UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Atratores de trajetórias para equações de evolução abstratas e aplicação a uma equação de reação difusão

FLÁVIA ENDSFELDZ TEIXEIRA

Orientadora: PROFA. DRA. KARINA SCHIABEL

SÃO CARLOS - SP

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Atratores de trajetórias para equações de evolução abstratas e aplicação a uma equação de reação difusão

FLÁVIA ENDSFELDZ TEIXEIRA

Orientadora: PROFA. DRA. KARINA SCHIABEL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS - SP

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Flávia Endsfeldz Teixeira, realizada em 20/03/2017:

Karina Schiabel
Profa. Dra. Karina Schiabel
UFSCar

VLCarbone
Profa. Dra. Vera Lucia Carbone
UFSCar

Everaldo de Mello Bonotto
Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto
ICMC-USP

Aos meus pais, Ivan e Paula, e meus avós, Eroni e Eliseu.

Pedi, e dar-se-vos-á; buscai, e achareis; batei, e abrir-se-vos-á. Porque, todo o que pede, recebe; e, o que busca, acha; e, a quem bate, abrir-se-á. Ou qual de vós, porventura, é o homem que, se seu filho lhe pedir pão, lhe dará uma pedra? Ou, porventura, se lhe pedir um peixe, lhe dará uma serpente. Pois se vós outros, sendo maus, sabeis dar boas dádivas a vossos filhos, quanto mais vosso Pai, que está nos Céus, dará boas dádivas aos que lhes pedirem. (Mateus VII:7-11)

Agradecimentos

A Deus por ter me guiado e sustentado nesta jornada e, também, aos seus Mensageiros de luz que iluminaram o meu caminho.

Aos amigos que Deus colou ao meu lado, pessoas que estavam sempre prontas a ajudar-me, aconselhar-me e a acompanhar-me tanto nas horas de estudos e dificuldades quanto nas horas de diversão. Entre eles, meus colegas do mestrado, Bárbara, Karina, Dalton, Lucas, Renato, Tiago e Wagner, meus companheiros nas madrugadas de estudo e também de aventuras, Carlos, Cristiano e Filipe, meu colega de sala, Ronaldo e meus amigos desde a graduação Renata e Maykel que sempre estiveram presentes e me apoiando.

A família cheia de amor que possuo, a qual me deu todo o suporte necessário para chegar até aqui, meus pais, Ivan e Paula, meu padrasto, Fábio, minha irmã, Letícia, meus avós, Eroni, Eliseu, Doraci e Antônio Carlos (em memória).

A minha madrinha, Eva, que esteve sempre pronta a ouvir-me, aconselhar-me e a rezar por mim em todos os momentos.

A professora Karina pela orientação, por ter acreditado em mim, por ter me incentivado nos estudos desde o início da graduação, pela paciência e pela amizade.

Aos professores Everaldo e Vera que aceitaram compor a banca para e defesa deste trabalho, assim como ao professor Marcelo que participou da minha qualificação.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar o comportamento assintótico de equações de evolução autônomas abstratas. Inicialmente apresentamos a teoria de existência de atratores globais para problemas autônomos unívocos e de atratores de trajetórias para problemas autônomos multívocos para, então, com base nos resultados apresentados, analisarmos a existência do atrator de trajetórias para uma equação de reação-difusão para a qual não há garantia de unicidade de solução.

Palavras Chave: *Atrator global, Atrator de trajetórias, Faedo-Galerkin.*

Abstract

The purpose of this work is to study the asymptotic behaviour of abstract autonomous evolution equations. The first part is dedicated to the theory of existence of global attractors for univoque autonomous problems and trajectory attractors for multivoque autonomous problems. After that, we analyse the existence of the trajectory attractor for an autonomous reaction-diffusion equation for which it is not possible to guarantee the uniqueness property.

Keywords: *Global attractor, Trajectory attractor, Faedo-Galerkin..*

Sumário

Introdução

Uma questão interessante no estudo de equações de evolução é o comportamento assintótico de suas soluções. Neste trabalho consideramos apenas equações de evolução autônomas

$$\begin{cases} u_t + Au = f(u) \\ u(t_0) = u_0 \in X. \end{cases} \tag{0.1}$$

Em um espaço funcional adequado e sob determinadas condições sobre a não-linearidade f e o operador A, podemos garantir que o problema (0.1) admite solução única $u(t, t_0, u_0)$ e, neste caso, o comportamento assintótico das soluções da equação pode ser estudado através do semigrupo dado por $S(t)u_0 = u(t, t_0, u_0)$. Um subconjunto $\mathcal{A}$ de um espaço de Banach X é o atrator global para o semigrupo $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ se $\mathcal{A}$ é compacto, invariante (i.e. $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$) e atrai conjuntos limitados de X (i.e., $S(t)B \in \mathcal{A}$ para t suficientemente grande, se B é limitado).

Este procedimento não pode ser utilizado no caso em que o problema de Cauchy não admite a propriedade de unicidade de solução. Neste caso, uma possibilidade é considerar o atrator de trajetórias, um subconjunto $\mathcal{U}$ do espaço $\mathcal{S}$ das soluções de (0.1) que é compacto (numa topologia apropriada Θ), invariante com respeito ao semigrupo de translações $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ dado por $T(t)u(s) = u(t + s)$ e tal que, se $B \subset \mathcal{S}$, então dist$(T(t)B, \mathcal{U}) \to 0$ (na topologia Θ).

É possível também considerar o atrator de trajetórias para problemas bem postos, relacionando-o com o atrator global $\mathcal{A}$. Neste caso, o atrator de trajetórias $\mathcal{U}$ consiste de todas as trajetórias u tais que os valores $u(t), t \geqslant 0$, pertencem a $\mathcal{A}$. Em outras palavras, o atrator global pode ser visto como uma "seção" do atrator de trajetórias.

As principais referências que utilizamos para o estudo de atratores globais para semigrupos foram [3] e [13], e nosso texto sobre atratores de trajetórias foi baseado principalmente em [4] e [17].

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

O primeiro capítulo destina-se aos resultados preliminares que serão utilizados ao longo do texto, tais resultados baseiam-se em conceitos envolvendo espaços L^p, espaços de Sobolev, teoria de distribuições e resultados de Análise.

O Capítulo 2 é dedicado à teoria de atratores globais para semigrupos abstratos. Neste capítulo apresentamos alguns conceitos utilizados na construção e caracterização do atrator global e apresentamos resultados que garantem condições necessárias e suficientes para a exitência do atrator global.

No Capítulo 3 consideramos uma equação autônoma, definida no espaço $\mathbb{R}^n$, a qual não possui unicidade de solução para o problema de Cauchy correspondente. Consideramos também o semigrupo de translação definido sob o conjunto das soluções do problema dado. Definimos então o atrator de trajetórias para a equação considerada, que coincidirá, neste caso, com o atrator global para o semigrupo em questão. Por fim, fazemos uma comparação entre o atrator de trajetórias e o atrator global no caso em que há unicidade de solução para o problema autônomo.

No Capítulo 4 generalizamos os conceitos apresentados no Capítulo 3, ou seja, construimos o atrator de trajetórias para equações de evolução abstratas que não possuem unicidade de solução para o problema de Cauchy correspondente.

No Capítulo 5 aplicamos a teoria apresentada no Capítulo 4 ao problema de reação difusão

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u - f(u) + |u|^{\alpha-1}u, & (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega \\ u_{|\Gamma} = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \Gamma, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$é um domínio limitado com fronteira suave Γ, $d > 1, \alpha \in (0,1)$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo as seguintes condições: existem constantes positivas c_1, c_2 e c_3 tais que, para todo $v \in \mathbb{R}$,

$$f(v) \cdot v \geq c_1|v|^p - c_3 \;\; e \;\; |f(v)|^q \leq c_2(|v|^p + 1),$$

onde $2 < p < \dfrac{2n}{n-1}$ e q é o expoente conjugado de p.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos utilizados no desenvolvimento do trabalho.

1.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $I \subset \mathbb{R}$ abertos.

Os dois teoremas a seguir fornecem condições suficientes para a existência e para existência e unicidade de solução local para o problema (1.1). Suas demonstrações podem ser encontradas em [7] e [16], respectivamente. Consideraremos os conjuntos $I_a = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| \leq b\}$ e $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq \alpha\}$ em seus enunciados.

Teorema 1.1.1 (Teorema de Peano) *Seja f contínua em $I_a \times B_b$. Pela continuidade da f, existe $M > 0$ tal que $|f| < M$ em $I_a \times B_b$ e o problema* (1.1) *tem pelo menos uma solução em I_α, onde $\alpha = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$.*

Teorema 1.1.2 (Teorema de Picard) *Suponhamos f contínua, Lipschitziana e $|f| \leq M$ em $I_a \times B_b$. Então existe uma única solução do problema* (1.1) *em I_α, onde $\alpha = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$.*

Seja $\phi : (\tau_{\min}, \tau_{\max}) \to \mathbb{R}^n$ solução de (1.1) definida em seu intervalo maximal. O resultado a seguir, o qual pode ser encontrado em [16], afirma que soluções limitadas em intervalos finitos podem ser estendidas a todo semieixo positivo, isto é, $\tau_{\max} = \infty$.

Teorema 1.1.3 *Seja f contínua em um aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Se ϕ é uma solução definida em seu intervalo maximal $(\tau_{\min}, \tau_{\max})$, então a aplicação $g(t) = (t, \phi(t))$ tende a $\partial\mathcal{U}$ quando $t \to \tau_{\max}$ (ou $\tau_{\min}$). Isto é, para cada compacto $K \subset \mathcal{U}$ existe uma vizinhança V de $\tau_{\max}$ (ou $\tau_{\min}$) tal que $g(t) \notin K$ para $t \in V$.*

Observação 1.1.4 *Segue do Teorema 1.1.3 que se $\tau_{\max} < \infty$, então necessariamente $\phi(t) \to \infty$ quando $t \to \tau_{\max}$.*

As demonstrações das desigualdades a seguir podem ser encontradas em [1].

Lema 1.1.5 (Desigualdade de Gronwall) *Sejam $y, a : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ funções não negativas tais que $a, y \in L^1([t_0, t_1])$. Suponha que exista uma constante C satisfazendo*

$$y(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} y(s)a(s)ds, \ \ \forall\, t \in [t_0, t_1],$$

então, para $t \in [t_0, t_1]$,

$$y(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right).$$

Lema 1.1.6 (Desigualdade diferencial) *Seja $y(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]), y \geq 0$ e suponha que a seguinte desigualdade seja válida*

$$y'(t) \leq a(t)y(t) + h(t), \ \ t \in [t_0, t_1],$$

onde $a, h \in C([t_0, t_1]), a \geq 0, h \geq 0$. Então,

$$y(t) \leq y(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right) + \int_{t_0}^{t} h(s) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right) ds$$

e, consequentemente,

$$y(t) \leq \left(y(t_0) + \int_{t_0}^{t} h(s)ds\right) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right).$$

Se a desigualdade

$$y'(t) + \gamma y(t) \leq h(t)$$

vale para $\gamma \geq 0$, então

$$y(t) \leq y(0)e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}h(s)ds.$$

Em particular, se $h(t) = C$, então

$$y(t) \leq y(0)e^{-\gamma t} + C\gamma^{-1}(1 - e^{-\gamma t}) \leq y(0)e^{-\gamma t} + C\gamma^{-1}.$$

1.2 Alguns Resultados de Topologia

Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em Munkres, J [12].

Teorema 1.2.1 (Arzelà-Ascoli) *Sejam (K, d) um espaço métrico compacto e $\mathcal{F}$ um subconjunto de $C(K;\mathbb{R})$. Então $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto se, e somente se, $\mathcal{F}$ é uniformemente limitado e equicontínuo.*

Corolário 1.2.2 *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de aplicações contínuas $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e suponha que existam constantes $M, K > 0$ tais que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer $s, t \in [a, b]$,*

$$|f_n(s) - f_n(t)| \leq K|s - t| \ \ e \ \ |f_n(t)| \leq M.$$

Então existe uma subsequência de $\{f_n\}$ que é uniformemente convergente para uma aplicação contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Proposição 1.2.3 *Sejam X, Y espaços métricos, $f : X \to Y$ contínua e $A \subset X$, então $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Definição 1.2.4 *Uma coleção $\mathcal{O}$ de subconjuntos abertos de um espaço topológico (X, τ) é uma base para a topologia τ se cada aberto de (X, τ) pode ser escrito como união dos elementos de $\mathcal{O}$.*

Teorema 1.2.5 *$\mathcal{O}$ é uma base para a topologia (X, τ) se:*

1. *$\forall x \in X$, existe $G \in \mathcal{O}$ tal que $x \in G$.*
2. *Se $x \in G_1 \cap G_2$, com $G_1, G_2 \in \mathcal{O}$, existe $G_3 \in \mathcal{O}$ tal que $x \in G_3 \subset G_1 \cap G_2$.*

Definição 1.2.6 *Um espaço topológico (X, τ) satisfaz o* segundo axioma da enumerabilidade *(ou é $E2$) se ele possui uma base enumerável para a topologia.*

Teorema 1.2.7 *Se (X,τ) é $E2$, então (X,τ) é* separável*, isto é, (X,τ) possui um subconjunto enumerável e denso em X.*

Teorema 1.2.8 *Seja (X,τ) um espaço topológico $E2$. Então toda cobertura por abertos de um conjunto $M \subset X$ admite subcobertura enumerável.*

Definição 1.2.9 *Dizemos que uma sequência $\{x_n\}$* converge *a x em um espaço topológico (X,τ) se para toda vizinhança W de x, existe $n_0 = n_0(W)$ tal que $x_n \in W$ sempre que $n \geq n_0$.*

Em um espaço métrico X, $x \in \overline{M} \subset X$ se, e somente se, existe uma sequência $\{x_n\} \subset M$ que converge a x. Em espaços topológicos gerais, essa propriedade não é necessariamente verdadeira.

Definição 1.2.10 *Um espaço topológico X é* Fréchet-Urysohn *se para cada $x \in \overline{M}$, $M \subset X$, existe sequência $\{x_n\} \subset M$ tal que $x_n \to x$ em (X,τ).*

Teorema 1.2.11 *Seja (X,τ) um espaço topológico Fréchet-Urysohn. Uma função $f : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ é contínua em $x_0 \in X$ se, e somente se, $x_n \to x_0$ em (X,τ_1) implica que $f(x_n) \to f(x_0)$ em (Y,τ_2).*

Definição 1.2.12 *Dizemos que um espaço topológico (X,τ) é* Hausdorff *se, dados quaisquer $x, y \in X$, existem vizinhanças V_x, V_y de x e y, respectivamente, tais que*

$$x \in V_x, y \in V_y \text{ e } V_x \cap V_y = \emptyset.$$

Teorema 1.2.13 *Se (X,τ) é Hausdorff e $E2$, então um conjunto $K \subset X$ é compacto se, e somente se, K é sequencialmente compacto, ou seja, se qualquer sequência em K possui uma subsequência convergente.*

1.3 Espaços L^p

Os resultados desta seção podem ser encontrados em Brézis [1].

Seja (Ω,μ) um espaço de medida.

Definição 1.3.1 *Sejam* $0 < p < \infty$ *e* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *mensurável. Definimos a* L^p*-norma de* f *como*

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

e o espaço $L^p(\Omega)$ *por*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}; \|f\|_{L^p} < \infty\}$$

e

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{C}; \int_K |f|^p d\mu < \infty, \forall K \subset \Omega \text{ compacto}\right\}.$$

Também definimos

$$\|f\|_\infty = ess \sup_\Omega |f(x)|,$$

onde

$$ess \sup_\Omega |f(x)| = \inf \left\{\sup_{x \in S} |f(x)|; S \subset \overline{\Omega} \text{ e } \Omega \setminus S \text{ possui medida nula}\right\}$$

e

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}; \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Lema 1.3.2 (Desigualdade de Young) *Sejam* $p > 1$ *e* q *expoentes conjugados, isto é,* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Se* $a, b \in \mathbb{R}^+$, *então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Em particular, para todo $\varepsilon > 0$, *existe* $C_\varepsilon = \dfrac{(\varepsilon p)^{1-q}}{q}$ *tal que*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q.$$

Lema 1.3.3 (Desigualdade de Hölder) *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* q *o expoente conjugado de* p. *Se* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$, *então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Definição 1.3.4 *Dados* $T > 0$, E *um espaço de Banach e* $I = \mathbb{R}$ *ou* $I = \mathbb{R}^+$, *definimos*

$$L^p(0, T, E) = \left\{f : (0, T) \to E; \int_0^T \|f(t)\|_E^p \, dt < \infty\right\},$$

$$L^p_{loc}(I, E) = \left\{f : I \to E; \int_K \|f(t)\|_E^p \, dt < \infty, \forall K \subset I \text{ compacto}\right\}$$

e

$$L^\infty(0, T, E)) = \left\{f : (0, T) \to E; ess \sup_{(0,T)} \|f(t)\|_E < \infty\right\}$$

1.4 Distribuições

Os resultados apresentados aqui podem ser encontrados em Hounie, J. [8], e em Teles, R.S. [17].

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$. Denotamos por $C(\Omega)$ o conjunto

$$C(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{C}; \varphi \text{ é contínua}\}.$$

Notação multi-índice: Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e denotemos $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. A derivada multi-índice de uma função u é dada por

$$D^\alpha u = D^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_n} x_n},$$

quando a derivada do lado direito existe. O valor $|\alpha|$ é chamado de multi-índice. Quando $|\alpha| = 0$, escrevemos $D^\alpha u = u$.

Definição 1.4.1 *Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos*

$$C^k(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{C}, D^\alpha \varphi \text{ existe e é contínua}, \forall\, |\alpha| \leq k\}.$$

Além disso,

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega),$$

e escrevemos

$$C_C^k(\Omega) = \left\{\varphi \in C^k(\Omega); \varphi \text{ tem suporte compacto em } \Omega\right\},$$

onde $supp\varphi = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}$.

O conjunto $C_C^\infty(\Omega)$ é chamado de espaço das funções teste, e seus elementos são as funções teste.

Tratemos agora da convergência em $C_C^\infty(\Omega)$ e da continuidade de funcionais lineares definidos em $C_C^\infty(\Omega)$.

Definição 1.4.2 *Dizemos que uma sequência $(\varphi_j) \subset C_C^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_C^\infty(\Omega)$ se existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $(\varphi_j) \subset C_C^\infty(K)$ e $\varphi_j \to \varphi$ em $C_C^\infty(K)$.*

Observe que, neste caso, $D^\alpha \varphi_j \to D^\alpha \varphi$ uniformemente em K, para todo α.

Definição 1.4.3 *Um funcional linear* $\Lambda : C_C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ *é* contínuo *se, para todo compacto* K *em* Ω*, existem* $M \in \mathbb{N}^*$*,* $M = M(K)$*, e* $C \geq 0$*,* $C = C(K)$*, tais que*

$$|\Lambda(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq M} \sup \{|D^\alpha \varphi(x)|, x \in K\}, \ \forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega).$$

Definição 1.4.4 *Uma* distribuição *é um funcional linear contínuo* $\Lambda : C_C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$*. Denotamos por* $D'(\Omega)$ *o espaço das distribuições:*

$$D'(\Omega) = \{\Lambda : C_C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C} | \Lambda \text{ é funcional linear contínuo } \}.$$

Vamos considerar em $D'(\Omega)$ *a topologia fraca* *, $\sigma^*((C_C^\infty(\Omega))', C_C^\infty(\Omega))$*. Então* $\Lambda_j \to \Lambda$ *em* $D'(\Omega)$ *se, e somente se,* $\langle \Lambda_j, \varphi \rangle \to \langle \Lambda, \varphi \rangle$*,* $\forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega)$*.*

Exemplo 1.4.5 *Seja* $x_0 \in \Omega$*. A aplicação*

$$\begin{aligned} \delta_{x_0} : C_C^\infty(\Omega) &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0) \end{aligned}$$

é uma distribuição.

Exemplo 1.4.6 (Distribuições representadas por funções $L^1_{loc}(\Omega)$) *Seja* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$*. O funcional*

$$\begin{aligned} \Lambda_f : C_C^\infty(\Omega) &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

é uma distribuição.

A aplicação $f \mapsto \Lambda_f$ é injetora, o que permite concluir que $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. Porém, convém ressaltar que não há igualdade entre esses espaços, isto é, existe distribuição $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ que não é da forma Λ_f.

Queremos de certa forma estender um operador linear contínuo $T : C_C^\infty(\Omega) \to C_C^\infty(\Omega)$ a um operador linear contínuo $\tilde{T} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$.

Veja que $C_C^\infty(\Omega)$ precisa estar identificado como subconjunto de $\mathcal{D}'(\Omega)$ para que faça sentido falarmos em extensão. O Exemplo 1.4.6 ilustra como fazer isso, uma vez que $C_C^\infty(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.

Suponhamos que exista um operador linear contínuo $T^X : C_C^\infty(\Omega) \to C_C^\infty(\Omega)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \langle T\psi, \varphi\rangle &= \langle \psi, T^X\varphi\rangle \\ \int_\Omega (T\psi)\varphi &= \int_\Omega \psi(T^X\varphi) \quad \forall \psi, \varphi \in C_C^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Estendemos T à aplicação $\tilde{T}$

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \mathcal{D}'(\Omega) &\to \mathcal{D}'(\Omega) \\ \Lambda &\mapsto \tilde{T}\Lambda : C_C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}, \end{aligned}$$

onde $\langle \tilde{T}\Lambda, \varphi\rangle = \langle \Lambda, T^X\varphi\rangle$, $\forall \Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$.

Não é difícil verificar que $\tilde{T}$ é linear e contínuo.

Operador diferenciação $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$: Como motivação, sejam $f, g \in C_C^2((a,b))$. Integrando por parte, obtemos

$$\int_a^b f''(x)g(x)dx = -\int_a^b f'(x)g'(x)dx = (-1)^2 \int_a^b f(x)g''(x)dx.$$

Consideremos o operador $D^\alpha : C_C^\infty(\Omega) \to C_C^\infty(\Omega)$. Da integração por partes, D^α satisfaz

$$\int_\Omega D^\alpha u(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega).$$

Em notação de produto interno,

$$\langle D^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha\varphi\rangle = \langle u, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi\rangle.$$

Tome $(D^\alpha)^X = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha$. Podemos então estender D^α a $\mathcal{D}'(\Omega)$ como

$$\begin{aligned} \tilde{D^\alpha} : \mathcal{D}'(\Omega) &\to \mathcal{D}'(\Omega) \\ \Lambda &\mapsto \langle \tilde{D^\alpha}\Lambda, \varphi\rangle = \langle \Lambda, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\varphi\rangle. \end{aligned}$$

Observações:

1. Para funções suficientemente regulares, as derivadas no sentido usual e as derivadas distribucionais coincidem.

2. Qualquer $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivadas de todas as ordens.

3. $L^1_{loc} \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ possuem derivadas distribucionais de todas as ordens, mas podem não ser deriváveis no sentido usual ou no sentido de Sobolev.

1.4.1 Distribuições Vetoriais

Definição 1.4.7 *Uma* distribuição vetorial *sobre* $[0,T]$ *com valores em* X*, onde* X *é um espaço de Banach, é um operador linear contínuo*

$$\Lambda : C^\infty_C((0,T),\mathbb{R}) \to X.$$

Ao conjunto dessas distribuições denotamos $\mathcal{D}'((0,T),X)$*.*

Dado qualquer $u \in L^1(0,T,X)$, consideremos a distribuição vetorial

$$\begin{aligned} \Lambda_u : C^\infty_C((0,T),\mathbb{R}) &\to X \\ \varphi &\mapsto \langle \varphi, \Lambda_u \rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt, \end{aligned}$$

onde a integral anterior é calculada no sentido de Bochner em X. Não é difícil notar que $\Lambda_u \in \mathcal{D}'((0,T),X)$ e a aplicação $u \mapsto \Lambda_u$ é injetora.

Proposição 1.4.8 $L^p(0,T,X) \subset L^1(0,T,X) \hookrightarrow \mathcal{D}'((0,T),X)$.

Definição 1.4.9 *Suponhamos* $u, v \in L^p(0,T,X)$*, onde* X *é um espaço de Banach. Dizemos que* v *é a* derivada *de* u *no sentido* $\mathcal{D}'(0,T,E)$ *se*

$$\int_0^T u(t)\partial_t\varphi(t)dt = -\int_0^T v(t)\varphi(t)dt, \quad \forall \varphi \in C^\infty_C((0,T),\mathbb{R}).$$

A integral é tomada em E *e denotamos* $v = \partial_t u$*.*

1.5 Espaços de Sobolev

Os próximos resultados podem ser encontrados em Brézis [1].

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 1.5.1 *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido como*

$$W^{1,p}(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega)|\exists g_1,...,g_n\in L^p(\Omega) \text{ tal que} \int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\int_\Omega g_i\varphi, \forall\varphi\in C_C^\infty(\Omega), \forall i=1,...,n\right\}.$$

Para $u\in W^{1,p}(\Omega)$ definimos $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=g_i$ e escrevemos $\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

Denotamos $H^1(\Omega)=W^{1,2}(\Omega)$.

Equipamos o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}}=\|u\|_p+\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_p.$$

Proposição 1.5.2 *O espaço $W^{1,p}$ é um espaço de Banach e H^1 é um espaço de Hilbert separável.*

Sejam $m\geq 2$ um inteiro e $p\in\mathbb{R}$ com $1\leq p\leq\infty$.

Definição 1.5.3 *Definimos o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ por*

$$W^{m,p}(\Omega)=\left\{u\in W^{m-1,p}(\Omega)|\frac{\partial u}{\partial x_i}\in W^{m-1,p}, \forall i=1,...,n\right\}$$

ou, equivalentemente, $W^{m,p}(\Omega)$ é o conjunto

$$\left\{u\in L^p(\Omega)|\forall\alpha \text{ com } |\alpha|\leq m, \exists g_\alpha\in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega uD^\alpha\varphi=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g_\alpha\varphi, \forall\varphi\in C_C^\infty(\Omega)\right\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}}=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|_p$$

é um espaço de Banach.

Definição 1.5.4 *Seja $1\leq p<\infty$, definimos o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_C^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e denotamos*

$$H_0^1(\Omega)=W_0^{1,p}(\Omega).$$

O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ equipado com a norma de $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável.

Definição 1.5.5 *Sejam E_1, E_2 espaços de Banach e suponha que E_2 é um subespaço vetorial de E_1. Dizemos que E_2 está* imerso *em E_1 se o operador inclusão é contínuo com respeito às topologias geradas pelas normas de E_1 e E_2. Denotaremos este fato por $E_2 \hookrightarrow E_1$.*

Observamos que a imersão $E_2 \hookrightarrow E_1$ implica $\|u\|_{E_1} \leq C\|u\|_{E_2}$, onde C é uma constante independente de $u \in E_2$. Além disso, se o operador imersão é compacto, então dizemos que E_2 está imerso compactamente em E_1 e denotamos $E_2 \overset{c}{\hookrightarrow} E_1$.

O próximo teorema fornece uma forma de identificar imersões entre os espaços de Sobolev. Sua demonstração pode ser encontrada em Triebel, H. [18].

Teorema 1.5.6 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ e $1 < p_1, p_2 < \infty$.*

1. *Se $l_2 \geq l_1, p_2 \geq p_1$ e $\frac{l_2}{n} - \frac{1}{p_2} \geq \frac{l_1}{n} - \frac{1}{p_1}$ então $W^{l_2,p_2}(\Omega) \hookrightarrow W^{l_1,p_1}(\Omega)$.*

2. *Se $l_2 \geq l_1, p_2 \geq p_1$ e $\frac{l_2}{n} - \frac{1}{p_2} > \frac{l_1}{n} - \frac{1}{p_1}$ então $W^{l_2,p_2}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{l_1,p_1}(\Omega)$.*

1.6 Resultados Adicionais

A demonstração do lema a seguir pode ser encontrada em Lions, J.L.[10].

Lema 1.6.1 *Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Se $u \in L^p(0,T,E)$ e $u' \in L^p(0,T,E)$, então após no máximo uma modificação em um conjunto de medida nula de $[0,T]$, $u : [0,T] \to E$ é contínua.*

O próximo teorema está demonstrado em Lions, J.L. e Magenes [11].

Teorema 1.6.2 *Sejam E, E_0 espaços de Banach e suponha que $E \hookrightarrow E_0$. Se $u \in L^\infty(0,T,E), u(t) \in E_0, \forall t \in [0,T]$ e $\langle u(t), \varphi\rangle$ é uma função contínua em t para todo $\varphi \in E_0'$, isto é, $u : [0,T] \to E_0$ é fracamente contínua, então*

$$u(t) \in E \text{ e } \|u(t)\|_E \leq \|u\|_{L^\infty(0,T,E)}, \forall t \in [0,T],$$

e $u : [0,T] \to E$ é fracamente contínua.

O problema de autovalor do Laplaciano fornece um conjunto de autofunções que constituem uma base para o $L^2(\Omega)$. A demonstração pode ser encontrada em Jost, J. [9].

Teorema 1.6.3 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto, limitado e de classe C^∞, então o problema de autovalor*

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w \text{ em } \Omega, \; w \in W^{1,2}(\Omega) \\ w_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

possui uma quantidade enumerável de autovalores $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_j \leq ...$ tais que $\lambda_j \to \infty$ e as autofunções satisfazem $w_{j|\partial\Omega} = 0$ e formam um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega)$, isto é,

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v, w_j \rangle \, w_j, \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

Em particular,

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v, w_j \rangle^2 \, .$$

As autofunções do Laplaciano são elementos de $C^\infty(\Omega)$. Esta informação será importante em resultados futuros e sua demonstração pode ser encontrada em Robinson, J. C. [13].

Corolário 1.6.4 *As autofunções do Laplaciano com condição de Dirichlet são elementos de $C^\infty \cap H^1_0(\Omega)$.*

O próximo teorema fornece as desigualdades de Poincaré. Sua demonstração pode ser encontrada em Smoller, J. [15].

Teorema 1.6.5 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$ e $u \in H^1(\Omega)$. Se λ_1 é o menor autovalor positivo de $-\Delta$ com condição de Dirichlet, então*

1. $\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \lambda_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$ *quando $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.*

2. *Se $u \in H^2(\Omega)$, $\|\Delta u\|^2_{L^2} \geq \lambda_1 \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$ quando $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.*

Definição 1.6.6 *Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um subconjunto aberto. Dizemos que $F : D \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory em D quando*

- *$F(t, x)$ é mensurável em t, para cada x fixo.*

- *$F(t, x)$ é mensurável em x, para cada t fixo.*

- *Se $C \subset D$ é compacto, então existe uma função real integrável $m_C(t)$ tal que*

$$|F(t,x)| \leq m_C(t), \forall (t,x) \in C.$$

As demonstrações dos dois próximos teoremas podem ser encontradas em Coddington, E. A. e Levinson, N. [6].

Dados $a, b > 0$, seja $R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\} \subset D$.

Teorema 1.6.7 (Teorema de Carathéodory) *Se $F : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory em R, então existem $\beta > 0$ e uma função $x : [t_0 - \beta, t_0 + \beta] \to \mathbb{R}^n$ absolutamente contínua satisfazendo*

1. $(t, x(t)) \in R, \forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$.
2. $x'(t) = F(t,x), \forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, *exceto em um conjunto de medida nula.*
3. $x(t_0) = x_0$.

Teorema 1.6.8 *Sejam $b > 0, 0 < T < \infty, B = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq b\}, \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq b$ e $0 < M < b$. Consideremos $D = [0,T] \times B$ e $F : D \to \mathbb{R}^N$ nas condições de Carathéodory. Se $x : [t_0 - \beta, t_0 + \beta] \to \mathbb{R}^n$ é uma função como a dada no Teorema 1.6.7 e $|x(t)| \leq M, \forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, então $x(t)$ tem um prolongamento em $[0,T]$.*

Ambos os resultados a seguir podem ter suas demonstrações encontradas em Robinson, J.C. [13].

Teorema 1.6.9 (Banach-Alaoglu:) *Seja E um espaço de Banach separável. Se u_m é uma sequência limitada em E', então u_m tem subsequência convergente na topologia fraca *.*

Corolário 1.6.10 *Seja E um espaço de Banach reflexivo. Se u_m é uma sequência limitada em E, então u_m tem uma subsequência que converge fracamente em E.*

Sejam $p_1, p_0 \geq 1$ e E_0, E_1 são espaços de Banach satisfazendo $E_1 \hookrightarrow E_0$. Consideremos

$$W_{p_1,p_0}(0,T,E_1,E_0) = \{\psi : \ \psi \in L^{p_1}(0,T,E_1), \ \psi' \in L^{p_0}(0,T,E_0)\},$$

munido da norma

$$\|\psi\|_{W_{p_1,p_0}} = \|\psi\|_{L^{p_1}(0,T,E_1)} + \|\psi'\|_{L^{p_0}}(0,T,E_0).$$

Nestas condições, temos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em Chepyzhov, V.V. e Vishik, M.I. [4].

Teorema 1.6.11 (Teorema da compacidade de Aubin-Lions:) *Sejam* $1 < p_1, p_0 < \infty$, $T > 0$, *e* E_1, E, E_0 *espaços de Banach. Se* $E_1 \overset{c}{\hookrightarrow} E \hookrightarrow E_0$, *então* $W_{p_1,p_0} \overset{c}{\hookrightarrow} L^{p_1}(0,T,E)$.

Observação: Em decorrência do Teorema da compacidade de Aubin-Lions, segue que se $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^{p_1}(0,T,E_1)$ e $\{u'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^{p_0}(0,T,E_0)$, então $\{u_m\}$ é limitada em $W_{p_1,p_0}(0,T,E_1,E_0)$. Assim, da imersão compacta, existe uma subsequência $\{u_{mj}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{mj} \to u$ fortemente em $L^{p_1}(0,T,E_1)$.

A demonstração do próximo lema pode ser encontrada em Robinson, J.C. [13].

Lema 1.6.12 *Se* $u_m \to u$ *em* $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, *então existe subsequência de* $\{u_m\}$ *que converge pontualmente para* u *q.t.p. em* Ω.

O próximo lema pode ter sua demonstração encontrada em Lions, J.L. [10].

Lema 1.6.13 *Sejam* Ω *um domínio limitado em* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *e* $1 < q < \infty$. *Se* $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *e* g *são funções em* $L^q(\Omega)$ *tais que*

$$\|g_m\|_{L^q(\Omega)} \leq C \text{ e } g_m \to g \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

então $g_m \rightharpoonup g$ *em* $L^q(\Omega)$.

A demonstração do lema a seguir pode ser encontrada em Robinson, J.C. [13].

Lema 1.6.14 *Seja* $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$. *Suponha que* $\{u_n\}$ *seja uniformemente limitada em* $L^\infty(0,T,V)$, *isto é,*

$$ess \sup_{s\in[0,T]} \|u_n(s)\|_V \leq C, \tag{1.3}$$

e que $u_n \rightharpoonup u$ *em* $L^2(0,T,V)$. *Então*

$$ess \sup_{s\in[0,T]} \|u(s)\|_V \leq C. \tag{1.4}$$

Além do mais, se $u \in \mathcal{C}([0,T],H)$*, então*

$$\sup_{s\in[0,T]} \|u(s)\|_V \leq C. \tag{1.5}$$

A demonstração do lema a seguir pode ser encontrada em Robinson, J.C. [13].

Lema 1.6.15 *Consideremos* $p > 2$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio suave. Se* $E = L^2(\Omega)$*,* $H^1(\Omega)$ *ou* $L^p(\Omega)$ *e* P_m *é o operador projeção ortogonal sobre o subespaço de* E *gerado pelas* m *primeiras autofunções do Laplaciano com condição de Dirichlet, então* $\|P_m u\|_E \leq \|u\|_E$ *e* $P_m u \to u$*.*

O lema a seguir pode ser encontrado em Chepyzhov, V.V. e Vishik, M.I. [4], Teorema 1.8, p. 33.

Lema 1.6.16 *Sejam* $p > 1$*,* $q > 1$ *expoentes conjugados. Suponhamos que* H *é um espaço de Hilbert e* V*,* E*,* X *são espaços de Banach satisfazendo*

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V' \hookrightarrow X$$

$$E \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow E' \hookrightarrow X,$$

onde V' *e* E' *denotam os duais de* V *e* E*, respectivamente. Se* $u \in L^2(0,T,V) \cap L^p(0,T,E)$ *e a distribuição* $\partial_t u$ *pode ser representada como* $\partial_t u(s) = w(s) + h(s)$*, onde* $w \in L^2(0,T,V')$ *e* $h \in L^q(0,T,E')$*, então*

1. $u \in \mathcal{C}([0,T],H)$*.*
2. *A função* $\|u(\cdot)\|_H^2$ *é absolutamente contínua em* $[0,T]$ *e, além disso,*

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = 2\langle u(t), u'(t)\rangle = 2\langle u(t), w(t)\rangle + 2\langle u(t), h(t)\rangle,$$

q.t.p. em $[0,T]$*.*

Capítulo 2

Atratores Globais para problemas autônomos

Consideremos o problema autônomo

$$\begin{cases} u' = f(u), \ \ t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $f : U \subset X \to X$ não depende diretamente do tempo, $U \subset X$ é aberto e conexo e o espaço de fase X é um espaço de Banach com a métrica d.

Se f é contínua e lipschitziana, existe uma única solução contínua $u : [0, \infty) \to X$ para o problema (2.1) e essa solução depende continuamente das condições iniciais. Denotaremos por $u(t) = u(t, 0, u_0) = u(t, u_0)$ a solução que no tempo $t = 0$ assume o valor inicial u_0.

Para cada solução $u(t, u_0), u_0 \in X$, podemos associar um operador $T(t) : X \to X$ de tal forma que

$$T(t)u_0 = u(t, u_0).$$

Assim, as soluções do problema definem uma família de aplicações $\{T(t), t \geq 0\}$. Por simplicidade, usaremos a notação $T(\cdot)$ ao invés de $\{T(t); t \geq 0\}$.

Definição 2.0.1 *Dizemos que uma família $T(\cdot)$ é um* semigrupo *se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $T(0) = Id$.

2. $T(t)T(s) = T(t+s), \ \forall t, s \geq 0.$

Além disso, se

3. $(t, u_0) \mapsto T(t)u_0$ *for contínua de* $[0, \infty) \times X$ *em* X

então $T(\cdot)$ *será chamado de* C_0 -semigrupo.

Observação 2.0.2 *Se* $T(\cdot)$ *é um semigrupo de operadores limitados em um espaço de Banach* X*, a condição* 3 *vale se, e somente se, para cada elemento* $u \in X$*,*

$$T(t)u \to u, \ \ \textit{quando} \ \ t \to 0^+.$$

2.1 Atratores Globais para semigrupos

Nesta seção estudaremos propriedades de atração para semigrupos abstratos, sem necessidade de associação com soluções de equações a princípio.

Apresentaremos a seguir alguns conceitos que serão úteis para definir o atrator global para semigrupos.

Definição 2.1.1 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico e* $A, B \subset X$*. A* semidistância de Hausdorff *entre* A *e* B *é dada por*

$$dist(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b).$$

Observemos que a semidistância de Hausdorff mede o quanto o conjunto A fica fora de B e que $dist(\cdot, \cdot)$ *não é simétrica, desta forma a igualdade* $dist(A, B) = 0$ *não implica* $A = B$*. Além disso, se* B *é fechado, então* $dist(A, B) = 0 \Rightarrow A \subset B$*. De fato, suponhamos que* A *não esteja contido em* B*, então existe* $a \in A \backslash B$ *tal que* $d(a, b) > 0, \forall b \in B$*, já que* $d(a, B) > 0$*. Logo,* $\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) > 0.$

Definição 2.1.2 *Sejam* $A, B \subset X$*. Dizemos que* A atrai B *sob a ação de* $T(\cdot)$ *se*

$$\lim_{t \to \infty} dist(T(t)B, A) = 0,$$

ou equivalentemente se, dado $\varepsilon > 0$*, existem vizinhança* $\mathcal{N}_B = \mathcal{N}(B, \varepsilon)$ *e* $\tau_B > 0$ *tais que*

$$T(t)B \subset \mathcal{N}(B, \varepsilon), \forall t \geq \tau_B.$$

Definição 2.1.3 *Sejam $A, B \subset X$. Dizemos que A* absorve *B sob a ação do semigrupo $T(\cdot)$ se existe $\tau_B \geq 0$ tal que*

$$dist(T(t)B, A) = 0, \forall t \geq \tau_B,$$

ou equivalentemente, se

$$T(t)B \subset A, \forall t \geq \tau_B.$$

Definição 2.1.4 *Dizemos que $A \subset X$ é um* conjunto absorvente *para o semigrupo $T(\cdot)$ se para cada $B \subset X$ limitado, existe $\tau_B > 0$ tal que $T(t)B \subset A, \forall t \geq \tau_B$.*

Definição 2.1.5 *Um ponto $p \in X$ é um* equilíbrio *ou um* ponto de equilíbrio de *$T(\cdot)$ se $T(t)p = p, \forall t \geq 0$. Dizemos que a aplicação $t \in \mathbb{R} \mapsto p \in X$ é uma* solução estacionária *ou* solução de equilíbrio *para o semigrupo.*

Definição 2.1.6 *Um conjunto $A \subset X$ é* invariante *por $T(\cdot)$ se $T(t)A = A, \forall t \geq 0$ e A é* positivamente invariante *com relação ao semigrupo $T(\cdot)$ se $T(t)A \subset A, \forall t \geq 0$.*

Observação 2.1.7 *Quando não houver dúvidas sobre o semigrupo $T(\cdot)$ em questão, diremos apenas que A* atrai *B, A* absorve *B e A é* invariante.

Definição 2.1.8 *Dado $u_0 \in X$, definimos a* semiórbita positiva *iniciando em u_0 por*

$$\gamma^+(u_0) = \bigcup_{t \geq 0} T(t)u_0.$$

Definição 2.1.9 *A* semiórbita positiva gerada por um conjunto *$B \subset X$ é o conjunto*

$$\gamma^+(B) = \bigcup_{t \geq 0} T(t)B.$$

Definição 2.1.10 *O conjunto ω*-limite *de um ponto $u_0 \in X$ é dado por*

$$\omega(u_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)u_0} = \left\{ v \in X \mid \exists\, t_n \to \infty \text{ tal que } T(t_n)u_0 \overset{n\to\infty}{\to} v \right\}.$$

Definição 2.1.11 *Se $B \subset X$, definimos o conjunto ω*-limite *de B por*

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B} = \left\{ v \in X \mid \exists\, t_n \to \infty \text{ e } \{v_n\} \subset B \text{ tal que } T(t_n)v_n \overset{n\to\infty}{\to} v \right\}.$$

Definição 2.1.12 *Uma função contínua* $x(\cdot) : \mathbb{R} \to X$ *é* solução global *de* $T(\cdot)$ *se*

$$T(t)x(\tau) = x(t+\tau), \forall \tau \in \mathbb{R} \text{ e } t \geq 0.$$

Neste caso, a órbita da solução global *é o conjunto*

$$\Gamma(x(\cdot)) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} x(t).$$

Proposição 2.1.13 *Um conjunto* $A \subset X$ *é invariante sob* $T(\cdot)$ *se, e somente se,* A *consiste de uma coleção de órbitas de soluções globais de* $T(\cdot)$*.*

Demonstração: Suponhamos que A seja uma coleção de órbitas de soluções globais. Dado $u_0 \in A$, existe uma solução global $u : \mathbb{R} \to X$ tal que u_0 está na órbita dessa solução, isto é, $u(\tau) = u_0$, para algum $\tau > 0$. Logo, $T(t)u_0 = T(t)u(\tau) = u(t+\tau) \in A$, pois a órbita está inteiramente contida em A, o que implica $T(t)A \subset A$, para todo $t \geq 0$. Além disso, como u é solução global, temos $u_0 = u(\tau) = T(t)u(\tau - t)$. Portanto, $A \subset T(t)A$, para todo $t \geq 0$.

Suponhamos agora que A seja invariante. Dado $u_0 \in A$, temos $T(t)u_0 \in A, \forall t \geq 0$. Defina $u : \mathbb{R} \to X$ por $u(t) = T(t)u_0$, para todo $t \geq 0$. A construção de u para $t < 0$ será indutiva: Pela invariância de A, temos $T(1)A = A$. Portanto, existe $u_{-1} \in A$ tal que $T(1)u_{-1} = u_0 = u(0)$. Definamos $u(t) = T(t+1)u_{-1}$ para $-1 \leq t \leq 0$. Da mesma forma, existe $u_{-2} \in A$ tal que $T(1)u_{-2} = u_{-1}$. Definamos $u(t) = T(t+2)u_{-2}$ para $-2 \leq t \leq -1$. Procedendo dessa forma, u será solução global e $\Gamma(u(\cdot)) \subset A$. □

Definição 2.1.14 *Um conjunto* $\mathcal{A} \subset X$ *é um* atrator global *para o semigrupo* $T(\cdot)$ *se*

(a) $\mathcal{A}$ *é compacto.*

(b) $\mathcal{A}$ *é invariante.*

(c) $\mathcal{A}$ *atrai conjuntos limitados de* X*, isto é, se* $B \subset X$ *é limitado, então* $dist(T(t)B, \mathcal{A}) \overset{t\to\infty}{\to} 0$.

Podemos caracterizar os atratores globais para um semigrupo da seguinte forma:

Proposição 2.1.15 *O atrator global* $\mathcal{A}$ *para um semigrupo* $T(\cdot)$ *é:*

(a) o conjunto minimal compacto que atrai limitados.

(b) o conjunto maximal fechado, limitado e invariante.

Demonstração: (a) Seja $B \subset X$ um compacto que atrai limitados. Como $\mathcal{A}$ é compacto, $\mathcal{A}$ é limitado e portanto B atrai $\mathcal{A}$. Logo,

$$\lim_{t\to\infty} dist(T(t)\mathcal{A}, B) = 0.$$

Sendo $\mathcal{A}$ invariante, $dist(A, B) = 0 \Rightarrow \mathcal{A} \subset B$.

Portanto, $\mathcal{A}$ é o minimal compacto que atrai limitados.

(b) Seja $B \subset X$ fechado, limitado e invariante. Temos

$$dist(B, \mathcal{A}) = dist(T(t)B, \mathcal{A}), \forall t \geq 0 \Rightarrow dist(B, \mathcal{A}) = \lim_{t\to\infty} dist(T(t)B, \mathcal{A}) = 0.$$

Portanto, $B \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é o maximal fechado, limitado e invariante. $\square$

Segue da proposição anterior que o atrator global de um semigrupo é único.

Podemos também caracterizar o atrator global em termos de soluções globais e limitadas.

Proposição 2.1.16 *Se um semigrupo $T(\cdot)$ possui um atrator global $\mathcal{A}$, então*

$$\mathcal{A} = \{\Gamma(x(\cdot));\ x : \mathbb{R} \to X \textit{ é solução global limitada de } T(\cdot)\} := \Omega.$$

Demonstração: Se $T(\cdot)$ tem atrator global $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A} \subset \Omega$, uma vez que $\mathcal{A}$ é invariante, limitado e consiste de uma coleção de órbitas de soluções globais (Proposição 2.1.13).

Para mostrar a outra inclusão, seja $\Gamma = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} x(t)$ a órbita de uma solução global limitada de $T(\cdot)$. Então Γ é limitada. Suponhamos que $\Gamma \not\subset \mathcal{A}$. Então existem $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in \Gamma$ tais que $x_0 \notin \mathcal{N}(\mathcal{A}, \varepsilon)$. Como $\mathcal{A}$ atrai limitados, segue que $\mathcal{A}$ atrai Γ, ou seja, existe $\tau > 0$ suficientemente grande tal que

$$dist(T(\tau)\Gamma, \mathcal{A}) < \varepsilon, \text{ ou ainda, } d(T(\tau)z, \mathcal{A}) < \varepsilon,\ \forall z \in \Gamma.$$

Como $x_0 \in \Gamma$, existe $\tilde{x} \in \Gamma$ tal que $x_0 = T(\tau)\tilde{x}$. Então $d(x_0, \mathcal{A}) = d(T(\tau)\tilde{x}, \mathcal{A}) < \varepsilon$, o que é uma contradição. $\square$

Lema 2.1.17 *Sejam K um subconjunto compacto de um espaço métrico X e $\{x_n\} \subset X$ tais que*

$$d(x_n, K) \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Então, existe subsequência de $\{x_n\}$ que converge para um ponto de K.

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{N}$, tomemos $x_{nk} \in \{x_n\}$ tal que $d(x_{nk}, K) \leq \dfrac{1}{k}$. Logo, existe $y_k \in K$ tal que $d(x_{nk}, y_k) \leq \dfrac{1}{k}$. Como K é compacto, passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $y_k \to y_0$. Portanto, segue que $x_{nk} \to y_0$. □

Proposição 2.1.18 *Se um conjunto compacto K atrai um conjunto compacto K_1 sob o C_0-semigrupo $T(\cdot)$, então $\overline{\gamma^+(K_1)}$ é compacto e $\emptyset \neq \omega(K_1) \subset K$.*

Demonstração: Seja $\{y_n\} \subset \gamma^+(K_1)$, onde para cada n, $y_n = T(t_n)x_n, x_n \in K_1$. Pela compacidade de K_1, existe $\{x_{nk}\} \subset \{x_n\}$, com $\lim\limits_{k\to\infty} x_{nk} = x, x \in K_1$. Se $t_n \to \infty$, então como K atrai K_1, temos

$$\lim_{n\to\infty} dist(T(t_n)x_n, K) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(y_n, K) = 0.$$

Usando o Lema 2.1.17 concluímos que toda sequência em $\gamma^+(K_1)$ possui uma subsequência convergente.

Por outro lado, se existir $\{t_{nk}\} \subset \{t_n\}$, com $\lim\limits_{k\to\infty} t_{nk} = t_0$, então

$$\lim_{k\to\infty} T(t_{nk})x_{nk} = T(t_0)x$$

$$\Rightarrow y_{nk} = T(t_{nk})x_{nk} \to T(t_0)x \text{ quando } k \to \infty.$$

A compacidade de $\overline{\gamma^+(K_1)}$ implica que $\omega(K_1)$ é não vazio. Além disso, se $x \in \omega(K_1)$, então existem $\{t_n\}$, com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e $\{x_n\} \subset K_1$ tais que $x = \lim\limits_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Como K_1 é atraído por K e

$$d(x, K) \leq d(x, T(t_n)x_n) + d(T(t_n)x_n, K), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então $d(x, K) \to 0$, quando $n \to \infty$. Logo, $x \in K$. □

Seja $\mathcal{A}$ o atrator de um C_0-semigrupo $T(\cdot)$ dado por $T(t)u_0 = u(t, u_0), u_0 \in X$. O resultado a seguir mostra que qualquer solução $u(t, u_0)$ pode ser aproximada, em tempos grandes, por uma solução $v(t, v_0)$ contida no atrator.

Proposição 2.1.19 *Seja $u(t) = T(t)u_0$ uma trajetória em um espaço de fase X e $\mathcal{A}$ o atrator global do C_0-semigrupo $T(\cdot)$. Então, dados $\varepsilon > 0$ e $T > 0$, existem $\tau = \tau(\varepsilon, T) > 0$ e uma trajetória $v(t) = T(t)v_0$ contida no atrator, tal que*

$$\|u(t+\tau) - v(t)\| \leq \varepsilon, \ \forall\ 0 \leq t \leq T.$$

Demonstração: Como $T(\cdot)$ é um C_0-semigrupo, a aplicação $(t,z) \mapsto T(t)z$ é contínua, esta aplicação é uniformemente contínua em $[0,T] \times \left[\overline{\bigcup_{t\geq 0} T(t)u_0} \cup \mathcal{A}\right]$, já que $\overline{\bigcup_{t\geq 0} T(t)u_0}$ é compacto pela Proposição 2.1.18 e união e produto de compactos é compacto. Assim, dados $\varepsilon, T \geq 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, T)$ tal que

$$u_0 \in \mathcal{A} \text{ e } \|u_0 - v_0\| \leq \delta \Rightarrow \|u(t) - v(t)\| \leq \varepsilon, \ t \in [0,T].$$

Como $\mathcal{A}$ é o atrator global, a trajetória $u(t)$ tende para $\mathcal{A}$ quando $t \to \infty$, logo existem $\tau > 0$ e um ponto $v_0 \in \mathcal{A}$ tal que

$$|u(\tau) - v_0| = dist(T(\tau)u_0, \mathcal{A}) \leq \delta.$$

Consideremos a trajetória $v(t)$ em $\mathcal{A}$ tal que $v(0) = v_0$. Então, as trajetórias $u(t)$ (vista como uma trajetória iniciando no ponto $u(\tau)$) e $v(t) = T(t)v_0$ satisfazem

$$\|u(t+\tau) - T(t)v_0\| = \|T(t)u(\tau) - T(t)v_0\| \leq \varepsilon, \ \forall 0 \leq t \leq T.$$

□

2.2 Existência do Atrator Global

Nesta seção, forneceremos condições necessárias e suficientes para que um C_0-semigrupo $T(\cdot)$ possua atrator global.

2.2.1 Dissipatividade e Compacidade Assintótica

Definição 2.2.1 *Dizemos que um semigrupo $T(\cdot)$ é:*

(i) ponto dissipativo *se existe um limitado $B \subset X$ que atrai cada ponto de X;*

(ii) limitado dissipativo *se existe um limitado* $B \subset X$ *que atrai todo subconjunto limitado de* X*;*

(iii) assintoticamente compacto *se, dado qualquer conjunto fechado, limitado e não vazio* $W \subset X$*, positivamente invariante, então existe um compacto não vazio* $K \subset W$ *que atrai* W*.*

Proposição 2.2.2 *Se* $T(\cdot)$ *possui atrator global, então* $T(\cdot)$ *é limitado dissipativo e assintoticamente compacto.*

Demonstração: Suponha que $T(\cdot)$ possui um atrator global $\mathcal{A}$. Então $T(\cdot)$ é limitado dissipativo, uma vez que $\mathcal{A}$ atrai todos os limitados de X.

Seja agora $W \subset X$ não vazio, fechado, limitado e tal que $T(t)W \subset W, \forall t \geq 0$. Sabemos que $\mathcal{A}$ é compacto e, sendo W fechado, $\mathcal{A} \cap W$ também é compacto. Como $T(t)W \subset W$ e $d(T(t)W, \mathcal{A}) \to 0$, então $W \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. De fato, se $W \cap \mathcal{A} = \emptyset$, sendo esses dois conjuntos fechados, existiriam vizinhanças $\mathcal{N}_W$ e $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ tais que $W \subset \mathcal{N}_W, A \subset \mathcal{N}_\mathcal{A}$ e $\mathcal{N}_W \cap \mathcal{N}_\mathcal{A} = \emptyset$. Como $T(t)W \subset W \subset \mathcal{N}_W$ então $T(t)W \not\subset \mathcal{N}_\mathcal{A}$, $\forall t \geq 0$, o que seria um absurdo. Logo, $\mathcal{A} \cap W \neq \emptyset$. Afirmamos que $\mathcal{A} \cap W$ atrai W. De fato,

$$dist(T(t)W, W) = 0 \text{ e } dist(T(t)W, \mathcal{A}) \to 0 \text{ quando } t \to \infty.$$

Logo,

$$dist(T(t)W, \mathcal{A} \cap W) \to 0 \text{ quando } t \to \infty.$$

Desta forma, $K = \mathcal{A} \cap W$ é o compacto desejado. $\square$

O objetivo nos próximos resultados é caracterizar o atrator para um C_0-semigrupo em termos de conjuntos ω-limite.

Proposição 2.2.3 *Seja* $T(\cdot)$ *um* C_0*-semigrupo assintoticamente compacto. Se* $B \subset X$ *é limitado e existe* $\tau_B > 0$ *tal que*

$$\bigcup_{s \geq \tau_B} T(s)B$$

é limitado, então $\omega(B)$ *é não vazio, compacto e invariante. Além disso,* $\omega(B)$ *atrai* B*.*

Demonstração: Começaremos mostrando que $\omega(B)$ é compacto. Como $\bigcup_{s\geq\tau_B} T(s)B$ é positivamente invariante, temos

$$T(t)\left(\bigcup_{s\geq\tau_B} T(s)B\right) \subset \bigcup_{s\geq\tau_B} T(s+t)B \subset \bigcup_{s\geq\tau_B} T(s)B,\ t \geq 0$$

e $T(\cdot)$ contínuo implica

$$T(t)\left(\overline{\bigcup_{s\geq\tau_B} T(s)B}\right) \subset \overline{\bigcup_{s\geq\tau_B} T(s)B}.$$

Como $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto e $\overline{\bigcup_{s\geq\tau_B} T(s)B}$ é fechado, limitado, não vazio e positivamente invariante, existe um compacto não vazio $C \subset \overline{\bigcup_{s\geq\tau_B} T(s)B}$ que atrai $\overline{\bigcup_{s\geq\tau_B} T(s)B}$. Logo, dada qualquer vizinhança $\mathcal{N}_C$ de C, existe vizinhança $\mathcal{N}'_C$ de C e $\tau_{\mathcal{N}_C} > 0$ tais que

$$\overline{\bigcup_{s\geq\tau_B} T(s)B} \subset \mathcal{N}'_C \subset \mathcal{N}_C \Rightarrow \omega(B) \subset \mathcal{N}_C.$$

Como $\mathcal{N}_C$ foi tomado arbitrário e C é fechado, segue que $\omega(B) \subset C$. De fato, se $\omega(B) \not\subset C$, como ambos são fechados, deve existir $y \in \omega(B)\backslash C$ tal que $d(y, C) > 0$. Tomando $\mathcal{N}(C, \varepsilon)$, com $\varepsilon = d(y, C)/2$, temos que $\omega(B) \not\subset \mathcal{N}(C, \varepsilon)$, absurdo. Portanto, $\omega(B) \subset C$ e $\omega(B)$ é compacto.

Consideremos sequências $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{v_n\} \subset B$. Como, para n suficientemente grande, $T(t_n)v_n \to C$, o qual é compacto, segue que podemos extrair subsequência convergente $T(t_{n_k})v_{n_k} \to y_0$ de modo que $y_0 \in \omega(B)$. Logo, $\omega(B)$ é não vazio.

Mostremos que $T(t)\omega(B) = \omega(B)$.

Dado $y \in \omega(B)$, existem sequências $\{t_n\}, t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{v_n\} \subset B$ tais que $T(t_n)v_n \to y$. Então,

$$T(t)T(t_n)v_n \to T(t)y \Rightarrow T(t_n + t)v_n \to T(t)y \Rightarrow T(t)y \in \omega(B).$$

Portanto, $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$.

Por outro lado, seja $y \in \omega(B)$. Existem sequências $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{v_n\} \subset B$ tais que $T(t_n)v_n \to y$. Queremos encontrar $w_0 \in \omega(B)$ tal que $T(t)w_0 = y$. Para n suficientemente grande, temos $t_n > t$, logo $T(t_n)v_n = T(t)T(t_n - t)v_n$. Também, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe n_k tal que

$$T(t_{n_k} - t)v_{n_k} \in \mathcal{N}(C, \frac{1}{k}) \Rightarrow d(T(t_{n_k} - t)v_{n_k}, C) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pelo Lema 2.1.17, passando a uma subsequência se necessário, $T(t_{n_k} - t)v_{n_k} \to w_0$ com $w_0 \in C$. Uma vez que $\omega(B)$ é fechado temos que $w_0 \in \omega(B)$. Logo,

$$T(t_{n_k} - t)v_{n_k} \to w_0 \;\text{ e }\; T(t)T(t_{n_k} - t)v_{n_k} \to y.$$

Pela continuidade de $T(\cdot)$, temos $T(t)w_0 = y$. Portanto, $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$.

Resta mostrar que

$$dist(T(t)B, \omega(B)) \to 0 \;\text{ quando }\; t \to \infty.$$

Se isto não acontecesse, existiriam $\varepsilon > 0$, $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{v_n\} \subset B$ tais que

$$dist(T(t)B, \omega(B)) \geq \varepsilon.$$

Mas $\{T(t_n)v_n\} \to C$ e isto implica que $T(t_n)v_n$ possui subsequência convergente para um ponto de $\omega(B)$, o que é uma contradição. □

O corolário abaixo caracteriza o atrator global em termos dos conjuntos ω-limites.

Corolário 2.2.4 *Seja $T(\cdot)$ um C_0-semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$. Então*

1. *$\mathcal{A}$ é a união dos conjuntos ω-limites de todos os subconjuntos limitados de X, isto é,*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B\subset X} \{\omega(B) \mid B \text{ é limitado } \}.$$

2. *$\mathcal{A}$ é a união dos conjuntos ω-limites de todos os subconjuntos compactos de X, isto é,*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{K\subset X} \{\omega(K) \mid K \text{ é compacto } \}.$$

Demonstração:

1. Como o semigrupo $T(\cdot)$ possui atrator global, segue que $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto. Seja $B \subset X$ limitado. Como $\mathcal{A}$ atrai limitados, existe $\tau_B > 0$ tal que

$$T(t)B \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}, \varepsilon), \;\; \forall t \geq \tau_B.$$

Logo,

$$\bigcup_{t\geq\tau_B} T(t)B \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}, \varepsilon).$$

Portanto, $\bigcup_{t\geq\tau_B} T(t)B$ é limitado e, pela Proposição 2.2.3, $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B. Além disso,

$$\omega(B) \subset A,$$

pois, dado $y \in \omega(B)$, existem $\{t_n\}, t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{v_n\} \subset B$ tais que $T(t_n)v_n \to y$ e como $\mathcal{A}$ atrai B, $d(T(t_n)v_n, \mathcal{A}) \to 0$. Então, pelo Lema 2.1.17 existem subsequências $\{t_{n_k}\}, \{v_{n_k}\}$ tais que $T(t_{n_k})v_{n_k} \to y_0 \in \mathcal{A}$. Logo, $y = y_0$ e $\omega(B) \subset \mathcal{A}$.

Como $\mathcal{A}$ é limitado, temos em particular que $\omega(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. Além disso, $\mathcal{A} \subset \omega(\mathcal{A})$. De fato, seja $y_0 \in \mathcal{A}$. Pela Proposição 2.1.13, existe uma órbita completa passando por y_0. Tome y_{-1} tal que $T(1)y_{-1} = y_0$, y_{-2} tal que $T(2)y_{-2} = y_0$, e assim sucessivamente. Considere $t_n = n$, $\{y_{-n}\} \subset \mathcal{A}$. Temos $T(t_n)y_{-n} = y_0 \to y_0$. Logo, $y_0 \in \omega(A)$. Portanto, $\omega(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Logo, $\mathcal{A} = \bigcup \{\omega(B) | B \subset X$ é limitado $\}$.

2. Segue do item anterior.

□

Definição 2.2.5 *Um semigrupo $T(\cdot)$ é limitado, se $\gamma^+(B)$ é limitada sempre que B é um subconjunto limitado de X.*

O teorema a seguir fornece condições suficientes para que um C_0-semigrupo possua atrator.

Teorema 2.2.6 *Seja $T(\cdot)$ um C_0-semigrupo ponto dissipativo, assintoticamente compacto e limitado. Então $T(\cdot)$ tem um atrator global em X.*

Demonstração: A demonstração será feita em dois passos.

Passo 1. Construiremos um conjunto limitado $\Omega \subset X$ tal que, para cada compacto $C \subset X$, existe uma vizinhança $\mathcal{N}_C$ de C que é absorvida por Ω.

Como $T(\cdot)$ é ponto dissipativo, existe um conjunto limitado W_0 que atrai todos os pontos de X. Seja $\mathcal{N}_{W_0}$ uma vizinhança limitada qualquer de W_0. Dado $v \in X$, como W_0 atrai v e $T(\cdot)$ é contínuo, existem $\varepsilon_v, \tau_v > 0$ tais que

$$T(t)B(v, \varepsilon_v) \subset \mathcal{N}_{W_0}, \forall t \geq \tau_v.$$

Como $T(\cdot)$ é limitado, a órbita de qualquer limitado é limitada. Consideremos $\tau_{\mathcal{N}_{W_0}}$ tal que

$$\Omega := \bigcup_{t \geq \tau_{\mathcal{N}_{W_0}}} T(t)\mathcal{N}_{W_0} \quad \text{seja limitado.}$$

Temos as seguintes propriedades para Ω.

(i) Ω é positivamente invariante, pela Proposição 2.2.3.

(ii) Ω absorve os pontos de X.

De fato, dado $v \in X$, existe $\tau_v > 0$ tal que $T(t)v \subset \mathcal{N}_{W_0}$ $\forall t \geq \tau_v$

$$\Rightarrow T(\tau_{\mathcal{N}_{W_0}})T(t)v \subset T(\tau_{\mathcal{N}_{W_0}})\mathcal{N}_{W_0} \subset \Omega \ \Rightarrow T(t')v \subset \Omega, \ \forall t' \geq \tau_{\mathcal{N}_{W_0}} + \tau_v.$$

(iii) $\forall v \in X$, existem $\varepsilon_v, \tau_v > 0$ tais que $T(t)B(v, \varepsilon_v) \subset \mathcal{N}_{W_0}$, $\forall t \geq \tau_v$

$$\Rightarrow T(\tau_{\mathcal{N}_{W_0}})T(t)B(v,\varepsilon_v) \subset T(\tau_{\mathcal{N}_{W_0}})\mathcal{N}_{W_0} \subset \Omega \ \Rightarrow T(t')B(v,\varepsilon_v) \subset \Omega, \ \forall t' \geq \tau_{\mathcal{N}_{W_0}} + \tau_v.$$

Seja $C \subset X$ compacto. Temos $C \subset \bigcup_{v_k \in X} B(v_k, \varepsilon_{v_k}) \Rightarrow \exists\, v_1, ...v_k \in X$ tais que

$$C \subset B(v_1, \varepsilon_{v_1}) \cup ... \cup B(v_k, \varepsilon_{v_k}) := \mathcal{N}_C.$$

Assim, tomando $\tau^* = \tau_{\mathcal{N}_{W_0}} + \max\{\tau_{v_1}, ..., \tau_{v_k}\}$, onde τ_{v_i} é o valor para o qual $T(t)B(v_i, \varepsilon_{v_i}) \subset \mathcal{N}_{W_0}$, $\forall t \geq \tau_{v_i}$, temos

$$T(t)C \subset T(t)\mathcal{N}_C = T(t)\left(\bigcup_{j=1}^{k} B(v_j, \varepsilon_{v_j})\right) = \bigcup_{j=1}^{k} T(t)B(v_j, \varepsilon_{v_j}) \subset \Omega, \ \forall t \geq \tau^*.$$

Portanto, Ω é o conjunto desejado.

Passo 2. Construiremos o conjunto $\mathcal{A}$ compacto, invariante e que atrai limitados.

Seja $B \subset X$ limitado. Por hipótese, a órbita de B é limitada. Segue da Proposição 2.2.3 que $\omega(B)$ é compacto, invariante e atrai B. Seja $\mathcal{N}_{\omega(B)}$ a vizinhança de $\omega(B)$ que é absorvida por Ω (primeiro passo). Definimos $\mathcal{A} = \omega(\Omega)$. Como Ω é limitado, segue que $\mathcal{A}$ é compacto, invariante, não vazio e atrai Ω.

Existem $\tau_{\omega(B)} > 0$ e $\tau_B > 0$ tais que

$$T(t)B \subset \mathcal{N}_{\omega(B)}, \ \forall t \geq \tau_{\mathcal{N}_{\omega(B)}} \ \text{ e } \ T(\tau_B)T(t)B \subset T(\tau_B)\mathcal{N}_{\omega(B)} \subset \Omega, \ \forall t \geq \tau_B.$$

Logo,

$$T(t')B \subset \Omega, \forall t' \geq \tau_{\mathcal{N}_{\omega(B)}} + \tau_B,$$

ou seja, B é absorvido por Ω. Portanto, Ω absorve limitados.

Como $\mathcal{A} = \omega(\Omega)$ atrai Ω, dada uma vizinhança $\mathcal{N}_{\omega(\Omega)}$ de $\omega(\Omega)$, existe $\tau_\Omega > 0$ tal que

$$T(t)\Omega \subset \mathcal{N}_{\omega(\Omega)}, \ \forall t \geq \tau_\Omega.$$

Então,

$$T(t'')B \subset \mathcal{N}_{\omega(\Omega)}, \ \forall t'' \geq \tau_{\mathcal{N}_{\omega(B)}} + \tau_B + \tau_\Omega.$$

Logo, $\mathcal{A} = \omega(\Omega)$ atrai B. □

Portanto, temos as seguintes condições necessárias e suficientes para a existência do atrator global.

Corolário 2.2.7 *Se $T(\cdot)$ é um C_0-semigrupo limitado, então $T(\cdot)$ possui atrator global se, e somente se, é ponto dissipativo e assintoticamente compacto.*

O próximo resultado fornece uma caracterização de semigrupos assintoticamente compactos em termos de sequências.

Proposição 2.2.8 *Um semigrupo limitado $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto se, e somente se, para quaisquer sequências $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{x_n\}$ limitada, $\{T(t_n)x_n\}$ admite subsequência convergente.*

Demonstração: Suponhamos $T(\cdot)$ assintoticamente compacto e seja $B \subset X$ limitado. Então $\gamma^+(B)$ é limitada. Pela Proposição 2.2.3, $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B. Logo, dada $\{v_n\} \subset B$ temos

$$dist(T(t_n)B, \omega(B)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \Rightarrow \ dist(T(t_n)v_n, \omega(B)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como $\omega(B)$ é compacto, podemos extrair subsequência convergente de $\{T(t_n)v_n\}$, pelo Lema 2.1.13.

Para mostrar a recíproca, seja B não vazio, fechado, limitado e positivamente invariante. Então, $\forall t \geq 0, T(t)B \subset B \Rightarrow \bigcup_{t\geq 0} T(t)B \subset B$. Logo, $\bigcup_{t\geq 0} T(t)B$ é limitado.

Queremos encontrar um conjunto $C \subset B$ não vazio, compacto e que atrai B. Mostraremos que $\omega(B)$ satisfaz tais condições.

1. Observe que $T(t)B \subset B \Rightarrow \overline{\bigcup_{t\geq 0} T(t)B} \subset \overline{B} \Rightarrow \omega(B) \subset B$.

2. Mostraremos que $\omega(B)$ é invariante. De fato, dado $y \in \omega(B)$. Existem sequências $\{t_n\}$ com $t_n \to \infty$ e $\{v_n\} \subset B$ tais que $T(t_n)v_n \to y$. Então,

$$T(t)T(t_n)v_n \to T(t)y \Rightarrow T(t_n + t)v_n \to T(t)y \in \omega(B).$$

   Portanto, $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$.

   Para ver que $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$, dados $y \in \omega(B)$ e $t > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t$, para todo $n \geq n_0$. Além disso,

$$T(t_n)v_n \to y \Rightarrow T(t)T(t_n - t)v_n \to y.$$

   Como $t_n - t \to \infty$, $\{v_n\} \subset B$, existe, por hipótese, subsequência $T(t_{n'} - t) \to w \in \omega(B)$. Assim,

$$T(t)T(t_{n'} - t)v_{n'} \to y \;\text{ e }\; T(t)T(t_{n'} - t)v_{n'} \to T(t)w,$$

   o que implica $y = T(t)w \in T(t)\omega(B)$.

3. Sabemos que, para todo $t > 0$, $T(t)\omega(B) = \omega(B)$ e $\omega(B)$ é limitado. Seja $\{y_n\} \subset \omega(B)$ e tome $t_n = n$. Para cada n existe $x_n \in \omega(B)$ tal que $y_n = T(t_n)x_n$. Por hipótese, existe subsequência $T(t_{n'})x_{n'}$ convergente, o que implica $\{y_{n'}\}$ convergente. Logo, $\omega(B)$ é compacto.

4. $\omega(B)$ atrai B segue de forma análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição 2.2.3.

   Assim, temos que $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto. $\square$

2.2.2 Existência de um compacto que atrai

A existência de um conjunto compacto que atrai limitados garante a existência de atrator global para o semigrupo, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 2.2.9 *Um C_0-semigrupo $T(\cdot)$ possui atrator global se, e somente se, existe um compacto $K \subset X$ que atrai limitados de X. Neste caso, $\mathcal{A} = \omega(K)$.*

Demonstração: Se existe um compacto $K \subset X$ que atrai limitados de X então $T(\cdot)$ possui atrator global pela Proposição 2.1.15.

Reciprocamente, suponhamos que $T(\cdot)$ possua atrator global e tomemos

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup \{\omega(B); B \subset X \text{ e } B \text{ é limitado }\}}.$$

Dado $B \subset X$ limitado, como K atrai B, existe $\tau_B > 0$ tal que $\bigcup\limits_{t \geq \tau_B} T(t)B$ é limitado. Repetindo as mesmas ideias da demonstração da Proposição 2.2.2, usando o compacto K ao invés do atrator $\mathcal{A}$, obtemos que $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto. Assim, pela Proposição 2.2.3, $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B. Pela Proposição 2.1.18, $\omega(B) \subset K$.

Mostraremos que $\mathcal{A}$ é o atrator global de $T(\cdot)$ e $\mathcal{A} = \omega(K)$.

1. $\mathcal{A}$ é compacto, pois é fechado e está contido em K.

2. $\mathcal{A}$ atrai limitados, pois dado qualquer $B \subset X$ limitado, B é atraído por $\omega(B)$ e, consequentemente, por $\mathcal{A}$.

3. $\mathcal{A}$ é invariante.

   Dado $x_0 \in \omega(B)$, para algum B limitado, temos $T(t)x_0 \in \omega(B)$, já que $\omega(B)$ é invariante. Logo, $T(t) \bigcup \{\omega(B); B \subset X \text{ é limitado }\} \subset \bigcup \{\omega(B); B \subset X \text{ e limitado }\}$ implica que

   $$T(t)\overline{\bigcup \{\omega(B); B \subset X \text{ e limitado }\}} \subset \overline{\bigcup \{\omega(B); B \subset X \text{ e limitado }\}},$$

   ou seja, $T(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$.

   Por outro lado, dado $x_0 \in \omega(B)$, como $\omega(B)$ é invariante, existe $t > 0$ tal que $T(t)y_0 = x_0$, $y_0 \in \omega(B) \subset \mathcal{A}$. Logo, $\mathcal{A} \subset T(t)\mathcal{A}$ (considerando os mesmos argumentos utilizados acima).

4. $\mathcal{A} = \omega(K)$.

   Como $\omega(K)$ é compacto e invariante, $\mathcal{A}$ atrai $\omega(K)$ e, pela Proposição 2.1.18, $\omega(K) \subset \mathcal{A}$.

□

O teorema anterior pode ser aplicado a problemas práticos. Muitas vezes é possível mostrar a existência de um conjunto compacto no plano de fase que absorve limitados e então a existência de atrator global é garantida.

Reunindo os resultados de existência de atrator global para semigrupos apresentados anteriormente, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.2.10 *Seja $T(\cdot)$ um C_0-semigrupo limitado. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *$T(\cdot)$ possui atrator global.*

2. *$T(\cdot)$ é assintoticamente compacto e ponto dissipativo.*

3. *$T(\cdot)$ é assintoticamente compacto e limitado dissipativo.*

4. *$T(\cdot)$ possui um compacto que atrai limitados.*

Capítulo 3

Atratores de Trajetórias para problemas autônomos

O objetivo neste capítulo é construirmos o atrator de trajetórias de equações de evolução abstratas que não possuem unicidade de solução para o problema de Cauchy correspondente.

Diferentemente do atrator global, o objeto que definiremos como atrator de trajetórias não estará no espaço de fase da equação, mas sim em um espaço cujos elementos são soluções da equação em questão, o qual chamaremos espaço de trajetórias $\mathcal{K}^+$.

Começaremos com o estudo de um problema específico no espaço de fase $\mathbb{R}^n$, para, no próximo capítulo, tratarmos o caso abstrato.

3.1 Atrator de Trajetórias para uma equação em $\mathbb{R}^n$

Consideremos o problema autônomo

$$u'(t) = -F(u(t)),\ t \geq 0, \tag{3.1}$$

onde $u = (u^1, u^2, ..., u^n) \in \mathbb{R}^n$ e $F(u) = (F^1(u), F^2(u), ..., F^n(u)) \in \mathbb{R}^n$ é uma função contínua que satisfaz a seguinte *condição de dissipatividade*: existem constantes $C, \delta > 0$ tais que

$$F(u) \cdot u = \sum_{i=1}^{n} F^i(u)u^i \geq -C + \delta|u|^2,\ \forall u \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

O Teorema de Peano, Teorema 1.1.1, junto com o Teorema 1.1.3 implicam o seguinte resultado:

Teorema 3.1.1 *Para todo* $u_0 \in \mathbb{R}^n$ *existe uma função* $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ *de classe* C^1 *que é uma solução de* (3.1) *satisfazendo a condição* $u(0) = u_0$.

Demonstração: Pelo Teorema de Peano, existe ao menos uma solução $u(t)$ definida em seu intervalo maximal $u : [0, \tau_{max}) \to \mathbb{R}^n$. Mostraremos que a hipótese de dissipatividade irá implicar que $u(t)$ é sempre limitada em $[0, \tau_{max})$. De fato,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u(t)\|^2\right) = \langle u(t), u'(t)\rangle = \langle u(t), -F(u(t))\rangle = -\langle u(t), F(u(t))\rangle \leq C - \delta\|u(t)\|^2.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|^2\right) + 2\delta\|u(t)\|^2 \leq 2C, \ \forall t > 0.$$

Tomando $\gamma = 2\delta$ e $\tilde{C} = 2C$, segue do Lema 1.1.6 que

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 e^{-2\delta t} + \frac{\tilde{C}}{2\delta} = \|u(0)\|^2 e^{-2\delta t} + \frac{C}{\delta}, \ \forall t \geq 0 \tag{3.3}$$

$$\Rightarrow \|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 + \frac{C}{\delta}, \ \forall t \geq 0.$$

Portanto, u é limitada e o Teorema 1.1.3 garante que u está definida em $\mathbb{R}^+$. □

Denotemos por $\mathcal{K}^+$ o subconjunto de $C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ dado por

$$\mathcal{K}^+ = \left\{u \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n); \text{ u é solução de (3.1)}\right\}.$$

Note que, pelo teorema anterior, $\mathcal{K}^+$ é não vazio, isto é, para cada $u_0 \in \mathbb{R}^n$, existe pelo menos uma solução $u(\,\cdot\,, u_0) \in \mathcal{K}^+$.

Definimos o *semigrupo de translação* $T(t) : C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n) \to C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ por

$$T(t)u(s) = u(t+s), \ \forall s, t \geq 0.$$

Proposição 3.1.2 $\mathcal{K}^+$ *é positivamente invariante por* $T(\cdot)$*, ou seja,* $T(t)\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{K}^+, \forall t \geq 0$.

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{K}^+$. É imediato que $T(t)u \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$, por se tratar apenas de uma translação. Resta-nos verificar que $T(t)u$ é solução de (3.1). De fato,

$$\frac{d}{ds}T(t)u(s) = \frac{d}{ds}u(t+s) = -F(u(t+s)) = -F(T(t)u(s)).$$

Portanto, $T(t)\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{K}^+$. □

Podemos então considerar a ação de $T(\cdot)$ em $\mathcal{K}^+$, isto é, $T(t) : \mathcal{K}^+ \to \mathcal{K}^+$.

3.1.1 A Topologia em $\mathcal{K}^+$

Queremos construir o atrator para o semigrupo $T(\cdot)$ restrito ao espaço $\mathcal{K}^+$. Para isso, vamos definir uma topologia em $C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$, que será denotada por θ^+_{loc}.

Definição 3.1.3 *No espaço $C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ definimos a* topologia da convergência uniforme local*, denotada por θ^+_{loc}, e caracterizada da seguinte maneira: uma sequência $\{u_m\} \subset C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ converge para uma função $u \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ se, para todo $T > 0$,*

$$\max_{s\in[0,T]} \|u_m(s) - u(s)\| + \max_{s\in[0,T]} \|u'_m(s) - u'(s)\| \to 0, \ \textit{quando} \ n \to \infty.$$

O conjunto $\mathcal{K}^+$ munido da topologia induzida θ^+_{loc} será denominado *espaço de trajetórias* da equação (3.1).

Exemplo 3.1.4 *Dada $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, satisfazendo $\lim_{s\to+\infty} y(s) = 0$ e $\lim_{s\to+\infty} y'(s) = 0$, se $y_m(s) = y(s+m)$ para $m \geq 1$, então $y_m \to 0$ em θ^+_{loc}, quando $m \to +\infty$.*

Observação 3.1.5 *A topologia θ^+_{loc} é metrizável e o espaço métrico correspondente, $(C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n), d_{\theta^+_{loc}})$, é completo (Veja [4], p.98).*

Dados $K \subset C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ e $T > 0$, indicamos a restrição de K a $[0, T]$ por

$$\begin{aligned}\Pi_{[0,T]}K &= \left\{u|_{[0,T]} : u \in K\right\} \\ &= \left\{\phi \in C^1([0,T], \mathbb{R}^n); \exists u \in K \text{ tal que } \phi = u|_{[0,T]}\right\}.\end{aligned}$$

O teorema a seguir estabelece um critério de compacidade em $(C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n), \theta^+_{loc})$.

Teorema 3.1.6 *$K \subset C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ é compacto em θ^+_{loc} se, e somente se, $\Pi_{[0,T]}K$ é compacto em $C^1([0,T], \mathbb{R}^n)$, para todo $T > 0$.*

Demonstração: Suponhamos K compacto em θ^+_{loc}. Sejam $T > 0$ qualquer e $\{\phi_m\}$ uma sequência em $\Pi_{[0,T]}K$. Logo, existe sequência $\{u_m\} \subset K$ tal que

$$\phi_m = u_m|_{[0,T]}.$$

Como K é compacto, $\{u_m\}$ admite subsequência convergente $u_{m_j} \to u$ em θ^+_{loc}, isto é,

$$\max_{s\in[0,T]} \|u_{m_j}(s) - u(s)\| + \max_{s\in[0,T]} \|u'_{m_j}(s) - u'(s)\| \to 0 \text{ quando } j \to \infty.$$

Denotando $\phi = u|_{[0,T]}$, obtemos

$$\max_{s\in[0,T]} \|\phi_{m_j}(s) - \phi(s)\| + \max_{s\in[0,T]} \|\phi'_{m_j}(s) - \phi'(s)\| \to 0 \text{ quando } j \to \infty$$

$$\Rightarrow \left\|\phi_{m_j} - \phi\right\|_{C^1([0,T],\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ quando } j \to \infty, \ \forall T > 0.$$

Portanto, $\{\phi_m\}$ admite subsequência convergente e $\Pi_{[0,T]}K$ é compacto, $\forall T > 0$.

Suponhamos agora que $\Pi_{[0,T]}K$ seja compacto em $C^1([0,T], \mathbb{R}^n), \forall T > 0$. Dada $\{u_m\} \subset K$, queremos mostrar que esta sequência possui subsequência convergente na topologia θ^+_{loc}.

Seja $\{\tau_m\} \subset \mathbb{R}^+$, $\tau_m \to \infty$ quando $m \to \infty$. Então $\left\{\Pi_{[0,\tau_1]}u_m\right\}$ é uma sequência em $\Pi_{[0,\tau_1]}K$. Como este espaço é compacto, podemos extrair uma subsequência $\left\{\Pi_{[0,\tau_1]}u_{m1}\right\}, m1 \in \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ convergente.

Consideremos $\{u_{m1}\}$ subsequência de $\{u_m\}$ e tomemos $\left\{\Pi_{[0,\tau_2]}u_{m1}\right\} \subset \Pi_{[0,\tau_2]}K$. Pela compacidade deste espaço, segue que existe subsequência convergente $\left\{\Pi_{[0,\tau_2]}u_{m2}\right\}, m2 \in \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$.

Procedendo desta forma, $\left\{\Pi_{[0,\tau_k]}u_{m(k-1)}\right\}$ admite subsequência convergente $\left\{\Pi_{[0,\tau_k]}u_{mk}\right\}$ em $\Pi_{[0,\tau_k]}K$ e $\{u_{mk}\}$ é subsequência de $\left\{u_{m(k-1)}\right\}$.

Tomemos então a subsequência diagonal $\{u_{mm}\}_{m\in\mathbb{N}}$. Dado $T > 0$, tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\tau_k \geq T$. Logo, a sequência $\{u_{mm}\}_{m\geq k}$ converge em $[0,T] \subset [0,\tau_k]$. Como T foi tomado de forma arbitrária, segue que $\{u_{mm}\}$ converge para um limite em K.

Portanto, K é compacto em θ^+_{loc}. $\square$

Proposição 3.1.7 *O semigrupo* $T(t) : (C^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n), \theta^+_{loc}) \to (C^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n), \theta^+_{loc})$ *é contínuo,* $\forall t \geq 0$.

Demonstração: Seja $u_m \to u$ em $(C^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n), \theta^+_{loc})$. Então, para todo $T > 0$, $u_m \to u$ uniformemente em $C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$. Em particular, $u_m \to u$ uniformemente em $C^1([0,T+t],\mathbb{R}^n)$ e, consequentemente, a convergência é uniforme em $C^1([t,T+t],\mathbb{R}^n)$. Assim, para todo $T > 0$ e t fixo,

$$u_m(\cdot) \to u(\cdot) \text{ uniformemente em } [t, T+t]$$

$$\Rightarrow u_m(\cdot + t) \to u(\cdot + t) \text{ uniformemente em } [0, T]$$

$$\Rightarrow T(t)u_m(\cdot) \to T(t)u(\cdot) \text{ uniformemente em } [0, T].$$

Portanto, $T(t)$ é contínuo para cada $t > 0$. □

Como consequência da proposição anterior, temos que o semigrupo $T(\cdot)$ satisfaz $T(t)u \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} u$ em θ^+_{loc}. Logo, $T(\cdot)$ é um C_0-semigrupo.

Proposição 3.1.8 *O espaço de trajetórias* $\mathcal{K}^+$ *é fechado em* $C^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)$ *na topologia* θ^+_{loc}*. Portanto,* $(\mathcal{K}^+, d_{\theta^+_{loc}})$ *é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Seja $\{u_m\} \subset \mathcal{K}^+$ com $u_m \to u$ em θ^+_{loc}. Logo, dado $T > 0$, $u_m \to u$ uniformemente em $C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, com $u \in C^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)$. Devemos verificar apenas que u satisfaz (3.1). Temos, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall T > 0$,

$$\frac{d}{dt}u_m(t) = -F(u_m(t)) \text{ em } [0,T].$$

Da convergência uniforme, segue que $\dfrac{d}{dt}u(t) = -F(u(t))$ para $t \in [0,T]$. Como $T > 0$ é arbitrário, temos $u \in \mathcal{K}^+$. □

Vamos agora caracterizar os subconjuntos limitados $B \subset \mathcal{K}^+$ a fim de estudarmos o comportamento dos conjuntos $T(t)B$ quando $t \to \infty$ na topologia θ^+_{loc}. Consideremos em $C^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)$ o subespaço das funções limitadas, denotado por $C^1_b(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)$ e munido da norma

$$\|u\|_{C^1_b(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)} = \sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{t\geq 0} \|u'(t)\|_{\mathbb{R}^n}. \tag{3.4}$$

A norma (3.4) é chamada *norma da convergência uniforme global* e o espaço $C_b^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ munido desta norma é um espaço de Banach.

Diremos que um conjunto B contido em $\mathcal{K}^+$ é *limitado* se $\|u\|_{C_b^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)} < \infty, \forall u \in B$.

Proposição 3.1.9 *O espaço de trajetórias $\mathcal{K}^+$ está contido em $C_b^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$. Ou seja, todas as soluções de* (3.1) *são limitadas com respeito à norma* (3.4).

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{K}^+$. Sabemos de (3.3) que

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 e^{-2\delta t} + \frac{C}{\delta} \leq \|u(0)\|^2 + \frac{C}{\delta} = M_1, \forall t \geq 0.$$

Resta então limitar $\|u'(t)\|$. Como $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é contínua, existe uma função crescente $C_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\|F(v)\| \leq C_1(R), \forall v \in B(0, R) \subset \mathbb{R}^n.$$

Como $\|u(t)\|^2 \leq M_1$, temos

$$\|u'(t)\|^2 = \|F(u(t))\|^2 \leq \left[C_1\left(\sqrt{M_1}\right)\right]^2 = M_2, \forall t \geq 0.$$

Assim,

$$\|u\|_{C_b^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)} = \sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{t\geq 0} \|u'(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_1 + M_2 < \infty.$$

Portanto, $u \in C_b^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$. $\square$

Corolário 3.1.10 *O conjunto*

$$B_0 = \left\{u \in C_b^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n); \|u(t)\|^2 \leq \frac{2C}{\delta} \text{ e } \|u'(t)\|^2 \leq C_1\left(\frac{2C}{\delta}\right)\right\} \cap \mathcal{K}^+$$

é absorvente para o semigrupo $T(\cdot)$ restrito a $\mathcal{K}^+$, ou seja, dado $B \subset \mathcal{K}^+$ limitado em $C_b^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ existe $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)B \subset B_0$, para todo $t \geq t_0$.

Demonstração: Seja $B \subset \mathcal{K}^+$ limitado em $C_b^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$. Dado $u \in B$ temos

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 e^{-2\delta t} + \frac{C}{\delta} \text{ e } \|u'(t)\|^2 \leq C_1\left(\|u(0)\|^2 e^{-2\delta t} + \frac{C}{\delta}\right).$$

Pela Proposição 3.1.9, u é limitado, logo existe $M > 0$ tal que $\|u(0)\| \leq M$.

Tomando h suficientemente grande tal que

$$\|T(h)u(t)\|^2 = \|u(t+h)\|^2 \leq M^2 e^{-2\delta(t+h)} + \frac{C}{\delta} \leq \frac{2C}{\delta}, \forall t \geq 0,$$

concluímos que $T(t)B \subset B_0, \forall t \geq h$. Logo, B_0 é absorvente. □

Note que não foi necessário utilizar a hipótese de que B é limitado na demonstração acima.

Proposição 3.1.11 *O conjunto $B_0 \subset \mathcal{K}^+$ é compacto na topologia θ^+_{loc}.*

Demonstração: Pela Proposição 3.1.6 é suficiente mostrar que $\Pi_{[0,T]}B_0$ é compacto, para qualquer $T > 0$. Seja $\{u_m\} \subset \Pi_{[0,T]}B_0$. Então

$$\max_{s\in[0,T]} \|u_m(s)\| + \max_{s\in[0,T]} \|u_m'(s)\| \leq \sqrt{\frac{2C}{\delta}} + \sqrt{C_1\left(\frac{2C}{\delta}\right)} = M,$$

ou seja, $\{u_m\}$ é uniformemente limitada em $C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$. Segue da Desigualdade do Valor Médio que

$$\|u_m(s) - u_m(t)\| \leq \sup_{\theta\in[0,1]} \|u_m'(\theta s + (1-\theta)t)\|\,|s-t| \leq M|s-t|, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $\{u_m\}$ é equicontínua. Como consequência do Teorema de Arzelà-Ascoli, Teorema 1.2.1, $\{u_m\}$ admite subsequência uniformemente convergente, a qual denotaremos por

$$u_{mj} \to u_0 \text{ em } C([0,T],\mathbb{R}^n).$$

Devemos mostrar que $u_0 \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$. Como $u_{mj} \to u_0$ uniformemente em $[0,T]$ e F é contínua, temos $-F(u_{mj}(t)) \to -F(u_0(t)), \forall t \in [0,T]$. Além disso,

$$\frac{d}{dt}u_{mj}(t) = -F(u_{mj}(t)),\ \forall t \in [0,T].$$

Logo, $\left\{\frac{d}{dt}u_{mj}\right\}$ é convergente em $[0,T]$ e $\lim_{j\to\infty}\frac{d}{dt}u_{mj} = \frac{d}{dt}u_0$, já que $u_{mj} \to u_0$ uniformemente em $[0,T]$. Portanto, $u_0 \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Logo, $\overline{\Pi_{[0,T]}B_0}$ é compacto em $C^1([0,T],\mathbb{R}^n), \forall T > 0$. Resta mostrar que $\Pi_{[0,T]}B_0$ é fechado em $C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Dada uma sequência $\{u_m\} \subset \Pi_{[0,T]} B_0$ tal que $u_m \to u_0$ em $C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, segue que u_0 satisfaz

$$u_0'(t) = -F(u_0(t)),\ \|u_0(t)\|^2 \leq \frac{2C}{\delta},\ \|u_0'(t)\|^2 \leq C_1\left(\frac{2C}{\delta}\right),\ \forall t \in [0,T].$$

Queremos encontrar $v_0 \in B_0$ tal que $u_0 = v_{0|_{[0,T]}}$. Uma vez que $\{u_m\} \subset \Pi_{[0,T]} B_0$, existe $\{v_m\} \subset B_0$ tal que

$$u_m = v_{m|_{[0,T]}}.$$

Seja $\{\tau_k\} \subset \mathbb{R}^+$ uma sequência tal que $\tau_k \to \infty$ quando $k \to \infty$. Fixando τ_1 e considerando a sequência $\{u_m^1\}$, onde $u_m^1 = v_{m|_{[0,T+\tau_1]}}$, com argumentos análogos aos utilizados no início desta demonstração, segue que $\{u_m^1\}$ é uniformemente limitada e equicontínua. Portanto, existe subsequência uniformemente convergente

$$u_{m,1}^1 \to u_1 \text{ em } C^1([0,T+\tau_1],\mathbb{R}^n).$$

Além disso, $u_{1|_{[0,T]}} = u_0$, pela unicidade do limite, e

$$\|u_1(t)\|^2 \leq \frac{2C}{\delta},\quad \|u_1'(t)\|^2 \leq C_1\left(\frac{2C}{\delta}\right),\quad \forall t \in [0,T+\tau_1].$$

Considerando $\{v_{m,1}\}$ restrita a $[0,T+\tau_2]$, podemos extrair subsequência $\{v_{m,2}\}$ tal que

$$u_{m,2}^2 := v_{m,2|_{[o,T+\tau_2]}} \to u_2 \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n),$$

com u_2 satisfazendo as mesmas limitações acima, porém no intervalo $[0,T+\tau_2]$ e $u_{2|_{[0,T]}} = u_0$.

Procedendo dessa forma e tomando a sequência diagonal $\{v_{k,k|_{[0,T+\tau_k]}}\}$, obtemos

$$v_{k,k} \to v_0 \in B_0 \text{ e } v_{0|_{[0,T]}} = u_0.$$

□

Acabamos de mostrar que B_0 é um subconjunto de $(\mathcal{K}^+, \theta_{loc}^+)$ que é compacto e absorvente em relação ao C_0-semigrupo $T(\cdot) : \mathcal{K}^+ \to \mathcal{K}^+$. Logo, pelo Teorema 2.2.9, $T(\cdot)$ possui atrator global.

3.2 Construção e Caracterização do Atrator de Trajetórias

Vamos definir o atrator de trajetórias do semigrupo de translação $T(\cdot)$ agindo no espaço de trajetórias $\mathcal{K}^+$ da equação (3.1).

Definição 3.2.1 *Um conjunto* $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}^+$ *é um* atrator de trajetórias *para a equação* (3.1) *se:*

1. $\mathcal{U}$ *é compacto em* θ^+_{loc}
2. $\mathcal{U}$ *é invariante pelo semigrupo de translação* $T(\cdot)$
3. $\mathcal{U}$ *atrai limitados de* $\mathcal{K}^+$*, isto é, se* $B \subset \mathcal{K}^+$ *é limitado em* $C^1_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$*, então*

$$dist_{C^1([0,T],\mathbb{R}^n)}(T(t)B, \mathcal{U}) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall T > 0,$$

onde

$$\begin{aligned} dist_{C^1([0,T],\mathbb{R}^n)}(T(t)B, \mathcal{U}) &= \sup_{v\in T(t)B} \inf_{u\in\mathcal{U}} d_{C^1([0,T],\mathbb{R}^n)}(v, u) \\ &= \sup_{v\in T(t)B} \inf_{u\in\mathcal{U}} \left\{ \max_{s\in[0,T]} \|v(s) - u(s)\| + \max_{s\in[0,T]} \|v'(s) - u'(s)\| \right\}. \end{aligned}$$

Proposição 3.2.2 *A equação* (3.1) *com a condição de dissipatividade* (3.2) *admite atrator de trajetórias* $\mathcal{U}$*.*

Demonstração: Já vimos que o semigrupo $T(\cdot) : \mathcal{K}^+ \to \mathcal{K}^+$ possui atrator global $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}^+$ tal que $\mathcal{U}$ é compacto em θ^+_{loc}, $\mathcal{U}$ é invariante por $T(\cdot)$ e $\mathcal{U}$ atrai limitados de $\mathcal{K}^+$. Logo, tal atrator satisfaz todos os itens da Definição 3.2.1. Portanto, $\mathcal{U}$ é o atrator de trajetórias de (3.1). □

Observemos que $\mathcal{U} \subset B_0$, já que $\mathcal{U}$ é compacto e invariante e B_0 absorve limitados.

Consideremos agora o problema

$$u'(t) = -F(u(t)),\ \ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

onde u e F são como em (3.1).

Definição 3.2.3 *Uma função* $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *é uma* trajetória completa *da equação* (3.5) *se* u *é uma solução de* (3.5).

Dizemos que uma trajetória completa é limitada *se existe* $C_u > 0$ *tal que*

$$\|u(t)\| \leq C_u \quad e \quad \|u'(t)\| \leq C_u, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

isto é, $u \in C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

O conjunto de todas as trajetórias completas e limitadas de (3.5) *é chamado de* núcleo *e é denotado por*

$$\mathcal{K} = \left\{ u(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) |\, u(\cdot) \text{ satisfaz } (3.5) \right\}.$$

Denotamos por $\Pi_+ u$ a restrição a $\mathbb{R}^+$ de uma função u definida em $\mathbb{R}$.

Observação 3.2.4 *É válida a inclusão* $\Pi_+\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^+$*, mas a igualdade pode não valer pois pode existir* $v \in \mathcal{K}^+$ *tal que não existe* $u \in \mathcal{K}$ *onde* $u_{|[0,\infty)} = v$.

Suporemos que o espaço $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ está munido da topologia θ_{loc}, a qual é caracterizada da seguinte forma: uma sequência $\{u_m\} \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ converge para uma função $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ se, para todo $T > 0$,

$$\max_{s \in [-T,T]} \|u_m(s) - u(s)\| + \max_{s \in [-T,T]} \|u'_m(s) - u'(s)\| \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Teorema 3.2.5 *Sob as hipóteses do Teorema 3.2.2 , temos*

$$\mathcal{U} = \Pi_+\mathcal{K}.$$

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{K}$. Pela definição de $\mathcal{K}$, $\Pi_+ u \in \mathcal{K}^+$ e $\Pi_+ u(\cdot + h) \in \mathcal{K}^+, \forall h \in \mathbb{R}$. Consideremos o conjunto

$$B = \{\Pi_+ u(\cdot + h); h \in \mathbb{R}\}.$$

Como u é limitado em $C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, B é limitado. Portanto, $T(t)B \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{U}$ em θ_{loc}^+. Mas, $T(t)B = B, \forall t \geq 0$. Logo, $B \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{U}$ em θ_{loc}^+. Já que $\mathcal{U}$ é fechado, temos $B \subset \mathcal{U}$. Logo, $\mathcal{U} \supset \Pi_+\mathcal{K}$.

Por outro lado, seja $u_0 \in \mathcal{U}$. Segue da invariância de $\mathcal{U}$ que existe $u_{-1}(\cdot) \in \mathcal{U}$ tal que

$$T(1)u_{-1}(s) = u_0(s), \quad \text{ou seja} \quad u_{-1}(s+1) = u_0(s), \ s \geq 0.$$

Denotemos por $\overline{u}(s) = u_{-1}(s+1), s \geq -1$. Então $\overline{u}$ satisfaz (3.5) e (3.6) para $s \geq -1$, pois $u_{-1} \in \mathcal{U} \subset \mathcal{K}^+$. Além disso, $\Pi_+\overline{u}(s) = u_0(s)$.

Novamente pela invariância de $\mathcal{U}$, existe $u_{-2}(\cdot) \in \mathcal{U}$ tal que

$$T(1)u_{-2}(s) = u_{-1}(s), s \geq -1 \text{ e } T(2)u_{-2}(s) = u_0(s), s \geq 0.$$

Redefinindo $\overline{u}(s) = u_{-2}(s), s \geq -2$, segue que $\overline{u}$ satisfaz (3.5) e (3.6) para $s \geq -2$ e $\Pi_+\overline{u}(s) = u_0(s)$.

Repetindo este processo, obtemos uma função $\overline{u}(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ satisfazendo (3.5) e (3.6) para $s \in \mathbb{R}$ e $\Pi_+\overline{u}(s) = u_0(s)$. Logo, $\mathcal{U} \subset \Pi_+K$. □

Teorema 3.2.6 *O conjunto $\mathcal{K}$ é limitado em $C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e compacto na topologia θ_{loc}.*

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{K}$. Pelo Teorema 3.2.5, temos $\Pi_+u(\cdot) \in \mathcal{U}$. Logo, $\Pi_+u(\cdot + h) \in \mathcal{U}, \forall h \in \mathbb{R}$, já que o problema é autônomo. Assim, $u_{|_{[-h,\infty)}} \in \mathcal{U}, \forall h \in \mathbb{R}$. Como $\mathcal{U} \subset B_0$, dado $s \in \mathbb{R}$ e tomando h suficientemente grande tal que $s \in [-h, \infty)$, temos

$$\|u(s)\| \leq \frac{2C}{\delta} \quad \text{e} \quad \|u'(s)\| \leq C_1\left(\frac{2C}{\delta}\right).$$

Portanto, $\mathcal{K}$ é limitado em $C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Para mostrarmos que $\mathcal{K}$ é compacto na topologia θ_{loc}, basta mostrarmos que $\Pi_{[-M,M]}\mathcal{K}$ é compacto em $C^1([-M, M], \mathbb{R}^n)$, para todo $M > 0$. Como $\Pi_+\mathcal{K} = \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}$ é compacto em θ_{loc}^+, então $\Pi_{[0,2M]}\mathcal{K}$ é compacto em $C^1([0, 2M], \mathbb{R}^n)$ e, sendo $T(-M)$ contínua,

$$T(-M)\Pi_{[0,2M]}\mathcal{K} = \Pi_{[-M,M]}\mathcal{K}$$

é compacto em $C^1([-M, M], \mathbb{R}^n)$. Portanto, $\mathcal{K}$ é compacto em θ_{loc}^+. □

Corolário 3.2.7 *Para todo $u \in \mathcal{K}$ as seguintes estimativas são válidas:*

$$\|u(t)\| \leq \frac{2C}{\delta} \quad e \quad \|u'(t)\| \leq C_1\left(\frac{2C}{\delta}\right).$$

Portanto, $\mathcal{K} \subset C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Qualquer conjunto da forma

$$B_{0,\varepsilon} = \left\{ u \in C_b^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n); \|u(t)\|^2 \leq \frac{2C}{\delta} + \varepsilon \text{ e } \|u'(t)\|^2 \leq C_1 \left(\frac{2C}{\delta} + \varepsilon \right) \right\} \cap \mathcal{K}^+$$

é absorvente para o semigrupo $T(t) : \mathcal{K}^+ \to \mathcal{K}^+$ (veja demonstração do Corolário 3.1.10).

Assim, usando o mesmo argumento apresentado no teorema anterior para provar que $\mathcal{K}$ é limitado, segue que

$$\|u(t)\| \leq \frac{2C}{\delta} + \varepsilon \;\text{ e }\; \|u'(t)\| \leq C_1 \left(\frac{2C}{\delta} + \varepsilon \right), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Da arbitrariedade de ε, segue o resultado. □

Proposição 3.2.8 *Qualquer solução* $\{u(t)\}_{t \geq 0}$ *de* (3.1) *pode ser aproximada por um número finito de soluções de* (3.1) *que estão no atrator de trajetórias* $\mathcal{U}$.

Demonstração: Sejam $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno e $T > 0$ arbitrariamente grande. Temos $\Pi_{[0,T]}\mathcal{U}$ compacto em $C^1([0,T], \mathbb{R}^n)$, logo existem funções

$$u_1(s), u_2(s), ..., u_k(s) \in \mathcal{U}, \;\; k = k(\varepsilon, T), \;\; s \in [0, T]$$

tais que as ε-vizinhanças das funções u_i cobrem $\Pi_{[0,T]}\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U} = \Pi_+\mathcal{K}$, tais funções podem ser estendidas a trajetórias completas limitadas.

Seja $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ uma solução de (3.1), a qual já provamos ser limitada devido à condição de dissipatividade. Logo,

$$T(t)u(s) = u(s+t) \to \mathcal{U} \;\;\text{ quando }\; t \to \infty, \, \forall s \in [0,T].$$

Assim, existe $m_1 = m_1(\varepsilon, T)$ tal que $u(t+s) \in \mathcal{N}(\mathcal{U}, \varepsilon)$, $\forall t \geq m_1 T, \forall s \in [0,T]$. Portanto, se $t \geq m_1 T$, podemos escolher $k_M \in \{1, ..., k\}$ tal que

$$\|u(t+s) - u_{k_M}(s)\| < \varepsilon \;\text{ e }\; \left\|u'(t+s) - u'_{k_M}(s)\right\| < \varepsilon, \;\forall s \in [0,T],$$

ou ainda, $\forall m > m_1$,

$$\|u(mT+s) - u_{k_M}(s)\| < \varepsilon \;\text{ e }\; \left\|u'(mT+s) - u'_{k_M}(s)\right\| < \varepsilon, \;\forall s \in [0,T].$$

□

3.2.1 Atrator de Trajetórias e Atrator Global

Consideremos o problema (3.5), em que F satisfaz a condição de dissipatividade (3.2) e é localmente Lipschitz. Dado $u_0 \in \mathbb{R}^n$, o problema (3.5) com a condição inicial $u(0) = u_0$ admite solução única, o que define o semigrupo

$$S(t)u_0 = u(t, u_0).$$

Sabemos que

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 e^{-2\delta t} + \frac{C}{\delta}.$$

Segue então que o conjunto $P = \left\{ v \in \mathbb{R}^n ; \|v\|^2 \leq \frac{2C}{\delta} \right\}$ é compacto e absorvente para o semigrupo $S(\cdot)$. Logo, (3.5) admite atrator global $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ e atrator de trajetórias $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}^+$, onde $\mathcal{U} = \Pi_+ \mathcal{K}$.

Denotamos por $\mathcal{K}(t)$ a seguinte seção do núcleo $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K}(t) = \{u(t);\ u(\cdot) \in \mathcal{K}\}.$$

O próximo teorema apresenta uma relação entre o atrator global e o atrator de trajetórias.

Teorema 3.2.9 *Suponhamos que F satisfaça* (3.2) *e seja localmente Lipschitz. Se $\mathcal{A}$ é o atrator global e $\mathcal{U}$ é o atrator de trajetórias de* (3.5)*, então*

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}(0) = \mathcal{U}(0).$$

Demonstração: Seja $v \in \mathcal{K}$. Como v é solução de (3.5) e $v \in C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, segue que o conjunto

$$B = \{v(s); s \in \mathbb{R}\}$$

é limitado e invariante por $S(\cdot)$. Pela invariância, $B = S(t)B$, temos

$$dist(B, \mathcal{A}) = \lim_{t\to\infty} dist(B, \mathcal{A}) = \lim_{t\to\infty} dist(S(t)B, \mathcal{A}) = 0.$$

Como $\mathcal{A}$ é fechado, então $B \subset \mathcal{A}$.

Logo, $v(t) \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, $v(0) \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{K}(0) \subset \mathcal{A}$.

Agora, seja $x \in \mathcal{A}$. Pela invariância de $\mathcal{A}$, podemos construir uma solução $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que $u(0) = x$ e u é limitada, pois $\mathcal{A}$ é compacto. Logo, $x = u(0) \in \mathcal{K}(0) \Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{K}(0)$. $\square$

Observação 3.2.10 *A demonstração do teorema acima implica que* $\mathcal{A} = \mathcal{K}(t), \forall t \in \mathbb{R}$*, o que por sua vez implica*

- $\mathcal{K}(0) = \mathcal{K}(t), \forall t \in \mathbb{R}.$
- $\mathcal{A} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{K}(t) =$ *a união das órbitas das soluções globais limitadas.*

Capítulo 4

Atrator de Trajetórias (caso abstrato)

Na primeira seção deste capítulo estudaremos a existência do $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$-atrator de semigrupos agindo em um espaço de Hausdorff. Nas demais seções construiremos o atrator de trajetórias para equações de evolução abstratas.

4.1 Atratores em Espaços de Hausdorff

Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto. Consideremos em X uma topologia ρ e uma métrica μ qualquer em X. Denotemos por $\mathcal{T}$ o espaço topológico (X, ρ) e por $\mathcal{M}$ o espaço métrico (X, μ).

Nosso objetivo é provar a existência do $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$-atrator $\mathcal{A}$ do semigrupo $S(\cdot)$ agindo no espaço topológico de Hausdorff $\mathcal{T}$.

Definição 4.1.1 *Seja $\mathcal{B}(\mathcal{M}) = \{B \subset X; B$ é limitado na métrica $\mu\}$. Dizemos que um conjunto $P \subset X$ é um $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$-* atrator de limitados *se, para todo $B \subset \mathcal{B}(\mathcal{M})$,*

$$S(t)B \to P \text{ na topologia } \rho, \text{ quando } t \to \infty.$$

Definição 4.1.2 *Dizemos que um conjunto $\mathcal{U} \subset X$ é o $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$-* atrator *do semigrupo $S(\cdot)$ se*

1. *$\mathcal{U}$ é compacto na topologia ρ e limitado na métrica μ.*

2. *$S(t)\mathcal{U} = \mathcal{U}, \forall t \geq 0$.*

3. *$\mathcal{U}$ é o compacto minimal em (X, ρ) que $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$-atrai limitados.*

Segue da definição acima que se o $(\mathcal{M},\mathcal{T})$-atrator existe, então ele é único.

Definição 4.1.3 *Uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to X$ é uma* trajetória completa *para o semigrupo $S(\cdot)$ se*

$$S(t)\gamma(s) = \gamma(t+s),\ \forall s \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Uma trajetória completa é limitada *se o conjunto $\mathcal{B}_\gamma = \{\gamma(s)|s \in \mathbb{R}\}$ é limitado em $\mathcal{M}$, isto é, $\mathcal{B}_\gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$.*

Definição 4.1.4 *O* núcleo *$\mathcal{K}$ do semigrupo $S(\cdot)$ em $\mathcal{M}$ é a união de todas as trajetórias completas e limitadas (em $\mathcal{M}$). A* seção do núcleo *no momento t é dada por*

$$\mathcal{K}(t) = \{\gamma(t); \gamma \in \mathcal{K}\}.$$

A demonstração do Teorema a seguir segue as mesmas ideias das demonstrações dos Teoremas 2.2.9 e 3.2.9.

Teorema 4.1.5 *Suponhamos que $S(\cdot)$ seja um semigrupo contínuo agindo no espaço de Hausdorff $\mathcal{T}$ e possuindo um $(\mathcal{M},\mathcal{T})$-atrator de limitados $K \subset X$, com K compacto em $\mathcal{T}$ e limitado em $\mathcal{M}$. Então $S(\cdot)$ possui um $(\mathcal{M},\mathcal{T})$-atrator $\mathcal{A} \subset K$. Além disso,*

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}(0),$$

onde $\mathcal{K}$ é o núcleo de $S(\cdot)$.

4.2 Atrator de Trajetórias para uma equação autônoma abstrata

Consideremos o problema de evolução autônomo

$$\partial_t u = A(u(t)),\ \ t \geq 0, \tag{4.1}$$

onde $A(\cdot) : E_1 \to E_0$ é um operador diferencial e E_1 e E_0 são espaços de Banach com $E_1 \subset E_0$.

Seja E um espaço de Banach tal que $E_1 \subset E \subset E_0$. Denotamos por $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}(0,T,E), T > 0$, um espaço de Banach que consiste de um conjunto de funções $f : [0,T] \to E$.

Assumiremos que os seguintes fatos ocorrem:

(H_1): Se $u \in \mathcal{F}(0, T, E_1)$ então $A(u(t)) \in \mathcal{F}(0, T, E_0)$ para $0 \leq t \leq T$ e $\mathcal{F}(0, T, E) \subset \mathcal{F}(0, T, E_0)$.

(H_2): A derivada $\partial_t u$ é uma distribuição com valores em E_0, isto é,

$$\partial_t u \in \mathcal{D}'((0, T), E_0) \text{ e } \mathcal{F}(0, T, E_0) \subset \mathcal{D}'((0, T), E_0).$$

Como exemplos para o conjunto $\mathcal{F}(0, T, E)$, temos

1. $\mathcal{F}(0, T, E) = C([0, T], E)$ o espaço das funções contínuas definidas em $[0, T]$ com a norma

$$\|f\|_{C([0,T],E)} = \sup_{s \in [0,T]} \|f(s)\|_E$$

é um espaço de Banach. Além disso, pela Proposição 1.4.8

$$C([0, T], E) \subset L^1(0, T, E) \subset \mathcal{D}'((0, T), E_0).$$

2. $\mathcal{F}(0, T, E) = L^p(0, T, E) = \left\{ f : [0, T] \to E : \int_0^T \|f\|_E^p ds < \infty \right\}$. Tal espaço é Banach com a norma

$$\|f\|_{L^p(0,T,E)} = \left[\int_0^T \|f\|_E^p ds \right]^{\frac{1}{p}}$$

e $L^p(0, T, E) \subset \mathcal{D}'((0, T), E_0)$.

Definição 4.2.1 *Uma função $u \in \mathcal{F}(0, T, E)$ é uma* solução fraca *de* (4.1) *em* $[0, T]$ *se satisfaz* (4.1) *no sentido distribucional em $\mathcal{D}'((0, T), E_0)$, isto é, $u \in \mathcal{F}(0, T, E)$ é solução fraca de* (4.1) *se*

$$\int_0^T u(t) \partial_t \varphi(t) dt = - \int_0^T A(u(t)) \varphi(t) dt, \ \forall \varphi \in C_C^\infty((0, T), E).$$

Consideremos o conjunto

$$\mathcal{F}^+ = \left\{ u : \mathbb{R}^+ \to E ; \Pi_{[0,T]} u \in \mathcal{F}(0, T, E), \forall T > 0 \right\}.$$

Definição 4.2.2 *Uma função $u \in \mathcal{F}^+$ é uma* solução fraca global *de* (4.1) *se* $\Pi_{[0,T]} u \in \mathcal{F}(0, T, E)$ *é uma solução fraca de* (4.1) *em* $[0, T], \forall T > 0$.

Denotamos por $\mathcal{K}^+$ o subconjunto de $\mathcal{F}^+$ formado pelas soluções fracas globais de (4.1):

$$\mathcal{K}^+ = \left\{u \in \mathcal{F}^+; u \text{ é solução fraca global de (4.1) } \right\}$$

e os elementos de $\mathcal{K}^+$ são denominados *trajetórias*.

Seja $T(t) : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{F}^+$ o semigrupo de translação dado por

$$T(t)u(s) = u(t+s), \ \forall s, t \geq 0.$$

Considerando $T(\cdot)$ restrito a $\mathcal{F}_T$ com $0 \leq t \leq T$, obtemos

$$T(t) : \mathcal{F}_T \to \mathcal{F}_{T-t}.$$

Assumimos as seguintes hipóteses:

(H_3): A aplicação $T(t) : \mathcal{F}_T \to \mathcal{F}_{T-t}$ é contínua $\forall\, 0 \leq t \leq T$.

(H_4): $\|T(t)u\|_{\mathcal{F}_{T-t}} \leq \|u\|_{\mathcal{F}_T}, \forall\, 0 \leq t \leq T$.

(H_5): $T(t)\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{K}^+, \forall t \geq 0$, ou seja, se u é uma solução fraca global de (4.1), então $T(t)u$ também o é.

4.2.1 A Topologia em $\mathcal{F}^+$

Introduziremos uma topologia em $\mathcal{F}^+$ a fim de estudar as propriedades de atração que o semigrupo de translação $T(\cdot)$ exerce sobre subconjuntos de $\mathcal{K}^+$.

Para isso, consideramos as topologias de $\mathcal{F}(0, T, E)$, para $T > 0$, e a topologia em $\mathcal{F}^+$ será dada de forma indutiva por essas topologias locais.

(H_6): Suponhamos que $\mathcal{F}(0, T, E)$ esteja munido de uma topologia θ_T de forma que $(\mathcal{F}_T, \theta_T)$ seja Hausdorff, E_2 e Fréchet-Urysohn.

Alguns exemplos de topologias θ_T em $\mathcal{F}_T$ são a topologia forte, fraca e fraca*.

Definição 4.2.3 *Definimos a topologia θ_{loc}^+ em $\mathcal{F}^+$ da seguinte forma: uma sequência $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+$ converge a $f \in \mathcal{F}^+$ em θ_{loc}^+ se, e somente se,*

$$\Pi_{[0,T]} f_m \to \Pi_{[0,T]} f \ \text{ em } \theta_T, \ \forall T > 0.$$

Observação 4.2.4 *$(\mathcal{F}^+, \theta^+_{loc})$ é Hausdorff, E_2 e Fréchet-Urysohn (Veja [4], $p.221$).*

Teorema 4.2.5 *$T(\cdot) : (\mathcal{F}^+, \theta^+_{loc}) \to (\mathcal{F}^+, \theta^+_{loc})$ é contínuo, para todo $T > 0$.*

Demonstração: Como $(\mathcal{F}^+, \theta^+_{loc})$ é Fréchet-Urysohn, é suficiente mostrar que se $u_m \to u$ em $(\mathcal{F}^+, \theta^+_{loc})$ então $T(t)u_m \to T(t)u$ em $(\mathcal{F}^+, \theta^+_{loc})$ (Veja Teorema 1.2.11).

Seja então $u_m \to u$ em $(\mathcal{F}^+, \theta^+_{loc})$. Então, para todo $T > 0$,

$$\Pi_{[0,T+t]}u_m(\cdot) \to \Pi_{[0,T+t]}u(\cdot) \text{ em } \theta_{T+t}.$$

Por H_3, $T(t) : (\mathcal{F}_{T+t}, \theta_{T+t}) \to (\mathcal{F}_T, \theta_T)$ é contínua. Logo,

$$T(t)\Pi_{[0,T+t]}u_m(\cdot) \to T(t)\Pi_{[0,T+t]}u(\cdot) \text{ em } \theta_T$$

$$\Rightarrow \Pi_{[0,T]}T(t)u_m(\cdot) \to \Pi_{[0,T]}T(t)u(\cdot) \text{ em } \theta_T, \forall T \geq 0.$$

Portanto, $T(t)u_m(\cdot) \to T(t)u(\cdot)$ em θ^+_{loc}. □

Vamos agora caracterizar os compactos de $(\mathcal{F}^+, \theta^+_{loc})$.

Teorema 4.2.6 *Um subconjunto $K \subset \mathcal{F}^+$ é compacto na topologia θ^+_{loc} se, e somente se, $\Pi_{[0,T]}K$ é compacto em $(\mathcal{F}_T, \theta_T), \forall T \geq 0$.*

Demonstração: Como θ_T e θ^+_{loc} são Hausdorff e E_2, a compacidade e a compacidade sequencial são equivalentes (Veja Teorema 1.2.13). Desta forma, a demonstração deste teorema é análoga à demonstração do Teorema 3.1.6. □

Definamos o espaço

$$\mathcal{F}^+_b = \{u \in \mathcal{F}^+; \|u\|_{\mathcal{F}^+_b} < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_{\mathcal{F}^+_b} = \sup_{h \geq 0} \|\Pi_{[0,1]}f(h + \cdot)\|_{\mathcal{F}(0,1,E)}. \tag{4.2}$$

Proposição 4.2.7 *$(\mathcal{F}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}^+_b})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $\{f_m\} \subset \mathcal{F}_b^+$ tal que $f_m \to f$ na topologia gerada pela métrica induzida da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+}$. Devemos mostrar que $f \in \mathcal{F}_b^+$. Suponha, por absurdo, que $\|f\|_{\mathcal{F}_b^+} = \infty$. Logo, para cada $M \geq 0$, existem $h_M > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\|\Pi_{[0,1]} f(h_M + \cdot)\|_{\mathcal{F}_1} \geq M + \varepsilon,$$

onde $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(0, 1, E)$. Como $f_m \to f$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = n_0(\varepsilon)$) tal que $\forall h \geq 0$,

$$\|\Pi_{[0,1]} f(h + \cdot) - \Pi_{[0,1]} f_{n_0}(h + \cdot)\|_{\mathcal{F}_1} \leq \varepsilon.$$

Em particular, para $h = h_M$,

$$\|\Pi_{[0,1]} f(h_M + \cdot)\|_{\mathcal{F}_1} - \|\Pi_{[0,1]} f_{n_0}(h_M + \cdot)\|_{\mathcal{F}_1} \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \|\Pi_{[0,1]} f_{n_0}(h_M + \cdot)\|_{\mathcal{F}_1} \geq M \Rightarrow \|f_{n_0}\|_{\mathcal{F}_b^+} \geq M.$$

Logo, como M foi tomado arbitrariamente, segue que $\|f_{n_0}\|_{\mathcal{F}_b^+} = \infty$. Absurdo. $\square$

(H_7) : Suponhamos que o espaço de trajetórias $\mathcal{K}^+$ de (4.1) satisfaça

$$\mathcal{K}^+ \neq \emptyset \ \text{ e } \ \mathcal{K}^+ \subset \mathcal{F}_b^+ \subset \mathcal{F}^+,$$

isto é, se $u(\cdot)$ é solução fraca global de (4.1), então u é limitada na norma dada em (4.2).

O espaço $(\mathcal{F}_b^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+})$ será usado para denifir os conjuntos limitados que serão atraídos pelo atrator sob a ação do semigrupo.

Como exemplos para os conjuntos $\mathcal{F}^+$ e $\mathcal{F}_b^+$, temos

1. $\mathcal{F}^+ = C(\mathbb{R}^+, E), \mathcal{F}_b^+ = C_b(\mathbb{R}^+, E)$ com a norma

$$\|f\|_{\mathcal{F}_b^+} = \sup_{s\geq 0} \|f(s)\|_E = \sup_{h\geq 0} \|\Pi_{[0,1]} f(h + s)\|_E.$$

2. $\mathcal{F}^+ = L^p_{loc}(\mathbb{R}^+, E), \mathcal{F}_b^+ = L^p_b(\mathbb{R}^+, E)$, onde

$$L^p_b(\mathbb{R}^+, E) = \left\{ u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+, E); \sup_{h\geq 0} \left[\int_h^{h+1} \|f(s)\|_E^p ds \right]^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

4.3 Construção e Caracterização do Atrator de Trajetórias

Definição 4.3.1 *Um subconjunto $P \subset \mathcal{K}^+$ é um* conjunto atrator de limitados *se, para qualquer $B \subset \mathcal{K}^+$ limitado em $\mathcal{F}_b^+$,*

$$T(t)B \to P \ \textit{na topologia} \ \theta_{loc}^+, \ \textit{quando} \ t \to \infty.$$

Definição 4.3.2 *Um subconjunto $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}^+$ é o* atrator de trajetórias *para a equação* (4.1) *se:*

1. *$\mathcal{U}$ é compacto na topologia θ_{loc}^+ e limitado em $(\mathcal{F}_b^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+})$.*

2. *$T(t)\mathcal{U} = \mathcal{U}, \forall t \geq 0$.*

3. *$\mathcal{U}$ é o compacto minimal em $(\mathcal{K}^+, \theta_{loc}^+)$ que atrai todo $B \subset \mathcal{K}^+$, com B limitado em $\mathcal{F}_b^+$.*

Observação 4.3.3 *Podemos usar a mesma nomenclatura que utilizamos na Seção 4.1, isto é, poderíamos ter chamado de*

$$((\mathcal{K}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+}), (\mathcal{K}^+, \theta_{loc}^+)) - \ \textit{atrator de limitados}$$

na Definição 4.3.1 e

$$((\mathcal{K}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+}), (\mathcal{K}^+, \theta_{loc}^+)) - \ \textit{atrator de trajetórias}$$

na Definição 4.3.2. Esta notação auxilia na compreensão de que a métrica define os limitados e que a topologia exerce a atração.

Indicaremos por $\mathcal{B}(\mathcal{K}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+})$ o conjunto de todos os subconjuntos $B \subset \mathcal{K}^+$, com B limitado em $(\mathcal{F}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+})$.

Teorema 4.3.4 *Suponhamos que $(\mathcal{K}^+, \theta_{loc}^+)$ seja fechado em $(\mathcal{F}^+, \theta_{loc}^+)$. Suponha ainda que exista um subconjunto $P \subset \mathcal{K}^+$, compacto na topologia θ_{loc}^+ e limitado em $\mathcal{F}_b^+$, tal que P é um conjunto atrator de limitados de $\mathcal{B}(\mathcal{K}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+})$. Então a equação* (4.1) *admite atrator de trajetórias $\mathcal{U} \subset P \subset \mathcal{K}^+$.*

Demonstração: Por hipótese P é um $((\mathcal{K}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+}), (\mathcal{K}^+, \theta_{loc}^+))$ - atrator de limitados, compacto em θ_{loc}^+ e limitado na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{F}^+}$. E, pelo Teorema 4.2.5 e pela hipótese (H_7) temos que $T(\cdot) : (\mathcal{K}^+, \theta_{loc}^+) \to (\mathcal{K}^+, \theta_{loc}^+)$ é contínua. Logo, pelo Teorema 4.1.5, $T(\cdot)$ admite $((\mathcal{K}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+}), (\mathcal{K}^+, \theta_{loc}^+))$- atrator $\mathcal{U}$, com $\mathcal{U} \subset P$ e ainda:

1. $\mathcal{U}$ é compacto em θ_{loc}^{+} e limitado em $\mathcal{F}_b^{+}$.

2. $T(t)\mathcal{U} = \mathcal{U}, \forall t \geq 0$.

3. $\mathcal{U}$ é o minimal compacto em θ_{loc}^{+} que atrai $\mathcal{B}(\mathcal{K}^{+}, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^{+}})$.

Logo, $\mathcal{U}$ é o atrator de trajetórias para 4.1. $\square$

Vamos agora obter uma caracterização do atrator de trajetórias em termos do núcleo, ou seja, das trajetórias completas. Para isso, condiremos o problema

$$\partial_t u = A(u(t)),\ t \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Definição 4.3.5 *Uma função $u : \mathbb{R} \to E$ é uma* trajetória completa *de* (4.3)*, se para todo $T > 0$, $\Pi_{[-T,T]}u$ é solução fraca no intervalo $[-T, T]$.*

Consideremos, para cada $T > 0$, o espaço $\mathcal{F}(-T, T, E)$ como um espaço de funções $u : [-T, T] \to E$ que é munido de uma topologia $\theta_{[-T,T]}$ Hausdorff, E_2 e Fréchet-Urysohn. Definimos então os conjuntos

$$\mathcal{F}_{loc} = \{u : \mathbb{R} \to E; \Pi_{[-T,T]}u \in \mathcal{F}(-T, T, E), \forall T > 0\},$$

e

$$\mathcal{F}_b = \{u \in \mathcal{F}_{loc}; \|u\|_{\mathcal{F}_b} < \infty\},$$

onde

$$\|u\|_{\mathcal{F}_b} = \sup_{h \in \mathbb{R}} \|\Pi_{[0,1]}u(h + \cdot)\|_{\mathcal{F}(0,1,E)}.$$

Da mesma forma que foi feito anteriormente, prova-se que $(\mathcal{F}_b, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b})$ é um espaço de Banach e munimos $\mathcal{F}_{loc}$ da topologia indutiva θ_{loc}, cuja caracterização é dada por: $u_m \to u$ em $(\mathcal{F}_{loc}, \theta_{loc})$ se, e somente se, $\Pi_{[-T,T]}u_m \to \Pi_{[-T,T]}u$ em $\theta_{[-T,T]}, \forall T \geq 0$.

Analogamente, tem-se que $(\mathcal{F}_{loc}, \theta_{loc})$ é Hausdorff, E_2 e Fréchet-Urysohn.

Seja $\mathcal{K}$ o *núcleo* de (4.3) definido por

$$\mathcal{K} = \{u \in \mathcal{F}_b; u \text{ é trajetória completa de (4.3) }\}.$$

Teorema 4.3.6 *Sob as mesmas condições do Teorema 4.3.4, que garantem a existência do atrator de trajetórias $\mathcal{U}$ para 4.1 , segue que*

$$\mathcal{U} = \Pi_+ \mathcal{K}.$$

Além disso, $\mathcal{K}$ é compacto em $(\mathcal{F}_{loc}, \theta_{loc})$ e limitado em $(\mathcal{F}_b, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b})$.

Demonstração: A demonstração deste teorema segue as mesmas ideias da demonstração do Teorema 3.2.5. Alguns pontos, nos quais há diferenças na demonstração, serão destacados.

Para mostrar que $\Pi_+\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$, tomamos o mesmo conjunto B do Teorema 3.2.5 e da mesma forma concluímos que $B \to \mathcal{U}$ quando $t \to \infty$, na topologia θ^+_{loc}. Porém, aqui devemos tomar um certo cuidado ao afirmar que $B \subset \mathcal{U}$.

Suponhamos por contradição que $B \not\subseteq \mathcal{U}$. Logo, existe $u_0 \in B$ tal que $u_0 \notin \mathcal{U}$.

Como $(\mathcal{K}^+, \theta^+_{loc})$ é Hausdorff, para cada $v \in \mathcal{U}$, existem vizinhanças $V^v_{u_0}$ e V_v tais que

$$u_0 \in V^v_{u_0},\ v \in V_v,\ V^v_{u_0} \cap V_v = \emptyset.$$

Podemos cobrir $\mathcal{U}$ com

$$\mathcal{U} \subset \bigcup_{v\in\mathcal{U}} V_v$$

e da compacidade de $\mathcal{U}$, segue que $\mathcal{U} \subset V_{v_1} \cup V_{v_2} \cup ... \cup V_{v_n} = V$. Essa vizinhança V de $\mathcal{U}$ é tal que $u_0 \notin V \Rightarrow d(B,\mathcal{U}) > 0$, o que é uma contradição. Logo, $B \subset \mathcal{U}$.

Continuamos a demonstração de forma análoga ao Teorema 3.2.5 para concluir que $\Pi_+\mathcal{K} = \mathcal{U}$.

Mostremos agora que $\mathcal{K}$ é compacto na topologia θ_{loc}.

Precisamos mostrar que $\forall \tau \geq 0$, $\Pi_{[-\tau,\tau]}\mathcal{K}$ é compacto em $\theta_{[-\tau,\tau]}$. Sabemos que $\Pi_+\mathcal{U}$ é compacto em θ^+_{loc}. Logo,

$$\Pi_{[0,2\tau]}\mathcal{U} = \Pi_{[0,2\tau]}\mathcal{K} \text{ é compacto em } \theta_{[0,2\tau]}.$$

Como $T(-\tau) : (\mathcal{F}(0, 2\tau, E), \theta_{[0,2\tau]}) \to (\mathcal{F}(-\tau, \tau, E), \theta_{[-\tau,\tau]})$ é contínua, segue que

$$T(-\tau)\Pi_{[0,2\tau]}\mathcal{K} = \Pi_{[-\tau,\tau]}\mathcal{K} \text{ é compacto em } \theta_{[-\tau,\tau]}.$$

Resta então mostrar que $\mathcal{K}$ é limitado em $(\mathcal{F}_b, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b})$.

Sabemos que $\Pi_+\mathcal{K} = \mathcal{U}$ e que $\mathcal{U}$ é limitado. Então existe $M > 0$ tal que $\|u\|_{\mathcal{F}_b^+} \leq M$ para todo $u \in \mathcal{U}$. Seja então $u \in \mathcal{K}$. Neste caso, $\Pi_+ u \in \mathcal{U}$ e, sendo o problema autônomo, $\Pi_+ u(h + \cdot) \in \mathcal{U}$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Logo, para todo $h > 0$, $u|_{[-h,\infty)} \in \mathcal{U} \Rightarrow \|u|_{[-h,\infty)}\|_{\mathcal{F}_b^+} \leq M$.

Portanto,

$$\sup_{h\in\mathbb{R}} \|\Pi_{[0,1]} u(h + \cdot)\| \leq M \Rightarrow \|u\|_{\mathcal{F}_b} \leq M,$$

e concluímos que $\mathcal{K}$ é limitado. $\square$

Capítulo 5

Atrator de Trajetórias para um problema de Reação-Difusão

Neste capítulo vamos considerar um problema de Cauchy autônomo para o qual não há garantia de unicidade de solução. Estudaremos a existência do atrator de trajetórias para este problema aplicando a teoria apresentada no Capítulo 4.

5.1 Um problema de Reação-Difusão com condição de Dirichlet: abordagem multívoca

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave Γ. Consideremos o problema

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u - f(u) + |u|^{\alpha-1}u, & (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega \\ u_{|\Gamma} = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \Gamma, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $d > 1, \alpha \in (0,1)$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo as seguintes condições: existem constantes positivas c_1, c_2 e c_3 tais que, para todo $v \in \mathbb{R}$,

$$f(v) \cdot v \geq c_1|v|^p - c_3, \tag{5.2}$$

$$|f(v)|^q \leq c_2(|v|^p + 1), \tag{5.3}$$

onde $2 < p < \dfrac{2n}{n-1}$ e q é o expoente conjugado de p.

Observação 5.1.1 *A função* $u \longmapsto |u|^{\alpha-1}u$ *não é localmente Lipschitz, logo não há garantia de unicidade de solução para o problema* (5.1). *Portanto, a abordagem deste problema deverá ser feita por atratores de trajetórias.*

Denotaremos por $H_d^1(\Omega)$ o espaço $H^1(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|^2_{H_d^1(\Omega)} = \int_\Omega (|u|^2 + d|\nabla u|^2)dx,$$

a qual é equivalente à norma usual de $H^1(\Omega)$,

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

De fato, basta notarmos que

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|^2_{H_d^1(\Omega)} \leq d\,\|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Denotemos o espaço dual de $H_d^1(\Omega)$ por $H_d^{-1}(\Omega)$ e consideremos o operador

$$\begin{aligned} \Delta : H_d^1(\Omega) &\to H_d^{-1}(\Omega) \\ u &\longmapsto \Delta u : H_d^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde, para cada $\varphi \in H_d^1(\Omega)$,

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = -\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx.$$

Proposição 5.1.2 *O operador laplaciano* Δ *definido acima é contínuo e linear, satisfazendo*

$$\|\Delta u\|_{H_d^{-1}(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{d}}\,\|u\|_{H_d^1(\Omega)}.$$

Demonstração: A linearidade é imediata. Para a continuidade, observemos que

$$\|\Delta u\|_{H_d^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{\varphi\in H_d^1(\Omega)\\ \|\varphi\|_{H_d^1(\Omega)}=1}} |\langle \Delta u, \varphi\rangle| = \sup_{\substack{\varphi\in H_d^1(\Omega)\\ \|\varphi\|_{H_d^1(\Omega)}=1}} \left|\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx\right|$$

$$\leq \sup_{\substack{\varphi\in H_d^1(\Omega)\\ \|\varphi\|_{H_d^1(\Omega)}=1}} \int_\Omega |\nabla u \nabla \varphi|\,dx \overset{Holder}{\leq} \sup_{\substack{\varphi\in H_d^1(\Omega)\\ \|\varphi\|_{H_d^1(\Omega)}=1}} \left[\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega |\nabla \varphi|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sup_{\substack{\varphi\in H_d^1(\Omega)\\ \|\varphi\|_{H_d^1(\Omega)}=1}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \frac{1}{\sqrt{d}}\left[\int_\Omega d\,|\nabla\varphi|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{d}}\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{d}}\,\|u\|_{H_d^1(\Omega)}.$$

□

Proposição 5.1.3 *Sejam $T > 0$, $2 < p < \dfrac{2n}{n-1}$ e q o expoente conjugado de p. Então*

1. *Se $u \in L^p(0,T,L^p(\Omega))$, então $f(u) \in L^q(0,T,L^q(\Omega))$.*

2. *Se $u \in L^2(0,T,H^1_d(\Omega))$, então $\Delta u \in L^2(0,T,H^{-1}_d(\Omega))$ e $|u|^{\alpha-1}u \in L^q(0,T,L^q(\Omega))$.*

Demonstração: Suponhamos $u \in L^p(0,T,L^p(\Omega))$. Segue de (5.3) que

$$\int_\Omega |f(u)|^q dx \le c_2 \int_\Omega |u|^p dx + |\Omega| = c_2\left(\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)} + |\Omega|\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^T \int_\Omega |f(u)|^q dxdt \le c_2\left(\int_0^T \|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)} + T|\Omega|\right)$$

$$\Rightarrow \|f(u)\|^q_{L^q(0,T,L^q(\Omega))} \le c_2\left(\|u\|^p_{L^p(0,T,L^p(\Omega))} + T|\Omega|\right) < \infty.$$

Portanto, $f \in L^q(0,T,L^q(\Omega))$.

Agora, suponhamos $u \in L^2(0,T,H^1_d(\Omega))$. Da demonstração da Proposição 5.1.2, obtemos

$$\|\Delta u\|^2_{H^{-1}_d(\Omega)} \le \frac{1}{d}\|u\|^2_{H^1_d(\Omega)} \Rightarrow \int_0^T \|\Delta u\|^2_{H^{-1}_d(\Omega)} \le \int_0^T \frac{1}{d}\|u\|^2_{H^1_d(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|\Delta u\|^2_{L^2(0,T,H^{-1}_d(\Omega))} \le \frac{1}{d}\|u\|^2_{L^2(0,T,H^1_d(\Omega))} < \infty.$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\left\||u|^{\alpha-1}u\right\|^q_{L^q(0,T,L^q(\Omega))} &= \int_0^T \left\||u(t,\cdot)|^{\alpha-1}u(t,\cdot)\right\|^q_{L^q(\Omega)} dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \left||u(t,x)|^{\alpha-1}u(t,x)\right|^q dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega |u(t,x)|^{\alpha q} dxdt \\
&\overset{Holder}{\le} \int_0^T \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{\alpha q}{2}} |\Omega|^{\frac{2-\alpha q}{2}} dt \\
&\overset{Young}{\le} \int_0^T \left(\frac{\alpha q}{2}\int_\Omega |u|^2 + \left(\left(1-\frac{\alpha q}{2}\right)|\Omega|\right) dx\right) dt \\
&\le \frac{\alpha q}{2}\int_0^T \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right) dt + \left(1-\frac{\alpha q}{2}\right) T|\Omega| \\
&\le \frac{\alpha q}{2}\int_0^T \left(\int_\Omega |u|^2 + d|\nabla u|^2 dx\right) dt + \left(1-\frac{\alpha q}{2}\right) T|\Omega| \\
&= \frac{\alpha q}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(0,T,H^1_d(\Omega))} + \left(1-\frac{\alpha q}{2}\right) T|\Omega| < \infty.
\end{aligned}$$

□

Proposição 5.1.4 *Se* $u \in L^p(0,T,L^p(\Omega)) \cap L^2(0,T,H_d^1(\Omega))$, *então*

$$\partial_t u \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)) + L^q(0,T,L^q(\Omega)) \hookrightarrow L^q(0,T,H^{-r}(\Omega)),$$

onde $r = \max\left\{1, n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Demonstração: Pela Proposição 5.1.3, temos

$$\partial_t u = d\Delta u - f(u) + |u|^{\alpha-1}u \in L^2(0,T,H_d^{-1}(\Omega)) + L^q(0,T,L^q(\Omega)).$$

Como $q < 2$, temos $L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^q(0,T,H^{-1}(\Omega))$. Além disso, usando o Teorema 1.5.6, obtemos

$$L^q(0,T,H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^q(0,T,H^{-r}(\Omega)),$$

já que $r \geq 1$. Usando novamente o Teorema 1.5.6, obtemos

$$L^q(0,T,L^q(\Omega)) \hookrightarrow L^q(0,T,H^{-r}(\Omega)),$$

já que $r \geq N\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)$. □

Definição 5.1.5 *Uma função* $u(t,x), t \geq 0, x \in \Omega$, *é* solução fraca global *de* (5.1) *se, para todo* $T > 0$, $u \in L^p(0,T,L^p(\Omega)) \cap L^2(0,T,H_d^1(\Omega))$ *e* u *satisfaz* (5.1) *no sentido distribucional em* $\mathcal{D}'(0,T,L^p(\Omega)) \cap H_d^1(\Omega)$, *isto é, para todo* $\varphi \in L^p(\Omega) \cap H_d^1(\Omega)$,

$$\frac{d}{dt}\langle u(t,\cdot),\varphi\rangle_{L^2(\Omega)} = -d\int_\Omega \nabla u(t,x)\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega [-f(u(t,x)) + |u(t,x)|^{\alpha-1}u(t,x)]\varphi(x)dx.$$

Observação 5.1.6

1. *Se* u *é solução fraca global de* (5.1), *pela Proposição 5.1.4, temos*

$$u \in L^2(0,T,H_d^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T,H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^q(0,T,H^{-r}(\Omega)) \ \text{e}\ \partial_t u \in L^q(0,T,H^{-r}(\Omega)).$$

   Logo, pelo Lema 1.6.1, $u \in C([0,T],H^{-r}(\Omega))$.

2. *Supondo também que* $u \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$ *e considerando que*

$$H^r(\Omega) \hookrightarrow H_d^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-r}(\Omega),$$

   segue do item 1 *que* $u : [0,T] \to H^{-r}(\Omega)$ *é fracamente contínua. Assim, considerando* $E = L^2(\Omega), E_0 = H^{-r}(\Omega)$ *no Teorema 1.6.2, concluímos que* $u : [0,T] \to L^2(\Omega)$ *é fracamente contínua.*

5.2 Existência de solução via método de Faedo-Galerkin

No próximo teorema aplicaremos o método de Faedo-Galerkin para provar a existência de solução fraca global para o problema (5.1).

Teorema 5.2.1 *Se f satisfaz as condições* (5.2), (5.3) *e $u_0 \in L^2(\Omega)$, então existe solução fraca global u de* (5.1) *com $u(0) = u_0$ e satisfazendo*

$$u \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^p(0, T, L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_d^1(\Omega)), \ \ \forall T > 0.$$

Demonstração: O método de Faedo-Galerkin consiste nas seguintes etapas:

1. Aplicar o método das soluções aproximadas, onde projetamos o problema em um espaço de dimensão finita e garantimos a existência de solução local fraca através do Teorema de Caratheodory.

2. Encontrar estimativas para as soluções aproximadas e utilizar o Teorema 1.6.8 para garantir a extensão da solução local para o intervalo $[0, T]$.

3. Mostrar que as soluções aproximadas convergem para uma solução do problema original.

4. Verificar que a solução obtida satisfaz os dados iniciais.

Sigamos então as etapas citadas para encontrar uma solução fraca global de (5.1).

Etapa 1: Segue do Teorema 1.6.3 que as autofunções $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ do problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w \text{ em } \Omega \\ w_{|\Gamma} = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

constituem uma base para $L^2(\Omega)$. Além disso, do Teorema 1.5.6 e da hipótese que $2 < p < \dfrac{2n}{n-1}$ segue que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, e do Corolário 1.6.4, temos $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$.

Mostraremos agora que $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ forma uma base para $H_0^1(\Omega)$. Para isso, precisamos mostrar que se $((u, w_j)) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $u = 0$, onde $((\cdot, \cdot))$ representa o produto interno em H_0^1 e é dado por $((u, v)) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$. Mas,

$$((u, w_j)) = \int_\Omega \nabla u \nabla w_j dx = -\langle u, \Delta w_j \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Então,

$$((u, w_j)) = 0 \Rightarrow - \langle u, \Delta w_j \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_j \langle u, w_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, w_j \rangle = 0, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Como $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é base de L^2, temos $u = 0$ e, portanto, $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é base de $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos o espaço de dimensão finita $H_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ e seja

$$u_m(t, x) = \sum_{j=1}^{m} a_{jm}(t) w_j(x). \tag{5.5}$$

Queremos provar que existem coeficientes a_{jm} de forma que a função u_m satisfaça, para $1 \leq j \leq m$,

$$\begin{cases} \langle \partial_t u_m(t, \cdot), w_j(\cdot) \rangle = \langle d\Delta u_m(t, \cdot), w_j(\cdot) \rangle + \langle -f(u_m(t, \cdot)), w_j \rangle + \langle |u_m(t, \cdot)|^{\alpha-1} u_m(t, \cdot), w_j(\cdot) \rangle \\ u_m(0) = u_{0m}, \end{cases} \tag{5.6}$$

onde $u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \langle u_0, w_j \rangle w_j \to u_0$ quando $m \to \infty$.

Note que a primeira equação em (5.6) é equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u_m(t, \cdot), w_j(\cdot) \rangle = & - d \int_\Omega \nabla u_m(t, \cdot) \nabla w_j(\cdot) dx \\ & + \int_\Omega -f(u_m(t, \cdot)) w_j(\cdot) dx + \left\langle |u_m(t, \cdot)|^{\alpha-1} u_m(t, \cdot), w_j(\cdot) \right\rangle, \end{aligned}$$

e então podemos reescrever o problema como

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a_{jm}(t) = F_j(t, a_{1m}(t)), a_{2m}(t)), ..., a_{mm}(t)), \ 1 \leq j \leq m \\ a_{jm}(0) = \langle u(0, \cdot), w_j \rangle = \int_\Omega u_0(x) w_j(x) dx. \end{cases} \tag{5.7}$$

As condições da Definição 1.6.6 são verificadas. Logo, (5.7) possui solução local $a_{jm} : [0, t_{jm}) \to \mathbb{R}, j = 1, 2, ..., m.$

Tomando $t_m = \min \{t_{1m}, t_{2m}, ..., t_{mm}\}$, segue que

$$u_m : [0, t_m) \to H_m$$

é solução de (5.7).

Etapa 2: Mostraremos que a solução local $u_m(\cdot, x) : [0, t_m) \to \mathbb{R}$ pode ser estendida ao intervalo $[0, T], T > 0$. Temos, $\forall v \in H_m$,

$$\begin{cases} \langle \partial_t u_m, v \rangle = \langle d\Delta u_m, v \rangle + \langle -f(u_m) + |u_m|^{\alpha-1} u_m, v \rangle \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \text{ em } L^2(\Omega) \text{ quando } m \to \infty. \end{cases} \tag{5.8}$$

Tomando $v = u_m$, temos

$$\langle \partial u_m, u_m \rangle = \langle d\Delta u_m, u_m \rangle + \left\langle -f(u_m) + |u_m|^{\alpha-1} u_m, u_m \right\rangle .$$

Além disso, segue do fato de u_m ser solução de (5.7) que tal função é suficientemente regular e então $\|u_m\|^2$ é diferenciável, o que implica

$$\langle \partial_t u_m, u_m \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle u_m, u_m \rangle .$$

Assim, integrando por partes, (5.8) pode ser reescrito como

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u_m|^2 dx = -d \int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx - \int_\Omega f(u_m) u_m dx + \int_\Omega |u_m|^{\alpha+1} dx. \tag{5.9}$$

Somando $\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$ a ambos os lados de (5.9) e denotando $u_m = u$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u|^2 dx + d \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx &= \int_\Omega |u|^{\alpha+1} dx + \int_\Omega |u|^2 dx - \int_\Omega f(u) \cdot u dx \\ &\leq \int_\Omega |u|^{\alpha+1} dx + \int_\Omega |u|^2 dx - c_1 \int_\Omega |u|^p dx + c_3 |\Omega|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u|^2 dx + \|u\|^2_{H^1_d(\Omega)} + c_1 \int_\Omega |u|^p dx \ &\leq \ c_3 |\Omega| + \int_\Omega |u|^{\alpha+1} dx + \int_\Omega |u|^2 dx \\ &\overset{Young}{\leq} c_3 |\Omega| + \varepsilon \int_\Omega |u|^p dx + \left(\frac{\varepsilon p}{(\alpha+1)} \right)^{\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)-p}} \left(\frac{p-(\alpha+1)}{p} \right) |\Omega| \\ &\quad + \varepsilon \int_\Omega |u|^p dx + \left(\frac{\varepsilon p}{2} \right)^{\frac{2}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p} \right) |\Omega| \\ &\overset{\varepsilon = \frac{c_1}{4}}{\leq} c_3 |\Omega| + \frac{c_1}{4} \int_\Omega |u|^p dx + \left(\frac{c_1 p}{4(\alpha+1)} \right)^{\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)-p}} \left(\frac{p-(\alpha+1)}{p} \right) |\Omega| \\ &\quad + \frac{c_1}{4} \int_\Omega |u|^p dx + \left(\frac{c_1 p}{8} \right)^{\frac{2}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p} \right) |\Omega|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega |u|^2 dx + 2 \|u\|_{H^1_d(\Omega)} + c_1 \int_\Omega |u|^p dx \leq K_1, \tag{5.10}$$

onde

$$K_1 = 2|\Omega|\left[c_3 + \left(\frac{c_1 p}{4(\alpha+1)}\right)^{\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)-p}}\left(\frac{p-(\alpha+1)}{p}\right) + \left(\frac{c_1 p}{8}\right)^{\frac{2}{2-p}}\left(\frac{p-2}{p}\right)\right]. \tag{5.11}$$

Integrando de 0 a t, $t \in [0, t_m)$, obtemos

$$\int_\Omega |u(t,x)|^2 dx - \int_\Omega |u(0,x)|^2 dx + 2\int_0^t \|u(s)\|^2_{H^1_d(\Omega)}\, ds + c_1\int_0^t\int_\Omega |u(s,x)|^p dx ds \leq K_1 t \leq K_1 T.$$

Assim,

$$\int_\Omega |u(t,x)|^2 dx + 2\int_0^t \|u(s)\|^2_{H^1_d(\Omega)}\, ds + c_1\int_0^t\int_\Omega |u(s,x)|^p dx ds \leq K_2, \tag{5.12}$$

onde $K_2 = K_1 T + \displaystyle\int_\Omega |u(0,x)|^2 dx$.

Voltando para a notação u_m, temos as seguintes limitações

$$\int_\Omega |u_m(t,x)|^2 dx \leq K_2 \Rightarrow \sup_{s\in[0,t]}\int_\Omega |u_m(s,x)|^2 dx \leq K_2, \tag{5.13}$$

$$\int_0^t \|u_m(s)\|^2_{H^1_d(\Omega)}\, ds \leq \frac{K_2}{2}, \tag{5.14}$$

$$\int_0^t\int_\Omega |u_m(s,x)|^p dx ds \leq \frac{K_2}{c_1}. \tag{5.15}$$

Pelo Teorema 1.6.8, podemos prolongar a solução $u_m(t)$ ao intervalo $[0,T]$.

Etapa 3: Mostremos agora que as soluções aproximadas convergem para uma solução do problema original.

Note que as limitações (5.13) a (5.15) independem de t_m e de m. Logo, são válidas para todo $t \in [0,T]$ e $\forall m \in \mathbb{N}$. Portanto,

1. $\{u_m\}$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$ (segue de (5.13)).
2. $\{u_m\}$ é uniformemente limitada em $L^p(0,T,L^p(\Omega))$ (segue de (5.14)).
3. $\{u_m\}$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T,H^1_d(\Omega))$ (segue de (5.15)).

   Além disso,

4. $\{\Delta u_m\}$ é uniformemente limitado em $L^2(0,T,H^{-1}_d(\Omega))$.

   De fato, segue da demonstração da Proposição 5.1.2 que

$$\|\Delta u_m\|^2_{L^2(0,T,H^{-1}_d(\Omega))} \leq \|u_m\|^2_{L^2(0,T,H^1_d(\Omega))}.$$

5. $\{f(u_m)\}$ e $\{|u_m|^{\alpha-1}u_m\}$ são uniformemente limitados em $L^q(0,T,L^q(\Omega))$.

Segue das desigualdades obtidas na demonstração da Proposição 5.1.3.

Definimos o operador projeção

$$P_m : H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega) \to H_m$$

dado por $P_m(h) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\langle h, w_j\rangle w_j$. Para cada $j \in \{1,2,...,m\}$, as equações a seguir são satisfeitas

$$\langle \partial_t u_m, w_j\rangle = d\langle \Delta u_m, w_j\rangle - \langle f(u_m), w_j\rangle + \langle |u_m|^{\alpha-1}u_m, w_j\rangle.$$

Uma vez que $u_m = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{mj}w_j$, as equações acima equivalem a

$$\frac{d}{dt}a_{mj} + d\lambda_j a_{mj} = -\langle f(u_m), w_j\rangle + \langle |u_m|^{\alpha-1}u_m, w_j\rangle, \quad j \in \{1,2,...,m\}.$$

Multiplicando a j-ésima equação por w_j e em seguida somando as m equações obtidas, segue que

$$\sum_{j=1}^{m}\partial_t[a_{mj}w_j] + d\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a_{mj}w_j = -\sum_{j=1}^{m}\langle f(u_m), w_j\rangle w_j + \sum_{j=1}^{m}\langle |u_m|^{\alpha-1}u_m, w_j\rangle w_j.$$

$$\Rightarrow \partial_t u_m - d\Delta u_m = -\sum_{j=1}^{m}\langle f(u_m), w_j\rangle w_j + \sum_{j=1}^{m}\langle |u_m|^{\alpha-1}u_m, w_j\rangle w_j.$$

Denotemos $\tilde{P}_m(f(u_m)) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\langle f(u_m), w_j\rangle w_j$ e $\tilde{P}_m(|u_m|^{\alpha-1}u_m) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\langle |u_m|^{\alpha-1}u_m, w_j\rangle w_j$ (observe que isto é apenas uma notação e não significa a projeção P_m aplicada em $f(u_m)$ ou em $|u_m|^{\alpha-1}u_m$, uma vez que P_m está definida em $H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)$).

Então, a equação anterior pode ser reescrita como

$$\partial_t u_m = d\Delta u_m - \tilde{P}_m(f(u_m)) + \tilde{P}_m(|u_m|^{\alpha-1}u_m) \tag{5.16}$$

Dizer que u_m é uma solução fraca para (5.16) em $\mathcal{D}'(0,T,L^p(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$ significa que, para todo $\varphi \in L^p(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$,

$$\langle \partial_t u_m, \varphi\rangle - d\,\langle \Delta u_m, \varphi\rangle = -\left\langle \tilde{P}_m(f(u_m)), \varphi\right\rangle + \left\langle \tilde{P}_m(|u_m|^{\alpha-1}u_m), \varphi\right\rangle.$$

Vamos investigar o que significa $\left\langle \tilde{P}_m(f(u_m)), \varphi \right\rangle$ e $\left\langle \tilde{P}_m(|u_m|^{\alpha-1}u_m), \varphi \right\rangle$. Temos,

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{P}_m(f(u_m)), \varphi \right\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{m} \langle f(u_m), w_j\rangle w_j, \varphi \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle f(u_m), w_j\rangle \langle w_j, \varphi\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{m} \langle f(u_m), \langle \varphi, w_j\rangle w_j\rangle = \left\langle f(u_m), \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi, w_j\rangle w_j \right\rangle \\
&= \langle f(u_m), P_m(\varphi)\rangle.
\end{aligned}$$

Analogamente, $\langle \tilde{P}_m(|u_m|^{\alpha-1}u_m), \varphi\rangle = \langle |u_m|^{\alpha-1}u_m, P_m(\varphi)\rangle$.

Note que para cada $j = 1, ..., m$, $\langle f(u_m), w_j\rangle w_j \in L^q(0, T, L^q(\Omega))$, pois

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\langle f(u_m), w_j\rangle w_j\|^q_{L^q(\Omega)} &= \int_0^T |\langle f(u_m), w_j\rangle| \, \|w_j\|^q_{L^q(\Omega)} \, dt \\
&\leq \|w_j\|^q_{L^q(\Omega)} \int_0^T \|f(u_m)\|^q_{L^q(\Omega)} \, \|w_j\|^p_{L^p(\Omega)} \, dt \\
&= \|w_j\|^q_{L^q(\Omega)} \, \|w_j\|^p_{L^p(\Omega)} \int_0^T \|f(u_m)\|^q_{L^q(\Omega)} \, dt < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{P}_m(f(u_m)) = \sum_{j=1}^{m} \langle f(u_m), w_j\rangle w_j$ pertence a $L^q(0, T, L^q(\Omega))$.

Além disso, $\langle |u_m|^{\alpha-1}u_m, w_j\rangle w_j \in L^q(\Omega)$, pois $\langle |u_m|^{\alpha-1}u_m, w_j\rangle \in \mathbb{R}$ e $w_j \in L^q(\Omega)$. Como $\langle |u_m|^{\alpha-1}u_m, w_j\rangle w_j$ independe de t, segue que

$$\int_0^T \left\| \langle |u_m|^{\alpha-1}u_m, w_j\rangle w_j \right\|^q_{L^q(\Omega)} < \infty.$$

Portanto, $\tilde{P}_m(|u_m|^{\alpha-1}u_m) = \sum_{j=1}^{m} \langle |u_m|^{\alpha-1}u_m, w_j\rangle w_j$ pertence a $L^q(0, T, L^q(\Omega))$.

Segue então de (5.16) que

$$\partial_t u_m \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)) + L^q(0, T, L^q(\Omega)) \hookrightarrow L^q(0, T, H^{-r}(\Omega)).$$

E, uma vez que o lado direiro de (5.16) é uniformemente limitado, segue que $\{\partial_t u_m\}$ é uniformemente limitado em $L^q(0, T, H^{-r}(\Omega))$.

Podemos então extrair subsequências (as quais continuaremos a chamar de u_m) tais que

1. $u_m \rightharpoonup u_1$ em $L^2(0, T, H^1_d(\Omega))$ (pela reflexividade de $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ e Corolário 1.6.10).

2. $u_m \rightharpoonup u_2$ em $L^p(0,T,L^p(\Omega))$ (mesmo argumento apresentado no item anterior).

3. $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u_3$ em $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$.

   Veja que $L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) = [L^1(0,T,L^2(\Omega))]'$ e, uma vez que $\{u_m\}$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$, segue do Teorema 1.6.9 que $\{u_m\}$ admite subsequência convergente na topologia fraca estrela.

   Provemos que $u_1 = u_2 = u_3$. Temos

$$H_d^1(\Omega) \hookrightarrow W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \text{ e } L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

   Da desigualdade (5.10),

$$\{u_m\} \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega)),\ \{u_m\} \in L^\infty(0,T,H_d^1(\Omega)) \text{ e } \{u_m\} \in L^\infty(0,T,L^p(\Omega)).$$

Pela unicidade do limite, $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u_1$ em $L^\infty(0,T,H_d^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$. Por outro lado, $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u_3$ em $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$. Logo, $u_1 = u_3$.

Analogamente, $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u_2$ em $L^\infty(0,T,L^p(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$. Mas por outro lado, $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u_3$ em $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$. Logo, $u_2 = u_3$.

Portanto, $u_1 = u_2 = u_3$.

4. $\Delta u_m \rightharpoonup \Delta u$ em $L^2(0,T,H_d^{-1}(\Omega))$ (pela continuidade de Δ).

5. $\{\partial_t u_m\}$ é uniformemente limitada em $L^q(0,T,H^{-r}(\Omega)) \Rightarrow \partial_t u_m \rightharpoonup h$ em $L^q(0,T,H^{-r}(\Omega))$.

   Provemos que $h = \partial_t u$.

   Sejam $E_1 = H_d^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \hookrightarrow E_0 = H^{-r}(\Omega)$ e

$$W_{2,q} = W_{2,q}(0,T,H_d^1(\Omega),H^{-r}(\Omega)) = \{\psi :\ \psi \in L^2(0,T,H^1(\Omega));\ \psi' \in L^q(0,T,H^{-r}(\Omega)).$$

   Segue do Teorema 1.6.11 que $W_{2,q} \hookrightarrow L^2(0,T,H^{-r}(\Omega))$.

   Uma vez que $\{u_m\} \subset L^2(0,T,H^1(\Omega))$, $\{\partial_t u_m\} \subset L^q(0,T,H^{-r}(\Omega))$ e $W_{2,p}$ é reflexivo, temos $u_m \rightharpoonup \beta$ em $W_{2,q}$. Então $u_m \rightharpoonup \beta$ em $L^2(0,T,H_d^1(\Omega))$ e $\partial_t u_m \rightharpoonup \beta'$ em $L^q(0,T,H^{-r}(\Omega)) \Rightarrow \beta = u$ e $\partial_t u_m \rightharpoonup \partial_t u \Rightarrow h = \partial_t u$.

6. $f(u_m) \rightharpoonup w$ em $L^q(0,T,L^q(\Omega))$ e $|u_m|^{\alpha-1}u_m \rightharpoonup \gamma$ em $L^q(0,T,L^q(\Omega))$ (segue da reflexividade de $L^q(0,T,L^q(\Omega))$ e do Corolário 1.6.10).

Mostraremos que $\tilde{P}_m(f(u_m)) \rightharpoonup w$ em $L^q(0,T,L^q(\Omega))$ e $\tilde{P}_m(|u_m|^{\alpha-1}u_m) \rightharpoonup \gamma$ em $L^q(0,T,L^q(\Omega))$. Primeiramente, observemos que dada uma função $\phi \in L^q(0,T,L^q(\Omega))$, temos $\tilde{P}_m(\phi) \rightharpoonup \phi$, pois

$$\begin{aligned}\langle \tilde{P}_m(\phi), v\rangle - \langle \phi, v\rangle &= \langle \phi, P_m(v)\rangle - \langle \phi, v\rangle \\ &= \langle \phi, P_m(v) - v\rangle \\ &\leq \|\phi\|^q_{L^q(\Omega)} \|P_m(v) - v\|^p_{L^p(\Omega)}, \quad \forall v \in L^p(\Omega).\end{aligned}$$

Como P_m é a projeção em $L^p(\Omega)$, segue que $P_m(v) \to v$ quando $m \to \infty$. Logo,

$$|\langle \tilde{P}_m(\phi), v\rangle - \langle \phi, v\rangle| \to 0 \Rightarrow \tilde{P}_m(\phi) \rightharpoonup \phi \text{ em } L^q(0,T,L^q(\Omega)).$$

Para $\tilde{P}_m(f(u_m))$, observemos que

$$\begin{aligned}|\langle \tilde{P}_m(f(u_m)), v\rangle - \langle w, v\rangle| &\leq |\langle \tilde{P}_m(f(u_m)), v\rangle - \langle f(u_m), v\rangle| + |\langle f(u_m), v\rangle - \langle w, v\rangle| \\ &= |\langle f(u_m), P_m(v) - v\rangle| + |\langle f(u_m) - w, v\rangle|.\end{aligned}$$

Como $v \in L^p(\Omega)$, $P_m(v) \to v$. Além disso, $f(u_m) \rightharpoonup w$. Logo, $|\langle P_m f(u_m), v\rangle - \langle w, v\rangle| \to 0$ e $\tilde{P}_m f(u_m) \rightharpoonup w$.

De forma análoga, obtemos que $\tilde{P}_m(|u_m|^{\alpha-1}u_m) \rightharpoonup |u_m|^{\alpha-1}u_m$.

Logo, fazendo $m \to \infty$ em (5.16), obtemos

$$\partial_t u = d\Delta u - w + g \tag{5.17}$$

no sentido distribucional em $\mathcal{D}'(0,T,L^p(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$.

Resta mostrar que $w = f(u)$ e $\gamma = |u_m|^{\alpha-1}u_m$.

Da observação que segue o Teorema 1.6.11, podemos obter subsequência $u_m \to u$ em $L^2(0,T,L^2(\Omega))$. Pelo Lema 1.6.12, existe subsequência (que ainda continuaremos a denotar por u_m) que converge para u q.t.p. em $[0,T] \times \Omega$. Da continuidade de f, segue

$$f(u_m(t,x)) \to f(u(t,x)) \text{ q.t.p. em } [0,T] \times \Omega.$$

Agora, da limitação de $\{f(u_m)\}$ em $L^q(0,T,L^q(\Omega))$, podemos aplicar o Lema 1.6.13 para concluir que $f(u_m) \rightharpoonup f(u)$. Pelos mesmos motivos, $|u_m|^{\alpha-1}u_m \rightharpoonup |u|^{\alpha-1}u$.

Portanto $w = f(u)$ e $\gamma = |u_m|^{\alpha-1}u_m$.

Etapa 4: Verificaremos que a solução obtida satisfaz os dados iniciais.

Tomemos $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T], H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega))$, com $\varphi(T) = 0$ e observemos que

$$\varphi \in L^2(0,T,H^1(\Omega)) \cap L^p(0,T,L^p(\Omega)).$$

Fazendo o produto das equações (5.16) e (5.17) por $\varphi(t)$, obtemos

$$\langle \partial_t u(t,\cdot), \varphi(t)\rangle - d\langle \Delta u(t,\cdot), \varphi(t)\rangle + \langle f(u) - |u_m|^{\alpha-1}u_m, \varphi(t)\rangle = 0 \tag{5.18}$$

$$\langle \partial_t u_m(t,\cdot), \varphi(t)\rangle - d\langle \Delta u_m(t,\cdot), \varphi(t)\rangle + \langle P_m(f(u_m) - |u_m|^{\alpha-1}u_m), \varphi(t)\rangle = 0 \tag{5.19}$$

Integrando por partes com relação a t em (5.18), obtemos

$$-\langle u(t), \varphi(t)\rangle|_0^T + \int_0^T [-\langle u, \varphi'\rangle - d\langle \Delta u, \varphi\rangle + \langle f(u) - |u_m|^{\alpha-1}u_m, \varphi\rangle]ds = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^T [-\langle u, \varphi'\rangle - d\langle \Delta u, \varphi\rangle + \langle f(u) - |u_m|^{\alpha-1}u_m, \varphi\rangle]ds = \langle u(0), \varphi(0)\rangle. \tag{5.20}$$

Analogamente, para (5.19)

$$\int_0^T [-\langle u_m, \varphi'\rangle - d\langle \Delta u_m, \varphi\rangle + \langle \tilde{P}_m(f(u_m) - |u_m|^{\alpha-1}u_m), \varphi\rangle]ds = \langle u_m(0), \varphi(0)\rangle. \tag{5.21}$$

Fazendo $m \to \infty$ em (5.21), concluímos que

$$\int_0^T [-\langle u, \varphi'\rangle - d\langle \Delta u, \varphi\rangle + \langle f(u) - |u_m|^{\alpha-1}u_m, \varphi\rangle]ds = \langle u_0, \varphi(0)\rangle,$$

pois $u_m(0) = P_m u_0 \to u_0$ quando $m \to \infty$, pelo Lema 1.6.15. Logo, $u(0) = u_0$. $\square$

Segue do Lema 1.6.16, tomando $V = H_d^1(\Omega)$, $E = L^p(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$, o seguinte resultado:

Proposição 5.2.2 *Se* $u \in L^2(0,T,H_d^1(\Omega)) \cap L^p(0,T,L^p(\Omega))$ *é uma solução fraca de* (5.1)*, então*

1. $u \in \mathcal{C}([0,T],L^2(\Omega))$.

2. *A função* $\|u(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}$ *é absolutamente contínua em* $[0,T]$ *e, além disso,*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + d\langle \nabla u(t), \nabla u(t)\rangle + \langle f(u) - |u|^{\alpha-1}u, u\rangle = 0, \tag{5.22}$$

$\forall t \in [0,T]$.

Corolário 5.2.3 *Seja* K_1 *o número positivo dado em* (5.11)*. Se* $u \in L^2(0,T,H_d^1(\Omega)) \cap L^p(0,T,L^p(\Omega))$ *é uma solução fraca de* (5.1) *então, para todo* $t \geq 0$*,*

1. $\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\, e^{-2t} + \dfrac{K_1}{2}$.

2. $2\displaystyle\int_t^{t+1} \|u(s)\|^2_{H_d^1(\Omega)}\, ds + c_1 \int_t^{t+1} \|u(s)\|^p_{L^p(\Omega)}\, ds \leq \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\, e^{-2t} + \frac{3K_1}{2}$.

Demonstração: Segue da Proposição 5.2.2 que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + d\langle \nabla u(t), \nabla u(t)\rangle + \langle f(u) - |u|^{\alpha-1}u, u\rangle = 0$$

e, da mesma forma que foi feito em (5.9), obtemos

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|u(t)\|^2_{H_d^1(\Omega)} + c_1\|u(t)\|^p_{L^p(\Omega)} \leq K_1. \tag{5.23}$$

Em particular,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq K_1.$$

Pelo Lema 1.1.6, segue que

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\, e^{-2t} + \frac{K_1}{2},$$

provando o primeiro item.

Integrando agora (5.23) de t a $t+1$, obtemos

$$\|u(t+1)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_t^{t+1}\|u(s)\|^2_{H_d^1(\Omega)}\, ds + c_1\int_t^{t+1}\|u(s)\|^p_{L^p(\Omega)}\, ds \leq K_1.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
2\int_t^{t+1} \|u(s)\|^2_{H^1_d(\Omega)}\, ds + c_1 \int_t^{t+1} \|u(s)\|^p_{L^p(\Omega)}\, ds &\leq K_1 + \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\, e^{-2t} + \frac{3K_1}{2}.
\end{aligned}
$$

□

Observação: Segue do item 1. do Corolário 5.2.3 que $u \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$. Portanto, se $u \in L^p(0,T,L^p(\Omega)) \cap L^2(0,T,H^1_d(\Omega))$ é solução fraca de (5.1), então $u \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$.

5.3 Construção do Atrator de Trajetórias

Consideremos o espaço de funções

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^+_d = \{u : u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap L^p_{loc}(\mathbb{R}^+, L^p(\Omega)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, H^1_d(\Omega)) \\
\text{e } \partial_t u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^+, H^{-r}(\Omega))\},
\end{aligned}
$$

onde $r = \max\left\{1, n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Sejam $p > 1$, E um espaço de Banach e consideremos o espaço de Banach

$$
L^P_b(\mathbb{R}^+, E) = \{u \in L^P_{loc}(\mathbb{R}^+, E) \ : \ \|u\|_{L^p_b} < \infty\},
$$

onde

$$
\|v\|_{L^p_b} = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \int_t^{t+1} \|v(s)\|^p_E\, ds, \;\; p < \infty \tag{5.24}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|v\|_{L^\infty_b(\mathbb{R}^+,E)} &= \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \sup_{s\in[0,1]} \|v(t+s)\|_E \\
&= \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|v(t)\|_E = \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,E)}\,.
\end{aligned}
$$

Logo, $\|\cdot\|_{L^\infty_b(\mathbb{R}^+,E)} = \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,E)}$.

Definimos

$$\mathcal{F}_{b,d}^{+} = \{u \in \mathcal{F}_d^{+};\ \|u\|_{\mathcal{F}_{b,d}^{+}} < \infty\},$$

onde

$$\|u\|_{\mathcal{F}_{b,d}^{+}} = \|u\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{+},L^{2}(\Omega))} + \|u\|_{L_b^{p}(\mathbb{R}^{+},L^{p}(\Omega))} + \|u\|_{L_b^{2}(\mathbb{R}^{+},H_d^{1}(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L_b^{q}(\mathbb{R}^{+},H^{-r}(\Omega))},$$

veja (5.24).

Definimos então a topologia $\theta_{loc,d}^{+}$ em $\mathcal{F}_d^{+}$ que é caracterizada da seguinte forma: $\{u_m\} \subset \mathcal{F}_d^{+}$ converge a u na topologia $\theta_{loc,d}^{+}$ se, e somente se, $u_m \to u$ em $\theta_{[0,T],d}$, ou seja, para todo $[0,T] \subset \mathbb{R}^{+}$,

1. $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^{\infty}(0,T,L^{2}(\Omega))$.

2. $u_m \rightharpoonup u$ em $L^{p}(0,T,L^{p}(\Omega))$.

3. $u_m \rightharpoonup u$ em $L^{2}(0,T,H_d^{1}(\Omega))$.

4. $\partial_t u_m \rightharpoonup \partial_t u$ em $L^{q}(0,T,H^{-r}(\Omega))$.

Proposição 5.3.1 *$(\mathcal{F}_d^{+}, \theta_{loc,d}^{+})$ é E_2, Fréchet-Urysohn e Hausdorff.*

Demonstração: Seja

$$\mathcal{F}_{[0,T],d} = \{u :\ u \in L^{\infty}(0,T,L^{2}(\Omega)) \cap L^{p}(0,T,L^{p}(\Omega)) \cap L^{2}(0,T,H_d^{1}(\Omega)) \\ \text{e } \partial_t u \in L^{q}(0,T,H^{-r}(\Omega))\}.$$

Denotemos por $\Theta_{[0,T],d}$ a topologia em $\mathcal{F}_{[0,T],d}$, induzida pelas métricas provenientes das normas de

$$L^{\infty}(0,T,L^{2}(\Omega)),\ L^{p}(0,T,L^{p}(\Omega)),\ L^{2}(0,T,H_d^{1}(\Omega)) \text{ e } L^{q}(0,T,H^{-r}(\Omega)),$$

isto é,

$$\|u\|_{\mathcal{F}_{[0,T],d}} = \|u\|_{L^{\infty}(0,T,L^{2}(\Omega))} + \|u\|_{L^{p}(0,T,L^{p}(\Omega))} + \|u\|_{L^{2}(0,T,H_d^{1}(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L^{q}(0,T,H^{-r}(\Omega))}.$$

Mostraremos que $(\mathcal{F}_{[0,T],d}, \Theta_{[0,T],d})$ é E_2, Hausdorff e Fréchet-Urysohn. Assim, $(\mathcal{F}_d^{+}, \theta_{loc,d}^{+})$ também é E_2, Hausdorff e Fréchet-Urysohn.

Como $(\mathcal{F}_{[0,T],d}, \Theta_{[0,T],d})$ é métrico, pois $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_{[0,T],d}}$ define uma norma, segue que tal espaço é Hausdorff e Fréchet-Urysohn. Resta apenas mostrar que este espaço possui base enumerável.

Suponhamos que $\{\mathcal{A}_i,\ i \in I\}$, $\{\beta_j,\ j \in J\}$, $\{\Gamma_k,\ k \in K\}$ e $\{\xi_l,\ l \in L\}$ sejam bases enumeráveis de $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$, $L^p(0,T,L^p(\Omega))$, $L^2(0,T,H^1_d(\Omega))$ e $L^q(0,T,H^{-r}(\Omega))$, respectivamente.

Consideremos todos os conjuntos da forma

$$\mathcal{F}_{i,j,k,l} = \mathcal{A}_i \cup \beta_j \cup \Gamma_k \cup \xi_l,$$

podendo algum desses conjuntos da união ser vazio. Afirmamos que $\{\mathcal{F}_{i,j,k,l},\ (i,j,k,l) \in I \times J \times K \times L\}$ forma uma base para $\Theta_{[0,T],d}$.

De fato, dados $u \in \mathcal{F}_{[0,T],d}$ e um aberto $\mathcal{U}$ tais que $u \in \mathcal{U}$, existe $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$B_{\|\cdot\|_{\mathcal{F}_{[0,T],d}}}(u,\varepsilon) \subset \mathcal{U}.$$

Tomando $\mathcal{A}_i = B_{\|\cdot\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}}\left(u,\frac{\varepsilon}{4}\right)$, $\beta_j = B_{\|\cdot\|_{L^p(0,T,L^p(\Omega))}}\left(u,\frac{\varepsilon}{4}\right)$, $\Gamma_k = B_{\|\cdot\|_{L^2(0,T,H^1_d(\Omega))}}\left(u,\frac{\varepsilon}{4}\right)$ e $\xi_l = B_{\|\cdot\|_{L^q(0,T,H^{-r}(\Omega))}}\left(\partial_t u,\frac{\varepsilon}{4}\right)$,segue que $u \in \mathcal{F}_{i,j,k,l} \subset B_{\|\cdot\|_{\mathcal{F}_{[0,T],d}}}(u,\varepsilon) \subset \mathcal{U}$.

Da mesma forma, mostramos que se $u \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, onde $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ são abertos básicos, então existe $\mathcal{U}_3$ aberto básico tal que $u \in \mathcal{U}_3 \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$.

Resta apenas mostrar que cada um dos espaços $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$, $L^p(0,T,L^p(\Omega))$, $L^2(0,T,H^1_d(\Omega))$ e $L^q(0,T,H^{-r}(\Omega))$ é E_2.

Como $L^p(0,T,L^p(\Omega))$, $L^2(0,T,H^1_d(\Omega))$ e $L^q(0,T,H^{-r}(\Omega))$ são separáveis, então possuem base enumerável. Além disso, $L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T,L^2(\Omega))$. Logo, possui base enumerável. $\square$

O espaço de trajetórias da equação (5.1) é dado por

$$\mathcal{K}^+_d = \{u \in \mathcal{F}^+_d \,|\, u \text{ é solução fraca global de (5.1)}\}.$$

Pelo Teorema 5.2.1, segue que $\mathcal{K}^+_d \neq \emptyset$.

Proposição 5.3.2 *$\mathcal{K}^+_d$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{F}^+_d$ na topologia $\theta^+_{loc,d}$.*

Demonstração: Seja $\{u_m\} \subset \mathcal{K}^+_d$ tal que $u_m \to u$ em $\theta^+_{loc,d}$, com $u \in \mathcal{F}^+_d$. Então, $\forall T > 0$,

1. $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$.

2. $u_m \rightharpoonup u$ em $L^p(0,T,L^p(\Omega))$.

3. $u_m \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T,H^1_d(\Omega))$.

4. $\partial_t u_m \rightharpoonup \partial_t u$ em $L^q(0,T,H^{-r}(\Omega))$.

Vamos verificar que u é solução fraca global de (5.1).

Como toda sequência fracamente convergente é limitada, segue que

$$\{u_m\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T,L^2(\Omega)),\ L^p(0,T,L^p(\Omega)),\ L^2(0,T,H^1_d(\Omega))$$

e $\{\partial_t u_m\}$ é limitada em $L^q(0,T,H^{-r}_d(\Omega))$.

Portanto, $\{-f(u_m)+|u_m|^{\alpha-1}u_m\}$ é uma sequência limitada e, pelo Corolário 1.6.10, admite subsequência fracamente convergente em $L^q(0,T,L^q(\Omega))$, digamos,

$$f(u_m)-|u_m|^{\alpha-1}u_m \rightharpoonup w \text{ em } L^q(0,T,L^q(\Omega)).$$

Como u_m é solução fraca de (5.1), fazendo $n\to\infty$, temos

$$\partial_t u = d\Delta u - w,$$

no sentido distribucional em $\mathcal{D}'((0,T),L^p(\Omega)\cap H^1_d(\Omega))$.

Com o mesmo argumento apresentado ao final da etapa 3 da demonstração do Teorema 5.2.1, provamos que

$$w = f(u)-|u|^{\alpha-1}u.$$

Logo, $u\in\mathcal{K}^+_d$. □

Definimos a aplicação

$$\begin{aligned} T(t) : \mathcal{F}^+_d &\to \mathcal{F}^+_d \\ u &\mapsto (T(t)u)(s) = u(t+s) \end{aligned}$$

e o semigrupo de translação $T(\cdot)$.

Do fato do problema (5.1) ser autônomo, segue que $T(t)\mathcal{K}^+_d\subset\mathcal{K}^+_d$. Logo, podemos considerar o semigrupo $T(\cdot)$ restrito a $\mathcal{K}^+_d$.

Proposição 5.3.3 *$T(t) : (\mathcal{F}_d^+, \theta_{loc,d}^+) \to (\mathcal{F}_d^+, \theta_{loc,d}^+)$ é contínua.*

Demonstração: A demonstração é idêntica à demonstração feita no Teorema 4.2.5. Basta observar que $T(t) : \mathcal{F}_{[0,T+t],d} \to \mathcal{F}_{[0,T],d}$ é contínua, uma vez que

$$\|T(t)u\|_{\mathcal{F}^+_{[0,T],d}} = \|u(\cdot + t)\|_{\mathcal{F}_{[0,T],d}} \leq \|u(\cdot)\|_{\mathcal{F}_{[0,T+t],d}}.$$

□

Teorema 5.3.4 *Existem constantes positivas M_1 e M_2 tais que, $\forall u \in \mathcal{K}_d^+$,*

$$\|T(t)u\|_{\mathcal{F}^+_{b,d}} \leq M_1 \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} e^{-2t} + M_2, \ \forall t \geq 0.$$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} \|T(t)u\|_{\mathcal{F}^+_{b,d}} = & \|T(t)u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))} + \|T(t)u\|_{L^p_b(\mathbb{R}^+,L^p(\Omega))} \\ & + \|T(t)u\|_{L^2_b(\mathbb{R}^+,H^1_d(\Omega))} + \|\partial_s T(t)u\|_{L^q_b(\mathbb{R}^+,H^{-r}(\Omega))}. \end{aligned}$$

- Para limitar $\|T(t)u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))}$, note que, do Corolário 5.2.3 item (1), temos

$$\begin{aligned} \|T(t)u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} e^{-2t} + \frac{K_1}{2}, \ \forall t \geq 0, \\ \Rightarrow \sup_{s\in\mathbb{R}^+} \|T(t)u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} e^{-2t} + \frac{K_1}{2}, \ \forall t \geq 0, \\ \Rightarrow \|T(t)u\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))} &\leq \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} e^{-2t} + \frac{K_1}{2}, \ \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

  Logo,

$$\|T(t)u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))} \leq \left[\|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} e^{-2t} + \frac{K_1}{2} + 1\right]^{\frac{1}{2}} \leq \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} e^{-2t} + \frac{K_1}{2} + 1. \quad (5.25)$$

- Para limitarmos $\|T(t)u\|_{L^p_b(\mathbb{R}^+,L^p(\Omega))}$ e $\|T(t)u\|_{L^2_b(\mathbb{R}^+,H^1_d(\Omega))}$, observe que a desigualdade dada no item (2) do Corolário 5.2.3 continua válida se integrarmos de t a $t + T$, para qualquer $T > 0$. Logo,

$$
\begin{aligned}
2\int_t^{t+T} \|u(s)\|^2_{H^1_d(\Omega)}\,ds + c_1\int_t^{t+T} \|u(s)\|^p_{L^p(\Omega)}\,ds &\leq \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\,e^{-2t} + \frac{3K_1}{2}\\
\Rightarrow 2\int_0^{T} \|T(t)u(s)\|^2_{H^1_d(\Omega)}\,ds + c_1\int_0^{T} \|T(t)u(s)\|^p_{L^p(\Omega)}\,ds &\leq \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\,e^{-2t} + \frac{3K_1}{2}\\
\Rightarrow 2\,\|T(t)u\|^2_{L^2(0,T,H^1_d(\Omega))} + c_1\,\|T(t)u\|^p_{L^p(0,T,L^p(\Omega))} &\leq \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\,e^{-2t} + \frac{3K_1}{2}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\|T(t)u\|_{L^2(0,T,H^1_d(\Omega))} \leq \left[\frac{1}{2}\,\|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\,e^{-2t} + \frac{3K_1}{4} + 1\right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}\,\|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\,e^{-2t} + \frac{3K_1}{4} + 1, \tag{5.26}
$$

e

$$
\|T(t)u\|_{L^p(0,T,L^p(\Omega))} \leq \left[\frac{1}{c_1}\,\|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\,e^{-2t} + \frac{3K_1}{2c_1} + 1\right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{c_1}\,\|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\,e^{-2t} + \frac{3K_1}{2c_1} + 1. \tag{5.27}
$$

- Para limitar $\|\partial_s T(t)u\|_{L^q_b(\mathbb{R}^+,H^{-r}(\Omega))}$, note que

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_s T(t)u\|_{L^q(0,T,H^{-r}(\Omega))} = \left(\int_0^T \|\partial_s u(t+s)\|^q_{H^{-r}(\Omega)}\,ds\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_t^{t+T} \|\partial_s u(s)\|^q_{H^{-r}(\Omega)}\,ds\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \left(\int_t^{t+T} \|d\Delta u\|^q_{H^{-r}(\Omega)}\,ds + \int_t^{t+T} \|f(u(s))\|^q_{H^{-r}(\Omega)}\,ds + \int_t^{t+T} \||u(s)|^\alpha\|^q_{H^{-r}(\Omega)}\,ds\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \left(k_1^q d^q \underbrace{\int_t^{t+T} \|\Delta u\|^q_{H^{-1}(\Omega)}\,ds}_{(I)} + k_2^q \underbrace{\int_t^{t+T} \|f(u(s))\|^q_{L^q(\Omega)}\,ds}_{(II)} + k_3^q \underbrace{\int_t^{t+T} \||u(s)|^\alpha\|^q_{L^q(\Omega)}\,ds}_{(III)} \right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}
$$

onde k_1, k_2 e k_3 são constantes de imersão.

Segue do Corolário 5.2.3 as seguintes limitações para as integrais destacadas acima:

$$
\begin{aligned}
(I)\ \int_t^{t+T} \|\Delta u\|^q_{H^{-1}(\Omega)}\,ds \leq \int_t^{t+T} \left[\frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\right]^q ds &= \frac{1}{d^{\frac{q}{2}}}\int_t^{t+T} \|\nabla u(s)\|^q_{L^2(\Omega)}\,ds\\
&\overset{1<q<2}{\leq} \frac{1}{d^{\frac{q}{2}}}\left[\frac{1}{2}\,\|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\,e^{-2t} + \frac{3K_1}{4}\right],
\end{aligned}
$$

onde usamos a desigualdade obtida na demonstração da Proposição 5.1.2.

Temos ainda

$$
\begin{aligned}
(II)\ \int_t^{t+T} \|f(u(s))\|_{L^q(\Omega)}^q\, ds &= \int_t^{t+T}\int_\Omega |f(u)|^q dxds \leq \int_t^{t+T}\int_\Omega c_2(|u|^p+1)dxds\\
&\leq c_2\int_t^{t+T}(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + |\Omega|)ds \leq c_2(\|T(t)u\|_{L^p(0,T,L^p(\Omega))}^p + |\Omega|)\\
&\leq c_2\left(\frac{1}{c_1}\left[\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{2}\right] + |\Omega|\right).
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
(III)\ \int_t^{t+T} \||u(s)|^\alpha\|_{L^q(\Omega)}^q\, ds &= \int_t^{t+T}\int_\Omega |u(s)|^{\alpha q} dxds\\
&\overset{Young}{\leq} \int_t^{t+T}\int_\Omega \left[|u(s)|^2\left(\frac{\alpha q}{2}\right) + \left(\frac{2-\alpha q}{2}\right)\right]dxds\\
&= \int_t^{t+T}\left[\frac{\alpha q}{2}\|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2-\alpha q}{2}\right)|\Omega|\right]ds\\
&\leq \frac{\alpha q}{2}\left[\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{2}\right]T + \frac{2-\alpha q}{2}|\Omega|T\\
&= \frac{\alpha q}{2}\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 Te^{-2t} + \frac{3\alpha q K_1}{4}T + \frac{2-\alpha q}{2}|\Omega|T.
\end{aligned}
$$

Portanto, aplicando a Desigualdade de Minkowski e as limitações obtidas anteriormente, temos

$$
\begin{aligned}
\|\partial_s T(t)u\|_{L^q(0,T,H^{-r}(\Omega))} &\leq k_1\frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{2}\|u(0)\|^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{4}\right]^{\frac{1}{q}}\\
&+ k_2 c_2^{\frac{1}{q}}\left[\frac{1}{c_1}\left(\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{2}\right) + |\Omega|\right]^{\frac{1}{q}}\\
&+ k_3\left[\frac{\alpha q}{2}\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 Te^{-2t} + \frac{3\alpha q K_1}{4}T + \frac{2-\alpha q}{2}|\Omega|T\right]^{\frac{1}{q}}\\
&\overset{d>1 \text{ e } \frac{1}{q}<1}{\leq} k_1\left[\frac{1}{2}\|u(0)\|^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{4} + 1\right]\\
&+ k_2 c_2^{\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t}}{c_1} + \frac{3K_1}{2c_1}\right) + |\Omega| + 1\right]\\
&+ k_3\left[\frac{\alpha q}{2}\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 Te^{-2t} + \frac{3\alpha q K_1}{4}T + \frac{2-\alpha q}{2}|\Omega|T + 1\right]\\
&\leq \tilde{K}_1\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \tilde{K}_2,
\end{aligned}
$$

onde

$$\tilde{K}_1 = \frac{k_1}{2} + \frac{k_2 c_2^{\frac{1}{q}}}{c_1} + \frac{k_3 \alpha q}{2} T,$$

$$\tilde{K}_2 = k_1 \left[\frac{3K_1}{4} + 1\right] + k_2 c_2^{\frac{1}{q}} \left[\frac{3K_1}{4c_1} + |\Omega| + 1\right] + k_3 \left[\frac{\alpha q 3K_1}{4} T + \left(\frac{2 - \alpha q}{2}\right) |\Omega| T + 1\right].$$

Temos então

$$\|\partial_s T(t)u\|_{L^q(0,T,H^{-r}(\Omega))} \leq \tilde{K}_1 \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} e^{-2t} + \tilde{K}_2. \tag{5.28}$$

Segue de (5.25), (5.26), (5.27) e (5.28) a estimativa desejada.

□

Observação: Segue do Teorema 5.3.4 que $\mathcal{K}_d^+ \subset \mathcal{F}_{b,d}^+$. Basta notar que se $u \in \mathcal{K}_d^+$, então

$$\|T(t)u\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} \leq M_1 \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + M_2, \quad \forall t \geq 0.$$

Proposição 5.3.5 *Se o problema* (5.1) *satisfaz* (5.2) *e* (5.3)*, então* (5.1) *possui atrator de trajetórias* $\mathcal{U}_d$ *e existe constante* $K > 0$ *tal que*

$$\mathcal{U}_d \subset \{\tilde{u} \in \mathcal{K}_d^+ |\ \|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} \leq K\}.$$

Demonstração: Do Teorema 5.3.4 segue que

$$\|T(t)u\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} \leq M_1 \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} e^{-2t} + M_2, \quad \forall t \geq 0.$$

Logo, o conjunto $P_d = \{\tilde{u} \in \mathcal{K}_d^+ |\ \|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} \leq 2M_2\}$ é absorvente para o semigrupo de translação $T(t) : \mathcal{K}_d^+ \to \mathcal{K}_d^+$.

Mostraremos que P_d é compacto na topologia $\theta_{loc,d}^+$. Dada $\{u_m\} \subset P_d$, então $\|u_m\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} \leq 2M_2$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Seja $\{\tau_m\}$ uma sequência de números positivos tal que $\tau_m \to \infty$, quando $m \to \infty$. Fixado $\tau_1 > 0$, $\{u_m\}$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0, \tau_1, L^2(\Omega))$, $L^p(0, \tau_1, L^p(\Omega))$, $L^2(0, \tau_1, H_d^1(\Omega))$ e $\{\partial_t u_m\}$ é uniformemente limitada em $L^q(0, \tau_1, H^{-r}(\Omega))$. Logo, com os mesmos argumentos apresentados na etapa (3) da demonstração do Teorema 5.2.1, segue que existe subsequência $\{u_{m,1}\}$ que satisfaz

$$u_{m,1} \overset{*}{\rightharpoonup} u_1 \text{ em } L^\infty(0,\tau_1,L^2(\Omega))$$
$$u_{m,1} \rightharpoonup u_1 \text{ em } L^p(0,\tau_1,L^p(\Omega))$$
$$u_{m,1} \rightharpoonup u_1 \text{ em } L^2(0,\tau_1,H^1_d(\Omega))$$
$$\partial_t u_{m,1} \rightharpoonup \partial_t u_1 \text{ em } L^q(0,\tau_1,H^{-r}(\Omega))$$

$$f(u_{m,1}) - |u_{m,1}|^{\alpha-1}u_{m,1} \rightharpoonup f(u_1) - |u_1|^{\alpha-1}u_1 \text{ em } L^q(0,\tau_1,L^q(\Omega))$$

e

$$\partial_t u_1 = d\Delta u_1 - f(u_1) + |u_1|^{\alpha-1}u_1 \quad \text{ em } [0,\tau_1],$$

no sentido distribucional em $\mathcal{D}'(0,\tau_1,L^p(\Omega)\cap H^1_d(\Omega))$.

Fixado agora $\tau_2 > \tau_1$. Então existe subsequência $\{u_{m,2}\}$ de $\{u_{m,1}\}$ tal que

$$u_{m,2} \overset{*}{\rightharpoonup} u_2 \text{ em } L^\infty(0,\tau_2,L^2(\Omega))$$
$$u_{m,2} \rightharpoonup u_2 \text{ em } L^p(0,\tau_2,L^p(\Omega))$$
$$u_{m,2} \rightharpoonup u_2 \text{ em } L^2(0,\tau_2,H^1_d(\Omega))$$
$$\partial_t u_{m,2} \rightharpoonup \partial_t u_2 \text{ em } L^q(0,\tau_2,H^{-r}(\Omega))$$

$$f(u_{m,2}) - |u_{m,2}|^{\alpha-1}u_{m,2} \rightharpoonup f(u_2) - |u_2|^{\alpha-1}u_2 \text{ em } L^q(0,\tau_2,L^q(\Omega))$$

e

$$\partial_t u_2 = d\Delta u_2 - f(u_2) + |u_2|^{\alpha-1}u_2 \quad \text{ em } [0,\tau_2],$$

no sentido distribucional em $\mathcal{D}'(0,\tau_2,L^p(\Omega)\cap H^1_d(\Omega))$.

Observe que, da unicidade do limite, ${u_2}_{|_{[0,\tau_1]}} = u_1$.

Procedendo dessa forma, podemos extrair a subsequência diagonal $\{u_{m,m}\}$, a qual é convergente. De fato, $\forall T > 0$, tome $\tau_k \geq T$. A sequência $\{u_{m,m};\ m \geq k\}$ converge em $[0,\tau_k]$ e, consequentemente, converge em $[0,T]$.

Se $u = \lim\limits_{m\to\infty} u_{m,m}$, então $\|u\|_{\mathcal{F}^+_{b,d}} \leq 2M_2$ e u é solução de (5.1).

Portanto, P_d é compacto na topologia $\theta^+_{loc,d}$ e absorvente. Logo, (5.1) possui atrator de trajetórias $\mathcal{U}_d \subset P_d$. $\square$

5.4 Caracterização do Atrator de Trajetórias

Consideremos

$$\partial_t u = d\Delta u - f(u) + |u|^{\alpha-1}u \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega. \tag{5.29}$$

Definição 5.4.1 *Dizemos que uma função u é uma* solução fraca completa *de* (5.29) *se* $\forall T > 0$, $u \in L^2(-T,T,H_d^1(\Omega)) \cap L^p(-T,T,L^p(\Omega))$ *e u satisfaz* (5.29) *no sentido distribucional em* $\mathcal{D}'(-T,T,L^p(\Omega) \cap H_d^1(\Omega))$.

Da mesma forma que foi feito antes, segue que $\partial_t u \in L^q(-T,T,H^{-r}(\Omega))$, $\forall T > 0$ e consideramos o espaço de Banach $L_b^p(\mathbb{R},E)$ munido da norma

$$\|v\|^p_{L_b^p(\mathbb{R},E)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|v(s)\|_E^p \, ds.$$

Definimos os espaços

$$\mathcal{F}_d = \{u|\ u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R},L^2(\Omega)) \cap L^p_{loc}(\mathbb{R},L^p(\Omega)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R},H^1_d(\Omega)) \text{ e } \partial_t u \in L^q_{loc}(\mathbb{R},H^{-r}(\Omega))\},$$

$$\mathcal{K}_d = \{u \in \mathcal{F}_d|\ u \text{ é solução fraca completa de (5.29)}\},$$

$$\mathcal{F}_{b,d} = \{u \in \mathcal{F}_d|\ \|u\|_{\mathcal{F}_{b,d}} < \infty\},$$

onde

$$\|u\|_{\mathcal{F}_{b,d}} = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^2(\Omega))} + \|u\|_{L_b^p(\mathbb{R},L^p(\Omega))} + \|u\|_{L_b^2(\mathbb{R},H_d^1(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L_b^q(\mathbb{R},H^{-r}(\Omega))}.$$

A topologia $\Theta_{loc,d}$ em $\mathcal{F}_d$ é construída de forma análoga à $\theta^+_{loc,d}$, com as convergências ocorrendo em intervalos da forma $[-T,T]$, para $T > 0$.

A demonstração do teorema a seguir é análoga à demonstração do Teorema 4.3.6.

Teorema 5.4.2 *Se $\mathcal{U}_d$ é o atrator de trajetórias de* (5.1) *e $\mathcal{K}_d$ é o núcleo de* (5.29)*, então*

$$\mathcal{U}_d = \Pi_+ \mathcal{K}_d.$$

Além disso, $\mathcal{K}_d \subset \mathcal{F}_{b,d}$ é limitado na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_{b,d}}$ e compacto na topologia $\Theta_{loc,d}$.

Referências Bibliográficas

[1] Brézis, H. *Análisis funcional: Teoria y aplicaciones*. Alianza Editorial, 1984.

[2] Belluzi, M. B. *Existência e semicontinuidade de atratores global, pullback e de trajetórias*. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal de São Carlos, 2016.

[3] Carvalho, A. N.; Langa, J. A. e Robinson, J. C. *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*. Applied Mathematical Sciences, v.182, Springer, 2010.

[4] Chepyzhov, V. V. e Vishik, M. I. *Attractors for equations of mathematical physics*. Colloquium publications, 49, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[5] Cholewa, J. W. e Dlotko, T. *Global attractors in abstract parabolic problems*. Cambridge University Press, 2000.

[6] Coddington, E.A. e Levinson, N. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill, New-York, 1955.

[7] Hale, J.K. *Theory of functional differential equations*. Springer-Verlag, 1977.

[8] Hounie, J. *Teoria Elementar das Distribuições*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[9] Jost, J. *Partial Differential Equations*. Graduate texts in Mathematics 214, Springer-Verlag, Second Edition, 2007.

[10] Lions, J. L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris, 1969.

[11] Lions, J. L e Magenes, E. *Problèmes aux limites non homogènes et applications, 1*. Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[12] Munkres, J. R. *Topology: A first Course*. Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1975.

[13] Robinson, J. C. *Infinity dimensional dynamical systems: An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*. Cambridge University Press, 2001.

[14] Silva, J. D. *Existência de atrator global para equações de Navier-Stokes sobre alguns domínios limitados em* $\mathbb{R}^2$. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal da Paraíba, 2014.

[15] Smoller, J. *Shock waves and reaction-diffusion equations*. Springer, New York, 1983.

[16] Sotomayor, J. *Equações diferenciais ordinárias*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011. - (Coleção textos universitários do IME-USP; v.4)

[17] Teles, R.S. *Atratores de trajetórias para algumas classes de equações diferenciais parciais*. Tese (Doutorado em Matemática). Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo, 2012.

[18] Triebel, H. *Interpolation theory, functional spaces, differential operators*. North-Holland, Amsterdam-New York, 1978.