UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE ÁREA E PERÍMETRO UTILIZANDO O BANCO DE QUESTÕES DA OBMEP E O GEOGEBRA

JÚLIO AUGUSTO DOS SANTOS NETO

SÃO CARLOS

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE ÁREA E PERÍMETRO UTILIZANDO O BANCO DE QUESTÕES DA OBMEP E O GEOGEBRA

JÚLIO AUGUSTO DOS SANTOS NETO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas – PPGECE, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano

SÃO CARLOS

2018

Santo Neto, Júlio Augusto dos

Uma sequência didática sobre área e perímetro utilizando o banco de questões da OBMEP e o GeoGebra / Júlio Augusto dos Santo Neto. -- 2018.
95 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador: Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano
Banca examinadora: Prof. Dr. Érica Regina Filletti Nascimento; Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini
Bibliografia

1. Geometria. 2. Engenharia Didática. 3. GeoGebra. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).
DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Júlio Augusto dos Santos Neto, realizada em 26/02/2018:

Paulo N. Neto

Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano
UFSCar

Érica Filletti

Prof. Dr. Érica Regina Filletti Nascimento
UNESP

Paterlini

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini
UFSCar

Ao meu mestre, meu pai Vicente. Leitor assíduo comprou livros para auxiliarem seus filhos nos estudos quando ainda não éramos letrados. Eles foram sementes da minha educação. Entre os meus momentos mais felizes estão aqueles em que retornava depois de meses trabalhando em obra.

AGRADECIMENTOS

Ao autor da vida, pela capacidade que a nós foi dada de nos tornarmos pessoa.

A minha esposa Ana e a nossa filha Beatriz, que caminharam comigo em cada passo desta importante etapa de nossas vidas.

A minha mãe, por todas as lutas que teve pela subsistência e futuro dos filhos.

Aos professores Claudina Rodrigues, João Sampaio, Roberto Paterlini, Luciene Bertoncello e Pedro Malagutti, pelo empenho e dedicação.

Ao professor Paulo Caetano, pelas orientações, por ter me dado a tranquilidade e motivação sem a qual a conclusão deste trabalho estaria comprometida.

A vida é demasiado curta para nos permitir interessar-nos por todas as coisas, mas é bom que nos interessemos por tantas quantas forem necessárias para preencher os nossos dias.

Bertrand Russell

RESUMO

Este trabalho apresenta uma sequência didática com questões de geometria desenvolvidas a partir de um problema do Banco de Questões da OBMEP utilizando como apoio um texto dialógico e o software GeoGebra. Tem a Engenharia Didática como referencial teórico e faz uso de uma linguagem acessível, de personagens de desenhos animados e de recursos computacionais. Pretende ser uma alternativa de aprendizagem que valoriza o desenvolvimento da autonomia do aluno tendo o professor como mediador. A questão da OBMEP solicita o cálculo do perímetro de um quadrilátero contido em um triângulo equilátero. A resolução exige conhecimentos geométricos subjacentes ao problema que são explorados pelas atividades. Outro problema trabalhado é o cálculo da maior área possível para uma figura de perímetro constante. Frações, álgebra e função quadrática são associadas aos problemas geométricos contribuindo para uma aprendizagem contextualizada e interdisciplinar. O trabalho foi aplicado em uma turma do 1º ano do curso Técnico em Redes de Computadores Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), campus Catanduva, nos meses de outubro e novembro de 2017.

Palavras-chave: geometria, perímetro, área, engenharia didática, texto dialógico, GeoGebra.

ABSTRACT

This work presents a didactic sequence with questions of geometry developed from a problem of the OBMEP's Question Database using as support a dialogical text and the software GeoGebra. Based on Didactic Engineering has accessible language, animated characters and computational resources. It intends to be an alternative learning for the development the student autonomy and transforming the teacher like mediator of this one. The OBMEP question requires the calculation of the perimeter of a quadrilateral contained in an equilateral triangle. Resolution requires geometric underlying knowledge to the problem that must be explored by the activities. Another traditional problem is the calculation of the largest area possible for a constant perimeter figure. Fractions, algebra and quadratic function are associated with geometric problems contributing to a contextualized and interdisciplinary learning. The work was carried out with the first year of the course on Computer Networks Integrated to High School of the Federal Institute of Education, Science and Technology of São Paulo (IFSP), Catanduva campus, in the months of October and November of 2017.

Keywords: geometry, perimeter, area, didactic engineering, dialogic text, GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O autor é professor há dez anos, formado em Licenciatura Matemática pela UNIMEP (Universidade Metodista de Piracicaba). Trabalhou na escola do Estado de São Paulo por nove anos, o último deles em escola de ensino integral e há um ano trabalha no Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP). Aos 14 anos ingressou na Escola SENAI de Americana - SP no curso de aprendiz de mecânica geral (tornearia e ajustagem mecânica). Trabalhou pouco mais de um ano como torneiro mecânico de produção e por oito anos em uma loja de ferramentas e acessórios para a indústria em trabalhos auxiliares. Recém-formado no ensino médio relutou em ser professor, em razão das dificuldades próprias do trabalho dos seus docentes da qual presenciara como aluno na escola básica. A falta de respeito dos alunos para com os professores da Escola Estadual e seus baixos salários desmotivava a empreitada universitária. No entanto, a possibilidade de ter o conhecimento como ferramenta de trabalho era um atrativo. Poder pensar quem é o ser humano, suas obras e o seu próprio pensamento, por exemplo, ao desenvolver a matemática, não é algo de que se ocupem geralmente os trabalhadores das oficinas e comércios, mas é um caminho possível e recomendável ao professor. Além disso, se na oficina mecânica e nas vendas não se encontrava nem se destacava, nas salas de aulas do SENAI ou nos levantamentos de preços e margens de lucro do setor de compras da loja, a fácil lida com os números já lhe apontava a licenciatura matemática como uma sequência interessante e oportuna.

Como professor, reconhece a dificuldade de se praticar uma aula diferente da convencional de exposição de conteúdos, resolução e correção de exercícios e exames, pela sua própria formação – até a graduação toda a formação foi tradicional – e por uma dinâmica escolar enraizada nesta forma de ensino. Contudo, sempre executou pequenas iniciativas de diversificação didático-pedagógicas. Os chamados cadernos do professor e do aluno, que ainda hoje servem de modelo de aplicações de conteúdos nas escolas do Estado de São Paulo, traz várias iniciativas interessantes de diversificação das atividades e estas eram quase sempre realizadas como sugeridas. Iniciativas simples, como incentivar o aluno a desenhar o gráfico que simulasse o comprimento de uma sombra no mesmo horário em várias datas do ano, sem que alguma referência a senóide tenha sido feita a priori, ajudava ao aluno atribuir sentido às funções capazes de modelar fenômenos cíclicos. Também foi quem iniciou e estimulou entre seus pares o uso de alguns softwares matemáticos em sua escola: Superlogo (para crianças do 7º ano na aprendizagem de ângulos), Winplot (deslocamentos e outras transformações de gráficos de funções, no ensino médio) e GeoGebra (desenho de figuras planas de dimensões variáveis utilizadas na aprendizagem de álgebra no 8º ano). Na escola de ensino integral do Estado de São Paulo em que trabalhou pouco mais de um ano, foi incentivador do uso do laboratório para as aulas de matemática. Quase sempre o trabalho era elementar, mas de resultados interessantes. Ao invés de simplesmente apresentar uma tabela trigonométrica que apresentasse os valores dos senos de determinados ângulos, o laboratório era usado para, por exemplo, desenhar triângulos retângulos com ângulos agudos fixos, mas com diferentes dimensões dos lados e as divisões do cateto oposto pela hipotenusa apresentavam em todos os triângulos valores próximos àquele apresentado pela tabela trigonométrica.

O presente trabalho foi realizado com a turma do 1º ano do curso Técnico em Redes de Computadores Integrado ao Ensino Médio do IFSP - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado de São Paulo, campus Catanduva.

O IFSP foi instituído pela Lei nº 11.892, de 29 de dezembro de 2008, mas sua história remonta ao ano de 1909, embora com outras denominações e objetivos próprias de cada época. Incialmente intitulada Escola de Aprendizes e Artífices, as primeiras escolas profissionalizantes em nível federal, localizadas nas capitais dos Estados, contava em São Paulo com cursos de tornearia, mecânica e eletricidade voltados a atender os "desfavorecidos da fortuna" (Lei 1.606/1906) e obrigava a participação em aulas noturnas àqueles que não soubessem ler. Em outros Estados os cursos de sapateiro e alfaiate eram comuns. Em 1937 a escola técnica federal, em São Paulo, passa a se chamar Liceu Industrial de São Paulo, com uma reorganização administrativa subordinada ao recém criado Ministério da Educação e Saúde. Em 1942 o então presidente Getúlio Vargas criou a Lei Orgânica do Ensino Industrial (Decreto-Lei nº 4.073 / 1942) visando padronizar o ensino técnico no país. Em um primeiro momento a instituição passou a se chamar Escola Industrial de São Paulo. Depois de verificadas algumas exigências estruturais nas unidades educacionais, passou a se chamar Escola Técnica de São Paulo incluindo, além do ensino técnico, cursos pedagógicos. Em 1961 a Escola Técnica de São Paulo foi transformada pelo presidente Juscelino Kubitschek em uma autarquia. Neste governo e com o Presidente João Goulart verifica-se alguma liberdade administrativa e pedagógica aos servidores. Durante a ditadura militar no ano de 1967, nova denominação: Escola Técnica Federal de São Paulo (ETFSP), incluindo pela primeira vez, em 1971, cursos de engenharia e cursos técnicos integrados ao ensino médio. Apenas em 1987, cria-se no país uma unidade fora de uma capital, na cidade de Cubatão. No governo do presidente Fernando Henrique Cardoso, em 1999, nova denominação: CEFET-SP, agregando novos cursos superiores – formação de tecnólogos na área da indústria e serviços, além de licenciaturas e engenharias.

A partir de 2008, o IFSP - como passou a ser chamado - tem ofertado cursos técnicos concomitantes e integrados ao ensino médio, cursos superiores voltados à tecnologia e à formação de professores e cursos de formação continuada nos âmbitos profissional (PROEJA FIC) e educacional (PROEJA). Os cursos técnicos concomitantes são feitos em parcerias com escolas estaduais. A parte propedêutica é feita na escola estadual, enquanto a parte técnica é realizada no IFSP. Já os cursos técnicos integrados ao ensino médio são realizados em campus do IFSP em sua totalidade. Tais cursos refletem, por um lado, a vocação histórica do IFSP na formação profissional e, por outro lado, desafios atuais da sociedade brasileira. A atual necessidade de oferta de profissionais das áreas tecnológicas em nível médio e superior se aproxima da vocação que acompanha as escolas técnicas federais desde sua origem. Contudo, os novos desafios acentuados nas últimas décadas no âmbito educacional de formação de novos professores, frente ao déficit quantitativo de formação destes, principalmente na área de exatas, e necessidade de ampliação da oferta de educação de qualidade e da correção da formação profissional e cultural daqueles que não tiveram acesso a tais serviços, explicam a amplitude dos cursos e dos níveis educacionais do IFSP como descrito em Projeto Pedagógico do Curso Técnico em Redes do campus Catanduva:

> Nesse percurso histórico, percebe-se que o IFSP, nas suas várias caracterizações (Escola de Artífices, Liceu Industrial, Escola Técnica, Escola Técnica Federal e CEFET), assegurou a oferta de trabalhadores qualificados para o mercado, bem como se transformou numa escola integrada no nível técnico, valorizando o ensino superior e, ao mesmo tempo, oferecendo oportunidades para aqueles que não conseguiram acompanhar a escolaridade regular (Projeto Pedagógico do Curso Técnico em Redes Integrado ao Ensino Médio do campus Catanduva, 2015).

Embora cada campus tenha autonomia para a escolha dos cursos ofertados há algumas exigências normativas que asseguram a oferta de cursos técnicos e de licenciaturas como descreve o Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura Química de campus de Catanduva.

> As novas ressignificações e mudanças advindas na recente transformação em Instituto fazem com que o mesmo passe a ter relevância de universidade e destaque-se pela autonomia. Destas alterações, destaque-se que o IFSP deve destinar 50% das vagas para os cursos técnicos e, no mínimo, 20% das vagas para os cursos de licenciatura, sobretudo nas áreas de Ciências e da Matemática (Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura Química do campus Catanduva, 2014).

Cabe ressaltar ainda, especialmente sobre os cursos técnicos, o caráter integral da formação ofertada. O IFSP entende formação integral como uma articulação entre a formação técnica e científica com a formação cultural do seu egresso. Além dos trabalhos realizados em cada disciplina constante na base comum, o IFSP realiza eventos objetivando tal formação holística ao longo do ano letivo, como o IFsport, IFshow, Semana da Tecnologia, Semana do Livro, Semana do Meio ambiente, além de palestras, teatros e outras apresentações diversas.

Atualmente o IFSP conta com cerca de 40.000 alunos em 37 campi nas cidades de Araraquara, Avaré, Barretos, Birigui, Boituva, Bragança Paulista, Campinas, Campos do Jordão, Capivari, Caraguatatuba, Cubatão, Guarulhos, Hortolândia, Ilha Solteira, Itapetininga, Itaquaquecetuba, Jacareí, Jundiaí, Matão, Piracicaba, Pirituba, Presidente Epitácio, Registro, Salto, São Carlos, São João da Boa Vista, São José dos Campos, São Miguel Paulista, São Paulo, São Roque, Sorocaba, Sertãozinho, Suzano, Tupã e Votuporanga, além de Catanduva.

Catanduva conta com 120.691 habitantes[1]. É chamada de cidade feitiço por "enfeitiçar" aqueles que a visitam para se instalarem em definitivo na cidade. Localizada a 385 km de São Paulo, pertencente à mesorregião de São José do Rio Preto, e é sede da microrregião de Catanduva, que conta ainda com outras doze cidades: Ariranha, Cajobi, Catiguá, Elisiário, Embaúba, Novais, Palmares Paulista, Paraíso, Pindorama, Santa Adélia, Severínia e Tabapuã. Cidades pequenas como, por exemplo, Elisiário, que conta com pouco mais de 3.000 habitantes, têm em Catanduva um centro regional para serviços de saúde e educação, bem como para comércio e trabalho. Por esta razão o centro comercial de Catanduva aparenta-se a outros centros de cidades mais populosas pela quantidade de lojas e consumidores. Na área industrial destaca-se a produção de ventiladores, laranja, café, laticínios, álcool e açúcar. Produtora de 90% dos ventiladores produzidos no Brasil, a cidade ficou conhecida como a "capital nacional dos ventiladores". Seu PIB per capita de pouco mais de R$ 30.000,00 (162º lugar de 645 cidades do Estado de São Paulo e 789° de 5570, no país) e com IDHM (Índice de Desenvolvimento Humano Municipal) de 0,785, próximo do nível de classificação "Muito Alto" (>0,800), evidenciam o forte desenvolvimento da cidade.

O campus do IFSP Catanduva está localizado na periferia da cidade e foi inaugurado em 2010. Conta com um terreno de 50.109,47m², dispondo de 13 salas de aula e 6 laboratórios de informática equipados com projetores, sendo que em 4 deles há também uma lousa digital. Conta também com 9 outros laboratórios, a maioria multidisciplinares. Em um deles há um braço robótico e outro é equipado com tornos e fresas. Há também laboratórios de física e química. Conta com uma biblioteca e um amplo refeitório construído em 2016 e oferece à comunidade livre acesso a rede wifi. O campus almeja no futuro construir uma

[1] Estimativa IBGE 2016.

quadra poliesportiva e um novo auditório, uma vez que precisou transformar o que havia em duas novas salas de aula.

Figura 1. Foto aérea do IFSP campus Catanduva

Fonte: ctd.ifsp.edu.br/portal/institucional/sobre-o-campus

Figura 2. Laboratório de Mecânica.

Fonte: ctd.ifsp.edu.br/portal/institucional/sobre-o-campus

Figura 3. Laboratório de Química.

Fonte: ctd.ifsp.edu.br/portal/institucional/sobre-o-campus

Figura 4. Laboratório de Mecatrônica.

Fonte: ctd.ifsp.edu.br/portal/institucional/sobre-o-campus

Figura 5. Laboratório de Informática.

Fonte: ctd.ifsp.edu.br/portal/institucional/sobre-o-campus

O IFSP Catanduva conta atualmente com aproximadamente 600 alunos (sem contar alunos de cursos FIC - Formação Inicial e Continuada), distribuídos em três cursos técnicos integrados ao Ensino Médio (Redes de Computadores, Química e Mecatrônica) e quatro cursos superiores (Análise de Sistemas, Mecatrônica Industrial, Engenharia de Controle e Automação e Licenciatura Química). Neste ano de 2018 começam as novas especializações em Saberes e Práticas e em Ciências da Natureza e Matemática. O campus conta com 44 técnicos administrativos efetivos, 66 docentes efetivos (a maioria mestres ou doutores) além de funcionários terceirizados.

Apesar desta boa estrutura física e contar com professores qualificados, o campus Catanduva enfrenta dificuldades pela política do governo federal de contenção de verba. Em particular, houve uma diminuição da verba específica para o campus Catanduva associada a número de alunos. Em 2016 o governo federal cortou o orçamento de todos os campi dos Institutos Federais em 15% durante o ano letivo. Ao final daquele ano, porém remanejou a verba de outros campi e Catanduva acabou contemplada com toda a verba esperada para o ano. Este movimento, contudo, não está isento de prejuízos, uma vez que ao longo do ano exige que o campus faça fortes cortes de gastos para se enquadrar na nova condição orçamentária, afetando a oferta de recursos básicos aos usuários do campus. Mesmo com a chegada em atraso da verba restante, esta acaba sendo destinada a projetos que tem sua importância, mas que poderiam ser considerados secundários. Em 2017 aconteceu algo semelhante, o corte não estava previsto, mas era esperado, gerando nova contenção de gastos. De fato, a verba foi paga integralmente, mas o ônus da restrição orçamentária existiu como em 2016. Além desta questão geral, há outra particular ao campus Catanduva. Um dos fatores utilizados para calcular a verba anual é o número de alunos. O campus Catanduva encontra-se em uma situação deficitária, ou seja, não temos número de alunos matriculados suficientes para que a verba do campus seja capaz de arcar com seus custos. Essa é uma situação própria de um campus em expansão, como é o de Catanduva, pois é necessário algum tempo para que a cidade tome conhecimento de um determinado curso e reconheça sua qualidade. Para estas dificuldades iniciais, o cálculo do repasse de verbas do governo aos campi em expansão é acrescido de um percentual. Contudo, em decorrência de ter deixado este status de campus em expansão, o IFSP Catanduva viu sua verba anual despencar em aproximadamente 27% entre os anos 2016 e 2017. Como consequências, nestes dois anos, o campus Catanduva encerrou o contrato de copeiragem e jardinagem, diminuiu as equipes de segurança e limpeza e limitou o uso do ar condicionado em determinados horários nos três turnos para que pudessem adequar aos valores recebidos às despesas. Alunos bolsistas também foram afetados e há relatos da assistência social de desistência de alunos por um curso por não haver verba de custeio. Mas o pior retrato desta dificuldade é ter um refeitório pronto, cuja obra foi entregue no final de 2016, mas não ter verba para manter a alimentação dos alunos, o que culminou em um processo judicial. Para o ano de 2018 o campus Catanduva tem planejado a oferta de alimentação por três dias semanais nos quais os alunos do ensino médio terão aulas também no período vespertino. Nos outros dois dias os alunos serão dispensados no horário de almoço. Para adequar a verba do campus à sua necessidade existem vários projetos visando o aumento do número de alunos tais como, cursos de formação continuada ou maneiras de evitar a evasão em todos os cursos.

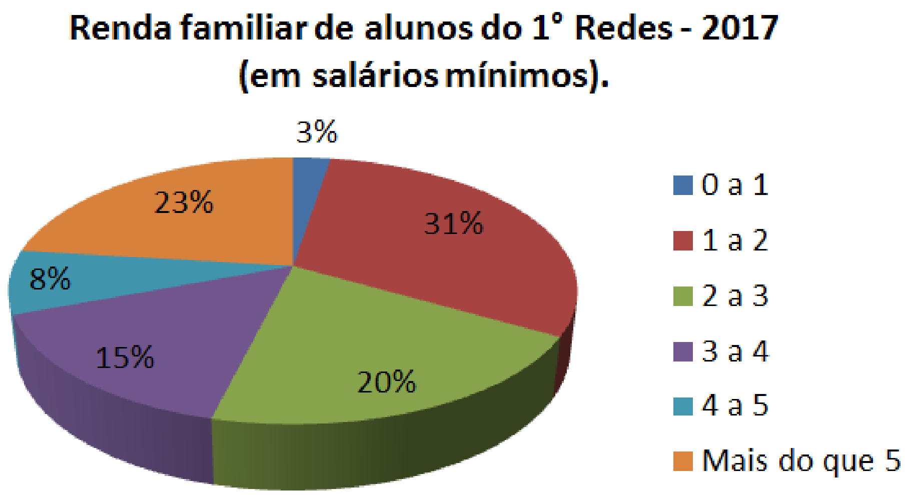
Os alunos que participaram da aplicação desse projeto são alunos do 1º ano do Curso Técnico em Redes de Computadores Integrado ao Ensino Médio. Além da formação geral já mencionada, segundo o Projeto Pedagógico do curso, o técnico em redes de computadores está "habilitado para atuar no projeto, execução e instalação de dispositivos de comunicação digital e programas de computadores em equipamentos de rede. Executa diagnóstico e corrige falhas em redes de computadores". O curso é oferecido em período integral com 2.600 horas para a Base Nacional Curricular Comum e Diversificada e 1.000 horas para disciplinas profissionalizantes na área da computação. Há ainda a oferta de curso de espanhol e libras de 180 horas no total em caráter opcional. As disciplinas profissionalizantes são divididas em aulas teóricas e práticas, mas não há uma exigência de percentual mínimo em cada uma delas. As aulas práticas são evidentemente comuns.

Para ingressar no curso o aluno deve passar por processo seletivo. Até o ano de 2017 era realizada prova eliminatória de português e matemática. Em 2018, no entanto, em razão da crise financeira e, objetivando a diminuição de custos operacionais, o ingresso se dá mediante avaliação de notas médias nas disciplinas de português e matemática obtidas pelo aluno no 8º ano do Ensino Fundamental II. Em um ou em outro processo, há uma porcentagem de vagas destinadas à inclusão social. Cinquenta por cento das vagas é destinada à ampla concorrência, enquanto os outros 50% são divididos entre alunos com renda familiar per capita de 1,5 salário-mínimo que tenham estudado integralmente em instituição pública de ensino, se auto declare preto, pardo ou indígena ou possua deficiência, com critérios específicos para distribuição dessas vagas.

O processo seletivo para ingresso do aluno elucida a diversificação de nossa clientela. Nesse processo, há um grupo de alunos com alto desempenho em matemática e outro com grandes dificuldades. O processo de seleção subtende uma concorrência e por isso são esperados ingressos de alunos com bom nível de aprendizagem nos anos anteriores, fato endossado pela comunidade que vê o IFSP como uma instituição de ensino de qualidade. Por outro lado a diversificação do nível de aprendizagem da clientela pode ser explicada em partes pela política de cotas, que entende ser democrático garantir acesso por mérito a uma parcela dos alunos e melhores condições para acesso àqueles que contam histórica e socialmente com menos recursos para competir.

A diversificação dos alunos é, primeiramente, social. Os dados abaixo apresentam bastante variabilidade da renda familiar dos alunos do 1º ano de Redes. Parcela considerável dos alunos, 34%, tem renda familiar de até 2 salários mínimos, enquanto 23% dos alunos tem renda familiar superior a 5 salários mínimos. Embora a pesquisa não tenha rigor estatístico e não faça comparações com outras escolas ou mesmo com outras turmas do campus, estando restrita a um grupo local, é razoável supor que em escolas privadas que cobram altas mensalidades o número de alunos de famílias de baixa renda seja diminuto ou mesmo inexistente ou que algumas escolas públicas apresentem alunos, em sua grande maioria, com baixas rendas familiares.

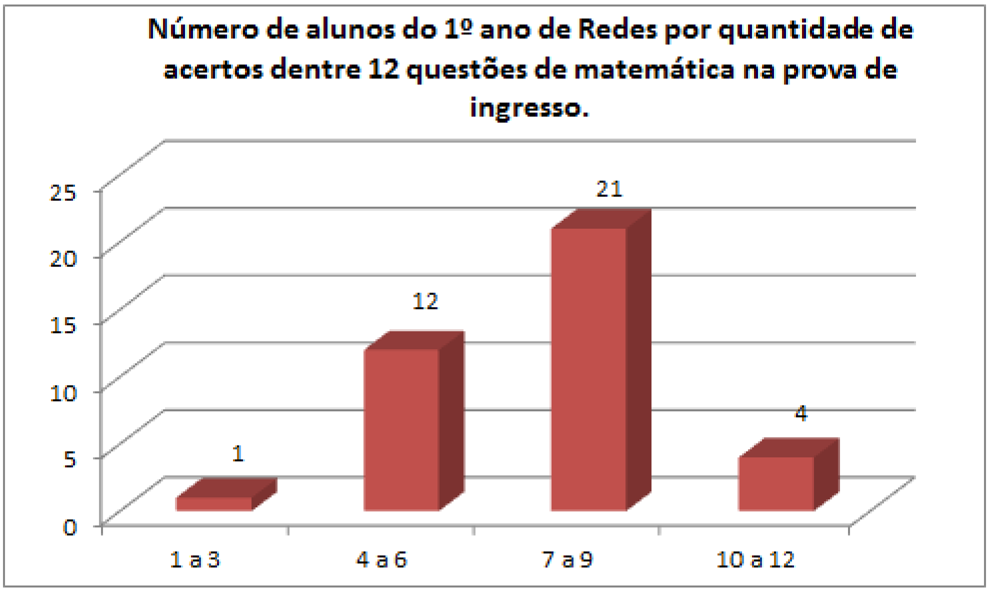
Figura 6. Gráfico da renda familiar de alunos do 1º ano de Redes - 2017.



Fonte: Coordenação do Curso Técnico em Redes de Computadores – IFSP Catanduva.

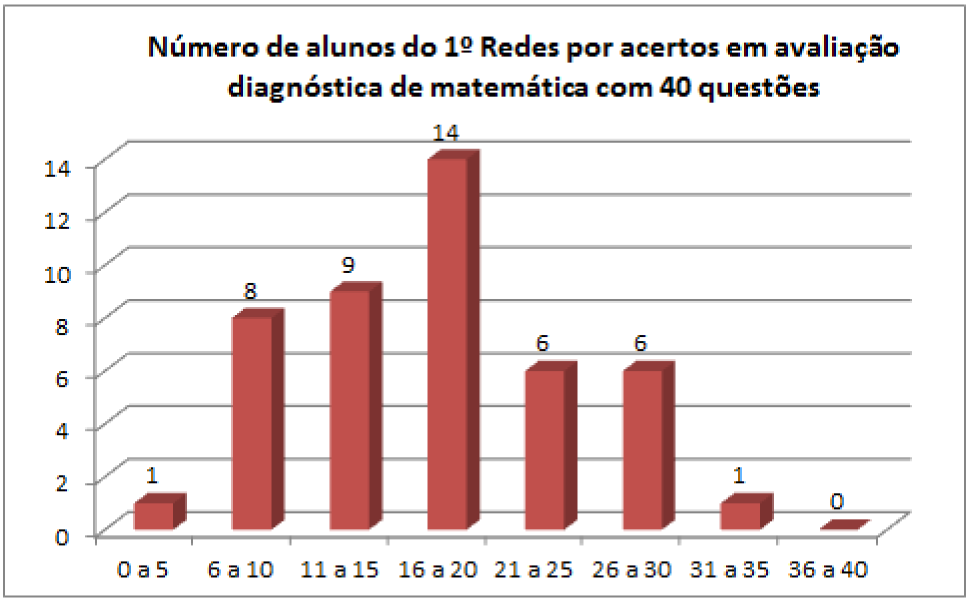
Quanto à aprendizagem matemática, a percepção do professor de ministrar aulas a grupos de alunos de diferentes níveis de aprendizagem é corroborada por duas avaliações realizadas antes do ingresso no IFSP. A primeira avaliação é o próprio processo de seleção para ingresso no IFSP, que contou com 12 questões de matemática de múltipla escolha. A segunda, uma Avaliação Diagnóstica aplicada nos primeiros dias de aula para, dentre outras coisas, encaminhar alunos para aulas de reforços, buscando nivelar a aprendizagem dos alunos. Essa avaliação conta com 40 questões, sendo 5 de múltipla escolha, envolvendo operações básicas, expressões numéricas, alguns poucos exercícios de geometria, dentre outros. As duas distribuições visualizadas a seguir com o rendimento nas duas provas são maiores no centro, com um leve aumento à direita na seleção para ingresso e um leve aumento à esquerda na avaliação diagnóstica. Ainda que a distribuição seja maior na parte central, é possível verificar nos dados da avaliação diagnóstica, três grandes grupos: aqueles que acertaram até 37,5% da prova formado por 18 alunos; um grupo central que acertou entre 40 e 50%, formado por 14 alunos e; aqueles que acertaram entre 52,5 e 87,5% formado por 13 alunos. Três grupos bastante representativos evidenciando o caráter diversificado do nível de aprendizagem destes alunos.

Figura 7. Gráfico de prova de ingresso.



Fonte: Banco de Dados IFSP.

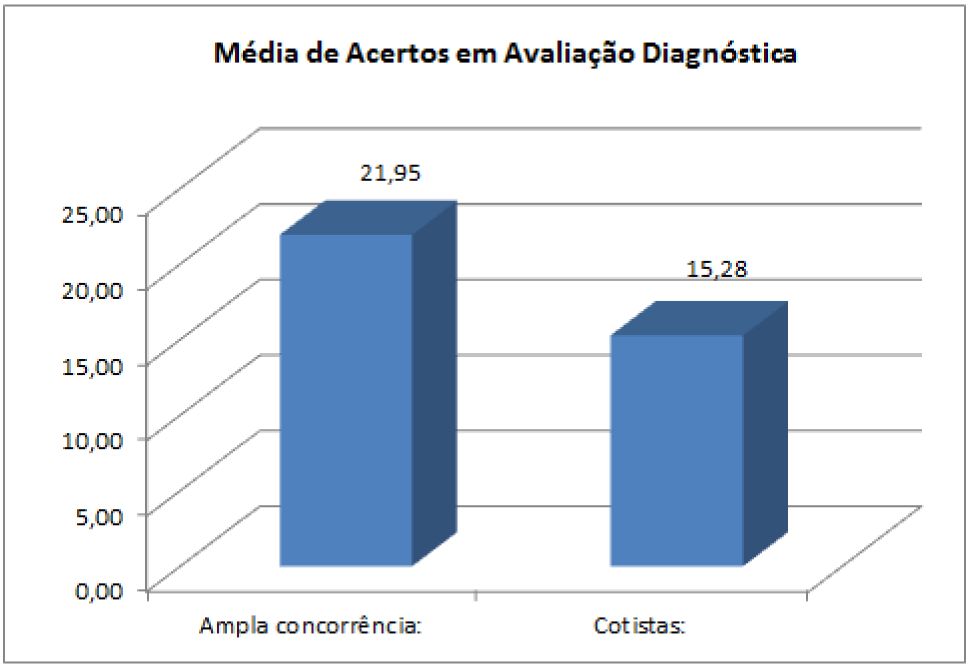
Figura 8. Gráfico de avaliação diagnóstica.



Fonte: Criado a partir dos dados do trabalho de Avaliação Diagnóstica realizado por professores de matemática do IFSP campus Catanduva.

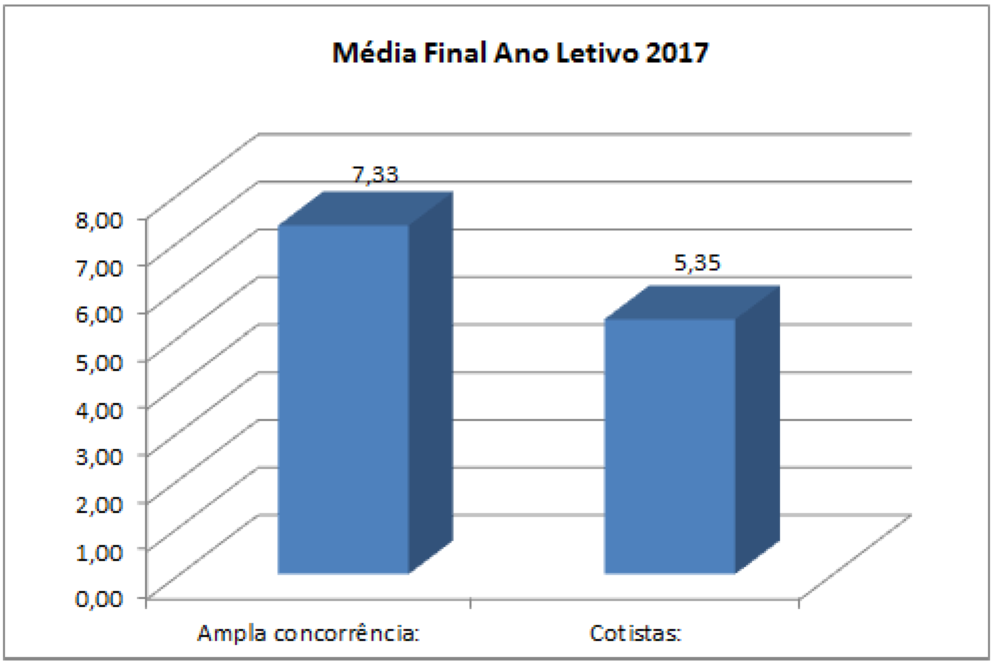
Outra importante observação nos ajuda a identificar quem são estes grupos de diferentes níveis de aprendizagem. Na avaliação diagnóstica e na média final do ano letivo, desconsiderada a recuperação final, os dados apontam que os alunos com maiores dificuldades em matemática são de modo geral os alunos cotistas.

Figura 9. Gráfico de média de acertos em avaliação.



Fonte: Criado a partir dos dados do trabalho de Avaliação Diagnóstica realizado por professores de matemática do IFSP campus Catanduva e do Banco de Dados do IFSP.

Figura 10. Gráfico de média final do ano letivo.



Fonte: Criado a partir do diário de classe e do Banco de Dados do IFSP.

Destacamos que a média final obtida pelos cotistas é insuficiente para aprovação cuja nota mínima é 6. É ainda mais agravante o fato de que todas as outras disciplinas do curso, exceto matemática, fazem parte de áreas das quais o aluno pode ser aprovado mesmo com nota inferior a 6 em alguma delas, desde que nesta área a média tenha sido superior a 6. Estas áreas são: Linguagens; Ciências Humanas; Ciências da Natureza e; Disciplinas Técnicas. Sendo a matemática uma quinta área à parte das demais.

Ao longo do ano, para superarem as dificuldades com matemática, foram disponibilizados aos alunos reforço nos dois primeiros bimestre, em aulas adicionais com outro professor de matemática que não o da turma, recuperação paralela com aula de revisão e prova substitutiva para recuperar a nota bimestral, horário de atendimento do professor ao aluno (2 horas semanais), monitoria de matemática e física (realizada por aluno da graduação), dois alunos monitores em sala de aula e em outros horários, horário de estudos programado pela coordenação do curso entre todas as disciplinas com participação rotativa de todos os professores em horário semanal definido e produção de vídeos-aula pelos alunos como forma de recuperação.

Apesar de contar com todas estas opções e do esforço da coordenação em torna-las mais efetivas, algumas dessas ações teve baixa adesão dos alunos. Por exemplo, a procura ao atendimento pelo professor e pelo monitor se limitou a alguns poucos alunos em algumas semanas apenas. Uma das razões apontadas foi a extensa carga horária dos alunos. São 37 aulas semanais em períodos matutino e vespertino além de 2 aulas de estudo programadas (estas funcionaram, pois eram vistas como aulas pelos alunos, em que se registrava presença), tarefas, trabalhos e estudos para a prova. Por isso, os alunos têm alegado cansaço para esses atendimentos. Há também falta de um ambiente adequado para estes atendimentos. Às vezes é feito em sala de aula desocupada, em outras, em “sala de estudo” frequentada por muitos alunos para acesso a internet, nem sempre com fins pedagógicos.

Como se pode observar, trabalhos diversificados existem. São raras, no entanto, aulas diversificadas, inclusive em matemática. Nossas aulas seguem sendo tradicionais. As razões podem ser apontadas ainda que de maneira superficial, no despreparo do professor que teve formação tradicional e tende a reproduzi-la, pela estrutura do currículo ainda organizado na ênfase da aplicação de conteúdos repartidos em disciplinas estanques que dificultam a interdisciplinaridade e a falta de incentivos por parte de agentes e gestores escolares.

Há ainda outra abordagem a se fazer quanto ao ensino aprendizagem que oferecemos. Embora tenhamos predileção por ajudar aqueles alunos com maiores dificuldades, também precisamos nos perguntar se aqueles que tiram boas notas aprendem o que realmente deveriam aprender. Tirar boas notas pode significar apenas estar adaptado a uma prática de ensino específica, mas isto não é uma garantia de que estejamos contribuindo com uma formação geral que de fato prepare o aluno para a vida.

Aula diversificada, portanto, é aquela que dispõe de novas metodologias, recursos e atitudes, capaz de gerar uma aprendizagem realmente significativa para a vida do aluno. Que o capacite para o mundo do trabalho, que lhe permita crescer como pessoa, que lhe dê instrumentos para continuar aprendendo em um mundo de rápidas transformações. Para isto, precisamos ensinar não apenas conteúdos, mas competências e habilidades a eles relacionadas. Uma proposta para um ensino efetivo pode ser encontrada no PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) do Ensino Médio.

> (...) este documento procura apresentar (...) uma proposta para o Ensino Médio que, sem ser profissionalizante, efetivamente propicie um aprendizado útil à vida e ao trabalho, no qual as informações, as competências, as habilidades e os valores desenvolvidos sejam instrumentos reais de percepção, satisfação, interpretação, julgamento, atuação, desenvolvimento pessoal ou de aprendizado permanente (...). (PCN – Ensino Médio).

Isto quer dizer, que não basta ao aluno saber resolver uma equação. É preciso, que ele atribua significados a leitura de uma expressão algébrica, seja capaz de interpretar um gráfico, fazer inferências, saber pesquisar informações pertinentes que ajudem a resolver um problema, conhecer ferramentas que lhe possam ajudar (planilhas, softwares, instrumentos de medição), saber formular ou questionar procedimentos, se organizar em equipe, se expressar corretamente, inclusive em linguagem matemática e, resolver problemas complexos semelhantes àqueles que irá encontrar em seu cotidiano.

Além disso, a aprendizagem deve permitir ao aluno se situar na vida social ao desenvolver um saber político, capaz de interagir harmoniosamente e criticamente com o outro. Que perceba o papel da humanidade em sua interação com a natureza e que se sinta parte integrante de uma construção cultural.

> Com esta compreensão, o aprendizado deve contribuir não só para o conhecimento técnico, mas também para uma cultura mais ampla, desenvolvendo meios para a interpretação de fatos naturais, a compreensão de procedimentos e equipamentos do cotidiano social e profissional, assim como para a articulação de uma visão do mundo natural e social. (...) um aprendizado com caráter prático e crítico e uma participação no romance da cultura científica, ingrediente essencial da aventura humana (PCN – Ensino Médio).

Deste modo, perceber o mundo das finanças com criticidade é uma abordagem superior em relação à simples descrição da fórmula dos juros compostos. Como também, o aluno deve experimentar a modelagem de alguns fenômenos naturais ou situações cotidianas. Também é importante que o aluno faça a sua descoberta pessoal de conquistas científicas como da percepção das órbitas elípticas dos planetas e tente imaginar como Kepler pode ter chegado a tal constatação em tempos tão longínquos. Que se espante com a existência de segmentos incomensuráveis, ao invés de simplesmente conhecer o conjunto dos números irracionais. Que experimente reduzir contas enormes pelo uso dos logaritmos e sinta um pouco do que esta conquista histórica representou, mas saiba fazer uso de uma calculadora científica, e que possa associar este conhecimento, mesmo que superficialmente, com a escala Richter.

A partir do conhecimento de nossas possibilidades e limites e desta realidade brevemente relatada (da turma de alunos, do campus, da instituição IFSP e deste professor), apresentamos neste trabalho uma atividade diferenciada e esperamos que ela possa acrescentar uma reflexão para a construção deste novo paradigma para as aulas de matemática.

2 A IDEALIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho é composto de duas etapas e parte da constatação da dificuldade de aprendizagem de geometria pelos educandos. Na primeira etapa utilizamos um problema da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) envolvendo o perímetro de um paralelogramo inscrito em um triângulo equilátero. Esse problema exige conhecimentos geométricos subjacentes para a sua resolução. A última etapa é uma extensão do mesmo problema da OBMEP, trabalhando agora o conceito de otimização de área. A ideia é suprir algumas possíveis lacunas na aprendizagem dos alunos, utilizando uma metodologia diferenciada baseada na Engenharia Didática e tendo como foco uma aprendizagem autônoma e dinâmica, utilizando como apoio o software GeoGebra.

A Engenharia Didática, criada pela educadora francesa Michèle Artigue na década de 1980, recebeu este nome por fazer uma analogia entre a atividade docente e a do engenheiro. Engenheiros e professores, ao conceberem e planejarem uma obra ou uma aula, sabem que o projeto deve exigir adaptações para sua efetiva conclusão, muitas vezes percebidas durante a sua aplicação. Por exemplo, no trabalho do engenheiro a perfuração do solo pode conter rochas não previstas anteriormente, sendo necessária troca de maquinário ou revisão do tempo de entrega de uma etapa; numa avaliação final, além de contemplar os pontos positivos e negativos, o engenheiro deve alterar seu projeto para obras futuras. A engenharia didática, na perspectiva de algo que se constrói - a aprendizagem dos alunos - segue esta orientação e contém todas as etapas do trabalho do engenheiro.

Em nosso trabalho as etapas são:

a) elaboração de uma sequência didática pensada como sendo ideal;
b) aplicação do trabalho com as possíveis intervenções ou correções para se atingir o objetivo traçado, a aprendizagem dos alunos e finalmente;
c) avaliação do trabalho pelos resultados obtidos nas atividades entregues pelos alunos, nas percepções do professor em sala de aula e por questionário de pesquisa respondido pelos alunos ao término do trabalho.

Entendemos por aprendizagem autônoma aquela em que a intervenção do professor é a menor possível, ou seja, aquela na qual a fala do professor que eventualmente expõe conceitos e resultados prontos e são aceitos imediatamente pelo aluno sem que antes tenha gerado o desejável desconforto do não saber seja substituída por outra em que o aluno faça perguntas a si mesmo. Este deve ser o ponto inicial da aprendizagem: a reflexão e a tomada de decisões quanto ao que pode ser feito para solucionar determinado problema. Uma resposta imediata do professor pode, a princípio, impossibilitar a aprendizagem do aluno quando lhe é retirada a oportunidade da reflexão. O que estamos propondo nesta situação de aprendizagem é que o aluno, ao se deparar com um problema e impossibilitado da resposta imediata do professor, busque ferramentas que o auxilie na sua resolução. Em nosso caso, as ferramenta são um texto com características específicas e o software GeoGebra. Concatenando estas ferramentas de maneira apropriada, o aluno desenvolve o tema proposto a partir de seus *insights*, ou seja, o aluno deve perceber por si só a solução de cada etapa. Deste modo, além da aprendizagem matemática, há a aprendizagem subjacente e também essencial para o aluno de métodos próprios de resolução de problemas, sejam eles da sala de aula ou da vida real.

O texto proposto como auxílio à resolução do problema inicial contém uma sequência didática escrita em forma de diálogo. São utilizados dois personagens em forma de desenho, o professor e o Homem Aranha, que dialogam com o aluno. O primeiro faz os enunciados das atividades e o segundo, um super-herói pronto a ajudar, fornece dicas importantes de algum conhecimento que talvez os alunos não se lembrem ou não tenham aprendido. A linguagem informal e o personagem do desenho animado foram escolhidos para que o aluno sinta-se atraído pelo texto, crie uma simpatia com ele e tenha a ajuda necessária sem a qual a conclusão do trabalho estaria comprometida. Em razão de alguns alunos apresentarem dificuldades de aprendizagem em matemática, destacamos a necessidade de que algumas ajudas do nosso “Homem Aranha” sejam mais elementares.

A utilização de um software de geometria dinâmica para a construção de figuras auxiliares tem grandes vantagens. O GeoGebra pode auxiliar os alunos a enxergarem, por si só, muitas propriedades matemáticas, principalmente ao associar a geometria com o conceito de função e ao perceberem que determinados objetos matemáticos são mantidos mesmo com o movimento da figura. A princípio, achávamos que seria necessário uma descrição minuciosa das construções das figuras auxiliares no GeoGebra pelo fato dos alunos não conhecerem bem o software, mas optamos por breves exposições dos comandos e dicas, sem formalismos e seguindo o padrão escolhido para o texto como um todo, escrito em forma de diálogo.

Queremos deixar claro que as evidências do software não podem ser usadas como justificativas matemáticas. O software deve auxiliar os alunos a perceber situações ou propriedades que a figura estática ou o texto talvez não consigam com a mesma eficácia. Há situações em que o limite do software fica evidente e esta é uma oportunidade para destacar que reconhecemos uma determinada propriedade matemática ainda que a limitada visualização do software pareça indicar o contrário. O rigor matemático é desejável e pode auxiliar o aluno dentre outras coisas a aprender formular conceitos, mas, por outro lado, desenvolver a habilidade da observação também é desejável para a ciência como um todo. Neste trabalho optamos mais pela última.

Caso o leitor queira detalhes dos processos de construção das figuras no GeoGebra ou das atividades da sequência didática, eles podem ser obtidos na reprodução da sequência didática entregue as alunos, no apêndice.

3 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA IDEALIZADA E RESULTADOS OBTIDOS

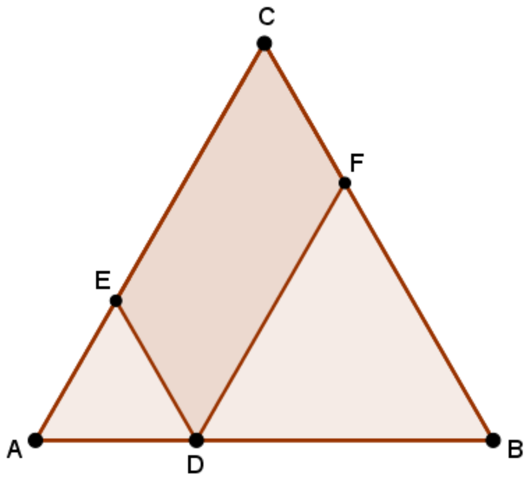
A sequência didática foi idealizada em duas etapas, e a seguir apresentamos cada uma delas separadamente.

3.1 Etapa 1

Nessa primeira etapa trabalhamos com a seguinte questão do Banco de Questões da OBMEP:

Questão OBMEP – Banco de Questões 2013 – Nível 3 - Questão 7 – Pág 57

O triângulo ABC abaixo é equilátero, ou seja, tem seus três lados de mesmo comprimento e todos os seus ângulos iguais a 60°. O senhor Simas marca um ponto D qualquer no lado $\overline{AB}$ do triângulo. Em seguida, ele traça um segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$, começando em D e terminando no ponto E sobre o lado $\overline{AC}$. Em seguida, traça um segmento paralelo ao lado $\overline{AC}$, começando em D e terminando no ponto F sobre o lado $\overline{BC}$, conforme a figura abaixo:



(a) Sabendo que o lado $\overline{AB}$ tem comprimento igual a 1, calcule o perímetro do quadrilátero CEDF.

A resposta a este problema requer algumas deduções que não foram utilizadas para desenvolver o rigor matemático nos alunos, mas para formar uma trilha de significações que pudessem atribuir sentido à resposta e ir além dela, ou seja, para que consigam responder que o perímetro do quadrilátero CEDF é igual a 2, mas também que percebam que este valor 2 independe das medidas dos lados do quadrilátero CEDF, ou de modo equivalente, independe da posição do ponto D na base do triângulo ABC.

O problema em questão expõe o conceito de um triângulo equilátero possuir três ângulos internos iguais a 60° e lados de mesmo comprimento e a construção do quadrilátero CEDF com dois lados paralelos aos lados do triângulo ABC, construídos a partir de um ponto D na base.

Uma sequência lógica para resolver o problema passa pela constatação de que os triângulos ADE e DBF também são equiláteros. Isto porque os ângulos $A\widehat{D}E$, $A\widehat{E}D$, $B\widehat{D}F$ e $B\widehat{F}D$ também medem 60°, o que pode ser verificado utilizando-se o conceito de ângulos formados por retas paralelas e uma transversal. Deste modo, $\overline{ED}$ e $\overline{DF}$ são iguais a $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$ respectivamente e somados é igual a 1, medida do lado AB. Conhecendo-se as medidas dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$ e sabendo que os lados do triângulo ABC medem 1, descobrimos as medidas dos lados $\overline{CE}$ e $\overline{CF}$ do quadrilátero CEDF por subtração das medidas dos segmentos. Basta então somar os segmentos do quadrilátero CEDF para se chegar a solução do problema.

Assim as atividades da etapa 1 seguiram o seguinte roteiro:

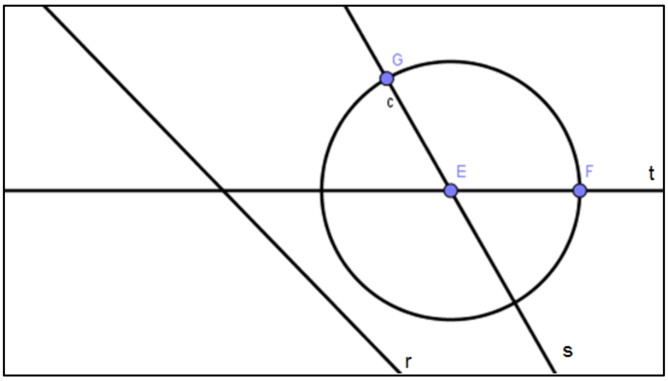
a) desenvolvimento do conceito de ângulos correspondentes definidos por duas retas paralelas e outra transversal;
b) percepção de que os triângulos ADE e DBF também são equiláteros;
c) determinação da medida do segmento $\overline{DB}$ em função do segmento $\overline{AD}$ pela percepção de que os segmentos de reta $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$ tem soma igual a 1;
d) determinação das medidas dos segmentos $\overline{ED}$ e $\overline{DF}$;
e) determinação das medidas dos segmentos $\overline{CF}$ e $\overline{CE}$;
f) conclusão - retorno à pergunta original do problema da OBMEP sobre o perímetro do quadrilátero CEDF.

3.1.1 Atividade 1 – Ângulos.

Conteúdo, competências e habilidades.	Identificação de ângulos congruentes, em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais. Construção da noção de ângulo associada à ideia de mudança de direção.
Objetivo.	Perceber que ângulos correspondentes formados por duas retas paralelas interceptadas por uma reta transversal possuem a mesma medida.

Propomos a construção de três retas no GeoGebra de modo que duas ficassem fixas e uma terceira tivesse um movimento rotacional conforme a figura abaixo:

Figura 11. Modelo de atividade do GeoGebra apresentado aos alunos.



Fonte: Desenvolvido pelo autor com o software GeoGebra

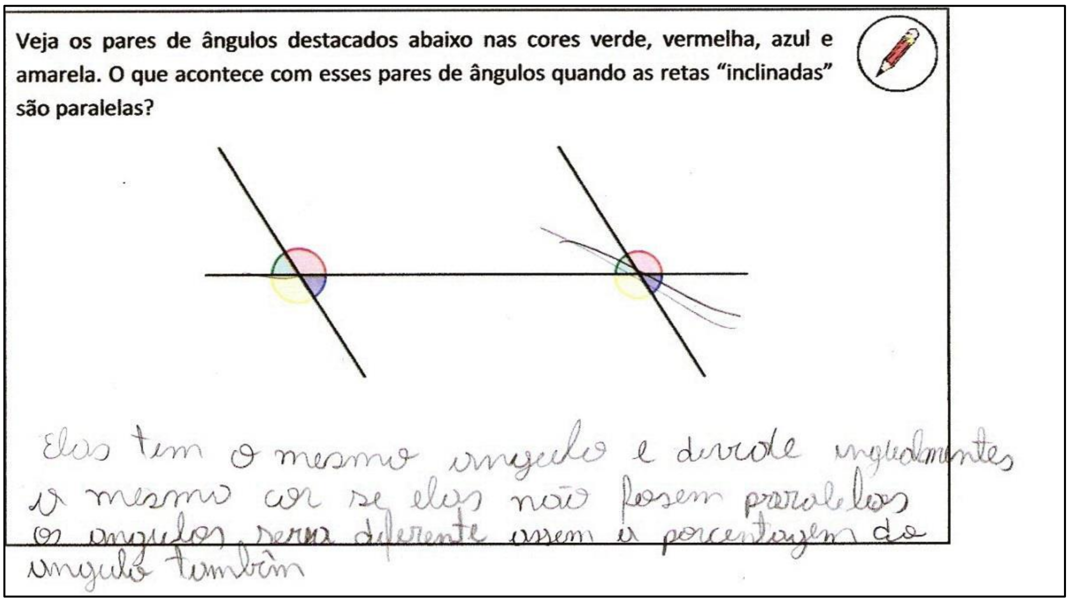
Foi solicitado aos alunos que movessem o ponto sobre a circunferência (aqui registrado como ponto G) de modo que a reta s não tocasse a reta r fixa. Os alunos foram alertados de que seria necessário diminuir o zoom do software, como se olhassem a figura a uma distância maior, para conferir se de fato não se tocavam.

Esperávamos que os alunos conjecturassem, sem a interferência do professor ou por uma definição escrita, que os ângulos correspondentes definidos por duas retas paralelas interceptadas por outra transversal possuem a mesma medida. Em seguida, os alunos responderam a algumas atividades para conferirmos o entendimento deste conceito.

Houve dificuldades na execução desta atividade quanto a figura desenvolvida no GeoGebra. Parte dos alunos disse não ter conseguido deixar as retas *r* e *s* paralelas, ou seja, qualquer que fosse a posição do ponto G na circunferência era possível ver, quando o zoom era diminuído, que as retas se tocavam. Verificamos que dependendo dos ângulos em que as retas fixas são construídas, isto realmente acontece. Isto ocorre porque o ângulo formado pelas retas *s* e *t* é obtido pelo deslocamento cartesiano do ponto G em “saltos” determinados por um incremento. Em nossa intervenção mencionamos estes “saltos” e dissemos que se tais saltos fossem menores talvez conseguíssemos ajustar a reta s de modo que ficasse pelo menos aparentemente paralelas. De fato, um ponto que se desloca em uma linha contínua somente pode ser apreendido pela razão usando conceitos de continuidade. Toda tentativa de mostrar este deslocamento em vídeo ou por software (em nosso caso o deslocamento do ponto G pela circunferência) implicará em posicionamentos distintos ao longo do tempo cujas coordenadas de tais posições formam uma sequência discreta. Se às vezes é imperceptível à visão humana dando a impressão de continuidade, isto se deve à nossa limitação visual. Para trabalhos futuros convém mencionar a possibilidade de diminuir o incremento, bastando clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto G, clicar em “Propriedades” e na pasta “Álgebra” escolher um incremento menor conveniente (vide a atividade corrigida na página 77 do apêndice). Há de se ressaltar que os “saltos” e consequentemente as imprecisões podem continuar existindo agora não tão perceptíveis.

Apesar da dificuldade na construção da figura no GeoGebra, os alunos demonstraram o esperado domínio da propriedade dos ângulos congruentes determinados por duas retas paralelas interceptadas por uma reta transversal. A figura abaixo mostra a percepção de uma aluna de que se não houvesse paralelismo, os ângulos correspondentes (destacados com a mesma cor) não teriam o mesmo ângulo. O traço deixado na figura pela aluna revela semelhança com a atividade proposta no GeoGebra.

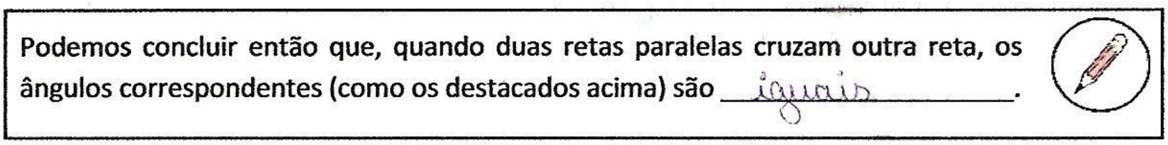
Figura 12. Resolução de atividade sobre ângulos.



Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

Os 24% dos alunos que erram a questão mencionaram a igualdade de ângulos opostos pelo vértice (opv), provavelmente por interpretação errada do problema, mas também é possível que a propriedade dos ângulos opv tenha sido mais facilmente assimilada em aprendizagem de anos anteriores. Mas a maioria desses alunos acertaram as próximas duas atividades sobre o mesmo assunto, o que implica que possuem domínio do conceito. O número de acertos total ou parcial da questão abaixo chegou a 86%.

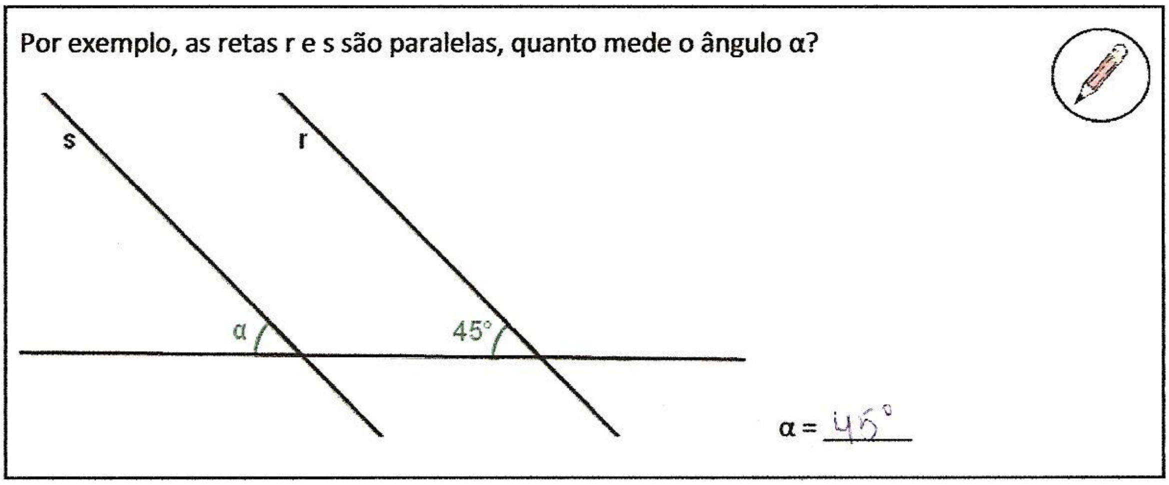
Figura 13. Resolução de atividade sobre ângulos.



Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

Todos os alunos acertaram a questão a seguir.

Figura 14. Resolução de atividade sobre ângulos.



Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

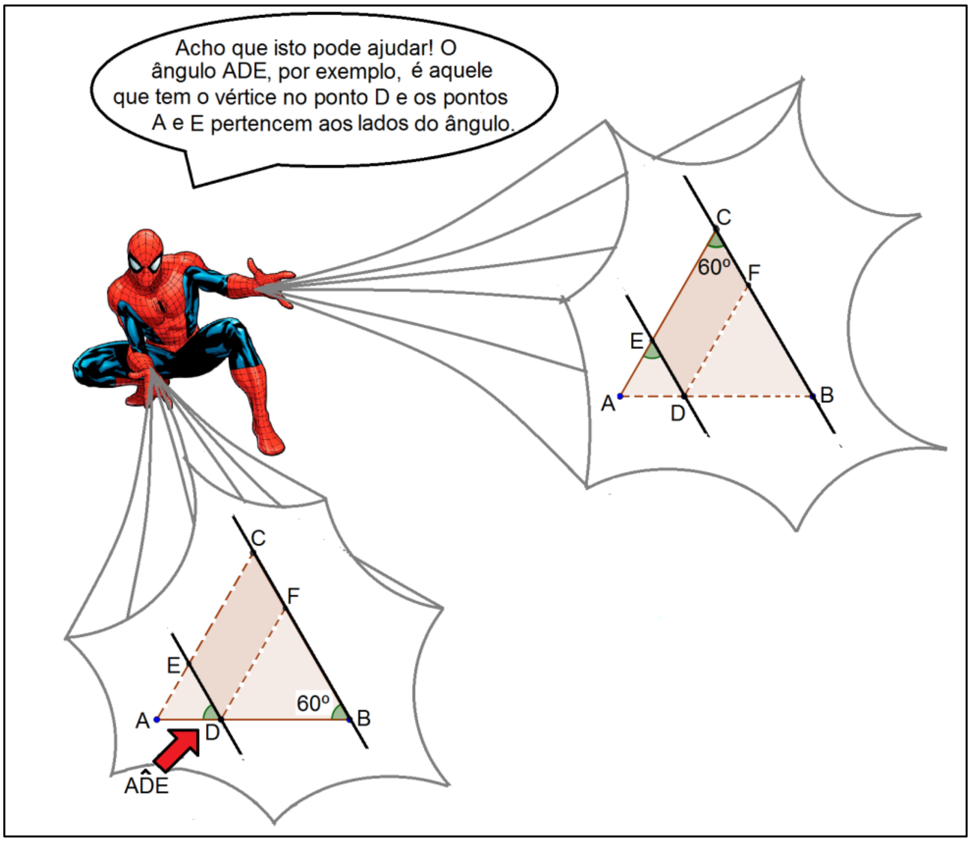
3.1.2 Atividade 2 – Triângulo equilátero definido por ângulos congruentes.

Conteúdo, competências e habilidades.	Verificar propriedades de triângulos pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.
Objetivo.	Utilizar o conceito de ângulos iguais definidos por duas retas paralelas e uma transversal e o conceito de triângulo equilátero exposto pelo problema, para concluírem que os triângulos ADE e DBF também são equiláteros.

Foi pedido ao aluno que construísse a figura do problema da OBMEP conforme pode ser acompanhado na página 79 do apêndice. Ela seria utilizada também em outras atividades do trabalho e achamos por bem desenha-la a partir deste momento como uma forma de interação ao problema, de modo que, construída agora pelo próprio aluno fosse vista por ele com mais riqueza de detalhes, permitindo uma melhor apropriação tanto da figura, quanto do problema.

Entendemos que o problema da OBMEP sugere que os alunos possam perceber que os triângulos ADE e DBF também são equiláteros, utilizando uma das propriedades que definem triângulo equilátero constante no enunciado, [aquele que tem] "... todos os seus ângulos iguais a 60°". O objetivo principal desta atividade, portanto, era auxiliar os alunos a terem esta percepção. Para definirem então que os triângulos ADE e DBF são equiláteros utilizando a propriedade apreendida anteriormente, de ângulos iguais definidos por duas retas paralelas interceptadas por outra transversal, pedimos que os alunos informassem as medidas dos ângulos $A\hat{D}E$, $A\hat{E}D$, $B\hat{D}F$ e $B\hat{F}D$. Para isto os alunos deveriam ter o *insight* do paralelismo entre ED||CB e DF||AC. Embora os paralelismos estivessem citados explicitamente no texto, a percepção deste fato requer o desenvolvimento de habilidades de interpretação de desenho geométrico que, por experiência, acreditávamos que parte considerável dos alunos não a tinham adquirido. Outra dificuldade que acreditávamos que os alunos teriam era a de localizar o ângulo no desenho a partir de sua descrição no texto. O Homem Aranha, então, antevendo estas dificuldades do aluno, é utilizado para ajuda-los nesta interação com a figura, conforme pode ser visto abaixo.

Figura 15. Dica do Homem Aranha: Segmentos paralelos e indicação de ângulos.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Ao final da atividade os alunos deviam responder se os triângulos ADE e DBF são equiláteros e pedia-se que justificassem a resposta como forma de avaliar a aprendizagem.

Como nesta sequência didática cada detalhe é importante, a figura abaixo teve a função de fazer uma conexão entre esta questão e o enunciado do problema OBMEP. O desenvolvimento do trabalho autônomo requer a habilidade de transitar entre os instrumentos auxiliares.

Figura 16. Dica do Homem Aranha sugerindo pesquisa.

Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Para a construção da figura do problema da OBMEP houve a necessidade de intervenção do professor. A maioria dos alunos não conseguiu fazer com que o segmento DE e DF ficassem paralelos aos lados BC e AC respectivamente. Dois casos distintos foram verificados.

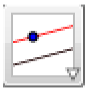
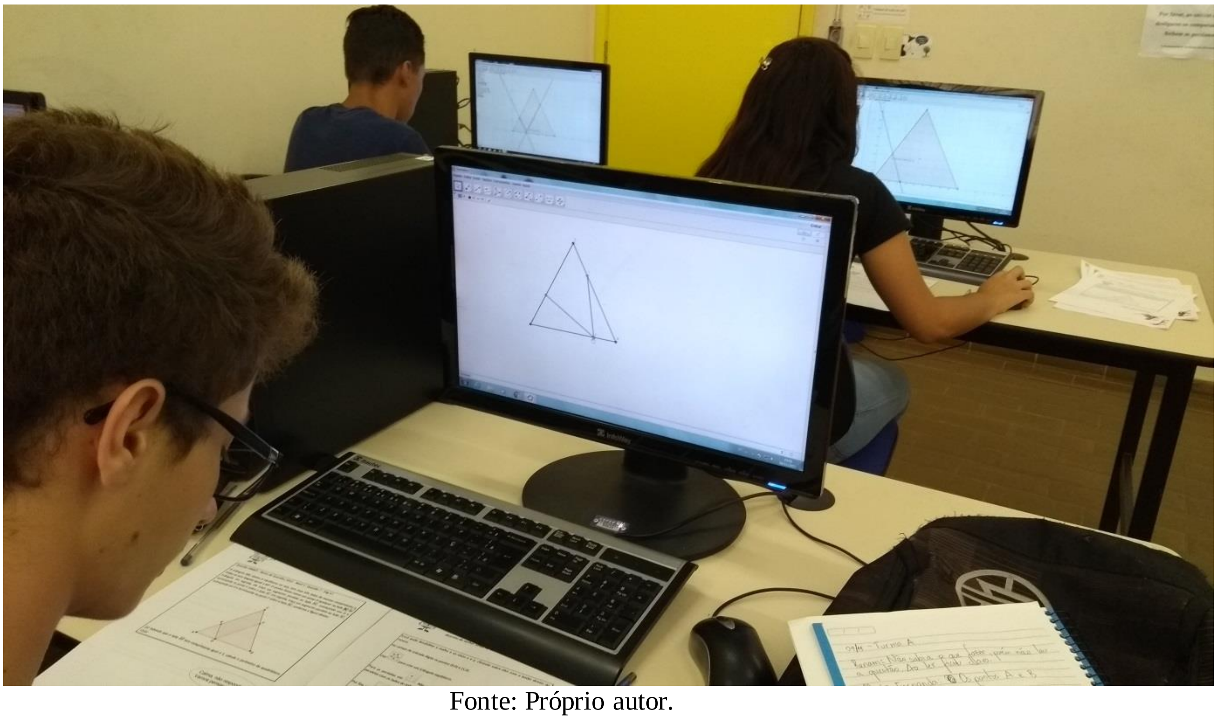
No primeiro caso percebido, os alunos criaram antecipadamente os pontos E, D e F e uniram esses pontos sem utilizar a ferramenta para construção de retas paralelas  solicitada no trabalho. Acreditamos que o erro tenha ocorrido muito mais por uma falha de interpretação do que pelo fato de o aluno ser iniciante no uso do GeoGebra, uma vez que outros comandos foram apresentados da mesma forma e foram bem executados. Isto requer revisão do texto da sequência didática.

Figura 17. Foto de aluno desenvolvendo atividade no Geogebra.

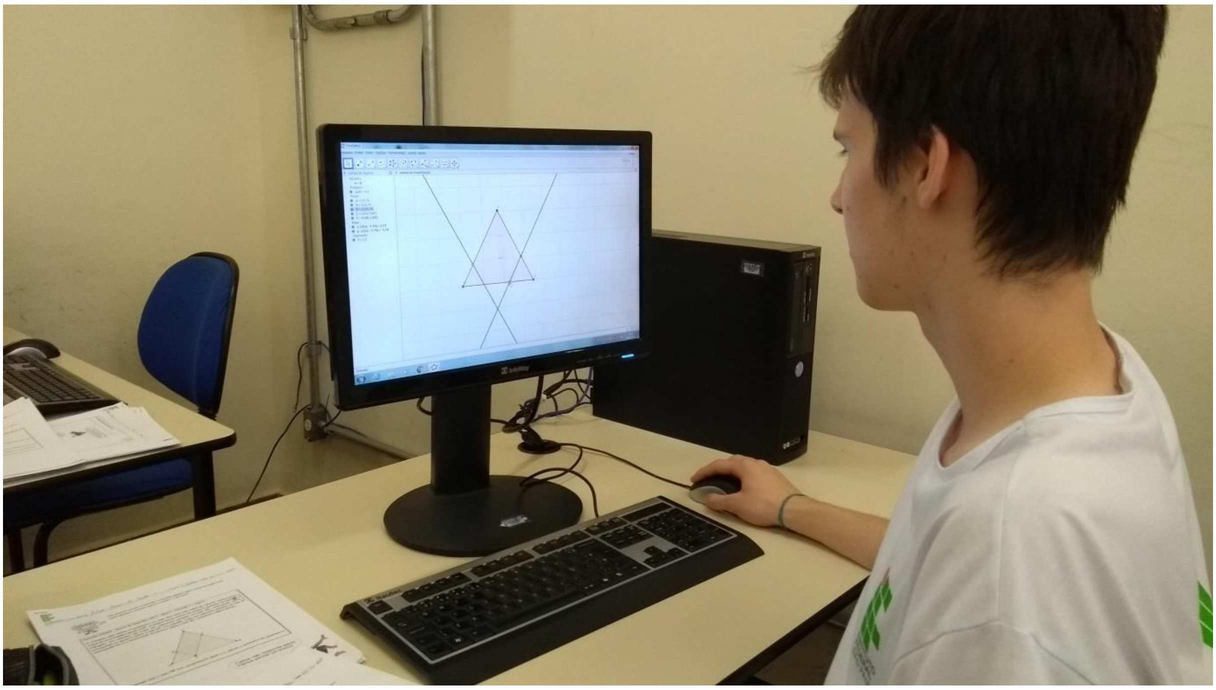


Fonte: Próprio autor.

Pode se ver na foto acima o erro de construção. Os segmentos no interior da figura não ficaram paralelos em relação aos lados do triângulo ABC.

Outro erro constatado ocorreu pelo fato de os alunos terem construído as retas paralelas ED e DF tomando por referência não o ponto D, mas os pontos E e F. Ou seja, os alunos construíam primeiro os pontos E e F para em seguida construírem paralelas aos lados AC e BC passando por estes dois pontos.

Figura 18. Foto de aluno desenvolvendo atividade no Geogebra.



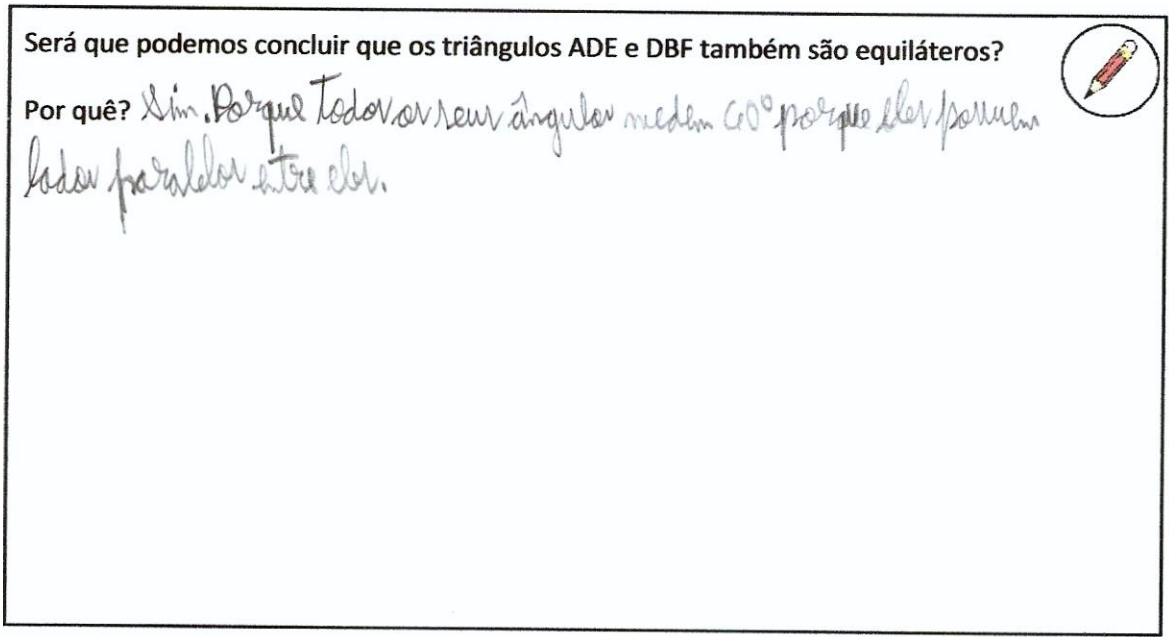
Fonte: Próprio autor.

Na foto acima vemos retas paralelas aos lados do triângulo ABC, mas elas não se interceptam em um único ponto (D) na base, não formando assim um quadrilátero inscrito ao triângulo ABC.

Nós nos ponderamos em evitar excessos de detalhes nos tutoriais para uso do GeoGebra, pois poderia tornar maçante a leitura da sequência didática e também porque entendemos que os alunos têm facilidade em lidar com recursos computacionais. Mas, para evitar que ambos os casos se repitam, avaliamos ser necessário corrigir o texto da sequência didática. Era necessário evidenciar na sequência didática que ele deveria construir primeiro o ponto D e só depois usar a ferramenta de retas paralelas, clicando na reta da qual se quer construir o paralelismo e em seguida no ponto D. Os pontos E e F seriam, então, construídos a partir da intercessão das retas paralelas com os lados do triângulo ABC (vide a atividade corrigida na página 79 do apêndice).

Contratempos resolvidos, os alunos não apresentaram dificuldades para responderem as questões. Foram as atividades com maior número de acertos. Responderam corretamente que os ângulos $A\widehat{D}E$ e $A\widehat{E}D$ do triângulo ADE e os ângulos $B\widehat{D}F$ e $B\widehat{F}D$ do triângulo DBF são todos iguais a 60°. E para concluir que os triângulos ADE e DBF são equiláteros, a maioria informou que se deve ao fato de terem todos os ângulos iguais. Uma parte dos alunos ainda justificou, mesmo sem ser pedido na atividade, que os ângulos têm mesma medida em razão da propriedade das retas paralelas interceptadas por uma transversal, conforme a resolução de um aluno visualizada na figura abaixo.

Figura 19. Resolução de atividade sobre triângulos equiláteros.



Será que podemos concluir que os triângulos ADE e DBF também são equiláteros?

Por quê? Sim. Porque Todos os seus ângulos medem 60° porque eles possuem lados paralelos entre eles.

Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

Houve também quem afirmasse que os triângulos ADE e DBF são equiláteros por terem três lados de mesma medida. Embora esta resposta não fosse esperada por que optamos por identificar os triângulos equiláteros a partir dos ângulos congruentes, além de estar correta ela pode ter sido eventualmente inspirada pela observação da figura no GeoGebra. A movimentação do ponto D evidencia que os três lados dos triângulos ADE e DBF, embora mudem de comprimento, mantém em cada triângulo lados de comprimentos iguais. Além disso, o enunciado também deixava claro que triângulos equiláteros têm lados de mesma medida e não apenas ângulos iguais a 60º. As várias maneiras de resolver um problema é um fenômeno que julgamos possível e até desejável quando se tem múltiplos instrumentos de investigação.

3.1.3 Atividade 3 – Medidas dos lados do paralelogramo CEDF.

A ideia inicial do projeto era utilizar algumas ferramentas do GeoGebra para que o aluno constatasse que o perímetro do quadrilátero CEDF é igual a 2 e que esta medida independe da posição do ponto D na base. Havíamos pensado em estabelecer uma função entre o perímetro do quadrilátero CEDF e o comprimento do segmento de reta $\overline{AD}$. Seu gráfico seria desenhado por rastro, no GeoGebra, a partir do deslocamento do ponto D na base do triângulo ABC. Percebemos, no entanto, que a leitura deste gráfico traria algumas limitações. Ela poderia revelar ao aluno que de fato o perímetro era constante e igual a 2, mas não deixaria muito claro do porque ele é constante. Haveria neste caso a necessidade de pensar em expandir a atividade com alguma alternativa geométrica em que o aluno percebesse por que razão isto acontece. Mas, se tivéssemos que propor outra atividade para além da análise gráfica, isto estaria nos indicando que a construção e análise do gráfico não trariam em si grandes contribuições. A solução foi abandonar a ideia de gráfico da função constante e partir para uma justificativa algébrica. Este é um exemplo de como é realizada a engenharia didática no nível de idealização do projeto. O professor procura de modo antecipado, perceber qual é a melhor maneira para se alcançar a aprendizagem do aluno.

Conteúdo, competências e habilidades.	Relacionar as linguagens algébrica e geométrica, sabendo traduzir uma delas na outra.
Objetivo.	Utilizar a ideia de lados congruentes de triângulos equiláteros e a observação da complementariedade de segmentos cuja soma é igual a 1 para definir o perímetro do quadrilátero CEDF.

Iniciamos a atividade propondo a identificação de um segmento de reta por sua figura e por uma forma correta de notação deste. Um nivelamento para os alunos com mais dificuldades.

Figura 20. Dica do Homem Aranha: segmento de reta.

Fonte: Desenvolvido pelo autor.

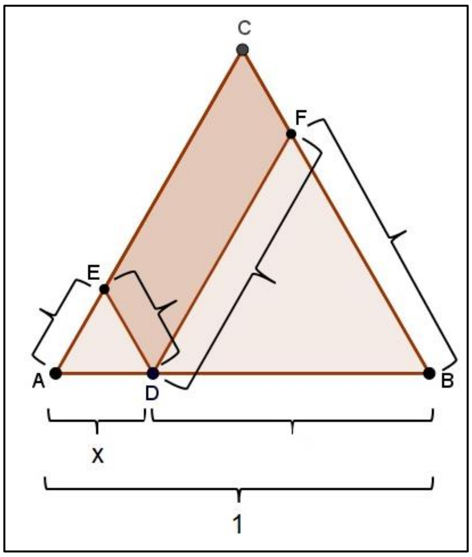
No currículo do Estado de São Paulo, no 8º ano, o aluno em processo inicial da aprendizagem de álgebra, deve associar uma expressão algébrica com o perímetro e a área de figuras planas. A ideia é que o aluno atribua sentido à aprendizagem de álgebra e neste caso a incógnita deve ser entendida como uma medida a ser definida *a posteriori*. Além de apresentar um sentido à ideia de incógnita, as atividades visavam também dar sentido às operações, às propriedades operatórias e à definição de expressões algébricas equivalentes. Por exemplo, se um retângulo tem dimensões 5 e (x + 7) tal que x é uma medida a ser definida, então, as operações de soma e multiplicação das expressões algébricas devem ser usadas para obter o seu perímetro P = 2x + 24 e a sua área A = 5(x + 7) ou, A = 5x + 35 (sendo estas duas últimas, expressões equivalentes).

O que fizemos foi utilizar esta prática pedagógica pela qual o aluno deve ter passado para que ele reconheça que o perímetro do quadrilátero CEDF é constante e igual a 2, e ainda, que o perímetro tem esse valor independentemente da posição do ponto D na base.

Em primeiro lugar se AB = 1 e AD = x, perguntamos ao aluno quanto mede DB. O Homem Aranha indicava ao aluno a necessidade de subtração entre as medidas dos segmentos ainda que um deles tivesse uma medida indeterminada (x): “Perceba que tirando $\overline{AD}$ de $\overline{AB}$ fica $\overline{DB}$”. A resposta esperada era $\overline{DB}$ = 1 – x. Depois disso, o aluno deveria utilizar o conceito de triângulo equilátero mais uma vez. Sabendo que os triângulos ADE e DBF são equiláteros poderia simplesmente transportar as medidas de $\overline{AD}$ para $\overline{AE}$ e $\overline{DE}$ e de

$\overline{DB}$ para $\overline{DF}$ e $\overline{BF}$ conforme mostra a figura abaixo (a medida DB teria sido respondida em atividade anterior).

Figura 21. Atividade sobre medidas de comprimento representadas algebricamente.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

No quadro seguinte o aluno deveria utilizar uma última vez o conceito de lados iguais dos triângulos equiláteros. De modo análogo ao que fez em relação à base, conhecendo as medidas de $\overline{AE}$ = x e $\overline{AC}$ = 1, deveria determinar que $\overline{CE}$ = 1 – x. E ainda, como $\overline{FB}$ = 1 – x e $\overline{BC}$ = 1, temos que $\overline{CF}$ = 1 – (1 – x) = x.

Com a ajuda do Homem Aranha para relembrar ao aluno o que é perímetro, encerramos a atividade perguntando qual expressão algébrica poderia representar o perímetro do quadrilátero CEDF e em seguida refizemos a pergunta original do problema da OBMEP: “Sabendo que o lado $\overline{AB}$ tem comprimento igual a 1, calcule o perímetro do quadrilátero CEDF”.

A expressão algébrica que representa o perímetro do quadrilátero CEDF é

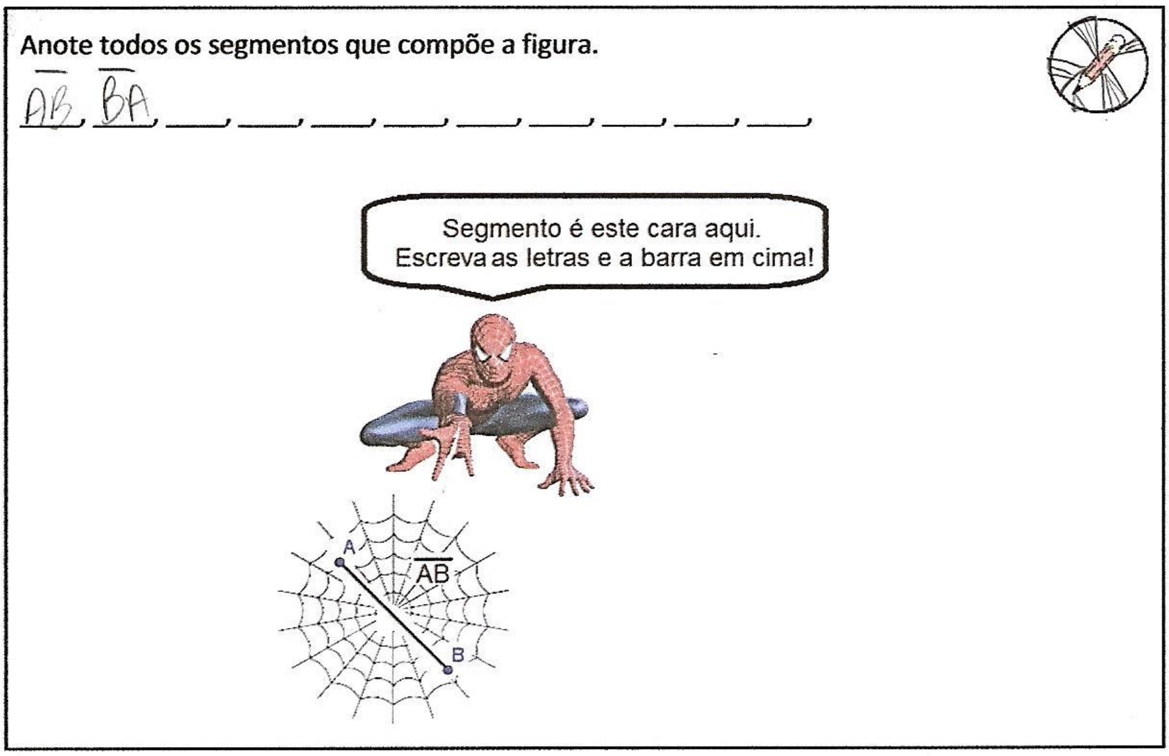
$$P = x + (1 – x) + x + (1 – x).$$

O perímetro do quadrilátero CEDF é, portanto, P = 2.

Ao destacar a expressão algébrica do perímetro, não esperando simplesmente o valor numérico final, gostaríamos que o aluno percebesse o cancelamento de x (também por isso o Homem Aranha alertava que x – x = 0). Uma vez que x é o comprimento do segmento de reta $\overline{AD}$, esperávamos que o aluno observasse que o perímetro do quadrilátero CEDF independe da medida deste segmento ou equivalentemente independe da posição do ponto D na base AB do triângulo.

Os alunos não tiveram dificuldades em registrar corretamente os segmentos de reta. Era esperado o registro dos onze segmentos de reta que compõe a figura do problema da OBMEP. Porém alguns alunos (cerca de 14%) relataram explicitamente que não haviam mais do que um segmento para registrar ou se limitaram a reescrever o exemplo que foi dado no exercício ($\overline{AB}, \overline{BA}$), conforme a resposta do aluno abaixo.

Figura 22. Resolução de atividade sobre segmentos de reta.

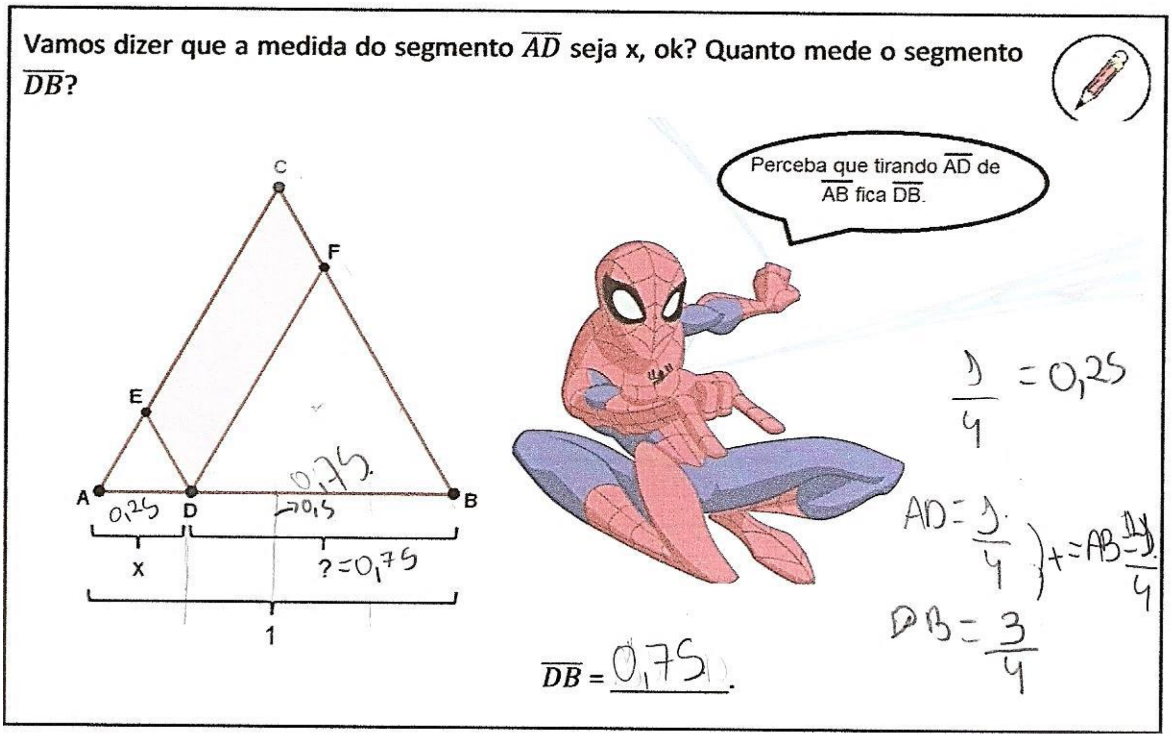


Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

Neste caso houve falha no texto da sequência didática que deverá ser corrigida para aplicação de atividades futuras. Deveria estar explícito ao aluno qual figura a atividade se refere (o triângulo do problema original da OBMEP) e deve haver uma separação da figura da dica do Homem Aranha com a atividade. Analisamos também que convém que os dizeres do Homem Aranha deixem claro que a figura que ele apresenta se trata apenas de um exemplo (vide apêndice página 82).

Na atividade seguinte, percebemos que cerca de 30% dos alunos não conseguiu desenvolver o pensamento algébrico solicitado, ou seja, não conseguiu associar fórmulas às medidas de comprimento. Isto pode estar relacionado à aprendizagem de álgebra estritamente relacionada à manipulação das expressões sem que fosse realizada alguma atribuição de sentido. Quem não se utilizou de álgebra, fez uso de supostos valores fracionários ou decimais que julgaram ser a medida dos segmentos, conforme a resolução de um aluno abaixo.

Figura 23. Resolução de atividade com o uso de expressões algébricas.



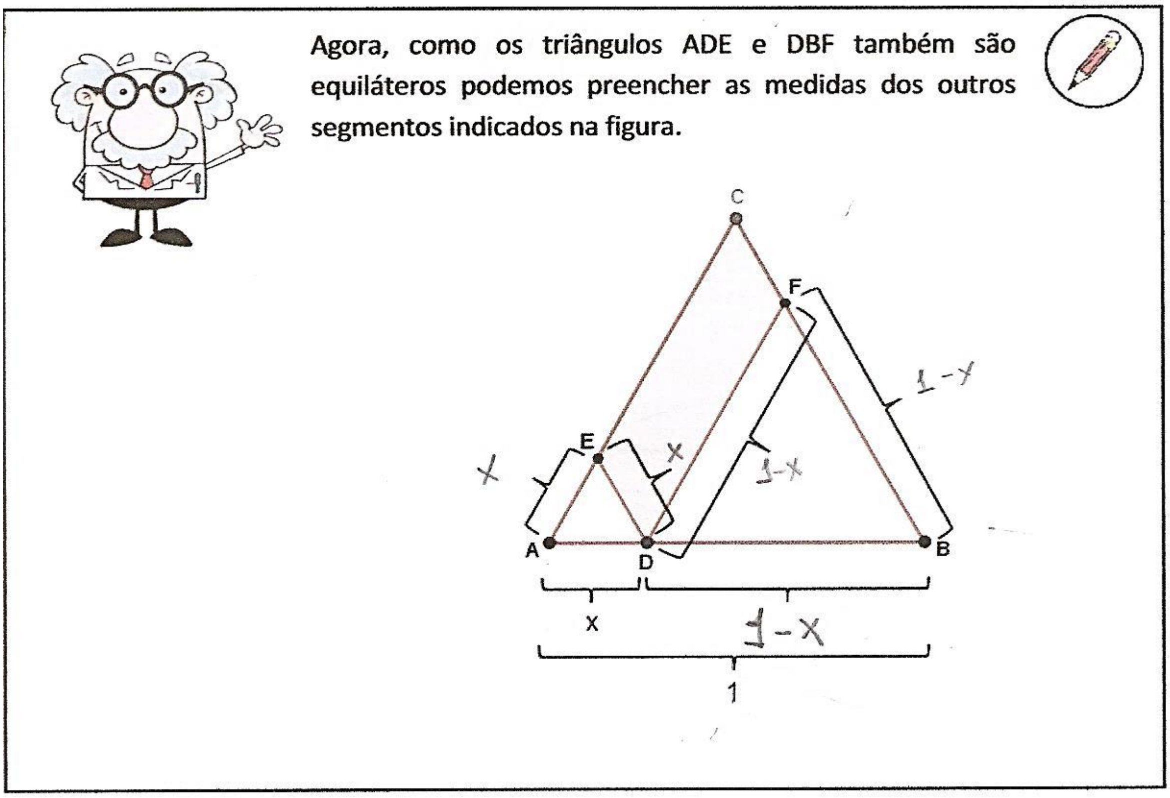
Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

Para as próximas aplicações deste projeto é conveniente uma atividade prévia que auxilie o aluno a representar medidas de segmentos, perímetros e áreas por expressões algébricas a partir de situações mais elementares, a exemplo das atividades presentes no caderno do professor e do aluno utilizados pelo Governo do Estado de São Paulo, 8º ano, volume 1.

Uma parcela entre 5% e 10% do total de alunos percebeu que deveriam utilizar álgebra, mas tiveram erros na montagem da expressão ou tiveram erros operacionais. Houve quem registrasse o segmento de reta $\overline{DB}$ como sendo x – 1 ao invés de 1 – x e, quem fizesse a operação "2x + 2 + 2x = 6x". Essas são evidências das dificuldades de aprendizagem de álgebra.

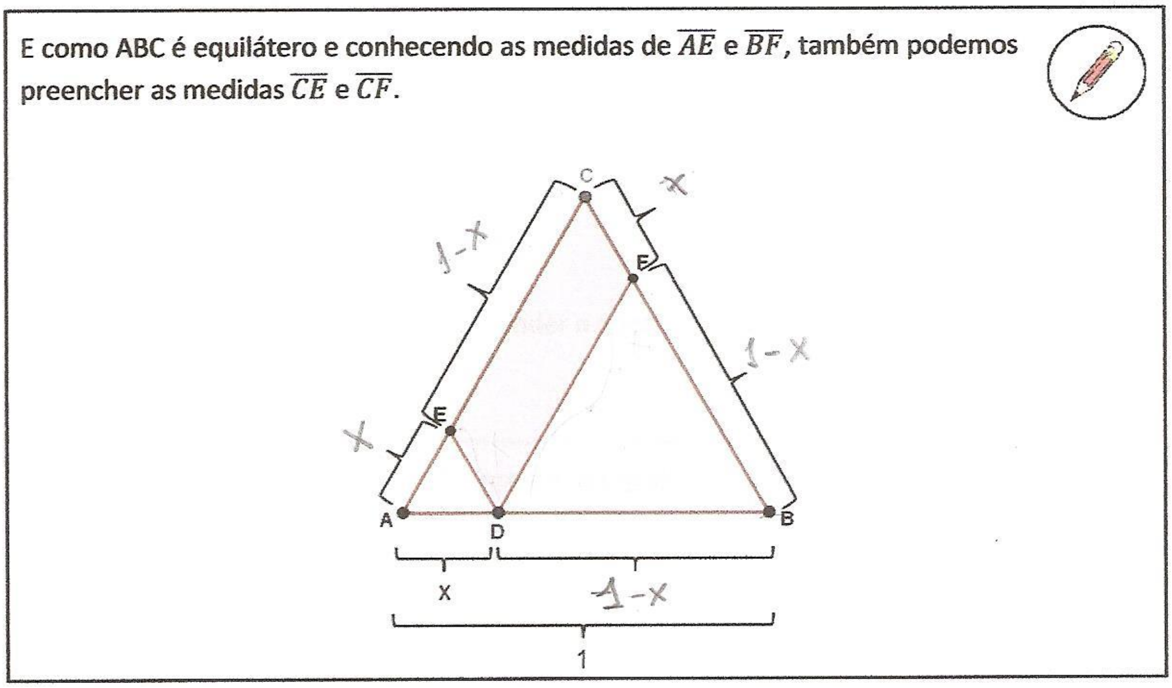
Apesar dessas dificuldades encontradas, observamos que a maioria dos alunos, algo em torno de 60% a 70%, conseguiu desenvolver bem essas atividades, conforme exemplos a seguir.

Figura 24. Resolução de atividade com o uso de expressões algébricas.



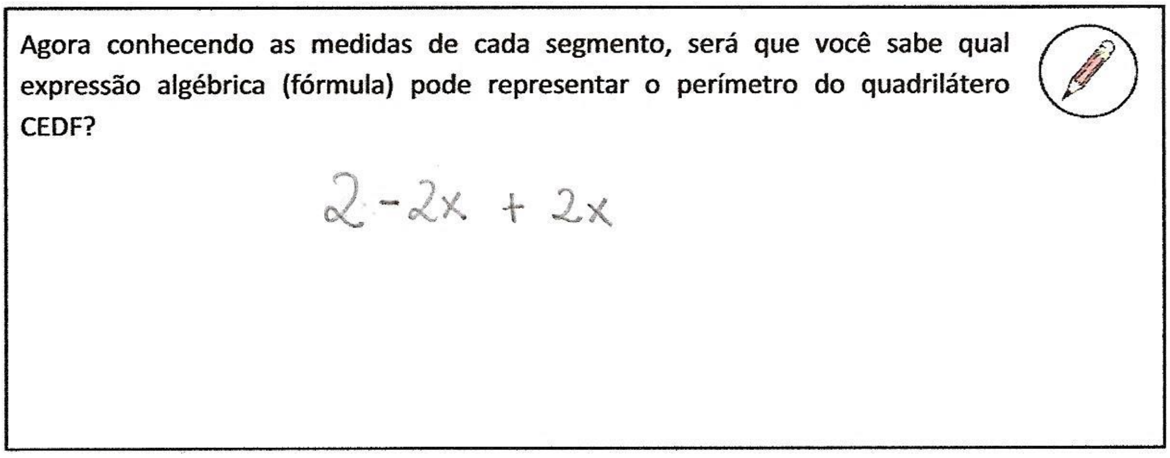
Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

Figura 25. Resolução de atividade com o uso de expressões algébricas.



Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

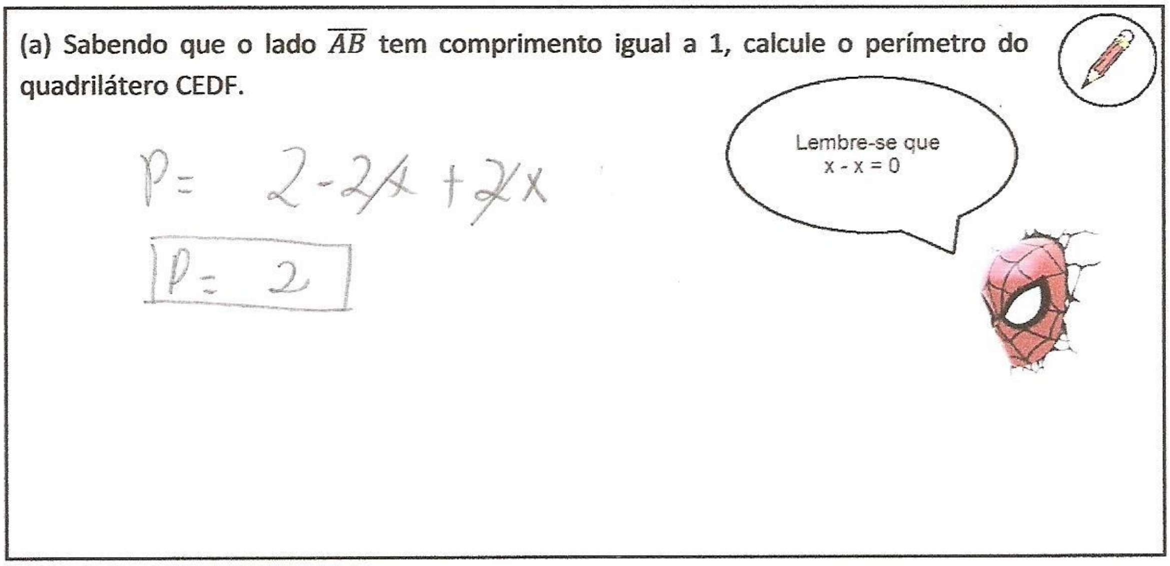
Figura 26. Resolução de atividade de perímetro expresso algebricamente.


Agora conhecendo as medidas de cada segmento, será que você sabe qual expressão algébrica (fórmula) pode representar o perímetro do quadrilátero CEDF?

$2 - 2x + 2x$

Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

Figura 27. Resolução do problema original da OBMEP sobre perímetro.


(a) Sabendo que o lado $\overline{AB}$ tem comprimento igual a 1, calcule o perímetro do quadrilátero CEDF.

$P = 2 - 2\cancel{x} + \cancel{2}x$

$\boxed{P = 2}$

Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

É possível verificar pelo número de acertos que a opção em trabalhar essas atividades com álgebra foi uma boa escolha. Por esta atividade, os alunos responderam a questão original da OBMEP e ainda puderem verificar o cancelamento de x. Acreditamos que o aluno tenha consigo associar a medida x ao segmento $\overline{AD}$, ou seja, que o perímetro do quadrilátero CEDF não depende da distância do ponto D ao ponto A. Dizendo de outro modo, o perímetro do quadrilátero CEDF é constante e independe da localização do ponto D na base AB do triângulo. Para o caso de ter havido algum aluno que não tenha percebido esta propriedade da figura, a relatamos explicitamente na atividade subsequente.

3.2 Etapa 2

A segunda etapa é uma extensão da primeira, mas não consta no problema original da OBMEP. Queríamos aproveitar o que já tínhamos desenvolvido até ali e trabalhar um problema tradicional do 9º ano do Ensino Fundamental II de otimização de área. Isto nos permitiria revisitar este tema associando-o ao conteúdo próprio da série atual dos alunos, as funções quadráticas.

Começamos por enfatizar o resultado da etapa 1. O perímetro do quadrilátero CEDF é constante, igual a 2 e independe da posição do ponto D na base. Mas, com a movimentação do ponto D, o que poderíamos dizer em relação à área do quadrilátero CEDF? Esta questão tradicional do 9º ano do Ensino Fundamental consiste em encontrar a maior área possível em figuras com o mesmo perímetro. Ao olhar a variação da figura no GeoGebra a partir do deslocamento do ponto D, o aluno pode verificar que, apesar do perímetro ser constante, diferentes formatos de área vão surgindo - um quadrilátero que ora se transforma em um losango e em outro momento fica mais “esticado”. Para ajudar na análise pedimos que construíssem uma parábola cuja construção também não é estática como veremos, mas que é formada a partir do deslocamento do ponto D. Era esperado que o aluno tivesse *insights* da variação da área e do seu valor máximo, ao analisar o desenho do GeoGebra ou o gráfico da área do quadrilátero CEDF em função do comprimento do segmento $\overline{AD}$ (determinado pela posição do ponto D na base). Por fim, o trabalho foi direcionado para atividades em que o aluno fosse capaz de reconhecer essa variação da área como uma função quadrática de x (a medida do segmento $\overline{AD}$).

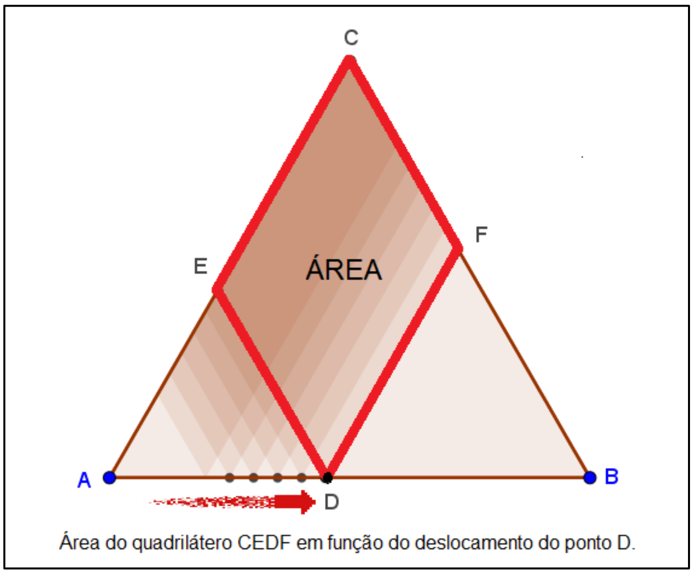
Destacamos que a articulação dos diversos conteúdos dentro da disciplina de matemática, como em nosso trabalho, entre geometria e função, embora nem sempre presente no ensino tradicional, é recomendado pelo Currículo de Matemática do Estado de São Paulo. Essa interação entre os conteúdos abre novas possibilidades de aprendizagens, ajuda a contextualizar problemas e enriquece a atribuição de sentidos aos conteúdos aprendidos pelos alunos. Se por um lado a função quadrática pode ajudar o aluno a interpretar o problema geométrico quando, por exemplo, analisa o gráfico, por outro lado é o problema que dá sentido a aprendizagem da função quadrática uma vez ela é exposta de modo contextualizado.

3.2.1 Atividade 1 – Construção de gráfico no GeoGebra.

Conteúdo, competências e habilidades.	Compreender informações transmitidas em gráficos. Compreender a construção do gráfico de funções de 2º grau sabendo caracterizar os valores extremos (pontos de máximo ou de mínimo). Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 2º grau, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos. Compreender o significado das frações na representação de medidas não inteiras e da equivalência de frações.
Objetivo.	Observar que, diferentemente do que ocorreu com o perímetro do quadrilátero CEDF, o deslocamento do ponto D implica áreas de diferentes dimensões. Observar a maior área possível do quadrilátero CEDF. Calcular a área do quadrilátero CEDF quando ela é a maior possível.

No primeiro momento enfatizamos a ideia de movimento da figura e convidamos o aluno a pensar na área do quadrilátero CEDF na medida em que ponto D é deslocado. Utilizamos a figura abaixo para reforçamos esta ideia.

Figura 28. Variação da área do quadrilátero CEDF a partir do deslocamento do ponto D.

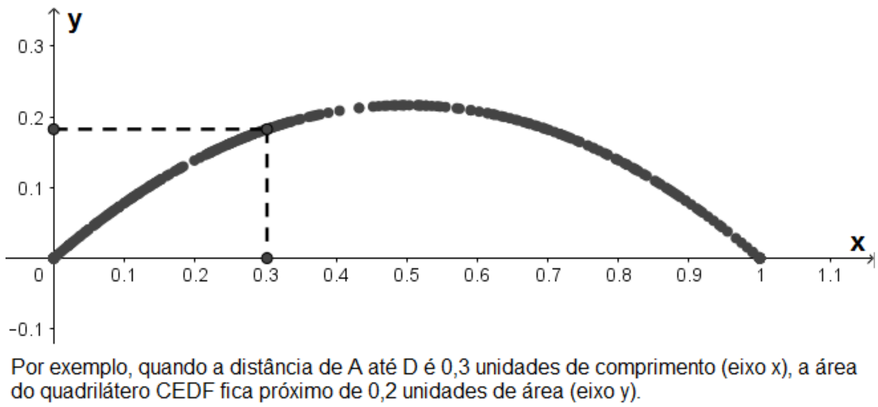


Fonte: Desenvolvido pelo autor.

A figura mostra diferentes áreas a partir do deslocamento do ponto D. Os detalhes da seta que deixa um rastro e das “sombras” das diferentes áreas e do ponto D foram criados para que o aluno tivesse a nítida noção de movimento.

Pedimos na sequência que os alunos construíssem um gráfico da área do quadrilátero CEDF em função do comprimento do segmento $\overline{AD}$ no GeoGebra. Para tanto, foi solicitado a exibição de uma janela de visualização 2, e a construção do ponto (AD, CEDF) tal que AD é a medida do segmento $\overline{AD}$ e CEDF é a medida da área do quadrilátero CEDF. Estas medidas foram obtidas na própria figura utilizando recursos do GeoGebra. Ao movimentarem o ponto D no GeoGebra arrastando-o pela base $\overline{AB}$, o aluno poderia observar a movimentação do ponto (AD, CEDF) em um plano cartesiano. Uma vez habilitado a função “Rastro” sobre este ponto o aluno poderia ver o surgimento de uma curva conforme exemplificado abaixo.

Figura 29. Gráfico da área do quadrilátero CEDF em função do comprimento do segmento AD.

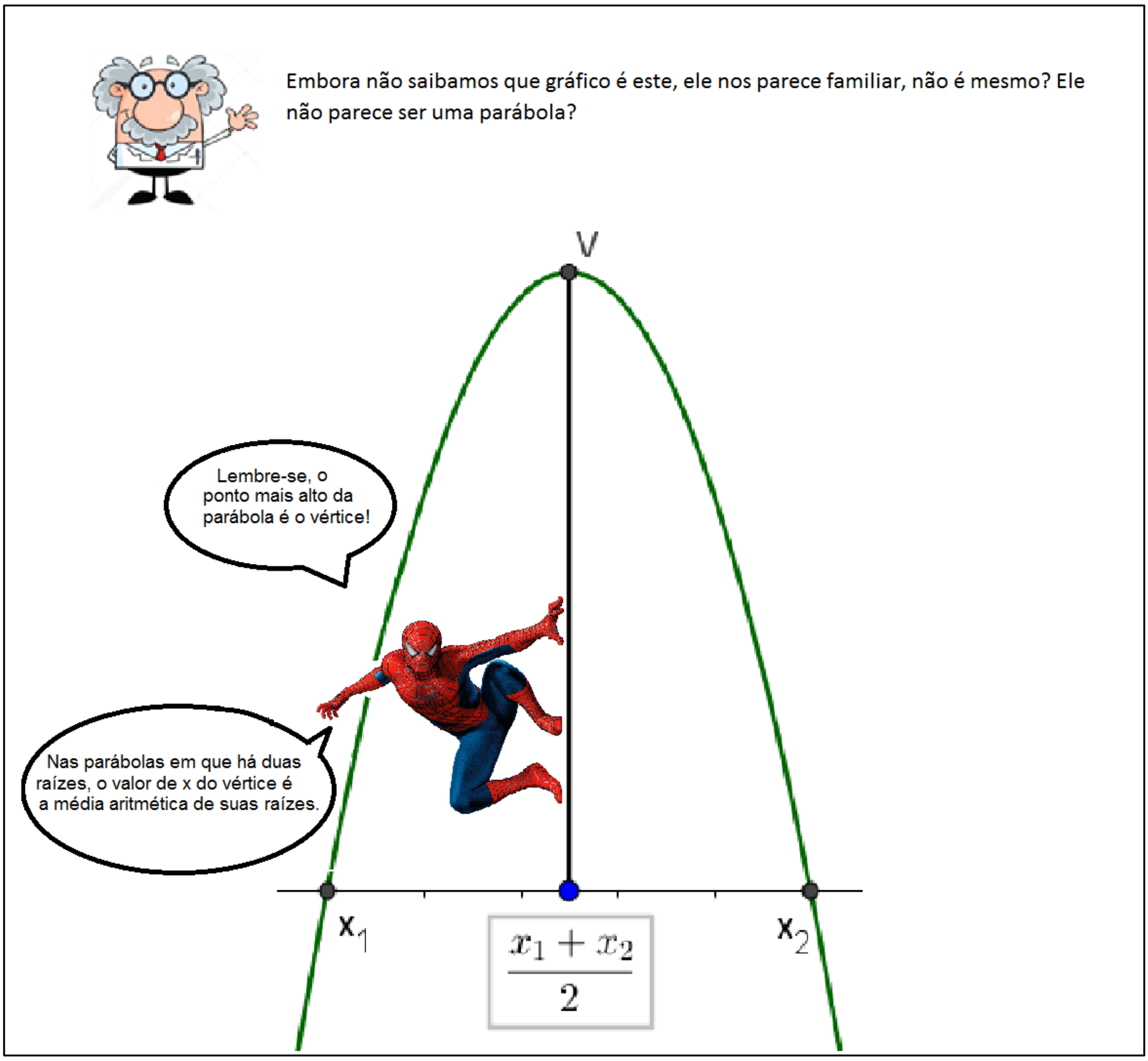


Fonte: Desenvolvido pelo autor.

A figura construída seria semelhante a esta, mas escolhemos ilustra-la no texto da sequência didática para que o aluno soubesse como associar os valores das abcissas e suas respectivas ordenadas uma vez que esta aprendizagem poderia não estar totalmente consolidada aos alunos recém-inseridos no conteúdo de função. Também optamos por um gráfico “falho” que apresenta interrupções por facilitar a identificação pelo aluno, entre a figura e o seu trabalho.

Deixamos para o fim a atividade para determinar a fórmula desta função. Primeiro problematizamos e depois formalizamos, numa tentativa de contextualizar a aprendizagem. Mas como precisaríamos trabalhar com propriedades da parábola na continuação da atividade, optamos por chama-la como tal, sempre usando o contexto do diálogo. Destacamos também um conceito aprendido pelos alunos em sua atual série escolar: os valores máximo ou mínimo da função quadrática determinados pelo vértice da parábola, conforme mostra a figura abaixo.

Figura 30. Dica do Homem Aranha: o vértice de uma parábola.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

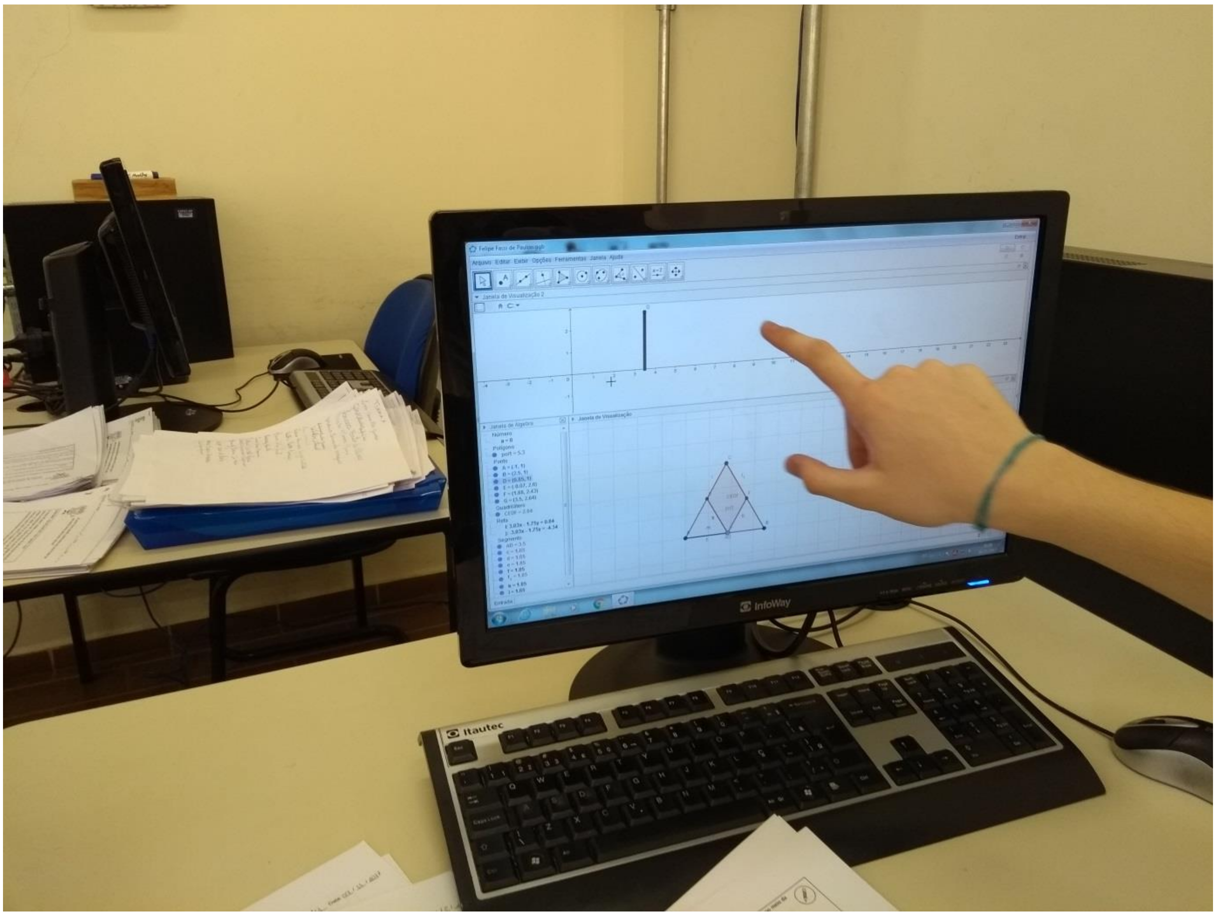
Queríamos que o aluno percebesse duas coisas distintas, porém interligadas. A primeira, que fosse capaz de perceber que o valor da área do quadrilátero CEDF varia conforme a posição do ponto D e, a segunda, qual é o valor máximo dessa área. Por isso dividimos este problema em dois estágios. A área do quadrilátero CEDF é menor quando o ponto D está mais próximo dos vértices A e B e é a maior possível quando o ponto D está exatamente na metade do segmento $\overline{AB}$. Era esperado que o aluno conseguisse visualizar isto com o auxílio do gráfico e do desenho do quadrilátero CEDF no GeoGebra.

Uma vez que os alunos tenham percebido que a maior área do quadrilátero CEDF é obtida quando o ponto D está na metade do segmento $\overline{AB}$, queríamos que ele observasse também o comprimento de todos os segmentos da figura e que isto culminasse na percepção de uma possibilidade de cálculo para a maior área do quadrilátero CEDF.

Pedimos que dissesse qual era a medida dos segmentos $\overline{AD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$ e $\overline{CE}$ (registrados anteriormente como x) e os segmentos $\overline{DB}$, $\overline{BF}$, $\overline{FD}$ e $\overline{CF}$ (cuja medida é 1 – x) quando x = ½. Ou seja, o aluno deveria constatar que, neste caso, todos os segmentos mediam igualmente ½. Continuamos, propondo a construção de um segmento entre os pontos E e F esperando que observassem que, nesta condição, os triângulos ADE, DBF, EDF e EFC são todos congruentes e por esta razão todos representam ¼ da área do triângulo ABC. Sem mencionar ao aluno que o quadrilátero CEDF é formado por dois desses triângulos gostaríamos que ele chegasse à conclusão de que, quando o ponto D está na metade do segmento $\overline{AB}$, o quadrilátero CEDF tem a sua maior área possível e ela mede metade da área do triângulo ABC, ou seja, ¼ + ¼ de sua área.

Durante a construção do gráfico da área do quadrilátero CEDF em função da medida do segmento de reta AD, houve alguns casos em que, ao invés de uma parábola, os alunos obtinham uma reta vertical, conforme a foto abaixo de um dos casos.

Figura 31. Foto de aluno desenvolvendo atividade no Geogebra.

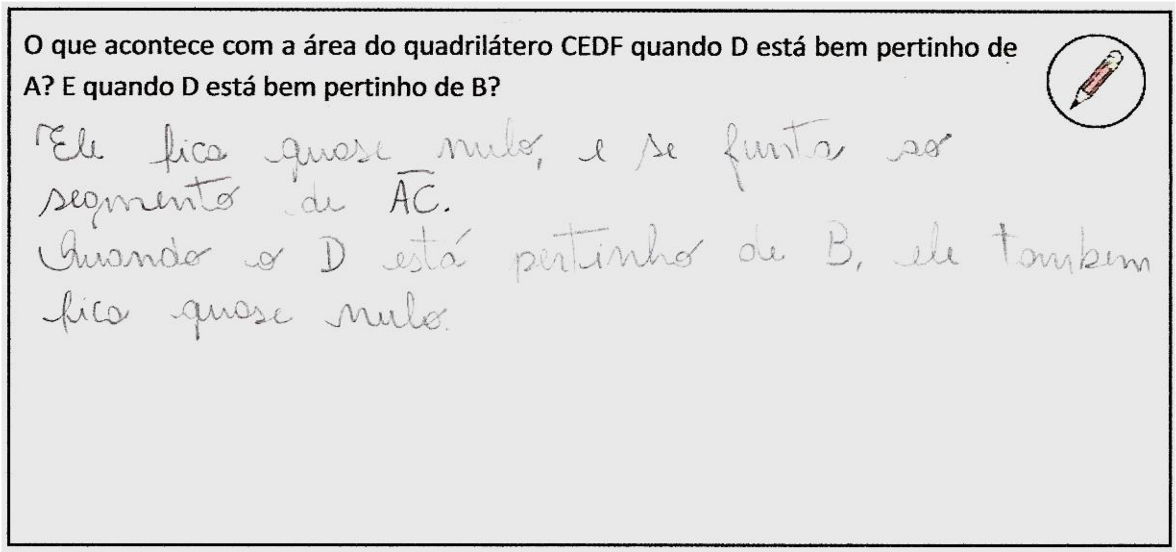


Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Verificamos que o aluno criou corretamente o segmento $\overline{AD}$ solicitado. Mas, na tentativa de renomear este segmento AD (pois era reconhecido pelo GeoGebra por uma letra minúscula qualquer), ele renomeou erroneamente, não este segmento, mas o segmento $\overline{\mathrm{AB}}$. A construção do ponto (AD, CEDF) na janela de visualização 2 mostrava uma variação no eixo y (que representava a área do quadrilátero CEDF), enquanto o valor do eixo x permanecia constante pois o comprimento do segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ tem valor fixo. Isto provavelmente ocorreu porque a instrução dada a ele na sequência didática para renomear o segmento era de clicar com o botão direito do mouse sobre o segmento $\overline{AD}$ que por sua vez está sobreposto ao segmento $\overline{\mathrm{AB}}$. Ao clicar sobre o segmento na figura, o GeoGebra selecionou automaticamente o segmento $\overline{\mathrm{AB}}$. A sugestão dada ao aluno durante o trabalho deve ser inserida ao projeto para novas aplicações: reconhecer por qual letra o segmento $\overline{AD}$ é representado (aparece uma letra minúscula junto ao segmento na figura) e clicar com o botão direito sobre essa letra, não mais na própria figura, mas na Janela de Álgebra (vide a atividade corrigida na página 87 do apêndice).

Quanto às respostas dos alunos nas atividades relacionadas à análise do gráfico e da figura, os acertos ficaram próximos a 55% com outros 15% de acertos parciais. Os que erram, de modo geral, não observaram a variação da área do quadrilátero CEDF a partir do deslocamento do ponto D, mas observaram as medidas dos lados do quadrilátero CEDF. Possivelmente estes alunos não dominam o conceito de área ou não interpretaram corretamente a atividade. Dentre os que acertaram parcialmente, consideramos basicamente dois casos. Aqueles que visualizaram que a área do quadrilátero CEDF aumenta quando o ponto D está “próximo” ao meio, mas que não que não conseguiram perceber que quando o ponto D está exatamente na metade do segmento $\overline{AB}$ a área do quadrilátero CEDF é a maior possível. E ainda, aqueles que visualizaram que quando o ponto D está no meio do segmento $\overline{AB}$, o ponto móvel sobre a parábola chega ao vértice (na janela de visualização 2), mas não é possível saber se estabelecem uma relação entre este fato e a área máxima do quadrilátero CEDF. Ainda assim consideramos que os resultados obtidos foram satisfatórios, pelo grau de dificuldade da atividade e por saber que nem todos os alunos já tenham conseguido assimilar o conceito de valor máximo de uma função quadrática. É claro que em aulas normais, no cotidiano, seria necessário um reforço sobre o tema. Ainda sim, acreditamos que a atividade é valorativa mesmo para o aluno que eventualmente não tenha conseguido um resultado satisfatório do ponto de vista objetivo, pois são experiências acumuladas que podem ser resgatadas em uma aprendizagem futura.

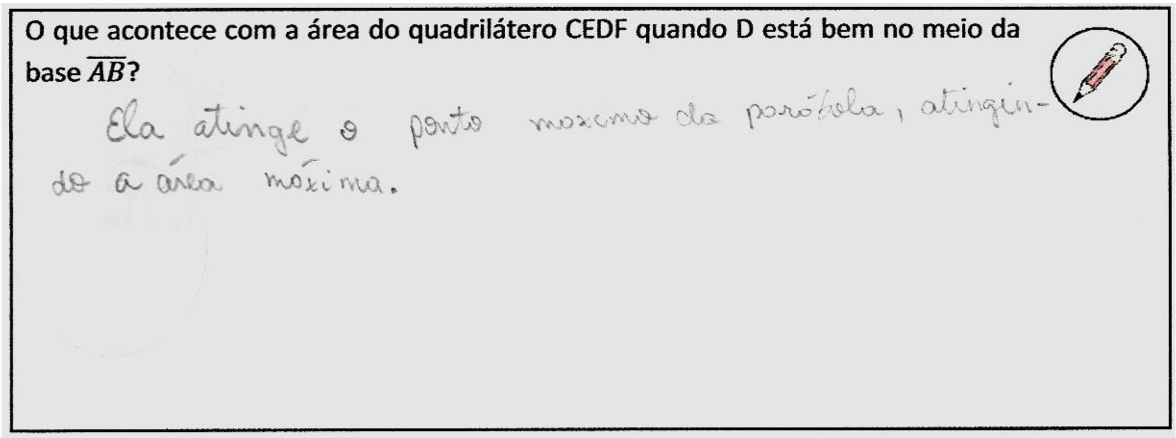
Figura 32. Resolução de atividade sobre a área do quadrilátero CEDF.


O que acontece com a área do quadrilátero CEDF quando D está bem pertinho de A? E quando D está bem pertinho de B?

Ele fica quase nulo, e se junta ao segmento de $\overline{AC}$.
Quando o D está pertinho de B, ele tambem fica quase nulo.

Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

Figura 33. Resolução de atividade sobre a área do quadrilátero CEDF.

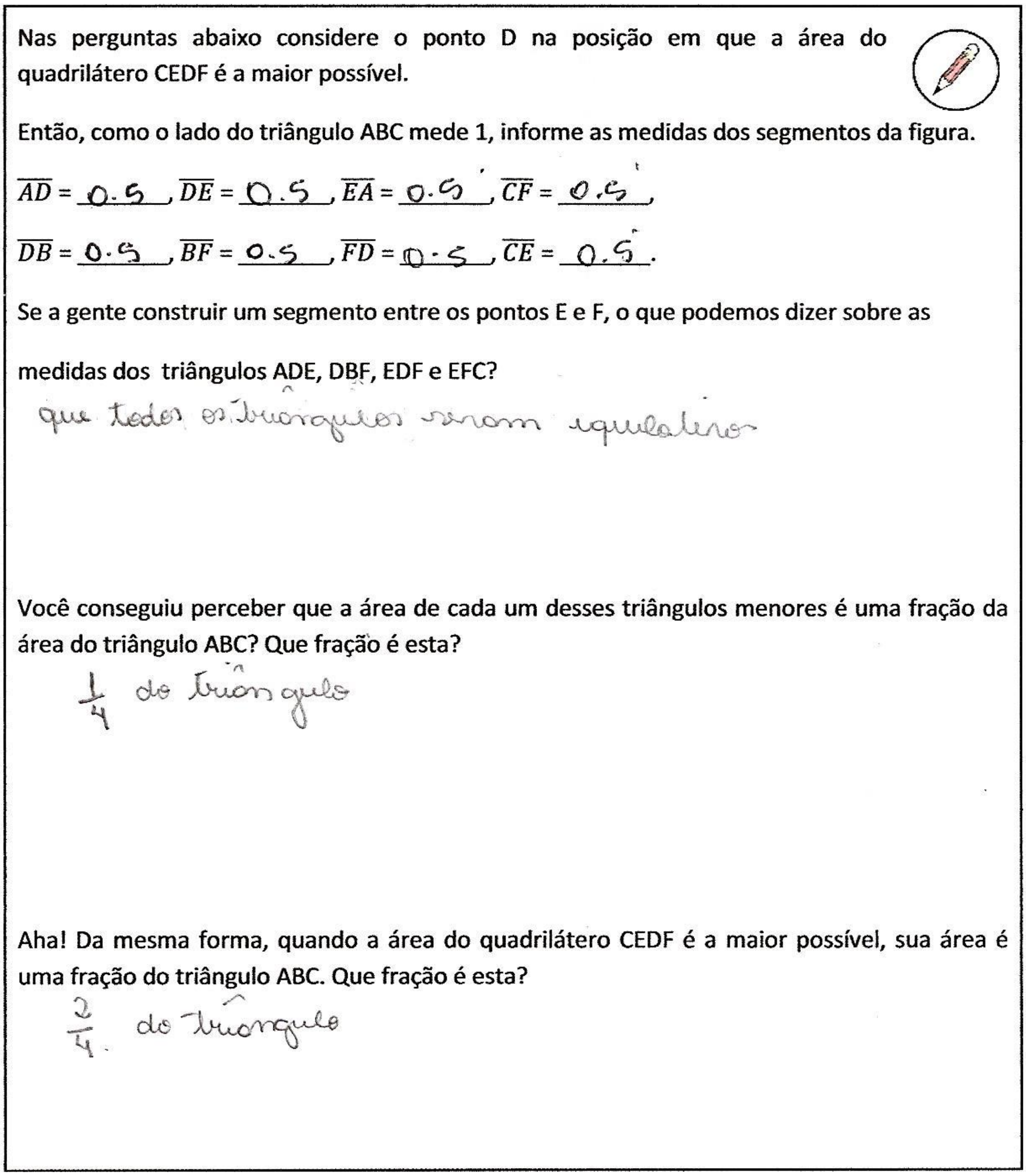

O que acontece com a área do quadrilátero CEDF quando D está bem no meio da base $\overline{AB}$?

Ela atinge o ponto maximo da parábola, atingin-do a área maxima.

Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

Na sequência, depois de registrarem os comprimentos dos segmentos da figura do problema da OBMEP quando D está no meio do segmento $\overline{AB}$, todos medindo igualmente ½, as outras questões sobre a congruência dos triângulos ADE, DBF, EDF e EFC tiveram resultados satisfatórios, conforme exemplo de uma resolução de atividade abaixo.

Figura 34. Resolução de atividades sobre da frações da área do triângulo ABC.



Nas perguntas abaixo considere o ponto D na posição em que a área do quadrilátero CEDF é a maior possível.

Então, como o lado do triângulo ABC mede 1, informe as medidas dos segmentos da figura.

$\overline{AD}$ = 0.5, $\overline{DE}$ = 0.5, $\overline{EA}$ = 0.5, $\overline{CF}$ = 0.5,

$\overline{DB}$ = 0.5, $\overline{BF}$ = 0.5, $\overline{FD}$ = 0.5, $\overline{CE}$ = 0.5.

Se a gente construir um segmento entre os pontos E e F, o que podemos dizer sobre as medidas dos triângulos ADE, DBF, EDF e EFC?

que todos os triângulos serom equilateros

Você conseguiu perceber que a área de cada um desses triângulos menores é uma fração da área do triângulo ABC? Que fração é esta?

$\frac{1}{4}$ do triângulo

Aha! Da mesma forma, quando a área do quadrilátero CEDF é a maior possível, sua área é uma fração do triângulo ABC. Que fração é esta?

$\frac{2}{4}$. do triângulo

Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

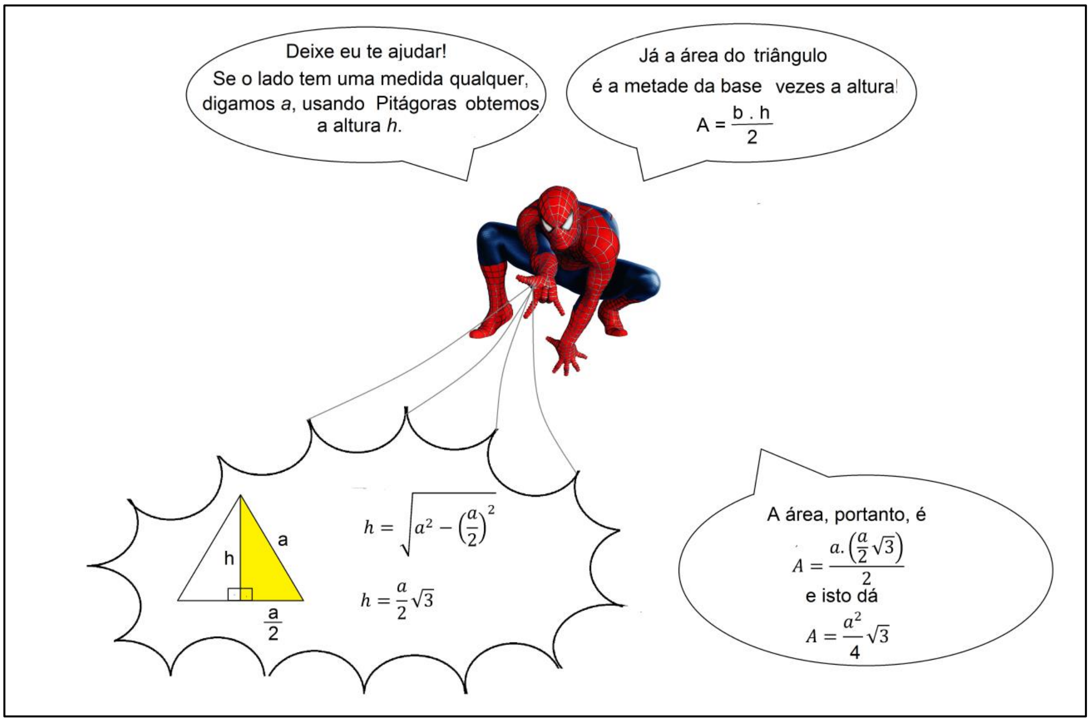
A única questão da atividade acima que merece reparo é a segunda. Os alunos deveriam verificar se os triângulos ADE e DBF, por exemplo, tinham a mesma dimensão. Mas tivemos apenas 71% de acertos. As respostas equivocadas faziam menção a “os triângulos são equiláteros” ou “possuem ângulos iguais”, o que nos faz perceber que, nessas respostas, os alunos compararam o comprimento dos três segmentos de cada triângulo isoladamente. Por exemplo, compararam cada segmento do triângulo ADE, entre si e constataram ser “equilátero”. Observamos que, neste caso, há necessidade de correção do texto, deixando claro que queremos que o aluno faça comparações entre os triângulos. Uma pergunta do tipo "qual desses triângulos é maior" resolveria a questão (vide a atividade corrigida na página 89 do apêndice). Esperamos neste caso que o aluno responda negativamente que nenhum triângulo é maior do que o outro. Desta forma o texto ficaria mais claro. Nas demais questões o índice de acertos foi muito bom. Quase 90% dos alunos observou que cada um dos triângulos ADE, DBF, EDF e EFC têm área equivalente a ¼ da área do triângulo ABC e que o quadrilátero CEDF tem área igual a metade da área do triângulo ABC, nesta condição em que o ponto D está na metade do segmento $\overline{AB}$.

3.2.2 Atividade 2 – Cálculo de áreas de triângulos equiláteros.

Conteúdo, competências e habilidades.	Calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares. Compreender e saber aplicar as relações métricas dos triângulos retângulos, particularmente o teorema de Pitágoras, na resolução de problemas em diferentes contextos. Saber expressar e utilizar em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado de outra por meio de uma função de 2º grau.
Objetivo.	Estabelecer a expressão algébrica da área do quadrilátero CEDF em função do comprimento do segmento $\overline{AD}$.

Como a maior área do quadrilátero CEDF tem a metade da área do triângulo ABC, seria suficiente que os alunos conhecessem a área do triângulo ABC para que o valor da maior área do quadrilátero CEDF fosse conhecido. É possível que os alunos tenham visto o cálculo da área do triângulo equilátero no 9º ano do Ensino Fundamental. Porém, achamos conveniente disponibilizar para eles um breve resumo deste cálculo, conforme segue na figura abaixo.

Figura 35. Dica do Homem Aranha sobre cálculo da área de um triângulo equilátero.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

O aluno deveria perceber que, para se calcular a área de um triângulo equilátero, ele deveria calcular a metade do produto da medida da sua base pela medida da sua altura e esta, por sua vez, poderia ser encontrada aplicando-se o Teorema de Pitágoras. Se a dica fosse interpretada corretamente, o aluno perceberia ser suficiente substituir a medida *a* pelo comprimento do lado do triângulo ABC na expressão $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, obtendo-se assim $A_{(ABC)} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, uma vez que no problema da OBMEP a = 1. Já a maior área do quadrilátero CEDF é $A_{(CEDF)} = \frac{1}{2} \cdot A_{(ABC)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}$. Utilizando novamente o cálculo da área de um triângulo equilátero, pedimos aos alunos que calculassem também as áreas dos triângulos ADE e DBF em função de x, obtendo respectivamente as expressões $A_{ADE} = \frac{x^2}{4}\sqrt{3}$ e $A_{DBF} = \frac{(1-x)^2}{4}\sqrt{3}$.

Por fim, pedimos aos alunos que descrevessem uma fórmula para a área do quadrilátero CEDF em função de x.

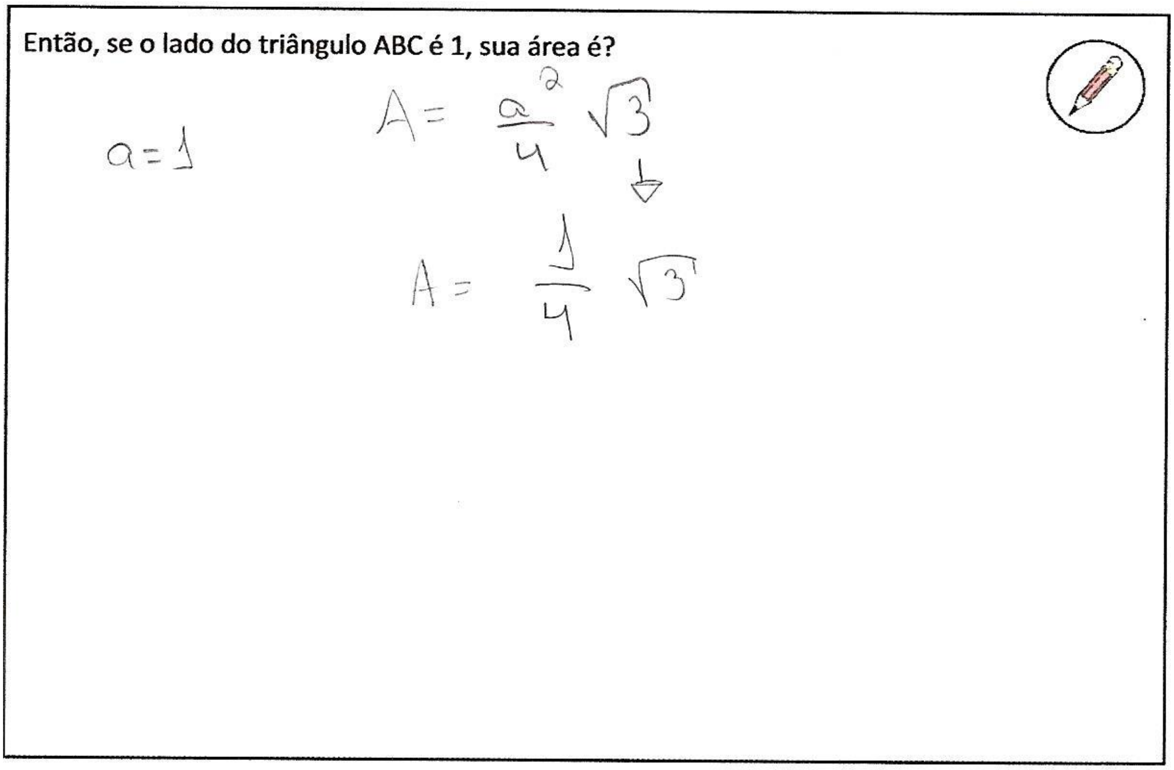
Ressaltamos que a linha de pensamento utilizada foi a inversa da convencional, que apresenta primeiro a função quadrática em fórmulas e depois exemplifica sua utilização dando ênfase a álgebra. Em nossa sequência didática a função quadrática foi apresentada como resultado da busca pela maior área de um quadrilátero de perímetro constante. Assim, a função quadrática "surge" para o aluno de modo contextualizado como uma ferramenta para a solução de um problema. Para encontrar a fórmula da função quadrática não seguimos o modelo comumente usado no Ensino Médio em que se substituem as coordenadas de três pontos de uma parábola em uma equação quadrática geral nas formas canônica ou fatorada. Utilizamos uma observação geométrica relativamente simples. A área do quadrilátero CEDF pode ser obtida pela subtração das áreas dos triângulos ADE e DBF da área do triângulo ABC. A dica para tal observação foi repassada aos alunos e a resposta esperada seria

$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2$, ou simplesmente, $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Nesta última atividade do trabalho os alunos apresentaram bastante dificuldade e o número de acertos foi aquém do esperado. No entanto, a distribuição dos acertos foi desigual concentrando-se mais nas primeiras questões.

A primeira questão em que se exigia do aluno apenas uma interpretação adequada da dica do Homem Aranha para se calcular a área de um triângulo equilátero, seguida do cálculo do valor numérico desta expressão algébrica para a = 1, o número de acertos foi de 68%. Segue abaixo um exemplo de resolução bem sucedida.

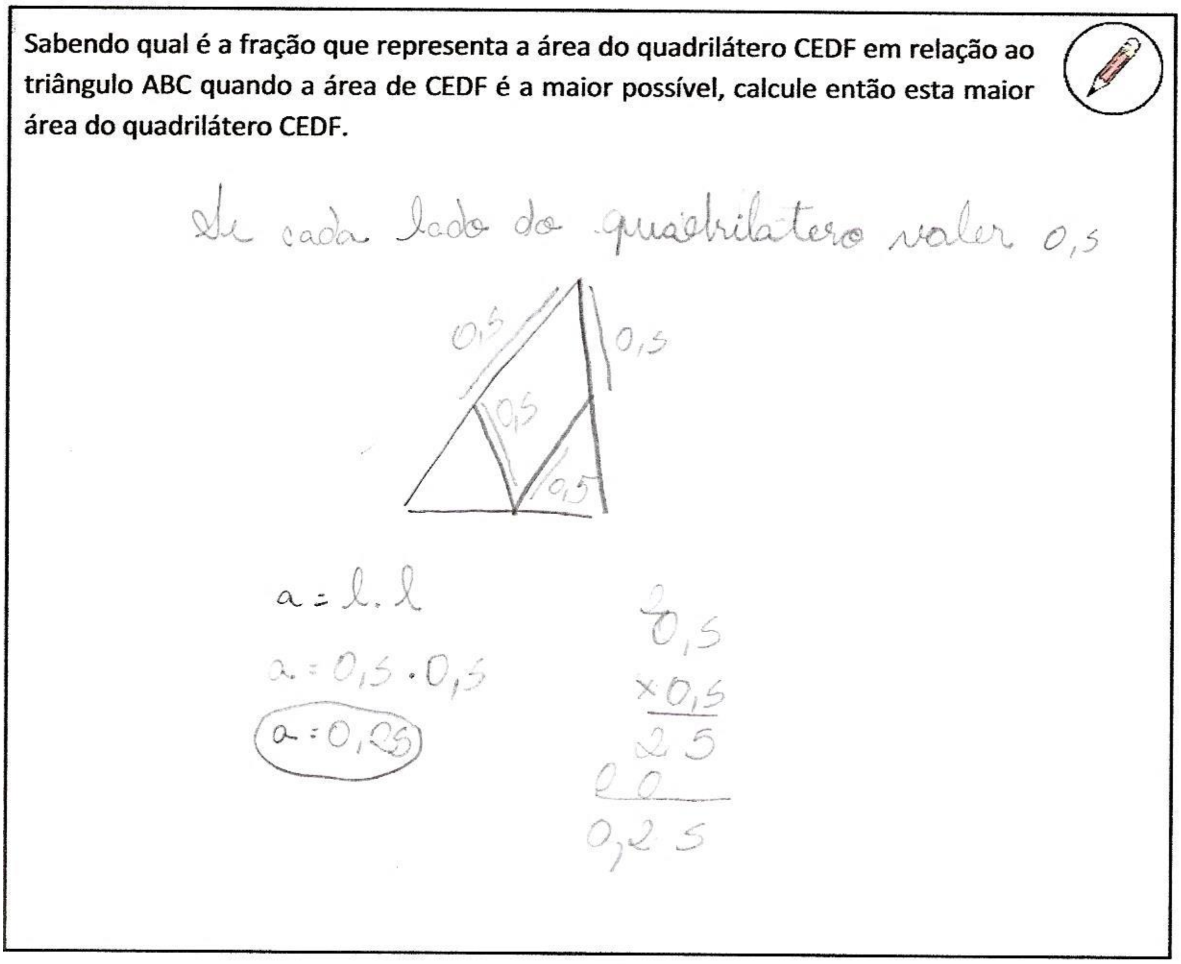
Figura 36. Resolução de atividade de cálculo da área do triângulo ABC.



Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

Quanto a atividade para encontrar o valor numérico da maior área do quadrilátero CEDF havia a necessidade de o aluno utilizar a aplicação de um resultado já obtido. Em atividade anterior, quase 90% dos alunos haviam conseguido observar que esta área equivale à metade da área do triângulo ABC, mas parte considerável destes não conseguiu transferir esta ideia para a resolução deste novo problema, que consistia em dizer qual é o valor desta área. Esperávamos que o aluno dividisse por 2 a área do triângulo ABC que acabara de obter. Quase 70% dos alunos conseguiram identificar o valor da área do triângulo ABC, mas os acertos desta questão caíram para 31%. Isto mostra uma dificuldade do aluno em estabelecer conexões entre as partes do trabalho, que de certa forma é esperado, pois quando se responde atividades isoladas em um livro didático a conexão que o aluno faz é entre o conceito desenvolvido e o próprio exercício, não sendo comum utilizar um resultado para se obter outros. Neste caso, provavelmente o aluno fixa a sua atenção para a atividade do momento, investigando exclusivamente em sua própria memória uma forma de resolver a questão, desistindo de respondê-la rapidamente quando se considera incapaz. A competência que queremos desenvolver em projetos como este é aquela em que o aluno, diante do desconhecido, não se sinta desencorajado quando a resposta imediata não é obtida, mas pelo contrário, que tenha sempre a disposição de encontrar pistas que levem a solução do problema. Ou seja, que o aluno pense em uma teia de conexões de ferramentas ou de saberes que, articuladas, permitam chegar à resolução gradativamente. O exemplo abaixo evidencia a tentativa de resposta do aluno por uma fórmula registrada em sua memória (esta fórmula não foi utilizada no trabalho) e por um método que o aluno julgava correto, desconsiderando sua resposta dada em atividade anterior.

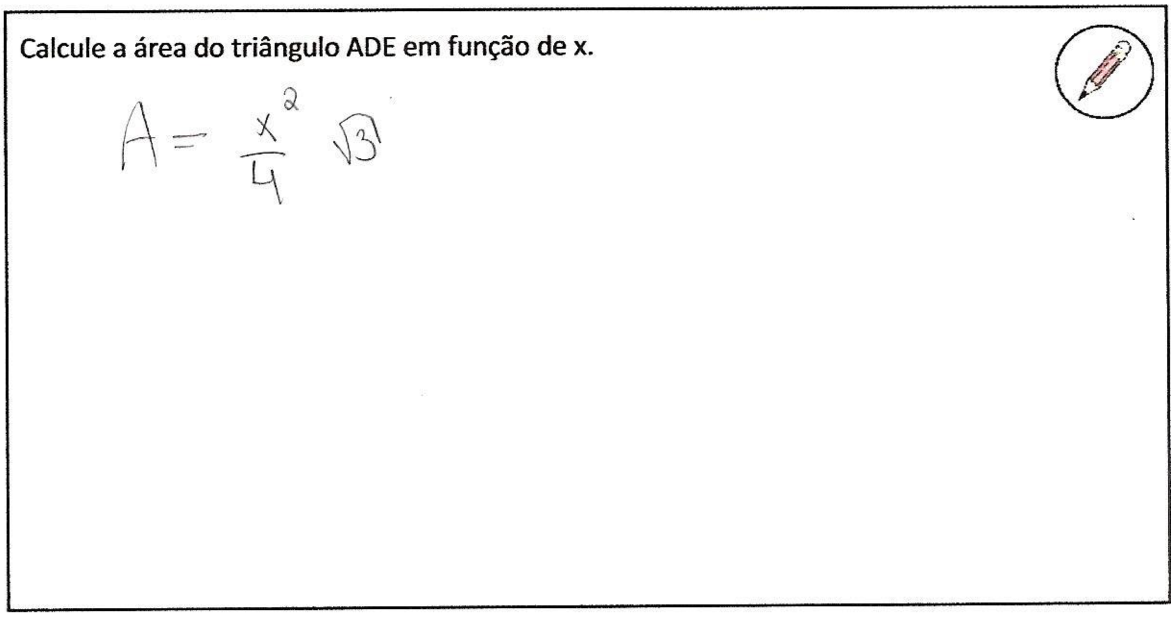
Figura 37. Resolução de atividade de cálculo da maior área do quadrilátero CEDF.



Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

Nas duas questões subsequentes os rendimentos foram de 28% e 6% de acertos respectivamente. Notamos nesta atividade nova dificuldade em lidar com a linguagem algébrica, pois da mesma forma que substituíram a incógnita *a* por 1 para encontrar a área do triângulo ABC, seria suficiente substitui-la por dimensões variáveis x e 1 – x, conforme pode-se ver na resolução do aluno logo abaixo.

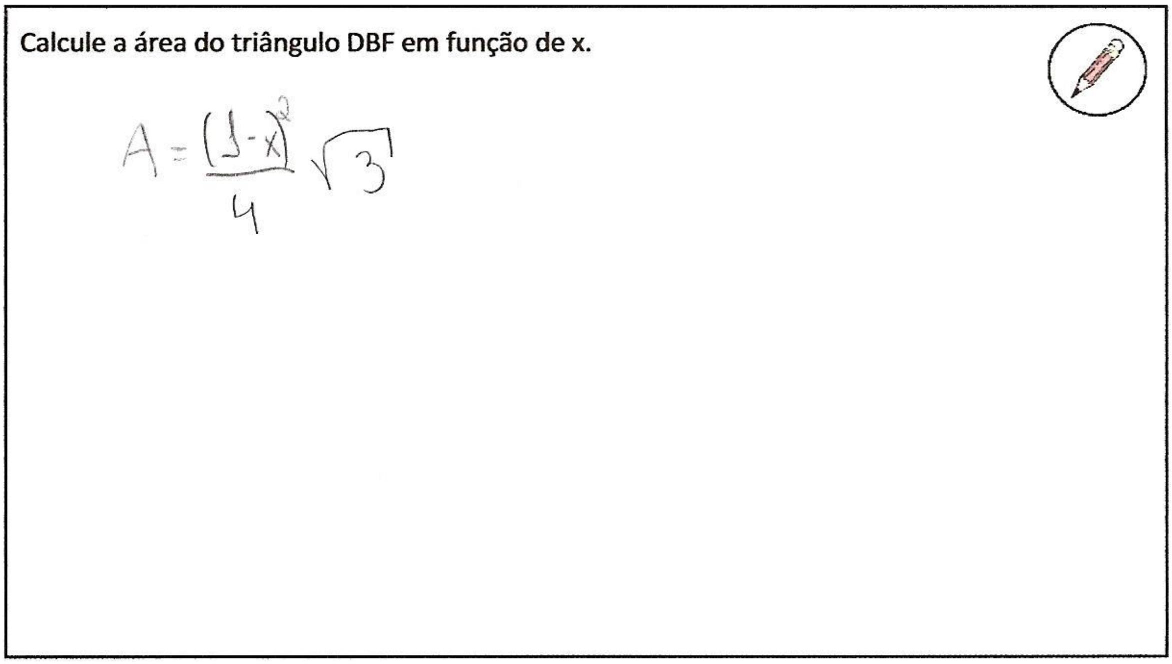
Figura 38. Resolução de atividade de cálculo da área do triângulo ADE.


Calcule a área do triângulo ADE em função de x.

$$A = \frac{x^2}{4}\sqrt{3}$$

Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

Figura 39. Resolução de atividade de cálculo da área do triângulo DBF.


Calcule a área do triângulo DBF em função de x.

$$A = \frac{(1-x)^2}{4}\sqrt{3}$$

Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

Na última questão apenas um aluno acertou, conforme segue a resposta abaixo.

Figura 40. Resolução de atividade sobre fórmula da área do quadrilátero CEDF.

Escreva a fórmula da área do quadrilátero CEDF em função de x.

$$\frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{x^2}{4}\sqrt{3} - \frac{(1-x)^2}{4}\sqrt{3}$$

Fonte: Sequência didática respondida por aluno.

Aqueles que não haviam conseguido responder corretamente os exercícios anteriores não podiam fazê-lo neste por ser evidentemente uma continuidade. Alguns poucos alunos entenderam a dica dada de subtração da área do triângulo ABC pelas áreas dos triângulos ADE e DBF, mas erraram uma das fórmulas das áreas dos triângulos ou então inverteram a ordem das subtrações (subtraíram a área do triângulo maior da área de um triângulo menor, certamente por não interpretarem corretamente qual expressão algébrica representava determinada área).

De modo geral, nesta segunda etapa, o trabalho registrou as dificuldades dos alunos em estabelecer uma fórmula geral que representasse a área do quadrilátero CEDF em função do comprimento do segmento $\overline{AD}$ (de medida x), mas consideramos que o objetivo foi alcançado satisfatoriamente como mostram os resultados das atividades. Desta forma, os alunos observaram nesta segunda etapa que:

a) diferentemente do perímetro a medida da área varia dependendo da posição do ponto D na base $\overline{AB}$ do triângulo;
b) a maior área do quadrilátero CEDF é obtida quando o ponto D está na metade do segmento $\overline{AB}$ e esta maior área é representada graficamente pelo vértice de uma parábola, o que de certa forma remete o aluno à percepção da relação entre o problema apresentado e a função quadrática (de tal forma que o problema antecede a ideia de função quadrática, contextualizando o seu uso);
c) as medidas dos lados dos triângulos ADE, DBF, EDF e EFC são iguais quando o ponto D está na metade do segmento $\overline{AB}$ calculando-se os valores numéricos para as expressões x e 1 – x quando x = 0,5;
d) a medida da maior área do quadrilátero CEDF pode ser obtida como uma fração da área do triângulo ABC.

4 A APLICAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho foi aplicado em um dos laboratórios de informática do campus em três quintas feiras, com intervalo de 14 dias entre a primeira e a segunda aplicação e 7 dias entre a segunda e a terceira aplicação, sendo que, todas elas foram realizadas fora do horário de aula regular dos alunos, não sendo necessário, portanto, interferir no planejamento das aulas.

Como já dissemos, o Curso Técnico em Redes de Computadores Integrado ao Ensino Médio é oferecido em tempo integral, porém às quintas feiras à tarde, oficialmente, não havia aulas. Este tempo era então aproveitado pelo coordenador do curso para que os professores organizassem horários de estudo programados com realização de atividades extras ou para a execução de projetos. O nosso trabalho foi realizado neste horário. As datas foram agendadas pelo coordenador do curso e exigiu certo trabalho de troca de horários entre professores.

As turmas eram divididas em A e B em uma divisão já conhecida pelos alunos quando da utilização do laboratório de informática, pois havia 40 alunos para 24 computadores. Foram usadas duas aulas de 50 minutos para cada turma em cada dia. Enquanto uma turma trabalhava conosco, a outra participava de outro projeto.

Já era esperado um número baixo de ausências, em razão de sempre haver atividades neste dia. Mas, por garantia, combinamos a atribuição de até um ponto extra na média atrelado a frequência que, nos três encontros, foi de cerca de 90% dos alunos.

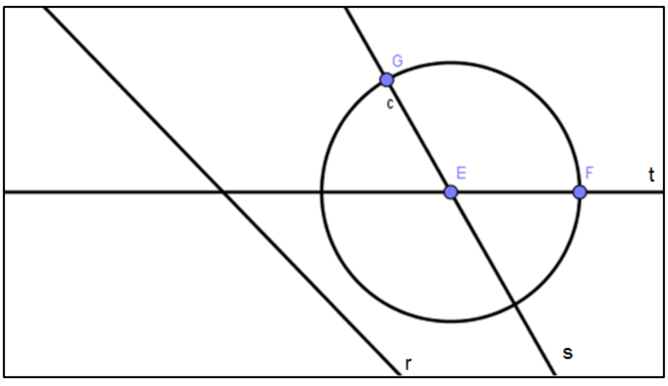
O campus dispõe de técnicos de informática e a manutenção dos computadores é feita com frequência. Ainda assim, em todos os dias tivemos computadores sem funcionamento, o que obrigou alguns alunos a desenvolverem parte do seu trabalho junto a outro aluno. Porém cada um respondeu em suas próprias folhas de atividades.

Figura 41. Foto de aplicação do trabalho em laboratório de informática.

Fonte: Próprio autor.

Pequenas correções no texto foram necessárias e os alunos foram avisados no início da atividade sobre a alteração. Na questão da OBMEP constava no texto que a base do triângulo ABC era BC, quando o correto seria base AB. Na figura abaixo, a reta *r* foi chamada erroneamente de reta transversal e a solução encontrada foi nomear as três retas por *r*, *s* e *t* na primeira atividade dos alunos com o GeoGebra.

Figura 42. Inclusão dos nomes das retas r, s e t.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

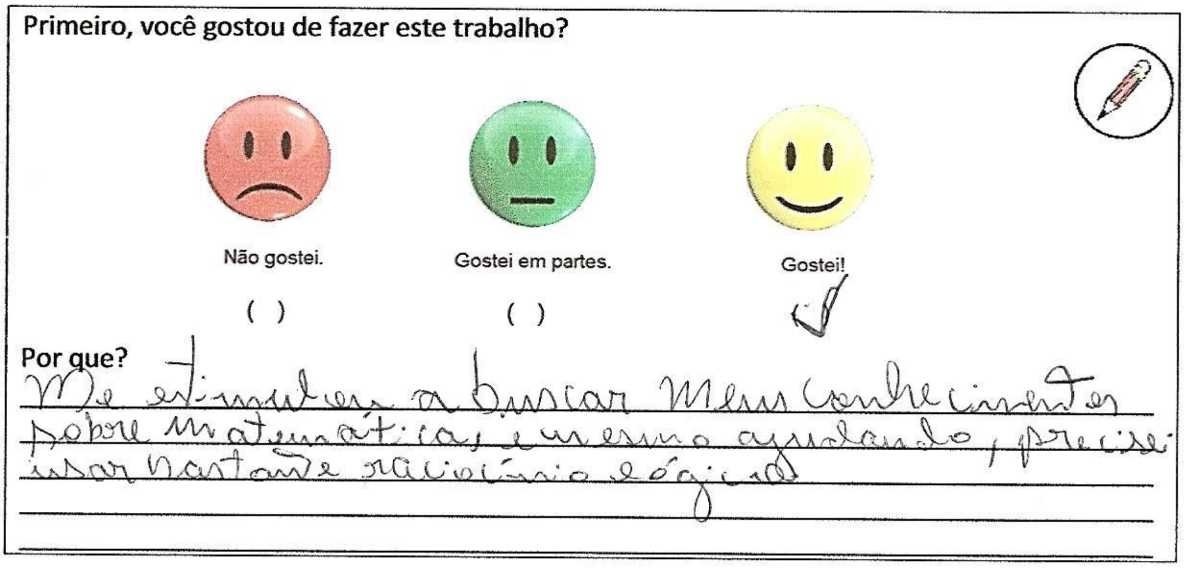
5 AVALIAÇÃO DOS ALUNOS

A avaliação deste trabalho pelos alunos constitui uma das formas de avaliação juntamente com as respostas às atividades e às observações do professor em sala de aula. Serve de termômetro para medir o grau de aceitação do trabalho pelos alunos, ao registrar considerações daqueles a quem este trabalho se dedica, sobre tópicos essenciais. De modo resumido, os itens da avaliação abordavam, como veremos, a empatia dos alunos para com o trabalho, suas considerações quanto ao nível de dificuldade, suas opiniões sobre os recursos utilizados (as personagens, o GeoGebra, a interdisciplinaridade) e possíveis sugestões.

5.1 Empatia ao trabalho

A maior parte dos alunos indicou ter gostado de fazer este trabalho com justificativas diversas, tais como o fato de terem usado o GeoGebra ou terem trabalhado com geometria. Daqueles que disseram ter gostado em partes, alguns disseram ter tido dificuldades em lidar com o GeoGebra ou porque tinham dificuldades em resolver algumas questões. Um aluno relatou não ter gostado de fazer o trabalho.

Figura 43. Avaliação de aluno sobre o trabalho.


Primeiro, você gostou de fazer este trabalho?

Não gostei. ( )

Gostei em partes. ( )

Gostei! (✓)

Por que?

Me estimulou a buscar meus conhecimentos sobre matemática, e mesmo ajudando, precisei usar bastante raciocínio lógico

Fonte: Avaliação respondida por aluno.

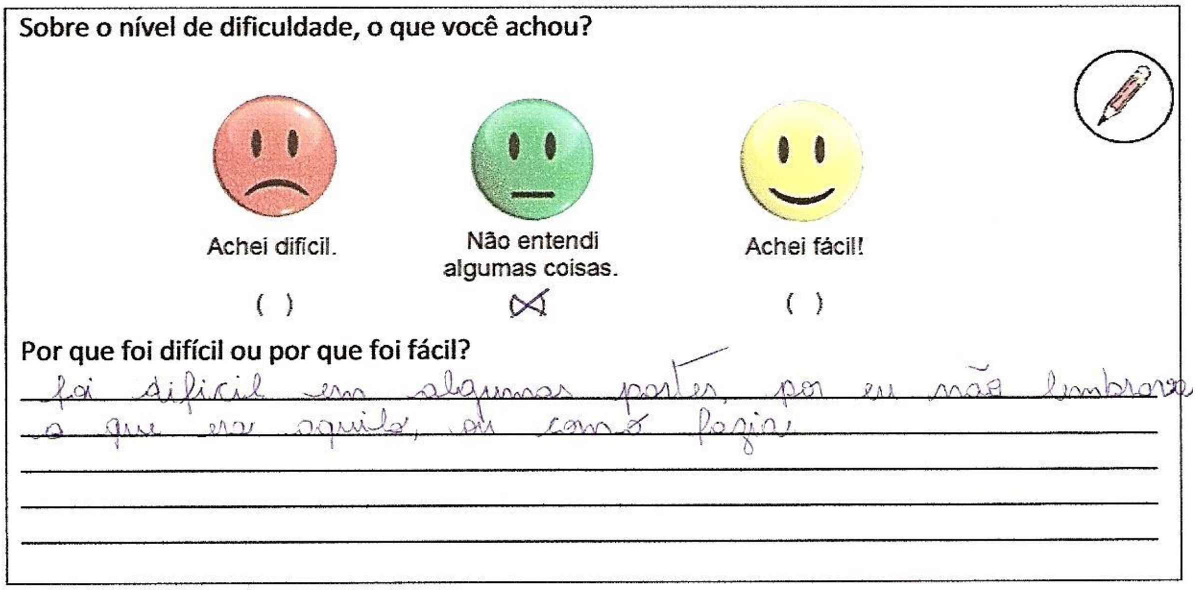
Figura 44. Gráfico de avaliação dos alunos sobre o trabalho.

Fonte: Desenvolvido pelo autor.

5.2 Nível de dificuldade

Sobre o nível de dificuldade do trabalho, as opções eram “Achei difícil”, “Não entendi algumas coisas” e “Achei Fácil!”.

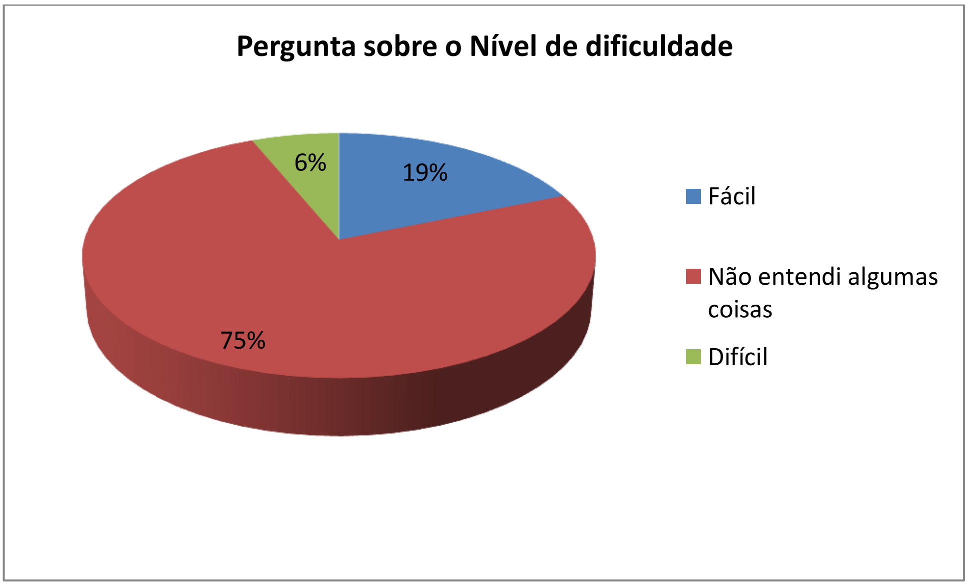
Figura 45. Avaliação de aluno sobre o trabalho.



Fonte: Avaliação respondida por aluno.

Percebemos depois de aplicado o questionário que a alternativa "Não entendi algumas coisas" induzia a resposta, influenciando aqueles que tenderiam a responder que o trabalho foi "fácil", pois é bastante provável que o aluno tenha tido dificuldade em algum tópico em se tratando de um trabalho não habitual. De certa forma esperávamos resultado semelhante, mesmo se a opção fosse algo que indicasse apenas um nível de dificuldade intermediário. Afinal, consideramos que o nível de dificuldade começou mais baixo e aumentou gradativamente tornando se mais difícil nas últimas questões como mostram as próprias atividades dos alunos. Um parâmetro positivo foi o baixo percentual de alunos que escolheram a opção "difícil" (a princípio não influenciada pela frase "Não entendi algumas coisas"). Isso evidencia que os alunos conseguiram interagir satisfatoriamente com o trabalho, mesmo apresentando algumas dificuldades como, por exemplo, lidar com o GeoGebra, não poder consultar o professor ou trabalhar vários conteúdos matemáticos em um mesmo trabalho. A maior parte dos alunos que escolheu a opção "Não entendi algumas coisas" justificou não ter entendido parte do trabalho, não ter conseguido resolver algumas atividades ou ainda, reconheceu ter dificuldades em relembrar conteúdos, sobretudo de geometria. Uma parte menor dos alunos ainda citou dificuldades em utilizar o GeoGebra.

Figura 46. Gráfico de avaliação dos alunos sobre o nível de dificuldade do trabalho.

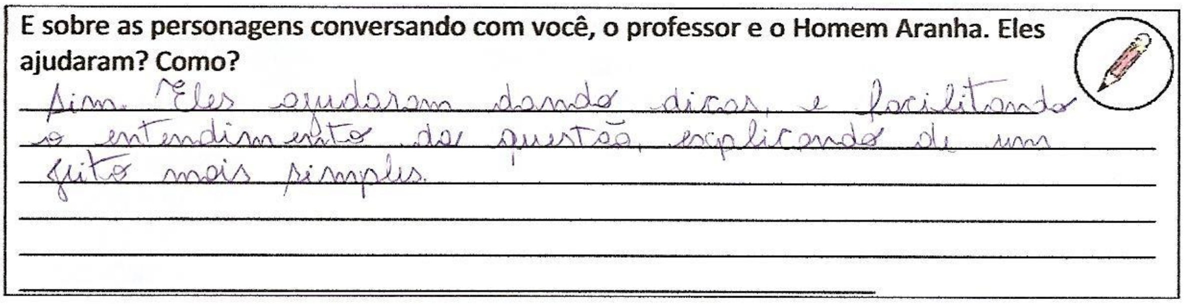


Fonte: Desenvolvido pelo autor.

5.3 As personagens, o uso do GeoGebra, a interdisciplinaridade.

As perguntas sobre as personagens, o uso do GeoGebra e forma interdisciplinar da apresentação dos conteúdos matemáticos foram feitas conforme os exemplos de respostas dos alunos abaixo.

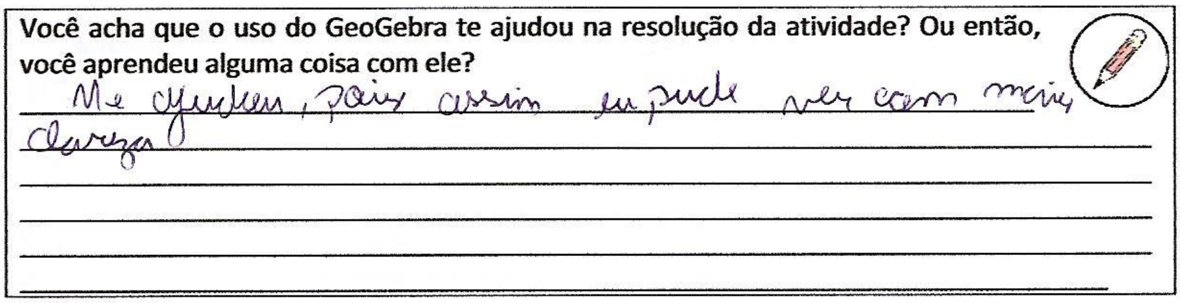
Figura 47. Avaliação de aluno sobre o trabalho.


E sobre as personagens conversando com você, o professor e o Homem Aranha. Eles ajudaram? Como?

Sim. Eles ajudaram dando dicas, e facilitando o entendimento das questão, explicando de um jeito mais simples.

Fonte: Avaliação respondida por aluno.

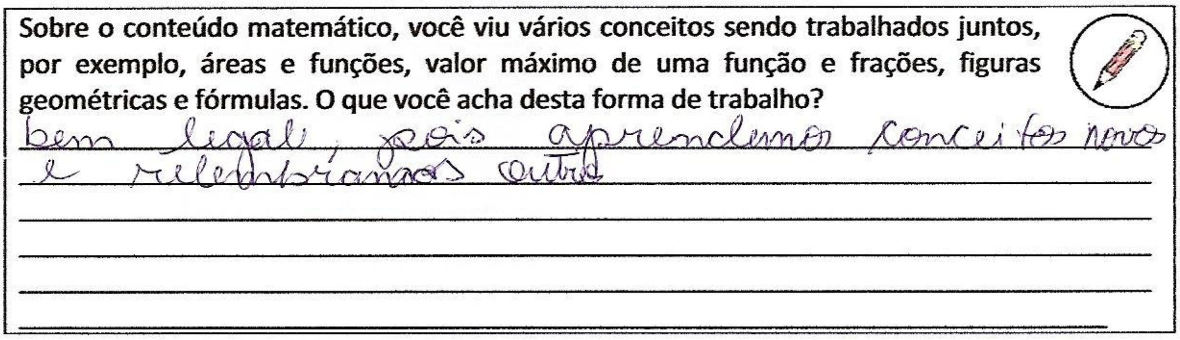
Figura 48. Avaliação de aluno sobre o trabalho.


Você acha que o uso do GeoGebra te ajudou na resolução da atividade? Ou então, você aprendeu alguma coisa com ele?

Me ajudou, pois assim eu pude ver com mais clareza

Fonte: Avaliação respondida por aluno.

Figura 49. Avaliação de aluno sobre o trabalho.


Sobre o conteúdo matemático, você viu vários conceitos sendo trabalhados juntos, por exemplo, áreas e funções, valor máximo de uma função e frações, figuras geométricas e fórmulas. O que você acha desta forma de trabalho?

bem legal, pois aprendemos conceitos novos e relembramos outros

Fonte: Avaliação respondida por aluno.

Os resultados gerais relativos a estes tópicos do trabalho seguem na tabela abaixo.

Tabela 1. Resultado de avaliação dos alunos sobre alguns tópicos do trabalho.

	Consideração do Aluno (em porcentagem)		
Tema	Negativa	Intermediária	Positiva
Uso das personagens	0	7	93
Uso do GeoGebra	3	18	79
Abordagem interdisciplinar dos conteúdos matemáticos.	19	19	62

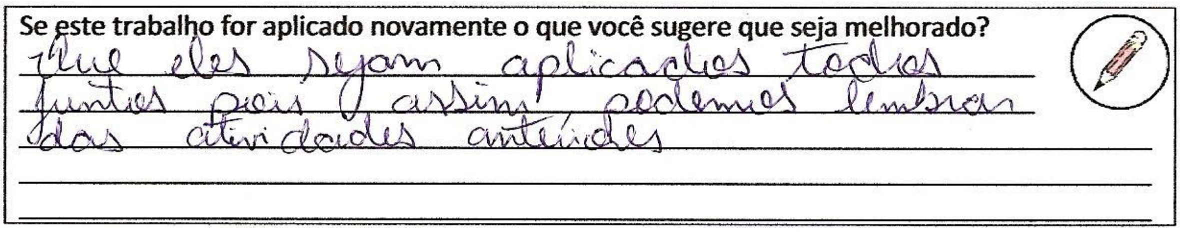
Fonte: Avaliações respondidas por alunos.

Os resultados mostram de modo geral que o uso de personagens como forma de auxílio e do GeoGebra como ferramenta de aprendizagem foram bem aceitos pelos alunos com considerações positivas em 93% e 79% das respostas respectivamente. Mesmo sem serem perguntados especificamente sobre o caráter lúdico, dois alunos enfatizaram que as personagens "descontraiam" e "entretiam". Aliás, uma das funções do uso das personagens era também aproximar o aluno do trabalho. Em relação ao GeoGebra, uma minoria que não fez considerações positivas abordou dificuldades em trabalhar com o software, mas o resultado geral é satisfatório. Em relação à abordagem interdisciplinar o resultado também foi satisfatório, embora as considerações dos alunos não tenham sido tão expressivas, pois quase 40% dos alunos tem alguma insatisfação com a apresentação de conteúdos diferentes em um mesmo trabalho. Mesmo os alunos que tiveram considerações positivas veem na interdisciplinaridade apenas uma forma revisão dos conteúdos.

5.4 Das sugestões dos alunos.

Cerca de 57% dos alunos não quiseram apresentar sugestões ou acreditam não ser necessária nenhuma modificação no trabalho. Quanto aos demais alunos, suas sugestões são bastante variadas, tais como explicar melhor o uso do GeoGebra, melhorar as dicas do Homem Aranha (pois não havia utilidade em algumas informações), aplicar o trabalho todo em um único dia e até mesmo, aumentar o nível de dificuldade das questões.

Figura 50. Avaliação de aluno sobre o trabalho.


Se este trabalho for aplicado novamente o que você sugere que seja melhorado?
Que eles sejam aplicados todos juntos pois assim podemos lembrar das atividades anteriores

Fonte: Avaliação respondida por aluno.

5.5 Aspectos gerais da avaliação dos alunos

De modo geral, esta avaliação aponta boa participação e interesse dos alunos pela atividade trabalhada, embora evidenciem algumas dificuldades relacionadas ao uso do GeoGebra e ao nível das questões. Pelo fato de o trabalho apresentar novidades em vários aspectos simultaneamente, consideramos que a aceitação do trabalho pelos alunos foi positiva.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como produto uma sequência didática desenvolvida por uma metodologia própria fundamentada na Engenharia Didática com atividades de geometria inspirada em um problema do banco de dados da OBMEP. A sequência didática foi idealizada de modo a minimizar a intervenção do professor para maximizar a autonomia do aluno. Para isto disponibilizou como ferramentas um texto dialógico, com personagens auxiliares interagindo com os alunos, e o software GeoGebra para análise de propriedades geométricas e confecções de gráficos de funções. A resolução das situações-problema exigia do aluno concatenar conceitos disponibilizados no texto, resultados obtidos em questões anteriores, *insights* advindos das atividades desenvolvidas e do seu próprio conhecimento.

Semelhante às atividades de um engenheiro, as etapas deste trabalho se constituíram em um projeto de uma sequência didática imaginada como sendo ideal, em uma aplicação que contou com pequenas intervenções do professor para que houvesse funcionalidade e para que chegássemos aos objetivos esperados. Como avaliação, contou com as respostas dos alunos às atividades propostas, com a observação do professor em sala de aula e com um questionário avaliativo respondido pelos alunos ao final das atividades.

A questão inicial era como aproveitar os recursos do software GeoGebra para que os alunos entendessem conteúdos de geometria necessário para se responder a uma questão do Banco de Questões da OBMEP. O desafio do projeto passou pelo questionamento fundamental de como o aluno aprende. Este questionamento exigiu uma forte mudança aos primeiros rascunhos apresentados ao orientador. De um manual detalhado de como construir algumas figuras no GeoGebra seguidas de questões que se pareciam com exames, repletos de formalismos, mudou para um projeto com novos ares, mais leve, informal, baseado em diálogos, tendo personagens cumprindo importantes funções. Passo a passo, a construção das atividades levava em consideração a análise do que seria necessário para que o aluno construísse o conhecimento, dando-lhe a ajuda necessária sem a qual poderia não ser capaz de responder a questão (sobretudo pensando nos alunos com mais dificuldades) e, por outro lado, observando se tal ajuda não causaria prejuízo à sua autonomia.

A aplicação do trabalho exigiu algumas intervenções pontuais nas construções das figuras no GeoGebra. Contudo, de modo geral, os trabalhos decorreram sem maiores dificuldades. Os alunos se ajudaram mutuamente, quando necessário, sem que isso significasse perda da individualidade e isto pôde ser verificado na amplitude das respostas dadas. Em dados momentos, era gratificante perceber o progresso que faziam. Houve alguns momentos em que a troca de ideias entre eles, cada um acrescentando uma observação, culminou no alcance de uma resposta esperada. Também foi gratificante perceber o aluno utilizando um recurso exatamente da maneira como havíamos previsto para chegar ao objetivo esperado, como no caso em que o aluno utilizou o vértice da parábola para concluir que aquela era a maior área do quadrilátero CEDF. As dificuldades em responderem as últimas questões foram apenas parte de um o todo que pode ser considerado satisfatório. Os índices de acertos, as respostas dadas e a avaliação dos alunos sobre o trabalho, revelam que a interação e os resultados alcançados por este trabalho foram positivos.

Gostaria de destacar o empenho dos alunos. Enxergando pela ótica deles, este trabalho representou a superação de alguns obstáculos significativos. O pouco conhecimento do software GeoGebra, a nada habitual apresentação dos conteúdos matemáticos de forma interdisciplinar e a defasagem de conhecimentos matemáticos, sobretudo em geometria, superados em um trabalho que contou com poucas intervenções do professor. A conclusão deste trabalho é também um reconhecimento à capacidade do aluno. Ao ser concluído com êxito, portanto, podemos afirmar que o trabalho, mostrou ser uma alternativa viável de aprendizagem matemática voltada ao desenvolvimento da autonomia do aluno.

O autor deste trabalho aprendeu muito com ele. Certamente reutilizará muito do que foi visto e o replicará entre os seus pares, sejam em novos projetos, em outros trabalhos semelhantes, ou ainda, utilizando partes deste no dia-a-dia da sala de aula.

Diante do atual quadro educacional brasileiro, de tão graves problemas a serem enfrentados, esperamos que este trabalho tenha contribuído para uma reflexão de como podemos construir um ensino de matemática de melhor qualidade.

7 BIBLIOGRAFIA

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique: Recherches em Didactique dês Mathématiques, vol. 9, nº 3, pp. 281-307. La Pensée Sauvage, 1990.

BRASIL/MEC. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/DEF, 1998a.

BRASIL/MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio:** Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

SÃO PAULO. Secretaria de Educação. **Proposta Curricular Matemática** – Ensino Fundamental – Ciclo II e Ensino Médio. São Paulo: SEE/SP, 2008.

BRASIL. **IBGE. Brasil em Síntese/São Paulo/Catanduva/Panorama.** Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/sp/catanduva/panorama>. Acesso em 8 de agosto de 2.017.

BRASIL. Portal MEC. **Decreto nº 7.566, de 23 de setembro de 1.909**. Cria nas capitais dos Estados as Escolas de Aprendizes Artífices, para o ensino profissional primário e gratuito. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/setec/arquivos/pdf3/decreto_7566_1909.pdf>. Acesso em 1 de agosto de 2.017.

BRASIL. **Lei nº 378 de 13 de janeiro 1.937**. Acerca da criação do Ministério da Educação e Saúde, sobre a nova organização administrativa do agora Liceu Industrial de São Paulo. Disponível em <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1930-1939/lei-378-13-janeiro-1937-398059-publicacaooriginal-1-pl.html>. Acesso em 1 de agosto de 2.017.

BRASIL. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. **Projeto Pedagógico do Curso de Técnico em Redes de Computadores Integrado ao Ensino Médio.** Disponível em <http://ctd.ifsp.edu.br/portal/2016-06-10-23-33-20>. Acesso em 12 de agosto de 2.017

BRASIL. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura Plena em Química.** Disponível em <http://ctd.ifsp.edu.br/portal/2016-06-10-23-34-27>. Acesso em 12 de agosto de 2.017.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO. **Caderno do professor:** Matemática, Ensino Fundamental – 7ª série / 8º ano, vol. 1. São Paulo: SEE/SP, 2009

APÊNDICES: FOLHAS DE ATIVIDADES E AVALIAÇÃO DOS ALUNOS.

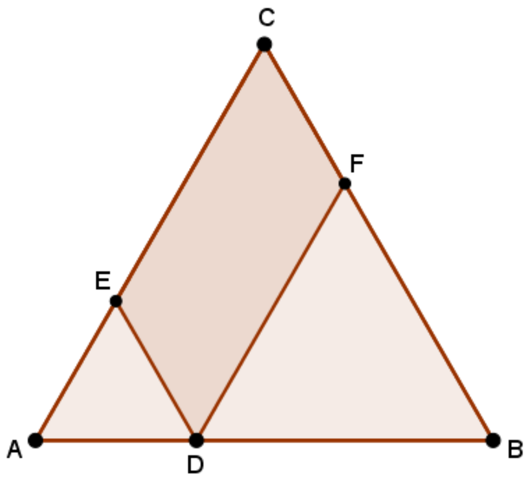
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Catanduva

Nome: ______________________________ nº _____ Turma: _________ Data: ___ / ___ / ___ .

Olá, jovens! Vamos responder a questão abaixo. Mas, calma lá! Sugiro que você caminhe conosco, passo-a-passo. Tudo bem?

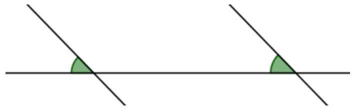
Questão OBMEP – Banco de Questões 2013 – Nível 3 - Questão 7 – Pág 57

O triângulo ABC abaixo é equilátero, ou seja, tem seus três lados de mesmo comprimento e todos os seus ângulos iguais a 60°. O senhor Simas marca um ponto D qualquer no lado $\overline{AB}$ do triângulo. Em seguida, ele traça um segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$, começando em D e terminando no ponto E sobre o lado $\overline{AC}$. Em seguida, traça um segmento paralelo ao lado $\overline{AC}$, começando em D e terminando no ponto F sobre o lado $\overline{BC}$, conforme a figura abaixo:

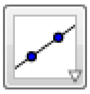


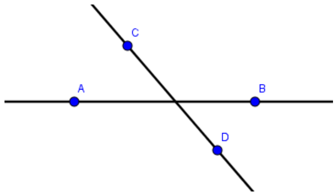
(a) Sabendo que o lado $\overline{AB}$ tem comprimento igual a 1, calcule o perímetro do quadrilátero CEDF.

Antes de responder ao probleminha acima, vamos lembrar de uma propriedade importante relativa aos ângulos correspondentes formados por duas retas paralelas e uma transversal.

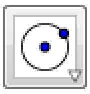


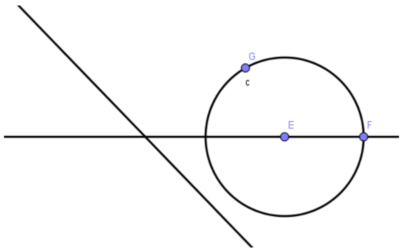
Vamos construir no GeoGebra duas retas conforme o desenho abaixo.

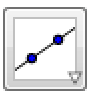
Utilize este comando:  . Ao clicar em dois lugares diferentes na Janela de Visualização (local onde se constroem os desenhos geométricos). Nos dois lugares que você clicar irá aparecer pontos pelos quais a reta passará.

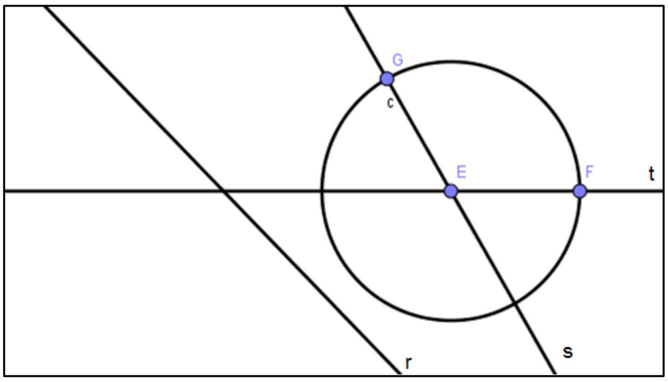


Feito o desenho você pode tirar os pontos clicando sobre eles com o botão direito do mouse e desabilitando o comando "Exibir objeto".

Em seguida, construa uma circunferência com centro sobre a reta horizontal e que não toca a outra reta. Para isto utilize  clicando a primeira vez sobre a reta, arraste o mouse e clique novamente em outro ponto da reta. Depois disso, construa um ponto sobre a circunferência. Seu desenho deve ter ficado assim:



Agora, utilize novamente  clicando sobre o centro da circunferência e o sobre o ponto na circunferência para construir outra reta conforme a figura.

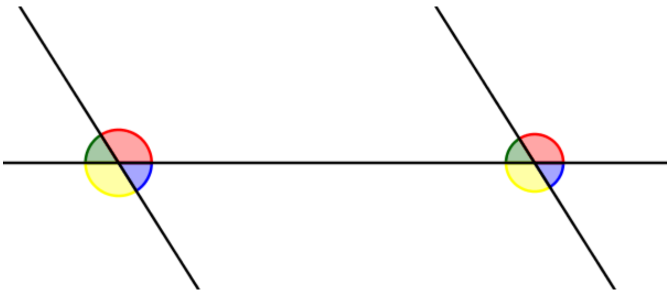


Se quiser, você pode renomear as retas. Clique com o botão direito do mouse sobre a reta e escolha a opção renomear.

Mova o ponto sobre a circunferência até que a reta s não toque a reta r. Ah, talvez você tenha que diminuir o zoom para checar que as retas não estão se tocando em um ponto distante, ok!

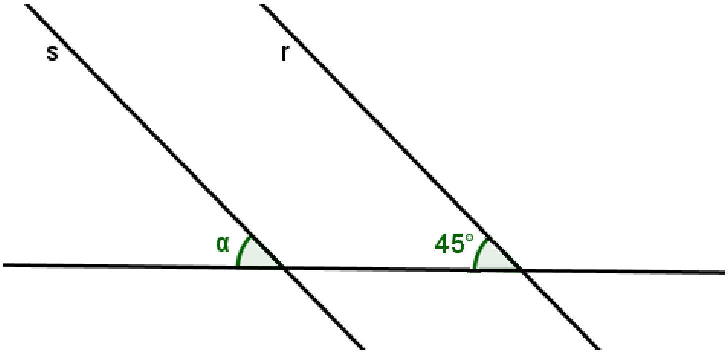
Caso aconteça de as retas r e s continuarem se tocando qualquer que seja a posição do ponto G, experimente diminuir os “saltos” que o ponto G sofre quando deslocado. Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto G, em seguida clique em “Propriedades” e na pasta “Álgebra” escolha um incremento menor conveniente, por exemplo, 0,05 (ou ainda menor).

Veja os pares de ângulos destacados abaixo nas cores verde, vermelha, azul e amarela. O que acontece com esses pares de ângulos quando as retas “inclinadas” são paralelas?



Podemos concluir então que, quando duas retas paralelas cruzam outra reta, os ângulos correspondentes (como os destacados acima) são ______________________.

Por exemplo, as retas r e s são paralelas, quanto mede o ângulo α?



α = _______

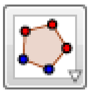
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Catanduva

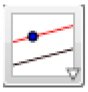
Nome: ______________________________ nº _____ Turma: _________ Data: ___ / ___ / ___ .

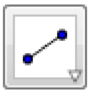
Lembra do problema da OBMEP? Leia de novo o enunciado e refaça o desenho do senhor Simas no GeoGebra.

Você pode desabilitar a malha e os eixos *x* e *y*, clicando sobre eles com o botão direito do mouse.

No campo de entrada digite os pontos (0,0) e (1,0).

Use  para criar um triângulo equilátero.

Construa o ponto D na base $\overline{AB}$ e em seguida as retas paralelas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, que passam por D. Para as paralelas use . Não se esqueça de colocar pontos nas interseções das retas paralelas com os lados do triângulo ABC (os pontos E e F).

Por fim, use  para desenhar os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$.

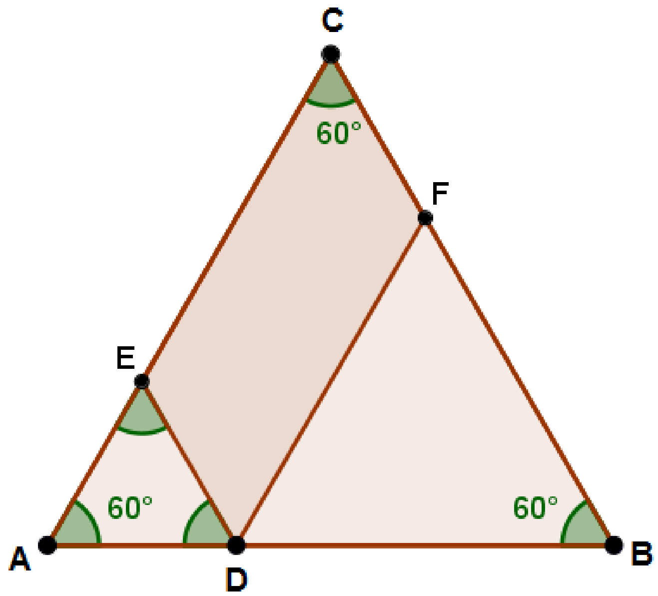
Ah! Depois você pode esconder as retas paralelas se quiser clicando com o botão direito sobre elas!

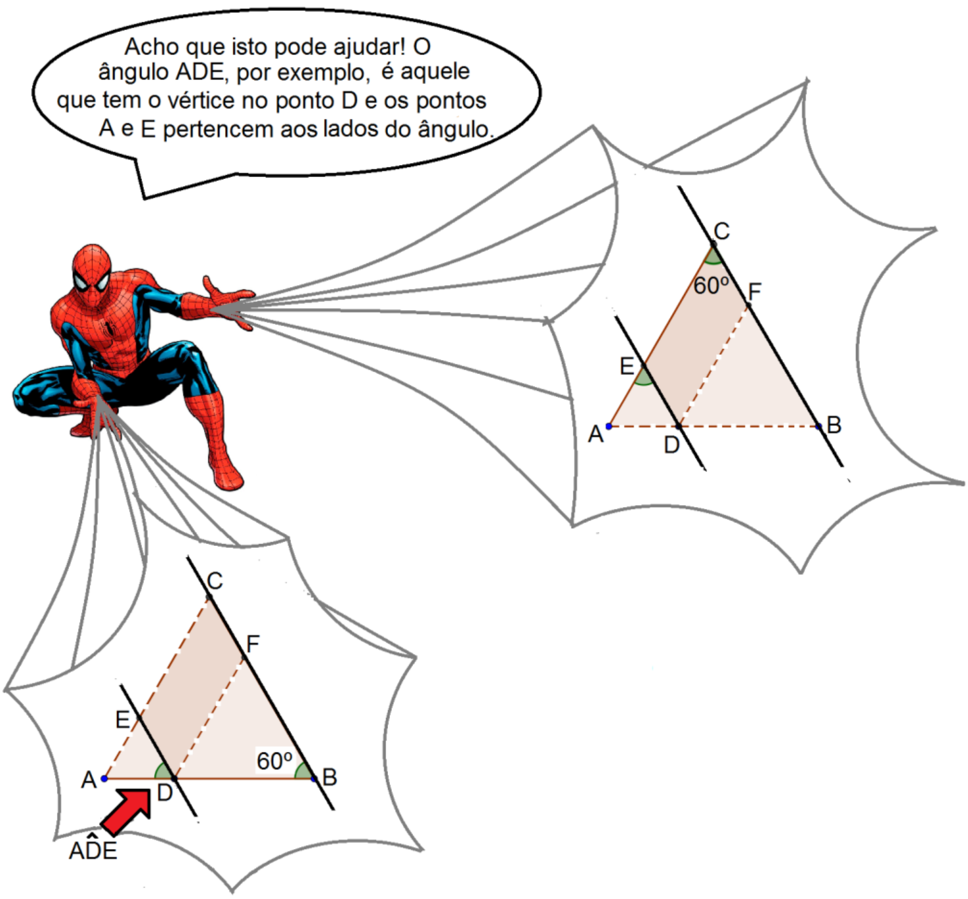
Se você estiver com dificuldade, peça ajuda a um colega que já conseguiu fazer a construção.

Vai lá menino, vai lá menina!

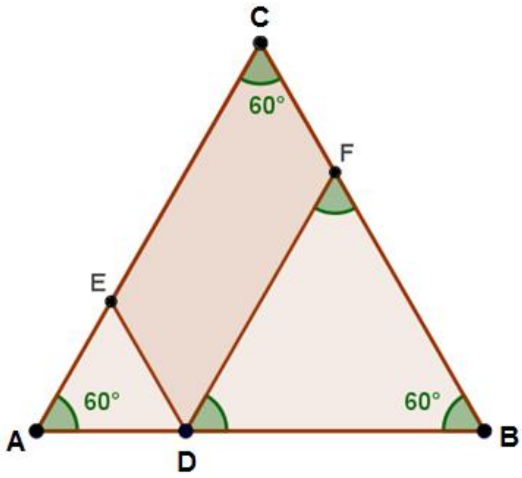
Como diz o enunciado, triângulos equiláteros têm todos os ângulos medindo 60°. É o caso do triângulo ABC.

Como os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ são paralelos, marque abaixo as medidas dos ângulos $A\widehat{D}E$ e $A\widehat{E}D$.

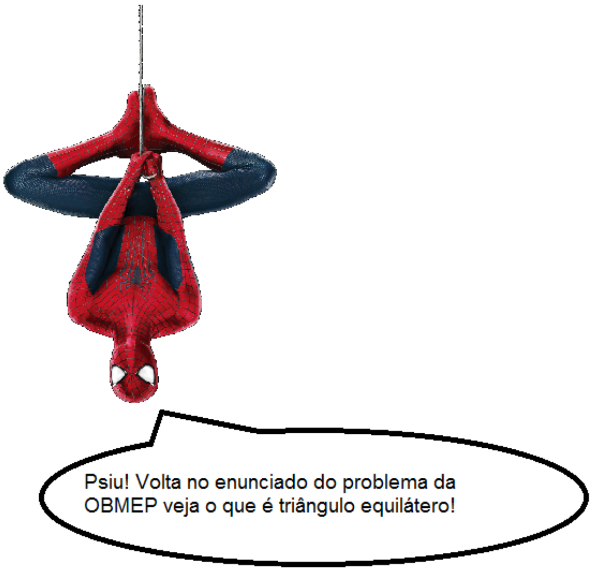




Observe também que $\overline{DF}$ é paralelo a $\overline{AC}$. Então escreva as medidas dos ângulos $B\hat{D}F$ e $B\hat{F}D$ indicados na figura:



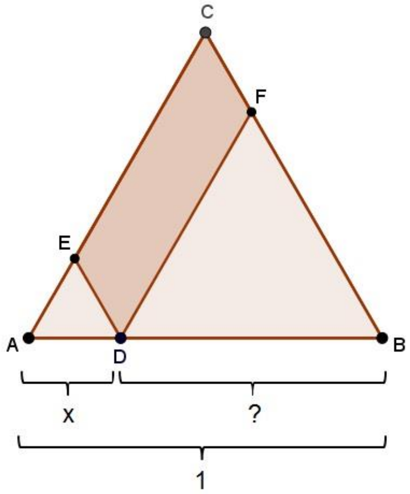
Será que podemos concluir que os triângulos ADE e DBF também são equiláteros? Por quê?



Anote todos os segmentos que compõe a figura do problema da OBMEP (você pode consulta-la na página anterior).

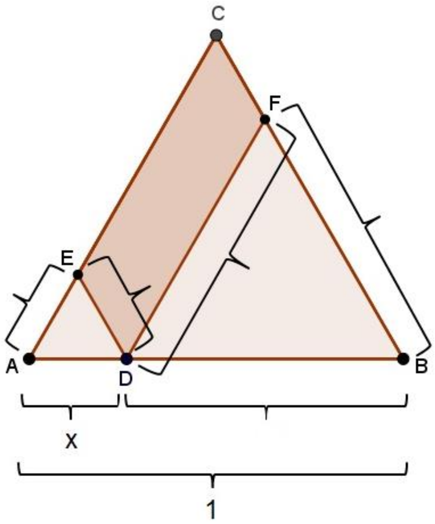
_____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____,

Vamos dizer que a medida do segmento $\overline{AD}$ seja x, ok? Quanto mede o segmento $\overline{DB}$?

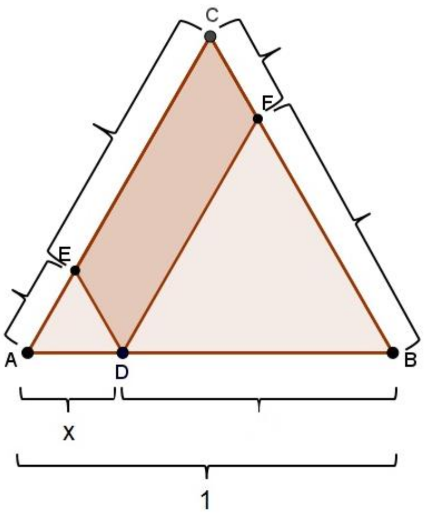


$\overline{DB}$ = _________.

Agora, como os triângulos ADE e DBF também são equiláteros podemos preencher as medidas dos outros segmentos indicados na figura.



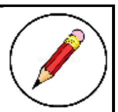
E como ABC é equilátero e conhecendo as medidas de $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$, também podemos preencher as medidas $\overline{CE}$ e $\overline{CF}$.



Agora conhecendo as medidas de cada segmento, será que você sabe qual expressão algébrica (fórmula) pode representar o perímetro do quadrilátero CEDF?

Enfim podemos responder a questão da OBMEP:

(a) Sabendo que o lado $\overline{AB}$ tem comprimento igual a 1, calcule o perímetro do quadrilátero CEDF.

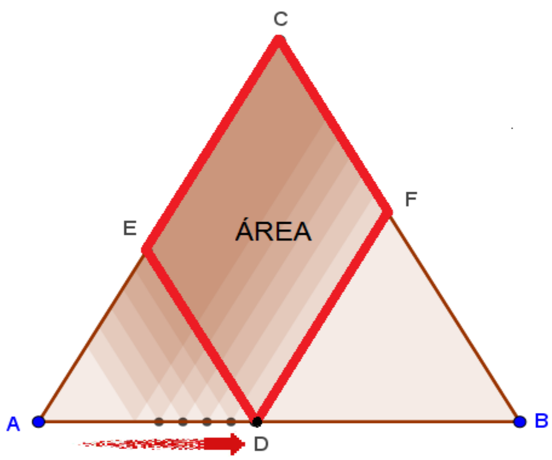


INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO Campus Catanduva Nome: ______________________________ nº _____ Turma: _________ Data: ___ / ___ / ___ .

Já sabemos que o perímetro do quadrilátero CEDF é constante e igual a 2. Não sei se você percebeu, mas o perímetro do quadrilátero CEDF é igual a 2 para qualquer posição do ponto D na base AB do triângulo ABC (pois, no cálculo do perímetro o valor de x se cancelou).

Será que o mesmo vai acontecer com a área do quadrilátero CEDF?

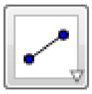
Vamos então pensar na ***área*** do quadrilátero CEDF à medida que deslocamos o ponto D.

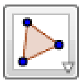


Área do quadrilátero CEDF em função do deslocamento do ponto D.

Que tal se o GeoGebra nos der uma mãozinha? Podemos analisar o gráfico da variação da área do quadrilátero CEDF à medida que mudamos D de posição.

Antes de fazer o gráfico, precisamos marcar a distância do ponto A ao ponto D e desenhar no GeoGebra o quadrilátero CEDF.

Use  para fazer o segmento $\overline{AD}$ e renomeie este segmento para AD. Para isto você deve verificar por qual letra o segmento $\overline{\mathrm{AD}}$ será representado (aparece uma letra minúscula junto ao segmento na figura) e clicar com o botão direito sobre essa letra na ***Janela de Álgebra*** escolhendo a opção “Renomear”.

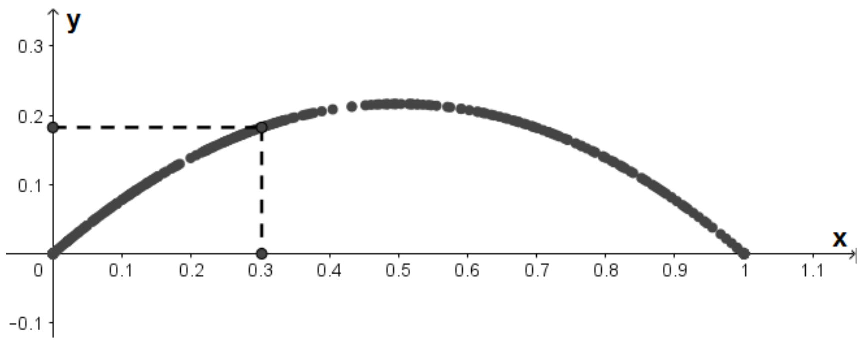
Em seguida, use  e clique em cada um dos pontos de CEDF para desenhar o quadrilátero, renomeando o quadrilátero criado para CEDF.

O gráfico deve ser mostrado em outra janela de visualização, para não misturar com a figura. Então, vamos inserir uma **Janela de Visualização 2**. Vá ao menu “Exibir” que você vai achar esta opção. Para que o gráfico seja desenhado na Janela de Visualização 2, e não na primeira janela, você deve clicar sobre algum ponto desta janela 2.

Vamos digitar no campo entrada um par ordenado em que o primeiro termo é o segmento $\overline{AD}$ e o segundo a área do quadrilátero CEDF. Para tal basta digitar (AD, CEDF) no Campo de Entrada. Observe que o GeoGebra cria um ponto cujas coordenadas são as medidas de $\overline{AD}$ e CEDF.

Clique com o botão direito do mouse sobre este ponto e depois em “Habilitar Rastro”. Não se esqueça de corrigir o zoom e a posição do gráfico pra você enxergar melhor, ok!

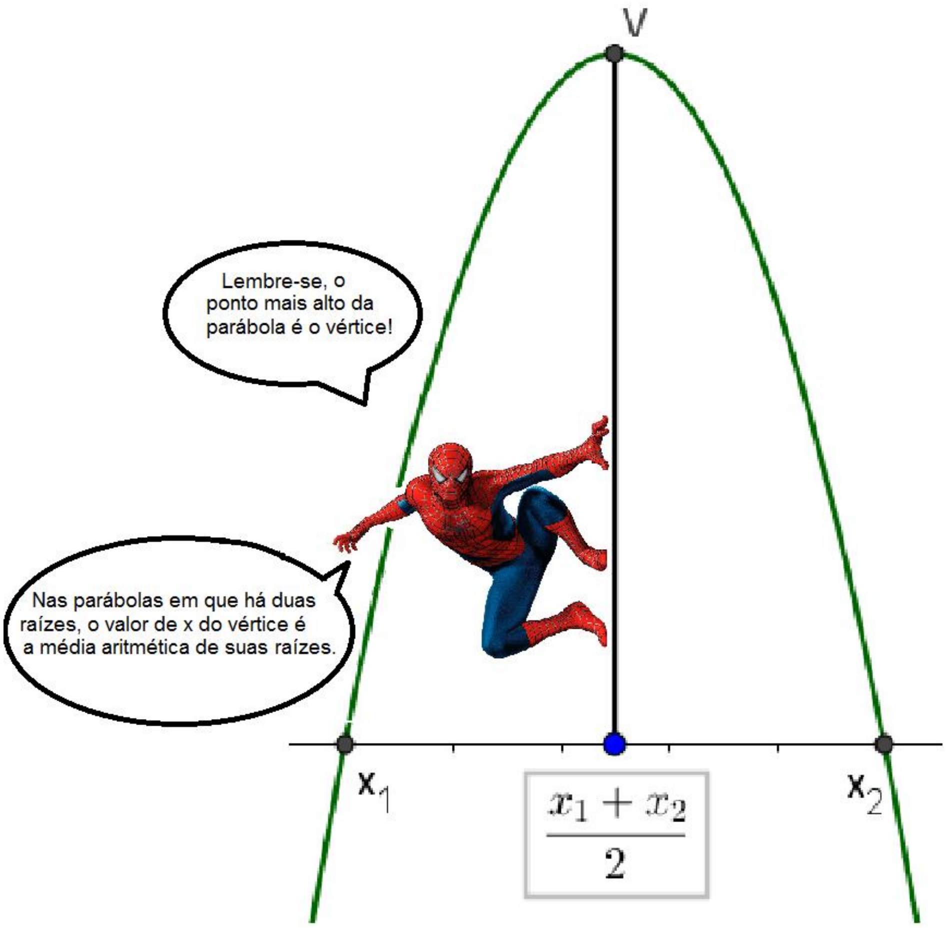
Ao deslocar o ponto D, veja que o gráfico descreve a área do quadrilátero CEDF (eixo y) em função da distância de A até D (eixo x).



Por exemplo, quando a distância de A até D é 0,3 unidades de comprimento (eixo x), a área do quadrilátero CEDF fica próximo de 0,2 unidades de área (eixo y).

Embora não saibamos que gráfico é este, ele nos parece familiar, não é mesmo?

Ele não parece ser uma parábola?



O que acontece com a área do quadrilátero CEDF quando D está bem pertinho de A? E quando D está bem pertinho de B?

O que acontece com a área do quadrilátero CEDF quando D está bem no meio da base $\overline{AB}$?

Nas perguntas abaixo considere o ponto D na posição em que a área do quadrilátero CEDF é a maior possível.

Então, como o lado do triângulo ABC mede 1, informe as medidas dos segmentos da figura.

$\overline{AD}$ = ________, $\overline{DE}$ = ________, $\overline{EA}$ = ________, $\overline{CF}$ = ________,

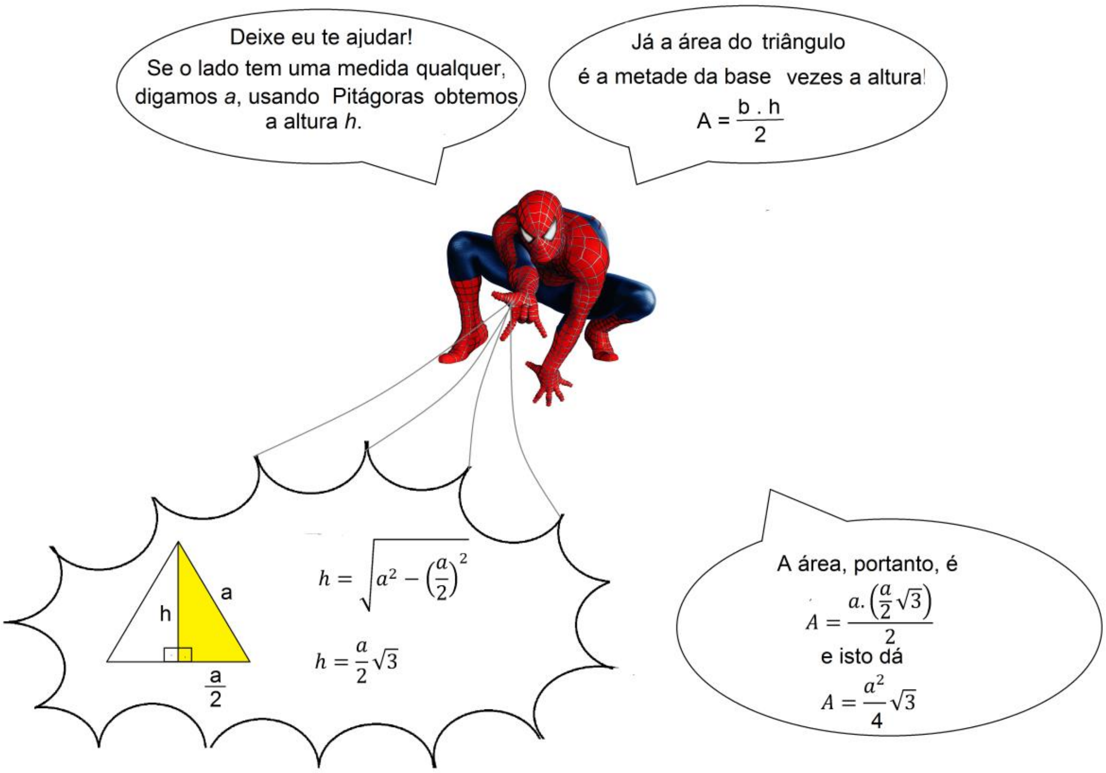
$\overline{DB}$ = ________, $\overline{BF}$ = ________, $\overline{FD}$ = ________, $\overline{CE}$ = ________.

Se a gente construir um segmento entre os pontos E e F, qual dentre os triângulos ADE, DBF, EDF e EFC é o maior?

Você conseguiu perceber que a área de cada um desses triângulos menores é uma fração da área do triângulo ABC? Que fração é esta?

Aha! Da mesma forma, quando a área do quadrilátero CEDF é a maior possível, sua área é uma fração do triângulo ABC. Que fração é esta?

Já que a área do quadrilátero CEDF é uma fração da área do triângulo ABC, "bora lá", vamos calcular a área do triângulo ABC.



Então, se o lado do triângulo ABC é 1, sua área é?

Sabendo qual é a fração que representa a área do quadrilátero CEDF em relação ao triângulo ABC quando a área de CEDF é a maior possível, calcule então esta maior área do quadrilátero CEDF.

Vamos escrever a área do quadrilátero CEDF em função da posição do ponto D, ou seja, em função da medida x do segmento $\overline{AD}$.

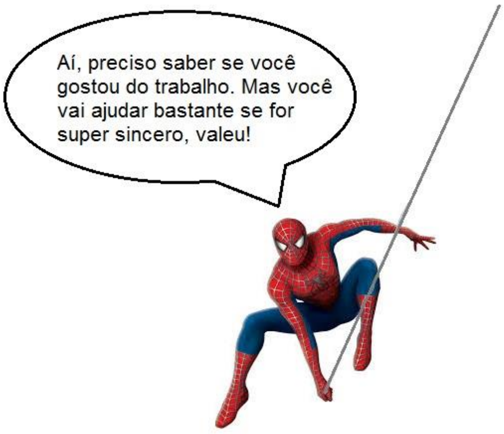
Calcule a área do triângulo ADE em função de x.

Calcule a área do triângulo DBF em função de x.

Escreva a fórmula da área do quadrilátero CEDF em função de x.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Catanduva

Nome: ______________________________ nº _____ Turma: _________ Data: ___ / ___ / ___ .



Primeiro, você gostou de fazer este trabalho?

Não gostei. ( ) | Gostei em partes. ( ) | Gostei! ( )

Por que?

____
____
____
____
____

Sobre o nível de dificuldade, o que você achou?

Achei difícil. ( ) | Não entendi algumas coisas. ( ) | Achei fácil! ( )

Por que foi difícil ou por que foi fácil?

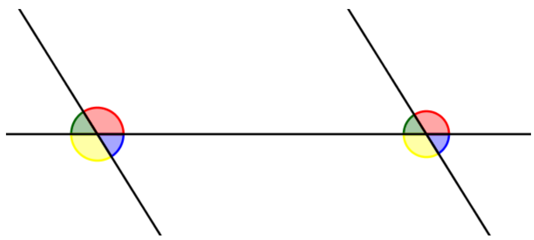
____
____
____
____
____

E sobre as personagens conversando com você, o professor e o Homem Aranha. Eles ajudaram? Como?

Você acha que o uso do GeoGebra te ajudou na resolução da atividade? Ou então, você aprendeu alguma coisa com ele?

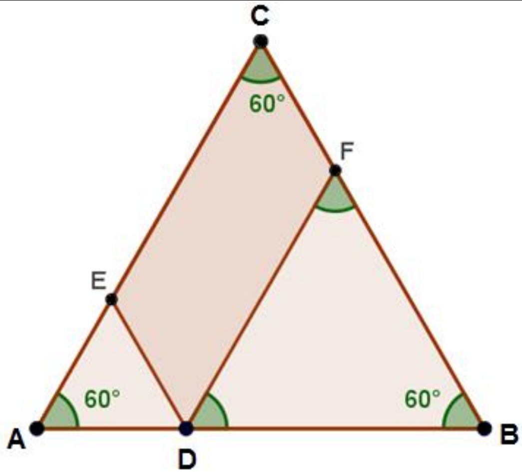
Sobre o conteúdo matemático, você viu vários conceitos sendo trabalhados juntos, por exemplo, áreas e funções, valor máximo de uma função e frações, figuras geométricas e fórmulas. O que você acha desta forma de trabalho?

Sobre a propriedade: Retas paralelas formam com uma reta transversal pares de ângulos congruentes.



Você:

( ) Conhecia a propriedade e se lembrava dela.
( ) Conhecia a propriedade, mas não se lembrava dela.
( ) Desconhecia a propriedade.



Por que você considerou (ou não) no trabalho que os triângulos ADE e BDF são equiláteros? Se necessário leia novamente a atividade, ok.

Folheie novamente as fichas e diga se havia mais alguma propriedade que você desconhecia ou não se lembrava dela e o Homem Aranha ou o trabalho com o GeoGebra te ensinou ou te ajudou a lembrar.

Se este trabalho for aplicado novamente o que você sugere que seja melhorado?

Obrigado, sua participação em todo o trabalho foi muito importante.