UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

FAUSTO LOMBARDO ZOLA

A MATEMÁTICA E O FUTEBOL
APRENDENDO MATEMÁTICA COM AS COBRANÇAS DE PÊNALTIS

SÃO CARLOS - SP
2018

FAUSTO LOMBARDO ZOLA

A MATEMÁTICA E O FUTEBOL
APRENDENDO MATEMÁTICA COM AS COBRANÇAS DE PÊNALTIS

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano e apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas – Matemática.

SÃO CARLOS - SP
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Fausto Lombardo Zola, realizada em 02/05/2018:

Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano
UFSCar

Profa. Dra. Ires Dias
USP

Prof. Dr. Renato Jose de Moura
UFSCar

Dedico este trabalho com todo amor a minha família e amigos, em especial à minha esposa Carol e à minha mãe Cecília. Obrigado pelo incentivo, pela paciência e pela compreensão. Minha eterna gratidão.

AGRADECIMENTOS

A Deus por propiciar mais esta conquista em minha vida.

Aos meus familiares, sempre presentes nas minhas conquistas profissionais.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, que contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano, pela dedicação e pelas ideias para o desenvolvimento e a conclusão desta dissertação.

Aos colegas do Mestrado Profissional, em especial ao Vinicius, Patrícia, Veruska, Paulo, Marcelo e Glen, pelo incentivo e pelo apoio durante esta conquista.

À Escola Espaço Livre pelo apoio na realização da pesquisa.

À UFSCAR por ter proporcionado a oportunidade da realização deste sonho.

“... E nunca considerem seu estudo como uma obrigação, mas sim como uma oportunidade invejável de aprender, sobre a influência libertadora da beleza no domínio do espírito, para seu prazer pessoal e para o proveito da comunidade à qual pertencerá o seu trabalho futuro."

Albert Einstein

RESUMO

Neste trabalho, tendo como fio condutor as cobranças de pênaltis no futebol, apresentamos a idealização, a construção, a aplicação e a análise dos resultados de uma sequência didática para o ensino e a retomada de alguns conteúdos matemáticos. Como produto final, obtivemos um simulador de cobrança de pênaltis no GeoGebra e cinco fichas de atividades, as quais foram aplicadas em duas turmas do segundo ano do Ensino Médio de 2017 de uma escola particular de Bebedouro/SP.

Palavras-chave: ensino de matemática, cobranças de pênaltis, GeoGebra, porcentagem, razão, probabilidade, gráficos.

ABSTRACT

In this work, having as a guideline the football penalty kicks, is presented the idealization, the development, the application and the results analysis of a didactic sequence in order to teach and recover some mathematical concepts. As final product a penalty simulator in GeoGebra and five activity sheets were obtained, which were applied in two classes of the second year of high school in a private school in Bebedouro/SP.

Keywords: mathematics teaching, football penalty kicks, GeoGebra, percentage, ratio, probability, graphs.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática é vista por inúmeros alunos como uma das disciplinas mais difíceis e complicadas de ser estudada e entendida. Grande parte disso está na dificuldade de muitos professores em apresentar a matemática de forma contextualizada e diferente da tradicional “definição-exemplo-exercícios”. Isso leva os estudantes a crerem que tal disciplina se constitui em um emaranhado de fórmulas e problemas, ao invés de uma oportunidade de interagir com novos conhecimentos para o desenvolvimento de competências e de habilidades, que lhes darão condições de entender melhor e de forma mais madura os problemas do dia a dia que os cercam.

Em contrapartida, há um grande número de materiais didáticos voltados para os cursos de Matemática no Ensino Médio (jogos, vídeos, kits experimentais) com aplicações nas diversas áreas do conhecimento nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), com objetivo de ajudar no processo de ensino/aprendizagem dos alunos.

Cientes dessa imagem histórica construída acerca da matemática, nesse trabalho, ligamos esta a cobranças de pênaltis no futebol buscando novas maneiras na abordagem e retomada de conteúdos. Somado a isso, almejamos elaborar uma forma de aprendizagem mais significativa, gerando algumas mudanças nas posturas de professores e, consequentemente, nas dos alunos. Essa opção fundamenta-se no fato de o futebol ser o esporte mais popular do mundo, além de ser a modalidade esportiva mais praticada no Brasil. Através dessa ponte, tentamos criar um ambiente mais contextualizado, interessante e desafiador, exigindo deles maior habilidade e competência para resolver os problemas apresentados. Além disso, descobrir que uma simples cobrança de pênalti apresenta vários conceitos matemáticos como, por exemplo, razões trigonométricas, probabilidade e estatística.

A metodologia de pesquisa empregada neste trabalho apoia-se nos princípios da Engenharia Didática. O conceito de Engenharia Didática aflorou na década de 80 na França, comparando a forma didática com que professores e educadores atuam no ensino à prática de um engenheiro. Isso se deve ao fato de educadores e de engenheiros fundamentarem suas produções em conhecimentos científicos de suas esferas; no entanto, na falta de teorias para solução de problemas de natureza mais complexa, eles buscam aprimorar, reelaborar ou até mesmo conceber novos conceitos.

A Engenharia Didática, sob o olhar da metodologia de pesquisa, caracteriza-se por experiências em sala de aula. As teorias educacionais desenvolvidas sem a experimentação da sala de aula ou sem o reconhecimento do professor, muitas vezes, são insatisfatórias para as mudanças desejadas nos habituais sistemas de ensino. A união da experiência docente com essas teorias educacionais, tendo como finalidade criar novas sequências didáticas, é a base da Engenharia Didática.

Nesta dissertação, contemplamos as diferentes fases da metodologia da Engenharia Didática [Artigue (1996)]:

I. análises prévias;
II. construção e análise a *priori* das situações didáticas a serem trabalhadas na sala de aula;
III. experiência e implementação;
IV. análise a *posteriori* e validação.

As análises prévias foram pautadas no referencial teórico. Para as análises *a priori*, consideramos as características das turmas e também o conteúdo programático para produção das fichas de atividades, bem como os objetivos a serem contemplados. Já a implementação ocorreu em duas aulas de 90 minutos cada; as atividades abrangeram duas turmas do segundo ano do ensino médio, totalizando 54 alunos. Por fim, a validação ocorreu ao analisarmos as respostas dos alunos ao término de cada atividade individual juntamente com a evolução deles.

A apresentação deste trabalho se dará em capítulos. No capítulo 1, apresentamos uma conjuntura, o ambiente escolar onde a pesquisa foi realizada, o perfil dos estudantes que foram escolhidos para as atividades e uma rápida abordagem histórica sobre a instituição. No capítulo 2, faremos uma descrição das fichas de atividades idealizadas. No capítulo 3, detalharemos todo o processo de aplicação das fichas idealizadas. No capítulo 4, mostraremos os resultados obtidos. Por fim, no capítulo 5, faremos as considerações finais.

1. CONTEXTO DESTE TRABALHO

O autor ministra aulas de matemática há 13 anos na rede privada de ensino. Após concluir o ensino fundamental e médio em escolas públicas, ingressou na Universidade Federal de São Carlos em 2001 para cursar Licenciatura Plena em Matemática, concluindo-o no final de 2004. No início atuou por alguns anos no ensino fundamental, mas atualmente leciona somente no ensino médio. Ao longo dos anos, apesar de buscar aperfeiçoamento constantemente no ensino da matemática, nunca houve espaço para inserir estratégias de ensino muito inovadoras, pois por trabalhar em redes privadas, sempre teve que utilizar materiais didáticos apostilados, como por exemplo, Anglo, COC e Objetivo entre outros. Essas apostilas apresentam aulas sequenciadas para serem cumpridas ao término do ano letivo, tornando praticamente inviáveis atividades extras. Durante sua caminhada, buscou proporcionar aos alunos um ambiente equilibrado nas salas de aula, com disciplina e harmonia, sempre tentando cativar os alunos para estabelecerem um vínculo com o professor, a fim de tornar as aulas de matemática mais prazerosas.

A escola onde a pesquisa foi realizada se localiza na cidade de Bebedouro-SP e tem mais de 30 anos de existência. Nesse tempo, tornou-se a melhor escola da cidade, com maior número de aprovações nas melhores faculdades do país e primeira colocação na região nas últimas edições do ENEM. O perfil dos alunos matriculados é de classe média e alta. As salas de aulas são todas equipadas com ar-condicionado e sistemas multimídias, com no máximo 30 alunos.

Os alunos escolhidos para a pesquisa são do segundo ano do ensino médio. Tal escolha se deve ao fato de os estudantes do terceiro ano do ensino médio estarem muito focados nos vestibulares que virão no segundo semestre e, com isso, suas aulas estão literalmente contadas, tornando-os inviáveis para a pesquisa. Já o primeiro ano apresenta alunos ainda muito imaturos que acabaram de ingressar no ensino médio. Os alunos do segundo ano, além de serem mais maduros, apresentam uma bagagem pedagógica maior, sendo mais rica a escolha de conteúdos e conceitos a serem trabalhados e resgatados. Os alunos de maneira geral apresentam um bom nível de aprendizado, mas como na maioria das escolas, falando especificamente da disciplina de matemática, eles apresentam resultados heterogêneos.

Figura 1. Laboratório de informática e quadra poliesportiva da Escola em Bebedouro.

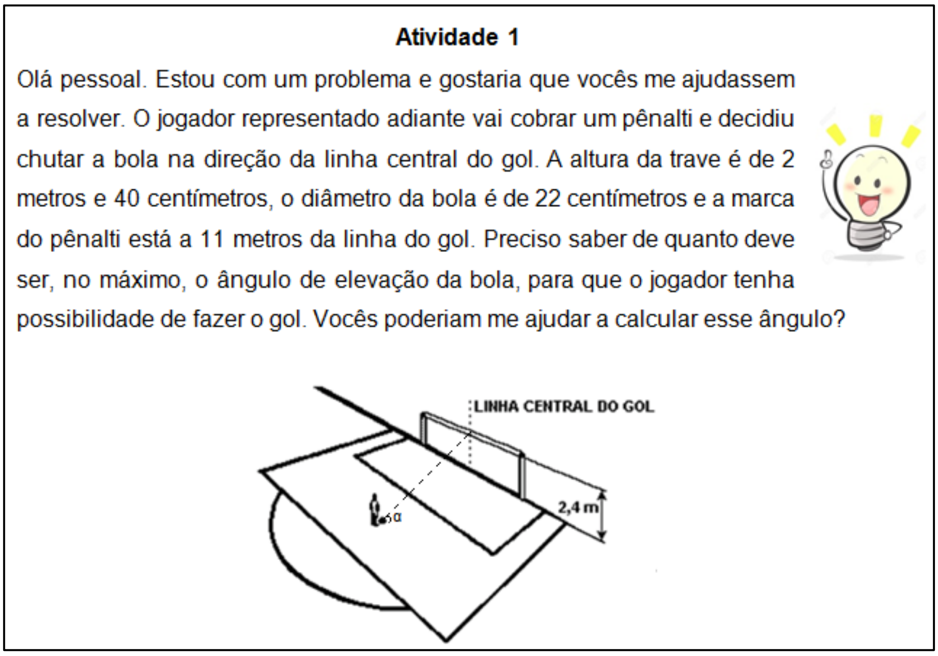
Figura 2. Sala de aula da Escola em Bebedouro.

2. IDEALIZAÇÃO E ORDENAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho foi idealizado na forma de fichas de atividades para serem aplicadas em sala de aula. Foram produzidas cinco fichas, cada uma delas trazendo como eixo principal um conceito matemático sempre inserido a partir das cobranças de pênalti do futebol.

Na primeira ficha, tivemos a preocupação de usar uma linguagem lúdica e informal com o intuito de nos aproximarmos dos alunos e, com isso, aumentarmos a participação e o interesse deles pela atividade.

O texto inicial descreve elementos e dados envolvidos em uma cobrança de pênalti: dimensões do gol, distância da marca do pênalti até o gol, diâmetro da bola de futebol, ângulo formado pela trajetória da bola e o solo em uma cobrança, dentre outros.


Atividade 1

Olá pessoal. Estou com um problema e gostaria que vocês me ajudassem a resolver. O jogador representado adiante vai cobrar um pênalti e decidiu chutar a bola na direção da linha central do gol. A altura da trave é de 2 metros e 40 centímetros, o diâmetro da bola é de 22 centímetros e a marca do pênalti está a 11 metros da linha do gol. Preciso saber de quanto deve ser, no máximo, o ângulo de elevação da bola, para que o jogador tenha possibilidade de fazer o gol. Vocês poderiam me ajudar a calcular esse ângulo?

Figura 2. Texto inicial da atividade 1.

Nessa primeira atividade, o jogador irá chutar a bola em linha reta, e o principal objetivo é que o aluno descubra qual é o ângulo máximo que a trajetória da bola pode formar com o solo (ângulo α) para que o atleta tenha sucesso na cobrança, ou seja, acerte o gol. As perguntas foram feitas de modo a inserir, gradativamente, os alunos no problema.

A primeira questão leva o aluno a refletir até qual altura a bola pode atingir para o jogador ter sucesso na sua cobrança.

Se o centro da bola atingir a linha central do gol a 2 metros e 40 centímetros, o jogador terá sucesso? Justifique.

Figura 4. Primeira questão da atividade 1.

Nessa pergunta, espera-se que os alunos respondam que o jogador não terá sucesso, pois a bola atingirá o travessão.

O aluno, na segunda questão, vai calcular o raio da bola.

Qual o raio da bola?

Figura 5. Segunda questão da atividade 1.

É informado, no texto da atividade, que o diâmetro da bola mede 22 centímetros. O raio tem, nesse problema, um papel importante, na medida em que ele é determinante para interpretar e responder corretamente o objetivo principal da atividade. Os alunos deverão encontrar a medida do raio dividindo o diâmetro informado por dois, ou seja, 11 centímetros.

Na terceira questão, perguntamos a altura máxima que a bola pode atingir o gol.

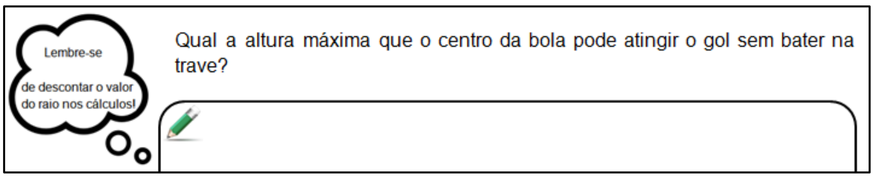


Figura 6. Terceira questão da atividade 1.

Lembramos aos alunos que eles deverão descontar o raio da bola nos cálculos, já que, somente se subtraíssem a altura do gol pela medida do raio da bola, eles encontrariam a altura máxima pedida. Esta é importante, pois será usada nas próximas questões.

Na quarta questão, o aluno deve fazer um esboço de um triângulo retângulo, no qual um cateto é a distância da marca do pênalti até a linha do gol (dado no enunciado), e o outro cateto é a altura máxima do gol (calculada no item anterior).

Desenhe um triângulo representando a situação descrita acima com os valores que você descobriu nos itens anteriores.

Figura 7. Quarta questão da atividade 1.

A quinta questão, pede para o aluno chamar de α o ângulo de inclinação que a trajetória da bola forma com o solo, levando-o a refletir que a tangente do ângulo α é a razão trigonométrica que relaciona os catetos de um triângulo retângulo.

Vamos chamar de α esse ângulo de elevação, ou seja, o ângulo que a trajetória da bola faz com o solo. Qual é a relação trigonométrica que você usaria para determinar esse ângulo?

Figura 8. Quinta questão da atividade 1.

Na sexta, os estudantes irão usar o esboço do triângulo retângulo da questão anterior para encontrar aproximadamente a tangente do ângulo α igual a 0,21 e com o auxílio da tabela trigonométrica que eles receberam, deduzir que $\alpha \approx 12°$.

Usando a tabela trigonométrica que você recebeu, encontre a melhor aproximação inteira para o ângulo α.

Figura 9. Sexta questão da atividade 1.

A sétima faz com que os alunos, utilizando razões trigonométricas e também a tabela trigonométrica, calculem a distância percorrida pela bola, ou seja, a hipotenusa do triângulo retângulo esboçado por eles.

Agora que você já descobriu o valor aproximado do ângulo, encontre a distância que a bola percorreria até atingir o plano que contém as traves do gol.

Figura 10. Sétima questão da atividade 1.

Eles poderão usar o seno ou o cosseno do ângulo α ou até mesmo aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar a resposta.

A última questão da atividade é uma aplicação das razões trigonométricas. Supondo que uma cobrança foi feita com um ângulo de inclinação de 6°, é solicitado aos alunos calcularem a altura que a bola irá atingir a linha central do gol.

Imagine que o centroavante do time, ao cobrar um pênalti, chuta a bola na linha central do gol com um ângulo de inclinação com o solo de 6°. Com que altura a bola atingirá a linha central do gol?

Figura 11. Oitava questão da atividade 1.

Usando a tangente do ângulo de 6°, os alunos irão encontrar aproximadamente 1,15 metro de altura.

Na segunda ficha, também tivemos a preocupação de utilizar uma linguagem lúdica e informal com a intenção de aumentar a proximidade entre o problema e os alunos. A apresentação da situação vem acompanhada de uma figura ilustrativa.

Atividade 2

Fala, galera! Nesse outro problema, nós vamos descobrir a velocidade média da bola em uma cobrança de pênalti. Eu acredito que você já cobrou um pênalti em alguma brincadeira ou até mesmo em um jogo, mas caso não tenha cobrado, certamente já viu uma cobrança de pênalti. Você já se perguntou qual é a velocidade da bola?

A figura mostra parte de um campo de futebol, em que estão representados um dos gols e a marca do pênalti (ponto P).

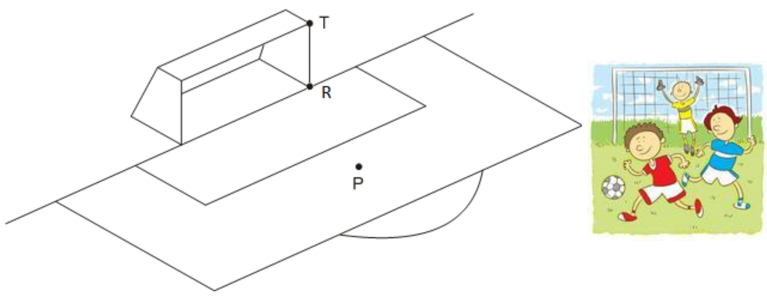


Figura 12. Figura inicial da atividade 2.

Nessa figura, destacamos os pontos P, R e T e aproximamos as dimensões do gol para facilitar os cálculos. A primeira questão trabalhará a ideia de distância e também de ponto médio de um segmento. Os alunos deverão marcar o ponto M no ponto médio da linha do gol.

Marque na figura acima o ponto M na linha do gol que está mais próximo da marca do pênalti P. Qual é a propriedade que este ponto tem em relação à linha do gol?

Figura 13. Questão 1 da atividade 2.

Na segunda questão, os alunos novamente irão refletir sobre o fato de M ser o ponto médio da linha do gol e, com isso, concluir que a distância do ponto P ao ponto M é a própria distância da marca do pênalti ao gol, ou seja, 11 metros.

Qual é a distância do ponto P ao ponto M?

Figura 14. Questão 2 da atividade 2.

A terceira questão da atividade reforça o fato de que o segmento PM é perpendicular à linha do gol.

Qual é o ângulo formado entre a linha do gol e a linha que passa pelos pontos M e P?

Figura 15. Questão 3 da atividade 2.

Os alunos deverão responder que o ângulo pedido mede 90°.

A quarta questão caracteriza a distância do ponto M às traves laterais do gol.

Qual é a distância do ponto M ao pé de uma das traves (ponto R)?

Figura 16. Questão 4 da atividade 2.

Uma vez que os alunos já marcaram e observaram que M é o ponto médio da linha do gol, essa questão apenas irá constatar tal fato, respondendo que a distância pedida é de quatro metros.

Até essa etapa da atividade as questões foram introdutórias. A partir desse momento, os alunos começarão a adentrar no principal propósito da atividade: calcular a velocidade da bola num chute direto em um dos ângulos da trave.

Na quinta questão, é pedido o cálculo da distância da marca do pênalti ao pé de uma das traves laterais.

Descubra a distância do ponto P ao pé da trave (ponto R).

Figura 17. Questão 5 da atividade 2.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, eles determinarão que a distância pedida é, aproximadamente, 11,7 metros.

Na sexta, é pedido o cálculo da distância da marca do pênalti até o encontro do travessão com uma das traves laterais.

Um atacante chuta a bola da marca do pênalti e ela, seguindo uma trajetória reta, choca-se bem onde a coruja dorme, na junção da trave esquerda com o travessão (ponto T). Nessa situação, do momento do chute até o choque, qual a distância em metros aproximada que a bola terá percorrido?

Figura 18. Questão 6 da atividade 2.

Mais uma vez os alunos usarão o Teorema de Pitágoras para calcular a distância solicitada, usando como um dos catetos a distância encontrada na questão anterior. Os cálculos resultarão em aproximadamente 12 metros.

A última questão da atividade traz uma situação onde é dado o tempo que a bola levou para percorrer essa distância e os alunos irão trabalhar com o conceito de velocidade média.

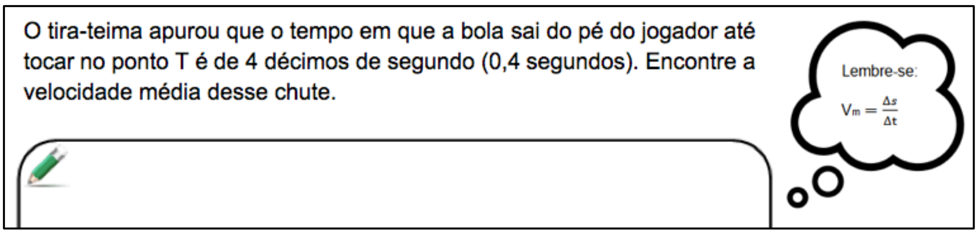

O tira-teima apurou que o tempo em que a bola sai do pé do jogador até tocar no ponto T é de 4 décimos de segundo (0,4 segundos). Encontre a velocidade média desse chute.

Figura 19. Questão 7 da atividade 2.

A fórmula da velocidade média será fornecida para ajudar os alunos a calcularem corretamente a velocidade, encontrando 30 metros por segundo.

A terceira ficha de atividade trata da comparação entre a área do gol com a área de cobertura do goleiro. Nessa ficha, fomos diretos às questões e não nos preocupamos em trazer uma linguagem mais acessível.

Qual é área total da baliza do gol?

Figura 20. Questão 1 da atividade 3.

Espera-se que os alunos multipliquem os dados fornecidos para chegar o valor de 17, 86 m^2.

Na segunda questão, apresentamos uma figura ilustrativa sobre a área de defesa de um goleiro na cobrança de pênalti e pedimos a área não coberta pelo goleiro em uma cobrança de pênalti.

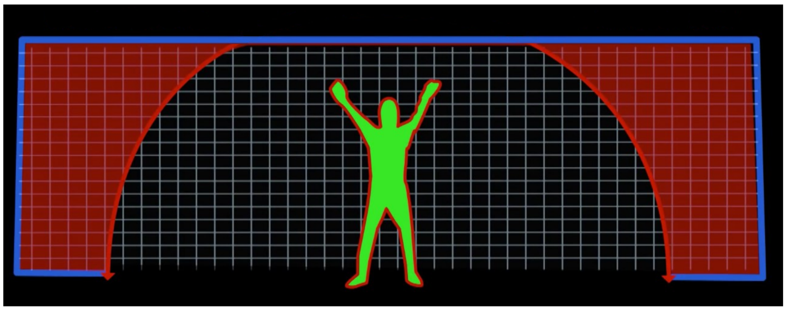


Figura 21. Figura ilustrando a questão 2 da atividade 3.

Sabendo que a área aproximada coberta pelo goleiro é 10,72 m^2, responda:

Qual é a área não coberta pelo goleiro?

Figura 22. Questão 2 da atividade 3.

Como se trata de uma área complexa, o valor dela foi fornecido aos alunos. Eles terão apenas que realizar uma subtração para conhecer a área não coberta pelo goleiro.

Na terceira questão, é para se determinar a porcentagem da área coberta pelo goleiro, usando proporção ou regra de três.

Deste modo, na cobrança de um pênalti, qual é a porcentagem da área coberta pelo goleiro?

Figura 23. Questão 3 da atividade 3.

Os cálculos corretos resultarão em 60%.

O quarto problema traz a famosa frase dita por Pelé "*um pênalti é uma forma covarde de se fazer um gol*" e é solicitado aos alunos analisarem se essa frase é verdadeira ou falsa do ponto de vista matemático.

Uma vez Pelé disse que: "Um pênalti é uma forma covarde de fazer um gol". Você concorda? Use argumentos matemáticos para elaborar sua resposta.

Figura 24. Questão 4 da atividade 3.

As respostas serão pessoais, mas os alunos que se basearem na questão anterior, tenderão a achar que a frase de Pelé não é verdadeira.

Para finalizar a atividade três, será criada uma situação hipotética solicitando o cálculo de uma área. O objetivo dessa questão é que os alunos tenham um primeiro contato com algumas noções básicas de probabilidade, já que esse será o assunto trabalhado na próxima atividade. Na situação hipotética da questão final da atividade três, um jogador irá realizar uma cobrança de pênalti aleatoriamente no gol e os alunos deverão calcular a área do gol para que o cobrador e o goleiro tenham chances iguais, ou seja, probabilidades de gol e de defesa iguais.

Imagine que um goleiro super bem treinado sempre defende as cobranças chutadas na sua área de cobertura, e que o jogador vai chutar aleatoriamente no gol. Qual deveria ser a área do gol para que goleiro e cobrador tivessem igualdade de condições na cobrança de um pênalti?

Figura 25. Questão 5 da atividade 3.

Os alunos irão trabalhar com o conceito de probabilidade geométrica, e como a área do gol e de cobertura do goleiro já foi definida em questões anteriores, eles deverão concluir que a área do gol deverá ser o dobro da área de cobertura do goleiro.

Iniciamos a quarta atividade introduzindo uma pergunta a fim de cativarmos os alunos para o problema que será proposto: *"Pessoal, que tal calcularmos as chances de um jogador ter sucesso em uma cobrança de pênalti?"*. Também explicamos detalhadamente a figura ilustrativa da atividade, de onde todas as questões irão basear-se.

Pessoal, que tal calcularmos as chances de um jogador ter sucesso em uma cobrança de pênalti? Para isso, vamos dividir o gol em 15 partes iguais e chamar cada uma dessas partes de "quadrante", como na figura. Cada quadrante está indicado pela letra Q e por dois números no subíndice. O primeiro número indica a linha e o segundo a coluna que o quadrante pertence.

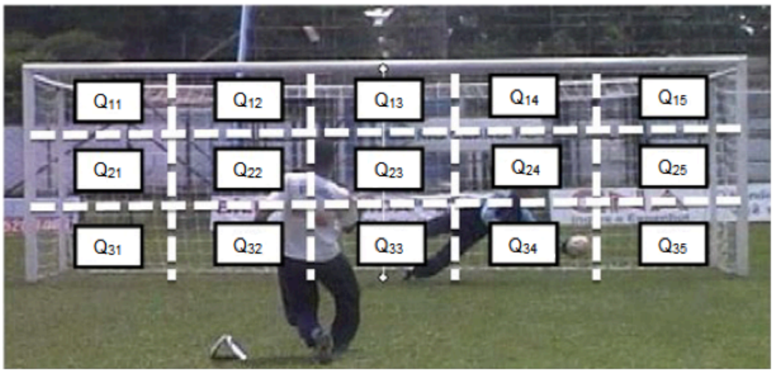


Figura 26. Texto inicial da atividade 4.

A figura apresenta a imagem de um gol dividido em 15 quadrantes. Usamos uma notação matricial para enumerar os quadrantes. Para analisar a familiaridade dos alunos com cobranças de pênaltis, idealizamos uma questão na qual eles devem citar quais são os quatro melhores quadrantes para se chutar um pênalti com melhores chances de sucesso.

Nas cobranças de pênaltis os chutes são de 90 km/h, em média. Isso quer dizer que o goleiro tem menos de meio segundo para tentar defender o chute. Suponha que você fosse bater um pênalti e que pudesse escolher onde chutar a bola para marcar o gol. Cite 4 quadrantes que você escolheria.

Figura 27. Questão 1 da atividade 4.

Acreditamos que os estudantes mais familiarizados com cobranças de pênaltis escolherão os quadrantes Q_{11} e Q_{15} dentre os quatro solicitados, por serem os mais distantes da área de alcance do goleiro.

Ainda verificando as noções deles nesse tipo de situação, a segunda pergunta quer saber em quais quadrantes o goleiro tem mais chance de defender uma cobrança de pênalti.

Cite agora alguns quadrantes em que, na sua opinião, o goleiro tem mais chance de defender uma cobrança de pênalti.

Figura 28. Questão 2 da atividade 4.

As respostas são pessoais, mas esperamos que os quadrantes escolhidos sejam os mais ao centro do gol.

Na terceira pergunta, trabalharemos com probabilidade. Para isso, criamos uma personagem, o goleiro Paredão e definimos que ele sempre defende cobranças chutadas em certos quadrantes. As cobranças serão realizadas ao acaso, mas sempre acertando a área do gol. Com base nesses dados, o aluno deve responder as chances de acontecer um gol e também as chances de Paredão defender a cobrança.

> Sabemos que o goleiro Paredão sempre defende as cobranças de pênalti chutadas nos quadrantes Q_{22}, Q_{32}, Q_{23}, Q_{33}, Q_{24} e Q_{34}. Em uma cobrança de pênalti, o cobrador, com medo do goleiro Paredão, fecha os olhos e chuta, ao acaso, acertando um dos quadrantes. Qual a chance de gol nessa cobrança? E qual é a chance de Paredão defender esse pênalti?

Figura 29. Questão 3 da atividade 4.

Como supomos que o goleiro sempre defende as cobranças nos 6 quadrantes centrais e como o gol está dividido em 15 quadrantes, espera-se que os alunos respondam que as chances de defesa e de gol sejam, respectivamente, 6/15 e 9/15.

Baseando-se na questão anterior, a quarta pergunta irá explorar 15 cobranças de pênalti realizadas as cegas, no gol de Paredão, aleatoriamente em qualquer um dos 15 quadrantes. Os alunos deverão responder o número esperado de gols para essas cobranças. Depois o número de cobranças é ampliado para 150.

> Na mesma situação do item anterior, serão realizadas 15 cobranças, às cegas, sempre acertando o gol, mas sem saber em qual quadrante. Qual é o número esperado de gols? E se forem 150 cobranças?

Figura 30. Questão 4 da atividade 4.

Os alunos deverão responder 9 e 90 gols respectivamente.

Por fim, na quinta e última ficha, abordaremos algumas noções de estatística. Os alunos irão buscar dados para a construção de gráficos e cálculos de porcentagens. Para isso, desenvolvemos um simulador de cobranças de pênalti no GeoGebra e disponibilizamos esse simulador na web de forma pública na página do GeoGebra. O simulador de pênaltis, como o próprio nome já diz, simula cobranças e traz um marcador contemplando o número total de cobranças e o número de gols convertidos.

Figura 31. Visão inicial do simulador.

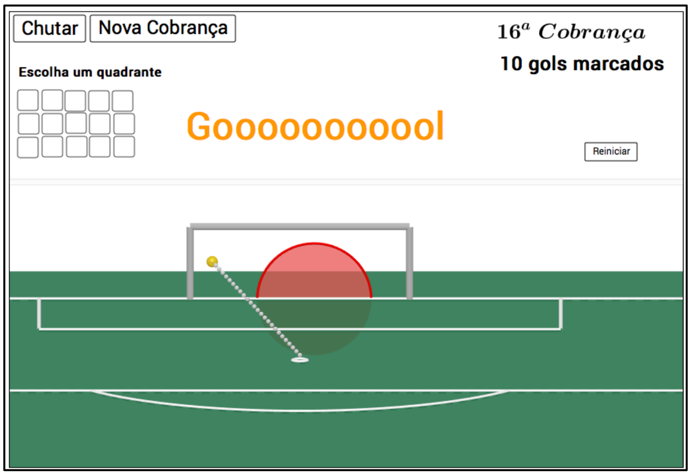


Figura 32. Simulação de um gol.

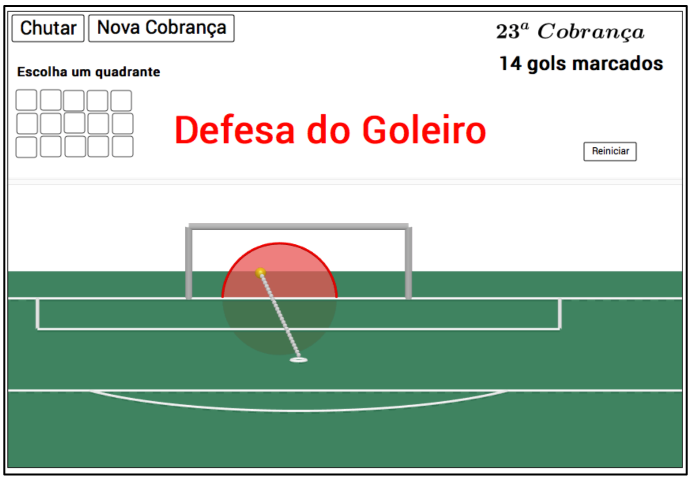


Figura 33. Simulação de uma defesa do goleiro.

O simulador apresenta a possibilidade de chutes aleatoriamente no gol ou em um dos 15 quadrantes como especificados nas questões anteriores.

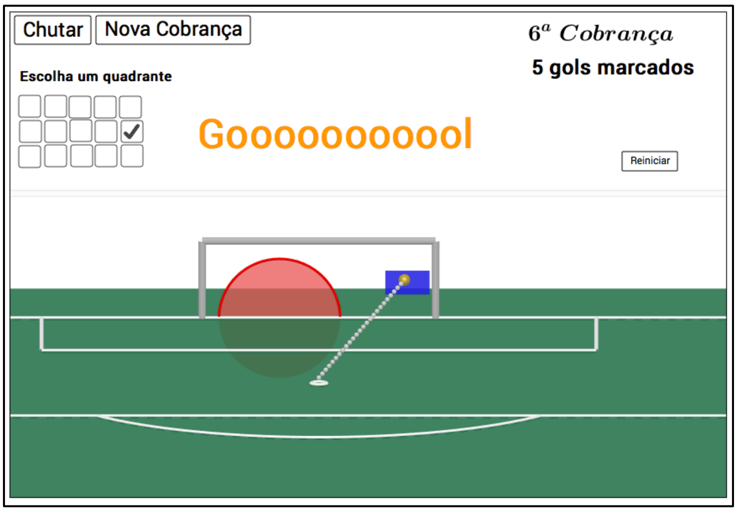


Figura 34. Simulação com um quadrante selecionado.

Como as atividades serão trabalhadas em dois encontros. Ao término do primeiro, os alunos levarão para casa um tutorial de como realizar a coleta de dados no simulador. Esse tutorial contém todos os passos necessários para eles acessarem o simulador e coletarem os dados.

Figura 35. Tutorial de como acessar o simulador.

Os alunos receberão junto com o tutorial uma tarefa para realizar em casa. Eles serão orientados a realizar um número específico de chutes no simulador e deverão anotar os dados em uma tabela fornecida na folha da tarefa.

- Realize 100 cobranças e registre aqui o número de gols: ______ gols
- Após as 100 cobranças, clique na tecla reiniciar.
- Agora, você terá que realizar 150 cobranças, 10 em cada quadrante. Selecione um quadrante, realize 10 cobranças, clique em reiniciar. Escolha outro quadrante, realize 10 cobranças, clique em reiniciar e assim sucessivamente até terminarem os quadrantes, totalizando 150 cobranças.

- Anote os resultados em cada quadrante seguindo a legenda abaixo:
  CD: cobranças defendidas.
  CG: cobranças convertidas em gol.

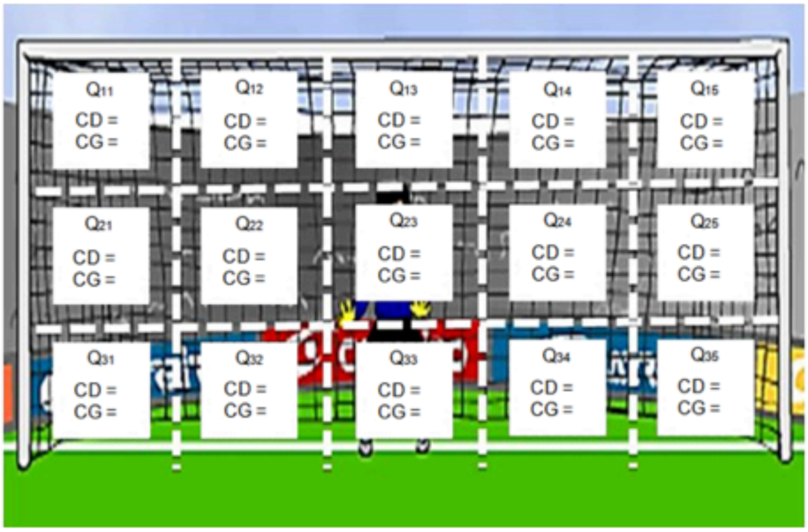


Figura 36. Simulações a serem realizadas pelos alunos.

De posse desses dados, os alunos irão responder algumas questões introdutórias para ressaltar os dados coletados nas simulações, que serão importantes no andamento da atividade. A primeira pergunta refere-se ao número de cobranças realizadas.

Quantas cobranças foram realizadas?

Figura 37. Questão 1 da atividade 5

A segunda indaga o número de cobranças convertidas em gol.

Quantas cobranças foram convertidas em gol?

Figura 38. Questão 2 da atividade 5

Os resultados apresentados deverão ser diferentes, pois cada aluno responderá de acordo com a sua própria simulação feita em casa.

A terceira pergunta da atividade refere-se ao número de cobranças desperdiçadas.

Quantas cobranças foram desperdiçadas?

Figura 39. Questão 3 da atividade 5.

Assim, como na questão anterior, as respostas serão pessoais de acordo com as simulações realizadas por cada aluno.

Na quarta pergunta, os alunos deverão calcular os percentuais aproximados de acertos e erros das cobranças simuladas, com base nos dados coletados nos itens anteriores.

Qual foi aproximadamente a porcentagem de acertos? E de erros?

Figura 40. Questão 4 da atividade 5.

Na quinta etapa da atividade, eles irão construir um gráfico de barras relacionando o desempenho nas cobranças com as respectivas porcentagens obtidas no item anterior.

Esboce no sistema de eixos coordenados abaixo, um gráfico de barras verticais com os dados do item anterior, relacionando o desempenho (acertos e erros) com as respectivas porcentagens.

Figura 41. Questão 5 da atividade 5.

Será fornecida uma malha quadriculada e um sistema de eixos coordenados para os alunos construírem o gráfico de barras verticais.

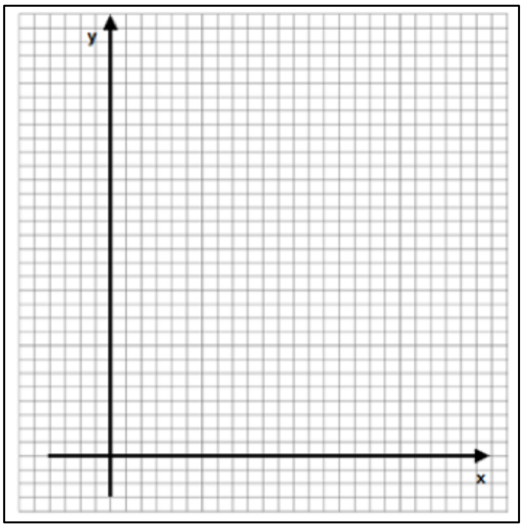


Figura 42. Sistema de eixos para a construção do gráfico.

Na sexta questão da atividade, os alunos irão construir um gráfico de setores com os dados do item anterior.

Monte um gráfico de setores com os dados do item anterior.

Figura 43. Questão 6 da atividade 5.

Será fornecida uma circunferência demarcada com múltiplos de dez graus para os alunos, uma vez que eles não possuem transferidor para realizar a medição dos arcos necessários para a construção do gráfico.

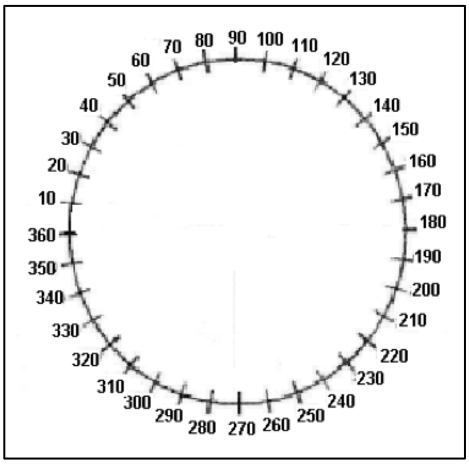


Figura 44. Circunferência para a construção do gráfico.

Os alunos receberão a seguinte dica: "*Em uma circunferência, 100% da área corresponde a um setor circular de 360°* ".

Na última etapa, os estudantes mais uma vez irão trabalhar com porcentagens baseando-se na tarefa feita em casa, mais especificamente na tabela que eles preencherão.

Analisando as cobranças realizadas e as cobranças convertidas em gol da atividade feita em casa, preencha cada quadrante do gráfico abaixo, com sua respectiva porcentagem de gols.

Figura 45. Questão 7 da atividade 5.

Os alunos receberão um gráfico divido em quinze quadrantes como em momentos anteriores e deverão preencher os quadrantes com as respectivas porcentagens de gols.

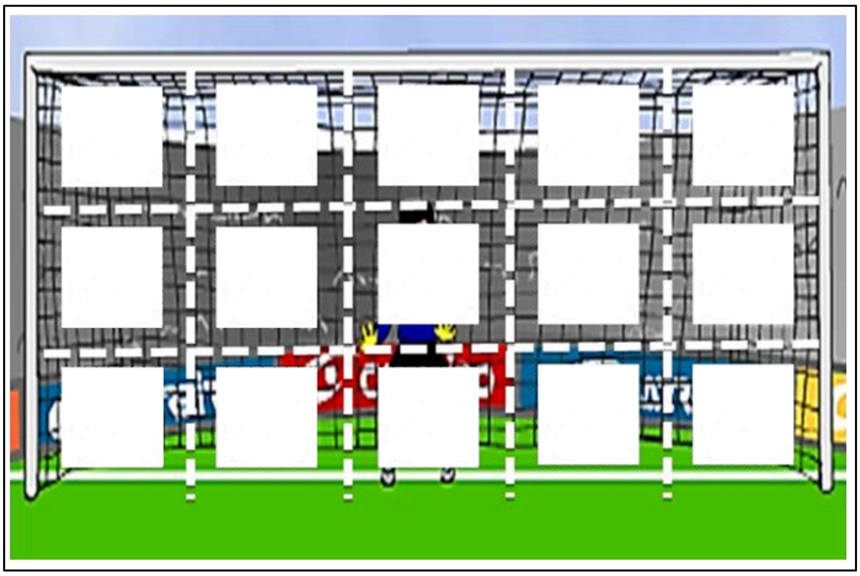


Figura 46. Gráfico para questão 7 da atividade 5

As fichas foram elaboradas de forma a fazer com que o aluno compreenda o conteúdo de maneira autônoma e desenvolva uma estratégia que o leve a responder as principais perguntas da atividade proposta. Procuramos com isso facilitar a retomada e interiorização dos conteúdos. Optamos na criação das fichas por não sequenciar as perguntas, buscando assim um maior entendimento do problema como um todo, e não apenas a compreensão de uma fração dele.

Dessa forma, priorizamos as competências e habilidades necessárias para os alunos prosseguirem nos estudos salientando a capacidade para solucionar problemas, ou seja, saindo da maneira tradicional que, basicamente, após apresentar as definições, foca na aplicação e memorização de fórmulas e procedimentos em detrimento de situações que estimulem a análise e o raciocínio do problema.

Não foram feitas aulas preparatórias para os alunos, pois o intuito era verificar e retomar conceitos já trabalhados e desenvolvidos em anos anteriores, mas com uma abordagem diferente da tradicional. A escola adota um material apostilado, que prega o aprendizado em espiral, ou seja, a cada ano que o aluno caminha na escola, são retomados os principais conceitos do ano anterior com aprofundamentos. Buscamos nas atividades, além da revisão, remover obstáculos criados pelos alunos e lhes dar segurança, evitando que se desestimulassem ou se sentissem incapazes de avançar.

3. APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

As atividades foram aplicadas em duas turmas do segundo ano do ensino médio, nas próprias salas de aula dos alunos, em duas segundas-feiras, nos dias 19/06 e 26/06 de 2017, em encontros de 1 hora e 30 minutos cada. Optamos por dividir em dois encontros visto que o tempo de aula disponível pelos alunos era inviável para realização de cinco atividades.

No primeiro encontro, os alunos trabalharam as três primeiras atividades e no segundo encontro as duas últimas.

Os alunos do segundo ano A realizaram as atividades nas primeiras aulas, das 7h30 às 9h. No primeiro encontro, logo no início da aula, os alunos foram informados de que iriam fazer uma atividade diferente, sem o uso das tradicionais apostilas que regularmente trabalhamos nas aulas. Imediatamente após isso, surgiram várias perguntas do tipo: vale nota? Vale ponto? E se eu não conseguir responder? Foi pedido a eles que levassem as atividades a sério e respondessem com sinceridade aquilo que realmente tivessem entendido, não se preocupando com nota, pois certamente discutiríamos sobre isso em outro momento. Todos os estudantes receberam as atividades impressas a cores. Acreditamos que esse detalhe, além de fornecer uma maior qualidade, aumenta o interesse dos alunos. Durante praticamente toda a atividade, eles trabalharam concentrados, em silêncio. Em geral, esse é o perfil dessa sala e a atividade não modificou esse perfil. Algumas perguntas esporádicas surgiram, mas nenhuma dúvida em comum que pudéssemos destacar. Por receio de que fizessem as atividades correndo para ficarem livres, não foi informado que eles poderiam sair da sala após terminá-las. O primeiro aluno a finalizar as atividades gastou uma hora. Na meia hora final, os alunos foram aos poucos acabando, mas restando cinco minutos para o fim, praticamente cinquenta por cento da sala (13 alunos) ainda não havia finalizado.

Já os alunos do segundo ano B realizaram as atividades nas últimas aulas, das 11h às 12h30. Eles já sabiam que iríamos realizar uma atividade diferente da usual, pois tiveram contato com os alunos do segundo ano A durante o intervalo. Assim, como no A, após os recados e avisos gerais os alunos receberam as atividades e começaram a trabalhar em silêncio. Não houve nenhuma dúvida geral, apenas algumas pontuais como: “posso aplicar o Teorema de Pitágoras? onde é a linha do gol? usamos $\sqrt{137}$ ou aproximamos?” Após uma hora, os primeiros alunos terminaram as atividades e restando 15 minutos para o término, ainda havia 12 alunos realizando as atividades. Como estávamos na última aula do dia, os alunos foram avisados que quem já tivesse terminado poderia sair da sala. Não houve sinais que os alunos que permaneceram, passaram a fazer as atividades com pressa, pois restando 5 minutos para o término, havia 6 alunos na sala. Nos 3 últimos minutos restaram 4 alunos e, para minha surpresa, dentre eles um aluno com histórico de desinteresse por provas e simulados, entregando essas atividades quase sempre em branco.

Ao final desse primeiro encontro, deixamos como tarefa para os alunos o preenchimento de uma tabela, que seria usada na atividade 5 do próximo encontro. Para realizar essa tarefa em casa, os alunos receberam uma folha extra, com todas as instruções: link do site, como acessar o simulador de cobranças de pênalti, quantas simulações deveriam realizar e onde anotar os resultados.

As atividades 4 e 5 foram realizadas da mesma forma que as atividades 1, 2 e 3, com intervalo de uma semana entre elas.

Três alunos do segundo ano A e dois alunos do segundo ano B perderam a folha de tarefa que tinha sido entregue na semana anterior, mas com ajuda dos colegas de sala realizaram as atividades e apresentaram as tarefas pedidas em outra folha, não deixando de participar dos trabalhos do dia.

Como no segundo encontro, trabalhamos uma atividade a menos que no primeiro. Em ambas as turmas, os primeiros alunos que finalizaram as atividades levaram cerca de 35 minutos, sendo que, com aproximadamente 1 hora após o início, todos já haviam terminado.

Reservamos os 30 minutos finais do encontro para mostrar que o valor da probabilidade geométrica de um jogador realizar um gol em uma cobrança de pênalti é a razão entre a área livre (área total subtraída a área de cobertura do goleiro) pela área total.

$$\boxed{P_{PROBABILIDADE\ DE\ GOL} = \frac{(A_{ÁREA\ TOTAL} - A_{ÁREA\ DE\ COBERTURA\ DO\ GOLEIRO})}{A_{ÁREA\ TOTAL}}}$$

Figura 47. Expressão para o cálculo da probabilidade.

Os alunos puderam constatar que os valores encontrados por eles eram próximo dessa razão, e novas simulações foram feitas junto com os alunos na lousa digital para validar esse fato à luz da Lei dos Grandes Números, induzindo os alunos a perceberem que quanto maior for o número de cobranças mais próximo dessa razão chegamos.

Primeiramente calculamos a probabilidade com 100 cobranças de pênalti, usando os dados obtidos pelos próprios alunos na tarefa feita em casa, obtendo resultados entre 50% e 70%. Depois com o auxílio do simulador de cobranças de pênaltis, simulamos 200 cobranças, depois 500 cobranças e por fim 1000 cobranças, chegando a respectivamente 61,5%, 59,6% e 60,1% no segundo ano A e 54,5%, 60,4% e 58,6% no segundo ano B.

Figura 48. Alunos do segundo ano A no primeiro dia.

Figura 49. Alunos do segundo ano B no primeiro dia; início e final da aula.

Figura 50. Alunos do segundo ano A no segundo dia.

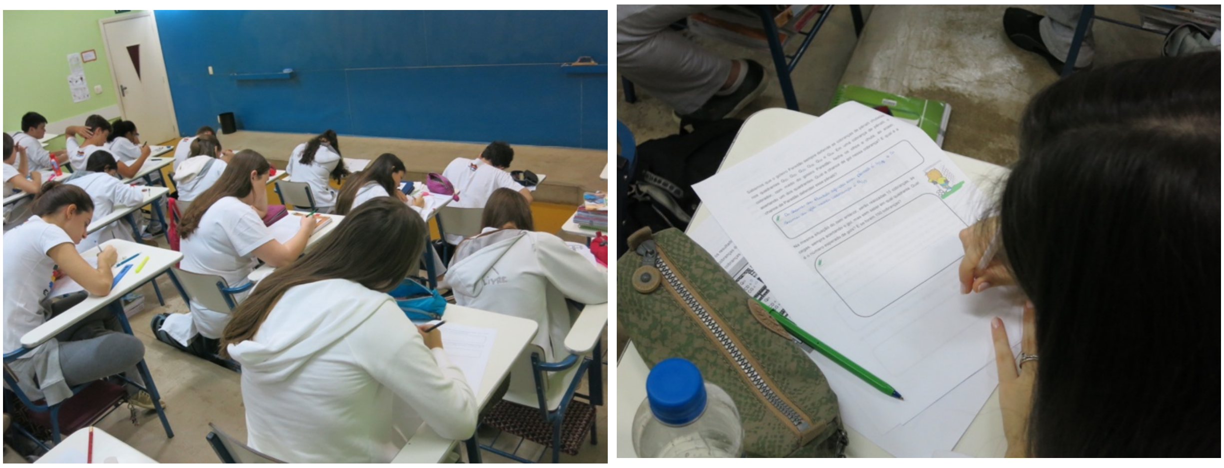


Figura 51. Alunos do segundo ano B no segundo dia.

4. RESULTADOS OBTIDOS

Nesta seção faremos as análises das fichas e dos resultados atingidos durante as aplicações das atividades. Lembramos que não foram realizadas aulas introdutórias para aplicação dessas atividades, pois um dos objetivos é exatamente avaliar conceitos já trabalhados pelos alunos em momentos anteriores.

4.1 Análise da Atividade 1

A primeira atividade foi composta por 8 questões. Como esperado, a grande maioria dos alunos que fizeram essa atividade acertaram as duas primeiras perguntas, o que evidencia que eles não encontraram dificuldades para respondê-las a partir da leitura do texto inicial. Os poucos erros que ocorreram, 7 erros em 106 respostas, foram basicamente por distração, como podemos verificar a seguir pela resposta de um aluno, que indicou, mas não realizou a conta.

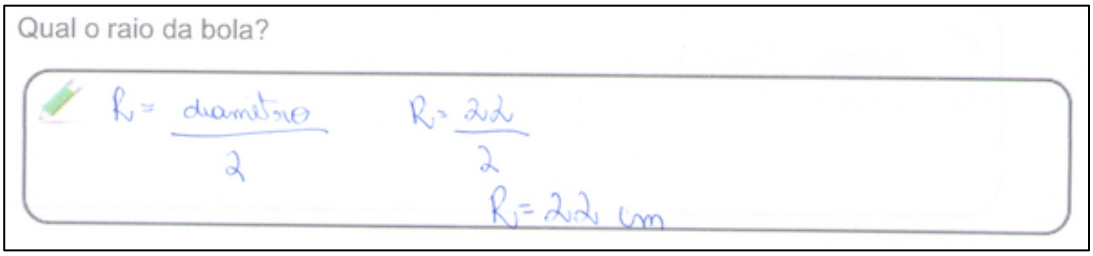


Figura 52. Resposta de um aluno da segunda questão da atividade 1.

Na terceira questão, o número de respostas erradas aumentou para 15 em 53 respostas. Esse número de erros não era esperado, pois foi idealizado a *priori* um lembrete para que os alunos descontassem o raio, o que basicamente reduz a questão a uma simples conta de subtração. Analisando as respostas dos alunos verificamos que muitos dos erros aconteceram por subtraírem, da altura do gol, o diâmetro da bola ao invés do raio, como enfatizado no lembrete da questão.

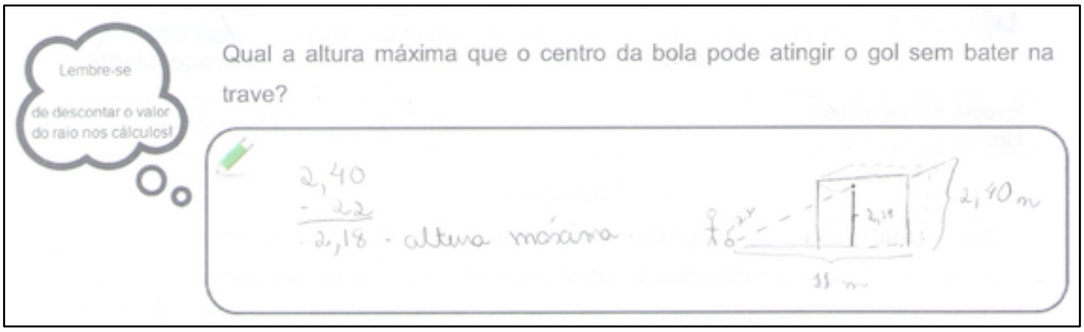


Figura 53. Resposta de um aluno da terceira questão da atividade 1.

A quarta questão trouxe um número de acertos e erros muito próximos da terceira questão. Um fato que chamou a atenção foi que muitos alunos encontraram 2,29 metros como a resposta certa da questão anterior, mas usaram, erroneamente, 2,40 metros como a medida do cateto oposto no triângulo retângulo solicitado nessa quarta questão.

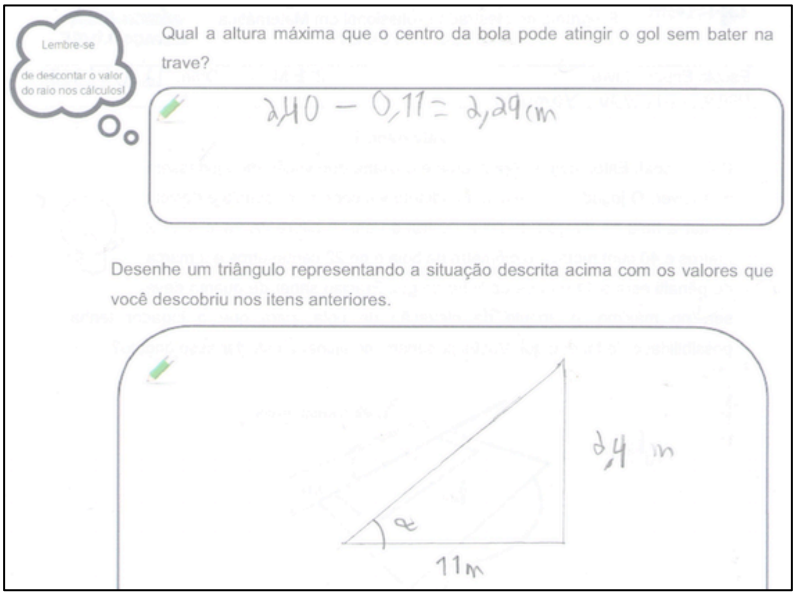


Figura 54. Resposta de um aluno da terceira e quarta questão da atividade 1.

Apenas 32 dos 53 alunos responderam corretamente à questão cinco. Esse número ficou bem abaixo do esperado, já que razões trigonométricas é um assunto trabalhado por eles desde o ensino fundamental, e também porque eles estudaram trigonometria durante o primeiro bimestre e parte do segundo, em uma das frentes de matemática. Ao verificarmos as respostas, constatamos que os principais problemas foram: não mencionar o nome da razão trigonométrica a ser usada (escreveram apenas cateto oposto/cateto adjacente), colocar como resposta as razões seno, cosseno e tangente sem especificar qual delas deveria ser usada e deixar a resposta em branco.

Menos da metade dos alunos que realizaram as atividades acertaram a questão seis. Apesar de alguns terem trabalhado com valores equivocados obtidos na questão quatro, esse erro não foi levado em conta na correção, sendo considerada como resposta certa a utilização do raciocínio correto, encontrando um valor aproximado para o ângulo pedido.

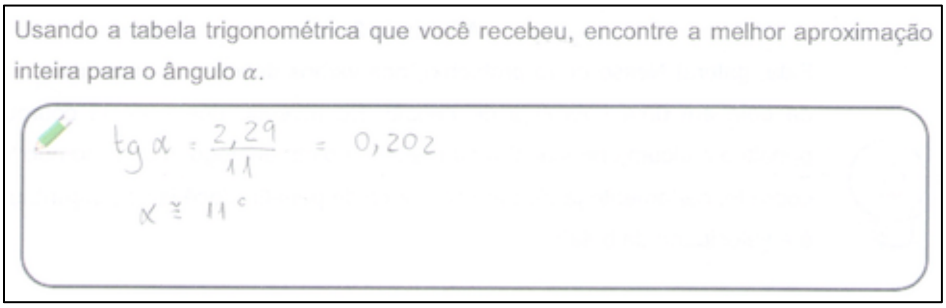


Figura 55. Resposta de um aluno da sexta questão da atividade 1.

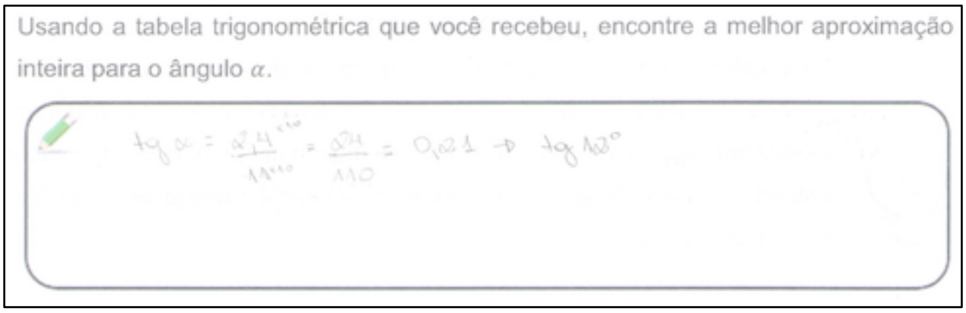


Figura 56. Resposta de um aluno da sexta questão da atividade 1.

A sétima questão da atividade 1 apresentou o maior número de respostas erradas. Assim como na questão anterior, muitos alunos cometeram erros ao realizar as divisões e multiplicações no cálculo das razões trigonométricas. Muitos também escolheram resolver a questão pelo Teorema de Pitágoras e erraram nas potenciações e radiciações, não chegando ao valor esperado. Muitos alunos, que haviam deixado a questão seis em branco, também deixaram essa sem resposta.

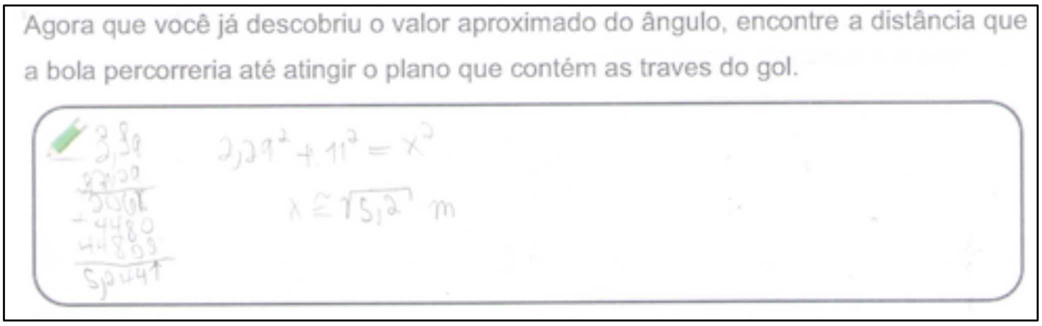


Figura 57. Resposta de um aluno da sétima questão da atividade 1.

Na última, o número de acertos foi praticamente igual ao número de erros. Esse número de acertos ficou abaixo do esperado, pois a questão oito não dependia de outras questões para ser resolvida.

Após a realização dessa primeira atividade pelos 53 alunos, vimos que o número de acertos foi diminuindo no decorrer da atividade, e somente metade dos alunos conseguiram responder corretamente as perguntas finais da atividade. A tabela abaixo ilustra esse fato.

ATIVIDADE 1		
QUESTÕES	NÚMERO DE ACERTOS	NÚMERO DE ERROS
1	50	3
2	49	4
3	38	15
4	39	14
5	32	21
6	24	29
7	23	30
8	27	26

Tabela 1. Quantidade de acertos e erros por questão da atividade 1.

4.2 Análise da Atividade 2

Na primeira pergunta da atividade os alunos deveriam realizar duas tarefas: marcar o ponto M na figura inicial do texto e responder qual a propriedade que este ponto tem em relação à linha do gol. Apenas 4 alunos marcaram o ponto M no lugar errado e 22 alunos não souberam responder corretamente qual a propriedade do ponto M em relação à linha do gol, sendo que 6 deles sabiam a resposta, pois marcaram na figura que o ponto M divide a linha do gol em duas partes iguais de 4 metros cada, como pode ser observado na figura a seguir:

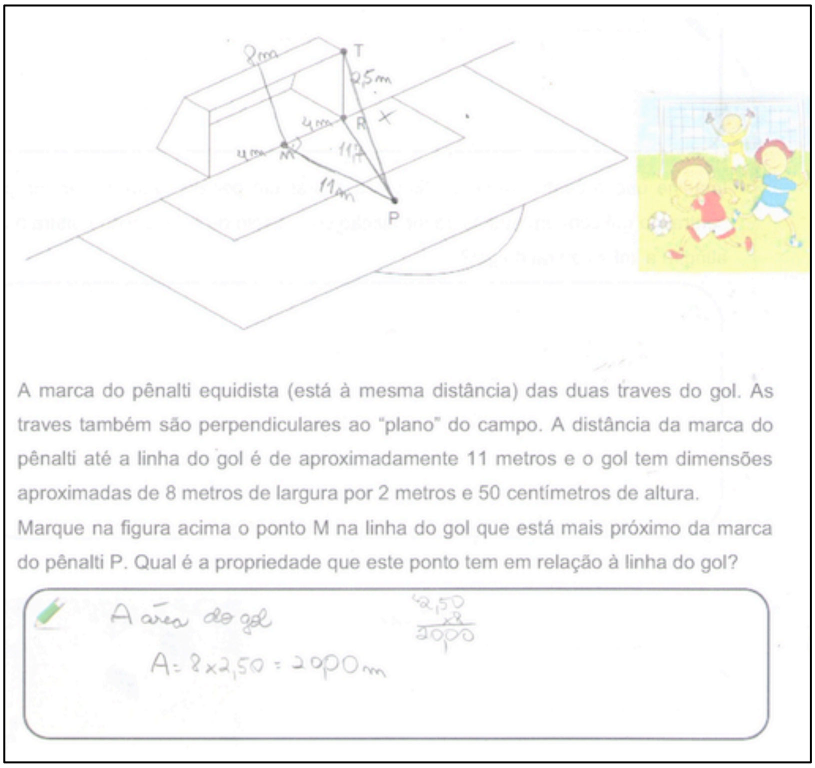


Figura 58. Resposta de um aluno da primeira questão da atividade 2.

Cinco alunos não responderam corretamente a segunda pergunta da atividade. Observamos aqui uma falta de atenção por parte deles, pois a resposta para essa pergunta estava no enunciado da questão anterior: "*A distância da marca do pênalti até a linha do gol é de aproximadamente 11 metros*". A maioria dos alunos que errou essa pergunta também errou a pergunta anterior.

A terceira questão trouxe um número de erros um pouco maior do que o esperado. Dos 53 alunos que responderam à questão, 7 deles não souberam dizer qual era o valor do ângulo solicitado. Os erros apresentaram duas respostas em brancos, 3 alunos que marcaram o ponto M no lugar incorreto e dois alunos que apesar de terem marcado o ponto M corretamente, não entenderam qual era o ângulo pedido como mostra a figura abaixo:

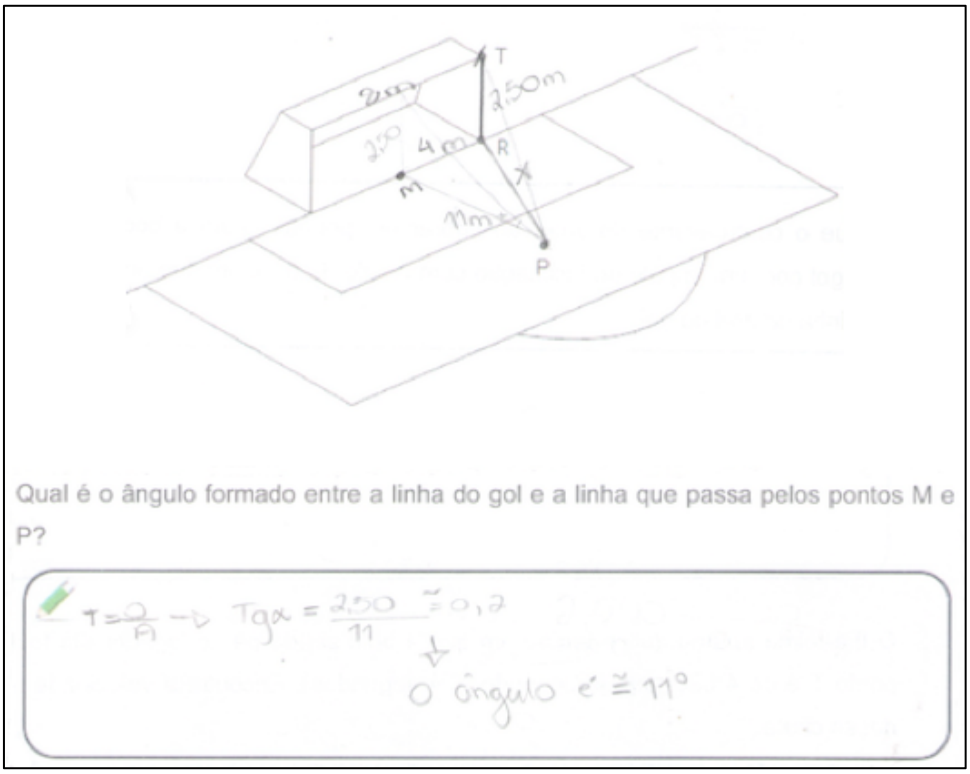


Figura 59. Resposta de um aluno da terceira questão da atividade 2.

Na quarta questão, levamo-nos a refletir mais uma vez que M é o ponto médio da linha do gol. Perguntamos a distância do ponto M ao pé da trave (ponto R) e 8 deles não souberam responder corretamente. Vale ressaltar que, dos 45 alunos que acertaram a resposta dessa questão, 12 deles não responderam corretamente a primeira questão da atividade, cuja resposta era que M é o ponto médio da linha gol. As figuras abaixo ilustram essa comparação:

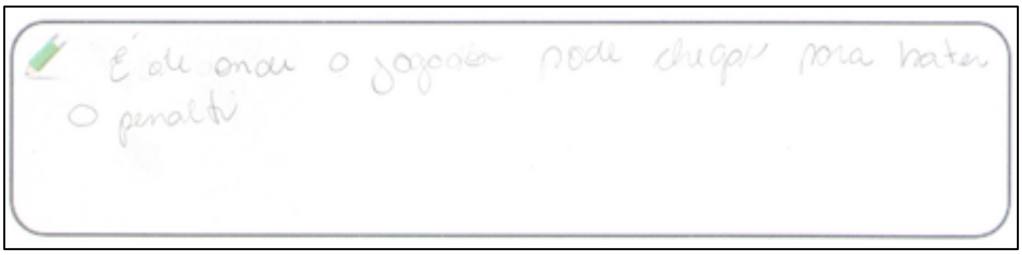


Figura 60. Resposta do aluno X da questão 1 da atividade 2.

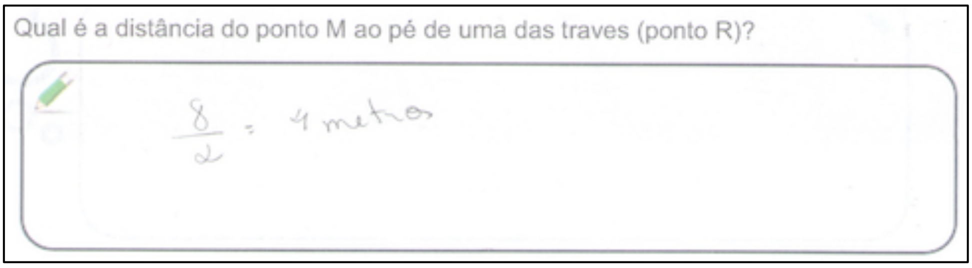


Figura 61. Resposta do aluno X da questão 4 da atividade 2.

Apenas 32 dos 53 alunos responderam corretamente a questão cinco. Através das questões iniciais da atividade, eles puderam enxergar o triângulo retângulo PMR e realizar os cálculos de maneira correta encontrando a medida da hipotenusa PR solicitada.

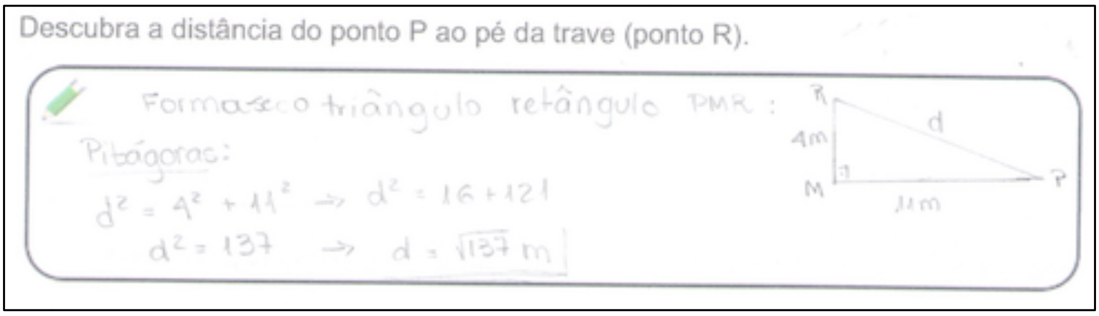


Figura 62. Resposta correta de um aluno da questão 5 da atividade 2.

O número de erros nessa pergunta ficou acima do esperado, pois aplicar o Teorema de Pitágoras é algo bastante familiar aos alunos. Ao analisarmos as respostas, verificamos que a maioria dos equívocos se deu por: deixar a resposta em branco (4 alunos), erros de contas nas potenciações (5 alunos) e erros cometidos em questões anteriores (8 alunos).

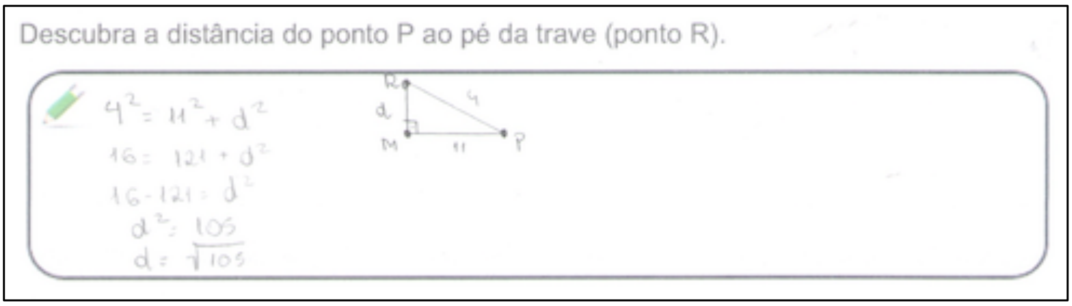


Figura 63. Resposta incorreta de um aluno da questão 5 da atividade 2.

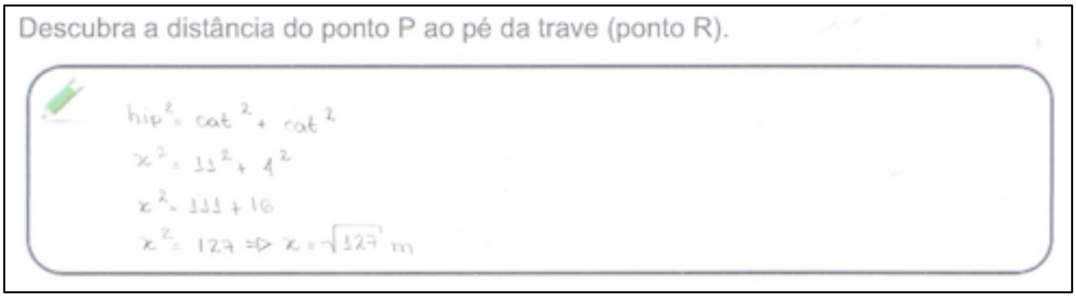


Figura 64. Resposta incorreta de um aluno da questão 5 da atividade 2.

Na penúltima questão, o número de respostas erradas superou o número de respostas certas, com 33 erros e 20 acertos. Essa quantidade de respostas corretas poderia ser ainda menor, porque a questão solicitava um valor aproximado em metros e muitos alunos não acharam essa aproximação, ainda assim essas respostas foram consideradas corretas. Acreditamos que o número de erros acima do esperado se deva ao fato de eles não estarem muito acostumados a trabalhar com números racionais e irracionais na aplicação de potenciações e radiciações, aumentado assim a quantidade de erros em contas e aproximações.

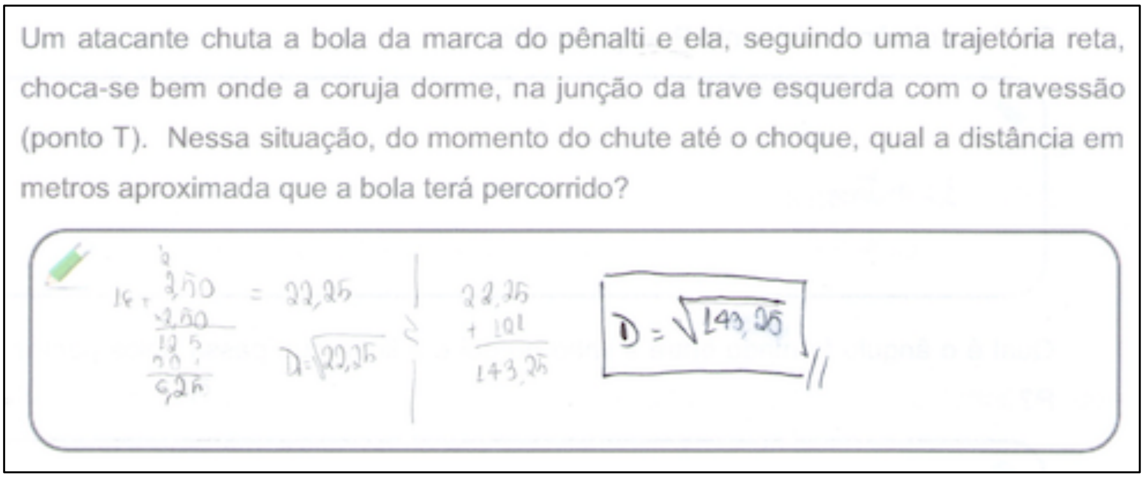


Figura 65. Resposta de um aluno da questão 6 da atividade 2.

Pelo fato da última questão depender do resultado da anterior, os números de acertos e erros apresentados na última pergunta foram próximos. Essa pergunta exibiu o maior número de erros da atividade, pois 4 alunos que acertaram a anterior, por distração cometeram erros de cálculos não chegando na resposta correta da velocidade. A figura abaixo ilustra um desses equívocos:

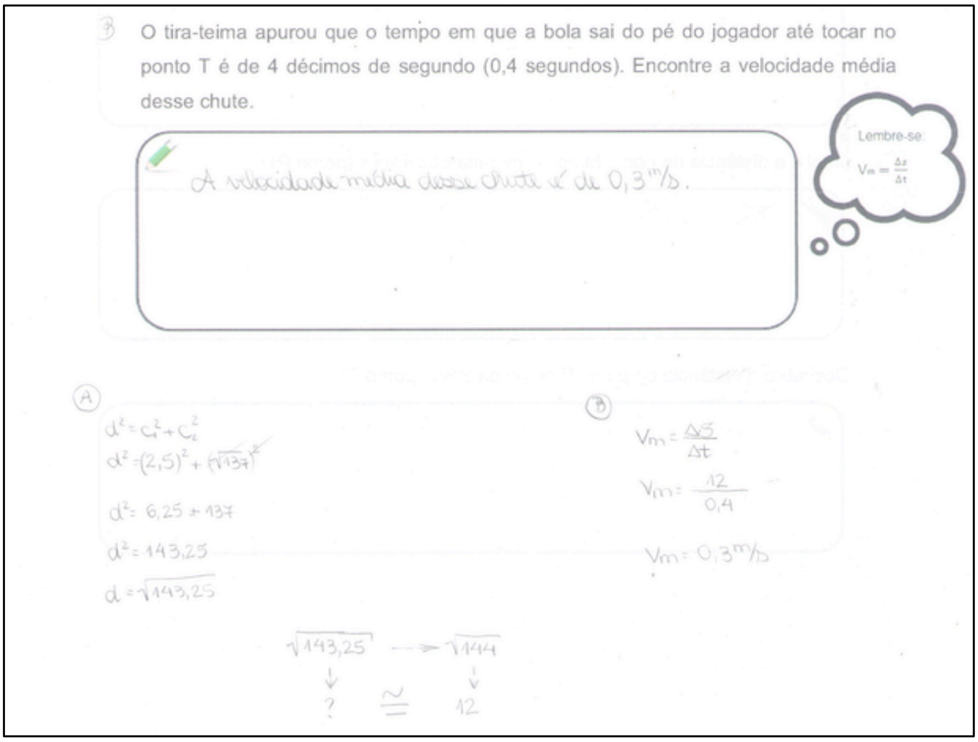


Figura 66. Resposta de um aluno da questão 7 da atividade 2.

Após a realização dessa segunda atividade pelos 53 alunos, vimos que o número de acertos foi diminuindo no decorrer da atividade, e menos da metade dos alunos conseguiram responder corretamente as duas perguntas finais da atividade. A tabela abaixo ilustra esse fato.

ATIVIDADE 2		
QUESTÕES	NÚMERO DE ACERTOS	NÚMERO DE ERROS
1) Marcar o ponto M na figura	49	4
1) Destacar a propriedade do ponto M	31	22
2	48	5
3	46	7
4	45	8
5	32	21
6	20	33
7	16	37

Tabela 2. Quantidade de acertos e erros por questão da atividade 2.

4.3 Análise da Atividade 3

A terceira e a última atividade do primeiro dia foi composta por 5 questões. A maioria dos alunos que fizeram essa atividade acertaram a primeira pergunta. Dos 53 alunos que responderam à pergunta inicial, 10 deles não encontraram o valor correto. Esse número de erros ficou um pouco acima do esperado, pois a primeira questão tratava do cálculo da área de um retângulo fornecendo-se suas dimensões. Após as análises das respostas, consideramos como certas as respostas aproximadas e percebemos que basicamente dois tipos de erros aconteceram: os alunos confundiram a área do retângulo com a área do triângulo ou cometeram erros nas contas de multiplicação. Podemos verificar esses erros pelas respostas dos alunos a seguir:

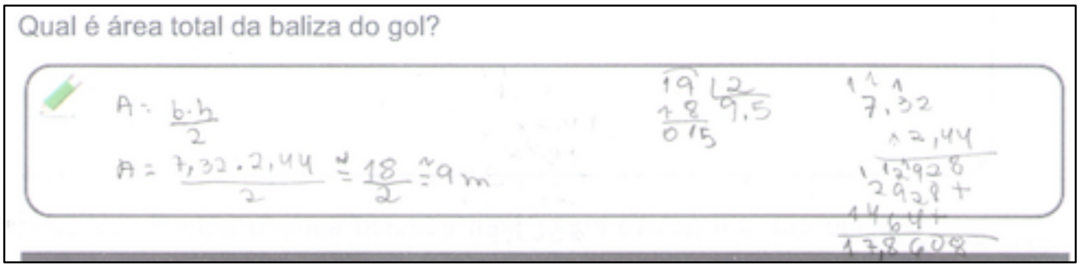


Figura 67. Resposta de um aluno da questão 1 da atividade 3.

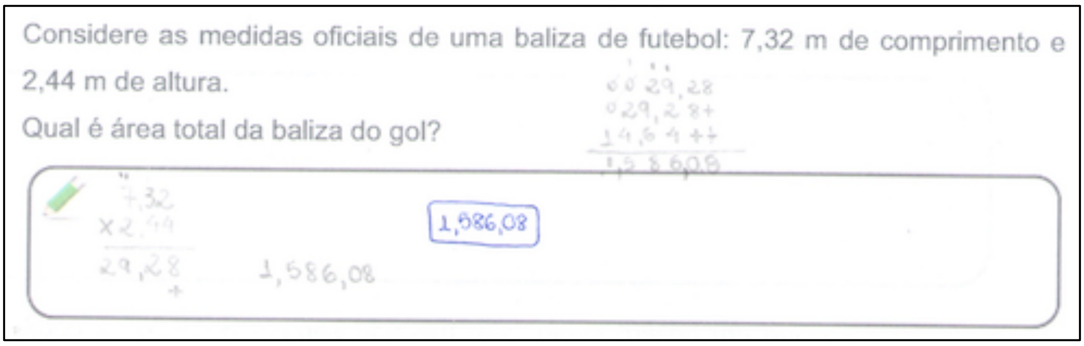


Figura 68. Resposta de um aluno da questão 1 da atividade 3.

A segunda pergunta dependia da resposta da questão anterior. Sendo assim, os 10 alunos que erraram a primeira pergunta da atividade também erraram a segunda. Fora esses 10 alunos, apenas mais 1 não acertou a questão 2 da terceira atividade. Como vimos, a maioria dos alunos também não encontraram dificuldades para responder à segunda questão, que basicamente se resume a uma conta de subtração, como é possível verificar nesta figura:

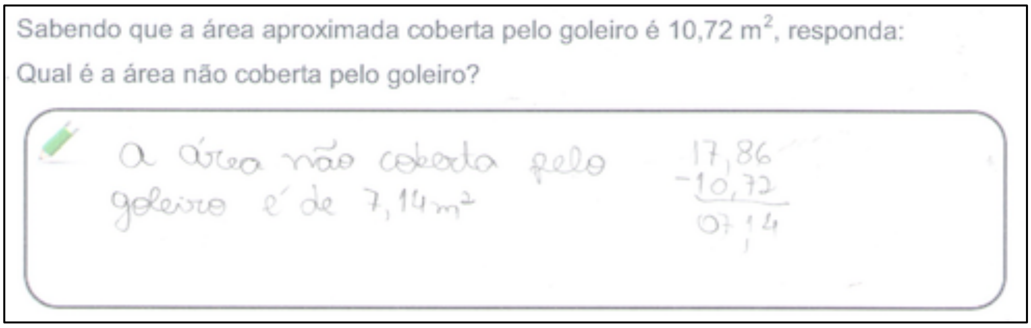


Figura 69. Resposta de um aluno da questão 2 da atividade 3.

Na terceira pergunta, o número de erros praticamente dobrou em relação as primeiras questões. Dessas 23 respostas erradas, 11 já eram esperadas pelo fato de os alunos errarem as questões anteriores. Muitos deles, ao calcularem a porcentagem pedida, montaram corretamente a proporção ou a regra de três, mas se perderam nas contas de multiplicação e divisão. Vale destacar que quatro alunos realizaram corretamente os cálculos, mas encontraram a porcentagem da área não coberta pelo goleiro, o contrário do que a questão solicitava como mostra a figura a seguir:

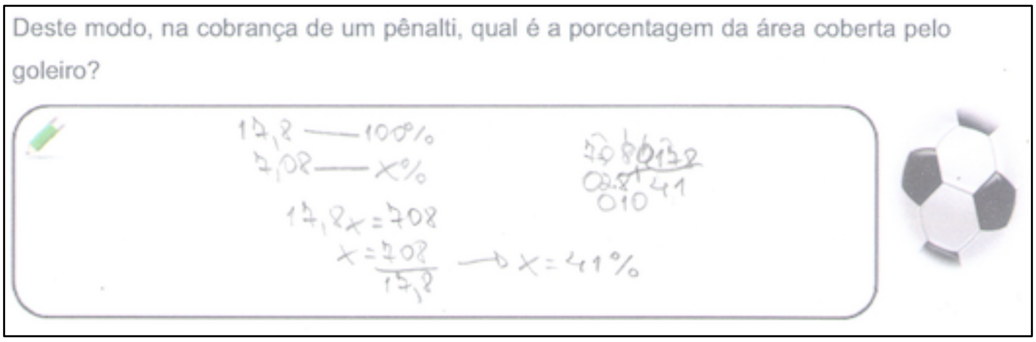


Figura 70. Resposta de um aluno da questão 3 da atividade 3.

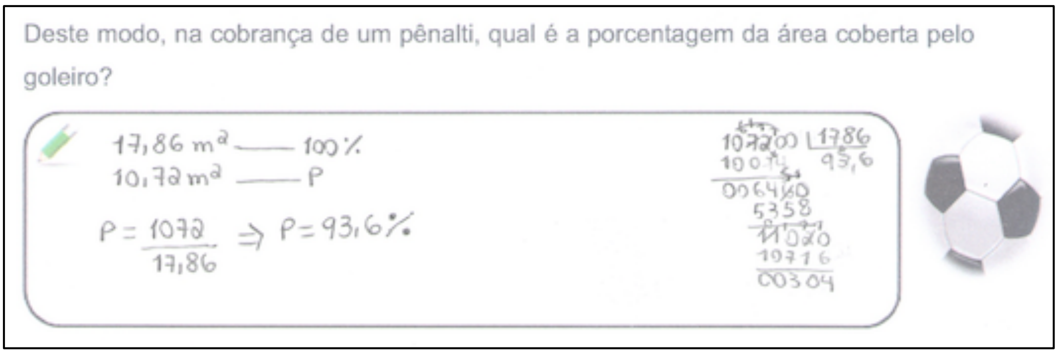
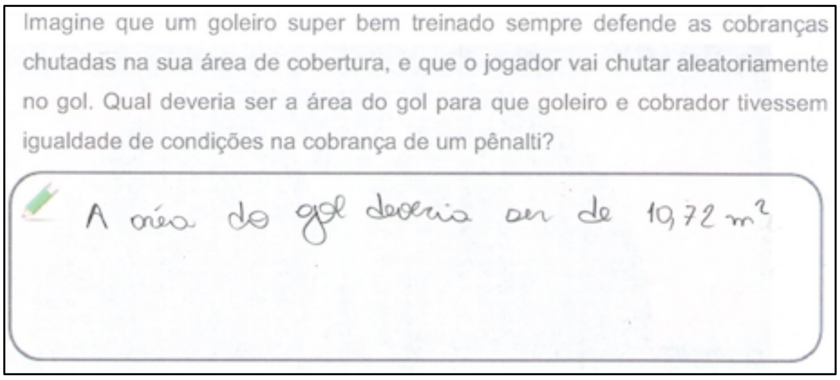


Figura 71. Resposta de um aluno da questão 3 da atividade 3.

A quarta pergunta tem um caráter pessoal, não se aplicando aqui acertos e erros. Podemos destacar que a maioria dos alunos concordaram com “Pelé”, enquanto que os alunos que se basearam nos dados da atividade, discordaram dele. Um fato estranho é que 5 alunos deixaram a pergunta em branco, talvez por ser a penúltima pergunta das três atividades ou por falta de tempo.

A última questão apresentou o maior número de erros da atividade, foram 34 respostas erradas. Houve menos acertos do que o imaginado, pois a questão cinco não dependia das respostas das perguntas anteriores para ser resolvida. Destacamos que, aproximadamente, em um quarto dessas respostas equivocadas os alunos responderam que a área do gol deveria ser igual a do goleiro e não o dobro como esperávamos. A figura abaixo ilustra essa situação:


Imagine que um goleiro super bem treinado sempre defende as cobranças chutadas na sua área de cobertura, e que o jogador vai chutar aleatoriamente no gol. Qual deveria ser a área do gol para que goleiro e cobrador tivessem igualdade de condições na cobrança de um pênalti?

A área do gol deveria ser de 10,72 m²

Figura 72. Resposta de um aluno da questão 5 da atividade 3.

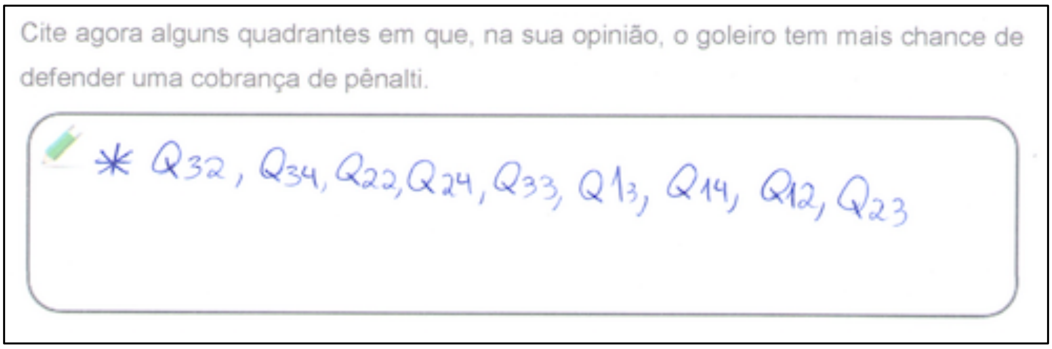
Após a realização dessa terceira atividade pelos 53 alunos, vimos que o número de acertos mais uma vez foi diminuindo no decorrer da atividade, e menos da metade dos alunos conseguiu responder corretamente à pergunta final da atividade. A tabela abaixo ilustra esse fato.

ATIVIDADE 3		
QUESTÕES	NÚMERO DE ACERTOS	NÚMERO DE ERROS
1	43	10
2	42	11
3	30	23
4	**Sim: 29 Não: 19**	5 (em branco)
5	19	34

Tabela 3. Quantidade de acertos e erros por questão da atividade 3.

4.4 Análise da Atividade 4

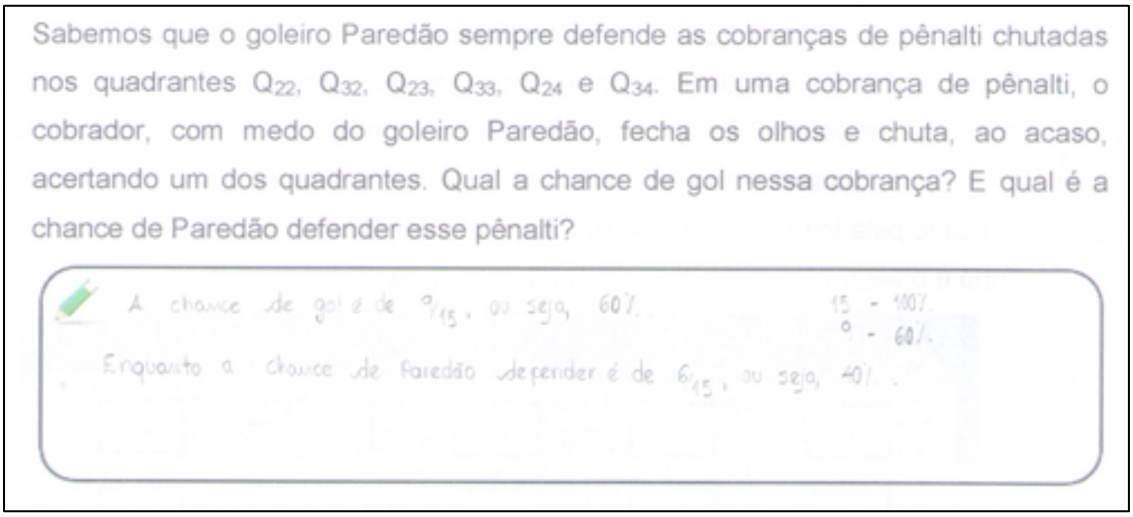
No segundo dia de atividades, 52 alunos fizeram a atividade 4 (um a menos que as três primeiras) e como imaginávamos, quase todos acertaram as duas primeiras perguntas, o que evidencia que eles possuem noções básicas sobre cobranças de pênaltis. Todos os alunos responderam corretamente a primeira pergunta da atividade. Na segunda, apenas 3 cometeram alguns equívocos, pois enumeraram praticamente todos os quadrantes que não utilizaram na resposta da questão 1, inclusive os quadrantes Q12, Q13 e Q14 que ficam no alto do gol e apresentam pouca possibilidade de defesa para os goleiros. A figura abaixo mostra uma dessas respostas.


Cite agora alguns quadrantes em que, na sua opinião, o goleiro tem mais chance de defender uma cobrança de pênalti.

* Q_{32}, Q_{34}, Q_{22}, Q_{24}, Q_{33}, Q_{13}, Q_{14}, Q_{12}, Q_{23}

Figura 73. Resposta de um aluno da questão 2 da atividade 4.

A terceira apresentou números muito próximos de erros e acertos. Do total de 52 respostas, 27 alunos responderam corretamente, sendo que muitos deram a resposta na forma de fração ou porcentagem, como podemos observar pela figura a seguir:


Sabemos que o goleiro Paredão sempre defende as cobranças de pênalti chutadas nos quadrantes Q_{22}, Q_{32}, Q_{23}, Q_{33}, Q_{24} e Q_{34}. Em uma cobrança de pênalti, o cobrador, com medo do goleiro Paredão, fecha os olhos e chuta, ao acaso, acertando um dos quadrantes. Qual a chance de gol nessa cobrança? E qual é a chance de Paredão defender esse pênalti?

A chance de gol é de $9/_{15}$, ou seja, 60%. 15 - 100% 9 - 60%

Enquanto a chance de Paredão defender é de $6/_{15}$, ou seja, 40%.

Figura 74. Resposta de um aluno da questão 3 da atividade 4.

Ao analisar as respostas dos 25 que não souberam responder corretamente, constatamos que os principais erros cometidos por eles foram: não responderam as duas perguntas da questão; não especificaram se o valor encontrado correspondia a chance de defesa ou chance de gol; erros nos cálculos das proporções, dentre outros.

Assim, como na pergunta anterior, a última questão da atividade trouxe números próximos de acertos e erros, sendo 28 acertos e 23 erros. Esses números apresentaram uma ligeira melhora em relação à questão anterior. Acreditamos que isso se deva ao fato de a questão ser mais objetiva, tendo como resposta um número natural, ao contrário da questão anterior a qual traz como resposta um número racional. A figura seguinte exemplifica uma dessas respostas:

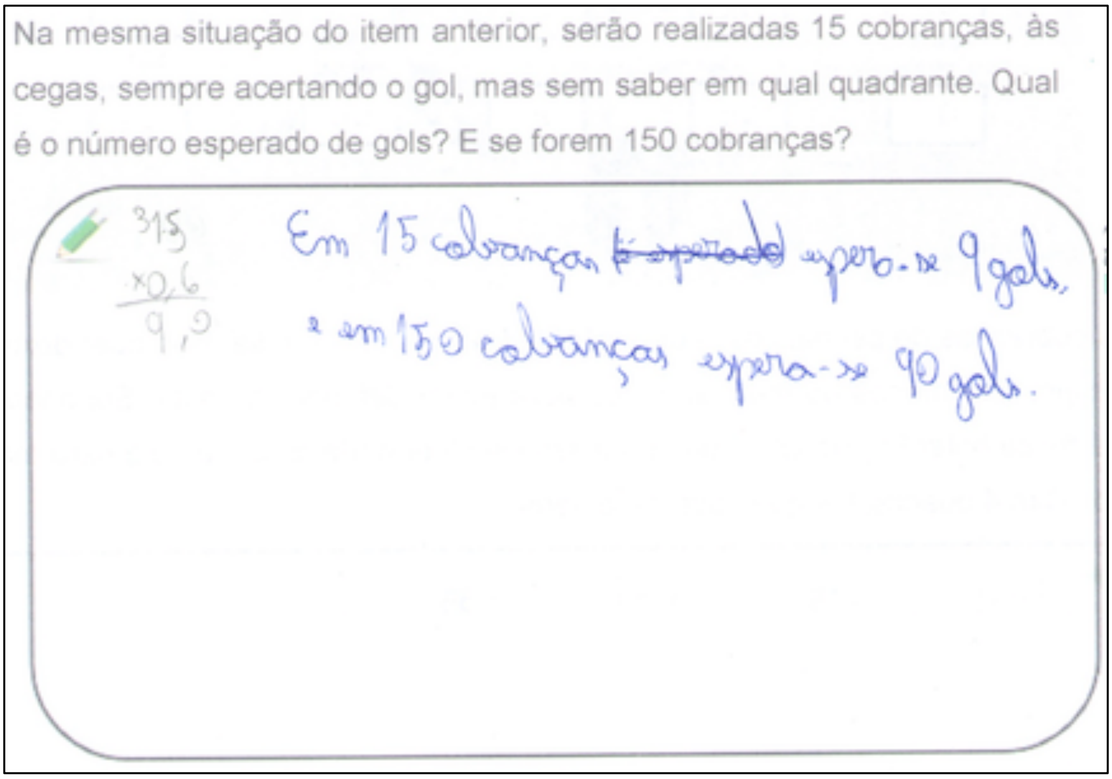


Figura 75. Resposta de um aluno da questão 4 da atividade 4.

Após a realização dessa quarta atividade pelos 52 alunos, notamos que os mesmos não tiveram dificuldades para responder as duas primeiras perguntas. Já nas perguntas finais, o número de acertos ficou um pouco acima da metade. A tabela abaixo ilustra esse fato.

ATIVIDADE 4		
QUESTÕES	NÚMERO DE ACERTOS	NÚMERO DE ERROS
1	52	0
2	49	3
3	27	25
4	29	23

Tabela 4. Quantidade de acertos e erros por questão da atividade 4.

4.5 Análise da Atividade 5

Como descrito anteriormente, antes do início da atividade os alunos simularam cobranças de pênaltis em um simulador GeoGebra disponibilizado na internet e utilizaram os dados coletados para responder as perguntas dessa última atividade.

Na primeira pergunta da última atividade os alunos apenas registraram o número de acertos e erros após as 100 cobranças realizadas. Todos os 52 alunos realizaram as simulações pedidas não havendo erros na primeira questão.

A segunda apresentou 5 respostas erradas. Apesar de ser um número pequeno, esse valor ficou acima do esperado pelo fato de os alunos terem trabalhado com 100 simulações sendo fácil a realização dos cálculos das porcentagens de acertos e erros. Analisando as respostas, constatamos que quatro dos cinco erros foram por arredondamentos não solicitados na questão. A figura abaixo mostra uma dessas respostas equivocadas.

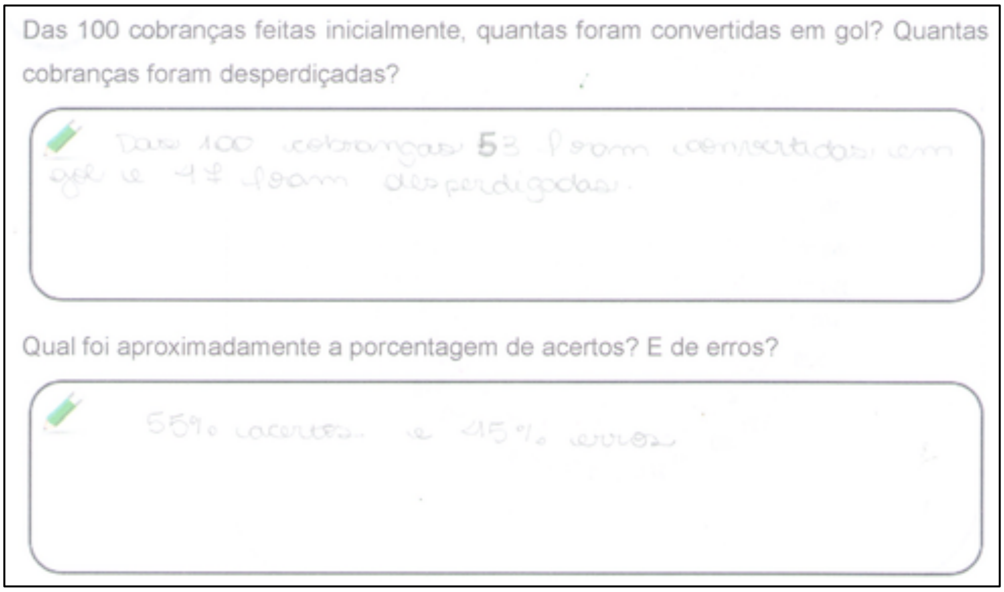


Figura 76. Resposta de um aluno das questões 1 e 2 da atividade 5.

Na terceira pergunta o número de erros praticamente dobrou em relação à questão anterior, mas mesmo assim considerou-se muito bom o fato de 43 alunos terem respondido corretamente à questão. Dentre os nove alunos que não souberam responder à questão, seis deles não fizeram um gráfico de barras verticais como solicitado permanecendo a dúvida se eles não entenderam o que foi pedido ou não sabem o que é um gráfico de barras. As figuras a seguir ilustram uma resposta correta e uma errada.

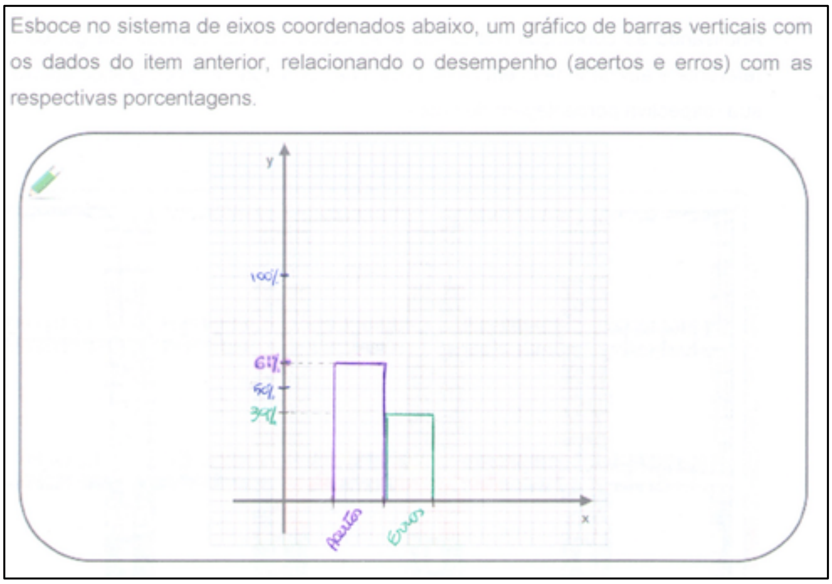


Figura 77. Resposta correta de um aluno da questão 3 da atividade 5.

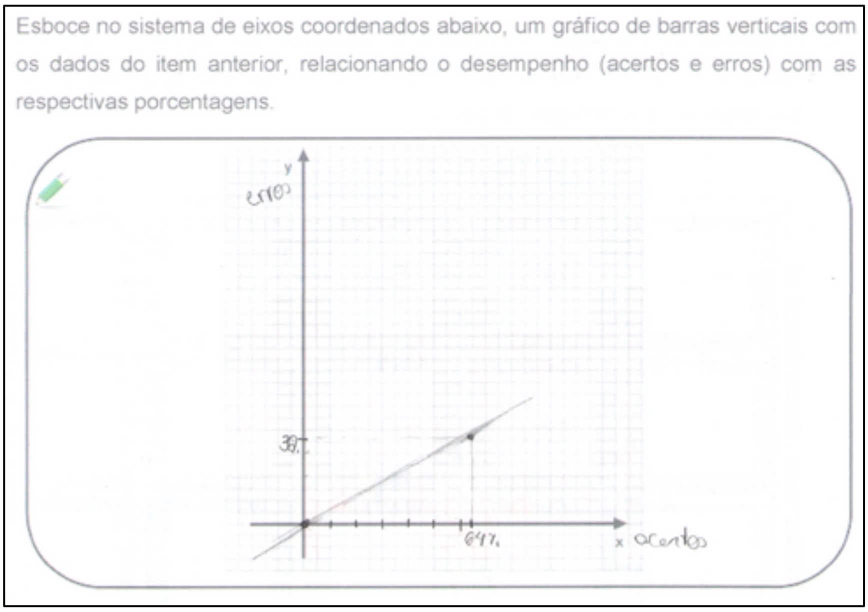


Figura 78. Resposta errada de um aluno da questão 3 da atividade 5.

Assim como a questão anterior, a quarta questão também tratava da construção de um gráfico. Dos 52 alunos que construíram o gráfico de setores, 15 alunos apresentaram respostas equivocadas. Esse número ficou um pouco acima do esperado, pois no próprio enunciado da questão recordamos que: *"Em uma circunferência, 100% da área corresponde a um setor circular de 360°"*. Basicamente eles deveriam realizar uma regra de três para encontrar os ângulos correspondentes aos acertos e erros. Analisando as erradas dos alunos, constatamos que os dois principais erros foram: não dividir o círculo em dois setores circulares e sim na área de dois segmentos e dividir o círculo em três setores circulares sendo que as áreas de acertos e erros não correspondiam a 100% do círculo. A figura seguinte evidencia uma dessas respostas.

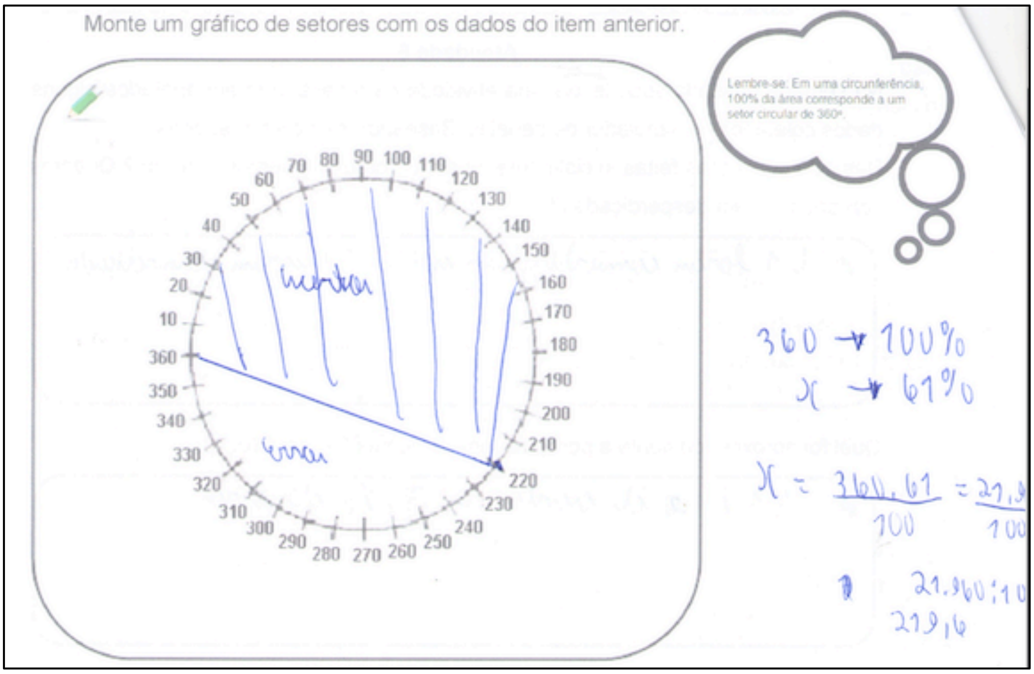


Figura 79. Resposta de um aluno da questão 4 da atividade 5.

A quinta apresentou 46 acertos e apenas 6 erros. O resultado já era esperado, pois os alunos transformaram os números coletados no simulador em porcentagens. Essa transformação ficou facilitada pela realização de 10 cobranças em cada quadrante, tornando cada cobrança equivalente a um percentual de 10%, facilitando em muito os cálculos dos alunos. Pode-se verificar isto na figura a seguir.

Figura 80. Resposta de um aluno da questão 5 da atividade 5.

Na penúltima questão, o número de respostas certas e de erradas foi igual à anterior. A maioria não teve dificuldades para representar a razão pedida e, analisando-se as respostas, ficou claro que os erros se deram na montagem da razão. A figura a seguir mostra uma dessas respostas.

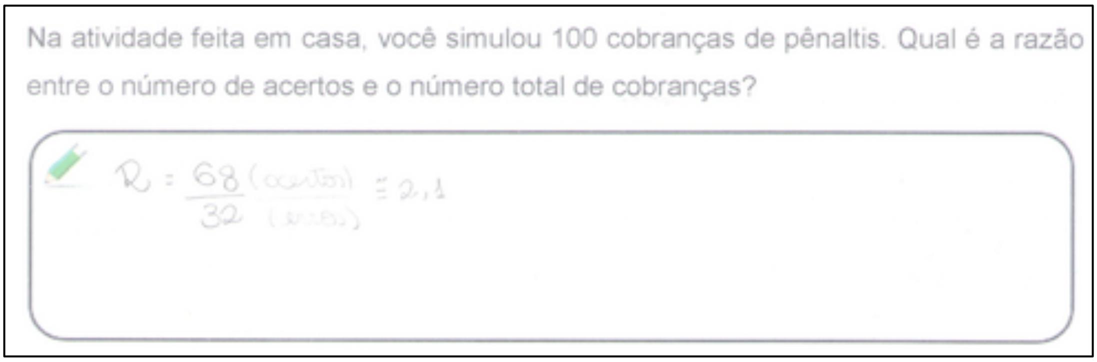
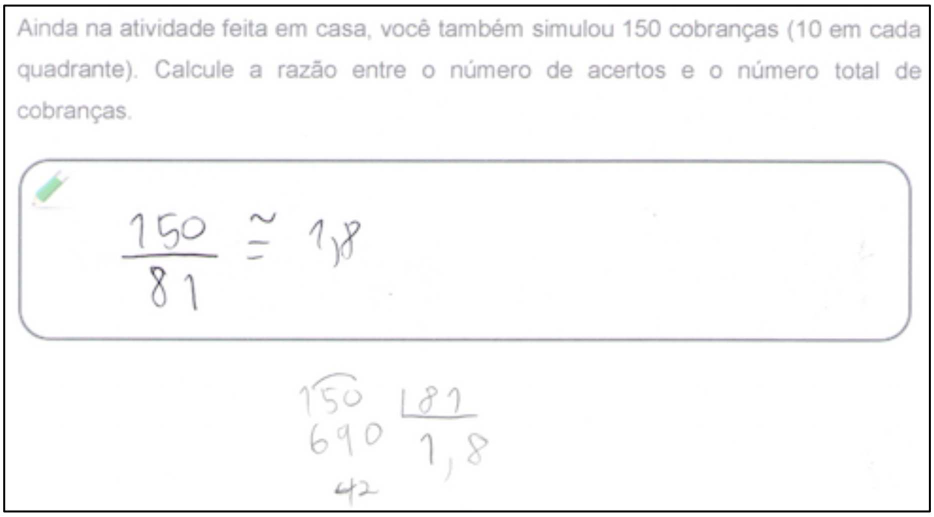


Figura 81. Resposta de um aluno da questão 6 da atividade 5.

Na última questão da atividade o número de erros ficou um pouco acima da questão anterior, foram 9 respostas erradas. Verificou-se que os principais equívocos cometidos foram: a razão dada não correspondia aos números apresentados, numeradores e denominadores invertidos na montagem da razão, dentre outros. Isso é verificável, por exemplo, na figura a seguir..


Ainda na atividade feita em casa, você também simulou 150 cobranças (10 em cada quadrante). Calcule a razão entre o número de acertos e o número total de cobranças.

$\frac{150}{81} \cong 1{,}8$

150 | 81
690 1,8
42

Figura 82. Resposta de um aluno da questão 7 da atividade 5.

Após a realização da quinta atividade pelos 52 alunos, vimos que o número de acertos não sofreu grandes oscilações, mas sempre com a maioria dos alunos respondendo corretamente as questões da atividade. A tabela abaixo ilustra esse fato.

ATIVIDADE 5		
QUESTÕES	NÚMERO DE ACERTOS	NÚMERO DE ERROS
1	52	0
2	47	5
3	43	9
4	37	15
5	46	6
6	46	6
7	43	9

Tabela 5. Quantidade de acertos e erros por questão da atividade 5.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

É evidente que o processo de ensino/aprendizagem está em transição, saindo do modelo centrado no professor como a fonte dos conhecimentos para outros modelos mais dinâmicos em que o professor tem o papel de mediador e orientador. Neste trabalho foi proposto a idealização e aplicação de cinco fichas de atividades para o ensino e retomada de alguns conceitos matemáticos a partir de cobranças de pênaltis no futebol.

Um dos objetivos atingido neste trabalho foi tirar o foco central do processo ensino-aprendizagem do professor e colocá-lo nos alunos, por meio da utilização de atividades nas quais eles foram os protagonistas. As aplicações dessas atividades proporcionaram um processo de estudo mais dinâmico de interpretação e resolução de problemas, qualificando os alunos a fabricar estratégias, realizar conjecturas e compreender conceitos matemáticos e suas aplicações, tanto em situações acadêmicas como em situações do cotidiano.

Outro objetivo atingido foi que as atividades proporcionaram não só uma revisão e aprofundamento de conceitos estudados em sala de aula, bem como um aprofundamento em novos temas, enriquecendo, assim, o aprendizado do aluno. O desenvolvimento das atividades permitiu a eles ganhos em autonomia, maturidade e motivação para aprender, além de contribuir para uma atitude mais proativa, dando-lhes a chance de serem sujeitos ativos na construção dos seus conhecimentos de forma mais significativa.

Por meio deste trabalho, constatou-se que muitos alunos ainda apresentam dificuldades para realização de cálculos envolvendo divisão, multiplicação, potenciação e radiciação. Muitos, mesmo no segundo ano do ensino médio, ainda se perdem em cálculos com números irracionais e decimais que não são exatos. Com isso pode-se inferir que eles, ao longo de toda a vida escolar, foram acostumados a trabalhar apenas com números naturais ou decimais exatos. Pôde-se constatar também que muitas vezes, na matemática, a resolução de uma questão não está nela mesma, mas no fato de o aluno, ao ler o enunciado, não compreender o que está sendo solicitado, mostrando que se trata de um problema de interpretação.

Outro fato que chamou a atenção foi que, quando estão inseridos no processo tradicional de ensino, em que o ciclo de algumas semanas de aula é seguido de uma prova para avaliação do conteúdo trabalhado e, sucessivamente, mais semanas de aula e uma nova avaliação, não é possível para o professor perceber que, mesmo alunos com notas satisfatórias nessas provas, não estão retendo e carregando consigo conteúdos básicos e fundamentais que precisam ser assimilados de forma definitiva para o aprendizado e o entendimento de conteúdos mais complexos da matemática no futuro. Nesse caso, a aprendizagem é efêmera e momentânea, necessária apenas para "tirar nota", e não vista como um conhecimento duradouro e necessário para ser utilizado em contextos futuros tanto na vida escolar como na vida prática.

Durante o processo foi possível perceber também uma conscientização do professor em relação às práticas e pontos de vista pedagógicos apresentados nesse trabalho, pois para alguns pode ser complicado assumir ou aceitar um comportamento menos tradicional, visto que frequentemente nota-se resistência em utilizar metodologias e materiais diversificados, seja por serem considerados como perda de tempo ou por acomodação aos métodos rotineiramente utilizados, acabando assim, por recorrer às formas tradicionais de docência. Também foi possível refletir sobre a importância de acreditar nos alunos e valorizar suas potencialidades, estimulando e incentivando-os ainda mais aos estudos. Para isso é de suma importância que o professor conheça seu alunado e seja capaz de viabilizar caminhos que respeitem o tempo de aprendizagem de cada um individualmente.

Ainda há muito a ser feito para que essas duas vertentes de ensino – a escola tradicional com seus professores e o inevitável processo de cobrança e preparação para o sucesso nos vestibulares, e uma prática mais inovadora e centrada no potencial do aluno visando a uma sedimentação mais duradoura do conhecimento aprendido – se equacionem de uma forma ideal. O ensino tradicional da matemática prioriza a resolução cansativa de exercícios e processos de memorização. No entanto, é fato que esse processo de ensino deverá adaptar-se às novas maneiras de ensinar, e que os professores precisam buscar, sempre que possível, atualizar e renovar seus métodos, para que os conceitos essenciais aprendidos possam ser carregados ao longo de sua vida.

É importante ressaltar também que para a obtenção de resultados melhores e mudança efetiva desse contexto deve haver uma continuidade no processo de ensino/aprendizagem ao longo de toda a vida escolar e não apenas algumas tentativas isoladas de inovação por parte de alguns educadores. Isso só será possível por intermédio de programas que englobem toda a rede de ensino nacional, desde o ensino infantil até o superior, objetivando criar condições de ensino ideais para professores e alunos.

Espera-se que esse trabalho possa ser mais um recurso para outros professores que queiram desenvolver materiais diversificados contendo uma abordagem interativa e diferenciada com seus alunos, e que possam ser aplicados tanto em escolas particulares quanto públicas.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT** – Revista Eletrônica de Educação Matemática. V3.6, p.62-77, UFSC:2008. Disponível em: <http://www.journal.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/13031/12137>. Acesso em: fev. 2017.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique: Recherches em Didactique dês Mathématiques, vol. 9, no 3, pp. 281-307. La Pensée Sauvage, 1990.

CARLOS, JG. **Interdisciplinaridade: o que é isso?** Interdisciplinaridade no Ensino Médio: desafios e potencialidades, 2012

BRASIL, MEC (Ministério da Educação), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec), **PCNEM**, Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Brasília: MEC/Semtec, 2000.

BRASIL, PCN+. Ensino Médio, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - MEC-SEMTEC, 2002.

DIAS, C. C.; SAMPAIO, J. C. D. **Matemática na prática**: Curso de especialização para professores do ensino médio de matemática. 1. ed. Cuiabá, MT: Central de texto, 2010. 87 p. (Módulo I – Desafios geométricos).

CAETANO, P. A. S.; PATERLINI, R. R. **Matemática na prática**: Curso de especialização para professores do ensino médio de matemática. 1. ed. Cuiabá, MT: Central de texto, 2010. 62 p. (Módulo I – Jogo dos discos).

DIAS, C. C.; SAMPAIO, J. C. D.; ROSA, M. B.; CAETANO, P. A. S.; MALAGUTTI, P. L. A.; PATERLINI, R. R.; GIRALDO, V. A. **Matemática na prática**: Curso de especialização para professores do ensino médio de matemática. 1. ed. Cuiabá, MT: Central de texto, 2010. 28 p. (Módulo I – A sala de aula em foco).

ROSSO JUNIOR, A. C.; AMSON, G. A. J.; CARDOSO, R. T. **Matemática: Livro-texto** Ensino Médio, 1° ano: 1 semestre. 1. ed. São Paulo: SOMOS, 2016.

ROSSO JUNIOR, A. C.; AMSON, G. A. J.; CARDOSO, R. T. **Matemática: Livro-texto** Ensino Médio, 1° ano: 2 semestre. 1. ed. São Paulo: SOMOS, 2016.

ROSSO JUNIOR, A. C.; AMSON, G. A. J.; CARDOSO, R. T. **Matemática: Livro-texto** Ensino Médio, 2° ano: 1 semestre. 1. ed. São Paulo: SOMOS, 2017.

ROSSO JUNIOR, A. C.; AMSON, G. A. J.; CARDOSO, R. T. **Matemática: Livro-texto** Ensino Médio, 2° ano: 2 semestre. 1. ed. São Paulo: SOMOS, 2017.

APÊNDICES:

A) SIMULADOR desenvolvido no GeoGebra: < https://www.geogebra.org/m/QJc2AHrM>.

B) FICHAS DE ATIVIDADES

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
Campus São Carlos

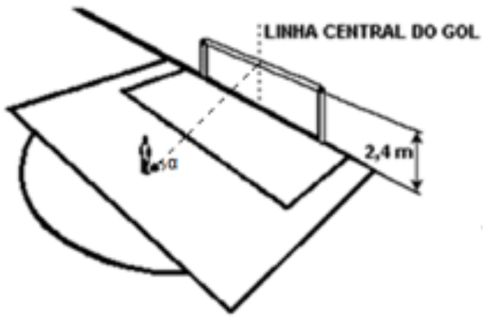
Escola Espaço Livre

Nome: 2° E.M. Data:

Atividade 1

Olá pessoal. Estou com um problema e gostaria que vocês me ajudassem a resolver.

O jogador representado adiante vai cobrar um pênalti e decidiu chutar a bola na direção da linha central do gol. A altura da trave é de 2 metros e 40 centímetros, o diâmetro da bola é de 22 centímetros e a marca do pênalti está a 11 metros da linha do gol. Preciso saber de quanto deve ser, no máximo, o ângulo de elevação da bola, para que o jogador tenha possibilidade de fazer o gol. Vocês poderiam me ajudar a calcular esse ângulo?



Primeiro, para me ajudar, vocês vão precisar responder algumas perguntas para entender o problema. Vamos lá?!

Se o centro da bola atingir a linha central do gol a 2 metros e 40 centímetros, o jogador terá sucesso? Justifique.

Qual o raio da bola?

Lembre-se de descontar o valor do raio nos cálculos!

Qual a altura máxima que o centro da bola pode atingir o gol sem bater na trave?

Desenhe um triângulo representando a situação descrita acima com os valores que você descobriu nos itens anteriores.

Vamos chamar de α esse ângulo de elevação, ou seja, o ângulo que a trajetória da bola faz com o solo. Qual é a relação trigonométrica que você usaria para determinar esse ângulo?

Usando a tabela trigonométrica que você recebeu, encontre a melhor aproximação inteira para o ângulo α.

Agora que você já descobriu o valor aproximado do ângulo, encontre a distância que a bola percorreria até atingir o plano que contém as traves do gol.

Imagine que o centroavante do time, ao cobrar um pênalti, chuta a bola na linha central do gol com um ângulo de inclinação com o solo de 6°. Com que altura a bola atingirá a linha central do gol?

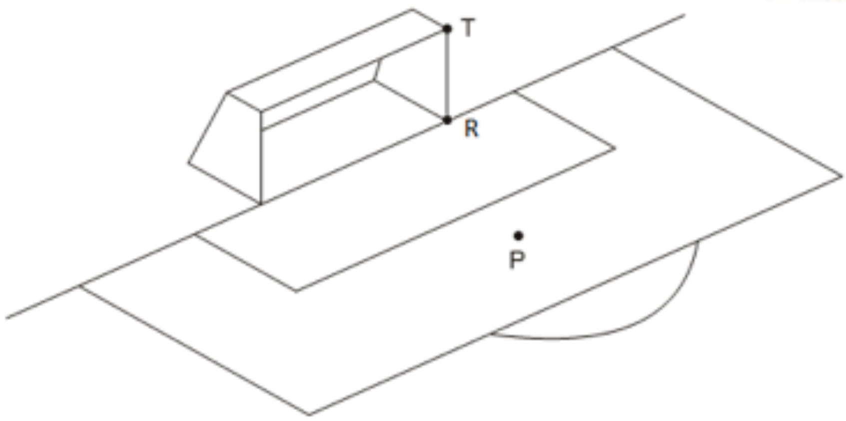
Escola Espaço Livre

Nome: 2° E.M. Data:

Atividade 2

Fala, galera! Nesse outro problema, nós vamos descobrir a velocidade média da bola em uma cobrança de pênalti. Eu acredito que você já cobrou um pênalti em alguma brincadeira ou até mesmo em um jogo, mas caso não tenha cobrado, certamente já viu uma cobrança de pênalti. Você já se perguntou qual é a velocidade da bola?

A figura mostra parte de um campo de futebol, em que estão representados um dos gols e a marca do pênalti (ponto P).



A marca do pênalti equidista (está à mesma distância) das duas traves do gol. As traves também são perpendiculares ao "plano" do campo. A distância da marca do pênalti até a linha do gol é de aproximadamente 11 metros e o gol tem dimensões aproximadas de 8 metros de largura por 2 metros e 50 centímetros de altura.

Marque na figura acima o ponto M na linha do gol que está mais próximo da marca do pênalti P. Qual é a propriedade que este ponto tem em relação à linha do gol?

Qual é a distância do ponto P ao ponto M?

Qual é o ângulo formado entre a linha do gol e a linha que passa pelos pontos M e P?

Qual é a distância do ponto M ao pé de uma das traves (ponto R)?

Descubra a distância do ponto P ao pé da trave (ponto R).

Um atacante chuta a bola da marca do pênalti e ela, seguindo uma trajetória reta, choca-se bem onde a coruja dorme, na junção da trave esquerda com o travessão (ponto T). Nessa situação, do momento do chute até o choque, qual a distância em metros aproximada que a bola terá percorrido?

O tira-teima apurou que o tempo em que a bola sai do pé do jogador até tocar no ponto T é de 4 décimos de segundo (0,4 segundos). Encontre a velocidade média desse chute.

Lembre-se:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

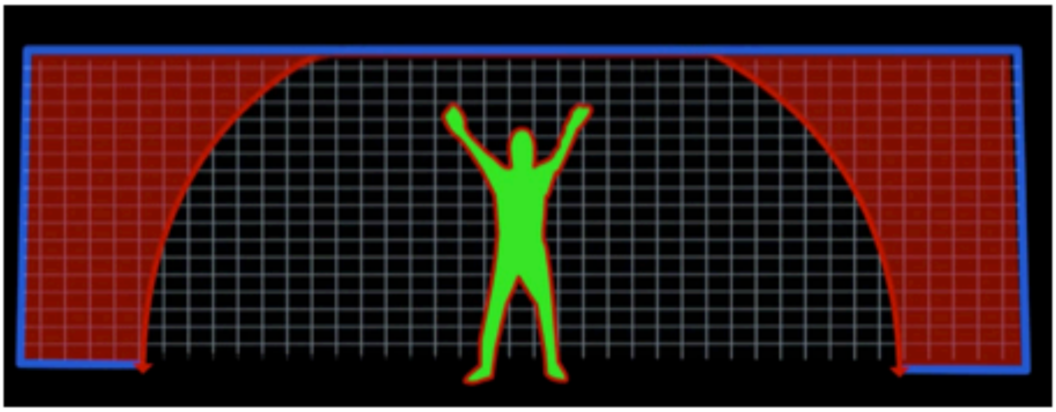
Escola Espaço Livre

Nome: 2° E.M. Data:

Atividade 3

Considere as medidas oficiais de uma baliza de futebol: 7,32 m de comprimento e 2,44 m de altura.

Qual é área total da baliza do gol?



Sabendo que a área aproximada coberta pelo goleiro é 10,72 m^2, responda:

Qual é a área não coberta pelo goleiro?

Deste modo, na cobrança de um pênalti, qual é a porcentagem da área coberta pelo goleiro?

Uma vez Pelé disse que: "Um pênalti é uma forma covarde de fazer um gol". Você concorda? Use argumentos matemáticos para elaborar sua resposta.

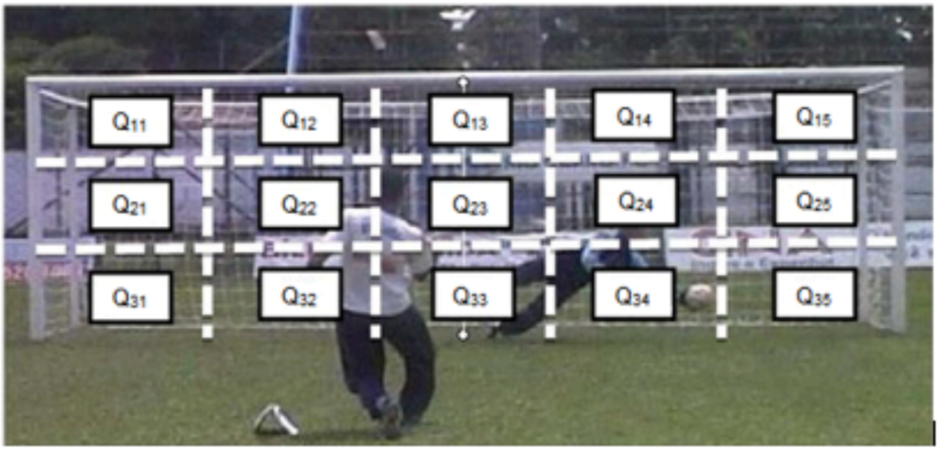
Imagine que um goleiro super bem treinado sempre defende as cobranças chutadas na sua área de cobertura, e que o jogador vai chutar aleatoriamente no gol. Qual deveria ser a área do gol para que goleiro e cobrador tivessem igualdade de condições na cobrança de um pênalti?

Escola Espaço Livre

Nome: 2° E.M. Data:

Atividade 4

Pessoal, que tal calcularmos as chances de um jogador ter sucesso em uma cobrança de pênalti? Para isso, vamos dividir o gol em 15 partes iguais e chamar cada uma dessas partes de "quadrante", como na figura. Cada quadrante está indicado pela letra Q e por dois números no subíndice. O primeiro número indica a linha e o segundo a coluna que o quadrante pertence.



Nas cobranças de pênaltis os chutes são de 90 km/h, em média. Isso quer dizer que o goleiro tem menos de meio segundo para tentar defender o chute. Suponha que você fosse bater um pênalti e que pudesse escolher onde chutar a bola para marcar o gol. Cite 4 quadrantes que você escolheria.

Cite agora alguns quadrantes em que, na sua opinião, o goleiro tem mais chance de defender uma cobrança de pênalti.

Sabemos que o goleiro Paredão sempre defende as cobranças de pênalti chutadas nos quadrantes Q_{22}, Q_{32}, Q_{23}, Q_{33}, Q_{24} e Q_{34}. Em uma cobrança de pênalti, o cobrador, com medo do goleiro Paredão, fecha os olhos e chuta, ao acaso, acertando um dos quadrantes. Qual a chance de gol nessa cobrança? E qual é a chance de Paredão defender esse pênalti?

Na mesma situação do item anterior, serão realizadas 15 cobranças, às cegas, sempre acertando o gol, mas sem saber em qual quadrante. Qual é o número esperado de gols? E se forem 150 cobranças?

Escola Espaço Livre	2° E.M.	Data:
Nome:		

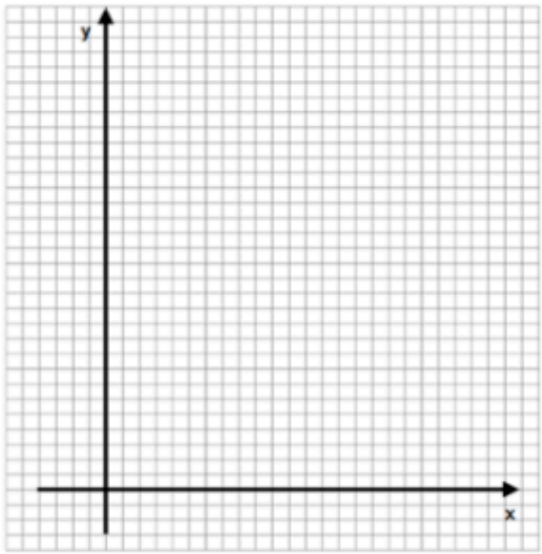
Atividade 5

Na semana passada você levou uma atividade para casa, e foram anotados alguns dados coletados no simulador de pênaltis. Baseando-se neles, responda:

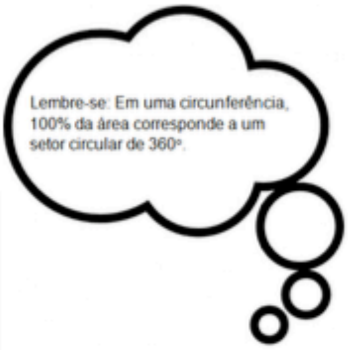
Das 100 cobranças feitas inicialmente, quantas foram convertidas em gol? Quantas cobranças foram desperdiçadas?

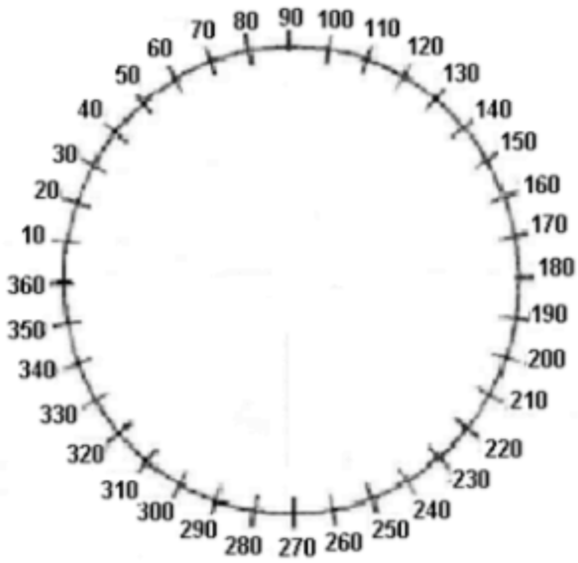
Qual foi aproximadamente a porcentagem de acertos? E de erros?

Esboce no sistema de eixos coordenados abaixo, um gráfico de barras verticais com os dados do item anterior, relacionando o desempenho (acertos e erros) com as respectivas porcentagens.

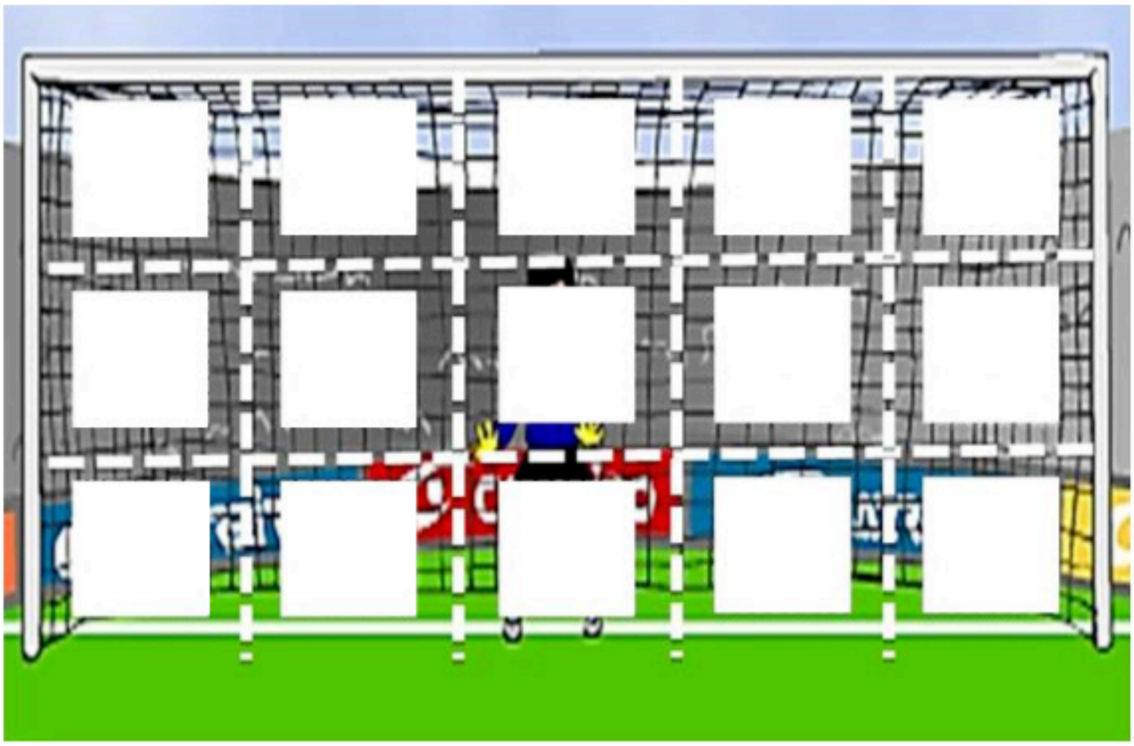


Monte um gráfico de setores com os dados do item anterior.





Analisando as cobranças realizadas e as cobranças convertidas em gol da tabela referente a atividade feita em casa, preencha cada quadrante do gráfico abaixo, com sua respectiva porcentagem de gols.



Na atividade feita em casa, você simulou 100 cobranças de pênaltis. Qual é a razão entre o número de acertos e o número total de cobranças?

Ainda na atividade feita em casa, você também simulou 150 cobranças (10 em cada quadrante). Calcule a razão entre o número de acertos e o número total de cobranças.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
Campus São Carlos

Escola Espaço Livre	2° E.M.	Data:
Nome:		

Anexo Atividade 5

Siga os passos a seguir para realizar essa tarefa:

- Acesse o site **www.geogebra.org**
- Em seguida, clique em ***materiais***

- No campo de buscas, digite **Fausto Zola** e clique em **buscar**

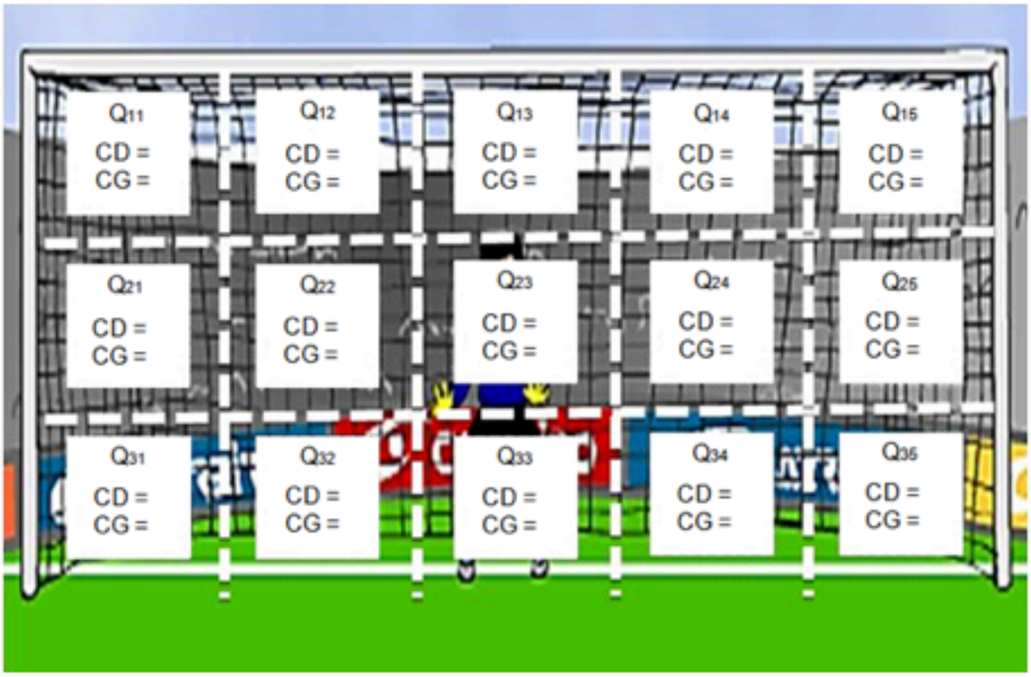
- Selecione a atividade **Simulador de pênalti**.

- Realize 100 cobranças e registre aqui o número de gols: ______ gols
- Após as 100 cobranças, clique na tecla reiniciar.
- Agora, você terá que realizar 150 cobranças, 10 em cada quadrante. Selecione um quadrante, realize 10 cobranças, clique em reiniciar. Escolha outro quadrante, realize 10 cobranças, clique em reiniciar e assim sucessivamente até terminarem os quadrantes, totalizando 150 cobranças.

- Anote os resultados em cada quadrante seguindo a legenda abaixo:

  CD: cobranças defendidas.

  CG: cobranças convertidas em gol.



ANEXO: TABELA TRIGONOMÉTRICA

Anexo Atividade 1

Tabela de Razões Trigonométricas

α	senα	cosα	tgα	α	senα	cosα	tgα
0	0,00000	1,00000	0,00000	45	0,70711	0,70711	1,00000
1	0,01745	0,99985	0,01746	46	0,71934	0,69466	1,03553
2	0,03490	0,99939	0,03492	47	0,73135	0,68200	1,07237
3	0,05234	0,99863	0,05241	48	0,74314	0,66913	1,11061
4	0,06976	0,99756	0,06993	49	0,75471	0,65606	1,15037
5	0,08716	0,99619	0,08749	50	0,76604	0,64279	1,19175
6	0,10453	0,99452	0,10510	51	0,77715	0,62932	1,23490
7	0,12187	0,99255	0,12278	52	0,78801	0,61566	1,27994
8	0,13917	0,99027	0,14054	53	0,79864	0,60182	1,32704
9	0,15643	0,98769	0,15838	54	0,80902	0,58779	1,37638
10	0,17365	0,98481	0,17633	55	0,81915	0,57358	1,42815
11	0,19081	0,98163	0,19438	56	0,82904	0,55919	1,48256
12	0,20791	0,97815	0,21256	57	0,83867	0,54464	1,53986
13	0,22495	0,97437	0,23087	58	0,84805	0,52992	1,60033
14	0,24192	0,97030	0,24933	59	0,85717	0,51504	1,66428
15	0,25882	0,96593	0,26795	60	0,86603	0,50000	1,73205
16	0,27564	0,96126	0,28675	61	0,87462	0,48481	1,80405
17	0,29237	0,95630	0,30573	62	0,88295	0,46947	1,88073
18	0,30902	0,95106	0,32492	63	0,89101	0,45399	1,96261
19	0,32557	0,94552	0,34433	64	0,89879	0,43837	2,05030
20	0,34202	0,93969	0,36397	65	0,90631	0,42262	2,14451
21	0,35837	0,93358	0,38386	66	0,91355	0,40674	2,24604
22	0,37461	0,92718	0,40403	67	0,92050	0,39073	2,35585
23	0,39073	0,92050	0,42447	68	0,92718	0,37461	2,47509
24	0,40674	0,91355	0,44523	69	0,93358	0,35837	2,60509
25	0,42262	0,90631	0,46631	70	0,93969	0,34202	2,74748
26	0,43837	0,89879	0,48773	71	0,94552	0,32557	2,90421
27	0,45399	0,89101	0,50953	72	0,95106	0,30902	3,07768
28	0,46947	0,88295	0,53171	73	0,95630	0,29237	3,27085
29	0,48481	0,87462	0,55431	74	0,96126	0,27564	3,48741
30	0,50000	0,86603	0,57735	75	0,96593	0,25882	3,73205
31	0,51504	0,85717	0,60086	76	0,97030	0,24192	4,01078
32	0,52992	0,84805	0,62487	77	0,97437	0,22495	4,33148
33	0,54464	0.83867	0,64941	78	0,97815	0,20791	4,70463
34	0,55919	0,82904	0,67451	79	0,98163	0,19081	5,14455
35	0,57358	0,81915	0,70021	80	0,98481	0,17365	5,67128
36	0,58779	0,80902	0,72654	81	0,98769	0,15643	6,31375
37	0,60182	0,79864	0,75355	82	0,99027	0,13917	7,11537
38	0,61566	0.78801	0,78129	83	0,99255	0,12187	8,14435
39	0,62932	0,77715	0.80978	84	0,99452	0,10453	9,51436
40	0,64279	0,76604	0,83910	85	0,99619	0,08716	11,43005
41	0,65606	0,75471	0,86929	86	0,99756	0,06976	14,30067
42	0,66913	0,74314	0,90040	87	0,99863	0,05234	19,08114
43	0,68200	0,73135	0,93252	88	0,99939	0,03490	28,63625
44	0,69466	0,71934	0,96569	89	0,99985	0,01745	57,28996