

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Localização dinâmica para perturbações de operadores
de Schrödinger discretos com campo elétrico**

MARIANE PIGOSSI

São Carlos
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Localização dinâmica para perturbações de operadores
de Schrödinger discretos com campo elétrico**

MARIANE PIGOSSI

Orientador: PROF. DR. CÉSAR ROGÉRIO DE OLIVEIRA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos

2018



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Mariane Pigossi, realizada em 02/02/2018:

Prof. Dr. Cesar Rogerio de Oliveira
UFSCar

Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado
UNESP

Prof. Dr. Silas Luiz de Carvalho
UFMG

Profa. Dra. Alessandra Aparecida Verri
UFSCar

Prof. Dr. Francisco Braun
UFSCar

“Ó profundidade das riquezas, tanto da sabedoria como da ciência de Deus! Quão insondáveis são os seus juízos, e quão inescrutáveis, os seus caminhos! Quem, pois, compreendeu o intento do Senhor? Ou quem foi o seu conselheiro? Ou quem lhe deu primeiro para que lhe seja recompensado? Porque Dele, e por Ele, e para Ele são todas as coisas. A Ele, pois, a glória eternamente. Amém!”

Romanos 11:33-36, Bíblia Sagrada

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela permissão de viver, pela graça e salvação imerecidas por meio de Jesus, pelo sustento provido todos os dias, pela constante companhia, por guiar meus passos e me abençoar para a realização deste trabalho;

à minha família pelo amor, incentivo e pela torcida dispensada em todos os momentos;

ao meu orientador, Prof. Dr. César Rogério de Oliveira, pelo problema proposto para este trabalho, por toda dedicação dispensada durante minha orientação, pelos conhecimentos transmitidos, disponibilidade, atenção e paciência que sempre teve ao esclarecer minhas dúvidas;

aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar, pelos conhecimentos transmitidos durante as disciplinas do doutorado;

aos amigos da graduação e do DM-UFSCar pela amizade, companheirismo e pela ótima convivência durante esses anos;

aos membros da Igreja Presbiteriana de São Carlos por todos os momentos divididos, pelas orações e pelo suporte espiritual; em especial agradeço aos amigos que fiz nesta igreja por tornarem minha vida nesta cidade incrivelmente alegre;

à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Estudamos o espectro e a localização dinâmica de alguns sistemas quânticos discretos, com campo elétrico uniforme, sob perturbações adequadas com decaimento exponencial nos elementos de matriz. Consideramos três situações particulares. (1) Na primeira situação, estudamos o correspondente operador de Schrödinger em 1D e perturbações limitadas. (2) Consideramos também o operador de Schrödinger discreto 2D com campo elétrico e perturbações com uma norma adequada. (3) Finalmente estudamos a condição SULE para o operador com dependência temporal periódica. Em todas as situações, as demonstrações são baseadas na técnica KAM.

Palavras-Chave: localização dinâmica; técnica KAM; teoria da perturbação; espectro pontual puro; campo elétrico, operadores de Schrödinger discreto.

Abstract

We study the spectrum and the dynamical localization of some discrete quantum systems with uniform electric fields under suitable perturbations with exponential decay in the matrix elements. We consider three particular situations. (1) In the first situation, we study the discrete Schrödinger operator in one dimension under bounded perturbations. (2) We also consider the discrete 2D Schrödinger operator. (3) Finally we study the 2D case under time periodic perturbation. The proofs are based on the KAM technique.

Keywords: dynamical localization; technique KAM; perturbation theory; pure point spectrum; electric fields; discrete Schrödinger operators.

Sumário

1	Introdução	9
2	Operador unidimensional	18
2.1	Espectro discreto para H_0	18
2.2	Localização Dinâmica para H_0	20
2.2.1	Propriedade SULE	20
2.2.2	H_0 tem SULE	21
2.3	Localização Dinâmica para H_V	22
2.3.1	Espectro discreto para H_V	22
2.3.2	Propriedades do espaço \mathcal{A}^p	23
2.3.3	Lemas iniciais	25
2.4	Demonstração do Teorema 1.1	28
2.4.1	Estratégia da demonstração	28
2.4.2	Implementação	29
2.4.3	H_V tem SULE	37
3	Operador bidimensional	39
3.1	Espectro pontual puro para $H_{0,E,\omega}$	40
3.2	$H_{0,E,\omega}$ tem SULE	42
3.3	Espaço $\mathcal{A}^{p_0}(0, +\infty)$ e propriedades	43
3.4	Lemas auxiliares	45
3.5	Implementação	49
3.5.1	$H_{V,E,\omega}$ tem SULE	56
4	Operador bidimensional sob perturbações periódicas no tempo	57
4.1	Localização dinâmica para \mathbf{K}_0	58

4.1.1	\mathbf{K}_0 tem SULE	59
4.2	Espaço $\mathcal{B}^{\rho_0}(0, \infty)$ e propriedades	60
4.3	Resultados auxiliares	62
4.4	Implementação	66
4.5	Localização dinâmica para \mathbf{K}	73
4.6	Corolário do Teorema 1.6	76
	Bibliografia	79

Capítulo 1

Introdução

Propriedades espectrais e dinâmicas de operadores de Schrödinger têm sido objetos de estudo de vários pesquisadores, por se tratarem de assuntos relevantes nas áreas de Física e Matemática.

A evolução temporal dos estados em um sistema quântico é determinada pela solução da equação de Schrödinger

$$i \frac{d\xi}{dt}(t) = T\xi(t)$$

em que T é um operador auto-adjunto em um espaço de Hilbert separável \mathcal{H} (tal operador representa a energia do sistema) e $\xi(t) = e^{-itT}\xi \in \mathcal{H}$, com $\xi \in D(T) \subset \mathcal{H}$.

A determinação de propriedades dinâmicas assintóticas, isto é, o estudo do comportamento da evolução temporal de um sistema quântico para $t \rightarrow \infty$ têm sido um problema desafiador. Neste trabalho, a propriedade dinâmica do nosso interesse é a localização dinâmica (veja [19]) em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ caracterizada a partir do comportamento dos momentos

$$r_\psi^p(t) := \langle e^{-itT}\psi, |X|^p e^{-itT}\psi \rangle$$

para qualquer $p > 0$, em que X denota o operador posição ($(|X|\psi)(n) := |n|\psi(n)$) e (e_n) a base usual de $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, isto é, $e_n(m) = \delta_{nm}$. Dizemos que o operador auto-adjunto com espectro pontual puro T tem localização dinâmica se, para toda condição inicial $\psi = e_n$ cada momento é uniformemente limitado no tempo, i.e., para cada $p > 0$ e $\psi = e_n$,

$$\sup_t r_\psi^p(t) < \infty. \tag{1.1}$$

Devido ao Teorema RAGE [5], localização dinâmica implica em espectro pontual puro, embora existam sistemas com espectro pontual puro que não apresentam localização dinâmica [6, 16].

Uma forma de obter esta propriedade é através do controle das autofunções de um operador T que possui SULE (Semi-Uniformly Localized Eigenfunction; veja [19] e Seção 2.2 adiante). O operador auto-adjunto T tem SULE se:

- T tem um conjunto completo e ortonormal de autofunções $\{\phi_k\}_k$ em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, i.e., $T\phi_k = \lambda_k\phi_k$;
- existem $\alpha > 0$ e, para cada autofunção ϕ_k , um $n_k \in \mathbb{Z}$ de forma que, para qualquer $\delta > 0$ existe $C(\delta) > 0$ de modo que

$$|\phi_k(n)| \leq C(\delta)e^{\delta|n_k| - \alpha|n - n_k|}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^d. \quad (1.2)$$

De forma geral, nesta tese estudamos a técnica KAM para demonstrar a localização dinâmica de alguns sistemas quânticos, sob perturbações adequadas.

Consideramos modelos cujas Hamiltonianas são da forma $H_V = H_0 + V$, e estudamos três situações com resultados originais em cada uma delas.

1. Na primeira situação, H_0 é o operador de Schrödinger discreto 1D com campo elétrico uniforme e perturbado por um potencial V limitado a valores reais. Nosso ponto de partida foi a referência [17], que numericamente obteve localização dinâmica para várias perturbações limitadas do modelo em questão (particularmente perturbações peneperiódicas (“almost periodic” em inglês)). No Capítulo 2, confirmamos rigorosamente este resultado sob certa restrição na norma infinito da perturbação V .
2. Estudamos também a situação em que H_0 é o operador de Schrödinger discreto 2D com campo elétrico uniforme e perturbado por um potencial limitado V dependendo de um parâmetro adequado. Nosso ponto de partida neste tópico foi o trabalho [8], que considera o mesmo operador em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ com potenciais periódicos ou ainda que decaem rapidamente no infinito e, para certos parâmetros, foi mostrado que tal operador tem espectro pontual puro. No Capítulo 3, mostramos que vale a localização dinâmica para certas escolhas da perturbação V .
3. Finalmente, analisamos a mesma questão para o operador dependente do tempo $K(t) = K_0(t) + V(t)$, em que $K_0(t)$ age em $L^2([0, 2\pi]) \otimes \ell^2(\mathbb{Z}^2)$ e $V(t)$ é uma perturbação periódica no tempo. No Capítulo 4, sob certas condições, mostramos a presença de espectro pontual puro e que a condição SULE vale para as autofunções deste operador (o qual é conhecido como operador quase-energia).

Em todas as situações, vamos utilizar a técnica KAM para mostrar que os operadores perturbados possuem espectro pontual puro e localização dinâmica. Tal técnica geralmente é empregada para apresentar condições para espectro pontual puro de operadores auto-adjuntos (algumas vezes com autovalores formando um conjunto denso na reta; veja os Capítulos 3 e 4) sob determinadas perturbações. A ideia é aplicar a $H_V = H_0 + V$, com H_0 com espectro pontual puro e V a perturbação, uma sequência infinita de transformações de forma que no k -ésimo passo

$$H_0 + V \cong H_0 + G_k + V_k, \quad \text{com } V_k = \mathcal{O}(\|V\|_{\rho-r}^{2s-1}),$$

isto é, $H_0 + V$ é unitariamente equivalente a uma parte diagonal $H_0 + G_k$ na base dos autovetores de H_0 , mais uma parte não-diagonal V_k que é muito pequena em k (o que segue se certa norma $\|V\|_\rho$ for suficientemente pequena).

O primeiro trabalho que se utilizou da técnica KAM para mostrar que a Hamiltoniana de Floquet K tem espectro pontual puro foi [2]. Nesse trabalho Bellissard considerou $K = -i\partial_t + H_0 + V(t)$, com $V(t)$ periódica, e

$$H_0 = -\alpha\partial_x^2$$

agindo em $L^2(S^1, dx)$ cujos autovalores são αm^2 e os autovetores são $\psi_m = e^{imx}$, enquanto a perturbação periódica no tempo V era holomorfa (veja Teorema 1 de [2]).

Então Combescure [3] tratou o caso com H_0 sendo osciladores harmônicos e a perturbação V também periódica em t , tendo decaimento exponencial e/ou polinomial nas entradas da matriz de V na base de autovetores do operador quase-energia não perturbado $K_0 = -i\partial_t + H_0$.

Mais tarde estas idéias foram adaptadas para uma classe mais ampla de sistemas por Duclos e Šťovíček [12]. Nesse trabalho os autores consideraram Hamiltonianas de Floquet do tipo $K = -i\partial_t + H_0 + \beta V(\omega t)$, com H_0 auto-adjunto com espectro discreto $h_1 < h_2 < \dots$ obedecendo uma condição do tipo

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \{n^{-\alpha}(h_{n+1} - h_n); n = 1, 2, \dots\} > 0$$

para algum $\alpha > 0$, $t \mapsto V(t)$ é 2π -periódica e r vezes continuamente diferenciável; α e β são parâmetros reais. Usaram aplicações sucessivas da iteração KAM iniciada por Bellissard e melhorada por Combescure.

Vamos apresentar um pouco mais de detalhes do que será discutido em cada uma das situações nesta tese.

No caso 1D, com campo elétrico uniforme $E \neq 0$, o operador é perturbado por um potencial limitado $V : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$; a ação do operador total é dada por

$$(H_{V,E}\psi)(n) := (\Delta\psi)(n) + En\psi(n) + V(n)\psi(n), \quad (1.3)$$

com domínio $D(H_{V,E}) = \{\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \mid \sum_n |n|^2 |\psi(n)|^2 < \infty\}$. Lembremos que o laplaciano discreto é o operador limitado $(\Delta\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1)$.

A principal motivação para este estudo foi [17] que considerou (numericamente) o modelo (1.3) com certos potenciais limitados V . Essas simulações numéricas indicam que vale a localização dinâmica quando temos um campo elétrico $E \neq 0$.

Sem perda de generalidade, tomamos $E = 1$ e denotamos $H_V = H_{V,E=1}$. Assim, o campo elétrico uniforme coincide com o operador posição. Verifica-se que o operador $H_0 = H_{V=0}$ possui espectro pontual puro e com autovetores normalizados ψ_m , $m \in \mathbb{Z}$ (veja o Capítulo 2).

Neste sentido, o principal resultado original que obtivemos para este modelo foi

Teorema 1.1. *Seja $V \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$. Se*

$$\|V\|_\infty < \frac{1}{2\|\dot{b}\|_0},$$

então existe $\rho > 0$ e um operador invertível $P \in \mathcal{A}^\rho$ de modo que

$$P^{-1}(H_V)P \quad (1.4)$$

é um operador diagonal com espectro discreto cujas autofunções de H_V são $P\psi_m$, $m \in \mathbb{Z}$. Além disso, o operador H_V possui localização dinâmica.

Observação 1.2. 1. *Denotamos por \dot{b} o operador linear cujos elementos de matriz na base $\{\psi_m\}$ são*

$$\dot{b}_{nm} := \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|n-l|! |m-l|!}.$$

2. *Pode-se escolher qualquer $\rho > 0$ de modo que, para algum $0 < h < 1/5$,*

$$\frac{1}{2\|V\|_\infty} > \|\dot{b}\|_\rho \left(\sum_{k \geq 0} h^{2^k - 1} \right) > \|\dot{b}\|_0.$$

Veja mais detalhes, inclusive de notação, no Capítulo 2; a demonstração do Teorema 1.1 está na Seção 2.4.

3. Numericamente obtivemos $\|\dot{b}\|_0 \leq 19.7$; então $\|V\|_\infty < 1/40$ é suficiente para concluir a localização dinâmica do Teorema 1.1.

Observação 1.3. Observamos que os operadores de Schrödinger em $L^2(\mathbb{R}^d)$ com campo elétrico uniforme, $-\Delta + \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}$, apresentam espectro absolutamente contínuo puro [1]. Veja o trabalho [18] para uma discussão da estabilidade espectral desses operadores sob certas perturbações limitadas.

Comentaremos agora resumidamente a estratégia para a demonstração deste resultado. Denotamos por H_0 o operador com a escolha particular $V = 0$. Verificamos explicitamente que H_0 tem espectro discreto e localização dinâmica. Então, por um argumento geral, apresentamos uma demonstração de que H_V tem espectro discreto para qualquer V limitado.

Para investigarmos a possibilidade de localização dinâmica para H_V , precisamos de informações detalhadas sobre suas autofunções, por isso empregamos a técnica KAM, que é um método de diagonalização baseado em um procedimento iterativo devido a Kolmogorov, Arnold e Moser, mas aqui com uma versão adaptada para a teoria espectral. Na implementação desta técnica, não estamos supondo que o potencial depende de um parâmetro, como usualmente é feito. Combinando isto, com o espectro discreto de H_0 , resulta na condição uniforme sobre $\|V\|_\infty := \sup_n |V(n)|$, conforme a hipótese do Teorema 1.1. Com isso, não precisamos descartar, no processo, conjuntos de medida pequena de certos parâmetros (como ocorre nos Capítulos 3 e 4).

Estamos considerando a perturbação V em um espaço apropriado, em que os elementos de matriz de V , na base dos autovetores de H_0 , decaem exponencialmente (veja Subseção 2.3.2). Tal consideração será fundamental para obtermos localização dinâmica. No entanto, devido ao espectro discreto de H_0 , fomos capazes de dar condições suficientes para a convergência em termos da norma $\|V\|_\infty$, o que não ocorre em outros trabalhos que empregam tal técnica.

Estudamos também o operador de Schrödinger discreto 2D com campo elétrico de intensidade E e perturbado por um potencial limitado $V : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$(H_{V,E,\omega}\psi)(n) := (\Delta\psi)(n) + E \langle \omega, n \rangle \psi(n) + V(n)\psi(n) \quad (1.5)$$

com domínio $D(H_{V,E,\omega}) = \{\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^2) \mid \sum_n |n|^2 |\psi(n)|^2 < \infty\}$, sendo o laplaciano discreto bidimensional $(\Delta\psi)(n) = \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}^2 \\ |l|=1}} \psi(n+l)$ que é um operador limitado, $E \in (0, +\infty)$ denota

a intensidade do campo elétrico e

$$\omega \in \Omega := \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : \|\omega\| = 1, \frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \quad (1.6)$$

a direção do campo elétrico. Verifica-se que o operador $H_{0,E,\omega}$ possui espectro pontual puro e com autovetores normalizados ψ_m , $m \in \mathbb{Z}^2$ (veja o Capítulo 3).

Como resultado original obtivemos o teorema abaixo, cuja demonstração e notações adicionais encontram-se no Capítulo 3. Aqui, estamos denotando a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $F \subset \mathbb{R}$ por $|F|$.

Teorema 1.4. *Seja $\omega \in \Omega$ com $\omega_1, \omega_2 \neq 0$. Então existe um conjunto de medida de Lebesgue total $\Omega_0 \subset \mathbb{R}$, de modo que para cada $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \Omega_0$, se V for ω -dominado em relação à base $\{\psi_m\}$ com*

$$\|V\|_{\rho_0} < \gamma\epsilon$$

para certos $\gamma > 0$, $\rho_0 > 0$ e $\epsilon > 0$ dados, existe $I \subset (0, +\infty)$ com $|I| < \epsilon$ de forma que para $E \in B' := (0, +\infty) \setminus I$ existem $0 < r < \rho_0$ e um operador invertível $P \in \mathcal{A}^{\rho_0-r}(B')$ de maneira que

$$P^{-1}H_{V,E,\omega}P$$

é operador diagonal com espectro pontual puro e denso na reta e cujos autovetores de $H_{V,E,\omega}$ são $P\psi_m$, $m \in \mathbb{Z}^2$. Além disso, para tais parâmetros $H_{V,E,\omega}$ possui localização dinâmica.

Observação 1.5. 1. *Veja a Definição 3.8 de V ser ω -dominado em relação à base $\{\psi_m\}$ (na Seção 3.3). Explicitamente tem-se*

$$\Omega_0 = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{\gamma}{|q|^\beta}, \text{ para algum } \beta > 2 \text{ e todo } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\},$$

e neste caso $|\mathbb{R} \setminus \Omega_0| = 0$.

2. *Explicitamente*

$$\gamma = \frac{r^\sigma(1 - \tilde{c})c}{10L(\sigma) \prod_{j=0}^{\infty} [2^{j+2}C(\sigma)e^{r/2^{j+1}}2^{\sigma(j+1)}]^{2^{-j-1}}},$$

para algum $\sigma > \beta + 1$ sendo $C(\sigma) = \left(\frac{\sigma}{e}\right)^\sigma$, $L(\sigma) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{(1+N)^{\sigma-\beta-1}}$ e para constantes $c > 0$, $0 < \tilde{c} < 1$ e $\epsilon < r < \rho_0$.

Nossa motivação inicial para esse estudo foi [8], que considerou o modelo (1.5) para potenciais V periódicos e potenciais que decaem no infinito. Para certos parâmetros $\omega \in \Omega$ e $E = 1$, foi mostrado que, para ambas escolhas de V , o operador $H_{V,1,\omega}$ possui espectro pontual puro e denso na reta.

Diferentemente de [8], tomamos $1 \neq E$ e não restringimos nossa análise a potenciais periódicos e potenciais que decaem rapidamente no infinito. Denotamos $H_{0,E,\omega}$ a escolha particular de $V = 0$. Verificamos que $H_{0,E,\omega}$ tem espectro pontual puro, denso na reta e também tem localização dinâmica.

Para investigarmos a possibilidade de localização dinâmica quando $V \neq 0$, precisamos verificar que $H_{V,E,\omega}$ tem espectro pontual puro e para isso aplicamos o algoritmo KAM. Diferentemente do Capítulo 2, na implementação dessa técnica fixamos a direção do campo na esfera unitária de \mathbb{R}^2 , de modo que $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ pertença a um conjunto de medida de Lebesgue total; isto será necessário, por exemplo, porque estamos supondo que todos os autovalores são simples. Descartamos no processo um conjunto de intensidades que possui medida de Lebesgue pequena.

Aqui, também consideramos a perturbação em um espaço apropriado, porém um pouco diferente do espaço em que se encontra a perturbação do Capítulo 2 (veja a Subseção 3.3). Combinando o descrito acima com restrições na escolha de V (veja Teorema 1.4), obtemos localização dinâmica para $H_{V,E,\omega}$. No entanto, não fomos capazes de dar condições para a convergência em termos da $\|V\|_\infty$ da perturbação, conforme fizemos no Capítulo 2 (e talvez nem seja possível!), visto que os autovalores do operador não perturbado formam um conjunto denso na reta.

A maior dificuldade no estudo deste modelo é encontrar exemplos explícitos de potenciais satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.4.

No Capítulo 4, consideramos o operador (1.5) com potencial periódico no tempo; como conhecido, isto leva ao estudo do operador

$$\mathbf{K} = -i\partial_t + H_{0,\omega} + V(\tau t).$$

Este é o chamado “Formalismo de Howland” que considera um espaço estendido [13, 14, 2, 3, 9, 15] (uma descrição motivadora pode ser encontrada na Seção 7.4 de [4])

$$L^2([0, \beta], dt) \otimes \ell^2(\mathbb{Z}^2)$$

de forma que a variável t passa a ser incorporada como “variável espacial” e dependendo do parâmetro $\beta = \frac{2\pi}{\tau}$. $H_{0,\omega}$ é o operador auto-adjunto agindo no espaço $l^2(\mathbb{Z}^2)$, conforme

definimos no Capítulo 3, fixando $\omega \in \Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : \|\omega\| = 1, \frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ e $E = 1$, com espectro pontual puro e denso na reta, ou seja, o conjunto de seus autovalores é $\{\langle n, \omega \rangle, n \in \mathbb{Z}^2\}$ e cujos autovetores correspondentes são $\{\psi_m\}_{m \in \mathbb{Z}^2}$ definidos em (3.3). $-i\partial_t$ é o operador diferencial que age em $L^2([0, \beta], dt)$ e representa o operador auto-adjunto caracterizado por condições de fronteiras periódicas, cujos autovalores são $k\tau$, $k \in \mathbb{Z}$, e os correspondentes autovetores normalizados são $\chi_k(t) = \beta^{-1/2} e^{ik\tau t}$. O operador V é auto-adjunto e limitado em $L^2([0, \beta], dt) \otimes \ell^2(\mathbb{Z}^2)$ determinado pela função mensurável $t \mapsto V(t) \in B(\ell^2(\mathbb{Z}^2))$ β -periódica com valores no espaço dos operadores auto-adjuntos em $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$. É conveniente redefinir o tempo para que o período seja fixado em 2π e então τ aparece como parâmetro em frente da derivada temporal. Então, a partir de agora, denotaremos

$$\mathbf{K} := -i\tau\partial_t + H(t) \quad (1.7)$$

agindo em $\mathcal{K} := L^2([0, 2\pi], dt) \otimes \ell^2(\mathbb{Z}^2)$ e $H(t) = H_{0,\omega} + V(t)$ com condições periódicas no tempo ($V(t)$ é 2π -periódico). Esse operador atua sobre um vetor $\Phi \otimes \Psi \in \mathcal{K}$ da forma

$$\mathbf{K}(\Phi \otimes \Psi)(t, n) := -i\tau(\partial_t \Phi)(t)\Psi(n) + \Phi(t)(H_{0,\omega}\Psi)(n) + V(t)\Psi(n).$$

Denotaremos por \mathbf{K}_0 a escolha particular de $V = 0$ que tem a forma

$$\mathbf{K}_0 := -i\tau\partial_t \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_{0,\omega}, \quad (1.8)$$

o qual possui um conjunto completo de autofunções normalizadas $\varphi_{k,m}(t, n) := e^{ikt}/\sqrt{2\pi} \otimes \psi_m(n)$, sendo ψ_m as autofunções de $H_{0,\omega}$.

O nosso principal resultado para este modelo é o seguinte

Teorema 1.6. *Fixe $\omega \in \Omega$ e $\epsilon > 0$. Dados $\rho_0 > 0$ e $0 < r < \rho_0$, existe $\gamma > 0$ de modo que, se*

$$\|V\|_{\rho_0} < \min \left\{ \frac{1}{4}, \gamma\epsilon \right\},$$

então existe $I \subset (0, \infty)$ com $|I| < \frac{2}{\sqrt[3]{4}}\epsilon^{\frac{1}{3}}$, de forma que para $\tau \in B' := (0, \infty) \setminus I$ e existe um operador invertível $P \in \mathcal{B}^{\rho_0-r}(B)$ de modo que

$$P^{-1}\mathbf{K}P \quad (1.9)$$

possui espectro pontual puro (um operador diagonal). Os autovetores de \mathbf{K} são da forma $P\varphi_{k,m}$, $m \in \mathbb{Z}^2$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Observação 1.7. *Explicitamente,*

$$\gamma = \frac{r^{3\sigma}(\sigma - 1)^3}{320L(\sigma)^3 \prod_{j=0}^{\infty} [6C(3\sigma) e^{r/2^{j+1}} (2^{j+1})^{3\sigma+3}]^{2^{-j-1}}},$$

com $\sigma > 1$, $C(3\sigma) = \left(\frac{3\sigma}{e}\right)^{3\sigma}$ e $L(\sigma) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2+k)^{\sigma-1}(2k-1)}$.

Como o operador \mathbf{K} depende do tempo e trabalhamos com o espaço estendido (conforme o Formalismo de Howland [13, 4]), vamos propor na Seção 4.5 uma versão de localização dinâmica neste contexto, a qual seguirá da condição SULE para \mathbf{K} . Vale mencionar que, embora tecnicamente conveniente, pois trabalhamos com operadores auto-adjuntos, nem sempre é simples interpretar [15] as relações dinâmicas e espectrais no espaço ampliado.

Finalmente, aplicamos a mesma técnica do teorema anterior para o operador autônomo (1.5) acrescentando apenas a derivada temporal, com isso, obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 1.8. *Fixe $\omega \in \Omega$ e $\epsilon > 0$. Dados $\rho_0 > 0$ e $0 < r < \rho_0$, existe $\gamma > 0$ de modo que, se*

$$[V]_{\rho_0} < \min \left\{ \frac{1}{4}, \gamma\epsilon \right\},$$

então existe $I \subset (0, \infty)$ com $|I| < \epsilon$, de forma que para $\tau \in B' := (0, \infty) \setminus I$ existe um operador invertível $P \in \mathcal{B}^{\rho_0-r}(B)$ de modo que

$$P^{-1}\mathbf{K}P \tag{1.10}$$

possui espectro pontual puro (um operador diagonal). Os autovetores de \mathbf{K} são da forma $P\varphi_{k,m}$, $m \in \mathbb{Z}^2$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Observação 1.9. *Explicitamente*

$$\gamma = \frac{2^{2\sigma} e^{r/2} r^{\sigma} (\sigma - 1) C(\sigma)^2}{20L(\sigma) \prod_{j=0}^{\infty} [6C(3\sigma) e^{r/2^{j+1}} (2^{j+1})^{3\sigma+3}]^{2^{-j-1}}},$$

com $\sigma > 1$, $C(3\sigma) = \left(\frac{3\sigma}{e}\right)^{3\sigma}$, $C(\sigma) = \left(\frac{\sigma}{e}\right)^{\sigma}$ e $L(\sigma) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2+k)^{\sigma-1}(2k-1)}$.

Observe que, no Teorema 1.6, excluímos um conjunto de períodos com medida de Lebesgue menor do que $\epsilon^{\frac{1}{3}}$, enquanto que no Teorema 1.8, em que estamos supondo que V não depende do tempo, descartamos um conjunto de parâmetros (períodos) menor do que ϵ . Note também que, no Teorema 1.8, obtemos condições suficientes para que o operador independente do tempo $H_{0,\omega} + V$ tenha espectro pontual puro.

Terminamos assim uma visão geral da tese; os detalhes serão apresentados nos capítulos seguintes.

Capítulo 2

Operador unidimensional

Neste capítulo, aplicaremos a técnica KAM para o operador (1.3). O nosso principal objetivo é demonstrar o Teorema 1.1.

Na Seção 2.1 determinaremos o espectro de H_0 . Na Seção 2.2 relembremos algumas condições suficientes para localização dinâmica e demonstraremos que H_0 tem tal propriedade. Propriedades gerais do operador perturbado e do espaço \mathcal{A}^p em que se encontra a perturbação V estão presentes na Seção 2.3. A Seção 2.4 será devotada à demonstração do Teorema 1.1.

2.1 Espectro discreto para H_0

Nesta seção, mostraremos que o espectro do operador H_0 é discreto, e também demonstraremos uma estimativa muito útil para suas autofunções.

Teorema 2.1. *H_0 tem espectro discreto simples dado pelos números inteiros.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que $E = 1$. Considere a equação de autovalores

$$H_0\varphi = \lambda\varphi, \tag{2.1}$$

e lembremos da transformada de Fourier [5]

$$\hat{\varphi}(\epsilon) = \sum_n \varphi(n)e^{-2\pi i n \epsilon}.$$

Aplicando a transformada em (2.1), obtemos

$$(2 \cos(2\pi\epsilon))\hat{\varphi}(\epsilon) + n\hat{\varphi}(\epsilon) = \lambda\hat{\varphi}(\epsilon);$$

por propriedade padrão da transformada de Fourier segue que

$$(2 \cos(2\pi\epsilon))\hat{\varphi}(\epsilon) + \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial \varphi(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \lambda\hat{\varphi}(\epsilon). \quad (2.2)$$

A equação (2.2) tem solução para $\lambda_m := m$, $m \in \mathbb{Z}$. De fato, para λ_m tem-se

$$(2 \cos(2\pi\epsilon) - m)\hat{\varphi}(\epsilon) + \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \epsilon} = 0.$$

Dividindo a equação acima por $\hat{\varphi}(\epsilon)$ (nos pontos em que $\hat{\varphi}(\epsilon) \neq 0$)

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\hat{\varphi}(\epsilon)} \frac{\partial \hat{\varphi}(\epsilon)}{\partial \epsilon} = -2 \cos(2\pi\epsilon) + m.$$

Integrando em ambos os lados com relação à ϵ

$$\ln \hat{\varphi}(\epsilon) = -2i \operatorname{sen}(2\pi\epsilon) + 2\epsilon i m \pi,$$

portanto,

$$\hat{\varphi}_m(\epsilon) = e^{-2i \operatorname{sen}(2\pi\epsilon)} e^{2\pi i m \epsilon}.$$

Note que esse conjunto forma uma base ortonormal de $L^2([0, 1])$; de fato, se $\hat{\psi} \perp \hat{\varphi}_m$ para todo m , então $e^{2i \operatorname{sen}(2\pi\epsilon)} \hat{\psi}(\epsilon) = 0$ e então $\hat{\psi} = 0$. Pela inversa da transformada de Fourier

$$\varphi_m(n) = \int_0^1 e^{2\pi i n \epsilon} \hat{\varphi}_m(\epsilon) d\epsilon \quad (2.3)$$

é solução de (2.1) com $\lambda = \lambda_m$. Pelo Teorema de Plancherel, $\{\varphi_m\}$ é base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z})$. \square

Observação 2.2. Denotaremos por φ_m as autofunções de H_0 . Note também que $\varphi_m(n) = \varphi_0(m+n)$, para todo $n, m \in \mathbb{Z}$, isto é, todas as autofunções de H_0 são obtidas a partir de uma delas pelo deslocamento dos vetores.

Proposição 2.3. Para todo $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$|\varphi_n(m)| \leq \frac{1}{|m+n|!}. \quad (2.4)$$

Demonstração. É suficiente demonstrar que $|\varphi_0(n)| \leq 1/|n|!$; temos

$$\begin{aligned}
\varphi_0(n) &= \int_0^1 e^{-2\pi i n \epsilon} e^{-2i \text{sen}(2\pi \epsilon)} d\epsilon \\
&= \int_0^1 (\cos(2\pi n \epsilon) - i \text{sen}(2\pi n \epsilon)) (\cos(2 \text{sen}(2\pi \epsilon)) - i \text{sen}(2 \text{sen}(2\pi \epsilon))) d\epsilon \\
&= J_{-n}(2) - \int_0^1 i (\cos(2\pi n \epsilon) \text{sen}(2 \text{sen}(2\pi \epsilon)) + \text{sen}(2\pi n \epsilon) \cos(2 \text{sen}(2\pi \epsilon))) d\epsilon \\
&= J_{-n}(2) - \int_0^1 i \text{sen}[(2\pi n \epsilon) + 2 \text{sen}(2\pi \epsilon)] d\epsilon
\end{aligned} \tag{2.5}$$

sendo $J_{-n}(2)$ a representação integral da função de Bessel, isto é,

$$J_{-n}(2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(2 \text{sen}(2\pi \epsilon) + n 2\pi \epsilon) d\epsilon.$$

Fazendo a mudança de variável $y := y(\epsilon) = 2\pi \epsilon - \pi$ então $y(0) = -\pi$, $y(1) = \pi$, e usando que, $\text{sen}(\pi \pm x) = \mp \text{sen} x$ obtemos

$$\int_{-\pi}^\pi \frac{i}{2\pi} \text{sen}[2(\text{sen}(y + \pi) + \frac{n}{2}(y + \pi))] dy = \int_{-\pi}^\pi \frac{i}{2\pi} \text{sen}[2(-\text{sen} y + \frac{n}{2}(y + \pi))] dy = 0.$$

Assim, de (2.5) segue, por propriedade da função de Bessel, que

$$|\varphi_0(n)| = |J_{-n}(2)| \leq \frac{|\frac{1}{2}(-2)|^n e^0}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{n!}.$$

□

Observação 2.4. Denotaremos por $\psi_m(n) := \varphi_{-m}(n)$ as autofunções do operador H_0 , então, de (2.4), temos que $|\psi_m(n)| \leq \frac{1}{|n-m|!}$.

2.2 Localização Dinâmica para H_0

Vamos agora realizar uma breve revisão sobre a localização dinâmica de um operador T auto-adjunto em $\ell^2(\mathbb{Z})$ com espectro pontual puro. Para mais detalhes veja [19].

2.2.1 Propriedade SULE

Seja $\{\phi_k\}$ um conjunto ortonormal completo de autofunções de um operador auto-adjunto T agindo em $\ell^2(\mathbb{Z})$, então $T\phi_k = \lambda_k \phi_k$. Seja $\psi = e_m$, $m \in \mathbb{Z}$. Então

$$\psi(t, n) \equiv (e^{-itT} \psi)(n) = \sum_k e^{-it\lambda_k} \phi_k(n) \overline{\phi_k(m)},$$

e

$$\sup_t |\psi(t, n)| \leq Z(n, m), \quad \sup_t r_\psi^p(t) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^p Z^2(n, m),$$

em que

$$Z(n, m) = \sum_k |\phi_k(n) \phi_k(m)|.$$

Para demonstrar a localização dinâmica (1.1) para qualquer $\psi = e_m$, é suficiente mostrar que função $Z(n, m)$ decai rapidamente quando $|n| \rightarrow \infty$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Uma forma de obter essa propriedade é através do controle das autofunções dito SULE (Semi-Uniformly Localized Eigenfunction) [19]. Suponha que para algum $\alpha > 0$, qualquer autofunção ϕ_k satisfaça

$$|\phi_k(n)| \leq C(k) e^{-\alpha|n|}, \quad (2.6)$$

com $C(k) < \infty$. Mas ainda é preciso controlar $C(k)$. O operador auto-adjunto T em $\ell^2(\mathbb{Z})$, com espectro pontual puro é dito ter SULE se:

- T tem um conjunto completo $\{\phi_k\}_k$ em $\ell^2(\mathbb{Z})$ de autofunções ortonormais (i.e., $T\phi_k = \lambda_k \phi_k$);
- existem $\alpha > 0$ e, para cada autofunção ϕ_k , um $n_k \in \mathbb{Z}$ de forma que, para qualquer $\delta > 0$,

$$|\phi_k(n)| \leq C(\delta) e^{\delta|n_k| - \alpha|n - n_k|}, \quad (2.7)$$

com alguma constante finita $C(\delta)$ uniforme em k, n . Segue-se então que se SULE vale para T , então $Z(n, m)$ decai exponencialmente em n para todo m e (1.1) vale. Esta será a maneira que usaremos para mostrar a localização dinâmica para o modelo (1.3) em consideração.

2.2.2 H_0 tem SULE

Com os resultados e definições acima em mente, vamos mostrar que o operador H_0 tem SULE e, portanto, segue

Teorema 2.5. H_0 tem localização dinâmica.

Demonstração. Conforme mostramos na seção anterior, as autofunções $\{\psi_m\}$ de H_0 formam uma base ortonormal em $\ell^2(\mathbb{Z})$. Portanto, é suficiente mostrarmos que H_0 tem SULE.

De (2.4) temos que

$$|\psi_m(n)| \leq \frac{1}{|n-m|!}.$$

Tomando $n_m = m$, precisamos mostrar que existe $\alpha > 0$ e para $\delta > 0$ existe $C(\delta) > 0$ tal que

$$\frac{1}{|n-m|!} \leq C(\delta)e^{\delta|m|-\alpha|n-m|}, \quad \forall n, m$$

Como, para todo $r > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{r|n|}}{|n|!} = 0. \quad (2.8)$$

concluimos que dado $\alpha > 0$, para cada $C > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de maneira que para $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{|n|!} \leq Ce^{-\alpha|n|}. \quad (2.9)$$

Para $n = 1, \dots, n_0$, basta escolhermos $C(\delta) = \max\{C, e^\alpha, \frac{e^{2\alpha}}{2!}, \dots, \frac{e^{n_0\alpha}}{n_0!}\}$. Portanto, concluimos que

$$\frac{1}{|n-m|!} \leq C(\delta)e^{-\alpha|n-m|} < C(\delta)e^{\delta|m|-\alpha|n-m|}, \quad \text{para todo } \delta > 0.$$

□

2.3 Localização Dinâmica para H_V

Nesta seção, consideraremos perturbações do operador H_0 por um operador no espaço \mathcal{A}^p (que definiremos na seção 2.3.2), cujos elementos de matriz tem decaimento exponencial conforme se afastam da diagonal principal. Demonstraremos que o operador H_V , definido em (1.3), tem espectro discreto. Além disso, mostraremos que tal operador possui localização dinâmica, desde que $\|V\|_\infty$ não seja muito grande. A técnica KAM consiste em um procedimento indutivo para encontrar um operador invertível $P \in \mathcal{A}^p$ de modo que $P^{-1}(H_0 + V)P = \Delta$, sendo Δ operador diagonal na base de autovetores de H_0 .

2.3.1 Espectro discreto para H_V

Por um argumento geral, mostraremos primeiramente que H_V tem espectro discreto para qualquer potencial V limitado.

Teorema 2.6. *H_V tem espectro discreto.*

Demonstração. Conforme mostramos na Seção 2.1, para $V = 0$ e $E = 1$, o espectro de H_0 , $\sigma(H_0)$, é discreto e, além disso,

$$\sigma(H_0) = \mathbb{Z};$$

logo, o operador resolvente $R_i(H_0)$ é compacto (veja Teorema 11.3.13 em [5]). Da segunda identidade do resolvente segue que

$$\begin{aligned} R_i(H_V) &= R_i(H_0) - R_i(H_0)V R_i(H_V) \\ &= R_i(H_0) (\mathbf{1} - V R_i(H_V)). \end{aligned}$$

Como $V R_i(H_V)$ é limitado, concluímos que $R_i(H_V)$ é compacto, o que implica que $\sigma(H_V)$ é discreto. \square

Observação 2.7. *Embora H_V tenha espectro discreto para qualquer potencial limitado V , até o momento não está claro se a localização dinâmica vale quando $\|V\|_\infty$ for suficientemente grande (como sugerido numericamente para alguns potenciais em [17]). Os autovalores de H_V , obtidos através do Teorema 1.1, são dados por (2.38).*

2.3.2 Propriedades do espaço \mathcal{A}^ρ

Introduziremos o espaço $(\mathcal{A}^\rho, \|\cdot\|_\rho)$ e discutiremos algumas de suas propriedades. Seja $\rho > 0$, e considere \mathcal{A}^ρ o conjunto dos operadores lineares a em $\ell^2(\mathbb{Z})$, com representação de matriz $a = \{a_{nm}\}$ na base $\{\psi_m\}$ dos autovetores de H_0 , i.e., $a_{nm} := \langle \psi_n, a\psi_m \rangle$, $n, m \in \mathbb{Z}$ e com norma finita

$$\|a\|_\rho := \sup_n \sum_m |a_{nm}| e^{\rho|n-m|} < \infty.$$

Para $\rho = 0$, definimos o espaço \mathcal{A}^0 como o conjunto dos operadores lineares limitados a em $\ell^2(\mathbb{Z})$ com norma finita

$$\|a\|_0 = \inf_{\rho>0} \|a\|_\rho < \infty.$$

Lema 2.8. *\mathcal{A}^ρ é espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $\{a_i\}$ sequência de Cauchy em \mathcal{A}^ρ , sendo $a_i = \{a_{nm}^{(i)}\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $i, j > N$,

$$\|a_i - a_j\|_\rho = \sup_n \sum_m e^{\rho|n-m|} |a_{nm}^{(i)} - a_{nm}^{(j)}| < \epsilon. \quad (2.10)$$

Segue que para $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$|a_{nm}^{(i)} - a_{nm}^{(j)}| < \frac{\epsilon}{e^{\rho|n-m|}}.$$

Disto temos que para cada $n, m \in \mathbb{Z}$, $\{a_{nm}^{(i)}\}_i$ é Cauchy em \mathbb{R} , sendo $a = \{a_{nm}\}$ o limite desta sequência. Então $a_{nm}^{(i)} \rightarrow a_{nm}$ quando $i \rightarrow \infty$. Usando esses limites mostraremos que $a = \{a_{nm}\} \in \mathcal{A}^\rho$ e $a^{(i)} \rightarrow a$. De (2.10) temos para $i, j > N$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{|m| < k} e^{\rho|n-m|} |a_{nm}^{(i)} - a_{nm}^{(j)}| < \epsilon,$$

tomando $j \rightarrow \infty$, obtemos para $i > N$,

$$\sum_{|m| < k} e^{\rho|n-m|} |a_{nm}^{(i)} - a_{nm}| < \epsilon.$$

Podemos tomar $k \rightarrow \infty$, então para $i > N$,

$$\sup_n \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\rho|n-m|} |a_{nm}^{(i)} - a_{nm}| < \epsilon. \quad (2.11)$$

Isso mostra que $(a^{(i)} - a) \in \mathcal{A}^\rho$ e daí

$$a = a^{(i)} + (a - a^{(i)}).$$

Portanto, $a \in \mathcal{A}^\rho$. Além disso, o lado esquerdo de (2.11) representa $\|a^{(i)} - a\|_\rho$ com $a^{(i)} \rightarrow a$ em \mathcal{A}^ρ . \square

Lema 2.9. *Dados $\rho \geq 0$, $a, c \in \mathcal{A}^\rho$ então ac e $ca \in \mathcal{A}^\rho$. Além disso,*

$$\|ac\|_\rho, \|ca\|_\rho \leq \|a\|_\rho \|c\|_\rho.$$

Demonstração. Seja $d = ac$, logo $d_{ij} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{ik} c_{kj}$. Assim,

$$\|d\|_\rho = \sup_i \sum_j e^{\rho|i-j|} |d_{ij}| \leq \sup_i \sum_{j,k} e^{\rho|i-j|} |a_{ik} c_{kj}| = \sup_i \sum_{k,j} e^{\rho|i-j|} |a_{ik} c_{kj}|$$

Temos que

$$\sup_i \sum_{k,j} e^{\rho|i-j|} |a_{ik} c_{kj}| \leq \sup_i \sum_k e^{\rho|i-k|} |a_{ik}| \sup_k \sum_j e^{\rho|k-j|} |c_{kj}|.$$

\square

Um operador linear a , não necessariamente em \mathcal{A}^ρ , é diagonal se $a_{nm} = 0$ para $n \neq m$ (o termo “diagonal” aqui está relacionado à base ortonormal (ψ_m) de $\ell^2(\mathbb{Z})$). Por construção, H_0 é diagonal cuja representação de matriz é dada por $(H_0)_{nm} = n\delta_{nm}$, enquanto que para o operador perturbado a representação de matriz é dada por $(H_V)_{nm} = n\delta_{nm} + V_{nm}$.

Observação 2.10. *Observe que ambos os Teoremas 1.1 e 2.6 demonstram que o operador H_V tem espectro pontual puro; sendo que, no Teorema 1.1 conseguimos um operador P que diagonaliza (1.3) e, desse modo, encontramos suas autofunções e demonstramos a localização dinâmica para H_V .*

2.3.3 Lemas iniciais

Esta subseção é essencialmente técnica e os resultados serão úteis para demonstrar o Teorema 1.1. O operador identidade será denotado por $\mathbf{1}$, e note que $\|\mathbf{1}\|_\rho = 1$, para todo $\rho \geq 0$. A diagonal do operador a será denotada por $\text{diag } a$, isto é, $(\text{diag } a)_{nm} = a_{nn}\delta_{nm}$. Se $a \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, temos a norma usual $\|a\|_\infty = \sup_n |a(n)|$.

Lema 2.11. *Seja $a \in \mathcal{A}^\rho$ com $\|a - \mathbf{1}\|_\rho < 1$. Então a é invertível em \mathcal{A}^ρ e vale*

$$\|a^{-1} - \mathbf{1}\|_\rho \leq \|a - \mathbf{1}\|_\rho (1 - \|a - \mathbf{1}\|_\rho)^{-1}.$$

Demonstração. Pela série de Neumann temos

$$\begin{aligned} \|a^{-1} - \mathbf{1}\|_\rho &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{1} - a)^n \right\|_\rho \leq \| \mathbf{1} - a \|_\rho \sum_{n=1}^{\infty} \| (\mathbf{1} - a) \|_\rho^{n-1} \\ &= \| \mathbf{1} - a \|_\rho \sum_{n=0}^{\infty} \| (\mathbf{1} - a) \|_\rho^n. \end{aligned}$$

Por hipótese, $\|a - \mathbf{1}\|_\rho < 1$, usando a série geométrica obtemos

$$\|a^{-1} - \mathbf{1}\|_\rho \leq \|a - \mathbf{1}\|_\rho (1 - \|a - \mathbf{1}\|_\rho)^{-1}.$$

□

Lema 2.12. *Seja $a \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ então*

$$|a_{nm}| \leq \|a\|_\infty \dot{b}_{nm}, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} |a_{nm}| &= |\langle \psi_n, a\psi_m \rangle| \leq \|a\|_\infty \langle |\psi_n|, |\psi_m| \rangle \\ &= \|a\|_\infty \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\psi_n(l)| |\psi_m(l)| \\ &= \|a\|_\infty \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|n-l|! |m-l|!} = \|a\|_\infty \dot{b}_{nm}. \end{aligned}$$

Considere

$$S_{nm} := \sum_l \frac{(|n-m|!)^{1/2}}{|m-l|!|n-l|!} = \sum_l \frac{\sqrt{|k|!}}{|l|!|k-l|!}, \quad k = n-m;$$

como $S_{nm} = S_{mn}$, podemos supor que $k \geq 0$. Temos três possibilidades $l < 0$, $l \ll k$ e $l \gg k$ para qualquer uma das três segue $\sqrt{k!}/(|l|!|k-l|!) \lesssim 1/(l!\sqrt{k!})$, e para $l \approx k$, temos $\sqrt{k!}/(|l|!|k-l|!) \lesssim 1/\sqrt{l!}$. Então vemos que a sequência S_{nm} é uniformemente limitada; é também imediato verificar numericamente isso, e encontramos $S_{nm} \leq 4$ para todo m, n , e o máximo ocorre quando $m = n$. Combinando $\dot{b}_{nm} = S_{nm}/(|n-m|!)^{1/2}$ com (2.8), segue que $\dot{b} \in \mathcal{A}^\rho$ para todo $\rho \geq 0$. \square

Mostraremos agora uma estimativa muito importante para tais elementos de matriz, pois nos garantirá que se $a \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ então $a \in \mathcal{A}^\rho$.

Lema 2.13. *Temos uma inclusão natural $\ell^\infty(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{A}^\rho$, para todo $\rho \geq 0$, uma vez que para $a \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, $\|a\|_\rho \leq \|a\|_\infty \|\dot{b}\|_\rho$. Assim, dado $\theta > 0$,*

$$\|a\|_\rho \leq \theta \tag{2.12}$$

para $\|a\|_\infty$ suficientemente pequeno.

Demonstração. Pelo Lema 2.12,

$$\begin{aligned} \|a\|_\rho &= \sup_n \sum_m |a_{nm}| e^{\rho|n-m|} \leq \sup_n \sum_m \|a\|_\infty \dot{b}_{nm} e^{\rho|n-m|} \\ &= \|a\|_\infty \|\dot{b}\|_\rho \end{aligned}$$

e o resultado segue com $\|a\|_\infty \leq \theta/\|\dot{b}\|_\rho$. \square

O próximo resultado será muito importante para o processo indutivo; aqui $[a, c] = ac - ca$ é o comutador dos operadores a e c .

Lema 2.14. *Fixe $\rho > 0$. Sejam G operador diagonal e $B \in \mathcal{A}^\rho$ com $G + \text{diag } B$ um operador diagonal de forma que $(G + \text{diag } B)_{nn} = g_n + B_{nn} \in \mathbb{R}$ e satisfazendo*

$$|g_n + B_{nn} - (g_m + B_{mm})| > K, \quad \forall m \neq n \tag{2.13}$$

para alguma constante $K > 0$. Então, existe $W \in \mathcal{A}^\rho$ solução de

$$[G + \text{diag } B, W] + B - \text{diag } B = 0, \tag{2.14}$$

com $W_{nn} = 1$ para todo n . Além disso,

$$\|W - \mathbf{1}\|_\rho \leq C \|B\|_\rho, \quad (2.15)$$

com $C = 1/K$.

Demonstração. De (2.14) obtemos que

$$B - \text{diag } B = W (G + \text{diag } B) - (G + \text{diag } B) W.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (B - \text{diag } B)_{nm} &= (W (G + \text{diag } B))_{nm} - ((G + \text{diag } B) W)_{nm} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} W_{nj} (G + \text{diag } B)_{jm} - (G + \text{diag } B)_{nj} W_{jm}. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $G + \text{diag } B$ é diagonal segue que

$$(B - \text{diag } B)_{nm} = W_{nm}(g_m + B_{mm}) - (g_n + B_{nn})W_{nm}.$$

Daí, obtemos a solução \tilde{W}_{nm} dada por

$$\tilde{W}_{nm} = \begin{cases} \frac{B_{nm}}{g_m + B_{mm} - (g_n + B_{nn})}, & n \neq m \\ 0, & n = m. \end{cases}$$

Resta mostrar que a solução $\tilde{W} \in \mathcal{A}^\rho$. De (2.13)

$$|\tilde{W}_{nm}| = \frac{|B_{nm}|}{|g_m + B_{mm} - (g_n + B_{nn})|} \leq C |B_{nm}|;$$

daí

$$\begin{aligned} \|\tilde{W}\|_\rho &= \sup_n \sum_m e^{\rho|n-m|} |\tilde{W}_{nm}| = \sup_n \sum_{m \neq n} e^{\rho|n-m|} \frac{|B_{nm}|}{|g_m + B_{mm} - (g_n + B_{nn})|} \\ &\leq C \sup_n \sum_{m \neq n} e^{\rho|n-m|} |B_{nm}| \leq C \|B\|_\rho. \end{aligned}$$

Finalmente, note que se \tilde{W} for solução de (2.14), então $W := \tilde{W} + \mathbf{1}$ também será solução e (2.15) vale para $W - \mathbf{1}$. \square

2.4 Demonstração do Teorema 1.1

2.4.1 Estratégia da demonstração

Denotemos por $D = D^0 = H_0$, $V^0 = V$ e $P^0 = \mathbf{1}$; assim $H_V = H_0 + V$. Consideremos

$$(P^0)^{-1} (D + V) P^0 = D^0 + V^0 = (D^0 + \text{diag } V^0) + (V^0 - \text{diag } V^0). \quad (2.16)$$

Gostaríamos de encontrar um operador linear invertível W^0 de maneira que

$$(W^0)^{-1} (D + V) W^0 = \text{operador diagonal.}$$

Se $V^0 = 0$ podemos tomar $W^0 = \mathbf{1}$; se V^0 for “pequena”, por exemplo, $\|V^0\| \leq C\epsilon$, para algum $C > 0$, $0 < \epsilon < 1$ e para alguma norma $\|\cdot\|$, espera-se que W^0 esteja próximo de $\mathbf{1}$, ou seja, $W^0 = \mathbf{1} + R_0$, sendo $\|R_0\| \leq \tilde{C}\epsilon$, e sua inversa seria dada por

$$(W^0)^{-1} = (\mathbf{1} + R_0)^{-1} = \mathbf{1} - R_0 + R_0^2 - R_0^3 + \dots$$

Assim,

$$\begin{aligned} (W^0)^{-1} (D + V) W^0 &= (\mathbf{1} - R_0 + R_0^2 - R_0^3 + \dots) \\ &\quad [(D^0 + \text{diag } V^0) + (V^0 - \text{diag } V^0)] (\mathbf{1} + R_0) \\ &= (D^0 + \text{diag } V^0) + (V^0 - \text{diag } V^0) + \\ &\quad [(D^0 + \text{diag } V^0), R_0] + \\ &\quad [(V^0 - \text{diag } V^0), R_0] - R_0 (D^0 + V^0) R_0 + \dots \end{aligned}$$

Impondo que os termos de ordem ϵ e alguns de ordem ϵ^2 se cancelem, obtemos uma equação para R_0

$$[(D^0 + \text{diag } V^0), R_0] + V^0 - \text{diag } V^0 = 0. \quad (2.17)$$

Observe que se R_0 for solução de (2.17), então $W^0 = \mathbf{1} + R_0$ também será solução. Logo das equações (2.16) e (2.17) obtemos

$$(P^1)^{-1} (D^0 + V^0) P^1 = D^1 + V^1,$$

sendo W^0 solução de (2.17) e

$$\left\{ \begin{array}{l} P^1 = P^0 W^0 \\ D^1 = D^0 + \text{diag } V^0 \\ V^1 = [V^0 - \text{diag } V^0, R_0] - R_0 (D^0 + \text{diag } V^0) R_0 - R_0 (V^0 - \text{diag } V^0) R_0 + \dots \end{array} \right.$$

Note que D^1 é um operador diagonal e, aproximadamente, $\|V^1\| \leq C_1 \epsilon^2$, para algum $C_1 > 0$, $\|W^0\| \leq 1 + \tilde{C}_1 \epsilon$ e $\|(W^0)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \tilde{C}_1 \epsilon}$. Agora vamos iterar este processo. Supondo válido o k -ésimo passo, isto é,

$$(P^k)^{-1} (D + V) P^k = D^k + V^k, \quad (2.18)$$

com D^k um operador diagonal e, aproximadamente, $\|V^k\| \leq C_k \epsilon^{2^k}$, para algum $C_k > 0$, $\|W^{k-1}\| \leq 1 + \tilde{C}_k \epsilon^{2^{k-1}}$ e $\|(W^{k-1})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \tilde{C}_k \epsilon^{2^{k-1}}}$, repete-se o argumento acima e procura-se W^k , $\|W^k\| \leq 1 + C_{k+1} \epsilon^{2^k}$, de modo que $W^k = \mathbf{1} + R_k$, $(W^{(k)})^{-1} = \mathbf{1} - R_k + R_k^2 - R_k^3 + \dots$ com

$$[(D^k + \text{diag } V^k), R_k] + V^k - \text{diag } V^k = 0. \quad (2.19)$$

Observe que $W^k = \mathbf{1} + R_k$ também é solução de (2.19). Logo das equações (2.18) e (2.19) obtemos

$$(P^{k+1})^{-1} (D + V) P^{k+1} = D^{k+1} + V^{k+1}, \quad (2.20)$$

sendo W^k solução de (2.19) e

$$\begin{cases} P^{k+1} = P^k W^k \\ D^{k+1} = D^k + \text{diag } V^k \\ V^{k+1} = [V^k - \text{diag } V^k, R_k] - R_k (D^k + \text{diag } V^k) R_k - R_k (V^k - \text{diag } V^k) R_k + \dots \end{cases}$$

Note que D^{k+1} é um operador diagonal e, aproximadamente, $\|V^{k+1}\| \leq C_{k+1} \epsilon^{2^{k+1}}$, para algum $C_{k+1} > 0$, e $\|W^k\| \leq 1 + \tilde{C}_{k+1} \epsilon^{2^k}$ e $\|(W^k)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \tilde{C}_{k+1} \epsilon^{2^k}}$. Um ponto importante é que a cada passo a ordem da perturbação é reduzida de ϵ^{2^k} para $\epsilon^{2^{k+1}}$. Tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$ em (2.20) obtém-se

$$P^{-1} (D + V) P = \tilde{D} = \text{operador diagonal},$$

sendo $P = \lim_{k \rightarrow \infty} W^0 W^1 \dots W^{k-1}$.

2.4.2 Implementação

Vamos agora demonstrar o Teorema 1.1.

Primeiro Passo $k = 0$.

Considerando $D = D^0 = H_0$, $V^0 = V$ e $P^0 = \mathbf{1}$, temos

$$(P^0)^{-1}(D + V)P^0 = D^0 + V^0 = (D^0 + \text{diag } V^0) + (V^0 - \text{diag } V^0). \quad (2.21)$$

Por hipótese, $D^0 + \text{diag } V^0$ é um operador diagonal cuja sequência diagonal é $(D^0 + \text{diag } V^0)_{nn} = \lambda_n^0 = n + V_{nn}^0$ e satisfaz

$$|\lambda_n^0 - \lambda_m^0| > K_0, \quad n \neq m,$$

para algum $K_0 > 0$ (veja 2.39). Pelo Lema 2.14, para cada $\rho > 0$ fixado, existe $W^0 \in \mathcal{A}^\rho$ solução de

$$[D^0 + \text{diag } V^0, W^0] + V^0 - \text{diag } V^0 = 0, \quad (2.22)$$

com

$$\text{diag } (W^0 - \mathbf{1}) = 0$$

Além disso, existe uma constante $C_0 = 1/K_0 \geq 1$ de maneira que

$$\|W^0 - \mathbf{1}\|_\rho \leq C_0 \|V^0\|_\rho. \quad (2.23)$$

De (2.21) e (2.22) temos

$$\begin{aligned} (W^0)^{-1}(P^0)^{-1}(D + V)P^0W^0 &\stackrel{(2.21)}{=} (W^0)^{-1}(D^0 + \text{diag } V^0)W^0 + (W^0)^{-1}(V^0 - \text{diag } V^0)W^0 \\ &\stackrel{(2.22)}{=} (W^0)^{-1}(W^0(D^0 + \text{diag } V^0)) - (W^0)^{-1}((V^0 - \text{diag } V^0)) \\ &\quad + (W^0)^{-1}(V^0 - \text{diag } V^0)W^0 =: D^1 + V^1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(P^1)^{-1}(D + V)P^1 = D^1 + V^1,$$

sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} P^1 = P^0W^0 \\ D^1 = D^0 + \text{diag } V^0 \\ V^1 = (W^0)^{-1}(V^0 - \text{diag } V^0)(W^0 - \mathbf{1}). \end{array} \right.$$

Pelo Lema 2.11, W^0 é um operador invertível em \mathcal{A}^ρ e

$$\begin{aligned} \|(W^0)^{-1} - \mathbf{1}\|_\rho &\leq \frac{\|W^0 - \mathbf{1}\|_\rho}{1 - \|W^0 - \mathbf{1}\|_\rho} \leq \frac{\|W^0 - \mathbf{1}\|_\rho}{1 - C_0\|V^0\|_\rho} \\ &\leq 2\|W^0 - \mathbf{1}\|_\rho < 1, \end{aligned}$$

desde que

$$C_0 \|V^0\|_\rho < \frac{1}{2} < 1, \quad (2.24)$$

o que verificaremos adiante.

Pelo Lema 2.9, segue-se que

$$\begin{aligned} \|V^1\|_\rho &= \|(W^0)^{-1}(V^0 - \text{diag } V^0)(W^0 - \mathbf{1})\|_\rho \\ &\leq \|(W^0)^{-1}\|_\rho \|V^0\|_\rho \|W^0 - \mathbf{1}\|_\rho. \end{aligned}$$

Como

$$\|(W^0)^{-1}\|_\rho = \|(W^0)^{-1} - \mathbf{1} + \mathbf{1}\|_\rho \leq \|(W^0)^{-1} - \mathbf{1}\|_\rho + \|\mathbf{1}\|_\rho < 2,$$

define-se θ_1 através de

$$\|V^1\|_\rho \leq 2\|V^0\|_\rho \|W^0 - \mathbf{1}\|_\rho \leq 2C_0 \|V^0\|_\rho^2 =: \theta_1^2.$$

Segundo Passo $k = 1$.

Seja $D^1 + \text{diag } V^1$ um operador diagonal cuja sequência diagonal dada por

$$(D^1 + \text{diag } V^1)_{nn} = \lambda_n^1 = \lambda_n^0 + V_{nn}^1 = n + V_{nn}^0 + V_{nn}^1$$

satisfaz (veja 2.39)

$$|\lambda_n^1 - \lambda_m^1| > K_1 > 0, \quad m \neq n.$$

Pelo Lema 2.14, existe $W^1 \in \mathcal{A}^\rho$ solução de

$$[D^1 + \text{diag } V^1, W^1] + V^1 - \text{diag } V^1 = 0, \quad (2.25)$$

com

$$\text{diag } (W^1 - \mathbf{1}) = 0.$$

Além disso, existe uma constante $C_1 = 1/K_1 \geq 1$ de modo que

$$\|W^1 - \mathbf{1}\|_\rho \leq C_1 \|V^1\|_\rho. \quad (2.26)$$

De (2.21) e (2.25) temos

$$\begin{aligned} (W^1)^{-1}(P^1)^{-1}(D + V)P^1W^1 &\stackrel{(2.21)}{=} (W^1)^{-1}(D^1 + \text{diag } V^1)W^1 + (W^1)^{-1}(V^1 - \text{diag } V^1)W^1 \\ &\stackrel{(2.25)}{=} (W^1)^{-1}(W^1(D^1 + \text{diag } V^1)) - (W^1)^{-1}((V^1 - \text{diag } V^1)) \\ &+ (W^1)^{-1}(V^1 - \text{diag } V^1)W^1 =: D^2 + V^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(P^2)^{-1}(D + V)P^2 = D^2 + V^2,$$

sendo

$$\begin{cases} P^2 = P^1 W^1 \\ D^2 = D^1 + \text{diag } V^1 \\ V^2 = (W^1)^{-1}(V^1 - \text{diag } V^1)(W^1 - \mathbf{1}). \end{cases}$$

Pelo Lema 2.11, W^1 é um operador invertível em \mathcal{A}^ρ e

$$\begin{aligned} \|(W^1)^{-1} - \mathbf{1}\|_\rho &\leq \frac{\|W^1 - \mathbf{1}\|_\rho}{1 - \|W^1 - \mathbf{1}\|_\rho} \leq \frac{\|W^1 - \mathbf{1}\|_\rho}{1 - C_1 \|V^1\|_\rho} \\ &\leq 2 \|W^1 - \mathbf{1}\|_\rho < 1, \end{aligned}$$

desde que

$$C_1 \|V^1\|_\rho < \frac{1}{2} < 1, \quad (2.27)$$

o que verificaremos adiante.

Pelo Lema 2.9, temos

$$\begin{aligned} \|V^2\|_\rho &= \|(W^1)^{-1}(V^1 - \text{diag } V^1)(W^1 - \mathbf{1})\|_\rho \\ &\leq \|(W^1)^{-1}\|_\rho \|V^1\|_\rho \|W^1 - \mathbf{1}\|_\rho. \end{aligned}$$

Como

$$\|(W^1)^{-1}\|_\rho = \|(W^1)^{-1} - \mathbf{1} + \mathbf{1}\|_\rho \leq \|(W^1)^{-1} - \mathbf{1}\|_\rho + \|\mathbf{1}\|_\rho < 2,$$

define-se θ_2 através de

$$\begin{aligned} \|V^2\|_\rho &\leq 2 \|V^1\|_\rho \|W^1 - \mathbf{1}\|_\rho \leq 2C_1 \|V^1\|_\rho^2 \\ &\leq 8C_1 C_0^2 \|V^0\|_\rho^4 =: \theta_2^2. \end{aligned}$$

(k + 1)-ésimo passo

Supomos que podemos encontrar para algum $k \in \mathbb{N}$:

(i) Um operador $V^k \in \mathcal{A}^\rho$ satisfazendo

$$\|V^k\|_\rho \leq \theta_k^{2^k},$$

sendo

$$\theta_k = \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} \left[(2C_j)^{2^{-j-1}} \right] \right\} \|V^0\|_\rho, \quad (2.28)$$

e usando (2.12)

$$\|V\|_\rho = \|V^0\|_\rho \leq \theta_0 := \|V\|_\infty \|\dot{b}\|_\rho. \quad (2.29)$$

(ii) Um operador diagonal D^k com $D^k + \text{diag } V^k$ diagonal cuja sequência diagonal é dada por $(D^k + \text{diag } V^k)_{nn} = \lambda_n^k = \lambda_n^{k-1} + V_{nn}^k$ satisfazendo (veja 2.39), para alguma constante $K_k > 0$,

$$|\lambda_n^k - \lambda_m^k| > K_k, \quad n \neq m, \quad (2.30)$$

de modo que

$$(P^k)^{-1}(D + V)P^k = D^k + V^k, \quad (2.31)$$

sendo $P^k = W^0 W^1 \dots W^{k-1}$.

Mostremos que (i)-(ii) valem para $k + 1$. Pelo Lema 2.14, existe $W^k \in \mathcal{A}^\rho$ solução de

$$[D^k + \text{diag } V^k, W^k] + V^k - \text{diag } V^k = 0, \quad (2.32)$$

com

$$\text{diag}(W^k - \mathbf{1}) = 0.$$

Além disso, com $C_k = 1/K_k \geq 1$,

$$\|W^k - \mathbf{1}\|_\rho \leq C_k \|V^k\|_\rho. \quad (2.33)$$

De (2.21) e (2.32) temos

$$\begin{aligned} (W^k)^{-1}(P^k)^{-1}(D + V)P^k W^k &\stackrel{(2.21)}{=} (W^k)^{-1}(D^k + \text{diag } V^k)W^k + (W^k)^{-1}(V^k - \text{diag } V^k)W^k \\ &\stackrel{(2.32)}{=} (W^k)^{-1}(W^k(D^k + \text{diag } V^k)) - (W^k)^{-1}((V^k - \text{diag } V^k)) \\ &\quad + (W^k)^{-1}(V^k - \text{diag } V^k)W^k =: D^{k+1} + V^{k+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(P^{k+1})^{-1}(D + V)P^{k+1} = D^{k+1} + V^{k+1},$$

sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} P^{k+1} = P^k W^k \\ D^{k+1} = D^k + \text{diag } V^k \\ V^{k+1} = (W^k)^{-1}(V^k - \text{diag } V^k)(W^k - \mathbf{1}). \end{array} \right.$$

Pelo Lema 2.11, W^k é um operador invertível em \mathcal{A}^ρ e

$$\begin{aligned} \|(W^k)^{-1} - \mathbf{1}\|_\rho &\leq \frac{\|W^k - \mathbf{1}\|_\rho}{1 - \|W^k - \mathbf{1}\|_\rho} \leq \frac{\|W^k - \mathbf{1}\|_\rho}{1 - C_k \|V^k\|_\rho} \\ &\leq 2 \|W^k - \mathbf{1}\|_\rho < 1, \end{aligned}$$

desde que

$$C_k \|V^k\|_\rho < \frac{1}{2} < 1; \quad (2.34)$$

o que verificaremos adiante.

Pelo Lema 2.9 temos

$$\begin{aligned} \|V^{k+1}\|_\rho &= \|(W^k)^{-1}(V^k - \text{diag } V^k)(W^k - \mathbf{1})\|_\rho \\ &\leq \|(W^k)^{-1}\|_\rho \|V^k\|_\rho \|W^k - \mathbf{1}\|_\rho. \end{aligned}$$

Como

$$\|(W^k)^{-1}\|_\rho = \|(W^k)^{-1} - \mathbf{1} + \mathbf{1}\|_\rho \leq \|(W^k)^{-1} - \mathbf{1}\|_\rho + \|\mathbf{1}\|_\rho < 2,$$

define-se θ_{k+1} através de

$$\|V^{k+1}\|_\rho \leq 2 \|V^k\|_\rho \|W^k - \mathbf{1}\|_\rho \leq 2 C_k \theta_k^{2^{k+1}} =: \theta_{k+1}^{2^{k+1}}.$$

Convergência

Resta mostrar, sob as condições apresentadas neste teorema, que o processo iterativo acima converge para $k \rightarrow \infty$, ou seja,

$$(j) \quad \theta_k \rightarrow \theta_\infty.$$

$$(jj) \quad P^k \text{ é sequência de Cauchy em } \mathcal{A}^\rho, \text{ então existe } P \in \mathcal{A}^\rho \text{ com } P^k \rightarrow P, P \neq 0.$$

$$(jjj) \quad V^k \rightarrow 0 \text{ em } \mathcal{A}^\rho, \text{ e a condição suficiente para convergência do processo em termos de } \|V\|_\infty.$$

Verificação de (j).

Verificaremos que existe $0 < \theta_\infty < \infty$ de forma que $\theta_k \rightarrow \theta_\infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Podemos supor que $1 \leq C_k$ aumenta com k , assim θ_k é crescente. De (2.28) e (2.29) segue que

$$\theta_k = \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} \left[(2C_j)^{2^{-j-1}} \right] \right\} \|V^0\|_\rho \leq \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} \left[(2C_j)^{2^{-j-1}} \right] \right\} \theta_0.$$

Então, se C_j não crescer muito rapidamente para $j \rightarrow \infty$, θ_k converge para algum $\theta_\infty < \infty$; por exemplo, isto acontece se $1 \leq C_j \leq L2^{j+1}$ para algum $L > 0$ (e então $K_j = \frac{1}{L2^{j+1}}$).

Tomando $0 < h < 1/5$, será conveniente escolher $\theta_0 (= \|V\|_\infty \|\dot{b}\|_\rho)$, veja (2.29) então

$$\prod_{j=0}^{\infty} \left[(2C_j)^{2^{-j-1}} \right] < \frac{h}{\theta_0}.$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$, temos

$$\theta_\infty < \frac{h \|V^0\|_\rho}{\theta_0} \leq h, \quad \text{e então} \quad \theta_\infty < \frac{1}{5}.$$

Verificação de (jj).

Mostremos que P^k converge em \mathcal{A}^ρ para $P \neq 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Como θ_k é crescente, temos

$$C_k \|V^k\|_\rho \leq C_k \theta_k^{2^k} \leq \theta_\infty^{2^k} < 1. \quad (2.35)$$

Usando $P^{k-1} = W^0 W^1 \dots W^{k-2}$, o Lema 2.9 e (2.35) obtemos

$$\begin{aligned} \|P^k - P^{k-1}\|_\rho &= \|P^{k-1} W^{k-1} - P^{k-1}\|_\rho \leq \|P^{k-1}\|_\rho \|W^{k-1} - \mathbf{1}\|_\rho \\ &\leq \left(\|W^0 - \mathbf{1}\|_\rho + \|\mathbf{1}\|_\rho \right) \left(\|W^1 - \mathbf{1}\|_\rho + \|\mathbf{1}\|_\rho \right) \\ &\dots \left(\|W^{k-2} - \mathbf{1}\|_\rho + \|\mathbf{1}\|_\rho \right) \left(\|W^{k-1} - \mathbf{1}\|_\rho \right) \\ &= \prod_{j=0}^{k-2} \left(\|W^j - \mathbf{1}\|_\rho + \|\mathbf{1}\|_\rho \right) \|W^{k-1} - \mathbf{1}\|_\rho \\ &\leq \|W^{k-1} - \mathbf{1}\|_\rho \prod_{j=0}^{k-2} (\theta_\infty^{2^j} + 1). \end{aligned}$$

De (2.33) e (2.35) segue que

$$\|P^k - P^{k-1}\|_\rho \leq 2\theta_\infty^{2^{k-1}}. \quad (2.36)$$

Suponha $m < k$; então, como $\theta_\infty < 1$,

$$\begin{aligned} \|P^k - P^m\|_\rho &\leq \|P^k - P^{k-1}\|_\rho + \|P^{k-1} - P^{k-2}\|_\rho + \dots + \|P^{m+1} - P^m\|_\rho \\ &\leq 2 \sum_{j=m}^{k-1} \theta_\infty^{2^j} \leq 2\theta_\infty^{2^m} \sum_{j=0}^{\infty} \theta_\infty^j = \frac{2\theta_\infty^{2^m}}{1-\theta_\infty} \longrightarrow 0, \quad \text{para } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto P^k é de Cauchy em \mathcal{A}^ρ . Como $\theta_\infty < h$, segue então

$$\begin{aligned} \|P^k - \mathbf{1}\|_\rho &\leq 2 \sum_{j=0}^{k-1} \|W^j - \mathbf{1}\|_\rho \leq 2 \sum_{j=0}^{k-1} \theta_\infty^{2^j} \\ &\leq 2\theta_\infty \sum_{j=0}^{\infty} \theta_\infty^j = \frac{2\theta_\infty}{1-\theta_\infty} < 1, \end{aligned}$$

logo, para $k \rightarrow \infty$ temos

$$\|P - \mathbf{1}\|_\rho \leq \frac{2\theta_\infty}{1-\theta_\infty} < 1.$$

Além disso, pelo Lema 2.11, temos que P é invertível em \mathcal{A}^ρ e

$$\|(P)^{-1} - \mathbf{1}\|_\rho \leq \frac{\|P - \mathbf{1}\|_\rho}{1 - \|P - \mathbf{1}\|_\rho} \leq \frac{2\theta_\infty}{1 - 3\theta_\infty} < 1,$$

o que implica que P é invertível em \mathcal{A}^ρ , em particular, $P \neq 0$.

Portanto (2.34) (bem como (2.24) e (2.27)) também é válido, isto é,

$$C_k \|V^k\|_\rho \leq C_k \theta_k^{2^k} \leq \theta_\infty^{2^k} \leq \frac{1}{5} < 1,$$

junto com

$$\|P\|_\rho \leq 2 \text{ e } \|P^{-1}\|_\rho \leq 2.$$

Verificação de (jjj)

Por indução, usando (2.35) temos que

$$\|V^k\|_\rho \leq \theta_k^{2^k} \leq \theta_0 \theta_\infty^{2^k - 1} < \theta_0 h^{2^k - 1}, \quad (2.37)$$

Assim, $V^k \rightarrow 0$ em \mathcal{A}^ρ . Além disso,

$$(P)^{-1} H_V P = H_0 + \sum_{k \geq 0} \text{diag } V^k$$

é diagonal cujos autovalores (elementos da diagonal) são dados por

$$\lambda_n^\infty := n + \sum_{k \geq 0} (\text{diag } V^k)_{nn}. \quad (2.38)$$

Para completar a demonstração da diagonalização, justificaremos a hipótese sobre $\|V\|_\infty$ no Teorema 1.1, o qual garante a convergência do processo. Em cada passo do processo todos os autovalores precisam ser simples, então é suficiente impor que

$$\sum_k |V_{nn}^k| = \sum_k |(\text{diag } V^k)_{nn}| < \frac{1}{2}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$ (como nesse caso $|\lambda_n^k - \lambda_m^k| > 0$, para todo $n \neq m$ e todo $0 \leq k < \infty$). Como $|V_{nn}^k| \leq \|V^k\|_\rho$ e $\theta_0 = \|V\|_\infty \|\dot{b}\|_\rho$, por (2.37), para todo n temos

$$\sum_k |V_{nn}^k| \leq \sum_k \|V^k\|_\rho \leq \|V\|_\infty \|\dot{b}\|_\rho \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k-1}. \quad (2.39)$$

Agora é suficiente impor que

$$\|V\|_\infty < \frac{1}{2F(\sum_{k \geq 0} h^{2k-1})}$$

com $F > \inf_{\rho' > 0} \|\dot{b}\|_{\rho'}$, e escolhemos $\rho > 0$ de modo que $F > \|\dot{b}\|_\rho$ para justificar a convergência de todo o processo.

2.4.3 H_V tem SULE

Vamos verificar que, para V como no Teorema 1.1, as autofunções de H_V satisfazem (1.2), ou seja, H_V tem SULE.

Pelo Teorema 2.6, sabemos que o operador H_V tem espectro discreto. Verificamos que suas autofunções são $\{P\psi_m\}$, sendo $P \in \mathcal{A}^\rho$ o operador que diagonaliza H_V (veja a demonstração acima) e $\{\psi_m\}$ as autofunções de H_0 . Tais autofunções formam um conjunto completo e ortogonal em $l^2(\mathbb{Z})$. Para $\{P\psi_m\}$ tem-se

$$\begin{aligned} |(P\psi_m)(n)| &= |\langle e_n, P\psi_m \rangle| = \left| \sum_k \langle e_n, \psi_k \rangle \langle \psi_k, P\psi_m \rangle \right| \\ &\leq \sum_k |P_{km}| |\psi_k(n)| \leq \sum_k \frac{C e^{-\rho|k-m|}}{1 + |m-k|} \frac{1}{|n-k|} \\ &= \sum_k \frac{C e^{-\rho|m-k|}}{1 + |m-k|} \frac{1}{|n-k|} \frac{1}{(|n-k|-1)!} \\ &\leq C \sum_k \frac{e^{-\rho(|m-k|+|n-k|)}}{(1 + |m-k|)(|n-k|)} \\ &\leq C \left(\sum_k \frac{1}{(1 + |m-k|)(|n-k|)} \right) e^{-\rho|n-m|}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

A soma acima entre parênteses é convergente e tem limite superior independente de n, m , logo

$$(2.40) \leq \tilde{C} e^{-\rho|n-m|} \leq \tilde{C} e^{\delta|m| - \rho|n-m|},$$

para todo $\delta > 0$ e para alguma constante $\tilde{C} > 0$. Isso completa a demonstração do Teorema 1.1.

Corolário 2.15. *É possível escolher P no Teorema 1.1 como um operador unitário.*

Demonstração. Suponha que diagonalizamos $H_0 + V$ por meio de um operador invertível P que não é unitário. Como, por hipótese,

$$\|V\|_\infty < \frac{1}{2\|b\|_0},$$

temos, para alguma constante $K > 0$, que

$$|\lambda_n^\infty - \lambda_m^\infty| > K, \quad n \neq m.$$

Isto implica que todos os autovalores de $H_0 + V$ são simples. Como $H_0 + V$ é auto-adjunto, todos os seus autovetores $P\psi_m$ são ortogonais entre si, logo o operador P^*P é diagonal na base $\{\psi_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ dos autovetores de H_0 ; de fato,

$$\langle P^*P\psi_n, \psi_m \rangle = \langle P\psi_m, P\psi_n \rangle = \delta_{nm} \|P\psi_n\|^2 = \langle \psi_m, P^*P\psi_n \rangle.$$

Observe que P^*P é um operador auto-adjunto e positivo.

Definindo $W = P(P^*P)^{-1/2}$, temos que W é unitário, pois

$$\begin{aligned} \langle (W^*W)\psi_m, \psi_n \rangle &= \langle W\psi_m, W\psi_n \rangle = \langle (P^*P)^{-1/2}\psi_m, (P^*P)^{1/2}\psi_n \rangle \\ &= \langle \psi_m, \psi_n \rangle = \delta_{m,n}, \end{aligned}$$

e, analogamente, $\langle \psi_m, (W^*W)\psi_n \rangle = \delta_{nm}$.

Assim, pelo Teorema 1.1, substituindo W no lugar de P , obtemos (1.4) com “ P unitário”. De fato,

$$W^{-1}H_VW = (P^*P)^{1/2}P^{-1}H_VP(P^*P)^{-1/2} = (P^*P)^{1/2}D(P^*P)^{-1/2} =: \tilde{D}.$$

□

Capítulo 3

Operador bidimensional

Neste capítulo, aplicaremos a técnica KAM para o operador (1.5). Nosso objetivo aqui é apresentar a demonstração do Teorema 1.4. Mas antes destacaremos algumas diferenças na aplicação da técnica para este modelo em relação ao modelo (1.3).

- $H_{0,E,\omega}$ tem espectro pontual puro e denso na reta (Teorema 3.1).
- Suporemos que o potencial V depende do parâmetro E (intensidade do campo elétrico), por isso será necessário descartar do processo um conjunto de intensidades que possui medida de Lebesgue pequena. Para mostrarmos que a medida deste conjunto é pequena, suporemos que V é ω -dominado em relação à base $\{\psi_m\}$ (veja Definição 3.8 e Lema 3.10).
- O espaço $\mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$ (veja Subseção 3.3) em que se encontram a perturbação V e o operador W que "diagonaliza" em um certo sentido o operador em questão (veja Lema 3.13), será diminuído, em cada passo do processo, para $\rho_0 - r$, com $0 < r < \rho_0$, devido à condição de limitação inferior da diferença dos autovalores tender a zero; esta escolha será necessária em virtude da densidade dos autovalores de $H_{0,E,\omega}$ na reta.
- Não fomos capazes de dar condições para a convergência em termos da $\|\cdot\|_\infty$ da perturbação, conforme fizemos no Capítulo 2, visto que os autovalores do operador não perturbado formam um conjunto denso na reta; de fato, a classe de potenciais em que demonstraremos os principais resultados depende da direção do campo ω .

Na Seção 3.1 encontraremos o espectro de $H_{0,E,\omega}$. Na Seção 3.2 demonstraremos que $H_{0,E,\omega}$ tem localização dinâmica. Definição e propriedades gerais do espaço $\mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$

estão presentes na Seção 3.3. Na Seção 3.4 demonstraremos alguns lemas que serão essenciais para a demonstração do Teorema 1.4, a qual se encontra na Seção 3.5.

3.1 Espectro pontual puro para $H_{0,E,\omega}$

Nesta seção, vamos mostrar que o espectro do operador $H_{0,E,\omega}$ é pontual puro e denso na reta. Demonstraremos também uma estimativa muito útil para suas autofunções.

Teorema 3.1. $H_{0,E,\omega}$ tem espectro pontual puro e denso na reta.

Demonstração. Usaremos a transformada de Fourier

$$\hat{\varphi}(\epsilon) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \varphi(n) e^{-2\pi i \langle n, \epsilon \rangle}.$$

Considere a equação de autovalores

$$H_{0,E,\omega} \varphi = \lambda \varphi, \quad (3.1)$$

e usando propriedades padrões da transformada ([5]) temos

$$\left(2 \sum_{j=1}^2 \cos(2\pi \epsilon_j) \right) \hat{\varphi}(\epsilon) + \sum_{j=1}^2 \frac{E\omega_j}{2\pi i} \frac{\partial \hat{\varphi}(\epsilon)}{\partial \epsilon_j} = \lambda \hat{\varphi}(\epsilon). \quad (3.2)$$

A equação (3.2) tem solução para $\lambda_m := E \langle m, \omega \rangle$, $m \in \mathbb{Z}^2$. De fato, usando o método de separação de variáveis $\hat{\varphi}_m(\epsilon) := \hat{\varphi}_m(\epsilon_1, \epsilon_2) = \hat{\varphi}_m^1(\epsilon_1) \hat{\varphi}_m^2(\epsilon_2)$ obtém-se

$$\sum_{j=1}^2 (2 \cos(2\pi \epsilon_j) - E m_j \omega_j) \hat{\varphi}_m^j(\epsilon_j) + \sum_{j=1}^2 \frac{E\omega_j}{2\pi i} \frac{\partial \hat{\varphi}_m^j(\epsilon_j)}{\partial \epsilon_j} = 0.$$

Dividindo a equação acima por $\hat{\varphi}_m^j(\epsilon_j)$ (nos pontos em que $\hat{\varphi}_m^j(\epsilon_j) \neq 0$) e igualando a zero cada termo da soma, obtemos

$$(-2 \cos(2\pi \epsilon_j) + E m_j \omega_j) = \frac{E\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{\hat{\varphi}_m^j(\epsilon_j)} \frac{\partial \hat{\varphi}_m^j(\epsilon_j)}{\partial \epsilon_j}.$$

Integrando ambos os lados com relação a ϵ_j ($j = 1, 2$), tem-se

$$\ln \hat{\varphi}_m^j(\epsilon_j) = \frac{-2i}{E\omega_j} \text{sen}(2\pi \epsilon_j) + 2\pi i \epsilon_j m_j,$$

portanto,

$$\hat{\varphi}_m^j(\epsilon_j) = e^{-2i(E\omega_j)^{-1} \text{sen} 2\pi \epsilon_j} e^{2\pi i \epsilon_j m_j}.$$

Dessa forma,

$$\hat{\varphi}_m(\epsilon) = e^{2\pi i \langle m, \epsilon \rangle} \prod_{j=1}^2 e^{-2i(E\omega_j)^{-1} \text{sen} 2\pi \epsilon_j}.$$

Note que este conjunto forma uma base ortonormal de $L^2([0, 1] \times [0, 1])$; de fato, se $\hat{\varphi} \perp \hat{\psi}_m$ para todo $m \in \mathbb{Z}^2$, então $e^{2i \text{sen}(2\pi \epsilon)} \hat{\varphi}(\epsilon) = 0$ e então $\hat{\psi} = 0$. Pela inversa da transformada de Fourier,

$$\varphi_m(n) = \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i \langle n, \epsilon \rangle} \hat{\varphi}_m(\epsilon_1, \epsilon_2) d\epsilon_1 d\epsilon_2 \quad (3.3)$$

é solução de (3.1) com autovalores λ_m . Pelo Teorema de Plancherel, $\{\varphi_m\}$ é base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$. E o conjunto $\{\lambda_m : m \in \mathbb{Z}^2\}$ é denso na reta. \square

Observação 3.2. • Denotaremos por φ_m as autofunções de $H_{0,E,\omega}$. Note também que $\varphi_m(n) = \varphi_0(m+n)$, isto é, todas as autofunções de $H_{0,E,\omega}$ são obtidas a partir de uma delas pelo deslocamento dos vetores.

- Estamos considerando que os autovalores $E \langle n, \omega \rangle$ de $H_{0,E,\omega}$ sejam simples, por isto tomamos $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Proposição 3.3. Para todo $n, m \in \mathbb{Z}^2$,

$$|\varphi_m(n)| \leq \prod_{j=1}^2 \frac{1}{|E\omega_j|^{|n_j+m_j|} |m_j+n_j|!}. \quad (3.4)$$

Demonstração. É suficiente demonstrar que $|\varphi_0(n)| \leq \prod_{j=1}^2 \frac{1}{|E\omega_j|^{|n_j|} |n_j|!}$. Tem-se

$$\begin{aligned} \varphi_0(n) &= \int_0^1 \int_0^1 e^{-2\pi i(n_1\epsilon_1+n_2\epsilon_2)} \prod_{j=1}^2 e^{-2i(\omega_j E)^{-1} \text{sen}(2\pi\epsilon_j)} d\epsilon_1 d\epsilon_2 \\ &= \int_0^1 A(\epsilon_1) d\epsilon_1 \times \int_0^1 A(\epsilon_2) d\epsilon_2 \\ &= \left(J_{-n_1}(2(E\omega_1)^{-1}) - i \int_0^1 \text{sen}(2E^{-1}\omega_1^{-1} \text{sen}(2\pi n_1\epsilon_1) + 2\pi n_1\epsilon_1) d\epsilon_1 \right) \times \\ &\quad \left(J_{-n_2}(2(E\omega_2)^{-1}) - i \int_0^1 \text{sen}(2E^{-1}\omega_2^{-1} \text{sen}(2\pi\epsilon_2) + 2\pi n_2\epsilon_2) d\epsilon_2 \right), \quad (3.5) \end{aligned}$$

em que

$$A(\epsilon_1) = (\cos(2\pi n_1\epsilon_1) - i \text{sen}(2\pi n_1\epsilon_1)) (\cos(2E^{-1}\omega_1^{-1} \text{sen}(2\pi\epsilon_1)) - i \text{sen}(2E^{-1}\omega_1^{-1} \text{sen}(2\pi\epsilon_1)))$$

e

$A(\epsilon_2) = (\cos(2\pi n_2 \epsilon_2) - i \operatorname{sen}(2\pi n_2 \epsilon_2)) (\cos(2E^{-1}\omega_2^{-1} \operatorname{sen}(2\pi \epsilon_2)) - i \operatorname{sen}(2E^{-1}\omega_2^{-1} \operatorname{sen}(2\pi \epsilon_2)))$, sendo $J_{-n}(2(E\omega)^{-1})$ a representação integral da função de Bessel, isto é,

$$J_{-n}(2(E\omega)^{-1}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(2(E\omega)^{-1} \operatorname{sen}(2\pi \epsilon) + n2\pi \epsilon) d\epsilon.$$

Por argumentos análogos aos apresentados na demonstração da Proposição 2.3 obtemos

$$\begin{aligned} & -i \int_0^1 \operatorname{sen}(2E^{-1}\omega_1^{-1} \operatorname{sen}(2\pi n_1 \epsilon_1) + 2\pi n_1 \epsilon_1) d\epsilon_1 = \\ & -i \int_0^1 \operatorname{sen}(2E^{-1}\omega_2^{-1} \operatorname{sen}(2\pi \epsilon_2) + 2\pi n_2 \epsilon_2) d\epsilon_2 = 0. \end{aligned}$$

Assim, de (3.5) e por propriedade da função de Bessel, segue que

$$|\varphi_0(n)| = |J_{-n_1}(2(E\omega_1)^{-1})| |J_{-n_2}(2(E\omega_2)^{-1})| \leq \frac{1}{|E\omega_1|^{|n_1|} |n_1|! |E\omega_2|^{|n_2|} |n_2|!}.$$

□

Observação 3.4. Denotaremos por $\psi_m(n) := \varphi_{-m}(n)$ as autofunções do operador $H_{0,E,\omega}$, então, de (2.4), temos que $|\psi_m(n)| \leq \frac{1}{|E\omega_j|^{|n_j-m_j|} |n_j-m_j|!}$.

3.2 $H_{0,E,\omega}$ tem SULE

Conforme argumentos vistos na Seção 2.2, mostraremos que $H_{0,E,\omega}$ tem localização dinâmica.

Teorema 3.5. $H_{0,E,\omega}$ tem localização dinâmica.

Demonstração. É suficiente demonstrar que as autofunções $\{\psi_m\}$ de $H_{0,E,\omega}$ satisfaz a condição SULE. Pela Proposição 3.3, temos

$$|\psi_n(m)| \leq \prod_{j=1}^2 \frac{1}{|E\omega_j|^{|n_j-m_j|} |m_j - n_j|!}.$$

Precisamos mostrar que existe $\alpha > 0$ e para $\delta > 0$ existe $C(\delta) > 0$, tais que

$$\prod_{j=1}^2 \frac{1}{|E\omega_j|^{|n_j-m_j|} |m_j - n_j|!} \leq C(\delta) e^{\delta|m| - \alpha|n-m|}, \quad \forall n, m$$

Da equação (2.8) segue que, dado $\alpha > 0$, para cada $C_j > 0$, existe $n'_j \in \mathbb{N}$ de modo que, para $n_j \geq n'_j$,

$$\frac{1}{|E\omega_j|^{|n_j|} |n_j|!} \leq C_j e^{-\alpha|n_j|}.$$

Tomando $C(\delta) = \max\{C_1 C_2, \frac{e^{2\alpha}}{|E\omega_1||E\omega_2|}, \dots, \frac{e^{n'_1 \alpha e^{\alpha n'_2}}}{|E\omega_1|^{n'_1} n'_2! |E\omega_2|^{n'_2} n'_2!}\}$, segue que

$$|\psi_m(n)| \leq \prod_{j=1}^2 \frac{1}{|E\omega_j|^{|n_j - m_j|} |m_j - n_j|!} \leq C(\delta) e^{-\alpha|n-m|} \leq C(\delta) e^{\delta|m| - \alpha|n-m|}, \forall \delta > 0.$$

□

3.3 Espaço $\mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$ e propriedades

Introduziremos o espaço $(\mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty), \|\cdot\|_{\rho_0})$ e mostraremos algumas de suas propriedades que serão úteis adiante.

Seja $\rho_0 > 0$ e considere o conjunto $\mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$ das aplicações a de $(0, +\infty)$ no espaço dos operadores lineares limitados em $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ de forma que, para cada $E \in (0, +\infty)$, a seja representado por uma matriz infinita $\{a_{nm}(E)\}$, $n, m \in \mathbb{Z}^2$, com

$$\|a\|_{\rho_0} := \sup_{\substack{E \in (0, +\infty) \\ n \in \mathbb{Z}^2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} |a_{nm}(E)| e^{\rho_0|n-m|} < \infty.$$

Aqui $\{a_{nm}(E)\}$ é a matriz de representação do operador a na base dos autovetores de $H_{0,E,\omega}$, i.e., $a_{nm}(E) := \langle \psi_n, a\psi_m \rangle$.

Lema 3.6. $\mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$ é espaço de Banach.

Demonstração. Seja $\{a_i(E)\}$ sequência de Cauchy em $\mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$, sendo $a_i = \{a_{nm}^i(E)\}$, $n, m \in \mathbb{Z}^2$. Então para $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que para todos $i, j > N$,

$$\|a_i - a_j\|_{\rho_0} = \sup_{\substack{E \in (0, +\infty) \\ n \in \mathbb{Z}^2}} \sum_m e^{\rho_0|n-m|} |a_{nm}^i(E) - a_{nm}^j(E)| < \epsilon. \quad (3.6)$$

Segue que para $n, m \in \mathbb{Z}^2$,

$$|a_{nm}^i(E) - a_{nm}^j(E)| < \frac{\epsilon}{e^{\rho_0|n-m|}}.$$

Disto temos que para cada par $n, m \in \mathbb{Z}^2$, $\{a_{nm}^i(E)\}_i$ é uma sequência de Cauchy em \mathbb{R} , e denote por $a_{nm} = \{a_{nm}(E)\}$ o limite desta sequência. Então, $a_{nm}^i(E) \rightarrow a_{nm}(E)$ quando $i \rightarrow \infty$. Usando estes limites mostraremos que $a = \{a_{nm}(E)\} \in \mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$ e $a_i \rightarrow a$ em $\mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$. De (3.6) temos para $i, j > N$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{|m| < k} e^{\rho_0|n-m|} |a_{nm}^i(E) - a_{nm}^j(E)| < \epsilon,$$

tomando $j \rightarrow \infty$, obtemos para $i > N$,

$$\sum_{|m| < k} e^{\rho_0|n-m|} |a_{nm}^i(E) - a_{nm}(E)| < \epsilon.$$

Podemos tomar $k \rightarrow \infty$, então para $i > N$,

$$\sup_{\substack{E \in (0, +\infty) \\ n \in \mathbb{Z}^2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} e^{\rho_0|n-m|} |a_{nm}^i(E) - a_{nm}(E)| < \epsilon. \quad (3.7)$$

Isto mostra que $(a_i - a) \in \mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$ e daí

$$a = a_i + (a - a_i).$$

Portanto, $a \in \mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$. Além disso, o lado esquerdo de (3.7) representa $\|a_i - a\|_{\rho_0}$ com $a_i \rightarrow a$ em $\mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$. \square

Lema 3.7. *Se $\rho_0 > 0$ e $a, c \in \mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$, então ac e $ca \in \mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$. Além disso,*

$$\|ac\|_{\rho_0}, \|ca\|_{\rho_0} \leq \|a\|_{\rho_0} \|c\|_{\rho_0}.$$

Demonstração. Análoga à demonstração do Lema 2.9. \square

Um operador linear a , não necessariamente em $\mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$, é diagonal se $a_{nm}(E) = 0$ para $n \neq m$ (na base $\{\psi_m\}$ de $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$). $H_{0,E,\omega}$ é diagonal, por construção, cuja representação de matriz é dada por $(H_{0,E,\omega})_{nm} = E \langle n, \omega \rangle \delta_{nm}$, enquanto que para o operador perturbado temos a representação $(H_{V,E,\omega})_{nm}(E) = E \langle n, \omega \rangle \delta_{nm} + V_{nm}(E)$. Denotamos por \dot{b} o operador linear cujos elementos de matriz são

$$\dot{b}_{nm} := \dot{b}_{nm}(E) = \sum_{l_j \in \mathbb{Z}} \prod_{j=1}^2 \frac{1}{|E\omega_j|^{|n_j-l_j|+|m_j-l_j|} |n_j-l_j|! |m_j-l_j|!}.$$

Definição 3.8. Seja $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ uma direção no plano. Dizemos que $V \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^2)$ é ω -dominado em relação à base ortonormal $\{\psi_m\}_{m \in \mathbb{Z}^2}$ se existir $0 < \tilde{c} < 1$ de modo que

$$\Delta V_{nm}^\infty < \tilde{c} |\langle n - m, \omega \rangle|, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^2,$$

sendo ΔV_{nm}^∞ definido em (3.9).

3.4 Lemas auxiliares

Esta subseção é essencialmente técnica e serve de apoio à demonstração do teorema principal deste capítulo. O operador identidade é denotado por $\mathbf{1}$; então $\mathbf{1}_{nm} = \delta_{nm}$, e $\|\mathbf{1}\|_\rho = 1$, para todo $\rho > 0$. A diagonal do operador V é denotada por $\text{diag } V$. Para $V \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^2)$, temos a norma usual $\|V\|_\infty := \sup_n |V(n)|$.

Lema 3.9. *Seja $a \in \mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$ com $\|a - \mathbf{1}\|_{\rho_0} < 1$. Então a é invertível em $\mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$ e vale*

$$\|a^{-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_0} \leq \|a - \mathbf{1}\|_{\rho_0} (1 - \|a - \mathbf{1}\|_{\rho_0})^{-1}.$$

Demonstração. Segue análoga à demonstração do Lema 2.11. \square

Lema 3.10. *Fixe $\omega \in \Omega$, com $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \Omega_0$. Sejam $V \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^2)$, ω -dominado em relação à base $\{\psi_m\}_{m \in \mathbb{Z}^2}$, e $(\lambda_n^\infty)_{n \in \mathbb{Z}^2}$ a sequência*

$$n \in \mathbb{Z}^2 \mapsto \lambda_n^\infty(E) = E \langle n, \omega \rangle + \sum_{i=0}^{\infty} V_{nn}^i(E), \quad E \in (0, +\infty),$$

em que V_{nn}^i é o elemento de matriz diagonal do operador V^i que definiremos na Seção 3.5. Então dado $\epsilon > 0$, existe $K > 0$ de modo que para algum $\beta > 2$ e algum $\sigma > \beta$ o conjunto

$$I = \left\{ E \in (0, +\infty), \exists n \neq m : |\lambda_n^\infty(E) - \lambda_m^\infty(E)| < \frac{K}{(1 + |n - m|)^\sigma} \right\} \quad (3.8)$$

possui medida de Lebesgue menor do que ϵ .

Demonstração. Dados $n, m \in \mathbb{Z}^2$, considere o conjunto

$$I_{nm}(\eta_{nm}) = \{E \in (0, +\infty) : \exists n \neq m, |\lambda_n^\infty(E) - \lambda_m^\infty(E)| < \eta_{nm}\},$$

sendo $\eta_{nm} = \frac{K}{(1 + |n - m|)^\sigma}$.

Para que $I_{nm}(\eta_{nm})$ seja não vazio é necessário que $\langle n - m, \omega \rangle \neq 0$. Tomando $E_1, E_2 \in I_{nm}(\eta_{nm})$, com $E_1 \neq E_2$ temos

$$\begin{aligned} \frac{2\eta_{nm}}{|E_1 - E_2|} &= \frac{\eta_{nm} + \eta_{nm}}{|E_1 - E_2|} \\ &> \frac{|\lambda_n^\infty(E_1) - \lambda_m^\infty(E_1)|}{|E_1 - E_2|} + \frac{|\lambda_n^\infty(E_2) - \lambda_m^\infty(E_2)|}{|E_1 - E_2|} \\ &\geq \frac{|(E_1 - E_2) \langle n - m, \omega \rangle + \sum_{i=0}^{\infty} (V_{nn}^i(E_1) - V_{mm}^i(E_1) - V_{nn}^i(E_2) + V_{mm}^i(E_2))|}{|E_1 - E_2|} \\ &\geq |\langle n - m, \omega \rangle| - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|V_{nn}^i(E_2) - V_{nn}^i(E_1)|}{|E_1 - E_2|} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|V_{mm}^i(E_1) - V_{mm}^i(E_2)|}{|E_1 - E_2|} \\ &=: |\langle n - m, \omega \rangle| - \Delta V_{nm}^\infty. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Usando-se a hipótese de que V é ω -dominado em relação à base $\{\psi_m\}$, existe $0 < \tilde{c} < 1$ de modo que

$$2\eta_{nm} \geq |E_1 - E_2| \left| 1 - \frac{\Delta V_{nm}^\infty}{\langle n - m, \omega \rangle} \right| |\langle n - m, \omega \rangle| \geq |E_1 - E_2| (1 - \tilde{c}) |\langle n - m, \omega \rangle|.$$

Como $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \Omega_0$ temos

$$\begin{aligned} |\langle n - m, \omega \rangle| &= |(n_1 - m_1)\omega_1 + (n_2 - m_2)\omega_2| \\ &= |\omega_1| |n_2 - m_2| \left| \frac{n_1 - m_1}{n_2 - m_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right| > \frac{c}{|n_2 - m_2|^{\beta-1}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$|E_1 - E_2| \leq \frac{2\eta_{nm} |n_2 - m_2|^{\beta-1}}{(1 - \tilde{c})c}.$$

Como temos $I \subset \bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}^2} I_{nm}(\eta_{nm}) = \bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}^2} I_{nm}\left(\frac{K}{(1+|n-m|)^\sigma}\right)$. Logo,

$$\begin{aligned} |I| &\leq \sum_{\substack{n,m \in \mathbb{Z}^2 \\ n \neq m}} |I_{nm}(\eta_{nm})| \leq \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} \frac{2K |n_2 - m_2|^{\beta-1}}{(1 - \tilde{c})c(1 + |n - m|)^\sigma} \\ &\leq \frac{2K}{(1 - \tilde{c})c} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{|z|=N} \frac{1}{(1 + |z|)^{\sigma-\beta+1}}, \end{aligned}$$

sendo que a série $L(\sigma) := \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{|z|=N} \frac{1}{(1 + |z|)^{\sigma-\beta+1}}$ converge, desde que $\sigma > \beta$. Tomando-se

$$K = \frac{\epsilon c(1 - \tilde{c})}{2L(\sigma)}, \text{ segue-se o resultado.} \quad \square$$

Lema 3.11. *Seja $V \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^2)$, então*

$$|V_{nm}| \leq \|V\|_\infty \dot{b}_{nm}(E), \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}^2.$$

Demonstração. Pela Proposição 3.3 temos

$$\begin{aligned} |V_{nm}| &= |\langle \psi_n, V\psi_m \rangle| \leq \sup_k |V(k)| |\langle \psi_n, \psi_m \rangle| \\ &= \sup_k |V(k)| \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} |\psi_n(l)| |\psi_m(l)| \\ &\leq \sup_k |V(k)| \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} \prod_{j=1}^2 \frac{1}{|E\omega_j|^{|n_j-l_j|+|m_j-l_j|} |n_j - l_j|! |m_j - l_j|!} \\ &= \|V\|_\infty \dot{b}_{nm}(E). \end{aligned}$$

Fixe $\delta_0 > 0$ de maneira que $E \geq \delta_0$. Para $|\delta_0 \omega_j| > 1$, com $j = 1, 2$ temos

$$\frac{1}{|\delta_0 \omega_j|^{|n_j - l_j| + |m_j - l_j|} |n_j - l_j|! |m_j - l_j|!} \leq \frac{1}{|n_j - l_j|! |m_j - l_j|!},$$

assim

$$\begin{aligned} |V_{nm}| &\leq \|V\|_\infty \dot{b}_{nm}(E) \\ &\leq \|V\|_\infty \sum_{l_j} \prod_{j=1}^2 \frac{1}{|\delta_0 \omega_j|^{|n_j - l_j| + |m_j - l_j|} |n_j - l_j|! |m_j - l_j|!} \\ &\leq \|V\|_\infty \prod_{j=1}^2 \sum_{l_j} \frac{1}{|\delta_0 \omega_j|^{|n_j - l_j| + |m_j - l_j|} |n_j - l_j|! |m_j - l_j|!} \\ &\leq \|V\|_\infty \prod_{j=1}^2 \sum_{l_j} \frac{1}{|n_j - l_j|! |m_j - l_j|!}. \end{aligned}$$

Utilizando os mesmos argumentos do Lema 2.12 segue que $\dot{b} \in \mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$, para todo $\rho_0 > 0$.

Para $0 < |\delta_0 \omega_j| < 1$ e $j = 1, 2$, temos

$$\begin{aligned} |V_{nm}| &\leq \|V\|_\infty \dot{b}_{nm}(E) \\ &\leq \|V\|_\infty \sum_{l_j} \prod_{j=1}^2 \frac{1}{|\delta_0 \omega_j|^{|n_j - l_j| + |m_j - l_j|} |n_j - l_j|! |m_j - l_j|!} \\ &\leq \|V\|_\infty \prod_{j=1}^2 \delta_0 \omega_j^{-|n_j - m_j|} \sum_{l_j} \frac{1}{|n_j - l_j|! |m_j - l_j|!}. \end{aligned}$$

Por argumentos análogos aos utilizados no Lema 2.12 segue que $\dot{b} \in \mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$, para todo $\rho_0 > 0$. \square

Mostraremos agora uma estimativa muito importante para os elementos de matriz V_{nm} , pois nos garantirá que se $V \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^2)$ então $V \in \mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$ para todo $\rho_0 > 0$.

Lema 3.12. $\ell^\infty(\mathbb{Z}^2) \subset \mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$ para todo $\rho_0 > 0$. Além disso, dados $V \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^2)$ e $\theta_0 > 0$,

$$\|V\|_{\rho_0} \leq \theta_0 \tag{3.10}$$

para $\|V\|_\infty$ suficientemente pequeno.

Demonstração. Pelo Lema 3.11,

$$\begin{aligned}\|V\|_{\rho_0} &= \sup_n \sum_m |V_{nm}| e^{\rho_0|n-m|} \leq \sup_n \sum_m \|V\|_{\infty} \dot{b}_{nm} e^{\rho_0|n-m|} \\ &= \|V\|_{\infty} \|\dot{b}\|_{\rho_0}\end{aligned}$$

e o resultado segue com $\|V\|_{\infty} \leq \theta_0 / \|\dot{b}\|_{\rho_0}$. \square

Apresentaremos um importante lema para o processo indutivo, cuja demonstração segue nas mesmas linhas do Lema 2.14. Como antes, $[a, c] = ac - ca$ é o comutador dos operadores a e c .

Lema 3.13. *Fixe $\rho_0 > 0$. Sejam G um operador diagonal e $V \in \mathcal{A}^{\rho}(0, \infty)$, com $(G + \text{diag } V)_{nn}(E) = g_n(E) + V_{nn}(E) \in \mathbb{R}$ satisfazendo, para cada $E \in (0, +\infty)$ e $\sigma > 1$,*

$$|(g_n(E) + V_{nn}(E)) - (g_m(E) + V_{mm}(E))| > \frac{K}{(1 + |n - m|)^{\sigma}}, \quad \forall m \neq n, \quad (3.11)$$

para alguma constante $K > 0$. Então, dado $0 < r < \rho_0$, existe $W \in \mathcal{A}^{\rho_0-r}(0, +\infty)$ solução de

$$[G + \text{diag } V, W] + V - \text{diag } V = 0, \quad (3.12)$$

com $W_{nn}(E) = 1$ para todo n e $E > 0$. Além disso,

$$\|W - 1\|_{\rho_0-r} \leq C(\sigma) e^r K^{-1} r^{-\sigma} \|V\|_{\rho_0}, \quad (3.13)$$

com $C(\sigma) = \left(\frac{\sigma}{e}\right)^{\sigma}$.

Demonstração. De (3.12) obtemos que

$$V - \text{diag } V = W(G + \text{diag } V) - (G + \text{diag } V)W.$$

Assim, para todos $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}(V - \text{diag } V)_{nm}(E) &= (W(G + \text{diag } V))_{nm}(E) - ((G + \text{diag } V)W)_{nm}(E) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[W_{nj}(E) (G + \text{diag } V)_{jm}(E) - (G + \text{diag } V)_{nj}(E) W_{jm}(E) \right].\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $G + \text{diag } V$ é diagonal, segue que

$$(V - \text{diag } V)_{nm}(E) = W_{nm}(E)(g_m(E) + V_{mm}(E)) - (g_n(E) + V_{nn}(E))W_{nm}(E).$$

Daí, obtemos uma solução $\tilde{W}_{nm}(E)$ dada por

$$\tilde{W}_{nm}(E) = \begin{cases} \frac{V_{nm}(E)}{(g_m(E) + V_{mm}(E)) - (g_n(E) + V_{nn}(E))}, & n \neq m \\ 0, & n = m. \end{cases}$$

Precisamos mostrar que a solução $\tilde{W} \in \mathcal{A}^{\rho_0-r}(0, +\infty)$. De (3.11), para $n \neq m$,

$$|\tilde{W}_{nm}(E)| = \frac{|V_{nm}(E)|}{|(g_m(E) + V_{mm}(E)) - (g_n(E) + V_{nn}(E))|} \leq \frac{(1 + |n - m|)^\sigma |V_{nm}(E)|}{K},$$

daí

$$\begin{aligned} \|\tilde{W}\|_{\rho_0-r} &= \sup_{\substack{E \in (0, +\infty) \\ n \in \mathbb{Z}^2}} \sum_m e^{\rho_0-r|n-m|} |\tilde{W}_{nm}(E)| \\ &= \sup_{\substack{E \in (0, +\infty) \\ n \in \mathbb{Z}^2}} \sum_{m \neq n} e^{\rho_0-r|n-m|} \frac{|V_{nm}(E)|}{|(g_m(E) + V_{mm}(E)) - (g_n(E) + V_{nn}(E))|} \\ &\leq \frac{1}{K} \sup_{\substack{E \in (0, +\infty) \\ n \in \mathbb{Z}^2}} \sum_{m \neq n} e^{\rho_0-r|n-m|} |V_{nm}(E)| (1 + |n - m|)^\sigma \\ &\leq \frac{1}{K} f_\sigma(r) \sup_{\substack{E \in (0, +\infty) \\ n \in \mathbb{Z}^2}} \sum_{n \neq m} e^{\rho_0|n-m|} |V_{nm}(E)|, \end{aligned}$$

sendo $f_\sigma(r) = \sup_{x \neq 0} e^{-rx} (x + 1)^\sigma < e^r r^{-\sigma} C(\sigma)$, com $C(\sigma) = (\frac{\sigma}{e})^\sigma$. Assim,

$$\|\tilde{W}\|_{\rho_0-r} \leq \frac{1}{K} C(\sigma) e^r r^{-\sigma} \|V\|_{\rho_0}.$$

Finalmente, note que se \tilde{W} for solução de (3.12), então $W := \tilde{W} + \mathbf{1}$ também será solução e (3.13) vale para $W - \mathbf{1}$. \square

3.5 Implementação

Vamos implementar a técnica KAM para obter a localização dinâmica de (1.5).

Primeiro Passo $k = 0$.

Considerando $D = D^0 = H_{0,E,\omega}$, $V^0 = V$, $P^0 = \mathbf{1}$ e $B_0 = (0, +\infty)$, temos

$$(P^0)^{-1}(D + V)P^0 = D^0 + V^0 = (D^0 + \text{diag } V^0) + (V^0 - \text{diag } V^0). \quad (3.14)$$

Por hipótese, $D^0 + \text{diag } V^0$ é um operador diagonal cuja sequência diagonal é $(D^0 + \text{diag } V^0)_{nn}(E) = \lambda_n^0(E) = E \langle n, \omega \rangle + V_{nn}^0$, com $E \in B_0$. Usando o Lema 3.10, existe

$K_0 = \frac{\epsilon_0 c(1 - \tilde{c})}{2L(\sigma)} > 0$, com $\epsilon_0 > 0$, $c, \tilde{c} > 0$, tal que $|I_1| < \epsilon_0$, sendo

$$I_1 = \left\{ E > 0 : \exists n, m \in \mathbb{Z}^2, m \neq n : |\lambda_n^0(E) - \lambda_m^0(E)| < \frac{K_0}{(1 + |n - m|)^\sigma} \right\}.$$

Tome $E \in B_1 = B_0 - I_1$, pelo lema 3.13 fazendo-se $K = K_0$ e dado $0 < r < \rho_0$ existe $W^0 \in \mathcal{A}^{\rho_0 - r_0}(B_1)$ solução da equação

$$[D^0 + \text{diag } V^0, W^0] + V^0 - \text{diag } V^0 = 0, \quad (3.15)$$

com

$$\text{diag } (W^0 - \mathbf{1}) = 0.$$

Além disso

$$\|W^0 - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r_0} \leq \frac{1}{K_0} C(\sigma) e^{r_0} r_0^{-\sigma} \|V^0\|_{\rho_0}. \quad (3.16)$$

Pelo Lema 3.10

$$|B_0 - B_1| = |I_1| < \epsilon_0.$$

De (3.14) e (3.15) temos

$$\begin{aligned} (W^0)^{-1} (P^0)^{-1} (D + V) P^0 W^0 &\stackrel{(3.14)}{=} (W^0)^{-1} (D^0 + \text{diag } V^0) W^0 + (W^0)^{-1} (V^0 - \text{diag } V^0) W^0 \\ &\stackrel{(3.15)}{=} (W^0)^{-1} (W^0 (D^0 + \text{diag } V^0)) - (W^0)^{-1} ((V^0 - \text{diag } V^0)) \\ &\quad + (W^0)^{-1} (V^0 - \text{diag } V^0) W^0 =: D^1 + V^1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(P^1)^{-1} (D + V) P^1 = D^1 + V^1,$$

sendo

$$\begin{cases} P^1 = P^0 W^0 \\ D^1 = D^0 + \text{diag } V^0 \\ V^1 = (W^0)^{-1} (V^0 - \text{diag } V^0) (W^0 - \mathbf{1}). \end{cases}$$

Pelo Lema 3.9, W^0 é invertível e

$$\begin{aligned} \|(W^0)^{-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r_0} &\leq \frac{\|W^0 - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r_0}}{1 - \|W^0 - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r_0}} \leq \frac{\|W^0 - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r_0}}{1 - C(\sigma) K_0^{-1} e^{r_0} r_0^{-\sigma} \|V^0\|_{\rho_0}} \\ &\leq 2 \|W^0 - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r_0} < 1, \end{aligned}$$

desde que

$$C(\sigma)K_0^{-1}e^{r_0}r_0^{-\sigma} \|V^0\|_{\rho_0} < \frac{1}{2} < 1; \quad (3.17)$$

o que verificaremos adiante.

Denotando $\rho_1 = \rho_0 - r_0$ e usando o Lema 3.7, segue que

$$\begin{aligned} \|V^1\|_{\rho_1} &= \|(W^0)^{-1}(V^0 - \text{diag } V^0)(W^0 - \mathbf{1})\|_{\rho_1} \\ &\leq \|(W^0)^{-1}\|_{\rho_1} \|V^0\|_{\rho_0} \|W^0 - \mathbf{1}\|_{\rho_1}. \end{aligned}$$

Como

$$\|(W^0)^{-1}\|_{\rho_1} = \|(W^0)^{-1} - \mathbf{1} + \mathbf{1}\|_{\rho_1} \leq \|(W^0)^{-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_1} + \|\mathbf{1}\|_{\rho_1} < 2,$$

define-se θ_1 através de

$$\|V^1\|_{\rho_1} \leq 2\|V^0\|_{\rho_0} \|W^0 - \mathbf{1}\|_{\rho_1} \leq 2K_0^{-1}C(\sigma)e^{r_0}r_0^{-\sigma} \|V^0\|_{\rho_0}^2 =: \theta_1^2 \|V^0\|_{\rho_0}^2.$$

(k + 1)-ésimo passo

Supomos que podemos encontrar, para algum $k \in \mathbb{N}$:

- i) Uma sequência de conjuntos $B_{k+1} \subset B_k \subset \dots \subset B_0 = (0, +\infty)$.
- ii) Um operador $V^k \in \mathcal{A}^{\rho_k}(B_k)$ satisfazendo

$$\|V^k\|_{\rho_k} \leq \theta_k^{2^k} \|V^0\|_{\rho_0}^{2^k},$$

sendo

$$\rho_k = \rho_0 - \sum_{j=0}^k r_j,$$

$$\theta_k \|V^0\|_{\rho_0} = \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} \left[(2C(\sigma)e^{r_j} (K_j r_j^\sigma)^{-1})^{2^{-j-1}} \right] \right\} \|V^0\|_{\rho_0}, \quad (3.18)$$

e usando (3.10)

$$\|V\|_{\rho_0} \leq \theta_0 := \|V\|_{\infty} \|\dot{b}\|_{\rho_0}, \quad (3.19)$$

- iii) Um operador diagonal D_k cuja sequência diagonal de $D^k + \text{diag } V^k$ é dada por

$$(D^k + \text{diag } V^k)_{nn}(E) = \lambda_n^k(E) = \lambda_n^{k-1}(E) + V_{nn}^k(E)$$

e satisfaz, para $E \in B_n := B_0 - (\cup_{j=1}^k I_j)$,

$$|\lambda_n^k(E) - \lambda_m^k(E)| > \frac{K_k}{(1 + |n - m|)^{-\sigma}}, \quad n \neq m. \quad (3.20)$$

de forma que para todo $E \in B_k$

$$(P^k)^{-1}(D + V)P^k = D^k + V^k, \quad (3.21)$$

sendo $P^k = W^0 W^1 \dots W^{k-1}$.

Mostremos que (i)-(iii) valem para $k + 1$.

Pelo Lema 3.13, existe $K_k = \frac{\epsilon_k c(1 - \tilde{c})}{2L(\sigma)} > 0$, $\epsilon_k > 0$, $c, \tilde{c} > 0$ de forma que $|I_k| < \epsilon_k$. Tome $E \in B_{k+1} := B_0 - \cup_{j=1}^{k+1} I_j$, pelo lema 2.14 fazendo-se $K = K_k$ e dado $0 < r_k < \rho_k$, existe $W^k \in \mathcal{A}^{\rho_k - r_k}$ solução de

$$[D^k + \text{diag } V^k, W^k] + V^k - \text{diag } V^k = 0, \quad (3.22)$$

com

$$\text{diag } (W^k - \mathbf{1}) = 0.$$

Além disso,

$$\|W^k - \mathbf{1}\|_{\rho_k - r_k} \leq C(\sigma) K_k^{-1} e^{r_k} r_k^{-\sigma} \|V^k\|_{\rho_k}. \quad (3.23)$$

Pelo Lema 3.10

$$|B_k - B_{k+1}| = |I_{k+1}| < \epsilon_k.$$

De (3.14) e (3.22) temos

$$\begin{aligned} (W^k)^{-1}(P^k)^{-1}(D + V)P^k W^k &\stackrel{(3.14)}{=} (W^k)^{-1}(D^k + \text{diag } V^k)W^k + (W^k)^{-1}(V^k - \text{diag } V^k)W^k \\ &\stackrel{(3.22)}{=} (W^k)^{-1}(W^k(D^k + \text{diag } V^k)) - (W^k)^{-1}((V^k - \text{diag } V^k)) \\ &\quad + (W^k)^{-1}(V^k - \text{diag } V^k)W^k =: D^{k+1} + V^{k+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(P^{k+1})^{-1}(D + V)P^{k+1} = D^{k+1} + V^{k+1},$$

sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} P^{k+1} = P^k W^k \\ D^{k+1} = D^k + \text{diag } V^k \\ V^{k+1} = (W^k)^{-1}(V^k - \text{diag } V^k)(W^k - \mathbf{1}). \end{array} \right.$$

Pelo Lema 3.9, W^k é invertível e

$$\begin{aligned} \|(W^k)^{-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_k - r_k} &\leq \frac{\|W^k - \mathbf{1}\|_{\rho_k - r_k}}{1 - \|W^k - \mathbf{1}\|_{\rho_k - r_k}} \leq \frac{\|W^k - \mathbf{1}\|_{\rho_k - r_k}}{1 - C(\sigma)K_k^{-1}e^{r_k}r_k^{-\sigma}\|V^k\|_{\rho_k}} \\ &\leq 2\|W^k - \mathbf{1}\|_{\rho_k - r_k} < 1, \end{aligned}$$

desde que

$$C(\sigma)K_k^{-1}e^{r_k}r_k^{-\sigma}\|V^k\|_{\rho_k} < \frac{1}{2} < 1; \quad (3.24)$$

o que verificaremos adiante.

Denotando $\rho_{k+1} = \rho_k - r_k$ e usando o Lema 3.7, segue que

$$\begin{aligned} \|V^{k+1}\|_{\rho_{k+1}} &= \|(W^k)^{-1}(V^k - \text{diag } V^k)(W^k - \mathbf{1})\|_{\rho_{k+1}} \\ &\leq \|(W^k)^{-1}\|_{\rho_{k+1}}\|V^k\|_{\rho_k}\|W^k - \mathbf{1}\|_{\rho_{k+1}}. \end{aligned}$$

Como

$$\|(W^k)^{-1}\|_{\rho_{k+1}} = \|(W^k)^{-1} - \mathbf{1} + \mathbf{1}\|_{\rho_{k+1}} \leq \|(W^k)^{-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_{k+1}} + \|\mathbf{1}\|_{\rho_{k+1}} < 2,$$

define-se θ_{k+1} através de

$$\begin{aligned} \|V^{k+1}\|_{\rho_{k+1}} &\leq 2\|V^k\|_{\rho_k}\|W^k - \mathbf{1}\|_{\rho_{k+1}} \\ &\leq 2C(\sigma)K_k^{-1}r_k^{-\sigma}e^{r_k}\theta_k^{2^{k+1}}\|V^0\|_{\rho_0}^{2^{k+1}} =: \theta_{k+1}^{2^{k+1}}\|V^0\|_{\rho_0}^{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Convergência

Resta mostrar, sob as condições apresentadas neste teorema, que o processo iterativo acima converge para $k \rightarrow \infty$, ou seja,

$$(j) \quad B_k \rightarrow B', \quad \theta_k \rightarrow \theta_\infty \text{ e } |B_0 - B'| < \epsilon.$$

$$(jj) \quad P^k \text{ é sequência de Cauchy em } \mathcal{A}^{\rho_0 - r}(B'), \text{ então existe } P \in \mathcal{A}^{\rho_0 - r}(B') \text{ com } P^k \rightarrow P, \\ P \neq 0.$$

$$(jjj) \quad V^k \rightarrow 0 \text{ em } \mathcal{A}^{\rho_0 - r}(B').$$

Verificação de (j).

Seja $B' = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. Assim,

$$|B_0 - B'| = \left| B_0 - \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_{k+1}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2K_k L(\sigma)}{(1 - \tilde{c})c} = \epsilon,$$

sendo $K_k = K2^{-k-1}$, $K = \frac{c(1-\tilde{c})}{2L(\sigma)}$ e $c > 0$. Tomando $r_k = r2^{-k-1}$, com $r > 0$ segue que $\rho_k \rightarrow \rho_0 - r$ quando $k \rightarrow \infty$. Verificaremos que existe $0 < \theta_\infty < \infty$ de forma que $\theta_k \rightarrow \theta_\infty$ para $k \rightarrow \infty$. Podemos supor que $1 \leq \frac{1}{K_k}$ aumenta com k ; assim θ_k é crescente. De (3.18) e (3.19) vem

$$\begin{aligned} \theta_k \|V^0\|_{\rho_0} &= \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} \left[(2C(\sigma)e^{r_j} (K_j r_j^\sigma)^{-1})^{2^{-j-1}} \right] \right\} \|V^0\|_{\rho_0} \\ &\leq \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} \left[(2C(\sigma)e^{r_j} (K_j r_j^\sigma)^{-1})^{2^{-j-1}} \right] \right\} \theta_0. \end{aligned}$$

Então θ_k converge para algum $\theta_\infty < \infty$; por exemplo, $K_j = \frac{1}{L2^{j+1}}$ para algum $L > 0$.

Tomando $0 < h < 1/5$, será conveniente escolher $\theta_0 (= \|V\|_\infty \|b\|_{\rho_0}$, veja (3.19)) então

$$\prod_{j=0}^{\infty} \left[(2C(\sigma)e^{r_j} (K_j r_j^\sigma)^{-1})^{2^{-j-1}} \right] < \frac{h}{\theta_0}.$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$, temos

$$\theta_\infty \theta_0 < \frac{h \|V^0\|_r}{\theta_0} \leq h, \quad \text{e então} \quad \theta_\infty \theta_0 < \frac{1}{5}.$$

Verificação de (jj).

Mostremos que P^k converge em $\mathcal{A}^{\rho_0-r}(B')$ a $P \neq 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Temos que $C(\sigma)e^{r_k} K_k^{-1} r_k^{-\sigma}$ cresce com k , logo

$$C(\sigma)e^{r_k} K_k^{-1} r_k^{-\sigma} \|V^k\|_{\rho_k} \leq C(\sigma)e^{r_k} K_k^{-1} r_k^{-\sigma} \theta_k^{2^k} \theta_0^{2^k} \leq \theta_\infty^{2^k} \theta_0^{2^k} < 1. \quad (3.25)$$

Usando $P^{k-1} = W^0 W^1 \dots W^{k-1}$, o Lema 3.7 temos que

$$\begin{aligned} \|P^k - P^{k-1}\|_{\rho_k} &= \|P^{k-1} W^{k-1} - P^{k-1}\|_{\rho_k} \leq \|P^{k-1}\|_{\rho_k} \|W^{k-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_k} \\ &\leq \left(\|W^0 - \mathbf{1}\|_{\rho_0-r_0} + \|\mathbf{1}\|_{\rho_0-r_0} \right) \left(\|W^1 - \mathbf{1}\|_{\rho_1-r_1} + \|\mathbf{1}\|_{\rho_1-r_1} \right) \\ &\dots \left(\|W^{k-2} - \mathbf{1}\|_{\rho_{k-2}-r_{k-2}} + \|\mathbf{1}\|_{\rho_{k-2}-r_{k-2}} \right) \left(\|W^{k-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_{k-1}-r_{k-1}} \right) \\ &= \prod_{j=0}^{k-2} \left(\|W^j - \mathbf{1}\|_{\rho_j-r_j} + \|\mathbf{1}\|_{\rho_j-r_j} \right) \|W^{k-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_{k-1}-r_{k-1}} \\ &\leq \|W^{k-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_{k-1}-r_{k-1}} \prod_{j=0}^{k-2} (\theta_\infty^{2^j} \theta_0^{2^j} + 1). \end{aligned}$$

De (3.23) e (3.25) segue que

$$\|P^k - P^{k-1}\|_{\rho_k} \leq 2\theta_\infty^{2^{k-1}}\theta_0^{2^{k-1}}. \quad (3.26)$$

Suponha $m < k$; então, como $\theta_\infty\theta_0 < 1$,

$$\begin{aligned} \|P^k - P^m\|_{\rho_0-r} &\leq \|P^k - P^{k-1}\|_{\rho_k} + \|P^{k-1} - P^{k-2}\|_{\rho_{k-1}} + \dots + \|P^{m+1} - P^m\|_{\rho_{m+1}} \\ &\leq 2 \sum_{j=m}^{k-1} \theta_\infty^{2^j}\theta_0^{2^j} \leq 2\theta_\infty^{2^m}\theta_0^{2^m} \sum_{j=0}^{\infty} \theta_\infty^j\theta_0^j = \frac{2\theta_\infty^{2^m}\theta_0^{2^m}}{1-\theta_\infty\theta_0} \rightarrow 0, \quad \text{para } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto P^k é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{A}^{\rho_0-r}(B')$.

Como $\theta_\infty < h/\theta_0$, segue então

$$\begin{aligned} \|P^k - \mathbf{1}\|_{\rho_0-r} &\leq 2 \sum_{j=0}^{k-1} \|W^j - \mathbf{1}\|_{\rho_{j+1}} \leq 2 \sum_{j=0}^{k-1} \theta_\infty^{2^j}\theta_0^{2^j} \\ &\leq 2\theta_\infty\theta_0 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_\infty^j\theta_0^j = \frac{2\theta_\infty\theta_0}{1-\theta_\infty\theta_0} < 1, \end{aligned}$$

logo, para $k \rightarrow \infty$ temos por continuidade da norma $\|\cdot\|_{\rho_0-r}$ que

$$\|P - \mathbf{1}\|_{\rho_0-r} \leq \frac{2\theta_\infty\theta_0}{1-\theta_\infty\theta_0} < 1.$$

Além disso, pelo Lema 3.9, temos que P é invertível em $\mathcal{A}^{\rho_0-r}(B')$ e

$$\|P^{-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_0-r} \leq \frac{\|P - \mathbf{1}\|_{\rho_0-r}}{1 - \|P - \mathbf{1}\|_{\rho_0-r}} \leq \frac{2\theta_\infty\theta_0}{1-3\theta_\infty\theta_0} < 1.$$

Portanto, (3.24) (bem como (3.17) e (2.27)) também é válido, isto é,

$$2C(\sigma)e^{r_k}(K_k r_k^\sigma)^{-1} \|V^k\|_{\rho_k} \leq 2C(\sigma)e^{r_k}(K_k r_k^\sigma)^{-1} \theta_k^{2^k} \theta_0^{2^k} \leq \theta_\infty^{2^k} \theta_0^{2^k} \leq \frac{1}{5} < 1,$$

junto com

$$\|P\|_{\rho_0-r} \leq 2 \text{ e } \|P^{-1}\|_{\rho_0-r} \leq 2.$$

Verificação de (jjj).

Por indução, usando (3.25) temos que

$$\|V^k\|_{\rho_k} \leq \theta_k^{2^k} \|V^0\|_{\rho_0}^{2^k} \leq \theta_0 \theta_\infty^{2^k-1} \theta_0^{2^k-1} < \theta_0 h^{2^k-1}. \quad (3.27)$$

Assim, $V^k \rightarrow 0$ em $\mathcal{A}^{\rho_0-r}(B')$. Além disso,

$$P^{-1}H_{V,E,\omega}P = H_{0,E,\omega} + \sum_{k \geq 0} \text{diag } V^k$$

é diagonal cujos autovalores são dados por

$$\lambda_n^\infty := E \langle n, \omega \rangle + \sum_{k \geq 0} (\text{diag } V^k)_{nn}. \quad (3.28)$$

3.5.1 $H_{V,E,\omega}$ tem SULE

Vamos verificar que, para V como no Teorema 1.4, as autofunções de $H_{V,E,\omega}$ satisfazem (1.2), isto é, $H_{V,E,\omega}$ tem SULE.

Da primeira parte deste Teorema, sabemos que $H_{V,E,\omega}$ tem espectro pontual puro e suas autofunções são $\{P\psi_m\}$, sendo $P \in \mathcal{A}^{\rho_0-r}(B')$ o operador que diagonaliza $H_{V,E,\omega}$ e $\{\psi_m\}$ as autofunções de $H_{0,E,\omega}$. Tais autofunções formam um conjunto completo e ortogonal em $l^2(\mathbb{Z}^2)$. Para $\{P\psi_m\}$, temos

$$\begin{aligned}
|(P\psi_m)(n)| &= |\langle e_n, P\psi_m \rangle| = \left| \sum_k \langle e_n, \psi_k \rangle \langle \psi_k, P\psi_m \rangle \right| \\
&\leq \sum_k |P_{km}| |\psi_k(n)| \\
&\leq \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} \frac{C e^{-\rho_0+r(|k_1-m_1|+|k_2-m_2|)}}{1 + |m_1 - k_1| + |m_2 - k_2|} \frac{1}{|E\omega_1|^{|n_1-k_1|} |n_1 - k_1|! |E\omega_2|^{|n_2-k_2|} |n_2 - k_2|!} \\
&\leq C \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\rho_0+r(|k_1-m_1|+|k_2-m_2|+|k_2-n_2|+|k_1-n_1|)}}{(1 + |m_1 - k_1| + |m_2 - k_2|)(|n_1 - k_1| |n_2 - k_2|)} \\
&\leq C \left(\sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1 + |m_1 - k_1| + |m_2 - k_2|)(|n_1 - k_1| |n_2 - k_2|)} \right) e^{(-\rho_0+r)|n-m|} \quad (3,29)
\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Pelo teste da comparação, a soma entre parênteses é convergente independentemente de n, m , logo

$$(4.26) \leq \tilde{C} e^{(-\rho_0+r)|n-m|} \leq \tilde{C} e^{\delta|m|(-\rho+r)|n-m|},$$

para todo $\delta > 0$ e para alguma constante $\tilde{C} > 0$. Isso om

Corolário 3.14. *É possível tomar P unitário no Teorema 1.4.*

Demonstração. Segue analogamente àquela do Corolário 4.10. □

Capítulo 4

Operador bidimensional sob perturbações periódicas no tempo

Neste capítulo, aplicaremos a técnica KAM para demonstrar a condição SULE para as autofunções o operador (1.7). Nosso principal objetivo é apresentar a demonstração do Teorema 1.6.

Vamos destacar algumas diferenças que encontraremos na aplicação da técnica para este modelo em relação ao Capítulo 3.

- Sem perda de generalidade e para simplificar a notação, tomaremos $E = 1$, $\omega \in \Omega$ e vamos variar o parâmetro τ .
- O espectro de \mathbf{K}_0 é simplesmente o fecho de $\tau\mathbb{Z} + \sigma(H_{0,\omega})$ e, portanto, pontual puro e, além disso, é denso em \mathbb{R} , para q.t.p. $\tau \in \mathbb{R}$ (veja Apêndice A de [11]), além disso suas autofunções são

$$\varphi_{k,m}(t, n) := e^{ikt} / \sqrt{2\pi} \otimes \psi_m(n)$$

(sendo ψ_m as autofunções de $H_{0,\omega}$, veja o Teorema 3.1 do Capítulo 3), e formam uma base ortonormal em \mathcal{K} .

- O uso da técnica KAM é justificado, pois estamos lidando com uma perturbação do espectro pontual puro e denso na reta.
- A norma do espaço, em que se encontrará a perturbação V , dependerá da derivada discreta dos elementos de matriz de V (veja Seção 4.2).

- Descartaremos do processo um conjunto de valores de $\tau \in (0, \infty)$ que possui medida de Lebesgue menor do que $\epsilon^{\frac{1}{3}}$. Devido à escolha deste parâmetro, não precisaremos supor que V seja ω -dominado em relação à base dos autovetores de K_0 (compare com o Capítulo 3). Comparado ao Teorema 1.4, isto já é uma melhora significativa no método, por causa da dificuldade de se encontrar exemplos explícitos de potenciais.
- Mostaremos que as autofunções de \mathbf{K} satisfazem uma adaptação da condição SULE com uma versão de localização dinâmica neste contexto dependendo do tempo periodicamente.
- Caso o potencial V seja independente do tempo, o Teorema 1.8 apresenta uma adaptação do Teorema 1.6 recuperando os resultados de Dinaburg [8].
- É possível generalizar ambos os Teoremas 1.6 e 1.8 que demonstraremos neste capítulo para o operador (1.7) definido em $L^2([0, 2\pi], dt) \otimes \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, $d \geq 3$, com as mesmas demonstrações, apenas escolhendo ω no conjunto (que desempenha o papel de Ω em (1.6))

$$\{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbb{R}^d : p_1\omega_1 + \dots + p_d\omega_d = 0, p_1, \dots, p_d \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow p_1 = \dots = p_d = 0\}.$$

O capítulo é organizado como segue. Na Seção 4.1, adaptaremos a noção de localização dinâmica para o operador dependente do tempo \mathbf{K}_0 , daremos condições suficientes para obtê-la, e mostraremos que o operador \mathbf{K}_0 tem localização dinâmica. Definições e propriedades gerais do espaço $\mathcal{B}^{\rho_0}(0, \infty)$ estão presentes na Seção 4.2. Na Seção 4.3, serão apresentados resultados adicionais necessários para a demonstração do teorema principal, particularmente a construção do conjunto de parâmetros para os quais o operador \mathbf{K} apresentará espectro pontual puro. A Seção 4.4 é dedicada à implementação da técnica KAM e à demonstração do Teorema 1.6. Na Seção 4.5, adaptaremos a condição SULE para o operador dependente do tempo \mathbf{K} . Por fim, na Seção 4.6 apresentaremos a demonstração de que o resultado do Teorema 1.6 continua válido para com escolha do operador P unitário.

4.1 Localização dinâmica para \mathbf{K}_0

Nesta seção, definiremos localização dinâmica para o operador auto-adjunto \mathbf{K}_0 em \mathcal{K} , dependente do tempo e definido em (1.8). Daremos uma condição suficiente para obter tal propriedade similar à (1.2). Para detalhes, veja [19] e [14].

Dizemos que \mathbf{K}_0 tem localização dinâmica se para todo $p > 0$ e para toda condição inicial da forma $\varphi^{s,r} = e^{ist} \otimes e_r$, com $r \in \mathbb{Z}^2$ e $s \in \mathbb{Z}$,

$$\sup_u r_{\varphi^{s,r}}^p(u) := \sup_u \langle e^{-iu\mathbf{K}_0} \varphi^{s,r}, |X|^p e^{-iu\mathbf{K}_0} \varphi^{s,r} \rangle < \infty,$$

em que X denota o operador de posição em \mathbb{Z}^2 .

Seja $\{\varphi_{k,m}\}$ um conjunto completo e ortonormal de autofunções do operador \mathbf{K}_0 agindo em \mathcal{K} , então $\mathbf{K}_0 \varphi_{k,m} = \lambda_{k,m} \varphi_{k,m}$. Para $\varphi^{s,r}$ como acima, temos

$$\begin{aligned} \phi(t, n) := (e^{-iu\mathbf{K}_0} \varphi^{s,r})(t, n) &= \sum_{k,m} e^{-i\lambda_{k,m}u} a_k a_m e^{ikt} \otimes \psi_m(n) \\ &= \sum_k 1\delta_{s,k} e^{-iku^2} e^{ikt} \sum_m a_m e^{-i\lambda_{m,u}} \psi_m(n) \\ &= e^{ikt} e^{-iku^2} \sum_m e^{-i\lambda_{m,u}} \psi_m(n) \psi_m(r) \end{aligned}$$

e

$$\sup_u |\phi(t, n)| \leq Z(n, r), \quad \sup_u r_{\varphi^{s,r}}^p(u) \leq \sum_n |n|^p Z^2(n, r),$$

com

$$Z(n, r) = \sum_m |\psi_m(n) \psi_m(r)|.$$

Então, para demonstrar a localização dinâmica para condições iniciais $\varphi^{s,r}$, é suficiente mostrar que a função $Z(n, r)$ decai rapidamente para $|n| \rightarrow \infty$, para todo $r \in \mathbb{Z}^2$.

Um caminho para obter tal propriedade é através da propriedade SULE das autofunções, conforme discutido na Seção 2.2.

4.1.1 \mathbf{K}_0 tem SULE

Começamos com uma estimativa para as autofunções $\varphi_{k,m}$ de \mathbf{K}_0 , que será fundamental para o resultado principal desta seção.

Observação 4.1. *Os resultados obtidos no Capítulo 3 para o espectro do operador $H_{0,\omega}$ continuam válidos tomando $E = 1$ e $\omega \in \Omega$ fixado.*

Proposição 4.2. *Para todos $n, m \in \mathbb{Z}^2$ e $k \in \mathbb{Z}$,*

$$|\varphi_{k,m}(t, n)| \leq \prod_{j=1}^2 \frac{1}{|\omega_j|^{|n_j - m_j|} |m_j - n_j|!}. \quad (4.1)$$

Demonstração. Segue analogamente àquela da Proposição 3.3. \square

Teorema 4.3. \mathbf{K}_0 tem localização dinâmica.

Demonstração. É suficiente demonstrar que as autofunções $\{\varphi_{k,m}\}$ de \mathbf{K}_0 tem SULE. Primeiramente, essas autofunções formam um conjunto completo e ortonormal em \mathcal{K} . Além disso, como

$$|\varphi_{k,m}(t, n)| = |e^{ikt} \otimes \psi_m(n)| = |\psi_m(n)| |e^{ikt}| = |\psi_m(n)|,$$

pela Proposição 4.2, segue-se que existem $\alpha > 0$ e $m \in \mathbb{Z}^2$ de forma que para todo $\delta > 0$ existe $C(\delta) > 0$ de modo que

$$|\varphi_{k,m}(t, n)| \leq C(\delta) e^{\delta|m| - \alpha|n-m|}, \quad \forall t, n.$$

Logo, \mathbf{K}_0 tem localização dinâmica. \square

4.2 Espaço $\mathcal{B}^{\rho_0}(0, \infty)$ e propriedades

Dado $\sigma, \rho_0 > 0, \sigma > 1$, denotaremos por $\mathcal{B}^{\rho_0}(0, \infty)$ o conjunto das aplicações a de $(0, \infty)$ no espaço dos operadores lineares limitados em \mathcal{K} de modo que, para cada $\tau_1 \in (0, \infty)$, a é representado por uma matriz $\{a_{nmk}(\tau_1)\}$, $n, m \in \mathbb{Z}^2$, com

$$\begin{aligned} \|a\|_{\rho_0} := & \sup_{\substack{\tau_1, \tau_2 \in (0, \infty) \\ \tau_1 \neq \tau_2}} \sup_{n \in \mathbb{Z}^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(|a_{nmk}(\tau_1)| + \left| \tilde{\partial} a_{nmk}(\tau_1, \tau_2) \right| \right) \\ & \times \left((1 + |k_1 + k_2| + |n + m|)^\sigma e^{\rho_0(|k_1 - k_2| + |n - m|)} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Aqui $\{a_{nmk}(\tau)\}$ é a matriz de representação do operador a na base $\{\varphi_{k,m}\}$ do espaço \mathcal{K} , i.e., $a_{nmk}(\tau) := \langle \varphi_{nk_1}, a\varphi_{mk_2} \rangle$, em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em \mathcal{K} , e $\tilde{\partial}$ é a “derivada discreta”

$$\tilde{\partial} a_{nmk}(\tau_1, \tau_2) = \frac{a_{nmk}(\tau_1) - a_{nmk}(\tau_2)}{\tau_1 - \tau_2}.$$

Note que o “operador derivada” discreta obedece a regra

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}(ac)(\tau_1, \tau_2) &= \frac{a(\tau_1)c(\tau_1) - a(\tau_2)c(\tau_2)}{\tau_1 - \tau_2} \\ &= \frac{a(\tau_1)c(\tau_2) - a(\tau_2)c(\tau_2) + a(\tau_1)c(\tau_1) - a(\tau_1)c(\tau_2)}{\tau_1 - \tau_2} \\ &= \left(\frac{a(\tau_1) - a(\tau_2)}{\tau_1 - \tau_2} \right) c(\tau_2) + a(\tau_1) \left(\frac{c(\tau_1) - c(\tau_2)}{\tau_1 - \tau_2} \right) \\ &= \tilde{\partial}a(\tau_1, \tau_2)c(\tau_2) + a(\tau_1)\tilde{\partial}c(\tau_1, \tau_2). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Observação 4.4. Uma interpretação para $\|a\|_{\rho_0}$ é que se $\|a\|_{\rho_0} < \infty$ então os elementos de matriz de a e de suas derivadas discretas decaem exponencialmente pelo menos “com taxa ρ_0 ”.

Lema 4.5. $\mathcal{B}^{\rho_0}(0, \infty)$ é espaço de Banach.

Demonstração. Segue analogamente à demonstração do Lema 3.6. \square

Lema 4.6. Dado $\rho_0 > 0$, se $a, c \in \mathcal{B}^{\rho_0}(0, +\infty)$, considere a regra de multiplicação

$$(ac)_{nmk}(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} a_{npl}(\tau) c_{p,m,k-l}(\tau);$$

então ac e $ca \in \mathcal{B}^{\rho_0}(0, +\infty)$. Além disso,

$$\|ac\|_{\rho_0}, \|ca\|_{\rho_0} \leq \|a\|_{\rho_0} \|c\|_{\rho_0}. \quad (4.3)$$

Demonstração. Para abreviar denotarmos nesta demonstração

$$\begin{aligned} \chi_p(\tau_1) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} |c_{p,m,k-l}(\tau_1)| e^{\rho_0(|k-l|+|m-p|)}, \\ \tilde{\partial} \chi_p(\tau_1, \tau_2) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \left| \tilde{\partial} c_{p,m,k-l}(\tau_1, \tau_2) \right| e^{\rho_0(|k-l|+|m-p|)}. \end{aligned}$$

Usando a regra de multiplicação acima e desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} |(ac)_{nmk}(\tau_1)| e^{\rho_0(|k|+|m-n|)} \\ & \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} |a_{npl}(\tau_1)| e^{\rho_0(|l|+|n-p|)} |c_{p,m,k-l}(\tau_1)| e^{\rho_0(|k-l|+|m-p|)} \\ & = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} |a_{npl}(\tau_1)| e^{\rho_0(|l|+|n-p|)} |c_{pmk}(\tau_1)| e^{\rho_0(|k|+|m-p|)} \\ & = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} |a_{npl}(\tau_1)| e^{\rho_0(|l|+|n-p|)} \chi_p(\tau_1). \end{aligned}$$

Similarmente, usando (4.2),

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \left| \tilde{\partial} (ac)_{nmk}(\tau_1) \right| e^{\rho_0(|k|+|m-p|)} \\ & \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} \left(|a_{npl}(\tau_1)| e^{\rho_0(|l|+|n-p|)} \left| \tilde{\partial} c_{p,m,k-l}(\tau_1, \tau_2) \right| e^{\rho_0(|k-l|+|m-p|)} \right) \\ & + \left(\left| \tilde{\partial} a_{npl}(\tau_1, \tau_2) \right| e^{\rho_0(|l|+|n-p|)} |c_{p,m,k-l}(\tau_2)| e^{\rho_0(|k-l|+|m-p|)} \right) \\ & \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} \left(|a_{npl}(\tau_1)| \tilde{\partial} \chi_p(\tau_1, \tau_2) + \left| \tilde{\partial} a_{npl}(\tau_1, \tau_2) \right| \chi_p(\tau_2) \right) e^{\rho_0(|l|+|n-p|)}. \end{aligned}$$

A combinação dessas duas desigualdades fornece

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \left(|(ac)_{nmk}(\tau_1)| + \left| \tilde{\partial}(ac)_{nmk}(\tau_1, \tau_2) \right| \right) e^{\rho_0(|k|+|m-n|)} \\
& \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} \left(|a_{npl}(\tau_1)| \left(\chi_p(\tau_1) + \tilde{\partial}\chi_p(\tau_1, \tau_2) \right) + \left| \tilde{\partial}a_{npl}(\tau_1, \tau_2) \right| \chi_p(\tau_2) \right) e^{\rho_0(|l|+|p-n|)} \\
& \leq \sup_{\tau_1, \tau_2} \sup_p \left(\chi_p(\tau_1) + \tilde{\partial}\chi_p(\tau_1, \tau_2) \right) \sum_l \sum_p \left(|a_{npl}| + \left| \tilde{\partial}a_{npl}(\tau_1, \tau_2) \right| \right) e^{\rho_0(|l|+|p-n|)} \\
& = \|c\|_{\rho_0} \sum_l \sum_p \left(|a_{npl}(\tau_1)| + \left| \tilde{\partial}a_{npl}(\tau_1, \tau_2) \right| \right) e^{\rho_0(|l|+|p-n|)}.
\end{aligned}$$

Para obter (4.3) é suficiente aplicar \sup_{τ_1, τ_2} e \sup_n nesta última desigualdade. \square

O operador \mathbf{K}_0 é diagonal, por construção, cuja representação matricial é dada por

$$(\mathbf{K}_0)_{nmk} = (\mathbf{K}_0)_{nn0} \delta_{k0} \delta_{nm} = (\langle n, \omega \rangle + k_1 \tau) \delta_{k0} \delta_{nm}.$$

Denotaremos os índices (n, m, k) correspondentes às entradas não-diagonais, i.e., os índices para os quais $n \neq m$ ou $k \neq 0$, e os índices diagonais com $k = 0$ e $n = m$. Aqui \dot{b} representa o operador linear diagonal cujos elementos de matriz são

$$\dot{b}_{nm0} := \sum_{l_j \in \mathbb{Z}^2} \prod_{j=1}^2 \frac{1}{|\omega_j|^{n_j-l_j+|m_j-l_j|} |n_j-l_j|! |m_j-l_j|!}.$$

Note que se $k = 0$, temos a inclusão $\mathcal{B}^{\rho_0}(0, \infty) \subset \mathcal{A}^{\rho_0}(0, \infty)$.

4.3 Resultados auxiliares

Dedicaremos esta seção a alguns resultados que serão essenciais para a demonstração do Teorema 1.6. A diagonal do operador V é denotada por $\text{diag } V$. O operador identidade será denotado por $\mathbf{1}$, então $\mathbf{1}_{nm0} = \delta_{nm} \delta_{k0}$, e $\|\mathbf{1}\|_{\rho_0} = 1$.

Observação 4.7. *O Lema 3.9 continua válido para o espaço $\mathcal{B}^{\rho_0}(0, \infty)$ e a demonstração segue analogamente.*

Lema 4.8. *Fixe $\omega \in \Omega$ em (1.6). Seja $(\lambda_{nk_1})_{k_1 \in \mathbb{Z}}$ a sequência*

$$\tau_1 \in \mathbb{Z} \mapsto \lambda_{nk_1} := \langle n, \omega \rangle + k_1 \tau_1 + V_{nn0}(\tau_1),$$

em que $V_{nn0}(\tau_1)$ são os elementos de matriz da diagonal do operador V . Se

$$\|V\|_{\rho_0} < \frac{1}{4}, \tag{4.4}$$

então dados $\sigma > 1$ e $\epsilon > 0$, existe $K > 0$ de forma que o conjunto

$$I = \left\{ \tau_1 \in (0, \infty) : \exists k_1 \neq k_2 \in \mathbb{Z}, \exists n, m \in \mathbb{Z}^2, n \neq m; \right. \\ \left. |\lambda_{nk_1}(\tau_1) - \lambda_{mk_2}(\tau_1)| < \frac{K}{(1 + |k_1 - k_2| + |n - m|)^\sigma (1 + |k_1 + k_2| + |n + m|)^{2\sigma}} \right\},$$

possui medida de Lebesgue menor do que $\epsilon^{\frac{1}{3}}$.

Demonstração. Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}^2$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ temos

$$|\lambda_{nk_1}(\tau_1) - \lambda_{mk_2}(\tau_1)| < \frac{K}{(1 + |k_1 - k_2| + |n - m|)^\sigma (1 + |k_1 + k_2| + |n + m|)^{2\sigma}}.$$

Definindo $i = (k_1 - k_2, n_1 - m_1, n_2 - m_2)$ e $j = (k_1 + k_2, n_1 + m_1, n_2 + m_2)$ tem-se

$$\left| \lambda_{\frac{i+j}{2}}(\tau_1) - \lambda_{\frac{j-i}{2}}(\tau_1) \right| < \frac{K}{(1 + |i|)^\sigma (1 + |j|)^{2\sigma}}.$$

Assim, basta considerarmos os conjuntos I_{ij} da forma

$$I_{ij}(\eta_{ij}) = \left\{ \tau_1 \in (0, +\infty) : \left| \lambda_{\frac{i+j}{2}}(\tau_1) - \lambda_{\frac{j-i}{2}}(\tau_1) \right| < \eta_{ij}, \right\}, k \neq 0.$$

Para que $I_{ij}(\eta_{ij})$ seja não-vazio é necessário que $k_1 \neq k_2$. Tomando $\tau_1, \tau_2 \in I_{ij}(\eta_{ij})$, com $\tau_1 \neq \tau_2$ temos

$$\begin{aligned} \frac{2\eta_{ij}}{|\tau_1 - \tau_2|} &= \frac{\eta_{ij} + \eta_{ij}}{|\tau_1 - \tau_2|} \\ &> \frac{\left| \lambda_{\frac{i+j}{2}}(\tau_1) - \lambda_{\frac{j-i}{2}}(\tau_1) \right|}{|\tau_1 - \tau_2|} + \frac{\left| \lambda_{\frac{i+j}{2}}(\tau_2) - \lambda_{\frac{j-i}{2}}(\tau_2) \right|}{|\tau_1 - \tau_2|} \\ &\geq |k_1 - k_2| - \frac{|V_{nn0}(\tau_2) - V_{nn0}(\tau_1)|}{|\tau_1 - \tau_2|} - \frac{|V_{mm0}(\tau_1) - V_{mm0}(\tau_2)|}{|\tau_1 - \tau_2|} \\ &= |k_1 - k_2| - \left| \tilde{\partial}V_{nn0}(\tau_1, \tau_2) \right| - \left| \tilde{\partial}V_{mm0}(\tau_1, \tau_2) \right| \\ &=: |i_1| - 2\Delta V(\tau_1, \tau_2); \end{aligned} \tag{4.5}$$

logo,

$$\frac{2\eta_{ij}}{|i_1| - 2\Delta V(\tau_1, \tau_2)} \geq |\tau_1 - \tau_2|,$$

Assim, como $2\Delta V(\tau_1, \tau_2) < \frac{1}{2}$ (é suficiente que seja satisfeita a condição (4.4), veja o final da Seção 4.4),

$$|\tau_1 - \tau_2| \leq \frac{2\eta_{ij}}{|i_1| - \frac{1}{2}}.$$

Como temos $I \subset \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}^3} I_{ij}(\eta_{ij}) = \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}^3} I_{ij} \left(\frac{K}{(1+|i|)^\sigma (1+|j|)^{2\sigma}} \right)$, segue que

$$\begin{aligned} |I| &\leq \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^3} |I_{ij}(\eta_{ij})| \leq \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^3} \frac{4K}{(1+|i|)^\sigma (1+|j|)^{2\sigma} (2|i_1| - 1)} \\ &= 4K \sum_{j \in \mathbb{Z}^3} \frac{1}{(1+|j|)^{2\sigma}} \sum_{i \in \mathbb{Z}^3} \frac{1}{(1+|i|)^\sigma (2|i_1| - 1)} \\ &\leq 4K \sum_{j \in \mathbb{Z}^3} \frac{1}{(1+|j|)^{2\sigma}} \sum_{i \in \mathbb{Z}^3} \frac{1}{(1+|i|)^\sigma}, \end{aligned}$$

sendo que a série $L(\sigma) := \sum_{j \in \mathbb{Z}^3} \frac{1}{(1+|j|)^{2\sigma}} \sum_{i \in \mathbb{Z}^3} \frac{1}{(1+|i|)^\sigma}$ converge, desde que $\sigma > 1$. Tomando $K = \frac{\epsilon^{\frac{1}{3}}}{4L(\sigma)}$, segue o resultado. \square

O próximo lema será muito importante para o processo indutivo, cuja demonstração segue as linhas da demonstração do Lema 3.13.

Lema 4.9. *Fixe $\rho_0 > 0$, $\omega \in \Omega$, $\sigma > 1$ e $K > 0$. Seja G um operador diagonal e $V \in \mathcal{B}^{\rho_0}(0, \infty)$ com $(G + \text{diag } V)_{nm0}(\tau_1) = g_{nk_1}(\tau_1) := k_1 \tau_1 + \langle n, \omega \rangle + V_{nm0}(\tau_1) \in \mathbb{R}$ satisfazendo, para cada $\tau_1 \in (0, +\infty)$ e $\sigma > 1$,*

$$|g_{nk_1}(\tau_1) - g_{mk_2}(\tau_1)| > \frac{K}{(1+|k|+|n-m|)^\sigma}, \quad \forall m \neq n \quad e \quad k \neq 0, \quad (4.6)$$

e $V_{nm0}(\tau_1)$ são os elementos de matriz da diagonal do operador V . Se

$$\|V\|_{\rho_0} < \frac{1}{4},$$

então, dado $0 < r < \rho_0$, existe $W \in \mathcal{B}^{\rho_0-r}(0, +\infty)$ solução de

$$[G + \text{diag } V, W] + V - \text{diag } V = 0, \quad (4.7)$$

com $W_{nm0}(\tau_1) = 1$ para todo n e $\tau_1 > 0$. Além disso,

$$\|W - \mathbf{1}\|_{\rho_0-r} \leq C(3\sigma) e^r 3K^{-3} r^{-3\sigma} \|V\|_{\rho_0}, \quad (4.8)$$

com $C(3\sigma) = \left(\frac{3\sigma}{e}\right)^{3\sigma}$.

Demonstração. De (4.7) obtemos que

$$V - \text{diag } V = W(G + \text{diag } V) - (G + \text{diag } V)W.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (V - \text{diag } V)_{nmk}(\tau_1) &= (W(G + \text{diag } V))_{nmk}(\tau_1) - ((G + \text{diag } V)W)_{nmk}(\tau_1) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} W_{npl}(\tau_1) (G + \text{diag } V)_{p,m,k-l}(\tau_1) - \\ &\quad \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} (G + \text{diag } V)_{n,p,l}(\tau_1) W_{p,m,k-l}(\tau_1). \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $G + \text{diag } V$ é diagonal, segue que

$$(V - \text{diag } V)_{nmk}(\tau_1) = W_{nmk}(\tau_1)(G_{mm0}(\tau_1) + V_{mm0}(\tau_1)) - (G_{nn0}(\tau_1) + V_{nn0}(\tau_1))W_{nmk}(\tau_1).$$

Daí, obtemos a solução $\tilde{W}_{nmk}(\tau_1)$ dada por

$$\tilde{W}_{nmk}(\tau_1) = \begin{cases} \frac{V_{nmk}(\tau_1)}{(G_{mm0}(\tau_1) + V_{mm0}(\tau_1)) - (G_{nn0}(\tau_1) + V_{nn0}(\tau_1))}, & n \neq m, \quad k \neq 0 \\ 0, & n = m \quad \text{e} \quad k = 0. \end{cases}$$

Precisamos mostrar que tal solução $\tilde{W} \in \mathcal{B}^{\rho_0-r}(0, +\infty)$. De (4.6), para $n \neq m$ ou $k \neq 0$,

$$|\tilde{W}_{nmk}(\tau_1)| = \frac{|V_{nmk}(\tau_1)|}{|g_{mk_2}(\tau_1) - g_{nk_1}(\tau_1)|} \leq \frac{(1 + |k| + |n - m|)^\sigma |V_{nmk}(\tau_1)|}{K},$$

sendo $B(\tau_1) := g_{nk_1}(\tau_1) - g_{mk_2}(\tau_1)$. Daí

$$\begin{aligned} \|\tilde{W}\|_{\rho_0-r} &= \sup_{\substack{\tau_1, \tau_2 \in (0, \infty) \\ \tau_1 \neq \tau_2}} \sup_{n \in \mathbb{Z}^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{(\rho_0-r)(|k|+|n-m|)} \left(|\tilde{W}_{nmk}(\tau_1)| + \left| \frac{\tilde{W}_{nmk}(\tau_1) - \tilde{W}_{nmk}(\tau_2)}{\tau_1 - \tau_2} \right| \right) \\ &= \sup_{\substack{\tau_1, \tau_2 \in (0, \infty) \\ \tau_1 \neq \tau_2}} \sup_{n \in \mathbb{Z}^2} \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq 0} e^{(\rho_0-r)(|k|+|n-m|)} \left| \frac{V_{nmk}(\tau_1)}{B(\tau_1)} \right| \\ &\quad + \frac{1}{|\tau_1 - \tau_2|} \left(\left| \frac{V_{nmk}(\tau_1)}{B(\tau_1)} - \frac{V_{nmk}(\tau_1)}{B(\tau_2)} + \frac{V_{nmk}(\tau_1)}{B(\tau_2)} - \frac{V_{nmk}(\tau_2)}{B(\tau_2)} \right| \right) \\ &\leq \sup_{\substack{\tau_1, \tau_2 \in (0, \infty) \\ \tau_1 \neq \tau_2}} \sup_{n \in \mathbb{Z}^2} \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq 0} e^{(\rho_0-r)(|k|+|n-m|)} \left| \frac{V_{nmk}(\tau_1)}{B(\tau_1)} \right| \\ &\quad + \frac{1}{|\tau_1 - \tau_2|} \left(|V_{nmk}(\tau_1)| \left| \frac{B(\tau_2) - B(\tau_1)}{B(\tau_1)B(\tau_2)} \right| + \frac{1}{|B(\tau_2)|} |V_{nmk}(\tau_1) - V_{nmk}(\tau_2)| \right) \end{aligned}$$

Considerando $V_{mn0}(\tau_j) = V_{nn0}(\tau_j) - V_{mm0}(\tau_j)$, com $j = 1, 2$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{W}\|_{\rho_0-r} &= \sup_{\substack{\tau_1, \tau_2 \in (0, \infty) \\ \tau_1 \neq \tau_2}} \sup_{n \in \mathbb{Z}^2} \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq 0} e^{(\rho_0-r)(|k|+|n-m|)} \left| \frac{V_{nmk}(\tau_1)}{B(\tau_1)} \right| + \frac{1}{|\tau_1 - \tau_2|} |V_{nmk}(\tau_1)| \\
&\times \left(\frac{|(k_1 - k_2)(\tau_1 - \tau_2) + (V_{nn0}(\tau_2) - V_{mm0}(\tau_2)) - (V_{nn0}(\tau_1) - V_{mm0}(\tau_1))|}{|B(\tau_1)B(\tau_2)|} \right) \\
&+ \frac{1}{|\tau_1 - \tau_2|} \frac{1}{|B(\tau_2)|} |V_{nmk}(\tau_1) - V_{nmk}(\tau_2)| \\
&\leq \sup_{\substack{\tau_1, \tau_2 \in (0, \infty) \\ \tau_1 \neq \tau_2}} \sup_{n \in \mathbb{Z}^2} \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq 0} e^{(\rho_0-r)(|k|+|n-m|)} \left(\frac{|V_{nmk}(\tau_1)|}{|B(\tau_1)|} + \frac{1}{|\tau_1 - \tau_2|} |V_{nmk}(\tau_1)| \right) \\
&\times \frac{(|1 + |k| + |n - m||)^\sigma |\tau_1 - \tau_2| + (1 + |k| + |n - m|)^\sigma |V_{nn0}(\tau_2) - V_{nn0}(\tau_1)|}{|B(\tau_1)| |B(\tau_2)|} \\
&+ \frac{1}{|\tau_1 - \tau_2|} \frac{1}{|B(\tau_2)|} |V_{nmk}(\tau_1) - V_{nmk}(\tau_2)| \\
&\stackrel{(4.6)}{\leq} \sup_{\substack{\tau_1, \tau_2 \in (0, \infty) \\ \tau_1 \neq \tau_2}} \sup_{n \in \mathbb{Z}^2} \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq 0} e^{(\rho_0-r)(|k|+|n-m|)} |V_{nmk}(\tau_1)| \frac{(1 + |k| + |m - n|)^\sigma}{K} \\
&+ \left(\frac{1}{|\tau_1 - \tau_2|} \left(|V_{nmk}(\tau_1)| \frac{(1 + |k| + |m - n|)^{3\sigma}}{K^3} \right) \times \left(|\tau_1 - \tau_2| + \frac{|\tau_1 - \tau_2|}{2} \right) \right) \\
&+ \left(\frac{1}{|\tau_1 - \tau_2|} \frac{(1 + |k| + |m - n|)^\sigma}{K} |V_{nmk}(\tau_1) - V_{nmk}(\tau_2)| \right) \\
&\leq \sup_{\substack{\tau_1, \tau_2 \in (0, \infty) \\ \tau_1 \neq \tau_2}} \sup_{n \in \mathbb{Z}^2} \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq 0} e^{(\rho_0-r)(|k|+|n-m|)} \frac{(1 + |k| + |m - n|)^{3\sigma}}{K^3} (|V_{nmk}(\tau_1)|) \\
&+ \frac{1}{|\tau_1 - \tau_2|} (2 |V_{nmk}(\tau_1)| |\tau_1 - \tau_2| + |V_{nmk}(\tau_1) - V_{nmk}(\tau_2)|) \\
&\leq \frac{3}{K^3} \sup_{\substack{\tau_1, \tau_2 \in (0, \infty) \\ \tau_1 \neq \tau_2}} \sup_{n \in \mathbb{Z}^2} \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq 0} e^{\rho_0(|k|+|n-m|)} (|V_{nmk}(\tau_1)|) \\
&+ \left(\frac{|V_{nmk}(\tau_1) - V_{nmk}(\tau_2)|}{|\tau_1 - \tau_2|} \right) e^{-r(|k|+|n-m|)} (1 + |k| + |n - m|)^{3\sigma} \\
&\leq \frac{3}{K^3} \sup_{\substack{\tau_1, \tau_2 \in (0, \infty) \\ \tau_1 \neq \tau_2}} \sup_{n \in \mathbb{Z}^2} \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq 0} e^{\rho_0(|k|+|n-m|)} \left(|V_{nmk}(\tau_1)| + \frac{|V_{nmk}(\tau_1) - V_{nmk}(\tau_2)|}{|\tau_1 - \tau_2|} \right) f(x)
\end{aligned}$$

sendo $f_\sigma(r) = \sup_{x>0} e^{-rx}(x+1)^{3\sigma} < e^r r^{-3\sigma} C(3\sigma)$, com $C(3\sigma) = \left(\frac{3\sigma}{e}\right)^{3\sigma}$. Assim,

$$\|\tilde{W}\|_{\rho_0-r} \leq \frac{3}{K^3} C(3\sigma) e^r r^{-3\sigma} \|V\|_{\rho_0}.$$

Finalmente, note que se \tilde{W} for solução de (4.7), então $W := \tilde{W} + \mathbf{1}$ também será solução e (4.8) vale para $W - \mathbf{1}$. \square

4.4 Implementação

Agora implementaremos a técnica KAM para demonstrar o Teorema 1.6.

Primeiro Passo $p = 0$.

Considerando $D = D^0 = \mathbf{K}_0$, $V^0 = V$, $P^0 = \mathbf{1}$ e $B_0 = (0, +\infty)$, temos

$$(P^0)^{-1}(D + V)P^0 = D^0 + V^0 = (D^0 + \text{diag } V^0) + (V^0 - \text{diag } V^0). \quad (4.9)$$

Por hipótese, $D^0 + \text{diag } V^0$ é um operador diagonal cuja sequência diagonal é $\lambda_{nk_1}^0(\tau) = \langle n, \omega \rangle + k_1\tau + V_{nn0}^0(\tau)$ e satisfaz para entradas diferentes (veja (4.24)),

$$|\lambda_{nk_1}^0(\tau) - \lambda_{mk_2}^0(\tau)| > K_0(1 + |k| + |n - m|)^{-\sigma},$$

com $\tau \in B_0$. Pelo Lema 4.9, dados $\epsilon_0 > 0$ existe $K_0 = \frac{\epsilon_0^{\frac{1}{3}}(\sigma - 1)}{4L(\sigma)} > 0$ de maneira que $|I_1| < \epsilon_0^{\frac{1}{3}}$, sendo

$$I_1 = \left\{ \tau > 0 : \exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, k_1 \neq k_2 : |\lambda_{nk_1}^0(\tau) - \lambda_{mk_2}^0(\tau)| < \frac{K_0}{(1 + |n - m| + |k|)^\sigma} \right\},$$

Tome $\tau \in B_1 = B_0 - I_1$, pelo Lema 4.9 fazendo-se $K = K_0$ e dado $0 < r_0 < \rho_0$ existe $W^0 \in \mathcal{B}^{\rho_0 - r_0}(B_1)$ solução da equação

$$[D^0 + \text{diag } V^0, W^0] + V^0 - \text{diag } V^0 = 0, \quad (4.10)$$

com

$$\text{diag } (W^0 - \mathbf{1}) = 0.$$

Além disso

$$\|W^0 - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r_0} \leq \frac{3}{K_0^3} C(3\sigma) e^{r_0} r_0^{-3\sigma} \|V^0\|_{\rho_0}. \quad (4.11)$$

Pelo Lema 4.8,

$$|B_0 - B_1| = |I_1| < \epsilon_0^{\frac{1}{3}}.$$

De (4.9) e (4.10), segue-se que

$$\begin{aligned} (W^0)^{-1}(P^0)^{-1}(D + V)P^0W^0 &\stackrel{(4.9)}{=} (W^0)^{-1}(D^0 + \text{diag } V^0)W^0 + (W^0)^{-1}(V^0 - \text{diag } V^0)W^0 \\ &\stackrel{(4.10)}{=} (W^0)^{-1}(W^0(D^0 + \text{diag } V^0)) - (W^0)^{-1}((V^0 - \text{diag } V^0)) \\ &+ (W^0)^{-1}(V^0 - \text{diag } V^0)W^0 =: D^1 + V^1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(P^1)^{-1}(D + V)P^1 = D^1 + V^1,$$

sendo

$$\begin{cases} P^1 = P^0 W^0 \\ D^1 = D^0 + \text{diag } V^0 \\ V^1 = (W^0)^{-1} (V^0 - \text{diag } V^0) (W^0 - \mathbf{1}). \end{cases}$$

Pela observação 4.7, W^0 é invertível e

$$\begin{aligned} \|(W^0)^{-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r_0} &\leq \frac{\|W^0 - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r_0}}{1 - \|W^0 - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r_0}} \leq \frac{\|W^0 - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r_0}}{1 - 3C(3\sigma)K_0^{-3}e^{r_0}r_0^{-3\sigma}\|V^0\|_{\rho_0}} \\ &< 2\|W^0 - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r_0} < 1, \end{aligned}$$

desde que

$$3C(3\sigma)K_0^{-3}e^{r_0}r_0^{-3\sigma}\|V^0\|_{\rho_0} < \frac{1}{2} < 1; \quad (4.12)$$

o que verificaremos adiante (veja página 72).

Denotando $\rho_1 = \rho_0 - r_0$ e usando o Lema 4.6, segue que

$$\begin{aligned} \|V^1\|_{\rho_1} &= \|(W^0)^{-1} (V^0 - \text{diag } V^0) (W^0 - \mathbf{1})\|_{\rho_1} \\ &\leq \|(W^0)^{-1}\|_{\rho_1} \|V^0\|_{\rho_0} \|W^0 - \mathbf{1}\|_{\rho_1}. \end{aligned}$$

Como

$$\|(W^0)^{-1}\|_{\rho_1} = \|(W^0)^{-1} - \mathbf{1} + \mathbf{1}\|_{\rho_1} \leq \|(W^0)^{-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_1} + \|\mathbf{1}\|_{\rho_1} < 2,$$

define-se θ_1 através de

$$\|V^1\|_{\rho_1} \leq 2\|V^0\|_{\rho_0} \|W^0 - \mathbf{1}\|_{\rho_1} \leq 6K_0^{-3}C(3\sigma)e^{r_0}r_0^{-3\sigma} \|V^0\|_{\rho_0}^2 =: \theta_1^2 \|V^0\|_{\rho_0}^2.$$

(p + 1)-ésimo passo

Supomos que podemos encontrar, para algum $p \in \mathbb{N}$:

- (i) Uma sequência de conjuntos $B_{p+1} \subset B_p \subset \dots \subset B_0 = \mathbb{R}^+$.
- (ii) Um operador $V^p \in \mathcal{B}^{\rho_p}(B_p)$ satisfazendo

$$\|V^p\|_{\rho_p} \leq \theta_p^{2p} \|V^0\|_{\rho_0}^{2p},$$

sendo

$$\theta_p \|V^0\|_{\rho_0} = \left\{ \prod_{j=0}^{p-1} \left[(6C(3\sigma)e^{r_j} (K_j^3 r_j^\sigma)^{-3})^{2^{-j-1}} \right] \right\} \|V^0\|_{\rho_0}, \quad (4.13)$$

e

$$\|V^0\|_{\rho_0} \leq \theta_0,$$

e usando (4.24))

$$\|V\|_{\rho_0} \leq \theta_0 < \frac{1}{4}, \quad (4.14)$$

(iii) Um operador diagonal D^p cuja seqüência diagonal de $D^p + \text{diag } V^p$ é dada por

$$(D^p)_{nk_1}(\tau) = \lambda_{nk_1}^p(\tau) = \lambda_{nk_1}^{p-1}(\tau) + V_{nk_1}^p(\tau)$$

e satisfaz, para $\tau \in B_p := B_0 - (\cup_{j=1}^p I_j)$ e autovalores diferentes (veja (4.24)),

$$|\lambda_{nk_1}^p(\tau) - \lambda_{mk_2}^p(\tau)| > \frac{K_p}{(1 + |k| + |n - m|)^\sigma}, \quad n \neq m, \quad k \neq 0, \quad (4.15)$$

de forma que para todo $\tau \in B_p$

$$(P^p)^{-1}(D + V)P^p = D^p + V^p, \quad (4.16)$$

sendo $P^p = W^0 W^1 \dots W^{p-1}$.

Mostremos que (i)-(iii) valem para $p + 1$. Pelo Lema 4.9, dados $K_p = \frac{\epsilon_p^{\frac{1}{3}}(\sigma - 1)}{4L(\sigma)} > 0$, $\epsilon_p > 0$, $0 < r_p < \rho_p$ e $\tau \in B_{p+1} := B_0 - \cup_{j=1}^{p+1} I_j$, existe $W^p \in \mathcal{B}^{\rho_p - r_p}$ solução de

$$[D^p + \text{diag } V^p, W^p] + V^p - \text{diag } V^p = 0, \quad (4.17)$$

com

$$\text{diag}(W^p - \mathbf{1}) = 0.$$

Além disso,

$$\|W^p - \mathbf{1}\|_{\rho_p - r_p} \leq 3C(\sigma)K_p^{-3}e^{r_p}r_p^{-3\sigma}\|V^p\|_{\rho_p}. \quad (4.18)$$

Pelo Lema 4.8

$$|B_p - B_{p+1}| = |I_{p+1}| < \epsilon_p^{\frac{1}{3}}.$$

De (4.9) e (4.17) segue que

$$\begin{aligned} (W^p)^{-1}(P^p)^{-1}(D + V)P^p W^p &\stackrel{(4.9)}{=} (W^p)^{-1}(D^p + \text{diag } V^p)W^p + (W^p)^{-1}(V^p - \text{diag } V^p)W^p \\ &\stackrel{(4.17)}{=} (W^p)^{-1}(W^p(D^p + \text{diag } V^p)) - (W^p)^{-1}((V^p - \text{diag } V^p)) \\ &+ (W^p)^{-1}(V^p - \text{diag } V^p)W^p =: D^{p+1} + V^{p+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(P^{p+1})^{-1}(D + V)P^{p+1} = D^{p+1} + V^{p+1},$$

sendo

$$\begin{cases} P^{p+1} = P^p W^p \\ D^{p+1} = D^p + \text{diag } V^p \\ V^{p+1} = (W^p)^{-1}(V^p - \text{diag } V^p)(W^p - \mathbf{1}). \end{cases}$$

Pela observação 4.7, W^p é invertível em \mathcal{B}^p e

$$\begin{aligned} \|(W^p)^{-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_p - r_p} &\leq \frac{\|W^p - \mathbf{1}\|_{\rho_p - r_p}}{1 - \|W^p - \mathbf{1}\|_{\rho_p - r_p}} \leq \frac{\|W^p - \mathbf{1}\|_{\rho_p - r_p}}{1 - 3C(3\sigma)K_p^{-3}e^{r_p}r_p^{-3\sigma}\|V^p\|_{\rho_p}} \\ &< 2\|W^p - \mathbf{1}\|_{\rho_p - r_p} < 1, \end{aligned}$$

desde que

$$3C(3\sigma)K_p^{-3}e^{r_p}r_p^{-3\sigma}\|V^p\|_{\rho_p} < \frac{1}{2} < 1; \quad (4.19)$$

o que verificaremos adiante (veja página 72).

Denotando $\rho_{p+1} = \rho_p - r_p$ e usando o Lema 4.6, segue que

$$\begin{aligned} \|V^{p+1}\|_{\rho_{p+1}} &= \|(W^p)^{-1}(V^p - \text{diag } V^p)(W^p - \mathbf{1})\|_{\rho_{p+1}} \\ &\leq \|(W^p)^{-1}\|_{\rho_{p+1}}\|V^p\|_{\rho_p}\|W^p - \mathbf{1}\|_{\rho_{p+1}}. \end{aligned}$$

Como

$$\|(W^p)^{-1}\|_{\rho_{p+1}} = \|(W^p)^{-1} - \mathbf{1} + \mathbf{1}\|_{\rho_{p+1}} \leq \|(W^p)^{-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_{p+1}} + \|\mathbf{1}\|_{\rho_{p+1}} < 2,$$

define-se θ_{p+1} através de

$$\begin{aligned} \|V^{p+1}\|_{\rho_{p+1}} &\leq 2\|V^p\|_{\rho_p}\|W^p - \mathbf{1}\|_{\rho_{p+1}} \\ &\leq 6C(3\sigma)K_p^{-3}r_p^{-3\sigma}e^{r_p}\theta_p^{2p+1}\|V^0\|_{\rho_0}^{2p+1} =: \theta_{p+1}^{2p+1}\|V^0\|_{\rho_0}^{2p+1}. \end{aligned}$$

Convergência

Resta mostrar, sob as condições apresentadas neste teorema, que o processo iterativo acima converge para $p \rightarrow \infty$, ou seja,

$$(j) \quad B_p \rightarrow B', \quad \theta_p \rightarrow \theta_\infty \quad \text{e} \quad |B_0 - B'| < \frac{1}{\sqrt[3]{4 - \text{sqr}t[3]2}} \epsilon^{\frac{1}{3}}.$$

(jj) P^p é sequência de Cauchy em $\mathcal{B}^{\rho_0-r}(B')$, logo existe $0 \neq P \in \mathcal{B}^{\rho_0-r}(B')$ com $P^p \rightarrow P$.

(jjj) $V^p \rightarrow 0$ em $\mathcal{B}^{\rho_0-r}(B')$ e a condição suficiente para convergência do processo em termos de $\|V^0\|_{\rho_0}$.

Verificação de (j).

Seja $B' = \lim_{p \rightarrow \infty} B_p = \bigcap_{p=1}^{\infty} B_p$. Assim,

$$|B_0 - B'| = \left| B_0 - \bigcap_{p=1}^{\infty} B_p \right| \leq \sum_{p=1}^{\infty} |I_{p+1}| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon_p^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}} \epsilon^{\frac{1}{3}},$$

sendo escolhidos $\epsilon_p = \epsilon 2^{-p-1}$. Tomando $r_p = r 2^{-p-1}$, segue que $\rho_p \rightarrow \rho_0 - r$ para $p \rightarrow \infty$. Verificaremos que existe $0 < \theta_{\infty} < \infty$ de forma que $\theta_p \rightarrow \theta_{\infty}$ para $p \rightarrow \infty$. Podemos supor que $1 \leq \frac{1}{r_p}$ e que $1 \leq \frac{1}{K_p}$ é crescente com p (em que $K_p = \frac{\epsilon_p^{\frac{1}{3}}(\sigma-1)}{4L(\sigma)}$), assim θ_p também é crescente. Por (4.13) e (4.24), segue que

$$\begin{aligned} \theta_p \|V^0\|_{\rho_0} &= \left\{ \prod_{j=0}^{p-1} \left[(6C(3\sigma)e^{r_j} (K_j r_j^{\sigma})^{-3})^{2^{-j-1}} \right] \right\} \|V^0\|_{\rho_0} \\ &\leq \left\{ \prod_{j=0}^{p-1} \left[(6C(3\sigma)e^{r_j} (K_j r_j^{\sigma})^{-3})^{2^{-j-1}} \right] \right\} \theta_0. \end{aligned}$$

Então θ_p converge para algum $\theta_{\infty} < \infty$. Tomando $0 < h < 1/5$, será conveniente escolher $\theta_0 (< \frac{1}{4}$, veja (4.24)) de modo que

$$\prod_{j=0}^{\infty} \left[(6C(3\sigma)e^{r_j} (K_j r_j^{\sigma})^{-3})^{2^{-j-1}} \right] < \frac{h}{\theta_0}.$$

Fazendo $p \rightarrow \infty$, temos

$$\theta_{\infty} \theta_0 < \frac{h \|V^0\|_{\rho_0}}{\theta_0} < h, \quad \text{e} \quad \text{então} \quad \theta_{\infty} \theta_0 < \frac{1}{5}.$$

Verificação de (jj).

Mostremos que P^p converge em $\mathcal{B}^{\rho_0-r}(B')$ para um operador $0 \neq P \in \mathcal{B}^{\rho_0-r}(B')$ para $p \rightarrow \infty$. Temos que $3C(3\sigma)e^{r_p} K_p^{-3} r_p^{-3\sigma} \|V^p\|_{\rho_p}$ é crescente com p , logo

$$3C(3\sigma)e^{r_p} K_p^{-3} r_p^{-3\sigma} \|V^p\|_{\rho_p} \leq 3C(3\sigma)e^{r_p} K_p^{-3} r_p^{-3\sigma} \theta_p^{2p} \theta_0^{2p} \leq \theta_{\infty}^{2p} \theta_0^{2p} < 1. \quad (4.20)$$

Como $P^{k-1} = W^0 W^1 \dots W^{p-2}$, usando o Lema 4.6 e (4.20)

$$\begin{aligned}
\|P^p - P^{p-1}\|_{\rho_p} &= \|P^{p-1} W^{p-1} - P^{p-1}\|_{\rho_p} \leq \|P^{p-1}\|_{\rho_p} \|W^{p-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_p} \\
&\leq \left(\|W^0 - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r_0} + \|\mathbf{1}\|_{\rho_0 - r_0} \right) \left(\|W^1 - \mathbf{1}\|_{\rho_1 - r_1} + \|\mathbf{1}\|_{\rho_1 - r_1} \right) \\
&\dots \left(\|W^{p-2} - \mathbf{1}\|_{\rho_{p-2} - r_{p-2}} + \|\mathbf{1}\|_{\rho_{p-2} - r_{p-2}} \right) \left(\|W^{p-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_{p-1} - r_{p-1}} \right) \\
&= \prod_{j=0}^{p-2} \left(\|W^j - \mathbf{1}\|_{\rho_j - r_j} + \|\mathbf{1}\|_{\rho_j - r_j} \right) \|W^{p-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_{p-1} - r_{p-1}} \\
&\leq \|W^{p-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_{p-1} - r_{p-1}} \prod_{j=0}^{p-2} (\theta_\infty^{2^j} \theta_0^{2^j} + 1).
\end{aligned}$$

De (4.18) e (4.20) segue que

$$\|P^p - P^{p-1}\|_{\rho_p} \leq 2 \theta_\infty^{2^{p-1}} \theta_0^{2^{p-1}}. \quad (4.21)$$

Suponha $m < p$; então, como $\theta_\infty \theta_0 < 1$,

$$\begin{aligned}
\|P^p - P^m\|_{\rho_0 - r} &\leq \|P^p - P^{p-1}\|_{\rho_p} + \|P^{p-1} - P^{p-2}\|_{\rho_{p-1}} + \dots + \|P^{m+1} - P^m\|_{\rho_{m+1}} \\
&\leq 2 \sum_{j=m}^{p-1} \theta_\infty^{2^j} \theta_0^{2^j} \leq 2 \theta_\infty^{2^m} \theta_0^{2^m} \sum_{j=0}^{\infty} \theta_\infty^j \theta_0^j = \frac{2 \theta_\infty^{2^m} \theta_0^{2^m}}{1 - \theta_\infty \theta_0} \rightarrow 0, \quad \text{para } m \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Portanto P^p é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}^{\rho_0 - r}(B')$.

Como $\theta_\infty < h/\theta_0$, segue então

$$\begin{aligned}
\|P^p - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r} &\leq 2 \sum_{j=0}^{p-1} \|W^j - \mathbf{1}\|_{\rho_{j+1}} \leq 2 \sum_{j=0}^{p-1} \theta_\infty^{2^j} \theta_0^{2^j} \\
&\leq 2 \theta_\infty \theta_0 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_\infty^j \theta_0^j = \frac{2 \theta_\infty \theta_0}{1 - \theta_\infty \theta_0} < 1,
\end{aligned}$$

logo, para $p \rightarrow \infty$ temos por continuidade da norma $\|\cdot\|_{\rho_0 - r}$,

$$\|P - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r} \leq \frac{2 \theta_\infty \theta_0}{1 - \theta_\infty \theta_0} < 1.$$

Além disso, pela Observação 4.7 temos que P é invertível (em particular $P \neq 0$) e

$$\|P^{-1} - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r} \leq \frac{\|P - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r}}{1 - \|P - \mathbf{1}\|_{\rho_0 - r}} \leq \frac{2 \theta_\infty \theta_0}{1 - 3 \theta_\infty \theta_0} < 1.$$

Portanto (4.19) (bem como (4.12) também é válido, isto é,

$$3C(3\sigma)e^{r_p} (K_p r_p^\sigma)^{-3} \|V^p\|_{\rho_p} \leq 3C(3\sigma)e^{r_p} (K_p r_p^\sigma)^{-3} \theta_p^{2^p} \theta_0^{2^p} \leq \theta_\infty^{2^p} \theta_0^{2^p} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{2^p} < 1,$$

junto com

$$\|P\|_{\rho_0-r} \leq 2 \text{ e } \|P^{-1}\|_{\rho_0-r} \leq 2.$$

Verificação de (jjj).

Por indução, usando (4.20) temos que

$$\|V^p\|_{\rho_p} \leq \theta_p^{2p} \|V^0\|_{\rho_0}^{2p} \leq \theta_0 \theta_\infty^{2p-1} \theta_0^{2p-1} < \theta_0 h^{2p-1}. \quad (4.22)$$

Assim, $V^p \rightarrow 0$ em $\mathcal{B}^{\rho_0-r}(B')$. Além disso,

$$P^{-1}\mathbf{K}P = -i\tau\partial_t + H_{0,\omega} + \sum_{k \geq 0} \text{diag } V^k$$

é diagonal cujos autovalores são dados por

$$\lambda_{nk}^\infty := k\tau + \langle n, \omega \rangle + \sum_{p \geq 0} (\text{diag } V^p)_{nn0}. \quad (4.23)$$

Para completar a demonstração da diagonalização, justificamos a hipótese sobre $\|V^0\|_{\rho_0}$ no Teorema 1.6, que garantirá a convergência de todo o processo.

$$\sum_{p=0}^{\infty} |\partial V_{nn0}^p(\tau_1, \tau_2)| \leq \sum_{p=0}^{\infty} \|V^p\|_{\rho_p} \stackrel{(4.22)}{\leq} \sum_{p=0}^{\infty} \theta_0 h^{2p-1} < \frac{1}{4}.$$

Assim,

$$\|V\|_{\rho_0} < \frac{1}{4 \sum_{p=0}^{\infty} h^{2p-1}} < \frac{1}{4}. \quad (4.24)$$

4.5 Localização dinâmica para \mathbf{K}

A adaptação natural do conceito de localização dinâmica (espacial) para o operador \mathbf{K} seria que para todo $p > 0$ e toda condição inicial da forma $\varphi^{k,m} = \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \otimes e_m$,

$$\sup_u r_{\varphi^{k,m}}^p(u) < \infty, \quad (4.25)$$

sendo $r_{\varphi^{k,m}}^p(u) := \langle e^{-iu\mathbf{K}}\varphi^{k,m}, |X|^p e^{-iu\mathbf{K}}\varphi^{k,m} \rangle$. Esta possibilidade seguirá de uma condição SULE natural para \mathbf{K} (veja a frente). Por uma questão de simplicidade, no que se segue, ignoraremos o fator de normalização $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ e escrevemos $\varphi^{k,m} = e^{ikt} \otimes e_m$.

Para o vetor $\varphi^{k,m}$ acima, tem-se

$$\begin{aligned} r_{\varphi^{k,m}}^p(u) &:= \sum_{j,n} \langle e^{-iu\mathbf{K}}\varphi^{k,m}, e^{ijt} \otimes e_n \rangle \langle e^{ijt} \otimes e_n, |X|^p e^{-iu\mathbf{K}}\varphi^{k,m} \rangle \\ &= \sum_{n,j} \overline{\psi^{k,m}(u, j, n)} |n|^p \psi^{k,m}(u, j, n) = \sum_{n,j} |\psi^{k,m}(u, j, n)|^2 |n|^p, \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}\psi^{k,m}(u, j, n) &:= (e^{-iu\mathbf{K}}(e^{ikt} \otimes e_m))(j, n) = \langle e^{ijt} \otimes e_n, e^{-iu\mathbf{K}}(e^{ikt} \otimes e_m) \rangle \\ &= \sum_{j', n'} \langle e^{ijt} \otimes e_n, P(e^{ij't} \otimes \psi_{n'}) \rangle \langle P(e^{ij't} \otimes \psi_{n'}), e^{-iu\mathbf{K}}(e^{ikt} \otimes e_m) \rangle \\ &= \sum_{j', n'} e^{-iu\lambda_{j', n'}} \Phi_{j', n'}(j, n) \overline{\Phi_{j', n'}(k, m)},\end{aligned}$$

e $\Phi_{j', n'}(j, n) := \langle e^{ijt} \otimes e_n, P(e^{ij't} \otimes \psi_{n'}) \rangle$. Temos que

$$\sup_u |\psi^{k,m}(u, j, n)| \leq W_{j,k}(m, n),$$

em que

$$W_{j,k}(m, n) = \sum_{j', n'} |\Phi_{j', n'}(k, m)| |\Phi_{j', n'}(j, n)|.$$

Portanto,

$$\sup_u r_{\varphi^{k,m}}^p(u) \leq \sum_{n,j} |n|^p W_{j,k}^2(m, n).$$

Vamos verificar que para cada k e m fixados, uma condição do tipo (1.2) é satisfeita para $P(e^{ikt} \otimes \psi_m)$ e então concluímos, analogamente à [19], que

$$\sup_u r_{\varphi^{k,m}}^p(u) < \infty.$$

Vamos verificar que, para V como no Teorema 1.6, os autovetores $P\varphi_{k,m}$ de \mathbf{K} satisfazem (1.2), isto é, \mathbf{K} tem SULE no sentido (4.27). Verificamos em (jj) que $P \in \mathcal{B}^{\rho_0-r}(B')$, para algum $0 < r < \rho_0$. Com P unitário, tais autovetores constituem um sistema completo e ortonormal em \mathcal{K} .

Como $\omega \in \Omega$ temos que $|\omega_j| \leq 1$. Para cada $P\varphi_{k,m}$, aplicando a Proposição 4.2, tem-se

$$\begin{aligned}
|(P\varphi_{k,m})(j,n)| &= |\langle e^{ijt} \otimes e_n, P\varphi_{k,m} \rangle| \\
&= \left| \sum_{j',m'} \langle e^{ijt} \otimes e_n, e^{ij't} \otimes \psi_{m'} \rangle \langle e^{ij't} \otimes \psi_{m'}, P(e^{ikt} \otimes \psi_m) \rangle \right| \\
&\leq \sum_{j',m'} 2\pi \delta_{j',j} |P_{m,m',j'-k}| |\psi_{m'}(n)| \\
&\leq \sum_{m'} \left(\frac{C e^{(-\rho_0+r)(|j-k|+|m'_1-m_1|+|m'_2-m_2|)}}{1+|j-k|+|m'_1-m_1|+|m'_2-m_2|} \right) \\
&\quad \otimes \left(\frac{1}{|\omega_1|^{|n_1-m'_1|} |n_1-m'_1|! |\omega_2|^{|n_2-m'_2|} |n_2-m'_2|!} \right) \\
&\leq \sum_{m'} \frac{C e^{(-\rho_0+r)(|j-k|+|m'_1-m_1|+|m'_1-n_1|+|m'_2-m_2|+|m'_2-n_2|)}}{(1+|j-k|+|m_1-m'_1|+|m_2-m'_2|)(|n_1-m'_1| |n_2-m'_2|)} \\
&\leq C \left(\sum_{m' \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{(1+|j-k|+|m'_1-m_1|+|m'_2-m_2|)(|n_1-m'_1| |n_2-m'_2|)} \right) \\
&\quad \times e^{(-\rho_0+r)(|n-m|+|j-k|)}. \tag{4.26}
\end{aligned}$$

A soma entre parênteses é convergente e com limite superior independente de n, m e k , logo

$$(4.26) \leq \tilde{C} e^{(-\rho_0+r)(|n-m|+|j-k|)} \leq \tilde{C}(\delta) e^{\delta(|m|+|k|)-(\rho_0-r)(|n-m|+|j-k|)}, \tag{4.27}$$

for all $\delta > 0$ e para alguma constante $\tilde{C} > 0$.

Demonstração do Teorema 1.8

A demonstração do Teorema 1.8 segue analogamente à do Teorema 1.6, porém com algumas diferenças que iremos apresentar a seguir:

- A perturbação inicial V está no espaço \mathcal{A}^{ρ_0} , $\rho_0 > 0$, dos operadores lineares limitados agindo em \mathcal{K} com representação matricial $V = \{V_{nmk}\}$ na base $\{\varphi_{k,m}\}$ das autofunções de \mathbf{K}_0 , $n, m \in \mathbb{Z}^2$, i.e., $V_{nmk} := \delta_{k,0} \langle \psi_n, a\psi_m \rangle$ (fazemos a identificação $V \cong \mathbf{1} \otimes V$) e com norma finita

$$[a]_{\rho_0} := \sup_{n \in \mathbb{Z}^2} \sum_m |a_{nm0}| e^{\rho_0|n-m|} < \infty.$$

Se a perturbação inicial V não depender do tempo t , então $V \in \mathcal{A}^{\rho_0}(0, +\infty)$ para todo $\rho_0 > 0$ e aplicamos a mesma técnica do teorema anterior.

- O primeiro passo do Lema 4.8, como V não depende de t , toma a forma

$$|I| \leq \frac{2K}{\sigma - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2+k)^{\sigma-1}k}.$$

Os demais passos são iguais, visto que V_{nm0}^i depende de t para $i \geq 1$.

- O primeiro passo da demonstração do Teorema 1.8 segue análogo ao primeiro passo da demonstração do Teorema 1.4, já que $V_{nmk} = V_{nmk}\delta_{k0}$ e $\tilde{\partial}V_{nmk}(\tau_1, \tau_2) = 0$, portanto

$$\|W^0 - \mathbf{I}\|_{\rho_0 - r_0} \leq K_0^{-1}C(\sigma)e^{r_0}r_0^{-\sigma} \|V\|_{\rho_0}.$$

- No $k + 1$ -ésimo passo temos que,

$$\theta_p \|V^0\|_{\rho_0} = \{(2C(\sigma)K_0^{-1}e^{r_0}r_0^{-\sigma})^{2^{-1}} \prod_{j=1}^{p-1} [6C(3\sigma)e^{r_j}(K_j r_j^\sigma)^{-3}]^{2^{-j-1}}\} \|V^0\|_{\rho_0}$$

4.6 Corolário do Teorema 1.6

Nosso objetivo nesta subseção é demonstrar que o Teorema 1.6 vale com P sendo um operador unitário, ou seja, vamos apresentar a demonstração do seguinte corolário.

Corolário 4.10. *Se \mathbf{K}_0 e V são auto-adjuntos então P no Teorema 1.6 pode ser tomado como um operador unitário.*

Demonstração. Suponha que diagonalizamos $\mathbf{K}_0 + \mathbf{V}$ por meio de um operador invertível P que não é necessariamente unitário. Como

$$\|V\|_{\rho_0} < \min \frac{1}{4}, \gamma\epsilon$$

temos, pelo Lema 4.8 existe $B'' \subset B'$ com $|B' - B''| < \epsilon'$ de modo que para $\tau \in B''$

$$\left| \lambda_{n,k_1}^\infty(\tau) - \lambda_{m,k_2}^\infty(\tau) \right| \geq \frac{K'}{(1 + |k| + |n - m|)^\sigma}.$$

Isto implica que os autovalores $\lambda_{nk_1}^\infty(\tau)$ de $\mathbf{K}_0 + \mathbf{V}$ são simples para $\tau \in B''$. Como $\mathbf{K}_0 + \mathbf{V}$ é auto-adjunto, todos os seus autovetores $P\varphi_{k,m}$ são ortogonais entre si; logo o operador P^*P é diagonal na base dos autovetores de \mathbf{K}_0 , de fato,

$$\langle P^*P\varphi_{k_1,n}, \varphi_{k_2,m} \rangle = \langle P\varphi_{k_1,n}, P\varphi_{k_2,m} \rangle = \delta_{nm}\delta_{k0} \|P\varphi_{k,n}\|^2 = \langle \varphi_{k,m}, P^*P\varphi_{k,n} \rangle.$$

Observe que P^*P é um operador auto-adjunto e positivo. Definimos $W = P(P^*P)^{-1/2}$, temos que W é unitário, pois

$$\begin{aligned} \langle (W^*W)\varphi_{k_1,n}, \varphi_{k_2,m} \rangle &= \langle W\varphi_{k_1,m}, W\varphi_{k_2,n} \rangle = \langle (P^*P)^{-1/2}\varphi_{k_1,m}, (P^*P)^{1/2}\varphi_{k_2,n} \rangle \\ &= \langle \varphi_{k_1,m}, \varphi_{k_2,n} \rangle = \delta_{nm}\delta_{k_0}, \end{aligned}$$

e, analogamente, $\langle \varphi_{k_1,m}, (W^*W)\varphi_{k_2,n} \rangle = \delta_{nm}\delta_{k_0}$.

Assim, pelo Teorema 1.6, substituindo B'' no lugar de B' e W no lugar de P , obtemos (1.9) com P unitário, ou seja, $W^{-1}(K_0 + V)W$ é um operador diagonal com espectro pontual puro.

□

Conclusão

Neste trabalho estudamos a propriedade de localização dinâmica para algumas perturbações do operador de Schrödinger discreto com campo elétrico uniforme. Analisamos três situações para este tipo de operador.

No primeiro caso, consideramos o operador de Schrödinger unidimensional com campo elétrico e perturbado por um potencial limitado; conseguimos mostrar que se a norma infinito da perturbação for suficientemente pequena (com valor explícito), então tem-se localização dinâmica. No segundo caso, estudamos o operador bidimensional e perturbado por um potencial limitado dependendo de um certo parâmetro, e demonstramos que a localização dinâmica é válida para certas escolhas da perturbação. Finalmente, estudamos o espectro pontual puro e a condição SULE para o operador bidimensional sob perturbações periódicas no tempo.

Como trabalhos futuros, pretende-se estudar o operador descrito no Capítulo 2, permitindo que os autovalores sejam degenerados. Como ponto de partida, podemos considerar o trabalho [9], que demonstra que a Hamiltoniana de Floquet do tipo

$$K = -i\partial_t + H + V(\omega t)$$

agindo em $L^2([0, T], \mathcal{H}, dt)$ e dependendo de $\omega = 2\pi/T$, $T > 0$ tem espectro pontual puro para frequências ω em um conjunto de medida de Lebesgue grande sob condições adequadas em H e na perturbação $V(\omega t)$. Para mostrar tal resultado, aplica-se o algoritmo KAM para hamiltonianas de Floquet periódicas.

Estudaremos também o operador

$$[H_\lambda \psi](n) = \lambda(-\psi(n+1) - \psi(n-1)) + V(n)\psi(n)$$

com λ um parâmetro real de modulo pequeno, e V uma função assumindo valores reais. Consideraremos V o operador não-perturbado com espectro pontual puro cujas autofunções são os elementos da base canônica de $\ell^2(\mathbb{Z})$, e o j -ésimo autovalor é $V(j)$. Aqui nosso desafio será determinar qual a condição sobre V para que H_λ tenha espectro pontual puro e também localização dinâmica. Uma variação desta proposta seria considerar

$$[H_{E,\lambda} \psi](n) = \lambda(-\psi(n+1) - \psi(n-1) + E n \psi(n)) + V(n)\psi(n),$$

também com $|\lambda|$ pequeno, o que representaria o extremo oposto do caso com campo elétrico unidimensional estudado previamente neste trabalho, sendo agora com potências “grandes”.

Referências Bibliográficas

- [1] Avron, J. E., Herbst, I. W.: Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to the Stark effect. *Commun. Math. Phys.* 52, 239–254 (1977)
- [2] Bellissard, J.: Stability and instability in quantum mechanics. In: Trends and Developments in the Eighties, S. Albeverio and Ph. Blanchard, Editors, 1–106. (Singapore: World Scientific, 1985)
- [3] Combes, M.: The Quantum stability problem for time-periodic perturbations of the harmonic oscillator *Ann. Inst. Henri Poincaré* 47, 63–83 (1987); Erratum: *Ann. Inst. Henri Poincaré* 47, 451–454 (1987)
- [4] Cycon, H. L., Froese, R. G., Kirsch, W., Simon, B.: *Schrödinger Operators*, (Berlin: Springer Verlag, 1987)
- [5] de Oliveira, C. R.: *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*, PMP v. 54 (Basel: Birkhäuser, 2009)
- [6] de Oliveira, C. R., Simsen, M. S.: A Floquet operator with purely point spectrum and energy instability. *Annales H. Poincaré* 8, 1225–1277 (2007)
- [7] del Rio, R., Jitomirskaya, S., Last, Y., Simon, B.: Operators with singular continuous spectrum. IV. Hausdorff dimensions, rank one perturbations, and localization. *J. Anal. Math.* 69, 153–200 (1996)
- [8] Dinaburg, E.I.: Stark Effect for a difference Schrödinger operator. *Theor. and Math. Phys.* 78, 50–57 (1989)
- [9] Duclos, P., Lev, O., Šťovíček, P., Vittot, M.: Weakly regular Floquet Hamiltonians with pure point spectrum. *Rev. Math. Phys.* 14, 531–568 (2002)

-
- [10] Duclos, P., Soccorsi, E., Šťovíček, P., Vittot, M.: On the stability of periodically time-dependent quantum systems. *Rev. Math. Phys.* 20, 725–764 (2008)
- [11] Duclos, P., Šťovíček, P., Vittot, M.: Perturbation of an eigen-value from a dense point spectrum: a general Floquet Hamiltonian, *Ann. Inst. Henri Poincaré* 71, 241-301 (1999)
- [12] Duclos, P., Šťovíček, P.: Floquet Hamiltonian with pure point spectrum. *Commun. Math. Phys.* 177, 327–247 (1996)
- [13] Howland, J. S.: Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians. *Math. Ann.* 207, 315–335 (1974)
- [14] Howland, J. S.: Scattering theory for Hamiltonians periodic in time. *Indiana J. Math.* 28, 471–494 (1979)
- [15] Jauslin, H. R., Lebowitz, J. L.: Spectral and stability aspects of quantum chaos. *Chaos* 1, 114–121 (1991)
- [16] Last, Y.: Quantum dynamics and decomposition of singular continuous spectra. *J. Funct. Anal.* 142, 406–445 (2001)
- [17] Nazareno, H. N., da Silva, C. A. A., de Brito, P. E.: Dynamical localization in aperiodic 1D systems under the action of electric fields. *Superlattices Microstruct.* 18, 297–307 (1995)
- [18] Sahvani, J.: On the absolutely continuous spectrum of Stark Hamiltonians. *J. Math. Phys.* 41, 8006–8015 (2000)
- [19] Tcheremchantsev, S.: How to prove dynamical localization. *Commun. Math. Phys.* 221, 27–56 (2001)