Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

ÁLGEBRAS DE HOPF, OBJETOS GALOIS E IDENTIDADES POLINOMIAIS

Abel Gomes de Oliveira Júnior

Orientador: Prof. Dr. Waldeck Schützer

Fevereiro de 2018

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

ÁLGEBRAS DE HOPF, OBJETOS GALOIS E IDENTIDADES POLINOMIAIS

Abel Gomes de Oliveira Júnior

Orientador: Prof. Dr. Waldeck Schützer

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro de 2018

Gomes de Oliveira Júnior, Abel

Álgebras de Hopf, Objetos Galois e Identidades Polinomiais / Abel Gomes de Oliveira Júnior. -- 2018.
90 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador: Waldeck Shützer
Banca examinadora: Waldeck Shützer, Eliezer Batista, Humberto Luiz Talpo
Bibliografia

1. Álgebras de Hopf. 2. Objetos Galois. 3. Identidades Polinomiais. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).
DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)
Bibliotecário(a) Responsável: Ronildo Santos Prado – CRB/8 7325

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Abel Gomes de Oliveira Júnior, realizada em 21/02/2018:

Waldeck Schutzer

Prof. Dr. Waldeck Schutzer
UFSCar

Eliezer Batista

Prof. Dr. Eliezer Batista
UFSC

Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo
UFSCar

Dedico esta dissertação de mestrado
aos meus pais que estão a celebrar
seu jubileu de ouro matrimonial.

Agradecimentos

Agradeço

aos meus pais, Abel e Emília, pelo apoio incondicional e por toda a confiança em todas as minhas decisões,

aos meus sete irmãos e irmãs por todo o carinho e cuidado que sempre tiveram com seu irmão mais novo,

à minha companheira Beatriz, que compartilha meus dias, alegrias e preocupações desde o início do mestrado por tantos momentos de felicidade e especialmente por dividir comigo as horas de estudo lado a lado.

Agradeço os meus amigos e colegas, tanto aos de longa data quanto aos mais recentes, com os quais tenho compartilhado nesses anos tantos momentos de aprendizagem, acadêmica ou não.

Aos professores tanto da graduação quanto do mestrado que me ajudam a descobrir a cada dia o quanto ainda tenho que aprender.

Agradeço também, é claro, ao Prof. Waldeck Schützer por todo o seu tempo dedicado a me orientar tanto no final da graduação quanto neste mestrado e a todos os membros da banca que se disponibilizaram a ler e corrigir este trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro nestes dois anos.

Resumo

Nosso objetivo é estudar as álgebras de Hopf e os objetos Galois sob o ponto de vista das identidades polinomiais, mais especificamente, quando estes objetos são distinguidos a menos de isomorfismos, por meio das H-identidades polinomiais que satisfazem. Para isso seguimos o programa iniciado por C. Kassel [17], no qual ele define o conceito de H-identidade polinomial para um H-comódulo álgebra, estabelece algumas propriedades dos respectivos T-ideais e utiliza classificações de objetos Galois, como a feita por Bichon [5] para as álgebras de Hopf monomiais do tipo I, para encontrar identidades polinomiais que distinguem tais objetos a menos de isomorfismo. Nesse caso, a existência de um homomorfismo de álgebras cujo núcleo coincide com o T-ideal das H-identidades é o principal fator determinante.

Palavras-chave: Álgebras de Hopf, Objetos Galois, Identidades Polinomiais.

Abstract

Our main goal is to study Hopf algebras and Galois objects, from the point of view of the polynomial identities, more precisely how these objects are distinguished by their polynomial H-identities. To this end we follow the program started by C. Kassel [17]. There he defines polynomial H-identities to H-comodule algebras, gives some properties of these T-ideals and uses Galois objects classifications, as made by Bichon [5] for the monomial Hopf algebras of type I, to find polynomial identities that distinguish those objects. In that case, the existence of an algebra homomorphism such that the kernel coincides with the T-ideal of the H-identities is crucial.

Key-words: Hopf Algebras, Galois Objects, Polynomial Identities.

Sumário

Introdução

As álgebras de Hopf, assim chamadas em honra a Heinz Hopf por seu trabalho pioneiro [14] em 1941, foram usadas com esse nome pela primeira vez por Armand Borel [7] em 1953.

No trabalho de Hopf, são introduzidos os, posteriormente chamados, H-espaços. Estes caracterizam-se por possuírem uma operação produto e uma estrutura adicional de H em $H \otimes H$, com condições de compatibilidade, que Hopf observou impor fortes restrições na estrutura de H, a partir das quais ele deduziu vários resultados topológicos.

Uma visão mais algébrica das álgebras de Hopf surgiu algum tempo depois, notavelmente no livro [8] de Chase e Sweedler (1969). Já sua expansão e popularização ocorreu nas décadas seguintes, com as aplicações da teoria obtidas por Drinfeld.

Já a teoria de identidades polinomiais (PI), apesar de ter sua abordagem moderna dada por Kaplansky em 1948, tem seu primeiro artigo publicado por Dehn em 1922 e desde então tem sido generalizada e atualmente boa parte da investigação se dá sobre o conceito de polinômios centrais. †

Usando uma álgebra de Hopf H, pode-se definir uma H-identidade polinomial (HPI) e é essa interseção que dá origem a esse trabalho.

Admitimos do leitor conhecimentos sobre as estruturas algébricas básicas (monoides, grupos, anéis, corpos, módulos, espaços vetoriais), de modo que apenas uma ou outra definição ou resultado envolvendo esses conceitos é colocado, mais como uma recordação do que como uma primeira visão do assunto.

Começamos com um capítulo de conceitos preliminares que versa basicamente sobre objetos dados por propriedades universais.

O segundo capítulo traz estruturas duais às álgebras e módulos: coálgebras e comódulos, respectivamente, para que no capítulo seguinte possamos introduzir o conceito de álgebras de Hopf propriamente.

O capítulo quatro traz os conceitos de ação e coação de uma álgebra de Hopf em uma álgebra e serão estruturas fundamentais para os resultados finais do trabalho.

O próximo capítulo traz dois conceitos distintos. O primeiro é o produto torcido que, dada uma álgebra, cria uma estrutura alernativa de produto. O outro conceito são os objetos Galois. Esses talvez mereçam muito mais espaço do que receberam, dada sua importância e extensão, mas por questão de foco, procuramos nos ater ao essencial. Por exemplo, o leitor que conheça as "extensões fendidas" irá notar que elas permeiam toda a seção mas sem abordá-las diretamente.

O sexto capítulo é o núcleo do trabalho. Começamos com uma introdução ingênua à teoria das identidades polinomiais sem o objetivo de dar uma visão detalhada do assunto mas tão somente motivar a seção seguinte. Nesta são definidas as H-identidades

† Para mais sobre essa parte histórica veja os artigos "Polynomial Identities" do Amitsur [2] e "The beginnings of the theory of Hopf algebras" de Andruskiewitsch e Santos [3].

polinomiais e apresentadas algumas das suas propriedades. A última seção encontra um método bastante útil, apesar de particular, para encontrar H-identidades polinomiais de uma álgebra.

O último capítulo deste trabalho traz dois exemplos nos quais podemos aplicar os resultados do capítulo anterior. O primeiro deles toma H como a álgebra de Taft e o segundo como a álgebra de Hopf Monomial do tipo I. Para esse último, além do artigo [17] do Christian Kassel, usamos fortemente o artigo [5] do Julien Bichon que classifica os objetos Galois para álgebras monomiais (todas, de I a VI).

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Em todo este texto k indica um corpo arbitrário, salvo menção contrária. Sempre que surgirem k-espaços vetoriais, a menos que se diga o contrário, estes serão chamados de espaços vetoriais. Da mesma forma, os termos linear e bilinear serão empregados no lugar de k-linear e k-bilinear, respectivamente. A unidade† 1_k do corpo k será simplesmente indicada por 1.

As principais referências para este capítulo são os livros [12], [15] e [16].

Lembraremos brevemente a seguir de alguns objetos dados por propriedade universal que serão importantes neste texto.

O Produto Tensorial

Definição 1.1 (Produto Tensorial)**.** Sejam V e W espaços vetoriais. Dizemos que (T, φ), no qual T é um espaço vetorial e $\varphi\colon V \times W \longrightarrow T$ é uma aplicação bilinear, é um *produto tensorial* entre V e W (sobre k) se para todo espaço vetorial Z e toda $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ bilinear, existe única $\bar{f}\colon T \longrightarrow Z$ linear tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, "\bar{f}"] \\ V \times W \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Lembremos que, como toda definição dada por propriedade universal, o produto tensorial é único a menos de isomorfismo, mas é necessário construir um modelo de produto tensorial. Essa construção (clássica) pode ser encontrada, por exemplo, em [12, Capítulo 10] ou [15, Capítulo IV] e resumidamente pode ser feita da seguinte forma:

Seja X um conjunto. O conjunto $k^X = \{f\colon X \longrightarrow k\}$ é um espaço vetorial com operações dadas por

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para todo $f, g \in k^X$ e $x \in X$,
- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ para todo $\lambda \in k$, $f \in k^X$ e $x \in X$.

† O termo "unidade" é ambíguo e pode fazer referência tanto ao elemento neutro da multiplicação quanto a um elemento invertível em um anel. Neste texto o termo "unidade" sempre fará referência ao elemento neutro da multiplicação.

Considere $kX = \{f\colon X \longrightarrow k \mid \operatorname{supp}(f) \text{ é finito}\}$, com $\operatorname{supp}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. kX é um subespaço vetorial de k^X.

Além disso, dados V e W espaços vetoriais, se $X = V \times W$ (produto cartesiano de conjuntos) então $kX = k(V \times W)$ é um espaço vetorial e tem como base

$$B = \left\{e_{(v,w)},\ v \in V,\ w \in W\right\} \equiv \{(v,w),\ v \in V,\ w \in W\},$$

com $e_x\colon X \longrightarrow k$ dada por $e_x(y) = \delta_{xy}$ † , para todo $x, y \in X$.

Por sua vez considere U o subespaço vetorial de $k(V \times W)$ gerado pela união dos seguintes conjuntos:

$$U_1 = \{(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w),\ v_1, v_2 \in V,\ w \in W\},$$

$$U_2 = \{(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2),\ v \in V,\ w_1, w_2 \in W\},$$

$$U_3 = \{\lambda(v, w) - (\lambda v, w),\ \lambda \in k,\ v, w \in W\},$$

$$U_4 = \{\lambda(v, w) - (v, \lambda w),\ \lambda \in k,\ v, w \in W\}.$$

Podemos com isso definir um conjunto (de classes laterais)

$$V \otimes_k W := \frac{k(V \times W)}{U}.$$

Este possui uma única estrutura de espaço vetorial tal que $\pi\colon k(V \times W) \longrightarrow V \otimes_k W$ é linear.††

É corriqueiro mostrar que $V \otimes_k W$ é um produto tensorial. Como de modo geral usaremos o produto tensorial sobre k, omitimos o índice k e denotamos simplesmente $V \otimes W$. A seguir colocamos alguns resultados relacionados a esse espaço:

Dados $v \in V$ e $w \in W$ denotaremos a projeção $\pi(e_{(v,w)}) \equiv \pi(v, w)$ (com π a projeção no espaço quociente) por $v \otimes w$. Os tensores dessa forma são chamados canônicos, porém note que os elementos de $V \otimes W$ em geral não são canônicos e sim combinações lineares de tensores canônicos, por exemplo dado $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de $V = \mathbb{R}^2$, então $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ não pode ser escrito da forma $v \otimes w$ para nenhum $v, w \in \mathbb{R}^2$. (Ao tentar fazê-lo chegamos a um sistema impossível).

Da própria definição do subespaço U e do fato de π ser linear seguem de imediato as seguintes propriedades de $V \otimes W$:

1. $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$, para todo $v_1, v_2 \in V$ e $w \in W$,

2. $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$, para todo $v \in V$ e $w_1, w_2 \in W$,

3. $(\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w) = v \otimes (\lambda w)$, para todo $v \in V$, $w \in W$ e $\lambda \in k$.

---

† O delta de Kronecker:

$$\delta_{xy} := \begin{cases} 1, & \text{se } y = x, \\ 0, & \text{se } y \neq x. \end{cases}$$

para todo $x, y \in X$.

†† Pela seguinte proposição encontrada em [12, 10.2 Prop. 3] "Sejam V um espaço vetorial, U um subespaço vetorial de V e $\pi\colon V \longrightarrow V/U$ uma aplicação dada por $\pi(v) = v + U$. Então existe única estrutura de espaço vetorial em V/U tal que π é linear."

Proposição 1.2. *[15, Corolário 5.3] Sejam V_1, V_2, W_1 e W_2 espaços vetoriais. Se $f_1\colon V_1 \longrightarrow W_1$ e $f_2\colon V_2 \longrightarrow W_2$ são lineares então existe única $g\colon V_1 \otimes V_2 \longrightarrow W_1 \otimes W_2$ linear tal que $g(v_1 \otimes v_2) = f_1(v_1) \otimes f_2(v_2)$ para todo $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$.*

Denotaremos a (única) aplicação g da proposição anterior por $f_1 \otimes f_2$.

Lema 1.3. *[15, Teorema 5.11] Sejam V e W espaços vetoriais e $v_i \in V$, $w_i \in W$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ tais que*

$$v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \ldots + v_n \otimes w_n = 0.$$

Se $w_1, \ldots, w_n$ são linearmente independentes então $v_1 = \ldots = v_n = 0$.

Proposição 1.4. *[15, Corolário 5.12] Sejam V e W espaços vetoriais. Se $B = \{v_i,\ i \in I\}$ e $C = \{w_j,\ j \in J\}$ são bases de V e W, respectivamente, então $\{v_i \otimes w_j,\ i \in I,\ j \in J\}$ é base de $V \otimes W$.*

Dados V, V_1, V_2 e W espaços vetoriais, introduzimos as seguintes notações:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(V,W) &:= \{\alpha\colon V \longrightarrow W,\ \alpha \text{ linear}\}\\
\mathrm{Bil}(V_1,V_2;W) &:= \{\beta\colon V_1 \times V_2 \longrightarrow W,\ \beta \text{ bilinear}\}\\
\mathrm{Mult}(V,W,n) &:= \{\beta\colon \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n\text{-vezes}} \longrightarrow W,\ \beta\ n\text{-linear}\}
\end{aligned}$$

A próxima proposição relaciona os operadores Bil e Hom:

Proposição 1.5. *[12, 10.4 Teorema 10] Sejam V_1, V_2 e W espaços vetoriais e $(V_1 \otimes V_2, \varphi)$ o produto tensorial entre V_1 e V_2. Então*

$$\mathrm{Bil}(V_1, V_2; W) \cong \mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, W).$$

Proposição 1.6. *[12, 10.4 Proposição 20] Se $(V \otimes W, \varphi_1)$ e $(W \otimes V, \varphi_2)$ são produtos tensoriais entre os espaços vetoriais V e W então*

$$V \otimes W \cong W \otimes V.$$

A partir daqui, em todo o texto, τ irá denotar o isomorfismo da poposição anterior, a saber, $\tau\colon V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$ dado por $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$, para todo $v \in V$ e $w \in W$.

Podemos estender indutivamente o conceito de produto tensorial entre vários espaços vetoriais. No caso $n = 3$, dados V_1, V_2 e V_3 espaços vetoriais obtemos $((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3, \varphi_1)$ e $(V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3), \varphi_2)$, porém estes espaços vetoriais são canonicamente isomorfos, como afirma a seguinte proposição:

Proposição 1.7. *[12, 10.4 Corolário 15] Sejam V_1, V_2 e V_3 espaços vetoriais. Se $((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3, \varphi_1)$ e $(V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3), \varphi_2)$ são produtos tensoriais então*

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3).$$

Em virtude da associatividade expressa por essa proposição faz sentido introduzir a seguinte notação para o espaço vetorial associado ao tensor do espaço vetorial V n vezes $(n \geq 0)$:

$$V^{\otimes n} = \begin{cases} k, & \text{se } n = 0,\\ \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{n\text{-vezes}}, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Proposição 1.8. *[12, 10.4 Exemplo 7] Seja V um espaço vetorial. Se $(k \otimes V, \varphi)$ é produto tensorial então*

$$k \otimes V \cong V \cong V \otimes k.$$

Lembrar que dados dois espaços vetoriais W_1 e W_2 a soma direta $W_1 \oplus W_2$ é um espaço vetorial, motiva a seguinte proposição:

Proposição 1.9. *[12, 10.4 Teorema 17] Sejam V, W_1 e W_2 espaços vetoriais. Se $((V \otimes (W_1 \oplus W_2)), \varphi_1)$ e $((V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2), \varphi_2)$ são produtos tensoriais então*

$$V \otimes (W_1 \oplus W_2) \cong (V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2).$$

Definição 1.10 (k-álgebra)**.** Uma *k-álgebra* A é um anel A com unidade junto com um homomorfismo de anéis $\phi\colon k \longrightarrow A$ que leva 1 em 1_A tal que $\mathrm{Im}(\phi) \subseteq Z(A)$, o centro de A.

Proposição 1.11. *[12, Proposição 10.21] Dadas k-álgebras A e B, $A \otimes B$ com multiplicação dada por*

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & (A \otimes B) \times (A \otimes B) & \longrightarrow & A \otimes B \\ & (a \otimes b, a' \otimes b') & \longmapsto & aa' \otimes bb' \end{array}$$

e unidade $1_A \otimes 1_B$ é uma álgebra, chamada produto tensorial das álgebras A e B.

A Álgebra Associativa Livre

A definição de objeto livre aplicado à categoria das álgebras nos da a seguinte definição:

Definição 1.12 (Álgebra Associativa Livre)**.** Sejam A uma álgebra, X um conjunto e $i\colon X \longrightarrow A$ uma função. Dizemos que A é uma *álgebra associativa livre em X* se, para toda álgebra B e $f\colon X \longrightarrow B$ função, existe único homomorfismo de álgebras $\bar{f}\colon A \longrightarrow B$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "\bar{f}"] \\ X \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & B \end{tikzcd}$$

Sendo dada por propriedade universal, uma álgebra associativa livre em X é única a menos de isomorfismo. Um modelo pode ser encontrado em [16, Capítulo I] como a seguir:

Seja X um conjunto. Considere o espaço vetorial $k\langle X\rangle$ com base dada por todas as palavras $x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}$ no alfabeto X, incluindo a palavra vazia $\varnothing$. A concatenação de palavras define uma multiplicação (associativa) em $k\langle X\rangle$ dada por

$$(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})(x_{i_{p+1}}, \ldots, x_{i_n}) = x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}x_{i_{p+1}}, \ldots, x_{i_n}$$

e a unidade é dada pela palavra vazia $1 = \varnothing$. Considere $A = k\langle X\rangle$ e $i\colon X \longrightarrow k\langle X\rangle$ a inclusão. $(k\langle X\rangle, i)$ é uma álgebra associativa livre em X.

Note que $k\langle X\rangle$ nada mais é que do que a álgebra dos polinômios em variáveis não comutativas de X. Assim, por exemplo, se $X = \{x_1, x_2\}$, $x_1x_2 - x_2x_1$ é um elemento de $k\langle X\rangle$, mas não é o polinômio nulo.

A Álgebra Tensorial

Definição 1.13 (Álgebra Tensorial)**.** Seja V um espaço vetorial. Dizemos que $(T(V), i)$, no qual $T(V)$ é uma álgebra e $i\colon V \longrightarrow T(V)$ linear, é uma *álgebra tensorial de V* se para toda álgebra A e toda aplicação $f\colon V \longrightarrow A$ linear, existe único $\bar{f}\colon T(V) \longrightarrow A$ homomorfismo de álgebras tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} & T(V) \arrow[d, "\bar{f}"] \\ V \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Sendo dada por propriedade universal, uma álgebra tensorial de um espaço vetorial V é única a menos de isomorfismo. Um modelo pode ser encontrado em [16, Capítulo II] como a seguir:

Seja V um espaço vetorial. Defina

$$\begin{aligned} T^0(V) &= k, \\ T^1(V) &= V, \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ T^n(V) &= V^{\otimes n}. \end{aligned}$$

Denote

$$T(V) = \bigoplus_{n\geq 0} T^n(V)$$

e defina $i\colon V \longrightarrow T(V)$ por $i(v) = v \in T^1(V)$ para todo $v \in V$. Dados $x = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in T^n(V)$ e $y = w_1 \otimes \ldots \otimes w_r \in T^r(V)$ defina a multiplicação em $T(V)$ por

$$x \cdot y = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_r \in T^{n+r}(V)$$

e estendendo por linearidade. $T(V)$ é uma álgebra associativa e unitária com essa multiplicaçao e tomando $1_k \in T^0(V)$ como unidade. $(T(V), i)$ é a álgebra tensorial de V. É comum denotar $x \cdot y$ por $x \otimes y$, já que existe um isomorfismo canônico $T^n(V) \otimes T^r(V) \cong T^{n+r}(V)$.

Proposição 1.14. *[16, Proposição II.5.1] Seja V um espaço vetorial e X uma base de V. Então $T(V) \cong k\langle X\rangle$ (como álgebras).*

A Álgebra Simétrica

Definição 1.15 (Álgebra Simétrica)**.** Seja V um espaço vetorial. Dizemos que $(S(V), i)$, na qual $S(V)$ é uma álgebra e $i\colon V \longrightarrow T(V)$ linear, é uma *álgebra simétrica de V* se, para toda álgebra A e toda $f\colon V \longrightarrow A$ linear tal que $f(x)f(y) = f(y)f(x)$, para todo $x, y \in V$, existe única $\bar{f}\colon S(V) \longrightarrow A$ homomorfismo de álgebras tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} & S(V) \arrow[dd, "\bar{f}"] \\ V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & A \end{tikzcd}$$

Sendo dada por propriedade universal, uma álgebra simétrica de um espaço vetorial V é única a menos de isomorfismo. Um modelo pode ser encontrado em [16, Capítulo II] como a seguir:

Seja V um espaço vetorial. Defina $S(V) = T(V)/I(V)$, com $I(V)$ o ideal bilateral gerado por todos os elementos da forma $x \otimes y - y \otimes x$, com $x, y \in V$.

Proposição 1.16. *[16, Proposição II.5.2] Seja V um espaço vetorial e X uma base de V. Então $S(V) \cong k[X]$ (como álgebras).*

Capítulo 2

Coálgebras e Comódulos

Neste capítulo, nosso objetivo é introduzir as coálgebras e os comódulos: Definições, exemplos, homomorfismos e principais resultados. Estas juntamente com as álgebras e os módulos são o alicerce para o que serão as álgebras de Hopf.

As principais referências para este capítulo são os livros [10], [16] e [20].

2.1 Álgebras

A fim de facilitar a introdução do conceito de coálgebra, convém revisitar a definição de álgebra. Por isso, trazemos a seguir, uma definição alternativa usando tensores e diagramas:

Definição 2.1.1 (k-álgebra)**.** Uma *k-álgebra (associativa com unidade)* é uma tripla (A, μ, η) em que A é um espaço vetorial e $\mu\colon A \otimes A \longrightarrow A$ e $\eta\colon k \longrightarrow A$ são aplicações lineares tais que os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes \mathrm{id}"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dd, "\mu"] & \\ k \otimes A \arrow[ur, "\eta \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\sim"'] & & A \otimes k \arrow[ul, "\mathrm{id} \otimes \eta"'] \arrow[dl, "\sim"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

A comutatividade do primeiro diagrama significa que, para todo $a, b, c \in A$, $(ab)c = a(bc)$. Já o segundo garante que, para todo $a \in A$ e para todo $\lambda \in k$, $\lambda a = (\lambda 1_A)a$ e $a\lambda = a(\lambda 1_A)$.

Na definição anterior, a comutatividade do primeiro diagrama é chamada associatividade. Além disso, o símbolo $\sim$ irá sempre representar um dos isomorfismos canônicos das Proposições 1.7, 1.8 e 1.9.

Como em geral usaremos k-álgebras a menos que se diga o contrário iremos chamá-las simplesmente de álgebras.

Esta nova versão da definição de álgebra é equivalente à definição usual de álgebra (associativa com unidade) como em 1.10. De fato, admitindo a definição acima, defina o produto $a \cdot b = \mu(a \otimes b)$ e $1_A = \eta(1)$. A linearidade de μ e η e os diagramas irão garantir o resultado. Por outro lado, admitindo a definição usual, defina $\mu(a \otimes b) = a \cdot b$ e $\eta = \phi$. As propriedades da definição clássica de álgebra com o fato de ϕ ser um homomorfismo garantem a linearidade de μ e η bem como a comutatividade dos diagramas.

Com isso, dada uma álgebra (A, μ, η), iremos frequentemente denotar $\mu(a \otimes b) = ab$ (notação clássica da multiplicação) e $\eta(1) = 1_A$ (notação clássica da unidade).

Obervamos, finalmente, que quando necessário para evitar confusão, podemos fixar o símbolo da álgebra na multiplicação ou unidade: $\mu_A, \mu_B, \eta_A, \eta_B, \dots$

Definição 2.1.2 (Álgebra Comutativa)**.** Uma álgebra (A, μ, η) é dita *comutativa* se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[ur, "\tau"] \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd}$$

em que τ é a aplicação definida na proposição 1.6. Note que a comutatividade do diagrama acima diz que $ab = ba$ para todo $a, b \in A$.

Definição 2.1.3 (Homomorfismo de Álgebras)**.** Sejam (A, μ_A, η_A) e (B, μ_B, η_B) álgebras e $f\colon A \longrightarrow B$ linear. Dizemos que f é um *homomorfismo de álgebras* se os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ k \arrow[ur, "\eta_A"] \arrow[r, "\eta_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} f(a_1a_2) &= f(a_1)f(a_2) \\ f(1_A) &= 1_B \end{aligned}$$

para todos $a_1, a_2 \in A$.

Além dos exemplos comuns de álgebras como o próprio corpo k, álgebras de matrizes, de polinômios, tensorial, simétrica, etc., apresentamos alguns outros para ilustrar as definições acima.

Exemplo 2.1.4. Seja (A, μ, η) uma álgebra. Defina $\mu^{op} = \mu \circ \tau$, ou seja, $\mu^{op}(x \otimes y) = yx$, para todo $x, y \in A$. Então (A, μ^{op}, η) é uma álgebra, chamada *álgebra oposta de A*.

Exemplo 2.1.5. Seja M um monoide e kM o espaço vetorial com base $\{m \mid m \in M\}$ cujos elementos são combinações lineares finitas do tipo

$$\sum_{m \in M} \alpha_m m$$

em que $(\alpha_m)_{m \in M}$ é uma família de elementos em k quase todos nulos. kM é uma álgebra com multiplicação dada pela operação do monoide e estendida por linearidade. Explicitamente, se $x = \sum_{m \in M} \alpha_m m$ e $y = \sum_{n \in M} \beta_n n$ então $xy = \sum_{p \in M} \gamma_p p$, em que $\gamma_p = \sum_{mn=p} \alpha_m \beta_n$. A unidade de kM é o elemento neutro do monoide. Aqui interessa-nos mais o caso particular kG, em que G é um grupo kG é dita *álgebra de grupo*.

2.2 Coálgebras

A noção de coálgebra é motivada pela ideia da dualização das aplicações de definem a estrutura de uma álgebra, revertendo as flechas. A relação entre as duas estruturas ficará mais clara na próxima seção.

Definição 2.2.1 (k-coálgebra)**.** Uma *k-coálgebra (coassociativa com counidade)* é uma tripla (C, Δ, ε) em que C é um espaço vetorial, $\Delta\colon C \longrightarrow C \otimes C$ e $\varepsilon\colon C \longrightarrow k$ são aplicações lineares tais que os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes \mathrm{id}"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[dl, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"] & \\ k \otimes C & & C \otimes k \\ & C \arrow[ul, "\sim"] \arrow[ur, "\sim"'] \arrow[uu, "\Delta"] & \end{tikzcd}$$

Em analogia direta com o conceito de álgebra, chamamos Δ de comultiplicação e ε de counidade da k-coálgebra. Além disso, a comutatividade do primeiro diagrama é chamada coassociatividade.

Como em geral, usaremos k-coálgebras a menos que se diga o contrário iremos chamá-las simplesmente de coálgebras.

Definição 2.2.2 (Coálgebra Cocomutativa)**.** Uma coálgebra (C, Δ, ε) é dita cocomutativa se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[dd, "\tau"] \\ C \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & \\ & C \otimes C \end{tikzcd}$$

O primeiro exemplo mostra que todo espaço vetorial possui estrutura de coálgebra.

Exemplo 2.2.3. Seja $S \neq \varnothing$ um conjunto e kS o espaço vetorial com base S. $(kS, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra com a comultiplicação $\Delta\colon kS \longrightarrow kS \otimes kS$ dada por $\Delta(s) = s \otimes s$ para todo $s \in S$ e counidade $\varepsilon\colon kS \longrightarrow k$ dada por $\varepsilon(s) = 1$ para todo $s \in S$.

Os próximos dois exemplos são casos particulares do anterior e merecem ser apresentados porque surgirão diversas outras vezes no texto.

Exemplo 2.2.4. (k, Δ, ε) é uma coálgebra com a comultiplicação $\Delta\colon k \longrightarrow k \otimes k$ dada por $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ e counidade $\varepsilon\colon k \longrightarrow k$ dada por $\varepsilon(1) = 1$.

Exemplo 2.2.5. Seja M um monoide e kM o espaço vetorial com base M. $(kM, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra com a comultiplicação $\Delta\colon kM \longrightarrow kM \otimes kM$ dada por $\Delta(m) = m \otimes m$ para todo $m \in M$ e counidade $\varepsilon\colon kM \longrightarrow k$ dada por $\varepsilon(m) = 1$ para todo $m \in M$. Em particular, isso atribui a kG uma estrutura de coálgebra, sendo G um grupo.

Exemplo 2.2.6. Seja $(S, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Um intervalo em S é um subconjunto de S não vazio da forma

$$[x, y] := \{z \mid x \leq \ z \leq y\}.$$

Dizemos que S é localmente finito se, todos seus intervalos são finitos. Denote o conjunto de intervalos de S por $\operatorname{int}(S)$. Seja V o espaço vetorial com base $\operatorname{int}(S)$. (V, Δ, ε) é uma coálgebra com a comultiplicação $\Delta\colon V \longrightarrow V \otimes V$ definida em sua base $\operatorname{int}(S)$ por

$$\Delta([x, y]) = \sum_{z \in [x,y]} [x, z] \otimes [z, y]$$

e counidade $\varepsilon\colon V \longrightarrow k$ definida na base por

$$\varepsilon([x, y]) = \delta_{x,y}.$$

Exemplo 2.2.7. Seja $n \geq 1$ um inteiro e $M^c(n)$ um espaço vetorial de dimensão n^2. Denote por $(e_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ uma base de $M^c(n)$. $(M^c(n), \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra com a comultiplicação $\Delta\colon M^c(n) \longrightarrow M^c(n) \otimes M^c(n)$ dada por

$$\Delta(e_{ij}) = \sum_{1 \leq p \leq n} e_{ip} \otimes e_{pj}$$

e counidade $\varepsilon\colon M^c(n) \longrightarrow k$ dada por $\varepsilon(e_{ij}) = \delta_{i,j}$. $M^c(n)$ é chamada de coálgebra de matrizes.

Exemplo 2.2.8. Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. $(C, \Delta^{op}, \varepsilon)$ é uma coálgebra, dita coálgebra oposta, na qual

$$\Delta^{op} = \tau \circ \Delta.$$

A coálgebra oposta de uma coálgebra C é denotada por C^{cop}.

Assim como é feito com álgebras, podemos definir uma estrutura de coálgebra no produto tensorial de duas coálgebras:

Exemplo 2.2.9. Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ duas coálgebras. Então $C \otimes D$ tem estrutura de coálgebra dada por

$$\Delta = (\operatorname{id} \otimes \tau \otimes \operatorname{id}) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$$

e

$$\varepsilon = \varphi \circ \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D,$$

com $\varphi\colon k \otimes k \longrightarrow k$ o isomorfismo canônico.

Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Introduzimos a seguinte notação:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta, \\
\Delta_2 &= (\Delta \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta, \\
\Delta_3 &= (\Delta \otimes \operatorname{id} \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta_2, \\
\vdots \quad &\quad\ \vdots \\
\Delta_n &= (\Delta \otimes \operatorname{id}^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}.
\end{aligned}$$

A proposição a seguir generaliza a coassociatividade:

Proposição 2.2.10. *Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Então para todo $n \geq 2$ e todo $p \in \{0, \ldots, n-1\}$*

$$\Delta_n = \mathrm{id}^p \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}^{n-1-p} \circ \Delta_{n-1}$$

Demonstração. Faremos por indução em n. Para $n = 2$ temos

$$\Delta_2 = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$$

que é simplesmente a coassociatividade da comultiplicação. Assumindo que a afirmação seja válida para $n > 2$, dado $p \in \{1, \ldots, n\}$ temos

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}^p \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}^{n-p}) \circ \Delta_n &= (\mathrm{id}^p \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}^{n-p}) \circ (\mathrm{id}^{p-1} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (\mathrm{id}^{p-1} \otimes ((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta) \otimes \mathrm{id}^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (\mathrm{id}^{p-1} \otimes ((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta) \otimes \mathrm{id}^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (\mathrm{id}^{p-1} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}^{n+1-p}) \circ (\mathrm{id}^{p-1} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (\mathrm{id}^{p-1} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}^{n-p+1}) \circ \Delta_n.
\end{aligned}$$

Note que para $p = 0$, temos por definição que $\Delta_{n+1} = (\mathrm{id}^p \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}^{n-p}) \circ \Delta_n$, logo por indução em p, temos o resultado para todo $p \in \{0, \ldots, n\}$. ∎

Ao contrário do que ocorre na multiplicação que leva dois elementos em um só, a comultiplicação leva um elemento em uma soma finita de tensores de elementos, o que pode tornar os cálculos um tanto complicados. Para facilitar, usaremos uma notação para a comultiplicação chamada de Notação de Sweedler (ou Notação Sigma): Dada uma coálgebra (C, Δ, ε) denotaremos

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_{i1} \otimes c_{i2}$$

por

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2.$$

Com isso, pela coassociatividade generalizada, podemos escrever, para $n \geq 1$,

$$\Delta_n(c) = \sum c_1 \otimes \ldots \otimes c_{n+1}.$$

Usando essa notação podemos também reescrever o segundo diagrama da definição de coálgebra da seguinte forma

$$\sum \varepsilon(c_1) c_2 = \sum c_1 \varepsilon(c_2) = c.$$

Definição 2.2.11 (Homomorfismo de Coálgebras)**.** Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ coálgebras e $g \colon C \longrightarrow D$ linear. Dizemos que g é um *homomorfismo de coálgebras* se os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\
C \otimes C \arrow[r, "g \otimes g"] & D \otimes D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dd, "\varepsilon_D"] \\
C \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & \\
 & k
\end{tikzcd}$$

Pela notação de Sweedler, a comutatividade do primeiro diagrama acima pode ser escrita, para todo $c \in C$, como:

$$\sum g(c)_1 \otimes g(c)_2 = \sum g(c_1) \otimes g(c_2).$$

2.3 Dualidade entre Álgebras e Coálgebras

Dado V um espaço vetorial, considere $V^* = \mathrm{Hom}(V,k)$ o espaço vetorial dual a V. Se $\varphi\colon V \longrightarrow W$ é um homomorfismo de espaços vetoriais, definimos $\varphi^*\colon W^* \longrightarrow V^*$ por $\varphi^*(f)(v) = f(\varphi(v))$ para todo $f \in W^*$ e $v \in V$. Essas informações serão necessárias nessa seção para mostrar que, dada uma coálgebra C, então C^* possui uma estrutura natural de álgebra, por dualidade. Comecemos com alguns lemas:

Lema 2.3.1. *Sejam V e W espaços vetoriais e $t \in V \otimes W$, com $t \neq 0$. Então existe $n > 0$ tal que*

$$t = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i,$$

com v_i e w_i linearmente independentes para todo $i = 1, ...n$.

Demonstração. É claro que sempre podemos escrever t com todos componentes v_i ou w_i linearmente independentes para algum n. Fixe n como o menor inteiro positivo tal que t se escreva da forma

$$t = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i,$$

com os v_i linearmente independentes. Mostremos que os w_i também são linearmente independentes. De fato, se não o fosse, teríamos, sem perda de generalidade, que w_n seria combinação linear dos demais:

$$w_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i w_i.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{n-1} v_i \otimes w_i + v_n \otimes w_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} v_i \otimes w_i + v_n \otimes \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i w_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (v_i + \alpha_i v_n) \otimes w_i \end{aligned}$$

Mas é claro que $\{v_1 + \alpha_1 v_n, \ldots, v_{n-1} + \alpha_{n-1} v_n\}$ é linermente independente, porém com isso temos uma representação de t com $n-1$ componentes v_i linearmente independentes, o que é um absurdo (pela minimalidade de n). ∎

Lema 2.3.2. *Sejam M e V espaços vetorias e $\varphi\colon M^* \otimes V \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,V)$ linear dada por*

$$\varphi(f \otimes v)(m) = f(m)v,$$

para todos $f \in M^*, v \in V$ e $m \in M$. Então φ é injetora. Além disso, se M tiver dimensão finita então φ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Demonstração. Seja $x \in M^* \otimes V$ tal que $\phi(x) = 0$. Pelo Lema 2.3.1, existe $p > 0$,tal que

$$x = \sum_{i=1}^{p} f_i \otimes v_i$$

com $f_i \in M^*$ e $v_i \in V$ lineramente independentes. Com isso, para todo $m \in M$,

$$0 = \phi(x)(m) = \phi\left(\sum_{i=1}^{p} f_i \otimes v_i\right)(m) = \sum_{i=1}^{p} \phi(f_i \otimes v_i)(m) = \sum_{i=1}^{p} f_i(m)v_i.$$

Como os v_i são linearmente independentes, temos que $f_i(m) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, p$ e para todo $m \in M$. Portanto $x = 0$.

Agora, admitindo que M tenha dimensão finita n, tome $\{m_1, \ldots, m_n\}$ uma base para M e seja $\{m_1^*, \ldots, m_n^*\}$ uma base dual para M^*, ou seja, $m_i^*(m_j) = \delta_{ij}$, para todo $1 \leq i, j \leq n$. É claro que, para todo $m \in M$,

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i^*(m)m_i.$$

Assim, dado $f \in \mathrm{Hom}(M, V)$,

$$f(m) = f\left(\sum_{i=1}^{n} m_i^*(m)m_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i^*(m)f(m_i).$$

Logo, tomando

$$x = \sum_{i=1}^{n} m_i^* f(m_i)$$

teremos, para todo $m \in M$,

$$\phi(x)(m) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} m_i^* f(m_i)\right)(m) = \sum_{i=1}^{n} m_i^*(m)f(m_i) = f(m).$$

Portanto ϕ é sobrejetora, e assim um isomorfismo de espaços vetoriais. ■

Lema 2.3.3. *Sejam M e N espaços vetorias e ψ: $\mathrm{Hom}(M, N^*) \longrightarrow (M \otimes N)^*$ linear dada por*

$$\psi(g)(m \otimes n) = g(m)(n),$$

para todos $g \in \mathrm{Hom}(M, N^*), m \in M$ e $n \in N$. Então ψ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Demonstração. Para mostrar esse resultado recordemos o seguinte isomorfismo canônico envolvendo o operador Hom e o produto tensorial:

Sejam A, B e C espaços vetoriais então

$$\mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \cong \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C)).$$

Usando esse fato o isomorfismo temos que $\mathrm{Hom}(M, N^*)$ e $(M \otimes N)^*$ são isomorfos pois

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(M, N^*) &= \mathrm{Hom}\left(M, \mathrm{Hom}(N, k)\right) \\ &\cong \mathrm{Hom}\left(M \otimes N, k\right) \\ &= (M \otimes N)^*. \end{aligned}$$

É possível mostrar que este isomorfismo coincide com a aplicação ψ do enunciado (o que se dá exatamente pela forma do isomofismo canônico), mas deixamos isso a cargo do leitor. ■

Proposição 2.3.4. *Sejam M e N espaços vetorias e $\rho\colon M^* \otimes N^* \longrightarrow (M \otimes N)^*$ linear dada por*

$$\rho(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m)g(n),$$

para todos $f \in M^*, g \in N^*$ e $n \in N$. Então ρ é injetora. Além disso, se M tiver dimensão finita então ρ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Demonstração. Basta observar que $\rho = \psi \circ \varphi_0$, em que ϕ_0 é a aplicação ϕ do Lema 2.3.2 com $V = N^*$ e ψ é a aplicação do Lema 2.3.3. ∎

Corolário 2.3.5. *Sejam $V_1, \ldots, V_n$ espaços vetoriais. Então a aplicação linear $\theta\colon V_1^* \otimes \ldots \otimes V_n^* \longrightarrow (V_1 \otimes \ldots \otimes V_n)^*$ dada por*

$$\theta(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = f_1(v_1) \ldots f_n(v_n)$$

é injetora. Mais ainda, se V_i é de dimensão finita para todo $i = 1, \ldots n$ então θ é um isomorfismo.

A demonstração deste corolário é imediata a partir da proposição anterior.

Teorema 2.3.6. *Se (C, Δ, ε) é uma coálgebra então C^* possui estrutura de álgebra.*

Demonstração. Tome ρ na proposição anterior com $M = N = C$, ou seja, o homomorfismo injetor $\rho\colon C^* \otimes C^* \longrightarrow (C \otimes C)^*$. Considere também o isomorfismo $\varphi\colon k \longrightarrow k^*$, tal que $\varphi(1) = \mathrm{id}$. Defina a multiplicação e a unidade em C^* por

$$\mu = \Delta^* \circ \rho \quad \text{e} \quad \eta = \varepsilon^* \circ \varphi$$

Note que, como $\Delta^*(h) = h \circ \Delta$ para todo $h \in (C \otimes C)^*$, então

$$\mu(f \otimes g)(c) = \Delta^* \circ \rho(f \otimes g)(c) = \rho(f \otimes f) \circ \Delta(c) = \rho(f \otimes g)\left(\sum c_1 \otimes c_2\right) = \sum f(c_1)g(c_2)$$

para todo $f, g \in C^*$ e $c \in C$. Essa multiplicação é conhecida como produto de convolução e denota-se $\mu(f \otimes g)$ por $f * g$. (Mais adiante, na seção 3.2 voltaremos a falar sobre o produto de convolução de uma forma mais ampla).

Note também que, como $\varepsilon^*(h) = h \circ \varepsilon$, para todo $h \in k^*$, então

$$\eta(1)(c) = \varepsilon^*(\phi(1))(c) = (\mathrm{id} \circ \varepsilon)(c) = \varepsilon(c)$$

para todo $c \in C$. Logo $\eta(\alpha)(c) = \alpha\eta(1)(c)$ para todo $\alpha \in k$ e $c \in C$.

Mostremos agora que (C^*, μ, η) é, de fato, uma álgebra associativa e unitária:

- μ é associativa pois, para todo $c \in C$ e $f, g \in C^*$,

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(c) &= \sum (f * g)(c_1)h(c_2)\\ &= \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3)\\ &= \sum f(c_1)(g * h)(c_2)\\ &= (f * (g * h))(c),\end{aligned}$$

  em que se usou a coassociatividade de Δ.

- $\eta(1)$ é unidade de C^* pois, para todo $c \in C$ e $f \in C^*$

$$(\eta(1) * f)(c) = \sum \eta(1)c_1 f(c_2) = \sum \varepsilon(c_1)f(c_2) = f\left(\sum \varepsilon(c_1)c_2\right) = f(c)$$
$$(f * \eta(1))(c) = \sum f(c_1)\eta(1)c_2 = \sum f(c_1)\varepsilon(c_2) = f\left(\sum c_1\varepsilon(c_2)\right) = f(c),$$

em que se usou o fato de ε ser counidade de C.

■

Exemplo 2.3.7. Dada a coálgebra kS do exemplo 2.2.3, $(kS)^*$ é uma álgebra com multiplicação

$$f * g(s) = f(s)g(s)$$

para todo $f, g \in (kS)^*$ e $s \in S$. A unidade de $(kS)^*$ é dada por $\eta(1)(s) = 1$ para todo $s \in S$. Obviamente, o mesmo vale para $(kM)^*$ e $(kG)^*$, com M um monoide e G um grupo.

Em vista do Teorema 2.3.6, é natural que nos perguntemos se, dada uma álgebra A, o espaço dual A^* possui uma estrutura natural de coálgebra por dualidade da estrutura de A. Em geral, a resposta é negativa, haja vista a aplicação ρ da proposição 2.3.4 ser apenas injetora. Se a dimensão de A for finita, então é possível dar uma resposta afirmativa como no teorema a seguir.

Teorema 2.3.8. *Se (A, μ, η) é uma álgebra de dimensão finita então A^* possui estrutura de coálgebra.*

Demonstração. Tome a aplicação ρ da proposição 2.3.4 com $M = N = A$. Como A tem dimensão finita então $\rho\colon A^* \otimes A^* \longrightarrow (A \otimes A)^*$ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Considere também o isomorfismo $\psi\colon k^* \longrightarrow k$, tal que $\psi(f) = f(1)$, para todo $f \in k^*$. Defina a comultiplicação e a counidade por

$$\Delta = \rho^{-1} \circ \mu^* \quad \text{e} \quad \varepsilon = \psi \circ \eta^*$$

Escrevendo $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$ para alguns $g_, h_i \in A^*$ então para todo $a, b \in A$

$$f(ab) = \sum_i g_i(a)h_i(b).$$

Mais ainda, da injetividade de ρ, se considerarmos uma família finita $(g'_j, h'_j)_j$ de elementos de A^* com

$$f(ab) = \sum_j g'_j(a)h'_j(b)$$

para todo $a, b \in A$ então

$$\sum_i g_i \otimes h_i = \sum_j g'_j \otimes h'_j.$$

Ou seja, $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$ está bem definido para quaisquer (g_i, h_i) tal que

$$f(ab) = \sum_i g_i(a)h_i(b).$$

Feito isso, considere $f \in A^*$ e $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$. Escrevendo

$$\Delta(g_i) = \sum_j g'_{i,j} \otimes g''_{i,j}$$

e

$$\Delta(h_i) = \sum_j h'_{i,j} \otimes h''_{i,j}$$

considere pelo corolário 2.3.5 a aplicação injetora $\theta\colon A^* \otimes A^* \otimes A^* \longrightarrow (A \otimes A \otimes A)^*$ dada por $\theta(u \otimes v \otimes w)(a \otimes b \otimes c) = u(a)v(b)w(c)$. Agora note que por um lado,

$$\begin{aligned} \theta\left(\sum_{i,j} g'_{i,j} \otimes g''_{i,j} \otimes h_i\right)(a \otimes b \otimes c) &= \sum_{i,j} g'_{i,j}(a) \otimes g''_{i,j}(b) \otimes h_i(c) \\ &= \sum_i g_i(ab)h_i(c) \\ &= f(abc) \end{aligned}$$

e por outro

$$\begin{aligned} \theta\left(\sum_{i,j} g_i \otimes h'_{i,j} \otimes h''_{i,j}\right)(a \otimes b \otimes c) &= \sum_{i,j} g_i(a) \otimes h'_{i,j}(b) \otimes h''_{i,j}(c) \\ &= \sum_i g_i(a)h_i(bc) \\ &= f(abc). \end{aligned}$$

Logo pela injetividade de θ,

$$\sum_{i,j} g'_{i,j} \otimes g''_{i,j} \otimes h_i = \sum_{i,j} g_i \otimes h'_{i,j} \otimes h''_{i,j}$$

ou seja, Δ é coassociativa.
A propriedade da counidade também é satisfeita pois como

$$\left(\sum_i \varepsilon(g_i)h_i\right)(a) = \sum_i g_i(1_A)h_i(a) = f(1_A a) = f(a)$$

então $\sum_i \varepsilon(g_i)h_i = f$ e analogamente $\sum_i \varepsilon(h_i)g_i = f$. ■

2.4 Módulos

Definição 2.4.1 (Módulo à Esquerda)**.** Seja A uma álgebra. Um A-*módulo à esquerda* é um par (X, ν), com X um espaço vetorial e $\nu\colon A \otimes X \longrightarrow X$ linear tal que os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes X \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \nu"] \arrow[d, "\mu \otimes \mathrm{id}"'] & A \otimes X \arrow[d, "\nu"] \\ A \otimes X \arrow[r, "\nu"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \otimes X \arrow[r, "\eta \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\sim"'] & A \otimes X \arrow[d, "\nu"] \\ & X \end{tikzcd}$$

É comum denotarmos $\nu(a \otimes x) = a \cdot x$. Note que, usando essa notação, os diagramas anteriores nos garantem que:

$$a \cdot (b \cdot x) = ab \cdot x, \text{ para todo } a, b \in A \text{ e } x \in X,$$
$$1_A \cdot x = x, \text{ para todo } x \in X.$$

que são as condições usuais da definição de módulo à esquerda.

De modo análogo é possível definir um A-módulo à direita.

Definição 2.4.2 (Homomorfismo de Módulos à Esquerda)**.** Seja A uma álgebra e (X, ν), (Y, ϑ) dois A-módulos. Dizemos que a aplicação linear $f\colon X \longrightarrow Y$ é um *homomorfismo de A-módulos à esquerda* se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} A \otimes X \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes f"] \arrow[d, "\nu"'] & A \otimes Y \arrow[d, "\vartheta"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Note que o diagrama anterior nos diz que:

$$f(a \cdot_\nu x) = a \cdot_\vartheta f(x), \text{ para todo } a \in A \text{ e } x \in X,$$

ou, como é mais comum, $f(ax) = af(x)$.

De modo análogo é possível definir um homomorfismo de A-módulos à direita.

Para cada álgebra A denotaremos o conjunto dos homomorfismos de A-módulos à esquerda $f\colon X \longrightarrow Y$ por $\mathrm{Hom}_{{}_A\mathcal{M}}(X, Y)$. Analogamente, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_A}(X, Y)$ denota os homomorfismos de A-módulos à direita.

Neste texto usaremos sobretudo o conceito de módulos à esquerda. Por isso a partir daqui, a menos que se diga o contrário, o termo A-módulo irá se referir a um A-módulo à esquerda.

2.5 Comódulos

Assim como a ideia da estrutura de coálgebra se dá por "inversão das flechas" da estrutura de álgebra, é natural que o mesmo se dê para a estrutura de comódulos.

Definição 2.5.1 (Comódulo à Direita)**.** Seja C uma coálgebra. Um *C-comódulo à direita* é um par (M, ρ), com M um espaço vetorial e $\rho\colon M \longrightarrow M \otimes C$ linear tal que os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho \otimes \mathrm{id}"] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\ M \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"] & M \otimes k \end{tikzcd}$$

De modo análogo, vamos definir um C-comódulo à esquerda.

Definição 2.5.2 (Comódulo à esquerda)**.** Seja C uma coálgebra. Um C-*comódulo à esquerda* é um par (M, λ), com M um espaço vetorial e $\lambda\colon M \longrightarrow C \otimes M$ linear tal que os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda"'] & C \otimes M \arrow[d, "\Delta\otimes \mathrm{id}"] \\ C \otimes M \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\lambda"] & C \otimes C \otimes M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[d, "\lambda"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\ C \otimes M \arrow[r, "\varepsilon\otimes \mathrm{id}"] & k \otimes M \end{tikzcd}$$

Observação 2.5.3. Assim como foi feito para coálgebras, introduziremos uma notação conveniente para C-comódulos: Para os C-comódulos à direita, denotaremos:

$$\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}, \text{ com } m_{(0)}\text{'s } \in M \text{ e } m_{(1)}\text{'s } \in C$$

e para os C-comódulos à esquerda, denotaremos:

$$\lambda(m) = \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)}, \text{ com } m_{(-1)}\text{'s } \in C \text{ e } m_{(0)}\text{'s } \in M.$$

Usando essa notação, os diagramas da definição 2.5.1 afirmam

$$\sum (m_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)} = \sum m_{(0)} \otimes (m_{(1)})_1 \otimes (m_{(1)})_2, \tag{2.1}$$

$$\sum \varepsilon(m_{(1)}) m_{(0)} = m. \tag{2.2}$$

e os da definição 2.5.2 que

$$\sum m_{(-1)} \otimes (m_{(0)})_{(-1)} \otimes (m_{(0)})_{(0)} = \sum (m_{(-1)})_1 \otimes (m_{(-1)})_2 \otimes m_{(0)}, \tag{2.3}$$

$$\sum \varepsilon(m_{(-1)}) m_{(0)} = m. \tag{2.4}$$

Logo, pela fórmula (2.1) podemos definir:

$$\sum m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)} := \sum (m_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)} = \sum m_{(0)} \otimes (m_{(1)})_1 \otimes (m_{(1)})_2,$$

e pela fórmula (2.3):

$$\sum m_{(-2)} \otimes m_{(-1)} \otimes m_{(0)} := \sum m_{(-1)} \otimes (m_{(0)})_{(-1)} \otimes (m_{(0)})_{(0)} = \sum (m_{(-1)})_1 \otimes (m_{(-1)})_2 \otimes m_{(0)}.$$

Para cada coálgebra C denotaremos o conjunto dos homomorfismos de C-comódulos à direita $f\colon X \longrightarrow Y$ por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^C}(X, Y)$. Analogamente, $\mathrm{Hom}_{{}^C\mathcal{M}}(X, Y)$ denota os homomorfismos de C-comódulos à esquerda. Vamos a alguns exemplos de comódulos:

Exemplo 2.5.4. Toda coálgebra (C, Δ, ε) é obviamente um C-comódulo à esquerda e à direita com $\lambda = \rho = \Delta$.

Exemplo 2.5.5. Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra e V um espaço vetorial. Então $V \otimes C$ é trivialmente um C-comódulo à direita com $\rho\colon V \otimes C \longrightarrow V \otimes C \otimes C$ dada por

$$\rho(v \otimes c) = \sum v \otimes c_1 \otimes c_2$$

para todo $v \in V$ e $c \in C$. Analogamente, $C \otimes V$ é um C-comódulo à esquerda com $\lambda\colon C \otimes V \longrightarrow C \otimes C \otimes V$ dada por

$$\lambda(c \otimes v) = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes v$$

para todo $v \in V$ e $c \in C$.

Exemplo 2.5.6. Dado $S \neq \varnothing$ um conjunto, considere a coálgebra $C = kS$ (como no Exemplo 2.2.3). Se $(M_s)_{s\in S}$ é uma família de C-comódulos então

$$M = \bigoplus_{s\in S} M_s$$

é um C-comódulo à direita com $\rho\colon M \longrightarrow M \otimes C$ dado por

$$\rho(m_s) = m_s \otimes s$$

para todo $s \in S$ e $m_s \in M_s$. Analogamente, M é um C-comódulo à esquerda com $\lambda\colon M \longrightarrow C \otimes M$ dado por

$$\lambda(m_s) = s \otimes m_s$$

para todo $s \in S$ e $m_s \in M_s$.

Definição 2.5.7 (Homomorfismo de Comódulos à Direita)**.** Seja C uma coálgebra e (M, ρ), (N, δ) dois C-comódulos à direita. Dizemos que a aplicação linear $g\colon M \longrightarrow N$ é um *homomorfismo de C-comódulos à direita* se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad g \quad} & N \\ {\scriptstyle\rho}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\delta} \\ M \otimes C & \xrightarrow{\ g\otimes \mathrm{id}\ } & N \otimes C \end{array}$$

Observe que, com a notação de Sweedler o diagrama anterior nos diz que

$$\delta(g(c)) = \sum g(c_{(0)}) \otimes c_{(1)}, \text{ para todo } c \in C.$$

De modo análogo, é possível definir o homomorfismo de C-comódulos à esquerda.

A proposição a seguir vem para garantir uma equivalência entre ${}^{C}\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^{C^{cop}}$.

Proposição 2.5.8. *Seja C uma coálgebra. Então*

a) M é um C-comódulo à esquerda (resp. à direita) se, e somente se, M é um C^{cop}-comódulo à direita (resp. à esquerda).

b) $f\colon M \longrightarrow N$ é um homomorfismo de C-comódulos à esquerda (resp. à direita) se, e somente se, f é um homomorfismo de C^{cop}-comódulos à direita (resp. à esquerda), com as estruturas de M e N dadas no item anterior.

Demonstração.

a) Seja (M, λ) um C-comódulo à esquerda com

$$\begin{aligned} \lambda\colon \quad M &\longrightarrow \quad C \otimes M \\ m &\longmapsto \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)}. \end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned} \rho\colon \quad M &\longrightarrow \quad M \otimes C^{cop} \\ m &\longmapsto \sum m_{(0)} \otimes m_{(-1)}. \end{aligned}$$

Não é difícil ver que (M, ρ) é um C^{cop}-comódulo à direita.

Analogamente, se (M, ρ') é um C-comódulo à direita com

$$\begin{array}{rccc} \rho'\colon & M & \longrightarrow & M \otimes C \\ & m & \longmapsto & \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)} \end{array}$$

então defina

$$\begin{array}{rccc} \lambda'\colon & M & \longrightarrow & C^{cop} \otimes M \\ & m & \longmapsto & \sum m_{(1)} \otimes m_{(0)}. \end{array}$$

(M, λ') será um C^{cop}-comódulo à esquerda.

b) Não é difícil ver que se $f\colon (M, \lambda_M) \longrightarrow (N, \lambda_N)$ é um homomorfismo de C-comódulos à esquerda então $f\colon (M, \rho_M) \longrightarrow (N, \rho_N)$ é um homomorfismo de C^{cop}-comódulos à direita, com ρ_M e ρ_N definidas como no item a).

Analogamente, se $f\colon (M, \rho'_M) \longrightarrow (N, \rho'_N)$ é um homomorfismo de C-comódulos à direita então $f\colon (M, \lambda'_M) \longrightarrow (N, \lambda'_N)$ é um homomorfismo de C^{cop}-comódulos à esquerda.

■

Motivados pela proposição anterior, adotaremos comódulos à direita como padrão e a partir de agora chamaremos os C-comódulos à direita simplesmente de C-comódulos.

Proposição 2.5.9. *Sejam C uma coálgebra, C^* a álgebra dual a C e M um espaço vetorial. Se (M, ρ) é um C-comódulo então (M, ν) é um C^*-módulo, com*

$$\begin{array}{rccc} \nu\colon & C^* \otimes M & \longrightarrow & M \\ & f \otimes m & \longmapsto & \sum m_{(0)} f(m_{(1)}) \end{array}$$

Demonstração. De fato, para todo $f, g \in C^*$ e para todo $m \in M$,

$$\begin{aligned} f \cdot (g \cdot m) &= f \cdot \left(\sum m_{(0)} g(m_{(1)}) \right) \\ &= \sum (f \cdot m_{(0)}) g(m_{(1)}) \\ &= \sum (m_{(0)})_{(0)} f(m_{(0)})_{(1)} g(m_{(1)}) \\ &= \sum (m_{(0)}) f(m_{(1)}) g(m_{(2)}) \\ &= \sum (m_{(0)}) fg(m_{(1)}) \\ &= (fg) \cdot m. \end{aligned}$$

e

$$1_{C^*} \cdot m = \varepsilon \cdot m = \sum m_{(0)} \varepsilon m_{(1)} = m.$$

■

Capítulo 3

Biálgebras e Álgebras de Hopf

Usando as estruturas definidas anteriormente, neste capítulo introduziremos as álgebras de Hopf, algumas de suas propriedades e exemplos.

Como no capítulo anterior, as principais referências para este capítulo são os livros [10], [16] e [20].

3.1 Biálgebras

Proposição 3.1.1. *Seja H um espaço vetorial tal que (H, μ, η) é uma álgebra e (H, Δ, ε) é uma coálgebra. São equivalentes:*

a) μ e η são homomorfismos de coálgebras;

b) Δ e ε são homomorfismos de álgebras.

Demonstração. Lembre-se de que $H \otimes H$ é naturalmente uma álgebra com $\mu_{H\otimes H} = (\mu \otimes \mu) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})$ e $\eta_{H\otimes H} = \eta \otimes \eta$ (pela proposição 1.11) e uma coálgebra com $\Delta_{H\otimes H} = (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)$ e $\varepsilon_{H\otimes H} \cong \varepsilon \otimes \varepsilon$ (pelo exemplo 2.2.9). Note que μ é um homomorfismo de coálgebras se, e somente se, os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[rr, "\mu"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & & H \arrow[dd, "\Delta"] \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id}"'] & & \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "\mu\otimes\mu"] & & H \otimes H
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & H \arrow[dd, "\varepsilon"] \\
H \otimes H \arrow[urr, "\mu"] \arrow[dr, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & & \\
 & k \otimes k \arrow[r, "\sim"'] & k
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Note também que η é um homomorfismo de coálgebras se, e somente se, os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\sim"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\
k \otimes k \arrow[r, "\eta\otimes\eta"] & H \otimes H
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

$$\begin{tikzcd}
 & H \arrow[dd, "\varepsilon"] \\
k \arrow[ur, "\eta"] \arrow[dr, "\sim"'] & \\
 & k
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Mas é imediato constatar que a comutatividade dos mesmos diagramas interpretados sob o ponto de vista de Δ e ε mostram que estas aplicações são homomorfismos de álgebras. ■

Observe que, usando a notação de Sweedler, o fato de Δ e ε serem homomorfismos de álgebras pode ser interpretada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Delta(xy) &= \sum x_1y_1 \otimes x_2y_2\\ \varepsilon(xy) &= \varepsilon(x)\varepsilon(y)\\ \Delta(1) &= 1\otimes 1\\ \varepsilon(1) &= 1.\end{aligned}$$

Definição 3.1.2 (Biálgebra)**.** Dizemos que $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ é uma *biálgebra* se (H, μ, η) é uma álgebra, (H, Δ, ε) é uma coálgebra e vale ao menos uma das condições equivalentes da proposição 3.1.1.

Vejamos aqui alguns exemplos simples e imediatos de biálgebras. Mais adiante virão outros mais elaborados.

Exemplo 3.1.3. Seja M um monoide. kM é uma biálgebra com $\Delta(m) = m \otimes m$ e $\varepsilon(m) = 1$, para todo $m \in M$. Em particular kG é uma biálgebra, com G um grupo. De modo ainda mais particular, k é uma biálgebra.

Exemplo 3.1.4. Se H é uma biálgebra, então são biálgebras: $H^{op} = (H, \mu^{op}, \eta, \Delta, \varepsilon)$, $H^{cop} = (H, \mu, \eta, \Delta^{op}, \varepsilon)$ e $H^{op,cop} = (H, \mu^{op}, \eta, \Delta^{op}, \varepsilon)$.

Exemplo 3.1.5. Sejam H_1 e H_2 biálgebras. Então $H_1 \otimes H_2$ é naturalmente uma biálgebra com estrutura dada pelo produto tensorial de álgebras e de coálgebras.

Proposição 3.1.6. *Seja $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra de dimensão finita então $(H^*, \bar{\mu}, \bar{\eta}, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ com $\bar{\mu}, \bar{\eta}, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon}$ os duais de $\Delta, \varepsilon, \mu, \eta$, respectivamente, também é uma biálgebra.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.3.6, $(H^*, \bar{\mu}, \bar{\eta})$ é uma álgebra e, pelo Teorema 2.3.8, $(H^*, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ é uma coálgebra. Mostremos que $\bar{\Delta}$ e $\bar{\varepsilon}$ são homomorfismos de álgebras. Lembre-se de que $\bar{\varepsilon}(h^*) = h^*(1_H)$ e $\bar{\Delta}(h^*) = \sum h_1^* \otimes h_2^*$, com $h^* \in H^*$ tal que $h^*(xy) = \sum h_1^*(x) \otimes h_2^*(y)$, para todo $x, y \in H$.
Note que se $h^*, g^* \in H^*$ e $\bar{\Delta}(h^*) = \sum h_1^* \otimes h_2^*$ e $\bar{\Delta}(g^*) = \sum g_1^* \otimes g_2^*$, então, para todo $x, y \in H$, temos

$$\begin{aligned}(h^*g^*)(xy) &= \sum h^*(x_1y_1)g^*(x_2y_2)\\ &= \sum h_1^*(x_1)h_2^*(y_1)g_1^*(x_2)g_2^*(y_2)\\ &= \sum (h_1^*g_1^*)(x)(h_2^*g_2^*)(y).\end{aligned}$$

Com isso,

$$\bar{\Delta}(h^*g^*) = \sum h_1^*g_1^* \otimes h_2^*g_2^* = \bar{\Delta}(h^*)\bar{\Delta}(g^*).$$

Além disso, $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$, para todo $x, y \in H$. Logo $\bar{\Delta}(\varepsilon) = \varepsilon \otimes \varepsilon$ e, assim, $\bar{\Delta}$ é um homomorfismo de álgebras.
Para mostrar que $\bar{\varepsilon}$ é um homomorfismo de álgebras, basta notar que valem

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}(h^*g^*) = (h^*g^*)(1_H) = h^*(1_H)g^*(1_H) = \bar{\varepsilon}(h^*)\bar{\varepsilon}(g^*)\\ \bar{\varepsilon}(\varepsilon) = \varepsilon(1_H) = 1.\end{aligned}$$

■

Definição 3.1.7 (Homomorfismo de Biálgebras)**.** Sejam H_1 e H_2 duas biálgebras. Dizemos que $f\colon H_1 \longrightarrow H_2$ é um *homomorfismo de biálgebras* se f for um homomorfismo de álgebras (nas álgebras subjacentes) e um homomorfismo de coálgebras (nas coálgebras subjacentes).

O seguinte exemplo vem para mostrar que, dada uma álgebra, nem sempre é possível colocar uma estrutura de coálgebra no espaço vetorial subjacente de modo a se obter uma biálgebra.

Exemplo 3.1.8. Seja $n \geq 2$ um número natural. Não existe estrutura de biálgebra para o espaço vetorial das matrizes $M_n(k)$ tal que a estrutura de álgebra subjacente coincida com a álgebra usual de matrizes. Para verificar isso, suponha que $M_n(k)$ tenha estrutura de biálgebra. Logo $\varepsilon\colon M_n(k) \longrightarrow k$ é um homomorfismo de álgebras. Consequentemente, $\ker(\varepsilon)$ é um ideal (bilateral) de $M_n(k)$. Como $M_n(k)$ é simples ([15], cap. IX), então $\ker(\varepsilon) = 0$ ou $\ker(\varepsilon) = M_n(k)$. Como $\varepsilon(1) = 1$, então $\ker(\varepsilon) = \{0\}$, o que é absurdo dado que $\dim(M_n(k)) > \dim(k)$ quando $n \geq 2$.

3.2 Álgebras de Hopf

Sejam (A, μ, η) uma álgebra e (C, Δ, ε) uma coálgebra. Considere o espaço vetorial $\mathrm{Hom}(C, A)$ (com C e A vistos como espaços vetoriais).

Proposição 3.2.1. $\mathrm{Hom}(C, A)$ *é uma álgebra com produto*

$$(f * g)(c) = (\mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta)(c) = \sum f(c_1)g(c_2)$$

para todo $f, g \in \mathrm{Hom}(C, A)$ *e* $c \in C$ *e unidade* $\eta \circ \varepsilon$.

Demonstração. $\mathrm{Hom}(C, A)$ é associativa pois, para todo $f, g, h \in \mathrm{Hom}(C, A)$ e $c \in C$, temos

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(c) &= \sum (f * g)(c_1)h(c_2)\\ &= \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3)\\ &= \sum f(c_1)(g * h)(c_2)\\ &= (f * (g * h))(c).\end{aligned}$$

$\eta \circ \varepsilon$ é unidade pois, para todo $f \in \mathrm{Hom}(C, A)$ e $c \in C$,

$$\begin{aligned}f * (\eta \circ \varepsilon)(c) &= \sum f(c_1)(\eta \circ \varepsilon)(c_2)\\ &= \sum f(c_1)\varepsilon(c_2)1_A\\ &= f(c)\end{aligned}$$

e analogamente, $(\eta \circ \varepsilon) * f = f$. ∎

O produto definido na proposição anterior é chamado produto de convolução.

Seja H uma biálgebra. Denote por H_a a álgebra subjacente e por H_c a coálgebra subjacente a H. Pela proposição anterior, podemos considerar a álgebra $\mathrm{Hom}(H_c, H_a)$. Note que a identidade $\mathrm{id}\colon H \longrightarrow H$ pertence a $\mathrm{Hom}(H_c, H_a)$ e, em certos casos é invertível com relação ao produto de convolução $*$.

Definição 3.2.2 (Antípoda)**.** Seja H uma biálgebra. Uma aplicação linear $S\colon H \longrightarrow H$ é chamada *antípoda* de H se S for a inversa de id pelo produto de convolução, ou seja, se

$$\mathrm{id} * S = S * \mathrm{id} = \eta \circ \varepsilon.$$

Isso é o mesmo que afirmar que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[rr, "S\otimes \mathrm{id}"] & & H \otimes H \arrow[dr, "\mu"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & k \arrow[rr, "\eta"] & & H \\
 & H \otimes H \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes S"] & & H \otimes H \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Observe que a antípoda, se existir, é única, pela unicidade do inverso do elemento id na álgebra $\mathrm{Hom}(H_c, H_a)$.

Definição 3.2.3 (Álgebra de Hopf)**.** Dizemos que uma biálgebra $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ é uma *álgebra de Hopf* se existe a antípoda S de H. Neste caso podemos denotar $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$.

Note que a antípoda S de H satisfaz

$$\sum S(x_1)x_2 = \sum x_1 S(x_2) = \varepsilon(x)1_H$$

pois, usando a notação de Sweedler no diagrama anterior,

$$\begin{aligned}
\mu \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(x) &= \mu \circ (S \otimes \mathrm{id}) \left(\sum x_1 \otimes x_2\right) \\
&= \mu \left(\sum S(x_1) \otimes x_2\right) \\
&= \sum S(x_1)x_2,
\end{aligned}$$

analogamente $\mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta(x) = \sum x_1 S(x_2)$ e ambos são iguais a $\eta \circ \varepsilon(x) = \varepsilon(x)1_H$.

Definição 3.2.4 (Homomorfismo de Álgebras de Hopf)**.** Sejam H_1 e H_2 álgebras de Hopf. Dizemos que uma aplicação $f\colon H_1 \longrightarrow H_2$ é um *homomorfismo de álgebras de Hopf* se f for um homomorfismo de biálgebras.

Nesta definição não é necessário requerer que f preserve a antípoda, pois a seguinte proposição estabelece que a condição de f ser um homomorfismo de biálgebras é suficiente para que isso também ocorra.

Proposição 3.2.5. *Sejam $(H_1, \mu_1, \eta_1, \Delta_1, \varepsilon_1, S_1)$ e $(H_2, \mu_2, \eta_2, \Delta_2, \varepsilon_2, S_2)$ álgebras de Hopf. Se $f\colon H_1 \longrightarrow H_2$ é um homomorfismo de álgebras de Hopf então*

$$S_2 \circ f = f \circ S_1.$$

Demonstração. Note que $S_2 \circ f$ e $f \circ S_1$ são elementos de $\mathrm{Hom}(H_1, H_2)$. Se mostrarmos que ambos são $*$-invertíveis e tem a mesma inversa, então eles serão iguais. De fato, $S_2 \circ f$ é inversa à esquerda de f pois, dado $x \in H_1$,

$$\begin{aligned}((S_2 \circ f) * f)(x) &= \sum (S_2 \circ f)(x_1) f(x_2) \\ &= \sum S_2((f(x)_1) f(x)_2 \\ &= \varepsilon_2(f(x)) 1_{H_2} \\ &= \varepsilon_1(x) 1_{H_2} \\ &= (\eta_2 \circ \varepsilon_1)(x).\end{aligned}$$

Analogamente, $f * (S_2 \circ f) = \eta_2 \circ \varepsilon_1$.
Por outro lado, $f \circ S_1$ é inversa à direita de f pois, dado $x \in H_1$,

$$\begin{aligned}(f * (f \circ S_1))(x) &= \sum f(x_1)(f \circ S_1)(x_2) \\ &= f\left(\sum x_1 S_1(x_2)\right) \\ &= f(\varepsilon_1(x)) 1_{H_1} \\ &= \varepsilon_1(x) 1_{H_2} \\ &= (\eta_2 \circ \varepsilon_1)(x)\end{aligned}$$

e de modo similar $(f \circ S_1) * f = \eta_2 \circ \varepsilon_1$. ∎

Os próximos resultados trazem propriedades da antípoda.

Proposição 3.2.6. *Seja $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ uma álgebra de Hopf. Então*

a) $S(xy) = S(y)S(x)$ para todo $x, y \in H$;

b) $S(1_H) = 1_H$;

c) $\Delta(S(x)) = \sum S(x_2) \otimes S(x_1)$ para todo $x \in H$;

d) $\varepsilon(S(x)) = \varepsilon(x)$ para todo $x \in H$.

Demonstração.

a) Considere a álgebra $\mathrm{Hom}(H \otimes H, H)$ com produto de convolução† e identidade $\eta_H \circ \varepsilon_{H \otimes H} \colon H \otimes H \longrightarrow H$. Defina, para todo $x, y \in H$,

$$\begin{array}{rccc} F\colon & H \otimes H & \longrightarrow & H \\ & x \otimes y & \longmapsto & S(y)S(x), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} G\colon & H \otimes H & \longrightarrow & H \\ & x \otimes y & \longmapsto & S(xy), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} M\colon & H \otimes H & \longrightarrow & H \\ & x \otimes y & \longmapsto & xy. \end{array}$$

† Aqui $H \otimes H$ tem estrutura de coálgebra dada pelo produto tensorial de coálgebras e H a estrutura de álgebra associada a H.

Mostremos que F e G são inversas por convolução de M. De fato, dados $x, y \in H$,

$$\begin{aligned}(M * F)(x \otimes y) &= \sum M((x \otimes y)_1)F((x \otimes y)_2) \\ &= \sum M(x_1 \otimes y_1)F(x_2 \otimes y_2) \\ &= \sum x_1 y_1 S(y_2)S(x_2) \\ &= \sum x_1 \varepsilon(y) 1_H S(x_2) \\ &= \varepsilon(x)\varepsilon(y)1_H \\ &= \varepsilon_{H\otimes H}(x \otimes y)1_H \\ &= \eta_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}(x \otimes y).\end{aligned}$$

Analogamente, $(F * M) = \eta_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}(G * M)(x \otimes y) &= \sum G((x \otimes y)_1)M((x \otimes yg)_2) \\ &= \sum G(x_1 \otimes y_1)M(x_2 \otimes y_2) \\ &= \sum S(x_1 y_1)x_2 y_2 \\ &= \sum S((xy)_1)(xy)_2 \\ &= \varepsilon(xy))1_H \\ &= \eta_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}(x \otimes y).\end{aligned}$$

e, de modo similar, $M * G = \eta_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}$. Logo, pela unicidade do elemento inverso, $F = G$ e portanto $S(xy) = S(y)S(x)$ para todo $x, y \in H$.

b) De fato,

$$S(1_H) = S(1_H)1_H = (S * \mathrm{id})(1_H) = (\eta \circ \varepsilon)(1_H) = \varepsilon(1_H)1_H = 1_H.$$

c) Considere a álgebra $\mathrm{Hom}(H, H \otimes H)$ com produto de convolução[†] e identidade $\eta_{H\otimes H} \circ \varepsilon_H \colon H \longrightarrow H \otimes H$. Defina para todo $x \in H$

$$\begin{aligned}F\colon \quad H &\longrightarrow \quad H \otimes H \\ x &\longmapsto \quad \Delta(S(x)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G\colon \quad H &\longrightarrow \quad H \otimes H \\ x &\longmapsto \sum S(x_2) \otimes S(x_1).\end{aligned}$$

Mostremos que F e G são inversas por convolução de Δ. De fato, dado $x \in H$,

$$\begin{aligned}(\Delta * F)(x) &= \sum \Delta(x_1)F(x_2) \\ &= \sum \Delta(x_1)\Delta(S(x_2)) \\ &= \Delta\left(\sum x_1 S(x_2)\right) \\ &= \Delta(\varepsilon(x)1_H) \\ &= \varepsilon(x)1_H \otimes 1_H \\ &= \eta_{H\otimes H} \circ \varepsilon_H(x)\end{aligned}$$

[†] Aqui $H \otimes H$ tem estrutura de álgebra dada pelo produto tensorial de álgebras e H a estrutura de coálgebra associada a H.

Analogamente, $(F * \Delta) = \eta_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(G * \Delta)(x) &= \sum G(x_1)\Delta(x_2) \\
&= \sum (S((x_1)_2) \otimes S((x_1)_1)((x_2)_1 \otimes (x_2)_2) \\
&= \sum (S(x_2) \otimes S(x_1))(x_3 \otimes x_4) \\
&= \sum S(x_2)x_3 \otimes S(x_1)x_4 \\
&= \sum S((x_2)_1)(x_2)_2 \otimes S(x_1)x_3 \\
&= \sum \varepsilon(x_2)1_H \otimes S(x_1)x_3 \\
&= \sum 1 \otimes S(x_1)\varepsilon((x_2)_1)(x_2)_2 \\
&= \sum 1 \otimes S(x_1)x_2 \\
&= 1 \otimes \varepsilon(x)1_H \\
&= \eta_{H\otimes H} \circ \varepsilon_H(x)
\end{aligned}$$

e, de modo similar, $\Delta * G = \eta_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}$. Logo, pela unicidade do elemento inverso, $F = G$, e assim

$$\Delta(S(x)) = \sum S(x_2) \otimes S(x_1)$$

para todo $x \in H$.

d) De fato,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(S(x)) &= \sum \varepsilon(S(x_1))\varepsilon(x_2) \\
&= \varepsilon\left(\sum S(x_1)x_2\right) \\
&= \varepsilon(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(x)\varepsilon(1_H) \\
&= \varepsilon(x).
\end{aligned}$$

■

Na proposição anterior, por S satisfazer os itens $a)$ e $b)$, diremos que S é um antihomomorfismo de álgebras e por satisfazer os itens $c)$ e $d)$, diremos que S é um antihomomorfismo de coálgebras.

Proposição 3.2.7. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. São equivalentes:*

a) $\sum S(x_2)x_1 = \varepsilon(x)1_H$ *para todo* $x \in H$*;*

b) $\sum x_2S(x_1) = \varepsilon(x)1_H$ *para todo* $x \in H$*;*

c) $S^2 = \mathrm{id}$.

Demonstração.

- a)⇒c) Basta mostrar que, na hipótese de a), S^2 é uma inversa à direita de S, pois como sabemos que id é inversa de S, pela unicidade da inversa teremos $S^2 = \mathrm{id}$. E de fato S^2 é uma inversa à direita de S pois, para todo $x \in H$,

$$\begin{aligned}(S * S^2)(x) &= \sum S(x_1)S^2(x_2) \\ &= \sum S(S(x_2)x_1) \\ &= S(\varepsilon(x)1_H) \\ &= \varepsilon(x)1_H \\ &= \eta \circ \varepsilon(x).\end{aligned}$$

- c) ⇒ a) Sendo $\sum S(x_1)x_2 = \varepsilon(x)1_H$ pela definição de S, e usando a hipótese c), temos que

$$\begin{aligned}\sum S(x_2)x_1 &= \sum S(x_2)S^2(x_1) \\ &= S\left(\sum S(x_1)x_2\right) \\ &= S(\varepsilon(x)1_H) \\ &= \varepsilon(x)1_H.\end{aligned}$$

- b) ⇒ c) Basta mostrar que S^2 é uma inversa à esquerda de S, pois como sabemos que id é inversa de S, pela unicidade da inversa teremos $S^2 = \mathrm{id}$. E de fato S^2 é uma inversa à esquerda de S pois para todo $x \in H$

$$\begin{aligned}(S^2 * S)(x) &= \sum S^2(x_1)S(x_2) \\ &= \sum S(x_2S(x_1)) \\ &= S(\varepsilon(x)1_H) \\ &= \varepsilon(x)1_H \\ &= \eta \circ \varepsilon(x).\end{aligned}$$

- c) ⇒ b) Sabendo que $\sum x_1S(x_2) = \varepsilon(x)1_H$ e usando a hipótese $S^2 = \mathrm{id}$, temos que

$$\begin{aligned}\sum x_2S(x_1) &= \sum S^2(x_2)S(x_1) \\ &= S\left(\sum x_1S(x_2)\right) \\ &= S(\varepsilon(x)1_H) \\ &= \varepsilon(x)1_H.\end{aligned}$$

■

Corolário 3.2.8. *Seja H uma álgebra de Hopf comutativa ou cocomutativa. Então* $S^2 = \mathrm{id}$.

Demonstração. Usando que $\sum S(x_1)x_2 = \varepsilon(x)1_H$, se H for comutativa, temos $\sum x_2S(x_1) = \varepsilon(x)1_H$, ou seja, vale o item b) da proposição anterior, e portanto $S^2 = \mathrm{id}$. Agora, se H for cocomutativa então

$$\sum x_1 \otimes x_2 = \sum x_2 \otimes x_1$$

e assim,

$$\begin{aligned}
\sum S(x_2)x_1 &= \mu \circ (S \otimes \mathrm{id}) \left(\sum x_2 \otimes x_1\right) \\
&= \mu \circ (S \otimes \mathrm{id}) \left(\sum x_1 \otimes x_2\right) \\
&= \sum S(x_1)x_2 \\
&= \varepsilon(x)1_H,
\end{aligned}$$

em cujo caso vale o item $a)$ da proposição anterior e assim também $S^2 = \mathrm{id}$. ■

Exemplo 3.2.9. Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então a biálgebra $H^{op,cop}$ é uma álgebra de Hopf com a mesma antípoda S. Além disso, se S for bijetora então H^{op} e H^{cop} são álgebras de Hopf com antípoda S^{-1}.

Proposição 3.2.10. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S. Então H^* é uma álgebra de Hopf com antípoda S^* (dual definido ao início da seção 2.3).*

Demonstração. Pela proposição 3.1.6, H^* é uma biálgebra. Mostremos que S^* é antípoda. Seja $h^* \in H^*$ e $\bar{\Delta}(h^*) = \sum h_1^* \otimes h_2^*$ comultiplicação de H^*. Então para todo $x \in H$

$$\begin{aligned}
(S^* * \mathrm{id})(h^*)(x) &= \sum ((S^*(h_1^*)h_2^*)(x) \\
&= \sum (S^*(h_1^*))(x_1)h_2^*(x_2) \\
&= \sum h_1^*(S(x_1))h_2^*(x_2) \\
&= \sum h^*(S(x_1)x_2) \\
&= h^*(\varepsilon(x)1_H) \\
&= \varepsilon(x)h^*(1_H) \\
&= \bar{\varepsilon}(h^*)\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

com $\bar{\varepsilon}$ a counidade de H^*. Com isso, $\sum(S^* \circ h_1^*)h_2^* = \bar{\varepsilon}(h^*)\varepsilon(h^*)\varepsilon$. Analogamente, podemos provar que $\sum h_1^* S^*(h_2^*) = \bar{\varepsilon}(h^*)\varepsilon$. ■

Exemplo 3.2.11. Sejam H_1 e H_2 álgebras de Hopf com antípodas S_1 e S_2 repectivamente. Então $H_1 \otimes H_2$ é uma álgebra de Hopf com antípoda $S_1 \otimes S_2$.

Terminamos esse capítulo com um último exemplo que dá estrutura de álgebra de Hopf às álgebras de grupo:

Exemplo 3.2.12 (Álgebra de Grupo)**.** Seja G um grupo e kG o espaço vetorial com base G. Pelo Exemplo 3.1.3, kG é uma biálgebra. A existência de uma antípoda que torne kG uma álgebra de Hopf está diretamente relacionada ao fato dos elementos de G serem invertíveis. De fato, definiremos a antípoda por $S(g) = g^{-1}$, para todo $g \in G$. Com isso, e pelo fato de $\Delta(g) = g \otimes g$, temos

$$S * \mathrm{id}(g) = S(g)g = g^{-1}g = 1_G = \varepsilon(g)1_{kG} = \eta \circ \varepsilon(g).$$

Analogamente, $\mathrm{id} * S = \eta \circ \varepsilon$.
Temos também que, se G for finito, pela proposição 3.2.10, $(kG)^*$ será uma álgebra de

Hopf.
Ainda em $(kG)^*$, para um grupo finito G, para cada $g \in G$, defina a aplicação

$$\begin{array}{rccc} p_g\colon & kG & \longrightarrow & k \\ & h & \longmapsto & \delta_{g,h} \end{array}$$

$(p_g)_{g\in G}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais para $(kG)^*$, ou seja,

$$p_g^2 = p_g, p_g p_h = 0 \text{ para todo } g \neq h \text{ e } \sum_{g\in G} p_g = 1_{(kG)^*}.$$

É possível mostrar que a comultiplicação, a counidade e a antípoda de $(kG)^*$ podem ser expressas em termos dos p_g da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta(p_g) &= \sum_{x\in G} p_x \otimes p_{x^{-1}g} \\ \varepsilon(p_g) &= \delta_{1,g} \\ S(p_g) &= p_{g^{-1}}. \end{aligned}$$

Capítulo 4

H-Módulo e H-Comódulo Álgebras

Em todo este capítulo, $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ será sempre uma álgebra de Hopf fixada.

Nosso objetivo neste capítulo é introduzir objetos que unem os conceitos de álgebras e módulos ou respectivamente coálgebras e comódulos. Estes objetos surgem quando queremos que uma álgebra (resp. coálgebra) tenha uma estrutura de "(co)ação" externa compatível com sua estrutura interna. Nos próximos capítulos será desejável que as álgebras tenham essa compatibilidade com a estrutura externa.

As principais referências para este capítulo são os livros [10] e [20].

4.1 Ações de Álgebras de Hopf em Álgebras

Definição 4.1.1 (H-Módulo Álgebra à Esquerda)**.** Seja A uma álgebra. Dizemos que A é um *H-módulo álgebra à esquerda* se valem as seguintes condições:

(MA1) A é um H-módulo à esquerda com ação

$$\begin{array}{rccc} \nu: & H \otimes A & \longrightarrow & A \\ & x \otimes a & \longmapsto & x \cdot a \end{array}$$

(MA2) $x \cdot (ab) = \sum (x_1 \cdot a)(x_2 \cdot b)$,

(MA3) $x \cdot 1_A = \varepsilon(x) 1_A$,

para todo $x \in H$ e $a, b \in A$.

De modo análogo poderíamos definir um H-módulo álgebra à direita.

O lema a seguir é uma tecnicalidade para mostrar que se A tem estrutura de álgebra e de H-comódulo então μ ser homomorfismo de álgebras é condição necessária e suficiente para que A seja um H-módulo álgebra.

Lema 4.1.2. *Seja A uma álgebra que também é um H-módulo como espaço vetorial e que tenha a propriedade (MA2). Então:*

(a) $(x \cdot a)b = \sum x_1 \cdot (a(S(x_2) \cdot b))$,

(b) Se S é bijetora então $a(x \cdot b) = \sum x_2 \cdot ((S^{-1}(x_1) \cdot a)b)$,

para todo $x \in H$ e $a, b \in A$.

Demonstração.

a) De fato,

$$\begin{aligned}
\sum x_1 \cdot (a(S(x_2) \cdot b) &= \sum (x_1 \cdot a)(x_2 \cdot (S(x_3) \cdot b) \\
&= \sum (x_1 \cdot a)(x_2 S(x_3)) \cdot b \\
&= (x_1 \cdot a)(\varepsilon(x_2) 1_H \cdot b) \\
&= \left(\left(\sum x_1 \varepsilon(x_2) \right) \cdot a \right) (1_H \cdot b) \\
&= (x \cdot a)(1_H \cdot b) \\
&= (x \cdot a) b
\end{aligned}$$

b) Sendo S bijetora, então vale

$$\sum x_2 S^{-1}(x_1) = \sum (S^{-1} \circ S)(x_2) S^{-1}(x_1) = S^{-1} \left(\sum x_1 S(x_2) \right) = \varepsilon(x) 1_H.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\sum x_2 \cdot ((S^{-1}(x_1) \cdot a) b) &= \sum (x_2 \cdot ((S^{-1}(x_1) \cdot a)(x_3 \cdot b) \\
&= \sum (x_2 S^{-1}(x_1) \cdot a)(x_3 \cdot b) \\
&= \sum (\varepsilon(x_1) 1_H \cdot a)(x_2 \cdot b) \\
&= (1_H \cdot a) \left(\sum \varepsilon(x_1) x_2 \cdot b \right) \\
&= a(x \cdot b).
\end{aligned}$$

■

Proposição 4.1.3. *Seja A uma álgebra que também é um H-módulo como espaço vetorial. Então A é um H-módulo álgebra se, e somente se, μ é um homomorfismo de H-módulos.*

Demonstração. Não é difícil ver que $A \otimes A$ é um H-módulo à esquerda com a ação $\theta \colon H \otimes H \otimes A \longrightarrow H \otimes A$ dada por

$$x \cdot (a \otimes b) = \sum (x_1 \cdot a)(x_2 \cdot b)$$

para todo $x \in H$ e $a, b \in A$. Note também que a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
H \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mu} & H \otimes A \\
\downarrow{\scriptstyle \theta} & & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\
A \otimes A & \xrightarrow{\quad \mu \quad} & A
\end{array}$$

em que θ é a aplicação definida acima e ν é a aplicação que torna A um H-módulo, garante que μ é um homomorfismo de H-módulos e que vale (MA2), ou seja as duas afirmações são equivalentes. Com isso, só resta mostrar que, neste caso, podemos deduzir (MA3) de

(MA2). Para isso, usaremos o lema anterior com $a = b = 1_A$:

$$\begin{aligned} x \cdot 1_A &= (x \cdot 1_A)1_A \\ &= \sum x_1 \cdot (1_A(S(x_2) \cdot 1_A)) \\ &= \sum x_1(S(x_2) \cdot 1_A) \\ &= \left(\sum x_1 S(x_2)\right) \cdot 1_A \\ &= \varepsilon(x)1_A. \end{aligned}$$

■

Dada A um H-módulo álgebra, considere o conjunto

$$A^H = \{a \in A \mid x \cdot a = \varepsilon(x)a, \text{ para todo } x \in H\}$$

dos elementos de A sobre os quais H age como um escalar.

Proposição 4.1.4. *A^H é uma subálgebra de A.*

Demonstração. Só precisamos provar que $x \cdot (ab) = \varepsilon(x)ab$, para todo $x \in H$ e $a, b \in A^H$, como se segue:

$$\begin{aligned} x \cdot (ab) &= \sum (x_1 \cdot a)(x_2 \cdot b) \\ &= \sum \varepsilon(x_1)a\varepsilon(x_2)b \\ &= \sum \varepsilon(x_1)\varepsilon(x_2)ab \\ &= \sum \varepsilon(x_1\varepsilon(x_2))ab \\ &= \varepsilon(x)ab \end{aligned}$$

■

Definição 4.1.5 (Subálgebra de Invariantes)**.** A^H é dita *subálgebra de invariantes* de A.

Exemplo 4.1.6. H é um H-módulo álgebra com ação $x \cdot y = \sum x_1 y S(x_2)$, para todo $x, y \in H$. Além disso, $H^H = Z(H)$, o centro de H.
Já sabemos que H é um H-módulo. A propriedade (MA3) se verifica facilmente pois, para todo $x \in H$,

$$x \cdot 1_H = \sum x_1 S(x_2) = \varepsilon(x)1_H$$

A propriedade (MA2) também se verifica, pois, para todo $x, y, z \in H$,

$$\begin{aligned} \sum (x_1 \cdot y)(x_2 \cdot z) &= \sum x_1 y S(x_2) x_3 z S(x_4) \\ &= \sum x_1 y \varepsilon(x_2) z S(x_3) \\ &= \sum x_1 \varepsilon(x_2) y z S(x_3) \\ &= \sum x_1 y z S(x_2) \\ &= x \cdot (yz) \end{aligned}$$

Logo H é um H-módulo álgebra. Finalmente, $H^H = Z(H)$ pois, se $y \in H^H$, então para todo $x \in H$,

$$\begin{aligned} xy &= \sum x_1 \varepsilon(x_2) y \\ &= \sum x_1 y \varepsilon(x_2) \\ &= \sum x_1 y S(x_2) x_3 \\ &= \sum (x_1 \cdot y) x_2 \\ &= \sum \varepsilon(x_1) y x_2 \\ &= \sum y \varepsilon(x_1) x_2 \\ &= yx. \end{aligned}$$

Exemplo 4.1.7. H^* é um H-módulo álgebra com ação $(x \cdot h^*)(y) = h^*(yx)$, para todo $x, y \in H$ e $h^* \in H^*$.
Já sabemos que H^* é um H-módulo. Verifiquemos a propriedade (MA3): para todo $x, y \in H$,

$$(x \cdot 1_{H^*})(y) = 1_{H^*}(yx) = \varepsilon(yx) = \varepsilon(y)\varepsilon(x) = \varepsilon(x) 1_{H^*}(y)$$

A propriedade (MA2) se verifica do mesmo modo, pois, para todo $x, y \in H$ e $h, g \in H^*$,

$$\begin{aligned} \sum (x_1 \cdot h^*)(x_2 \cdot g^*)(y) &= \sum h^*(y_1 x_1) g^*(y_2 x_2) \\ &= (hg)^*(yx) \\ &= (x \cdot (hg)^*)(y). \end{aligned}$$

Logo H^* é um H-módulo álgebra.

Para o próximo exemplo, será útil recordar a noção de álgebra graduada por um grupo.

Definição 4.1.8 (Álgebra G-graduada)**.** Seja G um grupo. Dizemos que A é uma *álgebra G-graduada* se

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g,$$

em que A_g são espaços vetoriais chamados componentes homogêneas de grau g em A tais que, para todo $g, h \in G$, $A_g A_h \subset A_{gh}$.

Se 1_G é o elemento neutro do grupo G, então A_1 é uma subálgebra de A contendo os elementos de grau 1 em A. É obvio que todo $a \in A$ se expressa unicamente na forma

$$a = \sum_{g \in G} a_g$$

para $a_g \in A_g$. Quando não houver dúvida quanto ao grupo, diremos simplesmente que A é uma álgebra graduada.

Exemplo 4.1.9. Seja G um grupo finito e A uma álgebra graduada. Então, A é um $(kG)^*$-módulo álgebra com a ação

$$\begin{array}{rccc} \nu: & (kG)^* \otimes A & \longrightarrow & A \\ & p_g \otimes a & \longmapsto & a_g. \end{array}$$

Ademais, $A^{(kG)^*} = A_1$, e com isso, A_1 é um $(kG)^*$-submódulo de A.
De fato, A é um $(kG)^*$-módulo com aplicação acima pois, usando os idempotentes do exemplo 3.2.12 temos que, para todo $p_g, p_h \in (kG)^*$ e para todo $a, b \in A$, a condição (MA1) é satisfeita pois, por um lado,

$$p_g \cdot p_h \cdot a = p_g(a_h) = \begin{cases} a_g, & \text{se } g = h \\ 0, & \text{se } g \neq h \end{cases}$$

e, por outro,

$$(p_g p_h) \cdot a = \begin{cases} p_g \cdot a = a_g, & \text{se } g = h \\ 0 \cdot a = 0, & \text{se } g \neq h. \end{cases}$$

Além disso,

$$1_{(kG)^*} \cdot a = \sum_{g \in G} p_g \cdot a = \sum_{g \in G} a_g = a.$$

A condição (MA2) é satisfeita, pois

$$p_g \cdot (ab) = (ab)_g = \sum_{h \in G} a_h b_{h^{-1}g} = \sum_{h \in G} (p_h \cdot a)(p_{h^{-1}g} \cdot b).$$

A condição (MA3) também, pois

$$p_g \cdot 1_A = \begin{cases} 1_A, & \text{se } g = 1_G \\ 0, & \text{se } g \neq 1_G \end{cases} = \delta_{1_G, g} 1_A = \varepsilon(p_g) 1_A.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} A^{(kG)^*} &= \{a \in A \mid p_g \cdot a = \varepsilon(p_g)a, \text{ para todo } p_g \in (kG)^*\} \\ &= \{a \in A \mid a_g = \delta_{1_G, g} a, \text{ para todo } g \in G\} \\ &= \{a \in A \mid a_{1_G} = a \text{ e } a_g = 0 \text{ para todo } g \in G, g \neq 1_G\} \\ &= A_1. \end{aligned}$$

Definição 4.1.10 (Homomorfismo de H-módulo Álgebras)**.** Sejam A e B H-módulo álgebras e $f : A \longrightarrow B$ linear. f é um *homomorfismo de H-módulo álgebras* se for ao mesmo tempo um homomorfismo de H-módulos e um homomorfismo de álgebras.

4.2 Coações de Álgebras de Hopf em Álgebras

Da mesma forma que nos H-módulo álgebras tinhamos uma ação compatível com o produto e a unidade da álgebra, aqui desejamos uma coação que também seja compatível com essas estruturas.

Definição 4.2.1 (H-comódulo Álgebra à Direita)**.** Seja H uma álgebra de Hopf e A uma álgebra. Dizemos que A é um *H-comódulo álgebra à direita* se valem as seguintes condições:

(CA1) A é um H-comódulo à direita com coação dada por

$$\rho(a) = \sum a_{(0)} \otimes a_{(1)},$$

(CA2) $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$, isto é, para todo $a, b \in A$,

$$\sum (ab)_{(0)} \otimes (ab)_{(1)} = \sum a_{(0)}b_{(0)} \otimes a_{(1)}b_{(1)},$$

(CA3) $\rho(1_A) = 1_A \otimes 1_H$.

É comum dizermos que H coage à direita de A por ρ, ou ainda que ρ é uma coação de H à direita em A. Em geral, omitiremos o termo "à direita".

De modo análogo, podemos definir um H-comódulo álgebra à esquerda:

Definição 4.2.2 (H-comódulo Álgebra à Esquerda)**.** Seja H uma álgebra de Hopf e A uma álgebra. Dizemos que A é um *H-comódulo álgebra à esquerda* se valem as seguintes condições:

(CA1$_l$) A é um H-comódulo à esquerda com coação dada por

$$\lambda(a) = \sum a_{(-1)} \otimes a_{(0)}$$

(CA2$_l$) $\lambda(ab) = \lambda(a)\lambda(b)$, isto é, para todo $a, b \in A$,

$$\sum (ab)_{(-1)} \otimes (ab)_{(0)} = \sum a_{(-1)}b_{(-1)} \otimes a_{(0)}b_{(0)},$$

(CA3$_l$) $\lambda(1_A) = 1_H \otimes 1_A$,

Note que as condições (CA2) e (CA3) (resp. (CA2$_l$) e (CA3$_l$)) equivalem a pedir que ρ (resp. λ) seja um homomorfismo de álgebras.

Dado A um H-comódulo álgebra, denote

$$A^{coH} = \{a \in A \mid \rho(a) = a \otimes 1_H, \text{ para todo } a \in A\}.$$

Em vista de (CA2), A^{coH} é uma subálgebra e é dita *subálgebra de coinvariantes* de A. Como fizemos com comódulos, a partir de agora o termo H-comódulo álgebra irá se referir aos H-comódulo álgebras à direita.

A próxima proposição exige um pequeno lema, da álgebra linear:

Lema 4.2.3. *Sejam U e V espaços vetoriais e $t \in U \otimes V$. Se $\mathrm{id} \otimes f(t) = 0$ para todo $f \in V^*$ então $t = 0$.*

Demonstração. Seja $t = \sum_i u_i \otimes v_i$, com

$$0 = (id \otimes f)(t) = (id \otimes f)\left(\sum_i u_i \otimes v_i\right) = \sum_i f(v_i)u_i$$

para todo $f \in V^*$. Suponha $t \neq 0$. Logo podemos tomar os $\{u_i\}_i$ linearmente independentes. Assim $f(v_i) = 0$ para todo i e para todo f. Com isso, $v_i = 0$ para todo i e portanto, $t = \sum_i u_i \otimes v_i = 0$. ■

Proposição 4.2.4. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A uma álgebra. Então A é um H-comódulo álgebra à direita se, e somente se, A é um H^*-módulo álgebra à esquerda. Além disso, $A^{coH} = A^{H^*}$.*

Demonstração. Suponha que A seja um H-comódulo álgebra. Mostremos que A é um H^*-módulo álgebra com aplicação

$$\begin{array}{rccc} \nu\colon & H\otimes A & \longrightarrow & A \\ & f\otimes a & \longmapsto & \sum a_{(0)}f(a_{(1)}). \end{array}$$

Pela proposição 2.5.9, (A,ν) é um H^*-módulo. As condições (MA2) e (MA3) se verificam pois, para todo $f\in H^*$ e $a,b\in A$,

$$\begin{aligned} f\cdot(ab) &= \sum (ab)_{(0)}f((ab)_{(1)}) \\ &= \sum a_{(0)}b_{(0)}f(a_{(1)}b_{(1)}) \\ &= \sum a_{(0)}b_{(0)}f(a_{(1)})f(b_{(1)}) \\ &= \sum a_{(0)}f(a_{(1)})b_{(0)}f(b_{(1)}) \\ &= \sum (f_1\cdot a)(f_2\cdot b) \end{aligned}$$

e

$$f\cdot(1_A) = 1_A f(1_H) = \bar{\varepsilon}(f)1_A$$

na qual $\bar{\varepsilon}$ é a counidade de H^*.

Para mostrar a recíproca, tome $n=\dim_k(H)$ e $\{e_1,\ldots,e_n\}$ base de H. Assim, temos $\{e_1^*,\ldots,e_n^*\}$ base dual de H^*, ou seja, $e_i^*(e_j)=\delta_{ij}$. Supondo que A seja um H^*-módulo álgebra, mostremos que A é um H-comódulo álgebra com coação

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & A & \longrightarrow & A\otimes H \\ & a & \longmapsto & \sum_{i=1}^n (e_i^*\cdot a)\otimes e_i. \end{array}$$

Não é difícil ver que a aplicação acima é de fato uma coação. Para mostrar (CA2), note que, para todo $f\in H^*$,

$$\begin{aligned} (\mathrm{id}\otimes f)(\rho(ab)) &= \sum_{i=1}^n e_i^*\cdot(ab)f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i^* f(e_i))\cdot(ab) \\ &= f\cdot(ab) \\ &= \sum (f_1\cdot a)(f_2\cdot b) \\ &= \sum_{i,j=1}^n ((e_i^* f_1(e_i))\cdot a)((e_j^* f_2(e_j))\cdot b) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (e_i^*\cdot a)(e_j^*\cdot b)f_1(e_i)f_2(e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (e_i^*\cdot a)(e_j^*\cdot b)f(e_ie_j) \\ &= (\mathrm{id}\otimes f)\left(\sum_{i,j=1}^n (e_i^*\cdot a)(e_j^*\cdot b)\otimes e_ie_j\right) \\ &= (\mathrm{id}\otimes f)(\rho(a)\rho(b)). \end{aligned}$$

Logo, pelo lema anterior, $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$. A condição (CA3) vale também, pois

$$\begin{aligned}\rho(1_A) &= \sum_{i=1}^{n}(e_i^* \cdot 1_A) \otimes e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i^*(1_H)1_A \otimes e_i \\ &= 1_A \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} e_i^*(1_H)e_i\right) \\ &= 1_A \otimes 1_H.\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}A^{H^*} &= \{a \in A \mid f \cdot a = f(1_H)a, \text{ para todo } f \in H^*\} \\ &= \left\{a \in A \;\middle|\; \sum a_{(0)}f(a_{(1)}) = f(1_H)a, \text{ para todo } f \in H^*\right\} \\ &= \{a \in A \mid (\mathrm{id} \otimes f)(\rho(a)) = (\mathrm{id} \otimes f)(a \otimes 1_H), \text{ para todo } f \in H^*\} \\ &= \{a \in A \mid \rho(a) = a \otimes 1_H\} \\ &= A^{coH}.\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.2.5. H é um H-comódulo álgebra. De fato, já sabemos que H é um H-comódulo com Δ, porém, como Δ é homomorfismo de álgebras, obviamente valem (MA2) e (MA3).

Exemplo 4.2.6. Seja G um grupo arbitrário e A uma álgebra graduada. Então A é um kG-comódulo álgebra com coação

$$\begin{aligned}\rho: \quad A &\longrightarrow A \otimes kG \\ a &\longmapsto \sum_{g\in G} a_g \otimes g\end{aligned}$$

Além disso, $A^{co(kG)} = A_1$.
De fato, A é um kG-comódulo a coação acima pois, para todos $a, b \in A$ e $g, h \in G$,

$$\begin{aligned}(\rho \otimes \mathrm{id}) \circ \rho(a) &= (\rho \otimes \mathrm{id})\left(\sum_{g\in G} a_g \otimes g\right) \\ &= \sum_{g\in G} a_g \otimes g \otimes g \\ &= (\mathrm{id} \otimes \Delta)\left(\sum_{g\in G} a_g \otimes g\right) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \rho(a).\end{aligned}$$

Além disso,

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \rho(a) = \sum_{g\in G} \varepsilon(g)a_g = \sum_{g\in G} a_g = a,$$

o que conclui a verificação de (CA1). Para (CA2), vem

$$\begin{aligned}
\rho(ab) &= \sum_{g\in G}(ab)_g \otimes g \\
&= \sum_{g\in G}\sum_{h\in H} a_{gh^{-1}}b_h \otimes g \\
&= \sum_{g\in G}\sum_{h\in H} a_{gh^{-1}}b_h \otimes gh^{-1}h \\
&= \sum_{g\in G}\sum_{h\in H} (a_{gh^{-1}} \otimes gh^{-1})(b_h \otimes h) \\
&= \rho(a)\rho(b).
\end{aligned}$$

A condição (CA3) segue imediatamente de

$$\rho(1_A) = \sum_{g\in G}(1_A)_g \otimes g = 1_A \otimes 1_G.$$

Para concluir,

$$\begin{aligned}
A^{co(kG)} &= \{a \in A \mid \rho(a) = a \otimes 1_{kG}\} \\
&= \left\{a \in A \mid \sum_{g\in G} a_g \otimes g = a \otimes 1_{_G}\right\} \\
&= \left\{a \in A \mid \sum_{g\in G} a_g \otimes g - a \otimes 1_{_G} = 0\right\} \\
&= \left\{a \in A \mid \sum_{g\in G} a_g \otimes g - a \otimes 1_{_G} = 0\right\} \\
&= \left\{a \in A \mid \sum_{\substack{g\in G\\ g\neq 1_G}} a_g \otimes g - (a_{1_G} - a) \otimes 1_{_G} = 0\right\}.
\end{aligned}$$

Logo, como G é base de kG, $(a_{1_G} - a) = a_g = 0$ para todo $g \neq 1_G$, ou seja, $a = a_{1_G}$ e $a_g = 0$, para todo $g \neq 1_G$. Portanto $A^{co(kG)} = A_1$.

Note que, quando tratamos de H-módulos, exigiamos um grupo finito G para que uma álgebra G-graduada A fosse um $(kG)^*$-módulo álgebra, já no exemplo anterior o grupo G é arbitrário.

Definição 4.2.7 (Homomorfismo de H-comódulo Álgebras)**.** Sejam A e B H-comódulo álgebras e $f\colon A \longrightarrow B$ linear. f é um *homomorfismo de H-comódulo álgebras* se for ao mesmo tempo um homomorfismo de H-comódulos e um homomorfismo de álgebras.

Capítulo 5

O Produto Torcido e os Objetos Galois

Em todo este capítulo $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ é uma álgebra de Hopf.

Neste capítulo estudaremos dois objetos: As álgebras torcidas que tem propriedades que serão úteis no capítulo seguinte e os objetos Galois cuja classificação será fundamental para obter os isomorfismos de álgebras que desejamos. No final do capítulo veremos que toda álgebra torcida é um objeto Galois e que, quando H tem dimensão finita, todo objeto Galois é uma álgebra torcida.

As principais referências para este capítulo são os livros [10], [20] e os artigos [6] e [17].

5.1 O Produto Torcido

Seja A um H-comódulo álgebra. A ideia aqui é alterar a multiplicação de A. porém preservando a unidade. F

Definição 5.1.1 (Cociclo)**.** Dada uma álgebra A tal que H mede A, ou seja, satisfazendo as condições (MA2) e (MA3), seja $\sigma\colon H \otimes H \longrightarrow A$ uma aplicação linear invertível por convolução. Por simplicidade denotaremos $\sigma(x \otimes y)$ por $\sigma(x, y)$. Dizemos que σ é um 2-*cociclo à esquerda normalizado* para H se

i) $\sum \sigma(y_1, z_1)\sigma(x, y_2z_2) = \sum \sigma(x_1, y_1)\sigma(x_2y_2, z)$,

ii) $\sigma(1_H, x) = \sigma(x, 1_H) = \varepsilon(x)$,

iii) $\sum(x_1 \cdot (y_1 \cdot a))\sigma(x_2, y_2) = \sum \sigma(x_1, y_1)((x_2y_2) \cdot a)$.

para todo $x, y, z \in H$ e $a \in A$.

Nesta definição, a condição i) é chamada de condição de cociclo, a condição ii) de condição de normalização e a condição iii) de condição do módulo torcido.

Para nossos fins, tomaremos $A = k$ e faremos H agir trivialmente em k.Com isso, da linearidade de σ, a condição do módulo torcido se resume à seguinte afirmação trivial:

$$a\sigma(x, y) = \sigma(x, y)a.$$

Como, a menos que se diga o contrário, usaremos 2-cociclos à esquerda normalizados, a partir de agora o termo "σ um cociclo" se refere a "σ um 2-cociclo à esquerda normalizado".

Pode ser útil interpretar a condição de cociclo em termos do produto de convolução em $\mathrm{Hom}(H \otimes H \otimes H, k)$ da seguinte forma:

$$(\varepsilon \otimes \sigma) * (\sigma \circ \mathrm{id} \otimes \mu) = (\sigma \otimes \varepsilon) * (\sigma \circ \mu \otimes \mathrm{id}).$$

O seguinte lema, apresenta algumas propriedades dos cociclos σ e estas serão bastante úteis mais adiante:

Lema 5.1.2. *Seja $\sigma\colon H \otimes H \longrightarrow k$ um cociclo. Para todo $x, y, z \in H$*

i) $\varepsilon(x)\sigma(y,z) = \sum \sigma(x_1, y_1)\sigma(x_2y_2, z_1)\sigma^{-1}(x_3, y_3z_2)$,

ii) $\varepsilon(x)\sigma^{-1}(y,z) = \sum \sigma(x_1, y_1z_1)\sigma^{-1}(x_2y_2, z_2)\sigma^{-1}(x_3, y_3)$.

A demonstração do lema anterior está imbutido na demonstração de [20, 7.2.7].
A seguinte observação da álgebra linear será usada aqui e no restante do texto.

Observação 5.1.3. Seja V um espaço vetorial. Considere o espaço vetorial u_V cujos elementos são denotados pelos u-símbolos $u_v, v \in V$. Certamente que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi_u\colon & V & \longrightarrow & u_V \\ & v & \longmapsto & u_v \end{array}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais. Note que, por definição, valem

$$\begin{aligned} u_{v_1} + u_{v_2} &= u_{v_1+v_2} \\ \lambda u_v &= u_{\lambda v} \end{aligned}$$

para todo $v, v_1, v_2 \in V$ e $\lambda \in k$.

A definição a seguir é um dos poucos casos que usaremos um H-comódulo álgebra à esquerda. Ainda nesta seção ficará claro o porquê.

Definição 5.1.4 (Produto Torcido)**.** Seja A um H-comódulo álgebra à esquerda e $\sigma\colon H \otimes H \longrightarrow k$ um cociclo. O *produto torcido por σ à esquerda* é a seguinte operação binária no espaço vetorial u_A (como na Observação 5.1.3)

$$u_a u_b = \sum \sigma(a_{(-1)}, b_{(-1)}) u_{a_{(0)}b_{(0)}}$$

para todo $u_a, u_b \in u_A$.

Note que esta operação está bem definida pois poderia ser expressa usando composições da seguinte forma

$$(\mathrm{id} \otimes \varphi_u) \circ (\sigma \otimes \mu_A) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\rho \otimes \rho) \circ (\varphi_u^{-1} \otimes \varphi_u^{-1})$$

com $\rho\colon A \longrightarrow H \otimes A$, dada por $\rho(a) = \sum a_{(-1)} \otimes a_{(0)}$ a coação de H em A à esquerda e φ_u o isomorfismo da Observação 5.1.3.

Proposição 5.1.5. *Seja A um H-comódulo álgebra e $\sigma\colon H \otimes H \longrightarrow k$ um cociclo. Então u_A com o produto torcido é uma álgebra com unidade 1_A. Este H-comódulo é dito um H-comódulo álgebra torcido (por σ) e será denotado por ${}^{\sigma}A$.*

Demonstração. ${}^{\sigma}A$ é associativa pois, denotando a operação da definição 5.1.4 por μ_σ,

$$\begin{aligned}
\mu_\sigma \circ (\mathrm{id} \otimes \mu_\sigma)(u_a \otimes u_b \otimes u_c) &= \mu_\sigma \left(u_a \otimes \left(\sum \left(b_{(-1)}, c_{(-1)}\right) u_{b_{(0)}c_{(0)}} \right)\right) \\
&= \sum \sigma\left(b_{(-1)}, c_{(-1)}\right) \sigma\left(a_{(-1)}, (b_{(0)}c_{(0)})_{(-1)}\right) u_{a_{(0)}(b_{(0)}c_{(0)})_{(0)}} \\
&= \sum \sigma\left(b_{(-2)}, c_{(-2)}\right) \sigma\left(a_{(-1)}, b_{(-1)}c_{(-1)}\right) u_{a_{(0)}b_{(0)}c_{(0)}} \\
&= \sum \sigma\left(b_{(-1)_1}, c_{(-1)_1}\right) \sigma\left(a_{(-1)}, b_{(-1)_2}c_{(-1)_2}\right) u_{a_{(0)}b_{(0)}c_{(0)}} \\
&\overset{*}{=} \sum \sigma\left(a_{(-1)_1}, b_{(-1)_1}\right) \sigma\left(b_{(-1)_2}c_{(-1)_2}, c_{(-1)_1}\right) u_{a_{(0)}b_{(0)}c_{(0)}} \\
&\overset{**}{=} \sum \sigma\left(a_{(-2)}, b_{(-2)}\right) \sigma\left(a_{(-1)}b_{(-1)}, c_{(-1)}\right) u_{a_{(0)}b_{(0)}c_{(0)}} \\
&\overset{*}{=} \sum \sigma\left(a_{(-1)}, b_{(-1)}\right) \sigma\left((a_{(0)}b_{(0)})_{(-1)}, c_{(-1)}\right) u_{(a_{(0)}b_{(0)})_{(0)}c_{(0)}} \\
&= \mu_\sigma \left(\left(\sum \left(a_{(-1)}, b_{(-1)}\right) u_{a_{(0)}b_{(0)}} \right) \otimes u_c \right) \\
&= \mu_\sigma \circ (\mu_\sigma \otimes \mathrm{id})(u_a \otimes u_b \otimes u_c).
\end{aligned}$$

Aqui $*$ faz referência à ultima afirmação da Observação 2.5.3 e $**$ é a aplicação da condição de cociclo.

Mostremos que 1_A é unidade de ${}^{\sigma}A$. Como $\rho(1_A) = 1_H \otimes 1_A$ (CA3$_l$), temos pela condição de normalização que

$$u_a u_{1_A} = \sum \sigma(a_{(-1)}, 1_H) u_{a_{(0)}} = \sum \varepsilon(a_{(-1)}) u_{a_{(0)}} = u_{\sum \varepsilon(a_{(-1)})a_{(0)}} = u_a$$

e

$$u_{1_A} u_a = \sum \sigma(1_H, a_{(-1)}) u_{a_{(0)}} = \sum \varepsilon(a_{(-1)}) u_{a_{(0)}} = u_{\sum \varepsilon(a_{(-1)})a_{(0)}} = u_a$$

para todo $u_a \in {}^{\sigma}A$. ■

A definição de produto torcido faz sentido para um H-comódulo álgebra à esquerda arbitrário, porém estaremos mais interessados no caso particular do seguinte exemplo:

Exemplo 5.1.6. Na definição 5.1.4 tome $A = H$. Lembre-se de que H é um H-comódulo álgebra com coação à esquerda dada por Δ (exemplo 4.2.5) e assim ${}^{\sigma}H$ é um produto torcido à esquerda por σ com multiplicação dada por

$$u_x u_y = \sum \sigma(x_1, y_1) u_{x_2 y_2}.$$

A seguinte proposição coloca estrutura de H-comódulo álgebra (à direita) em ${}^{\sigma}H$, e é para que isso seja possível (com a coação que iremos usar) que definimos anteriormente o produto torcido à esquerda.

Teorema 5.1.7. *Seja $\sigma\colon H \otimes H \longrightarrow k$ um cociclo. Então ${}^{\sigma}H$ é um H-comódulo álgebra.*

Demonstração. ${}^{\sigma}H$ é uma álgebra pela proposição 5.1.5.
Agora, defina

$$\begin{aligned}
\delta\colon \quad {}^{\sigma}H &\longrightarrow {}^{\sigma}H \otimes H \\
u_x &\longmapsto \sum u_{x_1} \otimes x_2.
\end{aligned}$$

δ está bem definida e é linear pois

$$\delta = (\varphi_u \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \circ \varphi_u^{-1}.$$

Para que δ seja uma coação, basta verificar as três condições da definição 4.2.1:

- ${}^{\sigma}H$ é um H-comódulo.
  De fato, para todo $u_x \in {}^{\sigma}H$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \delta(u_x) &= (\mathrm{id} \otimes \Delta)\left(\sum u_{x_1} \otimes x_2\right)\\ &= \sum u_{x_1} \otimes x_2 \otimes x_3\\ &= (\delta \otimes \mathrm{id})\left(\sum u_{x_1} \otimes x_2\right)\\ &= (\delta \otimes \mathrm{id})\delta(u_x)\end{aligned}$$

  e

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \delta(u_x) &= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\left(\sum u_{x_1} \otimes x_2\right)\\ &= \sum \varepsilon(x_2) u_{x_1}\\ &= u_{\sum \varepsilon(x_2)x_1}\\ &= u_x.\end{aligned}$$

- $\delta(u_x u_y) = \delta(u_x)\delta(u_y)$, para todo $u_x, u_y \in {}^{\sigma}H$.
  De fato,

$$\begin{aligned}\delta(u_x u_y) &= \delta\left(\sum \sigma(x_1, y_1) u_{x_2 y_2}\right)\\ &= \sum \sigma(x_1, y_1)\delta(u_{x_2 y_2})\\ &= \sum \sigma(x_1, y_1) u_{x_2 y_2} \otimes x_3 y_3\\ &= \sum u_{x_1} u_{y_1} \otimes x_2 y_2\\ &= \left(\sum u_{x_1} \otimes x_2\right)\left(\sum u_{y_1} \otimes y_2\right)\\ &= \delta(u_x)\delta(u_y).\end{aligned}$$

- $\delta(u_{1_H}) = u_{1_H} \otimes 1_H$. É imediato de $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$.

∎

Terminemos a seção com uma última propriedade de ${}^{\sigma}H$:

Proposição 5.1.8. *Dada ${}^{\sigma}H$ como anteriormente, então $({}^{\sigma}H)^{coH} = ku_{1_H} \cong k$.*

Demonstração. Note primeiramente que $x \in H^{coH}$ se, e somente se, $x \in \mathrm{Im}(\eta)$. De fato, se $x \in H^{coH}$, ou seja, $\Delta(x) = x \otimes 1_H$. Desse modo,

$$\begin{aligned}\eta \circ \varepsilon(x) &= (\mathrm{id} * S)(x)\\ &= \mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta(x)\\ &= \mu \circ \mathrm{id} \otimes S(x \otimes 1_H)\\ &= \mu(x \otimes S(1_H))\\ &= \mu(x \otimes 1_H)\\ &= x.\end{aligned}$$

Por outro lado, se $x \in \mathrm{Im}(\eta)$ então $x = \eta(\lambda) = \lambda 1_H$, para algum $\lambda \in k$. E assim,

$$\Delta(x) = \Delta(\lambda 1_H) = \lambda\Delta(1_H) = \lambda(1_H \otimes 1_H) = (\lambda 1_H) \otimes 1_H = x \otimes 1_H.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
({}^{\sigma}H)^{coH} &= \{u_x \in {}^{\sigma}H \mid \delta(u_x) = u_x \otimes 1_H\} \\
&= \{u_x \in {}^{\sigma}H \mid \Delta(x) = x \otimes 1_H\} \\
&= \{u_x \in {}^{\sigma}H \mid x \in H^{coH}\} \\
&= \{u_x \in {}^{\sigma}H \mid x \in \mathrm{Im}(\eta)\} \\
&= \{u_x \in {}^{\sigma}H \mid x = \lambda 1_H, \text{ para algum } \lambda \in k\} \\
&= \{u_{\lambda 1_H} \in {}^{\sigma}H \mid \lambda \in k\} \\
&= \{\lambda u_{1_H} \mid \lambda \in k\} \\
&= k u_{1_H}.
\end{aligned}$$

■

5.2 Os Objetos H-Galois

Definição 5.2.1 (H-extensão à Direita)**.** Sejam A e B álgebras, com B subálgebra de A e H uma álgebra de Hopf. Dizemos que $B \subset A$ é uma *H-extensão à direita* se A for um H-comódulo álgebra com $A^{coH} = B$.

Definição 5.2.2 (Extensão H-Galois e Objeto H-Galois)**.** Seja A um H-comódulo álgebra com coação dada por $\rho \colon A \longrightarrow A \otimes H$ e $A^{coH} \subset A$ a subálgebra de coinvariantes. Dizemos que A é uma *extensão H-Galois* (à direita)† , ou mais precisamente que A/A^{coH} é H-Galois (à direita), se a aplicação linear

$$\begin{array}{rccc}
\beta\colon & A \otimes_{A^{coH}} A & \longrightarrow & A \otimes H \\
& a \otimes b & \longmapsto & (a \otimes 1_H)\rho(b)
\end{array}$$

é bijetora. Além disso, se $A^{coH} = k1_A$ dizemos que A é um **objeto H-Galois**.

Quando A é uma extensão H-Galois, β é dita aplicação canônica de A e é comum ser denotada na literatura por *can*. Denotaremos por $\mathrm{Gal}(H)$ a classe dos objetos H-Galois.

Usar o nome extensão H-Galois com certeza remete o leitor às extensões de corpos da teoria de Galois. De fato, estamos generalizando tal conceito, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 5.2.3. [10, Exemplo 6.4.3] Seja G um grupo finito agindo por automorfismo sobre um corpo $E \supset k$ e $F = E^G$ (elementos do corpo E fixados por G). E/F ser extensão Galois é o mesmo que $E \subset F$ ser uma extensão $(kG)^*$-Galois.

Porém, como se espera de generalizações, nem toda extensão H-Galois é uma extensão de corpos da teoria de Galois no sentido clássico. Um exemplo pode ser encontrado em [20, Exemplo 8.1.5].

Exemplo 5.2.4. H/k é um objeto H-Galois com

$$\begin{array}{rccc}
\beta\colon & H \otimes H & \longrightarrow & H \otimes H \\
& x \otimes y & \longmapsto & \sum x y_1 \otimes y_2.
\end{array}$$

† É possível definir uma extensão H-Galois à esquerda quando A é um H-comódulo álgebra à esquerda, bem como um objeto H_1-H_2-biGalois se A for um H_1-comódulo álgebra à esquerda e um H_2-comódulo álgebra à direita.

Para isso, mostremos que

$$\begin{array}{rccc} \alpha\colon & H \otimes H & \longrightarrow & H \otimes H \\ & x \otimes y & \longmapsto & \sum xS(y_1) \otimes y_2 \end{array}$$

é a inversa de β. De fato,

$$\begin{aligned} \beta(\alpha(x \otimes y)) &= \beta\left(\sum xy_1 \otimes y_2\right) \\ &= \sum xy_1 S(y_2) \otimes y_3 \\ &= \sum x\varepsilon(y_1) \otimes y_2 \\ &= \sum x \otimes \varepsilon(y_1) y_2 \\ &= x \otimes y \\ &= \mathrm{id}_{H \otimes H}(x \otimes y). \end{aligned}$$

Analogamente, verifica-se que $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{H \otimes H}$.

Lema 5.2.5. *Seja $\sigma \in \mathrm{Hom}(H \otimes H, k)$. Dado o isomorfismo linear $f\colon H \longrightarrow {}^{\sigma}H$ tal que $f(x) = u_x$ e como antes, defina $g\colon H \longrightarrow {}^{\sigma}H$ por*

$$g(x) = \sum \sigma^{-1}(Sx_2, x_3) u_{Sx_1}$$

Então g é a inversa de f por convolução.

Demonstração. De fato, para todo $x \in H$,

$$\begin{aligned} (g * f)(x) &= \sum g(x_1) f(x_2) \\ &= \sum \sigma^{-1}(Sx_2, x_3) u_{Sx_1} u_{x_4} \\ &= \sum \sigma^{-1}(Sx_2, x_3) \sigma((Sx_1)_1, x_{4_1}) u_{(Sx_1)_2 x_{4_2}} \\ &= \sum \sigma^{-1}(Sx_3, x_4) \sigma(Sx_2, x_5) u_{Sx_1 x_6} \\ &\overset{\diamond}{=} \sum \varepsilon(Sx_2) \varepsilon(x_3) u_{Sx_1 x_4} \\ &= \sum \varepsilon(x_2) \varepsilon(x_3) u_{Sx_1 x_4} \\ &= \sum u_{Sx_1 x_2} \\ &= \varepsilon(x) u_{1_H}. \end{aligned}$$

Em que $\diamond$ faz referência ao item *ii*) do Lema 5.1.2.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(f * g)(x) &= \sum f(x_1)g(x_2) \\
&= \sum u_{x_1}\sigma^{-1}(Sx_3, x_4)u_{Sx_2} \\
&= \sum \sigma^{-1}(Sx_3, x_4)\sigma(x_{1_1}, (Sx_2)_1)u_{x_{1_2}(Sx_2)_2} \\
&= \sum \sigma^{-1}(Sx_5, x_6)\sigma(x_1, Sx_4)u_{x_2Sx_3} \\
&= \sum \sigma^{-1}(Sx_4, x_5)\sigma(x_1, Sx_3)u_{\varepsilon(x_2)} \\
&= \sum \sigma^{-1}(Sx_3, x_4)\sigma(x_1, Sx_2)u_{1_H} \\
&= \sum \varepsilon(x_1)\sigma^{-1}(Sx_4, x_5)\sigma(x_2, Sx_3)u_{1_H} \\
&\overset{\diamond}{=} \sum \sigma(x_{1_1}, (Sx_4)_1x_{5_1})\sigma^{-1}(x_{1_2}(Sx_4)_2, x_{5_2})\sigma^{-1}(x_{1_3}, (Sx_4)_3)\sigma(x_2, Sx_3)u_{1_H} \\
&= \sum \sigma(x_1, Sx_8x_9)\sigma^{-1}(x_2Sx_5, x_{10})\sigma^{-1}(x_3, Sx_6)\sigma(x_4, Sx_5)u_{1_H} \\
&= \sum \sigma(x_1, Sx_6x_7)\sigma^{-1}(x_2Sx_5, x_8)\varepsilon(x_3)\varepsilon(x_4)u_{1_H} \\
&= \sum \sigma(x_1, Sx_4x_5)\sigma^{-1}(x_2Sx_3, x_6)u_{1_H} \\
&= \sum \sigma(x_1, \varepsilon(x_3))\sigma^{-1}(\varepsilon(x_2), x_4)u_{1_H} \\
&= \sum \varepsilon(x_3)\sigma(x_1, 1_H)\varepsilon(x_2)\sigma^{-1}(1_H, x_4)u_{1_H} \\
&= \sum \sigma(x_1, 1_H)\sigma^{-1}(1_H, x_2)u_{1_H} \\
&= \sum \sigma(1_H, x_1)\sigma^{-1}(1_H, x_2)u_{1_H} \\
&\overset{\diamond\diamond}{=} \varepsilon(1_H)\varepsilon(x)u_{1_H} \\
&= \varepsilon(x)u_{1_H}.
\end{aligned}$$

Aqui $\diamond$ faz referência ao item iv) do Lema 5.1.2 e $\diamond\diamond$ ao item i) do mesmo lema. ∎

Teorema 5.2.6. *Seja ${}^\sigma H$ um produto torcido por algum cociclo $\sigma \in \mathrm{Hom}(H \times H, k)$. Então ${}^\sigma H$ é um objeto H-Galois.*

Demonstração. Recordemos primeiramente que, pela Proposição 5.1.8, $({}^\sigma H)^{coH} \cong ku_{1_H}$, logo basta mostrar que a aplicação linear

$$\begin{array}{rccc}
\beta\colon & {}^\sigma H \otimes {}^\sigma H & \longrightarrow & {}^\sigma H \otimes H \\
& u_x \otimes u_y & \longmapsto & (u_x \otimes 1_H)\delta(y),
\end{array}$$

com δ coação de H em ${}^\sigma H$ do Teorema 5.1.7, é bijetora. Note que podemos escrever

$$\beta(u_x \otimes u_y) = \sum u_x u_{y_1} \otimes y_2.$$

Usando as aplicações f e g do lema anterior, defina

$$\begin{array}{rccc}
\alpha\colon & {}^\sigma H \otimes H & \longrightarrow & {}^\sigma H \otimes {}^\sigma H \\
& u_x \otimes y & \longmapsto & \sum u_x g(y_1) \otimes f(y_2).
\end{array}$$

Mostremos que α é a inversa de β:

$$\begin{aligned}
\beta \circ \alpha(u_x \otimes y) &= \beta\left(\sum u_x g(y_1) \otimes f(y_2)\right) \\
&= \sum \left(u_x g(y_1) \otimes 1_H\right)\left(\delta(f(y_2))\right) \\
&= \sum \left(u_x g(y_1) \otimes 1_H\right)\left(f(y_2) \otimes y_3\right) \\
&= \sum u_x g(y_1) f(y_2) \otimes y_3 \\
&= \sum u_x \varepsilon(y_1) \otimes y_2 \\
&= u_x \otimes y,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\alpha \circ \beta(u_x \otimes u_y) &= \alpha\left(\sum u_x u_{y_1} \otimes y_2\right) \\
&= \sum u_x u_{y_1} g(y_2) \otimes f(y_3) \\
&= \sum u_x f(y_1) g(y_2) \otimes f(y_3) \\
&= \sum u_x \varepsilon(y_1) \otimes f(y_2) \\
&= \sum u_x \otimes u_{y_1} \varepsilon(y_2) \\
&= u_x \otimes u_y,
\end{aligned}$$

como requerido. ■

O seguinte lema é uma adaptação de um célebre resultado de Kreimer:

Lema 5.2.7. *[18, Proposição 2] Se A é um objeto H-Galois então $A \cong H^*$ como H^*-módulos.*

Lema 5.2.8. *Seja A um objeto H-Galois com coação ρ e bijeção β e $\gamma\colon H \longrightarrow A$ um isomorfismo de H-comódulos invertível por convolução, γ^{-1} sua inversa por convolução, ζ sua inversa (no sentido usual) e $g\colon A \longrightarrow k$ dada por $g = \varepsilon \circ \zeta$. Então*

a) $\rho \circ \gamma^{-1}$ *é a inversa por convolução de* $\rho \circ \gamma = (\gamma \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$,

b) $\rho \circ \gamma^{-1} = (\gamma^{-1} \otimes S) \circ \tau \circ \Delta$,

c) Para todo $a \in A$, $\sum a_{(0)} \gamma^{-1}(b_{(1)}) \in k$.

d) $\beta^{-1}(a \otimes x) = (a \otimes 1_H)\beta^{-1}(1 \otimes x)$ *para todo* $a \in A$,

e) $\beta(1 \otimes \gamma(x)) = \rho \circ \gamma(x) = \sum \gamma(x_1) \otimes x_2$

f) $(\mathrm{id} \otimes \rho) \circ \beta^{-1} = (\beta^{-1} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta)$, *ou seja, escrevendo* $\beta^{-1}(1 \otimes x) = \sum_i a_i \otimes b_i$, *para todo* $x \in H$, *então*

$$\sum_i a_i \otimes b_{i_{(0)}} \otimes b_{i_{(1)}} = \sum \beta^{-1}(1 \otimes x_1) \otimes x_2$$

g) Para todo $a \in A$, $a = \sum g(a_{(0)}) \gamma(a_{(1)})$, *h)* $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \beta = \mu_A$.

A demonstração deste lema se dá por um cálculo direto relativamente tedioso e não será feito aqui. Este pode ser feito usando uma adaptação de [20, Lema 7.2.6] e a parte final de [20, Teorema 8.2.4].

A seguinte proposição garante a recíproca do Teorema 5.2.6 quando H tem dimensão finita.

Proposição 5.2.9. *Seja A um objeto H-Galois. Se H tem dimensão finita então A é isomorfo a ${}^{\sigma}H$ (como H-comódulo álgebras) para algum cociclo σ.*

Demonstração. Pelo lema anterior, $A \cong H^*$ como H^*-módulos, logo pela Proposição 2.5.9 $A \cong H$ como H-comódulos. Seja $\varphi\colon H \longrightarrow A$ esse isomorfismo. Por conveniência, gotaríamos de estabelecer a seguinte notação: Podemos olhar φ como elemento da álgebra $\mathrm{Hom}(H, A)$ munido do produto de convolução. Neste caso, iremos denotá-la por γ. Fazemos isso, pois assim, φ^{-1} indicará inversa usual dessa aplicação, enquanto γ^{-1} denotará a sua inversa por convolução caso existam.
Defina $g\colon A \longrightarrow k$ por $g = \varepsilon \circ \varphi^{-1}$. Note que $g \circ \gamma(x) = \varepsilon(x)$ para todo $x \in H$.
Considere β a aplicação bijetora que torna A um objeto H-Galois e defina para todo $x \in H$

$$\gamma^{-1}(x) = \mu_A \circ (\mathrm{id} \otimes g) \circ \beta^{-1}(1_A \otimes x)$$

Mostremos que γ^{-1} é de fato a inversa de γ por convolução:
Por um lado, usando d) e e) do lema anterior, para todo $x \in H$,

$$\begin{aligned}
\gamma * \gamma^{-1}(x) &= \sum \gamma(x_1)\gamma^{-1}(x_2) \\
&= \sum \gamma(x_1)(\mu_A \circ (\mathrm{id} \otimes g) \circ \beta^{-1}(1_A \otimes x_2) \\
&= \sum \mu_A \circ (\mathrm{id} \otimes g) \circ \beta^{-1}(\gamma(x_1) \otimes x_2) \\
&= \mu_A \circ (\mathrm{id} \otimes g)(1_A \otimes \gamma(x) \\
&= \varepsilon(x)1_A.
\end{aligned}$$

Por outro usando f) e g) do lema anterior, para todo $x \in H$,

$$\begin{aligned}
\gamma^{-1} * \gamma(x) &= \sum \mu_A \circ (\mathrm{id} \otimes g) \circ \beta^{-1}(1_A \otimes x_1)\gamma(x_2) \\
&= \sum_i \mu_A \circ (\mathrm{id} \otimes g) \left(\sum a_i \otimes b_{i_{(0)}}\right) \gamma(b_{i_{(1)}}) \\
&= \sum_i a_i \left(\sum g(b_{i_{(0)}})\gamma(b_{i_{(1)}})\right) \\
&= \sum_i a_i b_i \\
&= \varepsilon(x)1_A.
\end{aligned}$$

Com isso, pode-se definir $\sigma\colon H \otimes H \longrightarrow k$ por

$$\sigma(x, y) = \sum \gamma(x_1)\gamma(y_1)\gamma^{-1}(x_2 y_2)$$

para todo $x, y, \in H$. Primeiramente temos que mostrar que $\mathrm{Im}(\sigma) \subset k$, para garantir que σ está bem definido. Para isso lembre que $A^{coH} \cong k$, assim, basta mostrar que

$\rho(\sigma(x,y)) = \sigma(x,y) \otimes 1_A$, com ρ a aplicação que torna A um H-comódulo álgebra. De fato, usando o item (b) do lema anterior,

$$\begin{aligned}
\rho(\sigma(x,y)) &= \rho\left(\sum \gamma(x_1)\gamma(y_1)\gamma^{-1}(x_2y_2)\right) \\
&= \sum \rho(\gamma(x_1))\rho(\gamma(y_1))\rho(\gamma^{-1}(x_2y_2)) \\
&= \sum (\gamma(x_{11}) \otimes x_{12})(\gamma(y_{11}) \otimes y_{12})(\gamma^{-1}(x_{22}y_{22}) \otimes S(x_{21}y_{21})) \\
&= \sum \gamma(x_1)\gamma(y_1)\gamma^{-1}(x_4y_4) \otimes x_2y_2S(y_3)S(x_3) \\
&= \sum \gamma(x_1)\gamma(y_1)\gamma^{-1}(x_4y_4) \otimes 1_H \\
&= \sigma(x,y) \otimes 1_H.
\end{aligned}$$

Agora, devemos mostrar também que σ é um cociclo, de modo que ${}^{\sigma}H$ seja uma álgebra. Primeiramente, a condição de cociclo é satisfeita pois, por um lado,

$$\begin{aligned}
\sum \sigma(x_1,y_1)\sigma(x_2y_2,z) &= \sum \gamma(x_{11})\gamma(y_{11})\gamma^{-1}(x_{12}y_{12})\gamma((x_2y_2)_1)\gamma(z_1)\gamma^{-1}((x_2y_2)_2z_2) \\
&= \sum \gamma(x_1)\gamma(y_1)\gamma^{-1}(x_2y_2)\gamma(x_3y_3)\gamma(z_1)\gamma^{-1}(x_4y_4z_2) \\
&= \sum \gamma(x_1)\gamma(y_1)\varepsilon(x_2y_2)\gamma(z_1)\gamma^{-1}(x_3y_3z_2) \\
&= \sum \gamma(x_1)\gamma(y_1)\gamma(z_1)\gamma^{-1}(x_2y_2z_2)
\end{aligned}$$

e, por outro,

$$\begin{aligned}
\sum \sigma(y_1,z_1)\sigma(x,y_2z_2) &= \sum \gamma(y_{11})\gamma(z_{11})\gamma^{-1}(y_{12}z_{12})\gamma(x_1)\gamma((y_2z_2)_1)\gamma^{-1}(x_2(y_2z_2)_2) \\
&= \sum \gamma(y_1)\gamma(z_1)\gamma^{-1}(y_2z_2)\gamma(x_1)\gamma(y_3z_3)\gamma^{-1}(x_2y_4z_4) \\
&= \sum \gamma(y_1)\gamma(z_1)\gamma(x_1)\varepsilon(y_2z_2)\gamma^{-1}(x_2y_3z_3) \\
&= \sum \gamma(y_1)\gamma(z_1)\gamma(x_1)\gamma^{-1}(x_2y_2z_2).
\end{aligned}$$

Além disso, como $\gamma(1) = 1$, é claro que

$$\sigma(1,x) = \sigma(x,1) = \varepsilon(x).$$

Defina $F\colon {}^{\sigma}H \longrightarrow A$ por $F(u_x) = \gamma(x)$ para todo $x \in H$ e $G\colon A \longrightarrow {}^{\sigma}H$ por

$$G(a) = \sum a_{(0)}\gamma^{-1}(a_{(1)})u_{a_{(2)}}.$$

para todo $a \in A$. A verificação dos três itens a seguir garantem o isomorfismo desejado:

- F é um homomorfismo de H-comódulos. De fato, se δ é a aplicação que torna ${}^{\sigma}H$ um H-comódulo álgebra,

$$\begin{aligned}
\rho(F(u_x)) &= \rho(\gamma(x)) \\
&= \sum \gamma(x_1) \otimes x_2 \\
&= \sum F(u_{x_1}) \otimes x_2 \\
&= (\mathrm{id} \otimes F)\left(\sum u_{x_1} \otimes x_2\right) \\
&= (\mathrm{id} \otimes F)(\delta(u_x)).
\end{aligned}$$

- F é um homomorfismo de álgebras:

$$\begin{aligned}F(u_x u_y) &= F\left(\sum \sigma(x_1, y_1) u_{x_2 y_2}\right)\\ &= \sum \sigma(x,y_1) F(u_{x_2 y_2})\\ &= \sum \sigma(x_1, y_1)\gamma(x_2 y_2)\\ &= \sum \gamma(x_1)\gamma(y_1)\gamma^{-1}(x_2 y_2)\gamma(x_3 y_3)\\ &= \sum \gamma(x_1)\gamma(y_1)\varepsilon(x_2 y_2)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\\ &= F(u_x)F(u_y).\end{aligned}$$

- G é a inversa de F:
Por um lado, usando que $\sum a_{(0)}\gamma^{-1}(a_{(1)}) \in k$, vale

$$\begin{aligned}F \circ G(a) &= F\left(\sum a_{(0)}\gamma^{-1}(a_{(1)}) u_{a_{(2)}}\right)\\ &= \sum a_{(0)}\gamma^{-1}(a_{(1)}) F(u_{a_{(2)}})\\ &= \sum a_{(0)}\gamma^{-1}(a_{(1)})\gamma(a_{(2)})\\ &= \sum a_{(0)}\varepsilon(a_{(1)})\\ &= a.\end{aligned}$$

Por outro, usando que $\rho\circ\gamma = (\gamma\otimes\mathrm{id})\circ\Delta$ (pois γ é homomorfismo de H-comódulos), vale

$$\begin{aligned}G \circ F(u_x) &= G(\gamma(x))\\ &= \sum \gamma(x)_{(0)}\gamma^{-1}(\gamma(x)_{(1)}) u_{\gamma(x)_{(2)}}\\ &= \sum \gamma(x_1)\gamma^{-1}(x_2) u_{x_3}\\ &= \sum \varepsilon(x_1) u_{x_2}\\ &= u_x\end{aligned}$$

■

Capítulo 6

H-Identidades Polinomiais

Em todo este capítulo $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ é uma álgebra de Hopf fixada.

Motivados pelos conceitos de identidade polinomial e identidade polinomial graduada, apresentamos aqui uma generalização destes conceitos devida a Kassel [17], a saber, as H-identidades polinomiais. As referências para os conceitos de identidades polinomiais são o livro [11] e o artigo [13]. Para as H-identidades polinomiais a principal referência é o artigo [17].

6.1 Identidades Polinomiais

Esta seção apresenta alguns conceitos básicos da PI-teoria que necessitaremos para motivar nossa discussão sobre as H-identidades.

Definição 6.1.1 (Identidade Polinomial)**.** Considere a álgebra associativa livre $k\langle X\rangle$, em que $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto de variáveis. Um polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in k\langle X\rangle$ é uma *identidade polinomial* para A se, e somente se, f está no núcleo de todo homomorfismo de álgebras $\omega\colon k\langle X\rangle \longrightarrow A$.

Denote por $I(A)$ o conjunto de identidades polinomiais para uma álgebra A. Se existe $f \in I(A)$, $f \neq 0$, dizemos que A é uma PI-álgebra.

Definição 6.1.2 (T-ideal)**.** Dizemos que uma subálgebra B de uma álgebra A é um T-ideal se $f(B) \subseteq B$, para todo endomorfismo de álgebras $f\colon A \longrightarrow A$.

Note que $I(A)$ é um T-ideal de $k\langle X\rangle$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, defina o polinômio

$$s_d = \sum_{\sigma \in S_d} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(d)}$$

com S_d o grupo de permutações do conjunto $\{1, \ldots, d\}$ e $\operatorname{sgn}(\sigma)$ é o sinal da permutação σ. Este é chamado polinômio standard de grau d.

Proposição 6.1.3. *[11, 2.3] Seja A uma álgebra. Se $\dim(A) < d$ então $s_d(x_1, \ldots, x_d)$ é uma identidade polinomial para A.*

Corolário 6.1.4. *Toda álgebra de dimensão finita é uma PI-álgebra.*

É comum chamar as identidades polinomiais de identidades polinomiais ordinárias, fazendo distinção das identidades polinomiais graduadas que definiremos a seguir.

Seja G um grupo e $\{X_g \mid g \in G\}$ uma família de conjuntos disjuntos de variáveis indexados por G, e defina

$$X = \bigcup_{g \in G} X_g.$$

Seja $k\langle X\rangle_g$ o subespaço da álgebra associativa livre $k\langle X\rangle$ gerada pelos monômios $m = x_{j_1} \dots x_{j_p}$ tais que os $x_{j_l} \in X$.

É possível mostrar que

$$k\langle X\rangle = \bigoplus_{g \in G} k\langle X\rangle_g \qquad \text{e} \qquad k\langle X\rangle_g k\langle X\rangle_h \subset k\langle X\rangle_{gh}$$

para todo $g, h \in G$, isto é, $k\langle X\rangle$ é uma álgebra G-graduada. com isso, os elementos de $k\langle X\rangle_g$ são polinômios homogêneos de grau g, e denota-se $\deg(f) = g$ para todo $f \in k\langle X\rangle_g$.

Definição 6.1.5 (Homomorfismo de Álgebras G-graduado)**.** Seja A uma álgebra G-graduada. Dizemos que $\varphi\colon k\langle X\rangle \longrightarrow A$ é um *homomorfismo de álgebras G-graduado* se $\varphi(k\langle X\rangle_g) \subset A_g$ para todo $g \in G$.

Definição 6.1.6 (Identidade Polinomial G-graduada)**.** Seja A uma álgebra G-graduada. Então um polinômio $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in k\langle X\rangle$ é uma *identidade polinomial G-graduada* para A se, e somente se, f está no núcleo de todo homomorfismo de álgebras G-graduado $\omega\colon k\langle X\rangle \longrightarrow A$.

Denote por $I_G(A)$ o conjunto de identidades polinomiais G-graduadas para uma álgebra A. Se existe $f \in I_G(A)$, $f \neq 0$, dizemos que A é uma GPI-álgebra.

Para terminar, vale notar que $I_G(A) \supseteq I(A)$ em $k\langle X\rangle$.

6.2 H-Identidades Polinomiais

A principal referência para essa seção e também para a próxima é o artigo [17]. De início desejamos introduzir substitutos convenientes para os "X_g" definidos acima de maneira a construir as H-identidades polinomiais. Para isso, seja H uma álgebra de Hopf e A um H-comódulo álgebra com $\rho\colon A \longrightarrow A \otimes H$ a coação de H em A.

Para cada $i = 1, 2, \dots$ considere $X_i^H = \{X_i^x \mid x \in H\}$ uma cópia do espaço vetorial subjacente a H, como na Observação 5.1.3. Os elementos X_i^x de X_i^H serão chamados de X-símbolos.

Defina a seguinte soma direta de cópias de H

$$X_H = \bigoplus_{i \geq 1} X_i^H$$

e considere a álgebra tensorial sobre X_H, denotada por T:

$$T = T(X_H) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(X_H) = \bigoplus_{n \geq 0} X_H^{\otimes n}$$

Lembre que da Proposição 1.14 $T \cong k\langle I\rangle$ (de álgebras) no qual I é um conjunto de índices para uma base de X_H. Note que fixando uma base B de H podemos substituir I por $\{X_i^x \mid x \in B\}$.

Proposição 6.2.1. *T é um H-comódulo álgebra*

Demonstração. Dada uma base $\{x \mid x \in H\}$ de H defina a transformação linear

$$\begin{array}{rccl} \rho_{X_H}\colon & X_H & \longrightarrow & T \otimes H \\ & X_i^x & \longmapsto & \sum X_i^{x_1} \otimes x_2 \end{array}$$

Logo pela propriedade universal da álgebra tensorial, existe um único homomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{rccl} \rho_T\colon & T & \longrightarrow & T \otimes H \\ & X_i^x & \longmapsto & \sum X_i^{x_1} \otimes x_2 \end{array}$$

tal que $\rho_T(X_i^x) = \sum X_i^{x_1} \otimes x_2$. Obviamente que, ρ_T satisfaz (CA2) e (CA3). Então só é preciso verificar que ρ_T satisfaz também (CA1), ou seja, que ρ_T é uma coação de H em T. Com efeito, para todo $X_i^x \in X_H$,

$$\begin{aligned} (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \rho_T(X_i^x) &= \sum X_i^{x_1} \otimes \Delta(x_2) \\ &= \sum X_i^{x_1} \otimes x_2 \otimes x_3 \\ &= (\rho_T \otimes \mathrm{id}) \left(\sum X_i^{x_1} \otimes x_2\right) \\ &= (\rho_T \otimes \mathrm{id}) \circ \rho_T(X_i^x), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \rho_T(X_i^x) &= \sum X_i^{x_1} \varepsilon(x_2) \\ &= \sum X_i^{x_1} \varepsilon(x_2) \\ &= X_i^x, \end{aligned}$$

logo vale (CA1), como requerido. ■

Definição 6.2.2 (H-Identidade Polinomial)**.** Dizemos que $P \in T$, $P \neq 0$, é dita uma *H-identidade polinomial* para o H-comódulo álgebra A se $\omega(P) = 0$ para todo homomorfismo de H-comódulo álgebras $\omega\colon T \longrightarrow A$.

Denote por $I_H(A)$ o conjunto das H-identidades polinomiais para uma álgebra A.

Proposição 6.2.3. *Seja H uma álgebra de Hopf e A um H-comódulo álgebra. Então*

a) $I_H(A)$ é um ideal bilateral de T, ou seja,

$$I_H(A)T \subseteq I_H(A) \text{ e } TI_H(A) \subseteq I_H(A)$$

b) $I_H(A)$ é um T-ideal, ou seja,

$$f(I_H(A)) \subseteq I_H(A)$$

para todo $f\colon T \longrightarrow T$ endomorfismo de H-comódulo álgebras.[†]

Demonstração.

[†] Na verdade temos aqui uma extensão do conceito de T-ideal.

a) Esse resultado segue do fato de que os $\omega\colon T \longrightarrow A$ da definição de H-identidades polinomiais serem homomorfismos de álgebras pois se P é uma H-identidade polinomial para A, ou seja, $P \in \ker(\omega)$ para todo ω homomorfismo de H-comódulo álgebras e $Q \in T$ então $\omega(PQ) = \omega(P)\omega(Q) = 0$, para todo ω. Portanto PQ é uma H-identidade polinomial para A, e assim, $I_H(A)T \subseteq I_H(A)$. Analogamente, $TI_H(A) \subseteq I_H(A)$.

b) Basta lembrar que se $f\colon T \longrightarrow T$ é um homomorfismo de H-comódulo álgebras então $\omega \circ f\colon T \longrightarrow A$ também o é para todo $\omega\colon T \longrightarrow A$ homomorfismo de H-comódulo álgebras (composta de homomorfismos). Assim, se $P \in I_H(A)$ então para todo homomorfismo de H-comódulo álgebras e em particular para $\omega \circ f$, temos $\omega \circ f(P) = 0$. Logo $f(P) \in \ker(\omega)$ para todo ω e assim, $f(P) \in I_H(A)$.

■

Os seguintes exemplos mostram que H-identidades polinomiais de fato generalizam as identidades polinomiais ordinárias e as identidades polinomiais graduadas:

Exemplo 6.2.4. Seja $H = k$. Um k-comódulo álgebra A é simplesmente uma álgebra e $T \cong k\langle\{X_1^1, X_2^1, \dots\}\rangle$. Logo P é um polinômio nas variáveis X_i^1 com $i = 1, 2, \dots$. Além disso, dado $\omega\colon T \longrightarrow A$ um homomorfismo de k-módulo álgebras (que na verdade é simplesmente um homomorfismo de álgebras), temos que $\omega(P) = 0$ se, e somente se, $P(a_1, a_2, \dots) = 0$ para todo $a_i \in A$. Dessa forma P é uma k-identidade polinomial para A se, e somente se, P é uma identidade polinomial ordinária para A.

Lema 6.2.5. *Sejam G um grupo, $H = kG$, A uma álgebra G-graduada e $\omega\colon T \longrightarrow A$ um homomorfismo de álgebras. ω é um homomorfismo de kG-comódulo se, e somente se, $\omega(X_i^g) \in A_g$ para todo $g \in G$.*

Demonstração. Lembremos as definições de ρ e ρ_T as coações que tornam A e T kG-comódulo álgebras (respectivamente):

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & A & \longrightarrow & A \otimes H \\ & a & \longmapsto & \sum_{g \in G} a_g \otimes g \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccc} \rho_T\colon & T & \longrightarrow & T \otimes H \\ & X_i^g & \longmapsto & X_i^g \otimes g \end{array}$$

Supondo que ω é um homomorfismo de kG-comódulo álgebras denotando $a = \omega(X_i^g)$ para todo $g \in G$, temos:

$$\begin{aligned} a \otimes g &= (\omega \otimes \mathrm{id})(X_i^g \otimes g) \\ &= (\omega \otimes \mathrm{id}) \circ \delta(X_i^g) \\ &= \rho \circ \omega(X_i^g) \\ &= \rho(a) \\ &= \sum_{h \in G} a_h \otimes h. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$0 = a \otimes g - \sum_{h \in G} a_h \otimes h = (a - a_g) \otimes g - \sum_{\substack{h \in G \\ h \neq g}} a_h \otimes h.$$

Logo, como $\{g\} \cup \{h \in G, h \neq g\}$ é linearmente independente (pois é base de kG), então $(a - a_g) = a_h = 0$ para todo $h \in G, h \neq g$, ou seja, $a = a_g$ e $a_h = 0$, para todo $h \neq g$. Portanto $\omega(X_i^g) = a = \sum_{h \in H} a_h = a_g \in A_g$ para todo $g \in G$.

Agora, supondo $\omega(X_i^g) \in A_g$ para todo $g \in G$, temos

$$\begin{aligned}\rho \circ \omega(X_i^g) &= \rho(a_g)\\ &= a_g \otimes g\\ &= \omega(X_i^g) \otimes g\\ &= (\omega \otimes \mathrm{id})(X_i^g \otimes g)\\ &= (\omega \otimes \mathrm{id}) \circ \delta(X_i^g).\end{aligned}$$

Assim, ω é um homomorfismo de kG-comódulos e portanto de kG-comódulo álgebras. ■

Como consequência desse lema temos o seguinte exemplo:

Exemplo 6.2.6. P é uma kG-identidade polinomial para um kG-comódulo álgebra A se, e somente se, P é uma identidade G-graduada para a álgebra G-graduada A.

Exemplo 6.2.7. Seja A um H-comódulo álgebra com coação ρ tal que a subalgebra de coinvariantes A^{coH} seja central em A (como é o caso das ${}^{\sigma}A$). Dados $x, y \in H$ considere os seguintes elementos de T:

$$P_x = \sum X_1^{x_1} X_1^{S(x_2)} \qquad\qquad Q_{x,y} = \sum X_1^{x_1} X_1^{y_1} X_1^{S(x_2 y_2)}.$$

Então, para todo $x, y, z \in T$,

$$P_x X_2^z - X_2^z P_x \qquad \text{e} \qquad Q_{x,y} X_2^z - X_2^z Q_{x,y}$$

são H-identidades polinomiais para A. Comecemos mostrando que P_x e $Q_{x,y}$ são coinvariantes de T. De fato, sendo ρ_T a aplicação que torna T um H-comódulo álgebra, como na Proposição 6.2.1, temos

$$\begin{aligned}\rho(P_x) &= \rho\left(\sum X_1^{x_1} X_1^{S(x_2)}\right)\\ &= \sum \rho\left(X_1^{x_1}\right) \rho\left(X_1^{S(x_2)}\right)\\ &= \sum \left(X_1^{x_1} \otimes x_2\right)\left(X_1^{S(x_3)_1} \otimes S(x_3)_2\right)\\ &= \sum \left(X_1^{x_1} \otimes x_2\right)\left(X_1^{S(x_4)} \otimes S(x_3)\right)\\ &= \sum X_1^{x_1} X_1^{S(x_4)} \otimes x_2 S(x_3)\\ &= \sum X_1^{x_1} X_1^{S(x_3)} \otimes \varepsilon(x_2) 1_H\\ &= \sum X_1^{x_1} X_1^{S(x_3)} \varepsilon(x_2) \otimes 1_H\\ &= \sum X_1^{x_1} X_1^{S(x_3)\varepsilon(x_2)} \otimes 1_H\\ &= \sum X_1^{x_1} X_1^{S(x_2)} \otimes 1_H\\ &= P_x \otimes 1_H,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\rho(Q_{x,y}) &= \rho\left(\sum X_1^{x_1} X_1^{y_1} X_1^{S(x_2y_2)}\right) \\
&= \sum \rho\left(X_1^{x_1}\right)\rho\left(X_1^{y_1}\right)\rho\left(X_1^{S(x_2y_2)}\right) \\
&= \sum \left(X_1^{x_1} \otimes x_2\right)\left(X_1^{y_1} \otimes y_2\right)\left(X_1^{S(x_3y_3)_1} \otimes S(x_3y_3)_2\right) \\
&= \sum \left(X_1^{x_1} \otimes x_2\right)\left(X_1^{y_1} \otimes y_2\right)\left(X_1^{S(x_4y_4)} \otimes S(x_3y_3)\right) \\
&= \sum \left(X_1^{x_1} X_1^{y_1} X_1^{S(x_4y_4)}\right) \otimes \left(x_2y_2S(x_3y_3)\right) \\
&= \sum \left(X_1^{x_1} X_1^{y_1} X_1^{S(x_4y_4)}\right) \otimes \left(x_2y_2S(y_3)S(x_3)\right) \\
&= \sum \left(X_1^{x_1} X_1^{y_1} X_1^{S(x_3y_3)}\right) \otimes \left(\varepsilon(x_2)\varepsilon(y_2)\right) \\
&= \sum X_1^{x_1} X_1^{y_1} X_1^{S(x_3y_3)} \varepsilon(x_2)\varepsilon(y_2) \otimes 1_H \\
&= \sum X_1^{x_1} X_1^{y_1} X_1^{S(x_2y_2)} \otimes 1_H \\
&= Q_{x,y} \otimes 1_H.
\end{aligned}$$

Agora, mostremos que, para todo homomorfismo de H-comódulo álgebras $\omega\colon T \longrightarrow A$, $\omega(P_x)$ e $\omega(Q_{x,y})$ são coinvariantes (logo centrais) em A. Queremos que $\rho_T(\omega(P_x)) = \omega(P_x) \otimes 1_H$. Porém, note que

$$\omega(P_x) \otimes 1_H = (\omega \otimes \mathrm{id})(P_x \otimes 1_H) = (\omega \otimes \mathrm{id}) \circ \rho(P_x)$$

ou seja, queremos

$$\rho_T(\omega(P_x)) = (\omega \otimes \mathrm{id}) \circ \rho(P_x).$$

Mas esta é a condição de ω ser um homomorfismo de H-comódulos (hipótese). Analogamente o mesmo se verifica para $Q_{x,y}$.
Assim,

$$\omega(P_x X_2^z - X_2^z P_x) = \omega(P_x)\omega(X_2^z) - \omega(X_2^z)\omega(P_x) = 0$$

e

$$\omega(Q_{x,y} X_2^z - X_2^z Q_{x,y}) = \omega(Q_{x,y})\omega(X_2^z) - \omega(X_2^z)\omega(Q_{x,y}) = 0$$

para todo homomorfismo de H-comódulo álgebras ω. Portanto, P_x e $Q_{x,y}$ são H-identidades polinomiais para A.

Denotemos o conjunto de todas as H-identidades polinomiais de um H-comódulo álgebra A por $I_H(A)$. Pela própria definição de H-identidade polinomial temos que

$$I_H(A) = \bigcap_{\omega} \ker(\omega),$$

com $\omega\colon T \longrightarrow A$ homomorfismo de H-comódulo álgebras.

Proposição 6.2.8. *Seja H uma álgebra de Hopf e A um H-comódulo álgebra. Se $f\colon A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de H-comódulo álgebras injetor então $I_H(B) \subseteq I_H(A)$. Em particular, se f for um isomorfismo então $I_H(A) = I_H(B)$.*

Demonstração. Sejam $P \in I_H(B)$ e $\omega\colon T \longrightarrow A$ um homomorfismo de H-comódulo álgebras qualquer. Por hipótese, para todo $\alpha\colon T \longrightarrow B$ homomorfismo de H-comódulo álgebras, temos que $\alpha(P) = 0$, em particular $f \circ \omega(P) = 0$. Como f é injetora, $\omega(P) = 0$ (para todo ω). Portanto $P \in I_H(A)$. ■

O último item da proposição anterior garante que quando dois H-comódulo álgebras são isomorfos então suas identidades polinomiais coincidem. Nosso objetivo a partir de agora é encontrar H-comódulo álgebras para as quais a recíproca vale. Para isso, começaremos por construir uma forma mais fácil de determinar se um elemento $P \in T$ é uma identidade polinomial para um H-comódulo álgebra A.

6.3 Detectando H-Identidades Polinomiais para ${}^{\sigma}H$

Seja ${}^{\sigma}H$ um H-comódulo álgebra para algum cociclo σ como no capítulo 5. Vamos investigar o T-ideal $I_H({}^{\sigma}H)$.

Por definição,

$$I_H({}^{\sigma}H) = \bigcap_{\omega} \ker(\omega),$$

para todo $\omega\colon T \longrightarrow {}^{\sigma}H$ homomorfismo de H-comódulo álgebras. É impraticável enumerar todos os tais homomorfismos para estabelecer precisamente o T-ideal $I_H({}^{\sigma}H)$. Porém, felizmente, é possível construir um homomorfismo de H-comódulo álgebras γ_σ tal que

$$I_H({}^{\sigma}H) = \ker(\gamma_\sigma).$$

Para isso, vamos construir uma versão comutativa de T. De forma análoga à seção anterior, para cada $i = 1, 2, \ldots,$ considere $t_i^H = \{t_i^x \mid x \in H\}$ uma cópia do espaço vetorial subjacente a H, como na Observação 5.1.3. Os elementos t_i^x de t_i^H serão chamados de t-símbolos.

Defina a soma direta de cópias de H

$$t_H = \bigoplus_{i \geq 1} t_i^H,$$

e considere a álgebra simétrica sobre t_H, denotada por S:

$$S = S(t_H) = \bigoplus_{n \geq 0} t_H^{\otimes n}$$

Lembre-se de que, da Proposição 1.16, $S \cong k\,[I]$ (como álgebras), em que I é um conjunto de índices para uma base de t_H. Note que fixando uma base B de H podemos substituir I por $\{t_x \mid x \in B\}$.

Em seguida construiremos γ_σ como previsto. Dadas T e $S \otimes {}^{\sigma}H$ com a estrutura usual de álgebra tensorial, defina

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & X_H & \longrightarrow & S \otimes {}^{\sigma}H \\ & X_i^x & \longmapsto & \sum t_i^{x_1} \otimes u_{x_2} \end{array}$$

Pela propriedade universal da álgebra tensorial, existe um único homomorfismo de álgebras γ_σ tal que $\gamma_\sigma(X_i^x) = \sum t_i^{x_1} \otimes u_{x_2}$.

Como os t-símbolos e u-símbolos não se confundem, podemos omitir o símbolo $\otimes$ nos elementos de $S \otimes {}^{\sigma}H$, simplificando dessa forma a notação:

$$\gamma_\sigma(X_i^x) = \sum t_i^{x_1} u_{x_2}.$$

Devemos mostrar que

- $S \otimes {}^{\sigma}H$ é um H-comódulo álgebra,
- γ_σ é um homomorfismo de H-comódulo álgebras,
- $I_H({}^{\sigma}H) = \ker(\gamma_\sigma)$.

Faremos isso nos próximos três teoremas, sendo que o último item exige alguns lemas:

Teorema 6.3.1. *$S \otimes {}^{\sigma}H$ é um H-comódulo álgebra com coação*

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & S \otimes {}^{\sigma}H & \longrightarrow & (S \otimes {}^{\sigma}H) \otimes H \\ & t_i^x u_y & \longmapsto & \sum t_i^{x_1} u_{y_1} \otimes y_2 \end{array}$$

Demonstração. Basta notar que $\rho = \mathrm{id} \otimes \delta$, sendo δ a coação do Teorema 5.1.7 que torna ${}^{\sigma}H$ um H-comódulo álgebra. ∎

Teorema 6.3.2. *γ_σ como definido anteriormente é um homomorfismo de H-comódulo álgebras.*

Demonstração. Como γ_σ é homomorfismo de álgebras, resta apenas mostrar que γ_σ é um homomorfismo de H-comódulos. Com efeito, se ρ e ρ_T são as coações que tornam $S \otimes {}^{\sigma}H$ e T, respectivamente, H-comódulos. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} \rho \circ \gamma_\sigma(X_i^x) &= \rho\left(\sum t_i^{x_1} u_{x_2}\right) \\ &= \sum t_i^{x_1} u_{x_2} \otimes x_3 \\ &= (\gamma_\sigma \otimes \mathrm{id})\left(\sum X_i^{x_1} \otimes x_2\right) \\ &= (\gamma_\sigma \otimes \mathrm{id}) \circ \rho_T(X_i^x.) \end{aligned}$$

∎

O terceiro e último passo é mostrar que $I_H({}^{\sigma}H) = \ker(\gamma_\sigma)$. Para isso necessitaremos de alguns lemas e de uma proposição. Lembre-se de que **alg** denota a categoria das álgebras, $\mathcal{M}^H$ a categoria dos H-comódulos e $\mathcal{A}^H$ a categoria dos H-comódulo álgebras.

Lema 6.3.3. *A correspondência*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^H}(T, {}^{\sigma}H) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X_H, {}^{\sigma}H)$$

é bijetora.

Demonstração. Comecemos por lembrar que pela propriedade universal da álgebra tensorial, para cada $f\colon X_H \longrightarrow {}^{\sigma}H$ linear existe um único homomorfismo de álgebras $\bar{f}\colon T \longrightarrow {}^{\sigma}H$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dd, "\bar{f}"] \\ X_H \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & {}^{\sigma}H \end{tikzcd}$$

Isso asssegura que a correspondência $f \longmapsto \bar{f}$ do enunciado das aplicações lineares nos homomorfismos de álgebras esteja bem definida. Deve-se mostrar que essa correspondência é bijetora, mas isso é fácil pois $g \longmapsto g|_{X_H}$ é a inversa. Com isso só precisamos mostrar que f é um homomorfismo de H-comódulos se, e somente se, $\bar{f}$ o é, ou seja, que um diagrama abaixo é comutativo se, e somente se, o outro é:

$$\begin{tikzcd} X_H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_{X_H}"'] & {}^{\sigma}H \arrow[d, "\delta"] \\ X_H \otimes H \arrow[r, "f\otimes \mathrm{id}"] & {}^{\sigma}H \otimes H \end{tikzcd} \tag{6.1}$$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\rho_T"'] & {}^{\sigma}H \arrow[d, "\delta"] \\ T \otimes H \arrow[r, "\bar{f}\otimes \mathrm{id}"] & {}^{\sigma}H \otimes H \end{tikzcd} \tag{6.2}$$

com ρ_{X_H} e ρ_T da Proposição 6.2.1 e δ do Teorema 5.1.7.
Mostremos que a comutatividade do diagrama (6.1) garante a comutatividade de (6.2). Note que basta mostrar a comutatividade nos elementos de $X_i^x, x \in H$ e estender para T pela propriedade universal da álgebra tensorial.

$$\begin{aligned} \delta(\bar{f}(X_i^x)) &= \delta(f(X_i^x)) \\ &= (f \otimes \mathrm{id})\left(\rho_{X_H}(X_i^x)\right) \\ &= (f \otimes \mathrm{id})\left(\sum X_i^{x_1} \otimes x_2\right) \\ &= \sum f\left(X_i^{x_1}\right) \otimes x_2 \\ &= \sum \bar{f}\left(X_i^{x_1}\right) \otimes x_2 \\ &= (\bar{f} \otimes \mathrm{id})\left(\sum X_i^{x_1} \otimes x_2\right) \\ &= (\bar{f} \otimes \mathrm{id})\left(\rho_T(X_i^x)\right) \end{aligned}$$

De modo análogo, a comutatividade do diagrama (6.2) garante a comutatividade do diagrama (6.1). ∎

Lema 6.3.4. *A correspondência*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X_H, {}^{\sigma}H) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X_H, H)$$

é bijetora.

Demonstração. Considere a bijeção da Observação 5.1.3

$$\begin{array}{rccc} \varphi_u\colon & H & \longrightarrow & {}^{\sigma}H \\ & x & \longmapsto & u_x \end{array}$$

φ_u é também um homomorfismo de H-comódulos pois para todo $x \in H$

$$\begin{aligned} \delta\left(\varphi_u(x)\right) &= \delta(u_x) \\ &= \sum u_{x_1} \otimes x_2 \\ &= (\varphi_u \otimes \mathrm{id})\left(\sum x_1 \otimes x_2\right) \\ &= (\varphi_u \otimes \mathrm{id})(\Delta(x)) \end{aligned}$$

Assim, φ_u é um isomorfismo de H-comódulos.
Com isso, definindo

$$\begin{array}{rccc} \alpha\colon & \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X_H, H) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X_H, {}^{\sigma}H) \\ & f & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \beta\colon & \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X_H, {}^{\sigma}H) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X_H, H) \\ & g & \longmapsto & \varphi_u^{-1} \circ g \end{array}$$

teremos

$$(\alpha \circ \beta)(g) = \alpha(\varphi_u^{-1} \circ g) = \varphi_u \circ \varphi_u^{-1} \circ g = g$$

para todo $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X_H, {}^{\sigma}H)$ e

$$(\beta \circ \alpha)(f) = \beta(\varphi_u \circ f) = \varphi_u^{-1} \circ \varphi_u \circ f = f$$

para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X_H, H)$, garantindo a bijeção desejada. ■

Lema 6.3.5. *A correspondência*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{alg}}(S, k) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(t_H, k)$$

é bijetora.

Demonstração. Para obter esse lema basta lembrar que pela propriedade universal da álgebra simétrica, para toda $f\colon t_H \longrightarrow k$ linear existe única $\bar{f}\colon S \longrightarrow k$ homomorfismo de álgebras tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dd, "\bar{f}"] \\ t_H \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & k \end{tikzcd}$$

garantindo uma bijeção $f \longmapsto \bar{f}$ como desejado. ■

Lema 6.3.6. *Se Y é um H-comódulo com aplicação $\rho\colon Y \longrightarrow Y \otimes H$, então a correspondência*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(Y, H) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(Y, k)$$

é bijetora. Com isso, para todo $f\colon Y \longrightarrow H$ homomorfismo de H-comódulos,

$$f = \phi_H \circ ((\varepsilon \circ f) \otimes \mathrm{id}) \circ \rho$$

com $\phi_H\colon k \otimes H \longrightarrow H$ isomorfismo canônico.

Demonstração. Defina

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(Y,H) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Y,k) \\ & f & \longmapsto & \varepsilon\circ f \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & \mathrm{Hom}(Y,k) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(Y,H) \\ & g & \longmapsto & \phi_H\circ(g\otimes \mathrm{id})\circ\rho \end{array}$$

ϕ está claramente bem definida, mas como g é "somente linear" não é imediato que $\psi(g)$ é um homomorfismo de H-comódulos. Por isso, admitindo que (Y,ρ) é um H-comódulo (ou seja, $(\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\rho = (\rho\otimes \mathrm{id})\circ\rho$) vamos provar que $\xi_g := \psi(g)$ é tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\xi_g"] \arrow[d, "\rho"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\ Y\otimes H \arrow[r, "\xi_g\otimes \mathrm{id}"] & H\otimes H \end{tikzcd}$$

De fato,

$$\begin{aligned}(\xi_g\otimes \mathrm{id})\circ\rho(y) &= (\xi_g\otimes \mathrm{id})\left(\sum y_{(0)}\otimes y_{(1)}\right)\\ &= \sum\left(\phi_H\circ(g\otimes \mathrm{id})\circ\rho(y_{(0)}\right)\otimes y_{(1)}\\ &= \sum g(y_{(0)})y_{(1)}\otimes y_{(2)}\\ &= \Delta\left(\sum g(y_{(0)})y_{(1)}\right)\\ &= \Delta\circ\xi_g(y).\end{aligned}$$

Portanto ψ está bem definida.
Agora lembrando que (pela própria definição de ε) $(\varepsilon\otimes \mathrm{id})\circ\Delta = \phi_H^{-1}$ e usando que $f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(Y,H)$, ou seja, $\Delta\circ f = (f\otimes \mathrm{id})\circ\rho$ temos que

$$\begin{aligned}(\psi\circ\varphi)(f) &= \psi(\varepsilon\circ f)\\ &= \phi_H\circ((\varepsilon\circ f)\otimes \mathrm{id})\circ\rho\\ &= \phi_H\circ(\varepsilon\otimes \mathrm{id})\circ((f\otimes \mathrm{id})\circ\rho)\\ &= \phi_H\circ(\varepsilon\otimes \mathrm{id})\circ\Delta\circ f\\ &= \phi_H\circ\phi_H^{-1}\circ f\\ &= f\end{aligned}$$

e para todo $y\in Y$

$$\begin{aligned}(\varphi\circ\psi)(f)(y) &= \varphi(\phi_H\circ(g\otimes \mathrm{id})\circ\rho)(y)\\ &= \varepsilon\circ\phi_H\circ(g\otimes \mathrm{id})\left(\sum y_{(0)}\otimes y_{(1)}\right)\\ &= \varepsilon\left(\sum g(y_{(0)})y_{(1)}\right)\\ &= \sum g(y_{(0)})\varepsilon(y_{(1)})\\ &= g\left(\sum y_{(0)}\varepsilon(y_{(1)})\right)\\ &= g(y)\end{aligned}$$

garantindo a bijeção desejada. O "além disso" é consequência imediata da bijeção anterior:

$$f = (\psi \circ \varphi)(f) = \psi(\varepsilon \circ f) = \phi_H \circ ((\varepsilon \circ f) \otimes \mathrm{id}) \circ \rho.$$

■

Proposição 6.3.7. *Se $\omega\colon T \longrightarrow {}^{\sigma}H$ é um homomorfismo de H-comódulo álgebras então existe único homomorfismo de álgebras $\chi\colon S \longrightarrow k$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\gamma_\sigma"'] & {}^{\sigma}H \\ S \otimes {}^{\sigma}H \arrow[r, "\chi\otimes\mathrm{id}"] & k \otimes {}^{\sigma}H \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

em que ψ é isomorfismo canônico.

Demonstração. Considere, no Lema 6.3.6, $(Y, \rho) = (X_H, \rho_{X_H})$. Para toda $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X_H, H)$ e em particular para $f = \varphi_u \circ \widetilde{\omega}$, com $\widetilde{\omega} = \omega|_{X_H}$ (como no Lema 6.3.3), temos então

$$\widetilde{\omega} = \varphi_u \circ \phi_H \circ ((\varepsilon \circ \varphi_u^{-1} \circ \widetilde{\omega}) \otimes \mathrm{id}) \circ \rho_{X_H}$$

ou seja, $\widetilde{\omega} = u_{\sum \varepsilon(\varphi_u^{-1}(\widetilde{\omega}(X_i^{x_1})))x_2}$ para todo $X_i^x \in X_H$.
Agora defina $g\colon t_H \longrightarrow k$ por $g(t_i^x) = \varepsilon \circ \varphi_u^{-1} \circ \widetilde{\omega}(X_i^x)$. Pelo Lema 6.3.5 existe único homomorfismo de álgebras $\chi\colon S \longrightarrow k$ tal que $\chi(t_i^x) = g(t_i^x)$. Com isso,

$$\begin{aligned} \psi \circ (\chi \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma_\sigma(X_i^x) &= \psi\left(\sum (\varepsilon \circ \varphi_u^{-1} \circ \widetilde{\omega})(X_i^{x_1}) u_{x_2}\right) \\ &= u_{\sum \varepsilon(\varphi_u^{-1}(\widetilde{\omega}(X_i^{x_1})))x_2} \\ &= \widetilde{\omega}(X_i^x) \end{aligned}$$

para todo $X_i^x \in X_H$. Finalmente, pelo Lema 6.3.3 temos $\omega = \psi \circ \chi \otimes \mathrm{id} \circ \gamma_\sigma$. ■

Teorema 6.3.8. *Seja k infinito. P é uma H-identidade polinomial para ${}^{\sigma}H$ se, e somente se, $\gamma_\sigma(P) = 0$. Ou seja, $I_H({}^{\sigma}H) = \ker(\gamma_\sigma)$.*

Demonstração. Comecemos supondo $P \in \ker(\gamma_\sigma)$. Logo para todo $\omega\colon T \longrightarrow {}^{\sigma}H$ homomorfismo de H-comódulo álgebras,

$$\omega(P) = \varphi_H \circ (\chi \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma_\sigma(P) = 0$$

com φ_H e χ da proposição anterior. Logo $P \in \ker(\omega)$ para todo $\omega \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^H}(T, {}^{\sigma}H)$, e assim, $P \in I_H({}^{\sigma}H)$.
Por outro lado, supondo $P \in I_H({}^{\sigma}H)$ então, para todo $\omega \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^H}(T, {}^{\sigma}H)$, $\omega(P) = 0$. Logo

$$\varphi_H \circ (\chi \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma_\sigma(P) = 0$$

e como φ_H é um isomorfismo

$$(\chi \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma_\sigma(P) = 0.$$

Dado Λ um conjunto de índices, fixe uma base $\{x_r\}_{r\in\Lambda}$ de H e escreva

$$\gamma_\sigma(P) = \sum_{r\in\Lambda} \gamma_\sigma^{(r)}(P) u_{x_r}{}^{\dagger}.$$

† $\gamma_\sigma^{(r)}$ é obtida simplesmente escrevendo $\gamma_\sigma(P)$ na base de $S \otimes {}^{\sigma}H$ (obtida pela base de H) e "transferindo" os escalares de ${}^{\sigma}H$ para S.

Logo, para todo $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{alg}}(S,k)$,

$$0 = (\chi \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma_\sigma(P) = (\chi \otimes \mathrm{id}) \left(\sum_{r \in \Lambda} \gamma_\sigma^{(r)}(P) u_{x_r} \right) = \sum_{r \in \Lambda} \chi \left(\gamma_\sigma^{(r)}(P) \right) u_{x_r}.$$

Como $\{u_{x_r}\}_{r\in\Lambda}$ é linearmente independente, temos

$$\chi \left(\gamma_\sigma^{(r)}(P) \right) = 0$$

para todos $r \in \Lambda$ e $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{alg}}(S,k)$. Usando que k é infinito, concluimos que $\gamma_\sigma^{(r)}(P) = 0$ para todo $r \in \Lambda$. Logo $\gamma_\sigma(P) = 0$, ou seja, $P \in \ker(\gamma_\sigma)$. ■

Capítulo 7

Exemplos

Para todo este capítulo fixe um número natural $n \geq 2$ e k um corpo tal que $char(k)$ não divide n. Fixe também q uma raiz n-ésima primitiva da unidade em k ($q^n = 1$ e $q^t \neq 1$ para todo $t < n$).

Iremos aqui definir algumas álgebras e aplicar os resultados do capítulo anterior para mostrar que para estes exemplos, podemos dizer que se duas álgebras tem as mesmas H-identidades polinomiais então elas são isomorfas.

As principais referências para este capítulo são os artigos [5], [9] e [17].

7.1 Os H_{n^2}-comódulo álgebras $A_{a,c}$

Defina a seguinte álgebra dada por geradores e relações:

$$H_{n^2} = \langle x, y \mid x^n = 1, yx = qxy, y^n = 0 \rangle$$

H_{n^2} é chamada álgebra de Taft e o caso particular H_4 é conhecida como álgebra de Sweedler de dimensão 4.

Proposição 7.1.1. *O conjunto $\{x^i y^j \mid 0 \leqslant i, j \leqslant n-1\}$ é uma base de H_{n^2} (como espaço vetorial).*

O resultado anterior pode ser feito usando o lema do diamante (Bergman [4]), e será omitido.

Proposição 7.1.2. *H_{n^2} é uma álgebra de Hopf com Δ, ε e S definidas por*

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= x \otimes x & \qquad \Delta(y) &= 1 \otimes y + y \otimes x \\ \varepsilon(x) &= 1 & \varepsilon(y) &= 0 \\ S(x) &= x^{-1} = x^{n-1} & S(y) &= -yx^{-1} = -qx^{n-1}y \end{aligned}$$

A demonstração do resultado anterior é uma checagem direta dos requisitos para uma álgebra de Hopf.

Agora fixados $a, c \in k$, com $a \neq 0$ defina a álgebra

$$A_{a,c} = \langle x, y \mid x^n = a, yx = qxy, y^n = c \rangle$$

Nosso objetivo é encontrar uma H_{n^2}-identidade polinomial para $A_{a,c}$. Para que isso ao menos faça sentido precisamos da seguinte proposição:

Proposição 7.1.3. *A álgebra $A_{a,c}$ é um H_{n^2}-comódulo álgebra com coação $\rho\colon A_{a,c} \longrightarrow A_{a,c} \otimes H_{n^2}$ definida nos geradores de $A_{a,c}$ por*

$$\rho(x) = x \otimes x$$
$$\rho(y) = 1 \otimes y + y \otimes x$$

Este resultado também é de verificação direta das condições para ser um H-comódulo álgebra.

O resultado a seguir é um caso particular de resultados do Masuoka em [19].

Teorema 7.1.4.

a) Todo objeto Galois sobre H_{n^2} é isomorfo a $A_{a,c}$ para alguns $a, c \in k$, com $a \neq 0$.

b) $A_{a,c} \cong A_{a',c'}$ como H_{n^2}-comódulo álgebras se, e somente se, existe $v \in k$, $v \neq 0$ tal que $a' = v^n a$ e $c' = c$.

c) Se k é algebricamente fechado então para todo $a, c \in k$, com $a \neq 0$ existe $c \in k$ tal que $A_{a,c} \cong A_{1,c'}$ como H_{n^2}-comódulo álgebras.

Demonstração.

a) Este item é um caso particular de [19, Proposição 2.17]† .

b) Este item é um caso particular de [19, Proposição 2.22b]†† .

c) A aplicação $f(a,c) = A_{a,c}$ não é bijetora (pelo item anterior tome $a' = v^n a$ e $c' = c$), mas induz um isomorfismo $\bar{f}\colon k^\times/(k^\times)^n \times k \longrightarrow \mathrm{Gal}(H_n^2)$, pelas próprias relações do item b). No caso particular que k é algebricamente fechado, $(k^\times)^n = k^\times$, de modo que $k^\times/(k^\times)^n = 1$ e assim todo elemento de $\mathrm{Gal}(H_{n^2})$ é do tipo $A_{1,c}$ para algum $c \in k$.

∎

Lembremos que como H_{n^2} tem dimensão finita, pela Proposição 5.2.9 todo objeto H_{n^2}-Galois é isomorfo a ${}^\sigma H_{n^2}$ para algum σ. Logo, usando o teorema anterior, temos que $A_{a,c} \cong {}^\sigma H_{n^2}$ como H_{n^2}-comódulo álgebras. Será importante notar que se denotarmos esse isomorfismo por $\psi\colon H_{n^2} \longrightarrow A_{a,c}$, pela demonstração da Proposição 5.2.9, $\psi(u_x) = x$, $\psi(u_y) = y$ e $\psi(1) = 1$.

Agora considere a aplicação γ_σ da seção 6.3 aplicada a esse exemplo:

$$\begin{array}{rccc} \gamma_\sigma\colon & T(H_{n^2}) & \longrightarrow & S(H_{n_2}) \otimes {}^\sigma H_{n^2} \\ & X_i^h & \longmapsto & \sum t_i^{h_1} u_{h_2} \end{array}$$

com $i \in \mathbb{N}$ e $h \in \{x^i y^j \mid 0 \leqslant i, j \leqslant n-1\}$. Com o isomorfismo ψ, podemos considerar

$$\begin{array}{rccc} \Gamma_\sigma\colon & T(H_{n^2}) & \longrightarrow & S(H_{n_2}) \otimes A_{a,c} \\ & X_i^h & \longmapsto & \sum t_i^{h_1} h_2 \end{array}$$

† Masuoka diz que toda H_{n^2}-extensão fendida B (uma álgebra) sobre uma álgebra C é isomorfo a uma álgebra $B_{\underline{d}}$ para algum $\underline{d}$, com $\underline{d} = (\alpha, \delta, u, a, b)$ que, por sua vez, é um conjunto com $\alpha\colon C \longrightarrow C$ um automorfismo de álgebras, $\delta\colon C \longrightarrow C$ uma $(1,\alpha)$-derivação, $u \in C^\times$ e $a, b \in C$.
Para nós, as H_{n^2}-extensões fendidas coincidem com os objetos H_{n^2}-Galois, e $C = k$. Com isso, é possível verificar, usando as condições da definição de $\underline{d}$ em [19, Definição 2.12] que $\alpha = \mathrm{id}, \delta = 0$ e b está livre, o que nos permite tomar $b = 0$, ou seja $B_{\underline{d}}$ se reduz a $B_{(u,a)}$, que na nossa notação é $A_{a,c}$.

†† Essa particularização segue a mesma linha do item anterior. É importante observar um lema prévio no mesmo artigo [19, Lema 2.19]

que funciona como γ_σ na seção 6.3 e facilitará os cálculos.

No nosso caso, os X-símbolos são os X_i^h tal que $i \in \mathbb{N}$ e $h \in \{x^i y^j \mid 0 \leqslant i, j \leqslant n-1\}$. Como só precisaremos de alguns deles, vamos simplificar a notação. Denote

$$E = X_1^1 \qquad X = X_1^x \qquad Y = X_1^y.$$

Analogamente para os t-símbolos:

$$t_1 = t_1^1 \qquad t_x = t_1^x \qquad t_y = t_1^y.$$

Note que:

$$\begin{aligned}
\Gamma_\sigma(E) &= t_1 \\
\Gamma_\sigma(X) &= t_x x \\
\Gamma_\sigma(Y) &= t_1 y + t_y x
\end{aligned}$$

Para a próxima proposição precisaremos do seguinte lema:

Lema 7.1.5. *Dados $u, v \in A_{a,c}$, se $vu = quv$ então*

$$(u+v)^n = u^n + v^n.$$

A demonstração do lema anterior é resultado imediato de [19, Lema 2.2].

Proposição 7.1.6. *O polinômio*

$$P_c = (YX - qXY)^n - (1-q)^n X^n Y^n + (1-q)^n c E^n X^n$$

é uma H_{n^2}-identidade polinomial para $A_{a,c}$.

Demonstração. Vamos mostrar que $\Gamma_\sigma(P_c) = 0$. Para isso, note que

$$\begin{aligned}
\Gamma_\sigma(YX - qXY) &= (t_1 y + t_y x) t_x x - q t_x x (t_1 y + y_y x) \\
&= t_1 t_x yx + t_y t_x x^2 - q t_x t_1 xy - q t_x t_y x^2 \\
&= (1-q) t_1 t_x (yx - qxy) + (1-q) t_x t_y x^2 \\
&= (1-q) t_x t_y x^2
\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
\Gamma_\sigma((YX - qXY)^n) &= ((1-q) t_x t_y x^2)^n \\
&= (1-q)^n t_x^n t_y^n x^{2n} \\
&= a^2 (1-q)^n t_x^n t_y^n.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\Gamma_\sigma(E^n) &= t_1^n \\
\Gamma_\sigma(X^n) &= t_x^n x^n = a t_x^n.
\end{aligned}$$

Usando o lema anterior temos também

$$\begin{aligned}
\Gamma_\sigma(Y^n) &= (t_1 y + t_y x)^n \\
&= t_1^n y^n + t_y^n x^n \\
&= c t_1^n + a t_y^n.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Gamma_\sigma(P_c) &= a^2(1-q)^n t_x^n t_y^n - (1-q)^n a t_x^n (c t_1^n + a t_y^n) + (1-q)^n c t_1^n a t_x^n \\ &= (1-q)^n \left(a^2 t_x^n t_y^n - a c t_x^n t_1^n - a^2 t_x^n t_y^n + a c t_1^n t_x^n\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

E portanto $P_c \in \ker(\Gamma_\sigma) = I_{H_{n^2}}(A_{a,c})$. ■

Teorema 7.1.7. *Seja k é algebricamente fechado. Se $I_{H_{n^2}}(A_{a,c}) = I_{H_{n^2}}(A_{a',c'})$ então $A_{a,c} \cong A_{a',c'}$ como H_{n^2}-comódulo álgebras.*

Demonstração. Sejam $P_c \in I_{H_{n^2}}(A_{1,c})$ e $P_{c'} \in I_{H_{n^2}}(A_{1,c'})$ para alguns $c, c' \in k$ como na proposição anterior. Como $I_{H_{n^2}}(A_{a,c}) = I_{H_{n^2}}(A_{a',c'})$, $P_c, P_{c'} \in I_{H_{n^2}}(A_{1,c'})$. Logo $P_c - P_{c'} \in I_{H_{n^2}}(A_{1,c'})$ e assim, $\Gamma_\sigma(P_c - P_{c'}) = 0$.
Por outro lado,

$$\Gamma_\sigma(P_c - P_{c'}) = \Gamma_\sigma((c-c')(1-q)^n E^n X^n) = (1-q)^n t_1^n t_x^n.$$

Como $(1-q)^n \neq 0$ pois q é n-esima raiz primitiva da unidade e $n \geqslant 2$, e $t_1^n t_x^n \neq 0$, então $c = c'$, garantindo que $A_{1,c} \cong A_{1,c'}$ e pelo Teorema 7.1.4, $A_{a,c} \cong A_{a',c'}$. ■

7.2 As Álgebras de Hopf Monomiais

Nosso objetivo é introduzir uma classe de álgebras de Hopf que usaremos na próxima seção. Para isso, vamos voltar um pouco aos cociclos e definir o conceito de dados de grupo.

Dado um grupo G e $k^\times$ o grupo multiplicativo dos elementos invertíveis em k, chamamos de cociclos de G os elementos de

$$Z^2(G, k^\times) = \{\sigma \colon G \times G \longrightarrow k \mid \sigma(h,k)\sigma(hk,l) = \sigma(h,kl)\sigma(k,l) \text{ e } \sigma(h,1) = \sigma(1,h) = 1\}.$$

$Z^2(G, k^\times)$ é um grupo multiplicativo, o que nos permite definir também a função bordo:

$$\begin{array}{rccc}\partial\colon & \mathrm{Hom}_{grp}(G, k^\times) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{grp}(G \times G, k^\times) \\ & f & \longmapsto & F\end{array}$$

tal que $F(g,h) = f(g)f(h)f(gh)^{-1}$ para todos $g, h \in G$. Usando a função bordo defina também

$$B^2(G, k^\times) = \{\partial(f) \mid f(1) = 1\}.$$

Como $B^2(G, k^\times)$ é um subgrupo normal de $Z^2(G, k^\times)$, podemos considerar o quociente

$$H^2(G, k^\times) = \frac{Z^2(G, k^\times)}{B^2(G, k^\times)}.$$

Na verdade, não há dificuldade em generalizar esses conceitos da seguinte forma: Fixado g um elemento central em G, considere

$$Z_g^2(G, k^\times) = \{\sigma \in Z^2(G, k^\times) \mid \sigma(g,h) = \sigma(h,g) \text{ para todo } h \in G\}$$

e

$$B_g^2(G, k^\times) = \{\partial(f) \in B^2(G, k^\times) \mid f(g) = 1\}$$

que ainda serão grupos, com $B_g^2(G,k^\times)$ subgrupo normal de $Z_g^2(G,k^\times)$ de modo que fixados g_1, g_2 no centro de G definimos

$$H^2_{g_1,g_2}(G,k^\times) = \frac{Z^2_{g_1}(G,k^\times)}{B^2_{g_2}(G,k^\times)}.$$

Note que $H^2_{1,1}(G,k^\times) = H^2(G,k^\times)$.

Introduzidas essas definições e notações, vamos aos dados de grupo:

Definição 7.2.1 (Dados de Grupo)**.** Definimos um conjunto de *dados de grupo* sobre k como sendo a quádrupla $\mathbb{G} = (G, g, \chi, \lambda)$, com G um grupo finito, $g \in G$ um elemento central fixado, $\chi\colon G \longrightarrow k^\times$ um homomorfismo de grupos e $\lambda \in k$, de modo que denotando $n := o(g)$ e $d := o(\chi(g))$ as seguintes propriedades são satisfeitas:

- $\chi(g) \neq 1$,
- se $n = d$ então $\lambda = 0$,
- se $\lambda \neq 0$ então $\chi^d = 1$.

Definição 7.2.2 (Isomorfismo de Dados de Grupo)**.** Sejam $\mathbb{G}_1 = (G_1, g_1, \chi_1, \lambda_1)$ e $\mathbb{G}_2 = (G_2, g_2, \chi_2, \lambda_2)$ dois dados de grupo. Dizemos que $\mathbb{G}_1$ e $\mathbb{G}_2$ são isomorfos se, e somente se, existe $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$ homomorfismo de grupos tal que $f(g_1) = g_2$, $\chi_2 \circ f = \chi_1$ e existe $\delta \in k^\times$ tal que $\lambda_1 = \delta^{d_1}\lambda_2$, com $d_1 = o(\chi_1(g_1))$

Vamos dividir os dados de grupo em seis tipos:

(I) $\lambda = 0$, $d = n$ e $\chi^d = 1$,

(II) $\lambda = 0$, $d = n$ e $\chi^d \neq 1$,

(III) $\lambda = 0$, $d < n$ e $\chi^d = 1$,

(IV) $\lambda = 0$, $d < n$, $\chi^d \neq 1$ e não existe $\sigma \in Z^2(G,k^\times)$ tal que, para todo $h \in G$,

$$\chi^d(h)\sigma(h, g^d) = \sigma(g^d, h),$$

(V) $\lambda = 0$, $d < n$, $\chi^d \neq 1$ e existe $\sigma \in Z^2(G,k^\times)$ tal que, para todo $h \in G$,

$$\chi^d(h)\sigma(h, g^d) = \sigma(g^d, h),$$

(VI) $\lambda \neq 0$ (logo $d < n$ e $\chi^d = 1$).

Seja G um grupo e y uma variável. Considere a álgebra de grupo kG, a álgebra de polinômios $k[y]$ e a álgebra $kG * k[y]$ dada pela união dos geradores e das relações de kG com $k[y]$. Definimos

$$A(\mathbb{G}) = \frac{kG * k[y]}{I}$$

com I o ideal gerado pelas relações

$$y^d = \lambda(1-g)^d \text{ e } yx = \chi(x)xy, \text{ para todo } x \in G.$$

Proposição 7.2.3. *O conjunto* $\{xy^i \mid 0 \leqslant i \leqslant d-1 \text{ e } x \in G\}$ *é uma base linear para* $A(\mathbb{G})$.

O resultado anterior pode ser feito usando o lema do diamante como no artigo do Bergman [4], e será omitido.

Proposição 7.2.4. *$A(\mathbb{G})$ é uma álgebra de Hopf com Δ, ε e S definidas por*

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= x \otimes x & \qquad \Delta(y) &= 1 \otimes y + y \otimes g \\ \varepsilon(x) &= 1 & \varepsilon(y) &= 0 \\ S(x) &= x^{-1} & S(y) &= -yg^{-1} \end{aligned}$$

A demonstração do resultado anterior é uma checagem direta dos requisitos para uma álgebra de Hopf.

Finalizamos esta seção enunciando um resultado feito por Bichon em [5] que determina os objetos Galois de $A(\mathbb{G})$ usando a classificação dos seis tipos de dados de grupo $\mathbb{G}$ que fizemos anteriormente. O símbolo $\coprod$ denotará o coproduto† .

Teorema 7.2.5. *[5, Teorema 2.1] Seja $\mathbb{G} = (G, g, \chi, \lambda)$ um conjunto de dados de grupo. Então de acordo com o tipo de $\mathbb{G}$ temos a seguinte descrição de $\mathrm{Gal}(A(\mathbb{G}))$:*

- *Tipo I:* $\mathrm{Gal}(A(\mathbb{G})) \cong H^2(G, k^\times) \times k$,
- *Tipos II e IV:* $\mathrm{Gal}(A(\mathbb{G})) \cong H^2(G, k^\times)$,
- *Tipos III, V e VI:* $\mathrm{Gal}(A(\mathbb{G})) \cong H^2(G, k^\times) \coprod H^2_{g^d, g^d}(G, k^\times)$.

7.3 Álgebras de Hopf Monomiais do Tipo I

Nesta seção consideraremos $A(\mathbb{G})$ sempre como uma álgebra de Hopf monomial do tipo I.

Vamos definir mais uma álgebra: Dados $\sigma \in Z^2(G, k^\times)$ e $c \in k$, defina $A_{\sigma,c}$ como a álgebra gerada por $\{u_x, x \in G\} \cup \{y\}$, com y variável fixada, com as seguintes relações:

$$\begin{aligned} u_{x_1} u_{x_2} &= \sigma(x_1, x_2) u_{x_1 x_2} \\ u_1 &= 1 \\ u_y u_x &= \chi(x) u_x u_y \\ u_y^d &= c u_{g^d} \end{aligned}$$

para todos $x, x_1, x_2 \in G$.

Proposição 7.3.1. *A álgebra $A_{\sigma,c}$ é um $A(\mathbb{G})$-comódulo álgebra com coação $\rho\colon A_{\sigma,c} \longrightarrow A_{\sigma,c} \otimes A(\mathbb{G})$ definida nos geradores de $A_{\sigma,c}$ por*

$$\begin{aligned} \rho(u_x) &= u_x \otimes x \\ \rho(u_y) &= 1 \otimes y + u_y \otimes g. \end{aligned}$$

Este resultado também é de verificação direta das condições para ser um H-comódulo álgebra.

O Teorema 7.2.5 enunciado na seção anterior garante que para álgebras de Hopf monomiais do tipo I, todo objeto $A(\mathbb{G})$-Galois é do tipo $A_{\sigma,c}$ para alguns $\sigma \in Z^2(G, k^\times)$ e $c \in k$ e mais ainda, $A_{\sigma,c} \cong A_{\sigma',c'}$ como $A(\mathbb{G})$-comódulo álgebras se, e somente se, $c = c'$ e $\sigma \sim \sigma'$ em $H^2(G, k^\times)$.

† Um coproduto para uma família $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos em uma categoria $\mathcal{C}$ é um objeto $S \in \mathcal{C}$ e uma família de morfismos $\{\iota_i\colon A_i \longrightarrow S\}_{i\in I}$ tal que para todo objeto $B \in \mathcal{C}$ e para toda família de morfismos $\{\psi_i\colon A_i \longrightarrow B\}_{i\in I}$ existe único morfismo $\psi\colon S \longrightarrow B$ tal que $\psi \circ \iota_i = \psi_i$ para todo $i \in I$.

Podemos definir os mesmos X-símbolos

$$E = X_1^1 \qquad X = X_1^x \qquad Y = X_1^y$$

e os t-símbolos:

$$t_1 = t_1^1 \qquad t_x = t_1^x \qquad t_y = t_1^y$$

da seção 7.1. Ainda com cálculos análogos podemos concluir que

$$P_c = (YX - qXY)^n - (1-q)^n X^n Y^n + (1-q)^n c E^n X^n$$

é uma $A(\mathbb{G})$-identidade polinomial para $A_{\sigma,c}$.

Teorema 7.3.2. *Suponha que k seja algebricamente fechado. Se*

$$I_{A(\mathbb{G})}(A_{\sigma,c}) = I_{A(\mathbb{G})}(A_{\sigma',c'})$$

então $A_{\sigma,c} \cong A_{\sigma',c'}$ como $A(\mathbb{G})$-comódulo álgebras.

Demonstração. Da mesma forma que foi feito no Teorema 7.1.7 podemos garantir que $c = c'$. Vamos mostrar que $\sigma \sim \sigma'$ em $H^2(G, k^\times)$.
Para isso, defina $k^\sigma G$ como a subálgebra de $A_{\sigma,c}$ gerada pelos $u_x, x \in G$ e relações $u_1 = 1$ e $u_{x_1}u_{x_2} = \sigma(x_1, x_2)u_{x_1x_2}$ para todos $x_1, x_2 \in G$ e considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
I_{kG}(k^\sigma G) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota"] & T(X_{kG}) \arrow[r, "\gamma_\sigma"] \arrow[d, "\iota_T"] & T(X_{kG}) \otimes k^\sigma G \arrow[d, "\iota_S"] \\
I_{A(\mathbb{G})}(A_{\sigma,c}) \arrow[r, "\psi"] & T\left(X_{A(\mathbb{G})}\right) \arrow[r, "\Gamma_\sigma"] & T\left(X_{A(\mathbb{G})}\right) \otimes A_{\sigma,c}
\end{tikzcd}$$

φ, ψ e ι_T são inclusões naturais e portanto injetoras. ι_S é dado por um lado por ι_T e por outro pela inclusão da subálgebra $k^\sigma G$ em $A_{\sigma,c}$ e portanto injetora. γ_σ e Γ_σ são as aplicações já fixadas no texto, que fazem com que as linhas horizontais sejam exatas pois $\ker(\gamma_\sigma) = I_{kG}(k^\sigma G) = \mathrm{Im}(\varphi)$ e $\ker(\Gamma_\sigma) = I_{A(\mathbb{G})}(A_{\sigma,c}) = \mathrm{Im}(\psi)$.
O diagrama claramente é comutativo e com isso $\mathrm{Im}(\iota) = I_{A(\mathbb{G})}(A_{\sigma,c})$. De fato, dado $P \in I_{kG}(k^\sigma G)$ então $\iota_S \gamma_\sigma \circ \varphi(P) = 0$. Logo $\Gamma_\sigma \circ \psi \circ \iota(P) = 0$, logo, $\Gamma_\sigma(P) = 0$, ou seja, $P \in I_{A(\mathbb{G})}(A_{\sigma,c})$.
Afirmamos que

$$I_{kG}(k^\sigma G) = T(X_{kG}) \cap I_{A(\mathbb{G})}(A_{\sigma,c}).$$

A inclusão $\subseteq$ é clara. A inclusão contrária é válida pois, dado $P \in T(X_{kG}) \cap I_{A(\mathbb{G})}(A_{\sigma,c})$,

$$0 = \Gamma_\sigma(P) = \Gamma_\sigma \circ \iota_T(P) = \iota_S \circ \gamma_\sigma(P) = \gamma_\sigma(P).$$

Portanto $P \in I_{kG}(k^\sigma G)$. Agora como $I_{A(\mathbb{G})}(A_{\sigma,c}) = I_{A(\mathbb{G})}(A_{\sigma',c'})$, temos

$$I_{kG}(k^\sigma G) = I_{kG}(k^{\sigma'} G).$$

Terminamos a demonstração usando um resultado do Aljadeff [1, Seção 2] que garante que nesse caso, $\sigma \sim \sigma'$ em $H^2(G, k^\times)$. ■

O final deste trabalho pode fazer o leitor se perguntar: "E quanto às álgebras de Hopf monomiais dos tipos II a VI?" É exatamente essa a pergunta que irá nortear nosso trabalho a partir de agora, por recomendação inclusive do próprio Kassel.

Como citado aqui, o artigo do Bichon [5, Teorema 2.1] classifica os objetos $A(\mathbb{G})$-Galois para todos os tipos de álgebras de Hopf monomiais, não só as de tipo I. Nosso objetivo é usar essa classificação para obter resultados análogos para as demais álgebras de Hopf monomiais, com ênfase nas de tipo II, por sua proximidade com com as de tipo I.

Referências Bibliográficas

[1] ALJADEFF, E.; HAILE, D.; NATAPOV, M. Graded Identities of matrix algebras and the universal graded algebra. **Trans. Amec. Math. Soc.**, v. 362, n. 6, p. 3125 – 3147, 2010.

[2] AMITSUR, S. A. Polynomial Identities. **Israel Journal of Mathematics**, v. 19, n. 1-2, p. 183 – 199, 1974.

[3] ANDRUSKIEWITSCH, N.; SANTOS, W. F. The Beginnings of the Theory of Hopf Algebras. **Acta Applicandae Mathematicae**, v. 108, n. 1, p. 3, 2008.

[4] BERGMAN, G. M. The Diamond Lemma for Ring Theory. **Advances in Mathematics**, v. 29, n. 1, p. 178 – 218, 1978.

[5] BICHON, J. Galois and Bigalois Objects over Monomial non-semisimple Hopf Algebras. **Journal of Algebra and its Applications**, v. 5, n. 5, p. 653–680, 2006.

[6] BICHON, J. Hopf-Galois Objects and Cogroupoids. **Rev. Un. Mat. Argentina**, v. 55, n. 2, p. 11 – 69, 2014.

[7] BOREL, A. Homology and Cohomology of Compact Connected Lie Groups. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA**, v. 39, n. 11, p. 1142–1146, 1953.

[8] CHASE, S. U.; SWEEDLER, M. E. **Hopf Algebras and Galois Theory**. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2007.

[9] CHEN, X. W.; HUANG, H. L.; YE, Y.; ZHANG, P. Monomial Hopf Algebras. **Journal of Algebra**, v. 275, n. 1, p. 212 – 232, 2004.

[10] DASCALESCU, S.; NASTASESCU, C.; RAIANU, S. **Hopf Algebra: An Introduction**. Marcel Dekker Inc., 2001. v. 235 of **Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics**.

[11] DRENSKY, V. S. **Free Algebras and PI-algebras: Graduate Course in Algebra**. Springer Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. Springer, 2000.

[12] DUMMIT, D. S.; FOOTE, R. M. **Abstract Algebra**. 3th. ed. John Wiley and Sons Inc., 2004.

[13] GONÇALVES FONSECA, L. F. Graded Polynomial Identities and Central Polynomials of Matrices over an Infinite Integral Domain. **Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo**, v. 63, n. 3, p. 371 – 387, 2014.

[14] HOPF, H. Uber Die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und Ihre Verallgemeinerungen. **Annals of Mathematics**, v. 42, n. 1, p. 22–52, 1941.

[15] HUNGERFORD, T. W. **Algebra**. Number 73 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1980.

[16] KASSEL, C. **Quantum Groups**. Number 155 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1995.

[17] KASSEL, C. Examples of Polynomial Identities Distinguishing the Galois Objects over finite-dimensional Hopf Algebras. **Annales Mathematiques Blaise Pascal**, v. 20, n. 2, p. 175 – 191, 2013.

[18] KREIMER, H. F.; COOK, P. M. Galois Theory and Normal Basis. **Journal of Algebra**, v. 43, n. 1, p. 115 – 121, 1976.

[19] MASUOKA, A. Cleft Extensions for a Hopf Algebra Generated by a Nearly Primitive Element. **Communications in Algebra**, v. 22, n. 11, p. 4537 – 4559, 1994.

[20] MONTGOMERY, S. **Hopf Algebras and their Actions on Rings**. Number 82 in Regional Conference Series in Mathematics. American Mathematical Soc., 1993.