

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Karen Regina Panzarin

**Aplicações entre 3-variedades Sol e  
números de Nielsen para coincidências**

São Carlos - SP

AGOSTO DE 2017

O presente trabalho teve suporte financeiro da CAPES

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Karen Regina Panzarin  
Orientador: Prof Dr. Daniel Vendruscolo

# **Aplicações entre 3-variedades Sol e números de Nielsen para coincidências**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

**São Carlos - SP**  
**AGOSTO DE 2017**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

---

Folha de Aprovação

---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Karen Regina Panzarin, realizada em 24/08/2017:

---

Prof. Dr. Daniel Vendruscolo  
UFSCar

---

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi  
UNESP

---

Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves  
USP

---

Prof. Dr. Dirceu Penteado  
UFSCar

---

Prof. Dr. João Peres Vieira  
UNESP

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus. Sem Ele, nada teria sido possível.

Em especial, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Daniel Vendruscolo por todo apoio, amizade, paciência, prontidão e dedicação.

Ao Prof. Dr. Waldeck Schützer pela fundamental ajuda na demonstração do Teorema 2.4.1.

À prof. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi que se prontificou a me ajudar quando precisei.

Aos meus pais e avó, por toda oração, apoio e amor incondicional. Às minhas irmãs, em especial à Karani, por toda a paciência e amizade. E ao meu noivo Leandro. Sem a ajuda e o suporte de vocês, teria sido impossível.

Enfim, gostaria de agradecer à CAPES pelo suporte financeiro e à todos que estiveram envolvidos nesse projeto ou em minha vida durante esse projeto, que de maneira direta ou indireta, contribuíram para que fosse possível a realização deste.

# RESUMO

Seja  $M_A$  um *torus bundle* sobre  $S^1$  obtido usando como aplicação de colagem uma matriz de Anosov  $A$ . Neste trabalho discutimos aplicações entre dois *torus bundles*  $M_A$  e  $M_D$  e calculamos o número de Nielsen para coincidências de algumas famílias de aplicações neste contexto. Além disso, usando o fato que as variedades safiras (*torus semi-bundles*) tem um recobrimento duplo por *torus bundles*, também calculamos o número de Nielsen para auto-aplicações dessas variedades.

# ABSTRACT

Let  $M_A$  be the torus bundle over  $S^1$  obtained using as gluing map an Anosov matrix  $A$ . In this work we discuss maps from  $M_A$  to  $M_D$  and compute the coincidence Nielsen numbers for some families of such maps, moreover we use that such manifolds are double covers of torus semi-bundles and compute the coincidence Nielsen number for selfmaps of Sol 3-manifolds which are torus semi-bundles.

# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Teoria de Nielsen para Coincidências . . . . .	3
1.2 Torus bundles sobre $S^1$ . . . . .	5
<b>2 Aplicações entre torus bundles</b>	<b>7</b>
2.1 Aplicações de $M_{A^r}$ em $M_A$ . . . . .	7
2.2 A fibra e a sua matriz induzida . . . . .	9
2.3 Aplicações de $M_{A^r}$ em $M_{A^s}$ . . . . .	21
2.4 Aplicações de $M_A$ em $M_D$ . . . . .	24
<b>3 Auto-aplicações entre safiras</b>	<b>30</b>
3.1 O número de Nielsen para auto-aplicações entre safiras . . . . .	31
<b>A A matriz de Anosov é diagonalizável</b>	<b>37</b>

# INTRODUÇÃO

Em 1927, J. Nielsen definiu para uma aplicação  $f$  dada, um número  $N(f)$  o qual chamamos de número de Nielsen de  $f$ . Este número é um limitante inferior para o número de pontos fixos de todas as aplicações homotópicas a  $f$ . Isso deu origem a toda uma teoria que, desde então, vem sendo desenvolvida por vários pesquisadores e foi generalizada para coincidências.

Quando trabalhamos com teoria de Nielsen, duas questões básicas se levantam: a primeira é se o limitante inferior obtido nessa teoria é o melhor possível e a segunda se refere à questão computacional, ou seja, como calcular os números de Nielsen.

Este trabalho se insere no contexto do estudo de aplicações entre variedades fechadas e do cálculo de números de Nielsen para coincidências.

A família das variedades de dimensão 3 com geometria Sol possui duas subfamílias. Uma delas consiste dos *torus bundles* com uma aplicação de colagem Anosov, e a outra contém os *torus semi-bundles* (também chamados de variedades safiras)(ver [Mo, BGV]).

Aplicações entre *torus bundles* sobre  $S^1$  e a teoria de Nielsen desses espaços têm sido estudado por diversos autores (por exemplo [Sa, SWW, GW, Vi, JL]). Em alguns desses trabalhos, os autores estavam mais preocupados com a descrição das possíveis aplicações entre esses espaços (especialmente as aplicações não triviais) e em outros eles tentaram calcular o número de Nielsen para algumas aplicações.

Vamos denotar por  $T$  o Toro obtido como o espaço quociente  $\frac{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ . Consideremos  $A$  um homeomorfismo do Toro, induzido por um operador linear em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  que preserva  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Podemos identificar  $A$  com uma matriz com coeficientes inteiros e determinante 1 ou  $-1$ .

Construímos  $M_A = \frac{T \times \mathbb{R}}{((x, y), t) \sim (A^n(x, y), t - n)}$  onde  $n \in \mathbb{Z}$ , o qual é um *torus bundle* sobre  $S^1$ . Se  $A$  é uma matriz de Anosov (isto é,  $\det(A) = 1$  e  $|tr(A)| > 2$  ou  $\det(A) = -1$  e  $tr(A) \neq 0$ ), então  $M_A$  é uma 3-variedade com geometria Sol.

---

Seguindo algumas ideias de [GW] discutimos aplicações entre as variedades  $M_A$  e  $M_D$  e calculamos o número de Nielsen para coincidências dessas aplicações tanto para o caso orientável como para o caso não-orientável. Conseguimos concluir completamente os casos  $M_{A^r} \rightarrow M_A$  e  $M_{A^r} \rightarrow M_{A^s}$  apresentados nas seções do Capítulo 2 e mais algumas situações. O caso geral (seção 2.4) segue em estudo. Além disso, usando o fato que as variedades safiras (*torus semi-bundles*) tem um recobrimento duplo por *torus bundles*, também calculamos o número de Nielsen para auto-aplicações dessas variedades.

Este trabalho está organizado em três capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos alguns resultados preliminares, incluindo uma introdução à teoria de Nielsen para coincidências e do fibrado que recebe o nome de *torus bundle*. No capítulo 2 descrevemos as possíveis aplicações entre dois *torus bundles*  $M_A$  e  $M_D$ , começando com o caso onde a matriz do domínio é uma potência da matriz do contradomínio (essa situação inclui muitas aplicações de recobrimento). Calculamos também os respectivos números de Nielsen para coincidências dessas aplicações. No terceiro capítulo usamos o fato que as variedades safiras (*torus semi-bundles*) tem um recobrimento duplo por *torus bundles* para calcular o número de Nielsen para auto-aplicações dessas variedades.

# Capítulo 1

## PRELIMINARES

### 1.1. Teoria de Nielsen para Coincidências

Nesta seção faremos uma breve introdução à teoria de Nielsen para coincidências, colocando as definições que julgamos serem mais importantes e alguns resultados que serão necessários ao longo do texto.

Sejam  $f, g : M \rightarrow N$  aplicações entre variedades fechadas (compactas e sem bordo) e de mesma dimensão.

**Definição 1.1.1.** *Uma coincidência de  $f$  e  $g$  é um ponto  $x \in M$  tal que  $f(x) = g(x)$ .*

*índice de coincidência* Denotaremos por  $Coin(f, g)$  o conjunto de todas as coincidências de  $M$ , ou seja,

$$Coin(f, g) = \{x \in M; f(x) = g(x)\}.$$

**Definição 1.1.2.** *Dados dois pontos  $x_1, x_2$  em  $Coin(f, g)$ , dizemos que  $x_1$  e  $x_2$  são Nielsen equivalentes com relação a  $f$  e  $g$  se existe um caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = x_1$ ,  $\gamma(1) = x_2$  e  $f \circ \gamma$  é homotópica a  $g \circ \gamma$  relativamente aos pontos finais.*

Essa relação é uma relação de equivalência e assim, podemos particionar o conjunto  $Coin(f, g)$  em classes de equivalência dessa relação, chamadas de *classes de coincidências* ou *classes de Nielsen* do par  $(f, g)$ .

A seguir, apresentamos uma noção de índice de coincidência. Vamos citar a definição de [Vk] para aplicações entre variedades orientáveis e, em seguida, a definição do "índice" para variedades não-orientáveis. Essa generalização foi feita em [DJ].

**Definição 1.1.3.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades fechadas, orientáveis e de mesma dimensão,  $W$  um subconjunto aberto de  $M$  e  $f, g : W \rightarrow N$  aplicações tais que  $C = Coin(f, g)$*

seja compacto. Definimos o índice de coincidência do par  $(f, g)$  em  $W$ ,  $ind(f, g : W)$ , como sendo o número inteiro dado pela imagem da classe fundamental de  $M$  através da composição

$$\begin{aligned} H_n(M) &\rightarrow H_n(M, M - V) \rightarrow H_n(W, W - V) \\ &\rightarrow H_n(N \times N, N \times N - \Delta(N)) \approx \mathbb{Z} \end{aligned}$$

onde a segunda aplicação é a excisão, a terceira é induzida por  $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$ , e  $V$  satisfaz  $Coin(f, g) \subset V \subset \bar{V} \subset W$ .

O índice de coincidência satisfaz algumas propriedades, entre elas, a *aditividade* [se  $W$  é uma união finita de conjuntos abertos  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , e  $C$  é uma união disjunta de conjuntos compactos  $C_i$  com  $C_i \subset W_i$ , então  $ind(f, g : W) = ind(f_1, g_1 : W_1) + \dots + ind(f_r, g_r : W_r)$ , onde  $(f_j, g_j) = (f|_{W_j}, g|_{W_j})$ ], a *localização* [ $ind(f, g : W) = ind(f|_{W'}, g|_{W'} : W')$  para todo conjunto aberto  $W' \subset W$  contendo  $C$ ] que permite nos referirmos ao índice como ‘o índice em  $C$ ’ ao invés de ‘o índice em  $W$ ’, e a *invariância por homotopia* [se  $f_t, g_t : W \rightarrow N$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , são homotopias tais que  $K = \{x \in W; \text{ existe } t \in [0, 1] \text{ com } f_t(x) = g_t(x)\}$  é compacto, então  $ind(Coin(f_0, g_0)) = ind(Coin(f_1, g_1))$ ].

Para generalizar o conceito de índice para variedades não-orientáveis, os autores de [DJ] introduziram o conceito de *semi-índice* de uma classe de Nielsen. Para isso, definiram uma relação de reduzibilidade na classe de Nielsen e, com essa relação, fizeram uma cisão nesta classe em pares de pontos. Ao número de pontos que restaram, chamaram de semi-índice. Provaram que esse número é um inteiro não negativo e invariante por homotopia, e portanto puderam usá-lo, como no caso orientável, para obter o número de Nielsen. Mais precisamente, os resultados demonstrados foram os que citamos abaixo.

O contexto do trabalho [DJ] é para variedades fechadas, suaves, conexas e de mesma dimensão. Porém, em [Je2] foi generalizado para variedades topológicas. A relação de reduzibilidade parte da seguinte definição:

**Definição 1.1.4** ((1.2), [DJ]). *Dizemos que  $x$  e  $y$  se reduzem um ao outro se, e somente se, existe um caminho  $\omega$  de  $x$  a  $y$  tal que  $f\omega \simeq g\omega$  e tal que  $\omega$  reverte a orientação no gráfico.*

Considere  $A \subset \text{Coin}(f, g)$ . Podemos escrever

$$A = \{a_1, b_1, \dots, a_k, b_k; c_1, \dots, c_s\},$$

onde  $a_i, b_i$  se reduzem um ao outro e isso não acontece para os pares  $c_i, c_j$ ,  $i \neq j$ . Chamamos de *livres* os elementos  $\{c_1, \dots, c_s\}$  nessa decomposição.

**Lema 1.1.5** ((1.3),[DJ]). *O número de elementos livres independe da decomposição de  $A$ .*

Assim, os autores definiram o *semi-índice* de uma classe de Nielsen  $A$  para um par de aplicações  $(f, g) : M \rightarrow N$ , como o número de elementos livres em qualquer decomposição e denotaram-no por  $|\text{ind}|(f, g : A)$ . O resultado abaixo relaciona índice e semi-índice e a definição em seguida, se refere às classes essenciais e ao número de Nielsen.

**Lema 1.1.6** ((1.6),[DJ]). *Sejam  $(f, g) : M \rightarrow N$  um par de aplicações entre variedades orientáveis, e  $A \subset \text{Coin}(f, g)$  uma classe de Nielsen. Então  $|\text{ind}|(f, g : A) = |\text{ind}(f, g : A)|$  onde o lado direito denota o valor absoluto do índice de coincidência usual.*

**Definição 1.1.7.** *Seja  $(f, g) : M \rightarrow N$  um par de aplicações contínuas. Dizemos que uma classe de Nielsen é essencial se, e somente se, o seu índice (ou semi-índice, para o caso não-orientável) é diferente de zero. O número de classes de Nielsen essenciais é chamado de número de Nielsen e denotado por  $N(f, g)$ .*

Temos que  $N(f, g)$  é um invariante homotópico, finito e é um limitante inferior para o conjunto  $\text{Coin}(f', g')$  das aplicações  $f'$  e  $g'$  homotópicas a  $f$  e  $g$ , respectivamente.

## 1.2. Torus bundles sobre $S^1$

Nesta seção faremos uma apresentação do fibrado que recebe o nome de *torus bundle*, o qual possui fibra Toro e base  $S^1$ . É possível encontrar mais detalhes deste em [Sa, SWW, GW, Vi, JL].

Vamos denotar por  $T$  o Toro obtido como o espaço quociente  $\frac{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ . Consideremos  $A$  um homeomorfismo do Toro, induzido por um operador linear em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  que preserva  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Podemos identificar  $A$  com uma matriz com coeficientes inteiros e determinante 1 ou  $-1$ . Se  $T \rightarrow M \xrightarrow{p} S^1$  é um fibrado com base  $S^1$  e fibra Toro, então o espaço total  $M$  é dado por:

$$M = M_A = \frac{T \times \mathbb{R}}{((x, y), t) \sim (A^n(x, y), t - n)},$$

onde  $n \in \mathbb{Z}$ .

A aplicação de projeção,  $p$ , é dada por  $p[((x, y), t)] = [t] \in \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \simeq \frac{[0, 1]}{0 \sim 1} \simeq S^1$ .

**Definição 1.2.1.** *Uma matriz  $A$  em  $GL(2, \mathbb{Z})$  é chamada uma matriz de Anosov se uma das seguintes condições for satisfeita:*

- (i)  $\det(A) = 1$  e  $|tr(A)| > 2$ ;
- (ii)  $\det(A) = -1$  e  $tr(A) \neq 0$ .

Se  $A$  é uma matriz de Anosov, então  $M_A$  é uma 3-variedade com geometria Sol.

# Capítulo 2

## APLICAÇÕES ENTRE TORUS BUNDLES

O nosso objetivo principal é conseguir calcular o número de Nielsen para um par de aplicações  $(f, g)$  entre dois *torus bundles*  $M_A$  e  $M_D$  com  $A$  e  $D$  matrizes de Anosov quaisquer em  $GL(2, \mathbb{Z})$ . Consideramos  $(f', g') : T \rightarrow T$  a aplicação induzida na fibra tal que  $f'_\# = B$ ,  $g'_\# = C$  e  $(\bar{f}, \bar{g}) : S^1 \rightarrow S^1$  a sua induzida na base. A princípio começamos analisando situações com algumas hipóteses restritivas, as quais apresento nas seções seguintes. O objetivo não foi alcançado em sua totalidade, ainda estamos com alguns casos em aberto que seguem em estudo.

### 2.1. Aplicações de $M_{A^r}$ em $M_A$

Vamos começar considerando que a matriz de colagem do domínio é uma potência da matriz de colagem do contradomínio. Para esse caso mostraremos que a aplicação linear, dada pela matriz  $B$  de sua induzida no grupo fundamental, possui uma forma específica se  $\deg \bar{f} = \pm r$ , onde  $r$  é tal potência, e que é nula se  $\deg \bar{f} \neq \pm r$ , o que nos diz quais são as possíveis aplicações de  $M_{A^r}$  em  $M_A$ .

Sejam

$$f, g : M_{A^r} = \frac{T \times \mathbb{R}}{((x, y), t) \sim ((A^r)^n(x, y), t - n)} \rightarrow M_A = \frac{T \times \mathbb{R}}{((x, y), t) \sim (A^n(x, y), t - n)},$$

com  $n \in \mathbb{Z}$ .

Temos que as aplicações  $f$  e  $g$  são homotópicas à aplicações que preservam fibra [[Je2],(5.4)] e, portanto, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} T & \longrightarrow & M_{A^r} & \longrightarrow & S^1 \\ f' \downarrow & & g' \downarrow & & \bar{f} \downarrow \\ T & \longrightarrow & M_A & \longrightarrow & S^1 \end{array} \quad (2.1)$$

Se  $f' : T \rightarrow T$  e  $\bar{f} : S^1 \rightarrow S^1$  são tais que  $f'_\# = B$  e  $\deg \bar{f} = k$  então, pelo diagrama comutativo acima, podemos escrever  $f : M_{A^r} \rightarrow M_A$  como

$$f([(x, y), t]) = [(B(x, y) + \eta([(x, y), t]), kt)],$$

onde  $\eta : M_{A^r} \rightarrow T$  é tal que  $\eta([(x, y), 0]) = (0, 0)$  e  $[(,)]$  denota a classe no quociente.

Notemos que como  $\eta$  é nula em  $t = 0$ , a aplicação  $\eta$  é homotópica a aplicação constante em cada instante  $t$ , ou seja,  $\eta_t : T \rightarrow T$  é homotopicamente nula, apesar de  $\eta : M_{A^r} \rightarrow T$  não o ser. Temos que, a menos de homotopia, a função  $\eta$  se fatora por  $S^1$ . Desse modo, ela não influencia no cálculo dos números de Nielsen de coincidências, já que tal conta é feita no grupo fundamental das fibras, onde  $\eta_t$  é nula.

Além disso,  $f$  se levanta a um recobrimento  $\tilde{f} : T \times \mathbb{R} \rightarrow T \times \mathbb{R}$  dado por  $\tilde{f}([(x, y), t]) = (f'_{[t]}(x, y), kt)$ , onde  $f' : T \rightarrow T$  é dada por  $f'(x, y) = (x_0, y_0)$  se  $f([(x, y), 0]) = [(x_0, y_0), 0]$ . Tal  $f'$  está bem definida pois  $[(x_1, y_1), 0] = [(x_2, y_2), 0]$  se, e somente se,  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ .

Da relação de equivalência que define a variedade, obtemos que  $((x, y), 0) \sim (A^{-r}(x, y), 1)$ .

Assim,  $\tilde{f}([(x, y), 0]) = (f'_{[0]}(x, y), 0) = (B(x, y), 0)$  e  $\tilde{f}((A^{-r}(x, y), 1)) = (f'_{[1]}(A^{-r}(x, y)), k) = (B(A^{-r}(x, y)), k) \sim (A^k B A^{-r}(x, y), 0)$ . E, conseqüentemente, devemos ter  $B = A^k B A^{-r}$ , ou seja,

$$B A^r = A^k B.$$

Observemos ainda, que a aplicação  $f$  está bem definida (se passa ao quociente), pois: dado  $(x, y) \in T$ , temos que  $[(x, y), 0] = [(A^{-r}(x, y), 1)]$ , logo devemos ter  $f([(x, y), 0]) = f([(A^{-r}(x, y), 1)])$ .

Pois bem,  $f([(x, y), 0]) = [(B(x, y) + \eta([(x, y), 0]), 0)] = [(B(x, y), 0)]$  e  $f([(A^{-r}(x, y), 1)]) = [(B A^{-r}(x, y) + \eta(A^{-r}(x, y), 1), k)] = [(B(A^{-r}(x, y)), k)]$ . Vejamos que esses dois pontos são equivalentes:

$$(B A^{-r}(x, y), k) \sim (A^k(B A^{-r}(x, y), k - k)) = (A^k B A^{-r}(x, y), 0).$$

Mas, como  $A^k B = B A^r$ , então  $A^k B A^{-r}(x, y) = B A^r A^{-r}(x, y) = B(x, y)$ , para todo  $(x, y)$  em  $T$ . Portanto,  $(B A^{-r}(x, y), k) \sim (B(x, y), 0)$ , ou seja,  $f$  está bem

definida.

Um raciocínio totalmente análogo pode ser feito para a aplicação  $g$ .

A partir de agora, denotaremos  $f'_{\#} = B$  e  $g'_{\#} = C$ .

## 2.2. A fibra e a sua matriz induzida

Podemos determinar qual matriz é induzida em cada fibra, o que nos ajudará no cálculo do número de Nielsen do par  $(f, g)$ . O nosso objetivo é usar mecanismos já conhecidos para facilitar os cálculos desse número e um deles nos permite fazer todos os cálculos nas fibras através do determinante de matrizes apropriadas. Assim, nos é interessante determinar tais matrizes.

Para isso, vamos usar as relações de equivalência que definem as variedades.

Para simplificar, daqui em diante identificaremos a aplicação  $f$  com a aplicação linear dada pela matriz da sua induzida no grupo fundamental.

Como  $\deg \bar{f} = k$  e lembrando que  $\eta$  é homotopicamente nula em cada instante  $t$ , temos que:

$$\begin{aligned} \tilde{f}((x, y), 0) = (B(x, y), 0) \text{ implica que em } t = 0, f'_{[0]} \text{ é dada pela matriz } B; \\ \tilde{f}\left((x, y), \frac{1}{k}\right) = \left(B(x, y), k \cdot \frac{1}{k}\right) = (B(x, y), 1) \sim (AB(x, y), 0), \text{ implica que} \end{aligned}$$

em  $t = \frac{1}{k}$ ,  $f'_{[\frac{1}{k}]}$  é dada pela matriz  $AB$ ;

E assim consecutivamente até as duas últimas, onde

$$\tilde{f}\left((x, y), \frac{k-1}{k}\right) = (B(x, y), k-1) \sim (A^{k-1}B(x, y), 0), \text{ implica que em}$$

$t = \frac{k-1}{k}$ ,  $f'_{[\frac{k-1}{k}]}$  é dada pela matriz  $A^{k-1}B$ ; e

$$\tilde{f}\left((x, y), \frac{k}{k}\right) = \tilde{f}((x, y), 1) = (B(x, y), k) \sim (A^k B(x, y), 0) \text{ implica que em}$$

$t = 1$ ,  $f'_{[1]}$  é dada pela matriz  $A^k B$ .

Mas, para que a colagem fique bem definida, devemos ter que as aplicações  $f'_{[1]}$  e  $f'_{[0]}$  devem ser dadas pela mesma matriz, o que de fato acontece: por um lado obtivemos que  $((x_1, y_1), 0) \xrightarrow{\tilde{f}} (B(x_1, y_1), 0)$  e, por outro lado, obtivemos que  $((x_0, y_0), 1) \xrightarrow{\tilde{f}} (B(x_0, y_0) + \eta((x_0, y_0), 1), k) \sim (A^k B(x_0, y_0), 0)$ .

Como os pontos do domínio devem ser equivalentes, então pela relação de equivalência  $((A^r)^{-1}(x, y), 1) \sim ((x, y), 0)$ , teremos que  $A^{-r}(x_1, y_1) = (x_0, y_0)$ .

Assim,  $A^k B(x_0, y_0) = A^k B(A^{-r}(x_1, y_1)) = BA^r(A^{-r}(x_1, y_1)) = B(x_1, y_1)$ .

E, portanto,  $((x_0, y_0), 1) = (A^{-r}(x_1, y_1), 1) \xrightarrow{\bar{f}} (B(x_1, y_1), 0)$ , ou seja, a aplicação  $f'_{[1]}$  também é dada pela matriz  $B$ .

Agora, consideremos  $\deg \bar{f} = k$  e  $\deg \bar{g} = l$ . Como já vimos, podemos escrever  $f[(x, y), t] = [(B(x, y) + \eta((x, y), t), kt)]$  e  $g[(x, y), t] = [(C(x, y) + \eta((x, y), t), lt)]$ .

Sejam  $t_0 = 0$ ;  $t_1 = \frac{1}{k-l}$ ;  $t_2 = \frac{2}{k-l}$ ;  $\dots$ ;  $t_{|k-l|-1} = \frac{|k-l|-1}{k-l}$  os  $|k-l|$  pontos de coincidência do par  $(\bar{f}, \bar{g})$  e lembremos que  $\eta$  é homotopicamente nula em cada instante  $t$ . Então,  $\tilde{f}((x, y), t_0) = (B(x, y), 0)$  e  $\tilde{g}((x, y), t_0) = (C(x, y), 0)$  significa que as aplicações  $f'_{[t_0]}$  e  $g'_{[t_0]}$  são dadas pelas matrizes  $B$  e  $C$ , respectivamente.

Também,  $\tilde{f}((x, y), t_1) = \left(B(x, y), \frac{k}{k-l}\right) \sim \left(AB(x, y), \frac{l}{k-l}\right)$  e  $\tilde{g}((x, y), t_1) = \left(C(x, y), \frac{l}{k-l}\right)$  significa que  $f'_{[t_1]}$  e  $g'_{[t_1]}$  são dadas pelas matrizes  $AB$  e  $C$ , respectivamente. E assim por diante, até o último ponto de coincidência, onde obtemos que  $\tilde{f}((x, y), t_{|k-l|-1}) = \left(B(x, y), \frac{k(|k-l|-1)}{k-l}\right) \sim \left(A^{|k-l|-1}B(x, y), \frac{l(|k-l|-1)}{k-l}\right)$  e  $\tilde{g}((x, y), t_{|k-l|-1}) = \left(C(x, y), \frac{l(|k-l|-1)}{k-l}\right)$  o que significa que  $f'_{[t_{|k-l|-1}]}$  e  $g'_{[t_{|k-l|-1}]}$  são dadas pelas matrizes  $A^{|k-l|-1}B$  e  $C$ , respectivamente.

O teorema a seguir nos mostra as formas específicas da matriz  $B$ , ou seja, todas as possíveis aplicações para o nosso contexto, as quais dependem do grau da aplicação  $\bar{f} : S^1 \rightarrow S^1$ .

**Teorema 2.2.1.** *Seja  $f : M_{A^r} \rightarrow M_A$  uma aplicação entre Sol-torus bundles  $M_{A^r}$  e  $M_A$  com matrizes de Anosov  $A^r$  e  $A$ , respectivamente,  $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . Considere também  $f' : T \rightarrow T$  a aplicação induzida na fibra tal que  $f'_{\#} = B = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ , e  $\bar{f} : S^1 \rightarrow S^1$ . Suponha que  $A^r = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ . Então:*

$$B = \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{cc} q + \left[ \frac{a' - d'}{c'} \right] p & \left[ \frac{b'}{c'} \right] p \\ p & q \end{array} \right), \text{ se } \deg \bar{f} = r \\ \left( \begin{array}{cc} -q & \left[ \frac{a' - d'}{c'} \right] q - \left[ \frac{b'}{c'} \right] p \\ p & q \end{array} \right), \text{ se } \begin{array}{l} \deg \bar{f} = -r \text{ e } \det A = 1 \text{ ou} \\ \deg \bar{f} = -r; r \text{ par e } \det A = -1 \end{array} \\ \left( \begin{array}{cc} -q & \left[ \frac{b'}{d'} \right] q \\ -\left[ \frac{c'}{a'} \right] q & q \end{array} \right), \text{ se } \begin{array}{l} \deg \bar{f} = -r; r \text{ ímpar e } \det A = -1, \\ \text{com } a', d' \neq 0 \end{array} \\ 0, \text{ se } \begin{array}{l} \deg \bar{f} = -r; r \text{ ímpar e } \det A = -1, \\ \text{com } a' = 0 \text{ ou } d' = 0; \\ \text{ou } \deg \bar{f} \neq \pm r \end{array} \end{array} \right. ,$$

onde  $\left[ \frac{a' - d'}{c'} \right] p, \left[ \frac{b'}{c'} \right] p, \left[ \frac{a' - d'}{c'} \right] q, \left[ \frac{b'}{d'} \right] q, \left[ \frac{c'}{a'} \right] q \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Suponhamos, primeiramente, que  $\deg \bar{f} = r$ .

Pelo diagrama comutativo (2.1) temos que  $BA^r = A^r B$ , o que é equivalente ao sistema  $\left\{ \begin{array}{l} ma' + nc' = ma' + pb' \\ mb' + nd' = na' + qb' \\ pa' + qc' = mc' + pd' \\ pb' + qd' = nc' + qd' \end{array} \right.$ , nas variáveis  $m, n, p$  e  $q$ . A primeira e quarta

linhas são equivalentes; da primeira linha obtemos <sup>1</sup>  $n = \left[ \frac{b'}{c'} \right] p$  e da terceira linha  $m = \left[ \frac{(a' - d')}{c'} \right] p + q$ . Substituindo os valores encontrados para  $m$  e  $n$  na segunda linha, vemos

<sup>1</sup>Observe que  $c' \neq 0$  pois  $A^r$  é uma matriz de Anosov (já que  $A$  o é). De fato, se  $c' = 0$ , então

que esta equação é claramente satisfeita. Portanto,

$$B = \begin{pmatrix} q + \left[ \frac{a' - d'}{c'} \right] p & \left[ \frac{b'}{c'} \right] p \\ p & q \end{pmatrix}, \quad \text{onde } \left[ \frac{a' - d'}{c'} \right] p, \left[ \frac{b'}{c'} \right] p \in \mathbb{Z}.$$

Suponhamos agora que  $\deg \bar{f} = -r$ , com  $\det(A) = 1$  ou  $r$  par e  $\det(A) = -1$ .

O diagrama comutativo (2.1) implica que  $BA^r = A^{-r}B$ , o que é equivalente

$$\text{ao sistema linear } \begin{cases} ma' + nc' = md' - pb' \\ mb' + nd' = nd' - qb' \\ pa' + qc' = -mc' + pa' \\ pb' + qd' = -nc' + qa' \end{cases}, \text{ nas variáveis } m, n, p \text{ e } q. \text{ A segunda e}$$

terceira linhas são equivalentes; da segunda linha obtemos <sup>2</sup>  $m = -q$  e da quarta linha  $n = \frac{(a' - d')}{c'}q - \frac{b'}{c'}p$ . Substituindo os valores encontrados para  $m$  e  $n$  na primeira linha, vemos que esta equação é claramente satisfeita. Portanto,

$$B = \begin{pmatrix} -q & \left[ \frac{a' - d'}{c'} \right] q - \left[ \frac{b'}{c'} \right] p \\ p & q \end{pmatrix}, \quad \text{onde } \left[ \frac{a' - d'}{c'} \right] q, \left[ \frac{b'}{c'} \right] p \in \mathbb{Z}.$$

Se  $\deg \bar{f} = -r$ ,  $r$  ímpar e  $\det(A) = -1$ , então o diagrama comutativo (2.1)

$$\text{implica que } BA^r = A^{-r}B, \text{ o que é equivalente ao sistema linear } \begin{cases} ma' + nc' = -md' + pb' \\ mb' + nd' = -nd' + qb' \\ pa' + qc' = mc' - pa' \\ pb' + qd' = nc' - qa' \end{cases},$$

nas variáveis  $m, n, p$  e  $q$ . Da primeira e quarta linhas obtemos <sup>3</sup>  $m = -q$ . Substituindo na segunda e terceira linhas obtemos, se  $a' \neq 0$  e  $d' \neq 0$ ,  $n = \frac{b'}{d'}q$  e  $p = -\frac{c'}{a'}q$ , respectivamente.

---

$A^r = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$  seria tal que  $1 = \det(A) = \det(A^r) = a'd' \Rightarrow a' = \pm 1 = d' \Rightarrow |\text{tr}(A^r)| = 2$  o que não pode acontecer, pois por ser de Anosov, temos que  $|\text{tr}(A^r)| > 2$ .

<sup>2</sup>Observe que, pelo mesmo raciocínio,  $b' \neq 0$ .

<sup>3</sup>Observe que  $\text{tr}(A^r) = a' + d' \neq 0$ .

Portanto,

$$B = \begin{pmatrix} -q & \left[\frac{b'}{d'}\right] q \\ -\left[\frac{c'}{a'}\right] q & q \end{pmatrix}, \quad \text{onde } \left[\frac{b'}{d'}\right] q, \left[\frac{c'}{a'}\right] q \in \mathbb{Z}.$$

Se  $a' = 0$  (e portanto  $d' \neq 0$ , já que  $\text{tr}(A^r) \neq 0$ ), obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} nc' & = -md' + pb' \\ mb' + nd' & = -nd' + qb' \\ qc' & = mc' \\ pb' + qd' & = nc' \end{cases}, \quad \text{nas variáveis } m, n, p \text{ e } q. \quad \text{Da primeira e quarta linhas}$$

obtemos  $q = -m$ . Da terceira,  $q = m$ ; logo concluímos que  $q = m = 0$ . Substituindo na segunda linha, obtemos  $n = 0$  e voltando na primeira, obtemos  $p = 0$ . Portanto,  $B = 0$ .

Para o caso  $d' = 0$  (e  $a' \neq 0$ ), basta proceder de modo análogo.

Por fim, suponhamos que  $\deg \bar{f} = k \neq \pm r$ .

Como  $A$  é uma matriz de Anosov, então  $A$  é diagonalizável<sup>4</sup>, logo existe  $P \in GL(2, \mathbb{R})$  tal que  $P^{-1}AP = \bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores de  $A$ .

Consideremos  $\bar{B} = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ .

Então

$$\bar{B}\bar{A}^r = \bar{A}^k\bar{B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^r & 0 \\ 0 & \lambda_2^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\lambda_1^r & = \lambda_1^k x & (I) \\ y\lambda_2^r & = \lambda_1^k y & (II) \\ z\lambda_1^r & = \lambda_2^k z & (III) \\ w\lambda_2^r & = \lambda_2^k w & (IV) \end{cases}$$

Em (I) temos:

---

<sup>4</sup>Ver Apêndice A

$$x\lambda_1^r - x\lambda_1^k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x\lambda_1^k(\lambda_1^{r-k} - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x\lambda_1^k = 0 & \Rightarrow x = 0 \text{ ou } \lambda_1^k = 0 \\ \text{ou} & \\ \lambda_1^{r-k} - 1 = 0 & \Rightarrow \lambda_1^{r-k} = 1 \end{cases} & , \text{ se } k < r; \\ x\lambda_1^r(1 - \lambda_1^{k-r}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x\lambda_1^r = 0 & \Rightarrow x = 0 \text{ ou } \lambda_1^r = 0 \\ \text{ou} & \\ 1 - \lambda_1^{k-r} = 0 & \Rightarrow \lambda_1^{k-r} = 1 \end{cases} & , \text{ se } r < k. \end{cases}$$

Mas,  $\lambda_1^{|k-r|} = 1$  não acontece, pois  $\lambda_1 \neq \pm 1$  já que  $A$  é de Anosov e  $k \neq r$ .

Também  $\lambda_1^k = 0$  e  $\lambda_1^r = 0$  não acontecem, pois  $\lambda_1 \neq 0$  já que  $\lambda_1\lambda_2 = \det \bar{A} = \pm 1$ .

Portanto, só podemos ter  $x = 0$ .

O caso (IV) é totalmente análogo, logo  $w = 0$ .

Em (II):

Como  $\pm 1 = \det \bar{A} = \lambda_1\lambda_2$ , então  $\lambda_1 = \pm \frac{1}{\lambda_2}$ . Assim,  $y\lambda_2^r = \lambda_1^k y \Rightarrow y\lambda_2^r = \left(\pm \frac{1}{\lambda_2}\right)^k y \Rightarrow y\lambda_2^{r+k} = \pm y$  e, como  $\lambda_2^{r+k} \neq \pm 1$  e  $k \neq -r$ , então  $y = 0$ .

Do mesmo modo obtemos  $z = 0$ .

Portanto,  $\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e, conseqüentemente,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

□

**Observação 2.2.2.** *Essa caracterização da matriz  $B$  coincide com a do artigo [SWW] quando  $f$  é uma auto-aplicação, ou seja, quando  $r = 1$ .*

Claramente,  $f$  cobre uma família de recobrimentos. É uma questão natural que surge é quais graus são realizáveis. O trabalho [SWW] responde essa questão para auto-aplicações entre *torus bundles* e safras. O teorema acima nos permitiu iniciar um trabalho, ainda em andamento, para responder essa questão para os outros casos, ou seja para aplicações quaisquer entre *torus bundles* e safras.

O próximo teorema nos diz como calcular o número de Nielsen de aplicações  $f, g : M_{A^r} = \frac{T \times \mathbb{R}}{((x, y), t) \sim ((A^r)^n(x, y), t - n)} \rightarrow M_A = \frac{T \times \mathbb{R}}{((x, y), t) \sim (A^n(x, y), t - n)}$ , onde  $r \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Em sua demonstração, usaremos o que foi feito na Seção 2.2, a caracterização da matriz  $B$  e também dois resultados dos artigos [Je1] e [Je2], os quais enunciaremos a seguir.

Este primeiro resultado, encontrado em [Je1], nos diz como calcular o número de Nielsen se estivermos trabalhando com o Toro:

**Lema 2.2.3** ((7.3),[Je1]). *Seja  $T^n$  o Toro  $n$ -dimensional e  $f, g : T^n \rightarrow T^n$  uma aplicação contínua. Sejam  $B$  e  $C$  matrizes  $n \times n$  representando os endomorfismos  $f_{\#}, g_{\#} : \pi_1 T^n \rightarrow \pi_1 T^n$ . Então*

$$N(f, g) = |L(f, g)| = |\det(B - C)|.$$

Este segundo, encontrado em [Je2], nos diz (além de outras coisas), que podemos somar os números de Nielsen das fibras para obter o número de Nielsen do espaço total:

**Lema 2.2.4** ((5.5),[Je2]). *Sejam  $\phi, \phi'$  difeomorfismos do Toro  $k$ -dimensional. Considere as matrizes  $k \times k$ ,  $A$  e  $D$ , representando  $\phi_{\#}, \phi'_{\#} : \pi_1 T \rightarrow \pi_1 T$  e suponha que  $\det(I - A) \neq 0$ . Então qualquer par de aplicações contínuas  $f, g : M_A \rightarrow M_D$  é homotópico a um par de aplicações que preservam fibra*

$$\begin{array}{ccc} M_A & \xrightarrow{\tilde{f}, \tilde{g}} & M_D \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ S^1 & \xrightarrow{\bar{f}, \bar{g}} & S^1 \end{array} \quad (2.2)$$

Se  $\text{ind}(\bar{f}, \bar{g}) = 0$ , então  $(\bar{f}, \bar{g})$  é homotópico a um par livre de coincidências, e portanto  $(f, g)$  também é, e  $N(f, g) = 0$ . Se  $\text{ind}(\bar{f}, \bar{g}) = k \neq 0$  então fixe um ponto de coincidência  $b \in S^1$  e denote por  $B$  e  $C$  as matrizes representando  $\tilde{f}_{b\#}$  e  $\tilde{g}_{b\#}$ . Então,

$$N(f, g) = \sum_{i=0}^{|k|-1} N(f_b, \phi'^i g_b) = \sum_{i=0}^{|k|-1} |\det(B - D^i C)|.$$

Apesar do teorema seguinte ser uma consequência imediata do Lema 2.2.4<sup>5</sup>, a nossa demonstração apresenta uma visão mais geométrica, por isso, optamos por apresentá-la na tese.

<sup>5</sup>Temos que  $\det(I - A^r) \neq 0$ , logo podemos aplicar o Lema 2.2.4. Esse lema nos diz que se  $N(\bar{f}, \bar{g}) = 0$  (ou seja  $k = l$ ), então  $N(f, g) = 0$  e se  $N(\bar{f}, \bar{g}) \neq 0$ , então  $N(f, g) = \sum_{i=0}^{N(\bar{f}, \bar{g})-1} |\det(B - D^i C)|$  (que é simétrico ao resultado que apresentamos).

**Teorema 2.2.5.** *Sejam  $f, g : M_{A^r} \rightarrow M_A$  aplicações entre Sol-torus bundles  $M_{A^r}$  e  $M_A$  com matrizes de Anosov  $A^r$  e  $A$ , respectivamente,  $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ ,  $r \in \mathbb{N}_*$ . Considere também  $f', g' : T \rightarrow T$  aplicações induzidas na fibra tais que  $f'_\# = B$  e  $g'_\# = C$ , e  $\bar{f}, \bar{g} : S^1 \rightarrow S^1$  tais que  $\deg \bar{f} = k$  e  $\deg \bar{g} = l$ . Então*

$$N(f, g) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } k = l \\ \sum_{i=0}^{|k-l|-1} |\det(A^{\text{sign}(k)^i} B - C)| & , \text{ se } k \neq l \end{cases}$$

$$\text{onde } \text{sign}(k) := \begin{cases} -1 & , \text{ se } k < 0 \\ 1 & , \text{ se } k > 0. \end{cases}$$

*Demonstração.* Primeiramente, observemos que existem seis casos para serem analisados:

- (a)  $k = r$  e  $l \neq \pm r$ ;
- (b)  $k = r$  e  $l = r$ ;
- (c)  $k \neq \pm r$  e  $l \neq \pm r$ ;
- (d)  $k = -r$  e  $l = r$ ;
- (e)  $k = -r$  e  $l = -r$ ;
- (f)  $k = -r$  e  $l \neq \pm r$ .

Também, nos itens (a), (d) e (f) existem os casos simétricos.

$$\text{Suponhamos que } A^r = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

- (a) Sabemos que  $\bar{f}$  é homotópica a uma aplicação  $\bar{f}(t) = rt$  e, pelo diagrama comutativo (2.1), temos que  $BA^r = A^rB$  onde  $B = \begin{pmatrix} q + \left[ \frac{a' - d'}{c'} \right] p & \left[ \frac{b'}{c'} \right] p \\ p & q \end{pmatrix}$ ,  $\left[ \frac{a' - d'}{c'} \right] p, \left[ \frac{b'}{c'} \right] p \in \mathbb{Z}$  (Teorema 2.2.1). Além disso,  $C = 0$  (Teorema 2.2.1) e  $\bar{g}$  é homotópica a uma aplicação  $\bar{g}(t) = lt$ .

Assim,  $rt = lt \pmod{1} \Rightarrow |r - l|t = 0 \pmod{1} \Rightarrow t_0 = 0; t_1 = \frac{1}{r - l}; t_2 = \frac{2}{r - l}; \dots; t_{|r-l|-1} = \frac{|r - l| - 1}{r - l}$  são os  $|r - l|$  pontos de coincidência de  $(\bar{f}, \bar{g})$ . Como  $N(\bar{f}, \bar{g}) = |r - l|$ , então os pontos de coincidência estão em classes distintas.

Como vimos no começo deste capítulo, podemos escrever  $f[(x, y), t] = [(B(x, y) + \eta((x, y), t), rt)]$  e  $g[(x, y), t] = [(C(x, y) + \eta((x, y), t), lt)]$ . Seguindo o raciocínio feito na seção 2.2, vamos obter que as aplicações  $f'_{[t_0]}, g'_{[t_0]}, f'_{[t_1]}, g'_{[t_1]}, f'_{[t_2]}, g'_{[t_2]}, \dots, f'_{[t_{|r-l|-1}]}$  e  $g'_{[t_{|r-l|-1}]}$  são dadas pelas matrizes  $B, C, AB, C, A^2B, C, \dots, A^{|r-l|-1}B$  e  $C$  respectivamente.

Assim,

$$\begin{aligned} N(f, g) &\stackrel{\text{Lema 2.2.4}}{=} N(f'_{[t_0]}, g'_{[t_0]}) + N(f'_{[t_1]}, g'_{[t_1]}) + \dots + N(f'_{[t_{|r-l|-1}]}, g'_{[t_{|r-l|-1}]}) \\ &\stackrel{\text{Lema 2.2.3}}{=} |\det(B - C)| + |\det(AB - C)| + \dots + |\det(A^{|r-l|-1}B - C)| \\ &= \sum_{i=0}^{|r-l|-1} |\det(A^i B - C)|. \end{aligned}$$

(b) e (e) Nestes casos, podemos tomar  $\bar{f}$  homotópica a  $\bar{f}$ , onde  $\bar{f}$  é uma translação por  $\varepsilon$  de  $\bar{f}$  ( $0 < \varepsilon < 1/4$ ) de modo que  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$  não tenham mais coincidências. Consequentemente,  $N(f, g) = 0$ .

(c) Podemos seguir o mesmo raciocínio do item (a) e obter os  $|k - l|$  pontos de coincidência de  $(\bar{f}, \bar{g})$ . Seguindo ainda nesse raciocínio, vamos obter o número de Nielsen de  $f$  e  $g$  em termos de  $\det(A^i B - C)$ . Porém, pelo Teorema 2.2.1, temos que  $B = 0 = C$  e portanto  $A^i B - C = 0$ , de onde obtemos que  $N(f, g) = 0$ .

(d) Aqui nós temos que  $\bar{f}$  é homotópica a uma aplicação  $\bar{f}(t) = -rt$ ,  $\bar{g}$  é homotópica a uma aplicação  $\bar{g}(t) = rt$ ,  $BA^r = A^{-r}B$  e  $CA^r = A^rC$  (pelo diagrama comutativo (2.1)), onde

$$B = \begin{cases} \begin{pmatrix} -q & \left[\frac{a'-d'}{c'}\right]q - \left[\frac{b'}{c'}\right]p \\ p & q \end{pmatrix}, & \begin{array}{l} \text{se } (\det(A) = 1) \text{ ou} \\ (\det(A) = -1 \text{ e } r \text{ é par}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -q & \left[\frac{b'}{d'}\right]q \\ -\left[\frac{c'}{a'}\right]q & q \end{pmatrix}, & \text{se } \det(A) = -1 \text{ e } r \text{ é ímpar} \end{cases},$$

$$\text{e } C = \begin{pmatrix} u + \left[\frac{a'-d'}{c'}\right]t & \left[\frac{b'}{c'}\right]t \\ t & u \end{pmatrix}, \text{ com } \left[\frac{a'-d'}{c'}\right]q, \left[\frac{b'}{c'}\right]p, \left[\frac{a'-d'}{c'}\right]t, \left[\frac{b'}{c'}\right]t, \left[\frac{b'}{d'}\right]q, \left[\frac{c'}{a'}\right]q \in \mathbb{Z}. \quad (2.2.1).$$

Assim,  $rt = -rt \pmod{1} \Rightarrow |2r|t = 0 \pmod{1} \Rightarrow t_0 = 0; t_1 = \frac{1}{|2r|}; t_2 = \frac{2}{|2r|}; \dots; t_{|2r|-1} = \frac{|2r|-1}{|2r|}$  são os  $|2r|$  pontos de coincidência de  $(\bar{f}, \bar{g})$ . Como  $N(\bar{f}, \bar{g}) = |2r|$ , os pontos de coincidência estão em classes distintas.

Consideremos  $f[(x, y), t] = [(B(x, y) + \eta((x, y), t), -rt)]$  e  $g[(x, y), t] = [(C(x, y) + \eta((x, y), t), rt)]$ . Então as aplicações  $f'_{[t_0]}, g'_{[t_0]}, f'_{[t_1]}, g'_{[t_1]}, \dots, f'_{[t_{|2r|-1}]}$  e  $g'_{[t_{|2r|-1}]}$  são dadas pelas matrizes  $B, C, A^{-1}B, C, \dots, A^{-(|2r|-1)}B$  e  $C$ , respectivamente.

Utilizando os Lemas 2.2.3 e 2.2.4 obtemos que  $N(f, g) = \sum_{i=0}^{|2r|-1} |\det(A^{-i}B - C)|$ .

- (f) Neste caso, temos  $|l+r|$  classes de coincidência. Assim, as aplicações  $f'_{[t_0]}, g'_{[t_0]}, f'_{[t_1]}, g'_{[t_1]}, \dots, f'_{[t_{|l+r|-1}]}$  e  $g'_{[t_{|l+r|-1}]}$  são dadas pelas matrizes  $B, C, A^{-1}B, C, \dots, A^{-(|l+r|-1)}B$  e  $C$ , res-

pectivamente; onde

$$B = \begin{cases} \begin{pmatrix} -q & \left[\frac{a' - d'}{c'}\right]q - \left[\frac{b'}{c'}\right]p \\ p & q \end{pmatrix}, & \begin{array}{l} \text{se } (\det(A) = 1) \text{ ou} \\ (\det(A) = -1 \text{ e } r \text{ é par}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -q & \left[\frac{b'}{d'}\right]q \\ -\left[\frac{c'}{a'}\right]q & q \end{pmatrix}, & \text{se } \det(A) = -1 \text{ e } r \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e  $C = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Assim, } N(f, g) &= N(f'_{[t_0]}, g'_{[t_0]}) + \dots + N(f'_{[t_{|r+l|-1}]}, g'_{[t_{|r+l|-1}]}) = |\det(B - C)| + \\ &|\det(A^{-1}B - C)| + \dots + |\det(A^{-(|r+l|-1)}B - C)| = \sum_{i=0}^{|r+l|-1} |\det(A^{-i}B - C)|. \end{aligned}$$

□

**Observação 2.2.6.** *Sob as hipóteses do Teorema 2.2.5, com um pouco de cálculo, podemos mostrar que se  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ ,  $f, g : M_{A^r} \rightarrow M_A$  e  $B$  e  $C$  são da forma do Teorema 2.2.1 então,  $\det(A^i B - C) = \det(B) + \det(C)$ .*

Como consequência desse teorema e da observação acima, podemos enunciar os dois próximos Corolários.

**Corolário 2.2.7.** *Sob as hipóteses do Teorema 2.2.5, se  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ , então*

$$N(f, g) = |k - l| |\det(B) + \det(C)|.$$

Para a demonstração do segundo Corolário, precisaremos do Lema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [Sa].

**Lema 2.2.8.** *Sejam  $A = \varepsilon A_0^n$  uma matriz de Anosov onde  $A_0 = \prod_{i=1}^s \begin{bmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  é uma raiz primitiva de  $A$ ;  $C(A) = \{B \in GL(2, \mathbb{Z}) | BAB^{-1} = A\}$  e  $R(A) = \{B \in GL(2, \mathbb{Z}) | BAB^{-1} = A^{-1}\}$ . Então:*

(1)  $C(A) = \{\pm A_0^i (i \in \mathbb{Z})\} \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_2$ .

(2) Suponha que  $\det(A) = 1$ , e que o período primitivo  $(a_1, \dots, a_s)$  seja invertível, isto é, existe um inteiro  $u$  ( $1 \leq u \leq s-1$ ) tal que  $(a_s, a_{s-1}, \dots, a_1) = (a_{u+1}, \dots, a_s, a_1, \dots, a_u)$ .

Coloque  $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \prod_{i=u+1}^s \begin{bmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Então  $R(A) = C(A)P$ .

(3) Se a condição (2) não for satisfeita, então  $R(A)$  é um conjunto vazio.

(4) Uma matriz  $Q$  em  $R(A)$  possui período 2 ou 4, dependendo se  $\det(Q) = -1$  ou  $+1$ .

**Corolário 2.2.9.** Sob as hipóteses do Teorema 2.2.5, se  $f, g : M_A \rightarrow M_A$  são homeomorfismos, então  $N(f, g) = 0$  ou  $N(f, g) = 4$ .

*Demonstração.* Primeiramente, observemos que como  $f$  e  $g$  são homeomorfismos, então  $k = \deg(\bar{f}) = \pm 1$  e  $l = \deg(\bar{g}) = \pm 1$ .

Se  $\det(A) = -1$ , então pelo Lema 2.2.8 (3), temos que não existe matriz  $B$  com  $\det(B) = \pm 1$  tal que  $BA = A^{-1}B$ . Assim,  $\deg \bar{f} = 1$ , ou seja,  $\bar{f}$  induz o homomorfismo identidade em  $\pi_1(S^1)$ . De modo análogo,  $\bar{g}$  também induz o homomorfismo identidade em  $\pi_1(S^1)$ . Portanto,  $N(f, g) = 0$ .

Se  $\det(A) = 1$ , então nos casos  $k = 1 = l$  e  $k = -1 = l$ , temos que  $N(f, g) = 0$ . Para  $k = -1$  e  $l = 1$  (ou no caso simétrico) temos, pelo Corolário 2.2.7, que  $N(f, g) = 2|\det(B) + \det(C)|$ .

Assim,

- $N(f, g) = 0$ , quando  $\det(B) = 1$  e  $\det(C) = -1$ , ou  $\det(B) = -1$  e  $\det(C) = 1$ ;
- $N(f, g) = 4$ , quando  $\det(B) = \det(C)$ .

□

**Observação 2.2.10.** No caso onde  $f$  e  $g$  são homeomorfismos, temos que  $\text{Coin}(f, g) = \text{Fix}(f^{-1} \circ g)$  e, portanto, o Corolário 2.2.9 pode ser obtido do Teorema 2.2 de [GW]. Porém, optamos por apresentá-lo dessa maneira por ser uma preparação para o que fizemos posteriormente.

### 2.3. Aplicações de $M_{A^r}$ em $M_{A^s}$

O próximo passo, indo em direção ao objetivo inicial, é analisar quando tanto a matriz de colagem do domínio quanto a do contradomínio são potências de uma mesma matriz de Anosov  $A$ . Para este caso, concluímos que as únicas aplicações, que não sejam triviais na fibra, entre as variedades  $M_{A^r}$  e  $M_{A^s}$  são obtidas quando  $r = \pm ks$ , onde  $k = \deg \bar{f}$ . Estamos assumindo que  $k > 0$  e  $s > 0$ .

**Teorema 2.3.1.** *Seja  $f : M_{A^r} \rightarrow M_{A^s}$  uma aplicação entre Sol-torus bundles  $M_{A^r}$  e  $M_{A^s}$  com matrizes de Anosov  $A^r$  e  $A^s$ , respectivamente,  $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$ . Considere também  $f' : T \rightarrow T$  a aplicação induzida na fibra tal que  $f'_\# = B$ , e  $\bar{f} : S^1 \rightarrow S^1$ , com  $\deg \bar{f} = k$ . Então  $B = 0$  se  $r \neq \pm ks$ .*

*Demonstração.* De fato, suponhamos que  $r \neq \pm ks$ .

Como  $A$  é uma matriz de Anosov, então  $A$  é diagonalizável<sup>6</sup>, logo existe  $P \in GL(2, \mathbb{R})$  tal que  $P^{-1}AP = \bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores de  $A$ .

$$\text{Consideremos } \bar{B} = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$

Então

$$\bar{B}\bar{A}^r = (\bar{A}^s)^k \bar{B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^r & 0 \\ 0 & \lambda_2^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{sk} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{sk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\lambda_1^r = \lambda_1^{sk}x & (I) \\ y\lambda_2^r = \lambda_1^{sk}y & (II) \\ z\lambda_1^r = \lambda_2^{sk}z & (III) \\ w\lambda_2^r = \lambda_2^{sk}w & (IV) \end{cases}$$

Em (I) temos:

---

<sup>6</sup>Ver Apêndice A

$$x\lambda_1^r - x\lambda_1^{sk} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x\lambda_1^{sk}(\lambda_1^{r-sk} - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x\lambda_1^{sk} = 0 & \Rightarrow x = 0 \text{ ou } \lambda_1^{sk} = 0 \\ \text{ou} & \\ \lambda_1^{r-sk} - 1 = 0 & \Rightarrow \lambda_1^{r-sk} = 1 \end{cases} & , \text{ se } r > sk; \\ x\lambda_1^r(1 - \lambda_1^{sk-r}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x\lambda_1^r = 0 & \Rightarrow x = 0 \text{ ou } \lambda_1^r = 0 \\ \text{ou} & \\ 1 - \lambda_1^{sk-r} = 0 & \Rightarrow \lambda_1^{sk-r} = 1 \end{cases} & , \text{ se } r < sk. \end{cases}$$

Mas,  $\lambda_1^{|sk-r|} = 1$  não acontece, pois  $\lambda_1 \neq \pm 1$  já que  $A$  é de Anosov e  $sk \neq r$ .

Também  $\lambda_1^{sk} = 0$  e  $\lambda_1^r = 0$  não acontecem, pois  $\lambda_1 \neq 0$  já que  $\lambda_1\lambda_2 = \det \bar{A} = \pm 1$ .

Portanto, só podemos ter  $x = 0$ .

O caso (IV) é totalmente análogo, logo  $w = 0$ .

Em (II):

Como  $\pm 1 = \det \bar{A} = \lambda_1\lambda_2$ , então  $\lambda_1 = \pm \frac{1}{\lambda_2}$ . Assim,  $y\lambda_2^r = \left(\pm \frac{1}{\lambda_2}\right)^{sk} y \Rightarrow y\lambda_2^{r+sk} = \pm y$  e, como  $\lambda_2^{r+sk} \neq \pm 1$  e  $r \neq -ks$ , então  $y = 0$ .

Do mesmo modo obtemos  $z = 0$ .

Portanto,  $\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e, conseqüentemente,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

□

**Corolário 2.3.2.** *Sob as hipóteses do Teorema 2.3.1, se  $r = \pm ks$ , então:*

(i) *Se  $r$  e  $\deg \bar{f}$  tem o mesmo sinal, então  $A$  e  $B$  são simultaneamente diagonalizáveis.*

(ii) *Se  $r$  e  $\deg \bar{f}$  tem sinais contrários, então só teremos aplicações triviais na fibra, no caso do domínio ser não-orientável.*

*Demonstração.* Utilizando o mesmo raciocínio do início da demonstração do Teorema 2.3.1, temos:

(i) Se  $r = ks$  e  $\deg \bar{f} = k$ , então no sistema

$$(*) \begin{cases} x\lambda_1^r = \lambda_1^{sk}x & (I) \\ y\lambda_2^r = \lambda_1^{sk}y & (II) \\ z\lambda_1^r = \lambda_2^{sk}z & (III) \\ w\lambda_2^r = \lambda_2^{sk}w. & (IV) \end{cases}$$

não podemos afirmar nada sobre  $x$  e  $w$ . Em (II),  $y\lambda_2^{2sk} = \pm y \Rightarrow y = 0$ . O mesmo acontece com  $z$  em (III).

Assim, se  $r = ks$  e  $\deg \bar{f} = k$ , então  $\bar{B} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$ , com  $x, w \in \mathbb{R}$ .

Se  $r = -ks$  e  $\deg \bar{f} = -k$ , então no sistema

$$(**) \begin{cases} x\lambda_1^r = \lambda_1^{-sk}x & (I) \\ y\lambda_2^r = \lambda_1^{-sk}y & (II) \\ z\lambda_1^r = \lambda_2^{-sk}z & (III) \\ w\lambda_2^r = \lambda_2^{-sk}w. & (IV) \end{cases}$$

não podemos afirmar nada sobre  $x$  e  $w$ . Em (II),  $y\lambda_2^{-2sk} = \pm y \Rightarrow y = 0$ . O mesmo acontece com  $z$  em (III).

Assim, se  $r = -ks$  e  $\deg \bar{f} = -k$ , então  $\bar{B} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$ , com  $x, w \in \mathbb{R}$ .

Portanto, em ambos os casos acima, obtemos que  $A$  e  $B$  são simultaneamente diagonalizáveis.

- (ii) Agora, se  $r = ks$  e  $\deg \bar{f} = -k$ , precisamos analisar os casos  $\det(A) = 1$  e  $\det(A) = -1$  separadamente.

Se  $\det(A) = -1$  e  $r$  é par, ou  $\det(A) = 1$ , então no sistema  $(**)$  não podemos afirmar nada sobre  $y$  e  $z$ , já que teremos  $y\lambda_2^{ks} = \lambda_1^{-ks}y = \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^{-ks}y = \lambda_2^{ks}y \Rightarrow y = y$  na equação (II) e o análogo na equação (III). Da equação (I) obtemos  $\lambda_1^{|2sk|} = 1$  ou  $x = 0$ , de onde concluímos que  $x = 0$ . O mesmo podemos concluir para  $w$  na equação (IV).

Assim, para esse caso, obtemos  $\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$ , com  $y, z \in \mathbb{R}$ .

Se  $\det(A) = -1$  e  $r$  é ímpar, então a diferença é que passamos a ficar com a equação  $y\lambda_2^{ks} = (-\lambda_2)^{ks}y \Rightarrow -y = y$ , e portanto,  $y = 0$ . O mesmo ocorre com  $z$ . Quanto às

equações que envolvem  $x$  e  $w$ , elas não sofrem alterações. Portanto,  $x, y, z$  e  $w$  são nulos. Ou seja,  $\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Se  $r = -ks$  e  $\deg \bar{f} = k$ , então considerando o sistema (\*) e procedendo como acima, obtemos os mesmos resultados.

Portanto, para os casos desse item, quando o domínio é não-orientável só temos aplicações triviais na fibra.

□

**Observação 2.3.3.** *Se  $r = \pm ks$ , então teremos que  $BA^{\pm ks} = A^{ks}B$  e assim, obtemos a mesma forma para a matriz  $B$  do Teorema 2.2.1. Observe que no caso onde  $\det(A) = -1$  e  $r$  é ímpar, obtemos que  $B = 0$  o que nos diz que a matriz  $B$  no Teorema 2.2.1 para o caso  $d', d'' \neq 0$ , não é realizável em  $\mathbb{Z}$ . Além disso, denotando  $A^s = D$ , temos que  $A^{ks} = (A^s)^k = D^k$ . Assim, o número de Nielsen para  $f, g : M_{A^r} \rightarrow M_{A^s}$ , coincide com o caso  $f, g : M_{D^k} \rightarrow M_D$ .*

## 2.4. Aplicações de $M_A$ em $M_D$

Este é o caso mais geral que podemos analisar para aplicações entre *torus bundles*.

Consideremos  $f : M_A \rightarrow M_D$  qualquer, com  $A$  e  $D$  matrizes de Anosov em  $GL(2, \mathbb{Z})$ . Sejam  $f' : T \rightarrow T$  a aplicação induzida na fibra tal que  $f'_{\#} = B$  e  $\bar{f} : S^1 \rightarrow S^1$  a sua induzida na base.

O Lema(1.1) de [Sa]<sup>7</sup> nos diz que  $M_A$  é homeomorfa a  $M_D$  se, e somente

---

<sup>7</sup>**Lema (1.1)** [Sa]. Sejam  $A$  e  $D$  matrizes em  $GL(2, \mathbb{Z})$ . Então as seguintes condições são equivalentes.

- (1)  $M_A$  é homeomorfo a  $M_D$ .
- (2)  $\pi_1(M_A)$  é isomorfo a  $\pi_1(M_D)$ .
- (3) O  $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -módulo  $H_A$  é isomorfo ou anti-isomorfo ao  $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -módulo  $H_B$ .
- (4)  $A$  é conjugado a  $D$  ou  $D^{-1}$ .

se,  $A$  é conjugada a  $D$  ou a  $D^{-1}$ , ou seja, se existe uma matriz  $P \in GL(2, \mathbb{Z})$  tal que  $A = PD^{\pm 1}P^{-1}$ .

Observemos que se  $\deg \bar{f} = k$ , então o diagrama comutativo (2.1) implica que  $BA = D^k B$ .

Assim, se  $f' : T \rightarrow T$  for um homeomorfismo, então  $B \in GL(2, \mathbb{Z})$  e  $BA = D^k B \Rightarrow A = B^{-1}D^k B$ , ou seja,  $A$  é conjugada a  $D^k$  e, portanto,  $M_A$  é homeomorfa a  $M_{D^k}$ . Logo, voltamos ao caso  $f : M_{A^r} \rightarrow M_A$ .

Resta analisar o caso onde  $f'$  não é um homeomorfismo.

Conseguimos resolver completamente esse caso quando  $\deg \bar{f} = 1$  e é o que apresentamos nesta seção. O caso  $\deg \bar{f} \neq 1$  segue em estudo.

**Teorema 2.4.1.** *Seja  $f : M_A \rightarrow M_D$  uma aplicação entre Sol-torus bundles com matrizes de Anosov  $A, D \in GL(2, \mathbb{Z})$ . Considere também  $f' : T \rightarrow T$  a aplicação induzida na fibra tal que  $f'_\# = B$ , e  $\bar{f} : S^1 \rightarrow S^1$ , com  $\deg \bar{f} = 1$ . Então  $B = 0$  se  $\det(A) \neq \det(D)$  ou se  $\det(A) = \det(D)$  e  $\text{tr}(A) \neq \text{tr}(D)$ .*

*Demonstração.* Denotemos por:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$

Da equação matricial  $BA = DB$  obtemos o sistema:

$$\begin{cases} (a-x)m + cn - yp = 0 \\ bm + (d-x)n - yq = 0 \\ -zm + (a-w)p + cq = 0 \\ -zn + bp + (d-w)q = 0 \end{cases}$$

o qual possui a seguinte matriz de coeficientes:

$$S = \begin{pmatrix} (a-x) & c & -y & 0 \\ b & (d-x) & 0 & -y \\ -z & 0 & (a-w) & c \\ 0 & -z & b & (d-w) \end{pmatrix}$$

O polinômio característico da matriz dos coeficientes,  $p_S(t)$ , é dado por:

$$\begin{aligned}
 p_S(t) &= \det \begin{bmatrix} (a-x-t) & c & -y & 0 \\ b & (d-x-t) & 0 & -y \\ -z & 0 & (a-w-t) & c \\ 0 & -z & b & (d-w-t) \end{bmatrix} = \\
 &= y^2 z^2 + ((-2w-2t+d+a)x + (-2t+d+a)w - 2t^2 + (2d+2a)t - d^2 - 2bc - a^2)yz + (w^2 + \\
 &+ (2t-d-a)w + t^2 + (-d-a)t + ad - bc)x^2 + ((2t-d-a)w^2 + (4t^2 + (-4d-4a)t + d^2 + 2ad + \\
 &+ a^2)w + 2t^3 + (-3d-3a)t^2 + (d^2 + 4ad - 2bc + a^2)t - ad^2 + (bc - a^2)d + abc)x + (t^2 + (-d - \\
 &+ a)t + ad - bc)w^2 + (2t^3 + (-3d-3a)t^2 + (d^2 + 4ad - 2bc + a^2)t - ad^2 + (bc - a^2)d + abc)w + t^4 + \\
 &+ (-2d-2a)t^3 + (d^2 + 4ad - 2bc + a^2)t^2 + (-2ad^2 + (2bc - 2a^2)d + 2abc)t + a^2 d^2 - 2abcd + b^2 c^2 = \\
 &= t^4 + (2x + 2w - 2d - 2a)t^3 + (x^2 - 2yz + 4wx - 3dx - 3ax + w^2 - 3dw - 3aw + d^2 + 4ad - \\
 &+ 2bc + a^2)t^2 + (2dyz - 2xyz - 2wyz + 2ayz + 2wx^2 - dx^2 - ax^2 + 2w^2x - 4dwx - 4awx + \\
 &+ d^2x + 4adx - 2bcx + a^2x - dw^2 - aw^2 + d^2w + 4adw - 2bcw + a^2w - 2ad^2 + 2bcd - 2a^2d + \\
 &+ 2abc)t + y^2 z^2 - 2wxyz + dxyz + axyz + dwyz + awyz - d^2yz - 2bcyz - a^2yz + w^2 x^2 - \\
 &+ dwx^2 - awx^2 + adx^2 - bcx^2 - dw^2x - aw^2x + d^2wx + 2adwx + a^2wx - ad^2x + bcdx - a^2dx + \\
 &+ abcx + adw^2 - bcw^2 - ad^2w + bcdw - a^2dw + abcw + a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2,
 \end{aligned}$$

onde o termo constante de  $p_S(t)$  é exatamente o determinante de  $S$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 \det(S) &= y^2 z^2 - 2wxyz + dxyz + axyz + dwyz + awyz - d^2yz - 2bcyz - a^2yz + w^2 x^2 - \\
 &+ dwx^2 - awx^2 + adx^2 - bcx^2 - dw^2x - aw^2x + d^2wx + 2adwx + a^2wx - ad^2x + bcdx - a^2dx + \\
 &+ abcx + adw^2 - bcw^2 - ad^2w + bcdw - a^2dw + abcw + a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \\
 &= d^2(wx - yz) + a^2(wx - yz) - yz(wx - yz) + xw(wx - yz) + x^2(ad - bc) + (ad - bc)^2 - \\
 &+ aw(ad - bc) - dw(ad - bc) + w^2(ad - bc) - ax(ad - bc) - dx(ad - bc) - dx(wx - yz) - \\
 &+ ax(wx - yz) - dw(wx - yz) - aw(wx - yz) - 2bcyz + 2adwx = \Delta.
 \end{aligned}$$

Se  $\det(A) = 1 = \det(D)$ , então:

$$\begin{aligned}
\Delta &= d^2 + a^2 - yz + xw + x^2 + 1 - aw - dw + w^2 - ax - dx - dx - ax - dw - aw - 2bcyz + 2adwx \\
&= d^2 + a^2 + x^2 + w^2 - 2aw - 2dw - 2ax - 2dx - 2bcyz + 2adwx + 2 \\
&= (a + d - x - w)^2 - 2da - 2xw - 2bcyz + 2adwx + 2 \\
&= (a + d - x - w)^2 + 2ad(wx - 1) - 2xw - 2bcyz + 2 \\
&= (a + d - x - w)^2 + 2yz(ad - bc) - 2xw + 2 \\
&= (a + d - x - w)^2 - 2(xw - yz) + 2 \\
&= (tr(A) - tr(D))^2 - 2 + 2 \\
&= (tr(A) - tr(D))^2.
\end{aligned}$$

Se  $\det(A) = -1 = \det(D)$ , então:

$$\begin{aligned}
\Delta &= -d^2 - a^2 + yz - xw - x^2 + 1 + aw + dw - w^2 + ax + dx + dx + ax + dw + aw - 2bcyz + 2adwx \\
&= -d^2 - a^2 - x^2 - w^2 + 2aw + 2dw + 2ax + 2dx - 2bcyz + 2adwx + 2 \\
&= -(a + d - x - w)^2 + 2da + 2xw - 2bcyz + 2adwx + 2 \\
&= -(a + d - x - w)^2 + 2ad(wx + 1) + 2xw - 2bcyz + 2 \\
&= -(a + d - x - w)^2 + 2yz(ad - bc) + 2xw + 2 \\
&= -(a + d - (x + w))^2 + 2(xw - yz) + 2 \\
&= -(tr(A) - tr(D))^2 - 2 + 2 \\
&= -(tr(A) - tr(D))^2.
\end{aligned}$$

Portanto, em ambos os casos,  $\det(S) = 0$  se, e somente se,  $tr(A) = tr(D)$ .

Ou seja, se  $tr(A) \neq tr(D)$ , então  $\det(S) \neq 0$  e, assim, o sistema admite uma única solução, a trivial. Logo,  $m = n = p = q = 0$ , isto é,  $B = 0$ .

Suponhamos agora que  $\det(A) = 1$  e  $\det(D) = -1$  o caso simétrico é análogo.

Então,

$$\begin{aligned}
\Delta &= -d^2 - a^2 + yz - xw + x^2 + 1 - aw - dw + w^2 - ax - dx + dx + ax + dw + aw - 2bcyz + 2adwx \\
&= -d^2 - a^2 + x^2 + w^2 - 2bcyz + 2adwx + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(a+d)^2 + 2ad + (x+w)^2 - 2xw - 2bcyz + 2adwx + 2 \\
&= -(a+d)^2 + (x+w)^2 + 2ad(1+wx) - 2xw - 2bcyz + 2 \\
&= -\text{tr}(A)^2 + \text{tr}(D)^2 + 2yz(ad-bc) - 2xw + 2 \\
&= -\text{tr}(A)^2 + \text{tr}(D)^2 - 2(xw-yz) + 2 \\
&= -\text{tr}(A)^2 + \text{tr}(D)^2 + 2 + 2 \\
&= -\text{tr}(A)^2 + \text{tr}(D)^2 + 4.
\end{aligned}$$

Observe que  $-\text{tr}(A)^2 + \text{tr}(D)^2 + 4$  nunca se anula, já que  $|\text{tr}(A)| > 2$  e  $\text{tr}(D) \neq 0$ .

Portanto,  $\det(S)$  é sempre diferente de zero e, assim, o sistema admite uma única solução, a trivial. Logo,  $m = n = p = q = 0$ , ou seja,  $B = 0$ .  $\square$

**Teorema 2.4.2.** *Seja  $f : M_A \rightarrow M_D$  uma aplicação entre Sol-torus bundles com matrizes de Anosov  $A, D \in GL(2, \mathbb{Z})$  tal que  $\det(A) = \det(D)$ . Considere também  $f' : T \rightarrow T$  a aplicação induzida na fibra tal que  $f'_\# = B = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ , e  $\bar{f} : S^1 \rightarrow S^1$ , com  $\deg \bar{f} = 1$ .*

*Suponha que  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  e  $D = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ .*

*Se  $\text{tr}(A) = \text{tr}(D)$ , então*

$$B = \begin{pmatrix} \left[ \frac{a-w}{z} \right] p + \left[ \frac{c}{z} \right] q & \left[ \frac{b}{z} \right] p + \left[ \frac{d-w}{z} \right] q \\ p & q \end{pmatrix},$$

onde  $\left[ \frac{a-w}{z} \right] p, \left[ \frac{c}{z} \right] q, \left[ \frac{b}{z} \right] p, \left[ \frac{d-w}{z} \right] q \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Da equação matricial  $BA = DB$  obtemos o sistema:

$$\begin{cases} (a-x)m + cn - yp = 0 \\ bm + (d-x)n - yq = 0 \\ -zm + (a-w)p + cq = 0 \\ -zn + bp + (d-w)q = 0 \end{cases}$$

Como  $\text{tr}(A) = \text{tr}(D)$ , isto é  $a+d = x+w$ , então  $a-x = w-d$  e  $d-x = w-a$ .

Substituindo no sistema, obtemos:

$$\begin{cases} -(d-w)m + cn - yp = 0 & (I) \\ bm - (a-w)n - yq = 0 & (II) \\ -zm + (a-w)p + cq = 0 & (III) \\ -zn + bp + (d-w)q = 0 & (IV) \end{cases}$$

Da equação (III) obtemos<sup>8</sup>:  $m = \frac{(a-w)p + cq}{z}$ .

Da equação (IV) obtemos:  $n = \frac{bp + (d-w)q}{z}$ .

Substituindo em (I) os valores de  $m$  e  $n$  encontrados, obtemos:

$$-(d-w) \left[ \frac{(a-w)p + cq}{z} \right] + c \left[ \frac{bp + (d-w)q}{z} \right] - yp = 0$$

$$\Rightarrow (-da + dw + wa - w^2 + cb - yz)p = 0$$

$$\Rightarrow (-1 + w(a+d) - w^2 - yz)p = 0 \text{ [se } \det(A) = 1] \text{ ou } (1 + w(a+d) - w^2 - yz)p = 0 \text{ [se } \det(A) = -1]$$

$$\Rightarrow (-1 + w(x+w) - w^2 - yz)p = 0 \text{ ou } (1 + w(x+w) - w^2 - yz)p = 0 \text{ [pois } \text{tr}(A) = \text{tr}(D)]$$

$$\Rightarrow (-1 + 1 + w^2 - w^2)p = 0 \text{ [se } \det(D) = 1] \text{ ou } (1 - 1 + w^2 - w^2)p = 0 \text{ [se } \det(D) = -1]$$

$$\Rightarrow 0p = 0 \text{ [em ambos os casos] e, portanto, } p \text{ é uma variável livre.}$$

Substituindo em (II) os valores de  $m$  e  $n$  encontrados, obtemos  $0q = 0$  e, portanto,  $q$  também é uma variável livre.

$$\text{Assim, } B = \begin{pmatrix} \left[ \frac{a-w}{z} \right] p + \left[ \frac{c}{z} \right] q & \left[ \frac{b}{z} \right] p + \left[ \frac{d-w}{z} \right] q \\ p & q \end{pmatrix},$$

$$\text{onde } \left[ \frac{a-w}{z} \right] p, \left[ \frac{c}{z} \right] q, \left[ \frac{b}{z} \right] p, \left[ \frac{d-w}{z} \right] q \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

---

<sup>8</sup> $z \neq 0$  pois  $D$  é matriz de Anosov.

De fato, se  $z = 0$  então  $1 = \det(D) = xw - yz = xw \Rightarrow x = \pm 1 = w \Rightarrow |\text{tr}(D)| = 2$ . Absurdo!

Ou  $-1 = \det(D) = xw - yz = xw \Rightarrow x$  e  $w$  tem sinais opostos, e portanto,  $\text{tr}(D) = 0$ . Absurdo!

# Capítulo 3

## AUTO-APLICAÇÕES ENTRE SAFIRAS

Para apresentar a variedade que recebe o nome de safira (*torus semi-bundle*), utilizaremos a definição dada em [SWW].

**Definição 3.0.3** ((1.4),[SWW]). *Seja  $K$  a garrafa de Klein e  $N = K \tilde{\times} I$  o  $I$ -fibrado torcido sobre  $K$  (twisted  $I$ -bundle over  $K$ ). Um torus semi-bundle  $N_\phi = N \cup_\phi N$  é obtido pela colagem de duas cópias de  $N$  pelo seu bordo,  $\partial N$ , o qual é um toro, via um difeomorfismo  $\phi$ . Observe que  $N_\phi$  é foliado por toros paralelos ao  $\partial N$  com uma garrafa de Klein no centro de cada cópia de  $N$ .*

Ainda de acordo com [SWW], temos a seguinte definição: Seja  $(x, y, z)$  a coordenada de  $S^1 \times S^1 \times I$ . Então  $N = S^1 \times S^1 \times I / \tau$ , onde  $\tau$  é uma involução que preserva orientação tal que  $\tau(x, y, z) = (x + \pi, -y, 1 - z)$ , e temos o recobrimento duplo  $p : S^1 \times S^1 \times I \rightarrow N$ . Sejam  $C_x$  e  $C_y$  dois círculos em  $S^1 \times S^1 \times \{1\}$  onde em  $C_x$  temos  $y$  sendo constante e em  $C_y$  temos  $x$  sendo constante. Denotemos por  $l_0 = p(C_x)$  (nível 0) e  $l_\infty = p(C_y)$  (nível  $\infty$ ) em  $\partial N$ . Uma *coordenada canônica* é uma orientação de  $l_0 \cup l_\infty$ , assim, existem quatro escolhas de coordenadas canônicas em  $\partial N$ . Uma vez que escolhermos as coordenadas canônicas em cada  $\partial N$ ,  $\phi$  é identificado com um elemento  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $GL_2(\mathbb{Z})$  dado por  $\phi(l_0, l_\infty) = (l_0, l_\infty) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

**Proposition 1** ((1.5),[SWW]). *Com uma escolha adequada de coordenadas canônicas de  $\partial N$ , temos:*

$$(1) N_\phi \text{ admite a geometria } E^3 \text{ se, e somente se, } \phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

- (2)  $N_\phi$  admite a geometria Nil se, e somente se,  $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  com  $z \neq 0$ ;
- (3)  $N_\phi$  admite a geometria Sol se, e somente se,  $\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , com  $abcd \neq 0$ ,  $ad - bc = 1$ .

Além disso, um torus semi-bundle  $N_\phi$  também é um torus bundle se, e somente se,  $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$  sob uma escolha adequada de coordenadas canônicas.

Seja  $N_\phi$  uma variedade safira que não é um *torus bundle* sobre  $S^1$ .

No artigo [GW] os autores provam que:

**Proposição 3.0.4** ((3.2),[GW]). *Toda variedade safira com geometria Sol possui um recobrimento duplo por um torus bundle sobre  $S^1$  com aplicação de colagem Anosov.*

Denotando por  $M$  tal *torus bundle*,

**Proposição 3.0.5** ((3.3), [GW]). *O subgrupo  $\pi_1(M)$  é completamente invariante em  $\pi_1(N_\phi)$ , isto é, para qualquer endomorfismo  $\varphi : \pi_1(N_\phi) \rightarrow \pi_1(N_\phi)$ ,  $\varphi(\pi_1(M)) \subset \pi_1(M)$ .*

Além disso temos que  $M$  é sempre orientável [[SWW],(2.8)].

## 3.1. O número de Nielsen para auto-aplicações entre safiras

Calculamos o número de Nielsen para coincidências de auto-aplicações  $f, g : N_\phi \rightarrow N_\phi$  utilizando o seu recobrimento duplo por *torus bundles*, e sintetizamos em dois teoremas. O primeiro deles trata de homeomorfismos e o segundo de auto-aplicações quaisquer.

**Teorema 3.1.1.** *Seja  $N_\phi$  uma variedade safira que não é um torus bundle sobre  $S^1$ . Se  $N_\phi$  tem a geometria Sol, então para todo par de homeomorfismos  $(f, g) : N_\phi \rightarrow N_\phi$ , temos que  $N(f, g) = 0$  ou  $N(f, g) = 4$ .*

*Demonstração.* Como  $f, g : N_\phi \rightarrow N_\phi$  são homeomorfismos, eles podem ser levantados a  $(f_1, g_1), (\alpha f_1, \alpha g_1), (\alpha f_1, g_1), (f_1, \alpha g_1) : M \rightarrow M$ , onde  $\alpha : M \rightarrow M$  é uma transformação de recobrimento (*deck transformation*). Além disso, temos que  $\deg f = \pm 1$  and  $\deg g = \pm 1$ . Assim, temos três possibilidades para analisar:

- (i)  $\deg f = 1 = \deg g$ ;
- (ii)  $\deg f = -1 = \deg g$ ;
- (iii)  $\deg f = -1$  e  $\deg g = 1$ .

Observemos que se  $\bar{f}_1$  induz a identidade em  $\pi_1(S^1)$ , então  $\bar{f}_1$  é homotópica à aplicação identidade em  $S^1$  e como  $\alpha$  induz  $-id$  na base  $S^1$  [GW], temos que  $\overline{\alpha f_1}$  induz  $-id$  em  $\pi_1(S^1)$ .

Desse modo, temos quatro possibilidades para as aplicações  $\bar{f}_1, \bar{g}_1, \overline{\alpha f_1}, \overline{\alpha g_1}$ :

- $\bar{f}_1$  e  $\bar{g}_1$  induzem  $id_{S^1}$  enquanto que  $\overline{\alpha f_1}$  e  $\overline{\alpha g_1}$  induzem  $-id_{S^1}$ ;
- $\bar{f}_1$  induzir  $id_{S^1}$  e  $\bar{g}_1$  induzir  $-id_{S^1}$  enquanto que  $\overline{\alpha f_1}$  induz  $-id_{S^1}$  e  $\overline{\alpha g_1}$  induz  $id_{S^1}$ ;
- $\bar{f}_1$  induzir  $-id_{S^1}$  e  $\bar{g}_1$  induzir  $id_{S^1}$  enquanto que  $\overline{\alpha f_1}$  induz  $id_{S^1}$  e  $\overline{\alpha g_1}$  induz  $-id_{S^1}$ ;
- $\bar{f}_1$  e  $\bar{g}_1$  induzem  $-id_{S^1}$  enquanto que  $\overline{\alpha f_1}$  e  $\overline{\alpha g_1}$  induzem  $id_{S^1}$ .

O primeiro e último casos são simétricos, assim como o segundo e o terceiro. Logo, podemos analisar apenas o terceiro e quarto casos.

- (i) Se  $\deg f = 1 = \deg g$ , então  $\deg f_1 = 1 = \deg \alpha f_1$  e  $\deg g_1 = 1 = \deg \alpha g_1$ .

Também, se  $\bar{f}_1, \bar{g}_1 \simeq -id_{S^1}$  e  $\overline{\alpha f_1}, \overline{\alpha g_1} \simeq id_{S^1}$ , então  $\deg \bar{f}_1 = -1 = \deg \bar{g}_1$  e  $\deg \overline{\alpha f_1} = 1 = \deg \overline{\alpha g_1}$ . Assim, pelo Teorema 2.2.5, temos que  $N(f_1, g_1) = 0$  e  $N(f_1, \alpha g_1) = \sum_{i=0}^1 |\det(A^{-i}B - \alpha_{\#}C)| \stackrel{\text{Corollary 2.2.7}}{=} 2|\det(B) + \det(\alpha_{\#}C)|$ .

Observe que podemos analisar apenas esses dois pares de levantamentos pois  $(\alpha f_1, \alpha g_1) = \alpha(f_1, g_1)$  e  $(\alpha f_1, g_1) = \alpha(f_1, \alpha g_1)$ , o que significa que os dois primeiros pares de levantamentos  $(\alpha f_1, \alpha g_1)$  e  $(f_1, g_1)$  são conjugados assim como os dois últimos  $(\alpha f_1, g_1)$  e  $(f_1, \alpha g_1)$ .

Agora,  $f'_{1\#} = B$  com  $\det(B) = \pm 1$  e  $g'_{1\#} = C$  com  $\det(C) = \pm 1$ . Como  $\alpha$  induz  $\alpha_{\#} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  na fibra  $T$  [GW], temos que  $\det(\alpha_{\#}C) = -\det(C)$ .

Além disso, não podem ocorrer  $\det(\alpha_{\#}C) = -1$  e  $\det(B) = 1$ , pois para que  $\det(\alpha_{\#}C) = -1$ , devemos ter  $\deg g'_{1\#} = 1$  e, como  $\deg \bar{g}_1 = -1$ , então teríamos  $\deg g_1 = -1$ , o que não ocorre.

O mesmo acontece para  $\det(B) = -1$ , pois teríamos  $\deg f'_1 = 1$  e  $\deg \bar{f}_1 = -1$  resultando também na contradição  $\deg f_1 = -1$ .

Portanto, só podemos ter  $\det(B) = -1$  e  $\det(\alpha_{\#}C) = 1$ , o que nos dá  $|\det(B) + \det(\alpha_{\#}C)| = 0$ , ou seja,  $N(f_1, \alpha g_1) = 0$  e conseqüentemente, como os números de Nielsen dos levantamentos são nulos,  $N(f, g) = 0$ .

Para o outro caso, isto é,  $\bar{f}_1, \overline{\alpha g_1} \simeq -id_{S^1}$  e  $\bar{g}_1, \overline{\alpha f_1} \simeq id_{S^1}$ , podemos usar um raciocínio análogo ao feito acima para concluir que só podemos ter  $\det(B) = -1$  e  $\det(C) = 1$ , o que significa que  $|\det(B) + \det(C)| = 0$ , isto é,  $N(f_1, g_1) = 0$ . E, como  $N(f_1, \alpha g_1) = 0$ , obtemos que  $N(f, g) = 0$ .

- (ii) Se  $\deg f = -1 = \deg g$ , então  $\deg f_1 = -1 = \deg \alpha f_1$  e  $\deg g_1 = -1 = \deg \alpha g_1$ . Seguindo o mesmo procedimento feito no item anterior, encontramos  $N(f_1, g_1) = 0$  e  $N(f_1, \alpha g_1) = 0$  (pois só podemos ter  $\det(B) = 1$  e  $\det(\alpha_{\#}C) = -1$ ) para o primeiro caso, e para o outro caso temos  $N(f_1, g_1) = 0$  (já que só podemos ter  $\det(B) = 1$  e  $\det(C) = -1$ ) e  $N(f_1, \alpha g_1) = 0$ . Assim, concluímos que  $N(f, g) = 0$ .
- (iii) Se  $\deg f = -1$  e  $\deg g = 1$ , então  $\deg f_1 = -1 = \deg \alpha f_1$  e  $\deg g_1 = 1 = \deg \alpha g_1$ . Assim,  $N(f_1, g_1) = 0$  e  $N(f_1, \alpha g_1) = 4$  (pois só podemos ter  $\det(B) = 1$  e  $\det(\alpha_{\#}C) = 1$ ) para o primeiro caso, e  $N(f_1, g_1) = 4$  para o outro caso (já que só podemos ter  $\det(B) = 1$  e  $\det(C) = 1$ ) e  $N(f_1, \alpha g_1) = 0$ . Portanto, concluímos que  $N(f, g) = 4$ .

□

Para o segundo teorema, precisamos introduzir algumas definições encontradas em [DJ].

Observe primeiramente que se  $(f, g)$  admite um levantamento  $(f_1, g_1)$ , então ele admite exatamente quatro:  $(f_1, g_1), (f_1, \alpha g_1), (\alpha f_1, g_1)$  e  $(\alpha f_1, \alpha g_1)$ , onde  $\alpha : M \rightarrow M$  é uma transformação de recobrimento.

Adaptadas ao nosso contexto, o levantamento  $f_1$  será chamado *ímpar* se  $f_1(\alpha \tilde{x}) = \alpha f_1(\tilde{x})$  e o chamaremos de *par* se  $f_1(\alpha \tilde{x}) = f_1(\tilde{x})$ , para todo  $\tilde{x} \in M$  e  $\alpha : M \rightarrow M$  uma transformação de recobrimento.

Ainda em nosso contexto, os pares  $(f_1, g_1)$  e  $(f_2, g_2)$  serão chamados de *conjugados* se, e somente se,  $(f_1, g_1) = \beta(f_2, g_2)\alpha$  para alguma transformação de recobrimento  $\alpha, \beta$  de  $p : M \rightarrow N_\phi$ .

Na demonstração do teorema anterior, vimos que os pares de levantamentos  $(\alpha f_1, \alpha g_1)$  e  $(f_1, g_1)$  são conjugados, assim como  $(\alpha f_1, g_1)$  e  $(f_1, \alpha g_1)$ . Portanto,  $(\alpha f_1, \alpha g_1)$  e  $(f_1, g_1)$  estão na mesma classe de levantamento; e o mesmo acontece com  $(\alpha f_1, g_1)$  e  $(f_1, \alpha g_1)$ .

Agora,

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha f_1, g_1) &= (f_1, \alpha g_1). \\ (\alpha f_1, g_1)\alpha &= (\alpha f_1\alpha, g_1\alpha) = \begin{cases} (\alpha f_1, g_1) & \text{se } f_1 \text{ e } g_1 \text{ são pares;} \\ (f_1, \alpha g_1) & \text{se } f_1 \text{ e } g_1 \text{ são ímpares;} \\ (\alpha f_1, \alpha g_1) & \text{se } f_1 \text{ é par e } g_1 \text{ é ímpar;} \\ (f_1, g_1) & \text{se } f_1 \text{ é ímpar e } g_1 \text{ é par.} \end{cases} \\ \alpha(\alpha f_1, g_1)\alpha &= (f_1\alpha, \alpha g_1\alpha) = \begin{cases} (f_1, \alpha g_1) & \text{se } f_1 \text{ e } g_1 \text{ são pares;} \\ (\alpha f_1, g_1) & \text{se } f_1 \text{ e } g_1 \text{ são ímpares;} \\ (f_1, g_1) & \text{se } f_1 \text{ é par e } g_1 \text{ é ímpar;} \\ (\alpha f_1, \alpha g_1) & \text{se } f_1 \text{ é ímpar e } g_1 \text{ é par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, se  $f_1$  e  $g_1$  são simultaneamente par ou ímpar, então temos duas classes de levantamentos,  $\{(f_1, g_1); (\alpha f_1, \alpha g_1)\}$  e  $\{(\alpha f_1, g_1); (f_1, \alpha g_1)\}$ . Se um dos levantamentos  $f_1, g_1$  é par e o outro é ímpar, então os quatro pares de levantamentos formam uma única classe.

Vamos denotar:

$$C(f_{\#}, g_{\#})_x = \{\beta \in \pi_1(N_{\phi}, x) : f_{\#}\beta = g_{\#}\beta\}, \text{ para } x \in \text{Coin}(f, g).$$

**Teorema 3.1.2.** *Seja  $N_{\phi}$  uma variedade safira que não é um torus bundle sobre  $S^1$ . Se  $N_{\phi}$  tem a geometria Sol, então para todo par de auto-aplicações  $(f, g) : N_{\phi} \rightarrow N_{\phi}$ , sejam  $(f_1, g_1), (f_1, \alpha g_1) : M \rightarrow M$  os seus levantamentos ao torus bundle  $M$  o qual é um recobrimento duplo de  $N_{\phi}$ . Então*

$$N(f, g) = \begin{cases} \frac{N(f_1, g_1) + N(f_1, \alpha g_1)}{2} & \text{se } C(f_{\#}, g_{\#})_{p\tilde{x}} \subseteq p_{\#}\pi_1(M, \tilde{x}), \forall \tilde{x} \in \text{Coin}(f_1, g_1); \\ N(f_1, g_1) + N(f_1, \alpha g_1) & \text{se } C(f_{\#}, g_{\#})_{p\tilde{x}} \not\subseteq p_{\#}\pi_1(M, \tilde{x}). \end{cases}$$

*Demonstração.* Suponhamos que  $f_1$  e  $g_1$  sejam simultaneamente par ou ímpar.

Se  $C(f_{\#}, g_{\#})_{p\tilde{x}} \subseteq p_{\#}\pi_1(M, \tilde{x})$  para qualquer  $\tilde{x} \in \text{Coin}(f_1, g_1)$ , então seguindo [[DJ],(2.5)], temos que se uma classe de Nielsen  $A \subset \text{Coin}(f, g)$  satisfaz  $A \subset p(\text{Coin}(f_1, g_1))$ , então  $p^{-1}A$  é a união de duas classes de Nielsen de  $(f_1, g_1)$  ambas com o mesmo índice da classe  $A$  e, portanto, essas classes serão essenciais se e somente se,  $A$  for essencial. O mesmo acontece para qualquer classe em  $p(\text{Coin}(f_1, \alpha g_1))$  e como os pares de levantamento  $(f_1, g_1)$  e  $(f_1, \alpha g_1)$  não são conjugados, então os conjuntos  $p(\text{Coin}(f_1, g_1))$  e  $p(\text{Coin}(f_1, \alpha g_1))$  são disjuntos [[DJ],(2.3)].

$$\text{Assim, } N(f, g) = \frac{N(f_1, g_1) + N(f_1, \alpha g_1)}{2}.$$

Se  $C(f_{\#}, g_{\#})_{p\tilde{x}} \not\subseteq p_{\#}\pi_1(M, \tilde{x})$ , então existe  $w \in C(f_{\#}, g_{\#})_{x_0}$  que se levanta a uma curva aberta  $\tilde{w}$  tal que  $f_1\tilde{w} \simeq g_1\tilde{w}$ . Tal curva  $w$  realiza a relação de Nielsen para  $\tilde{x}_0$  e  $\alpha\tilde{x}_0$ ; como  $p$  é um homeomorfismo local e  $\alpha$  preserva a orientação [GW], temos que os índices em  $\tilde{x}_0$  e  $\alpha\tilde{x}_0$  são iguais e, portanto, essa classe tem o dobro do índice da classe  $A$ , e será essencial se, e somente se,  $A$  for. Como temos duas classes de levantamentos,  $N(f, g) = N(f_1, g_1) + N(f_1, \alpha g_1)$ .

Agora, suponhamos que  $f_1$  seja par e  $g_1$  seja ímpar.

Se  $C(f_{\#}, g_{\#})_{p\tilde{x}} \subseteq p_{\#}\pi_1(M, \tilde{x})$  para qualquer  $\tilde{x} \in \text{Coin}(f_1, g_1)$ , então  $p : \text{Coin}(f_1, g_1) \rightarrow \text{Coin}(f, g)$  é uma bijeção que preserva a relação de Nielsen. Assim, para

cada classe  $A \in \text{Coin}(f, g)$ , temos que  $p^{-1}A$  é a união de duas classes de Nielsen  $\tilde{A}_1 \subset \text{Coin}(f_1, g_1)$  e  $\tilde{A}_2 \subset \text{Coin}(f_1, \alpha g_1)$ , e ambas com o mesmo índice da classe  $A$ , e portanto

$$N(f, g) = \frac{N(f_1, g_1) + N(f_1, \alpha g_1)}{2}.$$

O caso  $C(f_{\#}, g_{\#})_{p\tilde{x}} \not\subseteq p_{\#}\pi_1(M, \tilde{x})$  não ocorre quando  $f_1$  e  $g_1$  não têm a mesma paridade.

De fato, suponhamos que ocorra. Então existe  $w \in C(f_{\#}, g_{\#})_{x_0}$  que se levanta a uma curva aberta  $\tilde{w}$ . Como  $f_1$  é par e  $g_1$  é ímpar,  $fw$  se levanta a um laço e  $gw$  se levanta a um caminho aberto [DJ], o que é uma contradição pois  $fw \simeq gw$  com pontos finais fixados.  $\square$

# Apêndice A

## A MATRIZ DE ANOSOV É DIAGONALIZÁVEL

Mostremos que se  $A \in GL(2, \mathbb{Z})$  é uma matriz de Anosov, então  $A$  é diagonalizável.

De fato, consideremos  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$  uma matriz de Anosov.

Se  $\det(A) = 1$ , então

$$\det(A) = ad - bc = 1 \text{ e } |tr(A)| = |a + d| > 2.$$

Temos que  $\lambda$  é autovalor de  $A$  se  $p_A(\lambda) = 0$ , onde  $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (tr(A))\lambda + \det(A)$  é o polinômio característico de  $A$ .

Mas,

$$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (tr(A))\lambda + \det(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{tr(A) \pm \sqrt{(tr(A))^2 - 4}}{2}.$$

Observemos que como  $|tr(A)| > 2$ , então  $(tr(A))^2 - 4 > 0$  e, assim,  $A$  possui dois autovalores reais e distintos.

Para o caso onde  $\det(A) = -1$ , temos  $ad - bc = -1$  e  $tr(A) = a + d \neq 0$ .

Também,

$$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{tr(A) \pm \sqrt{(tr(A))^2 + 4}}{2}.$$

Como  $(tr(A))^2 + 4 > 0$ , temos que  $A$  possui dois autovalores reais e distintos.

Portanto, sendo  $A$  uma matriz  $2 \times 2$  com dois autovalores distintos, temos que  $A$  é diagonalizável em ambos os casos.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [BGV] A.P. Barreto, D.L. Gonçalves, D. Ventrúscolo, *Free involutions on torus semi-bundles and the Borsuk-Ulam Theorem for maps into  $R^n$* , Hiroshima Math. J. **46** (2016) 255–270.
- [DJ] R. Dobreńko, J. Jezierski, *The coincidence Nielsen number on non-orientable manifolds*, The Rocky Mountain Journal of Mathematics **23** (1993), 67–85.
- [Go] D.L. Gonçalves, *Coincidence theory*, Handbook of Topological Fixed Point Theory, Springer (2005), 3–42.
- [GW] D.L. Gonçalves, P. Wong, *Nielsen numbers of selfmaps of Sol 3-manifolds*, Topology and its Applications **159** (2012), 3729–3737.
- [He] P.R. Heath, *Fibre techniques in Nielsen theory calculations*, Handbook of Topological Fixed Point Theory, Springer (2005), 489–554.
- [Je1] J. Jezierski, *The Nielsen number product formula for coincidences*, Fundamenta Mathematicae **134** (1989), 183–212.
- [Je2] J. Jezierski, *The semi-index product formula*, Fundamenta Mathematicae **140** (1992), 99–120.
- [JL] J.H. Jo, J.B. Lee, *Nielsen fixed point theory on infra-solvmanifolds of Sol*, Topological Methods in Nonlinear Analysis (Online First).
- [Mo] K. Morimoto, *Some orientable 3-manifolds containing Klein bottles*, Kobe J. Math. **2** (1985), 37–44.
- [Ol] E. Oliveira, *Teoria de Nielsen para coincidência e algumas aplicações*, Tese (Doutorado) - ICMSC/USP, São Carlos (1987).
- [Sa] M. Sakuma, *Involutions on torus bundles over  $S^1$* , Osaka J. Math. **22** (1985), 163–185.

- 
- [Si] W.L. Silva, *Conjuntos minimais de pontos fixos e coincidências de aplicações fibradas*, Tese (Doutorado) - DM/UFSCar, São Carlos (2012).
- [SWW] H. Sun, S. Wang, J. Wu, *Self-mapping degrees of torus bundles and torus semi-bundles*, Osaka J. Math. **47** (2010), 131–155.
- [Vk] J. Vick, *Homology Theory*, Graduate Text Math., vol. 145, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1994.
- [Vi] J.P. Vieira, *Coincidence of maps on torus fibre bundles over the circle*, Topological Methods in Nonlinear Analysis **46** (2015), 507–548.