

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

CÁSSIO EDUARDO FARIA SOBUE

**ANÁLISE DO DESEMPENHO DE GRÁFICOS DE CONTROLE
X-BAR CONSIDERANDO DIFERENTES ESTIMADORES DO
DESVIO PADRÃO**

São Carlos
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

CÁSSIO EDUARDO FARIA SOBUE

**ANÁLISE DO DESEMPENHO DE GRÁFICOS DE CONTROLE
X-BAR CONSIDERANDO DIFERENTES ESTIMADORES DO
DESVIO PADRÃO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre em Engenharia de Produção

Orientação: Prof. Dr. Pedro C. Oprime

São Carlos
2018



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Cássio Eduardo Faria Sobue, realizada em 16/02/2018:

Prof. Dr. Pedro Carlos Oprime
UFSCar

Profa. Dra. Fabiane Letícia Lizarelli
UFSCar

Profa. Dra. Creusa Sayuri Tahara Amaral
UNIARA

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação à minha família, como fruto do reconhecimento de sua dedicação e confiança na minha formação pessoal e profissional.

AGRADECIMENTO

Agradeço a Deus, Pai de bondade e misericórdia, criador do céu e da terra, de todas as coisas visíveis e invisíveis.

Aos meus pais Katsumi e Regina, por todo empenho e dedicação para a minha formação profissional e acadêmica, e ao meu irmão Carlos Henrique, por todo incentivo no desenvolvimento desta dissertação para este programa de pós-graduação.

À empresa onde trabalho, pelo investimento e confiança em minha formação profissional.

Ao meu orientador, Professor Dr. Pedro Carlos Oprime pelos ensinamentos e dedicação para o desenvolvimento desta dissertação de mestrado.

Aos membros da banca de avaliação, Professora Dra. Fabiane Letícia Lizarelli e Professora Dra. Creusa Sayuri Tahara Amaral pelas orientações dadas para o desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

Os textos de referência sobre gráficos de controle tratam os parâmetros estatísticos como supostamente conhecidos nos cálculos dos limites estatísticos de controle. Entretanto, nas últimas décadas, a literatura referente ao CEP (Controle Estatístico de Processo) tem mostrado que há diferença entre o desempenho teórico e o real, havendo um aumento na incidência de falsos alarmes nos gráficos de controle que utilizam parâmetros estatísticos estimados. Importantes pesquisadores, como Castagliola e Chakraborti, propõem novos *designs* de gráficos, visando a melhoria do desempenho do gráfico de controle de Shewhart. Sob essa perspectiva, o objetivo desta dissertação é comparar o desempenho dos gráficos de controle X-bar, utilizando-se cinco estimadores do desvio-padrão, com base na análise da proporção de valores do ARL (*Average Run Length*, número médio de amostras até a ocorrência de um falso alarme) concentrados no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL, variando-se o tamanho (n) e a quantidade amostral (m) disponível. Os cinco estimadores de desvio-padrão utilizados são: estimador calculado com base na amplitude amostral média; estimador calculado com base no desvio-padrão amostral médio; estimador calculado com base no desvio-padrão agrupado, dividido pelo produto de c_4 (constante tabelada, de acordo com o tamanho amostral) em função de v (número de graus de liberdade, calculado a partir do produto do número de amostras pelo tamanho amostral menos um); estimador calculado com base no desvio-padrão agrupado, multiplicado pelo produto de c_4 em função de v ; e, por fim, o estimador calculado com base apenas no desvio-padrão agrupado. O método utilizado é a simulação, na qual foram desenvolvidos cinco programas que simulam processos produtivos sob controle, para cada um dos estimadores do desvio-padrão. Verifica-se que há diferença de desempenho entre os cinco estimadores do desvio-padrão, sendo o terceiro estimador mais indicado na situação simulada com menor quantidade amostral ($m=20$ e $n=5$ e $n=10$), e o primeiro estimador mais indicado na situação com maior quantidade amostral disponível ($m=200$, e $n=5$ e $n=10$). Apenas para $m=100$ e $n=10$, não houve diferença no desempenho entre os cinco estimadores. Verifica-se também que a quantidade amostral e o tamanho da amostra influenciam no desempenho dos gráficos de controle.

PALAVRAS-CHAVE: Gráfico de controle, Simulação, Estimadores de desvio-padrão, ARL, Desempenho.

ABSTRACT

The reference works about control charts consider the statistical parameters as known to calculate the control limits. However, in the last decades, the literature about SPC (Statistical Process Control) has indicated a difference between the theoretical and the real performance of control charts which use estimated statistical parameters, increasing the incidence of false alarms. Reference researchers in SPC, as Castagliola and Chakraborti, propose new designs of control charts, improving the performance of Shewhart's control charts. This work aims to compare the X-bar control charts performance, using five standard deviation estimators, based on the analysis of proportion of ARL values (Average Run Length, the average number of samples until the incidence of a false alarm) in the interval between 0 and 200 of the ARL distribution and varying the sample size and the number of the samples. The five estimators are: the estimator calculated from the average sample range; the estimator calculated from the average sample standard deviation; the estimator calculated from the pooled standard deviation divided by the result of c_4 (constant influenced by the sample size) in function of v (number of degrees of freedom, resultant from the number of samples times the sample size minus one); the estimator calculated from the pooled standard deviation times the result of the constant c_4 in function of v ; and the estimator based only on the pooled standard deviation. The method applied is the simulation, developing five programs to simulate productive in-control processes, each one for each standard deviation estimator. After the comparison of proportions, the third estimator is indicated for the situation with the lowest samples values tested ($m=20$ and $n=5$ and $n=10$), and the first estimator is indicated for the situation with the highest samples values tested ($m=200$ and $n=5$ and $n=10$). Only for $m=100$ and $n=10$, there is no evidence that proves an estimator has a better performance than another. This work also proved that the sample size and the number of samples influence the performance of the control charts.

KEYWORDS: Control chart, Simulation, Standard Deviation Estimator, ARL, Performance.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Problema de pesquisa.....	16
Figura 1.2: Estrutura da dissertação	18
Figura 1.3: Resumo do método	22
Figura 2.1: Pressupostos essenciais para o sucesso do CEP	24
Figura 2.2: Gráfico de Controle de Shewhart	25
Figura 2.3: Índícios de descontrole no processo	27
Figura 2.4: Benefícios dos gráficos de controle	28
Figura 2.5: Procedimento de escolha do gráfico de controle	29
Figura 2.6: Decisões sobre os parâmetros dos gráficos de controle	31
Figura 2.7: Ajustes no processo na Fase 1	36
Figura 2.8: Erro estatístico tipo I	39
Figura 2.9: Erro tipo II	41
Figura 2.10: Distribuição do ARL_0 para $\lambda=1,0$, $L=2,807$ e $m=100$	52
Figura 2.11: Distribuição do ARL_0 para $\lambda=0,5$, $L=2,777$ e $m=200$	53
Figura 2.12: Distribuição do ARL_0 para $\lambda=0,2$, $L=2,636$ e $m=300$	53
Figura 2.13: Distribuição do ARL_0 para $\lambda=0,1$, $L=2,454$ e $m=400$	54
Figura 3.1: Modelagem para cálculo da distribuição do ARL, utilizando-se SD3	71
Figura 3.2: Resumo da simulação	77
Figura 3.3: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=5$ e estimador SD1	101
Figura 3.4: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=5$ e estimador SD2	102
Figura 3.5: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=5$ e estimador SD3	102
Figura 3.6: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=5$ e estimador SD4	103
Figura 3.7: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=5$ e estimador SD5	103
Figura 3.8: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=5$ e estimador SD1	104
Figura 3.9: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=5$ e estimador SD2	105
Figura 3.10: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=5$ e estimador SD3	105
Figura 3.11: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=5$ e estimador SD4	106
Figura 3.12: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=5$ e estimador SD5	106
Figura 3.13: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=5$ e estimador SD1	107
Figura 3.14: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=5$ e estimador SD2	108
Figura 3.15: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=5$ e estimador SD3	108
Figura 3.16: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=5$ e estimador SD4	109
Figura 3.17: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=5$ e estimador SD5	109
Figura 3.18: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=5$ e estimador SD1	110
Figura 3.19: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=5$ e estimador SD2	111
Figura 3.20: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=5$ e estimador SD3	111
Figura 3.21: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=5$ e estimador SD4	112
Figura 3.22: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=5$ e estimador SD5	112
Figura 3.23: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=10$ e estimador SD1	113
Figura 3.24: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=10$ e estimador SD2	114
Figura 3.25: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=10$ e estimador SD3	114
Figura 3.26: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=10$ e estimador SD4	115
Figura 3.27: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=10$ e estimador SD5	115
Figura 3.28: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=10$ e estimador SD1	116
Figura 3.29: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=10$ e estimador SD2	117
Figura 3.30: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=10$ e estimador SD3	117

Figura 3.31: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=10$ e estimador SD4	118
Figura 3.32: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=10$ e estimador SD5	118
Figura 3.33: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=10$ e estimador SD1	119
Figura 3.34: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=10$ e estimador SD2	120
Figura 3.35: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=10$ e estimador SD3	120
Figura 3.36: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=10$ e estimador SD4	121
Figura 3.37: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=10$ e estimador SD5	121
Figura 3.38: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=10$ e estimador SD1	122
Figura 3.39: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=10$ e estimador SD2	123
Figura 3.40: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=10$ e estimador SD3	123
Figura 3.41: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=10$ e estimador SD4	124
Figura 3.42: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=10$ e estimador SD5	124

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Valores dos parâmetros para calcular os limites de controle para R-bar	33
Tabela 2.2: Valores dos parâmetros para calcular os limites de controle para S-bar	34
Tabela 2.3: Valores de ARL_0 para o gráfico X-bar e estimador SD1	49
Tabela 2.4: Valores de SDRL para o gráfico X-bar e estimador SD1	49
Tabela 2.5: Percentis do ARL_0 , utilizando-se o estimador de desvio-padrão $\hat{\sigma}_3$	51
Tabela 2.6: Valores do AARL para cada estimador, considerando processo sob controle ...	58
Tabela 2.7: Valores do SDARL para cada estimador, considerando processo sob controle .	58
Tabela 2.8: Valores do ARL para média desconhecida e variância conhecida, $n=5$ e $\alpha=0,0027$	63
Tabela 2.9: Valores do ARL para média conhecida e variância desconhecida, $n=5$ e $\alpha=0,0027$	64
Tabela 2.10: Valores do ARL para média e variância desconhecidos, $n=5$ e $\alpha=0,0027$	65
Tabela 3.1: Valores do ARL_0 para $n=5$	78
Tabela 3.2: Valores do ARL_0 para $n=10$	78
Tabela 3.3: Valores extremos, mediana, média e desvio-padrão para $n=5$ e $m=20$	79
Tabela 3.4: Valores extremos, mediana, média e desvio-padrão para $n=5$ e $m=50$	79
Tabela 3.5: Valores extremos, mediana, média e desvio-padrão para $n=5$ e $m=100$	79
Tabela 3.6: Valores extremos, mediana, média e desvio-padrão para $n=5$ e $m=200$	79
Tabela 3.7: Valores extremos, mediana, média e desvio-padrão para $n=10$ e $m=20$	80
Tabela 3.8: Valores extremos, mediana, média e desvio-padrão para $n=10$ e $m=50$	80
Tabela 3.9: Valores extremos, mediana, média e desvio-padrão para $n=10$ e $m=100$	80
Tabela 3.10: Valores extremos, mediana, média e desvio-padrão para $n=10$ e $m=200$	80
Tabela 3.11: Melhores resultados obtidos de média e variabilidade	81
Tabela 3.12: Proporção de valores do ARL_0 no intervalo inferior (entre 0 e 200)	82
Tabela 3.13: Comparação de proporção (<i>p-value</i>) entre estimadores para $n=5$	84
Tabela 3.14: Comparação de proporção (<i>p-value</i>) entre estimadores para $n=10$	86
Tabela 3.15: Comparação de proporção (<i>p-value</i>) entre valores amostrais	88
Tabela 3.16: Comparação de proporção (<i>p-value</i>) entre valores amostrais	89
Tabela 4.1: Melhores estimadores do desvio-padrão	91
Tabela 3.17: Distribuição do ARL_0 para $n=5$, $m=20$	101
Tabela 3.18: Distribuição do ARL_0 para $n=5$ e $m=50$	104
Tabela 3.19: Distribuição do ARL_0 para $n=5$ e $m=100$	107
Tabela 3.20: Distribuição do ARL_0 para $n=5$ e $m=200$	110
Tabela 3.21: Distribuição do ARL_0 para $n=10$ e $m=20$	113
Tabela 3.22: Distribuição do ARL_0 para $n=10$ e $m=50$	116
Tabela 3.23: Distribuição do ARL_0 para $n=10$ e $m=100$	119
Tabela 3.24: Distribuição do ARL_0 para $n=10$ e $m=200$	122

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1: Causas comuns ou aleatórias e especiais ou assinaláveis.....	26
Quadro 2.2: Propriedades dos estimadores de parâmetros	55
Quadro 2.3: Características dos trabalhos encontrados na literatura	67
Quadro 3.1: Variáveis utilizadas na simulação	70

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	12
1.1 Objetivo	18
1.2 Justificativa	19
1.3 Método	19
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
2.1 Benefícios e fundamentos do Controle Estatístico de Processo (CEP)	23
2.2 Fundamentos dos gráficos de controle estatísticos	25
2.3 Fases de implantação dos gráficos de controle	35
2.4 Testes estatísticos no controle do processo: os erros tipo I e tipo II	38
2.4.1 Erro tipo I.....	39
2.4.2 Erro tipo II	41
2.5 Medidas de desempenho dos gráficos de controle	43
2.5.1 ARL para uma situação sob controle (ARL_0).....	44
2.5.2 ARL para uma situação fora de controle (ARL_1)	45
2.5.3 SDRL (Standard Deviation Run Length).....	48
2.5.4 A análise do desempenho do gráfico de controle pela distribuição do ARL	50
2.6 Estimadores do desvio-padrão	55
2.7 Efeitos negativos da estimação de parâmetros para o ARL	59
2.8 Efeitos do tamanho amostral (n) e quantidade de amostras no desempenho	61
2.9 Exemplos de artigos na literatura sobre avaliação de desempenho	67
3. SIMULAÇÃO E RESULTADOS	69
3.1 Simulação dos valores do ARL_0 para os cinco estimadores do desvio-padrão	70
3.2 Resultados obtidos para o ARL_0	78
3.3 Resultados da análise pelo intervalo inferior	81
4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	91
5. CONCLUSÃO	94
REFERÊNCIAS	96
APÊNDICE A – DISTRIBUIÇÃO DO ARL_0 PARA $m=20$ E $n=5$	101
APÊNDICE B – DISTRIBUIÇÃO DO ARL_0 PARA $m=50$ E $n=5$	104
APÊNDICE C – DISTRIBUIÇÃO DO ARL_0 PARA $m=100$ E $n=5$	107
APÊNDICE D – DISTRIBUIÇÃO DO ARL_0 PARA $m=200$ E $n=5$	110
APÊNDICE E – DISTRIBUIÇÃO DO ARL_0 PARA $m=20$ E $n=10$	113
APÊNDICE F – DISTRIBUIÇÃO DO ARL_0 PARA $m=50$ E $n=10$	116
APÊNDICE G – DISTRIBUIÇÃO DO ARL_0 PARA $m=100$ E $n=10$	119
APÊNDICE H – DISTRIBUIÇÃO DO ARL_0 PARA $m=200$ E $n=10$	122

1. INTRODUÇÃO

Gráficos de controle são, de acordo com Wadsworth (1998), representações gráficas da variação de uma determinada estatística que está sendo produzida pelo processo. Woodall (2000) caracteriza-os como sendo importantes instrumentos para o monitoramento da estabilidade do processo, verificando se o mesmo está ou não em regime estatístico. O autor reforça que, qualquer programa de melhoria da qualidade consiste em reduzir a variabilidade e em centralizar um determinado valor em um número alvo, de modo a manter os processos estáveis e previsíveis. Segundo Seif *et al.* (2015), os gráficos de controle são uma ferramenta utilizada na avaliação do desempenho do processo, e, por meio do seu monitoramento, propor melhoria da sua capacidade.

O princípio fundamental dos gráficos de controle, segundo McCracken e Chakraborti (2013), é a verificação da estabilidade dos processos. Para isso são necessárias duas fases: a fase I, que consiste na coleta de amostras para definição dos limites de controle, e a fase II que é o monitoramento propriamente dito. Os gráficos de controle são importantes para a tomada de decisões, baseando-se em fatos e dados (MONTGOMERY e RUNGER, 2002; ZHANG e CASTAGLIOLA, 2010), destacando a sua simplicidade na sua operacionalização, sendo esse motivo uma das mais conhecidas ferramentas de monitoramento de processos (CASTAGLIOLA *et al.*, 2013a; JONES-FARMER *et al.*, 2014). Pode-se, então, destacar muitos benefícios que os gráficos de controle proporcionam, como o controle e monitoramento da estabilidade de processos, tornando-os previsíveis, diminuição de retrabalhos e refugos e redução dos custos da não qualidade.

Desde as primeiras aplicações dos gráficos de controle por Shewhart, em 1924, muitos trabalhos teóricos e práticos surgiram sobre diferentes aspectos e perspectivas. Destacam-se as linhas de pesquisa que estudam os efeitos das estimativas dos parâmetros estatísticos no desempenho dos gráficos de controle. Exemplos como o trabalho de Jensen *et al.* (2006) e Psarakis *et al.* (2014) demonstram que o procedimento de estimação resulta em um aumento da incidência de pontos além dos limites de controle (para um processo controlado) e diminui o poder do teste estatístico (no caso de um processo fora de controle) devido ao uso de uma quantidade de dados amostrais insuficiente para que o desempenho obtido seja semelhante a situações com parâmetros conhecidos. Outros autores, como Saleh *et al.* (2015a), destacam os erros decorrentes no processo de estimação dos parâmetros estatísticos devido a variação existente entre diferentes estimativas.

Em relação ao uso de estimadores de desvio-padrão, desenvolveram-se nas últimas décadas muitos trabalhos com o objetivo de analisar os efeitos gerados nos gráficos de controle. Albers e Kallenberg (2005), por exemplo, corrigem e propõem o uso de estimadores sem tendências. Saleh *et al.* (2015a) fazem um estudo a respeito dos efeitos no desempenho dos gráficos de controle, com base em cinco estimadores do desvio-padrão encontrados na literatura. São eles:

$$1) \hat{\sigma}_1 = \frac{\bar{R}}{d_2(n)} \quad (1)$$

$$2) \hat{\sigma}_2 = \frac{\bar{S}}{c_4(n)} \quad (2)$$

$$3) \hat{\sigma}_3 = \frac{Spooled}{c_4(v+1)} \quad (3)$$

$$4) \hat{\sigma}_4 = c_4(v+1)Spooled \quad (4)$$

$$5) \hat{\sigma}_5 = Spooled \quad (5)$$

$$Spooled = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m S^2_i}}{\sqrt{m}} \quad (6)$$

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^m R}{m} \quad (7)$$

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^m S}{m} \quad (8)$$

$$v = m * (n-1) \quad (9)$$

A equação (1) mostra o primeiro estimador do desvio-padrão, calculado com base na amplitude média (equação (7)), sendo a amplitude igual a $R = X_{\max} - X_{\min}$, que é a diferença entre o maior valor amostral pelo menor valor amostral, em uma mesma amostra), sobre a constante $d_2(n)$, variando seu valor em relação ao tamanho da amostra n (de acordo com a Tabela 2.1). A equação (2) mostra o segundo estimador do desvio-padrão, calculado com base no desvio-padrão amostral médio (equação (8)) sobre uma constante $c_4(n)$, a qual tem seu valor de acordo com o tamanho da amostra n (Tabela 2.1). A equação (3) mostra o terceiro estimador do desvio-padrão, calculado com base na razão entre o desvio-padrão agru-

pado (equação (6)) sobre a constante c_4 . Para esse caso, o tamanho da amostra que determina o valor de c_4 será $v+1$, sendo v indica o número de graus de liberdade, calculado pelo produto entre quantidade de amostras (m) pelo tamanho da amostra (n) menos um, definido conforme equação (9). O quarto estimador do desvio-padrão (definido na equação (4)) é calculado pelo produto entre o desvio-padrão agrupado (equação (6)) pela constante c_4 , sendo o tamanho da amostra igual a $v+1$, calculado conforme a equação (9). Por fim, o quinto estimador do desvio-padrão será o próprio desvio-padrão agrupado, calculado conforme a equação (6).

No que diz respeito à medida de desempenho dos gráficos de controle, o indicador mais conhecido na literatura é o ARL (*Average Run Length*). Esse indicador pode ser aplicado tanto para medir o desempenho de processos controlados (denominado ARL_0), quanto para aqueles que estejam fora de controle (ARL_1). No caso das situações controladas, o ARL será medido pelo número de pontos gerados até a incidência de um falso alarme. No caso de um descontrole no processo, o ARL indica o número de amostras necessárias até que o gráfico de controle detecte e aponte o descontrole. Entretanto, muitos trabalhos como Saleh *et al.* (2015a), Saleh *et al.* (2015b) e Epprecht *et al.* (2015), questionam o uso dessa métrica devido ao fato de ser um valor médio e apresentar alta variabilidade de valores, como também ao fato do RL seguir uma distribuição com acentuada assimetria positiva quando os parâmetros são estimados. Quando os parâmetros são conhecidos, o RL segue a distribuição geométrica, cuja assimetria é menos acentuada quando comparada ao caso de parâmetros desconhecidos.

Ao longo desta dissertação, alguns termos serão utilizados referentes ao desempenho dos gráficos de controle, os quais devem ser esclarecidos para uma melhor compreensão das métricas citadas na literatura. O RL (*Run Length*) indica o comprimento da rodada, ou seja, o número de amostras extraídas até a sinalização de um falso alarme pelo gráfico de controle para uma situação controlada. Pelo fato do RL seguir uma distribuição de probabilidade (no caso, uma distribuição geométrica), o seu valor esperado, $E(RL) = ARL$, será o inverso da probabilidade de ocorrência de um falso alarme. Quando os parâmetros do processo são estimados, o ARL deixa de ser definido por um valor fixo (ou seja, o inverso da probabilidade de ocorrência de um falso alarme), e passa a ser uma variável aleatória. Sendo assim, outra métrica de desempenho é definida: o AARL (ou seja, $E(ARL) = AARL$). O AARL é o valor médio entre diferentes valores do ARL que poderão ser obtidos, em diferentes gráficos de controle com parâmetros estimados, utilizando-se os mesmos valores da quantidade de amostras (m) e tamanho amostral (n).

Devido à alta variabilidade apresentada pelo valor médio do RL (por se tratar de uma distribuição geométrica, conforme equações (10) e (11)), outras métricas de desempenho foram propostas (PSARAKIS *et al.*, 2014). Autores como Quesenberry (1993), Chen (1997) e Saleh *et al.* (2015a), recomendam a análise conjunta com as medidas de dispersão do RL. Sendo assim, propõem-se o uso do SDRL (*Standard Deviation Run Length*), que é a medida do desvio-padrão referente ao RL (o ARL é o valor médio), calculado pela raiz de 1 menos a probabilidade de ocorrência de um falso alarme (p), pela probabilidade de um falso alarme (p), definido na equação (11). Quando os parâmetros do processo são estimados, conforme já mencionado, o ARL passa a ser uma variável aleatória não podendo mais ser definido pelo inverso da probabilidade de falso alarme. Sendo assim, sugere-se a avaliação da dispersão do desempenho pelo SDARL, a qual irá medir a variabilidade dos diferentes valores do ARL. As equações (10) e (11) apresentam o cálculo do valor médio (μ) e do desvio-padrão (σ) da distribuição geométrica, segundo Montgomery e Runger (2002). O termo “ p ” indica a probabilidade de ocorrência de um falso alarme.

$$\mu = \frac{1}{p} \quad (10)$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{(1-p)}}{p} \quad (11)$$

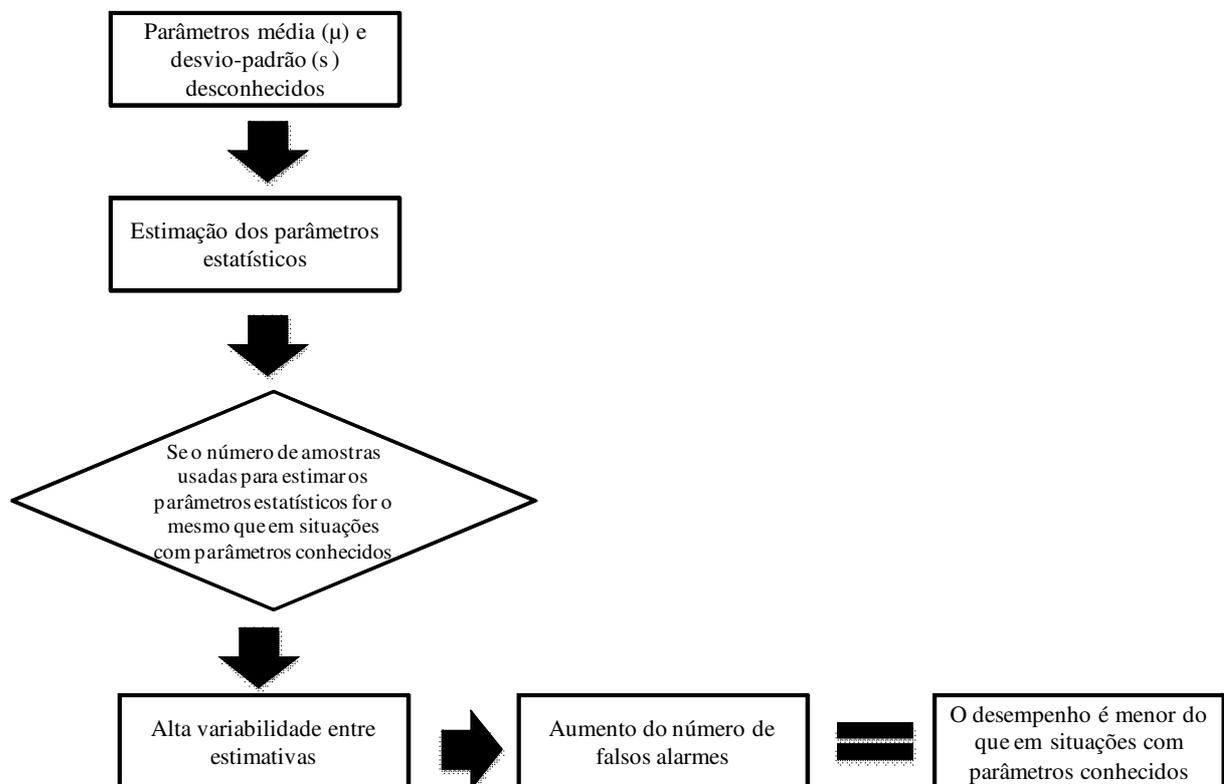
Outra proposta de análise de desempenho dos gráficos de controle é por meio da análise da distribuição do RL ou por percentis, aplicada em trabalhos como Chakraborti e Wiel (2008). Em Saleh *et al.* (2015b), aplica-se esse método de avaliação, sendo possível verificar a concentração dos valores do RL em diferentes intervalos, permitindo analisar como os dados estão concentrados nos intervalos críticos inferiores (por exemplo, entre 0 e 300, o que é insatisfatório, comparando-se com o valor teórico de 370,40). Psarakis *et al.* (2014) fizeram um comentário sobre o uso desse procedimento em alternativa ao ARL como medida do desempenho dos gráficos de controle.

Independente da métrica utilizada para medir o desempenho dos gráficos de controle, o fato é que pesquisas indicam a necessidade da utilização de um número elevado de amostras para minimizar os erros de estimativa dos parâmetros estatísticos, e, conseqüentemente, melhorar o desempenho dos gráficos de controle (JENSEN *et al.*, 2006; ZHANG e CASTAGLIOLA, 2010; EPPRECHT *et al.*, 2015; SALEH *et al.*, 2015a).

A quantidade de amostras utilizada no cálculo dos parâmetros estatísticos de processo e na definição dos limites de controle tem sido abordada em vários trabalhos, como o de Quesenberry (1993), Chen (1997) e Jensen *et al.* (2006). De acordo com esses autores, o valor amostral recomendado na literatura, de vinte amostras de tamanho igual a cinco, não é suficiente para garantir que o desempenho de 370,40, sendo inferior a esse valor. Isso significa que, a incidência de um falso alarme ocorre antes da amostra de número 370, contrariando o que diz a literatura quando os parâmetros são conhecidos e utilizados três desvios-padrão em relação à média. Chakraborti (2000) utiliza o auxílio da simulação para estudar os valores do ARL quando os parâmetros de média e desvio-padrão precisam ser estimados, e comprova que a medida que a quantidade de amostras aumenta, o ARL tende a se aproximar do seu valor teórico de 370,40.

A Figura 1.1 resume o problema gerado pela estimação incorreta dos parâmetros estatísticos do processo, abordado nesta introdução.

Figura 1.1: Problema de pesquisa



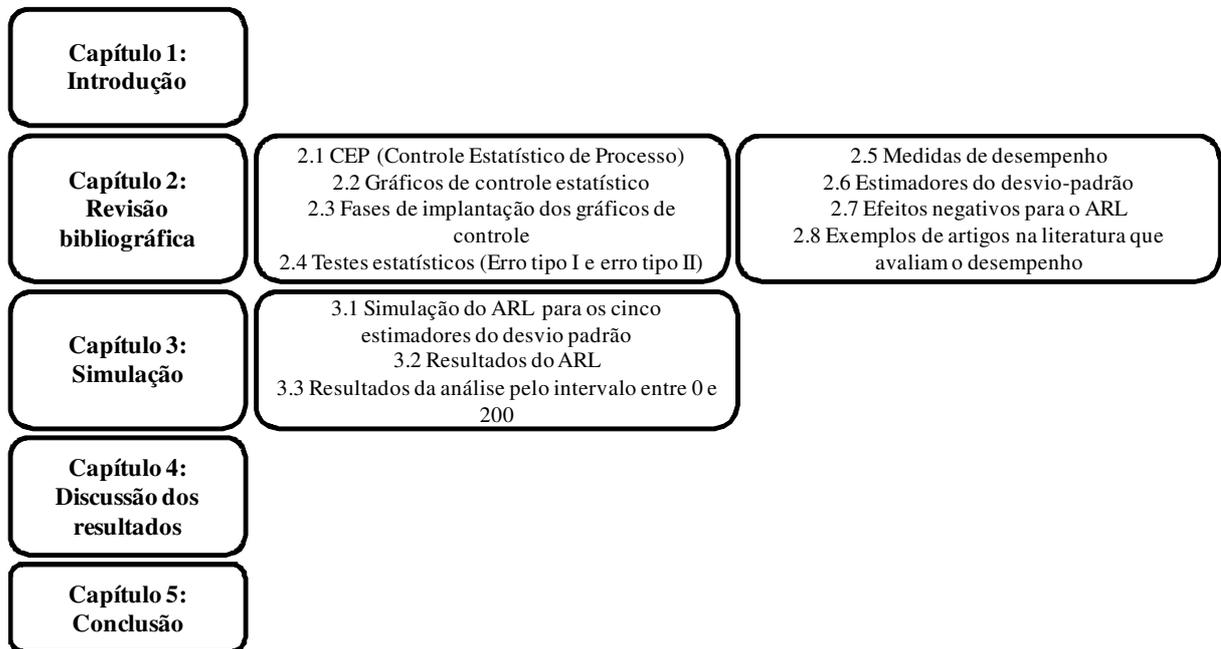
Fonte: Elaborado pelo autor

Ao se estimar os parâmetros estatísticos, quando desconhecidos, utilizando-se a mesma quantidade amostral recomendada para situações com parâmetros conhecidos, haverá uma alta variabilidade entre diferentes estimativas obtidas. Consequentemente, resulta-se em um aumento da incidência de falsos alarmes nos gráficos de controle, comprometendo o seu desempenho estatístico, sendo inferior em relação a situações com parâmetros conhecidos.

Um dos problemas de pesquisa sobre os gráficos de controle, com destaque na literatura científica, são os estudos dos efeitos da estimativa de parâmetros no desempenho dos gráficos de controle. Nesses estudos, a principal métrica utilizada é o ARL e seu desvio-padrão. Outra corrente utiliza os cálculos exatos do RL, dado que ele depende das estimativas dos parâmetros média e desvio-padrão. Porém, nenhuma dessas duas abordagens utiliza os valores extremos na análise do desempenho de gráficos de controle. Com base na situação abordada pela Figura 1.1, o problema central deste trabalho é: qual é o melhor estimador do desvio-padrão, listados nas equações de (1) até (5), para melhorar o desempenho dos gráficos de controle, tendo-se como base a concentração de valores do ARL no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL. Reforça-se que, não há na literatura sobre gráficos de controle nenhuma avaliação do desempenho com base no intervalo de valores entre 0 e 200 da distribuição do ARL, de modo a buscar alternativas que diminuam a incidência de valores concentrados nesse intervalo.

A divisão deste trabalho é apresentada na Figura 1.2. Elaborou-se um capítulo introdutório para a apresentação do tema, problema de pesquisa, método de pesquisa, objetivo e justificativa desta dissertação; revisão bibliográfica para fundamentação dos conceitos sobre Controle Estatístico de Processo (CEP), gráficos de controle $\bar{X} / \bar{S}(R)$, diferentes estimadores de desvio-padrão (e seus efeitos no desempenho) e exemplos de artigos na literatura que avaliam o desempenho dos gráficos de controle; desenvolvimento da simulação no *software* Maple 13, onde serão gerados cinco mil valores do ARL para avaliar o desempenho; comparação entre proporções de valores no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL entre os cinco estimadores do desvio-padrão; apresentação e discussão dos resultados obtidos; conclusões.

Figura 1.2: Estrutura da dissertação



Fonte: Elaborado pelo autor

1.1 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo identificar, por meio de simulações e por análise da proporção de valores concentrados no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do RL, em estado de controle, se há diferença no desempenho dos gráficos de \bar{X} para os cinco estimadores do desvio-padrão (numerados pelas equações de (1) até (5)), considerando-se diferentes valores de tamanho amostral (n) e da quantidade de amostras (m), e então indicar qual o melhor estimador de desvio-padrão para cada valor de tamanho amostral (n) e quantidade amostral (m) simulado. Para atingir esse objetivo serão realizados testes estatísticos de comparação entre proporções, comparando-se os valores obtidos entre os cinco estimadores do desvio-padrão.

Como objetivo secundário, este trabalho deve verificar se a quantidade de amostras (m) e tamanho amostral (n) influenciam no desempenho dos gráficos de controle, tendo-se como base a proporção de valores concentrados no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do RL. Para que fosse feita a análise, realizaram-se testes estatísticos de comparação entre proporção de valores, para os cinco estimadores do desvio-padrão, comparando-se dife-

rentes situações envolvendo diferentes valores de tamanho amostral (n) e quantidade de amostras (m).

1.2 Justificativa

Justifica-se a realização deste trabalho, pois não há na literatura sobre gráficos de controle nenhum trabalho que aborde a avaliação de desempenho dos gráficos de controle com base na proporção de valores concentrados no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL. Esse tipo de análise possibilita aos acadêmicos e engenheiros a concentrarem suas análises no intervalo de valores que corresponde a uma faixa indesejada de desempenho, o que significa a incidência de um falso alarme antes do previsto pela literatura. Ou seja, supondo-se três desvios-padrão em relação ao valor médio, um falso alarme ocorre antes da amostra de número 370.

Este trabalho também possibilita verificar entre cinco estimadores do desvio-padrão, listados nas equações de (1) até (5), qual irá resultar em uma menor proporção de valores no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL, de modo a indicar aquele que apresenta melhores resultados para determinados valores de quantidade de amostral (m) e tamanho amostral (n). O teste estatístico de comparação entre proporções fornece evidências estatísticas sobre rejeitar ou não a hipótese de que as proporções de valores geradas, no intervalo entre 0 e 200, são iguais ou se uma proporção de valor é superior a outra (conforme padrão do *software* Statistica 7).

1.3 Método

O método utilizado nesta dissertação se divide em duas etapas: a primeira, voltada ao levantamento bibliográfico, em que foram levantados os conceitos referentes ao Controle Estatístico de Processo (CEP), gráficos de controle, medidas de desempenho dos gráficos de controle encontrados na literatura e erros estatísticos (erro tipo I e erro tipo II). E a segunda etapa, que foi o desenvolvimento da simulação, com base no levantamento bibliográfico feito na primeira etapa.

Do levantamento bibliográfico, feito na primeira etapa, realizou-se um detalhamento sobre os efeitos causados pela estimação de parâmetros estatísticos no desempenho dos gráficos de controle. Os efeitos causados nos gráficos de controle pela estimação de pa-

râmetros foram estudados neste trabalho, utilizando-se cinco estimadores do desvio-padrão analisados por Saleh *et al.* (2015a) e Saleh *et al.* (2015b), de modo a questionar se há diferença no desempenho entre os cinco estimadores do desvio-padrão e qual é o mais indicado para determinados valores de m (quantidade de amostras) e n (tamanho amostral).

Considerou-se também, a partir deste levantamento bibliográfico, o questionamento de alguns trabalhos como Quesenberry (1993), Chen (1997) e Jensen *et al.* (2006), relacionado à quantidade de amostras que deverá ser utilizada na estimação dos parâmetros estatísticos para que o desempenho dos gráficos de controle, que usam parâmetros estimados, tenham desempenho semelhante às situações em que os parâmetros sejam conhecidos. Sendo assim, este trabalho incluiu a análise da quantidade de amostras (m) e tamanho amostral (n), em relação ao desempenho resultante do gráfico de controle.

Tendo-se como base a crítica feita por alguns autores como Chen (1997), Jensen *et al.* (2006) e Saleh *et al.* (2015b), relacionada à alta variabilidade existente na métrica de desempenho mais aplicada na literatura, o ARL, realizou-se um levantamento sobre as medidas de desempenho dos gráficos de controle encontradas na literatura. Sendo assim, este trabalho propôs uma nova forma de se avaliar o desempenho dos gráficos de controle, com base na proporção de valores concentrados no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL_0 .

Três pontos importantes foram destacados no levantamento bibliográfico realizado, servindo como base para a elaboração da segunda etapa do método, ou seja, a simulação: os estimadores do desvio-padrão, listados nas equações de (1) a (5); o impacto no desempenho decorrente da quantidade de amostras (m) e tamanho amostral (n); a proposta de avaliação do desempenho dos gráficos de controle, com base na proporção de valores entre 0 e 200 da distribuição do ARL_0 .

Com o objetivo de simular um processo produtivo, em que seja possível obter os resultados do desempenho, variando-se os valores da quantidade de amostras (m), tamanho amostral (n) e o estimador do desvio-padrão utilizado, este trabalho desenvolveu cinco programas com o auxílio do *software* Maple 13, cada qual relacionado a um estimador do desvio-padrão. A simulação realizada proporcionou a obtenção de 5000 valores do ARL_0 , para cada rodada simulada (ou seja, para cada estimador utilizado, quantidade de amostras e tamanho amostral específicos, obtendo-se 5000 valores do ARL_0), de modo a possibilitar a construção da distribuição dos valores e verificar como os mesmos estão concentrados no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL.

Justifica-se o uso da simulação para o desenvolvimento deste trabalho, devido a alta complexidade dos cálculos a serem feitos caso fossem resolvidos pelo método numérico exato ou por métodos aproximados do ARL incondicional. De acordo com Martins (2012), esse método se caracteriza pela manipulação das variáveis e seus níveis pelo pesquisador, sendo o modelo desenvolvido uma abstração da realidade. De fato, este trabalho manipula as variáveis “quantidade de amostras (m)” e “tamanho amostral (n)”, de modo a verificar seus efeitos na variável resultante “desempenho (ARL_0)”.

O uso da simulação para a avaliação do desempenho dos gráficos de controle, quando os parâmetros são estimados, é mais realista que o método numérico para a obtenção do ARL, pois o RL depende da estimativa dos parâmetros estatísticos, ou seja, o RL é uma distribuição condicional. Já o ARL, obtido numericamente por métodos de integração, fornece um valor incondicional da esperança matemática do RL. Há uma tendência de utilizar métodos exatos para o RL. Sobre isso, veja Epprecht *et al.* (2015).

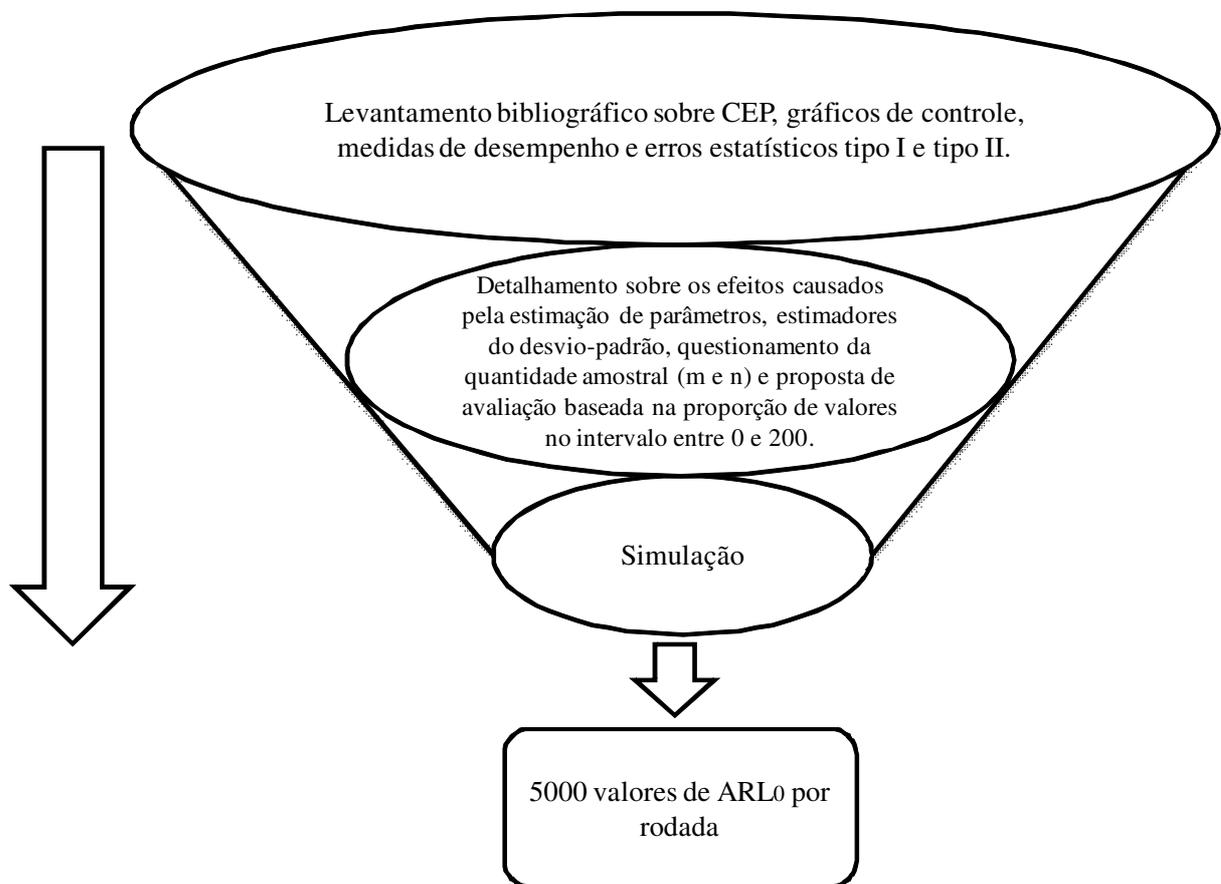
Os programas desenvolvidos simularam um processo produtivo hipotético, com capacidade de produção infinita, sob controle, com medidas de média e desvio-padrão desconhecidas. Para ambos os parâmetros, necessitou-se a estimação, com base na coleta de “ m ” amostras de tamanho igual a “ n ”. Nesta dissertação, consideraram-se os valores de m iguais a vinte, cinquenta, cem e duzentos; os valores de n iguais a cinco e dez. Calculados os parâmetros, definem-se os limites de controle, de modo que a diferença de um programa para outro é justamente o estimador do desvio-padrão utilizado.

Resumidamente, a simulação foi programada para que os limites de controle sejam recalculados, após um determinado número de amostras extraídas. Tanto o número de amostras extraídas para análise, quanto a quantidade de vezes em que os limites de controle são recalculados, podem ser alterados conforme interesse do pesquisador. Para que fosse gerado um valor do ARL_0 (entre os 5000 valores), optou-se em calcular vinte vezes os limites de controle a cada cem amostras extraídas. Como a simulação foi programada para gerar 5000 valores do ARL_0 , o procedimento mencionado foi repetido 5000 vezes.

Após a etapa de extração das amostras e recálculo dos limites de controle, realizou-se uma contagem do total de pontos que se localizam além dos limites de controle, e, com base nesta contagem, a simulação define o erro tipo I. Justifica-se o uso do erro tipo I, uma vez que, ao longo de toda a simulação, o processo produtivo hipotético permaneceu controlado, não havendo a existência de causas especiais agindo sobre o mesmo. Definido o erro tipo I, definiu-se o ARL_0 .

Obtendo-se, então, os 5000 valores do ARL_0 , utilizou-se os mesmos para a construção de histogramas (Apêndices A até H), de onde foi possível analisar a proporção de valores concentrada no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL_0 . A Figura 1.3 resume o método utilizado para esta dissertação. Reforça-se que, a simulação e os cálculos que foram feitos serão detalhados no Capítulo 3 desta dissertação.

Figura 1.3: Resumo do método



Fonte: Elaborado pelo autor

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A seguir, apresentam-se os conceitos do Controle Estatístico de Processo (CEP), gráficos de controle X-bar/S-bar (R-bar), as fases de desenvolvimento dos gráficos de controle, os erros estatísticos tipo I e tipo II, as medidas de desempenhos dos gráficos de controle, as propriedades dos estimadores e os diferentes estimadores do desvio-padrão, os efeitos da estimação dos parâmetros estatísticos no ARL e exemplos de artigos na literatura e a forma como avaliam o desempenho dos gráficos de controle.

2.1 Benefícios e fundamentos do Controle Estatístico de Processo (CEP)

Gráficos de controle são elementos centrais do CEP. Segundo Castagliola *et al.* (2009), o CEP consiste em um conjunto de técnicas estatísticas que possibilitam um monitoramento sistemático do processo de manufatura, contribuindo para a produção de produtos finais em conformidade com as suas especificações. Tal argumento é utilizado por Abbas *et al.* (2014), em que o CEP é utilizado no ambiente produtivo visando manter processos estáveis e previsíveis. Woodall (2000) caracteriza o CEP como um método que visa o entendimento, monitoramento e melhoria de processos.

De acordo com Gryna *et al.* (2007) e Montgomery (2009), o CEP consiste em um conjunto de poderosas ferramentas de resolução de problemas, sendo útil para estabilizar processos e melhorar a sua capacidade, por meio da redução da variabilidade. Segundo esses autores, qualidade e variabilidade são inversamente proporcionais, indicando que a redução de um levará ao aumento do outro. Em conformidade com essa afirmação, Shewhart (1986) cita o CEP como um importante instrumento para obtenção de uniformidade de processos. O autor também ressalta o CEP como um meio de tornar o processo previsível e controlado.

Os benefícios do CEP são destacados por vários autores na literatura. Leoni *et al.* (2014), por exemplo, enfatizam que o CEP gera melhorias na qualidade dos processos, por meio do monitoramento contínuo, servindo de apoio aos gestores. A Western Electric Company (1958) também se refere ao CEP como uma importante ferramenta gerencial que possibilita a resolução de problemas. Toledo *et al.* (2013) enfatizam a importância que o CEP possui na identificação das causas de variação na qualidade do processo, diferenciando-as entre causas especiais (esporádicas, de fácil correção) e causas naturais (inerentes ao processo). Woodall (2000) indica a diferenciação entre as causas de variação como principal benefício

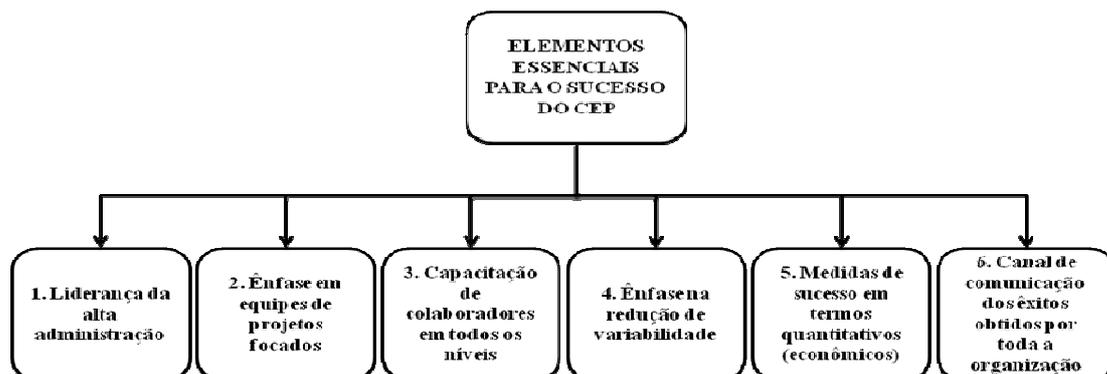
do CEP. O autor reforça que a eliminação das verdadeiras causas de variação levará à redução da incidência de itens não conformes.

Verificam-se, em muitas indústrias, a importância do CEP em suas atividades. Kane (1986) argumenta a preocupação da indústria automobilística na implementação do CEP, não somente para ela, mas em toda a sua cadeia de fornecedores. Segundo AIAG (1991), o CEP se tornou em alguns setores (como o automobilístico, por exemplo) requisito indispensável nos sistemas de gestão e garantia da qualidade. Lupo (2014) ressalta o sucesso e ganhos obtidos pelo CEP em diferentes setores, tais como manufatura, serviços, saúde, finanças, entre outros, havendo uma evolução desde as primeiras aplicações por Shewhart na década de 1920.

Em relação aos estudos voltados ao CEP encontrados na literatura, Juran e Gryna (1988), por exemplo, no *Quality Control Handbook*, destacam um capítulo especial sobre CEP; Gryna *et al.* (2007) atualizaram o livro de Juran e Gryna (1988) sobre planejamento e análise da qualidade, onde 50% é dedicado aos métodos estatísticos, tendo o CEP papel central. Woodall e Montgomery (1999) destacam um rápido crescimento de pesquisas em CEP durante os anos de 1980, devido ao acirramento da competitividade entre empresas no mercado durante esse período.

Para que os objetivos do CEP sejam atingidos, tornando possível a investigação das verdadeiras causas de variabilidade, seis pressupostos são definidos por Montgomery (2009). A Figura 2.1 lista os seis pressupostos essenciais para o sucesso do CEP. Caso não sejam seguidos, a aplicação do CEP não irá gerar ganhos. Montgomery e Runger (2002) complementam dizendo que, não apenas os aspectos técnicos são relevantes para a redução da variabilidade, como também os comportamentais.

Figura 2.1: Pressupostos essenciais para o sucesso do CEP

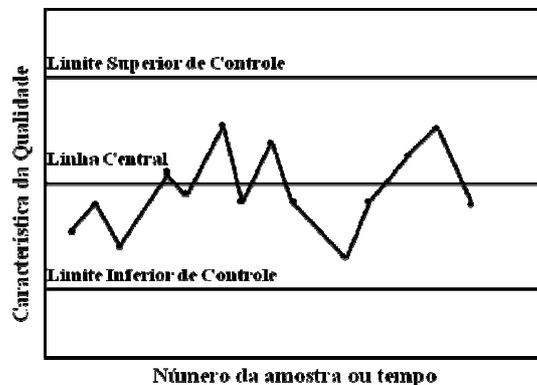


Fonte: Montgomery (2009)

2.2 Fundamentos dos gráficos de controle estatísticos

Os gráficos de controle de Shewhart são compostos, basicamente, por uma linha central que representa o valor médio da característica da qualidade a ser monitorada, e duas linhas paralelas, estando uma acima da linha central (limite superior de controle) e a outra abaixo (limite inferior de controle). A Figura 2.2 ilustra um exemplo de gráfico de controle de Shewhart.

Figura 2.2: Gráfico de Controle de Shewhart



Fonte: Adaptado de Montgomery (2009)

A ideia de estabilidade do processo se refere aos tipos de causas de variação que agem sobre o mesmo. Há dois tipos de causas que agem sobre o processo: as causas comuns e as causas especiais. O objetivo dos gráficos de controle é identificar causas especiais que agem no processo produtivo, impedindo seu desenvolvimento em caráter aleatório (MONTGOMERY, 2009; COSTA *et al.*, 2014).

Para o manual do AIAG (1991), os gráficos de controle são poderosas ferramentas que permitem a distinção entre causas especiais e causas comuns, servindo como direcionador para a tomada de dois tipos de ações: as locais ou as sistêmicas. Chakraborti *et al.* (2001) distinguem as duas causas de variações sob o ponto de vista econômico: causas comuns são aquelas que não podem ser, economicamente, identificáveis e corrigidas. Quando é viável a sua correção, então as causas possuem um caráter especial. Os autores reforçam que, quando um processo opera com apenas causas comuns agindo sobre ele, conclui-se que o mesmo está controlado.

Oprime *et al.* (2016) observam que há uma grande quantidade de causas comuns agindo em um sistema, sendo as mesmas difíceis de serem detectadas e eliminadas. Porém, não comprometem a conformidade dos produtos. Por outro lado, causas especiais estão presentes em pequena quantidade, porém são facilmente detectáveis e eliminadas, havendo grande impacto na conformidade do produto. O Quadro 2.1 resume o conceito das causas de variação que agem no processo.

Quadro 1.1: Causas comuns ou aleatórias e especiais ou assinaláveis.

Comuns ou aleatórias	Especiais ou assinaláveis
1) São inerentes ao processo e estão sempre presentes.	1) São desvios do comportamento “normal” do processo. Atuam esporadicamente.
2) Muitas causas que produzem individualmente pouca influência no processo.	2) Uma ou poucas causas que produzem grandes variações no processo.
3) Sua correção exige mudanças maiores no processo. A correção pode ser justificável economicamente, mas nem sempre.	3) Sua correção é, em geral, justificável e pode ser feita na própria linha de produção.
4) A melhoria da qualidade do produto e do processo, somente quando causas comuns estão presentes, necessita de decisões gerenciais que podem envolver investimentos significativos.	4) A melhoria da qualidade pode, em grande parte, ser obtida por meio de ações locais que não envolvem investimentos significativos.
5) São exemplos: capacitação inadequada de mão de obra, produção apressada, manutenção deficiente, equipamento deficiente ou não capaz, etc.	5) São exemplos: máquina desregulada, ferramenta gasta, oscilação temporária de energia, falha ocasional do operador, etc.

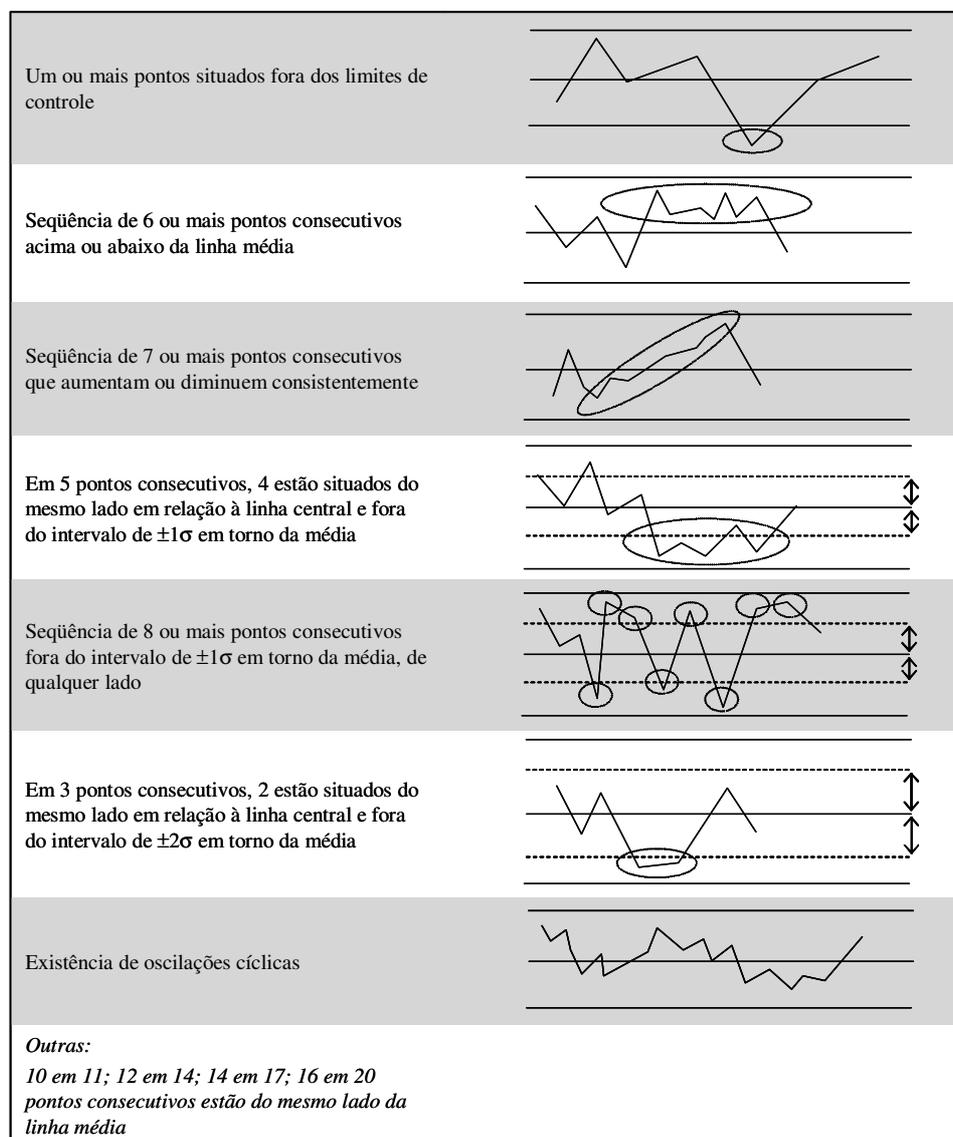
Fonte: Toledo *et al.* (2013)

Em uma de suas obras, Shewhart (1986) expõe os conceitos sobre a variabilidade do processo e o uso de limites de controle, indicando a variação permitida para uma determinada característica da qualidade, a probabilidade de ocorrência de eventos e a variação natural existente em processos produtivos. Ressalta-se, em vários momentos, a necessidade de um processo se desenvolver em regime estatístico, ou seja, em estado de controle estatístico. Costa *et al.* (2014) explicam os conceitos de Shewhart sobre variabilidade, de modo que, por mais que um processo seja muito bem projetado e desenvolvido, a eliminação completa da variabilidade é impossível, sendo essa proposição aceita até os dias atuais.

Alguns autores explicam a questão da estabilidade do processo, esclarecendo as mudanças ocorridas nos parâmetros estatísticos do processo. Costa e Rahim (2006) e Cas-

tagliola *et al.* (2015), por exemplo, explicam que um processo é considerado estabilizado quando possui média e variância constantes ao longo do tempo. Montgomery (2014) afirma que, quando ocorre a sinalização de um descontrole no processo, indicado pelo gráfico de controle, deve-se determinar quais parâmetros monitorados sofreram o deslocamento e investigar e caracterizar a causa especial. Toledo *et al.* (2013) reforçam a importância do monitoramento da dispersão do processo, de modo que um aumento desta poderá indicar a presença de causas assinaláveis. A Figura 2.3 mostra exemplos de casos, indicados pelos gráficos de controle, que podem ser indícios de descontrole no processo.

Figura 2.3: Indícios de descontrole no processo



Fonte: Toledo *et al.* (2013)

A Figura 2.4 resume os benefícios listados por vários autores, a respeito do uso de gráficos de controle. Verifica-se que, em muitas obras, a redução da variabilidade dos processos e a diminuição da incidência de produtos não conformes (WOODALL e FALTIN, 1993; MONTGOMERY, 2009). Outros trabalhos, por exemplo, listam a diminuição da necessidade de inspeções e a redução dos custos do processo (WESTERN ELECTRIC COMPANY, 1958).

Figura 2.4: Benefícios dos gráficos de controle

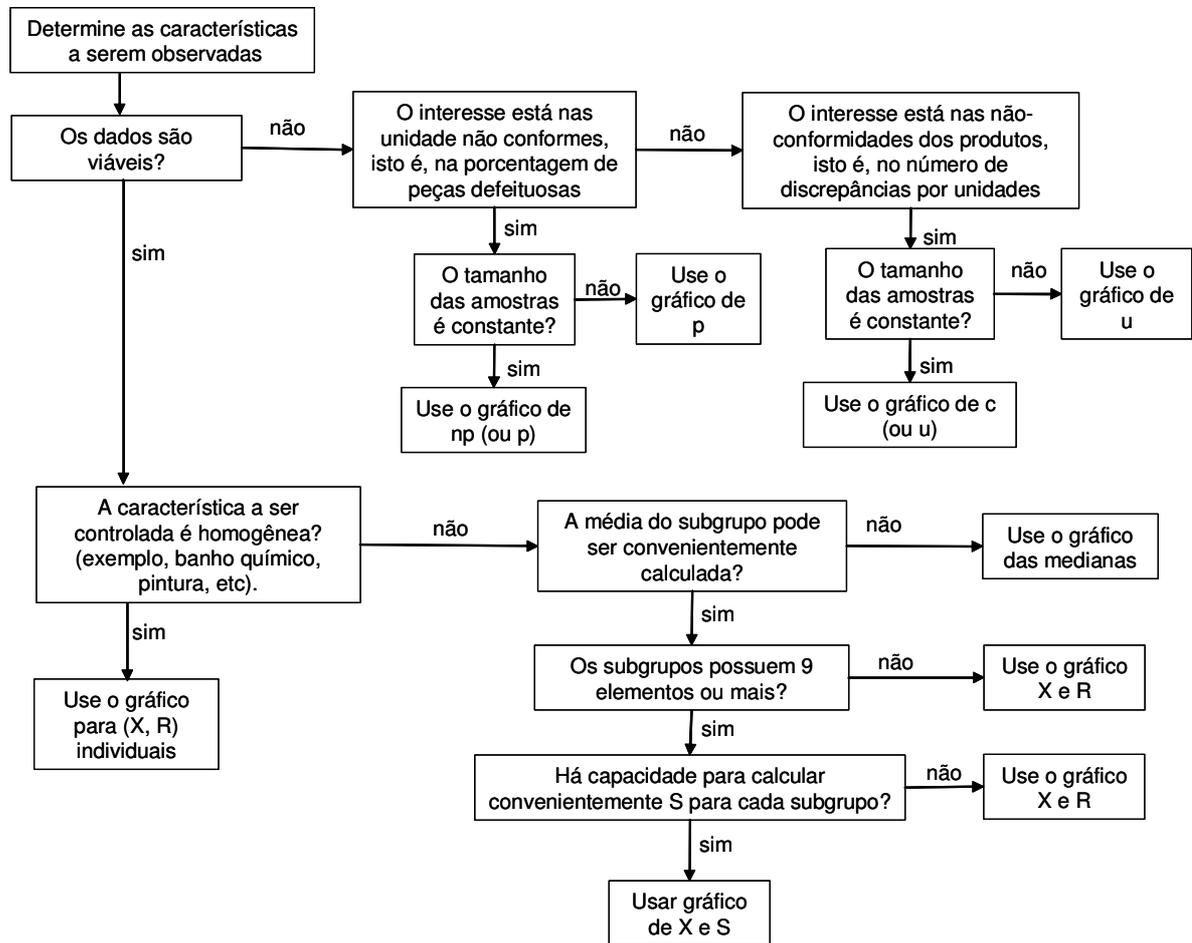


Fonte: Elaborado pelo autor

Conhece-se o termo, “regime estatístico”, no meio industrial como “processos dominados”. Nesta dissertação foi utilizado o termo “processo sob controle” ou “processo em estado de controle”. Utilizaram-se também, como sinônimos, os termos “cartas de controle” ou “gráficos de controle”, apesar de haver discordância para alguns acadêmicos e praticantes sobre esses dois termos. Utilizou-se o termo “monitoramento estatístico” para o uso de gráficos de controle em processos industriais ou em serviços. Em geral, fez-se referência aos gráficos de controle no decorrer desta dissertação, e pouco ao conjunto de ferramentas aplicadas no controle estatístico de processo, que são amplamente destacados nos livros textos clássicos, como o de Montgomery (2009).

Há diferentes tipos de gráficos de controle, cada um podendo ser aplicado de acordo com a realidade do processo e a característica da qualidade a ser monitorada. A Figura 2.5 ilustra um fluxograma que auxilia na escolha do gráfico de controle, de acordo com a característica observada.

Figura 2.5: Procedimento de escolha do gráfico de controle



Fonte: Toledo *et al.* (2013)

Entre os diferentes gráficos de controle abordados na Figura 2.5, destacam-se os gráficos de controle \bar{X} -bar / S -bar (R -bar). Esses gráficos são os mais utilizados na prática (PIGNATIELLO Jr. e SIMPSON, 2002; TOLEDO *et al.*, 2013). Machado e Costa (2008) ressaltam que, o poder deste tipo de gráfico de controle está na sua capacidade de diferenciar as causas assinaláveis das causas especiais. Para Santiago e Smith (2013), praticantes buscam encontrar deslocamentos de parâmetros, alterações na magnitude da variação ou padrões não aleatórios. Costa *et al.* (2014) afirmam que, quando a variável controlada é contínua, torna-se necessário o monitoramento do processo com dois gráficos de controle: um para a centralidade e o outro para a dispersão.

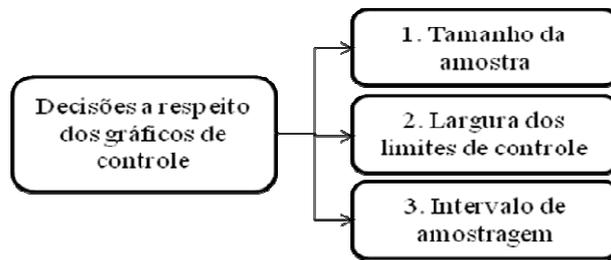
Para a construção dos gráficos de média e variância estimadas, verifica-se que os parâmetros estatísticos de processo não são conhecidos e deverão ser estimados. Como encontrado em muitas referências bibliográficas da área, recomenda-se o uso de 20 a 25 amostras, de tamanho igual à 4 ou 5, para o processo de estimação dos parâmetros de processo (MONTGOMERY, 2009). Utilizam-se esses valores, uma vez que, empiricamente, mostraram-se ser eficientes no processo de controle estatístico de processo, sendo esse procedimento consolidado em várias literaturas sobre CEP (LOURENÇO FILHO, 1976; CHEN, 1997).

Em relação aos parâmetros a serem definidos para o desenvolvimento dos gráficos de controle, Montgomery (2009) e Castagliola *et al.* (2013b) destacam três: o tamanho da amostra (n), a frequência de amostragem (h) e a largura entre os limites de controle (k). A definição dos valores assumidos para os três parâmetros é um ponto crítico no monitoramento do processo e na detecção de possíveis descontroles. No caso do tamanho da amostra (n), o autor reforça que, quanto maior for o seu valor, mais rápido o gráfico de controle irá detectar pequenos deslocamentos nos parâmetros de média e desvio-padrão. Assim também, para a frequência de amostragem (h). Logo, quanto maior for o tamanho da amostra e mais frequente for a coleta de amostras, mais rápida será a detecção de desequilíbrio no processo. Entretanto, a questão financeira deverá ser analisada, de modo que os valores escolhidos para n e h deverão ser viáveis economicamente, como também do ponto de vista estatístico.

Em relação à largura dos limites de controle (k), Montgomery (2009) explica que a definição do valor de k é de extrema importância, pois isso influencia os valores dos erros estatísticos tipo I e erro tipo II, os quais serão explicados na seção 2.4 desta dissertação. Shewhart (1986) vai além da questão em apenas definir a largura entre os limites de controle. Segundo o autor, o responsável em projetar o gráfico de controle não pode apenas se limitar à questão da distância entre os limites de controle, porém deverá também buscar e prever qual será a porcentagem de itens produzidos que terão as suas características da qualidade de acordo com a variabilidade permitida para o processo.

Para Celano (2011) e Franco *et al.* (2014), esses três parâmetros (n , h e k) deverão ser definidos antes de iniciar o monitoramento do processo. Nenes *et al.* (2015) reforçam que, a escolha dos parâmetros dos gráficos de controle deverá ser feita com extremo cuidado, devido ao seu impacto no desempenho. Na Figura 2.6, listam-se três decisões que devem ser tomadas durante o desenvolvimento dos gráficos de controle, sendo essenciais para a obtenção do desempenho esperado.

Figura 2.6: Decisões sobre os parâmetros dos gráficos de controle



Fonte: Adaptado de Magalhães *et al.* (2001) e Montgomery (2009)

Alguns pressupostos devem ser respeitados antes da aplicação dos gráficos de controle. São eles: independência de dados (ou seja, não há correlação entre os dados coletados), normalidade (a característica da qualidade monitorada deve se aproximar de uma curva de distribuição normal) e os parâmetros do processo são perfeitamente estimados a partir de um cenário controlado estatisticamente (CASTAGLIOLA *et al.*, 2013a; COSTA *et al.*, 2014) e as amostras devem ser coletadas de um processo controlado e estabilizado (SCHOONHOVEN *et al.*, 2011). Respeitadas as condições listadas, pode-se, então, estimar os parâmetros estatísticos do processo e calcular os limites de controle.

O procedimento para estimação dos parâmetros estatísticos, nos casos dos gráficos de controle X-bar / S-bar (R-bar), é amplamente encontrado em várias literaturas sobre esse tema. Baseando-se em Montgomery (2009) e Toledo *et al.* (2013), o cálculo dos parâmetros estatísticos do gráfico de controle X-bar / R-bar serão demonstrados pelas equações de (12) a (21).

Parâmetros de média e amplitude média:

$$\text{Média: } \bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m} \quad (12)$$

$$\text{Amplitude média: } \bar{\bar{R}} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m} \quad (13)$$

$$\text{Sendo a amplitude dentro da amostra: } R = x_{\max} - x_{\min} \quad (14)$$

Gráfico de controle X-bar:

$$\text{Linha central: } \bar{\bar{x}} \quad (15)$$

$$LSC_{\bar{x}}: \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{\bar{R}} \quad (16)$$

$$LIC_{\bar{x}}: \quad \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} \quad (17)$$

$$A_2: \quad \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \quad (d_2 \text{ está listado na Tabela 2.1}) \quad (18)$$

Gráfico de controle R-bar

$$\text{Linha central:} \quad \bar{R} \quad (19)$$

$$LSC_R: \quad D_4 \bar{R} \quad (D_4 \text{ está listado na Tabela 2.1}) \quad (20)$$

$$LIC_R: \quad D_3 \bar{R} \quad (D_3 \text{ está listado na Tabela 2.1}) \quad (21)$$

A equação (12) indica o cálculo de obtenção da média das médias amostrais, obtida entre m amostras, de tamanho n , e que será utilizada no gráfico de média como a linha central (equação (15)), sendo a característica da qualidade a ser monitorada. A equação (13) indica o cálculo da amplitude amostral média, calculada entre m amostras de tamanho n , de modo que a amplitude é definida pela diferença, em uma determinada amostra, do maior valor pelo menor valor (equação (14)). A amplitude amostral média será utilizada para o cálculo dos limites de controle do gráfico X-bar (equações (16) e (17)), bem como no desenvolvimento do gráfico de dispersão (equações (19), (20) e (21)). Nas equações (20) e (21), encontram-se os termos D_4 e D_3 , respectivamente. Ambos são encontrados na Tabela 2.1, definidos de acordo com o tamanho da amostra n . As equações (16) e (17) indicam, respectivamente, os limites de controle superior e inferior do gráfico X-bar. Para A_2 , indicado pela equação (18), define-se três desvios-padrão em relação a média, conforme proposto por Shewhart, sendo d_2 um valor tabelado (Tabela 2.1), definido de acordo com o tamanho da amostra n . Ressalta-se que, o termo $A_2 \bar{R}$ indica o estimador do desvio-padrão amostral calculado com base na amplitude amostral média, separado em três desvios-padrão em relação a média.

Tabela 2.1: Valores dos parâmetros para calcular os limites de controle para R-bar

Tamanho da amostra	A ₂	d ₂	D ₃	D ₄
2	1,880	1,128	0,000	3,267
3	1,023	1,693	0,000	2,575
4	0,729	2,059	0,000	2,282
5	0,577	2,326	0,000	2,114
6	0,483	2,534	0,000	2,004
7	0,419	2,704	0,076	1,924
8	0,373	2,847	0,136	1,864
9	0,337	2,970	0,184	1,816
10	0,308	3,078	0,223	1,777

Fonte: Toledo *et al.* (2013)

A Tabela 2.1 traz os valores dos parâmetros utilizados nos cálculos dos limites de controle, estando os mesmos em função do tamanho da amostra. Para a definição da largura dos limites de controle, Costa *et al.* (2014) explicam, de acordo com a proposta de Shewhart, o uso dos três desvios-padrão como sendo satisfatórios para que, estando o processo controlado, a probabilidade que os pontos caiam além dos limites de controle seja baixa, evitando intervenções desnecessárias.

Ressalta-se também o gráfico de controle X-bar / S-bar. O procedimento de cálculo é semelhante ao realizado para o gráfico X-bar / R-bar. Entretanto, o mesmo se baseia no desvio-padrão amostral médio, ao invés de utilizar a amplitude amostral média. O cálculo de estimação dos parâmetros dos gráficos e os limites de controle são demonstrados pelas equações (22) a (28). Vale ressaltar que o cálculo da linha central do gráfico X-bar é o mesmo utilizado na equação (15).

$$\text{Desvio-padrão amostral médio: } \bar{s} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i \quad (22)$$

Gráfico de controle X-bar:

$$\text{Linha central: } \bar{x} \quad (15)$$

$$LSC_{\bar{x}}: \bar{x} + A_3 \bar{s} \quad (23)$$

$$LIC_{\bar{x}}: \bar{x} - A_3 \bar{s} \quad (24)$$

$$A_3: \quad \frac{3}{c_4 \sqrt{n}} \quad (c_4 \text{ está listado na Tabela 2.2}) \quad (25)$$

Gráfico de controle S-bar:

$$\text{Linha central:} \quad \bar{s} \quad (26)$$

$$LSC_{\bar{s}}: \quad B_4 \bar{s} \quad (B_4 \text{ está listado na Tabela 2.2}) \quad (27)$$

$$LIC_{\bar{s}}: \quad B_3 \bar{s} \quad (B_3 \text{ está listado na Tabela 2.2}) \quad (28)$$

A equação (22) indica o cálculo de obtenção da média do desvio-padrão amostral obtido entre m amostras, de tamanho n , e que será utilizada no gráfico de média para calcular os limites de controle (equações (23) e (24)), assim como no gráfico de controle para monitorar a medida de dispersão (média e limites de controle, nas equações (26), (27) e (28)). A equação (15) representa a média das médias amostrais. As equações 23 e 24 mostram o cálculo dos limites de controle, a partir do termo A_3 (equação (25)). Esse termo consiste na razão entre três desvios-padrão, conforme proposto por Shewhart, pelo produto da constante c_4 (tabelada, conforme Tabela 2.2 e influenciada por n) pela raiz de n . O termo $A_3 \bar{s}$ indica o estimador do desvio-padrão, calculado a partir do desvio-padrão amostral médio, separado três desvios-padrão em relação a média. As equações (27) e (28) representam os limites de controle inferior e superior. Ambos são calculados com base no desvio-padrão amostral médio, multiplicados pelas constantes B_4 e B_3 , respectivamente. Essas constantes são tabeladas (Tabela 2.2) e dependentes do tamanho da amostra n .

Tabela 2.2: Valores dos parâmetros para calcular os limites de controle para S-bar

Tamanho da amostra	A_3	c_4	B_3	B_4
2	2,659	0,7979	0,000	3,267
3	1,954	0,8862	0,000	2,568
4	1,628	0,9213	0,000	2,266
5	1,427	0,9400	0,000	2,089
6	1,287	0,9515	0,030	1,970
7	1,182	0,9594	0,118	1,882
8	1,099	0,9650	0,185	1,815
9	1,032	0,9693	0,239	1,761
10	0,975	0,9727	0,284	1,716

Fonte: Adaptado de Montgomery (2009)

2.3 Fases de implantação dos gráficos de controle

Para o desenvolvimento de gráficos de controle, pode-se dividir o processo em duas etapas denominadas Fase 1 e Fase 2. Teoh *et al.* (2014) distinguem as duas fases em relação ao período de tempo em que os dados coletados são analisados, sendo a Fase 1 voltada a dados retrospectivos e a Fase 2, a dados em tempo real. Woodall *et al.* (2004) argumentam que, na Fase 1, o objetivo é decidir se o processo está ou não estabilizado, enquanto na Fase 2, preocupa-se em verificar se há tendências ou deslocamentos de parâmetros. Woodall e Montgomery (2014) definem as fases 1 e 2 como:

[...] os dados coletados na Fase 1 são utilizados para conhecer e entender o processo, sendo que os praticantes devem verificar possíveis resultados não usuais ou indesejados. Além disso, deve-se avaliar a estabilidade do processo, estimar seus parâmetros, selecionar um modelo apropriado para uma situação sob controle e determinar um método para o monitoramento dos parâmetros para a Fase 2. Durante a Fase 2, é feito o monitoramento do processo, com o intuito de se detectar possíveis alterações e deslocamentos nos parâmetros do processo (WOODALL e MONTGOMERY, 2014, p.78).

Psarakis *et al.* (2014) afirmam que a confiabilidade dos gráficos de controle depende da correta estimação dos parâmetros estatísticos do processo durante a Fase 1. Nesta fase, coletam-se dados suficientes, ao longo de um determinado período, em que o processo estando estável, possibilita a estimação dos parâmetros estatísticos (SANTIAGO e SMITH, 2013), buscando assim o seu entendimento (CHAKRABORTI *et al.*, 2009). Woodall (2000) reforça que, a interpretação dos gráficos de controle, durante a Fase 1, exigirá aos praticantes a compreensão de que a probabilidade de sinais de descontrole no processo poderá variar dependendo da forma da distribuição de probabilidade, grau de correlação entre os dados e o número de amostras.

Enfatiza-se que, de acordo com Chakraborti *et al.* (2009), os limites de controle na Fase 1 são definidos por tentativa e revisados constantemente, de modo a assegurar que o processo esteja controlado. Jones-Farmer *et al.* (2014) enfatizam a importância da Fase 1 para o desenvolvimento dos gráficos de controle. Segundo os autores, é durante a Fase 1 que as causas assinaláveis, presentes antes do processo de monitoramento deverão ser eliminadas, de modo que os parâmetros do processo sejam estimados a partir de amostras coletadas de um processo estabilizado, garantindo o poder estatístico de detecção de causas assinaláveis durante a Fase 2. Reforça-se também a importância de que, nessa fase, haja uma quantificação do

A Fase 2, por outro lado, tem como objetivo o monitoramento do processo com base nas estatísticas levantadas na Fase 1, de modo a detectar, o mais rápido possível, possíveis alterações nos parâmetros do processo. Woodall (2000) compara a Fase 2 a um teste estatístico, de modo a evidenciar, estatisticamente, se um processo está ou não sob ação de causas especiais. A comparação não pode ser feita para a Fase 1, pois a mesma tem como objetivo compreender e estabilizar o processo. Os deslocamentos de parâmetros são menores nessa etapa, uma vez que o processo já foi estabilizado na fase anterior (HAWKINS e ZAMBA, 2005; MONTGOMERY, 2009). Para Santiago e Smith (2013), a Fase 2 consiste em fixar os limites de controle, calculados com base nos parâmetros estatísticos estimados na Fase 1, possibilitando o monitoramento e controle da estabilidade do processo. Para Saleh *et al.* (2015b), a Fase 2 tem como objetivo o monitoramento do processo e a detecção de mudança de um estado controlado dos parâmetros estatísticos do processo, para uma situação fora de controle.

Com base nas definições e caracterizações feitas em relações às duas fases de desenvolvimento, ressalta-se que muitos autores reforçam a importância dos valores amostrais m e n para as Fases 1 e 2. Segundo Chakraborti *et al.* (2009), para um bom desempenho do gráfico de controle durante a Fase 2, reforça-se a qualidade da análise dos dados das amostras coletadas durante a Fase 1. Jensen *et al.* (2006) afirmam que, a quantidade amostral utilizada na Fase 1 é um fator crítico para que o desempenho obtido na Fase 2 seja alcançado, de modo a estar de acordo com o valor encontrado na literatura. Os autores, então, questionam quais são os valores de m e n , utilizados na Fase 1, para que o desempenho pretendido seja alcançado, assim como de que maneira os limites de controle na Fase 2 devem ser ajustados para compensar a falta de dados amostrais na Fase 1.

Jones-Farmer *et al.* (2014) reforçam que, sendo a Fase 1 caracterizada pela estimação da variabilidade do processo, valores insuficientes de m e n tornam a estimativa da variabilidade inconclusiva, recomendando-se valores amostrais superiores, em relação a estimativa do parâmetro de média. Os autores ainda reforçam que, em muitos casos, os valores de m e n necessários na Fase 1 para atender aos requisitos de desempenho na Fase 2 são inviáveis, devido a alta quantidade necessária. Tal ponto também é discutido por Saleh *et al.* (2015a).

Conclui-se, assim como Chakraborti *et al.* (2009), a importância de que sejam feitas distinções entre as duas fases, uma vez que muitos trabalhos não se preocupam em fazer essa diferenciação. Saleh *et al.* (2015a) argumentam que, o mau desempenho dos gráficos de controle na Fase 2, ou seja, a alta incidência de falsos alarmes e o baixo poder de detecção de

um deslocamento de parâmetros, é resultante da má estimação dos parâmetros estatísticos durante a Fase 1. Woodall (2000) complementa que, muito do trabalho de melhoria e entendimento sobre a condição real do processo, dá-se durante a transição da Fase 1 para a Fase 2.

2.4 Testes estatísticos no controle do processo: os erros tipo I e tipo II

Para o desenvolvimento, uso e aplicação dos gráficos de controle, torna-se necessário o entendimento sobre os erros tipo I e tipo II. Montgomery e Runger (2002) enfatizam a importância na relação entre os erros tipos I e II e a largura existente entre os limites de controle. De acordo com os autores, ao se aumentar a distância entre os limites de controle, diminui-se o erro tipo I. Entretanto, essa ação leva ao aumento do erro tipo II. Por essa razão, torna-se necessária uma boa definição da distância entre a linha central e os limites de controle. As equações a seguir, de (29) a (36), resumem os testes estatísticos envolvendo os erros tipo I e tipo II.

$$H_0: \mu = \mu_0 \text{ (processo livre de causas especiais)} \quad (29)$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0 \text{ (processo sob a influência de causas especiais)} \quad (30)$$

Definindo-se α , em relação à H_0 :

$$\alpha = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) - \text{Erro Tipo I} \quad (31)$$

$$\text{ou } \alpha = P(\bar{x} > LSC_{\bar{x}} \text{ ou } \bar{x} < LIC_{\bar{x}} \mid \mu = \mu_0) \quad (32)$$

$$1 - \alpha = P(\text{Não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) - \text{Decisão correta} \quad (33)$$

Definindo-se β , em relação à H_0 :

$$\beta = P(\text{Não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) - \text{Erro Tipo II} \quad (34)$$

$$\text{ou } \beta = P(LIC_{\bar{x}} < \bar{x} < LSC_{\bar{x}} \mid \mu \neq \mu_0) \quad (35)$$

$$1 - \beta = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) - \text{Decisão correta} \quad (36)$$

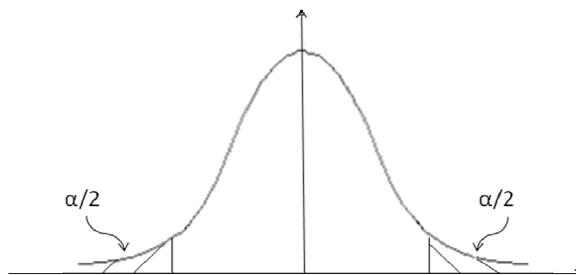
Tomando-se como base Costa *et al.* (2014), H_0 é a hipótese do teste estatístico em assumir que o processo está controlado e H_1 é a hipótese alternativa, ou seja, de que o processo esteja fora de controle.

O termo “ μ ” é o valor médio da característica da qualidade sendo controlada e monitorada pelo gráfico de controle e “ μ_0 ” é o valor-alvo em controle. Sempre que o valor amostral médio da característica da qualidade estiver entre os limites de controle ($LIC_{\bar{x}}$ e $LSC_{\bar{x}}$), considera-se H_0 como verdadeira. Caso contrário, H_0 é considerado falsa e se rejeita a mesma. O erro tipo I, probabilidade de rejeitar H_0 , sendo ela verdadeira e igual a α , representa o risco de considerar o processo fora de controle (falso alarme), estando o mesmo controlado. O erro tipo II, probabilidade igual a β , representa o risco de considerar o processo controlado, quando o mesmo estiver fora de controle (não detecção). As seções 2.4.1 e 2.4.2 detalham os conceitos dos erros estatísticos tipo I e tipo II.

2.4.1 Erro tipo I

Tomando como base as equações (29) e (30), as quais indicam os testes estatísticos, Juran e Gryna (1970) argumentam que um erro pode ocorrer em rejeitar a hipótese H_0 , quando a mesma for verdadeira. Esse erro estatístico é chamado de erro tipo I, ou nível de significância, e tem probabilidade α de ocorrência. Chakraborti (2000) define o erro tipo I como a probabilidade de ocorrência de um sinal de descontrole no processo (um ponto cair além dos limites de controle), quando na verdade, o processo permanece estável. A Figura 2.8 indica o erro tipo I em uma distribuição normal: caso o resultado do teste estatístico esteja entre as duas regiões destacadas (região de rejeição), denominada região de aceitação, então a hipótese H_0 não é rejeitada. Caso contrário, a mesma é rejeitada.

Figura 2.8: Erro estatístico tipo I



Fonte: Adaptado de Juran e Gryna (1970)

Conforme proposto por Shewhart, utilizam-se três desvios-padrão de deslocamento em relação à média para o cálculo dos limites de controle. Três desvios-padrão em relação à média resulta em um erro tipo I igual à 0,27% (o que representa um ARL_0 igual à, aproximadamente, 370,40, sendo $ARL_0 = 1/\alpha$). Costa *et al.* (2014) definem, matematicamente, a relação existente entre o erro tipo I e o uso de três desvios-padrão, demonstrando-a pela equação (31) e pelas equações de (37) até a (40) (sendo α o erro tipo I):

$$\alpha = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) - \text{Erro Tipo I} \quad (31)$$

$$= P(\bar{x} > LSC) + P(\bar{x} < LIC) \quad (37)$$

Padronizando-se a variável \bar{x} para Z , tem-se:

$$\alpha = P\left(Z > \frac{LSC - \mu_x}{\sigma_x}\right) + P\left(Z < \frac{LIC - \mu_x}{\sigma_x}\right) \quad (38)$$

Supondo que o processo esteja sob controle, e substituindo LSC por $\mu_0 + 3\sigma_x$, LIC por $\mu_0 - 3\sigma_x$ e sendo μ_x igual à μ_0 , tem-se:

$$\alpha = P\left(Z > \frac{\mu_0 + 3\sigma_x - \mu_0}{\sigma_x}\right) + P\left(Z < \frac{\mu_0 - 3\sigma_x - \mu_0}{\sigma_x}\right) \quad (39)$$

Fazendo as devidas eliminações, pode-se deduzir que:

$$\alpha = P(|Z| > 3) \quad (40)$$

Nas equações (31) e (37), tem-se a definição do erro tipo I, que é a probabilidade da média de uma determinada amostra de tamanho n , estar localizada além dos limites de controle (LSC e LIC). Na equação (38), realiza-se a transformação do valor de \bar{x} para Z , sendo Z uma variável aleatória com distribuição normal (0,1) (média igual à zero, e desvio-padrão igual à um). Na equação (39), os limites de controle são substituídos pelo valor de média (μ_0 , supondo que não houve alteração na média do processo), somada (ou subtraída) ao desvio-padrão (σ_x), havendo uma distância igual a três em relação a linha central ($3\sigma_x$). Logo, verifica-se que, em uma curva de distribuição de normal, a área compreendida nos pontos $Z > 3$ e $Z < -3$ (equação (38)) será 0,0027. Costa *et al.* (2014) deduzem, portanto, que para três desvios-padrão, o erro tipo I do gráfico (ou seja, a probabilidade de se rejeitar H_0 , sendo essa verdadeira) será igual à 0,27%.

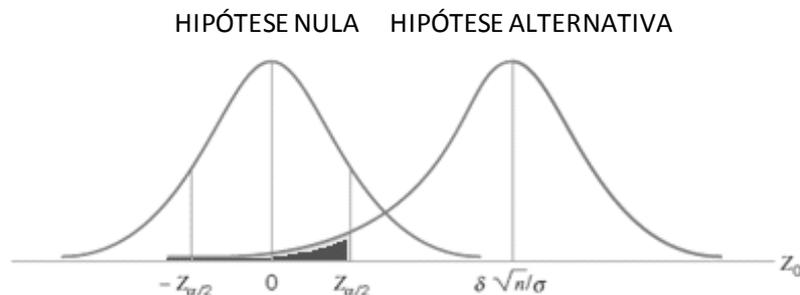
Verifica-se, de acordo com os cálculos desenvolvidos nas equações de (37) até (40), que pertence a quem desenvolve os gráficos de controle a escolha do risco (erro tipo I)

que deverá ser assumido no processo de monitoramento. Pela análise da Figura 2.8, fica evidente que, conforme a distância entre os limites de controle diminui, a região de rejeição (que compreende a probabilidade α) aumenta. Costa *et al.* (2014) argumentam que, alterando-se o valor da distância entre os limites de controle de 3,0 para 3,1, o erro tipo I diminui para 0,0019 (ou 0,19%), implicando em um ARL_0 igual a 526,30.

2.4.2 Erro tipo II

Em relação ao erro tipo II, Montgomery (2009) explica a sua relação com os testes estatísticos. Segundo o autor, o erro tipo II é a probabilidade de não rejeitar a hipótese nula sendo ela falsa, ou seja, o processo está fora de controle. A Figura 2.9 ilustra, com base em duas curvas de distribuição normal, um exemplo de ocorrência do erro tipo II (também conhecido como erro β).

Figura 2.9: Erro tipo II



Fonte: Montgomery (2009)

De acordo com a Figura 2.9, a hipótese nula (representada pela curva da esquerda) indica um processo controlado, enquanto a curva da direita (hipótese alternativa) representa o processo com parâmetro deslocado. O erro tipo II é a área destacada (entre $-Z_{\alpha/2}$ e $Z_{\alpha/2}$). Realizando-se o teste após um deslocamento de parâmetro, verifica-se de acordo com a Figura 2.9, que o erro tipo II ocorrerá quando o resultado pertencer a um ponto dentro da zona de aceitação da curva da esquerda, o que levará à uma falsa interpretação de que o processo ainda está sob controle. Juran e Gryna (1970) reforçam a análise, dizendo que é possível que os resultados obtidos do controle do processo se localizem dentro da região de aceitação (con-

forme curva da hipótese nula), porém com o valor de média não equivalente a situação original (hipótese alternativa).

O exemplo destacado na Figura 2.9 mostra um caso em que ocorre um aumento no valor da característica da qualidade monitorada. Porém, é possível que o descontrole no processo provoque uma diminuição do valor médio da característica da qualidade monitorada, havendo um deslocamento à esquerda do ponto “0”. É possível também que o descontrole no processo cause um alto deslocamento, distanciando-se a esquerda ou a direita do ponto inicial “0”, de modo que não haja interseção entre as duas curvas. Sendo assim, a probabilidade de ocorrência do erro tipo II será muito baixa, sendo facilmente detectado pelo gráfico de controle.

Matematicamente, Montgomery (2009) define o erro tipo II, de acordo com as equações (34) e (41) até (46), tomando como base o deslocamento ocorrido na Figura 2.9:

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad (41)$$

$$H_1: \mu > \mu_0 \quad (42)$$

$$\beta = P(\text{Erro tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa}) \quad (34)$$

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (43)$$

$$H_0 : Z_0 \sim N(0,1) \quad (44)$$

$$H_1 : Z_0 \sim N\left(\frac{\delta^* \sqrt{n}}{\sigma}, 1\right) \quad (45)$$

$$\beta = \phi\left(Z_{\alpha/2} - \frac{\delta^* \sqrt{n}}{\sigma}\right) - \phi\left(-Z_{\alpha/2} - \frac{\delta^* \sqrt{n}}{\sigma}\right) \quad (46)$$

As equações (41) e (42) representam, respectivamente, as hipóteses nula e alternativa do teste estatístico para verificar se houve ou não deslocamento no parâmetro de média (μ_0 para μ_1 , sendo $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = \delta^* \sqrt{n} / \sigma$ e $\delta = \mu_1 - \mu_0$, n o tamanho da amostra e σ o desvio-padrão populacional). A equação (34) define a probabilidade de ocorrência do erro tipo II, sendo igual a β . A equação (43) define o teste estatístico a ser realizado para a variável Z_0 , sendo Z_0 uma variável aleatória normal. As equações (44) e (45) definem Z_0 , de acordo com os seus valores de média (para a hipótese nula e hipótese alternativa, assumindo-se uma variância igual a um e média igual a zero). A equação (46) deduz, matematicamente, a proba-

bilidade de ocorrência do erro tipo II, sendo $(-Z_{\alpha/2}; Z_{\alpha/2})$ o intervalo na curva da distribuição normal. A probabilidade do resultado do teste estatístico de Z_0 estar localizado nesse intervalo é igual a β (erro tipo II). O termo “ ϕ ” indica que se trata de uma distribuição normal acumulada.

Montgomery (2009) reforça que, o erro tipo II é em função do tamanho da amostra (n), erro tipo I (α) e a diferença entre μ_1 e μ_0 (δ). Costa e Rahim (2006) e Costa *et al.*(2014) explicam que, com base no erro tipo II, é possível calcular o poder de detecção do gráfico de controle (ou simplesmente, o poder do gráfico de controle, Pd). Ou seja, a probabilidade de se detectar um deslocamento de processo, estando ele fora de controle. O valor de Pd será:

$$Pd = 1 - \beta \quad (47)$$

De acordo com Costa e Rahim (2006), o termo β indica o risco corrido pelo consumidor, ou seja, é a probabilidade de aceitação de um produto com qualidade abaixo do especificado. Verifica-se, portanto, a importância do erro tipo II no desenvolvimento dos gráficos de controle, uma vez que o mesmo está relacionado à sensibilidade na detecção de alterações nos parâmetros de média.

2.5 Medidas de desempenho dos gráficos de controle

O uso de indicadores de desempenho em gráficos de controle é um dos assuntos mais abordados em relação ao CEP. De acordo com Woodall (2000), ressalta-se a importância do uso de indicadores de desempenho, pois é uma forma de avaliar como os gráficos de controle operam, servindo como base de comparação entre diferentes modelos de gráficos encontrados na literatura. Por essa razão, para medir o desempenho dos gráficos de controle, utiliza-se o ARL (*Average Run Length*), medida que possui uma interpretação para uma situação de processo estabilizado, e outra para um processo não estabilizado. Costa e Rahim (2006) descrevem que o objetivo do monitoramento do processo é detectar os deslocamentos nos parâmetros estatísticos, para a média (conforme a equação (48)) e desvio-padrão (conforme equação (49)), sendo o ARL em função de ambas.

$$\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0, \text{ para } \delta \neq 0 \quad (48)$$

$$\sigma_1 = \lambda\sigma_0, \text{ para } \lambda \neq 1 \quad (49)$$

A equação (48) define o deslocamento ocorrido no parâmetro média, passando de μ_0 para μ_1 . O termo σ_0 é o desvio-padrão populacional do processo e “ δ ” é o fator que indica o deslocamento (para que haja deslocamento no parâmetro, “ δ ” deve ser diferente de zero, caso contrário, $\mu_1 = \mu_0$). A equação (49) define o deslocamento ocorrido no parâmetro de desvio-padrão, passando de um valor σ_0 para σ_1 . O termo “ λ ” é o fator que indica o deslocamento, de modo que o mesmo deverá ser diferente de um. Caso contrário, $\sigma_1 = \sigma_0$. Ressalta-se que, as equações (48) e (49) não são, necessariamente, dependentes uma da outra. Isso porque é possível que haja uma alteração no parâmetro de média ($\delta \neq 0$), sem que haja alguma alteração no desvio-padrão (σ_0). Assim como, é possível que haja uma alteração no desvio-padrão ($\lambda \neq 1$), porém o valor de média permanece inalterado (μ_0). Segundo os autores, quanto maior for o deslocamento no parâmetro de média ou o aumento da variância, menor será o valor do ARL.

Chakraborti *et al.* (2004) definem o ARL como uma métrica que resume o desempenho do gráfico de controle. O ARL é uma das medidas mais populares utilizadas para medição de desempenho de gráficos de controle, devido a sua interpretação intuitiva e a possibilidade de comparação entre diferentes gráficos (JENSEN *et al.*, 2006; SCHOONHOVEN e DOES, 2012).

Saleh *et al.* (2015a) explicam o uso do termo AARL (valor médio do ARL), justificando que, o ARL é uma medida voltada a um gráfico de controle, enquanto o AARL avalia um conjunto de gráficos. Um alto valor do ARL em situações controladas é desejável, enquanto para processos fora de controle, quanto menor o valor do ARL, melhor será (WOODALL, 1985; CHAKRABORTI, 2000). Alternativas estão sendo propostas, como por exemplo, Epprecht *et al.* (2015) propõem trabalhar com a distribuição do erro tipo I.

As próximas seções irão detalhar o ARL_0 e ARL_1 , além de discutir sobre o SDRL (*Standard Deviation Run Length*, medida de desempenho relacionado à variabilidade entre os diferentes valores gerados até a ocorrência de um sinal de descontrole) e a análise pela distribuição do ARL.

2.5.1 ARL para uma situação sob controle (ARL_0)

Para uma situação em que o processo esteja estabilizado, define-se o indicador de desempenho como ARL_0 . De acordo com Jensen *et al.* (2006), em uma situação sob controle, o valor do ARL_0 indica o número de amostras necessárias até o ocorrência de um falso

alarme. Isso significa uma indicação de descontrole no processo, quando na verdade o mesmo se encontra estabilizado. Alguns autores, como Chen (1997), Montgomery (2009) e Castagliola *et al.* (2013a), definem o ARL_0 como sendo o inverso do erro tipo I, ou seja:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (50)$$

Isso indica que, quanto maior for o valor de α , menor será o ARL_0 . Consequentemente, maior será a ocorrência de falsos alarmes. Leoni *et al.* (2015) também definem o ARL_0 como o inverso do erro tipo I. No caso dos gráficos de Shewhart, o uso de três desvios-padrão e o erro tipo I igual à 0,27%, o valor do ARL_0 será 370,40 (esse valor indica que, a cada 370 amostras, irá ocorrer um falso alarme). Jensen *et al.* (2006) e Castagliola *et al.* (2013a) definem o ARL como o valor médio esperado entre diferentes valores de RL (*Run Length*).

O RL é uma variável aleatória que representa o número de pontos gerados, estatisticamente, até a ocorrência de um sinal. Se esses pontos forem independentes e identicamente distribuídos e se os limites de controle forem constantes conhecidas, [...], então o RL é uma variável aleatória seguindo uma distribuição geométrica, com parâmetro Pr , representando a probabilidade de uma estatística de um único gráfico de controle cair além dos limites de controle (JENSEN *et al.*, 2006).

Na citação acima, Pr é a probabilidade de ocorrência do erro tipo I. Verifica-se que o ARL é o valor médio dos diferentes RL. Espera-se, portanto, que um gráfico clássico de Shewhart, um valor médio de 370,40 amostras até a sinalização de um falso alarme.

2.5.2 ARL para uma situação fora de controle (ARL_1)

Assim como em situações sob controle, o ARL também poderá ser utilizado em situações em que o processo sofre a ação de causas especiais. Define-se o indicador como ARL_1 . Pignatiello Jr. e Simpson (2002) afirmam que um importante fator de desempenho dos gráficos de controle é o quanto os mesmos são rápidos em detectar mudanças no processo, de modo que, quanto mais cedo o descontrole é detectado, mais cedo se iniciam as investigações sobre as suas causas.

De acordo com Montgomery (2009), o ARL_1 representa o número de amostras necessárias até que o gráfico de controle detecte uma variação nos parâmetros do processo. A seguir, apresenta-se a fórmula para a definição do ARL_1 , sendo β o erro tipo II. Leoni *et al.*

(2015) argumentam que, quanto menor o ARL_1 , maior a habilidade do gráfico de controle em detectar mudanças no processo. A equação (51) define a fórmula de cálculo do ARL_1 :

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} \quad (51)$$

Sendo, $1 - \beta = Pd$ (Poder do gráfico de controle), conforme equação (47).

De acordo com Costa *et al.* (2014), há dois fatores que influenciam no poder do gráfico de controle (Pd) X-bar: o tamanho da amostra (n) e no fator deslocamento do parâmetro (δ). Segundo os autores, os gráficos de Shewhart são insensíveis a pequenos deslocamentos ($\delta < 1,5$), o que explica a sua demora até a sinalização do descontrole no processo. Em relação ao tamanho da amostra (n), os autores afirmam que, quanto maior for o tamanho da amostra utilizado (mantendo-se o intervalo de coleta de amostras inalterado), maior será o poder de detecção de um descontrole no processo pelo gráfico de controle. A seguir, nas equações de (52) até (61), define-se o cálculo de obtenção do poder do gráfico de controle.

$$P(\bar{x} > LSC) = P(Z > Z_{LSC}) \quad (52)$$

$$Z_{LSC} = \frac{LSC - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} \quad (53)$$

$$= \frac{\mu_0 + k\sigma_{\bar{x}} - (\mu_0 + \delta\sigma_0)}{\sigma_{\bar{x}}} \quad (54)$$

$$= k - \delta\sqrt{n} \quad (\text{sendo } \sigma_0 / \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{n}) \quad (55)$$

$$\text{Sabe-se que } P(\bar{x} > LSC) = P(\bar{x} < LIC) = P(Z < Z_{LIC}) \quad (56)$$

$$Z_{LIC} = \frac{LIC - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} \quad (57)$$

$$= \frac{\mu_0 - k\sigma_{\bar{x}} - (\mu_0 + \delta\sigma_0)}{\sigma_{\bar{x}}} \quad (58)$$

$$= -k - \delta\sqrt{n} \quad (59)$$

$$\text{Sendo } Pd = P(Z > Z_{LSC}) + P(Z < Z_{LIC}) \quad (60)$$

$$Pd = P(Z > (k - \delta\sqrt{n})) + P(Z < (-k - \delta\sqrt{n})) \quad (61)$$

Dada a equação (61), define-se o motivo pelo qual os fatores (δ) e (n) afetam o poder do gráfico de controle (Pd). O termo “k” indica o número de desvios-padrão em relação

à media para definir os limites de controle. Na primeira situação, comparam-se diferentes deslocamentos de parâmetros (δ_1 e δ_2), mantendo-se o tamanho da amostra constante. Em um segundo momento, comparam-se diferentes tamanhos de amostras (n_1 e n_2), mantendo-se o fator deslocamento constante. As equações (62) até (77) mostram os cálculos realizados.

Situação 1: $\delta_1 = 0,5$ e $\delta_2 = 2,0$. Escolhe-se $k = 3,0$ e $n=4$.

$$Pd_1 = P(Z > (3 - 0,5\sqrt{4})) + P(Z < (-3 - 0,5\sqrt{4})) \quad (62)$$

$$Pd_1 = P(Z > 2) + P(Z < -4) \quad (63)$$

$$Pd_1 = 0,02275 + 0 \quad (64)$$

$$Pd_1 = 0,02275 \text{ (ou } ARL_1 = 43,95) \quad (65)$$

$$Pd_2 = P(Z > (3 - 2,0\sqrt{4})) + P(Z < (-3 - 2,0\sqrt{4})) \quad (66)$$

$$Pd_2 = P(Z > -1) + P(Z < -7) \quad (67)$$

$$Pd_2 = 0,84134 + 0 \quad (68)$$

$$Pd_2 = 0,84134 \text{ (ou } ARL_1 = 1,19) \quad (69)$$

Situação 2: $n_1 = 4,0$ e $n_2 = 9,0$. Escolhe-se $k = 3,0$ e $\delta = 1,0$.

$$Pd_1 = P(Z > (3 - 1\sqrt{4})) + P(Z < (-3 - 1\sqrt{4})) \quad (70)$$

$$Pd_1 = P(Z > 1) + P(Z < -5) \quad (71)$$

$$Pd_1 = 0,15866 + 0 \quad (72)$$

$$Pd_1 = 0,15866 \text{ (ou } ARL_1 = 6,30) \quad (73)$$

$$Pd_2 = P(Z > (3 - 1,0\sqrt{9})) + P(Z < (-3 - 1,0\sqrt{9})) \quad (74)$$

$$Pd_2 = P(Z > 0) + P(Z < -6) \quad (75)$$

$$Pd_2 = 0,50000 + 0 \quad (76)$$

$$Pd_2 = 0,50000 \text{ (ou } ARL_1 = 2,00) \quad (77)$$

Comparando-se os resultados obtidos nas equações (65) e (69), verifica-se que, quanto maior for o deslocamento do parâmetro de média sofrido pelo gráfico de controle de Shewhart, mais rápida será a detecção do descontrole (para $\delta_1 = 0,5$, serão necessárias 44 amostras até a detecção do descontrole do processo. Para $\delta_2 = 2,0$, será necessária apenas uma amostra), comprovando assim a sua alta eficiência na detecção de grandes deslocamentos ($\delta > 1,5$) e sua baixa sensibilidade para detectar pequenos deslocamentos no parâmetro de média. Comparando-se também os resultados obtidos nas equações (73) e (77), relativos ao tamanho

da amostra utilizada, verifica-se que, quanto maior for o tamanho da amostra utilizado, maior será o poder do gráfico de controle em detectar alterações no parâmetro de média (para $n=4$, serão necessárias seis amostras, enquanto para $n=9$, serão necessárias apenas duas).

Conclui-se que, o ARL_1 é de extrema importância no desenvolvimento de gráficos de controle, uma vez que, segundo Woodwall e Montgomery (2014), o intuito da Fase II do gráfico de controle (ou seja, o monitoramento propriamente dito), é a rápida detecção de deslocamentos que possam ser gerados ao longo do processo produtivo. Montgomery e Runger (2002) reforçam que, para aumentar o poder de detecção de uma situação fora de controle, há duas maneiras: a primeira, aumentar a frequência de amostragem. E a segunda, aumentar o tamanho da amostra.

2.5.3 SDRL (*Standard Deviation Run Length*)

O SDRL também poderá ser utilizado como medida de desempenho em gráficos de controle. Segundo Chen (1997) e Saleh *et al.* (2015a), o uso de uma medida de desempenho do gráfico de controle, a qual se concentra em analisar a dispersão, é recomendada em conjunto com o ARL, uma vez que o ARL apresenta alta variabilidade. O indicador SDRL pode ser definido de acordo com a equação (78).

$$SDRL = \frac{\sqrt{1 - \alpha}}{\alpha} \quad (78)$$

De acordo com Chen (1997), para três desvios-padrão além da meta, o valor esperado do SDRL, em situações em que se conhecem os parâmetros estatísticos do processo, será igual a 369,90. Nota-se que, esse valor é muito próximo aos 370,40 do ARL_0 , o que explica a alta variabilidade do ARL_0 como medida de desempenho. A Tabela 2.3 mostra os valores de ARL_0 e a Tabela 2.4 de SDRL, simulados e obtidos por Chen (1997), utilizando-se o estimador do desvio-padrão calculado a partir da amplitude amostral média dividida pela constante d_2 (apresentado na equação (1)).

Tabela 2.3: Valores de ARL_0 para o gráfico X-bar e estimador SD1

m	n						
	4	5	6	7	8	9	10
5	3071	1581	1024	775	643	564	512
10	879	627	524	470	437	414	397
20	520	454	420	400	387	378	371
30	455	418	398	385	377	371	366
50	415	395	384	377	372	368	366
75	398	385	378	373	370	368	366
100	390	381	376	372	370	368	367
200	380	375	373	371	370	369	368
300	376	373	372	371	370	369	369
500	374	372	371	370	370	370	369
1000	372	371	371	370	370	370	370
∞	370						

Fonte: Adaptado de Chen (1997)

Tabela 2.4: Valores de SDRL para o gráfico X-bar e estimador SD1

m	n						
	4	5	6	7	8	9	10
5	45928	23152	12429	7225	4587	3179	2381
10	7277	2945	1728	1257	1021	881	790
20	1303	893	728	639	584	547	520
30	820	651	572	526	496	475	459
50	588	515	477	454	438	427	418
75	502	460	437	422	413	406	400
100	465	435	419	408	401	396	392
200	414	400	393	388	385	382	380
300	399	390	385	382	380	378	377
500	387	382	379	377	376	375	374
1000	378	376	374	373	373	372	372
∞	370						

Fonte: Adaptado de Chen (1997)

As Tabelas 2.3 e 2.4 mostram a relação existente entre os valores de m (número de amostras) e n (tamanho da amostra), em relação aos valores resultantes de ARL_0 e SDRL. Verifica-se que, para as duas métricas de desempenho, o aumento no número de amostras (m), faz com que os valores de ARL_0 e SDRL se aproximem do valor proposto na literatura de 370. Ressalta-se que, a medida que os valores de m e n aumentam, a diferença entre ARL_0 e SDRL diminui, de modo que ambos os valores tendem a se aproximar um do outro (JONES e STEINER, 2011). Saleh *et al.* (2015a) faz uma análise das situações abordadas para os valores mais baixos de m e n , apresentados nas Tabelas 2.3 e 2.4. O alto valor do SDRL em relação ao ARL (por exemplo, para $m=5$ e $n=4$, o valor do ARL é 3071, enquanto o valor do SDRL é 45928) mostra que a estimação dos parâmetros estatísticos, definida a partir de um

tamanho de amostral ($n=4$) e quantidade de amostras ($m=5$), é insuficiente para alcançar um desempenho satisfatório. Mesmo que o valor do ARL seja alto, o valor do SDRL sendo superior à 370 (quando m tende ao infinito), mostra uma alta variabilidade existente entre os diferentes valores do RL, havendo rodadas muito curtas, como também, muito longas, até a incidência de um falso alarme (SCHOONHOVEN *et al.*, 2011).

A análise conjunta de ambos os indicadores é extremamente importante para concluir sobre o comportamento dos gráficos de controle. A análise conjunta também é recomendada por Quesenberry (1993). Segundo o autor, o uso apenas do ARL_0 como medida de desempenho poderá levar a resultados inconsistentes, fazendo com que conclusões incorretas sejam tiradas em relação a real situação do processo. Entretanto, esta dissertação considerou apenas o ARL_0 para analisar o desempenho dos gráficos de controle, pois a distribuição do ARL (usada por esta dissertação para avaliar a distribuição dos valores dentro da distribuição do ARL) mostra o quanto os valores do ARL estão concentrados em diferentes intervalos da distribuição do ARL (mostrados nos Apêndices de A até H), servindo como referência na avaliação da dispersão.

2.5.4 A análise do desempenho do gráfico de controle pela distribuição do ARL

A análise do desempenho do gráfico de controle pela distribuição do ARL é uma alternativa sugerida por alguns autores, como Quesenberry (1993) e Saleh *et al.* (2015b), em relação a análise pelo valor médio (ARL). Reforça-se a utilização desse tipo de análise, uma vez que, o valor médio (ARL) apresenta alta variabilidade, devido ao fato da distribuição do RL ser geométrica (desvio-padrão é igual a $\sqrt{(1-p)}/p = \sqrt{(1-0,0027)}/0,0027 \cong 370$), quando os parâmetros são conhecidos. Quando não são conhecidos, a dispersão do RL é ainda mais assimetricamente acentuada.

Chakraborti *et al.* (2001) definem a medida RL como sendo uma variável aleatória positiva e inteira. Segundo os autores, muitas pesquisas sugerem a análise não apenas do valor médio, mas de toda distribuição. Psarakis *et al.* (2014) citam o uso da distribuição do ARL como uma forma de avaliação, fornecendo mais informações a respeito do desempenho dos gráficos de controle, uma vez que o valor médio apresenta tendência quando os parâmetros do processo são estimados.

Em Chakraborti e Wiel (2008), analisam-se os percentis 5° e 95° da distribuição do ARL para comparar o desempenho entre um gráfico de controle de Shewhart (X-bar) com parâmetros estimados e um gráfico de controle não paramétrico. Segundo os autores, justifica-se a utilização desse tipo de análise para demonstração da variabilidade existente no tipo de distribuição do ARL. Em Saleh *et al.* (2015a), representam-se os valores do ARL encontrados nos décimo, vigésimo quinto, valor médio, septuagésimo quinto e nonagésimo percentis, demonstrando a variabilidade existente na métrica ARL.

Em Saleh *et al.* (2015b), utiliza-se a distribuição do ARL_0 para demonstrar o desempenho obtido para um gráfico de controle EWMA (Média Móvel Ponderada Exponencial). Os parâmetros utilizados para a comparação dos valores foram n (tamanho da amostra), m (quantidade de amostras), L (quantidade de desvios-padrão para o cálculo da distância dos limites de controle), estimador do desvio-padrão $\hat{\sigma}_3$ (conforme equação (3)), λ (a constante de suavização, sendo $0 < \lambda \leq 1$). A constante de suavização é utilizada para ponderação de valores entre a média amostral atual e o valor amostral anterior para o cálculo da estatística do gráfico). Os valores obtidos da distribuição do ARL_0 estão listados na Tabela 2.5. As Figuras 2.10, 2.11, 2.12 e 2.13 mostram os resultados obtidos da distribuição do ARL_0 para um gráfico de controle EWMA.

Tabela 2.5: Percentis do ARL_0 , utilizando-se o estimador de desvio-padrão $\hat{\sigma}_3$

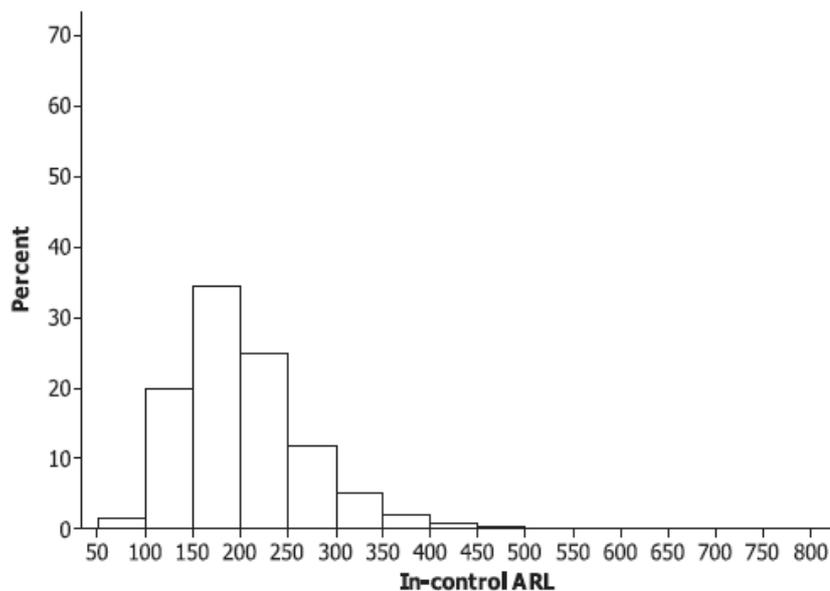
m	Min	5°	10°	25°	50°	75°	90°	95°	Max
50	14,2	52,4	65,6	96,7	139,6	186,7	235,8	268,4	620,1
100	26,2	81,1	96,9	127,7	161,9	195,9	228,4	250,3	471,2
200	45,7	112,3	127,4	152,5	176,8	201,0	223,0	236,5	342,0
400	66,9	142,6	153,6	170,3	186,9	203,1	218,2	227,9	311,6
600	94,2	155,8	164,6	177,4	190,6	203,6	215,7	223,1	304,9
800	114,4	163,7	170,9	181,5	192,4	203,5	214,1	220,2	264,4
1000	118,1	168,4	174,5	183,8	193,7	203,7	212,6	218,2	257,5
2000	150,1	180,2	184,0	190,1	196,1	203,3	209,5	213,3	238,9

Fonte: Saleh *et al.* (2015b)

Os resultados do ARL_0 demonstrados pela Tabela 2.5 mostram que, conforme m (quantidade de amostras) aumenta, diminui-se a variabilidade existente do ARL_0 , de modo a aumentar a concentração de valores. Nota-se, por exemplo, quando $m=50$ e tomando-se como base os percentis 5°, 50° e 95°, os valores do ARL_0 serão, respectivamente, 52,4, 139,6 e 268,4. Para $m=2000$, os valores serão 180,2, 196,1 e 213,3. Comparando-se os valores obtidos, verifica-se que os valores concentrados no percentil inferior aumenta a medida que o número de amostras aumenta, e, no percentil superior, diminui. A diferença de valores entre os dois percentis (5° e 95°) também diminui, a medida que o valor de m aumenta: para $m=50$, a diferença será 216, enquanto para $m=2000$, passa a ser apenas 33,1. Ressalta-se também o aumento no valor do percentil 50° (valor médio), a medida que o valor de m aumenta: para $m=50$, o valor será 139,60, enquanto para $m=2000$, o valor será 196,10.

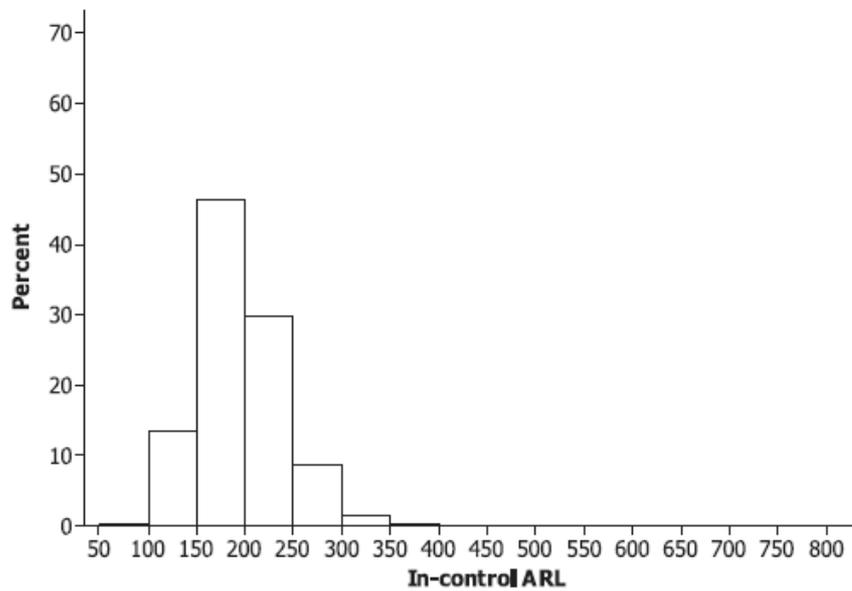
Segundo Saleh *et al.* (2015b), a análise dos dados demonstrados pela Tabela 2.5 auxiliam na definição da quantidade de amostras que será utilizada na Fase 1 para a estimação dos parâmetros do processo e no cálculo dos limites de controle, fornecendo informações a respeito da variabilidade dos valores do ARL_0 , de acordo com a quantidade de amostras.

Figura 2.10: Distribuição do ARL_0 para $\lambda=1,0$, $L=2,807$ e $m=100$



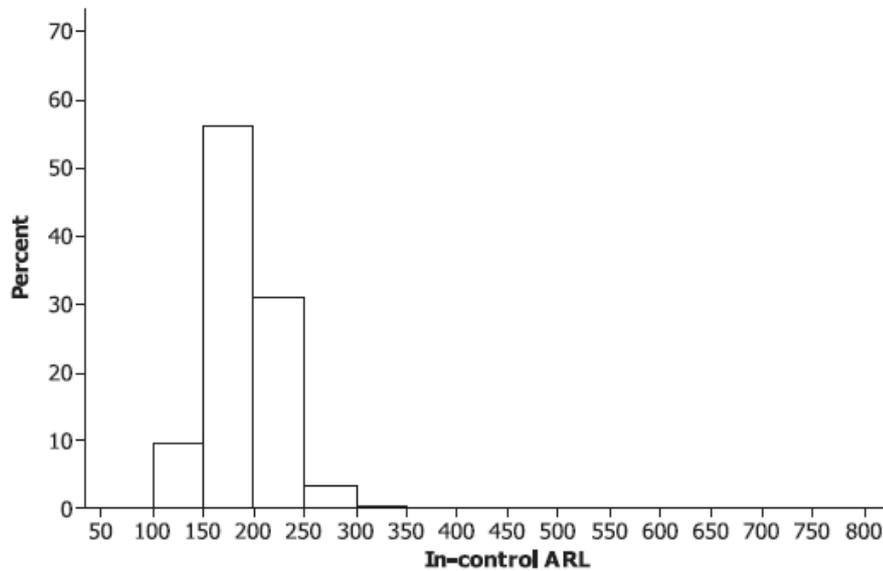
Fonte: Saleh *et al.* (2015b)

Figura 2.11: Distribuição do ARL_0 para $\lambda=0,5$, $L=2,777$ e $m=200$



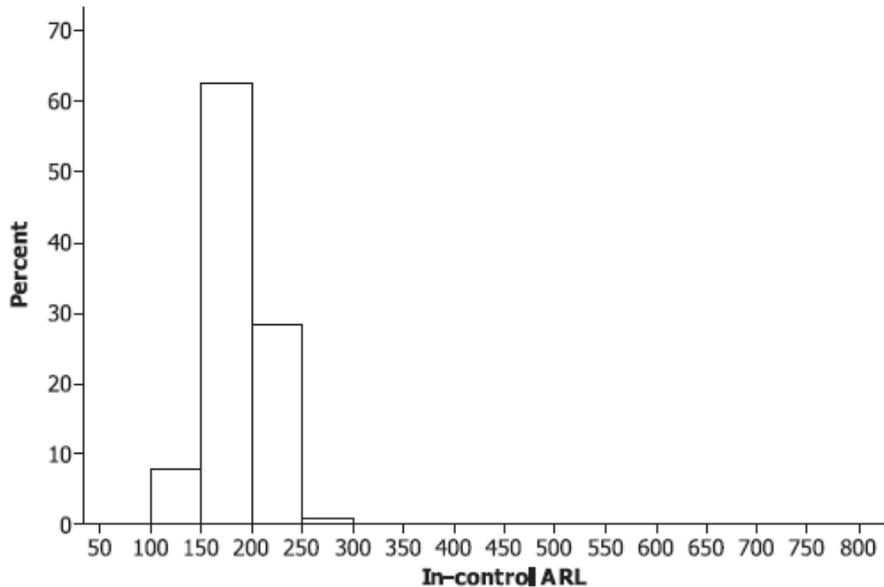
Fonte: Saleh *et al.* (2015b)

Figura 2.12: Distribuição do ARL_0 para $\lambda=0,2$, $L=2,636$ e $m=300$



Fonte: Saleh *et al.* (2015b)

Figura 2.13: Distribuição do ARL_0 para $\lambda=0,1$, $L=2,454$ e $m=400$



Fonte: Saleh *et al.* (2015b)

As Figuras 2.10, 2.11, 2.12 e 2.13 mostram os resultados obtidos do ARL_0 após 100000 rodadas de simulação para um gráfico de controle EWMA, variando-se os valores L , m e λ . Destaca-se, por meio dessas representações, a possibilidade de identificar o quanto os valores do ARL_0 incidem em cada intervalo de valores. Entre as situações estudadas, verifica-se, no caso da Figura 2.10, uma situação em que $\lambda=1,0$ (o que indica se tratar de um gráfico de controle de Shewhart), $L=2,807$ e $m=100$. Nas demais situações, diminui-se o valor de λ (o que enfatiza o peso do valor da amostra anterior para o cálculo da estatística atual), diminui-se o valor de L (ou seja, ocorre uma diminuição da largura dos limites de controle) e aumenta-se o valor de m (utiliza-se uma maior quantidade de amostras para o cálculo dos parâmetros estatísticos e limites de controle).

Entre os quatro gráficos, verifica-se que, a medida que o valor de m aumenta (na Figura 2.10, o valor de m é 100; na Figura 2.11, m é igual a 200; na Figura 2.12, m é igual a 300; na Figura 2.13, m é igual a 400), os valores do ARL_0 se deslocam dos intervalos extremos (entre 0 e 50, e entre 450 e 500) e tendem a se concentrarem entre 150 e 200. Consequentemente, verifica-se que há uma diminuição na dispersão dos valores na distribuição do ARL_0 .

2.6 Estimadores do desvio-padrão

Sabe-se que, tanto a estimação dos parâmetros do processo, quanto a não normalidade dos dados amostrais irá prejudicar o desempenho dos gráficos de controle. Nesta seção, apresentam-se os efeitos negativos para o ARL devido à estimação. De acordo com Costa Neto (1977), define-se como estimador a quantidade calculada, em função dos elementos da amostra, que será utilizada para estimar o parâmetro desejado, caracterizando-o como uma estimativa. Pode-se, então, defini-lo como uma variável aleatória, podendo ser representado por uma distribuição de probabilidade.

Montgomery (2009) define um estimador de um parâmetro desconhecido como uma estatística que correspondente a esse parâmetro. O valor assumido por ele é chamado de estimativa. Costa Neto (1977) define quatro propriedades, as quais um estimador deverá possuir: não ser tendencioso, consistência, eficiência e suficiência. O Quadro 2.2 faz um resumo das quatro propriedades mencionadas. Para a explicação, utilizou-se θ como o parâmetro a ser estimado, T um estimador de θ e t , a estimativa.

Quadro 2.2: Propriedades dos estimadores de parâmetros

Propriedade	Descrição
Sem tendência	Sendo T um estimador não tendencioso, verifica-se que sua média é o próprio parâmetro que se deseja estimar ($\mu(T)=\theta$). Ou seja, os valores aleatórios que T poderá assumir estarão em torno do valor θ . Outra característica que indica a ausência de tendência é a sua variância tender à zero quando o tamanho da amostra tende ao infinito.
Consistência	Pode-se dizer que um estimador é consistente se, dado um determinado valor de erro ϵ , sendo $\epsilon > 0$, é possível torná-lo tão baixo quanto se queira, utilizando-se um tamanho de amostra que tende ao infinito. Portanto, a probabilidade de que a diferença entre T e θ seja maior que ϵ será igual à zero.
Eficiência	Dados dois estimadores justos de θ , T_1 e T_2 , e utilizando o mesmo tamanho de amostra, define-se T_1 sendo mais eficiente que T_2 quando $\mu[(T_1-\theta)^2] < \mu[(T_2-\theta)^2]$, o que indica que a variância de T_1 é menor que a de T_2 .
Suficiência	Pode-se dizer que, um estimador é suficiente, quando ele concentra o máximo de informações possíveis dos parâmetros estimados.

Fonte: Adaptado de Costa Neto (1977)

Para a construção dos gráficos de controle, os parâmetros (média e desvio-padrão) deverão ser estimados quando não forem conhecidos. Segundo Costa Neto (1977), o melhor estimador para a média populacional é a média amostral \bar{x} , sendo ele não tendencioso em relação à média populacional μ . Segundo o autor, tal propriedade não é assumida pelo estimador do desvio-padrão amostral s , em relação ao parâmetro populacional σ , isso porque, o valor esperado de s ($E(s)$) não será igual a σ .

A confiabilidade da aplicação dos gráficos de controle depende da qualidade com que os estimadores são definidos, a partir dos dados coletados na Fase 1. Essa questão é de extrema importância, uma vez que, o estimador afeta diretamente o desempenho do gráfico de controle (ALBERS e KALLENBERG, 2005; PSARAKIS *et al.*, 2014). Shahriari *et al.* (2010) afirmam que, caso o valor estimado da dispersão seja utilizado no cálculo dos limites de controle, sendo essa estimativa feita de maneira incorreta (ou seja, a partir de um processo não controlado ou com um valor amostral inferior ao necessário para garantir o desempenho semelhante à uma situação com parâmetros conhecidos) resultará em uma largura incorreta entre os limites de controle, comprometendo o desempenho dos gráficos de controle e levando a decisões incorretas sobre a estabilidade do processo.

Em relação aos diferentes estimadores do desvio-padrão, Schoonhoven e Does (2012) descrevem as características que o estimador do desvio-padrão deverá ter em cada fase de desenvolvimento do gráfico de controle, sendo que o estimador deverá ser eficiente em situações controladas e robusto contra distúrbios na Fase 1, e sensível a deslocamentos na Fase 2. Saleh *et al.* (2015a) fazem uma comparação do desempenho obtido (AARL) em gráficos de controle, para cinco diferentes estimadores. Os estimadores utilizados no estudo de Saleh *et al.* (2015a) estão descritos nas equações (1) até (5), os elementos das equações são descritos nas equações (6) até (9), sendo eles listados novamente a seguir:

$$1) \hat{\sigma}_1 = \frac{\bar{R}}{d_2(n)} \quad (1)$$

$$2) \hat{\sigma}_2 = \frac{\bar{S}}{c_4(n)} \quad (2)$$

$$3) \hat{\sigma}_3 = \frac{Spooled}{c_4(v+1)} \quad (3)$$

$$4) \hat{\sigma}_4 = c_4(v+1)Spooled \quad (4)$$

$$5) \hat{\sigma}_5 = Spooled \quad (5)$$

$$S_{pooled} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m S^2_i}}{\sqrt{m}} \quad (6)$$

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^m R}{m} \quad (7)$$

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^m S}{m} \quad (8)$$

$$v = m * (n-1) \quad (9)$$

Saleh *et al.* (2015a) explicam que os estimadores das equações (1), (2) e (3) são estimadores que não apresentam tendência (ou seja, a média dos valores das diferentes estimativas é o próprio estimador), sendo que os estimadores das equações (4) e (5) apresentam tendência. Os autores também fazem outras observações, referentes aos estimadores: o estimador da equação (3) é o estimador padrão utilizado no *software* Minitab-16; o estimador baseado na amplitude amostral média (equação (1)) é o estimador padrão no *software* Minitab-17 para a construção dos gráficos de controle X-bar / R-bar, enquanto o estimador baseado no desvio-padrão amostral médio (equação (2)) é o estimador padrão na construção dos gráficos de controle X-bar / S-bar. O estimador da equação (5) é o estimador padrão no *software* Minitab-17, apenas para a construção do gráfico de controle X-bar (sem o gráfico de controle de dispersão). Tanto o estimador da equação (4), quanto a da equação (5), também foram estudados por Mahmoud *et al.* (2010) *apud* Saleh *et al.* (2015a).

Saleh *et al.* (2015a) analisam os valores de AARL (obtida por integração numérica) e SDARL, em relação ao número de amostras, representado pela letra m. Ressalta-se que, na última linha das Tabelas 2.6 e 2.7, o valor apresentado indica uma situação em que o processo está controlado e os parâmetros são conhecidos. De acordo com Nazir *et al.* (2013), o segundo estimador representado pela equação (2) (média do desvio-padrão) possui alto desempenho em situações de normalidade, porém é fortemente afetado pela presença de causas especiais e *outliers*.

Tabela 2.6: Valores do AARL para cada estimador, considerando processo sob controle

m	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\sigma}_4$	$\hat{\sigma}_5$
20	455,38	445,52	436,36	408,41	422,36
50	394,46	391,96	389,14	379,38	384,22
100	380,97	379,63	378,30	373,60	375,94
300	373,49	373,14	372,69	371,16	371,92
500	372,22	371,97	371,70	370,79	371,24
600	371,90	371,69	371,48	370,71	371,10
700	371,68	371,51	371,31	370,65	370,98
800	371,52	371,36	371,18	370,61	370,89
1000	371,31	371,16	371,03	370,57	370,80
1200	371,14	371,03	370,92	370,54	370,73
1300	371,08	370,98	370,88	370,53	370,71
3000	370,69	370,65	370,61	370,45	370,53
4500	370,59	370,56	370,53	370,43	370,48
5000	370,57	370,56	370,53	370,43	370,48
∞			370,40		

Fonte: Saleh *et al.* (2015a)

Tabela 2.7: Valores do SDARL para cada estimador, considerando processo sob controle

m	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\sigma}_4$	$\hat{\sigma}_5$
20	551,80	513,23	480,65	440,94	460,30
50	233,43	225,89	217,39	210,77	214,05
100	149,16	144,73	140,24	138,15	139,19
300	80,70	78,79	76,34	75,96	76,15
500	61,72	60,25	58,64	58,46	58,55
600	56,20	54,85	53,38	53,25	53,31
700	51,90	50,64	49,35	49,25	49,30
800	48,46	47,38	46,18	46,09	46,14
1000	43,17	42,27	41,16	41,10	41,13
1200	39,42	38,50	37,49	37,44	37,46
1300	37,84	36,97	35,99	35,95	35,97
3000	24,81	24,24	23,60	23,59	23,60
4500	20,26	19,78	19,29	19,29	19,29
5000	19,19	18,68	18,23	18,23	18,23
∞			0,00		

Fonte: Saleh *et al.* (2015a)

Analisando-se as Tabelas 2.6 e 2.7, verifica-se que, conforme o número de amostras aumenta, o AARL tende a se aproximar do valor definido pela literatura, 370,40, bem como diminui o valor do SDARL. Quando a quantidade de amostras m tende ao infinito, o valor do AARL é igual a 370,40 e o SDARL é igual a zero para os cinco estimadores do des-

vio-padrão. Ou seja, independente do estimador utilizado, quando o número de amostras tende ao infinito, a variabilidade existente entre os diferentes valores do ARL_0 é zero. Em relação aos estimadores do desvio-padrão, Saleh *et al.* (2015a) recomendam utilizar o estimador número 4, conforme equação (4). Os autores não recomendam a utilização do estimador número 1 (equação (1)), estimado a partir da amplitude média, devido à alta variabilidade gerada no desempenho, baixa eficiência e por ser facilmente afetado pela presença de pontos fora dos limites de controle.

2.7 Efeitos negativos da estimação de parâmetros para o ARL

A questão sobre os efeitos negativos da estimação dos parâmetros estatísticos do processo tem sido discutida por muitos autores na área de CEP, em que os mesmos afirmam que os parâmetros estatísticos do processo são considerados, em muitos trabalhos, como supostamente conhecidos (QUESENBERRY, 1993; CHEN, 1997; WOODALL e MONTGOMERY, 1999; JENSEN *et al.*, 2006). Psarakis *et al.* (2014) analisa Jensen *et al.* (2006) como um trabalho de base e precursor nos estudos relacionados aos efeitos negativos da estimação dos parâmetros estatísticos do processo no desempenho dos gráficos de controle.

Utilizando-se três desvios-padrão em relação à média, em situações em que os parâmetros sejam conhecidos, espera-se que a probabilidade de ocorrência de um falso alarme seja igual à 0,27%, conforme demonstrado nas equações (37) até (40), o que resulta em um ARL_0 igual à 370,40. Entretanto, nem sempre é possível estimar os parâmetros estatísticos e definir os limites de controle, utilizando-se uma quantidade amostral que resulte em um desempenho semelhante à uma situação em que os parâmetros estatísticos sejam conhecidos. Consequentemente, os limites de controle são calculados com base em parâmetros estatísticos estimados a partir de dados insuficientes e que não são conclusivos para determinar a realidade do processo, aumentando a incidência de falsos alarmes (JENSEN *et al.*, 2006; CHAKRABORTI *et al.*; 2009; SHAHRIARI *et al.*, 2010), de modo que decisões incorretas sobre a estabilidade do processo possam ser tomadas (ALBERS e KALLENBERG, 2004).

Matematicamente, Woodall (1985) define na equação (79) o que um gráfico de controle construído com parâmetros estimados deverá manter no que diz respeito a um processo controlado e estabilizado.

$$E(\bar{x}_i) = \mu_0, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (79)$$

Chakraborti (2000) observa que, na prática, o uso de parâmetros estimados altera o valor do ARL_0 , de modo que essa métrica já não pode mais ser definida pela razão $1/\alpha$. Quando os parâmetros do processo são estimados, o ARL_0 deixa de ser um valor constante, tornando-se uma variável aleatória, sendo essa a explicação para a variabilidade entre as estimativas (CHAKRABORTI *et al.*, 2001; ALBERS e KALLENBERG, 2004; SALEH *et al.*, 2015a). Schoonhoven e Does (2013) complementam o que é dito por Albers e Kallenberg (2004) e Saleh *et al.* (2015a) dizendo que em situações com parâmetros e limites de controle estimados, esses estão sujeitos à variabilidade inserida no processo de estimação. As equações (80) e (81) explicam o comportamento do ARL_0 em situações com parâmetros conhecidos, e as equações (82) e (83) mostram o comportamento do ARL_0 em situações com parâmetros estimados, caracterizando-o como uma variável aleatória.

$$P(F_i | \hat{\mu}, \hat{\sigma}) = P(\hat{\mu}_i < \overline{LIC} \text{ ou } \hat{\mu}_i > \overline{LSC} | \hat{\mu}, \hat{\sigma}) = p \quad (80)$$

O valor esperado de RL, $E(RL) = ARL$, é o inverso de p:

$$E(RL | \hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \frac{1}{P(F_i | \hat{\mu}, \hat{\sigma})} \quad (81)$$

As equações (80) e (81) deduzem o cálculo do ARL_0 em situações com parâmetros conhecidos. Nessa situação, o ARL_0 se comporta segundo uma distribuição geométrica, de modo que o valor médio do RL ($E(RL) = ARL$) pode ser definido como $1/\alpha$ (sendo $\alpha = p$, sendo “p” a probabilidade de que um ponto ($\hat{\mu}_i$) se localize além dos limites de controle estimados \overline{LIC} e \overline{LSC} , a partir da média estimada ($\hat{\mu}$) e desvio-padrão estimado ($\hat{\sigma}$)). F_i representa o evento de um ponto estar localizado além dos limites de controle. Quando os parâmetros e limites de controle são estimados, o RL se torna uma variável aleatória, devido à variabilidade existente entre as diferentes estimativas possíveis, a partir das amostras coletadas. Logo:

$$E(P(F_i | \hat{\mu}, \hat{\sigma})) = P(\hat{\mu}_i < \overline{LIC} \text{ ou } \hat{\mu}_i > \overline{LSC} | \hat{\mu}, \hat{\sigma}) = p \quad (82)$$

$$E(RL | \hat{\mu}, \hat{\sigma}) = E\left(\frac{1}{P(F_i | \hat{\mu}, \hat{\sigma})}\right) \quad (83)$$

As equações (82) e (83) mostram que, o uso de parâmetros estimados faz com que o ARL_0 deixe de ser um valor fixo e determinado pela razão $1/\alpha$, e passe a se comportar como uma variável aleatória. Sendo assim, a probabilidade (p) de um ponto ($\hat{\mu}_i$) se localizar além dos limites de controle (\overline{LIC} e \overline{LSC}), calculados a partir dos parâmetros de média ($\hat{\mu}$) e desvio-padrão ($\hat{\sigma}$) estimados também assume caráter aleatório, de modo que o ARL_0 passa a ser calculado a partir do valor esperado (valor médio, $E(RL)$) do inverso da probabilidade de ocorrência de um falso alarme (ou seja $E(RL) = E(1/p)$).

Os estudos sobre o aumento da incidência de falsos alarmes, ou seja, um indicativo de deslocamento de um parâmetro estatístico, devem ser conduzidos e são relevantes para o ambiente produtivo. A sinalização de descontrole no processo poderá ser um indicativo para uma interferência no processo. Dessa maneira, uma interrupção desnecessária, de acordo com Woodall (1985), poderá trazer prejuízos para a organização. Costa *et al.* (2014) afirmam que interrupções desnecessárias poderão paralisar o andamento das operações e atividades dos operadores, bem como desregular processos anteriormente calibrados. Quesenberry (1993) argumenta que a alta incidência de falsos alarmes poderá levar a investigações de causas inexistentes, comprometendo a credibilidade dos gráficos de controle. Jones-Farmer *et al.* (2014) dizem que uma alta incidência de falsos alarmes gera uma perda de confiança em qualquer informação que algum ponto além dos limites de controle poderá fornecer.

Por outro lado, Gryna (1998a) afirma que, não paralisar uma operação, quando necessária, poderá gerar produtos não conformes, aumentando os custos da organização com retrabalhos e refugos. Dessa forma, verifica-se a importância de haver gráficos de controle com desempenho estatístico satisfatório, não somente para a conformidade de produtos e processos, como também para a lucratividade das organizações.

2.8 Efeitos do tamanho amostral (n) e quantidade de amostras no desempenho

As referências bibliográficas sobre o assunto utilizam um total de vinte a trinta amostras de tamanho igual a cinco para a construção dos gráficos de Shewhart, retiradas de um processo controlado, sendo suficientes para definição dos limites de controle (QUESEN-

BERRY, 1993). Segundo Lourenço Filho (1976) e Chen (1997), essa escolha é feita devido a evidências empíricas relacionadas ao funcionamento do gráfico de controle. Entretanto, Chen (1997) afirma que nesse procedimento, desconsidera-se o aumento da incidência de falsos alarmes, em decorrência da estimação dos parâmetros estatísticos do processo.

A quantidade amostral de vinte a trinta amostras, de tamanho igual a cinco, é discutido por Chen (1997) e Jensen *et al.* (2006). Segundo os autores, essa quantidade deverá ser superior em relação a quantidade amostral proposta por Shewhart. Chen (1997), por exemplo, sugere cem amostras de tamanho igual a cinco, para que o desempenho esperado seja igual a 370,40 (mesmo valor sugerido por Quesenberry (1993)) ou então cinquenta amostras de tamanho igual a dez, para que seja obtido o mesmo valor do ARL_0 . Castagliola *et al.* (2009) sugerem, pelo menos, duzentas amostras ($m = 200$) para um gráfico de controle de variância (S^2).

Porém, verificando as quantidades amostrais levantadas por Quesenberry (1993), Chen (1997) e Castagliola *et al.* (2009), ressalta-se o argumento de Yourstone e Zimmer (1992), de modo que a quantidade amostral utilizada deverá ser viável operacionalmente e economicamente. Ou seja, por mais que a quantidade amostral utilizada garanta um desempenho estatístico satisfatório, deve-se verificar se essa quantidade é viável operacionalmente (isso significa, se é aceitável a quantidade de amostras coletadas em relação a dificuldade para a coleta) e economicamente (isso significa, se os custos envolvidos para se coletar a quantidade amostral especificada não irá encarecer os custos do produto final).

Chakraborti (2000) avalia os efeitos da estimação dos parâmetros do processo na métrica ARL para os gráficos de controle de Shewhart. As Tabelas 2.8, 2.9 e 2.10 trazem os resultados obtidos em simulações, após 1.000.000 de replicações. As rodadas analisaram tanto os valores para processos controlados ($\delta=0$), quanto para processos fora de controle ($\delta>0$). Os valores entre parênteses indicam os valores do erro padrão.

Tabela 2.8: Valores do ARL para média desconhecida e variância conhecida, $n=5$ e $\alpha=0,0027$

m	δ				
	0	0,5	1	1,5	2
5	238,26 (0,32736)	58,04 (0,21205)	6,06 (0,01833)	1,73 (0,00195)	1,11 (0,00033)
10	277,72 (0,26649)	45,53 (0,12552)	5,17 (0,00851)	1,64 (0,00111)	1,09 (0,00019)
20	311,06 (0,19440)	38,93 (0,07101)	4,80 (0,00495)	1,60 (0,00071)	1,08 (0,00012)
30	325,88 (0,15518)	36,97 (0,05280)	4,70 (0,00386)	1,59 (0,00056)	1,08 (0,00010)
50	340,73 (0,11125)	35,45 (0,03795)	4,62 (0,00287)	1,58 (0,00043)	1,08 (0,00007)
75	349,31 (0,08261)	34,77 (0,02976)	4,57 (0,00229)	1,58 (0,00034)	1,08 (0,00006)
100	354,16 (0,06532)	34,43 (0,02539)	4,55 (0,00195)	1,57 (0,00030)	1,08 (0,00006)
200	361,79 (0,03621)	33,89 (0,01746)	4,52 (0,00136)	1,57 (0,00021)	1,08 (0,0004)
300	364,55 (0,02496)	33,73 (0,01403)	4,51 (0,00111)	1,57 (0,00017)	1,08 (0,00003)
500	366,79 (0,01557)	33,60 (0,01086)	4,51 (0,00085)	1,57 (0,00013)	1,08 (0,00002)
1000	368,56 (0,00803)	33,50 (0,00762)	4,50 (0,00060)	1,57 (0,00009)	1,08 (0,00002)
100000	370,35 (0,00008)	33,40 (0,00076)	4,50 (0,00006)	1,57 (0,00009)	1,08 (0,00002)

Fonte: Chakraborti (2000)

Tabela 2.9: Valores do ARL para média conhecida e variância desconhecida, $n=5$ e $\alpha=0,0027$

m	δ				
	0	0,5	1	1,5	2
5	2037,61 (34,34920)	75,52 (0,41230)	6,11 (0,00820)	1,72 (0,000730)	1,10 (0,00012)
10	744,68 (1,88510)	47,03 (0,05890)	5,14 (0,00303)	1,64 (0,00039)	1,09 (0,00007)
20	511,73 (0,54980)	39,14 (0,02560)	4,79 (0,00172)	1,60 (0,00024)	1,08 (0,00004)
30	457,03 (0,35520)	37,01 (0,01840)	4,68 (0,00131)	1,59 (0,00019)	1,08 (0,00003)
50	418,87 (0,23060)	35,52 (0,01300)	4,61 (0,00097)	1,58 (0,00014)	1,08 (0,00002)
75	401,91 (0,17370)	34,79 (0,01010)	4,57 (0,00077)	1,58 (0,00012)	1,08 (0,00002)
100	393,61 (0,14470)	34,40 (0,00860)	4,55 (0,00066)	1,57 (0,00001)	1,08 (0,00002)
200	381,76 (0,09660)	33,90 (0,00590)	4,52 (0,00046)	1,57 (0,00007)	1,08 (0,00001)
300	377,93 (0,07740)	33,73 (0,00470)	4,51 (0,00037)	1,57 (0,00006)	1,08 (0,00001)
500	374,93 (0,05890)	33,59 (0,00360)	4,51 (0,00029)	1,57 (0,00004)	1,08 (0,00001)
1000	372,61 (0,04120)	33,50 (0,00260)	4,50 (0,00020)	1,57 (0,00003)	1,08 (0,00001)
100000	370,39 (0,00410)	33,40 (0,00010)	4,50 (0,00002)	1,57 (0,00000)	1,08 (0,00000)

Fonte: Chakraborti (2000)

Tabela 2.10: Valores do ARL para média e variância desconhecidos, $n=5$ e $\alpha=0,0027$

m	δ				
	0	0,5	1	1,5	2
5	1106,23 (17,22190)	205,55 (15,72930)	9,55 (0,04230)	1,96 (0,00190)	1,14 (0,00024)
10	532,96 (1,38370)	69,20 (0,19140)	6,06 (0,00650)	1,72 (0,00070)	1,10 (0,00011)
20	422,16 (0,45800)	46,34 (0,04990)	5,14 (0,00280)	1,64 (0,00040)	1,09 (0,00006)
30	399,06 (0,31370)	41,26 (0,03130)	4,90 (0,00200)	1,61 (0,00030)	1,08 (0,00005)
50	384,55 (0,21470)	37,80 (0,02010)	4,73 (0,00140)	1,59 (0,00020)	1,08 (0,00004)
75	378,59 (0,16510)	36,22 (0,01500)	4,65 (0,00110)	1,58 (0,00020)	1,08 (0,00003)
100	375,86 (0,13910)	35,53 (0,01250)	4,61 (0,00090)	1,58 (0,00010)	1,08 (0,00002)
200	372,77 (0,09470)	34,42 (0,00830)	4,55 (0,00060)	1,57 (0,00009)	1,08 (0,00002)
300	371,83 (0,07630)	34,06 (0,00660)	4,53 (0,00050)	1,57 (0,00007)	1,08 (0,00001)
500	371,34 (0,05850)	33,81 (0,00510)	4,52 (0,00040)	1,57 (0,00006)	1,08 (0,00001)
1000	370,74 (0,04110)	33,60 (0,00350)	4,51 (0,00030)	1,57 (0,00004)	1,08 (0,00007)
100000	370,37 (0,00411)	33,40 (0,00300)	4,50 (0,00003)	1,57 (0,00004)	1,08 (0,00001)

Fonte: Chakraborti (2000)

As tabelas 2.8, 2.9 e 2.10 mostram três situações distintas, os resultados do ARL_0 obtidos e seus respectivos erros padrão. A Tabela 2.8 mostra uma situação com média desconhecida e variância conhecida; a Tabela 2.9 mostra uma situação com média conhecida e variância desconhecida; e, por fim, a Tabela 2.10 mostra uma situação com ambos os parâmetros desconhecidos. Para as três situações, utilizou-se um tamanho de amostra igual a cinco ($n=5$) e erro tipo I igual a 0,0027 (equivalente a três desvios-padrão em relação a média). De modo semelhante, as três situações mostram que o gráfico de controle de Shewhart é pouco

eficiente para detectar pequenos deslocamentos ($\delta=0,5$). Na Tabela 2,7, esse valor é de 58,04 (ou seja, são necessárias 58 amostras, aproximadamente, para o gráfico de controle detectar o descontrole no processo); na Tabela 2.8, o valor é de 75,52 (aproximadamente 76 amostras para detectar o descontrole no processo); e na Tabela 2.9, o ARL_1 é de 205,55 (aproximadamente 206 amostras para detectar o descontrole no processo). Quando o deslocamento passa a ser igual a 1 ($\delta=1$), a situação com ambos os parâmetros desconhecidos apresenta um ARL_1 superior aos demais (são necessárias nove amostras, aproximadamente, para detectar o descontrole no processo. Para as outras duas situações, são necessárias apenas seis amostras para detectar o descontrole no processo). Para grandes deslocamentos de parâmetros ($\delta=2$), as três situações apresentam ARL_1 semelhantes: é necessária apenas uma amostra para detectar o descontrole no processo.

Em relação ao ARL_0 , tomando-se como base a quantidade amostral igual a vinte ($m=20$), verifica-se que o valor do ARL_0 será igual a 311,06 para média desconhecida e variância conhecida; 511,73, com média conhecida e variância desconhecida; e, por fim, 422,16 para ambos os parâmetros sendo desconhecidos. A partir desses resultados, verifica-se que o desempenho obtido, tomando como base vinte amostras, de tamanho igual a cinco e três desvios-padrão em relação à média, será distinto em relação ao desempenho esperado igual a 370,40, quando os parâmetros forem conhecidos. Mesmo que, para as duas situações, o valor do ARL_0 foi superior ao valor esperado, por se tratar de um valor médio, é possível que haja uma alta variabilidade entre os diferentes valores gerados pela simulação. Tal valor somente é obtido a medida que a quantidade de amostras tende ao valor máximo simulado, de 100000 amostras ($m=100000$), fazendo com que o ARL_0 seja igual ao valor teórico encontrado na literatura de 370,40 para as três situações simuladas.

Chakraborti (2000) conclui que, a partir dos valores levantados nas tabelas 2.8, 2.9 e 2.10, o caso mais crítico que afeta o desempenho dos gráficos de controle, devido ao uso de parâmetros estimados, é quando a variância é desconhecida (e deverá ser estimada). Nazir *et al.* (2013) enfatiza que, os gráficos de controle deverão ter propriedades robustas que deverão garantir um nível de desempenho desejado, mesmo que os parâmetros sejam estimados e a quantidade de dados amostrais seja limitada.

2.9 Exemplos de artigos na literatura sobre avaliação de desempenho

Encontra-se na literatura sobre gráficos de controle diferentes avaliações e métodos para a obtenção de resultados ao se avaliar o desempenho. Esta seção trata, especificamente, quais são os trabalhos encontrados na literatura que avaliam o desempenho do gráfico de controle e o tipo de gráfico de controle avaliado, a qual pode ser resumida de acordo com o Quadro 2.3. Consequentemente, esta seção busca sintetizar a forma como os trabalhos referentes à avaliação do desempenho dos gráficos de controle foram desenvolvidos e como esta dissertação de diferencia em relação aos demais trabalhos.

Quadro 2.3: Características dos trabalhos encontrados na literatura

Autor	Tipo de gráfico de controle	Indicador de desempenho
Quesenberry (1993)	X-bar	ARL e SDRL
Chen (1997)	X-bar	ARL e SDRL
Chakraborti (2000)	X-bar	ARL
Chakraborti e Wiel (2008)	X-bar e gráfico de controle não paramétrico	ARL e percentil
Epprecht <i>et al.</i> (2015)	Gráfico de controle S e S ²	Erro α (FAR - <i>False alarm rate</i>)
Saleh <i>et al.</i> (2015a)	X-bar	AARL e SDARL
Saleh <i>et al.</i> (2015b)	Gráfico de controle EWMA	AARL, SDARL e percentil

Fonte: Elaborado pelo autor

Os trabalhos listados no Quadro 2.3 tratam, em sua maioria, de avaliar o desempenho dos gráficos de controle pela medida do valor médio (ARL) dos valores da distribuição do RL, porém também se utilizam da medida de dispersão para verificar como os valores estão dispersos dentro da distribuição de valores (como Quesenberry (1993), Chen (1997), Saleh *et al.* (2015a) e Saleh *et al.* (2015b)). Dois trabalhos avaliam a própria distribuição de valores em percentis (Chakraborti e Wiel (2008) e Saleh *et al.* (2015b)). Apenas Chakraborti (2000) avalia o desempenho do gráfico de controle X-bar apenas por meio do ARL.

Esta dissertação se concentra na avaliação do desempenho dos gráficos de controle X-bar, tendo como base a concentração de valores encontrados no intervalo de 0 até 200

da distribuição do RL, como alternativa em relação ao ARL. Esta análise tem como principal característica a ênfase na proporção de valores que se concentram no intervalo entre 0 e 200, de modo que, esses valores representam uma situação indesejada dentro do monitoramento do processo, pois indica que a incidência de falsos alarmes ocorre antes do esperado. Verifica-se nos trabalhos listados no Quadro 2.3 que, a grande maioria se concentra na avaliação do desempenho por meio do ARL, não dando ênfase a um intervalo específico da distribuição de valores.

3. SIMULAÇÃO E RESULTADOS

Para a realização da simulação, utilizou-se o *software* Maple 13 para auxiliar nos cálculos. A simulação tem como objetivo verificar o efeito na distribuição do ARL_0 ao se utilizar cada um dos cinco estimadores do desvio-padrão propostos por Saleh *et al.* (2015a) e Saleh *et al.* (2015b), conforme a alteração dos valores da quantidade de amostras (m) e tamanho amostral (n). Para que essa análise fosse feita, geraram-se um total de 5000 valores do ARL_0 por rodada, ou seja, para cada valor de m , n e estimador do desvio-padrão utilizado para a análise. Isso significa, por exemplo, para o estimador SD1 e valores amostrais de $m=20$ e $n=5$, geraram-se 5000 valores do ARL_0 ; assim como, para o estimador SD2 e valores amostrais $m=50$ e $n=5$, também foram gerados 5000 valores do ARL_0 , e assim foi feito para os demais valores de m e n utilizados nesta simulação.

A simulação verifica, em um processo hipotético, sob controle e com média e desvio-padrão desconhecidos, a quantidade de pontos que se localizam além dos limites de controle. Com base nesses valores, o programa calcula o erro tipo I real e, com isso, retorna o valor do ARL_0 definido a partir do erro tipo I real.

Conforme o argumento utilizado por Chakraborti *et al.* (2001), pelo fato do ARL apresentar alta variabilidade, utilizar a sua esperança média como medida de desempenho se torna pouco atrativo. Portanto, utilizaram-se os gráficos de distribuição para auxiliar na análise, elaborados pelo *software* Statistica 7. Ao longo da simulação e dos resultados obtidos, os estimadores do desvio-padrão propostos por Saleh *et al.* (2015a) e Saleh *et al.* (2015b) tiveram a sua nomenclatura alterada: o primeiro estimador $\hat{\sigma}_1$ será redefinido como SD1; $\hat{\sigma}_2$ será redefinido como SD2; $\hat{\sigma}_3$ como SD3; $\hat{\sigma}_4$ como SD4; e $\hat{\sigma}_5$ como SD5.

Em relação à análise dos resultados, utilizou-se o teste estatístico para comparação entre proporções, de modo a avaliar a proporção de valores que estão localizados no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL_0 . Montou-se, assim, uma comparação entre estimadores do desvio-padrão para cada cenário. Utilizou-se o *software* Statistica 7 para auxiliar nos cálculos e nos testes estatísticos.

3.1 Simulação dos valores do ARL_0 para os cinco estimadores do desvio-padrão

Considerou-se um processo hipotético, com capacidade infinita de produção, média igual a zero, desvio-padrão igual a um, estando o mesmo controlado e havendo uma aderência dos dados do processo a um modelo de probabilidade seguindo uma distribuição normal. Isso significa que não foi simulada nenhuma situação de descontrole. Consequentemente, interessou-se apenas em verificar o ARL_0 . O ARL_1 não foi considerado na simulação. No total, geraram-se 5000 valores de ARL_0 em cada rodada, de modo a contribuir para a análise da distribuição do ARL. Também, optou-se em adotar um valor de três desvios-padrão na construção dos limites de controle.

A simulação representa as duas fases de desenvolvimento dos gráficos de controle: a Fase 1, em que os parâmetros estatísticos são estimados; e a Fase 2, que representa o monitoramento do processo, com base nos parâmetros estatísticos e limites de controle definidos na Fase 1. Ressalta-se que, tanto a média quanto o desvio padrão são desconhecidos e tiveram que ser estimados. A seguir, apresentam-se os parâmetros utilizados para realização da simulação, a variação de cada um e um memorial com os cálculos que foram realizados para obter os valores esperados. Elaboraram-se cinco programas, os quais representam cada estimador do desvio-padrão. O Quadro 3.1 faz uma abordagem de cada parâmetro da simulação utilizado e os valores assumidos por cada um, para cada rodada simulada. Na Figura 3.1, ilustra-se o programa utilizado para a simulação.

Quadro 3.1: Variáveis utilizadas na simulação

Parâmetro	Definição	Aplicação
j	Indica o número de vezes que os limites de controle são estimados, conforme os dados do processo ficam disponíveis.	20
k	Número de amostras extraídas após os cálculos dos limites de controle.	100
m	Número de amostras utilizadas para estimar os limites de controle.	20, 50,100,200
n	Tamanho da amostra utilizada na estimação dos limites de controle.	5, 10

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.1: Modelagem para cálculo da distribuição do ARL, utilizando-se SD3

```

Loading LinearAlgebra
[>
Loading Statistics
[>
Loading Student-Calculus1
[>
Loading MathematicalFunctions
with(RandomTools):
[>
[>
[>
[>
> RRL := proc(omega, j, k, m, n, gamma); local X, M, DV, s, p, i, g, Y, C, MX, EP, LIC, ARL, C4, v, SD3, soma, t, alpha, LSC, VR, r, MM, SM, N, LDV, DP, SVR, MVR, STotal, MDV, L, AM,
RT, Total, KI, M :=  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ; DV :=  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ; for r from 1 to omega do for s from 1 to j do; for t from 1 to m do p := Generate(integer(range = 1..4)); X_t
:= Mean(Sample(Normal(M_p, DV_p), n)); VR_t := Variance(Sample(Normal(M_p, DV_p), n)); SM := add(X_t, t = 1..m); MM :=  $\frac{SM}{m}$ ; SVR := add(VR_t, t = 1..m);
MVR :=  $\frac{SVR}{m}$ ; DP :=  $MVR^{0.5}$ ; v := m * (n - 1); C4 :=  $\frac{4 * (v + 1) - 4}{4 * (v + 1) - 3}$ ; SD3 :=  $\frac{DP}{C4}$ ; end do; LSC := MM + 3 *  $\frac{SD3}{n^{0.5}}$ ; LIC := MM - 3 *  $\frac{SD3}{n^{0.5}}$ ; for i from 1 to k do L
:=  $\begin{bmatrix} M_1 + \gamma DV_1 \\ M_2 + \gamma DV_2 \\ M_3 + \gamma DV_3 \\ M_4 + \gamma DV_4 \end{bmatrix}$ ; g := Generate(integer(range = 1..4)); Y_i := Mean(Sample(Normal(L_g, DV_g), n)); if LIC <= Y_i <= LSC then C_i := 0 else C_i := 1 end if end do;
soma_s := add(C_i, i = 1..k); end do; STotal := add(soma_s, s = 1..j); alpha := evalf( $\frac{STotal}{j * k}$ , 5); ARL := evalf( $\frac{1}{\alpha}$ , 5); print(ARL); end do end proc

```

Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com a Figura 3.1, os termos utilizados no programa Maple 13 para o desenvolvimento dos cálculos foram:

r – indica o número de valores (ARL) que o programa irá gerar.

M – indica a média do processo controlado (a mesma é igual a zero, ou seja, $\mu=0$).

DV – indica o desvio-padrão do processo controle (o mesmo é igual a um).

p – parâmetro utilizado para explicar a variação dos vetores M e DV. Como os mesmos possuem quatro linhas, de iguais valores, a sua variação será de um até quatro.

t – variável que indica o número de amostras utilizado (variando de 1 até m).

X – média amostral estimada, a partir de amostras coletadas de um processo sob controle.

VR – variância amostral estimada, a partir de amostras coletadas de um processo sob controle.

SM – somatória das médias amostrais, variando de 1 até m.

MM – média das médias amostrais.

LSC – Limite Superior de Controle.

LIC – Limite Inferior de Controle.

L – vetor que indica o deslocamento sofrido nos parâmetros de média.

γ - constante que indica a variação sofrida no parâmetro de média.

g - parâmetro utilizado para explicar a variação dos vetores M e DV . Como os mesmos possuem quatro linhas, de iguais valores, a sua variação será de um até quatro. Porém, g é utilizado após ocorrer o deslocamento de parâmetro.

Y - média amostral estimada (após ocorrer o deslocamento do parâmetro de média. Nesta simulação, conforme já mencionado, não foi considerado deslocamento de parâmetro. Logo, o valor de Y é igual a X).

C - fator binário (0 ou 1) que indica se a nova média amostral se encontra ($C_i = 0$) ou não ($C_i = 1$) entre os limites de controle. Ou seja, é a quantidade de pontos fora dos limites de controle.

soma - indica a somatória de todos os C_s obtidos, variando de 1 até k .

$STotal$ - indica a somatória de todas as somas obtidas, variando de 1 até j .

α - indica o erro tipo I estimado.

ARL - valor do desempenho calculado.

Resumidamente, a simulação representa um processo controlado, em que se deseja obter o valor do ARL_0 . Inicialmente, estimam-se os parâmetros de média e desvio-padrão para o cálculo dos limites de controle (LSC e LIC). A média das médias amostrais estimada (MM) é calculada pela somatória (SM) das médias obtidas (X_t , variando t de 1 até m , e tamanho das amostras igual a (n)) sobre o número de amostras (m). A variável m irá assumir, para cada rodada, os valores de 20, 50, 100 e 200. E n , assumirá valores iguais a 5 e 10. Deseja-se assim, verificar conforme Chen (1997) e Jensen *et al.* (2006), se a medida que o número de amostras aumenta, o ARL com parâmetros estimados tende a se aproximar de situações com parâmetros conhecidos. Os cinco programas se diferem em relação ao estimador do desvio-padrão amostral. A seguir, apresentam-se as formas como os cinco estimadores do desvio-padrão são estimados em cada programa.

Cálculo da média das médias amostrais (MM):

$$X_t := \text{Mean}(\text{Sample}(\text{Normal}(M_p, DV_p), n)) \quad (84)$$

$$SM := \text{add}(X_t, t = 1..m) \quad (85)$$

$$MM := \frac{SM}{m} \quad (86)$$

A equação (84) mostra o cálculo da média amostral (X_t), calculada a partir de uma distribuição normal e com amostras coletadas de tamanho igual a n , com média e desvio-padrão já estabelecidos. A equação (85) mostra a somatória de todas as médias amostrais (SM), sendo t a variável que indica o número da amostra, variando de um até m . O termo “ m ” indica o total de amostras. A equação (86) mostra o cálculo da média das médias amostrais (MM), calculada pela razão entre a somatória das médias amostrais (SM), pelo total de amostras (m). O termo “MM” é calculado da mesma forma para os cinco programas.

O estimador SD1 (calculado com base na amplitude amostral média):

$$R_t := \text{Range}(\text{Sample}(\text{Normal}(M_p, DV_p), n)) \quad (87)$$

$$SVR := \frac{\text{add}(R_t, t=1..m)}{m} \quad (88)$$

$$SD1 := \frac{SVR}{d_2} \quad (89)$$

$$LSC := MM + \frac{3 * SD1}{\sqrt{n}} \quad (90)$$

$$LIC := MM - \frac{3 * SD1}{\sqrt{n}} \quad (91)$$

A equação (87) mostra como a amplitude de uma amostra é definida, de tamanho igual a n , partindo-se de um processo com dados normalizados e média e desvio-padrão já estabelecidos. A equação (88) mostra o cálculo da amplitude amostral média, com base na somatória entre as amplitudes de cada amostra (R_t , variando t de um até m , sendo m o total de amostras), dividida pelo total de amostras (m). A equação (89) mostra o cálculo do estimador SD1, definido pela razão entre a amplitude amostral média (SVR) pela constante d_2 (tabelada conforme Tabela 2.1). As equações (90) e (91) mostram os cálculos dos limites de controle, calculados a partir da média das médias amostrais (MM), o estimador do desvio-padrão (SD1), com uma distância de três desvios-padrão em relação à média.

O estimador SD2 (calculado com base no desvio-padrão amostral médio):

$$DR_t := \text{StandardDeviation}(\text{Sample}(\text{Normal}(M_p, DV_p), n)) \quad (92)$$

$$SVR := \text{add}(DR_t, t=1..m) \quad (93)$$

$$MDR := \frac{SVR}{m} \quad (94)$$

$$SD2 := \frac{MDR}{c_4} \quad (95)$$

$$LSC := MM + \frac{3 * SD2}{\sqrt{n}} \quad (96)$$

$$LIC := MM - \frac{3 * SD2}{\sqrt{n}} \quad (97)$$

A equação (92) mostra o cálculo do desvio-padrão amostral médio (DR_t), obtido a partir de uma distribuição normal, com média e desvio-padrão já estabelecidos e amostras de tamanho igual a m . A equação (93) mostra a somatória dos desvios-padrão amostrais (SVR), calculada a partir do desvio-padrão de cada amostra (DR_t , variando t de um até m , sendo m o total de amostras). A equação (94) calcula o desvio-padrão amostral médio (MDR), calculado pela razão da somatória dos desvios-padrão amostrais (SVR), pelo total de amostras (m). A equação (95) calcula o estimador $SD2$, a partir da razão entre o desvio-padrão amostral médio (MDR) pela constante tabelada c_4 (conforme Tabela 2.2). As equações (96) e (97) mostram os cálculos dos limites de controle, calculados a partir da média das médias amostrais (MM), o estimador do desvio-padrão ($SD2$), com uma distância de três desvios-padrão em relação à média.

O estimador $SD3$ (calculado pela razão entre o desvio-padrão agrupado pela constante c_4), $SD4$ (calculado pelo produto entre o desvio-padrão agrupado pela constante c_4) e $SD5$ (é o próprio desvio-padrão agrupado):

$$VR_t := \text{Variance}(\text{Sample}(\text{Normal}(M_p, DV_p), n)) \quad (98)$$

$$SVR := \text{add}(VR_t, t=1..m) \quad (99)$$

$$MVR := \frac{SVR}{m} \quad (100)$$

$$DP := \sqrt{MVR} \quad (101)$$

$$SD3 := \frac{DP}{c_4} \quad (102)$$

$$LSC := MM + \frac{3 * SD3}{\sqrt{n}} \quad (103)$$

$$LIC := MM - \frac{3 * SD3}{\sqrt{n}} \quad (104)$$

$$SD4 := c_4 * DP \quad (105)$$

$$LSC := MM + \frac{3 * SD4}{\sqrt{n}} \quad (106)$$

$$LIC := MM - \frac{3 * SD4}{\sqrt{n}} \quad (107)$$

$$SD5 := DP \quad (108)$$

$$LSC := MM + \frac{3 * SD5}{\sqrt{n}} \quad (109)$$

$$LIC := MM - \frac{3 * SD5}{\sqrt{n}} \quad (110)$$

A equação (98) mostra o cálculo da variância amostral (VR_t), calculada de uma distribuição normal e com amostras coletadas de tamanho n , com média e desvio-padrão já definidos. A equação (99) mostra o cálculo da somatória das variâncias amostrais (SVR), obtido pela soma das variâncias amostrais (VR_t , variando t de um até m , sendo m o total de amostras). A equação (100) mostra o cálculo da média das variâncias amostrais, calculada pela razão entre a somatória das variâncias amostrais (SVR) pelo total de amostras (m). A equação (101) mostra o cálculo do desvio-padrão agrupado (DP), sendo definido pela raiz da variância amostral média. A equação (102) mostra o cálculo do estimador SD3, calculado pela razão entre o desvio-padrão agrupado (DP) pela constante tabelada c_4 (Tabela 2.2). Reforça-se que, o tamanho amostral que irá definir o valor de c_4 é definido por $v+1$, sendo $v = m*(n-1)$. As equações (103) e (104) mostram os cálculos dos limites de controle, calculados a partir da média das médias amostrais (MM), o estimador do desvio-padrão (SD3), com uma distância de três desvios-padrão em relação à média. A equação (105) mostra o cálculo do estimador SD4, calculado pelo produto entre o desvio-padrão agrupado (DP) pela constante tabelada c_4 . As equações (106) e (107) mostram os cálculos dos limites de controle, calculados a partir da média das médias amostrais (MM), o estimador do desvio-padrão (SD4), com uma distância de três desvios-padrão em relação à média. A equação (108) mostra o cálculo do estimador SD5, que é o próprio desvio-padrão agrupado. As equações (109) e (110) mostram os cálculos dos limites de controle, calculados a partir da média das médias amostrais (MM), o estimador do desvio-padrão (SD5), com uma distância de três desvios-padrão em relação à média.

A simulação, então, verifica os pontos que caem além dos limites de controle (ou seja, $Y_i < LIC$ ou $Y_i > LSC$). A localização dos pontos é representada pelo fator C_i , sendo que i varia de 1 até k . A variável k indica o número de amostras extraídas após o cálculo dos limites de controle (nesta dissertação, escolheu-se arbitrariamente k como sendo igual a 100). Ressalta-se que, de acordo com Jensen *et al.* (2006), devido a falta de amostras suficientes para que seja feito o cálculo dos limites de controle a partir de parâmetros estimados, recomenda-se a atualização dos mesmos conforme os dados amostrais se tornam disponíveis.

O fator C_i , então, verifica a quantidade de pontos que irão cair além dos limites de controle, sendo de caráter binário (ou seja, igual a um quando o ponto cair além dos limites de controle, e zero quando o ponto se localiza entre os limites de controle). O termo $soma_s$ faz uma somatória de todos os pontos que caem além dos limites de controle, no intervalo entre cálculos dos limites de controle, sendo que o termo “ i ” varia de um até k (igual a 100). Em seguida, o termo $STotal$ faz uma somatória de todos os $soma_s$, de modo que “ s ” varia de um até j (j indica o número de vezes em que os limites de controle são estimados e recalculados. Para esta dissertação, escolheu-se arbitrariamente o valor de j como sendo 20).

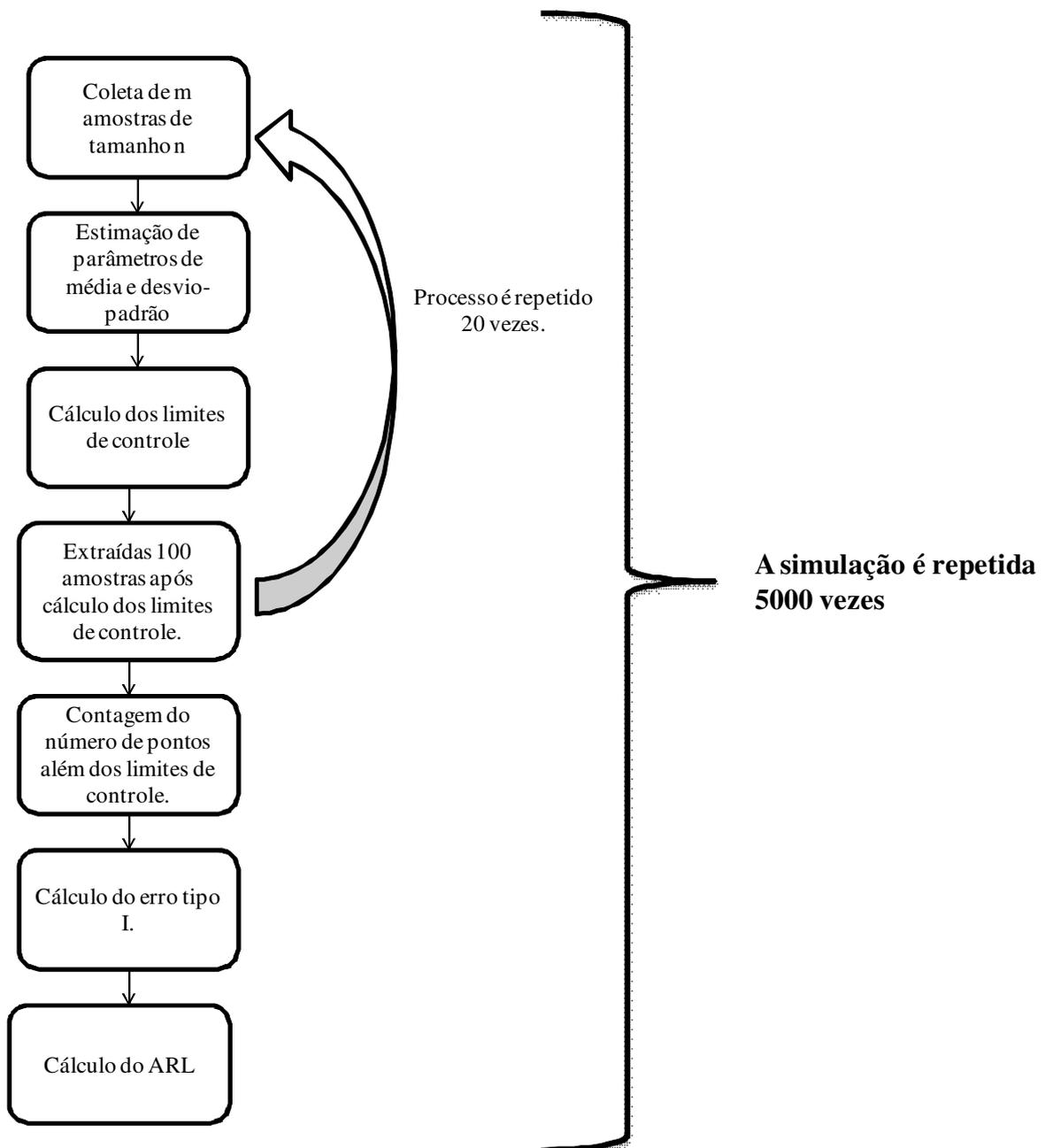
Em sequência, a simulação utiliza todos os pontos que caíram além dos limites de controle e que foram contados pelo termo $STotal$, e os divide pelo número total de amostras extraídas desde o início da simulação, ou seja, 2000 amostras (resultante do produto entre o número de vezes que os limites de controle são calculados, ou seja, 20, pelo número de amostras que são extraídas após cada cálculo dos limites de controle, sendo igual a 100 amostras). Calcula-se, então, o erro tipo I (ou erro α), que é a razão entre a quantidade de amostras além dos limites de controle ($STotal$), pelo total de amostras extraídas (2000).

Reforça-se que, o erro tipo I calculado nesta simulação é o valor real (e não o nominal. Ou seja, considerando-se três desvios-padrão além da média, o valor do erro tipo I não será, exatamente, 0,27%), obtido a partir do total de pontos localizados além dos limites de controle, estando o processo sob controle. Tendo-se esse valor definido, torna-se possível definir o valor do ARL_0 , que é calculado pelo inverso do erro tipo I, ou seja, $1/\alpha$. Todo o processo da simulação, desde o cálculo inicial dos limites de controle, até o cálculo final do ARL_0 é repetido 5000 vezes, de modo a gerar os 5000 valores do ARL_0 .

Ressalta-se que, a simulação representa as duas fases de desenvolvimento dos gráficos de controle, e se resume conforme a Figura 3.2: representa-se a Fase 1 não em sua totalidade, uma vez que o processo já se encontra controlado. Sendo assim, a Fase 1 é representada apenas na estimação dos parâmetros estatísticos do processo e no cálculo dos limites

de controle. A Fase 2, então, é representada pelo monitoramento do processo propriamente dito. Ou seja, a partir do momento em que as amostras são extraídas e a contagem da quantidade que se encontram além dos limites de controle é feita. Pode-se dizer que, constantemente, a simulação se desloca entre a Fase 1 e a Fase 2, uma vez que, os limites de controle são recalculados conforme as informações do processo se tornam disponíveis, e, após o recálculo, realiza-se o monitoramento do processo.

Figura 3.2: Resumo da simulação



3.2 Resultados obtidos para o ARL_0

Geraram-se 5000 valores para cada estimador do desvio-padrão. Isso significa que, os programas desenvolvidos foram simulados, em cada situação, em um total de 5000 vezes, sendo que o número de amostras (m) foram 20, 50, 100 e 200 e o tamanho da amostra (n) foram 5 e 10. A seguir, apresentam-se as tabelas e gráficos que ilustram os valores do ARL_0 e a sua distribuição para cada cenário. As Tabelas 3.1 e 3.2 mostram os valores médios obtidos do ARL_0 , variando-se o número de amostras (m), para amostras de tamanho 5 e 10 ($n=5$ e $n=10$). Apresentam-se, nas Tabelas 3.3 até 3.10, os valores obtidos de mínimo, máximo e mediana para cada situação simulada. Nos Apêndices A até H são apresentados as tabelas e gráficos da distribuição do ARL para cada situação simulada.

Tabela 3.1: Valores do ARL_0 para $n=5$

m	n=5			
	20	50	100	200
SD1	277,42	393,01	415,89	425,08
SD2	280,12	386,85	408,99	424,68
SD3	285,39	395,87	417,06	440,64
SD4	272,34	383,41	412,57	435,16
SD5	276,49	391,37	415,94	439,36

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 3.2: Valores do ARL_0 para $n=10$

m	n=10			
	20	50	100	200
SD1	307,46	393,96	431,60	429,43
SD2	315,59	395,14	426,50	419,16
SD3	314,11	394,98	431,72	422,38
SD4	304,64	388,72	428,61	423,41
SD5	309,31	392,38	430,57	425,51

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 3.3: Valores extremos, mediana, média e desvio-padrão para n=5 e m=20

	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
Mínimo	86,957	76,923	86,957	83,333	83,333
Máximo	2000,000	2000,000	2000,000	2000,000	2000,000
Média	277,42	280,12	285,39	272,34	276,49
Mediana	222,220	222,220	250,000	222,220	222,220
Desvio-padrão	177,423	195,204	188,813	173,872	182,308

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 3.4: Valores extremos, mediana, média e desvio-padrão para n=5 e m=50

	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
Mínimo	117,650	117,650	125,000	125,000	125,000
Máximo	2000,000	2000,000	2000,000	2000,000	2000,000
Média	393,01	386,85	395,87	383,41	391,37
Mediana	333,330	285,710	333,330	285,710	333,330
Desvio-padrão	274,861	271,874	280,366	264,788	279,530

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 3.5: Valores extremos, mediana, média e desvio-padrão para n=5 e m=100

	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
Mínimo	100,000	133,330	133,330	133,330	133,330
Máximo	2000,000	2000,000	2000,000	2000,000	2000,000
Média	415,89	408,99	417,06	412,57	415,94
Mediana	333,330	333,330	333,330	333,330	333,330
Desvio-padrão	266,046	249,432	264,378	261,389	261,658

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 3.6: Valores extremos, mediana, média e desvio-padrão para n=5 e m=200

	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
Mínimo	111,110	125,000	117,650	142,860	142,860
Máximo	2000,000	2000,000	2000,000	2000,000	2000,000
Média	425,08	424,68	440,64	435,16	439,36
Mediana	400,000	400,000	400,000	400,000	400,000
Desvio-padrão	239,320	249,169	282,046	279,238	284,059

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 3.7: Valores extremos, mediana, média e desvio-padrão para n=10 e m=20

	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
Mínimo	95,238	95,238	100,000	100,000	100,000
Máximo	2000,000	2000,000	2000,000	2000,000	2000,000
Média	307,46	315,59	314,11	304,64	309,31
Mediana	250,000	250,000	250,000	250,000	250,000
Desvio-padrão	190,155	207,085	180,794	175,653	177,505

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 3.8: Valores extremos, mediana, média e desvio-padrão para n=10 e m=50

	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
Mínimo	125,000	133,330	133,330	133,330	125,000
Máximo	2000,000	2000,000	2000,000	2000,000	2000,000
Média	393,96	395,14	394,98	388,72	392,38
Mediana	333,330	333,330	333,330	333,330	333,330
Desvio-padrão	230,190	233,786	240,200	230,241	233,438

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 3.9: Valores extremos, mediana, média e desvio-padrão para n=10 e m=100

	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
Mínimo	153,850	133,330	133,330	133,330	117,650
Máximo	2000,000	2000,000	2000,000	2000,000	2000,000
Média	431,60	426,50	431,72	428,61	430,57
Mediana	333,330	333,330	333,330	333,330	333,330
Desvio-padrão	268,122	260,242	275,458	269,674	271,839

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 3.10: Valores extremos, mediana, média e desvio-padrão para n=10 e m=200

	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
Mínimo	133,330	133,330	133,330	133,330	133,330
Máximo	2000,000	2000,000	2000,000	2000,000	2000,000
Média	429,43	419,16	422,38	423,41	425,51
Mediana	333,330	333,330	333,330	333,330	333,330
Desvio-padrão	299,653	280,146	276,393	279,636	281,472

Fonte: Elaborado pelo autor

As tabelas acima mostram os resultados gerados durante a simulação no *software* Maple 13. Verifica-se, conforme o valor de m aumenta, os valores de média e mediana do ARL_0 resultantes também aumentam. Em relação a mediana dos valores do ARL_0 , não se notou uma diferença significativa entre os diferentes estimadores, podendo ser notado, para o valor médio do ARL_0 . Tal afirmativa se torna evidente para $n=5$, sendo que o estimador do desvio-padrão SD3 apresentou os melhores resultados dos valores médios do ARL_0 .

As Tabelas 3.3 até 3.10, juntamente com os Apêndices de A até H, tratam da distribuição do ARL_0 . Apesar de haver um aumento do valor do ARL_0 médio, verificou-se um aumento na dispersão dos valores do ARL_0 . Não houve estimador do desvio-padrão que prevalecesse em relação aos demais. Sobre os valores de máximo e mínimo, verificou-se que, em todas as condições simuladas, não houve divergências em relação ao valor máximo ($ARL_0 = 2000$). Entretanto, em algumas situações, houve diferenças no valor mínimo do ARL_0 . Quando $m=200$ e $n=5$, os valores mínimos de SD4 e SD5 serão 142, 86, enquanto, para o SD1 será 111,11, SD2 igual a 125 e SD3 será 117,65. A Tabela 3.11 faz um resumo dos melhores resultados obtidos dos valores de média e desvio-padrão para os 5000 valores do ARL_0 gerados em cada rodada simulada, para cada estimador e valores de m e n .

Tabela 3.11: Melhores resultados obtidos de média e variabilidade

Cenário	Média	Desvio-padrão
$n=5$ e $m=20$	285,390 (SD3)	173,872 (SD4)
$n=5$ e $m=50$	395,870 (SD3)	264,788 (SD4)
$n=5$ e $m=100$	417,060 (SD3)	249,432 (SD2)
$n=5$ e $m=200$	440,640 (SD3)	239,320 (SD1)
$n=10$ e $m=20$	315,590 (SD2)	175,653 (SD4)
$n=10$ e $m=50$	395,140 (SD2)	230,190 (SD1)
$n=10$ e $m=100$	431,720 (SD1)	260,242 (SD2)
$n=10$ e $m=200$	429,430 (SD1)	276,393 (SD3)

Fonte: Elaborado pelo autor

3.3 Resultados da análise pelo intervalo inferior

Para que fosse feita a análise pelo intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL_0 , utilizaram-se os valores do ARL_0 obtidos, para cada situação simulada e para cada estimador do desvio-padrão, que se encontravam no intervalo de 0 até 200. Um teste estatísti-

co de comparação entre proporções foi feito para cada combinação de m e n , comparando-se a proporção de valores obtidos entre dois estimadores do desvio-padrão. No total, foram feitos dez testes de comparação de proporção de valores para cada combinação de m e n .

Justifica-se o uso dessa análise, uma vez que, o objetivo é reduzir a incidência de valores ARL_0 abaixo de 200, de modo a verificar se a escolha do estimador do desvio-padrão influencia a incidência de baixos valores do ARL_0 e se a situação simulada, variando-se o tamanho da amostra (n) e a quantidade de amostras (m) também é decisiva para que o gráfico de controle apresente um melhor desempenho. Desse modo, caso haja diferença estatística significativa entre os estimadores do desvio-padrão, como também entre os diferentes valores de n e m , propõe-se a situação em que o desempenho estatístico do gráfico de controle será mais satisfatório. A Tabela 3.12 mostra a proporção de valores do ARL_0 para cada estimador do desvio-padrão, variando-se os valores de m e n , no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL_0 .

Tabela 3.12: Proporção de valores do ARL_0 no intervalo inferior (entre 0 e 200)

Tamanho da Amostra (n) x Quantidade de amostras (m)	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
n=5 e m=20	0,3912	0,3814	0,3767	0,4157	0,4034
n=5 e m=50	0,1404	0,1469	0,1305	0,1419	0,1337
n=5 e m=100	0,0803	0,0892	0,0797	0,0803	0,0764
n=5 e m=200	0,0574	0,0670	0,0663	0,0642	0,0634
n=10 e m=20	0,2753	0,2721	0,2621	0,2877	0,2720
n=10 e m=50	0,0994	0,0890	0,0929	0,0990	0,0937
n=10 e m=100	0,0850	0,0861	0,0830	0,0876	0,0856
n=10 e m=200	0,0470	0,0558	0,0586	0,0570	0,0542

Fonte: Elaborado pelo autor

Com base nos valores levantados na Tabela 3.12, comparou-se as proporções obtidas entre cada estimador do desvio-padrão, variando-se o tamanho da amostra e a quantidade de amostras. No total, elaboraram-se oito rodadas de comparação, de modo que o valor indica o *p-value* resultante da comparação da proporção de valores do ARL_0 que estão concentrados entre 0 e 200. A análise por *p-value* é ressaltada por Montgomery (2009), de modo que, segundo o autor, não é necessário a quem está fazendo a análise definir o nível de significância previamente ao teste estatístico. O autor define o *p-value* como o menor valor possível do nível de significância que levaria a quem realiza o teste estatístico a rejeitar a hipótese

nula (H_0). Portanto, com base no *p-value*, cabe a quem realiza o teste estatístico determinar o quanto os dados são significativos sem determinar um nível de significância previamente.

As Tabelas 3.13 e 3.14 mostram os valores do *p-value* resultantes dos testes estatísticos de comparação entre diferentes proporções dos valores obtidos do ARL_0 , no intervalo de 0 até 200, sendo que a Tabela 3.13 apresenta os valores do teste estatístico de comparação entre proporções para $n=5$ e $m=20, 50, 100$ e 200 . E a Tabela 3.14 apresenta os valores do teste estatístico de comparação entre proporções para $n=10$ e $m=20, 50, 100$ e 200 . Utilizou-se o *software* Statistica 7 para a realização dos cálculos, e os testes estatísticos feitos foram unicaudais (ou seja, verificou-se se uma proporção é maior do que a outra, conforme as equações (111) e (112)).

As equações (111) e (112) exemplificam o tipo de teste estatístico que foi realizado, comparando-se as proporções entre diferentes estimadores do desvio-padrão, variando-se os valores de m e n , sendo que a equação (111) supõe que as proporções entre dois estimadores são iguais (não rejeita H_0) e a equação (112) supõe que a proporção de um estimador é maior que a do outro (rejeita H_0). Reforça-se que, quando a proporção de um estimador é maior do que a de outro estimador, pior é o desempenho apresentado pelo gráfico de controle em decorrência do uso do estimador do desvio-padrão para o cálculo dos limites de controle. As tabelas 3.13 e 3.14 também mostram o resultado dos testes realizados.

Em relação à classificação utilizada da relevância estatística do resultado do teste, o que demonstra que a proporção de valores de um estimador é maior do que a do outro utilizado neste teste estatístico: (L) indica $0,05 < p\text{-value} \leq 0,1$ (relevância estatística moderada); (M) indica $0,01 < p\text{-value} \leq 0,05$ (relevância estatística média); (A) indica $p\text{-value} \leq 0,01$ (relevância estatística alta). Para as demais situações, não há relevância estatística que comprove que a proporção de valores de um estimador é maior do que o de outro, no intervalo entre 0 e 200 na distribuição do ARL_0 .

$$H_0: P_{p1} = P_{p2} \text{ (não rejeita } H_0) \quad (111)$$

$$H_1: P_{p1} > P_{p2} \text{ (rejeita } H_0) \quad (112)$$

Tabela 3.13: Comparação de proporção (*p-value*) entre estimadores para $n=5$

Comparação entre estimadores	$m=20$ e $n=5$	$m=50$ e $n=5$	$m=100$ e $n=5$	$m=200$ e $n=5$
$P_{(SD1)-P_{(SD2)}}$	0,1571 $p_{(SD1)=p_{(SD2)}}$	0,1771 $p_{(SD2)=p_{(SD1)}}$	0,0551 ^L $p_{(SD2)>p_{(SD1)}}$	0,0235 ^M $p_{(SD2)>p_{(SD1)}}$
$P_{(SD1)-P_{(SD3)}}$	0,0680 ^L $p_{(SD1)>p_{(SD3)}}$	0,0740 ^L $p_{(SD1)>p_{(SD3)}}$	0,4560 $p_{(SD1)=p_{(SD3)}}$	0,0324 ^M $p_{(SD3)>p_{(SD1)}}$
$P_{(SD1)-P_{(SD4)}}$	0,0063 ^A $p_{(SD4)>p_{(SD1)}}$	0,4147 $p_{(SD4)=p_{(SD1)}}$	0,5000 $p_{(SD4)=p_{(SD1)}}$	0,0774 ^L $p_{(SD4)>p_{(SD1)}}$
$P_{(SD1)-P_{(SD5)}}$	0,1063 $p_{(SD5)=p_{(SD1)}}$	0,1650 $p_{(SD1)=p_{(SD5)}}$	0,2340 $p_{(SD1)=p_{(SD5)}}$	0,1040 $p_{(SD1)=p_{(SD5)}}$
$P_{(SD2)-P_{(SD3)}}$	0,3141 $p_{(SD2)=p_{(SD3)}}$	0,0088 ^A $p_{(SD2)>p_{(SD3)}}$	0,0438 ^M $p_{(SD2)>p_{(SD3)}}$	0,4442 $p_{(SD2)=p_{(SD3)}}$
$P_{(SD2)-P_{(SD4)}}$	0,0002 ^A $p_{(SD4)>p_{(SD2)}}$	0,2385 $p_{(SD2)=p_{(SD4)}}$	0,0551 ^L $p_{(SD2)>p_{(SD4)}}$	0,2859 $p_{(SD2)=p_{(SD4)}}$
$P_{(SD2)-P_{(SD5)}}$	0,0121 ^M $p_{(SD5)>p_{(SD2)}}$	0,0287 ^M $p_{(SD2)>p_{(SD5)}}$	0,0101 ^M $p_{(SD2)>p_{(SD5)}}$	0,2330 $p_{(SD2)=p_{(SD5)}}$
$P_{(SD3)-P_{(SD4)}}$	0,0000 ^A $p_{(SD4)>p_{(SD3)}}$	0,0483 ^M $p_{(SD4)>p_{(SD3)}}$	0,4560 $p_{(SD4)=p_{(SD3)}}$	0,3354 $p_{(SD4)=p_{(SD3)}}$
$P_{(SD3)-P_{(SD5)}}$	0,0031 ^A $p_{(SD5)>p_{(SD3)}}$	0,3183 $p_{(SD5)=p_{(SD3)}}$	0,2693 $p_{(SD5)=p_{(SD3)}}$	0,2780 $p_{(SD5)=p_{(SD3)}}$
$P_{(SD4)-P_{(SD5)}}$	0,1055 $p_{(SD4)=p_{(SD5)}}$	0,1171 $p_{(SD4)=p_{(SD5)}}$	0,2340 $p_{(SD4)=p_{(SD5)}}$	0,4350 $p_{(SD4)=p_{(SD5)}}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Pela análise da Tabela 3.13, é possível verificar se há evidências estatísticas que a proporção de valores do ARL_0 de um estimador do desvio-padrão é maior do que a de outro estimador, ou se não há evidências estatísticas que comprovem isso. Consequentemente, ambos apresentam desempenho semelhante para um determinado tamanho amostral (n) e quantidade de amostras (m). O valor de n utilizado foi 5 e os valores de m foram 20, 50, 100 e 200.

Para $m=20$ e $n=5$, há evidências estatísticas que a proporção de valores do ARL_0 , no intervalo entre 0 e 200 da distribuição de valores, de um estimador é maior que a de outro estimador, mostrando que há diferença de desempenho em seis testes realizados: SD3 apresenta melhor desempenho quando comparado a SD1, SD4 e SD5; SD2 apresenta melhor

desempenho quando comparado a SD4 e SD5; SD1 apresenta melhor desempenho quando comparado SD4. Para os demais testes realizados, não há evidências estatísticas que comprovem que a proporção de valores de um estimador é maior do que a de outro estimador, apresentando desempenho semelhante.

Para a situação em que $m=20$ e $n=5$, ressalta-se que esses valores amostrais são os que são propostos pela maioria da literatura em CEP para a estimação dos parâmetros do processo quando são desconhecidos. Conseqüentemente, verifica-se um melhor desempenho apresentado pelo estimador SD3, enquanto SD4 apresentou os piores resultados nos testes estatísticos de comparação entre proporções.

Quando $m=50$ e $n=5$, há evidências estatísticas que comprovam que a proporção de valores de um estimador é maior do que a de outro estimador do desvio-padrão em quatro situações: SD3 apresenta melhores resultados quando comparado a SD1, SD2 e SD4; SD5 apresenta melhores resultados quando comparado a SD2. Para os demais testes realizados, não há evidências estatísticas que comprovem que a proporção de valores de um estimador é maior que a de outro estimador do desvio-padrão, apresentando assim desempenho semelhante.

Ao se realizar o teste estatístico para $m=100$ e $n=10$, não evidências estatísticas que comprovem que a proporção de valores de um estimador é maior que a de outro. Conseqüentemente, o desempenho apresentado pelos cinco estimadores do desvio-padrão é semelhante.

Para $m=200$ e $n=5$, verificou-se que há evidências estatísticas que a proporção de valores de um estimador é maior que a de outro estimador do desvio-padrão em três situações: SD1 apresenta melhores resultados quando comparado a SD2, SD3 e SD4. Nos demais testes estatísticos, não há evidências estatísticas que comprovem que a proporção de valores de um estimador do desvio-padrão é maior que a de outro estimador, apresentando desempenho semelhante. Verifica-se, portanto, que em uma situação em que a quantidade de amostras utilizada é igual a 200, o estimador do desvio-padrão SD1 apresenta melhor desempenho.

Tabela 3.14: Comparação de proporção (*p-value*) entre estimadores para $n=10$

Comparação entre estimadores	$m=20$ e $n=10$	$m=50$ e $n=10$	$m=100$ e $n=10$	$m=200$ e $n=10$
$P_{(SD1)-P_{(SD2)}}$	0,3599 $p_{(SD1)=p_{(SD2)}}$	0,0375 ^M $p_{(SD1)>p_{(SD2)}}$	0,4221 $p_{(SD2)=p_{(SD1)}}$	0,0232 ^M $p_{(SD2)>p_{(SD1)}}$
$P_{(SD1)-P_{(SD3)}}$	0,0683 ^L $p_{(SD1)>p_{(SD3)}}$	0,1351 $p_{(SD1)=p_{(SD3)}}$	0,3592 $p_{(SD1)=p_{(SD3)}}$	0,0048 ^A $p_{(SD3)>p_{(SD1)}}$
$P_{(SD1)-P_{(SD4)}}$	0,0840 ^L $p_{(SD4)>p_{(SD1)}}$	0,4733 $p_{(SD4)=p_{(SD1)}}$	0,3217 $p_{(SD4)=p_{(SD1)}}$	0,0122 ^M $p_{(SD4)>p_{(SD1)}}$
$P_{(SD1)-P_{(SD5)}}$	0,3557 $p_{(SD5)=p_{(SD1)}}$	0,1673 $p_{(SD1)=p_{(SD5)}}$	0,4572 $p_{(SD1)=p_{(SD5)}}$	0,0503 ^L $p_{(SD5)>p_{(SD1)}}$
$P_{(SD2)-P_{(SD3)}}$	0,1292 $p_{(SD2)=p_{(SD3)}}$	0,2488 $p_{(SD2)=p_{(SD3)}}$	0,2887 $p_{(SD2)=p_{(SD3)}}$	0,2733 $p_{(SD2)=p_{(SD3)}}$
$P_{(SD2)-P_{(SD4)}}$	0,0412 ^M $p_{(SD4)>p_{(SD2)}}$	0,0433 ^M $p_{(SD4)>p_{(SD2)}}$	0,3950 $p_{(SD2)=p_{(SD4)}}$	0,3974 $p_{(SD2)=p_{(SD4)}}$
$P_{(SD2)-P_{(SD5)}}$	0,4955 $p_{(SD5)=p_{(SD2)}}$	0,2074 $p_{(SD2)=p_{(SD5)}}$	0,4644 $p_{(SD2)=p_{(SD5)}}$	0,3628 $p_{(SD2)=p_{(SD5)}}$
$P_{(SD3)-P_{(SD4)}}$	0,0021 ^A $p_{(SD4)>p_{(SD3)}}$	0,1502 $p_{(SD4)=p_{(SD3)}}$	0,2051 $p_{(SD4)=p_{(SD3)}}$	0,3659 $p_{(SD4)=p_{(SD3)}}$
$P_{(SD3)-P_{(SD5)}}$	0,1316 $p_{(SD5)=p_{(SD3)}}$	0,4453 $p_{(SD5)=p_{(SD3)}}$	0,3199 $p_{(SD5)=p_{(SD3)}}$	0,1701 $p_{(SD5)=p_{(SD3)}}$
$P_{(SD4)-P_{(SD5)}}$	0,0402 ^M $p_{(SD4)>p_{(SD5)}}$	0,1846 $p_{(SD4)=p_{(SD5)}}$	0,3611 $p_{(SD4)=p_{(SD5)}}$	0,2706 $p_{(SD4)=p_{(SD5)}}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Em relação à Tabela 3.14, verifica-se se há evidências estatísticas que a proporção de valores do ARL_0 de um estimador do desvio-padrão é maior do que a de outro estimador, ou se não há evidências estatísticas que comprovem isso, apresentando-se assim desempenho semelhante para um determinado tamanho amostral (n) e quantidade de amostras (m). O valor de n utilizado foi 10 e os valores de m foram 20, 50, 100 e 200.

Para $m=20$ e $n=10$, cinco testes estatísticos comprovaram que há evidências estatísticas que a proporção de valores no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL_0 , para um estimador do desvio-padrão é maior que a de outro estimador: SD3 apresenta menor proporção de valores ao ser comparado com SD1 e SD4; SD1 apresenta menor proporção de valores ao ser comparado a SD4; SD2 apresenta menor proporção de valores ao ser comparado a

SD4; SD5 apresenta menor proporção de valores ao ser comparado a SD4. Para os demais testes estatísticos, não há evidências estatísticas que comprovem que a proporção de valores de um estimador do desvio-padrão é maior que a de outro estimador. Conseqüentemente, apresentam desempenho semelhante. Ressalta-se que, o estimador SD4 apresentou os piores resultados em quatro testes de comparação entre proporções, havendo o pior desempenho.

Quando $m=50$ e $n=10$, dois testes estatísticos mostram que há evidências estatísticas que a proporção de valores de um estimador é maior que a de outro estimador do desvio-padrão: SD2 apresenta menor proporção de valores ao ser comparado ao SD1; SD2 apresenta menor proporção de valores ao ser comparado a SD4. Para os demais testes estatísticos, não há evidências estatísticas que comprovem que a proporção de valores de um estimador do desvio-padrão é maior que a de outro estimador, apresentando desempenho semelhante.

Em relação à situação em que $m=100$ e $n=10$, não há evidências estatísticas que comprovem que a proporção de valores de um estimador é maior que a de outro estimador. Conseqüentemente, o desempenho apresentando entre os cinco estimadores é semelhante.

Por fim, a última rodada de testes estatísticos foi realizada para $m=200$ e $n=10$, apresentando quatro situações em que há evidências estatísticas que comprovam que a proporção de valores de um estimador do desvio-padrão é menor que a de outro estimador, havendo um melhor desempenho: SD1 apresenta menor proporção de valores ao ser comparado com SD2, SD3, SD4 e SD5. Para as demais situações, não há evidências estatísticas que comprovem que a proporção de valores de um estimador do desvio-padrão é menor que a de outro estimador, apresentando assim desempenho semelhante. Ressalta-se que, para $m=200$ e $n=10$, o estimador SD1 apresenta o melhor desempenho em relação aos demais estimadores do desvio-padrão.

Realizou-se outro teste estatístico de comparação entre proporção de valores, no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL_0 , com o objetivo de verificar se há diferença na proporção de valores ao se comparar duas situações amostrais distintas. Comparando-se assim, por exemplo, se há diferença de proporção de valores entre $m=20$ e $n=5$ e $m=20$ e $n=10$. Os testes foram realizados para os cinco estimadores do desvio-padrão listados nas equações de (1) até (5). A Tabela 3.15 e a Tabela 3.16 resumem os resultados dos testes estatísticos realizados. Os valores das proporções utilizados foram listados na Tabela 3.12. A classificação em relação à relevância estatística e o teste estatístico foram os mesmos que foram apresentados nas Tabelas 3.13 e 3.14. Os resultados dos testes também são demonstrados nas Tabelas 3.15 e 3.16: “ H_0 ” indica que não há evidências estatísticas para rejeitar H_0 , ou seja,

não há diferença na proporção de valores. “H₁” indica que há evidências estatísticas para rejeitar H₀, e que comprovam a diferença na proporção de valores, apresentando assim desempenho distinto.

Tabela 3.15: Comparação de proporção (*p-value*) entre valores amostrais

Comparação entre proporções	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
$P_{(m=20; n=5)} > P_{(m=50; n=5)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=20; n=5)} > P_{(m=100; n=5)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=20; n=5)} > P_{(m=200; n=5)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=20; n=5)} > P_{(m=20; n=10)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=20; n=5)} > P_{(m=50; n=10)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=20; n=5)} > P_{(m=100; n=10)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=20; n=5)} > P_{(m=200; n=10)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=50; n=5)} > P_{(m=100; n=5)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=50; n=5)} > P_{(m=200; n=5)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=20; n=10)} > P_{(m=50; n=5)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=50; n=5)} > P_{(m=50; n=10)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=50; n=5)} > P_{(m=100; n=10)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=50; n=5)} > P_{(m=200; n=10)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=100; n=5)} > P_{(m=200; n=5)}$	0,0000 ^A H ₁	0,0000 ^A H ₁	0,0050 ^A H ₁	0,0019 ^A H ₁	0,0108 ^M H ₁

Fonte: Elaborado pelo autor

A Tabela 3.15 mostra que em todos os testes estatísticos realizados, entre as situações amostrais destacadas, há diferença de proporção de valores do ARL₀ no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL₀, comprovando que há evidências que mostram, para os cinco estimadores do desvio-padrão, que a proporção em uma determinada situação amostral

é maior ao ser comparada à outra situação amostral. Consequentemente, o desempenho apresentado é menor nas situações em que a proporção de valores é maior. Na maioria dos casos, comprova-se que, o aumento da quantidade de amostras utilizada para a estimação dos parâmetros estatísticos e nos limites de controle, faz com que o desempenho dos gráficos de controle aumente, mostrando que a quantidade de amostras (m) influencia no erro tipo I.

Tabela 3.16: Comparação de proporção (p -value) entre valores amostrais

Comparação entre proporções	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
$P_{(m=20; n=10)} > P_{(m=100; n=5)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=50; n=10)} > P_{(m=100; n=5)}$	0,0004 ^A H ₁	0,4860 H ₀	0,0094 ^A H ₁	0,0011 ^A H ₁	0,0019 ^A H ₁
$P_{(m=100; n=10)} > P_{(m=100; n=5)}$	0,1967 H ₀	0,2918 H ₀	0,2731 H ₀	0,1881 H ₀	0,0918 ^L H ₁
$P_{(m=100; n=5)} > P_{(m=200; n=10)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=20; n=10)} > P_{(m=200; n=5)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=50; n=10)} > P_{(m=200; n=5)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=100; n=10)} > P_{(m=200; n=5)}$	0,0000 ^A H ₁	0,0002 ^A H ₁	0,0007 ^A H ₁	0,0000 ^A H ₁	0,0000 ^A H ₁
$P_{(m=200; n=5)} > P_{(m=200; n=10)}$	0,0097 ^A H ₁	0,0098 ^A H ₁	0,0558 ^L H ₁	0,1314 H ₁	0,0506 ^L H ₁
$P_{(m=20; n=10)} > P_{(m=50; n=10)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=20; n=10)} > P_{(m=100; n=10)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=20; n=10)} > P_{(m=200; n=10)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=50; n=10)} > P_{(m=100; n=10)}$	0,0064 ^A H ₁	0,3040 H ₀	0,0403 ^M H ₁	0,0501 ^L H ₁	0,1563 H ₀
$P_{(m=50; n=10)} > P_{(m=200; n=10)}$	0,0000 ^A H ₁				
$P_{(m=100; n=10)} > P_{(m=200; n=10)}$	0,0000 ^A H ₁				

Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com a Tabela 3.16, na maioria dos testes realizados há evidências estatísticas que comprovam que a proporção de valores no intervalo da distribuição ARL_0 ,

entre 0 e 200, é maior para uma situação amostral ao ser comparada com outra situação amostral, mostrando que, quanto maior a proporção, menor o desempenho apresentado. Isso foi evidenciado para os cinco estimadores do desvio-padrão.

Pela Tabela 3.16, também se evidencia, para a maioria dos testes realizados, que o aumento na quantidade de amostras (m), faz com que o desempenho do gráfico de controle melhore, mostrando que o aumento da variável “ m ” influencia na diminuição do erro tipo I.

Apenas em sete testes estatísticos realizados não houve evidências estatísticas que comprovassem que a proporção de valores, para uma situação amostral, fosse superior a outra, mostrando desempenho semelhante. São os seguintes testes: proporção de valores para $m=100$ e $n=10$ em relação a $m=100$ e $n=5$, para o estimador SD1; proporção de valores para $m=50$ e $n=10$ em relação a $m=100$ e $n=5$; proporção de valores para $m=100$ e $n=10$ em relação a $m=100$ e $n=5$; proporção de valores para $m=50$ e $n=10$ em relação a $m=100$ e $n=10$, para SD2; proporção de valores para $m=100$ e $n=10$ em relação a $m=100$ e $n=5$, para o estimador SD3; proporção de valores para $m=100$ e $n=10$ em relação a $m=100$ e $n=5$, para o estimador SD4; proporção de valores para $m=50$ e $n=10$ em relação a $m=100$ e $n=10$, para o estimador SD5.

4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Analisando-se os valores que se encontram nos Apêndices A ao H, e tendo-se como base as tabelas 3.17 a 3.24 e as figuras 3.3 a 3.42, nota-se que, a medida que os dados amostrais aumentam (valores de m e n), os dados se deslocam dos intervalos inferiores (entre 0 e 200), e passam a se concentrar nos intervalos centrais (entre 200 e 300, e entre 300 e 400). Por exemplo, para o estimador SD1, verifica-se que, para $m=20$ e $n=5$, 39,12% dos dados estão concentrados no intervalo de 0 a 200 (Figura 3.3) e 16,42% estão concentrados entre 300 e 400 (Tabela 3.17). A medida que o valor de m aumenta, a concentração entre 0 e 200 diminui (14,04% para $m=50$ e $n=5$, Figura 3.8; 8,03% para $m=100$ e $n=5$, Figura 3.13; 5,74% para $m=200$ e $n=5$, Figura 3.18) e a concentração de valores entre 300 e 400 aumenta (26,34% para $m=50$ e $n=5$, Tabela 3.18; 30,60% para $m=100$ e $n=5$, Tabela 3.19; 34,32% para $m=200$ e $n=5$, Tabela 3.20). Verifica-se esse comportamento para os demais estimadores do desvio-padrão.

A situação também se repete, tomando-se como base os valores dos Apêndices A ao H, quando $m=20$ e $n=10$, e analisando o estimador SD1, verifica-se que, a concentração de valores no intervalo de 0 a 200 foi de 27,53% (Figura 3.23) e a concentração de valores entre 300 e 400 foi 22,60% (Tabela 3.21). O aumento nos valores de m levará a uma diminuição da concentração de valores entre 0 e 200 (9,94% para $m=50$ e $n=10$, Figura 3.28; 8,50% para $m=100$ e $n=10$, Figura 3.33; 4,70% para $m=200$ e $n=10$) e um aumento na concentração de valores no intervalo de 300 a 400 (30,91% para $m=50$ e $n=10$, Tabela 3.22; 32,50% para $m=100$ e $n=10$, Tabela 3.23; 33,92% para $m=200$ e $n=10$). Verifica-se esse comportamento para os demais estimadores do desvio-padrão.

Para os resultados dos testes estatísticos de comparação entre proporção de valores no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL_0 , a Tabela 4.1 resume os melhores estimadores do desvio-padrão para cada valor de m e n .

Tabela 4.1: Melhores estimadores do desvio-padrão

m / n	5	10
20	SD3	SD3
50	SD3	SD2
100	SD5	Todos obtiveram desempenho semelhante
200	SD1	

Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com a Tabela 4.1, quando a quantidade de amostras é igual a 20, ou seja, a menor quantidade simulada, o melhor estimador do desvio-padrão foi o SD3, tanto para $n=5$, quanto $n=10$. A proporção de valores é 37,67% e 26,21% respectivamente, sendo que os testes estatísticos resultaram em um *p-value* inferior a 10% ao ser comparado aos resultados obtidos pelos estimadores SD1, SD4 e SD5 (quando $n=5$) e SD1 e SD4 (quando $n=10$). Para ambos os casos, ressalta-se os valores obtidos para o estimador SD4: 41,57 (quando $n=5$) e 28,77% (quando $n=10$), apresentando assim os maiores valores de proporção.

Para a quantidade de amostras igual a 50, há duas situações distintas: o estimador SD3 apresentou os melhores resultados quando $n=5$, enquanto o estimador SD2 apresentou os melhores resultados para $n=10$. Na primeira situação, a proporção de valores do estimador SD3 é igual a 13,05%, sendo que o resultado do teste estatístico entre proporções mostrou ser inferior que a proporção de valores dos estimadores SD1, SD2 e SD4. Na segunda situação, a proporção de valores do estimador SD2 é de 8,90%, sendo inferior ao ser comparado com as proporções de valores dos estimadores SD1 e SD4.

Na situação em que a quantidade de amostras é igual a 100, ocorre também duas situações distintas, enfatizando-se quando o tamanho amostral é igual a 10. Para $n=5$, o melhor resultado obtido foi para o estimador SD5, sendo a proporção de valores igual a 7,64%. Entretanto, os resultados do teste estatístico mostram que o estimador SD2 (cuja proporção de valores é igual a 8,92%) foram todos inferiores a 10% (*p-value*) quando comparados aos estimadores SD1, SD3, SD4 e SD5, não sendo recomendado para essa situação amostral. Quando $n=10$, todos os testes estatísticos de comparação de proporções obtiveram resultados superiores a 10%, o que significa que a hipótese nula não pode ser rejeitada. Isso indica que as proporções de valores entre os cinco estimadores do desvio-padrão foram semelhantes, não havendo um estimador que apresentasse melhores resultados.

Por fim, quando $m=200$, ou seja, a maior quantidade amostral simulada, o estimador SD1 apresentou os melhores resultados para $n=5$ e $n=10$. Para $n=5$, a proporção de valores de SD1 é igual a 5,74%, sendo que o teste estatístico de comparação entre proporções mostrou que a proporção de valores é inferior ao ser comparada à proporção dos estimadores SD2, SD3 e SD4. Para $n=10$, a proporção de valores do estimador SD1 foi 4,70%, sendo que o teste estatístico de comparação entre proporções comprovou que a proporção de valores do estimador SD1 é inferior em relação às demais proporções dos estimadores do desvio-padrão.

Enfatizam-se também os resultados obtidos nos testes estatísticos listados nas Tabelas 3.15 e 3.16, com base nos valores levantados na Tabela 3.12. Nesses testes, compararam-se as proporções de valores no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL_0 , entre diferentes valores amostrais. Verificou-se que, em quase todos os casos simulados, o impacto que a quantidade de amostras (m) possui no desempenho dos gráficos de controle. Em quase todos os testes estatísticos realizados, envolvendo duas situações amostrais com m distintos, verifica-se que a proporção de valores do ARL_0 diminui, conforme o valor de m aumenta, comprovando a existência de uma relação entre a quantidade de amostras e o desempenho dos gráficos de controle.

5. CONCLUSÃO

Esta dissertação propôs uma forma alternativa de análise do desempenho dos gráficos de controle, em relação à análise conhecida na literatura, que é pelo ARL ou valor médio do RL. A maneira como esta dissertação analisou o desempenho se baseou nas proporções dos valores da distribuição do ARL_0 que se concentravam no intervalo entre 0 e 200. Levando-se em consideração que é desejável aumentar o desempenho dos gráficos de controle, diminuindo a incidência de falsos alarmes, a análise das proporções do ARL_0 no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL_0 possibilita a verificação da quantidade de valores inferiores a 200, para cada estimador do desvio-padrão, de modo a entender o comportamento da distribuição de valores conforme se altera o tamanho da amostra (n), a quantidade de amostras (m) e o estimador do desvio-padrão.

Com base na análise de desempenho proposta por esta dissertação, verificou-se que a quantidade de amostras (m) afeta o desempenho dos gráficos de controle, conforme os resultados dos testes estatísticos de comparação entre proporções mostrados na Tabela 3.15 e Tabela 3.16. Notou-se que, o aumento da quantidade amostral (m) resulta em uma diminuição da proporção de valores do ARL_0 no intervalo entre 0 e 200 da distribuição do ARL_0 (também mostrado pela Tabela 3.12). Independente do estimador utilizado, alterando-se os valores de m e n , ocorrerá mudanças nas proporções de valores do ARL_0 no intervalo entre 0 e 200 da distribuição de valores do ARL. Ao ser comparada às conclusões obtidas por Quesenberry (1993), Chen (1997) e Jensen *et al.* (2006), os quais avaliam o desempenho com base no valor médio e na dispersão do RL, esta dissertação convergiu no sentido que mostrou que o aumento da quantidade de amostras (m) afeta positivamente o desempenho dos gráficos de controle conforme mencionado por esses autores.

Em relação ao melhor estimador do desvio-padrão por valor amostral simulado, a Tabela 4.1 apresenta os melhores resultados obtidos para cada simulação, com base no teste estatístico de comparação entre proporções. Na situação com o menor valor amostral simulado, $m=20$, o estimador SD3 apresentou a menor proporção de valores no intervalo entre 0 e 200, para $n=5$ e $n=10$. Quando $m=50$, o estimador SD3 apresentou os melhores resultados para $n=5$, enquanto o estimador SD2 foi melhor para $n=10$. Quando $m=100$, o estimador SD5 apresentou a menor proporção de valores para $n=5$. Para $m=100$ e $n=10$, não há diferença entre a proporção de valores entre os cinco estimadores, mostrando que, de acordo com o resultado do teste estatístico, não há diferença de desempenho entre os cinco estimadores. Por fim,

para a maior quantidade amostral simulada, $m=200$, o estimador SD1 apresentou a menor proporção de valores, tanto para $n=5$, quanto para $n=10$.

Com base na Tabela 4.1, destaca-se o desempenho do estimador SD3 na situação em que a quantidade de amostras (m) é igual a 20 e o tamanho amostral (n) igual a 5. Isso porque essa é a quantidade amostral proposta nos livros de formação em CEP. Por essa razão, recomenda-se o uso do estimador SD3. Em contrapartida, o estimador SD4 apresentou a maior proporção de valores para esses valores amostrais. Consequentemente, não se recomenda o uso desse estimador. Entretanto, trabalhos como Mahmoud *et al.* (2010) *apud* Saleh *et al* (2015a) recomendam o uso do estimador SD4, argumentando ser esse mais eficiente que os demais, e não recomendam o uso do estimador SD1 (baseado na amplitude média).

Esta dissertação concluiu que há dois aspectos importantes que devem ser levados em consideração antes de se estimar os parâmetros estatísticos do processo: o estimador do desvio-padrão utilizado influencia na proporção de valores do ARL_0 no intervalo inferior da distribuição, recomendando-se que a situação em que $m=20$ e $n=5$ deve ter uma maior atenção, uma vez que essa é a situação sugerida nos livros de formação para estimar os parâmetros estatísticos do processo. E o segundo aspecto diz respeito aos valores de m e n utilizados para se estimar os parâmetros estatísticos do processo. Para os cinco estimadores do desvio-padrão, mantendo-se constante o valor de n , o aumento no valor de m resultará na diminuição da proporção de valores no intervalo entre 0 e 200 da distribuição de valores do ARL.

Por fim, esta dissertação recomenda que estudos envolvendo situações com gráficos de controle não paramétricos deverão ser conduzidos, de modo a comparar o desempenho em situações em que os dados não são normalizados e não possuem uma distribuição de probabilidade específica, em relação ao desempenho dos gráficos de controle de Shewhart com dados normalizados, utilizando-se da análise de proporção de valores, no intervalo entre 0 e 200. Outra recomendação é que estudos mais detalhados e focados na análise dos efeitos do tamanho da amostra (n) no desempenho dos gráficos de controle devem ser conduzidos, de modo a buscar aumentar o poder de detecção de um deslocamento de parâmetro em situações que simulem um processo fora de controle.

REFERÊNCIAS

- ABBAS, N. *et al.* An EWMA-type control chart for monitoring the process mean using auxiliary information. **Communication in Statistics – Theory and Methods**, v. 43, p. 3485-3498, 2014.
- AIAG. **Statistical Process Control: Reference Manual**. AIAG, 1991.
- ALBERS, W.; KALLENBERG, W. C. M. Empirical non-parametric control charts: estimation effects and corrections. **Journal of Applied Statistics**, v.31, n.3, p. 345-360, 2004.
- ALBERS, W.; KALLENBERG, W. C. M. Improved data driven control charts. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, v.37, n.3, p. 423-438, 2007.
- ALBERS, W.; KALLENBERG, W. C. M. New corrections for old control charts. **Quality Engineering**, v.17, n.3, p. 467-473, 2005.
- ALBERS, W.; KALLENBERG, W. C. M. Normal control charts with nonparametric safeguard. **Statistica Neerlandica**, v.63, p. 63-81, 2009.
- ALI, S.; RIAZ, M. On the generalized process capability under simple and mixture models. **Journal of Applied Statistics**, v.41, n.4, p. 832-852, 2014.
- CASTAGLIOLA, P.; CELANO, G.; CHEN, G. The exact run length distribution and design of the S^2 chart when the in-control variance is estimated. **International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering**, v.16, n.1, p. 23-38, 2009.
- CASTAGLIOLA, P.; CELANO, G.; FICHERA, S. Comparison of the \bar{X} chart and the t chart when the parameters are estimated. **Quality Technology and Quantitative Management**, v.10, n.1, p. 1-16, 2013a.
- CASTAGLIOLA, P. *et al.* One-sided Shewhart-type charts for monitoring the coefficient of variation in short production runs. **Quality Technology and Quantitative Management**, v.12, n.1, p.53-67, 2015.
- CASTAGLIOLA, P. *et al.* The variable sample size t control chart for monitoring short production runs . **Int. J. Adv. Manuf. Technol.**, v.66, p. 1353-1366, 2013b.
- CELANO, G. On the constrained economic design of control charts: a literature review. **Produção**, v.21, n.2, p. 223-234, 2011.
- CHAKRABORTI, S. Run length, average run length and false alarm rate of Shewhart X-bar chart: exact derivations by conditioning. **Communications in Statistics**, v.29, n.1, p. 61-81, 2000.
- CHAKRABORTI, S.; HUMAN, S. W.; GRAHAM, M. A. Phase I Statistical Process Control Charts: an overview and some results. **Quality Engineering**, v.21, n.1, p. 52-62, 2009.

CHAKRABORTI, S.; LAAN, P. van der.; BAKIR, S. T. Nonparametric Control Charts: an overview and some results. **Journal of Quality Technology**, v.33, n.3, p. 304-315, 2001.

CHAKRABORTI, S.; LAAN, P. van der.; WIEL, M. A. van de. A class of distribution-free control charts. **Applied statistics**, v.53, n.3, p. 443-462, 2004.

CHAKRABORTI, S.; WIEL, M. A. van de. A nonparametric control chart: an overview and some results based on the Mann-Whitney statistic. **Beyond Parametrics in Interdisciplinary Research: Festschrift in Honor of Professor Pranab K. Sen**, v.1, p. 156-172, 2008.

CHEN, G. The mean and standard deviation of the run length distribution of \bar{X} charts when control limits are estimated. **Statistica Sinica**, v.7, n.3, p. 789-798, 1997.

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle estatístico de qualidade**. 2.ed, 8 reimpr. São Paulo: Atlas, 2014. 336 p.

COSTA, A. F. B.; RAHIM, M. A. A single EWMA chart for monitoring process mean and process variance. **Quality Technology and Quantitative Management**, v.3, n.3, p. 295-305, 2006.

COSTA NETO, P. C. de O. **Estatística**. São Paulo: Edgard Blücher, 1977.

EPPRECHT, E. K.; LOUREIRO, L. D.; CHAKRABORTI, S. Effect of the amount of Phase I data on the Phase II performance of S^2 and S Control Charts. **Journal of Quality Technology**, v. 47, n.2, p. 139-155, 2015.

FRANCO, B. C. *et al.* Economic design of Shewhart control charts for monitoring autocorrelated data with skip sampling strategies. **Int. J. Production Economics**, v. 151, p. 121-130, 2014.

GRYNA, F. M. Quality and costs. In: JURAN, J. M.; GODFREY, J. M. **Juran's Quality Handbook**. 5. Ed, McGraw-Hill, 1998a.

GRYNA, F. M. Operations. In: JURAN, J. M.; GODFREY, J. M. **Juran's Quality Handbook**. 5. Ed, McGraw-Hill, 1998b.

GRYNA, F. M.; CHUA, R. C. H; DEFEO, J. A. **Juran's Quality Planning and Analysis for Enterprise Quality**. 5. ed. McGraw-Hill, 2007. 774 p.

HAWKINS, D. M; ZAMBA, K.D. A change-point model for a shift in variance. **Journal of Quality Technology**, v. 37, n.1, p. 21-31, 2005.

JENSEN, W. A. *et al.* Effects of parameters estimation on Control Chart properties: a literature review. **Journal of Quality Technology**, v. 38, n.4, p. 349-364, 2006.

JONES, M. A.; STEINER, S. H. Assessing the effect of estimation error on risk-adjusted CUSUM chart performance. **International Journal for Quality in Health Care** 2012, v. 24, n.2, p. 176-181, 2011.

- JONES-FARMER, L. A. *et al.* An overview of Phase I analysis for process improvement and monitoring. **Journal of Quality Technology**, v. 46, n.3, p. 265-280, 2014.
- JURAN, J.M.; GRZYNA, F. M. **Quality Control Handbook**. 4. ed. McGraw-Hill, 1988.
- JURAN, J.M.; GRZYNA, F. M. **Quality planning and analysis**. New York: McGraw-Hill Book, 1970.
- KANE, V.E. Process Capability Indices. **Journal of Quality Technology**, v. 18, n.1, p. 41-52, 1986.
- LEONI, R. C.; COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. The effect of the autocorrelation on the performance of the T² chart. **European Journal of Operational Research**, v. 247, n.1, p. 155-165, 2015.
- LEONI, R. C. *et al.* A simple procedure to calculate the control limit of the Z chart. **International Journal of Statistics and Applications**, v.4, n.6, p. 276-282, 2014.
- LOURENÇO FILHO, R. C. B. **Controle Estatístico de Qualidade**. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos, 1976.
- LUPO, T. Economic design approach for an SPC inspection procedure implementing the adaptive c chart. **Qual. Reliab. Engng. Int**, v. 30, p. 545-558, 2014.
- MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. The use of principal components and univariate charts to control multivariate processes. **Pesquisa Operacional**, v. 28, n. 1, p. 173-196, 2008.
- MAGALHÃES, M. S. de.; EPPRECHT, E. K.; COSTA, A. F. B. Economic design of a Vp \bar{X} chart. **International Journal of Production Economic**, v. 74, p. 191-200, 2001.
- MAHMOUD, M.A. *et al.* Estimating the standard deviation in Quality Control Application. **Journal of Quality Technology**, v. 42, n.4, p. 348-357, 2010.
- MARTINS, R. A. Abordagens quantitativa e qualitativa. In: MIGUEL, P. A. C. et al. **Metodologia de pesquisa em Engenharia de Produção e Gestão de Operações**. 2.ed. Rio de Janeiro: Elsevier: ABEPRO, 2012. 260 p.
- McCRAKEN, A. K.; CHAKRABORTI, S. Control charts for joint monitoring of mean and variance: an overview. **Quality Technology and Quantitative Management**, v. 10, n.1, p. 17-36, 2013.
- MONTGOMERY, D. C. **Introduction to Statistical Quality Control**. 6.ed. Wiley, 2009.
- MONTGOMERY, D. C. The future of industrial statistics. **Orion**, v. 16, n.1, p. 1-21, 2014.
- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Applied statistics and probability for engineers**. 3.ed. Nova York: Wiley, 2002.

- NAZIR, H.Z.; RIAZ, M.; A.; DOES, R.J.M.M. Robust CUSUM control charting for process dispersion. **Quality and Reliability Engineering International**, 2013.
- NENES, G.; TASIAS, K. A.; CELANO, G. A general model for the economic-statistical design of adaptive control charts for processes subject to multiple assignable causes. **International Journal of Production Research**, v.53, n. 7, p. 2146-2164, 2015.
- OPRIME, P. C. *et al.* Method for determining the control limits of nonparametric chart for monitoring location and scale. **Gest. Prod, São Carlos**, v. 23, n. 1, p. 146-164, 2016.
- PIGNATIELLO JR., J.J.; SIMPSON, J.R. A magnitude-robust control chart for monitoring and estimating step changes for normal process means. **Quality and Reliability Engineering International**, v.18, p. 429-441, 2002.
- PSARAKIS, S.; VYNIYOU, A. K.; CASTAGLIOLA, P. Some recent developments on the effect of parameter estimation on control chart. **Qual. Reliab. Engng. Int.**, v.30, p. 1113-1129, 2014.
- QUESENBERRY, C.P. The effect of sample size on estimated limits for \bar{X} and X control charts. **Journal of Quality Technology**, v.25, n.4, p. 237-247, 1993.
- SALEH, N. A. *et al.* Another look at the EWMA control chart with estimated parameters. **Journal of Quality Technology**, v. 47, n.4, p. 363-382, 2015b.
- SALEH, N. A. *et al.* The difficult in designing Shewhart \bar{X} and X Control Charts with estimated parameters. **Journal of Quality Technology**, v. 47, n.2, p. 127-138, 2015a.
- SANTIAGO, E.; SMITH, J. Control charts based on the exponential distribution: adapting run rules for the t chart. **Quality Engineering**, v. 25, p. 85-96, 2013.
- SCHOONHOVEN, M.; DOES, R. J. M. M. A robust standard deviation control chart. **Technometrics**, v. 54, n.1, p. 73-82, 2012.
- SCHOONHOVEN, M.; DOES, R. J. M. M. A robust \bar{X} control chart. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 29, p. 951-970, 2013.
- SCHOONHOVEN, M. *et al.* Robust location estimators for the \bar{X} control chart. **Journal of Quality Technology**, v. 43, n.4, p. 363-379, 2011.
- SEIF, A.; FARAZ, A.; SANIGA, E. Economic statistical design of the VP \bar{X} control charts for monitoring a process under non-normality. **International Journal of Production Research**, v. 53, n. 14, p. 4218-4230, 2015.
- SHAHRIARI, A.; AHMADI, O.; SHOKOUHI, A. H. A two-phase robust estimation of process dispersion using M-estimator. **JISE**, v. 4, n. 1, p. 47-58, 2010.
- SHEWHART, W. A. **Statistical Method from the viewpoint of Quality Control**. New York: Dover Publications INC, 1986.

TEOH, W.L. *et al.* Optimal design of the double sampling \bar{X} chart with estimated parameters based on median run length. **Computers and Industrial Engineering**, v. 67, n.1, p. 104-115, 2014.

TOLEDO, J. C. de *et al.* **Qualidade: Gestão e Métodos**. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 397 p.

WADSWORTH, H. M. Statistical Process Control. In: JURAN, J. M.; GODFREY, J. M. **Juran's Quality Handbook**. 5. Ed, McGraw-Hill, 1998.

WESTERN ELECTRIC COMPANY. **Statistical Quality Control Handbook**. 2. ed, Easton: Mack Print Company, 1958.

WOODALL, W. H. Controversies and contradictions in Statistical Process Control. **Journal of Quality Technology**, v.32, n.4, p. 341-350, 2000.

WOODALL, W. H. The statistical design of Quality Control Charts. **The Statistician**, v.34, n.2, p. 155-160, 1985.

WOODALL, W. H. *et al.* Using control charts to monitor process and product quality profiles. **Journal of Quality Technology**, v.36, n. 3, p. 309-320, 2004.

WOODALL, W. H.; FALTIN, F. W. Autocorrelated and SPC. **ASQC Statistic Division Newsletter**, v.13, n. 4, 1993.

WOODALL, W. H.; MONTGOMERY, D. C. Research issues and ideas in Statistical Process Control. **Journal of Quality Technology**, v.31, n. 4, p. 376-386, 1999.

WOODALL, W. H.; MONTGOMERY, D. C. Some current directions in the theory and application of Statistical Process Monitoring. **Journal of Quality Technology**, v.46, n. 1, p. 78-94, 2014.

YOURSTONE, S. A.; ZIMMER, W. J. Non-normality and the design of control charts for averages. **Decision sciences**, v.23, n. 5, p. 1099-1113, 1992.

ZHANG, Y.; CASTAGLIOLA, P. Run rules \bar{X} charts when process parameters are unknown. **International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering**, v.17, n.4, p. 381-399, 2010.

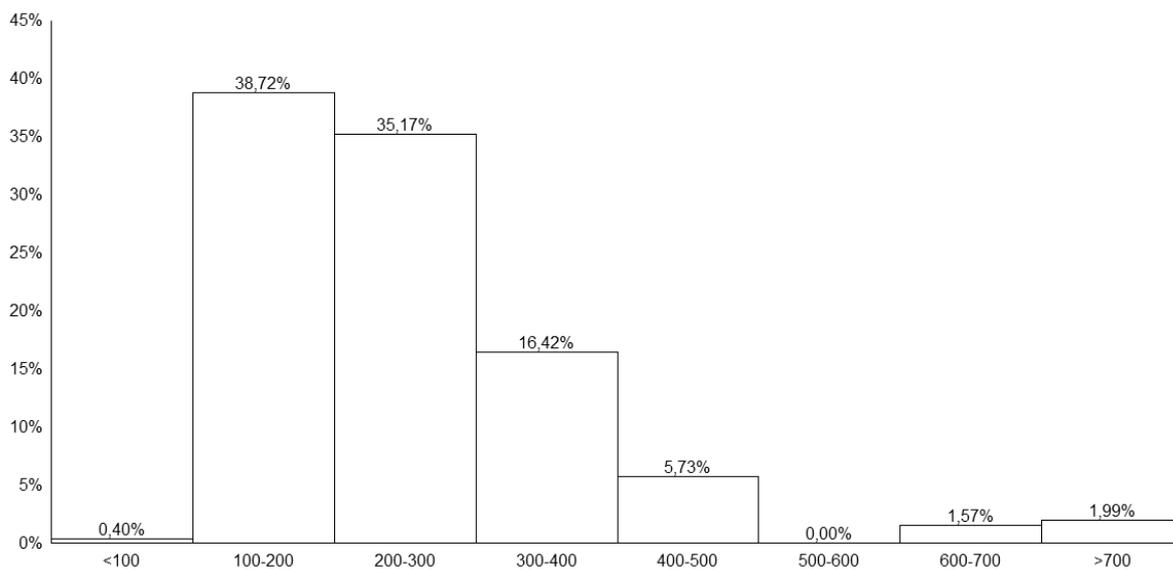
APÊNDICE A – DISTRIBUIÇÃO DO ARL_0 PARA $m=20$ E $n=5$

Tabela 3.17: Distribuição do ARL_0 para $n=5$, $m=20$

	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
<100	0,40%	0,63%	0,29%	0,50%	0,46%
100-200	38,72%	37,78%	37,38%	41,07%	39,88%
200-300	35,17%	35,88%	34,44%	33,36%	33,63%
300-400	16,42%	17,04%	17,30%	15,91%	16,75%
400-500	5,73%	4,40%	5,64%	5,15%	5,13%
500-600	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
600-700	1,57%	2,08%	2,78%	1,97%	2,04%
>700	1,99%	2,19%	2,17%	2,04%	2,11%

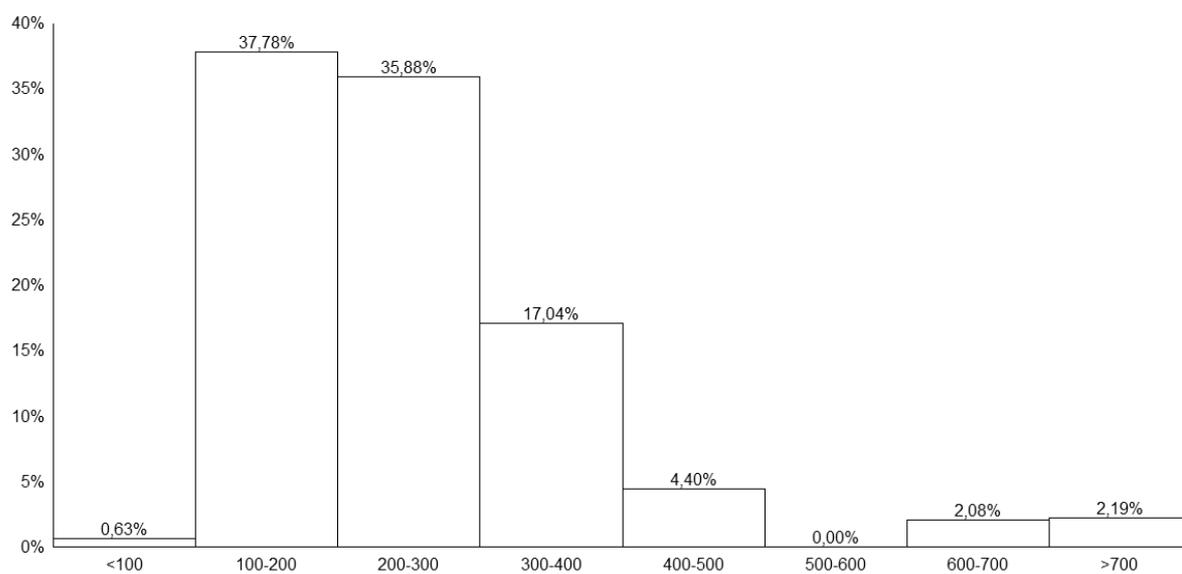
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.3: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=5$ e estimador SD1



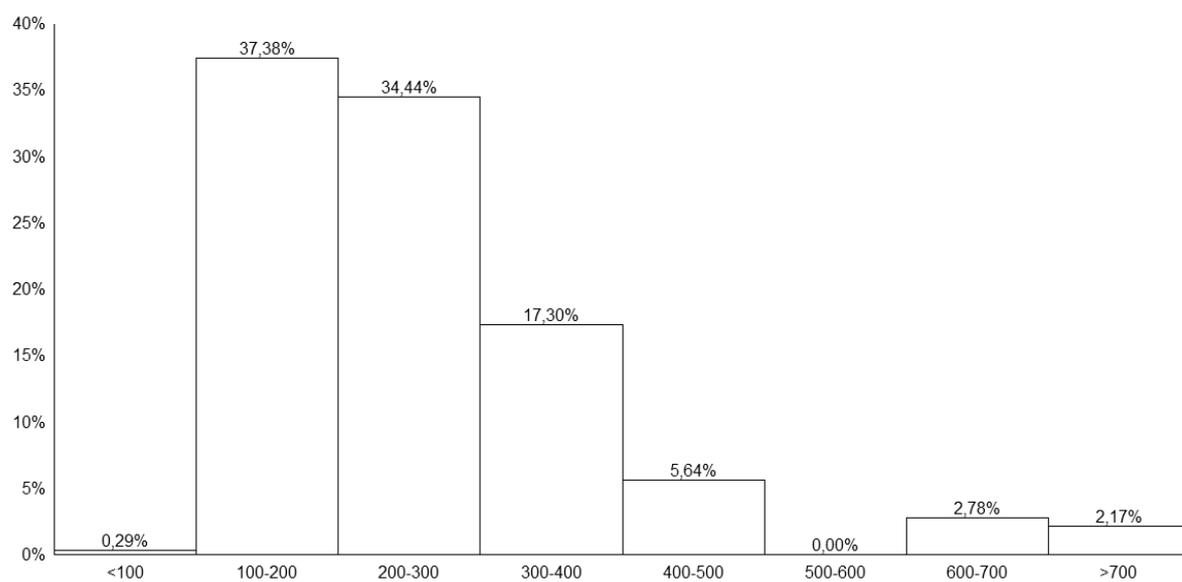
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.4: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=5$ e estimador SD2



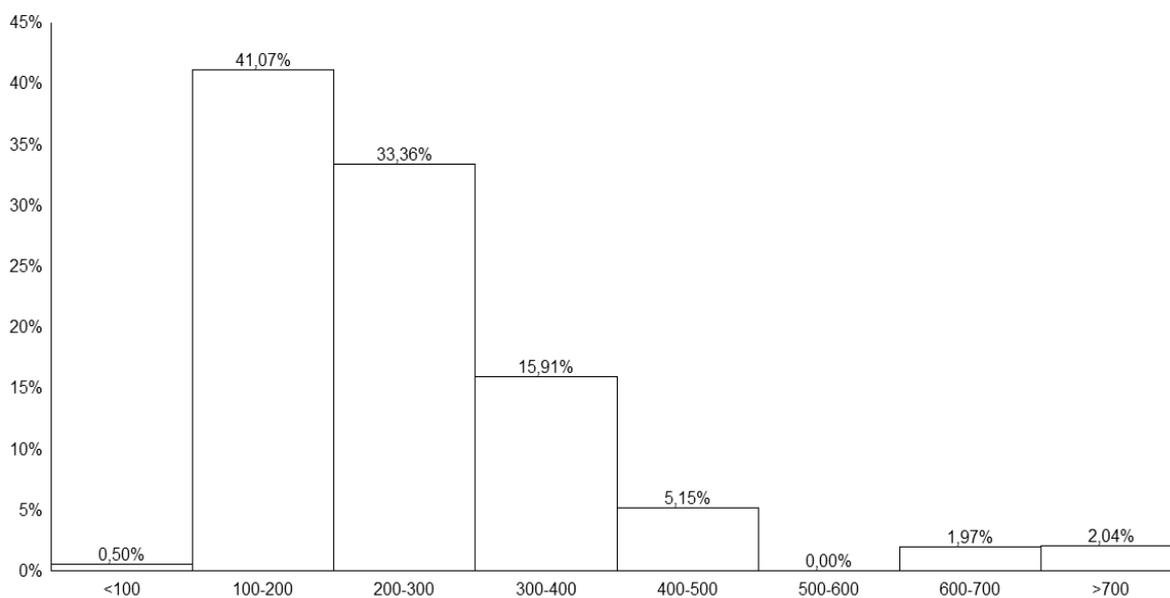
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.5: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=5$ e estimador SD3



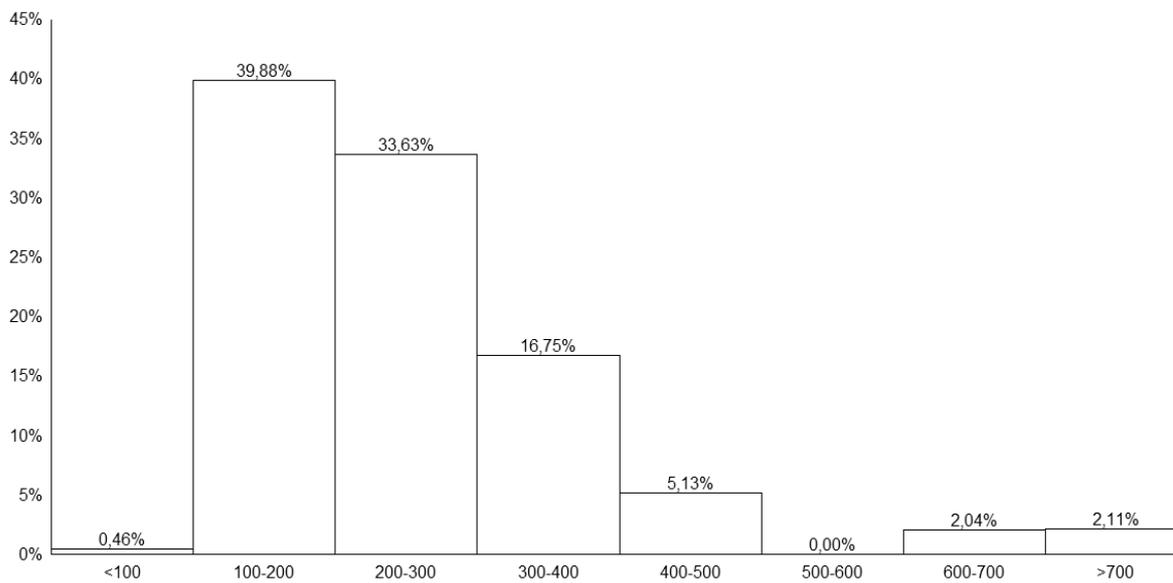
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.6: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=5$ e estimador SD4



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.7: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=5$ e estimador SD5



Fonte: Elaborado pelo autor

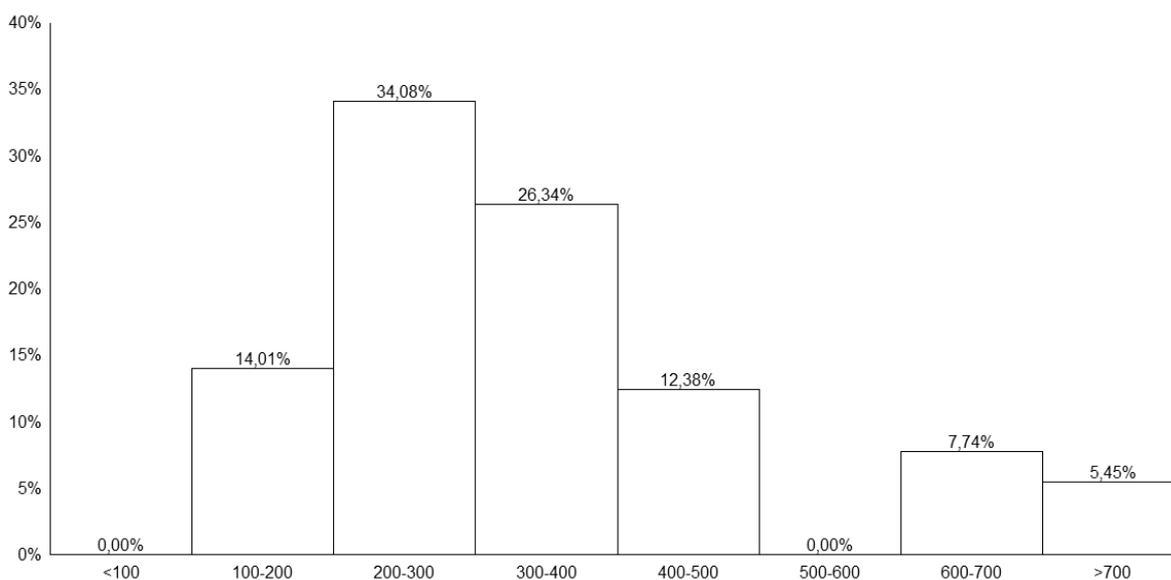
APÊNDICE B – DISTRIBUIÇÃO DO ARL_0 PARA $m=50$ E $n=5$

Tabela 3.18: Distribuição do ARL_0 para $n=5$ e $m=50$

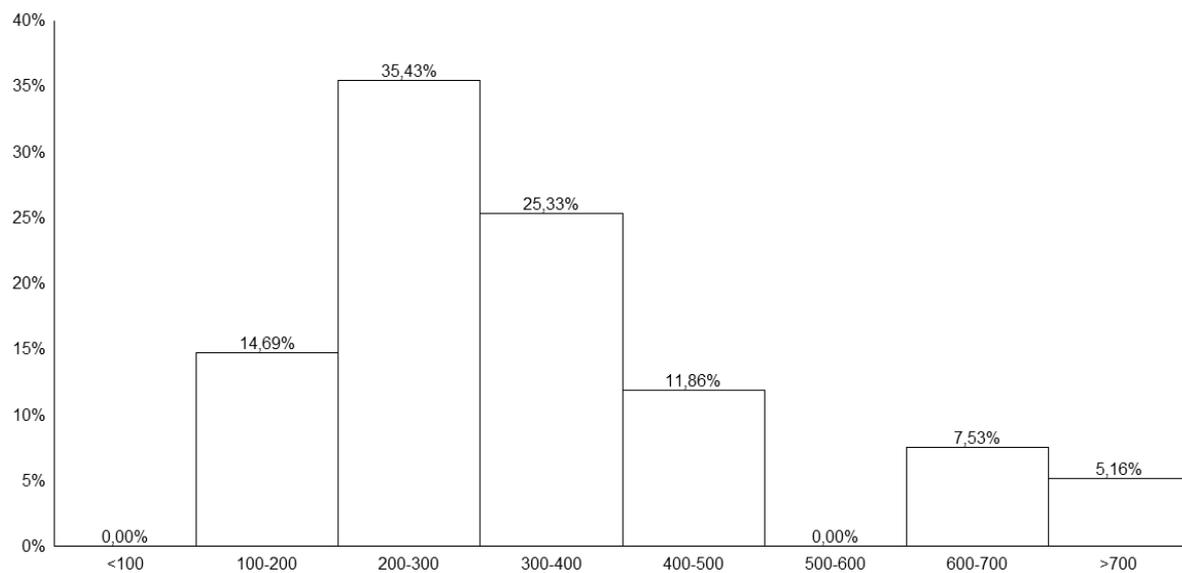
	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
<100	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
100-200	14,01%	14,69%	13,05%	14,19%	13,36%
200-300	34,08%	35,43%	35,88%	36,93%	36,63%
300-400	26,34%	25,33%	25,44%	24,83%	25,04%
400-500	12,38%	11,86%	11,65%	11,46%	11,84%
500-600	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
600-700	7,74%	7,53%	8,80%	7,64%	8,10%
>700	5,45%	5,16%	5,18%	4,95%	5,03%

Fonte: Elaborado pelo autor

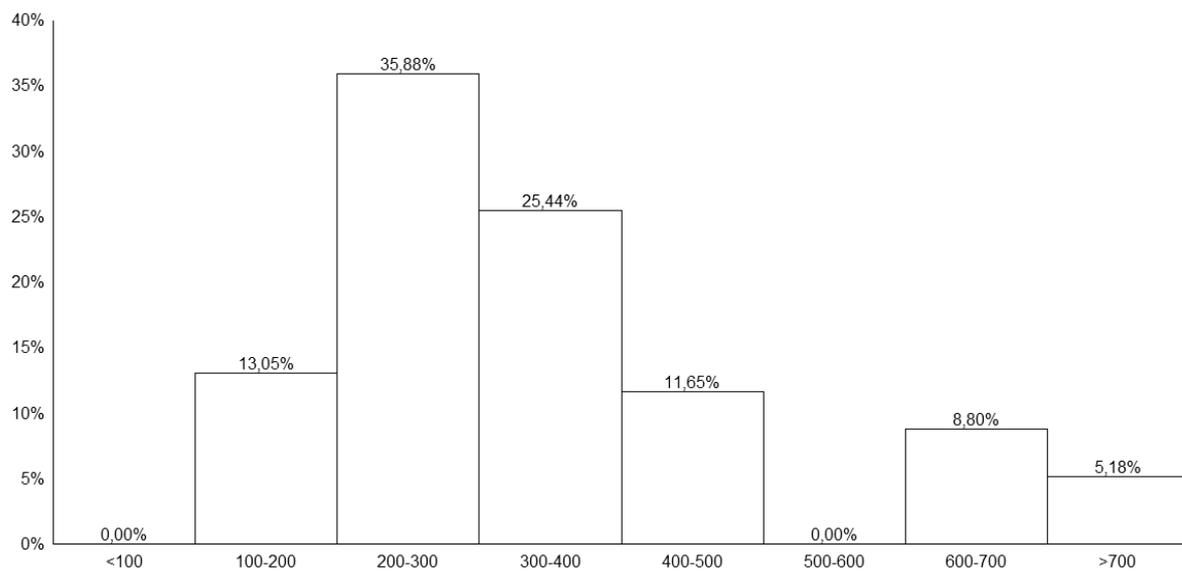
Figura 3.8: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=5$ e estimador SD1



Fonte: Elaborado pelo autor

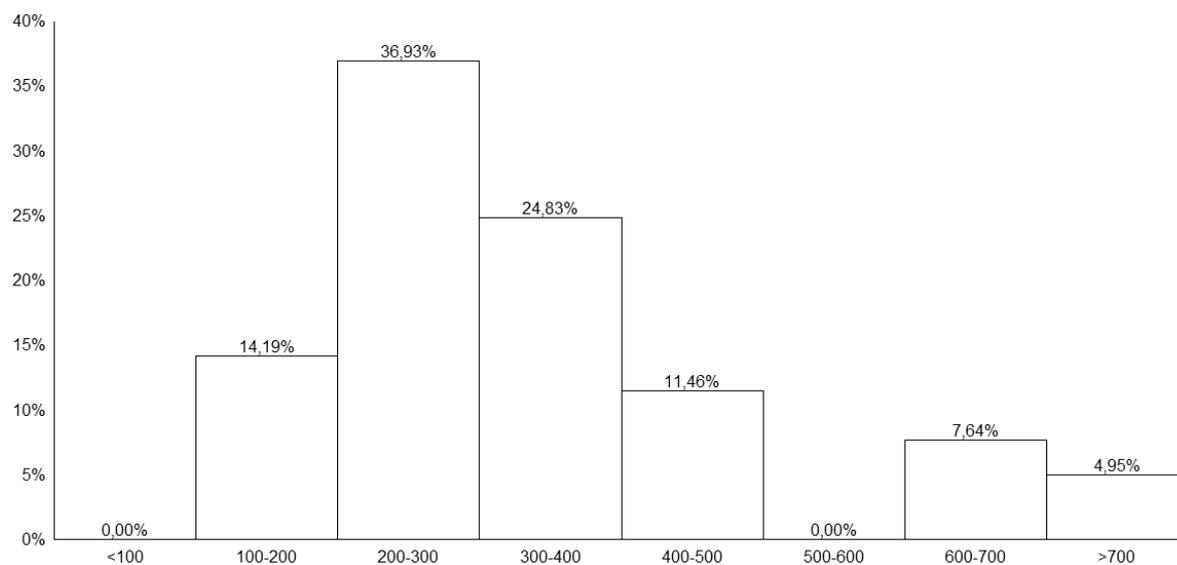
Figura 3.9: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=5$ e estimador SD2

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.10: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=5$ e estimador SD3

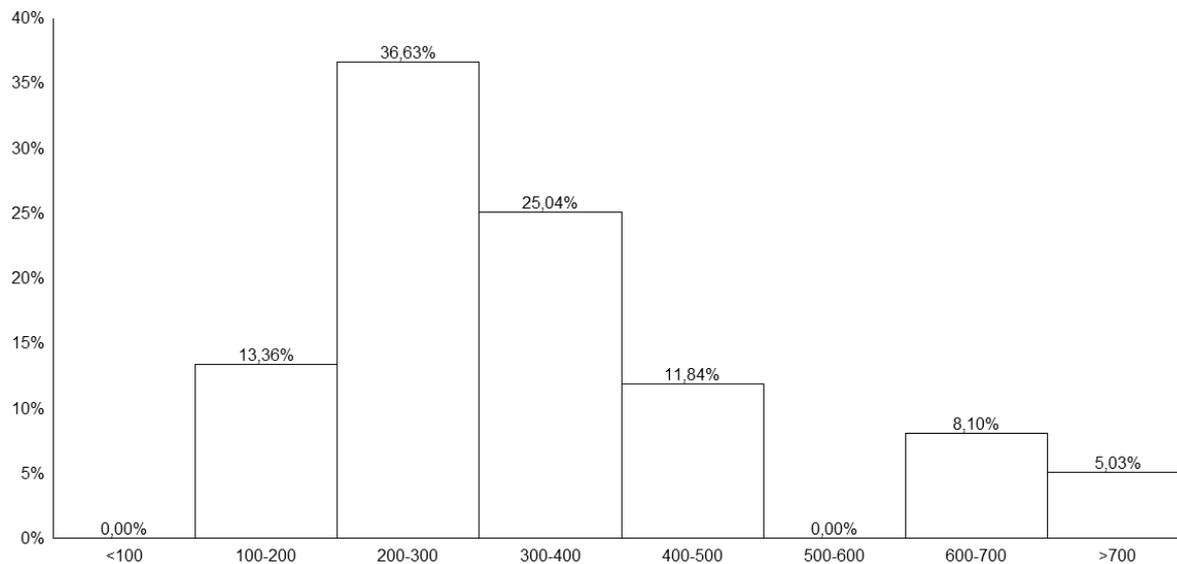
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.11: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=5$ e estimador SD4



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.12: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=5$ e estimador SD5



Fonte: Elaborado pelo autor

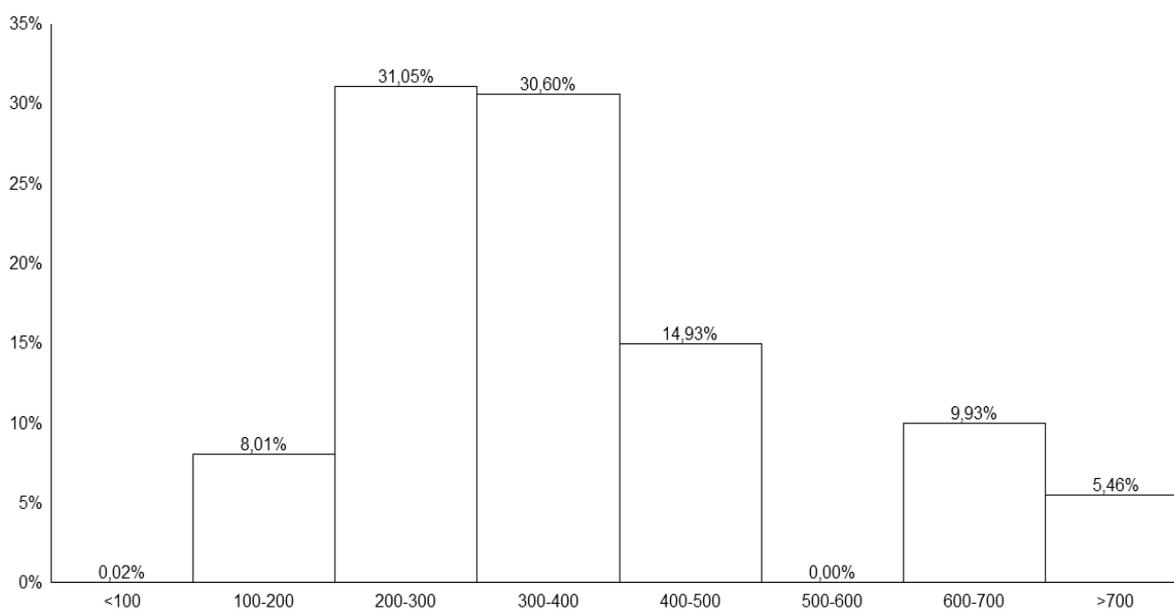
APÊNDICE C – DISTRIBUIÇÃO DO ARL_0 PARA $m=100$ E $n=5$

Tabela 3.19: Distribuição do ARL_0 para $n=5$ e $m=100$

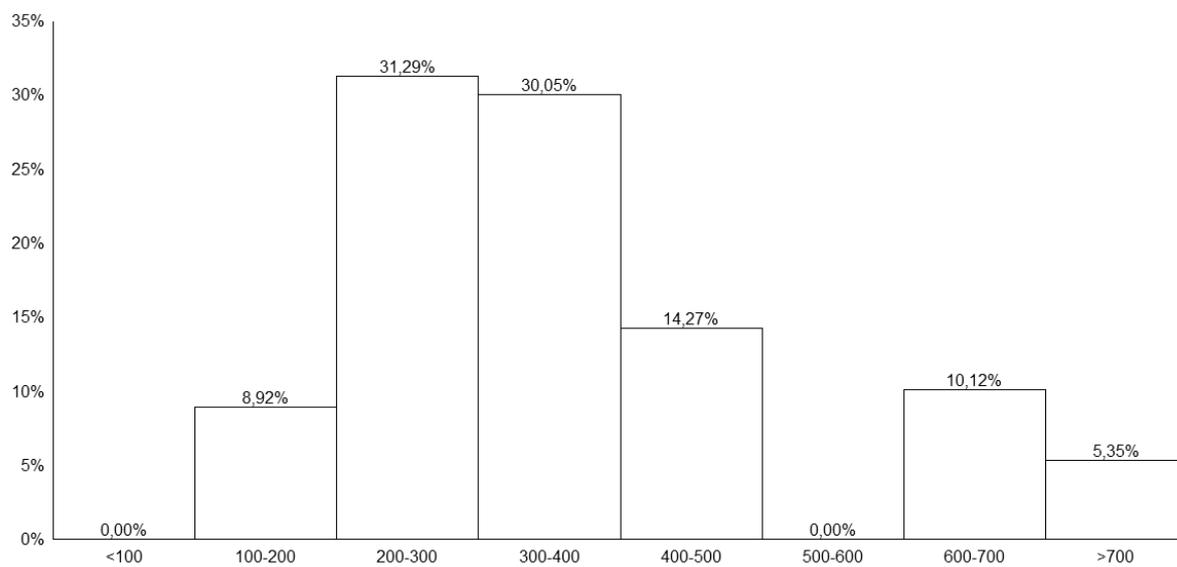
	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
<100	0,02%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
100-200	8,01%	8,92%	7,97%	8,03%	7,64%
200-300	31,05%	31,29%	30,26%	31,13%	30,42%
300-400	30,60%	30,05%	30,43%	29,61%	30,72%
400-500	14,93%	14,27%	16,39%	16,83%	16,54%
500-600	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
600-700	9,93%	10,12%	9,43%	9,17%	9,28%
>700	5,46%	5,35%	5,52%	5,23%	5,40%

Fonte: Elaborado pelo autor

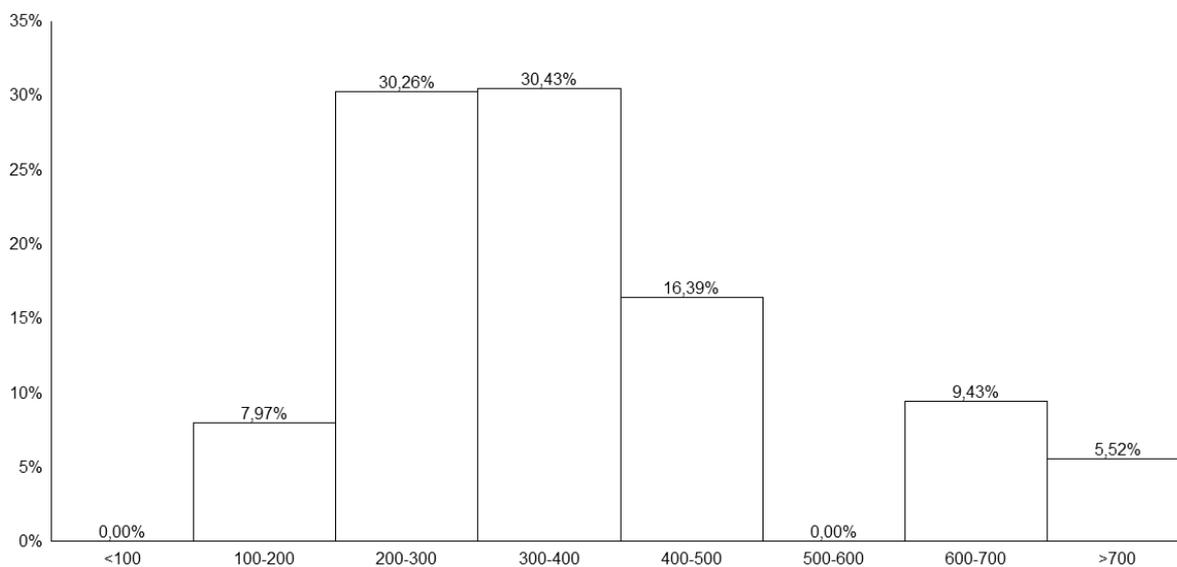
Figura 3.13: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=5$ e estimador SD1



Fonte: Elaborado pelo autor

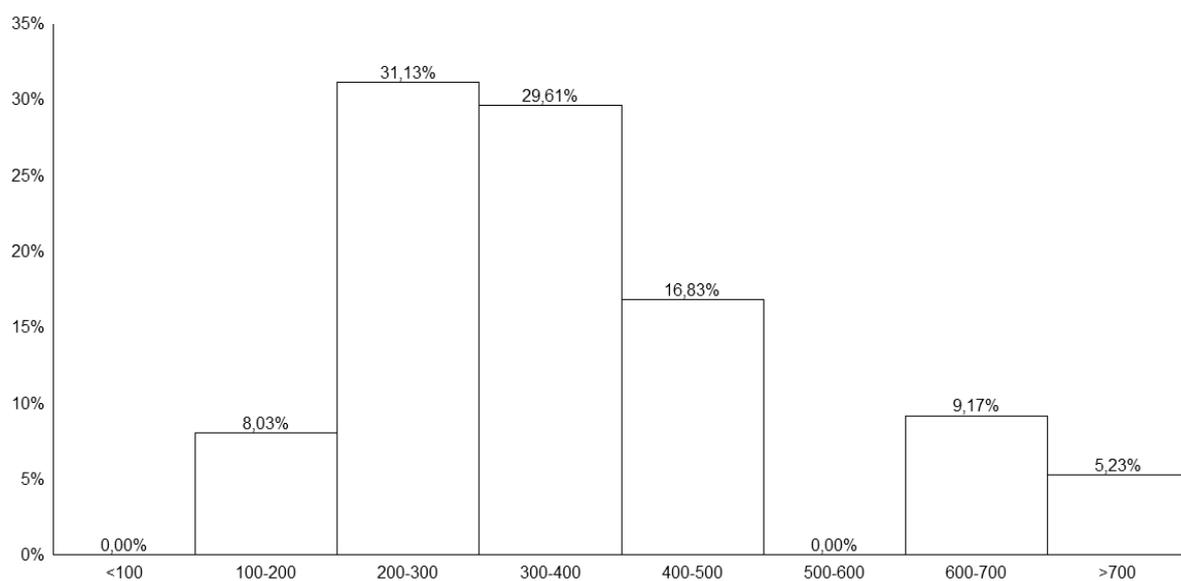
Figura 3.14: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=5$ e estimador SD2

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.15: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=5$ e estimador SD3

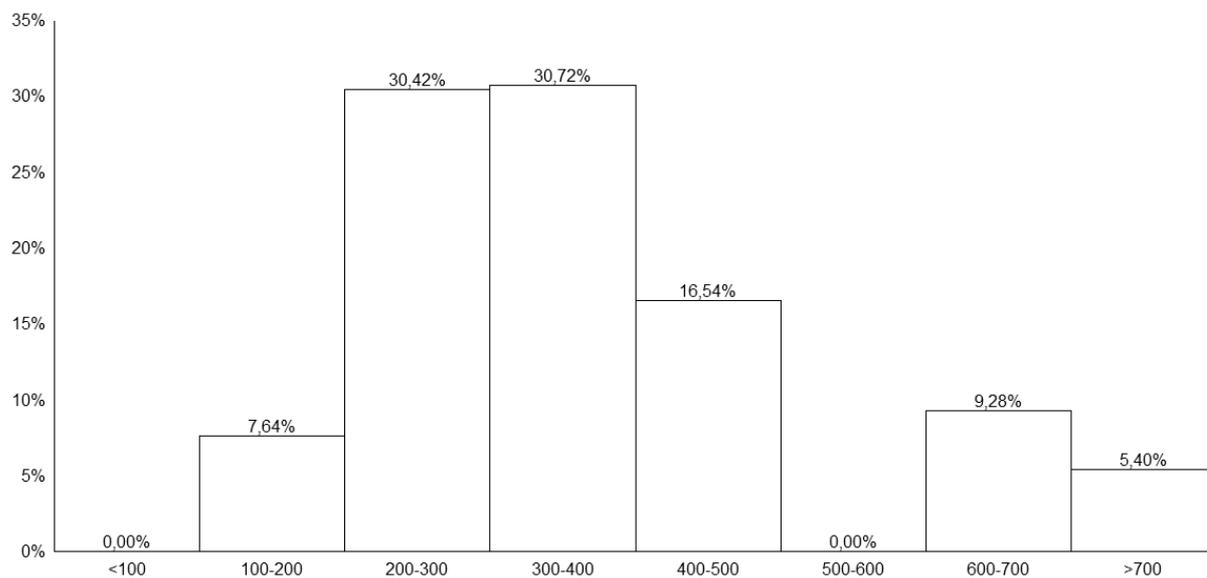
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.16: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=5$ e estimador SD4



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.17: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=5$ e estimador SD5



Fonte: Elaborado pelo autor

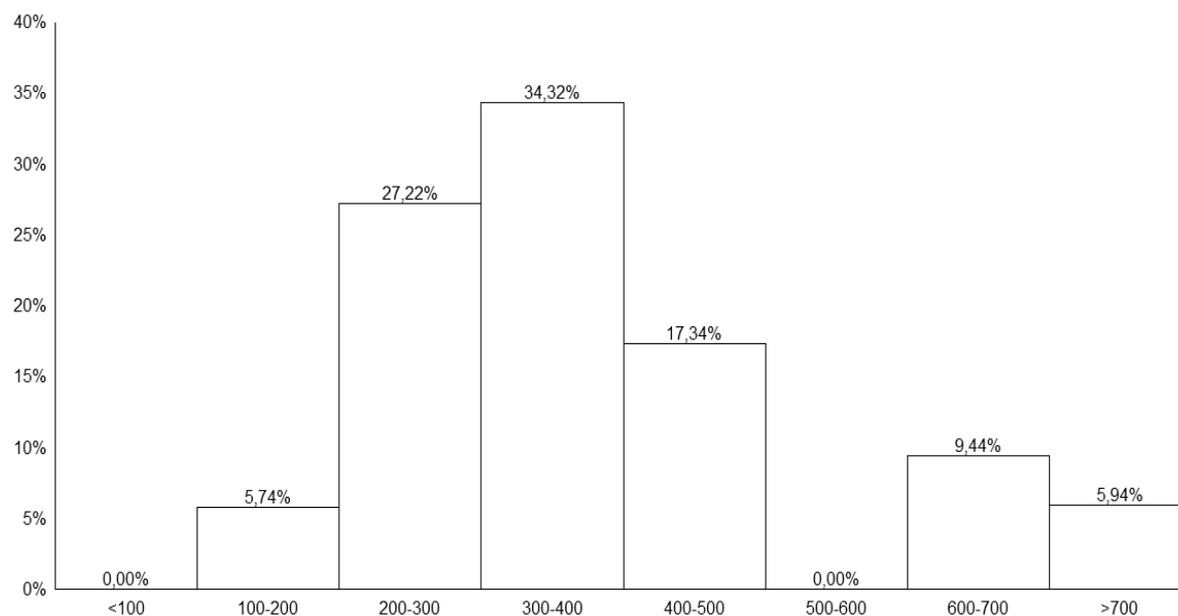
APÊNDICE D – DISTRIBUIÇÃO DO ARL_0 PARA $m=200$ E $n=5$

Tabela 3.20: Distribuição do ARL_0 para $n=5$ e $m=200$

	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
<100	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
100-200	5,74%	6,70%	6,59%	6,42%	6,34%
200-300	27,22%	25,92%	25,00%	25,94%	25,64%
300-400	34,32%	35,67%	33,33%	33,96%	33,60%
400-500	17,34%	16,21%	18,46%	17,96%	18,30%
500-600	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
600-700	9,44%	10,51%	11,55%	10,98%	11,00%
>700	5,94%	4,99%	5,06%	4,74%	5,12%

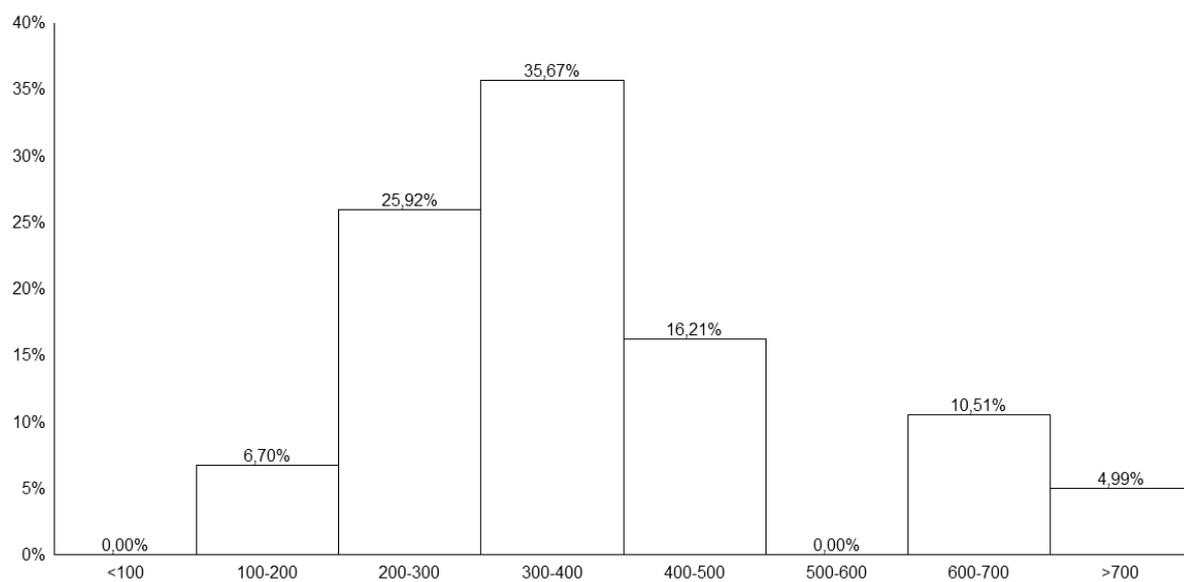
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.18: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=5$ e estimador SD1



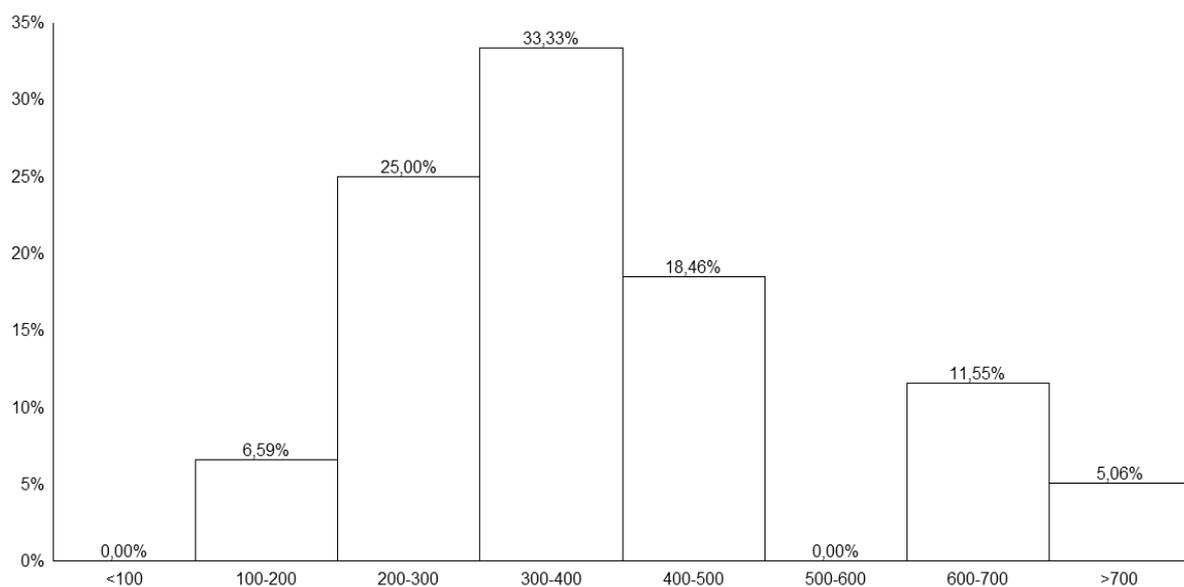
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.19: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=5$ e estimador SD2

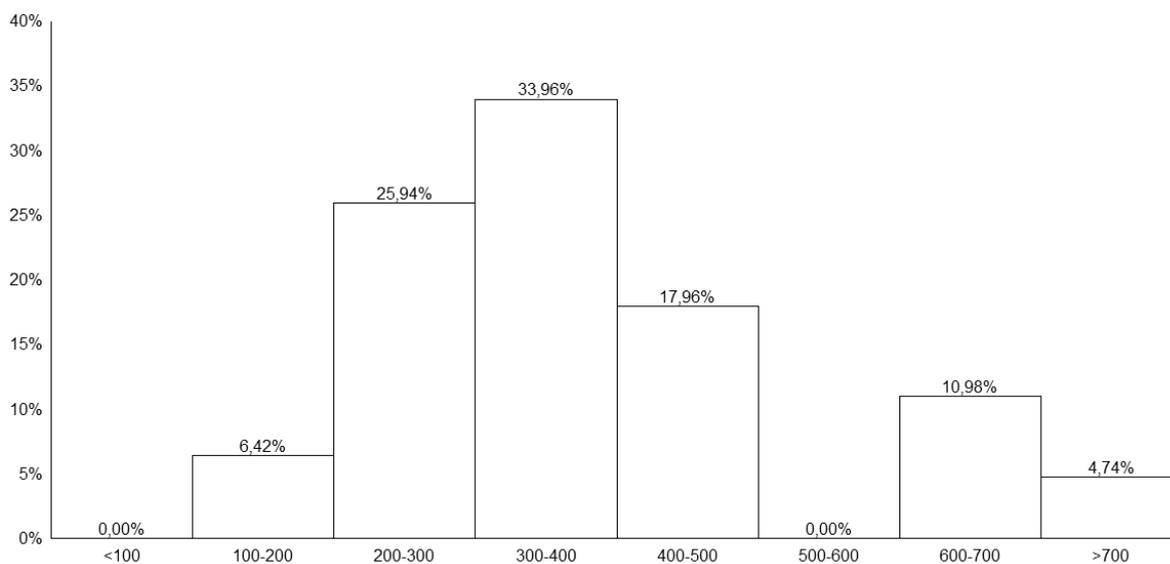


Fonte: Elaborado pelo autor

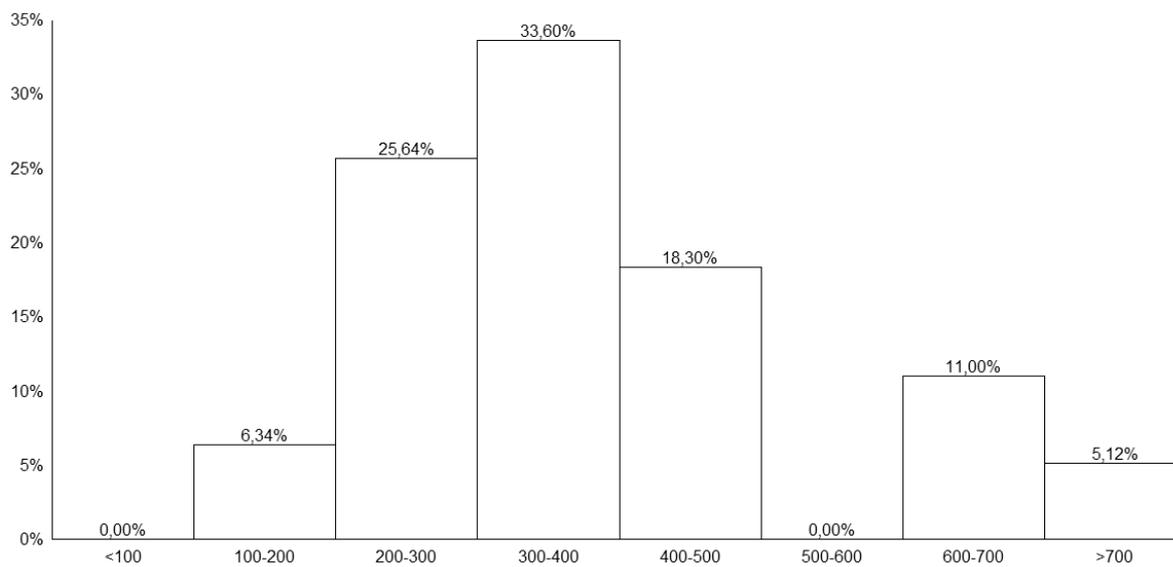
Figura 3.20: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=5$ e estimador SD3



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.21: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=5$ e estimador SD4

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.22: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=5$ e estimador SD5

Fonte: Elaborado pelo autor

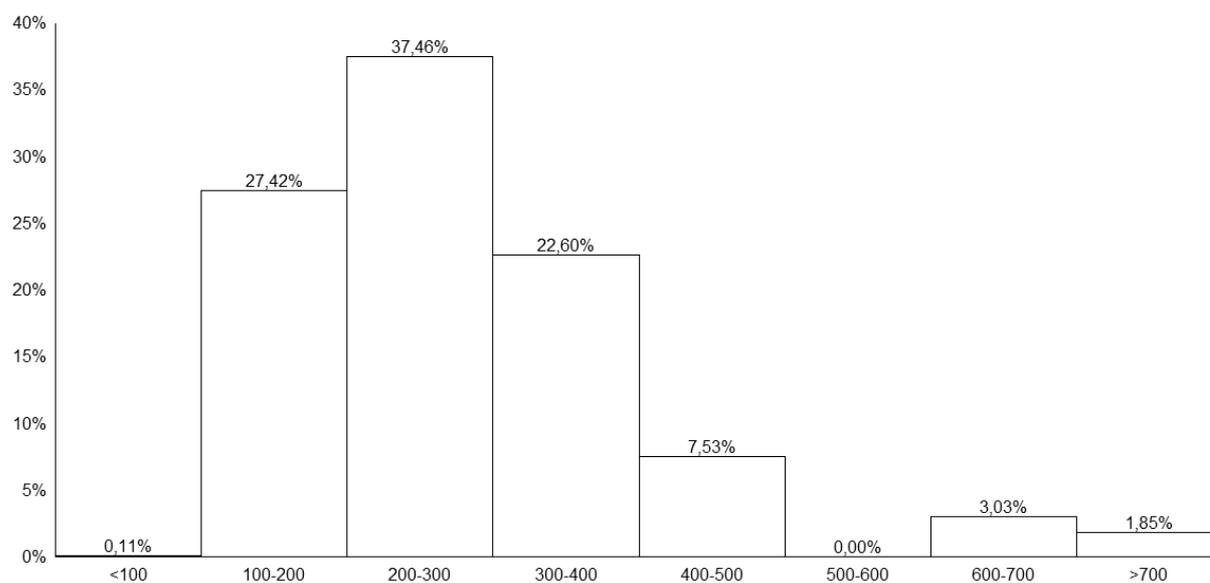
APÊNDICE E – DISTRIBUIÇÃO DO ARL_0 PARA $m=20$ E $n=10$

Tabela 3.21: Distribuição do ARL_0 para $n=10$ e $m=20$

	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
<100	0,11%	0,11%	0,11%	0,11%	0,11%
100-200	27,42%	27,10%	26,10%	28,66%	27,09%
200-300	37,46%	35,04%	35,72%	35,33%	35,20%
300-400	22,60%	25,04%	23,83%	23,08%	24,03%
400-500	7,53%	6,56%	7,51%	7,25%	7,64%
500-600	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
600-700	3,03%	4,21%	5,02%	4,01%	4,36%
>700	1,85%	1,94%	1,71%	1,56%	1,57%

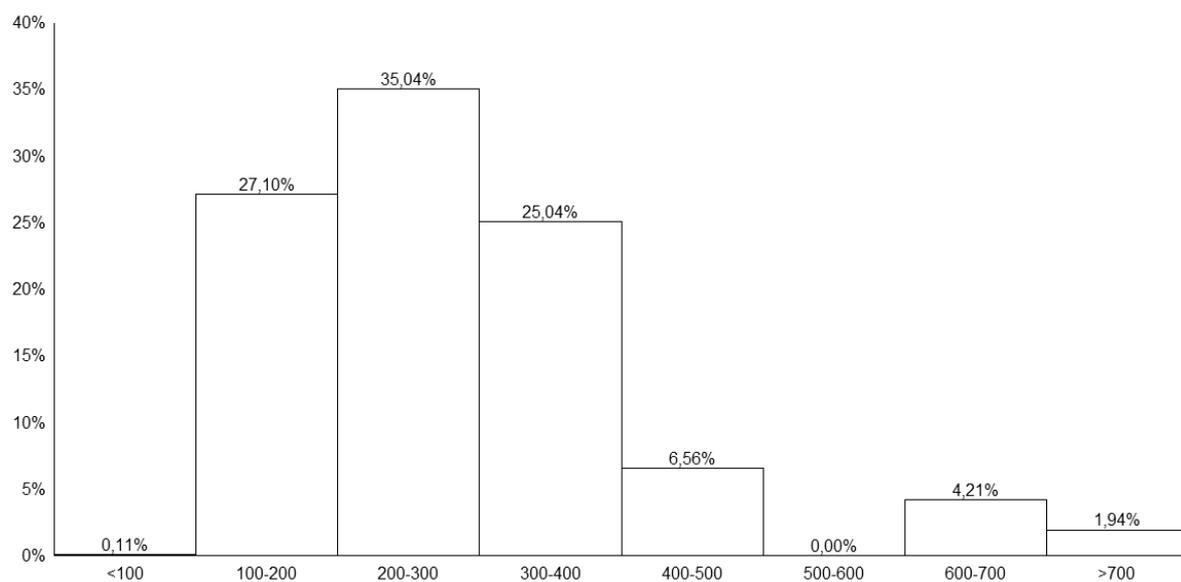
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.23: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=10$ e estimador SD1



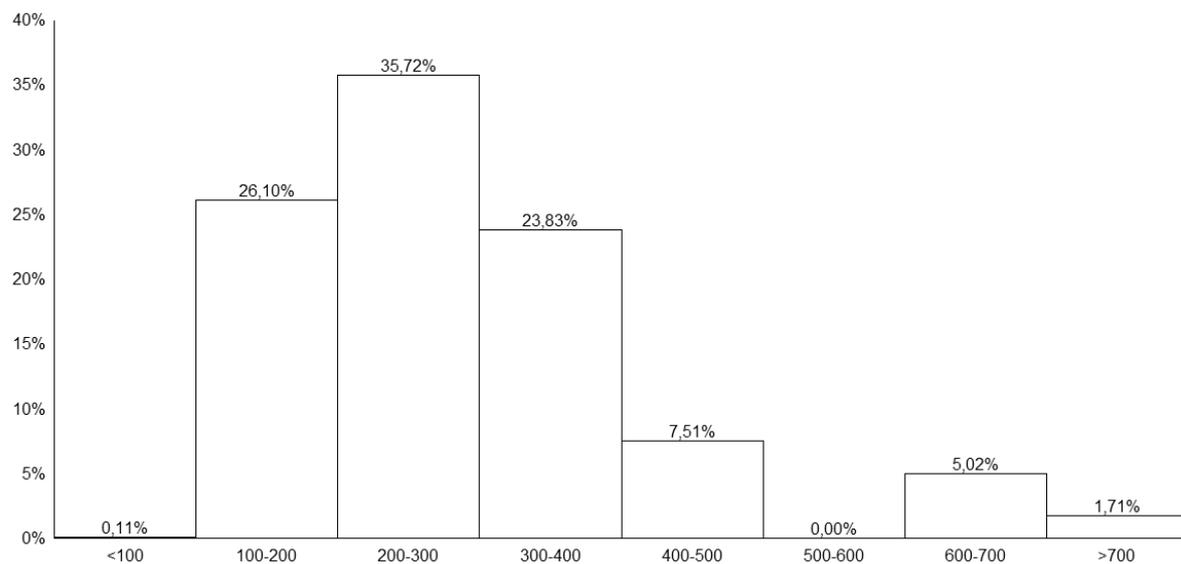
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.24: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=10$ e estimador SD2

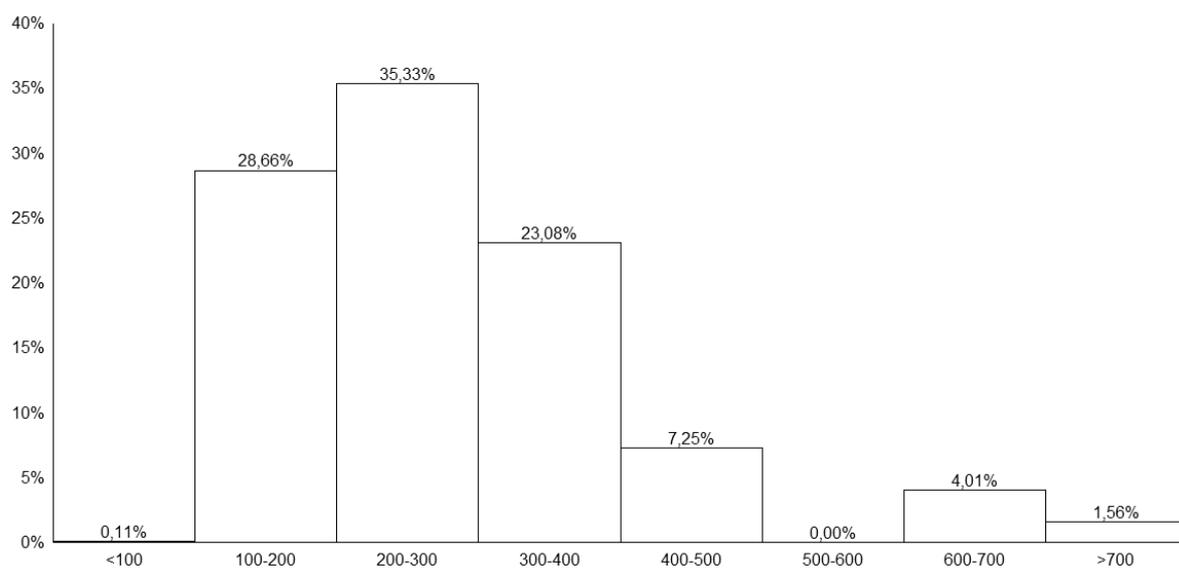


Fonte: Elaborado pelo autor

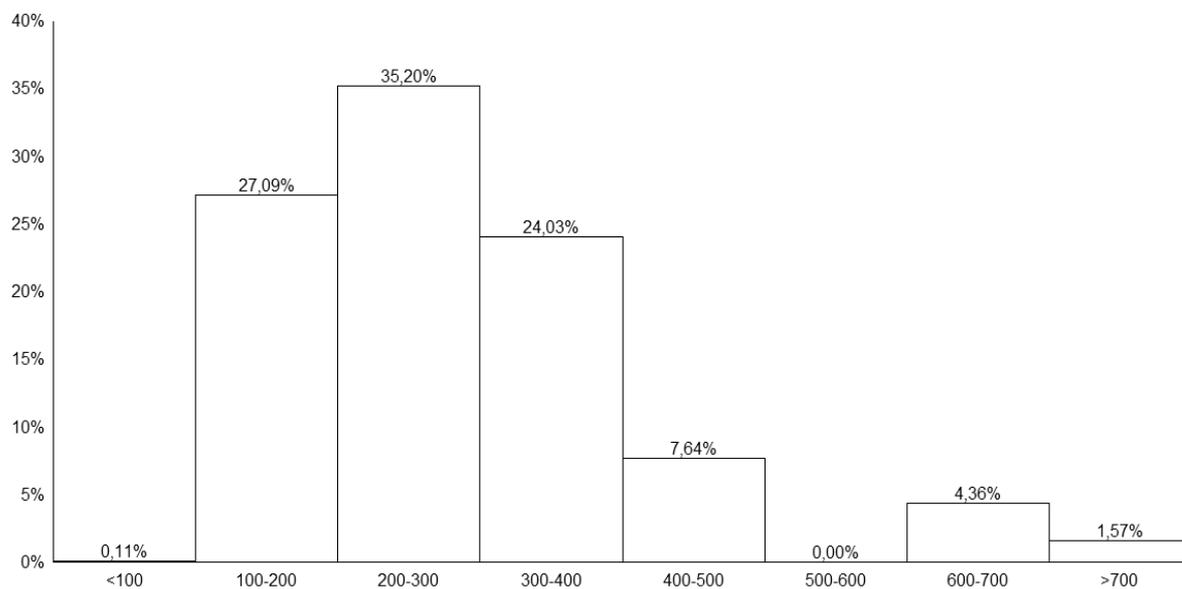
Figura 3.25: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=10$ e estimador SD3



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.26: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=10$ e estimador SD4

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.27: Distribuição do ARL_0 para $m=20$, $n=10$ e estimador SD5

Fonte: Elaborado pelo autor

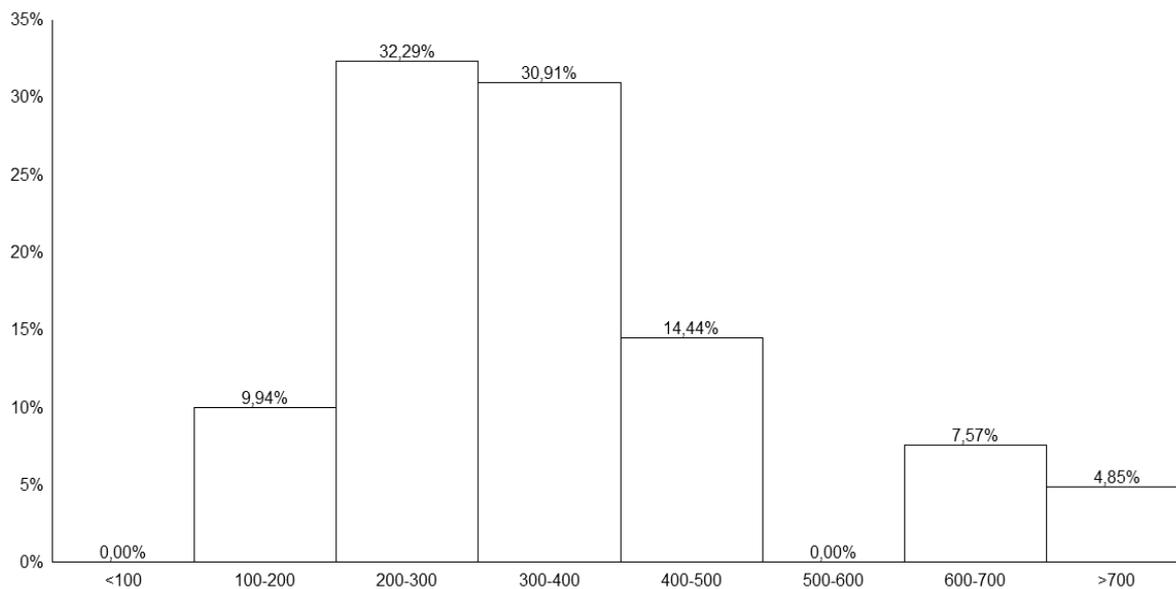
APÊNDICE F – DISTRIBUIÇÃO DO ARL_0 PARA $m=50$ E $n=10$

Tabela 3.22: Distribuição do ARL_0 para $n=10$ e $m=50$

	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
<100	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
100-200	9,94%	8,90%	9,29%	9,90%	9,37%
200-300	32,29%	33,98%	33,10%	33,73%	33,84%
300-400	30,91%	30,82%	31,39%	31,10%	30,68%
400-500	14,44%	13,34%	13,69%	13,12%	13,61%
500-600	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
600-700	7,57%	7,56%	6,96%	7,10%	6,93%
>700	4,85%	5,40%	5,57%	5,05%	5,57%

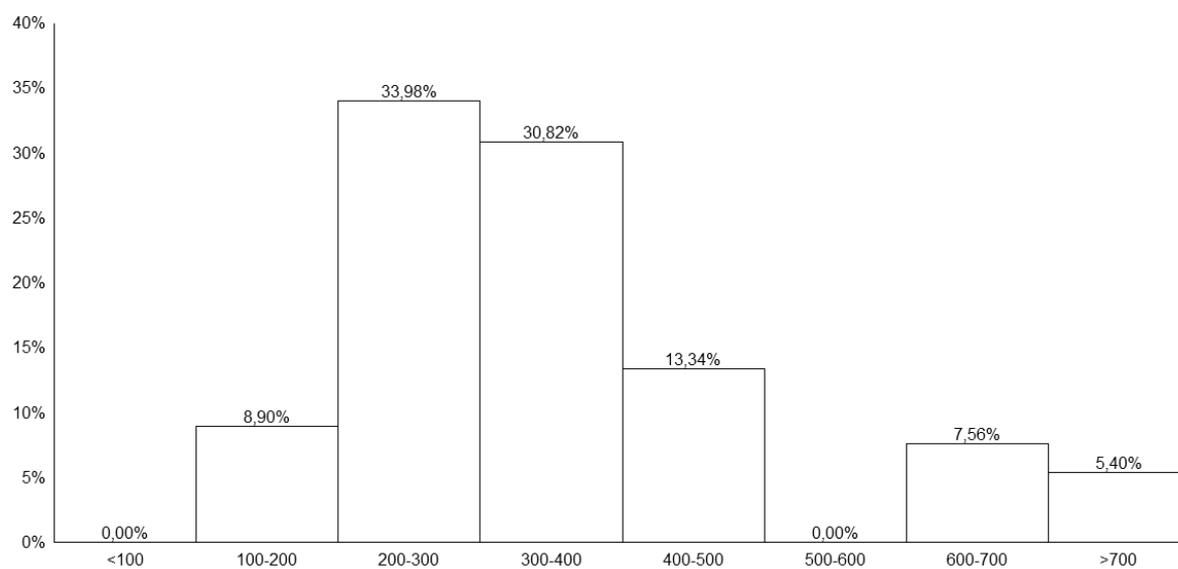
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.28: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=10$ e estimador SD1



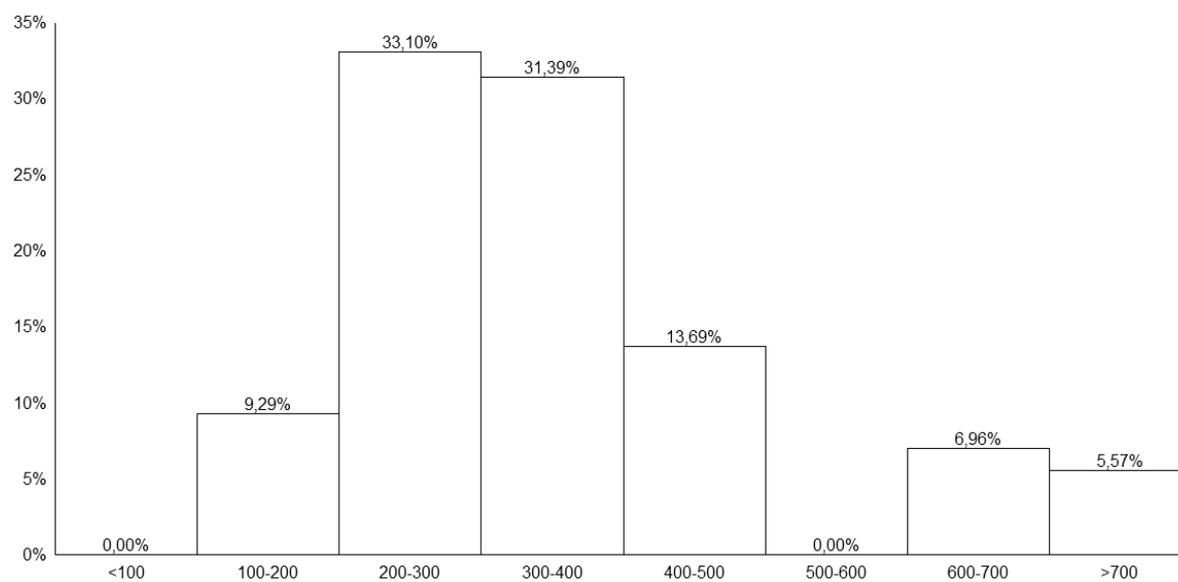
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.29: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=10$ e estimador SD2

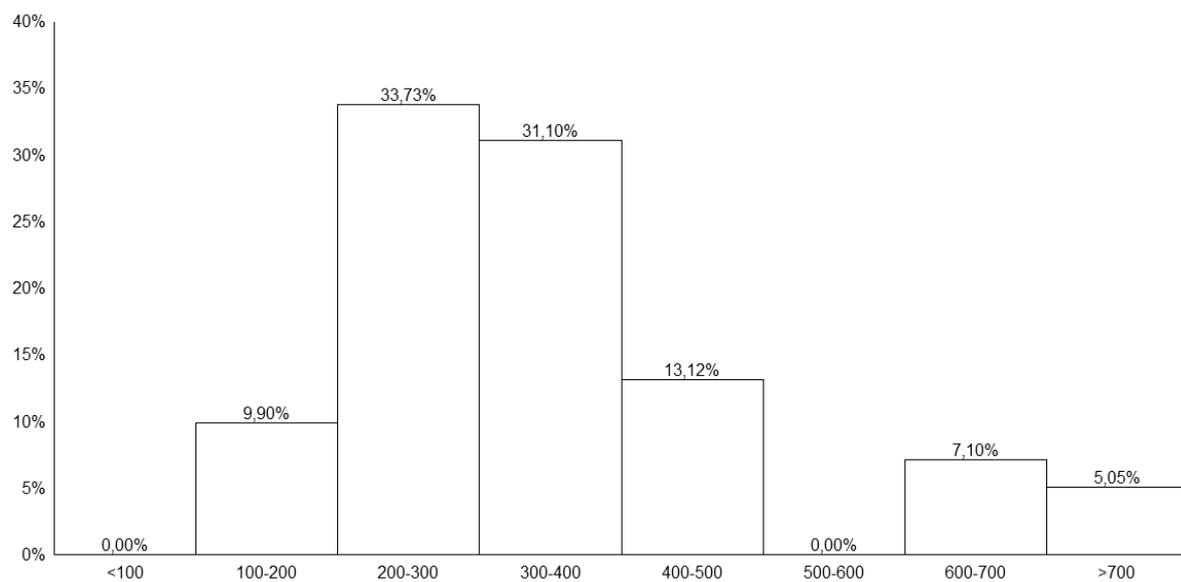


Fonte: Elaborado pelo autor

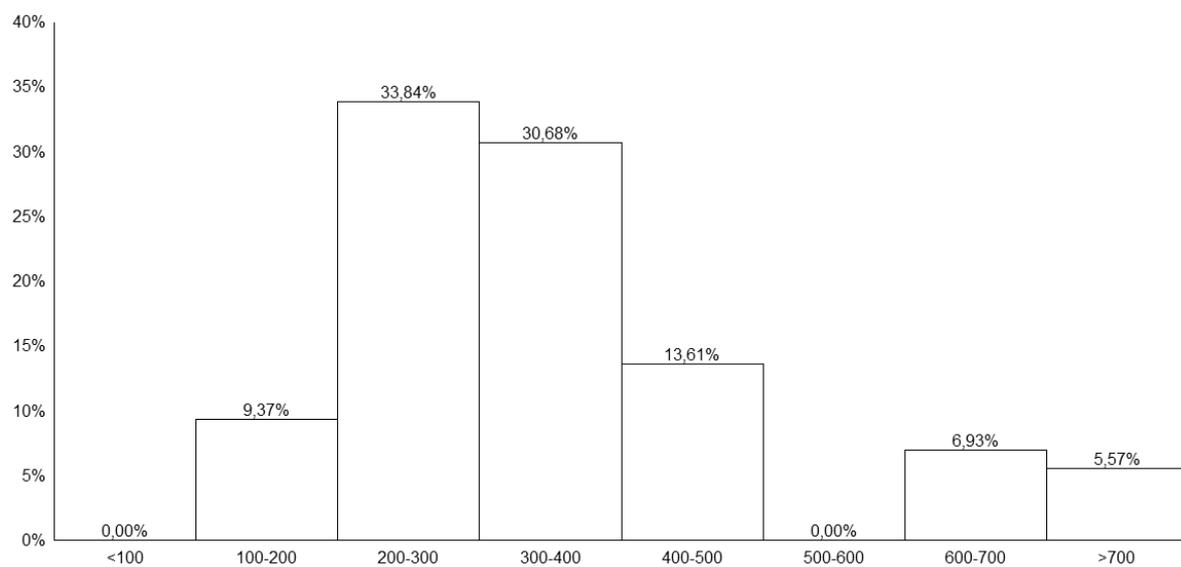
Figura 3.30: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=10$ e estimador SD3



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.31: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=10$ e estimador SD4

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.32: Distribuição do ARL_0 para $m=50$, $n=10$ e estimador SD5

Fonte: Elaborado pelo autor

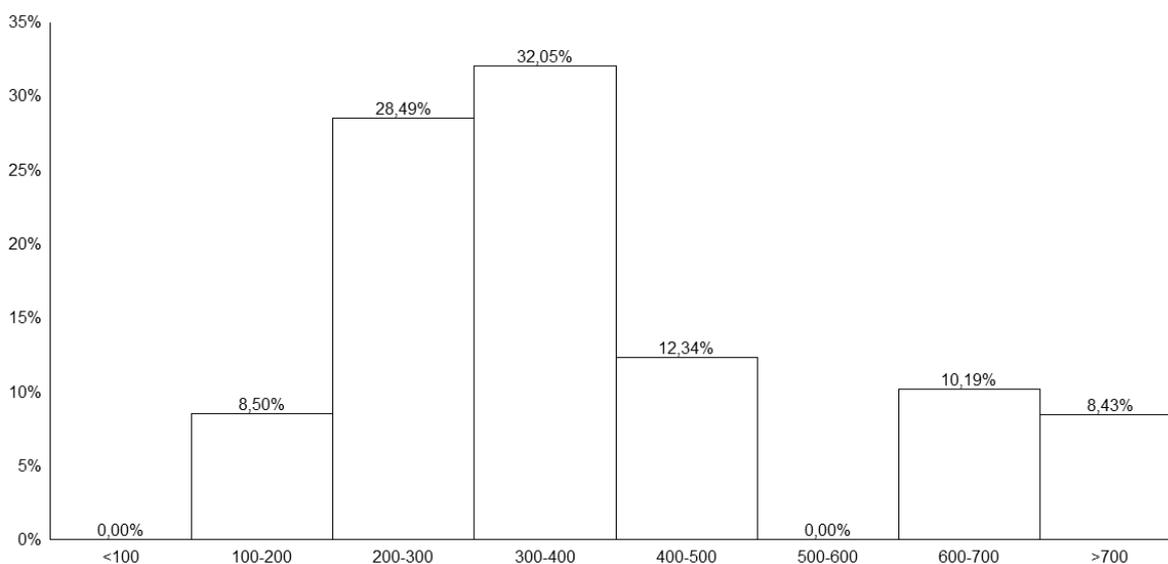
APÊNDICE G – DISTRIBUIÇÃO DO ARL_0 PARA $m=100$ E $n=10$

Tabela 3.23: Distribuição do ARL_0 para $n=10$ e $m=100$

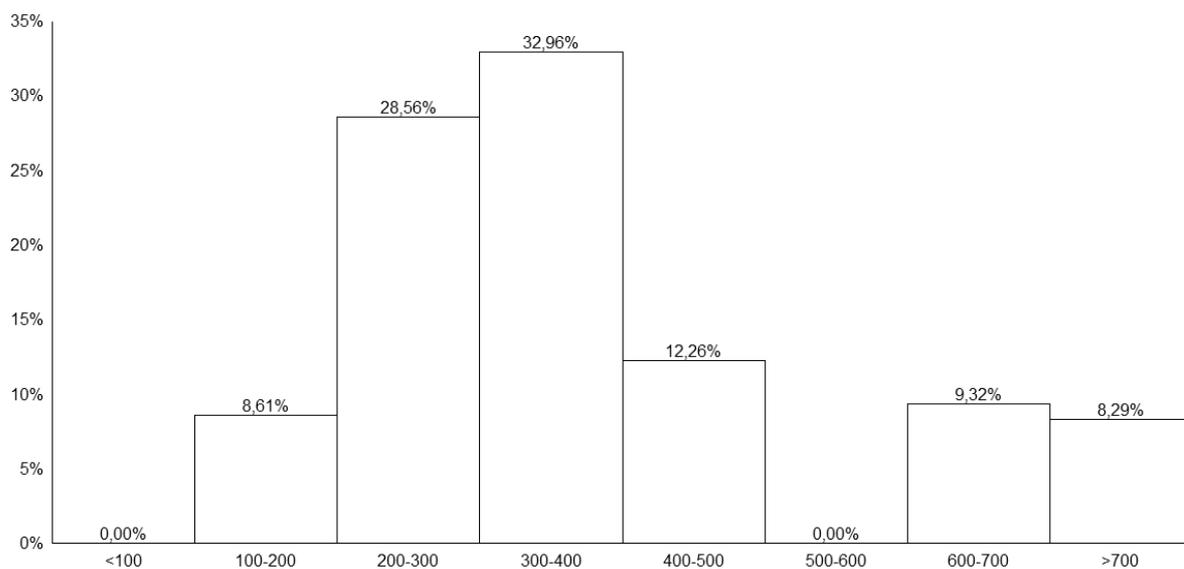
	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
<100	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
100-200	8,50%	8,61%	8,30%	8,76%	8,56%
200-300	28,49%	28,56%	27,96%	27,95%	27,90%
300-400	32,05%	32,96%	32,43%	32,32%	32,23%
400-500	12,34%	12,26%	13,80%	13,56%	13,63%
500-600	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
600-700	10,19%	9,32%	9,48%	9,55%	9,66%
>700	8,43%	8,29%	8,03%	7,86%	8,02%

Fonte: Elaborado pelo autor

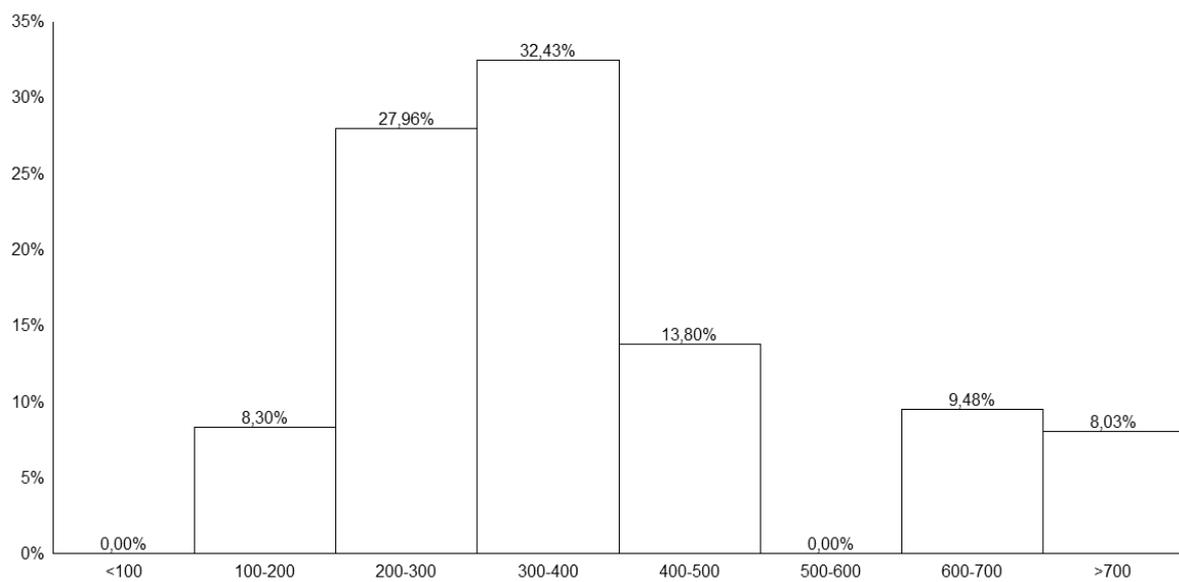
Figura 3.33: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=10$ e estimador SD1



Fonte: Elaborado pelo autor

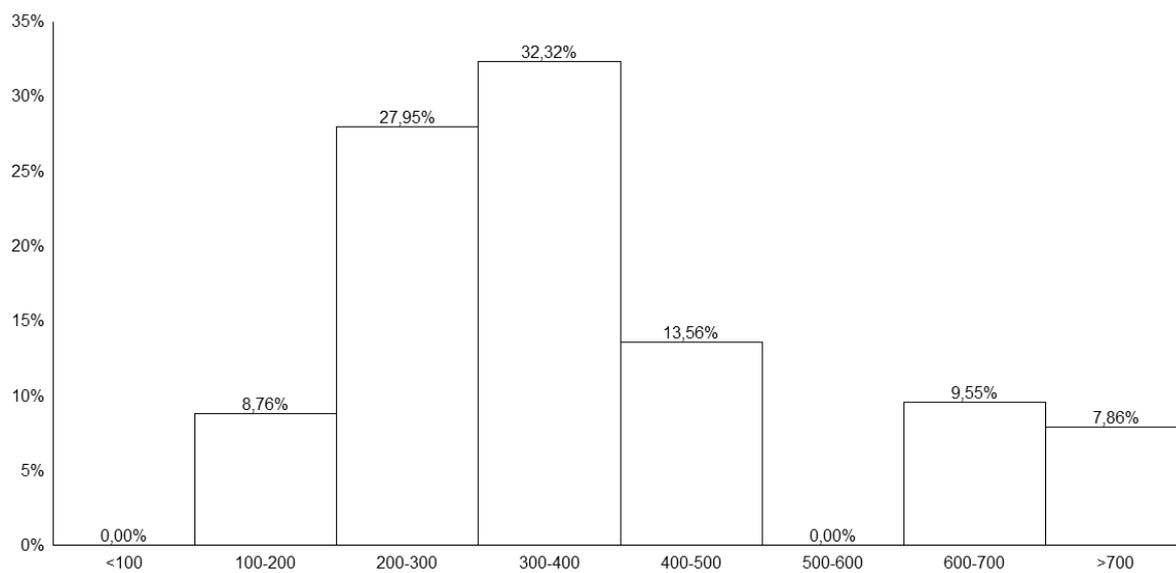
Figura 3.34: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=10$ e estimador SD2

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.35: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=10$ e estimador SD3

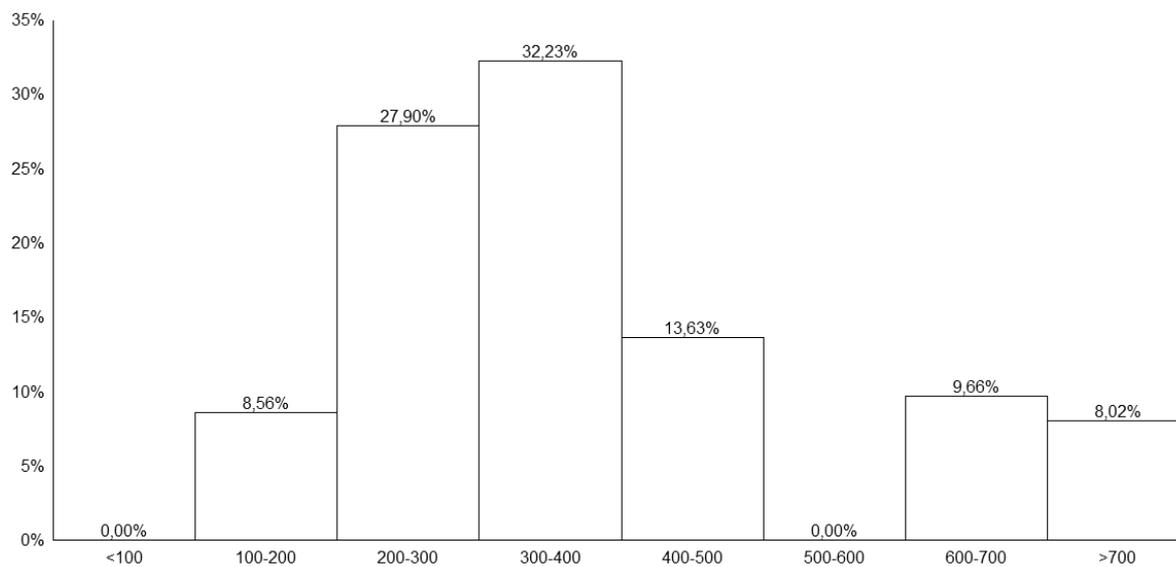
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.36: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=10$ e estimador SD4



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.37: Distribuição do ARL_0 para $m=100$, $n=10$ e estimador SD5



Fonte: Elaborado pelo autor

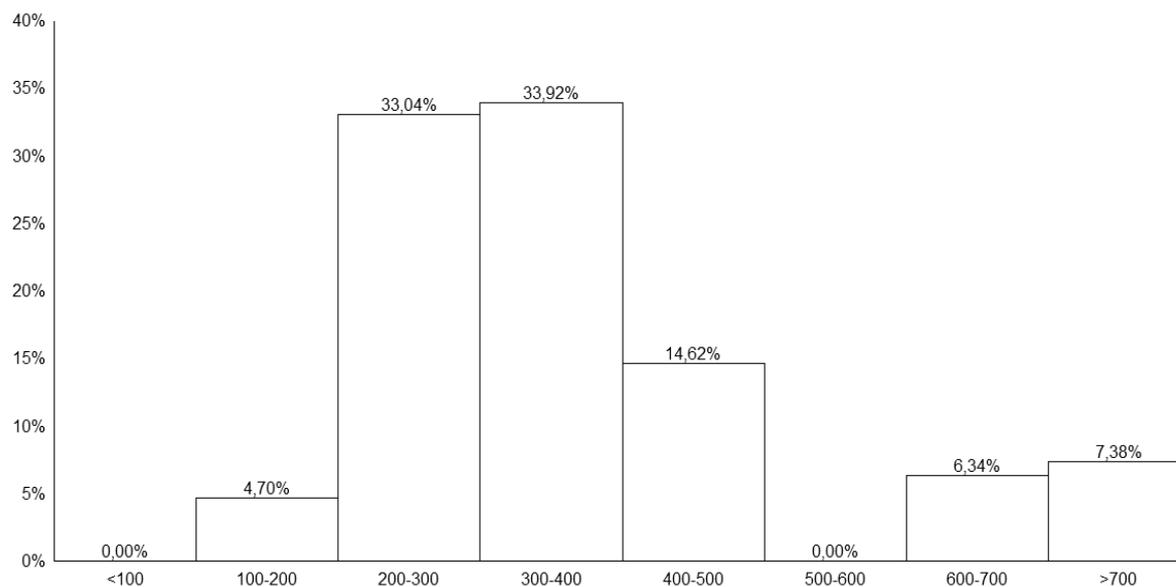
APÊNDICE H – DISTRIBUIÇÃO DO ARL_0 PARA $m=200$ E $n=10$

Tabela 3.24: Distribuição do ARL_0 para $n=10$ e $m=200$

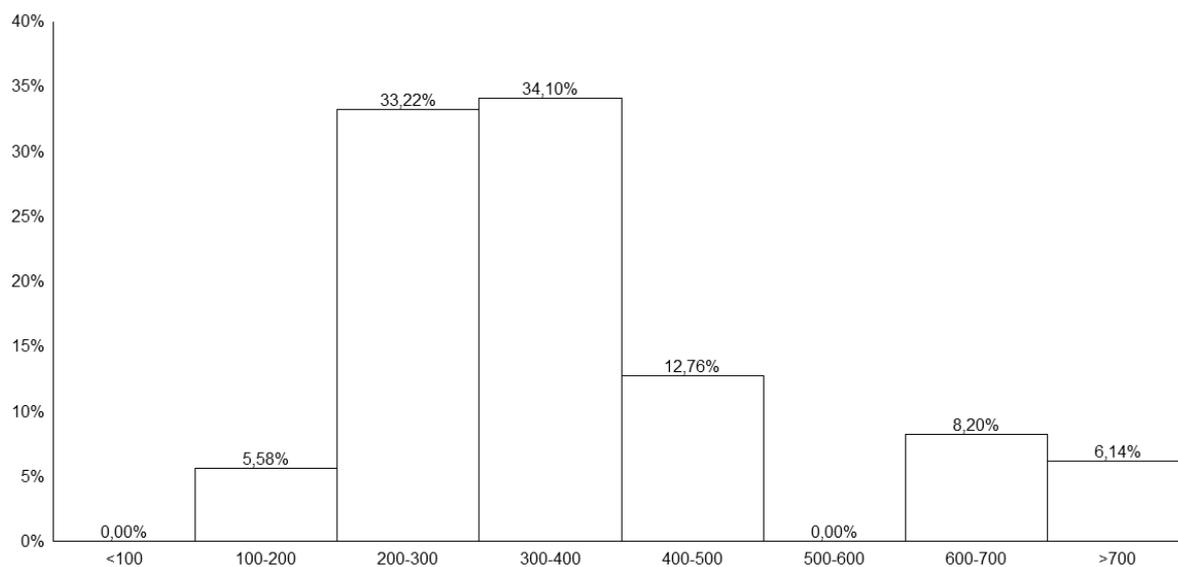
	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
<100	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
100-200	4,70%	5,58%	5,86%	5,70%	5,42%
200-300	33,04%	33,22%	32,22%	32,62%	32,42%
300-400	33,92%	34,10%	33,86%	33,88%	33,90%
400-500	14,62%	12,76%	13,02%	12,46%	12,98%
500-600	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
600-700	6,34%	8,20%	9,08%	9,26%	9,06%
>700	7,38%	6,14%	5,96%	6,08%	6,22%

Fonte: Elaborado pelo autor

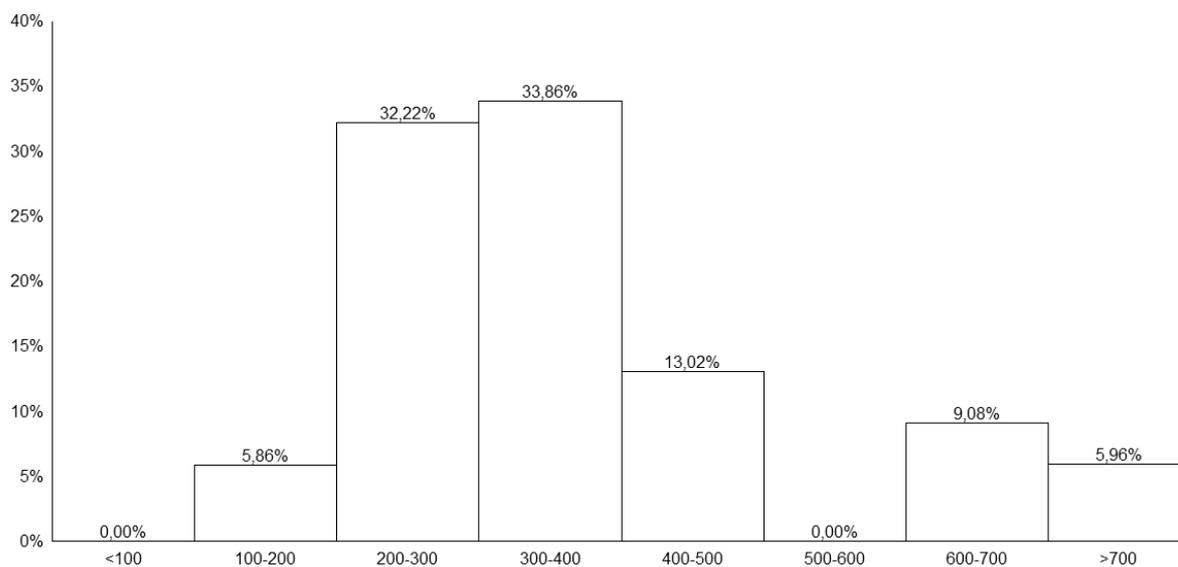
Figura 3.38: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=10$ e estimador SD1



Fonte: Elaborado pelo autor

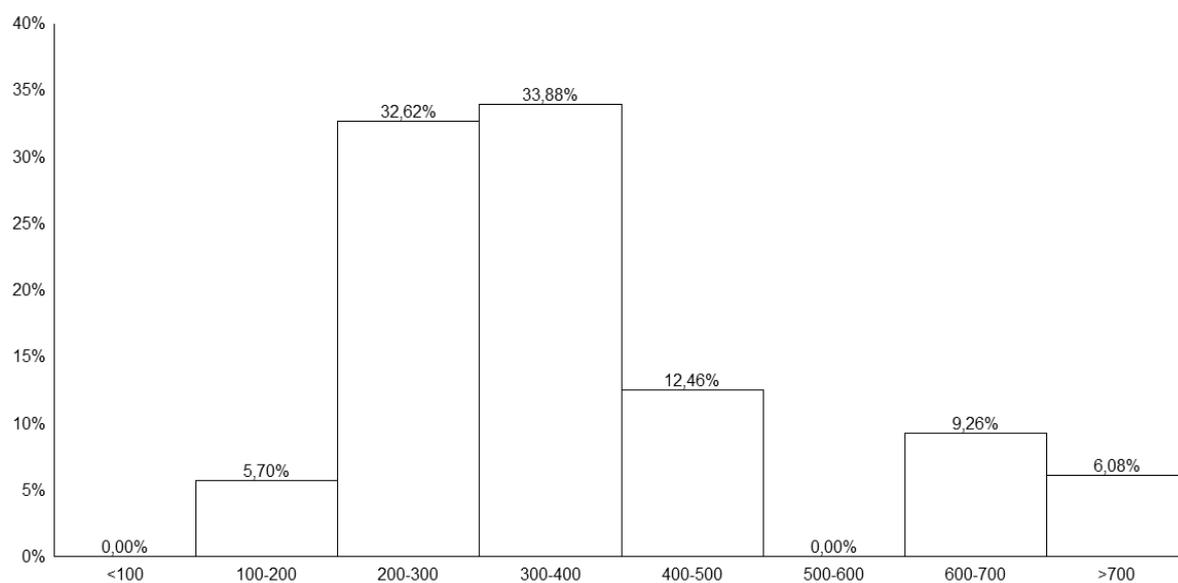
Figura 3.39: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=10$ e estimador SD2

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.40: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=10$ e estimador SD3

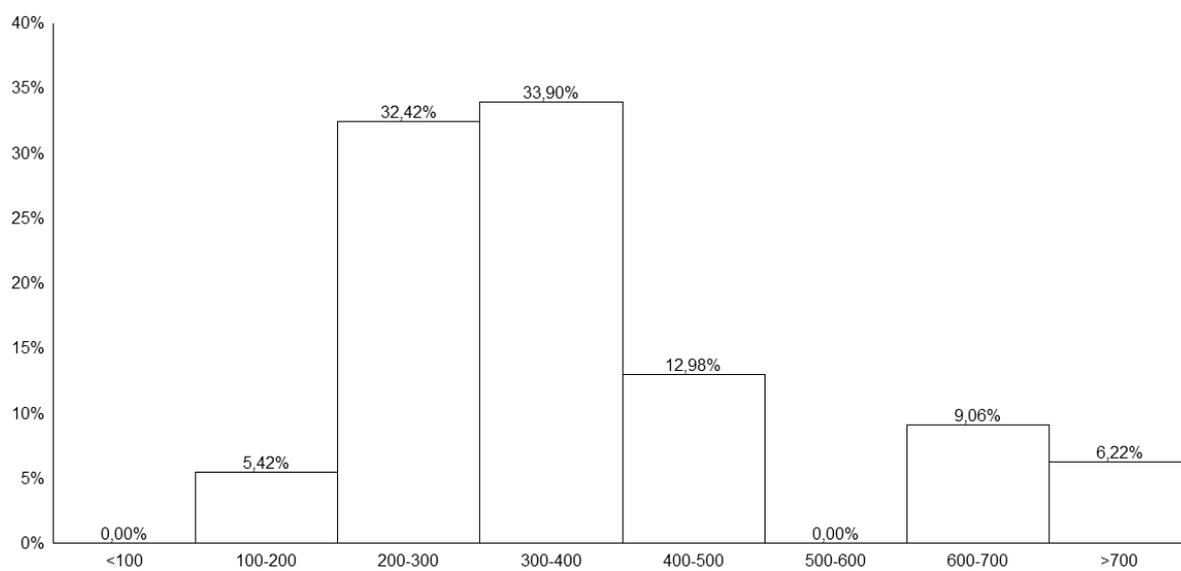
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.41: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=10$ e estimador SD4



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.42: Distribuição do ARL_0 para $m=200$, $n=10$ e estimador SD5



Fonte: Elaborado pelo autor