UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Departamento de Matemática

DM - UFSCar

Teoria dos Grafos no Ensino Médio:

Aplicações em Problemas de Trânsito

Orientador: José Antonio Salvador

Mestrando: João Paulo Gonçalves Della Torre

Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas

PPGECE

São Carlos, Março de 2018

JOÃO PAULO GONÇALVES DELLA TORRE

Teoria dos Grafos no Ensino Médio:

Aplicações em Problemas de Trânsito

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada ao Programa Pós Graduação de Ensino de Ciências Exatas PPGECE/UFSCar, pela Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para obtenção do Titulo de Mestre em Matemática

Orientador: Professor Dr. José Antonio Salvador

São Carlos 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato João Paulo Gonçalves Della Torre, realizada em 06/03/2018.

Prof. Dr. Jose Antonio Salvador
UFSCar

Profa. Dra. Janete Crema
USP

Prof. Dr. Renato Jose de Moura
UFSCar

A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar,

não seremos capazes de resolver os problemas

causados pela forma como nos acostumamos a ver o Mundo

Albert Einstein

Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar.

A minha família, em especial minha esposa Maura e meu pequeno filho Miguel, pelo apoio e paciência.

Ao meu orientador pelos ensinamentos de Matemática e vida.

Aos professores do PROFMAT/PPGECE pela oportunidade de aprendizagem oferecida.

Aos companheiros de curso pela amizade e colaboração de todos.

Abstract

This work, explores through the methodologies: Problem Solving and Mathematical Modeling, concepts of Graph theory in the second year of the High School of a State School.

The concepts developed here in a contextualized way, aim to lead the students to experience content not present in the curriculum, but that can be used to explain and solve everyday problems.

Keywords: Problem solving, Modeling, teaching and learning, Graphs and contextualization

Resumo

Este trabalho, explora através das metodologias: Resolução de Problemas e Modelagem Matemática, conceitos da teoria dos Grafos no segundo ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual. Os conceitos aqui desenvolvidos de maneira contextualizada, tem como intuito levar os alunos a experimentar um conteúdo não presente na grade curricular, mas que pode ser utilizado para explicar e resolver problemas do cotidiano.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Modelagem, ensino e aprendizagem, Grafos e contextualização

Conteúdo

Lista de Figuras

1 Introdução

Atualmente, existe uma necessidade urgente de relacionar a Matemática com o cotidiano, já que essa disciplina ajuda na compreensão dos avanços tecnológicos e os estudos de fenômenos naturais, sociais, científicos e culturais tão presentes e de fácil acesso à todos. Tal situação é um campo fértil para o Ensino e Aprendizagem dessa disciplina que, encontra no ambiente escolar, uma dificuldade em gerar bons resultados tanto em termos de Avaliações externas, como na aplicação em problemas na vida adulta.

Essa necessidade de relacionar um ente matemático com o dia-dia dos alunos, contextualizar o conhecimento, é sem dúvida um ótimo caminho para desenvolver o interesse e aprendizagem de uma classe. Além de mostrar onde e como a Matemática se faz presente em resolver problemas e criar modelos de soluções.

O Ensino e Aprendizagem de Matemática, hoje, necessita de uma ligação com o mundo de forma que, um assunto a ser ministrado se faça presente na vida dos alunos, sendo essa ação, de aproximar um ente matemático do mundo em que o aluno vive, de extrema necessidade para que os discentes tenham interesse em aprender.

O presente trabalho, tem como objetivo, aproximar alguns conteúdos sobre Teoria dos Grafos com a realidade dos alunos, essa contextualização, propiciada através de uma sequencia didática, que mostrará onde e como conhecimentos dessa teoria podem ser utilizados para resolver problemas e, assim, criar modelos para responder novos desafios.

Essa proposta é sem duvida o pilar desse trabalho, aproximar conteúdo estudado com a realidade, de maneira simples e objetiva, em que os estudantes vão desenvolvendo e adquirindo conhecimentos para solucionar os desafios propostos e, criando um ambiente favorável para o ensino de um novo ente.

O tema foi escolhido, justamente pela sua possibilidade de inserção no cotidiano do aluno, mesmo não sendo um assunto previsto na grade curricular da Secretária Estadual de Educação do

Estado de São Paulo, existe a possibilidade de ministra-lo durante o ensino de contagem e, ter um momento nas aulas, de experimentar a Matemática da Escola utilizada para solucionar problemas.

Também, possibilitar sair da zona de conforto que muitas vezes o ensino tradicional proporciona, optando por situações conhecidas dos alunos em forma de problematização.

O assunto será trabalhado com uma turma de Segundo Ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual do Estado de São Paulo, com o propósito de mostrar aos alunos, um conhecimento que não está presente na grade curricular, mas que pode ser utilizado para resolver questões corriqueiras. Dessa maneira, colher os resultados e, assim, verificar a eficiência dessa ação para fortalecer o ensino e a aprendizagem de um conteúdo não previsto, mas que tem uma importância na resoluções de vários problemas.

Esse trabalho, pautasse em metodologias que já demonstraram serem um ótimo recurso importante na disciplina de Matemática para melhorar aprendizado dos alunos, são elas: Resolução de Problemas e Modelagem Matemática. É fato que, o trabalho pedagógico passa por uma transformação, sendo que o ensino de um conhecimento seja pautado na necessidade, tanto para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, como para que seja algo significativo, capaz de proporcionar uma mudança positiva na vida desses educandos e na sociedade atual.

Percebe se facilmente que, a aprendizagem é mais efetiva quando usa se uma estratégia diferenciada, que no caso do presente trabalho optou se pela resolução de problemas. Espera-se, que à sequencia didática aqui proposta, seja um recurso a mais para contextualizar assuntos matemáticos fora do Currículo Escolar, mas que são de extrema utilidade por parte dos alunos para resolver problemas e desafios presentes no Mundo atual.

Também esperamos que, num futuro próximo uma introdução à Teoria dos Grafos esteja presente nos Currículos Escolares, dado sua importância e atualidade com os desafios modernos à serem resolvidos nas áreas de ciências exatas, computação, rede de informação e outros.

É nesse sentido, que o nosso trabalho se mostra como uma tentativa de já inserir esse ente matemático de forma simples e direta nas aulas de Matemática no Ensino Médio, para a uma possível posterior inserção do mesmo nas grades curriculares.

2 Currículo Oficial do Estado de São Paulo

Desde 2008, a Secretária Estadual de Educação do Estado de São Paulo têm orientações para o Trabalho Pedagógico nas suas escolas circuncidadas, pautado por um Currículo Básico nos níveis de Ensino Fundamental II e Médio, chamado de Currículo Oficial.

Esse documento apresenta princípios orientadores para que as escolas sejam capazes de promover competências indispensáveis ao enfrentamento do Mundo Contemporâneo, de tal maneira que seja também, o Currículo, um espaço de cultura, de uma escola que aprende e que desenvolva uma educação para compreender e resolver os desafios da atualidade.

Um currículo preocupado em oferecer condições para que as camadas mais pobres do País possam prosseguir nos estudos, além de buscar sempre um ensino de qualidade.

Como está descrito no Currículo Oficial:

> Um currículo que dá sentido, significado e conteúdo à escola precisa levar em conta os elementos aqui apresentados. Por isso, o Currículo da Secretária da Educação do Estado de São Paulo tem como princípios centrais: a escola que aprende; o currículo como espaço de cultura; as competências como eixo de aprendizagem; a competência de leitura e de escrita; articulação das competências para aprender; e a contextualização no Mundo do trabalho.[12] (p. 10);

Nessa perspectiva, é que esse documento é orientado por algumas Competências indispensáveis, dentre elas a competência de Leitura e de Escrita, dado ser essa competência, a porta de entrada para as outras competências das disciplinas, previstas nas áreas de Conhecimento do Currículo.

Esse documento, atende um público de idades entre 11 e 18 anos, o que mostra a sua preocupação em desenvolver nesses adolescentes as competências exigidas na vida adulta.

Um documento que prioriza a leitura e escrita, se justifica na sua contribuição em preparar os alunos para as atividades de produção e comunicação, sendo esse saber, usar a língua em situações subjetivas e objetivas que exijam graus de distanciamentos e de reflexão sobre os contextos vividos pelo aluno, é de fato a principal importância abordada pelo Currículo [12].

Além do que, este currículo adota como competências para aprender aquelas que foram formuladas no referencial teórico do Exame Nacional do Ensino Médio em 1998 e também a articulação com o Mundo do trabalho como referências para uma educação de qualidade.

2.1 A Área de Matemática e suas tecnologias

Em muitas épocas a escola foi um lugar para uma dupla alfabetização, no universo das letras e dos números. Hoje em dia, escola tornou se espaço para desenvolver áreas de Conhecimento, onde cada área abrange um grupo de disciplinas escolares. Entretanto, a Matemática, devido suas especificações e peculiaridades, é uma área de Conhecimento composta só por ela mesma no Currículo Oficial do Estado de São Paulo.

O objetivo principal do Currículo de Matemática é escolher entre os vários entes matemáticos para serem trabalhados na Educação Básica, os quais serão realmente indispensáveis para uma construção de conhecimento que sirva para as exigências do mundo atual em qualquer que seja o campo de informações.

Nesse aspecto, a Matemática e a Língua Materna, são a base para formação pessoal do aluno, assim a justificativa por um currículo próprio para a Matemática.

O Currículo Oficial define a importância da Matemática juntamente com a competência de Leitura e Escrita:

> A Matemática nos currículos deve constituir, em parceria com a língua materna, um

recurso imprescindível para uma expressão rica, uma compreensão abrangente, uma argumentação correta, um enfrentamento assertivo de situações-problema, uma contextualização significativa dos temas estudados.[12] (p. 30);

Assim, o Currículo de Matemática prioriza a aproximação entre conteúdos escolares e o universo dos educandos, através da contextualização, usando para isso recursos disponíveis como os tecnológicos. Por esse caminho, o ensino e a aprendizagem de entes matemáticos atinge seus objetivos como: capacidade de abstrair, aprender relações entre contextos, imaginar situações fictícias e situações que podem ser realizadas [2] [12].

É de fato importantíssimo inserir os alunos num novo conhecimento, de tal maneira, que esse conhecimento tenha sua necessidade de aprendizagem para entender, compreender ou conhecer o mundo que nos cerca.

O Currículo Oficial de Matemática [12], está constituído por três eixos norteadores da ação educacional:

- **Expressão/Compreensão**: Permitir que o aluno consiga se expressar por meio de diversas linguagens e ser capaz de compreender o outro seja do não eu, de um texto, de uma leitura, fato histórico, sociais, econômicos e outros;

- **Argumentação/Decisão**: Fazer com que o aluno seja capaz de articular informações e relações disponíveis para desenvolver a capacidade de elaboração de sínteses para a tomada de decisão;

- **Contextualização/Abstração**: Levar o aluno a perceber o enraizamento dos conteúdos da escola com a realidade imediata, além de desenvolver a capacidade de abstração e imaginação para conceber o que ainda não existe;

O papel da Matemática é reconhecido em cada um dos eixos: no primeiro, junto com a língua materna, compreender a realidade local e global, no segundo o desenvolver o raciocínio lógico e no terceiro, de fato uma das principais contribuições dessa disciplina, aprimorar a imaginação para resolução de problemas.

Todos os objetos matemáticos tem em cada eixo dos citados acima, uma maneira de fomentar o ensino e a aprendizagem, no intuito de educar os estudantes nos princípios do Currículo [12]. A Matemática nesse documento, junto com a Língua Materna, é apresentada como um sistema primário de expressão, entretanto, a Matemática tem um conteúdo próprio e singular, o que se faz atravessar os limites da linguagem formal para expressar algo.

O foco principal desse Currículo, é transformar informação em conhecimento, mapeando os temas/conteúdos considerados relevantes [12], esses temas estabelecem os meios para que as disciplinas desenvolvam competências pessoais.

No documento, fica estabelecido os fundamentos que se espera dessa disciplina, já que os conteúdos são extensos e fragmentados por tópicos o que dificulta seu detalhamento e necessidade de ser ministrada. Assim, espera se que através do Currículo Oficial de Matemática ideias fundamentais exploradas em diversos conteúdos sejam desenvolvidas em forma de competências, que são aqui o ponto importante a ser conquistado por esse documento.

Os conteúdos previstos nesse Currículo para cada serie/ano são oriundos de programas e materiais já existentes, não tendo nenhum que seja distanciado da prática docente [2] [12]. Os conteúdos são organizados em três blocos temáticos: **Números, Geometria e Relações**, cada bloco com suas características principais, mas em muitos casos seu ensino e aprendizagem é sempre acompanhado de dois ou três blocos ao mesmo tempo.

Cada um dos blocos está presente na lista de temas à serem ministrados em cada ano/serie, tendo em vista que toda informação reunida seja relevante na construção do conhecimento.

Em cada bloco temático, tem se um conjunto de competências a serem adquiridas pelos discentes, como números: *reconhecer e operar no campo de numérico real*, em geometria: *reconhecer figuras planas e espaciais e suas características* e em relações: *reconhecer e compreender as com-*

parações entre medidas e entre informações [12].

Tendo o cuidado de que em cada serie/ano haja um aprofundamento das ideias que se deseja atingir com aquele determinado tema e as competências e habilidades que se deve desenvolver com esse conteúdo de acordo com o previsto no Currículo Oficial.

O Currículo prevê ainda, que cada ente seja tratado de forma problematizada, dado a fecundidade desta estrategia e as possibilidades de exploração que ela permite, além de mostrar e demonstrar as relações interdisciplinares e transdisciplinares que cada um possa oferecer.

Nesse processo cada ideia, competência ou habilidade deve ser encaixada com o que o professor planeja para o ensino de determinado conteúdo [12].

No geral, a ideia norteadora para determinar ou prever um conteúdo a ser ensinado está no centro de interesse que esse assunto pode levantar, como sua importância e necessidade dentro do mundo do trabalho ou de desenvolver a abstração dos alunos.

No caso desse documento, os temas (conteúdos) estão dispostos com as Habilidades pretendidas em cada ano/serie. Como as Competências e Habilidades aqui esperadas são oriundas do ENEM de 1998, fica evidente que não existe disparidade entre o que o Currículo Oficial determina, com o que outras redes, públicas ou particulares, também já trabalham [2].

Esse Currículo Oficial de Matemática do Estado de São Paulo, é de fato um documento que prevê o que ensinar, porque ensinar e principalmente, o Currículo Oficial define isso, o que o aluno irá adquirir com aquele conteúdo que deve ser ministrado em cada ano/serie, ou seja, as competências e habilidades que o mundo exige, seja para a cultura, para o trabalho, para avida acadêmica ou para outros interesses que o discente tenha.

Independentemente do projeto de vida de cada aluno, esse documento quer que os discentes saiam formados plenamente da escola publica paulista, para que possam prosseguir naquilo que lhe é de interesse com condições cognitivas para alcança-los, sendo um cidadão consciente de seus direitos e deveres e, ao mesmo tempo, a rede de ensino pública paulista conquiste bons resultados num futuro próximo nas avaliações externas.

3 Modelagem Matemática

Existem vários metodologias de ensino recomendadas e utilizadas para que o objetivo pedagógico de um docente possa ser alcançado, entre elas a modelagem matemática ganha destaque por oferecer recursos e condições favoráveis ao ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Compreender o mundo e sua realidade é uma das finalidades da Educação Escolar, em que o ensino e aprendizagem de Matemática tem muito a contribuir, principalmente no quesito de interpretar os problemas que ocorrem ou poderão ocorrer.

Evidentemente, na Educação Básica o aluno a experimenta de forma simplificada a solução de um problema real, devido esse ser carregado de variáveis e condicionantes, numa fase da vida acadêmica em que, a maioria dos alunos, ainda não tem capacidade cognitiva e emocional para lidar com tantas informações.

Nesse ponto é que o uso de modelos matemáticos servem para se ter um ambiente propício para abordagem de problemas próximos dos reais, criando um ambiente de aprendizagem em que o educando é convidado a investigar através da Matemática, problemas aproximados dos problemas reais, tendo a oportunidade de verificar uma aplicação prática que valoriza o senso crítico [13].

A modelagem matemática tem esse aspecto, oferecer aos discentes um problema aproximado do problema real, em que a solução do problema aproximado é de fato uma resolução otimizada do problema verdadeiro e que pode servir como solução [16]. Essa metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica, é um excelente caminho tanto para contextualizar um assunto como para motivar e despertar o interesse dos alunos pelo conteúdo a ser ministrado.

Os objetivos pedagógicos dessa estratégia são:

- Aproximar a Matemática de outras áreas de conhecimento;

- Salientar princípios inerentes à Educação Crítica presentes na Matemática e que são importantes para formação do aluno;
- Relacionar situações do cotidiano do aluno com a Matemática curricular e, assim, fomentar o interesse pela pesquisa;
- Estimular a criatividade e incentivar investigações e reflexões;
- Melhorar a compreensão e a aprendizagem de conceitos matemáticos;
- Desenvolver a habilidade para resolver problemas.[11]

Uma Educação Matemática crítica, que torne a sala de aula um ambiente para desenvolver a cidadania, pode ser promovida pela modelagem matemática, dado que, esse método favorece a aprendizagem dos discentes através de um panorama de que a aprendizagem é mais do que testar fórmulas ou teoremas e sim, apresentar a aplicabilidade no cotidiano, levando o aluno a não só perceber como o mundo a sua volta se comporta, mas também sendo crítico no sentido de testar caminhos e estratégias para resolver um problema presente em uma situação futura [13].

Outros argumentos que podem justificar o uso de modelagem na sala de aula, na busca do desenvolvimento do saber escolar é a motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sociocultural da matemática [17] [16].

Uma conexão entre a Matemática e a realidade, é possível através dos modelos,tanto de Matemática como de outras áreas do conhecimento. Por esse caminho os educandos percebem a aplicação dos assuntos estudados, mesmo que para tal finalidade o problema real tenha sofrido, intencionalmente por questões pedagógicas, modificações no sentido de torná-lô mais favorável para o público da Educação Básica.

Simplificar um problema de modo que esse possa ser não só compreendido, mas também solucionado, é uma maneira de poder obter um caminho para a solução do problema real, ou seja, tem-se um problema inerente a uma determinada situação que envolve muita informação se transformar esse problema em um simplificado, é possível determinar a solução de problema simples que pode ser uma solução aproximada do problema real [16].

Ter uma aprendizagem significativa é, de fato, um fator determinante na Educação Básica e consequentemente na Educação Matemática existe esse compromisso, no processo de ensino e aprendizagem, em que uma dada situação deve ser investigada, o professor tem papel importantíssimo, ora como participante do processo, ora como mediador do conhecimento, já que o problema selecionado e a condução da aplicação da Matemática inerente a situação é fruto do seu estudo e preparação das aulas.

Como está previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

> Identificar o problema, procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; fazer e validar conjecturas, experimentando e recorrendo modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades [2]

Existem, infelizmente, alguns obstáculos e dificuldades para que essa estratégia possa contribuir no ensino e aprendizagem de matemática como por exemplo: insegurança e a falta de conhecimento do professor, resistência dos alunos ao novo, preocupação de cumprir os conteúdos previstos em um programa de ensino, necessidade de tempo extra, muitos alunos por turma e estrutura da escola [16].

Para cada uma dessas dificuldades, existe o motivo maior para insistir nesse método de ensino, que são as possibilidades que o mesmo proporciona.

É através dessa estratégia de ensino e aprendizagem que se pretende desenvolver nos educandos um senso critico, uma matemática crítica, uma aprendizagem significativa e um empoderamento nos mesmos [13], para que haja na construção do conhecimento, reflexão sobre a situação apresentada, já que se recomenda trabalhar com problemas reais presentes no cotidiano dos alunos e, uma analise profunda do conceito matemático envolvido, onde problema real é transformado em um problema matemático [16].

Tornando a sala de aula, um ambiente para desenvolver a cidadania e um ensino menos alienado e mais comprometido com a realidade da sociedade, além de relacionar diferentes conceitos e ligações entre esses e suas representações, colocando os discentes de frente com situações-problema que, apesar do interesse em resolvê-las, ainda não têm ideias e ferramentas para isso, assim, o processo investigativo ocorre utilizando os conhecimentos adquiridos e os novos que irão surgir. Esses são espaços e momentos que a Modelagem Matemática propicia.

Nesse quesito, que essa metodologia ganha vida e utilidade para o professor, já que motivar e incentivar os discentes é o primeiro passo para uma boa aprendizagem de qualquer conteúdo, principalmente os de Matemática, sendo esse recurso, a modelagem matemática, um possibilitador, não só de mudança de paradigma educacional, mas de transformações positivas no tocante da aprendizagem significativa e contextualizada [16].

Um ensino e uma aprendizagem por esse método tende a criar ambientes favoráveis para o trabalho do professor, já que o interesse e a motivação dos alunos são despertados com a situação problema apresentada e, a busca pela solução através de um processo investigativo, onde se utiliza conhecimentos prévios e novos que deverão ser adquiridos.

A sala de aula torna se um lugar de crescimento e amadurecimento frente às soluções encontradas e a matemática estudada, levando os educandos a gostar de Matemática através da aplicação dessa disciplina em problemas reais [16].

Desta maneira, organizar as aulas de Matemática utilizando a metodologia da Modelagem, é uma chance de que o conhecimento a ser adquirido ganhe representatividade, pois, essa estratégia possibilita aos alunos criarem argumentos, testarem hipóteses e principalmente perceber a Matemática que existe nas coisas e na solução ou explicação de problemas dos mais variados tipos.

3.1 Como aplicar em sala de aula a Modelagem

Nos dias atuais, a dificuldade de se ensinar Matemática ao aluno, é esse não ter interesse pelo assunto ministrado. Uma saída para esse fato, é o uso de aplicações da matemática escolar em situações reais, dado que toda Matemática Escolar tem aplicação no mundo real.

A busca, no entanto, está em como trabalhar esses assuntos, de forma que o ambiente e o desenvolvimento da aula sejam momentos e locais de interesse da classe. Nesse sentido, é que o uso de modelos matemáticos são úteis, para entender e experimentar a Matemática aplicada e aprendida.

O fruto da modelagem matemática, é a tentativa de formular um problema matemático próximo do original, com a essência do original e, simples o suficiente para se utilizar em sala de aula, como recurso para aprendizagem [3], que possibilite explorar todos os raciocínios matemáticos e interpretações reais e irreais para chegar a uma adequada da solução.

Encontrar ou criar uma aplicação matemática, que seja um modelo matemático de algum evento real, é uma pratica pedagógica que exige do professor empenho, estudo e experiencia.

É valido lembrar que, não só assuntos matemáticos podem ser aplicados, mas os de outras áreas também podem se apropriar de modelos matemáticos, para resolver problemas de determinadas situações, tanto reais como para uso em sala de aula, [16], modelagem é de fato a aplicação de um ente matemático.

Frequentemente o professor busca duas maneiras para determinar uma aplicação: A primeira é ter utilidade no mundo real de uma ideia matemática ou a segunda que é aplicar as ideias matemáticas para uma situação real [3] [17].

Nota se que, a primeira alternativa é a mais usada, pois parte da onde estão para demonstrar um ente matemático, porém, essa estratégia pode gerar resultados irreais e enganosos, além do que a situação pode ser algo isolado o que acaba por não favorecer o ensino como um todo, exigindo do professor um cuidado maior no momento de selecionar a situação e os assuntos a ela aplicados para não tornar a aula massiva e desestimulante.

A segunda, não tem os perigos da primeira dado que parte de definições e já se aplica um conhecimento , porém dada a situação pode se trabalhar com informações difíceis. O fato é que trabalhar com uma situação isolada estimula os educandos na busca pela solução, já que tal ação favorece o uso de peculiaridades e estruturas próprias, ou seja, a aplicação de uma ideia matemática é melhor explorada através de uma modelagem, pois, assim se trabalha com as informações e dados mínimos que facilitem o entendimento e explorem uma aprendizagem mais ampla na Matemática envolvida naquela situação [16].

Muito do que se deseja trabalhar em sala de aula surge do interesse e reflexões que o professor tem, do que esse observa e analisa sobre o mundo que o rodeia. A forma de manipular e a aplicação de um ente matemático, nasce de seus interesses e habilidades. Entretanto, tais tomadas de decisão devem ser realizadas através de uma analise do público que trabalhará com esse modelo (os alunos) e seu grau de maturidade matemática, para obter um melhor aproveitamento em termos de aprendizagem do assunto matemático abordado.

Evidentemente, é sempre bom analisar o que outros professores ou especialistas recomendam [3] [14], já que tal atitude amplia os saberes desse profissional, podendo ajudar no momento de preparação e execução de uma aula voltada para a modelagem matemática, criando uma alternativa pedagógica e um ambiente de aprendizagem.

Transpor a barreira do ensino tradicional, do cumprimento do cronograma da disciplina, é o desafio que o ensino por modelos sugere. Tal evento pode ser iniciado com contagens ou medições e assim gerar dados para várias situações, e buscar conjecturas ou determinar a lei de formação entre dois ou mais dados desses tipos pode ser o início para a aprendizagem de Matemática aplicada através da Modelagem [16]. Infelizmente, na formação inicial dos professores pouco ou quase nada sobre esse método de ensino e aprendizagem é oferecido, ficando como iniciativa desse procurar esse metodologia para sua pratica docente [17].

É valido lembrar que a docência por modelagem não é algo como o ensino tradicional de conteúdo, é mais sofisticado que isso, é algo que exige empenho na busca por temas, problematizações e aplicações dos entes matemáticos que se deseja ministrar por esse meio.

O Professor tem que desenvolver a capacidade de através de um problema definido de uma situação complexa, transformá-lo em um modelo matemático e assim buscar uma solução que possa interpretar a situação inicial, se cria assim um ciclo em que uma situação é interpretada por algum tema matemático que gera o formalismo necessário para compreender o próprio Mundo real.

Além do que, a qualidade de situações e atividades de modelagens para o ensino e aprendizagem de Matemática, são adquiridas com a experiencia e com empenho em sempre utilizar situações do cotidiano dos alunos [17][16].

Isso favorece, a capacidade de argumentar, criar e testar hipóteses e principalmente aprender um novo assunto que tem importância e utilidade do dia-dia.

Alguns procedimentos que validam e qualificam um trabalho por modelagem são: adquirir técnicas e teorias (para interpretar da matemática para língua portuguesa e da língua portuguesa para matemática), uso de problemas clássicos, desenvolver técnicas conhecidas em situações novas, questionar os modelos clássicos (como por exemplo, os Movimentos Uniformemente Variados em Mecânica interpretados por equações do segundo grau), improvisar novas técnicas em situações que as usuais não funcionam, abstração e formulação matemática de problema [16]. Tais procedimentos tem como objetivo facilitar a elaboração do plano de ensino do docente, quando esse decide utilizar a modelagem.

A criação de novos problemas não é uma atividade pedagógica muito fácil e, utilizar modelos para adaptar problemas conhecidos em situações cotidianas é um caminho viável, ou pode se: Iniciar com a escolha do tema, isto é, um assunto inerente ou recorrente do dia-dia dos alunos, uma contextualização,onde esse tema pode ser algo real ou imaginário. Evidentemente, se for algo real a credibilidade e o interesse dos alunos aumenta [3] [11].

De posse do tema, o próximo passo é a busca por dados, que podem ser levantados por amostra, entrevista ou outro processo qualquer, sendo esses dados dispostos em forma de tabelas, gráficos ou diagramas, o importante de dispô-los de forma que a consulta dos mesmos seja de fácil acesso [16]. Finalmente a formulação do modelo, ou seja, como a interpretação e formulação do problema podem contribuir para solucionar a situação por esse gerada.

Um dos mais importantes conceitos que a modelagem pode desenvolver nos alunos, além claro de vivenciar teoremas e formulas aplicadas em situações reais, é experimentar um processo de encontrar a otimização de um evento [8], em que a busca pelo menor caminho, melhor combinação, menor custo ou melhor beneficio, é encontrado através dos processos de argumentação, levantamentos de hipóteses e testagem de possibilidades, na busca da melhor solução para a situação-problema apresentada.

Cabe ao docente viabilizar essa metodologia, já que é desse profissional que surgi a possibilidade de planejar, executar e verificar os efeitos que tal pratica pode proporcionar. Lembrando sempre que, para tal jornada é necessário que se estude e busque com quais temas do cotidiano e quais assuntos matemáticos deve-se envolver sobre a ótica dessa estratégia [3] [16].

O trabalho pedagógico através da Modelagem Matemática é algo que exige empenho por parte do professor, já que para atingir algum êxito, esse deve experimentar, testar e avaliar todo o processo que essa estratégia desenvolve. Entretanto, o professor deve se sentir tocado a utilizá-la e assim fugir do que é tradicional ou comum e, vivenciar um método que tem muito a contribuir com o ensino e aprendizagem de todo e qualquer ente matemático da Educação Básica.

4 Resolução de Problemas

Resolver um problema, seja ele escolar ou na vida, é talvez a principal finalidade de se aprender Matemática na Educação Básica. Busca se constantemente formas para desenvolver o interesse dos alunos para os entes matemáticos e, atualmente ter um trabalho pedagógico através da resolução de problemas é o melhor caminho para que as expectativas de aprendizado, que todo docente deseja, seja alcançado e a ideia fundamental do ensino de Matemática também seja atingida, que é preparar os discentes para resolver os variados problemas que lhes forem propostos.

Tomando a Matemática como uma disciplina para preparar os alunos para resolver os mais variados problemas e desafios da vida, seja adulta ou escolar, surgem algumas interrogações: O que é um problema? O que deve ter um problema? Como é um problema? Essas e outras questões são subsídios para desenvolvermos este assunto, resolução de problemas.

Um problema bem proposto, tem como objetivo principal levar o aluno a utilizar os conhecimentos adquiridos e outros que por ventura terá que aprender para resolvê-lo. Possibilitando o aluno fazer: experimentações, aproximações, levantamento de hipóteses ou aquisição de novas ferramentas para assim, atingir o que é cobrado em um problema, que é encontrar uma resposta plausível [6].

Nessa perspectiva, cabe ao professor selecionar ou elaborar o problema mais adequado para que, através desse, a justificativa de uma sequencia didática seja vencida.

Essa metodologia, parte do principio de que o interesse do aluno pela Matemática pode ser adquirido pela exploração da resolução das mais variadas formas que um problema pode assumir como de reconhecimento, de algorítimos, aplicação, pesquisa aberta ou situações-problema [6].

Percorrer essa variedade de desafios é um caminho amplo para atingir o ensino e a aprendizagem, dado que quando se resolve um problema proposto, consegue se perceber padrões e características dos assuntos da Matemática[9], e assim criar um repertorio para utilizar em situações futuras. É fato que quanto mais problemas de Matemática um aluno resolve mais amplo fica seu repertório, o que possibilita em ocasiões futuras saber resolver outros problemas similares aos já superados.

Nesse ponto, as vezes fica a impressão de que estudar Matemática é algo mecânico e de memorização, o que de fato não o é, dado que resolver um problema não está em memorizar sua solução e sim preparar e fortalecer o raciocínio para tomadas de decisão[6].

Essa exploração da Matemática pode ser pelos desafios reais ou imaginários, tendo uma justificativa maior e melhor se o problema proposto for algo real e aplicável, que faça parte do cotidiano dos educandos. Para o aluno, um problema real deve ser um desafio e, para o professor a resolução desse, um meio para que um ente matemático seja ensinado.

Uma Matemática voltada para solucionar problemas reais é uma oportunidade para tornar os alunos melhores em resolver problemas e ter um espaço para mostrar-lhes que esses "desafios "são aplicações de conhecimentos e refletir sobre eles é um caminho pedagógico para o ensino e a aprendizagem previsto em todos planos de ensino [12] [14].

Formular um problema adequadamente é, de fato, uma provocação, pois exige que esse tenha, ou explore, o que é de interesse do docente, que pode ser deste verificação de algo já apreendido ou até observar como os alunos colhem informações implícitas ou explícitas e as utilizam para elaborar hipóteses e tomar decisões.

Esse tipo de preocupação explora tanto a busca do professor, em certificar o que o problema realmente pergunta e, do aluno em utilizar o que já sabe ou o que precisa aprender para tornar possível a resolução do desafio proposto. Ficando claro que um problema é mais do que uma lista de exercícios, em que se aplica ou manipula formulas e algoritmos, é de fato um recurso para trabalhar e desenvolver os aspectos cognitivos do aluno [6].

Um bom parâmetro para elaborar ou selecionar problemas, é observar como os discentes resolvem os que são propostos, como identificam informações e propõem soluções. Assim, o professor pode saber o que cobrar em um desafio e principalmente verificar como o aluno monta sua sequencia de solução.

Buscar um desenrolamento logico e bem argumentado para solucionar um problema, sendo este um problema formulado para esse fim, é um ótimo cenário investigativo em que uma Matemática critica sempre é desenvolvida [13].

Resolver problemas, é uma meta para o ensino da Matemática, um processo de aplicação de conhecimentos e também uma habilidade básica a ser adquirida [6] [1], utilizar a metodologia de resolução de problemas tendo como metas de ensino as vantagens pedagógicas já citadas, é um excelente meio de fortalecer a aprendizagem de um assunto qualquer da Educação Básica [3].

> As estrategias de resolução de problemas envolvem propor questões, analisar situações, interpretar resultados, ilustrar resultados, traçar diagramas e usar tentativa e erro. Na resolução de problemas, os alunos precisam saber aplicar regras da lógica que sejam necessárias para chegar a conclusões válidas. Precisam saber determinar quais casos relevantes. Devem ser corajosos para chegar a conclusões provisórias e precisam estar dispostos a submeter essas conclusões a exame minucioso. [6] (p. 12)

Assim, resolver problemas, é aplicar conhecimentos em situações novas e desconhecidas, sejam problemas de livros didáticos, de outras fontes e da vida real.

Essa é talvez a principal razão para desenvolver o ensino e a aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.

4.1 Como formular problemas

Tendo em vista as razões pedagógicas de se trabalhar conteúdos matemáticos através de resolução de problemas, surge a questão de como elaborar bons problemas. Tanto para desenvolver um assunto ou como para verificar o aprendizado de uma turma, é preciso formular problemas com criatividade para que um resolvedor (termo empregado por Polya):

- Seja motivado a solucionar;

- Entender e absolver o conceito envolvido na resolução;

- Aprenda algo através da resolução de um problema;

O primeiro passo para a resolução é a elaboração de um problema que desenvolva os aspectos acima citados. Para querer solucionar um problema existem vários motivos desde curiosidade até ser parte da nota final, porém, o principal é como o desafio ou problema, é formulado. Veja os três problemas abaixo:

> *Problema 1*- Seja d(n) o número de divisores positivos do inteiro n. Prove que d(n) é impar, se e somente se, n é um quadrado.
>
> *Problema 2*- Quais são os inteiros positivos que têm um número ímpar de fatores? (Justifique sua resposta).
>
> *Problema 3*- Imagine n armários, todos fechados, e n homens. Suponha que o primeiro homem passe a abra todos os armários. Depois, que o segundo homem passe e feche um sim outro não, começando pelo número 2. O terceiro homem, então, passa e altera o estado dos armários, de três em três, começando pelo número 3 (isto é, se este está aberto, ele o fecha e vice-versa). Se esse procedimento tiver continuidade até que todos os n homens tenham passado por todos os armários, quais então ficam abertos? [6] (p. 32 e 33)

Todos tem a mesma finalidade, porém, com escritas diferentes, tais diferenças são essenciais para gerar motivação, ou não, para solucionar um problema.

O interesse em resolver nasce da motivação, sendo um problema real ou imaginário e, para tanto, é preciso formular ou reformular problemas para que alunos através desses, possam se tornar resolvedores e consequentemente aprender um ente matemático.

Podemos classificar os problemas em vários tipos, aqui definiremos em: Exercícios de reconhecimento, de algoritmo, de aplicação, de pesquisa aberta e situações-problema [6].

Exercícios de reconhecimento: são para recordar ou reconhecer um fato específico, uma definição ou enunciado. Sua principal função está em verificar o que o aluno resolvedor sabe em relação a um teorema, uma definição ou outros, são geralmente propostos como verdadeiro ou falso, múltipla escolha, preencha os espaços ou comparação.

Esse tipo de atividade deve ser proposto de maneira que o aluno não memorize sua solução sem compreendê-los e sim explore as varias respostas e discussões que eles geram.

Exercícios de algoritmos: podem ser resolvidos por procedimento de passo-a-passo e de algoritmo numérico. O desafio é tornar esse tipo de exercício interessante segundo, duas sugestões são oferecidas nesse sentido: Dê uma sequência de exercícios de algoritmos com um proposito ou faça inversão de um problema conhecido [6].

Problemas de aplicação: são os que envolvem algoritmos aplicáveis, são situações em que têm formulação simbólica e depois manipulação dos símbolos por algum algoritmo. A característica principal é que seu enunciado tem uma estratégia para resolvê-lo, em que é simplesmente transformar a palavra escrita em uma forma matemática apropriada, utilizando um algoritmo.

O mais apropriado é tornar o problema dessa categoria, que em suma são na maioria artificial, em um problema real. Como sugestão pode-se: Utilizar dados realistas, tanto nas informações como nos valores utilizados, e que a incógnita do problema seja desconhecida, sendo que a resposta do problema seja algo que possa ser encontrada por uma razão.

Evitar formular problemas com dados insuficientes ou estranhos, pois, a habilidade para resolvê-lo está em discernir o que é necessário, assim bons problemas de aplicação são aqueles que exijam uma analise crítica das informações, levando o resolvedor a escolher as que mais lhe convêm para soluciona-lô[9].

Problemas de pesquisa aberta: são aqueles cujo o enunciado não tem uma estrategia para resolvê-los. São problemas que tem expressões do tipo prove que ou encontre todos.

Embora a maioria desse tipo de desafio se encontra no ambiente de nível superior, por se achar que trabalham com uma matemática mais sofisticada, é interessante seu uso na Educação Básica, por favorecer o aprendizado no aspecto de encontrar padrões, provas ou demonstrações.

São problemas que requerem um nível mais alto de raciocínio, sendo uma iniciativa a conjecturar, no caso dos alunos que se propõem a resolver esse tipo de problema.

Sua formulação é propor ao resolvedor que elabore a solução, tanto que para isso, é interessante que se evite as expressões do tipo: Prove que ou mostre que, aumentando assim a vontade do aluno em conjecturar soluções para tais problemas.

Levar um aluno a raciocinar sobre um problema e montar uma solução possível, coloca essa categoria de problemas num patamar de exigências para sua formulação ou reformulação, se deseja que um aluno aprenda a conjecturar.

Para isso, temos algumas recomendações, que são: Estimular os alunos a questionarem o objeto a ser descoberto, desde perguntas de respostas binárias, sim ou não, até perguntas mais elaboradas do tipo descobrir a frequência ou padrão do que se deseja solucionar e também trabalhar com problemas reais, já que na maioria das vezes os problemas dos livros didáticos dessa categoria são artificiais [6] [3].

Também se recomenda o uso de problemas extravagantes, que fogem completamente da realidade, já estes podem despertar a curiosidade intelectual no aluno.

Situações-Problema: são realmente problemas, coisas reais que acontecem, que determinam etapas como identificar o problema relacionado a situação e verificar o melhor caminho para resolvê-lo.

Sua necessidade de resolução parte da sua aplicação real, ou próxima da realidade já que se tratando de Educação Básica na maioria das vezes fica inviável ter um problema com muitas variáveis.

Assim, situação-problema deve ter em seu contexto a possibilidade de solução ou explicação razoável caso não haja, permitindo a transformação desse em um problema aritmético e em seguida propor a resposta. Esse tipo de problema não deve ter em seu enunciado qual ente matemático o resolve, para estimular e despertar no resolvedor caminhos possíveis para o aprendizado de algo novo, em detrimento de solucionar essa e outras situações.

Definimos acima alguns tipos de problemas e orientações quanto à suas formulações ou reformulações, para que assim, numa perspectiva de ensino e aprendizagem de Matemática através da metodologia de Resolução de Problemas, ganhe um pequeno suporte pedagógico e técnico para a elaboração e reformulação de problemas no aspecto de uso pedagógico desse.

4.2 Como resolver problemas

Nessa parte, definiremos possíveis caminhos para solucionar um problema proposto. Não como uma estratégia para ser usada em todas as resoluções, já que se trata de uma sugestão e não uma regra, além do que cada problema, detalhado em como formular problemas, têm suas peculiaridades e com isso uma gama de caminhos para sua solução.

Existem alguns caminhos para serem tomados na resolução de problemas. Aqui utilizamos o proposto por George Polya: É preciso compreender o problema, encontrar conexão entre os dados e a incógnita usando de problemas auxiliares e ter um plano para soluciona-lô, executar o plano e finalmente examinar a solução obtida, como um processo cognitivo e viável, na busca da resposta de um desafio.

Existem várias fórmulas e métodos para se resolver um problema, nesse trabalho nos prenderemos ao sugerido no paragrafo anterior, dado sua sutileza e facilidade de uso, mas lembrando sempre que na busca pela solução correta de qualquer desafio parte principalmente dos caminhos e que o resolvedor propõe seguir, isto é, sua heurística.

No trabalho pedagógico, o estímulo à heurística nos alunos é a grande vantagem de se ensinar e aprender Matemática através de problemas. Dessa maneira um caminho que facilite e ajude a solucionar todos os tipos de problemas, sejam reais ou artificiais, é muito importante já que nosso publico são crianças ou jovens em pleno desenvolvimento cognitivo, social e emocional [12] [1] [2].

Só o estimulo não é suficiente, necessitando de outros fatores que possam incentivar e encaminhar os alunos a procurar solucionar os problemas propostos. A maioria dos alunos, na vida adulta não identificarão nos fenômenos ou eventos, os entes matemáticos, assim, a principal finalidade de se aprender matemática é tornar os alunos bons resolvedores de problemas, dessa maneira, o ensino e a aprendizagem de Matemática ganha importância de destaque.

A solução de um problema deve partir com o resolvedor questionando sobre as informações implícitas e explicitas no enunciado do problema, identificando o que se deseja responder e quais informações são úteis, para a partir disso, procurar um caminho para começar a resolvê-lo.

A compreensão do problema, nasce de alguns fatores, como experiências em resolver outros problemas similares e dos conhecimentos adquiridos e dos futuros a serem adquiridos. A resolução de um problema se inicia com questionamentos para identificar as condicionantes e a incógnita [9].

Um resolvedor de problemas, faz uso das informações necessárias e para isso realiza perguntas e encontra as respostas com base no enunciado do problema e em conhecimentos absorvidos. Um destaque especial é a maneira particular que cada um utiliza para resolver, ou seja, a heurística que cada um desenvolve para solucionar um problema proposto [9], isto é, a forma de se resolver um problema acaba por ser algo individual, já que para encontrar a resposta correta de uma problema, existem mais do que uma maneira.

É extremamente importante, na resolução de um problema em sala de aula, que o professor considere as tentativas de solucionar dos discentes, através de questionamentos e elogios sobre as propostas de soluções individuais ou coletivas, pois, esse estímulo à heurística dos alunos é um caminho não só para resolver o problema, mas também para que o conhecimento matemático envolvido seja aprendido [9].

O professor deve assumir durante a resolução de um problema, o papel de comentarista, ou seja, favorecer o aprendizado com comentários pertinentes e positivos sobre as estratégias e respostas dos alunos, para que o mesmo se motive a sempre resolver os desafios ou aceitar seu erro como parte de seu aprendizado.

Sendo professor nos momentos propícios, quando o caminho percorrido pelo resolvedor fugir da proposta inicial e esse necessitar de uma intervenção para que tanto o estimulo e a motivação na busca pela resposta possa ser retomada.

As sugestões abaixo não são vias de regra, em determinados problemas sua solução se dará antes de se fazer todos os procedimentos sugeridos. Fica claro que em muitos casos, as estratégias pessoais terão mais eficiência que as essas aqui descritas, porém, o que *Polya* sugere pode ajudar muito na resoluções, principalmente se o resolvedor estiver com dificuldades de iniciar a resolução. São sugestões que podem ajudar na resolução, não que de fato proporcionaram ao aluno determinar a solução correta, dado que tal possibilidade depende de outros fatores como conhecimentos prévios, manipulação correta de informações e outros.

A descrição de cada etapa da heurística proposta é um alento, um caminho e não uma única maneira que deve ser utilizada em todos os problemas, dado que, um bom resolvedor tem em si um rol de muitos problemas já resolvidos, o que possibilita muitas vezes determinar a resposta de forma otimizada.

Lembrando que, um bom resolvedor de problemas, com destaque para os da Matemática escolar, é aquele aluno que tem repertório [9] [3] [14], ou seja, que já realizou e experimentou as resoluções de vários problemas com graus de dificuldades diferentes, o que possibilita desenvolver uma experiência que contribui muito em futuras resoluções de problemas.

Analisando e entendendo um problema, nessa etapa o aluno pode usar desde de desenhos e diagramas, casos particulares e até simplificações. Aqui, o aluno pode utilizar de meios como exemplificar o problema, descobrir padrões ou tentar simplificar sem perder a generalização do problema proposto.

O uso de diagramas e desenhos (aqui, podemos pensar em gráficos também), podem mostrar as possíveis respostas e assim encontrar um caminho para solução.

Deve se compreender o problema, para isso é necessário levantar os dados como condicionantes e a incógnita, verificando das informações o que é insuficiente, redundante ou contraditória, para que assim obtenha se o que é adequado para utilizar na busca da solução do problema.

Estabelecer um plano, o resolvedor deve relacionar os dados e a incógnita, qual a conexão entre ambas, procurar problemas já resolvidos que são semelhantes ou ligeiramente diferentes a este proposto, verificar se o método utilizado nesses problemas anteriores servem e determinar o que se deve inserir para solucionar o problema, utilizando os dados selecionados.

Todo o planejamento tem que ser hierarquizado, podendo o resolvedor explicar e demonstrar cada passo da resolução. Nesse plano, o importante é estabelecer o *como resolver* os caminhos para essa empreitada, tomando os cuidados necessários para sucesso na busca da solução.

Reformular um problema, com ligeiras ou amplas modificações, com metas secundárias, condicionantes não viáveis ou fixas podem fazer parte do planejamento como um caminho para determinar uma estrategia.

Nesse momento, é que o aluno resolvedor pode pensar no que utilizar como argumentação, buscando para isso os dados do enunciado que lhe são necessários.

Executar o plano, aqui essa etapa, consiste em aplicar o que foi determinado no planejamento, demonstrando cada passo executado de forma que seja capaz de comprovar cada uma de maneira convincente e correta. Toda execução deve ser realizada hierarquicamente, tendo a noção de onde está e, onde pretende se chegar, além de conseguir determinar todas as etapas e algoritmos para encontrar a resposta. Como no planejado é importante testar as etapas que foram executadas para que a reposta final seja encontrada e, essa, seja realmente a resposta correta.

Verificar o plano, terminada a execução cabe agora ao resolvedor examinar a solução obtida, se é adequada, se corresponde ao planejado e se determinou o que de fato era questionado, para isso observando tanto o resultado quanto o argumento utilizado, para assim se certificar da resposta e se todos os dados e condicionantes do enunciado foram usados.

Nesse ponto, ao encontrar a solução, o aluno pode pensar em outros caminhos e métodos para chegar na mesma solução, assim, conseguindo determinar qual é o mais viável para futuros problemas semelhantes a esse.

Também, pode se nessa fase, da resolução de um problema, explorar casos particulares ou geral, além de verificar se o que foi gerado na solução é algo novo ou já conhecido, a generalização de um problema pode contribuir e muito no desenvolvimento dos raciocínio logico e hipotético-dedutivo dos alunos [1] [2] [12].

Essa heurística pode ajudar na resolução de um problema, mas não garante que o resultado encontrado esteja correto, mas é através de empenho, motivação, interesse e dedicação que um aluno pode se tornar um excelente resolvedor de problemas e encontrar as respostas corretas.

Uma das principais finalidades do ensino de Matemática é desenvolver a capacidade de raciocínio para resolução de desafios e problemas tanto escolares quanto os da vida adulta.

A garantia de exito na solução, está na prática de se resolver muitos e vários problemas, aumentando gradativamente a dificuldade dos mesmos, para assim ter um raciocínio logico, dedutivo e indutivo bem desenvolvidos.

Dessa maneira, resolução de problemas, não trata se apenas de uma das razões para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica, mas sim da principal justificativa dessa disciplina e de seus benefícios, tanto para desenvolver o lado de cidadão crítico [13], como para que aspectos cognitivos [6] sejam aprimorados em solucionar problemas e, assim, a Matemática tenha vida e finalidade, não ficando apenas restita a mera memorização e aplicação de formulas decoradas.

5 Como a Resolução de Problemas e a Modelagem são recomendadas no Currículo Oficial de Matemática

O Currículo Oficial de Matemática do Estado de São Paulo, tem nas suas entre linhas algumas referências e orientações ao uso desses dois métodos de ensino nas aulas de Matemática, independentemente do assunto ou tema abordado, o que não se nota nesse documento, é um maior empenho em apoiar, orientar, motivar e incentivar o processo de ensino e aprendizagem tanto por resolução de problemas como por modelagem matemática, ficando restrito a apenas cita-los como metodologias úteis para o ensino e aprendizagem.

Nesse documento, que é um norteador para as ações pedagógicas, tanto para a Secretária Estadual de Educação, para a Escola como para os professores, define os meios legais, pedagógicos e necessários para que os alunos obtenham nas escolas publicas paulistas uma Educação de qualidade.

Nessa perspetiva, que o uso dessas duas estratégias de ensino e aprendizagem são válidas, além de ser um bom fomento para desenvolver uma educação matemática crítica [13]. Alimentar a capacidade de resolver problemas e compreender como um ente matemático é aplicado em uma determinada situação, são objetos previstos no Currículo Oficial, com ressalvas e justificativas, porém, não se têm uma orientação mais focada no como e quando tais objetos sejam oferecidos os discentes.

Observemos esse trecho do Currículo Oficial do Estado de São Paulo:

> Na apresentação dos conteúdos de Matemática, optou-se pela sua organização sistemática por bimestre, em cada um deles havendo um ou dois temas dominantes, que servem de mote para o desenvolvimento dos demais. Além do papel articulador, os temas escolhidos também têm sua relevância para ilustrar possibilidades metodológicas alternativas ao tratamento tradicional dos conteúdos, apresentar uma abordagem cria-

tiva e, sempre que possível, favorecer o uso de tecnologia, da modelagem matemática, de materiais concretos no tratamento do conteúdo do bimestre. [12] (p.52)

Verifica-se que a recomendação para o uso de Modelagem Matemática é no sentido de ser um caminho para desenvolver um determinado tema ou assunto e, não como um processo para aliar teoria e pratica [16], ou seja, a modelagem que pode ser um método para o aluno reconhecer um conteúdo matemático aplicado ou uma alternativa para compreender que ente está ocorrendo em determinada situação, é nesse documento oficial apenas uma alternativa, em relação ao ensino tradicional, para desenvolver um assunto.

Não é atribuído e, nem tão pouco explorado no Currículo as finalidades e recursos pedagógicos que a Modelagem Matemática oferece para trabalhar os conteúdos previstos. Assim, o uso de modelos matemáticos está como opção e não como um meio para a aprendizagem.

Em relação ao método de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos por Resolução de Problemas, o Currículo tem como uma das preocupações para melhoria da qualidade da educação ofertada nas escolas, a transformação do alunos (que ainda são crianças ou jovens) em cidadãos (quando forem adultos), com capacidade cognitiva suficiente para lidar com situações das mais diversas formas ou ocorrências, o que subentende que a escola deve preparar os alunos para lidar com problemas das várias ordens.

Assim, o ensino de resolução de problemas deveria ser mais evidenciado no documento que norteia as ações pedagógicas das Unidades Escolares, já que tal recurso oportuniza aos discentes desenvolver os aspectos intelectuais necessários para resolver problemas sejam eles matemáticos ou não [9], dado que, intervir de forma positiva na sociedade é uma das principais ações que um cidadão bem formado deve realizar e resolver problemas é de fato uma ação critica [13].

Infelizmente o Currículo, nas suas premissas, não tem como um dos objetivos levar o aluno a ser um aluno resolvedor de problemas [6], já que a grande finalidade da Educação Matemática escolar é que o aluno aprenda a resolver problemas não só de Matemática, mas de toda e qualquer grandeza.

O que se observa é que o Currículo Oficial de Matemática do Estado de São Paulo, preocupa-se em citar e enaltecer as várias formas e metodologias de ensino e aprendizagem, dentre elas a Resolução de Problemas e Modelagem Matemática, para que os conteúdos, habilidades e competências previstas nas suas entre linhas sejam alcançadas, porém, não há uma exploração mais clara de como e de qual maneira se pode utilizar esses métodos.

Percebe-se que, há registro no documento da importância, necessidade e justificativa do uso das metodologias já citadas, mas não um parecer de como podem ser realizadas.

É valido salientar que o Currículo é um documento que tem a finalidade de prever e orientar o que se deve focar no ensino e aprendizagem dos assuntos matemáticos selecionados, sendo subentendido que a forma e a maneira de que isso ocorra seja uma ação do professor.

Como apoio pedagógico e forma de subsidio ao Currículo, exite na Rede Estadual de Educação do Estado de São Paulo, uma extensão do Currículo, que são cadernos de atividades chamados de *São Paulo Faz Escola* com versões para Professores e para Alunos. Esse material é dividido por ano/serie e, separados por semestre em cada ano/serie, em que cada situação de aprendizagem trabalha um conteúdo e algumas habilidades previstos na grade curricular que se encontra no final do currículo [12].

Nessas situações de aprendizagem, algumas tem em seu enredo uma exploração da resolução de problemas ou aplicação matemática, onde pode se verificar a presença das duas metodologias de ensino e aprendizagem, ou seja, no currículo não há um registro mais formalizado dos métodos, porém, na extensão e no material utilizado para difundir os objetivos do documento, têm-se o uso das ferramentas tanto da Resolução de Problemas como da Modelagem Matemática.

Evidentemente, o sucesso da aplicação dessa situações de aprendizagem depende do como o professor irá desenvolvê-las, ou seja, o Currículo faz referências as metodologias, prevê os conteúdos matemáticos que devem ser ministrados os discentes, mas a maneira de realiza-los cabe aos professores, sendo de fato esse o principal agente transformador e difusor tanto do que o documento sugere como da própria Matemática.

De fato, há referências ao uso desses recursos pedagógicos no Currículo, com o intuito de facilitar e ajudar no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos previstos, não ocorrendo, com já evidenciamos, uma exploração mais sucinta de como tais metodologias podem aprimorar e contribuir na melhoria da qualidade do Ensino.

Nessa logica, que o presente trabalho se baseia, explorar através de uma sequencia didática, essas duas metodologias para ensinar e aprender um assunto matemático contextualizado que, apesar de não ser previsto na grade de conteúdos do Currículo, pode ser utilizado para motivar e incentivar a aprendizagem de Matemática.

6 Uma Introdução à Teoria dos Grafos

6.1 Introdução

Grafos são objetos matemáticos formado por vértices e arestas, em que V (vértices) é um conjunto finito arbitrário e A (arestas) é um conjunto das relações binárias entre os elementos de V, ou seja, G (grafos) é um par (V,A), em que $V \neq \phi$ e $V \in \aleph$, [4] [5].

Veja o exemplo que citamos a seguir:

Em uma excursão de formatura na cidade de Ubatuba, litoral norte paulista, a turma do Cláudio, aluno do terceiro ano do Ensino Médio, vez o seguinte passeio pelas Praias:

- Da praia do Tenório para Praia Grande;
- Da Praia Grande para praia da Toninhas;
- Da praia da Toninhas para praia do Tenório;
- Da praia do Tenório para praia do Prumirim;
- Da praia do Prumirim para praia do Félix e,
- Da praia do Félix para praia do Tenório.

Observamos que figuras desse capitulo são obras do próprio autor

O esboço desse passeio pode ser representado de acordo com a Figura 1, a seguir:

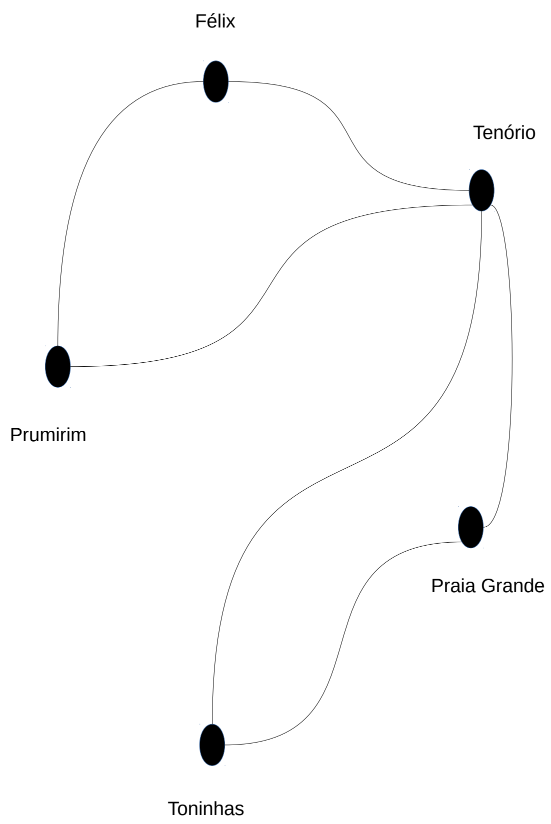


Figura 1: Passeio da turma do Cláudio

Pelo desenho (esboço), podemos definir as praias como vértices, e os trajetos de uma praia a outra como arestas. Assim, temos um grafo em que o conjunto V têm 5 elementos e o conjunto A têm 6 elementos.

Quando uma aresta está ligando dois vértices, dizemos que esses vértices são **adjacentes** e a aresta é **incidente**.

Chamando: Tenório de Te, Toninhas To, Praia Grande de Pg, Prumirim de Pu e Félix de Fe, o conjunto de vértices fica:

$$V = \{Te, To, Pg, Pu, Fe\}$$

As arestas, que são os trajetos de uma praia a outra são:

$$A = \{(Te; Pg); (Te; To); (Te; Pu); (Te; Fe); (Pg; To); (Pu; Fe)\}$$

Lembrando que, $(Te; Pg) = (Pg; Te)$, pois, a ordem dos vértices não gera uma nova aresta.

6.2 Grau de um vértice

Note-se que, no nosso grafo (passeio da turma do Cláudio), cada vértice tem um número de arestas que incide nele. Esse número, de arestas incidentes em cada vértice, é chamado de *grau do vértice*. Simbolizando de $d(v)$, temos:

$d(Te) = 4$ (esse vértice tem grau 4); $d(To) = 2$ (esse grau tem grau 2); $d(Pg) = 2$; $d(Fe) = 2$ e $d(Pu) = 2$.

O menor grau de um vértice, em um grafo G qualquer, é o grau **mínimo**, denotado por $\delta(G)$, e o maior é o grau **máximo**, denotado por $\Delta(G)$.

6.3 Conectividade

Agora observe o passeio pelas Praias de Ubatuba feito pela Turma do Felipe, veja:

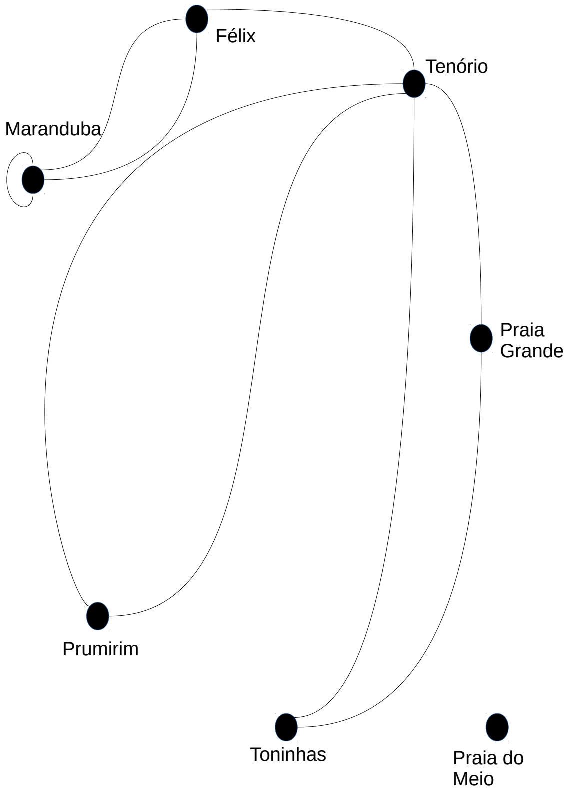


Figura 2: Passeio da turma do Felipe

O passeio feito pela turma do Felipe é um grafo conhecido por *Multigrafo*, pois têm arestas múltiplas e laços, veja:

Laço de um grafo G, é a aresta que sai de um vértice e chega no mesmo. Na figura 2, trata se da aresta $(Ma; Ma)$, em que Ma representa Maranduba.

Arestas Múltiplas de um grafo G, é quando existem duas ou mais arestas que incidem em dois vértices adjacentes. No multigrafo as arestas $(Ma; Fe)$ e $(Pu; Te)$ são arestas múltiplas.

Nota-se que no grafo da figura 2, o vértice Pm, Praia do Meio, não tem aresta incidente, ou seja, seu grau é zero $d(Pm) = 0$.

Isso significa que, o grafo que representa o passeio da turma do Felipe é um grafo *desconexo* (não têm arestas que ligam Pm a algum outro vértice).

Dessa maneira, definimos por grafo conexo, o grafo em que é possível sair de qualquer vértice e chegar em outro e, no caso da figura 2, não é possível chegar ou sair da Praia do Meio.

6.4 Tipos de Grafos

Aqui, definimos os seguintes tipos de Grafos: Completo, Complementar, Nulo, Regular, Árvore e Bipartidos.

Grafo Completo: É o grafo em que todo par de vértices é ligado por uma aresta. Um grafo completo com n (n um número natural) vértices é denotado por K_n. Conforme Figura 3:

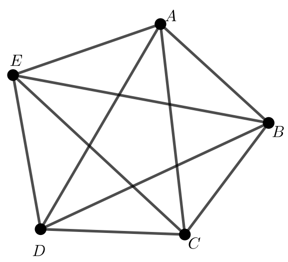


Figura 3: Grafo Completo

Grafo Complementar: Denominando de $\bar{G}$, é o grafo que contém as arestas restantes de um grafo completo. Na qual a reunião dos conjuntos de arestas de dois grafos, é o conjunto de arestas de um grafo completo, em que $V(G) = V(\bar{G})$ e A(G) $\cup$ A($\bar{G}$) são todas as arestas de G, veja:

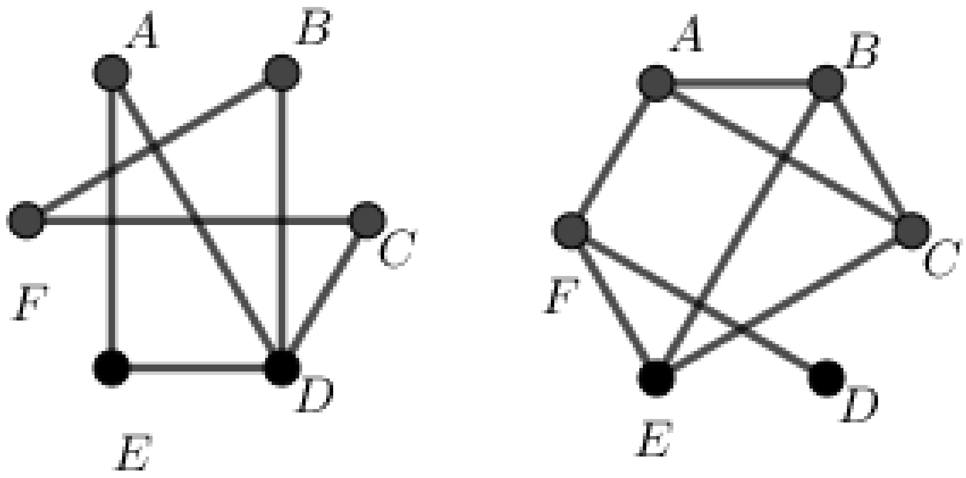


Figura 4: Grafo Complementar

Grafo Nulo: É um grafo em que o conjunto de arestas é vazio, ou seja, A(G)=∅, veja:

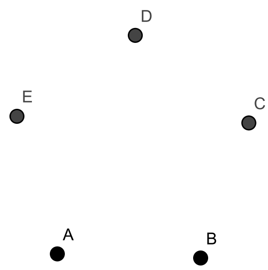


Figura 5: Grafo Nulo

Grafo Regular: É um grafo na qual todos os vértices têm o mesmo grau (k), chamado também de $k - regular$. Veja no grafo abaixo que todos os vértices tem grau 3:

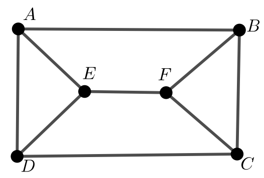


Figura 6: Grafo Regular de grau 3

Grafo de Árvore: É uma maneira simples de conectar vértices, em que cada vértice tem pelo menos uma aresta incidente e são grafos conexos, vejamos:

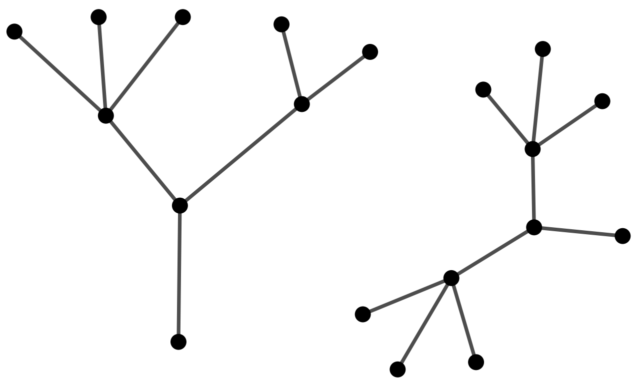


Figura 7: Grafos de Árvore

Grafo Bipartido: É o grafo com dois conjuntos disjuntos de vértices, em que cada aresta é incidente em vértices de conjuntos diferentes e, nunca uma aresta incide em vértices do mesmo conjunto, veja:

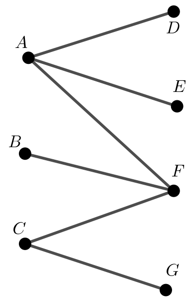


Figura 8: Grafo Bipartido

Grafo Bipartido Completo: É um grafo em que todos os vértices de um conjunto estão ligados a todos os vértices do outro conjunto. Veja:

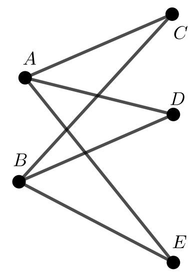


Figura 9: Grafo Bipartido Completo K(2,3)

Subgrafo: G' é subgrafo de G se V(G')⊂(G) e A(G')⊂(G).

Grafo induzido: O grafo G" é chamado de subgrafo induzido pelo subconjunto $\{a, b, c, d\}$ de $V(G)$, já que todas as arestas incidentes aos vértices de a, b, c, d em G estão em G". Na figura

10 temos um exemplo de subgrafo e subgrafo induzido:

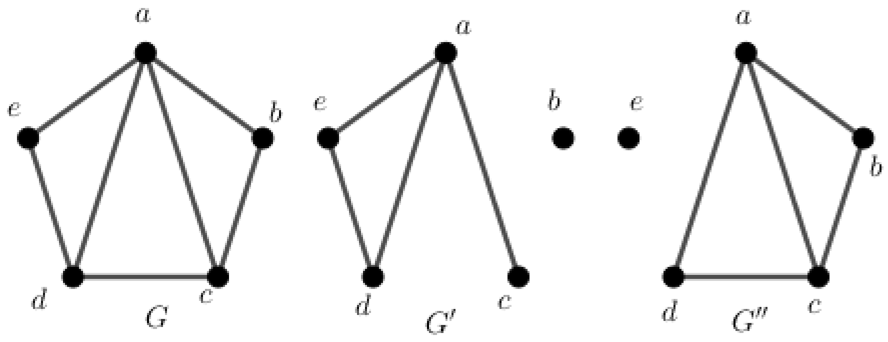


Figura 10: Grafo G, subgrafo G' e subgrafo induzido G"

Grafos Isomorfos: Dois ou mais grafos são isomorfos se tiverem o mesmo grau, mesmo número de arestas e se existir uma correspondência $1-a-1$ (biunívoca), entre seus conjuntos de vértices que preserve as adjacências, veja:

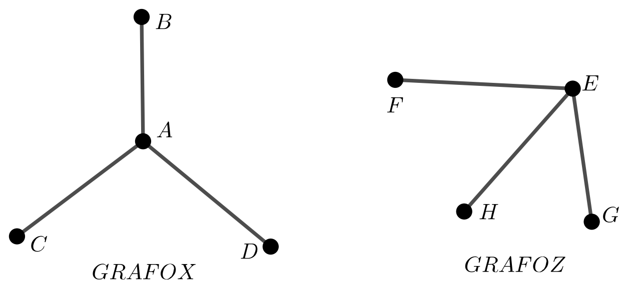


Figura 11: Os grafos X e Z são isomorfos

Observe que nos dois grafos (X e Z) da Figura 11, temos uma correspondência 1-a-1, entre os vértices dos dois conjuntos:

$A \longleftrightarrow$E, B$\longleftrightarrow$F, C$\longleftrightarrow$H, D$\longleftrightarrow$G

Dessa maneira, esses dois grafos são isomorfos. Além do que, as arestas também fazem uma correspondência $1-a-1$:

(A;B)$\longleftrightarrow$(E;F), (A;C)$\longleftrightarrow$(E;H), (A;D)$\longleftrightarrow$(E;G).

6.5 Passeios, Trajetos e Circuitos

Passeio: É uma sequência alternada de vértices e arestas, que começa e termina com vértices. Veja:

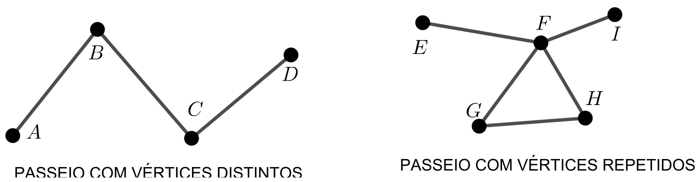


Figura 12: Passeios

Caminho ou **Caminho Simples**: É um passeio com vértices distintos.

Trilha ou Trajeto: É um passeio em que todas as arestas são distintas.

Circuito: É um trajeto em que o vértice inicial é igual ao vértice final.

Veja:

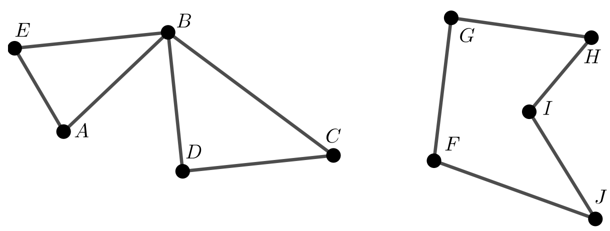


Figura 13: Circuitos

Ciclo: É um circuito em que todos os vértices são distintos, exceto o primeiro e o último serem o mesmo. Chamamos de acíclico os que não possuem ciclos.

6.6 Algumas propriedades

Observemos o grafo a seguir:

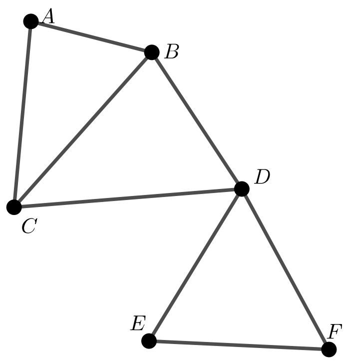


Figura 14: Grafo G

Nesse grafo G temos $A(G) = 8$, temos oito arestas.

Vejamos o grau de cada vértice:

$$d(A) = 2, d(B) = 3, d(C) = 3, d(D) = 4, d(E) = 2, d(F) = 2$$

Somando o grau de todos os vértices, temos:

$$d(A) + d(B) + d(C) + d(D) + d(E) + d(F) = 2 + 3 + 3 + 4 + 2 + 2 = 16$$

.

Nota-se que, a soma dos graus dos vértices de um Grafo é sempre o dobro do número de arestas, isto é:

$2 \cdot A(\mathrm{G}) \Rightarrow 2 \cdot 8 = 16.$

Isso nos leva ao seguinte enunciado:

Teorema:

Para todo grafo G:

A soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas.

Demonstração:

É fácil perceber esse teorema, basta para isso observar que cada aresta é incidente há dois vértices, dessa maneira, ela é contada duas vezes no momento que se soma os graus dos vértices, por isso essa soma é o dobro do número de arestas de um grafo.

Corolário:

Em todo Grafo G, existe um número par de vértices de grau ímpar.

Demonstração:

Se num grafo G qualquer, tiver um vértice de grau ímpar, isto é, ele tiver um número ímpar arestas, necessariamente deverá haver outro vértice com quantidade ímpar de arestas, para que a soma dos graus dos vértices seja um número par, como já provado no teorema acima. Podemos partir de um grafo com todos os vértices de grau par, já que esse grafo especifico, terá um número par de vértices de grau ímpar, que no caso temos zero vértices.

Assim, nesse e em qualquer outro grafo a quantidade de vértices de grau ímpar existirá em quantidade par. Para uma verificação sobre esse fato observe a figura 2 e a Figura 15.

6.7 Menor Caminho

Chama se de grafo valorado um grafo em que as arestas tem valores (pesos, distâncias e outros), é um esboço das opções de trajetos que Cláudio têm para ir da casa da sua mãe, até a casa da sua avó. Na Figura 15, representamos os possíveis caminhos com as distâncias em unidades de medida, da casa da Mãe até a casa da Avó.

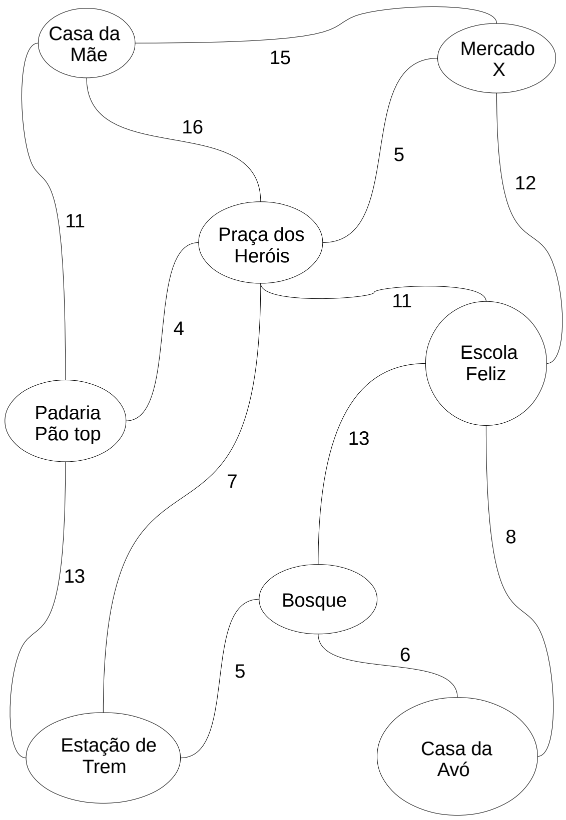


Figura 15: Esboço das opções de caminhos para ir da casa da Mâe até a casa da Avó

Pergunta-se: *Qual é o menor caminho para Cláudio ir da casa da sua Mãe até a casa da sua Avó?*.

Para resolver esse problema e, outros do mesmo estilo, utilizamos o método proposto por *Edsger Wybe Dijkstra* [5], que é uma solução simples e possível de ser executada manualmente, já que nosso grafo é pequeno. Essa maneira não é a única de se encontrar o menor caminho, porém, em grafos menores, como no nosso exemplo e em outros semelhantes, ele se mostra eficiente.

Em outros casos são necessários recursos de computação e informática, devido a grandeza e quantidade de informações que alguns grafos podem ter. A solução é encontrada com o seguinte objetivo: *Sempre encontrar o menor caminho entre dois vértices*, evidentemente testando todas as possibilidades.

Comecemos com a seguinte pergunta: *Qual o ponto mais proxímo da casa da Mãe?.*

Olhando o esboço percebe-se que é a Padaria Pão Top, que está a uma distância de 11 unidades de medida. Agora a partir desse ponto, Padaria Pão Top, fazemos a mesma pergunta: Qual o ponto mais próximo da Padaria?.

Pelo esboço verificamos que é a Praça dos Heróis e, que até aqui a menor distância foi de 15 unidades.

Veja, o grafo abaixo com o acumulado das distâncias:

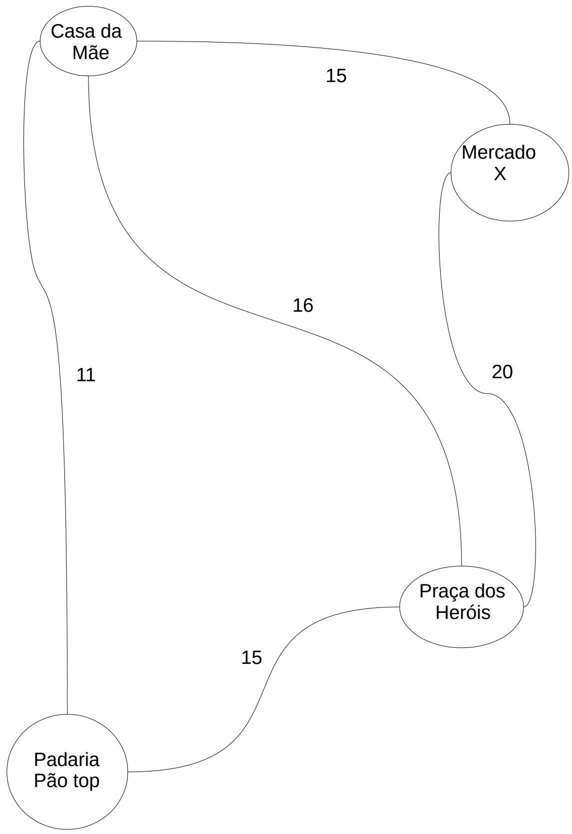


Figura 16: Distância acumulada da Mãe até a Praça do Heróis

Assim, a menor distância entre a casa da Mãe e a Praça dos Heróis é 15.

Agora, vemos pela figura 15, que o ponto mais próximo é a Estação de Trem, podemos ver pela figura abaixo, o acumulado pela Estação de Trem e pela Escola Feliz, veja:

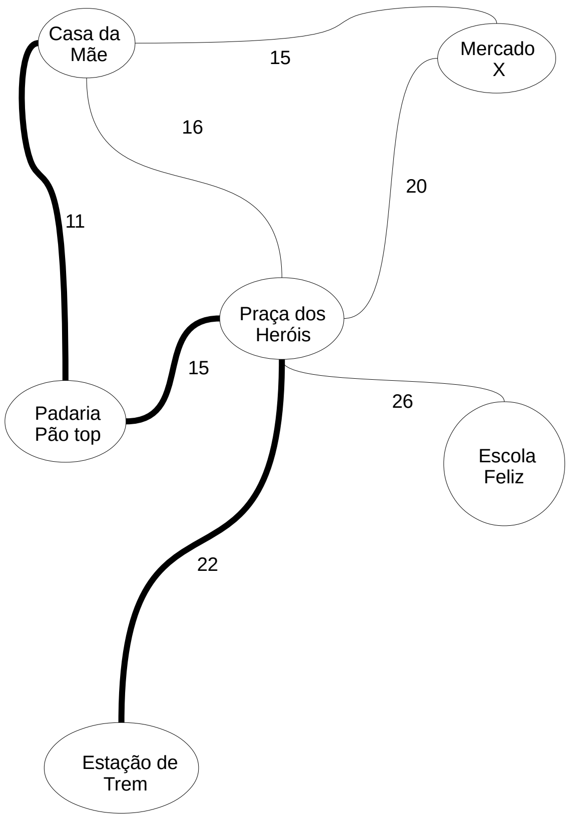


Figura 17: Observe que o menor caminho até agora está em negrito

Nesse ponto, percebe se que para chegar no Bosque, o menor caminho é pela Estação de Trem onde são 27 unidades, já pela Escola Feliz até a casa da Avó são 34, conforme a figura abaixo, entretanto, do Bosque até a casa da Avó o acumulado é de 33 unidades, dessa maneira, o menor caminho do nosso problema é o passeio em negrito, veja:

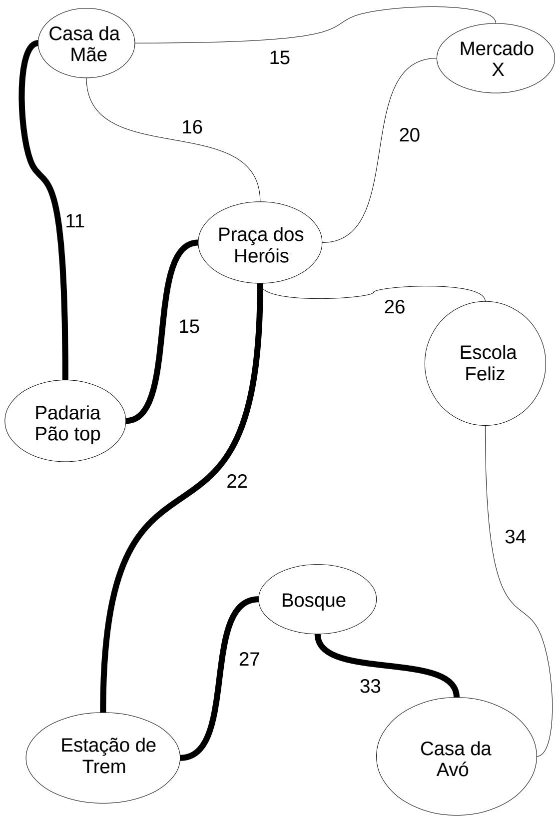


Figura 18: O menor caminho é a sequência em negrito em que o acumulado, no esboço, é de 33 unidades

Encontramos a solução sempre procurando a menor distância entre vértices (ou pontos), adjacentes (o interessante é sempre ir colocando nas arestas o valor acumulado por cada uma das opções, para assim ter condições de avaliar qual o menor), já que sempre o acumulado é a soma das distâncias entre vértices (pontos) e, no final essa soma desejada, será o menor caminho.

No nosso exemplo só colocamos os valores acumulados do caminho que realmente é a menor distância, o interessante é ir colocando os valores em todas opções para assim poder comparar e encontrar o menor caminho.

6.8 Caminhos e Ciclos Eulerianos

Antes de iniciar essa seção, vamos fazer um relato de como começou os estudos sobre grafos.

6.9 Breve relato histórico sobre a origem da teoria dos Grafos

Em meados do século XVIII (mais ou menos em 1736), surgiu a Teoria dos Grafos através da solução de um problema real e conhecido como: *O Problema das Pontes de Königsberg (hoje Kaliningrado).*

A pergunta que intrigava os moradores era: *É possivel realizar um passeio pelas ilhas, passando uma única vez em todas as sete pontes, voltando ao ponto de origem?.*[10]

Veja um esboço da época com destaque para as sete pontes .

Figura 19: Imagem das Pontes em 1736, do site mat.uc.pt

O matemático suíço, Leonhard Euler, propôs uma solução para esse problema e consequentemente criou uma teoria para aplica-lá em problemas desse tipo.

Euler concluiu que nesses problemas, as distâncias envolvidas são irrelevantes. O que importa é como as várias glebas de terra estão interligadas entre si [7].

Dessa maneira, ele fez uma resolução geométrica, onde cada porção de terra recebeu um nome. Norte (N), Sul (S), Ilha central (A) e Leste (L), conforme as figuras abaixo, ficando cada ponte representada por uma aresta e as porções de terra por vértices (ou pontos), conforme a figura 21:

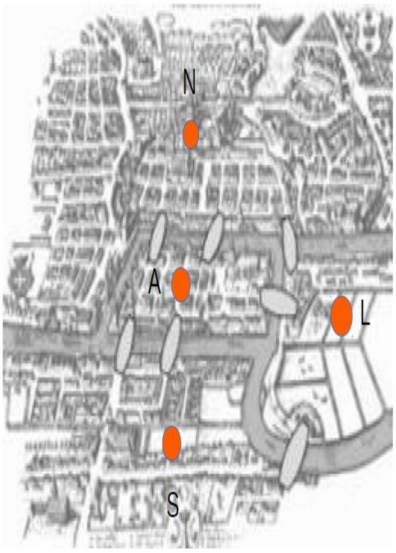


Figura 20: Esboço da pontes com vértices que representam cada gleba.

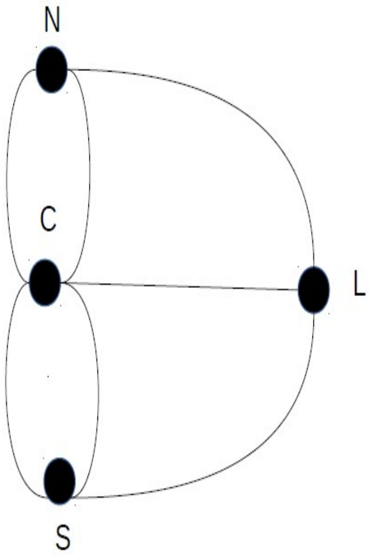


Figura 21: Esboço proposto por Euler para o problema das pontes.

Observemos que, tomando qualquer gleba de terra como ponto de partida, fica impossível a essa mesma gleba retornar, passando apenas uma vez em cada ponte. Tal situação intrigou Euler que, com base nas características desses objetos matemáticos, criou a um teorema para solucionar esse problema, e que hoje em dia, a Teoria criada à partir daquela época, têm aplicações nos problemas contemporâneos [7] [10]. Agora, vamos conhecer esse Teorema.

6.10 Grafos Eulerianos

Aqui, o estudo dos teoremas propostos tem como pressuposto ser um recurso matemático para resolver problemas semelhantes, em que a quantidade de vértices e arestas são enormes e que pela forma manual se torna impossível e, mesmo com os recursos computacionais o tempo gasto seria gigantesco.

Tornando assim, muitas vezes um problema com solução, porém, difícil de determina-lá. Imagine um grafo, do mesmo tipo, com 20 arestas e, encontrar qual o melhor passeio por todas elas, passando uma vez só em cada uma? No exemplo, interessante é saber primeiro, se é possível realizar o passeio, depois otimiza-lô.

Um grafo G com m arestas chama-se **euleriano**, se existe uma trilha fechada (que passe por todas as arestas) em G, isto é, podemos percorrer cada aresta uma só vez, partindo de um vértice e a ele retornando.

Se o grafo não é euleriano, mas tem uma trilha aberta (que também passe por todas as arestas), ou seja, é possível partir de um vértice passar uma e, só uma vez, em cada aresta e chegar a outro vértice, diferente do original, então, ele se chama grafo **semieuleriano**.

Observe os grafos abaixo:

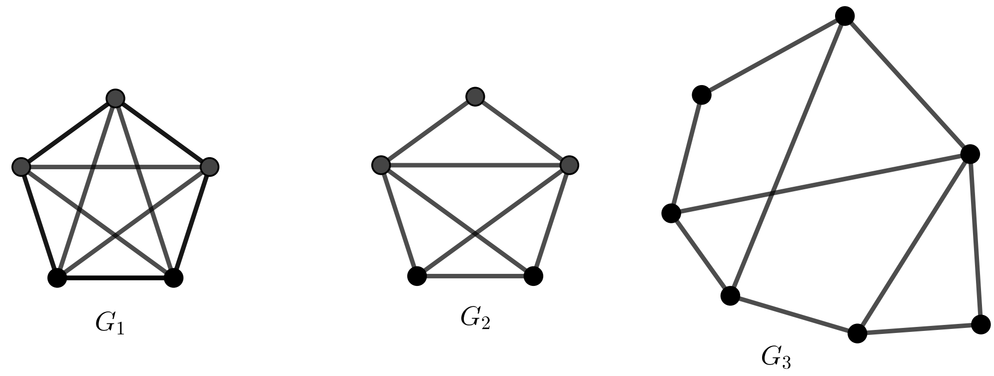


Figura 22: Grafo Euleriano, Semieuleriano e Simples.

O grafo G_1 é possível partir de qualquer vértice e à ele retornar passando por todas as arestas uma vez só (faça o trajeto com um lápis sobre esse).

No grafo G_2 é possível sair de um vértice especifico e a outro, também especifico, chegar (ou vice-versa), passando uma vez só em cada aresta (faça esse caminho sobre o grafo e descubra esses vértices).

No grafo G_3 não é possível realizar nem um tipo de passeio que passe por todas as arestas uma vez só em cada uma, também faça o teste.

Lema 1. *Se todo vértice de um grafo (não necessariamente simples) G, tem grau maior ou igual a 2, então, G contém um ciclo.*

Demonstração:

Observe que, se o grafo tiver laço ou aresta múltipla, temos um ciclo. No caso de grafo simples, a trilha inicia de um vértice (v_0), ao chegarmos no v_1 é porque ele já foi visitado ou está sendo visitado pela primeira vez e, nesse caso, podemos continuar até produzir um ciclo, passando por $V_2 \neq V_1$ já que todos os vértices tem grau maior ou igual a dois, e assim, continuar até retornar ao vértice inicial. Retorne na Figura 7 e note que não se tem um ciclo naquele tipo de grafo já que existem vértice com grau menor que 2. Sendo o número de vértices finito e maior ou igual a 2, todos os vértices podem ser percorridos de forma distinta, então, prova se o lema.

Use o grafo G_3 da figura 22 e verifique o lema, veja que é possível determinar um ciclo naquele grafo e o mesmo não ocorre, por exemplo, em alguns grafos que já foram citados.

Teorema de Euler 1. *Um grafo conexo (não necessariamente simples) G é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices têm grau par.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Tomemos um grafo G que tenha uma trilha fechada (um ciclo), que passe por todos os vértices, onde assim seu comprimento é de m (m arestas), nessa perspectiva, toda vez que passa por um vértice utiliza-se duas arestas, uma que chega e outra que sai do vértice, logo o grau de todos os vértices deve ser, obrigatoriamente, par.

($\Leftarrow$) Por indução, sobre o número m de arestas do grafo G.

No caso nulo (m = 0), o teorema é válido, tomando zero como par.

Suponha que, o teorema seja válido para todos os grafos com menos do que m arestas. Sendo G conexo, todos os vértices tem grau maior do que ou igual a dois, pois, são pares. Pelo lema anterior, G contém um ciclo (trilha fechada), escolhemos uma trilha T com comprimento máximo, assim, se T tem comprimento m está provado, já que m é o total de arestas.

Caso aconteça de sobrar o grafo H do (subgrafo de G), ao retirar as arestas da trilha T, vemos que o número de arestas retiradas de cada vértice em T foi par e, todos os vértices do grafo tem grau par (hipótese), pelo menos uma das componentes de H tem um vértice em comum com T e tem todos os vértices com grau par.

Pela indução, H tem uma trilha fechada que passa por todos os vértices de H e, podemos formar uma trilha fechada maior unindo T com a trilha em H, contrariando a maximalidade na escolha de T, logo, nesse grafo G de m arestas, a trilha fechada (ciclo) T, tem o máximo de arestas m quando todos os vértices tem grau par.

Corolário: *Um grafo conexo (não necessariamente simples) G é semieuleriano se, e somente se, no máximo, dois vértices têm grau ímpar.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Sabemos que em um grafo qualquer, exitem sempre uma quantidade par de vértices de grau ímpar, sendo o grafo G conexo pelo lema, todos os vértices tem grau maior que 2, dessa maneira, um caminho (trilha aberta) em G poderá ter no máximo dois vértices com grau ímpar, sendo esses o vértice inicial e, o outro, o final dessa trilha que passa uma só vez em cada aresta.

($\Leftarrow$) Sabemos que num grafo em que todos os vértices tem grau par, é possível realizar um ciclo, se adicionarmos dois novos vértices de grau ímpar a esse grafo é possível termos um caminho, que comece em um dos dois novos vértices e termine no outro, já que ambos tem quantidade ímpar de arestas, porém, se adicionarmos mais um, ou qualquer outra quantidade de vértices de grau ímpar nesse grafo, ele não terá uma trilha aberta, dado que, sempre ficará, no minimo, uma aresta pra percorrer, logo, o grafo G para ter um caminho (trilha aberta) que passe uma vez só em cada aresta poderá ter no máximo dois vértices de grau ímpar (sendo ambos um inicial e outro final).

Assim, retornando a figura 21, que é um esboço em forma de grafo do problema das pontes de Köennisberg e, com o Teorema de Euler e seu Corolário, podemos perceber que não há solução positiva, pois, todos os vértices tem grau ímpar, o que não possibilita nem um ciclo e nem um caminho que passe uma vez só por todas as arestas.

6.11 Grafos e Ciclos Hamiltonianos

Trata-se de um problema similar aos grafos eulerianos, que é procurar uma trilha fechada em G, que passe por todos os vértices *uma e só uma vez* em cada vértice. Em que uma trilha, assim, teria que ser um ciclo (deste que não seja um grafo nulo com um vértice).

A esse tipo ciclo denominamos por **Ciclo Hamiltoniano.** O nome é em homenagem a Sir Willian R. Hamilton, que estudou e divulgou o problema [7] [5].

As definições de grafo hamiltoniano e grafo semi-hamiltoniano, seguem as mesmas diretrizes dos grafos eulerianos. Entretanto, as semelhanças param por aqui.

O problema de descobrir se um grafo é ou não hamiltoniano é um dos mais estudados da Teoria dos Grafos, por sua aplicabilidade em comunicação, planejamento, transporte e outros.

Até hoje, nenhuma *condição necessária e suficiente*, de forma elegante, para provar que um grafo seja hamiltoniano foi encontrada, sendo que todos os teoremas que se encontram, estão muito longe de oferecer uma previsão razoável de solução.

Observe a figura abaixo os grafos G' e G'':

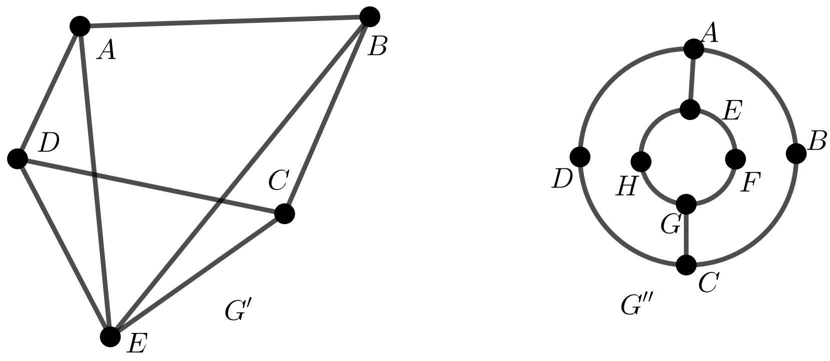


Figura 23: Grafo Hamiltoniano (G') e Semi-hamiltoniano (G")

O grafo G' é hamiltoniano, pois é possível realizar um ciclo, por exemplo, a sequência de vértices: $AEBCDA$ e, o grafo G'' é semi-hamiltoniano, pois é possível realizar um caminho, por exemplo, a sequência de vértices: $BADCGHEF$.

Como definido, podemos perceber que em grafos pequenos manualmente é possível encontrar uma sequência de arestas, evidentemente, não sendo a única, já que dependendo da quantidade de vértices teremos um número grande de possibilidades.

O que pode piorar, por exemplo, é determinar o melhor caminho quando além de ter arestas valoradas a quantidade de vértices for grande (um grafo de 15 vértices teremos 15! possibilidades de ciclos ou caminhos diferentes).

6.12 O Problema Chinês do Carteiro

Esse problema trata se de uma aplicação dos conceitos de grafos eulerianos, em que as arestas são valoradas, em que temos uma função: f:A$\longrightarrow \Re^+$ e, como no algoritmo de Dijakstra se procura uma solução otimizada [5].

Este tipo de problema, consiste em minimizar o esforço do carteiro que percorre as ruas de uma cidade. Se o grafo que representa a cidade for um grafo euleriano, não há problema, mas se não for, temos que torná-lo um.

Para isso, como em todo grafo a quantidade de vértices de grau impar ocorre em quantidades pares, basta liga-los por uma aresta ficando assim ambos com grau par. Evidentemente, que a ideia não é construir uma nova rua e, sim, percorrer ruas repetidas de forma econômica.

Existem problemas desse tipo complexos, porém, têm-se algoritmos que produzem resultados com boa eficiência. Tais problemas são estudados e pesquisados devido à economia que as soluções podem gerar.

Observe a grafo G abaixo, que tem suas arestas valoradas, onde deseja-se sair e retornar ao vértice A:

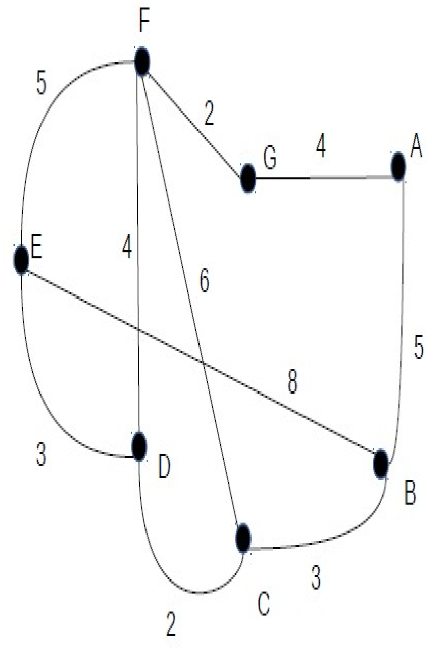


Figura 24: Grafo G valorado

Observe que, não é possível realizar o ciclo, dado que G não é um grafo euleriano, para isso vamos torna-lô um.

Os vértices B, C, D, E são todos vértices de grau ímpar (grau 3), como a busca para solucionar é *eulerizar* o grafo, uma das soluções, é acrescentar novas arestas e, assim, nesse grafo, podemos inserir uma aresta entre os vértices D e E e outra entre B e C, conforme a figura abaixo, onde arestas adicionais são tracejadas (veja que, outras soluções também são possíveis e que optamos por esta):

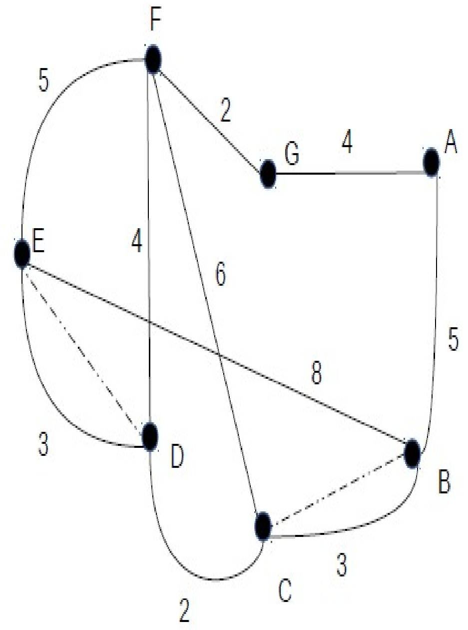


Figura 25: Grafo G com as arestas adicionadas tornando-o um grafo euleriano

Com as novas arestas o grafo G torna-se um grafo euleriano, possibilitando sair e retornar ao vértice A, o que fica claro é que a correção sugerida mostra que as arestas DE e BC deverão ser percorridas duas vezes de forma a completar o ciclo, obtendo um ciclo otimizado.

Tanto o problema como a busca por soluções, é um dos campos de estudo da Teoria dos Grafos, dada a otimização que o resultado desses processos podem oferecer.

6.13 Problema do Caixeiro Viajante

O famoso PCV (Problema do Carteiro Viajante), é um dos tipos de problemas mais estudados em pesquisa operacional, dado que até o momento, não há um algoritmo computacional eficiente para soluciona-lô.

Seu enunciado é simples, basta termos um grafo completo valorado G e, desejarmos determinar o valor do menor caminho hamiltoniano de G.

A dificuldade desses problemas é que eles sempre trabalham com grafos com mais de 60 vértices, tratando-se de um K_{60} em que a solução seria examinar as 60! permutações existentes, o que não é possível, pois, levaria milênios mesmo com uso de recursos computacionais.

Na tentativa de encontrar alguma solução para esses problemas (como no caso de grafos eulerianos), há alguns algoritmos heurísticos, mas nada de que seja elegante em termos de solução, dado que, trata-se de um problema de categoria especial, para maiores informações vide [5], [4] e [7].

7 Sequência Didática

Atualmente o desafio da Educação Escolar é oferecer ao seu público uma aprendizagem significativa, que tenha qualidade e que cada conhecimento tenha uma necessidade de ser apreendido tanto para o cotidiano escolar como para a vivência do dia-dia. Nesse sentido, é que a forma, método e estrategia utilizada pelo professor, determinará o sucesso ou fracasso do ensino e aprendizagem de um conteúdo.

Esse evento, requer um aprofundamento em alguns quesitos, como forma que o professor percebe a forma como seu aluno enxerga o assunto, como esse entende tanto no lúdico como no abstrato um determinado tema, meios de transmissão de conhecimento significativo, entre outros, que devem ser considerados para desenvolver um ensino e uma aprendizagem de qualidade [13] [14] [8].

Determinar e trabalhar os quesitos citados, é sem dúvida o desafio atual dos professores, para que uma aula se torne interessante e motivadora ao ponto do assunto desenvolvido, seja adquirido e se torne algo que o aluno domine, é nesse aspecto que o caminho, ou seja, a sequência didática adotada, é o fator determinante.

Toma se como sequência didática o caminho que um professor planeja para ministrar um assunto, desenvolvendo os objetivos e tendo como produto final um resultado, que no caso do ensino e aprendizagem em Matemática é que o aluno adquira e internalize um novo saber.

Um ensino não para a memorização, mas que desenvolva o raciocínio, um ensino para compreensão, que tenha capacidade de realizar as diversas tarefas e desafios que o mundo oferece e exige [15].

No processo de aprendizado, é necessário executar um plano formado por etapas ligadas entre si, no intuito de oferecer espaço e momento em que um assunto seja ensinado pelo professor e apreendido pelo aluno [8].

Esse processo, é que determina a qualidade do ensino, que no caso é desenvolver o raciocínio para a compreensão, onde o aluno no seu percusso natural da Educação Básica adquira as habilidades, competências e conteúdos para a vida adulta e para o mercado de trabalho [1].

Através desse esforço todo, é que consegue vencer o fracasso escolar e, gerar uma aprendizagem significativa, elevando a capacidade dos alunos para a resolver problemas e transformando-o em um cidadão capaz de decidir [13], considerando os fatores e as consequências.

Definido os motivos, de ter uma estrategia para o ensino e aprendizagem de um assunto, que no caso é: Qualidade no processo de ensino, aprendizagem significativa e um ensino voltado para a compreensão, fica evidente, agora, definir como desenvolver um ambiente que favoreça os motivos citados.

O resultado de um processo de ensino, dependerá de fatores, tanto internos quanto externos à escola, mas alguns são indispensáveis como ritmo de aprendizagem e conhecimento prévios dos alunos, método para desenvolver um assunto e seu aprofundamento, tempo e espaço oferecidos pela unidade escolar e contextualização do assunto abordado [3] [8][13].

Reconhecer os ritmos de aprendizagem e interesses dos alunos, ajuda o docente a ajustar e flexibilizar o processo de ensino, abrindo a aula para uma perspectiva construtivista, onde o desempenho intelectual de todos possam ser aprimorados [8].

Verificar o que o aluno sabe para a partir desse ponto, iniciar, já que hoje vivemos em um mundo onde a informação é de fácil acesso e, verificar o que os discentes sabem previamente sobre o que será ministrado, não é só empondera-los, mas ter condições para verificar se o que eles sabem é suficiente para iniciar ou se deve aprofundar mais, dado que, muitas informações nos dias atuais nem sempre são verdadeiras.

Lembrando que, a aprendizagem nessa visão tem interesse em todos os aspectos social, físico e afetivo do educando, despertando o interesse do aluno para superação dos problemas escolares e posteriormente os do cotidiano.

O método utilizado pelo professor é o que determina tanto a motivação quanto o interesse para apreender o assunto. Existem, muitas críticas ao chamado método tradicional de ensino [8] [13], o que de fato é justificável dado que os alunos atualmente vivem em um ritmo totalmente diferente do que antigamente [12].

Assim, desenvolver o conhecimento como fruto de uma progressão sucessiva de etapas que caminham para uma objetivação dos conceitos, abandonar o ensino tradicional para atingir a singularidade do educando, criar um ambiente de cooperação para melhorar as condições de ensino e aprendizagem são pontos que o método adotado deve ter para que o conhecimento em construção possa despertar no aluno a capacidade de questionar, decidir, optar e defender seu ponto de vista e capacitar sua criatividade [8], tendo em mente que o aluno é um ser humano em desenvolvimento e oferecer método que trabalhe esses aspectos melhora o processo de aprendizagem.

Oferecer uma educação de qualidade, é de fato poder aproveitar melhor o tempo, espaço e os recursos com mínimo de desperdício, já que, Educação Básica, além das bases filosóficas e políticas [8], os recursos que a Unidade Escolar oferece, devem ser considerados no planejamento e na execução de uma sequência, que vise desenvolver um assunto.

Em outras palavras, numa sequência didática, o que a escola oferece é indispensável para atingir os objetivos propostos. Resultados positivos não são frutos de somente usar os recursos tecnológicos e sim de como tal processo se efetua, dado que, se pode manter um ensino tradicional utilizando tecnologia [3] [14].

O uso dos espaços e do tempo de forma coerente e coesa de acordo com o público, currículo e recursos, é algo que deve ser modelado pelo professor, em busca de atingir a qualidade do ensino e aprendizagem.

No caso da contextualização, não menos importante, ela é o ponto de transformação do ensino e da aprendizagem em algo significativo, onde o aluno tem a possibilidade de enxergar o conhecimento em ação, tendo a chance de experimentar o assunto que aprendeu ou que irá aprender, compreendendo e pensando as transformações tecnológicas ou fenômenos decorrentes do assunto tratado [15].

Um ensino contextualizado, facilita todo o processo de aprendizagem dos alunos, já que sua aplicação, de forma clara e objetiva, evidência a importância e necessidade em adquirir aquele conhecimento para si [12] [15].

Uma sequência didática bem elaborada e executada, com os pontos analisados, oferece a possibilidade de elevar a qualidade da aula, transformando o ambiente da sala de aula em um local de efetiva aprendizagem.

Um cidadão e uma sociedade, consciente de seus deveres e direitos [13], se modifica para o ideal através de um projeto de ensino e aprendizagem voltada para situações bem elaboradas que gerem nos alunos um acumulo de saberes significativos que constroem ideias, sentimentos e valores.

A manifestação de uma educação de qualidade, se efetiva com a execução de uma estrategia que possibilite a transformação social, intelectual, afetiva e física dos alunos, ou seja, é através do método de ensino adotado pelo docente, a sequencia didática bem planejada e executada, pode contribuir positivamente para o aprendizado dos seus alunos e na construção social do mesmo.

7.1 Uma Sequência Didática de Introdução à Teoria dos Grafos

As atividades cotidianas que envolvem tecnologia, tem uma matemática discreta presente em seu funcionamento em que, entender e compreender como ocorrem é de fato algo necessário para o desenvolvimento pleno e critico dos alunos.

São vários os conteúdos que podem ser trabalhados nessa perspectiva, no caso de assuntos relacionados a problemas de contagem e combinação, observamos o que prevê as Orientações Curriculares do Ensino Médio [1]:

> Desse processo decorre um desenvolvimento significativo da área de combinatória, que é a Matemática dos conjuntos finitos. No Ensino Médio, o termo combinatória está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus

> aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Könisberg, tratado por Euler, dado um conjunto de sete ilhas interligadas por pontes, a pergunta que se coloca é: Partindo-se de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando-se cada uma das pontes uma única vez? Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema, identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um número par de pontes). Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo em uma cidade.[1],p 94.

A proposta de uma sequência didática, tendo como justificativa o que está previsto em documentos oficiais que regem a Educação Básica, tem como objetivo desenvolver nos alunos a capacidade de resolver alguns problemas através de informações e conhecimentos presentes na Teoria dos Grafos e, para tal situação, as atividades propostas tem a finalidade de encaminha-los a desenvolver um raciocínio direcionado de acordo com o que os problemas sugerem.

Serão disponibilizados duas aulas de 1hora e 40 minutos cada para a realização de todas as atividades aqui propostas.

A atividade inicial, é de realizar uma contagem de opções de caminhos para ir de um ponto a outro, no esboço do mapa que será objeto de estudo dessa atividade, tal problema inicial tem finalidade de ligar o assunto principal, Caminhos Eulerianos, com a grade de conteúdos previstos, conforme o Currículo Oficial do Estado de São Paulo, para o terceiro bimestre do segundo ano do Ensino Médio, que no caso é contagem.

E principalmente, iniciar um assunto através de um problema, que possibilitará uma serie de atividades que são fontes para que os alunos, por intermédio do professor, possam encontrar as respostas dos problemas.

Um trabalho pedagógico nesse sentido pode ajudar os discentes a desenvolverem seus processos cognitivos, além do que, termos aqui uma oportunidade para abordar esse assunto.

Toda nossa sequência surge de um esboço das cidades e principais rodovias da região administrativa de São João da Boa Vista, no estado de São Paulo. Vejamos:

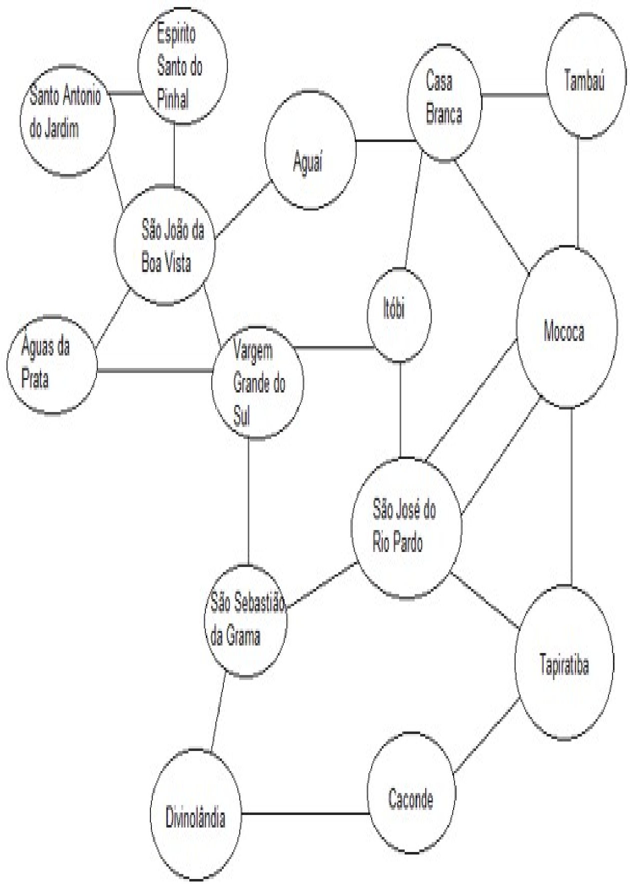


Figura 26: Esboço do Mapa das atividades

Figura 27: Mapa da Regional de Ensino de São João da Boa Vista, consultado pelo link: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons

A atividade inicial, como já citado, tem a finalidade de verificar os procedimentos dos alunos em encontrar um caminho viável de Santo Antônio do Jardim para Tapiratiba, passando por Vargem Grande do Sul. O intuito é que seja evidenciado como o aluno realiza essa contagem de acordo com o que ele entende por caminho viável.

A partir dessa atividade, surgirá os problemas que contextualizam as ideias sobre Teoria dos Grafos, aqui tratados. O primeiro a ser desenvolvido é a procura pelo menor caminho e, para tanto, o mesmo esboço é oferecido, porém, com as distâncias entre cidades inseridas (vale lembrar que tais distâncias são aproximadas, para facilitar o raciocínio).

O desafio é que os discentes sejam capazes de aplicar seus processos cognitivos na busca de um detalhamento de como encontrar o menor caminho no passeio sugerido, conforme as informações do esboço abaixo:

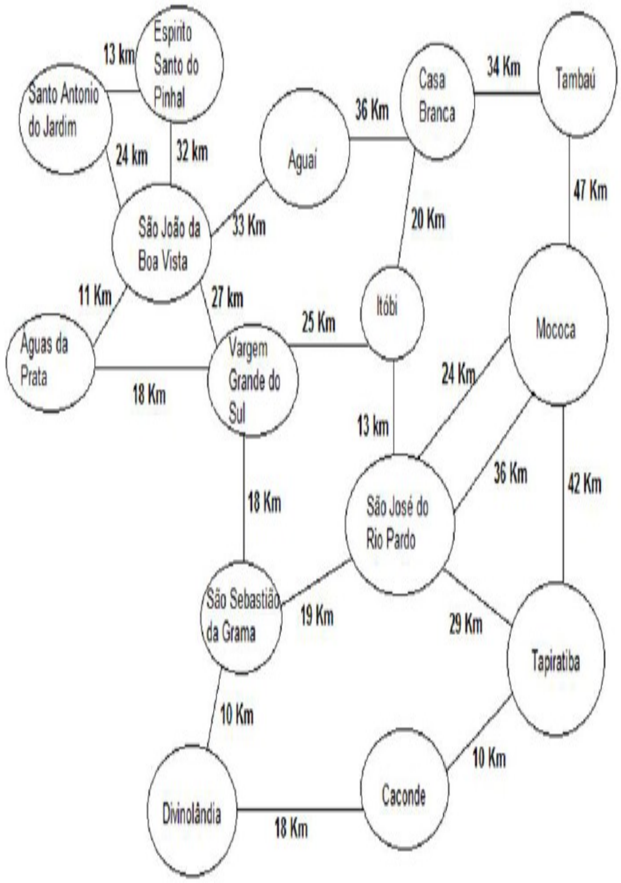


Figura 28: Esboço do Mapa com distância

Essa atividade, visa ter subsídios para inserir um assunto que envolve a Teoria dos Grafos, que no caso é o cálculo do menor caminho, mostrando que para esse tipo de problema não existe um algoritmo extremamente eficiente para encontrar o resultado (principalmente se ele for feito à mão) e, que em casos pequenos, o uso de uma heurística pessoal pode ser útil.

Posteriormente, na segunda parte da sequência, o método de Dijkstra, descrito no trabalho, será apresentado, o que fica dessa atividade é verificar como os discentes resolvem um problema dessa grandeza.

O desafio II, tem por iniciativa ser uma maneira de começar de forma lúdica e contextualizada o tema Caminhos Eulerianos. Pergunta se ao aluno, se existe a possibilidade de passar por todas as rodovias apenas uma vez, saindo e retornando à São João da Boa Vista.

Fica claro que haverá dificuldade do aluno em decidir, dado que se tem muitas rodovias e para tal, o mesmo é convidado a resolver problemas menores e mais simples, para tentar determinar algo que o ajude no problema inicial.

Observe os mapas propostos:

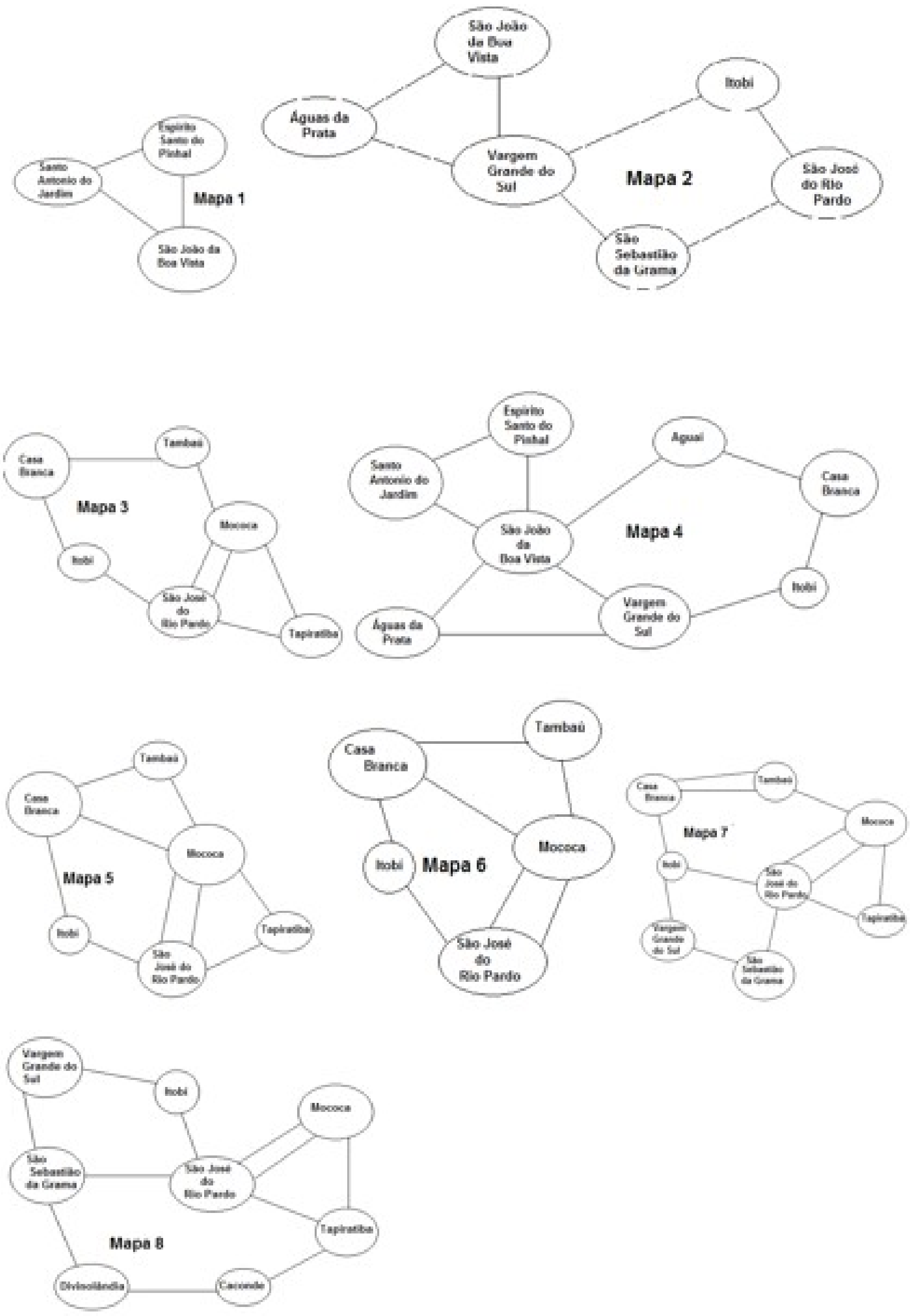


Figura 29: Mapas do Desafio II

Na atividade, os discentes são convidados há descobrirem em quais mapas é possível: sair e retornar à mesma cidade, sair de uma cidade e chegar em outra e em quais não é possível nenhuma solução de acordo com o enunciado, que é passar uma vez só em cada rodovia.

Esse exercício explora a capacidade motora e a expertise de encontrar características que sejam comuns entre alguns mapas e as diferentes entre outros mas, principalmente, já começar a conjecturar hipóteses para as soluções que podem ser usadas no problema maior, ou seja, observar os modelos que podem ser propostos pelos alunos na resolução do problema.

Nessa perspectiva, algumas dicas são oferecidas, dado que, pensamos que a solução proposta por Euler dificilmente surgiria em sala de aula devido a vários fatores e, entre eles, o tempo.

As dicas apontadas na ficha de atividade são: Quais os números de rodovias de cada cidade? Que tipo de números são as, quantidades, de rodovias de cada cidade? Par ou ímpar? Nos mapas que é possível realizar o ciclo, que tipo de número de rodovias cada uma têm? No mapa que sai de uma e chega em outra, quantas cidades de quantidade ímpar de rodovias existem? E nos mapas que não é possível nenhum tipo de passeio,possuem quantas cidades de quantidade de rodovias ímpar?.

Veja, que tal direcionamento é para a criação de um modelo que seja capaz de responder, não só nos mapas menores, mas também no mapa inicial o porquê de ser possível ou não de realizar o passeio que o professor deseja.

Tais perguntas tem o intuito de direcionar o aluno a concluir quais características um mapa deve ter, para ser possível encontrar a solução do problema inicial, ou seja, os alunos serão levados a criar um modelo de solução e, assim, aplica-lô para resolver problemas análogos, que no caso é o nosso problema motivador.

No final, é proposto um problema mais geral, no caso o mapa de rodovias do estado de São Paulo, deseja-se que os alunos, de acordo com o que acabaram de aprender, respondam o desafio proposto, para tanto, é interessante observar quais serão as respostas (ou propostas) para a pergunta do final da ficha de atividade, já que a resposta tem como importância verificar se o aluno aprendeu a resolver problemas dessa natureza, conforme modelizou nas atividades propostas.

Essa pergunta final tem a incumbência de não só verificar se o aluno, agora conhecedor de forma empírica de alguns teoremas, aprendeu o assunto, mas de avaliar como ele consegue aplicar-lô em problemas novos e maiores.

Em nenhum momento da aula, mais geral ou abrangente, é mencionado aos alunos que as atividades são de um assunto chamado Teoria dos Grafos, temos uma contextualização através de problemas de trânsito que é algo comum aos alunos, já que são cidades vizinhas a cidade dos discentes.

Na próxima aula, é que as definições e teoremas utilizados serão estruturados, a ideia por trás de uma atividade desse enredo é que os alunos, primeiro percebam a importância desse assunto para, assim, ter interesse e motivação em aprende-los. As fichas de atividades propostas encontram se no apêndice.

7.2 Plano de Aula

Unidade Escolar: Escola Estadual Domingos Teodoro de Oliveira Azevedo, São João da Boa Vista -SP.

Dia: 6 e 13 de Setembro de 2017.

Disciplina: Matemática e suas tecnologias.

Duração: 3 horas e 20 minutos.

Perfil da sala: Trata se de uma turma de Segundo Ano do Ensino Médio de 40 alunos, que no ano de 2017 se denomina 2º ano B, todos oriundos de bairros periféricos da cidade e a classe social das famílias dos alunos são baixa e média. A idade média é de 16 anos e a maioria são meninas (23 meninas e 17 meninos).

Tema: Uma Introdução a Teoria dos Grafos.

Titulo da Unidade: Problemas de Trânsito.

Justificativa: Teoremas e propriedades dos grafos são aplicados em problemas de várias áreas do conhecimento como comunicação, trânsito, computação e outros, sendo algo comum, tanto da ciência quando nas tecnologias atuais. Assim, aprender algumas dessas definições e seu uso em resolução de problemas e modelagem de soluções, é indispensável para a formação cognitiva e cidadã dos alunos para, inseri-los no mundo e transforma-los em adultos autônomos nas tomadas de decisões do dia dia.

Conteúdos: Definições, propriedades e resultados sobre grafos em resolução de problemas.

Objetivos Gerais: Resolver problemas é uma habilidade, uma meta e um processo no ensino e aprendizagem de qualquer ente matemático na Educação Básica. Observar, reconhecer e manipular padrões e características na busca por soluções é o objetivo de um ensino contextualizado de assuntos atuais. Nessa perspectiva, o trabalho pedagógico com uso de recursos: Resolução de problemas e modelagem matemática, no ensino e aprendizagem de um tema é o objetivo geral da aula descrita.

Objetivos Especificos: Utilizar recursos que são produtos de um raciocínio dedutivo e logico de atividades norteadoras na busca de um padrão que é recurso imprescindível para solucionar o problema motivador. Com essas atividades lúdicas terão condições de aprender algumas definições, propriedades e teoremas sobre grafos.

Metodologia: Serão duas aulas de 1 hora e 40 minutos cada. Na primeira aula, os discentes separados em grupos irão resolver os problemas propostos na Ficha de Atividade (que será distribuída uma copia para cada grupo) e registrar suas respostas nos respectivos campos destinados. Durante toda a aula, a interação professor-aluno e aluno-aluno sobre as atividades deverá ocorrer na busca da resolução dos problemas propostos. Na segunda aula, com uso de recursos tecnológicos, como data show, os teoremas e propriedades utilizadas e, previamente definidas nas soluções da aula anterior, serão ensinadas e aprendidas conforme a Teoria dos Grafos oferece como recursos.

Avalição: Ela será subjetiva com base na observação do professor nas soluções propostas e utilizadas pelos alunos.

A ficha de Atividades encontra se no apêndice.

8 Resultados da aplicação das Fichas de Atividades

No dia 6 de Setembro de 2017, nas terceira e quarta aulas do período da manhã, na Escola Estadual Domingos Teodoro de Oliveira Azevedo localizada no bairro Vila Loyolla em São João da Boa Vista, os alunos do segundo ano B, do Ensino Médio, foram separados em grupos de quatro à cinco alunos, realizaram os desafios da Ficha de Atividades, que foi a proposta desse trabalho.

Figura 30: Grupos de alunos por afinidade

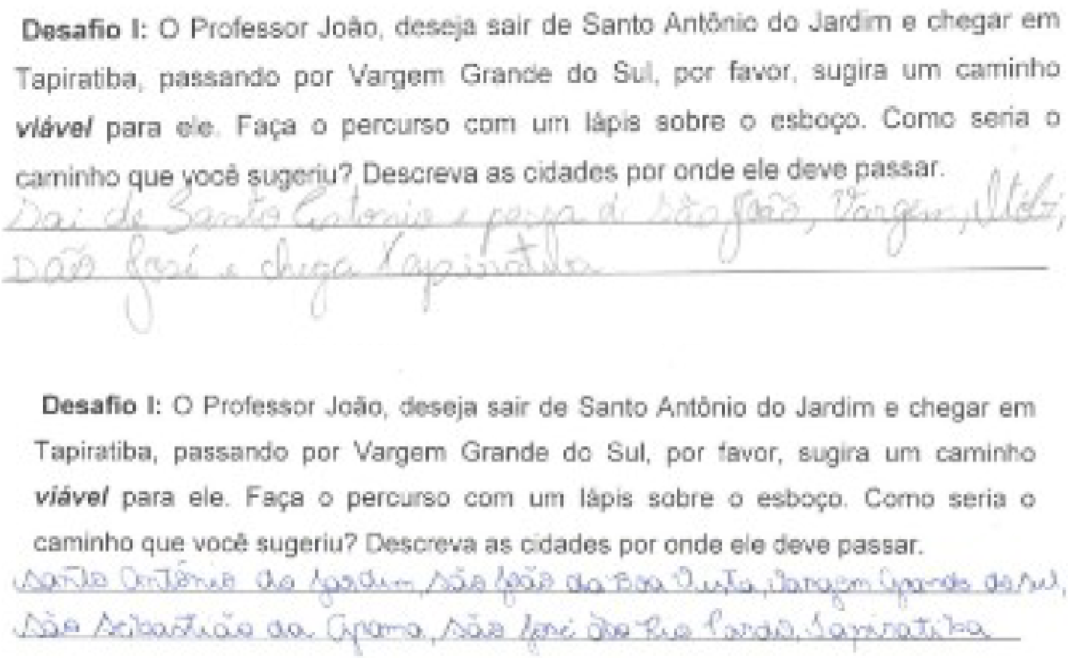
Os desafios foram propostos aos alunos com a comanda de que eles deveriam resolver aqueles problemas sobre trânsito, utilizando para isso os seus conhecimentos prévios, raciocínio lógico e dedutivo. Naquele momento, o mais importante era propor soluções de acordo com o que eles achavam correto.

O professor, ficou apenas como um mediador do saber, fazendo intervenções pontuais nos grupos, ou para todos, apenas quando necessário e, sempre deixando os discentes na busca por uma solução de acordo com o que percebiam ou interpretavam dos enunciados e das informações.

No primeiro desafio (Desafio I), de encontrar um caminho viável entre as cidades de Santo Antônio do Jardim e Tapiratiba, passando por Vargem Grande do Sul (cidades do estado de São Paulo), nota se que houve dois caminhos que foram os mais sugeridos como as soluções possíveis.

Esse problema foi proposto por serem duas cidades opostas e distantes no mapa, mesmo no mapa inicial que não é valorado, oferecendo a oportunidade de explorar no aluno seus conhecimentos prévios sobre os como realizar esse passeio e também de proporcionar no grupo o debate de soluções.

Abaixo, soluções que alguns grupos sugeriram, lembrando que havia um mapa, não valorado, como referência:



Desafio I: O Professor João, deseja sair de Santo Antônio do Jardim e chegar em Tapiratiba, passando por Vargem Grande do Sul, por favor, sugira um caminho ***viável*** para ele. Faça o percurso com um lápis sobre o esboço. Como seria o caminho que você sugeriu? Descreva as cidades por onde ele deve passar.

Sai de Santo Antonio e passa d São João, Vargem, Itob, São José e chega Tapiratiba

Desafio I: O Professor João, deseja sair de Santo Antônio do Jardim e chegar em Tapiratiba, passando por Vargem Grande do Sul, por favor, sugira um caminho ***viável*** para ele. Faça o percurso com um lápis sobre o esboço. Como seria o caminho que você sugeriu? Descreva as cidades por onde ele deve passar.

Santo Antônio do Jardim, São João da Boa Vista, Vargem Grande do Sul, São Sebastião da Grama, São José do Rio Pardo, Tapiratiba

Figura 31: Soluções propostas pelos alunos

Nessa atividade alguns alunos questionaram o termo viável, já que no primeiro mapa não têm medidas e, como intervenção, o professor sugeriu que eles verificassem no mapa o que era mais viável: *Ir de São João da Boa Vista para Vargem Grande do Sul* ou fazer um caminho mais longo passando por outras cidades quando saísse de São João até chegar em Vargem.

Tal intervenção foi necessária, pois, apesar de não termos distâncias nesse primeiro mapa, é interessante raciocinar sobre qual é o menor caminho, de acordo com seus conhecimentos prévios (caso sobre as distâncias entre os municípios), sendo esse um exercício preparatório para o próximo desafio.

A próxima pergunta, foi determinar a quantidade de caminhos que existem como possibilidades de soluções do desafio.

Aqui, surgiram algumas respostas, sendo que a quantidade variou de duas a sete possibilidades, de acordo com o que os alunos raciocinaram como viável.

Um grupo respondeu que são dois trajetos, outro que são três, quatro grupos que são cinco e apenas um grupo respondeu que são sete trajetos diferentes e possíveis conforme o enunciado do desafio. Todos os grupos realizaram a contagem através do mapa, fazendo traços das opções de trajetos sobre esse.

A resposta ideal seria determinar que a quantidade viável é de doze trajetos diferentes, que no caso nenhum grupo encontrou essa quantidade, mas observe o relato de um grupo que encontrou a solução de cinco trajetos diferentes: *Do Jardim até São João tem um caminho, de São João até Vargem um caminho e de Vargem a Tapiratiba três caminhos, assim* $1 + 1 + 3 = 5$ *tem cinco trajetos.*

Fica evidente que, os alunos confundem princípios multiplicativos e aditivos, assuntos de contagem, já que a resposta esperada era: De Santo Antônio do Jardim até São João da Boa Vista são dois trajetos, de São João até Vargem Grande do Sul dois, de Vargem a Tapiratiba três, assim, $2.2.3 = 12$, sendo 12 trajetos diferentes. Ficando claro a necessidade que esse assunto seja revisto.

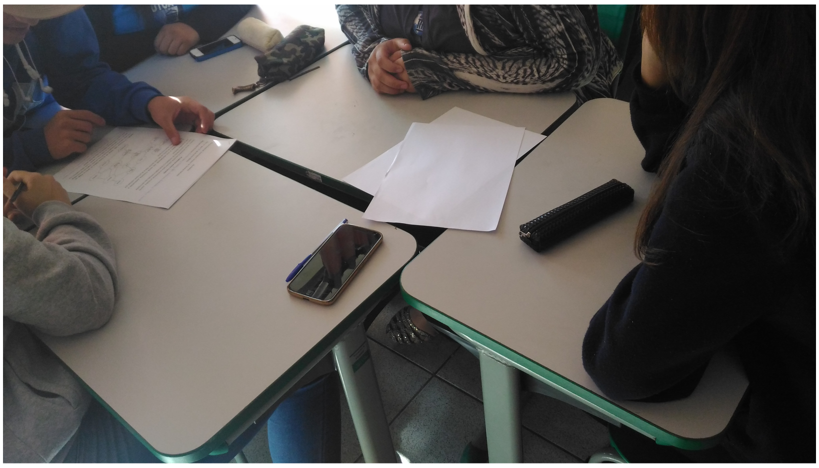


Figura 32: Alunos resolvendo o desafio I

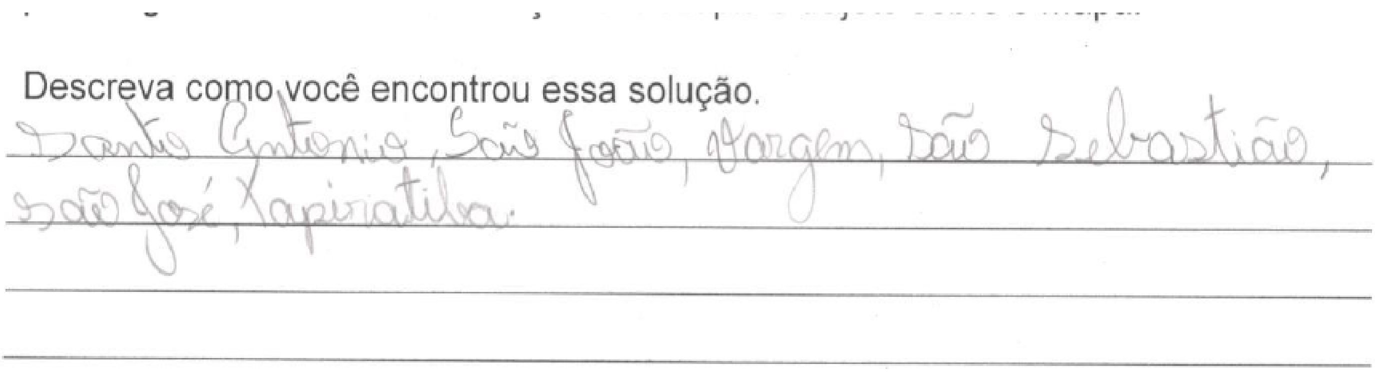
No segundo mapa do desafio I, que se trata do mesmo mapa, agora com distâncias aproximadas entre as cidades, a pergunta era determinar a menor distância.

Para tal solução, foi sugerido que os alunos tomassem por base a sequência de cidades que encontraram no primeiro mapa e, fossem somando as distâncias entre cada uma, para verificar com as outras possibilidades, se essa realmente era a menor possível.

Nesse processo, observou se que, muitos acabaram utilizando de uma heurística pessoal para encontrar a solução, porém, o que ficou de comum nos grupos foi a presença de pensar na menor distância até mesmo entre cidades vizinhas, sendo uma alusão ao método de *Dijkstra*.

Os caminhos que os grupos encontram no primeiro desafio são na verdade os dois menores possíveis, dado que, tais trajetos são de conhecimento dos alunos e fazem parte do seu cotidiano, sendo um caminho de 118km que é de: S. A. Jardim, S. J. Boa Vista, V. Grande do Sul, Itobi, S.J. Rio Pardo e Tapiratiba. E o outro é de 117Km que é a seguinte sequencia: S. A. Jardim, S. J. Boa Vista, V. rande do Sul, S. S. Grama, S. J. Rio Pardo e Tapiratiba.

Veja a solução encontrada por um grupo:



Descreva como você encontrou essa solução.

Santo Antonio, São João, Vargem, São Sebastião, São José, Tapiratiba.

Figura 33: Solução proposta por um grupo que tem no total 117 Km

O próprio desafio, não deixou claro que buscava se uma solução otimizada, sendo esse um ponto a melhorar nas próximas aplicações dessa ficha de atividade, para que assim uma resposta mais adequada possa ser exigida.

O desafio II, deve como resposta, de acordo com o que os alunos perceberam, a impossibilidade de determinar sua solução, o que realmente serviu de incentivo e motivação para nos próximos passos, encontrar a razão de se poder resolver ou não essa questão.

Veja as respostas de alguns grupos:

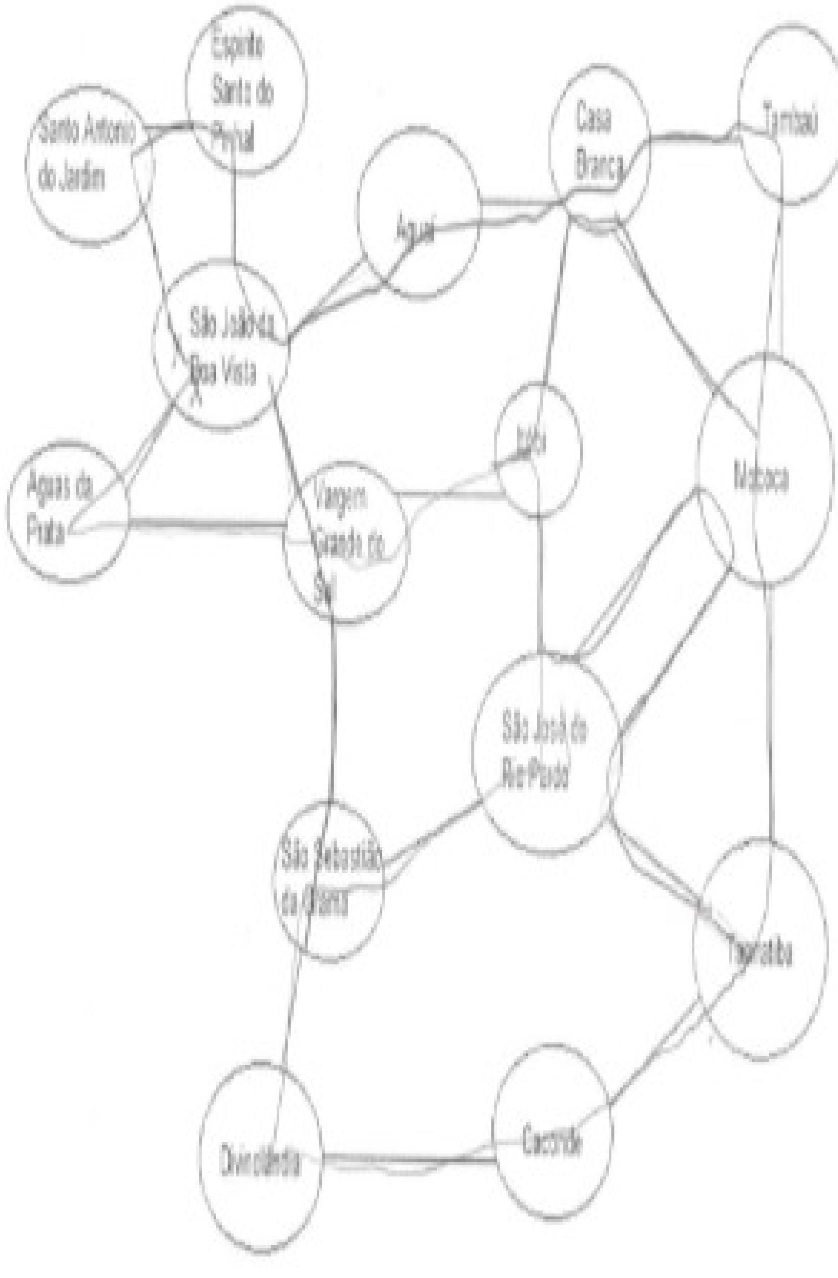
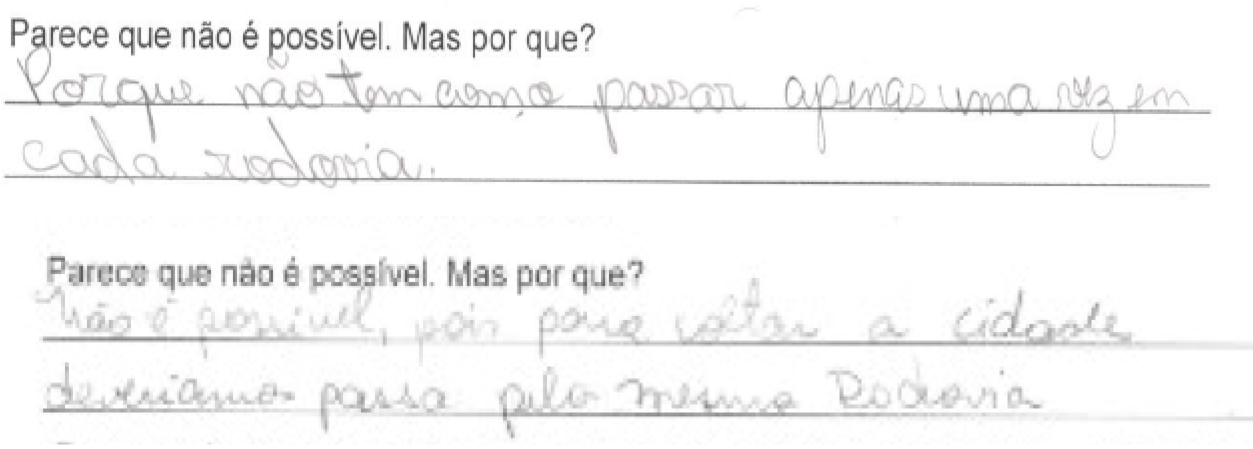


Figura 34: Mapa com tentativa de um grupo


Parece que não é possível. Mas por que?

Porque não tem como passar apenas uma vez em cada rodovia.

Parece que não é possível. Mas por que?

não é possível, pois para voltar a cidade deveriamos passa pelo mesmo Rodovia

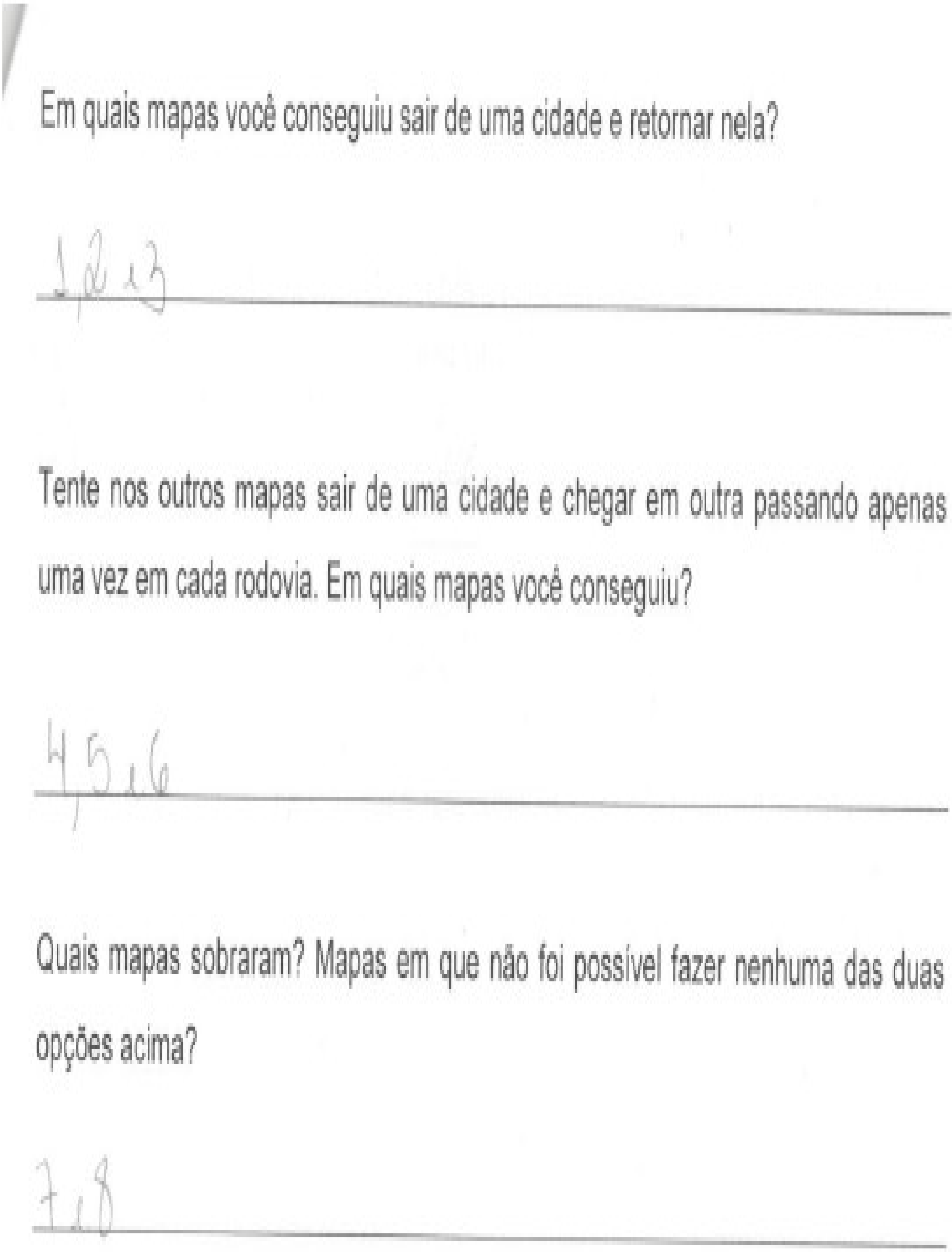
Figura 35: Respostas de dois grupos sobre a impossibilidade de resolver o problema.

Como já citado, a impossibilidade momentânea de se responder porquê não é possível, causou na turma estranheza e vontade de descobrir, já que com a intervenção do professor, foi dito aos discentes que as próximas atividades mostrariam os porquês.

Os alunos, na página seguinte da ficha de atividade, tinham que nos 8 mapas determinar em quais eram possíveis realizar passeios saindo e retornado à mesma cidade, ou sair de uma cidade e chegar em outra, passando apenas uma vez em cada rodovia, além do que, perceber em quais não era possível nenhuma das possibilidades.

Para isso, os alunos realizaram trajetos sobre os mapas com um lápis ou uma caneta e, verificando em quais, eram possíveis os trajetos sugeridos, para em seguida responder.

Veja as respostas de um grupo:



Em quais mapas você conseguiu sair de uma cidade e retornar nela?

1, 2 e 3

Tente nos outros mapas sair de uma cidade e chegar em outra passando apenas uma vez em cada rodovia. Em quais mapas você conseguiu?

4, 5 e 6

Quais mapas sobraram? Mapas em que não foi possível fazer nenhuma das duas opções acima?

7 e 8

Figura 36: Respostas de um grupo sobre as possibilidades de cada mapa.

Em seguida, de acordo com a comanda, os grupos marcaram em cada cidade, de cada mapa, a quantidade de rodovias que cada cidade têm.

Veja, o esboço de um grupo:

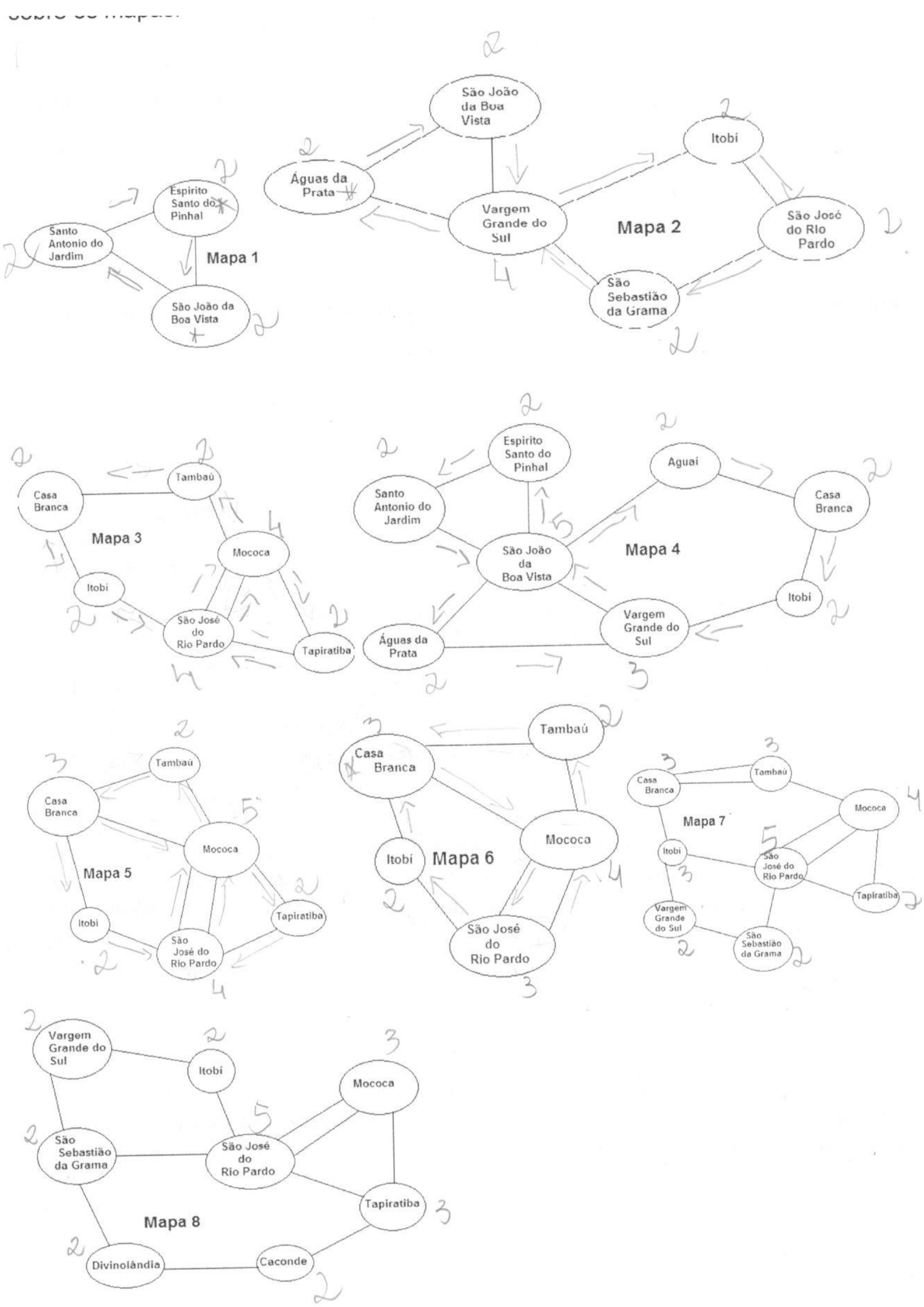
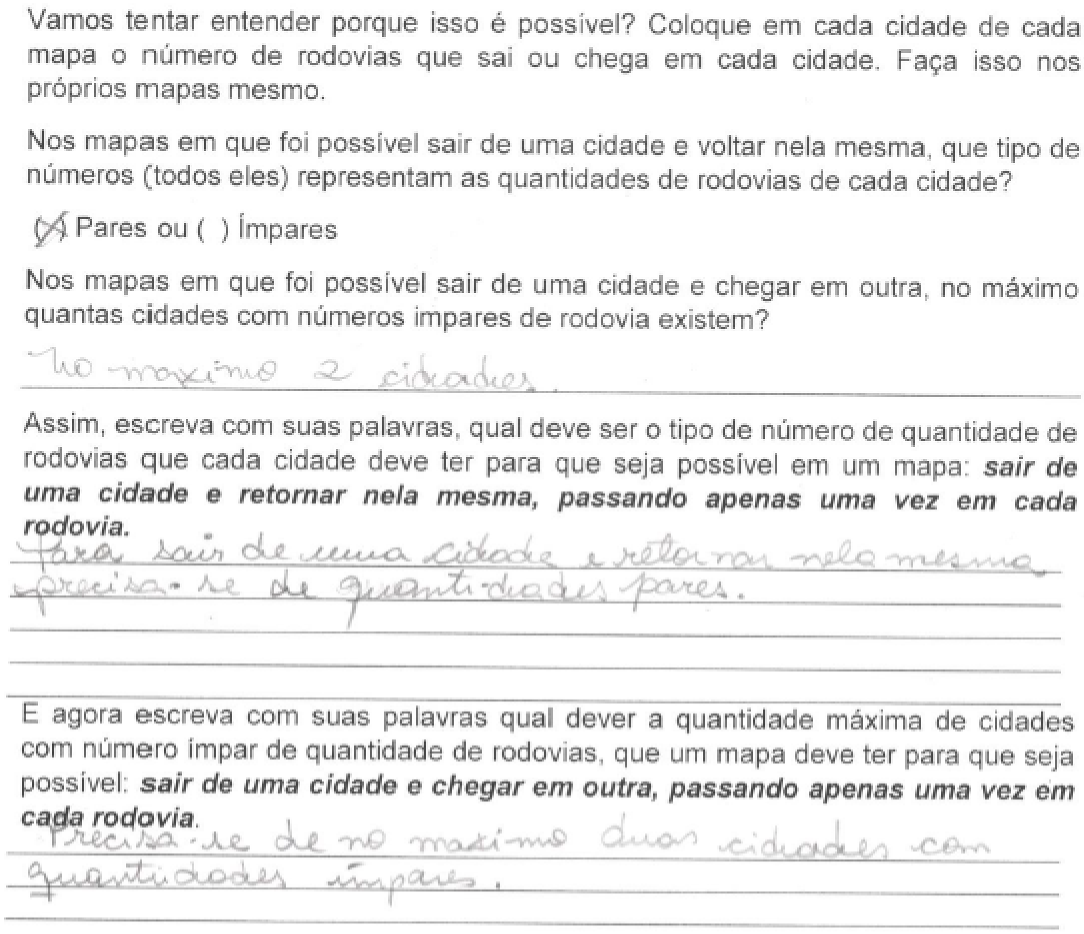


Figura 37: Cada cidade com a representação de suas quantidades de rodovias

Com esse resultado, os alunos foram convidados a responder algumas perguntas que tem como fundamento, de forma intuitiva e posteriormente dedutiva, determinar os motivos e as possibilidades de se realizar ou não, o caminho de percorrer todas as rodovias, apenas uma vez cada uma.

Nesse ponto, houve uma intervenção do professor para direcionar os esforços dos alunos na busca do entendimento do que ocorre em cada mapa de acordo com a quantidade de rodovias que cada cidade têm, com isso os grupos perceberam quando é possível e assim, escreveram com suas palavras o que notaram.

Veja, as respostas de dois grupos:


Vamos tentar entender porque isso é possível? Coloque em cada cidade de cada mapa o número de rodovias que sai ou chega em cada cidade. Faça isso nos próprios mapas mesmo.

Nos mapas em que foi possível sair de uma cidade e voltar nela mesma, que tipo de números (todos eles) representam as quantidades de rodovias de cada cidade?

(X) Pares ou ( ) Ímpares

Nos mapas em que foi possível sair de uma cidade e chegar em outra, no máximo quantas cidades com números impares de rodovia existem?

No máximo 2 cidades.

Assim, escreva com suas palavras, qual deve ser o tipo de número de quantidade de rodovias que cada cidade deve ter para que seja possível em um mapa: ***sair de uma cidade e retornar nela mesma, passando apenas uma vez em cada rodovia.***

Para sair de uma cidade e retornar nela mesma precisa-se de quantidades pares.

E agora escreva com suas palavras qual dever a quantidade máxima de cidades com número ímpar de quantidade de rodovias, que um mapa deve ter para que seja possível: ***sair de uma cidade e chegar em outra, passando apenas uma vez em cada rodovia.***

Precisa-se de no máximo duas cidades com quantidades ímpares.

Figura 38: Conclusões de um grupo

Vamos tentar entender porque isso é possível? Coloque em cada cidade de cada mapa o número de rodovias que sai ou chega em cada cidade. Faça isso nos próprios mapas mesmo.

Nos mapas em que foi possível sair de uma cidade e voltar nela mesma, que tipo de números (todos eles) representam as quantidades de rodovias de cada cidade?

(X) Pares ou ( ) Ímpares

Nos mapas em que foi possível sair de uma cidade e chegar em outra, no máximo quantas cidades com números impares de rodovia existem?

2

Assim, escreva com suas palavras, qual deve ser o tipo de número de quantidade de rodovias que cada cidade deve ter para que seja possível em um mapa: ***sair de uma cidade e retornar nela mesma, passando apenas uma vez em cada rodovia.***

É preciso ter números pares

E agora escreva com suas palavras qual dever a quantidade máxima de cidades com número ímpar de quantidade de rodovias, que um mapa deve ter para que seja possível: ***sair de uma cidade e chegar em outra, passando apenas uma vez em cada rodovia***.

No maximo 2 cidades com numero de rodovia impares

Figura 39: Conclusões de outro grupo

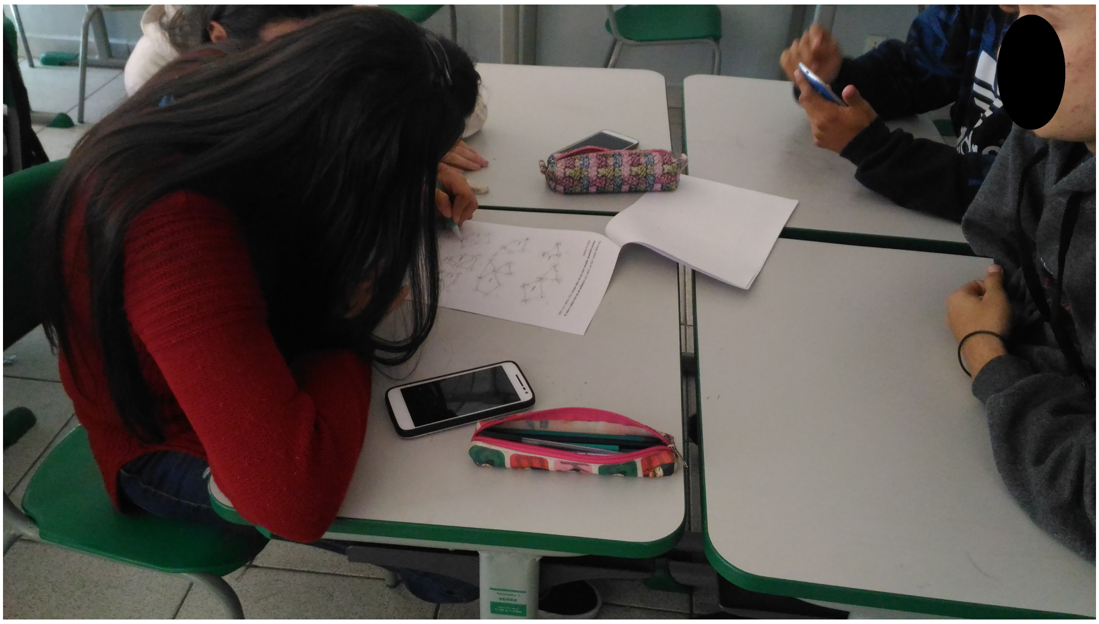
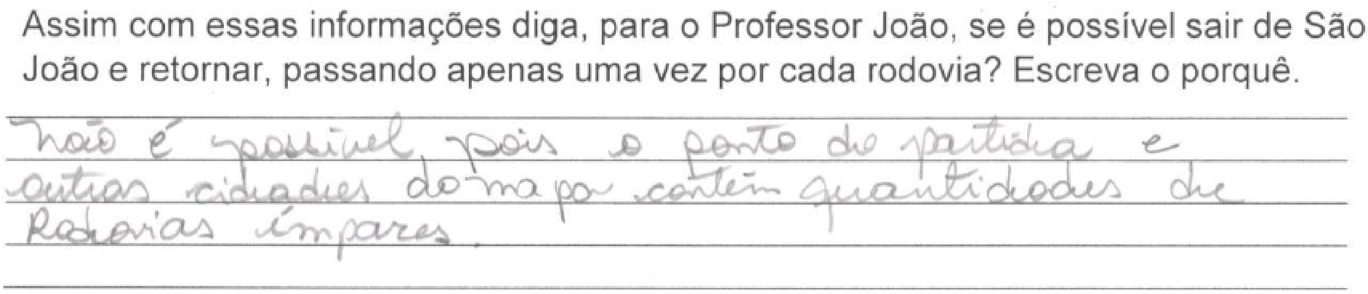


Figura 40: Aluna colocando os números de rodovias que cada cidade têm.

De posse desse novo conhecimento, que agora tornou-se pertencente a esses, os alunos adquiriram informações suficientes para responder o porquê não é possível que o Professor João, possa realizar o seu passeio de sair de São João da Boa Vista e voltar, passando apenas uma vez em cada rodovia.

Veja, a resposta de um grupo e o mapa de outro, utilizado para isso:


Assim com essas informações diga, para o Professor João, se é possível sair de São João e retornar, passando apenas uma vez por cada rodovia? Escreva o porquê.

não é possivel, pois o ponto de partida e outras cidades do mapa contem quantidades de Rodovias ímpares.

Figura 41: Resposta de um grupo sobre o porquê não é possivel

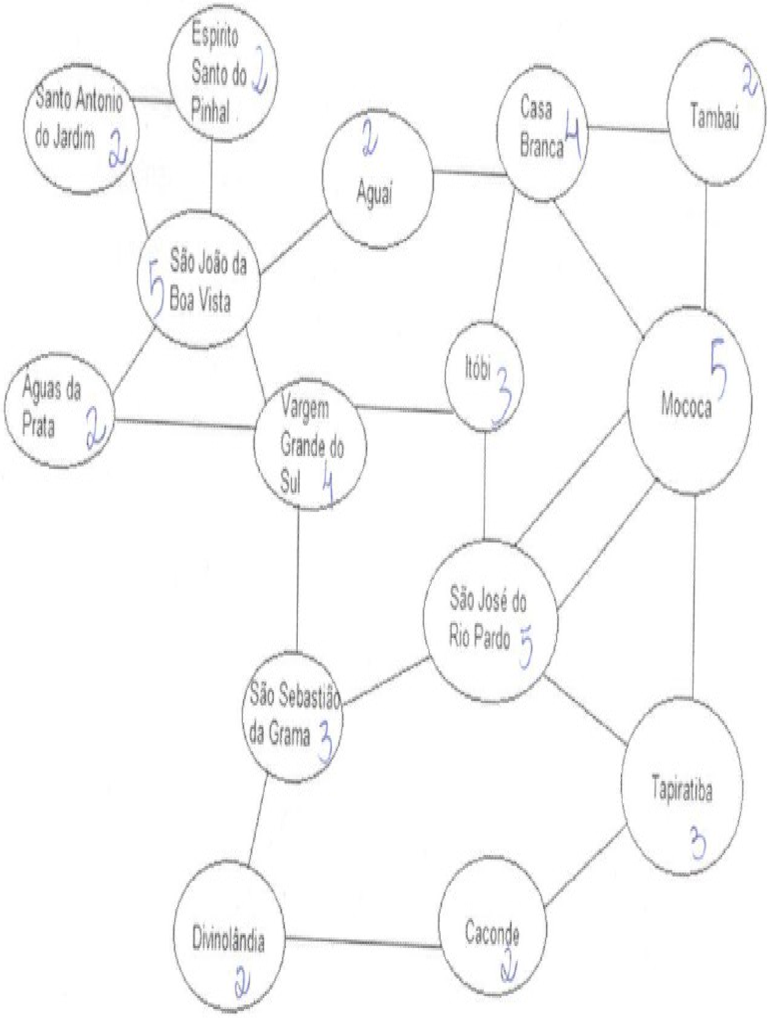


Figura 42: Marcações no mapa das quantidades de rodovias de cada cidade.

Nota-se, que com essas atividades, o Teorema de Euler e o Corolário fruto desse, foram apreendidos sem serem citados ou definidos, as definições e propriedades é tema, de acordo com o plano de aula, da próxima aula, que tem esse intuito, depois de ser trabalhado (na primeira parte) de forma lúdica e contextualizada alguns assuntos sobre Teoria dos Grafos.

A pergunta final da aula, tinha não só a finalidade de verificar o que foi apreendido nesses desafios, mas também perceber se a capacidade de abstração dos alunos, sobre o novo conhecimento adquirido foi efetuado e, essa situação ficou clara na resposta de um grupo em relação a pergunta final, veja:

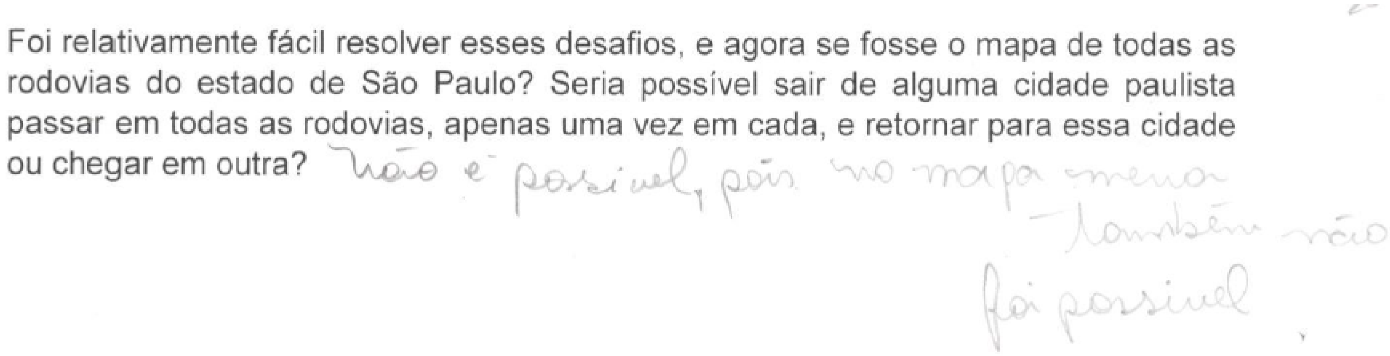

Foi relativamente fácil resolver esses desafios, e agora se fosse o mapa de todas as rodovias do estado de São Paulo? Seria possível sair de alguma cidade paulista passar em todas as rodovias, apenas uma vez em cada, e retornar para essa cidade ou chegar em outra? não é possível, pois no mapa menor também não foi possível

Figura 43: Conclusão de um grupo sobre a impossibilidade de solução

Os alunos sintetizaram conceitos trabalhados, pois, perceberam que se na região dos 15 municípios não foi possível, então num mapa maior, que contém esse, também não será, já que têm-se cidades com número ímpares de rodovias no menor, portanto, tem-se no maior.

Na sequência, algumas fotos dos alunos agrupados para resolver os desafios propostos nas Fichas de Atividade:

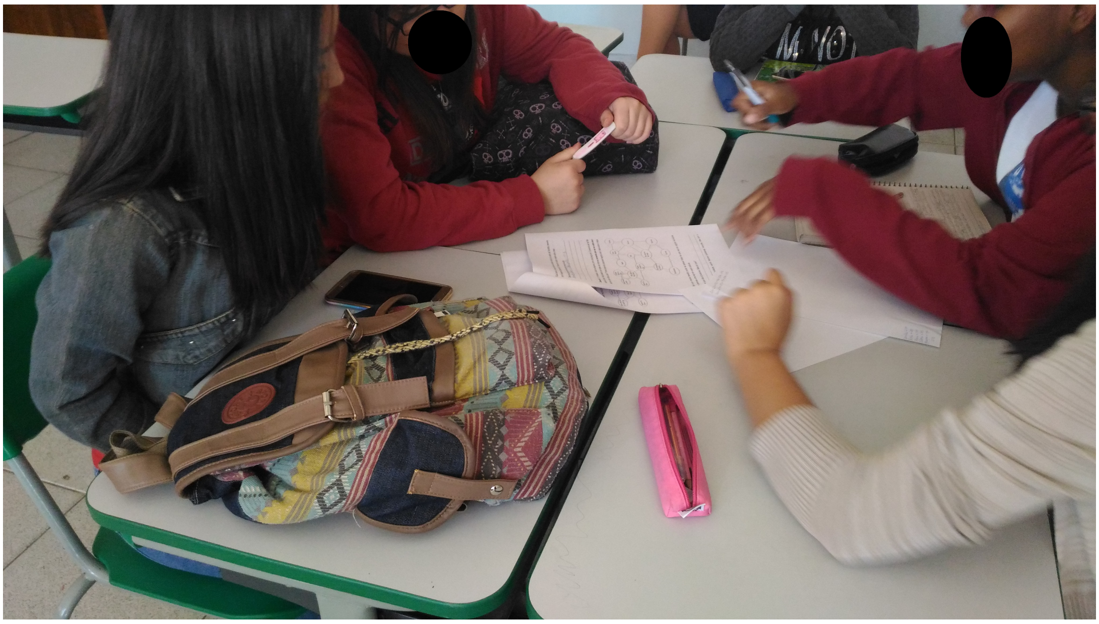


Figura 44: Alunos realizando o desafio II.

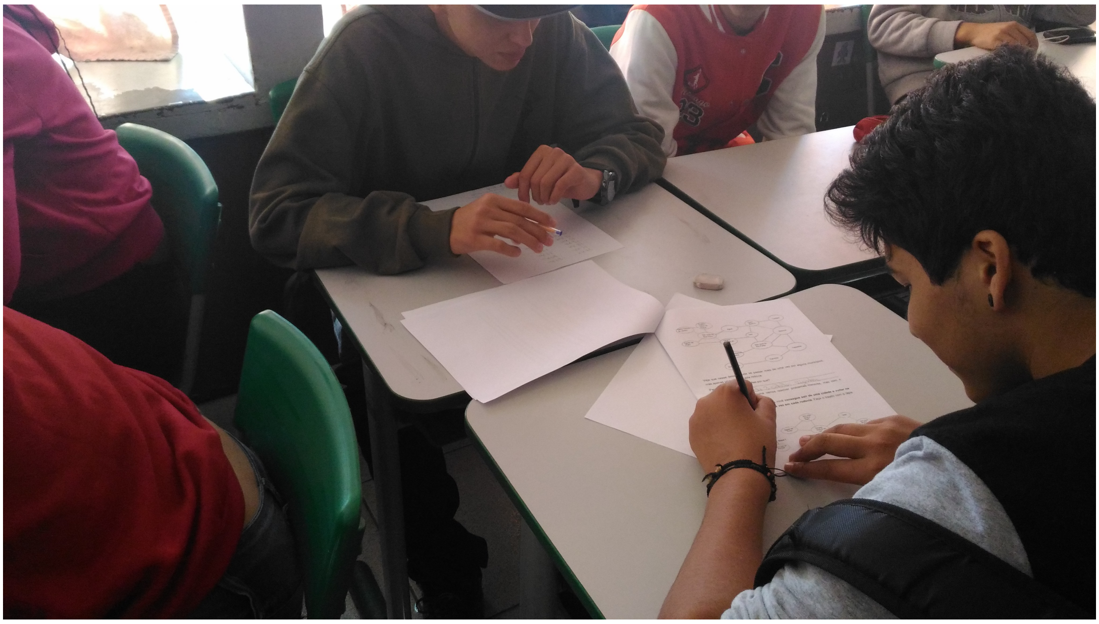


Figura 45: Aluno escrevendo a resposta do grupo.

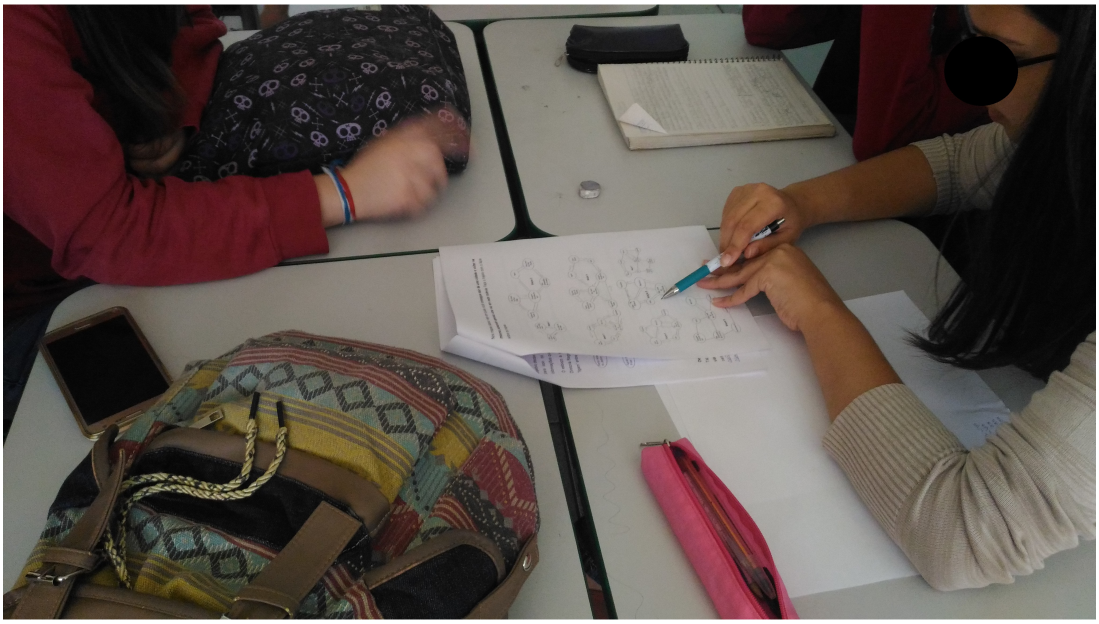


Figura 46: Aluna colocando número de rodovias em cada cidade.

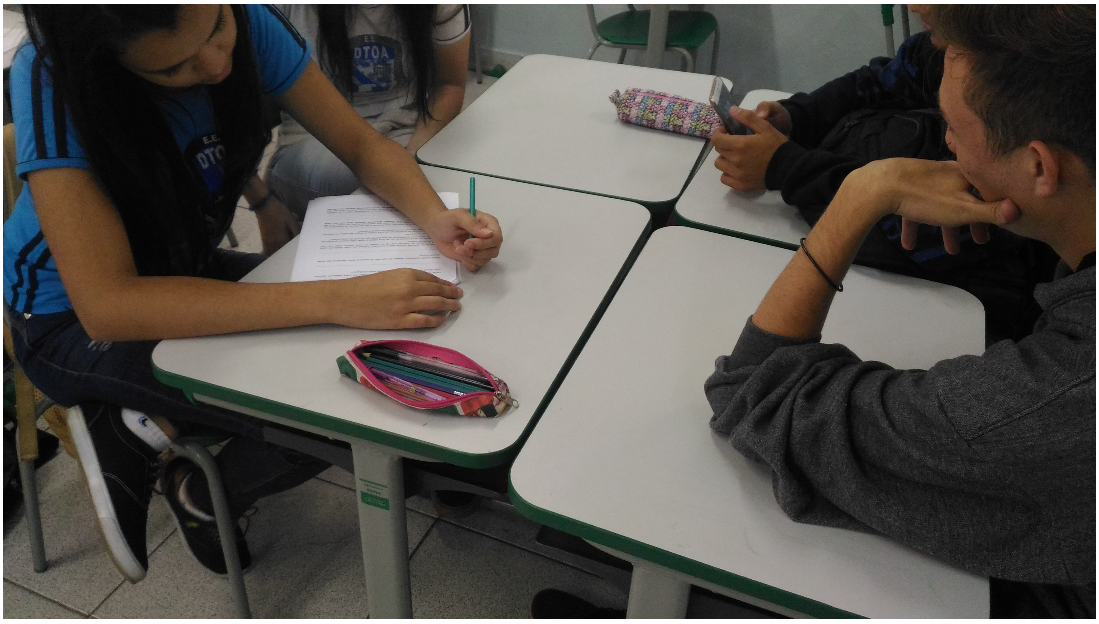


Figura 47: Grupo conversando sobre as repostas.

Figura 48: Aluna escrevendo a resposta do grupo.

Na segunda aula, houve a devolutiva sobre os resultados encontrados pelos grupos nos desafios, além de ser uma aula expositiva sobre os teoremas, propriedades e características da Teoria dos

Grafos (tais assuntos foram ministrados de acordo com que foi proposto no capitulo de Uma Introdução à Teoria dos Grafos), no intuito de reforçar as propriedades aprendidas na aula passada.

Nessa aula, a correção dos desafios ocorreu de forma simples, mostrando os caminhos corretos comparando com as respostas que os grupos apresentaram, para que não ficasse nos educandos algumas dúvidas que surgiram durante a primeira aula.

As questões de encontrar o caminho mais curto, ou mais viável, foram debatidas colocando que, o interesse era definir a resposta mais coerente de acordo com seus conhecimentos, já que as soluções dos alunos foram construídas com base nas suas capacidades e observações dos enunciados.

Na parte de apresentação das propriedades dos grafos e o teorema de Euler, usou se como recurso a Introdução à Teoria dos Grafos, apresentada aqui neste trabalho, no momento de transmitir as definições sobre esse tema, os alunos aprenderam as propriedades e teoremas trabalhados de forma contextualizadas e não definidas na aula passada. Não registramos aqui a segunda parte da sequência didática, dado que o nosso interesse foi o que se desenvolveu na primeira parte e, na segunda somente ocorreu uma aula expositiva sobre alguns conceitos que envolvem o tema Teoria dos Grafos.

O plano de aula, aqui definido, foi trabalhado na sua integralidade e os resultados encontrados e analisados serviram, não só para concretizar a validade da estratégia e do assunto ministrado, mas para justificar a importância de se modificar a postura e forma de ensinar algo, mesmo que fora dos conteúdos programáticos, que contribua na formação cognitiva dos discentes.

8.1 Comparação entre as expectativas e os resultados sobre a Ficha de Atividades

A ficha de atividade, se mostrou eficiente nas expectativas previstas, como a participação e interesse dos alunos, atividades desafiadoras, estratégia diferenciada para o ensino de um novo conhecimento e superação de obstáculos presentes no trabalho pedagógico dos professores de Matemática.

Dos resultados positivos podemos destacar a nova possibilidade de ensino e aprendizagem de um ente matemático. Como relevante sugerimos algumas mudanças para que o resultado final dessa proposta seja melhor e possibilite ensinar e aprender sobre esse tema em qualquer serie/ano da Educação Básica.

Nas dificuldades iniciais apresentadas, como superação da expectativas e formas de avaliar o trabalho, foram desmontadas, dado que, tanto na execução do trabalho quanto na observação do mesmo, todos os quesitos elencados mostraram se eficientes, validando não só o conhecimento trabalhado, mas a forma como o mesmo ocorreu.

A turma foi organizada em grupos para elaborar respostas possíveis em relação aos problemas, utilizando dados, modelando, discutindo e tomando decisões conjuntas sobre a natureza dos desafios, no intuito de elevar a qualidade de questionamento, já que se percebe, pelas referências utilizadas, que quanto mais um aluno questiona e pesquisa, mais motivação para o ensino e incentivo para o aprendizado surgem, algo que foi evidenciado durante a realização da busca de resoluções e adequações das atividades.

Os recursos utilizados, pelos alunos, como raciocínio lógico, operacionalização de problemas numéricos, relação de ordem de grandeza e escala, contagem, visualização e representação geométrica, consolida nas atividades os conhecimentos matemáticos produzidos através das soluções fornecidas, tanto por expressões escritas no trabalho como oral.

Essa ação gerou nos alunos, uma possibilidade de análise crítica na resolução dos problemas, que apresentados de forma simples, utiliza uma Matemática sofisticada, que não só serve para desenvolver as capacidades, mas também tem uma aplicação direta no cotidiano.

Algumas questões como avaliação formal que viabilize a estratégia, não se mostraram como obstáculo, pois, os critérios e instrumentos utilizados, superam e comprovam a viabilidade, já que, ficou presente tanto escrito e oral que a expectativa de aprendizagem pré definida foi atingida.

Avaliamos como positiva a estratégia utilizada, que no caso é a resolução de problemas, pois, possibilitou desenvolver nos alunos habilidades e capacidades, que são cobradas tanto na escola como na vida adulta.

O tema, Teoria dos Grafos, se mostrou viável, não só porque é um assunto que têm inúmeras aplicações nos problemas e tecnologias do mundo atual, mas que contribui para o cognitivo dos alunos, justificando inclusive que seja um conteúdo a ser inserido nos programas curriculares de Matemática.

9 Conclusão

A sequência didática se mostrou eficiente, dado que a principal ideia, que era perceber um teorema e ser capaz de reconhecê-lo num problema sem o conhecimento prévio de definições e propriedades, foi atingida. Sendo essa aprendizagem alcançada com o uso de metodologias especificas, como definido na introdução do trabalho, o objetivo é inserir o assunto Teoria dos Grafos de forma que esse, seja um terreno fértil para a explorar modelos e problemas.

O Currículo Oficial de Matemática do Estado de São Paulo, prevê que a resolução de problemas e modelagem matemática sejam metodologias para o ensino e a aprendizagem de conteúdos diversos, que venham a contribuir no desenvolvimento de competências e habilidades nos discentes.

Nessa perspectiva, a ficha de atividade proposta se mostra eficaz, dado que proporcionou aos educandos usar de recursos cognitivos para perceber padrões, inferir intuições e deduzir informações, que são úteis para modelizar dados que sejam usados na resolução dos desafios propostos.

A escolha do assunto Teoria dos Grafos foi tomado pela sua possibilidade de contextualização e inserção no próprio conteúdo de contagem e combinatória, previsto em documentos como o Currículo e Parâmetros Curriculares, mesmo que esse tema não seja, atualmente, explicitamente cobrado no Ensino Básico (no caso do Currículo Oficial do Estado de São Paulo).

Seu uso demonstrou-se útil, já que as respostas e indagações feitas pelos alunos, comprovam os recursos pedagógicos que essa teoria pode acrescentar nos desenvolvimentos cognitivos dos mesmos, já que partiu-se de um problema real que a maioria dos alunos conhece as informações apresentadas nos problemas ou podem busca-las.

Fica claro nas resoluções dos alunos, mesmo que em alguns momentos houve intervenções para um direcionamento mais apurado do assunto, que o objetivo de aprender o Teorema de Euler, dentro da Teoria dos Grafos, de modo informal e numa linguagem própria dos alunos para solucionar um problema motivador foi de fato atingida.

A avaliação adotada, foi principalmente subjetiva, como de observação dos momentos de interação dos alunos em grupos, validam que a metodologia utilizada e as expectativas presentes nesse trabalho.

Conforme as bases teóricas utilizadas, a ideia de aprender algo significativo através de que o conhecimento adquirido seja aplicado em diversos problemas, fez-se presente e, em futuras situações problemáticas que tenham similaridade com os desafios propostos, serão entendidos e solucionados, já que agora, esse conhecimento e sua aplicabilidade faz parte do repertório dos alunos.

Os resultados foram frutos de um trabalho em equipe, o que ajuda no fortalecimento das relações pessoais dos alunos, mesmo que os grupos foram formados por afinidade, isso contribuiu para o aprendizado e a sistematização do conhecimento adquirido.

A obtenção de dados, discussão e tomadas de decisões, registradas na ficha de atividade de cada grupo, evidência que a produção e desenvolvimento de um novo conhecimento matemático foi atingido. Melhorando o raciocínio lógico, operacionalização de problemas numéricos e crítica em relação a conceitos de ordem de grandeza e escala.

A contribuição que à Resolução de Problemas, proporcionou na elaboração e execução dessa ficha de atividade, foi algo que proporciona uma mudança de paradigma no ensino e aprendizagem de Matemática, de fato a motivação em aprender algo está diretamente ligado a aplicação desse em situações presentes no dia-a-dia e, que a busca por soluções de problemas é um caminho pedagógico eficiente para que um conteúdo seja ministrado, assim, a reflexão e mudança na forma de planejar e executar um plano de aula, agora, se faz sobre a perspectiva de que tal tema seja aplicado em problemas.

Inicialmente houve uma insegurança, quanto as metodologias utilizadas, por exigir um preparo maior e melhor das aulas e, principalmente, a falta de um instrumento mais eficaz para avaliar os resultados apresentado pelos alunos, mas essa fragilidade foi vencida com a aplicação de um olhar mais depurado durante a resolução dos problemas nos grupos, procurando visualizar a aprendizagem e os momentos de sistematização de conhecimento, fases de interação, discussão em busca da melhor decisão e participação no grupo.

Tudo isso são parâmetros utilizados no processo avaliativo, evitando que esse seja fragilizado e, realmente demonstrando que a ficha de atividade contribuiu positivamente para a formação dos alunos.

Como sugestão final, para que a estratégia e o tema possam ser trabalhados em outras series, ou em outros anos, fica uma versão adaptada que se encontra no apêndice (segunda ficha de atividade, versão simplificada) . Tal sugestão, parte da viabilização da ficha em outros momentos oportunos, como por exemplo um trabalho pedagógico por oficinas.

Deseja se que, esse trabalho seja utilizado pelos professores no intuito de trabalhar temas não pertencentes a uma grade de conteúdos programados, porém, que oferece uma gama excelente de oportunidades para desenvolver nos discentes várias habilidades, que estão presentes em problemas.

Referências

[1] BRASIL/MEC, Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio; Volume II Cências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.** Brasília: MEC, SEB, 2006.

[2] BRASIL. Ministério da Educação . Secretária de Educação Média e Tecnológica. **Paramêtros Currículares Nacioniais- Ensino Médio**- Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília, 1999.

[3] BUSHAW, Donald. et. al. **Aplicações da Matemática Escolar**. 3. ed. São Paulo: Atual,2003.

[4] FEOFILOFF, P., et. al. **Uma Introdução Sucinta á Teoria dos Grafos.**2011. Disponível em:<http://www.ime.usp.br/ pdf/teoriadosgrafos/> Acessado em: 07/11/2016.

[5] JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos - Uma Introdução**, 2012. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/Apostila5-Grafos.pdf> Acessado em 06/08/2016.

[6] KRULIK, Stephen, REYS; Robert E..**A resolução de Problemas na Matemática escolar**.3. ed. São Paulo: Atual,2003.

[7] LUCCHESI L., Cláudio. **Introdução á Teoria dos Grafos.** Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[8] MANTOAN, Maria Teresa Eglér (org.). **Pensando e Fazendo Educação de Qualidade.**1. ed., São Paulo: Moderna, 2003.

[9] POLYA, George.**A Arte de resolver Problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

[10] SAMPAIO, João Carlos V. **Passeios de Euler e as Pontes de Konisgsberg**. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/PasseiosdeEuler.pdf> acessado em: 09/11/2016.

[11] CAMPOS R., Celso; WODEWOTZKI L., Maria Lúcia; JACOBINI R., Otávio. **Educação Estatistica, teoria e prática em ambientes de modelagem matemática**.1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

[12] SÃO PAULO. Secretária de Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Oficial de Matemática**. São Paulo, 2010.

[13] SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica**. 2. ed. Campinas: Papirus, 2010.

[14] WEIZ, Telma,SANCHEZ, Ana. **O diálogo entre o Ensino e a Aprendizagem.** 1. ed., São Paulo: Ática, 2003.

[15] WISKE, Martha Stone. et. al. **Ensino para a compreensão: A pesquisa na prática**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

[16] BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática.** 1 ed. São Paulo: Contexto, 2002.

[17] BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática e os professores: A questão da Formação.** Bolema, Rio Claro, n 15, pp. 5-23, 2001. Disponível em <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes$_{m}odelagem/2009/modulo_{V}I/pdf/Mod - Mat - formacao - professores.pdf > acessoem : 20deJunhode$2017.

10 Apêndice

Os documentos a seguir são: Ficha de Atividade, Ficha de Atividade versão simples e as resoluções dos grupos.

Atividades

Escola Estadual: Domingos Teodoro de Oliveira Azevedo

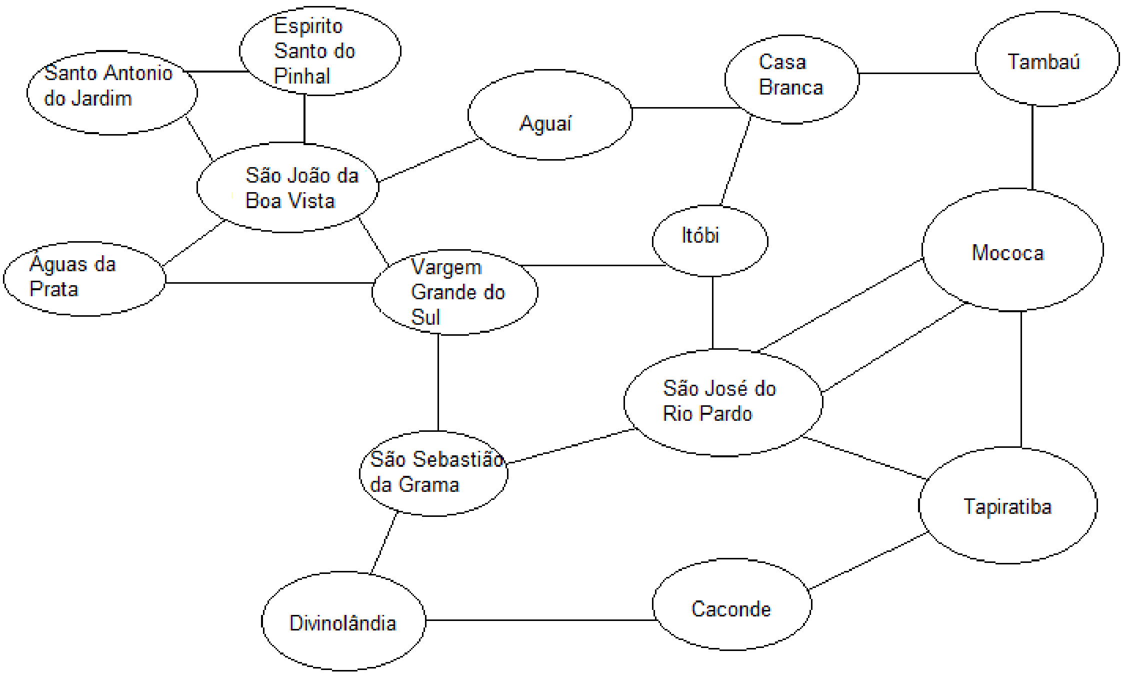
Ano: 2 º ano do Ensino Médio

Nome do Aluno:____

Problemas sobre Transito

Objetivo dessa atividade é encontrar soluções para os problemas propostos, usando para isso os conhecimentos de contagem e a observação e dedução das informações que os desafios oferecem.

O esboço a seguir é uma representação dos quinze municípios pertencentes a Diretoria Regional de Ensino de São João da Boa Vista e as principais rodovias que “ligam” entre si esses municípios.



Desafio I: O Professor João, deseja sair de Santo Antônio do Jardim e chegar em Tapiratiba, passando por Vargem Grande do Sul, por favor, sugira um caminho ***viável*** para ele. Faça o percurso com um lápis sobre o esboço. Como seria o caminho que você sugeriu? Descreva as cidades por onde ele deve passar.

____

____

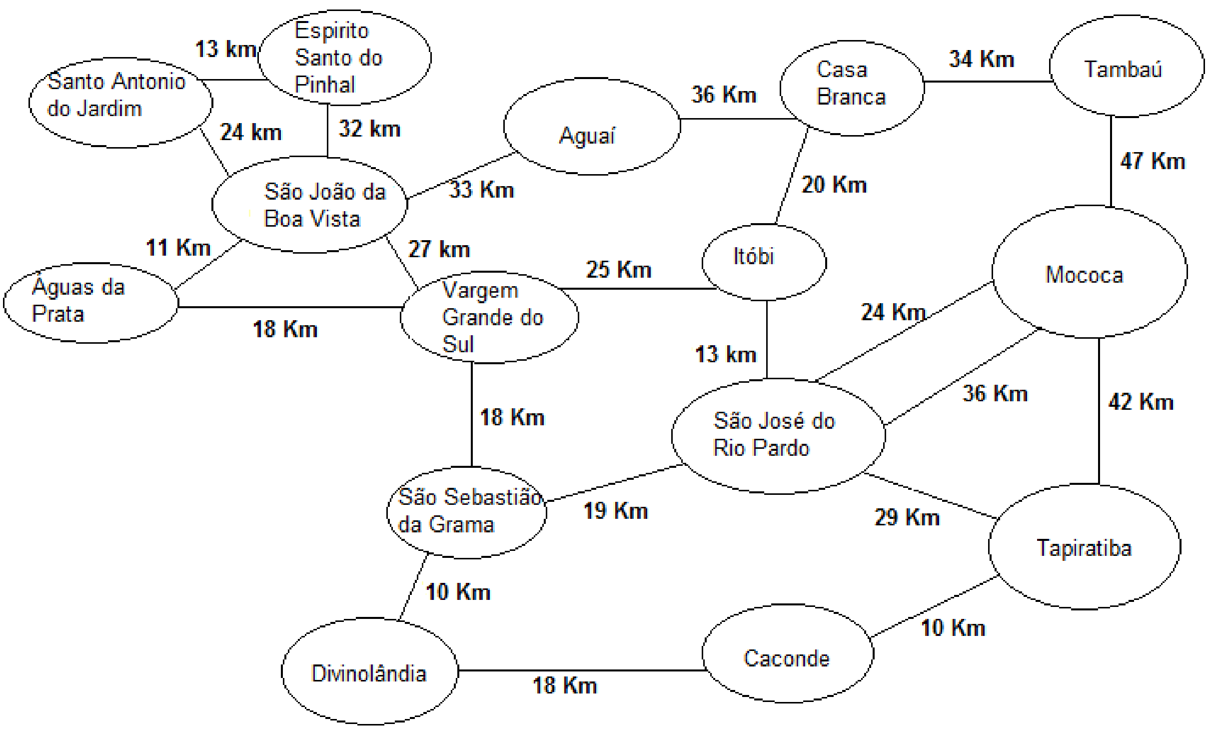
____

Compare seu caminho como dos seus colegas e verifique se alguém sugeriu o mesmo que o seu.

Você verificou que na sala houve alguns trajetos diferentes, assim quantos trajetos existem no total? Pense um pouco....

Resolução:

Agora o Professor João, deseja saber qual seria o menor caminho, e para isso temos um esboço com as distâncias aproximadas entre as cidades.



Qual seria o menor caminho de Santo Antônio do Jardim até Tapiratiba, passando por Vargem Grande do Sul? Faça com o lápis o trajeto sobre o mapa.

Descreva como você encontrou essa solução.

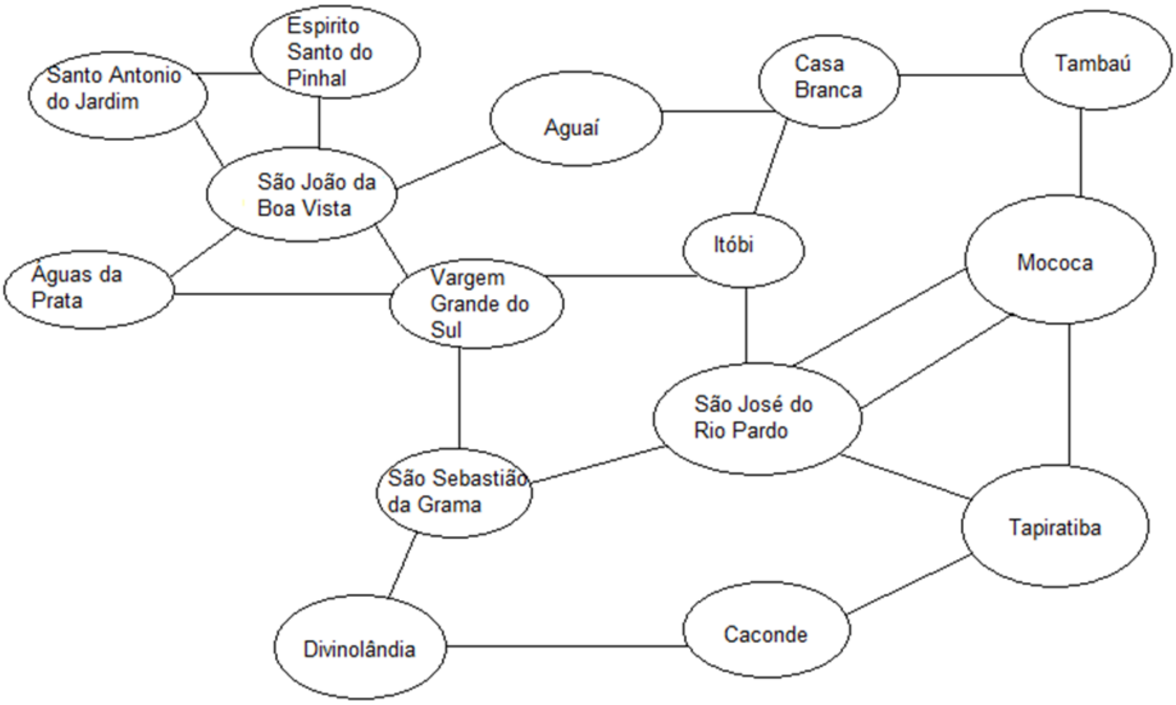
____

____

____

____

Desafio II: O Professor João se deparou com uma pergunta: É possível sair de São João da Boa Vista passar por todas as rodovias ***somente uma vez em cada uma*** e retornar para São João? Tente fazendo possíveis trajetos com o lápis sobre o mapa.



Veja que nesse desafio pode se passar mais de uma vez por alguns municípios, mas apenas uma vez em cada rodovia.

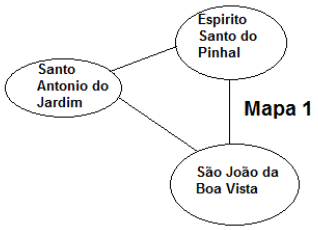
Parece que não é possível. Mas por que?

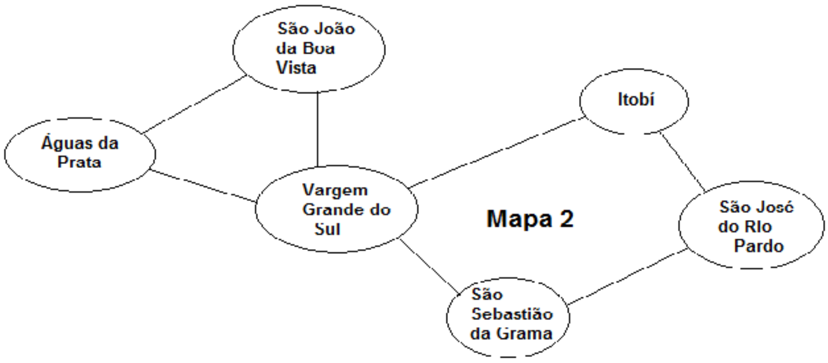
____

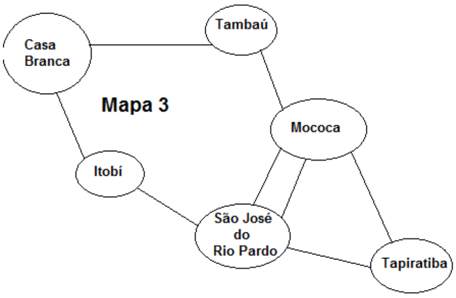
____

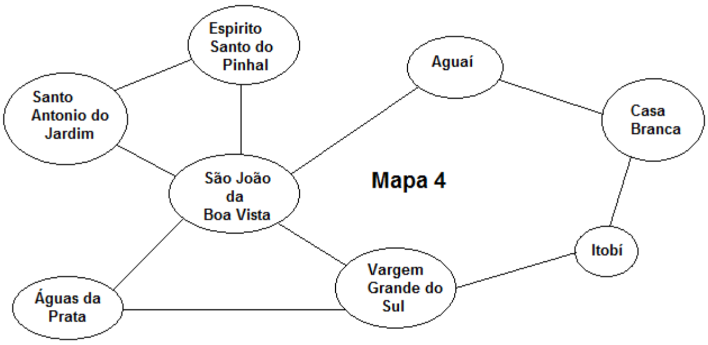
Para resolver esse problema vamos resolver problemas menores, mas com o mesmo desafio.

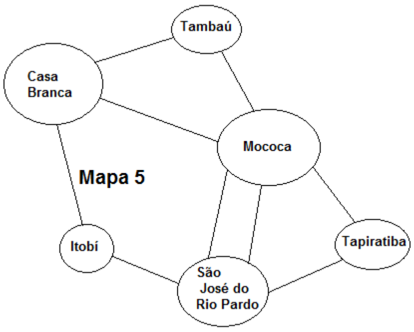
Nos mapas abaixo veja em quais você ***consegue sair de uma cidade e voltar na mesma passando apenas uma vez em cada rodovia***. Faça o trajeto com o lápis sobre os mapas.

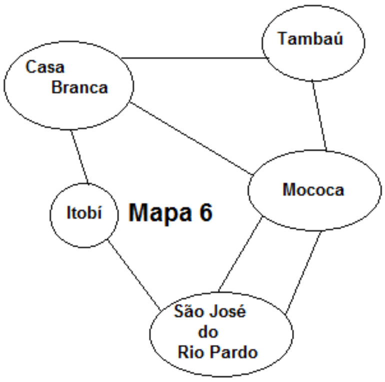


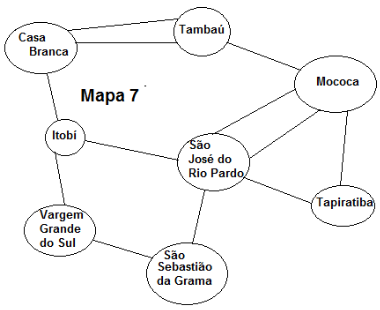


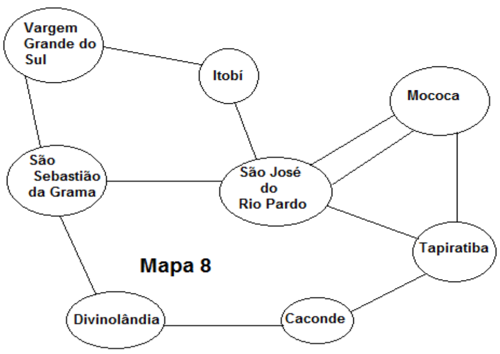












Em quais mapas você conseguiu sair de uma cidade e retornar nela?

____

Tente nos outros mapas sair de uma cidade e chegar em outra passando apenas uma vez em cada rodovia. Em quais mapas você conseguiu?

____

Quais mapas sobraram? Mapas em que não foi possível fazer nenhuma das duas opções acima?

____

Vamos tentar entender porque isso é possível? Coloque em cada cidade de cada mapa o número de rodovias que sai ou chega em cada cidade. Faça isso nos próprios mapas mesmo.

Nos mapas em que foi possível sair de uma cidade e voltar nela mesma, que tipo de números (todos eles) representam as quantidades de rodovias de cada cidade?

( ) Pares ou ( ) Ímpares

Nos mapas em que foi possível sair de uma cidade e chegar em outra, no máximo quantas cidades com números impares de rodovia existem?

____

Assim, escreva com suas palavras, qual deve ser o tipo de número de quantidade de rodovias que cada cidade deve ter para que seja possível em um mapa: ***sair de uma cidade e retornar nela mesma, passando apenas uma vez em cada rodovia.***

____

____

____

____

____

E agora escreva com suas palavras qual dever a quantidade máxima de cidades com número ímpar de quantidade de rodovias, que um mapa deve ter para que seja possível: ***sair de uma cidade e chegar em outra, passando apenas uma vez em cada rodovia***.

____

____

____

____

Assim com essas informações diga, para o Professor João, se é possível sair de São João e retornar, passando apenas uma vez por cada rodovia? Escreva o porquê.

____

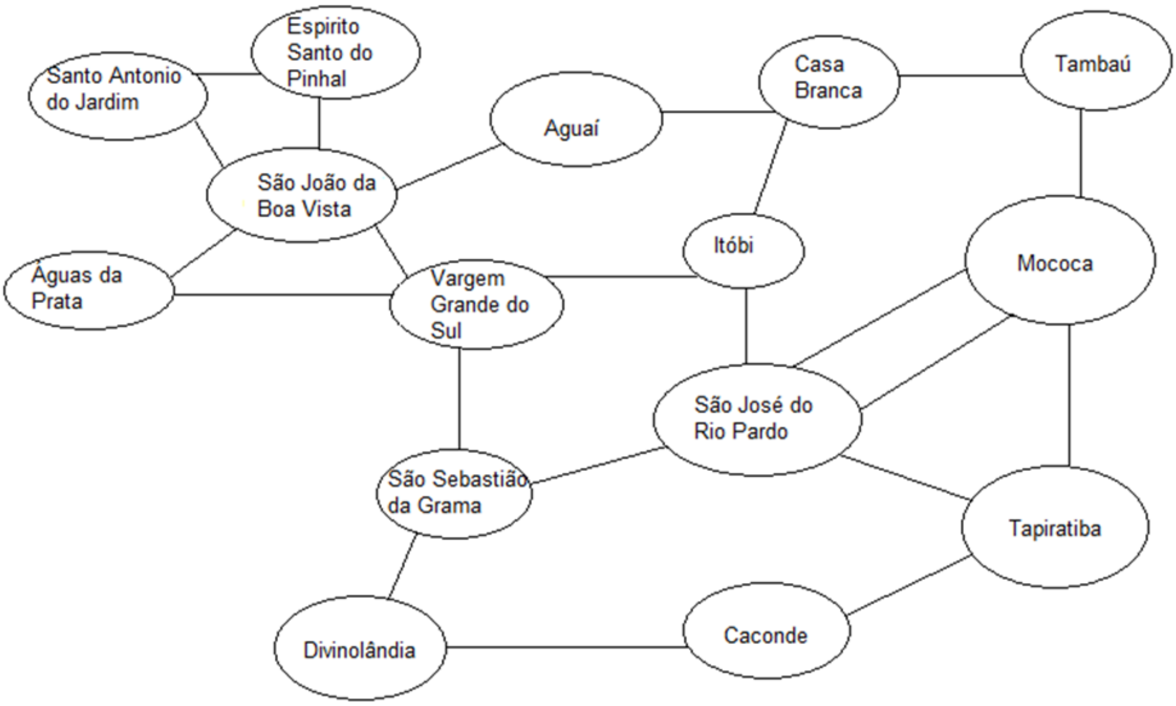
____

____

____

____

Utilize o mapa abaixo para ajudar a responder, colocando o número de rodovias que cada cidade têm.



Foi relativamente fácil resolver esses desafios, e agora se fosse o mapa de todas as rodovias do estado de São Paulo? Seria possível sair de alguma cidade paulista passar em todas as rodovias, apenas uma vez em cada, e retornar para essa cidade ou chegar em outra?

Atividades

Escola Estadual: Domingos Teodoro de Oliveira Azevedo

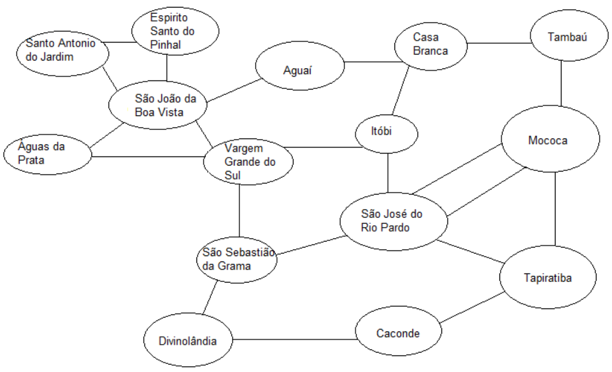
Ano: 2 º ano do Ensino Médio

Alunos:____

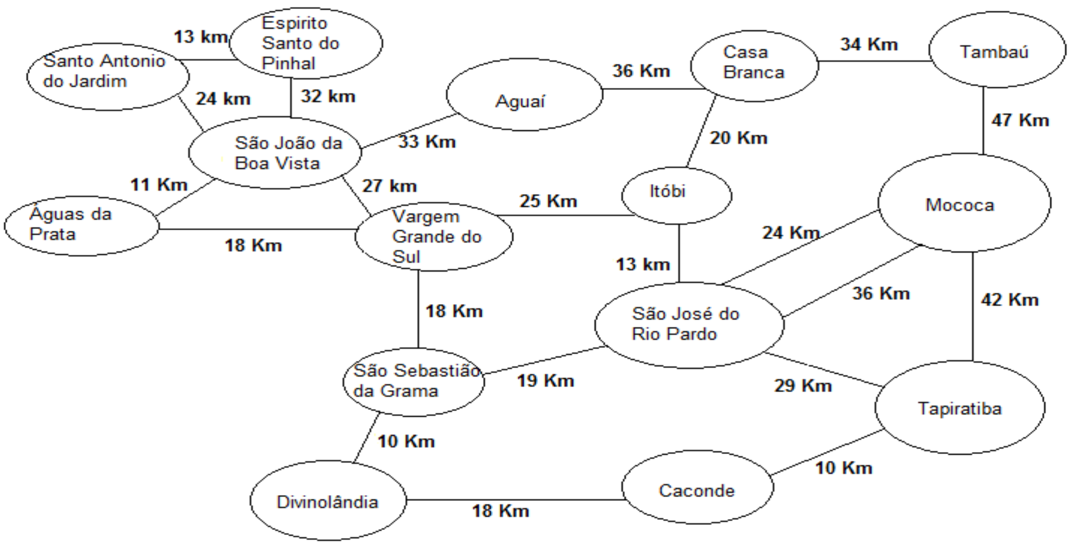
Problemas sobre Transito

Objetivo dessa atividade é encontrar soluções para os problemas propostos, usando para isso os conhecimentos de contagem e a observação e dedução das informações que os desafios oferecem.

O esboço a seguir é uma representação dos quinze municípios pertencentes a Diretoria Regional de Ensino de São João da Boa Vista e as principais rodovias que “ligam” entre si esses municípios.



O Professor João, deseja saber qual seria o menor caminho, e para isso temos um esboço com as distâncias aproximadas entre as cidades.



Qual seria o menor caminho de Santo Antônio do Jardim até Tapiratiba, passando por Vargem Grande do Sul? Faça com o lápis o trajeto sobre o mapa e encontre o caminho otimizado. (Endenta otimizado como o menor e melhor trajeto)

Descreva como você encontrou essa solução.

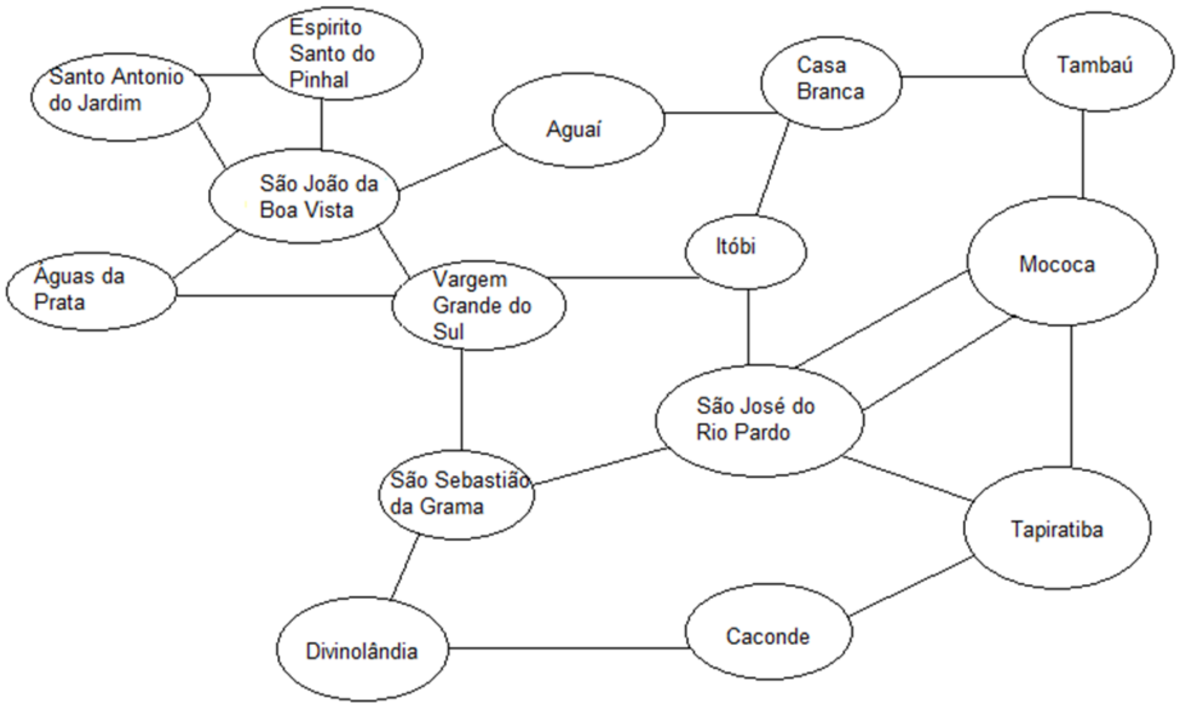
____

____

____

____

O Professor João se deparou com uma pergunta: É possível sair de São João da Boa Vista passar por todas as rodovias ***somente uma vez em cada uma*** e retornar para São João? Tente fazendo possíveis trajetos com o lápis sobre o mapa.



Veja que nesse desafio pode se passar mais de uma vez por alguns municípios, mas apenas uma vez em cada rodovia.

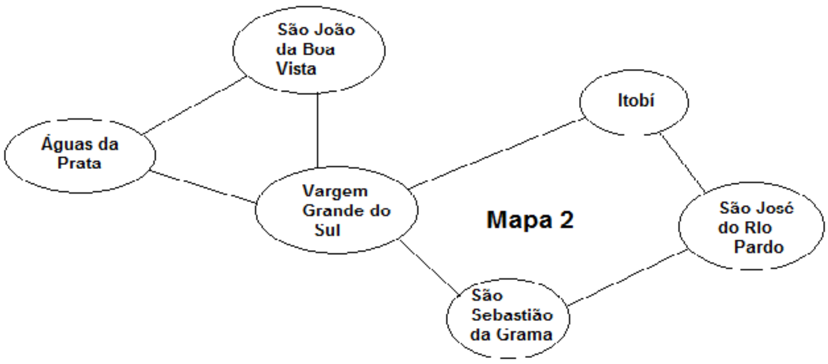
Parece que não é possível. Mas por que?

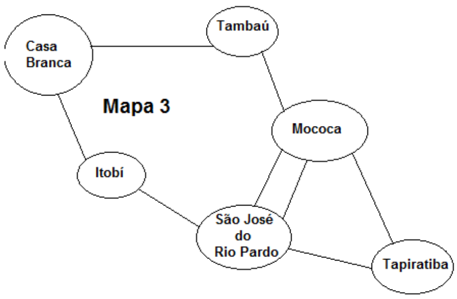
____

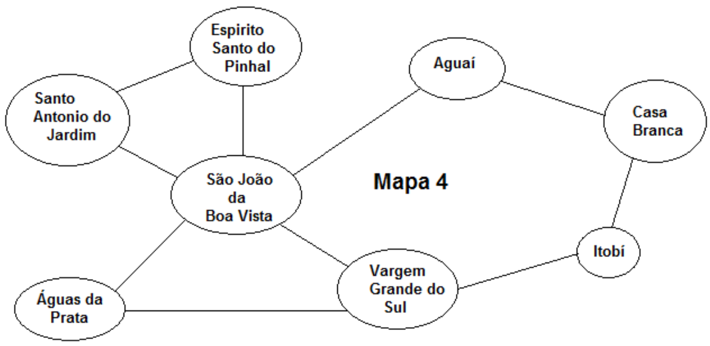
____

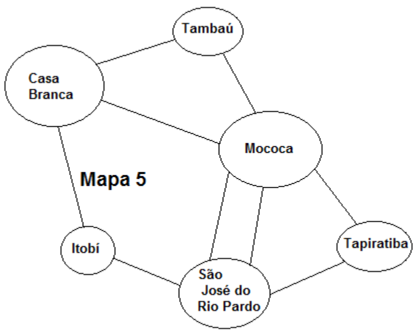
Para resolver esse problema vamos resolver problemas menores, mas com o mesmo desafio.

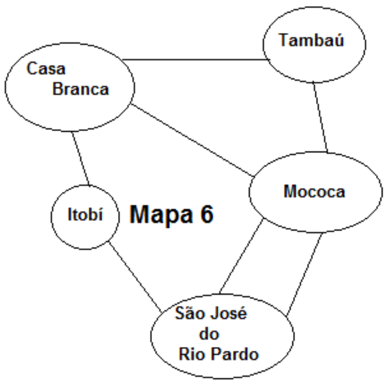
Nos mapas abaixo veja em quais você ***consegue sair de uma cidade e voltar na mesma passando apenas uma vez em cada rodovia***. Faça o trajeto com o lápis sobre os mapas.

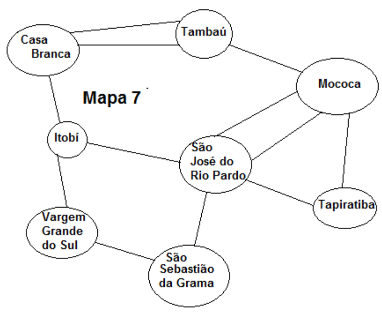


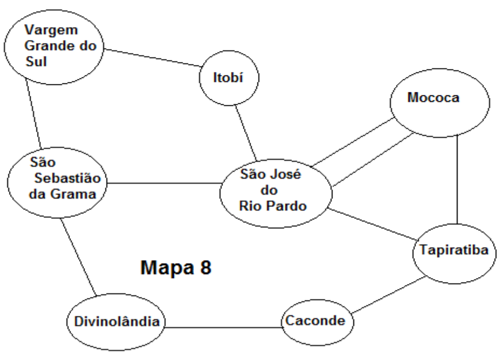












Em quais mapas você conseguiu sair de uma cidade e retornar nela?

____

Tente nos outros mapas sair de uma cidade e chegar em outra passando apenas uma vez em cada rodovia. Em quais mapas você conseguiu?

____

Quais mapas sobraram? Mapas em que não foi possível fazer nenhuma das duas opções acima?

____

Vamos tentar entender porque isso é possível? Coloque em cada cidade de cada mapa o número de rodovias que sai ou chega em cada cidade. Faça isso nos próprios mapas mesmo.

Nos mapas em que foi possível sair de uma cidade e voltar nela mesma, que tipo de números (todos eles) representam as quantidades de rodovias de cada cidade?

( ) Pares ou ( ) Ímpares

Nos mapas em que foi possível sair de uma cidade e chegar em outra, no máximo quantas cidades com números impares de rodovia existem?

____

Assim, escreva com suas palavras, qual deve ser o tipo de número de quantidade de rodovias que cada cidade deve ter para que seja possível em um mapa: ***sair de uma cidade e retornar nela mesma, passando apenas uma vez em cada rodovia.***

____

____

____

____

____

E agora escreva com suas palavras qual dever a quantidade máxima de cidades com número ímpar de quantidade de rodovias, que um mapa deve ter para que seja possível: ***sair de uma cidade e chegar em outra, passando apenas uma vez em cada rodovia***.

____

____

____

____

Assim com essas informações diga, para o Professor João, se é possível sair de São João e retornar, passando apenas uma vez por cada rodovia? Escreva o porquê.

____

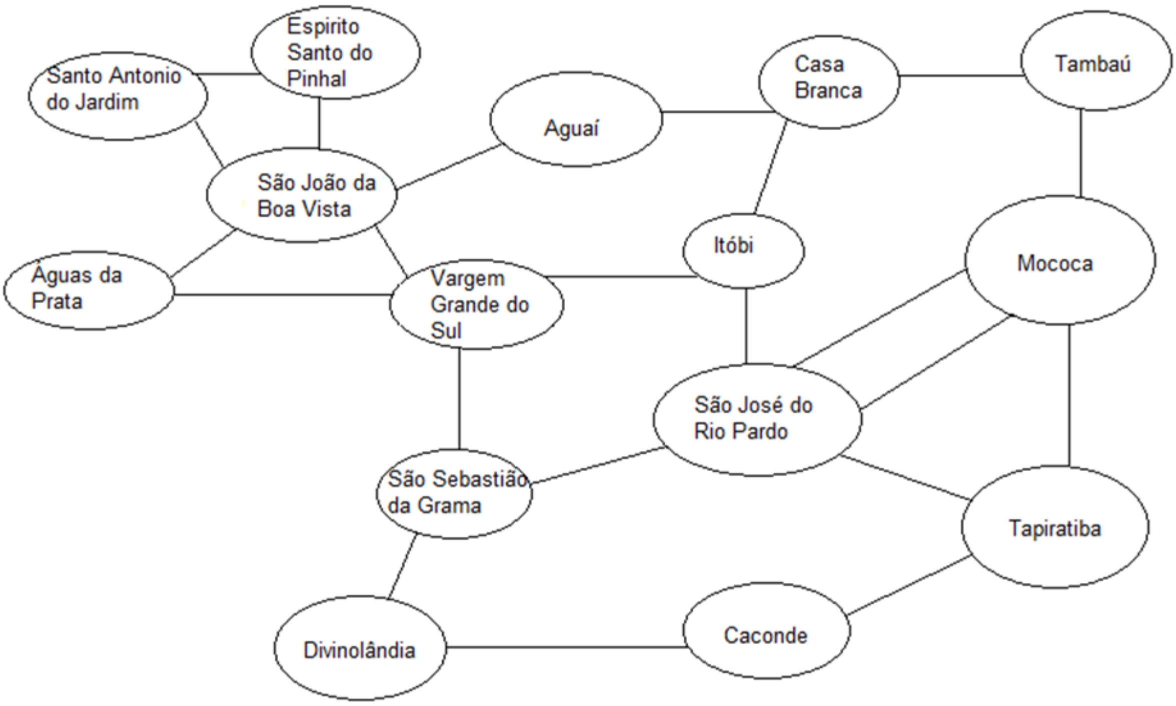
____

____

____

____

Utilize o mapa abaixo para ajudar a responder, colocando o número de rodovias que cada cidade têm.



Foi relativamente fácil resolver esses desafios, e agora se fosse o mapa de todas as rodovias do estado de São Paulo? Seria possível sair de alguma cidade paulista passar em todas as rodovias, apenas uma vez em cada, e retornar para essa cidade ou chegar em outra?

Atividades

Escola Estadual: Domingos Teodoro de Oliveira Azevedo

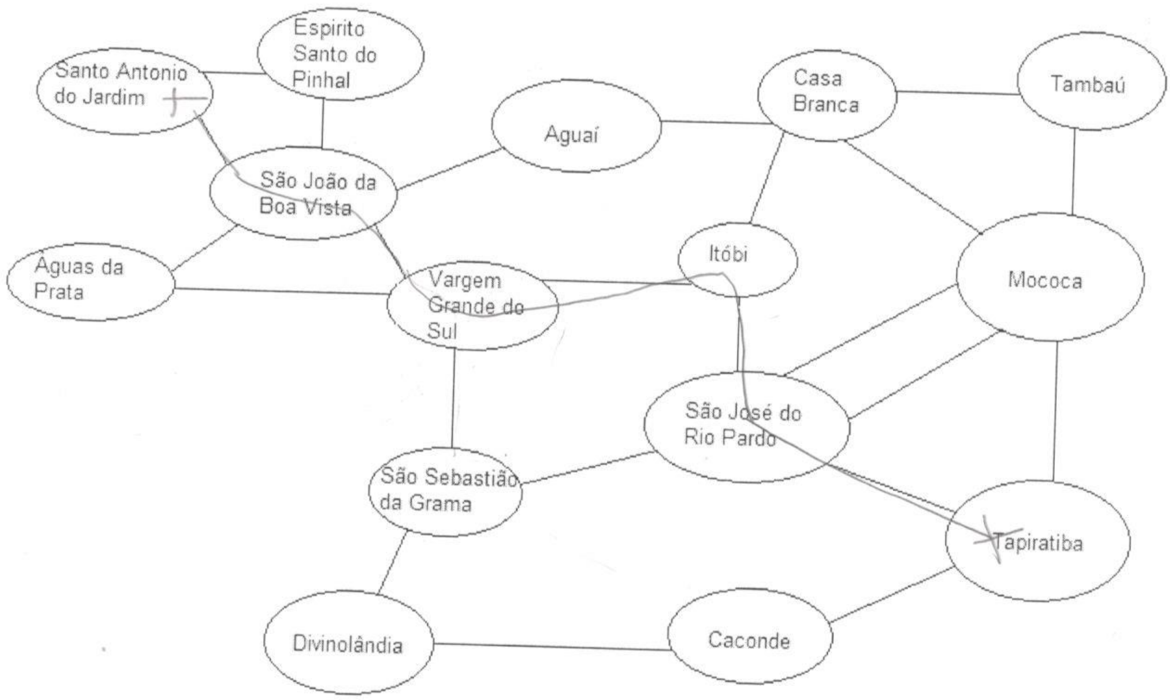
Ano: 2 º ano___do Ensino Médio

Nomes dos Alunos: Juan, Jeniffer, Fernanda, Luis Gustavo

Problemas sobre Transito

Objetivo dessa atividade é encontrar soluções para os problemas propostos, usando para isso os conhecimentos de contagem e a observação e dedução das informações que os desafios oferecem.

O esboço a seguir é uma representação dos quinze municípios pertencentes a Diretoria Regional de Ensino de São João da Boa Vista e as principais rodovias que "ligam" entre si esses municípios.



Desafio I: O Professor João, deseja sair de Santo Antônio do Jardim e chegar em Tapiratiba, passando por Vargem Grande do Sul, por favor, sugira um caminho ***viável*** para ele. Faça o percurso com um lápis sobre o esboço. Como seria o caminho que você sugeriu? Descreva as cidades por onde ele deve passar.

Sai de Santo Antonio e passa di São João, Vargem, Itóbi, São José e chega Tapiratiba

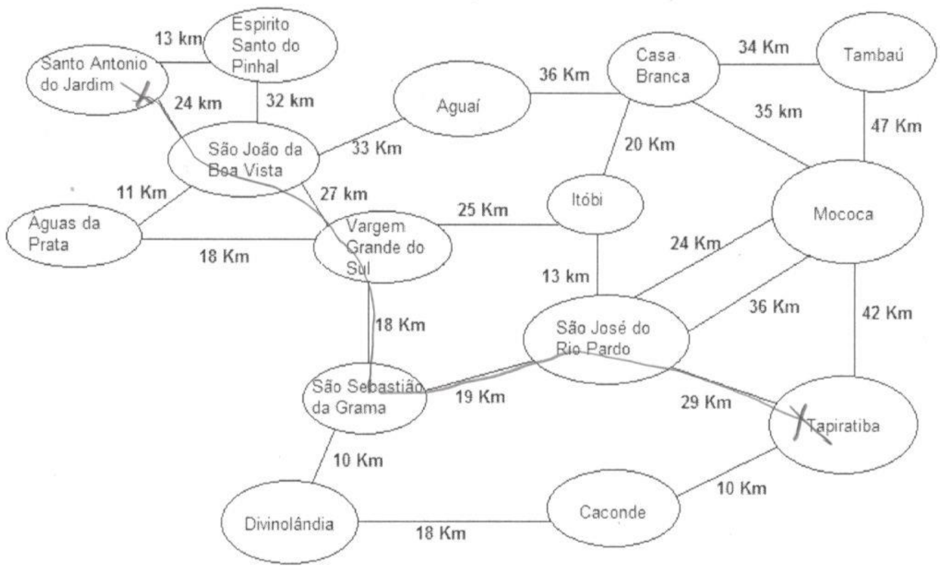
Compare seu caminho como dos seus colegas e verifique se alguém sugeriu o mesmo que o seu.

Você verificou que na sala houve alguns trajetos diferentes, assim quantos trajetos

Resolução: Encontramos dois caminhos vários.

existem no total? Pense um pouco....

Agora o Professor João, deseja saber qual seria o menor caminho, e para isso temos um esboço com as distâncias aproximadas entre as cidades.

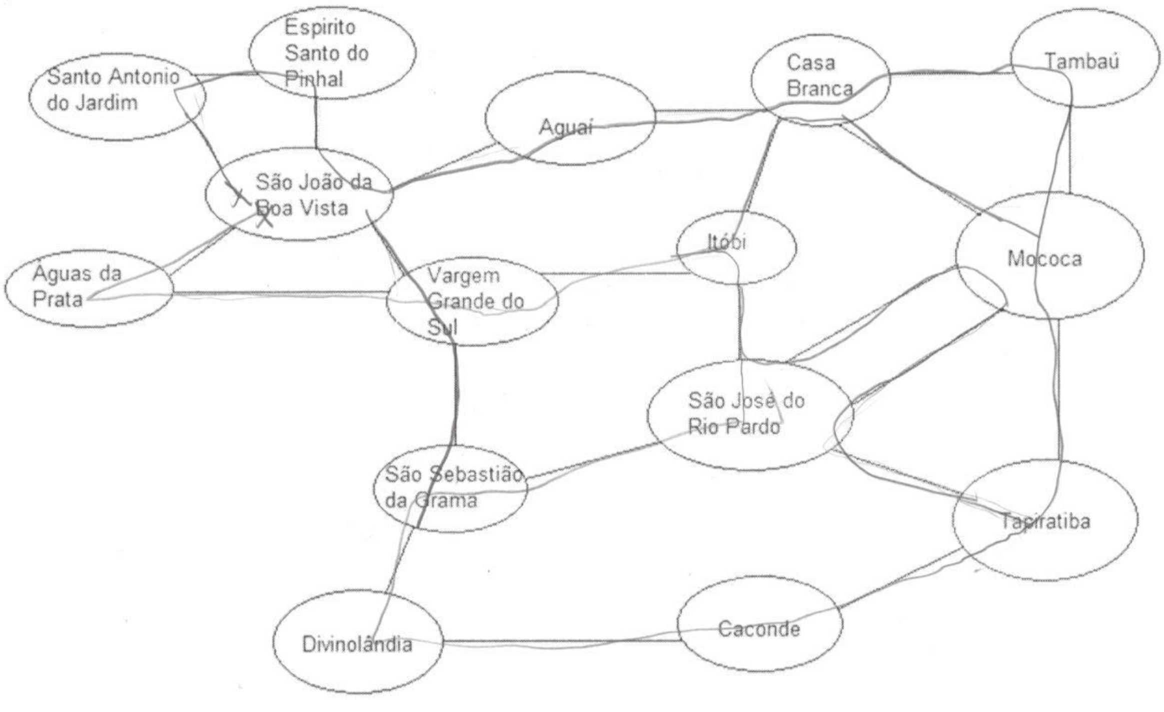


Qual seria o menor caminho de Santo Antônio do Jardim até Tapiratiba, passando por Vargem Grande do Sul? Faça com o lápis o trajeto sobre o mapa.

Descreva como você encontrou essa solução.

Santo Antonio, São João, Vargem, São Sebastião, São José, Tapiratiba.

Desafio II: O Professor João se deparou com uma pergunta: É possível sair de São João da Boa Vista passar por todas as rodovias ***somente uma vez em cada uma*** e retornar para São João? Tente fazendo possíveis trajetos com o lápis sobre o mapa.



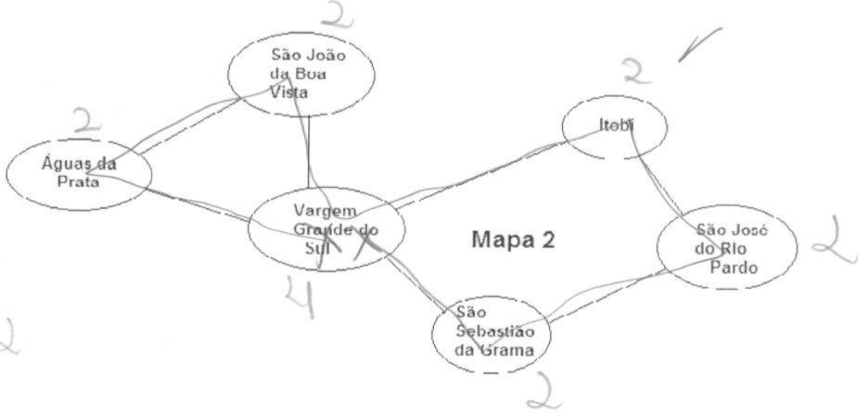
Veja que nesse desafio pode se passar mais de uma vez por alguns municípios, mas apenas uma vez em cada rodovia.

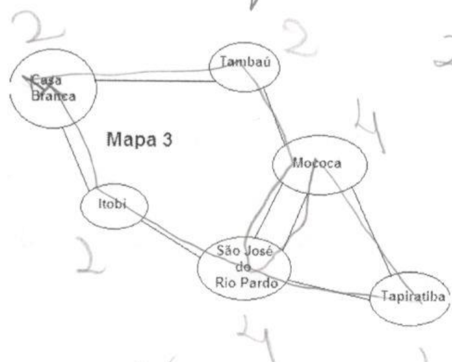
Parece que não é possível. Mas por que?

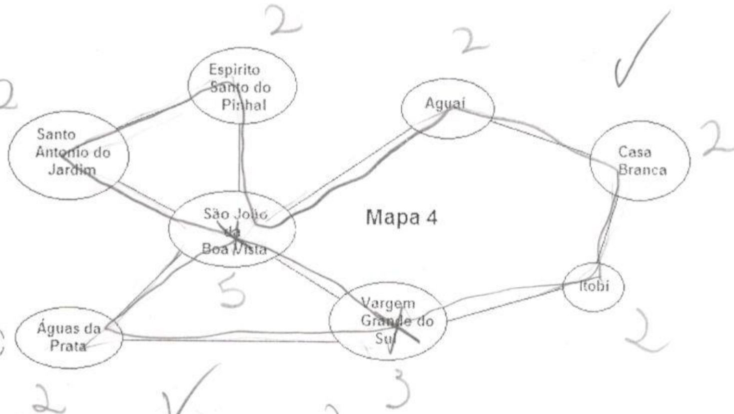
Porque não tem como passar apenas uma vez em cada rodovia.

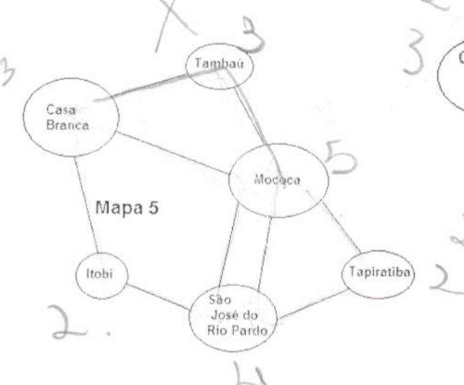
Para resolver esse problema vamos resolver problemas menores, mas com o mesmo desafio.

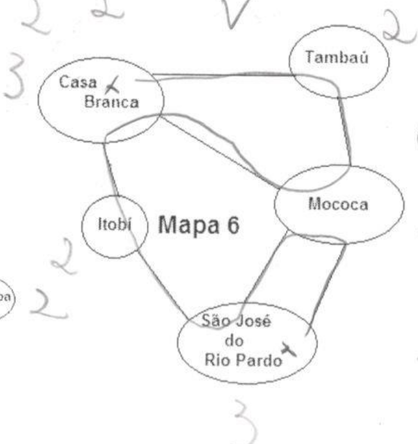
Nos mapas abaixo veja em quais você ***consegue sair de uma cidade e voltar na mesma passando apenas uma vez em cada rodovia***. Faça o trajeto com o lápis sobre os mapas.

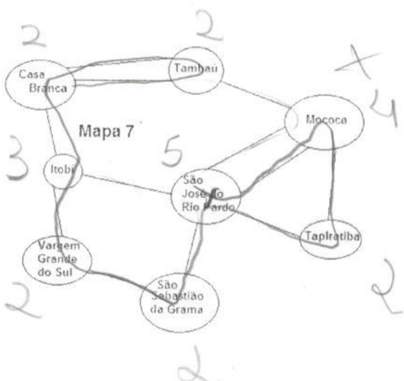


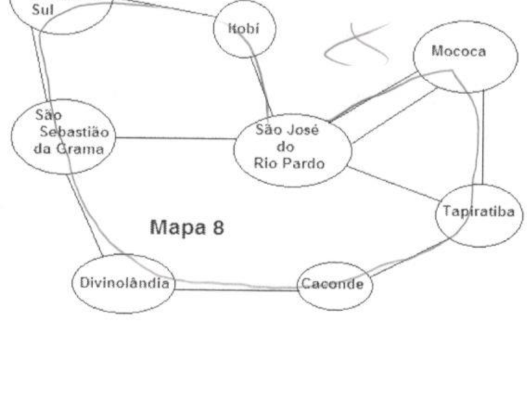












Em quais mapas você conseguiu sair de uma cidade e retornar nela?

Mapa 1, 2, 3.

Tente nos outros mapas sair de uma cidade e chegar em outra passando apenas uma vez em cada rodovia. Em quais mapas você conseguiu?

Mapa 3, 4, 5, 6

Quais mapas sobraram? Mapas em que não foi possível fazer nenhuma das duas opções acima?

Mapa 7, 8

Vamos tentar entender porque isso é possível? Coloque em cada cidade de cada mapa o número de rodovias que sai ou chega em cada cidade. Faça isso nos próprios mapas mesmo.

Nos mapas em que foi possível sair de uma cidade e voltar nela mesma, que tipo de números (todos eles) representam as quantidades de rodovias de cada cidade?

(X) Pares ou ( ) Ímpares

Nos mapas em que foi possível sair de uma cidade e chegar em outra, no máximo quantas cidades com números impares de rodovia existem?

Assim, escreva com suas palavras, qual deve ser o tipo de número de quantidade de rodovias que cada cidade deve ter para que seja possível em um mapa: ***sair de uma cidade e retornar nela mesma, passando apenas uma vez em cada rodovia.***

Todas as cidades devem ter o numero par

E agora escreva com suas palavras qual dever a quantidade máxima de cidades com número ímpar de quantidade de rodovias, que um mapa deve ter para que seja possível: ***sair de uma cidade e chegar em outra, passando apenas uma vez em cada rodovia***.

Deve ter pelo menos 2 cidade impares

Assim com essas informações diga, para o Professor João, se é possível sair de São João e retornar, passando apenas uma vez por cada rodovia? Escreva o porquê.

Não, porque a cidade de são joão e uma cidade impar.

Utilize o mapa abaixo para ajudar a responder, colocando o número de rodovias que cada cidade têm.

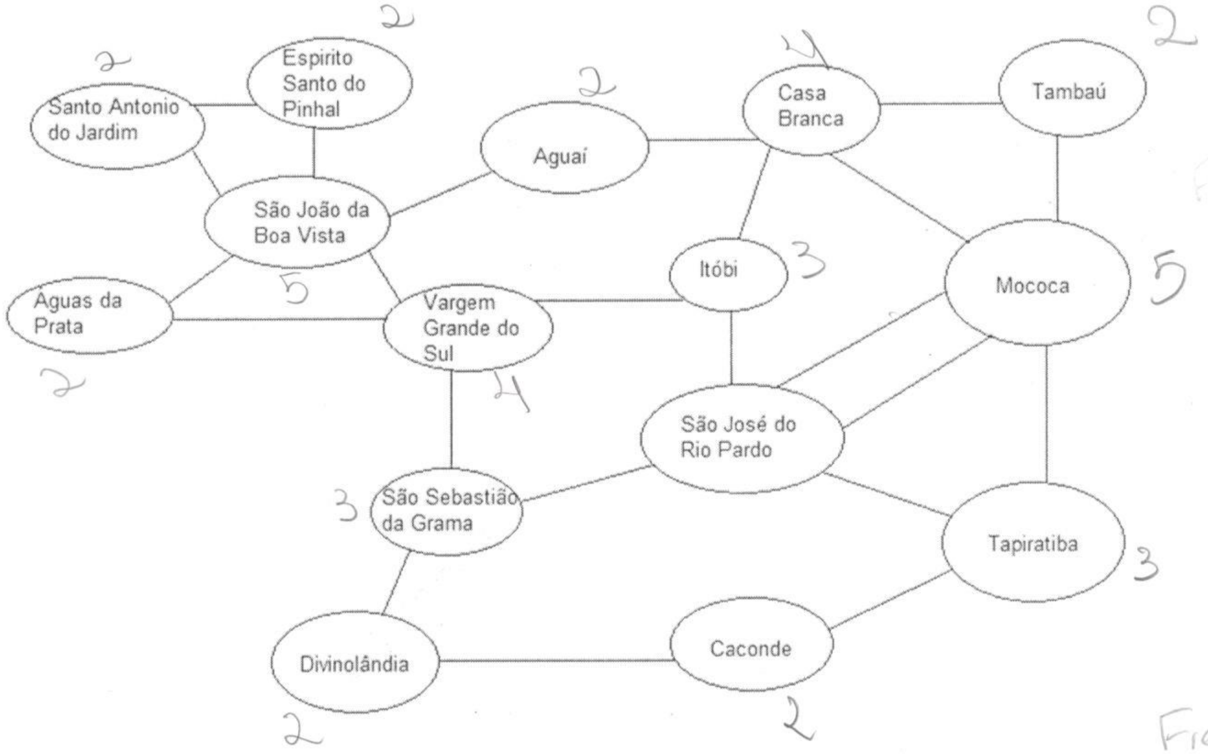


Figura 34

Foi relativamente fácil resolver esses desafios, e agora se fosse o mapa de todas as rodovias do estado de São Paulo? Seria possível sair de alguma cidade paulista passar em todas as rodovias, apenas uma vez em cada, e retornar para essa cidade ou chegar em outra?

Atividades

Escola Estadual: Domingos Teodoro de Oliveira Azevedo

Ano: 2 º ano B do Ensino Médio

Nomes dos Alunos: Amanda, Molly, Josi Vinicius, Ludmila e Vitória Maria

Problemas sobre Transito

Objetivo dessa atividade é encontrar soluções para os problemas propostos, usando para isso os conhecimentos de contagem e a observação e dedução das informações que os desafios oferecem.

O esboço a seguir é uma representação dos quinze municípios pertencentes a Diretoria Regional de Ensino de São João da Boa Vista e as principais rodovias que "ligam" entre si esses municípios.

Desafio I: O Professor João, deseja sair de Santo Antônio do Jardim e chegar em Tapiratiba, passando por Vargem Grande do Sul, por favor, sugira um caminho ***viável*** para ele. Faça o percurso com um lápis sobre o esboço. Como seria o caminho que você sugeriu? Descreva as cidades por onde ele deve passar.

Santo Antônio do Jardim; São João, Vargem; São Sebastião da Grama, São José e Tapiratiba.

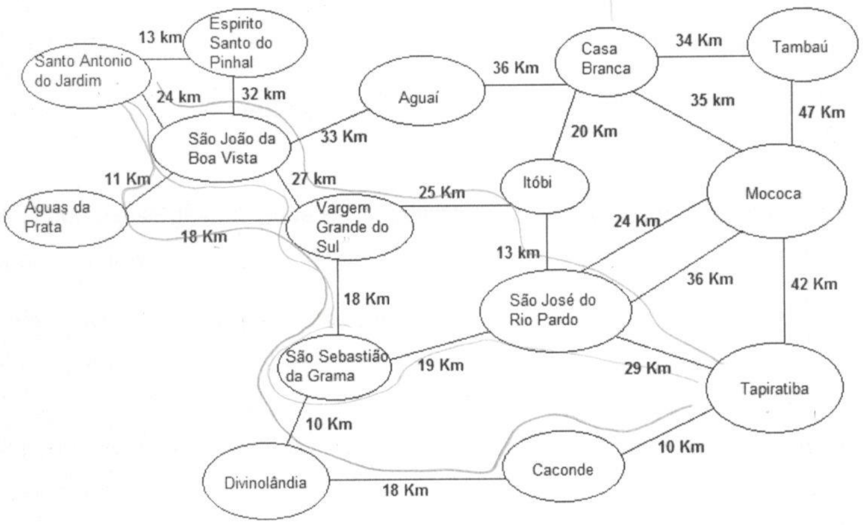
Compare seu caminho como dos seus colegas e verifique se alguém sugeriu o mesmo que o seu.

Você verificou que na sala houve alguns trajetos diferentes, assim quantos trajetos existem no total? Pense um pouco....

Resolução:

24
18
11
18
10
18
10
109 Km.

Agora o Professor João, deseja saber qual seria o menor caminho, e para isso temos um esboço com as distâncias aproximadas entre as cidades.



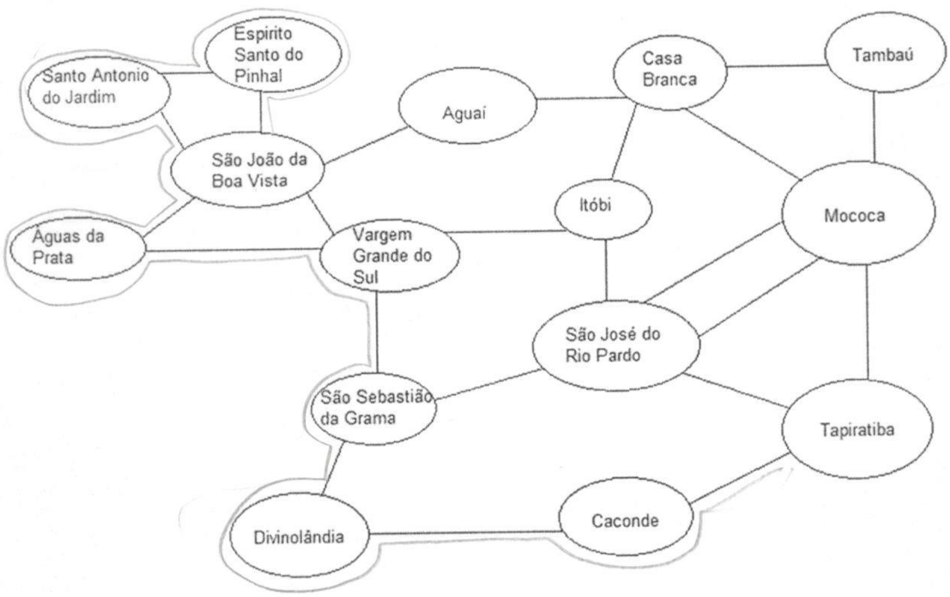
Qual seria o menor caminho de Santo Antônio do Jardim até Tapiratiba, passando por Vargem Grande do Sul? Faça com o lápis o trajeto sobre o mapa.

Descreva como você encontrou essa solução.

109 km

Santo Antônio do Jardim, São João, Águas da Prata, Vargem, São Sebastião, Divinolândia, Caconde e Tapiratiba.

Desafio II: O Professor João se deparou com uma pergunta: É possível sair de São João da Boa Vista passar por todas as rodovias ***somente uma vez em cada uma*** e retornar para São João? Tente fazendo possíveis trajetos com o lápis sobre o mapa.



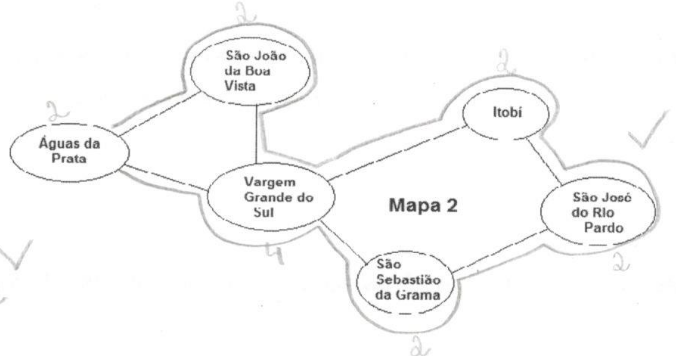
Veja que nesse desafio pode se passar mais de uma vez por alguns municípios, mas apenas uma vez em cada rodovia.

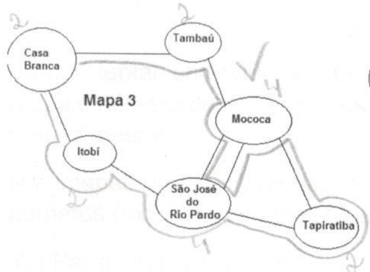
Parece que não é possível. Mas por que?

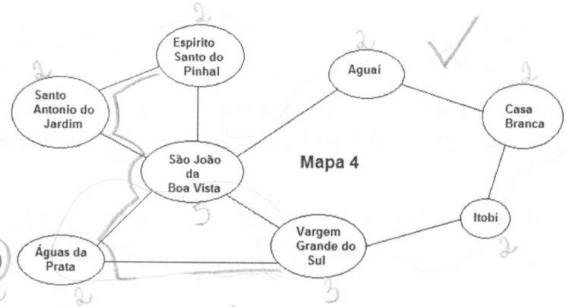
porque não tem como passar em todas as rodovias sem que as repitam.

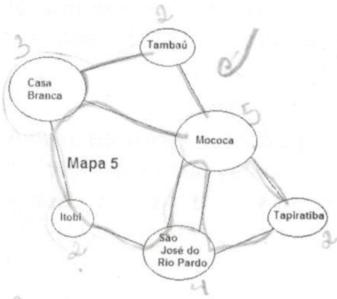
Para resolver esse problema vamos resolver problemas menores, mas com o mesmo desafio.

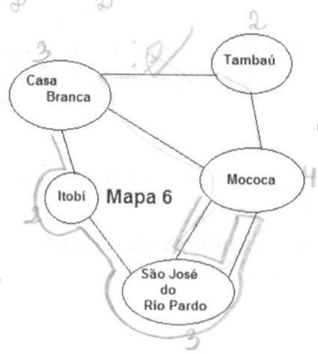
Nos mapas abaixo veja em quais você ***consegue sair de uma cidade e voltar na mesma passando apenas uma vez em cada rodovia***. Faça o trajeto com o lápis sobre os mapas.

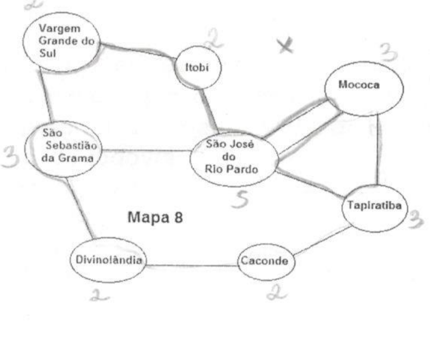












Em quais mapas você conseguiu sair de uma cidade e retornar nela?

1, 2 e 3

Tente nos outros mapas sair de uma cidade e chegar em outra passando apenas uma vez em cada rodovia. Em quais mapas você conseguiu?

4, 5 e 6

Quais mapas sobraram? Mapas em que não foi possível fazer nenhuma das duas opções acima?

7 e 8

Vamos tentar entender porque isso é possível? Coloque em cada cidade de cada mapa o número de rodovias que sai ou chega em cada cidade. Faça isso nos próprios mapas mesmo.

Nos mapas em que foi possível sair de uma cidade e voltar nela mesma, que tipo de números (todos eles) representam as quantidades de rodovias de cada cidade?

(X) Pares ou ( ) Ímpares

Nos mapas em que foi possível sair de uma cidade e chegar em outra, no máximo quantas cidades com números impares de rodovia existem?

2

Assim, escreva com suas palavras, qual deve ser o tipo de número de quantidade de rodovias que cada cidade deve ter para que seja possível em um mapa: ***sair de uma cidade e retornar nela mesma, passando apenas uma vez em cada rodovia.***

Todas as cidades tem que tem bastante quantidade de par.

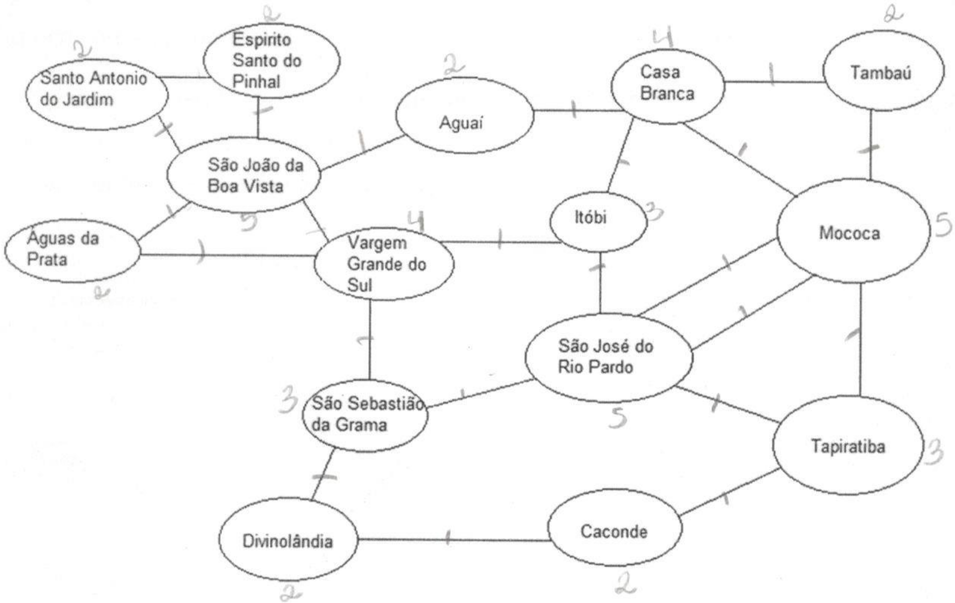
E agora escreva com suas palavras qual dever a quantidade máxima de cidades com número ímpar de quantidade de rodovias, que um mapa deve ter para que seja possível: ***sair de uma cidade e chegar em outra, passando apenas uma vez em cada rodovia***.

2 cidades tem que ter número impar

Assim com essas informações diga, para o Professor João, se é possível sair de São João e retornar, passando apenas uma vez por cada rodovia? Escreva o porquê.

Não, Porque tem mais de 2 números ímpares

Utilize o mapa abaixo para ajudar a responder, colocando o número de rodovias que cada cidade têm.



Foi relativamente fácil resolver esses desafios, e agora se fosse o mapa de todas as rodovias do estado de São Paulo? Seria possível sair de alguma cidade paulista passar em todas as rodovias, apenas uma vez em cada, e retornar para essa cidade ou chegar em outra?

Atividades

Escola Estadual: Domingos Teodoro de Oliveira Azevedo

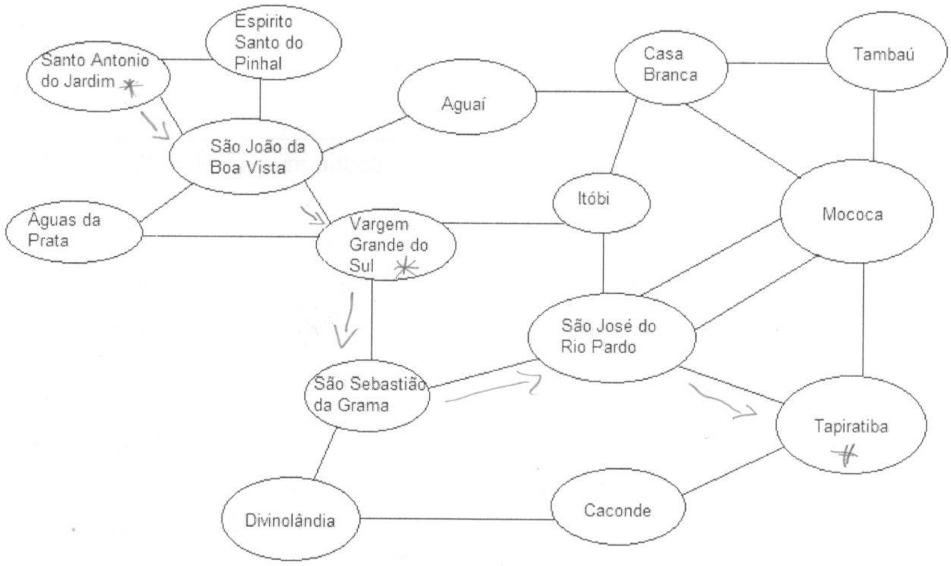
Ano: 2 º ano B do Ensino Médio

Nomes dos Alunos: Camila, Lívia, Thaís, Vitória, Zhayra

Problemas sobre Transito

Objetivo dessa atividade é encontrar soluções para os problemas propostos, usando para isso os conhecimentos de contagem e a observação e dedução das informações que os desafios oferecem.

O esboço a seguir é uma representação dos quinze municípios pertencentes a Diretoria Regional de Ensino de São João da Boa Vista e as principais rodovias que "ligam" entre si esses municípios.



Desafio I: O Professor João, deseja sair de Santo Antônio do Jardim e chegar em Tapiratiba, passando por Vargem Grande do Sul, por favor, sugira um caminho ***viável*** para ele. Faça o percurso com um lápis sobre o esboço. Como seria o caminho que você sugeriu? Descreva as cidades por onde ele deve passar.

Santo Antônio do Jardim, São João da Boa Vista, Vargem Grande do Sul, São Sebastião da Grama, São José do Rio Pardo, Tapiratiba

Compare seu caminho como dos seus colegas e verifique se alguém sugeriu o mesmo que o seu.

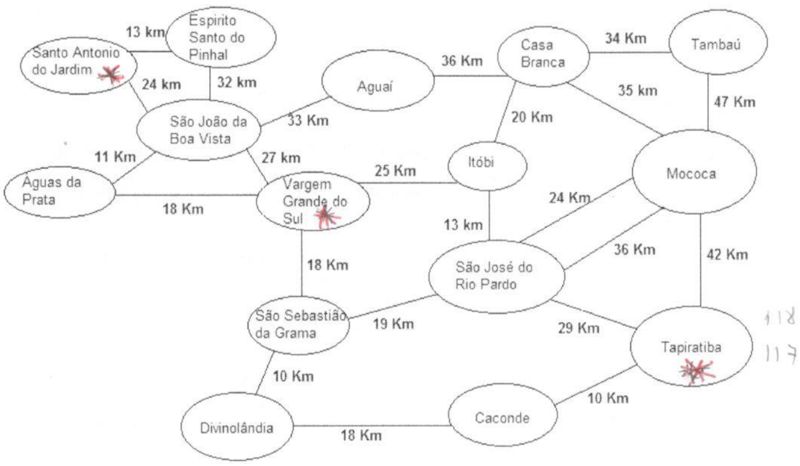
Você verificou que na sala houve alguns trajetos diferentes, assim quantos trajetos

Resolução:

Existem 7 caminhos

existem no total? Pense um pouco....

Agora o Professor João, deseja saber qual seria o menor caminho, e para isso temos um esboço com as distâncias aproximadas entre as cidades.



Qual seria o menor caminho de Santo Antônio do Jardim até Tapiratiba, passando por Vargem Grande do Sul? Faça com o lápis o trajeto sobre o mapa.

Descreva como você encontrou essa solução.

Santo Antonio -> ~~A~~ ~~Itobi~~ Tapiratiba = 117 Km

Desafio II: O Professor João se deparou com uma pergunta: É possível sair de São João da Boa Vista passar por todas as rodovias ***somente uma vez em cada uma*** e retornar para São João? Tente fazendo possíveis trajetos com o lápis sobre o mapa.

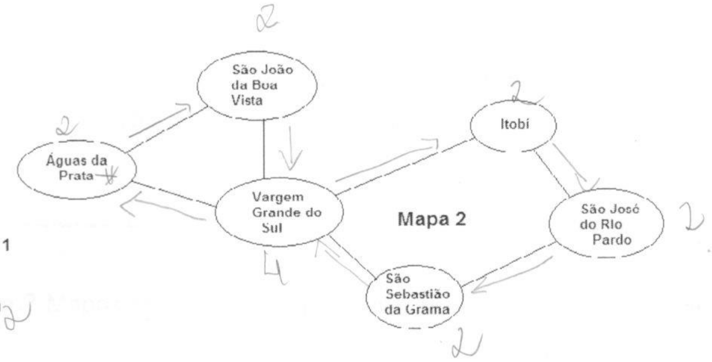
Veja que nesse desafio pode se passar mais de uma vez por alguns municípios, mas apenas uma vez em cada rodovia.

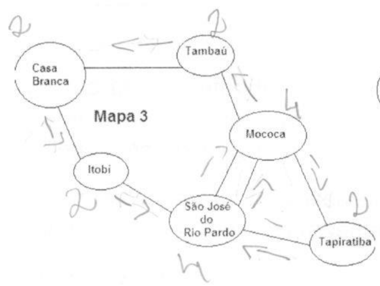
Parece que não é possível. Mas por que?

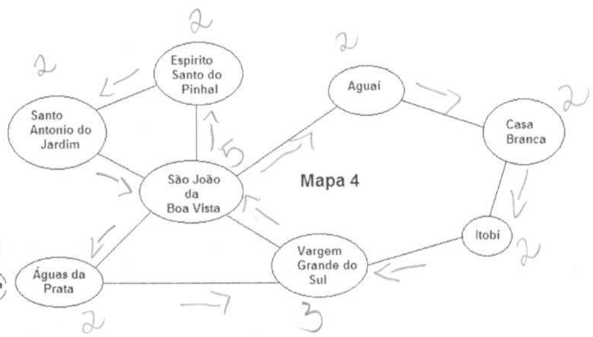
É possível

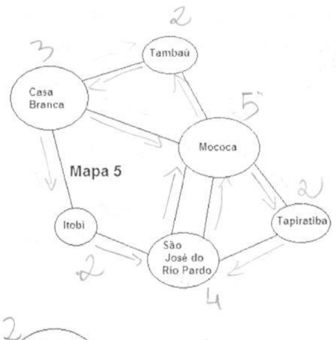
Para resolver esse problema vamos resolver problemas menores, mas com o mesmo desafio.

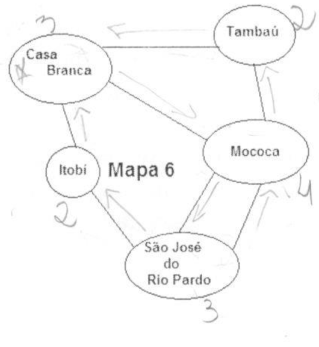
Nos mapas abaixo veja em quais você ***consegue sair de uma cidade e voltar na mesma passando apenas uma vez em cada rodovia***. Faça o trajeto com o lápis sobre os mapas.

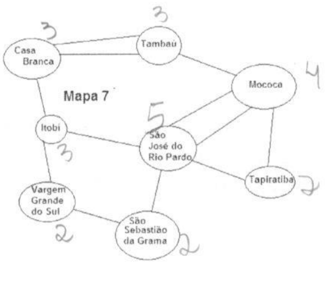


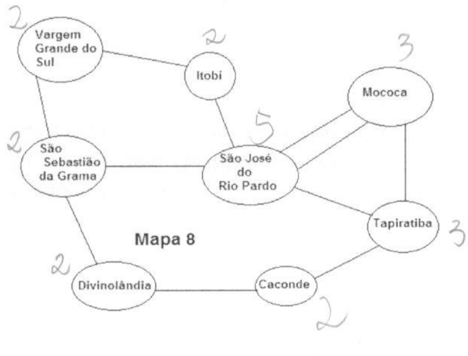












Em quais mapas você conseguiu sair de uma cidade e retornar nela?

1, 2 e 3

Tente nos outros mapas sair de uma cidade e chegar em outra passando apenas uma vez em cada rodovia. Em quais mapas você conseguiu?

4, 5 e 6

Quais mapas sobraram? Mapas em que não foi possível fazer nenhuma das duas opções acima?

7 e 8

Vamos tentar entender porque isso é possível? Coloque em cada cidade de cada mapa o número de rodovias que sai ou chega em cada cidade. Faça isso nos próprios mapas mesmo.

Nos mapas em que foi possível sair de uma cidade e voltar nela mesma, que tipo de números (todos eles) representam as quantidades de rodovias de cada cidade?

(X) Pares ou ( ) Ímpares

Figura 31

Nos mapas em que foi possível sair de uma cidade e chegar em outra, no máximo quantas cidades com números impares de rodovia existem?

2

Assim, escreva com suas palavras, qual deve ser o tipo de número de quantidade de rodovias que cada cidade deve ter para que seja possível em um mapa: ***sair de uma cidade e retornar nela mesma, passando apenas uma vez em cada rodovia.***

É preciso ter números pares

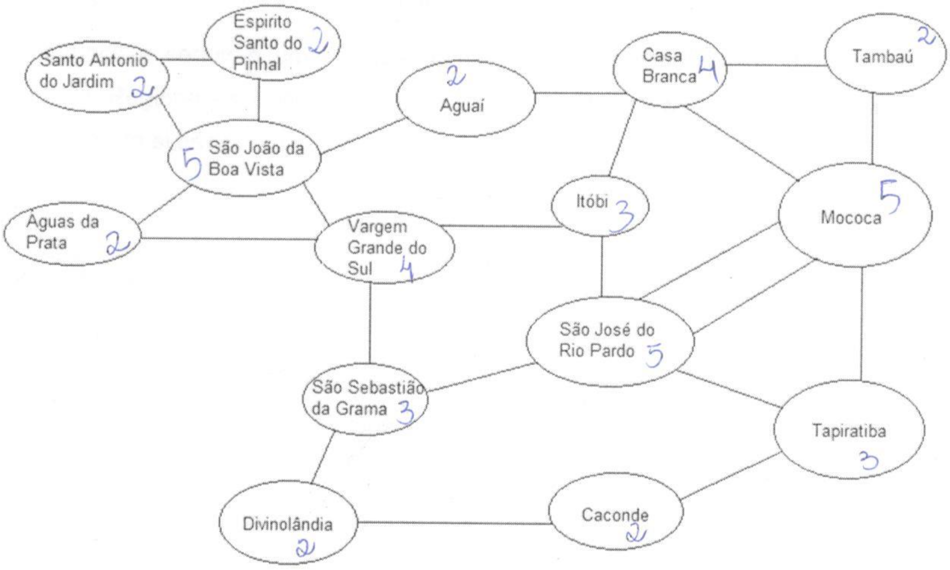
E agora escreva com suas palavras qual dever a quantidade máxima de cidades com número ímpar de quantidade de rodovias, que um mapa deve ter para que seja possível: ***sair de uma cidade e chegar em outra, passando apenas uma vez em cada rodovia***.

No máximo 2 cidades com numeros de rodovias impares

Assim com essas informações diga, para o Professor João, se é possível sair de São João e retornar, passando apenas uma vez por cada rodovia? Escreva o porquê.

Não é possível pois existem mais rodovias impares

Utilize o mapa abaixo para ajudar a responder, colocando o número de rodovias que cada cidade têm.



Foi relativamente fácil resolver esses desafios, e agora se fosse o mapa de todas as rodovias do estado de São Paulo? Seria possível sair de alguma cidade paulista passar em todas as rodovias, apenas uma vez em cada, e retornar para essa cidade ou chegar em outra?

Atividades

Escola Estadual: Domingos Teodoro de Oliveira Azevedo

Ano: 2 º ano B do Ensino Médio

Nomes dos Alunos: João Victor, Giovanna, Amanda Braz, Leonardo

Problemas sobre Transito

Objetivo dessa atividade é encontrar soluções para os problemas propostos, usando para isso os conhecimentos de contagem e a observação e dedução das informações que os desafios oferecem.

O esboço a seguir é uma representação dos quinze municípios pertencentes a Diretoria Regional de Ensino de São João da Boa Vista e as principais rodovias que "ligam" entre si esses municípios.

Desafio I: O Professor João, deseja sair de Santo Antônio do Jardim e chegar em Tapiratiba, passando por Vargem Grande do Sul, por favor, sugira um caminho ***viável*** para ele. Faça o percurso com um lápis sobre o esboço. Como seria o caminho que você sugeriu? Descreva as cidades por onde ele deve passar.

Ele deverá passar por São João da Boa Vista; Vargem Grande do Sul, Itóbi, São José R.P, Tapiratiba.

Compare seu caminho como dos seus colegas e verifique se alguém sugeriu o mesmo que o seu.

Você verificou que na sala houve alguns trajetos diferentes, assim quantos trajetos

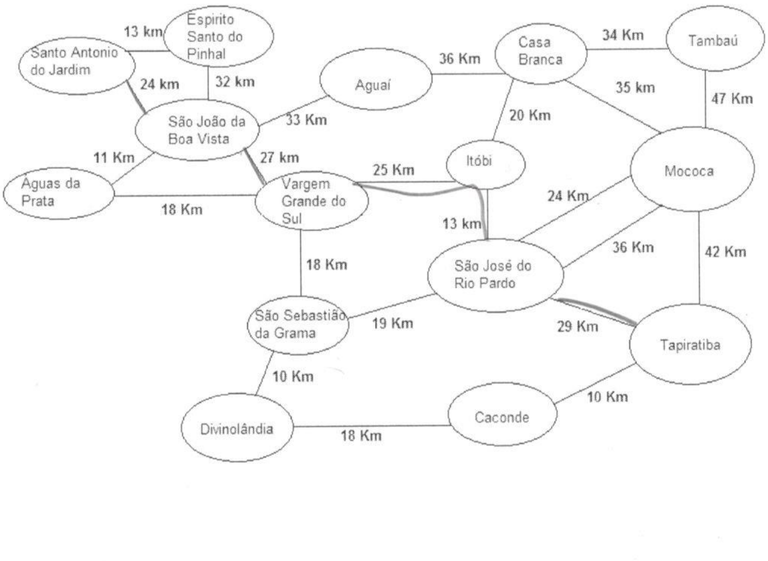
Resolução:

5 trajetos

Esse

existem no total? Pense um pouco....

Agora o Professor João, deseja saber qual seria o menor caminho, e para isso temos um esboço com as distâncias aproximadas entre as cidades.

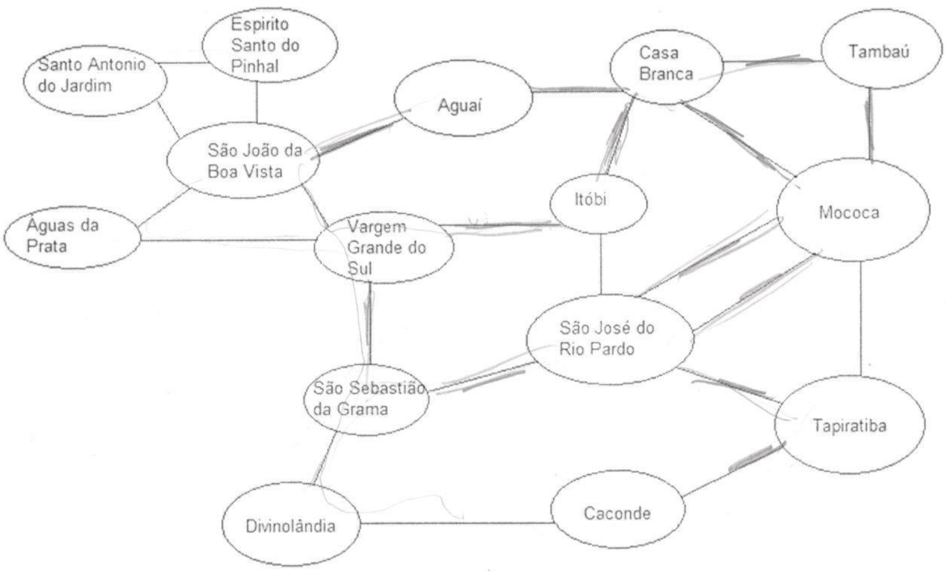


Qual seria o menor caminho de Santo Antônio do Jardim até Tapiratiba, passando por Vargem Grande do Sul? Faça com o lápis o trajeto sobre o mapa.

Descreva como você encontrou essa solução.

Santo Antonio do Jardim até São João 24Km, SJBV até Vargem são 27 Km, Vargem até Itóbi 25 Km, Itóbi até SJRP são 13Km, de SJRP até Tapiratiba 29 Km = 115 Km.

Desafio II: O Professor João se deparou com uma pergunta: É possível sair de São João da Boa Vista passar por todas as rodovias ***somente uma vez em cada uma*** e retornar para São João? Tente fazendo possíveis trajetos com o lápis sobre o mapa.



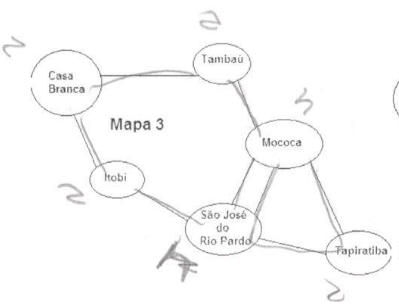
Veja que nesse desafio pode se passar mais de uma vez por alguns municípios, mas apenas uma vez em cada rodovia.

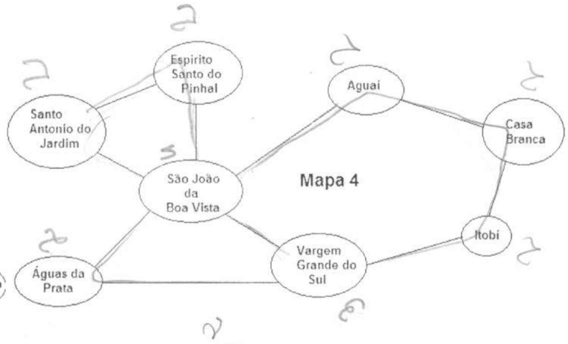
Parece que não é possível. Mas por que?

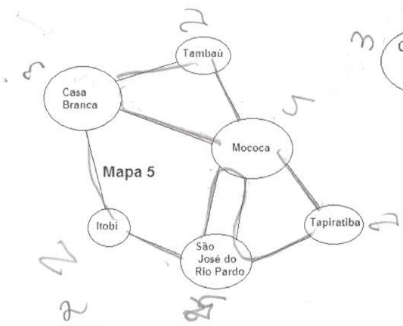
Não é possível, pois para voltar a cidade deveríamos passa pela mesma Rodovia

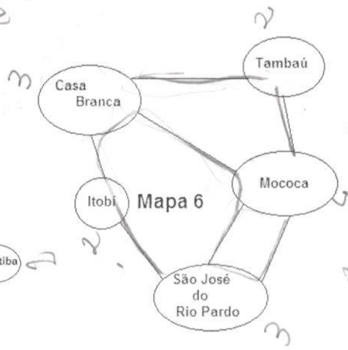
Para resolver esse problema vamos resolver problemas menores, mas com o mesmo desafio.

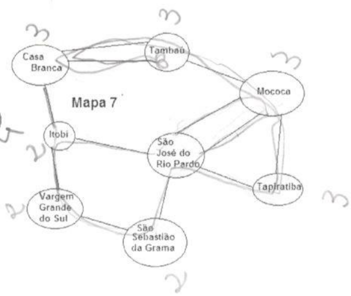
Nos mapas abaixo veja em quais você ***consegue sair de uma cidade e voltar na mesma passando apenas uma vez em cada rodovia***. Faça o trajeto com o lápis sobre os mapas.

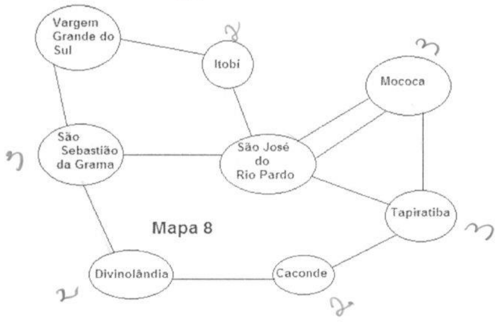












Em quais mapas você conseguiu sair de uma cidade e retornar nela?

Nos mapas 1,2,3

Tente nos outros mapas sair de uma cidade e chegar em outra passando apenas uma vez em cada rodovia. Em quais mapas você conseguiu?

Nos mapas 4,5,6

Quais mapas sobraram? Mapas em que não foi possível fazer nenhuma das duas opções acima?

Nos mapas, 7,8.

Vamos tentar entender porque isso é possível? Coloque em cada cidade de cada mapa o número de rodovias que sai ou chega em cada cidade. Faça isso nos próprios mapas mesmo.

Nos mapas em que foi possível sair de uma cidade e voltar nela mesma, que tipo de números (todos eles) representam as quantidades de rodovias de cada cidade?

(X) Pares ou ( ) Ímpares

Nos mapas em que foi possível sair de uma cidade e chegar em outra, no máximo quantas cidades com números impares de rodovia existem? Figura 80

No máximo 2 cidades.

Assim, escreva com suas palavras, qual deve ser o tipo de número de quantidade de rodovias que cada cidade deve ter para que seja possível em um mapa: ***sair de uma cidade e retornar nela mesma, passando apenas uma vez em cada rodovia.***

Para sair de uma cidade e retornar nela mesma precisa-se de quantidades pares.

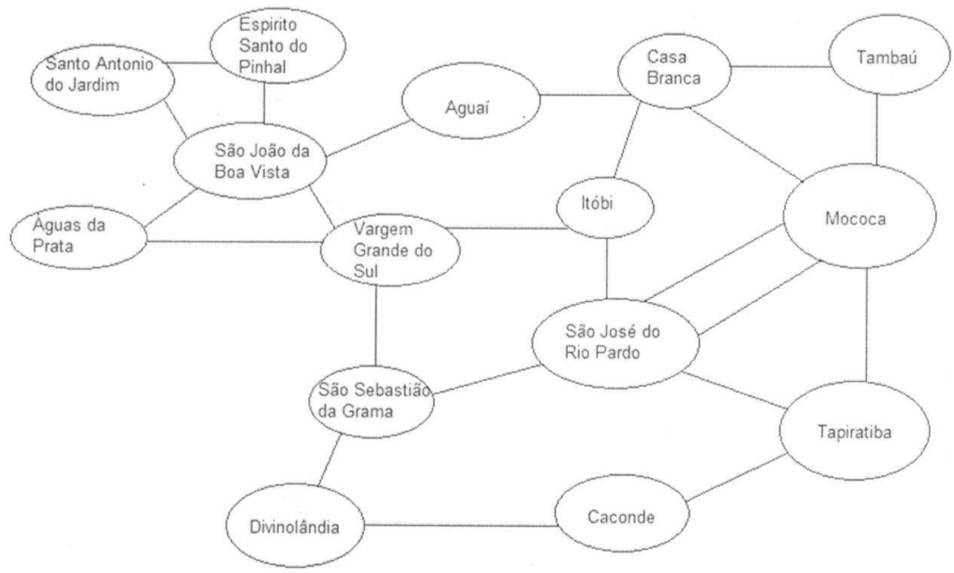
E agora escreva com suas palavras qual dever a quantidade máxima de cidades com número ímpar de quantidade de rodovias, que um mapa deve ter para que seja possível: ***sair de uma cidade e chegar em outra, passando apenas uma vez em cada rodovia***.

Precisa-se de no máximo duas cidades com quantidades ímpares.

Assim com essas informações diga, para o Professor João, se é possível sair de São João e retornar, passando apenas uma vez por cada rodovia? Escreva o porquê.

Não é possível, pois o ponto de partida e outras cidades do mapa contém quantidades de Rodovias ímpares.

Utilize o mapa abaixo para ajudar a responder, colocando o número de rodovias que cada cidade têm.



Foi relativamente fácil resolver esses desafios, e agora se fosse o mapa de todas as rodovias do estado de São Paulo? Seria possível sair de alguma cidade paulista passar em todas as rodovias, apenas uma vez em cada, e retornar para essa cidade ou chegar em outra? Não é possível, pois no mapa menor também não foi possível