

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA INTERINSTITUCIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA UFSCar-USP

FRANCYS ANDREWS DE SOUZA

CONTROLE DE SISTEMAS NÃO-MARKOVIANOS.

Tese apresentada ao Departamento de Estatística – Des/UFSCar e ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre ou Doutor em Estatística - Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística UFSCar-USP.

Orientador: Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Jr

São Carlos
Setembro de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA INTERINSTITUCIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA UFSCar-USP

FRANCYS ANDREWS DE SOUZA

CONTROL OF NON-MARKOVIAN SYSTEMS

Thesis submitted to the Departamento de – Des/UFSCar and to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment for the PhD degree in Statistics - Interinstitucional Program of Pos-Graduation in Statistics UFSCar-USP.

Advisor: Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Jr

São Carlos
September de 2017

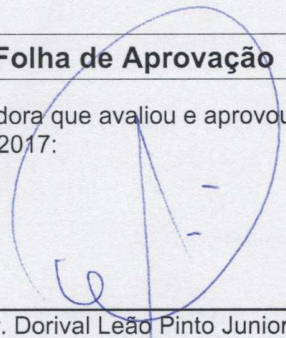


UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

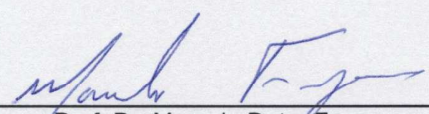
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística

Folha de Aprovação

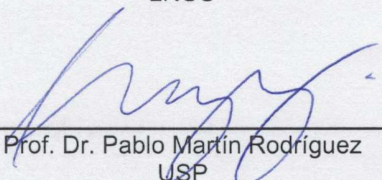
Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Francys Andrews de Souza, realizada em 13/09/2017:



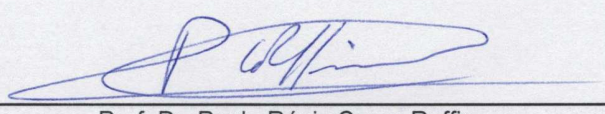
Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Junior
USP



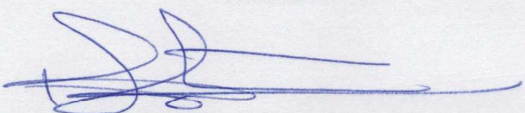
Prof. Dr. Marcelo Dutra Fragoso
LNCC



Prof. Dr. Pablo Martín Rodríguez
USP



Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino
UNICAMP



Prof. Dr. Pedro José Catuogno
UNICAMP

*A Minha Esposa
Lidiane*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado a oportunidade de desenvolver essa pesquisa e por ter me capacitado a concluí-la.

Agradeço a minha esposa Lidiane por todo auxílio sua compreensão sem limite durante esse período, companheirismo, apoio e por me dar suporte e a força necessária para que pudesse trilhar esse árduo caminho.

Aos meus pais Alaor e Marta por todo o apoio e o esforço que fizeram para que eu pudesse chegar até aqui, me ajudando nos momentos difíceis e a minha irmã Patrícia por ter me apoiado, devo muito a eles.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dorival Leão pela paciência, amizade, dedicação e por todo conhecimento que pude adquirir com sua experiência, além da confiança depositada em mim. Agradeço também carinhosamente ao Prof. Alberto Ohashi, que também me ajudou muito para que esse trabalho pudesse ser concluído.

Finalmente, ao CAPES agradeço pelo apoio financeiro cedido.

Resumo

Nesta tese, apresentamos uma metodologia concreta para calcular os controles ϵ -ótimos para sistemas estocásticos não-Markovianos. A análise *pathwise* e o uso da estrutura de discretização proposta por Leão e Ohashi (32) conjuntamente com argumentos de seleção mensuráveis, nos forneceu uma estrutura para transformar um problema infinito dimensional para um finito dimensional. Desta forma, garantimos uma descrição concreta para uma classe bastante geral de problemas.

Abstract

In this thesis, we present a concrete methodology to calculate the ϵ -optimal controls for non-Markovian stochastic systems. A pathwise analysis and the use of the discretization structure proposed by Leão and Ohashi (32) jointly with measurable selection arguments, allows us a structure to transform an infinite dimensional problem into a finite dimensional. In this way, we guarantee a concrete description for a rather general class of stochastic problems.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Contribuições da Tese	4
2	Controle Estocástico a Tempo Contínuo	7
2.1	Propriedades do Processo Valor	9
2.2	Exemplo EDE	16
3	Discretizações	21
3.1	Discretização Aleatória	21
3.2	Decomposição fraca de funcionais e o espaço \mathbf{B}^p	27
3.3	Decomposição de Doob-Meyer	32
3.4	Discretização do processo valor.	35
4	Discretização Trajetória a Trajetória	39
4.1	Discretização	39
4.1.1	Exemplo: EDE Controlada movida pelo movimento Browniano	44
4.2	Teorema de Seleção Mensurável	46
4.3	Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman em uma estrutura discreta	54
5	Aproximações	57
5.1	Aproximação do Controle	57
5.2	Aproximação do Euler-Maruyama controlado	67
5.2.1	Exemplo: EDE controlada dirigida por um movimento Browniano fracionário	78
5.3	Convergência do Processo Valor	80

6	Aplicações	91
6.1	Pairs Trade	91
6.1.1	Formulação do Problema	92
6.1.2	Aproximação do spread	94
6.2	Exemplo Particular	96
6.3	Controle no Portfolio	103
7	Conclusão	113
A	- Supremo Essencial	115
A.1	116
B	Formula da desintegração	119
	Índice Remissivo	129
	Referências Bibliográficas	130

Introdução

A teoria do controle estocástico pode ser aplicada em diversas áreas, como sistemas dinâmicos, física, gestão, economia e finanças. Dentro das inúmeras possibilidades de aplicações da teoria de controle, destacamos no mercado financeiro os problemas de hedging, super-hedging, pairs trading entre outros (1), (36), (54), (44), (41),(47) (18) .

Seja $X(t)$, a variável aleatória que representa o estado de um sistema estocástico no tempo t , $t \in [0, T]$, no qual T é uma constante positiva. Por exemplo, $X(t)$ é o capital de um investidor em ativos financeiros no instante t . Neste caso, o estado do processo é quanto dinheiro o investidor tem no instante t .

Assumimos que é possível controlar o estado do sistema por uma variável $u(t)$, a qual é denominada variável controle no instante t . Para destacar a ação do controle no estado do sistema, denotaremos o sistema controlado por $X^u(t)$.

No caso do capital do investidor, definimos $u(t)$ como sendo a quantidade de ativos no tempo t . Nesse caso a quantidade de ativos é o controle e a partir deste, definimos o estado do sistema como o capital do investidor $X^u(t) = u(t)S(t)$, no qual $S(t)$ representa o preço do ativo. Dado uma função de utilidade ξ sobre o estado do sistema X^u , queremos determinar uma ação de controle que otimiza a função de utilidade ξ .

Dado a base estocástica $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, no qual Ω é o espaço das funções contínuas

$$C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ contínuo}\},$$

\mathbb{P} é a medida Wiener e \mathbb{F} é a filtragem usual do movimento Browniano. Considere U_t^T para $0 \leq t \leq T$ a família de processos controles \mathbb{F} -adaptados em $(t, T]$ e limitados. Definida na base estocástica $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, tomamos uma família de processos estocásticos contínuos $\{X^u, u \in U_0^T\}$ controlados pela família U_t^T . Temos como objetivo determinar um controle u^ϵ tal que

$$V(0) := \sup_{u \in U_0^T} \mathbb{E}(\xi(X^u)) \leq \mathbb{E}(\xi(X^{u^\epsilon})) + \epsilon$$

no qual ξ é uma função custo definida sobre Ω e $\epsilon > 0$. Desta forma, temos um problema de otimização que depende de toda a trajetória do sistema controlado X^u e as ações de controle u dependem do tempo t . Como o tempo t assume valores no intervalo $[0, T]$, dizemos que o problema de otimização é infinito dimensional. Na tentativa de simplificar o problema de otimização foi introduzido a função valor associada. A ideia é reduzir o problema infinito dimensional para o caso finito dimensional.

Para introduzirmos o processo valor, definimos a concatenação de dois controles por: se $u \in U_m^s$ e $v \in U_s^t$ para $m < s < t$ q.c, então $(u \otimes_s v)(\cdot) \in U_m^t$, no qual

$$(u \otimes_s v)(r) := \begin{cases} u(r); & \text{se } m < r \leq s \\ v(r); & \text{se } s < r \leq t. \end{cases}$$

Para $u \in U_0^t$, o processo valor ao longo do tempo é dado por

$$V(t, u) := \text{ess sup}_{v \in U_t^T} \mathbb{E} \left[\xi(X^{u \otimes_t v}) | \mathcal{F}_t \right]; 0 \leq t \leq T, u \in U_0^T,$$

no ess sup representa o supremo essencial (ver A). Para reduzir o problema de otimização infinito dimensional para o caso finito, Bellman (2) introduziu o princípio da programação dinâmica. Sabemos que o processo valor V satisfaz o princípio da programação dinâmica 2.1.2

$$V(s, u) = \text{ess sup}_{\theta \in U_s^t} \mathbb{E} \left[V(t, u \otimes_s \theta) | \mathcal{F}_s \right] \text{ q.c.}$$

$$V(T, u) = \xi(X^u),$$

para $0 \leq s < t \leq T$. No caso Markoviano (ver (21) (8) e referências contidas neles) utilizamos o princípio da programação dinâmica, e sua forma infinitesimal conhecida como equação de Hamilton Jacobi Bellman(HJB) para reduzirmos a dimensão do problema de otimização para o caso finito dimensional. Assim, podemos caracterizar

controles ϵ -ótimos e o processo valor. Porém como nem sempre a HJB admite solução forte, Crandall e Lions (10) propuseram uma solução fraca, conhecida como solução de viscosidade, para mais detalhes sobre solução de viscosidade (ver (42)) e referências contidas.

No contexto não-Markoviano, a equação de HJB depende de operadores definidos em espaços de funções ((15)) e com isso, não simplifica o problema de otimização reduzindo para o caso finito dimensional. Para determinarmos estratégias ϵ -ótimas e caracterizarmos o processo valor, discretizamos o problema de controle via o método de discretização proposto por Leão e Ohashi (32).

No contexto não-Markoviano um dos processos mais estudados na teoria de controle é

$$\begin{aligned} X(0) &= x, \\ X^u(t) &= x + \int_0^t \alpha(s, X_s^u, u(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^u, u(s))dB(s), \quad 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (1.1)$$

com α e σ satisfazendo as hipóteses usuais para existência de soluções(ver 2.2), o qual é uma equação diferencial estocástica (EDE). A EDE é um caso particular do nosso modelo, pois satisfaz as hipóteses da nossa formulação.

Devido a grande dificuldade de tratar o caso não-Markoviano, as primeiras caracterizações iniciarão-se com o controle apenas no drift (função α da EDE (11), (16),(19)) e não no coeficiente de difusão (função σ da EDE).

Através do Teorema de Girsanov, Elliott (19) mostrou que o processo valor não depende do controle, quando este interfere somente no drift pois, todas as medidas são absolutamente contínuas. Desta forma ele obteve a solução através de um Hamiltoniano, isso foi tratado também por outros autores.(56),(60)

Outra forma de lidar com o caso em que o controle interfere apenas no drift, é a chamada *backward stochastic differential equation* (BSDE) (14), método que foi desenvolvido para encontrar soluções adaptadas envolvendo integrais de Itô satisfazendo condições apropriadas (24),(46),(26).

Agora, se o processo controle interfere na difusão em um processo não-Markoviano as medidas deixam de ser absolutamente contínuas (43), como consequência o processo valor depende do controle. A fim de resolver casos que incluem controles no processo de difusão, foi proposto a BSDE de segunda ordem (2BSDE)(7) (54), (43), (17).

Desta forma, resumidamente, temos que no caso non-Markoviano as principais abordagens são: solução de viscosidade para equações do tipo HJB ((15), (4)), BSDEs ((14))

e 2BSDEs ((7) (54), (43), (17)). Porém todas essas equações (HJB, BSDEs, 2BSDEs) são baseadas em operadores definidos em espaço de dimensão infinita, pois a estrutura de controle depende de toda a informação anterior ao tempo t . Assim temos dificuldades para efetivamente calcularmos estratégias ϵ -ótimas.

O principal ganho deste trabalho é a discretização do problema de controle estocástico não-Markoviano, o que nos permitiu reduzir a dimensão do problema de controle e obter um método para calcularmos controles ϵ -ótimo.

1.1 Contribuições da Tese

Mostramos a existência de uma função analiticamente mensurável, a qual é o controle ϵ -ótimo para versão discretizada do processo valor. Em seguida mostramos que o controle obtido para o problema discretizado também é ϵ -ótimo para o problema original (ver Corolário 5.3.1). Para isso, mostramos que a versão discretizada do processo valor converge para o processo original (ver Teorema 5.3.1) sob algumas hipóteses adicionais, que englobam por exemplo o caso da EDE.

Nossa abordagem resolve um problema ainda em aberto, pois simplifica o problema, trazendo um problema infinito dimensional para o caso finito dimensional. O que oferece diversas vantagens, como a possibilidade de uma solução explícita do controle ϵ -ótimo (numericamente se necessário). Como um exemplo em que podemos encontrar explicitamente a solução do controle, temos o caso do pair trade(18) que se encontra no capítulo 6.

O caso do pair trade, se enquadrada no contexto em que o controle se encontra apenas no drift, o que sem dúvidas favorece para apresentar um controle de forma explícita. Uma estratégia do tipo pair trade é uma estratégia de investimento baseada na identificação de pares de ações que são historicamente relacionados. Então buscamos discrepâncias temporárias nessa relação, comprando/vendendo as ações na divergência e obtendo o lucro quando volta a relação típica deles.

Tratamos esse tipo de estratégia de forma um pouco diferente, encontrando o controle ótimo, baseado em nosso modelo, no qual esse controle é a quantidade a ser investida em cada ação do par.

Abordamos também um problema no qual o controle interfere tanto no drift quanto na difusão. Como por exemplo o caso em que queremos controlar o *portfolio* (ver capítulo 6). O interessante deste exemplo, é que apesar de não encontrarmos uma solução explícita, obtivemos uma equação relativamente simples, na qual a solução desta equação é o controle ϵ -ótimo que procuramos.

Nosso trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 2 buscamos expor o problema de controle e as hipóteses necessárias para o modelo, explicando algumas propriedades importantes para o processo valor. Além disso, caracterizamos o espaço dos controles, baseado nas hipóteses canônicas. Como exemplo de um processo que satisfaz as hipóteses apresentadas demos a EDE, a qual mostramos que de fato se enquadra em nosso contexto.

No capítulo 3, descrevemos o processo de discretização aleatória proposto por Leão e Ohashi (32) e apresentamos detalhes sobre o espaço \mathbf{B}^p , no qual nosso processo pertence. Além disso, descrevemos a decomposição de Doob-Meyer para o processo.

No capítulo 4, mostramos em detalhes o processo de discretização trajetória a trajetória e os teoremas de seleção mensurável, e obtemos as equações de Hamilton-Jacobi-Bellman para o nosso modelo.

Já no capítulo 5, mostramos as convergências de todas as nossas discretizações, a convergência dos controles. Mostramos que cada controle discretizado pertence ao nosso espaço, pois permanece limitado, e por isso também são um controle para o processo valor não discretizado. Mostramos a convergência do Euler-Maruyama controlado, é importante enfatizar que o nosso Euler-Maruyama diverge do clássico pois usamos a discretização de tempos aleatórios. Mostramos a convergência do processo valor discretizado.

Por fim, no capítulo 6 aplicamos nosso método na estratégia de pairs trade, e mostramos explicitamente o controle ótimo, também aplicamos o método no caso do controle do *portfolio*.

Controle Estocástico a Tempo Contínuo

Problemas de controle aparece em diversos contextos da matemática, em geral envolvem sistemas dinâmicos, ou seja, sistemas que evoluem ao longo do tempo. A teoria de controle ótimo, como o próprio nome diz, busca encontrar a maneira ótima de controlar um sistema dinâmico.

Em nosso caso, trabalhamos com controle estocástico, ou seja, as equações que descrevem o sistema são estocásticas. Assumimos algumas hipóteses canônicas sobre os espaços de controle e algumas hipóteses sobre a função custo. Nossas hipóteses englobam casos bem gerais, como por exemplo as equações diferenciais estocásticas (EDE), com os controles interferindo tanto no drift quanto na difusão em um caso não-Markoviano (ver 2.2).

Dentro deste contexto, ainda podemos englobar as equações que são dirigidas por movimentos Brownianos Fracionais e sistemas não-semimartingales baseado em um funcional de Wiener genérico.

Através desta tese, fixamos o espaço filtrado de probabilidade $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ equipada com um movimento Browniano d -dimensional $B = \{B^1, \dots, B^d\}$ no qual $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ é a filtragem usual \mathbb{P} -aumentada gerada por B sobre uma medida de probabilidade fixada \mathbb{P} . Para um par de \mathbb{F} tempos de parada (M, N) , denotamos

$$]]M, N]] := \{(\omega, t); M(\omega) < t \leq N(\omega)\}. \quad (2.1)$$

O espaço de ações é um conjunto compacto

$$\mathbb{A} := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m; \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \leq \bar{a}\}$$

para algum $0 < \bar{a} < +\infty$. Para configurar a estrutura básica do nosso problema de controle, primeiro precisamos definir a classe de processos de controle admissíveis: para cada par (M, N) de \mathbb{F} tempos de parada tal que $M < N$ q.c., denotamos U_M^N como o conjunto de todos os processos \mathbb{F} -previsível $u :]]M, N]] \rightarrow \mathbb{A}$ tal que $u(M+)$ existe. Para qualquer família de processos, observamos que eles satisfazem as seguintes propriedades canônicas:

- **Restrição:** $u \in U_M^N \Rightarrow u |_{]]M, P]]} \in U_M^P$ para $M < P \leq N$ q.c.
- **Concatenação:** Se $u \in U_M^N$ e $v \in U_N^P$ for $M < N < P$ q.c, então $(u \otimes_N v)(\cdot) \in U_M^P$, no qual

$$(u \otimes_N v)(r) := \begin{cases} u(r); & \text{se } M < r \leq N \\ v(r); & \text{se } N < r \leq P. \end{cases}$$

- **Mistura finita:** Para todo $u, v \in U_M^N$ e $G \in \mathcal{F}_M^1$, temos que

$$u\mathbb{1}_G + v\mathbb{1}_{G^c} \in U_M^N.$$

- **Mistura enumerável em tempos determinísticos:** Dado uma sequência de controle u_1, u_2, \dots em U_s^t para $s < t$ e uma sequência de conjuntos disjuntos D_1, D_2, \dots em \mathcal{F}_s ,

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i \mathbb{1}_{D_i} \in U_s^t$$

Para manter a notação simples, denotaremos

$$U_M := \{u :]]M, +\infty[[\rightarrow \mathbb{A} \text{ é } \mathbb{F} \text{ - previsível e } u(M+) \text{ existe}\}$$

para cada \mathbb{F} -tempo de parada finito M . Seja $\mathbf{B}^p(\mathbb{F})$ um espaço de Banach de todos os processos \mathbb{F} -adaptados a valores reais Y tal que

$${}^1\mathcal{F}_M := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{M \leq t\} \in \mathbb{F}_t, \forall t \in \mathbb{R}_+\}$$

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |Y(t)|^p < \infty, \quad (2.2)$$

para $1 \leq p < \infty$ and $0 < T < +\infty$ é um tempo final fixado.

Definição 2.1. Qualquer $X : U_0^T \rightarrow \mathbf{B}^2(\mathbb{F})$ é chamado de **funcional de Wiener controlado**.

Precisamos de algumas hipóteses de continuidade nos funcionais de Wiener dado.

Afirmção A1: A aplicação $u \mapsto X^u$ is L^2 -Lipschitz contínua, i.e., existe uma constante C tal que

$$\|X^u - X^\eta\|_{\mathbf{B}^2(\mathbb{F})} \leq C \mathbb{E} \int_0^T \|u(s) - \eta(s)\|_{\mathbb{R}^d}^2 ds$$

para todo $u, \eta \in U_0^T$.

Mesmo que estejamos unicamente interessados em funcionais de Wiener controlados com caminhos contínuos, devido a discretização somos forçados a assumir que a função custo admite uma extensão de $C([0, T]; \mathbb{R}^q)$ para o espaço de cadlag q -dimensional definido por $D([0, T]; \mathbb{R}^q)$ sobre $[0, T]$.

Afirmção B1: A função custo $\xi : D([0, T]; \mathbb{R}^q) \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua e limitada. Ou seja, existem constantes C_1 e C_2 tal que

$$|\xi(f) - \xi(g)| \leq C_1 \sup_{0 \leq t \leq T} \|f - g\|_{\mathbb{R}^q}; f, g \in D([0, T]; \mathbb{R}^q)$$

e $|\xi(f)| \leq C_2$ para todo $f \in D([0, T]; \mathbb{R}^q)$

2.1 Propriedades do Processo Valor

Nesta seção, apresentamos as propriedades básica do processo valor

$$V_X(t, u) := \operatorname{ess\,sup}_{v \in U_t^T} \mathbb{E} \left[\xi(X^{u \otimes_t v}) | \mathcal{F}_t \right]; 0 \leq t \leq T, u \in U_0^T \quad (2.3)$$

baseado na filtragem Browniana \mathbb{F} . Devemos notar que $V_X(T, u) = \xi(X^u)$ q.c.. Definimos $V_X(0-) := V_X(0)$.

Através desta tese a fim de manter a notação simples omitiremos a dependência do processo valor em (2.3) do funcional de Wiener controlado X e escrevemos V como sendo a aplicação $V : U_0^T \rightarrow \mathbf{B}^2(\mathbb{F})$.

Observação 2.1.1. Para qualquer $u, v \in U_0^T$ tal que $u = v$ em $[0, t]$, temos que $V(t, u) = V(t, v)$ *q.c.*. Isto implica que $V(t; u)$ depende apenas do controle u no intervalo $[0, t]$.

Lema 2.1.1. (Propriedade de Lattice) Para cada u e v em U_t^T , existe $\theta \in U_t^T$ tal que

$$\mathbb{E} [\xi (X^{\pi \otimes t \theta}) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E} [\xi (X^{\pi \otimes t u}) | \mathcal{F}_t] \vee \mathbb{E} [\xi (X^{\pi \otimes t v}) | \mathcal{F}_t], \quad (2.4)$$

$\mathbb{P} - a.s$ para todo $\pi \in U_0^T$ (com $f \vee g = \max f, g$). Conseqüentemente, para cada $s \leq t$,

$$\mathbb{E} \left\{ \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_t^T} \mathbb{E} [\xi (X^{\pi \otimes t \theta}) | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s \right\} = \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_t^T} \mathbb{E} [\xi (X^{\pi \otimes t \theta}) | \mathcal{F}_s]$$

$\mathbb{P} - a.s$, com $\pi \in U_0^T$.

Demonstração: Para

$$C = \{ \omega \in \Omega; \mathbb{E} [\xi (X^{\pi \otimes t u}) | \mathcal{F}_t] (\omega) > \mathbb{E} [\xi (X^{\pi \otimes t v}) | \mathcal{F}_t] (\omega) \},$$

pela hipótese da mistura finita dos controles, temos que $C \in \mathcal{F}_t$. Então, definimos

$$\theta = u \mathbf{1}_{\{C\}} + v \mathbf{1}_{\{C^c\}}.$$

Do fato que $C \in \mathcal{F}_t$, podemos facilmente verificar que $\theta \in U_t^T$, e o resultado segue. ■

Por construção da propriedade de lattice (2.4) segue

$$\mathbb{E} \left[\operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_t^T} \mathbb{E} [\xi (X^{u \otimes t \theta}) | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s \right] = \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_t^T} \mathbb{E} [\xi (X^{u \otimes t \theta}) | \mathcal{F}_s] \quad q.c. \quad (2.5)$$

para qualquer $u \in U_0^T$ e $0 \leq s \leq t \leq T$. Além disso, pode-se verificar também que cada $u \in U_0^T$, $V(\cdot, u)$ é um supermartingale com condição final $\xi(X^u)$.

Lema 2.1.2. Para cada $0 \leq s < t \leq T$ e $u \in U_0^T$,

$$\operatorname{ess\,sup}_{\phi \in U_s^T} \mathbb{E} [\xi (X^{u \otimes s \phi}) | \mathcal{F}_s] = \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_s^t} \operatorname{ess\,sup}_{\phi \in U_t^T} \mathbb{E} [\xi (X^{(u \otimes s \theta) \otimes t \phi}) | \mathcal{F}_s] \quad q.c.$$

Demonstração: Para $0 \leq s < t \leq T$ e $u \in U_0^T$, escrevemos $u \otimes_s \phi = u \otimes_s \theta \otimes_t \phi$ no qual θ é uma restrição de $\phi \in U_s^T$ em $[s, t]$. Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi(X^{u \otimes_s \phi}) | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\xi(X^{(u \otimes_s \theta) \otimes_t \phi}) | \mathcal{F}_s] \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\varphi \in U_t^T} \mathbb{E}[\xi(X^{(u \otimes_s \theta) \otimes_t \varphi}) | \mathcal{F}_s] \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\eta \in U_s^t} \operatorname{ess\,sup}_{\varphi \in U_t^T} \mathbb{E}[\xi(X^{(u \otimes_s \eta) \otimes_t \varphi}) | \mathcal{F}_s] \quad q.c. \end{aligned} \quad (2.6)$$

para todo $\phi \in U_s^T$. Inversamente, $\operatorname{ess\,sup}_{\phi \in U_s^T} \mathbb{E}[\xi(X^{u \otimes_s \phi}) | \mathcal{F}_s] \geq \mathbb{E}[\xi(X^{(u \otimes_s \eta) \otimes_t \varphi}) | \mathcal{F}_s] \quad q.c.$ para todo $\varphi \in U_t^T$ e $\eta \in U_s^t$ tal que

$$\operatorname{ess\,sup}_{\phi \in U_s^T} \mathbb{E}[\xi(X^{u \otimes_s \phi}) | \mathcal{F}_s] \geq \operatorname{ess\,sup}_{\eta \in U_s^t} \operatorname{ess\,sup}_{\varphi \in U_t^T} \mathbb{E}[\xi(X^{(u \otimes_s \eta) \otimes_t \varphi}) | \mathcal{F}_s] \quad q.c. \quad (2.7)$$

Resumindo (2.6) e (2.7), o que conclui a prova. ■

Proposição 2.1.2. (Princípio da Programação Dinâmica) Para cada $u \in U_0^T$ e $0 \leq s < t$, a família de $V(\cdot, u)$ satisfaz a equação do princípio da programação dinâmica,

$$\begin{aligned} V(s, u) &= \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_s^t} \mathbb{E} \left[V(t, u \otimes_s \theta) \mid \mathcal{F}_s \right] \quad q.c. \\ V(T, u) &= \xi(X^u), \end{aligned} \quad (2.8)$$

Inversamente, se a classe de \mathbb{F} -funcionais $\{Z(\cdot, u) : u \in U_0^T\}$ satisfaz (2.8) para cada $u \in U_0^T$, então $Z(\cdot, u) = V(\cdot, u) \quad q.c.$ para todo $u \in U_0^T$.

Demonstração: Fixamos $0 \leq s < t \leq T$ e $u \in U_0^T$. Dos Lemas 2.1.1 e 2.1.2 segue

$$\begin{aligned}
V(s, u) &= \operatorname{ess\,sup}_{\phi \in U_s^T} \mathbb{E} [\xi(X^{u \otimes_s \phi}) \mid \mathcal{F}_s] \\
&= \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_s^t} \operatorname{ess\,sup}_{\phi \in U_t^T} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [\xi(X^{(u \otimes_s \theta) \otimes_t \phi}) \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s \right] \\
&= \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_s^t} \mathbb{E} \left[\operatorname{ess\,sup}_{\phi \in U_t^T} \mathbb{E} [\xi(X^{(u \otimes_s \theta) \otimes_t \phi}) \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s \right] \\
&= \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_s^t} \mathbb{E}[V(t, u \otimes_s \theta) \mid \mathcal{F}_s] \text{ q.c.}
\end{aligned}$$

Inversamente, suponha que existe uma classe de \mathbb{F} -funcionais $\{Z(\cdot, u) : u \in U_0^T\}$ satisfazendo o princípio da programação dinâmica (2.8) para cada $u \in U_0^T$. Fixamos $u \in U_0^T$. Por hipótese

$$Z(T, u) = \xi(X^u) = V(T, u) \text{ q.c.}$$

De modo que para cada $s \in [0, T)$,

$$\begin{aligned}
V(s, u) &= \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_s^T} \mathbb{E} \{V(T, u \otimes_s \theta) \mid \mathcal{F}_s\} \\
&= \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_s^T} \mathbb{E} \{Z(T, u \otimes_s \theta) \mid \mathcal{F}_s\} \\
&= Z(s, u) \text{ q.c.}
\end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue. ■

Vamos relembrar alguns conceitos de otimalidade.

Definição 2.2. Dizemos que $u \in U_0^T$ é um controle ϵ -ótimo se

$$\mathbb{E}[\xi(X^u)] \geq \sup_{\eta \in U_0^T} \mathbb{E}[\xi(X^\eta)] - \epsilon \quad (2.9)$$

No caso em que $\epsilon = 0$, dizemos que u realiza (2.9). Então u é chamado de controle ótimo.

Claro que, o controle ϵ -ótimo sempre existe quando $|\sup_{u \in U_0^T} \mathbb{E}[\xi(X^u)]| < +\infty$.

Definição 2.3. Dado $\epsilon \geq 0$ e $\pi \in U_0^T$, um controle $u^\epsilon \in U_t^T$ é (t, ϵ, π) -ótimo se

$$V(t, \pi) \leq \mathbb{E} [\xi(X^{(\pi \otimes_t u^\epsilon)}) \mid \mathcal{F}_t] + \epsilon \text{ a.s..}$$

Claro que um controle $(0, \epsilon, \pi)$ -ótimo é também ϵ -ótimo. O principal objetivos do desenvolvimento dessa tese é o desenvolvimento de um procedimento viável para calcular o controle ϵ -ótimo. A conhecida propriedade de martingale para otimalidade é dada pelo Lema a seguir.

Lema 2.1.3. (O Princípio da Otimalidade) Um controle $u^* \in U_0^T$ é ótimo se, e somente, se $\{V(t, u^*); 0 \leq t \leq T\}$ é um \mathbb{F} -martingale (veja (11)).

A seguir apresentamos um lema indicando que o processo valor tem caminhos contínuos sobre as Afirmções A1 e B1.

Lema 2.1.4. Se as afirmações A1 e B1 se aplicam, então para cada $u \in U_0^T$, o supermartingale $V(\cdot, u)$ tem versões contínuas.

Demonstração: Da propriedade de \mathbb{F} -supermartingale, é suficiente provar que $t \mapsto \mathbb{E}[V(t, u)]$ é contínuo. Fixamos $t \in [0, T]$, $u \in U_t^T$ e considere a sequência $t_n \downarrow t$ quando $n \rightarrow \infty$. Durante a prova C é uma constante genérica o qual pode diferir de linha para linha. A propriedade de lattice (veja (2.5)) segue

$$\mathbb{E}[V(t, u)] = \sup_{v \in U_t^T} \mathbb{E}[\xi(X^{u \otimes_t v})], \quad \mathbb{E}[V(t_n, u)] = \sup_{v \in U_{t_n}^T} \mathbb{E}[\xi(X^{u \otimes_{t_n} v})]$$

Em outras palavras, dado $\epsilon > 0$, existe um controle $v^\epsilon \in U_t^T$ tal que

$$\mathbb{E}[V(t, u)] - \epsilon < \mathbb{E}[\xi(X^{u \otimes_t v^\epsilon})]. \quad (2.10)$$

Da propriedade de supermartingale segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[V(t_n, u)]$ existe e $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}V(t_n, u) \leq \mathbb{E}V(t, u)$. Desde que todos os controles são limitados, verificamos que existe uma constante C tal que

$$\mathbb{E} \int_0^T \|u \otimes_{t_n} v^\epsilon - u \otimes v^\epsilon\|_{\mathbb{R}^d}^2 dr = \mathbb{E} \int_t^{t_n} \|u(r) - v^\epsilon(r)\|_{\mathbb{R}^d}^2 dr \leq C(t_n - t) \quad (2.11)$$

para todo $n \geq 1$. A partir das afirmações A1, B1 e (2.11), $\xi(X^{u \otimes_{t_n} v^\epsilon}) \rightarrow \xi(X^{u \otimes_t v^\epsilon})$ em probabilidade quando $n \rightarrow \infty$ de modo que o teorema de convergência segue $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\xi(X^{u \otimes_{t_n} v^\epsilon})] = \mathbb{E}[\xi(X^{u \otimes_t v^\epsilon})]$. Além disso, desde que $t < t_n$, podemos usar a hipótese de restrição dos controles para obtermos que $v^\epsilon \in U_{t_n}^T$. Então,

$$\mathbb{E}[V(t_n, u)] = \sup_{\phi \in U_{t_n}^T} \mathbb{E}[\xi(X^{u \otimes_{t_n} \phi})] \geq \mathbb{E}[\xi(X^{u \otimes_{t_n} v^\epsilon})]; n \geq 1. \quad (2.12)$$

Resumindo (2.10) e (2.12), temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V(t, u)] &\leq \mathbb{E}[\xi(X^{u \otimes t v^\epsilon})] + \epsilon \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\xi(X^{u \otimes t_n v^\epsilon})] + \epsilon \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[V(t_n, u)] + \epsilon
\end{aligned}$$

Isto nos permite afirmar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[V(t_n; u)] = \mathbb{E}[V(t; u)]$ sempre que $t_n \downarrow t$ quando $n \rightarrow \infty$. Considere o limite do lado esquerdo. Vamos pegar $t_n \uparrow t$ quando $n \rightarrow \infty$ para $t > 0$. O princípio da programação dinâmica segue

$$V(t_n, u) = \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_{t_n}^t} \mathbb{E}[V(t, u \otimes_{t_n} \theta) | \mathcal{F}_{t_n}]; n \geq 1. \quad (2.13)$$

Da propriedade de supermartingale segue $\mathbb{E}[V(t, u)] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[V(t_n, u)] =: \alpha$. Então, apenas precisamos verificar que $\alpha \geq \mathbb{E}[V(t, u)]$. Para mostrar isso, observe que $\{V(t_n, u \otimes_{t_n} \theta); \theta \in U_{t_n}^t\}$ tem a propriedade de lattice para cada $n \geq 1$ então (2.13) segue e obtemos que

$$\mathbb{E}[V(t_n, u)] = \sup_{\theta \in U_{t_n}^t} \mathbb{E}[V(t, u \otimes_{t_n} \theta)] = \sup_{\theta \in U_{t_n}^t} \sup_{\eta \in U_t^T} \mathbb{E}[\xi(X^{(u \otimes_{t_n} \theta) \otimes_t \eta})].$$

Das afirmações A1 e B1, sabemos que existe uma constante C

$$\begin{aligned}
\left| \sup_{\eta \in U_t^T} \mathbb{E}[\xi(X^{(u \otimes_{t_n} \theta) \otimes_t \eta})] - \sup_{\eta \in U_t^T} \mathbb{E}[\xi(X^{(u \otimes_t \eta)})] \right| &\leq \sup_{\eta \in U_t^T} \left| \mathbb{E}[\xi(X^{(u \otimes_{t_n} \theta) \otimes_t \eta})] - \mathbb{E}[\xi(X^{(u \otimes_t \eta)})] \right| \\
&\leq C \sup_{\eta \in U_t^T} \|(u \otimes_{t_n} \theta) \otimes_t \eta - (u \otimes_t \eta)\|_{L^2(\Omega \times [0, T])} \\
&= C \sup_{\eta \in U_t^T} \int_{t_n}^t \|\theta(r) - \eta(r)\|_{\mathbb{R}^p}^2 dr \\
&\leq C(t - t_n)^{1/2}
\end{aligned} \quad (2.14)$$

para qualquer $\theta \in U_{t_n}^t$ e $n \geq 1$. Portanto, dado $\epsilon > 0$

$$\sup_{\eta \in U_t^T} \mathbb{E}[\xi(X^{(u \otimes_t \eta)})] < C\epsilon + \sup_{\theta \in U_{t_n}^t} \sup_{\eta \in U_t^T} \mathbb{E}[\xi(X^{(u \otimes_{t_n} \theta) \otimes_t \eta})]$$

para todo n suficientemente grande. Portanto, $\mathbb{E}[V(t, u)] \leq \epsilon + \alpha$ e desde que $\epsilon > 0$ é arbitrário o resultado segue. ■

Lema 2.1.5. Para todo $t \in [0, T]$, $\pi \in U_0^T$ e $\epsilon > 0$, existem controles (t, ϵ, π) -ótimos.

Demonstração: Sabemos que existe uma classe enumerável $J_t^T = (u_1, u_2, \dots) \subset U_t^T$ tal que

$$V(t, \pi) = \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_t^T} \mathbb{E}[\xi_X((\pi \otimes_t \theta)) \mid \mathcal{F}_t] = \sup_{i \geq 1} \mathbb{E}[\xi_X((\pi \otimes_t u_i)) \mid \mathcal{F}_t].$$

Dado $\epsilon > 0$, definimos os conjuntos

$$B_n = \left\{ \sup_{i \geq 1} \mathbb{E}[\xi_X((\pi \otimes_t u_i)) \mid \mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[\xi_X((\pi \otimes_t u_n)) \mid \mathcal{F}_t] \leq \epsilon \right\}, \quad n \geq 1.$$

Então, podemos definir uma sequência de conjuntos disjuntos dada por $D_1 = B_1$, $D_2 = B_2 \cap B_1^c, \dots, D_n = B_n \cap (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})^c$ em \mathcal{F}_t para todo $n \geq 1$. Aplicando a propriedade de mistura enumerável, podemos concluir que

$$h^\epsilon(r) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(r) \mathbb{1}_{D_i}, \quad t < r \leq T,$$

é um controle em U_t^T . Por construção, temos que

$$V(t, \pi) = \sup_{i \geq 1} \mathbb{E}[\xi_X((\pi \otimes_t u_i)) \mid \mathcal{F}_t] \leq \mathbb{E}[\xi_X((\pi \otimes_t h^\epsilon)) \mid \mathcal{F}_t] + \epsilon \text{ a.s.}$$

■

Lema 2.1.6. Sob as afirmações A1 e B1, para todo $0 \leq t \leq T$, a aplicação $u \mapsto V(t, u)$ é L^2 -Lipschitz contínua, i.e., existe um constante C tal que

$$\mathbb{E} | V(t, u) - V(t, \eta) |^2 \leq C \mathbb{E} \int_0^t \|u(s) - \eta(s)\|_{\mathbb{R}^d}^2 ds$$

para todo $u, \eta \in U_0^T$.

Demonstração: Como ξ é Lipschitz contínua e limitada, temos que

$$\begin{aligned}
V(t, u) - V(t, \eta) &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_t^T} \left\{ \mathbb{E} \left[\xi(X^{u \otimes_t \theta}) \middle| \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E} \left[\xi(X^{\eta \otimes_t \theta}) \middle| \mathcal{F}_t \right] \right\} \\
&\leq \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_t^T} \left\{ \mathbb{E} \left[\left| \xi(X^{u \otimes_t \theta}) - \xi(X^{\eta \otimes_t \theta}) \right| \middle| \mathcal{F}_t \right] \right\} \\
&\leq C_1 \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_t^T} \left\{ \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} \left| X^{u \otimes_t \theta}(s) - X^{\eta \otimes_t \theta}(s) \right| \middle| \mathcal{F}_t \right] \right\},
\end{aligned}$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Por simetria, concluímos que

$$\begin{aligned}
|V(t, u) - V(t, \eta)|^2 &\leq C_1^2 \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_t^T} \left\{ \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} \left| X^{u \otimes_t \theta}(s) - X^{\eta \otimes_t \theta}(s) \right| \middle| \mathcal{F}_t \right] \right\}^2 \\
&\leq C_1^2 \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_t^T} \left\{ \mathbb{E} \left[\left| \sup_{0 \leq s \leq T} \left| X^{u \otimes_t \theta}(s) - X^{\eta \otimes_t \theta}(s) \right| \right|^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Como consequência da propriedade de lattice, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} |V(t, u) - V(t, \eta)|^2 &\leq C_1^2 \mathbb{E} \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_t^T} \left\{ \mathbb{E} \left[\left| \sup_{0 \leq s \leq T} \left| X^{u \otimes_t \theta}(s) - X^{\eta \otimes_t \theta}(s) \right| \right|^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] \right\} \\
&\leq C_1^2 \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_t^T} \left\{ \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} \left| X^{u \otimes_t \theta}(s) - X^{\eta \otimes_t \theta}(s) \right|^2 \right] \right\} \\
&\leq C_1^2 \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_t^T} \left\{ C \mathbb{E} \int_0^T \|(u \otimes_t \theta)(s) - (\eta \otimes \theta)(s)\|_{\mathbb{R}^d}^2 ds \right\} \\
&\leq C_2 \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in U_t^T} \left\{ \mathbb{E} \int_0^t \|u(s) - \eta(s)\|_{\mathbb{R}^d}^2 ds \right\} \\
&= C_2 \mathbb{E} \int_0^t \|u(s) - \eta(s)\|_{\mathbb{R}^d}^2 ds.
\end{aligned}$$

■

A seguir, vamos mostrar que a EDE satisfaz todas as hipóteses do nosso modelo.

2.2 Exemplo EDE

Um exemplo de um processo que satisfaz as hipóteses do nosso modelo é a equação diferencial estocástica. Para isso fixamos um movimento Browniano d -dimensional $B = \{B^1, \dots, B^d\}$ na base estocástica $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, no qual Ω é o espaço $C([0, T]; \mathbb{R}^d) := \{f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ contínuo}\}$, no qual T é uma constante positiva. Equipamos Ω com

norma usual do supremo $\|\omega\|_T = \omega_T^*$, no qual definimos $\omega_t^* := \sup_{s \in [0, t]} |\omega(s)|$, para $0 \leq t \leq T$ e $\omega \in \Omega$. Para tornar clara a informação codificada por um caminho $x \in C([0, t]; \mathbb{R}^d)$ até o instante $0 \leq r \leq t$, denotamos $x_r := \{x(s) : 0 \leq s \leq r\}$ e o valor de x no tempo $0 \leq u \leq t$ é denotado por $x(u)$. Essa notação é naturalmente estendida para processos. Definimos a filtragem $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, no qual \mathcal{F}_t é filtragem natural gerada pelo movimento Browniano \mathbb{P} -aumentada.

Denotamos por \mathbb{P} a medida de Wiener em (Ω, \mathcal{F}) tal que $\mathbb{P}\{B(0) = 0\} = 1$.

Para um espaço de Borel dado U dotado com a σ -álgebra de Borel $\beta(U)$, seja U_s^t o conjunto do processo controle, no qual para cada $u \in U_s^t$ é um processo \mathbb{F} -previsíveis a valores de U sobre $\Omega \times (s, t]$, para todo $0 \leq s < t \leq T$. Os coeficientes do drift e difusão

$$\alpha : (0, \infty) \times \Omega \times U_0^T \rightarrow \mathbb{R}^d \quad \text{e} \quad \sigma : (0, \infty) \times \Omega \times U_0^T \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d},$$

são funções $\mathcal{P}_\Omega \times \beta(U)$ -mensuráveis. Agora seja X um processo contínuo a valores \mathbb{R}^d . Então X é uma aplicação de Ω para Ω . Neste caso, é fácil ver que a aplicação

$$\begin{aligned} i_X : (0, \infty) \times \Omega &\rightarrow (0, \infty) \times \Omega \\ (t, \omega) &\rightarrow (t, X(\omega)) \end{aligned}$$

é $(\mathcal{P}_\Omega, \mathcal{P}_\Omega)$ -mensurável. Agora segue por composição, como $\alpha : (0, \infty) \times \Omega \times U_0^T \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função $\mathcal{P}_\Omega \times \beta(U)$ -mensurável, então o processo $(t, \omega) \rightarrow \alpha(t, X(\omega), u(t, \omega))$ é \mathcal{P}_Ω -mensurável, para toda processo contínuo X a valores \mathbb{R}^d e o controle $u \in U_0^T$.

Suponha que existe uma constante K_1 tal que

$$\begin{aligned} |\alpha(t, \omega, a) - \alpha(t, \omega', a')| + |\sigma(t, \omega, a) - \sigma(t, \omega', a')| &\leq K_1(\omega - \omega')_t^* + K_1\rho(|a - a'|) \\ |\alpha(t, 0, a)| + |\sigma(t, 0, a)| &\leq K_1, \end{aligned} \tag{2.15}$$

para todo $0 \leq t \leq T$, $\omega, \omega' \in \Omega$ e $a, a' \in U$ e ρ é uma função contínua crescente com $\rho(0) = 0$. Por $|\alpha(t, 0, a)| + |\sigma(t, 0, a)| \leq K_1$ podemos assumir ρ é limitado por uma constante.

Para fixado $0 \leq t \leq T$, $x \in \mathbb{R}^d$ e $u \in U$, considere a equação diferencial estocástica

$$X(0) = x, \quad (2.16)$$

$$X^u(t) = x + \int_0^t \alpha(s, X_s^u, u(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^u, u(s)) dB(s), \quad 0 < t \leq T. \quad (2.17)$$

é bem conhecido (veja Rogers and Williams (50)), existe um única solução forte \mathbb{F} -adaptada $X^u = \{X^u(s) : 0 \leq t \leq T\}$ com caminhos contínuos e satisfazendo

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)|^2 \right] \leq C(1 + |x|^2),$$

para alguma constante C depende apenas de T e K_1 .

Lema 2.2.1. Seja X^{u_1} e X^{u_2} duas EDE. Então

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X^{u_1}(t) - X^{u_2}(t)|^2 \right) \leq 2 \int_0^t e^{2K_1^2(t-s)} \mathbb{E}(\rho^2(|u_1(s) - u_2(s)|)) ds. \quad (2.18)$$

Demonstração: Defina $Y(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{u_1} - X_s^{u_2}|^2$. Então por (48) (teorema 2 cap.V), temos

$$\mathbb{E}(Y(t)) \leq \mathbb{E} \left(\int_0^t |\Delta \sigma^*(s)|^2 ds \right) + \mathbb{E} \left(\int_0^t |\Delta \alpha^*(s)|^2 ds \right), \quad (2.19)$$

no qual

$$\begin{aligned} \Delta \sigma^*(s) &= |\sigma(s, X_s^{u_1}, u_1(s)) - \sigma(s, X_s^{u_2}, u_2(s))| \\ \Delta \alpha^*(s) &= |\alpha(s, X_s^{u_1}, u_1(s)) - \alpha(s, X_s^{u_2}, u_2(s))|. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Então, usando a propriedade de Lipschitz para σ , α temos

$$\begin{aligned}
|\Delta\sigma^*(s)|^2 &\leq \left| K_1 \sup_{0 \leq \ell \leq s} |X_\ell^{u_1} - X_\ell^{u_2}| + \rho(|u_1(s) - u_2(s)|) \right|^2 \\
&\leq K_1^2 \sup_{0 \leq \ell \leq s} |X_\ell^{u_1} - X_\ell^{u_2}|^2 + \rho^2(|u_1(s) - u_2(s)|) \\
&= K_1^2 Y(s) + \rho^2(|u_1(s) - u_2(s)|) \\
|\Delta\alpha^*(s)|^2 &\leq \left| K_1 \sup_{0 \leq \ell \leq s} |X_\ell^{u_1} - X_\ell^{u_2}| + \rho(|u_1(s) - u_2(s)|) \right|^2 \\
&\leq K_1^2 \sup_{0 \leq \ell \leq s} |X_\ell^{u_1} - X_\ell^{u_2}|^2 + \rho^2(|u_1(s) - u_2(s)|) \\
&= K_1^2 Y(s) + \rho^2(|u_1(s) - u_2(s)|).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Aplicando 2.21 em 2.19 e usando a desigualdade de Gronwall's, temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y(t)) &\leq 2 \int_0^t \mathbb{E}(K_1^2 Y(s)) ds + 2 \int_0^t \mathbb{E}(\rho^2(|u_1(s) - u_2(s)|)) \\
&\leq 2 \int_0^t e^{2K_1^2(t-s)} \mathbb{E}(\rho^2(|u_1(s) - u_2(s)|)) ds.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Assim, a demonstração segue. ■

Note que a EDE definida satisfaz a Afirmação A1.

Lema 2.2.2. Seja $(u_k)_{k \geq 1}$ uma sequência de controle, tal que

$$\|u_k - u\|_{L^2(\mathbb{P} \times Leb)} = \int_0^T \mathbb{E}(|u_k(s) - u(s)|^2) ds \rightarrow 0.$$

Então

$$\int_0^t \mathbb{E}(\rho^2(|u_k(s) - u(s)|)) ds \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty. \tag{2.23}$$

e portanto

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X^{u^k}(t) - X^u(t)|^2 \right) \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty. \tag{2.24}$$

Demonstração: Seja $\epsilon, \delta > 0$ tal que $\rho^2(\delta) < \epsilon$. Definimos o conjunto $\Lambda_k := \{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega; |u^k(t, \omega) - u(t, \omega)| \geq \delta\}$. Então,

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{E}(\rho^2(|u^k(s) - u(s)|)) ds &= \int_{\Lambda_k} \int_0^t (\rho^2(|u^k(s) - u(s)|)) ds \mathbb{P} + \int_{\Lambda_k^c} \int_0^t (\rho^2(|u^k(s) - u(s)|)) ds \mathbb{P} \\ &\leq \int_{\Lambda_k} \int_0^t (\rho^2(|u^k(s) - u(s)|)) ds \mathbb{P} + \int_{\Lambda_k^c} \int_0^t \epsilon ds \mathbb{P} \\ &\leq C^2(\text{Leb} \times \mathbb{P})(\Lambda_k) + \epsilon T, \end{aligned} \tag{2.25}$$

no qual C é uma constante a qual limita ρ . Nós também,

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{E}(|u^k(s) - u(s)|^2) ds &= \int_{\Lambda_k} \int_0^t (|u^k(s) - u(s)|^2) ds \mathbb{P} + \int_{\Lambda_k^c} \int_0^t (|u^k(s) - u(s)|^2) ds \mathbb{P} \\ &\geq \int_{\Lambda_k} \int_0^t \delta^2 ds \mathbb{P} + \int_{\Lambda_k^c} \int_0^t \int_0^t (|u^k(s) - u(s)|^2) ds \mathbb{P} \\ &\leq \delta^2(\text{Leb} \times \mathbb{P})(\Lambda_k). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Assim, dividindo as duas equações temos

$$\int_0^t \mathbb{E}(\rho^2(|u^k(s) - u(s)|)) ds \leq \frac{C^2}{\delta^2} \int_0^t \mathbb{E}(|u^k(s) - u(s)|^2) ds + \epsilon. \tag{2.27}$$

Como ϵ é arbitrário e por hipótese $\mathbb{E}(|u^k(s) - u(s)|^2) \rightarrow 0$, Então

$$\int_0^t \mathbb{E}(\rho^2(|u^k(s) - u(s)|)) ds \rightarrow 0.$$

E usando o Lema 2.2.1 temos

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |X^{u^k}(t) - X^u(t)|^2) \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty.$$

e o resultado segue. ■

Discretizações

Neste capítulo, vamos descrever o método de discretização proposto por Leão e Ohashi (32), assim a maioria dos resultados contidos nas seções 3.1 3.2 e 3.3, foram obtidos por Leão Ohashi(32).

Através de toda a tese vamos fixar um movimento Browniano d -dimensional na base usual estocástica $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, no qual Ω é o espaço $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ contínuo}\}$, \mathbb{P} é a medida Wiener em Ω tal que $\mathbb{P}\{B(0) = 0\} = 1$ e $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ é a filtragem natural \mathbb{P} -aumentada gerada pelo movimento Browniano. Qualquer processo \mathbb{F} -adaptado será chamado de funcional de Wiener.

3.1 Discretização Aleatória

Para uma sequência positiva fixada ϵ_k tal que $\epsilon_k \downarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, e para cada $j = 1, \dots, d$, definimos $T_0^{k,j} := 0$ q.c. e

$$T_n^{k,j} := \inf\{T_{n-1}^{k,j} < t < \infty; |B^j(t) - B^j(T_{n-1}^{k,j})| = \epsilon_k\}, \quad n \geq 1. \quad (3.1)$$

Para cada $j \in \{1, \dots, d\}$, a família $(T_n^{k,j})_{n \geq 0}$ é uma sequência de \mathbb{F} -tempos de parada no qual os incrementos $\{T_n^{k,j} - T_{n-1}^{k,j}; n \geq 1\}$ são sequências i.i.d com a mesma distribuição de $T_1^{k,j}$. Para manter a notação simples, vamos tomar $\epsilon_k = 2^{-k}$.

Para essa família de tempos de parada, definimos $A^k := (A^{k,1}, \dots, A^{k,d})$ como o processo escada d -dimensional no qual seus componentes são dados por

$$A^{k,j}(t) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k} \sigma_n^{k,j} \mathbf{1}_{\{T_n^{k,j} \leq t\}}; \quad t \geq 0,$$

no qual

$$\sigma_n^{k,j} := \begin{cases} 1; & \text{se } B^j(T_n^{k,j}) - B^j(T_{n-1}^{k,j}) > 0 \\ -1; & \text{se } B^j(T_n^{k,j}) - B^j(T_{n-1}^{k,j}) < 0 \\ 0; & \text{se } B^j(T_n^{k,j}) - B^j(T_{n-1}^{k,j}) = 0 \end{cases}$$

para $k, n \geq 1$ and $j = 1, \dots, d$. Claro que, $|\sigma_n^{k,j}| = 1$ *q.c.*. Seja $\tilde{\mathbb{F}}^{k,j} := \{\tilde{\mathcal{F}}_t^{k,j}; t \geq 0\}$ a filtragem natural gerada por $\{A^{k,j}(t); t \geq 0\}$. Deve-se notar que $\tilde{\mathbb{F}}^{k,j}$ é uma filtragem de saltos (veja (29)) no sentido que

$$\tilde{\mathcal{F}}_t^{k,j} = \left\{ \bigcup_{\ell=0}^{\infty} \left(D_\ell \cap \{T_\ell^{k,j} \leq t < T_{\ell+1}^{k,j}\} \right); D_\ell \in \tilde{\mathcal{F}}_{T_\ell^{k,j}}^{k,j} \text{ para } \ell \geq 0 \right\}, \quad t \geq 0,$$

no qual $\tilde{\mathcal{F}}_0^{k,j} = \{\Omega, \emptyset\}$ and $\tilde{\mathcal{F}}_{T_m^{k,j}}^{k,j} = \sigma(T_1^{k,j}, \dots, T_m^{k,j}, \sigma_1^{k,j}, \dots, \sigma_m^{k,j})$ para $m \geq 1$ e $j = 1, \dots, p$. Então,

$$\tilde{\mathcal{F}}_{T_m^{k,j}}^{k,j} \cap \{T_m^{k,j} \leq t < T_{m+1}^{k,j}\} = \tilde{\mathcal{F}}_t^{k,j} \cap \{T_m^{k,j} \leq t < T_{m+1}^{k,j}\} \text{ q.c.}$$

Para cada $m \geq 0$ e $j = 1, \dots, d$. Denotamos $\mathcal{F}_t^{k,j}$ como o $\tilde{\mathcal{F}}_t^{k,j}$, \mathbb{P} -aumentado satisfazendo as condições usuais.

A filtragem multi-dimensional gerada por A^k é naturalmente caracterizada como segue. Seja $\tilde{\mathbb{F}}^k := \{\tilde{\mathcal{F}}_t^k; 0 \leq t < \infty\}$ a filtragem dada por $\tilde{\mathcal{F}}_t^k := \tilde{\mathcal{F}}_t^{k,1} \otimes \tilde{\mathcal{F}}_t^{k,2} \otimes \dots \otimes \tilde{\mathcal{F}}_t^{k,p}$ for $t \geq 0$.

Definimos $T_0^k := 0$,

$$T_1^k := \inf_{1 \leq j \leq d} \left\{ T_1^{k,j} \right\}, \quad T_n^k := \inf_{\substack{1 \leq j \leq d \\ m \geq 1}} \left\{ T_m^{k,j}; T_m^{k,j} \geq T_{n-1}^k \right\}$$

para $n \geq 1$. Podemos verificar (veja o Lema 3.1 em (45)) que $\tilde{\mathbb{F}}^k$ é uma filtragem e portanto contínua a direita (veja e.g Th 5.52 em (25)). Seja \mathcal{N} a σ -álgebra gerada por todos os conjuntos \mathbb{P} -nulos. O \mathbb{P} -aumentada de $\tilde{\mathbb{F}}^k$ é simples

$$\mathcal{F}_t^k = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left((\tilde{\mathcal{F}}_{T_n^k}^k \vee \mathcal{N}) \cap \{T_n^k \leq t < T_{n+1}^k\} \right); t \geq 0$$

e o conjunto $\mathcal{F}_{T_n^k}^k := (\tilde{\mathcal{F}}_{T_n^k}^k \vee \mathcal{N}); n \geq 0$. Para mais detalhes vejo o Th. 5.52 em (25).

Nesta tese, fazemos uso de argumentos trajetória a trajetória. Assim, vamos necessitar introduzir alguns importantes objetos. Seja

$$\mathbb{I}_k := \left\{ (i_1^k, \dots, i_d^k); i_\ell^k \in \{-1, 0, 1\} \forall \ell \in \{1, \dots, d\} \text{ e } \sum_{j=1}^d |i_j^k| = 1 \right\}$$

e $\mathbb{S}_k := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{I}_k$ sendo um subconjunto de Borel de \mathbb{R}^{d+1} . O espaço das ações \mathbb{A} é um subconjunto de Borel e compacto de \mathbb{R} a qual definimos mais adiante. O produto cartesiano de n -termos de \mathbb{S}_k e \mathbb{A} são denotado por \mathbb{S}_k^n e \mathbb{A}^n , respectivamente.

Em sequência, usamos a notação $\Delta T_n^k = T_n^k - T_{n-1}^k$, $\eta_n^k := (\eta_n^{k,1}, \dots, \eta_n^{k,d})$ no qual

$$\eta_n^{k,j} := \begin{cases} 1; & \text{se } \Delta A^{k,j}(T_n^k) > 0 \\ -1; & \text{se } \Delta A^{k,j}(T_n^k) < 0 \\ 0; & \text{se } \Delta A^{k,j}(T_n^k) = 0, \end{cases}$$

e escrevemos $\mathcal{A}_n^k := (\Delta T_1^k, \eta_1^k, \dots, \Delta T_n^k, \eta_n^k) \in \mathbb{S}_k^n$ q.c. Deve-se notar que

$$\tilde{\mathcal{F}}_{T_n^k}^k = (\mathcal{A}_n^k)^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{S}_k^n)) \text{ q.c.},$$

no qual $\mathcal{B}(\mathbb{S}_k^n)$ é a σ -álgebra de Borel gerada por $\mathbb{S}_k^n; n \geq 1$. Ao longo dessa tese, denotamos

$$\mathbb{P}_n^k := \mathbb{P} \circ \mathcal{A}_n^{k1}$$

como a medida de probabilidade em $\mathcal{B}(\mathbb{S}_k^n)$.

A fim de fornecer uma descrição trajetória a trajetória adequada dos funcionais controlados \mathbb{F}^k -adaptados e uma obtenção concreta de controles ϵ -ótimos, será importante ampliar $\tilde{\mathcal{F}}_{T_n^k}^k$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{T_{n+1}^k-}^k$ por meio de conjuntos uniformemente mensurável. Para o leitor que não esteja familiarizado com esse tipo de conjunto, indicamos por exemplo (3; 55) e (49).

Se R é um espaço de Borel, seja $P(R)$ o conjunto de todas as medidas de probabilidade definida na σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(R)$ gerada por R . Denotamos

¹ $\mathbb{P} \circ \mathcal{A}_n^k(\cdot) := \mathbb{P}(\mathcal{A}^k(\cdot))$

$$\mathcal{E}(R) := \bigcap_{p \in P(R)} \mathcal{B}(R, p)^2$$

no qual $\mathcal{B}(R, p)$ é o p -completamento $\mathcal{B}(R)$ com respeito a $p \in P(R)$.

Seja

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n^k &:= \{\mathcal{A}_n^k \in D; D \in \mathcal{E}(\mathbb{S}_k^n)\} \\ \mathcal{G}_{n+1-}^k &:= \{(\mathcal{A}_n^k, \Delta T_{n+1}^k) \in D; D \in \mathcal{E}(\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}_+)\} \end{aligned}$$

Deve-se notar que

$$\tilde{\mathcal{F}}_{T_n^k}^k \subset \mathcal{G}_n^k \subset \mathcal{F}_{T_n^k}^k; n \geq 0.$$

De fato, se $E \in \mathcal{E}(\mathbb{S}_k^n)$ então $E \in \mathcal{B}(\mathbb{S}_k^n, \mathbb{P}_n^k)$, de modo que

$$E = E_1 \cup E_2; E_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{S}_k^n) \text{ e } E_2 \subset F; \mathbb{P}_n^k(F) = 0.$$

Portanto, $\{\mathcal{A}_n^k \in E\} = \{\mathcal{A}_n^k \in E_1\} \cup \{\mathcal{A}_n^k \in E_2\} \in \mathcal{F}_{T_n^k}^k$.

Lema 3.1.1. *Para cada $k \geq 1$ e $j \in \{1, 2, \dots, d\}$, $\{A_t^{k,j} \mid 0 \leq t \leq T\}$ é um $\mathbb{F}^{k,j}$ -martingale com variação localmente integrável, e ainda temos que*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|B_t^j - A_t^{k,j}\|_\infty \leq 2^{-k}, \quad k \geq 1, \quad (3.2)$$

Demonstração: Primeiramente note que $A_t^{k,j} = B_{T_n^k}^j$ em $[T_n^{k,j} \leq t < T_{n+1}^{k,j}]$, $\forall n \geq 1$. Além disso, temos que pelo teorema usual de tempo de parada ótima temos que

$$\mathbb{E}[B_T^j | \mathcal{F}_t^{k,j}] = A_t^{k,j}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

portanto, concluímos que $A_t^{k,j}$ é um $\mathbb{F}^{k,j}$ -martingale. Agora para estimar 3.2 notamos que isso é imediata consequência da definição. \blacksquare

Essa discretização, difere das demais discretização devido a sua aleatoriedade, fato que facilita na aproximação do movimento Browniano. As figuras a seguir ilustram o processo de discretização, a figura 3.1 (a) mostra o movimento Browniano unidimensional ($d=1$), ele foi feito de forma suave para facilitar a ilustração do processo.

A figura 3.1 (d) ilustra o processo de saltos A^k , é fácil perceber que o processo A^k é uma aproximação do movimento Browniano, e que essa aproximação depende do

²Conhecido como σ -álgebra universal

do valor de k , ou seja, quanto maior o k mais próximo do movimento Browniano nos encontramos.

Lema 3.1.2. *A filtragem natural de A^k satisfaz as seguintes propriedades*

(i) $\{\mathbb{F}^k; k \geq 1\}$ é uma família de σ -álgebra crescente, tal que $\mathcal{F}_t = \bigvee_{k \geq 0} \mathcal{F}_t^k$

(ii) A sequência de filtragem \mathbb{F}^k converge fracamente com \mathbb{F} .

(iii) Para todo $O \in \mathcal{O}^3$ então existe uma sequência $O^k \in \mathcal{O}^k$, tal que

$$O^k \subset O, \quad \forall k \geq 1, \quad e \quad \mathbb{P}[\pi(O) - \pi(O^k)] \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$$

Demonstração: É consequência do Lema 2.2 em (32). ■

³ \mathcal{O} é conhecido como σ -álgebra optional, e coincide com a menor σ -álgebra gerada pelo intervalo estocástico $[0, \tau] = \{(\omega, t) : 0 < t < \tau(\omega)\}$, no qual $\tau = \tau(\omega)$ são \mathbb{F} -tempos de parada.

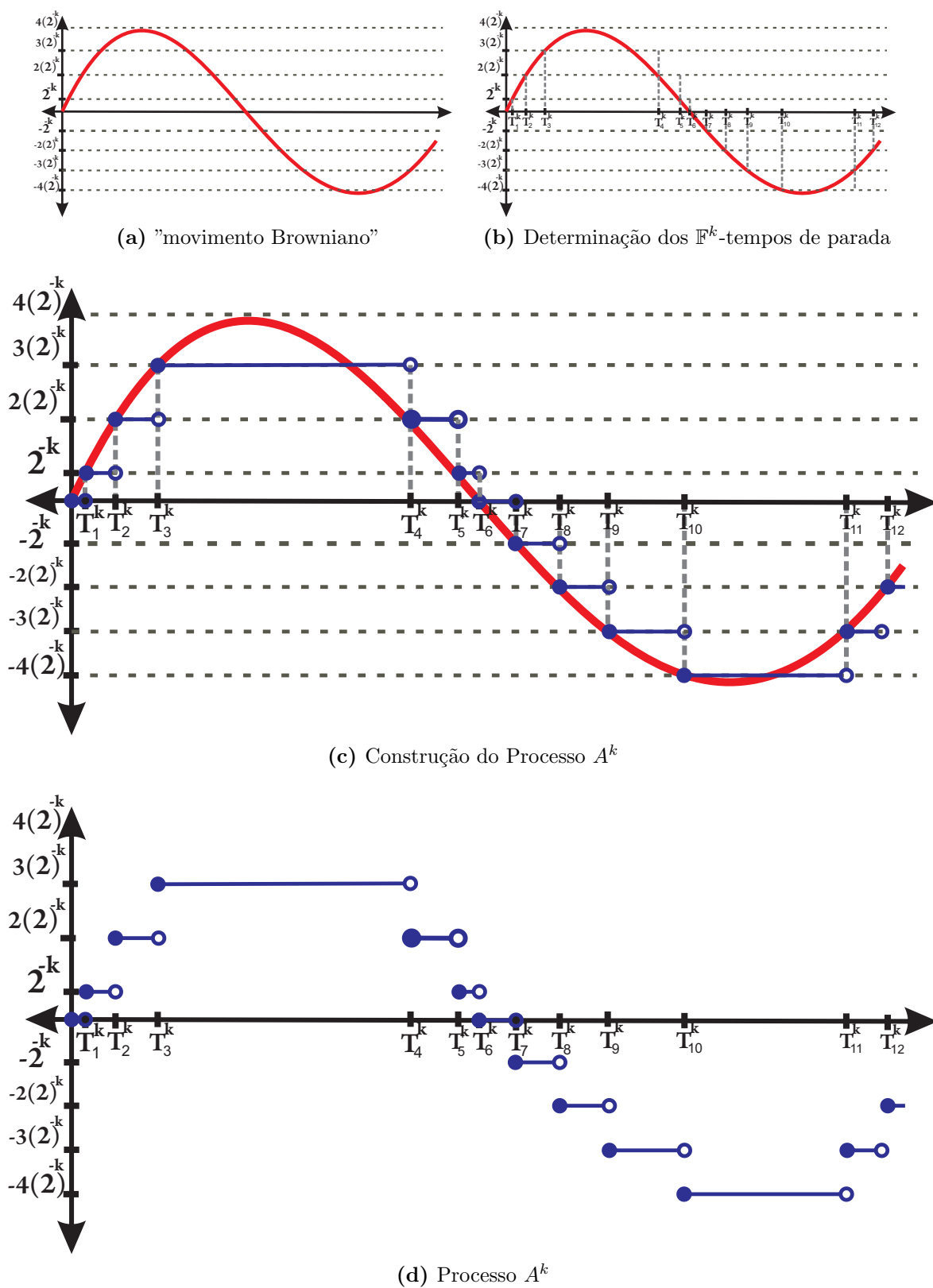


Figura 3.1: Discretização de uma trajetória do movimento Browniano, determinação dos \mathbb{F}^k -tempos de parada e do processo A^k , tomando $d = 1$
 Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Decomposição fraca de funcionais e o espaço \mathbf{B}^p

Iremos definir a seguir um importante espaço Banach de processos estocástico

Definição 3.2.1. *Seja $\mathbf{B}^p(\mathbb{F})$ o espaço de todos os processos \mathbb{F} -adaptados, no qual para $1 \leq p < \infty$ temos*

$$\|X\|_{\mathbf{B}^p}^p = \mathbb{E}[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^p] < \infty$$

$(\mathbf{B}^p(\mathbb{F}), \|\cdot\|_{\mathbf{B}^p})$ é um espaço de Banach. Quando não houver confusão denotaremos indistintamente $\mathbf{B}^p(\mathbb{F})$ por \mathbf{B}^p .

Definição 3.2.2. *O subespaço $H^p \subset \mathbf{B}^p$ é formado por todos os martingales que se iniciam em zero*

O subespaço H^p é fechado em \mathbf{B}^p , e portanto $(H^p(\mathbb{F}), \|\cdot\|_{\mathbf{B}^p})$ é um espaço de Banach

Definição 3.2.3. *Definimos M^q como sendo o dual topológico de \mathbf{B}^p , com $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. No qual, M^q é o espaço de todos os processos $A = (A^{pr}, A^{pd})$ tal que*

- (i) A^{pr} é um processo \mathbb{F} -previsível com $A_0^{pr} = 0$ e A^{pd} é \mathbb{F} -opcional puramente descontínuo
- (ii) $Var(A^{pd}) + Var(A^{pr}) \in L^q$ no qual, $Var(A^{pd}) = \int_0^T |dA^{pd}|$ e $Var(A^{pr}) = \int_{0-}^T |dA^{pr}|$
- (iii) Definimos $\|A\|_{M^q} := \|Var(A^{pd})\|_{L^q} + \|Var(A^{pr})\|_{L^q}$

A aplicação $(A, X) : \mathbf{B}^p \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(A, X) = \mathbb{E} \left[\int_0^T X_s dA_s^{pd} \right] + \mathbb{E} \left[\int_{0-}^T X_s dA_s^{pr} \right] \quad X \in \mathbf{B}^p$$

é uma forma linear contínua e está bem definida para todo $X \in \mathbf{B}^p$ Além disso,

$$|(A, X)| \leq \|A\|_{M^q} \|X\|_{\mathbf{B}^p}$$

para todo $A \in M^q$ e $X \in \mathbf{B}^p$ Para mais detalhes sobre o espaço \mathbf{B}^p veja os trabalhos (32), (12), (13) e (39)

Definição 3.2.4. *Denotaremos por Λ^∞ o conjunto dos processos de variação limitada \mathbb{F} -opcional da forma*

$$C = g \mathbf{1}_{S \leq \cdot}, \quad g \in L^\infty(\mathcal{F}_S),$$

com S sendo um \mathbb{F} -tempo de parada limitado por T .

O espaço Λ^∞ completa \mathbf{B}^1 no sentido que

$$\|X\|_{\mathbf{B}^1} = \sup\{|(X, C)|; C \in \Lambda^\infty, \|C\|_{M^\infty} \leq 1\} \quad (3.3)$$

A relação acima pode ser encontrada em (13)(Lema 1). Então, neste caso, podemos dotar o espaço \mathbf{B}^1 com a topologia $\sigma(\mathbf{B}^1, \Lambda^\infty)$ induzida pela família de semi-normas

$$X \mapsto (X, C), \quad C \in \Lambda^\infty.$$

Note que $\sigma(\mathbf{B}^1, \Lambda^\infty)$ é mais fraco que $\sigma(\mathbf{B}^1, M^\infty)$ (a menor topologia para o qual a forma linear $(A, X) : \mathbf{B}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall A \in M^\infty$ é contínua). Entretanto, a relação 3.3 nos diz que Λ^∞ é um subconjunto normado de M^∞ é ω^* -denso em M^∞

Proposição 3.2.5. *Seja X^n uma sequência de processos opcionais tal que $\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^n|$ é uniformemente integrável e para todo \mathbb{F} tempo de parada S a sequência X_S^n converge fracamente em L^1 relativamente a \mathcal{F}_S , então existe um processo opcional X tal que $X^n \rightarrow X$ em $\sigma(\mathbf{B}^1, M^\infty)$. Como consequência se $X^n \rightarrow X$ em $\sigma(\mathbf{B}^1, \Lambda^\infty)$ e $\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^n|$ é uniformemente integrável temos a convergência em $\sigma(\mathbf{B}^1, M^\infty)$. (Para mais detalhes (13))*

Vamos agora utilizar a discretização aleatória proposta. Seja X um \mathbb{F} -martingale quadrado integrável e $\delta^k X$ uma boa aproximação para X . De tal forma que, $\delta^k X$ é um \mathbb{F}^k -martingale quadrado integrável. Portanto $\delta^k X$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \delta^k X(t) &= X^k(0) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\Delta \delta^k X(T_\ell^k)}{\Delta A^k(T_\ell^k)} \Delta A^k(T_\ell^k) \mathbf{1}_{\{T_\ell^k \leq t\}} \\ &= X_0^k + \int_0^t \mathcal{D}^k X^k(u) dA^k(u), \end{aligned} \quad (3.4)$$

no qual,

$$\mathcal{D}^k X^k := \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\Delta X^k(T_\ell^k)}{\Delta A^k(T_\ell^k)} \mathbf{1}_{[[T_\ell^k, T_{\ell+1}^k[}}, \quad k \geq 1, \quad (3.5)$$

a integral acima é calculada como uma integral Lebesgue-Stieltjes. Além disso, como $\delta^k X$ é um \mathbb{F}^k -martingale sabemos que

$$\mathbb{E} \left[\mathcal{D}^k X(T_n^k) \Delta A^k(T_n^k) \mid \mathcal{F}_{T_n^k}^k \right] = 0, \quad n \geq 1. \quad (3.6)$$

Definição 3.2.6. Dizemos que um processo $\delta^k X \in \mathbf{B}^2(\mathbb{F}^k)$ é um \mathbb{F}^k -funcional se ele tem a seguinte representação

$$\delta^k X(t) = \delta^k X(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \delta^k X(T_n) \mathbb{1}_{T_n \leq t}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

com variação quadrática finita $\mathbb{E}([X^k, X^k](T)) < \infty$

Definição 3.2.7. Dizemos que um funcional de Wiener X tem energia finita ao longo da família de filtrações $(\mathbb{F}^k)_{k \geq 1}$ se

$$\mathcal{E}_2(X) := \sup_{k \geq 1} \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta \delta^k X_{T_n^k}|^2 \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq T\}} \right] < \infty$$

Definição 3.2.8. Seja X e Y funcionais de Wiener com \mathbb{F}^k -projeções $\delta^k X$ e $\delta^k Y$, respectivamente. Dizemos que X admite δ -covariação com respeito a Y se o limite

$$\langle X, Y \rangle_t^\delta := \lim_{k \rightarrow \infty} [\delta^k X, \delta^k Y]_t$$

existe fracamente em L^1 para todo $t \in [0, T]$.

Teorema 3.2.9. $\delta^k X \rightarrow X$ uniformemente em probabilidade

Demonstração: É consequência do teorema em (32) (Teorema 3.1 e Observação 3.7) ■

Corolário 3.2.10. $\delta^k X \rightarrow X$ converge fortemente em \mathbf{B}^2

Demonstração: É consequência do teorema 3.2.9 e do Teorema 1 em (9). ■

Para trabalhar com estratégias de hedging não-antecipativo, vamos definir uma versão \mathbb{F}^k -previsível adequada de $\mathcal{D}^k(X)$, assim considere

$$\mathbf{D}^k X := 0 \mathbb{1}_{[0]} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathcal{D}^k X_{T_n^k} | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^k] \mathbb{1}_{[T_{n-1}^k, T_n^k]}; k \geq 1, j = 1, \dots, d. \quad (3.7)$$

Desta forma, precisamos analisar o comportamento assintótico de $\mathbf{D}^k X$. Assim ao invés de trabalhar com o processo X , vamos olhar para $\int_0^\cdot \mathbf{D}^k X dA_u^k$. Neste caso, definimos

$$X^k = X_0 + \int_0^\cdot \mathbf{D}^k X dA_u^k \quad (3.8)$$

Desta maneira, temos que o lema a seguir de fundamental importância para essa seção.

Lema 3.2.1. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathcal{D}^k X_{T_n^k} | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^k] \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathcal{D}^k X_{T_n^k} \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^k]]$

Demonstração: Defina $B = \{T_n \leq t\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{1}_B \mathbb{E}(\mathcal{D}^k X_{T_n^k}^2 | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^k)) &= \int \mathbf{1}_B \int_A \mathbb{E}(\mathcal{D}^k X_{T_n^k} | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^k) \\
&= \int_B \int_A \mathcal{D}^k X_{T_n^k}^2 \\
&= \int_A \int_B \mathcal{D}^k X_{T_n^k}^2 = \int_A \int \mathcal{D}^k X_{T_n^k}^2 \mathbf{1}_B = \int \int_A \mathcal{D}^k X_{T_n^k}^2 \mathbf{1}_B \quad (3.9) \\
&= \int \int_A \mathbb{E}(\mathcal{D}^k X_{T_n^k} \mathbf{1}_B | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^k) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathcal{D}^k X_{T_n^k} \mathbf{1}_B | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^k)) \quad \forall A \in \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^k
\end{aligned}$$

■

Lema 3.2.2. $\mathbb{E}([X^k, X^k]_t) \leq \mathbb{E}([\delta^k X, \delta^k X]_t)$ e $\mathbb{E}([\delta^k X, X^k]_t) \leq \mathbb{E}([\delta^k X, \delta^k X]_t)$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}([X^k, X^k]_T) &= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta X_{T_n^k}^k|^2 \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E}(\mathcal{D}^k X_{T_n^k} | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^k) \Delta A^k(T_n^k)|^2 \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E}(\mathcal{D}^k X_{T_n^k} | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^k)|^2 2^{-2k} \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \right) \quad (3.10) \\
&\stackrel{Jensen}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left(\mathbb{E}((\mathcal{D}^k X_{T_n^k})^2 | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^k) 2^{-2k} \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \right) \\
&\stackrel{lema3.2.1}{\leq} 2^{-2k} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left(\mathbb{E}((\mathcal{D}^k X_{T_n^k})^2 \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^k) \right) \\
&\leq 2^{-2k} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left((\mathcal{D}^k X_{T_n^k})^2 \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2^{-2k} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left((\mathcal{D}^k X_{T_n^k})^2 \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left((\mathcal{D}^k X_{T_n^k})^2 2^{-2k} \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mathcal{D}^k X_{T_n^k} \Delta A^k(T_n^k))^2 \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \mathcal{D}^k X_{T_n^k} \Delta A^k(T_n^k) \mathbf{1}_{T_n^k \leq t} |^2 \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \right) \quad (3.11) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \Delta \delta^k X_{T_n^k} |^2 \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \right) \\
&= \mathbb{E}[[\delta^k X, \delta^k X]_t]
\end{aligned}$$

Agora para $\mathbb{E}([\delta^k X, X^k]_t) \leq \mathbb{E}([\delta^k X, \delta^k X]_t)$ note primeiramente que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathcal{D}^k X_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \mathbb{E}(\mathcal{D}^k X_{T_n} | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k})) &= \mathbb{E}(\mathcal{D}^k X_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \mathbb{E}(\mathcal{D}^k X_{T_n} | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k})) \\
&\stackrel{Holder}{\leq} \mathbb{E}^{1/2}(\mathcal{D}^k X_{T_n}^2 \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}}) \mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{E}^2(\mathcal{D}^k X_{T_n} | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k})) \\
&\stackrel{eq3.10}{\leq} \mathbb{E}((\mathcal{D}^k X_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}})^2) \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Portanto temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}([\delta^k X, X^k]_t) &= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \Delta \delta^k X \delta X^k \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} |^2 \right) \\
&= 2^{-2k} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left(\mathcal{D}^k X_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \mathbb{E}(\mathcal{D}^k X_{T_n} | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}) \right) \\
&\stackrel{eq3.12}{\leq} = 2^{-2k} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left((\mathcal{D}^k X_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}})^2 \right) \quad (3.13) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \Delta \delta^k X | \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \right) \\
&= \mathbb{E}([\delta^k X, \delta^k X]_t)
\end{aligned}$$

■

Lema 3.2.3. Dado $X \in \mathcal{M}$ um \mathbb{F} -martingale quadrado integrável, tal que

$$X(t) = \int_0^t \mathcal{D}^k X dB(s)$$

e X^k uma boa aproximação para X , \mathbb{F}^k -martingale e quadrado integrável com representação

$$X^k(t) = X_0 + \int_0^t \mathcal{D}^k X dA_u^k = X_0 + \int_0^t \mathbf{D}^k X dA_u^k + \int_0^t (\mathcal{D}^k X - \mathbf{D}^k X) dA_u^k, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Obtemos então que,

- $\mathcal{D}^k X$ converge fracamente para ϕ em $L^2(\text{Leb} \times \mathbb{P})$;
- $\mathbf{D}^k X$ converge fracamente para ϕ em $L^2(\text{Leb} \times \mathbb{P})$;
- $\int_0^\cdot \mathbf{D}^k X dA_u^k$ converge fracamente para X em \mathbf{B}^2 .

Demonstração: É consequência do lema 3.8 e teorema 3.2 em (53)(Teorema 3.1) ■

3.3 Decomposição de Doob-Meyer

Nesta seção, vamos obter explicitamente a decomposição de Doob-Meyer para $\delta^k X$

Lema 3.3.1. *O processo $\{\delta^k X_t : 0 \leq t \leq T\}$ é um \mathbb{F}^k processo adaptado⁴ com variação localmente integrável para cada $k \geq 1$. Além disso, existe um único \mathbb{F}^k processo previsível⁵ $N^{k,X}$ com variação localmente integrável, tal que*

$$\delta^k X_t - X_0 - N_t^{k,X} =: M_t^{k,X}, \quad 0 \leq t \leq T$$

é um \mathbb{F}^k martingale local⁶. O processo $N^{k,X}$ é um \mathbb{F}^k uma projeção dual previsível de $\delta^k X_t - X_0$, o qual pode ser tomado com trajetórias contínuas.

Demonstração: É consequência do lema 2.3 em (32) ■

Observação 3.3.1. Desde que A^k é um martingale quasi-contínua a esquerda e um processo escada, então temos a chamada representação opcional ((25) Teorema 13.19 e Exemplo 13.9). Isto é, para todo \mathbb{F}^k local martingale, começando em zero pode ser representado por uma integral opcional com respeito a A^k

⁴O processo X é dito adaptado a filtragem \mathbb{F} , se X_t é \mathcal{F} -mensurável para todo $t \geq 0$

⁵Um processo X é dito previsível sobre a filtragem \mathbb{F} se $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{t-}] = X_t$

⁶Um processo cádlag é dito ser um martingale local se existe uma sequencia de tempos de parada crescente τ_n , com $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$ q.c., tal que $X_{t \wedge \tau_n}$ é um martingale uniformemente integrável para todo n .

Lema 3.3.2. *A projeção \mathbb{F}^k dual previsível de $\delta^k X - X_0$ é dado por um processo contínuo*

$$\int_0^t U_s^{k,X} d\langle A^k, A^k \rangle_s, \quad 0 \leq t \leq T$$

No qual $U^{k,X} := \mathbb{E}_{[A^k]}[\mathcal{D}\delta^k X / \Delta A^k \mid \mathcal{P}^k]$ denota a esperança condicional com respeito a \mathcal{P}^k sobre a medida de Doléans⁷ gerada por $[A^k, A^k]$. Além disso,

$$U_t^{k,X} = 0\mathbb{1}_{\{T_0^k=t\}} + \frac{1}{2^{-2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_t - X_{T_{n-1}^k} \mid \mathcal{G}_{n-1}^k; T_n^k = 1] \mathbb{1}_{\{T_{n-1}^k < t \leq T_n^k\}}$$

Demonstração: Vamos escrever $Y_t^k = \int_0^t \mathcal{D}_s \delta^k X dA_s^k$ no sentido de Lebesgue-Stieltjes. Por definição

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_0^T \mathbb{1}_C s dY_s^k \right) &= \mathbb{E} \left(\int_0^T \mathbb{1}_C s \mathcal{D}_s \delta^k X dA_s^k \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_C T_n^k \mathcal{D}_{T_n^k} \delta^k X \Delta A_{T_n^k}^k \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_C T_n^k \frac{\mathcal{D}_{T_n^k} \delta^k X}{\Delta A_{T_n^k}^k} \Delta A_{T_n^k}^k \Delta A_{T_n^k}^k \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^T \mathbb{1}_C s \frac{\mathcal{D}_s \delta^k X}{\Delta A_s^k} d[A^k, A^k]_s \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^T \mathbb{1}_C s U_s^{k,X} d[A^k, A^k]_s \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^T \mathbb{1}_C s U_s^{k,X} d\langle A^k, A^k \rangle_s \right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

para todo $C \in \mathcal{P}^k$. Isto concluí a primeira parte da demonstração. Agora iremos caracterizar $U^{k,X}$. Para isto, considere a sequência de σ -álgebras $\mathcal{G}_{n-}^k := \mathcal{G}_{n-1}^k \vee \sigma(T_n^k)$, $n \geq 1$. Lembramos que para todo $C \in \mathcal{G}_{n-1}^k$ existe um processo previsível H tal que $H_{T_n^k} = \mathbb{1}_C$ e é nulo fora do intervalo estocástico $]]T_{n-1}^k, T_n^k[[$ ((5) Teorema 31 pg 307).

⁷Um submartingale S tem medida de Doléans μ definida na σ -álgebra previsível $[0, T] \times \Omega$ se $\mu(]]0, \tau]) = \mathbb{P}(S_\tau)$, para qualquer tempo de parada tomando valores em $[0, T]$

Então da primeira parte da demonstração segue que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{1}_C \Delta \delta^k X_{T_n^k} \mathbb{1}_{T_n^k \leq T}) &= \mathbb{E} \left(\int_0^T H_s dY_s^k \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^T H_s U_s^{k,X} d[A^k, A^k] \right) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{C\}} U_{T_n^k}^{k,X} 2^{-2k} \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq T\}})\end{aligned}\tag{3.15}$$

Desde que C é arbitrário e $U^{k,X}$ um processo previsível, segue que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta \delta^k X_{T_n^k} \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq T\}}] &= \mathbb{E}(U_{T_n^k}^{k,X} 2^{-2k} \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq T\}} \mid \mathcal{G}_{n-}^k) \\ &= U_{T_n^k}^{k,X} 2^{-2k} \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq T\}}\end{aligned}\tag{3.16}$$

Então, uma versão da esperança condicional pode ser escrita como

$$U_t^{k,X} \mathbb{1}_{\{T_{n-1}^k < t \leq T_n^k \leq T\}} = \mathbb{E} \left(\frac{\Delta \delta^k X_{T_n^k}}{2^{-2k}} \mid \mathcal{G}_{n-1}^k; T_n^k = t \right) \mathbb{1}_{\{T_{n-1}^k < t \leq T_n^k \leq T\}}, \quad n \geq 1$$

o que implica que

$$U_t^{k,X} = 0 \mathbb{1}_{\{T_0^k = t\}} + \frac{1}{2^{-2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_t - X_{T_{n-1}^k} \mid \mathcal{G}_{n-1}^k; T_n^k = 1] \mathbb{1}_{\{T_{n-1}^k < t \leq T_n^k\}}$$

e portanto o resultado segue ■

Lema 3.3.3. *O "angle bracket" de A^k é um processo absolutamente contínuo dado por*

$$\langle A^k, A^k \rangle_t = \int_0^t h_s^k ds$$

no qual, h^k é a intensidade de saltos do processo $[A^k, A^k]$ dado por

$$h_t^k = 2^{-2k} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{t-T_{n-1}^k}^k \mathbb{1}_{\{T_n^k < t \leq T_n^k\}}, \quad 0 \leq t \leq T$$

no qual $\lambda_t^k = \frac{f_t^k}{1 - F_t^k}$, $0 \leq t \leq T$, f^k e F^k são respectivamente a densidade e a função de distribuição de T_k^1 .

Demonstração: Desde que A^k é um processo pontual quasi contínua a esquerda no qual difere nos pontos de saltos $\{(T_n^k - T_{n-1}^k); n \geq 1\}$ é uma seqüência de variáveis iid absolutamente contínua, então a variável $\langle A^k, A^k \rangle$ tem trajetórias absolutamente

contínua. O que estabelece que

$$\langle A^k, A^k \rangle_t = \int_0^t h_s^k ds$$

Então usando (Teorema 18.2 (35)), o resultado segue. ■

Juntando todos os resultados dessa seção obtemos a seguinte proposição.

Proposição 3.3.2. *Se X é um funcional de Wiener satisfazendo*

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^m |\Delta \delta^k X_{T_n^k}|^2 \right) < \infty, \quad \forall m, k \geq 1.$$

então a \mathbb{F}^k decomposição dada por $(M^{k,X}, N^{k,X})$ definida no lema 3.3.1 é dada por

$$\delta^k X = X_0 + \oint_0^t \mathcal{D}_s \delta^k X dA_s^k + \int_0^t U_s^{k,X} h_s^k ds, \quad \text{8}$$

onde

$$U_s^{k,X} h_s^k = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_t - X_{T_n^k} | \mathcal{G}_{n-1}^k; T_n^k = t] \lambda_{t-T_{n-1}^k}^k \mathbb{1}_{\{T_{n-1}^k < t \leq T_n^k\}}; \quad t > 0$$

3.4 Discretização do processo valor.

Nesta seção, descrevemos o princípio da programação dinâmica para a forma discreta do processo valor, na seção 3.1 sobre um controle fixo. Se $n \leq m$, seja $U_{T_n^k}^{k, T_m^k}$ o conjunto do processo controle da forma

$$v^k(t) = \sum_{j=n+1}^m v_{j-1}^k \mathbb{1}_{\{T_{j-1}^k < t \leq T_j^k\}}; \quad T_n^k < t \leq T_m^k, \quad (3.17)$$

no qual v_{j-1}^k é \mathcal{G}_{j-1}^k -mensurável para cada $j = n+1, \dots, m$.

Com abuso de notação, definimos $U_n^{k,m} := U_{T_n^k}^{k, T_m^k}$ para qualquer numero natural $n, m \geq 0$. Além disso, para $u^k \in U_0^{k,m}$ e $v^k \in U_n^{k,m}$ com $n < m$, escrevemos

$$(u^k \otimes_n v^k) := (u_0^k, \dots, u_{n-1}^k, v_n^k, \dots, v_{m-1}^k)$$

Esta notação é consistente desde que $u^k \otimes_n v^k$ depende apenas de $(u_0^k, \dots, u_{n-1}^k, v_n^k, \dots, v_{m-1}^k)$ sempre que $u^k : \Omega \times [0, T_n^k] \rightarrow \mathbb{A}^d$ e $v^k : \Omega \times [T_n^k, T_m^k] \rightarrow \mathbb{A}^d$ são controles da forma (3.17) para $n < m$.

⁸ \oint representa a integral opcional, para mais detalhes ver ((12)(25))

Ao longo deste trabalho, o número total de períodos é dado por

$$e(k, s) := d \lceil 2^{2k} s \rceil \text{ para } s \geq T. \quad (3.18)$$

no qual $\lceil x \rceil$ é a parte inteira de um número positivo $x \geq 0$. Neste caso, $u^k, \phi^k \in U_0^{k, e(k, T)}$, definimos $u^k \otimes_{e(k, T)} \phi^k := (u_0^k, \dots, u_{e(k, T)-1}^k)$.

Definição 3.1. Seja $O_T(\mathbb{F}^k)$ o conjunto de todas as constantes o processo \mathbb{F}^k -optional sobre $[0, T]$. Seja $\mathbf{L}(U_0^{k, e(k, T)}; O_T(\mathbb{F}^k))$ o espaço onde todas as aplicações Y^k de $U_0^{k, e(k, T)}$ para $O_T(\mathbb{F}^k)$ tal que $u^k = v^k$ em $U_0^{k, e(k, T)}$ implica $Y^{k, u^k} = Y^{k, v^k}$. Os elementos desse espaço são chamados de processos \mathbb{F}^k -controlados.

Para um exemplo concreto de processos \mathbb{F}^k -controlados, veja a seção 4.1.1 e (5.2.1). Através desta seção, vamos fixar um processo \mathbb{F}^k -controlado \mathbb{X}^{k, u^k} e definimos

$$X^{k, u^k}(t) := \mathbb{X}^{k, u^k}(t \wedge T_{e(k, T)}^k); 0 \leq t \leq T, \quad (3.19)$$

para cada $u^k \in U_0^{k, e(k, T)}$.

O processo valor associado é definido por

$$V^k(T_n^k, u^k) := \operatorname{ess\,sup}_{\phi^k \in U_n^{k, e(k, T)}} \mathbb{E} \left[\xi(X^{k, u^k \otimes_n \phi^k}) | \mathcal{G}_n^k \right]; n = 1, \dots, e(k, T) - 1 \quad (3.20)$$

com as seguintes condição

$$V^k(0, u^k) := \sup_{\phi^k \in U_0^{k, e(k, T)}} \mathbb{E}[\xi(X^{k, \phi^k})], \quad V^k(T_{e(k, T)}^k, u^k) := \xi(X^{k, u^k}).$$

Deve-se notar que $V^k(T_n^k, u^k)$ depende apenas de $u^{k, n-1} := (u_0^k, \dots, u_{n-1}^k)$ por isso é natural escrever

$$V^k(T_n^k, u^{k, n-1}) = V^k(T_n^k, u^k); u^k \in U_0^{k, e(k, T)}, 0 \leq n \leq e(k, T)$$

com a convenção que $u^{k, -1} := 0$.

Lema 3.4.1. Seja $0 \leq n \leq e(k, T) - 1$. Para cada ϕ^k e η^k em $U_n^{k, e(k, T)}$, existe $\theta^k \in U_n^{k, e(k, T)}$ tal que

$$\mathbb{E} \left[\xi(X^{k, \pi^k \otimes_n \theta^k}) | \mathcal{G}_n^k \right] = \mathbb{E} \left[\xi(X^{k, \pi^k \otimes_n \phi^k}) | \mathcal{G}_n^k \right] \vee \mathbb{E} \left[\xi(X^{k, \pi^k \otimes_n \eta^k}) | \mathcal{G}_n^k \right] \quad q.c$$

para todo $\pi^k \in U_0^{k,n}$. Portanto, para cada $\pi^k \in U_0^{k,n}$

$$\mathbb{E} \left[\operatorname{ess\,sup}_{\theta^k \in U_n^{k,e(k,T)}} \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,\pi^k \otimes_n \theta^k}) | \mathcal{G}_n^k \right] \middle| \mathcal{G}_j^k \right] = \operatorname{ess\,sup}_{\theta^k \in U_n^{k,e(k,T)}} \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,\pi^k \otimes_n \theta^k}) | \mathcal{G}_j^k \right]$$

se $0 \leq j \leq n$ and $0 \leq n \leq e(k, T) - 1$.

Demonstração: Seja $G = \left\{ \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,\pi^k \otimes_n \phi^k}) | \mathcal{G}_n^k \right] > \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,\pi^k \otimes_n \eta^k}) | \mathcal{G}_n^k \right] \right\}$. Escolha $\theta^k = \phi^k \mathbf{1}_G + \eta^k \mathbf{1}_{G^c}$. ■

Lema 3.4.2. Se as afirmações A1 e B1 são verdadeiras, então para cada $u^k \in U_0^{e(k,T)}$, temos que

$$\operatorname{ess\,sup}_{\phi^k \in U_n^{k,e(k,T)}} \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,u^k \otimes_n \phi^k}) | \mathcal{G}_n^k \right] = \operatorname{ess\,sup}_{\theta_n^k \in U_n^{k,n+1}} \operatorname{ess\,sup}_{\phi^k \in U_{n+1}^{k,e(k,T)}} \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,u^k \otimes_n (\theta_n^k \otimes_{n+1} \phi^k)}) | \mathcal{G}_n^k \right] \quad q.c$$

para cada $0 \leq n \leq e(k, T) - 1$.

Demonstração: A prova é similar ao Lema 2.1.2. Fixamos $u^k \in U_0^{k,m}$, $0 \leq n \leq m-1$ e $m = e(k, T)$. Seja $\phi^k \in U_n^{k,m}$ e considere $u^k \otimes_n \phi^k = (u_0^k, \dots, u_{n-1}^k, \theta_n^k, \phi_{n+1}^k, \dots, \phi_{m-1}^k)$ no qual tomamos $\theta_n^k = \phi_n^k$. Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,u^k \otimes_n \phi^k}) | \mathcal{G}_n^k \right] &= \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,u^k \otimes_n \theta_n^k \otimes_{n+1} \phi^k}) | \mathcal{G}_n^k \right] \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\phi^k \in U_{n+1}^{k,m}} \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,u^k \otimes_n \theta_n^k \otimes_{n+1} \phi^k}) | \mathcal{G}_n^k \right] \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\eta_n^k \in U_n^{k,n+1}} \operatorname{ess\,sup}_{\phi^k \in U_{n+1}^{k,m}} \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,u^k \otimes_n \eta_n^k \otimes_{n+1} \phi^k}) | \mathcal{G}_n^k \right] \quad q.c \end{aligned}$$

O que mostra uma das desigualdades. Por outro lado

$$\operatorname{ess\,sup}_{\phi^k \in U_n^{k,m}} \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,u^k \otimes_n \phi^k}) | \mathcal{G}_n^k \right] \geq \operatorname{ess\,sup}_{\varphi^k \in U_{n+1}^{k,m}} \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,u^k \otimes_n \eta_n^k \otimes_{n+1} \varphi^k}) | \mathcal{G}_n^k \right] \quad q.c$$

para todo $\eta_n^k \in U_n^{k,n+1}$ de modo que

$$\operatorname{ess\,sup}_{\phi^k \in U_n^{k,m}} \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,u^k \otimes_n \phi^k}) | \mathcal{G}_n^k \right] \geq \operatorname{ess\,sup}_{\eta_n^k \in U_n^{k,n+1}} \operatorname{ess\,sup}_{\varphi^k \in U_{n+1}^{k,m}} \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,u^k \otimes_n \eta_n^k \otimes_{n+1} \varphi^k}) | \mathcal{G}_n^k \right] \quad q.c.$$

■

Proposição 3.4.1. Princípio da Programação Dinâmica Para cada $u^k \in U_0^{k,e(k,T)}$, o processo valor $V^k(\cdot, u^k)$ a tempo discreto satisfaz

$$V^k(T_n^k, u^k) = \operatorname{ess\,sup}_{\theta_n^k \in U_n^{k,n+1}} \mathbb{E} \left[V^k(T_{n+1}^k, u^{k,n-1} \otimes_n \theta_n^k) \mid \mathcal{G}_n^k \right]; \quad 0 \leq n \leq e(k, T) - 1 \quad (3.21)$$

$$V^k(T_{e(k,T)}^k, u^k) = \xi(X^{k,u^k}) \text{ q.c.}$$

Por outro lado, se uma classe de processos $\{Z^k(T_n^k, u^k); u^k \in U_0^{k,e(k,T)}; 0 \leq n \leq e(k, T)\}$ satisfaz a equação do princípio da programação dinâmica (3.21) para cada $u^k \in U_0^{k,e(k,T)}$, então $Z^k(T_n^k, u^k)$ coincide com $V^k(T_n^k, u^k)$ q.c para todo $0 \leq n \leq e(k, T)$ e para todo $u^k \in U_0^{k,e(k,T)}$.

Demonstração: Vamos fixar $n = 0, \dots, e(k, T) - 1, m = e(k, T)$ e $u^k \in U_0^{k,e(k,T)}$. Lemas 3.4.1 e 3.4.2 segue

$$\begin{aligned} V^k(T_n^k, u^k) &= \operatorname{ess\,sup}_{\phi^k \in U_n^{k,m}} \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,u^k \otimes_n \phi^k}) \mid \mathcal{G}_n^k \right] \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\theta_n^k \in U_n^{k,n+1}} \operatorname{ess\,sup}_{\phi^k \in U_{n+1}^{k,m}} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\xi(X^{k,u^k \otimes_n (\theta_n^k \otimes_{n+1} \phi^k)}) \mid \mathcal{G}_{n+1}^k \right] \mid \mathcal{G}_n^k \right] \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\theta_n^k \in U_n^{k,n+1}} \mathbb{E} \left[\operatorname{ess\,sup}_{\phi^k \in U_{n+1}^{k,m}} \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,u^k \otimes_n (\theta_n^k \otimes_{n+1} \phi^k)}) \mid \mathcal{G}_{n+1}^k \right] \mid \mathcal{G}_n^k \right] \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\theta_n^k \in U_n^{k,n+1}} \mathbb{E} \left[\operatorname{ess\,sup}_{\phi^k \in U_{n+1}^{k,m}} \mathbb{E} \left[\xi(X^{k,(u^{k,n-1} \otimes_n \theta_n^k) \otimes_{n+1} \phi^k}) \mid \mathcal{G}_{n+1}^k \right] \mid \mathcal{G}_n^k \right] \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\theta_n^k \in U_n^{k,n+1}} \mathbb{E} \left[V^k(T_{n+1}^k, u^{k,n-1} \otimes_n \theta_n^k) \mid \mathcal{G}_n^k \right] \text{ q.c.} \end{aligned}$$

Inversamente, suponha que existe uma classe de \mathbb{F}^k -funcionais $\{Z^k(\cdot, u^k) : u^k \in U_0^{k,m}\}$ satisfazendo a equação do princípio da programação dinâmica (3.21) para todo controle $u^k \in U_0^{k,m}$. Por suposição

$$Z^k(T_m^k, u^k) = \xi(X^{k,u^k}) = V^k(T_m^k, u^k) \text{ q.c.},$$

para todo $u^k \in U_0^{k,m}$. Portanto, por um argumento de indução invertida é fácil verificar que $Z^k(T_n^k, u^k) = V^k(T_n^k, u^k)$ para todo $u^k \in U_0^{k,m}$ and $n = 0, 1, \dots, m - 1$. ■

Discretização Trajetória a Trajetória

Neste capítulo, vamos fazer a descrição trajetória a trajetória do processo valor. E desenvolver o teorema de seleção mensurável, para encontrar o controle ϵ -ótimo.

4.1 Discretização

Ao longo dessa tese, um elemento genérico de \mathbb{S}_k^n será denotado por

$$\mathbf{b}_n^k := (s_1^k, \tilde{i}_1^k, \dots, s_n^k, \tilde{i}_n^k) \in \mathbb{S}_k^n$$

no qual $(s_r^k, \tilde{i}_r^k) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{I}_k$ para $1 \leq r \leq n$. A lei do sistema será dada por uma extensão da seguinte medida de probabilidade no espaço mensurável $(\mathbb{S}_k^n, \mathcal{B}(\mathbb{S}_k^{n-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{S}_k))$

$$\mathbb{P}_n^k := \mathbb{P} \circ \mathcal{A}_n^k; n, k \geq 1,$$

Por definição, $\mathbb{P}_{n-1}^k(\cdot) = \mathbb{P}_n^k(\cdot \times \mathbb{S}_k)$. Mais importante, $\mathbb{P}_n^k(\mathbb{S}_k^{n-1} \times \cdot)$ é uma medida regular e $\mathcal{B}(\mathbb{S}_k)$ é gerado enumerável, desta forma, é conhecido (veja e.g (22)) que existe (\mathbb{P}_{n-1}^k -q.c. única) a desintegração $\nu_n^k : \mathcal{B}(\mathbb{S}_k) \times \mathbb{S}_k^{n-1} \rightarrow [0, 1]$ a qual realiza

$$\mathbb{P}_n^k(D) = \int_{\mathbb{S}_k^{n-1}} \nu_n^k(D_{\mathbf{b}_{n-1}^k} | \mathbf{b}_{n-1}^k) \mathbb{P}_{n-1}^k(d\mathbf{b}_{n-1}^k)$$

para todo $D \in \mathcal{B}(\mathbb{S}_k^n)$, no qual $D_{\mathbf{b}_{n-1}^k} := \{(s_n^k, \tilde{\gamma}_n^k); (\mathbf{b}_{n-1}^k, s_n^k, \tilde{\gamma}_n^k) \in D\} \in \mathcal{B}(\mathbb{S}_k)$ é a \mathbf{b}_{n-1}^k -seção de D .

Por definição para cada $E \in \mathcal{B}(\mathbb{S}_k)$ e $\mathbf{b}_{n-1}^k \in \mathbb{S}_k^{n-1}$, temos que

$$\nu_n^k(E|\mathbf{b}_{n-1}^k) = \mathbb{P}\left\{(\Delta T_n^k, \eta_n^k) \in E \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k\right\}; n \geq 1. \quad (4.1)$$

Proposição 4.1.1. Para cada $(a, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\tilde{\gamma}_n^{k, \ell, i_n} \in \mathbb{I}_k$ e $\mathbf{b}_{n-1}^k \in \mathbb{S}_k^{n-1}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left\{\Delta T_n^k \in (a, b); \eta_n^k = \tilde{\gamma}_n^{k, \ell, i_n} \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k\right\} \\ &= \left\{ \frac{\int_{a+\Delta_n^{k, i_n}}^{b+\Delta_n^{k, i_n}} f_{\Delta T_1^{k, 1}}(x) dx}{\int_{\Delta_n^{k, i_n}}^{\infty} f_{\Delta T_1^{k, 1}}(x) dx} \right\} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\int_{-\infty}^0 \int_{-s}^{\infty} f_{\Delta T_1^{k, 1}}(s+t+\Delta_n^{k, i_n}) f_{min}(t) dt ds}{\prod_{\lambda=1}^d \int_{\Delta_n^{k, \lambda}}^{\infty} f_{\Delta T_1^{k, 1}}(t) dt} \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Demonstração: A demonstração desta proposição pode ser encontrada no Apêndice B (Teorema B.0.1). ■

Lembre-se, para cada $E \in \mathcal{E}(\mathbb{S}_k^n)$, existem $B \in \mathcal{B}(\mathbb{S}_k^n)$ tal que $\mathbb{P}_n^k(E \Delta B) = 0$. Desta forma, vamos definir uma extensão $\tilde{\mathbb{P}}_n^k : \mathcal{E}(\mathbb{S}_k^n) \rightarrow [0, 1]$ do seguinte modo

$$\tilde{\mathbb{P}}_n^k(E) := \mathbb{P}_n^k(B); E \in \mathcal{E}(\mathbb{S}_k^n)$$

sempre que $\mathbb{P}_n^k(E \Delta B) = 0$ para algum $B \in \mathcal{S}_k^n$.

Fixamos uma extensão de $\tilde{\mathbb{P}}_n^k$ de $\mathcal{B}(\mathbb{S}_k^n)$ para a classe $\mathcal{E}(\mathbb{S}_k^n)$ de todos os conjuntos universalmente mensuráveis de \mathbb{S}_k^n . Similarmente, podemos escolher uma extensão da desintegração $\tilde{\nu}_n^k : \mathbb{S}_k^{n-1} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{S}_k}$ como uma função de Borel na qual $\mathcal{P}_{\mathbb{S}_k}$ é um conjunto de medida de probabilidade sobre $\mathcal{E}(\mathbb{S}_k)$ dotado da topologia fraca estrela (veja a o Rudin (51)). Além disso, essa extensão realiza

$$\tilde{\mathbb{P}}_n^k(E) = \int_{\mathbb{S}_k^{n-1}} \tilde{\nu}_n^k(E_{\mathbf{b}_{n-1}^k} | \mathbf{b}_{n-1}^k) \mathbb{P}_{n-1}^k(d\mathbf{b}_{n-1}^k)$$

para todo $E \in \mathcal{E}(\mathbb{S}_k^n)$. Com um pequeno abuso de notação, escrevemos \mathbb{P}_n^k e ν_n^k como estas extensões.

Lembrando que qualquer controle $u^k \in U_0^{k, e(k, T)}$ pode ser escrito como

$$u^k(t) = u_0^k \mathbb{1}_{\{t=0\}} + \sum_{n=1}^{e(k, T)} u_{n-1}^k \mathbb{1}_{\{T_{n-1}^k < t \leq T_n^k\}} \quad (4.3)$$

Para cada u_i^k existe uma função universalmente mensurável (veja (49), (52), (3)) $g_i^k : \mathbb{S}_k^i \rightarrow \mathbb{A}^d$ tal que $g_i^k(\mathcal{A}_i^k) = u_i^k$ q.c.; $1 \leq i \leq e(k, T) - 1$ e g_0^k é uma constante q.c.

A dinâmica do sistema está definida no espaço história $\mathbb{H}^k := \mathbb{A}^d \times \mathbb{S}_k$. Denotamos $\mathbb{H}^{k,n}$ e \mathbb{I}_k^n como o produto cartesiano de n elementos \mathbb{H}^k e \mathbb{I}_k , respectivamente. Os elementos de $\mathbb{H}^{k,n}$ serão denotados por

$$\mathbf{o}^{k,n} := \left((a_0^k, s_1^k, \tilde{i}_1^k); \dots, (a_{n-1}^k, s_n^k, \tilde{i}_n^k) \right)$$

no qual $(a_0^k, \dots, a_{n-1}^k) \in \mathbb{A}^n$, $(s_1^k, \dots, s_n^k) \in \mathbb{R}_+^n$ e $(\tilde{i}_1^k, \dots, \tilde{i}_n^k) \in \mathbb{I}_k^n$. Para $m = e(k, T)$, também precisamos definir $\Xi_j^{k,g^k} : \mathbb{S}_k^j \rightarrow \mathbb{H}^{k,j}$ como

$$\Xi_j^{k,g^k}(s_1^k, \tilde{i}_1^k, \dots, s_j^k, \tilde{i}_j^k) := \left((g_0^k, s_1^k, \tilde{i}_1^k), \dots, (g_{j-1}^k(s_1^k, \tilde{i}_1^k, \dots, s_{j-1}^k, \tilde{i}_{j-1}^k), s_j^k, \tilde{i}_j^k) \right)$$

no qual $1 \leq j \leq m$. Identificamos Ξ_0^{k,g^k} como uma função constante (no espaço de ações \mathbb{A}^d) o qual não necessariamente depende da lista de controles $g^k = (g_{n-1}^k)_{n=1}^{e(k,T)}$.

Para um controle $u^k \in U_0^{k,e(k,T)}$ dado, associamos $\{g_{\ell-1}^k\}_{\ell=1}^{e(k,T)}$. Então, o teorema de Doob-Dynkin's garante a existência de uma função de Borel $\gamma_{e(k,T)}^k : \mathbb{H}^{k,e(k,T)} \rightarrow D([0, T]; \mathbb{R}^q)$ tal que $\gamma_{e(k,T)}^k(\mathbf{o}^{k,e(k,T)})(0) = x = X^{k,u^k}(0)$ e

$$\gamma_{e(k,T)}^k \left(\Xi_{e(k,T)}^{k,g^k}(\mathcal{A}_{e(k,T)}^k(\omega)) \right)(t) = X^{k,u^k}(t, \omega) \quad (4.4)$$

para ω e todo $t \in [0, T]$.

Iremos fazer uso da seguinte notação

$$\omega_t := \omega(t \wedge \cdot); \omega \in D([0, T] : \mathbb{R}^m).$$

Essa notação pode ser naturalmente estendida aos processos. Definimos

$$\Lambda_T := \{(t, \omega_t); t \in [0, T]; \omega \in D([0, T]; \mathbb{R}^m)\}.$$

A seguir vamos necessitar alguns objetos. Definimos $\aleph : \mathbb{I}_k \rightarrow \{1, 2, \dots, d\} \times \{-1, 1\}$ pelo

$$\aleph(\tilde{i}^k) := (\aleph_1(\tilde{i}^k), \aleph_2(\tilde{i}^k)) := (j, r), \quad (4.5)$$

no qual $j \in \{1, \dots, d\}$ é uma coordenada de $\tilde{i}^k \in \mathbb{I}_k$ o qual é diferente de zero e $r \in \{-1, 1\}$ é o sinal de \tilde{i}^k da coordenada j .

Se $F_\ell^k : \mathbb{H}^{k,\ell} \rightarrow \mathbb{R}; \ell = 0, \dots, e(k, T)$ é uma sequência de funções universalmente mensuráveis (F_0^k é uma constante), então definimos

$$\nabla_j F^k(\mathbf{o}_n^k) := \frac{F_n^k(\mathbf{o}_n^k) - F_{n-1}^k(\mathbf{o}_{n-1}^k)}{\epsilon_k \aleph_2(\tilde{j}_n^k)} \mathbb{1}_{\{\aleph_1(\mathbf{b}_n^k)=j\}}, \quad (4.6)$$

para $\mathbf{o}_n^k \in \mathbb{H}_k^n, 1 \leq n \leq e(k, T)$ e $j = 1, \dots, d$, e

$$\mathcal{U} F^k(\mathbf{o}_n^k, a_n^k) := \int_{\mathbb{S}_k} \frac{F_{n+1}^k(\mathbf{o}_n^k, a_n^k, s_{n+1}^k, \tilde{j}_{n+1}^k) - F_n^k(\mathbf{o}_n^k)}{\epsilon_k^2} \nu_{n+1}^k(ds_{n+1}^k d\tilde{i}_{n+1}^k | \mathbf{b}_n^k); \quad (4.7)$$

para $\mathbf{o}_n^k \in \mathbb{H}_k^n, 0 \leq n \leq (k, T) - 1$. O operador $(\nabla_j, \mathcal{U}; j = 1 \dots, d)$ descreverá a forma diferencial associada a uma determinada estrutura discreta controlada (Y^k). Em particular, (4.7) desempenhará o papel de um Hamiltoniano no contexto de problema de controle.

Para uma sequência de controle dados $(u_j^k)_{j=0}^{e(k,T)-1}$ baseado no $(g_j^k)_{j=0}^{e(k,T)-1}$, o Teorema Doob-Dynkin's fornece a existência de uma sequência de funções universalmente mensuráveis $F_j^k : \mathbb{H}_k^j \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$Y^k(T_n^k, u^k) = F_n^k(\Xi_n^{k,g^k}(\mathcal{A}_n^k)) \text{ q.c.}, \quad n = 0 \dots, e(k, T). \quad (4.8)$$

Na sequência, denotamos \mathcal{P}^k como sendo a σ -álgebra \mathbb{F}^k -previsível sobre $[0, T] \times \Omega$, $(\cdot)^{p,k}$ é o operador projeção \mathbb{F}^k -dual previsível e seja $\mu_{[A^{k,j}]}$ a medida de Doléans (veja Capítulo 3 em (38) e o Capítulo 5 em (25)) gerado pelo processo $[A^{k,j}, A^{k,j}]; 1 \leq j \leq d, k \geq 1$. Denotamos

$$\mathcal{D}^{\mathcal{Y},k,j} Y^k(s, u^k) := \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\Delta Y^k(T_\ell^{k,j}, u^k)}{\Delta A^{k,j}(T_\ell^{k,j})} \mathbb{1}_{\{T_\ell^{k,j}=s\}}; \quad 0 \leq s \leq T,$$

$$U^{\mathcal{Y},k,j} Y^k(s, u^k) := \mathbb{E}_{\mu_{[A^{k,j}]}} \left[\frac{\mathcal{D}^{\mathcal{Y},k,j} Y^k(\cdot, u^k)}{\Delta A^{k,j}} \Big| \mathcal{P}^k \right] (s); \quad 0 \leq s \leq T, k \geq 1, 1 \leq j \leq d, \quad (4.9)$$

no qual $U^{\mathcal{Y},k,j} Y^k(\cdot, u^k)$ é o único (a menos de um conjunto de medida $\mu_{[A^{k,j}]}$ nulo) processo \mathbb{F}^k -previsível tal que

$$\left(\int_0^\cdot \frac{\mathcal{D}^{\mathcal{Y},k,j} Y^k(\cdot, u^k)}{\Delta A^{k,j}} d[A^{k,j}, A^{k,j}] \right)^{p,k} = \int_0^\cdot \mathbb{E}_{\mu_{[A^{k,j}]}} \left[\frac{\mathcal{D}^{\mathcal{Y},k,j} Y^k(\cdot, u^k)}{\Delta A^{k,j}} \Big| \mathcal{P}^k \right] d\langle A^{k,j}, A^{k,j} \rangle.$$

Aqui, $\langle A^{k,j}, A^{k,j} \rangle$ é o *angle bracket* de $A^{k,j}$ (veja Lema 2.1 em (45)) e o processo estocástico $\mathcal{D}^{\mathcal{Y},k,j}Y^k(\cdot, u^k)/\Delta A^{k,j}$ é nulo no complemento da união dos intervalos $\cup_{n=1}^{\infty} [[T_n^{k,j}, T_n^{k,j}]]$. Denotamos

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^{\mathcal{Y},k,j}Y^k(s, u^k) &:= \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{D}^{\mathcal{Y},k,j}Y^k(s, u^k) \mathbb{1}_{\{T_{\ell}^k \leq s < T_{\ell+1}^k\}}, \\ \mathbb{U}^{\mathcal{Y},k,j}Y^k(s, u^k) &:= U^{\mathcal{Y},k,j}Y^k(s, u^k) \frac{d\langle A^{k,j}, A^{k,j} \rangle}{ds}\end{aligned}\tag{4.10}$$

Uma aplicação direta da Proposição 2.1 em (45) em $Y^k(\cdot, u^k) \in O_T(\mathbb{F}^k)$ segue

$$\begin{aligned}Y^k(t, u^k) &= Y^k(0, u^k) + \sum_{j=1}^d \oint_0^t \mathbb{D}^{\mathcal{Y},k,j}Y^k(s, u^k) dA^{k,j}(s) \\ &\quad + \sum_{j=1}^d \int_0^t \mathbb{U}^{\mathcal{Y},k,j}Y^k(s, u^k)(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Para o propósito desta tese, o aspecto mais importante desta representação diferencial é revelado em $T_0^k, \dots, T_{e(k,T)}^k$. Pela aplicação do Lema 2.7 em (45), no qual

$$\sum_{j=1}^d U^{\mathcal{Y},k,j}Y^k(T_{n+1}^k, u^k) = \mathbb{E} \left[\frac{\Delta Y^k(T_{n+1}^k, u^k)}{\epsilon_k^2} \middle| \mathcal{G}_{n+1-}^k \right] q.c.,\tag{4.12}$$

e, em outras palavras,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^d U^{\mathcal{Y},k,j}Y^k(T_{n+1}^k, u^k) \middle| \mathcal{G}_n^k \right] = \mathbb{E} \left[\frac{\Delta Y^k(T_{n+1}^k, u^k)}{\epsilon_k^2} \middle| \mathcal{G}_n^k \right] q.c.,\tag{4.13}$$

para cada $0 \leq n \leq e(k, T) - 1$ and $k \geq 1$. Por construção, Y^k é dado pela representação funcional (4.8). As funções $(\nabla_j F^k, \mathcal{U} F^k; j = 1, \dots, d)$ realiza as seguintes identidades: para todo $u^k \in U_0^{k, e(k, T)}$,

$$\nabla_j F^k(\Xi_n^{k, g^k}(\mathcal{A}_n^k)) = \mathcal{D}^{\mathcal{Y},k,j}Y^k(T_n^k, u^k) \mathbb{1}_{\{\mathfrak{N}_1(\mathcal{A}_n^k)=j\}} q.c.,\tag{4.14}$$

para cada $j = 1, \dots, d, n = 1, \dots, e(k, T)$ e

$$\mathcal{U} F^k(\Xi_n^{k, g^k}(\mathcal{A}_n^k), g_n^k(\mathcal{A}_n^k)) = \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^d U^{\mathcal{Y},k,j}Y^k(T_{n+1}^k, u^k) \middle| \mathcal{G}_n^k \right] q.c.\tag{4.15}$$

para $n = 0, \dots, e(k, T) - 1$.

A estrutura diferencial apresentada nesta seção, irá nos fornecer uma forma para obter os controles ϵ -ótimos em problemas não-Markovianos. Note que não é nada óbvio que maximizar $\mathcal{U} F^k$ (para um F^k adequado) sobre caminhos no espaço de ação irá fornecer os controles ótimos. Na seção 4.2 e 4.3 explicaremos com mais detalhes como conseguir isso

A seguir vamos dar um exemplo, o qual satisfaz todas as hipóteses do nosso modelo.

4.1.1 Exemplo: EDE Controlada movida pelo movimento Browniano

Seja $D([0, t]; \mathbb{R}^q)$ o espaço linear a valores de \mathbb{R}^q com caminhos càdlàg em $[0, t]$ e em seguida, definimos uma aplicação $F : [0, T] \times D([0, T]; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}; (t, \omega) \mapsto F(t, \omega)$ dotada da métrica Λ_T definida por

$$d_{1/2}((t, \omega); (t', \omega')) := \sup_{0 \leq u \leq T} \|\omega(u \wedge t) - \omega'(u \wedge t')\|_{\mathbb{R}^q} + |t - t'|^{1/2}$$

então (Λ_T, d) é um espaço métrico completo equipado com uma σ -álgebra de Borel. Temos que F é um funcional *não-antecipativo* e

$$F(t, \omega) = F(t, \omega_t); (t, \omega) \in [0, T] \times D([0, T]; \mathbb{R}^q).$$

Neste caso, um funcional não-antecipativo pode ser visto como uma aplicação mensurável $F : \Lambda_T \rightarrow \mathbb{R}; (t, \omega_t) \mapsto F(t, \omega) = F(t, \omega_t)$ para $(t, \omega_t) \in \Lambda_T$. Para encurtar a notação definimos $\|\omega\|_\infty := \sup_{0 \leq u \leq T} \|\omega(u)\|_{\mathbb{R}^q}$ para $\omega \in D([0, T]; \mathbb{R}^q)$.

O processo de estado básico será a EDE q -dimensional definida como

$$dX^{i,u}(t) = \alpha^i(t, X_t^u, u(t))dt + \sum_{j=1}^d \sigma^{i,j}(t, X_t^u, u(t))dB^j(t); 0 \leq t \leq T, 1 \leq i \leq q \quad (4.16)$$

com a condição inicial $X^u(0) = x \in \mathbb{R}^q$ dada. O coeficiente

$$\alpha : [0, T] \times D([0, T]; \mathbb{R}^q) \times \mathbb{A}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$$

e

$$\sigma : [0, T] \times D([0, T]; \mathbb{R}^q) \times \mathbb{A}^d \rightarrow \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^d$$

são funcionais não-antecipativos satisfazendo as condições padrão de tal forma que $X : U_0^T \rightarrow \mathbf{B}^2(\mathbb{F})$ é um funcional de Wiener bem definido.

Primeiramente, construímos um esquema tipo Euler-Maruyama baseado na partição aleatória $(T_n^k)_{n \geq 0}$ como segue: Seja $(u_{n-1}^k)_{n=1}^\infty$ um conjunto de controle tal que $u_{n-1}^k = g_{n-1}^k(\mathcal{A}_{n-1}^k)$ para uma sequência de funções universalmente mensurável $g_{n-1}^k : \mathbb{S}_k^{n-1} \rightarrow \mathbb{A}^d, n \geq 1$. Definimos $\bar{X}^{k,u^k}(0) = x$

$$\bar{X}^{k,u^k,i}(T_1^k) := \bar{X}^{k,u^k}(0) + \alpha^i(T_0^k, \bar{X}_{T_0^k}^{k,u^k}, u_0^k) \Delta T_1^k + \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(T_0^k, \bar{X}_{T_0^k}^{k,u^k}, u_0^k) \Delta A^{k,j}(T_1^k)$$

no qual $\bar{X}_{T_0^k}^{k,u^k} = x$ é uma função constante sobre $[0, T]$. Então, definimos

$$\bar{X}_{T_1^k}^{k,u^k}(t) := x \mathbb{1}_{\{0 \leq t < T_1^k\}} + \bar{X}^{k,u^k}(T_1^k) \mathbb{1}_{\{T_1^k \leq t\}}; 0 \leq t \leq T.$$

O segundo passo é dada por

$$\bar{X}^{k,u^k,i}(T_2^k) := \bar{X}^{k,u^k,i}(T_1^k) + \alpha^i(T_1^k, \bar{X}_{T_1^k}^{k,u^k}, u_1^k) \Delta T_2^k + \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(T_1^k, \bar{X}_{T_1^k}^{k,u^k}, u_1^k) \Delta A^{k,j}(T_2^k).$$

Então, definimos

$$\bar{X}_{T_2^k}^{k,u^k}(t) := x \mathbb{1}_{\{0 \leq t < T_1^k\}} + \bar{X}^{k,u^k}(T_1^k) \mathbb{1}_{\{T_1^k \leq t < T_2^k\}} + \bar{X}^{k,u^k}(T_2^k) \mathbb{1}_{\{T_2^k \leq t\}}; 0 \leq t \leq T.$$

Definimos por indução,

$$\bar{X}^{k,u^k,i}(T_n^k) := \bar{X}^{k,u^k,i}(T_{n-1}^k) + \alpha^i(T_{n-1}^k, \bar{X}_{T_{n-1}^k}^{k,u^k}, u_{n-1}^k) \Delta T_n^k + \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(T_{n-1}^k, \bar{X}_{T_{n-1}^k}^{k,u^k}, u_{n-1}^k) \Delta A^{k,j}(T_n^k).$$

para $n, k \geq 1$ e $1 \leq i \leq q$. Um processo \mathbb{F}^k -controlado associado ao esquema de Euler-Maruyama é então naturalmente definido por

$$X^{k,u^k}(t) := \bar{X}^{k,u^k}(t \wedge T_{\epsilon(k,T)}^k)$$

no qual

$$\bar{X}^{k,u^k}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{X}^{k,u^k}(T_n^k) \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t < T_{n+1}^k\}}$$

A descrição trajetória a trajetória é dado: Definimos $h_0^k = x$,

$$h_n^{k,i}(\mathbf{o}^{k,n}) = h_{n-1}^{k,i}(\mathbf{o}^{k,n-1}) + \alpha^i(s_{n-1}^k, \bar{\gamma}_{n-1}^k(\mathbf{o}^{k,n-1}), a_{n-1}^k) s_n^k + \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(s_{n-1}^k, \bar{\gamma}_{n-1}^k(\mathbf{o}^{k,n-1}), a_{n-1}^k) 2^{-k} \tilde{\gamma}_n^{k,j}$$

no qual $1 \leq i \leq q$, $\mathbf{o}^{k,n} \in \mathbb{H}^{k,n}$ e

$$\bar{\gamma}_n^k(\mathbf{o}^{k,n})(t) = \sum_{\ell=0}^{n-1} h_{\ell}^k(\mathbf{o}^{k,\ell}) \mathbf{1}_{\{t_{\ell}^k \leq t < t_{\ell+1}^k\}} + h_n^k(\mathbf{o}^{k,n}) \mathbf{1}_{\{t_n^k \leq t\}}; t \geq 0, \mathbf{o}^{k,n} \in \mathbb{H}^{k,n},$$

no qual usamos a notação

$$t_n^k := \sum_{\ell=1}^n s_{\ell}^k.$$

Definimos então

$$\bar{\gamma}^k(\mathbf{o}^{k,\infty})(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^k(\mathbf{o}^{k,n}) \mathbf{1}_{\{t_n^k \leq t < t_{n+1}^k\}}$$

para $\mathbf{o}^{k,\infty} \in \mathbb{H}^{k,\infty}$ e definimos

$$\gamma_{e(k,T)}^k(\mathbf{o}^{k,e(k,T)})(t) = \bar{\gamma}^k(\mathbf{o}^{k,\infty})(t \wedge t_{e(k,T)}^k); 0 \leq t \leq T.$$

Por definição, $\gamma_{e(k,T)}^k \left(\Xi_{e(k,T)}^{k,\mathbf{o}^k}(\mathcal{A}_{e(k,T)}^k(\omega)) \right)(t) = X^{k,u^k}(t, \omega)$ para q.c. ω e para cada $t \in [0, T]$.

4.2 Teorema de Seleção Mensurável

Nesta seção apresentamos o teorema de seleção mensurável. Sem duvida esse é um teorema fundamental, pois desempenha um papel chave na nossa metodologia. Para isso vamos necessitar utilizar de argumentos backwards.

Para simplificar a notação através dessa seção vamos definir $m = e(k, T)$. Lembrando que um processo \mathbb{F}^k -controlado da forma (3.19) é fixado e está equipado com uma função de Borel $\gamma_m^k : \mathbb{H}^{k,m} \rightarrow D([0, T]; \mathbb{R}^q)$ realizando (4.4) com uma condição

inicial $x \in \mathbb{R}^q$. Para tal processo \mathbb{F}^k -controlado, escrevemos V^k com o processo valor associado dado por (3.20).

Começamos definindo a aplicação $F_m^{k,m} : \mathbb{H}^{k,m} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F_m^{k,m}(\mathbf{o}^{k,m}) := \xi(\gamma_m^k(\mathbf{o}^{k,m})); \mathbf{o}^{k,m} \in \mathbb{H}^{k,m},$$

no qual $\xi : C([0, T]; \mathbb{R}^q) \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada. Por construção, $F_m^{k,m}$ é uma função de Borel.

Lema 4.2.1. Seja $u^k \in U_0^{k,m}$ um controle associado a funções universalmente mensuráveis $(g_{n-1}^k)_{n=1}^m$, no qual $m = e(k, T)$. Então,

$$\mathbb{E}[\xi(X^{k,u^k}) | \mathcal{G}_{m-1}^k] = \int_{\mathbb{S}_k} F_m^{k,m}(\Xi_m^{k,g^k}(\mathcal{A}_{m-1}^k, s_m^k, \tilde{i}_m^k)) \nu_m^k(ds_m^k, d\tilde{i}_m^k | \mathcal{A}_{m-1}^k) \text{ q.c.} \quad (4.17)$$

e

$$\mathbb{E}\xi(X^{k,u^k}) = \int_{\mathbb{S}_k^m} F_m^{k,m}(\Xi_m^{k,g^k}(\mathbf{b}_m^k)) \mathbb{P}_m^k(d\mathbf{b}_m^k) \quad (4.18)$$

Demonstração: Por definição, se $B = (\mathcal{A}_{m-1}^k)^{-1}(D) = (\mathcal{A}_m^k)^{-1}(D \times \mathbb{S}_k) \in \mathcal{G}_{m-1}^k$ para algum $D \in \mathcal{E}(\mathbb{S}_k^{m-1})$, então

$$\begin{aligned} \int_B \mathbb{E}[\xi(X^{k,u^k}) | \mathcal{G}_{m-1}^k] d\mathbb{P} &= \int_B \xi(X^{k,u^k}) d\mathbb{P} \\ &= \int_B \xi(\gamma_m^k(\Xi_m^{k,g^k}(\mathcal{A}_m^k))) d\mathbb{P} \\ &= \int_{D \times \mathbb{S}_k} \xi(\gamma_m^k(\Xi_m^{k,g^k}(\mathbf{b}_m^k))) \mathbb{P}_m^k(d\mathbf{b}_m^k) \\ &= \int_{D \times \mathbb{S}_k} \xi(\gamma_m^k(\Xi_m^{k,g^k}(\mathbf{b}_{m-1}^k, s_m^k, \tilde{i}_m^k))) \nu_m^k(ds_m^k, d\tilde{i}_m^k | \mathbf{b}_{m-1}^k) \mathbb{P}_{m-1}^k(d\mathbf{b}_{m-1}^k) \\ &= \int_D \left(\int_{\mathbb{S}_k} \xi(\gamma_m^k(\Xi_m^{k,g^k}(\mathbf{b}_{m-1}^k, s_m^k, \tilde{i}_m^k))) \nu_m^k(ds_m^k, d\tilde{i}_m^k | \mathbf{b}_{m-1}^k) \right) \mathbb{P}_{m-1}^k(d\mathbf{b}_{m-1}^k) \\ &= \int_B \left(\int_{\mathbb{S}_k} \xi(\gamma_m^k(\Xi_m^{k,g^k}(\mathcal{A}_{m-1}^k, s_m^k, \tilde{i}_m^k))) \nu_m^k(ds_m^k, d\tilde{i}_m^k | \mathcal{A}_{m-1}^k) \right) d\mathbb{P} \end{aligned} \quad (4.19)$$

O que mostra (4.17). A equação (4.18) é imediata. ■

Lema 4.2.2. A aplicação

$$(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}^k) \mapsto \int_{\mathbb{S}_k} F_m^{k,m}(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}^k, s_m^k, \tilde{i}_m^k) \nu_m^k(ds_m^k, d\tilde{i}_m^k | \mathbf{b}_{m-1}^k)$$

é uma função de Borel de $\mathbb{H}^{k,m-1} \times \mathbb{A}^d$ para \mathbb{R} .

Demonstração: Segue da prova da Prop. 7.29 em ((3)). ■

Da afirmação que ξ é limitada segue

$$\left| \int_{\mathbb{S}_k} F_m^{k,m}(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}^k, s_m^k, \tilde{i}_m^k) \nu_m^k(ds_m^k, d\tilde{i}_m^k | \mathbf{b}_{m-1}^k) \right| \leq \sup_{\eta \in D([0,T]; \mathbb{R}^d)} |\xi(\eta)| < \infty \quad (4.20)$$

para todo $\mathbf{o}^{k,m-1} \in \mathbb{H}^{k,m-1}$, $a_{m-1}^k \in \mathbb{A}^d$.

Lema 4.2.3. Seja $F_{m-1}^{k,m} : \mathbb{H}^{k,m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ um função definida como

$$F_{m-1}^{k,m}(\mathbf{o}^{k,m-1}) := \sup_{a_{m-1}^k \in \mathbb{A}^d} \int_{\mathbb{S}_k} F_m^{k,m}(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}^k, s_m^k, \tilde{i}_m^k) \nu_m^k(ds_m^k, d\tilde{i}_m^k | \mathbf{b}_{m-1}^k); \mathbf{o}^{k,m-1} \in \mathbb{H}^{k,m-1}.$$

Então, $F_{m-1}^{k,m}$ é semi-analítica superior¹. e para todo $\epsilon > 0$, existe uma função analiticamente mensurável $C_{k,m-1}^\epsilon : \mathbb{H}^{k,m-1} \rightarrow \mathbb{A}^d$ o qual realiza

$$F_{m-1}^{k,m}(\mathbf{o}^{k,m-1}) \leq \int_{\mathbb{S}_k} F_m^{k,m}(\mathbf{o}^{k,m-1}, C_{k,m-1}^\epsilon(\mathbf{o}^{k,m-1}), s_m^k, \tilde{i}_m^k) \nu_m^k(ds_m^k, d\tilde{i}_m^k | \mathbf{b}_{m-1}^k) + \epsilon \quad (4.21)$$

para todo $\mathbf{o}^{k,m-1} \in \mathbb{H}^{k,m-1}$.

Demonstração: O fato de que $F_{m-1}^{k,m}$ é semi-analítica superior segue da Prop 7.47 em (3) e do Lema 4.2.2 o qual diz que a aplicação dada por

$$f(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}^k) = \int_{\mathbb{S}_k} F_m^{k,m}(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}^k, s_m^k, \tilde{i}_m^k) \nu_m^k(ds_m^k, d\tilde{i}_m^k | \mathbf{b}_{m-1}^k)$$

pe uma função de Borel (portanto semi-analítica superior). Além disso, pela construção $\mathbb{H}^{k,m-1} \times \mathbb{A}^d$ é um conjunto de Borel. Seja

$$F_{m-1}^{k,m}(\mathbf{o}^{k,m-1}) = \sup_{a_{m-1}^k \in \mathbb{A}^d} f(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}^k)$$

¹Para o leitor não familiarizado com esse tipo de função recomendamos ver (3) capítulo 7.6

Do limite (4.20) e Prop 7.50 em (3) segue a existência de uma função analiticamente mensurável $C_{k,m-1}^\epsilon : \mathbb{H}^{k,m-1} \rightarrow \mathbb{A}^d$ tal que

$$f(\mathbf{o}^{k,m-1}, C_{k,m-1}^\epsilon(\mathbf{o}^{k,m-1})) \geq F_{m-1}^{k,m}(\mathbf{o}^{k,m-1}) - \epsilon$$

para todo $\mathbf{o}^{k,m-1} \in \{F_{m-1}^{k,m} < +\infty\} = \mathbb{H}^{k,m-1}$. \blacksquare

Lema 4.2.4. Para todo $\epsilon > 0$ e $u^k \in U_0^{k,m}$, existe um controle $\phi_{m-1}^{k,\epsilon} \in U_{m-1}^{k,m}$ tal que

$$V^k(T_{m-1}^k, u^k) \leq \mathbb{E}[V^k(T_m^k, u^k \otimes_{m-1} \phi_{m-1}^{k,\epsilon}) | \mathcal{G}_{m-1}^k] + \epsilon \text{ q.c.} \quad (4.22)$$

Demonstração: Seja $(g_{n-1}^k)_{n=1}^m$ uma lista de funções universalmente mensuráveis associados ao controle $(u_{n-1}^k)_{n=1}^m$. Para $\epsilon > 0$, seja $C_{k,m-1}^\epsilon : \mathbb{H}^{k,m-1} \rightarrow \mathbb{A}^d$ uma função analiticamente mensurável que realiza (4.21). Afirmamos que

$$\begin{aligned} F_{m-1}^{k,m}(\Xi_{m-1}^{k,g^k}(\mathcal{A}_{m-1}^k)) &= \text{ess sup}_{\phi^k \in U_{m-1}^{k,m}} \mathbb{E}[\xi(X^{k,u^k \otimes_{m-1} \phi^k}) | \mathcal{G}_{m-1}^k] \text{ q.c.} \\ &= V^k(T_{m-1}^k, u^k) \text{ q.c.} \end{aligned} \quad (4.23)$$

e

$$\int_{\mathbb{S}_k} F_m^{k,m}(\Xi_m^{k,g^k, C_{k,m-1}^\epsilon}(\mathcal{A}_{m-1}^k, s_m^k, \tilde{i}_m^k)) \nu_m^k(ds_m^k, d\tilde{i}_m^k | \mathcal{A}_{m-1}^k) = \mathbb{E}[\xi(X^{k,u^k \otimes_{m-1} \phi_{m-1}^{k,\epsilon}}) | \mathcal{G}_{m-1}^k] \text{ q.c.} \quad (4.24)$$

no qual $\phi_{m-1}^{k,\epsilon} := C_{k,m-1}^\epsilon(\Xi_{m-1}^{k,g^k}(\mathcal{A}_{m-1}^k))$ é uma composição de uma função analiticamente mensurável e um função universalmente mensurável. Neste caso, sabe-se que $C_{k,m-1}^\epsilon \circ \Xi_{m-1}^{k,g^k}$ é universalmente mensurável (veja e.g Prop 7.44 em (3)). Isto mostra que $\phi_{m-1}^{k,\epsilon}$ é um controle.

Neste ponto, é conveniente introduzirmos uma aplicação $\Xi_j^{k,g^k, z^k}(s_1^k, \tilde{i}_1^k, \dots, s_j^k, \tilde{i}_j^k)$ pelo

$$\left((g_0^k, s_1^k, \tilde{i}_1^k), \dots, (g_{j-2}^k(s_1^k, \tilde{i}_1^k, \dots, s_{j-2}^k, \tilde{i}_{j-2}^k), s_{j-1}^k, \tilde{i}_{j-1}^k), (z_{j-1}^k(s_1^k, \tilde{i}_1^k, \dots, s_{j-1}^k, \tilde{i}_{j-1}^k), s_j^k, \tilde{i}_j^k) \right) \quad (4.25)$$

no qual $j = m, \dots, 1$. A afirmação (4.24) é uma aplicação direta de (4.17) o que também segue

$$V^k(T_{m-1}^k, u^k) = \operatorname{ess\,sup}_{z^k \in U_{m-1}^{k,m}} \int_{\mathbb{S}_k} F_m^{k,m}(\Xi_m^{k,g^k, z^k}(\mathcal{A}_{m-1}^k, s_m^k, \tilde{l}_m^k)) \nu_m^k(ds_m^k, \tilde{d}i_m^k | \mathcal{A}_{m-1}^k) \, q.c. \quad (4.26)$$

Claramente,

$$F_{m-1}^{k,m}(\Xi_{m-1}^{k,g^k}(\mathcal{A}_{m-1}^k)) \geq \int_{\mathbb{S}_k} F_m^{k,m}(\Xi_m^{k,g^k, z^k}(\mathcal{A}_{m-1}^k, s_m^k, \tilde{l}_m^k)) \nu_m^k(ds_m^k, \tilde{d}i_m^k | \mathcal{A}_{m-1}^k) \quad (4.27)$$

para todo $z^k : \mathbb{S}_k^{m-1} \rightarrow \mathbb{A}^d$ função universalmente mensurável. Consideramos os elementos a_{m-1}^k como uma constante como um controle da forma $z^k(\mathbf{b}_{m-1}^k) = a_{m-1}^k; \mathbf{b}_{m-1}^k \in \mathbb{S}_k^{m-1}$, também temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{z^k \in U_{m-1}^{k,m}} \int_{\mathbb{S}_k} F_m^{k,m}(\Xi_m^{k,g^k, z^k}(\mathcal{A}_{m-1}^k, s_m^k, \tilde{l}_m^k)) \nu_m^k(ds_m^k, \tilde{d}i_m^k | \mathcal{A}_{m-1}^k) &\geq \int_{\mathbb{S}_k} F_m^{k,m}(\Xi_{m-1}^{k,g^k}(\mathcal{A}_{m-1}^k), a_{m-1}^k, s_m^k, \tilde{l}_m^k) \\ &\times \nu_m^k(ds_m^k, \tilde{d}i_m^k | \mathcal{A}_{m-1}^k) \, q.c. \end{aligned} \quad (4.28)$$

para todo $a_{m-1}^k \in \mathbb{A}^d$. Resumindo de (4.26), (4.27) e (4.28), concluímos que (4.23) segue. Pela composição $F_{m-1}^{k,m}$ com $\Xi_{m-1}^{k,g^k}(\mathcal{A}_{m-1}^k)$ em (4.21) e usando (4.23) e (4.24), concluímos que (4.22) segue verdadeiramente. ■

Agora somos capazes de iterar o argumento da seguinte maneira. A partir de (4.20) e um argumento backward, somos capazes de definir uma sequência de funções $F_\ell^{k,m} : \mathbb{H}^{k,\ell} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F_\ell^{k,m}(\mathbf{o}^{k,\ell}) := \sup_{a_\ell^k \in \mathbb{A}^d} \int_{\mathbb{S}_k} F_{\ell+1}^{k,m}(\mathbf{o}^{k,\ell}, a_\ell^k, s_{\ell+1}^k, \tilde{l}_{\ell+1}^k) \nu_{\ell+1}^k(ds_{\ell+1}^k, \tilde{d}i_{\ell+1}^k | \mathbf{b}_\ell^k)$$

para $\mathbf{o}^{k,\ell} \in \mathbb{H}^{k,\ell}$ e $\ell = m-1, \dots, 1$. A função inicial é apenas um número

$$F_0^{k,m} := \sup_{a_0^k \in \mathbb{A}^d} \int_{\mathbb{S}_k} F_1^{k,m}(a_0^k, s_1^k, \tilde{l}_1^k) \mathbb{P}_1^k(ds_{\ell+1}^k, \tilde{d}i_1^k)$$

Lema 4.2.5. Para cada $j = m-1, \dots, 1$, a aplicação

$$(\mathbf{o}^{k,j}, a_j^k) \mapsto \int_{\mathbb{S}_k} F_{j+1}^{k,m}(\mathbf{o}^{k,j}, a_j^k, s_{j+1}^k, \tilde{l}_{j+1}^k) \nu_{j+1}^k(ds_{j+1}^k, \tilde{d}i_{j+1}^k | \mathbf{b}_j^k)$$

é semi-analítica superior de $\mathbb{H}^{k,j} \times \mathbb{A}^d$ to \mathbb{R} .

Demonstração: Usando os mesmos argumentos da demonstração do Lema 4.2.2 aplicando aqui. Omitiremos os detalhes. ■

Proposição 4.2.1. *A função $F_j^{k,m} : \mathbb{H}^{k,j} \rightarrow \mathbb{R}$ é semi-analítica superior para cada $j = m - 1, \dots, 1$. Além disso, para todo $\epsilon > 0$, existe uma função analiticamente mensurável $C_{k,j}^\epsilon : \mathbb{H}^{k,j} \rightarrow \mathbb{A}^d$ tal que*

$$F_j^{k,m}(\mathbf{o}^{k,j}) \leq \int_{\mathbb{S}_k} F_{j+1}^{k,m}(\mathbf{o}^{k,j}, C_{k,j}^\epsilon(\mathbf{o}^{k,j}), s_{j+1}^k, \tilde{i}_{j+1}^k) \nu_{j+1}^k(ds_{j+1}^k, \tilde{d}i_{j+1}^k | \mathbf{b}_j^k) + \epsilon \quad (4.29)$$

para todo $\mathbf{o}^{k,j} \in \mathbb{H}^{k,j}$ no qual $j = m - 1, \dots, 1$.

Demonstração: De (4.20), a seguinte estimativa é verdadeira

$$\sup_{\mathbf{o}^{k,j} \in \mathbb{H}^{k,j}} |F_j^{k,m}(\mathbf{o}^{k,j})| \leq \sup_{\eta \in D([0,T]; \mathbb{R}^q)} |\xi(\eta)| < +\infty \quad (4.30)$$

para todo $j = m - 1, \dots, 1$. Agora, apenas repetimos os argumentos da prova do Lema 4.2.3. Fixamos $j = m - 1, \dots, 1$. O fato que $F_j^{k,m}$ é semi-analítica superior a partir do Prop 7.47 em (3) e Lema 4.2.5 o qual diz a aplicação dada por

$$f(\mathbf{o}^{k,j}, a_j^k) = \int_{\mathbb{S}_k} F_{j+1}^{k,m}(\mathbf{o}^{k,j}, a_j^k, s_{j+1}^k, \tilde{i}_{j+1}^k) \nu_{j+1}^k(ds_{j+1}^k, \tilde{d}i_{j+1}^k | \mathbf{b}_j^k)$$

é semi-analítica superior. Além do mais, por construção $\mathbb{H}^{k,j} \times \mathbb{A}^d$ é um conjunto de Borel. Seja

$$F_j^{k,m}(\mathbf{o}^{k,j}) = \sup_{a_j^k \in \mathbb{A}^d} f(\mathbf{o}^{k,j}, a_j^k)$$

O limite (4.30) e Prop 7.50 em (3) segue a existência de uma função analiticamente mensurável $C_{k,j}^\epsilon : \mathbb{H}^{k,j} \rightarrow \mathbb{A}^d$ tal que

$$f(\mathbf{o}^{k,j}, C_{k,j}^\epsilon(\mathbf{o}^{k,j})) \geq F_j^{k,m}(\mathbf{o}^{k,j}) - \epsilon$$

para todo $\mathbf{o}^{k,j} \in \{F_j^{k,m} < +\infty\} = \mathbb{H}^{k,j}$. ■

Proposição 4.2.2. *Por construção,*

$$V^k(T_j^k, u^k) = F_j^{k,m}(\Xi_j^{k,g^k}(\mathcal{A}_j^k)) \text{ q.c.} \quad (4.31)$$

para $j = m-1, \dots, 1$. Além disso, para todo $\epsilon > 0$, existe um controle $u_j^{k,\epsilon}$ definido por

$$u_j^{k,\epsilon} := C_{k,j}^\epsilon(\Xi_j^{k,g^k}(\mathcal{A}_j^k)); j = m-1, \dots, 0 \quad (4.32)$$

o qual realiza

$$V^k(T_j^k, u^k) \leq \mathbb{E}[V^k(T_{j+1}^k, u^k \otimes_j u_j^{k,\epsilon}) | \mathcal{G}_j^k] + \epsilon \text{ q.c.} \quad (4.33)$$

para todo $j = m-1, \dots, 0$.

Demonstração: Temos que para $j = m-1$ é verdadeiro (4.22) e (4.23) no Lema 4.2.4. Procedendo por indução de forma que é suficiente verificar para $j = m-2$. Segue da programação dinâmica

$$V^k(T_{m-2}^k, u^k) = \operatorname{ess\,sup}_{\theta_{m-2}^k \in U_{m-2}^{k,m-2}} \mathbb{E} \left[V^k(T_{m-1}^k, u^{k,m-3} \otimes_{m-2} \theta_{m-2}^k) | \mathcal{G}_{m-2}^k \right] \text{ q.c.}$$

Em particular, identidade (4.23) no Lema 4.2.4 e um calculo similar é feito para provar o Lema 4.2.1 segue

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[V^k(T_{m-1}^k, u^{k,m-3} \otimes_{m-2} \theta_{m-2}^k) | \mathcal{G}_{m-2}^k \right] &= \int_{\mathbb{S}_k} F_{m-1}^{k,m}(\Xi_{m-1}^{k,g^k,z^k}(\mathcal{A}_{m-2}^k, s_{m-1}^k, \tilde{l}_{m-1}^k)) \\ &\times \nu_{m-1}^k(ds_{m-1}^k, \tilde{d}i_{m-1}^k | \mathcal{A}_{m-2}^k) \end{aligned}$$

no qual z^k é uma função universalmente mensurável em \mathbb{S}_k^{m-2} associado para $\theta_{m-2}^k \in U_{m-2}^{k,m-2}$. Então, um argumento similar é feito (4.23) segue

$$\begin{aligned} V^k(T_{m-2}^k, u^k) &= \operatorname{ess\,sup}_{z^k \in U_{m-2}^{k,m-2}} \int_{\mathbb{S}_k} F_{m-1}^{k,m}(\Xi_{m-1}^{k,g^k,z^k}(\mathcal{A}_{m-2}^k, s_{m-1}^k, \tilde{l}_{m-1}^k)) \nu_{m-1}^k(ds_{m-1}^k, \tilde{d}i_{m-1}^k | \mathcal{A}_{m-2}^k) \\ &= F_{m-2}^{k,m}(\Xi_{m-2}^{k,g^k}(\mathcal{A}_{m-2}^k)) \text{ q.c.} \end{aligned}$$

Isto mostra (4.31). Pela composição $F_{m-2}^{k,m}$ com $\Xi_{m-2}^{k,g^k}(\mathcal{A}_{m-2}^k)$ na desigualdade (4.29) em Proposição 4.2.1 chegamos em (4.32) e (4.33) portanto é válido para $j = m-2$. Pelo procedimento backwards, concluímos (4.32) e (4.33) verdadeiro $j = m-1, m-2, \dots, 1$. Para $j = 0$, o argumento é mais simples. Para $\epsilon > 0$, existe $a_0^{k,\epsilon} \in \mathbb{A}^d$ tal que

$$F_0^{k,m} - \epsilon \leq \int_{\mathbb{S}_k} F_1^{k,m}(a_0^{k,\epsilon}, s_1^k, \tilde{l}_1^k) \mathbb{P}_1^k(ds_1^k, \tilde{d}i_1^k)$$

Definimos $u_0^{k,\epsilon} := a_0^{k,\epsilon}$. Neste caso, $\mathbb{E}[V^k(T_1^k, u_0^{k,\epsilon})] = \int_{\mathbb{S}_k} F_1^{k,m}(a_0^{k,\epsilon}, s_1^k, \tilde{i}_1^k) \mathbb{P}_1^k(ds_1^k, d\tilde{i}_1^k)$ e $F_0^{k,m} = V^k(T_0^k, u^k)$. O que concluí a prova. ■

Agora estamos aptos a apresentar uma construção factível de um controle ϵ -ótimo a nível discreto.

Proposição 4.2.3. *Para todo $\epsilon > 0$ e $k \geq 1$, existe um controle $\phi^{*,k,\epsilon} \in U_0^{k,e(k,T)}$ tal que*

$$\sup_{u^k \in U_0^{k,e(k,T)}} \mathbb{E}[\xi(X^{k,u^k})] \leq \mathbb{E}[\xi(X^{k,\phi^{*,k,\epsilon}})] + \epsilon. \quad (4.34)$$

Demonstração: Fixe $\epsilon > 0$ e seja $\eta_k(\epsilon) = \frac{\epsilon}{e(k,T)}$. O candidato para um controle ϵ -ótimo é

$$\phi^{*,k,\epsilon} = (u_0^{k,\eta_k(\epsilon)}, u_1^{k,\eta_k(\epsilon)}, \dots, u_{e(k,T)-1}^{k,\eta_k(\epsilon)}).$$

no qual $u_i^{k,\eta_k(\epsilon)}$; $i = e(k, T_1, \dots, 0)$ é construído via (4.32). Vamos verificar que de fato $\phi^{*,k,\epsilon}$ é um controle ϵ -ótimo. A partir (4.33), sabemos que

$$\sup_{u^k \in U_0^{k,e(k,T)}} \mathbb{E}[\xi(X^{k,u^k})] \leq \mathbb{E}[V^k(T_1^k, u_0^{k,\eta_k(\epsilon)})] + \eta_k(\epsilon) \quad (4.35)$$

e

$$V^k(T_1^k, u_0^{k,\eta_k(\epsilon)}) \leq \mathbb{E}[V^k(T_2^k, u_0^{k,\eta_k(\epsilon)} \otimes_1 u_1^{k,\eta_k(\epsilon)}) | \mathcal{G}_1^k] + \eta_k(\epsilon) \text{ q.c.} \quad (4.36)$$

Das desigualdades (4.35) e (4.36) segue

$$\sup_{u^k \in U_0^{k,e(k,T)}} \mathbb{E}[\xi(X^{k,u^k})] \leq \mathbb{E}[V^k(T_2^k, u_0^{k,\eta_k(\epsilon)} \otimes_1 u_1^{k,\eta_k(\epsilon)})] + 2\eta_k(\epsilon) \quad (4.37)$$

no qual (4.33)

$$\begin{aligned} V^k(T_j^k, u_0^{k,\eta_k(\epsilon)} \otimes_1 u_1^{k,\eta_k(\epsilon)} \otimes_2 \dots \otimes_{j-1} u_{j-1}^{k,\eta_k(\epsilon)}) &\leq \mathbb{E}[V^k(T_{j+1}^k, u_0^{k,\eta_k(\epsilon)} \otimes_1 u_1^{k,\eta_k(\epsilon)} \otimes \dots \otimes_j u_j^{k,\eta_k(\epsilon)}) | \mathcal{G}_j^k] \\ &\quad + \eta_k(\epsilon) \end{aligned} \quad (4.38)$$

q.c. para $j = 1, \dots, e(k, T) - 1$. Ao iterar o argumento a partir de (4.37) e usando (4.38), concluímos (4.34). ■

A proposição 4.2.3 fornece um método viável para a obtenção de controles ϵ -ótimo. Na verdade, é possível recuperar as funções controle $C_{k,j}^\epsilon$ na Proposição 4.2.1 por meio do argumento de dimensão finita baseado nas técnicas padrões de otimização. Em problemas de controle quadráticos, pode-se efetivamente obter tais funções por meio de técnicas de rotina. Em problemas mais sofisticados, o método baseia-se numa análise numérica baseada na probabilidade de transição ν_n^k .

4.3 Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman em uma estrutura discreta

Vamos agora ilustrar que o princípio da programação dinâmica dado pela Proposição 3.4.1, pode ser escrito em termos de um procedimento de otimização baseado no operador (4.15) que desempenha o papel de um Hamiltoniano. Na equação da programação dinâmica abaixo, existem várias concatenações de diferentes controles em cada passo do tempo. Então, se (Z^k) é um processo controlado associado a V , definimos

$$Z^{k,(n)}(\cdot, u^{k,n-1} \otimes_n \theta_n^k) := Z^k(\cdot, (u_0^k, \dots, u_{n-1}^k, \theta_n^k, \dots, \theta_n^k))$$

para $0 \leq n \leq e(k, T) - 1$. Por construção,

$$Z^{k,(n)}(t, u^{k,n-1} \otimes_n \theta_n^k) = Z^{k,(n)}(T_{n+1}^k, u^{k,n-1} \otimes_n \theta_n^k)$$

para todo $t \geq T_{n+1}^k$, i.e., é parado depois do tempo de parada T_{n+1}^k .

Para Z^k , escrevemos $(Z^{k,(n)})$ para $0 \leq n \leq e(k, T) - 1$. Para cada $n = 0, \dots, e(k, T) - 1$, $Z^{k,(n)}(\cdot, u^{k,n-1} \otimes_n \theta_n^k)$ é um elemento de $O_T(\mathbb{F}^k)$ e portanto podemos aplicar a decomposição (4.11) para obter

$$\begin{aligned} Z^{k,(n)}(t, u^{k,n-1} \otimes_n \theta_n^k) &= Z^{k,(n)}(0, u^{k,n-1} \otimes_n \theta_n^k) + \sum_{j=1}^d \int_0^t \mathbb{D}^{\mathcal{X}_n, k, j} Z^{k,(n)}(s, u^{k,n-1} \otimes_n \theta_n^k) dA^{k,j}(s) \\ &\quad + \sum_{j=1}^d \int_0^t \mathbb{U}^{\mathcal{X}_n, k, j} Z^{k,(n)}(s, u^{k,n-1} \otimes_n \theta_n^k) ds \end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq T$. Seguindo os argumentos para descrever (4.10), temos

$$\mathbb{D}^{\mathcal{X}_n, k, j} Z^{k, (n)}(s, u^{k, n-1} \otimes_n \theta_n^k)(s) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{D}^{\mathcal{X}_n, k, j} Z^{k, (n)}(s, u^{k, n-1} \otimes_n \theta_n^k) \mathbf{1}_{\{T_\ell^k \leq s < T_{\ell+1}^k\}}$$

no qual

$$\mathcal{D}^{\mathcal{X}_n, k, j} Z^{k, (n)}(s, u^{k, n-1} \otimes_n \theta_n^k) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Delta Z^{k, (n)}(T_r^{k, j}, u^{k, n-1} \otimes_n \theta_n^k)}{\Delta A^{k, j}(T_r^{k, j})} \mathbf{1}_{\{T_r^{k, j} = s\}}$$

e

$$\mathbb{U}^{\mathcal{X}_n, k, j} Z^{k, (n)}(s, u^{k, n-1} \otimes_n \theta_n^k) = U^{\mathcal{X}_n, k, j} Z^{k, (n)}(s, u^{k, n-1} \otimes_n \theta_n^k) \frac{d\langle A^{k, j} \rangle}{ds}$$

no qual

$$\sum_{j=1}^d U^{\mathcal{X}_n, k, j} Z^{k, (n)}(T_{n+1}^k, u^{k, n-1} \otimes_n \theta_n^k) = \mathbb{E} \left[\frac{\Delta Z^k(T_{n+1}^k, u^{k, n-1} \otimes_n \theta_n^k)}{\epsilon_k^2} \Big| \mathcal{G}_{n+1}^k \right] q.c. \quad (4.39)$$

Proposição 4.3.1. *Para um processo controlado $(X^k)_{k \geq 1}$, o processo valor associado $u^k \mapsto V^k(\cdot, u^k)$ é uma única aplicação de $U_0^{k, e(k, T)}$ para $O_T(\mathbb{F}^k)$ o qual satisfaz*

$$\operatorname{ess\,sup}_{\theta_n^k \in U_n^{k, n+1}} \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^d U^{\mathcal{X}_n, k, j} V^k(T_{n+1}^k, u^{k, n-1} \otimes_n \theta_n^k) \Big| \mathcal{G}_n^k \right] = 0 \text{ q.c.}; \quad 0 \leq n \leq e(k, T) - 1 \quad (4.40)$$

para qualquer $u^k \in U_0^{k, e(k, T)}$ com condição final dada por $V^k(T_{e(k, T)}^k, u^k) = \xi_{X^k}(u^k)$ q.c.

Demonstração: É uma aplicação imediata da Proposição 3.4.1. Equação (3.21) é equivalente para (4.40) devido a (4.39).

Os resultados presentes na Seção 4.2 combinado com a Proposição 4.3.1 nos permite formular os seguintes resultados que resumem os aspectos trajetória a trajetória da nossa metodologia baseada no operador (4.15).

Corolário 4.3.1. Para um funcional dado $\gamma_{e(k, T)}^k : \mathbb{H}^{k, e(k, T)} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (4.4), o funcional $(F_n^k)_{n=0}^{e(k, T)}$ associado com V^k é a única solução

$$\begin{aligned} \sup_{a_n^k \in \mathbb{A}} \mathcal{U} F_n^k(\mathbf{o}_n^k, a_n^k) &= 0; \quad n = e(k, T) - 1, \dots, 0, \\ F_{e(k, T)}^k(\mathbf{o}_{e(k, T)}^k) &= \xi(\gamma_{e(k, T)}^k(\mathbf{o}^{k, e(k, T)})); \quad \mathbf{o}^{k, e(k, T)} \in \mathbb{H}^{k, e(k, T)}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

no qual

$$\mathcal{U} F_n^k(\mathbf{o}_n^k, a_n^k) = \int_{\mathbb{S}_k} \frac{F_{n+1}^k(\mathbf{o}_n^k, a_n^k, s_{n+1}^k, \tilde{i}_{n+1}^k) - F_n^k(\mathbf{o}_n^k)}{\epsilon_k^2} \nu_{n+1}^k(ds_{n+1}^k d\tilde{i}_{n+1}^k | \mathbf{b}_n^k);$$

para $\mathbf{o}_n^k \in \mathbb{H}_k^n$, $a_n^k \in \mathbb{A}$. Pela composição com o estado de ruído, Proposição 4.3.1 pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \sup_{a_n^k \in \mathbb{A}} \mathcal{U} F_n^k(\Xi_n^{k, g^k}(\mathcal{A}_n^k), a_n^k) &= 0; \quad n = e(k, T) - 1, \dots, 0, \\ F_{e(k, T)}^k(\Xi_{e(k, T)}^{k, g^k}(\mathcal{A}_{e(k, T)}^k)) &= \xi(\gamma_{e(k, T)}^k(\Xi_{e(k, T)}^{k, g^k}(\mathcal{A}_{e(k, T)}^k))) \quad q.c., \end{aligned}$$

para todo controle $(u_n^k)_{n=0}^{e(k, T)-1}$ associado a sequência de função universalmente mensurável $(g_\ell^k)_{\ell=0}^{e(k, T)-1}$.

O resultado a seguir revela que o operador \mathcal{U} desempenha o papel de um operador do tipo Hamiltoniano.

Corolário 4.3.2. Seja $(F_n^k)_{n=0}^{e(k, T)}$ a solução de (4.41) e assumindo a existência de uma sequência de funções analiticamente mensuráveis $C_{k, n} : \mathbb{H}^{k, n} \rightarrow \mathbb{A}$ a qual realiza

$$\mathcal{U} F_n^k(\mathbf{o}_n^k, C_{k, n}(\mathbf{o}^{k, n})) = \sup_{a_n^k \in \mathbb{A}} \mathcal{U} F_n^k(\mathbf{o}_n^k, a_n^k) \quad (4.42)$$

para todo $\mathbf{o}^{k, n} \in \mathbb{H}^{k, n}$; $n = e(k, T) - 1, \dots, 0$. Definimos $\phi^{*, k} := (u_0^{k, *}, \dots, u_{e(k, T)-1}^{k, *})$ non qual $u_n^{k, *} := C_{k, n}(\Xi_n^{k, g^k}(\mathcal{A}_n^k))$; $n = 0, \dots, e(k, T) - 1$ para uma sequência de funções universalmente mensuráveis $(g_n^k)_{n=0}^{e(k, T)-1}$. Então, $\phi^{*, k}$ é um controle ótimo para $\sup_{\phi \in U_0^{e(k, T)}} \mathbb{E}[\xi_{X^k}(\phi)]$.

Demonstração: A demonstração deste resultado é idêntica a demonstração da Proposição 4.2.3.

Aproximações

Neste capítulo, vamos nos dedicar a mostrar todas as convergências necessárias para a nossa tese, é aqui em que se encontram os principais resultados da tese. As convergências mostradas aqui são convergência do controle discretizado a qual mostramos a convergência forte em $L^2(\mathbb{P} \times Leb)$ e que pode ser vista no Corolário 5.1.1. Mostramos também a convergência do Euler-Maruyama (5.2.1) usando tempos aleatórios. E o principal resultado é o Teorema 5.3.2 o qual mostra a convergência do processo valor.

5.1 Aproximação do Controle

Nesta seção, mostramos como obter controles na filtração Browniana como limites dos elementos de $U_0^{k,e(k,T)}$. O ponto chave é a identificação de qualquer controle $u \in U_0^T$ com o martingale associado.

$$W(t) = \sum_{j=1}^d \int_0^t u_j(s) dB^j(s); 0 \leq t \leq T, \quad (5.1)$$

no qual o controle $u = (u_1, \dots, u_d)$ é identificado como o operador derivada estocástica $\mathcal{D}W = (\mathcal{D}_1 W, \dots, \mathcal{D}_d W)$ introduzido em Leão e Ohashi (32) e Leão, Ohashi e Simas (45). Nesta seção, fazemos uso deste operador calculado no subconjunto dos \mathbb{F} -martingales tal que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathcal{D}W(t)\|_{\mathbb{R}^d} \leq \bar{a} \text{ q.c.} \quad (5.2)$$

no qual \bar{a} é a constante que descreve o espaço de ações compactos \mathbb{A}^d . Em (32; 34), os autores mostraram que para cada $W \in \mathcal{X}_{\bar{a}}$, com $\mathcal{X}_{\bar{a}} = \{W; \mathcal{D}W \text{ satisfaz (5.2)}\}$ existe uma sequência de processos \mathbb{F}^k -previsível a qual converge fracamente em $L^2(\mathbb{P} \times \text{Leb})$ para $\mathcal{D}W$. Nesta seção, nós provamos a convergência forte.

Para cada $W \in \mathcal{X}_{\bar{a}}$, denotamos

$$M^{\mathcal{Y},k}(t) := \mathbb{E}[W(T)|\mathcal{F}_t^k]; \quad J^k(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \Delta M^{\mathcal{Y},k}(T_n^k) \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t\}}; \quad 0 \leq t \leq T,$$

no qual $\mathcal{Y} = \{J^k; k \geq 1\}$ é uma família de processos de puro saltos. A decomposição \mathbb{F}^k -semimartingale é

$$J^k = M^{\mathcal{Y},k} + N^{\mathcal{Y},k}$$

no qual vamos escrever

$$J^k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} J^k(T_n^k) \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq t < T_{n+1}^k\}}; \quad t \geq 0,$$

$$J^k(T_n^k) := \sum_{\ell=1}^n \Delta M^{\mathcal{Y},k}(T_{\ell}^k); \quad n \geq 1.$$

Além do mais, $N^{\mathcal{Y},k}$ é a projeção \mathbb{F}^k -dual previsível de J^k o qual tem caminhos contínuos.

Lema 5.1.1. Para todo $W \in \mathcal{X}_{\bar{a}}$, os seguintes limites são válidos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |M^{\mathcal{Y},k}(t) - W(t)|^p = 0 \quad (5.3)$$

para todo $p > 1$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [M^{\mathcal{Y},k}, M^{\mathcal{Y},k}](T) = [W, W](T) \quad (5.4)$$

fortemente em $L^1(\mathbb{P})$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [M^{\mathcal{Y},k}, A^{k,j}](t) = [W, B_j](t) \quad (5.5)$$

fracamente em $L^1(\mathbb{P})$ para todo $t \in [0, T]$ e $1 \leq j \leq d$.

Demonstração: Ao longo desta prova, C é uma constante genérica a qual pode diferir de linha para linha. No início, observamos que $\mathbb{E}|W(T)|^p < \infty$ para todo $p > 1$ e $W \in \mathcal{X}_a$. Do Lema 3.1 em (45), sabemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{F}^k = \mathbb{F}$ fracamente uniformemente em probabilidade para $\lim_{k \rightarrow \infty} M^{\mathcal{Y},k} = W$. Da desigualdade de Burkholder-Davis-Gundy e da desigualdade de Jensen segue

$$\mathbb{E}[M^{\mathcal{Y},k}, M^{\mathcal{Y},k}]^{\frac{p}{2}}(T) \leq C \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |M^{\mathcal{Y},k}(t)|^p \leq C \mathbb{E}|W(T)|^p$$

de modo que

$$\sup_{k \geq 1} \mathbb{E}[M^{\mathcal{Y},k}, M^{\mathcal{Y},k}]^{\frac{p}{2}}(T) \leq C \mathbb{E}|W(T)|^p < \infty, p > 1 \quad (5.6)$$

Lema 2.2 em (32) e (5.6) implica que (5.3) segue. Do lema 10 em (37), obtemos que o $\lim_{k \rightarrow \infty} [M^{\mathcal{Y},k}, M^{\mathcal{Y},k}](\cdot) = [W, W](\cdot)$ uniformemente em probabilidade então tomando $p > 2$ em (5.6), concluímos então que (5.4) segue verdadeira. Afirmamos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [M^{\mathcal{Y},k}, A^{k,j}](\cdot) = [W, B^j](\cdot) \quad (5.7)$$

uniformemente em probabilidade. Do Teorema 6.22 em (25), sabemos que

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |\Delta M^{\mathcal{Y},k}(s)|^2 \leq \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta M^{\mathcal{Y},k}(T_n^k)|^2 \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}} \leq \mathbb{E}|M^{\mathcal{Y},k}(T)|^2 \leq C \mathbb{E}|W(T)|^2 \quad (5.8)$$

de modo que $\sup_{k \geq 1} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |\Delta M^{\mathcal{Y},k}(s)| < \infty$. Portanto, aplicamos Prop. UT2 em (37) para concluir que (5.7) segue. Fixamos $t \in [0, T]$. Pela desigualdade de Kunita-Watanabe e Burkholder-Davis-Gundy segue

$$\mathbb{E}|[M^{\mathcal{Y},k}, A^{k,j}](t)|^2 \leq C(\mathbb{E}|B^j(T)|^2)^{1/2} \times (\mathbb{E}|W(T)|^2)^{1/2} \quad (5.9)$$

de modo que $\sup_{k \geq 1} \mathbb{E}|[M^{\mathcal{Y},k}, A^{k,j}](t)|^2 < \infty$ o que implica que $\{[M^{\mathcal{Y},k}, A^{k,j}](t); k \geq 1\}$ é uniformemente integrável para todo $t \in [0, T]$. A partir de (5.7), concluímos então que (5.5) segue. ■

Lema 5.1.2. Seja $\tilde{\eta}^{k,j}(t+) := \min\{T_n^{k,j}; t < T_n^{k,j}\}$ e $\tilde{\eta}^{k,j}(t) := \max\{T_n^{k,j}; T_n^{k,j} \leq t\}$ para $t \in [0, T]; 1 \leq j \leq d, k \geq 1$. Seja $\tau = \inf\{t > 0; |Y(t)| = 1\}$ para um movimento Browniano padrão a valores reais Y . Então, para qualquer $q \geq 1$, temos que

$$\mathbb{E}|\tilde{\eta}^{k,j}(t+) - \tilde{\eta}^{k,j}(t)|^q = 2^{-2kq} \mathbb{E}\tau^q; \quad 1 \leq j \leq d, 0 \leq t \leq T, k \geq 1.$$

Demonstração: Fixamos $t \in [0, T]$, $1 \leq j \leq d$ e $q \geq 1$. Seja $N^{k,j}(t) = \max\{n; T_n^{k,j} \leq t\}; t \geq 0$. Pela própria definição, $\tilde{\eta}^{k,j}(t+) - \tilde{\eta}^{k,j}(t) = T_{N^{k,j}(t)+1}^{k,j} - T_{N^{k,j}(t)}^{k,j}$. Para qualquer $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[|T_{N^{k,j}(t)+1}^{k,j} - T_{N^{k,j}(t)}^{k,j}|^q \mid N^{k,j}(t) = m \right] &= \mathbb{E} \left[|T_{m+1}^{k,j} - T_m^{k,j}|^q \mid N^{k,j}(t) = m \right] \\
&= \int_0^\infty x^q \mathbb{P} \left[\Delta T_{m+1}^{k,j} \in dx \mid N^{k,j}(t) = m \right] \\
&= \int_0^\infty x^q \mathbb{P} \left[\Delta T_{m+1}^{k,j} \in dx \right] \quad (5.10) \\
&= \mathbb{E} |T_{m+1}^{k,j} - T_m^{k,j}|^q = 2^{-2kq} \mathbb{E} \tau^q,
\end{aligned}$$

no qual em (5.10), usamos o fato de que $\Delta T_{m+1}^{k,j}$ e $\mathbb{1}_{\{N^{k,j}(t)=m\}}$ são independentes. Isto mostra que $\mathbb{E} \left[|T_{N^{k,j}(t)+1}^{k,j} - T_{N^{k,j}(t)}^{k,j}|^q \mid N^{k,j}(t) \right] = 2^{-2kq} \mathbb{E} \tau^q$ o que nos permite concluir a demonstração. \blacksquare

Na sequência, observe que (veja (34)) o operador

$$\mathbb{D}^{\mathcal{Y},k,j} W := \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{D}^{\mathcal{Y},k,j} W(T_\ell^k) \mathbb{1}_{\{T_\ell^k \leq t < T_{\ell+1}^k\}}$$

no qual

$$\mathcal{D}^{\mathcal{Y},k,j} W := \frac{\Delta M^{\mathcal{Y},k}(T_\ell^{k,j})}{\Delta A^{k,j}(T_\ell^{k,j})} \mathbb{1}_{[[T_\ell^{k,j}, T_\ell^{k,j}]]}.$$

Lema 5.1.3. Para qualquer $W \in \mathcal{X}_a$, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{D}^{\mathcal{Y},k,j} W = \mathcal{D}_j W \text{ fracamente em } L^2(\mathbb{P} \times Leb) \quad (5.11)$$

para cada $1 \leq j \leq d$.

Demonstração: Do Lema 5.1.1, temos $\mathcal{E}^{\mathcal{Y},2}(W) < \infty$ e $\langle W, B_j \rangle^{\mathcal{Y}}(t); 0 \leq t \leq T$ existe para cada $1 \leq j \leq d$. Então, a declaração acima é ligeiramente diferente da versão Prop. 4.1 (34) no qual $\mathcal{Y} = \{J^k; k \geq 1\}$ não é necessariamente um GAS¹ para W (no sentido de (34)). Entretanto, uma vez que estamos apenas interessado na convergência de (5.11) o resultado segue sem assumir que $\{J^k; k \geq 1\}$ é um GAS para W . Neste caso, a existência do limite (5.11) é uma consequência imediata do Lema 5.1.1 e Lemas 3.6, 3.7 e Passo 1 na prova do Teorema 6.1 em (34). O fato de que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{D}^{\mathcal{Y},k,j}W = \mathcal{D}_jW$$

segue que (5.5) e representação martingale. ■

Agora podemos definir a aproximação para um determinado controle u . Inicialmente, consideramos a versão previsível de $\mathbb{D}^{\mathcal{Y},k,j}W$ como segue

$$\mathbf{D}^{\mathcal{Y},k,j}W(t) := \mathbb{D}^{\mathcal{Y},k,j}W(t-); 0 \leq t \leq T, \quad (5.12)$$

com a usual convenção que $\mathbb{D}^{\mathcal{Y},k,j}W(0-) = 0$.

Proposição 5.1.1. *Para cada $W \in \mathcal{X}_{\bar{a}}$ associado a um controle $\mathcal{D}W = (\mathcal{D}_1W, \dots, \mathcal{D}_dW)$ satisfazendo (5.2), temos para cada $1 \leq j \leq d$,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{D}^{\mathcal{Y},k,j}W = \mathcal{D}_jW \quad \text{fortemente em } L^2(\mathbb{P} \times \text{Leb}). \quad (5.13)$$

Demonstração: Pela própria definição,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M^{\mathcal{Y},k}, M^{\mathcal{Y},k}](T) &= \mathbb{E} \int_0^T \|\mathbb{D}^{\mathcal{Y},k}W(s)\|_{\mathbb{R}^d}^2 ds \\ &+ \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta M^{\mathcal{Y},k}(T_n^{k,j})|^2 2^{2k} (T_{n+1}^{k,j} - T) \mathbf{1}_{\{T_n^{k,j} \leq T < T_{n+1}^{k,j}\}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Para $\epsilon > 0$,

¹GAS: Sigla para Good Approximation Sequence. Uma família $\mathcal{Y} = \{X^k, k \geq 1\}$ em \mathbf{B}^2 é chamada de GAS para um funcional de Wiener X , se para cada $k \geq 1$, X^k é um càdlàg \mathbb{F}^k -adaptado admitindo a representação $X^k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X^k(T_n^k) \mathbf{1}_{\{T_n^k < t < T_{n+1}^k\}}$ para $t \geq 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} X^k = X$ fracamente em $\mathbb{B}^2(\mathbb{F})$.

$$\begin{aligned}
|M^{\mathcal{Y},k}(t) - M^{\mathcal{Y},k}(t - \epsilon)| &\leq |M^{\mathcal{Y},k}(t) - W(t)| + |W(t) - W(t - \epsilon)| + |W(t - \epsilon) - M^{\mathcal{Y},k}(t - \epsilon)| \\
&\leq 2 \sup_{0 \leq t \leq T} |M^{\mathcal{Y},k}(t) - W(t)| + |W(t) - W(t - \epsilon)|, \tag{5.15}
\end{aligned}$$

de modo que $|M^{\mathcal{Y},k}(t) - M^{\mathcal{Y},k}(t-)| \leq 2 \sup_{0 \leq u \leq T} |M^{\mathcal{Y},k}(u) - W(u)|$ para todo $k \geq 1$ e $t \in [0, T]$.

Observe que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sum_{j=1}^d \sum_{n=0}^{\infty} \Delta M^{\mathcal{Y},k}(T_n^{k,j})|^2 (T_{n+1}^{k,j} - T) 2^{2k} \mathbb{1}_{\{T_n^{k,j} \leq T < T_{n+1}^{k,j}\}} &\leq \sum_{j=1}^p 2 \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq T} |M^{\mathcal{Y},k}(u) - W(u)|^2 \right. \\
&\quad \left. \times (\tilde{\eta}^{k,j}(T+) - \tilde{\eta}^{k,j}(T)) 2^{2k} \right] \\
&\leq \sum_{j=1}^d 2^{2k} \left(\mathbb{E} \sup_{0 \leq u \leq T} |M^{\mathcal{Y},k}(u) - W(u)|^4 \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\mathbb{E} |\tilde{\eta}^{k,j}(T+) - \tilde{\eta}^{k,j}(T)|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq pC 2 \left(\mathbb{E} \sup_{0 \leq u \leq T} |M^{\mathcal{Y},k}(u) - W(u)|^4 \right)^{1/2} \\
&\rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty. \tag{5.16}
\end{aligned}$$

a partir (5.4) no Lema 5.1.1, (5.14) e (5.14), temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T \|\mathbb{D}^{\mathcal{Y},k} W(s)\|_{\mathbb{R}^d}^2 ds = \mathbb{E} \int_0^T \|\mathcal{D}W(s)\|_{\mathbb{R}^d}^2 ds = \mathbb{E}[W, W](T)$$

então, aplicando o Teorema de Radon-Riesz concluímos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{D}^{\mathcal{Y},k} W = \mathcal{D}W$ fortemente em $L^2(\mathbb{P} \times Leb)$. Desde que $\mathbb{D}^{\mathcal{Y},k} W = \mathbf{D}^{\mathcal{Y},k} W$ para $\mathbb{P} \times Leb$ -q.c, então temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{D}^{\mathcal{Y},k} W = \mathcal{D}W$ fortemente em $L^2(\mathbb{P} \times Leb)$. ■

O conjunto $\{\mathbf{D}^{\mathcal{Y},k} W; k \geq 1\}$ é uma sequência de processos \mathbb{F}^k -previsível constantes o qual converge para $\mathcal{D}W$ em $L^2(\mathbb{P} \times Leb)$ para cada $W \in \mathcal{X}_{\bar{a}}$. Entretanto, $\mathbf{D}^{\mathcal{Y},k} W$ pode não pertencer a $U_0^{k,T}$ por que pode não ser limitado por \bar{a} . Resta-nos mostrar que $\mathbf{D}^{\mathcal{Y},k} W$ permite construir uma sequência de processo previsível \mathbb{F}^k constante por partes u^k o qual converge e é limitado pela constante \bar{a} , a qual mostramos no corolário 5.1.1

Corolário 5.1.1. Dado $u^k \in U_0^{k,T}$, tal que $u^k \rightarrow u$ quando $k \rightarrow +\infty$. Então podemos obter uma “versão” de u^k , a qual denotaremos por \bar{u}^k tal que $\sup_{0 \leq t \leq T} \|\bar{u}^k\|_{\mathbb{R}^d} \leq \bar{a}$ q.c. para todo $k \geq 1$ e $\bar{u}^k \rightarrow u$ em $L^2(\mathbb{P} \times Leb)$ quando $k \rightarrow +\infty$.

Demonstração: Na sequência, C é uma constante que pode diferir de linha para linha. Para um dado $u \in U_0^T$, vamos associar

$$W(\cdot) = \sum_{j=1}^d \int_0^\cdot u_j(s) dB_j(s).$$

A partir da Proposição 5.1.1, sabemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{D}^{\mathcal{Y},k,j} W = u_j \quad \text{fortemente em } L^2(\mathbb{P} \times Leb)$$

para cada $1 \leq j \leq d$. Entretanto, isto não garante que $\mathbf{D}^{\mathcal{Y},k,j} W$ é essencialmente limitada pela constante \bar{a} . Para simplificar a notação, denotamos $u^{k,j}(t) = \mathbf{D}^{\mathcal{Y},k,j} W(t); 0 \leq t \leq T; j = 1, \dots, d$. Assumimos (se necessário) que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^{k,j} = u^j$ q.c. com respeito a $\mathbb{P} \times Leb$. Fixamos $j = 1, \dots, d$, e definimos

$$\bar{u}^{k,j} := u^{k,j} \mathbf{1}_{E_j^c(k)} + \bar{a} \mathbf{1}_{E_j(k) \cap H_j(k)} - \bar{a} \mathbf{1}_{E_j(k) \cap H_j^c(k)} \quad (5.17)$$

no qual $E_j(k) := \{(\omega, t); |u^{k,j}(\omega, t)| > \bar{a}\}$ e $H_j(k) := \{u^{k,j} > 0\}$. Desde que, $u^{k,j}$ é \mathbb{F}^k -previsível, então o processo $\mathbf{1}_{E_j^c(k)}$, $\mathbf{1}_{E_j(k) \cap H_j(k)}$ e $\mathbf{1}_{E_j(k) \cap H_j^c(k)}$ são \mathbb{F}^k -previsível então $\bar{u}^{k,j}$ é \mathbb{F}^k -previsível também. Pelo Teorema 5.55 é (25), o fato que $u^{k,j}$ é constante por partes e $\mathcal{G}_n^k = \mathcal{F}_{T_n^k}^k$ q.c, podemos escolher (se necessário) a versão de $\bar{u}^{k,j}$ de tal forma que $\bar{u}^{k,j}(T_{n+1}^k)$ é \mathcal{G}_n^k -mensurável para cada $n \geq 0$. Portanto, $\bar{u}^{k,j} \in U_0^k; k \geq 1$. Agora,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T |\bar{u}^{k,j}(s) - u_j(s)|^2 ds &\leq C \mathbb{E} \int_0^T |(\bar{u}^{k,j}(t) - u_j(t)) \mathbf{1}_{E_j^c(k)}|^2 dt \\ &\quad + C \mathbb{E} \int_0^T |(\bar{u}^{k,j}(t) - u_j(t)) \mathbf{1}_{E_j(k) \cap H_j(k)}|^2 dt \\ &\quad + C \mathbb{E} \int_0^T |(\bar{u}^{k,j}(t) - u_j(t)) \mathbf{1}_{E_j(k) \cap H_j^c(k)}|^2 dt \\ &\leq C \mathbb{E} \int_0^T |u^{k,j}(t) - u_j(t)|^2 dt \\ &\quad + C \int_{E_j(k) \cap H_j(k)} |(\bar{a} - u_j(t))|^2 d(\mathbb{P} \times Leb) \\ &\quad + C \int_{E_j(k) \cap H_j^c(k)} |(-\bar{a} - u_j(t))|^2 d(\mathbb{P} \times Leb); k \geq 1. \end{aligned}$$

Neste ponto observamos que converge $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^{k,j} = u_j$ $\mathbb{P} \times \text{Leb}$ -quase certamente o que implica que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{E_j(k) \cap H_j(k)} = \mathbb{1}_{\{|u_j| \geq \bar{a}, u_j \geq 0\}} \quad \mathbb{P} \times \text{Leb} - a.s \quad (5.18)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{E_j(k) \cap H_j^c(k)} = \mathbb{1}_{\{|u_j| \geq \bar{a}, u_j \leq 0\}} \quad \mathbb{P} \times \text{Leb} - a.s \quad (5.19)$$

Portanto, para (5.18), (5.18) e (5.19), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \int_0^T |\bar{u}^{k,j}(s) - u_j(s)|^2 ds &\leq C \int_{\{|u_j| \geq \bar{a}, u_j \geq 0\}} |(\bar{a} - u_j(t))|^2 d(\mathbb{P} \times \text{Leb}) \\ &+ C \int_{\{|u_j| \geq \bar{a}, u_j \leq 0\}} |(-\bar{a} - u_j(t))|^2 d(\mathbb{P} \times \text{Leb}) \quad (5.20) \end{aligned}$$

no qual (5.20) segue por que $\sup_{0 \leq t \leq T} |u_j(t)| \leq \bar{a}$ q.c. O que concluí a demonstração. \blacksquare

Denotamos

$$\bar{t}_j^k := \sum_{n=1}^{\infty} T_{n-1}^{k,j} \mathbb{1}_{\{T_{n-1}^{k,j} \leq t < T_n^{k,j}\}}, t \geq 0$$

e $u^k = (\mathbf{D}^{\mathcal{Y},k,1}W, \dots, \mathbf{D}^{\mathcal{Y},k,d}W)$.

Proposição 5.1.2. *Se $u^k \rightarrow u$ em $L^2(\mathbb{P} \times \text{Leb})$ como $k \rightarrow +\infty$, então*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \int_0^T \|u^k(\bar{s}_j^k) - u(s)\|_{\mathbb{R}^d}^2 ds = 0 \quad (5.21)$$

Além disso, se $\{u^k; k \geq 1\}$ é uma sequência de controles, é verdade que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \int_0^T \|u^k(\bar{s}_j^k) - u^k(s)\|_{\mathbb{R}^d}^2 ds = 0. \quad (5.22)$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, consideramos $T = 1$ and $d = 2$ tal que $d \lceil 2^{2k} T \rceil = 2^{2k+1}$. Por um momento tome $j = 1$. Denotamos $G_{n-1}^{k,1} := \min\{T_\ell^k; T_\ell^k > T_{n-1}^{k,1}\}; n \geq 1$. Em primeiro lugar, observamos que podemos supor que u^k salta em todos os tempos de parada $(T_n^k)_{k,n \geq 1}$. Observamos que

$$\begin{aligned}
 D_1^k &:= \left\{ (\omega, s) \in [[0, T_{2^{2k}}^{k,1} \wedge 1]]; u^k(\omega, \bar{s}_1^k(\omega)) = u^k(\omega, s) \right\} = \bigcup_{n=1}^{2^{2k}} \left\{ (\omega, s); T_{n-1}^{k,1}(\omega) \leq s < G_{n-1}^{k,1}(\omega) \right\} \\
 &\subset [[0, 1 \wedge T_{2^{2k}}^{k,1}]]
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Lembre-se que usamos a notação $[[0, 1 \wedge T_{2^{2k}}^{k,1}]] = \{(\omega, t); 0 \leq t \leq 1 \wedge T_{2^{2k}}^{k,1}(\omega)\}$. Então,

$$\mathbb{1}_{D_1^k} \leq \mathbb{1}_{[[0, T_{2^{2k}}^{k,1} \wedge 1]]} \quad q.c. \quad - \mathbb{P} \times Leb,$$

para todo $k \geq 1$. Desde que $T_{2^{2k}}^{k,1} \wedge 1 \rightarrow 1$ q.c., então

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{D_1^k} \leq \mathbb{1}_{\Omega \times [0,1]} \quad q.c. \quad - \mathbb{P} \times Leb, \tag{5.24}$$

Afirmamos que qualquer $(\omega, t) \in \Omega \times (0, 1)$ pertence a D_1^k para infinitos $k \geq 1$ com uma possível exceção para um número finito deles. De fato, é sabido que (Koshnevisan (30))

$$\max_{1 \leq j \leq 2} \sup_{0 \leq s \leq 1} |T_{\lceil 2^{2k} s \rceil}^{k,j} - s| \rightarrow 0 \tag{5.25}$$

permanece verdade q.c. no conjunto Ω^* . Fixamos $(\omega, t) \in \Omega^* \times (0, 1)$ no qual $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$. Tomamos uma sequência de números positivos $\{r_n; n \geq 1\}$ tal que $r_n < t$ e $r_n \uparrow t$ quando $n \rightarrow +\infty$. Escrevendo

$$|T_{\lceil 2^{2k} r_n \rceil}^{k,1}(\omega) - t| \leq |T_{\lceil 2^{2k} r_n \rceil}^{k,1}(\omega) - r_n| + |r_n - t|$$

e utilizando a convergência fundamental de (5.25), observamos que para $\epsilon, \eta > 0$ com $\epsilon - \eta > 0$, existe $k_0(\omega, \epsilon, \eta)$ tal que

$$t - (\epsilon - \eta) < T_{\lceil 2^{2k} r_n \rceil}^{k,1}(\omega) < t + (\epsilon - \eta)$$

para todo $k \geq k_0(\omega, \epsilon, \eta)$ e para todo $n \geq N$ suficientemente grande no qual N não depende de k e ω . Agora, observe a seguinte propriedade:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} T_{\lceil 2^{2k} (r_n + \epsilon) \rceil}^{k,1}(\omega) = t + \epsilon \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} G_{\lceil 2^{2k} (r_n + \epsilon) \rceil}^{k,1}(\omega) = t + \epsilon$$

tal que

$$(t + \epsilon) - \eta < G_{[2^{2k}(r_n + \epsilon)]}^{k,1}(\omega) < (t + \epsilon) + \eta$$

para todo $k \geq k_0(\omega, \epsilon, \eta)$ e para todo $n \geq N$. Portanto,

$$T_{[2^{2k}r_n]}^{k,1}(\omega) < t + (\epsilon - \eta) < G_{[2^{2k}(r_n + \epsilon)]}^{k,1}(\omega) \quad (5.26)$$

para todo $k \geq k_0(\omega, \epsilon, \eta)$ e para todo $n \geq N$. Desde que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} T_{[2^{2k}r_n]}^{k,1}(\omega) = t$, podemos assumir (tomando uma subsequência se necessário) que

$$T_{[2^{2k}r_n]}^{k,1}(\omega) < t \quad (5.27)$$

para todo $k \geq k_0(\omega, \epsilon, \eta)$ e para todo $n \geq N$. De (5.26) e (5.27), então temos que

$$T_{[2^{2k}r_n]}^{k,1}(\omega) < t < G_{[2^{2k}(r_n + \epsilon)]}^{k,1}(\omega) \quad (5.28)$$

para todo $k \geq k_0(\omega, \epsilon, \eta)$ e para todo $n \geq N$. Isto mostra que

$$\Omega \times [0, 1] = \liminf_{k \rightarrow +\infty} D_1^k \quad q.c. \mathbb{P} \times Leb \quad (5.29)$$

resumindo (5.24), concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{D_1^k} = \mathbf{1}_{\Omega \times [0,1]} \quad q.c. \mathbb{P} \times Leb. \quad (5.30)$$

Agora, observe que

$$\mathbb{E} \int_0^1 \|u^k(\bar{s}_1^k) - u^k(s)\|_{\mathbb{R}^2}^2 ds = \mathbb{E} \int_0^{1 \wedge T_{2^{2k}}^k} \|u^k(\bar{s}_1^k) - u^k(s)\|_{\mathbb{R}^2}^2 ds + \mathbb{E} \int_{T_{2^{2k}}^k \wedge 1}^1 \|u^k(\bar{s}_1^k) - u^k(s)\|_{\mathbb{R}^2}^2 ds$$

Obviamente, $\mathbb{E} \int_{T_{2^{2k}}^k \wedge 1}^1 \|u^k(\bar{s}_1^k) - u^k(s)\|_{\mathbb{R}^2}^2 ds \leq \bar{a}^2 \mathbb{E} |T_{2^{2k}}^{k,1} \wedge 1 - 1| \rightarrow 0$. Além disso, por (5.23) e usando (5.30) juntamente com o teorema da convergência limitada, concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \int_0^{1 \wedge T_{2^{2k}}^k} \|u^k(\bar{s}_1^k) - u^k(s)\|_{\mathbb{R}^2}^2 ds &\leq \mathbb{E} \int_0^{1 \wedge T_{2^{2k}}^k} \|u^k(\bar{s}_1^k) - u^k(s)\|_{\mathbb{R}^2}^2 \left(\mathbf{1}_{\Omega \times [0,1]} - \mathbf{1}_{D_1^k} \right) ds \\
&+ \mathbb{E} \int_0^{1 \wedge T_{2^{2k}}^k} \|u^k(\bar{s}_1^k) - u^k(s)\|_{\mathbb{R}^2}^2 \mathbf{1}_{D_1^k} ds \\
&= \mathbb{E} \int_0^{1 \wedge T_{2^{2k}}^k} \|u^k(\bar{s}_1^k) - u^k(s)\|_{\mathbb{R}^2}^2 \left(\mathbf{1}_{\Omega \times [0,1]} - \mathbf{1}_{D_1^k} \right) ds \\
&\leq \bar{a}^2 \mathbb{E} \int_0^1 \left(\mathbf{1}_{\Omega \times [0,1]} - \mathbf{1}_{D_1^k} \right) ds \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Isto significa que (5.22) segue. Aplicando a desigualdade triangular, também vemos que (5.21) é verdadeiro. ■

Observação 5.1.3. A convergência (5.21) é importante para mostrarmos a convergência do processo valor. A convergência (5.22) é importante para provar que o controle ϵ -ótimo $u^{*,k}$ construído para cada k é um controle ϵ -ótimo para o problema original, nomeadamente

$$\mathbb{E}[\xi(X^{u^{*,k}})] \geq \sup_{\eta \in U_0^T} \mathbb{E}[\xi(X^\eta)] - \epsilon$$

para todo $k \geq 1$ suficientemente grande.

Teorema 5.1.1. O subconjunto $\bigcup_{k \geq 1} U_0^{k, \epsilon(k, T)}$ é denso em U_0^T .

Demonstração: Para um $u \in U_0^T$ dado, seja $W(\cdot) = \sum_{j=1}^d \int_0^\cdot u_j(s) dB_j(s)$. Da proposição 5.1.1, sabemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{D}^{\mathcal{Y}, k, j} W = u_j$ fortemente em $L^2(\mathbb{P} \times Leb)$ para cada $1 \leq j \leq d$ e pelo corolário 5.1.1 temos que existe uma "versão" limitada por \bar{a} e portanto o resultado segue.

5.2 Aproximação do Euler-Maruyama controlado

Essa seção é dedicada a mostrar que um problema de controle dependentes da trajetória satisfaz as hipóteses necessárias de modo que podemos aplicar a Proposição 4.2.3. Considere o processo de estados é uma EDE q -dimensional controlada.

$$dX^u(t) = \alpha(t, X_t^u, u(t))dt + \sigma(t, X_t^u, u(t))dB(t); 0 \leq t \leq T, \quad (5.31)$$

com uma dada condição inicial $X^u(0) = x \in \mathbb{R}^q$. Recordando a notação

$$\omega_t = \omega(t \wedge \cdot); \omega \in D([0, T]; \mathbb{R}^q)$$

de modo que X é uma EDE que depende da trajetória. Definimos

$$\Lambda_T := \{(t, \omega_t); t \in [0, T]; \omega \in D([0, T]; \mathbb{R}^q)\}$$

e denotamos o conjunto com a métrica

$$d_{1/2}((t, \omega); (t', \omega')) := \sup_{0 \leq u \leq T} \|\omega(u \wedge t) - \omega'(u \wedge t')\|_{\mathbb{R}^q} + |t - t'|^{1/2}.$$

Então, (Λ_T, d) é um espaço métrico completo equipado com σ -álgebra de Borel. Para encurtar a notação definimos $\|\omega\|_\infty := \sup_{0 \leq u \leq T} \|\omega(u)\|_{\mathbb{R}^q}$ para $\omega \in D([0, T]; \mathbb{R}^q)$. Os coeficientes da EDE satisfazem a seguintes condições de regularidade:

Afirmção I: As aplicações $\alpha : \Lambda_T \times \mathbb{A}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$ e $\sigma : \Lambda_T \times \mathbb{A}^d \rightarrow \mathbb{R}^{q \times d}$ são Lipschitz contínua, i.e., existe um parte de constantes $K_{Lip} = (K_{1,Lip}, K_{2,Lip})$ tal que

$$\begin{aligned} \|\alpha(t, \omega, a) - \alpha(t', \omega', b)\|_{\mathbb{R}^q} + \|\sigma(t, \omega, a) - \sigma(t', \omega', b)\|_{\mathbb{R}^{q \times d}} &\leq K_{1,Lip} d_{1/2}((t, \omega); (t', \omega')) \\ &+ K_{2,Lip} \|a - b\|_{\mathbb{R}^d} \end{aligned}$$

para todo $t, t' \in [0, T]$ e $\omega, \omega' \in D([0, T]; \mathbb{R}^q)$ e $a, b \in \mathbb{A}^d$. Podemos facilmente verificar por argumentos da EDE (5.31) admite solução forte tal que

$$\sup_{u \in U_0^T} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^u(t)\|_{\mathbb{R}^q}^{2p} \leq C(1 + \|x_0\|_{\mathbb{R}^q}^{2p}) \exp(CT) \quad (5.32)$$

no qual $X(0) = x_0$, C é uma constante dependendo de $T > 0$, $p \geq 1$, K_{Lip} e do conjunto compacto \mathbb{A}^d .

Vamos mostrar que o processo X^k satisfaz as (5.59) e (5.61) dadas no Teorema 5.3.1 e no Corolário 5.3.1, respectivamente.

Lembramos que pelo exemplo 4.1.1, temos que

$$X^{k,u^k}(t) = \mathbb{X}^{k,u^k}(t \wedge T_{e(k,T)}^k); u^k \in U_0^{k,T}; 0 \leq t \leq T \quad (5.33)$$

no qual \mathbb{X}^k segue (6.5). Além disso, lembramos que podemos calcular $X^{k,\eta}$ no qual η é um controle Browniano. Na sequência, fixamos $u \in U_0^T$, $J \geq 1$ e $\phi \in U_{T_j^k \wedge T}^T$. Com isso em mãos, definimos a seguinte concatenação

$$\eta^k(t) := \begin{cases} u^k(t); & \text{se } 0 < t \leq T_j^k \wedge T \\ \bar{\phi}^k(t); & \text{se } T_j^k \wedge T < t \leq T \end{cases} \quad (5.34)$$

e

$$\bar{\eta}^k(t) := \begin{cases} u(t); & \text{se } 0 < t \leq T_j^k \wedge T \\ \bar{\phi}^k(t); & \text{se } T_j^k \wedge T < t \leq T \end{cases} \quad (5.35)$$

no qual

$$u^k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{n-1}^k(\mathcal{A}_{n-1}^k) \mathbb{1}_{\{T_{n-1}^k < t \leq T_n^k\}} \quad \bar{\phi}^k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(T_{n-1}^k) \mathbb{1}_{\{T_{n-1}^k < t \leq T_n^k\}}$$

Para aliviar a notação, vamos assumir que u^k e ϕ são definidas ao longo de todo o intervalo $(0, +\infty)$. Na sequência, considere

$$S_n^{k,j,+} := \min\{T_p^k; T_p^k > S_n^{k,j}\}$$

para cada $n \geq 1$.

Fixamos $(\eta^k, \bar{\eta}^k)$. É necessário introduzir os seguintes objetos:

$$\begin{aligned} \bar{t}_k &:= \sum_{n=0}^{\infty} T_n^k \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq t < T_{n+1}^k\}}, \\ \bar{t}_j^k &:= \sum_{n=1}^{\infty} T_{n-1}^{k,j} \mathbb{1}_{\{T_{n-1}^{k,j} \leq t < T_n^{k,j}\}}, \\ \tilde{\Sigma}^{ij,k,\eta^k}(t) &:= 0 \mathbb{1}_{\{t=0\}} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \sigma^{ij}(S_{\ell}^{k,j}, \mathbb{X}_{S_{\ell}^{k,j}}^{k,\eta^k}, \eta^k(S_{\ell}^{k,j,+})) \mathbb{1}_{\{T_{\ell-1}^k < t \leq T_{\ell}^k\}}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

e

$$\Sigma^{ij,k,\eta^k}(t) := 0 \mathbb{1}_{\{t=0\}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^{ij}(T_{n-1}^{k,j}, \mathbb{X}_{T_{n-1}^{k,j}}^{k,\eta^k}, \eta^{k,\text{cad}}(T_{n-1}^{k,j})) \mathbb{1}_{\{T_{n-1}^{k,j} < t \leq T_n^{k,j}\}},$$

para $0 \leq t \leq T$, $1 \leq i \leq q$ e $1 \leq j \leq d$.

Definimos

$$\widehat{\mathbb{X}}^{i,k,\eta^k}(t) := x_0^i + \int_0^t \alpha^i(\bar{s}_k, \mathbb{X}_{\bar{s}_k}^{k,\eta^k}, \eta^k(\bar{s}_k)) ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \widetilde{\Sigma}^{ij,k,\eta^k}(s) dA^{k,j}(s) \quad (5.37)$$

para $0 \leq t \leq T, 1 \leq i \leq q$. O diferencial $dA^{k,j}$ in (5.37) é interpretado como uma integral Lebesgue-Stieljtes. Deve-se notar que

$$\begin{aligned} \mathbb{X}^{k,\eta^k}(t) &= \mathbb{X}^{k,\eta^k}(\bar{t}_k) = \widehat{\mathbb{X}}^{k,\eta^k}(\bar{t}_k) \\ \mathbb{X}_t^{k,\eta^k} &= \mathbb{X}_{\bar{t}_k}^{k,\eta^k} \end{aligned} \quad (5.38)$$

para todo $t \in [0, T]$. Para um $1 \leq i \leq q$ dado, a ideia é analisar

$$\mathbb{E} \|\mathbb{X}_T^{i,k,\eta^k} - X_T^{i,\bar{\eta}^k}\|_\infty^2 \leq C \mathbb{E} \|\mathbb{X}_T^{i,k,\eta^k} - \widehat{\mathbb{X}}_T^{i,k,\eta^k}\|_\infty^2 + C \mathbb{E} \|\widehat{\mathbb{X}}_T^{i,k,\eta^k} - X_T^{i,\bar{\eta}^k}\|_\infty^2.$$

Lembre-se que $N^{k,j}(t) = \max\{n; T_n^{k,j} \leq t\}; t \geq 0$.

Lema 5.2.1. Para todo $t \geq 0$ e $1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq d$,

$$\begin{aligned} \int_0^t \Sigma^{ij,k,\eta^k}(s) dB^j(s) &= \int_0^t \widetilde{\Sigma}^{ij,k,\eta^k}(s) dA^{k,j}(s) \\ &+ \sigma^{ij}(T_{N^{k,j}(t)}^{k,j}, \mathbb{X}_{T_{N^{k,j}(t)}^{k,j}}^{k,\eta^k}, \eta^{k,\text{cad}}(T_{N^{k,j}(t)}^{k,j})) (B^j(t) - B^j(T_{N^{k,j}(t)}^{k,j})) \quad q.c. \end{aligned}$$

no qual dB^j é uma integral de Itô e $dA^{k,j}$ é uma integral de Lebesgue Stieltjes.

Lema 5.2.2. Assumindo que as Afirmações A1 e B1 são satisfeitas e que os coeficientes das EDE (5.31) satisfazem a Afirmção I. Seja $\mathbb{X}^{k,\eta^k}, \eta^k \in U_0^{T^k, \text{en}(k,T)}$ definido por 5.33, então

$$\sup_{k \geq 1} \mathbb{E} \|\mathbb{X}_T^{k,\eta^k}\|_\infty^p < \infty \quad \forall p > 1.$$

Demonstração: Fixamos $1 \leq i \leq q$. Em primeiro lugar, é importante notar que

$$\int_0^T \mathbb{E} \|\mathbb{X}_{\bar{s}_k}^{i,k,\eta^k}\|_\infty^p ds < \infty$$

para todo $k \geq 1$ e $p > 1$. Da afirmação I, existe uma constante C tal que

$$|\alpha^i(t, \omega, a)| + |\sigma^{ij}(t, \omega, a)| \leq C(1 + \|\omega_T\|_\infty) \quad (5.39)$$

para todo $(t, \omega, a) \in [0, T] \times \Omega \times \mathbb{A}^d$ e $1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq d$, no qual C depende somente de $T, \alpha(0, 0, 0), \sigma(0, 0, 0)$ e um conjunto compacto \mathbb{A}^d . A identidade (5.38) e Lema 5.2.1 segue

$$\mathbb{X}^{i,k,\eta^k}(t) = x_0 + \int_0^{\bar{t}_k} \alpha^i(\bar{s}_k, \mathbb{X}_{\bar{s}_k}^{k,\eta^k}, \eta^k(\bar{s}_k)) ds + \sum_{j=1}^d \int_0^{\bar{t}_k} \Sigma^{ij,k,\eta^k}(s) dB^j(s)$$

Escrevendo

$$\int_0^{\bar{t}_k} \alpha^i(\bar{s}_k, \mathbb{X}_{\bar{s}_k}^{k,\eta^k}, \eta^k(\bar{s}_k)) ds = \bar{t}_k \frac{1}{\bar{t}_k} \int_0^{\bar{t}_k} \alpha^i(\bar{s}_k, \mathbb{X}_{\bar{s}_k}^{k,\eta^k}, \eta^k(\bar{s}_k)) ds$$

podemos aplicar a desigualdade de Jensen's e (5.39) obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\bar{t}_k} \alpha^i(\bar{s}_k, \mathbb{X}_{\bar{s}_k}^{k,\eta^k}, \eta^k(\bar{s}_k)) ds \right|^p &\leq (\bar{t}_k)^{p-1} \int_0^{\bar{t}_k} |\alpha^i(\bar{s}_k, \mathbb{X}_{\bar{s}_k}^{k,\eta^k}, \eta^k(\bar{s}_k))|^p ds \\ &\leq (\bar{t}_k)^{p-1} \int_0^{\bar{t}_k} C(1 + \|\mathbb{X}_{\bar{s}_k}^{k,\eta^k}\|_\infty^p) ds \end{aligned} \quad (5.40)$$

Isto mostra que

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^{\bar{t}_k} \alpha^i(\bar{s}_k, \mathbb{X}_{\bar{s}_k}^{k,\eta^k}, \eta^k(\bar{s}_k)) ds \right|^p \leq TC \left(1 + \int_0^T \mathbb{E} \|\mathbb{X}_{\bar{s}_k}^{k,\eta^k}\|_\infty^p ds \right) \quad (5.41)$$

da desigualdade Burkholder-Davis-Gundy e Jensen segue

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \Sigma^{ij,k,\eta^k}(s) dB^j(s) \right|^p &\leq \mathbb{E} \left(\int_0^T |\Sigma^{ij,k,\eta^k}(s)|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \\ &\leq C \mathbb{E} \int_0^T |\Sigma^{ij,k,\eta^k}(s)|^p ds \end{aligned} \quad (5.42)$$

De (5.39), também temos que

$$|\Sigma^{ij,k,\eta^k}(s)|^q \leq C(1 + \|\mathbb{X}_{\bar{s}_k,j}^{k,\eta^k}\|_\infty^p) \text{ q.c. para todo } s \in [0, T]$$

Assim sendo,

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^{\bar{t}_{k,j}} \Sigma^{ij,k,\eta^k}(s) dB^j(s) \right|^p \leq C \left(1 + \int_0^T \mathbb{E} \|\mathbb{X}_{\bar{s}_{k,j}}^{k,\eta^k}\|_\infty^p ds \right)$$

Resumindo as estimativas acima, temos

$$\mathbb{E} \|\mathbb{X}_T^{k,\eta^k}\|_\infty^p \leq C \left(1 + \int_0^T \mathbb{E} \|\mathbb{X}_s^{k,\eta^k}\|_\infty^p ds \right).$$

a desigualdade de Grownall's nos permite concluir o resultado. \blacksquare

Lema 5.2.3. Para todo $\eta^k \in U_0^{T_{en}^{k,(k,T)}}$, $\eta \in U_0^T$ e assumindo que as Afirmações A1 e B1 são satisfeitas e que os coeficientes das EDE (5.31) satisfazem a Afirmação I, então temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\widehat{\mathbb{X}}_T^{k,\eta^k} - X_T^\eta\|_\infty^2 &\leq \left\{ \mathbb{E} \vee_{n=1}^\infty |\Delta T_n^k| \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}} + \mathbb{E} \int_0^{T_{e(k,T)}^k \wedge T} \|\eta^k(s) - \eta(s)\|_{\mathbb{R}^d}^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \int_0^{T_{e(k,T)}^k \wedge T} \|\eta^k(\bar{s}_j^k) - \eta(s)\|_{\mathbb{R}^p}^2 ds + 2^{-2k} + \int_0^T \mathbb{E} \|\mathbb{X}_s^{k,\eta^k} - X_s^\eta\|_\infty^2 ds \right\} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Demonstração: Fixamos $1 \leq i \leq q$. Por definição temos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{X}}^{i,k,\eta^k}(t) - X^{i,\bar{\eta}^k}(t) &= \int_0^t \left[\alpha^i(\bar{s}_k, \mathbb{X}_{\bar{s}_k}^{k,\eta^k}, \eta^k(\bar{s}_k)) - \alpha^i(s, X_s^{\bar{\eta}^k}, \bar{\eta}^k(s)) \right] ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^d \int_0^t \widetilde{\Sigma}^{ij,k,\eta^k}(s) dA^{k,j}(s) - \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma^{ij}(s, X_s^{\bar{\eta}^k}, \bar{\eta}^k(s)) dB^j(s) \end{aligned} \quad (5.44)$$

Lema 5.2.1 o que nos permite escrever

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{X}}^{i,k,\eta^k}(t) - X^{\bar{\eta}^k}(t) &= \int_0^t \left[\alpha^i(\bar{s}_k, \mathbb{X}_{\bar{s}_k}^{k,\eta^k}, \eta^k(\bar{s}_k)) - \alpha^i(s, X_s^{\bar{\eta}^k}, \bar{\eta}^k(s)) \right] ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^d \int_0^t \left[\Sigma^{ij,k,\eta^k}(s) - \sigma^{ij}(s, X_s^{\bar{\eta}^k}, \bar{\eta}^k(s)) \right] dB^j(s) \\
&\quad - \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(T_{N^{k,j}(t)}^{k,j}, \mathbb{X}_{T_{N^{k,j}(t)}^{k,j}}^{k,\eta^k}, \eta^k(T_{N^{k,j}(t)}^{k,j})) (B^j(t) - B^j(T_{N^{k,j}(t)}^{k,j})) \\
&= I_1^{k,i}(t) + I_2^{k,i}(t) + I_3^{k,i}(t)
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Análise de $I_1^{k,i}$: Afirmação I segue

$$\begin{aligned}
\left| \left[\alpha^i(\bar{s}_k, \mathbb{X}_{\bar{s}_k}^{k,\eta^k}, \eta^k(\bar{s}_k)) - \alpha(s, X_s^{\bar{\eta}^k}, \bar{\eta}^k(s)) \right] \right| &\leq C |\bar{s}_k - s|^{1/2} \\
&\quad + C \sup_{0 \leq \ell \leq T} \|\mathbb{X}^{k,\eta^k}(\ell \wedge \bar{s}_k) - X^{\bar{\eta}^k}(\ell \wedge s)\|_{\mathbb{R}^q} \\
&\quad + |\eta^k(\bar{s}_k) - \bar{\eta}^k(s)|.
\end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$\begin{aligned}
\left| \left[\alpha^i(\bar{s}_k, \mathbb{X}_{\bar{s}_k}^{k,\eta^k}, \eta^k(\bar{s}_k)) - \alpha^i(s, X_s^{\bar{\eta}^k}, \bar{\eta}^k(s)) \right] \right| &\leq C |\bar{s}_k - s|^{1/2} \\
&\quad + C \sup_{0 \leq \ell \leq T} \|\mathbb{Y}^{k,\eta^k}(\ell \wedge s) - X^{\bar{\eta}^k}(\ell \wedge s)\|_{\mathbb{R}^q} \\
&\quad + \|\eta^k(\bar{s}_k) - \bar{\eta}^k(s)\|_{\mathbb{R}^d}.
\end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq t \leq T} |I_1^{k,i}(t)|^2 &\leq C \vee_{n=1}^{\infty} \Delta T_n^k \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}} + C \int_0^T \|\mathbb{X}_s^{k,\eta^k} - X_s^{\bar{\eta}^k}\|_{\infty}^2 ds \\
&\quad + C \int_0^T \|\eta^k(\bar{s}_k) - \bar{\eta}^k(s)\|_{\mathbb{R}^d}^2 ds
\end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |I_1^{k,i}(t)|^2 &\leq C \left\{ \mathbb{E} \bigvee_{n=1}^{\infty} \Delta T_n^k \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}} + \int_0^T \mathbb{E} \|\mathbb{X}_s^{k,\eta^k} - X_s^{\bar{\eta}^k}\|_{\infty}^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \int_0^{T_{\epsilon(k,T)}^k \wedge T} \|\eta^k(\bar{s}_k) - \eta(s)\|_{\mathbb{R}^p}^2 ds \right\} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Análise de $I_2^{k,i}$: A análise é similar. De fato, usando a desigualdade de Burkholder-Davis-Gundy's, temos que

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |I_2^{k,i}(t)| \leq C \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \int_0^T |\Sigma^{ij,k,\eta^k}(s) - \sigma^{ij}(s, X_s^{\bar{\eta}^k}, \bar{\eta}^k(s))|^2 ds$$

O mesmo argumentos feito para parte do drift aplica-se aqui. Da afirmação I segue

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T \left| \Sigma^{ij,k,\eta^k}(s) - \sigma^{ij}(s, X_s^{\eta}, \eta(s)) \right|^2 ds &\leq C \left\{ \mathbb{E} \bigvee_{n=1}^{\infty} \Delta T_n^k \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}} \right. \\ &\quad + \int_0^T \mathbb{E} \|\mathbb{X}_s^{k,\eta^k} - X_s^{\eta}\|_{\infty}^2 ds \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \int_0^{T_{\epsilon(k,T)}^k \wedge T} \|\eta^k(\bar{s}_j^k) - \eta(s)\|_{\mathbb{R}^p}^2 ds \right\}. \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T \left| \Sigma^{ij,k,\eta^k}(s) - \sigma^{ij}(s, X_s^{\bar{\eta}^k}, \bar{\eta}^k(s)) \right|^2 ds &\leq C \left\{ \mathbb{E} \bigvee_{n=1}^{\infty} \Delta T_n^k \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}} \right. \\ &\quad + \int_0^T \mathbb{E} \|\mathbb{X}_s^{k,\eta^k} - X_s^{\bar{\eta}^k}\|_{\infty}^2 ds \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \int_0^{T_j^k \wedge T} \|\eta^{k,\text{cad}}(\bar{s}_j^k) - \bar{\eta}^k(s)\|_{\mathbb{R}^d}^2 ds \right\} \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |I_2^{k,i}(t)| &\leq C \left\{ \mathbb{E} \bigvee_{n=1}^{\infty} \Delta T_n^k \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}} + \int_0^T \mathbb{E} \|\mathbb{X}_s^{k,\eta^k} - X_s^\eta\|_\infty^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \int_0^{T_{e(k,T)} \wedge T} \|\eta^k(\bar{s}_j^k) - \eta(s)\|_{\mathbb{R}^p}^2 ds \right\} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Análise de $I_3^{k,i}$: A estimativa (5.39), Lema 5.2.2 e o fato que $|B^j(t) - B^j(T_{N^{k,j}(t)}^{k,j})| \leq 2^{-k}$ *q.c.* para todo $t \geq 0$ segue

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |I_3^{k,i}(t)| \leq C 2^{-2k}$$

Resumindo as estimativas acima, concluímos a demonstração. ■

Lema 5.2.4. Assumindo que as Afirmações A1 e B1 são satisfeitas e que os coeficientes das EDE (5.31) satisfazem a Afirmção I. Para todo $\eta^k \in U_0^{T_{en(k,T)}^k}$, temos que

$$\mathbb{E} \|\mathbb{X}_T^{k,\eta^k} - \widehat{\mathbb{X}}_T^{k,\eta^k}\|_\infty^2 \leq C \left(\mathbb{E} \bigvee_{n=1}^{\infty} |\Delta T_n^k| \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}} \right)^{1/p}$$

para qualquer $p > 1$.

Demonstração: A ideia é usar (5.39) e Lema 5.2.2. Sabemos que $\widehat{\mathbb{X}}^{k,\eta^k}(\bar{t}_k) = \mathbb{X}^{k,\eta^k}(t); t \geq 0$ de modo que

$$\begin{aligned} |\widehat{\mathbb{X}}^{i,k,\eta^k}(t) - \mathbb{X}^{i,k,\eta^k}(t)| &= |\widehat{\mathbb{X}}^{i,k,\eta^k}(t) - \widehat{\mathbb{X}}^{i,k,\eta^k}(\bar{t}_k)| \\ &\leq \int_{\bar{t}_k}^t |\alpha^i(\bar{s}_k, \mathbb{X}_{\bar{s}_k}^{k,\eta^k}, \eta(\bar{s}_k))| ds \end{aligned}$$

por que $\sum_{j=1}^d \int_0^t \widetilde{\Sigma}^{ij,k,\eta^k}(s) dA^{k,j}(s) = \int_0^{\bar{t}_k} \widetilde{\Sigma}^{ij,k,\eta^k}(s) dA^{k,j}(s)$ *q.c.* para todo $t \geq 0$. Assim sendo, (5.39) segue

$$\|\mathbb{X}_T^{i,k,\eta^k} - \widehat{\mathbb{X}}_T^{i,k,\eta^k}\|_\infty^2 \leq C(1 + \|\mathbb{X}_T^{k,\eta^k}\|_\infty^2) \times \bigvee_{n=1}^{\infty} |\Delta T_n^k| \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}} \text{ q.c.}$$

Usando o Lema 5.2.2 e a desigualdade de Holder, concluímos então a prova. ■

Resumindo os Lemas, chegamos ao seguinte resultado: Existe uma constante C o qual não depende de $\phi \in U_{j,T}^T$ e $k \geq 1$ tal que

$$\mathbb{E} \|\mathbb{X}_T^{k,\eta^k} - X_T^\eta\|_\infty^2 \leq C \left\{ \left(\mathbb{E} \bigvee_{n=1}^{\infty} |\Delta T_n^k| \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbb{E} \int_0^{T_{e^{(k,T)}}^k \wedge T} \|\eta^k(s) - \eta(s)\|_{\mathbb{R}^p}^2 ds \\
& \left. \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \int_0^{T_{e^{(k,T)}}^k \wedge T} \|\eta^k(\bar{s}_j^k +) - \eta(s)\|_{\mathbb{R}^p}^2 ds + 2^{-2k} + \int_0^T \mathbb{E} \|\mathbb{X}_s^{k,\eta^k} - X_s^\eta\|_\infty^2 ds \right\},
\end{aligned}$$

para cada $p > 1$ e para todo $\phi \in U_{J,T}^T$. Usando a desigualdade de Grownall's, então temos que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \|\mathbb{X}_T^{k,\eta^k} - X_T^\eta\|_\infty^2 \leq (C+1) \left\{ (\mathbb{E} |\bigvee_{n=1}^\infty |\Delta T_n^k| \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}}|^2)^{1/2} \right. \\
& \left. + \mathbb{E} \int_0^{T_{e^{(k,T)}}^k \wedge T} \|\eta^k(s) - \eta(s)\|_{\mathbb{R}^p}^2 ds + \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \int_0^{T_{e^{(k,T)}}^k \wedge T} \|\eta^k(\bar{s}_j^k +) - \eta(s)\|_{\mathbb{R}^p}^2 ds + 2^{-2k} \right\}.
\end{aligned}$$

para todo $p > 1$ e para todo $\phi \in U_{J,T}^T$. Então, se denotarmos

$$\gamma_k = \left\{ \mathbb{E} \bigvee_{n=1}^\infty |\Delta T_n^k| \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}} + (\mathbb{E} |\bigvee_{n=1}^\infty |\Delta T_n^k| \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}}|^p)^{1/p} + 2^{-2k} \right\}$$

e

$$\eta^{k,j}(s) := \eta^k(\bar{s}_j^k); s \geq 0,$$

Obtemos a seguinte estimativa

$$\mathbb{E} \|\mathbb{X}_T^{k,\eta^k} - X_T^\eta\|_\infty^2 \leq (C+1) \left\{ \gamma_k + \|\eta^k - \eta\|_{L^2(\mathbb{P} \times \text{Leb})}^2 + \sum_{j=1}^d \|\eta^{k,j} - \eta\|_{L^2(\mathbb{P} \times \text{Leb})}^2 \right\} \quad (5.48)$$

para todo $k \geq 1$.

Proposição 5.2.1. *Assumindo que as Afirmações A1 e B1 são satisfeitas e que os coeficientes das EDE (5.31) satisfazem a Afirmção I. Seja $(\eta^k, \eta) \in U_0^{k,e^{(k,T)}} \times U_0^T$ um par de controles arbitrários. Então, existe uma constante $C > 0$ a qual depende apenas de α, σ, T e \bar{a} tal que*

$$\mathbb{E} \|X_T^{k,\eta^k} - X_T^\eta\|_\infty^2 \leq C \left\{ \gamma_k + \sum_{j=1}^d \|\eta^{k,j} - \eta\|_{L^2(\mathbb{P} \times \text{Leb})}^2 + \|\eta^k - \eta\|_{L^2(\mathbb{P} \times \text{Leb})}^2 + \|T - T_{e^{(k,T)}}^k\|_{L^2(\mathbb{P})} \right\} \quad (5.49)$$

para todo $k \geq 1$.

Demonstração: Por definição,

$$X^{k,\eta^k}(t) = \mathbb{X}^{k,\eta^k}(t \wedge T_{e(k,T)}^k); 0 \leq t \leq T,$$

no qual $t \wedge T_{e(k,T)}^k \leq t \leq T$, pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} \left\| X_T^{k,\eta^k} - X_T^\eta \right\|_\infty &\leq C \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \mathbb{X}^{k,\eta^k}(t \wedge T_{e(k,T)}^k) - X^\eta(t \wedge T_{e(k,T)}^k) \right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &+ C \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| X^\eta(t \wedge T_{e(k,T)}^k) - X^\eta(t) \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 \\ &\leq C \left\| \mathbb{X}_T^{k,\eta^k} - X_T^\eta \right\|_\infty + C \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| X^\eta(t \wedge T_{e(k,T)}^k) - X^\eta(t) \right\|_{\mathbb{R}^n}^2. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Portanto, a partir da estimativa (5.48), precisamos apenas estimar

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| X^\eta(t \wedge T_{e(k,T)}^k) - X^\eta(t) \right\|_{\mathbb{R}^n}^2. \quad (5.51)$$

Para $1 \leq i \leq n$ dado,

$$\begin{aligned} \left| X^{i,\eta}(t \wedge T_{e(k,T)}^k) - X^{i,\eta}(t) \right|^2 &\leq C \left| \int_{t \wedge T_{e(k,T)}^k}^t \alpha^i(s, X_s^\eta, \eta(s)) ds \right|^2 \\ &+ C \sum_{j=1}^d \left| \int_{t \wedge T_{e(k,T)}^k}^t \sigma^{ij}(s, X_s^\eta, \eta(s)) dB^j(s) \right|^2 \end{aligned} \quad (5.52)$$

Pela desigualdade de Holder, (5.39) e (5.32), obtemos que existe uma constante C tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_{t \wedge T_{e(k,T)}^k}^t \alpha^i(s, X_s^\eta, \eta(s)) ds \right|^2 &\leq \mathbb{E} \left(C(1 + \|X_T^\eta\|_\infty^2) \sup_{0 \leq t \leq T} |t - t \wedge T_{e(k,T)}^k| \right) \\ &\leq C (\mathbb{E} |T - T_{e(k,T)}^k|^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (5.53)$$

for every $p > 1$. Pela aplicação da desigualdade Burkholder-Davis-Gundy's e pelos mesmos argumentos acima, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_{t \wedge T_{e(k,T)}^k}^t \sigma^{ij}(s, X_s^\eta, \eta(s)) dB^j(s) \right|^2 &\leq \mathbb{E} \left(C(1 + \|X_T^\eta\|_\infty^2) \sup_{0 \leq t \leq T} |t - t \wedge T_{e(k,T)}^k| \right) \\ &\leq C(\mathbb{E}|T - T_{e(k,T)}^k|^2)^{1/2} \end{aligned}$$

O que concluí a demonstração.

5.2.1 Exemplo: EDE controlada dirigida por um movimento Browniano fracionário

Nesta seção, vamos fazer um exemplo abstrato de problema de controle, no qual o processo considerado é uma EDE que depende da trajetória dirigida por um movimento Browniano fracionário

$$B_H(t) = \int_0^t \rho_H(t, s) B(s) ds; 0 \leq t \leq T,$$

no qual

$$\rho_H(t, s) := d'_H \left[\left(H - \frac{1}{2} \right) s^{-H-\frac{1}{2}} \int_s^t u^{H-\frac{1}{2}} (u-s)^{H-\frac{3}{2}} du - s^{-H-\frac{1}{2}} t^{H+\frac{1}{2}} (t-s)^{H-\frac{3}{2}} \right],$$

no qual $d'_H = (H - 1/2)d_H$ para uma constante d_H e $0 < H < 1$. Veja Hu (27) para mais detalhes sobre essa representação. O problema que vamos analisar é dado por

$$\sup_{\phi \in U_0^T} \mathbb{E}[\xi(X)] \tag{5.54}$$

com

$$dX^u(t) = \alpha(t, X_t, u(t))dt + \sigma dB_H(t) \tag{5.55}$$

no qual $X(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, σ é uma constante, α é um funcional não-antecipativo satisfazendo a Afirmação (I) e $\frac{1}{2} < H < 1$. A propriedade path-dependence neste caso, é muito mais sofisticada do que no caso da EDE, por que a falta da propriedade de Markov faz com que haja distorções no movimento Browniano por ρ_H e no drift α .

Sob a Afirmação I, por um argumento de ponto fixo, podemos mostrar que existe uma única solução forte de (5.55) (ver (20)) para cada $u \in U_0^T$. Na sequência, denotamos

$$B_H^k(t) := \int_0^t \rho_H(t,s) A^k(s) ds; 0 \leq t \leq T.$$

Pelo Corolário 5.1 em (33), existe uma constante $C_{H,T,p,\lambda}$ independente de k tal que

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |B_H(t) - B_{k,H}(t)| \leq C_{H,T,p,\lambda} \epsilon_k^{2(-\lambda + \frac{1}{2})}; k \geq 1 \quad (5.56)$$

para todo $p > 1$ e $\lambda < \frac{1}{2}$ satisfazendo alguma propriedade de compatibilidade. Para obter um processo constante por partes

$$W_H^k(t) := \sum_{n=0}^{\infty} B_H^k(T_n) \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq t < T_{n+1}^k\}}; 0 \leq t \leq T$$

e Corolário 5.1 em (33) segue

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |W_H^k(t) - B_H(t)| = 0.$$

A estrutura controlada é dada por: Seja $u^k \in U_0^k$ um controle fixado definido por $g_n^k : \mathbb{S}_k^n \rightarrow \mathbb{R}; n \geq 0$. Definimos

$$\begin{aligned} \mathbb{X}^{k,u^k}(T_m^k) &:= \mathbb{X}^{k,u^k}(T_{m-1}^k) + \alpha(T_{m-1}^k, \mathbb{X}_{T_{m-1}^k}^{k,u^k}, g_{m-1}^k(\mathcal{A}_{m-1}^k)) \Delta T_m^k \\ &+ \sigma \Delta W_H^k(T_m^k); m \geq 1, \end{aligned}$$

e então

$$X^{k,u^k}(t) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{X}^{k,u^k}(T_\ell^k) \mathbb{1}_{\{T_\ell^k \leq t \wedge T_{e(k,T)}^k < T_{\ell+1}^k\}}; 0 \leq t \leq T.$$

Proposição 5.2.2. *Assumindo que $\frac{1}{2} < H < 1$ e α satisfazem a Afirmação I (B1). Seja $(\eta^k, \eta) \in U_0^{k,e(k,T)} \times U_0^T$ um par de controles arbitrários. Então, existe uma constante C a qual depende de $T, \alpha, \beta \in (0, 1), p > 1$ tal que*

$$\mathbb{E} \|X_T^{k,\eta^k} - X_T^\eta\|_\infty \leq C \left\{ \epsilon_k^2 [\epsilon_k^{-2} T]^{\frac{1-\beta}{p}} + \mathbb{E} \int_0^T |\eta^k(s) - \eta(s)| ds + \|T_{e(k,T)}^k - T\|_{L^2(\mathbb{P})} + \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |W_H^k(t) - B_H(t)| \right\} \quad (5.57)$$

Em particular, X^k também satisfaz (5.61). Portanto, os Teoremas 5.3.1 e 5.3.1 aplicado ao problema de controle (5.54).

Demonstração: Repetindo exatamente os mesmos passos, apenas substituindo A^k por W_H^k na demonstração da Proposição 5.2 em (33) e a Proposição 5.2.1, podemos encontrar uma constante C (dependendo de α, T e β) tal que

$$\mathbb{E} \|\mathbb{X}_T^{k, \eta^k} - X_T^\eta\|_\infty \leq C \left\{ \epsilon_k^2 \lceil \epsilon_k^{-2} T \rceil^{\frac{1-\beta}{p}} + \mathbb{E} \int_0^T |\eta^k(s) - \eta(s)| ds + \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |W_H^k(t) - B_H(t)| \right\} \quad (5.58)$$

para $\beta \in (0, 1)$ and $p > 1$. A fim de estimar $\|X_T^{k, \eta^k} - X_T^\eta\|_\infty$, procedemos da mesma forma que (5.51) (com o expoente igual a 1). Precisamos apenas checar $\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |B_H(t) - B_H(t \wedge T_{e(k, T)}^k)|$. Para isto, tome $1 - H < \beta < 1/2$, $0 < \epsilon < \beta - 1 + H$. É conhecido que (veja por exemplo a demonstração do Lema 1.17.1 in (40)) existe $G_{T, \epsilon, \beta} \in \cap_{q \geq 1} L^q(\mathbb{P})$ e uma constante C tal que

$$|B_H(t) - B_H(s)| \leq C |t - s|^{(H-\epsilon)} G_{T, \epsilon, \beta} \text{ q.c}$$

para todo $t, s \in [0, T]$. Portanto,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |B_H(t) - B_H(t \wedge T_{e(k, T)}^k)| \leq C |T - T_{e(k, T)}^k|^{(H-\epsilon)} G_{T, \epsilon, \beta} \text{ q.c}$$

o que nos permite concluir a demonstração de (5.57). Desde que o sistema é dirigido por um movimento Browniano unidimensional, então (5.57) imediatamente mostra que X^k tem uma estrutura controlada com respeito a (5.55) satisfazendo (5.61). Neste caso, os Teoremas 5.3.1 e 5.3.1 podem ser aplicados ■

5.3 Convergência do Processo Valor

A meta desta seção é provar o seguinte resultado

Teorema 5.3.1. Seja $V(t, u) = \text{ess sup}_{\theta \in U_t^T} \mathbb{E}[\xi_X(u \otimes \theta) | \mathcal{F}_t]$; $0 \leq t \leq T$ um processo valor associado a uma função custo ξ e um funcional controlado $u \mapsto X^u$ satisfazendo as afirmações A1 e B1, respectivamente. Seja $\eta^k \mapsto V^k(\cdot, \eta^k)$ um processo valor associado um processo \mathbb{F}^k -controlado $\eta^k \mapsto X^{k, \eta^k}$. Suponha que

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^{k, \eta^k}(t) - X^\eta(t)\|_{\mathbb{R}^d}^2 \rightarrow 0 \quad (5.59)$$

quando $k \rightarrow +\infty$ sempre que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \eta^k = \eta$ em $L^2(\mathbb{P} \times Leb)$. Então,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| V^k(T_{\epsilon^{(k,t)}}, u^k) - V(t, u) \right\|_{L^2(\mathbb{P})} = 0, \quad u \in U_0^T, \quad (5.60)$$

para cada $t \in [0, T]$ e para todo $u^k \in U_0^{k, \epsilon^{(k,T)}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k = u$ em $L^2(\mathbb{P} \times Leb)$.

Por causa do teorema 5.1.1, é importante notar que para qualquer controle $u \in U_0^T$, construímos uma sequência $u^k \in U_0^{k, \epsilon^{(k,T)}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k = u$ em $L^2(\mathbb{P} \times Leb)$. Neste caso, conclusão (5.60) é um resultado de aproximação bastante forte para o processo valor. Uma consequência importante do Teorema 5.3.1 é o seguinte resultado.

Corolário 5.3.1. Seja $V(t, u) = \text{ess sup}_{\theta \in U_t^T} \mathbb{E}[\xi_X(u \otimes_t \theta) | \mathcal{F}_t]$; $0 \leq t \leq T$ o processo valor associado a uma função custo ξ e um controle funcional $u \mapsto X^u$ satisfazendo a Afirmção A1 e B1, respectivamente. Seja $\eta^k \mapsto V^k(\cdot, \eta^k)$ o processo valor associado ao processo \mathbb{F}^k -controlado $\eta^k \mapsto X^{k, \eta^k}$. Assumimos que

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^{k, \eta^k}(t) - X^\eta(t)\|_{\mathbb{R}^d}^2 \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow +\infty$ sempre que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \eta^k = \eta$ in $L^2(\mathbb{P} \times Leb)$. Além disso, assumimos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^{k, \eta^k}(t) - X^{\eta^k}(t)\|_{\mathbb{R}^d}^2 = 0 \quad (5.61)$$

para todo $\eta^k \in U_0^{k, \epsilon^{(k,T)}}$; $k \geq 1$. Então, (5.60) segue verdade para qualquer $\epsilon > 0$, o controle ϵ -ótimo $u^{*,k}$ construído via V^k na Proposição 4.2.3 satisfaz

$$\mathbb{E}[\xi_X(u^{*,k})] \geq \sup_{u \in U_0^T} \mathbb{E}[\xi_X(u)] - \epsilon$$

para todo k suficientemente grande.

Demonstração: Vamos fixar $\frac{\epsilon}{3} > 0$. Para cada positivo inteiro $k \geq 1$, seja $u^{*,k, \epsilon}$ o controle construído na Proposição 4.2.3, i.e.,

$$\mathbb{E}[\xi_{X^k}(u^{*,k, \epsilon})] \geq \sup_{\theta \in U_0^{k, \epsilon^{(k,T)}}} \mathbb{E}[\xi_{X^k}(\theta)] - \frac{\epsilon}{3}; \quad k \geq 1. \quad (5.62)$$

Do Teorema 5.3.1, sabemos que

$$\left| \sup_{\theta \in U_0^{k, \epsilon^{(k,T)}}} \mathbb{E}[\xi_{X^k}(\theta)] - \sup_{v \in U_0^T} \mathbb{E}[\xi_X(v)] \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad (5.63)$$

para todo k suficientemente grande. Usando as afirmações (5.61) e A1, também sabemos que

$$\left| \mathbb{E}[\xi_{X^k}(u^{*,k,\epsilon})] - \mathbb{E}[\xi_X(u^{*,k,\epsilon})] \right| \leq C_2 \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^{k,u^{*,k,\epsilon}}(t) - X^{u^{*,k,\epsilon}}(t)\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{\epsilon}{3} \quad (5.64)$$

para todo k suficientemente grande. Resumindo as desigualdades (5.62), (5.63) e (5.64), então temos que

$$\mathbb{E}[\xi_X(u^{*,k,\epsilon})] + \frac{\epsilon}{3} \geq \mathbb{E}[\xi_{X^k}(u^{*,k,\epsilon})] \geq \sup_{\theta \in U_0^{k,e(k,T)}} \mathbb{E}[\xi_{X^k}(\theta)] - \frac{\epsilon}{3} \geq \sup_{v \in U_0^T} \mathbb{E}[\xi_X(v)] - \frac{2}{\epsilon} \quad (5.65)$$

para todo k suficientemente grande. ■

Iremos dividir a demonstração do teorema 5.3.1 em varias partes, como segue.

Lema 5.3.1. Para cada $t \in [0, T]$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \operatorname{ess\,sup}_{\phi \in U_{T_{e(k,t)}^k}} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] = V(t, u)$$

em $L^p(\mathbb{P})$ para todo $p \geq 1$.

Demonstração: Usando a propriedade da mistura finita do conjunto de controle admissível, podemos facilmente mostrar que $\left\{ \mathbb{E}[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k]; \phi \in U_{T_{e(k,t)}^k} \right\}$ tem a propriedade de lattice de modo que

$$\mathbb{E} \left[\operatorname{ess\,sup}_{\phi \in U_{T_{e(k,t)}^k}} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] = \operatorname{ess\,sup}_{\phi \in U_{T_{e(k,t)}^k}} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \quad (5.66)$$

Em outras palavras,

$$\mathbb{E} \left[V(T_{e(k,t)}^k, u) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] = \operatorname{ess\,sup}_{\phi \in U_{T_{e(k,t)}^k}} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right]$$

Vamos escrever

$$\operatorname{ess\,sup}_{\phi \in U_{T_{e(k,t)}^k}^k} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] = \mathbb{E} \left[V(T_{e(k,t)}^k, u) - V(t, u) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] + \mathbb{E} \left[V(t, u) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right]$$

Desde que $T_{e(k,t)}^k \rightarrow t$ q.c. em L^1 , então usaremos a convergência fraca $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{F}^k = \mathbb{F}$ para afirmar que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[g \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] = \mathbb{E} [g \mid \mathcal{F}_t] \quad (5.67)$$

em L^p para todo $p \geq 1$ e $g \in L^\infty$. Além disso, a continuidade do caminho do valor funcional e do teorema de convergência limitada segue $\lim_{k \rightarrow +\infty} V(T_{e(k,t)}^k, u) = V(t, u)$ em L^p para todo $p \geq 1$. Segue da desigualdade de Jensen

$$\mathbb{E} \left| \mathbb{E} \left[V(T_{e(k,t)}^k, u) - V(t, u) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right|^p \leq \left\| V(T_{e(k,t)}^k, u) - V(t, u) \right\|_{L^p}^p \rightarrow 0 \quad (5.68)$$

quando $k \rightarrow +\infty$. De (5.67), (5.68) e a desigualdade triangular, concluímos a prova. \blacksquare

Lema 5.3.2. Se H é um subconjunto finito de U_0^∞ , então

$$\left\| \max_{\phi \in H} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_t \phi) \mid \mathcal{F}_t \right] - \max_{\phi \in H} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2}^2 \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow +\infty$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} & \left\| \max_{\phi \in H} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_t \phi) \mid \mathcal{F}_t \right] - \max_{\phi \in H} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2}^2 \\ & \leq \sum_{\phi \in H} \left\| \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_t \phi) \mid \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2}^2 \\ & \leq \sum_{\phi \in H} \left\| \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_t \phi) \mid \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_t \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2}^2 \\ & + \sum_{\phi \in H} \left\| \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_t \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] - \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (5.69)$$

De (5.67), para cada $\phi \in H$, temos

$$\left\| \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_t \phi) | \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_t \phi) | \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k} \right] \right\|_{L^2} \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Usando a desigualdade de Jensen's, e as propriedades de Lipschitz de ξ e na EDE controlada (Afirmção A1 e B1), temos que

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_t \phi) | \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k} \right] - \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) | \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k} \right] \right\|_{L^2}^2 &\leq C_2 \mathbb{E} \int_0^T \|u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi - u \otimes_t \phi\|_{\mathbb{R}^d}^2 ds \\ &\rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

para cada $\phi \in H$, no qual C é uma constante na qual depende apenas de T . A convergência em (5.70) é devido a $T_{e(k,t)}^k \rightarrow t$ q.c. e o fato de todos os controles são essencialmente limitada. O que conclui a demonstração. ■

Vamos fixar $u \in U_0$, a sequência $u^k \in U_0^{k, e(k, T)}$ tal que $u^k \rightarrow u$ em $L^2(\mathbb{P} \times Leb)$ quando $k \rightarrow +\infty$ (veja Teorema 5.1.1) e um processo \mathbb{F}^k -controlado X^k satisfazendo (5.59). Vamos introduzir alguns objetos. Existe um conjunto enumerável $\mathbb{I} \subset U_0$ tal que

$$V(t, u) = \sup_{\phi \in \mathbb{I}} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_t \phi) | \mathcal{F}_t \right] \quad q.c$$

Da propriedade de lattice, vamos ordenar $\mathbb{I} = \{\phi_n; n \geq 1\}$ de tal forma que

$$\mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_t \phi_n) | \mathcal{F}_t \right] \leq \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_t \phi_{n+1}) | \mathcal{F}_t \right] \quad q.c$$

para cada $n \geq 1$ e

$$V(t, u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_t \phi_n) | \mathcal{F}_t \right] \quad q.c$$

Vamos denotar $\mathbb{I}_n := \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. Pela propriedade de restrição, para qualquer $\theta \in U_0^k$ pode ser associado unicamente a um controle $U_{T_{e(k,t)}^k}$ pela restrição do intervalo estocástico $]]T_{e(k,t)}^k, +\infty[[$. Neste caso, obtemos

$$V^k(T_{e(k,t)}^k, u^k) = \text{ess sup}_{\phi^k \in U_0^k} \mathbb{E} \left[\xi_{X^k}(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi^k) | \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k} \right].$$

Existe um conjunto enumerável $\mathbb{I}_0^{k, \infty} \subset U_0^k$ tal que

$$V^k(T_{e(k,t)}^k, u^k) = \sup_{\phi^k \in \mathbb{I}_0^{k,\infty}} \mathbb{E} \left[\xi_{X^k}(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi^k) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] q.c. \quad (5.70)$$

A partir da propriedade de lattice, vamos ordenar $\mathbb{I}_0^{k,\infty} = \{\eta_n^k; n \geq 1\}$ de tal modo que, para um dado $k \geq 1$,

$$\mathbb{E} \left[\xi_{X^k}(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \eta_n^k) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \leq \mathbb{E} \left[\xi_X(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \eta_{n+1}^k) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] q.c. \quad (5.71)$$

para cada $n \geq 1$ e

$$V^k(T_{e(k,t)}^k, u^k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\xi_{X^k}(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \eta_n^k) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] q.c. \quad (5.72)$$

para cada $k \geq 1$. Vamos denotar $U_0^{k,\ell,\infty} := \{\eta_1^k, \dots, \eta_\ell^k\}$ e $\Delta_\ell^{n,k} := \mathbb{I}_n \cup U_0^{k,\ell,\infty}$.

Lema 5.3.3. Para cada $\ell \geq 1$ e n suficientemente grande, temos que

$$\left\| V(t, u) - \max_{\phi \in \Delta_\ell^{n,k}} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2} \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow +\infty$.

Demonstração: Seja $\mathbb{I}_{0,k}^\infty$ um subconjunto enumerável de U_0^∞ tal que

$$\operatorname{ess\,sup}_{\phi \in U_0} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] = \sup_{\phi \in \mathbb{I}_{0,k}^\infty} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] q.c.$$

Vamos definir $\mathbb{I}_0^\infty := \mathbb{I} \cup \left(\bigcup_{k \geq 1} \mathbb{I}_{0,k}^\infty \right)$. Claramente temos,

$$\operatorname{ess\,sup}_{\phi \in U_0} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] = \sup_{\phi \in \mathbb{I}_0^\infty} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] q.c. \quad (5.73)$$

e

$$V(t, u) = \sup_{\phi \in \mathbb{I}_0^\infty} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_t \phi) \mid \mathcal{F}_t \right] q.c. \quad (5.74)$$

De (5.73) e Lema 5.3.1, temos que

$$\left\| V(t, u) - \sup_{\phi \in \mathbb{I}_0^\infty} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad (5.75)$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Tomamos n suficientemente grande temos que

$$\left\| V(t, u) - \max_{\phi \in \mathbb{I}_n} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_t \phi) \mid \mathcal{F}_t \right] \right\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad (5.76)$$

quando $n \rightarrow +\infty$. Pela Lema 5.3.2, nós também temos que

$$\left\| \max_{\phi \in \mathbb{I}_n} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] - \max_{\phi \in \mathbb{I}_n} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_t \phi) \mid \mathcal{F}_t \right] \right\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad (5.77)$$

para cada $n \geq 1$. Pela desigualdade triangular, (5.76), (5.77), (5.73) e Lema 5.3.1, existe $n_0(\epsilon)$ tal que

$$\left\| \sup_{\phi \in \mathbb{I}_0^\infty} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] - \max_{\phi \in \mathbb{I}_n} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad (5.78)$$

quando $k \rightarrow +\infty$ para todo $n \geq n_0(\epsilon)$. A partir de (5.73), temos que

$$\begin{aligned} \max_{\phi \in \mathbb{I}_n} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] &\leq \max_{\phi \in \Delta_\ell^{n,k}} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \\ &\leq \sup_{\phi \in \mathbb{I}_0^\infty} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \text{ q.c} \end{aligned} \quad (5.79)$$

para todo $n, k, \ell \geq 1$. Agora, recordamos o fato elementar: $a, b \in \mathbb{R}$ no qual $a - b \geq 0, b' \geq b$ e $a - b' \geq 0$ implica que $(a - b)^2 \geq (a - b')^2$. Aplicando o fato que (5.78) e (5.79), temos que

$$\left\| \sup_{\phi \in \mathbb{I}_0^\infty} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] - \max_{\phi \in \Delta_\ell^{n,k}} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2} \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow +\infty$ para todo $n \geq n_0(\epsilon)$ e para todo $\ell \geq 1$. Por fim, a identidade (5.73), Lema 5.3.1 e a desigualdade triangular segue

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \max_{\phi \in \Delta_\ell^{n,k}} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] - V(t, u) \right\|_{L^2} = 0$$

para todo $n \geq n_0(\epsilon)$ and $\ell \geq 1$. Com isso, concluimos a prova. ■

Para cada elemento $\phi_j \in \mathbb{I}_n = \{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subset U_0^T$, escolhemos $\phi_j^k \in U_0^{k,e(k,T)}$ tal que

$$\max_{1 \leq j \leq n} \left\| u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi_j - u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi_j^k \right\|_{L^2(\mathbb{P} \times Leb)} \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Lembrando que isso é possível por causa do Teorema 5.1.1. Definimos $J_n^k := \{\phi_1^k, \dots, \phi_n^k\}$ para $k \geq 1$. Para um subconjunto finito $H = \{h_1, \dots, h_p\}$ de $U_0^{k,e(k,T)}$, vamos considerar $\mathbb{I}_n \cup H = \{\phi_1, \dots, \phi_n, h_1, \dots, h_p\}$ e

$$J_n^k \cup H = \{\phi_1^k, \dots, \phi_n^k, h_1, \dots, h_p\}.$$

Definimos $\varphi^k(\phi_j) := \phi_j^k$; $1 \leq j \leq n$ e $\varphi^k(h_j) = h_j$; $1 \leq j \leq p$.

Lema 5.3.4. Para cada subconjunto finito H de $U_0^{k,e(k,T)}$, e um positivo inteiro $n \geq 1$, temos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \max_{\phi \in \mathbb{I}_n \cup H} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] - \max_{\phi \in \mathbb{I}_n \cup H} \mathbb{E} \left[\xi_{X^k}(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \varphi^k(\phi)) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2} = 0$$

Demonstração: Na sequência, C é uma constante que pode diferir de uma linha para outra. Em primeiro lugar, notamos que

$$\begin{aligned} & \left\| \max_{\phi \in \mathbb{I}_n \cup H} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] - \max_{\phi \in \mathbb{I}_n \cup H} \mathbb{E} \left[\xi_{X^k}(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \varphi^k(\phi)) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2}^2 \\ & \leq \sum_{\phi \in \mathbb{I}_n \cup H} \left\| \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] - \mathbb{E} \left[\xi_{X^k}(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \varphi^k(\phi)) \mid \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2}^2 \\ & \leq C_2^2 \sum_{\phi \in \mathbb{I}_n \cup H} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| X^{k, u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \varphi^k(\phi)}(t) - X^{u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi}(t) \right\|^2. \end{aligned} \tag{5.80}$$

Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| X^{k, u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \varphi^k(\phi_j)}(t) - X^{u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi_j}(t) \right\| &\leq \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| X^{k, u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \varphi^k(\phi_j)}(t) - X^{u \otimes_t \phi_j}(t) \right\| \\
&+ \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| X^{u \otimes_t \phi_j}(t) - X^{u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi_j}(t) \right\| \\
&= I_1^{k,j} + I_2^{k,j}
\end{aligned} \tag{5.81}$$

A escolha dos nossos controles segue

$$\begin{aligned}
\max_{1 \leq j \leq n} \left\| u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \varphi^k(\phi_j) - u \otimes_t \phi_j \right\|_{L^2(\mathbb{P} \times Leb)} &= \max_{1 \leq j \leq n} \left\| u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi_j^k - u \otimes_t \phi_j \right\|_{L^2(\mathbb{P} \times Leb)} \\
&\leq \max_{1 \leq j \leq n} \left\| u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi_j^k - u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi_j^k \right\|_{L^2(\mathbb{P} \times Leb)} \\
&+ \max_{1 \leq j \leq n} \left\| u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi_j^k - u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi_j \right\|_{L^2(\mathbb{P} \times Leb)} \\
&+ \max_{1 \leq j \leq n} \left\| u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi_j - u \otimes_t \phi_j \right\|_{L^2(\mathbb{P} \times Leb)} \\
&\rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Usando o pressuposto (5.59), temos que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n I_1^{k,j} = 0$. A afirmação B1 e do fato que $\lim_{k \rightarrow +\infty} T_{e(k,t)}^k = t$ *q.c.* permitem concluir que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n I_2^{k,j} = 0$.

Similarmente,

$$\sum_{j=1}^p \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| X^{k, u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \varphi_{\varepsilon, n}^k(h_j)}(t) - X^{u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} h_j}(t) \right\| \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Isto concluí a prova. ■

Vamos então introduzir o seguinte subconjunto $\tilde{\Delta}_\ell^{n,k} := J_n^k \cup U_0^{k,\ell,\infty}$ para $\ell, n, k \geq 1$. Por construção, $\tilde{\Delta}_\ell^{n,k} = \varphi^k(\Delta_\ell^{n,k})$. Em adição, as identidades (5.70), (5.71) e (5.72) permitem afirmar que

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \left\| V^k(T_{e(k,t)}^k, u^k) - \max_{\eta \in U_0^{k,\ell,\infty}} \mathbb{E} \left[\xi_{X^k}(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \eta) | \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2} = 0 \tag{5.82}$$

para cada $k \geq 1$. Por definição,

$$V^k(T_{e(k,t)}^k, u^k) \geq \max_{\eta \in \tilde{\Delta}_\ell^{n,k}} \mathbb{E} \left[\xi_{X^k}(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \eta) \middle| \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \geq \max_{\eta \in U_0^{k,\ell,\infty}} \mathbb{E} \left[\xi_{X^k}(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \eta) \middle| \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \quad q.c \quad (5.83)$$

para todo $\ell, k, n \geq 1$. Relembrando o fato que : $a, b \in \mathbb{R}, a - b \geq 0, b' \leq b, a - b' \geq 0$ implica $(a - b)^2 \leq (a - b')^2$. Aplicando esse fato (5.82) e (5.83), temos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| V^k(T_{e(k,t)}^k, u^k) - \max_{\eta \in \tilde{\Delta}_\ell^{n,k}} \mathbb{E} \left[\xi_{X^k}(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \eta) \middle| \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2} = 0 \quad (5.84)$$

para todo $k, n \geq 1$. Uma aplicação direta do Lema 5.3.4 para um subconjunto finito $U_0^{k,\ell,\infty}$ e $U_0^{k,\infty}$ segue

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \max_{\phi \in \Delta_\ell^{n,k}} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \middle| \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] - \max_{\phi \in \Delta_\ell^{n,k}} \mathbb{E} \left[\xi_{X^k}(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \varphi_{\epsilon,n}^k(\phi)) \middle| \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2} = 0 \quad (5.85)$$

para cada $n, \ell \geq 1$, no qual

$$\max_{\phi \in \tilde{\Delta}_\ell^{n,k}} \mathbb{E} \left[\xi_{X^k}(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \middle| \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] = \max_{\phi \in \Delta_\ell^{n,k}} \mathbb{E} \left[\xi_{X^k}(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \varphi_{\epsilon,n}^k(\phi)) \middle| \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \quad q.c$$

para cada $n, k, \ell \geq 1$. Agora estamos prontos para declarar o seguinte resultado.

Prova do Teorema 5.3.1: A desigualdade triangular segue

$$\begin{aligned} \left\| V^k(T_{e(k,t)}^k, u^k) - V(t, u) \right\|_{L^2} &\leq \left\| V(t, u) - \max_{\phi \in \Delta_\ell^{n,k}} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \middle| \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2} \\ &+ \left\| \max_{\phi \in \Delta_\ell^{n,k}} \mathbb{E} \left[\xi_X(u \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \phi) \middle| \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] - \max_{\eta \in \tilde{\Delta}_\ell^{n,k}} \mathbb{E} \left[\xi_{X^k}(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \eta) \middle| \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2} \\ &+ \left\| V^k(T_{e(k,t)}^k, u^k) - \max_{\eta \in \tilde{\Delta}_\ell^{n,k}} \mathbb{E} \left[\xi_{X^k}(u^k \otimes_{T_{e(k,t)}^k} \eta) \middle| \mathcal{F}_{T_{e(k,t)}^k}^k \right] \right\|_{L^2} \\ &=: I_1^{k,n,\ell} + I_2^{k,n,\ell} + I_3^{k,n,\ell}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

A convergência (5.85) segue $\lim_{k \rightarrow +\infty} I_2^{k,n,\ell} = 0$ para todo $n, \ell \geq 1$. Pelo Lema 5.3.3, temos que $\lim_{k \rightarrow +\infty} I_1^{k,n,\ell} = 0$ para todo $\ell \geq 1$ e n suficientemente grande. Então fixamos n suficientemente grande. A convergência (5.84) segue $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} I_3^{k,n,\ell}(\epsilon) = 0$ para todo $k \geq 1$. Isto nos permite afirmar que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| V^k(T_{e(k,t)}^k, u^k) - V(t, u) \right\|_{L^2} = 0.$$

Concluimos então prova.

Desde que

$$0 \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \left\| \bar{V}^k(T_{e(k,t)}^k, u^k) - \bar{V}(t, u) \right\|_{L^1} \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \left\| \bar{V}^k(T_{e(k,t)}^k, u^k) - \bar{V}(t, u) \right\|_{L^1} = 0,$$

obtemos então o principal resultado desta seção

Teorema 5.3.2. Para qualquer $u \in U_0^\infty$, seja $\{u^k; k \geq 1\}$ uma sequência de controles em $U_0^{k,\infty}$ tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k = u$ em $L^2(\mathbb{P} \times Leb)$. Para cada $t \in [0, T]$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \bar{V}^k(T_{e(k,t)}^k, u^k) - \bar{V}(t, u) \right\|_{L^1} = 0$$

Teorema 5.3.3. Assumimos que a afirmação A1 e B1 segue verdadeiros e os coeficientes da EDE (5.31) satisfazendo a Afirmação I. Seja X^k o processo \mathbb{F}^k -controlado dado por (6.5). Então,

$$\sup_{\phi \in U_0^{k,\epsilon(k,T)}} \mathbb{E}[\xi_{X^k}(\phi)] \rightarrow \sup_{v \in U_0^T} \mathbb{E}[\xi_X(v)] \quad (5.87)$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Em particular, para qualquer $\epsilon > 0$, o controle ϵ -ótimo $u^{*,k}$ construído via V^k nas Proposições 4.2.2 e 4.2.3 satisfaz

$$\mathbb{E}[\xi_X(u^{*,k})] \geq \sup_{u \in U_0^T} \mathbb{E}[\xi_X(u)] - \epsilon \quad (5.88)$$

para todo k suficientemente grande.

Demonstração: Basta aplicar (5.22), (5.21) em (5.49), para concluir que X^k satisfaz as equações (5.59) e (5.61) dado no Teorema 5.3.1 e Corolário 5.3.1, respectivamente. ■

Aplicações

Nesse capítulo, buscamos fazer duas aplicações importante da nossa teoria. A primeira delas é na estratégia de pairs trade, desenvolvemos para ela uma teoria bem geral. Em seguida, descrevemos uma solução fechada para um caso de pairs trade considerando o *spread* como o chamado *log-price*.

Logo depois, fizemos um exemplo para encontrar o controle ϵ -ótimo para uma estratégia de controle do *portfolio*, no qual consideramos um ativo livre de risco e um ativo com risco. No ativo com risco foi modelado através de uma EDE e descrevemos o controle ϵ -ótimo para essa estratégia. Lembrando que pode ser facilmente estendido para um *portfolio* com n ativos com risco.

6.1 Pairs Trade

O Pairs Trade (18) é uma estratégia de investimento com base na identificação de pares de ações que existe uma relação entre os pares. Então buscamos discrepâncias temporárias na relação deles, comprando/vendendo as ações na divergência e obtendo o lucro quando volta a relação típica deles. Em muitos casos esses pares são empresas do mesmo segmento.

Esse tipo de estratégia investe na relação entre o pares que estão historicamente relacionados e não nas ações ou no movimento do mercado, ou seja, não existe uma pre-

ocupação no comportamento do mercado ou no comportamento das ações da empresa, e apenas relação entre as ações dos pares encontrado. Por isso, a busca pela identificação do par é uma etapa muito importante. Porém, nesta tese não vamos nos preocupar em como achar o par (ver (18), (59), (23) e (28)), e sim considerar que já identificamos o par e que estamos buscando o momento de compra/venda e a quantidade ótima para isto.

Assumimos que $Y(t)$ denota o *spread* de duas ações (S^1, S^2) no tempos t , definido como $Y(t) = f(t, S^1(t), S^2(t))$ tal que f representa uma função genérica tal que exista uma função $g(t, Y(t), S^1(t)) = S^2(t)$. Assumimos que o *spread* segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck (58).

Nossa teoria, pode ser feita para casos bem genéricos de pair trade, e buscamos formula-la no caso mais geral possível com o *spread* sendo um processo de Ornstein-Uhlenbeck. Após isso, na seção 6.2 para apresentar um caso mais concreto, tomamos $f(t, S^1(t), S^2(t)) = \ln(S^2(t)) - \ln(S^1(t))$ e a função utilidade $\xi(x) = -e^{-x}$, e obtemos uma formula fechada para o controle.

6.1.1 Formulação do Problema

Assumimos que existe um ativo livre de risco $M(t)$ com taxa de juros r , com a seguinte dinâmica

$$dM(t) = rM(t)dt.$$

Denotamos $S^1(t)$ e $S^2(t)$ como sendo o preço do par de ações (S^1, S^2) no instante t , no qual S^1 tem a seguinte dinâmica

$$dS^1(t) = \mu(t, S^1(t))S^1(t)dt + \sigma(t, S^1(t))S^1(t)dB_1(t)$$

e B_1 é o movimento Browniano. Além disso, $Y(t)$ o *spread* do par de ações no tempo t , definido como

$$Y(t) = f(S^1(t), S^2(t))$$

tal que exista uma função $g(Y(t), S^1(t)) = S^2(t)$, com $g \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e assumimos que o *spread* segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck

$$dY(t) = \kappa(\theta - Y(t))dt + \eta(Y(t))dB(t)$$

com ρ sendo o coeficiente de correlação entre B e B_1 . Então, obtemos a seguinte dinâmica para $S^2(t)$

$$\begin{aligned}
dS^2(t) &= \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial s} \{ \mu(t, S^1(t)) dt + \sigma(t, S^1(t)) dB_1(t) \} \\
&+ \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial y} \{ \kappa(\theta - Y(t)) dt + \eta(Y(t)) dB(t) \} \\
&+ \frac{1}{2} dt \left[\frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial s^2} \sigma^2(t, S^1(t)) + \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial y^2} \eta^2(Y(t)) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \{ \eta(Y(t)) \sigma(t, S^1(t)) \rho dt \} \left[\frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial s \partial y} + \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial y \partial s} \right] \\
&= \left\{ \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial t} + \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial s} \mu(t, S^1(t)) \right. \\
&+ \left. \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial y} \kappa(\theta - Y(t)) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial s^2} \sigma^2(t, S^1(t)) + \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial y^2} \eta^2(Y(t)) \right] \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \{ \eta(Y(t)) \sigma(t, S^1(t)) \rho \} \left[\frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial s \partial y} + \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial y \partial s} \right] \right\} dt \\
&+ \left\{ \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial s} \sigma(t, S^1(t)) \right\} dB_1(t) + \left\{ \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial y} \eta(Y(t)) \right\} dB(t) \\
&= \beta(t, S^1(t), S^2(t), Y(t)) dt + \left\{ \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial s} \sigma(t, S^1(t)) \right\} dB_1(t) \\
&+ \left\{ \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial y} \eta(Y(t)) \right\} dB(t)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

com

$$\begin{aligned}
\beta(t, S^1(t), S^2(t), Y(t)) &:= \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial t} + \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial s} \mu(t, S^1(t)) \\
&+ \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial y} \kappa(\theta - Y(t)) \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial s^2} \sigma^2(t, S^1(t)) + \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial y^2} \eta^2(Y(t)) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \{ \eta(Y(t)) \sigma(t, S^1(t)) \rho \} \left[\frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial s \partial y} + \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial y \partial s} \right]
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Finalmente denotamos o *portfolio* denotada por

$$X^u(t) = dX^u(t) \left(u(t) \frac{dS^1(t)}{S^1(t)} - u(t) \frac{dS^2(t)}{S^2(t)} + \frac{dM(t)}{M(t)} \right), \quad t \geq 0.$$

Observação 6.1.1. Para qualquer $u, v \in U_0^T$ tal que $u = v$ em $[0, t]$, temos $V(t, u) = V(t, v)$ q.c.. Isto implica que $V(t, u)$ depende apenas do controle u sobre o intervalo $[0, t]$.

Assim, no caso geral a função que queremos maximizar é

$$V(t, u) = \operatorname{ess\,sup}_{u(t) \in U_t^T} \mathbb{E}(\xi(X^u(t)) | \mathcal{F}_t) \quad (6.3)$$

subject to:

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0, \quad Y(0) = y_0 \\ dY(t) &= \kappa(\theta - Y(t))dt + \eta(Y(t))dB(t) \\ dX^u(t) &= X^u(t) \left[u(t) \left(\mu(t, S^1(t)) - \frac{\beta(t, S^1(t), S^2(t), Y(t))}{S^2(t)} \right) + r \right] dt \\ &\quad + X^u(t) \left\{ \frac{\frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial y}}{S^2(t)} \right\} \eta(Y(t))dB_1(t) \\ &\quad + X^u(t) \left[\frac{\frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial s} \sigma(t, S^1(t))}{S^2(t)} + \sigma(t, S^1(t)) \right] dB(t) \\ dS^2(t) &= \beta(t, S^1(t), S^2(t), Y(t))dt + \left\{ \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial s} \sigma(t, S^1(t)) \right\} dB_1(t) \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial g(t, Y(t), S^1(t))}{\partial y} \eta(Y(t)) \right\} dB(t) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Na seção a seguir descrevemos o problema de forma discreta.

6.1.2 Aproximação do spread

Na sequência, usamos a notação do capítulo 4.

Seja $\alpha : [0, T] \times D([0, T]; \mathbb{R}^q) \times \mathbb{A}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$ e $\sigma : [0, T] \times D([0, T]; \mathbb{R}^q) \times \mathbb{A}^d \rightarrow \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^d$ dois funcionais não-anticipativos o qual é suposto ser gerado por uma EDE controlada que depende da trajetória (veja seção 4.1.1). Primeiramente, construímos um esquema de Euler-Maruyama baseado em uma partição aleatória como segue:

Seja $(u_{n-1}^k)_{n=1}^\infty$ um conjunto controlado tal que $u_{n-1}^k = g_{n-1}^k(\mathcal{A}_{n-1}^k)$ para uma sequência de funções universalmente mensuráveis $g_{n-1}^k : \mathbb{S}_k^{n-1} \rightarrow \mathbb{A}^d; n \geq 1$. Definimos $\mathbb{X}^{k, u^k}(0) = x$

$$\mathbb{X}^{k,u^k,i}(T_1^k) := \mathbb{X}^{k,u^k}(0) + \alpha^i(T_0^k, \mathbb{X}_{T_0^k}^{k,u^k}, u_0^k) \Delta T_1^k + \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(T_0^k, \mathbb{X}_{T_0^k}^{k,u^k}, u_0^k) \Delta A^{k,j}(T_1^k)$$

no qual $\mathbb{X}_{T_0^k}^{k,u^k} = x$ é uma constante sobre $[0, T]$. Então, definimos

$$\mathbb{X}_{T_1^k}^{k,u^k}(t) := x \mathbb{1}_{\{0 \leq t < T_1^k\}} + \mathbb{X}^{k,u^k}(T_1^k) \mathbb{1}_{\{T_1^k \leq t\}}; 0 \leq t \leq T.$$

O segundo passo é dado por

$$\mathbb{X}^{k,u^k,i}(T_2^k) := \mathbb{X}^{k,u^k,i}(T_1^k) + \alpha^i(T_1^k, \mathbb{X}_{T_1^k}^{k,u^k}, u_1^k) \Delta T_2^k + \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(T_1^k, \mathbb{X}_{T_1^k}^{k,u^k}, u_1^k) \Delta A^{k,j}(T_2^k).$$

Então, definimos

$$\mathbb{X}_{T_2^k}^{k,u^k}(t) := x \mathbb{1}_{\{0 \leq t < T_1^k\}} + \mathbb{X}^{k,u^k}(T_1^k) \mathbb{1}_{\{T_1^k \leq t < T_2^k\}} + \mathbb{X}^{k,u^k}(T_2^k) \mathbb{1}_{\{T_2^k \leq t\}}; 0 \leq t \leq T.$$

Definimos por indução,

$$\mathbb{X}^{k,u^k,i}(T_n^k) := \mathbb{X}^{k,u^k,i}(T_{n-1}^k) + \alpha^i(T_{n-1}^k, \mathbb{X}_{T_{n-1}^k}^{k,u^k}, u_{n-1}^k) \Delta T_n^k + \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(T_{n-1}^k, \mathbb{X}_{T_{n-1}^k}^{k,u^k}, u_{n-1}^k) \Delta A^{k,j}(T_n^k).$$

para $n, k \geq 1$ e $1 \leq i \leq q$. Um processo \mathbb{F}^k -controlado associado ao esquema de Euler-Maruyama associado é então naturalmente definido por $X^{k,u^k}(t) := \mathbb{X}^{k,u^k}(t \wedge T_{e(k,T)}^k)$ no qual

$$\mathbb{X}^{k,u^k}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{X}^{k,u^k}(T_n^k) \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq t < T_{n+1}^k\}} \quad (6.5)$$

A descrição trajetória a trajetória é dada por: Denotamos $t_n^k := \sum_{\ell=1}^n s_\ell^k$ e definimos $h_0^k = x$,

$$h_n^{k,i}(\mathbf{o}^{k,n}) = h_{n-1}^{k,i}(\mathbf{o}^{k,n-1}) + \alpha^i(t_{n-1}^k, \tilde{\gamma}_{n-1}^k(\mathbf{o}^{k,n-1}), a_{n-1}^k) s_n^k + \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(t_{n-1}^k, \tilde{\gamma}_{n-1}^k(\mathbf{o}^{k,n-1}), a_{n-1}^k) 2^{-k} \tilde{i}_n^{k,j}$$

no qual $1 \leq i \leq q$, $\mathbf{o}^{k,n} \in \mathbb{H}^{k,n}$ e

$$\bar{\gamma}_n^k(\mathbf{o}^{k,n})(t) = \sum_{\ell=0}^{n-1} h_\ell^k(\mathbf{o}^{k,\ell}) \mathbb{1}_{\{t_\ell^k \leq t < t_{\ell+1}^k\}} + h_n^k(\mathbf{o}^{k,n}) \mathbb{1}_{\{t_n^k \leq t\}}; t \geq 0, \mathbf{o}^{k,n} \in \mathbb{H}^{k,n}.$$

Então, definimos

$$\bar{\gamma}^k(\mathbf{o}^{k,\infty})(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^k(\mathbf{o}^{k,n}) \mathbb{1}_{\{t_n^k \leq t < t_{n+1}^k\}}$$

para $\mathbf{o}^{k,\infty} \in \mathbb{H}^{k,\infty}$ definimos

$$\gamma_{e(k,T)}^k(\mathbf{o}^{k,e(k,T)})(t) = \bar{\gamma}^k(\mathbf{o}^{k,\infty})(t \wedge t_{e(k,T)}^k); 0 \leq t \leq T.$$

Por definição, $\gamma_{e(k,T)}^k\left(\Xi_{e(k,T)}^{k,g^k}(\mathcal{A}_{e(k,T)}^k(\omega))\right)(t) = X^{k,u^k}(t, \omega)$ para q.c. ω e para cada $t \in [0, T]$.

No caso geral temos

$$\begin{aligned} \alpha(T_{n-1}^k, \mathbb{X}_{T_{n-1}^k}^{k,u^k}, u_{n-1}^k) &:= \mathbb{X}^{k,u^k}(T_{n-1}^k) \left[u^k(T_{n-1}^k) \left(\mu(T_{n-1}^k, S^1(T_{n-1}^k)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\beta(T_{n-1}^k, S^1(T_{n-1}^k), S^2(T_{n-1}^k), Y(T_{n-1}^k))}{S^2(T_{n-1}^k)} \right) + r \right] \\ \sigma^1(T_{n-1}^k, \mathbb{X}_{T_{n-1}^k}^{k,u^k}, u_{n-1}^k) &:= X^{k,u^k}(T_{n-1}^k) \left\{ \frac{\frac{\partial g(T_{n-1}^k, Y(T_{n-1}^k), S^1(T_{n-1}^k))}{\partial y}}{S^2(T_{n-1}^k)} \right\} \eta(Y(T_{n-1}^k)) \\ \sigma^2(T_{n-1}^k, \mathbb{X}_{T_{n-1}^k}^{k,u^k}, u_{n-1}^k) &:= X^{k,u^k}(T_{n-1}^k) \left[\frac{\frac{\partial g(T_{n-1}^k, Y(T_{n-1}^k), S^1(T_{n-1}^k))}{\partial s} \sigma(T_{n-1}^k, S^1(T_{n-1}^k))}{S^2(T_{n-1}^k)} + \sigma(T_{n-1}^k, S^1(t)) \right] \end{aligned} \quad (6.6)$$

Na próxima seção, vamos tratar de um exemplo particular de pairs trade. O interessante desse exemplo, é que apesar de estarmos lidando com um problema que depende de dois movimentos Browniano diferentes, nesse exemplo conseguimos fazer com que o *portfolio* dependa apenas de um deles.

6.2 Exemplo Particular

Considere o exemplo particular descrito abaixo. Escolhemos esse exemplo pois é possível encontrar uma solução fechada. Assumimos que existe um ativo sem risco

$M(t)$ com uma taxa de juros r , com a seguinte dinâmica

$$dM(t) = rM(t)dt.$$

Denotamos $S^1(t)$ e $S^2(t)$ como sendo o preço do par de ações (S^1, S^2) no instante t , no qual S^1 tem a seguinte dinâmica

$$dS^1(t) = \mu S^1(t)dt + \sigma S^1(t)dB_1(t)$$

e B_1 é o movimento Browniano. Além disso, $Y(t)$ o *spread* do par de ações no tempo t , definido como

$$Y(t) = \ln(S^2(t)) - \ln(S^1(t))$$

e assumimos que o *spread* segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck

$$dY(t) = \kappa(\theta - Y(t))dt + \eta dB(t)$$

com ρ é o coeficiente de correlação entre B e B_1 .

Então, obtemos a seguinte descrição para $S^2(t)$

$$dS^2(t) = \left(\mu + \kappa(\theta - Y(t))dt + \frac{1}{2}\eta^2 + \rho\eta\sigma \right) S^2(t)dt + \sigma S^2(t)dB_1(t) + \eta S^2(t)dB(t)$$

Seja $X^u(t)$ o valor do *portfolio*, vamos considerar um pair-trading auto-financiável e portanto $u(t)$ denota a quantidade investida em cada ação S_1 e $-u(t)$ a quantidade investida na ação S_2 , isto implica que apenas podemos comprar a mesma quantidade de uma das ações e vender a mesma quantidade em reais da outra. Assim, temos a seguinte dinâmica do *portfolio* dada por

$$dX^u(t) = X^u(t) \left(u(t) \frac{dS^1(t)}{S^1(t)} - u(t) \frac{dS^2(t)}{S^2(t)} + \frac{dM(t)}{M(t)} \right), \quad t \geq 0.$$

Então, podemos reescrever como

$$dX^u(t) = X^u(t) \left\{ \left[u(t) \left(\kappa(\theta - Y(t)) + \frac{1}{2}\eta^2 + \rho\sigma\eta \right) + r \right] dt + \eta dB(t) \right\} \quad (6.7)$$

É importante notar que dinâmica não depende mais do movimento Browniano B_1 , por que o *portfolio* e o *spread* não dependem.

Vamos considerar a nossa função utilidade $\xi : \mathbf{D}_T^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $\xi(f) = -e^{-f(T)}$, (57) para $f \in \mathbf{D}_T^n$.

Então, a função que desejamos maximizar é dada por

$$V(t, u) = \sup_{u(t) \in U_t^T} \mathbb{E}(-\exp\{-X^u(t)\})$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0, \quad Y(0) = y_0 \\ dY(t) &= \kappa(\theta - Y(t))dt + \eta dB(t) \\ dX^u(t) &= X^u(t) \left\{ \left[u(t) \left(\kappa(\theta - Y(t)) + \frac{1}{2}\eta^2 + \rho\sigma\eta \right) + r \right] dt + \eta dB(t) \right\} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Note que podemos descrever $X^u(t)$ como EDE, com

$$\begin{aligned} \alpha(t, X^u(t), u(t)) &:= X^u(t) \left[u(t) \left(\kappa(\theta - Y(t)) + \frac{1}{2}\eta^2 + \rho\sigma\eta \right) + r \right] \\ \sigma(t, X^u(t), u(t)) &:= X^u(t)\eta \end{aligned}$$

Além disso, temos que:

$$dY(t) = \kappa(\theta - Y(t))dt + \eta dB(t)$$

Então, a solução é

$$Y(t) = ye^{\kappa t} + \int_0^t e^{\kappa(t-s)}\eta dB(s) + \int_a^t e^{\kappa(t-s)}\kappa\theta ds =: Y_t^y$$

e definimos $Y_t^{k,y} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{T_n^k}^y \mathbf{1}_{T_{n-1}^k < t \leq T_n^k}$. Desta forma,

$$dX^u(t) = X^u(t) \left\{ \left[u(t) \left(\kappa(\theta - Y_t^y) + \frac{1}{2}\eta^2 + \rho\sigma\eta \right) + r \right] dt + \eta dB(t) \right\}$$

com isso e usando o exemplo da EDE temos

$$\begin{aligned}\alpha(t, X^u(t), u(t)) &:= X^u(t) \left[u(t) \left(\kappa(\theta - Y_T^y) + \frac{1}{2}\eta^2 + \rho\sigma\eta \right) + r \right] \\ \sigma(t, X^u(t), u(t)) &:= X^u(t)\eta\end{aligned}\quad (6.9)$$

A seguir vamos descrever a versão trajetória a trajetória do nosso exemplo.

Descrição Pathwise

Nesta seção usamos o Princípio da Programação Dinâmica 4.2.1 para descrever o controle ótimo. Consideramos duas diferente distribuições para os tempos de parada, na primeira delas consideramos a distribuição de ΔT_1^k como sendo uma $Gamma(\beta, \lambda)$, levando em conta o trabalho de Burq e Jones (6) que mostrou que essa é uma boa aproximação. Na segunda parte consideramos a distribuição dos tempos de paradas ΔT_1^k usando

$$f(t) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \frac{2k+1}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left\{ - \left(\frac{(2k+1)^2}{2t} \right) \right\}$$

também obtida por Burq e Jones (6).

Então, usando o DPP 4.2.1 e a equação discreta geral EDE 6.6 e a equação 6.7, definimos

$$\begin{aligned}F_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) &:= \sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{S}_k} - \exp(-h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, \tilde{i})) d\mathbb{P} \\ &= \frac{1}{2} \sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{R}_+} - \exp(-h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, \tilde{i})) q^k(s) ds\end{aligned}\quad (6.10)$$

com q^k é a distribuição do tempo de parada ΔT_1^k e

$$\begin{aligned}- \exp - \{ (h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, 1)) \} &= - \exp - \left[h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) \right. \\ &\quad \left. + \left(h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) \left[a_{m-1} \left(\kappa(\theta - Y_{T_{m-1}^k}^{k,y}) + \frac{1}{2}\eta^2 + \rho\sigma\eta \right) + r \right] \right) s \right. \\ &\quad \left. + h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) 2^{-2k}\eta \right] \\ - \exp - \{ (h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, -1)) \} &= - \exp - \left[h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) \right. \\ &\quad \left. + \left(h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) \left[a_{m-1} \left(\kappa(\theta - Y_{T_{m-1}^k}^{k,y}) + \frac{1}{2}\eta^2 + \rho\sigma\eta \right) + r \right] \right) s \right. \\ &\quad \left. - h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) 2^{-2k}\eta \right]\end{aligned}\quad (6.11)$$

Parte I(Distribuição Gamma): Nesta parte consideramos q^k como sendo $Gamma(\beta, \lambda)$ (6). Por simplicidade definimos

$$\begin{aligned}
h_\ell^k(s, 1) &:= h_\ell^k(\mathbf{o}^{k,\ell-1}, a_{\ell-1}, s, 1) \\
h_\ell^k(s, -1) &:= h_\ell^k(\mathbf{o}^{k,\ell-1}, a_{\ell-1}, s, -1) \\
\Theta_{\ell-1}^{k,y} &:= h_{\ell-1}^k(\mathbf{o}^{k,\ell-1}) \left(\kappa(\theta - Y_{T_{\ell-1}^k}^{k,y}) + \frac{1}{2}\eta^2 + \rho\sigma\eta \right) \\
R_{\ell-1}^k &:= rh_{\ell-1}^k(\mathbf{o}^{k,\ell-1}) \\
\sigma_{\ell-1}^k &:= h_{\ell-1}^k(\mathbf{o}^{k,\ell-1})2^{-2k}\eta
\end{aligned} \tag{6.12}$$

para $\ell \in \{1, \dots, m\}$. Então, resolvendo a integral

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}) &:= \int_{\mathbb{S}_k} -\exp\left(-h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, \tilde{i})\right) d\mathbb{P} \\
&= -\frac{1}{2} \sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{R}_+} \exp\left(-h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, 1)\right) \\
&\quad + \exp\left(-h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, -1)\right) q^k(s) ds \\
&= \frac{1}{2} \sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{R}_+} -e^{h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1})} \left(e^{\sigma_{m-1}^k} + e^{-\sigma_{m-1}^k} \right) \\
&\quad \times e^{-\left(a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k\right)s} q^k(s) ds \\
&= \frac{1}{2} e^{-h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1})} \left(e^{\sigma_{m-1}^k} + e^{-\sigma_{m-1}^k} \right) \sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{R}_+} -e^{-\left(a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k\right)s} q^k(s) ds \\
&= e^{-h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1})} \left(\cosh(\sigma_{m-1}^k) \right) \sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} -\left(\lambda^\beta (a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k + \lambda)^{-\beta} \right)
\end{aligned} \tag{6.13}$$

precisamos encontrar o supremum, para isto derivamos e igualamos a zero, então temos

$$\begin{aligned}
\frac{dG(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}^*)}{da_{m-1}} &= \beta e^{-h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1})} \left(\cosh(\sigma_{m-1}^k) \right) \lambda^\beta \Theta_{m-1}^{k,y} \left((a_{m-1}^* \Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k + \lambda)^{-\beta-1} \right) = 0 \\
\Rightarrow a_{m-1}^* &= -\frac{(\lambda + R_{m-1}^k)}{\Theta_{m-1}^{k,y}}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Então, encontramos a_{m-1}^* , com isso substituímos a equação 6.13 e obtemos

$$F_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) = G(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}^*)$$

Então, repetindo os mesmos argumentos temos

$$\begin{aligned} a_{\ell-1}^* &= -\frac{(\lambda + R_{\ell-1}^k)}{\Theta_{\ell-1}^{k,y}} \\ &= -\frac{\lambda + rh_{\ell-1}^k(\mathbf{o}^{k,\ell-1})}{h_{\ell-1}^k(\mathbf{o}^{k,\ell-1}) \left(\kappa(\theta - Y_{T_{\ell-1}^k}^{k,y}) + \frac{1}{2}\eta^2 + \rho\sigma\eta \right)} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Indutivamente, obtemos $(a_0^*, a_1^*, \dots, a_{m-1}^*)$.

Parte II(Usando a Série): Nesta parte consideramos q^k como sendo

$$q^k(t) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \frac{2j+1}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left\{ -\left(\frac{(2j+1)^2}{2t} \right) \right\}.$$

Então, resolvendo a integral

$$\begin{aligned} G(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}) &:= \int_{\mathbb{S}_k} -\exp(-h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, \tilde{i})) d\mathbb{P} \\ &= -\frac{1}{2} \sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, 1)) + \exp(-h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, -1)) q^k(s) ds \\ &= -\frac{1}{2} \sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{R}_+} e^{h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1})} \left(e^{\sigma_{m-1}^k} + e^{-\sigma_{m-1}^k} \right) e^{-(a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)s} q^k(s) ds \\ &= -\frac{1}{2} e^{h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1})} \left(e^{\sigma_{m-1}^k} + e^{-\sigma_{m-1}^k} \right) \sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-(a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)s} q^k(s) ds \\ &= -\frac{1}{2} e^{h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1})} \cosh(\sigma_{m-1}^k) \sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j 2j+1 \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-(a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)s - \frac{(2j+1)^2}{2s}}}{\sqrt{2\pi s^3}} ds \\ &= -\frac{1}{2} e^{h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1})} \cosh(\sigma_{m-1}^k) \sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-(2j+1)\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Truncando a serie obtemos

$$\begin{aligned}
G^n(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}) &:= -\frac{1}{2}e^{h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1})} \cosh(\sigma_{m-1}^k) \sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} \sum_{j=-n}^n (-1)^j e^{-(2j+1)\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}} \\
&= -\sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} \frac{1}{2}e^{h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1})} \cosh(\sigma_{m-1}^k) \\
&\quad \frac{(-1)^n e^{(n+1)\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}} \left(e^{\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}} + e^{(4n+3)\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}} \right)}{1 + e^{2\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}}}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

precisamos encontrar o supremo, para isso derivamos e igualamos a zero.

$$\begin{aligned}
\frac{dG^n(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}^*)}{da_{m-1}} &= -\frac{1}{2}e^{h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1})} \cosh(\sigma_{m-1}^k) \\
&\quad \frac{(-1)^{n+1}\Theta_{m-1}^{k,y} e^{-2(1+n)\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}}}{\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}(1 + e^{2\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}})} \\
&\quad \times \left((1-2n)e^{(4n+5)\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}} + (1+2n)e^{\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}} \right. \\
&\quad \left. - (1+2m)e^{(3+4n)\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}} + (3+2m)e^{3\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}} \right) = 0 \\
&\Rightarrow (1-2n)e^{(4n+5)\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}} + (1+2n)e^{\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}} \\
&= (1+2n)e^{(3+4n)\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}} - (3+2n)e^{3\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}}
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Temos então que resolver

$$\begin{aligned}
&(1-2n)e^{(4n+5)\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}} + (1+2n)e^{\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}} \\
&= (1+2n)e^{(3+4n)\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}} - (3+2n)e^{3\sqrt{(2a_{m-1}\Theta_{m-1}^{k,y} + R_{m-1}^k)}}
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Então, encontramos a_{m-1}^* , com isso substituímos a equação 6.18 e temos que

$$F_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) \approx G^n(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}^*)$$

Então, repetindo os mesmos argumentos indutivamente temos

$$F_{\ell-1}^k(\mathbf{o}^{k,\ell-1}) \approx G^n(\mathbf{o}^{k,\ell-1}, a_{\ell-1}^*) \tag{6.20}$$

no qual o a_{m-1}^* é uma solução de

$$\begin{aligned} & (1 - 2n)e^{(4n+5)\sqrt{(2a_{\ell-1}\Theta_{\ell-1}^{k,y}+R_{\ell-1}^k)}} + (1 + 2n)e^{\sqrt{(2a_{\ell-1}\Theta_{\ell-1}^{k,y}+R_{\ell-1}^k)}} \\ & = (1 + 2n)e^{(3+4n)\sqrt{(2a_{\ell-1}\Theta_{\ell-1}^{k,y}+R_{\ell-1}^k)}} - (3 + 2n)e^{3\sqrt{(2a_{\ell-1}\Theta_{\ell-1}^{k,y}+R_{\ell-1}^k)}} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Então, obtemos indutivamente $(a_0^*, a_1^*, \dots, a_{m-1}^*)$.

6.3 Controle no Portfolio

Nesta seção, vamos considerar um problema de controle, no qual o objetivo é definir o nosso *portfolio*. Para isto, vamos considerar dois ativos, um deles livre de risco, e outro com risco. É importante ressaltar que a extensão para o caso com n ativos com risco é simples de obter, optamos por propor o modelo desta forma para facilitar a notação.

O ativo com risco será modelado por uma EDE. Assim, seja $S(t)$ o preço do ativo dado por

$$dS(t) = \alpha(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dB(t).$$

com $t \in [0, 1]$ e $S(t)$ dependendo de toda a trajetória, $\alpha(t, S_t) \in (0, M]$ e $\sigma(t, S_t) \in (0, M]$ no qual M é uma constante positiva. Então, com o nosso processo de discretização, temos que

$$S^k(T_n^k) := S^k(T_{n-1}^k) + \alpha(T_{n-1}^k, S_{T_{n-1}^k}^k)\Delta T_n^k + \sigma(T_{n-1}^k, S_{T_{n-1}^k}^k)\Delta A^{k,j}(T_n^k). \quad (6.22)$$

para $2 \leq n \leq 2^{-2k}$.

Assim, vamos considerar um *portfolio* descontado e auto-financiável. Então, temos que o *portfolio* é modelado por

$$dX^u(t) = u(t)dS(t) = u(t)\left[\alpha(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dB(t)\right]$$

Novamente usando o nosso processo de discretização temos que

$$X^{k,u^k}(T_n^k) = X^{k,u^k}(T_{n-1}^k) + u^k(T_{n-1}^k)\left[S^k(T_{n-1}^k) + \alpha(T_{n-1}^k, S_{T_{n-1}^k}^k)\Delta T_n^k + \sigma(T_{n-1}^k, S_{T_{n-1}^k}^k)\Delta A^{k,j}(T_n^k)\right]$$

Queremos encontrar o controle que realiza a equação

$$V(0) = \sup_{u \in U_0^T} \mathbb{E}(\xi(X^u))$$

Para isto, assim como no caso do pairs trade, vamos considerar a nossa função utilidade $\xi : \mathbf{D}_T^n \rightarrow \mathbb{R}$, definimos $\xi(f) = -e^{-f(T)}$, (57) para $f \in \mathbf{D}_T^n$. Por simplicidade definimos

$$\xi(\gamma_m^k(\mathbf{o}^{k,m})) := \xi(h_m^k(\mathbf{o}^{k,m})) = -e^{-h_m^k(\mathbf{o}^{k,m})}$$

Então, na descrição trajetória a trajetória e por construção, temos que

$$V^k(T_j^k, u^k) = F_j^k(\Xi_j^{k,g^k}(\mathcal{A}_j^k)) \text{ a.s} \quad (6.23)$$

Desta forma usando DPP , temos

$$\begin{aligned} F_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) &:= \sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{S}_k} \xi(h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, \tilde{i})) \nu(ds, di) \\ &= \frac{1}{2} \sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{R}_+} [\xi(h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, 1)) + \xi(h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, -1))] q^k(s) ds \end{aligned} \quad (6.24)$$

com q^k sendo a distribuição do tempo de parada ΔT_1^k

Considerando a distribuição de ΔT_1^k uma $\text{Gamma}(\beta, \lambda)$:

Primeiramente vamos considerar a distribuição do tempo de parada como sendo uma $\text{Gamma}(\beta, \lambda)$, o uso desta distribuição deve-se a aproximação proposta pelo Burq e Jones (6). Assim utilizando-se desta aproximação temos que

$$\begin{aligned} \xi(h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, 1)) &= -\exp\left(-\left[h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) + a_{m-1} \left(\alpha(t_{m-1}^k, \bar{\gamma}_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}))s \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \sigma(t_{m-1}^k, \bar{\gamma}_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}))2^{-2k}\right)\right]\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi(h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, -1)) &= -\exp\left(-\left[h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) + a_{m-1} \left(\alpha(t_{m-1}^k, \bar{\gamma}_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}))s \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \sigma(t_{m-1}^k, \bar{\gamma}_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}))2^{-2k}\right)\right]\right) \end{aligned} \quad (6.25)$$

Para minimizar a notação, defina

$$\alpha_{m-1}^k := \alpha(t_{m-1}^k, \bar{\gamma}_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}))$$

$$\sigma_{m-1}^k := \sigma(t_{m-1}^k, \bar{\gamma}_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}))$$

Por simplicidade, definimos

$$\Phi(a_{m-1}, 1) := h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) + a_{m-1}\sigma_{m-1}^k 2^{-2k}$$

e

$$\Phi(a_{m-1}, -1) := h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) - a_{m-1}\sigma_{m-1}^k 2^{-2k}$$

então, temos que

$$\begin{aligned} \xi(h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, 1)) &= -\exp(-[\Phi(a_{m-1}, 1) + a_{m-1}\alpha_{m-1}^k s]) \\ &= -e^{(-[\Phi(a_{m-1}, 1)])} \exp(-[a_{m-1}\alpha_{m-1}^k s]) \end{aligned} \quad (6.26)$$

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \xi(h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, 1)) q^k(s) ds &= -\frac{1}{2} e^{(-[\Phi(a_{m-1}, 1)])} \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-[a_{m-1}\alpha_{m-1}^k s]) \\ &\quad \times \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} s^{\lambda-1} e^{-\lambda s} ds \\ &= -\frac{1}{2} e^{(-[\Phi(a_{m-1}, 1)])} \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_{\mathbb{R}_+} s^{\lambda-1} e^{-(\lambda + a_{m-1}\alpha_{m-1}^k)s} ds \\ &= -\frac{1}{2} e^{(-[\Phi(a_{m-1}, 1)])} \lambda^\beta (\lambda + a_{m-1}\alpha_{m-1}^k)^{-\beta} \\ &= -\frac{\lambda^\beta}{2} e^{(-h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}))} e^{-a_{m-1}\sigma_{m-1}^k 2^{-2k}} (\lambda + a_{m-1}\alpha_{m-1}^k)^{-\beta} \\ &= -G e^{-a_{m-1}\sigma_{m-1}^k 2^{-2k}} (\lambda + a_{m-1}\alpha_{m-1}^k)^{-\beta} \\ &:= f(a_{m-1}, 1) \end{aligned} \quad (6.27)$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \xi(h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, -1)) q^k(s) ds &= -\frac{1}{2} e^{(-[\Phi(a_{m-1}, -1)])} \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-[a_{m-1} \alpha_{m-1}^k s]) \\
&\times \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} s^{\lambda-1} e^{-\lambda s} ds \\
&= -\frac{1}{2} e^{(-[\Phi(a_{m-1}, -1)])} \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_{\mathbb{R}_+} s^{\lambda-1} e^{-(\lambda + a_{m-1} \alpha_{m-1}^k) s} ds \\
&= -\frac{1}{2} e^{(-[\Phi(a_{m-1}, -1)])} \lambda^\beta (\lambda + a_{m-1} \alpha_{m-1}^k)^{-\beta} \\
&= -\frac{\lambda^\beta}{2} e^{(-h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}))} e^{a_{m-1} \sigma_{m-1}^k 2^{-2k}} (\lambda + a_{m-1} \alpha_{m-1}^k)^{-\beta} \\
&= -G e^{a_{m-1} \sigma_{m-1}^k 2^{-2k}} (\lambda + a_{m-1} \alpha_{m-1}^k)^{-\beta} \\
&:= f(a_{m-1}, -1)
\end{aligned} \tag{6.28}$$

com $G := G(\lambda, \beta, \mathbf{o}^{k,m-1}) = \frac{\lambda^\beta}{2} e^{(-h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}))}$. Então, queremos

$$\sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} \left\{ -G e^{-a_{m-1} \sigma_{m-1}^k 2^{-2k}} (\lambda + a_{m-1} \alpha_{m-1}^k)^{-\beta} - G e^{a_{m-1} \sigma_{m-1}^k 2^{-2k}} (\lambda + a_{m-1} \alpha_{m-1}^k)^{-\beta} \right\} =: \sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} f(a_{m-1}) \tag{6.29}$$

para isso derivamos a função em função a_{m-1} , e obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{df}{da_{m-1}} &= G (\alpha_{m-1}^k a_{m-1} + \lambda)^{-b-1} \left(\alpha_{m-1}^k (2\beta \cosh(2^{-2k} \sigma_{m-1}^k a_{m-1}) \right. \\
&\quad \left. - 2\sigma_{m-1}^k 2^{-2k} a_{m-1} \sinh(2^{-2k} \sigma_{m-1}^k a_{m-1})) - 2\lambda \sigma_{m-1}^k 2^{-2k} \sinh(2^{-2k} \sigma_{m-1}^k a_{m-1} - 1) \right)
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Desta forma, igualando a função a zero, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= G (\alpha_{m-1}^k a_{m-1} + \lambda)^{-b-1} \left(\alpha_{m-1}^k (2\beta \cosh(2^{-2k} \sigma_{m-1}^k a_{m-1}) - 2\sigma_{m-1}^k 2^{-2k} a_{m-1} \sinh(2^{-2k} \sigma_{m-1}^k a_{m-1})) \right. \\
&\quad \left. - 2\lambda \sigma_{m-1}^k 2^{-2k} \sinh(2^{-2k} \sigma_{m-1}^k a_{m-1} - 1) \right) \\
&\Rightarrow \frac{\beta \alpha_{m-1}^k \cosh(2^{-2k} \sigma_{m-1}^k a_{m-1})}{2\sigma_{m-1}^k 2^{-2k} \sinh(2^{-2k} \sigma_{m-1}^k a_{m-1})} = a_{m-1} + \frac{\lambda}{\alpha_{m-1}^k} \\
&\Rightarrow \frac{\beta \alpha_{m-1}^k}{2\sigma_{m-1}^k 2^{-2k}} \coth(2^{-2k} \sigma_{m-1}^k a_{m-1} - 1) = a_{m-1} + \frac{\lambda}{\alpha_{m-1}^k}
\end{aligned} \tag{6.31}$$

definimos a_{m-1}^* como sendo a solução da equação 6.31.

Então, substituindo a_{m-1}^* na equação 6.24 temos que F_{m-1}^k .

$$\begin{aligned}
 F_{m-2}^k(\mathfrak{o}^{k,m-2}) &:= \sup_{a_{m-2} \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{S}_k} F_{m-1}^k(\mathfrak{o}^{k,m-2}, a_{m-2}, s, i) \nu(ds, di) \\
 &= \frac{1}{2} \sup_{a_{m-2} \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{R}_+} \left[-H_{m-1} e^{(-h_{m-1}^k(\mathfrak{o}^{k,m-2}, a_{m-1}, s, 1))} - H_{m-1} e^{(-h_{m-1}^k(\mathfrak{o}^{k,m-2}, a_{m-1}, s, -1))} \right] q^k(s) ds \\
 &= H_{m-1} \frac{1}{2} \sup_{a_{m-2} \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{R}_+} \left[-e^{(-h_{m-1}^k(\mathfrak{o}^{k,m-2}, a_{m-1}, s, 1))} - e^{(-h_{m-1}^k(\mathfrak{o}^{k,m-2}, a_{m-1}, s, -1))} \right] q^k(s) ds
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

com $H_{m-1} := 2(\lambda + a_{m-1}^* \alpha_{m-1}^k)^{-\beta} \cosh(a_{m-1} \sigma_{m-1}^k 2^{-2k})$. Repetindo os argumentos acima, temos que

$$\frac{\beta \alpha_{m-2}^k}{2 \sigma_{m-2}^k 2^{-2k}} \coth(2^{-2k} \sigma_{m-2}^k a_{m-2}) = a_{m-2} + \frac{\lambda}{\alpha_{m-2}^k} \tag{6.33}$$

Então, precisamos apenas encontrar a solução da equação 6.33. Indutivamente, precisamos encontrar a solução de

$$\frac{\beta \alpha_\ell^k}{2 \sigma_\ell^k 2^{-2k}} \coth(2^{-2k} \sigma_\ell^k a_\ell) = a_\ell + \frac{\lambda}{\alpha_\ell^k} \tag{6.34}$$

com $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ e a_ℓ^* sendo a solução da equação 6.34. Com $a = (a_0^*, a_1^*, \dots, a_{m-1}^*)$ sendo o controle ϵ -ótimo. É importante analisar sobre quais circunstâncias a equação 6.34 apresenta solução. Para isso observe que

$$\frac{\beta \alpha_\ell^k}{2 \sigma_\ell^k 2^{-2k}} \coth(2^{-2k} \sigma_\ell^k a_\ell) = a_\ell + \frac{\lambda}{\alpha_\ell^k} \tag{6.35}$$

como por hipótese $\frac{\beta \alpha_\ell^k}{2 \sigma_\ell^k 2^{-2k}} > 0$, então temos solução, pois

$$\lim_{a_\ell \rightarrow 0^+} \frac{\beta \alpha_\ell^k}{2 \sigma_\ell^k 2^{-2k}} \coth(2^{-2k} \sigma_\ell^k a_\ell) - a_\ell - \frac{\lambda}{\alpha_\ell^k} = \infty$$

e

$$\lim_{a_\ell \rightarrow \infty} \frac{\beta \alpha_\ell^k}{2 \sigma_\ell^k 2^{-2k}} \coth(2^{-2k} \sigma_\ell^k a_\ell) - a_\ell - \frac{\lambda}{\alpha_\ell^k} = -\infty$$

Como a função é contínua para $a_\ell \in (0, \infty)$ temos que pelo menos em um ponto a função é nula.

Para $a_\ell \in (-\infty, 0)$

$$\lim_{a_\ell \rightarrow 0^-} \frac{\beta \alpha_\ell^k}{2\sigma_\ell^k 2^{-2k}} \coth(2^{-2k} \sigma_\ell^k a_\ell) - a_\ell - \frac{\lambda}{\alpha_\ell^k} = -\infty$$

e

$$\lim_{a_\ell \rightarrow -\infty} \frac{\beta \alpha_\ell^k}{2\sigma_\ell^k 2^{-2k}} \coth(2^{-2k} \sigma_\ell^k a_\ell) - a_\ell - \frac{\lambda}{\alpha_\ell^k} = \infty$$

também temos pelo menos um ponto em que a função é nula.

Considerando a distribuição de ΔT_1^k uma série:

Nesta segunda etapa vamos considerar a distribuição dos tempos de paradas f^k , vamos considerar f^k como sendo

$$f^k(t) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \frac{(2j+1)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2k+1)^2}{2t}}$$

$$\begin{aligned} \xi(h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, 1)) &= -\exp\left(-\left[h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) + a_{m-1} \left(\alpha(t_{m-1}^k, \bar{\gamma}_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}))s \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \sigma(t_{m-1}^k, \bar{\gamma}_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}))2^{-2k}\right)\right]\right) \\ \xi(h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, -1)) &= -\exp\left(-\left[h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) + a_{m-1} \left(\alpha(t_{m-1}^k, \bar{\gamma}_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}))s \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \sigma(t_{m-1}^k, \bar{\gamma}_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}))2^{-2k}\right)\right]\right) \end{aligned} \tag{6.36}$$

Novamente para simplificar a notação vamos considerar

$$\alpha_{m-1}^k := \alpha(t_{m-1}^k, \bar{\gamma}_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}))$$

$$\sigma_{m-1}^k := \sigma(t_{m-1}^k, \bar{\gamma}_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}))$$

Por simplicidade, definimos $\Phi(a_{m-1}, 1) := h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) + a_{m-1} \sigma_{m-1}^k 2^{-2k}$ e $\Phi(a_{m-1}, -1) := h_{m-1}^k(\mathbf{o}^{k,m-1}) - a_{m-1} \sigma_{m-1}^k 2^{-2k}$ então, obtemos

$$\begin{aligned} \xi(h_m^k(\mathbf{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, 1)) &= -\exp\left(-\left[\Phi(a_{m-1}, 1) + a_{m-1} \alpha_{m-1}^k s\right]\right) \\ &= -e^{(-[\Phi(a_{m-1}, 1)])} \exp\left(-\left[a_{m-1} \alpha_{m-1}^k s\right]\right) \end{aligned} \tag{6.37}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \xi(h_m^k(\mathfrak{o}^{k,m-1}, a_{m-1}, s, 1)) f^k(s) ds &= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left(e^{-[\Phi(a_{m-1}, 1)]} + e^{-[\Phi(a_{m-1}, -1)]} \right) (-1)^j (2j+1) \\
&\times \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\exp\left(-\left(a_{m-1}\alpha_{m-1}^k s + (2j+1)^2(2s)^{-1}\right)\right)}{\sqrt{2\pi s^3}} \\
&= -\frac{1}{2} \left(e^{-[\Phi(a_{m-1}, 1)]} + e^{-[\Phi(a_{m-1}, -1)]} \right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j (2j+1) \\
&\times \frac{\exp\left(-\left(2j+1\right)\sqrt{2\left(a_{m-1}\alpha_{m-1}^k\right)}\right)}{(2j+1)} \\
&= e^{h_{m-1}^k(\mathfrak{o}^{k,m-1})} \cosh\left(a_{m-1}\sigma_{m-1}^k 2^{-2k}\right) \\
&\times \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{j+1} \exp\left(-\left(2j+1\right)\sqrt{2\left(a_{m-1}\alpha_{m-1}^k\right)}\right) \\
&:= f(a_{m-1})
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Queremos encontrar

$$\begin{aligned}
&\sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} \left\{ e^{h_{m-1}^k(\mathfrak{o}^{k,m-1})} \cosh\left(a_{m-1}\sigma_{m-1}^k 2^{-2k}\right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{j+1} \exp\left(-\left(2j+1\right)\sqrt{2\left(a_{m-1}\alpha_{m-1}^k\right)}\right) \right\} \\
&=: \sup_{a_{m-1} \in \mathbb{A}} f(a_{m-1})
\end{aligned} \tag{6.39}$$

para isto derivamos a função em a_{m-1} , e obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{df}{da_{m-1}} &= e^{h_{m-1}^k(\mathfrak{o}^{k,m-1})} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{j+1} \exp\left(-\left(2j+1\right)\sqrt{2\left(a_{m-1}\alpha_{m-1}^k\right)}\right) \\
&\times \left(\sigma_{m-1}^k 2^{-2k} \sinh\left(a_{m-1}\sigma_{m-1}^k 2^{-2k}\right) - \frac{\alpha_{m-1}^k (2j+1) \cosh\left(a_{m-1}\sigma_{m-1}^k 2^{-2k}\right)}{\sqrt{2\alpha_{m-1}^k a_{m-1}}} \right)
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Então, igualando a zero temos que

$$\begin{aligned}
0 &= e^{h_{m-1}^k(\mathfrak{o}^{k,m-1})} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{j+1} \exp\left(- (2j+1) \sqrt{2(a_{m-1}\alpha_{m-1}^k)}\right) \\
&\times \left(\sigma_{m-1}^k 2^{-2k} \sinh(a_{m-1}\sigma_{m-1}^k 2^{-2k}) - \frac{\alpha_{m-1}^k (2j+1) \cosh(a_{m-1}\sigma_{m-1}^k 2^{-2k})}{2\sqrt{\alpha_{m-1}^k a_{m-1}}} \right) \\
&\Rightarrow 0 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{j+1} \exp\left(- (2j+1) \sqrt{2(a_{m-1}\alpha_{m-1}^k)}\right) \\
&\times \left(\sigma_{m-1}^k 2^{-2k} \sinh(a_{m-1}\sigma_{m-1}^k 2^{-2k}) - \frac{\alpha_{m-1}^k (2j+1) \cosh(a_{m-1}\sigma_{m-1}^k 2^{-2k})}{2\sqrt{\alpha_{m-1}^k a_{m-1}}} \right)
\end{aligned} \tag{6.41}$$

definimos a_{m-1}^* como sendo a solução de 6.31.

Portanto, substituindo a_{m-1}^* na equação 6.38 obtemos F_{m-1}^k .

$$\begin{aligned}
F_{m-2}^k(\mathfrak{o}^{k,m-2}) &:= \sup_{a_{m-2} \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{S}_k} F_{m-1}^k(\mathfrak{o}^{k,m-2}, a_{m-2}, s, i) \nu(ds, di) \\
&= \frac{1}{2} \sup_{a_{m-2} \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{R}_+} \left[-H_{m-1} e^{(-h_{m-1}^k(\mathfrak{o}^{k,m-2}, a_{m-1}, s, 1))} - H_{m-1} e^{(-h_{m-1}^k(\mathfrak{o}^{k,m-2}, a_{m-1}, s, -1))} \right] f^k(s) ds \\
&= H_{m-1} \frac{1}{2} \sup_{a_{m-2} \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{R}_+} \left[-e^{(-h_{m-1}^k(\mathfrak{o}^{k,m-2}, a_{m-1}, s, 1))} - e^{(-h_{m-1}^k(\mathfrak{o}^{k,m-2}, a_{m-1}, s, -1))} \right] f^k(s) ds
\end{aligned} \tag{6.42}$$

com $H_{m-1} := 2(\lambda + a_{m-1}^* \alpha_{m-1}^k)^{-\beta} \cosh(a_{m-1} \sigma_{m-1}^k 2^{-2k})$. Então, repetindo os argumentos acima

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{j+1} \exp\left(- (2j+1) \sqrt{2(a_{m-2}\alpha_{m-2}^k)}\right) \\
&\times \left(\sigma_{m-2}^k 2^{-2k} \sinh(a_{m-2}\sigma_{m-2}^k 2^{-2k}) - \frac{\alpha_{m-2}^k (2j+1) \cosh(a_{m-2}\sigma_{m-2}^k 2^{-2k})}{\sqrt{2\alpha_{m-2}^k a_{m-2}}} \right)
\end{aligned} \tag{6.43}$$

Então, precisamos apenas encontrar a solução 6.43. Indutivamente, precisamos encontrar a solução de

$$0 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{j+1} \exp\left(- (2j+1)\sqrt{2(a_\ell \alpha_\ell^k)}\right) \left(\sigma_\ell^k 2^{-2k} \sinh(a_\ell \sigma_\ell^k 2^{-2k}) - \frac{\alpha_\ell^k (2j+1) \cosh(a_\ell \sigma_\ell^k 2^{-2k})}{\sqrt{2\alpha_\ell^k a_\ell}} \right) \quad (6.44)$$

com $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ e a_ℓ^* sendo a solução da equação 6.44. Desta forma, o controle ótimo $a^* := (a_1^*, a_2^*, \dots, a_{m-1}^*)$.

Conclusão

Nesta tese, resolvemos um problema que estava em aberto até então, que é apresentar um método concreto para resolver o problema de controle ϵ -ótimo para processos não-Markovianos.

Para isso utilizamos a discretização aleatória proposta por Leão e Ohashi (32), que foi fundamental no desenvolvimento de nossa teoria. Com essa discretização fomos capazes de transformar um modelo infinito dimensional em um modelo finito dimensional. O que nos permitiu trabalhar com processos dentro de em condições bem gerais, o qual podemos destacar a G-expectation que resolve problemas como a super-replicação, a EDE e *fractional stochastic differential equation* (FSDE) ver 5.2.1.

Para poder mostrar explicitamente qual era o controle ϵ -ótimo, por estarmos em um problema finito dimensional utilizamos o princípio da programação dinâmica, junto com os teoremas de seleção mensuráveis, para explicitar o controle, mas para isso muitos problemas foram necessários serem superados como por exemplo mostrar as convergências, explicitar o princípio da programação dinâmica e os teoremas de seleção. Depois de toda a parte teórica do trabalho fizemos dois exemplos concretos para os quais exibimos explicitamente a forma de calcular os controles.

Um tópico interessante para estudos futuros seriam uma generalização da teoria de controle para teoria de jogos, como por exemplos os famosos jogos soma zero. Outra possibilidade seria a ampliação dos processos para processos de Levy, na qual seria

necessário um estudo do Euler-Maruyama, sendo necessário mostrar a convergência além de uma formulação adequada para esse tipo de processo.

Por fim, podemos expandir a teoria para jogos mais complexos como jogos cooperativos e/ou com múltiplos jogadores.

Supremo Essencial

Primeiramente, considere $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidades completo e seja X e Y variáveis aleatórias pertencentes a esse espaço, dizemos que duas variáveis são iguais quase certamente, se $\mathbb{P}(X = Y) = 1$, essa relação defini uma classe de equivalência, inclusive é a forma clássica de se transformar os espaços $L^p(\Omega)$ em um espaço normado com a norma $\|X\|_p = (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}$.

Se consideramos I um conjunto de índice enumerável, então se $X_i = Y_i$ para todo $i \in I$ é evidente que

$$\sup_{i \in I} X_i = \sup_{i \in I} Y_i$$

e

$$\inf_{i \in I} X_i = \inf_{i \in I} Y_i$$

Note que, nesse caso, implica que podemos fazer manipulações algébricas, nas classes de equivalência e elas são idênticas as operações feitas na variável aleatória, porém com o detalhe que a família de índice necessita ser enumerável. No caso em que o conjunto de índice é não enumerável diversos problemas podem aparecer, como por exemplo que a função

$$\{\omega \in \Omega; \sup_{i \in I} X_i(\omega)\}$$

pode nem ser mensurável.

Para corrigir esse problema, no caso não enumerável, ao invés de procurarmos um supremo ou um ínfimo para as variáveis aleatórias, vamos buscar um supremo ou um ínfimo entre as classes de equivalências. A seguir definimos o *ess sup* e mostramos alguns resultados clássicos relacionados a ele. Lembrando que todos os resultados pode ser obtidos de forma similar para o essencial ínfimo de forma similar, nos atentamos ao *ess sup*, pois foi o termo que usamos durante nosso trabalho.

A.1

O teorema A.1.2 nos garante que dado uma família de variáveis aleatórias qualquer e sua respectiva classe de equivalência, existe um supremo para essa família. É importante ressaltar que o *ess sup* está diretamente ligado a sua medida de probabilidade, ou seja, para cada medida de probabilidade o *ess sup* é diferente.

Definição A.1.1. Dizemos que uma variável aleatória Y é o $\text{ess sup}_{i \in I} Y_i$ para um conjunto de índice I se, e somente se,

1. $Y \geq Y_i$ ($\mathbb{P} - q.c.$) para todo $i \in I$
2. Se Z é uma variável aleatória, tal que $Z \geq Y_i$ $\mathbb{P} - q.c.$ Então $Z \geq Y$ $\mathbb{P} - q.c.$

Pela definição notamos que o *ess sup* é uma classe de equivalência, na qual a existência estabelecemos no teorema a seguir

Teorema A.1.2. Para toda família de variáveis aleatórias $\{Y_i : i \in I\}$ existe uma variável $Y = \text{ess sup}_{i \in I} Y_i$ $\mathbb{P} - q.c.$. Além disso, existe um subconjunto J^* enumerável de I tal que $Y = \sup_{j \in J^*} Y_j$

Demonstração: Sem perda de generalidade vamos assumir que $Y_i : \Omega \rightarrow [0, 1]$, pois caso contrário basta usar uma aplicação bijetora de \mathbb{R} . Agora, dado um conjunto enumerável $J \subset I$ defina

$$\bar{Y}_J = \sup_{i \in J} Y_i$$

Agora seja \mathcal{J} o conjunto de todos os subconjuntos enumeráveis de I , como cada Y_i assumi valores em $[0, 1]$ temos que $\mathbb{E}[Y_i] \leq 1$, portanto temos que

$$\alpha = \sup_{J \in \mathcal{J}} \mathbb{E}[\bar{Y}_J]$$

Pelas propriedades de sup temos que existe uma sequência de $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de \mathcal{J} tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\overline{X}_{J_n}] = \alpha$$

Seja $J^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$, note que J^* é um conjunto enumerável e além disso, temos que

$$\mathbb{E}[\overline{Y}_{J^*}] = \alpha$$

Iremos mostrar que $\overline{Y}_{J^*} = \text{ess sup}_{i \in I} Y_i$. Para isso primeiro fixe $i \in I$, então temos que $J^* \cup \{i\}$, claro que esse conjunto é enumerável e $J^* \cup \{i\} \subset I$, e ainda $\overline{Y}_{J^* \cup \{i\}} = \overline{Y}_{J^*} \vee Y_i$. Portanto,

$$\mathbb{E}(\overline{Y}_{J^*} \vee Y_i) \leq \mathbb{E}(\overline{Y}_{J^*}) = \alpha$$

o que implica que $\overline{Y}_{J^*} \vee Y_i = \overline{Y}_{J^*}$ q.c. o que implica que $\overline{Y}_{J^*} \geq Y_i$ q.c. para qualquer $i \in I$. Agora considere Y uma variável aleatória tal que $Y \geq Y_i$ q.c. para todo $i \in I$, como J^* é enumerável, temos que

$$Y \geq \sup_{i \in J^*} Y_i = \overline{Y}_{J^*} \quad q.c.$$

O que implica que $\sup_{i \in J^*} Y_i = \overline{Y}_{J^*} = \text{ess sup}_{i \in I} Y_i$ ■

É importante observar também que, mesmo que a função $\{\omega \in \Omega; \sup_{i \in I} X_i(\omega)\}$ seja mensurável não necessariamente ela é igual ao ess sup como prova temos o exemplo abaixo

Exemplo A.1.1. Considere $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade completo construído através da medida de Lebesgue definida sobre o intervalo $[0, 1]$. Denotaremos por

$$\begin{cases} X_i(\omega) = 1 & \text{se } i = \omega \\ X_i(\omega) = 0 & \text{se } i \neq \omega \end{cases}$$

para cada $i \in [0, 1]$. Neste caso, $X_i = 0$ $\mathbb{P} - q.c.$, então é evidente que

$$\text{ess sup } X_i = 0 \quad \mathbb{P} - q.c$$

Por outro lado, se

$$\sup X_i = 1$$

ou seja, o $\sup X_i \neq \text{ess sup } X_i$, apesar de ser mensurável. Ou seja, enquanto o que acontece nos conjuntos de medida nula não influencia no ess sup pode influenciar muito no sup

Definição A.1.3. Uma família de variáveis aleatórias $(Y_i)_{i \in I}$ tem a propriedade de Lattice se, para todo índice $i, j \in I$ existe um índice $p \in I$ tal que

$$Y_p \geq Y_i \vee Y_j, \quad q.c.$$

Proposição A.1.4. Se $\{Y_i\}_{i \in I}$ tem propriedade de Lattice, então existe uma sequência $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de índice tal que a sequência $\{Y_{i_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente (a menos de conjuntos de medida nula) tal que

$$\text{ess sup}_{i \in I} Y_i = \sup_{n \in \mathbb{N}} Y_{i_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{i_n} \quad q.c.$$

Demonstração: Usando o fato de que existe um conjunto enumerável $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ tal que

$$\text{ess sup}_{i \in I} Y_i = \sup_{n \in \mathbb{N}} Y_{i_n}$$

Então definimos a sequência usando a propriedade de lattice A.1.3 temos que

$$\begin{aligned} Z_1 &= Y_{i_1} \vee Y_{i_2} \\ Z_2 &= Y_{i_3} \vee Z_1 \\ &\vdots \\ Z_n &= Y_{i_{n+1}} \vee Z_{n-1} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Então $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e pela propriedade de Lattice A.1.3 para cada Z_n existe um $i_n \in I$ tal que

$$Z_n = Y_{i_n}$$

com

$$\text{ess sup}_{i \in I} Y_i = \sup_{n \in \mathbb{N}} Y_{i_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{i_n} \quad q.c. \quad \blacksquare$$

Proposição A.1.5. Seja $(Y_i)_{i \in I}$ uma família de variáveis aleatórias não negativas com a propriedade de Lattice. Temos que $\mathbb{E}(\text{ess sup}_{i \in I} Y_i) = \sup_{i \in I} \mathbb{E}(Y_i)$, e de forma mais geral temos que para uma σ -álgebra \mathcal{F} ,

$$\mathbb{E}(\text{ess sup}_{i \in I} Y_i \mid \mathcal{F}) = \text{ess sup}_{i \in I} \mathbb{E}(Y_i \mid \mathcal{F}) \quad q.c. \quad \blacksquare$$

Demonstração: Para demonstrar basta usar a proposição anterior e o teorema da convergência monótona.(31) \blacksquare

Formula da desintegração

A meta é fornecer uma formula simples para a probabilidade condicional,

$$\mathbb{P}\left\{\Delta T_n^k \in (a, b), \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k, \ell, i_n} \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k\right\},$$

no qual

$$\tilde{i}_n^{k, \ell, i_n} := (\underbrace{0, \dots, 0}_{i_n-1}, \ell, \underbrace{0, \dots, 0}_{d-i_n}), \quad \ell \in \{-1, 1\},$$

$-\infty < a < b < +\infty$ e $\mathbf{b}_{n-1}^k \in \mathbb{S}_k^{n-1}$. Aqui, o índice i_n denota a posição da variável não-nula no vetor $\tilde{i}_n^k \in \mathbb{I}_k$.

Notação: É conveniente fixar a notação. Para um dado $n \geq 1$, definimos

$$E_{i_n} := \{1, 2, \dots, i_n - 1, i_n + 1, \dots, d\}$$

e

$$\mathbf{i}_{n-1}^k := (\tilde{i}_1^k, \dots, \tilde{i}_{n-1}^k).$$

Para $\lambda \in \{1, 2, \dots, d\}$, denotamos

$j_\lambda - 1 := j_{\lambda, n} - 1 := \{ \text{Numero de saltos no vetor } \mathbf{i}_{n-1}^k \text{ o qual ocorre na coordenada } \lambda \},$

e

$$p_\lambda := p_\lambda(\mathbf{i}_{n-1}^k) := \max \left\{ 1 \leq j \leq n-1, \quad \tilde{i}_j^k = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{\lambda-1}, \ell, \underbrace{0, \dots, 0}_{d-\lambda}, \ell \in \{-1, 1\} \right\},$$

no qual se $\{1 \leq j \leq n-1, \quad \tilde{i}_j^k = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{\lambda-1}, \ell, \underbrace{0, \dots, 0}_{d-\lambda}, \ell \in \{-1, 1\}\}$ é vazio, definimos

$p_\lambda = 0$.

Baseado nessa notação, assim definimos

$$t_{j_\lambda-1}^{k, \lambda} := \sum_{\beta=1}^{p_\lambda} s_\beta^k,$$

e

$$t_r^k := \sum_{\beta=1}^r s_\beta^k, \quad 1 \leq r \leq n-1$$

para $\mathbf{b}_{n-1}^k \in \mathbb{S}_k^{n-1}$. Se $p_\lambda = 0$, então definimos $t_{j_\lambda-1}^{k, \lambda} := 0$. O incremento $(t_{n-1}^k - t_{j_\lambda-1}^{k, \lambda}) \geq 0$ será indicado por

$$\Delta_n^{k, \lambda} := (t_{n-1}^k - t_{j_\lambda-1}^{k, \lambda}).$$

É importante notar que $T_r^k = \sum_{\ell=1}^r \Delta T_\ell^k$ e $T_{j_\lambda-1}^{k, \lambda}(\mathcal{A}_{n-1}^k) = \sum_{\beta=1}^{p_\lambda(\mathcal{A}_{n-1}^k)} \Delta T_\beta^k$ q.c.

Com esses objetos à mão, vamos definir

$$f_{\min}(t) := f_{\min}(\mathbf{b}_{n-1}^k, i_n, t) := \left(\prod_{\lambda \in E_{i_n}} f_{\Delta T_1^{k, 1}}(t + \Delta_n^{k, \lambda}) \right),$$

$$\pi := \pi(\mathbf{b}_{n-1}^k, i_n) := \min\{\Delta_n^{k, \lambda}; \lambda \in E_{i_n}\}$$

para $(\mathbf{b}_{n-1}^k, i_n, t) \in \mathbb{S}_k^{n-1} \times \{1, \dots, d\} \times \mathbb{R}_+$. Aqui, $f_{\Delta T_1^{k, 1}}$ é a função de densidade de $\Delta T_1^{k, 1} = T_1^{k, 1}$. Agora estamos aptos a trabalhar no resultado principal.

Teorema B.0.1. Para cada $\mathbf{b}_{n-1}^k \in \mathbb{S}_k^{n-1}$, $\tilde{i}_n^{k, \ell, i_n} \in \mathbb{I}_k$ e $-\infty < a < b < +\infty$, temos

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P} \left\{ \Delta T_n^k \in (a, b); \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k, \ell, i_n} \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\} \\
 &= \left\{ \frac{\int_{a+\Delta_n^{k, i_n}}^{b+\Delta_n^{k, i_n}} f_{\Delta T_1^{k, 1}}(x) dx}{\int_{\Delta_n^{k, i_n}}^{\infty} f_{\Delta T_1^{k, 1}}(x) dx} \right\}. \\
 & \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{\int_{-\infty}^0 \int_{-s}^{\infty} f_{\Delta T_1^{k, 1}}(s+t+\Delta_n^{k, i_n}) f_{min}(t) dt ds}{\prod_{\lambda=1}^d \int_{\Delta_n^{k, \lambda}}^{\infty} f_{\Delta T_1^{k, 1}}(t) dt} \right\}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

A prova deste teorema será dividida em vários passos.

Lema B.0.1. Para cada $\mathbf{b}_{n-1}^k \in \mathbb{S}_k^{n-1}$, $\tilde{i}_n^{k, \ell, i_n} \in \mathbb{I}^k$ e $-\infty < a < b < +\infty$, temos que

$$\mathbb{P} \left\{ \Delta T_n^k \in (a, b) \mid \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k, \ell, i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\} = \left\{ \frac{\int_{a+\Delta_n^{k, i_n}}^{b+\Delta_n^{k, i_n}} f_{\Delta T_1^{k, 1}}(x) dx}{\int_{\Delta_n^{k, i_n}}^{\infty} f_{\Delta T_1^{k, 1}}(x) dx} \right\}$$

Demonstração: Seja $\mathbf{b}_{n-1}^k = (s_1^k, \tilde{i}_1^k, \dots, s_{n-1}^k, \tilde{i}_{n-1}^k)$. Seja J é o número de saltos ocorridos no i_n -ésima coordenada para $\{1, \dots, n\}$. É importante notar que J é uma função de \mathbf{b}_{n-1}^k . Vamos considerar

$$\mathbb{P} \left\{ \Delta T_n^k \in (a, b) \mid \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k, \ell, i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\} \tag{B.2}$$

Por construção

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P} \left\{ \Delta T_n^k \in (a, b) \mid \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k, \ell, i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\} = \\
 & \mathbb{P} \left\{ \Delta T_n^k \in (a, b) \mid \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k, \ell, i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, T_{J-1}^{k, i_n} = t_{j_{i_n}-1}^{k, i_n}, T_{n-1}^k = t_{n-1}^k \right\}
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

e

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \Delta T_n^k \in (a, b) \middle| \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k, \ell, i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, T_{J-1}^{k, i_n} = t_{j_{i_n-1}}^{k, i_n}, T_{n-1}^k = t_{n-1}^k \right\} \\
&= \mathbb{P} \left\{ T_n^k \in (a + t_{n-1}^k, b + t_{n-1}^k) \middle| \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k, \ell, i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, T_{J-1}^{k, i_n} = t_{j_{i_n-1}}^{k, i_n} \right\} \\
&= \mathbb{P} \left\{ T_J^{k, i_n} \in (a + t_{n-1}^k, b + t_{n-1}^k) \middle| \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k, \ell, i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, T_{J-1}^{k, i_n} = t_{j_{i_n-1}}^{k, i_n} \right\} \\
&= \mathbb{P} \left\{ \Delta T_J^{k, i_n} \in (a + \Delta_n^{k, i_n}, b + \Delta_n^{k, i_n}) \middle| \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k, \ell, i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, T_{J-1}^{k, i_n} = t_{j_{i_n-1}}^{k, i_n} \right\}
\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\left\{ \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k, \ell, i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, T_{J-1}^{k, i_n} = t_{j_{i_n-1}}^{k, i_n} \right\} = \left\{ \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k, \ell, i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, T_{J-1}^{k, i_n} = t_{j_{i_n-1}}^{k, i_n}, \Delta T_J^{k, i_n} > \Delta_n^{k, i_n} \right\}$$

e $\Delta T_J^{k, i_n}$ é independente do conjunto $\{\eta_n^k = \tilde{i}_n^{k, \ell, i_n}\}$. Resumindo as identidades acima, temos

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P} \left\{ \Delta T_J^{k, i_n} \in (a + \Delta_n^{k, i_n}, b + \Delta_n^{k, i_n}) \middle| \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k, \ell, i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, T_{J-1}^{k, i_n} = t_{j_{i_n-1}}^{k, i_n} \right\} \\
&= \mathbb{P} \left\{ \Delta T_J^{k, i_n} \in (a + \Delta_n^{k, i_n}, b + \Delta_n^{k, i_n}) \middle| \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k, \ell, i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, T_{J-1}^{k, i_n} = t_{j_{i_n-1}}^{k, i_n}, \Delta T_J^{k, i_n} > \Delta_n^{k, i_n} \right\} \\
&= \mathbb{P} \left\{ \Delta T_{j_{i_n}}^{k, i_n} \in (a + \Delta_n^{k, i_n}, b + \Delta_n^{k, i_n}) \middle| \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k, \ell, i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, T_{j_{i_n-1}}^{k, i_n} = t_{j_{i_n-1}}^{k, i_n}, \Delta T_{j_{i_n}}^{k, i_n} > \Delta_n^{k, i_n} \right\} \\
&= \mathbb{P} \left\{ \Delta T_{j_{i_n}}^{k, i_n} \in (a + \Delta_n^{k, i_n}, b + \Delta_n^{k, i_n}) \middle| \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, \Delta T_{j_{i_n}}^{k, i_n} > \Delta_n^{k, i_n} \right\}
\end{aligned}$$

Agora, afirmamos que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \Delta T_{j_{i_n}}^{k, i_n} \in (a + \Delta_n^{k, i_n}, b + \Delta_n^{k, i_n}) \middle| \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, \Delta T_{j_{i_n}}^{k, i_n} > \Delta_n^{k, i_n} \right\} \\
&= \mathbb{P} \left\{ \Delta T_{j_{i_n}}^{k, i_n} \in (a + \Delta_n^{k, i_n}, b + \Delta_n^{k, i_n}) \middle| \Delta T_{j_{i_n}}^{k, i_n} > \Delta_n^{k, i_n} \right\}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Para cada \mathbf{b}_{n-1}^k , nós realmente temos

$$j_{i_n}(\mathbf{b}_{n-1}^k) = j_{i_n}(\tilde{i}_1^k, \dots, \tilde{i}_{n-1}^k)$$

Para simplificar a notação definimos

$$\begin{aligned} t_{j_{i_n}-1}^{k,i_n} &:= t_{j_{i_n}-1}^{k,i_n}(\mathbf{b}_{n-1}^k) \\ \Delta T_{j_{i_n}}^{k,i_n} &:= \Delta T_{j_{i_n}}^{k,i_n}(\mathbf{b}_{n-1}^k) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

dependendo apenas $\tilde{i}_1^k, \dots, \tilde{i}_{n-1}^k$ e pela definição

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left\{ \Delta T_{j_{i_n}}^{k,i_n} \in (a + \Delta_n^{k,i_n}, b + \Delta_n^{k,i_n}) \middle| \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, \Delta T_{j_{i_n}}^{k,i_n} > \Delta_n^{k,i_n} \right\} \\ &= \mathbb{P} \left\{ \Delta T_{j_{i_n}}^{k,i_n} \in (a + t_{n-1}^k - t_{j_{i_n}-1}^{k,i_n}, b + t_{n-1}^k - t_{j_{i_n}-1}^{k,i_n}) \middle| \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, \Delta T_{j_{i_n}}^{k,i_n} > t_{n-1}^k - t_{j_{i_n}-1}^{k,i_n} \right\} \\ &= \mathbb{P} \left\{ 2^{-2k}\tau \in (a + t_{n-1}^k - t_{j_{i_n}-1}^{k,i_n}, b + t_{n-1}^k - t_{j_{i_n}-1}^{k,i_n}) \middle| \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, 2^{-2k}\tau > t_{n-1}^k - t_{j_{i_n}-1}^{k,i_n} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$= \mathbb{P} \left\{ 2^{-2k}\tau \in (a + t_{n-1}^k - t_{j_{i_n}-1}^{k,i_n}, b + t_{n-1}^k - t_{j_{i_n}-1}^{k,i_n}) \middle| 2^{-2k}\tau > t_{n-1}^k - t_{j_{i_n}-1}^{k,i_n} \right\} \quad (\text{B.7})$$

As igualdades (B.6) e (B.7) são devido ao fato de que $2^{-2k}\tau = \Delta T_{j_{i_n}}^{k,i_n}(\mathbf{b}_{n-1}^k)$ em lei para cada $\mathbf{b}_{n-1}^k \in \mathbb{S}_k^{n-1}$, no qual

$$\tau = \inf\{t > 0; |W(t)| = 1\}$$

para um movimento Browniano padrão W independente de (B^1, \dots, B^d) . Resumindo os passos acima temos

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left\{ \Delta T_n^k \in (a, b) \middle| \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k,\ell,i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\} \\ &= \mathbb{P} \left\{ \Delta T_1^{k,1} \in (a + \Delta_n^{k,i_n}, b + \Delta_n^{k,i_n}) \middle| \Delta T_1^{k,1} > \Delta_n^{k,i_n} \right\} \\ &= \frac{\mathbb{P} \left\{ \Delta T_1^{k,1} \in (a + \Delta_n^{k,i_n}, b + \Delta_n^{k,i_n}), \Delta T_1^{k,1} > \Delta_n^{k,i_n} \right\}}{\mathbb{P} \left\{ \Delta T_1^{k,1} > \Delta_n^{k,i_n} \right\}} \\ &= \frac{\mathbb{P} \left\{ \Delta T_1^{k,1} \in (a + \Delta_n^{k,i_n}, b + \Delta_n^{k,i_n}) \right\}}{\mathbb{P} \left\{ \Delta T_1^{k,1} > \Delta_n^{k,i_n} \right\}} \\ &= \left\{ \frac{\int_{a+\Delta_n^{k,i_n}}^{b+\Delta_n^{k,i_n}} f_{\Delta T_1^{k,1}}(x) dx}{\int_{\Delta_n^{k,i_n}}^{\infty} f_{\Delta T_1^{k,1}}(x) dx} \right\} \end{aligned}$$

no qual $2^{-2k}\tau = \Delta T_1^{k,1}$ em lei. ■

Na sequência, denotamos $\mathbb{I}_{k,j} := \{(i_1^k, \dots, i_d^k); i_j^k \in \{-1, 1\}\} \subset \mathbb{I}_k$ para $1 \leq j \leq d$.

Lema B.0.2. Para todo $\mathbf{b}_{n-1}^k \in \mathbb{S}_k^{n-1}$ e $1 \leq r \leq d$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{\eta_n^k = \tilde{i}_n^{k,1,r} | \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,r}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k\} \\ &= \mathbb{P}\{\eta_n^k = \tilde{i}_n^{k,-1,r} | \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,r}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k\} = 1/2 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Demonstração: Se $\eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,r}$ para um $1 \leq r \leq d$ dado, sabemos a priori que no n -ésimo passo, $\Delta A^{k,r}(T_n^k) \neq 0$ q.c. Seja $(j_r - 1)(\tilde{i}_1^k, \dots, \tilde{i}_{n-1}^k)$ o número de saltos que ocorrerão na coordenada $r \in \{1, \dots, d\}$ sobre as etapas $\{1, \dots, n-1\}$.

Neste caso,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{\eta_n^k = \tilde{i}_n^{k,1,r} | \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,r}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k\} \\ &= \mathbb{P}\{\Delta A^{k,r}(T_n^k) = 2^{-k} | \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,r}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k\} \\ &= \mathbb{P}\{\Delta A^{k,r}(T_{j_r}^{k,r}) = 2^{-k} | \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,r}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k\} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{\eta_n^k = \tilde{i}_n^{k,-1,r} | \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,r}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k\} \\ &= \mathbb{P}\{\Delta A^{k,r}(T_n^k) = -2^{-k} | \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,r}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k\} \\ &= \mathbb{P}\{\Delta A^{k,r}(T_{j_r}^{k,r}) = -2^{-k} | \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,r}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k\} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

Lema B.0.3. Para cada $\mathbf{b}_{n-1}^k \in \mathbb{S}_k^{n-1}$ e $\tilde{i}_n^{k,\ell,i_n} \in \mathbb{I}_k$, temos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left\{\eta_n^k = \tilde{i}_n^{k,\ell,i_n} \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k\right\} = \mathbb{P}\left\{\eta_n^k = \tilde{i}_n^{k,\ell,i_n}, \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,i_n} \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{\eta_n^k = \tilde{i}_n^{k,\ell,i_n} \mid \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k\right\} \mathbb{P}\left\{\eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,i_n} \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k\right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\int_{-\infty}^0 \int_{-s}^{\infty} f_{\Delta T_1^{k,1}}(s+t+\Delta_n^{k,i_n}) f_{\min}(t) dt ds}{\prod_{\lambda=1}^d \int_{\Delta_n^{k,\lambda}} f_{\Delta T_1^{k,1}}(t) dt} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Demonstração: Fixamos $\mathbf{b}_{n-1}^k \in \mathbb{S}_k^{n-1}$ e $\tilde{i}_n^{k,\ell,i_n} \in \mathbb{I}_k$. A identidade

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k,\ell,i_n}, \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,i_n} \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\} \\ &= \mathbb{P} \left\{ \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k,\ell,i_n} \mid \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\} \mathbb{P} \left\{ \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,i_n} \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\} \end{aligned}$$

é uma simples consequência do fato de que as probabilidades regulares subjacentes estão bem definidas e satisfazem

$$\mathbb{P} \left\{ \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k,\ell,i_n}, \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,i_n} \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\mathbb{P} \left\{ \eta_n^k = \tilde{i}_n^{k,\ell,i_n}, \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k \in V_\epsilon(\mathbf{b}_{n-1}^k) \right\}}{\mathbb{P} \left\{ \mathcal{A}_{n-1}^k \in V_\epsilon(\mathbf{b}_{n-1}^k) \right\}} \quad (\text{B.10})$$

e

$$\mathbb{P} \left\{ \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,i_n} \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\mathbb{P} \left\{ \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k \in V_\epsilon(\mathbf{b}_{n-1}^k) \right\}}{\mathbb{P} \left\{ \mathcal{A}_{n-1}^k \in V_\epsilon(\mathbf{b}_{n-1}^k) \right\}}, \quad (\text{B.11})$$

no qual $V_\epsilon(\mathbf{b}_{n-1}^k)$ é uma vizinhança de $\mathbf{b}_{n-1}^k \in \mathbb{S}_k^{n-1}$. Pelo Lema B.0.2, é suficiente para calcular $\mathbb{P} \left\{ \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,i_n} \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\}$. Pela própria definição,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \eta_n^k \in \mathbb{I}_{k,i_n} \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\} = \mathbb{P} \left\{ T_{j_{i_n}}^{k,i_n} < \min_{\lambda \in E_{i_n}} \{T_{j_\lambda}^{k,\lambda}\} \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\} \\ &= \mathbb{P} \left\{ T_{j_{i_n}}^{k,i_n} + t_{j_{i_n-1}}^{k,i_n} - t_{j_{i_n-1}}^{k,i_n} - t_{n-1}^k < \min_{\lambda \in E_{i_n}} \{T_{j_\lambda}^{k,\lambda} + t_{j_\lambda-1}^{k,\lambda} - t_{j_\lambda-1}^{k,\lambda} - t_{n-1}^k\} \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\} \\ &= \mathbb{P} \left\{ \Delta T_{j_{i_n}}^{k,i_n} - \Delta_n^{k,i_n} < \min_{\lambda \in E_{i_n}} \{\Delta T_{j_\lambda}^{k,\lambda} - \Delta_n^{k,\lambda}\} \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\} \\ &= \mathbb{P} \left\{ \left(\Delta T_{j_{i_n}}^{k,i_n} - \Delta_n^{k,i_n} - \min_{\lambda \in E_{i_n}} \{\Delta T_{j_\lambda}^{k,\lambda} - \Delta_n^{k,\lambda}\} \right) < 0 \mid \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\} \end{aligned}$$

Assim, por construção

$$\left\{ \Delta T_{j_1}^{k,1} \geq \Delta_n^{k,1}, \dots, \Delta T_{j_d}^{k,d} \geq \Delta_n^{k,d} \right\} \supset \left\{ \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \left(\Delta T_{j_{i_n}}^{k, i_n} - \Delta_n^{k, i_n} - \min_{\lambda \in E_{i_n}} \{ \Delta T_{j_\lambda}^{k, \lambda} - \Delta_n^{k, \lambda} \} \right) < 0 \middle| \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \right\} \\
&= \mathbb{P} \left\{ \left(\Delta T_{j_{i_n}}^{k, i_n} - \Delta_n^{k, i_n} - \min_{\lambda \in E_{i_n}} \{ \Delta T_{j_\lambda}^{k, \lambda} - \Delta_n^{k, \lambda} \} \right) < 0 \middle| \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, \bigcap_{\lambda=1}^d \{ \Delta T_{j_\lambda}^{k, \lambda} \geq \Delta_n^{k, \lambda} \} \right\} \\
&= \mathbb{P} \left\{ \left(\Delta T_1^{k, i_n} - \Delta_n^{k, i_n} - \min_{\lambda \in E_{i_n}} \{ \Delta T_1^{k, \lambda} - \Delta_n^{k, \lambda} \} \right) < 0 \middle| \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k, \bigcap_{\lambda=1}^d \{ \Delta T_1^{k, \lambda} \geq \Delta_n^{k, \lambda} \} \right\} \\
&= \frac{\mathbb{P} \left\{ \left(\Delta T_1^{k, i_n} - \Delta_n^{k, i_n} - \min_{\lambda \in E_{i_n}} \{ \Delta T_1^{k, \lambda} - \Delta_n^{k, \lambda} \} \right) < 0, \bigcap_{\lambda=1}^d \{ \Delta T_1^{k, \lambda} \geq \Delta_n^{k, \lambda} \} \right\}}{\prod_{\lambda=1}^d \mathbb{P} \{ \Delta T_1^{k, \lambda} \geq \Delta_n^{k, \lambda} \}} \\
&= \frac{\mathbb{P} \left\{ \left(\Delta T_{i_n}^{k, i_n} - \Delta_n^{k, i_n} - \min_{\lambda \in E_{i_n}} \{ \Delta T_{j_\lambda}^{k, \lambda} - \Delta_n^{k, \lambda} \} < 0 \right), \bigcap_{\lambda=1}^d \{ T_{j_\lambda}^{k, \lambda} \geq \Delta_n^{k, \lambda} \} \right\}}{\prod_{\lambda=1}^d \int_{\Delta_n^{k, \lambda}}^{\infty} f_{\Delta T_1^{k, 1}}(t) dt} \\
&= \frac{\mathbb{P} \left\{ \Delta T_{i_n}^{k, i_n} - \Delta_n^{k, i_n} - \min_{\lambda \in E_{i_n}} \{ \Delta T_{j_\lambda}^{k, \lambda} - \Delta_n^{k, \lambda} \} < 0 \right\}}{\prod_{\lambda=1}^d \int_{\Delta_n^{k, \lambda}}^{\infty} f_{\Delta T_1^{k, 1}}(t) dt} \\
&= \frac{\mathbb{P} \left\{ \Delta T_1^{k, i_n} - \Delta_n^{k, i_n} - \min_{\lambda \in E_{i_n}} \{ \Delta T_1^{k, \lambda} - \Delta_n^{k, \lambda} \} < 0 \right\}}{\prod_{\lambda=1}^d \int_{\Delta_n^{k, \lambda}}^{\infty} f_{\Delta T_1^{k, 1}}(t) dt}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \Delta T_1^{k, i_n} - \Delta_n^{k, i_n} - \min_{\lambda \in E_{i_n}} \{ \Delta T_1^{k, \lambda} - \Delta_n^{k, \lambda} \} < 0 \right\} \\
&= \int_{-\infty}^0 \int_{-s}^{\infty} f_{\Delta T_1^{k, 1}}(s+t+\Delta_n^{k, i_n}) f_{\min}(t) dt ds
\end{aligned} \tag{B.12}$$

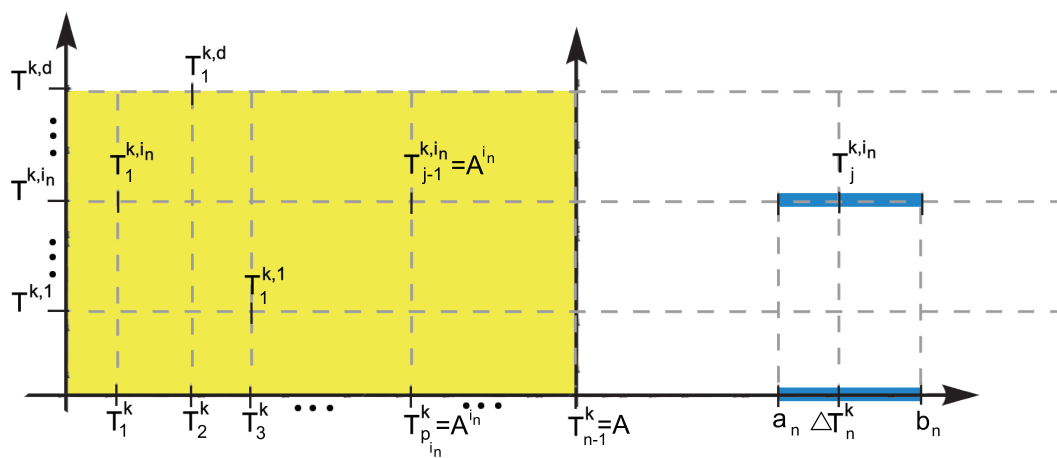
■

Demonstração do Teorema B.0.1: Fixamos $n \geq 1$, $\mathbf{b}_{n-1}^k \in \mathbb{S}_k^{n-1}$ e $a < b$. Pode-se verificar facilmente que

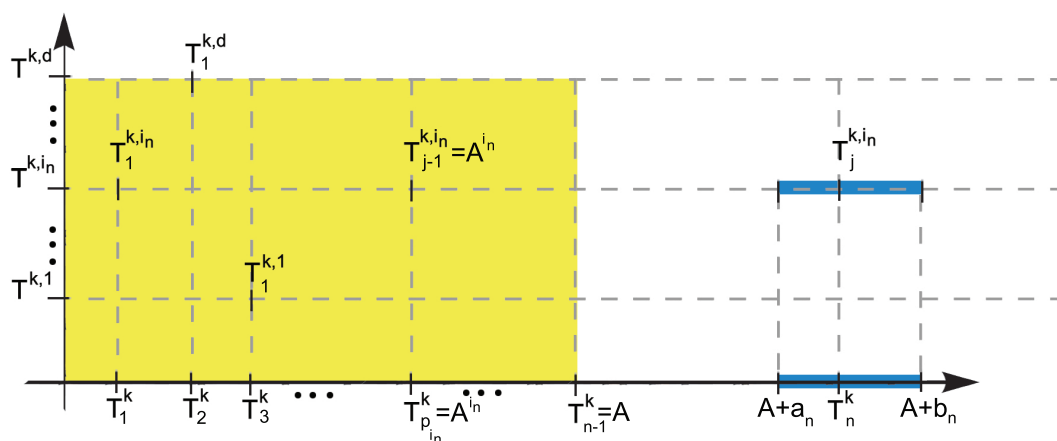
$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \{ \Delta T_n^k \in (a, b), \eta_n^k = \tilde{i}^{k, \ell, i_n} | \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \} &= \mathbb{P} \{ \Delta T_n^k \in (a, b) | \eta_n^k = \tilde{i}^{k, \ell, i_n}, \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \} \\
&\times \mathbb{P} \{ \eta_n^k = \tilde{i}^{k, \ell, i_n} | \mathcal{A}_{n-1}^k = \mathbf{b}_{n-1}^k \}
\end{aligned}$$

(veja por exemplo (B.10) e (B.11)). Agora, aplicamos Lema B.0.1 e (B.0.3) para concluir a prova. ■

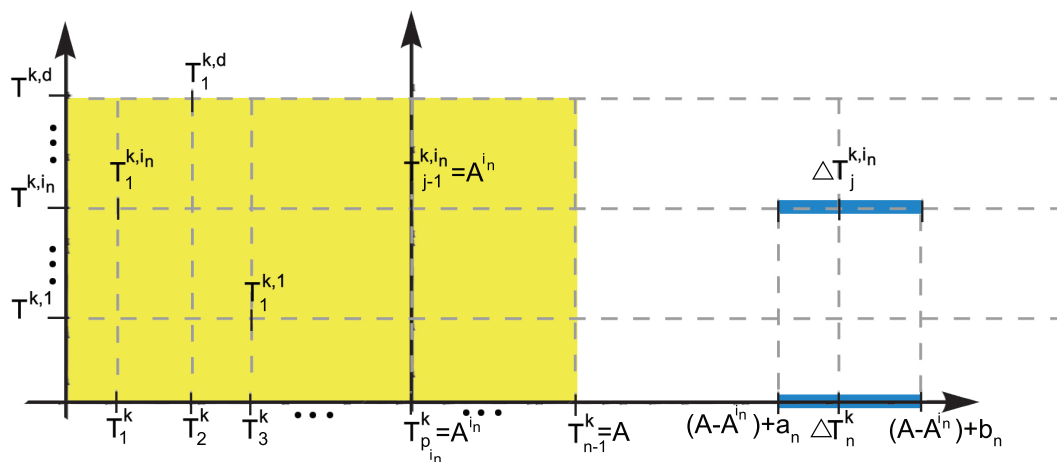
A figura a seguir ajuda a ilustrar o problema.



(a) Observe que nesse caso a origem se encontra em T_{n-1}^k .



(b) A origem foi alterada para o 0



(c) A origem foi deslocada para $T_{p_{i_n}}^k = T_{j-1}^{k,i_n}$

Figura B.1: Mudanças da origem, a parte em amarelo é dada, a em azul é região que queremos calcular a integral. Fonte: Elaborada pelo autor.

Índice Remissivo

Convergência Forte, 29, 57, 58
Convergência Fraca, 25, 28, 32, 58, 83
Euler-Maruyama, 5, 45, 57, 67, 94, 95,
114
Função Custo, 2, 7, 9, 80, 81
Martingale, 13, 24, 27, 28, 31, 32, 57, 61
Movimento Browniano, 2, 7, 16, 17, 21,
24–26, 44, 59, 78, 80, 92, 97, 98,
123
Movimento Browniano Fracionário, 78
Portfolio, 4, 5, 91, 93, 96–98, 103
Princípio da Programação Dinâmica(DPP),
2, 11, 12, 14, 35, 38, 54, 99, 104,
113
Spread, 91, 92, 97, 98

Referências Bibliográficas

- [1] AVELLANEDA, M., LEVYÉ, A., AND PARÁS, A. Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities. *Applied Mathematical Finance* 2, 2 (1995), 73–88.
- [2] BELLMAN, R. Dynamic programming and lagrange multipliers. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 42, 10 (1956), 767–769.
- [3] BERTSEKAS, D. P., AND SHREVE, S. E. *Stochastic optimal control: The discrete time case*, vol. 23. Academic Press New York, 1978.
- [4] BOUCHARD, B., AND TOUZI, N. Weak dynamic programming principle for viscosity solutions. *SIAM Journal on Control and Optimization* 49, 3 (2011), 948–962.
- [5] BRÉMAUD, P. *Point processes and queues: martingale dynamics*. Springer, 1981.
- [6] BURQ, Z. A., AND JONES, O. D. Simulation of brownian motion at first-passage times. *Mathematics and Computers in Simulation* 77, 1 (2008), 64–71.
- [7] CHERIDITO, P., SONER, H. M., TOUZI, N., AND VICTOIR, N. Second-order backward stochastic differential equations and fully nonlinear parabolic pdes. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 60, 7 (2007), 1081–1110.
- [8] COHEN, S., AND ELLIOTT, R. J. *Stochastic calculus and applications*. Birkhäuser, 2015.

- [9] COQUET, F., MÉMIN, J., AND SLOMINSKI, L. On weak convergence of filtrations. *Séminaire de probabilités de Strasbourg 35* (2001), 306–328.
- [10] CRANDALL, M. G. Condition d’unicité pour les solutions généralisées des équations de hamilton-jacobi du premier ordre. *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292* (1981), 183–186.
- [11] DAVIS, M. Martingale methods in stochastic control. *Stochastic Control Theory and Stochastic Differential Systems* (1979), 85–117.
- [12] DELLACHERIE, C., AND MEYER, P.-A. Probabilities and potential. b. theory of martingales. translated from the french by jp wilson. *North-Holland Math. Stud 72* (1982).
- [13] DELLACHERIE, C., MEYER, P.-A., AND YOR, M. Sur certaines propriétés des espaces de banach h_1 et bmo . In *Séminaire de Probabilités XII*. Springer, 1978, pp. 98–113.
- [14] DELONG, L. *Backward stochastic differential equations with jumps and their actuarial and financial applications*, vol. 201. Springer, 2013.
- [15] EKREN, I., KELLER, C., TOUZI, N., ZHANG, J., ET AL. On viscosity solutions of path dependent PDEs. *The Annals of Probability 42*, 1 (2014), 204–236.
- [16] EL KAROUI, N. Les aspects probabilistes du contrôle stochastique. *Ecole d’Eté de Probabilités de Saint-Flour IX-1979* (1981), 73–238.
- [17] EL KAROUI, N., PENG, S., AND QUENEZ, M. C. Backward stochastic differential equations in finance. *Mathematical finance 7*, 1 (1997), 1–71.
- [18] ELLIOTT, ROBERT J.; VAN DER HOEK *, J. M. W. P. Pairs trading. *Quantitative Finance 5* (06 2005), 271–276.
- [19] ELLIOTT, R. J. The optimal control of a stochastic system. *SIAM Journal on Control and Optimization 15*, 5 (1977), 756–778.
- [20] FEI, W. Y., XIA, D. F., AND ZHANG, S. G. Solutions to bsdes driven by both standard and fractional brownian motions. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series 29*, 2 (2013), 329–354.

- [21] FLEMING, W. H., AND SONER, H. M. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, vol. 25. Springer Science & Business Media, 2006.
- [22] GÄNSSLER, P., AND STUTE, W. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Verlag, 2013.
- [23] GATEV, E., GOETZMANN, W. N., AND ROUWENHORST, K. G. Pairs trading: Performance of a relative-value arbitrage rule. *Review of Financial Studies* 19, 3 (2006), 797–827.
- [24] HAMADÈNE, S., AND POPIER, A. Lp-solutions for reflected backward stochastic differential equations. *Stochastics and Dynamics* 12, 02 (2012), 1150016.
- [25] HE, S.-W., AND YAN, J.-A. *Semimartingale theory and stochastic calculus*. Taylor & Francis, 1992.
- [26] HU, M., JI, S., PENG, S., AND SONG, Y. Backward stochastic differential equations driven by g-brownian motion. *Stochastic Processes and their Applications* 124, 1 (2014), 759–784.
- [27] HU, Y. *Integral transformations and anticipative calculus for fractional Brownian motions*. No. 825. American Mathematical Soc., 2005.
- [28] HUCK, N., AND AFAWUBO, K. Pairs trading and selection methods: is cointegration superior? *Applied Economics* 47, 6 (2015), 599–613.
- [29] JACOD, J., AND SKOROHOD, A. V. Jumping filtrations and martingales with finite variation. In *Séminaire de Probabilités XXVIII*. Springer, 1994, pp. 21–35.
- [30] KHOSHNEVISAN, D., LEWIS, T. M., ET AL. Stochastic calculus for brownian motion on a brownian fracture. *The Annals of Applied Probability* 9, 3 (1999), 629–667.
- [31] LAMBERTON, D., ET AL. Optimal stopping and american options. *Ljubljana Summer School on Financial Mathematics* (2009).
- [32] LEO, D., AND OHASHI, A. Weak approximations for wiener functionals. *The Annals of Applied Probability* 23, 4 (2013), 1660–1691.

- [33] LEO, D., OHASHI, A., AND RUSSO, F. Discrete-type approximations for non-markovian optimal stopping problems: Part i.
- [34] LEO, D., OHASHI, A., AND SIMAS, A. Weak functional itô calculus and applications. *Preprint* (2014).
- [35] LIPTSER, R., AND SHIRYAEV, A. *A Statistics of Random Process*. Springer-Verlag, 1978.
- [36] LYONS, T. J. Uncertain volatility and the risk-free synthesis of derivatives. *Applied mathematical finance* 2, 2 (1995), 117–133.
- [37] MÉMIN, J. Stability of doob-meyer decomposition under extended convergence. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica* 19, 2 (2003), 177–190.
- [38] MÉTIVIER, M. *Semimartingales: a course on stochastic processes*, vol. 2. Walter de Gruyter, 1982.
- [39] MEYER, P.-A. Convergence faible de processus, d’après mokobodzki. In *Séminaire de Probabilités XI*. Springer, 1977, pp. 109–119.
- [40] MISHURA, Y. *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes*, vol. 1929. Springer Science & Business Media, 2008.
- [41] NEUFELD, A., AND NUTZ, M. Superreplication under volatility uncertainty for measurable claims. *Electron. J. Probab* 18, 48 (2013), 1–14.
- [42] NISIO, M. *Stochastic Control Theory: Dynamic Programming Principle*, vol. 72. Springer, 2014.
- [43] NUTZ, M., ET AL. A quasi-sure approach to the control of non-markovian stochastic differential equations. *Electron. J. Probab* 17, 23 (2012), 1–23.
- [44] NUTZ, M., AND VAN HANDEL, R. Constructing sublinear expectations on path space. *Stochastic processes and their applications* 123, 8 (2013), 3100–3121.
- [45] OHASHI, A., LEÃO, D., AND SIMAS, A. B. Weak functional itô calculus and applications, revised version. *arXiv preprint arXiv:1408.1423* (2014).

- [46] PARDOUX, E., AND PENG, S. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems & Control Letters* 14, 1 (1990), 55–61.
- [47] POSSAMAÏ, D., ROYER, G., AND TOUZI, N. On the robust superhedging of measurable claims. *Electronic Communications in Probability* 18, 95 (2013), 1–13.
- [48] PROTTER, P. E. Stochastic differential equations. In *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, 2005, pp. 249–361.
- [49] ROGERS, C. A. *Analytic sets*. Academic Press, 1980.
- [50] ROGERS, L. C. G., AND WILLIAMS, D. *Diffusions, Markov processes and martingales: Volume 2, Itô calculus*, vol. 2. Cambridge university press, 2000.
- [51] RUDIN, W. Functional analysis. 1991. *Internat. Ser. Pure Appl. Math* (1991).
- [52] SCHULZE, B. Doob, jl: Classical potential theory and its probabilistic counterpart. *grundlagen der mathematischen wissenschaften*, bd. 262. springer-verlag, berlin—heidelberg—new york—tokyo 1984, 846 s., dm 168. *Biometrical Journal* 28, 3 (1986), 336–336.
- [53] SIQUEIRA DE CASTRO, V. *Métodos de simulação Monte Carlo para aproximação de estratégias de hedging*. PhD thesis, Universidade Estadual de São Paulo, Instituto Ciências da Computação e Matemática Computacional, Curso de Pós-Graduação em Matemática Computacional, São Carlos, 2015.
- [54] SONER, H. M., TOUZI, N., AND ZHANG, J. Wellposedness of second order backward sdes. *Probability Theory and Related Fields* 153, 1-2 (2012), 149–190.
- [55] SRIVASTAVA, S. A course on borel sets. number 180 in graduate texts in mathematics, 1998.
- [56] TANG, S. General linear quadratic optimal stochastic control problems with random coefficients: linear stochastic hamilton systems and backward stochastic riccati equations. *SIAM journal on control and optimization* 42, 1 (2003), 53–75.

- [57] TOUZI, N. *Optimal stochastic control, stochastic target problems, and backward SDE*, vol. 29. Springer Science & Business Media, 2012.
- [58] UHLENBECK, G. E., AND ORNSTEIN, L. S. On the theory of the brownian motion. *Physical review* 36, 5 (1930), 823.
- [59] VIDYAMURTHY, G. *Pairs Trading: quantitative methods and analysis*, vol. 217. John Wiley & Sons, 2004.
- [60] YONG, J., AND ZHOU, X. Y. *Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations*, vol. 43. Springer Science & Business Media, 1999.