UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

CARLOS AFONSO SILVEIRA MORAES

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: CONTRIBUIÇÕES PARA O LETRAMENTO PROBABILÍSTICO NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.

SOROCABA
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

CARLOS AFONSO SILVEIRA MORAES

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: CONTRIBUIÇÕES PARA O LETRAMENTO PROBABILÍSTICO NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.

Carlos Afonso Silveira Moraes

ORIENTADOR: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

CARLOS AFONSO SILVEIRA MORAES

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: CONTRIBUIÇÕES PARA O LETRAMENTO PROBABILÍSTICO NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.

Dissertação elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA
2017

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Carlos Afonso Silveira Moraes, realizada em 31/10/2017:

Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira
UFSCar

Prof. Dr. Maria Ogécia Drigo
UNISO

Prof. Dr. Antonio Noel Filho
IFSP

Dedico este trabalho a minha esposa Adriana e minhas filhas Daiani e Daisi

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus.

Agradeço à minha querida esposa Adriana por todo apoio, compreensão e incentivo.

Agradeço às minhas filhas Daiani e Daisi.

Agradeço aos meus colegas e professores de mestrado.

Agradeço ao meu orientador Dr. Paulo César de Oliveira por toda paciência, apoio e dedicação.

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo descrever e analisar um cenário de ensino-aprendizagem do conceito de Probabilidade em duas classes do nono ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública da rede municipal de ensino do município de Salto de Pirapora, interior do Estado de São Paulo. A aquisição da linguagem probabilística na aprendizagem de conceitos relativos à probabilidade foi um elemento motivador para o projeto de pesquisa. Os aportes teóricos dessa pesquisa envolveu os registros de representação semiótica por Raymond Duval e o letramento probabilístico na perspectiva de Iddo Gal. A questão orientadora da investigação foi: “Como os registros de representação semiótica são mobilizados e coordenados em tarefas envolvendo o contexto probabilístico?” Foi elaborado um trabalho de campo com atividades envolvendo a probabilidade clássica e frequentista, processos de contagem e estatística e uma sequência didática que utiliza experimentos aleatórios, espaço amostral, probabilidade de eventos simples, eventos compostos, gráficos de barra, frequência relativa, tabela de distribuição de frequência e o diagrama da árvore. Na condição de professor-pesquisador, a produção de informações foi oriunda de atividades desenvolvidas pelos alunos na forma de protocolos escritos, além de registros em áudio de diálogos ocorridos na correção das atividades e registros elaborados no diário de bordo. Os resultados da análise do material empírico da pesquisa revelaram nessa pesquisa de que os alunos utilizaram diferentes registros de representação semiótica na resolução das tarefas. A mobilização e coordenação desses registros favoreceram o desenvolvimento do letramento probabilístico dos alunos. Como este trabalho foi oriundo da análise de uma prática pedagógica, espera-se que haja contribuições para a prática docente em conteúdos envolvendo combinatória, estatística e probabilidade para o Ensino Fundamental.

Palavras-chave: ensino fundamental; registros de representação semiótica; letramento probabilistico; prática pedagógica.

ABSTRACT

This research had the objective of describing and analyzing a teaching-learning concept of Probability in two classes of the ninth elementary school, in a municipal public school in Salto de Pirapora, in the interior of the State of São Paulo. The acquisition of probabilistic language in learning concept of probability was a motivating factor for the research project. The theoretical contributions of this research involved the records of semiotic representation by Raymond Duval and the literary probabilistic in the perspective of Iddo Gal. The guiding question of the research was: "How are records of semiotic representation mobilized and coordinated in tasks involving the context probabilistic? "A field work was elaborated with activities involving classical and frequentist probability, counting and statistics and a didactic sequence using experiments sample space, probability of simple events, events composites, bar graphs, relative frequency, frequency distribution and the tree diagram. As a teacher-researcher, the production of information originated from activities developed by students in the form of written protocols, in addition to audio records of dialogues that occurred in the correction of activities and records in the logbook. The results of the analysis of the empirical material of the research revealed that the students used different registers of semiotic representation in the resolution of tasks. The mobilization and coordination of these registers support the development of students' probabilistic literacy. Like this work was derived from the analysis of a pedagogical practice, it is expected there are contributions to the teaching practice in content involving combinatorial, statistical and probability for elementary school.

Keywords: elementary school; representation records semiotics; probabilistic literacy, pedagogical practice.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Fachada da escola..46

Figura 2 Probabilidade clássica X probabilidade frequentista X análise combinatória X estatística..56

Figura 3 Probabilidade clássica X probabilidade frequentista X análise combinatória X estatística..56

Figura 4 Probabilidade clássica X probabilidade frequentista X análise combinatória X estatística..58

Figura 5 Probabilidade clássica X probabilidade frequentista X análise combinatória X estatística..58

Figura 6 Probabilidade clássica X probabilidade frequentista X análise combinatória Xestatística..62

Figura 7 Probabilidade clássica X probabilidade frequentista X análise combinatória X estatística..63

Figura 8 Linguagem probabilística X Estatística X Probabilidade clássica X análise combinatória 65

Figura 9 Linguagem probabilística X Estatística X Probabilidade clássica X análise combinatória 66

Figura 10 Linguagem probabilística X Estatística X Probabilidade clássica X análise combinatória..69

Figura 11 Linguagem probabilística X Estatística X Probabilidade clássica X análise combinatória..69

Figura 12 Linguagem probabilística X Estatística X Probabilidade clássica X análise combinatória..70

Figura 13 Linguagem probabilística X Estatística X Probabilidade clássica X análise combinatória..74

Figura 14 Linguagem probabilística X Estatística X Probabilidade clássica X análise combinatória..75

Figura 15 Cartaz dos Passeios Aleatórios da Mônica...77

Figura 16 Passeios Aleatórios da Mônica – seção II...80

Figura 17 Passeios Aleatórios da Mônica – seção II...81

Figura 18 Passeios Aleatórios da Mônica – seção II...84

Figura 19 Passeios Aleatórios da Mônica – seção II...84

Figura 20 Passeios Aleatórios da Mônica – seção III..85

Figura 21 Passeios Aleatórios da Mônica – seçãoIII...86

Figura 22 Passeios Aleatórios da Mônica – seção III 89

Figura 23 Passeios Aleatórios da Mônica – seção III..89

Figura 24 Passeios Aleatórios da Mônica – seção IV...92

Figura 25 Passeios Aleatórios da Mônica – seção IV..93

Figura 26 Passeios Aleatórios da Mônica – seção IV..93

Figura 27 Passeios Aleatórios da Mônica – seção IV..94

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Linguagem probabilística – respostas da atividade 1 a............................50

Tabela 2 - Linguagem probabilística – respostas da atividade 1b 51

Tabela 3 - Linguagem probabilística – respostas da atividade 1c 52

Tabela 4 - Linguagem probabilística – respostas da atividade 1d............................53

Tabela 5 - Linguagem probabilística – respostas da atividade 1e 54

Tabela 6 – Probabilidade clássica x probabilidade frequentista x análise combinatória x estatística – respostas da atividade 2 55

Tabela 7– Probabilidade clássica x probabilidade frequentista x análise combinatória x estatística – respostas da atividade 4 57

Tabela 8 -Probabilidade clássica X probabilidade frequentista X análise combinatória X estatística-respostas da atividade 58

Tabela 9 - Probabilidade clássica X análise combinatória – respostas atividade 7a...60

Tabela 10 - Probabilidade clássica X análise combinatória – respostas atividade 7b...61

Tabela 11 - Probabilidade clássica X análise combinatória – respostas atividade 7c...61

Tabela 12 - Probabilidade clássica X análise combinatória – respostas atividade 7d...64

Tabela 13 - Linguagem probabilística X Estatística X Probabilidade clássica X análise combinatória – respostas da atividade 8b...67

Tabela 14 - Linguagem probabilística X Estatística X Probabilidade clássica X análise combinatória - respostas da atividade 8c..67

Tabela 15 - Linguagem probabilística X Estatística X Probabilidade clássica X análise combinatória - respostas da atividade8d...68

Tabela 16 - Linguagem probabilística X Estatística X Probabilidade clássica X análise combinatória - respostas da atividade 9ª..71

Tabela 17 - Linguagem probabilística X Estatística X Probabilidade clássica X análise combinatória - respostas da atividade 9b...71

Tabela 18 - Linguagem probabilística X Estatística X Probabilidade clássica X análise combinatória - respostas da atividade 9c..72

Tabela 19 - Linguagem probabilística X Estatística X Probabilidade clássica X análise combinatória - resposta**s** da atividade 9d...72

Tabela 20 - Passeios Aleatórios da Mônica –seção 1 – atividade 1ª.........................78

Tabela 21 - Passeios Aleatórios da Mônica –seção 1 – atividade 1d........................79

Tabela 22 - Passeios Aleatórios da Mônica – seção 2...80

Tabela 23 - Passeios Aleatórios da Mônica – seção 2 – atividade 2a.......................81

Tabela 24 - Passeios Aleatórios da Mônica – seção 2 – atividade 2b.......................82

Tabela 25 - Passeios Aleatórios da Mônica – seção 2 – atividade 2c.......................83

Tabela 26 - Passeios Aleatórios da Mônica – seção 3 – atividade 2ª........................87

Tabela 27 - Passeios Aleatórios da Mônica – seção 3 –atividade 3b........................87

Tabela 28 - Passeios Aleatórios da Mônica – seção 3 – atividade 3c.......................88

Tabela 29 - Passeios Aleatórios da Mônica – seção 4 – atividade 4.........................90

Tabela 30 - Passeios Aleatórios da Mônica – seção 4 – atividade 4b.......................91

Sumário

1 INTRODUÇÃO.....15

2 REFERENCIAL TEÓRICO.....19

2.1 O ensino do Tratamento da Informação na educação básica.....19

2.2 Teoria dos registros de representação semiótica.....23

2.3 Desenvolvimento do letramento estatístico e probabilístico.....29

2.4 Análise do livro didático: aspectos complementares.....35

2.5 Um olhar sob a perspectiva acadêmica envolvendo estatística e/ou probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental.....37

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....45

3.1 Contexto escolar.....45

3.2 A dinâmica das aulas.....46

4 ANÁLISE DAS PRODUÇÕES ESCRITAS DOS ALUNOS.....50

4.1 Análise da primeira pesquisa.....50

4.2 Análise da segunda pesquisa.....76

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....95

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....98

1-INTRODUÇÃO

Em 2006 iniciei o curso de licenciatura em matemática na Universidade de Sorocaba (UNISO), concluindo em 2009. No período de 2009 a 2012 ministrei aulas de matemática para o ensino médio na rede pública estadual de ensino no município de Sorocaba. Em maio de 2012, fui aprovado em concurso de professores para o município de Salto de Pirapora, região metropolitana de Sorocaba, e exerço minha atividade profissional lecionando atualmente a disciplina de matemática para turmas do ensino fundamental II.

Com o objetivo de ampliar as possibilidades pedagógicas fundamentando a prática de ensino, conclui em junho de 2016 uma Pós-Graduação Lato Sensu, em nível de Especialização, na área da Educação, em Metodologia do Ensino da Matemática e da Física, com carga horária de 371 horas, na Faculdade de Educação São Luís em Jaboticabal, interior de São Paulo. O Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) envolveu a aplicação de uma sequência didática intitulada Passeios Aleatórios da Mônica. Esta tarefa já foi tema de diversas produções acadêmicas como, por exemplo, Nagamine et al (2011).

De acordo com Nagamine et al. (2011), o conteúdo dessa tarefa envolveu noções elementares da teoria de probabilidades para a Educação Básica, além de propiciar a abordagem da concepção frequentista decorrente da experimentação aleatória, e da probabilidade clássica ou Laplaciana, via diagrama de possibilidades.

A tarefa originalmente é composta de quatro sessões. A primeira sessão compreende a leitura da história e, a partir dela, as percepções prévias de probabilidade por parte dos alunos. A segunda sessão subdivide-se em duas partes, sendo a primeira relativa à experimentação aleatória e, a segunda parte, à organização dos resultados em tabelas e gráficos. A terceira sessão aborda a modelagem matemática a partir da árvore de possibilidades e a respectiva organização dos resultados. A quarta e última sessão compara as diversas formas de atribuir probabilidade, bem como busca analisar as reflexões dos alunos após a realização da pesquisa, com foco no impacto da experimentação aleatória e da modelagem matemática no desenvolvimento dos conceitos probabilísticos. Toda a estrutura da tarefa é norteada pela seguinte questão: todos os amigos têm a mesma chance de ser visitados?

A aplicação desta tarefa no desenvolvimento do referido TCC com meus alunos do nono ano do ensino fundamental da Escola Municipal Professor José Marcello (Salto de Pirapora), despertou interesse na turma empenhada em resolvê-la. Na fase da concepção da probabilidade frequentista os alunos fizeram vários experimentos aleatórios com moedas e na socialização dos resultados, perceberam uma variação nos amigos visitados. Na fase da probabilidade clássica, os alunos construíram a árvore das possibilidades, completaram tabelas e elaboraram gráficos. Na finalização da tarefa os alunos, valendo-se das representações, puderam confrontar as características das duas concepções probabilísticas envolvidas na atividade de probabilidade.

A avaliação da aplicação da tarefa por este professor-pesquisador revelou aspectos de destaque. A previsão inicial do número de aulas para o desenvolvimento da tarefa precisou ser revisto. Outro aspecto diz respeito à apropriação da linguagem probabilística, pois os alunos tiveram muitas dúvidas com as palavras tais como acaso, chance, aleatório, sorte, probabilidade, entre outras.

A aquisição da linguagem probabilística na aprendizagem de conceitos relativos à probabilidade foi um elemento motivador para o projeto de pesquisa que desencadeou nesse relatório da pesquisa da dissertação de mestrado desenvolvida no âmbito Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade Federal de São Carlos.

O ingresso no programa de Pós-Graduação ocorreu em 2014 e com a participação no Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática (GEPLAM) na UFSCar Sorocaba, sob a liderança do professor e orientador desta pesquisa Paulo César Oliveira, houve a possibilidade de estudar teses e dissertações contidas no estado da arte e história da pesquisa em educação estatística brasileira (SANTOS, 2015), bem como expandir esse repertório.

Dentre as pesquisas, destacamos a dissertação de mestrado de Santos (2010) cujo foco foi a investigação sobre as ideias de linguagem e pensamento probabilísticos que os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental apresentavam em um contexto de resolução de problema. Um alerta da autora diz respeito à atenção que precisamos dar às palavras possibilidade e probabilidade,

> as quais muitos alunos compreendem como sinônimas, assinala para uma questão um tanto quanto delicada, pois há uma relação entre os seus significados, porém eles envolvem raciocínios diferentes, combinatório e probabilístico. Tal equívoco, por parte tanto do aluno como do professor, pode relacionar-se ao ensino-aprendizagem da probabilidade. Assim, presumimos, com as evidências constatadas, em relação aos equívocos apresentados, a importância do trabalho concomitante e contínuo com a análise de possibilidades (combinatória), probabilidade e estatística; além disso, cabe uma atenção especial às significações que os alunos dão aos termos probabilísticos (SANTOS, 2010, p.176).

O tratamento da linguagem probabilística em nossa pesquisa foi feito mediante o estudo de um dos elementos do componente cognitivo que compõem o modelo do letramento probabilístico, proposto por Gal (2005). Entre eles, os vários conceitos como aleatoriedade, previsibilidade e certeza, chance, entre outros. Para isto, elaboramos tarefas que valorizaram as habilidades que os estudantes já possuem sobre esses termos utilizados em seu cotidiano.

Uma produção acadêmica envolvendo parte do material empírico dessa dissertação de Mestrado foi apresentada na forma de comunicação científica oral na segunda edição do Simpósio sobre Investigações e Práticas em Educação Matemática (MORAES, OLIVEIRA, 2016). O conteúdo desse artigo envolveu um ensaio de análise sobre a produção escrita de quatorze alunos de uma escola pública de Ensino Fundamental II, envolvidos com uma tarefa de natureza probabilística, cujo conteúdo contemplou a utilização de termos pertinentes à probabilidade.

Outro elemento do componente cognitivo proposto por Gal (2005) e valorizado no planejamento e aplicação de tarefas foram os Cálculos Probabilísticos. Neste contexto, optamos pela teoria dos registros de representação semiótica, dado o pressuposto que a mobilização e coordenação de diferentes tipos desses registros (língua natural materna, figural, simbólico, entre outros) potencializam o estudo do objeto matemático, no caso, a Probabilidade.

A construção do referencial teórico da pesquisa delineou o objetivo da mesma, pautado na análise dos registros escritos e nas interlocuções ocorridas na socialização das atividades matemáticas probabilísticas, desenvolvidas por 34 alunos de duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública.

A análise da produção de informações geradas por esses alunos constituiu no material necessário para a busca de resposta à seguinte questão de investigação: “Como os registros de representação semiótica são mobilizados e coordenados em tarefas envolvendo o contexto probabilístico?” A redação desse relato de pesquisa envolveu seis capítulos, sendo o primeiro deles, a introdução.

O segundo capítulo contemplou, inicialmente, aspectos educacionais sobre o tratamento da informação entendido como um bloco temático que engloba a estatística, combinatória (contagem) e probabilidade, e em seguida os aportes teóricos da pesquisa: os registros de representação semiótica por Raymond Duval e o letramento probabilístico na perspectiva de Iddo Gal, assim como as contribuições da pesquisa acadêmica para o nosso trabalho.

O capítulo 3 tratou do percurso metodológico da pesquisa que contemplou o contexto escolar, os sujeitos da pesquisa, as implicações em termos de aprendizagem quanto ao uso do livro didático em sala de aula, a produção de informações no trabalho de campo e as categorias de análise oriundas dos aportes teóricos da pesquisa.

O capítulo 4 agregou a análise da produção escrita dos alunos e as interlocuções ocorridas em sala de aula.

O capítulo 5 foi composto pelas considerações finais deste relatório de pesquisa. Trata-se de um momento de resgate das intenções deste processo de investigação que culminou em resultados para a busca de respostas à nossa questão de investigação.

No capítulo 6, reservamos neste processo de redação a apresentação das referências bibliográficas que subsidiaram esta pesquisa.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo dedicamos primeiramente a apresentar aspectos curriculares sobre o processo de contagem, estatística e probabilidade. Na sequência abordamos a teoria dos registros de representação semiótica e os níveis cognitivos do letramento probabilístico, tomando por base as interlocuções com o livro didático "Matemática: Imenes & Lellis" que contém o manual do professor (SÃO PAULO, 2012). Por fim, apresentamos a revisão bibliográfica pautada na leitura de teses e dissertações, de modo a posicionar nosso trabalho de pesquisa no cenário acadêmico.

2.1 O ensino do Tratamento da Informação na educação básica

O documento "Agenda para Ação" proposto pelo *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)* na década de 1980, adotou a resolução de problemas como foco da Matemática escolar. No que diz respeito aos conteúdos de Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória nesse documento, Borba et al (2011) sugeriu que se ampliasse o espectro dos conteúdos a serem trabalhados na escolarização básica nos Estados Unidos da América, desde os anos iniciais.

A partir da publicação dos *"Principles and Standards for School Mathematics*" pelo NCTM em 2000, é esperado que os estudantes, ao longo dos 12 anos da educação básica sejam capazes de desenvolver habilidades no que concerne à Análise de Dados e Probabilidade: formular questões que possam ser respondidas por meio de coleta, organização e registro de dados; selecionar e utilizar métodos estatísticos apropriados para a análise de dados; desenvolver e avaliar inferências e predições baseadas em dados e entender e aplicar conceitos básicos de probabilidade (NCTM, 2017).

A difusão da Probabilidade, Análise Combinatória e Estatística em documentos curriculares brasileiros ocorreu inicialmente com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) por meio do bloco temático Tratamento da Informação (BRASIL, 1998) e, posteriormente com o bloco de conteúdos Análise de dados, publicado nas orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2002).

Especificamente para os anos finais do Ensino Fundamental, nos PCN é recomendável que os alunos possam aprender sobre coleta, organização e descrição de dados; leitura e interpretação de dados apresentados de maneira organizada (listas, tabelas, diagramas e gráficos) e construções dessas representações; identificação de características previsíveis ou aleatórias de acontecimentos; produção de textos escritos, interpretação de gráficos e tabelas; construções de gráficos e tabelas com base em informações contidas em textos jornalísticos, científicos ou outros; obtenção e interpretação de uma média aritmética; exploração da ideia de probabilidade em situações problemas simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de sorte; utilização de informações dadas para avaliar probabilidades e identificação de possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais (BRASIL, 1998).

Em nosso país têm ocorrido ações envolvendo debates sobre o ensino e/ou aprendizagem de Estatística e Probabilidade, como foi o caso *da International Conference on Teaching Statistics (ICOTS)* que acontece a cada quatro anos em diferentes locais do mundo e, em 2006, ocorreu a sétima edição em Salvador, a capital baiana. O objetivo principal deste evento foi o de promover a oportunidade para os educadores e profissionais de estatística de todo o mundo trocarem informações, ideias e experiências; discutirem as mais recentes inovações e pesquisas no campo do ensino de estatística; e expandirem a rede de contato entre os educadores.

A Sociedade Brasileira de Educação Matemática atualmente conta com quinze Grupos de Trabalho (GT), sendo o décimo segundo, (GT12 - Ensino de Probabilidade e Estatística), criado em 2000. Nele encontra-se pesquisadores brasileiros que atuam na área de Educação Estatística, sendo que o grupo tem como objetivo estudar e compreender como as pessoas ensinam e aprendem Estatística, o que envolve os aspectos cognitivos e afetivos do ensino-aprendizagem, além da epistemologia dos conceitos estatísticos e o desenvolvimento de métodos e materiais de ensino, visando o desenvolvimento do letramento estatístico. Para tal, a Educação Estatística utiliza-se de recursos teórico-metodológicos de outras áreas, como Educação Matemática, Psicologia, Pedagogia, Filosofia e Matemática, além da própria Estatística.

Os pesquisadores do GT12 reúnem-se trienalmente nos Seminários Internacionais de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) que têm acontecido em diversos Estados do país. A sexta e última edição ocorreu em 2015.

No contexto europeu o ensino de Probabilidade e o da Estatística apresentam-se interligados e tratados por um termo específico, que é chamado de Estocástica. “Estatística e Probabilidade são duas faces de uma mesma moeda, então preferimos falar de Estocástica” (BATANERO, 2001, p.134).

Para visualizar um ensino e aprendizagem estocástica que também seja efetivo na formação de professores, Lopes (2008, p.70) fez várias prescrições. Dentre elas, destacamos que “ao estudar probabilidade e chance os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e aleatoriedade, que aparecem nas nossas vidas diariamente, particularmente na mídia”. De acordo com Azcárate (1998, p.93), a incerteza diz respeito à ocorrência dos eventos, ou seja, “sucessos que podem ou não ocorrer, sem maior análise das características do fenômeno” probabilístico. O termo chance é uma grandeza que atribuímos um grau de confiança sobre a ocorrência de determinado evento e a probabilidade é a medida desta grandeza.

Resultados de pesquisa difundidos por Pietropaolo, Silva e Campos (2015) na forma de um capítulo do livro intitulado “Conhecimentos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental”, obtidos a partir do Observatório da Educação (projeto de formação e pesquisa financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES) envolvendo 23 professores de rede pública, apontaram que os docentes não estão sequer convencidos de que a probabilidade seja importante para ser desenvolvida no Ensino Médio quanto no Ensino Fundamental II. Estes sujeitos da pesquisa têm uma posição ainda mais restritiva; consideram a inclusão desse tema totalmente inadequada e desnecessária.

Pietropaolo, Silva e Campos (2015) apontou uma situação que se opõe às orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> (...) com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. (BRASIL, 1998, p52).

É frequente o tema Probabilidade não ser estudado no Ensino Fundamental e Médio e, quando é abordado, reduzir-se à resolução mecânica de exercícios padrões na qual é suficiente aplicar uma fórmula. Entretanto, parece consenso, que a presença de fenômenos imprevisíveis em seus resultados ou manifestações é algo que faz parte do cotidiano do ser humano em suas múltiplas relações e interações (CARVALHO; OLIVEIRA, 2002).

Em termos de educação básica a dissertação de mestrado desenvolvida por Santos (2010, p.11), com o título “O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do ensino fundamental”, revelou que o movimento de ideias probabilísticas “depende, e muito, das ações didáticas que necessitam ser realizadas com os alunos, nas escolas, uma vez que pouca ou nenhuma experiência probabilística é vivenciada e/ou observada por eles, sem que haja uma intervenção”.

A mesma autora em sua tese de doutorado, “A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora”, orientou que o processo de intencionalidade do professor no desenvolvimento e movimento de conceitos de combinatória e probabilidade produzidos “em sala de aula requer certo conhecimento pedagógico por parte do professor” (SANTOS, 2015, p.167). Em nossa pesquisa de mestrado levamos em conta os trabalhos de mestrado e doutorado realizado por Santos (2010, 2015) e acatamos uma sugestão de questão de investigação publicada em sua dissertação, cuja formulação original foi alterada para “como os registros de representação semiótica são mobilizados e coordenados em tarefas envolvendo o conceito probabilístico”.

No que diz respeito à palavra “ideias” dos alunos, fizemos a análise com base na mobilização e coordenação de registros de representação semiótica e no desenvolvimento do letramento probabilístico. Esses aportes teóricos serão apresentados nas seções posteriores deste capítulo.

2.2 Teoria dos registros de representação semiótica

As contribuições de Raymond Duval para o estudo dos temas de estatística e probabilidade na educação básica tem sido foco de algumas produções acadêmicas no contexto do GEPLAM (Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática), como foi o caso da recente dissertação defendida por Custódio (2017) intitulada “Letramento Probabilístico: um olhar sobre as situações de aprendizagem do Caderno do Professor”. Essa pesquisa teve por objetivo avaliar o conceito de probabilidade por meio da diversidade de registros de representação semiótica dispostos no enunciado das tarefas (situações de aprendizagem) contidas no segundo volume do Caderno do Professor para a segunda série do ensino médio e, suas possíveis contribuições para o desenvolvimento do letramento probabilístico.

Nesta seção do capítulo, apresentamos a teoria dos registros de representação semiótica, a partir do que significa fazer e aprender matemática do ponto de vista cognitivo, em pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, sob a perspectiva de Duval (2016). No decorrer dos conceitos abordados, no contexto desta teoria, recorremos aos problemas contidos no livro didático do 9º ano do Ensino Fundamental “Matemática: Imenes & Lellis” (SÃO PAULO, 2012) utilizado em nossas aulas para estabelecer interlocuções com os registros de representação semiótica.

Duval (2016, p.3) parte da premissa que “fazer matemática requer compreensão em matemática”. Para responder o que significa fazer e aprender matemática do ponto de vista cognitivo, esse autor introduziu noção de registro de representação semiótica. A manifestação desta noção, segundo Duval (2016), surgiu da análise do ponto de vista cognitivo do aluno na atividade e no pensamento matemático desenvolvido em resolução de problemas.

Para analisar o pensamento e a atividade matemática desenvolvida pelos alunos foi necessário considerar três características: “essas produções são semióticas, representações de objetos que não são acessíveis perceptivamente, mas apenas semioticamente”. Além disso, “temos de introduzir a noção de ‘registro’, um sistema semiótico cujo poder para criar novas representações semióticas é ilimitado” (DUVAL, 2016, p.4).

Tomando por base o livro didático “Matemática: Imenes & Lellis” que contém o manual do professor (SÃO PAULO, 2012), extraímos a tarefa 30 envolvendo um contexto estatístico para o 9º ano do Ensino Fundamental para exemplificar uma forma de representação semiótica para o objeto estatístico estimativa de uma população.

> Para preservar as espécies animais, é necessário controlar sua população. E como calcular, por exemplo, a população de micos-leões-de-cara-dourada de uma floresta?
> Um método estatístico usado nesse caso é:
> *capturam-se alguns exemplares (suponha 60);
> *todos eles são marcados (com alguma tinta não tóxica, por exemplo);
> *depois, eles são soltos e, após certo tempo, faz-se uma nova captura (suponha 60 outra vez).
> Agora é com você: se, na segunda captura, 14 dos 60 micos-leões-de-cara-dourada estavam marcados, qual é, aproximadamente, a população desses animais? (SÃO PAULO, 2012, p.113)

O problema está enunciado na forma de um registro de língua natural cuja resolução demanda uma mudança de registro (conversão) transcrita a seguir: “Resolve-se a equação 60/x = 14/60 obtendo-se x = 257” (SÃO PAULO, 2012, p.113)

A resolução levou em conta um sistema semiótico simbólico cuja representação semiótica utilizada foi a algébrica, a partir da resolução do algoritmo da regra de três elaborado para grandezas diretamente proporcionais.

A noção de registro se impõe quando se trata de ensinar matemática, pois é desejável que os jovens atinjam uma “plena autonomia intelectual e, desse jeito, a uma plena confiança em suas capacidades não só de resolver problemas, mas de propô-los” (DUVAL, 2016, p.15). Há três razões para esta imposição:

a) o estudo da atividade matemática sob o ponto de vista epistemológico. Os objetos matemáticos são unicamente acessíveis por meio da produção de representações semióticas;
b) o estudo da atividade matemática sob o ponto de vista cognitivo. A análise cognitiva da atividade matemática é a análise de todas as mudanças de

registro (conversão) que são constantemente requisitadas explícita ou implicitamente para que se possa compreender matemática;

c) equívoco didático da linguagem em sala de aula. De acordo com Duval (2016, p.19) há duas utilizações contrárias da língua natural como registro de representação semiótica. "Para perceber isso é preciso lembrar que a língua natural é um sistema semiótico, e não um vocabulário e regras sintáticas". Uma é a sua utilização comum e espontânea para fins de comunicação oral em sala de aula envolvendo alunos e professor em diferentes fases de uma sequência de atividades. A outra é a sua utilização matemática para fins de tratamento nas produções escritas para formular definições, para deduzir, a partir de propriedades dadas de outras propriedades utilizando teoremas, entre outros casos. Neste caso, na matemática, a linguagem natural é geralmente utilizada em cooperação cognitiva com outro registro de representação, mesmo quando as explicações e os raciocínios são encaminhados em língua natural. Apresentamos a seguir um problema do livro "Matemática: Imenes & Lellis" para o 9º ano do Ensino Fundamental que exemplifica a situação que acabamos de abordar:

> Na loteria conhecida como Mega Sena, a probabilidade de um apostador fazer a sena (isto é, acertar os seis números sorteados) com apenas uma aposta, é aproximadamente 1/50.000.000. Se você lançar uma moeda 20 vezes seguidas, a chance de todas as vezes o resultado ser cara é aproximadamente 1/1.000.000.
>
> a) É mais fácil ganhar na Mega Sena com uma aposta ou obter cara 20 vezes em 20 lançamentos?
>
> b) É verdade que a probabilidade de ganhar na Mega Sena com uma com uma só aposta é 50 vezes a probabilidade de obter cara 20 vezes em 20 lançamentos? Se não é verdade, qual é a relação entre as probabilidades citadas? (SÃO PAULO, 2012, p.114)

A resposta dos dois itens deste problema envolve um tratamento que é uma transformação de representação interna a um registro, no caso a língua natural como registro de partida e de chegada. No entanto, neste problema a linguagem natural é utilizada em cooperação cognitiva com o registro numérico, no momento de comparar as duas frações que expressam as referidas probabilidades.

Na lateral desse livro didático, os autores apresentam a seguinte resolução para o problema:

> Um dos objetivos dessa questão simples é mostrar como é difícil ganhar na loteria mais popular do país.
> a) É mais fácil obter ***cara*** 20 vezes em 20 lançamentos.
> b) A probabilidade de obter ***cara*** 20 vezes em 20 lançamentos é, aproximadamente, 50 vezes a de ganhar na Mega Sena com uma só aposta. (negrito e itálico dos autores) (SÃO PAULO, 2012, p.114)

Um sistema semiótico para ser considerado um registro de representação semiótica, ele deve admitir três atividades cognitivas: a formação, o tratamento e a conversão. Em termos de formação as representações em um registro semiótico não são somente meios para evocar um objeto real, mas também para exprimir uma representação mental. As duas outras atividades cognitivas fundamentais de representação ligadas à semiósis (capacidade de absorção ou produção de uma representação semiótica de um objeto) são o tratamento que consiste em "transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação as representações iniciais" (DUVAL, 2009, p.36-37) e a conversão das "representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira, que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado" (DUVAL, 2009, p.37).

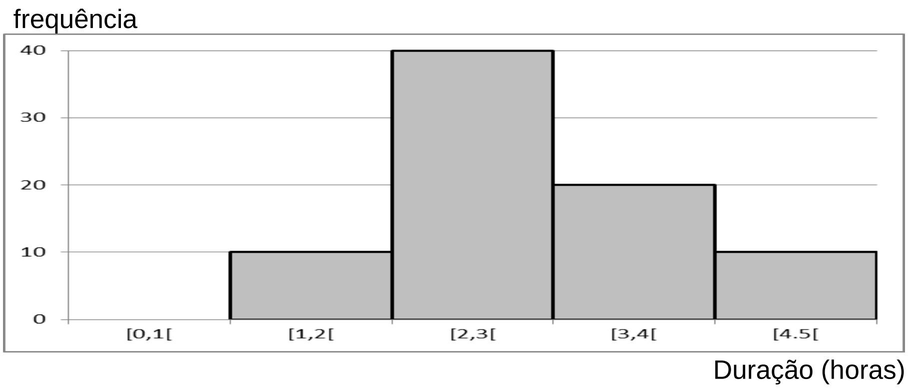
As conversões, na perspectiva de Duval (2009), podem se apresentar de duas formas: como conversões congruentes ou como conversões não congruentes. Para verificar a congruência de uma conversão, devem ser analisados três critérios:

a) a possibilidade de uma correspondência semântica entre os elementos significantes, dada a partir da associação de cada unidade do significante da representação de partida com cada unidade do significante da representação de chegada;

b) a univocidade semântica é dada quando cada unidade significante da representação de saída corresponde a uma só unidade significante do registro de chegada;

c) a ordem dentro da organização das unidades de composição de cada uma das duas representações, ou seja, a mesma arrumação das unidades quando as representações são comparadas.

A seguir apresentamos um problema envolvendo gráfico estatístico do livro didático "Matemática: Imenes & Lellis" para o 9º ano do Ensino Fundamental, sobre o qual a congruência de uma conversão satisfaz os três critérios citados.

> A duração das pilhas elétricas de certa fábrica era desconhecida. Por isso, uma amostra da produção foi testada. O gráfico mostra as frequências das durações, ou seja, quantas pilhas duram de 0 até 1 hora, quantas duram de 1 até 2 horas etc. A indicação [1,2[significa uma duração de 1 hora até 1h59min (exclui-se a duração de 2h); as outras indicações são similares.
>
> 
>
>
> Qual das sentenças está de acordo com o gráfico?
> a) A maioria dessas pilhas dura 2 horas ou mais.
> b) A probabilidade de uma dessas pilhas durar 3 horas ou mais é desprezível.
> c) É muito provável essas pilhas durarem menos que 30 minutos.
> d) Cerca de 3 ou 4 pilhas duraram 40 minutos.
> e) A produção dessas pilhas vem diminuindo. (SÃO PAULO, 2012, p.117)

Nesta tarefa cada unidade do significante da representação de partida (intervalos de duração das pilhas) corresponde com uma única unidade do significante da representação de chegada (frequência de duração das pilhas), dada a ordem de disposição de cada intervalo de duração no eixo horizontal do gráfico.

A transparência entre o registro de representação final e inicial contribui no custo cognitivo da atividade mental requerida do aluno que, nesse caso, restringe a interpretação das informações contidas no gráfico.

O exemplo a seguir diz respeito ao fenômeno de não-congruência. Trata-se do problema 19 extraído do livro didático "Matemática: Imenes & Lellis" para o 9º ano do Ensino Fundamental:

> Dentro de um saco há 3 bolas pretas, 5 bolas brancas e 10 bolas amarelas. As bolas são iguais em tudo, exceto na cor. Vou sortear uma bola sem olhar, ao acaso.
> a) Qual a probabilidade de a primeira bola sorteada ser preta?
> b) E a probabilidade de ser branca?
> c) E a probabilidade de não ser amarela?
> d) E a de ser branca ou preta? (SÃO PAULO, 2012, p.107)

A medida da probabilidade, dada a ocorrência de determinado evento aleatório (esse livro didático não aborda a aleatoriedade), segundo Imenes e Lellis, deve considerar que “ se existem várias possibilidades, todas com mesma chance de ocorrer, a probabilidade de ocorrer uma ou mais possibilidades é dada pela razão: (número de casos favoráveis)/(número total de possibilidades)” (SÃO PAULO, 2012, p.102)

Os três critérios de congruência não são satisfeitos quando deparamos com a resolução de cada item do problema. Para o cálculo da probabilidade é necessário obter o número total de possibilidades que no caso, diz respeito à soma do número de bolas de cada cor, totalizando 18 bolas.

No item ‘a’, não há possibilidade de uma correspondência semântica entre os elementos significantes, pois a unidade do significante da representação de partida (3 bolas pretas) não corresponde semanticamente a unidade do significante da representação de chegada que é expressa pela razão 3/18 = 1/6. O mesmo ocorre com o item ‘b’, cuja resposta esperada é 5/18.

Já para o item ‘c’ destacamos a ausência da conservação da univocidade semântica terminal, uma vez que a expressão “não ser amarela” (unidade significante da representação de saída) corresponde às cores pretas e brancas (unidade significante da representação de chegada).

O mesmo problema ocorre com o item ‘d’, pois a expressão “ser branca ou preta” (unidade significante da representação de saída) associa-se à união de eventos, cujo cálculo de probabilidade envolve a soma de cada uma das probabilidades de cada cor de bola, gerando como resposta 3/18+5/18 = 8/18 = 2/9 (unidade significante da representação de chegada).

Para o estudo da probabilidade é desejável a mobilização e coordenação do registro da língua natural materna (conteúdos dos enunciados ou abordagem de termos probabilísticos), registro figural (tabela de dupla entrada ou de contingência, além do diagrama de árvore) e registro simbólico na forma algébrica (uso de fórmulas) ou numérica (cálculo da probabilidade). Estudos feitos como na dissertação “Letramento probabilístico: um olhar sobre as Situações de Aprendizagem do Caderno do Professor”, que envolveu a análise das tarefas sobre o tema Probabilidade contidas no material de apoio (Caderno do Professor) ao Currículo do Estado de São Paulo para a 2ª série do Ensino Médio, desenvolvida por Custódio (2016), revelou que a conversão do registro na língua natural para o registro numérico, em detrimento do uso de outros registros de representação semiótica como o registro figural na forma do diagrama de árvore, foi decorrente da ausência de conexões entre o raciocínio combinatório e probabilístico.

A ausência de tarefas que poderiam exigir o tratamento do registro de língua natural em tarefas envolvendo o uso do vocabulário próprio da probabilidade (chance, aleatório, provável, entre outros termos), segundo Custódio (2016) também comprometeu a aquisição da linguagem probabilística.

O uso do registro gráfico no estudo da probabilidade é um recurso de representação semiótica que pode promover conexões com a estatística e a análise combinatória, contribuindo para o desenvolvimento do letramento estatístico no que diz respeito à leitura e interpretação das informações obtidas em pesquisas estatísticas (CUSTÓDIO, 2016).

Custódio (2016) recomendou que a mobilização e coordenação desses registros de representação semiótica, podem promover conexões entre combinatória (contagem), estatística e probabilidade, contribuindo no desenvolvimento do letramento probabilístico e estatístico dos estudantes.

No planejamento e aplicação das tarefas no decorrer do percurso metodológico da nossa pesquisa com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, acatamos as recomendações de Custódio (2016) para avaliar as ideias apresentadas pelos alunos em suas atividades envolvendo as referidas conexões.

A seguir apresentamos como estamos concebendo o letramento, em especial o probabilístico e estatístico sob a perspectiva do Iddo Gal (2002, 2005, 2012).

2.3 Desenvolvimento do letramento estatístico e probabilístico

Antes de abordamos o letramento no contexto estocástico (termo europeu que contempla as inter-relações entre a estatística e probabilidade), é importante apresentarmos formalmente o conceito de letramento.

Kleiman (2005, p.19) apresenta de forma suscinta que “o letramento está relacionado com os usos da escrita em sociedade e com o impacto da língua escrita na vida moderna”. Para complementar esta definição, a autora apresenta em seu livro “Preciso ensinar letramento? Não basta ensinar a ler e escrever?”, o surgimento do conceito até suas contribuições para o ensino da língua escrita, em geral, e da leitura, em particular. Neste percurso, Kleiman (2005, p.22) relata-nos que emergiu na literatura especializada o termo letramento como práticas sociais de uso da escrita, as quais refletiam “nas transformações das práticas letradas tanto dentro quanto fora da escola, lembrando que aí estão incluídas as tecnologias da escrita”, como o acesso a internet.

Para ampliar nosso conhecimento sobre letramento buscamos a contribuição em Fiorentini (2009), que é por ele enfatizada.

> [...]exploração, na prática escolar, de textos ou informações veiculados por diferentes mídias e que contemplam diferentes práticas sociais, tais como jornais, revistas, livros, internert , catálogos, panfletos, propagandas, contratos, orientações e informações sobre produtos e equipamentos. Essas orientações e informações geralmente demandam conhecimentos científicos, matemáticos[...] (FIORENTINI, 2009, p.11)

Em todas as esferas da vida, dispomos e mobilizamos diferentes práticas de letramentos para que possamos interagir e sobreviver. Na escola há prioritariamente a preocupação com um tipo de prática de letramento, a alfabetização, ou seja, o processo de aquisição de códigos (alfabético, numérico), geralmente concebido em termos de uma competência individual necessária para o sucesso e promoção na escola (KLEIMAN, 1995). Porém nessa instituição, formada por sujeitos com suas identidades individuais compondo um coletivo, outros tipos de práticas de letramento também emergem.

Essa multiplicidade de práticas são constituintes, não somente de um tipo de letramento, mas sim de “letramentos”. Nesse sentido, apoiamos em Buzato (2007, p.153), sobretudo quando este autor defende que “letramentos são práticas sociais, plurais e situadas, que combinam oralidade e escrita de formas diferentes em eventos de natureza diferente, e cujos efeitos ou consequências são condicionados pelo tipo de prática e pelas finalidades específicas a que se destinam[...]".

Inserir o sujeito em um mundo letrado, que também é matematicamente letrado, é propiciar que ele "desenvolva saberes e práticas de leitura, escrita e interpretação e tratamento crítico da informação – com compreensão e sentido para si e para a sua vida social e cultural com os outros e com o mundo" (FIORENTINI, 2009, p.11).

Nesse mundo letrado, vamos abordar as especificidades de tratamento do letramento estatístico e probabilístico, mais especificamente para os anos finais do Ensino Fundamental.

Para que o aluno possa desenvolver saberes e práticas de leitura, escrita e interpretação e tratamento crítico da informação, fatores como o conhecimento prévio que o estudante já detém, como um grau de vocabulário pertinente à linguagem probabilística, afetam a forma de julgamento quando se trata de fenômenos aleatórios. Com relação ao letramento probabilístico, Gal (2005, 2012) afirmou que os estudantes devem se familiarizar com as diferentes formas de cálculo da probabilidade de um evento, para que, desta maneira, possam entender as afirmações probabilísticas feitas por outras pessoas, gerar estimativas sobre a probabilidade de eventos e ter condições de se comunicar adequadamente.

Nestas condições, para avaliar se um aluno atingiu o letramento probabilístico, Gal (2005) propôs um modelo composto por elementos cognitivos e de disposição (atitudes do estudante em relação ao conhecimento: criticidade, crenças e atitudes e sentimentos pessoais).

Em nossa pesquisa valorizamos a análise dos elementos cognitivos pelo fato de partimos da análise da mobilização e coordenação dos registros de representação semiótica como forma de contribuir no desenvolvimento desse tipo de letramento:

Quadro 1: Elementos Cognitivos do modelo de Iddo Gal

Grandes Ideias: variação, aleatoriedade, independência, previsibilidade e incerteza.
Cálculos Probabilísticos: formas de encontrar ou estimar a probabilidade de

eventos.
Linguagem: Os termos e os métodos utilizados para comunicar resultados probabilísticos.
Contexto: compreensão do papel e dos significados de mensagens probabilísticas em diferentes contextos.
Questões críticas: reflexões sobre assuntos no contexto de Probabilidade.

Fonte: Gal (2005, p.51, tradução nossa)

Assim como recorremos aos problemas contidos no livro didático do 9º ano do Ensino Fundamental “Matemática: Imenes & Lellis” (SÃO PAULO, 2012) para discutir registros de representação semiótica, de forma semelhante, vamos discutir sobre o conteúdo dos elementos cognitivos propostos por Iddo Gal. Apresentamos a seguir lacunas que julgamos relevantes para a aprendizagem da probabilidade e suas conexões com a estatística, levando em conta o que já foi analisado dos quatro volumes (6º ao 9º ano) desse livro didático, por Soares (2014) em sua tese de doutorado intitulada ‘Uma análise sobre as atividades de probabilidade propostas nos livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental’.

A abordagem de grandes ideias corresponde à apropriação de tópicos fundamentais para a compreensão do conceito de probabilidade. Em relação ao conceito de aleatoriedade concordamos com Soares (2014, p. 101), no livro didático ‘Matemática: Imenes & Lellis’ não há prioridade em discutir aleatoriedade, “talvez por a considerarem um conceito óbvio, que não requer análise nesse estágio do ensino” (anos finais do Ensino Fundamental).

De acordo com Lopes (2003, p.74), “a aleatoriedade refere-se sempre ao que é incerto, ao que depende da sorte ou do azar. E este último é a suposta causa dos sucessos não devidos a uma necessidade natural, a uma intervenção, humana ou divina, intencionada”. Nessa situação, defrontamos com o fenômeno da imprevisibilidade, fundamental na ideia de aleatoriedade, cuja chance de ocorrência de um evento aleatório oscila em uma escala do menos ao mais provável, tomando por base os extremos: evento certo e impossível.

Em relação aos cálculos probabilísticos, em particular no volume do 9º ano do livro didático ‘Matemática: Imenes & Lellis’, concordamos com Soares (2014) que as formas de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos foram feitas via concepção clássica (dado um evento aleatório em que todas as possibilidades têm a mesma chance de ocorrência, a probabilidade é expressa como a razão entre o número de possibilidades de ocorrência do evento e o número total de possibilidades) e frequentista (a probabilidade é estimada por meios estatísticos, ou seja, pela frequência de ocorrência de determinada evento, mantida as mesmas condições de realização do experimento).

O terceiro elemento refere-se ao domínio da linguagem probabilística. Destacamos que no capítulo 5 do livro didático 'Matemática: Imenes & Lellis' para o 9º ano, na seção 'Para começar bem', destacamos o seguinte fragmento de texto: "vamos recordar apenas duas situações relativas à noção de **chance.** (Em matemática, prefere-se dizer **probabilidade** em vez de chance)." (grifos dos autores do livro didático) (SÃO PAULO, 2012). Os autores desse livro didático apoiam-se na matemática para tratar probabilidade e chance como palavras sinônimas. No nosso caso, especificamente na seção 2.1, no que diz respeito à apropriação da linguagem probabilística, estamos tratando o termo chance como uma grandeza que atribuímos um grau de confiança sobre a ocorrência de determinado evento e a probabilidade a medida desta grandeza.

Gal (2005, 2012) recomendou que conexões entre os elementos cognitivos 'grandes ideias' e 'linguagem' contribuem significativamente para que os alunos possam representar e comunicar resultados probabilísticos adequadamente. Na dissertação de Mestrado e tese de Doutorado de Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos (2010, 2015), no que tange à reflexão e a apropriação da linguagem probabilística em alunos de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, percebeu dentre outros resultados, que os alunos possuem a ideia de que os termos probabilísticos expressam as chances dos acontecimentos a eles relacionados e que alguns desses termos exprimem valores quantitativos exatos da probabilidade envolvida, como, as palavras 'impossível', 'certo', 'sem-dúvida'. Por outro lado, palavras como 'pode ser', 'se espera que' exprimem valores mais flexíveis de probabilidade.

O quarto elemento do modelo de Gal (2005, 2012) refere-se ao contexto em que as mensagens probabilísticas se apresentam. Em relação ao livro didático 'Matemática: Imenes & Lellis' para o 9º ano, concordamos com Soares (2014, p.100), que o tratamento da probabilidade ocorre com "bons contextos para desenvolver os conceitos de amostra e população e para fazer previsões". A seguir, destacamos um problema ilustrativo desta avaliação sobre um bom contexto:

> Um novo remédio foi testado estatisticamente da seguinte maneira:
> *100 pessoas tomaram o remédio, das quais 42 obtiveram melhora dos sintomas;
> *100 pessoas tomaram pílulas de farinha, embora pensassem que estavam tomando o remédio; dessas pessoas, 39 obtiveram melhora em seus sintomas.
> De acordo com esses dados, você diria que o remédio é eficaz? Escreva algumas linhas dando sua opinião, justificando-a com base na probabilidade de uma pessoa melhorar tomando ou não o remédio. (SÃO PAULO, 2012, p.108)

O bom contexto justifica-se pelo fato de que a probabilidade está interligada à estatística, por meio da constituição de uma amostra. Na lateral da p.108 do referido livro didático, destacamos o que os autores almejam em termos de competências e habilidades para redigir a resposta:

> Embora a resposta seja pessoal, espera-se aqui um pouco de bom-senso. A probabilidade de melhorar com o remédio é 42% e sem o remédio é 39%. A diferença é tão pequena que não se pode ter certeza da eficácia do remédio. (SÃO PAULO, 2012, p.108)

Finalmente, as questões críticas (último elemento cognitivo) envolvem especialmente a emissão de julgamentos por parte dos alunos em problemas relacionados com o contexto do conceito de probabilidade. O livro didático 'Matemática: Imenes & Lellis' para o 9º ano faz uma abordagem interessante sobre pesquisa estatística promovendo discussões relevantes sobre população e amostra. Extraímos deste material um conjunto de informações que instiga questões sobre os cuidados para não gerar uma amostra viciada.

A seção denominada 'Estatística' iniciou-se com um contexto em que a crença é desmentida pela estatística: os adolescentes consideram "seus pais ultrapassados, injustos e carentes" (SÃO PAULO, 2012, p.108). Um estudo realizado por Tania Zagury com 943 estudantes de ambos os sexos, com idades entre 14 e 18 anos, de várias regiões do Brasil e de diferentes grupos econômicos. A partir dos resultados obtidos pelas respostas de 104 questões aplicadas a cada um desses alunos, essa pesquisadora revelou que "mais de 80% dos adolescentes acham que seus pais os respeitam (mesmo quando são preocupados demais). (...) Será que é seu caso também? Será o caso de sua turma de 9º ano?” (SÃO PAULO, 2012, p.109).

Os autores desse livro didático propuseram reaplicar a pesquisa de Tania Zagury com os alunos de determinada turma de 9º ano do Ensino Fundamental. O objetivo desta tarefa foi verificar

> [...] se há razoável concordância entre os dados obtidos por Tania Zagury e os dados obtidos em sala de aula. Não há certeza de que isto aconteça, porque os integrantes de uma turma escolar normalmente pertencem a um mesmo grupo social, habitam bairros de uma mesma região, em suma, têm características sociais, econômicas e culturais similares, o que torna uma **amostra viciada,** que pode se afastar da média nacional. (grifos dos autores) (SÃO PAULO, 2012, p.112).

Apesar de abordarmos cada elemento cognitivo separadamente, Gal (2005, 2012) esclarece que o desenvolvimento do letramento probabilístico é dinâmico e depende das conexões entre os seus diversos elementos.

Dedicamos na próxima seção complementar a análise do livro didático “Matemática: Imenes & Lellis”, para o 9º ano do Ensino Fundamental, destacando aspectos para além ou não daquilo que já relacionamos com os aportes teóricos descritos, ou seja, os registros de representação semiótica e o letramento probabilístico.

2.4 Análise do livro didático: aspectos complementares

Os quatro volumes do livro didático “Matemática Imenes & Lellis” voltado para os anos finais do Ensino Fundamental, dos autores Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis da Editora Moderna, de acordo com o Programa Nacional do Livro Didático de 2014, caracteriza-se pela abordagem equilibrada de conceitos, algoritmos e procedimentos e por favorecer o desenvolvimento da autonomia intelectual dos alunos. Sua linguagem é clara e a apresentação dos conteúdos é acompanhada por justificativas acessíveis aos alunos (BRASIL, 2013).

Especificamente, em relação ao capítulo 5, intitulado de “Estatística, chances e possibilidades”, o mesmo foi dividido em três etapas de abordagem dos conteúdos: a primeira “Contando Possibilidades”, a segunda “Probabilidade ou Chance” e a terceira “Estatística”. No decorrer desse capítulo, são oferecidos 38 problemas e 11 supertestes.

A primeira etapa “Contando Possibilidades”, iniciou com o seguinte exemplo: “Imagine bandeiras com 4 faixas horizontais, cada uma com uma cor, escolhida entre amarelo, azul, vermelho e cinza. Sem repetir nenhuma cor, quantas bandeiras diferentes podem ser desenhadas?” (SÃO PAULO, 2012, p.97) Para a resolução , primeiramente, foi utilizada a árvore de possibilidades e o raciocínio multiplicativo. Esta etapa contêm 12 problemas, porém nenhum deles estabelece conexões com a probabilidade.

A segunda etapa “Probabilidade ou Chance” envolveu os seguintes tópicos:

a) Abordagem de eventos equiprováveis, ou seja, aqueles em que todos os elementos têm a mesma chance de serem sorteados. Foi apresentado o seguinte exemplo: “Imagine que você lance dois dados honestos. Qual é a probabilidade de se obter o número 6 em ambos os dados?” (SÃO PAULO, 2012, p.103). Nessa concepção de probabilidade (clássica) também é comum o seu cálculo como a razão entre o número de casos favoráveis pelo número total de possibilidades, envolvendo outros objetos fisicamente simetrizáveis como o lançamento de moeda, extração de cartas de um baralho e extração de bolas idênticas, exceto na cor;
b) Cálculo de probabilidade com base em informações estatísticas. Neste caso, é apresentado no livro um exemplo envolvendo a probabilidade de furto de veículos que é utilizado pelas seguradoras para definir o preço dos seguros de veículos;
c) Cálculo da probabilidade frequentista, ou seja, uma probabilidade obtida pela análise da frequência de ocorrência de determinado evento. No livro há exemplos desta concepção probabilística no qual é preservada a equiprobabilidade na realização do experimento:

> Lance um dado 24 vezes e anote quantas vezes foram obtidos 5 pontos. Calcule a chance estatística de obter 5 (isto é, a razão entre o número de sucessos e o número de lançamentos), compare com a chance teórica e escreva suas conclusões.
> Agora; lance um dado 60 vezes e refaça as comparações. O aumento no número de lançamentos aproximou a chance estatística da chance teórica? Registre suas conclusões. (SÃO PAULO, 2012, p.105)

Ainda com relação ao lançamento de um dado, é proposto outro experimento no qual se rompe a equiprobabilidade, ou seja, a chance não é igual para todos os resultados:

> Cole pedacinhos de fita adesiva sobre a face que marca 5 pontos, causando uma saliência **bem sensível** sobre ela. Essa modificação deve alterar as chances de todos os resultados. Em particular, a chance teórica e se obter 5 torna-se desconhecida. Ela será obtida experimentalmente: faça 60 lançamentos e tire suas conclusões. (SÃO PAULO, 2012, p.105)

Vale lembrar que já abordamos o fato dos autores do livro didático utilizarem a palavra chance como sinônimo de probabilidade. Neste sentido, o termo ‘chance estatística’ diz respeito à probabilidade frequentista e a ‘chance teórica’ diz respeito à probabilidade clássica.

Essa etapa do capítulo 5 do livro didático contém 15 problemas, envolvendo baralhos, dados honestos, saco com bolas, senhas bancárias, informações estatísticas e moedas. Nesse conjunto de problemas há conexões entre os processos de contagem inclusive com o incentivo de trabalhar o diagrama de árvores, os cálculos probabilísticos e a estatística.

Na última etapa intitulada ‘Estatística’ foi abordada a definição de população, amostra, amostra viciada e discussões sobre a confiabilidade das pesquisas estatísticas. São disponibilizados 10 problemas cujo conteúdo contempla pesquisas eleitorais, preferência por canais de TV, população de animais em uma floresta, jogos de azar (megasena), durabilidade de pilhas, estimativa do número de árvores em um bosque. Destes problemas, oito envolveram a utilização de amostras estatísticas e dois problemas demandaram o cálculo de probabilidade a partir do relato de dois experimentos aleatórios.

2.5 Um olhar sobre a pesquisa acadêmica envolvendo estatística e/ou probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental.

No que tange às teses e dissertações, o estado da arte realizado por Santos (2015), a partir do Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior (CAPES), da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e do acervo de currículos da Plataforma Lattes, até 2012 (inclusive), contou com 31 teses e 227 dissertações totalizando 258 pesquisas, produzidas em 56 instituições de Ensino Superior.

Em nossa revisão bibliográfica, estamos interessados nas pesquisas realizadas em contextos de Ensino Fundamental II, sob a perspectiva do Letramento probabilístico. Do montante dos trabalhos da tese de Santos (2015) encontramos as teses de Abe (2011), Alves (2010) e Santos (2010). Dando continuidade ao levantamento dos trabalhos acadêmicos realizados por Santos (2015), conseguimos obter as dissertações de Biajoti (2013), Nogueira (2015) e Soares (2014).

A dissertação de mestrado de Biajoti (2013), intitulada “Experimento probabilístico: noções de probabilidade no ensino fundamental II”, teve como objetivo relatar os resultados de uma investigação didático-pedagógica que utilizou experimentos com dados e moedas, cujas soluções e a adequada intervenção do professor permitiu a construção dos conceitos probabilísticos iniciais pelos estudantes, em uma escola do interior do estado de São Paulo.

A redação desse relato de pesquisa envolveu cinco capítulos. No primeiro capítulo o autor escreveu sobre a importância do ensino de probabilidade desde o Ensino Fundamental, os objetivos e maneiras de se ensinar probabilidade. No segundo capítulo, foi apresentada a história do desenvolvimento da Teoria de Probabilidade. No capítulo 3, foi apresentado aspectos gerais das atividades propostas aos alunos, seus objetivos e justificativas, além de análises prévias, apontando algumas expectativas de soluções que podem ser apresentadas pelos alunos.

As atividades foram aplicadas para 94 alunos do sétimo ano, organizados em 47 duplas; com um tempo de 100 minutos para a execução das atividades. A metodologia da pesquisa foi fundamentada na Engenharia Didática, um termo criado na França na década de 80, constituindo em uma metodologia de pesquisa pautada em um esquema experimental baseado em sequências didáticas aplicadas em sala de aula.

Como resultado da pesquisa, segundo Biajoti (2013), nas atividades envolvendo a linguagem probabilística, os estudantes reconheceram situações de incertezas e utilizaram palavras e expressões adquiridas nas observações e no seu cotidiano para justificar as suas respostas. Muitos alunos cometeram equívocos em relação ao espaço amostral em atividades que envolveram situações combinatórias, mas a formalização de alguns conceitos e a definição de probabilidade foram assimilados com mais facilidade pelos estudantes, o que não ocorreu em anos anteriores. Segundo o autor, a realização de experimentos com material concreto, como por exemplo, dados e moedas, tornou as aulas mais atraentes e participativas, os alunos foram protagonistas na construção de seu próprio conhecimento.

Os resultados da pesquisa de Biajoti (2013) indicaram que a utilização dessa proposta de ensino pode favorecer a aprendizagem e também enalteceu o trabalho em duplas, por conta dos alunos que discutiram as suas produções de atividades.

A pesquisa de Biajoti (2013) enfatizou a dificuldade, por parte dos alunos, em relação a linguagem probabilística e este indicativo foi levado em conta na aplicação das nossas tarefas para o trabalho de campo de nossa pesquisa.

A dissertação de mestrado de Abe (2011) intitulada “O ensino de probabilidade por meio das visões clássica e frequentista”, teve como objetivo principal investigar o ensino-aprendizagem por estudantes do nono ano do ensino fundamental, a partir de situações-problemas que envolveram a concepção clássica ou laplaciana e a visão frequentista de probabilidade.

A metodologia da pesquisa foi inspirada na Engenharia Didática e os sujeitos da pesquisa foram 6 alunos de uma escola pública estadual de Campo Grande, capital do Mato Grosso do Sul. A sequência didática foi composta por seis sessões, envolvendo experimentos aleatórios e determinísticos, espaço amostral, evento elementar e impossível, espaço amostral equiprovável e não-equiprovável, probabilidade na visão clássica e frequentista, além da articulação entre estas duas concepções probabilísticas. Nessa pesquisa foi feito experimentos com tetraedros, sorteio de bolas, moedas, dados, baralhos e simulador de roletas, com o objetivo de tratar a simulação e observar a estabilização da frequência relativa dos resultados obtidos experimentalmente.

Como resultado dessa pesquisa, segundo Abe (2011), os estudantes conseguiram assimilar a proporção com probabilidades nas atividades com roleta, e a partir daí, conseguiram calcular a probabilidade de outros experimentos aleatórios e também propiciou a aquisição e compreensão de probabilidade por meio da visão frequentista, com a ajuda do simulador de roleta. Esse aparato propiciou uma visão concreta do que acontece quando é realizado um experimento aleatório em uma quantidade pequena ou em uma quantidade muito grande de repetições nas mesmas condições.

Em nossa pesquisa também utilizamos uma sequência didática, em que se permite que os alunos desenvolvam tarefas aplicando a concepção clássica e frequentista concomitantemente na abordagem do cálculo de probabilidade, acrescido da construção e análise gráfica das frequências obtidas nos experimentos probabilísticos.

A dissertação de mestrado de Alves (2010), intitulada “Uma introdução ao pensamento combinatório no 9º ano do ensino fundamental”, explorou a introdução do pensamento combinatório e a sua relação com o cálculo de probabilidades em uma turma do nono ano do ensino fundamental, composta de 25 alunos, através da metodologia da engenharia didática. Para Alves (2010) o pensamento combinatório diz respeito ao aluno saber identificar se um problema envolve cálculo de arranjo ou combinação. Teve como objetivo que os estudantes reconhecessem as formas combinatórias de contagem e a sua relação com a probabilidade utilizando os diferentes registros de representação semiótica, como linguagem algébrica, figuras geométricas, gráficos cartesianos, tabelas, diagrama da árvore, multiplicação das possibilidades. A questão norteadora da pesquisa foi: “Quais estratégias de ensino-aprendizagem que podem viabilizar uma introdução dos conceitos básicos de análise combinatória do ensino fundamental?”

A metodologia qualitativa de desenvolvimento da pesquisa foi inspirada na Engenharia Didática, que possui quatro fases: a primeira é a análise preliminar, que, no caso de Alves (2010) consistiu na análise de quatro coleções dos livros didáticos referentes ao 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental; a segunda é a concepção e análise a priori, a qual envolveu a produção de tarefas que compôs o módulo de ensino, seus objetivos, as possíveis soluções e as dificuldades encontradas; a terceira é a experimentação, a sua aplicação e a quarta a análise a posteriori e a avaliação, que envolveu o estudo quantitativo e qualitativo dos erros e acertos, tomando por base a mobilização e coordenação dos registros de representação semiótica de Raymond Duval (2003, 2009).

A configuração da segunda fase do trabalho de Alves (2010, p.72-73) levou em conta os seguintes aspectos sobre a análise dos livros didáticos:

> a necessidade de utilização dos diferentes registros de representação; a falta das transformações destes registros em

> especial a conversão; a falta de exercícios que explorem a diferença entre arranjo simples e combinação simples; a possibilidade de se estudar a probabilidade interligada ao pensamento combinatório e a falta de exercícios que explorem diversos tipos de probabilidade.

Na fase da experimentação, os alunos foram divididos em onze duplas e um trio para a aplicação da sequência didática. O trabalho de campo envolveu 12 aulas para o desenvolvimento das atividades, duas aulas para aplicação de uma avaliação individual sobre os conteúdos contemplados na sequência didática, além de um questionário contendo duas questões envolvendo o trabalho desenvolvido.

> A análise da prova foi feita observando-se a percepção dos diferentes tipos de exercícios de contagem (permutação, arranjo e combinação), a sua ligação com os exercícios de probabilidade e a utilização dos diferentes registros de representação como forma de determinar as possibilidades de ocorrência de um evento. (Alves, 2010, p. 141)

Segundo Alves (2010), os estudantes utilizaram diferentes formas de representação e conseguiram desenvolver os cálculos referentes a arranjo e combinação sem o uso de fórmulas, utilizando o princípio multiplicativo, a árvore de possibilidades, as diferenças entre arranjo e combinação e destacou a importância do trabalho com os diferentes registros de representação semiótica e as suas transformações no estudo de análise combinatória.

Os resultados da pesquisa de Alves (2010) mostraram que além de proporcionar aos estudantes uma maior facilidade nos cálculos probabilísticos, também minimizou a dificuldade de diferenciação dos cálculos utilizados em diferentes situações, como arranjo e combinação. Segundo Alves (2010), essa experiência permitiu compreender que quando os alunos são motivados, eles conseguem elaborar diferentes estratégias nas resoluções de cálculos, como a multiplicação de possibilidades nas atividades de arranjo e permutação; a divisão como forma de retirar o excesso de possibilidades nas atividades de combinação; e outras formas de representar resultados obtidos como o diagrama, a tabela entre outros.

Em nossa pesquisa a mobilização dos diferentes registros de representação semiótica ocorreu com processos de contagem articulados à estatística e probabilidade, sem a valorização de situações-problemas envolvendo o estudo específico de arranjo e combinação.

A dissertação de mestrado de Nogueira (2015), "Análise de esquemas de estudantes ao resolverem situações envolvendo conceitos básicos de probabilidade", teve como objetivo analisar os esquemas de estudantes do 9º ano do ensino fundamental a resolver situações envolvendo conceitos básicos de probabilidade, presentes na sequência de ensino 'Passeios Aleatórios da Carlinha'. Essa sequência de ensino foi elaborada seguindo as recomendações para o ensino de probabilidade, tanto nos Parâmetros Curriculares Nacionais, como no modelo de letramento probabilístico proposto por Iddo Ga (2005)l, por abordar os seguintes conceitos: espaço amostral, eventos simples e compostos, probabilidade de eventos simples e compostos, situação determinística, espaço aleatório, frequência relativa, frequência e padrões observados e esperados. A questão norteadora dessa pesquisa foi: "Quais os esquemas que estudantes do 9º ano utilizam para resolver situações envolvendo conceitos básicos de Probabilidade presentes na Sequência de Ensino Passeios Aleatórios da Carlinha (SE PAC)?"

Foram utilizados como aporte teórico a teoria dos Campos Conceituais, proposto por Gerard Vergnaud e o modelo de letramento probabilístico proposto por Iddo Gal (2005). A teoria cognitivista dos Campos Conceituais visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, sobretudo aquelas relacionadas com as ciências e as técnicas, sendo seu principal objetivo o de permitir, por meio de um quadro, a compreensão das filiações e rupturas entre conhecimentos, nas crianças e adolescentes.

Participaram dessa pesquisa 23 alunos do 9º ano de uma escola da cidade de São José da Vitória, Bahia. Esta pesquisa possui cunho qualitativo, pois os dados foram coletados por meio de produções escritas dos alunos, fotografias, entrevistas e notas do pesquisador. Foram formadas 7 duplas e 3 trio, pois segundo Nogueira (2015), a técnica de agrupamento pode haver mais diálogo entre os alunos e desta maneira um maior entendimento na resolução das atividades.

Como resultado da pesquisa, Nogueira (2015) afirmou que muitos grupos de alunos cometeram equívocos do conceito de situação determinista e experimento aleatório.

A grande variedade de situações trazidas na sequência de ensino “Passeios Aleatórios da Carlinha” trouxe a oportunidade de garantia de novas experiências e aprendizagens para os estudantes, segundo Nogueira (2015), que afirmou ainda que as aplicações em sala de aula, a exemplo dessa sequência de ensino, podem auxiliar no desenvolvimento do letramento probabilístico dos estudantes na escola básica. O autor concluiu que apesar das dificuldades encontradas, compreendeu que os alunos conquistaram competências probabilísticas convergentes aos elementos cognitivos do modelo proposto por Gal (2005) e alinhadas aos propósitos educacionais dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998).

Em nossa pesquisa aplicamos essa sequência didática com adaptações inclusive no quesito tempo, que foi de quatro horas, já que Nogueira (2015) afirmou que duas horas foram insuficientes.

A tese de doutorado de Soares (2014) “Uma análise sobre as atividades de probabilidade propostas nos livros didáticos de matemática nos anos finais do ensino fundamental”, teve como objetivo analisar como o tema “probabilidade” tem sido abordado em coleção dos livros didáticos no Brasil, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2014).

A questão norteadora dessa pesquisa é: “Que indícios teóricos e metodológicos emergem de um processo analítico sobre o ensino de probabilidade expressos em alguns livros didáticos?”

Foram escolhidas 3 coleções, as que haviam sido mais adotadas pelas escolas, para analisar o tema “probabilidade” e inclusive uma delas a “Matemática: Lellis e Imenes”, foi utilizada pelos alunos sujeitos de nossa pesquisa. A análise desses materiais foi feita mediante as seguintes categorias de análise: presença da concepção de probabilidade clássica, presença de concepção de probabilidade frequentista e presença de discussão de aleatoriedade.

No livro do 9°ano, o item Probabilidade ou chance está no capítulo 5. A respeito do livro “Matemática: Lellis e Imenes”, segundo Soares (2014, p.100):

> Concordamos com os avaliadores do PNLD 2014 quando comentam que esta coleção focaliza a probabilidade em bons contextos para desenvolver os conceitos de amostra e população e para fazer previsões. Os autores desenvolvem adequadamente a probabilidade clássica, definindo-a claramente, e tratam também da probabilidade frequentista.

Soares (2014) afirmou que essa coleção avançou mais sobre as concepções probabilística, pois, além de tratar de probabilidade clássica ou laplaciana, também apresentou a probabilidade frequentista através de atividades investigativas, mostrando inclusive aplicações no mundo do trabalho, mas não promoveu o estudo do conceito de aleatoriedade.

A dissertação de Santos (2010), intitulada “O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental”, propôs investigar as ideias sobre linguagem e pensamento probabilístico dos alunos. Essa pesquisa qualitativa foi realizada em duas salas do 7º ano com 60 alunos da cidade de Amparo, interior de São Paulo. A questão norteadora foi: “Quais são as ideias sobre linguagem e pensamento probabilístico que os alunos apresentam em um contexto de resolução de problemas mediado pelo processo de comunicação?”

Os objetivos principais foram identificar ideias probabilísticas que emergem do processo de comunicação oral e escrita, no contexto de resolução de problemas em uma perspectiva investigativa e analisar ideias surgidas durante a interação e a negociação entre alunos e professora pesquisadora. Os dados foram produzidos por registros escritos dos grupos, entrevista, registro em vídeo de classe e registros escritos pelo professor-pesquisador no diário de campo.

Os resultados obtidos por Santos (2010) em sua pesquisa não indicaram uma regularidade nas concepções probabilísticas e na análise dos registros escritos dos estudantes, houve equívocos do uso da linguagem, como o caso dos termos “possibilidades” e “probabilidades” como sinônimos, além da interpretação errônea do espaço amostral nas atividades que envolveram situações combinatórias. A aquisição da linguagem probabilística na aprendizagem de conceitos relativos à probabilidade foi um elemento motivador para o nosso projeto de pesquisa para o mestrado.

3 – O PERCURSO METODOLÓGICO

Em termos metodológicos, essa pesquisa é de natureza qualitativa na modalidade descritiva e interpretativa. Na concepção de Bodgan e Biklen (1994, p.16), nessa modalidade de investigação “o investigador faz uma interpretação dos dados, descreve os participantes e os locais, analisa os dados para configurar temas ou categorias e retira conclusões”.

Na sequência apresentamos o contexto escolar da pesquisa incluindo os sujeitos da pesquisa, a dinâmica das aulas para a produção de informações, os instrumentos e procedimentos para a análise da produção de informações.

3.1 O Contexto Escolar

O trabalho de campo de nossa pesquisa foi realizado no primeiro semestre de 2016, com alunos do nono ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal José Marcello, situada na região central do município de Salto de Pirapora. Esse espaço escolar comporta cinco classes de nonos anos, quatro sala de oitavos ano, quatro salas de sétimos ano e quatro salas de quinto ano, biblioteca, refeitório, um laboratório de informática com vinte computadores, quadra esportiva coberta, as salas de aula são ambientes, possuem em média vinte alunos por sala, possui câmeras de monitoramento espalhadas pela escola, com exceção das salas de aula e dos banheiros e, diferente da rede estadual, não adotou o sistema de progressão continuada. Em 2015, três alunos conquistaram medalhas de bronze e oito menções honrosas na Obmep, o IDEB (Índice da Educação Básica) nesse ano foi de 5,8, a meta era de 5,9, uma justificativa estaria relacionada ao fluxo, devido as retenções. A meta do IDEB para 2020 é de 6,0.

No período matutino são atendidos os alunos dos nonos e sétimos anos, com aulas no período das sete horas às onze e trinta com um intervalo na quarta aula. São cinco aulas por dia sendo cinco de matemática, cinco de língua portuguesa, três de ciências, três de história, três de geografia, duas aulas de inglês, duas de educação física e duas de artes.

No período vespertino são atendidas as turmas de sextos e oitavos anos, iniciando as atividades no período das treze horas às dezessete e trinta horas.

No período da noite há aulas na modalidade pré-vestibulinho visando o ingresso em três escolas técnicas estaduais de Sorocaba, pertencente ao Centro Estadual de Educação Técnica Paula Souza, além do concurso de bolsas oferecidas por escolas particulares da região. Fernando Prestes, Rubens de Faria e Armando Pannunzio e também o politécnico e bolsas em colégios particulares da região. Ainda no período noturno a escola dispõe de duas salas de supletivo para o Ensino Fundamental l e também uma extensão de escola técnica que oferece curso técnico de secretariado com alunos distribuídos em duas turmas.

A escola também oferece no contra turno, aulas de reforço de Matemática e Língua Portuguesa para os estudantes que apresentam dificuldades de aprendizagem.

Figura 1: Fachada da escola

Fonte: arquivo do pesquisador

3.2 A dinâmica das aulas

Em termos quantitativos, os alunos envolvidos na aplicação da sequência foram 34 alunos, sendo 17 meninas e 17 meninos, cujas idades variam de 14 a 15 anos, dos nonos anos A e B, formando 17 duplas. Todo o trabalho de campo destinado à produção e análise das informações foi desenvolvido no decorrer de nossas aulas da disciplina de matemática, após a abordagem dos conteúdos contidos no capítulo 5 do livro didático “Matemática: Lellis e Imenes”.

Para inserir os alunos no contexto da pesquisa, as duplas foram escolhidas por sorteio, organizado pelo professor-pesquisador. Foram utilizados para o sorteio papéis retangulares, todos de mesmo tamanho, nos quais os alunos escreveram os seus nomes e em seguida depositados numa urna. Houve, por parte dos alunos uma grande euforia durante o sorteio, porque foi abordado que a chance de formarem duplas com quem tem mais afinidade era menor.

A abordagem de conteúdos, do quinto capítulo do livro didático, foram realizadas em 10 horas-aulas. Nessas aulas selecionamos algumas tarefas envolvendo conceitos de probabilidade clássica e frequentista, conceitos estatísticos e raciocínio probabilístico, e linguagem probabilística.

Iniciamos o tratamento dos conceitos, começando pela linguagem probabilística, a qual é pouco abordada no livro didático. Destinamos duas horas-aulas (01/08/2016) para trabalharmos a caracterização de situações-problemas envolvendo o confronto entre uma experiência aleatória e experiência determinista, espaço amostral, chance, probabilidade, espaço equiprovável e não-equiprovável, evento certo e impossível. Uma das atividades desse dia retirada do livro “Matemática Dante” (2005), volume único da editra Ática com algumas modificações: “No lançamento de dois dados um branco e um vermelho, determinar o espaço amostral e os eventos: A – sair o mesmo número em ambos os lados; B – sair soma maior do que 10; C – sair soma menor do que 5 e D – sair soma maior do que 12”.

Durante a aula explicamos que o espaço amostral é formado por todas as combinações possíveis, onde os alunos, sem dificuldades conseguiram responder corretamente todos as 36 combinações e a possibilidade de ocorrer o evento A, onde foi feita por mim, seria { (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) }. Pedi para o alunos, que estavam em duplas, resolverem o evento B { (5,6), (6,5) e (6,6) }, o evento C {(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)} e D onde o conjunto solução era vazio e todas as duplas conseguiram realizar a atividade não encontrando maiores dificuldades.

No dia 4 de agosto de 2016 foram dadas duas horas-aulas em cada uma das turmas de nono ano do Ensino Fundamental (9ºA e 9ºB). De acordo com as anotações no diário de campo do professor-pesquisador, foram tratados assuntos sobre contagem de possibilidades, motivado pela abordagem do seguinte problema extraído do livro didático (IMENES; LELLIS, 2012, p.97) : “Imagine bandeiras com 4 faixas horizontais, cada uma com uma cor, escolhida entre estas quatro: amarela, azul, vermelha e cinza. Sem repetir nenhuma cor, quantas bandeiras diferentes podem ser desenhadas?”

No início trabalhamos a árvore das possibilidades, onde salientamos que nenhuma possibilidade é esquecida, e após essa primeira parte foi trabalhado o raciocínio multiplicativo, onde salientamos que nem todos os problemas podem ser resolvidos pelo raciocínio multiplicativo e que a árvore das possibilidades é sempre útil, mesmo sendo trabalhosa. Inicialmente acharam a árvore de possibilidades trabalhosa, mas visualizaram melhor os resultados do que no raciocínio multiplicativo. No dia 5 de agosto foram dadas mais duas aulas em cada sala, onde foram abordadas atividades do livro didático com dados, placas, jogos de loteria e códigos de barras. No dia 6 de agosto, foi dada uma aula em cada sala utilizando o livro didático, introduzimos o conceito da probabilidade clássica, que é dada pela razão entre o número de possibilidades favoráveis e o número total de possibilidades, onde usamos o jogo de dados como exemplo e também foi abordado o que é um dado “honesto”. No dia 08 de agosto foram dadas duas aulas onde foram abordados assuntos envolvendo probabilidade e estatística. Nestas aulas foi abordado a importância para as seguradoras a probabilidade de furto de veículo: “ Se uma companhia avalia que terá 3000 veículos de marca X segurados em uma cidade, sabendo que a probabilidade de furto é aproximadamente 0,001 (ou seja, 3 em 3000), ela deverá se prevenir contra esses 3 furtos para cobrir seus gastos. Aliás, deverá se prevenir contra mais que 3 furtos, para se garantir contra o azar e ter lucro. Uma parte do que recebe a companhia de seguros serve para compor o prêmio de seguro que ela pagará se houver, digamos, 6 furtos” . Durante a aula um aluno concluiu que era por esse motivo que havia diferença de preços entre os valores de seguros de veículos, os mais visados tinham preços maiores. No dia 11 de agosto foi tratado da probabilidade na teoria (clássica) e na prática (frequentista), utilizamos uma atividade do livro didático onde o aluno deveria lançar um dado 24 vezes e anotar quantas vezes foram obtidos 5 pontos, para calcular a chance estatística de obter 5 e comparar com a chance teórica e escrever as suas conclusões. Na segunda parte era para lançar o dado 60 vezes e refazer as comparações e registrar suas conclusões e responder a pergunta “O aumento no número de lançamentos aproximou a chance estatística da teórica?” Na terceira parte era para recortar pedacinhos de fita adesiva sobre a face que marcar 5 pontos, causando uma leve saliência sobre ela, e que refaça os 60 lançamentos. Essa modificação deve alterar as chances de todos os resultados. Na quarta parte pedimos para que elabore um relatório com todas as conclusões. Após essas aulas, iniciamos o trabalho de campo. A pesquisa foi aplicada nos dias 16,17 e 18 de agosto de 2016, onde as duplas do 9º ano A foram chamadas de A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 e A9 e as duplas do 9ºB de B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7 e B8. Foram gastas 8 horas para aplicação, 4 horas para cada pesquisa.

4 – ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PELOS ALUNOS

4.1 - APLICAÇÃO DA PRIMEIRA PESQUISA

A primeira pesquisa é dividida em quatro etapas: a primeira é a linguagem probabilística, a segunda é probabilidade clássica, probabilidade frequentista, análise combinatória e estatística, a terceira é probabilidade clássica e análise combinatória e a quarta é linguagem probabilística, estatística, probabilidade clássica e análise combinatória.

Primeira parte: Linguagem probabilística

1- No nosso cotidiano muitas situações são de natureza aleatória; isto quer dizer que podemos fazer previsões sobre os acontecimentos.

a) Conte sobre um acontecimento que você julga ser de natureza aleatória.

A seguir estão as respostas das duplas:

Tabela 1: Respostas da atividade 1a

A1	A chuva
A2	Tomar o café da manhã
A3	Sua vida você não faz muitas escolhas
A4	Furacão, tsunami
A5	Possibilidade de chover
A6	Escolher uma roupa para vestir
A7	Chuva
A8	Queimada
A9	Terremoto
B1	Terremotos, tsunamis
B2	Uma pessoa subir em uma torre
B3	Chuva de granizo
B4	Um vulcão em erupção
B5	Achamos que um terremoto é de natureza aleatória, porque pode acontecer a qualquer momento, difícil de prever quando irá acontecer algo do gênero e pode acontecer em qualquer lugar, é inesperado
B6	Chuva
B7	Assalto, acidentes de carro
B8	A natureza humana, quando a mulher tem filhos pode ser homem ou mulher

Fonte: Arquivo do pesquisador

Durante a socialização das atividades o professor pesquisador esclareceu para a A2 que tomar café da manhã não é um acontecimento de natureza aleatória, pois você pode fazer a escolha do que vai consumir. A dupla A6 que argumentou que escolher uma roupa para vestir era de natureza aleatória, e o professor pesquisador perguntou o porquê que eles achavam isso e o aluno Fernando, dessa dupla, disse que pega a roupa no escuro para não acordar seu pai que trabalha durante a madrugada, e a primeira roupa que ele pega ele a usa, onde concordamos com o artifício alegado e a classe toda concordou com o aluno nesse caso. Já a dupla B2 disse que "um homem subir em uma torre" era de natureza aleatória pois neste mesmo ano era o segundo caso na cidade de Salto de Pirapora que uma pessoa sobe em uma torre, obrigando a fornecedora de energia elétrica interromper o fornecimento de energia elétrica da cidade, alterando a rotina da comunidade.

Das dezessete duplas, quinze apresentaram fenômenos de natureza aleatória: terremoto, ocorrência de chuvas, raios e trovões, furacão, doença, sexo do bebê e acidentes. No momento de interação do professor pesquisador com a turma para a discussão do conteúdo das produções dos alunos, houve a oportunidade por parte do docente de elaborar anotações e gravações de áudio relativas às respostas dos alunos. Isto foi muito importante para entendermos o porquê que boa parte destes registros escritos estão relacionados aos fenômenos naturais.

Os alunos explicaram que as respostas foram motivadas pelos conteúdos estudados em outras disciplinas: os fenômenos naturais fazem parte dos conteúdos abordados no primeiro semestre letivo na disciplina de Geografia. As palavras "doença" e "sexo do bebê" têm relação com discussões sobre o corpo humano, nas aulas de Ciências. Na interpretação do conteúdo das respostas das duplas A1 (o terremoto não é previsto) e A4 (quando o céu está mais escuro têm a grande probabilidade que chova), os alunos emitiram distintos graus de incerteza para tais fenômenos.

b) Por que o seu acontecimento é de natureza aleatória?

A tabela a seguir mostra as respostas dos grupos:

Tabela 2: Respostas da atividade 1b.

A1	Porque não tem como saber quando vai acontecer
A2	Porque é algo de sua escolha
A3	Porque tem coisas que você não consegue escolher
A4	Porque dá para prever
A5	Porque pode chover, mas não é certeza, então é uma probabilidade
A6	Porque eu que escolhi
A7	Porque conseguimos prever o que vai acontecer
A8	Porque acontece direto com várias pessoas colocando fogo na natureza
A9	Porque acontece de repente
B1	Pois o ser humano não pode controlar. A natureza faz por vontade própria e aleatória
B2	Porque não tinha como prever que ele ia subir na torre, pois é vontade dela
B3	Porque pode ocorrer a qualquer momento e é imprevisível
B4	Pois acontece do nada
B5	Porque pode acontecer em qualquer local e em qualquer momento
B6	Pois os meteorologistas conseguem prever se vai sair chuva ou sol, ás vezes acertam, ás vezes erram
B7	Porque pode acontecer a qualquer momento
B8	Pois ela não pode escolher o sexo da criança

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Notamos que a maior parte das justificativas referem-se a fenômenos climáticos, já a dupla A2 e A6 percebemos que não tinham compreendido o significado de aleatoriedade. Para a dupla A1, A7, B3 e B6 concebeu que a chance de ocorrência de chuva é um fenômeno aleatório, implicitamente há níveis numa escala que pode oscilar entre o que é mais provável para o menos provável, apesar de um evento probabilístico, "podemos fazer previsões antes de aparecer o acontecimento", seja por meio da difusão de informações meteorológicas, ou por experiências pessoais (intuições) em relação ao clima de determinada localidade.

As duplas A9, B1 e B5 consideraram o terremoto como "aleatório, e durante a socialização justificaram que as placas tectônicas se chocam aleatoriamente e que teve influência pelos estudos na aula de geografia, A chance de ocorrência ou não de um furacão (conteúdo do registro da dupla A4) pode ter sua medida estipulada em uma escala de zero (evento impossível) a um (evento certo). As demais duplas apenas estabeleceram a associação de chance com grau de incerteza.

c) Que palavras você considera adequada para formular frases que expressam previsões sobre um determinado acontecimento?

As respostas das duplas estão na tabela a seguir.

Tabela 3: Respostas da atividade 1c.

A1	Amanhã virá um temporal
A2	Eu acho, tenho a impressão de, talvez faça , etc
A3	Possibilidade
A4	Um barulho e tremores relatados em diversos lugares
A5	Possibilidade
A6	Uma possibilidade
A7	Possibilidade
A8	Cuidado, prevenção
A9	Cuidado, forte estrondo
B1	Provável
B2	Talvez, possivelmente, provavelmente
B3	Vai acontecer, talvez
B4	Está prestes a acontecer
B5	Inesperado, pega a população de surpresa
B6	Possibilidade
B7	Palavras que indicam o futuro
B8	Será, poderá.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Durante a pesquisa os alunos sentiram-se inseguros para a resolução dessa atividade, então o professor pesquisador pediu para que respondessem com suas próprias palavras, o que eles entendiam sobre isso, e os resultados em sua maioria foram satisfatórios.

a) Leia o fragmento da notícia extraída do site http://g1.globo.com/sao-paulo/sorocaba-jundiai/noticia/2016/07/moradores-de-sorocaba-relatam-forte-estrondo-e-tremores-em-bairros.html na data de 29/07/2016:

“Moradores de Sorocaba relatam 'forte estrondo' e tremores em bairros

Um "forte estrondo" assustou os moradores de alguns bairros de Sorocaba (SP) na tarde de quinta-feira (28). De acordo com comentários feitos em redes sociais, um barulho foi ouvido e tremores relatados em diversos locais e até outras cidades da região, como Salto de Pirapora e Araçoiaba da Serra, por volta das 15h. Segundo a Defesa Civil, nenhum chamado foi registrado e nenhum dano relatado por moradores. Os bombeiros receberam uma ligação do bairro Éden, em Sorocaba, mas também não há relatos de vítimas.

Você considera esta situação de natureza aleatória? Por que?

A seguir a tabela com as respostas das duplas.

Tabela 4: Respostas da atividade 1d.

A1	Sim, porque isso é resultado da natureza
A2	Não, pois não é algo que podemos prever
A3	Sim, porque ninguém quer que isso acontecesse e foi aleatório
A4	Bom aqui onde moramos não, porque a gente não prever se iria acontecer
A5	Porque pode acontecer ou não
A6	Não, porque ninguém preveu que poderia acontecer
A7	Não, porque não temos como prever esse acontecimento
A8	Aleatório, você não pode prever o acontecimento
A9	Sim, porque não pode ser prevista
B1	Sim, pois não sabiam que aconteceria
B2	Sim, porque ninguém preveu que um estrondo iria acontecer
B3	Não, pois não podemos fazer a previsão de que o tremor aconteceria
B4	Não, pois poderia ser uma pedreira explodindo
B5	Sim, porque é um acontecimento inesperado, ainda mais em Sorocaba, que nunca houve uma situação do gênero
B6	Não, pois eles não previram que isso ia acontecer
B7	Sim, pois ninguém imaginava que isso iria acontecer
B8	Sim, pode haver tremores em qualquer lugar da Terra

Fonte: Arquivo do pesquisador

Foram sete respostas negativas e dez respostas positivas justificadas, porém com alguns equívocos no uso da linguagem probabilística. As duplas A8, A9 e B2 afirmaram que o fenômeno é de natureza aleatória, porque ninguém previu o estrondo. Ressaltamos que o fato de estabelecermos previsões não implica na mudança da natureza do acontecimento, ou seja, de aleatória para determinística. A previsão propicia o raciocínio baseado em reconhecimento de situações de incerteza. Dê sua opinião sobre o que pode ter acontecido.

A seguir a tabela com as respostas das duplas

Tabela 5: Respostas da atividade 1e.

A1	Tremor de terra
A2	Placas tectônicas
A3	As placas tectônicas podem ter se mexido
A4	Pedreira
A5	Tremor de terra
A6	Alguma explosão na pedreira
A7	Pedras caindo na pedreira
A8	Explosão na pedreira
A9	Uma explosão na pedreira
B1	Um meteoro ou alguma pedra do espaço pode ter caído
B2	Um tremor de terra
B3	Um abalo imprevisto das placas tectõnicas
B4	Pedreira explodindo
B5	Eu acredito que pode ter sido um tremor acontecido por uma coisa qualquer, pode ter sido bomba, deslocamento, etc
B6	Que aconteceu um abalo sísmico ou terremoto.
B7	Para mim poderia ser alguma explosão em alguma pedreira próxima
B8	Pedreira

Fonte: Arquivo do pesquisador

Quando solicitamos que as duplas elaborassem previsões sobre o que teria ocasionado o forte estrondo, três duplas (A2, A3 e B3) mencionaram o choque das placas tectônicas como causa mais provável pelo acontecimento, as duplas A1, A5, B2 e B6 mencionaram um tremor de terra e as duplas A4, A6, A7, A8, A9, B4, B7 e B8 mencionaram sobre a possibilidade de "uma explosão na pedreira". O conteúdo das justificativas dessas duplas, diz respeito à atividade mineradora na Região Metropolitana de Sorocaba, que abrange a cidade de Salto de Pirapora. Durante a socialização desta atividade os alunos comentaram que havia uma pedreira próxima a cidade de Salto de Pirapora e que era comum ouvir estrondos vindo de lá. Segue o áudio transcrito após a realização da tarefa:

Professor: Houve um forte estrondo em Sorocaba e Salto de Pirapora há aproximadamente um mês atrás, o que você acha que pode ter acontecido?
Aluna 1: Acha que pode ter sido um meteoro ou alguma coisa do espaço pode ter caído.
Aluna 2: Eu acho que poderia ter sido alguma explosão na pedreira próxima daqui.
Professor: Tem pedreira aqui perto?
Aluna 2: Sim, poderia ter ocorrido uma explosão lá.

Aluna 3: Acha que poderia ter sido um tremor de terra
Professor: Vocês acham que isso poderia ser aleatório?
Aluna 1, 2 e 3 responderam simultaneamente: “Sim “
Aluna 2: Ninguém pode prever

Probabilidade clássica X probabilidade frequentista X análise combinatória X estatística

1)Considere o lançamento de dois dados, um de cada vez, e a respectiva soma dos valores das faces superiores. Se o professor convidar você para lançar esses dados, um de cada vez, em vinte jogadas, qual soma você acha que vai repetir mais vezes? Por que?

A seguir as respostas e as justificativas das duplas.

Tabela 6: Respostas da atividade 2

A1	O 7, pois tem mais possibilidades
A2	7, acho que tem mais chances
A3	7, porque tem mais chances de cair números que a soma dará 7
A4	7, porque acho que tem mais chance
A5	5, pois acho que tem mais chance
A6	7, pois pode haver 1,6 ; 6,1; 2,5; 5,2; 3,4; 4,3
A7	7, porque tem maior probabilidade
A8	5, porque cai mais vezes
A9	7, porque a maioria dos resultados é 7
B1	7, pois há mais formas de jogar o dado duas vezes e a soma resultar em 7
B2	7, porque há maior probabilidade de cair 7
B3	7, porque existem mais combinações com resultado 7 do que com outros números
B4	7, pois tem mais somas para dar 7
B5	6, porque é algo aleatório
B6	6, porque tem mais chances de sair
B7	7, porque as possibilidades de sair 7 são maiores, são 6/36
B8	7, a maioria dos números somados dão 7

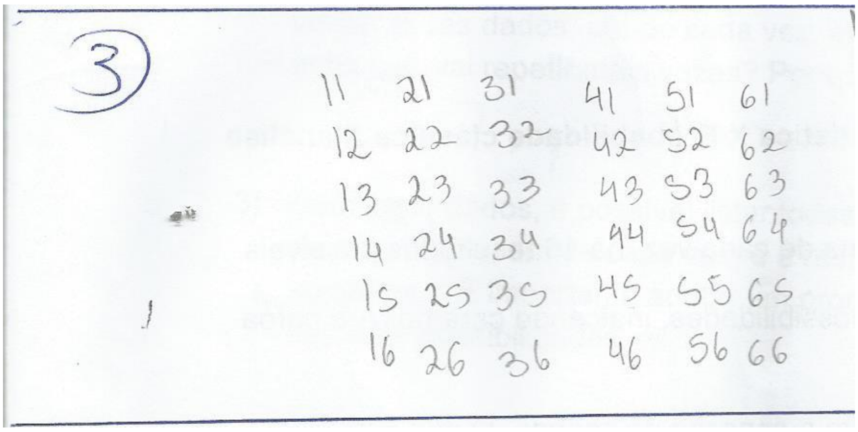
Fonte: arquivos do pesquisador.

Treze duplas responderam corretamente á pergunta e duas duplas responderam 5 e duas responderam 6, notamos que a maioria das duplas assimilaram os conteúdos estudados em sala nas aulas que antecederam a pesquisa.

1)Sem jogar dados, é possível listar todas as possibilidades dos lançamentos de dois dados, um de cada vez, e a respectiva soma dos valores das faces superiores. É importante adotar um procedimento para organizar a lista de todas as possibilidades.

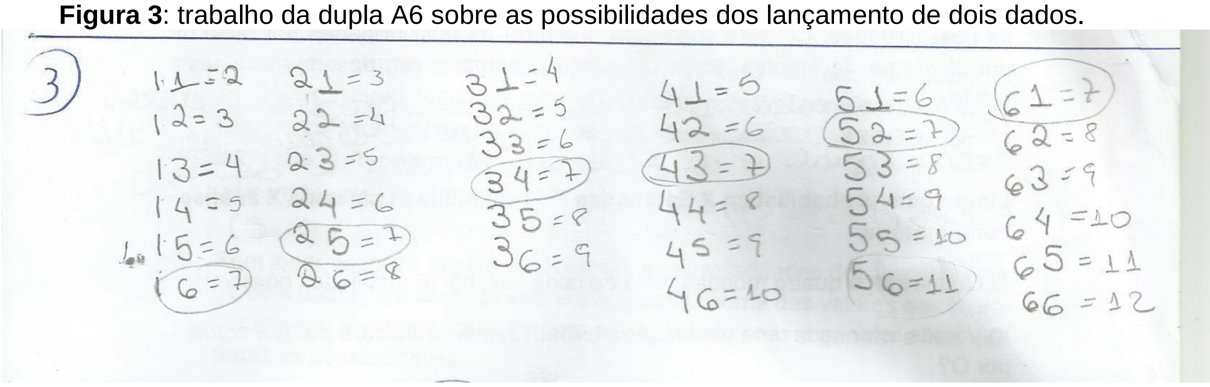
Nesta atividade todas as duplas executaram a tarefa sem dificuldades. Algumas duplas esqueceram de fazer a soma, não prejudicando em nada o andamento da atividade, seguem alguns exemplos das duplas A2 e A6.

Figura 2: trabalho da dupla A2 sobre as possibilidades dos lançamento de dois dados.



Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Figura 3: trabalho da dupla A6 sobre as possibilidades dos lançamento de dois dados.



Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

1)A aposta que você fez na **tarefa 2** coincidiu com o resultado obtido na **tarefa 3**? O que você concluiu sobre esse acontecimento?

A tabela a seguir com as respostas das duplas.

Tabela 7: Respostas da atividade 4

A1	7, que tem mais possibilidades de cair o 7
A2	Sim, que o número 7 tem maior probabilidade
A3	Sim, que o número 7 tem mais chance de sair
A4	Sim, pois a combinação do resultado dar 7 é o que mais tem
A5	Não, o que mais caiu foi o 7
A6	Sim, o número que mais sai é o 7
A7	Sim porque a chance de dar 7 é maior
A8	Não, porque o 7 tem mais chance de sair
A9	Sim
B1	Sim, concluímos que há mais possibilidades de dar 7 a soma de dois números do dado, do que qualquer outro número
B2	Sim, porque a chance da soma das faces cair 7 é maior
B3	Sim, há mais chances de cair 7 do que outro número
B4	Sim, pois o 7 tem mais chance por ter mais soma
B5	Não, porque caiu com números cuja soma é7
B6	Não, que a maioria resulta em 7
B7	Sim, porque a soma que se repetiu mais vezes foi o 7
B8	Sim, se somar os números da tabela acima a maioria dos resultados serão 7

Fonte: Arquivos do pesquisador.

Após a realização da tarefa as duplas A5, A8, B5 e B6 que não haviam respondido corretamente na tarefa 5 puderam perceber o equívoco e responderam corretamente.

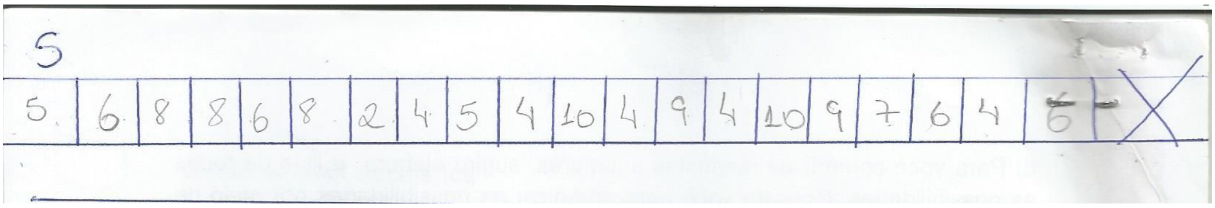
1)Proponho agora que você aceite o convite do professor feito na **tarefa 2.** Faça as vinte jogadas e liste todos os resultados obtidos, bem como as respectivas soma dos valores das faces.

Segundo Coutinho (1994), há a necessidade de uma mudança no programa atual desenvolvido no Brasil, que explora apenas a visão clássica de probabilidade, pois a visão frequentista utiliza experimentos ligados a realidade dos estudantes, uma vez que não precisa estar limitado a equiprobabilidade.

As duplas executaram esta tarefa se maiores dificuldades, seguindo a orientação do professor pesquisador, eles colocaram a soma direta na tabela.

Seguem exemplos das vinte jogadas das duplas A6 e A2.

Figura 4: Quadro dos vinte lançamentos da dupla A6

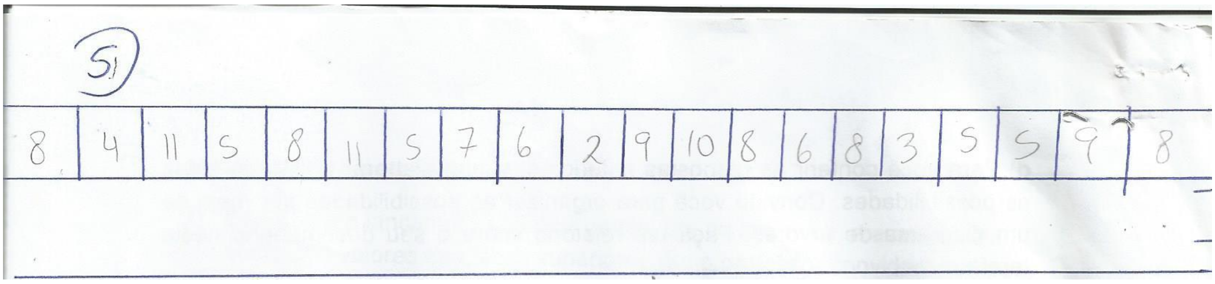


5

5	6	8	8	6	8	2	4	5	4	10	4	9	4	10	9	7	6	4	6

Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Figura 5: Quadro dos vinte lançamentos da dupla A2



5)

8	4	11	5	8	11	5	7	6	2	9	10	8	6	8	3	5	5	9	8

Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

1)Observe os seus registros feitos na **tarefa 3** e **5**. Elabore um relatório sobre suas conclusões.

Na tabela a seguir estão as respostas das duplas.

Tabela 8: Respostas da atividade 6

A1	A soma 8 saiu sete vezes, bem mais que a soma 7 que só saiu três vezes
A2	Na nossa experiência ao jogar os dados obtemos com maior repetição o número 8. Porém na soma do exercício 3 o resultado com maior probabilidade foi o 7. Isso prova que nem sempre o número com maior chance é o que cai
A3	Que para nós, nos vinte lançamentos saíram mais os números 6, 7 e 8 e os que menos saíram foram os números 2 e 5
A4	De que nas duas são utilizadas as mesmas formas de fazer
A5	Na minha experiência o número que mais saiu foi o 7, e o que menos sair foi o 12
A6	Na tarefa 5 o número 4 saiu mais vezes do que o 7 que foi citado no exercício 3
A7	Realmente o número que mais saiu foi o 7 e o 2 e o 5 não saíram nenhuma vez
A8	Que o número 7 saiu apenas uma vez, e o número 9 saiu quatro vezes e o número 10 saiu três vezes, bem diferentes dos resultados do exercício número 3
A9	Que o número 7 foi o que mais saiu nos resultados das somas
B1	Quando jogamos os dados vinte vezes, oito delas resultou em 7. Foi o número que deu mais vezes. E no exercício número três, consequentemente o resultado da soma de dois números do dado resultou em 7.
B2	Há maior chance de a soma ser 7, mas no exercício número cinco caiu mais a soma 5, porque depende da sorte

B3	A combinação que tinha mais chance, como o 7 que tinha 6/36 de chance, caiu menos que o 4, que tinha 3/36 de chance
B4	Vendo a soma de todos os possíveis números na questão três, o número que tem mais chance de soma é o 7, mas na questão cinco só caiu uma vez o número 7, isso significa que o 7 é o que tem mais possibilidades, mas na hora de jogar os dados pode sair qualquer número de 2 a 12
B5	Foram onze números ímpares e nove pares, de vinte lançamentos os números que mais se repetiram foram 9 e 6, que repetiram dada um quatro vezes
B6	O número 2 que tinha chance de 1/36 no exercício 3, no exercício 5 não caiu nenhuma, o 3 tinha 2/36 caiu 2/20 no exercício 5, o 4 tinha 3/36 de chance caiu 1/20, o 5 tinha 4/36 caiu 3/20, o 6 tinha 5/36 caiu 3/20, o 7 tinha 6/36 caiu 4/20, o 8 tinha 5/36 caiu 2/20, o 9 tinha 4/36 caiu 1/20, o 10 tinha 3/36 caiu 1/20, o 11 que tinha 2/36 caiu 1/20 e o 12 que tinha 1/35 caiu 2/20
B7	A probabilidade de sair o número 2 é 1/36, nos dados joguei vinte vezes e não saiu o 2. A probabilidade de sair 3 é 2/36, nas minha vinte jogadas não saiu o 3. A probabilidade de sair o 4 é 3/36, em minhas vinte jogadas o número 4 saiu duas vezes. A probabilidade de sair o 5 é 4/36, em minhas vinte jogadas o número 5 saiu 3/20. A probabilidade de sair 6 é 5/36, em minha jogadas o número 6 saiu 1/20. A probabilidade de sair o 7 é 6/36, em minha jogadas saiu o número 7 em 5/20. A probabilidade de sair o 8 é 5/36, em minha jogadas o número 8 não saiu. A probabilidade de sair 9 é 4/36, em minhas jogadas o número 9 saiu 4/20. A probabilidade de sair 10 é 3/36, em minha jogadas o número 10 saiu 3/20. A probabilidade de sair 11 é 2/36, em minha jogadas o número 11 saiu 1/20. A probabilidade de sair 12 é 1/36, em minha jogadas o número 12 saiu 1/20
B8	Há 36 possibilidades de lançamentos de dados com números diferentes

Fonte: Arquivo do pesquisador.

O principal objetivo dessa tarefa é que os alunos compreendam as diferentes concepções de visão clássica de probabilidade e a probabilidade frequentista, durante a socialização tivemos a oportunidade de comparar os diferentes resultados obtidos pelas 17 duplas. Durante a realização dessa atividade uma aluna, conforme gravação de áudio transcrito abaixo, chegou a seguinte conclusão:

Aluna: “ Professor, olha que interessante, no diagrama das possibilidades o número sete saiu seis em trinta e seis vezes, ou seja um sexto, na prática o sete , o oito, o quatro e o nove saíram quatro vezes, ou seja quatro em vinte, simplificando um quinto, ou seja, a prática não correspondeu com a teoria”.

Probabilidade clássica X análise combinatória

7. Dentro de um saco de cor preta, foram colocadas 2 bolas pretas com identificação P_1 e P_2, 1 bola branca e 3 bolas amarelas com identificação A_1, A_2 e A_3. As bolas são idênticas, exceto na cor. Vou sortear duas bolas, uma de cada vez, sem devolução para o saco.

a) O que é mais provável de ocorrer: extrair duas bolas de mesma cor ou de cores diferentes? Por que?

Nesta atividade o aluno depende exclusivamente dos conhecimentos prévios e da interpretação de texto para responder esta questão.

As respostas das duplas estão na tabela a seguir.

Tabela 9: Respostas da atividade 7a

A1	Diferentes, pois as chances começam a sair
A2	Cores diferentes, porque a probabilidade é maior
A3	Da mesma cor
A4	Da mesma cor, porque tem mais chances de cair
A5	Uma de cada cor, pois acho que tem mais chances
A6	Diferentes, porque há mais probabilidade de pegar cores diferentes
A7	Cores diferentes, porque nem sempre vai sair duas bolas da mesma cor
A8	50% ou ½, pois há três bolas amarelas e três bolas de cores diferentes
A9	De cores diferentes
B1	Diferentes, pois é difícil que saia as duas bolas de mesma cor, é mais fácil sair de cores diferentes
B2	Diferentes, porque tem mais cores diferentes
B3	Duas diferentes, porque já tivemos uma experiência parecida nas aulas de matemática
B4	Duas diferentes, pois tem muitas cores
B5	Duas da mesma porque tem mais cores repetidas
B6	2/6 duas iguais e 4/6 de tirar uma bola diferente, porque tem seis bolas coloridas
B7	Cores diferentes, pois as probabilidades são maiores, são 22/30 ou 11/15
B8	Extrair bolas de cores diferentes

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Apenas quatro duplas responderam iguais, as demais 14 responderam corretamente.

b)Qual a probabilidade de extrairmos uma bola branca e outra preta? As respostas das duplas estão na tabela a seguir:

Tabela 10: Respostas da atividade 7b.

A1	2/30
A2	1/15
A3	2/30
A4	2/30
A5	2/30
A6	2/30
A7	1/15
A8	2/30
A9	2/30
B1	1/15
B2	1/15
B3	2/30
B4	1/15
B5	2/30
B6	Preta1/6 e branca2/6
B7	2/30
B8	3/6

Fonte: Arquivo do pesquisador.

c)Qual a probabilidade de extrairmos uma bola preta e outra amarela? Na tabela a seguir estão as respostas das duplas.

Tabela 11: Respostas da atividade 7c

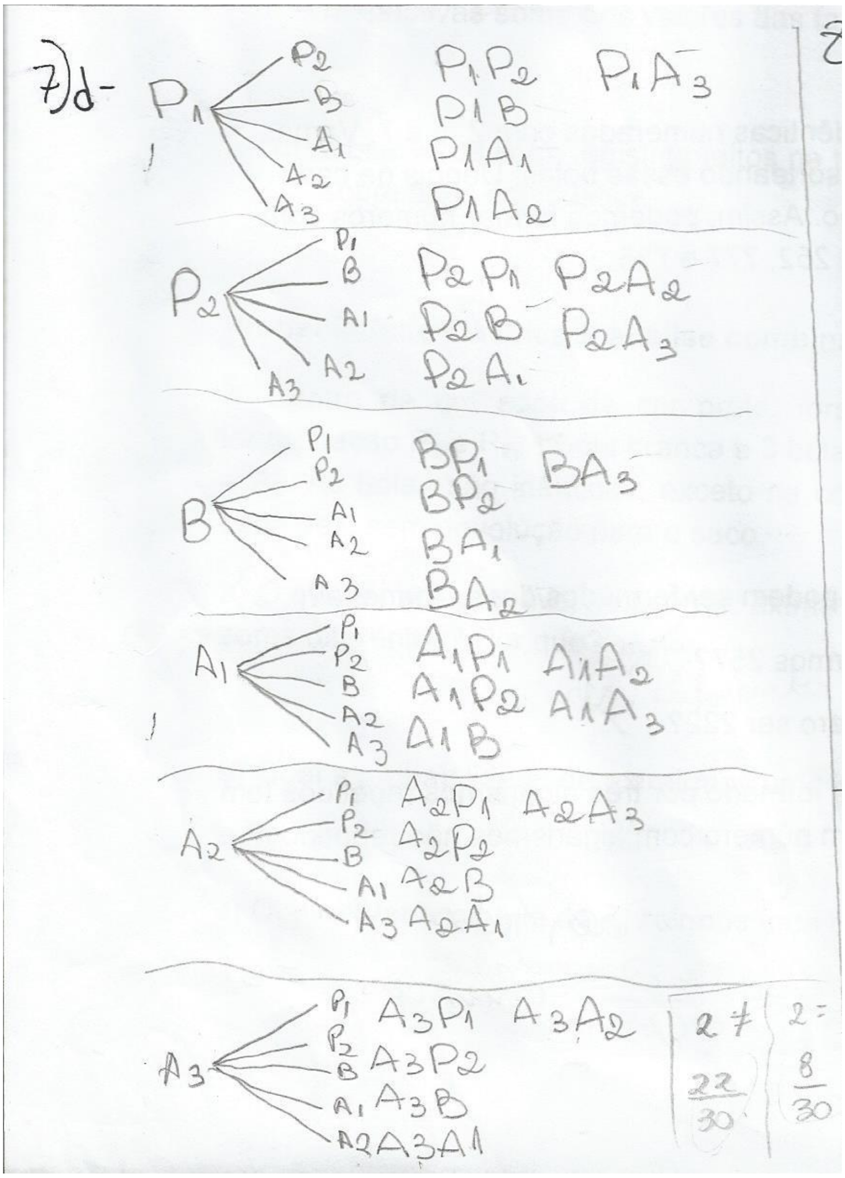
A1	6/30
A2	3/15
A3	6/30
A4	6/30
A5	6/30
A6	6/30
A7	1/5
A8	6/30
A9	6/30
B1	1/5
B2	1/5
B3	6/30
B4	1/5
B5	6/30
B6	Preto 1/6 e amarelo 3/6
B7	6/24
B8	5/6

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Durante a socialização desta atividade, notei um grande número de acertos, inclusive das duplas A5 e A8 que haviam respondido errada a primeira atividade, e os alunos afirmaram que após fazer árvore de possibilidades no item D, retornaram ao item B e C, onde responderam corretamente, apenas as duplas B6, B7 e B8 responderam incorretamente.

d)Para você conferir as respostas anteriores, sugiro elaborar a lista de todas as possibilidades. Convido você para organizar as possibilidades por meio de um diagrama de árvores. Faça um relatório sobre o seu desempenho nesta tarefa.A seguir os gráficos das duplas A2 e A6.

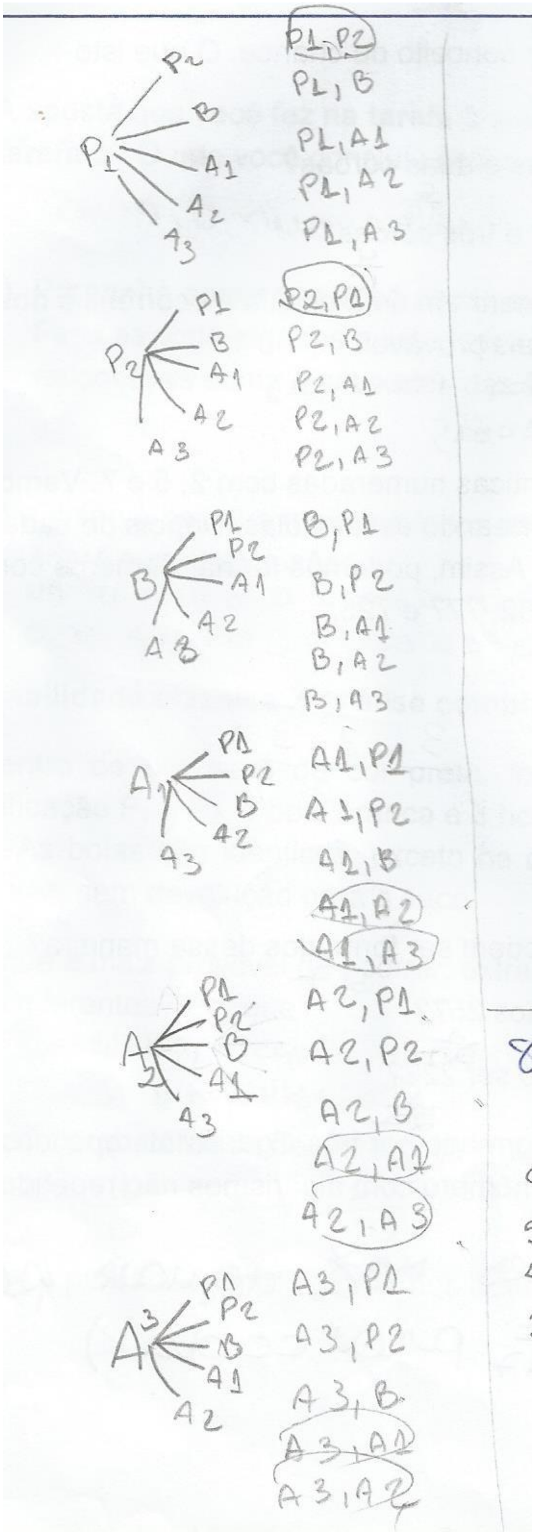
Figura 6: Diagrama da árvore da dupla A2



Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Figura 7: Diagrama da árvore da dupla A6

Figura 7: Diagrama da árvore da dupla A6



Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Por estar familiarizados com o diagrama da árvore, a maior parte das duplas desenvolveu a atividade com certa facilidade.

A tabela abaixo contêm as respostas das duplas:

Tabela 12: Respostas da atividade 7d.

A1	Só fez o diagrama da árvore.
A2	Os números da árvore deram vinte e dois diferentes e oito iguais, de acordo com as atividades 7 a, b ,c.
A3	Conclui que é mais fácil tirar bolas diferentes, as chances de tirar igual é 8/30 e diferentes 22/30.
A4	De que tirar igual é 8/30 e diferentes 22/30.
A5	Pude notar que na árvore de possibilidades as chances de sair cores iguais são 8/30 e de sair diferentes é de 22/30.
A6	Pude notar que minhas respostas anteriores estavam certas, e que a probabilidade de cair bolas iguais é de 8/30 e de bolas diferentes é de 22/30.
A7	Pude concluir que as chances de serem iguais são de 8/30 e diferentes de 22/30 , e que a minha resposta nos exercícios 7A, 7B e 7C estão corretas.
A8	Só fez o diagrama da árvore.
A9	Só fez o diagrama da árvore.
B1	Só fez o diagrama da árvore.
B2	O resultado que colocamos bateu com a árvore das possibilidades, pois há mais chances de sair cores diferentes do que iguais.
B3	Observando a árvore e de acordo com o nosso desenvolvimento na matéria, podemos provar que nossas deduções estavam certas.
B4	Só fez o diagrama da árvore.
B5	Só fez o diagrama da árvore.
B6	Existe 150 possibilidade.
B7	Bolas iguais 8/30 e diferentes 11/15.
B8	É 505, pois todos tem os mesmos resultados.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

As duplas A1, A8, A9, B1, B4 e B5 disseram que perderam muito tempo em fazer o diagrama da árvore e não fizeram o relatório, as duplas B6 e B8 tiveram muitas dificuldades e não responderam corretamente a questão, as demais duplas demonstraram ter assimilado corretamente o conteúdo. Durante a socialização das atividades uma aluna, Amanda, fez um comentário a respeito dessa atividade, que foi gravada em áudio e que segue abaixo:

Aluna: “Professor antes de fazer o experimento eu pensava que extrair duas bolas de mesma cor era mais fácil que extrair bolas de cores diferentes, depois de fazer o experimento eu percebi que extrair bolas iguais é bem mais fácil que extrair bolas diferentes, porque a possibilidade de extrair bolas diferentes é de 22/30, já iguais é 8/30.

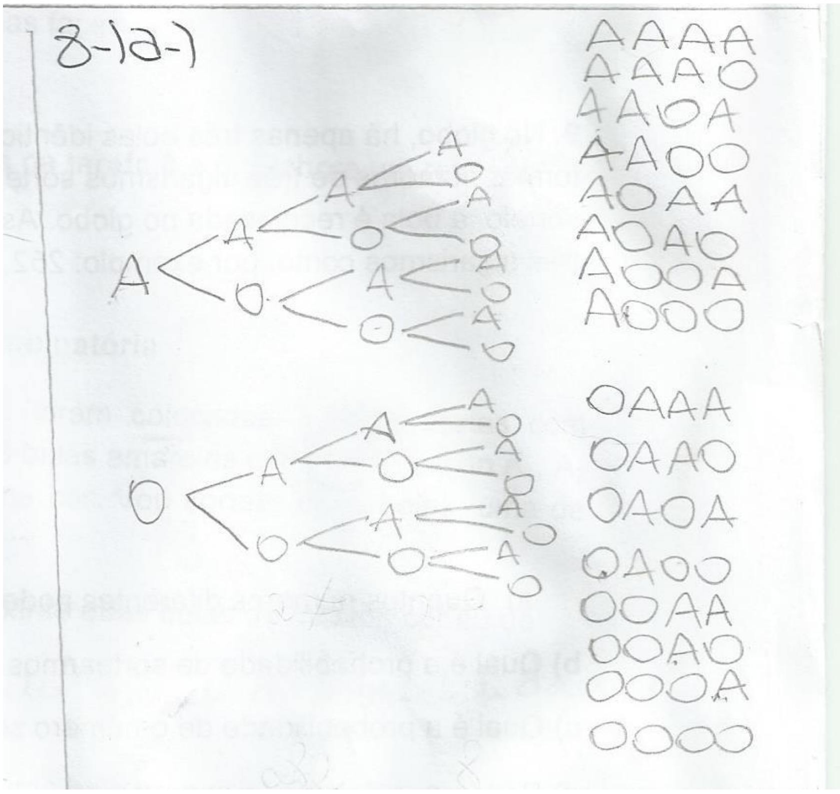
Linguagem probabilística X Estatística X Probabilidade clássica X análise combinatória

8. Quando jogo quatro moedas, uma de cada vez, há 16 resultados possíveis.

a) Vamos listar cada uma destas possibilidades, indicando cara por A e coroa por O?

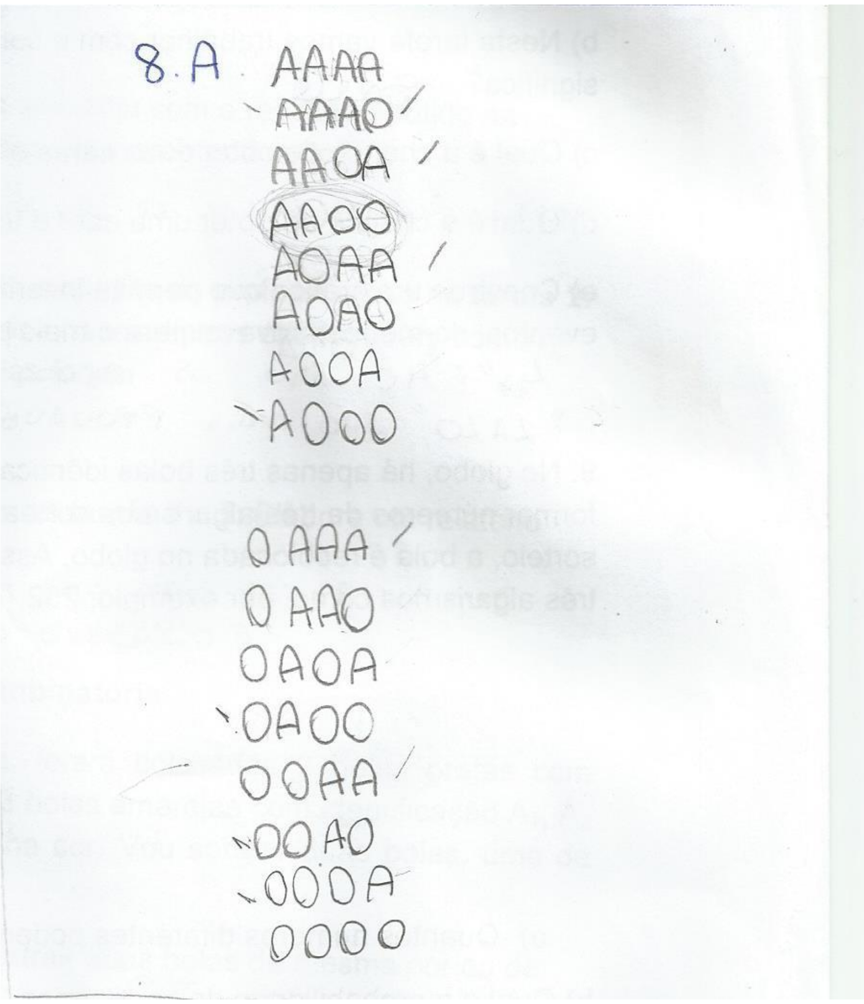
Segue abaixo alguns trabalhos das duplas A2 e A6:

Figura 8: Quadro dos 16 possíveis resultados ao jogar a moeda quatro vezes da dupla A2.



Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Figura 9: Quadro dos 16 possíveis resultados ao jogar a moeda quatro vezes da dupla A6.



Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Todas as dezessete duplas tiveram êxito nessa atividade.

b) Nesta tarefa vamos trabalhar com o conceito de chance. O que isto significa?

A tabela abaixo contêm as respostas das duplas:

Tabela 13: Respostas da atividade 8b.

A1	Não fez
A2	Sorte
A3	Que temos chance de acertar ou não
A4	Sorte
A5	Não fez
A6	Sorte
A7	Que seria algo na sorte
A8	Não fez
A9	Ter uma certa quantidade de chances
B1	Não fez
B2	Sorte
B3	A probabilidade de algo acontecer
B4	Uma coisa que pode ou não acontecer, sorte
B5	Não fez
B6	A chance de cair cara ou coroa
B7	Poderá sair qualquer uma das sequências
B8	Não fez

Fonte: Arquivo do pesquisador.

c) Qual é a chance de obter duas caras e duas coroas? A seguir as respostas das duplas:

Tabela 14: Respostas da atividade 8c.

A1	5/16
A2	5/16
A3	5/16
A4	Não fez
A5	6/16
A6	6/16
A7	6/16
A8	6/16
A9	5/16
B1	6/16
B2	6/16
B3	6/16
B4	2/16
B5	Não fez
B6	1/4
B7	6/16
B8	25%

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Apesar das duplas terem executados as dezesseis combinações possíveis, nove duplas responderam incorretamente essa questão, apresentaram dificuldades durante a conversão. Durante a socialização das tarefas a aluna Bruna, fez o seguinte comentário, que foi gravado em áudio, transcrito abaixo:

Aluna:” Professor olha que interessante eu achava que a chance de obter uma cara e três coroas era muito maior do que obter duas caras e duas coroas.”
Professor: Sim, conclua?
Aluna: “Mas depois que a gente fez o experimento eu percebi que a chance para obter duas caras e duas coroas é de 6/16 e de uma cara e três coroas é de 4/16, então a chance de obter duas cara e duas coroas é maior.”
Professor: Muito bem, Bruna.

d) Qual é a chance de obter uma cara e três coroas? Na tabela abaixo as respostas das duplas:

Tabela 15: Respostas da atividade 8d.

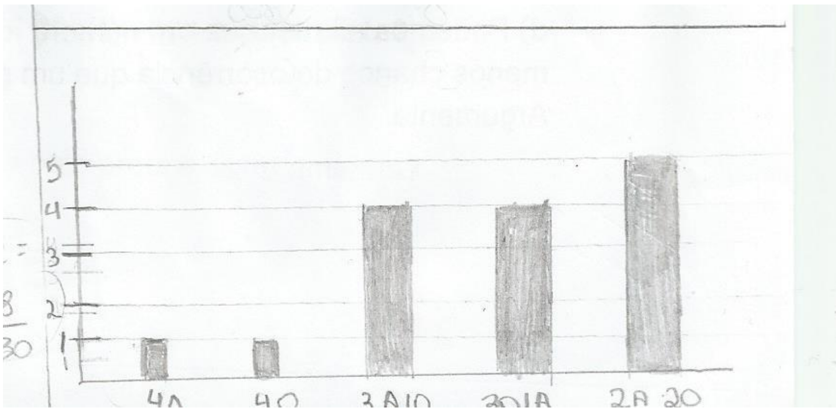
A1	4/16
A2	A1
A3	4/16
A4	4/16
A5	2/16
A6	4/16
A7	4/16
A8	4/16
A9	3/16
B1	6/16
B2	4/16
B3	4/16
B4	3/16
B5	Não fez
B6	3/4
B7	4/16
B8	12,5%

Fonte: Arquivos do pesquisador.

Nessa atividade, sete duplas responderam incorretamente, novamente cometeram erros na conversão.

e)Construa um gráfico que permita inserir em uma escala a ocorrência dos eventos: do menos provável para o mais provável. A seguir os gráficos das duplas A2, A6 e B1.

Figura 10: Gráfico de frequència da dupla A2.

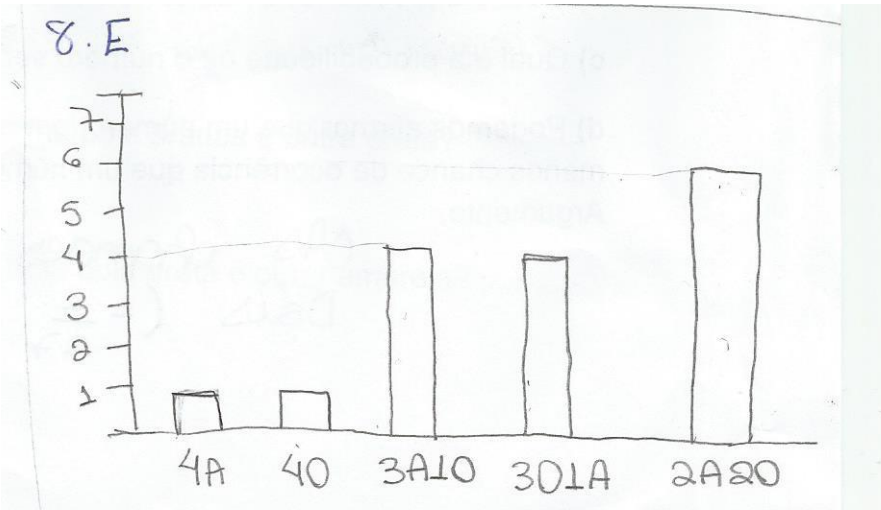


Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Figura 11: Gráfico de frequência da dupla A6.

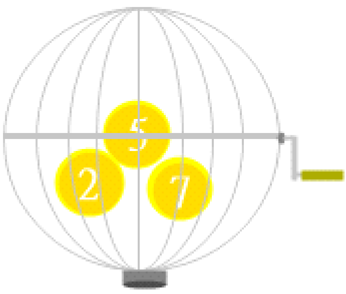
Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Figura 12: Gráfico de frequência da dupla B1.



Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

9. No globo, há apenas três bolas idênticas numeradas com 2, 5 e 7. Vamos formar números de três algarismos sorteando essas bolas. Depois de cada sorteio, a bola é recolocada no globo. Assim, podemos formar números com três algarismos como, por exemplo: 252, 777 e 725.



a)Quantos números diferentes podem ser formados dessa maneira? A seguir a tabela com os resultados das duplas:

Tabela 16: Respostas da atividade 9a.

A1	27
A2	27
A3	27
A4	27
A5	27
A6	27
A7	27
A8	27
A9	27
B1	27
B2	27
B3	27
B4	27
B5	27
B6	Não fez
B7	777
B8	777

Fonte: Arquivo do pesquisador.

b)Qual é a probabilidade de sortearmos 257? A tabela a seguir mostra os resultados das duplas:

Tabela 17: Respostas da atividade 9b.

A1	1/27
A2	1/27
A3	1/27
A4	1/27
A5	1/27
A6	1/27
A7	1/27
A8	1/27
A9	1/27
B1	1/27
B2	1/27
B3	1/27
B4	1/27
B5	1/27
B6	Não fez
B7	1/3
B8	1/3

Fonte: Arquivo do pesquisador.

c)Qual é a probabilidade de o número ser 222?. A tabela a seguir mostra os resultados das duplas:

Tabela 18: Respostas da atividade 9c.

A1	1/27
A2	1/27
A3	1/27
A4	1/27
A5	1/27
A6	1/27
A7	1/27
A8	1/27
A9	1/27
B1	1/27
B2	1/27
B3	1/27
B4	1/27
B5	1/27
B6	Não fez
B7	1/3
B8	1/3

Fonte: Arquivo do pesquisador.

d) Podemos afirmar que um número formado por três algarismos repetidos tem menos chance de ocorrência que um número com algarismos não repetidos? (SÃO PAULO, 2012, p.108) Argumente. A seguir a tabela com as respostas das duplas.

Tabela 19: Respostas da atividade 9d.

A1	Sim, pois a probabilidade cai devido a chance de cada jogada
A2	Não, todos têm chances iguais
A3	Números não repetidos tem mais chances do que sair iguais
A4	Sim, porque são as mesmas possibilidades
A5	Não respondeu
A6	As chances são iguais para os dois, 1/27 para cada
A7	Não, pois as chances são as mesmas
A8	Sim, pois você vai voltar o algarismo ao globo
A9	Números que não são repetidos tem mais chances
B1	Sim, pois há 3/27 de chance de sair repetidos, já aleatórios há 24/27
B2	Não, pois o resultado de B e C mostram que as chances do número repetido e não repetido é a mesma
B3	Sim, porque a chance de cair três repetidos é de 3/27 e de cair três diferentes é de 6/27
B4	Sim, pois só tem um repetido a cada nove.
B5	Sim, pois tem mais chances de saírem não repetidos
B6	Não respondeu
B7	Sim, pois as possibilidades de saírem números diferentes são maiores
B8	Sim

Fonte: Arquivo do pesquisador.

A dupla B6 disse que não fez a atividade 9 pois perdeu muito tempo com o gráfico da atividade 8e. Com exceção das duplas B6, B7 e B8 as demais duplas obtiveram um aproveitamento positivo na resolução da atividade **a, b** e **c,** levamos em consideração que as duplas apresentam um certo domínio com a linguagem probabilística apresentada**.** Na atividade **d,** apenas as duplas A2, A6, A7 e B2 responderam corretamente, as demais duplas, em sua maioria, cometeram um erro de interpretação. As duplas B1 e B6, durante a socialização, comentaram que a pergunta foi mal formulada, então o professor pesquisador explicou que a resposta deles foi para a pergunta: “Qual a probabilidade de obtermos um número com três algarismos repetidos?”, que seria de 3/27, e tomou um exemplo da loteria federal, que possui cem mil números, e perguntou para as duplas B1 e B6, se um deles possuísse o bilhete de número 33333 e outro o bilhete de número 12345, qual seriam as chances de cada um e obteve como respostas 1/100.000 para cada número e assim ficaram convencidos com a explicação.

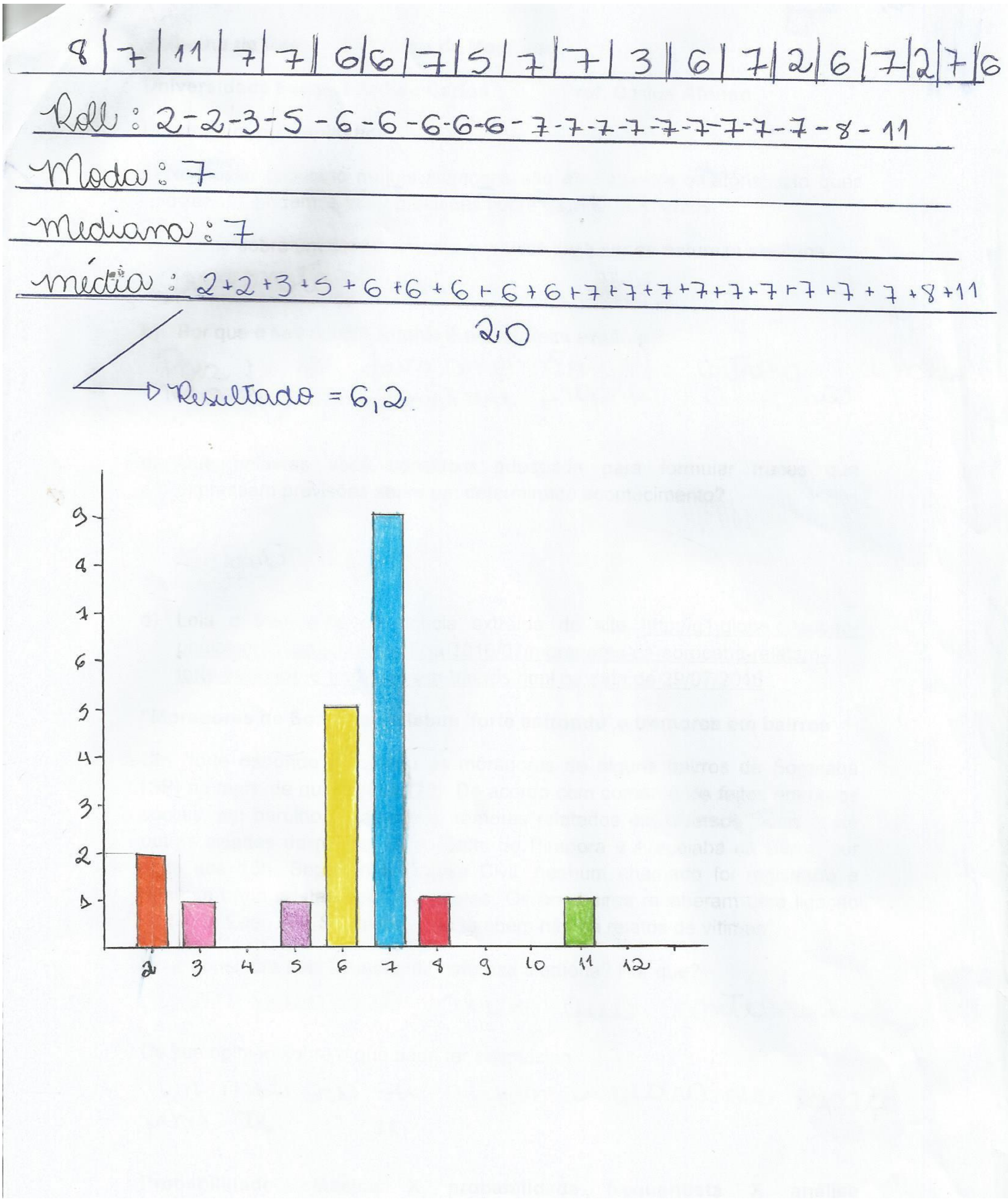
Durante as discussões das tarefas, a aluna Camila fez um comentário que foi gravado em áudio que segue conforme segue abaixo:

Aluna: “Professor eu achava que as possibilidades de se obter um número com três algarismos repetidos era maior do que obter um número com os três algarismos não repetidos, mas depois de fazer a árvore das possibilidades...”
Professor: “Você fez a árvore de possibilidades?”
Aluna: “Fiz, depois de fazer eu fui lá e vi que não é, os dois tem uma chance em 27, então o número formado por três algarismos repetidos não tem maior possibilidade, os dois são iguais.”

Algumas duplas que conseguiram terminar as atividades antes do tempo previsto que era de quatro aulas, o professor-pesquisador pediu para que construíssem um gráfico da atividade 5, que apresentassem os resultados em rol e qual a sua moda, média e mediana.

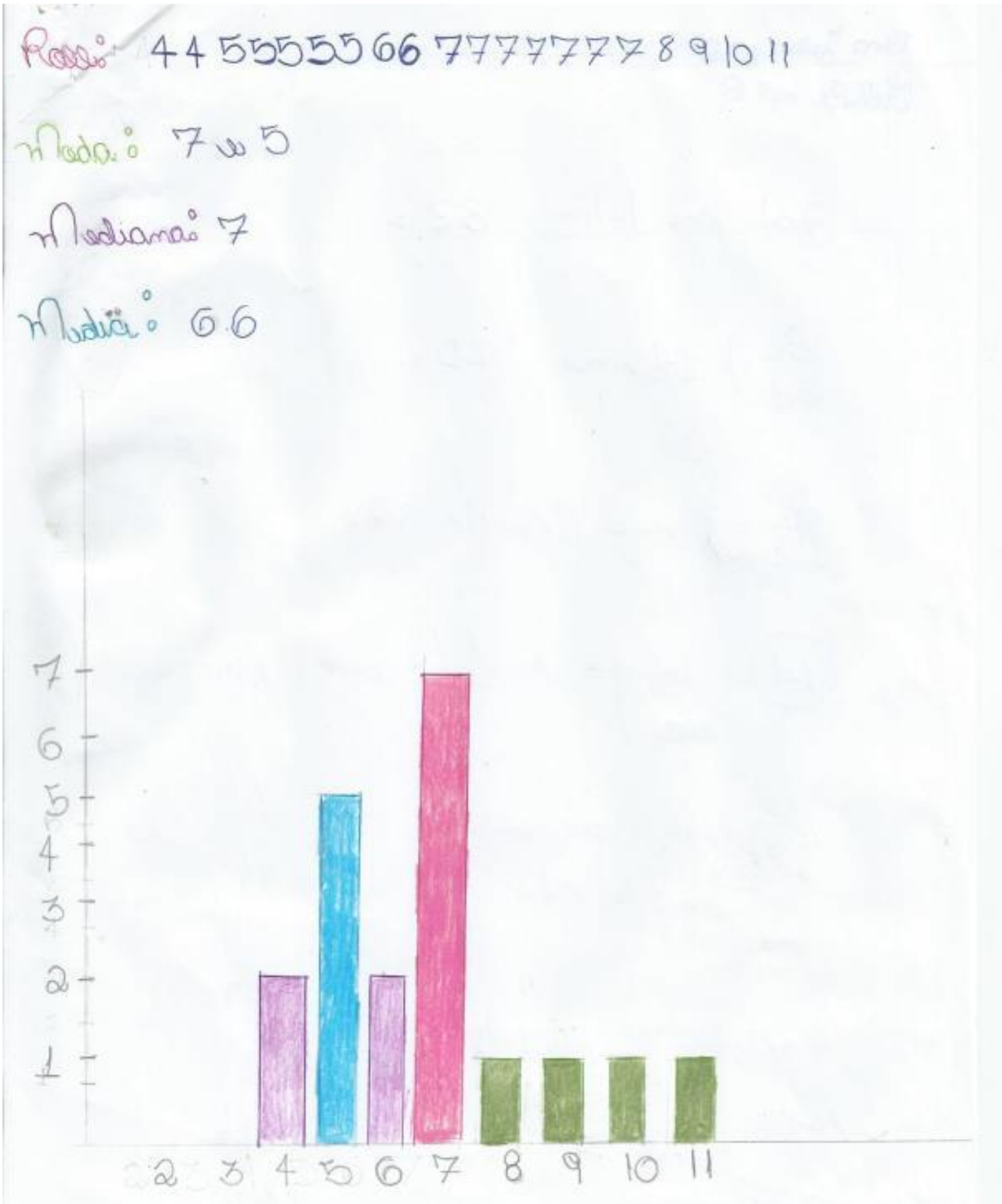
A seguir alguns trabalhos das duplas B1 e B8.

Figura 13: Gráfico de frequência da dupla B1.



Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Figura 14: Gráfico de frequência da dupla B6.



Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016)

4.2 APLICAÇÃO DA SEGUNDA PESQUISA

Para a segunda etapa, o tempo estimado desse trabalho é de quatro horas no ambiente papel e lápis. Esta atividade apresenta de forma contextualizada um experimento aleatório que propicia o aparecimento dos conceitos básicos de probabilidade, bem como a interpretação de gráficos e tabelas. Recomenda-se que os participantes trabalhem em dupla. Esta atividade também pode ser trabalhada no laboratório de informática, através do Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico – AVALE (CAZORLA, KATAOKA e NAGAMINE, 2010), que é um projeto de pesquisa e desenvolvimento da Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC.

Essa sequência didática "Passeios Aleatórios da Mônica" foi proposta originalmente por Fernandez e Fernandez (1999) para o estudo no Ensino Superior e foi adaptada posteriormente para o ensino de Probabilidade na Educação Básica por Cazorla e Santana (2006) com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN e é composta por quatro sessões:

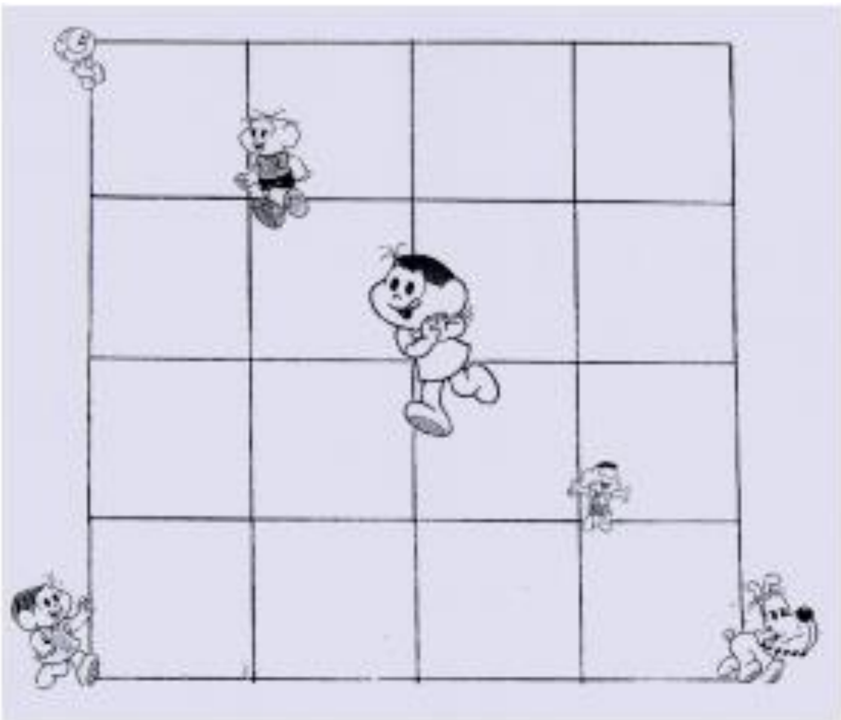
A primeira sessão compreende a leitura da história e a partir dela as percepções prévias de probabilidade por parte dos alunos. A segunda sessão subdivide-se em duas partes, sendo a primeira relativa à experimentação aleatória e a segunda parte à organização dos resultados em tabelas e gráficos e a probabilidade frequentista. A terceira sessão aborda à modelagem matemática a partir da árvore de possibilidades e a organização dos resultados e a probabilidade clássica ou Laplaciana. A quarta e última sessão compara as diversas formas de atribuir probabilidade, bem como busca analisar as reflexões dos alunos após a realização da pesquisa, em que busca verificar o impacto da experimentação aleatória e da modelagem matemática no desenvolvimento dos conceitos probabilísticos, no qual a pergunta norteadora é : Todos os amigos têm a mesma chance de ser visitados?

Optamos por fazer algumas alterações em relação a sequência original, mas não perdendo a sua originalidade.

A história dos Passeios Aleatórios da Mônica

A Mônica e seus amigos moram no mesmo bairro. A distância da casa da Mônica para a casa de Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu é de quatro quarteirões, conforme ilustra a Figura 1. A Mônica costumava visitar seus amigos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida: segunda-feira, Horácio; terça-feira, Cebolinha; quarta-feira, Magali; quinta-feira, Cascão e sexta-feira, Bidu. Para tornar mais emocionantes os encontros, a turma combinou que a sorte escolhesse o amigo a ser visitado pela Mônica. Para isso, na saída de sua casa e a cada cruzamento, Mônica deve jogar uma moeda; se sair cara (C), andará um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste. Cada jogada representa um quarteirão de percurso. Mônica deve jogar a moeda quatro vezes para poder chegar à casa dos amigos.

Figura 15: Cartaz dos Passeios Aleatórios da Mônica



Fonte: Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico – AVALE (CAZORLA, KATAOKA e NAGAMINE,2010)

Essa segunda pesquisa foi dividida em quatro seções.

Seção I

Na primeira etapa foram feitas 4 perguntas. A primeira pergunta foi: “De quantas maneiras a Mônica pode visitar os seus amigos?” A tabela a seguir apresenta os resultados das dezessete duplas

Tabela 20: Passeios Aleatórios da Mônica –seção 1 – atividade 1a

A1	14
A2	16
A3	4
A4	6
A5	14
A6	16
A7	13
A8	7
A9	8
B1	16
B2	16
B3	16
B4	40
B5	2
B6	6
B7	16
B8	16

Fonte: Arquivos do pesquisador.

Aqui o estudante depende essencialmente de conhecimentos prévios e da interpretação de texto para responder a esta questão, onde as duplas A2, A6, B1, B2, B3, B7 e B8 responderam corretamente.

A segunda pergunta: “Quais são os possíveis resultados de lançar uma moeda?”

E a terceira pergunta: “Qual é a chance de sair cara? E coroa?”

Todos os grupos responderam corretamente, na terceira pergunta alguns grupos responderam ½, outros 50% e outros responderam metade, levamos em conta que as duplas apresentam um certo domínio com a linguagem probabilística utilizada. Durante a socialização assumimos o fato de que a moeda seria honesta, e também foi comentado como seria as características físicas dessa moeda.

A quarta e última pergunta: “Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados? Por que vocês acham isso?” A seguir foi elaborada uma tabela com a resposta de cada grupo.

Tabela 21: Passeios Aleatórios da Mônica – seção 1 –atividade 1d.

A1	Não, porque a chance de dar cara é quatro vezes mais difícil, assim como quatro coroas também
A2	Não
A3	Não, porque se tiver uma mudança no cara ou coroa, você não consegue visitar nem Bidu e nem Horácio
A4	Não, porque não tem a chance de tirar tudo cara para visitar o Horácio
A5	Sim, pois todos tem quatro lançamentos de moeda
A6	Não, a probabilidade de sair quatro caras ou quatro coroas seguidas é menor que as outras
A7	Não, porque se der alguma alteração ele não consegue visitar o Horácio ou o Bidu
A8	Não, porque depende da forma que a moeda irá cair
A9	Sim
B1	Sim, todos têm chances, alguns têm mais chances que outros, depende da sorte
B2	Não, porque alguns têm mais chances que outros
B3	Não, porque tem mais chances de cair três vezes um lado e uma vez o outro do que cair duas de cada ou quatro de um lado só
B4	Sim, pois tem a mesma chance
B5	Não, pois moram em diferentes lugares
B6	Não, porque só pode usar quatro vezes
B7	Sim, porque a probabilidade de ambos são iguais
B8	Não, pois são cinco amigos e só há quatro lançamentos

Fonte: Arquivos do pesquisador.

As duplas que responderam sim (A5, A9, B4 e B7) concluíram que a equiprobabilidade está na quantidade de amigos e não no número de caminhos. Durante a socialização dessa atividade o aluno 5, conforme gravado em áudio, afirmou:

Aluno 5: “Não, porque a chance de cair cara, cara, cara ou coroa, coroa, coroa é bem difícil”.

Seção II

A segunda etapa da sequência didática foi a experimentação aleatória na qual os alunos teriam de lançar a moeda quatro vezes, se sair cara (C), Mônica andará um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste. Teriam de repetir esse experimento 30 vezes a anotar os resultados no Quadro 1. Após anotarem a sequência no quadro sem maiores dificuldades, responderam a mais cinco questões. Segue a tabela com os resultados de cada grupo.

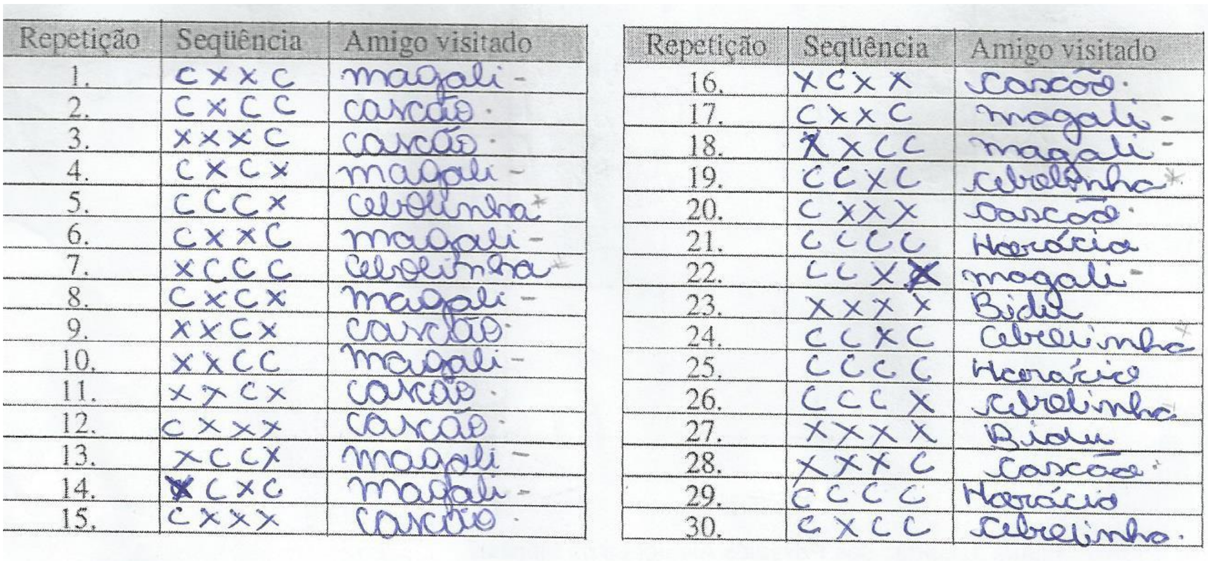
Tabela 22: Passeios Aleatórios da Mônica – seção 2 – Resultados da experiência aleatória de cada dupla.

Duplas	Horácio	Cebolinha	Magali	Cascão	Bidu
A1	2 ou 6,66%	6 ou 19,98%	13 ou 43,29%	7 ou 23,31%	2 ou 6,66%
A2	2 ou 6,66%	3 ou 9,99%	12 ou 39,96%	9 ou 29,97%	4 ou 13,32%
A3	1 ou 3,33%	6 ou 19,98%	14 ou 46,62%	5 ou 16,65%	4 ou 13,32%
A4	0 ou 0%	6 ou 19,98%	16 ou 53,28%	7 ou 23,31%	1 ou 3,33%
A5	1 ou 3,33%	12 ou 39,96%	10 ou 33,33%	5 ou 16,65%	2 ou 6,66%
A6	1 ou 3,33%	9 ou 29,97%	9 ou 29,97%	9 ou 29,97%	2 ou 6,66%
A7	2 ou 6,66%	6 ou 19,98%	12 ou 39,96%	9 ou 29,97%	1 ou 3,33%
A8	2 ou 6,66%	10 ou 33,33%	13 ou 43,29%	4 ou 13,32%	1 ou 3,33%2
A9	2 ou 6,66%	6 ou 19,98%	10 ou 33,33%	8 ou 26,64%	3 ou 9,99%
B1	3 ou 9,99%	6 ou 19,98%	10 ou 33,33%	9 ou 29,97%	2 ou 6,66%
B2	2 ou 6,66%	9 ou 29,97%	11 ou 36,63%	7 ou 23,31%	1 ou 3,33%
B3	0 ou 0%	10 ou 33,33%	12 ou 39,96%	5 ou 16,65%	3 ou 9,99%
B4	2 ou 6,66%	5 ou 16,65%	12 ou 39,96%	4 ou 13,32%	7 ou 23,31%
B5	4 ou 13,32%	6 ou 19,98%	10 ou 33,33%	7 ou 23,41%	3 ou 9,99%
B6	0 ou 0%	6 ou 19,98%	12 ou 39,96%	7 ou 23,32%	5 ou 16,65%
B7	2 ou 6,66%	6 ou 19,98%	17 ou 56,61%	4 ou 13,32%	1 ou 3,33%
B8	0 ou 0%	8 ou 27%	13 ou 43%	7 ou 23%	2 ou 6%

Fonte: Arquivos do pesquisador.

A seguir, o quadro de resultados da experimentação aleatória das duplas B1 e B7:

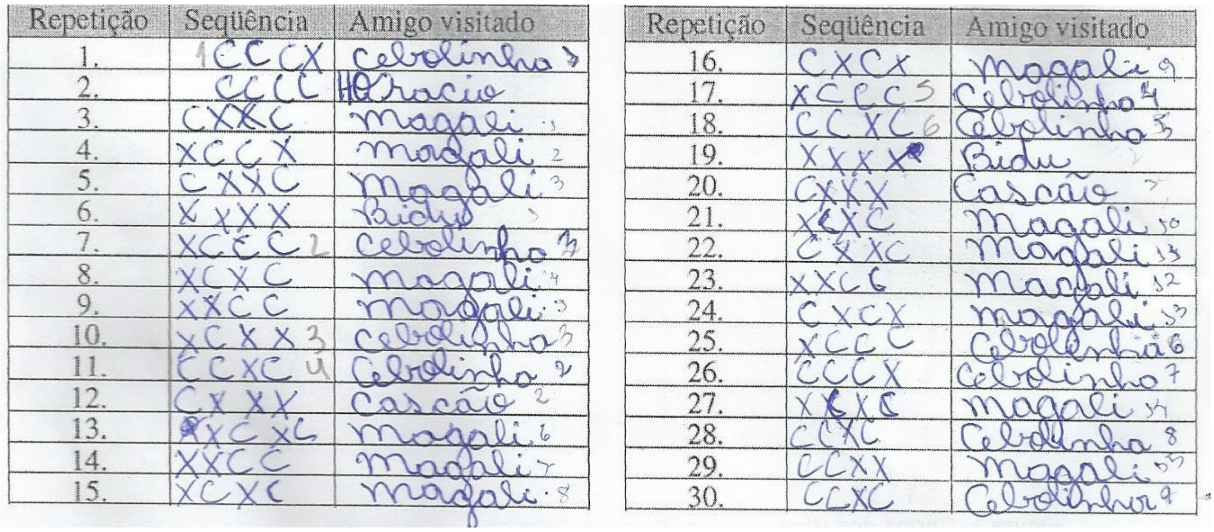
Figura 16: Quadro de resultados da experimentação aleatória da dupla B1.



Repetição	Seqüência	Amigo visitado	Repetição	Seqüência	Amigo visitado
1.	CXXC	magali	16.	XCXX	cascão
2.	CXCC	cascão	17.	CXXC	magali
3.	XXXC	cascão	18.	XXCC	magali
4.	CXCX	magali	19.	CCXC	cebolinha
5.	CCCX	cebolinha	20.	CXXX	cascão
6.	CXXC	magali	21.	CCCC	Horácio
7.	XCCC	cebolinha	22.	CCXX	magali
8.	CXCX	magali	23.	XXXX	Bidu
9.	XXCX	cascão	24.	CCXC	Cebolinha
10.	XXCC	magali	25.	CCCC	Horácio
11.	XXCX	cascão	26.	CCCX	cebolinha
12.	CXXX	cascão	27.	XXXX	Bidu
13.	XCCX	magali	28.	XXXC	cascão
14.	XCXC	magali	29.	CCCC	Horácio
15.	CXXX	cascão	30.	CXCC	cebolinha

.Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Figura 17: Quadro de resultados da experimentação aleatória da dupla B7



Repetição	Seqüência	Amigo visitado
1.	1 CCCX	Cebolinha 1
2.	CCCC	Horacio
3.	CXXC	Magali 1
4.	XCCX	Magali 2
5.	CXXC	Magali 3
6.	XXXX	Bidu 1
7.	XCCC 2	Cebolinha 2
8.	XCXC	Magali 4
9.	XXCC	Magali 5
10.	XCXX 3	Cebolinha 3
11.	CCXC 4	Cebolinha 2
12.	CXXX	Cascão 2
13.	XXCXC	Magali 6
14.	XXCC	Magali 7
15.	XCXC	Magali 8
16.	CXCX	Magali 9
17.	XCCC 5	Cebolinha 4
18.	CCXC 6	Cebolinha 5
19.	XXXX	Bidu 2
20.	CXXX	Cascão 3
21.	XCXC	Magali 10
22.	CXXC	Magali 11
23.	XXCC	Magali 12
24.	CXCX	Magali 13
25.	XCCC	Cebolinha 6
26.	CCCX	Cebolinha 7
27.	XCXC	Magali 14
28.	CCXC	Cebolinha 8
29.	CCXX	Magali 15
30.	CCXC	Cebolinha 9

Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

O processo de experimentação motivou e descontraiu as duplas, enquanto um jogava a moeda o outro anotava a sequência. A dupla B4 notou uma grande diferença ao número de vezes em que Bidu foi visitado em relação ás demais duplas, obtiveram 7 visitas, inclusive superando ao Cascão e ao Cebolinha.

A primeira pergunta da segunda etapa foi: “Quem tem mais chance de ser visitado? Por que?” A seguir a tabela com as respostas de todos os grupos.

Tabela 23: Passeios Aleatórios da Mônica – seção 2 - atividade 2a.

A1	Magali, pela sorte
A2	Magali, a probabilidade dela de chances é maior
A3	Magali, porque tem mais chances de sair cara, coroa, cara, coroa, pois cada um tem 50% de chances de sair
A4	Magali, porque jogando a moeda quatro vezes ela foi a que teve mais chance
A5	Cebolinha, por causa da sorte
A6	Cascão, Cebolinha e Magali foram visitados iguais
A7	Magali, pois ela tem seis combinações para ela ser visitada
A8	Magali, a sorte
A9	Magali, porque a sorte ajudou
B1	Magali, porque ela está no centro e há mais sequências que resultam nela
B2	Magali, porque teve onze chances em trinta
B3	Magali, porque tem mais chance de cair duas de cada
B4	Magali, pois é que mais deu
B5	Magali, porque ela está no meio da vizinhança
B6	Magali, porque ela tem 50% de cair cara e 50% de cair coroa
B7	Magali, pois ela foi visitada dezessete vezes em trinta jogadas
B8	Magali, por estar localizada no meio

Fonte: Arquivos do pesquisador.

Durante a socialização desta tarefa, com exceção das duplas A5 e A6, os demais obtiveram como amigo mais visitado foi a Magali e algumas duplas justificaram pela sua localização (B1, B5 e B8), pois a maior frequência de Magali está relacionada a sua posição central, ou seja, compreendem que a posição de cada amigo no roteiro influencia a probabilidade de visita. Outras duplas associaram a sorte (A1, A4, A5, A8, A9, B2, B4 e B5) e outras perceberam que a chance de sair duas caras e duas coroas é maior que sair três cara e uma coroa, ou três coroas e uma cara, ou quatro coroas ou quatro caras. A dupla A5 teve como mais visitado o Cebolinha, atribuindo o resultado a sorte, já a dupla A6, as visitas ao Cascão, Cebolinha e a Magali foram iguais.

A segunda pergunta foi: “Existe a chance de algum amigo não ser visitado?” As respostas foram dadas de acordo com os resultados na experiência aleatória. Segue a tabela com a resposta de cada grupo.

Tabela 24: Passeios Aleatórios da Mônica – seção 2 – atividade 2b

A1	Não pois todos foram visitados
A2	Não
A3	Todos foram visitados, a chance de visitar Horácio e o Bidu são bem poucas,precisariam de vários arremessos
A4	Sim
A5	Sim
A6	Existe a possibilidade
A7	Não
A8	Não, porque todos foram visitados.
A9	Não.
B1	Não, todos foram visitados
B2	Sim, depende das jogadas
B3	Sim, aqui o Horacio não foi visitado
B4	Sim, poderá cair somente um amigo, ou dois ou três
B5	Sim
B6	Sim, o Horácio
B7	Existe, pois por tentativas existe a possibilidade de não sair o caminho para algum amigo, diferente da árvore
B8	De toda a forma todos foram visitados, porém uns foram mais visitados do que outros

Fonte: Arquivos do pesquisador.

Responderam que sim 9 duplas em que na sua experiência frequentista algum amigos ficou sem ser visitado, e durante a socialização da tarefa algumas duplas afirmaram que seria mais difícil ocorrer resultados consecutivos que quatro caras ou quatro coroas, indicando uma compreensão do conceito de aleatoriedade associado ao conceito de chance. Após a realização dessa atividade foi gravado um áudio, transcrito a seguir:

Professor: “Na segunda parte da experiência aleatória, existe a chance de alguma amigo não ser visitado? O que vocês acham sobre isso?”
Aluna 4: “Eu acredito que sim, que exista uma chance de algum amigo não ser visitado porque é uma coisa que vai pela sorte, uma coisa bem aleatória.”
Professor: “ Você acha que nem todos vão ser visitados?”
Aluna4 : “Sim.”
Aluno 5: “Eu acho que não, no meu nem todos foram visitados, é muito difícil a possibilidade de dar quatro caras ou quatro coroas.”
Professor: “Você acha que pode ser que eles não sejam visitados?”
Aluno 5: “Sim, que nem todos sejam visitados”

Das duplas que responderam sim, que existe a chance de Horácio e Bidu não poderem ser visitados, argumentaram que seria mais difícil obter quatro caras, ou quatro coroas, indicando assim um entendimento do conceito de aleatoriedade associado ao conceito de chance. As duplas que responderam não se basearam nos resultados obtidos da frequência relativa.

A terceira pergunta foi :“Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados ? As respostas estão na tabela que vem a seguir.

Tabela 25: Passeios Aleatórios da Mônica – seção 2 – atividade 2c

A1	Não
A2	Não
A3	Não, a chance de Magali, Cascão e Cebolinha são maiores que as chances de Bidu e Horácio
A4	Não
A5	Não
A6	Não
A7	Não
A8	Não
A9	Não, porque alguns tiveram mais sorte do que o outro
B1	Não, Bidu e Horácio têm menos chance
B2	Não, são diferente.
B3	Não
B4	Não
B5	Não
B6	Não
B7	Não, são diferentes
B8	Não

Fonte: arquivos do pesquisador.

Na seção I desta sequência didática foi feita essa mesma pergunta e cinco duplas responderam que sim, que todos os amigos tinham a mesma chance de serem visitados (A5, A9, B1, B4 e B7), e após a experiência aleatória mudaram de opinião e que segundo Nagamine et al (2011) a técnica correta para realizar esta atividade consiste na comparação formada após a realização da experiência aleatória.

A quarta tarefa seria para completar o quadro de Distribuição de Frequência-TDF, ou seja, distribuição do número de visitas que cada amigo recebeu da Mônica.

Para completar o quadro os alunos não tiveram dificuldades. Foi permitido o uso de calculadoras para completar a tabela com a frequência relativa e a porcentagem. Somente no A5 e A6, a Magali não foi a mais visitada, foram respectivamente Cebolinha e Cascão. Horácio e Bidu foram os menos visitados em todos os grupos, sendo que no A4 , B3 e B6, Horácio não foi visitado, no B4 Bidu foi mais visitado do que Cascão e Cebolinha e também no A2 Bidu teve 4 visitas e Cebolinha 3. A seguir os quadros de frequência relativa de algumas duplas.

Abaixo a Tabela de Distribuição de Frequência do B3 e B2:

Figura 18: Quadro de resultados da experimentação aleatória da dupla B7

Amigo	Nº de vezes que foi visitado (fi)	Freqüência relativa (hi)	Porcentagem (100*hi)
Horácio	0/	0/30	0%
Cebolinha	10	10/30	33,3%
Magali	12	12/30	39,9%
Cascão	5	5/30	16,65%
Bidu	3	3/30	9,99%
Total	30	1,00	100,00

Onde hi = fi/30, que representa uma estimativa da probabilidade

Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Figura 19: Tabela de distribuição de frequência da dupla B3

Amigo	Nº de vezes que foi visitado (fi)	Freqüência relativa (hi)	Porcentagem (100*hi)
Horácio	2	2/30	6,66%
Cebolinha	9	9/30	29,97%
Magali	11	11/30	36,63%
Cascão	7	7/30	23,31%
Bidu	1	1/30	3,33%
Total	30	1,00	100,00

Onde hi = fi/30, que representa uma estimativa da probabilidade

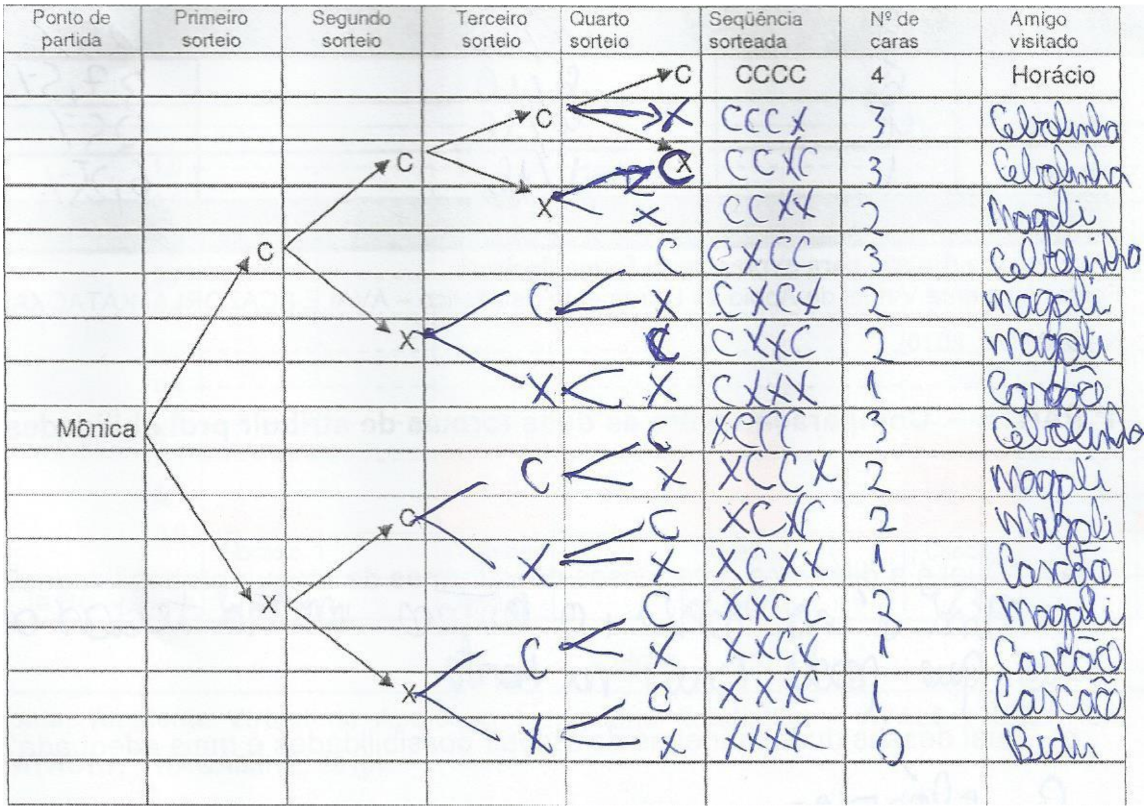
Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Seção III

A terceira etapa do trabalho é a de Modelagem Matemática ou seja, a árvore de possibilidades. Foi pedido para que as duplas completassem a árvore de possibilidades, e observassem que cada ramo se desdobra em dois novos ramos, um para cara e outro para coroa. A maioria dos alunos não apresentaram maiores dificuldades em completar a árvore de possibilidades, pois já tiveram contato com esse conteúdo nesse ano e também nos anos anteriores.

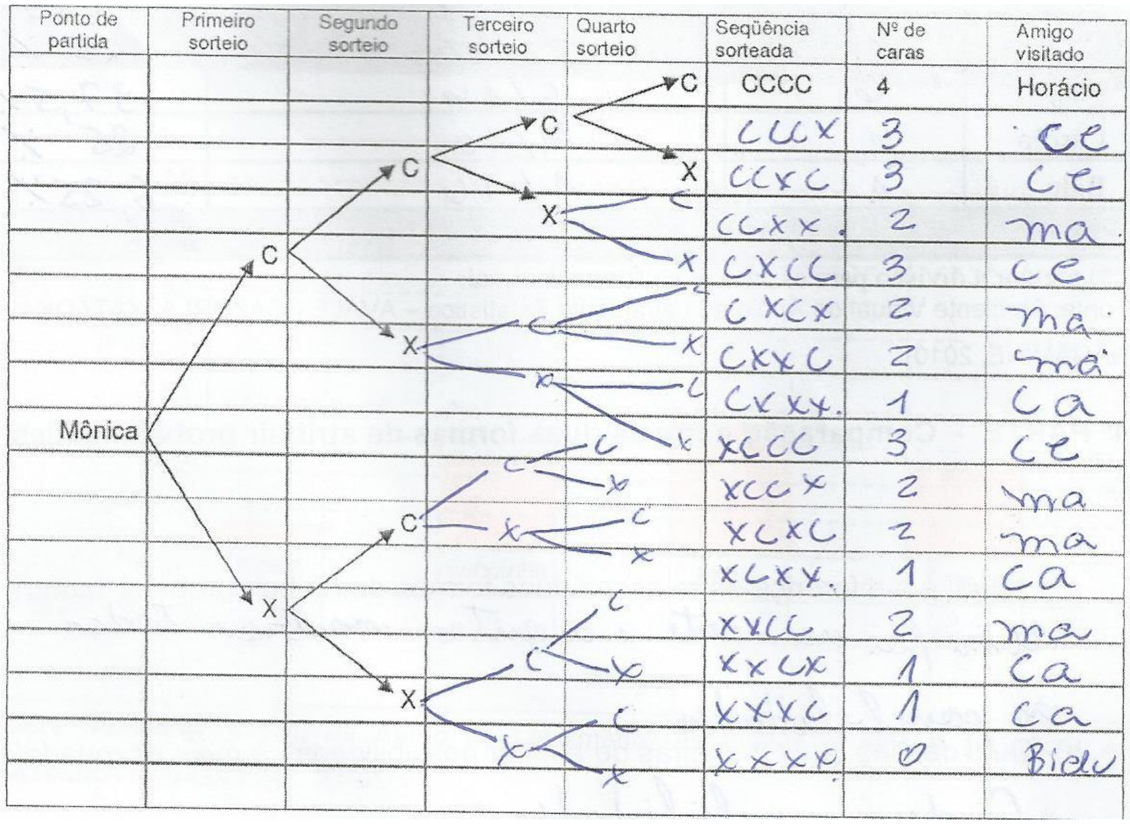
Segue a árvore de possibilidades do grupo B3 e B2.

Figura 20: Árvore das possibilidades da dupla B3.



Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Figura 21: Árvore de possibilidades do grupo B2.



Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Houve um pouco de dificuldade entre as duplas A8 e A9, intervi para que entendessem a sequência, em seguida, solucionada a dúvida prosseguimos a atividade com mais quatro perguntas. A primeira pergunta foi: “Quantos caminhos existem ao todo?” A seguir a tabela com respostas das duplas.

Tabela 26: Passeios Aleatórios da Mônica – seção 3 – atividade 2a

A1	16
A2	16
A3	5
A4	16
A5	16
A6	16
A7	16
A8	10
A9	16
B1	16
B2	16
B3	16
B4	16
B5	16
B6	16
B7	16
B8	16

Fonte: Arquivos do pesquisador

Nesta atividade, o estudante usará a probabilidade clássica ou Laplaciana. As duplas A3 e A8 chegaram a uma conclusão errada, a dupla A3 construiu a árvore corretamente, mas respondeu 5 ,pois contou o número de amigos, já a dupla A8 confundiu a sequência, as demais duplas responderam corretamente.

A segunda pergunta era: “Existe uma relação comum a todos os caminhos que levam a cada um dos amigos?” A seguir a tabela de respostas das duplas.

Tabela 27: Passeios Aleatórios da Mônica – seção 3 – atividade 3b

A1	De acordo com número de caras
A2	O número de vezes que se joga a moeda em todos os caminhos
A3	Não existe
A4	Não
A5	Em relação ao número de caras
A6	Não, porque todos tem cara, menos o Bidu
A7	De acordo com o número de caras
A8	Sim, a relação em que a moeda cai
A9	Sim, porque muitos caminhos se repetem
B1	De acordo com o diagrama das possibilidades a relação comum entre os caminhos é o número de caras
B2	O número de caras
B3	De acordo com o número de caras
B4	Não
B5	Sim
B6	Sim, de acordo com o número de caras
B7	Sim, de acordo com o número de caras cada amigo é visitado
B8	Não

Fonte: Arquivos do pesquisador.

Esta tarefa tem como objetivo verificar se os estudantes relacionam o número de caras ao amigo visitado. As duplas A2, A3, A4, A8, A9, B4, B5 e B8 não conseguiram perceber a regularidade da quantidade de caras para cada um deles

O aluno 7, durante a socialização fez a seguinte observação, conforme gravado em áudio:

Aluno 7: " Professor reparei que se der quatro cara sai o Horácio, se der três sai o Cebolinha, se der duas cara sai a Magali e uma vai ser o Cascão, tá formando uma sequência."

A terceira pergunta foi: "Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?" Segue a seguir a tabela de respostas dos alunos.

Tabela 28: Passeios Aleatórios da Mônica – seção 3 – atividade 3c

A1	Não
A2	Não
A3	Não
A4	Não
A5	Não
A6	Não, porque Bidu e Horácio tem 1/16 de chance
A7	Não
A8	Não, depende do jeito que a moeda irá cair
A9	Nâo, pois há mais possibilidades das faces serem intercaladas do que serem quatro faces iguais
B1	Não, de acordo com o diagrama das árvores das possibilidades as chances de todos são diferentes
B2	Não, a Magali é a mais visitada e Horácio e Cascão são os menos visitados
B3	Não, mas Cebolinha e Cascão tem chances iguais, assim como Bidu e Horácio
B4	Sim
B5	Não, são diferentes
B6	Sim
B7	Não. Horácio e Bidu tem 1/16 de chances e Cebolinha e Cascão 4/16 e a Magali 6/16 de chances
B8	Não

Fonte: Arquivos do pesquisador.

As duplas B4 e B6, durante a socialização, disseram que se equivocaram com a pergunta, entendendo que havia chance de todos os amigos serem visitados, desconsiderando o fenômeno aleatório envolvido na experimentação, as demais duplas apresentaram domínio com a linguagem probabilística utilizada.

A quarta questão foi pedido para completar a tabela do Quadro comparativo de atribuição de probabilidades da visita da Mônica aos seus amigos. Os grupos A3, A7, A8, A9, B5, B8 encontraram dificuldades no momento de indicar o amigo através da sequência sorteada, o grupo B8 apresentou dificuldades na conversão de fração para porcentagem, os demais grupos não tiveram dificuldades. Durante a socialização dessa atividade, segue abaixo a gravação de áudio de um aluno.

Aluno 6: " A chance de cair cara, cara, coroa, coroa, é bem maior, porque cada um tem cinquenta por cento de chance então é bem mais fácil cair cara, coroa, cara, coroa do que coroa, coroa, coroa, coroa ou cara, cara, cara, cara, que daria apenas 6,25% de chance."

Abaixo a tabela do grupo A2 e A1.

Figura 22: Tabela de Distribuição de probabilidade da visita da Mônica aos seus amigos do grupo A2.

Amigo	Nº de caminhos	Nº de caminhos/total de caminhos (fração)	Probabilidade (Pi)*
Horácio	1	1/16	6,25%
Cebolinha	4	4/16	25 %
Magali	6	6/16	37,5%
Cascão	4	4/16	25%
Bidu	1	1/16	6,25%
Total	16	16/16 =1	100 %

Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Figura 23: Tabela de Distribuição de probabilidade da visita da Mônica aos seus amigos do grupo A1.

Amigo	Nº de caminhos	Nº de caminhos/total de caminhos (fração)	Probabilidade (Pi)*
Horácio	1	1/16	6,25 %
Cebolinha	4	4/16	25%
Magali	6	6/16	37,5%
Cascão	4	4/16	25%
Bidu	1	1/16	6,25%
Total	16	1.00	100%

Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016)

Seção IV

Nesta quarta parte do trabalho será a feita a comparação entre as duas formas de atribuir probabilidades, a frequentista e a clássica. A primeira pergunta é: "Qual é a diferença entre essas duas formas de atribuir probabilidades? Essa atividade tem como objetivo verificar se os estudantes conseguem perceber a diferença entre a probabilidade clássica e a probabilidade frequentista. A seguir a tabela com as respostas dos grupos.

Tabela 29: Passeios Aleatórios da Mônica – seção 4 – atividade 4

A1	Uma é baseada na sorte da moeda e a outra a árvore com todas as possibilidades
A2	Que uma tenta a sorte jogando a moeda e a outra é com todas as possibilidades
A3	Uma é aleatória e a outra não
A4	Que uma você sabe o que vai sair e a outra é pela sorte quando a moeda é jogada
A5	A moeda é tirado a sorte no cara ou coroa e a árvore apresenta todas as possibilidades possíveis
A6	A árvore das possibilidades dão respostas não repetidas, já na experiência aleatória existe repetição
A7	Que na primeira você tenta pela sorte e na segunda você identifica todos os resultados possíveis
A8	A experiência aleatória é pela sorte e na árvore de possibilidades você encontra todos os resultados existentes
A9	Que na experiência aleatória é tirada a sorte e no diagrama da árvore é na possibilidade
B1	A diferença é que uma está em jogo a sorte e a outra é a árvore das possibilidades
B2	Uma foi na sorte e a outra mostra todas as possibilidades
B3	Um é na sorte, a outra mostra todas as possibilidades que pode cair na sorte
B4	È que uma é na sorte e pode cair qualquer coisa, mas na árvore das possibilidades cai na ordem correta
B5	Que cada um tem a porcentagem maior de cair
B6	Que uma não precisa da árvore e a outra sim
B7	Na árvore podemos ver todas as possibilidades de maneira mais ordenada e na outra vemos por tentativas, na sorte
B8	Uma é na sorte e a outra são os caminhos possíveis

Fonte: Arquivos do pesquisador.

Podemos notar que as duplas A3, B5 e B6 apresentam um pensamento confuso e sem relação com a experimentação e a modelagem teórica, já as demais duplas conseguiram diferenciar as duas formas de atribuir probabilidades, associando a frequência relativa á experimentação e a probabilidade obtida pelo número de caras encontrado na árvore de possibilidades. Durante a socialização dessa atividade o professor-pesquisador gravou um áudio que transcrevemos aqui.

Professor: “Vocês poderiam descrever para mim a diferença entre as duas formas de atribuir probabilidades que foram trabalhadas em sala de aula?
Aluna 1 “ Na prática foi trabalhada a probabilidade frequentista, ou seja envolve muito a sorte e também cai aleatoriamente.”
Professor: “Entendi, através do jogo obter vários resultados.
Aluna 2 : “ E o diagrama da árvore aparece todas as possibilidades e a gente pode vê-las de maneira mais ordenada, eu acho que o diagrama da árvore é o mais adequado para gente de basear, para ver todas as possibilidades”.

Professor: " Vocês acham na probabilidade frequentista existe a possibilidade de algum amigo não ser visitado?"
u**Aluna 2**: "Sim, porque é aleatório, é na sorte."
Aluna 1: "Sim, porque tem a chance de um amigo ser visitados várias vezes, ou todas as vezes."
Professor: " Então se fosse para você escolher uma probabilidade para você fazer um experimento você escolheria qual delas para trabalhar?"
Aluna 2: "Eu escolheria o diagrama da árvore, o melhor, o mais adequado".
Professor: Por quê?
Aluna 2: " Ele aparece todas as possibilidades de uma maneira mais ordenada, todos teriam chance."

Na outra sala que foi aplicada a pesquisa o aluno 5, conforme o áudio a seguir, afirma:

Aluno 5: "A árvore das possibilidade é mais completa porque ela produz um resultado de cada vez, sem repetir, já a frequência produz vários resultados repetidos."

A segunda pergunta pediu para analisar os resultados e, em seguida, para responder qual das duas maneiras de atribuir probabilidades (frequentista ou árvore de possibilidades) é mais adequada? Nesta atividade, seria razoável que o aluno opte pela probabilidade clássica que envolve todo espaço amostral e independe da experimentação. Na tabela e seguir as respostas de cada dupla.

Tabela 30: Passeios Aleatórios da Mônica – seção 4 – atividade 4b

A1	A da árvore de possibilidades
A2	A árvore das possibilidades, pois mostra todas as possibilidades, o que ás vezes a experiência aleatória não mostra
A3	O diagrama das Possibilidades
A4	A árvore de possibilidades
A5	O diagrama das possibilidades
A6	A árvore das possibilidades, pois não se repetem
A7	Diagrama das possibilidades
A8	Árvore das possibilidades
A9	A árvore das possibilidades, porque mostra todos os resultados
B1	Para nós, a maneira de atribuir possibilidades mais adequada é a árvore das possibilidades
B2	Àrvore das possibilidades
B3	A clássica
B4	A árvore de possibildades
B5	Diagrama das possibilidades
B6	Àrvore das possibilidades, pois é mais completa
B7	A árvore das possibilidades
B8	Árvore das possibilidades

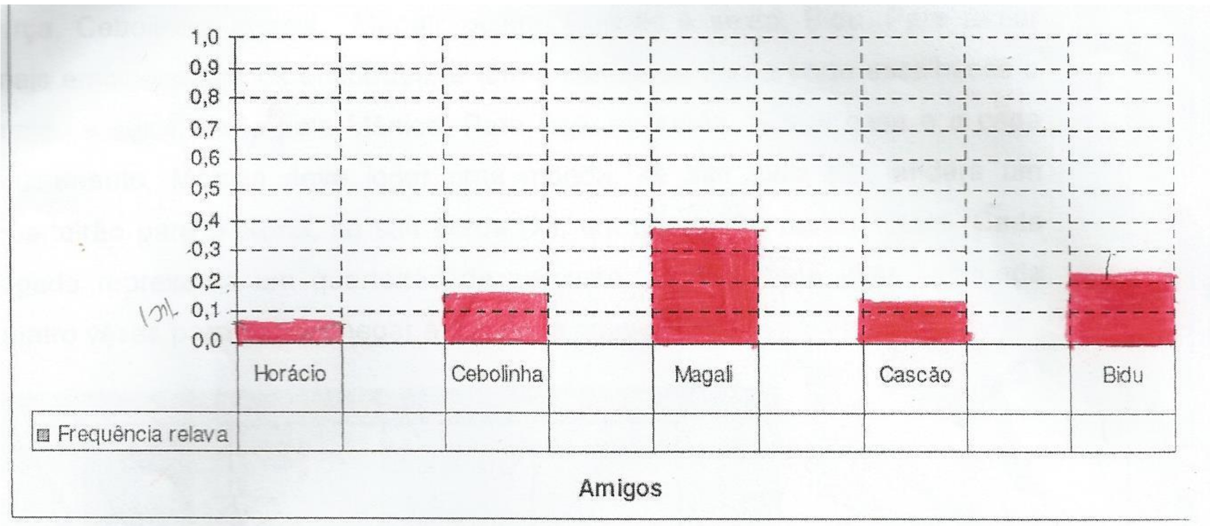
Fonte: Arquivos do pesquisador.

Todas as 17 duplas atingiram a percepção esperada, pois durante a socialização desta atividade, as duplas, se optassem pela frequência relativa, os resultados dependeriam da amostra e que por isso seria mais adequado optar pela árvore de possibilidades.

Na terceira atividade, as duplas devem completar os gráficos da frequência relativa e da probabilidade clássica. Após completarem os gráficos da frequência relativa e da probabilidade clássica, as duplas compararam com os gráficos das outra duplas e notaram que o gráfico da probabilidade clássica eram iguais para todas as duplas e que o gráfico de frequência relativa variava de dupla para dupla.

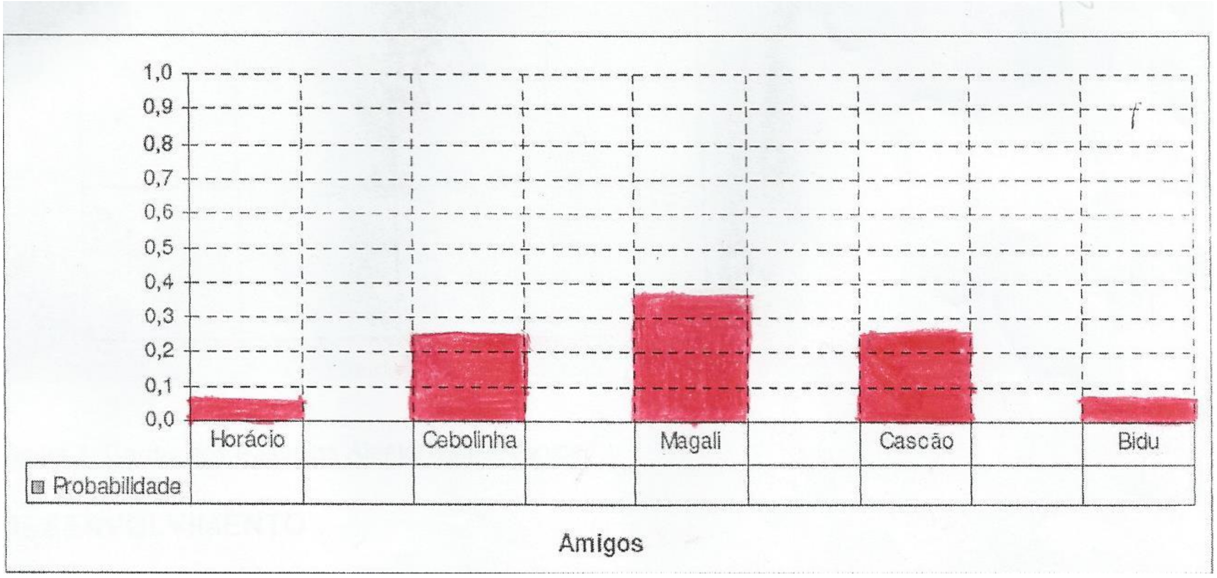
A seguir os gráficos das duplas B4 e B7.

Figura 24: Gráfico de frequência relativa da dupla B4



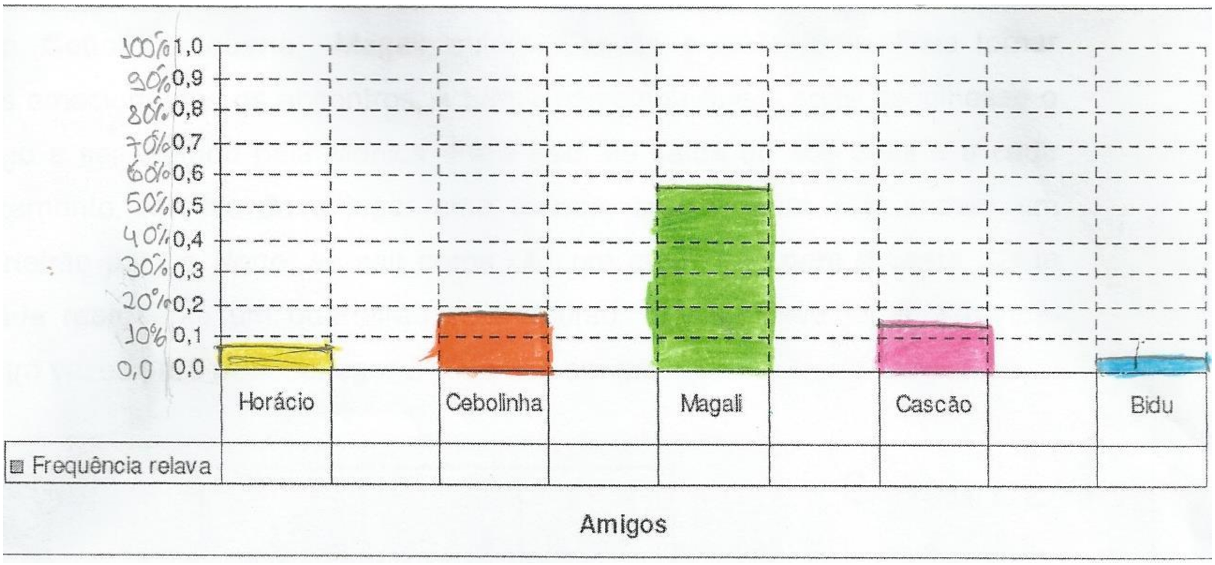
Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Figura 25: Gráfico da probabilidade clássica da dupla B4.



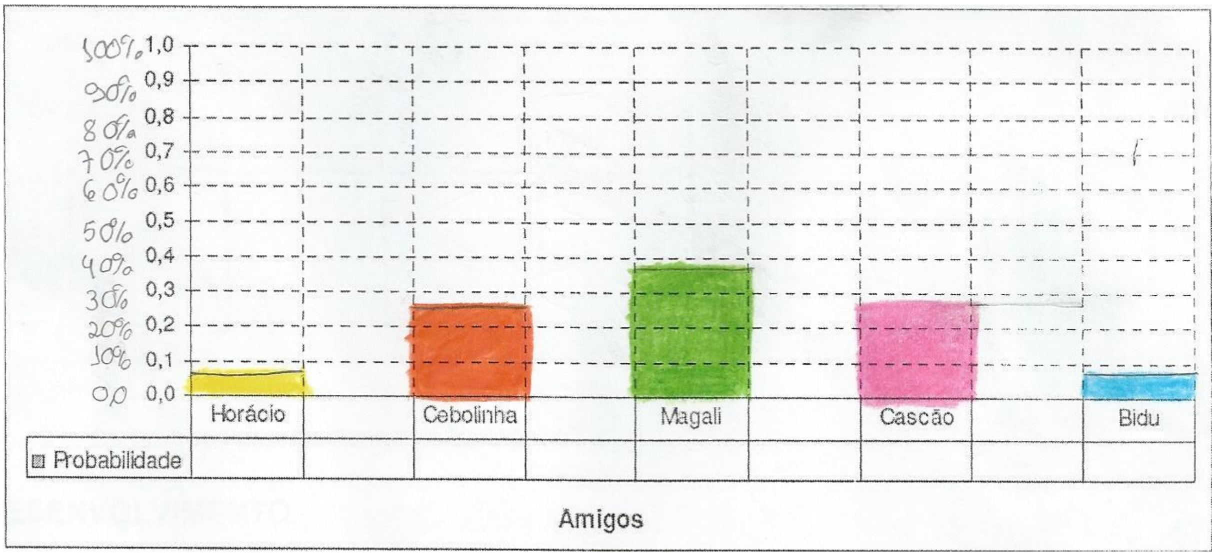
Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Figura 26: Gráfico de frequência relativa da dupla B7



Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

Figura 27: Gráfico da probabilidade clássica da dupla B7



Fonte: Trabalho Experimental com o 9ºano da Escola Municipal José Marcello (2016).

5- CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por objetivo descrever e analisar um cenário de ensino-aprendizagem do conceito de Probabilidade em duas classes do nono ano do Ensino Fundamental em uma escola pública da rede municipal de ensino do município de Salto de Pirapora, interior do Estado de São Paulo, valendo-se dos registros de representação semiótica, dado o pressuposto que a mobilização e coordenação de diferentes tipos desses registros (língua natural materna, figural, simbólico, entre outros) potencializam o estudo do objeto matemático, neste caso a probabilidade. Partirmos do princípio que o aluno do ensino fundamental deve ter conhecimentos básicos, como espaço amostral, experiência aleatória e determinística, espaço amostral e eventos, capacidade de interpretar e avaliar criticamente as informações estatísticas. Foram realizadas duas pesquisas relacionadas aos conhecimentos probabilísticos, combinatórios e estatísticos e que foram realizadas em dois dias, utilizando quatro horas cada uma. Procuramos responder a questão norteadora dessa pesquisa: “Como os registros de representação semiótica são mobilizados e coordenados em tarefas envolvendo o contexto probabilístico?”

A primeira atividade foi dividida em quatro etapas: a primeira etapa aborda a linguagem probabilística, onde o aluno é confrontado com acontecimentos de natureza aleatória, com quatro atividades; a segunda parte aborda a probabilidade clássica, a probabilidade frequentista e a análise combinatória, com seis atividades, onde a última é pedido para elaborar um relatório envolvendo a probabilidade clássica e a probabilidade frequentista; na terceira atividade é abordado a probabilidade clássica e a análise combinatória, com quatro atividades, sendo a última é solicitado para o aluno organizar as possibilidades por meio do diagrama da árvore e em seguida fazer um relatório sobre o seu desempenho nesta tarefa; a quarta e última parte aborda a linguagem probabilística, a estatística, a probabilidade clássica e a análise combinatória, com nove atividades.

Na primeira etapa, foram cometidos alguns equívocos no uso da linguagem probabilística e também emitiram distintos graus de incertezas em acontecimento de natureza aleatória, porém a maioria das duplas apresentaram um certo domínio com a linguagem probabilística apresentada. Na segunda etapa, de acordo com o relatório feito pelos alunos, concluímos que eles compreenderam as diferentes concepções de visão clássica de probabilidade e a visão frequentista. Durante a terceira etapa, os alunos elaboraram a árvore de possibilidades para a resolução das atividades, onde seis duplas deixaram de fazer o relatório, pois perderam muito tempo com o diagrama da árvore, onde o concluíram com êxito. Na quarta etapa, a maior parte das duplas construíram corretamente um gráfico que permite inserir em uma escala dos eventos menos provável para o mais provável. O uso do registro gráfico no estudo da probabilidade é um recurso de representação semiótica que pode promover conexões com a estatística e a análise combinatória, contribuindo para o desenvolvimento do letramento estatístico no que diz respeito à leitura e interpretação das informações obtidas em pesquisas estatísticas (CUSTÓDIO, 2016), e cometeram alguns equívocos didáticos de linguagem.

A segunda atividade teve como objetivo verificar o ensino de uma sequência didática que envolve as diferentes concepções de probabilidade clássica e frequentista. Os conceitos básicos presentes nessa sequência didática “Passeios Aleatórios da Mônica” são eventos simples e compostos, situação determinística, eapaço amostral, probabilidade de eventos simples e compostos, experiência aleatória, situação determinística, frequência relativa, frequência e padrões observados e esperados. Foi organizada uma aplicação de tarefas envolvendo a probabilidade clássica e a probabilidade frequentista . A sequência didática “Passeios Aleatórios da Mônica” foi organizada em quatro seções: a primeira permitiu verificar as concepções prévias de probabilidades dos alunos em relação a história; a segunda verificou o impacto da experiência aleatória e a estimativa de probabilidade pela frequência relativa; a terceira seção recorre à modelagem matemática, utilizando o diagrama da árvore (árvore das possibilidades), onde aborda a probabilidade clássica ou Laplaciana; e finalmente a quarta seção onde é solicitada a tomada de decisão diante destas formas de atribuir probabilidades.

Fazendo uma análise da primeira seção, concluímos que os alunos utilizaram seus conhecimentos prévios e que das 17 duplas apenas 4 cometeram erros de que a equiprobabilidade está na quantidade de amigos e não no número de caminhos.

Na segunda seção, todas as 17 duplas indicaram um entendimento do conceito de aleatoriedade associado ao conceito de chance, inclusive aquelas duplas que no início (da experimentação) apresentaram dificuldades, após a experimentação aleatória mudaram de opinião. A terceira seção, modelagem matemática, apesar de estar familiarizados com o diagrama de possibilidades, alguns alunos apresentaram dificuldades durante a conversão de fração para porcentagem e finalmente a quarta seção que das 17 duplas, 3 apresentaram um pensamento confuso e sem relação com a experimentação e a modelagem teórica, já as demais conseguiram diferenciar as duas formas de atribuir probabilidades, associando a frequência relativa á experimentação e a probabilidade teórica ao diagrama de possibilidades.

Os registros escritos pelos alunos e áudios gravados e as discussões durante e após as aplicações das atividades mostraram que os estudantes, em sua maioria, construíram conceitos e isso se deu com o processo de representação em sintonia com as atividades que envolvem modos diferentes de representação (desenhos, diagramas, gráficos, língua natural materna e outros), tornando-se estes partícipes do seu processo de construção do conhecimento. E assim respondendo a pergunta de que “como os registros de representação semiótica são mobilizados e coordenados em tarefas envolvendo o contexto probabilístico?”, constatamos que nessas atividades os alunos utilizaram diferentes registros de representação semiótica na resolução das tarefas onde possibilitou o estudo, com êxito, de probabilidade interligado ao pensamento combinatório e estatístico. Notamos que essas atividades podem favorecer no aprimoramento de leitura e interpretação crítica das informações probabilísticas dos alunos

Consideramos que esta pesquisa contribuiu com os docentes que desejam tornar suas aulas mais dinâmicas e prazerosas, com o desenvolvimento probabilístico, matemático e crítico dos estudantes.

Referências Bibliográficas

ABE, Thatiana Sakate. **O ensino de probabilidade por meio das visões clássica e frequentista.** 2011. 192 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Campo Grande: Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2011.

ALVES, Alessandro Caldeira. **Uma introdução ao pensamento combinatório no 9º ano do ensino fundamental.** 2010. 160 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Belo Horizonte: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2010.

BATANERO, Carmen. **Didactica de la Estadística**. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, 2001.

BIAJOTI, Emerson Donizeti. **Experimentos Probabilísticos:** Noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II. 2013. 109f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2013.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994

BORBA, Rute et al. Educação estatística no ensino básico: currículo, pesquisa e prática em sala de aula. **EM TEIA** – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v.2, n.2, 18p, 2011.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática (Ensino Fundamental II). Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+:** Ensino médio - orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002. 141p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2014 - matemática. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. 2013. 104p. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/guia-do-livro-didatico/item/4661-guia-pnld-2014>. Acesso em: 6 set. 2017.

BUZATO, Marcelo El Khouri. **Entre a fronteira e a periferia:** linguagem e letramento na inclusão digital. 2007. 284f. Tese (Doutorado em Linguística Aplicada). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2007.

CARVALHO, Dione Lucchesi; OLIVEIRA, Paulo César. Quatro concepções de probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na licenciatura de matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 25., 2002, Caxambu. **Anais...** 12p. Caxambu: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2002. CD-ROM.

CAZORLA, Irene M. **A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio conceitos estatísticos na leitura de gráficos.** 2002. 335p. Tese (Doutorado Educação). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2002.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista. 1994. 151p. Dissertação (Mestrado em Matemática) . São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 1994.

CUSTÓDIO, Leandro Aparecido Alves. **Letramento probabilístico:** um olhar sobre as situações de aprendizagem do caderno do professor. 2016. 64p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas). Sorocaba: Universidade Federal de São Carlos, 2016.

Dante, Luiz Roberto, Matemática, volume único, 1ª edição, São Paulo: Ática, 2005.
DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.) **Aprendizagem em matemática**: Registros de representações semióticas. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-34.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais** (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

DUVAL, Raymond. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 11, n. 2, p. 1-78, 2016.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. Executive Summary Principles and Standards for School Mathematics. Disponível em:<https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_Executive Summary.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2017.

FIORENTINI, Dario. Prefácio. In: COELHO, Maria Aparecida Vilela Mendonça Pinto (Org). **De portas abertas**: histórias de sala de aula de matemática. São Carlos: Pedro & João Editores, p.11-14.

GAL, Iddo. **Adult's Statistical Literacy: meanings, components, responsibilities.** International Statistical Review, v. 70, n. 1, p. 1-25, 2002.

GAL, Iddo. Towards 'probability literacy' for all citizens. In: JONES, Graham A. (ed.). **Exploring probability in school:** Challenges for teaching and learning. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2005, p. 43-71.

GAL, Iddo. Developing probability literacy: Needs and pressures stemmings from frameworks of adult competencies an mathematics curricula. In: INTERNATIONAL

CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12., 2012, Seoul. **Anais...** Seoul: COEX, 2012.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática:** Imenes & Lellis 9º ano**.** 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2012.

KLEIMAN, Angela. **Preciso ensinar letramento? Não basta ensinar a ler e escrever?** Campinas: CEFIEL/UNICAMP, 2005. (Coleção Linguagem e Letramento em foco).

LOPES, Celi Aparecida Espasandin. **O Conhecimento Profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil.** 2003. 290f. Tese (Doutorado em Educação). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2003.

LOPES. Celi Aparecida Espasandin. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Caderno Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 57-73, 2008.

MORAES, Carlos Afonso Silveira; OLIVEIRA, Paulo César. Mobilização de significados para a linguagem probabilística por parte dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. In: Simpósio sobre Investigações e Práticas em Educação Matemática (SIPRAEM), 2., 2016, Sorocaba. **Anais...** 11p. Sorocaba: UFSCar, 2016. CD-ROM.

NAGAMINE, Camila Macedo Lima et al. Análise Praxeológica dos Passeios Aleatórios da Mônica. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 24, n. 39, p. 451-472, 2011.

NOGUEIRA, Lemerton Matos**. Análise de esquemas de estudantes ao resolverem situações envolvendo conceitos básicos de probabilidade**. 2015. 207f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Ilhéus: Universidade Estadual de Santa Cruz, 2015.

PIETROPAOLO, Ruy Cesar; SILVA, Angélica da Fontoura Garcia; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. Conhecimentos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM), 14., 2015, Chiapas. **Anais...** 10p. Chiapas, 2015. Disponível em: <http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/pdf/Vol3FormCont.pdf>. Acesso em: 03 ag. 2018.
.

SANTOS, Rodrigo Medeiros dos. **Estado da arte e história da pesquisa em educação estatística em programas brasileiros de pós-graduação**. 2015. 348f. Tese (Doutorado em Educação). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2015.

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. **O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano**

do ensino fundamental. 2010. 183p. Dissertação (Mestrado em Educação). Itatiba: Universidade São Francisco, 2010.

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. **A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora**. 2015. 191p. Tese (Doutorado em Educação). Itatiba: Universidade São Francisco, 2015.

SOARES, Elizabeth. **Uma análise sobre as atividades de probabilidade propostas nos livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental**. 2014. 140 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2014.