

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**"INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO GEOMÉTRICA DOS ALVÉOLOS NA  
CAPACIDADE RESISTENTE AO CISALHAMENTO DE LAJES ALVEOLARES  
PROTENDIDAS"**

**Andrey Monteiro Maciel**

**São Carlos**  
**2017**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**"INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO GEOMÉTRICA DOS ALVÉOLOS NA  
CAPACIDADE RESISTENTE AO CISALHAMENTO DE LAJES ALVEOLARES  
PROTENDIDAS"**

**Andrey Monteiro Maciel**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Construção Civil.

**Área de Concentração:** Sistemas Construtivos

**Orientador:** Prof. Dr. Roberto Chust Carvalho.

**São Carlos**

**2017**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil

---

**Folha de Aprovação**

---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Andrey Monteiro Maciel, realizada em 26/04/2017:

---

Prof. Dr. Roberto Chust Carvalho  
UFSCar

---

Prof. Dr. Daniel Domingues Loriggio  
UFSC

---

Prof. Dr. Marcelo de Araujo Ferreira  
UFSCar

*Ao meu pai Carlos, minha mãe Maria  
Aparecida, minha esposa Lilian e ao  
meu filho Benjamin, com todo amor e  
carinho.*

## AGRADECIMENTOS

---

Ao meu Senhor, Jesus Cristo, toda Honra e toda Glória pelos séculos dos séculos!

Aos meus pais, por todo amor e renúncias de si mesmos para viabilizar minha trajetória nos estudos; por serem eles minha segurança quando ainda não podia caminhar com minhas próprias pernas.

À minha esposa, Lilian e ao meu filho Benjamin, pelas muitas horas em que não pude lhes dar a atenção que mereciam.

Ao amigo e sócio, Thiago Bindilatti Inforsato, por todo apoio durante o desenvolvimento deste trabalho; em especial pelas horas de auxílio nas revisões das contas, e por todo incentivo e motivação durante esta jornada, especialmente nos momentos de desânimo.

À PRETEC, pelas vezes em que precisei me ausentar das atividades do dia a dia para que este trabalho pudesse ser realizado.

Ao amigo, professor e orientador Roberto Chust Carvalho, excelente professor; pela orientação no decorrer deste trabalho, pelas motivações e “puxões de orelha”, quando de fato precisei.

Ao amigo e professor Marcelo de Araújo Ferreira, por todo conhecimento e material compartilhado, pelos incentivos e orientações durante o desenvolvimento deste trabalho.

À UFSCar, que me acolheu na graduação e pós-graduação, oferecendo condições para que eu pudesse ter acesso ao conhecimento necessário para o desenvolvimento deste trabalho. Por todos aqueles que direta ou indiretamente fizeram parte da minha vida durante os anos de DECiv e que certamente contribuíram para o meu crescimento. A todos o meu *muito obrigado!*

## RESUMO

---

MACIEL AMM. **Influência da variação geométrica dos alvéolos na capacidade resistente ao cisalhamento de lajes alveolares protendidas.**

137f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2017.

Esta dissertação trata do estudo da Influência da variação geométrica dos alvéolos na capacidade resistente ao cisalhamento de lajes alveolares protendidas considerando o mecanismo de ruptura por tração diagonal. Inicialmente, é apresentado um procedimento para a definição da geometria dos alvéolos e para o cálculo do cortante resistente considerando o modelo desenvolvido por YANG (1994); e que foi aperfeiçoado em PAJARI (2005); válido para regiões não fissuradas por flexão. Em seguida esta metodologia é aplicada através de uma planilha de cálculo que permite de maneira fácil e rápida avaliar a eficiência ao cortante de perfis variando a forma do alvéolo, possibilitando com isso a escolha de seções mais otimizadas. Avalia-se também neste trabalho o efeito da variação do ângulo da linha de ruptura – adotado 45 graus para o modelo tradicional e posteriormente fixado em 35 graus conforme YANG (1994) – cuja influência sobre a capacidade resistente ao cortante demonstrou ser pouco relevante. Exemplos de cálculo foram construídos de modo a elucidar na prática os principais conceitos abordados neste trabalho. Comparações foram realizadas considerando o modelo normativo brasileiro e o modelo de Yang-Pajari para tração diagonal a partir de resultados obtidos experimentalmente para protótipos cuja ruptura ocorreu pelo mecanismo de tração diagonal; contudo, o modelo de Yang-Pajari aplicado para estas lajes apresentou resultados satisfatórios; já o modelo normativo brasileiro aplicado para um dos protótipos ensaiados, cujos alvéolos são oblongos, não apresentou bom resultado; mas, considerando a pequena amostra analisada, qualquer conclusão acerca do desempenho do modelo normativo é muito prematura, cabendo a trabalhos futuros a responsabilidade de investigar melhor o assunto.

**Palavras-chaves:** *lajes alveolares, cisalhamento, tração diagonal.*

## ABSTRACT

---

MACIEL AMM. **The influence of void geometry on the shear capacity of prestressed hollow core slabs.** 137f. Dissertation (Master of Science) – Federal University of São Carlos. São Carlos, 2017.

This dissertation deals with the study of the influence of void geometry on the shear capacity of prestressed hollow core slabs. Based on analytical models for the tension shear capacity for *uncracked* sections, which were first proposed by YANG (1994) and latter modified by PAJARI (2005), a calculation procedure applying spreadsheets has being proposed for the prior definition of the void geometry, allowing an easy and quick way to evaluate the efficiency of the void shape to provide shear capacity. In addition, the influence of the variation of the angle of failure for the tension shear mechanism has been confronted against experimental results, giving indication that the fixed angle of  $35^\circ$  assumed by YANG (1994) is an adequate inclination to be considered in design. Calculation examples were presented in order to elucidate the main concepts discussed in this work. Comparisons were made considering the Brazilian normative model and the Yang-Pajari model for tension shear, from results obtained experimentally for prototypes whose rupture occurred by diagonal traction, and for the Brazilian standard model, safety results were not verified for slabs with oblong cores; as opposed to the YANG-PAJARI model applied to the same slabs, providing satisfactory results.

In addition, the analytical model based on the Brazilian code of practice for structural concrete has been verified against experimental results for slabs with oblong cores, wherein some of the experimental results were found below the predicted values. However, as the number of experimental results was small, future experimental investigation is needed in order to verify the reliability of this analytical model.

**Keywords:** *hollow cores slabs, web shear, tension shear.*

# SUMÁRIO

---

1	INTRODUÇÃO.....	14
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	14
1.2	JUSTIFICATIVA.....	16
1.3	OBJETIVOS .....	17
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO .....	17
1.5	METODOLOGIA.....	18
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	20
2.1	PRINCIPAIS FATORES QUE INFLUENCIAM O CORTANTE DE LAJES ALVEOLARES PROTENDIDAS ..	20
2.1.1	PROCESSO PRODUTIVO .....	20
2.1.2	O CONCRETO .....	24
2.1.3	ANCORAGEM DA ARMADURA LONGITUDINAL .....	28
2.2	A GEOMETRIA DA SEÇÃO – CRITÉRIOS DE PROJETO E INSPEÇÃO .....	33
2.2.1	SEÇÃO TRANSVERSAL .....	33
2.2.2	COMPRIMENTO DE APOIO .....	36
2.3	MECANISMOS DE RUPTURA POR CISALHAMENTO (AUSÊNCIA DE ARMADURA TRANSVERSAL)..	39
2.3.1	CLASSIFICAÇÃO DOS MECANISMOS DE RUPTURA.....	39
2.3.2	FLEXO-CORTANTE (“FLEXURE-SHEAR”) .....	41
2.3.3	TRAÇÃO DIAGONAL (“TENSION-SHEAR” OU “WEB-SHEAR”).....	45
2.4	MÉTODO DE YANG.....	48
2.5	MÉTODO DE PAJARI.....	53
2.6	PESQUISAS REALIZADAS NO BRASIL .....	57
2.7	PESQUISAS INTERNACIONAIS .....	61
2.8	MODELOS NORMATIVOS.....	70
3	GERAÇÃO DA GEOMETRIA DAS SEÇÕES.....	83
3.1	SEÇÕES EXISTENTES.....	83
3.2	CLASSIFICAÇÃO GEOMÉTRICA DOS ALVÉLOS QUANTO A FORMA.....	84
3.3	MÉTODO NUMÉRICO PARA GERAÇÃO DAS SEÇÕES .....	85

4	ANÁLISE DA RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO EM REGIÕES NÃO FISSURADAS .....	94
4.1	CÁLCULO DA CORTANTE MÁXIMA RESISTENTE ( $V_z, m_{Áx}$ ) .....	94
4.2	LOCALIZAÇÃO DO PONTO CRÍTICO .....	99
4.3	CONSIDERAÇÕES SOBRE O ÂNGULO DA LINHA DE RUPTURA .....	100
4.4	LIMITES DE APLICAÇÃO DO MODELO .....	101
5	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO .....	108
5.1	EXEMPLO 1 .....	109
5.1.1	ALVÉOLOS CURVOS .....	111
5.1.2	ALVÉOLOS POLIGONAIS.....	118
5.2	EXEMPLO 2 .....	124
5.3	EXEMPLO 3 .....	127
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	132
6.1	CONCLUSÕES.....	132
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	134
7	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	135

## LISTA DE FIGURAS

---

<i>Figura 2.1: Deslocamento da armadura longitudinal decorrente do desalinhamento entre o crivo e o guia-fio .....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 2.2: Seção transversal deformada devido ao excesso de umidade do concreto .....</i>	<i>22</i>
<i>Figura 2.3: Matriz de concreto de alto desempenho – ruptura ocorre nos agregados graúdos .....</i>	<i>25</i>
<i>Figura 2.4: Faixa de laje para extração de corpo de prova – Modelo FIB (1992).....</i>	<i>25</i>
<i>Figura 2.5: Máquina para compactação de concreto de baixa trabalhabilidade .....</i>	<i>26</i>
<i>Figura 2.6: Efeito Hoyler (Push-in) .....</i>	<i>29</i>
<i>Figura 2.7: Ancoragem da armadura ativa sob efeito de carregamento externo.....</i>	<i>30</i>
<i>Figura 2.8: Fissuras típicas de explosão (bursting).....</i>	<i>31</i>
<i>Figura 2.9: Fissuras típicas de separação do talão inferior (splitting) .....</i>	<i>31</i>
<i>Figura 2.10: Fissuras típicas de destacamento da alma (spalling) .....</i>	<i>32</i>
<i>Figura 2.11: Critérios para posicionamento de fios e cordoalhas .....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 2.12: Comprimento nominal de apoio .....</i>	<i>37</i>
<i>Figura 2.13: Influência da posição da carga concentrada no cisalhamento .....</i>	<i>40</i>
<i>Figura 2.14: Modelo de ensaio padrão EN 1168:2008.....</i>	<i>41</i>
<i>Figura 2.15: Exemplos de ruptura por flexo-cortante – a) Esmagamento do concreto; b) Corte da armadura longitudinal .....</i>	<i>42</i>
<i>Figura 2.16: Mecanismos residuais responsáveis pela resistência ao cisalhamento em zona fissurada. ....</i>	<i>43</i>
<i>Figura 2.17: Mecanismo alternativo – Bielas de compressão apoiadas sobre a armadura longitudinal .....</i>	<i>44</i>
<i>Figura 2.18: Fatores que influenciam no mecanismo da flexo-cortante – EUROCODE 2 e NBR14861 .....</i>	<i>44</i>
<i>Figura 2.19: Ruptura por tração diagonal.....</i>	<i>45</i>
<i>Figura 2.20: Posição do ponto crítico em alvéolos circulares .....</i>	<i>46</i>
<i>Figura 2.21: Posição do ponto crítico em alvéolos não-circulares .....</i>	<i>48</i>
<i>Figura 2.22: Efeito da transferência da força de protensão ao concreto .....</i>	<i>48</i>
<i>Figura 2.23: Diagrama de tensões conforme YANG (1994) .....</i>	<i>49</i>
<i>Figura 2.24: Parâmetros da seção transversal.....</i>	<i>51</i>
<i>Figura 2.25: Locação do ponto crítico .....</i>	<i>53</i>

<i>Figura 2.26: Diagrama de tensões conforme PAJARI (2005)</i> .....	54
<i>Figura 2.27: Posição do ponto crítico – Lajes com alvéolos oblongos</i> .....	56
<i>Figura 2.28: Variação da forma dos alvéolos para laje alveolar de 200mm de espessura</i> .....	62
<i>Figura 2.29: Distribuição da força cortante resistente e solicitante (valores de projeto) para uma laje de 200mm de espessura.</i> .....	63
<i>Figura 2.30: Ângulo de inclinação da fissura crítica obtidos do ensaio para protótipos da série 300..</i>	68
<i>Figura 2.31: Propriedades geométricas consideradas no cálculo para protótipo da série 300 – Variação geométrica decorrente do processo produtivo.</i> .....	69
<i>Figura 2.32: Seção investigada na procura pelo ponto crítico</i> .....	77
<i>Figura 3.1: Seções transversais típicas de lajes alveolares pré-fabricadas</i> .....	83
<i>Figura 3.2: Variações geométricas dos alvéolos – a) Alvéolos curvos; b) Alvéolos poligonais; c) Alvéolos mistos.</i> .....	84
<i>Figura 3.3: Seção transversal teórica.</i> .....	86
<i>Figura 3.4: Características geométricas dos alvéolos curvos.</i> .....	86
<i>Figura 3.5: Características geométricas dos alvéolos poligonais.</i> .....	87
<i>Figura 3.6: Variações geométricas dos alvéolos</i> .....	88
<i>Figura 3.7: Discretização dos alvéolos em faixas</i> .....	90
<i>Figura 3.8: Discretização da seção transversal em faixas.</i> .....	91
<i>Figura 3.9: Parâmetros da seção transversal</i> .....	93
<i>Figura 4.1: Definição da altura do ponto crítico</i> .....	99
<i>Figura 4.2: Ponto crítico em alvéolos curvos não-circulares</i> .....	100
<i>Figura 4.3: Configuração de carregamento adotada em ensaio de cisalhamento</i> .....	104
<i>Figura 4.4: Configuração de carregamento distribuído.</i> .....	105
<i>Figura 4.5: Modelo aplicável para qualquer que seja a forma do alvéolo</i> .....	106
<i>Figura 4.6: Modelo não aplicável independentemente da forma do alvéolo</i> .....	107
<i>Figura 4.7: Modelo aplicável para situações específicas de forma do alvéolo</i> .....	107
<i>Figura 5.1: Características das lajes adotadas no exemplo</i> .....	109
<i>Figura 5.2: Parâmetros geométricos para definição da forma</i> .....	110
<i>Figura 5.3: Parâmetros geométricos para definição da forma</i> .....	111
<i>Figura 5.4: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H20 – Alvéolos curvos</i> .....	112

<i>Figura 5.5: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H25 – Alvéolos curvos .....</i>	<i>113</i>
<i>Figura 5.6: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H30 – Alvéolos curvos .....</i>	<i>115</i>
<i>Figura 5.7: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H40 – Alvéolos curvos .....</i>	<i>116</i>
<i>Figura 5.8: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H50 – Alvéolos curvos .....</i>	<i>117</i>
<i>Figura 5.9: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H20 – Alvéolos poligonais.....</i>	<i>118</i>
<i>Figura 5.10: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H25 – Alvéolos poligonais .....</i>	<i>120</i>
<i>Figura 5.11: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H30 – Alvéolos poligonais .....</i>	<i>121</i>
<i>Figura 5.12: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H40 – Alvéolos poligonais .....</i>	<i>122</i>
<i>Figura 5.13: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H50 – Alvéolos poligonais .....</i>	<i>123</i>
<i>Figura 5.14: Características geométricas das lajes H30 analisadas – Seções transversais.....</i>	<i>124</i>
<i>Figura 5.15: Diagrama de tensão principal <math>\sigma_1/f_{ct}</math> (esquerda) e posição do ponto crítico <math>h_{pc}</math> (direita) para laje H30 – a) Laje Tipo A; b) Laje Tipo B; c) Laje Tipo C.....</i>	<i>125</i>
<i>Figura 5.16: Diagrama de tensão principal <math>\sigma_1/f_{ct}</math> (esquerda) e posição do ponto crítico <math>h_{pc}</math> (direita) para laje H30 – a) Laje Tipo A; b) Laje Tipo B; c) Laje Tipo C (cont.) .....</i>	<i>126</i>
<i>Figura 5.17: Seções transversais de projeto – a) Protótipo A; b) Protótipo B.....</i>	<i>127</i>
<i>Figura 5.18: Esquema de ensaio.....</i>	<i>130</i>

## LISTA DE TABELAS

---

<i>Tabela 5.1: Propriedades geométricas da seção transversal</i> .....	128
<i>Tabela 5.2: Propriedades dos materiais</i> .....	129
<i>Tabela 5.3: Parâmetros de ensaio</i> .....	130
<i>Tabela 5.4 : Valores de momento atuante e momento de fissuração</i> .....	130
<i>Tabela 5.5: Cortante resistente – Valores calculados e dados experimentais</i> .....	131

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A laje alveolar é a peça pré-fabricada, provavelmente, mais utilizada nos pavimentos de edificações pré-fabricadas, mistas e híbridas ao redor do mundo. Tanto as técnicas de execução quanto as de cálculo vem sendo amplamente desenvolvidas nos últimos 50 anos.

Sua baixa relação custo/benefício se dá principalmente devido à grande rapidez na sua execução, já que a produção é feita em escala industrial. Além disso, não exigem o uso de escoramento e apresentam bom rendimento mecânico devido a seção transversal otimizada. Isso se justifica pela presença dos vazios na região central da seção que permitem reduzir o consumo de concreto, e conseqüentemente o peso próprio, resultando assim em melhor desempenho estrutural quando comparado com seções retangulares submetidas às mesmas condições de uso (vão e sobrecarga).

A produção mecanizada das lajes alveolares se faz atualmente por meio de dois processos (e equipamentos) distintos, sendo eles: por extrusão (extrusoras) ou formas deslizantes (moldadoras). Cada qual por sua vez permite dar forma diferente aos alvéolos considerando os equipamentos disponíveis no mercado. Em geral, as extrusoras tendem a se restringir a alvéolos mais arredondados (possibilitando também a utilização de alvéolos oblongos, em especial para lajes de espessura igual ou superior a 260mm), e as moldadoras se restringem a formas mais oblongadas, porém, em ambos os processos, não é possível a utilização de estribos, o que pesa ainda mais sobre o concreto a responsabilidade de resistir aos esforços de tração decorrentes de forças cortantes, configurando assim um importante estado limite para esses elementos. Dessa maneira, a capacidade resistente ao cisalhamento é um dos pontos críticos que merecem especial atenção.

O uso de armaduras longitudinais protendidas, sendo fios ou cordoalhas posicionadas na borda inferior, e até mesmo na borda superior, além de melhorar o desempenho a flexão confere também ganho de capacidade resistente quando o mecanismo de falha é o cisalhamento. Quando o cisalhamento ocorre em regiões fissuradas por flexão as armaduras longitudinais também são capazes de melhorar a

ductilidade nas proximidades do estado limite último. Porém, essa ductilidade está relacionada com o comprimento de apoio sendo que, quanto maior, melhor a contribuição da armadura longitudinal. Casos onde o comprimento de apoio é muito pequeno pode ocorrer o escorregamento da armadura longitudinal.

Atualmente existem dois modos de ruptura consagrados no meio acadêmico e que foram descritos em diversas publicações nacionais e internacionais, sendo eles: *tração diagonal* e *flexo-cortante*. O primeiro trata de cisalhamento em regiões com pouca ou nenhuma influência da flexão, cujos modelos analíticos tem por base a Resistência dos Materiais (e que é o principal objeto desta pesquisa). O segundo modo de ruptura trata de regiões com grande influência da flexão e, devido a sua complexidade, os modelos analíticos utilizados são em geral baseados em conceitos teóricos, mas calibrados por parâmetros extraídos de ensaios.

Os códigos normativos tratam do assunto cisalhamento em elementos sem armadura transversal de formas distintas, sendo que alguns apresentam apenas uma formulação que, em geral, foram idealizadas considerando o mecanismo de flexo-cortante, como é o caso da norma brasileira (NBR 14861:2011) e canadense (CSA A23.3:2004). Estes códigos normativos permitem extrapolar os resultados para qualquer tipo de situação. Outras normas, porém, distinguem os dois mecanismos principais apresentando duas formulações, sendo uma para cada mecanismo resistente, como é o caso da norma Europeia (EN 1168:2008 / EUROCODE 2:2004) e a norte-americana (ACI 318:2014).

Estudos experimentais realizados na Europa e Estados Unidos, para lajes altas com alvéolos oblongos (acima de 320mm), relatam que os modelos de cálculo para tração diagonal apresentaram resultados contra a segurança em alguns casos e, por este motivo, tanto a norma europeia quanto a norma norte-americana vigentes impõem limites e condições de aplicação dos modelos de cálculo de modo a penalizar os resultados dos modelos e assim garantir a segurança estrutural, a nível de projeto. Por outro lado, há situações em que os resultados calculados pelos modelos normativos apresentam alto grau de conservadorismo quando comparado com resultados obtidos de ensaios laboratoriais, como por exemplo, é o que tem ocorrido com o modelo da norma Brasileira.

A forma dos alvéolos tem se mostrado determinante na capacidade resistente ao cisalhamento de lajes alveolares, especialmente aquelas em que o mecanismo de ruptura governante é o de tração diagonal. O presente trabalho por sua vez vem contribuir para o entendimento deste fenômeno e dos principais parâmetros que o definem, de maneira a permitir um maior controle no estudo de novos perfis, ou mesmo de uma avaliação mais criteriosa dos perfis já existentes no mercado.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

O uso de lajes alveolares em obras industriais cuja necessidade de resistir a carregamentos distribuídos e concentrados de elevada magnitude está cada vez mais frequente no Brasil. Não é incomum as obras demandarem estruturas para resistir a sobrecargas distribuídas da ordem de 10 a 50 kN/m<sup>2</sup>. Nessas condições, o mecanismo de ruptura por cisalhamento, em geral, se faz condicionante.

No que tange a capacidade resistente ao cisalhamento de lajes alveolares protendidas, a prática comum utilizada no meio técnico para se obter um ganho “extra” de desempenho neste estado limite, é o preenchimento de alvéolos. Este procedimento, porém, implica em maior consumo de material e mão de obra além de exigir uma qualidade de execução bastante apurada para garantir o funcionamento conjunto da seção.

Estudos baseados em ensaios de laboratório realizados especialmente na Finlândia tem mostrado que a forma dos alvéolos é determinante na capacidade resistente ao cisalhamento de lajes alveolares quando o mecanismo de ruptura principal é o de tração diagonal. No Brasil, mais especificamente no NETPre-UFSCAR, ensaios de caracterização de lajes de espessuras iguais ou superiores a 260mm, com alvéolos não-circulares, têm sido realizados e, em alguns casos, tem-se observado resultados contra a segurança considerando a equação apresentada na norma vigente.

Com referência nos estudos realizados por YANG (1994), PAJARI (2005) e LINDSTRÖM (2007), em especial, o presente estudo vem contribuir para o entendimento do efeito que a geometria dos alvéolos tem sobre a capacidade

resistente ao cisalhamento de lajes alveolares protendidas oferecendo subsídios técnicos que permitam avaliar mais criteriosamente a eficiência mecânica da seção transversal.

### **1.3 OBJETIVOS**

O objetivo principal deste trabalho é propor uma metodologia de cálculo que permita avaliar a eficiência geométrica de seções de lajes alveolares protendidas ao esforço cortante, considerando o mecanismo resistente de ruptura por tração diagonal. Como objetivos específicos resumem-se:

- Estudar um procedimento teórico que permita obter diversas formas geométricas para seções transversais de lajes alveolares, variando a forma dos alvéolos, bem como calcular suas propriedades mecânicas (área, inércia, momento estático e posição do centro de gravidade);
- Elaborar um procedimento de cálculo parametrizado empregando planilha eletrônica, que permita facilmente investigar diversas formas geométricas de seções transversais de lajes alveolares à luz do modelo de cálculo de Yang-Pajari;
- Sugerir uma metodologia que defina os critérios limites para o qual o modelo de Yang-Pajari se aplica;
- Avaliar o efeito da variação do ângulo da linha de ruptura sobre a capacidade resistente a cortante a partir do modelo de cálculo de Yang-Pajari;
- Comparar resultados teóricos do método proposto e do modelo da norma brasileira, com valores obtidos por meio de ensaios realizados no NETPre-UFSCar.

### **1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO**

Após a apresentação deste primeiro capítulo, de caráter introdutório, este trabalho é composto por mais 5 capítulos apresentados a seguir.

No segundo capítulo é realizada uma revisão bibliográfica apresentando inicialmente os fundamentos do tema desenvolvido; em seguida é feita uma apresentação das pesquisas correlatas mais relevantes, tanto no cenário nacional quanto internacional; e por último são apresentados os principais modelos de cálculo já consagrados, inclusive os modelos normativos, para o cálculo do cortante resistente.

No terceiro capítulo inicialmente são apresentadas algumas tipologias usuais de seção transversal produzidas mecanicamente; na sequência são definidos os termos adotados para classificação dos alvéolos quanto à sua forma no decorrer de todo o trabalho; e por fim é apresentada uma metodologia para o cálculo das propriedades mecânicas de seções transversais de lajes alveolares.

No quarto capítulo é apresentado inicialmente o desenvolvimento analítico passo a passo do modelo de Yang-Pajari destacando a presença da cordoalha superior e considerando a possibilidade de variação do ângulo da linha de ruptura; este modelo será adotado como referência para o presente trabalho. Posteriormente é feita uma abordagem sobre o conceito de “ponto crítico”, definido em YANG (1994), destacando a importância do conhecimento deste no projeto geométrico da seção. Por fim neste capítulo é apresentado um critério de cálculo para validação do modelo adotado considerando a variação geométrica dos alvéolos.

No quinto capítulo são desenvolvidos três exemplos de cálculo para, de maneira aplicada, fixar o conteúdo apresentado neste trabalho. Por fim, o sexto capítulo apresenta as conclusões deste trabalho, bem como as sugestões para trabalhos futuros.

## **1.5 METODOLOGIA**

Para atingir os objetivos almejados, em um primeiro momento, é realizada uma pesquisa bibliográfica sobre o tema reunindo materiais que serviram de base para a construção da rotina de cálculo apresentada neste trabalho. Posteriormente com auxílio de uma planilha eletrônica Microsoft Excel (2010) e sistematizando as rotinas matemáticas apresentadas no Capítulo 3 e no Capítulo 4 é elaborado um

programa para geração de seções transversais e para o cálculo do cortante resistente para o modelo de Yang-Pajari, bem como para o modelo da norma brasileira.

Por fim, no Capítulo 5 são apresentados 3 exemplos de aplicação, os quais possibilitam uma avaliação prática da metodologia discutida nesse trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são introduzidos inicialmente os principais fatores que influenciam na capacidade resistente ao cisalhamento de lajes alveolares protendidas bem como os mecanismos resistentes encontrados na literatura. Com ênfase no mecanismo de ruptura por tração diagonal, é discutido o modelo de cálculo extraído de YANG (1994) e que posteriormente foi detalhado e aperfeiçoado em PAJARI (2005), destacando também as limitações e condições de uso destes modelos. Por fim, são apresentadas algumas das principais pesquisas que se relacionam com o tema proposto neste trabalho.

### 2.1 PRINCIPAIS FATORES QUE INFLUENCIAM O CORTANTE DE LAJES ALVEOLARES PROTENDIDAS

#### 2.1.1 PROCESSO PRODUTIVO

Em geral, as lajes alveolares são produzidas com uso de equipamentos (extrusoras e moldadoras), cuja moldagem é feita sobre uma pista de protensão em chapa metálica fixada sobre piso estrutural. No Brasil é possível encontrar pistas de protensão com comprimento da ordem de 200m ou mais, conforme o espaço disponível na planta fabril.

O processo de produção de lajes alveolares deve ser planejado de modo a evitar basicamente dois tipos de falha: escorregamento da armadura ativa no ato da protensão; e variações geométricas maiores que os limites de aceitabilidade definidos em norma. A produção das lajes consiste basicamente em oito etapas distintas que, conforme PETRUCELLI (2009), podem ser elencados como:

- Preparação das pistas, ou seja, limpeza e aplicação de desmoldante;
- Posicionamento dos cabos de protensão;
- Lançamento do concreto e produção da laje;
- Marcação dos painéis (pré-cortes) e possíveis recortes na pista;
- Endurecimento e cura;
- Liberação da protensão e corte das lajes;
- Içamento e estocagem;
- Recortes e acabamentos (se necessário).

Na etapa de preparo, cuidados especiais devem ser tomados de maneira a evitar que o desmoldante entre em contato com os cabos para assim não comprometer posteriormente a aderência aço-concreto.

Outro fator que merece atenção é a questão do alinhamento dos cabos de protensão entre os crivos e os chamados “guias-fio”, que são dispositivos fixados a frente da unidade de compactação e que são responsáveis por corrigir desvios pequenos decorrentes da catenária dos cabos já tensionados. Desalinhamentos transversais (na direção da largura da seção transversal do painel) entre os crivos situados nas cabeceiras de protensão e os guias-fio, quando expressivos, podem provocar deslocamentos laterais dos cabos após a compactação do concreto, já que o concreto ainda fresco não é capaz de impedir o retorno destes para a posição de origem, deixando vazios em seu entorno no sentido oposto ao deslocamento, o que novamente pode comprometer a aderência com o concreto. A Figura 2.1 representa este efeito.

**Figura 2.1: Deslocamento da armadura longitudinal decorrente do desalinhamento entre o crivo e o guia-fio**



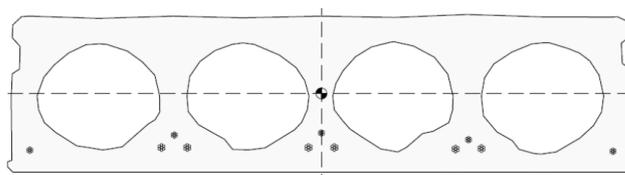
[Fonte: o autor]

O concreto utilizado apresenta baixa relação água-cimento (em torno de 0,40 ou menos) tendo em vista que o processo de adensamento realiza-se por meio de vibração e compactação. A consistência do concreto não pode ser medida com ensaio normal de abatimento (“*Slump Test*”). A umidade da mistura é medida a partir de uma avaliação visual e tátil feita normalmente pelo operador de usina de concreto que corrige a umidade quando julga necessário. Vale lembrar que os ajustes, em geral, representam pouca adição de água que é desprezível quanto a alteração da relação água-cimento. Porém, a faixa de umidade aceitável para a aplicação é tão

limitada que variações pequenas na umidade do concreto podem acarretar em problemas graves na produção das lajes, e por isso merece bastante cuidado. Tanto o excesso de umidade quanto a falta podem influenciar negativamente o processo e prejudicar diretamente o desempenho da laje ao cisalhamento. No caso de excesso de umidade, pode ocorrer distorção significativa da seção transversal (ver Figura 2.2), em que os alvéolos sofrem um “achatamento” e o empuxo proveniente da compactação pode alterar a posição dos cabos de protensão. Nesse caso, as consequências podem ser:

- Estrangulamento ou empenamento das nervuras;
- Perda de aderência dos cabos decorrentes do mau posicionamento (os cabos podem ser deslocados de modo que haja pouca massa de concreto envolvente para absorver as tensões oriundas da protensão e carregamentos externos);
- Alteração das propriedades mecânicas (área, inércia, etc.);
- Redução de altura útil ( $d$ );
- Aumento de peso próprio;
- Ondulações superficiais que posteriormente acarretam em maior consumo de concreto para a execução do capeamento (quando necessário);
- Etc.

**Figura 2.2: Seção transversal deformada devido ao excesso de umidade do concreto**



[Fonte: Adaptado de TRUNDERUNG (2011)]

A falta de umidade na mistura também pode ser prejudicial para a produção das lajes, podendo implicar em:

- Escorregamento das cordoalhas provocando perdas parciais ou totais (o que de fato é mais comum) das pistas após a liberação da protensão (corte das peças), gerando assim grande prejuízo econômico;

- Desmoronamento parcial do concreto da mesa superior e/ou das nervuras laterais;
- Acabamento superior e/ou laterais prejudicados;
- Etc.

Durante o adensamento do concreto os cabos de protensão, já tensionados e envolvidos no concreto, invariavelmente são submetidos à energia de compactação produzida pelo equipamento, em que parte desta acaba sendo transferida para a armadura de maneira que, quanto mais próxima esta estiver da mesa vibratória, maior o efeito sobre a mesma (em geral os cabos superiores são os mais afetados). O excesso de vibração na armadura ativa faz com que os agregados graúdos sejam submergidos na mistura, ficando ao redor dos cabos apenas a pasta que, em geral, não é capaz de absorver as tensões de aderência, induzindo assim o escorregamento da armadura. Desta forma, o desafio é regular a energia de compactação de modo a garantir boa compacidade do concreto (menor índice de vazios) sem comprometer a aderência, o que na prática não costuma ser um problema simples de ser resolvido.

A introdução da protensão pode ocorrer de forma imediata ou gradual. A protensão gradual é sempre mais indicada, especialmente em lajes alveolares onde não existe armadura transversal para combater esforços tangenciais oriundos desta carga. Porém, na maioria das fábricas no Brasil, a protensão se faz de modo repentino, o que exige do concreto uma capacidade resistente suficiente para resistir os esforços. Quando o concreto não tenha resistência suficiente, as tensões concentradas decorrentes da introdução da carga de protensão podem induzir a ocorrência de fissuras que, por sua vez, devem antecipar a ruína da laje quando submetida ao carregamento de uso. Com igual importância, vale destacar que peças com elevado nível de protensão inferior estão mais suscetíveis a fissuras de flexão na fibra superior, especialmente nas extremidades da peça, devido ao momento em vazio. Tais fissuras tendem a induzir a ruptura prematura da laje ao cisalhamento quando submetida a carregamento de uso, mas podem ser evitadas com o alívio da força de protensão inferior ou inclusão de cordoalhas superiores.

Por fim, é importante destacar a importância da manutenção preventiva dos equipamentos e da pista de protensão. Desgastes dos componentes da unidade de

compactação podem resultar em variações expressivas de forma das seções, bem como do posicionamento indevido dos cabos de protensão cujas consequências já foram apontadas anteriormente. Quanto à pista, com o passar do tempo, pode sofrer deformações que, além de comprometer a locação dos cabos, também podem implicar na variação na espessura dos painéis.

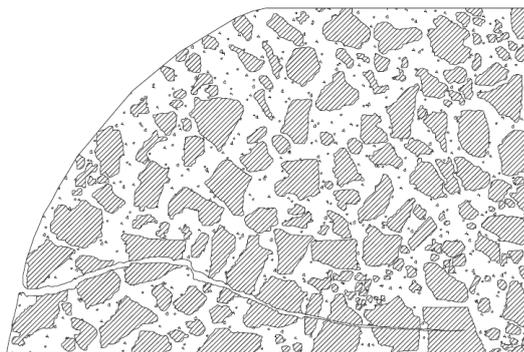
### **2.1.2 O CONCRETO**

Com o uso de equipamentos na produção das lajes, a colocação de armaduras transversais para combater esforços cisalhantes em lajes alveolares passa a ser praticamente inviável. Por esta razão, se faz necessário desenvolver concretos de alto desempenho, já que pesa sobre este toda a responsabilidade de resistir às tensões oriundas de esforços cisalhantes.

A tecnologia do concreto tem evoluído bastante com o passar dos anos. Isso tem sido possível graças aos avanços na tecnologia do cimento aliado às técnicas de dosagem e ao desenvolvimento dos aditivos superplastificantes cada vez mais potentes que permitem a redução do fator água-cimento. Competições entre instituições de ensino têm sido realizadas a fim de estimular o desenvolvimento de concretos de alto desempenho, o que tem contribuído muito também para a disseminação do conhecimento acerca deste importante material através de publicações em revistas científicas.

Como já abordado anteriormente, os concretos para uso em laje alveolar apresentam baixo fator água-cimento, considerando o uso de aditivo superplastificante e considerando que o adensamento é realizado mecanicamente por vibração e compactação. Como característica principal deste tipo de concreto, a capacidade resistente é governada não mais pela pasta de cimento, mas sim pela resistência do agregado graúdo, conferindo assim máximo aproveitamento do material composto. A Figura 2.3 ilustra uma matriz de concreto endurecido logo após a ruptura, onde a fissura principal atravessa as partículas de agregado graúdo.

**Figura 2.3: Matriz de concreto de alto desempenho – ruptura ocorre nos agregados graúdos**

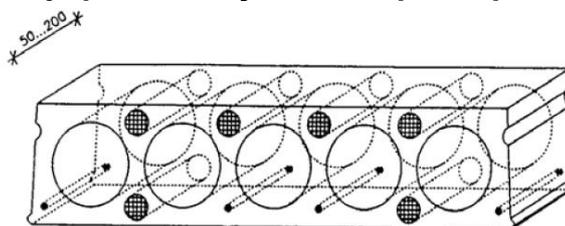


[Fonte: BRUNESI e NASCIBENE (2015)]

Considerando o processo produtivo de laje alveolar mecanizado, mesmo considerando que a espessura dos painéis é pequena, a compactação do concreto normalmente não é homogênea. No processo de extrusão, em particular, resultados de corpo de prova tendem a fornecer valores maiores de resistência em testemunhos obtidos da parte inferior da laje, quando comparado com testemunhos extraídos da parte superior, como destacam COSTA (2009) e BRUNESI et al. (2015).

O manual FIB (1992) apresenta uma metodologia para coleta de amostras por extração de testemunhos (ver Figura 2.4), e análise de resultados para obtenção da resistência a tração do concreto de lajes alveolares protendidas, porém a aplicação, especialmente no Brasil, não tem sido praticada pelos fabricantes devido a dificuldade da coleta e da qualidade das amostras obtidas.

**Figura 2.4: Faixa de laje para extração de corpo de prova – Modelo FIB (1992)**



[Fonte: FIB (1992) apud COSTA (2009)]

Uma alternativa para a obtenção de amostras, conforme citado em COSTA (2009), é a moldagem de corpos de prova cúbicos ou cilíndricos por meio de equipamentos específicos capazes de reproduzir de forma satisfatória a mesma

energia de compactação dos equipamentos de extrusão, conforme apresentado na Figura 2.5.

**Figura 2.5: Máquina para compactação de concreto de baixa trabalhabilidade**



[Fonte: INVELOP OY (2016)]

A resistência à tração do concreto, para efeito de cisalhamento é um dos parâmetros mais importantes quando se trata de lajes alveolares, já que determinam qual o mecanismo de ruptura será o crítico para o elemento analisado. Sendo assim, erros graves de interpretação de resultados podem ocorrer quando estes parâmetros são mal informados ou obtidos incorretamente.

Em laboratório, uma forma usual de se conseguir determinar a resistência à tração ( $f_{ctm}$ ) e compressão ( $f_{cm}$ ) média do concreto, é através do ensaio de flexão obtido de maneira indireta por meio do momento de fissuração do elemento ensaiado. Os resultados obtidos desta maneira permitem calibrar os dados oriundos dos testemunhos moldados em fábrica ou mesmo dos corpos de prova obtidos por extração.

$$f_{ctm} = \left[ -\frac{(N_{p,i} + N_{p,s})}{A_{hom}} - \frac{y_{hom}}{I_{hom}} \cdot (N_{p,i} \cdot e_i - N_{p,s} \cdot e_s) + \frac{y_{hom}}{I_{hom}} \cdot M_{r,exp} \right] / \alpha_f \quad (2.1)$$

$$f_{cm} = \left( \frac{f_{ctm}}{0,3} \right)^{3/2}; \text{ para concretos de classe até C50.} \quad (2.2)$$

$$f_{cm} = 9,09 \cdot \left( e^{\frac{f_{ctm}}{2,12}} - 1 \right); \text{ para concretos de classes entre C50 e C90.} \quad (2.3)$$

Onde:

$f_{ctm}$ : resistência a tração média do concreto (obtida no momento do ensaio), em megapascal (MPa);

$f_{cm}$ : resistência a compressão média do concreto (obtida no momento do ensaio), em megapascal (MPa);

$N_{p,i}$ : força de protensão devido ao cabo inferior (consideradas as perdas até a data do ensaio);

$N_{p,i}$ : força de protensão devido ao cabo inferior (consideradas as perdas até a data do ensaio);

$N_{p,s}$ : força de protensão devido ao cabo superior (consideradas as perdas até a data do ensaio);

$e_i$ : excentricidade efetiva do cabo inferior (valor médio de todos os cabos inferiores)

$e_s$ : excentricidade efetiva do cabo superior (valor médio de todos os cabos superiores)

$A_{hom}$ : área da seção, homogeneizada, considerando a seção efetiva da laje ensaiada;

$I_{hom}$ : inércia da seção, homogeneizada, considerando a seção efetiva da laje ensaiada;

$y_{hom}$ : posição do centroide da seção, homogeneizada, medido a partir da borda inferior da laje ensaiada;

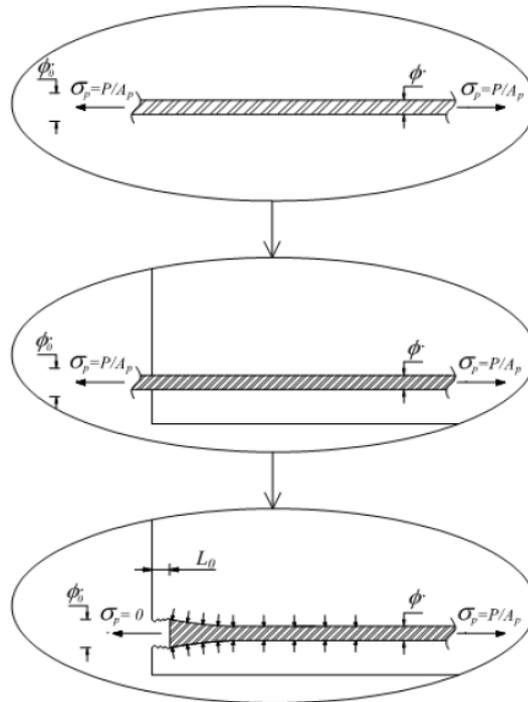
$M_{r,exp}$ : momento de fissuração obtido do ensaio de flexão;

$\alpha_f$ : coeficiente de forma, considerado 1,5 para laje alveolar.

### 2.1.3 ANCORAGEM DA ARMADURA LONGITUDINAL

A falha na ancoragem da armadura longitudinal pode induzir uma ruptura prematura das lajes alveolares, especialmente quando o mecanismo governante é o de cisalhamento. Qualquer falha na ancoragem da armadura nas proximidades do apoio implica em uma redistribuição de esforços na seção e um aumento súbito na tensão da armadura, que por sua vez, solicita ainda mais a ancoragem. Quando o comprimento de apoio não é suficiente para mobilizar estas tensões, ocorre um escorregamento que pode ocasionar a ruptura do elemento.

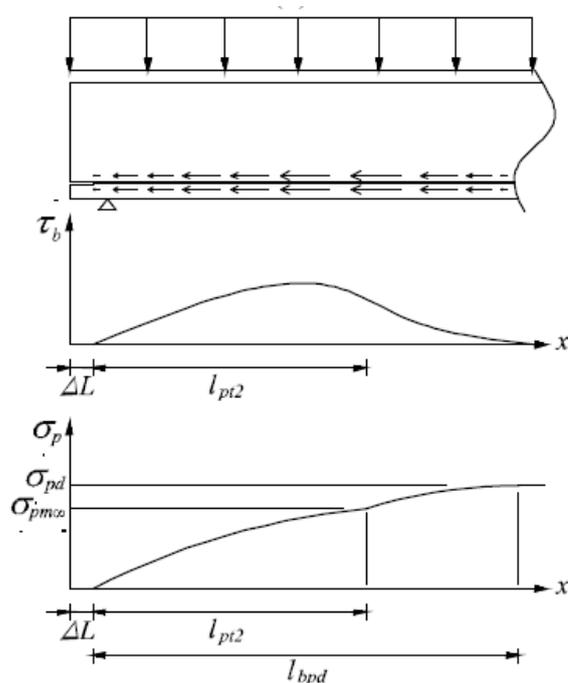
A ancoragem da armadura ativa depende muito da aderência aço-concreto, a qual segundo ARAÚJO (2011) apud FUSCO (1995), é composta por pelo menos quatro parcelas, sendo: adesão, atrito, mecânica e “efeito *Hoyler*”. A parcela relativa à adesão é o resultado da colagem entre a armadura e o concreto sendo esta bastante frágil, considerando que a mesma é rompida com pequenas deformações. Superada esta primeira parcela resistente, a segunda parcela, de atrito, é mobilizada. Esta depende basicamente da rugosidade das superfícies de contato, da retração do concreto e das tensões de compressão provenientes de carregamentos externos, especialmente aqueles próximos ao apoio. A terceira parcela, da aderência mecânica, é aquela de maior importância e confiabilidade, e depende do tipo de saliência da armadura. Por último, o “efeito *Hoyler*”, no caso de fios e cordoalhas, contribui para o aumento da aderência já que, quando estes são tensionados na pista, devido ao coeficiente de Poisson, o diâmetro nominal sofre redução e, após o endurecimento do concreto no corte, a protensão é introduzida por atrito e, na medida em que a extremidade do cabo adentra a seção, como a tensão do cabo é nula, o diâmetro do cabo recobra seu valor inicial ao longo do comprimento de transferência. Essa alteração de diâmetro irá proporcionar um efeito de cunha capaz de melhorar a condição de transferência do protensão (ver Figura 2.6).

**Figura 2.6: Efeito Hoyler (*Push-in*)**

[Fonte: ARAÚJO (2011)]

Por outro lado, quando a laje é colocada em situação de carga, devido ao acréscimo de tensão na armadura, ocorre um efeito contrário ao efeito Hoyler decorrente da redução do diâmetro do cabo e conseqüentemente, uma redução na tensão de aderência. Nesse caso, é necessário um comprimento de ancoragem ( $l_{bpd}$ ) maior para que se possa suportar aos esforços de protensão e as variações de tensão provocadas por carregamentos externos (ver Figura 2.7).

**Figura 2.7: Ancoragem da armadura ativa sob efeito de carregamento externo**



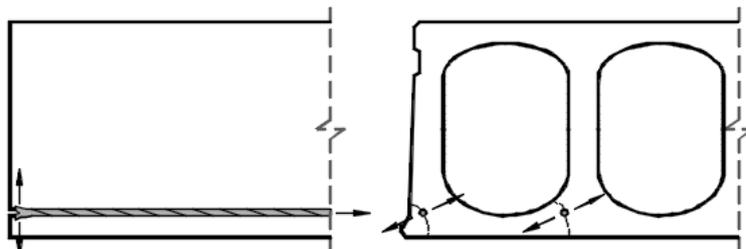
[Fonte: Adaptado de ARAÚJO (2011)]

A ocorrência de fissuras de flexão nas proximidades do apoio, na região de ancoragem, causam perturbações nas tensões e a ancoragem é comprometida. Então surgem mecanismos complementares responsáveis por redistribuir os esforços de modo a conservar o equilíbrio. No item 2.3.2, ao discutir o mecanismo de ruptura por flexo-cortante, este assunto é mais bem explorado.

Falhas decorrentes do processo de produção, apresentados no item 2.1.1, e que pode ou não estar aliado a uma concepção inadequada da seção transversal podem induzir a ocorrência de fissuras capazes de comprometer a ancoragem da armadura. Alguns tipos mais comuns de fissuras devido a concentração de tensões em zonas de ancoragem são classificados na literatura em inglês, porém, com alguma precisão estes termos podem ser traduzidos para o português como: explosão (*bursting*), separação (*splitting*) e destacamento (*spalling*). De forma geral, essas fissuras costumam ocorrer concomitantemente ao momento da liberação da protensão, quando o concreto ainda não atingiu toda a sua capacidade resistente, mas podem ser agravados posteriormente quando ocorre o carregamento externo. Estes fenômenos, porém, podem ocorrer de forma isolada ou até mesmo simultânea, conforme o caso.

A explosão (bursting) surge do escorregamento do cabo para o interior da laje no momento da protensão, quando a massa de concreto ao redor da armadura é insuficiente para absorver as tensões radiais. Há então uma propagação da fissura para o interior do concreto na vizinhança da armadura e, conseqüentemente, um acréscimo de escorregamento (ver Figura 2.8).

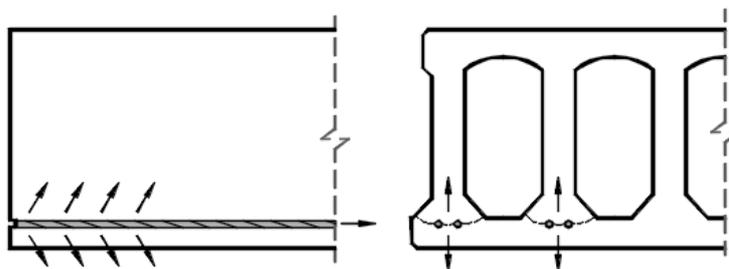
**Figura 2.8: Fissuras típicas de explosão (bursting)**



[Fonte: Adaptado de ASSAP (2002)]

O fenômeno de separação (splitting) é proveniente de tensões de tração tangenciais oriundas da introdução da força de protensão dentro do comprimento de ancoragem, que ao atingir a resistência a tração do concreto, podem induzir ocorrência de fissuras capazes de se propagar entre cordoalhas quando estas estão muito próximas umas das outras, levando a uma ruptura generalizada que, em estágios mais avançados, podem promover a separação do talão inferior em relação ao restante da seção transversal (ver Figura 2.9).

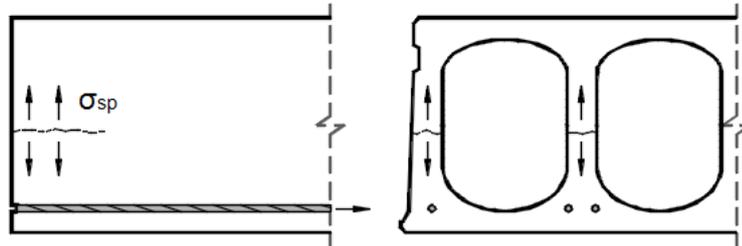
**Figura 2.9: Fissuras típicas de separação do talão inferior (splitting)**



[Fonte: Adaptado de ASSAP (2002)]

Por último, o destacamento (spalling) é um fendilhamento da alma do perfil que ocorre acima da linha de eixo dos cabos, na altura correspondente à menor espessura das nervuras, onde normalmente as tensões cisalhantes decorrentes da introdução de protensão são maiores, provocando assim um destacamento da metade superior em relação ao restante da seção (ver Figura 2.10).

**Figura 2.10: Fissuras típicas de destacamento da alma (spalling)**



[Fonte: Adaptado de ASSAP (2002)]

No que se trata de escorregamento da armadura ativa, a norma brasileira NBR14861:2011 (semelhante ao que se encontra na norma europeia EN1168:2008), define limites máximos que devem ser comparados com valores medidos peça a peça. A seguir são apresentados os limites de aceitabilidade.

- Valor máximo admitido para o escorregamento:

$$\Delta L = \frac{0,4 \cdot l_{bpd} \cdot \sigma_{pm0}}{E_p} \quad (2.4)$$

Onde:

$l_{bpd}$ : limite superior do comprimento de transferência calculado conforme Eurocode 2: 2004.

$\sigma_{pm0}$ : tensão de protensão imediatamente após a liberação da protensão

$E_p$ : módulo de elasticidade do aço de protensão

Assim, para cada cabo, deve ser respeitada a condição:  $\Delta L \leq 1,3\Delta l_0$ , sendo  $\Delta l_0$  o valor medido na peça. Além do que, para os três cabos cujos escorregamentos foram maiores, o valor médio medido não poderá ultrapassar  $\Delta L$  calculado. Excedidos os limites aqui apresentados, a peça deverá ser avaliada quanto à capacidade resistente (flexão e cisalhamento), excluindo-se os cabos escorregados.

## 2.2 A GEOMETRIA DA SEÇÃO – CRITÉRIOS DE PROJETO E INSPEÇÃO

### 2.2.1 SEÇÃO TRANSVERSAL

Um bom projeto de laje alveolar consiste em atender três requisitos simultaneamente: economia, desempenho estrutural e exequibilidade. Quanto maior o índice de vazios dos alvéolos, mais econômica é a laje considerando a redução de volume quando comparado à laje maciça. Porém, no tocante a desempenho mecânico da seção é necessário que a massa de concreto esteja situada em região adequada. Escolhida uma geometria que atenda aos dois primeiros requisitos apresentados, é preciso assegurar que haja compatibilidade desta com o tipo de equipamento a ser utilizado na fabricação e com os materiais disponíveis para a produção do concreto, para que se possa obter uma boa conformação e compactação.

A norma europeia EN1168:2008 estabelece limites para a definição da geometria da seção transversal de lajes alveolares, os quais são apresentados a seguir.

- Espessura mínima da nervura (interna / externa):

$$b_{i,min} \geq \begin{cases} h/10 \text{ [mm]} \\ \sqrt{2h} \text{ [mm]} \\ 20 \text{ [mm]} \\ d_g + 5 \text{ [mm]} \end{cases} \quad (\text{considerar o maior dos valores})$$

- Espessura mínima da mesa (inferior / inferior):

$$h_{f,min} \geq \begin{cases} \sqrt{2h} \text{ [mm]} \\ 17 \text{ [mm]} \\ d_g + 5 \text{ [mm]} \end{cases} \quad (\text{considerar o maior dos valores})$$

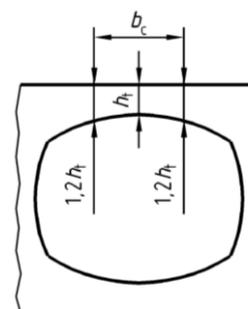
\*Observação: Para mesa superior deve-se considerar também:  $h_{f,min} \geq 0,25b_c$

Onde:

$h$  [mm]: espessura da laje

$d_g$  [mm]: diâmetro máximo do agregado

$b_c$  [mm]: largura da fração da mesa superior situado entre duas seções de espessura  $1,2 h_{f,\min}$



Como complemento às recomendações normativas apresentadas acima, ELLIOTT e JOLLY (2013) também recomendam que a altura dos alvéolos não seja superior a:  $h - 50$  [mm].

Na prática, de acordo com Manual ASSAP (2002), a espessura da nervura costuma estar entre 30 e 35 milímetros, aumentando na proporção em que as peças são mais sujeitas a esforços de cisalhamento. Por este motivo também, lajes produzidas por moldadoras, algumas vezes, permitem que se reduzam os alvéolos nas extremidades ou mesmo que estes sejam removidos por completo. Quanto as mesas, usualmente a espessura mínima está entre 25mm e 30mm.

Além da necessidade de se estudar a seção de concreto, também é igualmente importante observar o posicionamento dos cabos de protensão a fim de minimizar problemas de ancoragem, durabilidade e de resistência ao fogo. Desta maneira, a EN1168:2008 novamente estabelece limites para o posicionamento da armadura ativa conforme apresentado a seguir.

- Distância mínima entre fios ou cordoalhas e a superfície da forma (medida do eixo da armadura):

$$i \geq \begin{cases} \varnothing \text{ [mm]} \\ 20 \text{ [mm]} \\ d_g \text{ [mm]} \end{cases} \quad (\text{considerar o maior dos valores})$$

- Distância mínima entre fios ou cordoalhas (medida entre eixos das armaduras):

$$\text{- Distância horizontal: } i_h \geq \begin{cases} \varnothing \text{ [mm]} \\ 20 \text{ [mm]} \\ d_g + 5 \text{ [mm]} \end{cases} \quad (\text{considerar o maior dos valores})$$

- Distância vertical:  $i_v \geq \begin{cases} \emptyset \text{ [mm]} \\ 10 \text{ [mm]} \\ d_g \text{ [mm]} \end{cases}$  (considerar o maior dos valores)

Onde:

$\emptyset$  [mm]: diâmetro nominal do fio ou cordoalha

$d_g$  [mm]: diâmetro máximo do agregado

A seguir são apresentados os critérios prescritos na EN1168:2008 para limite de cobertura, já consideradas as tolerâncias permitidas (ver Figura 2.11).

$c = 2\emptyset$ , se a distância entre centro das armaduras é  $\geq 3\emptyset$ ; ou

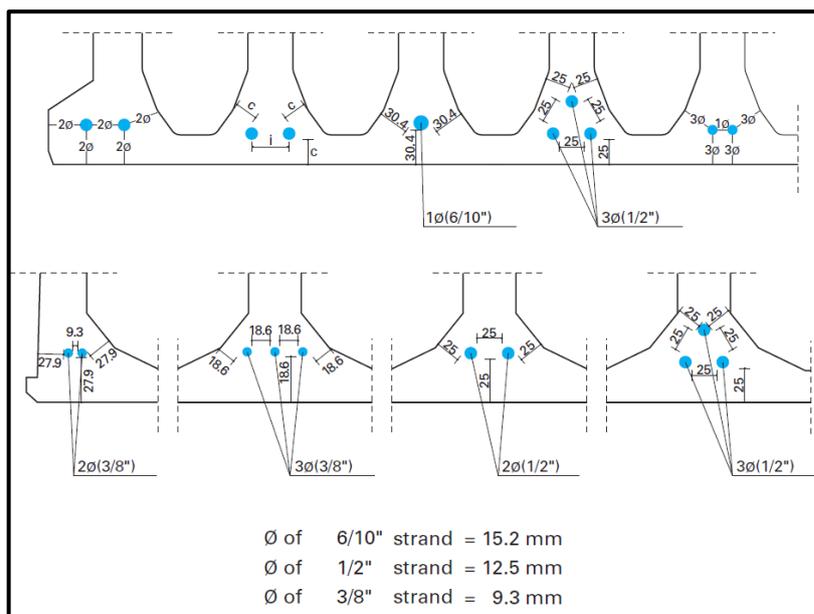
$c = 3\emptyset$ , se a distância entre centro das armaduras é  $\leq 2,5\emptyset$ .

Onde:

$\emptyset$ : diâmetro nominal do fio ou cordoalha; no caso de haver mais de um diâmetro na mesma seção, pode ser considerado o valor médio.

\*Observação: Para cordoalhas entalhadas, o cobertura deverá ser acrescido de mais  $1\emptyset$ .

**Figura 2.11: Critérios para posicionamento de fios e cordoalhas**



[Fonte: ASSAP (2002)]

Para efeito de aceitabilidade após a fabricação a norma EN1168:2008 (assim como a norma brasileira NBR14861:2011) fixa limites e tolerâncias para aceitabilidade de elementos de laje alveolar e que normalmente é feito a partir de uma inspeção visual, sendo eles:

- Espessura da laje:
  - Para  $h \leq 150\text{mm}$ :  $-5\text{mm} / +10\text{mm}$
  - Para  $h \geq 250\text{mm}$ :  $\pm 15\text{mm}$
- Espessura nominal da nervura:
  - Nervura individual ( $b_w$ ):  $-10\text{mm}$
  - Para toda a largura da laje ( $\sum b_w$ ):  $-20\text{mm}$
- Espessura nominal do talão superior / inferior:
  - Talão individual:  $-10\text{mm} / +15\text{mm}$
- Posição vertical da armadura longitudinal – Barra individual (fio ou cordoalha):
  - Para lajes com espessura ( $h$ )  $\leq 200\text{mm}$ :  $\pm 10\text{mm}$
  - Para lajes com espessura ( $h$ )  $\geq 250\text{mm}$ :  $\pm 15\text{mm}$
  - Para lajes com espessura  $200\text{mm} \leq h \leq 250\text{mm}$  (permite-se fazer interpolação linear).

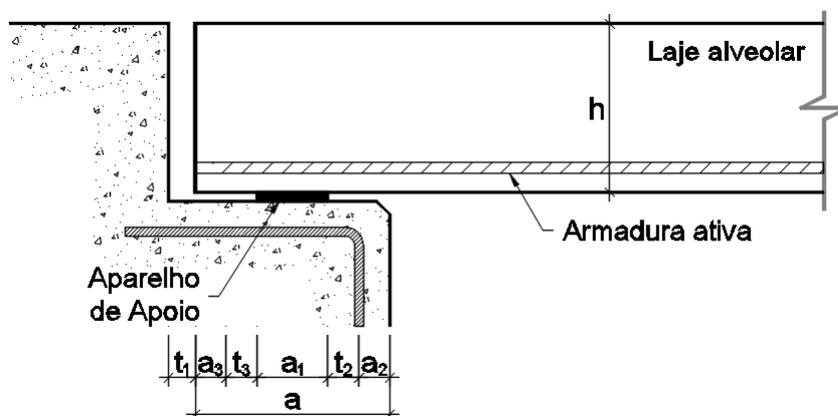
### 2.2.2 COMPRIMENTO DE APOIO

Assim como já foi abordado sobre a dificuldade de se introduzir armadura transversal nas lajes alveolares para combater cisalhamento, a colocação de armadura suplementar para melhorar a condição de apoio se torna igualmente inviável. Desta maneira, o cuidado com a solução de apoio das lajes tem grande importância para garantir o bom funcionamento em situação de uso.

Para se garantir um bom desempenho estrutural os principais fatores a serem considerados no projeto dos elementos de suporte para as lajes alveolares são: comprimento mínimo de apoio, capacidade de rotação, grau de restrição do apoio e nível de tensão de contato. Importante destacar que os critérios que são discutidos remetem apenas a esforços provenientes de cargas verticais, sendo que para situações onde as ligações são submetidas a esforços provenientes de carregamentos horizontais não necessárias verificações mais específicas e que não serão aqui abordadas.

A norma brasileira (NBR14861:2011) apresenta em seu texto um critério para determinação do comprimento mínimo de apoio "a" para lajes alveolares que dependem basicamente: da tensão de contato (solicitante), do tipo de material de contato, da resistência a compressão do concreto do elemento de suporte, da posição e bitola da armadura principal do elemento de apoio e das tolerâncias de montagem. A Figura 2.12 ilustra os parâmetros geométricos adotados para o cálculo do comprimento mínimo de apoio, cujo roteiro de cálculo é apresentado a seguir.

**Figura 2.12: Comprimento nominal de apoio**



[Fonte: Adaptado da ABNT NBR14861:2011]

$$a = a_1 + (a_2^2 + a_3^2 + t_2^2 + t_3^2)^{1/2} \quad (2.5)$$

sendo:

$$a_1 = \frac{V_{sd}}{b_n \cdot \sigma_{Rd}} \geq 40mm \quad (2.6)$$

onde:

$V_{sd}$ : valor solicitante de cálculo da reação de apoio;

$b_n$ : largura de apoio (nunca deve superior a 50% da largura da laje);

$\sigma_{Rd}$ : valor de cálculo da resistência à compressão do concreto, sendo:

$$\sigma_{Rd} \leq 0,6 \cdot f_{cd}, \text{ para o caso de apoio direto (concreto / concreto);}$$

$$\sigma_{Rd} \leq 0,7 \cdot f_{cd}, \text{ para o caso de apoio em almofada de elastômero;}$$

$$\sigma_{Rd} \leq 0,8 \cdot f_{cd}, \text{ para o caso de apoio sobre argamassa ou perfil metálico.}$$

$f_{cd}$ : resistência à compressão de cálculo do concreto;

$a_2$ : comprimento da possível ruptura do canto do apoio, com  $\sigma_{sd} > 0,4 \cdot f_{cd}$ , sendo:

$$a_2 = 0mm, \text{ no caso de estruturas metálicas;}$$

$$a_2 = 25mm, \text{ no caso de alvenaria ou concreto simples (não armado);}$$

$$a_2 = \text{cobrimento nominal de concreto, se a barra de armadura tiver diâmetro menor ou igual a } 12,5mm;$$

$$a_2 = \text{cobrimento nominal da barra somando o diâmetro da barra e o raio interno de curvatura da barra, caso esta tenha diâmetro superior a } 12,5mm;$$

$a_3$ : comprimento da possível ruptura da extremidade da laje, com  $\sigma_{sd} > 0,4 \cdot f_{cd}$ , sendo:

$$a_3 = 0mm, \text{ no caso de fios ou cordoalhas, ou barras expostas na extremidade da laje;}$$

$$a_3 = \text{maior valor entre o cobrimento nominal de concreto na extremidade ou } 10mm \text{ (se a barra de armadura tiver diâmetro menor que } 12,5mm);$$

$$a_3 = 15mm, \text{ caso o diâmetro da barra seja maior que } 12,5mm.$$

$$t_2 = 15mm, \text{ no caso de apoio em estrutura metálica ou em concreto pré-moldado;}$$

$$t_2 = 20mm, \text{ no caso de apoio em alvenaria ou em concreto moldado no local;}$$

$$t_3 = l_n/2500, \text{ sendo } l_n \text{ o vão livre da laje alveolar entre apoios;}$$

$t_1$ : é a máxima tolerância dimensional de fabricação do comprimento da laje somada à máxima tolerância dimensional de construção.

A NBR14861:2011 ainda recomenda que o comprimento mínimo de apoio  $a$  seja no mínimo igual a  $h/2$  (sendo  $h$  a altura total da laje sem capa).

Importante destacar que para situações de junta de apoio a seco, segundo a NBR9062:2017, deve-se limitar a tensão de contato atuante em  $0,042f_{cd}$ .

## **2.3 MECANISMOS DE RUPTURA POR CISALHAMENTO (AUSÊNCIA DE ARMADURA TRANSVERSAL)**

### **2.3.1 CLASSIFICAÇÃO DOS MECANISMOS DE RUPTURA**

Existem alguns modos de ruptura por cisalhamento encontrados na literatura quando se trata de lajes alveolares, sendo que os que mais se destacam são: mecanismo de ruptura por flexo-cortante, que ocorre em regiões previamente fissuradas por flexão; e o mecanismo de ruptura por tração diagonal, que se desenvolve antes da ocorrência de fissuras de flexão.

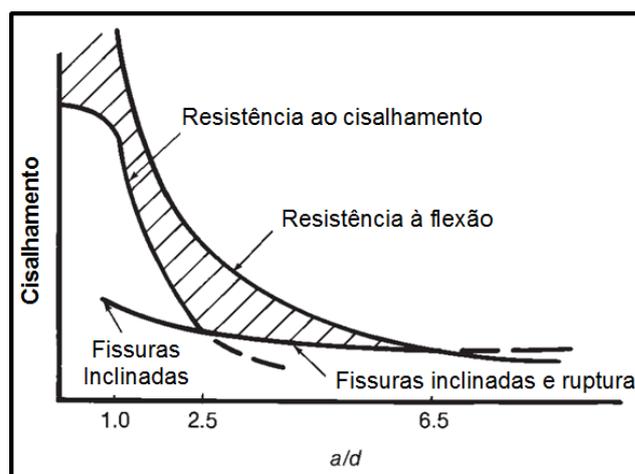
MACGREGOR e WIGHT (2012) mostra como a posição da carga pode influenciar no mecanismo resistente ao cisalhamento. A relação entre a distância de aplicação da carga e a altura útil do elemento ( $a/d$ ) tem sido uma referência importante no conhecimento dos mecanismos resistentes de elementos lineares biapoiados sem armadura transversal, sejam eles simplesmente armados ou protendidos.

Nas proximidades do apoio, onde os momentos fletores são praticamente nulos, as fissuras de cisalhamento são inclinadas e ocorrem quando a tensão principal de tração atinge a resistência à tração do concreto, o que acontece em uma posição (ao longo da altura da seção transversal) denominada “ponto crítico”. Por outro lado, em regiões mais próximas do meio do vão, onde os momentos costumam ser mais elevados e a cortante tende a ser pequena, especialmente no caso de cargas distribuídas, é mais comum a ocorrência de fissuras de flexão perpendiculares ao eixo longitudinal do elemento. Regiões intermediárias, porém,

são susceptíveis a ações combinadas de flexão e cisalhamento, de mesma ordem de grandeza e que originam fissuras que podem iniciar por flexão e se estender inclinadas até uma certa região.

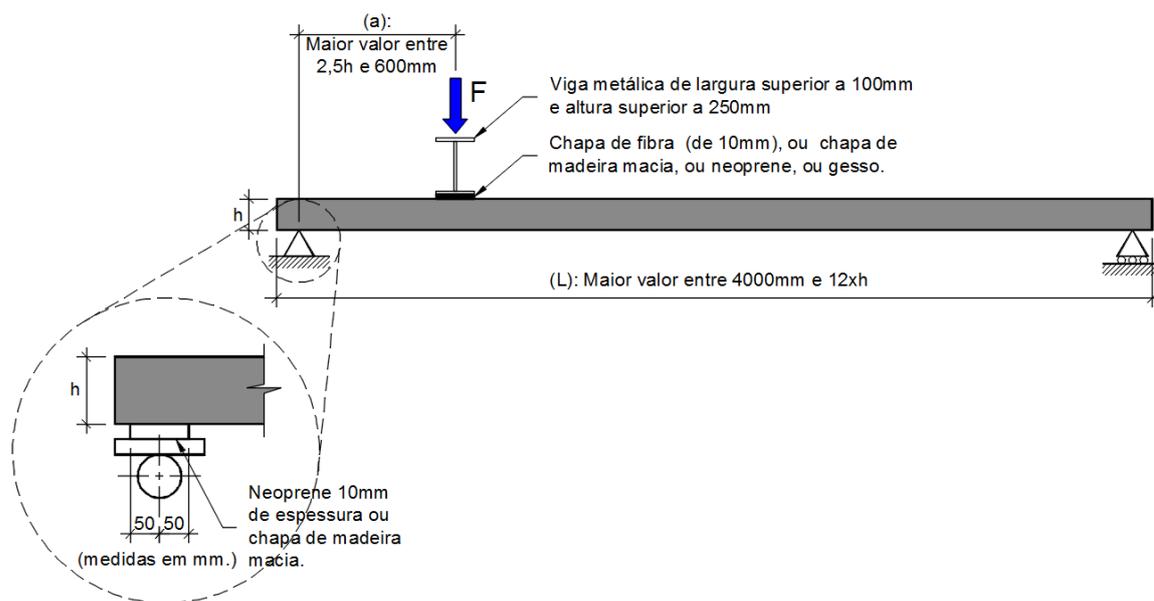
Estudos experimentais comprovaram que relações  $\frac{a}{d} \leq 1,0$  resultam em ruptura por esmagamento do concreto da biela comprimida junto ao apoio (mais próximo da carga aplicada), decorrentes do efeito arco. Já relações  $1,0 < \frac{a}{d} \leq 2,5$  resultam em rupturas por compressão devido ao cisalhamento, de modo que a fissura diagonal se forma e penetra o banzo comprimido, com o acréscimo do carregamento, gerando acréscimo de tensões e o esmagamento local do concreto. Por fim, para relações  $2,5 < \frac{a}{d} \leq 6,5$  o mecanismo de ruptura por cisalhamento é fortemente influenciado pela flexão.

**Figura 2.13: Influência da posição da carga concentrada no cisalhamento**



[Fonte: Adaptado de MACGREGOR e WIGHT (2012)]

O CEB-FIP em sua versão publicada em 1992 e a BS EN1168:2008 publicaram em seu texto um modelo de ensaio padrão para avaliação de desempenho de lajes alveolares ao cisalhamento, considerando para tanto a aplicação de uma carga concentrada posicionada a uma distância de  $2,5h$  (ou 600mm; o maior deles) do apoio conforme ilustrado na Figura 2.14. Este procedimento de ensaio é o que tem sido praticado nos ensaios realizados no Brasil.

**Figura 2.14: Modelo de ensaio padrão EN 1168:2008.**

[Fonte: Adaptado da EN1168:2008]

Não se limita, na EN1168, a posição do centro do apoio à extremidade da peça, porém no Brasil, em conformidade com o que preconiza a NBR14861:2011 quanto ao comprimento mínimo de apoio necessário, tem se considerado a medida de  $0,5h$ .

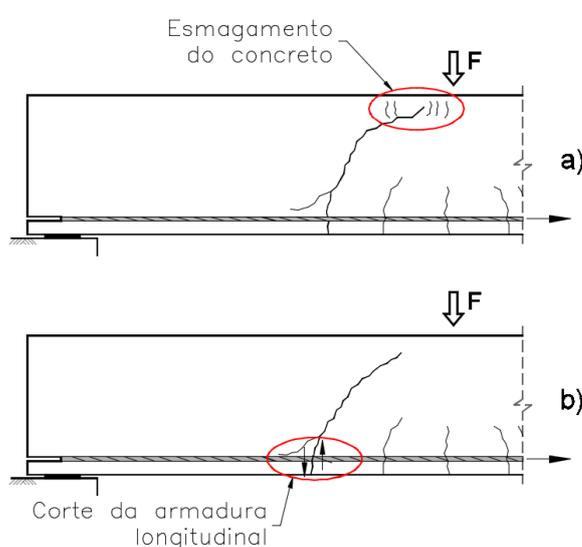
Por fim, é importante destacar que em situações de projeto, é mais comum a consideração de cargas uniformemente distribuídas, o que pode influenciar significativamente na configuração do mecanismo de ruptura, já que a intensidade dos esforços concomitantes de momento fletor e cortante tem magnitudes diferentes quando comparados com ações concentradas, o que deve ser levado em consideração na análise.

### 2.3.2 FLEXO-CORTANTE (“FLEXURE-SHEAR”)

A ruptura por flexo-cortante em lajes alveolares ocorre após o surgimento das primeiras fissuras de flexão, as quais são perpendiculares ao eixo longitudinal do elemento. Com o acréscimo de carregamento “as tensões diagonais de tração excedem o limite do concreto que se rompe, e como consequência da direção destas tensões, as fissuras deixam de ser perpendiculares ao eixo da peça, surgindo assim a fissura crítica, com a qual sobrevém a ruptura final da peça” [FUSCO

(2008)]. Esta ruptura pode ocorrer basicamente de duas maneiras: por esmagamento do concreto da região comprimida, estrangulado pela fissura crítica, ou por corte da armadura longitudinal (ver Figura 2.15). Após o surgimento da fissura crítica, este mecanismo tem por característica uma ruptura repentina, ocasionando grande impacto, o que foi observado em ensaios de laboratório conforme apontado por BERTAGNOLI e MANCINI (2009).

**Figura 2.15: Exemplos de ruptura por flexo-cortante – a) Esmagamento do concreto; b) Corte da armadura longitudinal**

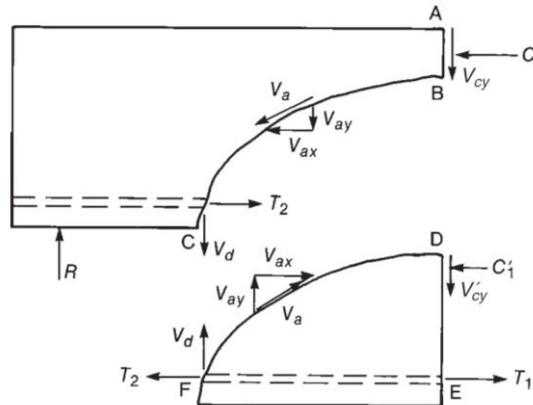


[Fonte: O autor]

O mecanismo de flexo-cortante é bastante complexo, já que a transmissão dos esforços que ocorrem pelas fissuras depende de diversos fatores. Com base nas bibliografias de FUSCO (2008) e MACGREGOR e WIGHT (2012) destacaram pelo menos cinco dos principais fatores que influenciam a capacidade resistente ao cisalhamento de vigas sem armadura transversal em regiões fissuradas por flexão e que pode ser extrapolado para o caso de lajes alveolares protendidas. São eles:

- Tensão de tração no concreto;
- Efeito pino (representado pela taxa de armadura longitudinal);
- Tamanho e tipologia dos agregados graúdos (forma e resistência);
- Fator escala (decalagem do diagrama de momentos);
- Força axial (tração ou compressão).

**Figura 2.16: Mecanismos residuais responsáveis pela resistência ao cisalhamento em zona fissurada.**

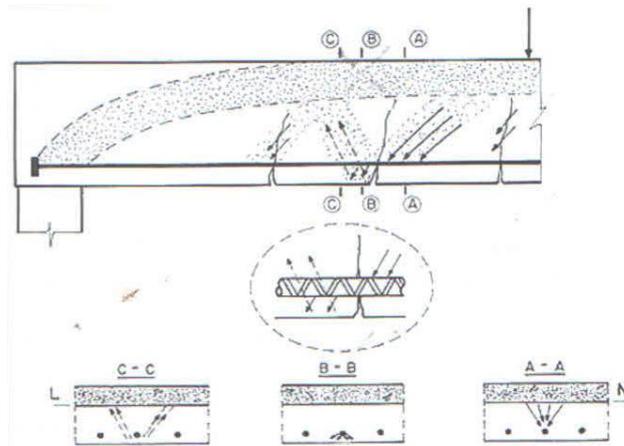


[Fonte: MACGREGOR e WIGHT (2012)]

Na Figura 2.16 é possível perceber que enquanto o concreto acima da região fissurada por flexão ainda não foi comprometido, ele acaba resistindo à primeira parcela do cisalhamento de forma direta (parcela  $V_{cy}$ ). A tensão de tração no concreto, juntamente com os esforços axiais externos (tração e compressão) definem o ângulo de inclinação da fissura crítica. O concreto na região fissurada, desde que as aberturas ainda não sejam muito expressivas, pode contribuir na resistência a partir do efeito de engrenamento dos agregados (parcela  $V_a$ ). Outro mecanismo residual resistente que surge na sequencia é o efeito pino (depende diretamente da taxa de armadura longitudinal) que ocorre na região fissurada, sendo que o esforço cortante ali presente, é resistido pela armadura engastada no concreto adjacente. Vale a pena salientar que este efeito depende muito da massa de concreto envolvente, o seja, quanto melhor o cobrimento, mais importante é esta parcela frente as demais.

FUSCO (2008) também destaca que a rigidez da armadura frente à rigidez do concreto permite que as bielas de compressão se apoiem sobre elas. Aliado a isso, o concreto íntegro presente entre as fissuras possibilitam que as tensões de tração sejam suspensas, formando assim um mecanismo de treliça, o que está exemplificado pela Figura 2.17. Este fenômeno, segundo o autor foi verificado em ensaios experimentais.

**Figura 2.17: Mecanismo alternativo – Bielas de compressão apoiadas sobre a armadura longitudinal**



[Fonte: FUSCO (2008)]

MACGREGOR e WIGHT (2012) estimam que o efeito pino ( $V_d$ ) somado ao efeito do engrenamento entre os agregados ( $V_{ay}$ ) são, juntos, responsáveis por resistir de 40 a 60% de toda a ação cisalhante.

Em geral, os modelos analíticos presentes nos principais códigos normativos não costumam explicitar todas as parcelas conforme exposto acima, porém algumas delas ficam evidentes, como é o caso do EUROCODE 2:2004 (EC2) e da norma brasileira NBR 14861:2011, que consideram as parcelas correspondentes à resistência a tração do concreto, força axial (representada pelo efeito da protensão), taxa de armadura (efeito pino) e fator escala, como exemplificado na Figura 2.18. Vale realçar que no EC2 a resistência à tração do concreto é apresentada de forma indireta a partir da raiz cúbica da resistência a compressão.

**Figura 2.18: Fatores que influenciam no mecanismo da flexo-cortante – EUROCODE 2 e NBR14861**

EUROCODE 2: 2004	
<i>taxa de armadura</i>	<i>efeito da protensão</i>
$V_{Rd1} = \left\{ 0,18 \left[ \frac{1 + \sqrt{200/d}}{d} \right]^3 \sqrt{100 \cdot \rho_1 \cdot f_{ctk}} \right\} \cdot b_w \cdot d + 0,15 \sigma_{cp} \cdot b_w \cdot d$	
<i>Fator escala</i>	<i>tensão de tração</i>
NBR 6118:2014	
<i>tensão de tração</i>	<i>taxa de armadura</i>
$V_{Rd1} = \left[ 0,25 \cdot f_{ctd} \cdot \frac{(1,6 - d)}{d} (1,2 + 40 \cdot \rho_1) + 0,15 \sigma_{cp} \right] \cdot b_w \cdot d$	
<i>Fator escala</i>	<i>efeito da protensão</i>

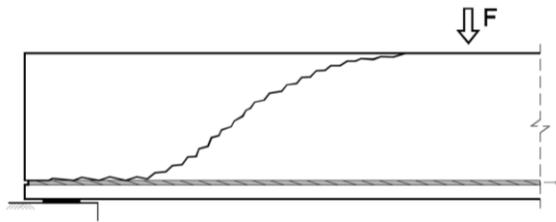
[Fonte: SANTOS (2014)]

### 2.3.3 TRAÇÃO DIAGONAL (“TENSION-SHEAR” OU “WEB-SHEAR”)

O mecanismo de ruptura por tração diagonal (objeto principal do presente trabalho) é caracterizado quando a capacidade resistente à tração do concreto é atingida, antes mesmo da formação de fissuras provocadas por flexão. No entanto, este fenômeno em geral ocorre em seções fora da região de influência das tensões de compressão, nas proximidades do apoio, mas, dentro da zona de transferência; ou seja, onde a força de protensão ainda não foi totalmente transmitida ao concreto.

A fissura crítica inicia-se sempre nas nervuras onde a espessura é mínima (ou próximo do mínimo) e com o acréscimo da carga esta se propaga em direção a armadura longitudinal, até a ruptura da ponte de aderência aço-concreto, de modo que a ruína completa costuma estar relacionada à falha por ancoragem. A Figura 2.19 exemplifica a forma de ruptura característica deste mecanismo.

**Figura 2.19: Ruptura por tração diagonal**



[Fonte: O autor]

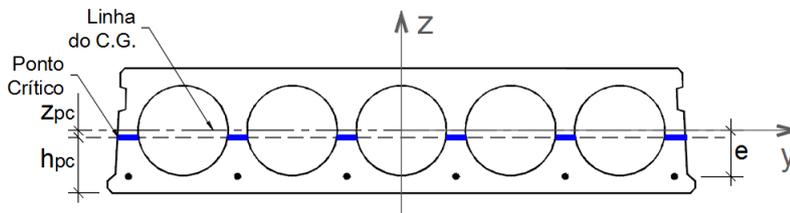
Para os elementos simplesmente armados, nas proximidades do apoio, as tensões principais dependem apenas das tensões de cisalhamento, já que as tensões axiais são baixas nesta região. Ao se considerar o efeito da protensão, há um distúrbio nas tensões nesta região que, somado ao efeito da transmissão gradual da protensão por aderência ao concreto, como é o caso de pré-tração, torna a análise bastante complexa. Sendo assim, para uma modelagem puramente analítica, se faz necessário utilizar de simplificações.

O modelo tradicionalmente adotado para representar este mecanismo considera nulo o acréscimo de tensões de cisalhamento devido à transferência da protensão ( $\frac{dP_i}{dx} = 0$ ). Esse modelo também adota outras simplificações de cálculo sendo:

- a) Tensões verticais devido às cargas verticais são desprezíveis ( $\sigma_z = 0$ );
- b) O ponto crítico está situado nas proximidades do centroide da seção ( $z_{pc} \approx 0$ );
- c) Validade da hipótese de *Navier-Bernoulli*;
- d) Ângulo da linha de ruptura com a linha que define o eixo longitudinal é de 45 graus.

Isso significa que o modelo tradicional considera uma seção transversal com alvéolos circulares, onde a posição do ponto crítico praticamente coincide com a posição do centro de gravidade (C.G.) da seção conforme apresentado na Figura 2.20.

**Figura 2.20: Posição do ponto crítico em alvéolos circulares**



[Fonte: O autor]

Com isso, as Equações (2.7 e (2.8 denotam a tensão normal  $\sigma_x$  e a tensão cisalhante  $\tau_{xz}$  atuantes no ponto crítico da seção.

$$\sigma_x = -\frac{P}{A} - \frac{M_y - P \cdot e}{I_y} \cdot z_{pc} \approx -\frac{P}{A} \tag{2.7}$$

$$\tau_{xz} = \frac{V_z \cdot S_{pc}}{b_{pc} \cdot I_y} \tag{2.8}$$

Onde:

$P$ : força de protensão;

$A$ : área de concreto da seção transversal da laje;

$e$ : excentricidade do cabo inferior em relação ao centroide da laje;

$M_y$ : momento atuante na seção analisada (em torno do eixo “y”);

$I_y$ : momento de inércia da seção em torno do eixo “y”;

$z_{pc}$ : coordenada do ponto analisado na direção do eixo “z”;

$h_{pc}$ : altura do ponto crítico em relação a face inferior da laje.

Da resistência dos materiais, assumindo que a máxima tensão principal de tração ( $\sigma_1$ ) ocorre na nervura do elemento quando esta atinge a capacidade resistente à tração do concreto, tem-se:

$$f_{ct} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x)^2 + 4 \cdot (\tau_{xz})^2} \quad (2.9)$$

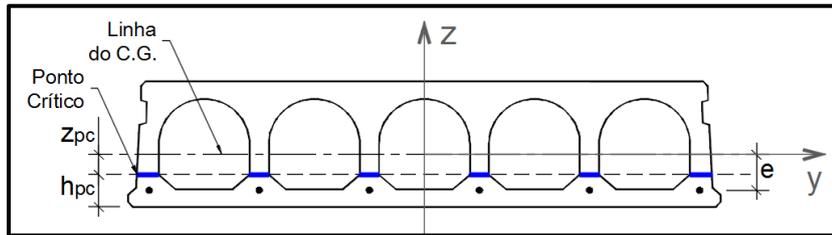
E substituindo as Equações (2.7 e (2.8 na Equação (2.9, tem-se:

$$V_{m\acute{a}x} = \frac{b_{pc} \cdot I_y}{S_{pc}} \cdot \sqrt{(f_{ct})^2 + \frac{P_i}{A} \cdot f_{ct}} \quad (2.10)$$

A Equação (2.10, ainda inspira a maioria dos códigos normativos que tratam do mecanismo de tração diagonal, porém, devido aos resultados contra a segurança publicados nos últimos anos (comparando com valores obtidos de estudos experimentais e modelagem numérica), os modelos normativos sofreram correções através de fatores de calibração, com o objetivo de garantir a segurança de projeto.

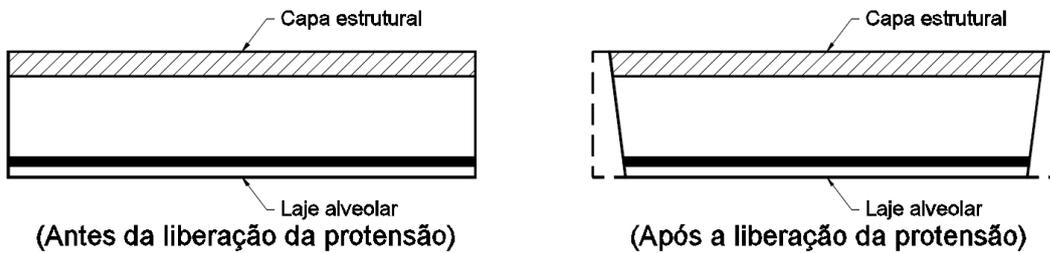
Alguns pesquisadores atribuíram a responsabilidade dos valores baixos da capacidade resistente das lajes alveolares estudadas à não consideração do efeito da variação da força de protensão na região do comprimento de transferência e, sobretudo, ao fator forma dos alvéolos. YANG (1994) destacou em seu trabalho que a posição do ponto crítico até então considerado fixo, no centróide da seção, passou a ser considerado variável, conforme características geométricas de cada perfil. No estudo, YANG (1994) mostrou que para alvéolos não-circulares, a posição do ponto crítico pode se afastar bastante do centro de gravidade da seção, provocando uma redução significativa da capacidade resistente ao cisalhamento do elemento (ver Figura 2.21). YANG (1994) e PAJARI (2005) também realçaram a necessidade de se considerar o acréscimo de tensões provenientes da introdução da protensão. A Figura 2.22 ilustra de maneira simplificada como ocorre a transferência da força de protensão ao concreto.

**Figura 2.21: Posição do ponto crítico em alvéolos não-circulares**



[Fonte: O autor]

**Figura 2.22: Efeito da transferência da força de protensão ao concreto**



[Fonte: Adaptado de PAJARI (2005)]

A partir de então os códigos normativos passaram a inserir em seus equacionamentos o fator  $\frac{l_x}{l_{pt}}$ , que leva em consideração o efeito da introdução de protensão e fatores redutores globais para considerar o fator forma. Isso será abordado de maneira mais clara posteriormente.

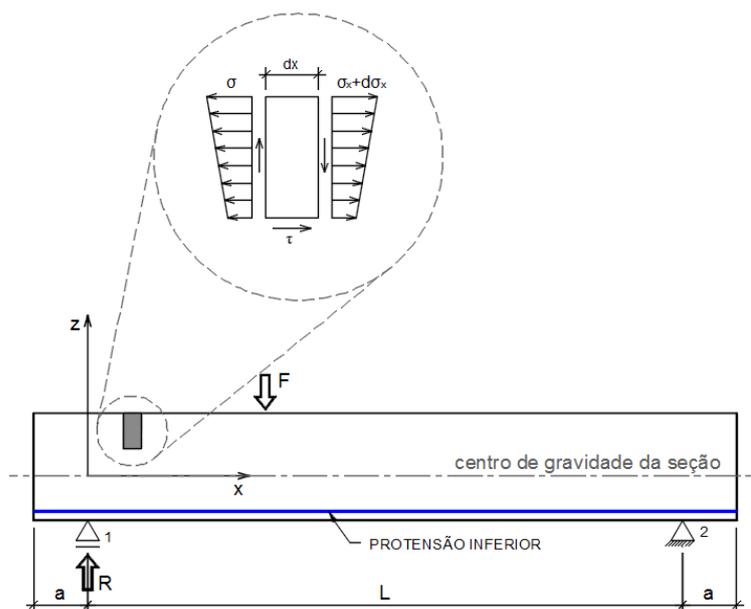
## 2.4 MÉTODO DE YANG

O modelo de cálculo proposto por YANG (1994) para o mecanismo de tração diagonal, por tratar de região não fissurada, adota como princípio básico a resistência dos materiais. Além disso, neste modelo são adotadas algumas considerações e simplificações, das quais algumas vêm desde o modelo tradicional, sendo elas:

- Tensões verticais devido às cargas verticais são desprezíveis ( $\sigma_z = 0$ );
- Momento atuante no ponto crítico  $x_{pc}$  pode ser aproximado pela equação:  $M_y(x_{pc}) \approx R \cdot x_{pc} \approx V_z \cdot x_{pc}$ , de modo que a cortante devido ao peso próprio é desprezada.
- Validade da hipótese de Navier-Bernoulli;
- Modelo válido para a região do comprimento de transferência  $l_{pt}$ ;
- Ângulo da linha de ruptura com a linha que define o eixo longitudinal é de 35 graus.

Para ilustrar, a Figura 2.23 representa o modelo de cálculo em questão. Em seguida são deduzidas as equações apresentadas pelo referido autor. Cabe destacar também que, para o desenvolvimento dos cálculos apresentados a seguir, foram adotadas as mesmas notações utilizadas por MARQUESI (2014).

**Figura 2.23: Diagrama de tensões conforme YANG (1994)**



[Fonte: Adaptado de MARQUESI (2014)]

Do diagrama de corpo livre sob estado plano de tensões, fazendo o equilíbrio das forças em da direção do eixo “x”, tem-se:

$$-\int_{z_0}^{z_t} \sigma_x \cdot dx \cdot b(z) \cdot dz + \tau_{xz} \cdot b(z) \cdot dx + \int_{z_0}^{z_t} \left( \sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} \cdot dx \right) \cdot b(z) \cdot dz = 0 \quad (2.11)$$

Sendo o limite inferior da integração  $z_0$  correspondente à base do elemento infinitesimal (de largura  $dx$ ) e o limite de integração superior correspondente ao topo ( $z_t$ ). Assim, da simplificação da Equação (2.11, tem-se:

$$\tau_{xz} = -\frac{1}{b(z)} \cdot \int_{z_0}^{z_t} \frac{d\sigma_x}{dx} \cdot dA \quad (2.12)$$

Onde:  $b(z) \cdot dz = dA$  e  $b(z)$  é a largura do elemento.

Da a hipótese de Navier-Bernoulli, considerando também o efeito da protensão, tem-se:

$$\sigma_x = -\frac{P}{A} + P \cdot e \cdot \frac{z}{I_y} - M_y \cdot \frac{z}{I_y} \quad (2.13)$$

Onde:

$z$ : coordenada do ponto analisado na direção do eixo “z”;

$\sigma_x < 0 \rightarrow$  compressão.

E derivando a Equação (2.13 em “x” e fazendo  $\frac{dM_y}{dx} = V_z$ , tem-se:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = -\frac{1}{A} \cdot \frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dx} \cdot e \cdot \frac{z}{I_y} - V_z \cdot \frac{z}{I_y} \quad (2.14)$$

Onde:  $\frac{dP}{dx}$  é a taxa de variação da protensão ao longo do comprimento da peça.

Inserindo a Equação (2.14 na Equação (2.12, tem-se:

$$\tau_{xz} = -\frac{1}{b(z)} \cdot \left[ -\frac{1}{A} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot \int_{z_0}^{z_t} dA + \frac{1}{I_y} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot e \cdot \int_{z_0}^{z_t} z \cdot dA - V_z \cdot \frac{1}{I_y} \cdot \int_{z_0}^{z_t} z \cdot dA \right] \quad (2.15)$$

Fazendo então:  $b(z) = b_0$  ,  $z = z_0$  ,  $\int_{z_0}^{z_t} dA = A_0$  e  $\int_{z_0}^{z_t} z \cdot dA = S_0$  a Equação (4.6 passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\tau_{xz} = \frac{1}{b_0} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot \left( \frac{A_0}{A} - \frac{e \cdot S_0}{I_y} \right) + \frac{V_z \cdot S_0}{b_0 \cdot I_y} \quad (2.16)$$

Onde:

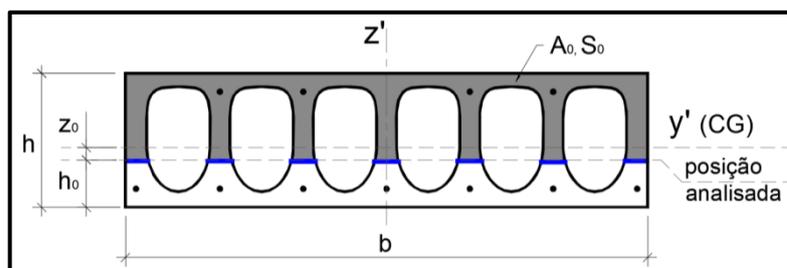
$b_0$ : largura da seção transversal na posição “z” analisada;

$z_0$ : posição do ponto analisado no eixo “z”;

$A_0$ : área acima do ponto no qual a seção é analisada (ver Figura 2.24);

$S_0$ : momento estático da área acima do ponto no qual a seção é analisada (ver Figura 2.24);

**Figura 2.24: Parâmetros da seção transversal**



[Fonte: Adaptado de PAJARI (2005)]

Observa-se que a Equação (2.16) é composta de dois termos, sendo que o primeiro corresponde ao acréscimo de tensão devido à protensão, e o segundo termo se refere ao carregamento.

Da simplificação apresentada no início, em que o autor propõe:  $M_y(x_{pc}) \approx V_z \cdot x_{pc}$ , substituindo na Equação (2.13), e considerando as Equações (2.13) e (2.16) avaliadas no ponto crítico (com índice “pc”), tem-se:

$$\sigma_x = -\frac{P}{A} + P \cdot e \cdot \frac{z_{pc}}{I_y} - V_z \cdot x_{pc} \cdot \frac{z_{pc}}{I_y} \quad (2.17)$$

$$\tau_{xz} = \frac{1}{b_{pc}} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot \left( \frac{A_{pc}}{A} - \frac{e \cdot S_{pc}}{I_y} \right) + \frac{V_z \cdot S_{pc}}{b_{pc} \cdot I_y} \quad (2.18)$$

Agora, substituindo as Equações (2.17) e (2.18) na Equação (2.9), simplificando e agrupando os termos, tem-se:

$$\left( \frac{S_{pc}}{b_{pc} \cdot I_y} \right)^2 \cdot V_z^2 + \left[ 2 \cdot \frac{S_{pc}}{b_{pc}^2 \cdot I_y} \cdot \left( \frac{A_{pc}}{A} - \frac{e \cdot S_{pc}}{I_y} \right) \cdot \frac{dP}{dx} - f_{ct} \cdot x_{pc} \cdot \frac{z_{pc}}{I_y} \right] \cdot V_z + \left\{ \left[ \left( \frac{A_{pc}}{A} - \frac{e \cdot S_{pc}}{I_y} \right) \cdot \frac{1}{b_{pc}} \cdot \frac{dP}{dx} \right]^2 - f_{ct} \cdot \frac{P}{A} + f_{ct} \cdot P \cdot e \cdot \frac{z_{pc}}{I_y} - f_{ct}^2 \right\} = 0 \quad (2.19)$$

Assim, resolvendo a Equação (2.19) (de 2º grau em  $V_z$ ), Yang obteve a Equação (2.20) apresentada a seguir:

$$V_{z,máx} = \frac{b_{pc} \cdot I_y}{S_{pc}} \cdot \left[ \frac{b_{pc}}{2 \cdot S_{pc}} \cdot f_{ct} \cdot x_{pc} \cdot z_{pc} + \frac{S_{pc}}{b_{pc}} \cdot \left( \frac{e}{I_y} - \frac{A_{pc}}{S_{pc} \cdot A} \right) \cdot \frac{dP}{dx} \right] + \frac{b_{pc} \cdot I_y}{S_{pc}} \cdot \left[ \left( \frac{b_{pc}}{2 \cdot S_{pc}} \cdot f_{ct} \cdot x_{pc} \cdot z_{pc} \right)^2 + \left( \frac{e}{I_y} - \frac{A_{pc}}{S_{pc} \cdot A} \right) \cdot f_{ct} \cdot x_{pc} \cdot z_{pc} + \left( \frac{1}{A} - \frac{e \cdot z_{pc}}{I_y} \right) \cdot P \cdot f_{ct} + f_{ct}^2 \right]^{1/2} \quad (2.20)$$

Porém, percorrendo os passos do desenvolvimento algébrico é obtida a Equação (2.21) que difere da Equação (2.19 (expressão geral obtida no trabalho original do autor) pelo termo  $\frac{dP}{dx}$  (em destaque).

$$V_{z,máx} = \frac{b_{pc} \cdot I_y}{S_{pc}} \cdot \left[ \frac{b_{pc}}{2 \cdot S_{pc}} \cdot f_{ct} \cdot x_{pc} \cdot z_{pc} + \frac{S_{pc}}{b_{pc}} \cdot \left( \frac{e}{I_y} - \frac{A_{pc}}{S_{pc} \cdot A} \right) \cdot \frac{dP}{dx} \right] + \frac{b_{pc} \cdot I_y}{S_{pc}} \cdot \left[ \left( \frac{b_{pc}}{2 \cdot S_{pc}} \cdot f_{ct} \cdot x_{pc} \cdot z_{pc} \right)^2 + \left( \frac{e}{I_y} - \frac{A_{pc}}{S_{pc} \cdot A} \right) \cdot \left( \frac{dP}{dx} \right) \cdot f_{ct} \cdot x_{pc} \cdot z_{pc} + \left( \frac{1}{A} - \frac{e \cdot z_{pc}}{I_y} \right) \cdot P \cdot f_{ct} + f_{ct}^2 \right]^{1/2} \quad (2.21)$$

Tanto na Equação (2.20 quanto na Equação (2.21,  $V_z$  recebe a notação  $V_{z,máx}$  já que, ao ser avaliado no ponto crítico, passa a ser máximo valor possível que a cortante pode atingir sem exceder a resistência a tração do concreto.

A partir de modelagem numérica com uso de programa computacional de elementos finitos, e também com base em resultados experimentais, o autor conclui que as tensões avaliadas em pontos próximos ao apoio ocorrem ao longo de uma linha inclinada com um ângulo de 35 graus com o eixo horizontal, partindo do centro do apoio; a esta linha é dado o nome de “linha de ruptura”. E complementa ainda que acima desta linha inclinada não há risco de falha por cisalhamento devido à influência das tensões verticais de compressão nas proximidades do apoio. Fora desta região o mesmo autor recomenda que todos os pontos localizados sobre a linha de ruptura, que atravessam a nervura, devem ser verificados. Assim, a posição horizontal do ponto crítico é calculada como:

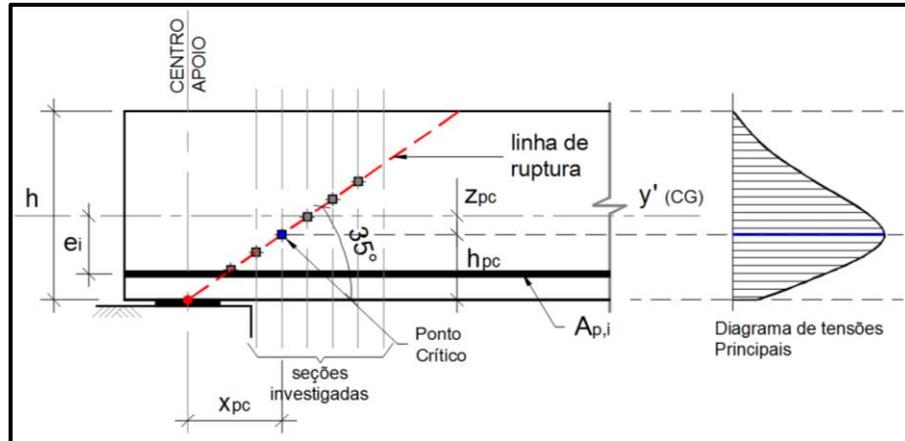
$$x_{pc} = \frac{h_{pc}}{\tan(35^\circ)} \approx \frac{h_{pc}}{0,7} \quad (2.22)$$

Onde:

$h_{pc}$ : altura do ponto crítico em relação a face inferior da laje.

A título de ilustração do que propõe o autor, a Figura 2.25 destaca que, ao contrário do que dizia o modelo tradicional, as tensões críticas não necessariamente coincidem sempre com a posição do centroide da seção transversal do elemento.

**Figura 2.25: Localização do ponto crítico**



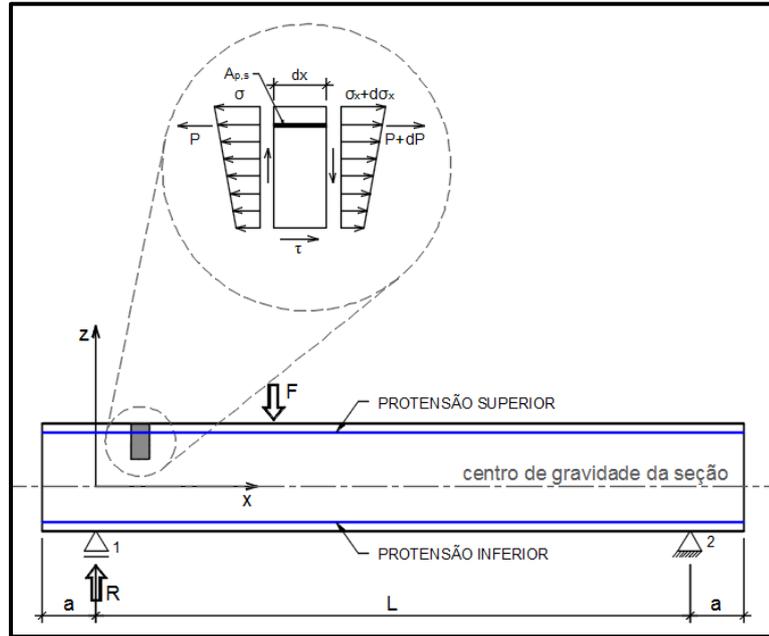
[Fonte: O autor]

Por fim, avaliando a distância  $h_{pc}$  para diversos tipos de laje, para alvéolos circulares e oblongos, é destacado nesse trabalho que a posição do ponto crítico deve estar situada no encontro da linha de ruptura com o ponto situado na posição onde a nervura atinge sua espessura mínima.

## 2.5 MÉTODO DE PAJARI

O modelo de cálculo proposto por PAJARI (2005) para o mecanismo de tração diagonal complementa o modelo de Yang com a consideração da armadura em camadas, contemplando também a utilização da armadura superior (quando necessário) conforme Figura 2.26 apresentada a seguir. Todas as simplificações e considerações do modelo apresentadas no Método de Yang são igualmente adotadas para este Método de Pajari.

Figura 2.26: Diagrama de tensões conforme PAJARI (2005)



[Fonte: Adaptado de PAJARI (2005)]

Da Equação (2.13, e considerando agora a protensão aplicada em “n” camadas, tem-se:

$$\sigma_x = -\frac{1}{A} \cdot \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{i=1}^n P_i \cdot e_i \cdot \frac{z}{I_y} - M_y \cdot \frac{z}{I_y} \quad (2.23)$$

Onde:

$e_i$ : excentricidade da camada “i” de protensão, sendo positiva se a camada estiver abaixo do C.G. da seção e negativa em caso contrário;

$P_i$ : é a força de protensão de cada camada “i”, sendo:  $1 \leq i \leq n$  (protensão inferior ou superior);

Derivando a Equação (2.13 em “x” e fazendo  $\frac{dM_y}{dx} = V_z$ , tem-se:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = -\frac{1}{A} \cdot \sum_i \frac{dP_i}{dx} + \frac{z}{I_y} \cdot \left[ \sum_i \left( e_i \cdot \frac{dP_i}{dx} \right) - V_z \cdot \frac{z}{I_y} \right] \quad (2.24)$$

Inserindo a Equação (2.24) na Equação (2.12), fazendo também:  $b_{(z)} = b_0$ ,  $z = z_0$ ,  $\int_{z_0}^{z_t} dA = A_0$  e  $\int_{z_0}^{z_t} z \cdot dA = S_0$ , com as mesmas notações utilizadas no item 2.6, tem-se:

$$\tau_{xz} = \frac{1}{b_0} \cdot \left[ \frac{A_0}{A} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{dP_i}{dx} - \frac{S_0}{I_y} \cdot \sum_{i=1}^n \left( e_i \cdot \frac{dP_i}{dx} \right) + \frac{S_0}{I_y} \cdot V_z - \sum_{j=1}^n \frac{dP_j}{dx} \right] \quad (2.25)$$

Onde:

$\frac{dP_i}{dx}$ : gradiente de protensão de cada camada “i” de protensão (acima ou abaixo do C.G. da seção);

$\frac{dP_j}{dx}$ : gradiente de protensão de cada camada “j” de protensão que estiver acima do C.G. da seção (protensão superior).

E a Equação (2.25) avaliada no ponto crítico igualmente recebe o índice “pc”, e a passa a ser escrita como:

$$\tau_{xz} = \frac{1}{b_{pc}} \cdot \left[ \frac{A_{pc}}{A} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{dP_i}{dx} - \frac{S_{pc}}{I_y} \cdot \sum_{i=1}^n \left( e_i \cdot \frac{dP_i}{dx} \right) + \frac{S_{pc}}{I_y} \cdot V_z - \sum_{j=1}^n \frac{dP_j}{dx} \right] \quad (2.26)$$

O processo de cálculo daqui em diante segue exatamente o roteiro apresentado no item 2.6 para o Método de Yang, até que se obtenha a expressão da cortante máxima resistente ( $V_{z,máx}$ ), porém, com uma modificação: o ponto de partida da linha de ruptura para o modelo de Pajari passa a ser a extremidade interna do apoio.

Neste mesmo documento onde o autor apresenta essa metodologia de cálculo melhorada do Modelo de Yang é feita uma análise comparativa da sua eficiência na previsão de carga para ensaios de cisalhamento além de submeter este modelo a comparação com aquele preconizado pelo EUROCODE 2. Para tanto o referido autor realiza 49 ensaios em lajes com espessura de 200 a 500mm.

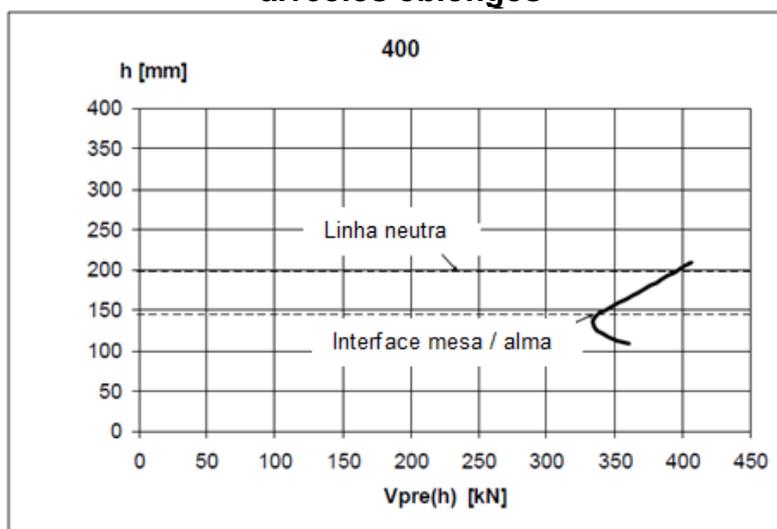
Das conclusões obtidas desta pesquisa, é destacado que o modelo proposto apresenta boa consistência nos resultados para todos os tipos de laje, tanto para alvéolos circulares quanto para alvéolos com nervuras paralelas, sendo que para

este último o desempenho do método é bastante satisfatório. Apenas para algumas lajes o método apresenta uma superestimação de resultados em torno de 10%, porém, o autor chama atenção para incertezas acerca da qualidade das informações obtidas da produção dos protótipos, e recomenda que mais ensaios sejam feitos posteriormente. O autor também conclui que tanto no modelo do EUROCODE 2 quanto no modelo proposto, pequenas variações de protensão influenciam muito pouco nos valores de cálculo previstos.

Quanto a posição do ponto crítico, ao contrário do modelo do EUROCODE 2 que considera sempre no C.G. da seção transversal, para o modelo de cálculo de Yang-Pajari esta localização não é evidente, porém, ela é obtida sempre que a tensão principal de tração na seção atinge a resistência a tração do concreto. Há situações, segundo o referido autor, que esta localização é bem clara, especialmente quando se trata de alvéolos entre nervuras paralelas ou alvéolos circulares, porém, em outras, não. Os ensaios realizados puderam confirmar de modo satisfatório as posições críticas previstas no modelo proposto.

É possível notar através da Figura 2.27, que apresenta os resultados dos ensaios para laje de 400mm de espessura com alvéolos oblongos, que a posição do ponto crítico (estimada no modelo e confirmada nos ensaios) pode de fato não estar no centróide e também pode não coincidir com a posição de transição entre o talão inferior o início da nervura.

**Figura 2.27: Posição do ponto crítico – Lajes com alvéolos oblongos**



[Fonte: Adaptado de PAJARI (2005)]

Em geral, sempre que o ponto crítico se aproxima da face inferior do elemento, tão menos resistente a seção é quanto ao cisalhamento. Desta maneira, o autor realça a grande importância que a forma dos alvéolos tem sobre este estado limite.

## 2.6 PESQUISAS REALIZADAS NO BRASIL

Serão apresentadas a seguir algumas das principais pesquisas nacionais relacionadas ao tema.

### **ARAÚJO (2011):**

Em sua tese de doutorado o autor desenvolve um programa computacional para dimensionamento e verificação de lajes alveolares pré-tracionadas isostáticas e hiperestáticas considerando os estados limites (últimos e de serviço). Neste programa, é possível considerar os efeitos reológicos na interação aço-concreto por meio de funções de relaxação. Com isso, é permitido fazer uma avaliação das etapas de carregamento considerando as fases construtivas da obra.

Neste trabalho foram comparados resultados obtidos de análise numérica não linear, considerando a aderência entre armadura e concreto, com uma metodologia analítica de verificação da resistência à força cortante baseada na *Modified Compression Field Theory* (MCFT) e nos conceitos de segurança do EUROCODE 2.

Para efeito de comparação, o autor reuni 129 ensaios experimentais de lajes alveolares obtidos em outras literaturas verificando bom desempenho dos processos analíticos utilizados. Segundo o autor, houve boa aderência dos resultados obtidos comparados aos modelos da norma canadense CSA A23.3:2004 e EUROCODE 2:2004, respectivamente.

**CATÓIA (2011):**

Neste trabalho, é apresentada uma análise teórico-experimental do comportamento de lajes mais comumente utilizadas no mercado brasileiro – caracterizadas por apresentarem alvéolos circulares, pequenas espessuras e elevados níveis de protensão – quanto ao cisalhamento em regiões previamente fissuradas por flexão.

Com uso das expressões presentes nos principais códigos normativos, mais especificamente, a norma Brasileira NBR6118:2003, o ACI-318:2008, o EUROCODE 2:2004 e a norma europeia EN1168:2005, é realizado um estudo analítico e comparado posteriormente com resultados experimentais extraídos de 96 protótipos de laje fabricadas por quatro empresas brasileiras, cujas espessuras variam de 15 a 26cm.

Das 96 lajes, 31 são ensaiadas a flexão e 65 ao cisalhamento sendo que parte das unidades é ensaiada sem capa, parte com capa e, por fim, alguns elementos são avaliados considerando o preenchimento de alvéolos. A maioria dos ensaios é feita conforme procedimento padrão CEB-FIB (1992), ou seja, considerando a carga aplicada a 2,5h da extremidade para ensaios de cisalhamento e a 5,0h (ou 1m da extremidade) para ensaios de flexão. Também são realizados alguns ensaios exploratórios a fim de avaliar a influência da variação do ponto de aplicação da força e do comprimento efetivo de apoio, além de avaliar a importância do tratamento da superfície de lajes quando da consideração da capa para melhoria do desempenho a flexão e cisalhamento.

Dentre as conclusões apresentadas pela autora, é destacado o fato de que para a tipologia de laje ensaiada (lajes pouco espessas e com alvéolos circulares), o mecanismo de ruptura que mais se adequa aos resultados é o de flexo-cortante, sendo que o modelo apresentado pela NBR6118:2003 é considerado adequado para uso em projetos. Também é mostrado através de um protótipo ensaiado com balanço de 1,0m na extremidade da aplicação da força, que eliminada a região de regularização da protensão, é possível aumentar expressivamente a capacidade ao cisalhamento. Neste caso os modelos de flexo-cortante apresentam resultados excessivamente conservadores.

Na maioria das lajes ensaiadas é possível constatar grande influência de um mecanismo resistente sobre o outro, seja flexão sobre cisalhamento ou vice-versa, o que pode ser observado pelas relações  $V_{exp} / V_{cal}$  apresentadas.

Também é possível constatar a importância do tratamento adequado da superfície dos elementos pré-fabricados, na interface com a capa (para seção composta), e como a má execução da capa pode resultar em perda de capacidade resistente ao cisalhamento. Quando a capa apresenta boa aderência à laje pré-fabricada, há um ganho expressivo de capacidade resistente ao cisalhamento e à flexão. Assim como da execução da capa, é concluído que o preenchimento dos alvéolos para este tipo de laje pode, se bem executado, resultar em ganho significativo da capacidade resistente tanto ao cisalhamento quanto à flexão conforme resultados experimentais apresentados também neste trabalho.

#### **FRANÇA (2012):**

Nesta dissertação de mestrado é realizado um estudo experimental para lajes de 265mm de espessura com alvéolos circulares, considerando ou não o preenchimento de alvéolos e a contribuição da capa estrutural. Os resultados obtidos são comparados com aqueles encontrados por meio dos modelos presentes nas normas brasileiras (NBR6118:2003 e NBR14861:2011).

Os valores analíticos obtidos dos modelos normativos e comparados com os resultados experimentais realçaram um conservadorismo excessivo dos valores calculados com uso do modelo da NBR14861:2011 em relação à NBR6118:2011, para lajes de 265mm de espessura. A autora atribui essa disparidade ao uso indevido do coeficiente redutor “ $\alpha$ ” aplicado sobre a parcela de protensão ( $\sigma_{cp}$ ) da equação, que por sua vez já estaria minorado com o fator “0,15” na mesma expressão.

#### **MARQUESI (2014):**

Nesta pesquisa o autor sugere uma relação geométrica para computar a influência da geometria dos alvéolos na capacidade resistente a cortante para lajes

cujos mecanismo de ruptura é a tração diagonal. A esta relação o referido autor dá o nome de “coeficiente  $\beta$ ” (Equação (2.27), e sugere a aplicação deste como um fator multiplicador global nas equações presentes no ACI-318:2011 e EUROCODE 2 (2004).

$$\beta = \varphi + \frac{h_{pc} - d_{p,i}}{h} \leq 1,0 \quad (2.27)$$

Onde:

$\beta$ : coeficiente que considera indiretamente a redução de resistência a tração diagonal do elemento pelas tensões de cisalhamento oriundas da introdução de protensão;

$\varphi$ : Fator de ajuste (0,5 para o EUROCODE 2 e 0,6 para o ACI-318);

$h_{pc}$ : altura do ponto crítico, definida para esta proposta, como a menor distância da borda inferior da laje até a menor largura da nervura (semelhante ao que propõe YANG (1994));

$d_{p,i}$ : distância da borda inferior da laje até o centro geométrico das armaduras longitudinais inferiores;

$h$ : altura total da laje sem capa.

Como sugestão para a norma brasileira, o autor sugere um ajuste no cálculo da parcela  $\tau_{Rd}$  alterando o valor da constante de 0,25 para 0,19. Também sugere uma equação para o cálculo da cortante em região não fissurada por flexão, realçando a necessidade de um bom controle de qualidade de fábrica para a consideração deste modelo, haja vista a fragilidade deste mecanismo de ruptura. Abaixo segue a expressão sugerida pelo autor (as demais notações seguem o que está previsto na NBR14861:2011 – ver item 2.10):

$$V_{calc} = \beta \cdot \frac{b \cdot I_y}{S_y} \cdot \sqrt{f_{ct}^2 + \alpha \cdot \sigma_{cp} \cdot f_{ct}}; \text{ onde: } \beta = 0,5 + \frac{h_{pc} - d_{p,i}}{h} \leq 1,0 \quad (2.28)$$

O autor também avalia neste trabalho, mediante ensaios laboratoriais, a influência do comprimento de apoio na capacidade resistente ao cisalhamento e

recomenda que, sempre que possível, se utilize apoios maiores de modo que seja possível considerar uma maior parcela da força de protensão na região de introdução da carga. Nessa pesquisa também o autor conclui que o comprimento de transferência preconizado pela norma brasileira ( $60\phi$ ) é uma boa estimativa.

## 2.7 PESQUISAS INTERNACIONAIS

A seguir são apresentadas algumas das principais pesquisas nacionais relacionadas ao tema.

### **GHOSH E HAWKINS (2005):**

Nesta pesquisa são apresentados resultados de ensaio de cisalhamento de unidades de laje alveolar com espessura acima de 320mm a fim de mostrar que o modelo de cálculo para o mecanismo de tração diagonal preconizado pela norma americana (ACI-318) não representam muito bem o comportamento de lajes com tais características.

Os autores comparam os resultados dos ensaios realizados nos EUA com resultados realizados na Europa para lajes com espessura de até 410mm e salientam que os resultados abaixo do esperado devem estar relacionados com a geometria. Com base nisso, eles defendem a utilização de fator redutor da capacidade resistente para lajes com espessura superior a 320mm.

### **LINDSTRÖM (2007):**

Neste trabalho é sugerida uma equação geral para geração da forma dos alvéolos que, associado ao modelo da norma EN1168:2008 (que teve como referência o estudo de PAJARI (2005)), permitiu avaliar graficamente a influência da forma dos alvéolos (curvos) sobre a capacidade resistente ao cisalhamento de lajes alveolares protendidas.

$$\left(\frac{x}{r_h}\right)^N + \left(\frac{z}{r_v}\right)^N = 1 \quad (2.29)$$

A Equação (2.29 relaciona valores de raio de curvatura (horizontal e vertical), e coeficientes de forma ( $N$ ).

Onde:

$x$  e  $z$ : são coordenadas horizontais e verticais, respectivamente, que define os pontos da curva.

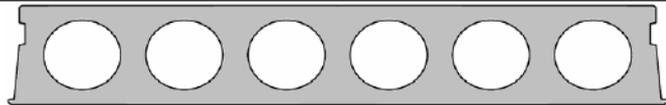
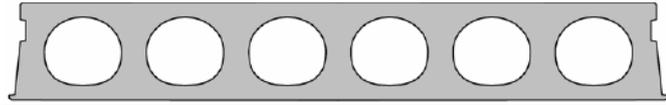
$r_h$ : raio horizontal da curva;

$r_v$ : raio vertical da curva;

$N$ : coeficiente de forma.

A partir desta equação, é possível desenhar formas curvas fechadas que variam desde círculos, elipses, até figuras mistas cuja curvatura da metade superior pode ser diferente da metade inferior conforme o coeficiente de forma  $N$  escolhido. A seguir são apresentadas algumas das possibilidades de geometria que pode ser obtida aplicando coeficientes de forma diferentes para uma mesma tipologia de laje.

**Figura 2.28: Variação da forma dos alvéolos para laje alveolar de 200mm de espessura**

	Height = 200 mm Tfl_top = 30 mm Tfl_bot = 30 mm Bw = 45.67 mm $N_{top} = N_{bot} = 2$
	$N_{top} = 2$ $N_{bot} = 2.5$
	$N_{top} = 2$ $N_{bot} = 3$
	$N_{top} = 2$ $N_{bot} = 4$
	$N_{top} = 2$ $N_{bot} = 8$
	$N_{top} = 4$ $N_{bot} = 4$
	$N_{top} = 2.5$ $N_{bot} = 1.5$

[Fonte: LINDSTRÖM (2007)]

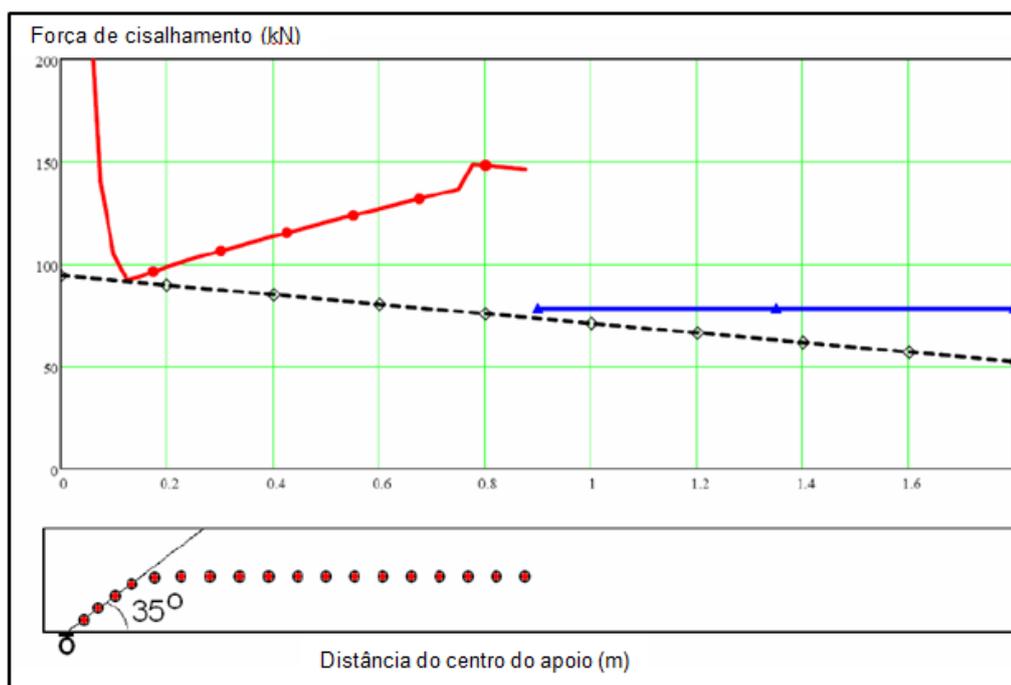
No tocante ao cálculo da capacidade resistente ao cisalhamento, o autor também destaca que a equação referente ao modelo de tração diagonal apresentado no EUROCODE 2 é adequada somente se:

- A menor espessura da nervura ( $b_w$ ) coincide com o centro geométrico da seção transversal;
- A seção transversal analisada está situada fora da região do comprimento de transferência de protensão.

Para demais situações, o autor recomenda recorrer ao método de Yang-Pajari, já que se percebeu por meio de outras pesquisas, que a variação da espessura da alma ao longo da altura seção transversal, bem como a localização vertical dos cabos de protensão, confere uma influência significativa na capacidade resistente ao cisalhamento em região de transferência de protensão.

Para exemplificar a aplicação do método para determinação da capacidade resistente à cortante, o autor considera uma laje de 200mm de espessura, biapoiada, submetida a carregamento uniforme. Nesta figura são apresentadas as forças resistentes (linhas sólidas) e as forças atuantes (linha tracejada).

**Figura 2.29: Distribuição da força cortante resistente e solicitante (valores de projeto) para uma laje de 200mm de espessura.**



[Fonte: Adaptado de LINDSTRÖM (2007)]

A linha vermelha corresponde ao modelo de tração diagonal e a linha azul corresponde ao modelo de flexo-cortante do EUROCODE 2. Os pontos indicados se referem às posições investigadas para cada seção nas proximidades do apoio.

O autor ressalta também a necessidade de se avaliar a interação entre os mecanismos de falha por flexão e cisalhamento já que há situações em que pode haver forte interação entre eles.

### **GIRHAMMAR E PAJARI (2008):**

Neste trabalho é estudada a influência da capa na capacidade resistente ao cisalhamento de lajes alveolares protendidas. O objetivo era estudar possibilidade de se reduzir a espessura da laje pré-fabricada em função do acréscimo de concreto moldado no local. Para os ensaios são utilizadas unidades de laje alveolar com 200mm de espessura ( $f_{ck}=50\text{MPa}$ ) e capa estrutural com 80mm de espessura de concreto ( $f_{ck}=25\text{MPa}$ ) ora convencional, ora reforçado com fibras.

Neste trabalho o autor defende que a capa estrutural pode ser uma alternativa interessante, economicamente, e que o aumento na capacidade resistente ao cisalhamento pode chegar a aproximadamente 35% quando comparado com a laje isolada, desde que seja executada de maneira adequada. O mecanismo de ruptura verificado nos ensaios foi o de tração diagonal.

### **BERTAGNOLI E MANCINI (2009):**

Neste trabalho, é feita uma abordagem comparativa entre os modelos de cálculo apresentados no EUROCODE 2 e CEB-FIP (1992) com os resultados de ensaios de lajes a cisalhamento feitos em vários laboratórios de pesquisa, dos mais conceituados da Europa. São reunidos neste trabalho resultados de 129 amostras de laje com espessuras diversas variando de 155mm a 500mm, e perdas de protensão de 5% e 15%, à partir de publicações disponibilizadas entre os anos de 1979 até 2005.

Os autores fazem uma análise da confiabilidade dos modelos de cálculo normalizados em relação à aplicabilidade tanto no que se refere ao projeto, quanto na avaliação de desempenho dos elementos em laboratório. Dentre as principais conclusões obtidas pelo autor é que do ponto de vista de projeto, se os modelos forem utilizados de modo adequado, os resultados obtidos estarão sempre a favor da segurança

Os valores encontrados para a relação entre a capacidade resistente das lajes (calculados considerando a resistência dos materiais minorada pelos fatores de segurança) e a resistência última obtida dos ensaios variam de 0,54 a 0,58, com coeficiente de variação de 23% e 22%, respectivamente. Porém, devido à mudança das características dos materiais (alteradas na minoração da resistência), é fato que os mecanismos de ruptura observados em laboratório nem sempre são condizentes com os modelos de cálculo normalizados, segundo os autores. Do ponto de vista do uso dos modelos para avaliação de desempenho de elementos de laje alveolar, a relação entre a resistência característica calculada (considerando a média da resistência dos materiais) e a resistência última obtida dos ensaios, varia entre 0,83 e 0,89, com coeficiente de variação 25% para ambos.

Os autores também concluem no trabalho que os efeitos das perdas de protensão não são determinantes no cálculo da capacidade resistente ao cisalhamento. Ainda para efeito de projeto eles recomendam que antes mesmo da definição do modelo de cálculo para capacidade resistente ao cisalhamento (seja flexo-cortante ou tração diagonal), o projetista deve se atentar para outros efeitos importantes e que merecem igual destaque, sendo eles: a introdução de protensão, a ancoragem da armadura ativa e o valor do momento de fissuração em cada seção. Por fim, a última recomendação dos autores é que, sempre que possível, sejam estendidos os comprimentos de apoio das lajes para que os esforços cisalhantes críticos ocorram em regiões onde um nível maior de protensão já foi introduzido.

#### **TRUNDERUNG (2011):**

Neste trabalho, o autor estuda a capacidade ao cisalhamento de lajes alveolares protendidas fabricadas por extrusão. Através de resultados obtidos

experimentalmente, é feita a comparação do modelo da norma canadense com o da norma americana (modelo de flexo-cortante). Para tanto foram ensaiados 3 grupos de laje com 203 (série-200), 254 (série-250) e 305mm (serie-300) de espessura variando nível de protensão, desde protensão leve até protensões próximas do limite das seções, e também variando o comprimento de apoio (38mm e 63mm). Os ensaios são realizados conforme prescrição da EN1168:2008.

As principais conclusões do autor são as seguintes:

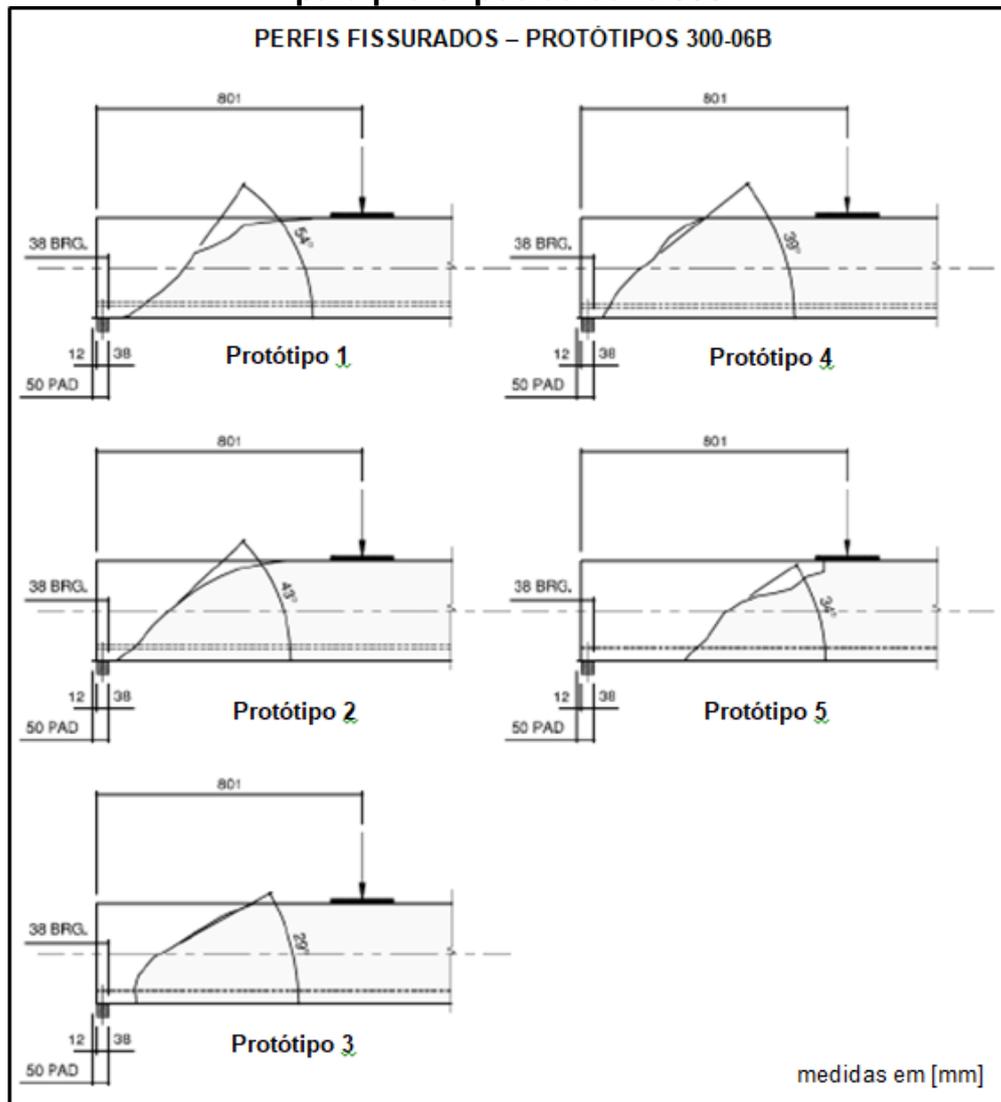
- A equação proposta pela CSA A23.3:2004 é adequada somente para falha de flexo-cortante onde se tem comprimento de ancoragem satisfatório. Quando isso não é possível, o acréscimo de tensões nas cordoalhas imediatamente após o surgimento das primeiras fissuras de flexão, são superiores a capacidade resistente da ancoragem e a ruptura ocorre de maneira repentina. Como a norma CSA A23.3 determina que a ruptura deva ocorrer de forma dúctil, não resta alternativa a não ser a utilização de estribos verticais para costurar a região fissurada. Porém, a utilização de estribos inviabiliza processo produtivo de lajes alveolares;
- O efeito do aumento da força de protensão é muito mais significativo quando aplicado na formulação da norma CSA A23.3 em relação ao ACI-318, sendo que norma canadense penaliza a capacidade resistente a cortante de lajes com baixo nível de protensão. Lajes da série de 200 e 250mm com baixo nível de protensão apresentaram resultados experimentais 60% a 100% maiores em relação ao calculado enquanto que para uso de protensão elevada, as lajes das séries de 200 e 300 apresentaram resultados experimentais semelhantes ao calculado e para as lajes da série de 250 os resultados experimentais chegaram a ser 40% superiores que o teórico;
- É relatado que a formulação apresentada na norma CSA A23.3, mesmo para regiões fissuradas por flexão apresenta grau excessivo de conservadorismo quando comparado com resultados experimentais deste trabalho;
- É relatado que nos ensaios que lajes com menores graus de protensão apresentaram linha de ruptura mais inclinada quando comparando com as lajes com graus elevados de protensão. Também houve uma variação grande nas seções de ruptura sendo que nenhum dos códigos normativos citados

nesta pesquisa (CSA A23.3, ACI-318, EN 1168) previu de forma satisfatória a posição da seção crítica;

- Para as três séries ensaiadas (200, 250 e 300), os modelos de cálculo do ACI-318 representam bem os modos de ruptura observados nos ensaios para diferentes níveis de protensão e largura de apoio. Para as lajes da série 200 e 250, são ensaiados protótipos com protensão leve e alta sendo que, em geral, os protótipos com baixo nível de protensão sofreram ruptura por flexo-cortante, enquanto que os de elevado nível de protensão sofreram ruptura por tração diagonal;
- Multiplicando a área de armadura ativa por 4, há um acréscimo de 39% para lajes com apoio de 63mm e aumento de 33% para lajes com apoio de 38mm, considerando lajes da série 250;
- Para resolver o problema de ductilidade das peças que falham por cisalhamento próximo ao apoio, o autor propõe inserir um coeficiente de redução da capacidade resistente da equação da norma a fim de minimizar o esforço atuante na ancoragem.

Nesse trabalho também, o autor atenta para o cuidado da realização do mapeamento do caminho da fissura crítica para cada um dos protótipos ensaiados, destacando inclusive, o ângulo da fissura principal (próximo a situação de colapso), em relação à linha do centróide, para protótipos das três séries estudadas, conforme exemplificado na Figura 2.30, para protótipo da série 300.

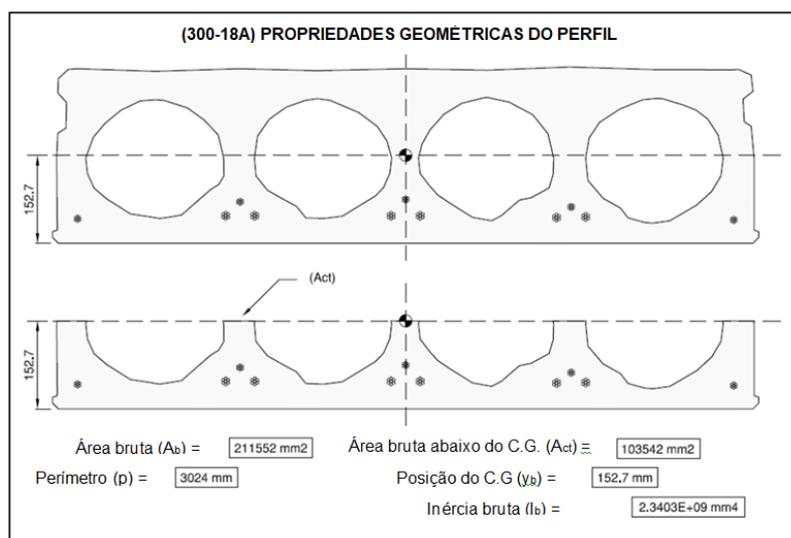
**Figura 2.30: Ângulo de inclinação da fissura crítica obtidos do ensaio para protótipos da série 300**



[Fonte: TRUDERUNG (2011)]

O autor destaca também o fato de haver variações de forma das seções decorrente do processo produtivo, o que pode ser exemplificado na Figura 2.31. Para os cálculos apresentados pelo pesquisador nesse trabalho foram corrigidas as propriedades geométricas de cada elemento.

**Figura 2.31: Propriedades geométricas consideradas no cálculo para protótipo da série 300 – Variação geométrica decorrente do processo produtivo.**



[Fonte: Adaptado de TRUDERUNG (2011)]

### BRUNESI E NASCIMBENE (2015):

Neste trabalho é estudada a capacidade resistente ao cisalhamento de lajes alveolares protendidas com alvéolos circulares e não-circulares e espessuras de 200, 265, 320, 370, 400 e 500mm. Para isso é feita uma análise não-linear a partir de modelagem em elementos finitos cujos dados foram comparados com resultados experimentais e analíticos obtidos por meio dos modelos apresentados nos principais códigos normativos (EUROCODE 2, EN 1168, ACI-318 e CSA A23.3).

Os autores comprovam neste trabalho que há imprecisão dos métodos de cálculo propostos nos códigos normativos quando são utilizados para estimar a capacidade resistente ao cisalhamento de lajes alveolares cuja seção transversal não é circular, onde a tensão principal crítica ocorre abaixo do centro de gravidade e cujo mecanismo de ruptura crítica é o de tração diagonal.

## 2.8 MODELOS NORMATIVOS

A seguir são apresentados e discutidos os modelos dos principais códigos normativos da atualidade. Em todos os modelos, as expressões estão de acordo com o Sistema Internacional de Unidades (SI).

### **NBR14861:2011:**

A norma brasileira apresenta um único modelo de cálculo para a capacidade resistente ao cisalhamento de lajes alveolares protendidas sem armadura transversal. Este modelo tem como fundamento o mecanismo de ruptura por flexo-cortante e foi idealizado a partir de estudos realizados em elementos de seções retangulares. Este modelo difere daquele apresentado na NBR6118 apenas quanto a presença do parâmetro redutor " $\alpha$ " no cálculo da tensão de compressão, o qual corrige a parcela de contribuição do efeito da protensão.

Conforme já apontado em FRANÇA (2012), a inclusão do parâmetro " $\alpha$ " no cálculo da tensão de compressão reduz demasiadamente a contribuição da protensão na capacidade resistente ao cisalhamento e é muito provável que nas próximas revisões da referida norma este parâmetro deixe de existir, o que deve eliminar a incoerência que atualmente há entre as duas normas brasileiras.

Para a presente pesquisa, a título de comparação de resultados com valores experimentais, será considerado como comprimento de transferência, o valor característico ( $l_{pt}$ ), ou seja, dividindo o valor do comprimento de transferência  $l_{pt2}$  por  $\gamma_c = 1,4$ , tem-se:  $l_{pt} \cong 60\emptyset$ . Da mesma forma, ao invés de  $f_{cta}$ , para a expressão, será considerada a resistência à tração inferior do concreto ( $f_{ctk,inf}$ ). O parâmetro " $\alpha$ " será desconsiderado nesta pesquisa.

A seguir são apresentados os equacionamentos da norma (NBR14861:2011) tal como apresentado no texto original:

$$V_{Rd1} = V_{c,1} + V_{p,1} \quad (2.30)$$

Em que:

$$V_{c,1} = 0,25 \cdot f_{ctd} \cdot k \cdot (1,2 + 40 \cdot \rho_1) \cdot \sum b_{w,1} \cdot d \quad (2.31)$$

$$V_{p,1} = 0,15 \cdot \sigma_{cp,1} \cdot \sum b_{w,1} \cdot d \quad (2.32)$$

Sendo:

$$\sum b_{w,1} = \sum b_{w,ext} + \sum b_{w,int} \quad (2.33)$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} \quad (2.34)$$

$$\rho_1 = \frac{A_s}{(\sum b_{w,1})} \quad (2.35)$$

$$\sigma_{cp,1} = \frac{N_p}{A_c} \cdot \alpha \quad (2.36)$$

$$\alpha = \frac{l_x}{l_{pt2}} \leq 1 \quad (2.37)$$

$$k = 1,6 - d \geq 1; d \text{ em metros (m)} \quad (2.38)$$

Onde:

$f_{ctd}$ : resistência a tração do concreto (minorada por  $\gamma_c$ );

$\sum b_{w,1}$ : somatório das nervuras internas e externas da seção transversal;

$A_s$ : área da armadura longitudinal tracionada;

$\rho_1$ : taxa da armadura longitudinal;

$\sigma_{cp,1}$ : tensão de compressão média no concreto devido à força de protensão;

$N_p$ : força de protensão final, depois de todas as perdas;

$A_c$ : área da seção transversal de concreto da laje;

$l_x$ : distância da extremidade da laje até a seção em análise;

$l_{pt2}$ : comprimento de transferência de protensão, fixado em  $85\phi$ , como valor de cálculo;

$k$ : fator escala.

### EN 1992-1-1 (2004) – EUROCODE 2:

O Eurocode 2 (EC2) considera para o cálculo da capacidade resistente ao cisalhamento dois modelos de cálculo, sendo um para o mecanismo de ruptura por flexo-cortante e outro para tração diagonal. Destaque se deve dar para a dispensa da verificação da cortante em seções que estejam situadas entre o apoio até a seção localizada à  $d$  (altura útil da peça), tomando como referência a face interna do apoio, desde que a carga atuante seja predominantemente distribuída.

Para regiões fissuradas por flexão, o EC2 preconiza:

$$V_{Rd,c} = \frac{0,18}{\gamma_c} \cdot [k \cdot (100 \cdot \rho_1 \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,15 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d \geq (0,035 \cdot k^{1/3} + 0,15 \cdot \sigma_{cp}) \cdot b_w \cdot d \quad (2.39)$$

Sendo:

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2; \quad d \text{ em milímetros (mm)} \quad (2.40)$$

$$\rho_1 = \frac{A_{sl}}{b_w \cdot d} \leq 0,02 \quad (2.41)$$

$$\sigma_{cp} = \frac{N_{Ed}}{A_c} < 0,2 \cdot f_{cd} \quad (2.42)$$

Onde:

$A_{sl}$ : armadura longitudinal tracionada;

$b_w$ : somatório das espessuras das nervuras na região onde elas são mínimas;

$f_{ck}$ : resistência a compressão do concreto

$k$ : fator escala;

$\sigma_{cp}$ : tensão de compressão no concreto devido à força de protensão e outros carregamentos ( $N_{Ed} > 0$ , para compressão);

$N_{Ed}$ : esforço normal, de cálculo, na seção analisada (valores positivos correspondem a compressão);

$A_c$ : área da seção transversal de concreto da laje.

Para regiões não fissuradas por flexão, o EC2 isenta a verificação de seções compreendidas entre a distância  $h/2$  e a face interna do apoio. Como modelo de cálculo neste caso, o código recomenda a seguinte equação:

$$V_{Rd,c} = \frac{I \cdot b_w}{S} \cdot \sqrt{f_{ctd}^2 + \alpha_l \cdot \sigma_{cp} \cdot f_{ctd}} \quad (2.43)$$

Em que:

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,005}}{\gamma_c} \quad (2.44)$$

$$\alpha_l = \frac{l_x}{l_{pt2}} \leq 1 \quad (2.45)$$

$$l_{pt2} = 1,2 \cdot l_{pt} \quad (2.46)$$

Onde:

$I$ : momento de inércia da seção transversal;

$b_w$ : somatório das espessuras das nervuras na região onde elas são mínimas;

$S$ : momento estático da área cima do centroide da seção;

$\sigma_{cp}$ : tensão de compressão no concreto devido à força de protensão e outros carregamentos ( $N_{Ed} > 0$ , para compressão);

$l_{pt}$ : comprimento de transferência de protensão;

$l_x$ : distância da extremidade da laje até a seção em análise;

$f_{ctd}$ : resistência a tração do concreto (minorada por  $\gamma_c$ ).

O comprimento de transferência de protensão é calculado como:

$$l_{pt} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \varnothing \cdot \frac{\sigma_{pm0}}{f_{bpt}} \quad (2.47)$$

$$f_{bpt} = \eta_{p1} \cdot \eta_1 \cdot f_{ctd} \quad (2.48)$$

Onde:

$$\alpha_1: \begin{cases} 1,0; & \text{para liberação gradual da protensão} \\ 1,25; & \text{para liberação repentina da protensão} \end{cases}$$

$$\alpha_2: \begin{cases} 0,25; & \text{para fios de protensão} \\ 0,19; & \text{para cordoalhas de 3 ou 7 fios} \end{cases}$$

$\varnothing$ : diâmetro do fio ou cordoalha;

$\sigma_{pm0}$ : tensão de protensão imediatamente após a liberação;

$$\eta_{p1}: \begin{cases} 2,7; & \text{para fios entalhados.} \\ 3,2; & \text{para cordoalhas de 3 ou 7 fios.} \end{cases}$$

$$\eta_1: \begin{cases} 1,0; & \text{para boas condições de aderência.} \\ 0,7; & \text{para as demais.} \end{cases}$$

Para a presente pesquisa, a título de comparação de resultados com valores experimentais, será considerado como comprimento de transferência, o valor característico ( $l_{pt}$ ) calculado para boas condições de aderência e liberação repentina da protensão. Também será considerada a resistência à tração inferior do concreto ( $f_{ctk,005}$ ) ao invés de  $f_{ctd}$ .

É importante destacar que, do modelo de Yang apresentado anteriormente, ao considerar nula a variação da protensão ( $\frac{dP_i}{dx} = 0$ ) e o ponto crítico no centroide da seção transversal ( $z_{pc} = 0$ ), a equação (2.21) passa a ser escrita como:

$$V_{z,máx} = \frac{I_y \cdot b_{pc}}{S_{pc}} \cdot \sqrt{f_{ct}^2 + \frac{P_i}{A} \cdot f_{ct}} \quad (2.49)$$

O que difere da equação do modelo apresentado pelo EC2, para tração diagonal, apenas pelo termo “ $\alpha_l$ ” que foi inserido no modelo a título de calibração com resultados experimentais.

### EN1168:2008:

A norma considera para efeito de cálculo de cisalhamento de lajes alveolares protendidas em região fissura por flexão, a mesma expressão apresentada no EC2. Porém é importante observar que para lajes com espessura maior que 45cm, segundo o código, é necessário utilizar um fator global de minoração da resistência de 0,9. Já para lajes simplesmente apoiadas em região não fissurada por flexão, esta norma define duas expressões de cálculo, sendo uma expressão geral e outra, simplificada. Estas expressões, por sua vez, substituem aquelas apresentadas no EC2.

A expressão geral é escrita como:

$$V_{Rd,c} = \frac{I \cdot b_w(y)}{S_c(y)} \cdot \sqrt{f_{ctd}^2 + \sigma_{cp}(y) \cdot f_{ctd}} - \tau_{cp}(y) \quad (2.50)$$

Em que:

$$\sigma_{cp}(y) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ \frac{1}{A} + \frac{(Y_c - y) \cdot (Y_c - Y_{pt})}{I} \right] \cdot P_t(l_x) \right\} - \frac{M_{Ed}}{I} \cdot (Y_c - y) \quad (2.51)$$

$$\tau_{cp}(y) = \frac{1}{b_w(y)} \cdot \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ \frac{A_c(y)}{A} - \frac{S_c(y) \cdot (Y_c - Y_{pt})}{I} + C_{pt}(y) \right] \cdot \frac{dP_t(l_x)}{dx} \right\} \quad (2.52)$$

Onde:

$\sigma_{cp}(y)$ : tensão de compressão no ponto definido pela ordenada “y” e pela abscissa “ $l_x$ ”;

$\tau_{cp}(y)$ : tensão de cisalhamento no ponto definido pela ordenada “y” e pela abscissa “ $l_x$ ”;

$b_w(y)$ : somatório das espessuras das nervuras localizado a “y” da face inferior da laje;

$A_c(y)$ : área da seção transversal cima da cota “y” do ponto analisado e acima do C.G.;

$S_c(y)$ : momento estático relativo à área cima da cota “y” do ponto analisado e acima do C.G.;

$A$ : área total da seção transversal;

$I$ : momento de inércia da seção transversal;

$Y_c$ : altura do C.G. da seção em relação a face inferior da laje;

$y$ : ordenada do ponto analisado em relação a face inferior da laje;

$Y_{pt}$ : altura da camada de protensão em relação a face inferior da laje;

$P_t(l_x)$ : força de protensão relativa a camada “t” de protensão e avaliada a “ $l_x$ ” da extremidade da laje;

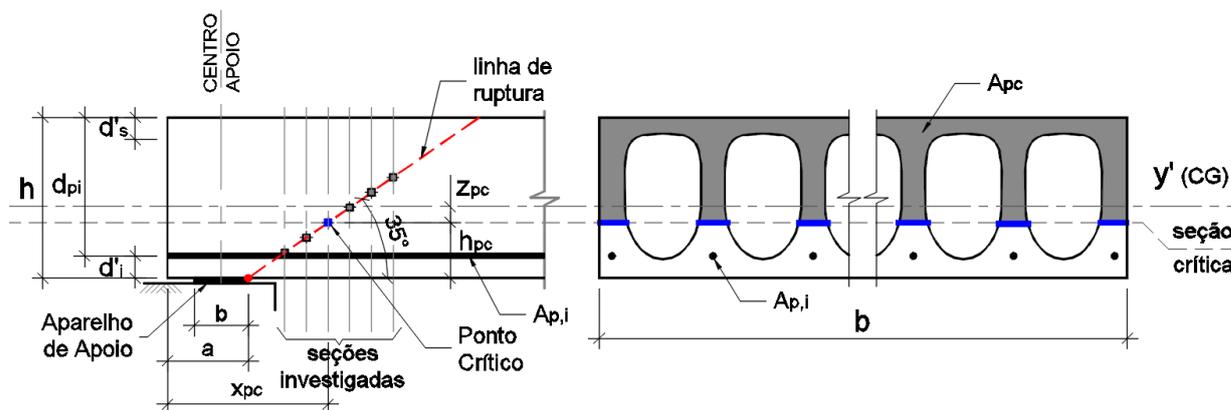
$M_{Ed}$ : momento fletor devido às cargas atuantes; pode ser considerado nulo para esta equação;

$n$ : número de camadas de protensão;

$$C_{pt}(y) = \begin{cases} -1; & \text{se } y \leq Y_{pt} \\ 0; & \text{se } y > Y_{pt} \end{cases}$$

As Equações (2.51 e (2.52 por sua vez, conforme previsto no código, devem ser calculadas nos pontos da linha de falha que parte da extremidade interna do apoio em ângulo de 35 graus em relação ao eixo longitudinal da peça. O ponto crítico deverá ser aquele que fornecer menor valor da força cortante resistida dos pontos analisados, conforme Figura 2.32.

**Figura 2.32: Seção investigada na procura pelo ponto crítico**



[O autor]

Essa expressão foi obtida a partir da publicação do método apresentado em PAJARI (2005) considerando já a protensão em camadas e a possibilidade da utilização de protensão superior.

Devido à dificuldade da aplicação das expressões acima, para efeito de projeto, a norma apresenta uma expressão simplificada que é definida por:

$$V_{Rd,c} = \varphi \cdot \frac{I \cdot b_w}{S_c} \cdot \sqrt{f_{ctd}^2 + \beta \cdot \alpha_l \cdot \sigma_{cp} \cdot f_{ctd}} \quad (2.53)$$

Onde:

$\varphi$ : fator redutor global igual a 0,8;

$\beta$ : fator redutor do efeito da introdução da protensão, igual a 0,9;

Observa-se que esta expressão é a mesma apresentada pelo EC2, a menos dos coeficientes de minoração, ao que valem todas as observações acerca da natureza da expressão conforme explanado acima, para o modelo de tração diagonal do EC2.

Esta norma também recomenda que, para efeito de projeto, lajes com espessura superiores a 450mm, seja aplicado mais um fator redutor de 0,9. E assim como para o EC2, isenta a verificação de seções compreendidas entre a face interna do apoio  $h/2$ .

**ACI-318:2014:**

Assim como o EC2, a norma americana apresenta em seu texto dois modelos de cálculo da capacidade resistente ao cisalhamento considerando regiões fissuradas (flexo-cortante) ou não fissuradas por flexão (tração diagonal).

Diferente dos demais códigos normativos, o ACI-318 utiliza fator global para minoração da resistência “ $\phi$ ” de maneira que a expressão abaixo seja atendida:

$$V_n \geq \phi \cdot V_u; \phi = 0,75 \text{ para cisalhamento.} \quad (2.54)$$

Assim, a capacidade resistente à força cortante é calculada de forma geral como:

$$V_n = V_c + V_s \quad (2.55)$$

Onde:

$V_c$ : parcela resistida pelo concreto;

$V_s$ : parcela resistida pela armadura transversal.

Assim, tratando de elementos sem armadura transversal,  $V_n = V_c$ , sendo que para o cálculo da flexo-cortante o modelo de cálculo para cortante resistida  $V_{ci}$  é:

$$V_{ci} = 0,05 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f_c'} \cdot b_w \cdot d_p + V_d + \frac{V_i \cdot M_{cre}}{M_{máx}} \geq 0,14 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f_c'} \cdot b_w \cdot d_p \quad (2.56)$$

Em que:

$$M_{cre} = \frac{I}{y_t} \cdot (0,5 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f_c'} + f_{pe} - f_d) \quad (2.57)$$

$$V_i = V_u - V_d \quad (2.58)$$

$$M_{máx} = M_u - M_d \quad (2.59)$$

Onde:

$\lambda$ : fator que modifica as propriedades mecânicas do concreto leve em relação a concretos comuns (para concretos convencionais,  $\lambda = 1,00$ );

$f'_c$ : resistência à compressão do concreto (quantil de 1% da curva de distribuição normal) limitado a 70MPa;

$b_w$ : somatório das espessuras das nervuras na região onde elas são mínimas;

$d_p$ : altura útil da seção (posição do centroide da armadura longitudinal até a face mais comprimida da seção transversal) e não deve ser inferior a 0,80h;

$I$ : momento de inércia da seção transversal;

$y_t$ : distância da face inferior até o centroide da seção transversal;

$f_{pe}$ : tensão devido à normal e momento de protensão na fibra tracionada mais externa submetida a carregamentos externos;

$f_d$ : tensão devido ao peso próprio da unidade na fibra mais tracionada por cargas externas (sem majoração);

$V_d$ : cortante devido ao peso próprio na seção analisada (sem majoração);

$M_d$ : momento fletor devido ao peso próprio na seção analisada (sem majoração);

$V_u$ : esforço cortante total atuante (majorado) na seção analisada;

$M_u$ : momento fletor total atuante (majorado) na seção analisada;

$M_{cre}$ : momento de fissuração.

O termo  $\sqrt{f'_c}$  é uma medida indireta da resistência à tração do concreto e deve estar limitada a 8,3MPa segundo o referido código normativo.

Para o mecanismo de tração diagonal, o código preconiza o seguinte modelo:

$$V_{cw} = \left( 0,29 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f'_c} + 0,3 \cdot f_{pc} \right) \cdot b_w \cdot d_p + V_p \quad (2.60)$$

Onde:

$f_{pc}$ : tensão de compressão no centro de gravidade da seção transversal;

$V_p$ : componente vertical da ação da protensão para cabos curvos (no caso de cabos retos, esta parcela é nula);

É importante destacar que, do modelo de Yang apresentado anteriormente, além das simplificações feitas na discussão do modelo do EC2 (para tração diagonal), o ACI-318 adota a linearização do termo da raiz da Equação (2.49 além de considerar  $\frac{l_y}{s_y} \cong d_p$ . Com isso tem-se a seguinte expressão:

$$V_{z,máx} = \left( f_{ct} + 0,3 \cdot \frac{P_i}{A} \right) \cdot b_w \cdot d_p \quad (2.61)$$

Assim, o que difere a Equação (2.61 da Equação (2.60 (além do termo  $V_p$ , já discutido), é apenas o coeficiente “0,29” que está relacionado com o efeito da introdução de protensão definido anteriormente pela razão  $\frac{l_x}{l_{pt}}$ , o qual foi inserido no modelo a título de calibração com resultados experimentais.

Outra observação importante acerca deste código normativo é que as equações descritas acima são válidas para lajes de até 320mm de espessura (sem considerar a capa) e podem ser aplicadas tal como foi apresentada. Para lajes com espessura superior a 320mm a capacidade resistente a força cortante calculada, a partir das equações descritas acima, deve ser no mínimo 50% superior a cortante provocada por ações externas. Em caso contrário a norma obriga a utilização de estribos, o que, conforme já discutido é muito oneroso.

#### **CSA-A23.3:2004:**

Assim como a norma brasileira, o código canadense apresenta um único modelo de cálculo para a capacidade resistente ao cisalhamento de lajes alveolares protendidas baseado no modelo de ruptura por flexo-cortante. Este modelo foi proposto por Collins et al., sendo este o autor de diversos estudos experimentais e analíticos publicados desde 1994.

$$V_c = \phi_c \cdot \lambda \cdot \beta \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d_v \quad (2.62)$$

Em que:

$$\beta = \frac{0,40}{(1 + 1500 \cdot \varepsilon_x)} \cdot \frac{1300}{(1000 + s_{ze})} \quad (2.63)$$

$$s_{ze} = \frac{35 \cdot s_z}{(15 + a_g)} \geq 0,85 \cdot s_z \quad (2.64)$$

$$\theta = 29 + 7000 \cdot \varepsilon_x \quad (2.65)$$

$$\varepsilon_x = \frac{M_f/d_v + V_f - V_p + 0,5 \cdot N_f - A_p \cdot f_{p0}}{2 \cdot (E_s \cdot A_s + E_p \cdot A_p)} \quad (2.66)$$

Onde:

$M_f$ : momento majorado atuante na seção localizada a  $d_v$  do centro do apoio;

$V_f$ : força cortante majorada atuante na seção localizada a  $d_v$  do centro do apoio;

$N_f$ : força axial majorada atuante na seção (força externa), concomitante com  $V_f$  (para laje alveolar pode ser considerado  $N_f = 0$ );

$V_d$ : componente vertical da força cortante (majorada) produzida pela protensão considerando cabo parabólico e atuante na seção localizada a  $d_v$  do centro do apoio (para laje alveolar onde a protensão é feita por cabos retos, pode ser considerado  $V_d = 0$ );

$A_s$ : área de armadura passiva na seção analisada (para laje alveolar produzida por equipamentos pode ser considerado  $A_s = 0$ );

$A_p$ : área de armadura ativa na seção analisada;

$E_s$ : módulo de elasticidade da armadura passiva (para laje alveolar produzida por equipamentos pode ser considerado  $E_s = 0$ );

$E_p$ : módulo de elasticidade da armadura ativa;

$d_v$ : altura útil da armadura ( $d_v = s_z$ );

$a_g$ : tamanho nominal máximo do agregado graúdo;

$\theta$ : ângulo de inclinação da fissura principal;

$\phi_c$ : fator de segurança de minoração da resistência ( $\phi_c = 0,70$ );

$\phi_p$ : fator de minoração da componente vertical da cortante devido a força de protensão para cabo parabólico (para laje alveolar,  $\phi_p=0$ );

$f_c'$ : resistência a compressão do concreto (quantil de 1% da curva de distribuição normal) limitado a 70MPa. Assim como no ACI318, o termo  $\sqrt{f_c'}$  é uma medida indireta da resistência à tração do concreto e deve estar limitada a 8,0MPa;

$f_{p0}$ : Tensão atuante na cordoalha antes da liberação da protensão (pode ser considerado  $f_{p0} = f_{pu}$ , onde  $f_{pu}$  é a tensão limite de ruptura que pode ser adotada 1860MPa);

Semelhante ao que preconiza o EC2, admite-se que as seções abaixo de  $d_v$  não precisam ser verificadas. Porém esta norma permite que seções antes de  $d_v$  sejam verificadas desde que sejam atendidas as condições a seguir:

- a) A carga atuante na seção considerada deve gerar compressão no elemento;
- b) Nenhuma força concentrada de intensidade maior que  $0,3 \cdot \lambda \cdot \phi_c \cdot \sqrt{f_c'} \cdot b_w \cdot d_v$  seja aplicada entre a seção localizada a  $d_v$  e o centro de apoio, seja aplicada.

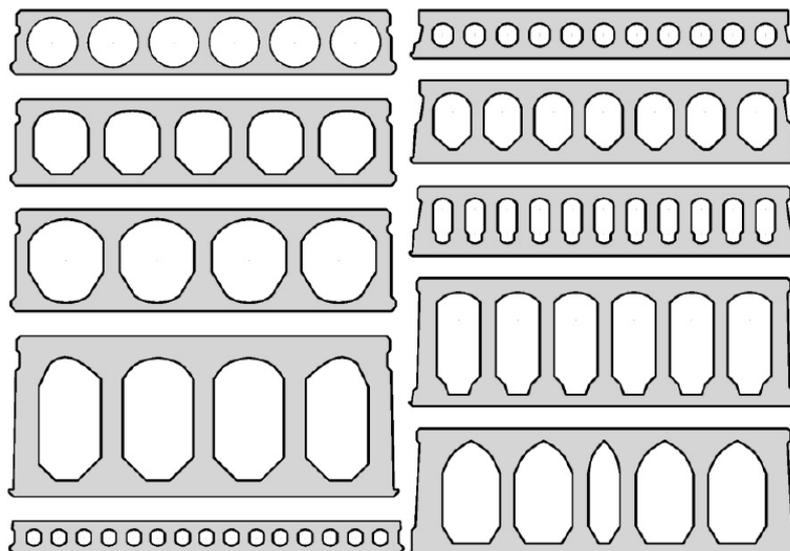
### 3 GERAÇÃO DA GEOMETRIA DAS SEÇÕES

Neste capítulo é apresentada uma metodologia de cálculo para obtenção das propriedades geométricas de seções transversais de lajes alveolares. Tais propriedades são obtidas de forma aproximada por meio de discretização por faixas, o que permite, com boa precisão, a aplicação em qualquer tipo de seção.

#### 3.1 SEÇÕES EXISTENTES

Diversos são as tipologias de laje alveolar encontradas no mercado. Devido às limitações do equipamento, as lajes produzidas por extrusora tendem a ter uma geometria mais homogênea do que aquelas produzidas por formas deslizantes. Estas últimas possibilitam infinitos arranjos de forma que, por sua vez, permitem se adequar melhor às necessidades do projeto, mas, por outro lado, em termos de produtividade, a diferença a favor das extrusoras é bastante significativa. A Figura 3.1 destaca algumas das possibilidades de perfis de laje alveolar produzidas por extrusoras e moldadoras.

**Figura 3.1: Seções transversais típicas de lajes alveolares pré-fabricadas**

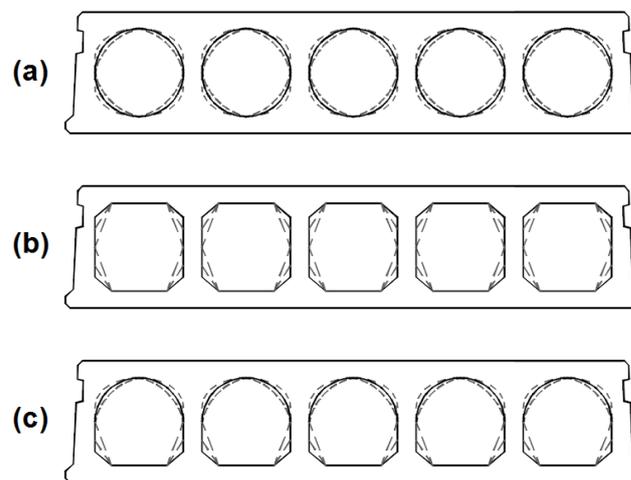


[Fonte: CEB-FIB (2016)]

### 3.2 CLASSIFICAÇÃO GEOMÉTRICA DOS ALVÉLOS QUANTO A FORMA

Dentro das possibilidades que os equipamentos oferecem quanto à configuração dos alvéolos, é possível fazer uma classificação em três grupos, sendo eles definidos aqui como *alvéolos curvos*, *alvéolos poligonais* e *alvéolos mistos*. A Figura 3.2a ilustra um exemplo de laje com alvéolos curvos; já a Figura 3.2b apresenta um modelo de laje com alvéolos poligonais; e por último, a Figura 3.2c ilustra um modelo de laje com alvéolos mistos.

**Figura 3.2: Variações geométricas dos alvéolos –  
a) Alvéolos curvos; b) Alvéolos poligonais; c)  
Alvéolos mistos.**



[Fonte: O autor]

No grupo dos alvéolos curvos, estão presentes os alvéolos circulares e os oblongos. Os alvéolos poligonais são aqueles formados por segmentos de reta que podem ser ou não paralelos. Quanto aos alvéolos mistos, como o nome já diz, incorpora parte da forma dos alvéolos curvos e parte da forma dos alvéolos poligonais. Neste último caso, ora a metade superior pode ser curva e a inferior poligonal, ou vice-versa.

### 3.3 MÉTODO NUMÉRICO PARA GERAÇÃO DAS SEÇÕES

LINDSTROM (2007) define em seu trabalho uma expressão geral para determinação das formas dos alvéolos curvos a qual foi reescrita na Equação (3.1).

$$y = \sqrt{r_h \cdot \left[ 1 - \left( \frac{z}{r_v} \right)^N \right]}; y \geq 0 \text{ e } z \geq 0 \quad (3.1)$$

Os parâmetros  $r_h$  e  $r_v$  são medidas da semidistância horizontal e vertical do centro geométrico do alvéolo até os extremos horizontais e verticais, respectivamente, e podem ser definidos pelas Equações (3.2 e (3.3, as quais são apresentadas a seguir:

$$r_h = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{b - [(n - 1) \cdot b_{w,i} + 2 \cdot b_{w,e}]}{n} \right\} \quad (3.2)$$

$$r_v = \frac{1}{2} \cdot [h - (t_s + t_i)] \quad (3.3)$$

Onde:

$h$ : espessura total da seção transversal;

$b$ : largura total da seção transversal;

$n$ : número total de alvéolos da seção ( $n = 1, 2, 3, \dots$ );

$b_{w,i}$ : espessura mínima da nervura interna;

$b_{w,e}$ : espessura mínima da nervura externa;

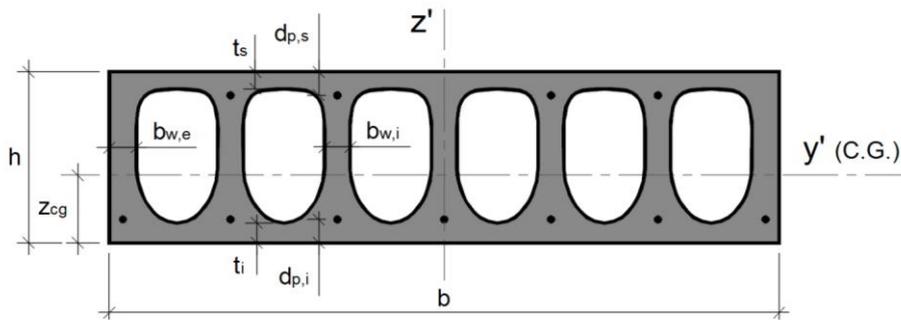
$t_s$ : espessura do talão superior da seção transversal;

$t_i$ : espessura do talão inferior da seção transversal;

$y$  e  $z$ : coordenadas horizontal e vertical, respectivamente.

A Figura 3.3 ilustra uma seção teórica e os parâmetros considerados para obtenção da curva dos alvéolos.

**Figura 3.3: Seção transversal teórica.**

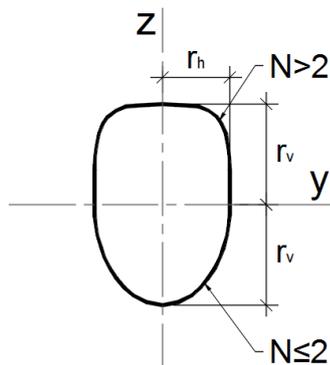


[Fonte: O autor]

Para melhor ilustrar a aplicação desta equação na definição geométrica dos alvéolos curvos é apresentada a seguir a Figura 3.4 que denota inclusive o efeito que o fator de forma  $N$  tem sobre a curvatura, interferindo no grau de abatimento desta. Ou seja, quanto maior o parâmetro  $N$ , mais “achatada” é a curva.

Cada par de coordenadas  $(y, z)$  define um ponto do primeiro quadrante, onde  $y \geq 0$  e  $z \geq 0$ . Quando  $N = 2$  a Equação 2.1 passa a ser a equação geral da elipse e se, além disso,  $r_h = r_v$ , é obtida a equação da circunferência. Para o primeiro e segundo quadrantes, é utilizado o mesmo parâmetro  $N$ , calculando as coordenadas e posteriormente corrigindo os sinais como convém. Do mesmo modo o procedimento é repetido para os pontos do terceiro e quarto quadrantes.

**Figura 3.4: Características geométricas dos alvéolos curvos.**

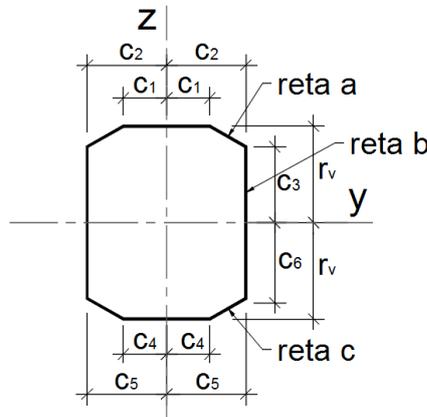


[Fonte: O autor]

Para a determinação das formas dos alvéolos poligonais, a figura é dividida em três segmentos de reta definidos por “retas a, b e c” ilustradas conforme a Figura 3.5. A composição destas três retas, observando-se os sinais para cada quadrante,

compõe a metade direita do alvéolo, e, por simetria, também define a metade esquerda da forma.

**Figura 3.5: Características geométricas dos alvéolos poligonais.**



[Fonte: O autor]

A “reta a” é definida pela Equação (3.4, bem como as Equações (3.5 e (3.6 definem as “retas b e c”, respectivamente.

$$c_3 \leq z \leq r_v \rightarrow y = \frac{(z - r_v) \cdot (c_2 - c_1)}{(c_3 - r_v)} + c_1 \quad (3.4)$$

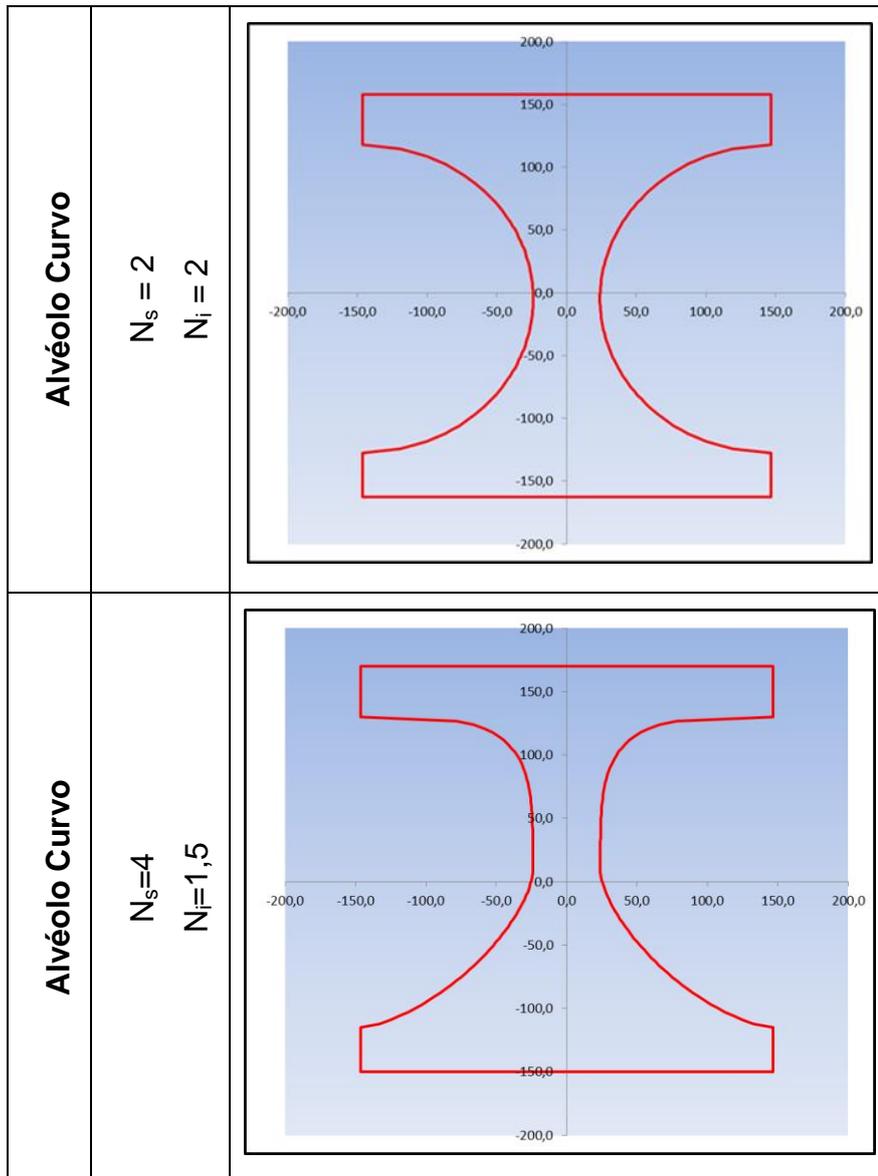
$$-c_6 < z < c_3 \rightarrow y = \frac{(z + c_6) \cdot (c_2 - c_5)}{(c_3 + c_6)} + c_5 \quad (3.5)$$

$$-r_v \leq z \leq -c_6 \rightarrow y = \frac{(z + r_v) \cdot (c_5 - c_4)}{(-c_6 + r_v)} + c_4 \quad (3.6)$$

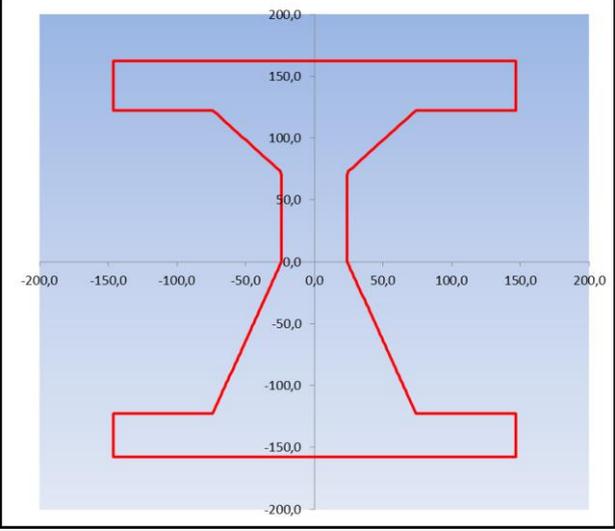
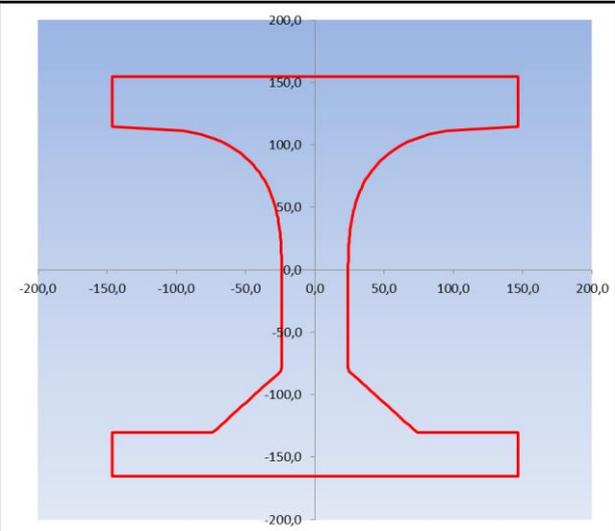
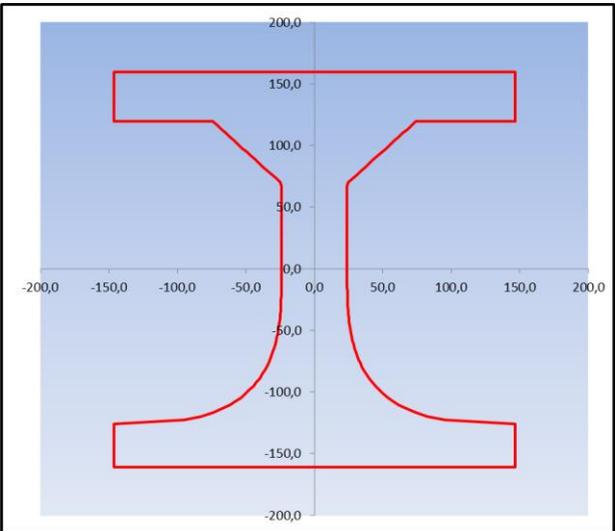
A construção dos alvéolos mistos, tendo em vista o que já foi explicado anteriormente, ocorre de maneira natural.

Com o intuito de ilustrar a metodologia de cálculo apresentada até aqui, é construída uma planilha de cálculo capaz de gerar diversas situações de forma dos alvéolos. A Figura 3.6 apresentada a seguir ilustra diversas possibilidades de forma para uma laje hipotética de espessura 300mm.

Figura 3.6: Variações geométricas dos alvéolos



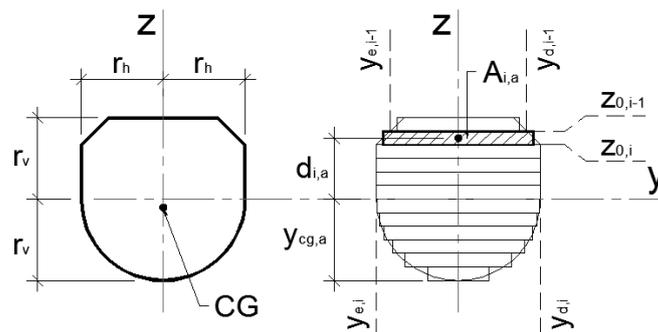
**Figura 3.6: Variações geométricas dos alvéolos (cont.)**

<p><b>Alvéolo Poligonal</b></p>	<p><math>C_1=C_3=C_4= 72,5\text{mm}</math>  <math>C_6=0; C_2=C_5=112,5\text{mm}</math></p>	
<p><b>Alvéolo Misto</b></p>	<p><math>N_s = 3</math>  <math>C_4=C_6= 72,5\text{mm}; C_5= 112,5\text{mm}</math></p>	
<p><b>Alvéolo Misto</b></p>	<p><math>C_1=C_3= 72,5\text{mm}</math>  <math>C_2= 112,5\text{mm}; N_i = 3</math></p>	

[Fonte: O autor]

Após a definição da linha de contorno do alvéolo, é necessário definir uma técnica capaz de, com precisão adequada, calcular as propriedades geométricas da seção transversal como: área  $A$ , momento de inércia  $I_y$  e posição do centroide  $z_{cg}$ . O problema pode então ser resolvido através de uma discretização por faixas de seção, tanto para a obtenção das características geométricas dos alvéolos quanto para as características geométricas da seção transversal final. A Figura 3.7 ilustra o procedimento aplicado aos alvéolos.

**Figura 3.7: Discretização dos alvéolos em faixas**



[Fonte: O autor]

A partir da Equação (3.7), é possível calcular a área de cada faixa discretizada  $A_{i,a}$  de modo que a soma de todas as áreas  $A_a$ , representada pela Equação (3.8), individualmente, compõem a seção transversal do alvéolo pré-definido conforme descrito anteriormente.

$$A_{i,a} = \frac{1}{2} \cdot [(y_{d,(i-1)} - y_{e,(i-1)}) + (y_{d,i} - y_{e,i})] \cdot |z_{(i-1)} - z_i| \quad (3.7)$$

$$A_a = \sum_{i=1}^k A_{i,a} \quad (3.8)$$

Da mesma maneira, é calculada a distância média  $d_{i,a}$  de cada faixa considerada até o centroide do alvéolo a partir da Equação (3.9). Na sequência através da Equação (3.10) é calculado o momento estático de cada faixa  $S_{i,a}$  e posteriormente, o momento estático acumulado  $S_a$  conforme Equação (3.11).

$$d_{i,a} = z_{(i-1)} - \frac{1}{2} \cdot (z_{(i-1)} - z_i) \quad (3.9)$$

$$S_{i,a} = A_{i,a} \cdot d_{i,a} \tag{3.10}$$

$$S_a = \sum_{i=1}^k S_{i,a} \tag{3.11}$$

Seguindo o mesmo critério, com as Equações (3.12 e (3.13), é calculado o momento de inércia do alvéolo  $I_{y,a}$ . A posição do centroide do alvéolo  $z_{cg,a}$  é calculada conforme Equação (3.14).

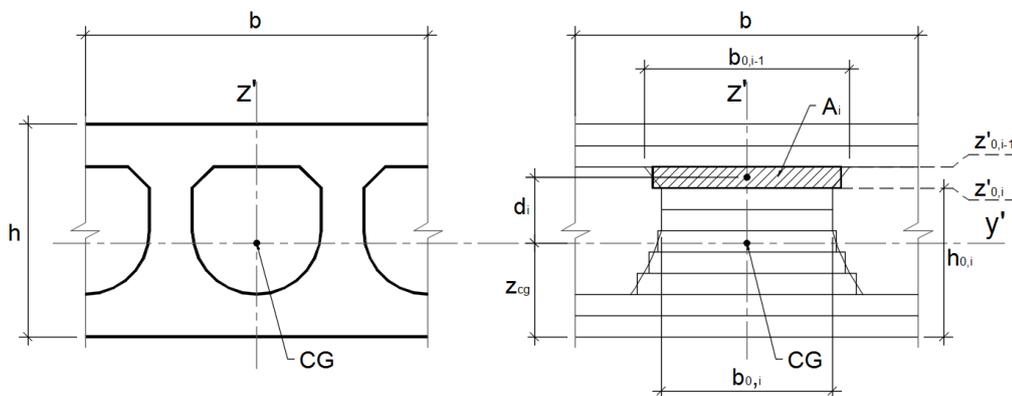
$$I_{y,i,a} = A_{i,a} \cdot (d_{i,a})^2 \tag{3.12}$$

$$I_{y,a} = \sum_{i=1}^k I_{y,i,a} \tag{3.13}$$

$$z_{cg,a} = \frac{S_a}{A_a} + r_v \tag{3.14}$$

A discretização da seção transversal pode ser representada pela Figura 3.8. Nela é possível perceber que a origem dos eixos cartesianos é deslocada para o centroide da seção transversal (no cruzamento entre os eixos), a fim de simplificar os cálculos posteriormente. Desta maneira, é necessário fazer a mudança de coordenadas a partir daquelas definidas para o cálculo das propriedades geométricas dos alvéolos. Ou seja, os eixos de referência outrora chamados  $y$  e  $z$ , passaram a ser chamados  $y'$  e  $z'$ .

**Figura 3.8: Discretização da seção transversal em faixas**



[Fonte: O autor]

Para tanto as ordenadas  $z$  são corrigidas conforme Equação (3.15, onde a posição  $z_{cg}$  do centroide da seção é calculada de acordo com a Equação (3.16).

$$z' = z + r_v + t_i - z_{cg} \quad (3.15)$$

$$z_{cg} = \frac{b \cdot h - n \cdot A_a \cdot (z_{cg,a} + t_i)}{b \cdot h - n \cdot A_a} \quad (3.16)$$

Com base na Figura 3.8 e seguindo a mesma lógica do cálculo das propriedades dos alvéolos, são calculados todos os parâmetros que caracterizam a seção transversal analisada, conforme Equações (3.17 a (3.25).

$$b_{0,i} = b - n \cdot (y'_{d,i} - y'_{e,i}) \quad (3.17)$$

$$h_{0,i} = z_{0,i} + z_{cg} \quad (3.18)$$

$$A_i = \frac{1}{2} \cdot (b_{0,(i-1)} + b_{0,i}) \cdot |z_{0,(i-1)} - z_{0,i}| \quad (3.19)$$

$$A_0 = \sum_{i=1}^k A_i \quad (3.20)$$

$$d_i = z_{0,(i-1)} - \frac{1}{2} \cdot |z_{0,(i-1)} - z_{0,i}| \quad (3.21)$$

$$S_i = A_i \cdot d_i \quad (3.22)$$

$$S_0 = \sum_{i=1}^k S_i \quad (3.23)$$

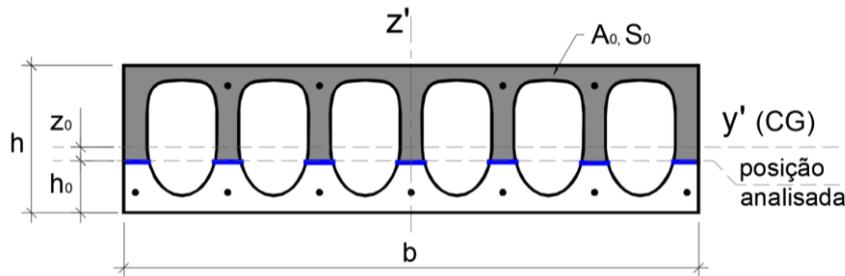
$$I_{y,i} = A_0 \cdot (d_i)^2 \quad (3.24)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^k I_{y,i} \quad (3.25)$$

O índice “0” é adotado para definir a posição da seção analisada em relação a fibra inferior, onde é calculada a área acumulada  $A_0$  e o momento estático acumulado  $S_0$ , como ilustrado na

Figura 3.9. Estes parâmetros são úteis para o cálculo da cortante resistente, o que é discutido no próximo seguinte deste trabalho.

**Figura 3.9: Parâmetros da seção transversal**



[Fonte: O autor]

## 4 ANÁLISE DA RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO EM REGIÕES NÃO FISSURADAS

Neste capítulo é feita uma abordagem analítica do cálculo da cortante máxima resistente tomando-se como referência os Modelos de Yang e de Pajari já apresentados anteriormente, e introduzindo uma metodologia para consideração da variação do ângulo da linha de ruptura, que para os referidos autores, a priori, é considerado fixo (em 35 graus) independentemente do tipo de laje analisado.

Ainda neste capítulo é feita uma abordagem sobre a importância do ponto crítico e as dificuldades em se conhecer sua localização. E, por fim, são apresentados os limites de aplicação do modelo considerando tipos distintos de carregamento.

### 4.1 CÁLCULO DA CORTANTE MÁXIMA RESISTENTE ( $V_{z,máx}$ )

Considerando o efeito da protensão superior  $P_2$ , e utilizando do mesmo modelo encontrado em PAJARI (2005), conforme a Figura 2.26 apresentada no capítulo 2 do presente trabalho, é feita a dedução da expressão da cortante máxima resistente  $V_{z,máx}$ .

Do equilíbrio de forças em “x” tem-se:

$$-P_2 - \int_{z_0}^{z_t} \sigma_x \cdot dx \cdot b_{(z)} \cdot dz + \tau_{xz} \cdot b_{(z)} \cdot dx + \int_{z_0}^{z_t} \left( \sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} \cdot dx \right) \cdot b_{(z)} \cdot dz + P_2 + dP_2 = 0 \quad (4.1)$$

E simplificando a expressão, tem-se:

$$\tau_{xz} \cdot b_{(z)} \cdot dx + \int_{z_0}^{z_t} \frac{d\sigma_x}{dx} \cdot dx \cdot b_{(z)} \cdot dz + dP_2 = 0 \quad (4.2)$$

Isolando  $\tau_{xy}$ , fazendo  $b_{(z)} \cdot dz = dA$  e dividindo a Equação (4.2) por  $b_{(z)} \cdot dx$ , tem-se:

$$\tau_{xz} = -\frac{1}{b_{(z)}} \cdot \left[ \int_{z_0}^{z_t} \frac{d\sigma_x}{dx} \cdot dA + \frac{dP_2}{dx} \right] \quad (4.3)$$

Onde:  $\frac{dP_2}{dx}$  é o gradiente de protensão devido aos cabos superiores.

Da a hipótese de Navier-Bernoulli, considerando também o efeito da protensão, tem-se:

$$\sigma_x = -\frac{(P_1 + P_2)}{A} + (P_1 \cdot e_1 - P_2 \cdot e_2) \cdot \frac{z}{I_y} - M_y \cdot \frac{z}{I_y} \quad (4.4)$$

Onde:

$P_1$ : força de protensão devido aos cabos inferiores ( $P_1 \geq 0$ );

$P_2$ : força de protensão devido aos cabos superiores ( $P_2 \geq 0$ );

$e_1$ : excentricidade devido aos cabos inferiores ( $e_1 \geq 0$ );

$e_2$ : excentricidade devido aos cabos superiores ( $e_2 \geq 0$ );

Derivando a Equação (4.4 em “x” e fazendo  $\frac{dM_y}{dx} = V_z$ , tem-se:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = -\frac{1}{A} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) + \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) \cdot \frac{z}{I_y} - V_z \cdot \frac{z}{I_y} \quad (4.5)$$

Onde:  $\frac{dP_1}{dx}$  é o gradiente de protensão devido aos cabos inferiores.

Substituindo a Equação (4.5 em (4.3, simplificando e agrupando os termos chega-se a:

$$\tau_{xz} = -\frac{1}{b(z)} \cdot \left[ -\frac{1}{A} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) \cdot \int_{z_0}^{z_t} dA + \frac{1}{I_y} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) \cdot \int_{z_0}^{z_t} z \cdot dA - V_z \cdot \frac{1}{I_y} \cdot \int_{z_0}^{z_t} z \cdot dA + \frac{dP_2}{dx} \right] \quad (4.6)$$

Fazendo então:  $b(z) = b_0$ ,  $z = z_0$ ,  $\int_{z_0}^{z_t} dA = A_0$  e  $\int_{z_0}^{z_t} z \cdot dA = S_0$  a Equação (4.6 passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\tau_{xz} = \frac{A_0}{b_0 \cdot A} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) - \frac{S_0}{b_0 \cdot I_y} \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) + \frac{V_z \cdot S_0}{b_0 \cdot I_y} - \frac{1}{b_0} \cdot \frac{dP_2}{dx} \quad (4.7)$$

Da resistência dos materiais tem-se a tensão principal  $\sigma_1$  calculada como mostra a Equação (4.8):

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \quad (4.8)$$

E fazendo  $\sigma_1 = f_{ct}$  e extraíndo os termos da raiz, tem-se:

$$\left(f_{ct} - \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2 \quad (4.9)$$

Simplificando:

$$f_{ct}^2 - f_{ct} \cdot \sigma_x = \tau_{xz}^2 \quad (4.10)$$

Da Equação (4.4, fazendo também:  $b_{(z)} = b_0$  ,  $z = z_0$  ,  $\int_{z_0}^{z_t} dA = A_0$  e  $\int_{z_0}^{z_t} z \cdot dA = S_0$  , e assumindo  $M_y = R \cdot x \cong V_z \cdot x_0$  (onde  $R$  é reação de apoio), a Equação (4.4 pode ser escrita como:

$$\sigma_x = -\frac{(P_1 + P_2)}{A} + (P_1 \cdot e_1 - P_2 \cdot e_2) \cdot \frac{z_0}{I_y} - V_z \cdot x_0 \cdot \frac{z_0}{I_y} \quad (4.11)$$

E dividindo a Equação (4.10 em duas partes chamadas “A” e “B”, sendo “A” o termo antes da igualdade e “B” o termo após a igualdade, para simplificar o cálculo, tem-se:

$$A = f_{ct}^2 - f_{ct} \cdot \left[ -\frac{(P_1 + P_2)}{A} + (P_1 \cdot e_1 - P_2 \cdot e_2) \cdot \frac{z_0}{I_y} - V_z \cdot x_0 \cdot \frac{z_0}{I_y} \right] \quad (4.12)$$

$$B = \left[ \frac{A_0}{b_0 \cdot A} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) - \frac{S_0}{b_0 \cdot I_y} \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) + \frac{V_z \cdot S_0}{b_0 \cdot I_y} - \frac{1}{b_0} \cdot \frac{dP_2}{dx} \right]^2 \quad (4.13)$$

Distribuindo os termos e agrupando os termos de mesma potência, vem que:

$$A = f_{ct}^2 + \frac{f_{ct}}{A} \cdot (P_1 + P_2) - f_{ct} \cdot \frac{z_0}{I_y} \cdot (P_1 \cdot e_1 - P_2 \cdot e_2) + V_z \cdot f_{ct} \cdot x_0 \cdot \frac{z_0}{I_y} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
 B = & \left( \frac{S_0}{b_0 \cdot I_y} \right)^2 \cdot V_z^2 + \left[ 2 \cdot \frac{A_0 \cdot S_0}{b_0^2 \cdot A \cdot I_y} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) - 2 \cdot \left( \frac{S_0}{b_0 \cdot I_y} \right)^2 \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) - 2 \cdot \right. \\
 & \left. \frac{S_0}{b_0^2 \cdot I_y} \cdot \frac{dP_2}{dx} \right] \cdot V_z + \left[ \left( \frac{S_0}{b_0 \cdot I_y} \right)^2 \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right)^2 - 2 \cdot \frac{A_0 \cdot S_0}{b_0^2 \cdot A \cdot I_y} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) \cdot \right. \\
 & \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) + 2 \cdot \frac{S_0}{b_0^2 \cdot I_y} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) \cdot \frac{dP_2}{dx} + \left( \frac{A_0}{b_0 \cdot A} \right)^2 \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right)^2 - 2 \cdot \frac{A_0}{b_0^2 \cdot A} \cdot \\
 & \left. \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) \cdot \frac{dP_2}{dx} + \frac{1}{b_0^2} \cdot \left( \frac{dP_2}{dx} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Retornando à Equação (4.10), inserindo nessa as Equações (4.14 e (4.15, e reagrupando os termos conforme equação de 2º grau:  $a \cdot V_z^2 + b \cdot V_z + c = 0$ , é obtida a Equação (4.16, a qual considera a presença da cordoalha superior:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{S_0}{b_0 \cdot I_y} \right)^2 \cdot V_z^2 + \left\{ 2 \cdot \frac{S_0}{b_0^2 \cdot I_y} \cdot \left[ \frac{A_0}{A} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) - \frac{S_0}{I_y} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) - \frac{dP_2}{dx} \right] - f_{ct} \cdot \right. \\
 & \left. x_0 \cdot \frac{z_0}{I_y} \right\} \cdot V_z + \left\{ \left[ \frac{A_0}{b_0 \cdot A} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) - \frac{S_0}{b_0 \cdot I_y} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) \right]^2 + \frac{1}{b_0^2} \cdot \frac{dP_2}{dx} \cdot \right. \\
 & \left[ 2 \cdot \frac{S_0}{I_y} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) - 2 \cdot \frac{A_0}{A} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) + \frac{dP_2}{dx} \right] - f_{ct} \cdot \frac{(P_1+P_2)}{A} + f_{ct} \cdot \frac{z_0}{I_y} \cdot \\
 & \left. (P_1 \cdot e_1 - P_2 \cdot e_2) - f_{ct}^2 \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Onde os termos “a”, “b” e “c” são, respectivamente:

$$a = \left( \frac{S_0}{b_0 \cdot I_y} \right)^2 \tag{4.17}$$

$$b = 2 \cdot \frac{S_0}{b_0^2 \cdot I_y} \cdot \left[ \frac{A_0}{A} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) - \frac{S_0}{I_y} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) - \frac{dP_2}{dx} \right] - f_{ct} \cdot x_0 \cdot \frac{z_0}{I_y} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
 c = & \left[ \frac{A_0}{b_0 \cdot A} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) - \frac{S_0}{b_0 \cdot I_y} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) \right]^2 + \frac{1}{b_0^2} \cdot \frac{dP_2}{dx} \cdot \left[ 2 \cdot \frac{S_0}{I_y} \cdot \right. \\
 & \left. \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) - 2 \cdot \frac{A_0}{A} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) + \frac{dP_2}{dx} \right] - f_{ct} \cdot \frac{(P_1+P_2)}{A} + f_{ct} \cdot \frac{z_0}{I_y} \cdot \\
 & (P_1 \cdot e_1 - P_2 \cdot e_2) - f_{ct}^2
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

A partir da Equação (4.16), anulando os termos que dependem de  $P_2$  e  $\frac{dP_2}{dx}$ , obtém-se a Equação (2.19, que é a mesma expressão encontrada em YANG (1994).

Resolvendo a Equação (4.16 e isolando  $V_z$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
 V_z = & \frac{b_0 \cdot I_y}{S_0} \cdot \left\{ \left[ \frac{S_0}{b_0 \cdot I_y} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) - \frac{A_0}{b_0 \cdot A} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) \right] + \frac{1}{b_0} \cdot \frac{dP_2}{dx} + \frac{b_0}{2 \cdot S_0} \cdot f_{ct} \cdot x_0 \cdot \right. \\
 & \left. z_0 \right\} + \frac{b_0 \cdot I_y}{S_0} \cdot \left\{ \left[ \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) - \frac{A_0 \cdot I_y}{A \cdot S_0} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) \right] \cdot f_{ct} \cdot x_0 \cdot \frac{z_0}{I_y} + \frac{dP_2}{dx} \cdot f_{ct} \cdot x_0 \cdot \right. \\
 & \left. \frac{z_0}{S_0} + \left( \frac{b_0}{2 \cdot S_0} \cdot f_{ct} \cdot x_0 \cdot z_0 \right)^2 + f_{ct} \cdot \frac{(P_1 + P_2)}{A} - f_{ct} \cdot \frac{z_0}{I_y} \cdot (P_1 \cdot e_1 - P_2 \cdot e_2) + f_{ct}^2 \right\}^{1/2}
 \end{aligned} \quad (4.20)$$

A seguir anulando os termos que dependem de  $P_2$  e  $\frac{dP_2}{dx}$  é possível reduzi-la à Equação (2.21 do Modelo de Yang. E considerando agora a cortante avaliada no ponto crítico (índice “pc”), a Equação (4.20) passa a ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 V_{z,máx} = & \frac{b_{pc} \cdot I_y}{S_{pc}} \cdot \left\{ \left[ \frac{S_{pc}}{b_{pc} \cdot I_y} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) - \frac{A_{pc}}{b_{pc} \cdot A} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) \right] + \frac{1}{b_{pc}} \cdot \frac{dP_2}{dx} + \frac{b_{pc}}{2 \cdot S_{pc}} \cdot \right. \\
 & \left. f_{ct} \cdot x_{pc} \cdot z_{pc} \right\} + \frac{b_{pc} \cdot I_y}{S_{pc}} \cdot \left\{ \left[ \left( \frac{dP_1}{dx} \cdot e_1 - \frac{dP_2}{dx} \cdot e_2 \right) - \frac{A_{pc} \cdot I_y}{A \cdot S_{pc}} \cdot \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} \right) \right] \cdot \frac{f_{ct}}{I_y} \cdot x_{pc} \cdot z_{pc} + \right. \\
 & \left. \frac{dP_2}{dx} \cdot \frac{f_{ct}}{S_{pc}} \cdot x_{pc} \cdot z_{pc} + \left( \frac{b_{pc}}{2 \cdot S_{pc}} \cdot f_{ct} \cdot x_{pc} \cdot z_{pc} \right)^2 + f_{ct} \cdot \frac{(P_1 + P_2)}{A} - f_{ct} \cdot \frac{z_{pc}}{I_y} \cdot (P_1 \cdot e_1 - P_2 \cdot \right. \\
 & \left. e_2) + f_{ct}^2 \right\}^{1/2}
 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Por fim, considerando a protensão em “n” camadas e adotando as mesmas notações definidas no item 2.7, tem-se:

$$\begin{aligned}
 V_{z,máx} = & \frac{b_{pc} \cdot I_y}{S_{pc}} \cdot \left\{ \left[ \frac{S_{pc}}{b_{pc} \cdot I_y} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{dP_i}{dx} \cdot e_i \right) - \frac{A_{pc}}{b_{pc} \cdot A} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{dP_i}{dx} \right) \right] + \frac{1}{b_{pc}} \cdot \sum_{j=1}^n \left( \frac{dP_j}{dx} \right) + \right. \\
 & \left. \frac{b_{pc}}{2 \cdot S_{pc}} \cdot f_{ct} \cdot x_{pc} \cdot z_{pc} \right\} + \frac{b_{pc} \cdot I_y}{S_{pc}} \cdot \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{dP_i}{dx} \cdot e_i \right) - \frac{A_{pc} \cdot I_y}{A \cdot S_{pc}} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{dP_i}{dx} \right) \right] \cdot \frac{f_{ct}}{I_y} \cdot x_{pc} \cdot z_{pc} + \right. \\
 & \left. \sum_{j=1}^n \left( \frac{dP_j}{dx} \right) \cdot \frac{f_{ct}}{S_{pc}} \cdot x_{pc} \cdot z_{pc} + \left( \frac{b_{pc}}{2 \cdot S_{pc}} \cdot f_{ct} \cdot x_{pc} \cdot z_{pc} \right)^2 + f_{ct} \cdot \frac{1}{A} \cdot \sum_{i=1}^n P_i - f_{ct} \cdot \frac{z_{pc}}{I_y} \cdot \right. \\
 & \left. \sum_{i=1}^n (P_i \cdot e_i) + f_{ct}^2 \right\}^{1/2}
 \end{aligned} \quad (4.22)$$

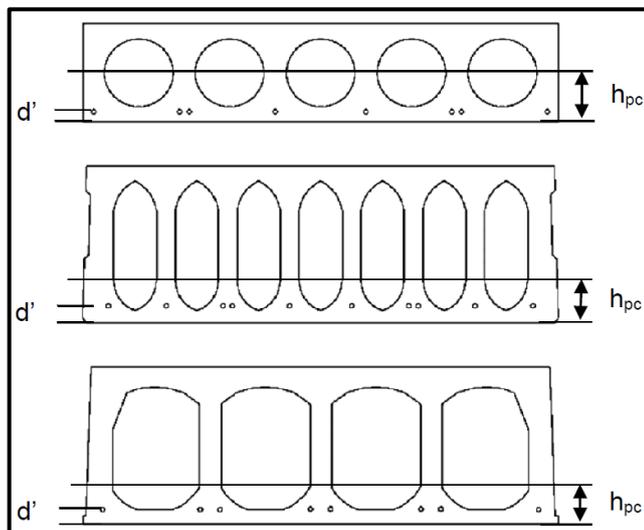
## 4.2 LOCALIZAÇÃO DO PONTO CRÍTICO

O ponto crítico é definido como o local onde a tensão principal numa determinada seção transversal atinge a capacidade resistente à tração do concreto, a partir do qual é iniciada a fissura diagonal capaz de se estender até o apoio e provocar o colapso.

Este ponto, conforme YANG (1994) está situado sobre a linha de ruptura, cujas coordenadas a partir do centro do apoio recebem a notação  $x_{pc}$  e  $h_{pc}$ . Porém, neste trabalho, assim como em PAJARI (2005) e em concordância com o método preconizado na EN1168:2008, o início da linha de ruptura será considerado na face interna do apoio.

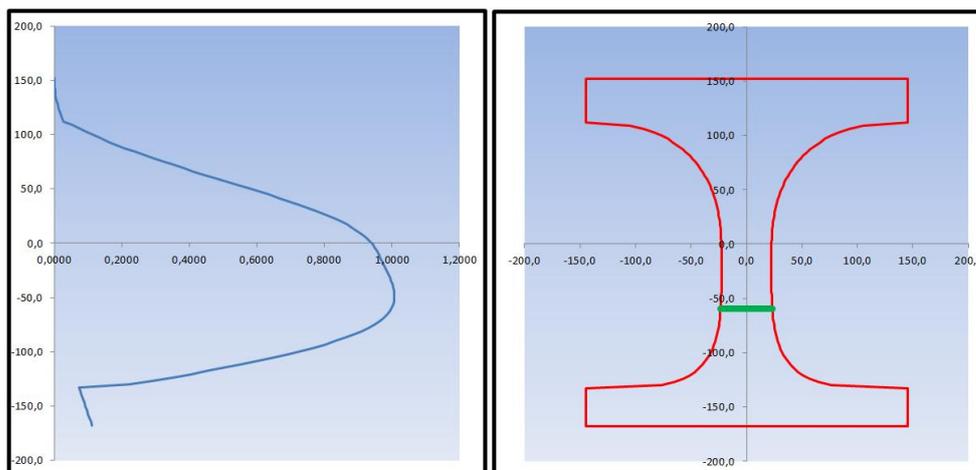
MARQUESI (2014) sugere em seu texto que a altura  $h_{pc}$  do ponto crítico ocorre na junção do talão inferior com o início da nervura, conforme ilustrado através da Figura 4.1.

**Figura 4.1: Definição da altura do ponto crítico**



[Fonte: MARQUESI (2014)]

Em geral, isso é possível na maioria dos casos para alvéolos poligonais ou mistos, porém, há situações em que a nervura tem espessura variável e, nestes casos, não é tão fácil estabelecer uma relação geométrica para definir, com boa precisão, a altura crítica  $h_{pc}$ . Na Figura 4.2, apresenta-se um exemplo de alvéolo curvo (e não-circular), onde o ponto crítico não é encontrado de maneira direta.

**Figura 4.2: Ponto crítico em alvéolos curvos não-circulares**

[Fonte: O autor]

### 4.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE O ÂNGULO DA LINHA DE RUPTURA

Conforme já apresentado anteriormente, o modelo de Yang-Pajari leva em consideração que o ângulo da linha de ruptura é constante e mede 35 graus com a linha horizontal que define o eixo da peça, independentemente das características geométricas da laje. Porém, calculando as tensões normais e de cisalhamento avaliadas no ponto crítico ( $\sigma_x, \tau_{xz}$ ) e lançando na Equação (4.23 da Resistência dos Materiais), o ângulo nem sempre coincide com aquele inicialmente arbitrado. Para reforçar o que aqui está sendo discutido, TRUNDERUNG (2011) em sua pesquisa, mediu o ângulo das fissuras imediatamente após a realização dos ensaios de cisalhamento e constatou variação expressiva no ângulo da linha de ruptura dos protótipos cuja ruptura ocorreu pelo mecanismo de tração diagonal.

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \left[ \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{2 \cdot \tau_{xz}}{\sigma_y - \sigma_z} \right) \right] \quad (4.23)$$

Assim, como proposta apresentada neste trabalho, é adotado um processo iterativo onde, partindo do ângulo de 35 graus com a linha horizontal que define o eixo da peça, são calculadas as coordenadas do ponto crítico conforme a expressão:

$$x_{pc} = \frac{h_{pc}}{\tan(\theta)} \quad (4.24)$$

Onde:  $\theta$  é o ângulo da linha de ruptura.

A seguir, são calculadas as tensões normal e cisalhante ( $\sigma_x, \tau_{xz}$ ) que são lançadas na Equação (4.23). Caso haja divergência do ângulo calculado com aquele anteriormente arbitrado, são calculadas as novas coordenadas do ponto crítico para o novo ângulo obtido. Ao final, é esperado que sempre haja convergência e, assim, possam ser obtidas as tensões, o ângulo final da linha de ruptura e, por fim, a cortante máxima resistente.

#### 4.4 LIMITES DE APLICAÇÃO DO MODELO

O efeito da protensão é favorável no aumento da capacidade resistente ao cisalhamento, desde que as tensões provenientes dos cabos nas fibras extremas da seção transversal não excedam os limites da capacidade resistente do concreto tanto a tração quanto a compressão, no ato da protensão (situação em vazio). Adotando como convenção as tensões de compressão negativas, as expressões que definem os limites de tensão do concreto são escritas a seguir:

$$\sigma_i = -\frac{P_1+P_2}{A_c} - P_1 \cdot e_1 \cdot \frac{z_{cg}}{I_y} + P_2 \cdot e_2 \cdot \frac{z_{cg}}{I_y} + M_{g1} \cdot \frac{z_{cg}}{I_y} ; \sigma_i \geq -0,7 \cdot f_{ck,j} \quad (4.25)$$

$$\sigma_s = -\frac{P_1+P_2}{A_c} + P_1 \cdot e_1 \cdot \frac{h-z_{cg}}{I_y} - P_2 \cdot e_2 \cdot \frac{h-z_{cg}}{I_y} - M_{g1} \cdot \frac{h-z_{cg}}{I_y} ; \sigma_s \leq \alpha \cdot f_{ct} \quad (4.26)$$

Onde:

$\sigma_i$ : tensão normal na fibra inferior;

$\sigma_s$ : tensão normal na fibra superior;

$P_1$ : força de protensão do cabo inferior após as perdas;

$P_2$ : força de protensão do cabo superior após as perdas;

$M_{g1}$ : momento fletor devido ao peso próprio da laje;

$e_1$ : excentricidade do cabo inferior em relação ao C.G. da seção (valor sempre positivo);

$e_2$ : excentricidade do cabo superior em relação ao C.G. da seção (valor sempre positivo);

$h$ : espessura da seção;

$A_c$ : área da seção bruta de concreto;

$I_y$ : Inércia da seção bruta de concreto;

$z_{cg}$ : posição do centro de gravidade da seção bruta ( $z_{cg} \geq 0$ );

$\alpha$ : fator de forma ( $\alpha = 1,5$  para lajes alveolares);

$f_{ct}$ : resistência a tração do concreto (adotado:  $f_{ct} = f_{ck,inf}$ ).

Atendidos os critérios de verificação em vazio, é preciso que a laje quando solicitada por ações externas não tenha o concreto fissurado por flexão, para que o modelo de tração diagonal seja válido. Para tanto, a verificação do momento de fissuração é uma forma de garantir a validade do modelo. Sendo assim, o momento de fissuração  $M_r$  da seção pode ser calculado pela expressão:

$$M_r = \left( \frac{P_1 + P_2}{A_{hom}} + \alpha \cdot f_{ct} \right) \cdot \frac{I_{y,hom}}{z_{cg,hom}} + P_1 \cdot e_1 - P_2 \cdot e_2 \quad (4.27)$$

Em que:

$$A_{hom} = \frac{A_c + (A_{p,1} + A_{p,2}) \cdot (\alpha_p - 1)}{A_{hom}}; \alpha_p = E_p / E_{cs} \quad (4.28)$$

$$z_{cg,hom} = \frac{A_c \cdot z_{cg} + A_{p,1} \cdot (\alpha_p - 1) \cdot d'_{p,1} + A_{p,2} \cdot (\alpha_p - 1) \cdot (h - d'_{p,2})}{A_{hom}} \quad (4.29)$$

$$I_{y,hom} = I_y + A_c \cdot (z_{cg} - z_{cg,hom})^2 + A_{p,1} \cdot (\alpha_p - 1) \cdot (d'_{p,1} - z_{cg,hom})^2 + A_{p,2} \cdot (\alpha_p - 1) \cdot (h - d'_{p,2} - z_{cg,hom})^2 \quad (4.30)$$

Onde:

$A_{hom}$ : área da seção de concreto homogeneizada;

$I_{hom}$ : Inércia da seção de concreto homogeneizada;

$z_{cg,hom}$ : posição do centro de gravidade da seção homogeneizada ( $z_{cg,hom} \geq 0$ );

$d'_{p,1}$ : distância da face inferior da seção até o centro da armadura longitudinal inferior;

$d'_{p,2}$ : distância da face inferior da seção até o centro da armadura longitudinal superior;

$A_{p,1}$ : área do cabo inferior;

$A_{p,2}$ : área do cabo superior;

$E_p$ : módulo de elasticidade do aço de protensão;

$E_{cs}$ : módulo de elasticidade secante do concreto.

Para a situação de laboratório, onde a configuração de ensaio pode ser representada pela Figura 4.3, onde a ordem de grandeza da carga  $P$  do atuador é muito superior à carga distribuída de peso próprio, aqui representada pela notação  $g_1$ , o momento e a cortante atuante do comprimento da peça até a posição  $x = l_1$ , denominados  $M_{at}$  e  $V_{at}$ , respectivamente, podem ser expressos por:

$$M_{at} = P \cdot x \cdot \frac{(L - l_1)}{L} + g_1 \cdot \frac{(L \cdot x - x^2)}{2} \quad (4.31)$$

$$V_{at} = P \cdot \frac{(L - l_1)}{2} + g_1 \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right) \quad (4.32)$$

Onde:

$P$ : força concentrada aplicada no atuador;

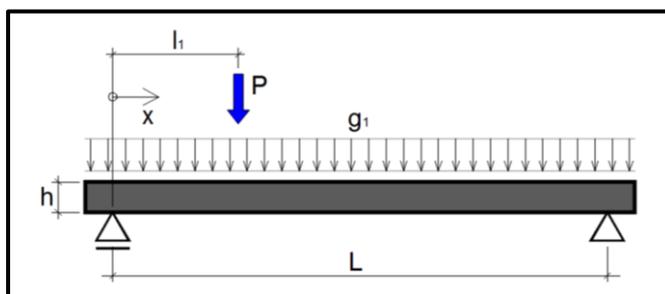
$L$ : distância entre centro dos apoios;

$l_1$ : distância entre a carga  $P$  e o centro do apoio mais próximo;

$x$ : posição da seção em análise;

$g_1$ : peso próprio do elemento por unidade de comprimento.

**Figura 4.3: Configuração de carregamento adotada em ensaio de cisalhamento**



[Fonte: O autor]

Sabendo que o momento de fissuração  $M_r$  é atingido em  $x = l_1$ , fazendo  $M_{at} = M_r$  e considerando que a cortante máxima ocorre à distância de  $h/2$  do apoio (seguindo recomendações do EC2), o carregamento  $P$  recebe a notação  $P_r$  e passa a ser chamada: carga crítica de fissuração; e matematicamente pode ser definido por:

$$P_r = \frac{\left[ M_r - g_1 \cdot \frac{(L \cdot l_1 - l_1^2)}{2} \right] \cdot L}{l_1 \cdot (L - l_1)} \quad (4.33)$$

Assim, caso a peça atinja a força crítica de fissuração antes de romper por tração diagonal, o modelo proposto deixa de ser válido. Neste caso, outro modelo de cálculo, que considera o mecanismo de flexo-cortante, deverá ser considerado para a previsão da carga última do ensaio.

Para facilitar a leitura do ponto onde ocorre a fissuração do concreto a partir do diagrama de força cortante, será introduzido em seguida um novo conceito chamado aqui de “cortante de fissuração”, cuja notação será  $V_r$ , e que pode ser definido como: o valor da força cortante que corresponde ao momento de fissuração. Esta cortante é um caso particular da Equação (4.32 considerando  $x = h/2$ . Ou seja:

$$V_r = P_r \cdot \frac{(L - l_1)}{2} + g_1 \cdot \frac{(L - h)}{2} \quad (4.34)$$

Onde  $h$  é a altura da seção transversal.

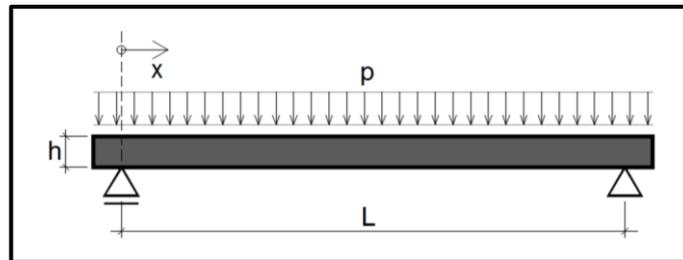
Para situações de projeto onde atuam, sobretudo, cargas distribuídas, como mostrado na Figura 4.4, o momento e a cortante atuante podem ser calculados para qualquer seção ao longo do eixo longitudinal da peça pelas seguintes expressões:

$$M_{at} = p \cdot \frac{(x \cdot L - p \cdot x^2)}{2} \quad (4.35)$$

$$V_{at} = p \cdot \left( \frac{L}{2} - x \right) \quad (4.36)$$

Onde  $p$  é a carga total distribuída por unidade de comprimento.

**Figura 4.4: Configuração de carregamento distribuído**



[Fonte: O autor]

Novamente igualando o momento atuante com o momento de fissuração ( $M_{at} = M_r$ ) e considerando novamente que a cortante máxima ocorre à distância de  $h/2$  do apoio, a carga distribuída  $p$ , recebe a notação  $p_r$ , a qual passa a ser escrita como:

$$p_r = \frac{8 \cdot M_r}{h \cdot (2 \cdot L - h)} \quad (4.37)$$

Por fim, a cortante de fissuração para o caso de cargas distribuídas, é calculada como:

$$V_r = p_r \cdot \frac{(L - h)}{2} \quad (4.38)$$

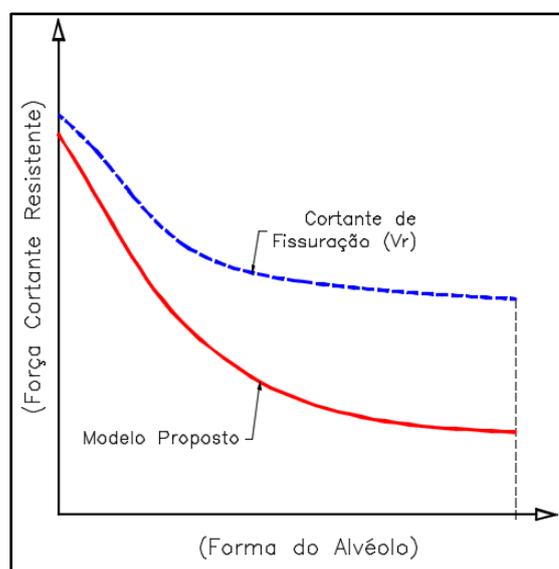
Conforme apresentado até aqui, é importante destacar que o parâmetro “cortante de fissuração” não pode ser definido a partir de um equacionamento

universal, mas este é inteiramente dependente do esquema de carregamento atuante.

O cálculo da cortante de fissuração pode ser útil na avaliação de desempenho de lajes alveolares (ao cisalhamento), já que permite identificar de forma direta o modo de ruptura a que o elemento está sujeito. Fixando um valor para a tensão média de protensão no centro de gravidade da seção ( $\sigma_{cp}$ ), e variando a forma dos alvéolos, a curva da cortante de fissuração pode assumir três configurações possíveis em relação a cortante resistente calculada pelo método proposto.

No primeiro caso, a curva referente a cortante de fissuração está totalmente acima da curva da cortante resistente ( $V_r > V_z$ ), o que significa dizer que para aquele nível de protensão, a forma do alvéolo não altera o mecanismo de ruptura (ver Figura 4.5).

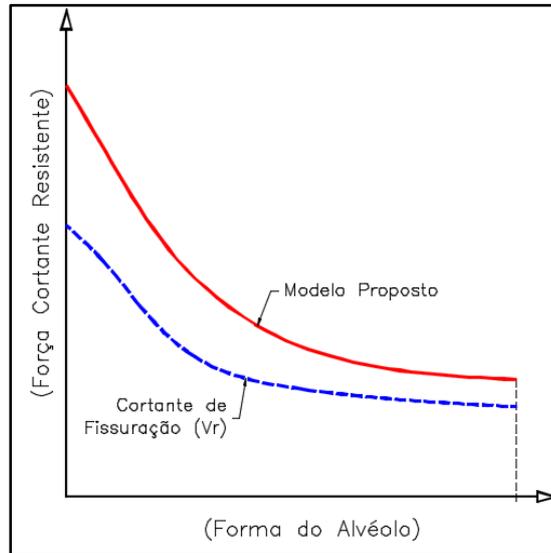
**Figura 4.5: Modelo aplicável para qualquer que seja a forma do alvéolo**



[Fonte: O autor]

No caso onde a cortante de fissuração está totalmente abaixo da curva da cortante resistente ( $V_r < V_z$ ), significa que independentemente da forma do alvéolo a para aquela determinada protensão, a laje estará sujeita ao mecanismo de flexo-cortante (ver Figura 4.6).

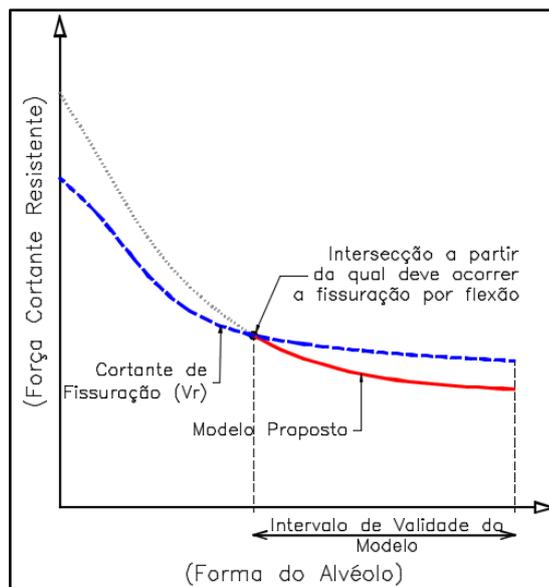
**Figura 4.6: Modelo não aplicável independentemente da forma do alvéolo**



[Fonte: O autor]

Por fim, um terceiro caso ocorre quando a curva da cortante de fissuração intercepta a curva da cortante resistente; neste caso o modelo é válido apenas para as seções após a intersecção (ver Figura 4.7).

**Figura 4.7: Modelo aplicável para situações específicas de forma do alvéolo**



[Fonte: O autor]

## 5 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Nesse capítulo são apresentados três exemplos de cálculo para explicar de forma aplicada o que foi discursado no Capítulo 3 e no Capítulo 4 do presente trabalho.

No primeiro exemplo, é considerada a condição de carregamento e vão conforme ensaio padrão CEB-FIB (1992) (e EN 1168:2008) e avaliado o efeito da variação da forma de alvéolos curvos e poligonais sobre a cortante resistente para as classes de lajes H20 (200mm de espessura), H25 (250mm de espessura), H30 (300mm de espessura), H40 (400mm de espessura), e H50 (500mm de espessura), fixando a soma das larguras das nervuras  $\Sigma_{bw}$ , para cada classe, a resistência a compressão e tração do concreto, a tensão média de compressão inicial no concreto devido a protensão ( $\sigma_{cp,i}$ ) (sem computar as perdas) e o comprimento de transferência de protensão ( $l_{pt,2}$ ). É considerando também neste exemplo o efeito da variação do ângulo da linha de ruptura e, para definição do limite de validade do modelo, é aplicado o conceito de cortante de fissuração apresentado no capítulo anterior, de modo a estabelecer o limite de validade do modelo de Yang-Pajari. Os resultados são expressos em forma de tabelas e gráficos.

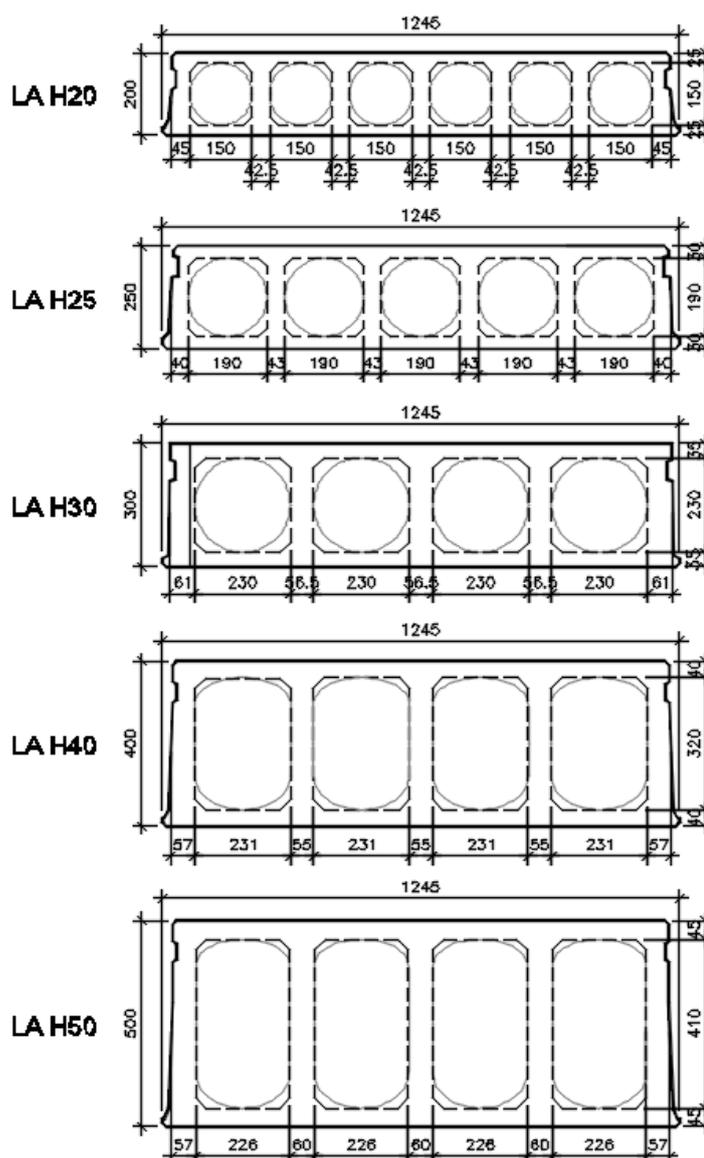
No segundo exemplo, é avaliado o efeito da variação da forma de alvéolos para a laje de classe H30 do exemplo anterior, considerando agora três tipologias de seções transversais, mantendo-se o mesmo índice de vazios (46%), e supondo válida a aplicação do modelo de Yang-Pajari. Neste exemplo é feita uma correlação entre a posição do ponto crítico e o valor da cortante resistente.

Por fim, no terceiro exemplo é realizada uma análise comparativa teórica-experimental de dois perfis distintos geometricamente (a menos da espessura), cujos dados de ensaio foram disponibilizados pelo laboratório NETPre-UFSCar. Estes perfis são avaliados à luz do método de Yang-Pajari e da norma brasileira, a fim de avaliar o desempenho destes quanto a aderência aos resultados experimentais. Em concordância com o que foi discursado em FRANÇA (2012) quanto ao uso inadequado do parâmetro “ $\alpha$ ” é adotado neste trabalho, para efeito de comparação com resultados experimentais, o modelo presente na NBR6118:2014.

## 5.1 EXEMPLO 1

A Figura 5.1 ilustra as características das seções adotadas para esse exemplo.

Figura 5.1: Características das lajes adotadas no exemplo



[Fonte: O autor]

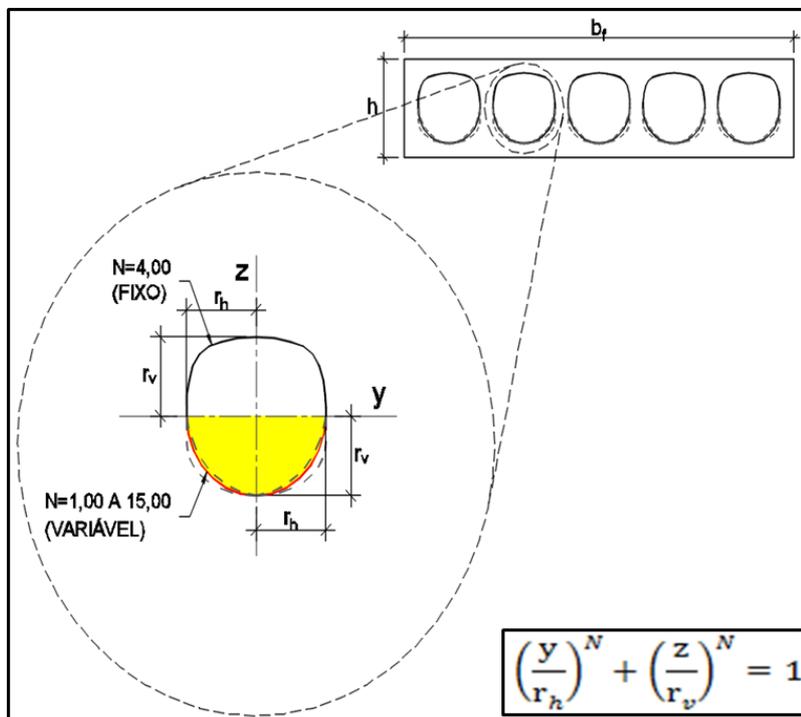
Para todas as classes de laje estudadas são considerados os seguintes dados gerais:

- Resistência à compressão do concreto no ato da protensão:  $f_{c_j, \text{protensão}} = 25 \text{ MPa}$ ;
- Resistência a compressão característica aos 28 dias:  $f_{ck} = 50 \text{ MPa}$ ;

- Comprimento de transferência de protensão  $l_{pt,2} = 65\phi$  (sendo  $\phi$  o diâmetro da do fio ou cordoalha);
- Perdas de protensão iniciais: 5%;
- Perdas de protensão finais: 15%;
- Tensão média de compressão inicial no concreto devido a protensão ( $\sigma_{cp,i}$ ): 6MPa;
- Tensão de tração  $f_{ct} = f_{ck,inf} = 0,21 \cdot \sqrt{f_{ck}}$  ;
- Fator de segurança unitário ( $\gamma_f = 1,0$ ).

Para os alvéolos curvos, é considerada a equação proposta por LINDSTROM (2007), mantendo fixo o parâmetro  $N=4$  para a parte superior do alvéolo e variando o parâmetro  $N$  da parte inferior, conforme ilustrado na Figura 5.2. Para cada uma das classes estudadas nesse exemplo, para efeito de comparação, será apresentada uma condição particular de alvéolo curvo que são os alvéolos circulares; onde  $N=2$  tanto para a parte superior quanto para a parte inferior do alvéolo.

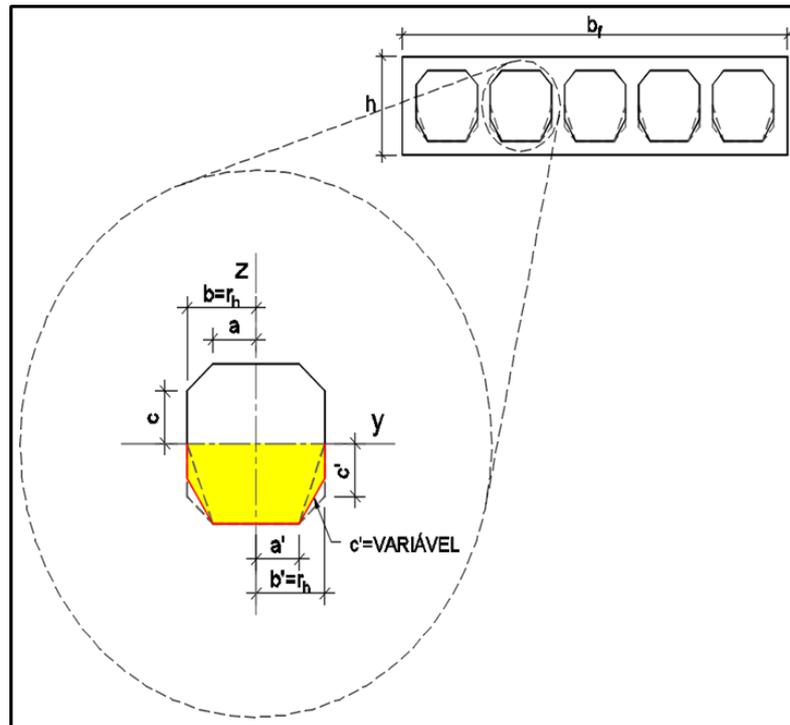
**Figura 5.2: Parâmetros geométricos para definição da forma – Alvéolos curvos**



[Fonte: O autor]

Para os alvéolos poligonais, são mantidos fixos os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  para a parte superior do alvéolo e variando apenas o parâmetro  $c'$  (inferior), mantendo também fixos os parâmetros  $a'$  e  $b'$  (ver Figura 5.3).

**Figura 5.3: Parâmetros geométricos para definição da forma – Alvéolos poligonais**



[Fonte: O autor]

Os resultados obtidos de cortante resistente para cada classe de laje são apresentados a seguir em forma de tabelas e gráficos, tanto para o cálculo segundo Yang-Pajari quanto para a norma brasileira (NBR6118:2014). São apresentados também nas tabelas os valores correspondentes do ângulo da linha de ruptura (medido no ponto crítico “ $pc$ ”), bem como a posição da seção crítica em relação a fibra inferior da laje  $h_{pc}$ .

### 5.1.1 ALVÉOLOS CURVOS

#### ✓ Laje H20:

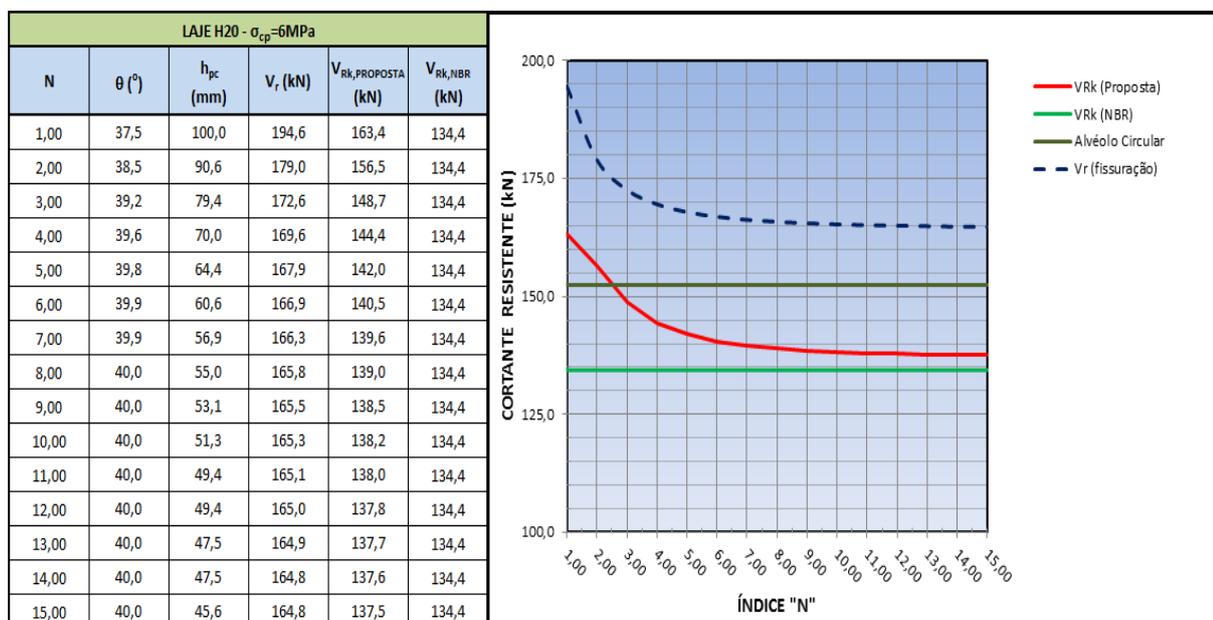
Segue abaixo as considerações para o cálculo para a laje H20:

- Altura do perfil ( $h$ ): 200mm
- Largura média do perfil ( $b$ ): 1202,5mm
- Comprimento da peça ( $L$ ): 6000mm

- Número de alvéolos ( $n_{alv}$ ): 6un.
- Largura da alma interna ( $b_{wi}$ ): 42,5mm
- Largura da alma externa ( $b_{we}$ ): 45,0mm
- Espessura do talão superior ( $t_s$ ): 25,0mm
- Espessura do talão inferior ( $t_i$ ): 25,0mm
- Posição da cordoalha superior ( $d_{p2}$ ): 35,0mm
- Posição da cordoalha inferior ( $d_{p1}$ ): 35,0mm
- Protensão inferior:  $7\phi 12,7$ mm

A seguir, na Figura 5.4 são apresentados os valores calculados para análise.

**Figura 5.4: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H20 – Alvéolos curvos**



[Fonte: O autor]

É possível observar na figura anterior, que para a classe de laje (H20), considerando o nível de protensão adotado, independentemente da forma dos alvéolos o modelo proposto deve ser sempre válido, já que a ruptura deve ocorrer pelo mecanismo de tração diagonal, tendo em vista que os valores calculados de  $V_{Rk}$  são sempre inferiores aos valores correspondentes à fissuração ( $V_r$ ). Vale destacar também que o desempenho para o alvéolo circular pode ser superado apenas quando  $N < 2,50$ . Considerando o modelo da norma brasileira, a redução da capacidade resistente pode ser de até 18%.

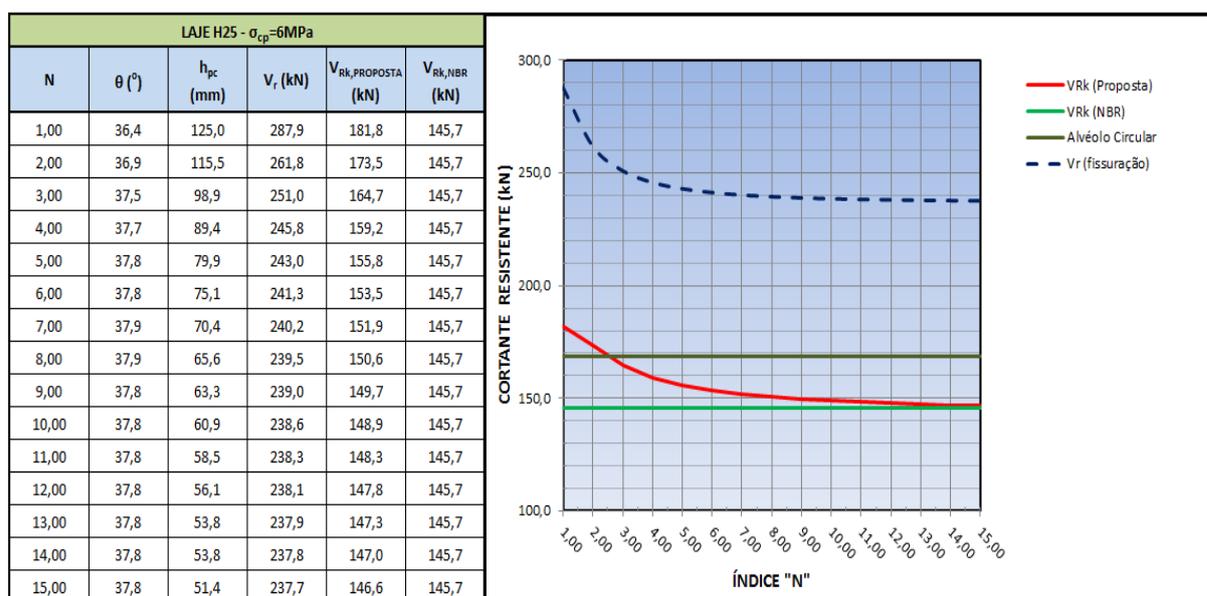
✓ **Laje H25:**

Segue abaixo as considerações para o cálculo para a laje H25:

- Altura do perfil ( $h$ ): 250mm
- Largura média do perfil ( $b$ ): 1202,5mm
- Comprimento da peça ( $L$ ): 6000mm
- Número de alvéolos ( $n_{alv}$ ): 5un.
- Largura da alma interna ( $b_{wi}$ ): 43,0mm
- Largura da alma externa ( $b_{we}$ ): 40,0mm
- Espessura do talão superior ( $t_s$ ): 30,0mm
- Espessura do talão inferior ( $t_i$ ): 30,0mm
- Posição da cordoalha superior ( $d_{p2}$ ): 40,0mm
- Posição da cordoalha inferior ( $d_{p1}$ ): 40,0mm
- Protensão inferior: 9 $\phi$ 12,7mm

A seguir, na Figura 5.5 são apresentados os valores calculados para análise.

**Figura 5.5: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H25 – Alvéolos curvos**



[Fonte: O autor]

Assim como para a classe H20 as lajes H25 adotadas neste exemplo devem romper sempre por tração diagonal, qualquer que seja a forma do alvéolo, considerando que os valores calculados de  $V_{Rk}$  são sempre inferiores aos valores

correspondentes à fissuração ( $V_f$ ); sendo assim, o modelo proposto tem validade. Assim como para as lajes H20, o desempenho ao cisalhamento para o alvéolo circular também pode ser superado apenas para  $N < 2,50$ . Considerando o modelo da norma brasileira, a redução da capacidade resistente pode ser de até 20%.

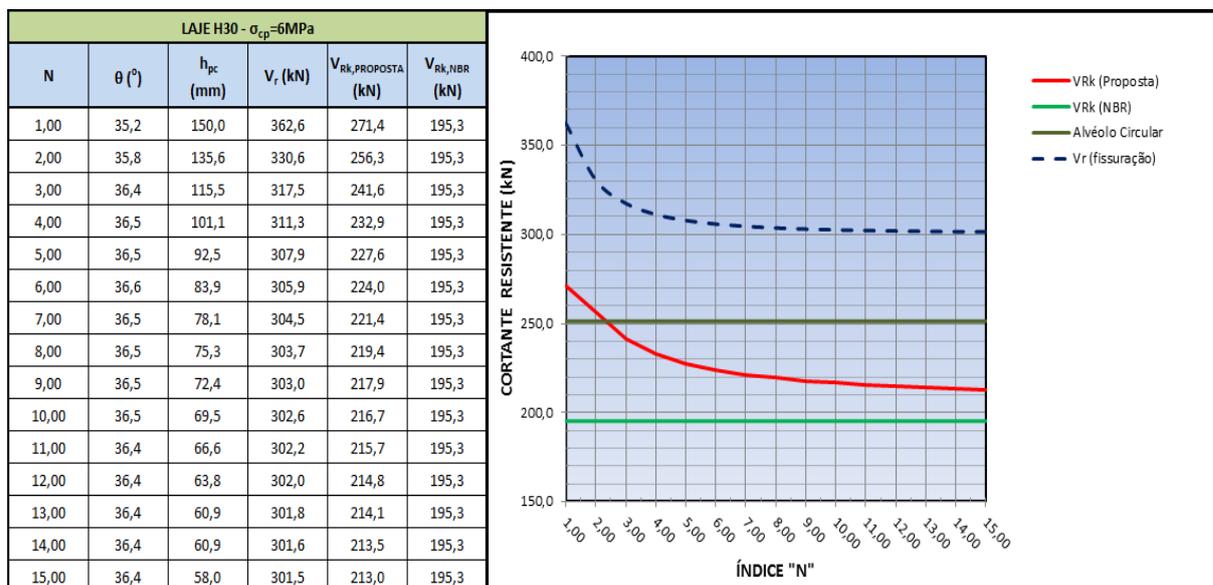
✓ **Laje H30:**

Segue abaixo as considerações para o cálculo para a laje H30:

- Altura do perfil ( $h$ ): 300mm
- Largura média do perfil ( $b$ ): 1211,5mm
- Comprimento da peça ( $L$ ): 6000mm
- Número de alvéolos ( $n_{alv}$ ): 4un.
- Largura da alma interna ( $b_{wi}$ ): 56,5mm
- Largura da alma externa ( $b_{we}$ ): 61,0mm
- Espessura do talão superior ( $t_s$ ): 35,0mm
- Espessura do talão inferior ( $t_i$ ): 35,0mm
- Posição da cordoalha superior ( $d_{p2}$ ): 42,5mm
- Posição da cordoalha inferior ( $d_{p1}$ ): 42,5mm
- Protensão inferior: 11 $\phi$ 12,7mm

A seguir, na Figura 5.6 são apresentados os valores calculados para análise.

**Figura 5.6: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H30 – Alvéolos curvos**



[Fonte: O autor]

Assim como para a classe H20 e H25 as lajes H30 adotadas neste exemplo devem romper sempre por tração diagonal, qualquer que seja a forma do alvéolo, considerando que os valores calculados de  $V_{Rk}$  são sempre inferiores aos valores correspondentes à fissuração ( $V_r$ ); sendo assim, o modelo proposto tem validade. Assim como para as lajes H20 e H25, o desempenho ao cisalhamento para o alvéolo circular também pode ser superado apenas para  $N < 2,25$ . Considerando o modelo da norma brasileira, a redução da capacidade resistente pode ser de até 28%.

#### ✓ Laje H40:

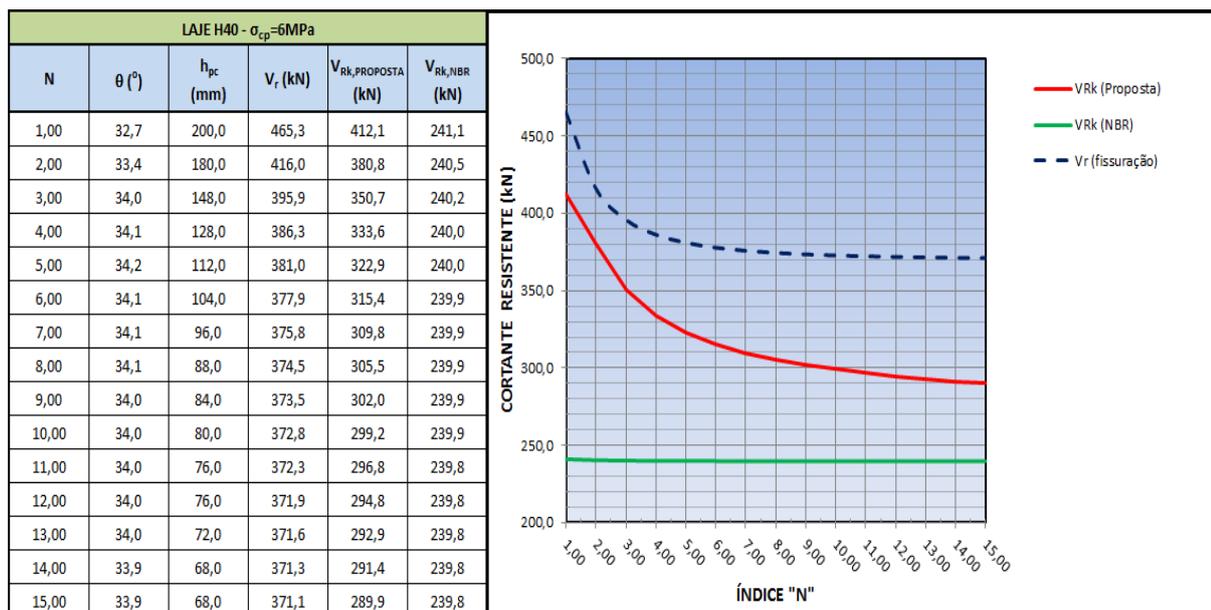
Segue abaixo as considerações para o cálculo para a laje H40:

- Altura do perfil ( $h$ ): 400mm
- Largura média do perfil ( $b$ ): 1202,5mm
- Comprimento da peça ( $L$ ): 6000mm
- Número de alvéolos ( $n_{alv}$ ): 4un.
- Largura da alma interna ( $b_{wi}$ ): 55,0mm
- Largura da alma externa ( $b_{we}$ ): 57,0mm
- Espessura do talão superior ( $t_s$ ): 40,0mm
- Espessura do talão inferior ( $t_i$ ): 40,0mm
- Posição da cordoalha superior ( $d_{p2}$ ): 42,5mm

- Posição da cordoalha inferior ( $d_{p1}$ ): 42,5mm
- Protensão inferior: 14 $\phi$ 12,7mm (CP190-RB).
- Protensão inferior: 2 $\phi$ ,7mm (CP190-RB).

A seguir, na Figura 5.7 são apresentados os valores calculados para análise.

**Figura 5.7: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H40 – Alvéolos curvos**



[Fonte: O autor]

Assim como para a classe H20, H25 e H30, as lajes H40 adotadas nesse exemplo devem romper sempre por tração diagonal, qualquer que seja a forma do alvéolo, considerando que os valores calculados de  $V_{Rk}$  são sempre inferiores aos valores correspondentes à fissuração ( $V_r$ ); sendo assim, o modelo proposto tem validade. Considerando o modelo da norma brasileira, a redução da capacidade resistente pode ser de até 41%.

✓ **Laje H50:**

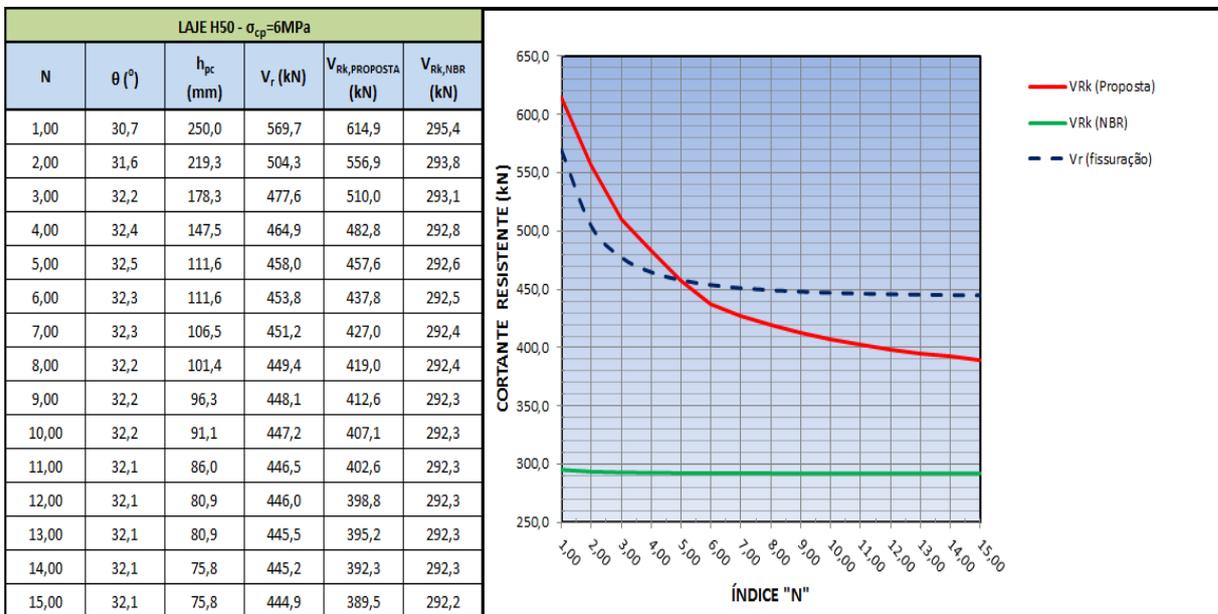
Segue abaixo as considerações para o cálculo para a laje H50:

- Altura do perfil ( $h$ ): 500mm
- Largura média do perfil ( $b$ ): 1199,0mm
- Comprimento da peça ( $L$ ): 6000mm
- Número de alvéolos ( $n_{alv}$ ): 4un.
- Largura da alma interna ( $b_{wi}$ ): 60,0mm

- Largura da alma externa ( $b_{we}$ ): 57,0mm
- Espessura do talão superior ( $t_s$ ): 45,0mm
- Espessura do talão inferior ( $t_i$ ): 45,0mm
- Posição da cordoalha superior ( $d_{p2}$ ): 42,5mm
- Posição da cordoalha inferior ( $d_{p1}$ ): 42,5mm
- Protensão inferior: 16 $\phi$ 12,7mm (CP190-RB).
- Protensão inferior: 4 $\phi$ ,7mm (CP190-RB).

A seguir, na Figura 5.8 são apresentados os valores calculados para análise.

**Figura 5.8: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H50 – Alvéolos curvos**



[Fonte: O autor]

Diferente do que foi visto para as classes anteriores, as lajes H50 adotadas neste exemplo devem romper por tração diagonal desde que  $N > 5,00$ , ou seja, para valores de  $N \leq 5,00$ , para o nível de protensão adotado, a laje deve sofrer fissuração antes de atingir a carga de ruptura prevista no modelo proposto. Então, para a previsão do valor máximo resistente deverá ser utilizado modelo correspondente ao mecanismo de ruptura por flexo-cortante. Considerando o modelo da norma brasileira, a redução da capacidade resistente pode ser de até 36%, porém esta redução poderá ser até maior no caso da utilização de outros modelos.

### 5.1.2 ALVÉOLOS POLIGONAIS

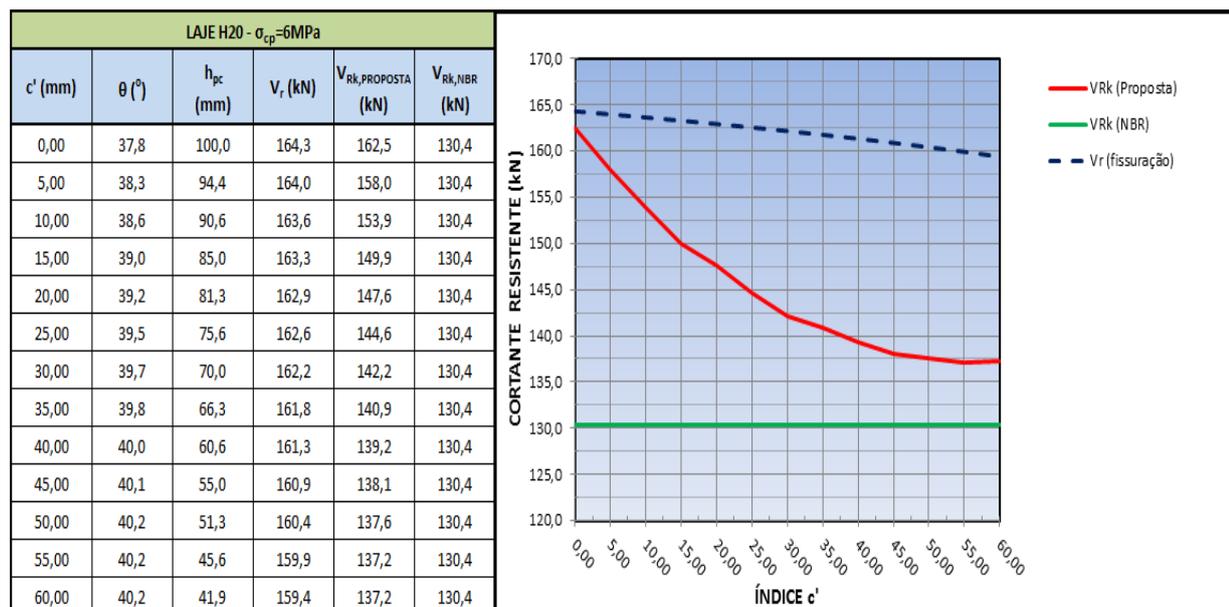
✓ **Laje H20.0:**

Segue abaixo as considerações para o cálculo para a laje H20:

- Altura do perfil ( $h$ ): 200mm
- Largura média do perfil ( $b$ ): 1202,5mm
- Comprimento da peça ( $L$ ): 6000mm
- Número de alvéolos ( $n_{alv}$ ): 6un.
- Largura da alma interna ( $b_{wi}$ ): 42,5mm
- Largura da alma externa ( $b_{we}$ ): 45,0mm
- Espessura do talão superior ( $t_s$ ): 25,0mm
- Espessura do talão inferior ( $t_i$ ): 25,0mm
- Posição da cordoalha superior ( $d_{p2}$ ): 35,0mm
- Posição da cordoalha inferior ( $d_{p1}$ ): 35,0mm
- Protensão inferior:  $7\phi 12,7$ mm

A seguir, na Figura 5.9 são apresentados os valores calculados para análise.

**Figura 5.9: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H20 – Alvéolos poligonais**



[Fonte: O autor]

É possível observar na figura acima, que para essa classe de laje (H20), considerando o nível de protensão adotado, independentemente da forma dos alvéolos o modelo proposto deverá ser sempre válido, já que a ruptura deve ocorrer pelo mecanismo de tração diagonal, tendo em vista que os valores calculados de  $V_{Rk}$  são sempre inferiores aos valores correspondentes à fissuração ( $V_f$ ). Considerando o modelo da norma brasileira, a redução da capacidade resistente pode ser de até 20%.

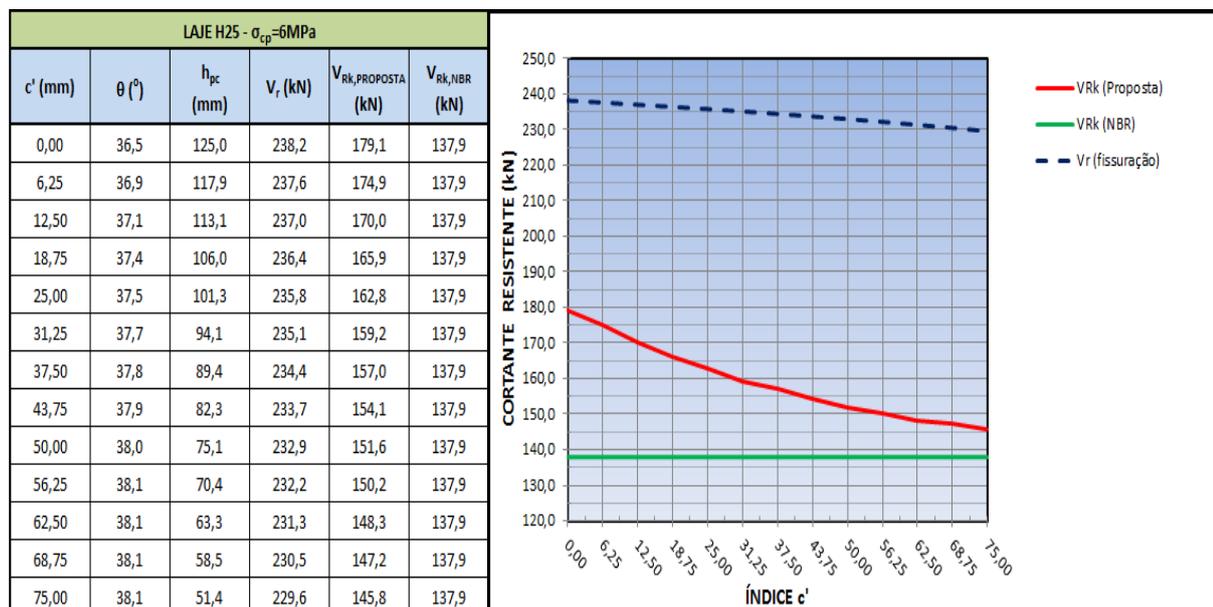
✓ **Laje H25:**

Segue abaixo as considerações para o cálculo para a laje H25:

- Altura do perfil ( $h$ ): 250mm
- Largura média do perfil ( $b$ ): 1202,5mm
- Comprimento da peça ( $L$ ): 6000mm
- Número de alvéolos ( $n_{alv}$ ): 5un.
- Largura da alma interna ( $b_{wi}$ ): 43,0mm
- Largura da alma externa ( $b_{we}$ ): 40,0mm
- Espessura do talão superior ( $t_s$ ): 30,0mm
- Espessura do talão inferior ( $t_i$ ): 30,0mm
- Posição da cordoalha superior ( $d_{p2}$ ): 40,0mm
- Posição da cordoalha inferior ( $d_{p1}$ ): 40,0mm
- Protensão inferior:  $7\phi 12,7$ mm

A seguir, na Figura 5.10 são apresentados os valores calculados para análise.

**Figura 5.10: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H25 – Alvéolos poligonais**



[Fonte: O autor]

Assim como para a classe H20 as lajes H25 adotadas neste exemplo devem romper sempre por tração diagonal, qualquer que seja a forma do alvéolo, considerando que os valores calculados de  $V_{RK}$  são sempre inferiores aos valores correspondentes à fissuração ( $V_r$ ). Para o modelo da norma brasileira, a redução da capacidade resistente pode ser de até 19%.

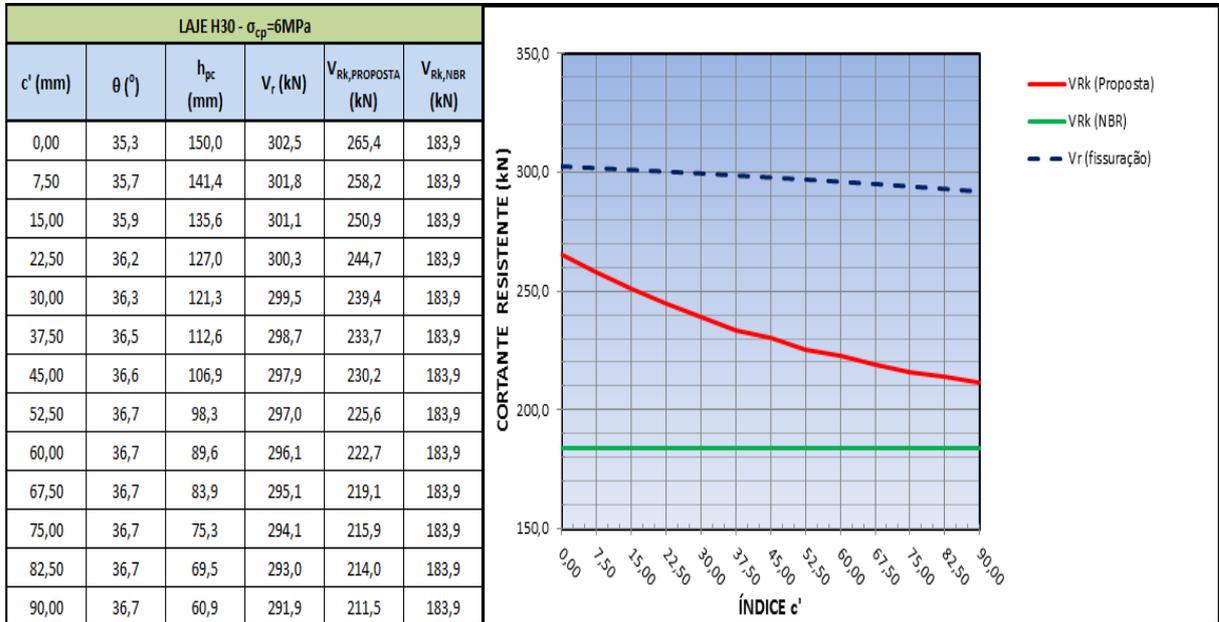
### ✓ Laje H30:

Segue abaixo as considerações para o cálculo para a laje H30:

- Altura do perfil ( $h$ ): 300mm
- Largura média do perfil ( $b$ ): 1211,5mm
- Comprimento da peça ( $L$ ): 6000mm
- Número de alvéolos ( $n_{alv}$ ): 4un.
- Largura da alma interna ( $b_{wi}$ ): 56,5mm
- Largura da alma externa ( $b_{we}$ ): 61,0mm
- Espessura do talão superior ( $t_s$ ): 35,0mm
- Espessura do talão inferior ( $t_i$ ): 35,0mm
- Posição da cordoalha superior ( $d_{p2}$ ): 42,5mm
- Posição da cordoalha inferior ( $d_{p1}$ ): 42,5mm
- Protensão inferior:  $8\phi 12,7\text{mm}$

A seguir, na Figura 5.11 são apresentados os valores calculados para análise.

**Figura 5.11: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H30 – Alvéolos poligonais**



[Fonte: O autor]

Assim como para a classe H20 e H25 as lajes H30 adotadas neste exemplo devem romper sempre por tração diagonal, qualquer que seja a forma do alvéolo, considerando que os valores calculados de  $V_{RK}$  são sempre inferiores aos valores correspondentes à fissuração ( $V_r$ ). Para o modelo da norma brasileira, a redução da capacidade resistente pode ser de até 31%.

✓ **Laje H40:**

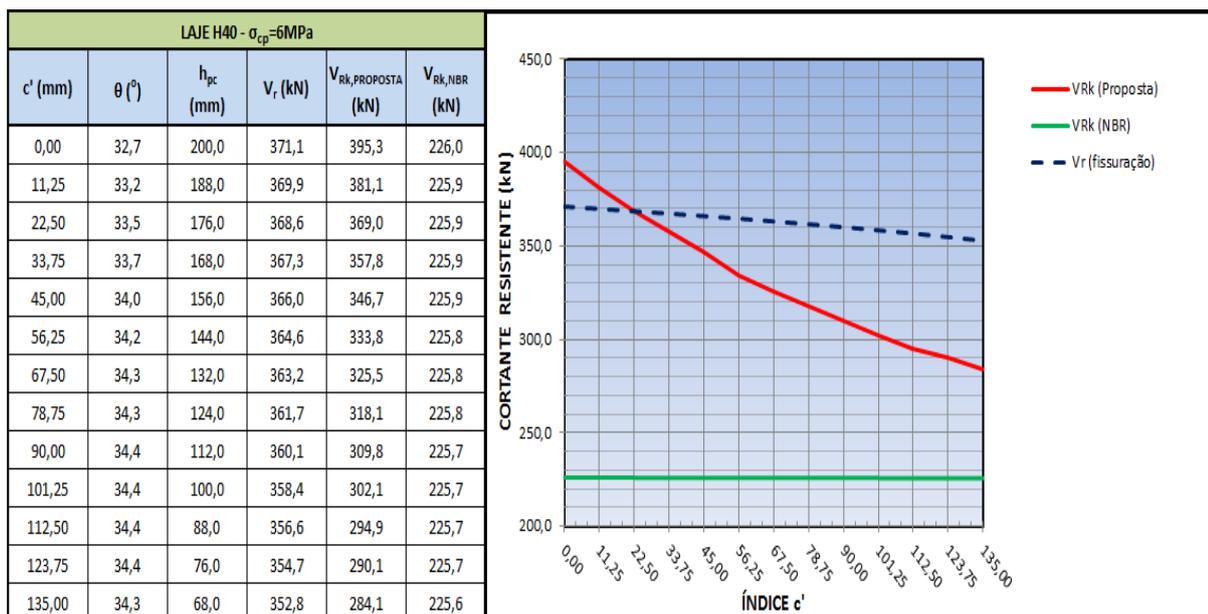
Segue abaixo as considerações para o cálculo para a laje H40:

- Altura do perfil ( $h$ ): 400mm
- Largura média do perfil ( $b$ ): 1202,5mm
- Comprimento da peça ( $L$ ): 6000mm
- Número de alvéolos ( $n_{alv}$ ): 4un.
- Largura da alma interna ( $b_{wi}$ ): 55,0mm
- Largura da alma externa ( $b_{we}$ ): 57,0mm
- Espessura do talão superior ( $t_s$ ): 40,0mm
- Espessura do talão inferior ( $t_i$ ): 40,0mm
- Posição da cordoalha superior ( $d_{p2}$ ): 42,5mm

- Posição da cordoalha inferior ( $d_{p1}$ ): 42,5mm
- Protensão inferior: 10 $\phi$ 12,7mm (CP190-RB).
- Protensão inferior: 2 $\phi$ ,7mm (CP190-RB).

A seguir, na Figura 5.12 são apresentados os valores calculados para análise.

**Figura 5.12: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H40 – Alvéolos poligonais**



[Fonte: O autor]

Diferente do que foi visto para as classes anteriores, as lajes H40 adotadas neste exemplo devem romper por tração diagonal desde que  $c' > 22,50$ , ou seja, para valores de  $c' \leq 22,50$ , para o nível de protensão adotado, a laje deve sofrer fissuração antes de atingir a carga de ruptura prevista no modelo proposto. Assim, para a previsão do valor da força cortante resistente deverá ser utilizado modelo correspondente ao mecanismo de ruptura por flexo-cortante. Para o modelo da norma brasileira, a redução da capacidade resistente pode ser de até 39%.

✓ **Laje H50:**

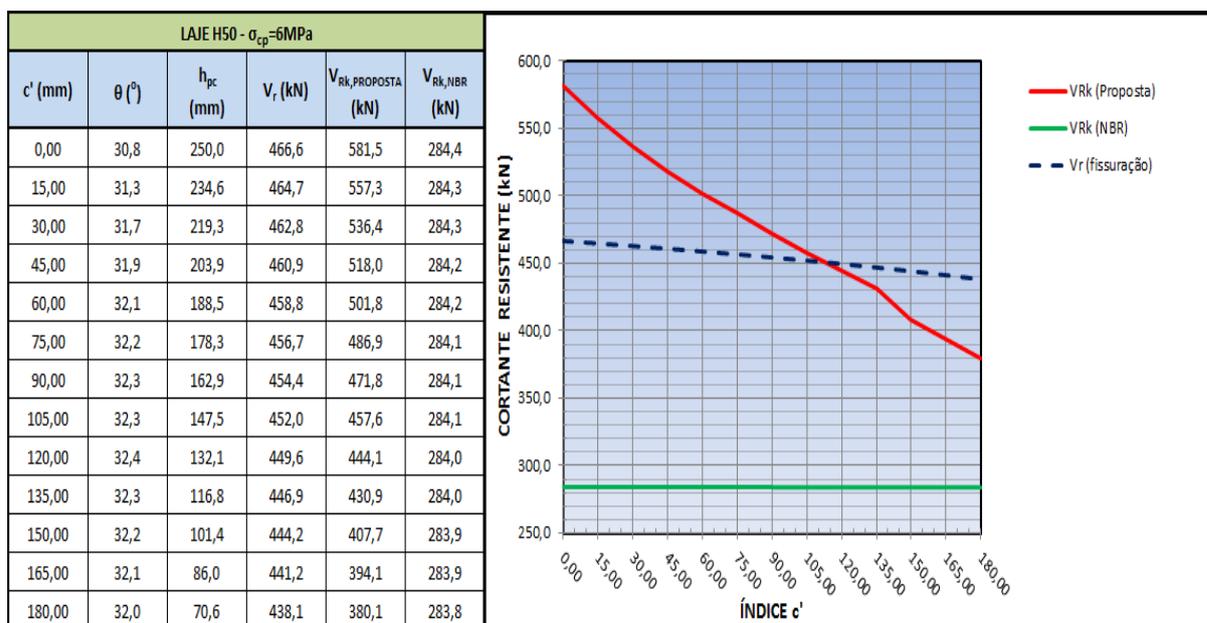
Segue abaixo as considerações para o cálculo para a laje H50:

- Altura do perfil ( $h$ ): 500mm
- Largura média do perfil ( $b$ ): 1199,0mm
- Comprimento da peça ( $L$ ): 6000mm
- Número de alvéolos ( $n_{alv}$ ): 4un.

- Largura da alma interna ( $b_{wi}$ ): 60,0mm
- Largura da alma externa ( $b_{we}$ ): 57,0mm
- Espessura do talão superior ( $t_s$ ): 45,0mm
- Espessura do talão inferior ( $t_i$ ): 45,0mm
- Posição da cordoalha superior ( $d_{p2}$ ): 42,5mm
- Posição da cordoalha inferior ( $d_{p1}$ ): 42,5mm
- Protensão inferior: 12 $\phi$ 12,7mm (CP190-RB).
- Protensão inferior: 2 $\phi$ ,7mm (CP190-RB).

A seguir, na Figura 5.13 são apresentados os valores calculados para análise.

**Figura 5.13: Capacidade resistente a força cortante considerando variação da forma dos alvéolos para laje H50 – Alvéolos poligonais**



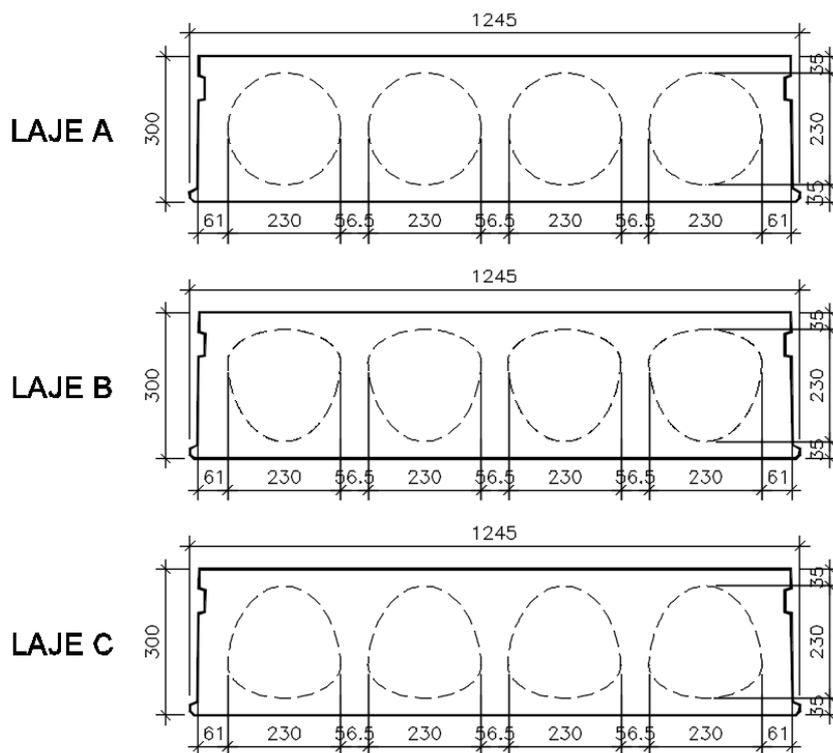
[Fonte: O autor]

Assim como para as lajes H40, as lajes H50 adotadas neste exemplo devem romper por tração diagonal desde que  $c' > 112,50$ , ou seja, para valores de  $c' \leq 112,50$ , para o nível de protensão adotado, a laje deve sofrer fissuração antes de atingir a carga de ruptura prevista no modelo proposto. Então, para a previsão do valor deverá ser utilizado modelo correspondente ao mecanismo de ruptura por flexo-cortante. Considerando o modelo da norma brasileira, a redução da capacidade resistente pode ser de até 51%.

## 5.2 EXEMPLO 2

Partindo da geometria circular (Laje A), são apresentadas mais duas propostas de geometria (Laje B e Laje C) considerando a mesma forma dos alvéolos, porém, sendo um espelho da outra em relação ao eixo horizontal, conforme ilustrado na Figura 5.14.

**Figura 5.14: Características geométricas das lajes H30 analisadas – Seções transversais**



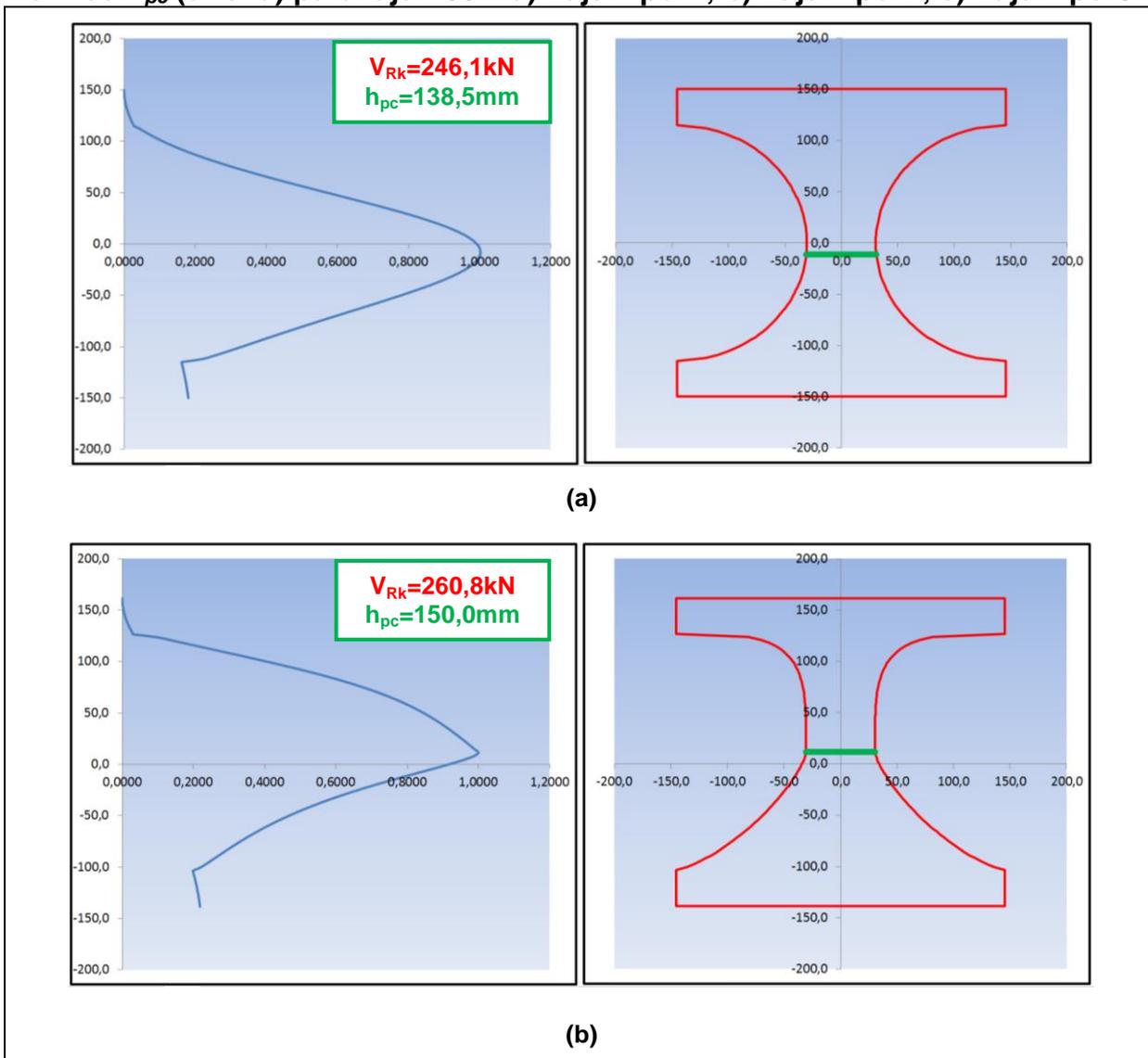
[Fonte: O autor]

Para as três seções estudadas neste exemplo, são considerados os seguintes dados:

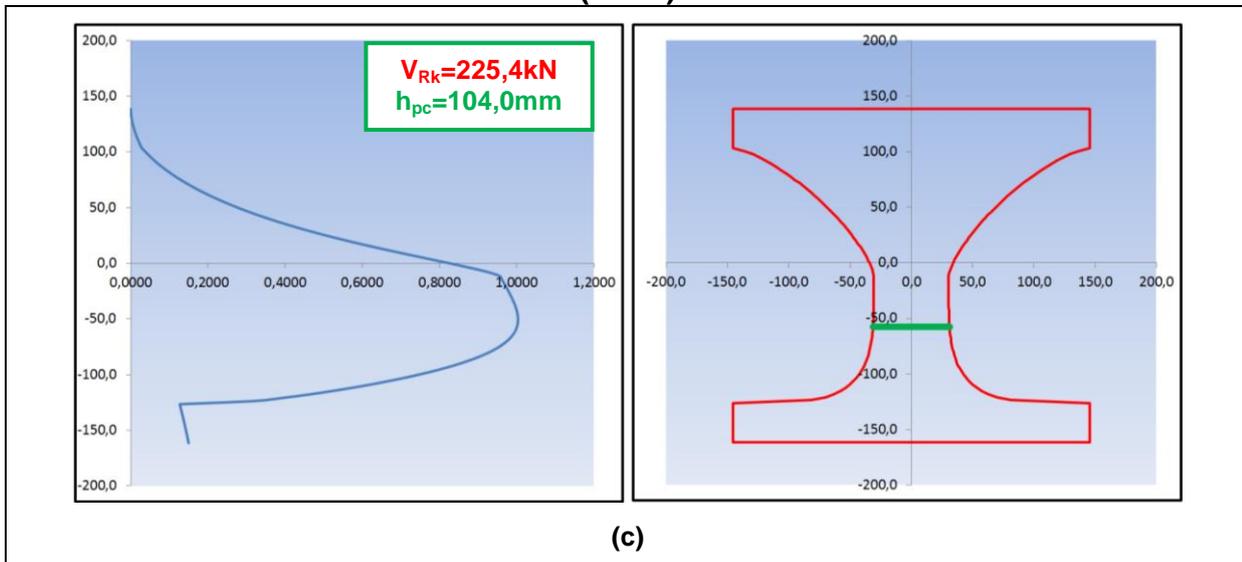
- Protensão inferior:  $10\phi 12,7\text{mm}$  (CP190-RB)
- Tensão média de protensão no centro de gravidade da seção ( $\sigma_{cp}$ ): 5,5MPa;
- Concreto:  $f_{cj,protensão}=26\text{MPa}$  /  $f_{ck}=50\text{MPa}$ ;
- Comprimento de transferência de protensão  $l_{pt,2} = 65\phi$ ;
- Fator de forma  $N$  (superior / inferior) para os alvéolos correspondentes a Laje B e Laje C, respectivamente:  $N= 4,00 / 1,3672$  e  $N= 1,3672 / 4,00$ .

Na Figura 5.15 apresentada a seguir é possível observar que, para cada uma das seções, é destacada em “verde” a posição da altura crítica ( $h_{pc}$ ) em que a tensão principal de tração atinge seu valor máximo, ou seja, neste ponto a tensão principal de tração atinge o valor da resistência à tração do concreto ( $\sigma_1/f_{ct}=1,00$ ), o que resultará na ruptura da seção.

**Figura 5.15: Diagrama de tensão principal  $\sigma_1/f_{ct}$  (esquerda) e posição do ponto crítico  $h_{pc}$  (direita) para laje H30 – a) Laje Tipo A; b) Laje Tipo B; c) Laje Tipo C**



**Figura 5.16: Diagrama de tensão principal  $\sigma_1/f_{ct}$  (esquerda) e posição do ponto crítico hpc (direita) para laje H30 – a) Laje Tipo A; b) Laje Tipo B; c) Laje Tipo C (cont.)**



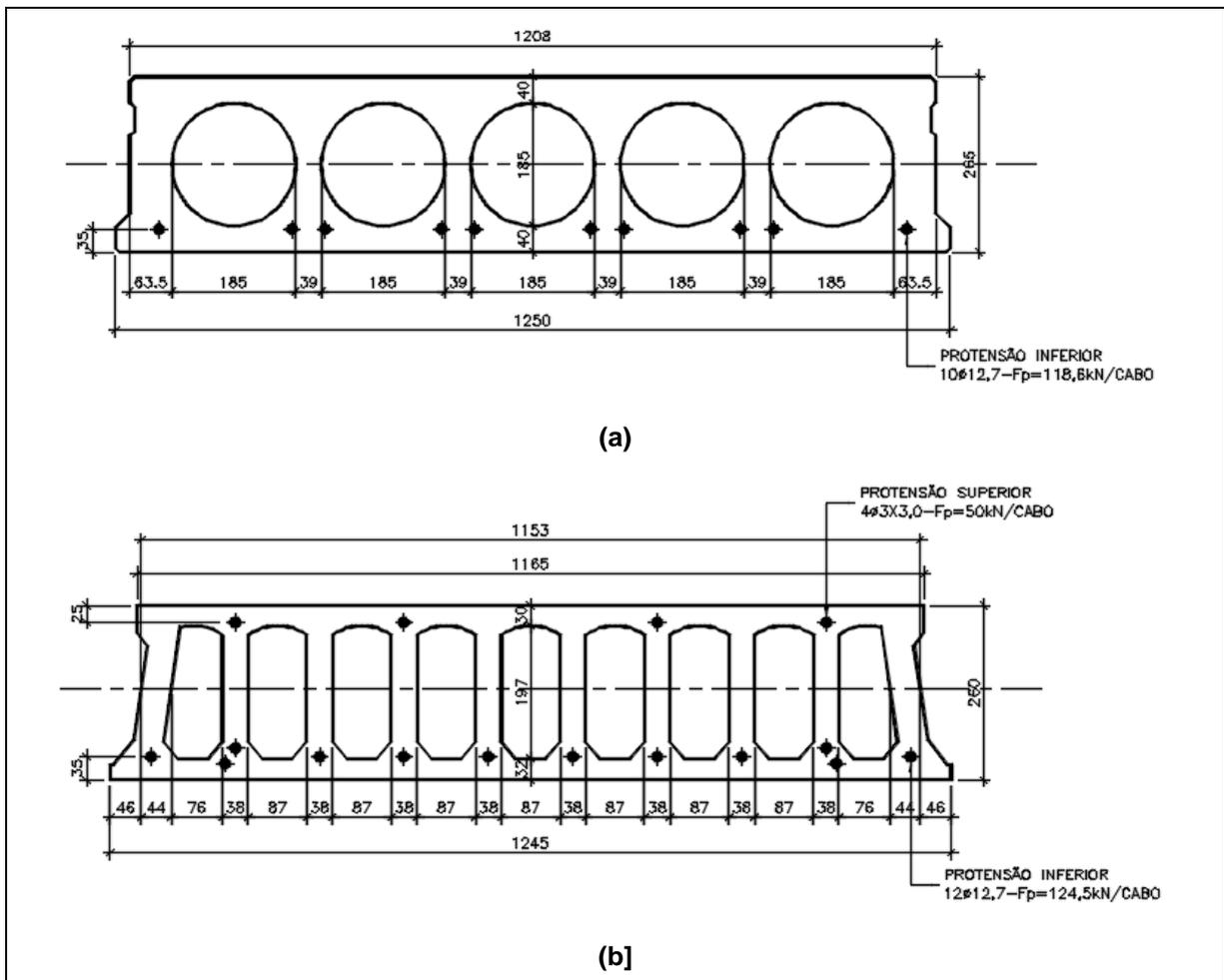
[Fonte: O autor]

Das Figura 5.15 e Figura 5.15 é possível reafirmar (como no Exemplo 1) que o aumento da capacidade resistente é diretamente proporcional ao aumento da altura crítica ( $h_{pc}$ ). Também se pode afirmar que é possível melhorar a capacidade resistente ao cisalhamento sem alterar o índice de vazios da seção transversal. Nesse exemplo, o ganho na capacidade resistente da laje com alvéolo circular (Tipo A) foi de 6,0% em relação à laje Tipo B. Por outro lado, houve uma perda de capacidade de 8,4% em relação à laje Tipo C.

### 5.3 EXEMPLO 3

A Figura 5.17 ilustra as seções transversais analisadas.

**Figura 5.17: Seções transversais de projeto – a) Protótipo A; b) Protótipo B**



[Fonte: o autor]

O primeiro protótipo avaliado foi denominado *Protótipo A* e apresenta espessura nominal de 265mm com alvéolos *circulares*. O segundo protótipo foi denominado *Protótipo B* com espessura nominal de 260mm e alvéolos do tipo *misto*.

A Tabela 5.1 fornece as características geométricas considerando a seção transversal de projeto e a seção real (com as distorções inerentes do processo de fabricação).

**Tabela 5.1: Propriedades geométricas da seção transversal**

PROPRIEDADES MECÂNICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL														
Protótipo	h (mm)		d' (mm)		$\sum b_w$ (mm)		$A_c$ (mm <sup>2</sup> )		$I_y$ (mm <sup>4</sup> )		S (mm <sup>3</sup> )		$z_{cg}$ (mm)	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
<b>Protótipo A</b>	265	266,3	35	43,4	283	314,1	185917	190382	1587158122	1611094546	7974136	8095407	132,5	133,2
<b>Protótipo B</b>	260	264	35/25	38,4	392	405,6	155661	174126	1253238080	1443562998	6317203	7218884	128,3	131,7

Protótipo A - Alvéolo Circular (LA02-C-A)      Protótipo B - Alvéolo misto (LA05-B)      (1) Seção transversal de projeto      (2) Seção transversal real

[Fonte: o autor]

A Tabela 5.2, por sua vez, apresenta as características dos materiais mais importantes e que são consideradas no cálculo.

**Tabela 5.2: Propriedades dos materiais**

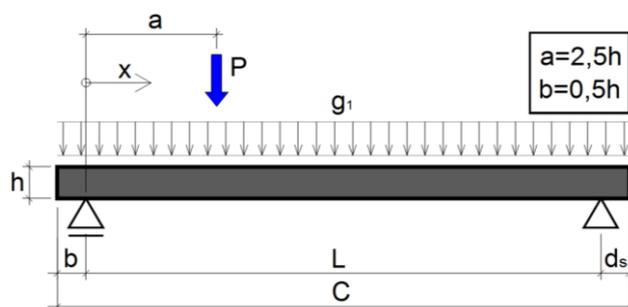
PROPRIEDADES DOS MATERIAIS												
Protótipo	$h_{nominal}$ (mm)	$\sum b_{w,nominal}$ (mm)	Protensão		Protensão Inicial (kN)		Perdas de Protensão		Protensão Inicial (kN)		$f_{c,protensão}$ (MPa)	$f_{ck}$ (MPa)
			Inferior	Superior	Inf./Cabo	Sup./Cabo	Inicial	Final	Inf./Cabo	Sup./Cabo		
Protótipo A	265	283	10 $\phi$ 12.7	-	118,6	-	4,5%	14,0%	118,6	-	25	45
Protótipo B	260	392	12 $\phi$ 12.7	4 $\phi$ 7.0	124,5	50,0	5,0%	15,0%	124,5	50,0	30	50

Protótipo A - Alvéolo Circular (LA02-C-A)      Protótipo B - Alvéolo Misto (LA05-B)

[Fonte: o autor]

A Figura 5.18 ilustra o esquema de ensaio conforme padrão CEB FIB (1992) (e EN 1168:2008), já adaptado às condições dos protótipos ensaiados, cujos dados estão apresentados na Tabela 5.3 apresentada a seguir.

**Figura 5.18: Esquema de ensaio**



[Fonte: o autor]

**Tabela 5.3: Parâmetros de ensaio**

CARACTERÍSTICAS DOS ESQUEMAS DOS ENSAIOS						
Protótipo	$h_{\text{nominal}}$ (mm)	C (mm)	L (mm)	a (mm)	b (mm)	$d_s$ (mm)
Protótipo A	265	6000	5467,5	662,5	132,5	400
Protótipo B	260	6500	6280	660	110	110

Protótipo A - Alvéolo Circular (LA02-C-A)

Protótipo B - Alvéolo Misto (LA05-B)

[Fonte: o autor]

Ao avaliar a aplicabilidade do modelo analítico normativo para as lajes analisadas neste trabalho, na Tabela 5.4, são apresentados os momentos atuante ( $M_a$ ) e de fissuração ( $M_r$ ) calculados para a seção crítica.

**Tabela 5.4 : Valores de momento atuante e momento de fissuração**

MOMENTO ATUANTE E DE FISSURAÇÃO ( $\gamma_c = 1,0$ )					
Protótipo	$h_{\text{nominal}}$ (mm)	$M_a$ (kN)		$M_r$ (kN)	
		(1)	(2)	(1)	(2)
Protótipo A	265	132,3	138,2	212,6	203,4
Protótipo B	260	156,0	162,9	239,4	244,2

Protótipo A - Alvéolo Circular (LA02-C-A)

Protótipo B - Alvéolo Misto (LA05-B)

(1) Seção transversal de projeto

(2) Seção transversal real

[Fonte: O autor]

Da Tabela 5.4, para ambos os protótipos não deve ocorrer fissuração na seção crítica e, portanto, o modelo normativo brasileiro não é adequado na avaliação destes elementos. No entanto, resta saber ainda se esse modelo fornece valores que atendem os critérios de segurança. Para tanto são calculadas as cortantes resistentes ( $V_{R,cal}$ ) conforme NBR6118:2014 e comparando os valores calculados com os respectivos valores obtidos nos ensaios ( $V_{R,exp}$ ), para ambos os protótipos considerando ora dados geométricos de projeto, ora valores obtidos em laboratório.

A Tabela 5.5 apresenta um resumo dos resultados obtidos a partir dos ensaios (sufixo “exp”) e também aqueles obtidos analiticamente (sufixo “cal”). Dos dados teóricos apresentados estão aqueles calculados a partir do modelo da NBR6118:2014 e também os calculados com o modelo de Yang-Pajari. Importante destacar que, a título de comparação com os dados experimentais, os resultados analíticos foram obtidos dos modelos considerando coeficientes de segurança unitários.

**Tabela 5.5: Cortante resistente – Valores calculados e dados experimentais**

CORTANTE RESISTENTE ( $v_c = 1,0$ )												
Protótipo	$h_{nominal}$ (mm)	$V_{R,exp}$ (kN)	$V_{R,cal,NBR}$ (kN)			$V_{R,cal,YANG}$ (kN)			$V_{R,exp}/V_{R,cal,NBR}$		$V_{R,exp}/V_{R,cal,YANG}$	
			(1)	(2)	Dif. (%)	(1)	(2)	Dif. (%)	(1)	(2)	(1)	(2)
Protótipo A	265	233	163,4	172,2	5,4%	200,2	209,1	4,4%	1,43	1,35	1,16	1,11
Protótipo B	260	244	264,2	259,7	1,7%	237,3	247,8	4,4%	0,92	0,94	1,03	0,98

Protótipo A - Alvéolo Circular (LA02-C-A)

Protótipo B - Alvéolo Misto (LA05-B)

(1) Seção transversal de projeto

(2) Seção transversal real

[Fonte: o autor]

Da Tabela 5.5 é possível afirmar que o efeito da variação geométrica decorrente do processo produtivo não é desprezível, chegando a 5,4% quando calculado pelo modelo da norma brasileira e 4,4% para o cálculo segundo Yang-Pajari. Considerando a seção de projeto, é observado que o modelo de Yang-Pajari apresenta resultados a favor da segurança para ambos os protótipos ensaiados. Por outro lado, para o Protótipo B quando calculado pela norma brasileira apresentou alguma deficiência, o que merece ser mais bem investigado futuramente. Para as seções reais, tanto o modelo normativo quanto o modelo de Yang-Pajari apresentaram deficiência, sendo que para este último a relação  $V_{R,exp}/V_{R,cal,Yang}$  foi bastante próxima da unidade.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1 CONCLUSÕES

Os objetivos deste trabalho são alcançados ao longo do texto. O primeiro deles é a criação de uma sistemática para a definição da geometria dos alvéolos que está contemplada no Capítulo 3. Para a facilidade do seu emprego, foi criada uma planilha de cálculo que permite gerar o desenho graficamente e calcular os parâmetros geométricos necessários para se chegar ao cortante resistido na seção.

O segundo objetivo é alcançado na medida em que, ao se desenvolver uma planilha eletrônica para o cálculo da cortante resistente da seção, de acordo com o modelo de Yang-Pajari, pode-se rapidamente analisar geometrias de alvéolos diferentes e que resultam em cortantes resistentes distintos. O Exemplo 2 é uma amostra de como se consegue melhorar o desempenho de uma seção mantendo-se o índice de vazios da seção de modo a se obter ganho considerável na capacidade resistente ao cisalhamento. Ainda com o uso da planilha é verificada a validade da aplicação do modelo de Yang-Pajari para cada caso analisado considerando o momento de fissuração do concreto. Desta forma, o terceiro objetivo deste trabalho também é atingido.

Pode-se dizer que o quarto objetivo desse trabalho também é alcançado a partir da interpretação dos resultados obtidos do Exemplo 1 onde, mesmo com grandes variações do ângulo da linha de ruptura (variações entre  $30^\circ$  e  $40^\circ$ ), a capacidade resistente ao cisalhamento não sofreu variações expressivas (variações encontradas de no máximo 1%), o que significa dizer que utilizar o valor de  $35^\circ$  proposto por YANG (1994) parece ser uma boa estimativa.

Do quinto e último objetivo alcançado nesse trabalho, é possível constatar através do Exemplo 3 que o modelo de Yang-Pajari apresenta uma boa aderência aos resultados experimentais. Já o modelo da norma brasileira se mostra inadequado para a avaliação da resistência ao cisalhamento considerando o protótipo com alvéolos oblongos. Isso se justifica inicialmente pelo fato de que o modelo foi idealizado para representar situações de cisalhamento em zonas fissuradas por flexão, o que não corresponde ao que foi verificado em laboratório. Mas o principal problema identificado foi que o resultado obtido do modelo normativo

foi superior ao medido no ensaio, configurando assim um problema de segurança. Porém, considerando a pequena amostragem cujos resultados foram apresentados neste trabalho, sugere-se que sejam realizadas investigações mais abrangentes sobre o assunto.

Assumindo que os objetivos propostos no início do trabalho foram cumpridos, a seguir, são elencadas as conclusões mais relevantes:

- ✓ A forma do alvéolo tem grande influência na capacidade resistente ao cisalhamento de lajes alveolares;
- ✓ As lajes de classe H40 e H50 (constatado no Exemplo 1) podem vir a romper por flexo-cortante, para algumas situações de forma do alvéolo. Isso pode justificar o maior rigor imposto pelos códigos normativos internacionais quanto ao uso dos modelos de cálculo para lajes altas (especialmente o ACI-318) tendo em vista resultados contra a segurança obtidos em ensaios laboratoriais;
- ✓ As lajes alveolares com alvéolos circulares apresentam bom desempenho ao cisalhamento quando comparadas com lajes de mesma espessura e com alvéolos oblongos. Porém, modificando de maneira conveniente a forma dos alvéolos é possível obter melhoras significativas no seu desempenho;
- ✓ Pode-se constatar a partir dos exemplos de aplicação que o aumento da capacidade resistente ao cisalhamento está intimamente relacionado com o aumento da altura do ponto crítico ( $h_{pc}$ );
- ✓ A posição do ponto crítico nem sempre pode ser obtida de maneira direta, especialmente para os alvéolos curvos e oblongos;
- ✓ Mesmo lajes consideradas “baixas” como as de classe H20, considerando tensão de compressão no concreto devido a protensão ( $\sigma_{pc,i}$ ) de 6Mpa, podem vir a romper por tração diagonal.

Para efeito de otimização de seção de laje alveolar quando o mecanismo governante de ruptura é o cisalhamento, com base nos objetivos atingidos neste trabalho, recomenda-se projetar a seção de modo que seja elevada, ao máximo, a posição do ponto crítico da seção ( $h_{pc}$ ), respeitando sempre os limites geométricos descritos no Capítulo 2.

## 6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestão para trabalhos futuros destaca-se:

- ✓ A utilização da metodologia apresentada neste trabalho tem se mostrado promissora; porém ensaios comprobatórios devem ser realizados para validação considerando um maior número de amostras e tipologias de lajes diversas daquelas disponíveis no mercado nacional;
- ✓ Sugere-se avaliar a influência do comprimento de transferência ( $l_{pt}$ ) e do comprimento de apoio na resistência a cortante quanto ao cisalhamento em lajes alveolares quanto ao mecanismo resistente de tração diagonal;
- ✓ Sugere-se uma avaliação mais aprofundada em relação ao desempenho do modelo normativo brasileiro quanto à previsão da capacidade resistente de lajes alveolares com alvéolos oblongos.

## 7 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2016). **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2016). **NBR 9062: Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado**. Rio de Janeiro, 2017.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14861: Lajes alveolares protendidas – Requisitos e procedimentos**. Rio de Janeiro, 2011

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE – **ACI Committee 318: Building code requirements for structural concrete (ACI 318-14) and commentary**. Farmington Hills, MI, 2014.

ARAÚJO CAM. **Contribuições para projeto de lajes alveolares protendidas**. 222f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2011.

BERTAGNOLI G; MANCINI G. **Failure analysis of hollow core slabs tested in shear**. *Structural Concrete*. v.10, n.3, p.139-152, 2009.

BRUNESI E, NASCIMBENE R. **Numerical web-shear strength assessment precast prestressed hollow core slab units**. *Engineering Structures*. v.102, p.13-30, 2015.

COMITÉ EUROPÉEN DE NORMALIZATION. **EN 1168: Precast concrete product – Hollow core slabs**, 2008.

CATOIA B. **Lajes alveolares protendidas: cisalhamento em regiões fissuradas por Flexão**. 325f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. São Carlos, 2011.

COSTA OO. **Avaliação de desempenho de elementos de lajes alveolares protendidas pré-fabricadas**. 131f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2009.

ELLIOTT KS, JOLLY CK. **Multi-storey precast concrete framed structures**. 2ª Ed. Willey Blackwell, 2013.

EN 1992-1-1 – *EUROCODE 2: Design of concrete structures – Part 1.1. General rules and rules for buildings*, 2004.

FEDERATION INTERNATIONALE DU BETON – FIB (CEB-FIB). *Guide to good practice: quality assurance of hollow core slabs*. London, England, 1992.

FEDERATION INTERNATIONALE DU BETON – FIB (CEB-FIB). *Design of precast prestressed hollow core floors – Part 1: Recommendations (Final draft)*. Commission 6<sup>a</sup> Prefabrication. October, 2016.

FRANÇA AAV. **Estudo das lajes alveolares pré-fabricadas em concreto protendido submetidas a ensaios de cisalhamento**. 136f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2012.

FUSCO PB. **Estruturas de concreto – Solicitações tangenciais**. 1<sup>a</sup> Ed. São Paulo. Pini, 2008.

GHOSH SK, HAWKINS NM. **Shear strength of hollow core slabs**. PCI Journal 51, p110-114, 2006.

GIRHAMMAR UA; PAJARI M. **Tests and analysis on shear of composite slabs of hollow core units and concrete topping**. *Construction and Building Materials*. v.22, 2008.

INVELOP OY. Disponível em: <<http://www.invelop.fi/ict100te>>. Acessado em 17 de Agosto de 2016.

LINDSTRÖM G. **Precast prestressed hollow core floors**. *FIB Draft Manual*, October, 2007.

WIGHT JK, MACGREGOR JC. **Reinforced concrete – Mechanics and design**. 6<sup>a</sup> Ed. Pearson, 2012.

MARQUESI MLG. **Contribuição ao estudo dos mecanismos resistentes à força cortante em lajes alveolares protendidas**. 144f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2014.

PAJARI M. **Resistance of prestressed hollow core slabs against web shear failure**. *VTT Technical Research Centre of Finland*, Research Notes 2292, 2005.

---

SANTOS AP. **Análise da continuidade em lajes alveolares: estudo teórico e experimental.** 370f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2014.

TRUNDERUNG KA. ***Shear capacity of dry-cast extruded precast / prestressed hollow-core slabs.*** 309pp. Dissertation (Master of Science) – University of Manitoba. Winnipeg, Manitoba, 2011.

YANG L. ***Design of prestressed hollow core slabs with reference to web shear failure. Journal of Structural Engineering.*** p. 2675-2696, 1994.