

Marcos Alberto Gonçalves dos Santos Filho

Turbulência de Ondas em Condensados de Bose-Einstein

Brasil

Fevereiro de 2018

Marcos Alberto Gonçalves dos Santos Filho

Turbulência de Ondas em Condensados de Bose-Einstein

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos.

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Francisco Ednilson Alves dos Santos

Brasil
Fevereiro de 2018



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Marcos Alberto Gonçalves dos Santos Filho, realizada em 19/02/2018:

Prof. Dr. Francisco Ednilson Alves dos Santos
UFSCar

Prof. Dr. Emanuel Alves de Lima Henn
USP

Prof. Dr. Emanuel Fernandes de Lima
UFSCar

Agradecimentos

Primariamente agradeço a minha família por todo suporte oferecido durante esse trajeto, em especial à minha mãe, Marinei, e ao meu pai, Marcos.

Agradeço também ao meu orientador, Professor Francisco Ednilson, por toda ajuda e orientação no desenvolvimento deste trabalho. Na mesma linha também agradeço aos companheiros de grupo, Renan e Ricardo, pelo suporte e companhia mútua nos dias longos de trabalho e contas sem fim.

Gostaria também de agradecer os meus amigos, Gabriela, Tatiane, Natália, Paola, Diego, Eduardo, Marina e Gustavo pela companhia através dos anos.

Agradeço também à Universidade Federal de São Carlos, ao Departamento de Física em especial, pela infra-estrutura que possibilitou a realização deste trabalho e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não haveria sido realizado.

Resumo

Neste trabalho utilizamos como ponto de partida a teoria desenvolvida por Zakharov e Nazarenko para tratar a turbulência de ondas em sistemas com não linearidade fraca em condensados de Bose-Einstein atômicos com temperatura baixa o suficiente a ponto de serem tratados pelo modelo de Gross-Pitaevskii. Após obtermos a equação cinética do condensado e extrair as soluções estacionárias fora do equilíbrio, as chamadas cascatas de Kolmogorov-Zakharov, partimos para o nosso objetivo de demonstrar que é possível conciliar estas soluções da equação cinética com as propriedades hidrodinâmicas do condensado. Para isso calculamos a função de correlação da corrente do condensado tanto para o regime de condensação fraca como para condensação forte, utilizando as cascatas obtidas da teoria da turbulência de ondas. Com este resultado mostramos que existe uma ponte entre o surgimento de turbulência de ondas e as variáveis relacionadas à turbulência hidrodinâmica deste sistema, que são essenciais para a compreensão de turbulência quântica em geral.

Palavras Chave: Turbulência de Ondas. Condensados De Bose-Einstein.

Abstract

In this work we used as a starting point the theory developed by Zakharov and Nazarenko for treating wave turbulence in systems with weak non linearity such as atomic Bose-Einstein condensates with low enough temperature to be described by the Gross-Pitaevskii model. After we obtained the kinetic equation for the condensate and extracted the out of equilibrium stationary solution, the so called Kolmogorov-Zakharov cascades, we set course to our objective of demonstrating that it is possible to conciliate this solutions of the kinetic equation with the hydrodynamical properties of the condensate. In order to do that we calculated the correlation function of the condensate current for both the weak condensate state and the strong condensate state using the respective wave turbulence cascades. With this result we have shown that there is a connection between the arising of wave turbulence and the variables related to the hydrodynamical turbulence of this system, which are essential for the comprehension of quantum turbulence as a whole.

Keywords: Wave Turbulence. Bose-Einstein Condensate.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Número de publicações por ano de 1995 à 2017. Dados extraídos da plataforma “ <i>Web of Science</i> ” utilizando como chave de busca “ <i>Bose-Einstein Condensation</i> ”.	18
Figura 2	– Diagrama ilustrando os passos a serem seguidos para obter as soluções estacionárias da equação cinética.	22
Figura 3	– Podemos ver claramente que conforme T aumenta, o pico aumenta e fica mais estreito, adquirindo uma forma característica da distribuição $\delta(x)$	30
Figura 4	– Soluções estacionárias da equação (2.81) na forma de espectros KZ.	33
Figura 5	– Soluções estacionárias da equação (2.97) na forma de espectros KZ.	35

Siglas e Abreviações

AFA Amplitude e Fase Aleatória. 24, 27

BEC Condensado de Bose-Einstein. 17

PDF Função Densidade de Probabilidade. 24, 25

VAI Variável Aleatória Independente. 24, 27

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Condensação de Bose-Einstein	17
1.2	Turbulência	17
2	METODOLOGIA: TURBULÊNCIA DE ONDAS EM CONDENSADOS FRACAMENTE INTERAGENTES	19
2.1	A equação de Gross-Pitaevskii	19
2.2	Espaço de <i>Fourier</i> e Representação de Interação	23
2.2.1	Transformada de Fourier	23
2.2.2	Representação de Interação	24
2.3	Variáveis Estatísticas	24
2.4	Expansão Não Linear Fraca	25
2.5	Equação Cinética	26
2.5.1	Média Estatística	27
2.5.2	Aproximação de caixa infinita: $L \rightarrow \infty$	29
2.5.3	Aproximação Não Linear Fraca: $\epsilon \rightarrow 0$	29
2.5.4	Equação Cinética do Espectro de Onda	30
2.6	Invariantes Estatísticos	31
2.7	Soluções Estacionárias da Equação Cinética	32
2.7.1	Correção Quântica	32
2.7.2	Um Tipo Diferente de Solução	32
2.8	Excitações Elementares	33
3	PROPRIEDADES HIDRODINÂMICAS DO CONDENSADO	37
3.1	Relação entre os espectros de onda e as variáveis hidrodinâmicas	38
3.2	Excitação Elementar	43
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
	REFERÊNCIAS	47

1 Introdução

1.1 Condensação de Bose-Einstein

O Condensado de Bose-Einstein (BEC) é um estado da matéria caracterizado pela ocupação macroscópica de um mesmo estado quântico por um número grande de partículas em um sistema. Este estado foi inicialmente proposto por Einstein em 1925 após generalizar para a matéria o trabalho que Satyendra N. Bose fez para os fótons em 1924 [1], o que levou à formalização da estatística de Bose-Einstein, que descreve a estatística de um conjunto de partículas de spin inteiro, chamadas de bósons em homenagem a Bose, em oposição às partículas de spin fracionário, chamadas de férmions, que obedecem à estatística de Fermi-Dirac e respeitam o princípio de exclusão de Pauli, i.e., dois férmions nunca podem ocupar o mesmo estado quântico. Einstein propôs que abaixando a temperatura de um gás de bósons suas partículas “cairiam” para o estado de mais baixa energia [1], isso é o que é chamado de *condensação*. Inicialmente pensava-se que esta condensação deveria ser limitada a gases ideais (não interagentes) [1], porém Penrose e Onsager mostraram em 1956 [2] que a interação entre as partículas não só era permitida como podia ser benéfica para o processo de condensação.

Apesar da realização teórica ter sido feita nas primeiras décadas do século 20, foi só em 1995 que o primeiro condensado atômico de Bose-Einstein foi obtido experimentalmente quando três grupos realizaram independentemente a condensação dos gases alcalinos de sódio [3], lítio [4] e rubídio [5], antes disso condensação de Bose-Einstein foi sugerida [6] como uma possível explicação para o fenômeno de super fluidez do Hélio, observado experimentalmente em 1938 [7, 8]. Desde então a área cresceu rapidamente e se manteve forte na física atual, como mostra a figura 1.

1.2 Turbulência

Turbulência é o nome dado a um comportamento caótico que surge quando um sistema conta com interação não linear e um número grande de parâmetros. Devido a esta natureza, problemas envolvendo turbulência usualmente requerem uma abordagem estatística. Em mecânica de fluidos, turbulência é associada ao surgimento de vórtices no fluido os quais interagem entre si e geram vórtices menores que por sua vez repetem o processo até os vórtices se dissiparem.

Em 1926, o físico e meteorologista Lewis Richardson propôs que a estabilidade de um fluxo turbulento precisa de um fluxo de energia constante, pelo menos da mesma ordem da taxa de dissipação. Em 1941, o matemático russo Andrey Kolmogorov formalizou a ideia de Richardson e obteve que localmente, i.e., longe da fonte inicial de energia,¹ o comportamento do estado estacionário ideal (isotrópico e homogêneo) reproduz uma cascata das maiores escalas de distância, D , para as menores, ξ , onde é completamente dissipado em forma de calor. Além disso, Kolmogorov propôs que a razão entre essas distâncias é universal e não depende das propriedades

¹ Chamado de intervalo inercial.

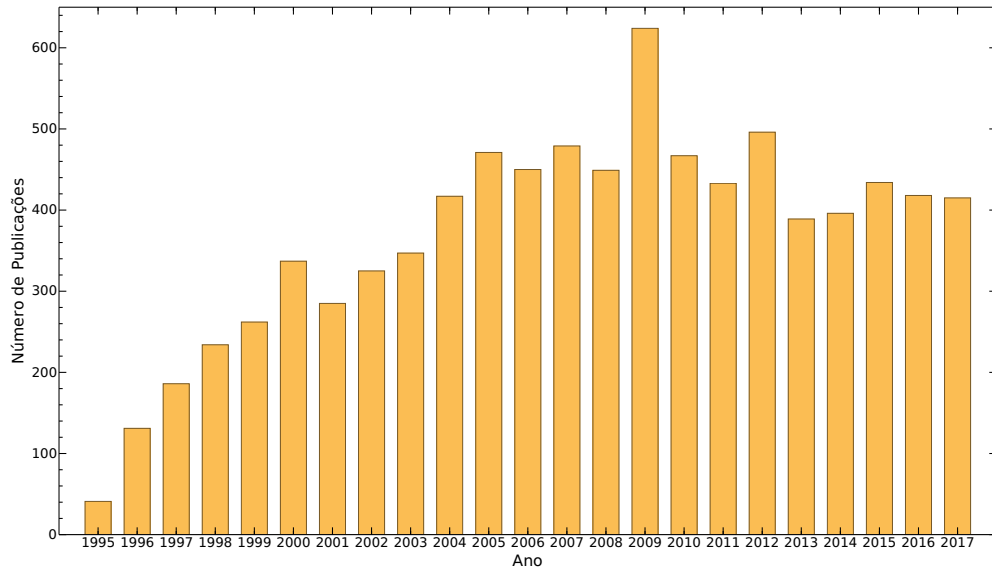


Figura 1 – Número de publicações por ano de 1995 à 2017. Dados extraídos da plataforma “*Web of Science*” utilizando como chave de busca “*Bose-Einstein Condensation*”.

físicas do fluido em particular. Essa relação pode ser especificada como

$$\frac{\xi}{D} \sim Re^{-3/4}, \quad (1.1)$$

onde Re é número de Reynolds, uma quantidade adimensional relacionada aos comprimentos e velocidades característicos do fluxo. ξ é chamado de escala de comprimento de Kolmogorov e é da ordem do tamanho dos menores vórtices antes da dissipação completa do fluxo turbulento[9]. A turbulência envolvendo vórtices é chamada usualmente de turbulência hidrodinâmica, em contrapartida a turbulência de ondas é assim chamada pois envolve ondas ao invés de vórtices, também apresentando dissipação na forma de cascatas. Uma descrição completa da teoria de Kolmogorov foge do escopo deste trabalho mas pode ser encontrada na referência [10].

O estudo de turbulência em fluidos quânticos é chamado de turbulência quântica, este nome se deve tanto a natureza do fluido quanto ao fato de que os tamanhos dos vórtices em um fluido quântico é quantizado [9]. A ideia de turbulência em fluidos quânticos foi inicialmente proposta por Feynman em 1955 [11] e observado experimentalmente em um superfluido de 4He por Hall e Vinem em 1956 [12]. Neste trabalho vamos aplicar a teoria analítica de turbulência de ondas desenvolvida por Zakharov e Nazarenko em condensados de Bose-Einstein atômicos e explorar as relações entre os estados de cascatas e as propriedades hidrodinâmicas do condensado.

2 Metodologia: Turbulência de Ondas em Condensados Fracamente Interagentes

2.1 A equação de Gross-Pitaevskii

Antes de entrarmos nos detalhes da metodologia vamos estabelecer as hipóteses fundamentais. Considerando um sistema de N átomos com spin inteiro assumiremos que:

- **Todos os N átomos estão no mesmo estado quântico de forma que o conjunto pode ser representado pelo estado simetrizado (2.1)**

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^{i=N} \phi(\mathbf{r}_i), \quad (2.1)$$

em que $\Psi(\mathbf{r})$ representa o estado quântico do sistema e $\phi(\mathbf{r}_i)$ o estado quântico do i -ésimo átomo do sistema. Esta é a chamada hipótese de campo médio[13].

- **A temperatura do sistema é muito baixa, de forma que podemos considerar apenas colisões de onda s entre átomos. Em tal regime é possível simplificar a interação entre os átomos como sendo interações de contato, cujo parâmetro de interação é dado por**

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \quad (2.2)$$

em que m é a massa do átomo, \hbar é a constante reduzida de Planck e a é o comprimento de espalhamento.

- **Os estados individuais são normalizados:**

$$\int d^n r |\phi(\mathbf{r})|^2 = 1. \quad (2.3)$$

Na hipótese de campo médio todos os átomos estão no mesmo estado, ϕ , porém na função de onda real alguns átomos não estarão neste estado e o número total vai ser menor que N , essa redução no número de átomos do condensado é chamada de depleção do condensado e é tipicamente da ordem de $(na^3)^{1/3} < 10^{-3}$ [13], portanto os efeitos devido a depleção do condensado podem ser desprezados sem grandes implicações.

A temperatura de transição do sistema pode ser estimada, de forma intuitiva, comparando o comprimento de onda de De Broglie com a distância média entre os átomos do sistema [14]. De forma simplificada podemos definir a distância média entre os átomos como:

$$\langle d \rangle = \rho_0^{-1/3} \sim \left(\frac{N}{V} \right)^{-1/3}, \quad (2.4)$$

e o comprimento de De Broglie como:

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{\sqrt{\kappa_B T m}}. \quad (2.5)$$

Onde N representa o número total de átomos no gás, V o volume, T a temperatura e m a massa. Desta forma a condição $\langle d \rangle \sim \lambda_{DB}$ nos leva a:

$$T_c \approx \frac{\hbar^2 \rho_0^{2/3}}{m \kappa_B}, \quad (2.6)$$

um cálculo rigoroso da temperatura crítica difere da obtida a partir desta aproximação por um fator de 3.31 [13].

Uma partícula de um gás de bósons uniforme em um volume V tem como função de onda do seu estado fundamental $\phi_a = 1/V^{1/2}$, portanto a energia de interação entre duas partículas é $E_0 = g/V$ e a energia de interação do sistema de N partículas é obtida multiplicando E_0 pelo número de maneiras possíveis de combinar duas partículas do sistema, i.e.,

$$E_{\text{int}} = \frac{N(N-1)}{2V} g, \quad (2.7)$$

assumindo que $N \gg 1$ temos que $N(N-1) \approx N^2$ e a energia de interação pode ser escrita como

$$E_{\text{int}} \approx \frac{1}{2} V n^2 g, \quad (2.8)$$

onde

$$n = \frac{N}{V} \quad (2.9)$$

é a densidade.

Para expandir esse raciocínio para o caso não uniforme é conveniente definir a função de onda do estado condensado

$$\psi(\mathbf{r}) = N^{1/2} \phi(\mathbf{r}), \quad (2.10)$$

assim a densidade de partículas é dada por

$$n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2, \quad (2.11)$$

e portanto, desprezando termos de ordem $1/N$, podemos escrever a energia do sistema como

$$E(\psi) = \int d^n r \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} g |\psi(\mathbf{r})|^4 \right], \quad (2.12)$$

onde $V(\mathbf{r})$ é algum potencial externo.

Uma forma de encontrar o estado de menor energia para ψ é minimizar a energia (2.12) em relação às variações de ψ e ψ^* de forma independente. Além disso é necessário impor o vínculo

$$N = \int d^n r |\psi(\mathbf{r})|^2 = \text{cte}, \quad (2.13)$$

i.e., é necessário garantir que o número total de partículas do sistema não se altera. Podemos satisfazer o vínculo pelo método dos multiplicadores de Lagrange escrevendo $\delta E - \mu \delta N = 0$, com o potencial químico μ fazendo o papel do multiplicador que garante o vínculo. Isto é equivalente a fixar μ e minimizar $E - \mu N$, daí fazendo:

$$\frac{\delta(E - \mu N)}{\delta \psi^*(\mathbf{r})} = 0, \quad (2.14)$$

obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + g|\psi(\mathbf{r})|^2\psi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}), \quad (2.15)$$

o que tem a forma da equação de Schrödinger independente do tempo com potencial dado pelo potencial externo somado de um termo de interação não linear que corresponde à contribuição de campo médio dos outros átomos do sistema. Esta é a equação de Gross-Pitaevskii independente do tempo. Uma diferença importante entre ela e a equação de Schrödinger é que seu autovalor é o potencial químico e não a energia [13].

Para obter a equação de Gross-Pitaevskii dependente do tempo usamos novamente o cálculo variacional, desta vez minimizando a ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (2.16)$$

com a lagrangiana

$$L = \int d^n r \frac{i\hbar}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - E, \quad (2.17)$$

onde a energia E é a mesma da expressão (2.12). Aplicando as equações de Euler-Lagrange em relação a ψ^* , obtemos a equação

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) + g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2\psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.18)$$

que é a equação de Gross-Pitaevskii dependente do tempo.

Com a equação (2.18), vários aspectos físicos de condensados atômicos podem ser explorados, desde que as hipóteses descritas no início da seção ofereçam uma aproximação aceitável do sistema a ser tratado. As aplicações e limites da equação de Gross-Pitaevskii são explorados em detalhes em [13, 15].

A teoria de turbulência de ondas que vamos utilizar foi desenvolvida primariamente por Zakharov, que em 1966 propôs soluções estacionárias para a equação cinética na forma de cascatas, e Nazarenko que refinou a teoria em conjunto com Zakharov [16]. A metodologia parte da equação diferencial que descreve a interação não linear das ondas. Para o caso dos condensados de Bose-Einstein esta equação é a equação de Gross-Pitaevskii, (2.18), que acabamos de obter. Deste ponto de partida podemos prosseguir na metodologia que pode ser destilada em uma série de passos descritos de forma diagramática na figura 2.

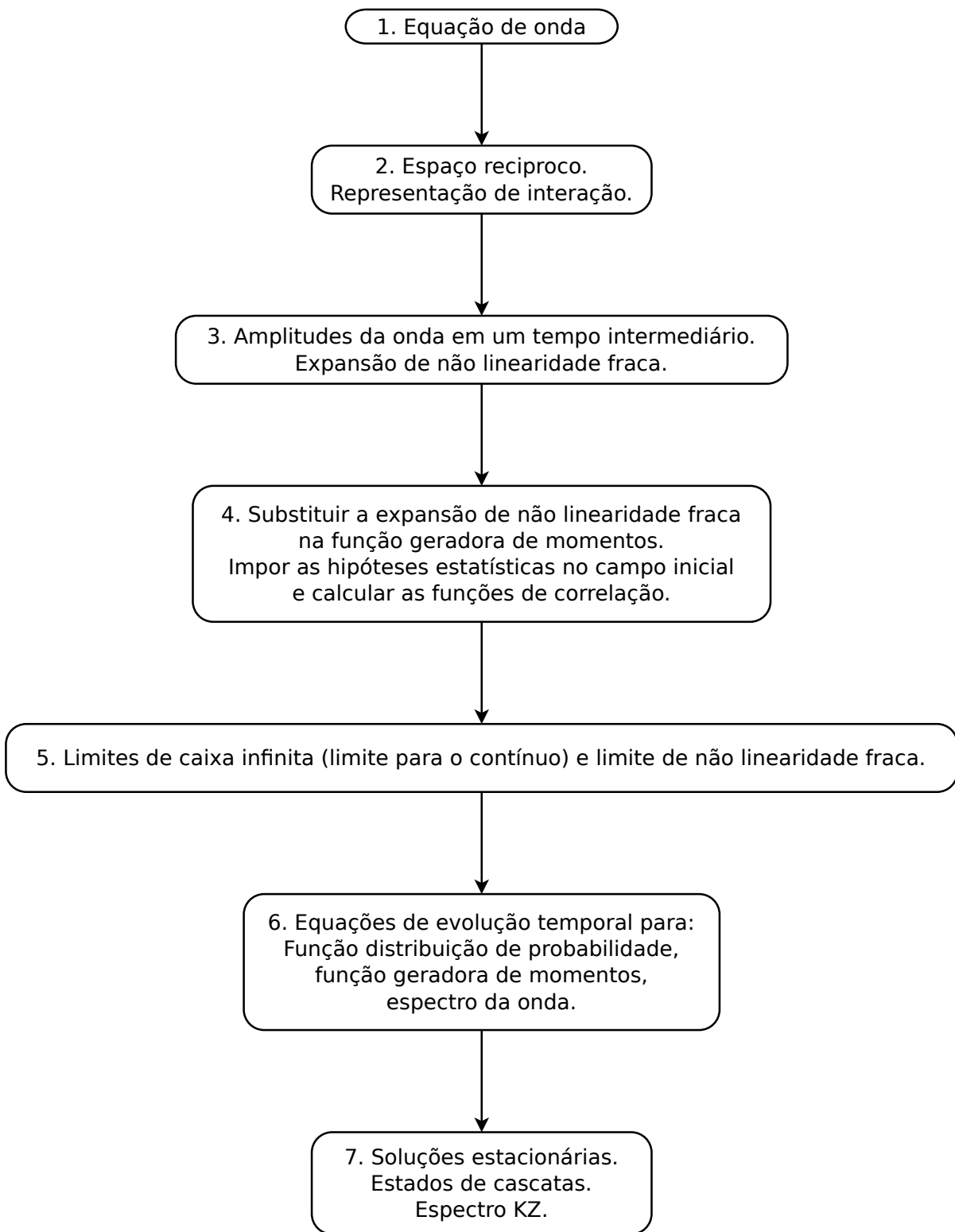


Figura 2 – Diagrama ilustrando os passos a serem seguidos para obter as soluções estacionárias da equação cinética.

2.2 Espaço de Fourier e Representação de Interação

Antes de prosseguirmos é importante ressaltar que a teoria analítica para turbulência de ondas utilizada no nosso trabalho é restrita a sistemas homogêneos, i.e., temos o potencial externo $V(\mathbf{r}) = 0$, além disso a fim de simplificar a descrição das equações iremos adotar o sistema de unidades naturais, $\hbar = \kappa_B = c = 1$, daqui em diante. Assumindo também $m = 1/2$, a equação (2.18) pode ser escrita como:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \nabla^2\right)\psi(\mathbf{r}, t) = -g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2\psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.19)$$

com $\psi(\mathbf{r}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$. Onde n é o número de dimensões espaciais do sistema.

2.2.1 Transformada de Fourier

Vamos considerar que o sistema está em uma caixa periódica, $\mathbf{r} \in \mathbb{T}$, com período L em todas as direções. Assim podemos escrever a transformada de Fourier de $\psi(\mathbf{r}, t)$ como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} a(\mathbf{k}, t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.20)$$

$$a(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{L^n} \int_{\text{caixa}} \psi(\mathbf{r}, t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n r. \quad (2.21)$$

Fazendo estas transformações em (2.19) obtemos

$$i\dot{a}_{\mathbf{k}} - k^2 a_{\mathbf{k}} - g \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}^* \delta_{k_3 k}^{k_1 k_2} = 0, \quad (2.22)$$

onde introduzimos a notação $a_{\mathbf{k}} = a(\mathbf{k}, t)$ e o termo $\delta_{kl}^{ij} = \delta_{i+j, k+l}$ representa o delta de Kronecker.

Os números de onda em (2.22) são discretos, $\mathbf{k}_l = \frac{2\pi\mathbf{l}}{L}$, com $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^n$. Vamos assumir também por simplicidade que o número de modos é finito e os números de onda são limitados por um k_{\max} em cada uma de suas componentes [16]. Sendo assim o número total de modos é

$$N = \left(\frac{k_{\max}}{k_{\min}}\right)^n = \left(\frac{k_{\max}L}{2\pi}\right)^n, \quad (2.23)$$

e definimos \mathbf{B}_N como sendo o conjunto de todos os números de onda \mathbf{k}_l dentro do volume $V = (2k_{\max})^n$.

Vamos agora analisar o limite linear da equação (2.22), isto é, vamos assumir momentaneamente que a interação atômica é desprezível ($g = 0$) de forma que

$$i\dot{a}_{\mathbf{k}} - k^2 a_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.24)$$

Resolvendo (2.24) obtemos

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}} &= A_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}, \\ \omega_{\mathbf{k}} &= k^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Na aproximação linear as amplitudes $A_{\mathbf{k}}$ são independentes do tempo e portanto não há troca de energia (interação) entre modos com diferentes números de onda [16].

2.2.2 Representação de Interação

Na representação de interação vamos introduzir variáveis que não mudam no limite linear, i.e., onde não há interação. Para tal definimos:

$$b_k = \frac{a_k e^{i\omega_k t}}{\epsilon}. \quad (2.26)$$

Comparando (2.26) com (2.25) fica claro que no limite linear b_k corresponde às amplitudes, A_k , que são independentes do tempo. O termo ϵ é um parâmetro arbitrário que vai ser útil na expansão em series de potência na seção seguinte.

Fazendo a substituição de (2.26) em (2.22) obtemos

$$i\dot{b}_k = \epsilon^2 g \sum_{k_1, k_2, k_3} b_{k_1} b_{k_2} b_{k_3}^* e^{i\omega_{k_1 k_2}^{k_3} t} \delta_{k_1 k_2}^{k_3 k}, \quad (2.27)$$

onde introduzimos a notação $\omega_{cd}^{ab} = \omega_a + \omega_b - \omega_c - \omega_d$.

É importante notar que na representação de interação um dos termos explicitamente lineares de (2.22) desaparece e ganhamos uma dependência explicita com o tempo no termo não linear (lado direito da equação (2.27)).

2.3 Variáveis Estatísticas

Antes de prosseguirmos devemos definir as variáveis estatísticas a serem consideradas a fim de obtermos a Função Densidade de Probabilidade (PDF) e a função geradora de momentos.

Vamos considerar um campo como o obtido em (2.25) e escrevê-lo em termos de sua amplitude e fase

$$a_l = \sqrt{J_l} \Phi_l, \quad (2.28)$$

com $J_l \in \mathbb{R}^+$ sendo a intensidade do modo l e $\Phi_l \in \mathbb{S}^1$ seu fator de fase. Aqui \mathbb{S}^1 representa o circulo unitário, i.e., $\Phi_l = e^{i\varphi_l}$ e $\varphi_l \in [0; 2\pi)$. Definimos então como $\{J, \Phi\}$ o conjunto de todos J_l e Φ_l tais que $k_l \in B_N$.

Definição 2.3.1 *Um campo do tipo Amplitude e Fase Aleatória (AFA) é um campo com as seguintes propriedades [16]:*

- Todas as fases e todas as amplitudes são Variáveis Aleatórias Independentes (VAI's),
- Todas as fases são distribuídas **uniformemente** em \mathbb{S}^1 .

Definição 2.3.2 *A função geradora de momentos para um modo l é definida por [16]:*

$$\mathcal{L}_l\{\lambda_l\} = \left\langle \exp \left[\left(\frac{L}{2\pi} \right)^n J_l \lambda_l \right] \right\rangle, \quad (2.29)$$

onde $\lambda_l \in \mathcal{R}$ e $\langle \dots \rangle$ representa o valor médio.

Definição 2.3.3 A PDF para um modo l é definida como a transformada inversa de Laplace de (2.29):

$$\mathcal{P}_l = \frac{1}{2i\pi} \int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty} e^{-\lambda_l} \mathcal{L}\{\lambda_l\} d\lambda_l, \quad (2.30)$$

onde ζ deve ser escolhido de forma que o contorno seja a direita de todas as singularidades de $\mathcal{L}\{\lambda_l\}$ no plano complexo λ_l [16].

Definição 2.3.4 O espectro da onda é definido por [16]:

$$n_k = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^n \langle J_k \rangle, \quad (2.31)$$

ou em termos da PDF

$$\begin{aligned} n_k &= \left[\partial_{\lambda_k} \left\langle e^{\lambda_k \left(\frac{L}{2\pi}\right)^n J_k} \right\rangle \right]_{\lambda_k=0} = [\partial_{\lambda_k} \mathcal{L}\{\lambda_k\}]_{\lambda_k=0} \\ &= \left(\frac{L}{2\pi}\right)^n \int_0^\infty s_k \mathcal{P}(s_k) ds_k. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.4 Expansão Não Linear Fraca

Vamos considerar o período da escala linear como sendo o período que depende apenas da relação de dispersão linear, ω_k :

$$\tau_L \approx T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}, \quad (2.33)$$

daí podemos definir o período da escala não linear como um período muito maior que τ_L , por exemplo:

$$\tau_{NL} = \frac{2\pi}{\epsilon^4 \omega_k}, \quad (2.34)$$

contanto que tomemos $\epsilon \ll 1$ de forma que $\tau_L \ll \tau_{NL}$.

Estas considerações são validas para o caso em que a não linearidade do sistema é fraca pois, como consequência, a dinâmica da interação entre os modos vai ser muito mais lenta que τ_L [16].

Vamos tomar um tempo intermediário, T , de forma que

$$\tau_L \ll T \ll \tau_{NL}, \quad (2.35)$$

podemos tomar por exemplo

$$T = \frac{2\pi}{\epsilon^2 \omega_k}, \quad (2.36)$$

e encontrar uma solução para (2.27) fazendo a expansão de $b_k(T)$ em potências de ϵ^2 :

$$b_k(T) = b_k^{(0)} + \epsilon^2 b_k^{(1)} + \epsilon^4 b_k^{(2)} + O(\epsilon^6) \quad (2.37)$$

O termo de ordem ϵ^0 corresponde ao caso em que não há não linearidade em (2.27), ou seja, $b_k^{(0)} = b_k(0)$. Assim podemos encontrar as demais ordens de forma iterativa, i.e., para encontrar o termo de ordem ϵ^2 utilizamos o resultado de ordem anterior (ϵ^0)¹:

$$i\dot{b}_k^{(1)} = \sum_{k_1, k_2, k_3} b_{k_1}(0) b_{k_2}(0) b_{k_3}^*(0) \delta_{k_1 k_2}^{k_3 k} e^{i\omega_{k_1 k_2}^{k_3 k} t}, \quad (2.38)$$

¹ Note que omitimos o fator de interação g nos cálculos a seguir, pois o mesmo só contribui como uma constante multiplicativa.

e resolvemos por integração direta

$$b_k^{(1)} = -i \sum_{k_1, k_2, k_3} b_{k_1}(0) b_{k_2}(0) b_{k_3}^*(0) \delta_{k_1 k_2}^{k_3 k} \Delta_T(\omega_{k_1 k_2}^{k_3 k}). \quad (2.39)$$

Repetindo o processo para o termo de ordem ϵ^4 obtemos

$$b_k^{(2)}(T) = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6} \left[b_{k_1}(0) b_{k_2}(0) b_{k_6}(0) b_{k_4}^*(0) b_{k_5}^*(0) \delta_{k_1 k_2}^{k_3 k} \delta_{k_4 k_5}^{k_6 k} E\left(\omega_{k_4 k_5}^{k_3 k_6}, \omega_{k_1 k_2}^{k_3 k}\right) - 2b_{k_2}(0) b_{k_4}(0) b_{k_5}(0) b_{k_3}^*(0) b_{k_6}^*(0) \delta_{k_1 k_2}^{k_3 k} \delta_{k_4 k_5}^{k_6 k_1} E\left(\omega_{k_4 k_5}^{k_6 k_1}, \omega_{k_1 k_2}^{k_3 k}\right) \right], \quad (2.40)$$

com:

$$\Delta_T(x) = \int_0^T e^{ixt} dt, \quad (2.41)$$

$$E(x, y) = \int_0^T \Delta_T(x) e^{iyt} dt. \quad (2.42)$$

2.5 Equação Cinética

A equação cinética do sistema é a equação de evolução temporal do espectro das funções de onda e descreve a densidade de ocupação de um determinado número de onda k , como veremos mais adiante, em um estado em que os invariantes estatísticos do sistema são conservados tal equação deve admitir soluções estacionárias.

O primeiro passo para obter a equação cinética é utilizar os resultados obtidos em (2.37), (2.39) e (2.40) para obter a função geradora de momentos no instante T . Para tal vamos tomar $J_k = |b_k|^2$ e substituir em (2.29)

$$\mathcal{L}_k\{\lambda_k\}(T) = \left\langle \exp\left(|b_k(T)|^2 \tilde{\lambda}_k\right) \right\rangle, \quad (2.43)$$

onde escrevemos $\tilde{\lambda}_k = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^n \lambda_k$ por simplicidade.

Substituindo (2.37) em (2.43) temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k\{\lambda_k\}(T) &\approx \left\langle \exp\left\{\tilde{\lambda}_k \left|b_k^{(0)} + \epsilon^2 b_k^{(1)} + \epsilon^4 b_k^{(2)}\right|^2\right\}\right\rangle \\ &= \left\langle \exp\left\{\tilde{\lambda}_k \left[|b_k^{(0)}|^2 + \epsilon^2 \left(b_k^{(0)*} b_k^{(1)} + \text{c.c.}\right) + \epsilon^4 \left(|b_k^{(1)}|^2 + b_k^{(0)*} b_k^{(2)} + \text{c.c.}\right)\right]\right\}\right\rangle, \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde termos de ordem maior ou igual a $O(\epsilon^6)$ foram descartados e “c.c.” representa o complexo conjugado. Podemos expandir a exponencial do lado direito de (2.44) em potências de ϵ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k\{\lambda_k\}(T) &= \left\langle e^{\tilde{\lambda}_k J_k^{(0)}} \exp\left\{\tilde{\lambda}_k \left[\epsilon^2 \left(b_k^{(0)*} b_k^{(1)} + \text{c.c.}\right) + \epsilon^4 \left(|b_k^{(1)}|^2 + b_k^{(0)*} b_k^{(2)} + \text{c.c.}\right)\right]\right\}\right\rangle \\ &\approx \left\langle e^{\tilde{\lambda}_k J_k^{(0)}} \left(1 + \epsilon^2 \alpha_{1k} + \epsilon^4 \alpha_{2k}\right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.45)$$

com $J_k^{(0)} = |b_k^{(0)}|^2$ e

$$\alpha_{1k} = \tilde{\lambda}_k \left(b_k^{(0)*} b_k^{(1)} + \text{c.c.}\right), \quad (2.46)$$

$$\alpha_{2k} = \tilde{\lambda}_k \left[\left(|b_k^{(1)}|^2 + b_k^{(0)*} b_k^{(2)} + \text{c.c.}\right) + \frac{\tilde{\lambda}_k}{2} \left(2|b_k^{(0)}|^2 |b_k^{(1)}|^2 + \left(b_k^{(0)*} b_k^{(1)}\right)^2 + \text{c.c.}\right) \right], \quad (2.47)$$

onde novamente descartamos termos de ordem maior ou igual a $O(\epsilon^6)$.

2.5.1 Média Estatística

Vamos considerar que em $t = 0$ os campos são do tipo AFA, i.e., $b_k^{(0)} = b_k(0) = a_k(0)$ têm as propriedades listadas na Definição 2.3.1. Como as amplitudes e fases são VAI's podemos fazer o cálculo das médias separadamente

$$\mathcal{L}_k\{\lambda_k\}(T) = \left\langle \left\langle \exp\left(|b_k(T)|^2 \tilde{\lambda}_k\right) \right\rangle_{\Phi} \right\rangle_J, \quad (2.48)$$

para calcular as médias estatísticas vamos fazer uso da regra de contração de Wick.

Definição 2.5.1 *Regra de Contração de Wick [16]: Para campos do tipo AFA a função de correlação (ou correlator) $\langle a_{l_1} a_{l_2} \dots a_{m_1}^* a_{m_2}^* \rangle$ é igual a 0 caso o número de “a” seja diferente do número de “a*’s”. Caso eles sejam iguais em número o resultado vai ser a soma dos termos em que os a’s são combinados com os a*’s de todas as formas possíveis.*

Exemplos:

1.

$$\begin{aligned} \langle a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}^* a_{k_4}^* \rangle &= \langle J_{k_1} J_{k_2} \rangle_J \langle \Phi_{k_1} \Phi_{k_2} \Phi_{k_3}^* \Phi_{k_4}^* \rangle_{\Phi} \\ &= \langle J_{k_1} J_{k_2} \rangle_J \left(\delta_{k_3}^{k_1} \delta_{k_4}^{k_2} + \delta_{k_4}^{k_1} \delta_{k_3}^{k_2} - \delta_{k_2}^{k_1} \delta_{k_3}^{k_1} \delta_{k_4}^{k_1} \right) \\ \langle J_{k_1} J_{k_2} \rangle_J &= \begin{cases} \langle J_{k_1} \rangle \langle J_{k_2} \rangle & k_1 \neq k_2 \\ \langle J_{k_1}^2 \rangle & k_1 = k_2 \end{cases} \\ \Rightarrow \langle a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}^* a_{k_4}^* \rangle &= \langle J_{k_1} \rangle \langle J_{k_2} \rangle \left(\delta_{k_3}^{k_1} \delta_{k_4}^{k_2} + \delta_{k_4}^{k_1} \delta_{k_3}^{k_2} \right) + \left(\langle J_{k_1}^2 \rangle - 2 \langle J_{k_1} \rangle^2 \right) \delta_{k_2}^{k_1} \delta_{k_3}^{k_1} \delta_{k_4}^{k_1}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

2.

$$\begin{aligned} \langle a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4}^* a_{k_5}^* a_{k_6}^* \rangle &= \langle J_{k_1} \rangle \langle J_{k_2} \rangle \langle J_{k_3} \rangle \left(\delta_{k_4}^{k_1} \delta_{k_5}^{k_2} \delta_{k_6}^{k_3} + \delta_{k_4}^{k_2} \delta_{k_5}^{k_3} \delta_{k_6}^{k_1} + \delta_{k_4}^{k_3} \delta_{k_5}^{k_1} \delta_{k_6}^{k_2} + \delta_{k_4}^{k_1} \delta_{k_5}^{k_3} \delta_{k_6}^{k_2} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{k_4}^{k_3} \delta_{k_5}^{k_2} \delta_{k_6}^{k_1} + \delta_{k_4}^{k_2} \delta_{k_5}^{k_1} \delta_{k_6}^{k_3} \right) \\ &\quad + \langle J_{k_3} \rangle \left(\langle J_{k_1}^2 \rangle - 2 \langle J_{k_1} \rangle^2 \right) \delta_{k_2}^{k_1} \left(\delta_{k_4}^{k_1} \delta_{k_5}^{k_2} \delta_{k_6}^{k_3} + \delta_{k_4}^{k_2} \delta_{k_5}^{k_3} \delta_{k_6}^{k_1} + \delta_{k_4}^{k_3} \delta_{k_5}^{k_1} \delta_{k_6}^{k_2} \right) \\ &\quad + \langle J_{k_2} \rangle \left(\langle J_{k_3}^2 \rangle - 2 \langle J_{k_3} \rangle^2 \right) \delta_{k_3}^{k_1} \left(\delta_{k_4}^{k_1} \delta_{k_5}^{k_2} \delta_{k_6}^{k_3} + \delta_{k_4}^{k_2} \delta_{k_5}^{k_3} \delta_{k_6}^{k_1} + \delta_{k_4}^{k_3} \delta_{k_5}^{k_1} \delta_{k_6}^{k_2} \right) \\ &\quad + \langle J_{k_1} \rangle \left(\langle J_{k_2}^2 \rangle - 2 \langle J_{k_2} \rangle^2 \right) \delta_{k_3}^{k_2} \left(\delta_{k_4}^{k_1} \delta_{k_5}^{k_2} \delta_{k_6}^{k_3} + \delta_{k_4}^{k_2} \delta_{k_5}^{k_3} \delta_{k_6}^{k_1} + \delta_{k_4}^{k_3} \delta_{k_5}^{k_1} \delta_{k_6}^{k_2} \right) \\ &\quad + \left(\langle J_{k_1}^3 \rangle - 9 \langle J_{k_1} \rangle^2 \langle J_{k_1} \rangle + 12 \langle J_{k_1} \rangle^3 \right). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Vamos utilizar a regra de contração de Wick para obter as médias estatísticas dos termos relevantes em (2.46) e (2.47).

Começando pelas médias em relação as fases vamos omitir os indicadores $b^{(0)}$ e $\langle \rangle_{\Phi}$ por brevidade.

Para o termo de contribuição ϵ^2 obtemos[17]

$$\left\langle b_k^* b_k^{(1)} \right\rangle = \sum_{k_1, k_2, k_3} \langle b_{k_1} b_{k_2} b_{k_3}^* b_k^* \rangle \delta_{k_1 k_2}^{k_3 k} \Delta_T \left(\omega_{k_1 k_2}^{k_3 k} \right) = 0. \quad (2.51)$$

Agora para os termos de contribuição de ϵ^4 :

$$\begin{aligned} \left\langle \left| b_k^{(1)} \right|^2 \right\rangle &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6} \langle b_{k_2} b_{k_3} b_{k_6} b_{k_1}^* b_{k_4}^* b_{k_5}^* \rangle \delta_{k_1 k_2}^{k_3 k} \delta_{k_4 k_5}^{k_6 k} \Delta_T \left(\omega_{k_1 k_2}^{k_3 k} \right) \Delta_T^* \left(\omega_{k_4 k_5}^{k_6 k} \right) \\ &= 2 \sum_{k_1, k_2, k_3} J_{k_1} J_{k_2} J_{k_3} \delta_{k_1 k_2}^{k_3 k} \left| \Delta_T \left(\omega_{k_1 k_2}^{k_3 k} \right) \right|^2, \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \left\langle b_k^* b_k^{(2)} \right\rangle &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6} \left[\langle b_{k_1} b_{k_2} b_{k_6} b_{k_3}^* b_{k_4}^* b_{k_5}^* \rangle \delta_{k_1 k_2}^{k_3 k} \delta_{k_4 k_5}^{k_6 k} \mathcal{R} \left(E \left(\omega_{k_4 k_5}^{k_3 k_6}, \omega_{k_1 k_2}^{k_3 k} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \langle b_{k_2} b_{k_4} b_{k_5} b_{k_3}^* b_{k_6}^* \rangle \delta_{k_1 k_2}^{k_3 k} \delta_{k_4 k_5}^{k_1 k_6} \mathcal{R} \left(E \left(\omega_{k_4 k_5}^{k_1 k_6}, \omega_{k_1 k_2}^{k_3 k} \right) \right) \right] \\ &= 4 \sum_{k_1, k_2, k_3} \left[J_k (J_{k_1} J_{k_2} - J_{k_1} J_{k_3} - J_{k_2} J_{k_3}) \delta_{k_1 k_2}^{k_3 k} \mathcal{R} \left(E \left(-\omega_{k_1 k_2}^{k_3 k}, \omega_{k_1 k_2}^{k_3 k} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\left\langle (b_k b_{k_1}^*)^2 \right\rangle = 0, \quad (2.54)$$

onde $\mathcal{R}(\cdot)$ representa “a parte real de”.

Fazendo agora as médias em relação às amplitudes vamos obter

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(T) - \mathcal{L}(0) &= \\ 2\epsilon^4 \tilde{\lambda}_k \sum_{k_1, k_2, k_3} &\left[\left(1 + \tilde{\lambda}_k \right) \left(\left\langle e^{\tilde{\lambda}_k J_k} J_{k_1} J_{k_2} J_{k_3} \right\rangle_J + \left\langle e^{\tilde{\lambda}_k J_k} J_k J_{k_1} J_{k_2} J_{k_3} \right\rangle_J \right) \delta_{k_1 k_2}^{k_3 k} \left| \Delta_T \left(\omega_{k_1 k_2}^{k_3 k} \right) \right|^2 \right. \\ &\left. + 2 \left(\left\langle e^{\tilde{\lambda}_k J_k} J_k J_{k_1} J_{k_2} \right\rangle_J - \left\langle e^{\tilde{\lambda}_k J_k} J_k J_{k_1} J_{k_3} \right\rangle_J \left\langle e^{\tilde{\lambda}_k J_k} J_k J_{k_2} J_{k_3} \right\rangle_J \right) \delta_{k_1 k_2}^{k_3 k} \mathcal{R} \left(E \left(-\omega_{k_1 k_2}^{k_3 k}, \omega_{k_1 k_2}^{k_3 k} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.55)$$

com

$$\left\langle e^{\tilde{\lambda}_k J_k} J_{k_1} J_{k_2} J_{k_3} \right\rangle_J = \langle J_{k_1} \rangle \langle J_{k_2} \rangle \langle J_{k_3} \rangle \left\langle e^{\tilde{\lambda}_k J_k} \right\rangle, \quad (2.56)$$

$$\left\langle e^{\tilde{\lambda}_k J_k} J_k J_{k_1} J_{k_2} J_{k_3} \right\rangle_J = \langle J_{k_1} \rangle \langle J_{k_2} \rangle \langle J_{k_3} \rangle \left\langle J_k e^{\tilde{\lambda}_k J_k} \right\rangle, \quad (2.57)$$

$$\left\langle e^{\tilde{\lambda}_k J_k} J_k J_{k_1} J_{k_2} \right\rangle_J = \langle J_{k_1} \rangle \langle J_{k_2} \rangle \left\langle J_k e^{\tilde{\lambda}_k J_k} \right\rangle, \quad (2.58)$$

$$\left\langle e^{\tilde{\lambda}_k J_k} J_k J_{k_1} J_{k_3} \right\rangle_J = \langle J_{k_1} \rangle \langle J_{k_3} \rangle \left\langle J_k e^{\tilde{\lambda}_k J_k} \right\rangle, \quad (2.59)$$

$$\left\langle e^{\tilde{\lambda}_k J_k} J_k J_{k_2} J_{k_3} \right\rangle_J = \langle J_{k_2} \rangle \langle J_{k_3} \rangle \left\langle J_k e^{\tilde{\lambda}_k J_k} \right\rangle, \quad (2.60)$$

lembrando que $\tilde{\lambda}_k = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^n \lambda_k$ e utilizando as definições 2.3.2 e 2.3.4, podemos fazer as seguintes substituições em (2.55)

$$\langle J_l \rangle = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^n n_l, \quad (2.61)$$

$$\left\langle e^{\lambda_k J_k} \right\rangle = \mathcal{L}_k, \quad (2.62)$$

$$\left\langle J_k e^{\lambda_k J_k} \right\rangle = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^n \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \lambda_k}, \quad (2.63)$$

de forma que obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k(T) - \mathcal{L}_k(0) &= \\ 2\epsilon^4 \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{2n} &\left[\left(\lambda_k \mathcal{L}_k + \lambda_k^2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \lambda_k} \right) \sum_{k_1, k_2, k_3} n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} \delta_{k_1 k_2}^{k_3 k} \left| \Delta_T \left(\omega_{k_1 k_2}^{k_3 k} \right) \right|^2 \right. \\ &\left. + 2\lambda_k \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \lambda_k} \sum_{k_1, k_2, k_3} [n_{k_1} n_{k_2} - n_{k_3} (n_{k_1} + n_{k_2})] \delta_{k_1 k_2}^{k_3 k} \mathcal{R} \left(E \left(-\omega_{k_1 k_2}^{k_3 k}, \omega_{k_1 k_2}^{k_3 k} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

2.5.2 Aproximação de caixa infinita: $L \rightarrow \infty$

Agora vamos fazer a aproximação de caixa infinita, $L \rightarrow \infty$, seguindo as regras usuais de correspondência entre integrais e somas:

$$\sum_{k_1, k_2, k_3} \Rightarrow \int d^n k_1 d^n k_2 d^n k_3 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{3n}, \quad (2.65)$$

$$\text{Kronecker-}\delta \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{L}\right)^n \text{Dirac-}\delta. \quad (2.66)$$

Assim reescrevemos (2.64) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k(T) - \mathcal{L}_k(0) = & 2\epsilon^4 \left[\left(\lambda_k \mathcal{L}_k + \lambda_k^2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \lambda_k} \right) \int d^n k_1 d^n k_2 d^n k_3 n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \left| \Delta_T(\omega_{k_1 k_2}^{k_3 k}) \right|^2 \right. \\ & \left. + 2\lambda_k \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \lambda_k} \int d^n k_1 d^n k_2 d^n k_3 [n_{k_1} n_{k_2} - n_{k_3} (n_{k_1} + n_{k_2})] \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathcal{R} \left(E \left(-\omega_{k_1 k_2}^{k_3 k}, \omega_{k_1 k_2}^{k_3 k} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

2.5.3 Aproximação Não Linear Fraca: $\epsilon \rightarrow 0$

Agora vamos tomar o limite de não linearidade fraca, lembrando que escolhemos

$$T = \frac{2\pi}{\epsilon^2 \omega_k},$$

percebemos que o limite $\epsilon \rightarrow 0$ é equivalente ao limite $T \rightarrow \infty$, portanto devemos tomar os limites

$$\lim_{T \rightarrow \infty} |\Delta_T(x)|^2, \quad (2.68)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{R}(E(-x, x)), \quad (2.69)$$

lembrando que

$$\begin{aligned} \Delta_T(x) &= \int_0^T e^{ixt} dt = \frac{e^{ixT} - 1}{ix}, \\ E(x, y) &= \int_0^T \Delta_T(x) e^{iyt} dt, \end{aligned}$$

obtemos portanto:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} |\Delta_T(x)|^2 = 2\pi T \delta(x), \quad (2.70)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{R}(E(-x, x)) = \pi T \delta(x). \quad (2.71)$$

O gráfico da figura 3 ilustra o comportamento da função $|\Delta_T(x)|^2$ conforme T aumenta.

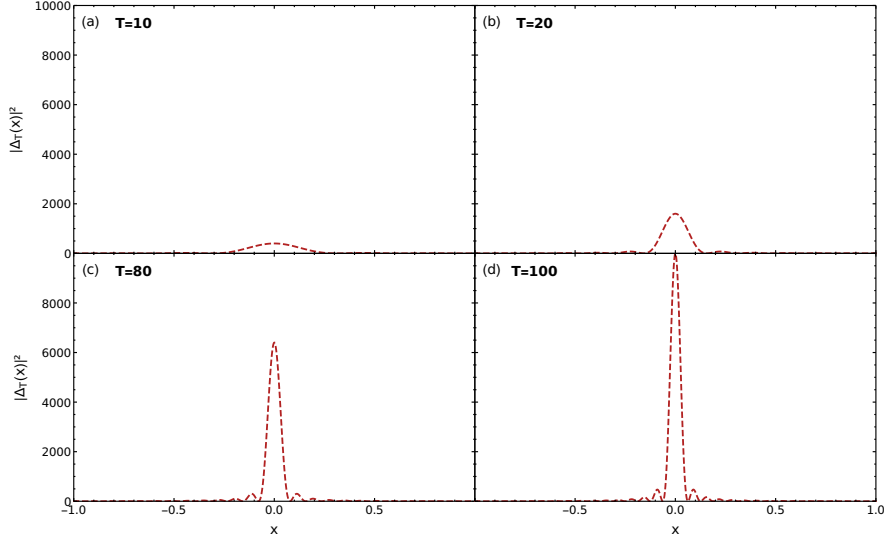


Figura 3 – Podemos ver claramente que conforme T aumenta, o pico aumenta e fica mais estreito, adquirindo uma forma característica da distribuição $\delta(x)$.

2.5.4 Equação Cinética do Espectro de Onda

Substituindo (2.70) e (2.71) em (2.67) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_k(T) - \mathcal{L}_k(0)}{T} = & 2\epsilon^4 \left[\left(\lambda_k \mathcal{L}_k + \lambda_k^2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \lambda_k} \right) \int d^n k_1 d^n k_2 d^n k_3 n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) 2\pi \delta(\omega_{k_1 k_2}^{k_3 k}) \right. \\ & \left. + 2\lambda_k \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \lambda_k} \int d^n k_1 d^n k_2 d^n k_3 [n_{k_1} n_{k_2} - n_{k_3} (n_{k_1} + n_{k_2})] \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \pi \delta(\omega_{k_1 k_2}^{k_3 k}) \right]. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Como tomamos $T \ll \frac{2\pi}{\epsilon^4 \omega_k}$, podemos considerar que T é pequeno em relação à mudança das quantidades médias do sistema, como por exemplo à mudança de \mathcal{L}_k , de forma que podemos aproximar

$$\frac{\mathcal{L}_k(T) - \mathcal{L}_k(0)}{T} \approx \dot{\mathcal{L}}_k. \quad (2.73)$$

Escrevemos então a equação de evolução temporal da função geradora de momentos

$$\dot{\mathcal{L}}_k = \lambda_k \eta_k \mathcal{L}_k + (\lambda_k^2 \eta_k - \lambda_k \gamma_k) \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \lambda_k}, \quad (2.74)$$

com

$$\eta_k = 4\pi\epsilon^4 \int \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\omega_{k_1 k_2}^{k_3 k}) n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} d^n k_1 d^n k_2 d^n k_3, \quad (2.75)$$

$$\gamma_k = 4\pi\epsilon^4 \int \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\omega_{k_1 k_2}^{k_3 k}) [n_{k_3} (n_{k_1} + n_{k_2}) - n_{k_1} n_{k_2}] d^n k_1 d^n k_2 d^n k_3 \quad (2.76)$$

Vamos relembrar a definição da função densidade de probabilidade, 2.30, e aplicar a transformada inversa de Laplace em (2.74)

$$\dot{\mathcal{P}}_k = \frac{\partial}{\partial s_k} \left(s_k \left(\gamma_k \mathcal{P}_k + \eta_k \frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial s_k} \right) \right). \quad (2.77)$$

Com a evolução temporal da PDF podemos usar 2.3.4 para encontrar a equação cinética

$$n_k = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^n \int_0^\infty s_k \mathcal{P}_k ds_k, \quad (2.78)$$

$$\dot{n}_k = - \int_0^\infty \left(s_k \gamma_k \mathcal{P}_k + s_k \eta_k \frac{\partial}{\partial s_k} \mathcal{P}_k \right) ds_k, \quad (2.79)$$

integrando o lado direito de (2.79) por partes e utilizando a unitariedade da PDF, $\int_0^\infty \mathcal{P}_k ds_k = 1$, temos que:

$$\dot{n}_k = \eta_k - \gamma_k n_k. \quad (2.80)$$

Substituindo (2.75) e (2.76) em (2.80), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{n}_k = 4\pi\epsilon^4 \int n_k n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} & \left[\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_{k_3}} - \frac{1}{n_{k_1}} - \frac{1}{n_{k_2}} \right] \\ & \times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(k^2 + k_3^2 - k_1^2 - k_2^2) d^n k_1 d^n k_2 d^n k_3. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Esta é a chamada “Equação Cinética”, em analogia a equação de Boltzman é a equação que descreve a evolução temporal da densidade de ocupação dos números de onda.

Na próxima seção vamos analisar quais tipos de espectros produzem soluções estacionárias para a equação (2.81) e obter as leis de potência relacionadas aos invariantes estatísticos do sistema. Apesar de estarmos aplicando diretamente a equações de Gross-Pitaevskii este tipo de sistema configura um regime conhecido como turbulência de 4 ondas e pode ser generalizado como demonstrado em [16].

2.6 Invariantes Estatísticos

Como vimos na seção 2.1 a conservação do número total de partículas é uma das exigências para a obtenção da equação de Gross-Pitaevskii, portanto é natural que um dos invariantes estatísticos do sistema seja o número de partículas. Podemos escrever a conservação de uma quantidade qualquer Φ cuja densidade no espaço dos momenta é $\rho_k n_k$, como:

$$\Phi = \int \rho_k n_k d^n k = \text{cte}. \quad (2.82)$$

A conservação do número total de partículas é expressa por:

$$\mathcal{N}_k = \int n_k d^n k = \text{cte}. \quad (2.83)$$

Além do número de partículas, a energia total do sistema também é conservada, porém só a energia cinética do sistema é um invariante estatístico, ou seja, de um ponto de vista estatístico a energia de interação é desprezível no calculo da energia total. A conservação de energia do sistema é expressa por:

$$\mathcal{E} = \int \omega_k n_k d^n k = \text{cte}. \quad (2.84)$$

2.7 Soluções Estacionárias da Equação Cinética

Para que as leis de conservação (2.83) e (2.84) sejam satisfeitas, buscamos soluções estacionárias da equação (2.81). No equilíbrio térmico devemos ter um espectro estacionário, o que nos é fornecido pelo espectro de Rayleigh-Jeans

$$n(k) = \frac{T}{k^2 + \mu}, \quad (2.85)$$

onde T e μ representam a temperatura e o potencial químico respectivamente. O espectro de Rayleigh-Jeans corresponde ao caso em que o integrando da equação (2.81) é nulo, sendo portanto uma solução relativamente simples da equação cinética.

A conservação de energia para o espectro (2.85) fica

$$\mathcal{E} = 4\pi \int_0^\infty dk \frac{Tk^4}{k^2 + \mu} \approx 4\pi T k^3 \Big|_0^\infty = \infty, \quad (2.86)$$

ou seja, a energia diverge para valores grandes de k de forma similar à catástrofe do ultravioleta na teoria clássica da radiação do corpo negro.

2.7.1 Correção Quântica

Assim como é feito no caso do eletromagnetismo podemos “corrigir” o espectro substituindo a expressão (2.85) pela distribuição de Bose-Einstein:

$$n(k) = \frac{1}{e^{(k^2+\mu)/T} - 1}. \quad (2.87)$$

A expressão (2.87) impõe um corte efetivo no espectro e preserva a conservação de energia, porém ela não é solução da equação cinética (2.81), mas sim de uma outra equação obtida pelo método usual de segunda quantização [16], desta forma essa estratégia pode ser pensada como uma correção quântica efetiva no sistema. Outro problema é que o corte efetivo introduzido não é unicamente determinado e depende diretamente da temperatura e potencial químico do sistema.

2.7.2 Um Tipo Diferente de Solução

Zakharov desenvolveu uma método para obter soluções estacionárias diretamente a partir da equação cinética, além do mais as soluções obtidas representam as famosas cascatas de Kolmogorov. Em tal método, k^α e seus expoentes são totalmente determinados pela dimensão espacial do sistema, pelos fatores de escala do coeficiente de interação e pela relação de dispersão [16].

O método consiste em buscar uma cascata para uma quantidade conservada do sistema, e normalizar o integrando da equação cinética até se obter um expoente único que satisfaz à equação cinética. Para as diferentes quantidades conservadas na equação (2.81), obtemos os seguintes coeficientes:

Número de Partículas

$$\alpha = -n, \quad (2.88)$$

Energia Total

$$\alpha = -n + \frac{2}{3}, \quad (2.89)$$

portanto os espectros de KZ^2 são:

$$n_{\mathcal{N}}(k) = k^{-n+2/3}, \quad (2.90)$$

$$n_{\mathcal{E}}(k) = k^{-n}, \quad (2.91)$$

os gráficos da figura 4 ilustram as cascatas para $n = 2$ e $n = 3$.

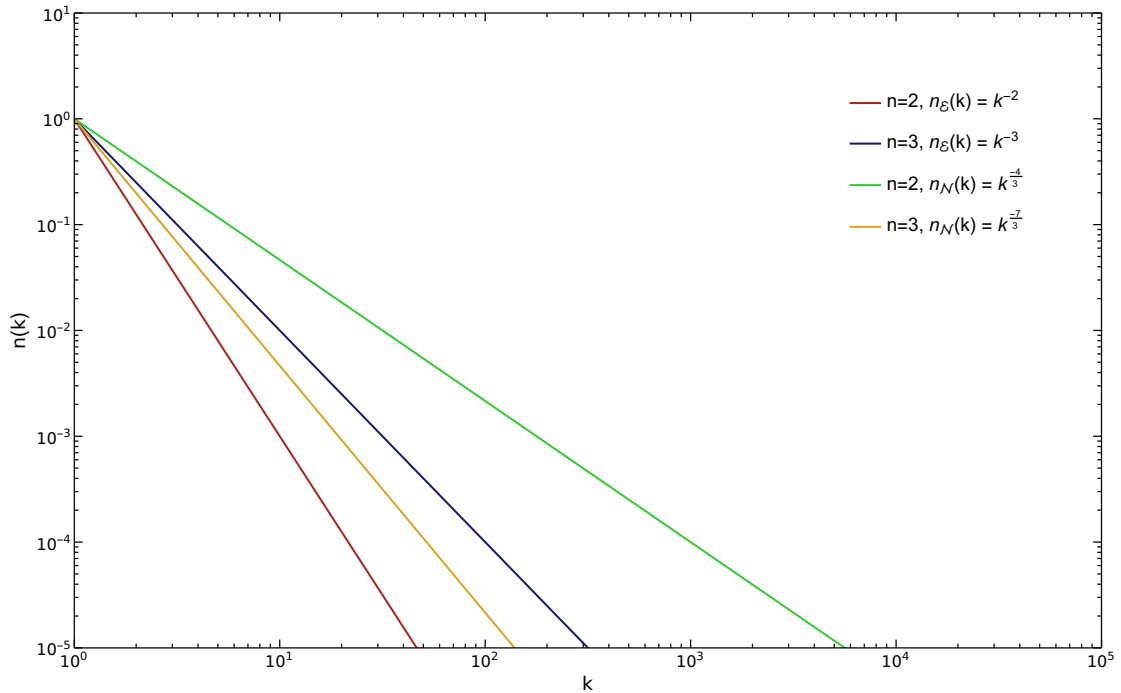


Figura 4 – Soluções estacionárias da equação (2.81) na forma de espectros KZ.

2.8 Excitações Elementares

No próximo capítulo vamos discutir as propriedades hidrodinâmicas do condensado, mas antes de prosseguirmos é interessante discutirmos outro tipo de turbulência de ondas possível em condensados atômicos, este devido a manifestação de excitações elementares no plano de fundo do condensado, quando o mesmo está no regime de condensação forte, na forma de ondas acústicas (fônons).

Para um condensado com plano de fundo homogêneo podemos considerar estas excitações como pequenas perturbações na função de onda do condensado:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = (\sqrt{\rho_0} + \delta\psi(\mathbf{r}))e^{-i\rho_0 t/\hbar}, \quad (2.92)$$

² Kolmogorov-Zakharov.

onde ρ_0 é a densidade de fundo do condensado. Substituindo (2.92) em (2.18) e desprezando termos de ordem maior que $O(\delta\psi^2)$ obtemos:

$$i\hbar\frac{\partial\delta\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\delta\psi + g\rho_0(\delta\psi + \delta\psi^*) + g\sqrt{\rho_0}(2\delta\psi^*\delta\psi + \delta\psi^2). \quad (2.93)$$

Agora utilizamos está equação no lugar da equação de Gross-Pitaevskii, (2.18), e repetimos os passos da metodologia, porém é importante notar que a equação de movimento para $\delta\psi$, (2.93), esta acoplada com $\delta\psi^*$. Uma forma de desacoplá-las é utilizando os campos transformados de Bogoliubov [16], dados pelas relações:

$$\hat{\delta\psi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}(f(k)_+a_{\mathbf{k}} - f(k)_-a_{-\mathbf{k}}^*), \quad (2.94)$$

$$\hat{\delta\psi}^*(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}(f(k)_+a_{\mathbf{k}}^* - f(k)_-a_{-\mathbf{k}}), \quad (2.95)$$

onde:

$$\begin{aligned} f(k)_\pm &= \sqrt{\frac{\omega(k)}{\beta(k)}} \pm \sqrt{\frac{\beta(k)}{\omega(k)}}, \\ \omega(k) &= \sqrt{\beta(k)^2 + 2\rho_0\beta(k)}, \\ \beta(k) &= \frac{k^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Feito isto obtemos a equação cinética:

$$\dot{n}_k = \int (\mathcal{R}_{k_1k_2k} - \mathcal{R}_{kk_1k_2} - \mathcal{R}_{k_2kk_1}) d^n k_1 d^n k_2, \quad (2.97)$$

com:

$$\mathcal{R}_{k_1k_2k} = 2\pi|V_{k_1k_2k}|^2\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2})(n_{k_1}n_{k_2} + n_{k_2}n_k + n_kn_{k_1}). \quad (2.98)$$

Que é uma equação cinética característica do regime de turbulência de 3 ondas. No limite de grandes comprimento de ondas o coeficiente de interação e a relação de dispersão têm as formas [16]:

$$V_{k_1k_2k} \approx \frac{\sqrt{k_1k_2k}}{\rho_0^{1/4}}, \quad (2.99)$$

$$\omega_k \approx \left(\hbar\sqrt{g\rho_0/2m}\right)k. \quad (2.100)$$

Da equação cinética (2.97) com o coeficiente de interação (2.99) e relação de dispersão (2.100) se extrai o seguinte espectro KZ³

$$n_{\mathcal{E}}(k) = A_k k^{-n-3/2}, \quad (2.101)$$

o gráfico da figura (5) ilustra as cascatas para $n = 2$ e $n = 3$.

³ No caso dos fônons, somente a energia cinética é um invariante estatístico do sistema.

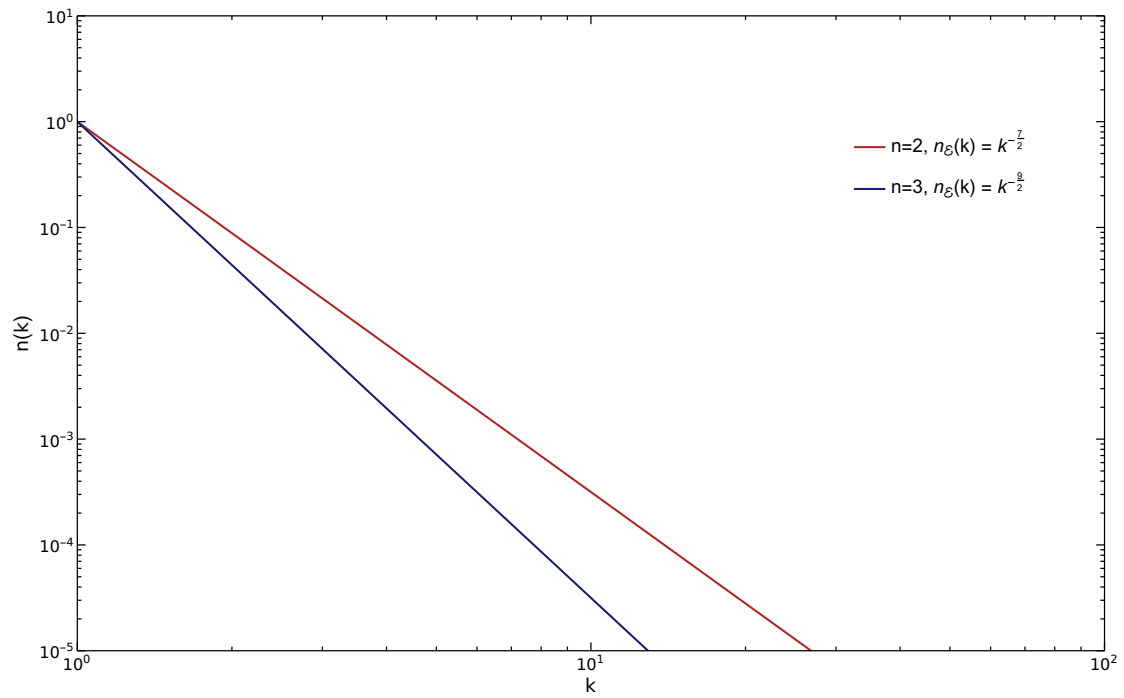


Figura 5 – Soluções estacionárias da equação (2.97) na forma de espectros KZ.

3 Propriedades Hidrodinâmicas do Condensado

No contexto da turbulência hidrodinâmica, uma quantidade de central importância é a dita velocidade do condensado. Tal velocidade superfluida é definida a partir da equação de continuidade do sistema. Para tal, partimos da equação de Gross-Pitaevskii, (2.18), nas unidades usuais

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t) + g|\psi(\mathbf{r},t)|^2\psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}.$$

Multiplicando a equação (2.18) por ψ^* e subtraindo o complexo conjugado obtemos

$$\frac{\partial(m|\psi|^2)}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{\hbar}{2i}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \right] = 0. \quad (3.1)$$

A equação (3.1) é a equação de continuidade que podemos colocar na forma

$$\frac{\partial(mn)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (3.2)$$

onde $n = |\psi|^2$ é a densidade do condensado e \mathbf{j} a corrente de partículas do condensado, daí, utilizando a relação

$$\mathbf{j} = mn\mathbf{v}, \quad (3.3)$$

definimos a velocidade \mathbf{v} do condensado como

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{2mi} \frac{(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)}{|\psi|^2}. \quad (3.4)$$

Agora, se escrevermos a função de onda do condensado em termos de sua amplitude e fase

$$\psi = Ae^{i\varphi}, \quad (3.5)$$

obtemos as seguintes relações para a densidade e velocidade:

$$n = |A|^2, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m}\nabla\varphi, \quad (3.7)$$

uma consequência imediata da relação (3.7) é o fato de que o condensado deve ser irrotacional, i.e.,

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\hbar}{m}\nabla \times \nabla\varphi = 0. \quad (3.8)$$

Este resultado é sempre válido contanto que a fase φ do condensado não seja uma função multivalorada [18].

Tal campo de velocidade pode exibir muitas das propriedades usuais de um fluido clássico, levando-se em conta algumas peculiaridades [9]. Por exemplo, a existência de vórtices em condensados é diretamente atrelada a possíveis descontinuidades na sua fase.

3.1 Relação entre os espectros de onda e as variáveis hidrodinâmicas

Neste trabalho buscamos relacionar a estatística das variáveis hidrodinâmicas estabelecidas na seção anterior com os espectros de onda obtidos da teoria de turbulência de ondas. Esse tipo de análise será útil pois permitirá utilizar os resultados da turbulência de ondas de modo a revelar comportamentos mais gerais na dinâmica do condensado.

Em particular podemos escrever a transformada de Fourier da corrente \mathbf{j} fazendo as seguintes transformações:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{V_k} a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^n k, \quad (3.9)$$

$$\psi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{V_k} a^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^n k, \quad (3.10)$$

com n representando o número de dimensões espaciais do sistema e as transformadas inversas dadas por

$$a(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_V \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^n r, \quad (3.11)$$

$$a^*(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_V \psi^*(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^n r. \quad (3.12)$$

Agora considerando a nossa corrente de partículas:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (3.13)$$

que pode também ser expressa como:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2i} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{V_{k_1}} \int_{V_{k_2}} i\mathbf{k}_2 a_{k_1}^* a_{k_2} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}} d^n k_2 d^n k_1 \\ &\quad - \frac{1}{2i} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{V_{k_1}} \int_{V_{k_2}} -i\mathbf{k}_1 a_{k_2} a_{k_1}^* e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}} d^n k_2 d^n k_1 \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{V_{k_1}} \int_{V_{k_2}} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) a_{k_1}^* a_{k_2} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}} d^n k_2 d^n k_1. \end{aligned} \quad (3.14)$$

A transformada do termo de corrente é

$$\mathcal{J}_k \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^n r, \quad (3.15)$$

substituindo (3.14) em (3.15) ficamos com

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_k &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \int_V \int_{V_{k_1}} \int_{V_{k_2}} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) a_{k_1}^* a_{k_2} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}} d^n k_2 d^n k_1 d^n r \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{V_{k_1}} \int_{V_{k_2}} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) a_{k_1}^* a_{k_2} \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) d^n k_2 d^n k_1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Com (3.16) podemos escrever a função de correlação

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}_k; \mathcal{J}_{k'}^* \rangle &= \frac{1}{4(2\pi)^n} \int \left[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot (\mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2) \left\langle a_{k'_1} a_{k_2} a_{k_1}^* a_{k'_2}^* \right\rangle \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) \right. \\ &\quad \left. \delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}') \right] d^n k'_2 d^n k'_1 d^n k_2 d^n k_1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Aplicando a regra de contração de Wick e simplificando ficamos com

$$\langle \mathcal{J}_k; \mathcal{J}_{k'}^* \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^n} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left[\int d^n k_1 n_{k_1} n_{|\mathbf{k}+\mathbf{k}_1|} |\mathbf{k} + 2\mathbf{k}_1|^2 \right]. \quad (3.18)$$

Como a segunda integral em (3.18) só tem valor significativo para $k = 0$, vamos nos concentrar na primeira integral que vamos denominar como I_1 :

$$I_1 = \int d^n k_1 n_{k_1} n_{|\mathbf{k}+\mathbf{k}_1|} |\mathbf{k} + 2\mathbf{k}_1|^2, \quad (3.19)$$

se fizermos uso da homogeneidade e isotropia espacial do sistema, podemos assumir simetria esférica para avaliar (3.19) de forma que podemos escrever

$$I_1 = \int_0^\infty dk_1 \int d^n \Omega n_{k_1} n_{|\mathbf{k}+\mathbf{k}_1|} k_1^{n-1} |\mathbf{k} + 2\mathbf{k}_1|^2, \quad (3.20)$$

onde $d^n \Omega$ é o angulo sólido diferencial referente à dimensão n . Em particular temos:

$$d^n \Omega = \begin{cases} d\theta, & \text{com } 0 \leq \theta < 2\pi, & \text{se } n = 2, \\ \sin \theta d\theta d\phi, & \text{com } 0 \leq \phi < 2\pi \text{ e } 0 \leq \theta < \pi, & \text{se } n = 3. \end{cases} \quad (3.21)$$

Para auxiliar na nossa análise definimos

$$W_n(k; k_1) = \int d^n \Omega |\mathbf{k} + 2\mathbf{k}_1|^2 k_1^{n-1} n_{k_1} n_{|\mathbf{k}+\mathbf{k}_1|}. \quad (3.22)$$

Um caso de interesse especial é aquele em que os espectros de onda obedecem a alguma lei de potência, visto que tais casos correspondem a estados estacionários da equação cinética [16]:

$$n_k = k^\alpha, \quad (3.23)$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim obtemos

$$\begin{aligned} W_n(k; k_1) &= \int d^n \Omega |\mathbf{k} + 2\mathbf{k}_1|^2 |\mathbf{k} + \mathbf{k}_1|^\alpha k_1^{n+\alpha-1} \\ &= \int d^n \Omega (k^2 + 4k_1^2 + 4kk_1 \cos \theta) (k^2 + k_1^2 + 2kk_1 \cos \theta)^{\alpha/2} k_1^{n+\alpha-1} \end{aligned} \quad (3.24)$$

e portanto podemos escrever (3.19) como

$$I_1 = \int_0^\infty dk_1 W_n(k; k_1). \quad (3.25)$$

É importante ressaltar que não existe garantia alguma da convergência de I_1 nos limites indicados, portanto é conveniente introduzirmos os parâmetros de regularização Ω_+ e Ω_-

$$I_1 = \int_{\Omega_-}^{\Omega_+} dk_1 W_n(k; k_1), \quad (3.26)$$

a fim de estudarmos o comportamento de I_1 quando $\Omega_- \rightarrow 0$ e $\Omega_+ \rightarrow \infty$. Agora vamos utilizar a homogeneidade de W_n para simplificar ainda mais a análise de I_1 , i.e.,

$$W_n(\lambda k; \lambda k_1) = \lambda^{2\alpha+n+1} W_n(k; k_1), \quad (3.27)$$

portanto podemos fazer a seguinte mudança de variáveis em I_1

$$\begin{aligned} k_1 &= kx; \\ dk_1 &= k dx; \\ \Omega_+ &\rightarrow \frac{\Omega_+}{k}; \\ \Omega_- &\rightarrow \frac{\Omega_-}{k}; \end{aligned} \quad (3.28)$$

desta forma:

$$I_1 = k^{2(\alpha+1)+n} \int_{\Omega_-/k}^{\Omega_+/k} dx W_n(1; x) \quad (3.29)$$

onde

$$W_n(1; x) = \int d^n \Omega (4x^2 + 4x \cos \theta + 1) (x^2 + 2x \cos \theta + 1)^{\alpha/2} x^{n+\alpha-1}, \quad (3.30)$$

estamos particularmente interessados na região em que $\Omega_- \ll k \ll \Omega_+$, de forma que mesmo que o comportamento de I_1 seja divergente para $\Omega_+ \rightarrow \infty$ ou $\Omega_- \rightarrow 0$, conseguimos recuperar o comportamento assintótico na região intermediária $\Omega_- \ll k \ll \Omega_+$. Os cortes, Ω_{\pm} são em princípio arbitrários e escolhidos de acordo com as necessidades dos sistemas em questão. Para determinar a região em que este comportamento convergente se manifesta, faremos uma análise do comportamento assintótico de

$$F(x) = \int_c^x W_n(x') dx', \quad (3.31)$$

quando $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow 0$. Em seguida examinaremos cada caso separadamente.

Se limitarmos nosso interesse somente ao comportamento do termo dominante (em relação a x) notamos que para $x \rightarrow \infty$

$$(4x^2 + 4x \cos \theta + 1) \sim 4x^2 \quad (3.32)$$

$$(x^2 + 2x \cos \theta + 1)^{\alpha/2} \sim x^\alpha \quad (3.33)$$

portanto:

$$W_n(1; x) \sim 4x^{n+2\alpha+1} \Omega_n \quad (3.34)$$

onde Ω_n representa o ângulo sólido total. Observamos, portanto, que (3.29) só converge no limite superior se $n + 2\alpha + 1 < -1$. Caso contrário, integrando (3.34), temos os seguintes limites assintóticos:

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{4}{n + 2\alpha + 2} x^{n+2\alpha+2}, \quad (3.35)$$

para $n + 2\alpha + 1 > -1$. Enquanto para $n + 2\alpha + 1 = -1$, temos:

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 4 \log x, \quad (3.36)$$

Similarmente para o caso em que $x \rightarrow 0$:

$$(4x^2 + 4x \cos \theta + 1) \propto 1, \quad (3.37)$$

$$(x^2 + 2x \cos \theta + 1)^{\alpha/2} \propto 1, \quad (3.38)$$

portanto:

$$W_n(1; x) \sim x^{n+\alpha-1} \Omega_n \quad (3.39)$$

o que implica que (3.29) só converge se $n + \alpha - 1 > -1$. Caso contrário, temos o seguinte comportamento assintótico para $n + \alpha - 1 < -1$:

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{n + \alpha} x^{n+\alpha}, \quad (3.40)$$

enquanto para $n + \alpha - 1 = -1$, temos:

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \log x, \quad (3.41)$$

Agora temos todos os elementos para analisar o limite assintótico de integral:

$$I_1 = k^{2(\alpha+1)+n} \left[F\left(\frac{\Omega_+}{k}\right) - F\left(\frac{\Omega_-}{k}\right) \right], \quad (3.42)$$

quando $\Omega_- \ll k \ll \Omega_+$.

Consideremos primeiro o caso em que a integral (3.42) converge em ambos os limites, ou seja temos simultaneamente $n + 2\alpha + 1 < -1$ e $n + \alpha - 1 > -1$. Tal situação corresponde à $-n < \alpha < -1 - n/2$. Tal situação pode ocorrer por exemplo para $n = 3$ mas não para $n = 2$. Neste caso, podemos fazer o limite $\Omega_+ \rightarrow +\infty$ e $\Omega_- \rightarrow 0$ em (3.42) de modo que teremos:

$$I_1 = k^{2(\alpha+1)+n} [F(+\infty) - F(0)] \sim k^{2(\alpha+1)+n}. \quad (3.43)$$

Observe que a situação em que ambos os limites divergem de forma não logarítmica, ou seja, quando temos simultaneamente $n + 2\alpha + 1 > -1$ e $n + \alpha - 1 < -1$ não pode ocorrer para $n > 1$. Em contrapartida a situação que temos divergência logarítmica em ambos os limites é, ou seja, quando temos simultaneamente $n + 2\alpha + 1 = -1$ e $n + \alpha - 1 = -1$ é satisfeito para $n = 2$ e $\alpha = -2$ de forma que

$$I_1 = k^{2(\alpha+1)+n} \left[F\left(\frac{\Omega_+}{k}\right) - F\left(\frac{\Omega_-}{k}\right) \right] \sim k^{2(\alpha+1)+n} \left(\log \frac{1}{k^5} + \log \frac{\Omega_+^4}{\Omega_-} \right). \quad (3.44)$$

Todos os casos possíveis para as dimensões de nosso interesse, ($n = 2$ e $n = 3$), são listados a seguir:

$n = 2$:

$$I_1(k) \sim \begin{cases} k^{2\alpha+4} \left[A + B \left(\frac{\Omega_-}{k} \right)^{\alpha+2} \right] & \text{se } \alpha < -2, & (3.45a) \\ k^{2\alpha+4} \left[A \left(\frac{\Omega_+}{k} \right)^{2\alpha+4} - B \right] & \text{se } \alpha > -2, & (3.45b) \\ 4 \log \left(\frac{\Omega_+}{k} \right) - \log \left(\frac{\Omega_-}{k} \right) & \text{se } \alpha = -2, & (3.45c) \end{cases}$$

onde A e B são constantes reais positivas.

$n = 3$:

$$I_1(k) \sim \begin{cases} k^{2\alpha+5} & \text{se } -3 < \alpha < -\frac{5}{2}, & (3.46a) \\ k^{2\alpha+5} \left[A + B \left(\frac{\Omega_-}{k} \right)^{\alpha+3} \right] & \text{se } \alpha < -3, & (3.46b) \\ k^{-1} \left[A - \log \left(\frac{\Omega_-}{k} \right) \right] & \text{se } \alpha = -3, & (3.46c) \\ k^{2\alpha+5} \left[A \left(\frac{\Omega_+}{k} \right)^{2\alpha+5} - B \right] & \text{se } \alpha > -\frac{5}{2}, & (3.46d) \\ 4 \log \left(\frac{\Omega_+}{k} \right) & \text{se } \alpha = -\frac{5}{2}. & (3.46e) \end{cases}$$

Analisando os casos acima podemos simplificar ainda mais a forma dos comportamentos dominantes. Por exemplo para o caso (3.45a) temos:

$$B + C \left(\frac{\Omega_-}{k} \right)^{\alpha+2}, \quad (3.47)$$

mas, $k \gg \Omega_- \rightarrow \Omega_+/k \ll 1$ e $\alpha < -2 \rightarrow \alpha + 2 < 0$, portanto o termo dominante em (3.47) é $(\Omega_+/k)^{\alpha+2}$. Repetindo esta análise para os demais casos obtemos:

$n = 2$:

$$I_1(k) \sim \begin{cases} (\Omega_-)^{\alpha+2} k^{\alpha+2} & \text{se } \alpha < -2, & (3.48a) \\ (\Omega_+)^{2\alpha+4} & \text{se } \alpha > -2, & (3.48b) \\ \begin{cases} 4 \log \left(\frac{\Omega_+}{k} \right) & \text{se } \frac{(\Omega_+)^4 \Omega_-}{k^5} \gg 1 \\ \log \left(\frac{k}{\Omega_-} \right) & \text{se } \frac{(\Omega_+)^4 \Omega_-}{k^5} \ll 1 \end{cases} & \text{se } \alpha = -2, & (3.48c) \end{cases}$$

$n = 3$:

$$I_1(k) \sim \begin{cases} k^{2\alpha+5} & \text{se } -3 < \alpha < -\frac{5}{2}, & (3.49a) \\ (\Omega_-)^{\alpha+3} k^{\alpha+2} & \text{se } \alpha < -3, & (3.49b) \\ \frac{1}{k} \log \left(\frac{k}{\Omega_-} \right) & \text{se } \alpha = -3, & (3.49c) \\ (\Omega_+)^{2\alpha+5} & \text{se } \alpha > -\frac{5}{2}, & (3.49d) \\ 4 \log \left(\frac{\Omega_+}{k} \right) & \text{se } \alpha = -\frac{5}{2}. & (3.49e) \end{cases}$$

Os espectros obtidos no capítulo 2 para a teoria de turbulência de ondas são:

$$n_{\mathcal{N}}(k) = k^{2/3-n}, \quad (3.50)$$

$$n_{\mathcal{E}}(k) = k^{-n}, \quad (3.51)$$

onde $n_{\mathcal{E}}$ e $n_{\mathcal{N}}$ são os espectros para densidade de energia e densidade de partículas respectivamente. Com estas informações podemos escrever as correlações das correntes de partículas e de energia da seguinte forma¹:

$$\langle \mathcal{J}(k); \mathcal{J}^*(k') \rangle_{\mathcal{N}} \sim \begin{cases} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') (\Omega_+)^{4/3} & \text{se } n = 2, & (3.52a) \\ \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') (\Omega_+)^{1/3} & \text{se } n = 3, & (3.52b) \end{cases}$$

¹ Note que estamos omitindo o termo constante referente ao produto das médias, i.e., $\langle \mathcal{J}_k \rangle \langle \mathcal{J}_{k'}^* \rangle$.

e

$$\langle \mathcal{J}(k); \mathcal{J}^*(k') \rangle_{\mathcal{E}} \sim \begin{cases} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \begin{cases} 4 \log\left(\frac{\Omega_+}{k}\right) & \text{se } \frac{(\Omega_+)^4 \Omega_-}{k^5} \gg 1 \\ \log\left(\frac{k}{\Omega_-}\right) & \text{se } \frac{(\Omega_+)^4 \Omega_-}{k^5} \ll 1 \end{cases} & \text{se } n = 2, \quad (3.53a) \\ \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{1}{k} \log\left(\frac{k}{\Omega_-}\right) & \text{se } n = 3. \quad (3.53b) \end{cases}$$

3.2 Excitação Elementar

Como vimos na seção 2.8, no limite de condensação forte podemos utilizar pequenas perturbações no plano de fundo do condensado, (2.92), para estudar a interação de ondas acústicas na sua superfície.

$$\psi(\mathbf{r}, t) = (\sqrt{\rho_0} + \delta\psi(\mathbf{r}))e^{-i\rho_0 t/\hbar},$$

substituindo (2.92) em (3.13) e mantendo apenas termos de primeira ordem em $\delta\psi$ obtemos:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{\rho_0}}{2i} (\nabla \delta\psi - \nabla \delta\psi^*). \quad (3.54)$$

Fazendo a transformada de Fourier obtemos:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{k}} = \frac{\rho_0}{2} \left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k_1 \mathbf{k}_1 \left(\hat{\delta}\psi(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + \hat{\delta}\psi^*(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) \right) \right], \quad (3.55)$$

fazendo novamente as transformações de Bogoliubov, i.e., fazendo:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}\psi(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2} (f_+(k) a_{\mathbf{k}} - f_-(k) a_{-\mathbf{k}}^*), \\ \hat{\delta}\psi^*(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2} (f_+(k) a_{\mathbf{k}}^* - f_-(k) a_{-\mathbf{k}}), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} f_{\pm}(k) &= \sqrt{\frac{\omega(k)}{\beta(k)}} \pm \sqrt{\frac{\beta(k)}{\omega(k)}}, \\ \omega(k) &= \sqrt{\beta(k)^2 + 2\rho_0\beta(k)}, \\ \beta(k) &= \frac{k^2}{2}, \end{aligned}$$

a expressão (3.55) se torna:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mathbf{k}} &= \frac{\rho_0}{4(2\pi)^{n/2}} \int d^n k_1 \mathbf{k}_1 [f_+(k_1) (a_{\mathbf{k}_1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + a_{\mathbf{k}_1}^* \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1)) \\ &\quad - f_-(k_1) (a_{-\mathbf{k}_1}^* \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + a_{-\mathbf{k}_1} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1))] . \end{aligned} \quad (3.56)$$

Podemos então escrever a autocorrelação da corrente como:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{J}_k; \mathcal{J}_{k'}^* \rangle \sim & \int d^n k_1 d^n k_2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \{ f_+(k_1) f_+(k_2) [\langle a_{k_1} a_{k_2}^* \rangle \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_2) \\
& + \langle a_{k_2} a_{k_1}^* \rangle \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1)] \\
& + f_-(k_1) f_-(k_2) [\langle a_{-k_1}^* a_{-k_2} \rangle \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_2) \\
& + \langle a_{-k_1} a_{k_2}^* \rangle \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1)] \\
& - f_+(k_1) f_-(k_2) [\langle a_{k_1} a_{-k_2}^* \rangle \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_2) \\
& + \langle a_{-k_2} a_{k_1}^* \rangle \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1)] \\
& - f_-(k_1) f_+(k_2) [\langle a_{k_2} a_{-k_1}^* \rangle \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_2) \\
& + \langle a_{-k_1} a_{k_2}^* \rangle \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)] \}.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Aplicando a regra de contração de Wick e assumindo $n(k) \sim k^\alpha$ obtemos:

$$\langle \mathcal{J}_k; \mathcal{J}_{k'}^* \rangle = \frac{\rho_0^2}{(2\pi)^n} k^{\alpha+3} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \tag{3.58}$$

onde utilizamos que no limite de comprimentos de onda longos $\omega(k) \sim k$. Utilizando os espectros obtidos na teoria de turbulência de ondas, (2.101), ficamos com:

$$\langle \mathcal{J}_k; \mathcal{J}_{k'}^* \rangle \sim \begin{cases} k^{-1/2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') & \text{se } n = 2, \\ k^{-3/2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') & \text{se } n = 3. \end{cases} \tag{3.59a}$$

$$\tag{3.59b}$$

4 Considerações Finais

Com as equações (3.52a), (3.52b), (3.53a), (3.53b), (3.59a) e (3.59b) , mostramos que é possível revelar detalhes do comportamento estatístico das variáveis hidrodinâmicas do condensado através dos resultados da teoria de turbulência de ondas. Para ilustrar esta possibilidade calculamos a função de correlação da corrente do condensado tanto no regime de condensação fraca quanto no regime de condensação forte. Neste último caso, utilizamos as ondas acústicas geradas por perturbações no plano de fundo do condensado.

Em trabalhos futuros pretendemos expandir estes resultados para incluir o campo de velocidade dos condensados. Este caso apresenta dificuldades adicionais para o caso da turbulência de 4 ondas devido a presença do termo de densidade na sua expressão [13],

$$\mathbf{v} = m \frac{\mathbf{j}}{|\psi|^2},$$

o que dificulta a obtenção de uma expressão fechada para sua transformada de Fourier, uma possibilidade é fazer uso de técnicas computacionais. Outro caso a ser explorado futuramente é: como a presença de um potencial externo afeta a equação cinética do condensado e por consequência as cascatas de turbulência de ondas. Um melhor entendimento destas questões vai possibilitar uma ponte direta entre a turbulência de ondas e a turbulência hidrodinâmica.

Referências

- 1 BOSE, S. N. Plancks gesetz und lichtquantenhypothese. *Zeitschrift für Physik*, v. 26, n. 1, p. 178–181, Dec 1924. ISSN 0044-3328. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01327326>>. Citado na página 17.
- 2 PENROSE, O.; ONSAGER, L. Bose-einstein condensation and liquid helium. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 104, p. 576–584, Nov 1956. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.104.576>>. Citado na página 17.
- 3 DAVIS, K. B. et al. Bose-einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 75, p. 3969–3973, Nov 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.3969>>. Citado na página 17.
- 4 BRADLEY, C. C. et al. Evidence of bose-einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 75, p. 1687–1690, Aug 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.1687>>. Citado na página 17.
- 5 ANDERSON, M. H. et al. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 269, n. 5221, p. 198–201, 1995. ISSN 0036-8075. Disponível em: <<http://science.sciencemag.org/content/269/5221/198>>. Citado na página 17.
- 6 LONDON, F. The λ -phenomenon of liquid helium and the bose-einstein degeneracy. *Nature*, Nature Publishing Group SN -, v. 141, p. 643 EP -, Apr 1938. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/141643a0>>. Citado na página 17.
- 7 ALLEN, J. F.; MISENER, A. D. Flow of liquid helium ii. *Nature*, Nature Publishing Group SN -, v. 141, p. 75 EP -, Jan 1938. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/141075a0>>. Citado na página 17.
- 8 KAPITZA, P. Viscosity of liquid helium below the λ -point. *Nature*, Nature Publishing Group SN -, v. 141, p. 74 EP -, Jan 1938. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/141074a0>>. Citado na página 17.
- 9 TSATSOS, M. C. et al. Quantum turbulence in trapped atomic Bose–Einstein condensates. *Phys. Rep.*, v. 622, p. 1–52, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 37.
- 10 FRISCH, U.; KOLMOGOROV, A. N. *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. Citado na página 18.
- 11 FEYNMAN, R. Chapter ii application of quantum mechanics to liquid helium. In: GORTER, C. (Ed.). Elsevier, 1955, (Progress in Low Temperature Physics, v. 1). p. 17 – 53. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0079641708600773>>. Citado na página 18.
- 12 Hall, H. E.; Vinen, W. F. The rotation of liquid helium ii ii. the theory of mutual friction in uniformly rotating helium ii. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 238, n. 1213, p. 215–234, 1956. ISSN 0080-4630. Disponível em: <<http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/238/1213/215>>. Citado na página 18.

- 13 PETHICK, C.; SMITH, H. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. 2nd ed. ed. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 21 e 45.
- 14 KETTERLE, W. *Bose Einstein Condensation*. 2002. Disponível em: <http://www.rle.mit.edu/cua_pub/ketterle_group/Popular_papers/BEC%20Enc%20preprint.pdf>. Citado na página 19.
- 15 GRIFFIN, A.; SNOKE, D. W.; STRINGARI, S. (Ed.). *Bose-Einstein Condensation*. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 1995. Citado na página 21.
- 16 NAZARENKO, S. *Wave Turbulence*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011. v. 825. (Lecture Notes in Physics, v. 825). Citado 9 vezes nas páginas 21, 23, 24, 25, 27, 31, 32, 34 e 39.
- 17 CHOI, Y. et al. Anomalous probability of large amplitudes in wave turbulence. *Phys. Lett. A*, v. 332, n. 3-4, p. 230–238, nov. 2004. ISSN 03759601. Citado na página 27.
- 18 SANTOS, F. E. A. dos. Hydrodynamics of vortices in bose-einstein condensates: A defect-gauge field approach. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 94, p. 063633, Dec 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.94.063633>>. Citado na página 37.