE Transactions on Image processing*, IEEE, v. 13, n. 10, p. 1327–1344, 2004. Citado 8 vezes nas páginas 22, 35, 52, 54, 55, 56, 57 e 64.
- FARSIU, S. et al. Advances and challenges in super-resolution. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, Wiley Online Library, v. 14, n. 2, p. 47–57, 2004. Citado 7 vezes nas páginas 22, 35, 52, 54, 56, 57 e 64.
- FRANCIA, G. T. D. Degrees of freedom of an image. *JOSA*, Optical Society of America, v. 59, n. 7, p. 799–804, 1969. Citado na página 31.
- FRIEDEN, B. Evaluation, design and extrapolation methods for optical signals, based on use of the prolate functions. *PROGRESS IN OPTICS*, v. 31, p. 311–311, 1993. Citado na página 31.
- FRIEDEN, B. R.; AUMANN, H. H. Image reconstruction from multiple 1-d scans using filtered localized projection. *Applied optics*, Optical Society of America, v. 26, n. 17, p. 3615–3621, 1987. Citado na página 32.
- GE, Z.-J. et al. A fast-convergence pocs seismic denoising and reconstruction method. *Applied Geophysics*, Springer, v. 12, n. 2, p. 169–178, 2015. Citado na página 36.
- GERCHBERG, R. Super-resolution through error energy reduction. *Journal of Modern Optics*, Taylor & Francis, v. 21, n. 9, p. 709–720, 1974. Citado na página 31.
- GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. *Digital Image Processing (3rd Edition)*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 2006. ISBN 013168728X. Citado na página 21.

- GUBIN, L.; POLYAK, B.; RAIK, E. The method of projections for finding the common point of convex sets. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Elsevier, v. 7, n. 6, p. 1–24, 1967. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 40.
- HARRIS, J. L. Resolving power and decision theory. *JOSA*, Optical Society of America, v. 54, n. 5, p. 606–611, 1964. Citado na página 31.
- HOMEM, M. R. P. Reconstrução tridimensional de imagens com o uso de deconvolução a partir de seções bidimensionais obtidas em microscopia óptica. *Doutorado em Física Computacional, Universidade de São Paulo-Instituto de Física de São Carlos*, 2003. Citado 6 vezes nas páginas 24, 25, 28, 29, 43 e 50.
- HUBER, P. J. *Robust statistics*. [S.l.]: Springer, 2011. Citado na página 54.
- HUNT, B. R. Super-resolution of images: Algorithms, principles, performance. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, Wiley Online Library, v. 6, n. 4, p. 297–304, 1995. Citado na página 31.
- IRANI, M.; PELEG, S. Improving resolution by image registration. *CVGIP: Graphical models and image processing*, Elsevier, v. 53, n. 3, p. 231–239, 1991. Citado 4 vezes nas páginas 26, 34, 45 e 48.
- JING, T.; KAI-KUANG, M. Stochastic super-resolution image reconstruction. *J. Visual Communication and Image Representation*, v. 21, n. 3, p. 232–244, 2010. Disponível em: <<http://dblp.uni-trier.de/db/journals/jvcir/jvcir21.html#TianM10>>. Citado na página 33.
- KEREN, D.; PELEG, S.; BRADA, R. Image sequence enhancement using sub-pixel displacements. In: IEEE. *Computer Vision and Pattern Recognition, 1988. Proceedings CVPR'88., Computer Society Conference on*. [S.l.], 1988. p. 742–746. Citado 4 vezes nas páginas 24, 25, 34 e 45.
- KEREN, D.; PELEG, S.; BRADA, R. Image sequence enhancement using sub-pixel displacements. In: *Computer Vision and Pattern Recognition, 1988. Proceedings CVPR '88., Computer Society Conference on*. [S.l.: s.n.], 1988. p. 742–746. ISSN 1063-6919. Citado na página 26.
- KIM, S. P.; BOSE, N. K.; VALENZUELA, H. M. Recursive reconstruction of high resolution image from noisy undersampled multiframes. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 38, n. 6, p. 1013–1027, Jun 1990. ISSN 0096-3518. Citado na página 30.
- KOSAREV, E. Shannon's superresolution limit for signal recovery. *Inverse problems*, IOP Publishing, v. 6, n. 1, p. 55, 1990. Citado na página 31.
- LIM, D. *Achieving accurate image registration as the basis for super-resolution*. Tese (Doutorado) — Master Thesis, The University of Western Australia, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 45.
- LIU, J. et al. An improved {POCS} super-resolution infrared image reconstruction algorithm based on visual mechanism. *Infrared Physics & Technology*, v. 78, p. 92 – 98, 2016. ISSN 1350-4495. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350449516302043>>. Citado na página 36.

LUCY, L. B. An iterative technique for the rectification of observed distributions. *The astronomical journal*, v. 79, p. 745, 1974. Citado 3 vezes nas páginas 23, 32 e 51.

MARCEL, B.; BRIOT, M.; MURRIETA, R. Calcul de translation et rotation par la transformation de fourier. *TS. Traitement du signal*, Lavoisier, v. 14, n. 2, p. 135–149, 1997. Citado na página 32.

MARKS, I.; ROBERT, J. Alternating projections onto convex sets. In: ACADEMIC PRESS, INC. *Deconvolution of images and spectra (2nd ed.)*. [S.l.], 1996. p. 476–501. Citado na página 41.

MARTINS, A. L. D.; HOMEM, M. R. P.; MASCARENHAS, N. D. A. Super-resolution image reconstruction using the icm algorithm. In: *IEEE International Conference on Image Processing*. [S.l.: s.n.], 2007. v. 4, p. IV–205 – IV–208. Citado na página 33.

MARTINS, A. L. D. et al. Map-mrf super-resolution image reconstruction using maximum pseudo-likelihood parameter estimation. In: *16th IEEE International Conference on Image Processing*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 1165 – 1168. Citado na página 33.

MILANFAR, P. *Super-resolution imaging*. [S.l.]: CRC Press, 2010. Citado 6 vezes nas páginas 21, 24, 26, 28, 30 e 33.

MIURA, N.; BABA, N. Superresolution for a nonnegative band-limited image. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 21, n. 15, p. 1174–1176, 1996. Citado na página 31.

MOALLEM, P.; ISFAHANI, S. M. M.; HADDADNIA, J. Facial image super resolution using weighted patch pairs. *International Journal of Image, Graphics and Signal Processing (IJIGSP)*, v. 5, n. 3, p. 1, 2013. Citado na página 35.

NARAYANAN, B. et al. A computationally efficient super-resolution algorithm for video processing using partition filters. *Circuits and Systems for Video Technology, IEEE Transactions on*, v. 17, n. 5, p. 621–634, May 2007. ISSN 1051-8215. Citado na página 35.

NASROLLAHI, K.; MOESLUND, T. B. Super-resolution: A comprehensive survey. *Mach. Vision Appl.*, Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, v. 25, n. 6, p. 1423–1468, ago. 2014. ISSN 0932-8092. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00138-014-0623-4>>. Citado na página 21.

NG, M. K. et al. A total variation regularization based super-resolution reconstruction algorithm for digital video. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, v. 2007, n. 1, p. 074585, 2007. ISSN 1687-6180. Disponível em: <<http://asp.eurasipjournals.com/content/2007/1/074585>>. Citado na página 35.

OSKOUI-FARD, P.; STARK, H. Tomographic image reconstruction using the theory of convex projections. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, IEEE, v. 7, n. 1, p. 45–58, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 46.

OSKOUI, P.; STARK, H. A comparative study of three reconstruction methods for a limited-view computer tomography problem. *IEEE transactions on medical imaging*, IEEE, v. 8, n. 1, p. 43–49, 1989. Citado na página 37.

PANDA, S. S.; PRASAD, M. S. R. S.; JENA, G. Pocs based super-resolution image reconstruction using an adaptive regularization parameter. *CoRR*, abs/1112.1484, 2011. Citado na página 32.

- PAPOULIS, A. A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation. *IEEE Transactions on Circuits and systems*, IEEE, v. 22, n. 9, p. 735–742, 1975. Citado na página 31.
- PARK, S. C.; PARK, M. K.; KANG, M. G. Super-resolution image reconstruction: a technical overview. *IEEE signal processing magazine*, IEEE, v. 20, n. 3, p. 21–36, 2003. Citado 7 vezes nas páginas 21, 23, 24, 25, 27, 28 e 30.
- PARK, S. C.; PARK, M. K.; KANG, M. G. Super-resolution image reconstruction: a technical overview. *IEEE Signal Processing Magazine*, IEEE, v. 20, n. 3, p. 21–36, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 25, 27 e 29.
- PATANAVIJIT, V. Super-resolution reconstruction and its future research direction. *AU Journal of Technology (AU JT), Assumption University*, p. 149–163, 2009. Citado na página 36.
- PATTI, A. J.; SEZAN, M. I.; TEKALP, A. M. High-resolution image reconstruction from a low-resolution image sequence in the presence of time-varying motion blur. In: *IEEE. Image Processing, 1994. Proceedings. ICIP-94., IEEE International Conference*. [S.l.], 1994. v. 1, p. 343–347. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.
- PATTI, A. J.; SEZAN, M. I.; TEKALP, A. M. Superresolution video reconstruction with arbitrary sampling lattices and nonzero aperture time. *IEEE Transactions on Image Processing*, IEEE, v. 6, n. 8, p. 1064–1076, 1997. Citado na página 33.
- PELEG, S.; KEREN, D.; SCHWEITZER, L. Improving image resolution using subpixel motion. *Pattern recognition letters*, Elsevier, v. 5, n. 3, p. 223–226, 1987. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 34.
- PHAM, T. Q.; VLIET, L. J. van; SCHUTTE, K. Robust fusion of irregularly sampled data using adaptive normalized convolution. In: *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 2006. Citado na página 35.
- RICHARDSON, W. H. Bayesian-based iterative method of image restoration. *JOSA*, Optical Society of America, v. 62, n. 1, p. 55–59, 1972. Citado 3 vezes nas páginas 23, 32 e 51.
- RUDIN, L. I.; OSHER, S.; FATEMI, E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 60, n. 1, p. 259–268, 1992. Citado na página 54.
- SEGALL, C. A. et al. Bayesian resolution enhancement of compressed video. *Image Processing, IEEE Transactions on*, v. 13, n. 7, p. 898–911, July 2004. ISSN 1057-7149. Citado na página 34.
- SEMENTILLI, P.; HUNT, B. R.; NADAR, M. Analysis of the limit to superresolution in incoherent imaging. *JOSA A*, Optical Society of America, v. 10, n. 11, p. 2265–2276, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- SEZAN, M.; STARK, H. Image restoration by the method of convex projections: Part 2 - applications and numerical results. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 1, n. 2, 1982. Citado na página 37.

- SEZAN, M. I. An overview of convex projections theory and its application to image recovery problems. *Ultramicroscopy*, Elsevier, v. 40, n. 1, p. 55–67, 1992. Citado na página 41.
- SHEN, H. et al. A map approach for joint motion estimation, segmentation, and super resolution. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 6, n. 2, p. 479–490, February 2007. Citado na página 33.
- SLEPIAN, D.; POLLAK, H. O. Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis and uncertainty—i. *Bell System Technical Journal*, Wiley Online Library, v. 40, n. 1, p. 43–63, 1961. Citado na página 31.
- STARK, H.; OSKOUI, P. High-resolution image recovery from image-plane arrays, using convex projections. *J. Opt. Soc. Am. A*, OSA, v. 6, n. 11, p. 1715–1726, Nov 1989. Disponível em: <<http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-6-11-1715>>. Citado na página 32.
- STARK, H.; SEZAN, M. I. Image processing using projection methods. *Real-Time Optical Information Processing*, Academic, San Diego, Calif, p. 185–232, 1994. Citado na página 41.
- STARK, H.; YANG, Y.; YANG, Y. *Vector space projections: a numerical approach to signal and image processing, neural nets, and optics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1998. Citado 12 vezes nas páginas 32, 37, 39, 41, 42, 46, 47, 48, 49, 50, 52 e 60.
- TEKALP, A. M.; OZKAN, M. K.; SEZAN, M. I. High-resolution image reconstruction from lower-resolution image sequences and space-varying image restoration. In: *IEEE. Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1992. ICASSP-92., 1992 IEEE International Conference on*. [S.l.], 1992. v. 3, p. 169–172. Citado 10 vezes nas páginas 23, 32, 37, 45, 46, 48, 49, 50, 59 e 60.
- THAPA, D. et al. A performance comparison among different super-resolution techniques. *Computers & Electrical Engineering*, Elsevier, 2015. Citado na página 36.
- TIAN, J.; MA, K. A survey on super-resolution imaging. *Signal, Image and Video Processing*, Springer, v. 5, n. 3, p. 329–342, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 35.
- TIAN, J.; MA, K.-K. A survey on super-resolution imaging. *Signal, Image and Video Processing*, v. 5, n. 3, p. 329–342, 2011. ISSN 1863-1711. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11760-010-0204-6>>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 45.
- TIKHONOV, A. N.; ARSENIN, V. Y. *Solutions of ill-posed problems*. Winston, 1977. Citado na página 30.
- TSAI, R.; HUANG, T. S. Multiframe image restoration and registration. *Advances in computer vision and Image Processing*, v. 1, n. 2, p. 317–339, 1984. Citado na página 30.
- UR, H.; GROSS, D. Improved resolution from subpixel shifted pictures. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, Elsevier, v. 54, n. 2, p. 181–186, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.

- VILLENA, S. et al. Bayesian combination of sparse and non sparse priors in image super resolution. *Digital Signal Processing*, v. 23, n. 2, p. 530–541, 2013. Disponível em: <<http://decsai.ugr.es/vip/files/journals/2011spnpJPSVsentrevSVRM4.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.
- WALSH, D. O.; NIELSEN-DELANEY, P. A. Direct method for superresolution. *JOSA A*, Optical Society of America, v. 11, n. 2, p. 572–579, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- WANG, T. et al. Adaptive patch-based pocs approach for super resolution reconstruction of 4d-ct lung data. *Physics in Medicine and Biology*, v. 60, n. 15, p. 5939, 2015. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0031-9155/60/i=15/a=5939>>. Citado na página 36.
- XIANG, Z.; JIE, Y.; DU, S. Super-resolution reconstruction of image sequences compressed with dwt-based techniques. In: *Wavelet Analysis and Pattern Recognition, 2007. ICWAPR '07. International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2007. v. 2, p. 555–560. Citado na página 34.
- XIONG, Z.; SUN, X.; WU, F. Robust web image/video super-resolution. *IEEE Transactions on image processing*, IEEE, v. 19, n. 8, p. 2017–2028, 2010. Citado na página 35.
- YOULA, D. Generalized image restoration by the method of alternating orthogonal projections. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, IEEE, v. 25, n. 9, p. 694–702, 1978. Citado na página 37.
- YOULA, D. C.; WEBB, H. Image restoration by the method of convex projections: Part 1 theory. *IEEE transactions on medical imaging*, IEEE, v. 1, n. 2, p. 81–94, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 40.
- ZIBETTI, M. V. W.; MAYER, J. Simultaneous super-resolution for video sequences. In: *Image Processing, 2005. ICIP 2005. IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2005. v. 1, p. I–877. Citado na página 34.
- ZITOVA, B.; FLUSSER, J. Image registration methods: a survey. *Image and Vision Computing*, v. 21, n. 11, p. 977 – 1000, 2003. ISSN 0262-8856. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0262885603001379>>. Citado na página 26.
- ZOMET, A.; RAV-ACHA, A.; PELEG, S. Robust super-resolution. In: IEEE. *Computer Vision and Pattern Recognition, 2001. CVPR 2001. Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on*. [S.l.], 2001. v. 1, p. I–645. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 55.