

Murilo Henrique de Oliveira

**Resposta óptica de sistemas atômicos no  
espaço livre ou aprisionados dentro de  
cavidades ópticas no regime de armadilhamento  
coerente de populações**

São Carlos

2018



Murilo Henrique de Oliveira

**Resposta óptica de sistemas atômicos no espaço livre ou  
aprisionados dentro de cavidades ópticas no regime de  
armadilhamento coerente de populações**

Dissertação de Mestrado apresentada à Co-  
ordenação de Pós-Graduação em Física do  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
(CCET) da Universidade Federal de São Car-  
los.

Universidade Federal de São Carlos – UFSCar  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia (CCET)  
Programa de Pós-Graduação em Física/CCET

Orientador: Celso Jorge Villas-Bôas

São Carlos

2018





**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

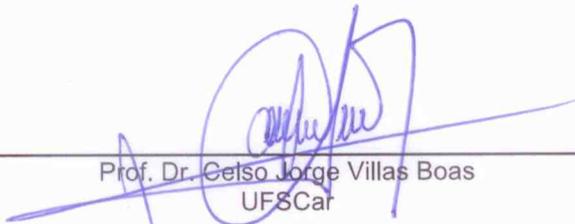
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Física

---

**Folha de Aprovação**

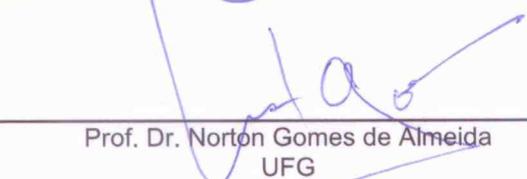
---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Murilo Henrique de Oliveira, realizada em 28/02/2018:



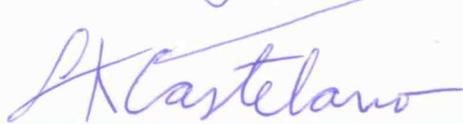
---

Prof. Dr. Celso Jorge Villas Boas  
UFSCar



---

Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida  
UFG



---

Prof. Dr. Leonardo Kleber Castelano  
UFSCar



*Aos meus pais.*



# Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas pelo acolhimento, orientação, incentivo e dedicação, se tornando uma fonte de inspiração e motivação diária durante esses dois anos de trabalho.

Aos meus pais, Daicy Márcia Bergui de Oliveira e Sergio Henrique de Oliveira, que sempre me incentivaram, deram todo apoio, carinho e amor que precisava e mesmo estando a maior parte do tempo longe, acompanharam todos os passos da minha caminhada até aqui. Sem eles nada disso seria possível.

À Maria Lorena Teodoro, minha namorada e grande amiga, pelo companheirismo e compreensão, estando ao meu lado, me acalmando nos momentos mais difíceis e proporcionando os momentos mais felizes.

À Halyne Silva Borges, que me ajudou muito desde o início do mestrado, se tornando uma grande amiga. Obrigado por estar sempre disposta a esclarecer minhas dúvidas e me auxiliar com qualquer tipo de dificuldade.

Ao James Alves de Souza, pelas excelentes conversas e discussões. Apesar do curto tempo que passou nos visitando, me ajudou muito, inclusive revisando essa dissertação.

Aos demais integrantes do grupo: Carlos, Daniel, Emanuel, Fernando e Taysa, obrigado pela amizade, por todo o apoio e excelentes conversas.

Aos meus demais amigos, aos que convivem diariamente comigo, quanto aos que a distância e a falta de tempo impossibilitam um maior contato, mas que mesmo assim continuam sendo muito especiais para mim. Muitos nomes deveriam aparecer aqui e mesmo se tentasse, com certeza não seria capaz de lembrar de todos que me ajudaram nessa jornada. No entanto, acho importante prestar os devidos agradecimentos à duas pessoas em especial: à Michelle, pela grande amizade, conversas diárias e excelente companhia e ao meu primo Eduardo, que considero como irmão, por esses mais de 20 anos de amizade e companheirismo.

Agradeço ao Departamento de Física da Universidade Federal de São Carlos e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro. Como esse trabalho foi feito em colaboração com outros pesquisadores, agradecemos também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processos nº 2013/04162-5 e nº 2014/12740-1, e ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Informação Quântica (INCT-IQ).



# Resumo

O presente trabalho de mestrado tem como objetivo estudar o fenômeno da transparência eletromagneticamente induzida (EIT) e do aprisionamento coerente de populações (CPT) em sistemas de três níveis, como átomos e moléculas de ponto quântico (QDM). Essa dissertação pode ser dividida basicamente em duas partes. A primeira se encarrega de comparar e explicar a origem das diferenças observadas na resposta óptica de sistemas compostos por átomos e sistemas compostos por QDM, bem como propor uma possível aplicação para o sistema de QDM no estreitamento da largura de linha de cavidades. Já a segunda parte consiste de um estudo da biestabilidade óptica controlável em sistemas de 3 de níveis no regime de CPT, trazendo novas perspectivas de estudo desses sistemas biestáveis e aplicações como sensores de pequenas flutuações de frequência ou de amplitudes de campos eletromagnéticos.

**Palavras-chave:** Interação radiação-matéria, Transparência eletromagneticamente induzida, aprisionamento coerente de populações, moléculas de pontos quânticos, cavidades ópticas, biestabilidade óptica.



# Abstract

The aim of this work is to study the electromagnetically induced transparency (EIT) and the coherent population trapping (CPT) phenomena in three-level systems, such as atoms and quantum dot molecules (QDM). The present work can be basically divided into two parts. The first one focus on comparing and explaining the differences between the optical reponses of systems composed by atoms and QDM and on proposing a possible application in cavity linewidth narrowing. In the second part, we turn our attention to the study of controlable optical bistability in three-level systems in the regime of CPT, bringing new perspectives to the study of these bistable systems and some practical applications as well.

**Keywords:** Radiation-matter interaction, Electromagnetically Induced Transparency, Coherent Population Trapping, quantum dot molecules, optical cavities, optical bistability.



# Lista de ilustrações

- Figura 1 – (a) Diagrama de níveis do átomo de dois níveis no interior de uma cavidade óptica. Os dois níveis atômicos são acoplados pelo modo do campo quantizado no interior da cavidade com frequência  $\omega$  e frequência de Rabi  $2g$ . (b) Representação pictórica do aparato experimental mostrando uma fonte luminosa (laser) incidindo sobre uma amostra atômica presa no interior de uma cavidade óptica linear e um detector devidamente posicionado, a fim de medir a transmissão da cavidade. . . . . 29
- Figura 2 – (a) Diagrama dos níveis de energia de um átomo de três níveis na configuração  $\Lambda$  no interior de uma cavidade, na presença de um campo de controle clássico com frequência  $\omega_c$  e frequência de Rabi  $2\Omega_c$ , que acopla uma das transições atômicas. A outra transição atômica é acoplada pelo modo do campo quantizado na cavidade com frequência  $\omega$  e frequência de Rabi  $2g$  e por fim, atuando sobre o modo do campo na cavidade, temos um bombeio de força  $\varepsilon$  e frequência  $\omega_P$ . (b) Representação pictórica do aparato experimental utilizado para a observação do fenômeno da EIT com um campo de prova ( $\omega_P$ ) e um campo de controle  $\omega_c$ , ambos incidindo sobre uma amostra atômica aprisionada no interior de uma cavidade óptica linear e um detector devidamente posicionado, a fim de medirmos a transmissão da cavidade. . . . . 31
- Figura 3 – **Diagramas de níveis de energia.** (a) Níveis de energia de um átomo de três níveis na configuração  $\Lambda$  no espaço livre e na presença de campos clássicos.(b) Efeito do campo de controle no átomo, onde o mesmo separa o estado  $|3\rangle$  em dois estados simétricos  $|a_{\pm}\rangle$ , chamados de estados vestidos. Os parâmetros que aparecem nessas figuras estão definidos no texto. . . . . 34
- Figura 4 – **EIT no espaço livre com campos clássicos.** (a) Dispersão ( $\text{Re}\{\chi_e\}$ ) do meio em função da dessintonia  $\Delta/\Gamma_{31}$ . (b) Espectro de absorção ( $\text{Im}\{\chi_e\}$ ) em função da dessintonia  $\Delta/\Gamma_{31}$ . A curva tracejada representa o sistema de dois níveis e a curva sólida representa o sistema de três níveis com o campo de controle ligado. Parâmetros ajustados em função da taxa de decaimento  $\Gamma_{31}$ :  $\Gamma_{32} = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ ,  $\Omega_p = \Gamma_{31}/50$  e  $\Omega_c = \Gamma_{31}/5$ . 35

Figura 5 – **EIT em cavidades.** Curvas representando a transmissão normalizada ( $\langle a^\dagger a \rangle / |\varepsilon/\kappa|^2$ ) como função da dessintonia normalizada  $\Delta_P/\kappa$  em três situações diferentes: a curva contínua representa o espectro de transmissão da CEIT para o átomo de três níveis, enquanto a curva preta tracejada representa o espectro para um átomo de dois níveis com  $\Gamma_{32} = \Omega_c = 0$  e a curva laranja pontilhada representa o espectro de cavidade vazia, sem átomos no interior da cavidade. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $g = 5\kappa$ ,  $\varepsilon = \sqrt{0,01}\kappa$  e  $\Omega_c = 2\kappa$ . . . . . 36

Figura 6 – (a) Diagrama dos níveis de energia de um átomo de três níveis na configuração  $\Lambda$ , interagindo com dois campos clássicos. (b) Diagrama de níveis de uma molécula de ponto quântico formada por dois poços quânticos acoplados por um processo de tunelamento e interagindo com um campo de prova clássico. Os parâmetros que aparecem nessas figuras estão definidos no texto. . . . . 40

Figura 7 – Representação pictórica dos estados da molécula de ponto quântico, sendo o estado fundamental  $|1\rangle$  caracterizado pela QDM sem nenhuma excitação, o estado excitado  $|3\rangle$  por conter um elétron na camada de condução e um buraco na camada de valência, e por fim, o estado fundamental  $|2\rangle$  que é o estado do sistema em que o elétron encontra-se no poço quântico à direita, isto é, um éxciton indireto. . . . . 40

Figura 8 – **Resposta óptica do sistema atômico e de QDM em dois regimes diferentes de parâmetros, EIT e CPT.** Em todos os gráficos, consideramos um decaimento total  $\Gamma$  do nível excitado  $|3\rangle$ . Fixamos  $\Omega_P = 0,1\Gamma$  e  $\Theta = 0,5\Gamma$  para o regime de EIT, painéis (a) e (b), e  $\Omega_P = 0,1\Gamma$  e  $\Theta = 0,1\Gamma$  para o regime de CPT, painéis (c) e (d). Em (a) e (c) representamos a absorção ( $Im\langle\sigma_{13}\rangle$ ) e a dispersão ( $Re\langle\sigma_{13}\rangle$ ) dos sistemas e em (b) e (d) as populações dos estados fundamentais  $|1\rangle$  ( $P_1$ ) e  $|2\rangle$  ( $P_2$ ). Em todos os gráficos, a curva preta e a azul tracejada referem-se ao caso  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\Gamma$  (sistema atômico) enquanto as curvas pontilhadas verde e vermelha se referem ao caso onde  $\Gamma_{31} = \Gamma$  e  $\Gamma_{32} = 0$  (sistema de QDM). **Inset:** populações do sistema de QDM obtidas a partir da equação mestra efetiva, isto é, levando em conta o decaimento efetivo do nível  $|1\rangle$  para o  $|2\rangle$ . . . . . 43

- Figura 9 – **Susceptibilidades ópticas lineares e não lineares.** Nos painéis de (a) a (f) [e de (g) a (l)] são mostradas a parte imaginária [real] de  $\chi^{(n)}$  ( $n = 1, 3, 5$ ) para os sistemas de átomos e QDM em dois regimes diferentes de parâmetros, isto é, EIT (painéis da esquerda) e CPT (painéis da direita), considerando o mesmo conjunto de parâmetros da figura 8. . . . . 46
- Figura 10 – (a) Diagrama dos níveis de energia de um átomo de três níveis na configuração  $\Lambda$ , interagindo com um modo quantizado do campo na cavidade, um campo de prova atuando nesse modo da cavidade e um campo de controle clássico sobre o átomo. (b) Diagrama de níveis de uma molécula de ponto quântico formada por dois poços quânticos acoplados por um processo de tunelamento e interagindo com um modo quantizado do campo na cavidade e um campo de prova atuando nesse modo da cavidade. Os parâmetros que aparecem nessas figuras estão definidos no texto. . . . . 47
- Figura 11 – **Espectro de transmissão e populações.** Os painéis (a) e (c) (topo) mostram a transmissão normalizada da cavidade e os painéis (b) e (d) (base) mostram as populações atômicas e da QDM, ambas em função da dessintonia  $\Delta_P/\kappa$ . Os parâmetros utilizados foram  $\kappa = \Gamma$ ,  $g = 5\kappa$ ,  $\varepsilon = \sqrt{0,01}\kappa$ , e  $\Theta = 1,0\kappa$  para a EIT (painéis (a) e (b), à esquerda) e  $\Theta = 0,1\kappa$  para o CPT (painéis (c) e (d), à direita), e  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\Gamma$  para o sistema atômico e  $\Gamma_{31} = \Gamma$  e  $\Gamma_{32} = 0$  para o de QDM. Para pequenos valores de frequência de Rabi do campo de controle ou da taxa de tunelamento ( $\Theta \rightarrow 0$ ),  $\Gamma_{32} \neq 0$  leva a população do sistema para o estado fundamental  $|2\rangle$ , o qual não é acoplado ao modo da cavidade, aumentando então a transmissão (situação de cavidade vazia). Isso é equivalente a um decaimento efetivo do nível  $|1\rangle$  para o  $|2\rangle$  – veja o *inset* do painel (c), onde incluímos o decaimento efetivo na dinâmica do sistema QDM-cavidade. . . . . 50
- Figura 12 – **Largura máxima a meia altura (*FWHM*) da ressonância do *dark state*.** *FWHM* para o sistema atômico (curva sólida preta) e para o sistema de QDM (curva vermelha tracejada) como função de  $\Theta = \Omega_C/\kappa$  ou  $T_e/\kappa$ . Aqui assumimos  $\Gamma_2 = \Gamma_{21} = 10^{-3}\Gamma$  e os demais parâmetros são os mesmos da figura 11, exceto para  $\varepsilon$ , o que implica em diferentes números médios de fótons dentro da cavidade ( $\langle n \rangle_{\max} = |\varepsilon/\kappa|^2$ ): (a)  $\varepsilon = \sqrt{0,01}\kappa$ , (b)  $\varepsilon = \sqrt{0,1}\kappa$ , (c)  $\varepsilon = \sqrt{0,3}\kappa$ , e (d)  $\varepsilon = \sqrt{1,0}\kappa$ . Em alguns casos, a mínima *FWHM* para QDM se torna 10% mais estreita que a *FWHM* para o sistema atômico. . . . . 51

Figura 13 – (a) Diagrama de níveis do átomo de dois níveis no interior de uma cavidade óptica na presença de um bombeio coerente de frequência $\omega_P$ e frequência de Rabi $2\Omega_P$ . (b) Representação pictórica do aparato experimental. Os parâmetros que aparecem nessas figuras estão definidos no texto. . . . .	54
Figura 14 – Número médio de fótons $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$ versus intensidade normalizada do campo de bombeio ( $\varepsilon^2/\kappa^2$ ) para diferentes valores de cooperatividade (C) em um sistema composto por N átomos de 2 níveis presos dentro de uma cavidade óptica e na presença de um campo de bombeio de força $\varepsilon$ . Parâmetros ajustados: $\kappa = 1$ , $N = 1000$ e $\Delta_P = \Delta_2 = 0$ . . . . .	55
Figura 15 – <b>Validade da aproximação semiclássica.</b> Comparação entre os espectros de transmissão normalizada $\langle a^\dagger a \rangle /  \varepsilon/\kappa ^2$ versus $\Delta_P/\kappa$ , obtidos pela formulação quântica e da aproximação semiclássica. Como podemos ver para esses parâmetros, para $N = 3$ a aproximação semiclássica já reproduz bem o resultado obtido pelo método totalmente quântico. Parâmetros ajustados: $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ , $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ , $g = 5\kappa$ , $\varepsilon = \sqrt{0,01}\kappa$ e $\Omega_c = 3\kappa$ . . . . .	57
Figura 16 – <b>Validade da aproximação semiclássica.</b> Comparação entre os espectros de transmissão normalizada $\langle a^\dagger a \rangle /  \varepsilon/\kappa ^2$ versus $\Delta_P/\kappa$ , obtidos pela formulação quântica e da aproximação semiclássica onde verificamos que as duas soluções se aproximam cada vez mais conforme diminuimos o valor de $g$ . Parâmetros ajustados: $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ , $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ , $N = 1$ , $\varepsilon = \sqrt{0,01}\kappa$ e $\Omega_c = 3\kappa$ . . . . .	58
Figura 17 – Número médio de fótons dentro da cavidade $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$ como função de $\varepsilon^2/\kappa^2$ para um sistema composto de N átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova e para diferentes valores de cooperatividade. Parâmetros ajustados: $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ , $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ , $\Delta_P = 0,1\kappa$ , $\Omega_c = 0,3\kappa$ e $N = 1000$ . . . . .	59
Figura 18 – Número médio de fótons dentro da cavidade $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$ como função de $\varepsilon^2/\kappa^2$ para um sistema composto de N átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova e para diferentes valores de dessintonia do campo de prova. Parâmetros ajustados: $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ , $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ , $C = 5$ , $\Omega_c = 0,3\kappa$ e $N = 1000$ . . . . .	60

Figura 19 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  como função de  $\varepsilon^2/\kappa^2$  para um sistema composto de  $N$  átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova e para diferentes valores da frequência de Rabi do campo de controle. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $C = 8$ ,  $\Delta_P = 0,1\kappa$  e  $N = 1000$ . . . . . 60

Figura 20 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  como função de  $\varepsilon^2/\kappa^2$  obtido para os mesmos parâmetros através de dois métodos distintos. Os pontos em azul representam a solução do sistema de equações algébricas obtidas do sistema de equações (3.11)-(3.17) fazendo  $\langle \dot{O} \rangle = 0$ , enquanto a curva em preto representa a solução do sistema de equações diferenciais (3.11)-(3.17) evoluindo o sistema por um tempo suficientemente longo de modo a garantir que o mesmo tenha atingido o estado estacionário. As setas em verde representam a primeira metade do experimento quando aumentamos a intensidade do campo de prova até a saturação do sistema, enquanto as em vermelho representam a segunda metade, onde diminuimos a intensidade. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $C = 5$ ,  $\Delta_P = 0,1\kappa$ ,  $\Omega_c = 0,3\kappa$ ,  $N = 1000$  e  $t = 10^4\kappa$  o tempo total de evolução do sistema para cada valor de  $\varepsilon$ . . . . . 61

Figura 21 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus frequência de Rabi do campo de controle normalizada ( $\Omega_c/\kappa$ ) para diferentes valores de cooperatividade ( $C$ ), considerando um sistema composto de  $N$  átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $\varepsilon = 5\kappa$ ,  $\Delta_P = 0,1\kappa$  e  $N = 1000$ . . . . . 63

Figura 22 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus frequência de Rabi do campo de controle normalizada ( $\Omega_c/\kappa$ ) para diferentes valores de força do campo de prova ( $\varepsilon$ ), considerando um sistema composto de  $N$  átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $C = 8$ ,  $\Delta_P = 0,1\kappa$  e  $N = 1000$ . . . . . 63

Figura 23 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus frequência de Rabi do campo de controle normalizada ( $\Omega_c/\kappa$ ) para diferentes valores de dessintonia entre a frequência do campo de prova e o modo da cavidade ( $\Delta_P$ ), considerando um sistema composto de N átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $C = 8$ ,  $\varepsilon = 5\kappa$  e  $N = 1000$ . . . . . 64

Figura 24 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus dessintonia entre a frequência do campo de prova e a do modo da cavidade normalizada ( $\Delta_P/\kappa$ ) para diferentes valores de cooperatividade ( $C$ ), considerando um sistema composto de N átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $\Omega_c = 0,2\kappa$ ,  $\varepsilon = 1\kappa$  e  $N = 1000$ . . . . . 65

Figura 25 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus dessintonia entre a frequência do campo de prova e a do modo da cavidade normalizada ( $\Delta_P/\kappa$ ) para diferentes valores de força do campo de prova ( $\varepsilon$ ), considerando um sistema composto de N átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $C = 45$ ,  $\Omega_c = 0,2\kappa$  e  $N = 1000$ . . . . . 65

Figura 26 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus dessintonia entre a frequência do campo de prova e a do modo da cavidade normalizada ( $\Delta_P/\kappa$ ) para diferentes valores de frequência de Rabi do campo de controle ( $\Omega_c$ ), considerando um sistema composto de N átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $C = 45$ ,  $\varepsilon = 1\kappa$  e  $N = 1000$ . . . . . 66

Figura 27 – Esquema ilustrativo do funcionamento do dispositivo de detecção de pequenas flutuações proposto. Em todos os painéis graficamos a transmissão normalizada  $\langle a^\dagger a \rangle / |\varepsilon/\kappa|^2$  como função da dessintonia entre as frequências do campo de prova e do modo da cavidade ( $\Delta_P/\kappa$ ). Em (a) temos um sistema preparado em um estado específico, apresentando uma transmissão de 90% e uma largura de histerese  $\delta H$ . Em (b) está representado o deslocamento de  $\delta\nu_P$  na dessintonia do campo de prova  $\Delta_P$ , resultado de uma flutuação desse parâmetro. Já em (c) é mostrado o estado para o qual o sistema vai durante o intervalo de tempo da flutuação, o qual apresenta transmissão nula e em (d) vemos que mesmo depois da flutuação, mesmo com o sistema voltando para o seu valor inicial de  $\Delta_P$ , ele não retorna para o seu estado inicial, continuando com transmissão nula. . . . . 67

Figura 28 – Representação do funcionamento do dispositivo capaz de detectar pequenas flutuações na intensidade do campo de controle  $\Omega_c$ . No primeiro quadro, em que plotamos o número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus a frequência de Rabi do campo de controle normalizada ( $\Omega_c/\kappa$ ), mostramos a histerese associada a esse sistema, preparada e ajustada para que apresente uma largura da ordem de  $10^{-4}\Omega_c/\kappa$ . Logo abaixo temos como a frequência de Rabi do campo de controle varia como função do tempo, onde o intervalo em cinza destaca o intervalo total do pulso (flutuação), cuja amplitude da flutuação é da ordem da largura da histerese. Por último temos como  $\langle n_f \rangle$  se comporta no tempo sob os efeitos da flutuação. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $\varepsilon = \sqrt{0,1}\kappa$ ,  $C = 5$ ,  $\Delta_P = 0,5\kappa$  e  $N = 1000$ . . . 68

Figura 29 – Representação do funcionamento do dispositivo capaz de detectar pequenas flutuações na dessintonia do campo de prova  $\Delta_P$ . No primeiro gráfico, em que plotamos o número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus a dessintonia normalizada ( $\Delta_P/\kappa$ ), mostramos a histerese associada a esse sistema, preparada e ajustada de modo que a mesma apresente uma largura da ordem de  $10^{-4}\Omega_c/\kappa$ . Logo abaixo temos como a dessintonia do campo de prova varia como função do tempo, sendo que o intervalo em cinza destaca o intervalo total do pulso (flutuação), que é da ordem da largura da histerese. Por último temos como  $\langle n_f \rangle$  se comporta no tempo sob os efeitos da flutuação. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $\varepsilon = \kappa$ ,  $C = 45$ ,  $\Omega_c = 0,2\kappa$  e  $N = 1000$ . . . . . 70



# Lista de abreviaturas e siglas

EIT	Transparência eletromagneticamente induzida
CPT	Aprisionamento coerente de populações
CEIT	Transparência eletromagneticamente induzida em cavidades
CCPT	Aprisionamento coerente de populações em cavidades
QDM	Molécula de ponto quântico
JCM	Modelo de Jaynes-Cummings
RWA	Aproximação de onda girante



# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>1</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E OBJETIVOS</b> . . . . .	<b>27</b>
1.1	Quantização do campo no interior de uma cavidade perfeitamente condutora . . . . .	27
1.2	Modelo de Jaynes-Cummings . . . . .	28
1.3	Átomos de três níveis no interior de uma cavidade óptica . . . . .	31
1.4	Dinâmica do sistema . . . . .	32
1.5	EIT e CPT . . . . .	33
1.6	CEIT e CCPT . . . . .	36
<b>2</b>	<b>ÁTOMO X PONTO QUÂNTICO</b> . . . . .	<b>39</b>
2.1	EIT e TIT no espaço livre . . . . .	39
2.2	EIT e TIT em cavidades . . . . .	47
<b>3</b>	<b>BIESTABILIDADE ÓPTICA</b> . . . . .	<b>53</b>
3.1	Biestabilidade óptica em átomos de 2 níveis . . . . .	53
3.2	Biestabilidade óptica em átomos de 3 níveis . . . . .	55
3.2.1	Biestabilidade óptica em função de $\Omega_c$ . . . . .	62
3.2.2	Biestabilidade óptica em função de $\Delta_P$ . . . . .	64
3.3	Dispositivos detectores de pequenas flutuações . . . . .	66
3.3.1	Detector de pequenas flutuações de $\Omega_c$ . . . . .	67
3.3.2	Detector de pequenas flutuações de $\Delta_P$ . . . . .	69
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>71</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>73</b>
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>77</b>
	<b>APÊNDICE A – ALGORITMO PARA OBTENÇÃO DO ESTADO ESTACIONÁRIO: BIESTABILIDADE EM ÁTOMOS DE 3 NÍVEIS</b> . . . . .	<b>79</b>
A.1	Algoritmo para Matlab . . . . .	80
A.1.1	Script principal: hysteresis.m . . . . .	80
A.1.2	Função externa: equations.m . . . . .	85

A.1.3	Função externa: check.m . . . . .	86
A.2	<b>Algoritmo para Mathematica</b> . . . . .	<b>88</b>

# Introdução

A transparência eletromagneticamente induzida (EIT, do inglês *electromagnetically induced transparency*) [1] se trata de um fenômeno de interferência quântica capaz de alterar propriedades ópticas de um meio, sendo possível por exemplo controlar a transmissão de um campo que se propaga por uma amostra atômica por meio da incidência de um segundo campo, de forma a tornar o meio inicialmente opaco em transparente. Intimamente relacionado com a EIT, o armadilhamento coerente de população (CPT, do inglês *coherent population trapping*) é um fenômeno bastante geral em física atômica, sendo que a EIT pode ser considerada como um caso particular do CPT para certos regimes de parâmetros. Os estudos de EIT e CPT são realizados considerando-se átomos de três níveis, geralmente em uma configuração comumente denominada  $\Lambda$ , na presença de dois campos coerentes chamados de campo de prova e campo de controle, de maneira que os regimes de EIT e CPT são determinados pela relação entre esses dois campos. Na literatura é comum encontrarmos uma definição de CPT que considera o campo de prova mais intenso ou da ordem do campo de controle, enquanto a EIT exige que o campo de controle seja muito mais intenso que o campo de prova. Apesar de tudo, por mais que os dois fenômenos estejam relacionados e possuam mecanismos semelhantes, eles possuem diferenças fenomenológicas bastante distintas.

O tratamento teórico da EIT leva em conta apenas um átomo já que a interação de dipolo entre os átomos da amostra é desprezível (isso acontece pois os experimentos são realizados com vapores atômicos suficientemente rarefeitos) e os campos são tratados classicamente. No entanto, a verificação de tais fenômenos no espaço livre com apenas um ou poucos átomos é muito difícil, uma vez que o acoplamento átomo-campo no espaço livre é muito pequeno. Uma solução para esse problema é aprisionar esses átomos no interior de uma cavidade óptica, onde o forte acoplamento entre o átomo e o modo do campo da cavidade nos permite observar características da EIT mesmo para poucos átomos em seu interior [2, 3, 4, 5]. Os fenômenos da EIT e CPT em cavidades recebem os nomes CEIT e CCPT, respectivamente.

O fenômeno da EIT tem sido amplamente estudado durante as últimas décadas, sempre obtendo destaque devido às suas diversas aplicações [6], entre as quais vale ressaltar a redução para poucos metros por segundo da velocidade de grupo de um pulso de luz que se propaga pelo vapor atômico [7], o estreitamento da janela de transmissão em cavidades [5, 8] e sua potencial aplicação na área de informação quântica com a implementação de memórias quânticas, onde os estados fotônicos podem ser armazenados e mapeados nos estados atômicos do meio [9, 10].

Recentemente, um fenômeno muito similar à EIT foi observado em sistemas de três níveis utilizando uma molécula de ponto quântico (QDM, do inglês *quantum dot molecule*) [11], onde no lugar de um campo de controle acoplando uma das duas transições, existe um processo de tunelamento quântico de um elétron entre os poços quânticos que compõem a QDM, por isso foi dado ao fenômeno o nome de Transparência Induzida por Tunelamento (TIT, do inglês *tunnelling induced transparency*). Comparando as respostas ópticas de um sistema composto por um átomo com aquelas de um composto por uma QDM, notamos que suas propriedades ópticas são praticamente idênticas no regime de EIT, mas no entanto há uma grande discrepância quando analisamos os sistemas no regime de CPT. A comparação entre as respostas ópticas nesses dois sistemas distintos é um dos objetivos do presente trabalho de mestrado.

Outro fenômeno muito interessante observado também no regime de CPT é o da biestabilidade óptica, onde uma certa propriedade óptica do meio apresenta dois valores de saída para um único valor de entrada. A biestabilidade óptica vem sendo estudada em sistemas atômicos de dois níveis a mais de quatro décadas [12], no entanto somente no início da década passada tal fenômeno passou a ser mais intensamente estudado em sistemas de três níveis no regime de CPT, os quais apresentam uma enorme vantagem devido à introdução de um campo externo, que nos permite controlar facilmente o regime de biestabilidade e a histerese associada a ela [13]. Ao longo desse trabalho de mestrado, iremos analisar esses sistemas biestáveis no regime de CPT, propondo novas perspectivas de estudo e aplicações para esses sistemas biestáveis.

# 1 Fundamentação Teórica e Objetivos

Durante esse trabalho iremos estudar basicamente dois sistemas diferentes de três níveis, átomos e moléculas de ponto quântico (QDM), nos regimes de transparência eletromagneticamente induzida (EIT) e de armadilhamento coerente de populações (CPT), tanto no espaço livre quanto no interior de cavidades ópticas. Tal estudo exige que saibamos como modelar cada sistema e para isso passaremos rapidamente por conceitos como a quantização do campo dentro de uma cavidade e a interação entre átomo/QDM e esse campo considerando as devidas aproximações como a aproximação de dipolo e de ondas girantes, chegando enfim a um hamiltoniano que descreve o sistema estudado. Além disso, precisamos introduzir a equação mestra que irá nos fornecer a dinâmica dos sistemas estudados, levando em conta seus decaimentos e termos de relaxação, para que possamos estudar os fenômenos da EIT e CPT.

## 1.1 Quantização do campo no interior de uma cavidade perfeitamente condutora

Ao longo desse trabalho, iremos trabalhar repetidas vezes com *ensembles* atômicos aprisionados no interior de uma cavidade óptica, aparato que nos permite isolar modos do campo quantizado ressonantes com a transição atômica. Para quantizarmos o campo eletromagnético dentro dessas cavidades, consideramos que suas paredes são perfeitamente condutoras, de forma que tanto o campo elétrico ( $\mathbf{E}$ ) paralelo quanto o campo magnético ( $\mathbf{B}$ ) normal às superfícies das paredes são nulos, impossibilitando a presença de correntes superficiais. Essas condições de contorno para o campo na cavidade óptica podem ser escritas como

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{B}_{\perp} = 0. \quad (1.1)$$

A energia do campo dentro da cavidade pode ser calculada a partir de [14]

$$H_{campo} = \frac{1}{2} \int_V \left( \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right) dV, \quad (1.2)$$

onde  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  são respectivamente as constantes de permissividade e permeabilidade do vácuo.

Utilizando as equações de Maxwell na ausência de cargas e o calibre de Coulomb, podemos escrever o campo elétrico e o campo magnético como função do potencial vetor  $\mathbf{A}$ , que por sua vez, por meio do método da separação de variáveis pode ser expandido como uma soma nos modos normais do campo ( $l$ ) [14]. Tudo isso nos permite reescrever a

equação (1.2), para uma dada polarização, como uma somatória nos modos do campo na cavidade

$$H_{\text{campo}} = \frac{1}{2} \sum_l p_l^2 + \omega_l^2 q_l^2 = \sum_l H_l. \quad (1.3)$$

Para o  $l$ -ésimo modo normal, o hamiltoniano é formalmente idêntico ao de um oscilador harmônico de massa unitária, com variáveis canonicamente conjugadas  $q$  e  $p$ . Desse modo,

$$q_l, p_l \longrightarrow Q_l, P_l \quad (1.4)$$

de tal maneira a respeitar a relação de comutação  $[Q_l, P_l] = i\hbar$ , podemos definir dois novos operadores

$$a_l = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_l}} (\omega_l Q_l + iP_l) \quad \text{e} \quad a_l^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_l}} (\omega_l Q_l - iP_l) \quad (1.5)$$

chamados de operadores de aniquilação e criação, respectivamente. Invertendo esses operadores, podemos reescrever os operadores  $Q$  e  $P$  como

$$Q_l = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l}} (a_l^\dagger + a_l) \quad \text{e} \quad P_l = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2}} (a_l^\dagger - a_l). \quad (1.6)$$

Portanto, o hamiltoniano para o  $l$ -ésimo modo do campo, em termos dos operadores  $a$  e  $a^\dagger$  é dado por

$$H_l = \hbar\omega_l \left( a_l^\dagger a_l + \frac{1}{2} \right), \quad (1.7)$$

onde o termo constante de energia  $\hbar\omega_l/2$  é usualmente omitido, uma vez que não altera as equações de movimento e  $a_l^\dagger a_l$  é o operador número, sendo  $a_l$  ( $a_l^\dagger$ ) o operador de aniquilação (criação) de fótons do  $l$ -ésimo modo do campo.

Para um único modo do campo, resolvendo a equação de autovalor

$$H |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle, \quad (1.8)$$

encontramos as autoenergias  $E_n$  e autoestados  $|\Psi\rangle$  (chamados de estados de Fock) do sistema, sendo

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad ; \quad |\Psi_n\rangle = |n\rangle, \quad (1.9)$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$  é o número de excitações do estado.

## 1.2 Modelo de Jaynes-Cummings

Com o campo quantizado, resta ainda sabermos como descrever a interação desse campo com os átomos no interior da cavidade. Nessa seção iremos estudar como se dá essa interação considerando um único átomo de dois níveis (figura 1), com estado excitado  $|2\rangle$  e estado fundamental  $|1\rangle$ , no interior de uma cavidade óptica com paredes perfeitamente condutoras, como descrita na seção 1.1.

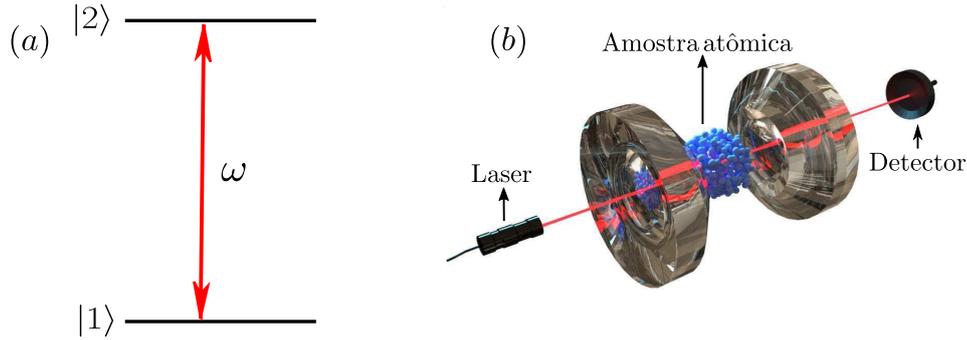


Figura 1 – (a) Diagrama de níveis do átomo de dois níveis no interior de uma cavidade óptica. Os dois níveis atômicos são acoplados pelo modo do campo quantizado no interior da cavidade com frequência  $\omega$  e frequência de Rabi  $2g$ . (b) Representação pictórica do aparato experimental mostrando uma fonte luminosa (laser) incidindo sobre uma amostra atômica presa no interior de uma cavidade óptica linear e um detector devidamente posicionado, a fim de medir a transmissão da cavidade.

O hamiltoniano total do sistema pode ser escrito como a soma de três hamiltonianos independentes, com cada termo representando os níveis energéticos do átomo ( $H_a$ ), o campo da cavidade ( $H_c$ ) e a interação átomo-campo ( $H_{int}$ ):

$$H = H_c + H_a + H_{int}, \quad (1.10)$$

sendo

$$H_a = E_1\sigma_{11} + E_2\sigma_{22} = \omega_1\sigma_{11} + \omega_2\sigma_{22}, \quad (1.11)$$

$$H_c = \sum_l \omega^{(l)} (n^{(l)} + 1/2), \quad (1.12)$$

onde fizemos  $\hbar = 1$  por simplicidade (assim como no restante do trabalho) e sendo  $E_i$  a autoenergia do estado atômico  $|i\rangle$ , os operadores  $\sigma_{ii} = |i\rangle\langle i|$ , os quais fornecem informação sobre a população do sistema,  $\omega^{(l)}$  e  $n^{(l)}$  são a frequência e o operador número do  $l$ -ésimo modo do campo quantizado na cavidade. A partir de ajustes na cavidade, é possível fazer com que a frequência de um dos modos seja ressonante com a transição atômica e, se nesse caso, os modos vizinhos estiverem suficientemente longe da ressonância, é possível fazer com que apenas o modo ressonante interaja efetivamente com o sistema atômico. Iremos então, a partir de agora, abandonar o índice  $l$ , considerando que há apenas um modo ressonante com a transição atômica.

Considerando que o comprimento de onda ( $\lambda$ ) da radiação incidente seja muito maior que as dimensões atômicas ( $\lambda \gg r_0$ , sendo  $r_0$  o raio atômico), podemos considerar o campo uniforme por toda extensão atômica e assim utilizar a aproximação de dipolo, de forma que a interação entre os átomos e os campos seja da forma

$$H_{int} = -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}, \quad (1.13)$$

sendo  $\mathbf{E}$  é o operador do campo elétrico e  $e$  e  $\mathbf{r}$  a carga e o vetor posição do elétron, respectivamente, de tal maneira que podemos escrever

$$e\mathbf{r} = \sum_{i,j} e|i\rangle\langle i|\mathbf{r}|j\rangle\langle j| = \sum_{i,j} \boldsymbol{\eta}_{ij}\sigma_{ij}, \quad (1.14)$$

sendo  $\boldsymbol{\eta}_{ij} = e\langle i|\mathbf{r}|j\rangle$  o elemento de matriz de transição de dipolo elétrico.

O hamiltoniano de interação pode ser escrito utilizando o operador do campo elétrico quantizado, que calculado na posição do átomo (posicionado na origem) e na aproximação de dipolo tem a forma [15]

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \left( ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t} \right), \quad (1.15)$$

com

$$\mathbf{E}_0 = \sqrt{\frac{\omega}{2\epsilon_0 V}} \hat{\mathbf{z}}, \quad (1.16)$$

sendo  $V$  o volume da cavidade,  $\epsilon_0$  a permissividade elétrica do vácuo e  $\omega$  e  $\hat{\mathbf{z}}$  a frequência e o vetor unitário na direção de propagação do campo, respectivamente.

A partir da equação (1.13), utilizando a aproximação de onda girante (RWA, de *rotating wave approximation*), válida quando as frequências de transição atômica e do modo da cavidade são muito maiores que o acoplamento átomo-campo, ou seja,  $\omega \gg g$  obtemos

$$H_{int}^{quan} = g(a\sigma_{21} + h.c.), \quad (1.17)$$

onde  $g$  é a constante de acoplamento átomo-campo, dada por

$$g = -\sqrt{\frac{\omega}{2\epsilon_0 V}} \hat{\mathbf{z}} \cdot \boldsymbol{\eta}_{12}, \quad (1.18)$$

$\sigma_{21}$  o operador atômico que leva o sistema do estado  $|1\rangle$  para o estado  $|2\rangle$  e  $h.c.$  o hermitiano conjugado.

Dessa maneira podemos reescrever o hamiltoniano da equação (1.10) substituindo nela as expressões (1.11), (1.12) e (1.17), o que nos leva a

$$H = \omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z + g(\sigma_{21}a + \sigma_{12}a^\dagger), \quad (1.19)$$

onde desprezamos o termo constante de  $H_c$ , e fizemos uma mudança no referencial de energia do átomo adotando  $\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$  e  $\sigma_z = \sigma_{22} - \sigma_{11}$ , desprezando novamente termos constantes de energia.

O hamiltoniano dado pela equação (1.19) é conhecido como hamiltoniano de Jaynes-Cummings [16, 17] e, a partir de generalizações desse modelo, seremos capazes de descrever sistemas mais complexos que iremos abordar em seguida.

### 1.3 Átomos de três níveis no interior de uma cavidade óptica

Vamos considerar agora um sistema composto por um *ensemble* de  $N$  átomos de três níveis presos dentro de uma cavidade óptica, o qual será usado diversas vezes durante esse trabalho. Os átomos têm uma configuração que chamamos de  $\Lambda$ , contando com dois estados fundamentais  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , e um estado excitado  $|3\rangle$ , como representado na figura 2. Os estados  $|1\rangle$  e  $|3\rangle$  são acoplados pelo modo quantizado de radiação da cavidade com frequência de Rabi  $2g$  e frequência  $\omega$ , enquanto os estados  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$  são acoplados por um campo de controle clássico com frequência de Rabi  $2\Omega_c$  e frequência  $\omega_c$ . Além disso temos um campo de prova de força  $\varepsilon$  e frequência  $\omega_p$  no modo da cavidade.

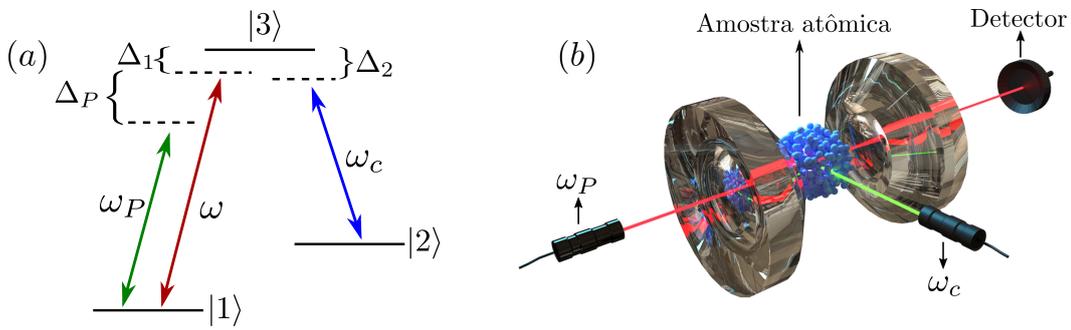


Figura 2 – (a) Diagrama dos níveis de energia de um átomo de três níveis na configuração  $\Lambda$  no interior de uma cavidade, na presença de um campo de controle clássico com frequência  $\omega_c$  e frequência de Rabi  $2\Omega_c$ , que acopla uma das transições atômicas. A outra transição atômica é acoplada pelo modo do campo quantizado na cavidade com frequência  $\omega$  e frequência de Rabi  $2g$  e por fim, atuando sobre o modo do campo na cavidade, temos um bombeio de força  $\varepsilon$  e frequência  $\omega_P$ . (b) Representação pictórica do aparato experimental utilizado para a observação do fenômeno da EIT com um campo de prova ( $\omega_P$ ) e um campo de controle  $\omega_c$ , ambos incidindo sobre uma amostra atômica aprisionada no interior de uma cavidade óptica linear e um detector devidamente posicionado, a fim de medirmos a transmissão da cavidade.

Agora o hamiltoniano total do sistema pode ser escrito como uma soma dada por

$$H = H_0^{at} + H_0^{cam} + H_{int} + H_p, \quad (1.20)$$

onde  $H_0^{at}$  é a energia livre dos estados atômicos

$$H_0^{at} = \omega_3 S_{33} + \omega_2 S_{22}, \quad (1.21)$$

sendo  $S_{ii} = \sum_{k=1}^N \sigma_{ii}^k$ , tal que  $\sigma_{ii} = |i\rangle\langle i|$  (com  $i = 1, 2, 3$ ) e considerando que o estado fundamental  $|1\rangle$  tem energia zero.

Como temos dois campos com propriedades distintas em nosso sistema, iremos escrever  $H_{int}$  como

$$H_{int} = H_{int}^{clas} + H_{int}^{quan}, \quad (1.22)$$

onde  $H_{int}^{clas}$  representa a parte do hamiltoniano de interação devido ao campo de controle clássico e  $H_{int}^{quan}$  a parte devido ao acoplamento pelo modo quantizado do campo na cavidade.

Para  $H_{int}^{clas}$ , consideramos que o campo de controle possa ser escrito como  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega_c t)$  e que ele acople somente os níveis  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$ , de modo que

$$H_{int}^{clas} = \Omega_c (S_{32} e^{-i\omega_c t} + h.c.), \quad (1.23)$$

onde  $h.c.$  representa o hermitiano conjugado e  $\Omega_c = \mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_0$  a frequência de Rabi da transição  $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  e  $\mathbf{d}_{ij} = e \langle i | \mathbf{r} | j \rangle$ . Vale ressaltar que aqui utilizamos a aproximação de onda girante (RWA), que é válida quando  $\omega_c \gg \Omega_c$ .

Já o hamiltoniano de interação  $H_{int}^{quan}$  é completamente análogo ao deduzido na seção 1.2, levando em conta que o modo do campo quantizado no interior da cavidade agora acopla a transição atômica  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ , isto é,

$$H_{int}^{quan} = g (a\sigma_{31} + h.c.). \quad (1.24)$$

Por fim, o hamiltoniano do campo de prova  $H_p$  presente na equação (1.20), já na aproximação de onda girante (válida para  $\omega_p \gg \varepsilon$ ), contribui para o hamiltoniano total como

$$H_p = \varepsilon (a e^{i\omega_p t} + h.c.). \quad (1.25)$$

Portanto, substituindo todos os termos da equação (1.20) e aplicando as transformações unitárias  $U_0 = e^{-iH_0 t}$ , onde  $H_0 = H_0^{at} + H_0^{cam}$  e  $U_1 = e^{i[\Delta_1 S_{33} + (\Delta_1 - \Delta_2) S_{22} + \Delta_P S_{11} - \Delta_P a^\dagger a] t}$ , obtemos o hamiltoniano independente do tempo

$$H = \Delta_1 S_{33} + (\Delta_1 - \Delta_2) S_{22} + \Delta_P S_{11} - \Delta_P a^\dagger a + (g a S_{31} + \Omega_c S_{32} + \varepsilon a + h.c.), \quad (1.26)$$

onde  $\Delta_1 = \omega_3 - \omega$  e  $\Delta_2 = (\omega_3 - \omega_2) - \omega_c$  são as dessintonias entre as frequências de transição atômicas e os respectivos campos e  $\Delta_P = \omega - \omega_P$  a dessintonia entre as frequências do campo de prova e do modo da cavidade.

## 1.4 Dinâmica do sistema

Até o momento, nosso sistema não leva em conta nenhum tipo de interação com o meio ambiente e para descrevermos esse processo utilizamos uma equação mestra, que nos fornece a dinâmica do sistema por meio de uma equação diferencial de primeira ordem para a matriz densidade  $\rho = \sum_{\Psi} P_{\Psi} |\Psi\rangle \langle \Psi|$ . A obtenção dessa equação mestra é feita a partir de algumas aproximações:

- Aproximação de Born, onde assumimos que acoplamento sistema-reservatório seja fraco o suficiente para que possamos tratar o problema perturbativamente e também nos permita assumir que o estado do reservatório não seja alterado pelo sistema;

- Aproximação de Markov, onde consideramos que o estado do sistema independe de estados anteriores;
- Consideramos que o sistema está à  $T = 0K$ , o que é bem razoável pois o número médio de fótons térmicos do reservatório é desprezível mesmo à temperatura ambiente uma vez que estamos trabalhando no regime óptico.

Dentro dessas considerações, a equação mestra para esse sistema [18] pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & -i[H, \rho] + \kappa \left( 2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a \right) + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1,2} \Gamma_{3l} \left( 2\sigma_{l3}^{(k)} \rho \sigma_{3l}^{(k)} - \sigma_{33}^{(k)} \rho - \rho \sigma_{33}^{(k)} \right) \\ & + \sum_{k=1}^N \sum_{j=2,3} \gamma_j \left( 2\sigma_{jj}^{(k)} \rho \sigma_{jj}^{(k)} - \sigma_{jj}^{(k)} \rho - \rho \sigma_{jj}^{(k)} \right), \end{aligned} \quad (1.27)$$

sendo  $\Gamma_{3l}$  a taxa de decaimento atômico do estado excitado  $|3\rangle$  para o estado fundamental  $|l\rangle$  ( $l = 1, 2$ ),  $\gamma_j$  a taxa de defasagem do estado atômico  $|j\rangle$  ( $j = 2, 3$ ) e  $\kappa$  a taxa de decaimento da cavidade. O primeiro termo trata da evolução coerente do sistema, enquanto os demais descrevem os processos de relaxação tanto da cavidade óptica quanto dos átomos, levando em conta sua emissão espontânea e a defasagem dos níveis de energia.

Antes de prosseguirmos para os métodos de solução da equação (1.27), vale a pena detalharmos um pouco mais os fenômenos de EIT e CPT.

## 1.5 EIT e CPT

Para entender melhor o fenômeno da EIT e do CPT e os mecanismos por trás dos mesmos, vamos analisar um caso mais simples, como aquele de dois campos clássicos incidindo sobre uma amostra atômica composta por átomos de três níveis na configuração  $\Lambda$  como mostra a figura 3.

O hamiltoniano independente do tempo desse sistema em um referencial girante, adotando  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ , pode ser escrito na forma matricial, na base  $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ , como

$$H = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_p \\ 0 & 0 & \Omega_c \\ \Omega_p & \Omega_c & -\Delta \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

cujos autovalores são

$$\begin{aligned} E_0 &= 0, \\ E_{\pm} &= \frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \Omega_p^2 + \Omega_c^2}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

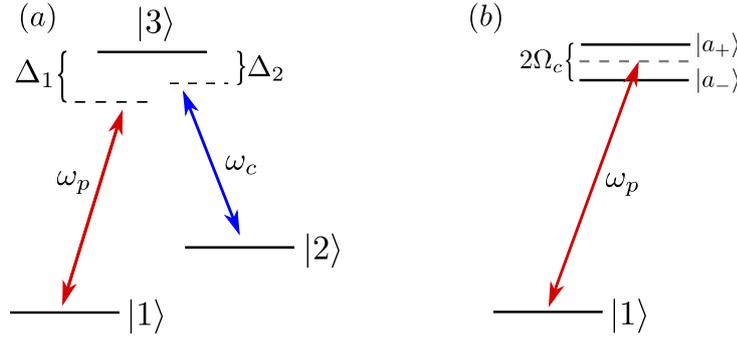


Figura 3 – **Diagramas de níveis de energia.** (a) Níveis de energia de um átomo de três níveis na configuração  $\Lambda$  no espaço livre e na presença de campos clássicos. (b) Efeito do campo de controle no átomo, onde o mesmo separa o estado  $|3\rangle$  em dois estados simétricos  $|a_{\pm}\rangle$ , chamados de estados vestidos. Os parâmetros que aparecem nessas figuras estão definidos no texto.

e seus autoestados são

$$\begin{aligned}
 E_+ \rightarrow |a_+\rangle &= \sin(\theta) \sin(\phi) |1\rangle + \cos(\theta) \sin(\phi) |2\rangle + \cos(\phi) |3\rangle, \\
 E_0 \rightarrow |a_0\rangle &= \cos(\theta) |1\rangle - \sin(\theta) |2\rangle, \\
 E_- \rightarrow |a_-\rangle &= \sin(\theta) \cos(\phi) |1\rangle + \cos(\theta) \cos(\phi) |2\rangle - \sin(\phi) |3\rangle,
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \tan(\theta) &= \frac{\Omega_p}{\Omega_c}, \\
 \tan(2\phi) &= \frac{\sqrt{\Omega_p^2 + \Omega_c^2}}{\Delta/2}.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

É importante notar que o autoestado  $|a_0\rangle$  da equação (1.30), que tem autoenergia  $E_0 = 0$ , para qualquer regime de  $\Omega_c$  e  $\Omega_p$ , é escrito somente em função dos estados fundamentais do sistema, não apresentando nenhum tipo de relação com o estado excitado  $|3\rangle$ . Isso quer dizer que se o sistema estiver no estado  $|a_0\rangle$  a probabilidade de emissão ou absorção de um fóton é nula, por isso a esse estado é dado o nome de estado escuro (ou *dark state* em inglês).

A partir disso, podemos proceder com uma análise onde consideramos dois diferentes regimes de parâmetros levando em conta a relação entre as intensidades dos campos clássicos  $\Omega_p$  e  $\Omega_c$ : quando  $|\Omega_p| \approx |\Omega_c|$  (CPT) e quando  $|\Omega_p| \ll |\Omega_c|$  (EIT).

No regime de CPT para o caso ressonante ( $\Delta \rightarrow 0$ ), com  $|\Omega_p| \approx |\Omega_c|$ , temos  $\tan \theta \approx 1$ , ou seja,  $\sin \theta \approx \cos \theta$ , sendo  $\theta \approx \pi/4$  e  $\tan(2\phi) \rightarrow \infty$ , de forma que  $\phi = \pi/4$ .

Assim, os autoestados passam a ser:

$$\begin{aligned} |a_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle), \\ |a_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \pm |3\rangle \right]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Analisando agora para o regime de EIT, onde  $\Omega_c \gg \Omega_p$  (EIT) e para  $\Delta \rightarrow 0$ , temos  $\tan(\theta) \approx 0$  e  $\tan(2\phi) \rightarrow \infty$  de forma que

$$\begin{aligned} |a_0\rangle &= |1\rangle, \\ |a_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle \pm |3\rangle). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Note que quando o campo de controle é muito forte, o sistema tende a ir para o estado fundamental  $|1\rangle$ , que nada mais é do que o estado escuro quando próximo da ressonância. Como esse estado não absorve ou emite fótons, o sistema apresenta uma janela de transparência. A partir da análise acima fica claro que a EIT é um caso particular da CPT. No entanto, é comum encontrarmos na literatura a definição de EIT a partir da condição  $\Omega_c \gg \Omega_p$ , e a definição de CPT nos demais regimes de parâmetros. Vale notar também que no regime de EIT próximo da ressonância, as autoenergias de  $|a_{\pm}\rangle$  (estados vestidos), são iguais à  $E_{\pm} = \pm\Omega_c$ , exatamente onde se encontram os máximos de absorção na figura 4(b).

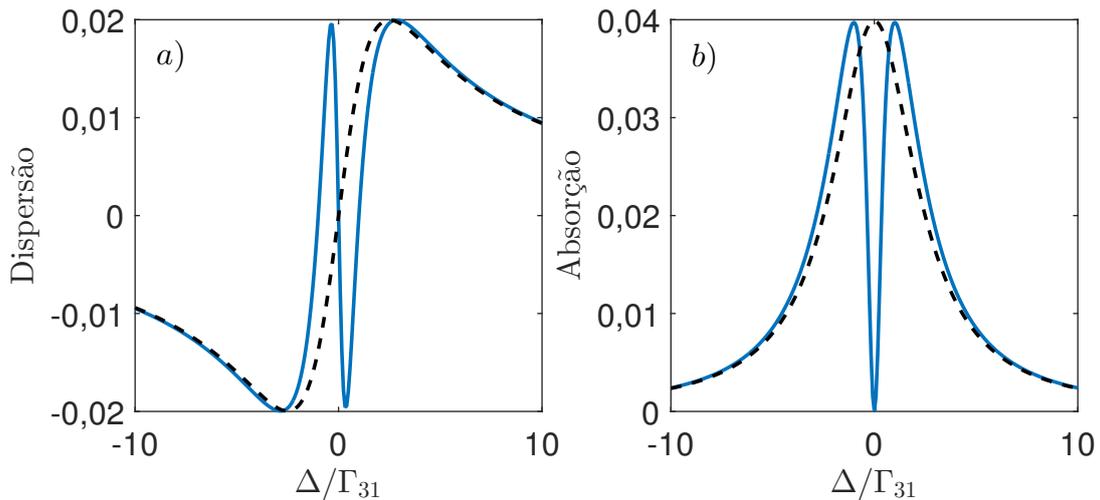


Figura 4 – **EIT no espaço livre com campos clássicos.** (a) Dispersão ( $\text{Re}\{\chi_e\}$ ) do meio em função da dessintonia  $\Delta/\Gamma_{31}$ . (b) Espectro de absorção ( $\text{Im}\{\chi_e\}$ ) em função da dessintonia  $\Delta/\Gamma_{31}$ . A curva tracejada representa o sistema de dois níveis e a curva sólida representa o sistema de três níveis com o campo de controle ligado. Parâmetros ajustados em função da taxa de decaimento  $\Gamma_{31}$ :  $\Gamma_{32} = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ ,  $\Omega_p = \Gamma_{31}/50$  e  $\Omega_c = \Gamma_{31}/5$ .

O efeito do campo de controle pode ser observado na figura 4, onde analisamos a dispersão e a absorção obtidas respectivamente a partir das partes real e imaginária da susceptibilidade elétrica linear do meio, definida a menos de um fator como  $\chi_e \equiv \langle \sigma_{13} \rangle$ , em função da dessintonia normalizada em relação à taxa de decaimento  $\Gamma_{31}$ , ou seja,  $\Delta/\Gamma_{31}$ .

## 1.6 CEIT e CCPT

No caso da EIT em cavidades (CEIT) e do CPT em cavidades (CCPT), cujo sistema está representado na figura 2, o hamiltoniano independente do tempo em um referencial girante é dado pela equação (1.26). A transmissão normalizada, definida como  $\langle a^\dagger a \rangle / |\varepsilon/\kappa|^2$ , é obtida através da equação (1.27) para o estado estacionário ( $d\rho/dt = 0$ ) e está representada na figura 5.

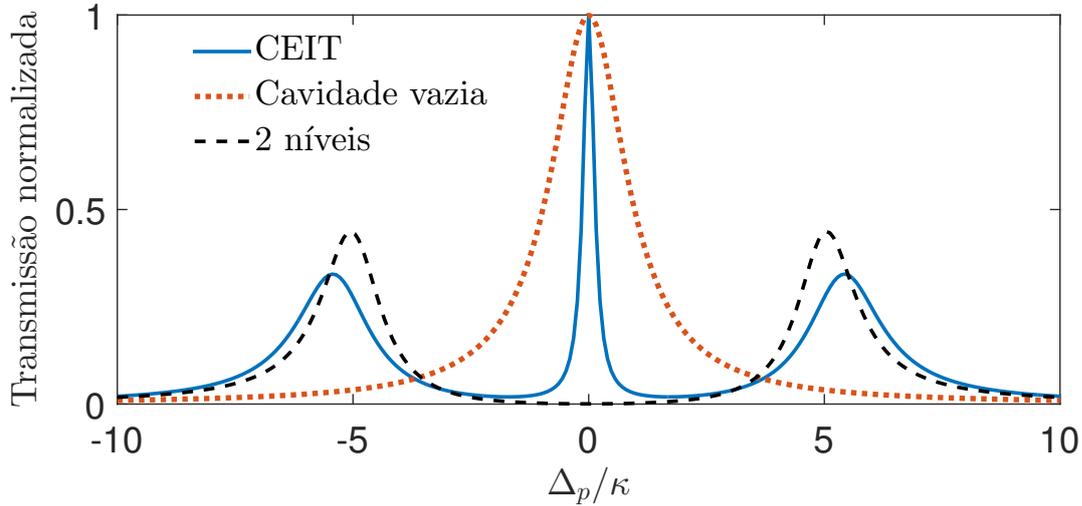


Figura 5 – **EIT em cavidades.** Curvas representando a transmissão normalizada ( $\langle a^\dagger a \rangle / |\varepsilon/\kappa|^2$ ) como função da dessintonia normalizada  $\Delta_P/\kappa$  em três situações diferentes: a curva contínua representa o espectro de transmissão da CEIT para o átomo de três níveis, enquanto a curva preta tracejada representa o espectro para um átomo de dois níveis com  $\Gamma_{32} = \Omega_c = 0$  e a curva laranja pontilhada representa o espectro de cavidade vazia, sem átomos no interior da cavidade. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $g = 5\kappa$ ,  $\varepsilon = \sqrt{0,01}\kappa$  e  $\Omega_c = 2\kappa$ .

O mecanismo por trás da janela de transparência continua sendo o mesmo do caso envolvendo campos clássicos (espaço livre), mas aqui, além do pico estreito de transmissão da CEIT que coincide com o pico do espectro de cavidade vazia, há dois picos de transmissão laterais que estão ligados aos autoestados do sistema átomo-campo. Note que, na presença do campo de controle, esses picos laterais estão levemente deslocados em relação ao sistema de dois níveis, pois nesse caso as oscilações de Rabi do vácuo do sistema átomo-campo são dadas pelas frequências  $2\sqrt{ng^2 + \Omega_c^2}$  [19], sendo  $n$  o número de excitações do sistema.

---

Esse projeto de mestrado tem como foco geral o estudo do fenômeno da EIT em cavidades, mas também tem como objetivo a abordagem de dois fenômenos mais específicos relacionados à EIT. Um desses fenômenos exige um tratamento puramente quântico, onde analisamos as diferenças na resposta óptica entre dois sistemas de três níveis dentro de uma cavidade, átomos e moléculas de pontos quânticos, nos regimes de EIT e CPT. Já o segundo fenômeno a ser abordado é o da biestabilidade óptica em átomos de três níveis no regime de CPT, onde o fato de trabalharmos com amostras compostas por muitos átomos com um fraco acoplamento com a cavidade nos permite conduzir um tratamento semiclássico e assim estudar o comportamento desse fenômeno em função de diversos parâmetros do sistema.



## 2 Átomo x Ponto Quântico

O objetivo dessa parte do trabalho foi investigar a diferença na resposta óptica de dois sistemas distintos de três níveis, um átomo e uma molécula de ponto quântico (QDM). Ambos os sistemas apresentam uma configuração típica denotada por  $\Lambda$ , justamente por apresentar dois estados fundamentais acoplados a um estado excitado.

Os dois sistemas apresentam algumas similaridades, de modo que abordagem descrita no capítulo 1 pode ser também aplicada ao sistema de QDM. Para a QDM somos capazes de observar um fenômeno completamente análogo à EIT, chamado de transparência induzida por tunelamento (TIT, do inglês *tunnelling induced transparency*), onde somos capazes induzir transparência em um meio originalmente opaco, mas dessa vez não através da incidência de um campo de controle, mas sim de um processo de tunelamento quântico. Apesar das semelhanças e analogias entre os dois sistemas, existem certas particularidades que merecem ser discutidas e destacadas com mais calma.

### 2.1 EIT e TIT no espaço livre

O sistema atômico de três níveis no espaço livre pode ser descrito por dois estados fundamentais  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , e um estado excitado  $|3\rangle$ , como representado na figura 6(a). Os estados  $|1\rangle$  e  $|3\rangle$  são acoplados por um campo de prova com frequência de Rabi  $\Omega_p$  e frequência  $\omega_p$ , enquanto os estados  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$  são acoplados por um campo de controle com frequência de Rabi  $\Omega_c$  e frequência  $\omega_c$ . As dessintonias dos campos de prova e de controle são representadas respectivamente por  $\Delta_p$  e  $\Delta_2$  e as taxas de decaimento do estado excitado  $|3\rangle$  para os estados fundamentais  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  são representadas respectivamente  $\Gamma_{31}$  e  $\Gamma_{32}$ .

A partir de técnicas de crescimento em semicondutores é possível construir heteroestruturas onde o movimento dos elétrons e buracos seja confinado a uma, duas ou três dimensões, dando origem a poços quânticos, fios quânticos e pontos quânticos, respectivamente [20]. Tal confinamento leva a uma expressiva mudança no espectro de energia do sistema, sendo que no caso do ponto quântico, o confinamento em três dimensões leva a um espectro de energia discreto muito parecido com o de sistemas atômicos. No entanto, a configuração dos níveis de energia do ponto quântico pode ser controlada através de campos externos e por parâmetros estruturais.

A molécula de ponto quântico (QDM) que iremos tratar nesse trabalho consiste de dois pontos quânticos assimétricos acoplados, crescidos em nanoestruturas semicondutoras, verticalmente empilhados [21, 22]. Assim como o sistema atômico, a molécula de ponto

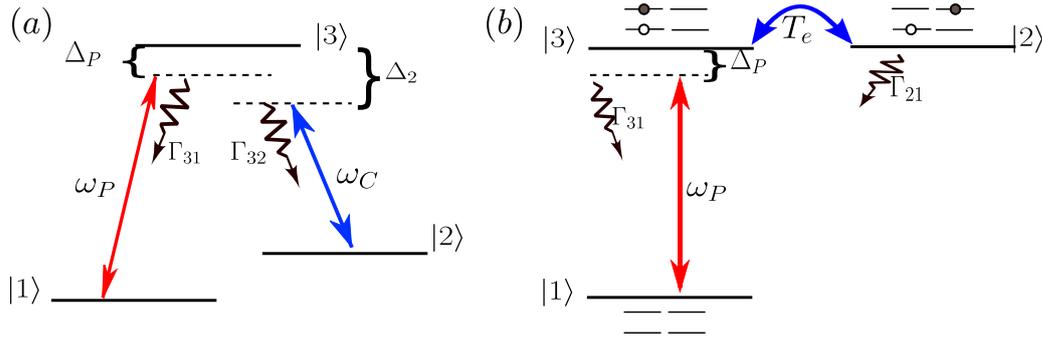


Figura 6 – (a) Diagrama dos níveis de energia de um átomo de três níveis na configuração  $\Lambda$ , interagindo com dois campos clássicos. (b) Diagrama de níveis de uma molécula de ponto quântico formada por dois poços quânticos acoplados por um processo de tunelamento e interagindo com um campo de prova clássico. Os parâmetros que aparecem nessas figuras estão definidos no texto.

quântico, cujos níveis de energia estão representados na figura 6(b), também possui dois estados fundamentais e um estado excitado. O estado fundamental  $|1\rangle$  nada mais é que a QDM sem nenhuma excitação. O estado excitado  $|3\rangle$  é alcançado quando um campo externo ressonante com a transição do elétron da banda de valência para a banda de condução é aplicado, fazendo com que o elétron vá para a banda de condução deixando para trás um buraco. Chamamos esse estado formado por esse par elétron-buraco de éxciton direto. Por fim, o estado fundamental  $|2\rangle$ , que é alcançado através da aplicação de um campo externo no sentido do crescimento da heteroestrutura, tornando possível o tunelamento do elétron na banda de condução de um ponto quântico para o outro, chamado de éxciton indireto. Esses níveis energéticos estão representados na figura 7.

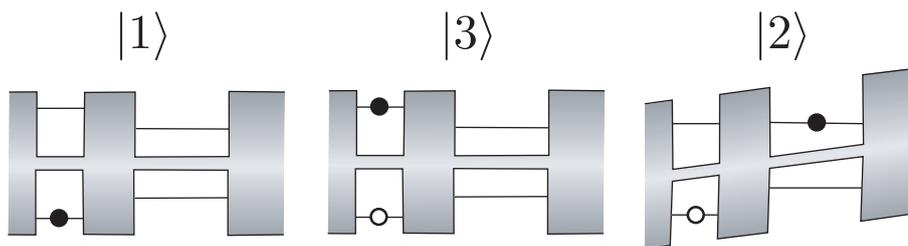


Figura 7 – Representação pictórica dos estados da molécula de ponto quântico, sendo o estado fundamental  $|1\rangle$  caracterizado pela QDM sem nenhuma excitação, o estado excitado  $|3\rangle$  por conter um elétron na camada de condução e um buraco na camada de valência, e por fim, o estado fundamental  $|2\rangle$  que é o estado do sistema em que o elétron encontra-se no poço quântico à direita, isto é, um éxciton indireto.

Os estados  $|1\rangle$  e  $|3\rangle$  são acoplados por um campo de prova clássico com frequência de Rabi  $\Omega_p$  e frequência  $\omega_p$ , assim como no sistema atômico, mas os estados  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$  dessa

vez são acoplados por tunelamento quântico, sendo  $T_e$  a taxa desse tunelamento. A taxa de decaimento do estado  $|3\rangle$  para o  $|1\rangle$  continua sendo denominada por  $\Gamma_{31}$  e uma grande diferença desse sistema é que  $\Gamma_{32} = 0$ , ou seja, não há decaimento do estado excitado  $|3\rangle$  para o estado fundamental  $|2\rangle$ , mas sim um decaimento do estado  $|2\rangle$  para o  $|1\rangle$ , com taxa de decaimento  $\Gamma_{21}$  ausente no sistema atômico, sendo tipicamente da ordem de milésimos de  $\Gamma_{31}$  em sistemas de QDM.

Ambos os sistemas podem ser descritos pelo mesmo hamiltoniano, levando-se sempre em conta a diferença entre o acoplamento dos níveis  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$ . Utilizando a aproximação de dipolo e de ondas girantes (RWA), podemos escrever esse hamiltoniano na representação de interação como ( $\hbar = 1$ )

$$H_I = -\Delta_P \sigma_{11} - \left( \frac{\Omega_P}{2} \sigma_{31} + \frac{\Theta}{2} \sigma_{32} + h.c. \right), \quad (2.1)$$

onde  $\Delta_P = \omega_{31} - \omega_P$  é a dessintonia entre a transição  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  e a frequência do campo de prova ( $\omega_P$ ). Consideramos aqui que a frequência do campo de controle, de frequência de Rabi  $\Theta$ , é ressonante com a transição  $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ , ou seja,  $\Delta_C = 0$ . Para a QDM, assumimos um campo externo de valor específico aplicado ao longo da direção de crescimento da nanoestrutura de tal forma que os estados excitônicos direto e indireto sejam ressonantes, isto é,  $\omega_{32} = 0$ . Os operadores atômicos ou da QDM são representados por  $\sigma_{kl} = |k\rangle \langle l|$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ). O que irá diferir nos hamiltonianos dos dois sistemas é que  $\Theta = \Omega_C$  ou  $T_e$ , para o sistema atômico e para o sistema de QDM, respectivamente, e denominamos por *h.c.* o hermitiano conjugado por questão de simplicidade.

As dissipações de cada sistema podem ser incluídas nas respectivas dinâmicas através da equação mestra

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H_I, \rho] + \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{k=2 \\ (k \geq i)}}^3 \frac{\Gamma_{ki}}{2} (2\sigma_{ik}\rho\sigma_{ki} - \sigma_{ki}\sigma_{ik}\rho - \rho\sigma_{ki}\sigma_{ik}), \quad (2.2)$$

sendo  $\Gamma_{ki}$  ( $k \neq i$ ) a taxa de decaimento do nível  $|k\rangle$  para o nível  $|i\rangle$  e  $\Gamma_{ii}$  a taxa de defasagem do nível  $|i\rangle$ . Como já dito anteriormente, uma das principais diferenças entre os dois sistemas está na taxa de decaimento do nível  $|3\rangle$  para o nível  $|2\rangle$ , enquanto que para o sistema atômico geralmente trabalhamos com  $\Gamma_{32} \approx \Gamma_{31} \neq 0$ , para sistemas de QDM  $\Gamma_{32} = 0$ . Essa diferença irá alterar intensamente o comportamento não-linear dos átomos e QDM, é essa alteração que iremos analisar neste trabalho. É claro que poderíamos encontrar um sistema atômico na configuração  $\Lambda$  em que  $\Gamma_{31} \gg \Gamma_{32}$ , tal sistema apresentaria então uma resposta óptica bastante similar à da QDM que estudaremos aqui, de modo que, embora toda comparação feita ao longo desse capítulo seja entre átomo e QDM, os resultados são mais gerais e aplicam-se para quaisquer sistemas em que seja possível obter  $\Gamma_{31} \gg \Gamma_{32}$ .

No contexto do sistema de QDM, sabe-se muito bem que pode haver um processo de tunelamento incoerente entre os dois pontos quânticos atribuído a fônons acústicos

da rede do substrato em que os pontos quânticos são crescidos ou a fótons. Porém como estamos considerando um acoplamento fraco entre sistema e reservatório em nosso modelo, esse tipo de processo incoerente pode ser negligenciado já que requerem a absorção e reemissão de fônon (ou até mesmo de um fóton), ou seja, processos de segunda ordem. Na verdade, foi demonstrado experimentalmente em [23] que a taxa associada a esse processo incoerente (chamado de tunelamento inelástico) é zero quando as condições de ressonância são satisfeitas. Além disso, foi recentemente mostrado em [24] uma expressão analítica para essa taxa, que é, por sua vez, diretamente proporcional à diferença de energia entre os níveis envolvidos no processo. Como em nosso modelo assumimos que os estados excitônicos  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$  são ressonantes ( $\omega_2 = \omega_3$ ), para o sistema de QDM a taxa associada a esse tunelamento incoerente entre os pontos quânticos é zero, ou seja, podemos assumir que  $\Gamma_{32} = 0$ .

A partir da equação mestra (2.2), podemos facilmente obter a solução para o estado estacionário. Considerando diferentes regimes de campo de controle (processo de tunelamento) e campo de prova, vemos imediatamente diferenças expressivas entre a resposta óptica do sistema atômico e de QDM. A resposta óptica é quantificada aqui pela absorção e dispersão, definidas a menos de uma constante multiplicativa como  $\text{Im}\{\langle\sigma_{13}\rangle\}$  e  $\text{Re}\{\langle\sigma_{13}\rangle\}$ , respectivamente.

Em todos os gráficos da figura 8 consideramos  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\Gamma$  para os átomos e  $\Gamma_{31} = \Gamma$  e  $\Gamma_{32} = 0$  para a QDM, de maneira que em ambos os sistemas o decaimento total do nível excitado  $|3\rangle$  é  $\Gamma$ .

Ao longo desse trabalho nós negligenciamos as outras decoerências e taxas de dissipação, isto é,  $\Gamma_{22} = \Gamma_{33} = \Gamma_{21} = 0$ , já que eles são muito menores que as taxas de decaimento do estado excitado e também por destruírem o *dark state* do sistema, tornando difícil a comparação entre as respostas ópticas dos dois sistemas [25, 26].

Notamos que, quando  $\Omega_P \ll \Theta$ , sendo  $\Theta = \Omega_c$  ou  $T_e$ , ou seja, no regime de parâmetros conhecido como EIT (ou até mesmo no regime de Autler-Townes [27, 28], onde a presença de um campo de controle muito intenso leva a uma separação total do nível excitado por efeito Stark) a resposta óptica do sistema independe da taxa de decaimento do estado excitado  $|3\rangle$  para o estado fundamental  $|2\rangle$ , como podemos ver na figura 8 (a). No entanto, para  $\Omega_P \gtrsim \Theta$ , ou seja, no regime conhecido como CPT nós podemos observar uma grande diferença entre as respostas ópticas do sistema atômico e de QDM, como mostrado na figura 8 (c). A largura da janela de transparência é a mesma para ambos os sistemas. No entanto, a QDM apresenta uma maior absorção na região em torno da janela de transparência. A origem de tal diferença está na taxa de decaimento  $\Gamma_{32}$ , a qual é nula para o sistema de QDM mas não nula para o sistema atômico.

Na figura 8 (b) e (d) são mostradas as populações  $P_1$  e  $P_2$  dos estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , respectivamente, dos dois sistemas (a população do nível excitado é próxima de zero em

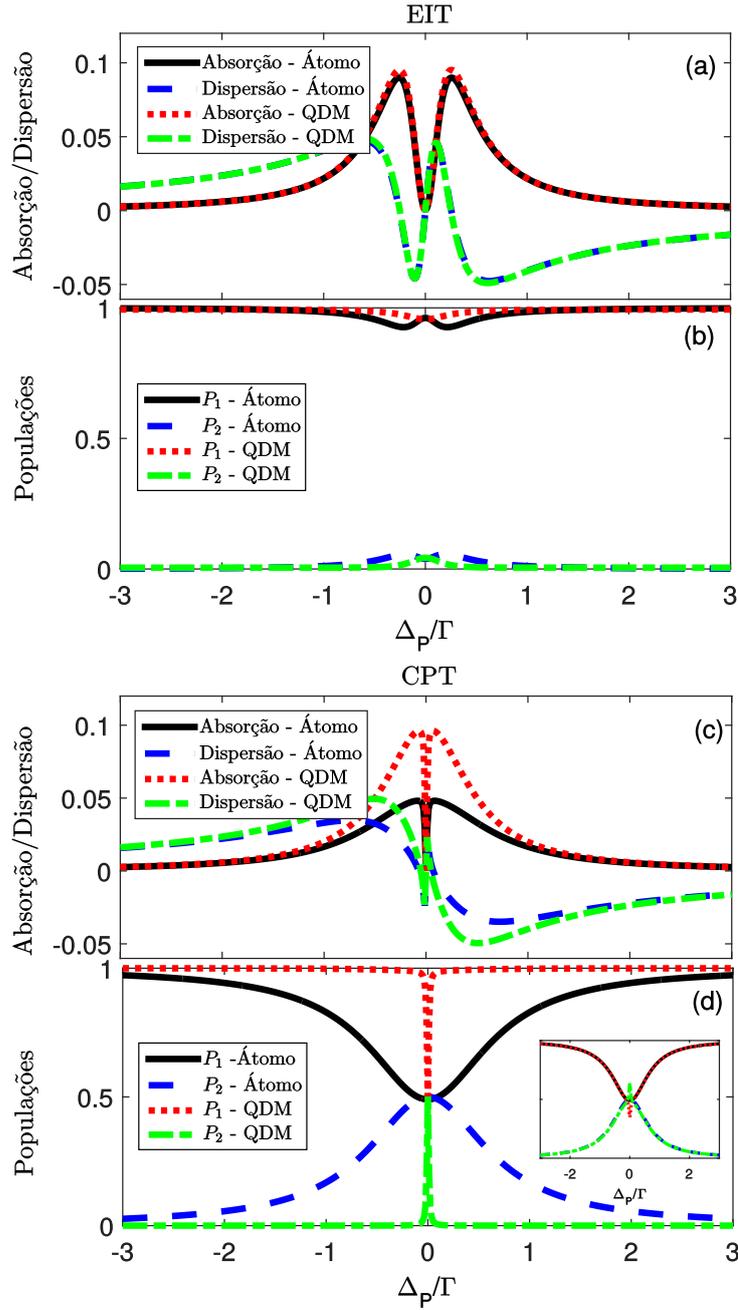


Figura 8 – **Resposta óptica do sistema atômico e de QDM em dois regimes diferentes de parâmetros, EIT e CPT.** Em todos os gráficos, consideramos um decaimento total  $\Gamma$  do nível excitado  $|3\rangle$ . Fixamos  $\Omega_P = 0, 1\Gamma$  e  $\Theta = 0, 5\Gamma$  para o regime de EIT, painéis (a) e (b), e  $\Omega_P = 0, 1\Gamma$  e  $\Theta = 0, 1\Gamma$  para o regime de CPT, painéis (c) e (d). Em (a) e (c) representamos a absorção ( $Im\langle\sigma_{13}\rangle$ ) e a dispersão ( $Re\langle\sigma_{13}\rangle$ ) dos sistemas e em (b) e (d) as populações dos estados fundamentais  $|1\rangle$  ( $P_1$ ) e  $|2\rangle$  ( $P_2$ ). Em todos os gráficos, a curva preta e a azul tracejada referem-se ao caso  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0, 5\Gamma$  (sistema atômico) enquanto as curvas pontilhadas verde e vermelha se referem ao caso onde  $\Gamma_{31} = \Gamma$  e  $\Gamma_{32} = 0$  (sistema de QDM). *Inset*: populações do sistema de QDM obtidas a partir da equação mestra efetiva, isto é, levando em conta o decaimento efetivo do nível  $|1\rangle$  para o  $|2\rangle$ .

todos os casos), para os regimes de EIT e CPT, respectivamente. Novamente notamos que no regime de CPT há uma diferença expressiva entre as populações dos níveis fundamentais atômicos e do sistema de QDM. Em particular, para as populações da QDM  $P_1$  e  $P_2$  só mudam para um campo de prova ressonante, isto é, quando  $\Delta_P = 0$ .

A origem de tais diferenças entre átomos e QDM está no decaimento efetivo do nível  $|1\rangle$  para o  $|2\rangle$ , descrito pelo lindbladiano efetivo

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{\Gamma_{12}^{eff}}{2} (2\sigma_{21}\rho\sigma_{12} - \sigma_{11}\rho - \rho\sigma_{11}), \quad (2.3)$$

que surge apenas quando  $\Gamma_{32} \neq 0$ , sendo  $\Gamma_{12}^{eff} = P_3\Gamma_{32}$ . No limite em que  $\Theta \rightarrow 0$  e  $\Gamma_{32} = 0$  nós teríamos um sistema de dois níveis bombeado por um campo de prova com frequência de Rabi  $\Omega_P$  e uma taxa de decaimento total do estado excitado  $\Gamma$ . Nesse caso, a população do nível excitado é [29]

$$P_3 = \frac{1}{2} (1 + \langle \sigma_{33} - \sigma_{11} \rangle) = \frac{|\Omega_P|^2}{\Gamma^2 + 4\Delta_P^2 + 2|\Omega_P|^2}. \quad (2.4)$$

Introduzindo a taxa de decaimento efetivo do nível  $|1\rangle$  para o  $|2\rangle$  na dinâmica do sistema de QDM podemos reproduzir quase que perfeitamente as populações do sistema atômico, como pode-se observar no *inset* da figura 8 (d), onde somente na ressonância do *dark state* vemos uma pequena discordância, a qual se torna negligenciável conforme diminuimos ainda mais o valor de  $\Theta$ .

Afim de entendermos como a taxa de decaimento  $\Gamma_{32}$  afeta a resposta óptica de nosso sistema, é instrutivo analisarmos a susceptibilidade óptica do sistema e suas componentes lineares e não lineares. A densidade de polarização do sistema é dada por [30]

$$\vec{P} = \chi^{(1)}\vec{E}_P + \chi^{(3)}\vec{E}_P^3 + \chi^{(5)}\vec{E}_P^5 + \dots, \quad (2.5)$$

sendo  $\chi^{(n)}$  a  $n$ -ésima ordem da susceptibilidade do meio. Por outro lado resolvendo a equação mestra (2.2), somos capazes de obter a densidade de polarização em termos de elementos da matriz densidade  $\rho_{ij}(t)$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) [6]. Ao impor  $d\rho/dt = 0$ , podemos obter a solução estacionária da equação mestra (2.2), que nos permite obter, por sua vez, a susceptibilidade óptica de  $n$ -ésima ordem [6], que pode ser escrita a menos de um fator escalar como:

$$\chi^{(1)} = \frac{2\Delta_P}{2\Delta_P(2\Delta_P - i\Gamma) - \Theta^2}, \quad (2.6)$$

$$\chi^{(3)} = \frac{4\Delta_P^2 \left( \frac{\Gamma^2\Gamma_{32}}{\Theta^2} - i\frac{\Gamma\Gamma_{32}}{2\Delta_P} + 3\Gamma - \Gamma_{31} + \frac{\Gamma_{31}\Theta^2}{2\Delta_P^2} \right)}{\Gamma_{31}(\Theta^2 - 2i\Delta_P\Gamma - 4\Delta_P^2)(\Theta^2 + 2i\Delta_P\Gamma - 4\Delta_P^2)^2}, \quad (2.7)$$

$$\chi^{(5)} = \frac{2\Delta_P \left( \frac{-16\Gamma^4\Gamma_{32}^2\Delta_P^4}{\Theta^4} + \frac{8\Gamma^2\Gamma_{32}\Delta_P^3}{\Theta^2} (i\Gamma\Gamma_{32} - 10\Gamma\Delta_P + 2\Gamma_{31}\Delta_P) + 4\Delta_P^2 A + 2\Delta_P B\Theta^2 - 3\Gamma_{31}^2\Theta^4 \right)}{\Gamma_{31}^2 (-2i\Gamma\Delta_P - 4\Delta_P^2 + \Theta^2)^2 (2i\Gamma\Delta_P - 4\Delta_P^2 + \Theta^2)^3}, \quad (2.8)$$

sendo:

$$A = \Gamma^2 \left( \Gamma_{31}^2 - 2\Gamma_{31}\Gamma_{32} - \Gamma_{32}^2 \right) + 4\Delta_P^2 \left( -6\Gamma^2 + 3\Gamma\Gamma_{31} + \Gamma_{31}\Gamma_{32} \right) + 4i\Gamma^2\Gamma_{32}\Delta_P,$$

$$B = -2\Delta_P(3\Gamma(\Gamma + 3\Gamma_{31}) + \Gamma_{31}(\Gamma_{32} - 2\Gamma_{31})) + i\Gamma\Gamma_{32}(\Gamma + \Gamma_{31}),$$

$$\Gamma_3 = \Gamma_{31} + \Gamma_{32} = \Gamma.$$

As expressões acima são válidas para quaisquer valores de  $\Omega_P$  e  $\Theta$ , portanto válidas tanto no regime de EIT quando em CPT. Da equação (2.6) podemos notar que  $\chi^{(1)}$  depende somente da taxa de decaimento total do nível excitado  $|3\rangle$  ( $\Gamma_3$ ), não importando qual o valor da taxa de decaimento  $\Gamma_{32}$  isoladamente. Esse comportamento é mostrado na figura 9 (a) e (d), como também em (g) e (j), onde plotamos  $\text{Im}\{\chi^{(1)}\}$  e  $\text{Re}\{\chi^{(1)}\}$  como função de  $\Delta_P/\Gamma$ , respectivamente. Em todos os gráficos foi considerada a taxa de decaimento total  $\Gamma_3 = \Gamma$  e os mesmos parâmetros utilizados na figura 8. Por outro lado, as susceptibilidades ópticas não lineares  $\chi^{(3)}$  e  $\chi^{(5)}$  apresentam uma forte dependência em  $\Gamma_{32}$ , o que é evidenciado nos demais painéis da figura 9, onde plotamos  $\text{Im}\{\chi^{(n)}\}$  e  $\text{Re}\{\chi^{(n)}\}$  ( $n = 1, 3, 5$ ) como função de  $\Delta_P/\Gamma$ . Apesar de existir uma grande diferença entre os dois sistemas ( $\Gamma_{32} = 0$  e  $\Gamma_{32} \neq 0$ ) na região em torno da ressonância do *dark state*, exatamente em  $\Delta_P = 0$ , os sistemas são equivalentes, sendo que ambos predizem absorção nula ( $\text{Im}\{\chi^{(3)}\}$ ) e a mesma inclinação na curva da dispersão ( $\text{Re}\{\chi^{(3)}\}$ ), o que resulta na mesma velocidade de grupo de pulsos luminosos quando interagem tanto com átomos, como com QDM.

A expansão da susceptibilidade não linear  $\text{Im}\{\chi^{(3)}\}$  em uma série de potências de  $\Theta$  nos ajuda a observar matematicamente como  $\Gamma_{32}$  afeta a resposta óptica do sistema no limite de campo de controle fraco:

$$\begin{aligned} \text{Im}\{\chi^{(3)}\} = & -\frac{2\Gamma^2(\Gamma^2 + 2\Gamma\Gamma_{32} + 4\Delta_P^2)}{\Gamma_{31}(\Gamma^2 + 4\Delta_P^2)^3} - \frac{\Gamma^3\Gamma_{32}}{\Theta^2\Gamma_{31}(\Gamma^2 + 4\Delta_P^2)} \\ & + \Theta^2 \frac{4\Gamma \left[ \frac{\Gamma^4(\Gamma_{32} - 2\Gamma_{31})}{16\Delta_P^2} - \Gamma^3(3\Gamma + 2\Gamma_{32}) - \Delta_P^2(9\Gamma + \Gamma_{31}) \right]}{\Gamma_{31}(\Gamma^2 + 4\Delta_P^2)^4}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como pode ser visto na expressão (2.9), o primeiro termo é independente de  $\Theta$  e o segundo possui  $\Theta^2$  em seu denominador e é zero se  $\Gamma_{32} = 0$ . Tal fato indica que esse termo é o principal responsável pelo realce dos efeitos da susceptibilidade óptica associada a  $\Gamma_{32}$ . Na verdade, o último termo da expressão vai a zero no limite em que  $\Theta \rightarrow 0$ , enquanto o

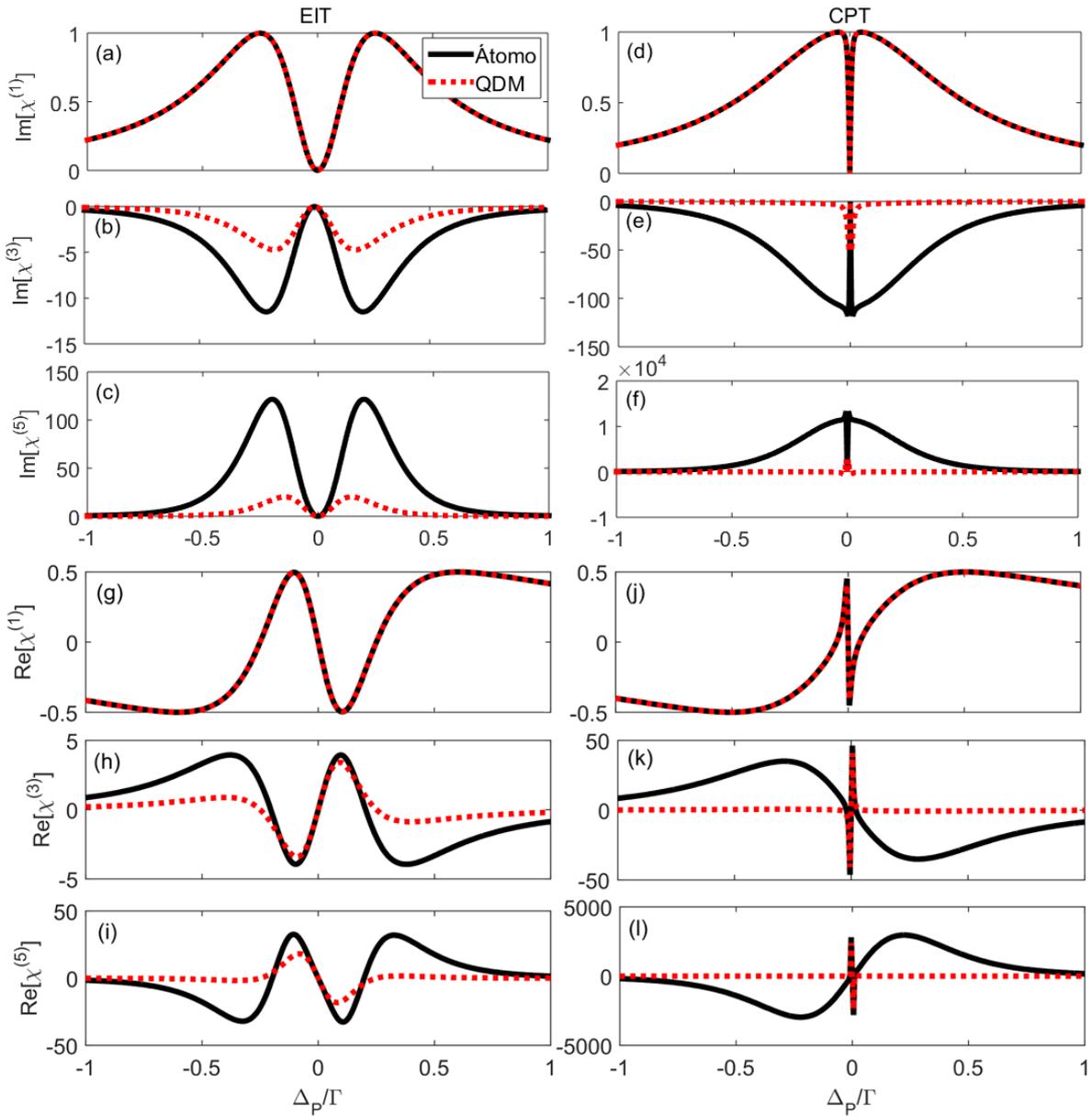


Figura 9 – **Susceptibilidades ópticas lineares e não lineares.** Nos painéis de (a) a (f) [e de (g) a (l)] são mostradas a parte imaginária [real] de  $\chi^{(n)}$  ( $n = 1, 3, 5$ ) para os sistemas de átomos e QDM em dois regimes diferentes de parâmetros, isto é, EIT (painéis da esquerda) e CPT (painéis da direita), considerando o mesmo conjunto de parâmetros da figura 8.

segundo se torna cada vez mais relevante nesse limite. Podemos observar exatamente isso analisando a figura (9): fora da janela de transparência, diminuindo  $\Theta$  de  $0,5\Gamma$  (regime de EIT) para  $0,1\Gamma$  (regime de CPT), o valor máximo de  $\chi^{(3)}$  (em valores absolutos) tem um aumento da ordem de 10 vezes, quando  $\Gamma_{32} \neq 0$ , mas essa variação é negligenciável quando  $\Gamma_{32} = 0$

## 2.2 EIT e TIT em cavidades

Fazendo uso de um acoplamento forte entre átomo/QDM e cavidade, os efeitos previstos acima poderiam ser experimentalmente investigados ao nível de um único átomo ou QDM e usado, por exemplo, em aplicações como estreitamento da largura de cavidade [5, 8, 31, 32]. Vamos agora analisar os mesmos dois sistemas vistos na primeira seção deste capítulo, mas dessa vez estudaremos um único átomo e um único QDM aprisionados dentro de uma cavidade óptica.

Agora a transição do estado fundamental  $|1\rangle$  para o estado excitado  $|3\rangle$ , em ambos os sistemas, é mediada pelo modo quantizado do campo na cavidade, com frequência de Rabi  $g$  e frequência  $\omega$ . Há também um campo de prova de força  $\varepsilon$  e frequência  $\omega_P$  no modo da cavidade. Além disso, os sistemas continuam apresentando as mesmas características descritas na seção anterior, o estado fundamental  $|2\rangle$  e o estado excitado  $|3\rangle$  são acoplados por um campo de controle clássico com frequência de Rabi  $\Omega_c$  e frequência  $\omega_c$  no sistema atômico e por um processo de tunelamento, com taxa de tunelamento  $T_e$  no sistema de QDM. As taxas de decaimento continuam inalteradas para cada sistema e novamente consideramos o campo de controle ressonante com a transição  $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  para o sistema atômico, e que os éxcitons direto e indireto sejam ressonantes para o sistema de QDM. O diagrama de níveis dos dois sistemas é representado na figura (10).

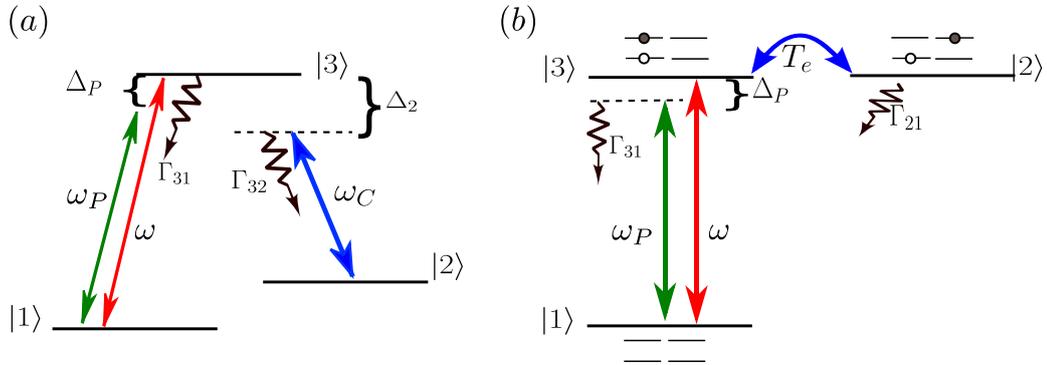


Figura 10 – (a) Diagrama dos níveis de energia de um átomo de três níveis na configuração  $\Lambda$ , interagindo com um modo quantizado do campo na cavidade, um campo de prova atuando nesse modo da cavidade e um campo de controle clássico sobre o átomo. (b) Diagrama de níveis de uma molécula de ponto quântico formada por dois poços quânticos acoplados por um processo de tunelamento e interagindo com um modo quantizado do campo na cavidade e um campo de prova atuando nesse modo da cavidade. Os parâmetros que aparecem nessas figuras estão definidos no texto.

O hamiltoniano geral que descreve esses dois sistemas já na representação de interação e sem dependências temporais pode ser escrito como ( $\hbar = 1$ )

$$H_{cav} = -\Delta_P(\sigma_{11} - a^\dagger a) + \left( \frac{\varepsilon}{2} a + g a \sigma_{31} + \frac{\Theta}{2} \sigma_{32} + h.c. \right), \quad (2.10)$$

onde  $\Delta_P = \omega - \omega_p$  representa a dessintonia entre as frequências do modo do campo quantizado na cavidade ( $\omega$ ) e do campo de prova ( $\omega_p$ ) e  $a$  e  $a^\dagger$  os operadores de aniquilação e criação, respectivamente, associados ao modo do campo dentro da cavidade. Novamente, as dissipações serão incluídas na dinâmica do sistema através da equação mestra, dada por

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H_{cav}, \rho] + \frac{\kappa}{2}(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) + \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{k=2 \\ (k \geq i)}}^3 \frac{\Gamma_{ki}}{2}(2\sigma_{ik}\rho\sigma_{ki} - \sigma_{ki}\sigma_{ik}\rho - \rho\sigma_{ki}\sigma_{ik}), \quad (2.11)$$

sendo  $\kappa$  a taxa de decaimento total da intensidade do campo da cavidade.

Podemos novamente resolver a equação mestra no estado estacionário, onde  $d\rho/dt = 0$  e obter as principais propriedades ópticas do sistema. Nós fazemos isso numericamente, truncando o espaço de Hilbert do modo da cavidade de maneira apropriada e utilizando algoritmos de um pacote para Python chamado *Qutip* [33].

Voltando para a figura 8 (b), podemos observar que as populações do sistema não apresentam uma diferença substancial quando temos  $\Gamma_{32}$  nulo (QDM) ou não nulo (átomo) quando consideramos  $\Theta \gg \Omega_P$ , ou seja, no regime de EIT. No entanto, as populações no regime de CPT ( $\Omega_P \gtrsim \Theta$ ) são fortemente dependentes de  $\Gamma_{32}$ , como visto na figura 8 (d): para  $\Gamma_{32} = 0$  (QDM)  $P_1 \simeq 1$  e  $P_2 \simeq 0$  para todos os valores de  $\Delta_P$  exceto na ressonância do *dark state* ( $\Delta_P \simeq 0$ ). Isso quer dizer que a largura de linha do *dark state* para o sistema de QDM pode ser mais estreita que para o sistema atômico. Quando colocamos o átomo ou QDM dentro da cavidade, sua transmissão será amplamente afetada por essa diferença de populações (para os casos em que  $\Gamma_{32} = 0$  e  $\Gamma_{32} \neq 0$ ). Na figura 11 plotamos a transmissão normalizada da cavidade ( $\langle a^\dagger a \rangle / |\varepsilon/\kappa|^2$ , com  $n = a^\dagger a$ ) dos sistemas átomo/QDM-cavidade, no regime de EIT e CPT. Em ambos os casos consideramos  $\kappa = \Gamma$ . Novamente, para o átomo consideramos  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0, 5\Gamma$  e para a QDM,  $\Gamma_{31} = \Gamma$  e  $\Gamma_{32} = 0$ . Os outros parâmetros são  $\kappa = \Gamma$ ,  $g = 5\kappa$ ,  $\varepsilon = \sqrt{0,01}\kappa$ , e  $\Theta = 1,0\kappa$  para o regime EIT e  $\Theta = 0, 1\kappa$  para o regime de CPT.

Assim como acontece no espaço livre, quando  $\Theta \rightarrow 0$ , haverá um decaimento efetivo do nível  $|1\rangle$  para o  $|2\rangle$ , cuja taxa de decaimento efetivo é  $P_3\Gamma_{32}$ , a qual modifica consideravelmente a dinâmica do sistema quando  $\Gamma_{32} \neq 0$  (átomo). E esse de fato é o caso, como podemos ver no *inset* da figura 11 (c), onde plotamos a transmissão do sistema QDM-cavidade incluindo tal decaimento efetivo na dinâmica do sistema. Quando  $\Theta \rightarrow 0$ , temos um sistema de dois níveis interagindo com um modo da cavidade e um bombeio, nesse caso, e considerando que o campo de prova está próximo da ressonância (em torno do pico da EIT), temos [29]

$$\langle \sigma_{33} - \sigma_{11} \rangle = -n_0/(n + n_0), \quad (2.12)$$

com  $n_0 = \Gamma_3^2/8g^2$  e

$$n = |\alpha|^2 = \left| \frac{\varepsilon/\kappa(n + n_0)}{n + n_0 + 2Cn_0} \right|^2, \quad (2.13)$$

sendo  $C = g^2/2\kappa\Gamma_3$  a cooperatividade do sistema.

No limite de campo de bombeio fraco ( $\varepsilon \rightarrow 0$ , que implica  $n \ll n_0$ ) e cooperatividade grande ( $C \gg 1$ ), nós obtemos

$$P_3 = 1/2(1 + \langle \sigma_{33} - \sigma_{11} \rangle) \approx |\varepsilon/2g|^2, \quad (2.14)$$

o que resulta em uma taxa de decaimento efetivo do nível  $|1\rangle$  para o  $|2\rangle$  dada por  $\Gamma_{12}^{eff} = |\varepsilon/2g|^2\Gamma_{32}$ . Incluindo esse canal de dissipação na equação mestra do sistema QDM-cavidade nós recuperamos aproximadamente a dinâmica do sistema átomo-cavidade (em torno do pico de EIT), como podemos ver no *inset* da figura 11 (c).

Como vimos na figura 11 (c), quando diminuimos  $\Omega_C$  ( $T_e$ ), isto é, no regime de CPT, a transmissão em torno de  $\Delta_P = 0$  cresce para o sistema atômico enquanto que para o sistema de QDM ela permanece não nula apenas quando  $\Delta_P = 0$ , ou seja, na ressonância do *dark state*. Isso ocorre pois a população do estado fundamental  $|2\rangle$  cresce devido a presença de um canal de decaimento associado a  $\Gamma_{32}$  quando  $\Omega_C \rightarrow 0$ , fazendo com que o sistema átomo-cavidade se torne transparente ao campo de prova (situação de cavidade vazia). Por outro lado, no sistema de QDM, ou seja,  $\Gamma_{32} = 0$ , no limite que  $T_e \rightarrow 0$  nós ficamos com um perfeito sistema de dois níveis, que apresenta transmissão nula em  $\Delta_P \approx 0$  e no regime de acoplamento forte ( $g \gg \kappa, \Gamma_{31}$ ). Dessa maneira, temos uma interessante diferença entre o comportamento atômico e de QDM: enquanto o sistema atômico atinge o perfil de cavidade vazia quando  $\Omega_C \rightarrow 0$ , o sistema de QDM apresenta um pico de transmissão muito estreito quando  $T_e \rightarrow 0$ . Na figura 12 estão representadas a largura máxima a meia altura (*FWHM*, do inglês *full width at half maximum*) da ressonância do *dark state* de ambos os sistemas como função de  $\Theta$  ( $= \Omega_C$  or  $T_e$ ). A cor de fundo representa aproximadamente os diferentes regimes: CPT (região mais escura, à esquerda, com  $\Theta \lesssim g \langle a \rangle$ ), EIT (região intermediária, com  $\Theta \gg g \langle a \rangle$ ) e Autler-Townes (região mais clara, à direita, com  $\Theta \gg \gg g \langle a \rangle$ ).

Podemos notar que a *FWHM* atinge um valor mínimo para o sistema atômico e em seguida volta a crescer à medida que a população do nível  $|2\rangle$  aumenta (para  $\Omega_C \rightarrow 0$ ). Começamos utilizando valores bem pequenos para  $\Theta$ , como por exemplo  $\Theta_{min} = 0,001\kappa$ , já que para  $\Theta = 0$  o sistema de QDM é reduzido a um sistema de dois níveis e então não é mais possível definir a *FWHM*. A *FWHM* depende também da força do campo de prova ( $\varepsilon$ ), como podemos ver nas figuras 11 (a) a (d). Para pequenos valores de número médio de fótons dentro da cavidade, a probabilidade de excitação de ambos os sistemas é muito pequena. Por exemplo, para um número máximo de fótons médios 0,01, figura 12(a), a *FWHM* mínima para o átomo é muito próxima da obtida com o sistema de QDM. No entanto, a diferença entre os dois sistemas cresce conforme aumentamos o número médio

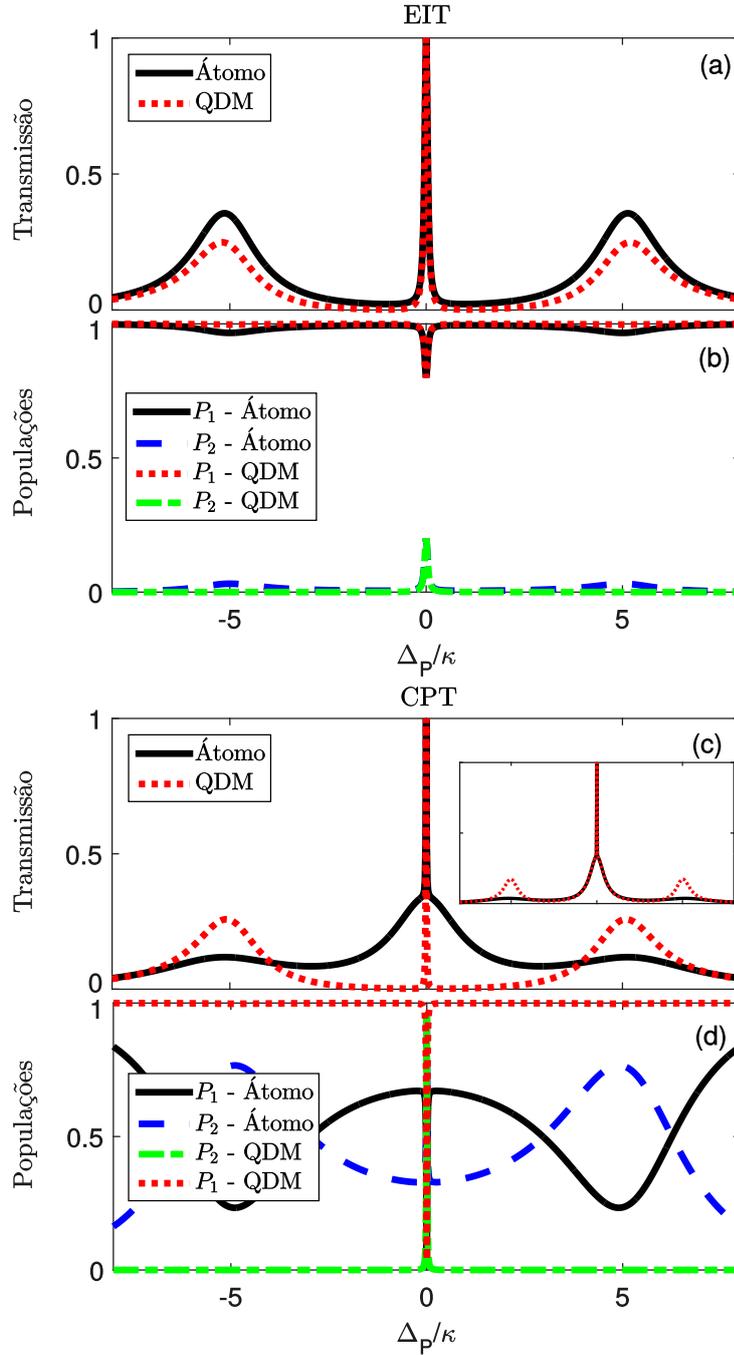


Figura 11 – **Espectro de transmissão e populações.** Os painéis (a) e (c) (topo) mostram a transmissão normalizada da cavidade e os painéis (b) e (d) (base) mostram as populações atômicas e da QDM, ambas em função da dessintonia  $\Delta_P/\kappa$ . Os parâmetros utilizados foram  $\kappa = \Gamma$ ,  $g = 5\kappa$ ,  $\varepsilon = \sqrt{0,01}\kappa$ , e  $\Theta = 1,0\kappa$  para a EIT (painéis (a) e (b), à esquerda) e  $\Theta = 0,1\kappa$  para o CPT (painéis (c) e (d), à direita), e  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\Gamma$  para o sistema atômico e  $\Gamma_{31} = \Gamma$  e  $\Gamma_{32} = 0$  para o de QDM. Para pequenos valores de frequência de Rabi do campo de controle ou da taxa de tunelamento ( $\Theta \rightarrow 0$ ),  $\Gamma_{32} \neq 0$  leva a população do sistema para o estado fundamental  $|2\rangle$ , o qual não é acoplado ao modo da cavidade, aumentando então a transmissão (situação de cavidade vazia). Isso é equivalente a um decaimento efetivo do nível  $|1\rangle$  para o  $|2\rangle$  – veja o *inset* do painel (c), onde incluímos o decaimento efetivo na dinâmica do sistema QDM-cavidade.

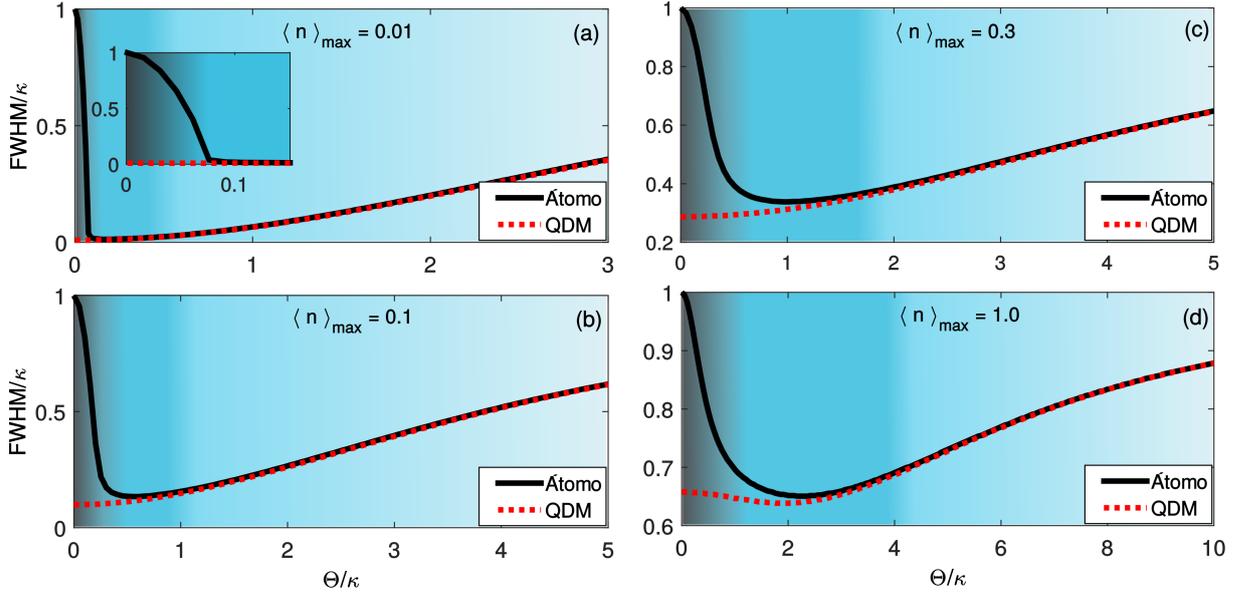


Figura 12 – **Largura máxima a meia altura ( $FWHM$ ) da ressonância do *dark state*.**  $FWHM$  para o sistema atômico (curva sólida preta) e para o sistema de QDM (curva vermelha tracejada) como função de  $\Theta = \Omega_C/\kappa$  ou  $T_e/\kappa$ . Aqui assumimos  $\Gamma_2 = \Gamma_{21} = 10^{-3}\Gamma$  e os demais parâmetros são os mesmos da figura 11, exceto para  $\varepsilon$ , o que implica em diferentes números médios de fótons dentro da cavidade ( $\langle n \rangle_{\max} = |\varepsilon/\kappa|^2$ ): (a)  $\varepsilon = \sqrt{0,01}\kappa$ , (b)  $\varepsilon = \sqrt{0,1}\kappa$ , (c)  $\varepsilon = \sqrt{0,3}\kappa$ , e (d)  $\varepsilon = \sqrt{1,0}\kappa$ . Em alguns casos, a mínima  $FWHM$  para QDM se torna 10% mais estreita que a  $FWHM$  para o sistema atômico.

de fótons. Aumentando  $\varepsilon$  obtemos uma maior probabilidade de termos dois fótons (ou mais) dentro da cavidade. Como estamos considerando um único átomo/QDM interagindo com o modo da cavidade, ele pode absorver apenas um único fóton do campo de prova, dessa maneira, a  $FWHM$  mínima depende também do número de átomos/QDMs dentro da cavidade.

Considerando a aplicação em estreitamento da largura de linha da cavidade baseado em EIT em cavidades como proposto em [8] e verificado experimentalmente por H. Wang *et. al.* [5], nossos resultados mostram que QDMs nos permitem alcançar uma  $FWHM$  mais estreita do que em sistemas atômicos no limite que  $\Theta \rightarrow 0$ , sendo então mais atrativa para esse tipo de aplicação. Como vemos na figura 12(b), a  $FWHM$  mínima para o átomo se torna 35% mais larga que a  $FWHM$  mínima para o sistema de QDM. Para acoplamentos mais fortes, ou seja, para maiores valores de  $g$ , a diferença entre a  $FWHM$  mínima dos dois sistemas diminui.



### 3 Biestabilidade óptica

O fenômeno da biestabilidade óptica (BO) foi previsto por Szöke e colaboradores em 1969 [34]. Alguns anos depois, em 1974, McCall realizou um tratamento numérico do fenômeno da biestabilidade óptica [35] e dois anos depois, em 1976, Gibbs, McCall e Venkatesan publicaram um artigo com a primeira observação experimental do fenômeno [36]. A biestabilidade óptica é um fenômeno que surge na transmissão de luz por uma cavidade óptica com um meio ressonante dentro dela, ou seja, para uma cavidade vazia, a transmissão da luz é proporcional à luz incidente na cavidade, já para uma cavidade preenchida com um meio ressonante, a intensidade da luz transmitida passa a ser uma função não linear da luz incidente, de forma que para certos regimes de parâmetros podemos observar o comportamento biestável do sistema através de sua curva característica, a histerese.

Ao longo de mais de quatro décadas após o descobrimento do fenômeno, a biestabilidade óptica em meios atômicos foi vastamente estudada, principalmente para sistemas de átomos de dois níveis [12].

#### 3.1 Biestabilidade óptica em átomos de 2 níveis

O sistema que iremos estudar consiste em uma amostra atômica composta por  $N$  átomos de dois níveis não interagentes, aprisionados no interior de uma cavidade óptica com bombeio coerente, de força  $\varepsilon$  e frequência  $\omega_P$  atuando sobre o modo do campo na cavidade, o qual tem frequência  $\omega$  e acopla a transição  $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$  com uma frequência de Rabi  $2g$ . Esse sistema, representado na figura 13, pode ser descrito por um hamiltoniano na representação de interação e independente do tempo como ( $\hbar = 1$ )

$$H = (\Delta_2 - \Delta_P)\sigma_{22} - \Delta_P a^\dagger a + g(a\sigma_{21} + a^\dagger\sigma_{12}) + \varepsilon(a + a^\dagger), \quad (3.1)$$

onde  $\Delta_P = \omega_P - \omega$ ,  $\Delta_2 = \omega_2 - \omega$  e  $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$ . As dissipações, tanto da cavidade quanto do átomo, são levadas em conta na dinâmica do sistema, dada a partir da equação mestra

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & -i[H, \rho] + \kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) + \sum_{k=1}^N \Gamma_{21} \left( 2\sigma_{12}^{(k)} \rho \sigma_{21}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} \rho - \rho \sigma_{22}^{(k)} \right) \\ & + \sum_{k=1}^N \gamma_2 \left( 2\sigma_{22}^{(k)} \rho \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} \rho - \rho \sigma_{22}^{(k)} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo  $\Gamma_{21}$  o decaimento do estado excitado  $|2\rangle$  para o estado fundamental  $|1\rangle$ ,  $\kappa$  o decaimento da cavidade e  $\gamma_2$  a defasagem atômica, referente ao estado excitado.

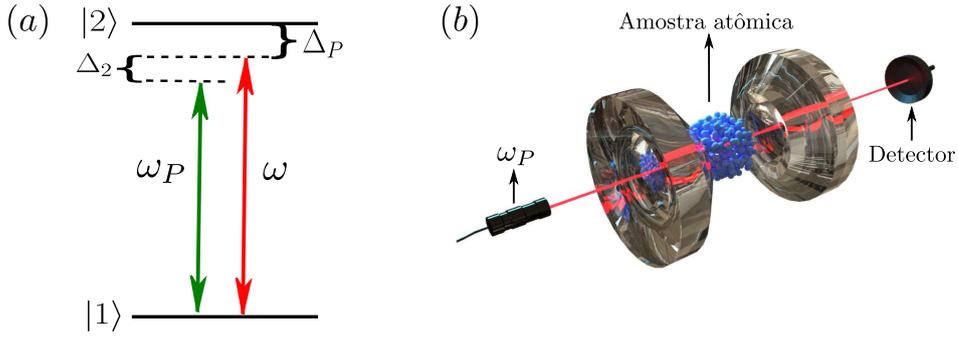


Figura 13 – (a) Diagrama de níveis do átomo de dois níveis no interior de uma cavidade óptica na presença de um bombeio coerente de frequência  $\omega_P$  e frequência de Rabi  $2\Omega_P$ . (b) Representação pictórica do aparato experimental. Os parâmetros que aparecem nessas figuras estão definidos no texto.

A evolução temporal do valor médio de cada um dos operadores do sistema pode ser obtida através da equação

$$\left\langle \frac{dO}{dt} \right\rangle = \text{Tr}(\dot{\rho}O), \quad (3.3)$$

sendo  $O$  um operador arbitrário do sistema. Fazendo isso, nos deparamos com termos do tipo  $\langle a\sigma_{ij} \rangle$ , mas considerando que a amostra atômica com que estamos trabalhando contém um número grande de átomos e trabalhando em regimes de fraco acoplamento, podemos contornar esse problema utilizando a aproximação semiclassical, na qual o valor médio do operador do campo  $\langle a \rangle$  ( $\langle a^\dagger \rangle$ ) passa a ser considerado como uma amplitude dependente do tempo  $\alpha$  ( $\alpha^*$ ), de forma que  $\langle a\sigma_{ij} \rangle \approx \alpha \langle \sigma_{ij} \rangle$ . Com isso, a partir das equações (3.1), (3.2) e (3.3), obtemos as seguintes expressões para a derivada temporal dos valores médios dos operadores do sistema

$$\dot{\alpha} = i \{ (\Delta_P + i\kappa)\alpha - \varepsilon - g\langle \sigma_{12} \rangle \}, \quad (3.4)$$

$$\langle \dot{\sigma}_{12} \rangle = i \{ [\Delta_2 + i(\Gamma_{21} + \gamma_2)]\langle \sigma_{12} \rangle + g\alpha\langle \sigma_z \rangle \}, \quad (3.5)$$

$$\langle \dot{\sigma}_z \rangle = -2(\Gamma_{21} + \gamma_2)(1 + \langle \sigma_z \rangle) + 2ig(\alpha^*\langle \sigma_{12} \rangle - \alpha\langle \sigma_{21} \rangle), \quad (3.6)$$

onde  $\sigma_z = \sigma_{22} - \sigma_{11}$  representa o operador de inversão atômica. Resolvendo esse sistema formado pelas equações (3.4)–(3.6) para o estado estacionário, ou seja, para  $\langle \dot{O} \rangle = 0$ , podemos mostrar que, para  $\Delta = \Delta_P = 0$ , temos

$$\frac{\varepsilon^2}{\kappa^2} = |\alpha|^2 \left[ 1 + \frac{2C}{1 + s_0/2} \right], \quad (3.7)$$

onde  $C$  é um parâmetro ao qual damos o nome de cooperatividade, dado por

$$C = \frac{Ng^2}{2\kappa(\Gamma_{21} + \gamma_2)}, \quad (3.8)$$

e  $s_0$  é definido como o parâmetro de saturação atômico, através do valor médio do operador de inversão atômica

$$\langle \sigma_z \rangle = -\frac{1}{1 + s_0}, \quad (3.9)$$

sendo

$$s_0 = \frac{2g_{ef}^2}{(\Gamma_{21} + \gamma_2)^2} |\alpha|^2. \quad (3.10)$$

Através do caráter não-linear da equação (3.7), podemos esperar mais de uma solução possível, ou seja, para um único valor da força do campo de prova ( $\varepsilon$ ) podemos ter mais de um valor de campo transmitido. Para determinados conjuntos de parâmetros do sistema, o mesmo pode apresentar até três soluções reais e físicas, sendo cada uma delas, uma solução para um estado estacionário diferente para qual o sistema pode evoluir.

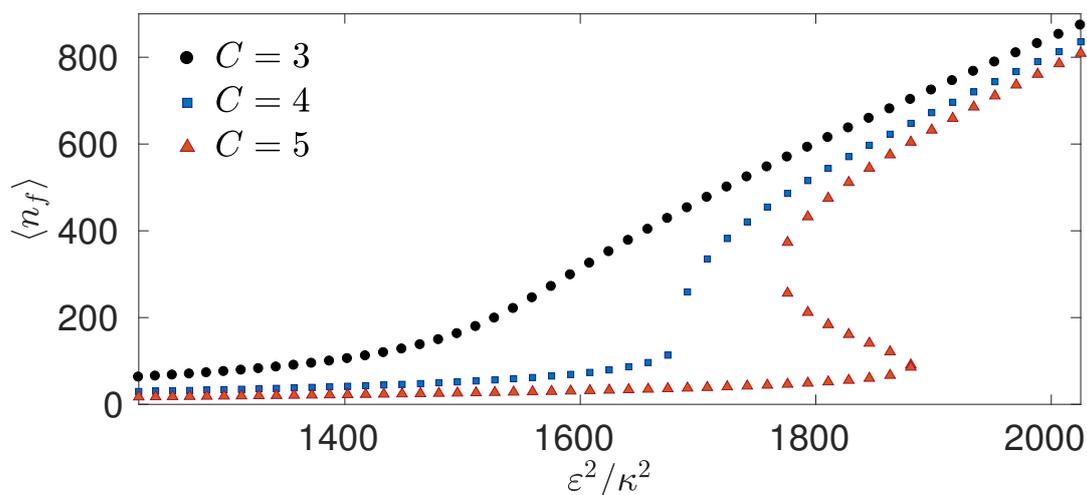


Figura 14 – Número médio de fótons  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus intensidade normalizada do campo de bombeio ( $\varepsilon^2/\kappa^2$ ) para diferentes valores de cooperatividade ( $C$ ) em um sistema composto por  $N$  átomos de 2 níveis presos dentro de uma cavidade óptica e na presença de um campo de bombeio de força  $\varepsilon$ . Parâmetros ajustados:  $\kappa = 1$ ,  $N = 1000$  e  $\Delta_P = \Delta_2 = 0$ .

Analisando as soluções do sistema através da abordagem usual, isto é, analisando o comportamento do campo transmitido em função da variação do campo de entrada (campo de prova), podemos observar a curva característica de sistemas biestáveis, a histerese. Mais que isso, podemos investigar o que acontece quando alteramos o valor da cooperatividade  $C$ , como mostrado na figura 14, onde podemos notar que quanto maior a cooperatividade do sistema, maior é a largura da histerese associada ao comportamento biestável do sistema e além disso, notamos que existe um limiar para a observação do fenômeno da biestabilidade óptica nesse sistema de átomos de dois níveis, para  $C > 4$ , como demonstrado em [12].

## 3.2 Biestabilidade óptica em átomos de 3 níveis

Assim como no caso de dois níveis anteriormente discutido, o fenômeno da biestabilidade óptica em átomos de 3 ou mais níveis já foi muito bem estudado [13]. O interesse nesses sistemas biestáveis é justificado por sua ampla lista de possíveis aplicações e no

caso de átomos de 3 (ou mais) níveis, pelo fato de que o fenômeno da biestabilidade óptica é agora controlável a partir de parâmetros externos, diferentemente de sistemas de átomos de 2 níveis.

Durante esta seção, iremos considerar um sistema composto por  $N$  átomos de 3 níveis não interagentes entre si, presos dentro de uma cavidade óptica com taxa de decaimento  $\kappa$ , na presença de um campo de bombeio que atua no modo quantizado dentro da cavidade com força  $\varepsilon$  e frequência  $\omega_P$  e um campo de controle com frequência de Rabi  $\Omega_c$  e frequência  $\omega_c$ , idêntico ao descrito na seção 1.3 e ilustrado na figura 2, cujo hamiltoniano e equação mestra são dados pelas equações (1.26) e (1.27), respectivamente. Estaremos sempre trabalhando aqui no regime de aprisionamento coerente de populações (CPT), que como já dito anteriormente, consiste em considerar um campo de prova sempre mais intenso ou da ordem do campo de controle, neste caso,  $g\langle a \rangle \gtrsim \Omega_c$ .

A partir das equações (1.26) e (1.27), utilizando a relação dada pela equação (3.3), podemos, através da aproximação semiclássica, obter as equações dos valores médios da derivada temporal de cada um dos operadores do sistema, obtendo o seguinte sistema

$$\dot{\alpha} = i(\Delta_P + i\kappa)\alpha - i\varepsilon^* - ig^*\langle S_{13} \rangle, \quad (3.11)$$

$$\langle \dot{S}_{13} \rangle = i\{(\Delta_P - \Delta_1) + i(\Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_3)\}\langle S_{13} \rangle - i\Omega_c\langle S_{12} \rangle + ig\alpha(\langle S_{33} \rangle - \langle S_{11} \rangle), \quad (3.12)$$

$$\langle \dot{S}_{12} \rangle = i(\Delta_P + \Delta_2 - \Delta_1 + i\gamma_2)\langle S_{12} \rangle - i\Omega_c^*\langle S_{13} \rangle + ig\alpha\langle S_{32} \rangle, \quad (3.13)$$

$$\langle \dot{S}_{23} \rangle = i\{-\Delta_2 + i(\Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_2 + \gamma_3)\}\langle S_{23} \rangle - ig\alpha\langle S_{21} \rangle + i\Omega_c(\langle S_{33} \rangle - \langle S_{22} \rangle), \quad (3.14)$$

$$\langle \dot{S}_{11} \rangle = -ig^*\alpha^*\langle S_{13} \rangle + ig\alpha\langle S_{31} \rangle + 2\Gamma_{31}\langle S_{33} \rangle, \quad (3.15)$$

$$\langle \dot{S}_{22} \rangle = -i\Omega_c^*\langle S_{23} \rangle + i\Omega_c\langle S_{32} \rangle + 2\Gamma_{32}\langle S_{33} \rangle, \quad (3.16)$$

$$\langle \dot{S}_{33} \rangle = -\frac{d\langle S_{11} \rangle}{dt} - \frac{d\langle S_{22} \rangle}{dt}. \quad (3.17)$$

Diferentemente do sistema de átomos de dois níveis, esse sistema de equações não possui solução analítica, mas pode ser resolvido por dois métodos numéricos: a partir da evolução do sistema para um tempo muito longo (muito maior que os tempos de relaxação do sistema), a fim de garantir que realmente alcancemos o estado estacionário e também através da solução numérica do sistema homogêneo quando fazemos  $\langle \dot{O} \rangle = 0$ , o que garante de fato que as soluções encontradas serão estacionárias, a qual será utilizada para obter todos os gráficos aqui presentes. Ambos os métodos foram implementados no Matlab<sup>®</sup> e no Mathematica<sup>®</sup>. Vale ressaltar que a aproximação semiclássica é válida e descreve muito bem o sistema para um número grande de átomos em um regime de fraco acoplamento com o modo da cavidade, como podemos observar nas figuras 15 e 16, respectivamente.

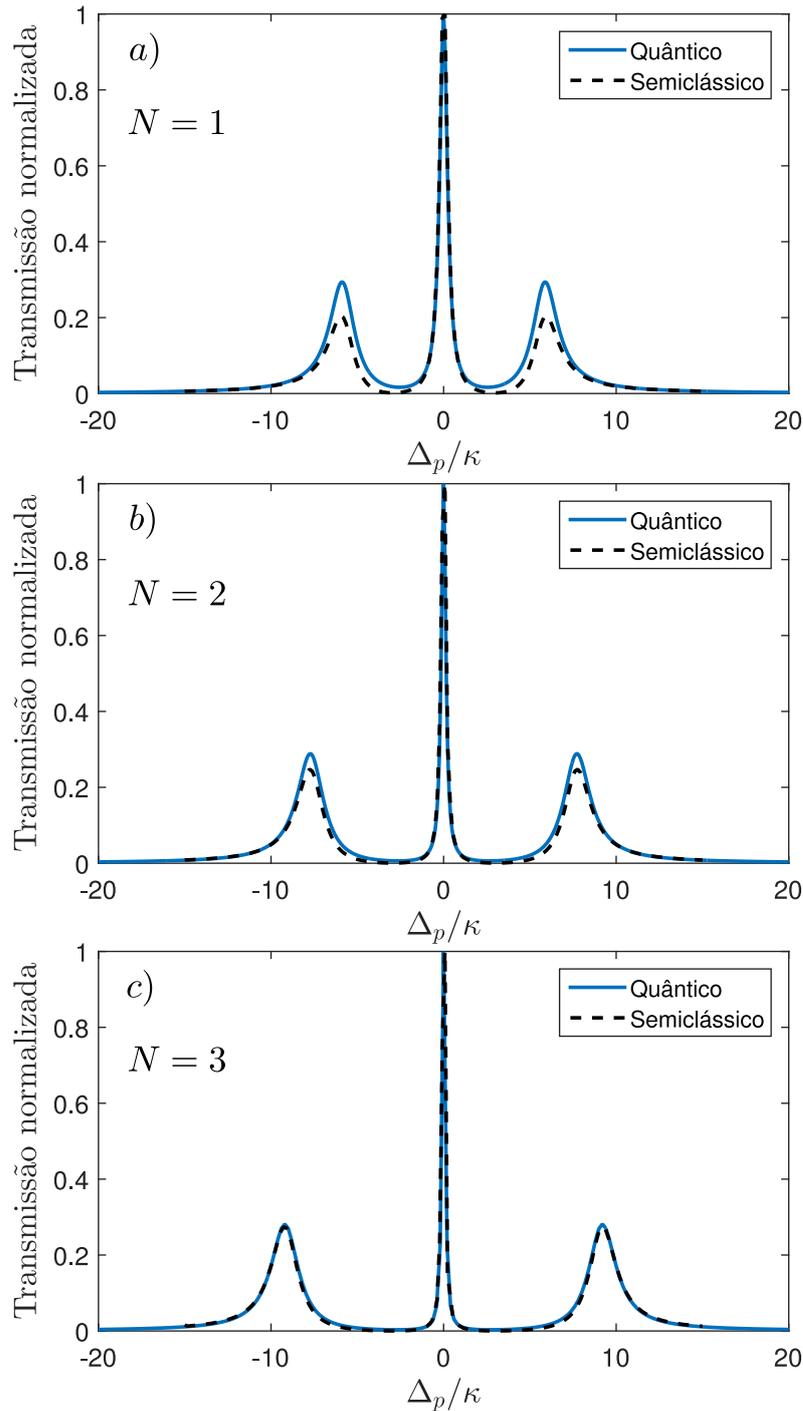


Figura 15 – **Validade da aproximação semiclassical.** Comparação entre os espectros de transmissão normalizada  $\langle a^\dagger a \rangle / |\varepsilon/\kappa|^2$  versus  $\Delta_P/\kappa$ , obtidos pela formulação quântica e da aproximação semiclassical. Como podemos ver para esses parâmetros, para  $N = 3$  a aproximação semiclassical já reproduz bem o resultado obtido pelo método totalmente quântico. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $g = 5\kappa$ ,  $\varepsilon = \sqrt{0,01}\kappa$  e  $\Omega_c = 3\kappa$ .

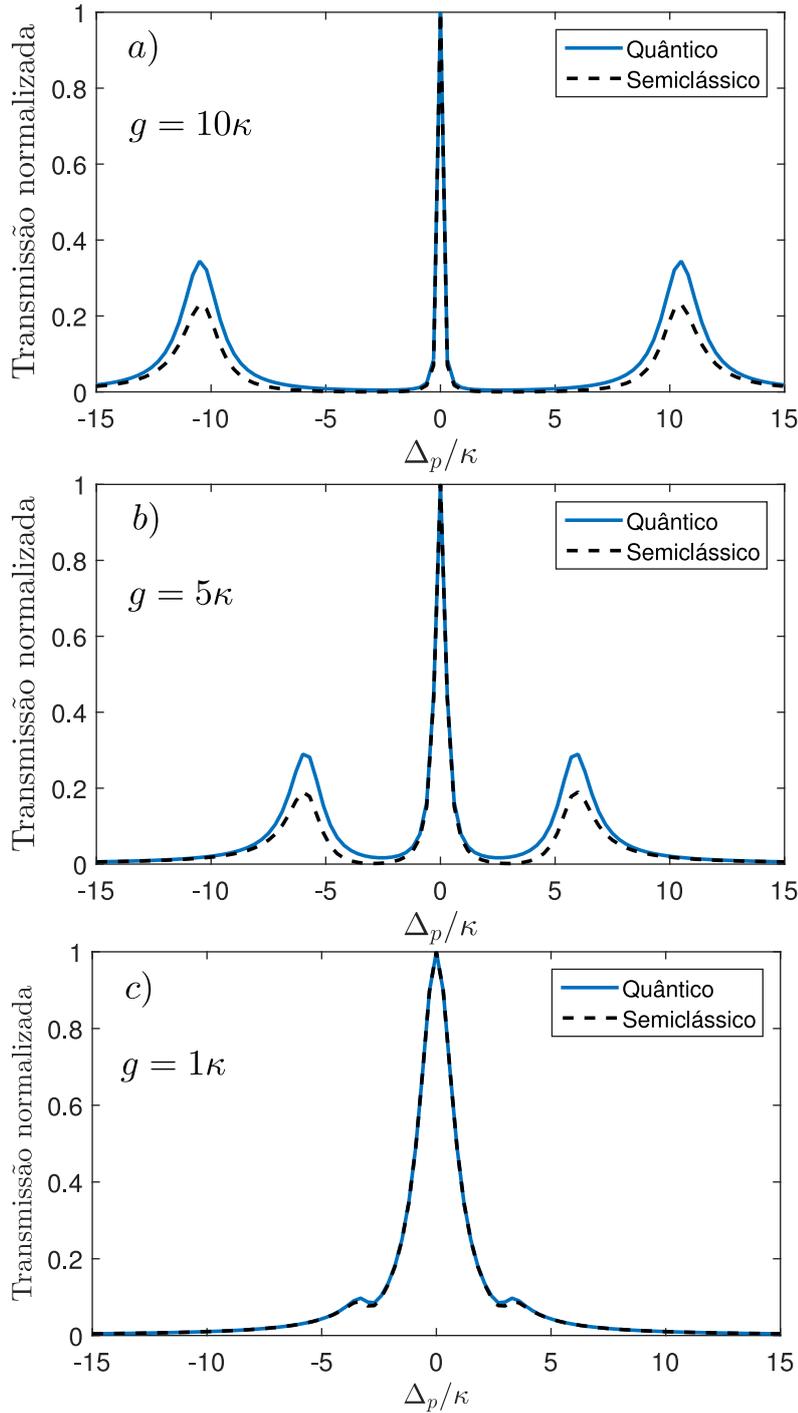


Figura 16 – **Validade da aproximação semiclassical.** Comparação entre os espectros de transmissão normalizada  $\langle a^\dagger a \rangle / |\varepsilon/\kappa|^2$  versus  $\Delta_P/\kappa$ , obtidos pela formulação quântica e da aproximação semiclassical onde verificamos que as duas soluções se aproximam cada vez mais conforme diminuimos o valor de  $g$ . Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $N = 1$ ,  $\varepsilon = \sqrt{0,01}\kappa$  e  $\Omega_c = 3\kappa$ .

Apesar da grande vantagem dos sistemas de átomos de três níveis, que consiste em podermos controlar o fenômeno da biestabilidade óptica e, por consequência, sua histerese característica por meio de parâmetros externos ajustáveis, os estudos realizados utilizando

esses sistemas de átomos de três níveis são novamente realizados investigando como o campo transmitido varia em função do campo de prova, mas desta vez, cientes que para diferentes valores de parâmetros externos do sistema, podemos provocar alterações ao perfil biestável do sistema, ajustando a sua histerese de acordo com sua necessidade. A figura 17 mostra como ocorre essa alteração conforme variamos o valor da cooperatividade do sistema, assim como feito no estudo do sistema de átomos de dois níveis, variando apenas o valor de  $g$ , mantendo fixos os demais parâmetros, inclusive o número de átomos presos no interior da cavidade óptica ( $N$ ). Na figura 17 plotamos o número médio de fótons dentro da cavidade ( $\langle n_f \rangle$ ) como função de  $\varepsilon/\kappa$ . Novamente, como no caso do sistema de átomos de dois níveis, observamos que conforme aumentamos a cooperatividade do sistema, aumentamos a largura da histerese.

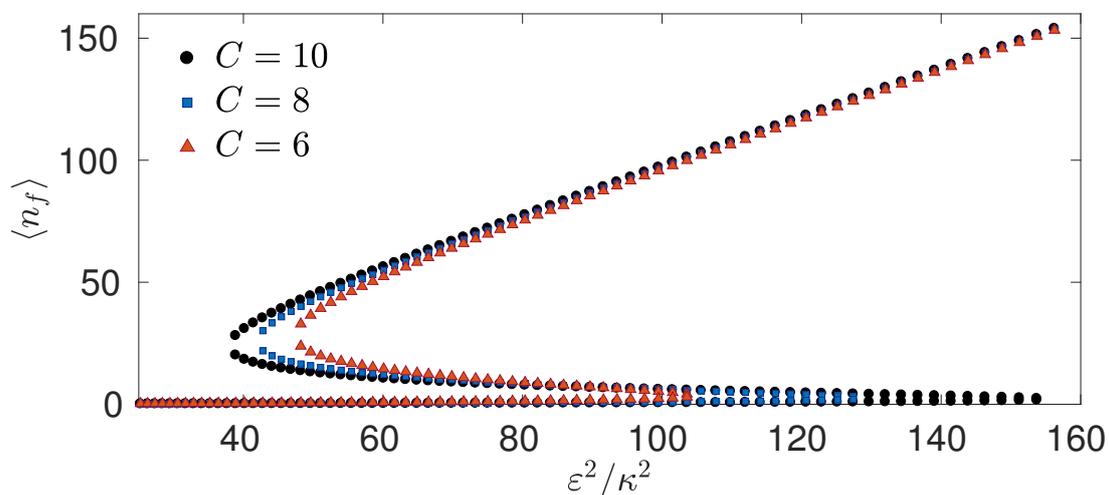


Figura 17 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  como função de  $\varepsilon^2/\kappa^2$  para um sistema composto de  $N$  átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova e para diferentes valores de cooperatividade. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $\Delta_P = 0,1\kappa$ ,  $\Omega_c = 0,3\kappa$  e  $N = 1000$ .

Além da cooperatividade do sistema, podemos investigar a mudança no comportamento biestável do sistema através de variações na dessintonia do campo de prova ( $\Delta_P$ ) e a intensidade do campo de controle através da sua frequência de Rabi ( $\Omega_c$ ). Esses estudos estão representados nas figuras 18 e 19, respectivamente. A partir dessas figuras, podemos concluir que a histerese se alarga conforme aumentamos a dessintonia do campo de prova ( $\Delta_P$ ) e diminuímos a intensidade do campo de controle ( $\Omega_c$ ).

Para ambos os sistemas, de dois ou três níveis, a observação experimental do que foi representado nas figuras 14,17, 18 e 19 é realizada preparando a amostra de  $N$  átomos aprisionados dentro de uma cavidade óptica em um estado inicial específico e após o início do experimento com o campo de prova desligado, aumentar a sua intensidade até

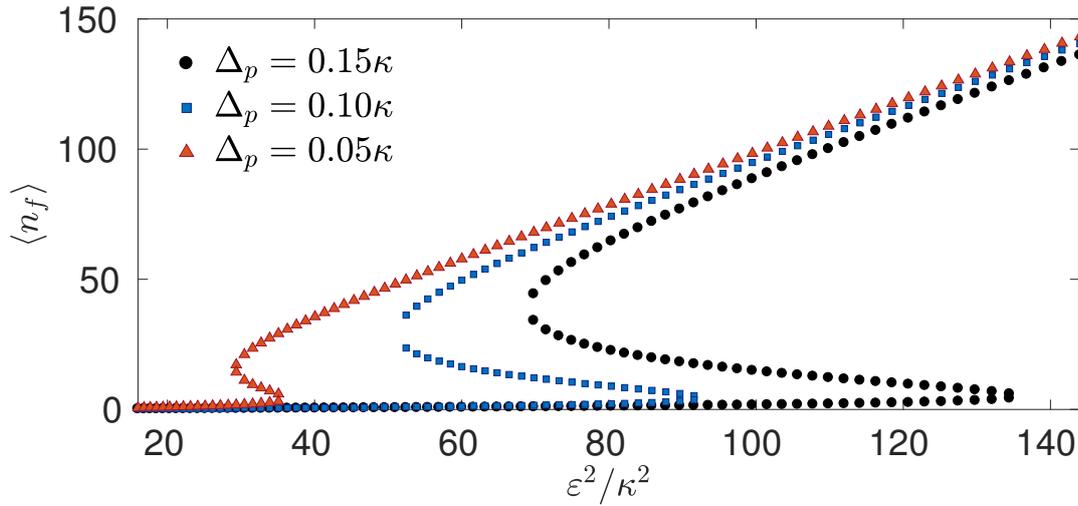


Figura 18 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  como função de  $\varepsilon^2/\kappa^2$  para um sistema composto de  $N$  átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova e para diferentes valores de dessintonia do campo de prova. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $C = 5$ ,  $\Omega_c = 0,3\kappa$  e  $N = 1000$ .

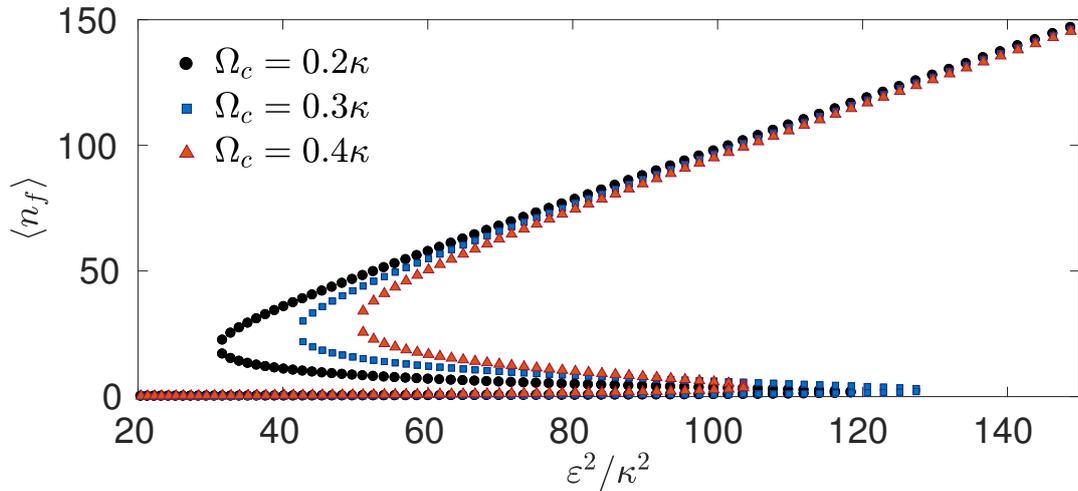


Figura 19 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  como função de  $\varepsilon^2/\kappa^2$  para um sistema composto de  $N$  átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova e para diferentes valores da frequência de Rabi do campo de controle. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $C = 8$ ,  $\Delta_p = 0,1\kappa$  e  $N = 1000$ .

a saturação do sistema e em seguida diminuí-la até desligá-lo novamente. Fazendo isso, o que se observa é uma pequena diferença com relação às curvas mostradas nas figuras anteriormente mencionadas. Tal diferença é representada na figura 20, onde uma das curvas foi obtida através da busca de raízes para o sistema algébrico de equações obtido

impondo  $\langle \dot{O} \rangle = 0$  nas equações (3.11)-(3.17), ou seja, o mesmo método já discutido de forma breve anteriormente e usado para reproduzir todos os gráficos apresentados até agora. A outra curva, foi obtida através da evolução do sistema de equações diferenciais (3.11)-(3.17) para um tempo suficientemente longo de modo a garantir que o mesmo tenha evoluído para o estado estacionário.

Vale ressaltar que esse tempo de evolução pode ser muito grande para determinados regimes de parâmetros, o que inviabiliza a utilização do método tanto por questões de praticidade e rapidez quanto por confiabilidade, uma vez que o resultado obtido através do mesmo pode ser meramente fruto de uma evolução para um tempo muito longo, mas que mesmo assim, não foi longo o suficiente para que o sistema alcançasse o estado estacionário. Por isso, é fundamental utilizarmos os dois métodos de maneira complementar, comparando os resultados obtidos por cada um, afim de garantir um resultado consistente.

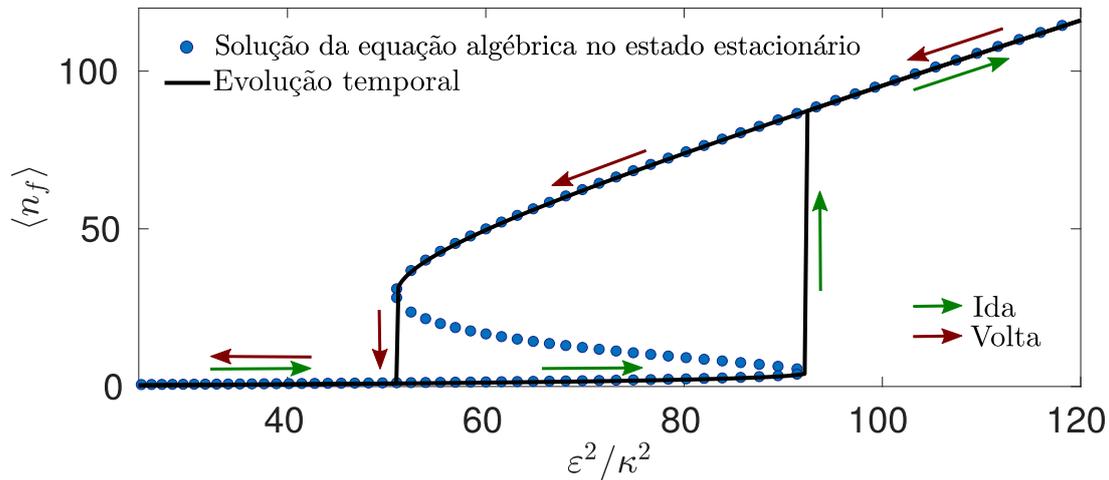


Figura 20 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  como função de  $\varepsilon^2/\kappa^2$  obtido para os mesmos parâmetros através de dois métodos distintos. Os pontos em azul representam a solução do sistema de equações algébricas obtidas do sistema de equações (3.11)-(3.17) fazendo  $\langle \dot{O} \rangle = 0$ , enquanto a curva em preto representa a solução do sistema de equações diferenciais (3.11)-(3.17) evoluindo o sistema por um tempo suficientemente longo de modo a garantir que o mesmo tenha atingido o estado estacionário. As setas em verde representam a primeira metade do experimento quando aumentamos a intensidade do campo de prova até a saturação do sistema, enquanto as em vermelho representam a segunda metade, onde diminuimos a intensidade. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $C = 5$ ,  $\Delta_P = 0,1\kappa$ ,  $\Omega_c = 0,3\kappa$ ,  $N = 1000$  e  $t = 10^4\kappa$  o tempo total de evolução do sistema para cada valor de  $\varepsilon$ .

Experimentalmente é possível observar apenas dois estados estacionários para um único valor de entrada, como na curva sólida da figura 20 e não três como mostram os pontos em azul, os quais foram obtidos encontrando a raiz do sistema algébrico. Essa

terceira raiz do sistema de equações para o estado estacionário, apesar de ser uma solução física, ou seja, que obedece as condições de que as populações dos níveis atômicos devem ser reais e que a sua soma deve coincidir com o número de átomos no interior da cavidade, é bastante instável, sendo necessário que o sistema esteja em um estado muito preciso e específico para que possa evoluir para esses estados, sendo sensível a pequenas flutuações. Outra coisa interessante que podemos notar em todas as figuras feitas até agora, onde analisamos a mudança no campo transmitido enquanto variamos a intensidade do campo de controle, é que a necessidade de elevar a intensidade do campo de prova até a saturação do sistema faz com que sempre trabalhemos com um número de fótons grande dentro da cavidade, o que pode ser um empecilho dependendo do que queremos estudar.

O objetivo desse trabalho é ir além dos estudos apresentados na literatura sobre biestabilidade óptica, em que é mostrado como o campo transmitido varia em função do campo de entrada. Aqui analisamos essa variação como função dos parâmetros externos  $\Omega_c$  e  $\Delta_P$ . A ideia inicial era tentar encontrar outros regimes de biestabilidade, ou seja, investigar como o campo transmitido se comporta em função da variação de outros parâmetros do sistema a fim de entender mais sobre o fenômeno de biestabilidade óptica, atingir um nível bem maior de controle sobre o comportamento biestável e propor novas aplicações, tudo isso utilizando ainda o mesmo sistema de átomos de três níveis.

O sistema em questão apresenta além da intensidade do campo de prova, mais dois parâmetros externos variáveis, sendo eles a intensidade do campo de controle ( $\Omega_c$ ) e a dessintonia do campo de prova ( $\Delta_P$ ). Pensando nisso realizamos a análise do mesmo tipo da que fizemos anteriormente nas figuras 17, 18 e 19, mas agora observando como a transmissão varia em função desses outros dois parâmetros. Ao fazer isso, observamos um comportamento biestável da transmissão pela cavidade óptica em função de mais duas variáveis do sistema, onde podemos estudar como a largura das suas histereses se comportam com a variação de cada um dos outros parâmetros do sistema.

### 3.2.1 Biestabilidade óptica em função de $\Omega_c$

As figuras 21, 22 e 23 mostram o comportamento do campo transmitido, analisado aqui novamente pelo número médio de fótons na cavidade, mas dessa vez não em função da força do campo de prova ( $\varepsilon$ ), mas sim como função da frequência de Rabi do campo de controle ( $\Omega_c$ ).

A partir dessa análise podemos concluir que podemos controlar o perfil biestável em função do parâmetro externo  $\Omega_c$  a partir de mudanças nos parâmetros  $C$ ,  $\varepsilon$  e  $\Delta_P$ , de modo que a largura da histerese é maior conforme aumentamos o valor de  $C$  e  $\varepsilon$ , e quando diminuimos o valor de  $\Delta_P$ .

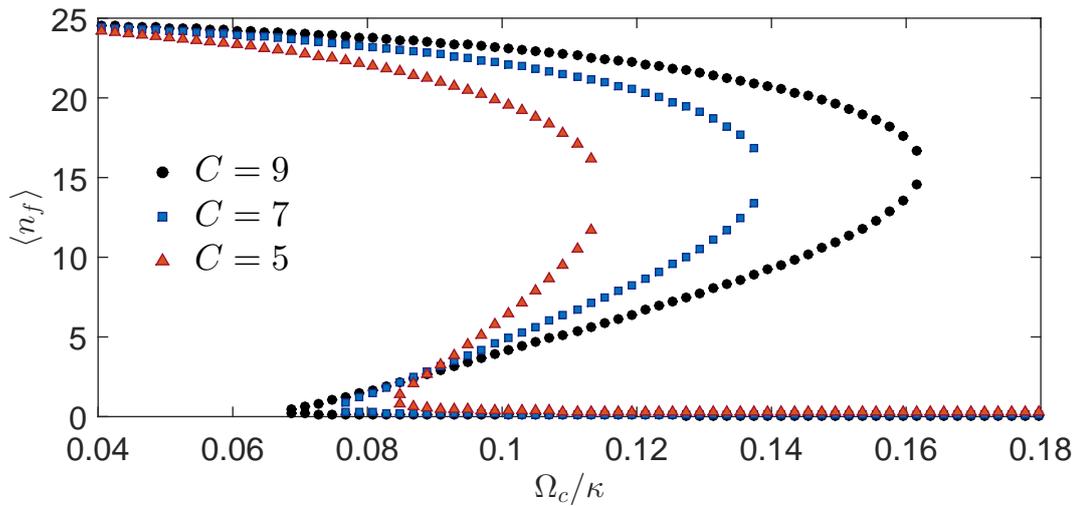


Figura 21 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus frequência de Rabi do campo de controle normalizada ( $\Omega_c/\kappa$ ) para diferentes valores de cooperatividade ( $C$ ), considerando um sistema composto de  $N$  átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0, 5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $\varepsilon = 5\kappa$ ,  $\Delta_P = 0, 1\kappa$  e  $N = 1000$ .

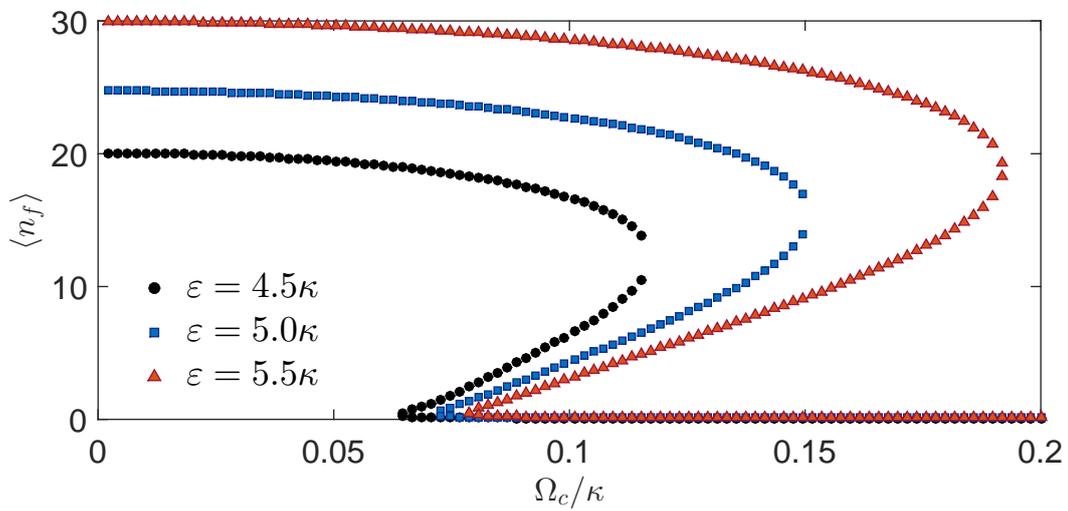


Figura 22 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus frequência de Rabi do campo de controle normalizada ( $\Omega_c/\kappa$ ) para diferentes valores de força do campo de prova ( $\varepsilon$ ), considerando um sistema composto de  $N$  átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0, 5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $C = 8$ ,  $\Delta_P = 0, 1\kappa$  e  $N = 1000$ .

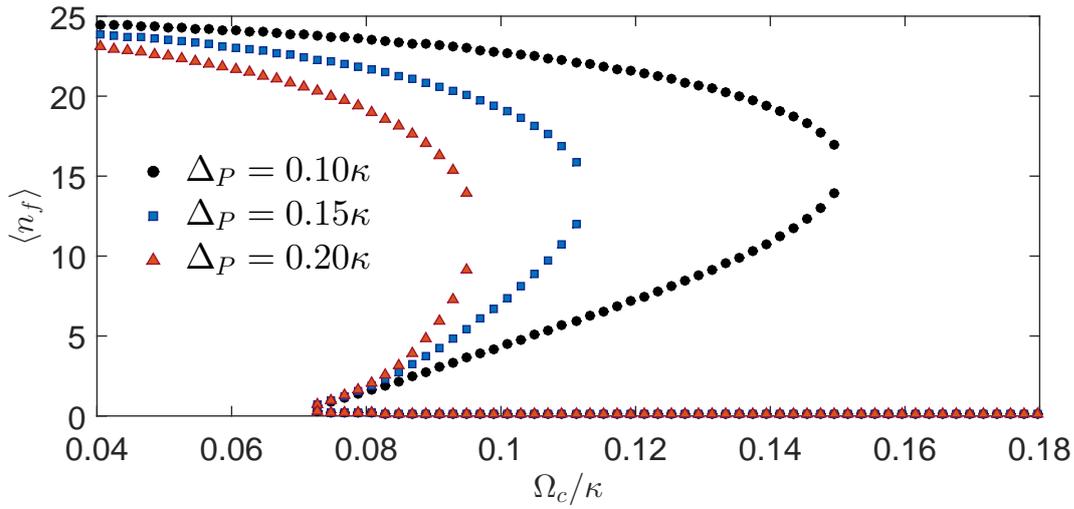


Figura 23 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus frequência de Rabi do campo de controle normalizada ( $\Omega_c/\kappa$ ) para diferentes valores de dessintonia entre a frequência do campo de prova e o modo da cavidade ( $\Delta_P$ ), considerando um sistema composto de  $N$  átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0, 5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $C = 8$ ,  $\varepsilon = 5\kappa$  e  $N = 1000$ .

### 3.2.2 Biestabilidade óptica em função de $\Delta_P$

Realizando a mesma análise da subseção anterior, onde investigamos o comportamento do campo transmitido como função do parâmetro externo  $\Omega_c$ , mas agora observando como se dá esse comportamento em função de  $\Delta_P$  e como a sua histerese característica se altera conforme os valores dos outros parâmetros do sistema.

Com isso podemos concluir que a histerese desse sistema que estamos estudando, em função da dessintonia do campo de prova ( $\Delta_P$ ), tem sua largura aumentada conforme aumentamos os valores de  $C$  e  $\varepsilon$ , e conforme diminuimos a intensidade do campo de controle através de  $\Omega_c$ .

Considerando tudo o que vimos, teoricamente somos capazes de controlar as histereses apresentadas por esses sistemas com certa precisão, já que sabemos quais parâmetros ajustar para aumentar, diminuir ou até mesmo deslocar as histereses relacionadas à biestabilidade óptica apresentada por determinado sistema. Portanto seríamos capazes de preparar um sistema de modo que o mesmo apresente um caráter biestável bem específico, escolhido de acordo com a aplicação desejada. Uma das aplicações possíveis desses sistemas biestáveis seriam em dispositivos capazes de medir pequenas flutuações de parâmetros onde é possível observar biestabilidade, como nos casos que mostramos nessas duas últimas seções, isto é, através do sistema estudado até agora poderíamos construir dispositivos capazes de detectar pequenas flutuações na intensidade de um campo por meio de  $\Omega_c$  e na

frequência através de  $\Delta_P$ .

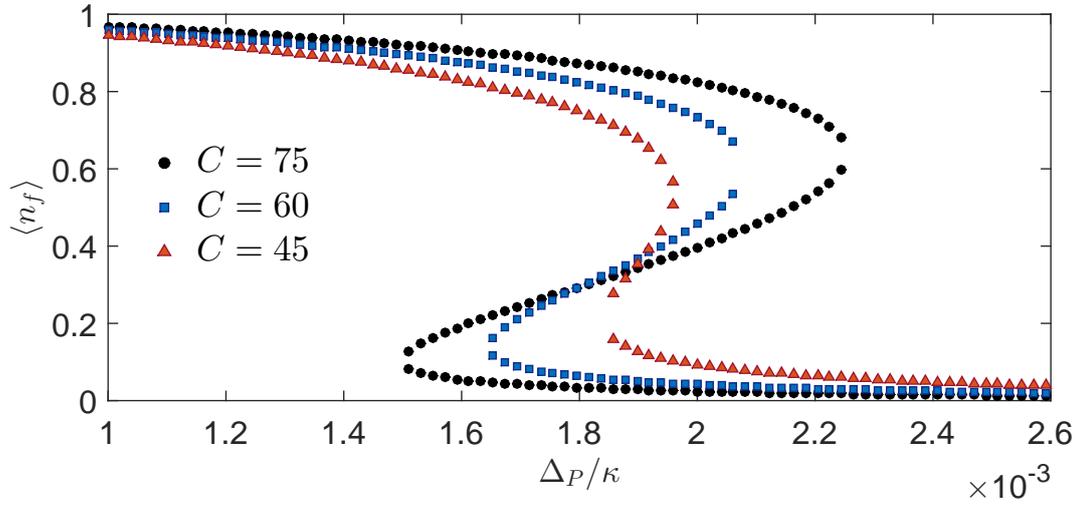


Figura 24 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus dessintonia entre a frequência do campo de prova e a do modo da cavidade normalizada ( $\Delta_P/\kappa$ ) para diferentes valores de cooperatividade ( $C$ ), considerando um sistema composto de  $N$  átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $\Omega_c = 0,2\kappa$ ,  $\varepsilon = 1\kappa$  e  $N = 1000$ .

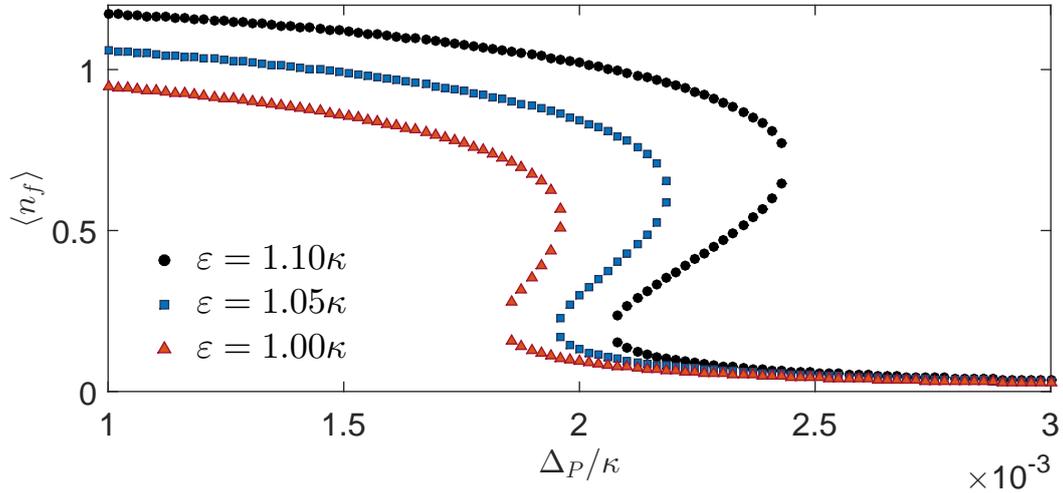


Figura 25 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus dessintonia entre a frequência do campo de prova e a do modo da cavidade normalizada ( $\Delta_P/\kappa$ ) para diferentes valores de força do campo de prova ( $\varepsilon$ ), considerando um sistema composto de  $N$  átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $C = 45$ ,  $\Omega_c = 0,2\kappa$  e  $N = 1000$ .

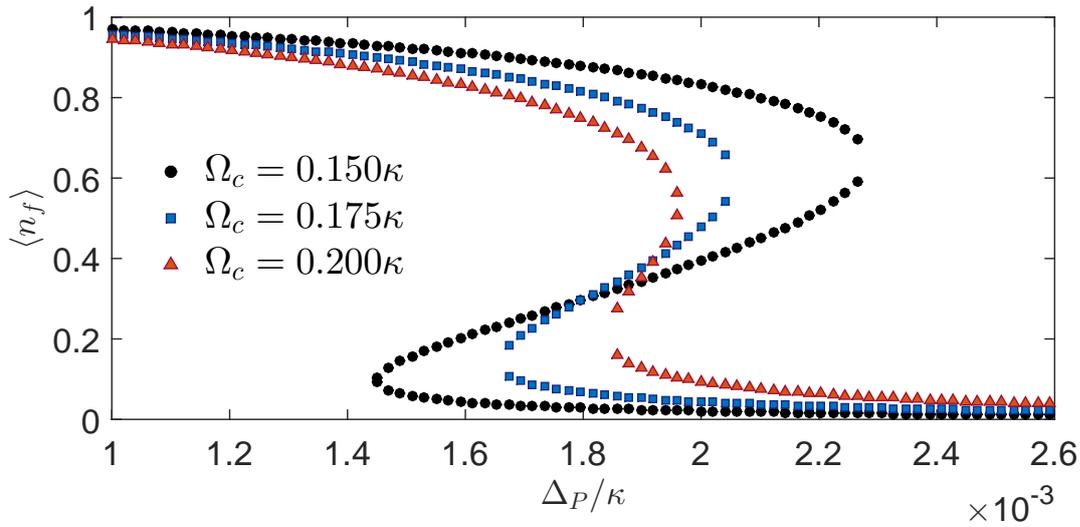


Figura 26 – Número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus dessintonia entre a frequência do campo de prova e a do modo da cavidade normalizada ( $\Delta_P/\kappa$ ) para diferentes valores de frequência de Rabi do campo de controle ( $\Omega_c$ ), considerando um sistema composto de  $N$  átomos de 3 níveis presos dentro de uma cavidade óptica, na presença de um campo de controle e um campo de prova. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $C = 45$ ,  $\varepsilon = 1\kappa$  e  $N = 1000$ .

### 3.3 Dispositivos detectores de pequenas flutuações

A ideia por trás do desenvolvimento desses dispositivos de detecção de pequenas flutuações é muito simples, e consiste basicamente em preparar o sistema, utilizando os conhecimentos adquiridos nas subseções 3.2.1 e 3.2.2, de acordo com a precisão que queremos alcançar na detecção e em qual parâmetro esperamos detectar a flutuação.

A figura 27(a) mostra a transmissão em função da dessintonia do campo de prova de um sistema que apresenta biestabilidade óptica. Note que preparamos o sistema de modo que o mesmo tenha uma transmissão de cerca de 90% e que a largura da histerese seja  $\delta H$ . Depois de preparado o sistema, supomos que haja uma flutuação  $\delta\nu_P$  em  $\Delta_P$ , o que faz com que o sistema vá momentaneamente para um estado onde a transmissão é nula, como na figura 27(c). Quando o estado volta para o valor de  $\Delta_P$  inicial, sua transmissão não volta a ser de 90%, já que o sistema evolui para o outro estado estável da histerese, que possui transmissão nula, como mostrado na figura 27(d), ou seja, seríamos capazes de detectar flutuações muito pequenas a partir dessa brusca queda de transmissão.

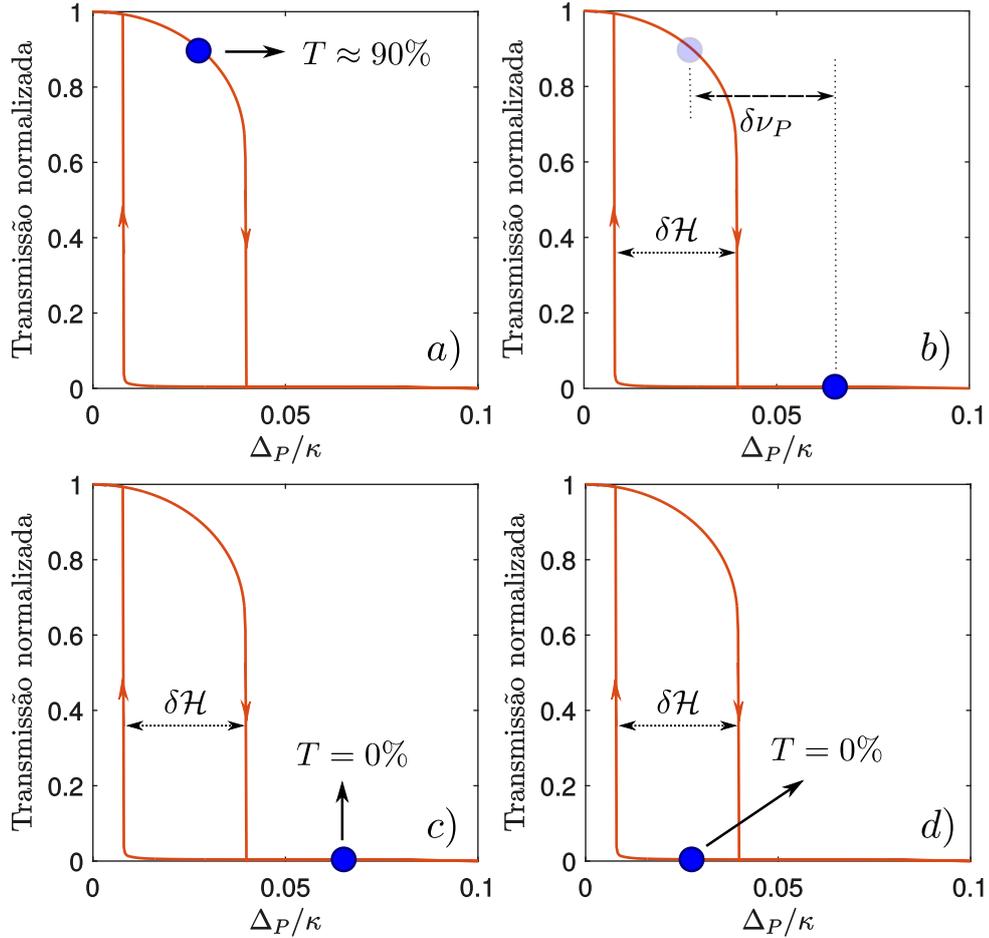


Figura 27 – Esquema ilustrativo do funcionamento do dispositivo de detecção de pequenas flutuações proposto. Em todos os painéis graficamos a transmissão normalizada  $\langle a^\dagger a \rangle / |\varepsilon/\kappa|^2$  como função da dessintonia entre as frequências do campo de prova e do modo da cavidade ( $\Delta_P/\kappa$ ). Em (a) temos um sistema preparado em um estado específico, apresentando uma transmissão de 90% e uma largura de histerese  $\delta H$ . Em (b) está representado o deslocamento de  $\delta \nu_P$  na dessintonia do campo de prova  $\Delta_P$ , resultado de uma flutuação desse parâmetro. Já em (c) é mostrado o estado para o qual o sistema vai durante o intervalo de tempo da flutuação, o qual apresenta transmissão nula e em (d) vemos que mesmo depois da flutuação, mesmo com o sistema voltando para o seu valor inicial de  $\Delta_P$ , ele não retorna para o seu estado inicial, continuando com transmissão nula.

### 3.3.1 Detector de pequenas flutuações de $\Omega_c$

A partir da ideia esquematizada na figura 27, podemos preparar um sistema e fazer com que a frequência de Rabi do campo de controle ( $\Omega_c$ ) varie no tempo como

$$\Omega_c(t) = \Omega_c^0 + \delta\Omega_c e^{-\frac{1}{2} \frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.18)$$

sendo  $\Omega_c^0 = 5.35 \times 10^{-3} \kappa$  o valor da frequência de Rabi do campo de controle na ausência do pulso,  $\delta\Omega_c = 10^{-4} \kappa$  a variação em  $\Omega_c$  devido à flutuação,  $t_0 = 500 \kappa^{-1}$  o instante cujo

pulso atinge sua maior intensidade  $\Omega_c^{max} = 5.45 \times 10^{-3}\kappa$  e  $\sigma = 10\sqrt{2}\kappa^{-1}$ , de modo que a FWHM do pulso seja  $2\sigma$ . A partir de tal flutuação, podemos observar se a transmissão irá se comportar como previmos no início da seção 3.3. A figura 28 mostra o perfil biestável do sistema, o modo como o parâmetro  $\Omega_c$  varia no tempo e qual a resposta da transmissão a essa flutuação.

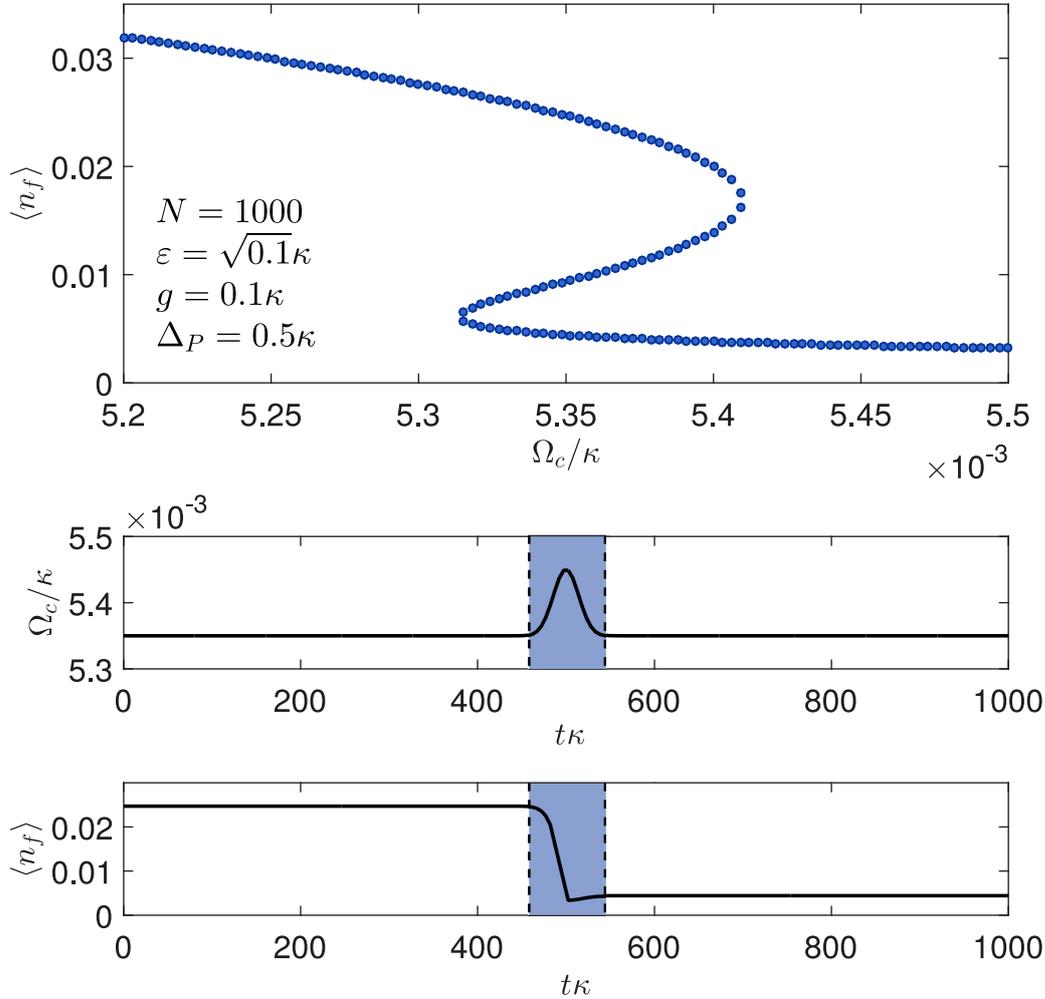


Figura 28 – Representação do funcionamento do dispositivo capaz de detectar pequenas flutuações na intensidade do campo de controle  $\Omega_c$ . No primeiro quadro, em que plotamos o número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus a frequência de Rabi do campo de controle normalizada ( $\Omega_c/\kappa$ ), mostramos a histerese associada a esse sistema, preparada e ajustada para que apresente uma largura da ordem de  $10^{-4}\Omega_c/\kappa$ . Logo abaixo temos como a frequência de Rabi do campo de controle varia como função do tempo, onde o intervalo em cinza destaca o intervalo total do pulso (flutuação), cuja amplitude da flutuação é da ordem da largura da histerese. Por último temos como  $\langle n_f \rangle$  se comporta no tempo sob os efeitos da flutuação. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $\varepsilon = \sqrt{0,1}\kappa$ ,  $C = 5$ ,  $\Delta_P = 0,5\kappa$  e  $N = 1000$ .

De fato podemos observar que como já havíamos previsto, o sistema proposto é capaz de detectar através de uma queda abrupta da transmissão, flutuações muito pequenas

na intensidade do campo de controle, ou seja, de  $\Omega_c$ . No caso analisado, o sistema foi capaz de reagir a uma flutuação da ordem de  $10^{-4}\Omega_c/\kappa$  e vale notar que é possível aprimorar ainda mais essa detecção, de forma que seja possível observar uma variação ainda maior da transmissão e uma detecção ainda mais precisa, mas é importante levar em conta que como  $\Omega_c$ , os demais parâmetros do sistema podem flutuar e quanto mais estreita for a histerese, maior a probabilidade dessas outras flutuações atrapalharem a detecção.

### 3.3.2 Detector de pequenas flutuações de $\Delta_P$

Seguindo os mesmos passos da subseção 3.3.1, podemos propor um detector de flutuações de frequência de um dado campo de prova, que sofre uma flutuação em um determinado intervalo de tempo da mesma forma que a equação (3.18), sendo

$$\Delta_P(t) = \Delta_P^0 + \delta\Delta_P e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.19)$$

onde  $\Delta_P^0 = 1.9 \times 10^{-3}\kappa$  é o valor da dessintonia do campo de prova fora do intervalo de tempo onde ocorre a flutuação,  $\delta\Delta_P = 10^{-4}\kappa$  a variação máxima em  $\Delta_P$  provocada pela flutuação, fazendo com que a dessintonia do campo de prova atinga seu valor máximo  $\Delta_P^{max} = 2.0 \times 10^{-3}$  no instante  $t_0 = 500\kappa^{-1}$  e  $\sigma = 10\sqrt{2}\kappa^{-1}$ .

A figura 29 mostra novamente a histerese característica do sistema que apresenta biestabilidade óptica, como o parâmetro  $\Delta_P$  varia no tempo e como o campo transmitido reage a essa variação.

Novamente, o sistema proposto foi capaz de detectar uma flutuação da ordem de  $10^{-4}\Delta_P/\kappa$ , e tendo em vista as mesmas considerações da subseção 3.2.1, podemos concluir que a caracterização do fenômeno da biestabilidade óptica controlável em sistemas de átomos de 3 níveis é de fundamental importância para que possamos propor aplicações como a de detectores aqui citada, já que o refinamento das medidas (ou detecções) de tais dispositivos depende basicamente do nível de controle que temos sobre o perfil biestável do sistema.

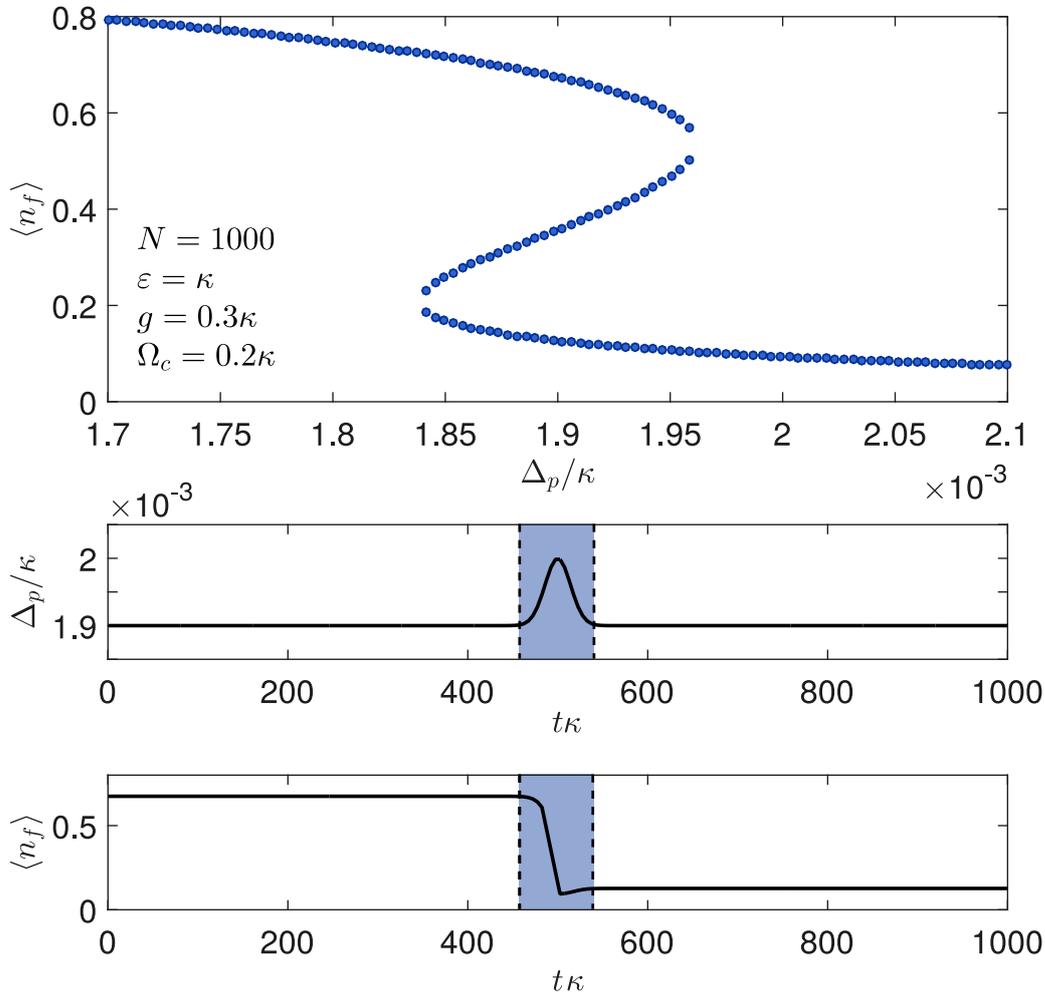


Figura 29 – Representação do funcionamento do dispositivo capaz de detectar pequenas flutuações na dessintonia do campo de prova  $\Delta_P$ . No primeiro gráfico, em que plotamos o número médio de fótons dentro da cavidade  $\langle n_f \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  versus a dessintonia normalizada ( $\Delta_P/\kappa$ ), mostramos a histerese associada a esse sistema, preparada e ajustada de modo que a mesma apresente uma largura da ordem de  $10^{-4}\Omega_c/\kappa$ . Logo abaixo temos como a dessintonia do campo de prova varia como função do tempo, sendo que o intervalo em cinza destaca o intervalo total do pulso (flutuação), que é da ordem da largura da histerese. Por último temos como  $\langle n_f \rangle$  se comporta no tempo sob os efeitos da flutuação. Parâmetros ajustados:  $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $\varepsilon = \kappa$ ,  $C = 45$ ,  $\Omega_c = 0,2\kappa$  e  $N = 1000$ .

## 4 Conclusões

No capítulo 2 apresentamos um estudo da influência sobre a resposta óptica do decaimento assimétrico do estado excitado de sistemas de três níveis na configuração  $\Lambda$ , átomos e QDM, nos regimes de EIT e CPT. Quando comparamos a resposta óptica e as populações dos estados fundamentais dos dois sistemas notamos uma diferença enorme quando trabalhamos no regime de CPT, enquanto que para o regime de EIT os sistemas apresentavam um resposta bastante similar.

A diferença mais fundamental entre os dois sistemas está nas diferentes taxas de decaimentos do nível excitado: enquanto para o sistema atômico temos um decaimento do nível  $|3\rangle$  para o nível  $|2\rangle$  não nulo, ou seja,  $\Gamma_{32} \neq 0$ , o sistema de QDM não possui decaimento do nível excitado  $|3\rangle$  para o nível fundamental  $|2\rangle$ . Essa diferença intrínseca leva à diferenças na dinâmica dos dois sistemas.

Quando temos a taxa de decaimento do nível  $|3\rangle$  para o nível fundamental  $|1\rangle$   $\Gamma_{31} \gg \Gamma_{32}$ , como é no caso de uma QDM, as susceptibilidades não lineares  $\chi^{(3)}$  e  $\chi^{(5)}$  são muito menores (em valor absoluto) do que no caso onde temos  $\Gamma_{31} \approx \Gamma_{32}$ , ou seja, no sistema atômico. Logo, podemos concluir que os efeitos não lineares presentes em experimentos de EIT e CPT estão intimamente relacionados com o canal de decaimento  $\Gamma_{32}$ , o qual está associado com a transição que é acoplada pelo campo de controle. Por outro lado, taxas de decaimento  $\Gamma_{32}$  não nulas implicam em uma alta população do nível  $|2\rangle$  do sistema no limite em que  $\Omega_c$  ou  $T_e \ll \Omega_P$ .

Quando esse sistema é colocado dentro de uma cavidade óptica, isso resulta em uma situação de cavidade vazia, elevando assim a transmissão do sistema. Enquanto isso, para  $\Gamma_{32} = 0$ , nós recuperamos perfeitamente o comportamento de um átomo de dois níveis acoplado ressonantemente com o modo da cavidade, o qual apresenta transmissão nula quando o campo de prova é ressonante com o modo da cavidade e no regime de forte acoplamento entre átomo/QDM e cavidade. Com isso, somente na ressonância exata nós temos o *dark-state*, o que implica em um pico de transmissão extremamente fino para sistemas de QDM em comparação com sistemas atômicos [5, 8, 31, 32].

Um estudo recente [37], utilizou um sistema atômico de três níveis na configuração  $\Lambda$  no regime de CPT, assim como o apresentado nesse trabalho, para a proposta de aplicações em metrologia, devido a estreita largura de linha que o sistema apresenta. Como vimos no capítulo 2, podemos fazer uso de um sistema como o de QDM, com decaimento assimétrico do nível excitado, a fim de obter larguras de linha cada vez mais estreitas. Desta forma, esperamos que esse trabalho seja útil nos estudos de efeitos não lineares em processos de EIT e CPT em futuras aplicações em estreitamento de linha de cavidades e metrologia.

Na segunda metade do trabalho, exposta ao longo do capítulo 3, fizemos um breve apanhado dos estudos clássicos que podemos encontrar na literatura sobre biestabilidade óptica em sistemas de átomos de dois e três níveis, o que nos permitiu entender as vantagens em se trabalhar com átomos de três níveis, principalmente pela controlabilidade que surge através de parâmetros externos desses sistemas. Vimos também as complicações práticas que surgem por não conseguirmos mais uma expressão analítica para a transmissão como a que tínhamos para o sistema de átomos de dois níveis e pela solução numérica em si ser bastante complicada.

Após conseguirmos obter dois métodos de solução numérica para o sistema, fomos capazes de estudar a biestabilidade óptica no regime de CPT como função de dois parâmetros externos completamente ajustáveis do sistema,  $\Omega_c$  e  $\Delta_P$ , e investigar como a histerese associada ao fenômeno se altera quando variamos os valores dos demais parâmetros. Tal caracterização nos permitiu propor a aplicação desses sistemas em dispositivos detectores de pequenas flutuações em intensidade e frequência, onde vale ressaltar que, teoricamente, podemos preparar o sistema para que o mesmo apresente a precisão que desejarmos através de um ajuste fino de parâmetros.

O crescente interesse na biestabilidade óptica, desde os anos 80, surgiu com suas possíveis aplicações em dispositivos completamente ópticos, transistores ópticos, circuitos ópticos de processamento de informação e portas lógicas ópticas, onde a vantagem desses dispositivos se encontra no fato de não ser necessária uma conversão óptica-eletrônica, sendo possível o controle de luz com luz. Todas essas possíveis aplicações dependem fortemente do controle que temos sobre o fenômeno da biestabilidade nesses sistemas. Como perspectiva futura, iremos investigar de maneira mais profunda o fenômeno da biestabilidade óptica controlável, como apresentado nas subseções 3.2.1 e 3.2.2, com o intuito de investigar para quais regimes de parâmetros ( $C$ ,  $\varepsilon$ ,  $\Omega_c$  e  $\Delta_P$ ) o sistema apresenta biestabilidade. Com isso, esperamos que o estudo e caracterização que estão sendo realizados possam ser úteis para qualquer tipo de possível aplicação que possa surgir desse sistema.

# Referências

- 1 HARRIS, S. E.; FIELD, J.; IMAMOĞLU, A. Nonlinear optical processes using electromagnetically induced transparency. *Physical Review Letters*, APS, v. 64, n. 10, p. 1107, 1990. Citado na página 25.
- 2 MÜCKE, M. et al. Electromagnetically induced transparency with single atoms in a cavity. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 465, n. 7299, p. 755, 2010. Citado na página 25.
- 3 SOUZA, J. et al. Coherent control of quantum fluctuations using cavity electromagnetically induced transparency. *Physical review letters*, APS, v. 111, n. 11, p. 113602, 2013. Citado na página 25.
- 4 WU, H.; GEA-BANACLOCHE, J.; XIAO, M. Observation of intracavity electromagnetically induced transparency and polariton resonances in a doppler-broadened medium. *Physical review letters*, APS, v. 100, n. 17, p. 173602, 2008. Citado na página 25.
- 5 WANG, H. et al. Cavity-linewidth narrowing by means of electromagnetically induced transparency. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 25, n. 23, p. 1732–1734, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 25, 47, 51 e 71.
- 6 FLEISCHHAUER, M.; IMAMOĞLU, A.; MARANGOS, J. P. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media. *Reviews of modern physics*, APS, v. 77, n. 2, p. 633, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 44.
- 7 HAU, L. V. et al. Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 397, n. 6720, p. 594–598, 1999. Citado na página 25.
- 8 LUKIN, M. D. et al. Intracavity electromagnetically induced transparency. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 23, n. 4, p. 295–297, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 25, 47, 51 e 71.
- 9 LIU, C. et al. Observation of coherent optical information storage in an atomic medium using halted light pulses. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 409, n. 6819, p. 490–493, 2001. Citado na página 25.
- 10 OLIVEIRA, R. R. et al. Quantum memory and optical transistor based on electromagnetically induced transparency in optical cavities. *arXiv preprint arXiv:1603.05127*, 2016. Citado na página 25.
- 11 BORGES, H. et al. Tunneling induced transparency and slow light in quantum dot molecules. *Physical Review B*, APS, v. 85, n. 11, p. 115425, 2012. Citado na página 26.
- 12 GIBBS, H. *Optical bistability: controlling light with light*. [S.l.]: Elsevier, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 26, 53 e 55.
- 13 JOSHI, A.; XIAO, M. *Controlling steady-state and dynamical properties of atomic optical bistability*. [S.l.]: World Scientific, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 55.

- 14 LOUISELL, W. H.; LOUISELL, W. H. *Quantum statistical properties of radiation*. [S.l.]: Wiley New York, 1973. v. 7. Citado na página 27.
- 15 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum optics*. [S.l.]: AAPT, 1999. Citado na página 30.
- 16 JAYNES, E. T.; CUMMINGS, F. W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 51, n. 1, p. 89–109, 1963. Citado na página 30.
- 17 SHORE, B. W.; KNIGHT, P. L. The jaynes-cummings model. *Journal of Modern Optics*, Taylor & Francis, v. 40, n. 7, p. 1195–1238, 1993. Citado na página 30.
- 18 BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. *The theory of open quantum systems*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2002. Citado na página 33.
- 19 SOUZA, J. et al. Coherent control of quantum fluctuations using cavity electromagnetically induced transparency. *Physical review letters*, APS, v. 111, n. 11, p. 113602, 2013. Citado na página 36.
- 20 BIMBERG, D.; GRUNDMANN, M.; LEDENTSOV, N. N. *Quantum dot heterostructures*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999. Citado na página 39.
- 21 LEDENTSOV, N. et al. Direct formation of vertically coupled quantum dots in stranski-krastanow growth. *Physical Review B*, APS, v. 54, n. 12, p. 8743, 1996. Citado na página 39.
- 22 SOLOMON, G. et al. Vertically aligned and electronically coupled growth induced inas islands in gaas. *Physical review letters*, APS, v. 76, n. 6, p. 952, 1996. Citado na página 39.
- 23 FUJISAWA, T. et al. Spontaneous emission spectrum in double quantum dot devices. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 282, n. 5390, p. 932–935, 1998. Citado na página 42.
- 24 JENNINGS, C.; SCHEIBNER, M. Entanglement dynamics of molecular exciton states in coupled quantum dots. *Physical Review B*, APS, v. 93, n. 11, p. 115311, 2016. Citado na página 42.
- 25 BORRI, P. et al. Exciton dephasing in quantum dot molecules. *Physical review letters*, APS, v. 91, n. 26, p. 267401, 2003. Citado na página 42.
- 26 GIRODAY, A. B. de la et al. Exciton-spin memory with a semiconductor quantum dot molecule. *Physical review letters*, APS, v. 106, n. 21, p. 216802, 2011. Citado na página 42.
- 27 AUTLER, S. H.; TOWNES, C. H. Stark effect in rapidly varying fields. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 100, p. 703–722, Oct 1955. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.100.703>. Citado na página 42.
- 28 LU, X. et al. Transition from autler–townes splitting to electromagnetically induced transparency based on the dynamics of decaying dressed states. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, IOP Publishing, v. 48, n. 5, p. 055003, 2015. Citado na página 42.

- 29 WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. *Quantum optics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 48.
- 30 BOYD, R. W. *Nonlinear optics*. [S.l.]: Academic press, 2003. Citado na página 44.
- 31 PENG, Y. et al. Cavity linewidth narrowing by voltage-controlled induced transparency in asymmetry quantum dot molecules. *Optics Communications*, Elsevier, v. 284, n. 3, p. 824–827, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 71.
- 32 PENG, Y. et al. Ultranarrow linewidth and high gain of an optical cavity with enhanced self-kerr nonlinearity in quantum dot molecules. *Laser Physics Letters*, IOP Publishing, v. 11, n. 6, p. 065201, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 71.
- 33 JOHANSSON, J.; NATION, P.; NORI, F. Qutip: An open-source python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, Elsevier, v. 183, n. 8, p. 1760–1772, 2012. Citado na página 48.
- 34 SZÖKE, A. et al. Bistable optical element and its applications. *Applied Physics Letters*, AIP, v. 15, n. 11, p. 376–379, 1969. Citado na página 53.
- 35 MCCALL, S. L. Instabilities in continuous-wave light propagation in absorbing media. *Physical Review A*, APS, v. 9, n. 4, p. 1515, 1974. Citado na página 53.
- 36 GIBBS, H.; MCCALL, S.; VENKATESAN, T. Differential gain and bistability using a sodium-filled fabry-perot interferometer. *Physical Review Letters*, APS, v. 36, n. 19, p. 1135, 1976. Citado na página 53.
- 37 NICOLAS, L. et al. Coherent population trapping with a controlled dissipation: applications in optical metrology. *arXiv preprint arXiv:1712.04240*, 2017. Citado na página 71.



# Apêndices



# APÊNDICE A – Algoritmo para obtenção do estado estacionário: biestabilidade em átomos de 3 níveis

Como dito no capítulo 3, o sistema de equações diferenciais (3.11)-(3.17) dos valores médios das derivadas temporais dos operadores do sistema de átomos de três níveis, descrito na seção 3.2, não apresenta uma solução analítica. Apesar disso, podemos encontrar soluções para o estado estacionário do sistema de duas formas distintas: através da evolução temporal do sistema para um tempo suficientemente longo até o estado estacionário e através da busca por raízes do sistema de equações algébricas, quando assumimos  $\langle \dot{O} \rangle = 0$ .

A confiabilidade do método de evolução temporal se baseia em fazer testes para diferentes tempos totais de evolução do sistema, tempos esses que podem se tornar inviáveis, tecnicamente falando, para certos regimes de parâmetros, e após a comparação dos diferentes resultados, concluir se o sistema alcançou ou não o estado estacionário. Já no segundo método, temos certeza que as raízes encontradas representam a solução estacionária do sistema. Sendo assim, o método de busca por raízes do sistema no estado estacionário é muitas vezes mais prático, objetivo e confiável.

Nesse anexo serão apresentados dois algoritmos diferentes para a obtenção das raízes do sistema de equações algébrico com  $\langle \dot{O} \rangle = 0$ , implementados no Matlab<sup>®</sup> e no Mathematica<sup>®</sup>.

## A.1 Algoritmo para Matlab

Essa foi a primeira versão implementada do programa e pode ser dividida em três *scripts*: o código principal (*hysteresis.m*) e duas funções (*equations.m* e *check.m*) externas. Cada um deles será apresentado em detalhes, com comentários nos pontos mais importantes.

### A.1.1 Script principal: *hysteresis.m*

```

1  % Esse programa encontra raizes para o sistema de equacoes
    formado pelas
2  % medias das derivadas temporais dos operadores do sistema
    composto com N
3  % atomos de 3 niveis no interior de uma cavidade optica , na
    presenca de um
4  % campo de prova e um campo de controle
5
6  clear all
7  clc
8  tic
9
10 Nat = 1000; % numero de atomos
11 kappa = 1.0; % taxa de relaxacao da cavidade optica
12 EM = sqrt(1.0)*kappa; % forca do campo de controle
13 D1 = 0.0; % dessintonia do modo da cavidade com a transicao
    entre os niveis 1 e 3
14 D2 = 0.0; % dessintonia do campo de controle com a transicao
    entre os niveis 2 e 3
15 Dp = 0.5*kappa; % dessintonia do campo de prova com a transicao
    entre os niveis 1 e 3
16 G31 = 0.5*kappa; % taxa de decaimento espontaneo do nivel
    excitado 3 para o nivel fundamental 1
17 G32 = 0.5*kappa; % taxa de decaimento espontaneo do nivel
    excitado 3 para o nivel fundamental 2
18 gamma2 = 0.0; % defasagem do nivel 2
19 gamma3 = 0.0; % defasagem do nivel 3
20 G3 = G31+G32+gamma3; % taxa de decaimento total
21 C_list = linspace(4.0,8.0,20); % lista de valores de
    cooperatividade , que pode ser substituido por outro parametro
    , caso seja interessante analisar sua influencia na histerese

```

```
22
23 for nc = 1:length(C_list) % for para variacao do parametro
    externo, nesse caso a cooperatividade
24
25     g = sqrt(2*kappa*G3*C_list(nc)/Nat); % constante de
        acoplamento com modo da cavidade
26     Np = 400; % numero de pontos para a lista de valores de
        frequencia de Rabi do campo de controle Oc
27     Oc_list = linspace(0.012,0.02,Np); % lista de valores de Oc
28
29     count = 0; % numero de raizes obtidas para cada valor de Oc
30     nroots1 = 0; % numero de raizes obtidas para o Oc do passo
        anterior
31     nroots2 = 0; % numero de raizes obtidas para o Oc de dois
        passos atras
32     flag2 = 0; % muda para 1 quando encontrarmos o fim da
        histere
33
34     H1 = 999.0; H2 = 999.0; % valores para as posicoes do inicio
        e fim da histerese, sao valore absurdos para que fique
        evidente se ocorrer algum erro na medida
35
36     for em = 1:length(Oc_list) % for para os valores de Oc
        definidos na lista anterior
37
38         Oc = Oc_list(em); % Oc tem seu valor atualizado
39
40         if((flag2 == 1) && (Oc >= break_param)), break; end %
            condicao de checagem para que o programa termine de
            rodar um pouco depois do fim da histerese
41
42         nroots1 = nroots2; % atualiza o valor do numero de
            raiz do passo anterior
43         clear vec_roots; % limpa o vetor que armazena as
            raizes do passo anterior
44
45         PARAM = [Nat, kappa, g, EM, Oc, D1, D2, Dp, G31, G32, gamma2,
            gamma3, G3]; % lista de parametros, input para as
            funcoes que seram usadas a seguir
```

```
46
47     fun = @(x) equations(x,PARAM); % chama a funcao
         equations do script equations.m
48     fun_check = @(x) check2(x,PARAM); % chama a funcao de
         checagem das raizes do script check.m
49
50     Nsteps = 25; % numero de chutes para a busca por raizes
51     guess_list = linspace(-EM,EM,Nsteps); % lista de chutes
52     count_vec = 0; % parametro auxiliar para salvarmos as
         raizes e evitar raizes repeticas
53     flag = 0; % indica se podemos iniciar o calculo da
         largura da histerese
54
55
56     for na = 1:Nsteps % for para os chutes em a, parte real
         do operador do campo alpha
57         guess_a = guess_list(na);
58
59         for nb = 1:Nsteps % for para os chutes em b, parte
         imaginaria do operador do campo alpha
60             guess_b = guess_list(nb);
61
62             x0 = [guess_a, guess_b];
63
64             options = optimset('MaxFunEvals',100000,'MaxIter
                 ',100000,'Display','off','TolFun',1.0e-30,'
                 TolX',1.0e-30);
65             format long g
66
67             res = fsolve(fun,x0,options); % encontra uma
                 unica raiz para o chute x0 usando as equacoes
                 em equations.m
68
69             allroots((na-1)*Nsteps+nb,1) = res(1); %
                 armazena todas
70             allroots((na-1)*Nsteps+nb,2) = res(2); % as
                 raizes
71
```

```
72     [bin_check , c1 , c2 , c3 , c4 , c5 , c6] = fun_check(res);
       % checa se as raizes sao fisicas a partir da
       funcao em check.m
73
74
75     if(bin_check == 1) % se a raiz for fisicam ,
       serao salvas
76         flag = 1;
77         count_vec = count_vec+1;
78
79         if (count_vec == 1)
80             count = count+1;
81             vec_roots(1,1) = res(1); vec_roots(1,2)
               = res(2);
82             roots(count,1) = res(1); roots(count,2)
               = res(2); roots(count,3) = 0c; roots(
               count,4) = res(1)^2 + res(2)^2;
83
84         end
85
86     if(count_vec>1) % se ja foi encontrada uma
       raiz antes , aqui checamos se as raizes
       nao sao repetidas
87         aux_check = 0;
88         for m = size(vec_roots,1):-1:1
89             if((abs(abs(res(1))-abs(vec_roots(m
               ,1))))<10^-6)
90                 aux_check = 1;
91             end
92         end
93
94     if (aux_check == 0) % se forem
       distintas , salvamos a nova raiz aqui
95         count = count+1;
96         siz = size(vec_roots,1);
97         vec_roots(siz+1,1) = res(1);
               vec_roots(siz+1,2) = res(2);
98         roots(count,1) = res(1); roots(count
               ,2) = res(2); roots(count,3) = 0c
```

```

; roots(count,4) = res(1)^2 + res
(2)^2;
99         end
100        end
101       end
102      end
103     end
104
105    % Nessa proxima parte, tentamos encontrar as posicoes do
106    % fim da histerese. Se o numero de raizes para o valor
107    % anterior de
108    % Oc for 1 e o atual maior que um, encontramos o inicio
109    % da
110    % histerese. Ja se o numero de raizes anterior for maior
111    % que 1 e o
112    % atual for 1, encontramos o fim da histeses.
113
114    if(flag == 1)
115        nroots2 = size(vec_roots,1);
116        if((nroots1 == 1)&&(nroots2 > nroots1))
117            H1 = Oc_list(em);
118        elseif((nroots2 == 1)&&(nroots1 > nroots2))
119            H2 = Oc_list(em-1);
120            flag2 = 1;
121            break_param = 1.1*Oc;
122        end
123    end
124
125    prog = (em*100)/Np;           % mostra o progresso em
126    % porcentagem
127    if rem(prog,10)==0, fprintf(' %d%%...',prog); end
128 end
129
130 if((H1~=999.0)&&(H2~=999.0))    % calcula a largura da
131     histerese
132     H(nc) = H2-H1;
133 else
134     H(nc) = 0.0;

```

```

130     end
131
132
133     if (count >= 1) % salva cada histerese em arquivos
        separados
134         fprintf( '\n C = %f -> Found %d roots \n', C_list(nc),
                count)
135         file_name = sprintf( 'hysteresis%d.dat', nc);
136         Data = [roots];
137         dlmwrite( file_name, Data, 'delimiter', ' ', 'precision', 16)
                ;
138     end
139 end
140
141 Data_wid = [H', C_list']; % salva a largura da histerese em
        funcao do parametro que variamos no primeiro for
142 dlmwrite( 'wid_x_C.dat', Data_wid, 'delimiter', ' ', 'precision', 16)
        ;
143
144 toc

```

### A.1.2 Função externa: equations.m

```

1 function F = equations(x,p)
2
3 Nat = p(1); % numero de atomos
4 kappa = p(2); % taxa de relaxacao da cavidade optica
5 g = p(3); % constante de acoplamento atomo campo
6 EM = p(4); % forca do campo de controle
7 Oc = p(5); % frequencia de Rabi do campo de controle
8 D1 = p(6); % dessintonia do atomo com o modo do campo
        quantizado
9 D2 = p(7); % dessintonia do atomo com o campo de controle
10 Dp = p(8); % dessintonia do atomo com o campo de prova
11 G31 = p(9); % taxa de decaimento do nivel 3 para o nivel 1
12 G32 = p(10); % taxa de decaimento do nivel 3 para o nivel 1
13 gamma2 = p(11); % defasagem do nivel 2
14 gamma3 = p(12); % defasagem do nivel 3
15 G3 = p(13); % decaimento total
16

```

```

17 % Equacoes obtidas manipulando o sistema de equacoes no
    Mathematica , em
18 % funcao das partes real e imaginaria do valor medio do operador
    do campo
19 % alpha
20
21 F(1) = -2*(x(1)^8*g^6*G32*kappa+x(1)*G3*G31*Dp^3*EM*Oc^2+x(1)^6*
    g^4*(x(2)*g^2*G32*(EM+4*x(2)*kappa)+(G31+2*G32)*kappa*Oc^2)+x
    (1)^4*g^2*(G32*(3*x(2)^3*g^4*EM+6*x(2)^4*g^4*kappa+G3^2*Dp^2*
    kappa)+(x(2)*g^2*(G31+2*G32)*EM+3*x(2)^2*g^2*(G31+2*G32)*
    kappa+(3*G3-G31)*Dp^2*kappa)*Oc^2+(2*G31+G32)*kappa*Oc^4)+x
    (1)^2*(x(2)*g^2*G32*(3*x(2)^4*g^4*EM+G3^2*Dp^2*EM+4*x(2)^5*g
    ^4*kappa+2*x(2)*G3^2*Dp^2*kappa)+(x(2)^3*g^4*(G31+2*G32)*(2*
    EM+3*x(2)*kappa)+G3*G31*Dp^2*(-Dp^2+G3*kappa)+g^2*Dp^2*(Nat*
    G3*G31+x(2)*(3*G3-G31)*(EM+2*x(2)*kappa)))*Oc^2+(x(2)*g^2*(2*
    G31+G32)*EM+2*x(2)^2*g^2*(2*G31+G32)*kappa-G31*Dp^2*kappa)*Oc
    ^4+G31*kappa*Oc^6)+x(2)*(x(2)^2*g^2*G32*(x(2)^4*g^4+G3^2*Dp
    ^2)*(EM+x(2)*kappa)+(x(2)^4*g^4*(G31+2*G32)*EM+x(2)^2*g^2*(3*
    G3-G31)*Dp^2*EM+G3^2*G31*Dp^2*EM+x(2)^5*g^4*(G31+2*G32)*kappa
    +x(2)^3*g^2*(3*G3-G31)*Dp^2*kappa+x(2)*G3*G31*Dp^2*(g^2*Nat-
    Dp^2+G3*kappa))*Oc^2+(x(2)^2*g^2*(2*G31+G32)-G31*Dp^2)*(EM+x
    (2)*kappa)*Oc^4+G31*(EM+x(2)*kappa)*Oc^6);
22 F(2) = -2*(-x(1)^5*g^4*G3*G31*EM+x(1)^6*g^4*G31*Dp*(G3+kappa)-2*
    x(1)^3*g^2*G3*G31*EM*(x(2)^2*g^2+Oc^2)+x(1)^4*g^2*Dp*(x(2)*g
    ^2*G31*(EM+3*x(2)*(G3+kappa))+(2*G3*G31+3*G3*kappa+G31*kappa)
    *Oc^2)-x(1)*G3*G31*EM*(x(2)^4*g^4+G3^2*Dp^2+(2*x(2)^2*g^2-Dp
    ^2)*Oc^2+Oc^4)+x(2)*Dp*(G31*(x(2)^4*g^4+G3^2*Dp^2)*(EM+x(2)*(
    G3+kappa))+x(2)*(G3*G31*(g^2*Nat-Dp^2)+x(2)*g^2*(3*G3+G31)*EM
    +x(2)^2*g^2*(2*G3*G31+3*G3*kappa+G31*kappa))*Oc^2+x(2)*G3*G31
    *Oc^4)+x(1)^2*Dp*(2*x(2)^3*g^4*G31*EM+3*x(2)^4*g^4*G31*(G3+
    kappa)+x(2)*g^2*(3*G3+G31)*EM*Oc^2+2*x(2)^2*g^2*(2*G3*G31+3*
    G3*kappa+G31*kappa)*Oc^2+G3*G31*(G3*Dp^2*(G3+kappa)+(g^2*Nat-
    Dp^2)*Oc^2+Oc^4));

```

### A.1.3 Função externa: check.m

```

1 function [bin_test , c1 , c2 , c3 , c4 , c5 , c6] = check(x,p)
2
3 bin_test = 0; % parametro de output da funcao caso a raiz seja
    fisica

```

```

4  tole = 1.0e-8; % tolerancia admitida
5
6  Nat = p(1); % numero de atomos
7  kappa = p(2); % taxa de relaxacao da cavidade optica
8  g = p(3); % constante de acoplamento atomo campo
9  EM = p(4); % forca do campo de controle
10 Oc = p(5); % frequencia de Rabi do campo de controle
11 D1 = p(6); % dessintonia do atomo com o modo do campo
    quantizado
12 D2 = p(7); % dessintonia do atomo com o campo de controle
13 Dp = p(8); % dessintonia do atomo com o campo de prova
14 G31 = p(9); % taxa de decaimento do nivel 3 para o nivel 1
15 G32 = p(10); % taxa de decaimento do nivel 3 para o nivel 1
16 gamma2 = p(11); % defasagem do nivel 2
17 gamma3 = p(12); % defasagem do nivel 3
18 G3 = p(13); % decaimento total
19
20 % Expressoes para as populacoes do niveis atomicos obtidas
    atraves da
21 % manipulacao das equacoes no Mathematica
22
23 S11 = (1/(2*(x(1)+1i*x(2))*g^2))*(2*(1i*G3+Dp)*(-EM+(x(1)+1i*x
    (2))*Dp+1i*kappa))-(2*(x(1)+1i*x(2))*g^2*(x(2)*EM+(x(1)^2+x
    (2)^2)*kappa))/G31+(2*(x(1)*g^2*Nat*G31+1i*x(2)*g^2*Nat*G31-x
    (1)*G31*Dp^2-1i*x(2)*G31*Dp^2+3*x(1)*x(2)*g^2*EM+3*1i*x(2)^2*
    g^2*EM+G31*Dp*EM+(x(1)+1i*x(2))*(3*(x(1)^2+x(2)^2)*g^2-1i*G31
    *Dp)*kappa)*Oc^2)/(G31*((x(1)^2+x(2)^2)*g^2-1i*G3*Dp+Oc^2));
24 S22 = (2*(x(1)-1i*x(2))*(x(1)+1i*x(2))^2*g^4*(Nat*G31+2*x(2)*EM
    +2*(x(1)^2+x(2)^2)*kappa)+2*1i*G3*G31*(-EM+(x(1)+1i*x(2))*(Dp
    +1i*kappa))*(1i*G3*Dp+Dp^2-Oc^2)-1i*(x(1)+1i*x(2))*g^2*(2*Nat
    *G3*G31*Dp+2*(x(1)+1i*x(2))*((x(1)-1i*x(2))*G31*(G3-1i*Dp)*Dp
    -1i*G3*Dp*EM+(x(1)-1i*x(2))*(1i*G3*G31+2*G3*Dp+G31*Dp)*kappa)
    -(x(1)+1i*x(2))*(EM+2*(1i*x(1)+x(2))*kappa)*Oc^2+(x(1)-1i*x
    (2))*EM*(-2*G3*G31+2*1i*(G3+G31)*Dp+Oc^2))/(2*(x(1)+1i*x(2))
    *g^2*G31*((x(1)^2+x(2)^2)*g^2-1i*G3*Dp+Oc^2));
25 S33 = -((x(2)*EM+(x(1)^2+x(2)^2)*kappa)/G31);
26
27
28 % Essa proxima parte verifica se a raiz eh fisica a partir da

```

```

    parte
29 % imaginaria das populacoes , que deve ser menor que a tolerancia
    , e atraves
30 % da soma das populacoes que deve ser igual ao numero de atomos
    na
31 % cavidade .
32
33 c1 = imag(S11); c2 = imag(S22); c3 = imag(S33); c4 = imag(x(1));
    c5 = imag(x(2)); c6 = Nat-(S11+S22+S33);
34
35 if ((abs(c1)<=tole)&&(abs(c2)<=tole)&&(abs(c3)<=tole)&&(abs(c4)
    <=tole)&&(abs(c5)<=tole)&&(abs(c6)<=tole))
36     bin_test = 1; % assume esse valor se as condicoes forem
        todas satisfeitas
37 end

```

## A.2 Algoritmo para Mathematica

Apesar de o programa em Matlab<sup>®</sup> funcionar muito bem, o cálculo das raízes é muitas vezes demorado, pois lá, o *solver* responsável por encontrar as soluções, retorna apenas uma raiz para cada chute, o que nos leva a criar mais *loops* para que possamos obter todas as raízes. Além disso, se o número de chutes for pequeno, pode ser que algumas raízes não sejam encontradas, fazendo com que estudos da largura da histerese, por exemplo, se tornem complicados.

Aproveitando o sistema de equações já manipulado no Mathematica<sup>®</sup>, podemos escrever um *script* muito similar ao escrito para Matlab<sup>®</sup>, mas dessa vez temos a vantagem de que o *solver* do Mathematica retorna todas as raízes, sem necessidade de uma lista de chutes, o que faz com que o tempo de processamento diminua. Por motivos de praticidade e objetividade, apenas a parte do cálculo de raízes do *notebook* do Mathematica<sup>®</sup> é apresentado abaixo, começando logo depois de derivar duas equações para as partes real (a) e imaginária (b) da média do operador do campo  $\alpha$ .

```

1 Nat=1000; (* numero de atomos *)
2 kappa=1.0; (* taxa de relaxacao da cavidade *)
3 E=1 kappa; (* forca do campo de prova *)
4 D1=0.0; (* dessintonia do atomo com o modo da cavidade *)
5 D2=0.0; (* dessintonia do atomo com o campo de controle *)
6 Oc= 0.05 kappa; (* frequencia de Rabi do campo de controle*)
7 G31 = 0.5 kappa; (* taxa de decaimento do nivel 3 para o nivel 1
    *)

```

```

8 G32 = 0.5 kappa; (* taxa de decaimento do nivel 3 para o nivel 2
*)
9 G3 = G31+G32; (* taxa de decaimento total *)
10 Np = 1001; (* numero de pontos para a lista de parametros que
iremos variar para observar a histerese , nesse caso a
dessintonia do atomo com campo de prova Dp *)
11
12 Dpmin =0.0 kappa;
13 Dpmax = 0.0026 kappa;
14 dDp=(Dpmax-Dpmin)/(Np-1);
15 Dplist = Range[Dpmin,Dpmax,dDp]; (* lista de valores de Dp *)
16
17 dC = N[(8-4)/19];
18 Clist =Range[3,7,dC]; (* lista de valores para cooperatividade
*)
19
20 (* Essa parte cria listas vazias para armazenar os dados obtidos
*)
21 Dpplist :={}; (* armazena a lista de Dp *)
22 transmission:={}; (* armazena a transmissao , ou melhor , o numero
medio de fotons *)
23 S11list:={}; (* armazena a populacao do nivel 1 *)
24 S22list:={}; (* armazena a populacao do nivel 2 *)
25 S33list:={}; (* armazena a populacao do nivel 3 *)
26 Widlist :={}; (* armazena a largura da histerese *)
27
28 tol=10^-6; (* tolerancia admitida na determinacao se uma raiz eh
fisica *)
29
30 (* O restante do codigo eh praticamente uma traducao do script
hysteresis.m do Matlab. Primeiro variamos um parametro
externo (caso for necessario estudar como a histerese muda em
funcao desse parametro), nesse caso a cooperatividade. Em
seguida variamos o parametro principal, em funcao do qual o
sistema apresenta biestabilidade , nesse caso Dp. *)
31
32 For [nc=1,nc<= Length[ Clist ],nc++,{
33
34     Coop =Clist [[ nc ]],

```

```

35     g = Sqrt[2 kappa G3 Coop/Nat],
36
37     flag1=0, (* se flag==1, significa que encontramos o
              inicio da histerese *)
38     flag2=0, (* se flag==2, significa que encontramos o
              inicio da histerese *)
39
40     dimlist := {}, (* armazena o numero de solucoes para cada
                    Dp *)
41
42     For[m=1,m<=Length[Dplist],m++,{
43
44         Clear[a,b,dim,nroots],
45         nroots=0, (* numero de raizes do Dp atual *)
46         Dp=Dplist[[m]],
47
48         (* solucao para o sistema de duas equacoes com
           duas incognitas, obtido atraves da
           manipulacao do sistema de equacoes, o mesmo
           de equations.m *)
49         sol=NSolve[{Equation1==0,Equation2==0},{a,b},
                    Reals,WorkingPrecision->50],
50
51         dim=Dimensions[sol][[1]], (* numero de solucoes
                                     *)
52
53         (* note que a vantagem de nao precisarmos gerar
           uma lista de chutes para que o solver
           encontre todas as raizes como no Matlab *)
54
55         For[n=1,n<=dim,n++,{
56
57             Clear[a,b],
58             a=sol[[n,1,2]],
59             b=sol[[n,2,2]],
60             t=a^2+b^2, (* numero medio de fotons *)
61
62             (* verificando se a raiz eh fisica *)
63             If[Im[S11]<=tol&&Im[S22]<=tol&&Im[S33]<=

```

```

64         tol&&Im[t]<=tol,{
        AppendTo[Dpplist,Dp],AppendTo[
65             transmission,t],
        AppendTo[S11list,Re[S11]],
66             AppendTo[S22list,Re[S22]],
        AppendTo[S33list,Re[S33]],nroots
            =nroots+1}]
67     }],
68
69     AppendTo[dimlist,nroots],
70
71     (* daqui em diante, seguimos o mesmo raciocinio
        do script do Matlab para medirmos a largura
        da histerese *)
72     If[m>3,{
73
74     If[(nroots>dimlist[[m-3]])&&(nroots>dimlist[[m-2]])&&(
        nroots==dimlist[[m-1]])],{
75         H1=Dplist[[m-1]],
76         flag1=1
77     }],
78
79     If[(nroots<dimlist[[m-3]])&&(nroots<dimlist[[m-2]])&&(
        nroots==dimlist[[m-1]])],{
80         H2 = Dplist[[m-2]],
81         flag2=1}]
82     }],
83
84     }],
85
86     If[(flag1==1)&&(flag2==1),{
87         dH=Abs[H2-H1],
88         AppendTo[Widlist,dH]
89     }],
90
91     If[(flag1==0)&&(flag2==0),{
92         dH=0,
93         AppendTo[Widlist,dH]
94     }],

```

```
95
96     If [(flag1==0)&&(flag2==1)},{
97     dH=999,
98     AppendTo[Widlist,dH]
99     }],
100
101     If [(flag1==1)&&(flag2==0)},{
102     dH=999,
103     AppendTo[Widlist,dH]
104     }]
105
106 }]
```