

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Transmissão de emaranhamento através de cadeias de spins

Rafael Vieira

São Carlos
2018

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Tese de Doutorado

Transmissão de emaranhamento através de cadeias de spins

Rafael Vieira

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Garcia Rigolin

São Carlos
2018



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Rafael Vieira, realizada em 25/04/2018:

Prof. Dr. Gustavo Garcia Rigolin
UFSCar

Prof. Dr. Leonardo Kleber Castelano
UFSCar

Prof. Dr. Pedro Augusto Franco Pinheiro Moreira
UFSCar

Prof. Dr. Frederico Borges de Brito
USP

Prof. Dr. Marcus Vinicius Segantini Bonança
UNICAMP

Dedico este trabalho,

*Aos meus pais Osvaldo Manoel Vieira
e Suely Teresinha de Lacerda Vieira por
todo apoio a minha formação.*

*A todos aqueles que acreditaram em
mim, me apoiaram e me ajudaram nessa
árdua caminhada pela educação.*

Agradecimentos

Ao meu orientador, o Prof. Dr. Gustavo Garcia Rigolin, que não apenas me orientou, mas me apoiou e acreditou em mim. Agradeço a cada crítica e elogio, pois me fizeram perceber que eu podia fazer algo melhor. Ele fez por mim muito mais do que lhe caberia e, por isso, sou imensamente grato.

Ao meu colega de doutorado Diogo Lima, pelas trocas de informações e pelas conversas que deixaram o ambiente de trabalho muito mais interessante.

Ao pessoal da secretaria da pós-graduação da UFSCar e ao CNPq pela minha bolsa de estudos.

Aos meus irmãos Leandro Vieira, Taino Vieira e Gleison Vieira e meus amigos Randolf, Herica e Anita pela amizade, companherismo e apoio nos bons e maus momentos.

Muito Obrigado!

Resumo

Nesta Tese estudamos a transmissão de estados emaranhados em cadeias de spins não moduladas. Para isso, propomos uma pequena modificação no modelo isotrópico XY (modelo XX) que descreve uma cadeia de spin-1/2 unidimensional. Mostramos que é possível transmitir estados emaranhados bipartites de um remetente a um receptor com altíssimos índices de fidelidade de uma ponta a outra da cadeia. Essa transmissão ocorre sem a necessidade de campos externos ou modulação das constantes de acoplamento entre os qubits, viabilizando e simplificando sua implementação prática. Constatamos, através de análise numérica, que a modificação no modelo unidimensional funciona para qualquer tamanho de cadeia. Verificamos também que o modelo proposto é robusto a pequenas imperfeições nas constantes de acoplamento, bem como à presença de campos magnéticos externos fracos e a interações residuais entre os spins na direção z . Ao final, analisamos se o modelo proposto também pode ser utilizado como transmissor de estados de um qubit e discutimos esses resultados à luz da teoria de informação e computação quânticas.

Abstract

In this thesis we studied the transmission of entangled states in unmodulated spin chains using a slight modification in the XY isotropic model (XX model) that describes a one-dimensional spin-1/2 chain. We have shown that it is possible to transmit bipartite entangled states from a sender to a receiver with high fidelity from one end of the chain to the other. This transmission occurs without the need for external fields or modulation of the coupling constants between the qubits, which simplifies its practical implementation. We verified, through numerical analysis, that the modification in the one-dimensional model works for any size of the chain. We also verified that the proposed model is robust for small imperfections in the coupling constants, low magnetic field noise and residual interaction between spins in the z direction. At last, we analyzed whether the proposed model can also be used as a transmitter of single qubit states and we discussed these results within the context of the quantum information theory.

Lista de Figuras

1.1	Cadeia de spins puramente unidimensional, sendo esse o "modelo padrão" de cadeia aqui utilizado. As linhas representam as interações entre qubits (spins).	18
1.2	Esquema de transmissão de estados de um qubit em uma cadeia ferromagnética de spins puramente unidimensional, em que (a) Alice prepara um estado arbitrário no qubit 1 em $t=0$ e (b), após um tempo t , Bob deverá medir em N o mesmo estado (ou o mais próximo possível) do qubit de Alice. Figura retirada de [8] com adaptações.	19
2.1	Comparação dos modelos de cadeia de spins proposto nesse trabalho (a) e o modelo padrão unidimensional (b). As letras "A" e "B" representam os qubits que foram adicionados ao modelo padrão. Os qubits com Alice e Bob estão representados com seus nomes dentro. As linhas representam as interações entre spins.	27
3.1	Representação do modelo proposto para uma cadeia de $N = 4$	45
3.2	Representação do modelo proposto para uma cadeia de $N = 5$	49
3.3	Comparação das configurações de acoplamento que foram estudadas para os modelos proposto e unidimensional. As correntes representam o emaranhamento dos qubits de Alice em $t=0$ e Bob para $J_A t$ dado na figura. Para obter os resultados, evoluímos o estado $ \Psi^+(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(01\rangle + 10\rangle) \otimes 000\dots\rangle$ até $J_A t = 25\pi$ utilizando a Hamiltoniana da equação (3.58) para o modelo proposto e (3.59) para o modelo padrão, variando apenas o valor de J_m/J_A de 0 a 50. Durante a evolução, calculamos o estado dos qubits de Bob e armazenamos o melhor valor de emaranhamento encontrado e o tempo em que este ocorreu para cada valor de J_m/J_A . No quadro acima estão os melhores resultados encontrados e a melhor condição de acoplamento para tal. Notamos que a melhor condição para o modelo proposto ocorre quando os qubits de Alice e Bob estão acoplados com a cadeia de transmissão com uma mesma magnitude e essa deve ser menor que os acoplamentos J_m . Já para o modelo proposto, o melhor cenário ocorrerá quando o acoplamento entre os dois qubits de Alice for da mesma magnitude do acoplamento dos dois qubits de Bob. Observe que o modelo proposto supera em muito as outras propostas de configuração, transmitindo um emaranhamento dado por 0,997.	51
3.4	Comparação dos modelos unidimensional (linha contínua) e o proposto no nosso trabalho (linha tracejada) para (a) $N = 8$ e (b) $N = 9$ com o estado inicial $ \psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(01\rangle + 10\rangle)$, e quando todos os acoplamentos têm a mesma magnitude, ou seja, $J_m = J_A$. Nesses gráficos, utilizamos a Hamiltoniana da equação (3.60) para o modelo proposto e (3.61) para o modelo padrão.	52

- 3.5 Comparação dos pontos de máximo EoF dos modelos proposto e unidimensional, em que transmitimos o estado $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ de Alice para Bob por cadeias de (a) $N = 100$ e (b) $N = 1000$. Utilizamos as Hamiltonianas das equações (3.62) para o modelo proposto e (3.63) para o modelo padrão, variando apenas o valor de J_m de 0 a 100, em incrementos de 0,1. Evoluímos o sistema até $t = 25\pi$ para cada valor de J_m e coletamos o maior emaranhamento transmitido a Bob que ocorre durante esse tempo. 53
- 3.6 Gráfico de evolução temporal do emaranhamento nos qubits de Bob quando $J_m = N$ para o modelo proposto. Utilizamos para gerar as curvas a Hamiltoniana da equação (3.62). Todos os resultados de EoF máximo estão acima de 0,99. 54
- 3.7 Gráficos de EoF dos qubits de Bob quando o estado de Alice em $t=0$ é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ e $N = 100$ para o modelo proposto (equação (3.62)). Aqui, $J_m = 22,50$, $J_m = 49,98$, $J_m = 73,30$ e $J_m = 100,0$. Nota-se que, quanto maior o valor de J_m , menor é a frequência de oscilação dos pontos de máximo emaranhamento transmitido. 55
- 3.8 (a) Valor de J_m dando o primeiro pico de máximo emaranhamento transmitido a Bob em função de N . (b) Valor do emaranhamento no primeiro pico de máximo descrito em (a) em função de N . (c) Tempo em que o primeiro pico de máximo ocorre conforme descrito em (a) em função de N . O estado emaranhado inicialmente com Alice é dado por $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ e nos gráficos acima N varia de $N = 4$ até $N = 100$ 55
- 3.9 Emaranhamento transmitido a Bob em função do tempo para o caso de $N = 100$ qubits quando o estado de Alice em $t=0$ é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Os valores de J_m usados para gerar estes dados são aqueles que dão o primeiro pico de máximo emaranhamento transmitido a Bob. Para o modelo proposto, temos $J_m = 2,86$ e para o modelo padrão (unidimensional) temos $J_m = 2,33$. As curvas acima são claras ao mostrar que o *EoF* transmitido pelo modelo padrão não ultrapassa 0,5 enquanto o modelo proposto supera o valor de 0,8. 56
- 3.10 Gráficos de transmissão de estados emaranhados para cadeias de (a) 22, (b) 102, (c) 502 e (d) 1002 qubits no modelo proposto. O gráfico do lado esquerdo corresponde ao cálculo do primeiro máximo de emaranhamento causado pela variação de J_m , quando transmitimos o estado $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ utilizando a Hamiltoniana da equação (3.62). Para cada valor de J_m , o tempo variou de 0 a 25π nas evoluções temporais. Nota-se que esse valor de J_m dá um primeiro máximo de emaranhamento seguido de outros picos menos expressivos. 57
- 3.11 Gráficos de (a) EoF transmitido, (b) tempo e (c) constante de acoplamento J_m quando o estado de Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ para cadeias de $N = 4$ até $N = 2500$. Usamos a Hamiltoniana (3.62) para evoluir o modelo proposto e o valor de J_m associado ao primeiro pico de máximo emaranhamento, conforme descrito no texto e na figura 3.10. Encontramos EoF=0,6787, acima de 2/3, mesmo para $N = 2500$ em um tempo razoável de simulação. O valor da constante de acoplamento é $J_m = 4,70$ para $N = 2500$ 58

LISTA DE FIGURAS

- 3.12 Comparação dos primeiros máximos de emaranhamento transmitido a Bob via modelos 1D e proposto nesta Tese quando o estado inicial de Alice for $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. A Hamiltoniana usada é dada pela equação (2.11) e evoluímos o estado em incrementos de $\Delta t = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-4}$, conforme explicado no texto. Vemos que o valor de J_m ótimo para o caso unidimensional é menor que o do modelo proposto (veja gráfico pequeno (b)). Em compensação, o valor de EoF transmitido pelo modelo proposto é maior, alcançando valores acima de 0,8 mesmo para $N = 20$ (veja gráfico pequeno (a)). 60
- 3.13 (a) Comparação dos pontos de primeiro máximo de EoF transmitido a Bob e (b) o tempo em que ocorre este máximo quando inicialmente Alice tem os estados $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ e $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$, de $N=4$ até $N=20$. A Hamiltoniana usada é dada pela equação (2.11) e evoluímos o estado em incrementos de $\Delta t = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-4}$. Notamos que, ao aumentarmos do número de qubits, o estado $|\psi^+\rangle$ fornece melhores resultados. 60
- 3.14 Valores da fidelidade (linha tracejada) e emaranhamento de formação (linha contínua) quando o estado inicial de Alice for $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. No painel (a) temos $N=9$ qubits e em (b) $N=10$. Aqui usamos a Hamiltoniana (3.62) com $J_m = 2$ para implementar a evolução temporal. 61
- 4.1 Representação da desordem que pode ocorrer durante a montagem do experimento. Cada constante de acoplamento terá um valor aleatório escolhido independentemente a partir de distribuição uniforme centrada sobre seu valor ideal. $\delta J_{i,j}$ representa a porcentagem de erro sobre o valor ótimo teórico para o caso ordenado. 64
- 4.2 Aqui círculos representam os qubits da cadeia e os quadrados a variação das constantes de acoplamento entre os qubits em torno dos seus valores ótimos. As cores distintas nos quadrados representam diferentes flutuações das constantes de acoplamento, as quais diferem do valor ótimo ordenado por $\delta J_{i,j}(t)$. Os painéis representam (a) a desordem estática, (b) a desordem dinâmica e a (c) desordem flutuante. Para a desordem estática, $\delta J_{i,j}(t) = \delta J_{i,j}$, isto é, as constantes de acoplamento não mudam com o tempo e, por isso, as cores dos quadrados não mudam conforme o tempo passa. Na desordem dinâmica, $\delta J_{i,j}(t) = \delta J(t)$, isto é, todas as constantes de acoplamento sofrem a mesma variação conforme o tempo passa. Na desordem flutuante, $\delta J_{i,j}(t)$ depende tanto da posição quanto do tempo. 65

- 4.3 Emaranhamento transmitido a Bob na presença de desordem estática. O estado inicial enviado por Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ e o tempo t no qual calculamos a quantidade de emaranhamento com Bob é aquele previsto a dar o máximo emaranhamento transmitido para o caso ordenado. Os gráficos da esquerda correspondem ao modelo padrão e os da direita ao modelo proposto. Os gráficos superiores referem-se a $N = 10$ qubits e os inferiores a $N = 60$ qubits. Utilizamos como ponto de partida os valores ótimos do caso ordenado: $J_A = 1$ e J_m conforme visto nas figuras (Hamiltonianas (4.3) e (4.4)). Para cada valor de p , a porcentagem máxima de variação das constantes J_A e J_m em torno de seus valores ótimos, foram feitas 1000 simulações. Variamos p de 0,2% a 10%, em incrementos de 0,2 ponto percentual, totalizando 50000 realizações de desordem para cada um dos quatro gráficos acima. As linhas violetas mostram as médias dos valores do emaranhamento transmitido em função de p e as "barras" verticais que cortam as linhas roxas são na verdade os pontos que representam os valores do emaranhamento transmitido para as 1000 simulações realizadas para cada valor de p . Por fim, os histogramas na parte inferior de cada gráfico nos dão a fração de realizações de desordem superando o valor ótimo do caso ordenado. A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido. 67
- 4.4 Emaranhamento transmitido a Bob na presença de desordem estática. Os dados e curvas apresentadas nas figuras acima têm o mesmo significado já explicado na legenda da figura 4.3. Agora, no entanto, $N = 100$ qubits e fizemos 10000 simulações para cada valor de p . Aqui p varia de 0,1% a 5% em incrementos de 0,1 ponto percentual. Alice envia o estado $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ e as constantes de acoplamento do caso ordenado foram $J_A = 1$ e (a) $J_m = 2,863$, (b) $J_m = 22,50$ e (c) $J_m = 49,98$. Os tempos em que calculamos o emaranhamento dos qubits de Bob foram aqueles em que temos os melhores resultados do caso ordenado, isto é, (a) $t = 3,037\pi$, (b) $t = 3,323\pi$ e (c) $t = 6,537\pi$. O valor do emaranhamento transmitido para os casos ordenados são (a) $EoF = 0,8165$, (b) $EoF = 0,9409$ e (c) $EoF = 0,9872$. A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido. . . . 68
- 4.5 Mesmo cenário já descrito na figura 4.4, só que agora $N = 1000$ qubits e, para cada p , fizemos 1000 realizações de desordem. No gráfico da esquerda (a) o valor ótimo de J_m no caso ordenado é $J_m = 4,253$ e no da direita (b) $J_m = 200,0$, enquanto os tempos em que a máxima transmissão ocorreu são $t = 19,11\pi$ e $t = 26,06\pi$, respectivamente. Os valores destes máximos emaranhamentos transmitidos para o caso sem desordem são $EoF = 0.7113$ e $EoF = 0.9896$, respectivamente. A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido. 69
- 4.6 Esquema da evolução temporal quando a Hamiltoniana varia temporalmente (desordens dinâmica e flutuante). Vemos que, caso t_n não ocorra em um múltiplo de Δt , ele será calculado utilizando a Hamiltoniana que está descrevendo o sistema naquele período. 70

LISTA DE FIGURAS

- 4.7 Resultados do EoF máximo transmitido para desordem dinâmica quando o estado enviado por Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ e calculamos o EoF com Bob no tempo do máximo emaranhamento transmitido no caso exato (sem desordem). Para estas simulações, $J_A(t_0) = 1$ na equação (4.4) e $N = 100$. Foram feitas 100 simulações para cada porcentagem máxima de aleatoriedade de $p = 0$ a $p = 1\%$, variando p em incrementos de 0,02 ponto percentual, em torno dos valores ótimos de acoplamentos J_A e J_m dos casos ordenados. Utilizamos os valores do caso ordenado indicados no canto direito e os emaranhamentos máximos transmitidos nestas situações (caso ordenado) dados por (a) $EoF = 0,8165$, (b) $EoF = 0,9409$ e (c) $EoF = 0,9872$. A primeira coluna mostra os gráficos do emaranhamento transmitido por tempo para cada um dos acoplamentos J_m citados acima no caso ordenado. A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido. 72
- 4.8 Resultados do EoF máximo transmitido para desordem flutuante quando o estado enviado por Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ e calculamos o EoF com Bob no tempo do máximo emaranhamento transmitido no caso exato (sem desordem). Para estas simulações, $J_A(t_0) = 1$ na equação (4.4) e $N = 100$. Foram feitas 100 simulações para cada porcentagem máxima de aleatoriedade p de 0 a 1%, variando em incrementos de 0,02 ponto percentual em torno dos valores de acoplamentos J_A e J_m . Utilizamos os valores do caso ordenado indicados no canto direito e os emaranhamentos máximos transmitidos nestas situações (caso ordenado) dados por (a) $EoF = 0,8165$, (b) $EoF = 0,9409$ e (c) $EoF = 0,9872$. A primeira coluna mostra os gráficos do emaranhamento transmitido pelo tempo para cada um dos acoplamentos J_m citados acima no caso ordenado. A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido. 73
- 4.9 As cores nos qubits representam as variações do campo magnético $\delta h_j(t)$ e cada cor equivale a um valor aleatório diferente. As desordens possíveis são (a) estáticas (δh_j), (b) dinâmica ($\delta h(t)$) e (c) flutuante ($\delta h_j(t)$). Se observarmos essa figura, o tempo cresce de cima para baixo e temos as posições dos qubits crescendo da esquerda para a direita. Logo, a desordem estática ocorre apenas nas colunas, a desordem dinâmica nas linhas e a flutuante ocorre tanto em linhas quanto colunas. 76
- 4.10 Resultados de EoF máximo transmitido com desordem estática no campo magnético e quando o estado inicial de Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Os valores de EoF calculados acima são aqueles obtidos no tempo t em que a máxima transmissão de emaranhamento seria esperada para o caso ordenado. Definimos H_{XX} pela equação (3.62) onde $J_A = 1$, além de J_m e t que estão indicados na figura. Para o campo magnético definido na equação (4.10), utilizamos $h_j = 0$ e δh_j sendo dado por uma distribuição uniforme compreendida entre $-p$ e p , conforme explicado no texto. Fizemos 10000 simulações para cada p . A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido. 77

- 4.11 Resultados de EoF máximo transmitido com desordem flutuante no campo magnético quando o estado inicial de Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Os valores de EoF calculados acima são aqueles obtidos no tempo t em que a máxima transmissão de emaranhamento seria esperada para o caso ordenado. Definimos H_{XX} pela equação (3.62) onde $J_A = 1$, além de J_m e t que estão indicados no lado direito da figura. Para o campo magnético definido na equação (4.10), utilizamos $h_j(t_0) = 0$ e $\delta h_j(t)$ sendo dado por uma distribuição uniforme compreendida entre $-p$ e p , conforme explicado no texto. A linha roxa representa a média de EoF transmitido e para cada p fizemos 100 simulações de desordem flutuante. Os intervalos Δt em que os valores de $\delta h_j(t)$ mudam estão indicados no topo de cada coluna do gráfico. A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido. 78
- 4.12 Resultados do EoF máximo transmitido com desordem estática dada pelo termo $\Delta_{i,j}\sigma_i^z\sigma_j^z$, quando o estado inicial de Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Os valores de EoF calculados acima são aqueles obtidos no tempo t em que a máxima transmissão de emaranhamento seria esperada para o caso ordenado. Definimos H_{XX} pela equação (3.62) onde $J_A = 1$, além de J_m e t que estão indicados na figura. Para a magnitude da anisotropia $\Delta_{i,j}$ definida na equação (4.25), utilizaremos $\delta_{i,j}$ máximo variando a partir de $p = 0,002$ a $p = 0,1$, em incrementos de 0,002. Realizamos 1000 simulações para cada valor de p . A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido. 81
- 4.13 Resultados de EoF máximo transmitido com desordem dinâmica dada pelo termo $\Delta(t)\sigma_i^z\sigma_j^z$, quando o estado inicial de Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Os valores de EoF calculados acima são aqueles obtidos no tempo t em que a máxima transmissão de emaranhamento seria esperada para o caso ordenado. Definimos H_{XX} pela equação (3.62) onde $J_A = 1$, além de J_m e t que estão indicados no lado direito da figura. A primeira coluna mostra o gráfico do emaranhamento transmitido por tempo de cada um dos acoplamentos ótimos J_m utilizados para o caso ordenado. Para a magnitude da anisotropia $\Delta(t)$ definida na equação (4.25), utilizaremos $\delta(t)$ máximo variando em 0,002 de 0 a 0,1, realizando 100 simulações em cada valor. Os valores de $\delta(t)$ mudam aleatoriamente a cada período Δt dado por $\pi, 0,1\pi$ e $0,01\pi$. A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido. 82
- 4.14 Resultados de EoF máximo transmitido com desordem flutuante dada pelo termo $\Delta_{i,j}(t)\sigma_i^z\sigma_j^z$, quando o estado inicial de Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Os valores de EoF calculados acima são aqueles obtidos no tempo t em que a máxima transmissão de emaranhamento seria esperada para o caso ordenado. Definimos H_{XX} pela equação (3.62) onde $J_A = 1$, além de J_m e t que estão indicados no lado direito da figura. A primeira coluna mostra o gráfico do emaranhamento por tempo de cada um dos acoplamentos ótimos J_m utilizados para o caso ordenado. Para a magnitude da anisotropia em z definida na equação (4.25), utilizaremos p variando de 0 a 0,1 em incrementos de 0,002, realizando 100 simulações em cada valor. A desordem muda a cada período Δt dado por $\pi, 0,1\pi$ e $0,01\pi$. A linha roxa corresponde à média de EoF transmitido. 83

LISTA DE FIGURAS

- 4.15 Resultados do EoF transmitido com desordem estática simultânea nos três cenários estudados anteriormente $\Delta J_{i,j}$, Δh_j e $\Delta_{i,j}$, definidos nas equações (4.1), (4.10) e (4.25), respectivamente (assume-se que $n = 1$ e $t_1 = t$ para a desordem estática nessas equações). Utilizamos a Hamiltoniana (4.36) para transmitir em $t_0 = 0$ o estado de Alice $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ para Bob em t (indicado acima de cada gráfico). Os valores de EoF calculados acima são aqueles obtidos no tempo t em que a máxima transmissão de emaranhamento seria esperada para o caso ordenado, ou seja, os $J_{i,j}(t_0)$ assumirão os valores das constantes $J_A = 1$ e J_m apropriado (indicados acima de cada gráfico), além de $h_j(t_0) = 0$ e $\Delta_{i,j}(t_0) = 0$. Para os parâmetros $\delta J_{i,j}$, δh_j e $\delta_{i,j}$, utilizaremos seus máximos valores p (variando em incrementos de 0,002) de 0,002 até 0,1, realizando 1000 simulações para cada valor de p 85
- 4.16 Resultados do EoF transmitido com desordem dinâmica nos parâmetros estudados anteriormente $\Delta J(t)$ e $\Delta(t)$ ($\Delta h(t)$ não afeta o sistema na desordem dinâmica), definidos nas equações (4.2) e (4.25), respectivamente, quando o estado inicial de Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Os valores de EoF calculados acima são aqueles obtidos no tempo t em que a máxima transmissão de emaranhamento seria esperada para o caso ordenado, ou seja, os $J_{i,j}(t_0)$ assumirão os valores das constantes $J_A = 1$, além de J_m e t apropriados (indicados ao lado direito da figura), $\Delta J(t_0) = 0$ e $\Delta(t_0) = 0$. Definimos a Hamiltoniana (4.36) como ordenada para t_0 . A primeira coluna mostra o gráfico do emaranhamento por tempo de cada um dos acoplamentos ótimos J_m utilizados para o caso ordenado. Para os parâmetros $\delta J(t)$ e $\delta(t)$, utilizaremos seus máximos valores p (variando em incrementos de 0,002) de 0,002 até 0,1, realizando 100 simulações para cada p 86
- 4.17 Resultados de EoF transmitido com desordem flutuante nos parâmetros estudados anteriormente $\Delta J_{i,j}(t)$, $\Delta h_j(t)$ e $\Delta_{i,j}(t)$, definidos nas equações (4.2), (4.10) e (4.25), quando o estado de Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Os valores de EoF calculados acima são aqueles obtidos no tempo t em que a máxima transmissão de emaranhamento seria esperada para o caso ordenado, ou seja, os $J_{i,j}(t_0)$ assumirão os valores das constantes $J_A = 1$, além de J_m e t apropriados (indicados ao lado direito da figura), $h_j(t_0) = 0$, $\Delta J_{i,j}(t_0) = 0$ e $\Delta_{i,j}(t_0) = 0$. Definimos a Hamiltoniana (4.36) como ordenada para t_0 . A primeira coluna mostra o gráfico do emaranhamento por tempo para cada um dos acoplamentos ótimos J_m utilizados para o caso ordenado. Para os parâmetros $\delta J_{i,j}(t)$, $\delta h_j(t)$ e $\delta_{i,j}(t)$, seus máximos valores p variarão (em incrementos de 0,002) de 0,002 até 0,1, realizando 100 simulações para cada valor de p 87
- 5.1 Cadeias para transmitir apenas um estado excitado, em que queremos transmitir o estado $|1\rangle$ do qubit A até o qubit B no modelo proposto e transmitir um estado excitado do qubit 1 até o qubit N no modelo padrão. 90
- 5.2 Reprodução do estudo de [24] em que há uma cadeia de $N = 30$ qubits. Utilizamos o estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |1_1 0_2 0_3 \dots 0_{28} 0_{29} 0_{30}\rangle$ e a Hamiltoniana $\mathcal{H}_{XX} = J_A(\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_1^-) + \sum_{j=2}^{28}(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-) + J_A(\sigma_{29}^+ \sigma_{30}^- + \sigma_{30}^+ \sigma_{29}^-)$ e variamos J_A de 1 a 0. O gráfico representa a probabilidade máxima de se medir o estado $|1_{30}\rangle$, isto é, $P(30) = |\langle 1_{30} | \Psi(t) \rangle|^2 = |c_{30}|^2$ num intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 200\pi$ 90

5.3 Gráfico da probabilidade ótima (ou fidelidade) $P(j) = |\langle 1_j | \Psi(t) \rangle|^2 = |c_j|^2$, em que $j = N$ para o modelo padrão e $j = B$ para o modelo proposto. Os gráficos foram feitos com as Hamiltonianas das equações (3.62) para o modelo proposto e (3.63) para o modelo padrão. O estado inicial para o modelo padrão é $|\Psi(0)\rangle = |1_1 0_2 \dots 0_{N-1} 0_N\rangle$ e para o modelo proposto é $|\Psi(0)\rangle = |1_A 0_1 0_2 \dots 0_{N-1} 0_N 0_B\rangle$. Os resultados para (a) $N = 100$ e (b) $N = 1000$ estão apresentados nos gráficos da esquerda para direita, respectivamente. Para o caso em que $N = 100$, apresentamos para o modelo padrão o caso ótimo em que J_m varia de 0 a 5 ($J_m^{\text{ótimo}} = 2,022$) e quando J_m varia de 0 a 50 ($J_m^{\text{ótimo}} = 47,57$). Para o modelo proposto temos apenas a curva para o J_m ótimo obtido quando este varia de 0 a 50 ($J_m^{\text{ótimo}} = 49,98$). No caso em que $N = 1000$, as curvas para o modelo padrão correspondem aos J_m ótimos quando J_m varia de 0 a 5 ($J_m^{\text{ótimo}} = 3,012$) e de 0 a 301 ($J_m^{\text{ótimo}} = 300,071$). Para o modelo proposto temos apenas a curva para J_m fornecendo o melhor resultado quando J_m varia de 0 a 301 ($J_m^{\text{ótimo}} = 298,269$). 91

Sumário

1	Introdução	17
1.1	Motivação	17
1.2	Cadeia de spins	18
1.3	Emaranhamento	20
1.3.1	Definição de estados emaranhados	21
1.4	Aplicação do emaranhamento em cadeias de spin	22
1.5	Organização da Tese	22
2	Modelo teórico	25
2.1	Cadeia de spins	25
2.1.1	Reescrevendo a Hamiltoniana	27
2.2	Estados quânticos das cadeias de spin	28
2.2.1	Operador densidade em termos das matrizes de Pauli	30
2.3	Como ocorrerá a transmissão de estados emaranhados	32
2.4	Fidelidade e emaranhamento	33
2.4.1	Emaranhamento de formação e concorrência	34
3	Resultados	37
3.1	Transmissão de estados com uma excitação	37
3.1.1	Operador densidade	39
3.2	O estado de Bell $ \psi^-\rangle$	43
3.3	O estado de Bell $ \psi^+\rangle$	44
3.3.1	Análise numérica	50
3.4	Estados de Bell $ \phi^+\rangle$ e $ \phi^-\rangle$	57
4	Inclusão de desordem	63
4.1	Desordem nas constantes de acoplamento	63
4.2	Ruídos oriundos de campos magnéticos externos ao sistema	74
4.3	Interações residuais entre qubits do tipo $\sigma_i^z \sigma_j^z$	79
4.4	Vários tipos de ruído agindo simultaneamente	84
5	Transmissão do estado de 1 qubit excitado	89
5.1	Fidelidade da transmissão	89
6	Conclusões	93
	APÊNDICE A - ALGORITMO BASE PARA TRANSMISSÃO DE ESTADOS EMARANHADOS	103

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A teoria de informação quântica tem sido amplamente estudada nas últimas décadas por conta de suas implicações para uma tecnologia iminente. Apesar da criação dos computadores ocorrer juntamente ao desenvolvimento da mecânica quântica, esses ainda utilizam conceitos clássicos para representar a informação de um bit (0 e 1). Porém, o aumento da quantidade de transistores por área em um processador infere que esses transistores fiquem cada vez menor. Porém, há um limite para essa diminuição: quando a dimensão dos transistores atingir escalas atômicas. Nesse cenário, efeitos quânticos não podem ser desprezados e a computação sofrerá uma revolução: nessa escala, as leis da mecânica quântica regerão a computação, onde bits serão substituídos por *quantum bits* ou *qubits*. Um qubit é um sistema de dois níveis, ou seja, dois estados quânticos distinguíveis. Poderíamos usar como transistor quântico um átomo que esteja ou não em uma superposição de dois estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, ou fótons que podem ser representado pela sua polarização linear ($|\uparrow\rangle$ ou $|\leftrightarrow\rangle$), ou circular ($|\odot\rangle$ ou $|\ominus\rangle$), o spin do elétron ($|\uparrow\rangle$ ou $|\downarrow\rangle$), etc. [1].

Nesse novo cenário, a informação (qubits) armazenada e processada em um computador quântico será transmitida por meio de protocolos de comunicação quântica, cujo objetivo é transmitir em alta fidelidade estados quânticos de um remetente (Alice) a um receptor (Bob) [2, 3]. Uma forma de transmissão de estados quânticos seria enviar o próprio qubit que carrega a informação quântica através de um meio, como um fóton que foi preparado em um certo estado quântico sendo enviado por uma fibra ótica [4]. Outra forma é enviar o estado quântico, e não os qubits. Exemplo disso é o teletransporte quântico, em que um estado altamente emaranhado está sendo compartilhado entre Alice e Bob e esse é o canal através do qual o estado quântico descrevendo o qubit de Alice é transmitido a um qubit com Bob [5].

O protocolo que abordaremos nessa Tese será enviar o estado quântico via qubits aco-

plados por interações de troca ao longo de uma *cadeia de spins* [6–8]. Transmissões de estados com alta fidelidade são importantes para muitas tarefas de informação quântica. Certos protocolos de comunicação quântica e distribuição de chaves quânticas não funcionariam sem uma transmissão confiável de estados [9]. Outro exemplo, como já dito acima, seria um computador quântico ainda a ser construído, onde deverá haver em seus componentes transferências de estados quânticos com alta fidelidade sem muita distorção dentro de seu hardware.

1.2 Cadeia de spins

Um dos principais objetivos ao estudar alguns fluidos, metais ou cristais é medir certas propriedades físicas como calor específico, transporte de carga, susceptibilidade, etc. Para explicar certos resultados experimentais, é necessário um modelo teórico simplificado que leve em consideração a dinâmica das interações microscópicas do material como, por exemplo, as interações de troca entre férmions ou bósons.

Um desses modelos é a cadeia de spins (*spin chain* em inglês) de Heisenberg, muito utilizada em sistemas magnéticos cujas propriedades de spin das partículas não devem ser tratadas senão via mecânica quântica. Uma das maiores características desse modelo é que, para muitos sistemas físicos, temos a possibilidade de tratar os graus de liberdade magnéticos como no modelo de Heisenberg, isto é, um conjunto de N sítios (partículas) posicionados lado a lado (figura 1.1). Chamaremos as cadeias puramente unidimensionais nos nossos estudos de *modelo padrão*. Apesar de parecer ilógico com a realidade, vários materiais magnéticos podem ser modelados como um conjunto de cadeias unidimensionais, pois as interações entre spins ocorrem muito mais fortemente ao longo de uma certa direção específica. Nesse caso, as interações entre as diferentes cadeias dentro do material são tão fracas comparadas às que ocorrem internamente em cada cadeia que se pode desprezá-las nos estudos teóricos [10, 11].

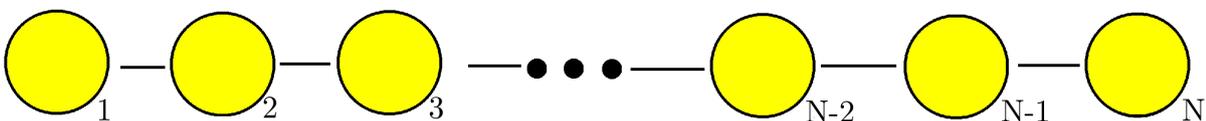


Figura 1.1: Cadeia de spins puramente unidimensional, sendo esse o "modelo padrão" de cadeia aqui utilizado. As linhas representam as interações entre qubits (spins).

Essas cadeias podem ser implantadas em redes óticas [12], circuitos supercondutores [13, 14], guias de onda [15, 16], entre outros. Já para a computação quântica, ela tem como finalidade transmitir informação de um remetente a um receptor em forma de estados quânticos [7, 8]. Mais convenientemente, os qubits de uma ponta da cadeia de spins pertencem a Alice e na outra ponta, os qubits pertencem a Bob. Tais arranjos de sítios

fixos podem ser muito práticos para permitir que transmissões de estados quânticos ocorram entre os vários componentes de um computador quântico. Ajustar constantemente a força de interação entre seus qubits não é uma tarefa fácil [7, 8] e por isso o uso de cadeias de spin com constantes de acoplamento fixas é bastante promissor. Além disso, será uma vantagem ter os canais de comunicação quântica construídos apenas com spins conectando as várias portas lógicas de um chip quântico, já que não haverá necessidade de uma interface sofisticada entre diferentes sistemas físicos como acontece, por exemplo, se usarmos fótons para transmitir a informação e spin para processá-la.

O primeiro a estudar cadeias de spin para transmissão de informação no contexto da teoria de informação quântica foi Bose [7, 8]. Seu objetivo era enviar o estado de um qubit de Alice para Bob em diferentes pontos da cadeia. Essa transmissão, de maneira simplificada, pode ser descrita da seguinte forma no modelo padrão de cadeia de spins. Alice prepara um estado no qubit 1 de uma ponta da cadeia, enquanto os outros qubits (inclusive o de Bob) se encontram no estado $|0\rangle$ em $t = 0$ (figura 1.2.a). Após isso, a própria dinâmica das interações spin-spin evoluirá esse estado geral até que Bob, que está na outra ponta da cadeia, medirá em seu qubit N o estado que Alice preparou inicialmente, ou o mais próximo possível dele (figura 1.2.b). Nesse exemplo, Alice enviou a informação de um qubit, ideia essa já muito abordada em outros estudos [6–8, 17–36]. Pode-se também utilizar uma cadeia de spins para *emaranhar* os qubits de Alice e Bob (que não necessariamente precisam estar nas pontas, mas em quaisquer sítios da cadeia), conseguindo assim um canal direto para comunicação quântica [7, 8, 21, 26, 29, 31, 37–40]. Além disso, é possível enviar estados *bipartite* ou *multipartite*, sejam eles arbitrários ou emaranhados de Alice para Bob [6, 21, 23, 31, 41–43].

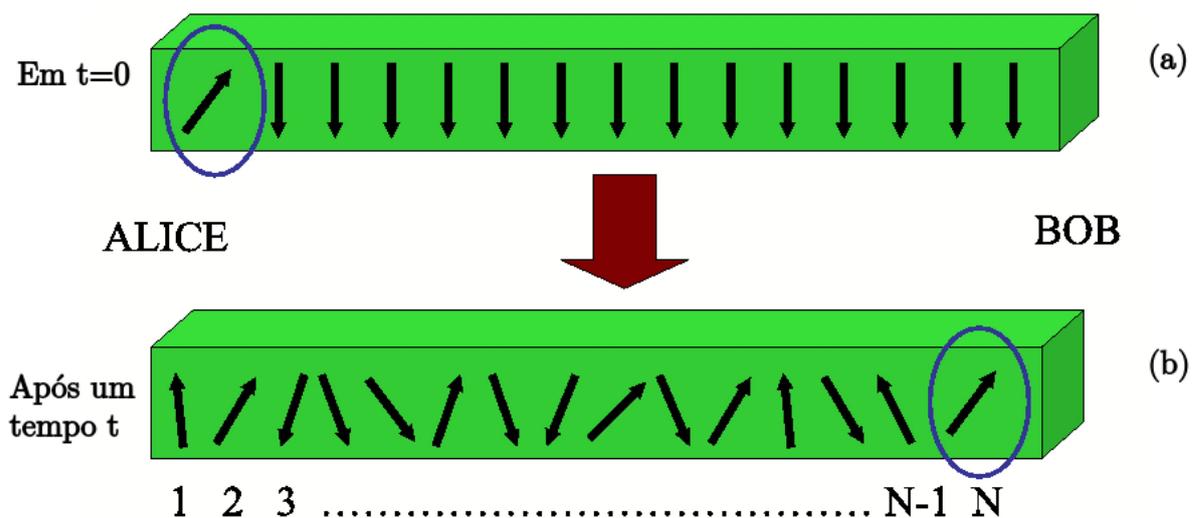


Figura 1.2: Esquema de transmissão de estados de um qubit em uma cadeia ferromagnética de spins puramente unidimensional, em que (a) Alice prepara um estado arbitrário no qubit 1 em $t=0$ e (b), após um tempo t , Bob deverá medir em N o mesmo estado (ou o mais próximo possível) do qubit de Alice. Figura retirada de [8] com adaptações.

1.3 Emaranhamento

Durante o desenvolvimento da Física no início do século XX, o advento da mecânica quântica permitiu a descrição de fenômenos até então inexplicáveis. À medida que esses estudos avançaram, vários conceitos e princípios foram propostos para que pudéssemos caminhar sobre esse terreno até então inexplorado. Um dos mais importantes conceitos é a *linearidade* ou o *princípio da superposição*: Se o estado quântico de um sistema pertence a um espaço vetorial H_c , então a soma de dois ou mais estados também deve pertencer ao mesmo espaço H_c e, portanto, também descrever um possível estado do sistema. Enquanto não houver a medição, não se sabe em qual estado quântico a partícula se encontra e o estado geral deverá ser uma combinação linear de todos os estados possíveis [44, 45].

Em 1935, Erwin Schrödinger [46, 47] propôs um experimento mental para ilustrar o princípio da superposição. Imaginemos que um gato foi colocado dentro de uma caixa com um dispositivo venenoso acionado por um contador Geiger que medirá partículas alfa emitidas no decaimento de uma amostra de metal radioativo. Essa caixa é fechada, não há como saber o que está ocorrendo dentro dela se ela não for aberta. Sabemos que, se o metal radioativo decair, o dispositivo será acionado e o gato morrerá. Por outro lado, se o dispositivo não acionar, o gato estará vivo (ignoremos qualquer possibilidade do gato morrer de outra forma). Logo, a probabilidade do átomo decair será a mesma do gato morrer. Pela Física Quântica, o sistema gato é descrito por dois estados, $|vivo\rangle$ e $|morto\rangle$ pertencentes ao espaço de Hilbert H_{gato} . Já o metal radioativo deve ser descrito também por dois estados, $|decaiu\rangle$ e $|não\ decaiu\rangle$, pertencentes ao espaço de Hilbert H_{metal} . Logo, o estado geral que descreve o que ocorre dentro da caixa é

$$|\psi\rangle = \alpha|vivo\rangle \otimes |não\ decaiu\rangle + \beta|morto\rangle \otimes |decaiu\rangle, \quad (1.1)$$

em que interpretamos α e β como amplitudes de probabilidade de cada uma das informações e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Notamos que o estado quântico que descreve corretamente o sistema tem as duas informações possíveis para o gato e para o metal e elas estão vinculadas: não há como o gato morrer sem que o metal radioativo decaia assim como não há como ele sobreviver se o metal decair. Pelo princípio da linearidade, se $|vivo\rangle \otimes |não\ decaiu\rangle$ e $|morto\rangle \otimes |decaiu\rangle$ pertencem a um espaço $H_{geral} = H_{gato} \otimes H_{metal}$, consequentemente o estado de superposição $|\psi\rangle$ também deve pertencer ao espaço H_{geral} . Então, quanticamente, o gato está em uma superposição de estados *vivo* e *morto*. Caso a caixa seja aberta, saberemos o que ocorreu e, então, colapsaremos instantaneamente o estado $|\psi\rangle$ para apenas uma informação para o gato, *vivo* ou *morto*. Não precisamos observar o contador geiger para sabermos do gato, nem precisamos observar o gato para sabermos se o metal decaiu, pois as informações dos seus estados estão *emaranhados*. Ao colapsarmos um dos dois sistemas, o outro instantaneamente colapsará também, independentemente da distância que os dois (o gato e o metal radioativo) se encontram. Essa propriedade do

emaranhamento quântico é chamada de *não-localidade* [45].

Através desse experimento, podemos definir o *emaranhamento quântico* como um fenômeno que ocorre quando estados quânticos precisam estar correlacionados de forma semelhante à explicada acima para descrever corretamente alguns sistemas físicos. Exemplos de estados totalmente emaranhados são os estados de Bell $|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle \pm |10\rangle$ e $|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle \pm |11\rangle$ [48, 49]. Esses serão os estados quânticos que analisaremos na transmissão de emaranhamento através de cadeias de spins.

1.3.1 Definição de estados emaranhados

O emaranhamento quântico entre duas ou mais partículas ocorre quando estados de cada partícula estão vinculados diretamente com os estados de outra, sendo impossível descrever as informações de cada partícula separadamente mantendo as características do sistema total. Um exemplo é o próprio gato de Shroedinger, em que não conseguimos isolar os estados do gato e do metal como

$$|\psi\rangle = (a_1|vivo\rangle + a_2|morto\rangle) \otimes (b_1|n\tilde{a}o\ decaiu\rangle + b_2|decaiu\rangle). \quad (1.2)$$

Nesse cenário, não seria possível fazer uma combinação linear entre as constantes a_1 , a_2 , b_1 e b_2 tal que encontramos o mesmo estado da equação (1.1). Esse é um exemplo de estados emaranhados *bipartites*. Também podemos ter *estados tripartites*, compostos de três partículas [50] ou mesmo *estados multipartites*, compostos com mais de três partículas.

Percebe-se que, para definir quantitativamente estados emaranhados, devemos definir primeiramente o que não é um estado emaranhado. Se o sistema de N partículas pertence a um espaço de Hilbert $H = \bigotimes_{j=1}^N H_j = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_N$, o estado dessas partículas não estará emaranhado ele for descrito como $|\psi\rangle = \bigotimes_{j=1}^N |\psi\rangle_j = |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\psi\rangle_N$, isto é, apenas por produtos tensoriais, em que cada $|\psi\rangle_j$ pertence ao espaço H_j [45]. Logo, esses serão *estados puros não-emaranhados* ou *separáveis* já que medir um dos estados não influenciará os estados das outras partículas.

Essa definição, apesar de correta, não engloba todas as possibilidades, servindo apenas para determinarmos se os estados puros estão ou não emaranhados. Ela nada diz sobre *estados mistos*. No decorrer desta Tese, explicaremos com detalhes o que são estados puros, mas neste momento definiremos estado puro como aquele cujo operador densidade é descrito por um único estado $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. No entanto, em cadeias de spins, dificilmente um grupo de spins se encontrará em um estado puro, pois eles podem se emaranhar não somente entre si, mas também com o restante da cadeia. Em outras palavras, quando o sistema que queremos medir não está isolado, o seu operador densidade será descrito da seguinte forma: $\rho = \sum_{j>0} p_j |\psi\rangle_j \langle\psi|_j$, em que $p_j \in \mathbb{R}$ é a fração de cada estado puro $|\psi\rangle_j$ que compõe o operador densidade. Nesse caso, eles estarão em um *estado misto*. Logo, uma forma mais abrangente de definirmos o emaranhamento de duas ou mais partículas

é que, se nenhum $|\psi\rangle_j$ que descreve ρ for um estado emaranhado, então as partículas não estão emaranhadas.

Tais conceitos nos dão apenas um entendimento qualitativo sobre emaranhamento, pois nos informam apenas se os sistemas estão ou não emaranhados. Contudo, estados não-separáveis podem não estar *totalmente emaranhados*. Existe a possibilidade das partículas estarem *parcialmente correlacionadas*. Discorreremos melhor sobre essas características no próximo capítulo.

1.4 Aplicação do emaranhamento em cadeias de spin

Uma pergunta que é relevante nesse momento é: "qual é a aplicação do emaranhamento em cadeias de spin?". O emaranhamento tem importância na execução dos protocolos da futura tecnologia baseada em partículas subatômicas. Já as cadeias de spin podem ser um canal de transmissão dos estados emaranhados usados nesses protocolos. Um exemplo disso ocorre quando Alice e Bob têm um qubit em cada ponta da cadeia e utilizam a dinâmica das interações entre esses qubits para prepará-los em um dos quatro estados de Bell. Eles poderiam utilizar esses estados emaranhados como um canal para *codificação superdensa*, proposta por Bennett e Wiesner [51] em 1992, a qual permite transmitir dois bits de informação de Alice para Bob utilizando apenas um qubit. Classicamente, seria necessário uma partícula para cada bit.

Outro exemplo é o teletransporte quântico proposto por Bennett *et al.* [5] em 1993. Eles demonstraram que é possível, através de estados emaranhados, enviar o estado que descreve um qubit de Alice para Bob sem o envio de algo físico (como um elétron ou um fóton).

Atualmente outros protocolos que utilizam emaranhamento estão sendo estudados e tecnologias baseadas na mecânica quântica poderão surgir muito em breve. Espera-se que este trabalho, de alguma forma, possa contribuir futuramente para o avanço da teoria dessas tecnologias. Em particular, apresentamos nesta Tese uma proposta de transmissão de estados emaranhados (estados de Bell) de Alice a Bob através de cadeias de spins, robusta a imperfeições em sua construção e bastante eficiente.

1.5 Organização da Tese

No capítulo 2, apresentaremos o formalismo matemático necessário para os estudos de cadeias de spins. Apresentaremos um panorama sobre cadeias de spins, demonstrando a Hamiltoniana dos modelos abordados. Discutiremos as características do sistema como os estados quânticos utilizados e os conceitos de fidelidade e emaranhamento.

No capítulo 3, mostraremos os resultados de nossa pesquisa, comparando as transmissões do modelo padrão unidimensional e o modelo proposto que foi apresentado no

capítulo 2. Mostraremos que o estado de Bell $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ não pode ser transmitido no modelo proposto e demonstraremos analiticamente como podemos calcular a fidelidade de transmissão do estado $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ tanto no modelo proposto quanto no modelo padrão. Além disso, apresentamos quais configurações para as constantes de acoplamento entre qubits otimizam a transmissão. Encerramos este capítulo discutindo a eficiência de transmissão dos estados de Bell $|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$, com os resultados sendo confrontados com a transmissão do estado $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$.

No capítulo 4, discutiremos os tipos de desordem que podem ocorrer no sistema e as condições de desordem que não inviabilizam o protocolo aqui proposto.

No capítulo 5, demonstramos como ocorre a transmissão de um qubit excitado de Alice para Bob utilizando o modelo proposto e comparamos com os resultados já conhecidos na literatura para o modelo padrão.

No último capítulo, apresentamos nossas conclusões e potenciais novas frentes de estudos que podem ser abertas a partir dos resultados obtidos nesta Tese.

Capítulo 2

Modelo teórico

2.1 Cadeia de spins

Uma *cadeia de spins* é um modelo teórico que descreve um número de N partículas fermiônicas ou bosônicas interligadas por interações de troca. Nesta Tese, trabalharemos com partículas de spin- $\frac{1}{2}$ (férmions). Representamos uma dessas interações entre qubits i e j como

$$H_{i,j} = \hbar \left(J_{i,j}^x \sigma_i^x \sigma_j^x + J_{i,j}^y \sigma_i^y \sigma_j^y + J_{i,j}^z \sigma_i^z \sigma_j^z \right). \quad (2.1)$$

Aqui, $J_{i,j}^{x,y,z}$ são as *constantes de acoplamento* entre os spins i e j nos eixos x , y ou z [17] e os termos $\sigma^{x,y,z}$ são as matrizes de Pauli:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

O termo $H_{i,j}$ descreve de forma geral as interações entre qubits. Se restringirmos os valores das constantes de acoplamento, podemos obter os tipos de cadeia de spins mais utilizados para representar sistemas físicos, como os modelos XYZ ($J_{i,j}^x \neq J_{i,j}^y \neq J_{i,j}^z$), X ($J_{i,j}^y = J_{i,j}^z = 0$), XX ($J_{i,j}^x = J_{i,j}^y$ e $J_{i,j}^z = 0$), XY ($J_{i,j}^x \neq J_{i,j}^y$ e $J_{i,j}^z = 0$) e XXZ ($J_{i,j}^x = J_{i,j}^y = J_{i,j}$ e $J_{i,j}^z \neq J_{i,j}$) [54]. A equação (2.1) é comumente apresentada da seguinte forma,

$$H_{i,j} = \hbar J_{i,j} \left[(1 + \gamma) \sigma_i^x \sigma_j^x + (1 - \gamma) \sigma_i^y \sigma_j^y \right] + \hbar \Delta_{i,j} \sigma_i^z \sigma_j^z, \quad (2.3)$$

onde γ é a anisotropia na direção y e Δ é a anisotropia na direção z . Para o modelo XXZ ($\gamma = 0$), quando $\Delta < -1$ a Hamiltoniana descreve uma cadeia ferromagnética de férmions, chamada "fase Ferromagnética". Para $-1 \leq \Delta \leq 1$, temos uma Hamiltoniana que se encontra em uma "fase XY", e que pode descrever, por exemplo, casos de férmions livres XX ($\Delta = 0$ e $\gamma = 0$) e totalmente isotrópicos XXX ($\Delta = 1$ e $\gamma = 0$). Para $\Delta > 1$, o sistema se encontra na "fase de Néel", isto é, uma "fase Antiferromagnética". [52, 53].

As interações entre os qubits são muito maiores para os primeiros vizinhos, decaindo

muito com a distância, o que nos permite tratar as demais interações como nulas [7, 54]. Definindo $j = i + 1$, isto é, cada termo da somatória corresponde à interação do qubit i com seu vizinho posterior $i + 1$, a Hamiltoniana que descreve todas as interações de primeiros vizinhos será:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1d} &= \sum_{i=1}^{N-1} H_{i,i+1}, \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \hbar \left[(1 + \gamma) \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + (1 - \gamma) \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y \right] + \hbar \Delta_{i,i+1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Essa Hamiltoniana é independente do tempo e, se estamos trabalhando com uma cadeia como um sistema isolado, o estado $|\Psi(t)\rangle$ é obtido resolvendo-se a equação de Schroedinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \mathcal{H} |\Psi(t)\rangle. \quad (2.5)$$

Por conveniência de notação, definiremos $\hbar = 1$. Como a Hamiltoniana independe do tempo, a solução da equação (2.5) é $|\Psi(t_2)\rangle = e^{-i\mathcal{H}(t_2-t_1)} |\Psi(t_1)\rangle$.

Neste trabalho, lidaremos com o modelo XY isotrópico (modelo XX) levemente modificado. Reescrevendo a equação (2.3) quando $\gamma = 0$ e $\Delta_{i,j} = 0$, temos o modelo XX usual,

$$H_{i,j} = J_{i,j} \left(\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y \right). \quad (2.6)$$

Nesta Tese, vamos introduzir dois qubits a mais no modelo padrão, como visto na figura 2.1.a. Note que os qubits de Alice 1 e A não interagem entre si, interagindo apenas com o qubit 2. O mesmo acontece analogamente com os qubits de Bob N e B , não interagindo entre si, mas diretamente com o qubit $N-1$. Precisamos "incluir" a interação " $A \rightarrow 2$ " e " $N-1 \rightarrow B$ " no modelo padrão. Assim, a Hamiltoniana que descreve de maneira geral todas essas interações do modelo proposto é

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= H_{A,2} + \mathcal{H}_{1d} + H_{N-1,B}, \\ &= J_{A,2} (\sigma_A^x \sigma_2^x + \sigma_A^y \sigma_2^y) + \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,i+1} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) + J_{N-1,B} (\sigma_{N-1}^x \sigma_B^x + \sigma_{N-1}^y \sigma_B^y). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nosso objetivo é transmitir com alta fidelidade um estado emaranhado de dois qubits de uma ponta a outra da cadeia sem necessidade de campo externo ou modulações muito específicas entre as constantes de acoplamento. Compararemos nossa eficiência de transmissão com o modelo padrão,

$$\mathcal{H}_{1d} = \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,i+1} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y), \quad (2.8)$$

em que Alice detêm os qubits 1 e 2, que devem estar emaranhados inicialmente, e Bob detêm os qubits $N-1$ e N , que devem estar inicialmente separados, como visto na figura

2.1.b.

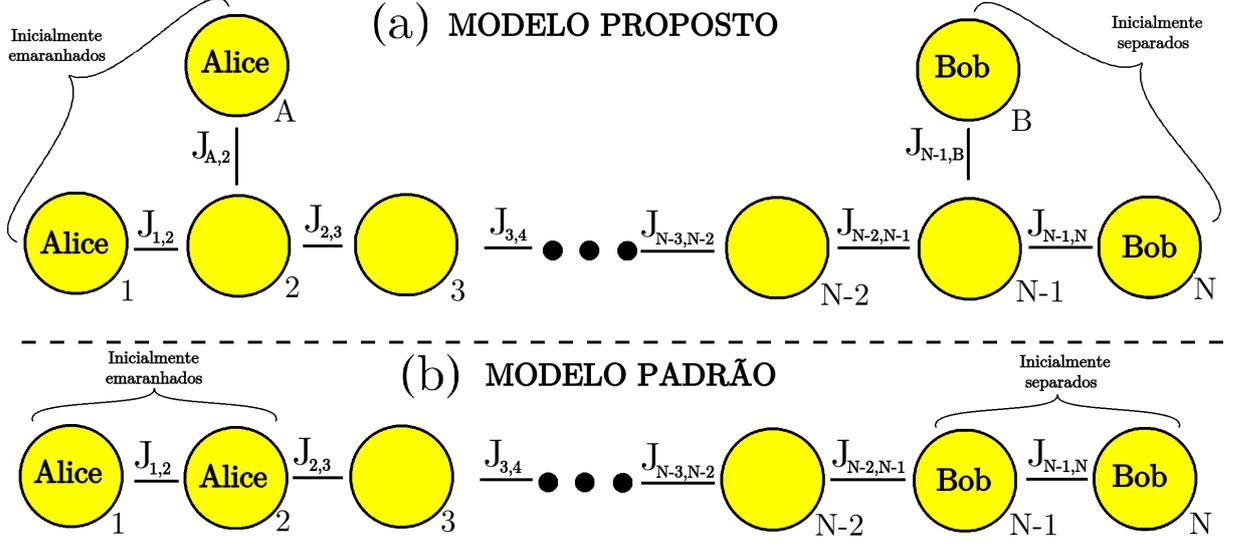


Figura 2.1: Comparação dos modelos de cadeia de spins proposto nesse trabalho (a) e o modelo padrão unidimensional (b). As letras "A" e "B" representam os qubits que foram adicionados ao modelo padrão. Os qubits com Alice e Bob estão representados com seus nomes dentro. As linhas representam as interações entre spins.

Isso significa que uma cadeia de N qubits do modelo padrão será comparada a uma cadeia de $N+2$ qubits do modelo proposto, sendo esses dois qubits a mais denotados por A e B . Essa configuração em que dois qubits interagem diretamente com um terceiro mas não entre si já foi estudado anteriormente, mas em uma cadeia de uma configuração diferente e com o objetivo de transmitir estados de um qubit e não estados emaranhados [35, 55].

2.1.1 Reescrevendo a Hamiltoniana

Utilizar diretamente as matrizes de Pauli para fazer os cálculos não é muito conveniente analiticamente. Além disso, tentar resolver numericamente o problema sem uma análise mais detalhada é inviável. Procedendo dessa forma conseguiríamos resolver numericamente sistemas com no máximo algumas dezenas de qubits. Isso se deve ao fato das informações matriciais para descrever esse sistema crescerem a uma ordem de 2^N . Assim, para simplificar cálculos analíticos mais à frente bem como para deixar a Hamiltoniana de uma forma mais amigável para o tratamento numérico, definimos os operadores σ^+ e σ^- de tal forma que

$$\begin{aligned}
 \sigma^x &= \sigma^+ + \sigma^-, \\
 \sigma^y &= i(\sigma^+ - \sigma^-), \\
 \sigma^z &= 2\sigma^+ \sigma^- - 1.
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Com essa definição, podemos reescrever a interação XX como,

$$\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y = 2(\sigma_i^+ \sigma_j^- + \sigma_j^+ \sigma_i^-), \quad (2.10)$$

e a Hamiltoniana passa a ser

$$\mathcal{H}_{XX} = 2J_{A,2}(\sigma_A^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_A^-) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} J_{j,j+1}(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-) + 2J_{N-1,B}(\sigma_{N-1}^+ \sigma_B^- + \sigma_B^+ \sigma_{N-1}^-). \quad (2.11)$$

Para introduzir campo magnético em z , basta somar um termo \mathcal{H}_Z nessa Hamiltoniana. Assim, teremos $\mathcal{H}_{XX+h_z} = \mathcal{H}_{XX} + \mathcal{H}_Z$ sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_Z &= \sum_j h_j (\sigma_j^z + I) \\ &= \sum_j 2h_j \sigma_j^+ \sigma_j^-, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde h_j é a magnitude do campo magnético em z sobre um qubit j [17, 18, 41, 56, 57].

2.2 Estados quânticos das cadeias de spin

A cadeia de spins é descrita por um ou mais estados compostos de produtos tensoriais dos estados de todos os qubits [58, 59]. Para o modelo proposto, um desses estados será

$$|\varphi\rangle = |v_A\rangle \otimes |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \otimes \dots \otimes |v_{N-1}\rangle \otimes |v_N\rangle \otimes |v_B\rangle, \quad (2.13)$$

sendo que cada $|v_i\rangle$ pode assumir os estados $|0_i\rangle$ (estado fundamental) ou $|1_i\rangle$ (estado excitado). Se trabalharmos no espaço de Fock [60], $|0\rangle$ e $|1\rangle$ correspondem a sítio vazio e sítio ocupado, respectivamente. Já para o modelo padrão, onde não há os qubits A e B , temos

$$|\varphi\rangle = |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \otimes \dots \otimes |v_{N-1}\rangle \otimes |v_N\rangle. \quad (2.14)$$

Note que $|\varphi\rangle$ como dado acima é apenas uma possibilidade de configuração da cadeia de spins em um certo tempo t . Na grande maioria das vezes, a cadeia de spins pode estar em uma superposição desses estados, isto é,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) |\varphi_n\rangle, \quad (2.15)$$

sendo $C_n(t)$ amplitudes de probabilidade que assumem valores reais e/ou complexos e $\sum_n |C_n(t)|^2 = 1$. Por exemplo, se o qubit j da cadeia do modelo proposto se encontra em uma superposição $|v_j\rangle = a(t)|0\rangle + b(t)|1\rangle$, o qubit N em $|v_N\rangle = |1\rangle$ e o restante dos qubits

da cadeia se encontram no estado $|0\rangle$, então o estado geral será

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= |0_A\rangle|0_1\rangle|0_2\rangle\dots(a(t)|0_j\rangle + b(t)|1_j\rangle)\dots|0_{N-1}\rangle|1_N\rangle|0_B\rangle, \\ &= a(t)|0_A0_10_2\dots\underbrace{0_j\dots0_{N-1}}_{\text{j-ésimo qubit}}1_N0_B\rangle + b(t)|0_A0_10_2\dots\underbrace{1_j\dots0_{N-1}}_{\text{j-ésimo qubit}}1_N0_B\rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Definiremos o *operador densidade* da cadeia de spins como

$$\rho = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|. \quad (2.17)$$

Esse operador descreve todas as características do sistema quântico. Assim como qualquer operador densidade, ele precisa obedecer algumas propriedades como *Hermiticidade* ($\rho^\dagger = \rho$), seus autovalores são não-negativos e seu *traço*, isto é, a média sobre todos os estados ortogonais que formam uma base [1], sempre terá um valor unitário:

$$\begin{aligned} Tr[\rho] &= \sum_n \langle\varphi_n|\rho|\varphi_n\rangle, \\ &= \sum_n |c_n(t)|^2 = 1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Será através desse operador que conseguiremos retirar as informações dos qubits que nos interessam utilizando o *traço parcial*. Explicando de maneira simples, se temos o operador densidade de um sistema S_1S_2 , a fim de obter o operador densidade do subsistema S_1 , calculamos o traço apenas do subsistema S_2 , ou seja,

$$\rho_{S_1} = Tr_{S_2}[\rho] = \sum_{\varphi_{S_2}} \langle\varphi_{S_2}|\rho|\varphi_{S_2}\rangle. \quad (2.19)$$

Desta forma, o resultado do traço parcial é outra matriz densidade, diferentemente do traço total que retorna um valor numérico. Como estamos interessados em mensurar as propriedades dos dois qubits de Bob na cadeia de spins, o subsistema S_2 corresponderá a todos os qubits da cadeia menos o subsistema S_1 , que corresponderá aos qubits de Bob. O operador densidade resultante dessa operação será ρ_B e esse poderá descrever as características de um estado bipartite *puro* ou *misto*.

Podemos definir um estado puro como aquele que consegue ser descrito por um único ket como, por exemplo, o estado geral do sistema $|\Psi(t)\rangle$. Para estados bipartites de dois níveis (qubits), podemos escrever um estado puro como

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{n=1}^4 c_n(t)|u_n\rangle, \\ &= c_1(t)|00\rangle + c_2(t)|01\rangle + c_3(t)|10\rangle + c_4(t)|11\rangle. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Já o operador densidade normalizado ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$) de um sistema puro das partículas l e m é descrito como

$$\rho_{l,m} = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (2.21)$$

Porém, quando o sistema não está isolado, sofrendo interações com outras partículas a todo instante, esse pode não se encontrar em um estado puro. Seu operador densidade é uma "mistura" de vários estados puros, isto é,

$$\rho_{l,m} = \sum_{j>0} p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|, \quad (2.22)$$

onde $p_j > 0$ descreve uma fração do estado puro $|\psi_j\rangle$ que compõe o *estado misto*. Nota-se que essa é a forma mais geral de escrever o operador densidade pois, se $j = 1$, descreveremos um estado puro e, se $j > 1$, o estado será misto. Uma condição necessária e suficiente para determinarmos se os qubits estão em um estado puro ou misto é calculando a *pureza* $Tr[\rho_{l,m}^2]$.

$$\begin{aligned} Tr[\rho_{l,m}^2] &= Tr[\rho_{l,m}\rho_{l,m}] \\ &= Tr\left[\sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \sum_l p_l |\psi_l\rangle \langle \psi_l|\right] \\ &= Tr\left[\sum_j \sum_l p_j p_l |\psi_j\rangle \underbrace{\langle \psi_j|\psi_l\rangle}_{\delta_{j,l}} \langle \psi_l|\right] \\ &= Tr\left[\sum_j p_j^2 |\psi_j\rangle \langle \psi_j|\right] = \sum_j p_j^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Se $j = 1$, $Tr[\rho_{l,m}^2] = Tr[\rho_{l,m}] = 1$, o que significa que esse é um estado puro. Já para o caso de $j > 1$, $Tr[\rho_{l,m}^2] < Tr[\rho_{l,m}]$, indicando um estado misto.

2.2.1 Operador densidade em termos das matrizes de Pauli

É possível escrever qualquer operador densidade $\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi|$ em termos das matrizes de Pauli através das combinações de envolvem I , σ_x , σ_y e σ_z [1]. Como estamos interessados em estudos de transmissão de emaranhamento entre dois qubits, teremos [61]

$$\rho = \frac{1}{4} \left[\alpha_{I,I} (I \otimes I) + \sum_{a=x,y,z} [\alpha_{a,I} (\sigma_a \otimes I) + \alpha_{I,a} (I \otimes \sigma_a)] + \sum_{a,b=x,y,z} \alpha_{a,b} (\sigma_a \otimes \sigma_b) \right]. \quad (2.24)$$

Agora, temos dezesseis parâmetros para calcular. Esses são os valores médios dos operadores de Pauli atuando em dois qubits e são obtidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \alpha_{I,I} &= \langle I \otimes I \rangle = Tr[\rho(I \otimes I)] = 1, \\ \alpha_{a,I} &= \langle \sigma_a \otimes I \rangle = Tr[\rho(\sigma_a \otimes I)], \\ \alpha_{I,a} &= \langle I \otimes \sigma_a \rangle = Tr[\rho(I \otimes \sigma_a)], \\ \alpha_{a,b} &= \langle \sigma_a \otimes \sigma_b \rangle = Tr[\rho(\sigma_a \otimes \sigma_b)]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Sabendo disso, calcularemos os parâmetros das equações (2.25) para construirmos o operador densidade dos dois qubits de Bob l e m a partir do operador do estado geral ρ utilizando a relação:

$$\alpha = Tr \left[\rho_{l,m}(\sigma^l \otimes \sigma^m) \right] = Tr \left[\rho(I^a I^b I^c \dots I^k \otimes \sigma^l \otimes \sigma^m) \right], \quad (2.26)$$

em que σ^l e σ^m podem ser I , σ_x , σ_y ou σ_z atuando nos sítios l e m . A fim de provar essa última equação, partiremos do princípio do traço total visto na equação (2.18). Definindo α como qualquer um dos parâmetros do conjunto de equações (2.25) atuando em l e m , e igualando com o termo da direita da equação (2.26), temos

$$\begin{aligned} \alpha &= Tr \left[\rho(I^a I^b I^c \dots I^k \otimes \sigma^l \otimes \sigma^m) \right] \\ &= \sum_{a,b,c,\dots,k,l,m} \langle a, b, c, \dots, k, l, m | \rho(I^a I^b I^c \dots I^k \otimes \sigma^l \otimes \sigma^m) | a, b, c, \dots, k, l, m \rangle. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Rearranjando e separando os estados l e m dos demais,

$$\alpha = \sum_{a,b,c,\dots,k,l,m} \langle a, b, c, \dots, k | \langle l, m | \rho(I^a I^b I^c \dots I^k) | a, b, c, \dots, k \rangle \sigma^l \otimes \sigma^m | l, m \rangle. \quad (2.28)$$

Atuando as identidades em seus respectivos kets, temos

$$\alpha = \sum_{a,b,c,\dots,k,l,m} \langle a, b, c, \dots, k | \langle l, m | \rho | a, b, c, \dots, k \rangle \sigma^l \otimes \sigma^m | l, m \rangle. \quad (2.29)$$

Aplicando a somatória em a, b, c, \dots, k , vemos que os termos l e m não afetam o restante dos estados, fazendo assim com que possamos reescrever a última equação trazendo o bra $\langle l, m |$ para frente, a fim de rearranjar a equação da seguinte forma:

$$\alpha = \sum_{l,m} \langle l, m | \sum_{a,b,c,\dots,k} \langle a, b, c, \dots, k | \rho | a, b, c, \dots, k \rangle \sigma^l \otimes \sigma^m | l, m \rangle. \quad (2.30)$$

Mas,

$$\sum_{a,b,c,\dots,k} \langle a, b, c, \dots, k | \rho | a, b, c, \dots, k \rangle = Tr_{a,b,c,\dots,k}(\rho) = \rho_{l,m}. \quad (2.31)$$

Substituindo na equação (2.30), encontramos finalmente

$$\alpha = \sum_{l,m} \langle l, m | \rho_{l,m}(\sigma^l \otimes \sigma^m) | l, m \rangle = Tr \left[\rho_{l,m}(\sigma^l \otimes \sigma^m) \right]. \quad (2.32)$$

Logo, é possível analisar o operador densidade dos últimos dois qubits utilizando o operador densidade total $\rho = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$. Esse método será muito importante para fazermos cálculos mais analíticos ou retirarmos as informações do operador densidade de Bob, já que a matriz densidade ρ fornecida após os cálculos tem dimensão $2^N \times 2^N$ para

o modelo padrão e $2^{N+2} \times 2^{N+2}$ para o modelo proposto, tornando-se inviável retirar o traço parcial computacionalmente. No próximo capítulo, veremos que esse método não será necessário se explorarmos algumas simetrias do modelo XX pois mostraremos que podemos deixar o problema de uma forma que sua complexidade computacional cresce polinomialmente com N .

2.3 Como ocorrerá a transmissão de estados emaranhados

Para os dois casos da figura 2.1 o estado geral inicial pode ser descrito por meio de três sub-estados: $|\psi_A(t)\rangle$ (um estado bipartite dos qubits em posse de Alice), $|\psi_m(t)\rangle$ (estado dos qubits de transmissão) e $|\psi_B(t)\rangle$ (o estado bipartite dos qubits em posse de Bob) [41]. Quantitativamente,

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi_A(0)\rangle \otimes |\psi_m(0)\rangle \otimes |\psi_B(0)\rangle. \quad (2.33)$$

Definimos o estado de entrada, no qual as informações serão introduzidas, da seguinte forma:

$$|\psi_A(0)\rangle = |\psi_{in}\rangle = a_1|00\rangle + a_2|01\rangle + a_3|10\rangle + a_4|11\rangle, \quad (2.34)$$

em que a_1, a_2, a_3 e a_4 podem ser reais ou complexos, desde que $\sum_{n=1}^4 |a_n|^2 = 1$. Como queremos enviar estados maximamente emaranhados, usaremos os estados de Bell:

$$\begin{aligned} |\phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \\ |\psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Para os estados dos demais qubits, esses serão preparados inicialmente no estado $|0\rangle$:

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi_A(0)\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle. \quad (2.36)$$

Após a preparação do estado inicial, este evolui temporalmente com uma certa Hamiltoniana durante um tempo t para $|\Psi(t)\rangle$. Nesse ponto, calcularemos o operador densidade reduzido de Bob $\rho_B(t)$ para obter o *grau de emaranhamento* entre seus qubits e a *fidelidade* com o estado preparado por Alice $|\psi_A(0)\rangle$ [62] conforme explicado na seção seguinte. Preparar o estado assim nos permitirá sabermos, independente do número de spins da cadeia, quantos estados excitados o sistema tem e, com isso, encontrar o melhor algoritmo para analisarmos os resultados e comparar com o modelo padrão, cujos resultados já foram apresentados na literatura.

2.4 Fidelidade e emaranhamento

Uma maneira de quantificar a eficiência da transmissão de um estado quântico ao longo de uma cadeia de spins se dá por meio do cálculo da fidelidade F [1]. Esta grandeza mede, após um tempo t , o quão próximo o estado de Bob está do estado de entrada $|\psi_A(t=0)\rangle$ originalmente com Alice. Matematicamente, definimos a fidelidade como

$$F = \langle \psi_A(0) | \rho_B(t) | \psi_A(0) \rangle. \quad (2.37)$$

Se o estado dos qubits de Bob for puro, $\rho_B(t) = |\psi_B(t)\rangle\langle\psi_B(t)|$, a fidelidade será $F = |\langle \psi_A(0) | \psi_B(t) \rangle|^2$.

Já para o emaranhamento de estados puros bipartites, Bennett *et al.* [45, 63] demonstraram que a entropia de von-Neumann pode ser utilizada para medir o grau de emaranhamento das partículas a e b descritos por um estado $|\psi\rangle$. Sendo assim, mensuramos o emaranhamento de estados puros através da equação

$$E(\psi) = -Tr[\rho_a \log_2(\rho_a)] = -Tr[\rho_b \log_2(\rho_b)], \quad (2.38)$$

onde $\rho_a = Tr_b[\rho]$ e $\rho_b = Tr_a[\rho]$ são os operadores densidade reduzidos das partículas a e b , respectivamente. Os valores de $E(\rho)$ estarão sempre entre 0 (estados separáveis) e 1 (estados emaranhados). Para o cálculo do logaritmo de um operador, lembrando que $\log_2(\rho_a) = \frac{\ln(\rho_a)}{\ln(2)}$, temos que partir das séries de potência [65];

$$\begin{aligned} \log_2(\rho_a) &= \frac{1}{\ln(2)} \ln(\rho_a) \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \left[(\rho_a - I) - \frac{(\rho_a - I)^2}{2} + \frac{(\rho_a - I)^3}{3} - \frac{(\rho_a - I)^4}{4} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Por exemplo, se calcularmos o emaranhamento do estado puro $|\psi\rangle_1 = |00\rangle$, teremos que o operador densidade será $\rho_1 = |00\rangle\langle 00|$ e $\rho_a = Tr_b[\rho_1] = \langle 0_b | \rho | 0_b \rangle + \langle 1_b | \rho | 1_b \rangle = |0\rangle\langle 0|$. Ao calcularmos o logaritmo de base 2 do operador densidade reduzido ρ_a , encontraremos $\log_2(\rho_a) = 0_{2 \times 2}$. Concluimos que $E(\rho_1) = -Tr[\rho_a \log_2(\rho_a)] = 0$ (estados separáveis). Outro exemplo é calcularmos o emaranhamento para o estado de Bell $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, partindo do operador densidade $\rho_{\phi^+} = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$. Calculando $Tr_b[\rho_{\phi^+}]$, encontramos que $\rho_a = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$ e $\log_2(\rho_a) = -(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$. Logo, $E(\rho_{\phi^+}) = -Tr[\rho_a \log_2(\rho_a)] = -Tr[-\frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)] = 1$ (estados maximamente emaranhados).

Podemos também encontrar casos de qubits *parcialmente emaranhados*. Esses estados podem ser utilizados em teleclonagem de qubits [64], estudos da espectroscopia Ramsey sob alguma decoerência [66], entre outros. Um exemplo de estado parcialmente emaranhado é $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + \frac{1}{2}(|10\rangle + |11\rangle))$. Percebe-se que, se medirmos o estado $|1\rangle$ em a ,

o estado da partícula b continuará em uma superposição dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Diferentemente, se medirmos o estado $|0\rangle$ em a , o estado de b colapsará para $|0\rangle$. Isso indica que há um certo grau de emaranhamento entre os qubits. Para calcular o emaranhamento desse estado partindo do seu operador densidade

$$\rho_\psi = \frac{1}{2}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle\langle 10| + |00\rangle\langle 11| + |10\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 00|) + \frac{1}{4}(|10\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|). \quad (2.40)$$

Ao determinarmos o operador reduzido da partícula b , encontramos o operador densidade reduzido $\rho_b = \frac{1}{4}(3|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + \frac{1}{4}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)$. Com isso, calculamos o emaranhamento $E(\rho_\psi) = -Tr[\rho_b \log_2(\rho_b)] \approx 0,65$. Logo, o estado $|\psi\rangle$ descreve um estado com aproximadamente 65% de emaranhamento.

Apesar de Alice preparar um estado puro maximamente emaranhado para transmissão via cadeia de spins, os qubits de Bob dificilmente estarão em um estado puro porque há interação entre todos os qubits. Nesse caso, trata-se de estados mistos bipartites, e a entropia de von-Neumann não descreve corretamente o emaranhamento nesse cenário, sendo necessário outra forma de medir essa característica quântica. A seguir, apresentaremos o *emaranhamento de formação*, que nos permite calcular o grau de emaranhamento em estados mistos.

2.4.1 Emaranhamento de formação e concorrência

O emaranhamento de Formação (EoF) mensura o número mínimo de singletos necessários para obter um conjunto de pares de partículas descritas por ρ , utilizando apenas operações locais e comunicação clássica [45, 63, 67]. Matematicamente, ele é definido como

$$EoF(\rho) = \min \sum_i p_i E(\psi_i), \quad (2.41)$$

em que $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle \psi_i|$ é o operador densidade em uma possível decomposição de ρ e $E(\psi_i)$ é emaranhamento de cada estado puro $|\psi_i\rangle$ via entropia de von-Neumann. Apesar de ser uma definição simples, na grande maioria das vezes encontrar a decomposição de ρ que minimiza $\sum_i p_i E(\psi_i)$ é um problema difícil de se resolver analiticamente.

Felizmente, Scott Hill e William K. Wootters [68] apresentaram uma solução analítica para dois qubits:

$$EoF(\rho) = -(f)\log_2(f) - (1-f)\log_2(1-f), \quad (2.42)$$

onde $f = (1 + \sqrt{1 - C^2})/2$. Aqui, C é a *concorrência*, definida como

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (2.43)$$

na qual $\lambda_{i=1,\dots,4}$ são as raízes quadradas dos autovalores em ordem decrescente do operador não-Hermitiano $R = \rho\tilde{\rho}$, em que $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$, e ρ^* o conjugado de ρ [69].

Esse cálculo acaba sendo muito abrangente pois pode ser aplicado tanto para estados mistos quanto puros. O estado dos qubits de Bob acabará sempre sendo misto, com exceção dos casos dos seus qubits estarem em um estado separável (EoF=0) ou maximamente emaranhado (EoF=1). O objetivo inicial na transmissão de estado quântico em uma cadeia de spins é o caso ideal em que Bob deve medir em seus qubits o mesmo estado puro e maximamente emaranhado que Alice preparou. Porém, quando trabalhamos com muitas partículas, dificilmente encontraremos uma situação de fidelidade máxima em $t > 0$ devido à decoerência do sistema. Isso se torna um problema para muitos protocolos de comunicação quântica que trabalham com estados maximamente emaranhados. Nosso objetivo é alcançar uma transmissão de Alice para Bob para grandes cadeias de spins com a fidelidade o mais próximo possível de 1.

Capítulo 3

Resultados

3.1 Transmissão de estados com uma excitação

Vamos estudar com mais detalhes a transmissão dos estados $|\psi^+\rangle$ e $|\psi^-\rangle$ para o modelo proposto, visto que o seu análogo unidimensional (modelo padrão) já é conhecido e estudado em outros trabalhos [25,57,70]. Como o número de excitações é conservado para a Hamiltoniana estudada, podemos escrever o estado do sistema para qualquer tempo t como

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) \sigma_n^+ |\hat{0}\rangle = \sum_n c_n(t) |\hat{1}_n\rangle, \quad (3.1)$$

onde $\sum_n |c_n|^2 = 1$, $n = A, 1, 2, \dots, N-1, N, B$, $|\hat{0}\rangle = |0_A 0_1 0_2 \dots 0_{N-1} 0_N 0_B\rangle$ e

$$|\hat{1}_n\rangle = \sigma_n^+ |0_A 0_1 0_2 \dots \underbrace{0_n}_{n\text{-ésimo qubit}} \dots 0_{N-1} 0_N 0_B\rangle = |0_A 0_1 0_2 \dots \underbrace{1_n}_{n\text{-ésimo qubit}} \dots 0_{N-1} 0_N 0_B\rangle. \quad (3.2)$$

Essa é a maneira mais simples de escrever um estado geral composto de estados de um qubit excitado [40]. Se em $t = 0$ os qubits de Alice A e 1 estiverem no estado de Bell $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$, o estado geral do sistema será $|\Psi^+(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01000\dots 000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10000\dots 000\rangle$. Logo, a condição inicial na notação da equação (3.1) será

$$\begin{aligned} c_A(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ c_1(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ c_k(0) &= 0, \text{ para } k \geq 2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

O estado geral inicial é escrito como

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle &= c_A(0)|\hat{1}_A\rangle + c_1(0)|\hat{1}_1\rangle, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\hat{1}_A\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\hat{1}_1\rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Vamos, agora, obter a equação de movimento do sistema, substituindo $|\Psi(t)\rangle$ na equação de Schroedinger (2.5). Usando $\hbar = 1$, temos

$$i \sum_n \frac{d}{dt} c_n(t) |\hat{1}_n\rangle = \sum_n c_n(t) \mathcal{H} |\hat{1}_n\rangle. \quad (3.5)$$

Realizando o produto escalar por $\langle \hat{1}_m |$ na equação anterior, sendo m um sítio qualquer do sistema, obtemos

$$i \sum_n \frac{d}{dt} c_n(t) \langle \hat{1}_m | \hat{1}_n \rangle = \sum_n c_n(t) \langle \hat{1}_m | \mathcal{H} | \hat{1}_n \rangle. \quad (3.6)$$

Como $\langle \hat{1}_m | \hat{1}_n \rangle = \delta_{m,n}$, chegamos a seguinte equação de movimento,

$$i \frac{d}{dt} c_m(t) = \sum_n c_n(t) \langle \hat{1}_m | \mathcal{H} | \hat{1}_n \rangle. \quad (3.7)$$

Resolvendo essa equação para $m = A, 1, 2, \dots, N-1, N, B$, usando a Hamiltoniana (2.11) obtemos

$$i \frac{d}{dt} c_A(t) = 2J_{A,2} c_2(t), \quad (3.8)$$

$$i \frac{d}{dt} c_1(t) = 2J_{1,2} c_2(t), \quad (3.9)$$

$$i \frac{d}{dt} c_2(t) = 2J_{1,2} c_1(t) + 2J_{A,2} c_A(t) + 2J_{2,3} c_3(t), \quad (3.10)$$

$$i \frac{d}{dt} c_k(t) = 2J_{k-1,k} c_{k-1}(t) + 2J_{k,k+1} c_{k+1}(t), \text{ sendo } 3 \leq k \leq N-2, \quad (3.11)$$

$$i \frac{d}{dt} c_{N-1}(t) = 2J_{N-2,N-1} c_{N-2}(t) + 2J_{N-1,N} c_N(t) + 2J_{N-1,B} c_B(t), \quad (3.12)$$

$$i \frac{d}{dt} c_N(t) = 2J_{N-1,N} c_{N-1}(t), \quad (3.13)$$

$$i \frac{d}{dt} c_B(t) = 2J_{N-1,B} c_{N-1}(t). \quad (3.14)$$

Matricialmente pode-se reorganizar esses resultados da seguinte maneira:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_A(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \\ \vdots \\ c_{N-2}(t) \\ c_{N-1}(t) \\ c_N(t) \\ c_B(t) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_{A,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ J_{A,2} & J_{1,2} & 0 & J_{2,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{2,3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & J_{N-2,N-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_{N-2,N-1} & 0 & J_{N-1,N} & J_{N-1,B} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & J_{N-1,N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & J_{N-1,B} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_A(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \\ \vdots \\ c_{N-2}(t) \\ c_{N-1}(t) \\ c_N(t) \\ c_B(t) \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Comparando com a equação (2.5), nota-se que, para estados gerais compostos de uma base de estados de apenas um sítio ocupado no modelo proposto, podemos trabalhar com o estado matricial $|\Psi(t)\rangle$ como uma matriz coluna de dimensão $N + 2$. Além disso, temos que \mathcal{H}_{XX} passa a ser uma matriz $(N + 2) \times (N + 2)$ em que a primeira linha e a primeira coluna refere-se ao qubit A e a última linha e a última coluna remete-se ao qubit B .

Para o modelo padrão, se fizermos o mesmo tratamento, utilizando a Hamiltoniana

$$\mathcal{H}_{1D} = 2 \sum_{j=1}^{N-1} J_{j,j+1} (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-), \quad (3.16)$$

encontraremos a seguinte equação de Schroedinger:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \\ \vdots \\ c_{N-2}(t) \\ c_{N-1}(t) \\ c_N(t) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & J_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ J_{1,2} & 0 & J_{2,3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_{2,3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_{N-2,N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J_{N-2,N-1} & 0 & J_{N-1,N} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_{N-1,N} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \\ \vdots \\ c_{N-2}(t) \\ c_{N-1}(t) \\ c_N(t) \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Resultado esse já publicado e estudado [57, 71, 72]. Trabalhar com essas Hamiltonianas nos trará um ganho computacional muito grande, nos permitindo calcular sistemas de até milhares de qubits. Agora, estudaremos o operador densidade de Bob nessas condições para os modelos proposto e padrão.

3.1.1 Operador densidade

Analisaremos o operador densidade de Bob quando Alice transmite os estados de Bell $|\psi^+\rangle$ e $|\psi^-\rangle$, que possuem apenas uma excitação. Como o número de excitações aqui

estudados não se altera, sabemos que não há a possibilidade de encontrarmos estados de dois ou mais qubits excitados. Dessa forma, o cálculo da matriz densidade descrevendo os qubits de Bob será bem simplificado uma vez que não precisamos incluir estados com duas ou mais excitações ao tomarmos o traço parcial.

Começamos os estudos pelo modelo padrão e sendo $\rho = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$, temos

$$\begin{aligned}
\rho_{N-1,N} &= \text{Tr}_{1,\dots,N-2}[\rho], \\
&= \langle 0_1 \dots 0_{N-2} | \rho | 0_1 \dots 0_{N-2} \rangle + \sum_{n=1}^{N-2} \langle 0_1 \dots 0_{N-2} | (\sigma_n^+)^\dagger \rho \sigma_n^+ | 0_1 \dots 0_{N-2} \rangle, \\
&= \underbrace{\langle 0_1 \dots 0_{N-2} | \Psi(t) \rangle \langle \Psi(t) | 0_1 \dots 0_{N-2} \rangle}_{T1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{N-2} \langle 0_1 \dots 0_{N-2} | (\sigma_n^+)^\dagger | \Psi(t) \rangle \langle \Psi(t) | \sigma_n^+ | 0_1 \dots 0_{N-2} \rangle}_{T2}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Sendo $|\Psi(t)\rangle = \sum_{m=1}^N c_m(t) \sigma_m^+ |0_1 \dots 0_N\rangle$, temos para o termo $T2$ da equação acima,

$$\begin{aligned}
T2 &= \sum_{n=1}^{N-2} \langle 0_1 \dots 0_{N-2} | (\sigma_n^+)^\dagger \left(\sum_{m=1}^N c_m(t) \sigma_m^+ |0_1 \dots 0_N\rangle \right) \left(\sum_{l=1}^N c_l^*(t) \langle 0_1 \dots 0_N | (\sigma_l^+)^\dagger \right) \sigma_n^+ |0_1 \dots 0_{N-2}\rangle, \\
&= \sum_{n=1}^{N-2} \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^N c_m(t) c_l^*(t) \langle 0_1 \dots 0_{N-2} | (\sigma_n^+)^\dagger \sigma_m^+ |0_1 \dots 0_{N-2}\rangle \\
&\quad \langle 0_1 \dots 0_{N-2} | (\sigma_l^+)^\dagger \sigma_n^+ |0_1 \dots 0_{N-2}\rangle |0_{N-1} 0_N\rangle \langle 0_{N-1} 0_N|, \\
&= \sum_{n=1}^{N-2} \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^N c_m(t) c_l^*(t) \langle 0_1 \dots 1_n \dots 0_{N-2} | 0_1 \dots 1_m \dots 0_{N-2} \rangle \\
&\quad \langle 0_1 \dots 1_l \dots 0_{N-2} | 0_1 \dots 1_n \dots 0_{N-2} \rangle |0_{N-1} 0_N\rangle \langle 0_{N-1} 0_N|
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Como $\langle 0_1 \dots 1_n \dots 0_{N-2} | 0_1 \dots 1_m \dots 0_{N-2} \rangle = \delta_{n,m}$ e $\langle 0_1 \dots 1_l \dots 0_{N-2} | 0_1 \dots 1_n \dots 0_{N-2} \rangle = \delta_{l,n}$, temos

$$\begin{aligned}
T2 &= \sum_{n=1}^{N-2} |c_n(t)|^2 |0_{N-1} 0_N\rangle \langle 0_{N-1} 0_N|, \\
&= (1 - |c_{N-1}(t)|^2 - |c_N(t)|^2) |0_{N-1} 0_N\rangle \langle 0_{N-1} 0_N|,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde usamos a condição de normalização $\sum_{n=1}^N |c_n(t)|^2 = 1$ para obter a última equação.

O cálculo do primeiro termo da equação (3.18), $T1$, é mais simples:

$$\begin{aligned}
T1 &= \langle 0_1 \dots 0_{N-2} | \left(\sum_{m=1}^N c_m(t) \sigma_m^+ |0_1 \dots 0_N\rangle \right) \left(\sum_{l=1}^N c_l^*(t) \langle 0_1 \dots 0_N | (\sigma_l^+)^\dagger \right) |0_1 \dots 0_{N-2}\rangle, \\
&= \langle 0_1 \dots 0_{N-2} | (c_{N-1}(t) |0_1 \dots 0_{N-2}\rangle |1_{N-1} 0_N\rangle \\
&\quad + c_N(t) |0_1 \dots 0_{N-2}\rangle |0_{N-1} 1_N\rangle) (c_{N-1}^*(t) \langle 0_1 \dots 0_{N-2} | \langle 1_{N-1} 0_N| \\
&\quad + c_N^*(t) \langle 0_1 \dots 0_{N-2} | \langle 0_{N-1} 1_N|) |0_1 \dots 0_{N-2}\rangle, \\
&= \langle 0_1 \dots 0_{N-2} | 0_1 \dots 0_{N-2} \rangle [(c_{N-1}(t) |1_{N-1} 0_N\rangle \\
&\quad + c_N(t) |0_{N-1} 1_N\rangle) (c_{N-1}^*(t) \langle 1_{N-1} 0_N| + c_N^*(t) \langle 0_{N-1} 1_N|)], \\
&= |c_{N-1}(t)|^2 |1_{N-1} 0_N\rangle \langle 1_{N-1} 0_N| + |c_N(t)|^2 |0_{N-1} 1_N\rangle \langle 0_{N-1} 1_N| \\
&\quad + c_{N-1}(t) c_N^*(t) |1_{N-1} 0_N\rangle \langle 0_{N-1} 1_N| + c_{N-1}^*(t) c_N(t) |0_{N-1} 1_N\rangle \langle 1_{N-1} 0_N|.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Substituindo estes resultados na equação (3.18) obtemos

$$\begin{aligned} \rho_{N-1,N} = & |c_{N-1}(t)|^2 |1_{N-1}0_N\rangle\langle 1_{N-1}0_N| + c_{N-1}(t)c_N^*(t) |1_{N-1}0_N\rangle\langle 0_{N-1}1_N| + \\ & c_{N-1}^*(t)c_N(t) |0_{N-1}1_N\rangle\langle 1_{N-1}0_N| + |c_N(t)|^2 |0_{N-1}1_N\rangle\langle 0_{N-1}1_N| + \\ & (1 - |c_{N-1}(t)|^2 - |c_N(t)|^2) |0_{N-1}0_N\rangle\langle 0_{N-1}0_N|. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Logo, a matrix densidade de Bob para o modelo padrão é

$$\rho_{N-1,N} = \begin{pmatrix} 1 - |c_{N-1}(t)|^2 - |c_N(t)|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |c_N(t)|^2 & c_N(t)c_{N-1}^*(t) & 0 \\ 0 & c_{N-1}^*(t)c_N(t) & |c_{N-1}(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Para o cálculo da concorrência, utilizaremos as informações da seção 2.4.1. Temos que as raízes quadradas dos autovalores do operador R são $\lambda_1 = 2|c_{N-1}(t)c_N(t)|^2$ e $\lambda_{2,3,4} = 0$. Conseqüentemente,

$$C(\rho_{N-1,N}) = 2|c_{N-1}(t)c_N(t)|, \quad (3.24)$$

resultado esse já conhecido na literatura [40]. A fidelidade vale

$$F = \langle \psi^+ | \rho_{N-1,N} | \psi^+ \rangle = \frac{1}{2} (|c_{N-1}(t)|^2 + |c_N(t)|^2) + \text{Re}[c_{N-1}^*(t)c_N(t)]. \quad (3.25)$$

Já para o modelo proposto, partindo do mesmo princípio:

$$\begin{aligned} \rho_{N,B} &= \text{Tr}_{A,1,2,\dots,N-1}[\rho], \\ &= \langle 0_A 0_1 0_2 \dots 0_{N-1} | \rho | 0_A 0_1 0_2 \dots 0_{N-1} \rangle + \sum_{n=A,1}^{N-1} \langle 0_A 0_1 0_2 \dots 0_{N-1} | (\sigma_n^+)^{\dagger} \rho \sigma_n^+ | 0_A 0_1 0_2 \dots 0_{N-1} \rangle, \\ &= \langle 0_A 0_1 0_2 \dots 0_{N-1} | \Psi(t) \rangle \langle \Psi(t) | 0_A 0_1 0_2 \dots 0_{N-1} \rangle + \\ &\quad \sum_{n=A,1}^{N-1} \langle 0_A 0_1 0_2 \dots 0_{N-1} | (\sigma_n^+)^{\dagger} | \Psi(t) \rangle \langle \Psi(t) | \sigma_n^+ | 0_A 0_1 0_2 \dots 0_{N-1} \rangle. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Substituindo $|\Psi(t)\rangle = \sum_m c_m(t) \sigma_m^+ |\hat{0}_{N+2}\rangle$ onde $m = A, 1, 2, \dots, N-1, N, B$, temos

$$\begin{aligned} \rho_{N,B} &= |c_N(t)|^2 |1_N 0_B\rangle\langle 1_N 0_B| + c_N(t)c_B^*(t) |1_N 0_B\rangle\langle 0_N 1_B| + c_B^*(t)c_N(t) |0_N 1_B\rangle\langle 1_N 0_B| \\ &\quad + |c_B(t)|^2 |0_N 1_B\rangle\langle 0_N 1_B| + \sum_{n=A,1}^{N-1} |c_n(t)|^2 |0_N 0_B\rangle\langle 0_N 0_B|, \\ &= |c_N(t)|^2 |1_N 0_B\rangle\langle 1_N 0_B| + c_N(t)c_B^*(t) |1_N 0_B\rangle\langle 0_N 1_B| + c_B^*(t)c_N(t) |0_N 1_B\rangle\langle 1_N 0_B| \\ &\quad + |c_B(t)|^2 |0_N 1_B\rangle\langle 0_N 1_B| + (1 - |c_N(t)|^2 - |c_B(t)|^2) |0_N 0_B\rangle\langle 0_N 0_B|. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Matricialmente,

$$\rho_{N,B} = \begin{pmatrix} 1 - |c_N(t)|^2 - |c_B(t)|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |c_B(t)|^2 & c_B(t)c_N^*(t) & 0 \\ 0 & c_B^*(t)c_N(t) & |c_N(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

A concorrência dos qubits de Bob para o modelo proposto é

$$C(\rho_{N,B}) = 2|c_N(t)c_B(t)|. \quad (3.29)$$

Para o caso da fidelidade, partindo da equação (2.37), em que Alice transmite o estado $|\psi^+\rangle$, encontramos

$$F = \langle \psi^+ | \rho_{N,B} | \psi^+ \rangle = \frac{|c_N(t) + c_B(t)|^2}{2}. \quad (3.30)$$

Caso os sítios N e B interajam com $N-1$ com a mesma intensidade (mesmas constantes de acoplamento), teremos um sistema simétrico na ponta da cadeia e, conseqüentemente, $c_N(t) = c_B(t)$. Com isso, o operador densidade dos qubits de Bob em um instante t é

$$\begin{aligned} \rho_{N,B} &= \begin{pmatrix} 1 - 2|c_B(t)|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |c_B(t)|^2 & |c_B(t)|^2 & 0 \\ 0 & |c_B(t)|^2 & |c_B(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2|c_B(t)|^2 |\psi^+\rangle\langle\psi^+| + (1 - 2|c_B(t)|^2) |00\rangle\langle 00|. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Assim, a concorrência passa a ser

$$C(\rho_{N,B}) = 2|c_B(t)|^2 \quad (3.32)$$

e a fidelidade

$$F = 2|c_B(t)|^2 = C(\rho_{N,B}). \quad (3.33)$$

Logo, concluímos que a fidelidade será igual à concorrência no modelo proposto para esse estado de Bell, diferentemente do modelo padrão, em que quase sempre $c_{N-1}(t) \neq c_N(t)$. Com isso, conseguimos demonstrar que para obtermos todas as informações necessárias para o estudo da transmissão de emaranhamento, só precisamos calcular as variáveis $c_{N-1}(t)$ e $c_N(t)$ para o caso unidimensional e $c_N(t)$ e $c_B(t)$ para o modelo proposto se o estado de Alice é $|\psi^+\rangle$. Tendo essas informações estabelecidas, faremos uma análise mais detalhada da transmissão de estados emaranhados $|\psi^+\rangle$ e $|\psi^-\rangle$ a seguir.

3.2 O estado de Bell $|\psi^-\rangle$

No começo dos estudos sobre a transmissão de informação, observamos que, diferentemente dos demais estados de Bell, não há transmissão do estado $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ na grande maioria dos casos estudados para o modelo que propomos nesses estudos. Investigaremos em qual cenário o estado $|\psi^-\rangle$ não evolui temporalmente com a Hamiltoniana proposta, isto é, quais as condições para que $d\rho_{\psi^-}/dt = 0$,

Trabalhando na representação de Heisenberg, temos

$$\frac{d}{dt}\rho_{\psi^-} = i[\mathcal{H}, \rho_{\psi^-}]. \quad (3.34)$$

Escrevendo o estado geral quando o estado de Bell $|\psi^-\rangle$ está com Alice, vemos que

$$\begin{aligned} |\Psi^-\rangle &= |\psi^-\rangle_{1,A} \otimes |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 \otimes \dots \otimes |0\rangle_N \otimes |0\rangle_B, \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \right]_{1,A} \otimes \dots \otimes |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 \otimes \dots \otimes |0\rangle_N \otimes |0\rangle_B. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Seu operador densidade em termos das matrizes de Pauli é

$$\begin{aligned} \rho_{\psi^-} &= |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|, \\ &= |\psi^-\rangle\langle\psi^-|_{1,A} \otimes |0\rangle\langle 0|_2 \otimes |0\rangle\langle 0|_3 \otimes \dots \otimes |0\rangle\langle 0|_N \otimes |0\rangle\langle 0|_B, \\ &= \frac{1}{4}(I_1 \otimes I_A - \sigma_1^x \otimes \sigma_A^x - \sigma_1^y \otimes \sigma_A^y - \sigma_1^z \otimes \sigma_A^z) \bigotimes_{i=2}^{N,B} (I + \sigma^z)_i. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Para calcular o comutador $[\mathcal{H}, \rho_{\psi^-}]$, reescreveremos a equação (2.7) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -h_1\sigma_1^z - h_2\sigma_A^z - \sum_{k=2}^B h_k\sigma_k^z + \sum_{\alpha=x,y,z} \left(J_{1,2}^\alpha \sigma_1^\alpha \sigma_2^\alpha + J_{A,2}^\alpha \sigma_A^\alpha \sigma_2^\alpha \right) \\ &+ \sum_{\alpha=x,y,z} \left(\sum_{j=2}^{N-1} J_{j,j+1}^\alpha \sigma_j^\alpha \sigma_{j+1}^\alpha \right) + \sum_{\alpha=x,y,z} \left(J_{N-1,N}^\alpha \sigma_{N-1}^\alpha \sigma_N^\alpha + J_{N-1,B}^\alpha \sigma_{N-1}^\alpha \sigma_B^\alpha \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Trabalhando com a equação (3.37), não é difícil fazer os cálculos do comutador. Assim, é possível ver que as condições para que $d\rho_{\psi^-}/dt$ seja nula, ou seja, para que $[\mathcal{H}, \rho_{\psi^-}] = 0$ são:

1. $J_{A,2}^\alpha = J_{1,2}^\alpha$, sendo $\alpha = x, y, z$;
2. $J_{j,j+1}^x = J_{j,j+1}^y$, em que $m = 2, 3, 4, \dots, N-1, N, B$;
3. $h_1 = h_A$.

Na verdade, se satisfizermos essas condições, teremos uma Hamiltoniana cujo estado $|\psi^-\rangle$ é um dos seus autovetores, com autovalor 0, como veremos na próxima seção. Logo,

esse estado não evolui para modelos XX e XXZ, por exemplo. Os outros parâmetros, como h_k e $J_{j,j+1}^z$, para $j \geq 2$, terão importância nos resultados apenas quando pelo menos uma dessas condições não for satisfeita. É de se perceber pela primeira condição que isso não ocorre no modelo padrão, em que é possível transmitir $|\psi^-\rangle$.

3.3 O estado de Bell $|\psi^+\rangle$

Apesar de o estado $|\psi^-\rangle$ não ser transmissível para o modelo proposto para cadeias no modelo isotrópico XY, o mesmo não ocorre para $|\psi^+\rangle$, onde as simulações apontaram resultados expressivos com transmissões altamente eficientes. Para melhor compreender a razão desse sucesso, analisaremos primeiramente um sistema de poucos qubits, cuja solução analítica podemos obter usando métodos analíticos. Em seguida passaremos aos estudos numéricos para cadeias de centenas e milhares de qubits.

Formalmente, qualquer Hamiltoniana pode ser escrita na base em que ela é diagonal da seguinte forma:

$$\mathcal{H} = \sum_n E_n |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}|, \quad (3.38)$$

onde $n = 1, 2, \dots, N + 2$ e $|\tilde{n}\rangle$ é o n -ésimo autovetor de \mathcal{H} com autoenergia E_n [40]. Para obter a evolução temporal do estado $|\psi\rangle$, temos que projetá-lo nesta base

$$|\psi\rangle = \sum_n |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}|\psi\rangle. \quad (3.39)$$

Na base em que a Hamiltoniana é diagonal, a evolução temporal é

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\mathcal{H}t} |\psi(0)\rangle = \sum_n e^{-iE_n t} |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}|\psi(0)\rangle. \quad (3.40)$$

Para o modelo aqui investigado, temos $|\Psi(0)\rangle = |\psi^+\rangle_{A,1} \otimes |0_2 \dots 0_N 0_B\rangle$ e portanto

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n e^{-iE_n t} |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}| \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\hat{1}_A\rangle + |\hat{1}_1\rangle \right) \right], \quad (3.41)$$

onde usamos a notação introduzida na seção 3.1. Calculando a fidelidade do estado dos qubits com Bob com o estado enviado, temos

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \left| \left(\langle \hat{1}_B | + \langle \hat{1}_N | \right) |\Psi(t)\rangle \right|^2 \\ &= \left| \sum_n e^{-iE_n t} \left(\frac{\langle \hat{1}_B | + \langle \hat{1}_N |}{\sqrt{2}} \right) |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}| \left(\frac{|\hat{1}_A\rangle + |\hat{1}_1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Analogamente, podemos fazer o mesmo estudo para o modelo padrão em que $n = 1, 2, \dots, N$. A fidelidade nesse caso é

$$\begin{aligned} F^{1D} &= \frac{1}{2} \left| \left(\langle \hat{1}_{N-1} | + \langle \hat{1}_N | \right) | \Psi(t) \rangle \right|^2 \\ &= \left| \sum_n e^{-iE_n t} \left(\frac{\langle \hat{1}_{N-1} | + \langle \hat{1}_N |}{\sqrt{2}} \right) | \tilde{n} \rangle \langle \tilde{n} | \left(\frac{|\hat{1}_1\rangle + |\hat{1}_2\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Passemos agora ao cálculo da fidelidade para o menor sistema possível e não trivial, aquele com $N = 4$. Para o modelo proposto, isso significa que teremos seis qubits no sistema, sendo dois para Alice, dois para Bob e dois para transmissão (figura 3.1).

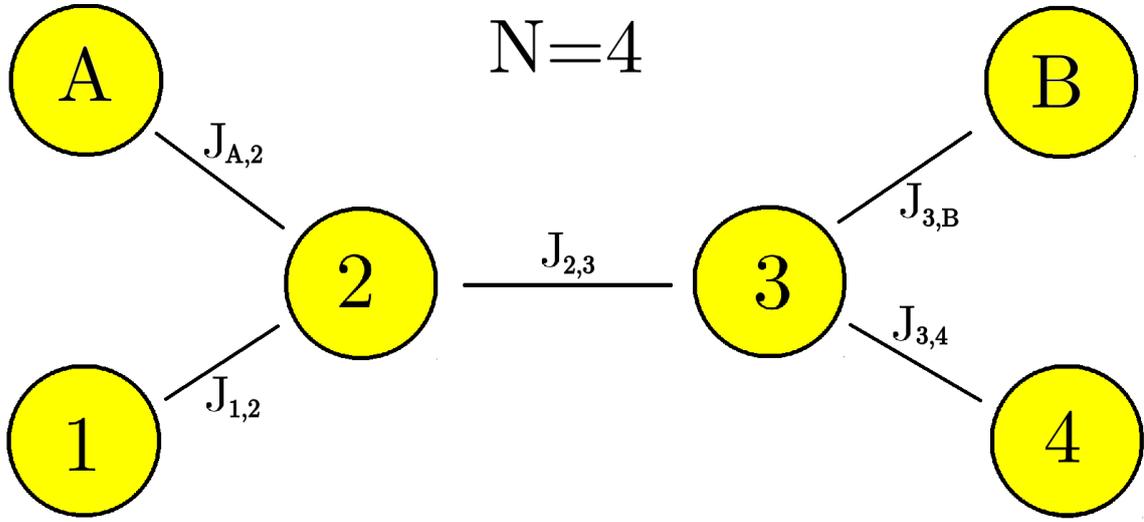


Figura 3.1: Representação do modelo proposto para uma cadeia de $N = 4$.

Os estados $\frac{|\hat{1}_A\rangle + |\hat{1}_1\rangle}{\sqrt{2}}$ e $\frac{|\hat{1}_N\rangle + |\hat{1}_B\rangle}{\sqrt{2}}$ descritos na equação (3.42) para $N = 4$ serão

$$\frac{|\hat{1}_A\rangle + |\hat{1}_1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{|\hat{1}_4\rangle + |\hat{1}_B\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Reescrevendo a Hamiltoniana da equação (3.15) para 6 qubits, temos

$$\mathcal{H}_{XX} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_{A,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ J_{A,2} & J_{1,2} & 0 & J_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{2,3} & 0 & J_{3,4} & J_{3,B} \\ 0 & 0 & 0 & J_{3,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{3,B} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

cujas autoenergias são $E_1 = 0$, $E_2 = -\sqrt{2(\sum J^2 + K)}$, $E_3 = -\sqrt{2(\sum J^2 - K)}$, $E_4 = \sqrt{2(\sum J^2 - K)}$, $E_5 = \sqrt{2(\sum J^2 + K)}$ e $E_6 = 0$, sendo $\sum J^2 = J_{A,2}^2 + J_{1,2}^2 + J_{2,3}^2 + J_{3,4}^2 + J_{3,B}^2$ e $K = \sqrt{(\sum J^2)^2 - 4(J_{A,2}^2 + J_{1,2}^2)(J_{3,4}^2 + J_{3,B}^2)}$. Ao calcularmos os autoestados de E_1 e E_6 temos,

$$|\tilde{1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{J_{A,2}^2 + J_{1,2}^2}} \begin{pmatrix} -J_{1,2} \\ J_{A,2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |\tilde{6}\rangle = \frac{1}{\sqrt{J_{3,4}^2 + J_{3,B}^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ J_{3,B} \\ -J_{3,4} \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Não é difícil notar que $(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle \hat{1}_B | + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \hat{1}_N |)|\tilde{6}\rangle$ e $\langle \tilde{1}|(\frac{1}{\sqrt{2}}|\hat{1}_A\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\hat{1}_1\rangle)$ serão nulos se $J_{1,2} = J_{A,2} = J_A$ e $J_{3,4} = J_{3,B} = J_B$. Esta é a relação que permite que a fórmula da concorrência seja igual à da fidelidade no modelo proposto, como visto na seção 3.1.1.

Como para transmissões de um qubit o uso de Hamiltonianas espelhadas [25,57,71–73] se mostrou como sendo a melhor opção, definimos também que $J_{i,i+1} = J_{N-i,N-i+1}$ para o nosso modelo, onde $i = 1, 2, \dots, N-1$ e $J_B = J_A$. Além disso, para simplificar a notação, $J_{2,3} = J_m$. Assim, reescrevendo a Hamiltoniana (3.1) para $N = 4$ descrito acima, obtemos para o caso em que $N = 4$:

$$\mathcal{H}_{XX} = 2J_A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \frac{J_m}{J_A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_m}{J_A} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Suas autoenergias são $E_1 = 0$, $E_2 = -J_A\kappa^+$, $E_3 = -J_A\kappa^-$, $E_4 = J_A\kappa^-$, $E_5 = J_A\kappa^+$ e $E_6 = 0$, onde $\kappa^\pm = \frac{J_m}{J_A} \pm \sqrt{8 + (\frac{J_m}{J_A})^2}$. Além disso, seus autoestados são

$$|\tilde{1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\tilde{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{8 + \frac{J_m}{J_A}\kappa^+}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{\kappa^+}{2} \\ \frac{\kappa^+}{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\tilde{3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{8 + \frac{J_m}{J_A}\kappa^-}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{\kappa^-}{2} \\ \frac{\kappa^-}{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$|\tilde{4}\rangle = \frac{1}{\sqrt{8 + \frac{J_m}{J_A} \kappa^-}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{\kappa^-}{2} \\ \frac{\kappa^-}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\tilde{5}\rangle = \frac{1}{\sqrt{8 + \frac{J_m}{J_A} \kappa^+}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{\kappa^+}{2} \\ \frac{\kappa^+}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } |\tilde{6}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Usando os autoestados e autoenergias acima podemos calcular a fidelidade da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{J_m}{J_A}, J_A t\right) &= \left| \sum_{n=1}^6 e^{-iE_n t} \left(\frac{\langle \hat{1}_B | + \langle \hat{1}_4 |}{\sqrt{2}} \right) |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}| \left(\frac{|\hat{1}_A\rangle + |\hat{1}_1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right|^2, \\ &= 16 \left[\frac{\text{sen} \left[\left(\frac{J_m}{J_A} + \sqrt{8 + \left(\frac{J_m}{J_A} \right)^2} \right) J_A t\right]}{8 + \left(\frac{J_m}{J_A} \right)^2 + \frac{J_m}{J_A} \sqrt{8 + \left(\frac{J_m}{J_A} \right)^2}} + \frac{\text{sen} \left[\left(\frac{J_m}{J_A} - \sqrt{8 + \left(\frac{J_m}{J_A} \right)^2} \right) J_A t\right]}{8 + \left(\frac{J_m}{J_A} \right)^2 - \frac{J_m}{J_A} \sqrt{8 + \left(\frac{J_m}{J_A} \right)^2}} \right]^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Para obtermos os máximos de fidelidade, precisamos saber quando $\frac{d}{dt} F\left(\frac{J_m}{J_A}, J_A t\right) = 0$ e $F\left(\frac{J_m}{J_A}, J_A t\right) \neq 0$. Essas condições são satisfeitas para $J_m \neq 0$ quando os dois numeradores da equação (3.49) forem 1 e/ou -1 . A única situação possível é quando $\frac{J_m}{J_A} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ e a fidelidade se torna

$$F\left(\frac{J_m}{J_A} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}, J_A t\right) = \text{sen}^6\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} J_A t\right), \quad (3.50)$$

nos mostrando que, para obtermos fidelidade máxima, $J_A t = \frac{(2a-1)\sqrt{3}}{4}\pi$, em que $a = 1, 2, 3, \dots$

Já para o modelo padrão, em que $N = 4$, podemos fazer o mesmo tratamento para uma cadeia de spins simétrica, $J_{1,2} = J_{3,4} = J_A$, além de $J_{2,3} = J_m$. Sendo assim, a Hamiltoniana do modelo padrão é

$$\mathcal{H}_{XX}^{1D} = 2J_A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{J_m}{J_A} & 0 \\ 0 & \frac{J_m}{J_A} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Suas autoenergias são $E_1 = -J_A \eta^+$, $E_2 = -J_A \eta^-$, $E_3 = J_A \eta^-$ e $E_4 = J_A \eta^+$, em que $\eta^\pm = \frac{J_m}{J_A} \pm \sqrt{4 + \left(\frac{J_m}{J_A}\right)^2}$. Após calcularmos os autoestados dessa Hamiltoniana, a fidelidade

será

$$\begin{aligned}
F^{1D} \left(\frac{J_m}{J_A}, J_{At} \right) &= \left| \sum_{n=1}^4 e^{-iE_n t} \left(\frac{\langle \hat{1}_3 | + \langle \hat{1}_4 |}{\sqrt{2}} \right) |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}| \left(\frac{|\hat{1}_1\rangle + |\hat{1}_2\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right|^2, \\
&= \left| \frac{\eta^+ \cos[\eta^+ J_{At}] - i[1 + 0.25(\eta^+)^2] \text{sen}[\eta^+ J_{At}]}{4 + J_m \eta^+} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\eta^- \cos[\eta^- J_{At}] - i[1 + 0.25(\eta^-)^2] \text{sen}[\eta^- J_{At}]}{4 + J_m \eta^-} \right|^2.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Ao verificarmos qual o valor de J_m que satisfaz as equações $\frac{d}{dt} F^{1D}(\frac{J_m}{J_A}, J_{At}) = 0$ e $F^{1D}(\frac{J_m}{J_A}, J_{At}) \neq 0$, encontramos $\frac{J_m}{J_A} = 2\sqrt{\frac{1}{3}}$. Logo,

$$F^{1D} \left(\frac{J_m}{J_A} = 2\sqrt{\frac{1}{3}}, J_{At} \right) = \text{sen}^6 \left(2\sqrt{\frac{1}{3}} J_{At} \right) + \text{sen}^2 \left(2\sqrt{\frac{1}{3}} J_{At} \right) \cos^2 \left(2\sqrt{\frac{1}{3}} J_{At} \right) \tag{3.53}$$

e concluímos que, para obtermos valores de fidelidade máxima, o valor de tempo deverá ser $J_{At} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2a - 1)\pi$, em que $a = 1, 2, 3, \dots$

No caso em que $N = 4$, encontramos uma característica importante: devemos construir uma cadeia simétrica para o modelo proposto assim como foi feito em outros trabalhos para o modelo padrão. Essa simetria deve ocorrer também para as interações 1, 2 e A, 2, além de $N - 1, N$ e $N - 1, B$.

Estudemos agora uma cadeia de $N = 5$, com o modelo proposto representado pela figura 3.2, onde, $J_{1,2} = J_{A,2} = J_{4,5} = J_{4,B} = J_A$ e $J_{2,3} = J_{3,4} = J_m$. Escrevendo a Hamiltoniana para sete qubits ($N = 5$) temos

$$\mathcal{H}_{XX} = 2J_A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \frac{J_m}{J_A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_m}{J_A} & 0 & \frac{J_m}{J_A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_m}{J_A} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.54}$$

Ao determinarmos suas autoenergias, obtemos $E_1 = 0$, $E_2 = -2\sqrt{2\mu}J_A$, $E_3 = -2\sqrt{2}J_A$, $E_4 = 0$, $E_5 = 2\sqrt{2}J_A$ e $E_6 = 2\sqrt{2\mu}J_A$ e $E_7 = 0$, em que $\mu = 1 + (\frac{J_m}{J_A})^2$.

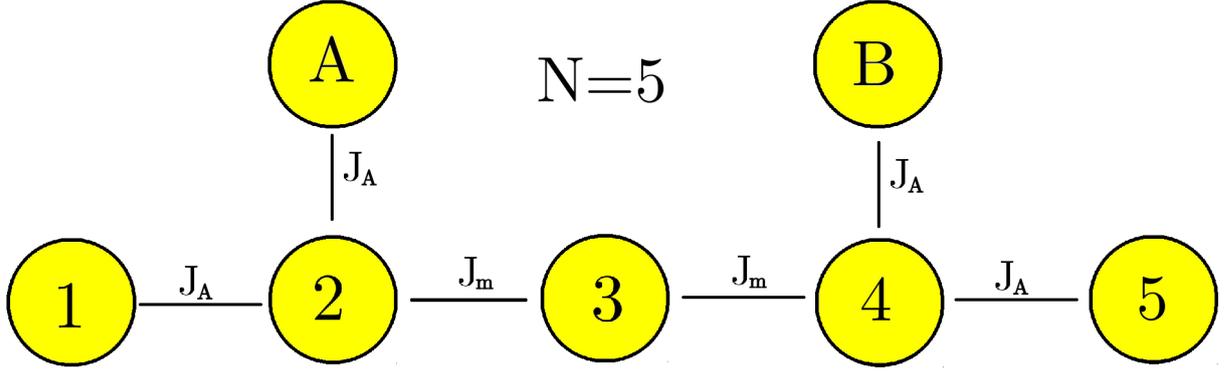


Figura 3.2: Representação do modelo proposto para uma cadeia de $N = 5$.

Já seus autoestados são

$$\begin{aligned}
 |\tilde{1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |\tilde{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{8\mu}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2\mu} \\ 2\frac{J_m}{J_A} \\ -\sqrt{2\mu} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |\tilde{3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, |\tilde{4}\rangle = \frac{J_m}{J_A\sqrt{2\mu}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{2J_A}{J_m} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 |\tilde{5}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, |\tilde{6}\rangle = \frac{1}{\sqrt{8\mu}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2\mu} \\ 2\frac{J_m}{J_A} \\ \sqrt{2\mu} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } |\tilde{7}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

Com isso, podemos calcular a fidelidade da equação (3.42) para $N = 5$:

$$\begin{aligned}
 F &= \left| \sum_{n=1}^7 e^{-iE_n t} \left(\frac{\langle \hat{1}_5 | + \langle \hat{1}_B |}{\sqrt{2}} \right) |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}| \left(\frac{|\hat{1}_1\rangle + |\hat{1}_2\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right|^2, \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{\left(\left(\frac{J_m}{J_A} \right)^2 - \left[1 + \left(\frac{J_m}{J_A} \right)^2 \right] \cos(2\sqrt{2}J_A t) + \cos\left(2\sqrt{2}J_A t \sqrt{1 + \left(\frac{J_m}{J_A} \right)^2}\right)}{1 + \left(\frac{J_m}{J_A} \right)^2} \right)^2. \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

Nesse caso, é possível encontrarmos máxima concorrência para os qubits de Bob quando $\frac{J_m}{J_A} = \sqrt{4a^2 - 1}$ e $J_A t = \frac{2b-1}{\sqrt{2}}\pi$, sendo $a, b = 1, 2, 3, \dots$. Por exemplo, para $a = 1$,

$\frac{J_m}{J_A} = \sqrt{3}$, a equação da fidelidade passa a ser:

$$F\left(\frac{J_m}{J_A} = \sqrt{3}, J_A t\right) = \text{sen}^8(\sqrt{2}J_A t). \quad (3.57)$$

Para o modelo padrão, é possível calcular o valor da fidelidade para cadeias de 5 qubits com o máximo ocorrendo quando $\frac{J_m}{J_A} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Percebemos que conseguimos fidelidade F máxima e assim transmitir a Bob um estado puro maximamente emaranhado quando $N = 4$ e $N = 5$. Para cadeias com $N > 5$ as contas analíticas tornam-se inviáveis. A partir desse ponto, faremos nossas análises de forma numérica, em que definiremos a Hamiltoniana para o modelo proposto como sendo

$$\mathcal{H}_{XX} = 2J_A \left[(\sigma_A^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_A^-) + (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_1^-) + \frac{J_m}{J_A} \sum_{j=2}^{N-2} (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-) \right. \\ \left. + (\sigma_{N-1}^+ \sigma_B^- + \sigma_B^+ \sigma_{N-1}^-) + (\sigma_{N-1}^+ \sigma_N^- + \sigma_N^+ \sigma_{N-1}^-) \right], \quad (3.58)$$

e para o modelo padrão

$$\mathcal{H}_{XX}^{1D} = 2J_A \left[(\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_1^-) + \frac{J_m}{J_A} \sum_{j=2}^{N-2} (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-) + (\sigma_{N-1}^+ \sigma_N^- + \sigma_N^+ \sigma_{N-1}^-) \right]. \quad (3.59)$$

3.3.1 Análise numérica

Primeiramente, é importante verificar para cadeias maiores se a melhor configuração para os dois modelos é aquela apontada no final da seção 3.3 (configuração simétrica). Como pode ser visto na figura 3.3, comparamos as cadeias simétricas com outras diferentes configurações nos dois modelos. Definimos um tamanho de cadeia $N = 50$ para nossos estudos, buscando o melhor valor de emaranhamento para cada configuração. Nessa busca, evoluímos o estado geral $|\Psi^+(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10000\dots\rangle + |01000\dots\rangle)$ até $J_A t = 25\pi$, armazenando o maior valor de EoF e o tempo em que isso ocorre. Começamos as simulações com $\frac{J_m}{J_A} = 0$ e, após terminar e armazenar o melhor EoF, repetimos o processo, mas agora aumentando o valor de $\frac{J_m}{J_A}$ em 0,001. Esse processo de acréscimo em 0,001 nas constantes de acoplamento ocorrerá sucessivamente até a última simulação, quando $\frac{J_m}{J_A} = 50$, totalizando 50001 simulações para cada configuração de cadeia. Terminado esse processo, observamos qual dentre todos esses resultados é o que fornece o maior valor de EoF nos qubits de Bob, apresentados abaixo de cada configuração na figura 3.3. Nota-se claramente que o melhor cenário ocorrerá quando $J_{A,2} = J_{1,2} = J_{N-1,B} = J_{N-1,N} = J_A$ para o modelo proposto e $J_{1,2} = J_{N-1,N} = J_A$ para o modelo padrão. Vale a pena observar que encontramos excelentes resultados para esse e outros tamanhos de cadeia modulando o sistema com apenas dois valores de acoplamento, sem necessidade de campo externo.

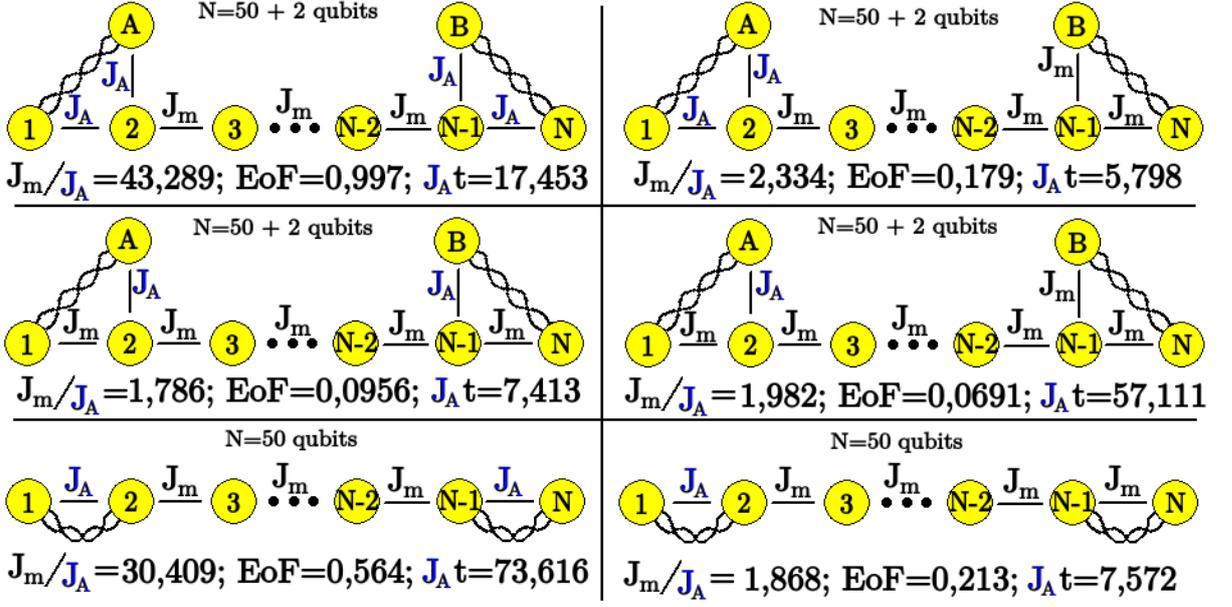


Figura 3.3: Comparação das configurações de acoplamento que foram estudadas para os modelos proposto e unidimensional. As correntes representam o emaranhamento dos qubits de Alice em $t=0$ e Bob para $J_A t$ dado na figura. Para obter os resultados, evoluímos o estado $|\Psi^+(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \otimes |000\dots\rangle$ até $J_A t = 25\pi$ utilizando a Hamiltoniana da equação (3.58) para o modelo proposto e (3.59) para o modelo padrão, variando apenas o valor de J_m/J_A de 0 a 50. Durante a evolução, calculamos o estado dos qubits de Bob e armazenamos o melhor valor de emaranhamento encontrado e o tempo em que este ocorreu para cada valor de J_m/J_A . No quadro acima estão os melhores resultados encontrados e a melhor condição de acoplamento para tal. Notamos que a melhor condição para o modelo proposto ocorre quando os qubits de Alice e Bob estão acoplados com a cadeia de transmissão com uma mesma magnitude e essa deve ser menor que os acoplamentos J_m . Já para o modelo proposto, o melhor cenário ocorrerá quando o acoplamento entre os dois qubits de Alice for da mesma magnitude do acoplamento dos dois qubits de Bob. Observe que o modelo proposto supera em muito as outras propostas de configuração, transmitindo um emaranhamento dado por 0,997.

Definida qual será a configuração padrão das nossas simulações para todos os tamanhos de cadeias estudadas, vamos antes, por completeza, estudar a situação mais simples possível: todas as interações têm a mesma magnitude nos dois modelos, ou seja, $J_m = J_A$. Assim, a Hamiltoniana do modelo proposto passa a ser

$$\mathcal{H}_{XX} = 2J_A \left[(\sigma_A^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_A^-) + \sum_{j=1}^{N-1} (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-) + (\sigma_{N-1}^+ \sigma_B^- + \sigma_B^+ \sigma_{N-1}^-) \right], \quad (3.60)$$

e a Hamiltoniana para o modelo padrão será

$$\mathcal{H}_{XX}^{1D} = 2J_A \sum_{j=1}^{N-1} (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-). \quad (3.61)$$

Como visto na figura 3.4, os dois modelos encontram valores de emaranhamento semelhantes em boa parte das simulações, mostrando que o arranjo proposto em sua configuração mais simples pode servir de transmissor de estados emaranhados. No entanto,

vemos que o caso unidimensional sempre consegue transmitir em um tempo menor que o nosso modelo. Um dos principais motivos é que o modelo proposto tem dois qubits a mais na cadeia de transmissão, fazendo a informação dos qubits de entrada "ter um caminho mais longo" do que o caso 1D. Resumidamente, o modelo proposto, apesar de demonstrar resultados eficientes em boa parte dos casos, não é melhor que o modelo padrão quando todas as interações têm a mesma magnitude. Vale a pena destacar que nesta configuração, não conseguimos transmissões quase-perfeitas do emaranhamento seja via modelo padrão ou modelo proposto.

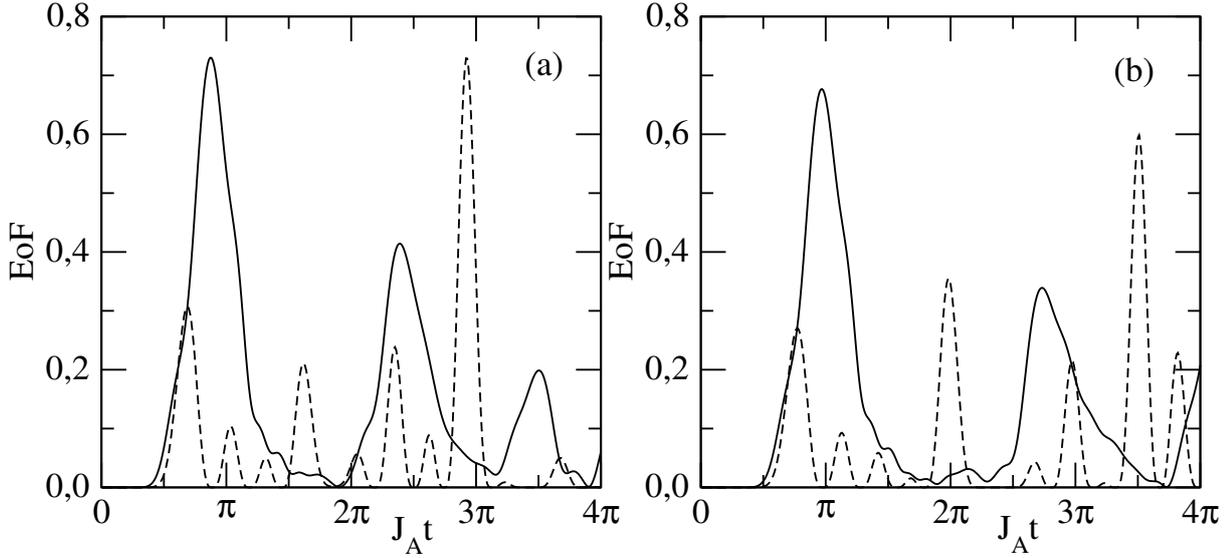


Figura 3.4: Comparação dos modelos unidimensional (linha contínua) e o proposto no nosso trabalho (linha tracejada) para (a) $N = 8$ e (b) $N = 9$ com o estado inicial $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$, e quando todos os acoplamentos têm a mesma magnitude, ou seja, $J_m = J_A$. Nesses gráficos, utilizamos a Hamiltoniana da equação (3.60) para o modelo proposto e (3.61) para o modelo padrão.

De agora em diante, analisaremos as situações em que $J_m \neq J_A$. Para simplificar os estudos a seguir, fixaremos $J_A = 1$. Com essa mudança, a Hamiltoniana para o modelo proposto será

$$\mathcal{H}_{XX} = 2 \left[(\sigma_A^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_A^-) + (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_1^-) + J_m \sum_{j=2}^{N-2} (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-) \right. \\ \left. + (\sigma_{N-1}^+ \sigma_B^- + \sigma_B^+ \sigma_{N-1}^-) + (\sigma_{N-1}^+ \sigma_N^- + \sigma_N^+ \sigma_{N-1}^-) \right], \quad (3.62)$$

e para o modelo padrão

$$\mathcal{H}_{XX}^{1D} = 2 \left[(\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_1^-) + J_m \sum_{j=2}^{N-2} (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-) + (\sigma_{N-1}^+ \sigma_N^- + \sigma_N^+ \sigma_{N-1}^-) \right]. \quad (3.63)$$

Vamos começar nossa discussão supondo a condição inicial dada pelo estado de Bell $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ e dois tamanhos de cadeia: $N = 100$ e $N = 1000$. Evoluiremos

esse estado geral até $t = 25\pi$ para todos os valores de acoplamento J_m entre 0 a 100 e armazenaremos o melhor valor para o emaranhamento transmitido e o tempo em que isso ocorre. Como visto na figura 3.5, ao aumentarmos os valores de J_m aumentamos também a quantidade de emaranhamento que chega a Bob. Isso ocorre para os dois modelos e cessa a partir de um certo valor crítico de J_m . Acima desse valor de J_m a

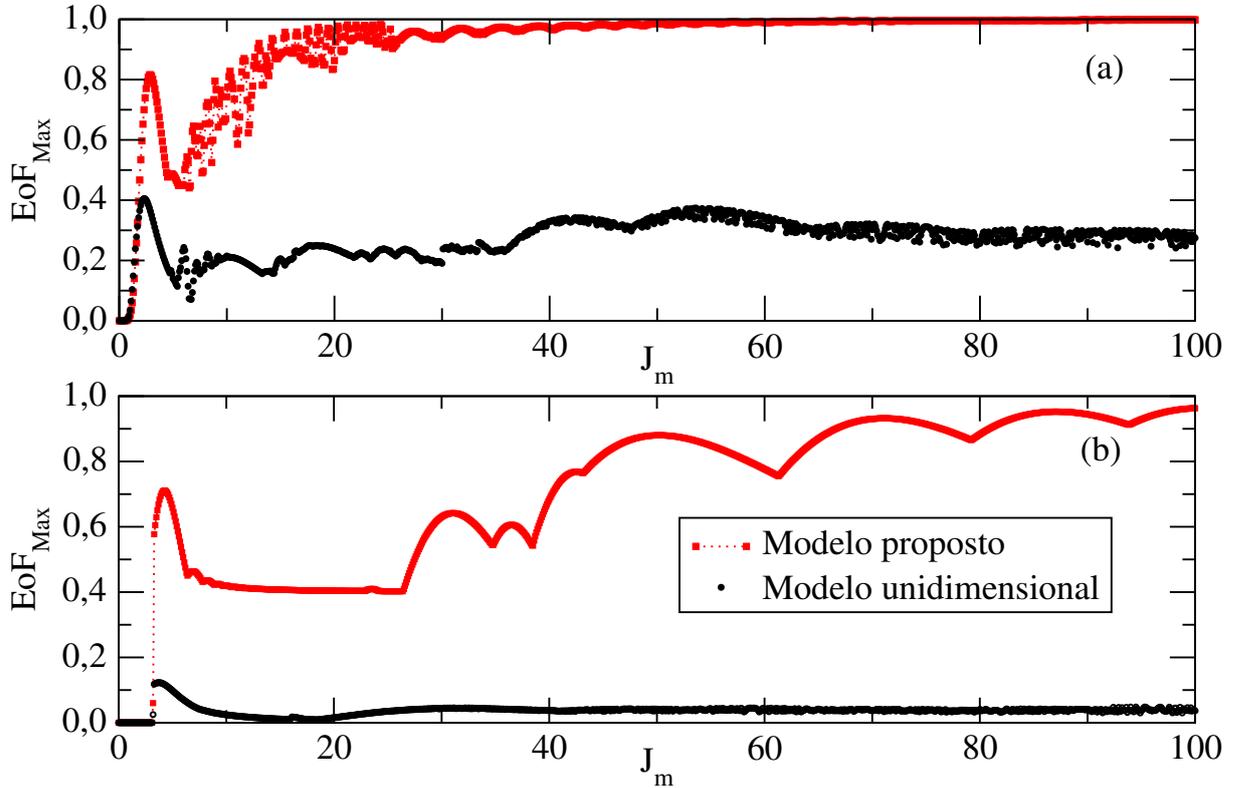


Figura 3.5: Comparação dos pontos de máximo EoF dos modelos proposto e unidimensional, em que transmitimos o estado $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ de Alice para Bob por cadeias de (a) $N = 100$ e (b) $N = 1000$. Utilizamos as Hamiltonianas das equações (3.62) para o modelo proposto e (3.63) para o modelo padrão, variando apenas o valor de J_m de 0 a 100, em incrementos de 0,1. Evoluímos o sistema até $t = 25\pi$ para cada valor de J_m e coletamos o maior emaranhamento transmitido a Bob que ocorre durante esse tempo.

quantidade de emaranhamento chegando a Bob diminui. No entanto, ao continuarmos aumentando o valor de J_m , um novo valor crítico dessa constante surge, além do qual o emaranhamento transmitido volta a aumentar. É a partir desse ponto que vemos uma diferença fundamental entre os modelos padrão e proposto. Para o primeiro, esse aumento do emaranhamento transmitido é muito pequeno, não superando o valor do primeiro pico de máximo. Agora, para o modelo proposto nesta Tese, o emaranhamento chegando a Bob continua a aumentar até alcançarmos uma transmissão praticamente perfeita para valores suficientemente grande de J_m . De fato, observando na figura 3.5.a, vemos o emaranhamento transmitido a Bob, quando $N=100$, atingir valores acima de 0,97 quando $J_m \approx 40$ e 0,99 quando $J_m \approx 70$. Especificamente, para $J_m \leq 5$, o melhor cenário ocorre para $J_m = 2,86$; para $J_m \leq 50$, o melhor acoplamento será 49,98; já para $J_m \leq 100$,

o melhor valor de J_m é 99,10. Quando a cadeia possui $N = 1000$ qubits (figura 3.5.b), vemos um comportamento semelhante ao descrito quando $N = 100$ qubits.

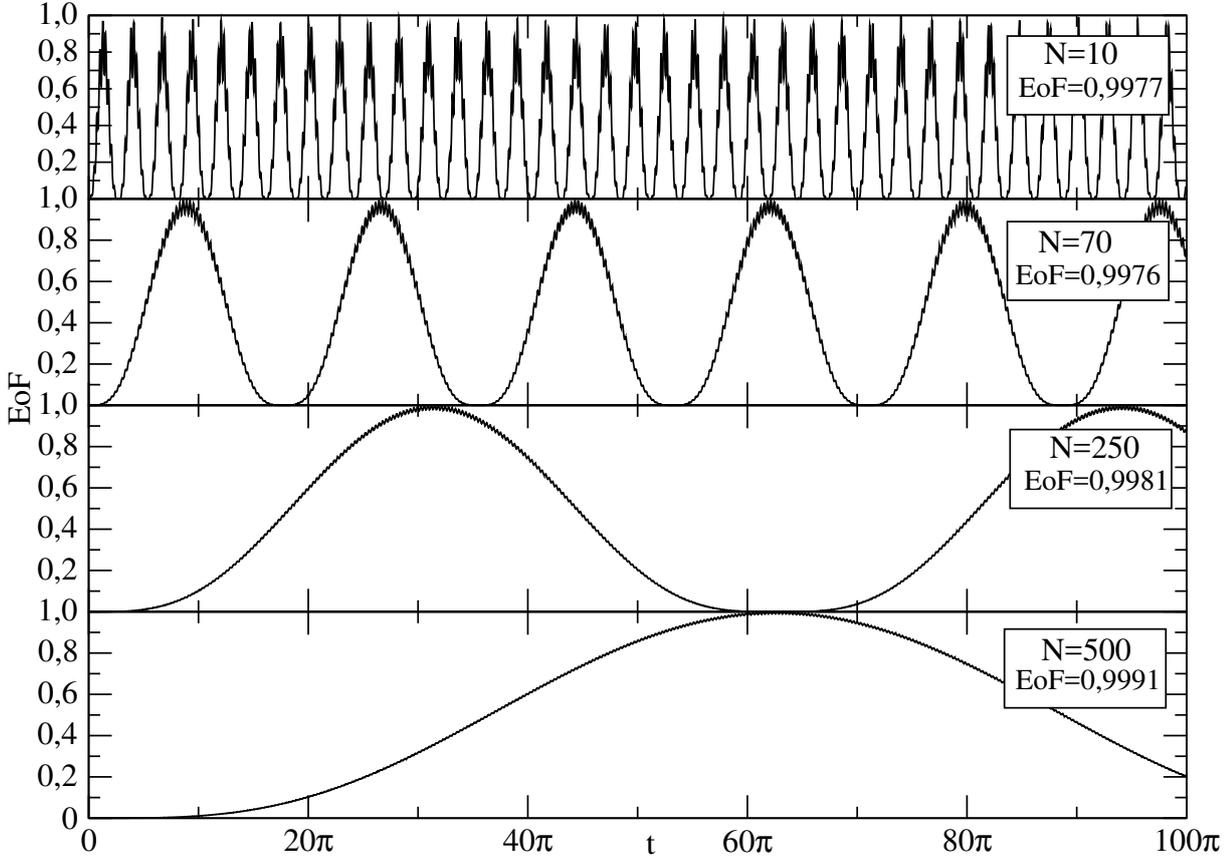


Figura 3.6: Gráfico de evolução temporal do emaranhamento nos qubits de Bob quando $J_m = N$ para o modelo proposto. Utilizamos para gerar as curvas a Hamiltoniana da equação (3.62). Todos os resultados de EoF máximo estão acima de 0,99.

Note que esse comportamento de máxima transmissão de emaranhamento ocorre quando J_m for muito maior que J_A . Verificamos isso para diferentes tamanhos de cadeias e todas deram resultados excelentes, alcançando transmissões de estados emaranhados quase perfeitas. Os valores de J_m que fornecem esses resultados tendem a ser da ordem do número de qubits da cadeia, em que certamente encontraremos $EoF > 0,99$ em algum instante de tempo (apesar do tempo para o máximo EoF ficar cada vez maior), como visto na figura 3.6. No entanto, a medida que aumentamos a cadeia, valores menores de J_m também serão suficientes para transmitir emaranhamento próximo de 1.

A análise precedente mostrou que temos um sistema que pode transmitir estados emaranhados com alta eficiência apenas alterando o valor do acoplamento entre os qubits da cadeia de transmissão, para qualquer tamanho de cadeia, desde que J_m seja suficientemente grande. E mais, como visto na figura 3.6 para cadeias de diferentes tamanhos e também observado na figura 3.7 para uma cadeia de $N = 100$ qubits, o valor do emaranhamento transmitido é cíclico no modelo proposto, isto é, oscila entre regiões de mínimo e máximo ao longo do tempo. Além disso, vemos que a frequência de máximos EoF é

cada vez menor a medida que aumentamos o valor de J_m .

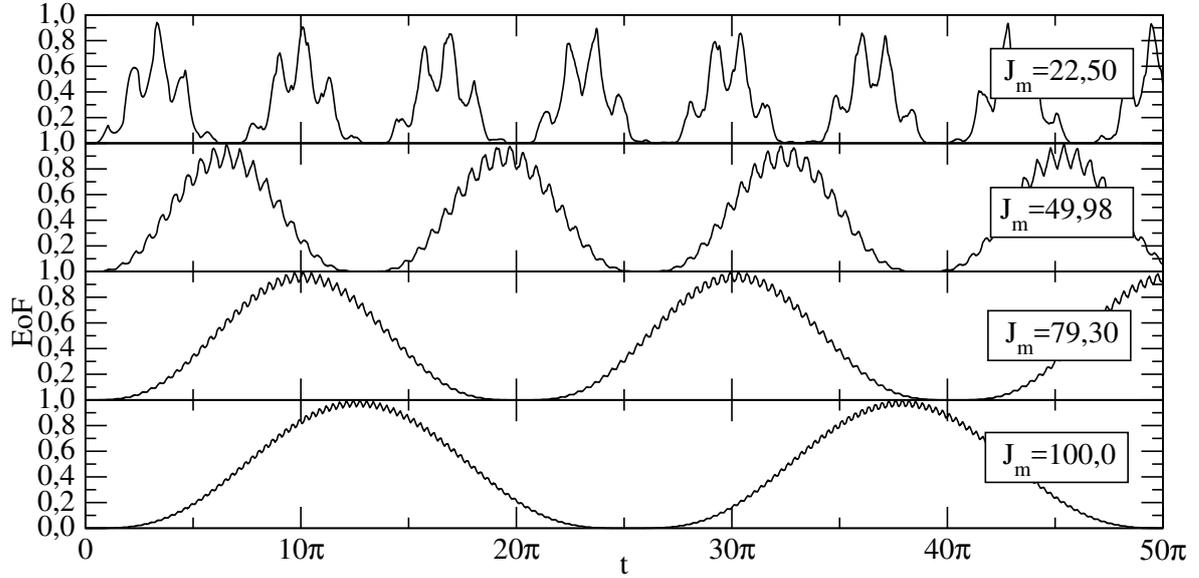


Figura 3.7: Gráficos de EoF dos qubits de Bob quando o estado de Alice em $t=0$ é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ e $N = 100$ para o modelo proposto (equação (3.62)). Aqui, $J_m = 22,50$, $J_m = 49,98$, $J_m = 79,30$ e $J_m = 100,0$. Nota-se que, quanto maior o valor de J_m , menor é a frequência de oscilação dos pontos de máximo emaranhamento transmitido.

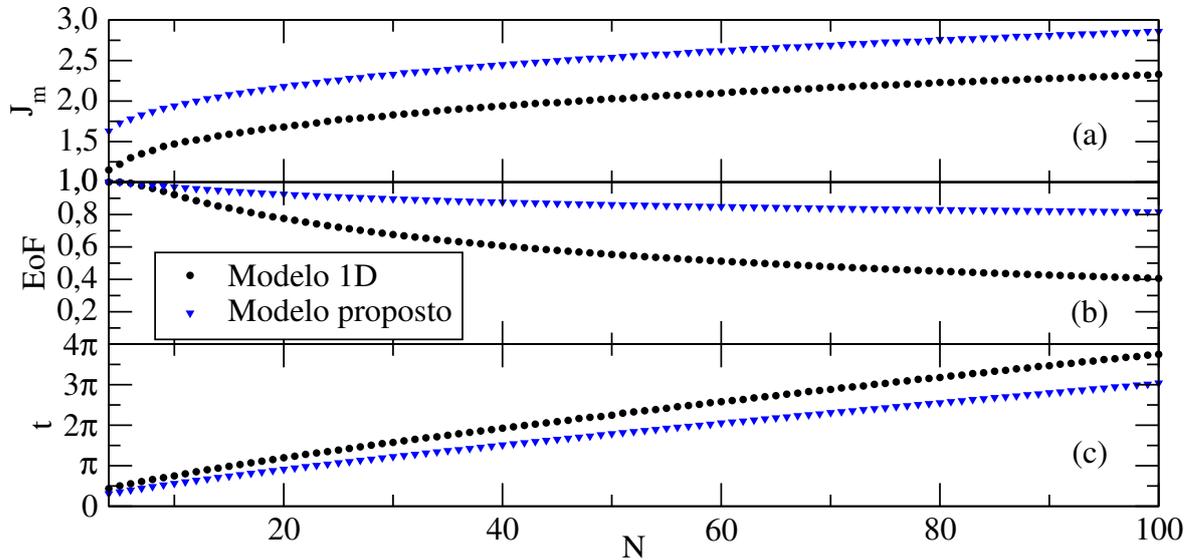


Figura 3.8: (a) Valor de J_m dando o primeiro pico de máximo emaranhamento transmitido a Bob em função de N . (b) Valor do emaranhamento no primeiro pico de máximo descrito em (a) em função de N . (c) Tempo em que o primeiro pico de máximo ocorre conforme descrito em (a) em função de N . O estado emaranhado inicialmente com Alice é dado por $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ e nos gráficos acima N varia de $N = 4$ até $N = 100$.

Não há vantagens apenas quando o sistema proposto opera com J_m muito maior que J_A . Como visto figura 3.5, valores pequenos de J_m também dão bons resultados. Para melhor ver isso, mapeamos todos os valores de J_m que dão os primeiros picos de máximo

emaranhamento transmitidos com precisão de duas casas decimais, para os dois modelos variando N de 4 até 100. Essas simulações podem ser vistas na figura 3.8.

Analisaremos, agora, os gráficos para $N = 100$, em que $J_m = 2,33$ para o modelo padrão e $J_m = 2,86$ para o modelo proposto, cujos máximos EoF correspondem a 0,4057 e 0,8165, respectivamente (figura 3.9). Observando estes gráficos, notamos uma caracte-

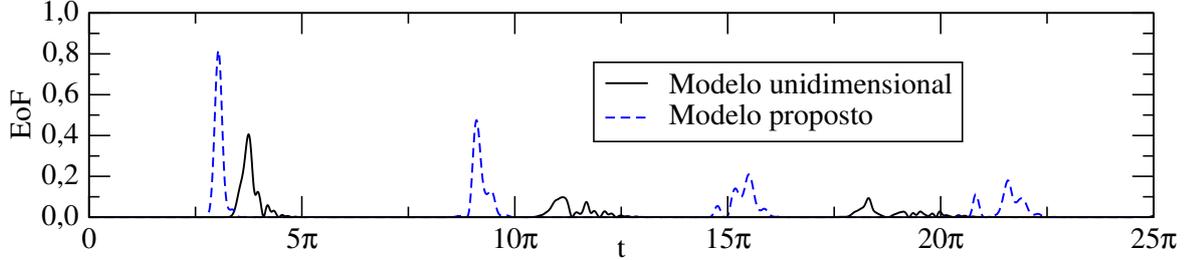


Figura 3.9: Emaranhamento transmitido a Bob em função do tempo para o caso de $N = 100$ qubits quando o estado de Alice em $t=0$ é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Os valores de J_m usados para gerar estes dados são aqueles que dão o primeiro pico de máximo emaranhamento transmitido a Bob. Para o modelo proposto, temos $J_m = 2,86$ e para o modelo padrão (unidimensional) temos $J_m = 2,33$. As curvas acima são claras ao mostrar que o EoF transmitido pelo modelo padrão não ultrapassa 0,5 enquanto o modelo proposto supera o valor de 0,8.

rística importante: o valor de máximo emaranhamento ocorre no primeiro pico, seguido de regiões de mínimos e outros picos menos expressivos.

Ao estudarmos cadeias maiores para o modelo proposto, vemos que não há a necessidade de evoluir o estado geral para além do primeiro máximo EoF por sabermos que este dará o melhor resultado (figura 3.10). Logo, encontramos uma situação de excelentes valores de emaranhamento transmitido para cadeias relativamente grandes e em um tempo razoável. Esse comportamento do máximo emaranhamento transmitido ocorrer no primeiro pico da evolução temporal ocorre em todas as cadeias quando utilizamos valores baixos de J_m . A seguir analisaremos mais detalhadamente esse fato.

Como temos um modelo em que é possível de se analisar milhares de qubits, fizemos uma varredura para tamanhos de cadeias entre $N = 4$ e $N = 2500$, nos limitando ao primeiro pico de máximo emaranhamento transmitido. Vemos na figura 3.11.a que, mesmo para uma cadeia de $N = 2500$, encontramos uma transmissão de emaranhamento acima de $2/3$ em um tempo de simulação de $\sim 42,8\pi$. Percebe-se também que o valor do EoF transmitido decai cada vez mais lentamente a medida que aumentamos a cadeia. Além disso, não há a necessidade de usarmos um valor de J_m cada vez mais alto a medida que a cadeia aumenta, pois a taxa de aumento do valor de J_m do primeiro pico de máximo EoF em relação ao número de qubits diminui, tendendo a ser cada vez mais linear em relação ao número de qubits (figuras 3.11.b e 3.11.c). Para $N = 2500$, por exemplo, encontramos $EoF = 0,6787$ para $J_m = 4,70$, um valor de J_m não muito alto.

Desta seção, concluímos que, quando Alice quer transmitir o estado $|\psi^+\rangle$, o modelo proposto dá os melhores resultados, superando, e muito, o modelo padrão. Nessas condi-

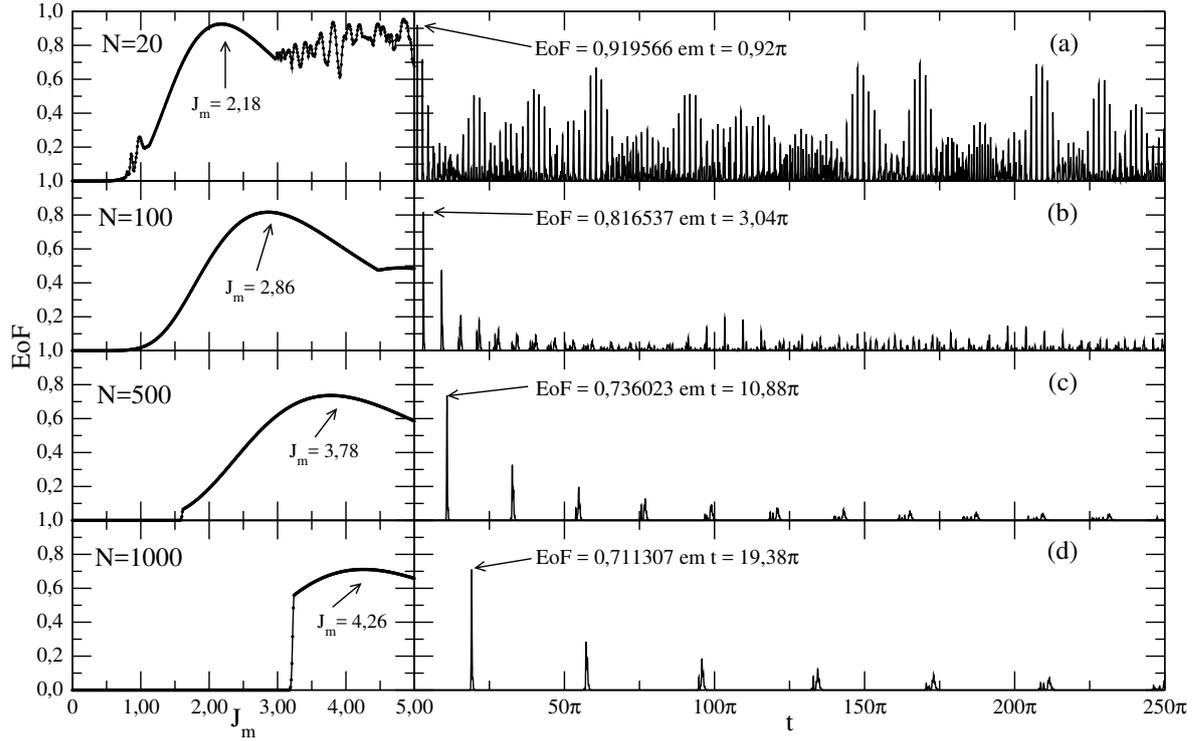


Figura 3.10: Gráficos de transmissão de estados emaranhados para cadeias de (a) 22, (b) 102, (c) 502 e (d) 1002 qubits no modelo proposto. O gráfico do lado esquerdo corresponde ao cálculo do primeiro máximo de emaranhamento causado pela variação de J_m , quando transmitimos o estado $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ utilizando a Hamiltoniana da equação (3.62). Para cada valor de J_m , o tempo variou de 0 a 25π nas evoluções temporais. Nota-se que esse valor de J_m dá um primeiro máximo de emaranhamento seguido de outros picos menos expressivos.

ções, conseguimos uma excelente transmissão de estados emaranhados, mesmo para uma cadeia de milhares de qubits, ajustando apropriadamente os valores de J_m e J_A na equação (2.11). Conseguimos, também, fazer essa transmissão num tempo razoável, mesmo para grandes cadeias de spin.

3.4 Estados de Bell $|\phi^+\rangle$ e $|\phi^-\rangle$

Diferentemente da transmissão de $|\psi^+\rangle$, o estado $|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$ tem dois estados excitados, o que faz com que o número de estados relevantes para a evolução temporal seja da ordem de N^2 . Logo, não é tão vantajoso utilizar os métodos numéricos aplicados ao estado $|\psi^+\rangle$ descritos na seção anterior. No entanto, podemos ainda utilizar o fato de que o número de excitações é constante.

Com isso em mente, não é difícil ver que, usando a notação da equação (2.6),

1. $H_{i,j}|\Psi\rangle = 0$ se os números de estados excitados nos sítios i e j forem iguais, seja 0 ou 1.

$$\text{Ex.: } H_{A,2}|0_A 1_1 0_2 1_3 0_4 \dots 0_N 0_B\rangle = 0.$$

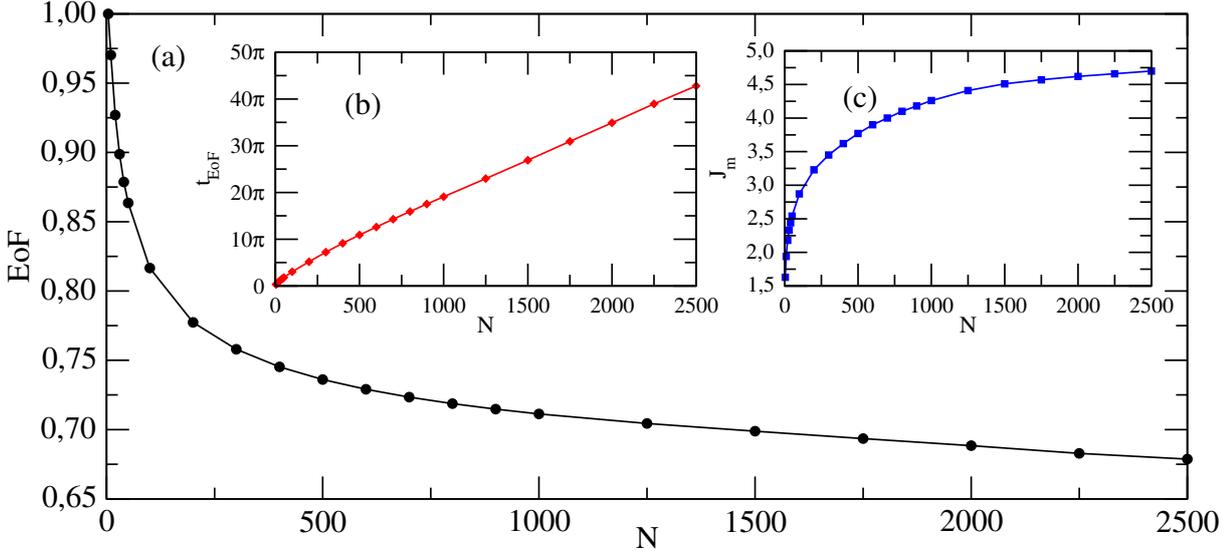


Figura 3.11: Gráficos de (a) EoF transmitido, (b) tempo e (c) constante de acoplamento J_m quando o estado de Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ para cadeias de $N = 4$ até $N = 2500$. Usamos a Hamiltoniana (3.62) para evoluir o modelo proposto e o valor de J_m associado ao primeiro pico de máximo emaranhamento, conforme descrito no texto e na figura 3.10. Encontramos EoF=0,6787, acima de $2/3$, mesmo para $N = 2500$ em um tempo razoável de simulação. O valor da constante de acoplamento é $J_m = 4,70$ para $N = 2500$.

2. $H_{i,j}|\Psi\rangle = |\tilde{\Psi}\rangle$ se os números de estados excitados nos sítios i e j forem diferentes. Aqui, $|\tilde{\Psi}\rangle$ é o estado $|\Psi\rangle$ onde trocamos os papéis de i com j .

$$\text{Ex.: } H_{A,2}|\underbrace{0_A 1_1 1_2 0_3 0_4 \dots 0_N 0_B}_{\text{circular}}\rangle = |1_A 1_1 0_2 0_3 0_4 \dots 0_N 0_B\rangle.$$

De posse dessas informações, expandimos o operador evolução temporal $U(\Delta t) = e^{-i\mathcal{H}\Delta t}$ da seguinte forma,

$$U(\Delta t) \approx I - i\mathcal{H}\Delta t. \quad (3.64)$$

e utilizamos as propriedades (1) e (2) acima para calcular numericamente o estado no tempo Δt , isto é, $|\Psi(\Delta t)\rangle = U(\Delta t)|\Psi(0)\rangle$. Dividindo nosso tempo total de evolução temporal em intervalos de Δt suficientemente pequenos, conseguimos calcular a evolução temporal do nosso sistema através de sucessivas aplicações do operador $U(\Delta t)$,

$$|\Psi(t)\rangle = \underbrace{U(\Delta t) \dots U(\Delta t)}_{n \text{ vezes}} |\Psi(0)\rangle, \quad (3.65)$$

onde $n\Delta t = t$.

Essa aproximação para até $N = 20$ qubits é muito precisa se $\Delta t \sim 10^{-4}$ (tabela 3.1) e o tempo máximo for de 5π . Sendo assim, nossos estudos se limitarão a $N = 20$ para transmissão dos estados $|\phi^+\rangle$ e $|\phi^-\rangle$.

A princípio, estudaremos como o operador evolução temporal (3.64) age nesses dois

Δt	N=15		N=20	
	EoF	t_{EoF}	EoF	t_{EoF}
$1,00\pi \cdot 10^{-3}$	0,9123025539	$0,881\pi$	0,8693109377	$1,049\pi$
$2,00\pi \cdot 10^{-4}$	0,8818990180	$0,8814\pi$	0,8381488160	$1,0494\pi$
$1,00\pi \cdot 10^{-4}$	0,8781324383	$0,8815\pi$	0,8342447307	$1,0495\pi$
$6,25\pi \cdot 10^{-5}$	0,8767230568	$0,881500\pi$	0,8327824477	$1,0495625\pi$
$5,00\pi \cdot 10^{-5}$	0,8762536279	$0,88150\pi$	0,8322953049	$1,049550\pi$
$4,00\pi \cdot 10^{-5}$	0,8758782164	$0,88152\pi$	0,8319056650	$1,049560\pi$
$3,20\pi \cdot 10^{-5}$	0,8755779863	$0,881504\pi$	0,8315940154	$1,049568\pi$

Tabela 3.1: Tabela dos valores de máximo EoF transmitido a Bob quando o estado de Alice é $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. Aqui, $N = 15$ e $N = 20$ e utilizamos diferentes valores de Δt no operador evolução temporal $U(\Delta t) = I - i\mathcal{H}\Delta t$. As interações são descritas pela equação (3.62), sendo $J_m = 2,150$ para $N = 15$ e $J_m = 2,252$ para $N = 20$. Para os dois tamanhos de cadeias estudadas, quando $\Delta t \leq 5,00\pi \cdot 10^{-5} \approx 1,57 \cdot 10^{-4}$, a alteração de valor do EoF ótimo passa a ser na terceira casa decimal e do tempo ótimo na quarta casa decimal, sempre que os tempos totais de evolução forem menores que 5π .

estados de Bell:

$$\begin{aligned}
U(\Delta t)|\Phi^\pm(0)\rangle &= U(\Delta t) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle \pm |11\rangle \right) \otimes |000\dots 0\rangle, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}U(\Delta t)|00000\dots 0\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}U(\Delta t)|11000\dots 0\rangle. \quad (3.66)
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{H}|000\dots 0\rangle = 0$ e $|000\dots 0\rangle$ é um autoestado da Hamiltoniana, então $U(\Delta t)|000\dots 0\rangle = |000\dots 0\rangle$

Assim, reescreveremos a equação (3.66) como

$$U(\Delta t)|\Phi^\pm(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00000\dots 0\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}U(\Delta t)|11000\dots 0\rangle, \quad (3.67)$$

e precisamos apenas estudar a evolução temporal do estado $|11000\dots\rangle$ para obter a evolução do estado geral. Note que a evolução temporal dos estados $|\phi^+\rangle$ e $|\phi^-\rangle$ diferirá apenas pelo sinal $+$ e $-$. Dessa forma, a dinâmica destes dois estados será semelhante e, sem perder em generalidade, escolhemos trabalhar de agora em diante com $|\phi^+\rangle$.

Na figura 3.12 apresentamos os resultados de nossas simulações para valores de N de 4 a 20 qubits. Como pode ser visto, os modelos padrão e proposto atingem valores de $EoF \rightarrow 1$ em um tempo $t \approx \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ quando $N = 4$. Além disso, encontramos que $Tr(\rho_B^2) \rightarrow 1$, o que indica que o estado que chegou a Bob é um estado puro. A partir de $N = 7$, o modelo proposto começa a dar resultados melhores que o modelo padrão, obtendo melhores valores de emaranhamento e em um menor tempo. Percebemos que, para a transmissão desses estados, também precisamos aumentar o valor de J_m a cada número de qubits adicionado à cadeia, assim como na transmissão do estado $|\Psi^\pm\rangle$ (figura 3.12.a). Além disso, como visto na figura 3.12.b, o emaranhamento de formação decai

a uma taxa menor para o modelo proposto, mostrando que, para cadeias maiores, a transmissão desses estados também é extremamente eficiente via esse modelo.

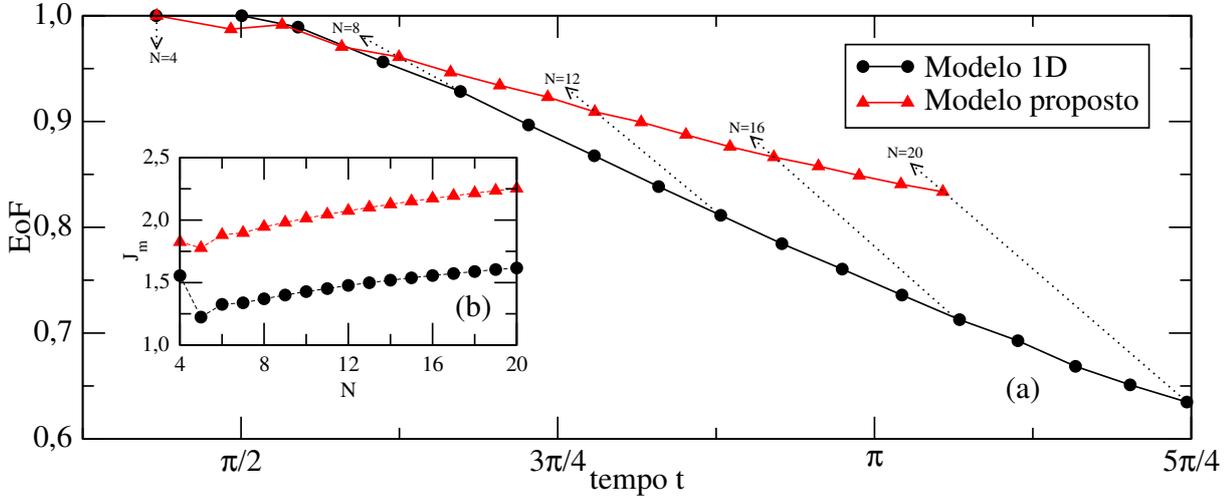


Figura 3.12: Comparação dos primeiros máximos de emaranhamento transmitido a Bob via modelos 1D e proposto nesta Tese quando o estado inicial de Alice for $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. A Hamiltoniana usada é dada pela equação (2.11) e evoluímos o estado em incrementos de $\Delta t = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-4}$, conforme explicado no texto. Vemos que o valor de J_m ótimo para o caso unidimensional é menor que o do modelo proposto (veja gráfico pequeno (b)). Em compensação, o valor de EoF transmitido pelo modelo proposto é maior, alcançando valores acima de 0,8 mesmo para $N = 20$ (veja gráfico pequeno (a)).

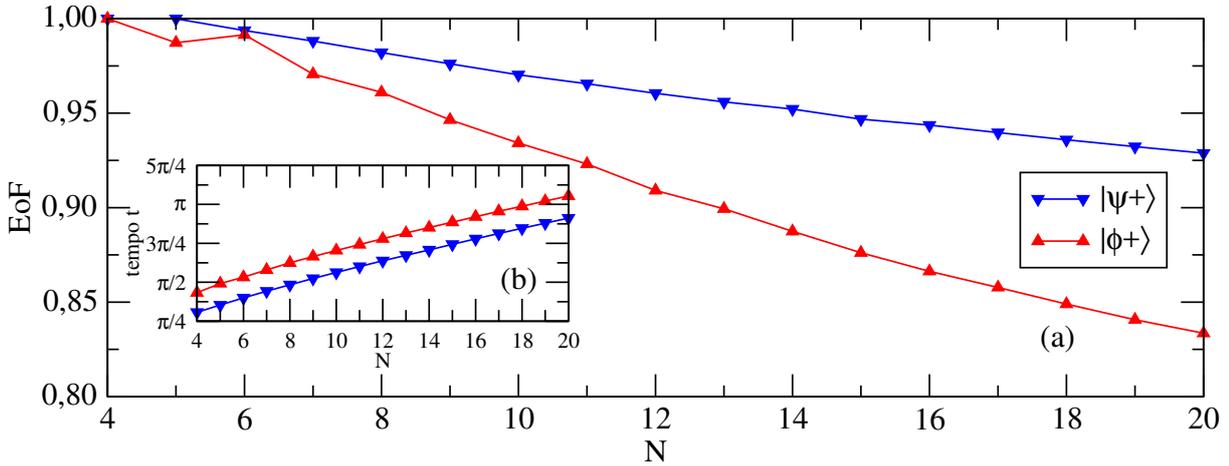


Figura 3.13: (a) Comparação dos pontos de primeiro máximo de EoF transmitido a Bob e (b) o tempo em que ocorre este máximo quando inicialmente Alice tem os estados $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ e $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$, de $N=4$ até $N=20$. A Hamiltoniana usada é dada pela equação (2.11) e evoluímos o estado em incrementos de $\Delta t = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-4}$. Notamos que, ao aumentarmos do número de qubits, o estado $|\psi^+\rangle$ fornece melhores resultados.

Quando comparamos os resultados do primeiro máximo de transmissão desse estado de Bell ($|\phi^+\rangle$) com o estado $|\psi^+\rangle$, observamos que o estado $|\psi^+\rangle$ tem o melhor desempenho

entre os dois, obtendo valores de EoF maiores (figura 3.13.a) em um tempo menor (figura 3.13.b).

Apesar de observarmos resultados interessantes, ainda não sabemos se esse estado emaranhado nos qubits de saída é o mesmo estado de entrada. É importante, pois, avaliar a fidelidade do estado com Bob para descobrirmos qual estado de Bell está chegando até ele.

Para determinar o estado de saída, precisamos estudar a fidelidade dos qubits de Bob em t em relação aos qubits de Alice em $t = 0$. Quando encontramos um alto valor de fidelidade nas regiões de máximo emaranhamento (figura 3.14.a), isso significa que o estado de Bob após um tempo t é o estado transmitido por Alice. Já no caso da fidelidade ser quase nula nessas regiões (figura 3.14.b), isso significa que o estado dos qubits de Alice foi alterado ao longo da transmissão. Mas qual estado chegou a Bob quando o emaranhamento é máximo, mas a fidelidade é nula? Ao analisar o operador densidade do estado de saída nestes casos, vemos que se prepararmos um estado de entrada $|\phi^+\rangle$, encontramos o estado de saída $|\phi^-\rangle$ e vice-versa. Em outras palavras, há condições em que os estados de Bell são "invertidos" e é importante determinar tais condições.

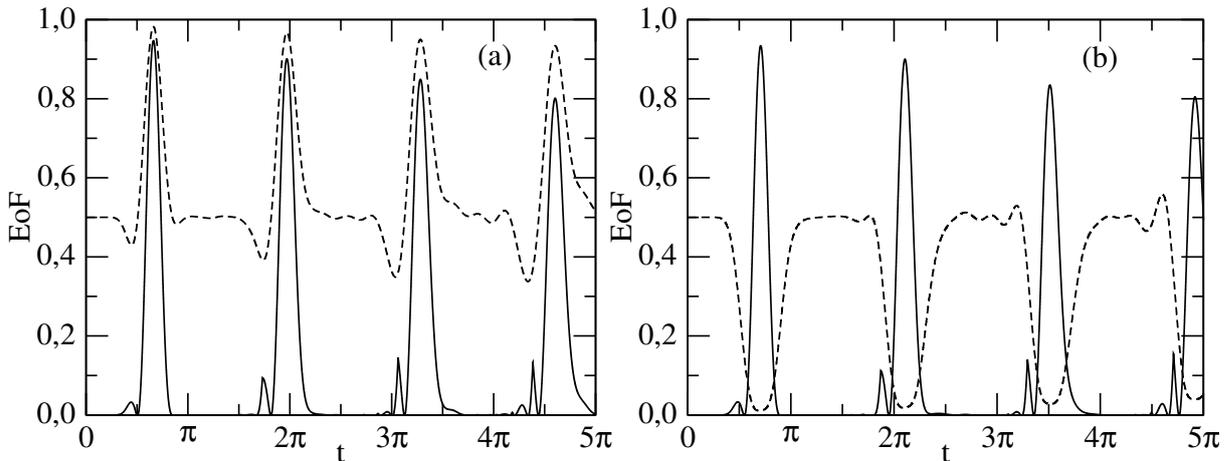


Figura 3.14: Valores da fidelidade (linha tracejada) e emaranhamento de formação (linha contínua) quando o estado inicial de Alice for $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. No painel (a) temos $N=9$ qubits e em (b) $N=10$. Aqui usamos a Hamiltoniana (3.62) com $J_m = 2$ para implementar a evolução temporal.

Através de nossas simulações percebemos que isso ocorre quando temos um número par de qubits na cadeia. Assim, se quisermos que Bob receba $|\phi^-\rangle$, por exemplo, precisamos saber quantos qubits temos na cadeia para determinar qual o estado Alice deve preparar em $t = 0$, isto é, $|\phi^+\rangle$ se N par ou $|\phi^-\rangle$ se N ímpar.

Há uma outra maneira de Alice garantir que Bob receba o estado preparado por ela quando N for par. Para isso, ela deve alterar o sinal do acoplamento entre o qubit A e o qubit 2 , isto é, $J_{A,2} \rightarrow -J_{A,2}$. Neste cenário, nossas simulações mostraram que para cadeias com N par, se Alice envia $|\phi^+\rangle$ (ou $|\phi^-\rangle$), Bob receberá o mesmo estado $|\phi^+\rangle$ (ou

$|\phi^-\rangle$).

Logo, se quisermos sempre transmitir o estado de entrada $|\phi^+\rangle$ ou $|\phi^-\rangle$, indiferentemente do número de qubits, a nossa Hamiltoniana deve ser

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{XX} = & (-1)^{N+1}(\sigma_A^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_A^-) + (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_1^-) + J_m(N) \sum_{j=2}^{N-2} (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-) \quad (3.68) \\ & + (\sigma_{N-1}^+ \sigma_B^- + \sigma_B^+ \sigma_{N-1}^-) + (\sigma_{N-1}^+ \sigma_N^- + \sigma_N^+ \sigma_{N-1}^-). \end{aligned}$$

Essa mesma troca de sinal, $J_{A,2} \rightarrow -J_{A,2}$, também afeta a transmissão no cenário em que $|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$ é o estado de Alice em $t = 0$. Mas agora, no entanto, a troca de sinal produz o seguinte resultado. Ao trocarmos o sinal e se Alice prepara em $t = 0$ os seus qubits no estado $|\psi^+\rangle$, não observamos transmissão alguma. Caso ela prepare seus qubits no estado $|\psi^-\rangle$, observamos que Bob recebe o estado $|\psi^+\rangle$ ao final da evolução temporal. Ou seja, neste caso trocar o sinal de $J_{A,2}$ significa bloquear ou permitir a transmissão de emaranhamento.

Em suma, toda a extensa discussão feita nesse capítulo mostrou que o modelo proposto é muito superior ao modelo padrão na tarefa de transmitir emaranhamento de Alice para Bob. Além disso, vimos que dos quatro estados de Bell, $|\psi^+\rangle$ foi o que se mostrou mais apropriado para transmitir emaranhamento. De fato, mostramos que, se Alice prepara seus qubits no estado $|\psi^+\rangle$, a quantidade de emaranhamento que chega a Bob é superior àquela obtida usando-se os outros três estados de Bell e o tempo em que esse emaranhamento chega a Bob também se mostrou menor. Nossa tarefa, agora, é estudar a robustez das configurações ótimas do protocolo aqui proposto em diversos cenários de imperfeição em sua construção (desordem). É esse o assunto do próximo capítulo.

Capítulo 4

Inclusão de desordem

Estudaremos neste capítulo a inclusão de *desordem* no modelo proposto quando este transmite o estado $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ de Alice para Bob. A desordem será implementada adicionando imperfeições nas constantes de acoplamento entre primeiros vizinhos, campos magnéticos externos fracos e interações residuais entre qubits no eixo z ($\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z$). A inclusão de desordem nos permitirá trabalhar com um sistema "mais realista", onde verificaremos o quanto a transmissão é afetada por possíveis problemas na montagem ou na execução experimental [74, 75]. Nas discussões a seguir, chamaremos de "caso ordenado" o sistema sem desordem e de "caso desordenado" o sistema que apresentar algum tipo de desordem.

4.1 Desordem nas constantes de acoplamento

Começaremos os estudos de desordem supondo a possibilidade de haver erros aleatórios em cada constante de acoplamento ótima obtida no capítulo anterior. Em outras palavras, queremos verificar a robustez dos resultados anteriores em um cenário de possível implementação experimental do nosso protocolo, onde não é factível regular com perfeição todos os parâmetros do sistema. Imaginemos um exemplo: o responsável pela montagem do experimento nos informa que, ao regular as interações do modelo proposto, cujos valores devem ser $J_A = 1$ e $J_m = 2$, possivelmente haverá um erro aleatório de até $\pm 0,1\%$ do valor ideal. Isso indica que, experimentalmente, $J_A = 1 \pm 0,001$ e $J_m = 2 \pm 0,002$. Todas as constantes J_A e J_m poderão ter valores independentes devido a essa imprecisão na montagem. Possivelmente $J_{A,2} \neq J_{1,2}$, por exemplo. Tal cenário poderia inviabilizar o uso prático do modelo proposto se as condições ótimas de acoplamento forem muito sensíveis e o mínimo desvio nos seus valores afetar drasticamente os resultados. Por outro lado, não sabemos informar se a melhor configuração é aquela em que todas as interações J_A e J_m devam ser a do caso ordenado ou se alguns desvios podem otimizar a transmissão. Nesse caso, ter um sistema desordenado pode ser benéfico. Sendo assim, há uma necessidade real de investigarmos a robustez do sistema estudado para além do caso ordenado. Afinal,

se quisermos tentar prever como ocorrerá uma transmissão experimentalmente, devemos estudá-la incluindo essas imperfeições. Isso pode ser feito adicionando um erro aleatório $\delta J_{i,j}$ que fará com que cada constante $J_{i,j}$ tenha um leve desvio de seu valor ótimo, ficando um pouco maior ou menor que no caso ordenado.

Podemos descrever matematicamente como atuarão esses desvios nas constantes de acoplamento que irão compor a Hamiltoniana \mathcal{H}_{XX} da seguinte maneira:

$$\underbrace{J_{i,j}}_{\text{valor com erro}} = \underbrace{J_{i,j}}_{\text{valor ideal}} (1 + \delta J_{i,j}). \quad (4.1)$$

Aqui, $\delta J_{i,j}$ é um número aleatório dentro de uma distribuição uniforme contínua entre $-p$ e p , sendo p a máxima porcentagem de erro no valor de interação $J_{i,j}$. Por exemplo, para um erro máximo de 1% ($p = 0,01$), temos $-0,01 \leq \delta J \leq 0,01$ e, se aplicado nas interações entre qubits $J_{1,2} = 1$ e $J_{2,3} = 2$, suas magnitudes poderão estar entre os valores $0,99 \leq J_{1,2} \leq 1,01$ e $1,98 \leq J_{2,3} \leq 2,02$, respectivamente. Como nossa intenção é verificar a robustez dos resultados apresentados anteriormente para a transmissão do estado $|\psi^+\rangle$ ao longo de grandes cadeias de spin, utilizaremos como valores ordenados as constantes ótimas de acoplamento J_A e J_m estudadas no capítulo 3 (figura 4.1).

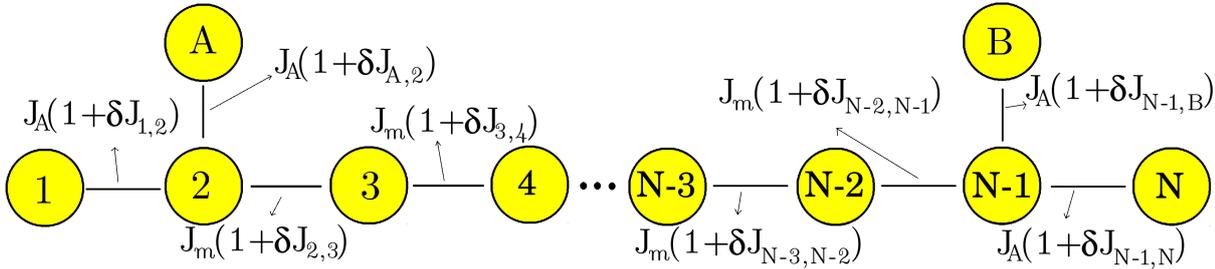


Figura 4.1: Representação da desordem que pode ocorrer durante a montagem do experimento. Cada constante de acoplamento terá um valor aleatório escolhido independentemente a partir de distribuição uniforme centrada sobre seu valor ideal. $\delta J_{i,j}$ representa a porcentagem de erro sobre o valor ótimo teórico para o caso ordenado.

A desordem descrita pela equação (4.1) ocorre durante a construção ou montagem da cadeia de spin e assim as interações XX entre os qubits se mantêm fixas durante a transmissão. Em outras palavras, essa é uma *desordem estática* (figura 4.2.a). No entanto, devemos estudar a possibilidade dessas interações oscilarem assim que Alice começar a enviar o seu estado quântico para Bob. Nessa situação, $J_{i,j} = J_{i,j}(t)$ e a equação do desvio para as constantes de acoplamento será

$$J_{i,j}(t_n) = J_{i,j}(t_{n-1}) \left(1 + \delta J_{i,j}(t_n) \right). \quad (4.2)$$

Nesse tipo de desordem, $J_{i,j}(t_0)$ será o valor ideal da constante de acoplamento e $J_{i,j}(t_1)$ o desvio na montagem, com o qual o sistema evoluirá até o instante t_1 . A seguir, ele sofrerá

um novo desvio, $J_{i,j}(t_2)$, evoluindo até o instante t_2 . Isso ocorrerá sucessivamente até o tempo final t_n em que Bob deveria receber o emaranhamento transmitido por Alice no caso ordenado. Logo, a equação (4.2) será uma relação de recorrência utilizada nos estudos e os n valores aleatórios de $\delta J_{i,j}(t)$ utilizados serão independentes entre si e com os valores anteriores, tendo como única semelhança o máximo valor possível $\pm p$.

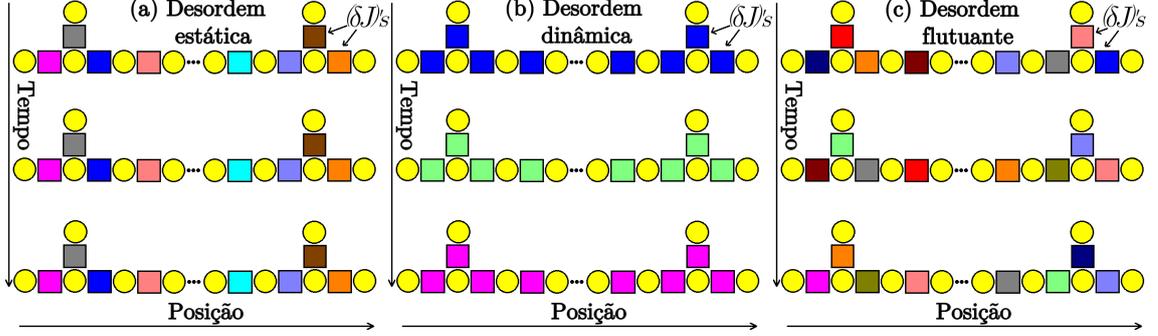


Figura 4.2: Aqui círculos representam os qubits da cadeia e os quadrados a variação das constantes de acoplamento entre os qubits em torno dos seus valores ótimos. As cores distintas nos quadrados representam diferentes flutuações das constantes de acoplamento, as quais diferem do valor ótimo ordenado por $\delta J_{i,j}(t)$. Os painéis representam (a) a desordem estática, (b) a desordem dinâmica e a (c) desordem flutuante. Para a desordem estática, $\delta J_{i,j}(t) = \delta J_{i,j}$, isto é, as constantes de acoplamento não mudam com o tempo e, por isso, as cores dos quadrados não mudam conforme o tempo passa. Na desordem dinâmica, $\delta J_{i,j}(t) = \delta J(t)$, isto é, todas as constantes de acoplamento sofrem a mesma variação conforme o tempo passa. Na desordem flutuante, $\delta J_{i,j}(t)$ depende tanto da posição quanto do tempo.

Nesse novo cenário, existem duas possibilidades da desordem atuar no sistema durante a transmissão. A primeira forma descreve a situação em que todas as constantes de acoplamento sofrem a mesma porcentagem de desvio em torno de seu valor ótimo e ao longo do tempo, isto é, $\delta J_{i,j}(t) = \delta J(t)$. Essa será uma *desordem dinâmica* (figura 4.2.b), em que a cadeia muda suas interações em uníssono, ficando todas proporcionalmente mais fortes ou mais fracas a cada período de tempo $\Delta t = t_n - t_{n-1}$. A segunda possibilidade de desordem ao longo do tempo se dá quando os desvios ocorrerem independentemente em cada interação, não somente na montagem, como na desordem estática, mas também durante a transmissão de Alice para Bob. Isso significa que, de tempos em tempos durante a transmissão, cada constante de acoplamento oscilará independentemente das demais, sendo essa a aleatoriedade mais geral possível, chamada *desordem flutuante* (figura 4.2.c).

Faremos nossas análises numéricas da seguinte maneira: a partir da configuração ótima do caso ordenado, em que já sabemos o tamanho da cadeia, o valor de J_m (fazendo $J_A = 1$), e o tempo para o máximo EoF aparecer, implementamos uma das desordens acima e evoluímos o sistema até o tempo em que o máximo EoF apareceu no caso ordenado. Após isso, o resultado é coletado e volta-se a fazer outra simulação e assim sucessivamente. O objetivo é termos um número suficiente de resultados para sabermos se existe um padrão, analisando a média dos resultados e quantos estão acima ou abaixo do resultado no caso

ordenado.

Para ilustrar melhor essas ideias, vamos começar com o seguinte exemplo. Estudaremos a desordem estática nos modelos padrão e proposto para uma cadeia pequena de $N = 10$ e $N = 60$ qubits, utilizando as informações da figura 3.8. Matematicamente, a Hamiltoniana de desordem estática para o modelo padrão é

$$\mathcal{H}_{XX}^{1D} = 2 \left[J_A(1 + \delta J_{1,2})(\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_1^-) + \sum_{j=2}^{N-2} J_m(1 + \delta J_{j,j+1})(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-) \right. \\ \left. + J_A(1 + \delta J_{N-1,N})(\sigma_{N-1}^+ \sigma_N^- + \sigma_N^+ \sigma_{N-1}^-) \right], \quad (4.3)$$

e para o modelo proposto

$$\mathcal{H}_{XX} = 2 \left[J_A(1 + \delta J_{A,2})(\sigma_A^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_A^-) + J_A(1 + \delta J_{1,2})(\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_1^-) \right. \\ \left. + \sum_{j=2}^{N-2} J_m(1 + \delta J_{j,j+1})(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-) + J_A(1 + \delta J_{N-1,N})(\sigma_{N-1}^+ \sigma_N^- + \sigma_N^+ \sigma_{N-1}^-) \right. \\ \left. + J_A(1 + \delta J_{N-1,B})(\sigma_{N-1}^+ \sigma_B^- + \sigma_B^+ \sigma_{N-1}^-) \right]. \quad (4.4)$$

Para uma cadeia de $N = 10$, o máximo EoF transmitido a Bob ocorre quando $J_m = 1,477$ e $t = 0,7510\pi$, para o modelo padrão e, para o modelo proposto, o tempo será $t = 0,5628\pi$ para $J_m = 1,941$. Assim, prepararemos as Hamiltonianas das equações (4.3) e (4.4) com esses valores de J_m e $J_A = 1$. Para os valores de cada $\delta J_{i,j}$, começaremos com um desvio de 0,2% ($p = 0,002$). Nesse caso, faremos 1000 simulações. Ao término de cada simulação, o resultado do EoF chegando a Bob será armazenado e outra Hamiltoniana será preparada com outros valores aleatórios $\delta J_{i,j}$ para a próxima simulação. Armazenaremos todos os valores de EoF encontrados nos tempos em que encontraríamos o máximo EoF no caso ordenado dos dois modelos. Terminada essa etapa, voltaremos a preparar as Hamiltonianas, mas agora acrescentando 0,2% na máxima desordem possível, ou seja, agora $p = 0,004$. Realizaremos mais 1000 simulações conforme explicado anteriormente. Terminada a segunda etapa, acrescentaremos novamente 0,2% no desvio máximo, ou seja, agora é possível haver um desvio de 0,6% do valor ideal em cada constante de acoplamento, fazendo outras 1000 simulações distintas. Esse processo será feito sucessivamente até atingirmos 10% ($p=0,1$) como máximo desvio. Esse mesmo estudo será repetido posteriormente para $N = 60$, em que $J_m = 2,099$ e $t = 2,582\pi$, para o modelo padrão, e $J_m = 2,545$ e $t = 2,1093\pi$, para o modelo proposto (figura 4.3).

Verificando os resultados, notamos que as características no comportamento da desordem são semelhantes para os dois modelos, padrão e proposto. Para uma desordem

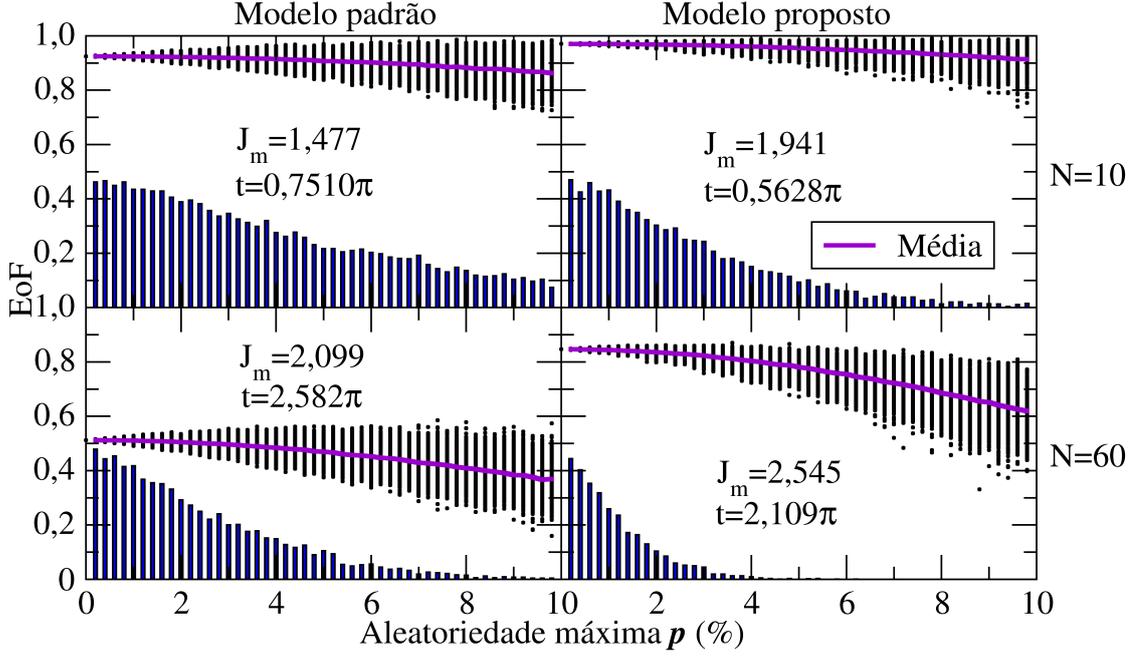


Figura 4.3: Emaranhamento transmitido a Bob na presença de desordem estática. O estado inicial enviado por Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ e o tempo t no qual calculamos a quantidade de emaranhamento com Bob é aquele previsto a dar o máximo emaranhamento transmitido para o caso ordenado. Os gráficos da esquerda correspondem ao modelo padrão e os da direita ao modelo proposto. Os gráficos superiores referem-se a $N = 10$ qubits e os inferiores a $N = 60$ qubits. Utilizamos como ponto de partida os valores ótimos do caso ordenado: $J_A = 1$ e J_m conforme visto nas figuras (Hamiltonianas (4.3) e (4.4)). Para cada valor de p , a porcentagem máxima de variação das constantes J_A e J_m em torno de seus valores ótimos, foram feitas 1000 simulações. Variamos p de 0,2% a 10%, em incrementos de 0,2 ponto percentual, totalizando 50000 realizações de desordem para cada um dos quatro gráficos acima. As linhas violetas mostram as médias dos valores do emaranhamento transmitido em função de p e as "barras" verticais que cortam as linhas roxas são na verdade os pontos que representam os valores do emaranhamento transmitido para as 1000 simulações realizadas para cada valor de p . Por fim, os histogramas na parte inferior de cada gráfico nos dão a fração de realizações de desordem superando o valor ótimo do caso ordenado. A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido.

de até 2%, o desvio do valor do EoF transmitido em relação ao caso ordenado é muito baixo. Notamos que tanto o EoF_{min} quanto o EoF_{max} encontrados são muito próximos do caso ordenado. Além disso, os resultados do EoF acima do caso ordenado se deu em quase 50% do total de simulações. Continuando a aumentar os valores de aleatoriedade, diminuimos o número de resultados acima do valor para o caso ordenado e, conseqüentemente, a sua média. Logo, vemos que os dois modelos são modelos robustos quando afetados por pequenas desordens (abaixo de 2%).

Nosso interesse principal é descobrir se o modelo proposto continua robusto para cadeias de centenas ou milhares de qubits, já que o caso ordenado alcança altos índices de transmissão de emaranhamento nesse cenário. Note que o modelo padrão não atinge valores de emaranhamento satisfatórios mesmo para uma cadeia de $N = 60$, e os máximos

de EoF diminuem cada vez mais assim que aumentamos a cadeia. Assim sendo, de agora em diante, estudaremos os casos com desordem apenas para o modelo proposto.

Analisaremos agora uma cadeia de $N = 100$ qubits para três valores das constantes de acoplamento do modelo proposto: $J_m = 2,863$, sendo esse o valor ótimo de acoplamento encontrado se $J_m \leq 5$; $J_m = 49,98$, melhor cenário para $J_m \leq 50$; e um valor intermediário entre eles, $J_m = 22,50$. Faremos 10000 simulações para cada porcentagem máxima de aleatoriedade p , partindo de 0,1%, aumentando em 0,1 ponto percentual a cada análise, até atingirmos um desvio máximo de $p = 5\%$. Esse procedimento será feito para os três valores de J_m anteriormente descritos.

Como observado na figura 4.4, o modelo proposto é eficiente quando a aleatoriedade é baixa ($\sim 0,1\%$). Além disso, para baixa desordem os resultados do EoF máximo transmitido acima do caso ordenado são quase 50% do total de simulações. Já para desordens mais altas, percebemos que, a medida que J_m aumenta, menor será a quantidade de emaranhamento transmitido, isto é, mais sensível à desordem é o sistema. Além disso, notamos que a média do EoF transmitido se mantém acima de $2/3$ para $p \lesssim 4\%$. Em outras palavras, mesmo com uma desordem alta, é possível encontrar resultados excelentes, onde a flutuação dos EoF transmitidos é muito baixa em comparação ao caso ordenado, e acima do previsto para o modelo padrão, que nestes casos dá no máximo $EoF \sim 0,4$.

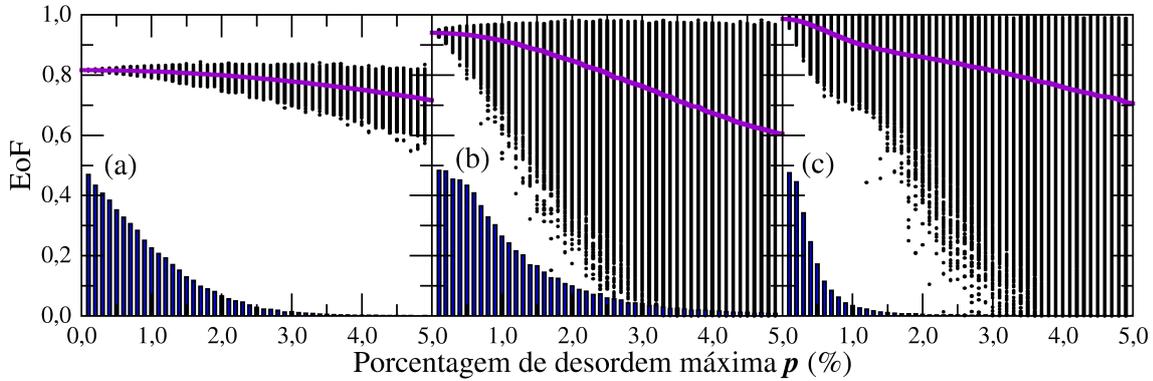


Figura 4.4: Emaranhamento transmitido a Bob na presença de desordem estática. Os dados e curvas apresentadas nas figuras acima têm o mesmo significado já explicado na legenda da figura 4.3. Agora, no entanto, $N = 100$ qubits e fizemos 10000 simulações para cada valor de p . Aqui p varia de 0,1% a 5% em incrementos de 0,1 ponto percentual. Alice envia o estado $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ e as constantes de acoplamento do caso ordenado foram $J_A = 1$ e (a) $J_m = 2,863$, (b) $J_m = 22,50$ e (c) $J_m = 49,98$. Os tempos em que calculamos o emaranhamento dos qubits de Bob foram aqueles em que temos os melhores resultados do caso ordenado, isto é, (a) $t = 3,037\pi$, (b) $t = 3,323\pi$ e (c) $t = 6,537\pi$. O valor do emaranhamento transmitido para os casos ordenados são (a) $EoF = 0,8165$, (b) $EoF = 0,9409$ e (c) $EoF = 0,9872$. A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido.

Para $N = 1000$, estudamos dois casos para o modelo proposto: $J_m = 4,253$ e $J_m = 200,0$, cujos emaranhamentos ótimos transmitidos são $EoF = 0,7113$ em $t = 19,11\pi$

e $EoF = 0.9896$ em $t = 26,06\pi$, respectivamente (figura 4.5). Agora temos um novo cenário, em que aumentamos em dez vezes o tamanho da cadeia e, por isso, o número de simulações com desordem resultando em um EoF acima do EoF dos casos ordenados é menor que anteriormente, quando $N = 60$ e $N = 100$. Com desordens de apenas 0,1%, um pouco mais de 30% do total de simulações onde $J_m = 4,253$, e aproximadamente 13% quando $J_m = 200,0$, têm EoF acima do caso ordenado. Já para desordens mais altas, percebemos uma maior redução do emaranhamento transmitido. Por exemplo, $EoF_{\text{médio}} < 0,5$ para os dois valores de J_m estudados quando a desordem é de 5%.

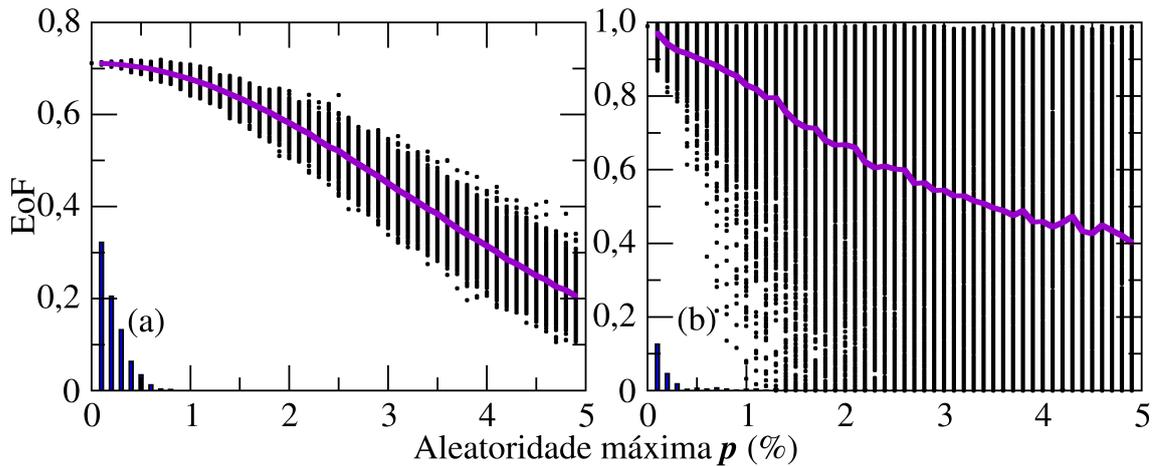


Figura 4.5: Mesmo cenário já descrito na figura 4.4, só que agora $N = 1000$ qubits e, para cada p , fizemos 1000 realizações de desordem. No gráfico da esquerda (a) o valor ótimo de J_m no caso ordenado é $J_m = 4,253$ e no da direita (b) $J_m = 200,0$, enquanto os tempos em que a máxima transmissão ocorreu são $t = 19,11\pi$ e $t = 26,06\pi$, respectivamente. Os valores destes máximos emaranhamentos transmitidos para o caso sem desordem são $EoF = 0.7113$ e $EoF = 0.9896$, respectivamente. A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido.

Concluimos que, para a desordem estática, o modelo é robusto para cadeias de ordem de $N = 1000$ qubits quando os desvios a partir da configuração ótima do caso ordenado são pequenas. Em condições em que o responsável pela montagem do experimento consegue uma boa precisão e o possível desvio é da ordem de 0,2%, conseguimos praticamente os mesmos resultados que no caso ordenado. Acima desse desvio, também encontramos ótimos resultados, isto é, a flutuação em relação ao valor do caso ordenado é muito baixa. Porém, os valores de EoF transmitido diminuem gradativamente assim que a porcentagem é maior. Outro ponto é que, quanto maior o valor de J_m e quanto maior o tamanho da cadeia, mais sensível é o sistema às desordens.

Terminada essa etapa, estudaremos agora as desordens dinâmica e flutuante. Para tais desordens, definiremos alguns conceitos que serão utilizados em todas as simulações subsequentes. O primeiro destes conceitos está relacionado com a própria definição de desordem dinâmica e com a maneira pela qual construímos a desordem flutuante. Essencialmente, nas desordens dinâmica e flutuante precisamos definir uma escala de tempo Δt em que a Hamiltoniana que descreve a evolução do sistema muda com o tempo. Ao

contrário da desordem estática, agora lidamos com Hamiltonianas dependentes do tempo. A taxa com que a Hamiltoniana muda depende do sistema físico em questão, sendo proporcional a $1/\Delta t$. Com isso em mente, a evolução do sistema de $N + 2$ qubits do tempo $t = t_0 = 0$ até $t = t_n$ será dada por

$$\begin{aligned} |\Psi^+(t)\rangle &= e^{-i\mathcal{H}(t_n)(t_n-t_{n-1})} \dots e^{-i\mathcal{H}(t_3)(t_3-t_2)} e^{-i\mathcal{H}(t_2)(t_2-t_1)} e^{-i\mathcal{H}(t_1)(t_1-t_0)} |\Psi^+(0)\rangle, \\ &= e^{-i\mathcal{H}(t_n)\Delta t} \dots e^{-i\mathcal{H}(t_3)\Delta t} e^{-i\mathcal{H}(t_2)\Delta t} e^{-i\mathcal{H}(t_1)\Delta t} |\Psi^+(0)\rangle, \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $\mathcal{H}(t_l)$, em que $l = 1, \dots, n$, são as Hamiltonianas utilizadas em cada etapa da evolução temporal. Por exemplo, de $t = t_0$ a $t = t_1$, utilizamos $\mathcal{H}(t_1)$ para evoluir o sistema. Ao chegar em t_1 , a Hamiltoniana muda para $\mathcal{H}(t_2)$, sendo esta utilizada para evoluir o sistema até t_2 . Este processo se repete até chegarmos a $t = t_n$ (figura 4.6).

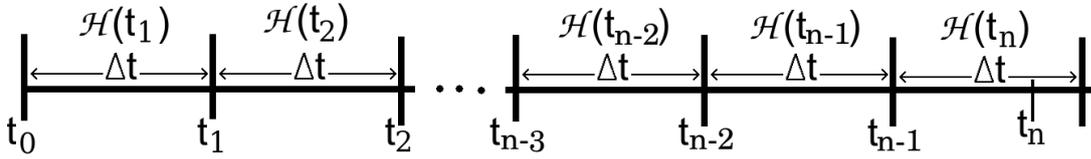


Figura 4.6: Esquema da evolução temporal quando a Hamiltoniana varia temporalmente (desordens dinâmica e flutuante). Vemos que, caso t_n não ocorra em um múltiplo de Δt , ele será calculado utilizando a Hamiltoniana que está descrevendo o sistema naquele período.

Vale a pena observar que $\mathcal{H}(t_{l+1})$ é obtida por meio de processos aleatórios a partir de $\mathcal{H}(t_l)$. Em particular, $\mathcal{H}(t_1)$ é obtido a partir da configuração ótima do caso ordenado, dada por $\mathcal{H}(t_0)$.

O segundo conceito de que necessitamos é aquele que nos permite diferenciar a desordem dinâmica da flutuante. No primeiro caso, a cada intervalo de tempo Δt , a Hamiltoniana muda de tal forma que todas as constantes de acoplamento sofrem a mesma variação percentual. Na notação introduzida nas páginas anteriores, temos $\delta J_{i,j}(t) = \delta J(t)$. A cada intervalo Δt , podemos ter diferentes valores para $\delta J(t_l)$, mas este valor atuará em todas as constantes de acoplamento.

A desordem flutuante, por sua vez, é tal que $\delta J_{i,j}(t_l)$ é aleatoriamente calculado para cada constante de acoplamento em cada intervalo de tempo Δt . Ou seja, aqui combinamos os elementos da desordem estática e dinâmica, onde não só a cada intervalo de tempo Δt as constantes de acoplamento mudam (desordem dinâmica) como também mudam de forma distintas, dependendo de quais primeiros vizinhos temos (desordem estática). Nas simulações que se seguem, utilizamos três escalas de tempo: $\Delta t = \pi$, $\Delta t = 0,1\pi$ e $\Delta t = 0,01\pi$.

Para os casos de desordem estática, não é difícil fazer milhares de simulações. Isso se deve ao fato de precisarmos fazer apenas um cálculo: $|\Psi^+(t)\rangle = e^{-iHt}|\Psi^+(0)\rangle$. Agora, como $\mathcal{H}(t)$ depende do tempo, devemos calcular a evolução do sistema a cada período de tempo Δt . Essa evolução fará com que se leve muito tempo de processamento nos

computadores utilizados para cada simulação e, por isso, nos limitaremos a 100 realizações de desordem para cada porcentagem p de desordem. Verificamos que esta quantidade de simulações é o mínimo necessário para estabelecermos uma estatística razoável sobre os comportamentos específicos da média de emaranhamento transmitido e do número de casos acima do valor ótimo para o sistema ordenado.

Estudaremos primeiramente a desordem dinâmica, em que $\delta J_{i,j}(t) = \delta J(t)$. Essa desordem nos acoplamentos implica que todos os valores de J_A e J_m variarão a uma mesma proporção a cada período Δt . Matematicamente

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{XX}(t_n) &= J_A(t_{n-1})(1 + \delta J_{t_n})(\sigma_A^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_A^-) \\
&+ J_A(t_{n-1})(1 + \delta J_{t_n})(\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_1^-) \\
&+ \sum_{j=2}^{N-2} J_m(t_{n-1})(1 + \delta J_{t_n})(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-) \\
&+ J_A(t_{n-1})(1 + \delta J_{t_n})(\sigma_{N-1}^+ \sigma_N^- + \sigma_N^+ \sigma_{N-1}^-) \\
&+ J_A(t_{n-1})(1 + \delta J_{t_n})(\sigma_{N-1}^+ \sigma_B^- + \sigma_B^+ \sigma_{N-1}^-).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Note que podemos pôr em evidência o termo $(1 + \delta J_{t_n})$ na Hamiltoniana e, com isso, vemos que $\mathcal{H}_{XX}(t_n) = (1 + \delta J_{t_n})\mathcal{H}_{XX}(t_{n-1})$. Logo, os resultados dessa desordem são "distorções temporais" do caso ordenado pois, se descrevermos a evolução temporal em um período Δt ,

$$\begin{aligned}
U(\Delta t) &= e^{-i\mathcal{H}_{XX}(t_n)(t_n - t_{n-1})}, \\
&= e^{-i\mathcal{H}_{XX}(t_{n-1})[(1 + \delta J_{t_n})(t_n - t_{n-1})]},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

notamos que a aleatoriedade deslocará no eixo do tempo as grandezas relevantes (figura 4.7). Por esse motivo, se estamos analisando os resultados no tempo de máximo emaranhamento de formação do caso ordenado, nenhuma desordem puramente dinâmica terá valores maiores de emaranhamento do que o caso sem desordem. Em outras palavras, o tempo em que medimos o EoF dos qubits de Bob já ocorre no maior máximo possível e esse efeito de descolamento temporal fará com que outro ponto em torno do máximo seja medido naquele instante de tempo t_n .

Outra característica da desordem dinâmica se dá quando observamos os resultados para $J_m(t_0) = 22, 50$ e, principalmente, $J_m(t_0) = 49, 98$. Aqui notamos que pouquíssimas realizações de desordem dão resultados inferiores a um certo valor de emaranhamento transmitido (linhas tracejadas na figura 4.7). Esse efeito é mais aparente para altos valores de J_m . Podemos entender isso notando que, quanto maior J_m , mais "largo" é o intervalo de tempo em que os valores de EoF transmitido ficam próximos do valor máximo. Assim, precisamos de intervalos de tempo Δt cada vez menores para que tenhamos um acúmulo suficiente de alterações da Hamiltoniana de tal forma a afetarmos significativamente a performance da transmissão de emaranhamento para altos valores de J_m .

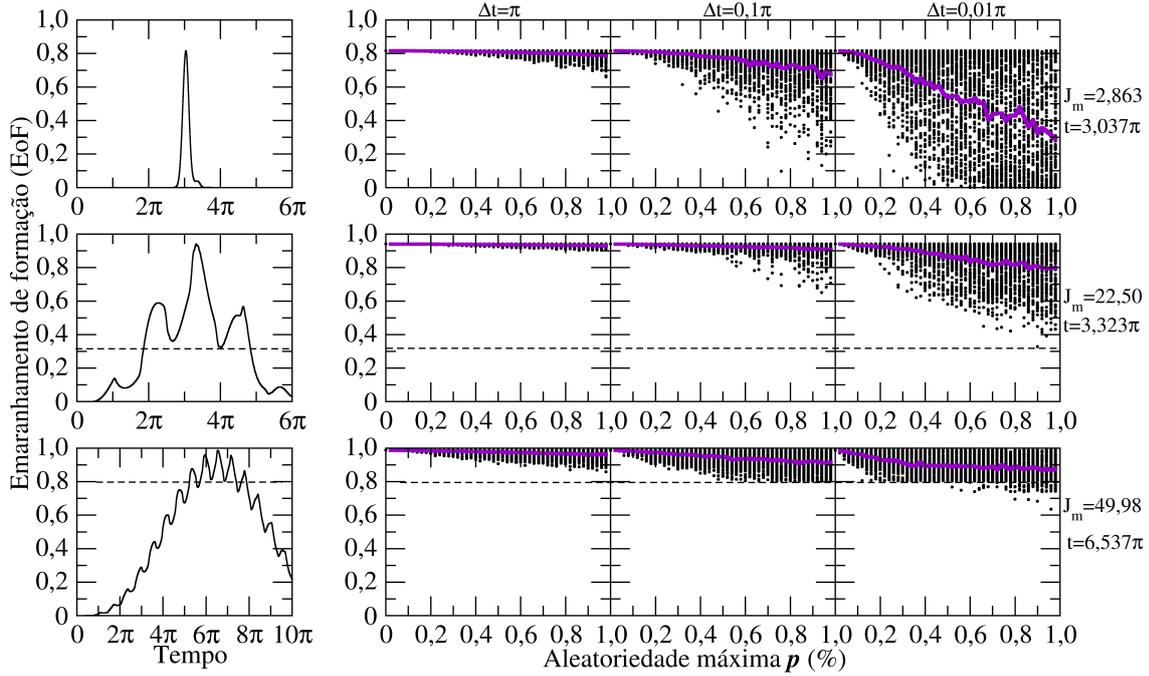


Figura 4.7: Resultados do EoF máximo transmitido para desordem dinâmica quando o estado enviado por Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ e calculamos o EoF com Bob no tempo do máximo emaranhamento transmitido no caso exato (sem desordem). Para estas simulações, $J_A(t_0) = 1$ na equação (4.4) e $N = 100$. Foram feitas 100 simulações para cada porcentagem máxima de aleatoriedade de $p = 0$ a $p = 1\%$, variando p em incrementos de 0,02 ponto percentual, em torno dos valores ótimos de acoplamentos J_A e J_m dos casos ordenados. Utilizamos os valores do caso ordenado indicados no canto direito e os emaranhamentos máximos transmitidos nestas situações (caso ordenado) dados por (a) $EoF = 0,8165$, (b) $EoF = 0,9409$ e (c) $EoF = 0,9872$. A primeira coluna mostra os gráficos do emaranhamento transmitido por tempo para cada um dos acoplamentos J_m citados acima no caso ordenado. A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido.

Em suma, a desordem dinâmica não afeta significativamente a performance da transmissão do emaranhamento de Alice para Bob. E para um período Δt de mudanças na Hamiltoniana, sempre podemos melhorar o desempenho aumentando o valor de J_m , conforme pode ser visto na figura 4.7, em especial para o caso em que $\Delta t = 0,01\pi$.

Vejam, agora, o que acontece para o caso da desordem flutuante. Matematicamente, a Hamiltoniana em um instante t_n é descrita pela equação

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{XX}(t_n) = & J_{A,2}(t_{n-1})(1 + \delta J_{A,2}(t_n))(\sigma_A^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_A^-) \\
& + J_{1,2}(t_{n-1})(1 + \delta J_{1,2}(t_n))(\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_1^-) \\
& + \sum_{j=2}^{N-2} J_{j,j+1}(t_{n-1})(1 + \delta J_{j,j+1}(t_n))(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-) \\
& + J_{N-1,N}(t_{n-1})(1 + \delta J_{N-1,N}(t_n))(\sigma_{N-1}^+ \sigma_N^- + \sigma_N^+ \sigma_{N-1}^-) \\
& + J_{N-1,B}(t_{n-1})(1 + \delta J_{N-1,B}(t_n))(\sigma_{N-1}^+ \sigma_B^- + \sigma_B^+ \sigma_{N-1}^-).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Aqui, $J_{A,2}(t_0) = J_{1,2}(t_0) = J_{N-1,N}(t_0) = J_{N-1,B}(t_0) = J_A$ e $J_{j,j+1}(t_0) = J_m$ para $2 \leq j \leq N-1$. Como vemos na figura 4.8, os resultados são semelhantes à desordem

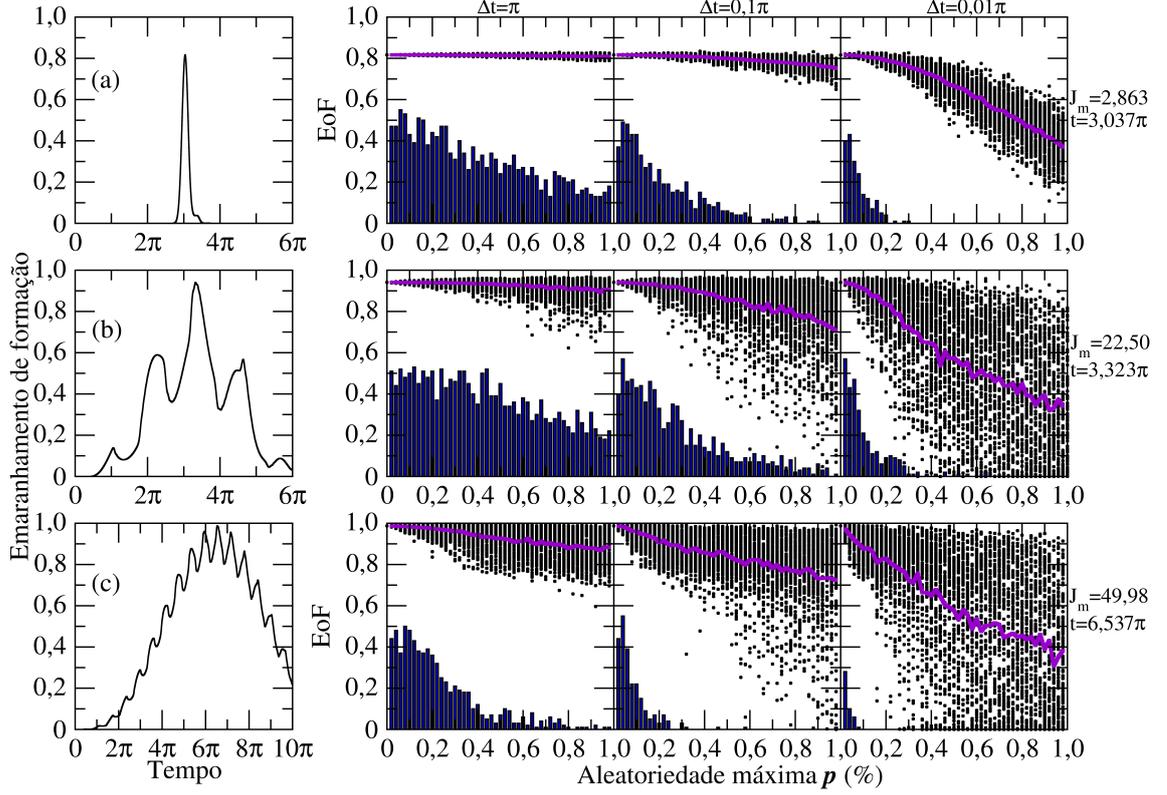


Figura 4.8: Resultados do EoF máximo transmitido para desordem flutuante quando o estado enviado por Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ e calculamos o EoF com Bob no tempo do máximo emaranhamento transmitido no caso exato (sem desordem). Para estas simulações, $J_A(t_0) = 1$ na equação (4.4) e $N = 100$. Foram feitas 100 simulações para cada porcentagem máxima de aleatoriedade p de 0 a 1%, variando em incrementos de 0,02 ponto percentual em torno dos valores de acoplamentos J_A e J_m . Utilizamos os valores do caso ordenado indicados no canto direito e os emaranhamentos máximos transmitidos nestas situações (caso ordenado) dados por (a) $EoF = 0,8165$, (b) $EoF = 0,9409$ e (c) $EoF = 0,9872$. A primeira coluna mostra os gráficos do emaranhamento transmitido pelo tempo para cada um dos acoplamentos J_m citados acima no caso ordenado. A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido.

estática (figura 4.4) até $p \approx 1,0\%$ de desordem e quando o período de flutuação é grande, como $\Delta t = \pi$, por exemplo. Isso se deve à taxa de mudança da Hamiltoniana ($\frac{1}{\Delta t}$) ser muito pequena para grandes valores de Δt . Isso faz com que o sistema esteja quase em uma desordem estática. Assim, desordens baixas nos acoplamentos ($p \lesssim 0,2\%$) não afetam significativamente os resultados. A medida que diminuimos o período de desordem temporal, no entanto, os resultados tendem a piorar significativamente, principalmente para $J_m(t_0) = 22,50$ e $J_m(t_0) = 49,98$. Mesmo pequenas desordens nos acoplamentos, quando há muita oscilação temporal (Δt pequeno), pioram a transmissão na grande maioria das vezes, principalmente quando o valor de J_m é alto. Para desordens de $p = 1\%$ nas constantes de acoplamento, a qualidade da transmissão é muito ruim neste cenário. Logo, o modelo proposto é robusto a desordens em $J_{i,j}$ quando o período de tempo Δt em que a Hamiltoniana muda não for muito pequeno. Quanto menor o tempo em que devemos

obter a máxima transmissão de emaranhamento em relação a Δt , melhores resultados teremos.

Após análise de todos os casos de desordem até agora estudados, concluímos que o modelo proposto é muito eficiente quando a desordem é mais baixa que 1%, fornecendo bons índices de emaranhamento transmitido a Bob. Para valores de desordem maiores que 1%, os resultados ainda são razoáveis para as desordens estática e dinâmica. Para a desordem flutuante, a situação se deteriora rapidamente, principalmente para altos valores de J_m .

4.2 Ruídos oriundos de campos magnéticos externos ao sistema

Estudaremos agora os efeitos de um campo magnético externo fraco atuando sobre o sistema na direção z . Experimentalmente, é possível que os equipamentos eletrônicos possam gerar um campo magnético muito fraco, devido a correntes elétricas ou mesmo pela presença de ímãs. Em alguns casos, pode ser difícil inibir completamente a presença desses campos que agirão como um ruído na cadeia de spins.

Primeiramente, devemos definir como implementar matematicamente estes campos. O campo magnético externo será descrito pela seguinte Hamiltoniana:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_Z(t_n) &= \sum_j h_j(t_n)(I + \sigma_j^z), \\ &= \sum_j 2h_j(t_n)\sigma_j^+\sigma_j^-, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde

$$h_j(t_n) = h_j(t_{n-1}) + \delta h_j(t_n). \quad (4.10)$$

Aqui, $h_j(t_n)$ é a magnitude do campo magnético em t_n e $\delta h_j(t_n)$ é a variação no campo, o qual pode assumir valores dentro de uma distribuição contínua entre $-p$ a p . Por exemplo, se a desordem máxima de $\delta h_j(t_n)$ for $p = 0, 1$, este poderá assumir valores entre $-0, 1$ e $0, 1$. Nos nossos estudos, $h_j(t_0) = 0$, ou seja, os campos magnéticos oscilarão em torno do caso ideal em que não há campo.

Agora, devemos converter a Hamiltoniana (4.9) para a notação de estados de um qubit excitado utilizada até então nessa Tese. Se utilizarmos $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{XX} + \mathcal{H}_Z$ na equação (3.7) teremos

$$i \frac{d}{dt} c_m(t) = \sum_n c_n(t) (\langle \hat{1}_m | \mathcal{H}_{XX} | \hat{1}_n \rangle + \langle \hat{1}_m | \mathcal{H}_Z | \hat{1}_n \rangle). \quad (4.11)$$

Os termos advindos da expansão de $\langle \hat{1}_m | \mathcal{H}_{XX} | \hat{1}_n \rangle$ são os obtidos nas equações (3.8-14). O novo termo, $\langle \hat{1}_m | \mathcal{H}_Z | \hat{1}_n \rangle$, referente ao campo magnético, fornecerá apenas os elementos

$2h_m(t)c_m(t)$ em cada uma das equações (3.8-14). Então, resolvendo a equação (4.11) para $m = A, 1, 2, \dots, N-1, N, B$, usando a Hamiltoniana (2.11) para \mathcal{H}_{XX} e (4.9) para \mathcal{H}_Z , obtemos

$$i\frac{d}{dt}c_A(t) = 2J_{A,2}c_2(t) + 2h_A(t)c_A(t), \quad (4.12)$$

$$i\frac{d}{dt}c_1(t) = 2J_{1,2}c_2(t) + 2h_1(t)c_1(t), \quad (4.13)$$

$$i\frac{d}{dt}c_2(t) = 2J_{1,2}c_1(t) + 2J_{A,2}c_A(t) + 2J_{2,3}c_3(t) + 2h_2(t)c_2(t), \quad (4.14)$$

$$i\frac{d}{dt}c_k(t) = 2J_{k-1,k}c_{k-1}(t) + 2J_{k,k+1}c_{k+1}(t) + 2h_k(t)c_k(t),$$

sendo $3 \leq k \leq N-2$,

(4.15)

$$i\frac{d}{dt}c_{N-1}(t) = 2J_{N-2,N-1}c_{N-2}(t) + 2J_{N-1,N}c_N(t) + 2J_{N-1,B}c_B(t) + 2h_{N-1}(t)c_{N-1}(t), \quad (4.16)$$

$$i\frac{d}{dt}c_N(t) = 2J_{N-1,N}c_N(t) + 2h_N(t)c_N(t), \quad (4.17)$$

$$i\frac{d}{dt}c_B(t) = 2J_{N-1,B}c_{N-1}(t) + 2h_B(t)c_B(t). \quad (4.18)$$

O último termo de cada uma dessas equações nos permite construir uma segunda matriz Hamiltoniana, \mathcal{H}_Z , que descreve apenas o campo magnético. Esta se trata de uma matriz diagonal do tamanho do número de qubits (matriz $(N+2) \times (N+2)$):

$$\mathcal{H}_Z = 2 \begin{pmatrix} h_A(t) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2(t) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_3(t) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{N-2}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_{N-1}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & h_N(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & h_B(t) \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Estabelecido isso, estudaremos os casos em que a desordem é estática (o campo magnético em cada qubit é fixo no tempo, como visto na figura 4.9.a), dinâmica (o campo magnético atua uniformemente em todos os qubits, mas varia a cada instante de tempo Δt , como observado na figura 4.9.b) e flutuante (cada qubit sofre a presença de campo independente dos demais que pode ou não variar a cada período de oscilação, como na figura 4.9.c).

Começaremos pela desordem dinâmica, talvez a mais provável de ocorrer experimentalmente devido às dimensões diminutas das cadeias de spin do sistema, em que qualquer

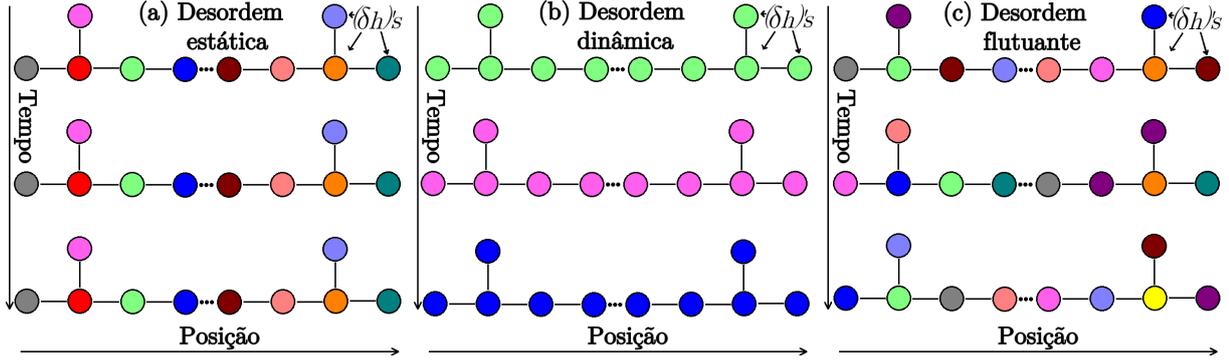


Figura 4.9: As cores nos qubits representam as variações do campo magnético $\delta h_j(t)$ e cada cor equivale a um valor aleatório diferente. As desordens possíveis são (a) estáticas (δh_j), (b) dinâmica ($\delta h(t)$) e (c) flutuante ($\delta h_j(t)$). Se observarmos essa figura, o tempo cresce de cima para baixo e temos as posições dos qubits crescendo da esquerda para a direita. Logo, a desordem estática ocorre apenas nas colunas, a desordem dinâmica nas linhas e a flutuante ocorre tanto em linhas quanto colunas.

campo magnético afetará todos os qubits da mesma maneira. Para esse tipo de desordem, onde

$$\mathcal{H}_Z(t_n) = 2h(t_n) \sum_j \sigma_j^+ \sigma_j^-, \quad (4.20)$$

não haverá alteração nos resultados, pois $[\mathcal{H}_Z, |\psi^+\rangle\langle\psi^+|] = 2h_{t_n} [\sum_j \sigma_j^+ \sigma_j^-, |\psi^+\rangle\langle\psi^+|] = 0$. Como o comutador é zero, \mathcal{H}_Z não contribuirá efetivamente na evolução temporal do sistema. Isso significa que, se o campo magnético for igual para todos os qubits, não haverá influência na transmissão, independente do campo ser constante ou oscilar ao longo do tempo.

Passemos, então, à desordem estática, em que $h_j(t_n) = \delta h_j$. Para todos os estudos, utilizaremos a Hamiltoniana H_{XX} do caso ordenado, (3.62), com $J_m = 2,863$ e $t = 3,0374\pi$, $J_m = 22,50$ e $t = 3,3229\pi$ e $J_m = 49,98$ e $t = 6,5366\pi$, já discutidos anteriormente. Para a magnitude do campo magnético definido na equação (4.10), utilizaremos $h_j = 0$ e δh_j inicialmente oscilando entre $\pm 0,002$, isto é, $p = 0,002$. Para cada p faremos 10000 simulações. Repetiremos esse procedimento para p até 0,1, em incrementos de 0,002 (figura 4.10).

No cenário da desordem estática, nosso sistema está sofrendo um ruído fixo de campo magnético para cada qubit j , campo esse que não deveria existir no caso ideal. O primeiro ponto que devemos destacar é que encontramos poucos e inexpressivos resultados de transmissão acima do caso ótimo ordenado, o que mostra que campos magnéticos aleatórios em cada qubit efetivamente prejudica a transmissão no modelo proposto mais intensamente do que flutuações nas constantes de acoplamento J_m e J_A . Por esse motivo, experimentalmente é importantíssimo tentar inibir qualquer presença de campo magnético que não afete de forma homogênea o sistema, como no caso da desordem dinâmica. Em compensação, caso se consiga inibir quase completamente os campos, deixando apenas campos extremamente fracos ($\sim 0,04$), os resultados da transmissão serão pouco afetados,

4.2. RUÍDOS ORIUNDOS DE CAMPOS MAGNÉTICOS EXTERNOS AO SISTEMA77

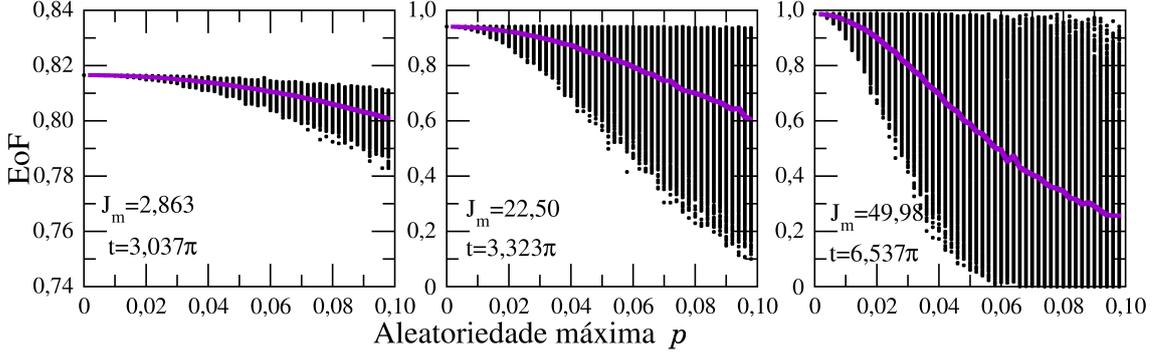


Figura 4.10: Resultados de EoF máximo transmitido com desordem estática no campo magnético e quando o estado inicial de Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Os valores de EoF calculados acima são aqueles obtidos no tempo t em que a máxima transmissão de emaranhamento seria esperada para o caso ordenado. Definimos H_{XX} pela equação (3.62) onde $J_A = 1$, além de J_m e t que estão indicados na figura. Para o campo magnético definido na equação (4.10), utilizamos $h_j = 0$ e δh_j sendo dado por uma distribuição uniforme compreendida entre $-p$ e p , conforme explicado no texto. Fizemos 10000 simulações para cada p . A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido.

principalmente para J_m mais baixos. Concluímos que, se os campos magnéticos externos forem muito fracos mas fixos no tempo, o modelo proposto é robusto o suficiente para não deixar que a transmissão seja prejudicada mesmo com cada qubit sofrendo a ação de campos magnéticos com valores distintos.

Para a desordem flutuante de campo magnético, utilizaremos os mesmos casos da desordem estática, isto é, usaremos a Hamiltoniana H_{XX} (3.62) para $J_m = 2,863$, $J_m = 22,50$ e $J_m = 49,98$. Também utilizaremos $h_j(t_0) = 0$ e p variará de 0,002 a 0,1, aumentando em incrementos de 0,002. Para cada p , implementaremos 100 realizações de desordem flutuante.

Em um cenário real, o sistema (que idealmente não deveria ter campo magnético) está agora com um ruído de campo externo diferente em cada qubit j e esse ruído varia a cada período $\Delta t = \pi$, $\Delta t = 0,1\pi$ e $\Delta t = 0,01\pi$ (figura 4.11). Assim como na desordem estática, há poucos casos de EoF transmitido com um valor acima do caso ótimo ordenado, e, quando há, a diferença é inexpressiva. Concluímos, assim, que o campo magnético atuando no sistema sob forma de ruído só tende a piorar a transmissão na maioria das vezes. Entretanto, assim como no caso da desordem flutuante nas constantes de acoplamento, quando o período Δt de oscilações for da ordem do tempo de medida dos qubits de Bob, o sistema é pouco afetado, e os resultados são muito parecidos com o caso estático. Por outro lado, a medida que diminuimos o tamanho de Δt , a transmissão piora muito, principalmente para os valores de J_m mais altos.

Outro ponto a se destacar é que o sistema também será mais sensível a medida que J_m for maior. Para desordens de 1% há realizações de desordem para $J_m = 49,98$ em que a transmissão chega a ser praticamente nula em $t = 6,5366\pi$, mesmo com poucas oscilações.

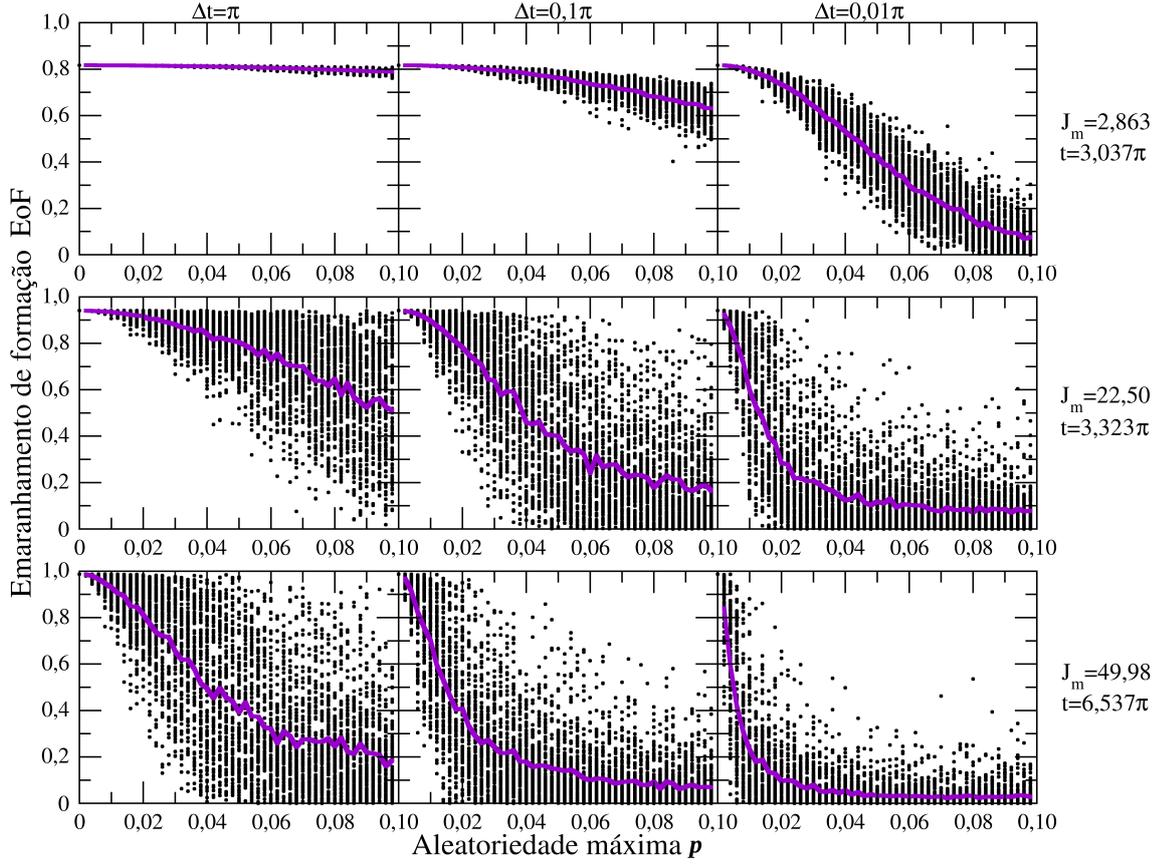


Figura 4.11: Resultados de EoF máximo transmitido com desordem flutuante no campo magnético quando o estado inicial de Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Os valores de EoF calculados acima são aqueles obtidos no tempo t em que a máxima transmissão de emaranhamento seria esperada para o caso ordenado. Definimos H_{XX} pela equação (3.62) onde $J_A = 1$, além de J_m e t que estão indicados no lado direito da figura. Para o campo magnético definido na equação (4.10), utilizamos $h_j(t_0) = 0$ e $\delta h_j(t)$ sendo dado por uma distribuição uniforme compreendida entre $-p$ e p , conforme explicado no texto. A linha roxa representa a média de EoF transmitido e para cada p fizemos 100 simulações de desordem flutuante. Os intervalos Δt em que os valores de $\delta h_j(t)$ mudam estão indicados no topo de cada coluna do gráfico. A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido.

Lembremos que no caso ordenado, o emaranhamento transmitido é 0,9872, muito próximo de uma transmissão perfeita. Isso significa que, se os campos não forem muito fracos, mesmo que não oscilem muito, é improvável que Bob receba algum emaranhamento. Em um cenário pior, no qual o campo magnético oscila demais, mesmo magnitudes baixas de campo atrapalharão drasticamente a transmissão, como visto no último quadro da figura 4.11. No entanto, se experimentalmente o campo magnético for muito fraco e se esse oscilar muito pouco, como visto na primeira coluna da figura 4.11, onde $\Delta t = \pi$, a transmissão é pouquíssima afetada. Acreditamos que essas condições de pouca desordem e pouca oscilação não sejam impossíveis de se conseguir experimentalmente com equipamentos atuais. Em suma, o sistema é robusto a pequenas desordens de campo magnético.

4.3 Interações residuais entre qubits do tipo $\sigma_i^z \sigma_j^z$

Entre as possíveis desordens que podem influenciar experimentalmente na transmissão, temos a possibilidade de haver pequenas interações entre os qubits que não sejam do tipo XX. Isso indica a possibilidade de haver uma fraca anisotropia afetando o sistema. Por esse motivo, devemos estudar um pouco o modelo XXZ. Utilizaremos a equação (2.1) com $\gamma = 0$ para descrever esse modelo. Então

$$H_{i,j}(t_n) = J_{i,j}(\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y) + \Delta_{i,j}(t_n) \sigma_i^z \sigma_j^z, \quad (4.21)$$

onde $\Delta_{i,j}(t_n)$ atua como um ruído no sistema, isto é,

$$\Delta_{i,j}(t_n) = \Delta_{i,j}(t_{n-1}) + \delta_{i,j}(t_n). \quad (4.22)$$

Aqui, $\delta_{i,j}(t_n)$ assume valores entre $-p$ e $+p$, sendo p o máximo valor de ruído possível. Por exemplo, se a desordem máxima de $\delta_{i,j}(t_n)$ for $p = 0,05$, esse poderá assumir valores entre $-0,05$ e $0,05$. E a nossa Hamiltoniana geral pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{XXZ}(t_n) &= J_{A,2}(\sigma_A^x \sigma_2^x + \sigma_A^y \sigma_2^y) + \Delta_{A,2}(t_n) \sigma_A^z \sigma_2^z \\ &+ \sum_{j=2}^{N-1} [J_{j,j+1}(\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y) + \Delta_{j,j+1}(t_n) \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z] \\ &+ J_{N-1,B}(\sigma_{N-1}^x \sigma_B^x + \sigma_{N-1}^y \sigma_B^y) + \Delta_{N-1,B}(t_n) \sigma_{N-1}^z \sigma_B^z. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Já que estamos trabalhando a partir da situação ideal em que o sistema não sofre essa interação, $\Delta_{i,j}(t_0) = 0$.

Como $[(\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y), \sigma_i^z \sigma_j^z] = 0$, a matriz unitária que dá a evolução temporal do sistema fatora, $U(t_n) = U_{ZZ}(t_n) U_{XX}(t_n)$, onde $U_{ZZ}(t_n) = e^{-i\mathcal{H}_{ZZ} t_n}$ e $U_{XX}(t_n) = e^{-i\mathcal{H}_{XX} t_n}$. Note que, como o comutador acima é zero, também temos que $[U_{ZZ}(t_n), U_{XX}(t_n)] = 0$, indicando que $U(t_n) = U_{ZZ}(t_n) U_{XX}(t_n) = U_{XX}(t_n) U_{ZZ}(t_n)$. Aqui,

$$\mathcal{H}_{XXZ} = \mathcal{H}_{XX} + \mathcal{H}_{ZZ}, \quad (4.24)$$

em que

$$\mathcal{H}_{ZZ}(t_n) = \Delta_{A,2}(t_n) \sigma_A^z \sigma_2^z + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_{j,j+1}(t_n) \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + \Delta_{N-1,B}(t_n) \sigma_{N-1}^z \sigma_B^z. \quad (4.25)$$

Se observarmos a equação (2.10), temos que $\sigma^z = 2\sigma^+ \sigma^- - I$. Assim, podemos reescrever uma interação XXZ como:

$$\begin{aligned} \sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y &= 2(\sigma_i^+ \sigma_j^- + \sigma_i^- \sigma_j^+) \\ \sigma_i^z \sigma_j^z &= (2\sigma^+ \sigma^- - I)_i (2\sigma^+ \sigma^- - I)_j. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Logo, reescrevendo a equação (4.25), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ZZ}(t_n) &= \Delta_{A,2}(t_n)(2\sigma_A^+\sigma_A^- - I_A)(2\sigma_2^+\sigma_2^- - I_2) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_{j,j+1}(t_n)(2\sigma_j^+\sigma_j^- - I_j)(2\sigma_{j+1}^+\sigma_{j+1}^- - I_{j+1}) \\ &\quad + \Delta_{N-1,B}(t_n)(2\sigma_{N-1}^+\sigma_{N-1}^- - I_{N-1})(2\sigma_B^+\sigma_B^- - I_B). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para a análise da transmissão do estado $|\psi^+\rangle$, partindo da equação (3.7) e utilizando a Hamiltoniana (4.23), para $m = A, 1, 2, \dots, N-1, N, B$, obtemos

$$i\frac{d}{dt}c_A = 2J_{A,2}c_2 + (\Lambda - 2\Delta_{A,2})c_A, \quad (4.28)$$

$$i\frac{d}{dt}c_1 = 2J_{1,2}c_2 + (\Lambda - 2\Delta_{1,2})c_1, \quad (4.29)$$

$$i\frac{d}{dt}c_2 = 2J_{A,2}c_A + 2J_{1,2}c_A + 2J_{2,3}c_3 + (\Lambda - 2\Delta_{A,2} - 2\Delta_{1,2} - 2\Delta_{2,3})c_2, \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}c_k &= 2J_{k-1,k}c_{k-1} + 2J_{k,k+1}c_{k+1} + (\Lambda - 2\Delta_{k-1,k} - 2\Delta_{k,k+1})c_k, \\ &\text{sendo } 3 \leq k \leq N-2, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}c_{N-1} &= 2J_{N-2,N-1}c_{N-2} + 2J_{N-1,N}c_N + 2J_{N-1,B}c_B \\ &\quad + (\Lambda - 2\Delta_{N-2,N-1} - 2\Delta_{N-1,N} - 2\Delta_{N-1,B})c_{N-1}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$i\frac{d}{dt}c_N = 2J_{N-1,N}c_{N-1} + (\Lambda - 2\Delta_{N-1,N})c_N, \quad (4.33)$$

$$i\frac{d}{dt}c_B = 2J_{N-1,B}c_{N-1} + (\Lambda - 2\Delta_{N-1,B})c_B. \quad (4.34)$$

Aqui, $\Lambda = \sum_j \Delta_j$. Observando as equações acima, vemos que a contribuição de \mathcal{H}_{ZZ} será uma matriz diagonal. Com isso, podemos estudar a transmissão do estado $|\Psi^+\rangle$ para os modelos XX e XXZ utilizando as técnicas apresentadas no capítulo 3, o que nos permite analisar cadeias de centenas a milhares de qubits.

Começaremos com a desordem estática. Aqui há uma fraca interação em z (equivalente a um ruído) entre cada par de qubits vizinhos. Nesse caso, $\delta_{i,j}(t_n)$ tem um valor entre $-p$ e p , sendo p o máximo valor de desvio possível. As desordens aqui são apenas em \mathcal{H}_{ZZ} , então \mathcal{H}_{XX} será a Hamiltoniana ordenada (2.11). Começaremos as análises com o valor de $\delta_{i,j}$ tendo máximo desvio $p = 0,002$, fazendo 1000 simulações neste cenário. Sucessivamente, aumentaremos o desvio máximo em 0,002 após cada rodada de simulações até $p = 0,1$.

Para comparar esses resultados com os obtidos nos outros tipos de desordem, utilizaremos cadeias com $N = 100$ qubits, como visto na figura 4.12. Comparativamente, encontramos aqui um cenário semelhante à inclusão do campo magnético, em que há poucos e inexpressivos resultados acima do caso ótimo ordenado. Em compensação, o sistema é extremamente robusto para valores baixos de J_m . Exemplo disso é o menor valor encontrado de emaranhamento para $p = 0,02$ e $J_m = 2,863$, onde $EoF = 0,81650$, enquanto que no caso ordenado temos $EoF = 0,81655$. A transmissão, porém, fica mais

sensível à desordem a medida que J_m aumenta, como visto para $J_m = 22,50$ e $J_m = 49,98$.

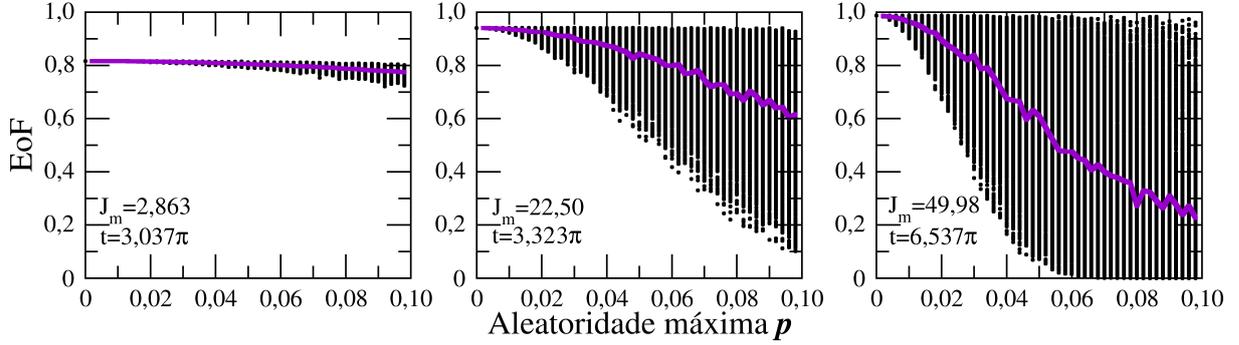


Figura 4.12: Resultados do EoF máximo transmitido com desordem estática dada pelo termo $\Delta_{i,j} \sigma_i^z \sigma_j^z$, quando o estado inicial de Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Os valores de EoF calculados acima são aqueles obtidos no tempo t em que a máxima transmissão de emaranhamento seria esperada para o caso ordenado. Definimos H_{XX} pela equação (3.62) onde $J_A = 1$, além de J_m e t que estão indicados na figura. Para a magnitude da anisotropia $\Delta_{i,j}$ definida na equação (4.25), utilizaremos $\delta_{i,j}$ máximo variando a partir de $p = 0,002$ a $p = 0,1$, em incrementos de $0,002$. Realizamos 1000 simulações para cada valor de p . A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido.

Conclui-se que, caso houver interações do tipo $\sigma_i^z \sigma_j^z$ muito baixas entre qubits vizinhos, o sistema não é efetivamente prejudicado. Porém, é importantíssimo retirar o máximo possível dessas interações, já que uma anisotropia desse tipo se mostrou prejudicial à transmissão de emaranhamento para altos valores de J_m .

Já para a desordem dinâmica, $\Delta_{i,j}(t_n) = \Delta(t_n)$. Começaremos as análises com desordem máxima de $p = 0,002$ até $p = 0,100$, aumentando o valor de p em $0,002$ após cada 100 simulações. Inicialmente, em todas as simulações $\Delta(t_0) = 0$, sendo esse o valor ideal para transmissão. Assim como as outras desordens variando no tempo, faremos $\Delta t = \pi$, $\Delta t = 0,1\pi$ e $\Delta t = 0,01\pi$. Percebemos na figura 4.13 que, assim como visto na figura 4.7, também há uma "barreira" inferior muito visível para $J_m = 49,98$. Estudando esse cenário, vemos que

$$\mathcal{H}_{ZZ}(t_n) = \Delta(t_n) \left(\sigma_A^z \sigma_2^z + \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + \sigma_{N-1}^z \sigma_B^z \right) = \Delta(t_n) H_{ZZ}, \quad (4.35)$$

em que H_{ZZ} é a Hamiltoniana que descreve a interação com $\Delta_{i,j} = 1$ constante para todas as interações entre qubits i e j . Essa desordem, quando muito baixa, se assemelha muito à desordem nas constantes de acoplamento visto na figura 4.7 e os motivos para a "barreira" inferior nos valores de EoF são semelhantes àquela figura. No entanto, quando Δt é muito pequeno nos casos em que a máxima desordem p é alta, encontramos valores muito baixos de emaranhamento. Outro ponto a se destacar é a robustez para J_m baixo quando há poucas oscilações nessas interações $\sigma_i^z \sigma_j^z$ (Δt grande). Mesmo com uma desordem de

0,10, a maioria dos resultados foram apenas um pouco menores do que o valor do caso sem desordem. Além disso, mesmo para muitas oscilações (Δt muito pequeno), o sistema não foi muito prejudicado quando a desordem dinâmica for baixa ($p \sim 0,01$). Contudo, assim como na desordem estática, não há valores de EoF acima do esperado teoricamente, o que mostra que a desordem dinâmica tende a piorar a transmissão.

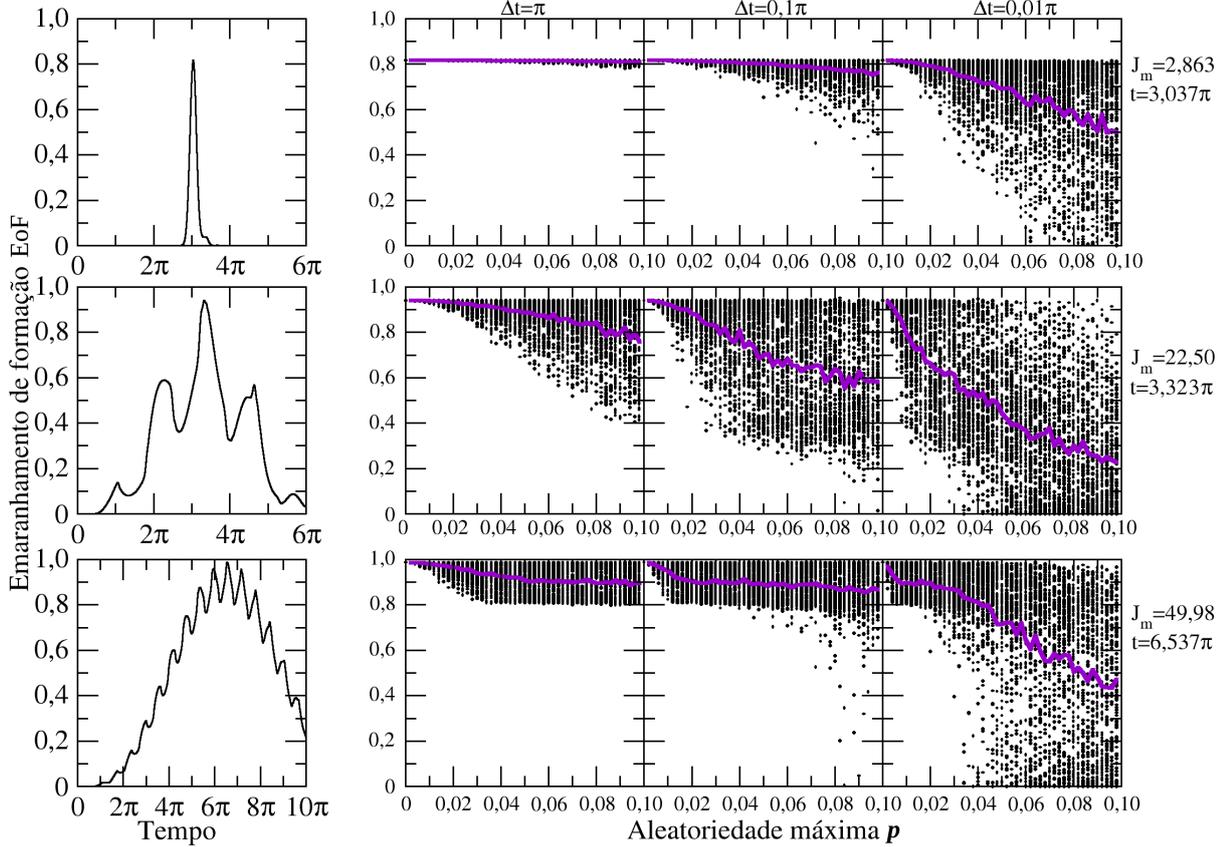


Figura 4.13: Resultados de EoF máximo transmitido com desordem dinâmica dada pelo termo $\Delta(t)\sigma_i^z\sigma_j^z$, quando o estado inicial de Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Os valores de EoF calculados acima são aqueles obtidos no tempo t em que a máxima transmissão de emaranhamento seria esperada para o caso ordenado. Definimos H_{XX} pela equação (3.62) onde $J_A = 1$, além de J_m e t que estão indicados no lado direito da figura. A primeira coluna mostra o gráfico do emaranhamento transmitido por tempo de cada um dos acoplamentos ótimos J_m utilizados para o caso ordenado. Para a magnitude da anisotropia $\Delta(t)$ definida na equação (4.25), utilizaremos $\delta(t)$ máximo variando em 0,002 de 0 a 0,1, realizando 100 simulações em cada valor. Os valores de $\delta(t)$ mudam aleatoriamente a cada período Δt dado por π , $0,1\pi$ e $0,01\pi$. A linha roxa corresponde à média do EoF transmitido.

Para a desordem flutuante, as características de análise serão as mesmas da desordem dinâmica estudada anteriormente, diferenciando apenas que cada $\Delta_{i,j}(t)$ será independente dos demais. As análises terão desordem máxima de $p = 0,002$ até $p = 0,100$, aumentando p em 0,002 após cada 100 simulações feitas (figura 4.14).

Assim como na desordem causada por campo magnético externo, vemos que o sistema é robusto para pequenas desordens ($p = 0,01$) quando o período Δt de cada oscilação de

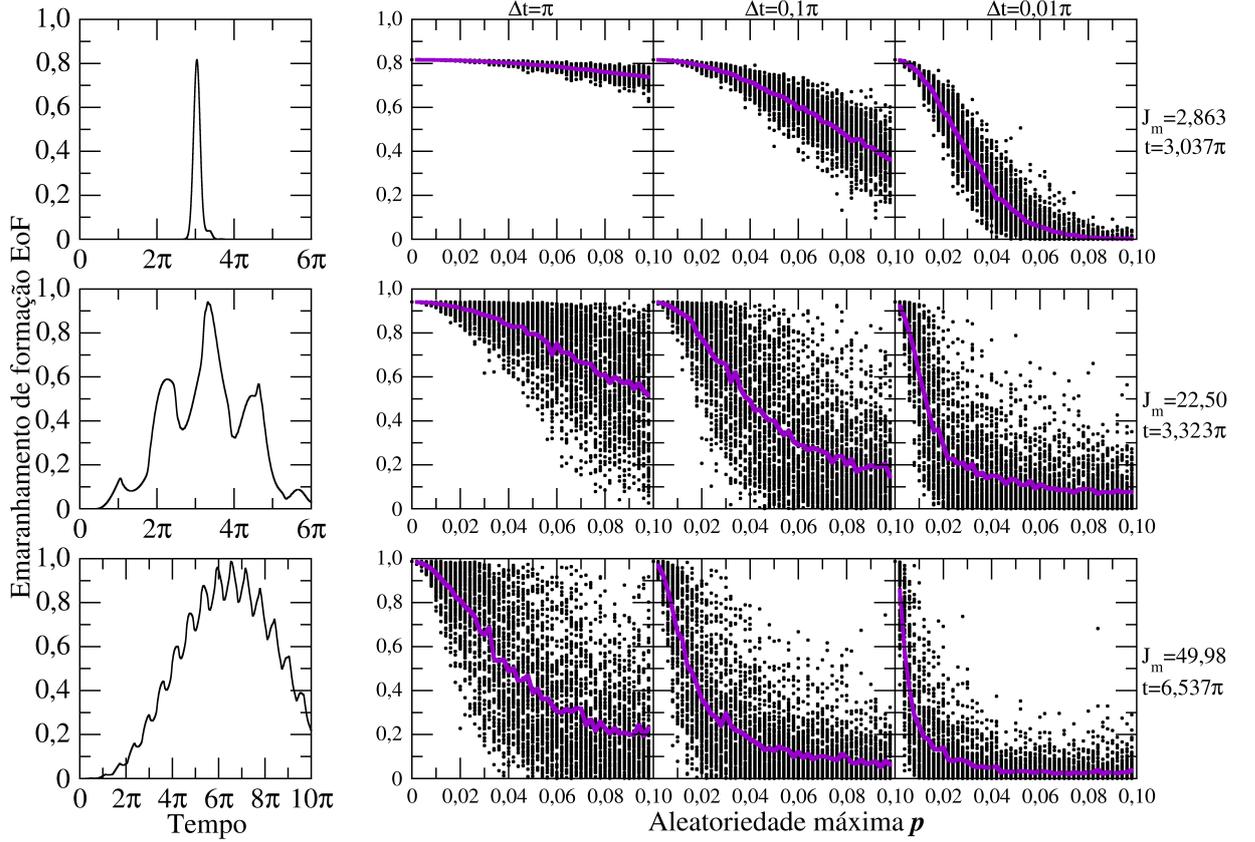


Figura 4.14: Resultados de EoF máximo transmitido com desordem flutuante dada pelo termo $\Delta_{i,j}(t)\sigma_i^z\sigma_j^z$, quando o estado inicial de Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Os valores de EoF calculados acima são aqueles obtidos no tempo t em que a máxima transmissão de emaranhamento seria esperada para o caso ordenado. Definimos H_{XX} pela equação (3.62) onde $J_A = 1$, além de J_m e t que estão indicados no lado direito da figura. A primeira coluna mostra o gráfico do emaranhamento por tempo de cada um dos acoplamentos ótimos J_m utilizados para o caso ordenado. Para a magnitude da anisotropia em z definida na equação (4.25), utilizaremos p variando de 0 a 0,1 em incrementos de 0,002, realizando 100 simulações em cada valor. A desordem muda a cada período Δt dado por π , $0,1\pi$ e $0,01\pi$. A linha roxa corresponde à média de EoF transmitido.

$\Delta_{i,j}(t_n)$ for da ordem de grandeza do tempo da transmissão, fazendo com que o sistema esteja em uma desordem "quase estática". Todavia, para os casos de muitas oscilações, como $\Delta t = 0,01\pi$, mesmo baixos valores de máxima desordem p fazem com que a transmissão seja praticamente nula, principalmente quando o valor de J_m for alto. Nota-se uma real necessidade de que essas interações residuais entre qubits $\sigma_i^z\sigma_j^z$, se inevitáveis na montagem experimental, sejam fixas durante a transmissão, já que o sistema não é robusto quando a oscilação dessas interações ocorrer várias vezes até o tempo de medir o estado dos qubits de Bob, fatalmente prejudicando a transmissão de emaranhamento.

4.4 Vários tipos de ruído agindo simultaneamente

Estudaremos agora o que ocorrerá se todos os tipos de ruídos anteriormente estudados atuarem simultaneamente no sistema ao longo de uma mesma transmissão. Sendo assim, os parâmetros $\delta J_{i,j}(t)$, $\delta h_j(t)$ e $\delta_{i,j}(t)$ poderão ser não nulos simultaneamente no sistema. Mas, antes de continuarmos, é importante estabelecermos alguns padrões. Primeiramente, não estudaremos casos em que há diferentes valores de máximo desvio p para os três parâmetros. Assim sendo, todos os três parâmetros reagirão à desordem com o mesmo valor de desordem máxima p . No entanto, todos variarão independentemente. Queremos verificar como o sistema reage a uma desordem mais geral, quando todos os parâmetros não conseguem ser ajustados com perfeição, um cenário provável experimentalmente. Outro ponto a se destacar é que os tipos de desordem serão iguais a todos. Sendo assim, não haverá possibilidade de termos desordem estática em um e flutuante em outro parâmetro, por exemplo. Isso nos leva ao último ponto a se destacar: as oscilações Δt deverão ocorrer igualmente a todos os parâmetros. Com essas condições estabelecidas, teremos um estudo relativamente abrangente e factível de ser implementado num tempo de computação razoável nos equipamentos computacionais de que dispomos.

Primeiramente, estabeleceremos a Hamiltoniana a ser estudada. Para todos os parâmetros de ruído inclusos, temos que nossa Hamiltoniana será

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t_n) = & J_{A,2}(t_n)(\sigma_A^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_A^-) + \Delta_{A,2}(t_n) \sigma_A^z \sigma_2^z + 2h_A(t_n) \sigma_A^+ \sigma_A^- \\ & + \sum_{j=2}^{N-1} [J_{j,j+1}(t_n)(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-) + \Delta_{j,j+1}(t_n) \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z] + \sum_{j=1}^N 2h_j(t_n) \sigma_j^+ \sigma_j^- \\ & + J_{N-1,B}(t_n)(\sigma_{N-1}^+ \sigma_B^- + \sigma_B^+ \sigma_{N-1}^-) + \Delta_{N-1,B}(t_n) \sigma_{N-1}^z \sigma_B^z + 2h_B(t_n) \sigma_B^+ \sigma_B^- \end{aligned} \quad (4.36)$$

Aqui, todos os parâmetros $J_{i,j}$, h_j e $\Delta_{i,j}$ serão regidos pelas equações (4.2), (4.10) e (4.22), respectivamente. Para t_0 , os valores serão os ideais do caso ordenado, em que os $J_{i,j}(t_0)$ assumirão os valores das constantes $J_A = 1$ e J_m apropriados, além de $h_j(t_0) = 0$ e $\Delta_{i,j}(t_0) = 0$.

Começando nossas análises pela desordem estática, estudaremos as três transmissões já estabelecidas onde $J_m = 2,862$, $J_m = 22,50$ e $J_m = 49,98$, tendo como máximo valor para p nos desvios $\delta J_{i,j}$, δh_j e $\delta_{i,j}$ os valores $p = 0,002$ até $p = 0,100$, aumentando o valor do desvio máximo em $0,002$ a cada 1000 simulações feitas (figura 4.15). Aqui, vemos que o modelo se mostra robusto para baixos valores de desordem máxima ($p \sim 0,002$), tendo pouquíssima diferença do valor ordenado mesmo sofrendo diferentes tipos de ruído. No entanto, notamos que quando o valor de J_m fica maior, há uma piora na transmissão de emaranhamento. Para desordens um pouco mais altas, acima de $p = 0,04$ aproximadamente, a transmissão acaba sendo bastante afetada e não encontramos mais EoF acima do valor do caso ordenado. Logo, fica visível nos gráficos que, quanto maior a desordem e quanto maior o tamanho de J_m , maior será a sensibilidade do modelo para

transmissão de emaranhamento. Por esse motivo, é importante experimentalmente que esses parâmetros tenham uma desordem mínima, já que qualquer desordem um pouco mais alta fará com que Bob tenha uma probabilidade menor de medir o estado $|\psi^+\rangle$ que Alice enviou.

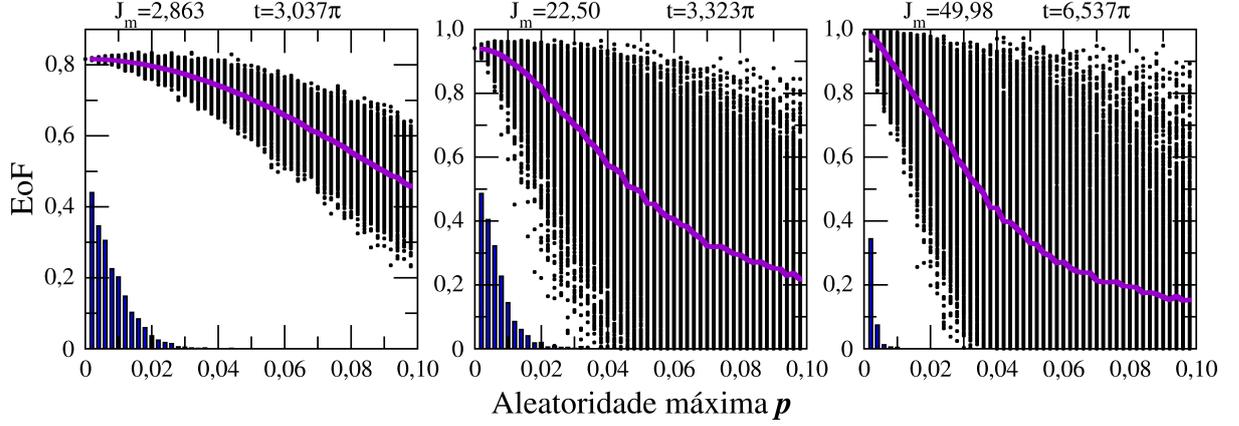


Figura 4.15: Resultados do EoF transmitido com desordem estática simultânea nos três cenários estudados anteriormente $\Delta J_{i,j}$, Δh_j e $\Delta i_{i,j}$, definidos nas equações (4.1), (4.10) e (4.25), respectivamente (assume-se que $n = 1$ e $t_1 = t$ para a desordem estática nessas equações). Utilizamos a Hamiltoniana (4.36) para transmitir em $t_0 = 0$ o estado de Alice $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ para Bob em t (indicado acima de cada gráfico). Os valores de EoF calculados acima são aqueles obtidos no tempo t em que a máxima transmissão de emaranhamento seria esperada para o caso ordenado, ou seja, os $J_{i,j}(t_0)$ assumirão os valores das constantes $J_A = 1$ e J_m apropriado (indicados acima de cada gráfico), além de $h_j(t_0) = 0$ e $\Delta i_{i,j}(t_0) = 0$. Para os parâmetros $\delta J_{i,j}$, δh_j e $\delta i_{i,j}$, utilizaremos seus máximos valores p (variando em incrementos de 0,002) de 0,002 até 0,1, realizando 1000 simulações para cada valor de p .

Para a desordem dinâmica, temos apenas dois tipos de ruído, $\delta J(t)$ e $\delta(t)$ pois, como já discutimos anteriormente, $\delta h(t)$ não afeta o sistema. Aqui, as desordens máximas p irão de 0,002 a 0,100, aumentando p em incrementos de 0,002 a cada 100 simulações. Já os períodos serão os mesmos dos outros casos com desordem dinâmica, $\Delta t = \pi$, $\Delta t = 0,1\pi$ e $\Delta t = 0,01\pi$ (figura 4.16). Começando a analisar os resultados, percebemos que há pouquíssimos resultados acima do valor de EoF para o caso ordenado, o que mostra que essas condições de desordem tendem apenas a prejudicar a transmissão. Observamos também que o sistema é pouco robusto nessas condições, em que o emaranhamento tende a ser nulo quando temos Δt muito pequeno para oscilação das desordens. No entanto, se a desordem for baixa e houver poucas oscilações, obtemos bons resultados. No caso de poucas oscilações (Δt grande), a transmissão fica mais robusta à medida que aumentamos o valor de J_m , como visto para $J_m = 49,98$ quando $\Delta t = \pi$. Isso se deve ao fato da região de máximo emaranhamento transmitido ser bastante "larga" temporalmente falando, como visto no gráfico EoF por tempo da figura 4.16. Em contrapartida, para $J_m = 2,863$, essa região é muito estreita e, por consequência, qualquer desordem um pouco mais forte será suficiente para diminuir consideravelmente o EoF transmitido.

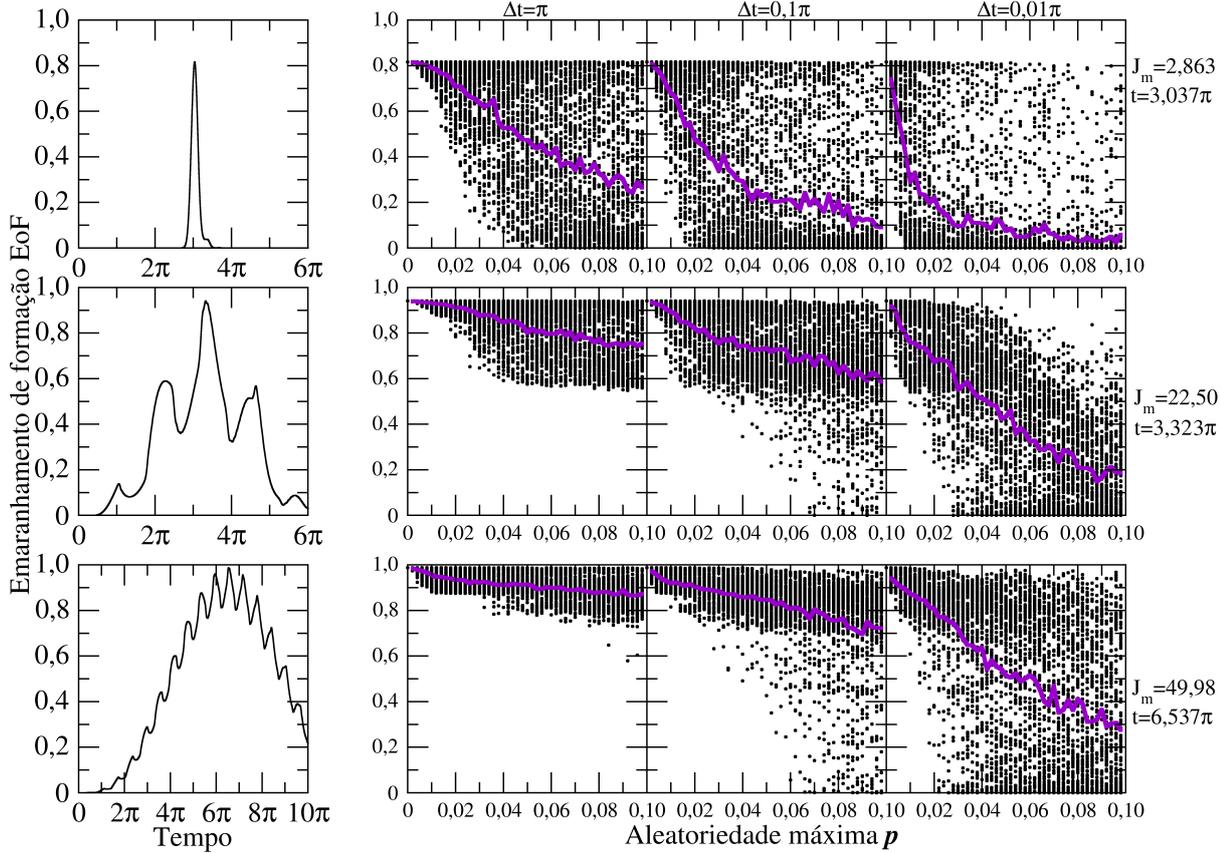


Figura 4.16: Resultados do EoF transmitido com desordem dinâmica nos parâmetros estudados anteriormente $\Delta J(t)$ e $\Delta(t)$ ($\Delta h(t)$ não afeta o sistema na desordem dinâmica), definidos nas equações (4.2) e (4.25), respectivamente, quando o estado inicial de Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Os valores de EoF calculados acima são aqueles obtidos no tempo t em que a máxima transmissão de emaranhamento seria esperada para o caso ordenado, ou seja, os $J_{i,j}(t_0)$ assumirão os valores das constantes $J_A = 1$, além de J_m e t apropriados (indicados ao lado direito da figura), $\Delta J(t_0) = 0$ e $\Delta(t_0) = 0$. Definimos a Hamiltoniana (4.36) como ordenada para t_0 . A primeira coluna mostra o gráfico do emaranhamento por tempo de cada um dos acoplamentos ótimos J_m utilizados para o caso ordenado. Para os parâmetros $\delta J(t)$ e $\delta(t)$, utilizaremos seus máximos valores p (variando em incrementos de 0,002) de 0,002 até 0,1, realizando 100 simulações para cada p .

Em relação à desordem flutuante, encontramos um cenário em que a transmissão é praticamente nula quando a desordem aparece (figura 4.17). Para que seja possível haver uma transmissão razoável, o experimento deve ser muito bem controlado quanto às desordens e o tempo no qual essas oscilam. Por exemplo, se a desordem for $p \sim 0,002$ para $\Delta t = \pi$, a transmissão ainda terá qualidade, principalmente para J_m mais baixo, onde encontramos pouca flutuação nos resultados de emaranhamento e um número razoável de EoF acima do valor ótimo ordenado. Um pouco mais de desordem, no entanto, já será o suficiente para prejudicar totalmente a transmissão de emaranhamento.

Concluimos que o modelo proposto, quando todos os ruídos estão presentes, e lidamos com desordem flutuante, é extremamente sensível ao aumento de desordem. Para peque-

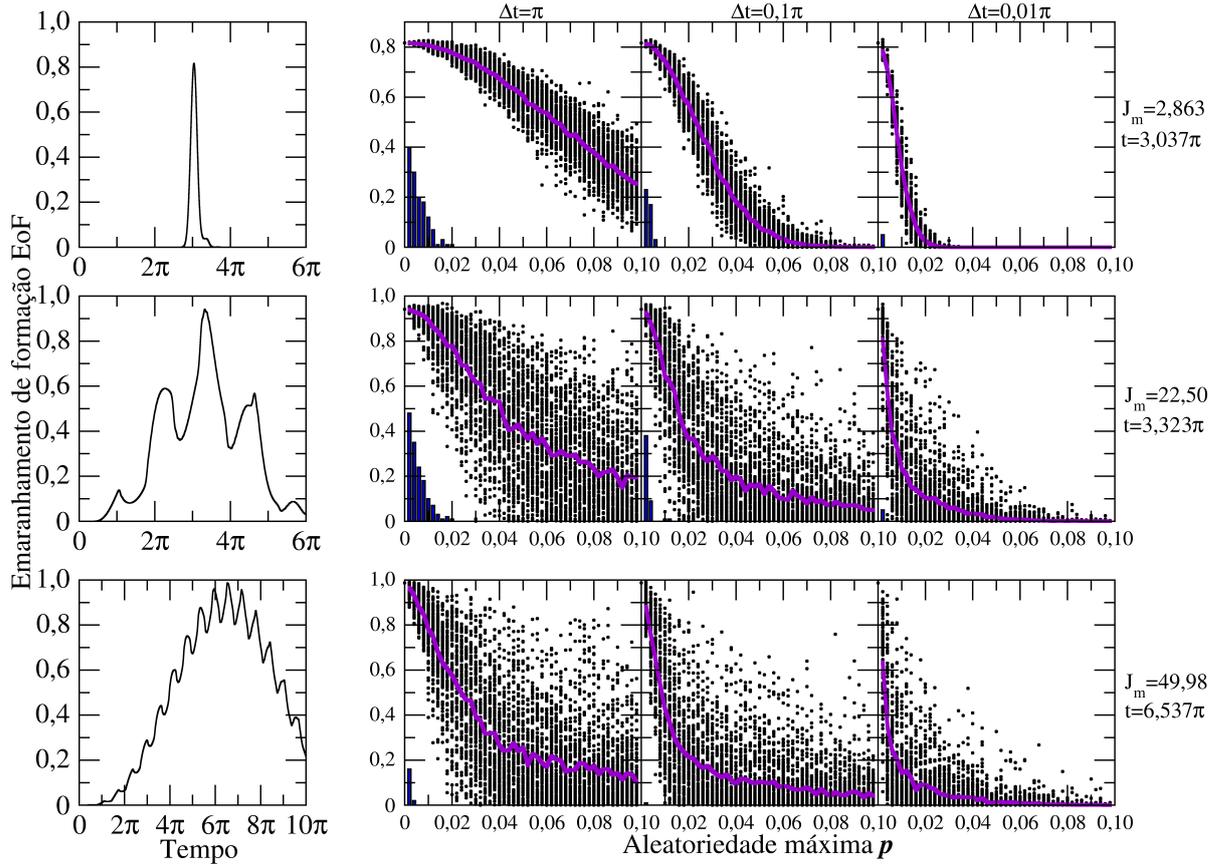


Figura 4.17: Resultados de EoF transmitido com desordem flutuante nos parâmetros estudados anteriormente $\Delta J_{i,j}(t)$, $\Delta h_j(t)$ e $\Delta_{i,j}(t)$, definidos nas equações (4.2), (4.10) e (4.25), quando o estado de Alice é $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Os valores de EoF calculados acima são aqueles obtidos no tempo t em que a máxima transmissão de emaranhamento seria esperada para o caso ordenado, ou seja, os $J_{i,j}(t_0)$ assumirão os valores das constantes $J_A = 1$, além de J_m e t apropriados (indicados ao lado direito da figura), $h_j(t_0) = 0$, $\Delta J_{i,j}(t_0) = 0$ e $\Delta_{i,j}(t_0) = 0$. Definimos a Hamiltoniana (4.36) como ordenada para t_0 . A primeira coluna mostra o gráfico do emaranhamento por tempo para cada um dos acoplamentos ótimos J_m utilizados para o caso ordenado. Para os parâmetros $\delta J_{i,j}(t)$, $\delta h_j(t)$ e $\delta_{i,j}(t)$, seus máximos valores p variarão (em incrementos de 0,002) de 0,002 até 0,1, realizando 100 simulações para cada valor de p .

nas desordens e se essas não oscilam muito até o momento de medição do EoF dos qubits de Bob, o sistema se apresenta robusto o suficiente para transmitir estados emaranhados com praticamente a mesma eficiência do caso ideal (sem desordens). No entanto, assim que aumentamos o número de oscilações possíveis até o tempo de medição (Δt pequeno), o sistema só tende a piorar, com situações em que a transmissão é nula.

Capítulo 5

Transmissão do estado de 1 qubit excitado

Para complementar os nossos estudos, verificamos se o modelo proposto serve para transmissão de apenas um estado excitado, $|\psi_A(0)\rangle = |1\rangle$, de Alice para Bob. Estudaremos também o modelo padrão neste cenário a fim de validar nossas simulações, já que na literatura há muitos estudos para transmissão de uma única excitação. Dessa forma, conseguiremos comparar os resultados obtidos por meio das nossas simulações com resultados disponíveis em outros trabalhos e assim checar a consistência dos nossos programas.

5.1 Fidelidade da transmissão

A grandeza relevante agora é a fidelidade do estado de Bob, $\rho_B = \sum_j p_j |B_j\rangle\langle B_j|$, quando Alice transmite o estado $|\psi_A(0)\rangle = |1\rangle$. No modelo padrão, em $t = 0$, o qubit 1 pertencente à Alice é preparado no estado $|1_1\rangle$ e os demais estados se encontram em $|0\rangle$. Após um tempo t , Bob mede o estado de seu único qubit N (figura 5.1.a). Já para o modelo proposto, Alice prepara seu único qubit A no estado $|1_A\rangle$ e os demais estados se encontram em $|0\rangle$. Após um tempo t , Bob medirá o estado de seu único qubit B (figura 5.1.b). Fizemos a escolha dos qubits A e B por conveniência, pois não teríamos diferentes resultados se utilizássemos 1 ou A e N ou B , devido a simetria da Hamiltoniana do modelo proposto perante a troca destes qubits ($1 \leftrightarrow A$ e $N \leftrightarrow B$). As configurações para as constantes de acoplamento serão iguais às adotadas anteriormente, em que definimos $J_A = 1$ e procuramos o melhor valor de J_m para transmissão.

O primeiro passo para validação das nossas simulações foi verificar os resultados apontados em [24], que estudou o modelo padrão assim como representado na figura 5.1.a com uma única diferença: em vez de fixar $J_A = 1$ e aumentar o valor de J_m , eles estudaram o mesmo problema fixando $J_m = 1$ e diminuindo o valor de J_A até ele ser nulo (figura 5.2). No entanto, essencialmente, os dois modelos são iguais, diferenciando-se apenas na escala

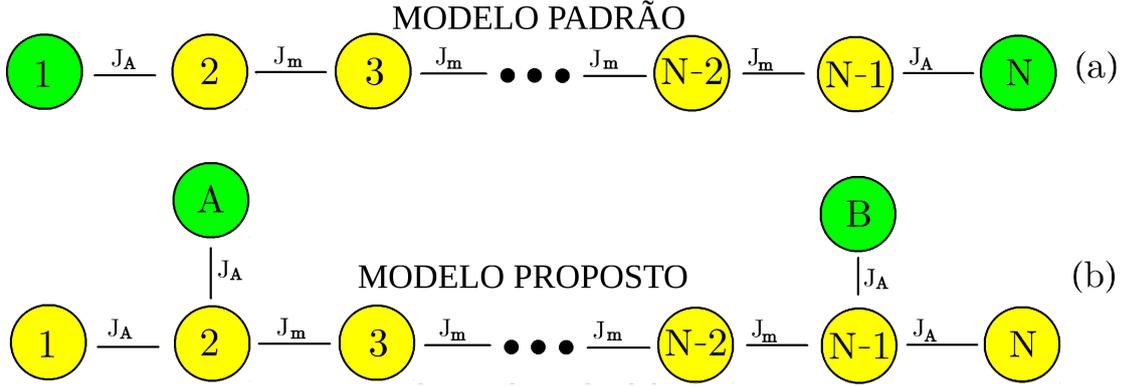


Figura 5.1: Cadeias para transmitir apenas um estado excitado, em que queremos transmitir o estado $|1\rangle$ do qubit A até o qubit B no modelo proposto e transmitir um estado excitado do qubit 1 até o qubit N no modelo padrão.

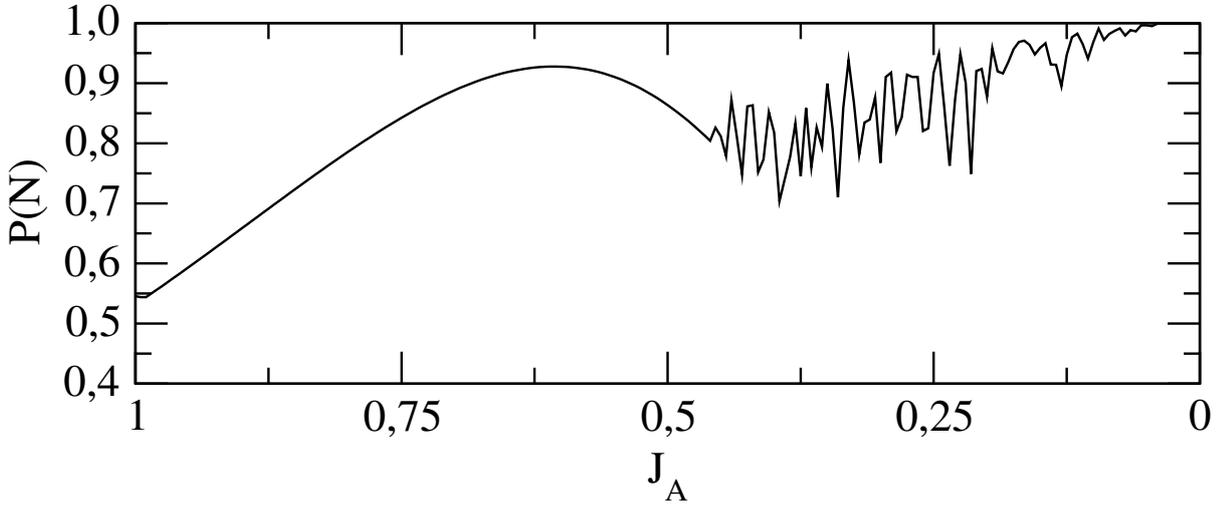


Figura 5.2: Reprodução do estudo de [24] em que há uma cadeia de $N = 30$ qubits. Utilizamos o estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |1_1 0_2 0_3 \dots 0_{28} 0_{29} 0_{30}\rangle$ e a Hamiltoniana $\mathcal{H}_{XX} = J_A(\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_1^-) + \sum_{j=2}^{28} (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-) + J_A(\sigma_{29}^+ \sigma_{30}^- + \sigma_{30}^+ \sigma_{29}^-)$ e variamos J_A de 1 a 0. O gráfico representa a probabilidade máxima de se medir o estado $|1_{30}\rangle$, isto é, $P(30) = |\langle 1_{30} | \Psi(t) \rangle|^2 = |c_{30}|^2$ num intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 200\pi$.

de tempo para transmissão ótima do estado excitado.

Para os dois modelos, o operador densidade de qualquer qubit j da cadeia será $\rho_j = (1 - |c_j|^2)|0\rangle\langle 0| + |c_j|^2|1\rangle\langle 1|$. Logo, a fidelidade de qualquer qubit com o estado transmitido $|1\rangle$ será $F = |c_j|^2$. Esse valor para F nada mais é do que a probabilidade de medirmos o estado excitado em algum qubit específico $P(j) = |\langle 1_j | \Psi(t) \rangle|^2 = |c_j|^2$. Mediremos o qubit de Bob $j = N$ para o modelo padrão e $j = B$ para o modelo proposto. Já o estado inicial global para o modelo padrão é $|\Psi(0)\rangle = |1_1 0_2 \dots 0_{N-1} 0_N\rangle$ e para o modelo proposto é $|\Psi(0)\rangle = |1_A 0_1 0_2 \dots 0_{N-1} 0_N 0_B\rangle$.

Vamos analisar os resultados para cadeias de $N = 100$ e $N = 1000$ qubits, variando J_m para encontrar a melhor fidelidade dentro de uma janela de tempo de evolução temporal pré-determinada. Para a cadeia de $N = 100$, variamos J_m de 0 a 50 nos dois modelos,

buscando o melhor resultado entre $t = 0$ e $t = 25\pi$. Os resultados de nossas simulações para os dois modelos estão apresentados na figura 5.3.a. Já para a cadeia de $N = 1000$, variamos J_m de 0 a 301 com o tempo t entre 0 a 150π (figura 5.3.b). Como pode ser visto na figura, para a transmissão de uma única excitação, o modelo proposto acaba sendo ineficiente, e seus resultados não passam de 0,25. Já para o modelo padrão, conseguimos encontrar maiores probabilidades de achar o estado $|1_N\rangle$. Logo, o modelo padrão é a escolha ideal para transmissão de uma única excitação, produzindo uma transmissão quase perfeita. Na verdade, o modelo proposto nunca pode se destacar nessa tarefa, uma vez que a Hamiltoniana e a condição inicial neste caso são simétricas com respeito a troca entre os qubits A e 1 , além de N e B . Isso quer dizer que o máximo de estado excitado transmitido tem amplitude $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e, quando esse chega nos qubits de Bob, nunca obteremos estados diferentes entre esses qubits, isto é, o máximo de amplitude de probabilidade de um estado que obtivermos no qubit B será $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. Sendo assim, o estado que dará a máxima probabilidade de transmissão de uma única excitação para o qubit de Bob será $\frac{1}{2}|1_N\rangle + \frac{1}{2}|1_B\rangle$, resultando o valor de 0,25 visto numericamente.

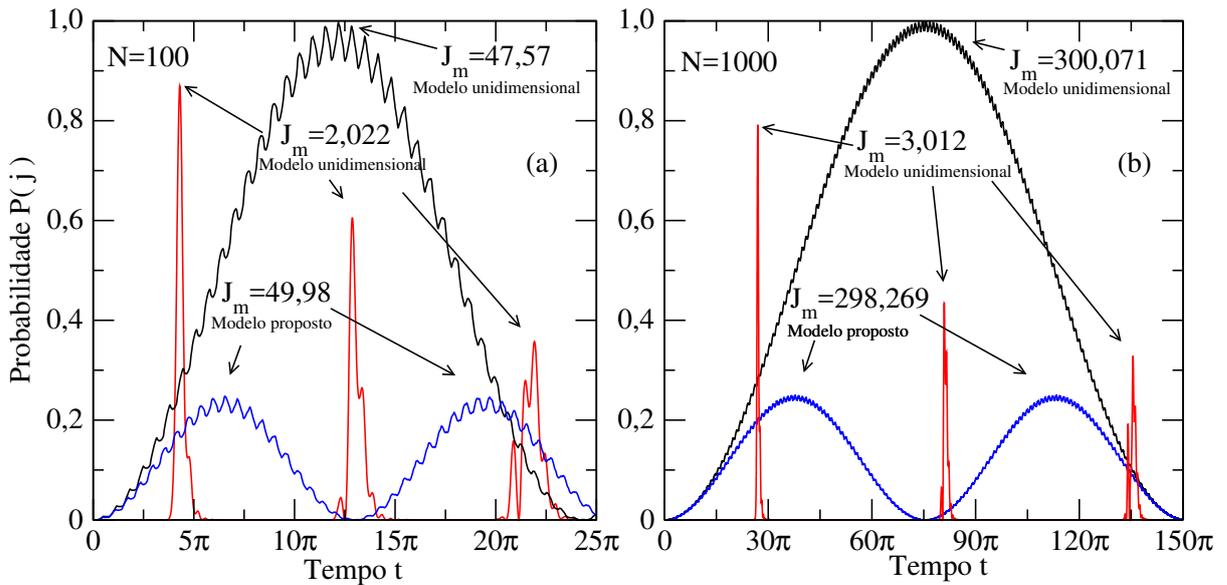


Figura 5.3: Gráfico da probabilidade ótima (ou fidelidade) $P(j) = |\langle 1_j | \Psi(t) \rangle|^2 = |c_j|^2$, em que $j = N$ para o modelo padrão e $j = B$ para o modelo proposto. Os gráficos foram feitos com as Hamiltonianas das equações (3.62) para o modelo proposto e (3.63) para o modelo padrão. O estado inicial para o modelo padrão é $|\Psi(0)\rangle = |1_1 0_2 \dots 0_{N-1} 0_N\rangle$ e para o modelo proposto é $|\Psi(0)\rangle = |1_A 0_1 0_2 \dots 0_{N-1} 0_N 0_B\rangle$. Os resultados para (a) $N = 100$ e (b) $N = 1000$ estão apresentados nos gráficos da esquerda para direita, respectivamente. Para o caso em que $N = 100$, apresentamos para o modelo padrão o caso ótimo em que J_m varia de 0 a 5 ($J_m^{\text{ótimo}} = 2,022$) e quando J_m varia de 0 a 50 ($J_m^{\text{ótimo}} = 47,57$). Para o modelo proposto temos apenas a curva para o J_m ótimo obtido quando este varia de 0 a 50 ($J_m^{\text{ótimo}} = 49,98$). No caso em que $N = 1000$, as curvas para o modelo padrão correspondem aos J_m ótimos quando J_m varia de 0 a 5 ($J_m^{\text{ótimo}} = 3,012$) e de 0 a 301 ($J_m^{\text{ótimo}} = 300,071$). Para o modelo proposto temos apenas a curva para J_m fornecendo o melhor resultado quando J_m varia de 0 a 301 ($J_m^{\text{ótimo}} = 298,269$).

Capítulo 6

Conclusões

Nesta Tese estudamos a transmissão de estados emaranhados através de cadeias de spins, investigando sua eficiência na transmissão de estados de Bell, os quais são estados maximamente emaranhados de dois qubits. Especificamente, estudamos a eficiência de determinados estados de Bell, preparados em uma das pontas da cadeia de spins (Alice), serem transmitidos até a outra ponta (Bob), explorando exclusivamente a dinâmica do sistema. Em outras palavras, em $t = 0$ Alice prepara um estado de Bell e monitoramos se e quando no tempo $t > 0$ os dois qubits finais da cadeia em posse de Bob passam a ser descritos por este estado de Bell.

A cadeia proposta nesta Tese é ligeiramente diferente da cadeia unidimensional tradicional. Aqui, incluímos dois qubits extras: um qubit A que se acopla com o qubit 2 e outro qubit B que interage com o qubit N-1. Os qubits de Alice serão A e 1 e esses não interagem entre si, mas apenas com o qubit 2. Analogamente, Bob tem em seu domínio os qubits B e N, os quais só interagem com o qubit N-1 (figura 2.1). O modelo de cadeia de spins utilizado foi o XX para cadeias de spin-1/2. Na nossa proposta, não utilizamos campo externo e nem precisamos modular os acoplamentos entre os qubits. Utilizamos apenas dois valores distintos para as constantes de acoplamento: J_m , cujo valor descreverá todas as interações de primeiros vizinhos $j, j + 1$, quando $j = 2, 3, 4, \dots, N - 1$; e J_A , sendo essa a magnitude de interação dos qubits de Alice e Bob com os qubits 2 e N-1, respectivamente.

A motivação dessa modificação para cadeias descritas pelo modelo XX foi a constatação de que o modelo padrão não consegue transmitir estados emaranhados com eficiência para cadeias muito grandes sem modulação das constantes de acoplamento entre os qubits e sem o auxílio de campo externo. O que buscamos nessa Tese foi uma configuração de cadeias de spins simples, eficiente e que alcança resultados muito melhores quando comparado ao modelo puramente unidimensional. Nosso modelo fornece a possibilidade de fixarmos todos os valores das constantes de acoplamento na cadeia de transmissão em um valor J_m , e entre os qubits extras com a cadeia de transmissão em J_A , para conseguirmos transmissões quase perfeitas, mesmo para cadeias de milhares de qubits. Nesse cenário, o

modelo padrão (unidimensional) não consegue valores significativos para cadeias grandes, diminuindo rapidamente sua eficiência a medida que aumentamos o número de qubits.

Notamos que o melhor estado de Bell para transmissão no modelo proposto é o $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$, em que mostramos que é possível transmitir quase perfeitamente o estado de Alice para Bob para qualquer tamanho de cadeia, desde que J_m seja suficientemente maior que J_A . No entanto, encontramos situações favoráveis para transmissão mesmo para $J_m < 5J_A$, em que conseguimos obter, por exemplo, um emaranhamento nos qubits de Bob dado por 0,6787, quando $J_m = 4,70J_A$ e temos uma cadeia de $N = 2500$ (figura 3.11).

Para os demais estados de Bell, conseguimos demonstrar que não há transmissão via o modelo proposto quando o estado geral for $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A1_1\rangle - |1_A0_1\rangle) \otimes |0_20_3\dots0_{N-1}0_N0_B\rangle$, por esse ser um autoestado da Hamiltoniana deste modelo. Quando Alice prepara em $t = 0$ os estados de Bell $|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$, conseguimos mostrar que a eficiência de transmissão é a mesma para $|\phi^+\rangle$ e $|\phi^-\rangle$. Além disso, para $|\phi^\pm\rangle$, também obtemos ótimos resultados, superando a eficiência do modelo padrão, mas tendo resultados inferiores à transmissão do estado $|\psi^+\rangle$.

Nós também testamos a robustez do modelo proposto para vários tipos de imperfeições tanto na construção (desordem estática) quanto na execução (desordens dinâmica e flutuante) deste protocolo de transmissão de emaranhamento. Isto é, incluímos vários tipos de desordem no sistema. Essas desordens podem ser vistas como um desvio no valor ideal dos acoplamentos, um ruído de campo magnético externo ou um outro tipo de interação residual entre os qubits. Esses estudos de imperfeições na construção e execução experimental do modelo proposto nos mostraram a robustez do sistema. Em outras palavras, mapeamos em quais cenários estes erros têm pouca influência na transmissão. Verificamos que, para erros de uma porcentagem de 0,002 (0,2%) aproximadamente, temos pouquíssima perda na transmissão para qualquer tipo de desordem, com redução no emaranhamento transmitido de no máximo 1% na maioria dos casos. Em alguns cenários, erros maiores, como visto na figura 4.4, não afetaram significativamente o sistema. Verificamos também que, se os acoplamentos flutuarem poucas vezes no tempo durante a transmissão, não diminuimos substancialmente o emaranhamento transmitido. Ao contrário, tem-se a possibilidade de encontrarmos resultados melhores que os previstos pelas configurações ótimas encontradas no caso ordenado.

Finalizamos os estudos testando o modelo proposto para transmitir apenas uma única excitação de Alice para Bob, comparando com os resultados do modelo padrão. Notamos que transmitir a excitação do qubit A (ou 1) para B (ou N) não é eficiente via o modelo aqui proposto, não conseguindo alcançar valores mais altos do que 0,25 de fidelidade. Neste cenário, o modelo padrão (cadeia unidimensional) é a melhor escolha.

Ao longo do doutorado, tivemos algumas dificuldades em relação aos estudos numéricos. Isso se deveu à complexidade computacional para obtenção dos resultados quando

trabalhamos com um algoritmo que engloba todas as 2^N possibilidades de estados quânticos que podem descrever uma cadeia de spins. Por esse motivo, inicialmente os trabalhos se limitavam a treze qubits e, a medida que aumentamos a cadeia, maior foi o tempo de simulação. Os dados para uma cadeia de treze qubits, por exemplo, levavam semanas para serem obtidos, o que atrasou substancialmente os trabalhos. As análises em estados de uma excitação vieram solucionar grande parte desses problemas no meio do doutorado, pois agora poderíamos estudar o envio do estado $|\phi^+\rangle$ para cadeias de centenas ou milhares de spins em pouquíssimo tempo.

Essas dificuldades reapareceram quando analisamos nosso sistema incluindo as desordens. Isso se deve, principalmente, ao número de simulações para cada porcentagem máxima de desordem p . Para as desordens dinâmica e flutuante, temos que outra dificuldade é realizar o processo de evolução temporal a cada período Δt , o que consome um tempo computacional considerável. Para obtermos cada um dos gráficos do capítulo 4, levamos uma semana, na melhor das hipóteses. Contudo, nossos algoritmos bases já estavam estabelecidas e otimizadas e, com isso, conseguimos realizar os estudos de desordem de forma eficiente.

Outro ponto de dificuldade do trabalho foi a falta de resultados de transmissão de estados emaranhados em cadeias de spins publicados na literatura e que poderiam ajudar a validar nossos algoritmos. Para não termos maiores dificuldades nesse âmbito, foram feitos vários algoritmos de diferentes formas, com diferentes plataformas computacionais, tanto pelo doutorando quanto pelo orientador, para que pudéssemos avançar nos nossos estudos validando os resultados obtidos e apresentados nesta Tese.

Graças a todos esses esforços, nossos estudos demonstraram que transmitir um estado emaranhado de Alice para Bob através de uma cadeia de milhares de qubits é viável se usarmos o modelo proposto nesta Tese. Não precisamos recorrer a campo externo nem a modulações entre as constantes de acoplamento. Precisamos apenas preparar o estado inicial de forma que todos os qubits que não pertencem a Alice estejam preparados no estado $|0\rangle$, e ajustar os acoplamentos em apenas dois valores distintos e específicos de magnitude de interação entre os qubits das pontas interagindo com os qubits 2 e N-1 (J_A) e entre os qubits do meio da cadeia (J_m). Vale salientar que esse trabalho teve como principal objetivo demonstrar que não precisamos recorrer a modulação ou inclusão de campo magnético durante a transmissão para termos transmissões de emaranhamento eficientes.

Por ser um modelo teórico que exige uma preparação inicial antes da transmissão e que esteja em temperatura próxima do zero absoluto, esse modelo pode ser difícil de se preparar experimentalmente. Sendo assim, seria interessante estender o presente trabalho nas seguintes direções sempre visando testar e estudar a performance do modelo proposto em cenários ainda mais realistas. Por exemplo, qual a eficiência do modelo proposto quando temos um sistema aberto? O que aconteceria se a cadeia de spins interagir com

um reservatório térmico em temperatura $T > 0$? Como seria a transmissão se os qubits $2, 3, \dots, N, B$ estivessem no estado fundamental da Hamiltoniana, em vez de preparados no estado $|000\dots 00\rangle$? Quais modificações precisaríamos implementar no nosso modelo para deixá-lo funcional nestas situações? Como o sistema responderia perante uma anisotropia nas interações XX , isto é, o que aconteceria caso lidássemos com o modelo XY anisotrópico? E, por fim, qual a influência das interações entre segundos e terceiros vizinhos na eficiência da transmissão de emaranhamento?

Referências Bibliográficas

- [1] M. Nielsen and I. Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information" (Cambridge University Press, 2000).
- [2] J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble, and H. Mabuchi, "Quantum State Transfer and Entanglement Distribution among Distant Nodes in a Quantum Network", *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3221 (1997).
- [3] C. H. Bennett and D. P. DiVincenzo, "Quantum information and computation", *Nature (London)* **404**, 247 (2000).
- [4] A. G. Radnaev, Y. O. Dudin, R. Zhao, H. H. Jen, S. D. Jenkins, A. Kuzmich, and T. A. B. Kennedy, "A quantum memory with telecom-wavelength conversion", *Nature Physics* **6**, 894 (2010).
- [5] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels", *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
- [6] V. Subrahmanyam, "Entanglement Dynamics and Quantum State Transport in Spin chains", arXiv:quant-ph/0307135v2 (2003).
- [7] S. Bose, "Quantum Communication through an Unmodulated Spin Chain", *Phys. Rev. Lett.* **91**, 207901 (2003).
- [8] S. Bose, "Quantum Communication Through Spin Chain Dynamics: An Introductory Overview", arXiv:0802.1224 [quant-ph].
- [9] C. H. Bennett, and G. Brassard, "Quantum cryptography: public key distribution and coin tossing", in: *Proceedings of the IEEE International Conference on Computers Systems and Signal Processing*, Bangalore, India, 1984, p. 175.
- [10] J.M. Maillet, "Heisenberg Spin Chains: From Quantum Groups to Neutron Scattering Experiments", in: Duplantier B. (eds) *Quantum Spaces. Progress in Mathematical Physics*, vol 53. Birkhäuser Basel, 2007.

- [11] M. Steiner, J. Villain, and C. G. Windsor, "Theoretical and experimental studies on one-dimensional magnetic systems", *Adv. Phys.* **25**, 87 (1976).
- [12] T. Fukuhara, S. Hild, J. Zeiher, P. Schauß, and I. Bloch, "Spatially Resolved Detection of a Spin-Entanglement Wave in a Bose-Hubbard Chain". *Phys. Rev. Lett.* **115**, 035302 (2015)
- [13] M. W. Johnson *et al.*, "Quantum annealing with manufactured spins", *Nature* **473**, 194 (2011).
- [14] U. Las Heras, L. García-Álvarez, A. Mezzacapo, E. Solano, and L. Lamata, "Quantum Simulation of Spin Chains Coupled to Bosonic Modes with Superconducting Circuits", arXiv:1507.02553v3 [quant-ph].
- [15] M. I. Makin, J. H. Cole, C. D. Hill, and A. D. Greentree, "Spin Guides and Spin Splitters: Waveguide Analogies in One-Dimensional Spin Chains", *Phys. Rev. Lett.* **108**, 017207 (2012).
- [16] M. Bellec, G. M. Nikolopoulos, and S. Tzortzakis, "A Faithful Communication Hamiltonian in Photonic Lattices", arXiv:1210.1009 [quant-ph].
- [17] G. de Chiara, D. Rossini, S. Montangero, and R. Fazio, "From perfect to fractal transmission in spin chains", *Phys. Rev. A* **72**, 12323 (2005).
- [18] T. J. G. Apollaro, L. Banchi, A. Cuccoli, R. Vaia, and P. Verrucchi, "99%-fidelity ballistic quantum-state transfer through long uniform channels", *Phys. Rev. A* **85**, 052319 (2012).
- [19] M. B. Plenio and F. L. Semião, "High efficiency transfer of quantum information and multiparticle entanglement generation in translation-invariant quantum chains", *New J. Phys.* **7**, 73 (2005).
- [20] M. Christandl, N. Datta, A. Ekert, and A. J. Landahl, "Perfect State Transfer in Quantum Spin Networks", *Phys. Rev. Lett.* **92**, 187902 (2004).
- [21] M. Christandl, N. Datta, T. C. Dorlas, A. Ekert, A. Kay, and A. J. Landahl, "Perfect transfer of arbitrary states in quantum spin networks", *Phys. Rev. A* **71**, 032312 (2005).
- [22] T. J. Osborne and N. Linden, "Propagation of quantum information through a spin system", *Phys. Rev. A* **69**, 052315 (2004).
- [23] G. M. Nikolopoulos, D. Petrosyan, and P. L. Lambropoulos, "Electron wavepacket propagation in a chain of coupled quantum dots", *J. Phys.: Condens. Matter* **16**, 4991 (2004).

- [24] A. Wójcik, T. Luczak, P. Kurzyński, A. Grudka, T. Gdala, and M. Bednarska, "Unmodulated spin chains as universal quantum wires", *Phys. Rev. A* **72**, 034303 (2005).
- [25] P. Karbach and J. Stolze, "Spin chains as perfect quantum state mirrors", *Phys. Rev. A* **72**, 030301(R) (2005).
- [26] M. J. Hartmann, M. E. Reuter, and M. B. Plenio, "Excitation and entanglement transfer versus spectral gap", *New J. Phys.* **8**, 94 (2006).
- [27] M. X. Huo, Y. Li, Z. Song, and C. P. Sun, "Peierls distorted chain as a quantum data bus for quantum state transfer", *Europhys. Lett.* **84**, 30004 (2008).
- [28] G. Gualdi, V. Kostak, I. Marzoli, and P. Tombesi, "Perfect state transfer in long-range interacting spin chains", *Phys. Rev. A* **78**, 022325 (2008).
- [29] L. Banchi, T. J. G. Apollaro, A. Cuccoli, R. Vaia, and P. Verrucchi, "Optimal dynamics for quantum-state and entanglement transfer through homogeneous quantum systems", *Phys. Rev. A* **82**, 052321 (2010).
- [30] P. Kurzyński and A. Wójcik, "Discrete-time quantum walk approach to state transfer", *Phys. Rev. A* **83**, 062315 (2011).
- [31] S. Lorenzo, T. J. G. Apollaro, A. Sindona, and F. Plastina, "Quantum-state transfer via resonant tunneling through local-field-induced barriers", *Phys. Rev. A* **87**, 042313 (2013).
- [32] K. Korzekwa, P. Machnikowski, and P. Horodecki, "Quantum-state transfer in spin chains via isolated resonance of terminal spins", *Phys. Rev. A* **89**, 062301 (2014).
- [33] Z. C. Shi, X. L. Zhao, and X. X. Yi, "Robust state transfer with high fidelity in spin-1/2 chains by Lyapunov control", *Phys. Rev. A* **91**, 032301 (2015).
- [34] X.-P. Zhang, B. Shao, S. Hu, J. Zou, and L.-A. Wu, "Optimal control of fast and high-fidelity quantum state transfer in spin-1/2 chains", *Ann. Phys. (NY)* **375**, 435 (2016).
- [35] X. Chen, R. Merau, and D. L. Feder, "Asymptotically perfect efficient quantum state transfer across uniform chains with two impurities", *Phys. Rev. A* **93**, 012343 (2016).
- [36] M. P. Estarellas, I. D'Amico, and T. P. Spiller, "Topologically protected localised states in spin chains", *Sci. Rep.* **7**, 42904 (2007).

- [37] M. P. Estarellas, I. D'Amico, and T. P. Spiller, "Robust quantum entanglement generation and generation-plus-storage protocols with spin chains", *Sci. Rep.* **7**, 42904 (2007).
- [38] S. M. Giampaolo and F. Illuminati, "Long-distance entanglement in many-body atomic and optical systems", *New Journal of Physics* **12**, 025019 (2010).
- [39] L. Banchi *et al.*, "Optimal dynamics for quantum-state and entanglement transfer through homogeneous quantum wires", arXiv:1006.1217 [quant-ph].
- [40] G. M. A. Almeida, F. A. B. F. de Moura, T. J. G. Apollaro, and M. L. Lyra, "Disorder-assisted distribution of entanglement in XY spin chains", arXiv:1707.05865.
- [41] R. Sousa and Y. Omar, "Pretty good state transfer of entangled states through quantum spin chains", *New J. Phys.* **16**, 123003 (2014).
- [42] T. Shi, Y. Li, Z. Song, and C.-P. Sun, "Quantum-state transfer via the ferromagnetic chain in a spatially modulated field", *Phys. Rev. A* **71**, 032309 (2005).
- [43] S. Lorenzo, T. J. G. Apollaro, S. Paganelli, G. M. Palma, and F. Plastina, "Transfer of arbitrary two qubit states via a spin chain", arXiv:1502.02458 [quant-ph].
- [44] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, "Quantum mechanics", Vol 1 e 2, Hermann and Wiley, Paris, 1977.
- [45] G. Rigolin, "Estados quânticos emaranhados", Tese (Doutorado) - Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas (2005).
G. Rigolin, "Emaranhamento Quântico", *Physicae (APGF)*, v. **7**, 1 (2008).
- [46] E. Schrödinger, "Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik", *Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935).
- [47] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?", *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [48] J. S. Bell, "On the Einstein Podolsky Rosen paradox", *Physics* **1**, 195 (1964).
- [49] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, "Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem", *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981).
A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, "Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities", *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91 (1982).

- [50] D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, "Bell's theorem without inequalities", *Am. J. of Phys.* **58**, 1131 (1990).
- [51] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, "Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states", *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2881 (1992).
- [52] S. Pouyandeh and F. Shahbazi, "Quantum state transfer in XXZ spin chains: A measurement induced transport method", *Int. J. Quantum Inform.* **13**, 1550030 (2015).
- [53] U. Schollwöck, J. Richter, D. J. J. Farnell, and R. F. Bishop, "Quantum Magnetism". *Lecture Notes in Physics* (2004), p. 316.
- [54] T. Werlang and G. Rigolin, "Thermal and Magnetic Quantum Discord in Heisenberg models", *Phys. Rev. A* **81**, 044101 (2010).
- [55] A. Kay and M. Ericsson, "Geometric effects and computation in spin networks", *New J. Phys.* **7**, 143 (2005).
- [56] A. Kay, "Perfect, efficient, state transfer and its applications as a constructive tool", *Int. J. Quantum Inform.* **8**, 641 (2010).
- [57] M. Christandl, N. Datta, A. Ekert, and A. J. Landahl, "Perfect State Transfer in Quantum Spin Networks", *Phys. Rev. Lett.* **92**, 187902 (2004).
- [58] J. J. Sakurai, "Modern Quantum Mechanics" (Late, University of California, Los Angeles, 1994).
- [59] R. A. Bertlmann, and N. Friis, "Theoretical Physics T2. Quantum Mechanics", T2-Script of Sommersemester 2008.
- [60] V. Fock, "Konfigurationsraum und zweite Quantelung", *Z. Phys.* **75**, 622 (1932).
- [61] W. W. Cheng *et al.*, "Quantum correlation approach to criticality in the XX spin chain with multiple interaction", *Physica B* **407**, 3671 (2012).
- [62] S. Ashhab, "Quantum state transfer in a disordered one-dimensional lattice", *Phys. Rev. A* **92**, 062305 (2015).
- [63] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, "Mixed-state entanglement and quantum error correction", *Phys. Rev. A* **54**, 3824 (1996).
- [64] G. Araneda, N. Cisternas, and A. Delgado, "Telecloning of qudits via partially entangled states", arXiv:1712.00624 [quant-ph].

- [65] B. C. Hall, "Lie Groups, Lie Algebras, and Representations An Elementary Introduction", Graduate Texts in Mathematics, 222 (2nd ed.), Springer (2015).
- [66] D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano, F. L. Moore, and D. J. Heinzen, "Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy", *Phys. Rev. A* **46**, R6797 (1992).
D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano, and D. J. Heinzen, "Squeezed atomic states and projection noise in spectroscopy", *Phys. Rev. A* **50**, 67 (1994).
- [67] W. K. Wootters, "Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits". *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).
- [68] S. Hill and W. K. Wootters, "Entanglement of a Pair of Quantum Bits", *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5022 (1997).
W. K. Wootters, "Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits", *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).
- [69] E. Wu and X. Zhang, "Dynamics of pairwise entanglement in the three-qubit Heisenberg XX spin chain", *Int. J. Quantum Inform.* **07**, 1447 (2009).
- [70] C. Albanese, M. Christandl, N. Datta, and A. Ekert, "Mirror Inversion of Quantum States in Linear Registers", *Phys. Rev. Lett.* **93**, 230502 (2004).
- [71] X. Chen, Y. Wang, J. Shi, H. Rabitz, and F. Shuang, "Perfect Information Transfer in Neighbor-coupled Spin Chains", Proceedings of the 29th Chinese Control Conference, Beijing, China (2010).
- [72] A. Kay, "A Review of Perfect, Efficient, State Transfer and its Application as a Constructive Tool", arXiv:0903.4274v3 [quant-ph].
- [73] D. R.-Méndez, O. A.-Loreto, and H. M.-Cessa, "Mirror-field-atom interaction: Hamiltonian diagonalization", arXiv:1303.1802 [quant-ph].
- [74] R. Vieira, E. P. M. Amorim, and G. Rigolin, "Entangling power of disordered quantum walks", *Phys. Rev. A* **89**, 042307 (2014).
- [75] L. F. Santos, G. Rigolin, and C. O. Escobar, "Entanglement versus chaos in disordered spin chains", *Phys. Rev. A* **69**, 042304 (2004).

Apêndice A

ALGORITMO BASE PARA TRANSMISSÃO DE ESTADOS EMARANHADOS

Segue em anexo a esta Tese o algoritmo base para simular computacionalmente o modelo proposto quando Alice prepara o estado $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. A partir deste código, foram montados os demais programas estudados no capítulo 4. As letras cinzas representam as anotações para o leitor entender melhor o que cada passo do código significa. Apresentaremos o algoritmo da simulação para que ele possa ser adaptado a qualquer software de simulação. O símbolo "?" indica ao autor da simulação que, naquele ponto, ele deve incluir um valor numérico para algum dos parâmetros de entrada do algoritmo.

Simulação para o modelo proposto quando Alice prepara o estado $|\Psi^{\wedge+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle)$.

Os termos cinzas são apenas anotações.

Os pontos de interrogação representam valores a serem colocados inicialmente

Número de qubits

$$n = ? + 2;$$

Tempo inicial e final (em função de π)

$$t_0 = ? \pi;$$

$$t_1 = ? \pi;$$

$$T = t_1 - t_0;$$

Intervalo de tempo entre cada passo. Ex.: $dt=0,001$

$$dt = ?;$$

Valores de JA e Jm

$$JA = ?;$$

$$Jm = ?;$$

Hamiltoniana

$$H_{n \times n} = \text{Matriz } n \times n \text{ nula};$$

Estado geral

$$\psi_{n \times 1} = \text{Matriz coluna nula de tamanho } n;$$

$$\psi_{1 \times 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} ;$$

$$\psi_{2 \times 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} ;$$

Construção da Hamiltoniana

$$H_{3 \times 1} = JA;$$

$$H_{3 \times 2} = JA;$$

$$H_{1 \times 3} = JA;$$

$$H_{2 \times 3} = JA;$$

$$H_{3 \times 4} = Jm;$$

$$g=1;$$

Faça enquanto $g \leq n-6$

$$\{ H_{(g+3) \times (g+2)} = Jm;$$

$$H_{(g+3) \times (g+4)} = Jm;$$

$$g=g+1\};$$

$$H_{(n-2) \times (n-3)} = Jm;$$

$$H_{(n-2) \times (n-1)} = JA;$$

$$H_{(n-2) \times (n)} = JA;$$

$$H_{(n-1) \times (n-2)} = JA;$$

$$H_{(n) \times (n-2)} = JA;$$

Melhor emaranhamento e o tempo em que ocorre

$$EoF = 0;$$

$$tempo = 0;$$

Resultados

resultados = Matriz $(T/dt) \times 4$ nula;

Tempo inicial,

$$U0 = e^{-i2Ht0}$$

$$\psi = U0.\psi;$$

$$U = e^{-i2Hdt}$$

b=1;

Faça enquanto $b \leq T/dt$

$$\{t = t0 + dt.b;$$

$$\psi = U.\psi;$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 - |\psi_{(n-1)x1}|^2 - |\psi_{(n)x1}|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\psi_{(n)x1}|^2 & \psi_{(n-1)x1}^* \psi_{(n)x1} & 0 \\ 0 & \psi_{(n)x1}^* \psi_{(n-1)x1} & |\psi_{(n-1)x1}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{Fidelidade} = \psi_0^\dagger \cdot \rho \cdot \psi_0;$$

Calculando a concorrência

$$C = 2|\psi_{(n-1)x1} \psi_{(n)x1}|;$$

$$f = \frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2};$$

$$\text{Se: } \left\{ \begin{array}{l} f = 1, \text{Emaranhamento} = 0 \\ f \neq 1; \text{Emaranhamento} = f \cdot \log_2(f) - (1-f) \cdot \log_2(1-f) \end{array} \right\};$$

$$\text{Se: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Emaranhamento} > \text{EoF}, \text{EoF} = \text{Emaranhamento}; \text{tempo} = t, \\ \text{Emaranhamento} \leq \text{EoF}; \text{n\~{o} fa\~{c}a nada.} \end{array} \right\};$$

resultados $b \times 1 = t$;

resultados $b \times 2 = \text{Fidelidade}$;

resultados $b \times 3 = C$;

resultados $b \times 4 = \text{Emaranhamento}$;

b=b+1}

Imprima EoF e tempo;

Exporte[resultados];