

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Sobre uma família de equações de evolução não lineares:
existência, classificação e instabilidade de soluções ondas
viajantes**

ALISSON DARÓS SANTOS

São Carlos-SP
26 de março de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Sobre uma família de equações de evolução não lineares:
existência, classificação e instabilidade de soluções ondas
viajantes**

ALISSON DARÓS SANTOS

Orientadora: LYNNYNGS KELLY ARRUDA SARAIVA DE PAIVA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

São Carlos-SP
26 de março de 2018



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

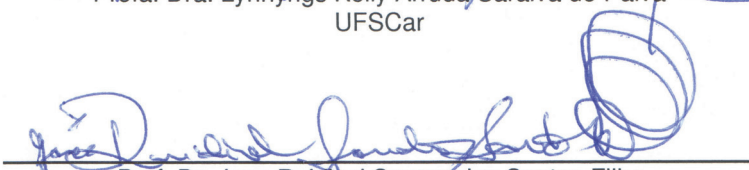
VIA DO ALUNO

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Alisson Darós Santos, realizada em 26/03/2018:



Prof. Dra. Lynnyngs Kelly Arruda Saraiva de Paiva
UFSCar




Prof. Dr. Jose Rujival Soares dos Santos Filho
UFSCar



Prof. Dr. Cezar Issao Kondo
UFSCar



Prof. Dr. Igor Leite Freire
UFABC



Profa. Dra. Ilma Aparecida Marques da Silva
UFABC

... nessa vida, a única coisa que não pode ser retirada de nós, é o conhecimento que adquirimos e levamos conosco.

Dalvin A. B. dos Santos (meu velho pai).

... com força de vontade e persistência podemos superar todas as dificuldades, até mesmo as encontradas na busca pelo conhecimento.

Dirce I. D. Santos (minha amada mãe).

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por me dar a força necessária para superar as dificuldades e obstáculos encontrados até este momento. Também, gostaria de agradecer a minha família pelo amor, apoio e por caminharem sempre ao meu lado durante toda a minha trajetória como estudante. Aos colegas e amigos do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar pelas muitas horas de descontração e, em especial, a Francisco Carlos Caramello por suas conversas sempre inusitadas e seus importantes questionamentos geométricos.

Gostaria de agradecer à professora Lynnyngs, pela orientação, dedicação e confiança em mim depositada, além de seu carinho e amizade. Ao professor Luiz Hartmann, por sua amizade e pelos seminários, bastante benéficos, que apontaram modificações em versões preliminares deste trabalho.

Finalmente, agradeço à minha noiva Patrícia pela compreensão e paciência, além de suas correções e incentivo ao longo deste processo.

Aos demais contribuintes e, à CAPES, pelo apoio financeiro.

Nesta tese, estudamos qualitativamente as soluções ondas viajantes da família b de equações modificadas

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} + bu_x u_{xx} - (b+1)u^2 u_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

com $b > 1$ real, que engloba, nos casos em que $b = 2$ e $b = 3$, respectivamente, as equações modificadas de Camassa-Holm (mCH)

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} + 2u_x u_{xx} - 3u^2 u_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

e Degasperis-Procesi (mDP)

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} + 3u_x u_{xx} - 4u^2 u_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Para esta família b de equações, mostramos a existência de uma classe de soluções ondas viajantes periódicas e suaves não triviais, conhecidas como *ondas snoidais*, obtidas a partir da função elíptica jacobiana sn . Quando $b = 2$, provamos, sob certas condições envolvendo o período e a velocidade de propagação das ondas, a instabilidade orbital não linear de soluções ondas snoidais L -periódicas, com média zero, no subespaço de $H_{\text{per}}^1([0, L])$ das funções com média zero. Para este resultado de instabilidade orbital utilizamos as ideias presentes na teoria abstrata desenvolvida por Grillakis, Shatah e Strauss [21, 22] e a teoria de Floquet [11]. Além disso, inspirados nos trabalhos de Lenells [26, 27], classificamos todas as soluções do tipo onda viajante, no sentido fraco, da equação mCH, parametrizadas por seus máximo, mínimo e constante de velocidade. Em especial, verificamos que esta equação possui algumas ondas viajantes não tão conhecidas como, por exemplo, ondas “kinks”, “cuspons” e “stumpons”, além de ondas mais populares como “solitons” e “peakons”.

Abstract

This thesis is concerned with the orbital instability for a specific class of periodic traveling wave solutions with the mean zero related to the modified Camassa-Holm equation. These solutions, called snoidal waves, are written in terms of the Jacobi elliptic function sn . To prove these results we use the abstract methods of Grillakis, Shatah and Strauss, and the Floquet theory for periodic eigenvalue problems. Moreover, we classify all traveling wave solutions of the modified Camassa-Holm equation in the weak sense via parametrization of their maxima, minima and wave velocity constants, using the qualitative method of Lenells. This equation is shown to admit in addition to more popular solutions like smooth traveling waves and peakons, some not so well-known traveling waves as, for example, kinks, cuspons, composite waves and stumpons.

Introdução		1
Notação		5
1 A família b de equações modificadas		7
1.1 Soluções ondas viajantes periódicas suaves		7
1.2 Período fundamental da solução onda viajante		16
1.2.1 Limitação inferior para o período fundamental		16
1.3 Existência de uma curva não trivial suave de soluções ondas snoidais L - periódicas parametrizada pela velocidade de propagação das ondas c		21
1.3.1 Propriedades monotônicas das aplicações $c \mapsto \Lambda(c)$ e $c \mapsto k(c)$		27
1.4 Soluções triviais		31
2 Instabilidade orbital das ondas viajantes periódicas suaves, com média zero, da equação mCH		33
2.1 Estrutura hamiltoniana		34
2.2 Soluções ondas viajantes periódicas suaves, com média zero, da equação mCH		36
2.3 Existência de uma curva suave de soluções ondas snoidais L -periódicas, com média zero, da equação mCH, parametrizada pela velocidade de propagação das ondas c		37
2.4 Concavidade da função $d(c)$		38
2.5 Análise espectral do operador hessiano \mathcal{H}_c		45
2.6 Prova da instabilidade orbital para as soluções ondas snoidais, com média zero, da equação mCH		49
3 Classes de ondas viajantes fracas da equação mCH		50
3.1 Formulação fraca		51

3.2	Classificação de ondas viajantes	51
3.3	Prova da classificação de ondas viajantes	54
3.3.1	Soluções particulares	59
3.3.2	Composição de ondas viajantes	61
3.4	Dependência dos parâmetros	65
3.5	Fórmulas explícitas para “peakons”	66
A	Fórmulas e Relações	69
A.1	Fórmula de Cardano-Tartaglia	69
A.2	Funções elípticas de Jacobi	69
A.3	Relações de Girard	72
B	O Problema de Sturm-Liouville e a Teoria de Floquet	73
	Referências Bibliográficas	79

A família b de equações modificadas

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} + bu_x u_{xx} - (b+1)u^2 u_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1)$$

com $b > 1$ real, apareceu na literatura em 2006, devido a Wazwaz [35]. Neste trabalho, ele explorou a mudança qualitativa na estrutura física das soluções das equações obtidas a partir da substituição do termo convencional de não linearidade uu_x por $u^2 u_x$ nas equações

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} + bu_x u_{xx} - (b+1)uu_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2)$$

com $b > 1$ real, que quando $b = 2, 3$, correspondem às equações clássicas de Camassa-Holm e de Degasperis-Procesi, respectivamente, [10, 15]. Aqui, os índices t e x denotam as derivadas parciais com relação às variáveis temporal e espacial, t e x .

Quando $b = 2$, (1) é conhecida como equação de Camassa-Holm modificada

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} + 2u_x u_{xx} - 3u^2 u_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (\text{mCH})$$

que, por sua vez, via transformação de Galileu $u(x, t) \mapsto \tilde{u}(x + \kappa t, t)$, pode ser reescrita como a equação de Dullin-Gottwald-Holm (DGH) modificada [30]

$$\tilde{u}_t + \kappa \tilde{u}_x - \tilde{u}_{xxt} - \kappa \tilde{u}_{xxx} = \tilde{u} \tilde{u}_{xxx} + 2\tilde{u}_x \tilde{u}_{xx} - 3\tilde{u}^2 \tilde{u}_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Em [18], Dullin, Gottwald e Holm discutiram o caso clássico da equação DGH como um modelo de onda de água rasa com propagação unidimensional e velocidade de fluido $u(x, t)$, em que $\kappa \neq 0$ é a velocidade de onda linear para a água não perturbada que repousa no infinito.

A equação mCH resulta também ser caso particular da chamada equação generalizada de Camassa-Holm, presente, por exemplo, no trabalho de Lopes [29] de 2002. Além disso,

ela pode ser obtida da família de equações modificadas [23]

$$u_t + (f(u))_x - u_{xxt} = \left(g'(u) \frac{u_x^2}{2} + g(u) u_{xx} \right)_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (3)$$

sendo $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais e suaves, com $f(0) = 0$, por se considerar $f(u) = u^3$ e $g(u) = u$. De [23], é sabido que os funcionais

$$E(u) = - \int_0^L \left[\frac{u^4}{4} + \frac{uu_x^2}{2} \right] dx, \quad F(u) = \frac{1}{2} \int_0^L [u^2 + u_x^2] dx \quad \text{e} \quad V(u) = \int_0^L u dx \quad (4)$$

são importantes leis de conservação na variável t para a equação mCH, em que $u = u(x, t)$ é uma solução desta equação.

Substituindo a onda viajante L -periódica $u(x, t) = \phi(x - ct)$ em (mCH) e integrando uma vez com relação a variável ξ , percebemos que ϕ deve satisfazer

$$(\phi - c)\phi'' + \frac{(\phi')^2}{2} - \phi^3 + c\phi = A_\phi, \quad (5)$$

a qual pode ser escrita na forma de quadratura $(\phi')^2 = F_\phi(\phi(\xi))$, com $F_\phi(t) = t^3 + d_2 t^2 + d_1 t + d_0$, em que $d_0 = c^3 - 2c^2 + 4A_\phi$, $d_1 = c^2 - 2c$, $d_2 = c$ e A_ϕ é uma constante de integração que pode ser escolhida diferente de zero e de tal modo que, pela fórmula de Cardano-Tartaglia, o polinômio F_ϕ tenha três raízes reais e distintas.

Então, a equação da onda viajante (5) assume a forma

$$E'(\phi) + cF'(\phi) = A_\phi. \quad (6)$$

Em geral, as teorias abstratas de estabilidade têm como ponto crucial, a caracterização da onda viajante periódica ϕ de velocidade c como um ponto crítico do funcional $E + cF$. Da mesma forma que em [4, 7], para contornar esta dificuldade, assumimos que ϕ tem média zero, isto é,

$$\int_0^L \phi = 0,$$

o que fisicamente significa exigir que o “wavetrain” tenha a mesma medida de profundidade quanto de superfície livre não perturbada.

A estabilidade orbital para ondas solitárias associadas à equação de Camassa-Holm clássica foi provada por Constantin e Strauss [13], enquanto que para ondas solitárias negativas da equação mCH, este resultado foi estabelecido por Yin, Tian e Fan [37]. Em [29], Lopes provou a estabilidade de peakons para a equação generalizada de Camassa-Holm. Em [23], Hakkaev, Iliev e Kirchev estudaram, via a formulação (3), a estabilidade de ondas viajantes periódicas da equação BBM modificada e outras formas perturbadas desta equação, e obtiveram resultados bastante significativos. Mais especificamente, eles provaram, dentre outros resultados, o teorema abaixo.

Teorema 1. *(Ondas de pequena amplitude da equação mBBM perturbada) Considere*

$f(u) = 2\omega u + \beta u^3$, $g(u) = \gamma h(u)$, $\beta > 0$ e $u = \phi(x - ct)$ com $c > 0$ e $\phi(y) = \phi(c, 0; \phi_0; y)$ uma solução onda viajante periódica de (3) com amplitude pequena e que não oscila em torno do zero. Então ϕ é orbitalmente estável para $3c^2 - 8\omega > 0$ e $|\gamma|$ pequeno.

Em particular, fazendo $\omega = 0$, $\beta = 1$ e $h(u) = u$ no teorema anterior, obtém-se um resultado sobre estabilidade orbital para soluções ondas viajantes $u(x, t) = \phi(x - ct)$ da equação

$$u_t - u_{xxt} = -3u^2u_x + 2\gamma u_x u_{xx} + \gamma u u_{xxx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

com γ pequeno e que independe da velocidade c de propagação da onda e de seu período. Já o problema de estabilidade orbital para soluções suaves periódicas, bem como uma classificação geral de todas as soluções ondas viajantes da equação mCH, em que $f(u) = u^3$ e $g(u) = \gamma u$ em (3), com $\gamma \equiv 1$, até o momento permaneciam em aberto. Nosso trabalho resolve tais problemas baseado no estudo de estabilidade não linear para soluções ondas viajantes periódicas da equação de Korteweg-de Vries (KdV) clássica apresentado por Arruda em [2], para soluções ϕ positivas e, também, por Angulo, Bona e Scialom [7], considerando a constante de integração A_ϕ , em (6), diferente de zero e a solução ϕ com média zero. Neste ponto, é importante salientar que classes similares de soluções ϕ da equação KdV, encontradas no século XIX, nos trabalhos de Boussinesq (1871, 1872) e Korteweg e de Vries (1895), e da equação mCH encontradas via métodos numéricos, recentemente no século XXI no trabalho de Deng [16], podem ser escritas em termos das funções cosseno e seno elíptico de Jacobi (cn) ou (sn), respectivamente, em que $sn^2 + cn^2 = 1$, ou seja, as equações de Boussinesq e KdV possuem soluções ondas cnoidais e a mCH, soluções ondas snoidais.

Nesta tese, primeiramente, mostramos a existência de uma curva suave não trivial $c \in (0, 1) \mapsto \phi_c \in H_{\text{per}}^1([0, L])$ de soluções ondas snoidais (sn) L -periódicas da equação mCH, com período fixado $L > \sqrt[4]{\frac{128}{9}}\pi$ relacionado com a velocidade c de propagação da onda. Para tanto, usamos as ideias presentes em Arruda [2]. Então a instabilidade orbital destas soluções ondas snoidais é estabelecida no subespaço de $H_{\text{per}}^1([0, L])$ das funções com média zero para $c \in (0, 1)$ e L suficientemente grande, usando o método desenvolvido por Grillakis, Shatah e Strauss [22]. Como em nosso estudo, período e velocidade estão naturalmente relacionados, o resultado sobre instabilidade orbital que obtemos é restrito a determinados valores de c e L . A saber,

Teorema 2. *Seja L uma constante arbitrária mas fixa, tomada suficientemente grande, e considere $u(x, t) = \phi_c(x - ct)$, com $c \in (0, 1)$ tal que $[c^2 - 3c] < -\frac{32\pi^4}{L^4}$, a solução onda snoidal com média zero da equação mCH. Então, existe $k_0 \in (0, 1)$ pequeno tal que, escrevendo $c \equiv c(k)$ como em (2.15), para todo $k \in (0, k_0)$, a onda snoidal $\phi_{c(k)}$ é orbitalmente instável. Aqui, k representa o módulo de sn .*

Além disso, para finalizar este trabalho, classificamos todas as soluções ondas viajantes, $u(x, t) = \phi(x - ct)$, $c \in \mathbb{R}$, no sentido fraco, da equação mCH usando o método qualitativo

de Lenells [26, 27], bem como deduzimos explicitamente famílias de soluções consideradas, digamos, mais exóticas como, por exemplo, “peakons” periódicos e “peakons” com decaimento, envolvendo também as já citadas funções elípticas de Jacobi e funções com decaimento rápido, respectivamente. Também, além das já familiares soluções suaves, obtemos alguns tipos de soluções muito interessantes, tais como “kinks”, “cuspons”, ondas compostas e “stumpons”. Para se ter uma ideia, as ondas compostas são resultado da combinação de “cuspons” com “peakons” em uma nova onda viajante, veja (h) da Fig. 1, e, por sua vez, as ondas chamadas “stumpons” são obtidas através da inserção de intervalos nos quais ϕ é igual a uma constante, na crista de adequadas ondas “cusped”, (i) da Fig. 1.

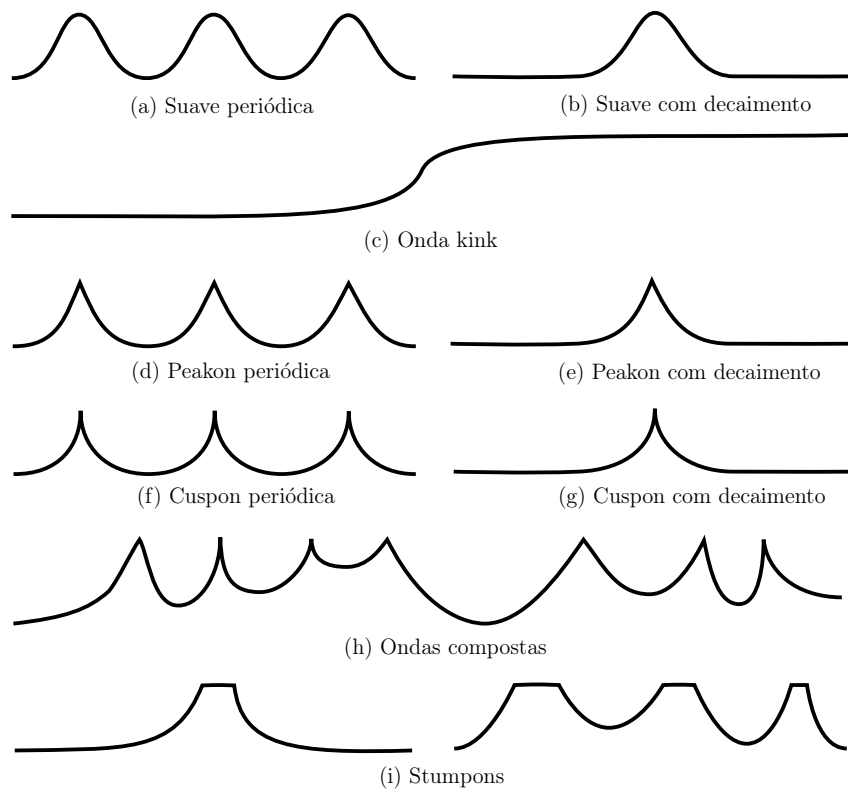


Figura 1: Ondas viajantes da equação mCH correspondentes aos itens (a)-(i) do Teorema 7

Siglas e notações matemáticas

EDO	Equação diferencial ordinária
EDP	Equação diferencial parcial
mCH	Camassa-Holm modificada
mDP	Degasperis-Procesi modificada
$X \subset \mathbb{R}$	Conjunto aberto em \mathbb{R}
$C^n(X)$	Espaço das funções continuamente diferenciáveis n vezes em X , $n \geq 0$
$C^\infty(X) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} C^n(X)$	
$C_c(X)$	Espaço das funções contínuas com suporte compacto em X
$C_c^\infty(X) = C^\infty \cap C_c$	
$L^p(X) = \{u : X \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } \int_X u ^p < +\infty, 1 \leq p < +\infty\}$	
$L_{loc}^p(X) = \{u : X \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } \int_I u ^p < +\infty, \forall I \subset X \text{ compacto}, 1 \leq p < +\infty\}$	
$L_{\text{per}}^p(X) = \{u : X \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável, periódica e } \int_X u ^p < +\infty, 1 \leq p < +\infty\}$	
$W^{1,1}(X), W^{1,2}(X), W^{2,1}(X)$	Espaços de Sobolev
$W_{loc}^{1,1}(X), W_{loc}^{2,1}(X)$	Espaços de Sobolev locais
$H^1(X) = W^{1,2}(X), H_{loc}^1(X) = W_{loc}^{1,2}(X)$	
$W_{\text{per}}^{1,2}(X) = \{u \in W^{1,2}(X) \mid u \text{ é periódica}\}$	
$H_{\text{per}}^1(X) = W_{\text{per}}^{1,2}(X)$	
$\mathcal{D}'(X)$	Espaços das Distribuições em X
$BV(X)$	Espaços das funções reais de variação limitada em X
$BV_{loc}(X) = \{u : X \rightarrow \mathbb{R} \mid u \in BV(I), \forall I \subset X \text{ compacto}\}$	
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	
$\text{SL}(2, \mathbb{C})$	Grupo linear especial das matrizes 2×2 com entradas complexas

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \langle f, g \rangle_{L^2_{\text{per}}([0, L])} = \int_0^L fg \, dx \\ \langle f, g \rangle_1 &= \langle f, g \rangle_{H^1_{\text{per}}([0, L])} = \int_0^L fg \, dx + \int_0^L f'g' \, dx \\ \|f\| &= \|f\|_{L^2_{\text{per}}([0, L])} = \left(\int_0^L f^2 \, dx \right)^{1/2} \\ \|f\|_1 &= \|f\|_{H^1_{\text{per}}([0, L])} = \left(\int_0^L f^2 \, dx + \int_0^L f'^2 \, dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

A família b de equações modificadas

Inicialmente, entendendo por onda viajante periódica toda solução de uma EDP não linear que possui as seguintes propriedades:

- (i) representa uma onda de forma permanente, ou seja, é da forma $\phi(x - ct)$, em que $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e c é uma constante real que corresponde a velocidade de propagação da onda;
- (ii) é tal que $\phi(\xi + L) = \phi(\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, assim como todas as suas derivadas, $\phi^{(n)}(\xi + L) = \phi^{(n)}(\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$;

utilizaremos o método da quadratura, a fórmula de Cardano-Tartaglia (Apêndice A.1) e o Teorema da Função Implícita, para determinar a existência de uma curva suave de soluções explícitas do tipo onda viajante periódica suave para a família b de equações modificadas (1), dadas em termos da função elíptica de Jacobi sn (Apêndice A.2). O parâmetro da curva é a velocidade de propagação da onda c . Posteriormente, seguindo as ideias presentes em Arruda [2], estudaremos a periodicidade das referidas soluções, bem como demonstraremos propriedades monotônicas de algumas funções que se fazem importantes na análise da instabilidade orbital apresentada no Capítulo 2.

1.1 Soluções ondas viajantes periódicas suaves

Considere novamente a família b de equações modificadas (1)

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} + bu_x u_{xx} - (b + 1)u^2 u_x, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

com $b > 1$ real. Como já destacado, para $b = 2$, esta família de equações engloba a equação mCH

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} + 2u_x u_{xx} - 3u^2 u_x, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Mais ainda, para $b = 3$, a equação (1) torna-se a equação de Degasperis-Procesi modificada

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} + 3u_x u_{xx} - 4u^2 u_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (\text{mDP})$$

o que faz o estudo de soluções dessa família de equações ser mais interessante. Várias classes de soluções do tipo onda viajante da equação (1) já foram obtidas em [16]. Com base neste trabalho, vamos determinar condições para que (1) tenha uma família de ondas viajantes periódicas suaves.

Seja $u(x, t) = \phi(\xi)$ uma transformação em onda viajante, com $\xi = x - ct$ sendo $x, t \in \mathbb{R}$, c uma constante de velocidade de propagação da onda e $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica suave. Ao substituí-la em (1), esta última torna-se a EDO de terceira ordem

$$(\phi - c)\phi''' + b\phi'\phi'' - (b+1)\phi^2\phi' + c\phi' = 0, \quad (1.1)$$

em que $'$ denota a derivada em relação à variável ξ .

Agora, $[(\phi - c)\phi'']' = (\phi - c)'\phi'' + (\phi - c)\phi'''$, então (1.1) é equivalente a

$$[(\phi - c)\phi'']' - (\phi - c)'\phi'' + b\phi'\phi'' - (b+1)\phi^2\phi' + c\phi' = 0.$$

Observando que $\left\{\frac{[(\phi - c)']^2}{2}\right\}' = (\phi - c)'(\phi - c)'' = (\phi - c)'\phi''$, $\left[\frac{b}{2}(\phi')^2\right]' = b\phi'\phi''$ e $\left[\frac{(b+1)}{3}\phi^3\right]' = (b+1)\phi^2\phi'$, podemos reescrever a última equação do seguinte modo

$$[(\phi - c)\phi'']' - \left\{\frac{[(\phi - c)']^2}{2}\right\}' + \left[\frac{b}{2}(\phi')^2\right]' - \left[\frac{(b+1)}{3}\phi^3\right]' + c\phi' = 0. \quad (1.2)$$

Integrando (1.2) com relação à variável ξ obtemos

$$(\phi - c)\phi'' - \frac{[(\phi - c)']^2}{2} + \frac{b}{2}(\phi')^2 - \frac{(b+1)}{3}\phi^3 + c\phi = A_\phi, \quad (1.3)$$

sendo A_ϕ uma constante de integração. Mas como $\phi' = (\phi - c)'$, segue que

$$(\phi - c)\phi'' + \frac{(b-1)}{2}[(\phi - c)']^2 - \frac{(b+1)}{3}\phi^3 + c\phi = A_\phi. \quad (1.4)$$

Agora, multiplicando a equação (1.4) por

$$(\phi - c)^{b-2}(\phi - c)'$$

e utilizando que

$$\frac{1}{2}\{(\phi - c)^{b-1}[(\phi - c)']^2\}' = \frac{(b-1)}{2}(\phi - c)^{b-2}[(\phi - c)']^3 + (\phi - c)^{b-1}(\phi - c)'\phi'',$$

obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ (\phi - c)^{b-1} [(\phi - c)']^2 \}' - \frac{(b+1)}{3} (\phi - c)^{b-2} (\phi - c)' \phi^3 + c (\phi - c)^{b-2} (\phi - c)' \phi \\ &= (\phi - c)^{b-2} (\phi - c)' A_\phi. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Além disso, como $b > 1$ e

$$\frac{1}{b-1} [(\phi - c)^{b-1}]' A_\phi = (\phi - c)^{b-2} (\phi - c)' A_\phi,$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{b+1}{b-1} \right) [\phi^3 (\phi - c)^{b-1}]' = \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi^2 \phi' (\phi - c)^{b-1} + \frac{(b+1)}{3} \phi^3 (\phi - c)^{b-2} \phi'$$

e

$$\frac{1}{b-1} c [\phi (\phi - c)^{b-1}]' = \frac{1}{b-1} c \phi' (\phi - c)^{b-1} + c \phi (\phi - c)^{b-2} (\phi - c)',$$

podemos reescrever a equação (1.5), equivalentemente, com

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ (\phi - c)^{b-1} [(\phi - c)']^2 \}' + \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi^2 \phi' (\phi - c)^{b-1} - \frac{1}{3} \left(\frac{b+1}{b-1} \right) [\phi^3 (\phi - c)^{b-1}]' \\ & - \frac{1}{b-1} c \phi' (\phi - c)^{b-1} + \frac{1}{b-1} c [\phi (\phi - c)^{b-1}]' = \frac{1}{b-1} [(\phi - c)^{b-1}]' A_\phi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Note que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi' (\phi - c)^{b+1} = \left(\frac{b+1}{b-1} \right) (\phi - c)^2 \phi' (\phi - c)^{b-1} \\ &= \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi^2 \phi' (\phi - c)^{b-1} - 2c \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi \phi' (\phi - c)^{b-1} + c^2 \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi' (\phi - c)^{b-1}, \end{aligned}$$

então, a equação (1.6) pode ser expressa da seguinte maneira

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ (\phi - c)^{b-1} [(\phi - c)']^2 \}' - \frac{1}{3} \left(\frac{b+1}{b-1} \right) [\phi^3 (\phi - c)^{b-1}]' + \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi' (\phi - c)^{b+1} \\ & + 2c \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi \phi' (\phi - c)^{b-1} - c^2 \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi' (\phi - c)^{b-1} - \frac{1}{b-1} c \phi' (\phi - c)^{b-1} \\ & + \frac{1}{b-1} c [\phi (\phi - c)^{b-1}]' = \frac{1}{b-1} [(\phi - c)^{b-1}]' A_\phi \end{aligned}$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ (\phi - c)^{b-1} [(\phi - c)']^2 \}' - \frac{1}{3} \left(\frac{b+1}{b-1} \right) [\phi^3 (\phi - c)^{b-1}]' + \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \left[\frac{(\phi - c)^{b+2}}{b+2} \right]' \\ & + 2c \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi \phi' (\phi - c)^{b-1} - c^2 \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \left[\frac{(\phi - c)^b}{b} \right]' - \frac{1}{b-1} c \left[\frac{(\phi - c)^b}{b} \right]' \\ & + \frac{1}{b-1} c [\phi (\phi - c)^{b-1}]' = \frac{1}{b-1} [(\phi - c)^{b-1}]' A_\phi. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Agora, como

$$\begin{aligned} 2c \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi' (\phi - c)^b &= 2c \left(\frac{b+1}{b-1} \right) (\phi - c) \phi' (\phi - c)^{b-1} \\ &= 2c \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi \phi' (\phi - c)^{b-1} - 2c^2 \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi' (\phi - c)^{b-1}, \end{aligned}$$

temos da equação (1.7) que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left\{ (\phi - c)^{b-1} [(\phi - c)']^2 \right\}' - \frac{1}{3} \left(\frac{b+1}{b-1} \right) [\phi^3 (\phi - c)^{b-1}]' + \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \left[\frac{(\phi - c)^{b+2}}{b+2} \right]' \\ &+ 2c \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi' (\phi - c)^b + 2c^2 \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi' (\phi - c)^{b-1} - c^2 \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \left[\frac{(\phi - c)^b}{b} \right]' \\ &- \frac{1}{b-1} c \left[\frac{(\phi - c)^b}{b} \right]' + \frac{1}{b-1} c [\phi (\phi - c)^{b-1}]' = \frac{1}{b-1} [(\phi - c)^{b-1}]' A_\phi \end{aligned}$$

e, então,

$$\begin{aligned} &\left\{ (\phi - c)^{b-1} [(\phi - c)']^2 \right\}' - \frac{2}{3} \left(\frac{b+1}{b-1} \right) [\phi^3 (\phi - c)^{b-1}]' + 2 \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \left[\frac{(\phi - c)^{b+2}}{b+2} \right]' \\ &+ \frac{4}{b-1} c [(\phi - c)^{b+1}]' + 2c^2 \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \left[\frac{(\phi - c)^b}{b} \right]' - \frac{2}{b-1} c \left[\frac{(\phi - c)^b}{b} \right]' \\ &+ \frac{2}{b-1} c [\phi (\phi - c)^{b-1}]' = \frac{2}{b-1} [(\phi - c)^{b-1}]' A_\phi. \end{aligned}$$

Logo, integrando a equação acima com relação à variável ξ , obtemos

$$\begin{aligned} &(\phi - c)^{b-1} [(\phi - c)']^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi^3 (\phi - c)^{b-1} + \frac{2(b+1)}{(b-1)(b+2)} (\phi - c)^{b+2} \\ &+ \frac{4}{b-1} c (\phi - c)^{b+1} + \frac{2(b+1)}{b(b-1)} c^2 (\phi - c)^b - \frac{2}{b(b-1)} c (\phi - c)^b \\ &+ \frac{2}{b-1} c \phi (\phi - c)^{b-1} = \frac{2}{b-1} A_\phi (\phi - c)^{b-1} + B_\phi, \end{aligned}$$

sendo B_ϕ uma constante de integração. Portanto, supondo $\phi \neq c$, vemos que

$$\begin{aligned} &(\phi')^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \phi^3 + \frac{2(b+1)}{(b-1)(b+2)} (\phi - c)^3 + \frac{4}{b-1} c (\phi - c)^2 \\ &+ \frac{2(b+1)}{b(b-1)} c^2 (\phi - c) - \frac{2}{b(b-1)} c (\phi - c) + \frac{2}{b-1} c \phi - \frac{2}{b-1} A_\phi \\ &= \frac{B_\phi}{(\phi - c)^{b-1}}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Observação 1. Com base no estudo de classificação de ondas viajantes da equação mCH presente no Capítulo 3, a condição $\phi - c \neq 0$ aparecerá naturalmente para garantir a existência de soluções periódicas suaves da equação (1).

Agora,

$$\begin{aligned} & \frac{2(b+1)}{(b-1)(b+2)}(\phi-c)^3 = \frac{2(b+1)}{(b-1)(b+2)}\phi^3 - \frac{6(b+1)}{(b-1)(b+2)}c\phi^2 \\ & + \frac{6(b+1)}{(b-1)(b+2)}c^2\phi - \frac{2(b+1)}{(b-1)(b+2)}c^3 \end{aligned}$$

e

$$\frac{4}{b-1}c(\phi-c)^2 = \frac{4}{b-1}c\phi^2 - \frac{8}{b-1}c^2\phi + \frac{4}{b-1}c^3,$$

então

$$\begin{aligned} & (\phi')^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{b+1}{b+2} \right) \left[\frac{3-(b+2)}{b-1} \right] \phi^3 + \frac{2}{3} \left(\frac{b+1}{b+2} \right) \left[-\frac{9}{b-1} + \frac{6(b+2)}{(b-1)(b+1)} \right] c\phi^2 \\ & + \frac{2}{3} \left(\frac{b+1}{b+2} \right) \left[\frac{9}{b-1} - \frac{12(b+2)}{(b-1)(b+1)} + \frac{3(b+2)}{b(b-1)} \right] c^2\phi \\ & + \frac{2}{3} \left(\frac{b+1}{b+2} \right) \left[-\frac{3}{b-1} + \frac{6(b+2)}{(b-1)(b+1)} - \frac{3(b+2)}{b(b-1)} \right] c^3 \\ & + \frac{2}{3} \left(\frac{b+1}{b+2} \right) \left[\frac{3(b+2)}{(b-1)(b+1)} - \frac{3(b+2)}{b(b-1)(b+1)} \right] c\phi \\ & + \frac{2}{3} \left(\frac{b+1}{b+2} \right) \left[\frac{3(b+2)}{b(b-1)(b+1)}c^2 - \frac{3(b+2)}{(b-1)(b+1)}A_\phi \right] \\ & = \frac{B_\phi}{(\phi-c)^{b-1}}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} & (\phi')^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{b+1}{b+2} \right) \left[\phi^3 + \frac{3c}{b+1}\phi^2 + \frac{6c^2}{b(b+1)}\phi + \frac{6c^3}{b(b-1)(b+1)} - \frac{3(b+2)c}{b(b+1)}\phi \right. \\ & \left. - \frac{3(b+2)c^2}{b(b-1)(b+1)} + \frac{3A_\phi(b+2)}{(b-1)(b+1)} \right] = \frac{B_\phi}{(\phi-c)^{b-1}} \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$(\phi')^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{b+1}{b+2} \right) \left[\phi^3 + \frac{3c}{b+1}\phi^2 + \frac{3(2c^2 - 2c - bc)}{b(b+1)}\phi + C_1 \right] - C_0 = 0, \quad (1.9)$$

sendo $C_0 = \frac{B_\phi}{(\phi-c)^{b-1}}$ e $C_1 = \frac{3[(bA_\phi - c^2)(b+2) + 2c^3]}{b(b-1)(b+1)}$.

Considere $C_0 = 0$ ou, conseqüentemente, $B_\phi = 0$ e denote $d_0 = C_1$, $d_1 = \frac{3(2c^2 - 2c - bc)}{b(b+1)}$ e $d_2 = \frac{3c}{b+1}$. Desse modo, podemos reescrever a equação (1.9) na forma

$$(\phi')^2 = \frac{2(b+1)}{3(b+2)}[\phi^3 + d_2\phi^2 + d_1\phi + d_0] = \frac{2(b+1)}{3(b+2)}F_\phi(\phi(\xi)) \quad (1.10)$$

Lema 1. Para $c \in (0, b+1)$, o polinômio $F_\phi(\phi) = \phi^3 + d_2\phi^2 + d_1\phi + d_0$ possui três raízes reais e distintas.

Demonstração. Pela fórmula de Cardano-Tartaglia (Apêndice A.1), a equação reduzida

$\phi^3 + p\phi + q = 0$, com

$$p = -\frac{d_2^2}{3} + d_1 \quad \text{e} \quad q = \frac{2d_2^3 - 9d_1d_2 + 27d_0}{27},$$

obtida da equação $\phi^3 + d_2\phi^2 + d_1\phi + d_0 = 0$, possui três soluções reais distintas se

$$D_1 = \frac{\left(\frac{2d_2^3 - 9d_1d_2 + 27d_0}{27}\right)^2}{4} + \frac{\left(-\frac{d_2^2}{3} + d_1\right)^3}{27} < 0.$$

Agora, $D_1 < 0$ se, e somente se,

$$D_2 \doteq -27 \left(\frac{2}{27}d_2^3 + d_0 - \frac{d_1d_2}{3} \right)^2 - 4 \left(d_1 - \frac{d_2^2}{3} \right)^3 > 0. \quad (1.11)$$

Como,

$$d_0 = \frac{3[(bA_\phi - c^2)(b+2) + 2c^3]}{b(b-1)(b+1)} = \frac{3b(b+2)A_\phi - 3(b+2)c^2 + 6c^3}{b(b-1)(b+1)},$$

$$d_1 = \frac{3(2c^2 - 2c - bc)}{b(b+1)} = \frac{6c^2 - 3(b+2)c}{b(b+1)} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{3c}{b+1},$$

então

$$D_2 = -\frac{27}{b^2(b-1)^2(b+1)^6} [2(b+2)(b+3)c^3 - 3[(b+1)^2(b+2) - (b-1)(b+1)(b+2)]c^2 + 3b(b+1)^2(b+2)A_\phi]^2 - \frac{4}{b^3(b+1)^6} [3(b+2)c^2 - 3(b+1)(b+2)c]^3.$$

Daí, $D_2 > 0$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} & [2(b+3)c^3 - 3[(b+1)^2 - (b-1)(b+1)]c^2 + 3b(b+1)^2A_\phi]^2 \\ & < -\frac{4(b-1)^2(b+2)}{27b} [3c^2 - 3(b+1)c]^3. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Note que (1.12) só pode ser satisfeita se $3c^2 - 3(b+1)c < 0$, já que o lado esquerdo na desigualdade em (1.12) é não negativo, ou seja, $c \in (0, b+1)$, o que restringe a escolha da constante de velocidade de propagação da onda. Supondo $c \in (0, b+1)$, obtemos que (1.12) é equivalente a inequação

$$\begin{aligned} & [3b(b+1)^2]^2 A_\phi^2 + 6b(b+1)^2 [2(b+3)c^3 - 3[(b+1)^2 - (b-1)(b+1)]c^2] A_\phi \\ & + [2(b+3)c^3 - 3[(b+1)^2 - (b-1)(b+1)]c^2]^2 + \frac{4(b-1)^2(b+2)}{27b} [3c^2 - 3(b+1)c]^3 < 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

que nos remete ao estudo do gráfico de uma função em A_ϕ do segundo grau. Assim, a relação em A_ϕ que estamos interessados é dada pelo discriminante da fórmula de Bháskara

para a equação

$$[3b(b+1)^2]^2 A_\phi^2 + 6b(b+1)^2 [2(b+3)c^3 - 3[(b+1)^2 - (b-1)(b+1)]c^2] A_\phi + [2(b+3)c^3 - 3[(b+1)^2 - (b-1)(b+1)]c^2]^2 + \frac{4(b-1)^2(b+2)}{27b} [3c^2 - 3(b+1)c]^3 = 0,$$

a saber $\Delta > 0 \Leftrightarrow 3c^2 - 3(b+1)c < 0$.

Portanto, para $c \in (0, b+1)$ podemos escolher a constante de integração A_ϕ de tal forma que a desigualdade em (1.13) esteja satisfeita. Conseqüentemente, (1.12) é válida e o lema está concluído. \square

Pelo lema que acabamos de provar, para $c \in (0, b+1)$ existem três raízes reais e distintas α_0 , β_0 e γ_0 ordenadas, sem perda de generalidade, da forma $\alpha_0 < \beta_0 < \gamma_0$. Então, podemos reescrever a equação (1.10) na forma

$$(\phi')^2 = \frac{2(b+1)}{3(b+2)} (\phi - \alpha_0)(\phi - \beta_0)(\phi - \gamma_0) = \frac{\mu}{3} (\phi - \alpha_0)(\phi - \beta_0)(\phi - \gamma_0), \quad (1.14)$$

sendo $\mu = \frac{2(b+1)}{b+2}$.

Observação 2. α_0 é sempre negativo já que $\alpha_0 < \beta_0 < \gamma_0$ e, da primeira equação das relações de Girard (A.3) para o polinômio F_ϕ , $\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 < 0$.

Lema 2. $\alpha_0 \leq \phi \leq \beta_0$.

Demonstração. Suponha $\gamma_0 > \phi > \beta_0$. Como $\alpha_0 < \beta_0 < \gamma_0$, temos $\gamma_0 > \phi > \beta_0 > \alpha_0$ e, assim, obtemos de (1.14) a seguinte contradição

$$0 \leq (\phi')^2 = \frac{\mu}{3} (\phi - \alpha_0)(\phi - \beta_0)(\phi - \gamma_0) = -\frac{\mu}{3} (\phi - \alpha_0)(\phi - \beta_0)(\gamma_0 - \phi) < 0.$$

Se $\phi < \alpha_0$, novamente, obtemos uma contradição a partir da equação (1.14). Agora, se $\phi > \gamma_0$, então de acordo com [16] seria possível obter solução do tipo blow-up periódica para a equação mCH desde que permitíssemos $\phi = c$, fato este que estamos excluindo justamente para estudarmos a classe de ondas viajantes periódicas. Portanto, a única possibilidade é $\alpha_0 < \phi < \beta_0$.

Finalmente, ϕ assume os valores α_0 e β_0 . De fato, como ϕ é contínua e periódica então assume seus valores máximo e mínimo. Além disso, como sua imagem pertence ao intervalo $[\alpha_0, \beta_0]$ e pela equação (1.14), $\phi' = 0 \Leftrightarrow \phi = \alpha_0$ ou $\phi = \beta_0$ ou $\phi = \gamma_0$, segue que α_0 e β_0 são o mínimo e máximo atingidos, respectivamente, de ϕ . \square

Assim, da equação (1.14), obtemos

$$\frac{1}{\alpha_0} \left(\frac{\phi'}{\alpha_0} \right)^2 = \frac{1}{\alpha_0^3} (\phi')^2 = \frac{\mu}{3} \left(\frac{\phi - \alpha_0}{\alpha_0} \right) \left(\frac{\phi - \beta_0}{\alpha_0} \right) \left(\frac{\phi - \gamma_0}{\alpha_0} \right)$$

e, então,

$$(\varphi')^2 = \frac{\mu\alpha_0}{3} (\varphi - 1)(\varphi - \eta_1)(\varphi - \eta_2), \quad (1.15)$$

sendo $\varphi = \frac{\phi}{\alpha_0}$, $\eta_1 = \frac{\beta_0}{\alpha_0}$ e $\eta_2 = \frac{\gamma_0}{\alpha_0}$.

Agora, impondo que a crista da onda esteja em $\xi = 0$, isto é, $\varphi(0) = 1$ e definindo uma outra variável, ψ , pela relação $\varphi - 1 = (\eta_1 - 1)\text{sen}^2\psi$, temos $\psi(0) = 0$ e $\varphi' = 2\psi'(\eta_1 - 1)\text{sen}\psi \cos\psi$. Dessa forma, de (1.15), segue que

$$(2\psi'(\eta_1 - 1)\text{sen}\psi \cos\psi)^2 = \frac{\mu\alpha_0}{3}(\eta_1 - 1)\text{sen}^2\psi[(1 - \eta_1) + (\eta_1 - 1)\text{sen}^2\psi][(1 - \eta_2) + (\eta_1 - 1)\text{sen}^2\psi]$$

e, então,

$$\begin{aligned} (\psi')^2 &= \frac{\mu\alpha_0(\eta_1 - 1)^2\text{sen}^2\psi(-1 + \text{sen}^2\psi)[(1 - \eta_2) + (\eta_1 - 1)\text{sen}^2\psi]}{12(\eta_1 - 1)^2\text{sen}^2\psi \cos^2\psi} \\ &= \frac{\mu\alpha_0(1 - \text{sen}^2\psi)[(1 - \eta_2) + (\eta_1 - 1)\text{sen}^2\psi]}{12\cos^2\psi} \\ &= \frac{\mu\alpha_0}{12}(\eta_2 - 1) \left[1 - \left(\frac{\eta_1 - 1}{\eta_2 - 1} \text{sen}^2\psi \right) \right]. \end{aligned}$$

Tome $k^2 = \frac{\eta_1 - 1}{\eta_2 - 1}$ e $l = \frac{\mu\alpha_0}{12}(\eta_2 - 1)$. Note que $k \in (0, 1)$ e $l > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} (\psi')^2 = l(1 - k^2\text{sen}^2\psi) &\Rightarrow \frac{d\psi}{d\xi} = \psi' = \pm\sqrt{l}\sqrt{1 - k^2\text{sen}^2\psi} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\text{sen}^2\psi}} \cdot \frac{d\psi}{d\xi} = \pm\sqrt{l}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Sem perda de generalidade, vamos escolher, na equação acima, $+\sqrt{l}$ ao invés de $\pm\sqrt{l}$ e considerar $F(\psi, k) = F_k(\psi)$ a primitiva da aplicação $\psi \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\text{sen}^2\psi}}$ (Apêndice A.2). Então, segue de (1.16) que

$$\frac{dF_k}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{d\xi} = \sqrt{l} \Rightarrow \frac{d}{d\xi} [F_k(\psi(\xi))] = \sqrt{l},$$

ou ainda, integrando de 0 até ξ vemos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$F(\psi(\xi), k) = F_k(\psi(\xi)) = F_k(\psi(\xi)) - F_k(\psi(0)) = \sqrt{l}\xi.$$

Mas, como podemos observar em (A.5), $F(\psi, k)$ é a integral normal elíptica do primeiro tipo, então pela definição das funções elípticas de Jacobi (Apêndice A.2), podemos escrever a equação acima como

$$\text{sen}^2\psi = \text{sn}^2(\sqrt{l}\xi, k).$$

e, portanto, utilizando a relação entre φ e ψ , vemos que

$$\varphi = 1 + (\eta_1 - 1)\text{sn}^2(\sqrt{l}\xi, k),$$

ou seja,

$$\phi(\xi) = \phi(\xi; \alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = \alpha_0 + (\beta_0 - \alpha_0) \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{\frac{(b+1)(\gamma_0 - \alpha_0)}{6(b+2)}} \xi, k \right), \quad (1.17)$$

sendo sn a função snoidal definida em (A.8) e seu módulo $k \in (0, 1)$ dado pela equação $k^2 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\gamma_0 - \alpha_0}$, é a solução onda viajante periódica suave para a família b de equações modificadas (1). Em particular, quando $b = 2$ e $b = 3$ segue que

$$\phi(\xi) = \phi(\xi; \alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = \alpha_0 + (\beta_0 - \alpha_0) \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{\frac{(\gamma_0 - \alpha_0)}{8}} \xi, k \right) \quad (1.18)$$

e

$$\phi(\xi) = \phi(\xi; \alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = \alpha_0 + (\beta_0 - \alpha_0) \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{\frac{4(\gamma_0 - \alpha_0)}{30}} \xi, k \right) \quad (1.19)$$

são as soluções ondas viajantes periódicas suaves para as equações mCH e mDP, com $c \in (0, 3)$ e $c \in (0, 4)$, respectivamente.

Observação 3. Vamos refletir um pouco sobre os casos degenerados. Fixe $c > 0$ e considere que soluções periódicas possam persistir se $\alpha_0 = \beta_0$ ou $\beta_0 = \gamma_0$. Como ϕ assume apenas valores no intervalo $[\alpha_0, \beta_0]$ concluímos que o primeiro caso nos conduz a solução constante $\phi \equiv \alpha_0 = \beta_0$. De fato, o limite de (1.17) quando $\alpha_0 \rightarrow \beta_0$ é uniforme na variável ξ e é exatamente esta solução constante. Se por outro lado c e γ_0 estão fixos, então, tomando $\beta_0 \uparrow \gamma_0$, temos $\alpha_0 = -\frac{3c}{b+1} - 2\gamma_0$, via relações de Girard (A.3) para o polinômio F_ϕ em (1.10), e $k \rightarrow 1$. Além disso, como $\operatorname{sn}^2 + \operatorname{cn}^2 = 1$ e a função elíptica cn converge, uniformemente em conjuntos compactos, para a função hiperbólica sech , (1.17) torna-se, neste limite,

$$\lim_{\beta_0 \uparrow \gamma_0} \phi = \varphi = \varphi_\infty - a \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{(b+1)a}{6(b+2)}} \xi \right),$$

sendo $\varphi_\infty = \gamma_0$ e $a = \gamma_0 - \alpha_0$. Agora, entendendo por onda viajante solitária, toda solução de uma EDP que possui forma permanente, $\phi(x - ct)$, e é localizada, ou seja, $\phi(\xi) \rightarrow 0$, assim como todas as suas derivadas ($\phi^{(n)}(\xi) \rightarrow 0$), quando $\xi \rightarrow \infty$, podemos considerar $\gamma_0 = 0$ na identidade acima, de modo que a solução onda solitária padrão

$$\varphi = -\frac{3c}{b+1} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{c}{2(b+2)}} \xi \right)$$

de velocidade de propagação c da família b de equações modificadas é recuperada. Em particular, para $b = 2$ e $b = 3$ obtemos, respectivamente, as ondas solitárias das equações mCH e mDP, obtidas por Wazwaz em [35]. Note que $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ exatamente quando $A_\phi = B_\phi = 0$, como era de se esperar.

1.2 Período fundamental da solução onda viajante

Como $\text{sn}^2(\xi, k)$ tem período fundamental igual a $2K(k)$, sendo $K(k)$ a integral elíptica completa definida em (A.7), $\text{sn}^2(\sqrt{l}\xi, k)$ tem período fundamental igual a $\frac{2K(k)}{\sqrt{l}}$. Portanto, ϕ tem período fundamental, T_ϕ , dado por

$$T_\phi = \frac{2K(k)}{\sqrt{\frac{(b+1)(\gamma_0-\alpha_0)}{6(b+2)}}} = \frac{2\sqrt{6(b+2)}}{\sqrt{b+1}\sqrt{\gamma_0-\alpha_0}}K(k). \quad (1.20)$$

De fato, veja que

$$\begin{aligned} \phi(0 + T_\phi) &= \alpha_0 + (\beta_0 - \alpha_0)\text{sn}^2\left(\sqrt{\frac{(b+1)(\gamma_0-\alpha_0)}{6(b+2)}}(0 + T_\phi), k\right) \\ &= \alpha_0 + (\beta_0 - \alpha_0)\text{sn}^2\left(0 + \sqrt{\frac{(b+1)(\gamma_0-\alpha_0)}{6(b+2)}}\frac{2\sqrt{6(b+2)}}{\sqrt{b+1}\sqrt{\gamma_0-\alpha_0}}K(k), k\right) \\ &= \alpha_0 + (\beta_0 - \alpha_0)\text{sn}^2(0 + 2K(k), k) \\ &= \alpha_0 + (\beta_0 - \alpha_0)\text{sn}^2(0, k) \\ &= \phi(0). \end{aligned}$$

E, mais ainda, T_ϕ é o período fundamental de ϕ pois, do contrário, existiria $L > 0$ satisfazendo $L < T_\phi$ e $\phi(\xi) = \phi(\xi + L)$, $\forall \xi$. Assim, teríamos

$$\text{sn}^2\left(\sqrt{\frac{(b+1)(\gamma_0-\alpha_0)}{6(b+2)}}(\xi + L), k\right) = \text{sn}^2\left(\sqrt{\frac{(b+1)(\gamma_0-\alpha_0)}{6(b+2)}}\xi, k\right),$$

o que significaria que L é período de $\text{sn}^2(\sqrt{l}\xi, k)$. Então, como L é período de $\text{sn}^2(\sqrt{l}\xi, k)$, $\sqrt{l}L$ seria período de $\text{sn}^2(\xi, k)$ com

$$\begin{aligned} \sqrt{l}L &= \left(\sqrt{\frac{(b+1)(\gamma_0-\alpha_0)}{6(b+2)}}\right)L < \left(\sqrt{\frac{(b+1)(\gamma_0-\alpha_0)}{6(b+2)}}\right)T_\phi \\ &= \left(\sqrt{\frac{(b+1)(\gamma_0-\alpha_0)}{6(b+2)}}\right)\left(\frac{2\sqrt{6(b+2)}}{\sqrt{b+1}\sqrt{\gamma_0-\alpha_0}}K(k)\right) = 2K(k), \end{aligned}$$

o que contradiz o fato de $2K$ ser o período fundamental de $\text{sn}^2(\xi, k)$.

Logo, T_ϕ é o período fundamental de ϕ .

1.2.1 Limitação inferior para o período fundamental

Vamos provar que o período fundamental T_ϕ para a solução periódica suave (1.17) da equação (1) é limitado inferiormente por $\frac{2\pi\sqrt{b(b+2)}}{\sqrt{2}\sqrt{-b(b+2)c^2+b(b+1)(b+2)c}}$, com $b > 1$ real. Para tal objetivo, inicialmente vamos obter a equação de uma elipse, que denotaremos por Σ , em função de α_0 e β_0 , através das relações de Girard (A.3) para o polinômio de grau três

$F_\phi(\phi) = \phi^3 + d_2\phi^2 + d_1\phi + d_0$, com $c \in (0, b + 1)$, que são dadas por

$$\begin{cases} \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = -d_2 = -\frac{3c}{b+1} \\ \alpha_0\beta_0 + \alpha_0\gamma_0 + \beta_0\gamma_0 = d_1 = \frac{6c^2 - 3(b+2)c}{b(b+1)} \\ \alpha_0\beta_0\gamma_0 = -d_0 = -C_1. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} \gamma_0 = -\frac{3c}{b+1} - \alpha_0 - \beta_0 \\ \gamma_0(\alpha_0 + \beta_0) = \frac{6c^2 - 3(b+2)c}{b(b+1)} - \alpha_0\beta_0 = \frac{6c^2 - 3(b+2)c - b(b+1)\alpha_0\beta_0}{b(b+1)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = -\frac{3c}{b+1} - \alpha_0 - \beta_0 = \frac{6c^2 - 3(b+2)c - b(b+1)\alpha_0\beta_0}{b(b+1)(\alpha_0 + \beta_0)}. \quad (1.21)$$

Além disso, como a equação geral de uma elipse é dada por

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

com $B^2 - 4AC < 0$, vemos que a equação (1.21), reescrita, equivalentemente, como

$$b(b+1)\alpha_0^2 + b(b+1)\alpha_0\beta_0 + b(b+1)\beta_0^2 + 3bc\alpha_0 + 3bc\beta_0 + 6c^2 - 3(b+2)c = 0, \quad (1.22)$$

corresponde à equação de uma elipse, digamos Σ , em α_0 e β_0 .

Vamos determinar os intervalos de variação de α_0 e β_0 na elipse Σ . Para isso, considere novamente a equação da elipse Σ dada por (1.22), na forma

$$b(b+1)\beta_0^2 + [b(b+1)\alpha_0 + 3bc]\beta_0 + [b(b+1)\alpha_0^2 + 3bc\alpha_0 + 6c^2 - 3(b+2)c] = 0, \quad (1.23)$$

que é solúvel em β_0 se, e somente se, o seu discriminante, Δ_1 , na fórmula de Bháskara é não negativo. Agora,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= [b(b+1)\alpha_0 + 3bc]^2 - 4b(b+1)[b(b+1)\alpha_0^2 + 3bc\alpha_0 + 6c^2 - 3(b+2)c] \\ &= b^2(b+1)^2\alpha_0^2 + 6b^2(b+1)c\alpha_0 + 9b^2c^2 - 4b^2(b+1)^2\alpha_0^2 \\ &\quad - 12b^2(b+1)c\alpha_0 - 24b(b+1)c^2 + 12b(b+1)(b+2)c \\ &= -3b^2(b+1)^2\alpha_0^2 - 6b^2(b+1)c\alpha_0 - [24b(b+1) - 9b^2]c^2 + 12b(b+1)(b+2)c \\ &= -3b^2(b+1)^2\alpha_0^2 - 6b^2(b+1)c\alpha_0 - 3b(5b+8)c^2 + 12b(b+1)(b+2)c. \end{aligned}$$

Então, para obtermos $\Delta_1 \geq 0$, vamos estudar a equação do segundo grau em α_0

$$\begin{aligned} &-3b^2(b+1)^2\alpha_0^2 - 6b^2(b+1)c\alpha_0 - 3b(5b+8)c^2 + 12b(b+1)(b+2)c = 0 \\ \Leftrightarrow &-b(b+1)^2\alpha_0^2 - 2b(b+1)c\alpha_0 - (5b+8)c^2 + 4(b+1)(b+2)c = 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Assim, novamente do discriminante, Δ_2 , da fórmula de Bháskara para uma equação do segundo grau, a saber a equação (1.24), vemos que

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= 4b^2(b+1)^2c^2 - 4[-b(b+1)^2][-(5b+8)c^2 + 4(b+1)(b+2)c] \\ &= 4b^2(b+1)^2c^2 + 4b(b+1)^2[-(5b+8)c^2 + 4(b+1)(b+2)c].\end{aligned}$$

Dessa forma, para que a equação (1.24) tenha duas raízes reais e distintas, digamos $A_0 < A_1$, é suficiente supor $\Delta_2 > 0$ ou, equivalentemente, $c \in (0, b+1)$. Conseqüentemente, para $\alpha_0 \in (A_0, A_1)$ temos $\Delta_1 > 0$ e a equação (1.23) é solúvel. Note que A_0 e A_1 são dados como solução da equação do segundo grau em α_0 (1.24), ou seja,

$$\begin{cases} A_0 = \frac{-bc - 2\sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}}{b(b+1)} \\ A_1 = \frac{-bc + 2\sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}}{b(b+1)}. \end{cases}$$

Assim, supondo $c \in (0, b+1)$ temos de (1.23)

$$\beta_0 = \frac{-[b(b+1)\alpha_0 + 3bc] \pm \sqrt{\Delta_1}}{2b(b+1)} = \frac{-3bc - b(b+1)\alpha_0 \pm \sqrt{\sigma(\alpha_0, c)}}{2b(b+1)}, \quad (1.25)$$

sendo $\sigma(\alpha_0, c) \doteq -6b^2(b+1)c\alpha_0 - 3b^2(b+1)^2\alpha_0^2 - 3b(5b+8)c^2 + 12b(b+1)(b+2)c$.

Fazendo a seguinte escolha em (1.25)

$$\beta_0 = \frac{-3bc - b(b+1)\alpha_0 - \sqrt{\sigma(\alpha_0, c)}}{2b(b+1)} \quad (1.26)$$

e definindo $\gamma_0 = -\frac{3c}{b+1} - \alpha_0 - \beta_0$, segue que

$$\begin{aligned}\gamma_0 - \alpha_0 &= \left(-\frac{3c}{b+1} - \alpha_0 - \beta_0\right) - \alpha_0 = -\frac{3c}{b+1} - 2\alpha_0 - \beta_0 \\ &= -\frac{3c}{b+1} - 2\alpha_0 - \left[\frac{-3bc - b(b+1)\alpha_0 - \sqrt{\sigma(\alpha_0, c)}}{2b(b+1)}\right] \\ &= \frac{-6bc - 4b(b+1)\alpha_0 + 3bc + b(b+1)\alpha_0 + \sqrt{\sigma(\alpha_0, c)}}{2b(b+1)} \\ &= \frac{-3bc - 3b(b+1)\alpha_0 + \sqrt{\sigma(\alpha_0, c)}}{2b(b+1)}.\end{aligned} \quad (1.27)$$

Observação 4. A escolha de β_0 é feita de modo que a funções período e módulo em (1.28) e (1.29) estejam bem definidas e os cálculos a seguir sejam possíveis.

Ainda, buscando refinar os limitantes de α_0 utilizaremos o método dos multiplicadores de Lagrange. Vamos definir a função $M(\alpha, \beta) \doteq \alpha + \beta$ e obter seus máximos e mínimos absolutos restrito ao vínculo $N(\alpha, \beta) \doteq b(b+1)\beta^2 + [b(b+1)\alpha + 3bc]\beta + [b(b+1)\alpha^2 +$

$3bc\alpha + 6c^2 - 3(b+2)c] = 0$. Primeiro vamos calcular os pontos α , β e λ tais que

$$\nabla M(\alpha, \beta) = \lambda \nabla N(\alpha, \beta) \text{ e } N(\alpha, \beta) = 0.$$

Note que:

$$\begin{aligned} \nabla M(\alpha, \beta) &= \lambda \nabla N(\alpha, \beta) \\ \Leftrightarrow (1, 1) &= \lambda(b(b+1)\beta + 2b(b+1)\alpha + 3bc, 2b(b+1)\beta + b(b+1)\alpha + 3bc) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b(b+1)\beta\lambda + 2b(b+1)\alpha\lambda + 3bc\lambda = 1 \\ 2b(b+1)\beta\lambda + b(b+1)\alpha\lambda + 3bc\lambda = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Então, queremos α , β e λ satisfazendo

$$\begin{cases} b(b+1)\beta\lambda + 2b(b+1)\alpha\lambda + 3bc\lambda = 1 \\ 2b(b+1)\beta\lambda + b(b+1)\alpha\lambda + 3bc\lambda = 1 \\ b(b+1)\beta^2 + [b(b+1)\alpha + 3bc]\beta + [b(b+1)\alpha^2 + 3bc\alpha + 6c^2 - 3(b+2)c] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b(b+1)\beta\lambda - b(b+1)\alpha\lambda = 0 \Rightarrow b(b+1)\beta\lambda = b(b+1)\alpha\lambda \stackrel{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} \beta = \alpha$$

e,

$$\begin{aligned} 0 &= b(b+1)\beta^2 + [b(b+1)\beta + 3bc]\beta + [b(b+1)\beta^2 + 3bc\beta + 6c^2 - 3(b+2)c] \\ &= 3b(b+1)\beta^2 + 6bc\beta + 6c^2 - 3(b+2)c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 = b(b+1)\beta^2 + 2bc\beta + 2c^2 - (b+2)c$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \beta &= \frac{-2bc \pm \sqrt{4b^2c^2 - 4b(b+1)[2c^2 - (b+2)c]}}{2b(b+1)} \\ &= \frac{-bc \pm \sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}}{b(b+1)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para determinarmos os valores absolutos de M , é suficiente calcular $M(\alpha, \beta)$ para os valores α e β encontrados acima, sendo que o menor valor e o maior valor da função M será, respectivamente, o seu mínimo e o seu máximo absoluto. Assim,

$$\begin{aligned} M(\beta, \beta) &= 2\beta = 2 \left(\frac{-bc \pm \sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}}{b(b+1)} \right) \\ &= \frac{-2bc \pm 2\sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}}{b(b+1)} \end{aligned}$$

e, portanto, $A_2 \leq F(\alpha, \beta) \leq A_3$, com

$$A_2 \doteq \frac{-2bc - 2\sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}}{b(b+1)}$$

e

$$A_3 \doteq \frac{-2bc + 2\sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}}{b(b+1)}.$$

Em particular, como $\alpha_0 < \beta_0$,

$$2\beta_0 > F(\alpha_0, \beta_0) \Rightarrow \beta_0 > \frac{-bc - \sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}}{b(b+1)} \doteq B_0.$$

Dessa forma, vamos supor $c \in (0, b+1)$ e $\alpha_0, \beta_0 \in \Sigma$ tais que

$$A_0 < \alpha_0 < B_0 < \beta_0.$$

Continuando com o nosso objetivo inicial, temos, pela equação reduzida da elipse Σ , que para cada $\alpha_0 \in (A_0, B_0)$ existe um valor real $\beta_0 > B_0$ no qual $(\alpha_0, \beta_0) \in \Sigma$. Assim, de (1.26) e (1.27),

$$T_\phi(\alpha_0, c) = \frac{2\sqrt{6(b+2)}}{\sqrt{b+1}\sqrt{\gamma_0 - \alpha_0}} K(k(\alpha_0, c)) = \frac{4\sqrt{3b(b+2)}K(k(\alpha_0, c))}{\sqrt{-3bc - 3b(b+1)\alpha_0 + \sqrt{\sigma(\alpha_0, c)}}} \quad (1.28)$$

e

$$k(\alpha_0, c) = \sqrt{\frac{\beta_0 - \alpha_0}{\gamma_0 - \alpha_0}} = \sqrt{\frac{-3bc - 3b(b+1)\alpha_0 - \sqrt{\sigma(\alpha_0, c)}}{-3bc - 3b(b+1)\alpha_0 + \sqrt{\sigma(\alpha_0, c)}}}. \quad (1.29)$$

Então, como $-3bc - 3b(b+1)A_0 = 6\sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c} - 6b^2(b+1)cA_0 - 3b^2(b+1)^2A_0^2 - 3b(5b+8)c^2 + 12b(b+1)(b+2)c = 0$, obtemos que

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow A_0} k(\alpha_0, c) = \sqrt{\frac{6\sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}}{6\sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}}} = 1.$$

Portanto, como da integral elíptica completa de primeira espécie temos

$$\begin{aligned} K(1) &= F\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 1.\text{sen}^2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\text{cos}^2\theta}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\text{cos}\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\theta d\theta = (\ln|\sec\theta + \text{tg}\theta|) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \lim_{M \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln|\sec M + \text{tg}M| - \lim_{N \rightarrow 0} \ln|\sec N + \text{tg}N| = +\infty, \end{aligned} \quad (1.30)$$

podemos concluir de (1.28) que

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow A_0} T_\phi(\alpha_0, c) = \frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{\sqrt{6\sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}}} K(1) = +\infty. \quad (1.31)$$

Além disso, como $-3bc - 3b(b+1)B_0 = 3\sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}$ e $-6b^2(b+1)cB_0 - 3b^2(b+1)^2B_0^2 - 3b(5b+8)c^2 + 12b(b+1)(b+2)c = 9[-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c]$, segue de (1.29) que

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow B_0} k(\alpha_0, c) = \sqrt{\frac{-3bc - 3b(b+1)B_0 - \sqrt{\sigma(B_0, c)}}{-3bc - 3b(b+1)B_0 + \sqrt{\sigma(B_0, c)}}} = 0.$$

Assim, como

$$K(0) = F\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 0 \cdot \text{sen}^2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}, \quad (1.32)$$

obtemos de (1.28) que

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_0 \rightarrow B_0} T_\phi(\alpha_0, c) &= \frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{\sqrt{6\sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}}} K(0) \\ &= \frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{\sqrt{6\sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi\sqrt{b(b+2)}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}}. \end{aligned}$$

Então, como a aplicação $\alpha_0 \in (A_0, B_0) \mapsto T_\phi(\alpha_0, c)$ é estritamente decrescente (Teorema 3), concluímos que $T_\phi > \frac{2\pi\sqrt{b(b+2)}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}}$.

1.3 Existência de uma curva não trivial suave de soluções ondas snoidais L -periódicas parametrizada pela velocidade de propagação das ondas c

Na seção anterior, obtivemos uma solução onda snoidal com período L . Para c_0 tal que $[c_0^2 - (b+1)c_0] < -\frac{4\pi^4 b(b+2)}{L^4}$, existe um único $\alpha_{0,0} \in (A_0(c_0), B_0(c_0))$ tal que $T_\phi(\alpha_{0,0}, c_0) = L$. Então, para c_0 e $\alpha_{0,0}$ tais que $(\alpha_{0,0}, \beta_{0,0}) \in \Sigma(c_0)$, temos que a onda snoidal $\phi \doteq \phi_{c_0} = \phi_{c_0}(\cdot; \alpha_{0,0}, \beta_{0,0}, \gamma_{0,0})$, com $\gamma_{0,0} = -\frac{3c_0}{b+1} - \alpha_{0,0} - \beta_{0,0}$, possui período fundamental L e satisfaz (1.3), com $c = c_0$. Além disso, a onda snoidal $\phi(\cdot, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \doteq \phi_c(\cdot, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ em (1.17) é completamente determinada pelos parâmetros c e α_0 e será denotada por $\phi_c(\cdot, \alpha_0)$ ou, simplesmente, ϕ_c .

Nosso próximo resultado mostra a existência de uma curva suave de soluções ondas snoidais da equação (1.3). Em outras palavras, mostramos que pelo menos localmente a escolha de $\alpha_{0,0}$ depende suavemente de c_0 .

Teorema 3. *Seja $L > \sqrt[4]{\frac{16b(b+2)}{(b+1)^2}}\pi$ uma constante arbitrária fixada com $b > 1$ real. Considere $c_0 \in (0, \frac{(b+1)(b+2)}{5b+2})$ tal que $[c_0^2 - (b+1)c_0] < -\frac{4\pi^4 b(b+2)}{L^4}$ e $\alpha_{0,0} \equiv \alpha_0(c_0) \in (A_0, B_0)$ tais que $T_{\phi_{c_0}} = L$. Então, valem as seguintes afirmações:*

(a) *Existem um intervalo $\mathcal{J}(c_0)$ centrado em c_0 , um intervalo $J(\alpha_{0,0})$ centrado em $\alpha_0(c_0)$ e uma única função suave $\Lambda : \mathcal{J}(c_0) \rightarrow J(\alpha_{0,0})$ tal que $\Lambda(c_0) = \alpha_{0,0}$ e*

$$\frac{4\sqrt{3b(b+2)}K(k(\alpha_0, c))}{\sqrt{-3bc - 3b(b+1)\alpha_0 + \sqrt{\sigma(\alpha_0, c)}}} = L, \quad (1.33)$$

sendo $\sigma(\alpha_0, c) \doteq -6b^2(b+1)c\alpha_0 - 3b^2(b+1)^2\alpha_0^2 - 3b(5b+8)c^2 + 12b(b+1)(b+2)c$, $c \in \mathcal{J}(c_0)$, $\alpha_0 = \Lambda(c)$ e $k^2 \equiv k^2(c) \in (0, 1)$ definido em (1.29).

(b) *A solução onda snoidal dada por (1.17), $\phi_c(\cdot; \alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, determinada por $\alpha_0 \equiv \alpha_0(c)$, $\beta_0 \equiv \beta_0(c)$ e $\gamma_0 \equiv \gamma_0(c)$, tem período fundamental L e satisfaz a equação (1.3). Além disso, a aplicação*

$$c \in \mathcal{J}(c_0) \mapsto \phi_c \in H_{per}^1([0, L])$$

é uma função suave.

Demonstração. A ideia da demonstração é aplicar o Teorema da Função Implícita. Para isto, considere o conjunto aberto $\Omega = \{(\alpha, c) \mid c \in (0, \frac{(b+1)(b+2)}{5b+2}), [c^2 - (b+1)c] < -\frac{4\pi^4 b(b+2)}{L^4} \text{ e } \alpha \in (A_0, B_0)\} \subset \mathbb{R}^2$ e defina $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Psi(\alpha, c) = \frac{4\sqrt{3b(b+2)}K(k(\alpha, c))}{\sqrt{-3bc - 3b(b+1)\alpha + \sqrt{\sigma(\alpha, c)}}},$$

sendo $\sigma(\alpha, c) \doteq -6b^2(b+1)c\alpha - 3b^2(b+1)^2\alpha^2 - 3b(5b+8)c^2 + 12b(b+1)(b+2)c$ e $k(\alpha, c)$ definido em (1.29), com $\alpha_0 = \alpha$. Por hipótese, $\Psi(\alpha_{0,0}, c_0) = T_{\phi_{c_0}} = L$.

Considere

$$f(\alpha, c) = \frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{\sqrt{-3bc - 3b(b+1)\alpha + \sqrt{\sigma(\alpha, c)}}}, \quad (1.34)$$

então, pela regra do produto para derivadas, temos de (1.34)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = K \frac{\partial f}{\partial \alpha} + f \frac{\partial K}{\partial \alpha}.$$

Fazendo $u(\alpha, c) = -3bc - 3b(b+1)\alpha + \sqrt{\sigma(\alpha, c)}$, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = -3b(b+1) + \frac{-3b^2(b+1)c - 3b^2(b+1)^2\alpha}{\sqrt{\sigma(\alpha, c)}}. \quad (1.35)$$

Agora, pela regra da cadeia para derivadas, temos

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \text{ e } \frac{\partial K}{\partial \alpha} = \frac{dK}{dk} \frac{\partial k}{\partial \alpha}.$$

Então, por (1.35),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} &= K \left[\frac{d}{du} \left(\frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{\sqrt{u}} \right) \right] \cdot \left[-3b(b+1) + \frac{-3b^2(b+1)c - 3b^2(b+1)^2\alpha}{\sqrt{\sigma(\alpha, c)}} \right] \\
&+ f \left[\frac{dK}{dk} \frac{\partial k}{\partial \alpha} \right] \\
&= \left[\frac{2\sqrt{3b(b+2)}K}{u\sqrt{u}} \right] \cdot \left[3b(b+1) + \frac{3b^2(b+1)^2\alpha + 3b^2(b+1)c}{\sqrt{\sigma(\alpha, c)}} \right] \\
&+ \frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{\sqrt{u}} \left(\frac{dK}{dk} \frac{\partial k}{\partial \alpha} \right).
\end{aligned}$$

Denotando $\nu \equiv \nu(\alpha) = -3bc - 3b(b+1)\alpha$ e $\sigma \equiv \sigma(\alpha) = \sigma(\alpha, c)$, podemos reescrever, equivalentemente, a equação acima como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} &= \left[\frac{2\sqrt{3b(b+2)}K}{(\nu + \sqrt{\sigma})(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{1}{2}}} \right] \left[3b(b+1) + \frac{3b^2(b+1)^2\alpha + 3b^2(b+1)c}{\sqrt{\sigma}} \right] \\
&+ \frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{dK}{dk} \frac{\partial k}{\partial \alpha} \right) \\
&= \frac{2\sqrt{3b(b+2)}K [3b(b+1) + d^{-\frac{1}{2}}(3b^2(b+1)^2\alpha + 3b^2(b+1)c)]}{(\nu + \sqrt{\sigma})(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{dK}{dk} \frac{\partial k}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\nu + \sqrt{\sigma}}{\nu + \sqrt{\sigma}} \right) \\
&= \frac{2\sqrt{3b(b+2)}K [\nu + \sqrt{\sigma}]^{-\frac{1}{2}} [3b(b+1) + d^{-\frac{1}{2}}(3b^2(b+1)^2\alpha + 3b^2(b+1)c)]}{\nu + \sqrt{\sigma}} \\
&+ \frac{4\sqrt{3b(b+2)} \left(\frac{dK}{dk} \frac{\partial k}{\partial \alpha} \right) (\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{1}{2}}}{\nu + \sqrt{\sigma}}. \tag{1.36}
\end{aligned}$$

Agora, de (1.35) e pela regra do quociente para derivadas, vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k^2}{\partial \alpha} &= \frac{-3bc - 3b(b+1)\alpha + \sqrt{\sigma}}{(-3bc - 3b(b+1)\alpha + \sqrt{\sigma})^2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (-3bc - 3b(b+1)\alpha - \sqrt{\sigma}) \right] \\
&- \frac{-3bc - 3b(b+1)\alpha - \sqrt{\sigma}}{(-3bc - 3b(b+1)\alpha + \sqrt{\sigma})^2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (-3bc - 3b(b+1)\alpha + \sqrt{\sigma}) \right] \\
&= \frac{(\nu + \sqrt{\sigma})}{(\nu + \sqrt{\sigma})^2} \left[-3b(b+1) - \frac{-3b^2(b+1)c - 3b^2(b+1)^2\alpha}{\sqrt{\sigma}} \right] \\
&- \frac{(\nu - \sqrt{\sigma})}{(\nu + \sqrt{\sigma})^2} \left[-3b(b+1) + \frac{-3b^2(b+1)c - 3b^2(b+1)^2\alpha}{\sqrt{\sigma}} \right] \\
&= \frac{-3b(b+1)\nu - 3b(b+1)\sqrt{\sigma}}{(\nu + \sqrt{\sigma})^2} - \left[\frac{(\nu + \sqrt{\sigma})(-3b^2(b+1)c - 3b^2(b+1)^2\alpha)}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^2} \right] \\
&+ \frac{3b(b+1)\nu - 3b(b+1)\sqrt{\sigma}}{(\nu + \sqrt{\sigma})^2} - \left[\frac{(\nu - \sqrt{\sigma})(-3b^2(b+1)c - 3b^2(b+1)^2\alpha)}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-6b(b+1)\sqrt{\sigma}}{(\nu + \sqrt{\sigma})^2} - \frac{2\nu[-3b^2(b+1)c - 3b^2(b+1)^2\alpha]}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^2} \\
&= \frac{-6b(b+1)\sigma - 2b(b+1)\nu[-3bc - 3b(b+1)\alpha]}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^2} \\
&= \frac{-6b(b+1)\sigma - 2b(b+1)\nu^2}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^2}.
\end{aligned}$$

Ainda, pela regra da cadeia para derivadas e da equação acima, segue que

$$\frac{\partial k^2}{\partial \alpha} = 2k \frac{\partial k}{\partial \alpha} \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial \alpha} = \frac{1}{2k} \frac{\partial k^2}{\partial \alpha} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{-6b(b+1)\sigma - 2b(b+1)\nu^2}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^2}. \quad (1.37)$$

Mas, como c é tomado de tal forma que $\sigma > 0$ e $k \in (0, 1)$, segue que

$$\frac{\partial k}{\partial \alpha} = - \left(\frac{1}{2k} \right) \left(\frac{6b(b+1)\sigma + 2b(b+1)\nu^2}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^2} \right) < 0.$$

Além disso, de (1.37), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} &= \frac{2\sqrt{3b(b+2)}K[3b(b+1) + \sigma^{-\frac{1}{2}}(3b^2(b+1)^2\alpha + 3b^2(b+1)c)]}{(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{1}{2}}(\nu + \sqrt{\sigma})} \\
&+ \frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{\nu + \sqrt{\sigma}} \left(\frac{dK}{dk} \right) \left(\frac{1}{2k} \cdot \frac{-6b(b+1)\sigma - 2b(b+1)\nu^2}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^2} \right) (\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{3b(b+2)}K[3b(b+1) - b(b+1)\nu\sigma^{-\frac{1}{2}}]}{(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{3}{2}}} \\
&+ 2\sqrt{3b(b+2)} \left(\frac{dK}{dk} \right) \left(\frac{-6b(b+1)\sigma - 2b(b+1)\nu^2}{k\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^2} \right) \left(\frac{\sqrt{\nu + \sqrt{\sigma}}}{\nu + \sqrt{\sigma}} \right) \\
&= \frac{2\sqrt{3b(b+2)}K[3b(b+1)\sqrt{\sigma} - b(b+1)\nu]}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{3}{2}}} \\
&- 2\sqrt{3b(b+2)} \left(\frac{dK}{dk} \right) \left[\frac{6b(b+1)\sigma + 2b(b+1)\nu^2}{k\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{5}{2}}} \right]. \quad (1.38)
\end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} < 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{dK}{dk} \right) \left[\frac{6b(b+1)\sigma + 2b(b+1)\nu^2}{k\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{5}{2}}} \right] > \frac{K[3b(b+1)\sqrt{\sigma} - b(b+1)\nu]}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{3}{2}}} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{dK}{dk} \right) \left[\frac{6\sigma + 2\nu^2}{k\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{5}{2}}} \right] > \frac{K(3\sqrt{\sigma} - \nu)}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.39)
\end{aligned}$$

Então, como $\frac{dK}{dk} = \frac{E-k'^2K}{kk'^2}$, vemos que

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{E - k'^2 K}{kk'^2} \right] \left[\frac{6\sigma + 2\nu^2}{k\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{5}{2}}} \right] > \frac{K(3\sqrt{\sigma} - \nu)}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{3}{2}}} \\
\Leftrightarrow & \left[\frac{E - k'^2 K}{kk'^2} \right] \left[\frac{6\sigma + 2\nu^2}{k(\nu + \sqrt{\sigma})} \right] > K(3\sqrt{\sigma} - \nu) \\
\Leftrightarrow & (E - k'^2 K)(6\sigma + 2\nu^2) > K(3\sqrt{\sigma} - \nu)k^2k'^2(\nu + \sqrt{\sigma}) \\
\Leftrightarrow & E(6\sigma + 2\nu^2) > K(3\sqrt{\sigma} - \nu)k^2k'^2(\nu + \sqrt{\sigma}) + (6\sigma + 2\nu^2)k'^2K \\
\Leftrightarrow & E(6\sigma + 2\nu^2) > Kk^2k'^2(3\nu\sqrt{\sigma} + 3\sigma - \nu^2 - \nu\sqrt{\sigma}) + (6\sigma + 2\nu^2)k'^2K \\
\Leftrightarrow & E(6\sigma + 2\nu^2) > Kk^2k'^2(2\nu\sqrt{\sigma} + 3\sigma) - Kk^2k'^2\nu^2 + 6\sigma k'^2K + 2\nu^2k'^2K.
\end{aligned}$$

Ademais, como $k'^2 = 1 - k^2$ temos que $k^2 = 1 - k'^2$ e $k^2 + k'^2 = 1$ e, assim,

$$\begin{aligned}
& E(6\sigma + 2\nu^2) > Kk^2k'^2(2\nu\sqrt{\sigma} + 3\sigma) - K(1 - k'^2)k'^2\nu^2 + 6\sigma k'^2K + 2\nu^2k'^2K \\
\Leftrightarrow & E(6\sigma + 2\nu^2) > Kk^2k'^2(2\nu\sqrt{\sigma} + 3\sigma) + Kk'^2\nu^2 + k'^4\nu^2K + 6\sigma k'^2K \quad (1.40)
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
& E(6\sigma + 2\nu^2) = 6\sigma E + 2\nu^2 E = 6\sigma E + 2\nu^2 - \nu^2 k^2 E + \nu^2 k^2 E \\
& = (1 - k^2)\nu^2 E + 6\sigma E + \nu^2 E + \nu^2 k^2 E = \nu^2 k'^2 E + 6\sigma E + \nu^2 E + \nu^2 k^2 E \\
& = \nu^2 k'^2 E + 6\sigma E + \nu^2 E + \nu^2 k^2 E - \nu^2 k'^4 E + \nu^2 k'^4 E \\
& = \nu^2 k'^2(1 - k'^2)E + \nu^2(k^2 + k'^2)E + \nu^2 k^2 E + \nu^2 k'^4 E + 6\sigma E \\
& = \nu^2 k'^2(1 - k'^2)E + \nu^2 k^2 E + \nu^2 k'^2 E + \nu^2 k^2 E + \nu^2 k'^4 E + 6\sigma E \\
& = \nu^2 k'^2(1 - k'^2)E + \nu^2 k'^2(1 + k'^2)E + 2\nu^2 k^2 E + 6\sigma E \\
& = \nu^2 k'^2(1 + k'^2)E + \nu^2 k'^2 k^2 E + 2\nu^2 k^2 E + 6\sigma E \\
& = \nu^2 k'^2(1 + k'^2)E + \nu^2 k^2(1 + k'^2)E + \nu^2 k^2 E + 6\sigma E. \quad (1.41)
\end{aligned}$$

Também, como $E(k) + K(k)$ é estritamente crescente,

$$[E(k) + K(k)]' = E'(k) + K'(k) > 0.$$

Mas, $E' = \frac{E-K}{k}$ e $K' = \frac{E-k'^2K}{kk'^2}$, então

$$\begin{aligned}
& \frac{E - K}{k} + \frac{E - k'^2 K}{kk'^2} > 0 \Rightarrow \frac{k'^2(E - K) + E - k'^2 K}{kk'^2} > 0 \\
\Rightarrow & k'^2 E - k'^2 K + E - k'^2 K > 0 \Rightarrow E(1 + k'^2) > 2k'^2 K. \quad (1.42)
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados de (1.42) por $k^2\nu^2$ e utilizando que $\nu > \sqrt{\sigma}$, temos

$$k^2\nu^2E(1+k'^2) > 2\nu^2k^2k'^2K > 2\nu\sqrt{\sigma}k^2k'^2K. \quad (1.43)$$

Ainda,

$$3\sigma E = 3\sigma(k^2+k'^2)E = 3\sigma k^2E + 3\sigma k'^2E. \quad (1.44)$$

Novamente, usando o fato de K ser estritamente crescente, temos

$$K' > 0 \Rightarrow \frac{E-k'^2K}{kk'^2} > 0 \Rightarrow E-k'^2K > 0 \Rightarrow E > k'^2K \quad (1.45)$$

e, portanto, multiplicando ambos os lados de (1.45) por $3\sigma k^2$, segue que

$$3\sigma k^2E > 3\sigma k^2k'^2K. \quad (1.46)$$

Dessa forma, segue de (1.41) que

$$\begin{aligned} & E(6\sigma + 2\nu^2) > 2\nu\sqrt{\sigma}k^2k'^2K + \nu^2k'^2(1+k'^2)E + \nu^2k^2E + 6\sigma E, \text{ por (1.43)} \\ & = 2\nu\sqrt{\sigma}k^2k'^2K + \nu^2k'^2(1+k'^2)E + \nu^2k^2E + 3\sigma E + 3\sigma k^2E + 3\sigma k'^2E, \text{ por (1.44)} \\ & > (2\nu\sqrt{\sigma} + 3\sigma)k^2k'^2K + \nu^2k'^2(1+k'^2)E + \nu^2k^2E + 3\sigma(1+k'^2)E, \text{ por (1.46)} \\ & > (2\nu\sqrt{\sigma} + 3\sigma)k^2k'^2K + \nu^2k'^2(1+k'^2)E + \nu^2k^2E + 6\sigma k'^2K, \text{ por (1.42)}. \end{aligned}$$

Por fim, do que foi visto acima, para verificar (1.40) resta apenas mostrar que

$$\nu^2k'^2(1+k'^2)E + \nu^2k^2E > Kk'^2\nu^2 + Kk'^4\nu^2.$$

Agora, de (1.42), tem-se

$$\nu^2k'^2(1+k'^2)E > 2\nu^2k'^4K$$

e, assim,

$$\begin{aligned} & \nu^2k'^2(1+k'^2)E + \nu^2k^2E - Kk'^2\nu^2 - Kk'^4\nu^2 > 2\nu^2k'^4K + \nu^2k^2E - Kk'^2\nu^2 \\ & - Kk'^4\nu^2 = \nu^2k'^4K + \nu^2k^2E - Kk'^2\nu^2 = -\nu^2k'^2(1-k'^2)K + \nu^2k^2E \\ & = -\nu^2k'^2k^2K + \nu^2k^2E = \nu^2k^2(E - k'^2K) > 0, \text{ por (1.45)}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Logo, vale (1.40) e, portanto, $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} < 0$. Finalmente, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma única função suave Λ , definida em uma vizinhança $\mathcal{J}(c_0)$ de c_0 , tal que $\Psi(\Lambda(c), c) = L$, para todo $c \in \mathcal{J}(c_0)$. Então, obtemos (1.33) e isto completa a prova do teorema. \square

1.3.1 Propriedades monotônicas das aplicações $c \mapsto \Lambda(c)$ e $c \mapsto k(c)$

Vamos estudar algumas relações de crescimento e decrescimento das funções $\Lambda(c)$ e $k(c)$ definidas no Teorema 3. Inicialmente, demonstraremos um lema bastante técnico e que nos auxiliará neste propósito.

Lema 3. Para $c \in I_1 \doteq (0, \frac{b+1}{2} - \frac{\sqrt{2b(b+1)}}{4})$, tem-se

$$-3b + \sigma^{-\frac{1}{2}}[-3b^2(b+1)\alpha - 3b(5b+8)c + 6b(b+1)(b+2)] > 0 \quad (1.48)$$

e

$$-3b\sigma - \nu[-3b^2(b+1)\alpha - 3b(5b+8)c + 6b(b+1)(b+2)] < 0, \quad (1.49)$$

sendo $\nu \equiv \nu(\alpha, c) = -3bc - 3b(b+1)\alpha$ e $\sigma \equiv \sigma(\alpha, c) = -6b^2(b+1)c\alpha - 3b^2(b+1)^2\alpha^2 - 3b(5b+8)c^2 + 12b(b+1)(b+2)c$.

Demonstração. De fato, a primeira desigualdade no enunciado deste lema é possível desde que tenhamos $\rho \doteq -3b^2(b+1)\alpha - 3b(5b+8)c + 6b(b+1)(b+2) > 0$. Mas como $\alpha \in (A_0, B_0)$,

$$\begin{aligned} \rho &> -3b^2(b+1) \left(\frac{-bc - \sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c}}{b(b+1)} \right) - 3b(5b+8)c \\ &+ 6b(b+1)(b+2) \\ &= 3b\sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c} - 12b(b+2)c + 6b(b+1)(b+2) \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} &3b\sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c} - 12b(b+2)c + 6b(b+1)(b+2) > 0 \\ \Leftrightarrow &\sqrt{-b(b+2)c^2 + b(b+1)(b+2)c} > 4(b+2)c - 2(b+1)(b+2). \end{aligned}$$

É fácil ver que a desigualdade acima se verifica para $c \leq \frac{3}{2}$, o que também prova (1.49). Portanto, (1.48) é equivalente a

$$\begin{aligned} &\sigma < [(5b+8)c + b(b+1)\alpha - 2(b+1)(b+2)]^2 \\ \Leftrightarrow &\sigma < [(5b+8)c + b(b+1)\alpha]^2 - 4(b+1)(b+2)[(5b+8)c + b(b+1)\alpha] \\ &+ 4(b+1)^2(b+2)^2 \\ \Leftrightarrow &\sigma < (5b+8)^2c^2 + 2b(b+1)(5b+8)c\alpha + b^2(b+1)^2\alpha^2 \\ &- 4(b+1)(b+2)(5b+8)c - 4b(b+1)^2(b+2)\alpha + 4(b+1)^2(b+2)^2 \\ \Leftrightarrow &0 < b^2(b+1)\alpha^2 + [4b(b+1)c - b(b+1)(b+2)]\alpha + [2(5b+8)c^2 \\ &- 8(b+1)(b+2)c + (b+1)(b+2)^2], \end{aligned}$$

que é uma equação do segundo grau na variável α cujo discriminante da fórmula de

Bháskara $\Delta_3 < 0$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
& [4b(b+1)c - b(b+1)(b+2)]^2 - 4b^2(b+1)[2(5b+8)c^2 - 8(b+1)(b+2)c \\
& + (b+1)(b+2)^2] < 0 \\
\Leftrightarrow & -24(b+2)c^2 + 24(b+1)(b+2)c - 3(b+1)(b+2)^2 < 0 \\
\Leftrightarrow & 8c^2 - 8(b+1)c + (b+1)(b+2) > 0,
\end{aligned}$$

que se verifica para $c \in I_1$, concluindo a demonstração. \square

Corolário 1. *Considere a aplicação $\Lambda : \mathcal{J}(c_0) \rightarrow J(\alpha_{0,0})$ determinada pelo Teorema 3. Então Λ é uma função estritamente decrescente em $I_1 \cap \mathcal{J}(c_0)$, sendo $I_1 = (0, \frac{b+1}{2} - \frac{\sqrt{2b(b+1)}}{4})$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3, temos $\Psi(\Lambda(c), c) = L$ para todo $c \in \mathcal{J}(c_0)$ e, então, pelo Teorema da Função Implícita,

$$\frac{d\Lambda}{dc}(c) = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial c}}{\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}}. \quad (1.50)$$

Pela demonstração do Teorema 3 já sabemos que $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} < 0$, então basta mostrar que $\frac{\partial \Psi}{\partial c} < 0$ em $I_1 \cap \mathcal{J}(c_0)$. Para tal, considere $\nu \equiv \nu(c) = -3bc - 3b(b+1)\alpha$ e $\sigma \equiv \sigma(c) = -6b^2(b+1)c\alpha - 3b^2(b+1)^2\alpha^2 - 3b(5b+8)c^2 + 12b(b+1)(b+2)c$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{\sqrt{\nu(c) + \sqrt{\sigma(c)}}} K(k(\alpha, c)) \right) \\
&= K \frac{d}{dc} \left(\frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{\sqrt{\nu(c) + \sqrt{\sigma(c)}}} \right) + \left(\frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{\sqrt{\nu + \sqrt{\sigma}}} \right) \frac{\partial K}{\partial c}(k(\alpha, c)) \\
&= 4\sqrt{3b(b+2)}K \frac{d}{dc} \left(\frac{1}{\sqrt{\nu(c) + \sqrt{\sigma(c)}}} \right) + \frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{\sqrt{\nu + \sqrt{\sigma}}} \frac{dK}{dk} \frac{\partial k}{\partial c}.
\end{aligned}$$

Fazendo $u(c) = \nu(c) + \sqrt{\sigma(c)}$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dc} &= \frac{d}{dc}(\nu(c)) + \frac{d}{dc}(\sqrt{\sigma(c)}) = \frac{d}{dc}(\nu(c)) + \frac{1}{2\sqrt{\sigma}} \frac{d}{dc}(\sigma(c)) \\
&= -3b + \frac{1}{2\sqrt{\sigma}} [-6b^2(b+1)\alpha - 6b(5b+8)c + 12b(b+1)(b+2)] \\
&= -3b + \sigma^{-\frac{1}{2}}\rho,
\end{aligned} \quad (1.51)$$

sendo $\rho \equiv \rho(\alpha, c) = -3b^2(b+1)\alpha - 3b(5b+8)c + 6b(b+1)(b+2)$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial c} &= 4\sqrt{3b(b+2)}K \frac{d}{dc} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right) + \frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{\sqrt{u}} \left(\frac{dK}{dk} \frac{\partial k}{\partial c} \right) \\
&= 4\sqrt{3b(b+2)}K \frac{d}{du} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right) \frac{du}{dc} + \frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{\sqrt{u}} \left(\frac{\partial K}{\partial k} \frac{dk}{dc} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\sqrt{3b(b+2)}K\left(-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}\right)[-3b + \sigma^{-\frac{1}{2}}\rho] + \frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{\sqrt{u}}\left(\frac{dK}{dk}\frac{\partial k}{\partial c}\right) \\
&= \frac{-2\sqrt{3b(b+2)}K[-3b + \sigma^{-\frac{1}{2}}\rho]}{u^{\frac{3}{2}}} + \frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{\sqrt{u}}\left(\frac{dK}{dk}\frac{\partial k}{\partial c}\right).
\end{aligned}$$

Voltando as variáveis iniciais, vemos que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial c} = \frac{-2\sqrt{3b(b+2)}K[-3b + \sigma^{-\frac{1}{2}}\rho]}{(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{3}{2}}} + \frac{4\sqrt{3b(b+2)}}{(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dK}{dk}\frac{\partial k}{\partial c}\right). \quad (1.52)$$

Agora, aplicando a regra do quociente para derivar $k^2(\alpha, c)$ com relação a c e usando (1.51), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k^2}{\partial c}(\alpha, c) &= \frac{d}{dc}\left(\frac{\nu(c) - \sqrt{\sigma(c)}}{\nu(c) + \sqrt{\sigma(c)}}\right) = \frac{(\nu + \sqrt{\sigma})[-3b - \sigma^{-\frac{1}{2}}\rho] - (\nu - \sqrt{\sigma})[-3b + \sigma^{-\frac{1}{2}}\rho]}{(\nu + \sqrt{\sigma})^2} \\
&= \frac{-3b(\nu + \sqrt{\sigma}) - (\nu + \sqrt{\sigma})\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho + 3b(\nu - \sqrt{\sigma}) - (\nu - \sqrt{\sigma})\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho}{(\nu + \sqrt{\sigma})^2} \\
&= \frac{-6b\sqrt{\sigma} - 2\nu\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho}{(\nu + \sqrt{\sigma})^2}.
\end{aligned}$$

Mas, pela regra da cadeia para derivadas,

$$\frac{\partial k^2}{\partial c} = 2k\frac{\partial k}{\partial c} \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial c} = \frac{1}{2k}\frac{\partial k^2}{\partial c},$$

então,

$$\frac{\partial k}{\partial c} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{-6b\sqrt{\sigma} - 2\nu\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho}{(\nu + \sqrt{\sigma})^2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{-3b\sigma - \nu\rho}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^2}. \quad (1.53)$$

Finalmente, basta estudar o sinal das expressões $-3b\sigma - \nu\rho$ e $-3b + \sigma^{-\frac{1}{2}}\rho$ em (1.52), a partir do Lema 3, para concluir este resultado. \square

Agora, vamos provar que a função módulo $k(c)$ é estritamente crescente.

Proposição 1. *Considere $c \in (0, \frac{(b+1)(b+2)}{5b+2})$ tal que $[c^2 - (b+1)c] < -\frac{4\pi^4 b(b+2)}{L^4}$, $\alpha_0 = \Lambda(c)$ e a função módulo*

$$k(c) \equiv k(\Lambda(c), c) = \sqrt{\frac{\nu(c) - \sqrt{\sigma(c)}}{\nu(c) + \sqrt{\sigma(c)}}}, \quad (1.54)$$

sendo $\nu \equiv \nu(c) = -3bc - 3b(b+1)\Lambda(c)$ e $\sigma \equiv \sigma(c) = -6b^2(b+1)c\Lambda(c) - 3b^2(b+1)^2[\Lambda(c)]^2 - 3b(5b+8)c^2 + 12b(b+1)(b+2)c$. Então, $\frac{d}{dc}k(c) > 0$.

Demonstração. Note que,

$$\frac{dk}{dc} = \alpha'_0(c)\frac{\partial k}{\partial \alpha_0} + \frac{\partial k}{\partial c}.$$

Mas pelo que vimos em (1.37) e (1.53),

$$\frac{\partial k}{\partial \alpha_0} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{-6b(b+1)\sigma - 2b(b+1)\nu^2}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^2}$$

e

$$\frac{\partial k}{\partial c} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{-6b\sqrt{\sigma} - 2\nu\sigma^{-\frac{1}{2}}[-3b^2(b+1)\alpha_0 - 3b(5b+8)c + 6b(b+1)(b+2)]}{(\nu + \sqrt{\sigma})^2}.$$

Além disso, denotando $\rho \equiv \rho(\alpha, c) \doteq -3b^2(b+1)\alpha_0 - 3b(5b+8)c + 6b(b+1)(b+2)$, temos que, pelo Corolário 1 e as equações (1.38), (1.52) e (1.53),

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda(c)}{dc} &= -\frac{\partial\Psi}{\partial c} \Big/ \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} \\ &= -\left\{ \frac{-2\sqrt{3b(b+2)}K[-3b + \sigma^{-\frac{1}{2}}\rho]}{(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{3}{2}}} + 4\sqrt{3b(b+2)} \left(\frac{dK}{dk} \right) \left[\frac{1}{2k} \cdot \frac{-6b\sqrt{\sigma} - 2\nu\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho}{(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{5}{2}}} \right] \right\} \\ &\cdot \left\{ \frac{2\sqrt{3b(b+2)}K[3b(b+1)\sqrt{\sigma} - b(b+1)\nu]}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\left. - 2\sqrt{3b(b+2)} \left(\frac{dK}{dk} \right) \left[\frac{6b(b+1)\sigma + 2b(b+1)\nu^2}{k\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{5}{2}}} \right] \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dc}(c) > 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial k}{\partial \alpha_0} \frac{d\Lambda(c)}{dc} > -\frac{\partial k}{\partial c} \Leftrightarrow \frac{1}{2k} \cdot \frac{-6b(b+1)\sigma - 2b(b+1)\nu^2}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^2} \\ &\cdot \left\{ \frac{-2\sqrt{3b(b+2)}K[-3b + \sigma^{-\frac{1}{2}}\rho]}{(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{3}{2}}} + 4\sqrt{3b(b+2)} \left(\frac{dK}{dk} \right) \left[\frac{1}{2k} \cdot \frac{-6b\sqrt{\sigma} - 2\nu\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho}{(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{5}{2}}} \right] \right\} \\ &> -\frac{1}{2k} \cdot \frac{-6b\sqrt{\sigma} - 2\nu\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho}{(\nu + \sqrt{\sigma})^2} \cdot \left\{ -\frac{2\sqrt{3b(b+2)}K[3b(b+1)\sqrt{\sigma} - b(b+1)\nu]}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &+ \left. 4\sqrt{3b(b+2)} \left(\frac{dK}{dk} \right) \left[\frac{1}{2k} \cdot \frac{6b(b+1)\sigma + 2b(b+1)\nu^2}{\sqrt{\sigma}(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{5}{2}}} \right] \right\} \\ &\Leftrightarrow [-6b(b+1)\sigma - 2b(b+1)\nu^2] \cdot \left\{ \frac{-2\sqrt{3b(b+2)}K[-3b + \sigma^{-\frac{1}{2}}\rho]}{(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &+ \left. 4\sqrt{3b(b+2)} \left(\frac{dK}{dk} \right) \left[\frac{1}{2k} \cdot \frac{-6b\sqrt{\sigma} - 2\nu\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho}{(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{5}{2}}} \right] \right\} \\ &> [-6b\sqrt{\sigma} - 2\nu\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho] \cdot \left\{ \frac{2\sqrt{3b(b+2)}K[3b(b+1)\sqrt{\sigma} - b(b+1)\nu]}{(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &+ \left. 4\sqrt{3b(b+2)} \left(\frac{dK}{dk} \right) \left[\frac{1}{2k} \cdot \frac{-6b(b+1)\sigma - 2b(b+1)\nu^2}{(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{5}{2}}} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow [-6b(b+1)\sigma - 2b(b+1)\nu^2] \cdot \left\{ \frac{-2\sqrt{3b(b+2)}K[-3b + \sigma^{-\frac{1}{2}}\rho]}{(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
&> [-6b\sqrt{\sigma} - 2\nu\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho] \cdot \left\{ \frac{2\sqrt{3b(b+2)}K[3b(b+1)\sqrt{\sigma} - b(b+1)\nu]}{(\nu + \sqrt{\sigma})^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
&\Leftrightarrow [-6b(b+1)\sigma - 2b(b+1)\nu^2] \cdot [3b - \sigma^{-\frac{1}{2}}\rho] \\
&> [-6b\sqrt{\sigma} - 2\nu\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho] \cdot [3b(b+1)\sqrt{\sigma} - b(b+1)\nu] \\
&\Leftrightarrow -18b^2(b+1)\sigma + 6b(b+1)\sigma^{\frac{1}{2}}\rho - 6b^2(b+1)\nu^2 + 2b(b+1)\nu^2\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho \\
&> -18b^2(b+1)\sigma + 6b^2(b+1)\nu\sigma^{\frac{1}{2}} - 6b(b+1)\nu\rho + 2b(b+1)\nu^2\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho \\
&\Leftrightarrow \sigma^{\frac{1}{2}}\rho - b\nu\sigma^{\frac{1}{2}} - b\nu^2 + \nu\rho > 0.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
-b\nu^2 + \nu\rho &= -\nu[\nu b + 3b^2(b+1)\alpha_0 + 3b(5b+8)c - 6b(b+1)(b+2)] \\
&= -\nu[\nu b + (3b^2(b+1)\Lambda(c) + 3b^2c) + 12b^2c + 24bc - 6b(b+1)(b+2)] \\
&= -\nu[12b(b+2)c - 6b(b+1)(b+2)],
\end{aligned}$$

e, do mesmo modo,

$$\sigma^{\frac{1}{2}}\rho - b\nu\sigma^{\frac{1}{2}} = -\sigma^{\frac{1}{2}}[\nu b - \rho] = -\sigma^{\frac{1}{2}}[12b(b+2)c - 6b(b+1)(b+2)].$$

Então, como $\nu > \sqrt{\sigma} > 0$, a desigualdade em (1.55) se verifica desde que tenhamos $12b(b+2)c - 6b(b+1)(b+2) < 0$, ou seja, $k(c)$ é estritamente crescente. \square

1.4 Soluções triviais

Nesta seção vamos buscar por soluções contantes $u(x, t) = \phi_c(\xi) \equiv \phi_{c,0}$ da equação (1) ou, mais especificamente, da equação (1.3). Para isso, vemos que tal equação é equivalente a

$$\phi_{c,0}^3 - \frac{3c}{b+1}\phi_{c,0} + \frac{3A_{\phi_{c,0}}}{b+1} = 0,$$

sendo $A_{\phi_{c,0}}$ uma constante de integração não nula.

Agora, considere $F_{\phi_{c,0}}(\phi_{c,0}) = \phi_{c,0}^3 + d_2\phi_{c,0}^2 + d_1\phi_{c,0} + d_0$, com $d_2 = 0$, $d_1 = -\frac{3c}{b+1}$ e $d_0 = \frac{3A_{\phi_{c,0}}}{b+1}$. Pela fórmula de Cardano-Tartaglia (Apêndice A.1), a equação reduzida $\phi_{c,0}^3 + p\phi_{c,0} + q = 0$, com

$$p = -\frac{d_1^2}{3} + d_1 = -\frac{3c}{b+1} \quad \text{e} \quad q = \frac{2d_2^3 - 9d_1d_2 + 27d_0}{27} = \frac{3A_{\phi_{c,0}}}{b+1},$$

possui uma solução real $\phi_{c,0}$ se

$$D_1 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0.$$

Portanto, resolvendo a desigualdade acima com relação a c , obtemos, também pela fórmula de Cardano-Tartaglia, uma família de soluções constantes

$$\phi_{c,0} = \sqrt[3]{-\frac{3A_{\phi_{c,0}}}{2(b+1)} + \sqrt{\frac{9A_{\phi_{c,0}}^2}{4(b+1)^2} - \frac{c^3}{(b+1)^3}}} + \sqrt[3]{-\frac{3A_{\phi_{c,0}}}{2(b+1)} - \sqrt{\frac{9A_{\phi_{c,0}}^2}{4(b+1)^2} - \frac{c^3}{(b+1)^3}}},$$

para $c < \sqrt[3]{\frac{9(b+1)A_{\phi_{c,0}}^2}{4}}$, com $b > 1$ real.

Instabilidade orbital das ondas viajantes periódicas suaves, com
média zero, da equação mCH

Neste capítulo, desenvolveremos a teoria de instabilidade das ondas viajantes periódicas (1.18) da equação mCH. O conceito de estabilidade, será interpretado no sentido de $H_{\text{per}}^1([0, L])$, isto é, para cada $\varepsilon > 0$ diremos que ϕ_c é estável se existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ para o qual sempre que $\inf_{r \in \mathbb{R}} \|u_0 - \phi_c(\cdot + r)\|_1 < \delta$, a solução $u(t)$ de mCH, com $u(0) = u_0$, satisfaz

$$\inf_{r \in \mathbb{R}} \|u(t) - \phi_c(\cdot + r)\|_1 < \varepsilon$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ para o qual existe $u(t)$. Caso contrário, ϕ_c será dita instável.

Estabelecemos a seguir as hipóteses necessárias para concluir a partir do método de Grillakis, Shatah e Strauss [21, 22], que ϕ_c é instável. Lembramos, que a equação mCH possui importantes quantidades conservadas no tempo, a saber, a energia, o momento e a média, explicitadas pelos funcionais E , F e V , definidos em (4).

Hipótese 1 (Existência de solução) Para cada $u_0 \in H_{\text{per}}^1([0, L])$ existe $T > 0$, T dependendo de $\|u_0\|_1$, tal que a equação mCH possui uma solução $u \in C([0, T], H_{\text{per}}^1([0, L]))$ com $u(0) = u_0$ e $E(u(t)) = E(u_0)$, $F(u(t)) = F(u_0)$ para todo $t \in [0, T]$.

Hipótese 2 (Existência de ondas viajantes periódicas) A equação mCH possui uma família de soluções ondas viajantes periódicas e, além disso, existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que, para cada $c \in (c_1, c_2)$, a aplicação $c \mapsto \phi_c$ é de classe C^1 e a função

$$d(c) = E(\phi_c) + cF(\phi_c) \tag{2.1}$$

é uma função côncava de c .

Hipótese 3 (Espectro do Hessiano) Para $c \in (c_1, c_2)$, o operador $\mathcal{H}_c \equiv (E'' + cF'')(\phi_c) = (\phi_c - c)\partial_\xi^2 + \phi_c'\partial_\xi + c - 3\phi_c^2 + \phi_c''$ possui núcleo gerado por ϕ_c' e um espectro constituído por um conjunto discreto de autovalores sequencialmente ordenados de forma crescente, sendo os três primeiros autovalores simples e apenas um deles negativo.

A Hipótese 1, sobre existência de solução da equação mCH, já encontra-se verificada por Hakkaev, Iliev e Kirchev em [23] via teoria de Kato [24]. A seguir, enunciamos o resultado que prova tal hipótese.

Teorema 4. *Seja $L > 0$ uma constante arbitrária, mas fixa. Dado $u_0 \in H^s([0, L])$, $s > \frac{3}{2}$, existe $t_0 > 0$ maximal e uma única solução $u(x, t)$ da equação mCH tal que*

$$u \in C([0, t_0], H^s([0, L])) \cap C^1([0, t_0], H^{s-1}([0, L])).$$

Além disso, a solução depende continuamente do valor inicial u_0 .

A partir deste momento, utilizaremos $b = 2$ sempre que for mencionada qualquer equação, inequação ou resultado do Capítulo 1, pois estamos interessados na instabilidade orbital para a solução onda snoidal da equação mCH, obtida para este valor de b na equação (1). Além disso, suporemos $\int_0^L \phi_c dx = 0$.

2.1 Estrutura hamiltoniana

Para $u(t) \in H_{\text{per}}^1([0, L])$, com $t \geq 0$, definamos o funcional

$$E(u) = - \int_0^L \frac{u^4}{4} + \frac{uu_x^2}{2} dx.$$

Então é fácil verificar que a equação mCH é formalmente equivalente a equação hamiltoniana

$$u_t = JE'(u), \tag{2.2}$$

com $J = \partial_x(1 - \partial_x^2)^{-1}$ um operador hamiltoniano antissimétrico e E' denotando a derivada de Gâteaux do funcional E calculada em relação ao produto interno de $L_{\text{per}}^2([0, L])$. Isto é, se E é um funcional definido em $H_{\text{per}}^1([0, L])$, então $E' \in H_{\text{per}}^{-1}([0, L])$ e satisfaz para $v \in H_{\text{per}}^1([0, L])$ a relação

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} E(u + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} = \langle v, E'(u) \rangle_1.$$

Em nosso caso, verificamos que $E'(u) = -u^3 + \frac{u_x^2}{2} + uu_{xx}$. Analogamente, podemos verificar que para o funcional

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 + u_x^2 dx$$

temos $F'(u) = u - u_{xx}$ e, portando, podemos escrever

$$u_t = J_2 F'(u),$$

com $J_2 = -(1 - \partial_x^2)^{-1} [\partial_x (\frac{u^2}{2} - u_{xx}) + 2(u^2 - u_{xx}) \partial_x] (1 - \partial_x^2)$ um operador linear hamiltoniano. Em particular, isso significa que a equação mCH possui duas estruturas hamiltonianas.

Observemos que a equação mCH é invariante por translações em x , ou seja, se $u(x, t)$ é uma solução, então também o é $u(x + s, t)$ para $s \in \mathbb{R}$. O mesmo ocorre aos funcionais E e F , ou seja, $E(\tau_s u) = E(u)$ e $F(\tau_s u) = F(u)$ sendo τ_s o operador translação $\tau_s u = u(\cdot + s)$. Além disso, E e F são funcionais contínuos e suaves em $H_{\text{per}}^1([0, L])$ que satisfazem a equação (6).

Para a conveniência do leitor, apresentamos o lema abaixo.

Lema 4. *Os funcionais $E(u)$, $F(u)$ e $V(u)$ definidos em (4) são quantidades conservadas no tempo para a equação mCH.*

Demonstração. Inicialmente, de (mCH) temos que

$$\frac{d}{dt} V(u) = \int_0^L u_t \, dx = \int_0^L uu_{xxx} \, dx = \int_0^L (uu_{xx})_x - u_x u_{xx} \, dx = 0.$$

Agora, multiplicando a equação mCH por u e integrando sobre o compacto $[0, L]$ obtemos

$$\frac{d}{dt} F(u) = \int_0^L uu_t + u_x u_{xt} \, dx = \int_0^L uu_t - uu_{xxt} \, dx = 0.$$

Para mostrar que $E(u)$ é invariante no tempo, vamos usar a formulação hamiltoniana (2.2). Note que

$$\frac{d}{dt} E(u(t)) = \langle E', u_t \rangle = \langle E'(u), JE'(u) \rangle = -\langle JE', E'(u) \rangle.$$

Assim, como J é um operador antissimétrico, segue a invariância de $E(u)$. \square

Observação 5. Cabe ressaltar que aplicar o método de Grillakis, Shatah e Strauss [21] diretamente ao problemas (2.2) requer certa sutileza. A principal razão emerge do fato que J_1 não é um operador sobrejetor ou, menos ainda, bijetor. Em [21], de acordo com os próprios autores, não é necessário J_1 ser sobrejetor, sendo suficiente que a solução onda viajante periódica ϕ_c pertença a sua imagem. Já para contornar a dificuldade de J_1 não ser bijetor em [22], Deconinck e Kapitula [14] consideraram equações gerais da forma

$$u_t = JE'(u), \quad u(0) = u_0$$

em um espaço de Hilbert X , sendo $J : X \rightarrow \text{range}(J) \subset X$ antissimétrico e $\mathcal{E} : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^2 , restritas ao seguinte subespaço fechado de média zero,

$$\mathbb{V} = \left\{ f \in L^2([0, L]) / [f] = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \, dx = 0 \right\},$$

o que para o nosso estudo faz todo o sentido, já que estamos considerando ondas viajantes periódicas ϕ_c com média zero.

2.2 Soluções ondas viajantes periódicas suaves, com média zero, da equação mCH

Com base no estudo da equação (1), apresentado no Capítulo 1, obtemos que uma família de soluções ondas viajantes periódicas da equação mCH

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} + 2u_x u_{xx} - 3u^2 u_x$$

é dada pela chamada onda snoidal

$$\phi_c(\xi) = \phi_c(\xi; \alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = \alpha_0 + (\beta_0 - \alpha_0) \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{\frac{(\gamma_0 - \alpha_0)}{8}} \xi, k \right), \quad (2.3)$$

com $\alpha_0 < \beta_0 < \gamma_0$ raízes do polinômio $F_{\phi_c}(\phi_c) = \phi_c^3 + c\phi_c^2 + (c^2 - 2c)\phi_c + c^3 - 2c^2 + 4A_{\phi_c}$, A_{ϕ_c} uma constante de integração,

$$\beta_0 = \frac{-c - \alpha_0 - \sqrt{\sigma(\alpha_0, c)}}{2} \quad \text{e} \quad \gamma_0 = \frac{-c - \alpha_0 + \sqrt{\sigma(\alpha_0, c)}}{2}, \quad (2.4)$$

para $c \in (0, 1)$ e $\alpha_0 \in (A_0, B_0)$, sendo

$$A_0 = \frac{-c - 2\sqrt{-2c^2 + 6c}}{3}, \quad B_0 = \frac{-c - \sqrt{-2c^2 + 6c}}{3}$$

e $\sigma(\alpha_0, c) \doteq -2c\alpha_0 - 3\alpha_0^2 - 3c^2 + 8c$.

O período fundamental T_{ϕ_c} da onda snoidal (2.3) é igual a

$$T_{\phi_c} \equiv \frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{\gamma_0 - \alpha_0}} K(k), \quad (2.5)$$

com

$$k^2 \equiv \frac{-c - 3\alpha_0 - \sqrt{\sigma(\alpha_0, c)}}{-c - 3\alpha_0 + \sqrt{\sigma(\alpha_0, c)}}, \quad (2.6)$$

pois sn^2 tem período fundamental igual a $2K(k)$, sendo $K(k)$ a integral elíptica completa definida em (A.7). Além disso, o período fundamental da onda snoidal (2.3) satisfaz a seguinte desigualdade

$$T_{\phi_c}^2 > \frac{8\pi^2}{\sqrt{-2c^2 + 6c}}. \quad (2.7)$$

2.3 Existência de uma curva suave de soluções ondas snoidais L -periódicas, com média zero, da equação mCH, parametrizada pela velocidade de propagação das ondas c

Sejam $L > \sqrt[4]{\frac{128}{9}}\pi$ arbitrário mas fixo e $c \in (0, 1)$ tais que $[c^2 - 3c] < -\frac{32\pi^4}{L^4}$. Da demonstração do Teorema 5 abaixo, concluiremos que a aplicação $\alpha_0 \in (A_0, B_0) \mapsto T_{\phi_c}(\alpha_0)$ é estritamente decrescente e, então, existe um único $\alpha_0 \equiv \alpha_0(c) \in (A_0(c), B_0(c))$ para o qual o período fundamental da onda snoidal $\phi_c(\cdot, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ definida em (2.3), será $T_{\phi_c}(\alpha_0(c)) = L$. Neste caso o módulo $k(\alpha_0, c)$ pode ser escrito como uma função de c , já que por (2.6),

$$k^2(c) = \frac{-c - 3\alpha_0 - \sqrt{\sigma(\alpha_0, c)}}{-c - 3\alpha_0 + \sqrt{\sigma(\alpha_0, c)}}, \quad (2.8)$$

com $\sigma(\alpha_0, c) \doteq -2c\alpha_0 - 3\alpha_0^2 - 3c^2 + 8c$ e $\alpha_0 = \alpha_0(c)$. Mostraremos agora que pelo menos localmente a escolha de α_0 depende suavemente de c .

Teorema 5. *Seja $L > \sqrt[4]{\frac{128}{9}}\pi$ uma constante arbitrária fixada. Considere $c_0 \in (0, 1)$ tal que $[c_0^2 - 3c_0] < -\frac{32\pi^4}{L^4}$ e $\alpha_{0,0} \equiv \alpha_0(c_0) \in (A_0, B_0)$ tais que $T_{\phi_{c_0}} = L$. Então, valem as seguintes afirmações:*

(a) *Existem um intervalo $\mathcal{J}(c_0)$ centrado em c_0 , um intervalo $J(\alpha_{0,0})$ centrado em $\alpha_0(c_0)$ e uma única função suave $\Lambda : \mathcal{J}(c_0) \rightarrow J(\alpha_{0,0})$ tal que $\Lambda(c_0) = \alpha_{0,0}$ e*

$$\frac{8K(k(\alpha_0), c)}{\sqrt{-c - 3\alpha_0 + \sqrt{\sigma(\alpha_0, c)}}} = L \quad (2.9)$$

sendo $\sigma(\alpha_0, c) \doteq -2c\alpha_0 - 3\alpha_0^2 - 3c^2 + 8c$, $c \in \mathcal{J}(c_0)$, $\alpha_0 = \Lambda(c)$ e $k^2 \equiv k^2(c) \in (0, 1)$ definido em (2.8).

(b) *A solução onda snoidal dada por (2.3), $\phi_c(\cdot; \alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, determinada por $\alpha_0 \equiv \alpha_0(c)$, $\beta_0 \equiv \beta_0(c)$ e $\gamma_0 \equiv \gamma_0(c)$, tem período fundamental L e satisfaz a equação (5). Além disso, a aplicação*

$$c \in \mathcal{J}(c_0) \rightarrow \phi_c \in H_{per}^1([0, L])$$

é uma função suave.

Demonstração. Veja a demonstração do Teorema 3 com $b = 2$. □

Agora, vamos provar que a função módulo $k(c)$ é estritamente crescente.

Proposição 2. *Considere $c \in (0, 1)$ tal que $[c^2 - 3c] < -\frac{32\pi^4}{L^4}$, $\alpha_0 = \Lambda(c)$ e a função módulo*

$$k(c) \equiv k(\Lambda(c), c) = \sqrt{\frac{\nu(c) - \sqrt{\sigma(c)}}{\nu(c) + \sqrt{\sigma(c)}}}, \quad (2.10)$$

sendo $\nu \equiv \nu(c) = -c - 3\Lambda(c)$ e $\sigma \equiv \sigma(c) = -2c\Lambda(c) - 3[\Lambda(c)]^2 - 3c^2 + 8c$. Então, $\frac{d}{dc}k(c) > 0$.

Demonstração. Veja a demonstração da Proposição 1 com $b = 2$. □

Observação 6. A condição de ϕ_c ter média zero é expressa exatamente por

$$\alpha_0 + (\beta_0 - \alpha_0) \frac{(K - E)}{k^2 K} = 0, \quad (2.11)$$

já que

$$0 = \int_0^L \phi_c d\xi = \alpha_0 L + \frac{\sqrt{8}(\beta_0 - \alpha_0)}{\sqrt{\gamma_0 - \alpha_0}} \int_0^{2K} \text{sn}^2 u du$$

e valem as equações (2.9) e (2.10) juntamente com (2.20) que veremos mais adiante.

Note que parte da Hipótese 2 exigida para a instabilidade orbital da onda snoidal (2.3), segue do Teorema 5. O restante desta mesma hipótese, o qual diz respeito à concavidade da função $d(c)$ definida em (2.1), será abordado na próxima seção.

2.4 Concavidade da função $d(c)$

Pelo Teorema 5, para cada $c \in (0, 1)$ satisfazendo $[c^2 - 3c] < -\frac{32\pi^4}{L^4}$ para $L > \sqrt[4]{\frac{128}{9}}\pi$, a aplicação $c \mapsto \phi_c \in H_{\text{per}}^1([0, L])$ é de classe C^1 . Assim, como ϕ_c possui média zero, segue de (2.1) que

$$d'(c) = \left\langle E'(\phi_c) + cF'(\phi_c), \frac{d}{dc}\phi_c \right\rangle_1 + F(\phi_c) = F(\phi_c). \quad (2.12)$$

Proposição 3. *Seja L uma constante arbitrária mas fixa, suficientemente grande, e considere $u(x, t) = \phi_c(x - ct)$, com $c \in (0, 1)$ tal que $[c^2 - 3c] < -\frac{32\pi^4}{L^4}$, a solução onda snoidal, com média zero, da equação mCH. Então, existe $k_1 \in (0, 1)$ tal que,*

$$c \equiv c(k) = \frac{3L^2 - \sqrt{9L^4 - 512[(1 + k^2)^2 + 3(1 - k^2)^2]K^4}}{2L^2}, \quad \forall k \in (0, k_1), \quad (2.13)$$

e $d(c)$ é uma função côncava.

Demonstração. A ideia para demonstrar esse resultado é mostrar que a derivada de segunda ordem com relação a variável c da função $d(c)$ é estritamente negativa.

Inicialmente, das equações (2.9) e (2.10), vemos que $\nu + \sqrt{\sigma} = \frac{64K^2}{L^2}$ e $\nu - \sqrt{\sigma} = \frac{64k^2K^2}{L^2}$, sendo $\nu \equiv \nu(\alpha_0, c) \doteq -c - 3\alpha_0$ e $\sigma \equiv \sigma(\alpha_0, c) \doteq -2c\alpha_0 - 3\alpha_0^2 - 3c^2 + 8c$. Então, obtemos

$$\nu = \frac{32(1 + k^2)K^2}{L^2} \quad \text{and} \quad \sqrt{\sigma} = \frac{32(1 - k^2)K^2}{L^2} \quad (2.14)$$

e, portanto, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} -c - 3\alpha_0 = \frac{32(1+k^2)K^2}{L^2} \\ -2c\alpha_0 - 3\alpha_0^2 - 3c^2 + 8c = \frac{32^2(1-k^2)^2K^4}{L^4}, \end{cases}$$

podemos escrever

$$c = c(k) = \frac{3L^2 - \sqrt{9L^4 - 512[(1+k^2)^2 + 3(1-k^2)^2]K^4}}{2L^2} \quad (2.15)$$

e

$$\alpha_0 = \alpha_0(k) = \frac{-3L^2 - 64(1+k^2)K^2 + \sqrt{9L^4 - 512[(1+k^2)^2 + 3(1-k^2)^2]K^4}}{6L^2}.$$

Agora, a equação (1.9) é dada por

$$(\phi'_c)^2 - \frac{1}{2}[\phi_c^3 + c\phi_c^2 + (c^2 - 2c)\phi_c + C_1] = 0,$$

sendo $C_1 = 2(2A_{\phi_c} - c^2) + c^3$, então, lembrando que ϕ_c possui média zero e usando a equação (2.12), segue que

$$d''(c) = \frac{d}{dc}F(\phi_c) = \frac{d}{dc} \left[\frac{1}{4} \int_0^L \phi_c^3 + (2+c)\phi_c^2 + 2(2A_{\phi_c} - c^2) + c^3 d\xi \right]. \quad (2.16)$$

Note que

$$\frac{d}{dc} \left(\frac{1}{4} \int_0^L 2(2A_{\phi_c} - c^2) + c^3 d\xi \right) = \frac{d}{dc} \left(\frac{L}{4} [2(2A_{\phi_c} - c^2) + c^3] \right) = \frac{L}{4} [3c^2 - 4c]$$

e, ainda,

$$\frac{d}{dc} \left(\frac{1}{4} \int_0^L \phi_c^3 + (2+c)\phi_c^2 d\xi \right) = \frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c^3 d\xi \right) + (2+c) \frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c^2 d\xi \right) + \int_0^L \phi_c^2 d\xi.$$

Portanto, para provar este lema, é suficiente mostrar que

$$\frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c^3 d\xi \right) + (2+c) \frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c^2 d\xi \right) < 0 \quad \text{e} \quad \frac{L}{4} [3c^2 - 4c] + \int_0^L \phi_c^2 d\xi < 0. \quad (2.17)$$

Para isso, vamos primeiramente determinar as integrais de ϕ_c^2 e ϕ_c^3 com relação a variável ξ .

Utilizando a solução explícita (2.3) da equação mCH temos

$$\phi_c^2 = \alpha_0^2 + 2\alpha_0(\beta_0 - \alpha_0)\text{sn}^2 \left(\sqrt{\frac{\gamma_0 - \alpha_0}{8}} \xi \right) + (\beta_0 - \alpha_0)^2 \text{sn}^4 \left(\sqrt{\frac{\gamma_0 - \alpha_0}{8}} \xi \right) \quad (2.18)$$

e

$$\begin{aligned}\phi_c^3 &= \alpha_0^3 + 3\alpha_0^2(\beta_0 - \alpha_0)\text{sn}^2\left(\sqrt{\frac{\gamma_0 - \alpha_0}{8}}\xi\right) + 3\alpha_0(\beta_0 - \alpha_0)^2\text{sn}^4\left(\sqrt{\frac{\gamma_0 - \alpha_0}{8}}\xi\right) \\ &+ (\beta_0 - \alpha_0)^3\text{sn}^6\left(\sqrt{\frac{\gamma_0 - \alpha_0}{8}}\xi\right).\end{aligned}\quad (2.19)$$

Fazendo a mudança de variável $u = \sqrt{\frac{\gamma_0 - \alpha_0}{8}}\xi$ e usando a equação (2.9), segue que

$$\int_0^L \phi_c^2 = \alpha_0^2 L + \frac{2\sqrt{8}\alpha_0(\beta_0 - \alpha_0)}{\sqrt{\gamma_0 - \alpha_0}} \int_0^{2K} \text{sn}^2 u \, du + \frac{\sqrt{8}(\beta_0 - \alpha_0)^2}{\sqrt{\gamma_0 - \alpha_0}} \int_0^{2K} \text{sn}^4 u \, du$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^L \phi_c^3 \, d\xi &= \alpha_0^3 L + \frac{3\sqrt{8}\alpha_0^2(\beta_0 - \alpha_0)}{\sqrt{\gamma_0 - \alpha_0}} \int_0^{2K} \text{sn}^2 u \, du + \frac{3\sqrt{8}\alpha_0(\beta_0 - \alpha_0)^2}{\sqrt{\gamma_0 - \alpha_0}} \int_0^{2K} \text{sn}^4 u \, du \\ &+ \frac{\sqrt{8}(\beta_0 - \alpha_0)^3}{\sqrt{\gamma_0 - \alpha_0}} \int_0^{2K} \text{sn}^6 u \, du.\end{aligned}$$

Então, como $\text{sn}^2 + \text{cn}^2 = 1$, escrevendo

$$\begin{aligned}\text{sn}^2 u &= 1 - \text{cn}^2 u, \\ \text{sn}^4 u &= 1 - 2\text{cn}^2 u + \text{cn}^4 u, \\ \text{sn}^6 u &= 1 - 3\text{cn}^2 u + 3\text{cn}^4 u - \text{cn}^6 u\end{aligned}$$

e usando as fórmulas 310.02, 312.02, 312.04 e 312.05 presentes em [1] e [9], juntamente com a periodicidade das funções sn^2 , sn^4 e sn^6 , obtemos

$$\int_0^{2K} \text{sn}^2 u \, du = 2 \int_0^K \text{sn}^2 u \, du = \frac{2(K - E)}{k^2}, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2K} \text{sn}^4 u \, du &= 2 \int_0^K (1 - 2\text{cn}^2 u + \text{cn}^4 u) \, du \\ &= 2K - 4 \left[\frac{E - k'^2 K}{k^2} \right] + 2 \left[\frac{(2 - 3k^2)(1 - k^2)K + 2(2k^2 - 1)E}{3k^4} \right] \\ &= \frac{6k^4 K - 12k^2 E + 12k^2(1 - k^2)K + 2(2 - 3k^2)(1 - k^2)K + 4(2k^2 - 1)E}{3k^4} \\ &= \frac{2k^2 K - 4k^2 E + 4K - 4E}{3k^4}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2K} sn^6 u \, du = 2 \int_0^K 1 - 3cn^2 u + 3cn^4 u - cn^6 u \, du \\
& = 2K - 6 \left[\frac{E - k'^2 K}{k^2} \right] + 6 \left[\frac{(2 - 3k^2)(1 - k^2)K + 2(2k^2 - 1)E}{3k^4} \right] \\
& - \frac{2}{5k^2} \left[4(2k^2 - 1) \int_0^K sn^4 u \, du + 3(1 - k^2) \int_0^K sn^2 u \, du \right] \\
& = \frac{6k^4 K + 6k^2 E + 12K - 12k^2 K - 12E}{3k^4} + \frac{-16k^4 K + 8k^2 K + 32k^4 E - 16k^2 E}{15k^6} \\
& + \frac{-32k^2 K + 16K + 32k^2 E - 16E}{15k^6} + \frac{-6K + 6k^2 K + 6E - 6k^2 E}{15k^6} \\
& = \frac{30k^6 K - 58k^4 K - 18k^2 K + 16K - 48k^4 E - 26k^2 E - 16E}{15k^6}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, fazendo uso das equações (2.11) e (2.14) em (2.18) e (2.19), obtemos que

$$\int_0^L \phi_c^2 \, d\xi = -\frac{1024K^2}{L^3}(K^2 - 2KE + E^2) + \frac{1024K^3}{3L^3}(k^2 K - 2k^2 E + 2K - 2E) \quad (2.21)$$

e

$$\begin{aligned}
\int_0^L \phi_c^3 \, d\xi & = -\frac{32768K^3}{L^5}(K^3 - 3K^2 E + 3KE^2 - E^3) \\
& + \frac{98304K^3}{L^5}(K^3 - 3K^2 E + 2KE^2 + KE - E^2) \quad (2.22) \\
& - \frac{16384K^4}{L^5}(2k^2 K^2 - 6k^2 KE - 8KE + 4k^2 E^2 + 4E^2 + 4K^2) \\
& + \frac{16384K^5}{15L^5}(30k^6 K - 58k^4 K - 18k^2 K + 16K - 48k^4 E - 26k^2 E - 16E).
\end{aligned}$$

Derivando as expressões em (2.21) e (2.22) com relação ao parâmetro c , obtemos

$$\begin{aligned}
(2+c) \frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c^2 \, d\xi \right) & = \left[-\frac{2048(2+c)K}{L^3} p_1(k) - \frac{2048(2+c)K^2}{L^3} p_2(k) \right. \\
& \left. + \frac{1024(2+c)K^2}{L^3} p_3(k) + \frac{1024(2+c)K^3}{3L^3} p_4(k) \right] \cdot \frac{dk}{dc}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c^3 \, d\xi \right) & = \left[-\frac{98304K^2}{L^5} p_5(k) - \frac{98304K^3}{L^5} p_6(k) + \frac{294912K^2}{L^5} p_7(k) \right. \\
& + \frac{98304K^3}{L^5} p_8(k) - \frac{131072K^3}{L^5} p_9(k) + \frac{32768K^4}{L^5} p_{10}(k) \\
& \left. + \frac{32768K^4}{3L^5} p_{11}(k) + \frac{32768K^5}{15L^5} p_{12}(k) \right] \cdot \frac{dk}{dc},
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
p_1(k) &:= K'[K^2 - 2KE + E^2], \\
p_2(k) &:= KK' - K'E - KE' + EE', \\
p_3(k) &:= K'[k^2K - 2k^2E + 2K - 2E], \\
p_4(k) &:= 2kK + k^2K' - 4kE - 2k^2E' + 2K' - 2E', \\
p_5(k) &:= K'[K^3 - 3K^2E + 3KE^2 - E^3], \\
p_6(k) &:= K^2K' - 2KK'E - K^2E' + K'E^2 + 2KEE' - E^2E', \\
p_7(k) &:= K'[K^3 - 3K^2E + 2KE^2 + KE - E^2], \\
p_8(k) &:= 3K^2K' - 6KK'E - 3K^2E' + 2K'E^2 + 4KEE' + K'E + KE' - 2EE', \\
p_9(k) &:= K'[k^2K^2 - 3k^2KE - 4KE + 2k^2E^2 + 2E^2 + 2K^2], \\
p_{10}(k) &:= -2kK^2 - 2k^2KK' + 6kKE + 3k^2K'E + 3k^2KE' + 4K'E + 4KE' - 4kE^2 \\
&\quad - 4k^2EE' - 4EE' - 4KK', \\
p_{11}(k) &:= K'[15k^6K - 29k^4K - 9k^2K + 8K - 24k^4E - 13k^2E - 8E], \\
p_{12}(k) &:= 90k^5K + 15k^6K' - 116k^3K - 29k^4K' - 18kK - 9k^2K' + 8K' - 96k^3E \\
&\quad - 24k^4E' - 26kE - 13k^2E' - 8E'.
\end{aligned}$$

Agora, para $c \in (0, 1)$ sabemos pela Proposição 2 que $\frac{dk}{dc} > 0$, então para mostrar a primeira das desigualdades presentes em (2.17) é suficiente provar que $g_1(k, c) < 0$, sendo

$$\begin{aligned}
g_1(k, c) &:= -\frac{2048(2+c)K}{L^3}p_1(k) - \frac{2048(2+c)K^2}{L^3}p_2(k) + \frac{1024(2+c)K^2}{L^3}p_3(k) \\
&\quad + \frac{1024(2+c)K^3}{3L^3}p_4(k) - \frac{98304K^2}{L^5}p_5(k) - \frac{98304K^3}{L^5}p_6(k) + \frac{294912K^2}{L^5}p_7(k) \\
&\quad + \frac{98304K^3}{L^5}p_8(k) - \frac{131072K^3}{L^5}p_9(k) + \frac{32768K^4}{L^5}p_{10}(k) + \frac{32768K^4}{3L^5}p_{11}(k) \\
&\quad + \frac{32768K^5}{15L^5}p_{12}(k).
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E - (1 - k^2)K}{k(1 - k^2)} \quad \text{e} \quad \frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k},$$

podemos reescrever $g_1(k, c)$, equivalentemente, por

$$\begin{aligned}
g_2(k, c) &:= \frac{K^2}{L^5k(1 - k^2)} \left[-\frac{2048(2+c)L^2}{K}m_1(k) + 2048(2+c)L^2m_2(k) \right. \\
&\quad + 1024(2+c)L^2m_3(k) + 1024(2+c)L^2Km_4(k) - 98304m_5(k) \\
&\quad - 98304Km_6(k) + 294912m_7(k) + 98304Km_8(k) - 131072Km_9(k) \\
&\quad \left. + 32768K^2m_{10}(k) + \frac{32768K^2}{3}m_{11}(k) + \frac{32768K^3}{15}m_{12}(k) \right],
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
m_1(k) &:= 3EK^2 - 3E^2K + E^3 + K^3k^2 - 2EK^2k^2 + E^2Kk^2 - K^3, \\
m_2(k) &:= E^2k^2 - EKk^2, \\
m_3(k) &:= K^2k^4 - 2KEk^4 + K^2k^2 + KEk^2 - 2E^2k^2 + 4KE - 2E^2 - 2K^2, \\
m_4(k) &:= 2Ek^4 - Kk^4 - Ek^2 + Kk^2, \\
m_5(k) &:= 4EK^3 - 6E^2K^2 + 4E^3K - E^4 + K^4k^2 - 3K^3Ek^2 + 3K^2E^2k^2 \\
&\quad - KE^3k^2 - K^4, \\
m_6(k) &:= E^3k^2 - 2E^2Kk^2 + EK^2k^2, \\
m_7(k) &:= K^4k^2 - 3K^3Ek^2 + 2K^2E^2k^2 + K^2Ek^2 - KE^2k^2 + 4K^3E - 5K^2E^2 + 2KE^3 \\
&\quad + 2KE^2 - E^3 - K^4 - K^2E, \\
m_8(k) &:= 6E^2Kk^2 - 13EK^2k^2 + 6K^3k^2 - 2E^2k^2 + 4EKk^2 - K^2k^2 + 2E^3 - 12E^2K \\
&\quad + 16EK^2 - 6K^3 + 3E^2 - 4EK + K^2, \\
m_9(k) &:= K^3k^4 - 3K^2Ek^4 + 2KE^2k^4 - 3KE^2k^2 + K^3k^2 - 6KE^2 + 2E^3k^2 + 2E^3 \\
&\quad + 6K^2E - 2K^3, \\
m_{10}(k) &:= 8E^2k^4 - 10EKk^4 + 3K^2k^4 - E^2k^2 + 4EKk^2 - 3K^2k^2, \\
m_{11}(k) &:= 15K^2k^8 - 44K^2k^6 + 20K^2k^4 + 17K^2k^2 - 9KEk^6 - 18KEk^4 - 4KEk^2 \\
&\quad + 16KE - 24E^2k^4 - 13E^2k^2 - 8E^2 - 8K^2, \\
m_{12}(k) &:= -75Kk^8 + 135Ek^6 + 138Kk^6 - 110Ek^4 - 67Kk^4 - 40Ek^2 + 4Kk^2.
\end{aligned}$$

Note que $m_1(k) = k(1 - k^2)p_1(k) = k(1 - k^2)K'[K - E]^2 > 0$, $m_2 = k^2E(E - K) < 0$ e $m_4 = k^2p_4(k) = k^2(E - 2Ek'^2 + Kk'^2) = k^2[E(1 - k'^2) + k'^2(K - E)] > 0$. Além disso, usando a expansão em série das funções elípticas de Jacobi $K(k)$ e $E(k)$, presentes em [1] e [9],

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \frac{25}{256}k^6 + \dots \right)$$

e

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 - \frac{5}{256}k^6 + \dots \right),$$

vemos que

$$m_3(k) = k(1 - k^2)p_3(k) = k(1 - k^2) \left(\frac{9}{16}\pi k^4 + \frac{15}{64}\pi k^6 + \frac{35}{512}\pi k^8 + \mathcal{O}(k^8) \right) > 0,$$

sendo $\mathcal{O}(k^8)$ uma função polinomial com coeficientes constantes positivos.

Agora, de (2.9), sabemos que

$$\frac{32}{\gamma_0 - \alpha_0} K^2 = L^2 > \frac{8\pi^2}{\sqrt{-2c^2 + 6c}},$$

então, como $A_0 < \alpha_0 < B_0$, segue de (2.4) que $\gamma_0 - \alpha_0 > \frac{\sqrt{-2c^2+6c}}{2}$ e, portanto,

$$L^2 < \frac{64}{\sqrt{-2c^2+6c}} K^2.$$

Conseqüentemente, $g_2(k, c) < 0$ se o mesmo ocorre para $g_3(k, c)$, sendo

$$\begin{aligned} g_3(k, c) &:= -\frac{2^{14}\pi^2(2+c)}{K\sqrt{-2c^2+6c}}m_1(k) + \frac{2^{14}\pi^2(2+c)}{\sqrt{-2c^2+6c}}m_2(k) + \frac{2^{16}(2+c)K^2}{\sqrt{-2c^2+6c}}m_3(k) \\ &+ \frac{2^{16}(2+c)K^3}{\sqrt{-2c^2+6c}}m_4(k) - 2^{15}3m_5(k) - 2^{15}3Km_6(k) \\ &+ 2^{15}3^2m_7(k) + 2^{15}3Km_8(k) - 2^{17}Km_9(k) + 2^{15}K^2m_{10}(k) \\ &+ \frac{2^{15}K^2}{3}m_{11}(k) + \frac{2^{15}K^3}{15}m_{12}(k). \end{aligned}$$

Usando novamente a expansão em série das funções elípticas de Jacobi, $K(k)$ e $E(k)$, podemos reescrever g_3 , equivalentemente, por

$$g_3(k, c) = -\frac{2^{21} \cdot 3}{5}\pi^4 k^2 + k^4 \mathcal{O}(k, c)$$

sendo $\mathcal{O}(k, c)$ uma função polinomial par em k com coeficientes reais para $c \in (0, 1)$. Portanto, como para $k \in (0, 1)$ suficientemente pequeno, $g_3(k, c) < 0$, segue que a primeira desigualdade em (2.17). O cálculo acima também foi verificado via o software Maple 18, mas por sua expressão conter um número muito grande de termos optamos por omiti-la.

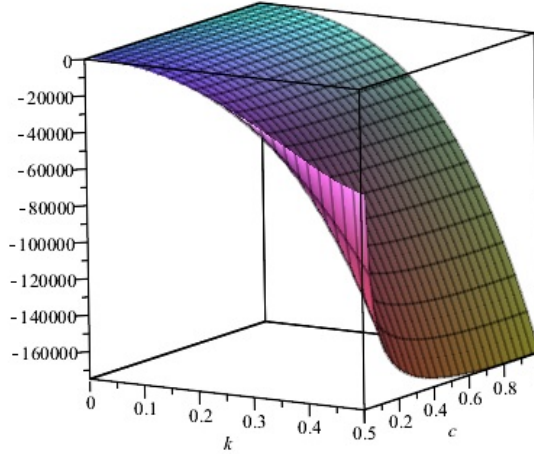


Figura 2.1: Esboço do gráfico da função $g_3(k, c)$

Finalmente, para concluir a segunda desigualdade de (2.17) basta observar que para $c(k)$, definido em (2.15),

$$\begin{aligned} \frac{L}{4}[3c^2 - 4c] + \int_0^L \phi_c^2 d\xi &= \frac{L}{4}[3c^2(k) - 4c(k)] - \frac{1024K^2}{L^3}(K^2 - 2KE + E^2) \\ &+ \frac{1024K^3}{3L^3}(k^2K - 2k^2E + 2K - 2E) \\ &\rightarrow \frac{15L^4 - 192\pi^4 - 5L^2\sqrt{9L^4 - 128\pi^4}}{8L^3}, \text{ quando } k \rightarrow 0, \end{aligned}$$

e o resultado segue por continuidade para L suficientemente grande.

Assim, concluímos que existe $k_1 \in (0, 1)$ tal que $d(c(k))$ é côncava para todo $k \in (0, k_1)$. \square

Observação 7. Analisando a expressão em (2.15) vemos que $c(k)$ não está bem definido para valores de k próximos de um, o que vem ao encontro com a demonstração feita acima. Ademais, para valores $k \in (0, 1)$ pequenos e L grande, temos $c(k) \in (0, 1)$, como desejado.

2.5 Análise espectral do operador hessiano \mathcal{H}_c

Nesta seção, vamos estudar as propriedades espectrais associadas ao problema de autovalores periódico em $H_{\text{per}}^1([0, L])$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_c \psi = \lambda \psi \\ \psi(0) = \psi(L) \\ \psi'(0) = \psi'(L), \end{cases} \quad (2.23)$$

sendo $\mathcal{H}_c \doteq E''(\phi_c) + cF''(\phi_c) = (\phi_c - c)\partial_\xi^2 + \phi_c' \partial_\xi + c - 3\phi_c^2 + \phi_c''$, $c \in (0, 1)$ tal que $[c^2 - 3c] < -\frac{32\pi^4}{L^4}$ e ϕ_c a onda snoidal L -periódica (2.3) dada pelo Teorema 5, a fim de verificar a Hipótese 3 para a instabilidade orbital.

Podemos escrever,

$$\mathcal{H}_c \psi(\xi) = \lambda \psi(\xi) \Leftrightarrow -[p(\xi)\psi'(\xi)]' + q(\xi)\psi(\xi) = \lambda \omega \psi(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (2.24)$$

sendo $p(\xi) = c - \phi_c(\xi)$, $q(\xi) = \phi_c'' - 3\phi_c^2 + c$, e $\omega = 1$.

Observação 8. p é positivo. De fato, lembremos que $p = c - \phi_c \neq 0$. Como $\alpha_0 \leq \phi_c \leq \beta_0$, temos as seguintes possibilidades

$$\phi_c < c \Rightarrow \phi_c \leq \beta_0 < c \quad \text{ou} \quad \phi_c > c \Rightarrow c < \alpha_0 \leq \phi_c.$$

Mas, pela Observação 2, $\alpha_0 < 0 < c$. Assim, só nos resta $\phi_c \leq \beta_0 < c$.

Além disso, como tanto p quanto q são funções periódicas e $\frac{1}{p}, q, w \in L^1(J, \mathbb{R})$, sendo $J = (0, L)$, o sistema de autovalores (2.23) caracteriza um problema de Sturm-Liouville periódico (Apêndice B).

Vamos, agora, interpretar as condições de contorno do problema de Sturm-Liouville periódico (2.23). Podemos reescrever estas condições de contorno, equivalentemente, na forma

$$AY(0) + BY(L) = 0, \quad (2.25)$$

sendo $A = I_2$, $B = -I_2$ e $Y = \begin{bmatrix} \psi \\ p\psi' \end{bmatrix}$. Ademais, A e B são matrizes tais que $AEA^* =$

BEB^* , com $E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. À vista disso, o problema de Sturm-Liouville periódico (2.23) é dito autoadjunto (Apêndice B) e as condições de contorno (2.25) reais acopladas.

Desse modo, denotando por $\{\lambda_n\}$ e $\{\mu_{n+1}\}$, com $n \in \mathbb{N}_0$, os autovalores do operador \mathcal{H}_c com condições de contorno periódicas e antiperiódicas, respectivamente,

$$\begin{cases} \psi(0) = \psi(L) \\ \psi'(0) = \psi'(L) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \psi(0) = -\psi(L) \\ \psi'(0) = -\psi'(L) \end{cases},$$

temos, da teoria de Floquet para problemas de Sturm-Liouville periódicos (Apêndice B), que seu espectro é real e puramente discreto, cujos autovalores são sequencialmente organizados na forma

$$-\infty < \lambda_0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_3 \leq \mu_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots, \quad (2.26)$$

com $\lambda_n, \mu_{n+1} \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ e λ_0 de multiplicidade simples. Além disso, se φ_n e ψ_{n+1} com $n \in \mathbb{N}$ denotam, respectivamente, as autofunções associadas aos autovalores λ_n e μ_{n+1} , então

$$\begin{aligned} \varphi_0 &\text{ não tem zeros em } [0, L], \\ \varphi_{2n+1} \text{ e } \varphi_{2n+2} &\text{ tem, cada uma, exatamente } 2n + 2 \text{ zeros em } [0, L], \\ \psi_{2n+3} \text{ e } \psi_{2n+4} &\text{ tem, cada um, exatamente } 2n + 3 \text{ zeros em } [0, L]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Observação 9. ϕ'_c é a autofunção associada ao autovalor zero. De fato, basta notar que por (1.1),

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c \phi'_c &= (\phi_c - c)(\phi'_c)'' + \phi'_c(\phi'_c)' + c\phi'_c - 3\phi_c^2\phi'_c + \phi_c''\phi'_c \\ &= (\phi_c - c)\phi_c''' + 2\phi'_c\phi_c'' + c\phi'_c - 3\phi_c^2\phi'_c \\ &= 0. \end{aligned}$$

Proposição 4. *Suponha $c \in (0, 1)$ tal que $[c^2 - 3c] < -\frac{32\pi^4}{L^4}$, então o problema de autovalores periódico (2.23) possui as seguintes propriedades:*

- (i) *os primeiros três autovalores de \mathcal{H}_c são simples;*
- (ii) *o segundo ou o terceiro autovalor de \mathcal{H}_c é, respectivamente, $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$, com $\lambda_1 < \lambda_2$.*

Demonstração. Como já vimos que ϕ_c é uma função periódica que assume seus valores de máximo e mínimo, segue que ϕ'_c tem dois zeros em $[0, L)$ e, então, pelo que podemos observar de (2.27), $\phi'_c = \varphi_1 \neq \varphi_2$, ou $\phi'_c = \varphi_2 \neq \varphi_1$ ou $\phi'_c = \varphi_1 = \varphi_2$, isto é, (2.26) é de uma, entre as três formas abaixo:

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2, \text{ ou } \lambda_1 < \lambda_2 = 0 \text{ ou } \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Vamos verificar que somente as duas primeiras possibilidades podem ocorrer, mostrando que o autovalor $\lambda = 0$ é simples. Para isso suponha f_1 e f_2 duas autofunções associadas ao autovalor $\lambda = 0$. Como podemos ver,

$$0 = \int \mathcal{L}[f_1]f_2 = \int [-(pf_1')' + qf_1]f_2 = \int -(pf_1')f_2 + qf_1f_2,$$

sendo \mathcal{L} o operador de Sturm-Liouville (Apêndice B).

Fazendo $u = f_2$ e $dv = (pf_1')'d\xi$ temos $du = f_2'd\xi$, $v = pf_1'$ e, portanto integrando uma vez por partes,

$$0 = -f_2pf_1' + \int pf_1'f_2' + \int qf_1f_2.$$

Novamente integrando por partes, agora com $u = pf_2'$, $v = f_1$, $du = (pf_2')'d\xi$ e $dv = f_1'd\xi$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= -f_2pf_1' + pf_2'f_1 - \int f_1(pf_2')' + \int qf_1f_2 = -p[f_1'f_2 - f_1f_2'] + \int [-(pf_2')' + qf_2]f_1 \\ &= -p[f_1'f_2 - f_1f_2'] \end{aligned}$$

e, assim, $f_1'f_2 - f_1f_2' = 0$, pois $p > 0$.

Logo, f_1 e f_2 diferem por uma multiplicação de constante, o que significa que o autovalor $\lambda = 0$ tem multiplicidade 1.

Portanto, segue de (2.26) e (2.27) que $\lambda_1 < \lambda_2$ ambos de multiplicidade 1, pois, do contrário, teríamos $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ com multiplicidade 2. Concluimos então, a demonstração desta proposição. \square

Com a proposição acima, para mostrar que a Hipótese 3, do problema de instabilidade orbital para as soluções ondas snoidais com média zero da equação mCH, é válida, é suficiente verificar que o segundo autovalor em (2.26), ou seja, λ_1 , é exatamente o zero. Para tanto, temos o resultado abaixo.

Proposição 5. *Seja L uma constante arbitrária mas fixa, suficientemente grande, e considere $u(x, t) = \phi_c(x - ct)$, com $c \in (0, 1)$ tal que $[c^2 - 3c] < -\frac{32\pi^4}{L^4}$, a solução onda snoidal, com média zero, da equação mCH. Então, existe $k_2 \in (0, 1)$ pequeno tal que, escrevendo $c \equiv c(k)$ como em (2.13), para todo $k \in (0, k_2)$, o operador $\mathcal{H}_{c(k)}$ possui exatamente um autovalor negativo, o qual é também simples.*

Demonstração. Inicialmente, escrevemos a equação de autovalores $\mathcal{H}_c\psi = \lambda\psi$ em (2.23), na forma

$$a_2\psi'' + a_1\psi' + a_0\psi = 0, \tag{2.28}$$

com $a_2 \equiv a_2(\xi) = \phi_c - c$, $a_1 \equiv a_1(\xi) = \phi_c'$ e $a_0 \equiv a_0(\xi) \equiv \tilde{a}_0(\xi) - \lambda$, em que $\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(\xi) = c - 3\phi_c^2 + \phi_c''$. Desse modo, usando a transformação [8]

$$\psi(\xi) = \exp\left(-\int_0^L \frac{a_1(\xi)}{2a_2(\xi)} d\xi\right) \cdot u(\xi),$$

convertemos a EDO (2.28) em uma nova EDO com o coeficiente de u' nulo,

$$u''(\xi) - r(\xi)u(\xi) = 0,$$

sendo $r(\xi) = (\frac{a_1}{2a_2})' + (\frac{a_1}{2a_2})^2 - \frac{a_0}{a_2}$. Ou, ainda, equivalentemente, por

$$\mathcal{L}_c u(\xi) := a_2(\xi)u''(\xi) - \tilde{r}(\xi)u(\xi) = \lambda u(\xi), \quad (2.29)$$

com $\tilde{r}(\xi) = -\frac{\phi_c''}{2} - \frac{(\phi_c')^2}{4(\phi_c - c)} - c + 3\phi_c^2$.

Agora, vamos analisar o problema de autovalores periódicos em $H_{\text{per}}^1([0, L])$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_c u = \lambda u \\ u(0) = u(L) \\ u'(0) = u'(L). \end{cases}$$

Esse sistema já foi estudado por Dubrovin [17] e Novikov [31] para casos mais gerais do operador \mathcal{L}_c (Apêndice B). Para o nosso problema em particular, temos $n = 2$ e $q_2(\xi) = a_2(\xi)$ em (B.13) e (B.14). Assim, para a equação

$$-u'' + (\phi_c - c)(\xi)u = vu$$

referente ao problema de Dirichlet (B.14), após uma integração por partes na variável ξ , obtemos

$$v = \frac{\|u'\|^2 + \int_0^L (\phi_c - c)u^2}{\|u\|^2}. \quad (2.30)$$

Ainda, como $A_0 \leq \alpha_0 \leq B_0$ e $\alpha_0 \leq \phi_c \leq \beta_0$, segue da Observação 8 que

$$\frac{-4c - 2\sqrt{-2c^2 + 6c}}{3} = A_0 - c \leq \phi_c - c < 0.$$

Finalmente, de (2.15), podemos escrever $c = c(k)$ e ver que existe $k_2 \in (0, 1)$ pequeno tal que, para $k \in (0, k_2)$, o lado esquerdo da desigualdade acima, tende a zero quando tomamos L grande. Portanto, por continuidade, podemos considerar $v \geq 0$ em (2.30). Note que, dessa forma, todos os autovalores do problema de Dirichlet (B.14) mais geral são não negativos, independente do número de “gaps” (Apêndice B). Em particular, isso garante que $v_1 \geq 0$ no problema de Dirichlet (B.14) com 2 “gaps”, Fig. B.1, e, então, como o zero é um autovalor do problema espectral (2.23) e $\lambda_1 < v_1 < \lambda_2$, obtemos, juntamente com a Proposição 4, que $\lambda_1 = 0$ em (2.26). \square

Isso conclui a verificação da Hipótese 3 sobre a análise espectral do operador \mathcal{H}_c

2.6 Prova da instabilidade orbital para as soluções ondas snoidais, com média zero, da equação mCH

Nesta seção, vamos mostrar a instabilidade orbital para as soluções ondas snoidais da equação mCH no subespaço de $H_{\text{per}}^1([0, L])$ das funções com média zero.

Com base nas Hipóteses 1 – 3 verificadas nas seções anteriormente, estamos aptos a aplicar os resultados de Grillakis, Shatah e Strauss [22]. Para isso denote por $n(\mathcal{H}_c)$ o número de autovalores negativos do operador hessiano \mathcal{H}_c definido na Hipótese 3, e $p(d''(c))$ o número de autovalores positivos de $d''(c)$. Pela Proposição 3, como existe $k_1 \in (0, 1)$ tal que para todo $k \in (0, k_1)$ temos $d''(c(k)) < 0$, segue que $p(d''(c(k))) = 0$. Além disso, pela Proposição 5, vemos que existe $k_2 \in (0, 1)$ tal que para todo $k \in (0, k_2)$ obtemos $n(\mathcal{H}_{c(k)}) = 1$. Dessa forma, para todo $k \in (0, k_0)$, sendo $k_0 = \min\{k_1, k_2\}$,

$$n(\mathcal{H}_{c(k)}) - p(d''(c(k))) = 1$$

é um número ímpar. Logo, pelo Teorema de Instabilidade de [22], segue o Teorema 2.

Observação 10. É importante salientar que, mesmo a formulação hamiltoniana de uma equação estando de acordo com as devidas exigências presentes nas teorias abstratas de Grillakis em [20] e Grillakis, Shatah e Strauss em [21, 22], nem sempre tais teorias nos dão uma informação acerca do problema de estabilidade ou instabilidade. Para exemplificar isso, podemos ver o trabalho de Angulo [3] e Pastor [32].

Classes de ondas viajantes fracas da equação mCH

Neste capítulo, vamos classificar todas as soluções limitadas do tipo onda viajante fraca da equação mCH.

Diremos que uma função contínua ϕ tem um *pico* em $\xi \in \mathbb{R}$, se ϕ é localmente suave em ambos os lados de ξ e

$$0 \neq \lim_{\eta \uparrow \xi} \phi'(\eta) = - \lim_{\eta \downarrow \xi} \phi'(\eta) \neq \pm\infty. \quad (3.1)$$

Perfis de onda com picos são chamados de ondas “*peaked*” ou, simplesmente, “*peakons*”. Similarmente, se a condição em (3.1) for substituída por

$$\lim_{\eta \uparrow \xi} \phi'(\eta) = - \lim_{\eta \downarrow \xi} \phi'(\eta) = \pm\infty,$$

então ϕ será dita ter um *cúspide* em $\xi \in \mathbb{R}$. Chamaremos as ondas com cúspides de ondas “*cusped*” ou, também, “*cuspons*”. Se, por sua vez, inserirmos um intervalo, onde ϕ é constante, em um cúspide, então diremos que ϕ tem um *toco*. Em outras palavras, existe um intervalo $[a, b]$ no qual ϕ é constante e ϕ é localmente suave a esquerda de a e a direita de b , mas

$$\lim_{\eta \uparrow a} \phi'(\eta) = - \lim_{\eta \downarrow b} \phi'(\eta) = \pm\infty.$$

Ondas com tocos serão chamadas “*stumpons*”.

Além disso, se ϕ for da forma de uma onda, chamaremos qualquer ponto onde ϕ possuir um máximo local de *crista*. Um ponto onde ϕ tiver um mínimo local será chamado de *calha*. Também, diremos que ϕ é uma *onda com decaimento* se existir uma constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\phi - \alpha \in H^1(\mathbb{R})$.

3.1 Formulação fraca

Para uma onda viajante $u(x, t) = \phi(\xi)$, com $\xi = x - ct$, a equação (1) é equivalente a

$$-c\phi' + c\phi''' = \phi\phi''' + b\phi'\phi'' - (b+1)\phi^2\phi', \quad (3.2)$$

em que $'$ denota a derivada com relação a variável ξ e $b > 1$ real.

Agora, como $(\phi\phi'')' = \phi'\phi'' + \phi\phi'''$, $[\frac{(b-1)}{2}(\phi')^2]' = (b-1)\phi'\phi''$ e $[\frac{(b+1)}{3}\phi^3]' = (b+1)\phi^2\phi'$, após uma integração com relação a variável ξ podemos reescrever (3.2) na forma

$$-c\phi + c\phi'' + \frac{(b+1)}{3}\phi^3 = \phi\phi'' + \frac{(b-1)}{2}(\phi')^2 + \frac{a}{2}, \quad (3.3)$$

para alguma constante de integração $a \in \mathbb{R}$. Equivalentemente, temos de (3.3),

$$-(b-3)(\phi')^2 + \frac{2(b+1)}{3}\phi^3 - 2c\phi = ((\phi - c)^2)'' + a. \quad (3.4)$$

Observemos que para (3.4) fazer algum sentido é suficiente exigir $\phi \in H_{loc}^1(\mathbb{R})$. Assim, é plausível a seguinte definição.

Definição 1. Uma função $\phi \in H_{loc}^1(\mathbb{R})$ é uma onda viajante da equação (1), se ϕ satisfaz (3.4) no sentido das distribuições para algum $a \in \mathbb{R}$.

Observação 11. A equação diferencial (3.4) é integrável via quadratura, a saber, $(\phi')^2 = F(\phi)$, com F uma função racional, para $\phi \neq c$.

3.2 Classificação de ondas viajantes

Nesta seção, enunciamos os Teoremas 6 e 7 que classificam todas as ondas viajantes limitadas, $\phi \in H_{loc}^1(\mathbb{R})$, da equação mCH. Tais ondas viajante são parametrizadas por seus máximo, mínimo e velocidade de propagação. Denotaremos, μ como a medida de Lebesgue em \mathbb{R} .

Teorema 6. *Considere $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ com $\Re(z) = -(m+M)/2$ satisfazendo a equação $m^2 + M^2 - |z|^2 + mM - 2c = 0$. Qualquer onda viajante limitada da equação mCH pertence a uma das seguintes categorias:*

(a) *Periódica suave: se $m < M < c$, existe uma onda viajante periódica suave $\phi(x-ct)$ de (mCH) com $m = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $M = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$.*

(b) *Peakons periódicos: se $m < M = c$, existe uma onda viajante “peaked” periódica $\phi(x-ct)$ de (mCH) com $m = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $M = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$.*

(c) *Cuspons periódicos: se $m < c < M$, existe uma onda viajante “cusped” periódica $\phi(x-ct)$ de (mCH) com $m = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $c = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$.*

(a') *Periódica suave: se $c < M < m$, existe uma onda viajante periódica suave $\phi(x-ct)$ de (mCH) com $M = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $m = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$.*

(b') *Peakons periódicos*: se $c = M < m$, existe uma onda viajante “peaked” periódica $\phi(x - ct)$ de (mCH) com $M = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $m = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$.

(c') *Cuspons periódicos*: se $M < c < m$, existe uma onda viajante “cusped” periódica $\phi(x - ct)$ de (mCH) com $c = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $m = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$.

(d) *Composição de ondas*: para cada $c < 0$, considere a equação

$$2a = (M + m)(|z|^2 - mM) \quad (3.5)$$

no espaço tridimensional $(m, M, \Im(z))$ com $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ satisfazendo, a menos de mudança de variável, o hiperbolóide de duas folhas

$$\frac{m^2}{\alpha^2} - \frac{M^2}{\beta^2} - \frac{\Im(z)^2}{\gamma^2} = 1, \quad (3.6)$$

sendo $\alpha = \sqrt{-2c}$, $\beta = 2\sqrt{-c}$ e $\gamma = \sqrt{-c}$. Para $(m, M, c) \in \{m < c \leq M\} \cup \{m > c \geq M\}$ existe um correspondente “cuspon” ou “peakon” de acordo com (b) ou (c) e (b') ou (c'). Um número contável de “cuspons” e “peakons” correspondendo aos pontos (m, M, c) que pertencem ao mesmo hiperbolóide de duas folhas, podem ser colados em suas cristas para formar uma onda composta ϕ . Se a medida de Lebesgue $\mu(\phi^{-1}(c)) = 0$, então ϕ é uma onda viajante de (mCH).

(e) *Stumpons*: para $a = 2c^3 - 2c^2$ a equação (3.5) juntamente com (3.6) contêm os pontos $(m, M, \Im(z)) = (c, c, \pm\sqrt{4c^2 - 2c})$. Estas equações correspondem somente a “cuspons”. Seja ϕ uma onda composta obtida por juntar um número contável destes “cuspons” e intervalos onde $\phi \equiv c$. Então ϕ é uma onda viajante de (mCH) mesmo se $\mu(\phi^{-1}(c)) > 0$.

Teorema 7. *Considere $z = -m - r - M$ com $r \in \mathbb{R}$ satisfazendo a equação $r^2 + m^2 + M^2 + rm + rM + mM - 2c = 0$. Qualquer onda viajante limitada da equação mCH pertence, a menos de uma alternância de z por r , a uma das seguintes categorias:*

(a) *Periódica suave*: se $z < r < m < M < c$, existe uma onda viajante periódica suave $\phi(x - ct)$ de (mCH) com $m = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $M = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$.

(b) *Suave com decaimento*: se $z < r = m < M < c$, existe uma onda viajante suave $\phi(x - ct)$ de (mCH) com $m = \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$, $M = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $\phi \downarrow m$ exponencialmente quando $\xi \rightarrow \pm\infty$.

(c) *Kinks*: se $z = m < M = r < c$, existe uma onda viajante suave $\phi(x - ct)$ de (mCH) com $m = \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$, $M = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e, $\phi \uparrow M$ e $\phi \downarrow m$ exponencialmente quando $\xi \rightarrow \pm\infty$, respectivamente.

(d) *Peakons periódicos*: se $z < r < m < M = c$, existe uma onda viajante “peaked” periódica $\phi(x - ct)$ de (mCH) com $m = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $M = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$.

(e) *Peakons com decaimento*: se $z < r = m < M = c$, existe uma onda viajante “peaked” $\phi(x - ct)$ de (mCH) com $m = \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$, $M = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $\phi \downarrow m$ exponencialmente quando $\xi \rightarrow \pm\infty$.

(f) *Cuspons periódicos*: se $z < r < m < c < M$, existe uma onda viajante “cusped” periódica $\phi(x - ct)$ de (mCH) com $m = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $c = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$.

(g) *Cuspons com decaimento*: se $z < r = m < c < M$, existe uma onda viajante “cusped” $\phi(x - ct)$ de (mCH) com $m = \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$, $c = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $\phi \downarrow m$ exponencialmente quando $\xi \rightarrow \pm\infty$.

(a') *Periódica suave*: se $c < M < m < r < z$, existe uma onda viajante periódica suave $\phi(x - ct)$ de (mCH) com $M = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $m = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$.

(b') *Suave com decaimento*: se $c < M < m = r < z$, existe uma onda viajante suave $\phi(x - ct)$ de (mCH) com $M = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$, $m = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $\phi \uparrow m$ exponencialmente quando $\xi \rightarrow \pm\infty$.

(c') *Kinks*: se $c < r = M < m = z$, existe uma onda viajante suave $\phi(x - ct)$ de (mCH) com $M = \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$, $m = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e, $\phi \downarrow M$ e $\phi \uparrow m$ exponencialmente quando $\xi \rightarrow \pm\infty$, respectivamente.

(d') *Peakons periódicos*: se $c = M < m < r < z$, existe uma onda viajante “peaked” periódica $\phi(x - ct)$ de (mCH) com $M = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $m = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$.

(e') *Peakons com decaimento*: se $c = M < m = r < z$, existe uma onda viajante “peaked” $\phi(x - ct)$ de (mCH) com $M = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$, $m = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $\phi \uparrow m$ exponencialmente quando $\xi \rightarrow \pm\infty$.

(f') *Cuspons periódicos*: se $M < c < m < r < z$, existe uma onda viajante “cusped” periódica $\phi(x - ct)$ de (mCH) com $c = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $m = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$.

(g') *Cuspons com decaimento*: se $M < c < m = r < z$, existe uma onda viajante “cusped” $\phi(x - ct)$ de (mCH) com $c = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$, $m = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ e $\phi \uparrow m$ exponencialmente quando $\xi \rightarrow \pm\infty$.

(h) *Composição de ondas*: para cada $c > 0$, a equação

$$2a = -(M + m)r^2 - (m + r)M^2 - (M + r)m^2 - 2mrM \quad (3.7)$$

descreve três planos se interseptando no espaço (m, M, r) com $r \in \mathbb{R}$ satisfazendo, a menos de mudança de variável, o elipsóide

$$\frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{M^2}{\beta^2} + \frac{r^2}{\gamma^2} = 1, \quad (3.8)$$

sendo $\alpha = \beta = 2\sqrt{c}$ e $\gamma = \sqrt{c}$. Para $(m, M, r, c) \in \{r \leq m < c \leq M\} \cup \{r \geq m > c \geq M\}$ existe um correspondente “cuspon” ou “peakon” de acordo com (d) – (g) e (d') – (g'). Um número contável de “cuspons” e “peakons” correspondendo aos pontos (m, M, r, c) que pertencem ao mesmo elipsóide, podem ser colados em suas cristas para formar uma onda composta ϕ . Se a medida de Lebesgue $\mu(\phi^{-1}(c)) = 0$, então ϕ é uma onda viajante de (mCH).

(i) *Stumpons*: para $a = 2c^3 - 2c^2$ a equação (3.7) juntamente com (3.8) contém os pontos $(m, M, r) = (c, c, -c \pm \sqrt{-2c^2 + 2c})$. Estas equações correspondem somente a “cuspons”. Seja ϕ uma onda composta obtida por juntar um número contável destes “cuspons” e intervalos onde $\phi \equiv c$. Então ϕ é uma onda viajante de (mCH) mesmo se $\mu(\phi^{-1}(c)) > 0$.

Ademais, é possível caracterizar a existência de algumas ondas viajante não limitadas da equação mCH.

Teorema 8. *Se o polinômio $P(\phi)$ em (3.21) possui apenas um zero real, digamos m (respect. M), então a equação mCH não possui soluções ϕ limitadas se $c < m$ (respect. $M < c$), com $m = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$ (respect. $M = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi)$). Em particular, esta equação possui uma solução onda viajante com comportamento exponencial, (i) – (ii) da Fig. 3.1.*

Observação 12. Diferentemente do caso clássico, a equação modificada (mCH) não possui soluções ondas viajantes com comportamento similar a uma parábola, (iii) – (iv) da Fig. 3.1, pois isso somente é possível quando o polinômio $P(\phi)$ em (3.21) possuir um único zero real com multiplicidade igual a um.

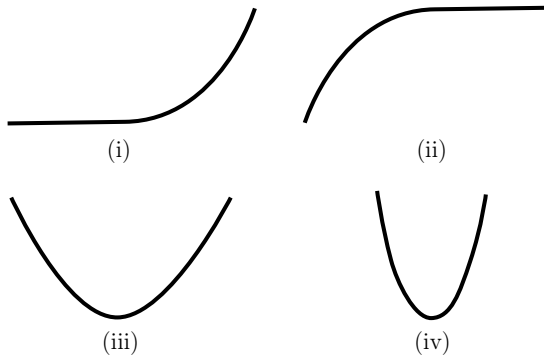


Figura 3.1: Ondas viajantes não limitadas

Observação 13. Para $b = 3$ em (1) recuperamos a equação mDP

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} + 3u_x u_{xx} - 4u^2 u_x.$$

Também podemos classificar todas as soluções ondas viajantes fracas para esta equação e obter resultados semelhantes aos teoremas acima. Para isso, procedemos do mesmo modo que para a equação mCH, considerando na próxima seção $p(v) = \frac{8}{3}\phi^3 - 2c\phi - a$ e o Lema 1 de [27] na demonstração do Lema 8 deste trabalho. Além disso, para obter uma equação como em (3.12), multiplicamos por $\phi\phi'$ a formulação fraca da equação mDP, dada por

$$\frac{8}{3}\phi^3 - 2c\phi = ((\phi - c)^2)'' + a,$$

sendo a uma constante de integração como em (3.4).

3.3 Prova da classificação de ondas viajantes

Nesta seção demonstraremos os Teoremas 6 – 8 que foram enunciados na seção anterior. Para tal, lembramos que uma função f , definida em um aberto $X \subset \mathbb{R}$, é dita ser

absolutamente contínua em X se para cada conjunto compacto $K \subset X$ e $\varepsilon > 0$, existe um correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^n |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon,$$

para qualquer n e qualquer coleção disjunta de segmentos $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$ em K satisfazendo

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta.$$

Lema 5. *Seja $p(v)$ um polinômio com coeficientes reais. Assuma que $v \in H_{loc}^1(\mathbb{R})$ satisfaz*

$$(v^2)'' = (v')^2 + p(v) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Então,

$$v^k \in C^j(\mathbb{R}) \quad \text{para } k \geq 2^j.$$

Demonstração. Veja [26], Lema 1, página 404. □

Lema 6. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua. Então $f' = 0$ q.t.p. em $f^{-1}(c)$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Veja [26], Lema 2, página 405. □

Lema 7. *Seja $f \in W_{loc}^{2,1}(\mathbb{R})$. Então, $f'' = 0$ q.t.p. em $f^{-1}(c)$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Veja [26], Lema 3, página 405. □

Agora, recordando a Definição 1, de uma solução onda viajante da equação (1), vemos que uma função $\phi \in H_{loc}^1(\mathbb{R})$ é uma onda viajante da equação mCH com velocidade de propagação c , se satisfaz a equação

$$(\phi')^2 + 2\phi^3 - 2c\phi = ((\phi - c)^2)'' + a \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (3.9)$$

para alguma constante $a \in \mathbb{R}$. Além disso, lembrando que μ denota a medida de Lebesgue, podemos enunciar e demonstrar o lema abaixo, o qual é fundamental para que possamos exibir todas as classes de ondas viajantes da equação mCH.

Lema 8. *Uma função $\phi \in H_{loc}^1(\mathbb{R})$ é uma onda viajante da equação mCH com velocidade de propagação c se, e somente se, as seguintes três afirmações são verdadeiras:*

(TW1) *Existem intervalos abertos e disjuntos E_i 's, $i \geq 1$, e um conjunto fechado C tal que $\mathbb{R} \setminus C = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$, $\phi \in C^\infty(E_i)$ para $i \geq 1$, $\phi(\xi) \neq c$ para $\xi \in E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$, e $\phi(\xi) = c$ para $\xi \in C$.*

(TW2) *Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que:*

(i) existem constantes reais d_i 's, $i \geq 1$, tais que

$$(\phi')^2 = F(\phi) \text{ para } \xi \in E_i \text{ e } \phi \rightarrow c \text{ em qualquer ponto final finito de } E_i, \quad (3.10)$$

sendo,

$$F(\phi) = \frac{\phi^2 \left(c - \frac{\phi^2}{2} \right) + a\phi + d_i}{c - \phi}; \quad (3.11)$$

(ii) se $\mu(C) > 0$, então $a = 2c^3 - 2c^2$.

(TW3) $(\phi - c)^2 \in W_{loc}^{2,1}(\mathbb{R})$.

Demonstração. (\Rightarrow) Aplicando o Lema 5 com $v = \phi - c$ e $p(v) = 2\phi^3 - 2c\phi - a$, vemos que

$$(\phi - c)^k \in C^j(\mathbb{R}), \text{ para } k \geq 2^j.$$

Assim, concluímos que ϕ é C^∞ exceto, possivelmente, em pontos na fronteira de $\phi^{-1}(c)$.

Como ϕ é contínua, $\phi^{-1}(c)$ é um conjunto fechado e, então, podemos definir $C = \phi^{-1}(c)$. Todo conjunto aberto é uma união contável de intervalos abertos disjuntos, ou seja, existem intervalos abertos disjuntos E_i 's, $i \geq 1$, tais que $\mathbb{R} \setminus C = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Deduzimos, por contradição, que (TW1) está satisfeita.

Para provar (TW2) considere E_i um destes intervalos abertos. Como ϕ é C^∞ em E_i , inferimos que (3.9) vale pontualmente em E_i . Dessa forma, multiplicando (3.9) por ϕ' obtemos

$$-2c\phi\phi' + 2c\phi'\phi'' + 2\phi^3\phi' = 2\phi\phi'\phi'' + (\phi')^3 + a\phi'.$$

Então, como $(\phi^2)' = 2\phi\phi'$, $[(\phi')^2]' = 2\phi'\phi''$, $(\frac{\phi^4}{2})' = 2\phi^3\phi'$ e $[(\phi')^2\phi]' = 2\phi\phi'\phi'' + (\phi')^3$, a equação acima pode ser reescrita, equivalentemente, por

$$-c(\phi^2)' + c[(\phi')^2]' + \left(\frac{\phi^4}{2} \right)' = [(\phi')^2\phi]' + a\phi'$$

e, a partir de uma integração com relação ao parâmetro ξ , obtemos que

$$(\phi')^2(c - \phi) = \phi^2 \left(c - \frac{\phi^2}{2} \right) + a\phi + d_i, \quad \xi \in E_i \quad (3.12)$$

para alguma constante d_i . Dividindo (3.12) por $c - \phi$ temos (3.10). Que $\phi \rightarrow c$ em pontos finais finitos de E_i segue da continuidade de ϕ e (TW1). Isso prova (i) de (TW2).

O lado esquerdo de (3.9) está em $L_{loc}^1(\mathbb{R})$. Assim, $((\phi - c)^2)'' \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ e, então, segue (TW3).

Para mostrar (ii) de (TW2), vamos assumir $\mu(C) > 0$. Como $\phi \in H_{loc}^1(\mathbb{R})$ e $(\phi - c)^2 \in W_{loc}^{2,1}(\mathbb{R})$, obtemos do Lema 6 e Lema 7 respectivamente,

$$\phi'(\xi) = 0 \text{ e } ((\phi - c)^2)''(\xi) = 0 \text{ q.t.p. em } C. \quad (3.13)$$

Em vista de $(\phi - c)^2 \in W_{loc}^{2,1}(\mathbb{R})$, temos que (3.9) acontece q.t.p. em \mathbb{R} , isto é,

$$(\phi')^2 + 2\phi^3 - 2c\phi = ((\phi - c)^2)'' + a \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}.$$

Em particular, a equação acima ocorre q.t.p. em C . Então, de (3.13) segue que

$$2\phi^3 - 2c\phi = a \quad \text{q.t.p. em } C.$$

Como $\mu(C) > 0$ e $\phi \equiv c$ em C , concluímos que $a = 2c^3 - 2c^2$. Isso mostra que todas as ondas viajantes da equação mCH satisfazem (TW1) – (TW3).

(\Leftarrow) Reciprocamente, note que da diferenciação de (3.10) temos

$$(\phi')^2 + 2\phi^3 - 2c\phi = ((\phi - c)^2)'' + a \quad \text{em } E \doteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i. \quad (3.14)$$

Se $\mu(C) = 0$, então (3.14) implica que

$$(\phi')^2 + 2\phi^3 - 2c\phi = ((\phi - c)^2)'' + a \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Como $((\phi - c)^2)'' \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ por (TW3), (3.15) implica (3.9) de modo que ϕ é uma solução onda viajante da equação mCH.

Resta verificar que (3.15) ocorre também no caso em que $\mu(C) > 0$. Suponha $\mu(C) > 0$. Como $\phi \in H_{loc}^1(\mathbb{R})$ e $(\phi - c)^2 \in W_{loc}^{2,1}(\mathbb{R})$, obtemos do Lema 6, respectivamente, Lema 7 que a equação (3.13) se verifica. De (ii) em (TW2) temos $a = 2c^3 - 2c^2$. Dessa forma, como $\phi \equiv c$ em C , obtemos que para q.t.p. $\xi \in C$,

$$(\phi')^2 + 2\phi^3 - 2c\phi = ((\phi - c)^2)'' + a.$$

Juntamente com (3.14), o que acabamos de mostrar implica (3.15) e, como já mencionado, o resultado segue. \square

Para provar os Teoremas 6 e 7, iremos mostrar que o conjunto das funções limitadas satisfazendo (TW1) – (TW3) do Lema 8, consiste exatamente das ondas apresentadas no enunciado destes teoremas.

Suponha que ϕ satisfaz (TW1) – (TW2). A partir de (TW1) e (TW2) existe um número contável de segmentos de onda C^∞ , separados por um conjunto fechado C tal que cada segmento de onda ϕ satisfaz

$$\begin{aligned} (\phi')^2 = F(\phi) \quad \text{para } \xi \in E, \quad F(\phi) &= \frac{\phi^2 \left(c - \frac{\phi^2}{2} \right) + a\phi + d}{c - \phi} \\ \text{e } \phi &\rightarrow c \text{ em qualquer ponto final finito de } E \end{aligned} \quad (3.16)$$

para algum intervalo E e constantes reais a e d . Se formos capazes de encontrar todas

as soluções de (3.16) para diferentes intervalos E e diferentes valores de a e d , então poderemos juntar soluções definidas em intervalos nos quais a união é $\mathbb{R} \setminus C$ para algum conjunto fechado C de medida nula e teremos a função que construímos definida em \mathbb{R} , satisfazendo (TW1) e (TW2) se, e somente se, todos os segmentos de onda satisfazem (3.16) com a mesma constante a . Além disso, se para $a = 2c^3 - 2c^2$ permitirmos $\mu(C) > 0$, esse procedimento nos dará todas as funções satisfazendo (TW1) e (TW2). Vamos mostrar que essas funções que acabamos de construir pertencem a $H_{loc}^1(\mathbb{R})$, satisfazem (TW3) e são exatamente as ondas nos Teoremas 6 e 7.

Para estudar (3.16), primeiro consideramos equações gerais da forma

$$(\phi')^2 = F(\phi), \quad (3.17)$$

sendo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função racional. Lenells em [26] explorou o comportamento qualitativo das soluções de (3.17) em pontos onde F possui um zero ou um polo. Em resumo, se $F(\phi)$ possui um zero simples em $\phi = m$ com $F'(m) > 0$, então a solução ϕ de (3.17) satisfaz

$$\phi(\xi) = m + \frac{1}{4}(\xi - \eta)^2 F'(m) + O((\xi - \eta)^4) \quad \text{quando } \xi \uparrow \eta, \quad (3.18)$$

sendo $\phi(\eta) = m$. Assumindo que $F(\phi)$ possui um zero duplo em m , com $F'(m) = 0$ e $F''(m) > 0$, obtemos

$$\phi(\xi) - m \approx \alpha \exp(-\xi \sqrt{F''(m)}) \quad \text{quando } \xi \rightarrow +\infty \quad (3.19)$$

para alguma constante α e, então, $\phi \downarrow m$ exponencialmente quando $\xi \rightarrow +\infty$. Dessa maneira, sempre que F possui dois zeros simples, digamos m e M , e $F(\phi) > 0$ para $m < \phi < M$, temos a existência de soluções periódicas. Por outro lado, se F possui um zero duplo em m , um zero simples em M e $F(\phi) > 0$ para $m < \phi < M$, então existem soluções com decaimento. Se F tem um zero simples em m e $F(\phi) > 0$ para $m < \phi$, não existem soluções ϕ limitadas. Se incluirmos todas as funções $\phi \in H_{loc}^1(\mathbb{R})$ que são soluções de (3.17) e não só as suaves, teremos outros comportamentos qualitativos. A saber, caso ϕ se aproxime de um polo simples de F , isto é, $\frac{1}{F(\phi)}$ tem um zero simples, então, para $\phi(\xi_0) = c$,

$$\phi(\xi) - c = \alpha |\xi - \xi_0|^{\frac{2}{3}} + O((\xi - \xi_0)^{\frac{4}{3}}) \quad \text{quando } \xi \rightarrow \xi_0, \quad (3.20)$$

sendo α uma constante adequada, e uma solução ϕ com um cúspide ocorre. Também, “peakons” acontecem quando a evolução de ϕ , de acordo com (3.17), muda repentinamente de direção, ou seja, $\phi' \mapsto -\phi'$.

3.3.1 Soluções particulares

Aplicando a discussão acima para o caso particular

$$F(\phi) = \frac{P(\phi)}{c - \phi}, \quad \text{com } P(\phi) = \phi^2 \left(c - \frac{\phi^2}{2} \right) + a\phi + d, \quad (3.21)$$

$a, d \in \mathbb{R}$, podemos classificar todas as soluções limitadas de (3.16). A prova é basicamente uma inspeção de todas as possíveis distribuições de zeros e polos de F .

Como $P(\phi)$ é um polinômio de quarto grau com coeficientes reais, possui um, dois ou quatro zeros reais contados com sua multiplicidade.

Para provar o Teorema 8 suponha $P(\phi)$ com apenas um zero real. Este zero possui multiplicidade dois, pois o polinômio $P(\phi)$ é do quarto grau. Sejam $m \in \mathbb{R}$ esse zero duplo e z, \bar{z} os outros zeros pertencentes a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Para essa distribuição de zeros, podemos escrever

$$P(\phi) = -\frac{1}{2}(\phi - m)^2(\phi - z)(\phi - \bar{z})$$

e, então, obter $F'(m) = 0$ e

$$F''(m) = -\frac{|m - z|^2}{c - m}.$$

Portanto, vemos que a solução ϕ da equação mCH satisfaz (3.19) para $c < m < \phi$ e, assim, ϕ não pode ser limitada. Se $\phi < m < c$, então $-F''(m) > 0$ e um resultado similar é obtido. Isso finaliza a demonstração do Teorema 8.

Suponha que existem dois zeros reais simples, digamos m e M , e vamos provar o Teorema 6. Para $z = \Re(z) + i\Im(z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, escrevemos

$$P(\phi) = \frac{1}{2}(M - \phi)(\phi - m)(\phi - z)(\phi - \bar{z})$$

e comparamos os coeficientes de (3.21), obtendo $\Re(z) = -(M + m)/2$ e $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ satisfazendo o hiperbolóide de duas folhas em $(m, M, \Im(z))$,

$$\frac{5}{4}m^2 + \frac{5}{4}M^2 - \Im(z)^2 + \frac{3}{2}mM - 2c = 0. \quad (3.22)$$

Além disso, temos

$$F'(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(M - m)|m - z|^2}{c - m}$$

e, de (3.18), deduzimos que existem soluções periódicas C^∞ de (3.16) se, e somente se, $m < M < c$ ou $c < M < m$. Para $P(\phi)$ com dois zeros simples, essas são todas as soluções C^∞ limitadas de (3.16). Note que essas soluções nunca tocam a assíntota $\phi = c$. Portanto, o intervalo E em (3.16) deve ser toda a reta real. Em particular, essas soluções C^∞ nunca podem ser coladas com uma outra onda.

Se tratando de soluções limitadas para (3.16), com $\phi \rightarrow c$ em um ponto final finito de E , colando duas dessas soluções originaremos uma nova onda não suave. “Peakons” periódicos, ocorrem se permitirmos $m < M = c$. De fato, considere ϕ uma solução com

$m \leq \phi \leq M$. Se ϕ é decrescente, alcançará m e retornará para cima até alcançar M . ϕ não pode parar ou retornar em nenhum ponto, pois ϕ não possui singularidades em pontos nos quais $\phi \neq c$. Mas, note que ϕ cresce até alcançar $\phi = c$ e pode fazer um retorno repentino neste ponto. Essa mudança repentina de direção de ϕ faz com que ϕ' tenha um salto, o qual dá origem a um pico. Para ver como “cuspons” periódicos surgem, considere $m < c < M$. Neste caso, $F(\phi)$ possui um zero simples em m , um polo simples em c e $F(\phi) > 0$ para $m < \phi < c$. Então, de (3.20) obtemos

$$\phi'(\xi) = \begin{cases} \frac{2}{3}\alpha|\xi - \xi_0|^{-\frac{1}{3}} + O((\xi - \xi_0)^{\frac{1}{3}}), & \text{quando } \xi \downarrow \xi_0 \\ -\frac{2}{3}\alpha|\xi - \xi_0|^{-\frac{1}{3}} + O((\xi - \xi_0)^{\frac{1}{3}}), & \text{quando } \xi \uparrow \xi_0. \end{cases} \quad (3.23)$$

para alguma constante α . Em particular, a solução terá um cúspide em ξ_0 .

Essas, são todas as soluções limitadas não triviais de (3.16) para essa distribuição de zeros do polinômio $P(\phi)$ e correspondem aos itens (a) – (c) e (a') – (c') do Teorema 6.

Para o Teorema 7, assuma que existem quatro zeros reais, digamos $m, M, z, e r$, e escreva

$$P(\phi) = \frac{1}{2}(M - \phi)(\phi - m)(\phi - z)(\phi - r).$$

Analogamente ao caso anterior, obtemos $z = -m - r - M$ com r satisfazendo a equação do elipsóide em (m, M, r) ,

$$r^2 + m^2 + M^2 + rm + rM + mM - 2c = 0, \quad (3.24)$$

$$F'(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(M - m)(m - z)(m - r)}{c - m}$$

e

$$F''(m) = \frac{(M - m)[(m - r) + (m - z)] - (m - z)(m - r)}{c - m} + \frac{(M - m)(m - z)(m - r)}{(c - m)^2}.$$

Também, concluímos que existem soluções periódicas C^∞ para (3.16) se, e somente se, $z < r < m < M < c$ ou $c < M < m < r < z$. Uma solução limitada ϕ com $\phi \downarrow m$ quando $\xi \rightarrow \pm\infty$, existe para $z < r = m < M < c$. Uma solução $\phi \uparrow m$ quando $\xi \rightarrow \pm\infty$, existe para $c < M < m = r < z$. Uma solução ϕ na qual ambos os casos ocorrem, isto é, $\phi \uparrow M$ quando $\xi \rightarrow +\infty$ e $\phi \downarrow m$ quando $\xi \rightarrow -\infty$, acontece para $z = m < M = r < c$ ou, ainda, para $c < r = M < m = z$ com $\phi \downarrow M$ e $\phi \uparrow m$ quando $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Além disso, para soluções ϕ limitadas de (3.16) com $\phi \rightarrow c$ em um ponto final finito de E temos, por exemplo, “peakons” periódicos se $z < r < m < M = c$ e “cuspons” com decaimento se consideramos $z < r = m < c < M$. Em geral, as diferentes possibilidades de soluções limitadas de (3.16) para $P(\phi)$ com quatro zeros reais são aquelas apresentadas em (a) – (g) e (a') – (g') do Teorema 7.

Observação 14. No Teorema 7 as soluções são definidas em toda a reta real. Aqui, estamos restringindo a solução em intervalos entre duas cristas no caso periódico e a

parte à esquerda ou à direita da crista no caso de ondas com decaimento. O intervalo E está definido de modo a ser uma semirreta ou um intervalo finito.

3.3.2 Composição de ondas viajantes

Vamos determinar quais soluções de (3.16) tem a mesma constante a e, assim, elas poderão ser coladas, originando uma nova função que mais tarde mostraremos satisfazer (TW3) e pertencer a $H_{loc}^1(\mathbb{R})$.

Podemos encontrar a constante de integração a , correspondente a uma solução ϕ , identificando os coeficientes de ϕ em (3.21). Para $P(\phi)$ com dois zeros reais simples, lembrando que $\Re(z) = -(M + m)/2$, obtemos

$$2a = (M + m)(|z|^2 - mM)$$

com $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ satisfazendo a equação (3.22). Mais especificamente, escrevendo a equação (3.22) em sua forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & M & \Im(z) \end{bmatrix}}_{X^t} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 & 0 \\ 3/4 & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_P \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ M \\ \Im(z) \end{bmatrix}}_X + J = 0,$$

sendo $J = [-2c]$, sabemos que existe uma matriz ortogonal Q para a qual o sistema matricial acima pode ser reescrito, equivalentemente, por $Y^t D Y + J = 0$, sendo

$$Y = QX = \begin{bmatrix} m_1 \\ M_1 \\ \Im(z)_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ou seja, a quádrlica (3.22) assume, após uma mudança de variáveis, a forma

$$-m_1^2 + \frac{1}{2}M_1^2 + 2\Im(z)_1^2 - 2c = 0.$$

A título de curiosidade, os valores $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1/2$ e $\lambda_3 = 2$ acima são os autovalores associados a matriz P . Além disso, Q pode ser obtida por dispor os autovetores de P associados aos autovalores λ_1 , λ_2 e λ_3 como vetores coluna, após o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt. Assim, a equação (3.22) se apresenta em sua forma reduzida, a menos de uma mudança de variáveis, por

$$\frac{m^2}{\alpha^2} - \frac{M^2}{\beta^2} - \frac{r^2}{\gamma^2} = 1,$$

com $\alpha = \sqrt{-2c}$, $\beta = 2\sqrt{-c}$ e $\gamma = \sqrt{-c}$, para $c < 0$.

Dessa forma, obtemos todas as funções limitadas satisfazendo (TW1) e (TW2) para

$P(\phi)$ com dois zeros simples por colagem, de todas as possíveis maneiras, das soluções correspondendo ao mesmo hiperbolóide de duas folhas. Note que as ondas resultantes dessa abordagem são exatamente as ondas do Teorema 6.

Analogamente, considerando $P(\phi)$ com quatro zeros reais, obtemos

$$2a = -(M + m)r^2 - (m + r)M^2 - (M + r)m^2 - 2mrM$$

sendo $z = -m - r - M$ e $r \in \mathbb{R}$ satisfazendo a equação (3.24). A quádrlica (3.24) se apresenta, a menos de uma mudança de variáveis, em sua forma reduzida

$$\frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{M^2}{\beta^2} + \frac{r^2}{\gamma^2} = 1,$$

com $\alpha = \beta = 2\sqrt{c}$ e $\gamma = \sqrt{c}$, para $c > 0$.

Novamente, colando, de todas as possíveis maneiras, as soluções correspondendo ao mesmo elipsóide, obtemos que todas as funções limitadas satisfazendo (TW1) e (TW2) para esta distribuição de zeros do polinômio $P(\phi)$ são as ondas do Teorema 7

Finalmente, para finalizar a demonstração dos Teoremas 6 e 7 é suficiente que essas ondas que acabamos de obter pertençam a $H_{loc}^1(\mathbb{R})$ e satisfaçam (TW3). Este fato é garantido pela Proposição 6, mas antes de apresentar a sua demonstração precisamos estabelecer algumas notações e resultados técnicos.

Definição 2. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, é dita ser de variação limitada se

$$\sup \sum_{i=1}^N |f(t_i) - f(t_{i-1})| < +\infty,$$

onde o supremo é tomado sobre todo natural N e sobre escolhas de partições $\{t_i\}_{i=1}^N$ tais que

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b.$$

Denotamos $BV(I)$ o conjunto das funções $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de variação limitada em I . $BV_{loc}(\mathbb{R})$ denota o espaço das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f \in BV(I)$ para todo intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$.

Definição 3. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida em algum conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma N -função se f aplica conjuntos de medida nula em conjuntos de medida nula, ou seja, $\mu(f(N)) = 0$ sempre que N é um subconjunto de X com $\mu(N) = 0$.

Lema 9. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, é absolutamente contínua se, e somente se, $f \in W_{loc}^{1,1}(X)$.

Lema 10. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, uma função contínua e de variação limitada. Então, f é absolutamente contínua se, e somente se, f é uma N -função.

Lema 11. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, é contínua e $|f|$ é absolutamente contínua, então f é absolutamente contínua.

A prova dos Lemas 9-11 pode ser encontrada em [19, 33].

Proposição 6. Qualquer função limitada ϕ satisfazendo (TW1) e (TW2) pertence a $H_{loc}^1(\mathbb{R})$ e satisfaz (TW3).

Demonstração. Considere E_i e C como em (TW1). Inicialmente vamos mostrar que ϕ é uma N -função. Para isso, seja N um conjunto de medida nula e escrevamos,

$$\phi(N) = \phi(N \cap C) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \phi(N \cap E_i) \right).$$

Em cada intervalo $\overline{E_i} \doteq N \cap E_i$, ϕ é C^∞ e de variação limitada, então de (3.20) e (3.23) obtemos que $\phi \in H^1(\overline{E_i})$, para todo i . Do Lema 10 segue que $\phi_i \doteq \phi|_{\overline{E_i}}$ é uma N -função em cada $\overline{E_i}$ para $i \geq 1$, pois como $\phi \in H^1(\overline{E_i})$ tem-se $\phi \in H_{loc}^1(\overline{E_i}) = W_{loc}^{1,2}(\overline{E_i}) \subset W_{loc}^{1,1}(\overline{E_i})$ o que é equivalente a dizer que ϕ_i é absolutamente contínua. Assim, como $\phi(N \cap C) = \{c\}$ e os intervalos E_i 's são disjuntos, vemos que

$$\mu(\phi(N)) = \mu(\{c\}) + \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(\phi(N \cap E_i)) = 0,$$

provando que ϕ é uma N -função.

Agora, vamos mostrar que $\phi \in BV_{loc}(\mathbb{R})$. Considere $\{i_k\}_{k=1}^{+\infty}$, ou simplesmente $\{j\}_{j=1}^{+\infty}$, uma subseqüência e I um subintervalo compacto tal que

$$I \subset C \cup \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j \right) \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} |E_j| < +\infty,$$

sendo $|E_j|$ o comprimento do intervalo E_j .

Suponha, por exemplo, o polinômio $P_j(\phi) = \phi^2(c - \phi^2/2) + a\phi + d_j$ com quatro zeros reais, digamos z_j, r_j, m_j e M_j , e o caso $z_j < r_j \leq m_j \leq \phi < c \leq M_j$. Para os outros casos temos ϕ suave e, portanto, a prova segue analogamente ao que faremos a seguir, com as devidas simplificações. Por (3.10) vemos que

$$\begin{aligned} 2 \int_{m_j}^c \frac{\sqrt{c - \phi}}{\sqrt{\left| \phi^2 \left(c - \frac{\phi^2}{2} \right) + a\phi + d_j \right|}} d\phi &= 2 \lim_{\eta \rightarrow \varepsilon_j} \int_{m_j}^{\phi(\eta)} \frac{1}{\phi'} d\phi = 2 \lim_{\eta \rightarrow \varepsilon_j} \int_{\eta_j}^{\eta} d\xi \\ &= |E_j|, \end{aligned} \tag{3.25}$$

em que ε_j denota o ponto final de E_j e $m_j = \phi(\eta_j)$.

Note que $P_j(c) \geq 0$ para todo j . Além disso, a derivada de P_j independe de j e, como

P_j possui quatro zeros, os d_j 's formam um conjunto limitado. Desse modo, obtemos

$$0 \leq P_j(\phi) \leq D(c - m_j), \quad m_j \leq \phi \leq c, \quad j \geq 1 \quad (3.26)$$

para alguma constante positiva D independente de j .

Então, usando (3.25) e (3.26) temos

$$\begin{aligned} |E_j| &= \int_{m_j}^c \frac{\sqrt{c - \phi}}{\sqrt{P_j(\phi)}} d\phi \geq \frac{2}{\sqrt{D}\sqrt{c - m_j}} \int_{m_j}^c \sqrt{c - \phi} d\phi \\ &= D_0(c - m_j), \quad j \geq 1. \end{aligned} \quad (3.27)$$

sendo $D_0 = 4/3\sqrt{D}$. Portanto, $\phi \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ pois a variação total de ϕ em I é limitada superiormente por

$$2 \sum_{j=1}^{+\infty} \left(c - \min_{\xi \in E_j} \phi(\xi) \right) = 2 \sum_{j=1}^{+\infty} (c - m_j) \leq \frac{2}{D_0} \sum_{j=1}^{+\infty} |E_j| < +\infty.$$

Agora, vamos mostrar que ϕ é contínua em I . Note que isso não é evidente, apesar de $\phi \rightarrow c$ em todo ponto final dos intervalos E_j 's. De fato, sabemos que ϕ é contínua em todos os pontos exceto naqueles onde $\phi(\xi) = c$. Seja $\xi_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(\xi_0) = c$, então temos dois casos. Primeiro, se existe um intervalo semiaberto $(\eta, \xi_0]$ tal que $(\eta, \xi_0] \cap \phi^{-1}(c) = \{\xi_0\}$, então ξ_0 é o ponto final à direita de um intervalo E_j . Como $\phi \rightarrow c$ em pontos finais finitos de E_j 's, concluímos que $\lim_{\xi \uparrow \xi_0} \phi(\xi) = c = \phi(\xi_0)$. Segundo, se todo intervalo semiaberto $(\eta, \xi_0]$, $\eta < \xi_0$, contém um subconjunto infinito de $\phi^{-1}(c)$. Neste caso, de (3.27) temos uma estimativa para a variação de ϕ em qualquer $E_j \subset (\eta, \xi_0]$, o que mostra que ϕ é contínua a esquerda em ξ_0 . Similarmente, provamos a continuidade a direita em ξ_0 .

Portanto, ϕ é contínua em I , ou seja, ϕ é contínua em \mathbb{R} . Ademais, ϕ é uma N -função de variação limitada e segue do Lema 10 que ϕ é absolutamente contínua. Isso significa, pelo Lema 9, que a derivada distribucional de ϕ está em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, ϕ é diferenciável no sentido clássico em quase todo ponto e as derivadas coincidem.

Para concluir que $\phi \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, vamos mostrar que $\phi' \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. De (3.10) e (3.26), obtemos

$$\int_{E_j} (\phi')^2 d\xi \leq \sqrt{D}\sqrt{c - m_j} \int_{m_j}^c \frac{1}{\sqrt{c - \phi}} d\phi = 2\sqrt{D}(c - m_j), \quad j \geq 1$$

e, assim, por (3.27),

$$\int_{E_j} (\phi')^2 d\xi \leq \frac{3}{2}D|E_j|, \quad j \geq 1.$$

Logo,

$$\int_{\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j} (\phi')^2 d\xi \leq \frac{3}{2}D \sum_{j=1}^{+\infty} |E_j| < +\infty.$$

Como o Lema 6 implica que $\phi' = 0$ q.t.p. em $C = \phi^{-1}(c)$, segue da desigualdade acima

que $\phi \in H_{loc}^1(\mathbb{R})$.

Finalmente, resta provar que $(\phi - c)^2 \in W_{loc}^{2,1}(\mathbb{R})$. Para isso vamos mostrar que $|(\phi - c)\phi'|$ é de variação limitada, contínua e uma N -função. Como $\phi' \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$ e $\phi' = 0$ q.t.p. em C , temos $(\phi - c)\phi' = 0$ q.t.p. em C . Além disso, por (3.10),

$$|(\phi - c)\phi'| = \sqrt{P_j(\phi)}\sqrt{c - \phi}, \quad \xi \in E_j, \quad j \geq 1 \quad (3.28)$$

e, assim, $|(\phi - c)\phi'|$ é C^∞ em qualquer intervalo E_j e $|(\phi - c)\phi'| \rightarrow 0$ em pontos finais finitos de E_j . Na realidade, em cada E_j , $|(\phi - c)\phi'|$ é uma função simétrica com relação ao ponto médio de E_j com dois máximos locais. Logo, por (3.26) e (3.27), a variação total de $|(\phi - c)\phi'|$ em I é limitada por

$$4 \sum_{j=1}^{+\infty} \sup_{\xi \in E_j} |(\phi(\xi) - c)\phi'(\xi)| = 4 \sum_{j=1}^{+\infty} \sup_{\xi \in E_j} \sqrt{P_j(\phi)} \sup_{\xi \in E_j} \sqrt{c - \phi} \leq \frac{8}{3} \sum_{j=1}^{+\infty} |E_j| < +\infty.$$

Isso mostra que $|(\phi - c)\phi'| \in BV_{loc}(\mathbb{R})$.

Agora, de (3.28), vemos que $|(\phi - c)\phi'|$ é contínua. Então, escrevendo

$$|(\phi - c)\phi'| (N) = |(\phi - c)\phi'| (N \cap C) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} |(\phi - c)\phi'| (N \cap E_j) \right)$$

e fazendo uso do Lema 10 com $|(\phi - c)\phi'|$ restrita a $N \cap E_j$, obtemos que $|(\phi - c)\phi'|$ é uma N -função, já que pelas equações (3.20) e (3.23) vemos que $|(\phi - c)\phi'|$ é absolutamente contínua.

Novamente, aplicando o Lema 10, garantimos que $|(\phi - c)\phi'|$ é absolutamente contínua. Além disso, como $(\phi - c)\phi'$ é C^∞ em E_j e, para $\xi \in C$, $(\phi(\xi) - c)\phi'(\xi) = |(\phi - c)\phi'|(\xi) = 0$, temos que $(\phi - c)\phi'$ é contínua. Portanto, o Lema 11 implica que $(\phi - c)\phi'$ é absolutamente contínua.

Concluimos de (3.20), que $(\phi - c)^2$ é absolutamente contínua e, então, suas derivadas distribucional e clássica coincidem. Assim, pelo que vimos acima,

$$[(\phi - c)^2]' = 2(\phi - c)\phi' \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R})$$

e, conseqüentemente, $(\phi - c)^2 \in W_{loc}^{2,1}(\mathbb{R})$. □

3.4 Dependência dos parâmetros

Além dos Teoremas 6 e 7 é possível caracterizar a relação entre as ondas viajantes da equação mCH e os parâmetros m , M e c . A saber, tais ondas viajantes dependem continuamente desses parâmetros.

Teorema 9. *Sejam (m_i, M_i, c_i) , $i \geq 1$, e (m, M, c) tais que existam ondas viajantes correspondentes a equação mCH de acordo com (a) – (c) do Teorema 6, ou (a) – (g) do*

Teorema 7. Sejam ϕ_i , $i = 1, 2, \dots$ e ϕ as referidas ondas viajantes transladadas de tal forma que todas tenham crista em $\xi = 0$. Se $(m_i, M_i, c_i) \rightarrow (m, M, c)$, então $\phi_i \rightarrow \phi$ em $H_{loc}^1(\mathbb{R})$. Em particular, temos convergência uniforme em conjuntos compactos.

Ideia da demonstração. Assuma (m_i, M_i, c_i) , $i \geq 0$, e (m, M, c) como no enunciado do Teorema 6 ou 7 e, ϕ_i e ϕ as correspondentes ondas viajantes com crista no zero.

Note que para a equação mCH, obtemos de (3.10) e (3.11) que ϕ e ϕ_i são dadas implicitamente por

$$\xi = \begin{cases} \xi_0 + \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{dy}{\sqrt{F(y)}}, & \phi' > 0 \\ \xi_0 - \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{dy}{\sqrt{F(y)}}, & \phi' < 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

sendo $\phi(\xi_0) = \phi_0$. Além disso, escolhendo $\xi_0 = 0$, temos $\phi_0 = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi) = \min\{M, c\}$ e

$$\xi = - \int_{\min\{M, c\}}^{\phi} \frac{dy}{\sqrt{F(y)}}, \quad 0 < \xi < \frac{L}{2},$$

com L denotando o período de ϕ e dado por

$$L = 2 \int_m^{\min\{M, c\}} \frac{dy}{\sqrt{F(y)}} = 2 \int_m^{\min\{M, c\}} \frac{\sqrt{c-y}}{\sqrt{P(y)}} dy.$$

O restante da demonstração segue uma linha similar a do Teorema 2 em [26], considerando as diferentes distribuições de zeros do polinômio $P(\phi) = \phi^2(c - \phi^2/2) + a\phi + d$ ao invés de $P(\phi) = \phi^2(c - 2k - \phi) + a\phi + d$, com $k \in \mathbb{R}$, nas equações (6.4), (6.13) e (6.17) de [26]. \square

Também, o Teorema 9 é verdadeiro para ondas satisfazendo $(a') - (c')$ e $(a') - (g')$ dos Teoremas 6 e 7, respectivamente.

3.5 Fórmulas explícitas para “peakons”

Suponha ϕ uma onda viajante correspondente aos itens (d) – (e) do Teorema 7. Nesta seção, vamos determinar fórmulas explícitas para tais ondas “peaked”.

De (3.29), temos

$$|\xi - \xi_0| = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{dy}{\sqrt{F(y)}} = \sqrt{2} \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\sqrt{c-y}}{\sqrt{(M-y)(y-m)(y-z)(y-r)}} dy. \quad (3.30)$$

Fazendo a mudança de variável $\phi = m + (M - m)\text{sen}^2(\theta)$, reescrevemos (3.30) por

$$|\xi - \xi_0| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{M-m}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sqrt{A - \text{sen}^2(t)}}{\sqrt{B + \text{sen}^2(t)}\sqrt{C + \text{sen}^2(t)}} dt, \quad (3.31)$$

sendo

$$A = \frac{c-m}{M-m}, \quad B = \frac{m-r}{M-m} \quad \text{e} \quad C = \frac{m-z}{M-m}.$$

O período de ϕ é dado por

$$\begin{aligned} L &= 2\sqrt{2} \int_m^{\min\{M,c\}} \frac{\sqrt{c-y}}{\sqrt{(M-y)(y-m)(y-z)(y-r)}} dy \\ &= 4 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{M-m}} \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} \frac{\sqrt{A-\sin^2(t)}}{\sqrt{B+\sin^2(t)}\sqrt{C+\sin^2(t)}} dt. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Assuma que ϕ é uma solução “peakon” periódica como no item (d) do Teorema 7. Então, $A = 1$ e $B, C > 0$, com $B \neq C$. De (3.31), temos

$$\begin{aligned} |\xi - \xi_0| &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{M-m}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos(t)}{\sqrt{B+\sin^2(t)}\sqrt{C+\sin^2(t)}} dt \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{M-m}} \left[-\frac{i}{\sqrt{C}} \cdot F \left(\operatorname{arcsen} \left(\frac{i}{B} \sin(t) \right) ; \sqrt{\frac{B}{C}} \right) \right] \Big|_{\theta_0}^{\theta}, \end{aligned}$$

com F denotando a integral elíptica do primeiro tipo (veja Apêndice A.2), desde que $0 < B/C < 1$.

Escolhendo ξ_0 de modo que $\phi(\xi_0) = m$, ou seja, ξ_0 é uma “calha”, vemos que $\theta_0 = 0$. Além disso, como $M = c$ obtemos que $\sin(\theta) = \sqrt{\phi - m}/\sqrt{c - m}$. Então

$$|\xi - \xi_0| = -\frac{i}{D_1} \cdot F \left(i \cdot \operatorname{arcsenh} \left(\frac{1}{B} \sqrt{\frac{\phi - m}{c - m}} \right) ; k \right),$$

sendo $D_1 = \sqrt{C}\sqrt{c-m}/2\sqrt{2}$ e $k = \sqrt{B/C}$ o módulo da integral elíptica (veja Apêndice A.2).

Portanto, pelas propriedades da integral elíptica do primeiro tipo [9], segue que

$$\operatorname{sen} \left(i \cdot \operatorname{arcsenh} \left(\frac{1}{B} \sqrt{\frac{\phi - m}{c - m}} \right) \right) = \operatorname{sn}(D_1|\xi - \xi_0|i ; k),$$

sendo sn uma função elíptica de Jacobi (veja Apêndice A.2).

Logo, resolvendo esta equação concluímos que uma fórmula explícita para “peakons” periódicos da equação mCH é dada por

$$\phi(\xi) = m + D_2 \operatorname{tn}^2(D_1|\xi - \xi_0| ; k'), \quad |\xi - \xi_0| \leq \frac{L}{2},$$

sendo

$$L = D_3 \cdot F \left(\operatorname{arcsen} \left(\sqrt{\frac{1/B^2}{1+1/B^2}} \right) ; k' \right)$$

o período da onda ϕ obtido de (3.32), $D_2 = B^2(c-m)$, $D_3 = 2/D_1$, $k'^2 = 1 - k^2$ e tn uma função elíptica de Jacobi (veja Apêndice A.2).

Se ϕ é uma solução do tipo “peakon” com decaimento como no item (e) do Teorema

7, então $A = 1$, $B = 0$ e $C > 0$. Assim, (3.31) nos dá

$$|\xi - \xi_0| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{M-m}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)\sqrt{C + \sin^2(t)}} dt = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{C}\sqrt{M-m}} \left[-\operatorname{arccsch}|t| \right] \Big|_{\frac{\sin(\theta_0)}{\sqrt{C}}}^{\frac{\sin(\theta)}{\sqrt{C}}}.$$

Escolhendo ξ_0 como um ponto de pico, ou seja, $\phi(\xi_0) = c$, obtemos que $\sin(\theta_0) = \sin(\theta_{\max}) = 1$. Ainda, como $M = c$, vemos que $\sin(\theta) = \sqrt{\phi - m}/\sqrt{c - m}$. Portanto,

$$|\xi - \xi_0| = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{C}\sqrt{c-m}} \left[\operatorname{arccsch} \left| \frac{\sqrt{\phi - m}}{\sqrt{C}\sqrt{c-m}} \right| - \operatorname{arccsch} \left(\frac{1}{\sqrt{C}} \right) \right].$$

Agora, usando a identidade

$$\operatorname{arccsch}(x) = \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right) = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \right); \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0$$

na equação acima, concluímos que

$$-\frac{\sqrt{C}\sqrt{M-m}|\xi - \xi_0|}{2\sqrt{2}} = \ln \left(\frac{\frac{\sqrt{C}\sqrt{c-m}}{\sqrt{\phi-m}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\phi-m}{C(c-m)}} \right)}{\sqrt{C} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{C}} \right)} \right).$$

Logo,

$$\phi(\xi) = m + \frac{D_4 e^{-D_5 |\xi - \xi_0|}}{(D_6 e^{-D_5 |\xi - \xi_0|} - 1)^2}$$

é a expressão de uma onda viajante “peaked” com decaimento, com $D_4 = 4C^2(c-m)(1 + \sqrt{1 + 1/C})^2$, $D_5 = \sqrt{C}\sqrt{c-m}/\sqrt{2}$ e $D_6 = C(1 + \sqrt{1 + 1/C})^2$.

A.1 Fórmula de Cardano-Tartaglia

A fórmula de Cardano-Tartaglia [28] estabelece uma relação entre os coeficientes de uma equação geral de terceiro grau $A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0$ e suas respectivas raízes. A saber,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

é uma solução da equação reduzida $x^3 + px + q = 0$, obtida da equação geral de terceiro grau citada acima por uma substituição da forma $x = y - \frac{A_2}{3A_3}$, sendo

$$p = -\frac{A_2^2}{3A_3^2} + \frac{A_1}{A_3} \quad \text{e} \quad q = \frac{2A_2^3 - 9A_3A_2A_1 + 27A_3^2A_0}{27A_3^3}. \quad (\text{A.1})$$

Mais ainda, denotando

$$D_1 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}, \quad (\text{A.2})$$

sabemos de [28] que se $D_1 > 0$ a equação reduzida do terceiro grau citada anteriormente tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas; se $D_1 = 0$, tem-se três raízes reais, sendo uma repetida; se $D_1 < 0$ então as três raízes da equação reduzida $x^3 + px + q = 0$ são reais e distintas.

A.2 Funções elípticas de Jacobi

Para definir as funções elípticas de Jacobi, primeiramente vamos denominar uma função racional $f(k, x)$, com $k, x \in \mathbb{R}$, como uma função que é a raiz quadrada de um polinômio, sendo k^2 uma função polinomial cúbica ou quártica de x sem fator repetido,

ou seja, do tipo $k^2 = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4$. Dessa forma,

$$\int f(k, x) dx$$

é a denominada *integral elíptica*. Para exemplificar, podemos citar a integral

$$a \int_0^a \frac{(1 - k^2x^2) dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}},$$

que corresponde ao comprimento do arco de uma elipse de excentricidade k e eixo maior $2a$.

Agora, vamos introduzir algumas formas canônicas para estas funções, a saber

$$F(\varphi, k) = F_k(\varphi) = \int_0^{\text{sen}\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} \quad (\text{A.3})$$

e

$$E(\varphi, k) = E_k(\varphi) = \int_0^{\text{sen}\varphi} \frac{\sqrt{(1 - k^2x^2)}}{\sqrt{(1 - x^2)}} dx, \quad (\text{A.4})$$

denominadas *integrais elípticas de primeira e segunda espécie*, respectivamente.

Fazendo a mudança de variável $x = \text{sen}\varphi \Leftrightarrow \varphi = \text{sen}^{-1}x$ temos $\frac{dx}{d\varphi} = \cos\varphi$, $x = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$, $x = \text{sen}\phi \Leftrightarrow \varphi = \text{sen}^{-1}(\text{sen}\phi) = \phi$ e, obtemos, respectivamente, as integrais elípticas de primeira e segunda espécie:

$$\begin{aligned} F(\phi, k) &= F_k(\phi) = \int_0^{\text{sen}\phi} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} = \int_0^{\phi} \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{(1 - \text{sen}^2\varphi)(1 - k^2\text{sen}^2\varphi)}} \\ &= \int_0^{\phi} \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi} \sqrt{(1 - k^2\text{sen}^2\varphi)}} = \int_0^{\phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2\text{sen}^2\varphi)}} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

e

$$\begin{aligned} E(\phi, k) &= E_k(\phi) = \int_0^{\text{sen}\phi} \frac{\sqrt{(1 - k^2x^2)}}{\sqrt{(1 - x^2)}} dx = \int_0^{\phi} \frac{\sqrt{(1 - k^2\text{sen}^2\varphi)} \cos\varphi d\varphi}{\sqrt{(1 - \text{sen}^2\varphi)}} \\ &= \int_0^{\phi} \frac{\sqrt{1 - k^2\text{sen}^2\varphi} \cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}} = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2\text{sen}^2\varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

O parâmetro k é dito o *módulo* da integral elíptica, com $0 \leq k^2 \leq 1$, e $k'^2 = 1 - k^2$ o seu *módulo complementar*. Além disso, o parâmetro ϕ é chamado de *amplitude* e, geralmente, é tomado pertencente ao intervalo $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Quando $\phi = \frac{\pi}{2}$, as integrais $F(\frac{\pi}{2}, k)$ e $E(\frac{\pi}{2}, k)$ são denominadas *integrais elípticas completas de primeira e segunda espécie*, respectivamente, e denotadas por

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right). \quad (\text{A.7})$$

Finalmente, as *funções elípticas de Jacobi* são definidas como as inversas da integral

elíptica de primeira ordem. Note que a existência dessa inversa é garantida pelo fato de $F(\phi, k)$ ser bijetora, já que u é uma função estritamente crescente e, portanto, injetora, e na sua forma algébrica, essa integral possui a propriedade de ser finita para todos os valores de x , logo, também é, sobrejetora. Dessa forma, definindo $u = F(\phi, k)$, ou seja,

$$u = \int_0^\phi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

a função inversa é denominada a *função amplitude* $\phi = \text{am}(u, k) = \text{amu}$.

Existem várias funções elípticas jacobianas [9], mas aqui definimos apenas as funções snoidal, cnoidal e dnoidal, denotadas por sn , cn e dn , respectivamente, da seguinte forma

$$\begin{cases} \text{sn}(u, k) = \sin \text{am}(u, k) = \sin \phi, \\ \text{cn}(u, k) = \cos \text{am}(u, k) = \cos \phi, \\ \text{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(u, k)}. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

e que satisfazem as relações fundamentais:

1. $\text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1$;
2. $k^2 \text{sn}^2 u + \text{dn}^2 u = 1$;
3. $k'^2 \text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = \text{dn}^2 u$;
4. $-1 \leq \text{sn} u \leq 1$;
5. $-1 \leq \text{cn} u \leq 1$;
6. $k'^2 \leq \text{dn} u \leq 1$;
7. sn é uma função ímpar, ou seja, $\text{sn}(-u) = -\text{sn} u$;
8. cn e dn são funções pares, ou seja, $\text{cn}(-u) = \text{cn} u$ e $\text{dn}(-u) = \text{dn} u$.

Além disso, como em [9], podemos listar alguns valores especiais e algumas propriedades das integrais elípticas completas de primeira e segunda espécies,

1. $K'(k) > 0$,
2. $E'(k) < 0$,
3. $E(k) < K(k)$,
4. $E(k) + K(k)$ e $E(k)K(k)$ são funções estritamente crescentes em $(0, 1)$,
5. $\frac{dK(k)}{dk} = \frac{E(k) - k'^2 K(k)}{kk'^2}$,
6. $\frac{dE(k)}{dk} = \frac{E(k) - K(k)}{k}$.

A.3 Relações de Girard

As relações de Girard apresentam uma importante relação entre as raízes e os coeficientes de um polinômio. Vamos explicitar estas relações para um polinômio de grau três. Consideramos, o polinômio de grau três $F(x) = A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$, com $A_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 0, 1, 2, 3$ e $A_3 \neq 0$, cujas raízes são x_1, x_2 e x_3 . Então,

$$A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = A_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{A_2}{A_3}x^2 + \frac{A_1}{A_3}x + \frac{A_0}{A_3} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{A_2}{A_3}x^2 + \frac{A_1}{A_3}x + \frac{A_0}{A_3} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3.$$

Agora, igualando os coeficientes, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{A_2}{A_3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{A_1}{A_3} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{A_0}{A_3} \end{cases} .$$

que são as *relações de Girard* para o polinômio de grau três $F(x)$.

O Problema de Sturm-Liouville e a Teoria de Floquet

Em 1800, devido ao trabalho iniciado por Jacques Charles François Sturm (1803-1855) e Joseph Liouville (1809-1882) acerca do operador diferencial linear de segunda ordem,

$$\mathcal{L}[y(x)] = \frac{1}{\omega} \left[-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) \right],$$

com peso ω , a equação diferencial não-homogênea

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) = f(x) \tag{B.1}$$

ficou conhecida como *equação diferencial de Sturm-Liouville*. O trabalho era essencialmente resolver um problema de autovalores para o operador diferencial \mathcal{L} , já que o peso ω naturalmente aplica-se para o espectro nesta forma. Para se ter uma ideia da importância deste tipo de equação, vejamos o que segue.

Exemplo 1. (O Átomo de Hidrogênio) Na mecânica quântica, Erwin Schrödinger (1887-1961) modelou o problema para determinar o estado de partículas que são comparáveis em uma escala Planck (\hbar), a saber

$$\hat{H}\Phi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x, t) \right] \Phi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t},$$

sendo m a massa da partícula e $V(x, t)$ o potencial do sistema. Há grande semelhança desta equação com a equação hamiltoniana clássica, de modo que parece plausível pensar em obter resultados análogos na mecânica quântica. No caso do átomo de hidrogênio, trabalha-se com um potencial eletrostático em \mathbb{R}^3 ,

$$V(x, t) = V(|x|) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|x|},$$

com $q, \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$. Após algumas separações de variáveis, $\Phi(x, t) = \Psi(x)\psi(t)$ e $\Psi(x) = R(r)Y(\theta, \phi)$, e uma expansão do laplaciano, obtemos as equações separadas

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar} [V(r) - \lambda] R(r) = l(l+1)R(r)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = -l(l+1) \sin \theta Y(\theta, \phi),$$

com $l(l+1) \in \mathbb{C}$, que são duas equações de Sturm-Liouville.

Exemplo 2. (*A Equação da Onda*) Leonhard Euler (1707-1783) se deparou com um modelo para descrever ondas em \mathbb{R}^3 dado por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0.$$

Assumindo uma solução separável $u(t, x) = T(t)P(x)$, obtém-se outro exemplo de um problema de Sturm-Liouville. A saber, o problema de autovalores do laplaciano

$$\Delta P = -\lambda P,$$

que pode ser expandido em coordenadas cartesianas, ao invés de coordenadas esféricas como no exemplo anterior, para obter a equação de Fourier

$$X_i'' = -\lambda_i X_i$$

sendo $P(x) = X_1 X_2 X_3$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda$.

Note que se considerarmos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ q & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ y^{[1]} \end{bmatrix},$$

em que

$$(y^{[1]})' = \frac{d}{dx}(py') \quad \text{e} \quad y' = \frac{dy}{dx},$$

temos uma formulação matricial para a equação (B.1) dada por

$$\dot{Y} = AY + F \Leftrightarrow -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) = f(x).$$

Dessa forma, como podemos ver em [34], teoremas de existência e unicidade, bem como algumas propriedades de equações diferenciais matriciais, podem ser transferidos para a equação de Sturm-Liouville.

Queremos responder algumas questões sobre o problema de Sturm-Liouville, para isso, vamos utilizar a teoria de Floquet, que nada mais é que o estudo de sistemas diferenciais

periódicos. Começamos definindo a conhecida *equação de Hill*, em sua forma mais geral,

$$-(py')' + qy = \lambda\omega y \quad \text{em } J = (a, b), \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty, \quad (\text{B.2})$$

com coeficientes satisfazendo

$$\frac{1}{p}, q, \omega \in L_1(J, \mathbb{R}). \quad (\text{B.3})$$

Em particular, quando o coeficiente $p(x)$ for periódico, diremos que a equação de Hill é periódica.

Pela unicidade da solução da equação de Sturm-Liouville, podemos reduzir a equação de Hill (B.2) no sistema equivalente $X(t) = e^{At}$ (veja [34]), sendo

$$\dot{X} = AX, \quad \text{e } A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ q - \lambda\omega & 0 \end{bmatrix},$$

obtendo, assim, que todas as boas propriedades da função exponencial continuam válidas neste caso.

Agora, para introduzir condições de contorno ao problema de Sturm-Liouville, exigiremos uma condição da forma

$$AY(a) + BY(b) = 0, \quad (\text{B.4})$$

sendo $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ e $Y = \begin{bmatrix} y \\ y^{[1]} \end{bmatrix}$. A dicotomia das condições de contorno consistem de dados que diremos serem *separados* ou *acoplados*. A condição de separação é classificada do mesmo modo como soa seu nome, isto é, podemos separar a equação (B.4), equivalentemente, em duas outras condições,

$$A_1y(a) + A_2y^{[1]}(a) = 0 \quad \text{e} \quad B_1y(b) + B_2y^{[1]}(b) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Isso corresponde a obtermos

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, também impomos adicionalmente que $\vec{A} = (A_1, A_2) \neq 0$ e $\vec{B} = (B_1, B_2) \neq 0$, pois se \vec{A} ou \vec{B} é for nulo, a solução do problema de Sturm-Liouville será a trivial. Já a condição de contorno acoplada toma a forma

$$Y(a) = e^{i\gamma}KY(b), \quad \text{com } K \in \mathbb{SL}(2, \mathbb{C}), \quad \gamma \in (-\pi, \pi], \quad (\text{B.6})$$

sendo $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ o grupo linear especial das matrizes 2×2 com entradas complexas. Em particular, se a matriz K possui apenas entradas reais, então se $\gamma = 0$ diremos que esta é uma condição *real acoplada*, caso contrário, para $\gamma \neq 0$ chamaremos a condição de

contorno de *complexa acoplada*.

Em ambos os casos exigiremos

$$\text{rank}([A|B]) \equiv \text{rank} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = 2, \quad (\text{B.7})$$

pois com o sistema de condições de contorno sendo de posto completo garantimos que existe uma solução não nula para do problema (B.2), já que se o posto de $[A|B]$ não for completo, existe uma redução do sistema atual de condições de contorno para um sistema que requer a condição $y(\cdot) = y^{[1]}(\cdot) = 0$, que pode somente ser satisfeita pela solução nula.

Introduzimos, também, a condição que iremos denominar por *autoadjunto* e chamaremos de *problema de Sturm-Liouville autoadjunto* o problema de valores de contorno explícito acima com a hipótese adicional

$$AEA^* = BEB^*, \quad \text{sendo } E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Lema 12. *Considere a condição de contorno (B.4) com matrizes A e B satisfazendo (B.7) e (B.8), então (B.4) ou será separada, ou real acoplada ou complexa acoplada.*

Demonstração. Veja [34], Lema 4.2.1, página 71. □

Teorema 10. *Considere o problema de Sturm-Liouville autoadjunto consistindo da equação (B.2) com coeficientes satisfazendo (B.3) e condições de contorno (B.4) satisfazendo (B.7) e (B.8). Assuma que p é uma função a valores reais em J e*

$$\omega > 0 \text{ q.t.p. em } J.$$

Então, todos os autovalores são reais, isolados, com nenhum ponto de acumulação e existe um número infinito mas contável deles.

Demonstração. Veja [34], Teorema 4.3.1, página 72. □

Agora, enunciaremos um teorema bastante útil no estudo da teoria espectral e que pode ser encontrado com todos os detalhes em [11]. Este resultado estabelece uma relação entre os coeficientes da equação (B.2), mais especificamente $p(x)$, e o problema de Sturm-Liouville periódico, isto é, o problema de Sturm-Liouville com o coeficiente $p(x)$ periódico. Assim, estabelecendo para o problema periódico as condições de contorno periódicas

$$y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1) \quad (\text{B.9})$$

e, antiperiódicas,

$$y(0) = -y(1), \quad y'(0) = -y'(1), \quad (\text{B.10})$$

temos o seguinte teorema:

Teorema 11. *Os autovalores, digamos λ_n com $n \in \mathbb{N}_0$ e μ_n com $n \in \mathbb{N}$, para (B.2) com (B.9) e para (B.2) com (B.10), respectivamente, formam uma sequencia tal que*

$$-\infty < \lambda_0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_3 \leq \mu_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \cdots, \quad (\text{B.11})$$

com $\lambda_n, \mu_n \rightarrow +\infty$, quando $n \rightarrow +\infty$. Para $\lambda = \lambda_0$ existe uma única autofunção, φ_0 . Se $\lambda_{2n+1} < \lambda_{2n+2}$ para algum $n \in \mathbb{N}_0$, então existe uma única autofunção φ_{2n+1} para $\lambda = \lambda_{2n+1}$ e uma única autofunção φ_{2n+2} para $\lambda = \lambda_{2n+2}$. Se, contudo, $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$, então existem duas autofunções independentes $\varphi_{2n+1}, \varphi_{2n+2}$ para $\lambda = \lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$. Resultados similares valem para os casos $\mu_{2n+1} < \mu_{2n+2}$ e $\mu_{2n+1} = \mu_{2n+2}$, sendo as autofunções denotadas por ψ_{2n+1} e ψ_{2n+2} . Além disso, φ_0 não tem zeros em $[0, 1]$; $\varphi_{2n+1}, \varphi_{2n+2}$, para $n \in \mathbb{N}_0$, tem exatamente $2n + 2$ zeros em $[0, 1]$; e ψ_{2n+1}, ψ_{2n+2} , para $n \in \mathbb{N}$, tem exatamente $2n + 1$ zeros em $[0, 1]$.

Demonstração. Veja [11], Teorema 3.1, página 214. □

Além das referências já citadas, outros resultados acerca da teoria espectral para o problema de Sturm-Liouville bem como critérios para multiplicidade de autovalores, também podem ser encontrados em [25].

Por fim vejamos a análise do problema de autovalores periódicos em $H_{\text{per}}^1([0, L])$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_c u = \lambda u \\ u(0) = u(L) \\ u'(0) = u'(L). \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

O estudo desse problema, feito por Dubrovin [17] e Novikov [31], usando a teoria de Floquet, para o operador geral

$$\mathcal{L}_c = q_n(\xi) \frac{d^{(n)}}{d\xi^{(n)}} + q_{n-2}(\xi) \frac{d^{(n-2)}}{d\xi^{(n-2)}} + \cdots + q_1(\xi) \frac{d}{d\xi} + q_0(\xi), \quad (\text{B.13})$$

estabelece que o espectro de tal operador é constituído por n intervalos finitos (ou, da literatura, simplesmente, n “gaps”) e um intervalo infinito. Os pontos finais desses intervalos são autovalores do operador \mathcal{L}_c ordenados de forma crescente e existe um número infinito de autovalores discretos dentro do intervalo de comprimento infinito, os quais possuem multiplicidade igual a dois. Além disso, considerando o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -u'' + q_n(\xi)u = \lambda u \\ u(0) = u(L) = 0, \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

cujos espectro é um conjunto discreto, digamos $\{\nu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, temos que todos menos uma quantidade n destes pontos pertence ao intervalo infinito estabelecido anteriormente e, mais ainda, cada um destes n pontos remanescentes pertence a um “gap” diferente do espectro do operador \mathcal{L}_c , Fig. B.1.

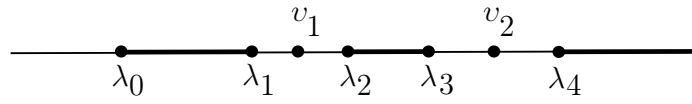


Figura B.1: Espectro do operador \mathcal{L}_c com 2 “gaps”.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRADE, T. P. & PASTOR, A., **Orbital stability of periodic traveling-wave solutions for the regularized Schamel equation**. *Physica D*, 317 (2016), 43-58.
- [2] ARRUDA, L. K., **Nonlinear stability properties of periodic travelling wave solutions of the classical Korteweg-de Vries and Boussinesq equations**. *Portugaliae Mathematica*, Vol.66, Fasc.2 (2009), 225-259.
- [3] ANGULO PAVA, J., **Nonlinear stability of periodic traveling wave solutions to the Schrödinger and the modified Korteweg-de Vries equations**. *J. Differential Equations* 235 (2007) 1-30.
- [4] ANGULO PAVA, J., CARDOSO, E. & NATALI, F., **Nonlinear stability of periodic traveling wave solutions to the Schrödinger and the modified Korteweg-de Vries equations**. *J. Differential Equations* 235 (2007) 1-30.
- [5] BENJAMIN, T. B., **The stability of solitary waves**. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 328 (1972) 153-183.
- [6] BONA J. L., **On the stability of solitary waves**. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 344 (1975) 363-374.
- [7] BONA J. L., PAVA J. A. & SCIALOM M., **Stability of cnoidal waves**. *Advances in Differential Equations* 11 (2006), 1321-1374.
- [8] BURGER, R., LABAHN G. & HOEIJ M., **Closed Form Solutions of Linear Odes having Elliptic Function Coefficients**. *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation ISSAC* (2004), 58-64.
- [9] BYRD, P. F. & FRIEDMAN, M. D. **Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists**. New York: Springer, 1971.

- [10] CAMASSA, R. & HOLM, D., **An integrable shallow water equation with peaked solitons**. Phys. Rev. Lett. 71 (1993), 1661-1664.
- [11] CODDINGTON, E. & LEVINSON, N., **Theory of Ordinary Differential Equations**. New York: TMH, 1987.
- [12] CONSTANTIN, A., **On the Cauchy Problem for the Periodic Camassa-Holm Equation**. Journal of Differential Equations 141 (1997), 218-235.
- [13] CONSTANTIN, A. & STRAUSS, W. A., **Stability of the Camassa-Holm Solitons**. J. Nonlinear Sci. 12 (2002), 415-422.
- [14] DECONINCK, B. & KAPITULA, T., **On the spectral and orbital stability of spatially periodic stationary solutions of generalized Korteweg-de Vries equations**. “Hamiltonian Partial Differential Equations and Applications”, Fields Institute Communications: Springer 75 (2015) 285-322.
- [15] DEGASPERIS, A. & PROCESI, M., **A new integrable equation with peakon solutions**,. Theor. Math. Phys. 133 (2002) 1461-1472.
- [16] DENG, X., **A note on exact travelling wave solutions for the modified Camassa-Holm and Degasperis-Procesi equations**. Applied Math. and Computation 218 (2009), 2269-2276.
- [17] DUBROVIN, B. A., MATVEEV, V. B. & NOVIKOV, S. P. **Nonlinear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties**. Russian mathematical surveys 31 (1976), 59-146.
- [18] DULLIN, H. R., GOTTWALD, G. A. & HOLM, D. D., **An integrable shallow water equation with linear and nonlinear dispersion**. Phys. Rev. Lett. 87 (2001), 4501-4504.
- [19] FOLLAND, G. B., **Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications**. Seattle: John Wiley & Sons, 1999.
- [20] GRILLAKIS, M., **Linearized instability for nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon equations**. J. Comm. Pure Appl. Math XLI (1988), 747-774.
- [21] GRILLAKIS, M., SHATAH, J. & STRAUSS, W., **Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry**. I, J. Functional Anal. 74 (1987), 160-190.
- [22] GRILLAKIS, M., SHATAH, J. & STRAUSS, W., **Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry**. II, J. Functional Anal. 90 (1990), 308-348.
- [23] HAKKAEV, S., ILIEV, I. D. & KIRCHEV K., **Stability of periodic travelling shallow-water waves determined by Newton’s equation**. J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008) 085203.

- [24] KATO, T., **Perturbation Theory for Linear Operators**. Berlin: Springer, 1967.
- [25] KONG, Q., WU, H. & ZETTL A., **Multiplicity of Sturm-Liouville Eigenvalues**. J. of Computational and Applied. Math. (2004), 291-309.
- [26] LENELLS, J., **Traveling wave solutions of the Camassa-Holm equation**. J. Differential Equations 217 (2005), 393-430.
- [27] LENELLS, J., **Traveling wave solutions of the Degasperis-Procesi equation**. J. Math. Anal. Appl. 306 (2005), 72-82.
- [28] LIMA, E. L., **A Equação do Terceiro Grau**. Artigos: Matemática Universitária 5 (1987), 9-23.
- [29] LOPES, O., **Stability of peakons for the generalized Camassa-Holm equation**, Electronic Journal of Diff. Equations, Vol 2002 (2002), No. 5, 1-12.
- [30] LIU X. & YIN Z., **Local well-posedness and stability of peakons for a generalized Dullin-Gottwald-Holm equation**. Nonlinear Analysis 74 (2011), 2497-2507.
- [31] NOVIKOV, S. P., MANAKOV S. V., PITAEVSKII, L. P. & ZAKHAROV, V. E. **Theory of solitons: the inverse scattering method**. New York and London: Consultants Bureau, 1984.
- [32] PASTOR, A., **Nonlinear and spectral stability of periodic traveling wave solutions for a nonlinear Schrödinger system**. Differential and Integral Equations Physica D, 23 (2010), 125-154.
- [33] RUDIN, W., **Real and Complex Analysis**. Singapore: McGraw-Hill Book Company, 1987.
- [34] ZETTL, A., **Sturm-Liouville Theory**. United States of America: American Mathematical Society, 2005.
- [35] WAZWAZ, A. M., **Solitary wave solutions for modified forms of Degasperis-Procesi and Camassa-Holm equations**. Phys. Lett. A 352 (2006), 500-504.
- [36] WEINSTEIN, M. I., **Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations**. Comm. Pure Appl. Math., 39 (1986), 51-68.
- [37] YIN, J., TIAN, L. & FAN, X., **Stability of negative solitary waves for an integrable modified Camassa-Holm equation**. Journal of Mathematical Physics 51 (2010), 053515.