Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Boa postura da "boa" equação de Boussinesq em espaços de Sobolev na reta e no toro

Autor: *Renan de Carvalho Lourenço*

Orientador: *Rafael Fernando Barostichi*

São Carlos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Renan de Carvalho Lourenço, realizada em 02/03/2018:

Rafael F. Barostichi

Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi
UFSCar

Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira
UFSCar

Sérgio Luís Zani

Prof. Dr. Sérgio Luís Zani
USP

Agradecimentos

Agradeço,

Primeiramente ao Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi, pela oportunidade de desenvolver este projeto e todo auxílio dado.

À Renata Oliveira Figueira, por toda ajuda, estudos e atenção.

À Mariana Salgado Lopes, por todo companheirismo e amor.

Aos meus estimados amigos.

Ao meu falecido Pai.

Resumo

Neste trabalho abordamos o problema de boa postura da equação diferencial parcial não linear conhecida como a "boa"equação de Boussinesq em espaços de Sobolev. Apresentaremos os resultados de boa postura em ambos os casos, o periódico, quando os dados iniciais e as soluções são periódicos na variável espacial, e o não periódico.

Sumário

Introdução

Por volta de 1870, Boussinesq encontrou alguns modelos para propagação de onda de pequena amplitude e ondas na superfície da água. Estas equações possuem solução por ondas viajantes chamadas ondas solitárias que são denominadas dessa maneira pela translação da onda na superfície. A teoria de Boussinesq foi a primeira a dar uma explicação satisfatória e científica sobre o fenômeno das ondas solitárias descobertas por Scott-Russel(1808-1882) 30 anos antes. À primeira vista, Boussinesq desejava denominar tal equação de equação de Lyapunov, dada sua conexão com a estabilidade das ondas solitárias.
Iremos considerar o problema de valor inicial para a equação de Boussinesq

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + (f(u))_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{T}, \quad t > 0, & \text{(Caso Periódico)} \\ u(0,x) = u_0(x); \ u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + (f(u))_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, & \text{(Caso Real)} \\ u(0,x) = u_0(x); \ u_t(0,x) = u_1(x). \end{cases}$$

Dessa forma, pode-se perceber que existem várias maneiras de observarmos e modelarmos o problema de pequena amplitude, basta colocarmos diferentes funções para $f(u)$. Porém, todos estes modelos possuem uma característica marcante, de que são as perturbações da equação de onda linear que cuidam da não linearidade e dispersão.
Parte do motivo da relativa escassez de resultados referentes às equações do tipo Boussinesq podem ser devidas ao fato que o problema de valor inicial nem sempre é globalmente bem posto. Existem perfis iniciais de onda e velocidade que são suaves, mas para os quais a solução perde a regularidade em tempo finito.
Nosso principal objetivo é encontrar boa postura local para a solução quando $f(u) = u^2$.

O tipo de espaço onde iremos desenvolver tal postura será o espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{T})$ e $H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$, equipados, respectivamente, com as normas

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{T})} = \|\langle n \rangle^s \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{T})} \qquad \text{e} \qquad \|f\|_{H^s(\mathbb{R})} = \|\langle \xi \rangle^s \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

sendo $\langle a \rangle \equiv \sqrt[2]{1+|a|^2}$.
Além disso, trabalharemos com índices de Sobolev $s > -\dfrac{1}{4}$, em especial, garantiremos que para $s < -\dfrac{1}{4}$, algumas estimativas usadas aqui não valem.
Este trabalho foi baseado nos artigos sobre boa postura da "boa"equação de Boussinesq no caso real produzido pelo professor doutor Luiz Gustavo Farah e no caso periódico junto com a professora doutora Márcia Assumpção Guimarães Scialom, citados em [1] e [3]. Além disso, este texto está organizado da seguinte maneira: no capítulo 1, apresentamos alguns resultados preliminares que serão úteis na demonstração do principal resultado desse trabalho, com ênfase na definição dos espaços de Sobolev periódicos e não periódicos. No capítulo 2, primeira seção, apresentamos a demonstração dos resultados necessários para consolidar nosso principal resultado, já na segunda seção, podemos então enunciar e desenvolver a estimativa principal, iniciando com uma equivalência de desigualdades e repartindo $\mathbb{R}^4$ em 6 regiões, de modo que, ao obter a estimativa da desigualdade em cada uma delas, completamos a demonstração. Utilizamos então, tal estimativa para desenvolver a existência e a boa postura da solução. No capítulo 3, com base nos resultados desenvolvidos no capítulo 2 e fazendo algumas pequenas mudanças, mostramos como obter o mesmo resultado de boa postura para o caso real.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, faremos uma exposição de alguns resultados necessários para abordarmos os principais resultados desse trabalho. As demonstrações desses resultados serão omitidas, o leitor interessado poderá encontrá-las nas referências [4],[5] e [8].

Definição 1.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita periódica, se existe um número real T, chamado período de f, tal que*

$$f(x+T) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

ou seja, qualquer múltiplo inteiro positivo nT de T também é um período de f. O menor valor de T que satisfaz a igualdade é chamado período fundamental de f e será denotado por T. Qualquer outro período de f será um múltiplo inteiro do período fundamental.

Exemplo 1.2. *As funções seno e cosseno são 2π-periódicas.*

Definição 1.3. *Vamos denotar por $\langle \cdot \rangle$ o operador que age da seguinte maneira*

$$\langle x \rangle \doteq \sqrt{1+|x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.4. *Vamos denotar o círculo unitário por $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, ou seja,*

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = 1\}.$$

Exemplo 1.5. *Podemos identificar S^1 com o intervalo $[0, 2\pi]$ via a seguinte aplicação*

$$\varphi[0, 2\pi] \to S^1$$
$$\theta \hookrightarrow (cos\theta, sen\theta).$$

Tal função é sobrejetora, injetora a menos de $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$. Considerando então topologicamente o quociente

$$\bar{\varphi} : \frac{[0, 2\pi]}{\{0, 2\pi\}} \to S^1,$$

temos que $\bar{\varphi}$ é um homeomorfismo e então

$$[0, 2\pi] \approx S^1.$$

Definição 1.6. *Vamos definir o toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ como sendo*

$$\mathbb{T}^n \equiv \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ vezes}}.$$

Definição 1.7. *Vamos denotar por $C^\infty(\mathbb{T})$ o espaço das funções de classe C^∞ munido da norma*

$$\|f\|_k = \sup_{x \in \mathbb{T}} |f^{(k)}(x)|.$$

Definição 1.8. *Dizemos que uma sequência (ϕ_j) em $C_c^\infty(\mathbb{R})$ converge a zero segundo a norma se*

- $\exists K \subset \mathbb{R}$ *compacto tal que supp* $\phi_j \subset K, \forall j \in \mathbb{N}$;
- ϕ_j *e* $\phi_j^{(k)}$ *convergem uniformemente a zero* $\forall k \in \mathbb{N}$.

Definição 1.9. *Uma distribuição 2π-periódica é um funcional linear contínuo $u : C^\infty(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ tal que*

$$u(\phi) \doteq \langle u, \phi \rangle,$$

ou seja, uma aplicação que satisfaz as seguintes propriedades

- $\langle u, \alpha\phi + \beta\psi \rangle = \alpha\langle u, \phi \rangle + \beta\langle u, \psi \rangle$

- $\langle u, \phi_j \rangle \to 0$ *sempre que* $\phi_j \to 0$ *em* $C^\infty(\mathbb{T})$ *e esta convergência ocorre uniformemente segundo a norma.*

Notação: $\mathcal{D}'(\mathbb{T}) = (C^\infty(\mathbb{T}))^*$.

Exemplo 1.10. *Seja* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *uma função periódica de classe* C^∞. *Definimos o operador*

$$\begin{aligned} T_f : C^\infty(\mathbb{T}) &\to \mathbb{C} \\ \phi &\hookrightarrow \int_0^{2\pi} \phi(x) f(x) dx, \end{aligned}$$

isto é

$$\langle T_f, \phi \rangle \doteq \int_0^{2\pi} f(x)\phi(x) dx.$$

É fácil ver que T_f *define uma distribuição* 2π*-periódica. Além disso, dadas* $f, g \in C^\infty(\mathbb{T})$, *temos* $T_f = T_g$ *se, e somente se,* $f = g$. *Podemos então fazer a identificação* $T_f \equiv f$.

Definição 1.11. *Se* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ *então definimos*

$$\langle u', \phi \rangle = -\langle u, \phi' \rangle, \forall \ \phi \in C^\infty[0, 2\pi].$$

Pergunta: Se ϕ é periódica, é possível expressar ϕ como uma soma do tipo

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikx},$$

para certas constantes $a_k \in \mathbb{C}$? Se essa decomposição for possível então, $\forall n \in \mathbb{Z}$, temos

$$e^{-inx}\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{i(k-n)x}.$$

Integrando ambos os lados de 0 a 2π, temos

$$\int_0^{2\pi} e^{-inx}\phi(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)x} dx = a_n 2\pi.$$

Então o coeficiente deverá ser

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx}\phi(x) dx.$$

Isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.12. *Se $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{T})$, definimos a transformada de Fourier periódica de ϕ por*

$$\hat{\phi}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\phi(x)dx, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 1.13. *Defina o operador $D_x = \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dx}$. Então*

$$\widehat{D_x^j\phi}(n) = n^j\hat{\phi}(n), \forall j \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Definição 1.14. *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ então definimos o coeficiente de Fourier de u por*

$$\hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi}\langle u, e^{-inx}\rangle.$$

Teorema 1.15. *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ então*

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}(n)e^{inx}.$$

Vale ressaltar que o Teorema 1.15 ocorre na convergência pontual em $D'(\mathbb{T})$.

Definição 1.16. *Considere (Ω, A, μ) um espaço de medida positiva, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, A σ- álgebra em Ω, μ medida positiva, definamos*

$$L^p = L^p_{\mu}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}; \|f\|_p < \infty\},$$

sendo

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p < \infty$$

e

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t\in\Omega} ess|f(t)|.$$

Definição 1.17. *Definimos o espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{T})$, $s \in \mathbb{R}$, como sendo*

$$H^s(\mathbb{T}) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}); \sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^{\frac{s}{2}}|\hat{\phi}(n)|^2 < \infty\}.$$

Se $f \in H^s(\mathbb{T})$ então

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{T})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{\phi}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 1.18. *$\|.\|_{H^s(\mathbb{T})}$ é uma norma e $(H^s(\mathbb{T}), \|.\|_{H^s(\mathbb{T})})$ é um espaço de Hilbert.*

Teorema 1.19. ***(Hölder)*** *Sejam $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p$, $g \in L^q$ então*

$$\int |f(t)g(t)|d\mu(t) \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Teorema 1.20. ***(Minkowski)*** *Se $1 \leqslant p < \infty$ e $f, g \in L^p$ então $f + g \in L^p$ e*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Proposição 1.21. ***(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)*** *Sejam $u, v \in L^2$ então*

$$\langle u, v\rangle^2 \leqslant \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle, \forall u, v \in L^2.$$

Sendo $\langle u, v\rangle$ o produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x)dx.$$

Teorema 1.22. *L^p é um espaço de Banach.*

Definição 1.23. *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ definimos a transformada de Fourier de f por*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx.$$

Além disso, iremos nos referir à transformada total de Fourier quando a transformada for tomada em todas as variáveis da função f. Usaremos também a notação $\mathcal{F}(f)(\xi)$.

Definição 1.24. *Definimos o espaço de Schwartz por*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n); \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|x^j D_x^\alpha f(x)\| < \infty, \forall j \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n\},$$

sendo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $D_x^\alpha \equiv \dfrac{1}{i}\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$.

Teorema 1.25. *Seja o operador $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dado por $\mathcal{F}(\varphi) = \hat{\varphi}$. Então* *(i)* $\mathcal{F}$ *é inversível;*

(ii) $\mathcal{F}^{-1}$ *é contínua;*

(iii) $\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi.$

Teorema 1.26. ***(Plancherel)*** *Se* $f \in L^2$ *então* $\hat{f} \in L^2$ *e vale*

$$\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2.$$

Definição 1.27. *Definimos o espaços das funções teste por*

$$C_c^\infty(a,b) = \{\phi \in C^\infty(a,b); \operatorname{supp}\phi \textit{ é compacto}\},$$

sendo $\operatorname{supp}\phi = \overline{\{x \in (a,b); \phi(x) \neq 0\}}$.

Definição 1.28. *Uma distribuição sobre* (a,b) *é um funcional linear contínuo* $u : C_c^\infty(a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ *tal que*

$$u(\phi) \doteq \langle u, \phi \rangle,$$

ou seja, uma aplicação que satisfaz

(i) $\langle u, \alpha\phi + \beta\psi \rangle = \alpha \langle u, \phi \rangle + \beta \langle u, \psi \rangle$;

(ii) $\langle u, \phi_j \rangle \to 0$ *sempre que* $\phi_j \to 0$ *em* $C_c^\infty(a,b)$.

Utilizamos a notação $\mathcal{D}'(a,b) = (C_c^\infty(a,b))'$.

Definição 1.29. *Dizemos que uma sequência* $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ *converge a zero se*

$$|x^\alpha \phi_j^{(\beta)}(x)| \to 0,$$

uniformemente para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$.

Definição 1.30. *Um funcional* $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ *linear e contínuo é chamado de distribuição temperada. Notação:* $\mathcal{S}'$.

Definição 1.31. *Definimos o espaço de Sobolev de grau* $s \in \mathbb{R}$ *por*

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{S}'; (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f} \in L^2\}.$$

Teorema 1.32. ***(Teorema da representação de Riesz)*** *Seja H um espaço de Hilbert real ou complexo, munido do produto interno $\langle .,. \rangle$. Seja u um funcional linear contínuo em H então existe um vetor $y \in H$ tal que*

$$u(x) = \langle x, y \rangle, \forall x \in H.$$

Teorema 1.33. ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então para todo par de números reais não negativos a, b vale*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Teorema 1.34. ***(Teorema da convergência dominada)*** *seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge quase sempre para uma função real mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leqslant g$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

Finalizaremos este capítulo enunciando o teorema do ponto fixo de Banach, fundamental neste trabalho.

Definição 1.35. *Seja X um espaço métrico não vazio com uma métrica d. Uma aplicação $f : X \longrightarrow X$ é dita uma contração se existir $0 \leqslant \beta < 1$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \beta d(x, y), \forall x, y \in X.$$

Teorema 1.36. ***(Ponto fixo de Banach)*** *Seja X um espaço métrico não vazio completo Se $f : X \longrightarrow X$ é uma contração então existe um único ponto fixo $x^* \in X$, isto é, $f(x^*) = x^*$.*

Capítulo 2

O Caso Periódico

Este capítulo é dedicado ao estudo do problema de Cauchy para a "boa"equação de Boussinesq com condições iniciais periódicas.

Considere o problema de valor inicial periódico

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + (f(u))_{xx} = 0, \\ u(0,x) = u_0(x);\ u_t(0,x) = u_1(x). \end{cases} \tag{2.1}$$

com $f(u) = u^2$ e a seguinte norma

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{T})} = \|\langle n\rangle^s \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Definição 2.1. *Seja Υ o espaço das funções $F(\cdot)$ com*

i) $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$;

ii) $F(x,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\ ,\forall x \in \mathbb{T}$;

iii) $F(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{T})\ ,\forall t \in \mathbb{R}$.

Para $s, b \in \mathbb{R}$, vamos denotar $X_{s,b}$ o completamento de Υ com a norma

$$\|F\|_{X_{s,b}} = \|\langle|\tau| - \gamma(n)\rangle^b \langle n\rangle^s \tilde{F}\|_{l^2_n L^2_\tau} \quad = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\langle|\tau| - \gamma(n)\rangle^b \langle n\rangle^s \tilde{F}\|_{L^2_\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

$$= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_R \langle|\tau| - \gamma(n)\rangle^b \langle n\rangle^s |\tilde{F}|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.3}$$

sendo γ a função dada por $\gamma(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2.1 Resultados Preliminares

Nesta seção, iremos desenvolver alguns lemas necessários para a demonstração do Teorema de existência e unicidade. Tais lemas podem ser encontrados em [1],[2],[3], [6] e [7].

Vamos considerar a equação diferencial parcial linear

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} = 0, \\ u(0,x) = \phi(x), \\ u_t(0,x) = (\psi(x))_x. \end{cases} \tag{2.4}$$

Aplicando a transformada de Fourier periódica em (2.4) na variável x. Temos a seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$(n^4 - n^2)\hat{u}(t,n) + \partial_t^2 \hat{u}(t,n) = 0. \tag{2.5}$$

Agora, pelo Método de Variação dos Parâmetros, temos que a solução de (2.5) é da forma

$$u(t,n) = c_1 e^{\sqrt{n^2+n^4}it} + c_2 e^{-\sqrt{n^2+n^4}it}. \tag{2.6}$$

Como em (2.4) temos $u(0,x) = \phi(x)$ e $u_t(0,x) = (\psi(x))_x$, as condições iniciais de (2.5) ficam $\hat{u}(0,n) = \hat{\phi}(n)$ e $\hat{u}_t(0,n) = \hat{\psi}_x(n)$. Logo,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \hat{\phi}(n), \\ \sqrt{n^2+n^4}c_1 - \sqrt{n^2+n^4}c_2 = \hat{\psi}_x(n). \end{cases} \tag{2.7}$$

Usando a notação desejada e lembrando as novas condições inicais, temos para $n \neq 0$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \hat{\phi}(n), \\ c_1 - c_2 = \dfrac{\hat{\psi}_x(n)}{\gamma(n)}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Resolvendo o sistema acima temos,

$$c_1 = \frac{\hat{\phi}(n)}{2} + \frac{\hat{\psi}_x(n)}{\gamma(n)}\ ,\ c_2 = \frac{\hat{\phi}(n)}{2} - \frac{\hat{\psi}_x(n)}{2i\gamma(n)},$$

e assim, substituindo esses valores de c_1 e c_2 em (2.6) temos que a solução da edo (2.5) é dada por

$$\hat{u}(t,n) = \widehat{V_c(t)\phi} + \widehat{V_s(t)\psi_x}.$$

Dessa forma, tomando-se a transformada de Fourier inversa, obtemos

$$u(t,n) = V_c(t)\phi + V_s(t)\psi_x,$$

sendo

$$V_c(t)\phi = \left(\frac{e^{it\sqrt{n^2+n^4}} + e^{-it\sqrt{n^2+n^4}}}{2}\hat{\phi}(n)\right)^{\vee}$$

e

$$V_s(t)\psi_x = \left(\frac{e^{it\sqrt{n^2-n^4}} + e^{-it\sqrt{n^2+n^4}}}{2i\sqrt{n^2+n^4}}\hat{\psi}_x(n)\right)^{\vee}.$$

Para encontrar a solução da EDP não linear, vamos procurar uma solução para funções de t do tipo

$$u(t) = b_1(t)u_1(t) + b_2(t)u_2(t), \quad \text{onde } u_1 = e^{it\gamma(n)} \text{ e } u_2(t) = e^{-it\gamma(n)}.$$

Da teoria qualitativa de equações diferenciais, temos

$$b_1(t) = -\int \frac{u_2(t)(u^2)_{xx}}{W(u_1,u_2)}dt + c_1 \text{ e } b_2(t) = \int \frac{u_1(t)(u^2)_{xx}}{W(u_1,u_2)}dt + c_2.$$

Uma vez que,

$$W(u_1,u_2)(t) = \text{Det}\begin{bmatrix} e^{it^{\gamma(n)}} & e^{-it^{\gamma(n)}} \\ i\gamma(n)e^{it^{\gamma(n)}} & -\,i\gamma(n)e^{it^{\gamma(n)}} \end{bmatrix} = -2i\gamma(n),$$

obtemos

$$b_1(t) = c_1 - \int_0^t \frac{e^{-it\gamma(n)}}{2i\gamma(n)}(u^2)_{xx}(t)dt \quad \text{e} \quad b_2(t) = c_2 + \int_0^t \frac{e^{-it\gamma(n)}}{2i\gamma(n)}(u^2)_{xx}(t)dt.$$

Substituindo as constantes c_1 e c_2 pelo que obtemos anteriormente, chegamos na solução da equação não linear dada por

$$u(t) = V_c(t)\phi + V_s(t)\psi_x + \int_0^t V_s(t-t')(u^2)_{xx}(t')dt'.$$

Seja agora $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ uma função de corte tal que, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $\theta \equiv 1$ em $[-1,1]$, $\text{supp}(\theta) \subset [-2,2]$. Para $0 < T < 1$, defina $\theta_T(t) = \theta(\frac{t}{T})$. Assim,

$$u(t) = \theta(t)\left(V_s(t)\psi_x + V_c(t)\phi + \theta_T(t)\int_0^t V_s(t-t')(u^2)_{xx}(t')dt'\right), \tag{2.9}$$

é uma solução de (2.4) obtida em $[0,T]$.

Lema 2.2. *Seja $u(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} = 0, \\ u(0,x) = \phi(x), \\ u_t(0,x) = (\psi(x))_x, \end{cases} \tag{2.10}$$

com $\phi \in H^s$ e $\psi \in H^{s-1}$. Então existe $c > 0$ dependendo de θ, s, b tal que

$$\|\theta u\|_{X_{s,b}} \leqslant c\left(\|\phi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}}\right).$$

Demonstração: Seja $u(t) = V_c(t)\phi + V_s(t)\psi_x$ e $\theta(t)$ dados como anteriormente. Então

$$\theta(t)u(x,t) = \theta(t)V_c(t)\phi + \theta(t)V_s(t)\psi_x.$$

Tomando-se a transformada total de Fourier de θu, obtemos

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta u}(\tau,\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}\widehat{\theta u}(t,\xi)dt = \int e^{it\tau}\theta\left(e^{it\gamma(\xi)}\left[\frac{\hat{\phi}(\xi)}{2}+\frac{\xi\hat{\psi(\xi)}}{2\gamma(\xi)}\right]+e^{-it\gamma(\xi)}\left[\frac{\hat{\phi}(\xi)}{2}-\frac{\xi\hat{\psi(\xi)}}{2\gamma(\xi)}\right]\right)dt\\
&= \int e^{it(\tau+\gamma(\xi))}\theta(t)\left[\frac{\hat{\phi}(\xi)}{2}+\frac{\xi\hat{\psi(\xi)}}{2\gamma(\xi)}\right]dt+\int e^{-it(\tau-\gamma(\xi))}\theta(t)\left[\frac{\hat{\phi}(\xi)}{2}-\frac{\xi\hat{\psi(\xi)}}{2\gamma(\xi)}\right]dt\\
&= \frac{\hat{\theta}(\tau+\gamma(\xi))}{2}\left[\hat{\phi}(\xi)+\frac{\xi\hat{\psi}(\xi)}{\gamma(\xi)}\right]+\frac{\hat{\theta}(\tau-\gamma(\xi))}{2}\left[\hat{\phi}(\xi)-\frac{\xi\hat{\psi}(\xi)}{\gamma(\xi)}\right].
\end{aligned}$$

Sejam agora $h_1(\xi)=\hat{\phi}(\xi)+\dfrac{\xi\hat{\psi}(\xi)}{\gamma(\xi)}$ e $h_2(\xi)=\hat{\phi}(\xi)-\dfrac{\xi\hat{\psi}(\xi)}{\gamma(\xi)}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|\theta u\|_{X_{s,b}} &= \|\langle|\tau|-\gamma(\xi)\rangle^b\langle\xi\rangle^s\widehat{\theta u}\|_{L^2_{\tau,\xi}}\\
&= \left\|\langle|\tau|-\gamma(\xi)\rangle^b\langle\xi\rangle^s\left(\frac{h_1(\xi)\hat{\theta}(\tau-\gamma(\xi))}{2}+\frac{h_2(\xi)\hat{\theta}(\tau+\gamma(\xi))}{2}\right)\right\|_{L^2_{\tau,\xi}}\\
&\leqslant \left\|\langle|\tau|-\gamma(\xi)\rangle^b\langle\xi\rangle^s\frac{h_1(\xi)\hat{\theta}(\tau-\gamma(\xi))}{2}\right\|_{L^2_{\tau,\xi}}+\left\|\langle|\tau|-\gamma(\xi)\rangle^b\langle\xi\rangle^s\frac{h_2(\xi)\hat{\theta}(\tau+\gamma(\xi))}{2}\right\|_{L^2_{\tau,\xi}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$I^2=\left\|\langle|\tau|-\gamma(\xi)\rangle^b\langle\xi\rangle^s\frac{h_1(\xi)\hat{\theta}(\tau-\gamma(\xi))}{2}\right\|^2_{L^2_{\tau,\xi}}=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{2s}\langle|\tau|-\gamma(\xi)\rangle^{2b}|h_1(\xi)|^2\left|\frac{\hat{\theta}(\tau-\gamma(\xi))}{4}\right|^2d\tau d\xi.$$

Uma vez que,

$$||\tau|-|\gamma(\xi)||=||\tau|-\gamma(\xi)|\leqslant\ \text{mín}\ \{|\tau-\gamma(\xi),|\tau+\gamma(\xi)|\},$$

temos,

$$I^2\leqslant\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{2s}\langle\tau-\gamma(\xi)\rangle^{2b}|h_1(\xi)|^2\left|\frac{\hat{\theta}(\tau-\gamma(\xi))}{4}\right|^2d\tau d\xi.$$

Fazendo a mudança $\alpha=\tau-\gamma(\xi)$, temos $d\alpha=d\tau$ e

$$I^2\leqslant\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{2s}\langle\alpha\rangle^{2b}|h_1(\xi)|^2\left|\frac{\hat{\theta}(\alpha)}{4}\right|^2d\alpha d\xi=\int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{2s}|h_1(\xi)|^2d\xi\int_{\mathbb{R}}\langle\alpha\rangle^{2b}\left|\frac{\hat{\theta}(\alpha)}{4}\right|^2d\alpha.$$

Observemos agora que

$$\int_{\mathbb{R}} \langle\alpha\rangle^{2b} \left|\frac{\hat{\theta}(\alpha)}{4}\right|^2 d\alpha \leqslant C^2_{\theta,b},$$

uma vez que $\hat{\theta} \in \mathcal{S}$ sempre que $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Portanto,

$$I^2 \leqslant C^2_{\theta,b} \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} |h_1(\xi)|^2 d\xi = C^2_{\theta,b}\ \|\langle\xi\rangle^2 h_1\|^2_{L^2_\xi}.$$

Analogamente, obtemos um resultado para $(II)^2$, isto é,

$$(II)^2 \leqslant C^2_{\theta,b}\ \|\langle\xi\rangle^2 h_2\|^2_{L^2_\xi}.$$

Juntando todas as partes, obtemos o seguinte

$$\|\theta u\|_{X_{s,b}} \leqslant (I) + (II) \leqslant 2C_{\theta,b}\left(\|\langle\xi\rangle^2 h_1(\xi)\|^2_{L^2_\xi} + \|\langle\xi\rangle^2 h_2(\xi)\|^2_{L^2_\xi}\right).$$

Observe então que

$$\begin{aligned}\|\langle\xi\rangle^2 h_1(\xi)\|^2_{L^2_\xi} + \|\langle\xi\rangle^2 h_2(\xi)\|^2_{L^2_\xi} &= \left\|\langle\xi\rangle^s \left((\hat{\phi}(\xi) + \frac{\xi\psi(\hat{\xi})}{\gamma(\xi)}\right)\right\|_{L^2_\xi} + \left\|\langle\xi\rangle^s \left((\hat{\phi}(\xi) - \frac{\xi\psi(\hat{\xi})}{\gamma(\xi)}\right)\right\|_{L^2_\xi} \\ &\leqslant 2\|\langle\xi\rangle^s \hat{\phi}(\xi)\|_{L^2\xi} + 2\left\|\langle\xi\rangle^s \frac{\xi\hat{\psi}(\xi)}{\gamma(\xi)}\right\|_{L^2_\xi}.\end{aligned}$$

Mas,

$$\left\|\langle\xi\rangle^s \frac{\xi\hat{\psi}(\xi)}{\gamma(\xi)}\right\|^2_{L^2_\xi} = \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^s \frac{|\xi|^2}{\gamma(\xi)^2} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^s \frac{1}{\langle\xi\rangle^2} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi,$$

pois,

$$\frac{\xi^2}{\xi^2 + \xi^4} = \frac{1}{1+\xi^2} = \frac{1}{\langle\xi\rangle^2}.$$

Em vista das observações obtemos a seguinte relação

$$\left\|\langle\xi\rangle^s \frac{\xi\hat{\psi}(\xi)}{\gamma(\xi)}\right\|_{L^2_\xi} = \|\psi\|_{H^{s-1}},$$

e

$$\|\theta u\|_{X_{s,b}} \leqslant C_{\theta,b}\left(\|\phi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}}\right).$$

A demonstração do lema está completa. □

Lema 2.3. *Sejam* $-\frac{1}{2} \leqslant b' \leqslant 0 \leqslant b \leqslant b'+1$ *e* $0 < T \leqslant 1$. *Então*

(i) $\left\| \theta_T(t) \int_0^t f(t')dt' \right\|_{H_t^b} \leqslant T^{1-(b-b')} \|f\|_{H_t^{b'}}$

(ii) $\left\| \theta_T(t) \int_0^t V_s(t-t') f(u)(t')dt' \right\|_{X_{s,b}} \leqslant T^{1-(b-b')} \left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\tilde{f}(u)(\tau,n)}{2i\gamma(n)} \right) \right\|_{X_{s,b}}$.

Demonstração:

(i) Vamos reescrever (i) da seguinte maneira

$$
\begin{aligned}
\theta_T(t) \int_0^t f(t')dt' &= \frac{1}{2\pi}\theta_T(t) \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{it'\tau} \widehat{f}(\tau) d\tau dt' \\
&= \frac{1}{2\pi}\theta_T(t) \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\tau) \int_0^t e^{it'\tau} dt' d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\theta_T(t) \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\tau) \left(\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau} \right) d\tau.
\end{aligned}
$$

Agora, vamos separar a integral em duas regiões $|\tau|T \leqslant 1$ e $|\tau|T > 1$,

$$
\begin{aligned}
\theta_T(t) \int_0^t f(t')dt' &= \theta_T(t) \int_{|\tau|T\leqslant 1} \widehat{f}(\tau) \left(\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau} \right) d\tau + \theta_T(t) \int_{|\tau|T>1} \widehat{f}(\tau) \left(\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau} \right) d\tau \\
&= \text{(I)} + \text{(II)} + \text{(III)}
\end{aligned}
$$

com

$$
\begin{aligned}
\text{(I)} &= \theta_T(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{|\tau|T\leqslant 1} (i\tau)^{k-1} \widehat{f}(\tau) d\tau \\
\text{(II)} &= \theta_T(t) \int_{|\tau|T>1} \widehat{f}(\tau) e^{it\tau} (i\tau)^{-1} d\tau \\
\text{(III)} &= -\theta_T(t) \int_{|\tau|T>1} \widehat{f}(\tau) (i\tau)^{-1} d\tau.
\end{aligned}
$$

Aqui, usamos o seguinte fato $e^{it\tau}-1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(it\tau)^k}{k!}$. Vamos agora estimar cada parcela.

Estimativa de (I): Se $|\tau|T \leqslant 1$, então $|\tau|^{k-1} \leqslant (T^{-1})^{k-1}$ para todo $k \geqslant 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
\|(\mathrm{I})\|_{H_t^b} &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\|t^k\theta_T(t)\int\limits_{|\tau|T\leqslant 1}(i\tau)^{k-1}\widehat{f}(\tau)d\tau\right\|_{H_t^b}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}T^{1-k}\left\|t^k\theta_T(t)\int\limits_{|\tau|T\leqslant 1}\widehat{f}(\tau)d\tau\right\|_{H_t^b}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{T^{1-k}}{k!}\left|\int\limits_{|\tau|T\leqslant 1}\widehat{f}(\tau)d\tau\right|\left\|t^k\theta_T(t)\right\|_{H_t^b}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, observamos que

$$\left|\int\limits_{|\tau|T\leqslant 1}\widehat{f}(\tau)d\tau\right| = \left|\int\limits_{|\tau|T\leqslant 1}\widehat{f}(\tau)\langle\tau\rangle^{b'}\langle\tau\rangle^{-b'}d\tau\right| \leqslant \|f\|_{H^{b'}}\left(\int\limits_{|\tau|T\leqslant 1}\langle\tau\rangle^{-2b'}d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

o que implica

$$\|(\mathrm{I})\|_{H_t^b} \leqslant \|f\|_{H^{b'}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{T^{1-k}}{k!}\left\|t^k\theta_T\right\|_{H^b}\left(\int\limits_{|\tau|T\leqslant 1}\langle\tau\rangle^{-2b'}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, é suficiente provar que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{T^{1-k}}{k!}\left\|t^k\theta_T\right\|_{H^b}\left(\int\limits_{|\tau|T\leqslant 1}\langle\tau\rangle^{-2b'}d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant CT^{1-(b-b')}. \tag{2.11}$$

Temos $\left\|t^k\theta_T\right\|_{H^b} = \left\|\langle\tau\rangle^b\widehat{t^k\theta_T}(\tau)\right\|_{L^2}$ com

$$\begin{aligned}
\widehat{t^k\theta_T}(\tau) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-it\tau}t^k\theta_T(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-it\tau}t^k\theta\left(\frac{t}{T}\right)dt\\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(Ts)\tau}(Ts)^k\theta(s)Tds = T^{k+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-is(T\tau)}s^k\theta(s)ds,
\end{aligned}$$

isto é, $\widehat{t^k\theta_T}(\tau) = T^{k+1}\left[\widehat{t^k\theta}(T\tau)\right]$. Assim,

$$\left\|t^k\theta_T\right\|_{H^b} = T^{k+1}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle\tau\rangle^{2b}\left|\widehat{t^k\theta}(T\tau)\right|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} = T^{k+1}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle T^{-1}\rho\rangle^{2b}\left|\widehat{t^k\theta}(\rho)\right| T^{-1}d\rho\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $T^{-2} \geqslant T^{-1} \geqslant 1$, temos que

$$\langle T^{-1}\rho\rangle^2 = 1 + T^{-2}\rho^2 \leqslant T^{-2}(1+\rho^2) = T^{-2}\langle\rho\rangle^2,$$

o que implica o seguinte fato

$$\left\|t^k\theta_T\right\| \leqslant T^{k+1}T^{-\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}T^{-2b}\langle\rho\rangle^{2b}\left|\widehat{t^k\theta}(\rho)\right|^2 d\rho\right)^{\frac{1}{2}} = T^{k+\frac{1}{2}}T^{-b}\left\|t^k\theta\right\|_{H^b}. \tag{2.12}$$

Usando que $b \leqslant 1 + b' \leqslant 1$, obtemos

$$\left\|t^k\theta\right\|_{H^b} \leqslant \left\|t^k\theta\right\|_{H^1} = \left\|t^k\theta\right\|_{L^2} + \left\|\partial_t(t^k\theta)\right\|_{L^2} = \left\|t^k\theta\right\|_{L^2} + \left\|kt^{k-1}\theta\right\|_{L^2} + \left\|t^k\theta'\right\|_{L^2}.$$

Como supp $(\theta) \subset [-2,2]$, podemos trabalhar com limitações do seguinte tipo

$$|t^k\theta(t)| \leqslant 2^k|\theta(t)|, \quad |kt^{k-1}\theta(t)| \leqslant 2^{k-1}k|\theta(t)| \quad \text{and} \quad |t^k\theta'(t)| \leqslant 2^k|\theta'(t)|,$$

para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $k \geqslant 1$. Então,

$$\left\|t^k\theta\right\|_{H^b} \leqslant k2^k\left(2\left\|\theta\right\|_{L^2} + \left\|\theta'\right\|_{L^2}\right) = k2^kC_\theta,\ \forall k \geqslant 1.$$

Da equação (2.12) temos

$$\left\|t^k\theta_T\right\|_{H^b} \leqslant C_\theta T^{-b}T^{k+\frac{1}{2}}k2^k.$$

Sendo assim,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{T^{1-k}}{k!}\left\|t^k\theta\right\|_{H^b} \leqslant C_\theta T^{1-b}T^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{(k-1)!} \leqslant C_\theta T^{1-b}T^{\frac{1}{2}},$$

onde usamos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(k-1)!} = 2e^2 < \infty$. Por outro lado, como $b' \leqslant 0$ e $T^{-2} \geqslant 1$, temos

$$\begin{aligned}\left(\int_{|\tau|T \leqslant 1} \langle \tau \rangle^{-2b'} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{|\tau|T \leqslant 1} (1+\tau^2)^{-b'} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_{|\tau|T \leqslant 1} (2T^{-2})^{-b'} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant 2^{-\frac{b'}{2}} T^{b'} \left(\int_{|\tau|T \leqslant 1} 1 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = C_{b'} T^{b'} T^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Então,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^{1-k}}{k!} \left\| t^k \theta_T \right\|_{H^b} \left(\int_{|\tau|T \leqslant 1} \langle \tau \rangle^{-2b'} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_\theta T^{1-b} T^{\frac{1}{2}} C_{b'} T^{b'} T^{-\frac{1}{2}} = C_{\theta,b'} T^{1-(b-b')},$$

concluindo assim que (2.11) acontece.

Estimativa para (II): Observemos que

$$\|(\mathrm{II})\|_{H_t^b} = \left\| \theta_T(t) \int_{|\tau|T>1} (i\tau)^{-1} \widehat{f}(\tau) d\tau \right\|_{H_t^b} = \left| \int_{|\tau|T>1} (i\tau)^{-1} \widehat{f}(\tau) d\tau \right| \|\theta_T\|_{H^b}. \quad (2.13)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\left| \int_{|\tau|T>1} (i\tau)^{-1} \widehat{f}(\tau) d\tau \right| = \left| \int_{|\tau|T>1} \langle \tau \rangle^{-b'} (i\tau)^{-1} \langle \tau \rangle^{b'} \widehat{f}(\tau) d\tau \right| \leqslant \left(\int_{|\tau|T>1} \langle \tau \rangle^{-2b'} |\tau|^{-2} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^{b'}},$$

com

$$\begin{aligned}\int_{|\tau|T>1} \langle \tau \rangle^{-2b'} |\tau|^{-2} d\tau &= 2 \int_{T^{-1}}^{\infty} (1+\tau^2)^{-b'} \tau^{-2} d\tau = 2 \int_{1}^{\infty} (1+T^{-2}s^2)^{-b'} T^2 s^{-2} T^{-1} ds \\ &\leqslant T^{2b'+1} \int_{1}^{\infty} (1+s^2)^{-b'} s^{-2} ds,\end{aligned}$$

pois $T^{-2} \geqslant 1$ e $-b' \geqslant 0$. Além disso,

$$\int_{1}^{\infty} (1+s^2)^{-b'} s^{-2} ds \leqslant \int_{1}^{\infty} (2s^2)^{-b'} s^{-2} ds = 2^{-b'} \int_{1}^{\infty} s^{-2b'-2} ds < \infty,$$

pois $2b'+2>1$. Então,

$$\left(\int\limits_{|\tau|T>1}\langle\tau\rangle^{-2b'}|\tau|^{-2}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{H^{b'}}\leqslant C_{b'}T^{b'+\frac{1}{2}}\|g\|_{H^{b'}}.$$

Por outro lado, $\|\theta_T\|_{H^b}=\left\|\langle\tau\rangle^b\widehat{\theta}_T\right\|_{L^2}$ com

$$\widehat{\theta}_T(\tau)=\int e^{-it\tau}\theta\left(\frac{t}{T}\right)dt=\int e^{-isT\tau}\theta(s)Tds=T\widehat{\theta}(T\tau).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|\theta_T\|_{H^b} &= \left(\int\langle\tau\rangle^{2b}T^2|\widehat{\theta}(T\tau)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}=T\left(\int\langle T^{-1}\rho\rangle^{2b}|\widehat{\theta}(\rho)|^2T^{-1}d\rho\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant T^{\frac{1}{2}}\left(\int\langle T^{-1}\rho\rangle^{2b}|\widehat{\theta}(\rho)|^2d\rho\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant T^{\frac{1}{2}}\left(\int T^{-2b}\langle\rho\rangle^{2b}|\widehat{\theta}(\rho)|^2d\rho\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= T^{\frac{1}{2}-b}\|\theta\|_{H^b},\end{aligned}$$

pois $\langle T^{-1}\rho\rangle^{2b}=(1+T^{-2}\rho^2)^b\leqslant T^{-2b}(1+\rho^2)^b=T^{-2b}\langle\rho\rangle^{2b}$. Voltando à equação (2.13), concluímos que

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{II})\|_{H_t^b} &\leqslant C_{b'}T^{b'+\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}-b}\|\theta\|_{H^b}\|g\|_{H^{b'}}\\ &= C_{\theta,b,b'}T^{1-(b-b')}\|g\|_{H^{b'}}.\end{aligned}$$

Estimativa para (III): Vamos escrever $(\mathrm{III})=\theta_T(t)J(t)$, sendo

$$J(t)=\int\limits_{|\tau|T>1}e^{it\tau}(i\tau)^{-1}\widehat{g}(\tau)d\tau.$$

Temos então que

$$\|(\mathrm{III})\|_{H_t^b}=\left\|\langle\tau\rangle^b\widehat{(\theta_T\cdot J)}\right\|_{L^2}=C\left\|\langle\tau\rangle^b\widehat{\theta_T}*\widehat{J}(\tau)\right\|_{L^2}.$$

Observemos que

$$\langle\tau\rangle^b\leqslant C(\langle\tau-y\rangle^b+|y|^b),\quad\forall y\in\mathbb{R}. \tag{2.14}$$

De fato,

$$|\tau|^2 \leqslant (|\tau - y| + |y|)^2 = |\tau - y|^2 + 2|\tau - y||y| + |y|^2 \leqslant 2(|\tau - y|^2 + |y|^2),$$

pois $2|\tau - y||y| \leqslant |\tau - y|^2 + |y|^2$. Assim, como $b \geqslant 0$,

$$\langle\tau\rangle^b = (1 + |\tau|^2)^{\frac{b}{2}} \leqslant \left(1 + 2(|\tau - y|^2 + |y|^2)\right)^{\frac{b}{2}} \leqslant 2^{\frac{b}{2}}(1 + |\tau - y|^2 + |y|^2)^{\frac{b}{2}}.$$

Para provarmos a equação (2.14), é suficiente garantir que

$$(\alpha + \beta)^{\frac{b}{2}} \leqslant \alpha^{\frac{b}{2}} + \beta^{\frac{b}{2}} \tag{2.15}$$

é verdade para todo $\alpha,\ \beta \geqslant 0$. Suponhamos que $\alpha \neq 0$ temos então que (2.15) ocorre, se, e somente se,

$$\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{b}{2}} \leqslant 1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{b}{2}}.$$

Vamos considerar a função $g(t) = 1 + t^{\frac{b}{2}} - (1 + t)^{\frac{b}{2}}$. Como $g(0) = 0$ e

$$g'(t) = \frac{b}{2}\left(t^{\frac{b}{2}-1} - (1 + t)^{\frac{b}{2}-1}\right) \geqslant 0,$$

pois $0 \leqslant \dfrac{b}{2} < 1$, temos $g(t) \geqslant 0$ para todo $t \geqslant 0$. Provamos assim a desigualdade (2.15), o que finaliza a prova de (2.14).

Usando (2.14), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle\tau\rangle^b \widehat{\theta_T} * \widehat{J}(\tau) &= \int \langle\tau\rangle^b \widehat{J}(\tau - y)\widehat{\theta_T}(y)dy \\
&\leqslant C\int \langle\tau - y\rangle^b \widehat{J}(\tau - y)\widehat{\theta_T}(y) + \widehat{J}(\tau - y)|y|^b\widehat{\theta_T}(y)dy \\
&= C\left((\langle\tau\rangle^b \widehat{J}) * \widehat{\theta_T} + \widehat{J} * (|\tau|^b\widehat{\theta_T})\right).
\end{aligned}$$

Assim, aplicando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
\|(\mathrm{III})\|_{H^b} &\leqslant C\left(\left\|(\langle\tau\rangle^b \widehat{J}) * \widehat{\theta_T}\right\|_{L^2} + \left\|\widehat{J} * (|\tau|^b\widehat{\theta_T})\right\|_{L^2}\right) \\
&\leqslant C\left(\|\theta_T\|_{L^1}\left\|\langle\tau\rangle^b \widehat{J}\right\|_{L^2} + \left\||\tau|^b\widehat{\theta}_T\right\|_{L^1}\left\|\widehat{J}\right\|_{L^2}\right).
\end{aligned}$$

Sendo χ a função característica no conjunto $\{\tau \in \mathbb{R};\ |\tau|T > 1\}$, temos então

$$J(t) = \int e^{it\tau}\left(\chi(\tau)(i\tau)^{-1}\widehat{f}(\tau)\right)d\tau = \mathcal{F}_\tau^{-1}\left(\chi(\tau)(i\tau)^{-1}\widehat{f}(\tau)\right)(t),$$

mostrando que $\widehat{J}(\tau) = \chi(\tau)(i\tau)^{-1}\widehat{f}(\tau)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left\|\langle\tau\rangle^b \widehat{J}(\tau)\right\|_{L^2} &= \left\|\langle\tau\rangle^b\chi(\tau)(i\tau)^{-1}\widehat{f}(\tau)\right\|_{L^2} = \left(\int\limits_{|\tau|T>1}|\tau|^{-2}\langle\tau\rangle^{2b}|\widehat{f}(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\int\limits_{|\tau|T>1}|\tau|^{-2}\langle\tau\rangle^{2(b-b')}\langle\tau\rangle^{2b'}|\widehat{f}(\tau)|^2\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \left(\sup_{|\tau|T>1}|\tau|^{-2}\langle\tau\rangle^{2(b-b')}\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{H^{b'}}.
\end{aligned}$$

Segue de $0 \leqslant b - b' \leqslant 1$ e $T^{-1} \geqslant 1$ que

$$\begin{aligned}
|\tau|^{-2}\langle\tau\rangle^{2(b-b')} &= |\tau|^{-2}(1+\tau^2)^{b-b'} = \left(|\tau|^{-2(b-b')^{-1}} + |\tau|^{2(1-(b-b')^{-1})}\right)^{b-b'}\\
&\leqslant \left(T^{2(b-b')^{-1}} + T^{-2(1-(b-b')^{-1})}\right)^{b-b'}\\
&= T^2(1+T^{-2})^{b-b'} \leqslant 2^{b-b'}T^{2(1-(b-b'))},
\end{aligned}$$

para todo $|\tau| > T^{-1}$. Obtemos então

$$\left\|\langle\tau\rangle^b\widehat{J}(\tau)\right\|_{L^2} \leqslant C_{b,b'}T^{1-(b-b')}\|f\|_{H^{b'}}.$$

Além disso, lembremos que $\widehat{\theta_T}(t) = T\widehat{\theta}(T\tau)$. Logo

$$\left\|\widehat{\theta_T}\right\|_{L^1} = \int|\widehat{\theta}(T\tau)|Td\tau = \int|\widehat{\theta}(s)|ds = \left\|\widehat{\theta}\right\|_{L^1}.$$

Então,

$$\left\|\widehat{\theta_T}\right\|_{L^1}\left\|\langle\tau\rangle^b\widehat{J}(\tau)\right\|_{L^2} \leqslant C_{\theta,b,b'}T^{1-(b-b')}\|g\|_{H^b}.$$

Resta agora estimar apenas $\left\||\tau|^b\widehat{\theta_T}\right\|_{L^1}\left\|\widehat{J}\right\|_{L^2}$. Temos

$$\left\||\tau|^b\widehat{\theta_T}\right\|_{L^1} = \int|\tau|^b|\widehat{\theta}(T\tau)Td\tau = \int|T^{-1}s|^b|\widehat{\theta}(s)|ds = T^{-b}\int|s|^b|\widehat{\theta}(s)|ds = C_{\theta,b}T^{-b},$$

pois $\widehat{\theta} \in \mathcal{S}$. Por outro lado, lembremos que $\widehat{J}(\tau) = \chi(\tau)(i\tau)^{-1}\widehat{g}(\tau)$. Sendo assim

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{J}\right\|_{L^2} &= \left(\int\limits_{|\tau|T>1} |\tau|^{-2}|\widehat{f}(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_{|\tau|T>1} |\tau|^{-2}\langle\tau\rangle^{-2b'}\langle\tau\rangle^{2b'}|\widehat{f}(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \left(\sup_{|\tau|T>1} |\tau|^{-2}\langle\tau\rangle^{-2b'}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^{b'}} .\end{aligned}$$

Como $0 \leqslant -b' < 1$ e $T^{-1} \geqslant 1$, temos

$$\begin{aligned}|\tau|^{-2}\langle\tau\rangle^{-2b'} &= |\tau|^{-2}(1+\tau^2)^{-b'} = \left(\tau^{2(b')^{-1}} + \tau^{2(1+(b')^{-1})}\right)^{-b'} \leqslant \left(T^{-2(b')^{-1}} + T^{-2(1+(b')^{-1})}\right)^{-b'} \\ &= T^2(1+T^{-2})^{b'} \leqslant 2^{-b'}T^{2(1+b')},\end{aligned}$$

para todo $|\tau| > T^{-1}$. Logo,

$$\left\||\tau|^b\widehat{\theta_T}\right\|_{L^1}\left\|\widehat{J}\right\|_{L^2} \leqslant C_{\theta,b}T^{-b}2^{-\frac{b'}{2}}T^{1+b'} = C_{\theta,b,b'}T^{1-(b-b')},$$

o que finaliza a estimativa para (III) e, consequentemente a prova de (2.3)(i).

(ii) Temos que $V_s(t)$ é o operador pseudo diferencial dado por

$$\mathcal{F}(V_s(t)\varphi(\xi) = \widehat{V_s(t)\varphi}(\xi) = \left(\frac{e^{it\gamma(\xi)} - e^{-it\gamma(\xi)}}{2i\gamma(\xi)}\right)\hat{\varphi(\xi)}.$$

Notemos agora que

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_\xi\left(\theta_T(t)\int_0^t V_s(t-t')f(u)(t')dt'\right)(t,\xi) = \theta_T(t)\int_0^t \mathcal{F}_\xi\left(V_s(t-t')f(u)(t')\right)dt' \\ &= \theta_T(t)\int_0^t\left(\frac{e^{i(t-t')\gamma(\xi)} - e^{-i(t-t')\gamma(\xi)}}{2i\gamma(\xi)}\right)\mathcal{F}_\xi(f(u))(t',n)dt' \\ &= e^{it\gamma(n)}\left(\theta(_T(t)\int_0^t \frac{e^{-it'\gamma(n)}\mathcal{F}_\xi(f(u))(t',n)}{2i\gamma(n)}dt'\right) - e^{-it\gamma(n)}\left(\theta(_T(t)\int_0^t \frac{e^{it'\gamma(n)}\mathcal{F}_\xi(f(u))(t',n)}{2i\gamma(n)}dt'\right) \\ &= e^{it\gamma(n)}\left(\theta_T(t)\int_0^t h_1(t',n)dt'\right) - e^{-it\gamma(n)}\left(\theta_T(t)\int_0^t h_2(t',n)dt'\right).\end{aligned}$$

Defina:

$$\mathcal{F}_x(A(t,n))) = e^{it\gamma(n)}\mathcal{F}_x(w_1(t,n)) - e^{-it\gamma(n)}\mathcal{F}_x(w_2(t,n)).$$

Tomando agora, a transformada de Fourier em relação a t, nos dá

$$\begin{aligned}
A(\tau,n) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}\mathcal{F}_x(A(t,n))dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\tau-\gamma(n))}\mathcal{F}_x(w_1(t,n))dt - \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\tau+\gamma(n))}\mathcal{F}_x(w_2(t,n))dt \\
&= \tilde{w}_1(\tau-\gamma(n),n) - \tilde{w}_2(\tau+\gamma(n),n).
\end{aligned}$$

Agora, usando a definição de $X_{s,b}$

$$\begin{aligned}
\|A(t,x)\|_{X_{s,b}} &= \|\langle|\tau|-\gamma(n)\rangle^b\langle n\rangle^s\tilde{A}\|_{l^2_nL^2_\tau} \\
&\leqslant \|\langle|\tau|-\gamma(n)\rangle^b\langle n\rangle^s\tilde{w}_1(\tau-\gamma(n),n)\|_{l^2_nL^2_\tau} + \|\langle|\tau|-\gamma(n)\rangle^b\langle n\rangle^s\tilde{w}_2(\tau+\gamma(n),n)\|_{l^2_nL^2_\tau}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|A(t,x)\|_{X_{s,b}} &\leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle|\tau|-\gamma(n)\rangle^{2b}|\tilde{w}_1(\tau-\gamma(n),n)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad+\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle|\tau|-\gamma(n)\rangle^{2b}|\tilde{w}_2(\tau+\gamma(n),n)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&=\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle|\rho+\gamma(n)|-\gamma(n)\rangle^{2b}|\tilde{w}_1(\rho,n)|^2d\rho\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad+\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle|\rho-\gamma(n)|-\gamma(n)\rangle^{2b}|\tilde{w}_2(\rho,n)|^2d\rho\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Como $\gamma(n)\geqslant 0,\ \forall\ n\in\mathbb{R}$, temos

$$\text{máx}\ \{|\rho-\gamma(n)|-\gamma(n), |\rho+\gamma(n)|-\gamma(n)\}\leqslant|\rho|,$$

pois,

$$|\rho|\geqslant|\rho+\gamma(n)|-\gamma(n)\ \text{e}\ |\rho|\geqslant\gamma(n)-|\rho-\gamma(n)|,$$

então

$$|\rho|\geqslant||\rho+\gamma(n)|-\gamma(n)|.$$

Por outro lado,

$$|\rho|\geqslant|-\gamma(n)|-|\rho-\gamma(n)|=\gamma(n)-|\rho-\gamma(n)|,$$

e daí,

$$|\rho| \geqslant ||\rho - \gamma(n)| - \gamma(n)|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|A(t,x)\|_{X_{s,b}} &\leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle\rho\rangle^{2b}|\tilde{w}_1(\rho,n)|^2 d\rho\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle\rho\rangle^{2b}|\tilde{w}_2(\rho,n)|^2 d\rho\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle\rho\rangle^{2b}|\mathcal{F}_\rho(\mathcal{F}_x(w_1(\rho,n)))|^2 d\rho\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle\rho\rangle^{2b}|\mathcal{F}_\rho(\mathcal{F}_x(w_2(\rho,n)))|^2 d\rho\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\|\mathcal{F}_x(w_1)\|_{H_t^b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\|\mathcal{F}_x(w_2)\|_{H_t^b}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Agora, lembremos que

$$\mathcal{F}_x(w_1(t,n)) = \theta_T(t)\int_0^t h_1(t',n)dt' \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}_x(w_2(t,n)) = \theta_T(t)\int_0^t h_2(t',n)dt'.$$

Pela parte (i) temos

$$\|\mathcal{F}_x(w_1(t,n))\|_{H_t^b} \leqslant T^{1-(b-b')}\|h_1(t',n)\|_{H_t^{b'}}$$

e

$$\|\mathcal{F}_x(w_2(t,n))\|_{H_t^b} \leqslant T^{1-(b-b')}\|h_2(t',n)\|_{H_t^{b'}}.$$

Logo,

$$\|A(t,x)\|_{X_{s,b}} \leqslant T^{1-(b-b')}\left[\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\|h_1(t',n)\|^2_{H_t^{b'}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\|h_2(t',n)\|^2_{H_t^{b'}}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

sendo

$$h_1(t,n) = \frac{e^{-it\gamma(n)}\mathcal{F}_x(f(u)(t,n))}{2i\gamma(n)} \;\; \text{e} \;\; h_2(t,n) = \frac{e^{it\gamma(n)}\mathcal{F}_x(f(u)(t,n))}{2i\gamma(n)}.$$

Então

$$\mathcal{F}_x(h_1(\tau,n)) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}h_1(t,n)dt = \frac{\tilde{f}(u)(\tau+\gamma(n),n)}{2i\gamma(n)}$$

e

$$\mathcal{F}_x(h_2(\tau,n)) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}h_2(t,n)dt = \frac{\tilde{f}(u)(\tau-\gamma(n),n)}{2i\gamma(n)}.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\|A(t,x)\|_{X_{s,b}} \leqslant T^{1-(b-b')} &\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{2s} \int_{\mathbb{R}} \langle \tau\rangle^{2b'} \left|\frac{\tilde{f}(u)(\tau-\gamma(n),n)}{2i\gamma(n)}\right|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ T^{1-(b-b')} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{2s} \int_{\mathbb{R}} \langle \tau\rangle^{2b'} \left|\frac{\tilde{f}(u)(\tau+\gamma(n),n)}{2i\gamma(n)}\right|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$
\tau-\gamma(n)=\rho \quad \text{e} \quad \tau+\gamma(n)=\rho,
$$

temos

$$
\begin{aligned}
\|A(t,x)\|_{X_{s,b}} \leqslant T^{1-(b-b')} &\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{2s} \int_{\mathbb{R}} \langle \rho+\gamma(n)\rangle^{2b'} \left|\frac{\tilde{f}(u)(\rho,n)}{2i\gamma(n)}\right|^2 d\rho\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ T^{1-(b-b')} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{2s} \int_{\mathbb{R}} \langle \rho-\gamma(n)\rangle^{2b'} \left|\frac{\tilde{f}(u)(\rho,n)}{2i\gamma(n)}\right|^2 d\rho\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Observemos agora que

$$
||\rho|-\gamma(n)| \leqslant \text{mín } \{|\rho-\gamma(n)|, |\rho+\gamma(n)|\},
$$

donde seque que

$$
||\rho|-\gamma(n)|^{2b'} \geqslant \text{máx } \{|\rho-\gamma(n)|^{2b'}, |\rho+\gamma(n)|^{2b'}\},
$$

pois $b' \leqslant 0$.

Daí,

$$
\|A(t,x)\|_{X_{s,b}} \leqslant T^{1-(b-b')} \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\tilde{f}(u)(\rho,n)}{2i\gamma(n)}\right)\right\|_{X_{s,b}},
$$

ou seja,

$$
\left\|\theta_T(t)\int_0^t V_s(t-t')f(u)(t')dt'\right\|_{X_{s,b}} \leqslant T^{1-(b-b')} \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\tilde{f}(u)(\tau,n)}{2i\gamma(n)}\right)\right\|_{X_{s,b}}.
$$

A demonstração do lema está completa. □

Lema 2.4. *Existe* $c > 0$ *tal que*

$$\frac{1}{c} \leqslant \sup_{x,y\geqslant 0} \frac{1+|x+y|}{1+|x-\sqrt{y^2+y}|} \leqslant c.$$

Demonstração: Afirmamos que

$$y \leqslant \sqrt{y^2+y} \leqslant y + \frac{1}{2}, \quad \forall y \geqslant 0.$$

De fato,

$$y = |y| = \sqrt{y^2} \leqslant \sqrt{y^2+y}, \quad \forall y \geqslant 0,$$

além disso,

$$(y+\frac{1}{2})^2 = y^2 + y + \frac{1}{4} \geqslant y^2 + y.$$

Concluímos então que

$$\sqrt{y^2+y} \leqslant y + \frac{1}{2},$$

demonstrando a afirmação.

Daí,

$$1+|x-\sqrt{y^2+y}| \geqslant 1+|x| - |\sqrt{y^2+y}| = 1 + x - \sqrt{y^2+y} \geqslant 1 + x - y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + (x-y),$$

temos também,

$$1+|x-\sqrt{y^2+y}| \geqslant 1 + \sqrt{y^2+y} - x \geqslant 1 + (y-x) \geqslant \frac{1}{2} + (y-x),$$

logo,

$$1+|x-\sqrt{y^2+y}| \geqslant \frac{1}{2} + |x-y| \geqslant \frac{1}{2}$$

então

$$\frac{1+|x-y|}{1+|x-\sqrt{y^2+y}|} \leqslant \frac{\frac{1}{2}}{1+|x-\sqrt{y^2+y}|} + \frac{\frac{1}{2}}{1+|x-\sqrt{y^2+y}|} \leqslant 1+1 = 2.$$

Por outro lado,

$$1+|x-y| \geqslant 1+(x-y) \geqslant 1+x-\sqrt{y^2+y} \geqslant \frac{1}{2}+x-\sqrt{y^2+y}$$

e

$$1+|x-y| \geqslant 1+(y-x) \geqslant 1+\sqrt{y^2+y}-\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}+\sqrt{y^2+y}-x,$$

o que implica

$$1+|x-y| \geqslant \frac{1}{2}+|x-\sqrt{y^2+y}| \geqslant \frac{1}{2}(1+|x-\sqrt{y^2+y}|)$$

e

$$\frac{1+|x-y|}{1+|x-\sqrt{y^2+y}|} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Portanto, para $c=2$ concluímos o resultado e a demonstração do lema está completa. □

Lema 2.5. *Sejam* $0 \leqslant a_- \leqslant a_+$, $a_+ + a_- > \frac{1}{2}$, *e* $a_+ \neq \frac{1}{2}$ *então*

$$J(s)=\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle y-s\rangle^{2a_+}\langle y+s\rangle^{2a_-}} dy \leqslant \frac{c}{\langle s\rangle^{\alpha}}, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

sendo $\alpha = 2a_- - [1+2a_+]_+$ *e*

$$[\lambda]_+ = \begin{cases} \lambda & se \quad \lambda > 0 \\ \epsilon, & \lambda = 0 \\ 0 & se \quad \lambda < 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Demonstração: Sabemos que

$$\langle y\rangle^2 = (1+|y|^2).$$

Daí

$$\langle y\rangle^2 \leqslant 1+(|y-s|+|s|)^2 = 1+|y-s|^2+|s|^2+2|y-s||s|,$$

e como

$$2|y-s||s| \leqslant |y-s|^2+|s|^2,$$

temos

$$\langle y\rangle^2 \leqslant 2(1+|y-s|^2+|s|^2) \leqslant 2(1+|s|^2)(1+|y-s|^2) = 2\langle s\rangle^2\langle y-s\rangle^2$$

e

$$\langle y\rangle \leqslant \sqrt{2}\langle y-s\rangle\langle s\rangle,$$

isto é,

$$\frac{1}{\langle y-s\rangle} \leqslant \frac{\sqrt{2}\langle s\rangle}{\langle y\rangle}.$$

Analogamente,

$$\frac{1}{\langle y+s\rangle} \leqslant \frac{\sqrt{2}\langle s\rangle}{\langle y\rangle},$$

e então

$$\frac{1}{\langle y-s\rangle^{2a_+}\langle y+s\rangle^{2a_-}} \leqslant \frac{\sqrt{2}^{2(a_++a_-)}\langle s\rangle^{2(a_++a_-)}}{\langle y\rangle^{2(a_++a_-)}} \leqslant \frac{2\langle s\rangle}{\langle y\rangle^{2(a_++a_-)}},$$

pois $2(a_+ + a_-) > 1$. Logo,

$$J(s) \leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{2\langle s\rangle}{\langle y\rangle^{2(a_++a_-)}}dy < \infty,\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Vamos agora dividir $J(s)$ em 3 regiões, sendo elas

$$A_1 = \{y \in \mathbb{R}\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant 2s\}$$
$$A_2 = \{y \in \mathbb{R}\ ;\ -2s \leqslant y \leqslant 0\}$$
$$A_3 = \{y \in \mathbb{R}\ ;\ |y| \geqslant 2s\}.$$

Dessa forma, $J(s) = J_{A_1}(s) + J_{A_2}(s) + J_{A_3}(s)$. Nossa meta agora é estimar $J(s)$ através destas integrais. Vamos trabalhar primeiro com a integral $J_{A_1}(s)$, temos

$$J_{A_1}(s) = \int_0^{2s} \frac{1}{\langle y-s\rangle^{2a_+}\langle y+s\rangle^{2a_-}}dy.$$

Neste caso, $0 \leqslant y \leqslant s$, donde segue que $s \leqslant y+s$ e $\langle s\rangle \leqslant \langle y+s\rangle$, e assim,

$$\frac{1}{\langle y+s\rangle^2} \leqslant \frac{1}{\langle s\rangle^2}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
J_{A_1}(s) &\leqslant \frac{1}{\langle s\rangle^{2a_-}}\int_0^{2s}\frac{1}{\langle y-s\rangle^{2a_+}}dy = \frac{1}{\langle s\rangle^{2a_-}}\int_0^{2s}\frac{1}{(1+|y-s|^2)^{a_+}}dy\\
&= \frac{1}{\langle s\rangle^{2a_-}}\int_{-s}^{s}\frac{1}{(1+u^2)^{a_+}}du = \frac{2}{\langle s\rangle^{2a_-}}\int_0^{s}\frac{1}{(1+u^2)^{a_+}}du.
\end{aligned}$$

Observe agora que

$$1+u^2 \leqslant 1+2u+u^2 = (1+u)^2 \leqslant 2(1+u)^2,$$

pois $0 \leqslant (1-u)^2$ e $2u \leqslant 1+u^2$. Daí,

$$\frac{1}{1+u^2} \geqslant \frac{1}{(1+u)^2}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\langle s\rangle^{2a_-}}\int_0^{s}\frac{1}{(1+u^2)^{a_+}}du &\leqslant \frac{2c}{\langle s\rangle^{2a_-}}\int_0^{s}\frac{1}{(1+u)^{2a_+}}du\\
&= \frac{2c}{\langle s\rangle^{2a_-}}\int_0^{s}\frac{1}{(1+u)^{2a_+}}du\\
&= \begin{cases} \dfrac{2c}{\langle s\rangle^{2a_-}}\left(\dfrac{(1+u)^{-2a_+ +1}}{-2a_+ +1}\right)\Bigg|_0^s, & \text{se} \quad a_+ \neq \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2c}{\langle s\rangle^{2a_-}} ln|1+u| \;|_0^s, & \text{se} \quad a_+ = \dfrac{1}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo, como $a_+ \neq \dfrac{1}{2}$ então $1-2a_+ > 0$ e

$$\begin{aligned}
J_{A_1}(s) &\leqslant \frac{2c}{\langle s\rangle^{2a_-}}\left(\frac{1}{(1-2a_+)(1+s)^{1-2a_+}} - \frac{1}{1-2a_+}\right)\\
&\leqslant \frac{2c}{\langle s\rangle^{2a_-}}\frac{1}{(1+s)^{2(\frac{1}{2}-a_-)}} \leqslant \frac{c}{\langle s\rangle^{2a_-}}\frac{1}{\langle s\rangle^{1-2a_+}}\\
&= c\langle s\rangle^{-2a_- +(1-2a_+)} \leqslant c\langle s\rangle^{-2a_- +[1-2a_+]_+},
\end{aligned}$$

pois $\langle s\rangle \geqslant 1$ e $1-2a_+ \leqslant [1-2a_+]_+$.

Observe também que

$$\frac{1}{(1+s)^{2(\frac{1}{2}-a_-)}} \leqslant \frac{1}{(1+s^2)^{\frac{1}{2}-a_-}} = \frac{1}{\langle s\rangle^{\frac{1}{2}-a_-}}, \quad \text{se} \quad 1-2a_- > 0$$

e
$$\frac{1}{(1+s)^{2(\frac{1}{2}-a_-)}} \leqslant \frac{1}{2(1+s^2)^{\frac{1}{2}-a_+}} = \frac{c}{\langle s\rangle^{\frac{1}{2}-a_+}}, \quad \text{se} \quad 1-2a_- < 0.$$

Portanto, temos

$$J_{A_1}(s) \leqslant c\langle s\rangle^{-2a_-+[1-2a_+]_+},$$

ou ainda,
$$J_{A_1} \leqslant \frac{c}{\langle s\rangle^r}, \quad r = \min\{2a_-, 2a_+, 2a_+ + 2a_- - 1\}.$$

Estimemos agora a integral $J_{A_2}(s)$:

$$J_{A_2}(s) = \int_{-2s}^{0} \frac{1}{\langle y-s\rangle^{2a_+}\langle y+s\rangle^{2a_-}}dy = \int_0^{2s} \frac{1}{\langle y-s\rangle^{2a_-}\langle y+s\rangle^{2a_+}}dy.$$

Fazendo a mudança $u=-y$ e usando o raciocínio análogo feito para J_{A_1}, nos dá

$$J_{A_2} \leqslant \frac{1}{\langle s\rangle^{2a_+}}\int_0^{2s}\frac{1}{\langle y-s\rangle^{2a_-}}dy \leqslant c\langle s\rangle^{-2a_-+(1-2a_+)} \leqslant c\langle s\rangle^{-2a_-+[1-2a_+]_+}.$$

Finalmente, vejamos a estimativa para $J_{A_3}(s)$:

$$\begin{aligned} J_{A_3}(s) &= \int_{-\infty}^{-2s} \frac{1}{\langle y-s\rangle^{2a_+}\langle y+s\rangle^{2a_-}}dy + \int_{2s}^{\infty} \frac{1}{\langle y-s\rangle^{2a_+}\langle y+s\rangle^{2a_-}}dy \\ &= \int_{2s}^{\infty}\left(\frac{1}{\langle y-s\rangle^{2a_+}\langle y+s\rangle^{2a_-}} + \frac{1}{\langle y-s\rangle^{2a_-}\langle y+s\rangle^{2a_+}}\right)dy. \end{aligned}$$

Como $s \geqslant 0$, segue que
$$y \leqslant 2(y+s) \quad \text{e} \quad \frac{y}{2} \leqslant y+2,$$

e, no caso em que $y \geqslant 2s$, temos

$$y \leqslant y + (y-2s) = 2(y-s) \quad \text{e} \quad \frac{y}{2} \leqslant (y-s).$$

Logo,
$$\langle \frac{y}{2}\rangle \leqslant \text{mín}\ \{\langle y-s\rangle, \langle y+s\rangle\}$$

e
$$J_{A_3} \leqslant 2\int_{2s}^{\infty}\frac{1}{\langle \frac{y}{2}\rangle^{2a_++2a_-}}dy = 4\int_s^{\infty}\langle u\rangle^{-(2a_++2a_-)}du.$$

Lembremos agora que

$$(1+u)^2 \leqslant 2(1+u^2) \quad \text{e} \quad (1+u)^2 \leqslant 2\langle u\rangle^2,$$

e assim

$$\langle u\rangle^{-(2a_+ + 2a_-)} \leqslant c(1+u)^{-(2a_+ + 2a_-)}.$$

Portanto,

$$J_{A_3}(s) \leqslant c\int_s^\infty \frac{1}{(1+u)^{(2a_+ + 2a_-)}}du = c\cdot \frac{u^{1-2(a_+ + a_-)}}{1-2(a_+ + a_-} \,|_s^\infty,$$

pois $a_+ + a_- > \dfrac{1}{2}$ e $2(a_+ + a_-) > 1$, e então

$$J_{A_3}(s) \leqslant cs^{1-2a_+ - 2a_-} \leqslant c\langle s\rangle^{1-2(a_+ + a_-)}.$$

Por fim,

$$J(s) \leqslant J_{A_1} + J_{A_2} + J_{A_3} \leqslant c\langle s\rangle^\alpha$$

sendo $\alpha = -2a_- + [1+2a_+]_+$, pois

$$-2a_- + [1-2a_+]_+ \geqslant -2a_+ + [1-2a_-]_+ \geqslant 1-2(a_+ + a_-).$$

A demonstração do lema está agora completa. □

Corolário 2.6. *Sejam $p, q > 0$, $p \neq \dfrac{1}{2}, q \neq \dfrac{1}{2}$ e $r = min\{p, q, p+q-1\}$ com $p+q > 1$. Então existe $c > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle x-\alpha\rangle^p\langle x-\beta\rangle^q}dx \leqslant \frac{c}{\langle \alpha-\beta\rangle^r}.$$

Demonstração: Segue diretamente da demonstração do Lema 2.5. □

Lema 2.7. *Sejam $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, β, $\nu > 0$ e $H = \{h \in \mathbb{R}\ ;\ h = \alpha \pm n, n \in \mathbb{Z}$ e $|h| \leqslant \beta\}$. Então*

$$\sum_{h\in H} \frac{1}{(\nu+|h|)^{2\alpha}} \leqslant 2\left(\frac{2}{\nu^{2\alpha}} + \int_0^\beta \frac{dx}{(\nu+x)^{2\alpha}}\right).$$

Demonstração: Observe que, como $\nu > 0$ e $\beta > 0$,

$$\frac{1}{(\nu+|h|)^{2\alpha}} \leqslant \frac{2}{\nu^{2\alpha}\beta} + \frac{1}{(\nu+|h|)^{2\alpha}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{h\in H} \frac{1}{(\nu+|h|)^{2\alpha}} &\leqslant \sum_{h\in H} \frac{2}{\nu^{2\alpha}\beta} + \frac{1}{(\nu+|h|)^{2\alpha}} \\
&\leqslant \int_{-\beta}^{\beta} \frac{2}{\nu^{2\alpha}\beta} + \frac{1}{(\nu+|x|)^{2\alpha}} dx \\
&= 2\int_{0}^{\beta} \frac{2}{\nu^{2\alpha}\beta} + \frac{1}{(\nu+|x|)^{2\alpha}} dx \\
&= 2\left(\frac{2}{\nu^{2\alpha}} + \int_0^{\beta} \frac{dx}{(\nu+x)^{2\alpha}}\right),
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Lema 2.8. *Se* $\gamma > \dfrac{1}{2}$ *então*

$$\sup_{(n,\tau)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|\tau \pm n_1(n-n_1)|^{\gamma}} < \infty.$$

Demonstração: Vamos reescrever o resultado de maneira que

$$\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|\tau \pm n_1(n-n_1)|^{\gamma}} = \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|(n_1-\alpha^{\pm})(n_1-\beta^{\pm})|)^{\gamma}},$$

sendo $\alpha = \alpha^{\pm}$ e $\beta = \beta^{\pm}$ as raízes do polinômio

$$\tau \pm (n_1(n-n_1)) = 0,$$

isto é,

$$\tau \pm (n_1(n-n_1)) = (n_1-\alpha^{\pm})(n_1-\beta^{\pm}).$$

Existem no máximo $10n_1$ tal que

$$|n_1-\alpha| \leqslant 2 \quad \text{ou} \quad |n_1-\beta| \leqslant 2.$$

De fato, seja $f(n_1) = \tau \pm (n_1(n-n_1)) = 0$. Agora, suponha que exista apenas uma raiz, ou seja, $\alpha = \beta$. Então

$$f(n_1) = (n_1 - \alpha)^2,$$

e o caso $|n_1 - \alpha| \leqslant 2$ é válido para

(i) $n_1 = \alpha$;

(ii) $n_1 = \alpha \pm 1$;

(iii) $n_1 = \alpha \pm 2$,

que totalizam 5 diferentes opções. No caso $\alpha \neq \beta$, temos

$$f(n_1) = (n_1 - \alpha)(n_1 - \beta)$$

e daí, o caso $|n_1 - \alpha| \leqslant 2$ é válido para

(i) $n_1 = \alpha$;

(ii) $n_1 = \alpha \pm 1$;

(iii) $n_1 = \alpha \pm 2$,

e o caso $|n_1 - \beta| \leqslant 2$ é válido para

(i) $n_1 = \beta$;

(ii) $n_1 = \beta \pm 1$;

(iii) $n_1 = \beta \pm 2$,

que totalizam 10 possíveis casos. Agora, observe que se $\alpha \notin \mathbb{Z}$, podemos tomar n_1 como a parte inteira de α, isto é,

$$n_1 = [\alpha] = z, \ \alpha \in [z, z+1] \subset \mathbb{R},$$

e o resultado dos 10 casos seguem analogamente. Vamos agora trabalhar com o restante dos n_1, isto é,

$$|n_1 - \alpha| > 2 \quad \text{e} \quad |n_1 - \beta| > 2.$$

Observe que

$$|n_1-\alpha| \leqslant \frac{|n_1-\alpha||n_1-\beta|}{2} \quad \text{e} \quad |n_1-\beta| \leqslant \frac{|n_1-\alpha||n_1-\beta|}{2},$$

assim

$$|n_1-\alpha| + |n_1-\beta| \leqslant |n_1-\alpha||n_1-\beta|$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(1+|n_1-\alpha|)(1+|n_1-\beta|) &= \frac{1}{2}(1+|n_1-\alpha|+|n_1-\beta|+|n_1-\alpha||n_1-\beta|)\\
&\leqslant \frac{1}{2}(1+2|n_1-\alpha||n_1-\beta|)\\
&\leqslant 1+|n_1-\alpha||n_1-\beta|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}(1+|n_1-\alpha|)(1+|n_1-\beta) \leqslant 1+|n_1-\alpha||n_1-\beta|,$$

e daí

$$\frac{1}{1+|(n_1-\alpha)(n_1-\beta)|} \leqslant \frac{2}{(1+|n_1-\alpha|)(1+|n_1-\beta|)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|\tau \pm n_1(n-n_1)|^\gamma} &= \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|n_1-\alpha||n_1-\beta|)^\gamma}\\
&\leqslant \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{2}{(1+|n_1-\alpha|)^\gamma(1+|n_1-\beta|)^\gamma}\\
&= 2\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|n_1-\alpha|)^\gamma}\cdot\frac{1}{(1+|n_1-\beta|)^\gamma}\\
&\leqslant 2\left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|n_1-\alpha|)^{2\gamma}}\cdot\frac{1}{(1+|n_1-\beta|)^{2\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant 2\left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|n_1-\alpha|)^{2\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|n_1-\beta|)^{2\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= 2\|x\|_{l^2}\|y\|_{l^2} < \infty,
\end{aligned}$$

sendo x e y os vetores de l^2 obtidos. A demonstração do lema está completa. □

Observação 2.9. *Usaremos a notação $a \lesssim b$ quando existir $\theta \geqslant 0$ tal que $a \leqslant \theta b$ e* *denotaremos* $a \sim b$ *quando* $a \lesssim b$ *e* $b \lesssim a$. *Com essa notação, temos*

$$\|u\|_{X_{s,b}} \sim \|\langle|\tau| - n^2\rangle^b \langle n\rangle^s \tilde{u}(\tau, n)\|_{l_n^2 L_\tau^2}.$$

De fato,

(i) $\langle n\rangle \sim 1 + |n|$, *pois*

$$(1 + |n|)^2 \leqslant 2(1 + |n|^2)$$

e além disso,

$$\langle n\rangle^2 = 1 + n^2 \leqslant (1 + |n|)^2.$$

(ii) $\langle|\tau| - n^2\rangle \sim \langle|\tau| - \gamma(n)\rangle$, *pois*

o lema 2.4 *com* $x = |\tau|$ *e* $y = n^2$ *nos garante que*

$$\frac{1}{c} \leqslant \frac{1 + ||\tau| - n^2|}{1 + ||\tau| - \gamma(n)|} \leqslant c.$$

Do item (*i*), *temos*

$$1 + ||\tau| - n^2| \sim \langle|\tau| - n^2\rangle \quad e \quad 1 + ||\tau| - \gamma(n)| \sim \langle|\tau| - \gamma(n)\rangle.$$

Logo,

$$\langle|\tau| - n^2\rangle \sim \langle|\tau| - \gamma(n)\rangle.$$

2.2 Resultados Principais

Nesta seção, demonstraremos os resultados principais deste capítulo.

Teorema 2.10. *Seja* $s > -\dfrac{1}{4}$, $u,v \in X_{s,-a}$. *Então existe* $c > 0$, *com* c *dependendo apenas de* a, b *e* s, *tal que*

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{|n|^2\widetilde{uv}(\tau, n)}{2i\gamma(n)}\right)\right\|_{X_{s,-a}} \leqslant c\|u\|_{X_{s,b}}\|v\|_{X_{s,b}} \tag{2.17}$$

acontece nos seguintes casos

(i) $s \geqslant 0,\ b > \frac{1}{2}$ *e* $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$,

(ii) $-\frac{1}{4} < s < 0, b > \frac{1}{2}$ *e* $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ *tal que* $|s| < \frac{a}{2}$.

Demonstração: Sejam $u,v \in X_{s,b}$. Definimos

$$f(\tau, n) = \langle |\tau| - n^2 \rangle^b \langle n \rangle^s \tilde{u}(\tau, n)$$

e

$$g(\tau, n) = \langle |\tau| - n^2 \rangle^b \langle n \rangle^s \tilde{v}(\tau, n).$$

Afirmação 1: A desigualdade (2.17) é equivalente a

$$W(f,g,\phi) \leqslant c\|f\|_{l^2_n L^2_\tau}\|g\|_{l^2_n L^2_\tau}\|\phi\|_{l^2_n L^2_\tau}, \tag{2.18}$$

sendo

$$W(f,g,\phi) = \sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \frac{\langle n \rangle^s}{\langle n_1 \rangle^s \langle n-n_1 \rangle^s} \frac{g(\tau_1, n_1) f(\tau-\tau_1, n-n_1)\bar{\phi}(\tau,n) d\tau d\tau_1}{\langle |\tau| - n^2 \rangle^a \langle |\tau_1| - n_1^2 \rangle^b \langle |\tau-\tau_1| - (n-n_1)^2 \rangle^b}.$$

Primeiramente, vamos mostrar que (2.17) implica (2.18). Para isto, suponha válido o teorema. Agora observe que

$$\begin{aligned}
W(f,g,\phi) &= \sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \frac{\langle n \rangle^s}{\langle n_1 \rangle^s \langle n-n_1 \rangle^s} \frac{\langle |\tau| - n^2 \rangle^b \langle n \rangle^s \tilde{v}(\tau, n) f(\tau-\tau_1, n-n_1)\bar{\phi}(\tau,n) d\tau d\tau_1}{\langle |\tau| - n^2 \rangle^a \langle |\tau_1| - n_1^2 \rangle^b \langle |\tau-\tau_1| - (n-n_1)^2 \rangle^b} \\
&= \sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \frac{\langle n \rangle^s}{\langle n_1 \rangle^s \langle n-n_1 \rangle^s} \frac{\langle |\tau| - n^2 \rangle^b \langle n \rangle^s \tilde{v}(\tau, n) \langle |\tau| - n^2 \rangle^b \langle n \rangle^s \tilde{u}(\tau, n)\bar{\phi}(\tau,n) d\tau d\tau_1}{\langle |\tau| - n^2 \rangle^a \langle |\tau_1| - n_1^2 \rangle^b \langle |\tau-\tau_1| - (n-n_1)^2 \rangle^b} \\
&= \sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \frac{\tilde{v}(\tau_1, n_1)\tilde{u}(\tau-\tau_1, n-n_1)\bar{\phi}(\tau,n)}{\langle |\tau| - n^2 \rangle^a} d\tau d\tau_1 \\
&= \sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \langle n \rangle^s \langle |\tau| - n^2 \rangle^{-a} \bar{\phi}(\tau,n) \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{v}(\tau_1, n_1)\tilde{u}(\tau-\tau_1, n-n_1) \right) d\tau d\tau_1 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \langle n \rangle^s \langle |\tau| - n^2 \rangle^{-a} \bar{\phi}(\tau,n) \tilde{v} * \tilde{u}(\tau, n) d\tau \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \langle n \rangle^s \langle |\tau| - n^2 \rangle^{-a} \bar{\phi}(\tau,n) (2\pi) \widetilde{uv}(\tau, n) d\tau.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|W(f,g,\phi)| &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|n|^2}{\gamma(n)}\langle n\rangle^s\langle|\tau|-n^2\rangle^{-a}|\bar{\phi}|(\tau,n)2\pi|\widetilde{uv}(\tau,n)|\frac{2i}{2i}d\tau \\
&\leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|n|^2}{|2i\gamma(n)|^2}\langle n\rangle^{2s}\langle|\tau|-n^2\rangle^{-2a}|\widetilde{uv}(\tau,n)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} |4\pi i||\bar{\phi}(\tau,n)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{|n|^2\widetilde{uv}(\tau,n)}{2i\gamma(n)}\right)\right\|_{X_{s,-a}} \|\phi\|_{l^2_n L^2_\tau}|4\pi| \\
&\leqslant c\|f\|_{l^2_n L^2_\tau}\|g\|\|_{l^2_n L^2_\tau}\|\phi\|_{l^2_n L^2_\tau}.
\end{aligned}$$

□

Vamos agora mostrar que (2.18) implica (2.17).

Sabemos que

$$W(f,g,\phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|n|^2}{\gamma(n)}\langle n\rangle^s\langle|\tau|-n^2\rangle^{-a}\bar{\phi}(\tau,n)(2\pi)\widetilde{uv}(\tau,n)d\tau.$$

Definindo

$$h(\tau,n) = \frac{2\pi|n|^2}{\gamma(n)}\langle n\rangle^s\langle|\tau|-n^2\rangle^{-a}\widetilde{uv}(\tau,n),$$

podemos escrever W como o seguinte produto interno

$$W(f,g,\phi) = \langle h,\phi\rangle_{l^2_n L^2_\tau}.$$

Usando agora (2.18), nos dá

$$|\langle h,\phi\rangle| \leqslant c\|f\|_{l^2_n L^2_\tau}\|g\|\|_{l^2_n L^2_\tau}\|\phi\|_{l^2_n L^2_\tau},\ \forall\phi\in L^2(\mathbb{R}).$$

Logo, o operador

$$\begin{aligned}
T_h : L^2(\mathbb{R}^2) &\to \mathbb{C} \\
\phi &\hookrightarrow \langle h,\phi\rangle
\end{aligned}$$

satisfaz

$$|T_h(\phi)| \leqslant c\|f\|_{l^2_n L^2_\tau}\|g\|\|_{l^2_n L^2_\tau}\|\phi\|_{l^2_n L^2_\tau},\ \forall\phi\in L^2(\mathbb{R}),$$

e pelo teorema de representação de Riesz para espaços de Hilbert, temos

$$\|h\|_{l^2_n L^2_\tau} = \|T_h\| \leqslant c\|f\|_{l^2_n L^2_\tau}\|g\|_{l^2_n L^2_\tau}.$$

Observe agora que $\dfrac{|n|^2}{\gamma(n)} \leqslant 1,\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Daí

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{|n|^2\widetilde{uv}(\tau,n)}{2i\gamma(n)}\right)\right\|_{X_{s,-a}} \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{|n|^2}{|2i\gamma(n)|^2}\langle n\rangle^{2s}\langle|\tau|-n^2\rangle^{-2a}|\widetilde{uv}(\tau,n)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \|\mathcal{F}^{-1}(\widetilde{uv}(\tau,n))\|_{X_{s,-a}}$$
$$= \|h\|_{l^2_n L^2_\tau} \leqslant c\|u\|_{X_{s,b}}\|v\|_{X_{s,b}}.$$

Isso mostra que as afirmativas (2.17) e (2.18) são equivalentes.

Agora, para conseguirmos a desigualdade desejada, precisaremos analisar melhor todas as possibilidades de sinais de τ, τ_1 e $\tau - \tau_1$. Para isso, dividiremos $\mathbb{R}^4$ nas seguintes regiões:

- $\Gamma_1 = \{(n,\tau,n_1,\tau_1) \in \mathbb{R}^4\ ;\ \tau_1 < 0, \tau - \tau_1 < 0\}$
- $\Gamma_2 = \{(n,\tau,n_1,\tau_1) \in \mathbb{R}^4\ ;\ \tau_1 \geqslant 0, \tau - \tau_1 < 0, \tau \geqslant 0\}$
- $\Gamma_3 = \{(n,\tau,n_1,\tau_1) \in \mathbb{R}^4\ ;\ \tau_1 \geqslant 0, \tau - \tau_1 < 0, \tau < 0\}$
- $\Gamma_4 = \{(n,\tau,n_1,\tau_1) \in \mathbb{R}^4\ ;\ \tau_1 < 0, \tau - \tau_1 \geqslant 0, \tau \geqslant 0\}$
- $\Gamma_5 = \{(n,\tau,n_1,\tau_1) \in \mathbb{R}^4\ ;\ \tau_1 < 0, \tau - \tau_1 \geqslant 0, \tau < 0\}$
- $\Gamma_6 = \{(n,\tau,n_1,\tau_1) \in \mathbb{R}^4\ ;\ \tau_1 \geqslant 0, \tau - \tau_1 \geqslant 0\}$.

Desta forma, denotando também

- $n_2 = n - n_1$
- $\sigma = |\tau| - n^2$
- $\sigma_1 = |\tau_1| - n_1^2$
- $\sigma_2 = |\tau_2| - n_2^2$
- $\tau_2 = \tau - \tau_1$

podemos ver que é suficiente provarmos a desigualdade (2.18) com $Z(f,g,\phi)$ no lugar de $W(f,g,\phi)$, sendo

$$Z(f,g,\phi)=\sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|n|^2}{\gamma(n)}\frac{\langle n\rangle^s}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s}\frac{g(\tau_1,n_1)f(\tau_2,n_2)\bar{\phi}(\tau,n)}{\langle\sigma\rangle^a\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}d\tau d\tau_1$$

e σ_1,σ_2,σ nos seguintes casos

(I) $\sigma=\tau+n^2$, $\sigma_1=\tau_1+n_1^2$, $\sigma_2=\tau_2+n_2^2$

(II) $\sigma=\tau-n^2$, $\sigma_1=\tau_1-n_1^2$, $\sigma_2=\tau_2+n_2^2$

(III) $\sigma=\tau+n^2$, $\sigma_1=\tau_1-n_1^2$, $\sigma_2=\tau_2+n_2^2$

(IV) $\sigma=\tau-n^2$, $\sigma_1=\tau_1+n_1^2$, $\sigma_2=\tau_2-n_2^2$

(V) $\sigma=\tau+n^2$, $\sigma_1=\tau_1+n_1^2$, $\sigma_2=\tau_2-n_2^2$

(VI) $\sigma=\tau-n^2$, $\sigma_1=\tau_1-n_1^2$, $\sigma_2=\tau_2-n_2^2$.

Observemos que os casos $(I),(II),(III),(IV),(V),(VI)$ correspondem às regiões $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_5,\Gamma_6$, respectivamente.

Afirmação 2: $(III)\Leftrightarrow(IV)$, $(II)\Leftrightarrow(V)$, $(I)\Leftrightarrow(VI)$.

$(III)\Leftrightarrow(IV)$ Façamos a mudança de variáveis

$$(n,\tau,n_1,\tau_1)\longmapsto-(n,\tau,n_1,\tau_1).$$

Assumindo agora que (III) está estimado temos

$$\begin{aligned}(IV)&=\sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|n|^2}{\gamma(n)}\frac{\langle n\rangle^s}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s}\frac{g(\tau_1,n_1)f(\tau_2,n_2)\bar{\phi}(\tau,n)}{\langle\tau-n^2\rangle^a\langle\tau_1+n_1^2\rangle^b\langle\tau_2-n_2^2\rangle^b}d\tau d\tau_1\\&=\sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|n|^2}{\gamma(n)}\frac{\langle n\rangle^s}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s}\frac{g(-\tau_1,-n_1)f(-\tau_2,-n_2)\bar{\phi}(-\tau,-n)}{\langle\tau+n^2\rangle^a\langle\tau_1-n_1^2\rangle^b\langle\tau_2+n_2^2\rangle^b}d\tau d\tau_1\\&\leqslant c\|f(-\tau_2,-n_2)\|_{l^2_nL^2_\tau}\|g(-\tau_1,n_1)\|\|_{l^2_nL^2_\tau}\|\phi(-\tau,-n)\|_{l^2_nL^2_\tau}\\&=c\|f\|_{l^2_nL^2_\tau}\|g\|\|_{l^2_nL^2_\tau}\|\phi\|_{l^2_nL^2_\tau}.\end{aligned}$$

Tal fato acontece pois as normas l^2 e L^2 são invariantes por reflexão. Analogamente conseguimos $(II)\Leftrightarrow(V)$ e $(I)\Leftrightarrow(VI)$.

Afirmação 3: $(V) \Leftrightarrow (IV)$. Para isto, sem perda de generalidade, assuma (IV) válido. Logo,

$$(V) = \sum_{n,n_1 \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \frac{\langle n \rangle^s}{\langle n_1 \rangle^s \langle n_2 \rangle^s} \frac{g(\tau_1, n_1) f(\tau_2, n_2) \bar{\phi}(\tau, n)}{\langle \tau + n^2 \rangle^a \langle \tau_1 + n_1^2 \rangle^b \langle \tau_2 - n_2^2 \rangle^b} d\tau d\tau_1.$$

Façamos as mudanças

$$\tau_2 = \tau - \tau_1, \quad n_2 = n - n_1, \quad (n, \tau, n_1, \tau_1) \longmapsto -(n, \tau, n_1, \tau_1).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(V) &= \sum_{n,n_1 \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \frac{\langle n \rangle^s}{\langle n_1 \rangle^s \langle n_2 \rangle^s} \frac{g(\tau_1, n_1) f(\tau_2, n_2) \bar{\phi}(\tau, n)}{\langle \tau + n^2 \rangle^a \langle \tau_1 + n_1^2 \rangle^b \langle \tau_2 - n_2^2 \rangle^b} d\tau d\tau_1 \\
&= \sum_{n,n_1 \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \frac{\langle n \rangle^s}{\langle n_1 \rangle^s \langle n_2 \rangle^s} \frac{g(\tau - \tau_2, n - n_2) f(\tau - \tau_1, n - n_1) \bar{\phi}(-\tau, -n)}{\langle \tau - n^2 \rangle^a \langle \tau_1 + n_1^2 \rangle^b \langle \tau_2 - n_2^2 \rangle^b} d\tau d\tau_1 \\
&\leqslant c \| f(-\tau_2, -n_2) \|_{l^2_n L^2_\tau} \| g(\tau - \tau_2, n - n_2) \| \|_{l^2_n L^2_\tau} \| \bar{\phi}(-\tau, -n) \|_{l^2_n L^2_\tau} \\
&= c \| f \|_{l^2_n L^2_\tau} \| g \| \|_{l^2_n L^2_\tau} \| \phi \|_{l^2_n L^2_\tau}.
\end{aligned}$$

A recíproca é análoga.

Portanto, dadas as equivalências, precisamos apenas estabelecer os casos (IV) e (VI).

Vamos primeiramente tratar do caso (VI).

Neste caso, usaremos a seguinte relação algébrica

$$(\tau - n^2) + (\tau_1 - n_1^2) + ((\tau - \tau_1) - (n - n_1)^2) = 2n_1(n - n_1). \tag{2.19}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
& -(\tau - n^2) + (\tau_1 - n_1^2) + ((\tau - \tau_1) - (n - n_1)^2) \\
&= -(\tau - n^2) + (\tau_1 - n_1^2) + ((\tau - \tau_1) - n^2 + 2nn_1 - n_1^2) \\
&= 2nn_1 - 2n_1^2 \\
&= 2n_1(n - n_1).
\end{aligned}$$

Por simetria, vamos nos restringir ao conjunto

$$A = \{(n, n_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \ ; \ |(\tau - \tau_1) - (n - n_1)^2 \leqslant |\tau_1 - n_1^2\}.$$

Observe que, se

$$B = \{(n, n_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \ ; \ |(\tau - \tau_1) - (n - n_1)^2 > |\tau_1 - n_1^2\},$$

então

$$Z(f, g, \phi) = I_A + I_B,$$

e assim, fazendo a mudança de variáveis em I_B

$$n_2 = n - n_1 \quad , \tau_2 = \tau - \tau_1,$$

obtemos I_A. Dessa forma, basta provarmos (2.18) para I_A.

Dividimos agora A em 3 partes

- $A_1 = \{(n, n_1, \tau, \tau_1) \in A \ ; \ n = 0\}$

- $A_2 = \{(n, n_1, \tau, \tau_1) \in A \ ; \ n = 0 \ \text{ ou } \ n_1 = n\}$

- $A_1 = \{(n, n_1, \tau, \tau_1) \in A \ ; \ n \neq 0, \ n_1 \neq 0, \ \text{ e } \ n_1 \neq n\}$

  e dividimos A_3 em mais duas partes

- $A_{3,1} = \{(n, n_1, \tau, \tau_1) \in A \ ; \ |\tau_1 - n_1^2| \leqslant |\tau - n^2|\}$

- $A_{3,2} = \{(n, n_1, \tau, \tau_1) \in A \ ; \ |\tau - n^2| \leqslant |\tau_1 - n_1^2|\}.$

Agora, definamos os conjuntos

$$R_1 = A_1 \cup A_2 \cup A_3, 1 \quad \text{e} \quad R_2 = A_{3,2}.$$

Em vista disso, temos $A = R_1 \cup R_2$ com $R_1 \cap R_2 = \varnothing$.

A partir de agora, seja χ_{R_i}, a função característica do conjunto R_i, $i = 1, 2$.

Afirmação 4:$|Z|^2 \leqslant \|f\|_{l^2_nL^2_\tau}\|g\|\|_{l^2_nL^2_\tau}\|\phi\|_{l^2_nL^2_\tau}\cdot(P_1+P_2)$, sendo

$$P_1=\left\|\frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}}\frac{|n|^4}{\gamma(n)^2}\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}\chi_{R_1}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2b}}d\tau_1\right\|_{l^\infty_nL^\infty_\tau}$$

e

$$P_2=\left\|\frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}}\frac{|n|^4}{\gamma(n)^2}\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}\chi_{R_2}}{\langle\sigma\rangle^{2a}\langle\sigma_2\rangle^{2b}}d\tau\right\|_{l^\infty_{n_1}L^\infty_{\tau_1}}.$$

De fato, como $A=R_1\cup R_2$, temos

$$\begin{aligned}|Z|\leqslant&\left|\sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|n|^2}{\gamma(n)}\frac{\langle n\rangle^s}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s}\frac{\chi_{R_1}g(\tau_1,n_1)f(\tau_2,n_2)\bar{\phi}(\tau,n)}{\langle\sigma\rangle^a\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}d\tau_1d\tau\right|\\&+\left|\sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|n|^2}{\gamma(n)}\frac{\langle n\rangle^s}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s}\frac{\chi_{R_2}g(\tau_1,n_1)f(\tau_2,n_2)\bar{\phi}(\tau,n)}{\langle\sigma\rangle^a\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}d\tau_1d\tau\right|,\end{aligned}$$

assim

$$|Z|\leqslant c_1+c_2,$$

sendo

$$c_1=\sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|n|^2}{\gamma(n)}\frac{\langle n\rangle^s}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s}\frac{\chi_{R_1}g(\tau_1,n_1)f(\tau_2,n_2)\bar{\phi}(\tau,n)}{\langle\sigma\rangle^a\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}d\tau_1d\tau$$

e

$$c_2=\sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|n|^2}{\gamma(n)}\frac{\langle n\rangle^s}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s}\frac{\chi_{R_2}g(\tau_1,n_1)f(\tau_2,n_2)\bar{\phi}(\tau,n)}{\langle\sigma\rangle^a\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}d\tau_1d\tau.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$c_1\leqslant\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{|n|^4}{\gamma(n)^2}\frac{\langle n\rangle^{2s}}{\langle\sigma\rangle^{2a}}\left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\chi_{R_1}g(\tau_1,n_1)f(\tau_2,n_2)}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}d\tau_1\right)^2d\tau\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\|\phi\|_{l^2_nL^2_\tau}.$$

Aplicando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\chi_{R_1}g(\tau_1,n_1)f(\tau_2,n_2)}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}d\tau_1\leqslant\left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\chi_{R_1}}{\langle n_1\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2b}}d\tau\right)\left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}|f(\tau_2,n_2)|^2|g(\tau_1,n_1)|^2d\tau_1\right)$$

Então

$$c_1\leqslant\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{|n|^4}{\gamma(n)^2}\frac{\langle n\rangle^{2s}}{\langle\sigma\rangle^{2a}}\left(\frac{\chi_{R_1}}{\langle n_1\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2b}}\right)\left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}|f(\tau_2,n_2)|^2|g(\tau_1,n_1)|^2d\tau_1\right)d\tau\right]\|\phi\|_{l^2_nL^2_\tau}.$$

Vamos agora aplicar a Desigualdade de Hölder, de modo a obter

$$c_1 \leqslant \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \frac{\langle n\rangle^{2s}}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \left(\frac{\chi_{R_1}}{\langle n_1\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2b}} \right) d\tau \right\|_{l_n^\infty L_\tau^\infty} \left\| \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f(\tau_2,n_2)|^2 |g(\tau_1,n_1)|^2 d\tau_1 \right\|_{l_n^1 L_\tau^1} \|\phi\|$$

Observemos que

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \frac{\langle n\rangle^{2s}}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \left(\frac{\chi_{R_1}}{\langle n_1\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2b}} \right) d\tau \right\|_{l_n^\infty L_\tau^\infty} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{Z},\tau\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \frac{\langle n\rangle^{2s}}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \left(\frac{\chi_{R_1}}{\langle n_1\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2b}} \right) d\tau \right| \end{aligned}$$

e assim, através de uma mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f(\tau_2,n_2)|^2 |g(\tau_1,n_1)|^2 d\tau_1 \right\|_{l_n^1 L_\tau^1} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f(\tau_2,n_2)|^2 |g(\tau_1,n_1)|^2 d\tau_1 d\tau \\ &= \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |g(\tau_1,n_1)|^2 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f(\tau_2,n_2) d\tau \right) d\tau_1 \\ &= \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |g(\tau_1,n_1)|^2 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f(\tau',n') d\tau' \right) d\tau \\ &= \|f\|_{l_n^2 L_\tau^2} \|g\|_{l_n^2 L_\tau^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$c_1 \leqslant P_1^{\frac{1}{2}} \|f\|_{l_n^2 L_\tau^2} \|g\|_{l_n^2 L_\tau^2} \|\phi\|_{l_n^2 L_\tau^2},$$

e analogamente,

$$c_2 \leqslant P_2^{\frac{1}{2}} \|f\|_{l_n^2 L_\tau^2} \|g\|_{l_n^2 L_\tau^2} \|\phi\|_{l_n^2 L_\tau^2},$$

donde segue agora a afirmação, isto é,

$$|Z|^2 \leqslant \|f\|_{l_n^2 L_\tau^2} \|g\| \|_{l_n^2 L_\tau^2} \|\phi\|_{l_n^2 L_\tau^2} \cdot (P_1 + P_2).$$

Lembremos agora que estamos tratando com o caso (VI). Assim, usando o corolário 2.6, temos

$$\begin{aligned}
P_1 &= \left\| \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}\chi_{R_1}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2b}} d\tau_1 \right\|_{l_n^\infty L_\tau^\infty} \\
&= \left\| \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2b}} d\tau_1 \right\|_{l_n^\infty L_\tau^\infty} \\
&= \left\| \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\tau_1 - n_1^2\rangle^{2b}\langle(\tau-\tau_1)-(n-n_1)^2\rangle^{2b}} d\tau_1 \right\|_{l_n^\infty L_\tau^\infty} \\
&\leqslant \left\| \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}}{\langle n_1^2 - (\tau+\tau_2-n_2)^2\rangle^{2b}} \right\|_{l_n^\infty L_\tau^\infty} = \left\| \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}}{\langle\tau - n^2 - 2n_1^2 + 2n_1 n\rangle^{2b}} \right\|_{l_n^\infty L_\tau^\infty}.
\end{aligned}$$

Logo, precisamos encontrar limitantes para

$$J_1 \equiv \sup_{n\in\mathbb{Z},\ \tau\in\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}}{\langle\tau - n^2 - 2n_1^2 + 2nn_1\rangle^{2b}}, \quad \text{em} \quad R_1$$

e

$$J_2 \equiv \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\ \tau_1\in\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \frac{\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}}{\langle\tau_1 + n_1^2 - 2nn_1\rangle^{2a}}, \quad \text{em} \quad R_2,$$

sendo J_2 obtido de maneira análoga a J_1 através do corolário 2.6.

Em A_1, temos $\dfrac{|n|^4}{\gamma(n)^2} = 0$, tornando o supremo acima limitado.

Na região A_2, temos

$$\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s} = \langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n-n_1\rangle^{-2s} = (1+|n|^2)^s(1+|n_1|^2)^{-s}(1+|n-n_1|^2)^{-s}.$$

Se $n_1 = 0$, então

$$\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s} \lesssim 1.$$

Se $n_1 = n$, então

$$\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s} \lesssim 1,$$

e além disso,

$$\frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \leqslant 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Para $n_1 = 0$, observemos que

$$J_1 = \sup_{n\in\mathbb{Z},\ \tau\in\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{\langle n\rangle^{2s}\langle n\rangle^{-2s}}{\langle\tau - n^2\rangle^{2b}} \lesssim \sup_{n\in\mathbb{Z},\ \tau\in\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a+2b}} \lesssim 1.$$

Se agora $n_1 = n$, observemos que

$$J_1 \equiv \sup_{n\in\mathbb{Z},\ \tau\in\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{\langle n\rangle^{2s}\langle n\rangle^{-2s}}{\langle\tau - n^2 - 2n^2 + 2n^2\rangle^{2b}} \lesssim 1,$$

e então, em ambos os casos temos

$$J_1 \lesssim \sup_{n\in\mathbb{Z},\ \tau\in\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a+2b}} \lesssim 1 \quad \text{para} \quad a, b > 0.$$

Em $A_{3,1}$ temos $|\tau_1 - n_1^2| \leqslant |\tau - n^2|$. Assim

$$\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s} \lesssim \langle\sigma\rangle^{\lambda(s)},$$

sendo

$$\lambda(s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \geqslant 0, \\ 2|s|, & \text{se} \quad s \leqslant 0. \end{cases}$$

De fato, suponha $s \geqslant 0$. Daí

$$\begin{aligned} n^2 &\leqslant (|n_1| - |n - n_1|)^2 = |n_1|^2 + 2|n_1||n - n_1| + |n - n_1|^2 \\ &\leqslant |n_1|^2 + |n_1|^2 + |n - n_1|^2 + |n - n_1|^2 = 2|n_1|^2 + 2|n - n_1|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 1 + n^2 &\leqslant 2 + n^2 \leqslant 2 + 2|n_1|^2 + 2|n - n_1|^2 = 2(1 + |n_1|^2) + 2|n - n_1|^2 \\ &\leqslant 2(1 + |n_1|^2) + 2(1 + |n_1|^2)|n - n_1|^2 = 2(1 + |n_1|)^2(1 + |n - n_1|^2) \end{aligned}$$

e a afirmação segue para $s \geqslant 0$.

Suponha agora que $s \leqslant 0$. Afirmamos que

$$\langle n_1\rangle\langle n_2\rangle \leqslant c\langle\sigma\rangle\langle n\rangle.$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\langle n_1\rangle\langle n_2\rangle &= (1+|n_1|)(1+|n_2|) = 1+|n_2|+|n_1|+|n_1||n_2| \leqslant 1+|n_2|+|n_1|+\frac{3}{2}|\sigma| \\
&\leqslant 1+|n|+5|\sigma| \leqslant 5(1+|n|+|\sigma|) \leqslant 5(1+|n|+(1+|n|)|\sigma|) \\
&= 5(1+|n|)(1+|\sigma|) = 5\langle n\rangle\langle\sigma\rangle.
\end{aligned}
$$

Observe então que provamos o seguinte resultado

$$
\langle n\rangle^{2s} \lesssim \langle n_1\rangle^{|2s|}\langle n_2\rangle^{2s}, \ \forall n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \ s \in \mathbb{R}. \tag{2.20}
$$

Aplicando tal resultado em J_1, temos

$$
J_1 \lesssim \sup_{n_1\in\mathbb{Z}, \tau\in\mathbb{R}} \langle\sigma\rangle^{\lambda(s)-2a} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}, n_1\neq\{0,n\}} \frac{1}{\langle\tau-n^2-2n_1^2+2nn_1\rangle^{2b}} \lesssim 1, \quad \text{para } b>\frac{1}{2} \ \text{ e } \lambda(s)\leqslant 2a.
$$

Analogamente, para a região $A_{3,2}$ temos

$$
\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s} \lesssim \langle\sigma_1\rangle^{\lambda(s)},
$$

e além disso

$$
|\tau_1+n_1^2-2nn_1| \leqslant |\tau_1-n_1^2|+|2nn_1| \leqslant 2\langle\sigma_1\rangle.
$$

Queremos estabelecer as condições do lema 2.7. Para isto, defina

$$
H = \{n \in Z \ ; \ |\tau_1+n_1^2-2nn_1| \leqslant 2\langle\sigma_1\rangle\}.
$$

Aplicando agora o lema 2.7, nos dá

$$
\begin{aligned}
J_2 &\lesssim \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\tau_1\in\mathbb{R}} \langle\sigma_1\rangle^{\lambda(s)-2b} \sum_{n\in H} \frac{1}{\langle \tau_1 + n_1^2 - 2nn_1\rangle^{2a}} \leqslant \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\tau_1\in\mathbb{R}} \langle\sigma_1\rangle^{\lambda(s)-2b}\, 2\left(2 + \int_0^{2\langle\sigma_1\rangle} \frac{1}{(1+x)^{2a}}dx\right) \\
&= \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\tau_1\in\mathbb{R}} \langle\sigma_1\rangle^{\lambda(s)-2b}\, 2\left(2 + \int_0^{2\langle\sigma_1\rangle} \frac{1}{\left(\frac{2|n_1|}{2|n_1|} + x\right)}dx\right) \\
&= \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\tau_1\in\mathbb{R}} \langle\sigma_1\rangle^{\lambda(s)-2b}\, 2\left(2 + \frac{1}{2|n_1|^{2a}}\int_0^{2\langle\sigma_1\rangle} \frac{1}{\left(\frac{1}{2|n_1|} + \frac{x}{2|n_1|}\right)^{2a}}dx\right) \\
&= \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\tau_1\in\mathbb{R}} \langle\sigma_1\rangle^{\lambda(s)-2b}\, 2\left(2 + \frac{1}{2|n_1|}\int_0^{\frac{\langle\sigma_1\rangle}{|n_1|}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2|n_1|} + y\right)^{2a}}dy\right) \\
&\leqslant \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\tau_1\in\mathbb{R}} \langle\sigma_1\rangle^{\lambda(s)-2b} \frac{2}{2|n_1|^{2a-1}}\left(2(2|n_1|)^{2a-1} + \int_0^{\frac{\langle\sigma_1\rangle}{|n_1|}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2|n_1|} + y\right)^{2a}}dy\right).
\end{aligned}
$$

Vamos agora calcular a integral acima. Lembremos que $a < \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2|n_1|} \leqslant \frac{\langle\sigma_1\rangle}{|n_1|}$. Daí

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\langle\sigma_1\rangle}{|n_1|}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2|n_1|} + y\right)^{2a}}dy &= \left.\frac{\left(\frac{1}{2|n_1|} + y\right)^{-2a+1}}{-2a+1}\right|_0^{\frac{\langle\sigma_1\rangle}{|n_1|}} \lesssim \left(\frac{1}{2|n_1|} + \frac{\langle\sigma_1\rangle}{|n_1|}\right)^{-2a+1} - \frac{1}{2|n_1|} \\
&\lesssim \left(\frac{1}{2|n_1|} + \frac{\langle\sigma_1\rangle}{|n_1|}\right)^{-2a+1} \lesssim \left(\frac{\langle\sigma_1\rangle}{|n_1|} + \frac{\langle\sigma_1\rangle}{|n_1|}\right)^{-2a+1} \\
&= \left(2\frac{\langle\sigma_1\rangle}{|n_1|}\right)^{-2a+1} = \frac{c\cdot\langle\sigma_1\rangle^{-2a+1}}{|n_1|^{-2a+1}}.
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
J_2 &\lesssim \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\tau_1\in\mathbb{R}} \langle\sigma_1\rangle^{\lambda(s)-2b}\left(1 + \frac{1}{(2|n_1|)^{2a-1}\cdot\frac{\langle\sigma_1\rangle^{-2a+1}}{|n_1|^{-2a+1}}}\right) \\
&\lesssim \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\tau_1\in\mathbb{R}} \langle\sigma_1\rangle^{\lambda(s)-2b}\left(\langle\sigma_1\rangle^{-2a+1} + \frac{1}{2^{2a+1}}\cdot\langle\sigma_1\rangle^{-2a+1}\right) \\
&= \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\tau_1\in\mathbb{R}} \langle\sigma_1\rangle^{\lambda(s)-2b-2a+1}\left(1 + \frac{1}{2^{2a+1}}\right).
\end{aligned}
$$

Agora, $\lambda(s) = \min\{2b, 2a+2b-1\}$, e assim,

$$\lambda(s) - 2b - 2a + 1 \leqslant 0,$$

o que implica

$$J_2 \lesssim \sup_{n_1 \in \mathbb{Z}, \tau_1 \in \mathbb{R}} \langle \sigma_1 \rangle^{\lambda(s)-2b-2a+1} \lesssim 1,$$

para $a < \dfrac{1}{2}$ e $\lambda(s) \leqslant \min\{2b, 2b+2a-1\}$.
Vamos agora tratar do caso (IV), isto é

$$\sigma = \tau - n^2 \quad , \quad \sigma_1 = \tau_1 + n_1^2 \quad , \quad \sigma_2 = \tau_2 - n_2^2.$$

Este caso segue passos parecidos com o caso (VI). Utilizaremos aqui a seguinte relação algébrica

$$-(\tau - n^2) + (\tau_1 + n_1^2) + ((\tau - \tau_1) - (n - n_1)^2) = 2nn_1. \tag{2.21}$$

Vamos dividir agora $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2$ nos seguintes três conjuntos

- $B_1 = \{(n, n_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \ ; \ n = 0\}$,
- $B_2 = \{(n, n_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \ ; \ n_1 = 0\}$,
- $B_3 = \{(n, n_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \ ; \ n \neq 0, n_1 \neq 0\}$.
  Dividimos ainda B_3 em três partes
- $B_{3,1} = \{(n, n_1, \tau, \tau_1) \in B_3 \ ; \ |\tau_1 - n_1^2| \leqslant |\tau - n^2|$ e $|(\tau - \tau_1) - (n - n_1)^2| \leqslant |\tau - n^2|\}$,
- $B_{3,2} = \{(n, n_1, \tau, \tau_1) \in B_3 \ ; \ |\tau - n^2| \leqslant |\tau_1 + n_1^2|$ e $|(\tau - \tau_1) - (n - n_1)^2| \leqslant |\tau_1 + n_1^2|\}$,
- $B_{3,3} = \{(n, n_1, \tau, \tau_1) \in B_3 \ ; \ |\tau_1 + n_1^2| \leqslant |(\tau - \tau_1) - (n - n_1)^2|$ e $|\tau - n^2| \leqslant |(\tau - \tau_1) - (n - n_1)^2|\}$.

Vamos definir agora os conjuntos S_i, $i = 1, 2, 3$, da seguinte forma

$$S_1 = B_1 \cup B_2 \cup B_{3,1} \quad , \quad S_2 = B_{3,2} \quad , \quad S_3 = B_{3,3}.$$

Afirmação 5: $|Z|^2 \lesssim \|f\|_{l_n^2 L_\tau^2} \|g\|_{l_n^2 L_\tau^2} \|\phi\|_{l_n^2 L_\tau^2} \cdot (P_1 + P_2 + P_3)$ sendo

$$P_1 = \left\| \frac{1}{\langle \sigma \rangle^{2a}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle n \rangle^{2s} \langle n_1 \rangle^{-2s} \langle n_2 \rangle^{-2s} \chi_{S_1}}{\langle \sigma_1 \rangle^{2b} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}} d\tau_1 \right\|_{l_n^\infty L_\tau^\infty},$$

$$P_2 = \left\| \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{2a}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}\chi_{S_2}}{\langle\sigma\rangle^{2a}\langle\sigma_2\rangle^{2b}} d\tau \right\|_{l^\infty_{n_1} L^\infty_{\tau_1}}$$

e

$$P_3 = \left\| \frac{1}{\langle\sigma_2\rangle^{2b}} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|n_1+n_2|^4}{\gamma(n_1+n_2)^2} \frac{\langle n_1+n_2\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}\chi_{\bar{S}_3}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma\rangle^{2a}} d\tau_1 \right\|_{l^\infty_{n_2} L^\infty_{\tau_2}},$$

com

$$\bar{S}_3 \subset \{(n_2, n_1, \tau_2, \tau_1) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \ ; \ n_1 \neq 0, n_1+n_2 \neq 0, |\tau_1 + n_1^2| \leqslant |\tau_2 - n_2^2|$$
$$\text{e } |(\tau_1+\tau_2) - (n_1+n_2)^2| \leqslant |\tau_2 - n_2^2|\}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} |Z| \leqslant & \left| \sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \frac{\langle n\rangle^s}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s} \frac{\chi_{S_1} g(\tau_1,n_1) f(\tau_2,n_2)\bar{\phi}(\tau,n)}{\langle\sigma\rangle^a\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b} d\tau_1 d\tau \right| \\ & + \left| \sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \frac{\langle n\rangle^s}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s} \frac{\chi_{S_2} g(\tau_1,n_1) f(\tau_2,n_2)\bar{\phi}(\tau,n)}{\langle\sigma\rangle^a\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b} d\tau_1 d\tau \right| \\ & + \left| \sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \frac{\langle n\rangle^s}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s} \frac{\chi_{S_3} g(\tau_1,n_1) f(\tau_2,n_2)\bar{\phi}(\tau,n)}{\langle\sigma\rangle^a\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b} d\tau_1 d\tau \right| \end{aligned}$$

e então, $|Z| \leqslant k_1 + k_2 + k_3$, sendo

$$k_1 = \sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \frac{\langle n\rangle^s}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s} \frac{\chi_{S_1} g(\tau_1,n_1) f(\tau_2,n_2)\bar{\phi}(\tau,n)}{\langle\sigma\rangle^a\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b} d\tau_1 d\tau,$$

$$k_2 = \sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \frac{\langle n\rangle^s}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s} \frac{\chi_{S_2} g(\tau_1,n_1) f(\tau_2,n_2)\bar{\phi}(\tau,n)}{\langle\sigma\rangle^a\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b} d\tau_1 d\tau,$$

$$k_3 = \sum_{n,n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \frac{\langle n\rangle^s}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s} \frac{\chi_{S_3} g(\tau_1,n_1) f(\tau_2,n_2)\bar{\phi}(\tau,n)}{\langle\sigma\rangle^a\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b} d\tau_1 d\tau.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$k_1 \leqslant \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \frac{\langle n\rangle^{2s}}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{S_1} g(\tau_1,n_1) f(\tau_2,n_2)}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b} d\tau_1 \right)^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \|\phi\|_{l^2_n L^2_\tau}.$$

Aplicando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\chi_{R_1}g(\tau_1,n_1)f(\tau_2,n_2)}{\langle n_1\rangle^s\langle n_2\rangle^s\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}d\tau_1\leqslant\left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\chi_{S_1}}{\langle n_1\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2b}}d\tau\right)\cdot$$
$$\left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}|f(\tau_2,n_2)|^2|g(\tau_1,n_1)|^2d\tau_1\right).$$

Assim,

$$k_1\leqslant\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{|n|^4}{\gamma(n)^2}\frac{\langle n\rangle^{2s}}{\langle\sigma\rangle^{2a}}\left(\frac{\chi_{S_1}}{\langle n_1\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2b}}\right)\left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}|f(\tau_2,n_2)|^2|g(\tau_1,n_1)|^2d\tau_1\right)d\tau\right]$$
$$\cdot\|\phi\|_{l_n^2L_\tau^2}.$$

Vamos agora aplicar a Desigualdade de Hölder, de modo a obter

$$k_1\leqslant\left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{|n|^4}{\gamma(n)^2}\frac{\langle n\rangle^{2s}}{\langle\sigma\rangle^{2a}}\left(\frac{\chi_{S_1}}{\langle n_1\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2b}}\right)d\tau\right\|_{l_n^\infty L_\tau^\infty}\left\|\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}|f(\tau_2,n_2)|^2|g(\tau_1,n_1)|^2d\tau_1\right\|_{l_n^1L_\tau^1}\|\phi\|_{l_n^2L_\tau^2}.$$

Em vista da demonstração da afirmação 4, temos então

$$k_1\leqslant P_1^{\frac{1}{2}}\|f\|_{l_n^2L_\tau^2}\|g\|_{l_n^2L_\tau^2}\|\phi\|_{l_n^2L_\tau^2},$$

e analogamente,

$$k_2\leqslant P_2^{\frac{1}{2}}\|f\|_{l_n^2L_\tau^2}\|g\|_{l_n^2L_\tau^2}\|\phi\|_{l_n^2L_\tau^2}.$$

Para k_3, seguindo o raciocínio análogo temos

$$k_3\leqslant\left\|\frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2b}}\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{|n|^4}{\gamma(n)^2}\frac{\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}\chi_{S_3}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2a}}d\tau_1\right\|_{l_{n_2}^\infty L_{\tau_2}^\infty}.$$

Fazendo agora a mudança

$$S_3\to\bar{S}_3,\quad n=n_1+n_2\ \text{ e }\ \tau=\tau_1+\tau_2,$$

temos

$$
\begin{aligned}
k_3 &\leqslant \left\| \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2b}} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \frac{\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}\chi_{S_3}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2a}} d\tau_1 \right\|_{l^\infty_{n_2}L^\infty_{\tau_2}} \\
&\leqslant \left\| \frac{1}{\langle\sigma_2\rangle^{2b}} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|n_1+n_2|^4}{\gamma(n_1+n_2)^2} \frac{\langle n_1+n_2\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}\chi_{\bar{S}_3}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma\rangle^{2a}} d\tau_1 \right\|_{l^\infty_{n_2}L^\infty_{\tau_2}}.
\end{aligned}
$$

Segue então que

$$k_3 \leqslant P_3^{\frac{1}{2}} \|f\|_{l^2_n L^2_\tau} \|g\|_{l^2_n L^2_\tau} \|\phi\|_{l^2_n L^2_\tau},$$

e

$$|Z|^2 \lesssim k_1 + k_2 + k_3 \lesssim \|f\|_{l^2_n L^2_\tau} \|g\|_{l^2_n L^2_\tau} \|\phi\|_{l^2_n L^2_\tau} \cdot (P_1 + P_2 + P_3).$$

Novamente, usando o mesmo raciocínio utilizado na Afirmação 4, a relação algébrica (2.21), o caso (IV) e o corolário 2.6, temos limitantes para

$$K_1 \equiv \sup_{n\in\mathbb{Z},\tau\in\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}}{\langle\tau - n^2 + 2nn_1\rangle^{2b}} \quad \text{em } S_1,$$

$$K_2 \equiv \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\tau_1\in\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \frac{\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}}{\langle\tau - n^2 + 2nn_1\rangle^{2b}} \quad \text{em } S_2,$$

$$K_3 \equiv \sup_{n_2\in\mathbb{Z},\tau_2\in\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\sigma_2\rangle^{2b}} \sum n_1 \in \mathbb{Z} \frac{|n_1+n_2|^4}{\gamma(n_1+n_2)^2} \frac{\langle n_1+n_2\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}}{\langle\tau - n_2^2 - 2n_1^2 + 2n_1n_2\rangle^{2b}} \quad \text{em } \bar{S}_3.$$

Em B_1 temos $\dfrac{|n|^4}{\gamma(n)^2} = 0$, e então a estimativa segue.
Em B_2 temos uma situação análoga à Afirmação 4

$$\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s} \lesssim 1 \quad \text{e} \quad \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \leqslant 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

e também, se $n_1 = 0$,

$$K_1 \lesssim \sup_{n\in\mathbb{Z},\tau\in\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a+2b}} \lesssim 1, \quad \text{para } a > 0 \ \text{ e } \ b > 0.$$

Agora, na região $B_{3,1}$, temos

$$\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s} \lesssim |n_1|^{\eta(s)} \lesssim |n_1 n|^{\eta(s)}, \tag{2.22}$$

sendo

$$\eta(s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \geqslant 0, \\ 4|s|, & \text{se} \quad s \leqslant 0. \end{cases}$$

De fato, se $s \geqslant 0$, então por (2.20),

$$\langle n\rangle^{2s} \lesssim \langle n_1\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{2s}$$

e

$$\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s} \lesssim 1 = |n_1|^{\eta(s)}, \quad \text{pois } \eta(s) = 0, s \geqslant 0.$$

Agora, se $s \leqslant 0$, novamente por (2.20),

$$\langle n\rangle^{2s} \lesssim \langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{2s}$$

e daí,

$$\langle n\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{-2s} \lesssim \langle n_1\rangle^{-2s} \Leftrightarrow \langle n\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{-2s}\langle n_1\rangle^{-2s} \lesssim \langle n_1\rangle^{-4s}.$$

Uma vez que $\langle n_1\rangle = 1 + |n_1| \leqslant 2|n_1|$, pois $n_1 \neq 0$, e $-4s > 0$, temos

$$\langle n_1\rangle^{-4s} \lesssim |n_1|^{-4s} = |n_1|^{4|s|} = |n_1|^{\eta(s)}.$$

Segue agora da relação (2.21) escrita de outra forma que

$$-\sigma + \sigma_1 + \sigma_2 = 2nn_1$$

e assim,

$$|nn_1| = \frac{1}{2}|-\sigma + \sigma_1 + \sigma_2|.$$

Como estamos em $B_{3,2}$, temos $\langle\sigma_1\rangle, \langle\sigma_2\rangle \leqslant \langle\sigma\rangle$. Logo,

$$|nn_1| \leqslant \frac{3}{2}\langle\sigma\rangle \Leftrightarrow |nn_1| \lesssim \langle\sigma\rangle.$$

Em vista disso, analogamente à Afirmação 4, temos

$$K_1 \equiv \sup_{n\in\mathbb{Z},\tau\in\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \frac{|n|^4}{\gamma(n)^2} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{\langle n\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}}{\langle\tau - n^2 + 2nn_1\rangle^{2b}} \lesssim \sup_{n\in\mathbb{Z},\tau\in\mathbb{R}} \langle\sigma\rangle^{\eta(s)-2a} \sum_{n_1\neq 0} \frac{1}{\langle\tau - n^2 + 2nn_1\rangle^{2b}} \lesssim 1$$

para $b > \dfrac{1}{2}$ e $\eta(s) > 2a$.

Vamos estimar agora K_2. Na região $B_{3,2}$, temos por (2.20) que

$$|nn_1| \lesssim \langle\sigma_1\rangle$$

e

$$|\tau_1 + n_1^2 - 2nn_1| \leqslant 2\langle\sigma_1\rangle.$$

Usando agora (2.22) e o lema 2.7 temos, de modo análogo ao obtido para J_2 no caso da Afirmação 4,

$$\begin{aligned}
K_2 &\lesssim \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\tau_1\in\mathbb{R}} \langle\sigma_1\rangle^{\eta(s)-2b} \sum_{n\in H} \frac{1}{\langle\tau_1 + n_1^2 - 2nn_1\rangle^{2a}} \\
&\lesssim \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\tau_1\in\mathbb{R}} \frac{\langle\sigma_1\rangle^{\eta(s)-2b}}{|n_1|^{2a-1}} \left(|n_1|^{2a-1} + \int_0^{\frac{\langle\sigma_1\rangle}{|n_1|}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2|n_1|} + y\right)^{2a}} dy \right) \\
&\lesssim \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\tau_1\in\mathbb{R}} \langle\sigma_1\rangle^{\eta(s)-2b-2a+1} \\
&\lesssim 1,
\end{aligned}$$

para $a < \dfrac{1}{2}$ e $\eta(s) \leqslant \text{mín}\{2b, 2a + 2b - 1\}$.

Vamos agora estimar $K_3(n_2, \tau_2)$. Na região $B_{3,3}$, temos por (2.20) que

$$\langle n_1 + n_2\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s} \lesssim |n_2|^{\eta(s)}$$

e

$$|n_2| \lesssim |n_1 + n_2| + |n_1| \lesssim |n_1(n_1 + n_2)| \lesssim \langle\sigma_2\rangle.$$

Agora, vamos usar o lema 2.8. Para isto, observe que

$$
\begin{aligned}
K_3 &= \sup_{n_2\in\mathbb{Z},\tau_2\in\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\sigma_2\rangle^{2b}} \sum_{n_1\neq 0} \frac{|n_1+n_2|^4}{\gamma(n_1+n_2)^2} \frac{\langle n_1+n_2\rangle^{2s}\langle n_1\rangle^{-2s}\langle n_2\rangle^{-2s}}{\langle \tau - n_2^2 - 2n_1^2 + 2n_1n_2\rangle^{2b}} \\
&\lesssim \sup_{n_2\in\mathbb{Z},\tau_2\in\mathbb{R}} \langle\sigma_2\rangle^{-2b}\langle\sigma_2\rangle^{\eta(s)} \sum_{n_1\neq 0} \frac{1}{\langle \tau_2 - n_2^2 - 2n_1 - 2n_1n_2\rangle^{2a}} \\
&= \sup_{n_2\in\mathbb{Z},\tau_2\in\mathbb{R}} \langle\sigma_2\rangle^{\eta(s)-2b} \sum_{n_1\neq 0} \frac{1}{\langle \tau_2 - n_2^2 - 2n_1 - 2n_1n_2\rangle^{2a}}.
\end{aligned}
$$

Assim, fazendo a mudança de variáveis

$$
\tau' = \frac{\tau_2 - n_2^2}{2}
$$

podemos então aplicar o lema 2.8, isto é,

$$
\begin{aligned}
\sup_{n_2\in\mathbb{Z},\tau_2\in\mathbb{R}} \langle\sigma_2\rangle^{\eta(s)-2b} \sum_{n_1\neq 0} \frac{1}{\langle \tau_2 - n_2^2 - 2n_1 - 2n_1n_2\rangle^{2a}} &\lesssim \sup_{n_2\in\mathbb{Z},\tau'\in\mathbb{R}} \langle\sigma_2\rangle^{\eta(s)-2b} \sum_{n_1\neq 0} \frac{1}{\langle \tau' - (n_1+n_2)n_1\rangle^{2a}} \\
&\lesssim \sup_{n_2\in\mathbb{Z},\tau_2\in\mathbb{R}} \langle\sigma_2\rangle^{\eta(s)-2b} \\
&\lesssim 1
\end{aligned}
$$

para $a > \frac{1}{4}$, $b > \frac{1}{2}$ e $s > -\frac{1}{4}$, o que implica que $\eta(s) \leqslant 2b$, o que conclui a demonstração do teorema. □

Corolário 2.11. *Sejam $s > -\frac{1}{4}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ dados como no Teorema 2.10. Para $s' > s$, temos*

$$
\left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{|n|^2 \widetilde{uv}(\tau, n)}{2i\gamma(n)} \right) \right\|_{X s', -a} \leqslant c\|u\|_{X_{s',b}}\|v\|_{X_{s,b}} + c\|u\|_{X_{s,b}}\|v\|_{X_{s',b}}.
$$

Demonstração: Basta observar que

$$
\langle n\rangle^{s'} \leqslant \langle n\rangle^{s}\langle n_1\rangle^{s-s'} + \langle n\rangle^{s}\langle n - n_1\rangle^{s'-s}
$$

e aplicar o Teorema 2.10. □

Teorema 2.12. *Para qualquer $s < -\frac{1}{4}$ e para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < \frac{1}{2}$, a estimativa* (2.17) *falha.*

Demonstração: Para $u \in X_{s,b}$ e $v \in X_{s,b}$, defina

$$
f(\tau, n) \equiv \langle |\tau| - \gamma(n)\rangle^{b}\langle n\rangle^{s}\tilde{u}(\tau, n)
$$

e

$$g(\tau,n) \equiv \langle |\tau| - \gamma(n)\rangle^b \langle n\rangle^s \tilde{v}(\tau,n).$$

Pelo lema 2.4 e usando a Afirmação 1 para Z, a desigualdade (2.17) é equivalente a

$$\left\| \frac{|n|^2}{\gamma(n)} \frac{\langle n\rangle^s}{\langle \sigma\rangle^s} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{f(\tau_1, n_1 g(\tau_2,n_2)d\tau_1)}{\langle n_1\rangle^s \langle n_2\rangle^s \langle \sigma_1\rangle^b \langle \sigma_2\rangle^b} \right\| \lesssim \|f\|_{l^2_n L^2_\tau} \|g\|_{l^2_n L^2_\tau}, \tag{2.23}$$

sendo

$$n_2 = n - n_1, \quad \tau_2 = \tau - \tau_1, \quad \sigma = |\tau| - n^2, \quad \sigma_1 = |\tau_1| - n_1^2, \quad \sigma_2 = |\tau_2| - n_2^2.$$

A ideia é mostrar que a estimativa (2.23) falha. Para isto, se $N \in \mathbb{Z}$, defina

$$f_N(\tau,n) = a_n \chi\left(\frac{(\tau - n^2)}{2}\right),$$

sendo

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } \ n = N, \\ 0, & \text{se } \ n \neq N \end{cases}$$

e

$$g_N(\tau,n) = b_n \chi\left(\frac{(\tau + n^2)}{2}\right),$$

sendo

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{se } \ n = 1 - N, \\ 0, & \text{se } \ n \neq 1 - N, \end{cases}$$

com $\chi(.)$ denotando a função característica no intervalo $[-1,1]$.

Observe agora que

$$a_{n_1} b_{n-n_1} \neq 0 \Leftrightarrow n_1 = N \text{ e } \ n = 1.$$

Vamos agora estimar a seguinte integral

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(\tau_1, n_1) g(\tau_2, n_2) d\tau_1 &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau_1, n_1) g(\tau - \tau_1, n - n_1) d\tau_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} a_{n_1} \chi\left(\frac{\tau_1 - n_1^2}{2}\right) b_{n-n_1} \chi\left(\frac{\tau - \tau_1 + (n+n_1)^2}{2}\right) d\tau_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} a_N \chi\left(\frac{\tau_1 - n_1^2}{2}\right) b_{1-N} \chi\left(\frac{\tau - \tau_1 + (n+n_1)^2}{2}\right) d\tau_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi\left(\frac{\tau_1 - n_1^2}{2}\right) \chi\left(\frac{\tau - \tau_1 + (n+n_1)^2}{2}\right) d\tau_1 \\
&\gtrsim \chi((\tau + (n - n_1)^2) - n_1^2) \\
&\gtrsim \chi(\tau + 1 - 2N),
\end{aligned}$$

sendo a última parte apenas para N suficientemente grande.

Usando agora o fato de que $||\tau| - n^2| \leqslant \text{mín}\,\{|\tau - n^2|, |\tau + n^2|\}$ e $n_1 = N$, $n = 1$ temos que a desigualdade (2.23) é equivalente a

$$1 \gtrsim \left\| \frac{N^{-2s}}{N^a} \chi((\tau + 1 - 2N)) \right\|_{L^2_\tau} \gtrsim N^{-2s-a}$$

Sendo $a < \frac{1}{2}$, fazendo $N \to \infty$ temos que a desigualdade (2.23) não é preservada, sendo assim, a desigualdade (2.17) também não é preservada. O que conclui a demonstração do teorema. □

Definição 2.13. *Para $s, b \in \mathbb{R}$ e $T \geqslant 0$, $X^T_{s,b}$ irá denotar o espaço $X_{s,b}$ com a norma*

$$\|u\|_{X^T_{s,b}} = \inf_{w \in X_{s,b}} \{\|w\|_{X_{s,b}}; w(t) = u(t) \quad em \quad [0, T]\}.$$

Estamos agora em condições de demonstar o principal resultado desse capítulo.

Teorema 2.14. *Seja $s > -\frac{1}{4}$. Então para toda $\phi \in H^s(\mathbb{T})$ e $\psi \in H^{s-1}(\mathbb{T})$, existe $T = T(\|\phi\|_{H^s}, \|\phi\|_{H^{s-1}})$ e uma única solução u de (2.1) com $f(u) = u^2$, $u_0 = \phi$, $u_1 = \psi_x$ tais que*

$$u \in C([0, T] : H^s(\mathbb{T})) \cap X^T_{s,b}.$$

Além disso, dado $T' \in (0, T)$ existe $R = R(T') > 0$ tal que a função

$$S : W \to C([0, T'] : H^s(\mathbb{T})) \cap X^T_{s,b}, \quad (\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \to u(t)$$

é Lipschitziana, sendo

$$W \equiv \{(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in H^s(\mathbb{T}) \times H^{s-1}(\mathbb{T}) \ ; \|\tilde{\phi} - \phi\|^2_{H^s(\mathbb{T})} + \|\tilde{\psi} - \psi\|^2_{H^{s-1}(\mathbb{T})} < R\}.$$

Além disso, se $(\phi, \psi) \in H^{s'}(\mathbb{T}) \times H^{s'-1}(\mathbb{T})$, *com* $s' > s$, *os resultados acima seguem com* s' *no mesmo intervalo* $[0, T]$ *sendo* $T = T(\|\phi\|_{H^s}, \|\phi\|_{H^{s-1}})$.

Demonstração:

Existência: Seja $(\phi, \psi) \in H^s(\mathbb{T}) \times H^{s-1}(\mathbb{T})$, com $s > -\dfrac{1}{4}$ e $T \leqslant 1$. Defina a seguinte equação integral

$$\Gamma_T(u)(t) = \theta(t)(V_c(t)\phi + V_s(t)\psi_x) + \theta_T(t) \int_0^t V_s(t-t')(u^2)_{xx}(t')dt'. \tag{2.24}$$

Queremos usar então o teorema do ponto fixo para encontrar uma solução de

$$\Gamma_T(u) = u.$$

Sejam $s > -\dfrac{1}{4}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ como no teorema 2.10, isto é,

$$\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2} < b \ \text{ e } \ 1 - (a - b) \equiv \delta > 0.$$

Agora, observemos que, usando o lema 2.3(ii) e o teorema 2.10, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Gamma_T(u)\|_{X_{s,b}} &\leqslant \|\theta(t)(V_c(t)\phi + V_s(t)\psi_x)\|_{X_{s,b}} + \left\|\theta_T(t) \int_0^t V_s(t-t')(u^2)_{xx}(t')dt'\right\|_{X_{s,b}} \\ &\leqslant c(\|\phi\|_{X_{s,b}} + \|\psi\|_{X_{s,b}}) + T^\delta c\|u\|^2_{X_{s,b}}. \end{aligned}$$

Nesta mesma linha de racícionio, nosso primeiro objetivo é mostrar que $\Gamma_T(u)$ é uma contração. Para isso, notemos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma_T(u) - \Gamma_T(v)\|_{X_{s,b}} &= \left\|\theta_T(t) \int_0^t V_s(t-t')(u^2 - v^2)_{xx}(t')dt'\right\|_{X_{s,b}} \\ &\leqslant T^\delta \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{|n|^2 \widetilde{u^2 - v^2}(\tau, n)}{2i\gamma(n)}\right)\right\|_{X_{s,-a}} \\ &\leqslant cT^\delta \|u + v\|_{X_{s,b}} \|u - v\|_{X_{s,b}}. \end{aligned}$$

Como precisamos de um conjunto fechado em um espaço de Banach, defina

$$X_{s,b}(d) = \{u \in X_{s,b}; \|u\|_{X_{s,b}} \leqslant d\},$$

sendo $d = 2c(\|\phi\|_{X_{s,b}} + \|\psi\|_{X_{s,b}})$. Observe que, se $u \in X_{s,b}(d)$, temos

$$\|\Gamma_T(u)\|_{X_{s,b}} \leqslant c(\|\phi\|_{X_{s,b}} + \|\psi\|_{X_{s,b}}) + T^\delta c\|u\|^2_{X_{s,b}} \leqslant c(\|\phi\|_{X_{s,b}} + \|\psi\|_{X_{s,b}}) + cd^2T^\delta.$$

Agora, tome

$$0 < T < \min\left\{1, \frac{1}{(4dc)^{\frac{1}{\delta}}}\right\}.$$

Daí,

$$\|\Gamma_T(u)\|_{X_{s,b}} \leqslant c(\|\phi\|_{X_{s,b}} + \|\psi\|_{X_{s,b}}) + cd^2T^\delta \leqslant \frac{d}{2} + cd^2\frac{1}{4dc} < d.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_T(u) - \Gamma_T(v)\|_{X_{s,b}} &\leqslant cT^\delta\|u+v\|_{X_{s,b}}\|u-v\|_{X_{s,b}} \\
&\leqslant cT^\delta(\|u\|_{X_{s,b}} + \|v\|_{X_{s,b}})(\|u-v\|_{X_{s,b}}) \\
&\leqslant c\frac{1}{4dc}2d\|u-v\|_{X_{s,b}} \\
&= \frac{1}{2}\|u-v\|_{X_{s,b}}.
\end{aligned}$$

Portanto, Γ_T é uma contração em $X_{s,b}(d)$ e existe então uma única solução u de (2.24) em $X_{s,b}(d)$.

Unicidade: Sejam $T > 0$, $u \in X_{s,b}$ solução de (2.24) $\tilde{v} \in X^T_{s,b}$ solução de (2.9). Fixe agora, uma extensão $v \in X_{s,b}$. Assim, para algum $T^* < T < 1$ nós temos

$$v(t) = \theta(t)(V_c(t)\phi + V_s(t)\psi_x) + \theta_T(t)\int_0^t V_s(t-t')(v^2)_{xx}(t')dt', \quad \forall t \in [0, T^*].$$

Considere

$$M \geqslant \max\{\|u\|_{X_{s,b}}, \|v\|_{X_{s,b}}\}.$$

Pela definição de $X^{T^*}_{s,b}$, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $w \in X_{s,b}$ tal que

$$w(t) = u(t) - v(t), \quad \forall t \in [0, T^*]$$

e

$$\|w\|_{X_{s,b}} \leqslant \|u-v\|_{X_{s,b}^{T*}} + \varepsilon.$$

Defina

$$\tilde{w}(t) = \theta(t)\int_0^t V_s(t-t')(w(t')u(t') + w(t')v(t'))_{xx}(t')dt', \quad t \in [0, T^*].$$

Observe que $\tilde{w} \in X_{s,b}$ pelo lema 2.3(ii). Agora

$$\begin{aligned}
\tilde{w}(t) &= \theta(t)\int_0^t V_s(t-t')((u(t')-v(t'))u(t') + (u(t')-v(t'))v(t'))_{xx}(t')dt' \\
&= \theta(t)\int_0^t V_s(t-t')(u^2-v^2)_{xx}(t')dt' \\
&= \Gamma_T(u) - \Gamma_T(v) \\
&= u(t) - v(t).
\end{aligned}$$

Pela definição da norma, pelo Lema (2.3)(ii) e o Teorema 2.10 temos

$$\begin{aligned}
\|u-v\|_{X_{s,b}^{T*}} &\leqslant \|\tilde{w}\|_{X_{s,b}} \\
&\leqslant T^{*\delta}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{|n|^2\widetilde{u^2-v^2}(\tau,n)}{2i\gamma(n)}\right)\right\|_{X_{s,-a}} \\
&= cT^{*\delta}\|u-v\|_{X_{s,b}}\|u+v\|_{X_{s,b}} \\
&= cT^{*\delta}\|w\|_{X_{s,b}}\|u+v\|_{X_{s,b}} \\
&\leqslant cT^{*\delta}\|w\|_{X_{s,b}}(\|u\|_{X_{s,b}} + \|v\|_{X_{s,b}}) \\
&\leqslant 2McT^{*\delta}\|w\|_{X_{s,b}}.
\end{aligned}$$

Escolha T^* tal que $2McT^{*\delta} < \dfrac{1}{2}$. Daí

$$\|u-v\|_{X_{s,b}^{T*}} \leqslant \frac{1}{2}\|w\|_{X_{s,b}} \leqslant \frac{1}{2}\|u-v\|_{X_{s,b}^{T*}} + \frac{\varepsilon}{2}$$

e então,

$$\|u-v\|_{X_{s,b}^{T*}} \leqslant \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Portanto, $u = v = \tilde{v}$ em $[0, T^*]$. Como tal argumento não depende da condição inicial, podemos transladar T^* para 0 e repetir o processo uma quantidade finita de vezes para estender a unicidade até o intervalo $[0,T]$.

Afirmação: Se $s' > s$ o resultado é válido no intervalo $[0,T]$, com T nas condições do teorema.

Sejam $s > -\dfrac{1}{4}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ dados como no teorema 2.10. Para $s' > s$ vamos considerar o seguinte

$$W = \{u \in X_{s',b}; \|u\|_{s'} = \|u\|_{X_{s,b}} + \beta\|u\|_{X_{s',b}} < +\infty\}$$

sendo $\beta = \dfrac{\|\phi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}}}{\|\phi\|_{H^{s'}} + \|\psi\|_{H^{s'-1}}}$.

Com raciocínio análogo ao da existência, temos

$$\|\Gamma_T(u)\|_{X_{s,b}} \leqslant c(\|\phi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}} + T^\delta\|u\|^2_{X_{s,b}}).$$

Agora, pelo Corolário 2.11 obtemos

$$\begin{aligned}\|\Gamma_T(u)\|_{X_{s,b}} &\leqslant c(\|\phi\|_{H^{s'}} + \|\psi\|_{H^{s'-1}} + T^\delta\|u\|_{X_{s,b}})\|u\|_{X_{s',b}}) \\ &\leqslant \frac{c}{\beta}(\|\phi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}} + T^\delta\|u\|^2_{s'}).\end{aligned}$$

Então

$$\|\Gamma_T(u)\|_{s'} \leqslant 2c(\|\phi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}} + T^\delta\|u\|^2_{s'}),$$

e analogamente,

$$\|\Gamma_T(u) - \Gamma_T(v)\|_{s'} \leqslant 2cT^\delta\|u+v\|_{s'}\|u-v\|_{s'}.$$

Defina então em W a bola fechada centrada na origem com raio $d' = 4c(\|\phi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}})$ e tome

$$0 < T < \min\left\{1, \frac{1}{(8cd')^{\frac{1}{\delta}}}\right\}.$$

Como obtido no caso da existência, temos que Γ_T será contração e existirá uma solução, com $T = T(\|\phi\|_{H^s}, \|\psi\|_{H^{s-1}})$. A demonstração do teorema está agora completa. □

Capítulo 3

O Caso Real

Neste capítulo, abordaremos o problema de Cauchy para a "boa"equação de Boussinesq no caso real, isto é, com dados iniciais em espaços de Sobolev na reta. Em linhas gerais, os argumentos aqui se assemelham aos do caso periódico. Procuramos, portanto, dar ênfase aos pontos que se diferenciam deste último.
Considere o problema de valor de inicial

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + (f(u))_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x);\ u_t(0,x) = u_1(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

com $f(u) = u^2$ e

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R})} = \|\langle \xi \rangle^s \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

os dados iniciais pertencendo a espaços de Sobolev na reta.

Definição 3.1. *Para $s, b \in \mathbb{R}$, $X_{s,b}$ denotará o completamento do espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ com respeito à seguinte norma*

$$\|F\|_{X_{s,b}} = \|\langle |\tau| - \gamma(\xi) \rangle^b \langle \xi \rangle^s \tilde{F}\|_{L^2_{\tau,\xi}},$$

sendo $\gamma(\xi) \equiv \sqrt{\xi^2 + \xi^4}$.

Definição 3.2. *Para $s, b \in \mathbb{R}$ e $T \geqslant 0$, $X^T_{s,b}$ denotará o espaço $X_{s,b}$ com à seguinte norma*

$$\|u\|_{X^T_{s,b}} = \inf_{w \in X_{s,b}} \{\|w\|_{X_{s,b}}; w(t) = u(t) \quad em \quad [0,T]\}.$$

3.1 Resultados Preliminares

Nesta seção iremos enunciar alguns lemas necessários para o teorema de boa postura. Tais lemas podem ser encontrados em [1],[2],[3], [6] e [7]. As demonstrações dos dois lemas abaixo são inteiramente análogas aos seus equivalentes no caso periódico (lemas 2.2 e 2.3 respectivamente), bastando trocar somas por integrais nas definições das respectivas normas.

Lema 3.3. *Seja $u(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} = 0, \\ u(0,x) = \phi(x), \\ u_t(0,x) = (\psi(x))_x, \end{cases} \tag{3.2}$$

com $\phi \in H^s$ e $\psi \in H^{s-1}$. Então existe $c > 0$ dependendo de θ, s, b tal que

$$\|\theta u\|_{X_{s,b}} \leqslant c\left(\|\phi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}}\right).$$

Lema 3.4. *Sejam $-\dfrac{1}{2} \leqslant b' \leqslant 0 \leqslant b \leqslant b'+1$ e $0 < T \leqslant 1$. Então*

(i) $\left\|\theta_T(t)\displaystyle\int_0^t f(t')dt'\right\|_{H_t^b} \leqslant T^{1-(b-b')}\|f\|_{H_t^{b'}}$

(ii) $\left\|\theta_T(t)\displaystyle\int_0^t V_s(t-t')f(u)(t')dt'\right\|_{X_{s,b}} \leqslant T^{1-(b-b')}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{\tilde{f}(u)(\tau,n)}{2i\gamma(n)}\right)\right\|_{X_{s,b}}.$

Lema 3.5. *Seja $b > \dfrac{1}{2}$. Então existe $c > 0$, dependendo apenas de b, tal que*

$$\|u\|_{C(\mathbb{R}:H^s)} \leqslant c\|u\|_{X_{s,b}}.$$

Demonstração: Vamos provar primeiramente que $X_{s,b} \subset L^\infty(\mathbb{R}, H^s)$.
Seja $u \in X_{s,b}$, escreva $u = u_1 + u_2$, sendo $\widehat{u_1} = \widehat{u}\chi_{\{\tau\leqslant 0\}}$, $\widehat{u_2} = \widehat{u}\chi_{\{\tau>0\}}$ e χ_A a função característica do conjunto A. Então, como $\left|e^{i\gamma(\xi)t}\right| = 1$,

$$\|u_1(x,t)\|_{H_x^s} = \|\langle\xi\rangle^s\,\widehat{u_1}^x(\xi,t)\|_{L_\xi^2} = \left\|\langle\xi\rangle^s\, e^{i\gamma(\xi)t}\widehat{u_1}^x(\xi,t)\right\|_{L_\xi^2} = \left\|\mathcal{F}_x^{-1}\big(e^{i\gamma(\xi)t}\widehat{u_1}^x(\xi,t)\big)\right\|_{H_x^s},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, usando a desigualdade de Minkowski, temos

$$\begin{aligned}
\|u_1(x,t)\|_{H_x^s} &= \left\| \mathcal{F}_t^{-1}\mathcal{F}_t\Big(\mathcal{F}_x^{-1}\big(e^{i\gamma(\xi)t}\widehat{u_1}^x(\xi,t)\big)\Big)\right\|_{H_x^s} = \left\| \int e^{it\tau}\mathcal{F}_t\big(\mathcal{F}_x^{-1}\big(e^{i\gamma(\xi)t}\widehat{u_1}^x(\xi,t)\big)\big)(\tau)d\tau\right\|_{H_x^s} \\
&= \left(\int \langle\xi\rangle^{2s} \left| \int e^{it\tau}\mathcal{F}_t\big(e^{i\gamma(\xi)t}\widehat{u_1}^x(\xi,t)\big)(\tau)d\tau\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\int \left(\int \langle\xi\rangle^{s} \left|\mathcal{F}_t\big(e^{i\gamma(\xi)t}\widehat{u_1}^x(\xi,t)\big)(\tau)\right| d\tau\right)^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \int \left(\int \langle\xi\rangle^{2s} \left|\mathcal{F}_t\big(e^{i\gamma(\xi)t}\widehat{u_1}^x(\xi,t)\big)(\tau)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} d\tau.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|u_1(x,t)\|_{H_x^s} \leqslant \int \left\|\mathcal{F}_t\mathcal{F}_x^{-1}\big(e^{i\gamma(\xi)t}\widehat{u_1}^x(\xi,t)\big)(x,\tau)\right\|_{H_x^s} d\tau,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Usando agora a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\|u_1(x,t)\|_{H_x^s} \leqslant \left(\int \langle\tau\rangle^{-2b} d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \langle\tau\rangle^{2b} \left\|\mathcal{F}_t\mathcal{F}_x^{-1}\big(e^{i\gamma(\xi)t}\widehat{u_1}^x(\xi,t)\big)(x,\tau)\right\|_{H_x^s}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{F}_t\mathcal{F}_x^{-1}\big(e^{i\gamma(\xi)t}\widehat{u_1}^x(\xi,t)\big)(x,\tau)\right\|_{H_x^s}^2 &= \int \langle\xi\rangle^{2s} \left|\mathcal{F}_t\big(e^{i\gamma(\xi)t}\widehat{u_1}^x(\xi,t)\big)(\tau)\right|^2 d\xi \\
&= \int \langle\xi\rangle^{2s} \left|\int e^{-it\tau}e^{i\gamma(\xi)t}\widehat{u_1}^x(\xi,t)dt\right|^2 d\xi \\
&= \int \langle\xi\rangle^{2s} \left|\widehat{u}_1(\xi,\tau-\gamma(\xi))\right|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\|u_1(x,t)\|_{H_x^s} \leqslant \left(\int \langle\tau\rangle^{-2b}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \langle\tau\rangle^{2b} \int \langle\xi\rangle^{2s} \left|\widehat{u_1}(\xi,\tau-\gamma(\xi))\right|^s d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lembremos que $\widehat{u_1} = \chi_{\{\tau \leqslant 0\}}$. Obtemos assim

$$\begin{aligned}
\|u_1(x,t)\|_{H^s_x} &\leqslant \left(\int \langle\tau\rangle^{-2b}\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \langle\xi\rangle^{2s} \int_{-\infty}^{0} \langle\tau\rangle^{2b} \left|\widehat{u}(\xi,\tau-\gamma(\xi)\right|^2 d\tau d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int \langle\tau\rangle^{-2b}\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \int_{-\infty}^{-\gamma(\xi)} \langle\xi\rangle^{2s} \langle\rho+\gamma(\xi)\rangle^{2b} \left|\widehat{u}(\xi,\rho)\right|^2 d\rho d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\int \langle\tau\rangle^{-2b}\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \int_{-\infty}^{0} \langle\xi\rangle^{2s} \langle\rho+\gamma(\xi)\rangle^{2b} \left|\widehat{u}(\xi,\rho)\right|^2 d\rho d\xi\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

pois $\gamma(\xi) \geqslant 0$. Por outro lado, um argumento similar implica que

$$\|u_2(x,t)\|_{H^s_x} \leqslant \left(\int \langle\tau\rangle^{-2b}\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \int_{0}^{\infty} \langle\rho-\gamma(\xi)\rangle^{2b} \langle\xi\rangle^{2s} \left|\widehat{u}(\xi,\rho)\right|^2 d\rho d\xi\right)^{\frac{1}{2}},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Agora, como $b > \dfrac{1}{2}$ e

$$\big||\rho| - \gamma(\xi)\big| = \begin{cases} |\rho-\gamma(\xi)|, & \text{for } \rho \geqslant 0, \\ |\rho+\gamma(\xi)|, & \text{for } \rho \leqslant 0, \end{cases}$$

temos

$$\|u(x,t)\|_{H^s_x} \leqslant \|u_1(x,t)\|_{H^s_x} + \|u_2(x,t)\|_{H^s_x} \leqslant C_b \|u(t,x)\|_{X_{s,b}},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Concluímos então que

$$\|u(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R},H^s)} \leqslant C_b \|u(t,x)\|_{X_{s,b}},$$

isto é, $u \in L^\infty(\mathbb{R}, H^s)$.

Resta ainda mostrar a continuidade na variável t. Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ uma sequência tal que $t_n \to t$. Temos então,

$$\|u_1(x,t) - u_2(x,t_n)\|_{H^s_x} = \left\| \int \mathcal{F}_t \mathcal{F}_x^{-1} \left(e^{i\gamma(\xi)t} \widehat{u_x}^x(\xi,t)\right)(x,\tau) \left(e^{-it\tau} - e^{it_n\tau}\right) d\tau \right\|_{H^s_x}. \quad (3.3)$$

Fazendo $n \to \infty$, podemos aplicar duas vezes o Teorema da Convergência Dominada para concluir que o lado direito de (3.3) vai a zero. Entretanto, $u_1 \in C(\mathbb{R}, H^s)$. Aplicando o mesmo argumento a u_2, concluímos o resultado. □

Lema 3.6. *Sejam $p, q > 0$, $p \neq \frac{1}{2}, q \neq \frac{1}{2}$ e $r = min\{p, q, p+q-1\}$ com $p+q > 1$. Existe $c > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle x-\alpha\rangle^p \langle x-\beta\rangle^q} dx \leqslant \frac{c}{\langle \alpha-\beta\rangle^r}.$$

Demonstração: Veja o Lema 2.5. □

Lema 3.7. *Existe $c > 0$ tal que*

$$\frac{1}{c} \leqslant \sup_{x,y\geqslant 0} \frac{1+|x+y|}{1+|x-\sqrt{y^2+y}|} \leqslant c.$$

Demonstração: Veja o Lema 2.4. □

3.2 Resultados Principais

Esta seção é dedicada à prova do teorema de boa postura do caso real, com ênfase aos argumentos que se distanciam do caso periódico.

Teorema 3.8. *Seja $s > -\frac{1}{4}$, $u,v \in X_{s,-a}$. Então existe $c > 0$, com c dependendo apenas de a, b e s, tal que*

$$\left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{|\xi|^2 \widetilde{u}\widetilde{v}(\tau,\xi)}{2i\gamma(\xi)} \right) \right\|_{X_{s,-a}} \leqslant c\|u\|_{X_{s,b}} \|v\|_{X_{s,b}} \tag{3.4}$$

acontece nos seguintes casos

(i) $s \geqslant 0$, $b > \frac{1}{2}$ *e* $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$,

(ii) $-\frac{1}{4} < s < 0, b > \frac{1}{2}$ *e* $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ *tal que* $|s| < \frac{a}{2}$.

Demonstração: Sejam $u, v \in X_{s,b}$ e defina

$$f(\xi,\tau) = \left\langle |\tau| - \xi^2 \right\rangle^b \langle\xi\rangle^s \widehat{u}(\xi,\tau) \quad \text{e} \quad g(\xi,\tau) = \left\langle |\tau| - \xi^2 \right\rangle^b \langle\xi\rangle^s \widehat{v}(\xi,\tau),$$

funções em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Afirmamos que (3.4) é equivalente à seguinte desigualdade

$$|W(f,g,\varphi)| \leqslant C \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}, \quad \forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}^2), \tag{3.5}$$

sendo

$$W(f,g,\varphi)=\int\limits_{\mathbb{R}^4}\frac{|\xi|^2}{2i\gamma(\xi)}\frac{\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi-\xi_1\rangle^s}\frac{g(\xi_1,\tau_1)f(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)\overline{\varphi}(\xi,\tau)}{\langle|\tau|-\xi^2\rangle^a\langle|\tau_1|-\xi_1^2\rangle^b\langle|\tau-\tau_1|-(\xi-\xi_1)^2\rangle^b}d\xi d\tau d\xi_1 d\tau_1.$$

De fato, para provar que (3.4) é equivalente a (3.5), vamos usar um argumento de dualidade. Observe que

$$W(f,g,\varphi)=[h(\xi,\tau),\varphi(\xi,\tau)],$$

sendo [,] o produto interno em $L^2(\mathbb{R}^2)$ e

$$\begin{aligned}
h(\xi,\tau) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{|\xi|^2}{2i\gamma(\xi)}\frac{\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^2\langle\xi-\xi_1\rangle^s}\frac{g(\xi_1,\tau_1)f(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)}{\langle|\tau|-\xi^2\rangle^a\langle|\tau_1|-\xi_1^2\rangle^b\langle|\tau-\tau_1|-(\xi-\xi_1)^2\rangle^b}d\xi_1 d\tau_1\\
&= \frac{|\xi|^2}{2i\gamma(\xi)}\frac{\langle\xi\rangle^s}{\langle|\tau|-\xi^2\rangle^a}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{v}(\xi_1,\tau_1)\widehat{u}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)d\xi_1 d\tau_1\\
&= \frac{|\xi|^2}{2i\gamma(\xi)}\frac{\langle\xi\rangle^s}{\langle|\tau|-\xi^2\rangle^a}\widehat{u}*\widehat{v}(\xi,\tau)\cong\frac{|\xi|^2}{2i\gamma(\xi)}\frac{\langle\xi\rangle^s}{\langle|\tau|-\xi^2\rangle^a}\widehat{uv}(\xi,\tau).
\end{aligned}$$

Se (3.4) vale, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\begin{aligned}
|W(f,g,\varphi)| &\leqslant \|h(\xi,\tau)\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}\\
&= \left\|\langle\xi\rangle^s\langle|\tau|-\xi^2\rangle^{-a}\frac{|\xi|^2}{2i\gamma(\xi)}\widehat{uv}(\xi,\tau)\right\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}\\
&= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{|\xi|^2}{2i\gamma(\xi)}\widehat{uv}(\xi,\tau)\right)\right\|_{X_{s,-a}}\|\varphi\|_{L^2}\\
&\leqslant C\|u\|_{X_{s,b}}\|v\|_{X_{s,b}}\|\varphi\|_{L^2}\\
&= C\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}
\end{aligned}$$

concluindo então que (3.5) vale. Por outro lado, se (3.5) é válida para todo $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^2)$, observando a ação do produto interno, segue do Teorema de Representação de Riesz que $h\in L^2(\mathbb{R}^2)$ e $\|h\|_{L^2}\leqslant C\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$, o que nos garante que (3.4) também é válida.

Assim sendo, para provar tal estimativa, precisamos analisar todos os possíveis casos de sinal de τ, τ_1 e $\tau-\tau_1$. Para isto, vamos particionar $\mathbb{R}^4$ nas seguintes regiões

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \left\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4;\ \tau_1<0,\ \tau-\tau_1<0\right\}\\
\Gamma_2 &= \left\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4;\ \tau_1\geqslant 0,\ \tau-\tau_1<0,\ \tau\geqslant 0\right\}\\
\Gamma_3 &= \left\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4;\tau_1\geqslant 0,\ \tau-\tau_1<0,\ \tau<0\right\}\\
\Gamma_4 &= \left\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4;\ \tau_1<0,\ \tau-\tau_1\geqslant 0,\ \tau\geqslant 0\right\}\\
\Gamma_5 &= \left\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4;\ \tau_1<0,\ \tau-\tau_1\geqslant 0,\ \tau<0\right\}\\
\Gamma_6 &= \left\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4;\ \tau_1\geqslant 0,\ \tau-\tau_1\geqslant 0\right\}.
\end{aligned}$$

Logo, é suficiente provar (3.5) com $Z(f,g,\varphi)$ no lugar de $W(f,g,\varphi)$, sendo

$$Z(f,g,\varphi)=\int\limits_{\mathbb{R}^4}\frac{|\xi|^2}{2i\gamma(\xi)}\frac{\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s}\frac{g(\xi_1,\tau_1)f(\xi_2,\tau_2)\overline{\varphi}(\xi,\tau)}{\langle\sigma\rangle^a\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}d\xi d\tau d\xi_1 d\tau_1,$$

com $\xi_2=\xi-\xi_1$, $\tau_2=\tau-\tau_1$ e σ, σ_1, σ_2 em um desses casos

- $\sigma=\tau+\xi^2$, $\sigma_1=\tau_1+\xi_1^2$, $\sigma_2=\tau_2+\xi_2^2$.
- $\sigma=\tau-\xi^2$, $\sigma_1=\tau_1-\xi_1^2$, $\sigma_2=\tau_2+\xi_2^2$.
- $\sigma=\tau+\xi^2$, $\sigma_1=\tau_1-\xi_1^2$, $\sigma_2=\tau_2+\xi_2^2$.
- $\sigma=\tau-\xi^2$, $\sigma_1=\tau_1+\xi_1^2$, $\sigma_2=\tau_2-\xi_2^2$.
- $\sigma=\tau+\xi^2$, $\sigma_1=\tau_1+\xi_1^2$, $\sigma_2=\tau_2-\xi_2^2$.
- $\sigma=\tau-\xi^2$, $\sigma_1=\tau_1-\xi_1^2$, $\sigma_2=\tau_2-\xi_2^2$.

Observe que os casos

$$\sigma=\tau+\xi^2,\ \sigma_1=\tau_1-\xi_1^2,\ \sigma_2=\tau_2-\xi_2^2\quad\text{e}\quad\sigma+\tau-\xi^2,\ \sigma_1=\tau_1+\xi_1^2,\ \sigma_2=\tau_2+\xi_2^2,$$

não podem ocorrer, já que $\tau_1<0$, $\tau-\tau_1<0$ implica $\tau<0$ e $\tau_1\geqslant 0$, $\tau-\tau_1\geqslant 0$ implica $\tau\geqslant 0$.

Aplicando a mudança de variáveis

$$(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\to-(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)$$

e observando que a norma L^2 é preservada por reflexão, os casos (IV), (V) e (VI) podem ser facilmente reduzidos a (III), (II) e (I) respectivamente. De fato, vamos mostrar que o caso (IV) pode ser reduzido ao caso (III). Assuma que (III) é válido, temos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^4} \frac{|\xi|^2}{2i\gamma(\xi)}\frac{\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s}\frac{g(\xi_1,\tau_1)f(\xi_2,\tau_2)\overline{\varphi}(\xi,\tau)}{\langle\tau-\xi^2\rangle^a\langle\tau_1+\xi_1^2\rangle^b\langle\tau_2-\xi_2^2\rangle^b}d\xi d\tau d\xi_1 d\tau_1\right| = \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^4} \frac{|\xi|^2}{2i\gamma(\xi)}\frac{\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s}\frac{g(-\xi_1,-\tau_1)f(\xi_1-\xi,\tau_1-\tau)\overline{\varphi}(-\xi,-\tau)}{\langle\tau+\xi^2\rangle^a\langle\tau_1-\xi_1^2\rangle^b\langle\tau_2+\xi_2^2\rangle^b}d\xi d\tau d\xi_1 d\tau_1\right| \\
&\leqslant C\|f\|_{L^2}\|g(-\xi_1,-\tau_1)\|_{L^2_{\xi_1,\tau_1}}\|\varphi(-\xi,-\tau)\|_{L^2_{\xi,\tau}} \\
&= C\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2},
\end{aligned}$$

isto é, o caso (IV) está provado. Além disso, da mesma maneira, fazendo a mudança de variáveis $\tau_1=\tau-\tau_1$, $\xi_2=\xi-\xi_1$ e $(\xi,\tau,\xi_2,\tau_2)\to-(\xi,\tau,\xi_2,\tau_2)$ o caso (II) pode ser reduzido ao caso (III). Logo, precisamos apenas provar os casos (I) e (III).

Vamos considerar primeiramente (3.5) com $Z(f,g,\varphi)$ no caso (I) e vamos utilizar a seguinte relação algébrica

$$-(\tau+\xi^2)+(\tau_1+\xi_1^2)+\big((\tau-\tau_1)+(\xi-\xi_1)^2\big)=2\xi_1(\xi_1-\xi). \tag{3.6}$$

Podemos escrever $\mathbb{R}^4=A\cup B$, sendo

$$\begin{aligned}
A &= \big\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4;\ |(\tau-\tau_1)+(\xi-\xi_1)^2|\leqslant|\tau_1+\xi_1^2|\big\} \quad \text{e} \\
B &= \big\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4;\ |(\tau-\tau_1)+(\xi-\xi_1)^2|\geqslant|\tau_1+\xi_1^2|\big\}.
\end{aligned}$$

Considerando $Z(f,g,\varphi)$ no caso (I) e fazendo a seguinte mudança de variáveis $\xi_2=\xi-\xi_1$ e $\tau_2=\tau-\tau_1$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_B \frac{|\xi|^2}{2i\gamma(\xi)}\frac{\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s}\frac{g(\xi_1,\tau_1)f(\xi_2,\tau_2)\overline{\varphi}(\xi,\tau)}{\langle\tau+\xi^2\rangle^a\langle\tau_1+\xi_1^2\rangle^b\langle\tau_2+\xi_2\rangle^b}d\xi d\tau d\xi_1 d\tau_1 \\
&= \int_A \frac{|\xi|^2}{2i\gamma(\xi)}\frac{\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi-\xi_2\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s}\frac{g(\xi-\xi_2,\tau-\tau_2)f(\xi_2,\tau_2)\overline{\varphi}(\xi,\tau)}{\langle\tau+\xi^2\rangle^a\langle(\tau-\tau_2)+(\xi-\xi_2)^2\rangle^b\langle\tau_2+\xi_2\rangle^b}d\xi d\tau d\xi_2 d\tau_2.
\end{aligned}$$

Assim, por simetria, podemos nos restringir ao conjunto A. Vamos dividir A em três partes, sendo elas

$$\begin{aligned} A_1 &= \big\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1) \in A;\ |\xi_1| \leqslant 10\big\} \\ A_2 &= \big\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1) \in A;\ |\xi_1| \geqslant 10 \ \text{ e } \ |2\xi_1-\xi| \geqslant |\xi_1|/2\big\} \\ A_3 &= \big\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1) \in A;\ |\xi_1 \geqslant 10 \ \text{ e } \ |\xi_1-\xi| \geqslant |\xi_1|/2\big\}. \end{aligned}$$

Temos $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. De fato, se $(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1) \in A$ temos que

$$\frac{|\xi|}{2} \leqslant |2\xi_1 - \xi| \quad \text{ou} \quad \frac{|\xi_1|}{2} \leqslant |\xi_1 - \xi|,$$

caso contrário teremos

$$|\xi_1| = \frac{|\xi_1|}{2} + \frac{|\xi_1|}{2} > |2\xi_1 - \xi| + |\xi - \xi_1| \geqslant |2\xi_1 - \xi + \xi - \xi_1| = |\xi_1|,$$

o que é um absurdo.

Vamos agora dividir A_3 em duas partes, sendo elas

$$\begin{aligned} A_{3,1} &= \big\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1) \in A_3;\ |\tau_1 + \xi_1^2| \leqslant |\tau + \xi^2|\big\} \\ A_{3,2} &= \big\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1) \in A_3;\ |\tau + \xi^2| \geqslant |\tau_1 + \xi_1^2|\big\}. \end{aligned}$$

Podemos definir agora os conjuntos R_1 e R_2 da seguinte maneira

$$R_1 = A_1 \cup A_2 \cup A_{3,1} \quad \text{e} \quad R_2 = A_{3,2}.$$

No que segue, χ_R denotará a função característica no conjunto R. Como $A = R_1 \cup R_2$,

$$|Z(f,g,\varphi)| \leqslant |\mathcal{R}_1| + |\mathcal{R}_2|,$$

sendo

$$\mathcal{R}_i = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \frac{|\xi|^2}{2\gamma(\xi)} \frac{\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s} \frac{\chi_{R_i}(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)g(\xi_1,\tau_1)f(\xi_2,\tau_2)\overline{\varphi}(\xi,\tau)}{\langle\sigma\rangle^a\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b} d\xi d\tau d\xi_1 d\tau_1.$$

Usando duas vezes a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{R}_1| &\leqslant \left[\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi|^4 \langle\xi\rangle^{2s}}{4\gamma(\xi)^2 \langle\sigma\rangle^{2a}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{R_1} g(\xi_1,\tau_1) f(\xi_2,\tau_2)}{\langle\xi_1\rangle^s \langle\xi_2\rangle^s \langle\sigma_1\rangle^b \langle\sigma_2\rangle^b} d\xi_1 d\tau_1\right)^2 d\xi d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2} \\
&\leqslant \left[\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi|^4 \langle\xi\rangle^{2s}}{4\gamma(\xi)^2 \langle\sigma\rangle^{2a}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_2} \frac{1}{\langle\xi_1\rangle^{2s} \langle\xi_2\rangle^{2s} \langle\sigma_1\rangle^{2b} \langle\sigma_2\rangle^{2b}} d\xi_1 d\tau_1\right)\right. \\
&\quad \times \left.\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |g(\xi_1,\tau_1)|^2 |f(\xi_2,\tau_2)|^2 d\xi_1 d\tau_1\right) d\xi d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{R}_1| &\leqslant \left\| \frac{|\xi|^4 \langle\xi\rangle^{2s}}{4\gamma(\xi)^2 \langle\sigma\rangle^{2a}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{R_1}}{\langle\xi\rangle^{2s} \langle\xi_2\rangle^{2s} \langle\sigma_1\rangle^{2b} \langle\sigma_2\rangle^{2b}} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L^\infty_{\xi,\tau}}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left[\int\limits_{R^4} |g(\xi_1,\tau_1)| f(\xi_2,\tau_2)|^2 d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2} \\
&\leqslant \left\| \frac{|\xi|^4 \langle\xi\rangle^{2s}}{4\gamma(\xi)^2 \langle\sigma\rangle^{2a}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{R_1}}{\langle\xi_1\rangle^{2s} \langle\xi_2\rangle^{2s} \langle\sigma_1\rangle^{2b} \langle\sigma_2\rangle^{2b}} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L^\infty_{\xi,\tau}}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Aplicamos agora os mesmos passos para $\mathcal{R}_2$,

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{R}_2| &\leqslant \left[\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\langle\xi_1\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi|^2\langle\xi\rangle^{s} f(\xi_2,\tau_2)\overline{\varphi}(\xi,\tau)\chi_{R_2}}{2\gamma(\xi)\langle\xi_2\rangle^{s}\langle\sigma\rangle^{a}\langle\sigma_2\rangle^{b}} d\xi d\tau\right)^2 d\xi_1 d\tau_1\right]^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2} \\
&\leqslant \left[\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\langle\xi_1\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi|^4}{4\gamma(\xi)^2}\frac{\langle\xi\rangle^{2s}\chi_{R_2}}{\langle\xi_2\rangle^{2s}\langle\sigma\rangle^{2a}\langle\sigma_2\rangle^{2b}} d\xi d\tau\right)\right. \\
&\quad \times \left.\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |f(\xi_2,\tau_2)|^2|\overline{\varphi}(\xi,\tau)|^2 d\xi d\tau\right) d\xi_1 d\tau_1\right]^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2} \\
&\leqslant \left\| \frac{1}{\langle\xi_1\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi|^4}{4\gamma(\xi)^2}\frac{\langle\xi\rangle^{2s}\chi_{R_2}}{\langle\xi_2\rangle^{2s}\langle\sigma\rangle^{2a}\langle\sigma_2\rangle^{2b}} d\xi d\tau \right\|_{L^\infty_{\xi_1,\tau_1}} \\
&\quad \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^4} |f(\xi_2,\tau_2)|^2|\overline{\varphi}(\xi,\tau)|^2 d\xi d\tau d\xi_1 d\tau_1\right)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2} \\
&\leqslant \left\| \frac{1}{\langle\xi_1\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi|^4}{4\gamma(\xi)^2}\frac{\langle\xi\rangle^{2s}\chi_{R_2}}{\langle\xi_2\rangle^{2s}\langle\sigma\rangle^{2a}\langle\sigma_2\rangle^{2b}} d\xi d\tau \right\|_{L^\infty_{\xi_1,\tau_1}} \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Usando que $|\xi|^4\gamma(\xi)^{-2} = |\xi|^4\left(|\xi|^2+|\xi|^4\right)^{-1} = (|\xi|^{-2}+1)^{-1} \leqslant 1$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, concluímos que

$$
\begin{aligned}
|Z(f,g,\varphi)| &\leqslant \left\| \frac{\langle\xi\rangle^{2s}}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{R_1}}{\langle\xi_1\rangle^{2s}\langle\xi_2\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2b}} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L^\infty_{\xi,\tau}} \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \\
&\quad + \left\| \frac{1}{\langle\xi_1\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle\xi\rangle^{2s}\chi_{R_2}}{\langle\xi_2\rangle^{2s}\langle\sigma\rangle^{2a}\langle\sigma_2\rangle^{2b}} d\xi d\tau \right\|_{L^\infty_{\xi_1,\tau_1}} \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Temos ainda

$$
\frac{\langle\xi\rangle^{2s}}{\langle\xi_1\rangle^{2s}\langle\xi_2\rangle^{2s}} \leqslant \frac{\langle\xi_1\rangle^{2|s|}}{\langle\xi_1\rangle^{2s}} = \langle\xi_1\rangle^{\beta(s)},
$$

sendo

$$
\beta(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \geqslant 0 \\ 4|s|, & \text{se } s < 0. \end{cases}
$$

Além disso,

$$\left\| \frac{\langle\xi\rangle^{2s}}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{R_1}}{\langle\xi_1\rangle^{2s}\langle\xi_2\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2b}} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L^\infty_{\xi,\tau}} \leqslant \left\| \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{R_1}\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2b}} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L^\infty_{\xi,\tau}}$$

e

$$\left\| \frac{1}{\langle\xi_1\rangle^{2s}} \langle\sigma_1\rangle^{2b} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{R_2}\langle\xi\rangle^{2s}}{\langle\xi_2\rangle^{2s}\langle\sigma\rangle^{2a}\langle\sigma_2\rangle^{2b}} d\xi d\tau \right\|_{L^\infty_{\xi_1,\tau_1}} \leqslant \left\| \frac{\langle\xi\rangle^{\beta(s)}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{R_2}}{\langle\sigma\rangle^{2a}\langle\sigma_2\rangle^{2b}} d\xi d\tau \right\|_{L^\infty_{\xi_1,\tau_1}}.$$

Segue do corolário 2.11 que

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{R_1}\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{\langle\tau_1+\xi_1^2\rangle^{2b}\langle\tau_2+\xi_2^2\rangle^{2b}} d\xi_1 d\tau_1 &= \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{R_1}\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\tau_1-(-\xi_1^2)\rangle^{2b}\langle\tau_1-(\tau+\xi_2^2)\rangle^{2b}} d\tau_1 d\xi_1 \\ &\lesssim \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{R_1}\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{\langle\tau+\xi_2^2+\xi_1^2\rangle^{2b}} d\xi_1, \end{aligned}$$

uma vez que $b > \dfrac{1}{2}$ e $\min\{2b, 4b-1\} = 2b$. Analogamente, temos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{R_2}}{\langle\tau+\xi^2\rangle^{2a}\langle\tau_2+\xi_2^2\rangle^{2b}} d\xi d\tau \lesssim \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{R_2}}{\langle\tau_1-\xi_2^2+\xi^2\rangle^{2a}} d\xi$$

pois $\min\{2b, 2a, 2a+2b-1\} = 2a$ e $a > \dfrac{1}{4}$.

Como $\tau+\xi_2^2+\xi_1^2 = \tau+\xi_2^2-2\xi\xi_1+2\xi_1^2$ e $\tau_1-\xi_2^2+\xi^2 = \tau_1-\xi_1^2+2\xi\xi_1$, é suficiente estabelecer limitantes para

$$\begin{aligned} J_1(\xi,\tau) &= \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{\langle\tau+\xi^2-2\xi\xi_1+2\xi_1^2\rangle^{2b}} d\xi_1 \quad \text{em } R_1 \\ J_2(\xi_1,\tau_1) &= \frac{\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\tau_1-\xi_1^2+2\xi\xi_1\rangle^{2a}} d\xi \qquad \text{em } R_2. \end{aligned}$$

Na região A_1, temos $\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)} \leqslant \langle 10\rangle^{\beta(s)} \lesssim 1$. Além disso, para $a > 0$ e $b > \dfrac{1}{2}$, obtemos

$$J_1(\xi,\tau) \lesssim \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \int\limits_{|\xi_1|\leqslant 10} \frac{1}{\langle\tau+\xi^2-2\xi\xi_1+2\xi_1^2\rangle^{2b}} d\xi_1 \leqslant \int\limits_{|\xi_1|\leqslant 10} 1 d\xi_1 \lesssim 1 \quad \text{em } A_1,$$

pois $\langle\eta\rangle \geqslant 1$, para todo $\eta \in \mathbb{R}$. Na região A_2, por mudança de variáveis temos

$$\eta = \tau + \xi^2 + 2\xi_1^2 - 2\xi\xi_1, \quad d\eta = 2|2\xi_1 - \xi| d\xi_1$$

e $|2\xi_1 - \xi| \geqslant \dfrac{|\xi_1|}{2}$. Temos então

$$J_1(\xi,\tau) = \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \int\limits_{|\xi_1|\geqslant 10} \frac{\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{\langle\eta\rangle^{2b}} \frac{d\eta}{2|2\xi_1 - \xi|} \leqslant \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \int\limits_{|\xi_1|\geqslant 10} \frac{\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{\langle\eta\rangle^{2b}|\xi_1|} d\eta \quad \text{em} \ \ A_2.$$

Por outro lado, $\langle\xi_1\rangle = (1+\xi_1^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (2\xi_1^2)^{\frac{1}{2}} \lesssim |\xi_1|$ implicando que

$$J_1(\xi,\tau) \lesssim \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \int \frac{\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)-1}}{\langle\eta\rangle^{2b}} d\eta \quad \text{em} \ \ A_2.$$

Observemos que $\beta(s) - 1 \leqslant 0$ para todo $s > -\dfrac{1}{4}$, assim

$$J_1(\xi,\tau) \lesssim \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \int \frac{1}{\langle\eta\rangle^{2b}} d\eta \lesssim 1 \quad \text{em} \ \ A_2,$$

pois $b > \dfrac{1}{2}$. Agora, por definição da região $A_{3,1}$, temos

$$\langle\xi_1\rangle^2 \leqslant 2|\sigma_1 - \sigma + \sigma_2| \leqslant 2(|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|) \leqslant 6|\sigma| \lesssim \langle\sigma\rangle,$$

uma vez que $|\sigma_1|, |\sigma_2| \leqslant |\sigma|$ na região $A_{3,1}$. Para $a > 0$, temos $\langle\sigma\rangle^{-2a} \lesssim \langle\xi_1\rangle^{-4a}$. Além disso, segue do corolário 2.11 que

$$J_1(\xi,\tau) \lesssim \int \frac{\langle\xi\rangle^{\beta(s)-4a}}{\langle\tau + \xi^2 + 2\xi^2 + 2\xi\xi_1\rangle^{2b}} d\xi_1 \lesssim \int \frac{1}{\langle\tau + \xi^2 + 2\xi_1^2 + 2\xi\xi_1\rangle^{2b}} d\xi_1 \lesssim 1 \quad \text{em} \ \ A_{3,1},$$

pois $\beta(s) < 4a$.

Vamos agora estimar $J_2(\xi_1,\tau_1)$. Fazendo a mudança de variáveis $\eta = \tau_1 - \xi_1^2 + \xi\xi_1$ na região $A_{3,2}$, obtemos

$$J_2(\xi_1,\tau_1) = \frac{\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b} 2|\xi_1|} \int \frac{1}{\langle\eta\rangle^{2a}} d\eta.$$

E ainda, na região $A_{3,2}$ temos $|\xi_1 - \xi| \geqslant \dfrac{|\xi_1|}{2}$ e $|\sigma|, |\sigma_2| \leqslant |\sigma_1|$ o que implica que

$$|\xi_1|^2 \leqslant |\xi_1| 2|\xi_1 - \xi| = |\sigma_1 - \sigma + \sigma_2| \leqslant 3|\sigma_1| \lesssim \langle \sigma_1 \rangle$$

sendo que aqui estamos utilizando a relação algébrica (3.6), e o fato que

$$|\eta| = |\tau_1 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_1| = |\tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 + \xi^2| \leqslant |\tau_1 - \tau - (\xi - \xi_1)^2| + |\tau + \xi^2| = |\sigma_2| + |\sigma_1| \leqslant 2|\sigma_1|.$$

Como $|\xi_1| \geqslant 10$ em $A_{3,2}$, temos

$$J_2(\xi_1, \tau_1) \lesssim \frac{|\xi_1|^{\beta(s)-1}}{\langle \sigma_1 \rangle^{2b}} \int\limits_{|\eta| \leqslant 2|\sigma_1|} \frac{1}{\langle \eta \rangle^{2a}} d\eta.$$

Observe agora que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|\eta| \leqslant 2|\sigma_1|} \frac{1}{\langle \eta \rangle^{2a}} d\eta \quad &\sim \int\limits_{|\eta| \leqslant \langle \sigma_1 \rangle} \frac{1}{(1 + |\eta|^{2a}} = 2 \int\limits_0^{2|\sigma_1|} \frac{1}{(1+\eta)^{2a}} = \left. \frac{(1+\eta)^{1-2a}}{1-2a} \right|_0^{2|\sigma_1|} \\
&= \frac{(1 + 2|\sigma_1|)^{1-2a}}{1-2a} - \frac{1}{1-2a} \leqslant \frac{2(1 + |\sigma_1|)^{1-2a}}{1-2a} \\
&\lesssim \langle \sigma_1 \rangle^{1-2a}
\end{aligned}$$

pois $a < \dfrac{1}{2}$. Além disso,

$$J_2(\xi_1, \tau_1) \lesssim \frac{|\xi_1|^{\beta(s)-1}}{\langle \sigma \rangle^{2a+2b-1}} \leqslant 1,$$

uma vez que $\beta(s) - 1 < 0$, para todo $s > -\dfrac{1}{4}$ e $2a + 2b - 1 > 0$ com $a > 0$ e $b > \dfrac{1}{2}$. Vamos agora demonstrar o caso (III). Utilizaremos a seguinte relação algébrica

$$-(\tau + \xi^2) + (\tau_1 - \xi_1^2) + ((\tau - \tau_1) + (\xi - \xi_1)^2) = -2\xi_1\xi. \tag{3.7}$$

Primeiramente vamos dividir $\mathbb{R}^4$ em quatro regiões

$$\begin{aligned}
B_1 &= \left\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4;\ |\xi_1|\leqslant 10\right\}\\
B_2 &= \left\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4;\ |\xi_1|\geqslant 10\ \text{ e }\ |\xi|\leqslant 1\right\}\\
B_3 &= \left\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4;\ |\xi_1|\geqslant 10,\ |\xi|\geqslant 1\ \text{ e }\ |\xi|\geqslant |\xi_1|/2\right\}\\
B_4 &= \left\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4;\ |\xi_1|\geqslant 10,\ |\xi|\geqslant 1\ \text{ e }\ |\xi|\leqslant |\xi_1|/2\right\}.
\end{aligned}$$

Dividiremos também B_4 em três partes, sendo elas

$$\begin{aligned}
B_{4,1} &= \left\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in B_4;\ |\tau_1-\xi_1^2|,\ |(\tau-\tau_1)+(\xi-\xi_1)^2|\leqslant|\tau+\xi^2|\right\}\\
B_{4,2} &= \left\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in B_4;\ |\tau+\xi^2|,\ |(\tau-\tau_1)+(\xi-\xi_1)^2|\leqslant|\tau_1-\xi_2|\right\}\\
B_{4,3} &= \left\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in B_4;\ |\tau_1-\xi_1^2|,\ |\tau+\xi^2|\leqslant|(\tau-\tau_1)+(\xi-\xi_1)^2|\right\}.
\end{aligned}$$

Podemos agoar definir os conjuntos S_i, $i=1,2,3$, da seguinte maneira

$$S_1 = B_1\cup B_2\cup B_{4,1},\quad S_2 = B_2\cup B_{4,2}\ \text{ e }\ S_3 = B_{4,3}.$$

Analogamente ao caso (I), usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Hölder, temos

$$|Z(f,g,\varphi)|\leqslant\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}\big(\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2+\mathcal{S}_3\big),$$

sendo

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1 &= \left\|\frac{\langle\xi\rangle^{2s}}{\langle\sigma\rangle^{2a}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\chi_{S_1}}{\langle\xi_1\rangle^{2s}\langle\xi_2\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2b}}d\xi_1 d\tau_1\right\|_{L^\infty_{\xi,\tau}}\\
\mathcal{S}_2 &= \left\|\frac{1}{\langle\xi_1\rangle^{2s}\langle\sigma_1\rangle^{2b}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\chi_{S_2}\langle\xi\rangle^{2s}}{\langle\xi_2\rangle^{2s}\langle\sigma\rangle^{2a}\langle\sigma_2\rangle^{2b}}d\xi d\tau\right\|_{L^\infty_{\xi_1,\tau_1}}\\
\mathcal{S}_3 &= \left\|\frac{1}{\langle\xi_2\rangle^{2s}\langle\sigma_2\rangle^{2b}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\chi_{\tilde{S}_3}\langle\xi_1+\xi_2\rangle^{2s}}{\langle\xi_1\rangle^{2s}\langle\sigma\rangle^{2a}\langle\sigma_1\rangle^{2b}}d\xi_1 d\tau_1\right\|_{L^\infty_{\xi_2,\tau_2}},
\end{aligned}$$

com σ, σ_1 e σ_2 dadas nas condições do caso (III) e

$$\tilde{S}_3 \subseteq \left\{ (\xi_2,\tau_2,\xi_1,\tau_1) \in \mathbb{R}^4; \quad \begin{array}{c} |\xi_1| \geqslant 10,\ |\xi_1+\xi_2| \geqslant 1,\ |\xi_1+\xi_2| \leqslant |\xi_1|/2 \\ \text{e} \ \ |\tau_1 - \xi_1^2|, |(\tau_1+\tau_2)+(\xi_1+\xi_2)^2| \leqslant |\tau_2+\xi_2| \end{array} \right\}.$$

Temos ainda

$$\frac{\langle \xi \rangle^{2s}}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \xi_2 \rangle^{2s}} \leqslant \langle \xi_1 \rangle^{\beta(s)}, \ \text{ sendo } \quad \beta(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \geqslant 0 \\ 4|s|, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Como fizemos no caso (I), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &\lesssim \left\| \frac{1}{\langle \sigma \rangle^{2a}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{\beta(s)} \chi_{S_1}}{\langle \sigma_1 \rangle^{2b} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L^\infty_{\xi,\tau}} \\ \mathcal{S}_2 &\lesssim \left\| \frac{\langle \xi_1 \rangle^{\beta(s)}}{\langle \sigma_1 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{S_2}}{\langle \sigma \rangle^{2a} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}} d\xi d\tau \right\|_{L^\infty_{\xi_1,\tau_1}} \\ \mathcal{S}_3 &\lesssim \left\| \frac{1}{\langle \sigma_2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{\tilde{S}_3} \langle \xi_1 \rangle^{\beta(s)}}{\langle \sigma \rangle^{2a} \langle \sigma_1 \rangle^{2b}} d\xi_1 \ d\tau_1 \right\|_{L^\infty_{\xi_2,\tau_2}}. \end{aligned}$$

Aplicando o Corolário 2.11, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{\beta(s)}}{\langle \sigma_1 \rangle^{2b} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}} d\xi_1 d\tau_1 &= \int_{\mathbb{R}} \langle \xi_1 \rangle^{\beta(s)} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 + (\xi-\xi_1)^2 \rangle^{2b}} d\tau_1 d\xi_1 \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{\beta(s)}}{\langle \tau + \xi^2 - 2\xi\xi_1 \rangle^{2b}} d\xi_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\langle \sigma \rangle^{2a} \langle \sigma_1 \rangle^{2b}} d\xi d\tau &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2a} \langle \tau - \tau_1 + (\xi-\xi_1)^2 \rangle^{2b}} d\tau d\xi \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi\xi_1 \rangle^{2a}} d\xi, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma\rangle^{2a}} d\xi_1\tau_1 &= \int\limits_{\mathbb{R}} \langle\xi_1\rangle^{\beta(s)} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\tau_1-\xi_1^2\rangle^{2b}\langle\tau_1+\tau_2+(\xi_1+\xi_2)^2\rangle^{2a}} d\tau_1 d\xi_1 \\ &\lesssim \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{\langle\tau_2+\xi_2^2+2\xi_1^2+2\xi_1\xi_2\rangle^{2a}} d\xi_1\end{aligned}$$

uma vez que $\min\{2b,\ 4b-1\}=2b$ e $\min\{2b,\ 2a,\ 2b+2a-1\}=2a$. Concluímos então que

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &\lesssim \left\| \frac{1}{\langle\sigma\rangle} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\langle\xi\rangle^{\beta(s)}\chi_{S^1}}{\langle\tau+\xi^2-2\xi\xi_1\rangle^{2b}} d\xi_1 \right\|_{L^\infty_{\tau,\xi}} \\ \mathcal{S}_2 &\lesssim \left\| \frac{\langle\xi\rangle^{\beta(s)}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{S_2}}{\langle\tau_1-\xi^2+2\xi\xi_1\rangle^{2a}} d\xi \right\|_{L^\infty_{\xi_1,\tau_1}} \\ \mathcal{S}_3 &\lesssim \left\| \frac{1}{\langle\sigma_2\rangle^{2b}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\langle\xi\rangle^{\beta(s)}\chi_{\tilde{S}_3}}{\langle\tau_2+\xi_2^2+2\xi^2+2\xi_2\xi_1\rangle^{2a}} d\xi_1 \right\|_{L^\infty_{\xi_2,\tau_2}} .\end{aligned}$$

Logo, é suficiente encontrar limitantes para

$$\begin{aligned}K_1(\xi,\tau) &= \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{\langle\tau+\xi^2-2\xi\xi_1\rangle^{2b}} d\xi_1 \qquad \text{em} \quad S_1 \\ K_2(\xi_1,\tau_1) &= \frac{\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\tau_1-\xi_1^2+2\xi\xi_1\rangle^{2a}} d\xi \qquad \text{em} \quad S_2 \\ K_3(\xi_2,\tau_2) &= \frac{1}{\langle\sigma_2\rangle^{2b}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{\langle\tau_2\xi_2^2+2\xi_1^2+2\xi_1\xi_2\rangle^{2a}} d\xi_1 \quad \text{em} \quad \tilde{S}_3.\end{aligned}$$

Na região B_1, temos $|\xi_1|\leqslant 10$ o que implica que $\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}\lesssim 1$. Então,

$$K_1(\xi,\tau) \lesssim \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}} \int\limits_{|\xi_1|\leqslant 10} \frac{1}{\langle\tau+\xi_1^3-2\xi\xi_1\rangle^{2b}} d\xi_1 \leqslant \int\limits_{|\xi_1|\leqslant 10} 1 d\xi_1 \lesssim 1 \quad \text{em} \quad B_1,$$

pois $\langle\eta\rangle\geqslant 1$ para todo $\eta\in\mathbb{R}$ e $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$. Na região B_3, a troca de variáveis

$\eta = \tau + \xi^2 - 2\xi\xi_1$ nos dá

$$K_1(\xi,\tau) = \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}}\int \frac{\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{|\xi|\langle\eta\rangle^{2b}}d\eta \lesssim \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}}\int \frac{\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)-1}}{\langle\eta\rangle^{2b}}d\eta \quad \text{em} \quad B_3,$$

uma vez que $|\xi_1| \geqslant 10$. Usando que $\beta(s) - 1 < 0$ para todo $s > -\dfrac{1}{4}$ e $\langle\eta\rangle \geqslant 1$ para todo $\eta \in \mathbb{R}$, obtemos

$$K_1(\xi_1,\tau_1) \lesssim \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\eta\rangle^{2b}}d\eta \lesssim 1 \quad \text{em} \quad B_3,$$

pois $2b > 1$.

Agora, por definição da região $B_{4,1}$ e da relação algébrica (3.7) temos

$$\langle\xi_1\rangle \leqslant 2|\xi_1| \leqslant 2|\xi||\xi_1| = |\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma| \leqslant 3|\sigma| \lesssim \langle\sigma\rangle,$$

já que $|\xi_1| \geqslant 10$, $|\xi| \geqslant 1$ e $|\sigma_1|$, $|\sigma_2| \leqslant |\sigma|$ em $B_{4,1}$.

$$K_1(\tau,\xi) \lesssim \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2a}}\int \frac{\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{2|\xi|\langle\eta\rangle^{2b}}d\eta \lesssim \frac{\langle\sigma\rangle^{\beta(s)-2a}}{2|\xi|}\int \frac{1}{\langle\eta\rangle^{2b}}d\eta \lesssim 1$$

para todo $s > -\dfrac{1}{4}$, $b > \dfrac{1}{2}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < \dfrac{1}{2}$, se $s \geqslant 0$ ou $2|s| < a < \dfrac{1}{2}$, se $s > 0$.

Vamos agora estimar $K_2(\xi_1,\tau_1)$ em S_2. Fazendo a mudança de variáveis $\eta = \tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi\xi_1$, obtemos

$$K_2(\xi_1,\tau_1) = \frac{\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}}\int \frac{1}{2|\xi_1|\langle\eta\rangle^{2a}}d\eta.$$

Observamos que, em B_2, temos $|\eta| = |\tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi\xi_1| \leqslant |\sigma_1| + 2|\xi\xi_1| \leqslant 2(|\sigma_1| + |\xi_1|)$ e $\langle\xi_1\rangle \leqslant 2|\xi_1|$. Então,

$$K_2(\xi_1,\tau_1) \lesssim \frac{|\xi_1|^{\beta(s)-1}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}} \int_{|\eta|\lesssim|\sigma_1|+|\xi_1|} \frac{1}{\langle\eta\rangle^{2a}}d\eta.$$

Por outro lado,

$$\int_{|\eta|\lesssim|\sigma_1|+|\xi_1|} \frac{1}{\langle\eta\rangle^{2a}}d\eta \sim \int_{|\eta|\lesssim|\sigma_1|+|\xi_1|} \frac{1}{(1+|\eta|)^{2a}}d\eta \lesssim 2\int_0^{|\eta_1|+|\xi_1|} \frac{1}{(1+\eta)^{2a}}d\eta,$$

sendo

$$
\begin{aligned}
\int_0^{|\eta_1|+|\xi_1|} \frac{1}{(1+\eta)^{2a}} d\eta &= \left.\frac{(1+\eta)^{1-2a}}{1-2a}\right|_0^{|\sigma_1|+|\xi_1|} \\
&= \frac{(1+|\sigma_1|+|\xi_1|)^{1-2a}}{1-2a} - \frac{1}{1-2a} \\
&\leqslant \big(1+|\sigma_1|+|\xi_1|\big)^{1-2a} \\
&\lesssim \big(\langle\sigma_1\rangle+|\xi_1|\big)^{1-2a},
\end{aligned}
$$

uma vez que $1-2a>0$. Logo,

$$
K_2(\xi_1,\tau_1) \lesssim \frac{|\xi_1|^{\beta(s)-1}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}}\big(\langle\sigma_1\rangle+|\xi_1|\big)^{1-2a} \leqslant \frac{|\xi_1|^{\beta(s)-1}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}}\left(\langle\sigma_1\rangle^{1-2a}+|\xi_1|^{1-2a}\right),
$$

onde usamos o fato que $\big(|x|+|y|\big)^{\alpha} \leqslant |x|^{\alpha}+|y|^{\alpha}$ para todo $0\leqslant\alpha<1$ e para todo $x,y\in\mathbb{R}$. Como $2b+2a-1>2a>0$, $\langle\eta\rangle\geqslant 1$ para todo $\eta\in\mathbb{R}$, $|\xi_1|\geqslant 10$ em B_2 e $\beta(s)-2a<0$, concluímos que

$$
K_2(\xi_1,\tau_1) \lesssim \frac{|\xi_1|^{\beta(s)-1}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b+2a-1}} + \frac{|\xi_1|^{\beta(s)-2a}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}} \leqslant 1,
$$

para $s>-\dfrac{1}{4}$, $b>\dfrac{1}{2}$ e $0<a<\dfrac{1}{2}$ tal que $\beta(s)\leqslant\min\{1,2a\}$.

Na região $B_{4,2}$, pela relação algébrica (3.7), temos

$$
\langle\xi_1\rangle \sim (1+|\xi_1|) \leqslant 2|\xi_1| \leqslant 2|\xi_1||\xi| = |-\sigma+\sigma_1+\sigma_2| \leqslant 3|\sigma_1| \lesssim \langle\sigma_1\rangle,
$$

pois $|\xi_1|\geqslant 10$, $|\xi|\geqslant 1$ e $|\sigma|$, $|\sigma_2|\leqslant|\sigma_1$ em B_2. Além disso, a mudança de variáveis $\eta=\tau_1-\xi_1^2+2\xi\xi_1$, a restrição da região B_2 e(3.7) nos dão $|\eta|\leqslant 2|\xi\xi_1|+|\sigma_1|\lesssim\langle\sigma_1\rangle$. Assim,

$$
K_2(\xi_1,\tau_1) \lesssim \frac{\langle\xi_1\rangle^{\beta(s)}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}} \int_{|\eta|\lesssim\langle\sigma_1\rangle} \frac{1}{|\xi_1|\langle\eta\rangle^{2a}} d\eta \lesssim \frac{|\xi_1|^{\beta(s)-1}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}} \int_{|\eta|\lesssim\langle\sigma_1\rangle} \frac{1}{\langle\eta\rangle^{2a}} d\eta
$$

e ainda,

$$
\int_{|\eta|\lesssim\langle\sigma_1\rangle} \frac{1}{\langle\eta\rangle^{2a}} d\eta = 2\int_0^{\langle\sigma_1\rangle} \frac{1}{(1+\eta)^{2a}} d\eta = \left.\frac{2(1+\eta)}{1-2a}\right|_0^{\langle\sigma_1\rangle} \lesssim (1+\langle\sigma_1\rangle)^{1-2a} \lesssim \langle\sigma_1\rangle^{1-2a}
$$

para todo $0 < a < \frac{1}{2}$. Daí,

$$K_2(\xi_1, \tau_1) \lesssim \frac{|\xi_1|^{\beta(s)-1}}{\langle \sigma_1 \rangle^{2b+2a-1}} \lesssim 1$$

pois $|\xi_1| \geqslant 10$, $2b + 2a - 1 > 0$ e $\beta(s) - 1 < 0$ para todo $s > -\frac{1}{4}$.

Finalmente, vamos estimar $K_3(\xi_2, \tau_2)$ em $\tilde{S}_3$. Observemos que na região $\tilde{S}_3$ temos

$$\langle \xi_1 \rangle \leqslant 2|\xi_1| \leqslant 2|\xi\xi_1| = |-\sigma + \sigma_1 + \sigma_2| \leqslant 3|\sigma_2| \lesssim \langle \sigma_2 \rangle.$$

Além disso, o corolário 2.11 implica que

$$\begin{aligned} K_3(\xi_1, \tau_1) &= \frac{1}{\langle \sigma \rangle^{2b}} \int \frac{\langle \xi_1 \rangle^{\beta(s)}}{\langle \tau_2 + \xi_2^2 + 2\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_1 \rangle^{2a}} d\xi_1 \\ &\lesssim \int \frac{\langle \xi_1 \rangle^{\beta(s)-2b}}{\langle \tau_2 + \xi_2^2 + 2\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 \rangle^{2a}} d\xi_1 \\ &\leqslant \int \frac{1}{\langle \tau_2 + \xi_2^2 + 2\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 \rangle^{2a}} d\xi_1 < \infty, \end{aligned}$$

uma vez que $\beta(s) - 2b < 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$. A prova do teorema está agora completa. ▫

Vamos agora enunciar, sem demonstração, o principal resultado desse capítulo. Uma vez estabelecidos os resultados acima, a prova aqui é análoga ao caso periódico (teorema 2.14).

Teorema 3.9. *Seja $s > -\frac{1}{4}$. Então para toda $\phi \in H^s(\mathbb{R})$ e $\psi \in H^{s-1}(\mathbb{R})$, existe $T = T(\|\phi\|_{H^s}, \|\phi\|_{H^{s-1}})$ e uma única solução u de (3.1) com $f(u) = u^2$, $u_0 = \phi$, $u_1 = \psi_x$ tais que*

$$u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R})) \cap X_{s,b}^T.$$

Além disso, dado $T' \in (0,T)$ existe $R = R(T') > 0$ tal que a função

$$S : W \to C([0,T'] : H^s(\mathbb{R})) \cap X_{s,b}^T, \quad (\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \to u(t)$$

sendo

$$W \equiv \{(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^{s-1}(\mathbb{R}) \; ; \|\tilde{\phi} - \phi\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 + \|\tilde{\psi} - \psi\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}^2 < R\}$$

é Lipschitz. Em adição, se $(\phi, \psi) \in H^{s'}(\mathbb{R}) \times H^{s'-1}(\mathbb{R})$ com $s' > s$, os resultados acima *seguem com* s' *no mesmo intervalo* $[0,T]$ *sendo* $T = T(\|\phi\|_{H^s}, \|\phi\|_{H^{s-1}})$.

Referências Bibliográficas

[1] FARAH, L. G.. Local Solutions in Sobolev Spaces with Negative Indices for the Good Boussinesq Equation. Communications in Partial Differential Equations, v. 34, p. 52-73, 2009.

[2] FARAH, L. G. Local solutions in Sobolev spaces and unconditional well-posedness for the generalized Boussinesq equation. Communications on Pure and Applied Analysis, v. 8, p. 1521-1539, 2009.

[3] FARAH, L. G.; SCIALOM, M. On the periodic "GOOD"Boussinesq equation. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 138, p. 953-964, 2010.

[4] GINIBRE, J.; TSUTSUMI, Y.; VELO, G. On the Cauchy problem for the zakhrov system, J. Funct. Anal. 151(1997), no. 2, 384-436. MR1491547(2000c:35220).

[5] HÖRMANDER, L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1998. v. 256.

[6] HOUNIE, J. Teoria das Distribuições, IMPA, 1979.

[7] KENIG, C. E.; PONCE, G.; VEGA, L. Quadratic forms for the 1-D semilinear Schrödinger equation, Trans. Amer. Math. Soc. 348(1996),no 8, 3323-3353. MR1357398(96j:35223).

[8] KENIG, C. E.; PONCE, G.; VEGA, L. Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de-Vries equation via the contraction principle, Comm. Pure Appl. Math. 46 (1993), no. 4, 527-620. MR1211741(94h:35229).

[9] PETRONILHO, G. Periodic Gevrey ultradistributions in Rn. Notas de aula, UFSCar, 2006.