

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**Uma Nova Caracterização dos Espaços
de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$**

Thaysa Fernanda Elias

São Carlos

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma Nova Caracterização dos Espaços de Sobolev

$W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Thaysa Fernanda Elias

Orientador: Prof. Dr Tiago Henrique Picon

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos

2018



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

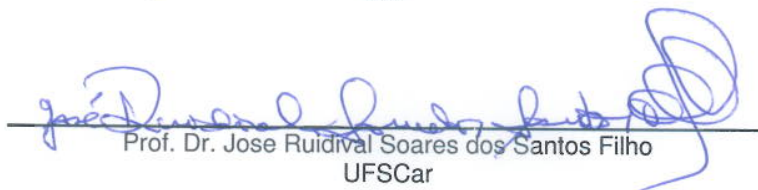
VIA
ALUNO

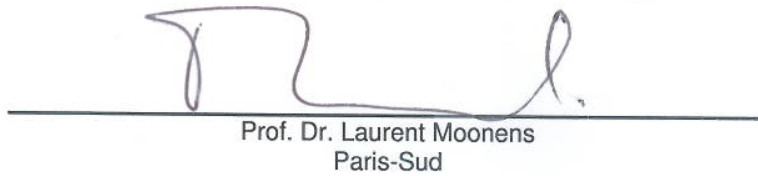
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Thaysa Fernanda Elias, realizada em 06/04/2018:


Prof. Dr. Tiago Henrique Picon
USP


Prof. Dr. Jose Ruidival Soares dos Santos Filho
UFSCar


Prof. Dr. Laurent Moonens
Paris-Sud

Dedico aos meus pais.

*“O que faço agora, talvez não podes compreender,
todavia o compreenderás mais tarde.”*

João 13:7

*“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu,
mas pensar o que ninguém ainda pensou
sobre aquilo que todo mundo vê.”*

Arthur Schopenhauer

AGRADECIMENTOS

Essa é uma das partes mais difíceis do trabalho, que nos faz refletir sobre a vida, nos questionarmos sobre o significado da palavra “Gratidão”. Comecei a pensar em todas as pessoas nas quais deveria direcionar meus agradecimentos, pessoas que me ajudaram ao longo desses 25 anos. Depois de algumas minutos percebi que seria impossível listar todos os nomes, então me restringi a tentar lembrar somente os nomes das pessoas que me ajudaram nesses últimos 7 anos, período no qual fiz graduação, intercâmbio e mestrado, também não foi uma tarefa nada fácil, por fim, me limitei a escrever os nomes das pessoas que me ajudaram nesses últimos 2 anos, mas meu medo de ter esquecido alguém falou mais alto, sendo assim optei por direcionar meus agradecimentos a Deus, Ele que é onipresente, unipotente e unicente, sabe de cada uma das pessoas que me ajudaram, me inspiram, me desafiaram, me encorajaram, me fizeram ser quem eu sou hoje, peço para que Ele abençoe a vida dessas pessoas para que elas possam ajudar outras pessoas, bem como, ser ajudadas.

Agradeço também a CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nessa dissertação apresentaremos uma nova caracterização (pontual) para o espaço de Sobolev $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ e uma nova demonstração da caracterização de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$, em termos da desigualdade de Poincaré. Ambas as caracterizações foram estabelecidas por Piotr Hajlasz no paper “*A new characterization of the Sobolev spaces*” publicado no jornal *Studia Mathematica* em 2003.

Palavras chaves: Função Maximal de Hardy-Littlewood, Espaços de Sobolev, Desigualdades de Poincaré, Caracterização pontual dos Espaços de Sobolev.

ABSTRACT

In this work we will present a new characterization of the Sobolev space $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ and also we give another proof of the characterization of the Sobolev space $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, in terms of Poincaré inequalities. Both characterizations were proved by Piotr Hajlasz in the paper “*A new characterization of the Sobolev spaces*” published in the journal *Studia Mathematica* in 2003.

Key words: Hardy-Littlewood Maximal Functions, Sobolev Spaces, Inequality of Poincaré, Pointwise Characterization of the Sobolev Space.

SUMÁRIO

Lista de Abreviaturas	10
1 Preliminares	14
1.1 Tópicos em Teoria da Medida e Integração	14
1.2 Tópicos de Análise Funcional	22
1.3 Teoria das Distribuições	24
1.4 Convolução	30
2 Tópicos em Análise Harmônica	33
2.1 Aproximação da Identidade	33
2.2 Operador Maximal de Hardy e Littlewood	36
2.3 Desigualdades do Tipo Forte e Fraco	38
2.4 Teorema de Interpolação	46
3 Espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$	52
3.1 Introdução aos Espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$	52
3.2 Propriedades dos Espaços $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$	56
3.3 Desigualdades de Sobolev	62
4 Uma nova caracterização dos Espaços de Sobolev	66
4.1 Caracterização dos Espaços $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$	67

4.2 Teorema de Equivalências em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 100

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	- Subconjunto aberto do \mathbb{R}^n
$C(\Omega)$	- Espaço das funções contínuas
$C^k(\Omega)$	- Espaço das funções k vezes diferenciáveis
$C^\infty(\Omega)$	- Espaço das funções infinitamente diferenciáveis
$C_c^\infty(\Omega)$	- Espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto
$C_0(\mathbb{R}^n)$	- Espaço das funções contínuas que decaem no infinito
$\mathcal{D}(\Omega)$	- Espaço das funções testes
$\mathcal{D}'(\Omega)$	- Conjunto das distribuições
δ_a	- Distribuição Delta de Dirac no ponto a
$f * g$	- f convolução com g
∇u	- Gradiente da função u
H_0	- Função de Heaviside no ponto 0
Mf	- Função maximal de Hardy-Littlewood
$M_R f$	- Função maximal de Hardy-Littlewood restrita
$\mathcal{S}(\Omega)$	- Espaço das funções de Schwartz
$\mathcal{S}'(\Omega)$	- Conjunto dos funcionais lineares contínuos em \mathcal{S}
$\text{supp}(f)$	- Suporte da função ou distribuição f
u_B	- $\frac{1}{ B } \int_B u = \int_B u$
$\omega_f(\lambda)$	- Função distribuição associada a f
\ll	- Medidas absolutamente contínua

INTRODUÇÃO

Nosso estudo é dedicado a estabelecer uma nova caracterização dos espaços de Sobolev

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n); \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$$

para $1 \leq p < \infty$.

Veremos a possibilidade de encontrar uma nova caracterização equivalente a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ que não envolva derivadas. A caracterização que apresentaremos é devida a Piotr Hajlasz.

No artigo [13] Hajlasz provou que se $1 < p < \infty$ então $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, existe $0 \leq g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que satisfaz a desigualdade

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|(g(x) + g(y)) \quad q.t.p.$$

Entretanto, para $p = 1$ esse resultado não é verdadeiro (apresentaremos um contraexemplo no decorrer do texto). Um dos objetivos da dissertação é apresentar uma versão, também dada por Hajlasz, que engloba o caso $p = 1$.

O texto fora estruturado da seguinte forma: no Capítulo 1 veremos resultados preliminares sobre Teoria da Medida, Análise Funcional e Teoria das Distribuições. No Capítulo 2 apresentaremos alguns tópicos em Análise Harmônica, definiremos o operador maximal de Hardy-Littlewood e provaremos o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz. O Capítulo 3 será dedicado a uma breve introdução aos Espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Mostraremos que para certas escolhas de p os espaços são de Banach, separável e reflexivo, bem como, alguns resultados sobre densidade e desigualdades nesse espaço. No que concerne o Capítulo 4, o principal capítulo da dissertação, cujo enfoque é estudar o artigo [10]. Alguns resultados dos capítulos iniciais não serão demonstrados, apenas citaremos as referências de suas demonstrações.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo trataremos de diversos assuntos em Teoria da Medida e Integração, alguns resultados de Análise Funcional e de Teoria das Distribuições. Assumiremos familiaridade com alguns tópicos em Espaços Métricos e Topologia. As principais bibliografias utilizadas neste capítulo foram: [8], [19] e [21] (para referências adicionais consulte [2] e [3]).

1.1 Tópicos em Teoria da Medida e Integração

Nesta seção vamos recordar algumas definições e resultados de Teoria da Medida que serão essenciais no estudo dos espaços L^p . Em seguida enunciaremos alguns teoremas que serão recorrentes nas demonstrações dos resultados de Teoria das Distribuições como, por exemplo, Teorema da Convergência Monótona e Dominada. Por fim, definiremos medida de Radon e o Teorema de Radon-Nikodym, que serão importantes na demonstração de um lema fundamental que será enunciado no Capítulo 4.

Seja X um conjunto não vazio. Dizemos que uma álgebra \mathcal{M} em X é uma coleção não vazia de subconjuntos de X tal que:

- (i) Se $E_j \in \mathcal{M}$ para $j = 1, 2, \dots, n$ então $\bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{M}$;

(ii) Se $E \in \mathcal{M}$ então $E^c \in \mathcal{M}$.

Uma σ -álgebra é uma álgebra fechada para união enumerável.

Observações: Seja \mathcal{M} uma álgebra em X não vazia. Então

(1) $\emptyset \in \mathcal{M}$. De fato, como $X \in \mathcal{M}$ então $X^c = \emptyset \in \mathcal{M}$.

(2) $X \in \mathcal{M}$. De fato, se $E \in \mathcal{M}$ então $E \cup E^c = X$.

(3) Seja $E_j \in \mathcal{M}$ para $j = 1, 2, \dots, n$, temos $\bigcap_{j=1}^n E_j = \left(\bigcup_{j=1}^n E_j^c \right)^c$, ou seja, é uma álgebra fechada em relação a interseção finita.

Se X é um espaço topológico qualquer então a σ -álgebra gerada pela família de conjuntos abertos (fechados) de X é chamada de σ -álgebra de Borel e seus elementos são chamados de conjuntos de Borel.

Seja X um conjunto munido com uma σ -álgebra \mathcal{M} . Uma medida em \mathcal{M} é uma função $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ tal que

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) Se $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$ é uma coleção enumerável disjunta então

$$\mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

O par (X, \mathcal{M}) é chamado de espaço mensurável e os conjuntos em \mathcal{M} são chamados conjuntos mensuráveis. A terna (X, \mathcal{M}, μ) é chamado de espaço de medida.

Uma medida satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 1.1. *Seja (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável. Então*

(i) *Sejam E_1 e $E_2 \in \mathcal{M}$ tais que $E_1 \subseteq E_2$ então $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$;*

(ii) *Se $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$ então $\mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.*

Demonstração. Vide [8] p. 25.

■

Sejam (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, σ) espaços de medida. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é mensurável se $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ para qualquer $B \in \mathcal{N}$. Denotamos por $M^+ = M^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ o espaço das funções a valores reais, não negativos e mensuráveis.

Uma função em M^+ é chamada simples se pode ser escrita da seguinte forma:

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j},$$

no qual $a_j \in \mathbb{R}^+$ e $A_j \in \mathcal{M}$ disjuntos. Assim, podemos definir a integral de uma função simples em M^+ como:

$$\int_X \phi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(A_j).$$

Uma vez que definimos a integral de funções simples, podemos definir a integral para qualquer $f \in M^+$, nesse sentido o próximo resultado afirma que qualquer função mensurável não negativa pode ser aproximada por funções simples.

Proposição 1.2. *Se $f \in M^+$ então existe uma sequência $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de funções simples tais que $\varphi_j \leq \varphi_{j+1}$ e $\varphi \leq f$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Além disso, $\varphi_j \rightarrow f$ pontualmente e uniformemente em qualquer conjunto no qual f seja limitada.*

Demonstração. Vide [8] p. 47. ■

Agora podemos estender o conceito de integral a todas as funções mensuráveis a valores positivos.

Se $f \in M^+$ então a integral de f com respeito a μ é

$$\int_X f d\mu = \sup \int_X \varphi d\mu,$$

no qual o supremo é tomado sobre todas as funções simples $\varphi \in M^+$ que satisfazem $0 \leq \varphi \leq f$.

Os próximos resultados seguem na direção de definir a integral para funções mensuráveis a valores reais.

Seja $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ definimos a parte positiva e parte negativa de f , respec-

tivamente, como

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Observemos que f é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- pertencem a M^+ . Se, ao menos, uma das partes (positiva ou negativa) possui integral finita com respeito a μ , definimos a integral de f por

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu,$$

e dizemos que f é integrável.

Dizemos que uma função complexa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensurável é integrável quando a parte real e imaginária da função f são funções integráveis e por definição,

$$\int_X f d\mu = \int_X \operatorname{Re}(f) d\mu - \int_X \operatorname{Im}(f) d\mu.$$

Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} e defina $L = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ tal que } f \text{ é integrável}\}$. Considere sobre L a relação de equivalência dada por $f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ q.t.p.}$ e as classes de equivalência $[f] = \{g : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ tal que } f = g \text{ } \mu - \text{q.t.p.}\}$. Denotaremos por $\mathcal{L}^1(X)$ o conjunto $\{[f] : f \in L\}$ munido das operações usuais de soma e produto de funções.

Dizemos que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensurável f pertence ao espaço $L^1(X)$, ou simplesmente L^1 , quando $|f| \in L^+$.

Teorema 1.3. (Teorema Convergência Monótona) *Seja f uma função e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em M^+ tais que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo n . Suponha que a sequência converge para a função f em quase todo ponto. Então f é mensurável e*

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Demonstração. Vide [8] p. 31. ■

Teorema 1.4. (Teorema Convergência Dominada) *Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $\mathcal{L}^1(X)$ que convergem para uma função f em quase todo ponto. Além disso,*

suponha que exista uma função $g \in \mathcal{L}^1(X)$ não negativa tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $f \in \mathcal{L}^1(X)$ e

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Demonstração. Vide [8] p. 44. ■

Teorema 1.5. (Lema de Fatou) Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções em M^+ então

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Demonstração. Vide [8] p. 52. ■

Definição 1.6. Seja (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável. Uma medida com sinal em (X, \mathcal{M}) é uma função $\nu : \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ tal que

1. $\nu(\emptyset) = 0$;
2. ν assume apenas um dos valores: $+\infty$ ou $-\infty$;
3. Se $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de conjuntos disjuntos em \mathcal{M} então

$$\nu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j),$$

no qual a soma converge absolutamente se $\nu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right)$ é finita.

Exemplo 1.7. Toda medida é uma medida com sinal.

Definição 1.8. Se ν é uma medida com sinal em (X, \mathcal{M}) , um conjunto $E \in \mathcal{M}$ é positivo em relação a medida ν (respectivamente negativo em relação a medida ν) se $\nu(F) \geq 0$ (respectivamente $\nu(F) \leq 0$) para toda $F \in \mathcal{M}$ tal que $F \subset E$. Dizemos que o conjunto $F \in \mathcal{M}$ é nulo em relação a medida ν se $\nu(F) = 0$ para toda $F \in \mathcal{M}$ tal que $F \subset E$.

Definição 1.9. *Suponhamos que ν é uma medida com sinal e μ é uma medida positiva em (X, \mathcal{M}) . Dizemos que ν é absolutamente contínua com respeito a μ se*

$$\mu(E) = 0 \text{ implicar } \nu(E) = 0 \text{ para qualquer } E \in \mathcal{M},$$

e escrevemos $\nu \ll \mu$.

Vejamos um exemplo no qual as medidas não são absolutamente contínuas.

Exemplo 1.10. *Considere uma enumeração $\{r_1, r_2, \dots\}$ do conjunto \mathbb{Q} . Defina*

$$\mu(A) = \sum_{r_i \in A} \frac{1}{2^i}.$$

Observemos que μ é uma medida positiva para qualquer aberto da reta, pois necessariamente A contém algum r_i .

Seja $|\cdot|$ a medida de Lebesgue, sabemos que $|\mathbb{Q}| = 0$. Porém, a medida μ de \mathbb{Q} é $\mu(\mathbb{Q}) = \sum_{r_i \in \mathbb{Q}} \frac{1}{2^i} = 1$. Portanto, μ não é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue.

□

Definição 1.11. *Dizemos que duas medidas com sinais μ e ν em (X, \mathcal{M}) são mutuamente singulares, se existe $E, F \in \mathcal{M}$ tais que $E \cap F = \emptyset$, $E \cup F = X$, E é nulo com respeito a medida μ e F é nulo com respeito a medida ν . Denotamos por $\mu \perp \nu$.*

O próximo teorema afirma que quando $\nu \ll \mu$, a medida ν pode ser vista como integral, com respeito a medida μ , de uma certa função mensurável f .

Teorema 1.12. (Teorema de Radon-Nikodym)¹ *Sejam ν uma medida com sinal σ -finita e μ uma medida positiva σ -finita em (X, \mathcal{M}) . Existem únicas medidas com sinal σ -finitas em (X, \mathcal{M}) tais que*

$$\lambda \perp \mu, \quad \rho \ll \mu \quad e \quad \mu = \lambda + \rho.$$

¹Otto Marcin Nikodym (1887 - 1974) matemático polonês, um de seus trabalhos mais famosos foi o teorema enunciado.

Além disso, existe uma única função f μ -integrável tal que

$$d\rho = f d\mu.$$

Demonstração. Vide [8] p. 90. ■

Dizemos que uma medida é σ -finita quando $X = \cup_{j \in \mathbb{N}} E_j$, no qual $\mu(E_j) < \infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Definição 1.13. *Seja μ uma medida de Borel positiva em X e E um conjunto de Borel em X . Dizemos que uma medida μ é regular exterior em E se*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U); E \subset U, U \text{ aberto}\}.$$

Dizemos que uma medida μ é regular interior em E se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K); K \subset E, K \text{ compacto}\}.$$

Definição 1.14. *Uma medida de Radon² em X é uma medida de Borel que é finita em todo conjunto compacto (localmente finita), regular exterior em todo conjunto de Borel e regular interior em todo conjunto aberto ou qualquer $E \in \mathcal{M}$ tal que $\nu(E) < \infty$.*

Vejamos alguns exemplos de medidas de Radon.

Exemplo 1.15. *A medida de Lebesgue em espaços Euclidianos restrita a subconjuntos de Borel é uma medida de Radon.*

Exemplo 1.16. *Sejam (X, \mathcal{M}) mensurável e $E \in \mathcal{M}$. A medida da contagem em X definida por:*

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E, & \text{se } E \text{ é finito,} \\ \infty, & \text{se } E \text{ é infinito,} \end{cases}$$

no qual $\#E$ denota a cardinalidade do conjunto E , não é uma medida de Radon, uma vez que não é localmente finita.

²Johann Radon (1887 - 1956) matemático austríaco, foi aluno de David Hilbert.

□

Definição 1.17. Definimos $C_0(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções contínuas que decaem no infinito, ou seja,

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \text{ contínua; } |f(x)| \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow +\infty\}.$$

Claramente segue da definição que $C_0(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$, entretanto a recíproca não é verdadeira (basta considerar uma função constante não nula). A seguir vamos enunciar um resultado que caracteriza os funcionais lineares contínuos em $(C_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$.

Teorema 1.18. (Teorema de Representação de Riesz) Se Ψ é um funcional linear contínuo em $C_0(\mathbb{R}^n)$ então existe uma única medida de Radon complexa μ tal que

$$\Psi(f) = \int f d\mu,$$

para toda $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Vide [8] p. 223. ■

Observação: A continuidade acima significa que existe $C > 0$ tal que $|\Psi(f)| \leq C\|f\|_\infty$ para toda $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Um outro resultado utilizado durante o texto é o Teorema de Integração em coordenadas polares no \mathbb{R}^n .

Teorema 1.19. Se f é Borel mensurável em \mathbb{R}^n , com $f \geq 0$ ou f uma função integrável definida q.t.p, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\omega) r^{n-1} d\sigma(\omega) dr,$$

no qual $d\sigma(\omega)$ é uma medida de Borel na esfera S^{n-1} .

Demonstração. Vide [8] p. 78. ■

Corolário 1.20. (*Integração de uma função radial*) Seja f uma função mensurável definida em \mathbb{R}^n e integrável tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguma g definida $(0, \infty)$ então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty g(r) r^{n-1} dr.$$

Demonstração. Vide [8] p. 79. ■

A seguir vejamos uma propriedade geral dos espaços com medida.

Definição 1.21. Dizemos que um espaço (X, \mathcal{M}, μ) é s -regular ($s > 0$) com respeito a medida μ , se $\mu(X) < \infty$ e existe uma constante b tal que para qualquer $x \in X$ e para todo $r \leq \text{diam } X$ temos

$$\mu(B(x, r)) \geq br^s.$$

Exemplo 1.22. A bola do \mathbb{R}^n com a medida de Lebesgue é n -regular. □

1.2 Tópicos de Análise Funcional

Neste seção veremos alguns resultados sobre os espaços L^p . Daqui em diante dx representa a medida de Lebesgue.

Definição 1.23. Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $1 \leq p < \infty$, definimos

$$L^p(\Omega) = \{f \text{ mensurável}; \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty\},$$

que é munida pela norma

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ainda,

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f \text{ mensurável}; \int_K |f(x)|^p dx < \infty, \text{ para qualquer } K \subset \Omega \text{ compacto}\}.$$

Para $p = \infty$, definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{f \text{ mensurável}; |f(x)| \leq C \text{ q.t.p.}\},$$

neste caso a norma é dada por

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \inf\{a \geq 0; \mu(x; |f(x)| > a) = 0\},$$

chamada de supremo essencial.

Proposição 1.24. (Desigualdade de Hölder) *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ então $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|fg\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. Vide [8] p. 182. ■

Agora seguem duas consequências da Desigualdade de Hölder.

Proposição 1.25. (Desigualdade de Minkowski) *Se $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ então $f + g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demonstração. Vide [8] p. 194. ■

Proposição 1.26. (Desigualdade de Hölder generalizada) *Sejam g_1, g_2, \dots, g_m funções tais que $g_i \in L^{p_i}(\mathbb{R}^n)$ com $p_i \geq 1$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$ e*

$$\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \leq 1.$$

Então $\prod_{i=1}^m g_i \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e vale a desigualdade

$$\left\| \prod_{i=1}^m g_i \right\|_p \leq \prod_{i=1}^m \|g_i\|_{p_i}.$$

Demonstração. Vide [3] p. 93. ■

Proposição 1.27. $L^p(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração. De fato, para $p = 1$ é imediato. Suponhamos $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto,

$$\int_K |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_K(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_K dx \right)^{1/q} = \|f\|_p |K|^{1/q} < \infty.$$

Para o caso $p = \infty$, temos

$$\int_K |f(x)| dx \leq \|f\|_\infty \int_K dx \leq \|f\|_\infty |K| < \infty.$$

Portanto, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. ■

Teorema 1.28. São válidas as seguintes propriedades sobre os espaços de Lebesgue:

- (i) $L^p(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$;
- (ii) $L^p(\mathbb{R}^n)$ é um espaço separável para $1 \leq p < \infty$;
- (iii) $L^p(\mathbb{R}^n)$ é um espaço reflexivo para $1 < p < \infty$.

Demonstração. Vide [3] p. 93, 95 e 98. ■

1.3 Teoria das Distribuições

Na primeira metade do século XX o matemático francês Laurent Schwartz introduziu o formalismo ao que chamamos de Teoria das Distribuições. Com a criação dessa importante teoria Schwartz recebeu uma medalha Fields em 1950.

Considere $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e o gradiente $\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n})$, no qual $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ escrevemos

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n},$$

denominamos α de multi-índice. Note que $\partial^0 f = \partial_{x_1}^0 \partial_{x_2}^0 \cdots \partial_{x_n}^0 f = f$.

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ contínua definimos o suporte de f por

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}}.$$

Observemos que o suporte é sempre um subconjunto fechado. Além disso, segue imediatamente da definição que se $x_0 \notin \text{supp}(f)$ então f é nula em uma vizinhança de x_0 . Dizemos que uma função f tem suporte compacto se o $\text{supp}(f)$ for um conjunto compacto. Denotamos o conjunto $C^k(\mathbb{R}^n)$ como o espaço das funções k vezes diferenciáveis em \mathbb{R}^n e $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis em \mathbb{R}^n . Definimos o espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ como sendo o espaço das funções definidas em \mathbb{R}^n infinitamente diferenciáveis com suporte compacto, denominado espaço das funções testes. Alguns autores denotam o espaço das funções testes por $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Vale ressaltar que $C_0(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções contínuas definidas em \mathbb{R}^n que decaem no infinito. Observemos que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_c(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{R}^n)$. Poderíamos nos questionar sobre a existência de alguma função em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. O exemplo abaixo nos garante que o conjunto de tais funções é não vazio.

Exemplo 1.29. *Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\|x\|^2-1}\right), & \text{se } \|x\| < 1, \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Então $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\text{supp } \varphi = B(0, 1)$. □

Vamos apresentar o conceito de convergência em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.30. *Dada uma sequência $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dizemos que a sequência converge para zero, ou seja, $\varphi_j \rightarrow 0$, se existe um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto tal que $\text{supp}(\varphi_j) \subseteq K$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e para qualquer α multi-índice temos $\partial^\alpha \varphi_j$ converge uniformemente para 0 em K , quando $j \rightarrow \infty$.*

Definição 1.31. *Um funcional linear contínuo $f : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ é chamado de distribuição em \mathbb{R}^n . Denotamos o espaço das distribuições em \mathbb{R}^n por $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\langle f, \varphi \rangle := f(\varphi)$ para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Em outras palavras, sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\{\phi_j\}$*

uma sequência em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, satisfazendo:

$$(i) \quad f(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = f(\varphi_1) + \lambda f(\varphi_2);$$

$$(ii) \quad \varphi_j \rightarrow 0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ então } f(\varphi_j) \rightarrow 0 \in \mathbb{C}.$$

Exemplo 1.32. *Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $\delta_a : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\delta_a(\phi) := \phi(a)$. Então δ_a é uma distribuição chamada de Delta de Dirac³.*

Demonstração. De fato, para qualquer $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$\delta_a(\phi_1 + \lambda\phi_2) = (\phi_1 + \lambda\phi_2)(a) = \phi_1(a) + \lambda\phi_2(a) = \delta_a(\phi_1) + \lambda\delta_a(\phi_2).$$

Agora mostremos a continuidade de δ_a . Consideremos uma sequência $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \rightarrow 0$. Pela definição de convergência, isto significa que existe $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto tal que $\text{supp}(\phi_j) \subseteq K$ para qualquer $j \in \mathbb{N}$ e para qualquer α multi-índice $\partial^\alpha \phi_j \rightarrow 0$ uniformemente em K . Se $a \notin K$ então $\phi_j(a) = 0$, o que implica $\phi_j(a) \rightarrow 0$. Se $a \in K$, em particular, consideremos o multi-índice $\alpha = (0, \dots, 0)$, assim $\partial^\alpha \phi_j(a) = \phi_j(a) \rightarrow 0$.

□

Abaixo um dos principais exemplos de distribuição.

Exemplo 1.33. *Seja $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ então definimos uma distribuição associada a função f denotada por T_f como*

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx,$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Primeiro vejamos que o funcional T_f está bem definido. De fato, como $\|\varphi\|_\infty < M$, temos

$$|T_f(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\varphi(x)|dx \leq M \int_{\text{supp}(\varphi)} |f(x)|dx < \infty.$$

³Como fato histórico, é interessante saber que a ideia da distribuição Delta como pico de uma função concentrada em um ponto foi introduzida pelo engenheiro elétrico, graduado em matemática, Paul Dirac (1902 - 1984). Essa função aparece no seu livro Principles Quantum Mechanics (1930). Para saber mais sobre essa função veja [4].

Portanto, $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

A linearidade segue imediatamente das propriedades de integração. Mostremos agora que T_f é contínua. De fato, seja $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_j \rightarrow 0$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe um compacto $K \in \mathbb{R}^n$ tal que $\text{supp}(\varphi_j) \subseteq K$ e $j_0 \in \mathbb{N}$ no qual, se $j \geq j_0$ implica $|\varphi_j(x)| < \varepsilon$, para qualquer $x \in K$. Então,

$$|T_f(\varphi_j)| = \left| \int_{\text{supp}(\varphi_j)} |f(x)| |\varphi_j(x)| dx \right| \leq \int_K |f(x)| |\varphi_j(x)| dx \leq \varepsilon \int_K |f(x)| dx.$$

para qualquer $j \geq j_0$.

□

A partir desse exemplo, inferimos que $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ou seja, podemos identificar as funções localmente integráveis como distribuições. À vista da Proposição 1.27, qualquer função f em $L^p(\mathbb{R}^n)$ pode ser vista como distribuição por meio do operador T_f , mais ainda, qualquer função nos subespaços $C(\mathbb{R}^n)$, $C^k(\mathbb{R}^n)$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, pode ser visto como distribuição. Vale a pena ressaltar que a recíproca nem sempre é válida. Vamos assumir por hora que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$ (esta demonstração encontra-se no Capítulo 3). Um contraexemplo é a distribuição Delta de Dirac vista no Exemplo 1.33, que é uma distribuição, contudo, não define uma função em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. De fato, suponhamos que exista $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tal que $T_f = \delta$, ou seja,

$$\langle \delta, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \phi(x) dx,$$

para qualquer $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definamos

$$\eta_k(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|kx|^2 - 1}\right), & \text{se } |x| \leq \frac{1}{k}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\eta_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\int \eta_k(x) f(x) dx = \delta(\eta_k) = \eta_k(0) = e^{-1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$e^{-1} = \left| \int \eta_k(x) f(x) dx \right| \leq \|\eta_k\|_\infty \int_{B(0,1/k)} |f(x)| dx.$$

Como $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\|\eta_k\|_\infty \leq e^{-1}$, pelo Teorema de Convergência Dominada segue

$$e^{-1} \leq e^{-1} \inf_{k \in \mathbb{N}} \int_{B(0,1/k)} |f(x)| dx = 0.$$

Absurdo. Portanto, a distribuição Delta de Dirac não define uma função em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.34. *Sejam $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então $f = g$ em quase todo ponto se, e somente se, $T_f = T_g$ no sentido das distribuições.*

Demonstração. Vide [19] p. 35. ■

Em vista das proposições acima, não faremos distinção entre $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e a distribuição T_f associada a ela.

Motivados pela regra de integração por partes, definimos a derivada de uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ como

$$\langle \partial_{x_j} u, \varphi \rangle := -\langle u, \partial_{x_j} \varphi \rangle, \quad (1.1)$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e para qualquer $j = 1, 2, \dots, n$. Analogamente, para α multi-índice e $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad (1.2)$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dessa forma, a derivada de uma distribuição é também uma distribuição.

Exemplo 1.35. *Consideremos a função $H_0 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$H_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Observemos que $H_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, logo H_0 é uma distribuição, chamada de função de Heaviside⁴. A derivada de H_0 é a distribuição Delta de Dirac vista no Exemplo 1.33.

Demonstração. De fato, para qualquer $\varphi \in C_c^\infty$ com $\text{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$ com $M \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \langle \partial H_0, \varphi \rangle &= - \int_{\mathbb{R}} H_0(x) \partial \varphi(x) dx \\ &= - \int_0^\infty \partial \varphi(x) dx \\ &= - \int_0^M \partial \varphi(x) dx \\ &= -\varphi(M) + \varphi(0) \\ &= \varphi(0) \\ &= \langle \delta_0, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Concluimos, assim $\partial H_0 = \delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

□

Definição 1.36. Definimos o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como sendo o conjunto das funções $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que para qualquer α, β multi-índice, vale

$$\sup |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty.$$

Definimos a convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ do seguinte modo: uma sequência $\{\varphi_k\}_k$ converge para zero se, e somente se, para quaisquer α, β multi-índices $x^\alpha \partial^\beta \varphi_k(x) \rightarrow 0$ uniformemente em \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.37. Qualquer função infinitamente diferenciável com suporte compacto é uma função de Schwartz, ou seja, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entretanto, a recíproca não é verdadeira. Considere a função $e^{-\|x\|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, que não pertence a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (pois não possui suporte compacto).

□

Os funcionais lineares contínuos em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são chamados de distribuições temperadas, denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

⁴Recebeu esse nome devido ao engenheiro elétrico Oliver Heaviside (1850 - 1897), um inglês que desenvolveu um dispositivo matemático para manipular equações e analisar indução eletromagnética.

Proposição 1.38. *O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ está contido $L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Considere $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| = n + 2$, $\beta = 0$, para $|x|$ grande, temos $|f(x)| < \frac{c}{|x|^{n+2}}$. Então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx &= \int_{|x| \geq 1} |f(x)| dx + \int_{|x| \leq 1} |f(x)| dx \\ &\leq \|f\|_{\infty} |B(0, 1)| + c \int_{|x| \geq 1} \frac{1}{|x|^{n+2}} \\ &\leq c_1 + c \int_{S^{n-1}} \int_1^{\infty} \frac{1}{r^{n+2}} r^{n-1} dr ds \\ &= c_1 + c \int_{S^{n-1}} \int_1^{\infty} \frac{1}{r^3} dr ds \\ &\leq c_1 + c_2 \sigma(S^{n-1}) = C < \infty. \end{aligned}$$

■

O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ é denso no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Como consequência, a restrição dos funcionais $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ no conjunto $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ define uma distribuição em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e assim $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

1.4 Convolução

Primeiro iniciemos com a definição de convolução para funções contínuas.

Definição 1.39. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ funções mensuráveis. A convolução de f e g é a função $f * g$ definida por*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$$

para todo x tal que a integral exista.

Várias condições podem ser impostas em f e g para garantir que a integral esteja bem definida, como por exemplo, continuidade e suporte compacto.

A operação de convolução satisfaz algumas propriedades que serão listadas na proposição a seguir.

Proposição 1.40. *Suponha que a integral acima esteja bem definida. Então*

(i) $*$ é bilinear e simétrico;

(ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$;

(iii) Se $w \in \mathbb{R}^n$ então $\tau_w(f * g) = (\tau_w f) * g$ onde $\tau_w f(x) = f(x - w)$;

(iv) $\text{supp}(f * g) \subset \overline{\{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)\}}$.

Omitiremos a demonstração dos itens (i) e (ii) e mostremos apenas os dois últimos.

Demonstração (iii) Seja $x \in \mathbb{R}^n$ então

$$\begin{aligned} \tau_w((f * g)(x)) &= (f * g)(x - w) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - w - y)g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tau_w f(x - y)g(y)dy \\ &= (\tau_w f) * g(x). \end{aligned}$$

Demonstração (iv) Primeiro notemos que $\text{supp}(f) + \text{supp}(g)$ é um conjunto fechado. Seja $x \in \mathbb{R}^n$, basta mostrarmos que se $x \notin \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$ então $x \notin \text{supp}(f * g)$, ou seja, $(f * g)(x) = 0$. De fato,

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y)dy = \int_{(x - \text{supp}(f)) \cap (\text{supp}(g))} f(x - y)g(y)dy.$$

Se $x \notin \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$ então $(x - \text{supp}(f)) \cap (\text{supp}(g)) = \emptyset$, assim $(f * g)(x) = 0$. Portanto, $(f * g)(x) = 0$ q.t.p em $(\text{supp}(f) + \text{supp}(g))^c$. Em particular, $(f * g)(x) = 0$ q.t.p em $\text{Int}[(\text{supp}(f) + \text{supp}(g))^c]$. Donde concluímos,

$$\text{supp}(f * g) \subset \overline{\{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)\}}.$$

■

O próximo resultado afirma que sob certas restrições a convolução, como na Definição 1.39, pode ser estendida para funções nos espaços de Lebesgue.

Teorema 1.41. (Desigualdade de Young) *Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tais que $1 + \frac{1}{r} =$*

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ então $f * g$ existe q.t.p e vale

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. Vide [3] p. 104.

Motivados pela definição de convolução para funções contínuas vamos estender este conceito para distribuições.

Definição 1.42. Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (ou $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) denotaremos por $u * \varphi$ a função definida por

$$(u * \varphi)(x) = \langle u, \varphi(x - \cdot) \rangle$$

Exemplo 1.43. $\delta_a * \varphi(x) := \varphi(x - a)$. □

Exemplo 1.44. Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, já vimos que podemos associar a esta uma distribuição T_f , então $T_f * \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(x - y)dy$. □

O próximo resultado nos mostra como a operação de derivação se comporta com relação a convolução.

Teorema 1.45. Seja $f \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e satisfaz

$$\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g$$

para qualquer multi-índice $|\alpha| \leq k$.

Demonstração. Vide [3] p. 107. ■

CAPÍTULO 2

TÓPICOS EM ANÁLISE HARMÔNICA

Neste capítulo versaremos sobre o operador maximal de Hardy-Littlewood e algumas consequências decorrentes da limitação destes operadores. Um dos principais resultados desse capítulo é o Teorema de Marcinkiewicz, que é fundamental para o estudo da limitação do operador maximal de Hardy-Littlewood em norma L^p para $1 < p < \infty$. Além disso, veremos também o conceito de aproximação da identidade e o Teorema da Diferenciação de Lebesgue. Este capítulo foi baseado na referência [5].

2.1 Aproximação da Identidade

Seja $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, com $\phi \geq 0$, tal que $\|\phi\|_1 = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos

$$\phi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (2.1)$$

denominada Aproximação da Identidade. Notemos que a seguinte propriedade é mantida

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Um exemplo de função como acima é dado por $\phi(x) = \frac{\varphi(x)}{\|\varphi\|_1}$ no qual

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\|x\|^2-1}\right), & \text{se } \|x\| < 1, \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Outro fato interessante sobre a família de funções $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ o “volume” de ϕ_ε se concentra na origem, em outras palavras, converge para a distribuição Delta de Dirac na origem.

Proposição 2.1. *Seja $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\phi \geq 0$, tal que $\|\phi\|_1 = 1$. Então ϕ_ε converge para a distribuição δ_0 em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Demonstração. De fato, para qualquer $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\langle \phi_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z) \varphi(\varepsilon z) dz.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(z) \varphi(\varepsilon z) dz \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z) \varphi(0) dz = \varphi(0).$$

Assim,

$$\langle \phi_\varepsilon, \varphi \rangle \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Portanto, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon(\varphi) = \delta_0(\varphi)$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. ■

Como $\delta * f = f$ para qualquer $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos $\phi_\varepsilon * f \rightarrow f$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por esta razão, dizemos que ϕ_ε é uma aproximação da identidade. O próximo resultado nos fornece informação adicional sobre a convergência de $\phi_\varepsilon * f \rightarrow f$ em L^p .

Teorema 2.2. *Seja $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com $\phi \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$ então $\phi_\varepsilon * f \rightarrow f$ em norma $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\phi_\varepsilon * f(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-y)f(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)f(x)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)f(x)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z)f(x-\varepsilon z)dz - \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z)f(x)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z)[f(x-\varepsilon z) - f(x)]dz.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Minkowski, temos

$$\begin{aligned}
\|\phi_\varepsilon * f - f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z)[f(x-\varepsilon z) - f(x)]dz \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(z)|^p |f(x-\varepsilon z) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(z)| \|\tau_{\varepsilon z} f - f\|_p dz,
\end{aligned}$$

no qual τ representa a translação de f no ponto a , ou seja, $\tau_a g(\cdot) := g(\cdot - a)$.

Para cada z fixo, defina f_z como sendo $\|\tau_{\varepsilon z} f - f\|_p$. Observe que f_z é integrável e limitada por $\|\tau_{\varepsilon z} f - f\|_p \leq 2\|f\|_p$. Além disso, converge pontualmente para a função nula quando $\varepsilon \rightarrow 0$, pois a translação é contínua na norma $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$\|\phi_\varepsilon * f - f\|_p \rightarrow 0.$$

■

Observação 2.3. Para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fixada temos que se $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\phi_\varepsilon * f - f\|_p = 0$ então $\|\phi_\varepsilon * f\|_p \rightarrow \|f\|_p$. Isto segue como consequência direta da desigualdade triangular, pois $|\|\phi_\varepsilon * f\|_p - \|f\|_p| \leq \|\phi_\varepsilon * f - f\|_p$. Além disso, se $\|\phi_\varepsilon * f - f\|_p \rightarrow 0$ então passando a uma subsequência temos que $\phi_{\varepsilon_k} * f \rightarrow f$ q.t.p quando $\varepsilon_k \rightarrow 0$.

2.2 Operador Maximal de Hardy e Littlewood

Seja $B_r = B(x, r)$ a bola centrada em $x \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$.

Definição 2.4. *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então definimos a função maximal de Hardy-Littlewood por*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(y)| dy,$$

no qual o supremo é tomado sobre todas as bolas centradas no ponto x e $|B_r|$ é a medida de Lebesgue de B_r .

Embora definimos a função maximal de Hardy-Littlewood com bolas centradas no ponto x , poderíamos ter definido para qualquer bola que contenha o ponto x , pois as bolas não centradas estão contidas na bola com raio duas vezes maior que o raio das bolas centradas, assim é possível mostrar que as definições são equivalentes, ou seja, que existem c_1 e c_2 tais que $c_1 M'f \leq Mf \leq c_2 M'f$, no qual M' é a função maximal definida para bolas centradas.

Chamamos de Operador Maximal de Hardy-Littlewood

$$M : f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \mapsto Mf \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n),$$

no qual $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de todas as funções mensuráveis em \mathbb{R}^n .

Proposição 2.5. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \neq 0$ então $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \neq 0$, então existe $B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$ mensurável tal que

$$\int_{B(0,r)} |f(x)| dx \geq \varepsilon > 0.$$

Caso contrário, se para toda $B(0, r)$ tivéssemos $\int_{B(0,r)} |f(x)| dx = 0$ então $f(x) = 0$ em quase todo ponto de $B(0, r)$. Como $B(0, r)$ é arbitrário, implicaria que $f(x) = 0$ em quase todo ponto do \mathbb{R}^n .

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| > r$, temos $B(0, r) \subset B(x, 2|x|)$. Assim,

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} |f(y)| dy \geq \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} |f(y)| dy \\ &\geq \frac{\varepsilon}{|B(0, r)|} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{|B(x, 2|x|)|} \\ &= c \frac{\varepsilon}{|x|^n}. \end{aligned}$$

Como,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^n} dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty \frac{1}{r^n} r^{n-1} dr = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty \frac{1}{r} dr = \infty$$

então $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. ■

O Teorema de Diferenciação de Lebesgue, também conhecido como Teorema Pontual de Lebesgue nos fornece uma aproximação em médias do valor de uma função no ponto.

Teorema 2.6. (Teorema de Diferenciação de Lebesgue) *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} f(x - y) dy = f(x) \quad q.t.p.$$

Este teorema será provado mais adiante.

Corolário 2.7. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)|^p dy = |f(x)|^p \quad q.t.p.$$

Demonstração. Como $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, basta aplicar o teorema anterior para $|f(y)|^p$, o resultado segue diretamente. ■

Definição 2.8. *Seja $x \in \mathbb{R}^n$, dizemos que x é um ponto de Lebesgue de f quando*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} |f(x - y) - f(x)| dy = 0$$

Observação 2.9. *Se x é um ponto de Lebesgue e $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sequência de bolas tal que $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_j \supset \dots$ e $\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \{x\}$ (bolas não necessariamente centradas em x) então*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_j|} \int_{B_j} f(y) dy = f(x).$$

2.3 Desigualdades do Tipo Forte e Fraco

Estamos interessados em estudar a limitação do operador maximal de Hardy-Littlewood nos espaços L^p , isto é, nos questionarmos quando existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|Mf\|_p \leq C \|f\|_p,$$

para toda $f \in L^p$. Para $p = \infty$, o resultado é imediato. Seja $B = B(x, r)$, para qualquer $r > 0$, temos

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy \leq \|f\|_{\infty} \frac{1}{|B|} \int_B dy = \|f\|_{\infty}.$$

Logo,

$$Mf(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy \leq \|f\|_{\infty}.$$

Portanto,

$$\|Mf\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}.$$

Para $p = 1$, vimos na Proposição 2.5 que a desigualdade não é válida, pois se f não é identicamente nula temos $Mf(x) \sim |x|^{-n}$ para x grande. Diante disso, não é possível obter a estimativa desejada para o caso $p = 1$, mas podemos enfraquecer a estimativa.

Observemos que para $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx > \int_{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > \lambda\}} |f(x)| dx \\ &\geq \lambda \int_{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > \lambda\}} 1 dx \\ &= \lambda |\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > \lambda\}| \end{aligned}$$

ou seja, $|\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > \lambda\}| \leq \frac{\|f\|_1}{\lambda}$.

Pergunta: Será possível encontrar uma constante $c > 0$ tal que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{c\|f\|_1}{\lambda} ?$$

Inspirados nessa observação definiremos um controle que chamaremos de desigualdade do tipo fraco.

Definição 2.10. Um operador $T : V \rightarrow \{g : (X, \mu) \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensuráveis}\}$, V espaço vetorial, é dito ser sublinear se satisfaz:

$$(i) |T(f_1 + f_2)(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|;$$

$$(ii) |T\lambda f(x)| = |\lambda| |Tf(x)|.$$

para qualquer $f_1, f_2, f \in V$, $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exemplo 2.11. O operador Maximal de Hardy-Littlewood é sublinear.

Demonstração. De fato, sejam $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} M(f + g)(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f + g|(y) dy \\ &\leq \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} (|f| + |g|)(y) dy \\ &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(y)| dy + \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |g(y)| dy \\ &= Mf(x) + Mg(x). \end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} M(\lambda f)(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |\lambda f|(y) dy \\ &= |\lambda| \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f|(y) dy \\ &= |\lambda| Mf(x). \end{aligned}$$

□

Sejam (X, μ) e (Y, ν) espaços com medida e $T : L^p(X, \mu) \rightarrow \{g \text{ mensuráveis}; g : Y \rightarrow \mathbb{C}\}$ sublinear.

Definição 2.12. Dizemos que T é do tipo fraco (p, q) com $1 \leq p, q < \infty$ se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\nu(\{y \in Y; |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

para $\lambda > 0$.

Definição 2.13. Dizemos que T é (p, q) forte com $1 \leq p, q \leq \infty$ se T é limitado de $L^p(X, \mu)$ em $L^q(Y, \nu)$, ou seja, se existe uma constante $C > 0$ tal que $\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$ para qualquer $f \in L^p$.

Observação: Definimos fraco (∞, ∞) simplesmente por forte (∞, ∞) .

Proposição 2.14. Se T é do tipo (p, q) forte então T é do tipo fraco (p, q) .

Demonstração. Seja $\lambda > 0$. Considere o conjunto $E_\lambda = \{y \in Y; |Tf(y)| > \lambda\}$, assim

$$\begin{aligned} \nu(E_\lambda) &= \int_{E_\lambda} 1 d\nu \leq \frac{1}{\lambda^q} \int_{E_\lambda} |Tf(y)|^q d\nu \\ &\leq \frac{1}{\lambda^q} \|Tf\|_p^q \\ &\leq \frac{1}{\lambda^q} c\|f\|_p^q. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nu(E_\lambda) \leq \left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda}\right)^q.$$

Proposição 2.15. *Um exemplo de operador fraco (1, 1).*

Antes de apresentar a demonstração vamos enunciar o seguinte lema.

Lema 2.16. *(Lema de Recobrimento de Vitali) Seja $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_N\}$ uma coleção de bolas (abertas ou fechadas) em \mathbb{R}^n . Então existe uma subcoleção $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k}\}$ de bolas disjuntas de \mathcal{B} tal que*

$$\left| \bigcup_{l=1}^N B_l \right| \leq 3^n \sum_{j=1}^k |B_{i_j}|.$$

Demonstração. A demonstração deste lema é construtiva. Considere a bola $B = B(x, r)$ de maior raio do conjunto \mathcal{B} e defina $B^* = (x, 3r)$. Todas as bolas que intersectam B estarão contidas em B^* . Chame B de B_{i_1} , e remova da coleção todas as bolas que intersectam B_{i_1} . As bolas restantes formam uma coleção \mathcal{B}' , no qual repetimos este processo, ou seja, destacamos em \mathcal{B}' a bola de maior raio que será chamada de B_{i_2} . Remova todas as bolas que a intersectam, obtendo uma nova coleção e assim repetindo o processo, que acabará após k passos (quantidade finita de bolas), teremos k bolas disjuntas. Como toda bola B_l está contida em uma $B_{i_j}^*$ e $|B_{i_j}^*| = 3^n |B_{i_j}|$ segue

$$\left| \bigcup_{l=1}^N B_l \right| \leq \sum_{j=1}^k |B_{i_j}^*| = 3^n \sum_{j=1}^k |B_{i_j}|.$$

■

Demonstração do Proposição 2.15. Vamos utilizar o lema para mostrar que Mf é fraco (1, 1).

Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mensurável e $E_\lambda = \{y \in Y : |Mf(y)| > \lambda\}$. Notemos que o conjunto E_λ é um aberto, pois $E_\lambda = |Mf|^{-1}[\lambda, +\infty[$ e a aplicação

$$(x, r) \mapsto \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy := g(x, r)$$

é contínua em $\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[$. De fato, suponhamos que $(x_n, r_n) \rightarrow (x_0, r_0)$ quando $n \rightarrow \infty$ e mostremos que $g(x_n, r_n) \rightarrow g(x_0, r_0)$, uma vez que $\chi_{B(x_n, r_n)} \rightarrow \chi_{B(x_0, r_0)}$ pontualmente e

$\chi_{B(x_n, r_n)}$ é limitada em norma L^1 , segue do Teorema da Convergência Dominada

$$\frac{1}{|B(x_n, r_n)|} \int_{B(x_n, r_n)} |f(y)| dy \rightarrow \frac{1}{|B(x_0, r_0)|} \int_{B(x_0, r_0)} |f(y)| dy.$$

Portanto, a aplicação g é contínua em $\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[$ e conseqüentemente, M é contínua.

Consideremos $x \in E_\lambda$, assim existe uma bola B_r centrada em x tal que

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(y)| dy > \lambda.$$

pois E_λ é aberto. Logo,

$$|B_r| < \frac{1}{\lambda} \int_{B_r} |f(y)| dy.$$

Seja $K \subset E_\lambda$ compacto. Observemos que $K \subset \bigcup_{x \in E_\lambda} B_r$, sendo este compacto podemos extrair uma subcobertura finita de bolas disjuntas

$$K \subset \bigcup_{l=1}^N B_l.$$

Pelo lema anterior, existem $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k}$ disjuntas tal que

$$\begin{aligned} |K| &\leq \left| \bigcup_{l=1}^N B_l \right| \leq 3^n \sum_{j=1}^k |B_{i_j}| \\ &\leq \frac{3^n}{\lambda} \sum_{j=1}^k \int_{B_{i_j}} |f(y)| dy \\ &= \frac{3^n}{\lambda} \int_{\bigcup_{j=1}^k B_{i_j}} |f(y)| dy \\ &\leq \frac{3^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \\ &= \frac{3^n}{\lambda} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Como $|E_\lambda| = \sup\{|K|; K \subset E_\lambda \text{ com } K \text{ compacto}\}$ já que a medida de Lebesgue é regular e $|E_\lambda| \leq \frac{3^n}{\lambda} \|f\|_1$, segue que Mf é fraco $(1, 1)$.

□

Definição 2.17. *Seja $\{T_t\}_{t>0}$ uma família de operadores lineares definidos em $L^p(X, \mu)$.*

Definimos

$$T^*f(x) = \sup_{t>0} |T_t f(x)|$$

chamado de operador maximal associado a família T_t .

Exemplo 2.18. Seja φ_t uma aproximação da identidade. Então $T_t f(x) = \phi_t * f(x)$ define uma família de operadores associado a família T_t .

Teorema 2.19. Se T^* (definido como acima) é fraco (p, q) então o conjunto

$$A = \{f \in L^p(X, \mu); \lim_{t \rightarrow t_0} T_t f(x) = f(x) \text{ q.t.p.}\}$$

é fechado em $L^p(X, \mu)$.

Demonstração. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in A$ tal que $f_n \rightarrow f$ em L^p , ou equivalentemente, $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Mostremos que $f \in A$. Como $f_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vale que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} T_t f_n(x) = f_n(x) \text{ q.t.p.}$$

Analisemos a medida do seguinte conjunto

$$E_\lambda = \{x \in X; \limsup_{t \rightarrow t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \lambda\}.$$

Somando e subtraindo f_n e usando a desigualdade triangular temos

$$|T_t f(x) - f(x)| \leq |T_t(f_n - f)(x) - (f_n - f)(x)| + |T_t f_n(x) - f_n(x)|.$$

Com a observação acima podemos separar o conjunto na seguinte união

$$\{x \in X; \limsup_{t \rightarrow t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \lambda\} \subseteq \{x \in X; \limsup_{t \rightarrow t_0} |T_t(f_n - f)(x) - (f_n - f)(x)| > \lambda/2\} \cup$$

$$\{x \in X; \limsup_{t \rightarrow t_0} |T_t(f_n - f_n)(x)| > \lambda/2\}.$$

Entretanto,

$$\mu \left(\{x \in X; \limsup_{t \rightarrow t_0} |T_t f_n - f_n(x)| > \lambda/2\} \right) = 0,$$

pois, por hipótese, $f_n \in A$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow t_0} T_t f_n(x) = f_n(x)$ q.t.p.

Assim, como $T^* f(x) = \sup_{t>0} |T_t f(x)|$ e T^* é fraco (p, q) , segue

$$\begin{aligned} \mu \left(\{x \in X; \limsup_{t \rightarrow t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \lambda\} \right) &\leq \mu(\{x \in X; \\ &\quad \limsup_{t \rightarrow t_0} |T_t(f_n - f)(x) - (f_n - f)(x)| > \lambda\}) \\ &\leq \mu(\{x \in X; |T^*(f_n - f)(x)| > \lambda/2\}) + \\ &\quad \mu(\{x \in X; (f_n - f)(x) > \lambda/2\}) \\ &\leq \mu(\{x \in X; |T_t^*(f_n - f)(x)| > \lambda/2\}) \\ &\leq \left(\frac{2c \|f_n - f\|_p}{\lambda} \right)^q + \left(\frac{2 \|f_n - f\|_p}{\lambda} \right)^p. \end{aligned}$$

Por hipótese, $f_n \rightarrow f$ em L^p , segue que $E_\lambda \rightarrow 0$ com λ uniforme. Para concluir a demonstração, consideremos $\lambda = \frac{1}{k}$ com $k \in \mathbb{N}$ e notemos que

$$E_0 = \bigcup E_{\frac{1}{k}} \Rightarrow \mu(E_0) \leq \sum \mu(E_{\frac{1}{k}}) = 0.$$

Assim,

$$\mu(\{x \in X; \limsup_{t \rightarrow t_0} |T_t f(x) - f(x)| > 0\}) = 0$$

o que implica, $\lim_{t \rightarrow t_0} T_t f(x) = f(x)$ q.t.p x . Portanto, A é fechado. ■

Vamos agora demonstrar o principal resultado deste seção.

Demonstração do Teorema 2.6. Vamos supor $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \geq 0$, caso contrário escrevamos $f = f^+ - f^-$ com $f^+, f^- \geq 0$ no qual $f^+(x) = f(x)\chi_{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \geq 0\}}$ e $f^-(x) = -f(x)\chi_{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) < 0\}}$. No caso em que f seja complexo escrevamos $f = \text{Re}f + i\text{Im}f$.

1° caso: f é contínua.

Fixado $B(0, r)$ temos que f é uniformemente contínua em $\overline{B(0, r)}$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|y| < \delta$ então $|f(x - y) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in \overline{B(0, r)}$.

Considere $r_0 = \min\{\delta, r\}$ assim, se $s < r_0$ para qualquer $y \in B(0, s)$ temos que $|f(x - y) - f(x)| < \varepsilon$.

Portanto,

$$\left| \frac{1}{|B(0, s)|} \int_{B(0, s)} (f(x - y) - f(x)) dy \right| \leq \frac{1}{|B(0, s)|} \int_{B(0, s)} |f(x - y) - f(x)| dy < \varepsilon.$$

2º caso: $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Para cada $r > 0$ defina

$$T_r f(x) = \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} f(x - y) dy.$$

Pelo Teorema 2.19 aplicado a $p = 1$ temos que o conjunto

$$A = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n); \lim_{t \rightarrow t_0} T_t f(x) = f(x) \text{ q.t.p}\}$$

é fechado em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Como o conjunto das funções contínuas está contido em A que é denso e fechado em $L^1(\mathbb{R}^n)$, assim o resultado segue para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Agora se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Considere a família $Q = \{Q_j\}_j$ de cubos de tamanho 1 de \mathbb{R}^n abertos a direita com vértices em \mathbb{Z}^n . Como os cubos são disjuntos, temos

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} f \chi_{Q_j} = \sum_{j=1}^{\infty} f_j,$$

no qual cada $f_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pois $\int_{\mathbb{R}^n} |f_j| \leq \int_{Q_j} |f| < \infty$.

Pelo 2º caso, temos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} f_j(x - y) dy = f_j(x)$$

em que $\mathbb{R}^n \setminus E_j$ tal que $|E_j| = 0$.

Defina $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, temos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(0, r)} f(x - y) dy = f(x)$$

com $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$. Além disso, $|E| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |E_j| = 0$. ■

2.4 Teorema de Interpolação

Vamos mostrar nessa seção que o operador maximal de Hardy-Littlewood é um operador limitado em L^p para $1 < p \leq \infty$ como consequência de um resultado bastante útil chamado Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz.

Definição 2.20. *Se f é uma função mensurável de X em \mathbb{C} , definimos sua função distribuição $\omega_f(\lambda)$ em $[0, +\infty)$ como*

$$\omega_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}).$$

Exemplo 2.21. *A função distribuição da função $f(x) = \frac{1}{|x|^p}$ é $\omega_f(\lambda) = |S^{n-1}| \lambda^{-\frac{n}{p}}$.*

De fato, $\{x \in \mathbb{R}^n; \frac{1}{|x|^p} > \lambda\} = \{x \in \mathbb{R}^n; (\frac{1}{\lambda})^{\frac{1}{p}} > |x|\}$, e a medida deste último conjunto é igual a medida da bola $B(0, \lambda^{-\frac{1}{p}})$.

□

Com a definição precedente as normas em $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p < \infty$, ficam completamente determinadas pela função distribuição. De fato, pelo Teorema de Fubini, obtém-se:

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{|f(x)|} p\lambda^{p-1} d\lambda dx \\ &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \left(\int_{|f(x)| > \lambda} dx \right) d\lambda \\ &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \omega_f(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f\|_p = \left(p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \omega_f(\lambda) d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.2)$$

Proposição 2.22. *Seja f uma função mensurável de X em \mathbb{C} . Suponhamos $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ diferenciável, crescente e tal que $\phi(0) = 0$ então*

$$\int_X \phi(|f(x)|) dx = \int_0^\infty \phi'(\lambda) \omega_f(\lambda) d\lambda.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\int_X \phi(|f(x)|) dx &= \int_X \left(\int_0^{|f(x)|} \phi'(\lambda) d\lambda \right) dx \\
&= \int_X \left(\int_0^\infty \phi'(\lambda) \chi_{\{x \in X; |f(x)| > \lambda\}}(x) d\lambda \right) dx \\
&= \int_0^\infty \phi'(\lambda) \left(\int_X \chi_{\{x \in X; |f(x)| > \lambda\}}(x) dx \right) d\lambda \\
&= \int_0^\infty \phi'(\lambda) \mu(\{x \in X; |f(x)| > \lambda\}) d\lambda \\
&= \int_0^\infty \phi'(\lambda) \omega_f(\lambda) d\lambda.
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.23. (Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz) Dados (X, μ) e (Y, ν) espaços de medida com $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ e T um operador sublinear de $L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$ no conjunto das funções mensuráveis definidas em Y . Se T é do tipo fraco (p_0, p_0) e fraco (p_1, p_1) então T é do tipo forte para todo $p_0 < p < p_1$.

Antes de começarmos a demonstração, vamos esclarecer alguns conceitos.

Definimos $L^{p_0} + L^{p_1}$ como sendo o conjunto das funções f tais que $f = f_0 + f_1$ no qual f_0 pertence a L^{p_0} e f_1 pertence a L^{p_1} . Ainda, uma norma neste espaço é dado por

$$\|f\| = \inf_{f=f_0+f_1} \{\|f_0\|_{p_0} + \|f_1\|_{p_1}\}.$$

Demonstração. A ideia inicial consiste em escrever f como soma de duas funções f_0 e f_1 de modo que pertençam a L^{p_0} e L^{p_1} respectivamente.

Seja $p_0 < p < p_1$, $f \in L^p(X)$ e $\lambda > 0$. Defina

$$f_0(x) = f(x) \chi_{\{x \in X; |f(x)| > c\lambda\}}$$

e

$$f_1(x) = f(x) \chi_{\{x \in X; |f(x)| \leq c\lambda\}},$$

no qual c é uma constante positiva a ser determinada. Claramente, $f = f_0 + f_1$.

Afirmção: $f_0 \in L^{p_0}$.

Note que $\{x \in X : |f(x)| > c\lambda\} = \{x \in X : \frac{|f(x)|}{c\lambda} > 1\}$ e que $p - p_0 > 0$, assim

$$\begin{aligned} \int_X |f_0(x)|^{p_0} dx &= \int_{\{x \in X : \frac{|f(x)|}{c\lambda} > 1\}} |f(x)|^{p_0} 1 dx \\ &\leq \int_X |f(x)|^{p_0} \left(\frac{|f(x)|}{c\lambda} \right)^{p-p_0} dx \\ &= (c\lambda)^{p_0-p} \int_X |f(x)|^p dx < \infty, \end{aligned}$$

pois $f \in L^p$.

Afirmação: $f_1 \in L^{p_1}$.

Observemos $\{x \in X : |f(x)| \leq c\lambda\} = \{x \in X : \frac{|f(x)|}{c\lambda} \leq 1\}$ e que $p - p_1 < 0$, logo

$$\begin{aligned} \int_X |f_1(x)|^{p_1} dx &= \int_{\{x \in X : \frac{|f(x)|}{c\lambda} \leq 1\}} |f(x)|^{p_1} 1 dx \\ &\leq \int_X |f(x)|^{p_1} \left(\frac{|f(x)|}{c\lambda} \right)^{p-p_1} dx \\ &= (c\lambda)^{p_1-p} \int_X |f(x)|^p dx < \infty. \end{aligned}$$

pois $f \in L^p$.

Observemos que o conjunto $\{x \in X; |Tf(x)| > \lambda\}$ está contido na seguinte união

$$\{x \in X; |Tf_0(x)| \geq \lambda/2\} \cup \{x \in X; |Tf_1(x)| \geq \lambda/2\}.$$

De fato, notemos que se $x \in X$, é tal que

$$|Tf_0(x)| < \lambda/2 \quad \text{e} \quad |Tf_1(x)| < \lambda/2,$$

então

$$\lambda < |Tf(x)| = |T(f_0 + f_1)(x)| \leq |Tf_0(x)| + |Tf_1(x)| = \lambda$$

Contradição. Assim,

$$\begin{aligned}\omega_{Tf}(\lambda) &= \mu(\{x \in X; |Tf(x)| > \lambda\}) \\ &\leq \mu(\{x \in X; |Tf_0(x)| \geq \lambda/2\}) + \mu(\{x \in X; |Tf_1(x)| \geq \lambda/2\}) \\ &= \omega_{Tf_0}(\lambda/2) + \omega_{Tf_1}(\lambda/2).\end{aligned}$$

Dividamos a demonstração em dois casos.

1° caso: $p_1 = \infty$. Escolhamos $c = \frac{1}{2a}$, no qual a é tal que $\|Tf\|_\infty \leq a\|f\|_\infty$ para toda $f \in L^\infty$. Mostraremos que $\omega_{Tf_1}(\lambda/2) = 0$.

Segue da definição que

$$|f_1(x)| = |f(x)\chi_{\{x \in X: |f(x)| \leq c\lambda\}}| \leq c\lambda = \frac{\lambda}{2a}.$$

Assim,

$$\|Tf_1\|_\infty \leq a\|f_1\|_\infty \leq \frac{a\lambda}{2a} = \frac{\lambda}{2}.$$

Deste modo,

$$|Tf_1(x)| \leq \|Tf_1\|_\infty \leq \lambda/2$$

para todo x q.t.p $x \in X$. Logo,

$$\omega_{Tf_1}(\lambda/2) = \mu(\{x \in X : |Tf_1(x)| > \lambda/2\}) = 0. \quad (2.3)$$

Por hipótese, T é fraco (p_0, p_0) , ou seja, existe um $\tilde{c} > 0$ tal que

$$\omega_{Tf_0}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2\tilde{c}}{\lambda}\|f_0\|_{p_0}\right)^{p_0}. \quad (2.4)$$

Finalmente, da igualdade (2.2) e das desigualdades (2.3), (2.3) e (2.4), temos

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &\leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \omega_{Tf_0}(\lambda/2) d\lambda \\
&\lesssim \int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0} \left(\int_{\{x \in X: |f(x)| > c\lambda\}} |f(x)|^{p_0} dx \right) d\lambda \\
&\lesssim \int_X |f(x)|^{p_0} \left(\int_0^{\frac{|f(x)|}{c}} \lambda^{p-1-p_0} d\lambda \right) dx \\
&\lesssim \int_X |f(x)|^p dx \\
&\lesssim \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

2º caso: $p_1 < \infty$

Como $\omega_{Tf}(\lambda) = \mu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\})$ sabemos que

$$\omega_{Tf}(\lambda) \leq \omega_{Tf_0}(\lambda/2) + \omega_{Tf_1}(\lambda/2).$$

Além disso, por hipótese, T é fraco (p_0, p_0) e fraco (p_1, p_1) sendo assim, vale:

$$\omega_{Tf_0}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2c_0 \|f_0\|_{p_0}}{\lambda} \right)^{p_0}, \omega_{Tf_1}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2c_1 \|f_1\|_{p_1}}{\lambda} \right)^{p_1}. \quad (2.5)$$

Seguem pelas estimativas (2.2),(2.5) e pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &= \int_X |Tf(x)|^p \\
&\leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \omega_{Tf_0}(\lambda/2) d\lambda + p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \omega_{Tf_1}(\lambda/2) d\lambda \\
&\leq p(2c_0)^{p_0} \int_0^\infty \lambda^{p-p_0-1} \int_X |f_0(x)|^{p_0} dx d\lambda \\
&\quad + p(2c_1)^{p_1} \int_0^\infty \lambda^{p-p_1-1} \int_X |f_1(x)|^{p_1} dx d\lambda \\
&\lesssim \int_0^\infty \lambda^{p-p_0-1} \int_{\{x \in X: |f(x)| > c\lambda\}} |f(x)|^{p_0} dx d\lambda \\
&\quad + \int_0^\infty \lambda^{p-p_1-1} \int_{\{x \in X: |f(x)| \leq c\lambda\}} |f(x)|^{p_1} dx d\lambda \\
&\lesssim \int_X |f(x)|^{p_0} \left(\int_0^{\frac{|f(x)|}{c}} \lambda^{p-p_0-1} d\lambda \right) dx \\
&\quad + \int_X |f(x)|^{p_1} \left(\int_{\frac{|f(x)|}{c}}^\infty \lambda^{p-p_1-1} d\lambda \right) dx \\
&\lesssim \int_X |f(x)|^{p_0} |f(x)|^{p-p_0} dx + \int_X |f(x)|^{p_1} |f(x)|^{p-p_1} dx \\
&\lesssim \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.24. Como o operador maximal de Hardy-Littlewood fraco $(1, 1)$ e forte (∞, ∞) , segue como consequência do Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz que o operador maximal é forte (p, p) para $1 < p < \infty$, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|Mf\|_p \leq C \|f\|_p \quad \forall f \in L^p.$$

□

CAPÍTULO 3

ESPAÇOS DE SOBOLEV $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

Em 1930, Sobolev¹ introduziu o conjunto das funções no espaço de Lebesgue L^p com derivadas em L^p , espaço este que recebeu seu nome, a saber Espaços de Sobolev. Os espaços de Sobolev tornaram-se muito importantes no desenvolvimento de diversas áreas da Análise, principalmente, em Equações Diferenciais Parciais.

Neste capítulo faremos uma breve introdução à Teoria dos espaços de Sobolev no intuito de estabelecer as principais propriedades que serão utilizadas no capítulo posterior. Veremos alguns resultados gerais, dentre eles a Desigualdade Clássica de Poincaré e a Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg. Este capítulo foi baseado nas referências [1], [7], [21] e [22].

3.1 Introdução aos Espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Inicialmente vamos recapitular alguns conceitos. Vimos no Capítulo 1 que se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-índice então a derivada distribucional de u é definida por

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle,$$

¹Sergei Lvovich Sobolev (1908 - 1989) matemático russo, introduziu os espaços de Sobolev, bem como funções generalizadas.

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e portanto defini uma distribuição. Vimos também que se $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ então podemos identifica-la como uma distribuição $T_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$T_u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)dx = \langle u, \varphi \rangle,$$

para $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, no Exemplo 1.35 calculamos a derivada distribucional da função Heaviside $H_0 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ e vimos que a derivada de H_0 é a distribuição Delta de Dirac que não pertence a $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Mostramos que não existe nenhuma função $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ que satisfaça

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx,$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Com isso, dado $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, pode ou não existir uma função $v \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\partial^\alpha \varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} v(x)\varphi(x)dx$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Justificados por tais observações formalizemos o conceito de derivada fraca.

Definição 3.1. *Seja $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-índice. Dizemos que uma função $v \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ é a α -ésima derivada fraca de u quando*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\partial^\alpha \phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} v(x)\phi(x)dx$$

para qualquer $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Comumente escrevemos $v = \partial^\alpha u$.

Proposição 3.2. *Se a derivada fraca existe então ela é única.*

Demonstração. De fato, suponhamos que existam v_1 e $v_2 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\partial^\alpha \phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} v_1(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} v_2(x)\phi(x)dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} (v_1 - v_2)(x)\phi(x)dx = 0 = \int_{\mathbb{R}^n} 0\phi(x)dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Assim, pela Proposição 1.34 segue que $v_1 - v_2 = 0$ ou seja, $v_1 = v_2$ q.t.p. ■

Exemplo 3.3. *Sejam $n = 1$, $\Omega = (0, 2)$. Considere*

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Essa função não possui derivada no sentido clássico em Ω , mas possui derivada no sentido fraco.

Defina

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Afirmção: $u' = v$ no sentido fraco.

De fato, seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ então

$$\begin{aligned} \int_0^2 u(x)\phi'(x)dx &= \int_0^1 u(x)\phi'(x) + \int_1^2 u(x)\phi'(x)dx \\ &= \int_0^1 x\phi'(x) + \int_1^2 \phi'(x)dx \\ &= \left(\phi(1) - \int_0^1 \phi(x)dx \right) + \phi(2) - \phi(1) \\ &= - \int_0^1 \phi(x)dx = - \int_0^2 v(x)\phi(x)dx \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.4. *Sejam $n = 1$, $\Omega = (0, 2)$. Considere*

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 2, & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Afirmação: A função u não possui derivada fraca.

Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e suponhamos (por absurdo) que exista $v \in L_{loc}^1(\Omega)$ tal que

$$\int_0^2 u(x)\phi'(x)dx = - \int_0^2 v(x)\phi(x)dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então

$$\begin{aligned} \int_0^2 u(x)\phi'(x)dx &= \int_0^1 u(x)\phi'(x)dx + \int_1^2 u(x)\phi'(x)dx \\ &= \int_0^1 x\phi'(x)dx + \int_1^2 2\phi'(x)dx \\ &= \phi(1) - \int_0^1 \phi(x)dx + 2\phi(0) - 2\phi(1) \\ &= -\phi(1) - \int_0^1 \phi(x)dx. \end{aligned}$$

Dessa forma, deveríamos ter,

$$\int_0^2 v(x)\phi(x)dx = \phi(1) + \int_0^1 \phi(x)dx, \quad (3.1)$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ o que é impossível. De fato, considere uma função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$ e $\phi \equiv 1$ numa vizinhança de $K \subset \Omega$ com K compacto (veja [19] p. 7). Consideremos $K = \{1\}$ e $\Omega_m = (1 - 1/m, 1 + 1/m)$ com $m \in \mathbb{N}$. Assim, é possível construir uma sequência $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $\phi_m(1) = 1$, $|\phi_m| \leq 1$ para qualquer $m \in \mathbb{N}$ e $\phi_m \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$ para $x \neq 1$. Substituindo ϕ por ϕ_m na igualdade (3.1), temos

$$\int_0^2 v(x)\phi_m(x)dx = \phi_m(1) + \int_0^1 \phi_m(x)dx.$$

Como ϕ_m são funções integráveis, pois $\phi_m \in C_c^\infty(\Omega)$, $\phi_m \rightarrow 0$ q.t.p e $|\phi_m| \leq 1$, pelo Teorema de Convergência Dominada, segue que

$$\int_0^1 \phi_m(x)dx \rightarrow 0.$$

Assim,

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^2 v(x) \phi_m(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\phi_m(1) + \int_0^1 \phi_m(x) dx \right) = 1.$$

Absurdo. □

Definição 3.5. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Os espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ consistem de todas as funções $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tais que existe a i -ésima derivada fraca $\partial_{x_i} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $i = 1, 2, \dots, n$.*

Além disso, definimos o espaço $W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ como sendo o espaço das funções $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ tais que existe a i -ésima derivada fraca $\partial_{x_i} f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $i = 1, 2, \dots, n$.

Notemos que podemos escrever os espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, como

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n); \nabla f \in L^p(\mathbb{R}^n)\},$$

no qual $\nabla f = (\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f, \dots, \partial_{x_n} f)$.

Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Uma norma para o espaço $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} f\|_p,$$

ou equivalentemente,

$$\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \|\nabla f\|_p,$$

no qual $\|g\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)|$.

3.2 Propriedades dos Espaços $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Vejamos algumas propriedades dos espaços $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 3.6. *$W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ então existe um

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $m, n \geq n_0$ temos

$$\|f_n - f_m\|_{1,p} < \varepsilon.$$

Pela definição do espaço $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ segue

$$\|\partial_{x_i} f_n - \partial_{x_i} f_m\|_p < \varepsilon, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n,$$

ou seja, $\partial_{x_i} f_m$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$, sendo $L^p(\mathbb{R}^n)$ completo existem f e g_i , ambas pertencentes a $L^p(\mathbb{R}^n)$, tais que $f_n \rightarrow f$ e $\partial_{x_i} f_n \rightarrow g_i$ na norma $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Resta mostrar que g_i é a i -ésima derivada fraca de f .

Como $f_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n(x) \partial_{x_i} \phi(x) dx = (-1) \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_i} f_n)(x) \phi(x) dx,$$

para qualquer $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Afirmção 1:
$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n(x) \partial_{x_i} \phi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_{x_i} \phi(x) dx.$$

De fato, usando a Desigualdade de Hölder e a hipótese de que $f_n \rightarrow f$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x) \partial_{x_i} \phi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_{x_i} \phi(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_n - f|(x) |\partial_{x_i} \phi(x)| dx \\ &\leq \|f_n - f\|_p \|\partial_{x_i} \phi\|_q \rightarrow 0, \end{aligned}$$

no qual $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Afirmção 2:
$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_i} f_n)(x) \phi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} g_i(x) \phi(x) dx.$$

De fato, novamente pela Desigualdade de Hölder e a hipótese de que $f_n \rightarrow g_i$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_i} f_n)(x) \phi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} g_i(x) \phi(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(\partial_{x_i} f_n)(x) \phi(x) - g_i(x) \phi(x)| dx \\ &\leq \|\partial_{x_i} f_n - g_i\|_p \|\phi\|_q \rightarrow 0, \end{aligned}$$

no qual $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Assim, para qualquer $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $i = 1, 2, \dots, n$, temos

$$(-1) \int_{\mathbb{R}^n} g_i \phi = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_i} f_n) \phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n (\partial_{x_i} \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f (\partial_{x_i} \phi).$$

Portanto, g_i é a i -ésima derivada fraca de f , donde concluímos que $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach. ■

Teorema 3.7. *Seja $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ então $\text{supp}(\partial_{x_i} f) \subset \text{supp}(f)$ para qualquer $i = 1, 2, \dots, n$.*

Demonstração. Seja $\{\mathcal{O}_j\}_{j \in J}$ a família de todos os subconjuntos abertos \mathcal{O}_j do \mathbb{R}^n tais que $f = 0$ em quase todo ponto de \mathcal{O}_j . Podemos ver o suporte da função f como sendo o conjunto $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ no qual $\mathcal{O} = \cup_{j \in J} \mathcal{O}_j$ (notemos que esta definição é equivalente a definição de suporte que apresentamos no Capítulo 1, pois se $x_0 \notin \text{supp} f \Leftrightarrow f(x) = 0$ em uma vizinhança de $x_0 \Leftrightarrow x_0 \in \mathcal{O}_j$ para algum $j \Leftrightarrow x_0 \in \cup \mathcal{O}_j \Leftrightarrow x_0 \notin \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$). O teorema segue se mostrarmos que $\partial_{x_i} f = 0$ para qualquer $j \in J$, com $i = 1, 2, \dots, n$. Para qualquer $\phi \in C_c^\infty(\mathcal{O}_j)$, temos

$$\int_{\mathcal{O}_j} (\partial_{x_i} f)(x) \phi(x) dx = \int_{\mathcal{O}_j} f(x) \partial_{x_i} \phi(x) dx = 0 \quad \text{q.t.p em } \mathcal{O}_j.$$

Pela Proposição 1.34, segue $\partial_{x_i} f = 0$ q.t.p em \mathcal{O}_j . ■

Teorema 3.8. *Seja $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$ então existe uma sequência $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset W^{1,p} \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_m \rightarrow f$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ quando $m \rightarrow \infty$. Em outras palavras, $W^{1,p} \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Sejam $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função positiva com $\int \varphi(x) dx = 1$. Tal como fizemos em (2.1), para cada $\varepsilon > 0$ definamos uma aproximação da identidade dada por

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Consideremos a seguinte convolução

$$f_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * f.$$

Afirmção. $f_\varepsilon \in C^\infty \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Uma vez que $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Resta provarmos que $f_\varepsilon \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. De fato, pela Desigualdade de Young, temos

$$\|f_\varepsilon\|_p = \|\varphi_\varepsilon * f\|_p \leq \|\varphi_\varepsilon\|_1 \|f\|_p < \infty.$$

Pelo Teorema 1.45, para todo $i = 1, 2, \dots, n$ segue

$$\partial_{x_i} f_\varepsilon = \partial_{x_i} \varphi_\varepsilon * f = \varphi_\varepsilon * \partial_{x_i} f.$$

Assim, novamente aplicando a Desigualdade de Young, temos

$$\|\partial_{x_i} f_\varepsilon\|_p = \|\varphi_\varepsilon * \partial_{x_i} f\|_p \leq \|\varphi_\varepsilon\|_1 \|\partial_{x_i} f\|_p < \infty.$$

Logo, f_ε e $\partial_{x_i} f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$, o que concluí a afirmação.

Mostremos agora que $C^\infty \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 2.2, dado que f e $\partial_{x_i} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ temos

$$f_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * f \rightarrow f \text{ em norma } L^p(\mathbb{R}^n),$$

analogamente,

$$\partial_{x_i} f_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * \partial_{x_i} f \rightarrow \partial_{x_i} f \text{ em norma } L^p(\mathbb{R}^n).$$

Portanto, $C^\infty \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. ■

Teorema 3.9. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Pelo Teorema anterior basta provarmos que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $C^\infty \cap$

$W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Dado $u \in C^\infty \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ queremos encontrar $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|u_m - u\|_p \rightarrow 0.$$

Fixemos $\psi \in C_c^\infty(B(0,2))$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ e $\psi = 1$ se $|x| \leq 1$. Para cada $m > 0$ definamos

$$u_m(x) = \psi\left(\frac{x}{m}\right)u(x).$$

Notemos que u_m é suave, pois ψ e u o são e o produto de funções suave é suave. Além disso, como ψ possui suporte compacto na bola $B(0,2)$ segue que u_m possui suporte compacto na bola $B(0,2m)$.

Vamos aplicar o Teorema da Convergência Dominada para mostrarmos que u_m converge para u em norma $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Primeiramente u_m converge para u q.t.p. De fato, fixado $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$|(u_m - u)(x)| = |\psi(x/m)u(x) - u(x)| \rightarrow 0,$$

uma vez que,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \psi(x/m) = \psi(0) = 1.$$

Além disso, $|u_m|$ é dominada, em quase todo ponto, por uma função em $L^p(\mathbb{R}^n)$, pois

$$|u_m(x)| = |\psi(x/m)u(x)| \leq |u(x)|,$$

e $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada $\|u_m - u\|_p \rightarrow 0$. ■

Proposição 3.10. $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço separável para $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Considere a aplicação $T : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \underbrace{L^p(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^p(\mathbb{R}^n)}_{n+1 \text{ vezes}}$

tal que

$$f \mapsto (f, \partial_{x_1} f, \cdots, \partial_{x_n} f).$$

Sabemos que a norma no espaço cartesiano de L^p é dada por

$$\|Tf\|_{L^p \times \dots \times L^p} = \|f\|_p + \|\partial_{x_1} f\|_p + \dots + \|\partial_{x_n} f\|_p.$$

Logo, $\|Tf\|_{L^p \times \dots \times L^p} = \|f\|_{1,p}$, ou seja, T é uma isometria.

Como $L^p(\mathbb{R}^n)$ é separável para $1 \leq p < \infty$, o espaço $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L^p(\mathbb{R}^n)$ também é separável. Além disso, $T(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ é um subespaço de $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L^p(\mathbb{R}^n)$, assim temos que $T(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ é separável, logo possui um subconjunto denso e enumerável X , considerando a pré-imagem de X , uma vez que T é um isometria, temos um subconjunto denso e enumerável em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, donde concluímos que $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é separável para $1 \leq p < \infty$. ■

Proposição 3.11. $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço reflexivo para $1 < p < \infty$.

Demonstração. Considere a aplicação $T : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \underbrace{L^p(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L^p(\mathbb{R}^n)}_{n+1 \text{ vezes}}$ tal que

$$f \mapsto (f, \partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_n} f).$$

Sabemos que a norma no espaço cartesiano de L^p é dada por

$$\|Tf\|_{L^p \times \dots \times L^p} = \|f\|_p + \|\partial_{x_1} f\|_p + \dots + \|\partial_{x_n} f\|_p.$$

Logo, $\|Tf\|_{L^p \times \dots \times L^p} = \|f\|_{1,p}$, ou seja, T é uma isometria.

Como $L^p(\mathbb{R}^n)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$, o espaço $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L^p(\mathbb{R}^n)$ também é reflexivo. Além disso, como T é uma isometria e $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é Banach, segue que $T(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ é um subespaço de $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L^p(\mathbb{R}^n)$, temos $T(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ é reflexivo. Considerando a aplicação $\bar{T} : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow T(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ que é uma aplicação bijetora e fechada, portanto, dado que $T(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ é reflexivo, concluímos que $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é reflexivo. ■

3.3 Desigualdades de Sobolev

As desigualdades de Sobolev desempenham um papel extremamente importante na teoria de Equações Diferenciais Parciais. Existe um grande número de desigualdades relacionadas a este espaço, apresentaremos apenas algumas que serão usadas adiante.

Definição 3.12. Para $1 \leq p < n$ defina

$$p^* = \frac{np}{n-p} \Leftrightarrow \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

no qual p^* é chamado de expoente conjugado de Sobolev.

Teorema 3.13. (Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg) Seja $1 \leq p < n$.

Então existe uma constante $C > 0$, que depende de n e p tal que

$$\|f\|_{p^*} \leq C \|\nabla f\|_p,$$

para toda $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Primeiro consideraremos $p = 1$. Neste caso $p^* = \frac{n}{n-1}$. Como f tem suporte compacto, para cada $i = 1, 2, \dots, n$ e $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_{y_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dy_i.$$

Assim,

$$|f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_{y_i} f(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i.$$

Conseqüentemente,

$$|f(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_{y_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Para simplificar a notação, daqui em diante nesta demonstração, a menos que deixemos explícito outro intervalo de integração, a integral varia de $-\infty$ a ∞ .

Agora, integrando em relação a x_1 , segue que

$$\begin{aligned} \int |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int \prod_{i=1}^n \left(\int |\partial_{y_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \int \left(\int |\partial_{y_1} f(y_1, \dots, x_n)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left[\prod_{i=2}^n \left(\int |\partial_{y_i} f(x_1, \dots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \right] dx_1 \\ &= \left(\int |\partial_{y_1} f| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int \prod_{i=2}^n \left(\int |\partial_{y_i} f| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1. \end{aligned}$$

Definamos $g_i = \left(\int |\partial_{y_i} f| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}$. Temos que $g_i \in L^{n-1}(\mathbb{R})$, pois

$$\begin{aligned} \int g_i^{n-1} dx_i &= \int \left(\int |\partial_{y_i} f| dy_i \right)^{\frac{n-1}{n-1}} dx_i \\ &= \int \int |\partial_{y_i} f| dy_i dx_i < \infty. \end{aligned}$$

a última passagem segue do fato de $\partial_{y_i} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então pelo Teorema de Fubini temos que cada integral iterada é finita.

Assim, aplicando a Desigualdade de Hölder generalizada para $p_i = n - 1$, temos

$$\int |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \leq \left(\int |\partial_{y_1} f| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int \int |\partial_{y_i} f| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Agora, integrando em relação a x_2 , vemos que

$$\begin{aligned} \int \int |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 &\leq \int \left(\int |\partial_{y_1} f| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^n \int \int |\partial_{y_i} f| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2 \\ &= \left(\int \int |\partial_{y_2} f| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int \prod_{i=1, i \neq 2}^n \left(\int \int |\partial_{y_i} f| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2. \end{aligned}$$

Novamente aplicando a Desigualdade de Hölder generalizada para $p_i = n - 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \int |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 &\leq \left(\int \int |\partial_{y_2} f| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int \int |\partial_{y_1} f| dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \times \\ &\quad \prod_{i=3}^n \left(\int \int \int |\partial_{y_i} f| dy_1 dx_2 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Repetindo esse processo para x_3, x_4, \dots, x_n , teremos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx &\leq \prod_{i=1}^n \left(\int \int \cdots \int |\partial_{x_i} f| dx_1 \cdots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx \right)^{\frac{n}{n-1}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

ou seja,

$$\|f\|_{\frac{n}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx.$$

Portanto,

$$\|f\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \|\nabla f\|_1.$$

Se $1 < p < n$ então $p^* = \frac{np}{n-p}$. Aplicando em (3.2) $g := |f|^\gamma$ com $\gamma > 1$ a ser escolhido. Pela Desigualdade de Hölder para $\frac{p}{p-1}$ e p , temos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^\gamma dx \\ &= \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\gamma-1} |\nabla f(x)| dx \\ &\leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Escolhendo $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1}$ implica $\gamma = p \frac{(n-1)}{(n-p)} > 1$. Como $\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{n-p}{np} = \frac{1}{p^*}$, concluímos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{np}{n-p}} dx \right)^{\frac{n-p}{np}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Portanto,

$$\|f\|_{p^*} \leq C \|\nabla f\|_p. \quad \blacksquare$$

Observação: Usando argumento de densidade é possível estender a Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg para qualquer função $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Seja $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ basta considerar $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

tal que f_n converge para f em norma $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Pela Teorema 3.13 vale que

$$\|f_n\|_{p^*} \leq C \|\nabla f_n\|_p.$$

Como f_n converge para f em norma $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ temos $\|\nabla f_n\|_p$ converge para $\|\nabla f\|_p$ quando $n \rightarrow \infty$. Por outro lado, $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, sendo este completo então f_n converge para g em $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, uma vez que f_n converge para f , pela unicidade do limite $f = g$, segue que $\|f_n\|_{p^*}$ converge para $\|f\|_{p^*}$ quando $n \rightarrow \infty$.

Corolário 3.14. *Seja $1 \leq p < n$. Então existe uma constante $C > 0$ que depende de n e p tal que*

$$\|f\|_{p^*} \leq C \|f\|_{1,p},$$

para qualquer $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. O resultado segue da Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg e do Teorema 3.9. ■

Teorema 3.15. (Desigualdade Clássica de Poincaré) *Seja $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante $C > 0$, que depende de n e p , tal que*

$$\int_B |u - u_B| \leq Cr \int_B |\nabla u|,$$

para qualquer $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, no qual B é uma bola qualquer do \mathbb{R}^n com raio $r > 0$ e

$$u_B = \frac{1}{|B|} \int_B u(y) dy = \int_B u(y) dy.$$

A demonstração será realizada no próximo capítulo. ■

CAPÍTULO 4

UMA NOVA CARACTERIZAÇÃO DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

O objetivo deste capítulo é fornecer uma nova caracterização do espaço de Sobolev $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ que não envolva derivadas e também dar uma nova demonstração para a caracterização dos espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ em termos da desigualdade de Poincaré. Mais especificamente, é dedicado a provar o teorema que segue logo adiante. Este capítulo foi baseado nas referências [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16] e [18].

Usaremos u_B para indicar a média da função em uma bola B qualquer do \mathbb{R}^n de raio $r > 0$, em outras palavras,

$$u_B = \frac{1}{|B|} \int_B u(y) dy = \oint_B u(y) dy.$$

Denotamos por $M_R f$ a função maximal de Hardy-Littlewood restrita para $R > 0$, ou seja,

$$M_R f(x) = \sup_{r < R} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(y)| dy,$$

no qual $B_r = B(x, r)$ para $x \in \mathbb{R}^n$ e $r < R$.

A notação $f \lesssim g$ significa que existe uma constante $c > 0$ tal que $f(x) \leq cg(x)$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que $f \approx g$, se $f \lesssim g$ e $g \lesssim f$, ou seja, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que $c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. E vale lembrar que a abreviatura q.t.p neste contexto significa que tal propriedade é válida salvo em um conjunto de medida de Lebesgue nula.

4.1 Caracterização dos Espaços $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

O primeiro resultado apresenta uma desigualdade envolvendo a função maximal de Hardy-Littlewood restrita, que será usada com frequência durante o texto.

Teorema 4.1. *Seja $\sigma > 1$. Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$ então existe uma constante C , que depende de n e σ , tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|(M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(x) + M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(y)). \quad (4.1)$$

Para demonstrarmos esse teorema precisaremos de dois lemas que serão enunciados e provados logo a seguir. O próximo lema pode ser encontrado em [9] p. 154.

Lema 4.2. *Sejam Ω um conjunto aberto, limitado e convexo do \mathbb{R}^n e d o diâmetro de Ω . Suponha que $u \in W^{1,1}(\Omega)$, então*

$$|u(x) - u_S| \leq \frac{d^n}{n|S|} \int_{\Omega} |x - y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy \quad \text{q.t.p em } \Omega,$$

no qual S é um subconjunto mensurável de Ω tal que $|S| > 0$.

Demonstração. Mostraremos, primeiramente, o lema para $u \in W^{1,1} \cap C^1(\Omega)$. Sejam $x \in \Omega$ e $y \in S$ para qualquer $S \subset \Omega$ mensurável, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$u(x) - u(y) = - \int_0^{|x-y|} \partial_r u(x + r\omega) dr,$$

no qual $\omega = \frac{y-x}{|y-x|}$. Integrando com respeito a y , obtemos

$$\begin{aligned} u(x) - u_S &= u(x) - \frac{1}{|S|} \int_S u(y) dy \\ &= \frac{1}{|S|} \int_S [u(x) - u(y)] dy \\ &= -\frac{1}{|S|} \int_S \left(\int_0^{|x-y|} \partial_r u(x + r\omega) dr \right) dy. \end{aligned}$$

Defina

$$V(x) = \begin{cases} |\partial_r u(x)|, & \text{se } x \in \Omega, \\ 0, & \text{se } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Logo,

$$|u(x) - u_S| \leq \frac{1}{|S|} \int_S \left(\int_0^\infty V(x + r\omega) dr \right) dy.$$

Seja $d = \text{diam } \Omega$. Notemos que se $v := x + r\omega$ então $|v - x| = r$. Fixado $x \in \Omega$ estamos interessados apenas nos pontos v tais que $|v - x| = r \leq d$, pois caso contrário, se $v \notin \Omega$ temos $V(x + r\omega) = 0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} |u(x) - u_S| &\leq \frac{1}{|S|} \int_S \left(\int_0^\infty V(x + r\omega) dr \right) dy \\ &\leq \frac{1}{|S|} \int_{|x-y| < d} \left(\int_0^\infty V(x + r\omega) dr \right) dy \end{aligned}$$

Chamando $z = x - y$ e passando para coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned} |u(x) - u_S| &\leq \frac{1}{|S|} \int_{|z| < d} \left(\int_0^\infty V \left(x + r \frac{z}{|z|} \right) dr \right) dz \\ &= \frac{1}{|S|} \int_{|\tilde{\omega}|=1} \left[\int_0^d \left(\int_0^\infty V(x + r\tilde{\omega}) dr \right) \rho^{n-1} d\rho \right] d\tilde{\omega}. \end{aligned}$$

no qual $z = \rho\tilde{\omega}$.

Notemos que $|\tilde{\omega}| = 1$, ou seja, não depende do raio. Pelo Teorema de Fubini,

temos

$$\begin{aligned} |u(x) - u_S| &\leq \frac{1}{|S|} \int_0^\infty \left(\int_{|\tilde{\omega}|=1} V(x + r\tilde{\omega}) d\tilde{\omega} \right) dr \left(\int_0^d \rho^{n-1} d\rho \right) \\ &= \frac{d^n}{n|S|} \int_0^\infty \left(\int_{|\tilde{\omega}|=1} V(x + r\tilde{\omega}) d\tilde{\omega} \right) dr. \end{aligned}$$

Afirmação: $\int_0^\infty \left(\int_{|\tilde{\omega}|=1} V(x + r\tilde{\omega}) d\tilde{\omega} \right) dr \leq \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy.$

De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{1-n} |\partial_r u(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{1-n} V(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} |z|^{1-n} V(x + z) dz$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |z|^{1-n} V(x + z) dz = \int_0^\infty \int_{|\tilde{\omega}|=1} r^{1-n} V(x + r\tilde{\omega}) r^{n-1} dr d\tilde{\omega} = \int_0^\infty \left(\int_{|\tilde{\omega}|=1} V(x + r\tilde{\omega}) d\tilde{\omega} \right) dr.$$

Afirmação: $|\partial_r u(y)| \leq |\nabla u(y)|.$

De fato, fazendo mudança para coordenadas polares, seja $y = r\omega$ com $|\omega| = 1$,

temos

$$u(y) = \tilde{u}(r, \omega).$$

Assim,

$$|\partial_r \tilde{u}(r, \omega)| = |\partial_r u(y)| = |\nabla u \cdot \partial_r(y)| = |\nabla u \cdot \partial_r(r\omega)| = |\nabla u \cdot \omega| \leq |\nabla u| |\omega| = |\nabla u|.$$

Pela desigualdade provada na afirmação acima, concluímos que vale a desigualdade

$$\int_0^\infty \left(\int_{|\tilde{\omega}|=1} V(x + r\tilde{\omega}) d\tilde{\omega} \right) dr \leq \int_{\Omega} |x - y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy.$$

Por conseguinte, o lema é válido para $u \in W^{1,1} \cap C^1(\Omega)$, ou seja,

$$|u(x) - u_S| \leq \frac{d^n}{n|S|} \int_{\Omega} |x - y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy.$$

Agora mostraremos para $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Pelo Teorema 3.8 existem $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in W^{1,1} \cap C^\infty(\Omega)$ tal que $u_k - u$ converge para zero quando $k \rightarrow \infty$ na norma $W^{1,1}(\Omega)$, ou seja,

$$\|u_k - u\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|\nabla(u_k - u)\|_1 \rightarrow 0.$$

Como $u_k \in W^{1,1} \cap C^1(\Omega)$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$, sabemos que

$$|u_k(x) - (u_k)_S| \leq \frac{d^n}{n|S|} \int_{\Omega} |x - y|^{1-n} |\nabla u_k(y)| dy \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Mostremos que o lado esquerdo da desigualdade converge q.t.p. para $|u - u_S|$ quando $k \rightarrow \infty$. De fato,

$$\begin{aligned} \left| |u_k - (u_k)_S| - |u - u_S| \right| &\leq |u_k - (u_k)_S - (u - u_S)| \\ &\leq |u_k - u| + |(u_k)_S - (u)_S| \\ &\leq |u_k - u| + \frac{1}{|S|} \|u_k - u\|_1. \end{aligned}$$

Passando a uma subsequência, quando $k \rightarrow \infty$ temos $|u_k - u|$ converge para zero q.t.p., uma vez que $\|u_k - u\|_1$ tende a zero.

Por outro lado, quando $k \rightarrow \infty$, temos

$$\int_{\Omega} |x - y|^{1-n} |\nabla u_k(y)| dy \rightarrow \int_{\Omega} |x - y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

De fato,

$$\left| \int_{\Omega} |x - y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy - \int_{\Omega} |x - y|^{1-n} |\nabla u_k(y)| dy \right| \leq \int_{\Omega} |x - y|^{1-n} |\nabla(u - u_k)(y)| dy.$$

Nosso objetivo é mostrar que $\int_{\Omega} |x - y|^{1-n} |\nabla(u - u_k)(y)| dy$ converge a zero quando $k \rightarrow \infty$ q.t.p. em Ω . Como $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sem perda de generalidade, podemos calcular a integral em todo \mathbb{R}^n estendendo u como nula fora de Ω . Dividamos a integral em duas regiões disjuntas, na bola de centro em $x \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ e no seu complementar. Notemos que $\mathbb{R}^n = B(x, r) \cup B^c(x, r)$ e $B(x, r) \cap B^c(x, r) = \emptyset$.

Seja $h(y) = |x - y|^{1-n} |\nabla(u - u_k)(y)|$ então

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(y) dy = \int_{B(x,r)} h(y) dy + \int_{B^c(x,r)} h(y) dy.$$

Seja $y \in B^c(x,r)$, temos $|x - y| \geq r$ e logo $|x - y|^{1-n} \leq r^{1-n}$. Consequentemente,

$$\int_{B^c(x,r)} |x - y|^{1-n} |\nabla(u - u_k)(y)| dy \leq r^{1-n} \|\nabla(u - u_k)\|_1,$$

mas, por hipótese $\|\nabla(u - u_k)\|_1 \rightarrow 0$, passando a uma subsequência, temos

$$\int_{B^c(x,r)} |x - y|^{1-n} |\nabla(u - u_k)(y)| dy \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow \infty$.

Para a outra parte, inicialmente reescrevemos-a como uma convolução, da seguinte forma

$$\int_{B(x,r)} |x - y|^{1-n} |\nabla(u - u_k)(y)| dy = |\nabla(u - u_k)(y)| * |y|^{1-n} \chi_{B(0,r)}(x).$$

Pela Desigualdade de Young, temos

$$\| |\nabla(u - u_k)(y)| * |y|^{1-n} \chi_{B(0,r)} \|_1 \leq \|\nabla(u - u_k)\|_1 \| |y|^{1-n} \chi_{B(0,r)} \|_1 = C(r) \|\nabla(u - u_k)\|_1.$$

Mas, por hipótese, $\|\nabla(u - u_k)\|_1 \rightarrow 0$ e portanto passando a uma subsequência, temos

$$(|\nabla(u - u_k)(y)| * |y|^{1-n} \chi_{B(0,r)})(x) \rightarrow 0 \text{ q.t.p}$$

quando $k \rightarrow \infty$.

Donde concluimos, passando a uma subsequência, temos

$$\int_{B(x,r)} |x - y|^{1-n} |\nabla(u - u_k)(y)| dy \rightarrow 0 \text{ q.t.p}$$

quando $k \rightarrow \infty$.

Portanto, mostramos o lema para qualquer $u \in W^{1,1}(\Omega)$. ■

Observação 4.3. *O lema anterior vale em especial para qualquer função $W^{1,p}(B)$, no qual B é uma bola do \mathbb{R}^n (que é um aberto, convexo e limitado), pois se $f \in W^{1,p}(B)$ então $f \in W^{1,1}(B)$. Pela Desigualdade de Hölder, considerando $g = \nabla f$, assim*

$$\int_B |g| \leq \left(\int_B |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} |B|^{1-\frac{1}{p}} < \infty,$$

para $1 < p < \infty$. Se $p = \infty$ então

$$\int_B |g| \leq \|g\|_{\infty} |B| < \infty.$$

Lema 4.4. *Seja $0 < \alpha < n$, $\delta > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Se $f \in L^1_{loc}(B(x, \delta))$ então existe uma constante $C > 0$ que depende apenas de n tal que*

$$\int_{B(x, \delta)} |x - y|^{\alpha-n} |f(y)| dy \leq C \delta^{\alpha} M_{\delta}(f)(x).$$

Demonstração. Para $x \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, considere o anel

$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A} \left(x, \frac{\delta}{2^{k+1}}, \frac{\delta}{2^k} \right) = B \left(x, \frac{\delta}{2^k} \right) \setminus B \left(x, \frac{\delta}{2^{k+1}} \right),$$

para qualquer $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Notemos que $\mathcal{A}_k \cap \mathcal{A}_{k+1} = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,\delta)} |x-y|^{\alpha-n} |f(y)| dy &= \int_{\cup \mathcal{A}_k} |x-y|^{\alpha-n} |f(y)| dy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathcal{A}_k} |x-y|^{\alpha-n} |f(y)| dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\delta}{2^k}\right)^{\alpha-n} \int_{\mathcal{A}_k} |f(y)| dy \\
&= \delta^{\alpha-n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{\alpha-n} |B(x, \delta/2^k)| \left(\frac{1}{|B(x, \delta/2^k)|} \int_{B(x, \delta/2^k)} |f(y)| dy \right) \\
&\leq \delta^{\alpha-n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{\alpha-n} \left[|S^{n-1}| \left(\frac{\delta}{2^k}\right)^n \right] M_{\frac{\delta}{2^k}}(f)(x) \\
&\leq C(n) \delta^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^\alpha M_\delta(f)(x) \\
&\leq C(n) \delta^\alpha M_\delta(f)(x)
\end{aligned}$$

pois, $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^\alpha$ é convergente. ■

Agora temos todas as ferramentas necessárias para demonstrarmos o teorema.

Demonstração Teorema 4.1. Suponhamos que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$. Para qualquer x, y podemos encontrar uma bola $B \subset \mathbb{R}^n$ cujo raio de $B \approx \sigma|x-y|$ com $x, y \in B$ e $\sigma \geq 1$. Assim, pelo Lema 4.2 juntamente com a Observação 4.3 e o Lema 4.4 temos

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_B| + |u(y) - u_B| \\
&\leq C \int_B |x-y|^{1-n} |\nabla u(x)| dx + C \int_B |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy \\
&\lesssim |x-y| M_{\sigma|x-y|} |\nabla u|(x) + |x-y| M_{\sigma|x-y|} |\nabla u|(y) \\
&\lesssim |x-y| (M_{\sigma|x-y|} |\nabla u|(x) + M_{\sigma|x-y|} |\nabla u|(y)) \quad q.t.p,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do teorema. ■

O próximo teorema apresenta uma caracterização dos espaços $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ que não envolve derivadas. Essa caracterização foi introduzida por Hajlasz em [13].

Teorema 4.5. (Teorema de Caracterização para $1 < p < \infty$) Uma função $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$ se, e somente se, $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e existe $0 \leq g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|(g(x) + g(y)) \quad q.t.p. \quad (4.2)$$

Além disso,

$$\|\nabla u\|_p \approx \inf_g \|g\|_p,$$

no qual o ínfimo é tomado sobre a classe de funções g que satisfaz (4.2).

Antes de provarmos o teorema observemos que no enunciado do teorema acima $1 < p < \infty$, ou seja, o resultado não engloba o espaço $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Vejamos um exemplo em que o teorema não é satisfeito para $p = 1$.

Exemplo 4.6. Seja $\Omega =] - 1/2, 1/2[$ e $u(x) = -x(|x| \ln |x|)^{-1}$ então $u \in W^{1,1}(\Omega)$.

Demonstração. De fato,

$$\int_{\Omega} |u(x)| dx = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{|\ln |x||} dx = 2 \int_0^{1/2} \frac{1}{|\ln(x)|} dx.$$

Comparemos a função $\frac{1}{|\ln(x)|}$ com a função $\frac{1}{x^\alpha}$ que é integrável próximo a origem para $0 \leq \alpha < 1$. De fato, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = 0$, por definição, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < x < \delta$ então $\left| \frac{x^\alpha}{\ln(x)} \right| < \varepsilon$, ou seja, $\frac{1}{|\ln(x)|} \leq \frac{\varepsilon}{x^\alpha}$. Sendo assim,

$$2 \int_0^{1/2} \frac{1}{|\ln(x)|} dx \leq 2\varepsilon \int_0^\delta \frac{1}{x^\alpha} dx + \int_\delta^{1/2} \frac{1}{|\ln(x)|} dx \leq 2\varepsilon \int_0^\delta \frac{1}{x^\alpha} dx + \frac{1/2 - \delta}{|\ln(\delta)|} < +\infty.$$

Além disso, $u'(x) = \frac{x^2}{|x|^3 \ln^2 |x|}$. De fato,

$$\begin{aligned} u'(x) &= \left(\frac{-x}{|x| \ln |x|} \right)' = \frac{(-x)'(|x| \ln |x|) - (|x| \ln |x|)'(-x)}{|x|^2 \ln^2 |x|} \\ &= \frac{-|x| \ln |x| + [(|x|)' \ln |x| + |x|(\ln |x|)']x}{|x|^2 \ln^2 |x|} \\ &= \frac{-|x| \ln |x| + \left(\frac{x}{|x|} \ln |x| + \frac{|x|}{x} \right) x}{|x|^2 \ln^2 |x|} \\ &= \frac{-|x|^2 \ln |x| + x^2 \ln |x| + |x|^2}{|x|^3 \ln^2 |x|} \\ &= \frac{x^2}{|x|^3 \ln^2 |x|}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|x| \ln^2 |x|} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_{-\infty}^{\ln(1/2)} \frac{1}{t^2} dt = \frac{-2}{\ln(1/2)}.$$

Suponha que exista $g \in L^1(\Omega)$ com $g \geq 0$ satisfazendo (4.2). Então para $0 < x < 1/2$, temos

$$|u(x) - u(-x)| \leq |x - (-x)|(g(x) + g(-x)) = 2x[g(x) + g(-x)].$$

Todavia,

$$|u(x) - u(-x)| = \left| \frac{-x}{|x| \ln |x|} - \frac{x}{|x| \ln |x|} \right| = \frac{2}{|\ln x|}.$$

Assim,

$$\frac{1}{x |\ln x|} \leq (g(x) + g(-x)).$$

Agora,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 g(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx.$$

Fazendo mudança de variável,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 g(x) dx = - \int_{\frac{1}{2}}^0 g(-x) dx$$

temos,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} g(-x)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx \geq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x|\ln x|} = - \int_{-\infty}^{\ln(1/2)} \frac{1}{t} dt = \infty.$$

Deste modo, $g \notin L^1(\Omega)$.

□

O lema subsequente nos auxiliará a provar o Teorema 4.5.

Lema 4.7. *Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $0 \leq g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Se*

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|(g(x) + g(y)) \quad q.t.p. \quad (4.3)$$

então $|\nabla u| \leq C(n)g$ em quase todo ponto, o que implica, $\nabla u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Para demonstrarmos que $|\nabla u| \leq C(n)g$ em quase todo ponto, mostraremos que cada componente do gradiente é limitada por g .

Dada uma função $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ temos

$$\nabla u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \dots, \partial_{x_n} u).$$

Fixemos uma coordenada x_i com $i = 1, 2, \dots, n$. Consideremos a função u restrita a esta coordenada, dada por

$$u(x_i, \bar{x}_i) \doteq u(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

no qual $\bar{x}_i \cong (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Para facilitar a notação denotaremos $u(x_i, \bar{x}_i) := u(x_i)$. Assim, a função $u(x_i)$ é uma função de uma variável real quando \bar{x}_i está fixo. A notação anterior também é estendida para a função g .

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e sem perda de generalidade suponhamos $a < b$, com a condição adicional $g(a), g(b) < \infty$, pois $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dividamos o intervalo $[a, b]$ em n segmentos de comprimento $\frac{(b-a)}{n}$, dessa forma, teremos n subintervalos em $[a, b]$ de comprimento $\frac{(b-a)}{n}$, os quais denotaremos por I_i , com $i = 1, \dots, n$ no qual $I_1 = [a = z_0, z_1]$, $I_2 = [z_1, z_2], \dots, I_n = [z_n, b = z_{n+1}]$.

Afirmção. Para cada i , com $i = 1, 2, \dots, n$, existe $x_i \in I_i$ tal que

$$g(x_i) \leq \frac{1}{|I_i|} \int_{I_i} g(y) dy.$$

Fixemos i . Suponhamos por absurdo que

$$g(x) > \frac{1}{|I_i|} \int_{I_i} g(y) dy,$$

para todo $x \in I_i$. Isto implica que

$$\frac{1}{|I_i|} \int_{I_i} g(y) dy < g(x) = \frac{1}{|J|} \int_J g(x) dy$$

para todo $J \subseteq I_i$ que contém x tal que $|J| \neq 0$. A contradição ocorre quando $J = I_i$.

Consideremos $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$, $x_i \in I_i$ satisfazendo a propriedade acima para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Dessa forma, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$, e além disso,

$$\begin{aligned} |u(a) - u(b)| &\leq \sum_{i=0}^n |u(x_i) - u(x_{i+1})| \\ &\leq \sum_{i=0}^n |x_i - x_{i+1}| [g(x_i) + g(x_{i+1})] \\ &\leq \frac{2(b-a)}{n} \sum_{i=0}^n [g(x_i) + g(x_{i+1})] \\ &= \frac{2(b-a)}{n} \left(g(a) + g(b) + 2 \sum_{i=1}^n g(x_i) \right) \\ &\leq \frac{2(b-a)}{n} (g(a) + g(b)) + \frac{4(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|I_i|} \int_{I_i} g(y) dy \\ &= \frac{2(b-a)}{n} (g(a) + g(b)) + 4 \sum_{i=1}^n \int_{I_i} g(y) dy. \end{aligned}$$

Quando n tende ao infinito, concluímos

$$|u(a) - u(b)| \leq 4 \int_a^b g(y) dy.$$

Seja $I = [a, b]$, pela desigualdade acima, temos

$$|\partial_{x_i} u(a)| = \lim_{b \rightarrow a} \frac{|u(a) - u(b)|}{|b - a|} \leq \lim_{b \rightarrow a} \frac{1}{|b - a|} \left(4 \int_a^b g(y) dy \right) = 4 \lim_{|I| \rightarrow 0} \frac{1}{|I|} \int_I g(y) dy.$$

Pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue, concluímos

$$|\partial_{x_i} u(a)| \leq 4g(a) \quad q.t.p$$

isto é, u é absolutamente contínua sobre linhas e a conclusão para o espaço euclidiano segue via o Teorema de Caracterização de Nikodym - ACL (veja Teorema 1.42 em [17]).

Como cada componente do gradiente é limitado por g e $|\nabla u| \leq \sqrt{n} \max_i |\partial_{x_i} u|$, segue que

$$|\nabla u| \leq C(n)g.$$

■

Demonstração Teorema 4.5. Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ então pelo Teorema 4.1, temos

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n, \sigma)|x - y| (M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(x) + M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(y)) \quad q.t.p.$$

Notemos que pontualmente o operador maximal restrito pode ser estimado pelo operador Maximal de Hardy-Littlewood, ou seja,

$$M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(x) \leq M|\nabla u|(x).$$

Assim,

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n, \sigma)|x - y| (M|\nabla u|(x) + M|\nabla u|(y)) \quad q.t.p.$$

Tomando $g = C(n, \sigma)M(|\nabla u|)$, como $|\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$ e sabendo que o operador maximal de Hardy-littlewood é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1$, segue que $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1$. Dessa forma (4.2) é satisfeita.

Vejamos a outra implicação. Sejam $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $0 \leq g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|(g(x) + g(y)) \quad q.t.p.$$

mostremos que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$. Por hipótese $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, resta mostrar que $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Como $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, pelo Lema 4.7, segue que $|\nabla u| \leq C(n)g$ em quase todo ponto, logo

$$\int |\nabla u|^p \leq C(n) \int g^p < \infty.$$

Assim, $|\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Para concluir o teorema mostremos que $\|\nabla u\|_p \approx \inf_g \|g\|_p$, ou seja, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1 \inf_g \|g\|_p \leq \|\nabla u\|_p \leq C_2 \inf_g \|g\|_p.$$

Sabemos que $|\nabla u| \leq C(n)g$ em quase todo ponto, assim segue

$$\|\nabla u\|_p^p = \int |\nabla u|^p \leq C(n) \int |g|^p = C(n) \|g\|_p^p,$$

como a desigualdade é uniforme para $g \in L^p$, em particular,

$$\|\nabla u\|_p \leq C_2 \inf_g \|g\|_p.$$

Dado que $g = C(n)M(|\nabla u|)$ satisfaz (4.2) e o operador maximal é do tipo forte para $1 < p \leq \infty$, temos

$$\|g\|_p = \|M(|\nabla u|)\|_p \leq C \|\nabla u\|_p,$$

em particular,

$$C_1 \inf_g \|g\|_p \leq \|\nabla u\|_p.$$

Portanto, segue $\|\nabla u\|_p \approx \inf_g \|g\|_p$. ■

O próximo teorema nos fornece uma caracterização análoga ao apresentado no teorema anterior para o espaço $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Cabe ressaltar que na demonstração do Teorema 4.5 usamos fortemente que o operador maximal de Hardy-Littlewood é limitado para $p > 1$, mas já vimos na Proposição 2.5 que isto não acontece para $p = 1$, por isso, faz-se necessário uma caracterização alternativa para este caso.

Teorema 4.8. $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e existe $0 \leq g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\sigma \geq 1$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|(M_{\sigma|x-y|}g(x) + M_{\sigma|x-y|}g(y)) \quad q.t.p. \quad (4.4)$$

Além disso, se u satisfaz (4.4) então

$$|\nabla u| \leq C(n, \sigma)g \quad q.t.p.$$

Para demonstrar esse teorema precisaremos de alguns resultados preliminares.

Seja $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. A versão clássica da Desigualdade de Poincaré é dada por

$$\int_B |u - u_B| \leq Cr \left(\int_B |\nabla u| \right),$$

no qual C é uma constante positiva que só depende de n e B é uma bola do \mathbb{R}^n .

Definição 4.9. Sejam $\sigma \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e g uma função mensurável $0 \leq g \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, dizemos que o par (u, g) satisfaz a desigualdade p -Poincaré quando

$$\int_B |u - u_B| \leq r \left(\int_{\sigma B} g^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para toda bola B de raio r , no qual σB é a bola concêntrica com B e raio σr .

O lema que vem a seguir implica em uma desigualdade do tipo p -Poincaré.

Lema 4.10. Sejam $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq g \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$ e $\sigma \geq 1$. Se

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y| \left((M_{\sigma|x-y|}g^p(x))^{\frac{1}{p}} + (M_{\sigma|x-y|}g^p(y))^{\frac{1}{p}} \right) \quad q.t.p. \quad (4.5)$$

então existe uma constante $C = C(n, p, \sigma) > 0$ tal que

$$\int_B |u - u_B| \leq rC \left(\int_{\sigma B} g^p \right)^{1/p},$$

para toda bola B de raio r .

Demonstração. Primeiramente, demonstraremos o caso em que $p > 1$.

Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ quaisquer. Consideremos $B = B(a, r)$ uma bola de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$. Denotaremos por $B_{3\sigma} = B(a, 3\sigma r)$ a bola concêntrica com B e raio 3σ vezes o raio de B .

Sejam $x, y \in B$ quaisquer, observemos que

$$\begin{aligned} M_{\sigma|x-y|}g^p(x) &= \sup_{s < \sigma|x-y|} \frac{1}{|B(x, s)|} \int_{B(x, s)} |g(z)|^p dz \\ &\leq \sup_{s < 3\sigma r} \frac{1}{|B(x, s)|} \int_{B(x, s)} |g(z)|^p dz \\ &\leq \sup_{s > 0} \frac{1}{|B(x, s)|} \int_{B(x, s)} |g(z)\chi_{B_{3\sigma}}(z)|^p dz = M(g^p\chi_{B_{3\sigma}})(x). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Segue da hipótese (4.5) juntamente com a observação anterior que

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y| \left((M(g^p\chi_{B_{3\sigma}})(x))^{\frac{1}{p}} + (M(g^p\chi_{B_{3\sigma}})(y))^{\frac{1}{p}} \right). \quad (4.7)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_B |u(x) - u_B| &= \int_B \left| u(x) - \int_B u(y) dy \right| dx \\ &= \int_B \left| \int_B (u(x) - u(y)) dy \right| dx \\ &\leq \int_B \int_B |u(x) - u(y)| dy dx. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Substituindo (4.7) em (4.8), obtemos

$$\int_B |u(x) - u_B| dx \leq \int_B \int_B |x - y| \left(M(g^p\chi_{B_{3\sigma}})(x)^{\frac{1}{p}} + M(g^p\chi_{B_{3\sigma}})(y)^{\frac{1}{p}} \right) dx dy.$$

Como $|x - y| < 2r$ e

$$\int_B \int_B (M(g^p\chi_{B_{3\sigma}})(x))^{\frac{1}{p}} dx dy = \int_B (M(g^p\chi_{B_{3\sigma}})(x))^{\frac{1}{p}} dx.$$

Temos,

$$\int_B |u(x) - u_B| dx \leq 2 \left(2r \int_B (M(g^p\chi_{B_{3\sigma}})(x))^{\frac{1}{p}} dx \right).$$

Chamando $f = M(g^p \chi_{B_{3\sigma}})$, já que f é uma função mensurável positiva, podemos definir a função distribuição,

$$\omega_f(t) = |\{x \in B; f(x) > t\}|.$$

Pela Proposição 2.22, tomemos $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ como sendo a função identidade, isto é, $\phi(t) = t$. Notemos que ϕ é diferenciável, crescente, $\phi(0) = 0$ e $\phi'(t) = 1$, temos

$$\int_B \phi(|f(x)|) dx = \int_0^\infty \omega_f(t) dt,$$

ou seja,

$$\int_B |f(x)| dx = \int_0^\infty |\{x \in B; f(x) > t\}| dt.$$

Com isso obtemos,

$$\begin{aligned} \int_B |u(x) - u_B| dx &\leq 4r \int_B (f(x))^{\frac{1}{p}} dx \\ &= 4r \frac{1}{|B|} \int_0^\infty |\{x \in B; f(x) > t^p\}| dt \\ &= 4r \frac{1}{|B|} \left(\int_0^{t_0} |\{x \in B; f(x) > t^p\}| dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^\infty |\{x \in B; f(x) > t^p\}| dt \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

com t_0 uma constante a ser escolhida.

Agora vamos estimar separadamente os valores das integrais,

$$\int_0^{t_0} |\{x \in B; f(x) > t^p\}| dt \leq \int_0^{t_0} |B| dt = |B| t_0. \quad (4.10)$$

Para a outra parte usaremos o fato do operador maximal de Hardy-Littlewood ser

limitado fracamente $(1, 1)$, assim

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{\infty} |\{x \in B; f(x) > t^p\}| dt &= \int_{t_0}^{\infty} |\{x \in B; M(g^p \chi_{B_{3\sigma}})(x) > t^p\}| dt \\
&\leq \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{C \int_{B_{3\sigma}} g^p}{t^p} \right) dt \\
&= C \left(\int_{B_{3\sigma}} g^p \right) \left(\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t^p} dt \right) \\
&= C \left(\int_{B_{3\sigma}} g^p \right) \left(\frac{t_0^{1-p}}{p-1} \right) \\
&= C t_0^{1-p} \int_{B_{3\sigma}} g^p.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Substituindo as estimativas (4.10) e (4.11) em (4.9), obtemos

$$\int_B |u(x) - u_B| dx \leq 4r \frac{1}{|B|} \left(|B| t_0 + C t_0^{1-p} \int_{B_{3\sigma}} g^p \right).$$

Tomando $t_0 = \left(\frac{1}{|B|} \int_{B_{3\sigma}} g^p \right)^{\frac{1}{p}}$, vemos que

$$\begin{aligned}
\int_B |u(x) - u_B| dx &\leq 4r \frac{1}{|B|} \left[|B| \left(\frac{1}{|B|} \int_{B_{3\sigma}} g^p \right)^{\frac{1}{p}} + C \left(\frac{1}{|B|} \int_{B_{3\sigma}} g^p \right)^{\frac{1-p}{p}} \int_{B_{3\sigma}} g^p \right] \\
&\leq 4r \frac{1}{|B|} \left[|B|^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B_{3\sigma}} g^p \right)^{\frac{1}{p}} + C |B|^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B_{3\sigma}} g^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
&\lesssim r |B|^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{3\sigma}} g^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim r \left(\int_{B_{3\sigma}} g^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Nesta parte da demonstração foi essencial assumirmos $p > 1$ a fim de que a função t^{-p} fosse integrável em $[t_0, +\infty)$, sendo assim, precisamos de uma demonstração alternativa para o caso $p = 1$.

Demonstração do Lema 4.10 para $p = 1$. Fixemos uma bola B e novamente seja $B_{3\sigma}$ a bola concêntrica a B com raio 3σ vezes o raio de B . Para cada $x, y \in B$, pela estimativa (4.7) temos

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|(Mh(x) + Mh(y)), \tag{4.12}$$

no qual $h = g\chi_{B_{3\sigma}}$. Devemos mostrar que

$$\int_B |u - u_B| \leq C(n, p, \sigma)r \int_{B_{3\sigma}} h. \quad (4.13)$$

Se $h = 0$ então $|u(x) - u(y)| = 0$ para qualquer $x, y \in B$, isto implica que u é constante, assim a desigualdade (4.13) é satisfeita. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\int_{B_{3\sigma}} h > 0$. Além disso, podemos assumir que

$$0 < \int_{B_{3\sigma}} h \leq 2h \text{ em } B_{3\sigma} \text{ e } h = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \setminus B_{3\sigma}. \quad (4.14)$$

Caso contrário, se $\int_{B_{3\sigma}} h > 2h$ em $B_{3\sigma}$, então (4.14) é satisfeito para

$$f = h + \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right) \chi_{B_{3\sigma}}.$$

De fato,

$$\int_{B_{3\sigma}} f = \int_{B_{3\sigma}} h + \int_{B_{3\sigma}} h \int_{B_{3\sigma}} \chi_{B_{3\sigma}} = 2 \int_{B_{3\sigma}} h,$$

e conseqüentemente,

$$\int_{B_{3\sigma}} f = 2 \int_{B_{3\sigma}} h \leq 2 \int_{B_{3\sigma}} h + 2h = 2f \text{ em } B_{3\sigma}.$$

Por definição $f = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_{3\sigma}$. Note que neste caso (4.2) permanece válido.

Vamos decompor a bola B em conjuntos de níveis. Para qualquer $k \in \mathbb{Z}$ seja

$$E_k = \{x \in B; Mh(x) \leq 2^k\} \quad \text{e} \quad a_k = \sup_{x \in E_k} |u(x)|. \quad (4.15)$$

Notemos que $E_k \subseteq E_{k+1}$, conseqüentemente $a_k \leq a_{k+1}$. Observemos também, $B = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (E_k \setminus E_{k-1})$ e essa união é disjunta.

Da desigualdade triangular, temos

$$\int_B |u - u_B| \leq \int_B |u_B| + \int_B |u| \leq \int_B |u| + |B||u_B| \leq \int_B |u| + \int_B |u| = 2 \int_B |u|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_B |u - u_B|(x) dx &\leq 2 \int_B |u(x)| dx & (4.16) \\
&= 2 \int_{\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (E_k \setminus E_{k-1})} |u(x)| dx \\
&= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(E_k \setminus E_{k-1})} |u(x)| dx \\
&\leq 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sup_{x \in E_k \setminus E_{k-1}} |u(x)| \right) \int_{(E_k \setminus E_{k-1})} 1 dx \\
&\leq 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k |E_k \setminus E_{k+1}| \\
&= 2 \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} a_k |E_k \setminus E_{k+1}| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k |E_k \setminus E_{k+1}| \right) \\
&= 2 \left(\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{k_0} a_k |E_k \setminus E_{k+1}|}_{\text{Parte I}} + \underbrace{\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k |E_k \setminus E_{k+1}|}_{\text{Parte II}} \right). & (4.17)
\end{aligned}$$

no qual $k_0 \in \mathbb{N}$ é um número a ser escolhido.

Nosso objetivo agora será encontrar estimativas para a_k e a_{k_0} . Pela hipótese (4.12) e pela Definição 4.15, a função $u\chi_{E_k}$ é Lipschitz de constante 2^{k+1} . De fato, para quaisquer $x, y \in E_k$, temos

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &\leq |x - y|(Mh(x) + Mh(y)) \\
&\leq |x - y|(2^k + 2^k) \\
&= 2^{k+1}|x - y|.
\end{aligned}$$

Agora, para qualquer $x \in E_k$ e $y \in E_{k-1} \subseteq E_k$,

$$|u(x)| \leq |u(x) - u(y)| + |u(y)| \leq 2^{k+1}|x - y| + a_{k-1}.$$

Mostremos uma propriedade sobre bolas em \mathbb{R}^n que será útil mais adiante.

Afirmção 1: Para qualquer $x \in B$ e $r \leq \text{diam } B$ vale $|B(x, r) \cap B| \geq |B(x, r/2)|$.

De fato, seja B a bola de centro em $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $\ell > 0$. Temos três casos a considerar:

(i) $r \leq \ell - d(x, a)$. Neste caso, $B(x, r) \subset B$, o que implica

$$|B(x, r) \cap B| = |B(x, r)| \geq |B(x, r/2)|.$$

(ii) $\ell + d(x, a) \leq r$. Vemos que $B \subset B(x, r)$, assim

$$|B(x, r) \cap B| = |B| \geq |B(x, r/2)|,$$

pois $r \leq \text{diam}B = 2\ell$.

(iii) $\ell - d(x, a) < r < \ell + d(x, a)$.

Lembrando que $x \in B$ então $d(x, a) < \ell$, assim $\ell - d(x, a) > 0$.

Tomemos $x' \in B$ na reta que une x a a tal que $d(x, x') = r/2$. Pela invariância $|B(x, r/2)| = |B(x', r/2)|$. Vamos demonstrar que

$$B(x', r/2) \subset B(x, r) \cap B(a, \ell), \quad (4.18)$$

e assim segue que

$$|B(x, r) \cap B(a, \ell)| \geq |B(x', r/2)| = |B(x, r/2)|.$$

De fato, seja $y \in B(x', r/2)$ então $d(x', y) < r/2$. Primeiramente mostremos que $d(x, y) < r$. Como $d(x, x') = r/2$ e $d(x', y) < r/2$ implica $d(x, y) < 2(r/2) = r$.

Resta-nos mostrar que $d(y, a) < \ell$. De fato,

$$d(a, y) \leq d(a, x') + d(x', y) \leq d(a, x') + r/2.$$

Temos dois casos a considerar

$$d(a, x') = \begin{cases} d(a, x) - d(x, x') & (1) \\ d(x, x') - d(a, x) & (2) \end{cases}$$

Se (1) acontece então

$$d(a, y) \leq d(a, x') + r/2 = d(a, x) - d(x, x') + r/2 = d(a, x) < \ell.$$

Se vale (2) então

$$\begin{aligned} d(a, y) \leq d(a, x') + r/2 &= [d(x, x') - d(a, x)] + r/2 \\ &= r/2 - d(a, x) + r/2 \\ &= r - d(a, x) \\ &< [\ell + d(a, x)] - d(a, x) = \ell. \end{aligned}$$

Portanto, a inclusão (4.18) é verdadeira e assim segue a afirmação.

Observemos que qualquer bola em \mathbb{R}^n , com a medida de Lebesgue, satisfaz a propriedade de n -regularidade, isto é,

$$|B(x, r)| > \omega_n (r/2)^n,$$

no qual ω_n é o volume da bola unitária.

Escolhamos r , com $r < \text{diam } B$, tal que $|B(x, r/2)| \geq |B \setminus E_{k-1}|$. Basta tomar $r > 2\omega_n^{-\frac{1}{n}} |B \setminus E_{k-1}|^{\frac{1}{n}}$. De fato,

$$|B(x, r/2)| > \omega_n (r/2)^n > \omega_n \left(\omega_n^{-\frac{1}{n}} |B \setminus E_{k-1}|^{\frac{1}{n}} \right)^n = |B \setminus E_{k-1}|.$$

Afirmação 2: Dado $x \in E_k$ existe $y \in E_{k-1}$ tal que $|x - y| < r$ para $\text{diam } B > r > 2\omega_n^{-\frac{1}{n}} |B \setminus E_{k-1}|^{\frac{1}{n}}$.

De fato, suponhamos (por absurdo) que dado $x \in E_k$ e r como acima $B(x, r) \cap E_{k-1} = \emptyset$. Lembremos que $E_{k-1} = \{x \in B; Mh(x) \leq 2^{k-1}\}$. Assim, podemos escrever B como união disjunta $B = (B \setminus E_{k-1}) \cup E_{k-1}$. Intersectando a bola B com a bola $B(x, r)$, e usando a propriedade distributiva da interseção, temos

$$B \cap B(x, r) = ((B \setminus E_{k-1}) \cap B(x, r)) \cup (E_{k-1} \cap B(x, r)).$$

Pela definição de medida de conjunto,

$$|B \cap B(x, r)| = |(B \setminus E_{k-1}) \cap B(x, r)| + |E_{k-1} \cap B(x, r)|,$$

mas por hipótese $|B(x, r) \cap E_{k-1}| = 0$. Logo

$$|B \cap B(x, r)| = |(B \setminus E_{k-1}) \cap B(x, r)|.$$

Pela Afirmação 1, $r > 2\omega_n^{-\frac{1}{n}}|B \setminus E_{k-1}|^{\frac{1}{n}}$ segue

$$|B \cap B(x, r)| \geq |B(x, r/2)| > |B \setminus E_{k-1}|.$$

Portanto,

$$|(B \setminus E_{k-1}) \cap B(x, r)| > |B \setminus E_{k-1}|$$

o que é uma contradição. Logo, $B(x, r) \cap E_{k-1} = \emptyset$.

Pela Afirmação 2 dado $x \in E_k$ temos que

$$|u(x)| \leq 2^{k+1}C|B \setminus E_{k-1}|^{\frac{1}{n}} + a_{k-1}$$

para $C = C(n) > 0$ e $r = 2\omega_n^{-\frac{1}{n}}|B \setminus E_{k-1}|^{\frac{1}{n}}$ (caso limite de r).

Como a desigualdade acima é uniforme, tomando o supremo no conjunto E_k , segue

$$a_k \lesssim 2^{k+1}|B \setminus E_{k-1}|^{\frac{1}{n}} + a_{k-1}. \quad (4.19)$$

Analisemos $|B \setminus E_{k-1}|$. Usando o fato do operador maximal M ser fraco (1, 1), temos

$$|B \setminus E_{k-1}| = |\{x \in B; Mh(x) > 2^{k-1}\}| \leq \frac{c}{2^{k-1}} \int |h| = \frac{2c}{2^k} \int_{B_{3\sigma}} h = \frac{C}{2^k} \int_{B_{3\sigma}} h. \quad (4.20)$$

Substituindo (4.20) em (4.19), obtemos uma estimativa para a_k ,

$$\begin{aligned} a_k &\leq a_{k-1} + C2^{k+1} \left(\frac{1}{2^k} \int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= a_{k-1} + C2^{k(1-\frac{1}{n})} \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Se $k > k_0$, podemos iterar a desigualdade anterior até chegarmos em k_0 . Consideremos dois casos $n = 1$ e $n > 1$.

Se $n = 1$, para qualquer $k > k_0$, temos

$$\begin{aligned} a_k &\leq a_{k-1} + C \int_{B_{3\sigma}} h \\ &\leq \left(a_{k-2} + C \int_{B_{3\sigma}} h \right) + C \int_{B_{3\sigma}} h \\ &\vdots \\ &\leq a_{k_0} + (k - k_0)C \int_{B_{3\sigma}} h. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Assumindo $n > 1$, para qualquer $k > k_0$, segue

$$\begin{aligned} a_k &\leq a_{k-1} + C2^{k(1-\frac{1}{n})} \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \left(a_{k-2} + C2^{(k-1)(1-\frac{1}{n})} \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}} \right) + C2^{k(1-\frac{1}{n})} \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\vdots \\ &\leq a_{k_0} + C \left(\sum_{i=k_0+1}^k 2^{i(1-\frac{1}{n})} \right) \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq a_{k_0} + C2^{k(1-\frac{1}{n})} \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Se $k \leq k_0$ então $E_k \subset E_{k_0}$, assim $a_k \leq a_{k_0}$. Escolhamos k_0 tal que

$$|E_{k_0-1}| < |B|/2 \leq |E_{k_0}|. \tag{4.23}$$

De fato tal k_0 existe pois devido a limitação de h , visto em (4.14), temos $h \geq \frac{1}{2} \int_{B_{3\sigma}} h$

assim,

$$Mh(x) \geq \frac{1}{2} \int_{B_{3\sigma}} h.$$

Além disso, 2^k tende a zero quando $k \rightarrow -\infty$ então

$$|E_k| \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow -\infty.$$

Pela definição de limite, existe um $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|E_{j_0}| < \varepsilon_1$ para $j \leq -j_0$. Escolha $\varepsilon_1 = \frac{|B|}{2}$. Assim, temos um lado da desigualdade

$$|E_{j_0}| < \frac{|B|}{2}.$$

Por outro lado, como $|E_k| \rightarrow |B|$ quando $k \rightarrow \infty$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|B| - |E_k| < |B|/2$ para $k \geq k_0$, isto implica, $\frac{|B|}{2} < |E_k|$ para $k \geq k_0$. Tome \tilde{k}_0 o menor entre os índices k_0 tal que $\frac{|B|}{2} < |E_k|$ para $k \geq k_0$. Este \tilde{k}_0 verifica

$$|E_{\tilde{k}_0-1}| < |B|/2 \leq |E_{\tilde{k}_0}|,$$

e assim temos (4.23).

Como $E_{k_0} \neq \emptyset$, existe $x \in B$ tal que

$$\frac{1}{2} \int_{B_{3\sigma}} h \leq Mh(x) \leq 2^{k_0}. \quad (4.24)$$

De (4.23) segue

$$|B| = |B \setminus E_{k_0-1} \cup E_{k_0-1}| = |B \setminus E_{k_0-1}| + |E_{k_0-1}| < |B \setminus E_{k_0-1}| + \frac{|B|}{2},$$

o que implica

$$\frac{|B|}{2} < |B \setminus E_{k_0-1}|.$$

Da estimativa fraca (1, 1) do operador maximal, temos

$$\frac{|B|}{2} < |B \setminus E_{k_0-1}| = |\{x \in B; Mh(x) > 2^{k_0-1}\}| \leq \frac{2C}{2^{k_0}} \int_{B_{3\sigma}} h, \quad (4.25)$$

o que implica

$$2^{k_0} \leq \frac{C}{|B|} \int_{B_{3\sigma}} h = C(\sigma) \int_{B_{3\sigma}} h. \quad (4.26)$$

Das estimativas (4.24) e (4.26), segue que

$$2^{k_0} \approx \int_{B_{3\sigma}} h = \frac{1}{|B_{3\sigma}|} \int_{B_{3\sigma}} h. \quad (4.27)$$

De acordo com a aproximação dada anteriormente podemos inferir que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$2^{\frac{-k_0}{n}} \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}} \approx |B_{3\sigma}|^{\frac{1}{n}} = C(n, \sigma) \text{diam } B. \quad (4.28)$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $a_{k_0-1} \leq 2^{k_0-1} \text{diam } B$, pois caso contrário, existiria b constante positiva tal que $\sup_{x \in E_{k_0-1}} |u(x) - b| \leq 2^{k_0-1} \text{diam } B$ e substituindo u por $u - b$ a desigualdade (4.12) permanece válida.

Para qualquer $x \in E_{k_0}$, temos $|u(x)| \leq a_{k_0}$. Mais ainda, u é Lipschitz em E_{k_0} de constante 2^{k_0+1} , assim

$$\begin{aligned} a_{k_0} \leq 2^{k_0+1}|x - y| + a_{k_0-1} &\leq 2^{k_0+1}|B \setminus E_{k_0-1}|^{\frac{1}{n}} + a_{k_0-1} \\ &\leq 2^{k_0+1} \left(\frac{C}{2^{k_0}} \int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}} + a_{k_0-1} \\ &\leq 2^{k_0+1} C(\sigma) \text{diam } B + 2^{k_0-1} \text{diam } B \\ &\lesssim \text{diam } B \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Voltando a desigualdade (4.16), e substituindo a estimativa a_{k_0} na Parte I, temos

$$\sum_{k=-\infty}^{k_0} a_{k_0} |E_k \setminus E_{k+1}| \lesssim \text{diam } B \int_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=-\infty}^{k_0} |E_k \setminus E_{k+1}| \quad (4.30)$$

Já no caso da Parte II da desigualdade (4.16), será necessário analisar separadamente os casos $n = 1$ e $n > 1$. Para $n = 1$, pelas estimativas (4.20), (4.21), (4.28) e

(4.29), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k |E_k \setminus E_{k+1}| &\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(a_{k_0} + C(k - k_0) \int_{B_{3\sigma}} h \right) |E_k \setminus E_{k+1}| \\
&\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(2 \int_{B_{3\sigma}} h \operatorname{diam} B + C(k - k_0) \int_{B_{3\sigma}} h \right) |E_k \setminus E_{k+1}| \\
&\leq 2 \operatorname{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}| + \int_{B_{3\sigma}} h C \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (k - k_0) |B \setminus E_{k+1}| \\
&\leq 2 \operatorname{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}| + \int_{B_{3\sigma}} h C \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (k - k_0) \left(\frac{C}{2^k} \int_{B_{3\sigma}} h \right) \\
&\leq 2 \operatorname{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}| + C \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{(k - k_0)}{2^k} \\
&\leq 2 \operatorname{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}| + C \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^2 \left(\frac{1}{2^{k_0}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \right) \\
&\leq 2 \operatorname{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}| + C \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^2 2^{-k_0} \tilde{C} \\
&\leq 2 \operatorname{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}| + C \int_{B_{3\sigma}} h \operatorname{diam} B,
\end{aligned}$$

uma vez que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ converge.

Se $n > 1$ então pelas estimativas (4.20), (4.22), (4.28) e (4.29), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k |E_k \setminus E_{k+1}| &\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(a_{k_0} + C 2^{k(1-\frac{1}{n})} \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}} \right) |E_k \setminus E_{k+1}| \\
&\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(2 \text{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h + C 2^{k(1-\frac{1}{n})} \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}} \right) |E_k \setminus E_{k+1}| \\
&\leq 2 \text{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}| + \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}} C \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{k(1-\frac{1}{n})} |B \setminus E_{k+1}| \\
&\leq 2 \text{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}| + \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}} C \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{k(1-\frac{1}{n})} \left(\frac{c}{2^k} \int_{B_{3\sigma}} h \right) \\
&\leq 2 \text{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}| + C \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{n}} \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right) \\
&\leq 2 \text{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}| + C \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}} 2^{-\frac{k_0}{n}} \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right) \\
&\leq 2 \text{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}| + C \text{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h.
\end{aligned}$$

Notemos que as estimativas obtidas para os casos $n = 1$ e $n > 1$ são similares.

Então finalmente concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_B |u - u_B| &\leq 2 \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} a_k |E_k \setminus E_{k+1}| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k |E_k \setminus E_{k+1}| \right) \\
&\leq 4 \text{diam} B \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right) \sum_{k=-\infty}^{k_0} |E_k \setminus E_{k+1}| \\
&\quad + 4 \text{diam} B \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right) \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}| + C \text{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h \\
&\leq 4 \text{diam} B \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}| \right) + C \text{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h \\
&\leq 4 \text{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h |B| + C \text{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h \\
&\leq C \text{diam} B \int_{B_{3\sigma}} h,
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração

$$\int_B |u - u_B| \leq C(n, p, \sigma) r \int_{B_{3\sigma}} h.$$



O próximo lema tem como hipótese a desigualdade de Poincaré.

Lema 4.11. *Sejam $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq g \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$ e $\sigma \geq 1$ são tais que*

$$\int_B |u - u_B| \leq Cr \left(\int_B g^p \right)^{1/p}, \quad (4.31)$$

para toda bola B de raio r . Então $u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e

$$|\nabla u| \leq C(n)g \text{ em quase todo ponto.}$$

Demonstração. Todas as constantes do decorrer da demonstração dependerão apenas de n .

Seja $B = B(0, 1)$ a bola de centro em $0 \in \mathbb{R}^n$ e raio 1. Considere $\psi \in C_c^\infty(B)$ com $\psi \geq 0$ e $\int \psi = 1$ (como vimos na Seção 2.1 existem funções com esta propriedade). Além disso, considere $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \psi(x/\varepsilon)$ e a aproximação suave da distribuição u dada por $u * \psi_\varepsilon$, provada no Teorema 2.2.

Pela Definição 1.2 de derivada distribucional, a derivada de u em relação a coordenada x_i é

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \text{ para qualquer } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Como $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, podemos identificar o lado direito da igualdade da seguinte forma

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \int u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx, \text{ para qualquer } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Pelo Teorema 1.45, temos

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle &= - \int u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \\
&= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int (u * \psi_\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{\partial}{\partial x_i} (u * \psi_\varepsilon) \varphi \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left(u * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right) \varphi.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Observemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} dx_i \right) d\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\lim_{L \rightarrow \infty} (\psi_\varepsilon(L, \bar{x}) - \psi_\varepsilon(-L, \bar{x})) \right] d\bar{x} = 0,$$

no qual $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Disso, segue que

$$\left(u * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right) (x) = (u - u_{B(x, \varepsilon)}) * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i}(x).$$

Agora, pela definição de convolução e regra da cadeia

$$\begin{aligned}
\left| u * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right| (x) &= \left| (u - u_{B(x, \varepsilon)}) * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right| (x) \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (u - u_{B(x, \varepsilon)})(y) \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial y_i}(x - y) dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (u - u_{B(x, \varepsilon)})(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{\varepsilon^n} \psi((x - y)/\varepsilon) \right) dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u - u_{B(x, \varepsilon)}|(y) \frac{1}{\varepsilon^n} \left| \frac{\partial \psi}{\partial y_i}((x - y)/\varepsilon) \right| dy.
\end{aligned}$$

Como ψ tem suporte compacto na bola unitária, segue do Teorema 3.7 que

$$\text{supp} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_i}((x - y)/\varepsilon) dy \right) \subset B(x, \varepsilon).$$

Logo, pela observação acima e pela hipótese (4.31), temos

$$\begin{aligned} \left| u * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right| (x) &\leq \left\| \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right\|_\infty \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \int_{B(x,\varepsilon)} |u - u_{B(x,\varepsilon)}|(y) dy \\ &\leq C(\psi) \left(\int_{B(x,\sigma\varepsilon)} g^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Para qualquer conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ temos,

$$\begin{aligned} \int_K \left| u * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right|^p (x) dx &\leq C^p \int_K \left(\int_{B(x,\sigma\varepsilon)} g^p(y) dy \right) dx \\ &= C^p \frac{1}{|B_{\sigma\varepsilon}|} \int_K \left(\int_{B(x,\sigma\varepsilon)} g^p(y) dy \right) dx \\ &= C^p \frac{1}{|B_{\sigma\varepsilon}|} \int_{K_{\sigma\varepsilon}} g^p(y) \left(\int_K \chi_{B(y,\sigma\varepsilon)}(x) dx \right) dy \\ &\leq C^p \frac{1}{|B_{\sigma\varepsilon}|} \int_{K_{\sigma\varepsilon}} g^p(y) |K \cap B(y,\sigma\varepsilon)| dy \\ &\leq C^p \int_{K_{\sigma\varepsilon}} g^p(y) dy, \end{aligned} \tag{4.33}$$

no qual, $K_{\sigma\varepsilon}$ é o conjunto dos pontos em \mathbb{R}^n cuja distância a K é menor que $\sigma\varepsilon$.

Agora pela Identidade (4.32) e pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \right| &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(u * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right) \varphi \right| \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\text{supp}(\varphi)} \left| u * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

no qual $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, com $q = \infty$ se $p = 1$.

Fixe uma bola B . Como $\varphi \in C_c^\infty(B)$, usando a Desigualdade 4.33, obtemos

$$\left| \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \right| \leq C \left(\int_{\sigma B} g^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.34}$$

também válida para $p = 1$ e $q = \infty$.

Tal como fizemos na demonstração anterior, dividamos a demonstração em dois casos. Assumamos inicialmente $1 < p < \infty$. Fixe uma bola B do \mathbb{R}^n qualquer. Considere

o funcional linear $T := \frac{\partial u}{\partial x_i} : (C_c^\infty(B), \|\cdot\|_q) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$T(\varphi) \mapsto \langle T, \varphi \rangle, \quad (4.35)$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(B)$.

Pela Desigualdade (4.34), como $|T(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_q$, temos que, T é um funcional linear limitado no subespaço $C_c^\infty(B)$ do espaço normado $L^q(B)$. Em vista disso, pelo Teorema de Hahn Banach, este funcional pode ser estendido a um funcional linear limitado em $L^q(B)$.

Lembremos que $(L^q(B))^* = L^p(B)$. Então $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(B)$ e

$$\left(\int_B \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{\sigma B} g^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicando o Corolário da Diferenciação de Lebesgue na desigualdade acima, vemos

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|B_r|} \int_{\sigma B_r} g^p \right)^{\frac{1}{p}} = C(n, \sigma)g \quad q.t.p. \quad (4.36)$$

Como $g \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ e cada componente do gradiente é limitada por g , concluímos que $\nabla u \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$.

Falta mostrarmos que $u \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$. Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $\alpha, \alpha' \geq 1$, então pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\int_K |u|^p dx \leq \left(\int_K |u|^{p\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_K dx \right)^{\frac{1}{\alpha'}}, \quad (4.37)$$

no qual $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$. Defina $p\alpha = p^*$, no qual $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, isto implica $\alpha = \frac{p^*}{p} > 1$ e

$\frac{1}{\alpha'} = 1 - \frac{p}{p^*} > 0$. Pelo Corolário 3.14, temos

$$\begin{aligned} \int_K |u|^p dx &\leq \left(\int_K |u|^{p^*} \right)^{\frac{p}{p^*}} \left(\int_K dx \right)^{1 - \frac{p}{p^*}} \\ &= \left(\int_K |u|^{p^*} \right)^{\frac{p}{p^*}} |K|^{1 - \frac{p}{p^*}} \\ &\leq C(K) \|u\|_{p^*}^p \\ &\leq C(K) \|\nabla u\|_p^p. \end{aligned}$$

Portanto, para qualquer $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto vale

$$\|u\chi_K\|_p \leq C \|\nabla u\|_p.$$

Com isso, concluímos que $u \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$.

Agora o caso $p = 1$. Já temos, por hipótese, que $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, resta mostrarmos que $\|\nabla u\| \leq C(n)g$.

Se $p = 1$ então $q = \infty$. Considere o funcional linear $T := \frac{\partial u}{\partial x_i} : (C_c^\infty(B), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$T(\varphi) \mapsto \langle T, \varphi \rangle, \quad (4.38)$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(B)$.

Pela Desigualdade 4.34, como $|T(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_\infty$, temos que T é um funcional linear limitado no subespaço $C_c^\infty(B)$ do espaço normado $C_0(B)$. Pelo Teorema de Hahn Banach, este funcional pode ser estendido a um funcional linear limitado \tilde{T} em $(C_0(B), \|\cdot\|_\infty)$.

Pelo Teorema de Representação de Riesz, \tilde{T} pode ser representado por uma única medida de Radon complexa μ , isto é,

$$\tilde{T}(\varphi) = \int \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Mostremos que μ é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue. Suponhamos (por absurdo) que existe um compacto K cuja medida de Lebesgue $|K| = 0$, entretanto $\mu(K) \neq 0$. Seja $\varphi_i \in C_c^\infty(K_{1/i})$ uma sequência decrescente de funções, com

$0 \leq \varphi_i \leq 1$ e $\varphi_i|_K \equiv 1$. Pelo Teorema de Convergência Monótona, temos

$$\int_{K_{1/i}} \varphi_i d\mu \rightarrow \int_K d\mu = \mu(K) > 0.$$

Por outro lado, pela Desigualdade (4.34)

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_{1/i}} \varphi_i d\mu \right| &= |T(\varphi \chi_{K_{1/i}})| \leq \|T\| \|\varphi_i\|_\infty \\ &\leq \|\varphi_i\|_\infty \left(\int_{\sigma B} g \chi_{K_{1/i}} \right) \\ &\leq \int_{\chi_{K_{1/i}}} g. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Mas,

$$\int_{\chi_{K_{1/i}}} g \rightarrow \int_K g dx = 0,$$

pois, supomos que $|K| = 0$, no qual dx denota a medida de Lebesgue. Donde obtemos uma contradição.

De acordo com Teorema de Radon-Nikodym, temos

$$d\mu = \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Agora, pela definição de derivada distribucional e da unicidade da medida do Teorema de Radon-Nikodym segue

$$\left| \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \right| = \left| \int \varphi d\mu \right| = \left| \int \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \right|.$$

Pela Desigualdade (4.34) para $p = 1$ e $q = \infty$, temos

$$\left| \int \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \right| \leq C \|\varphi\|_\infty \int_{\sigma B} g, \quad (4.40)$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(B)$.

Como a função $\text{sgn}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in L^1(B)$ e já vimos que $C_c^\infty(B)$ é denso em $L^1(B)$, segue que $\text{sgn}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ pode ser aproximada por funções $\varphi_j \in C_c^\infty(B)$ em norma $L^1(B)$ com

$\|\varphi_j\|_\infty \leq 1$. Assim,

$$\int_B \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| = \int_B \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_B \varphi_j \frac{\partial u}{\partial x_i} \leq C \|\varphi_j\|_\infty \int_{\sigma B} g \leq C \int_{\sigma B} g,$$

para qualquer bola B .

Pelo raciocínio análogo ao feito na desigualdade (4.36), segue do Teorema de Diferenciação de Lebesgue aplicado a $p = 1$ que

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leq Cg \quad \text{q.t.p.}$$

Como $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, concluímos $|\nabla u| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, por conseguinte, $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Isto completa a demonstração do Lema 4.11. ■

Demonstração do Teorema 4.8. Se $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ então pelo Teorema 4.1, temos

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n, \sigma)|x - y|(M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(x) + M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(y)),$$

sendo assim, basta tomar $g = C(n, \sigma)|\nabla u| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, como u e $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então pelo Lema 4.10 concluímos que vale a desigualdade de Poincaré e, por sua vez, pelo Lema 4.11 implica que $|\nabla u| \leq C(n)g$ q.t.p e assim $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. ■

4.2 Teorema de Equivalências em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Segue abaixo o teorema principal desse capítulo.

Teorema 4.12. *Seja $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Existe $0 \leq g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_B |u - u_B| \leq Cr \int_B g$$

para qualquer bola B do \mathbb{R}^n com $r > 0$.

(iii) Existem $0 \leq g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq q \leq p$ e $\sigma \geq 1$ tais que

$$\int_B |u - u_B| \leq Cr \left(\int_{3\sigma B} g^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para qualquer bola B do \mathbb{R}^n com $r > 0$.

(iv) Existem $0 \leq g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq q \leq p$ e $\sigma \geq 1$ tais que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y| \left((M_{\sigma|x-y|} g^q(x))^{\frac{1}{q}} + (M_{\sigma|x-y|} g^q(y))^{\frac{1}{q}} \right) \quad q.t.p.$$

Além disso, as desigualdades (ii), (iii) e (iv) implicam que

$$|\nabla u| \leq Cg \quad q.t.p.$$

Demonstração. Mostraremos que $(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii)$.

(i) \Rightarrow (ii) Segue da Desigualdade Clássica de Poincaré 3.15 que

$$\int_B |u - u_B| dx \leq Cr \int_B |\nabla u| dx$$

para qualquer bola B de raio r . Como $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, temos que $|\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Basta considerarmos $g = |\nabla u|$ e o resultado segue.

(ii) \Rightarrow (i) Basta mostrar que $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Por hipótese existe $0 < g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_B |u - u_B| \leq Cr \int_B g. \quad (4.41)$$

Queremos aplicar o Lema 4.11, entretanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|} \int_B g &\leq \frac{1}{|B|} \left(\int_B g^p \right)^{\frac{1}{p}} |B|^{1-\frac{1}{p}} \\
&= \frac{|B|^{1-\frac{1}{p}}}{|B|} \left(\int_B g^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_B g^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C(n, p, \sigma) \left(\int_{\sigma B} g^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

De (4.41) e da desigualdade acima segue (4.30), e portanto

$$|\nabla u| \leq C(n, p, \sigma)g \quad \text{implica} \quad |\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

(ii) \Rightarrow (iii) Como $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $1 \leq q \leq p < \infty$ e, por hipótese, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, logo $g \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $1 \leq q \leq p < \infty$.

Considere B uma bola fixada. Pela Desigualdade de Hölder aplicada para q e q' tais que $1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_B |u - u_B| &\leq r \int_B g = r \frac{1}{|B|} \int_B g \\
&\leq r \frac{1}{|B|} \left(\int_B |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} |B|^{\frac{1}{q'}} \\
&\leq r \frac{1}{|B|} |3\sigma B|^{\frac{1}{q}} \left(\int_{3\sigma B} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} |B|^{\frac{1}{q'}} \\
&= Cr\sigma^{\frac{n}{q}} |B|^{\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} - 1} \left(\int_{3\sigma B} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C(n, p, \sigma)r \left(\int_{3\sigma B} g^q \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (i) Basta observar que o Lema 4.11 permanece válido substituindo σB no lado direito de (4.30) por $3\sigma B$.

Com isso mostramos que (i), (ii) e (iii) são equivalentes.

(i) \Rightarrow (iv) Uma vez que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$, pelo Teorema 4.1 aplicado a $1 < p < \infty$ e pelo Teorema 4.8 para $p = 1$, segue a desigualdade

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n)|x - y|(M_{\sigma|x-y|}g(x) + M_{\sigma|x-y|}g(y)),$$

para alguma $0 \leq g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$.

Agora pela Desigualdade de Hölder aplicada a q e q' tais que $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, temos

$$\begin{aligned} M_{\sigma|x-y|}g &= \sup_{r < \sigma|x-y|} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} g \\ &\leq \sup_{r < \sigma|x-y|} \frac{1}{|B_r|} \left(\int_{B_r} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} |B_r|^{\frac{1}{q'}} \\ &= \sup_{r < \sigma|x-y|} \frac{1}{|B_r|^{1-\frac{1}{q'}}} \left(\int_{B_r} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{r < \sigma|x-y|} \left(\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sup_{r < \sigma|x-y|} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} g^q \right)^{\frac{1}{q}} = (M_{\sigma|x-y|}g^q)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

(iv) \Rightarrow (iii) Dado que $u \in L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, a desigualdade desejada segue diretamente do Lema 4.10. ■

A demonstração do teorema de equivalências está concluída. Faremos uma demonstração adicional que (iii) implica que existem $0 \leq g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq q \leq p$ e $\sigma \geq 1$ tais que satisfazem a seguinte desigualdade:

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y| \left((M_{6\sigma|x-y|}g^q(x))^{\frac{1}{q}} + (M_{6\sigma|x-y|}g^q(y))^{\frac{1}{q}} \right). \quad q.t.p.$$

(iii) \Rightarrow (iv) Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ pontos de Lebesgue da função $u \in L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue isto é verdadeiro em quase todo ponto.

Escrevamos

$$B_i(x) = B(x, r_i) = B(x, 2^{-i}|x - y|), \text{ com } i \in \mathbb{N}.$$

Notemos que $B_0(x) = B(x, |x - y|)$ e $B_i(x) \subset B_0(x)$ para qualquer $i \in \mathbb{N}$. Além disso, $B_{i+1} \subset B_i$ para qualquer $i \in \mathbb{N}$ e pela Observação 2.9, uma vez que x é ponto de Lebesgue, segue

$$u_{B_i}(x) \rightarrow u(x)$$

quando $i \rightarrow \infty$.

Pela desigualdade triangular e pela desigualdade da hipótese

$$\begin{aligned} |u(x) - u_{B_0(x)}| &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |u_{B_i(x)} - u_{B_{i+1}(x)}| = \sum_{i=0}^{\infty} \left| u_{B_i(x)} - \int_{B_{i+1}(x)} u(z) dz \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_{B_{i+1}(x)} |u_{B_i(x)} - u| \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{|B_{i+1}|} \int_{B_{i+1}(x)} |u_{B_i(x)} - u| \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|B_i|}{|B_{i+1}|} \frac{1}{|B_i|} \int_{B_i} |u_{B_i(x)} - u| \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|B_i|}{|B_{i+1}|} \int_{B_i} |u_{B_i(x)} - u| \\ &\leq C \sum_{i=0}^{\infty} r_i \left(\int_{3\sigma B_i(x)} g^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \sum_{i=0}^{\infty} r_i \left(\int_{3\sigma B_0(x)} g^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C|x - y| (M_{3\sigma|x-y|} g^q(x))^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$|u(y) - u_{B_0(y)}| \leq C|x - y| (M_{3\sigma|x-y|} g^q(y))^{\frac{1}{q}}.$$

E ainda, seja $2B_0(x) = B(x, 2|x - y|)$, segue que $B_0(y) = B(y, |x - y|) \subset 2B_0(x) = B(x, 2|x - y|)$. De fato, tomemos $z \in B_0(y)$ então $|z - y| \leq |x - y|$. Queremos mostrar

que $z \in 2B_0(x)$, ou seja, $|z - x| \leq 2|x - y|$, mas

$$|z - x| = |z - y + y - x| \leq |x - y| + |x - y| = 2|x - y|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |u_{B_0(x)} - u_{B_0(y)}| &\leq |u_{B_0(x)} - u_{2B_0(x)}| + |u_{B_0(y)} - u_{2B_0(x)}| \\ &\leq \int_{B_0(x)} |u - u_{2B_0(x)}| + \int_{B_0(y)} |u - u_{2B_0(x)}| \\ &\leq C \int_{2B_0(x)} |u - u_{2B_0(x)}| + C \int_{2B_0(x)} |u - u_{2B_0(x)}| \\ &\leq 2C \int_{2B_0(x)} |u - u_{2B_0(x)}| \\ &\leq C|x - y| \left(\int_{6\sigma B_0} g^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C|x - y| (M_{6\sigma|x-y|} g^q(x))^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Juntando as três desigualdades, concluímos

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_{B_0(x)}| + |u_{B_0(x)} - u_{B_0(y)}| + |u_{B_0(y)} - u(y)| \\ &\leq C|x - y| \left((M_{3\sigma|x-y|} g^q(x))^{\frac{1}{q}} + (M_{6\sigma|x-y|} g^q(x))^{\frac{1}{q}} + (M_{3\sigma|x-y|} g^q(y))^{\frac{1}{q}} \right) \\ &\leq C|x - y| \left((M_{6\sigma|x-y|} g^q(x))^{\frac{1}{q}} + (M_{6\sigma|x-y|} g^q(y))^{\frac{1}{q}} \right). \end{aligned}$$

■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Adams, Robert A. e Fourier, John J. F. *Sobolev Spaces*. Segunda edição. Academic Press, 2003.
- [2] Bartle, Robert. *Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Willey Classics Library, New York , 1966.
- [3] Brezis, Haim. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Equations Differential*. Editora Springer, 2010.
- [4] Cordaro, Paulo. *Delta de Dirac - Uma introdução à Teoria das Distribuições para engenharia*, Editora Livraria da Física, 2002.
- [5] Duoandikoetxea, Javier. *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 29, Editora American Mathematical Society, 2000.
- [6] Evans, Lawrence e Gariépy, Ronald. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CR Press, 1992.
- [7] Evans, Lawrence. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [8] Folland, Gerald. *Real Analysis, Modern Techniques and their Applications*, United American States. New York, 1984.

-
- [9] Gilbarg, D., Trudinger, N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. New York, 1957.
- [10] Hajlasz, Piotr. *A new characterization of the Sobolev Spaces*, Studia Mathematica, 2003.
- [11] Hajlasz, Piotr. *Geometric approach to Sobolev Spaces and badly degenerated elliptic equations*, 1994.
- [12] Hajlasz, Piotr. e Koskela, Pekka. *Sobolev met Poincaré*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, 1995.
- [13] Hajlasz, Piotr. *Sobolev Spaces on an arbitrary Metric Space*, Potencial Anal. 5, 1996.
- [14] Hajlasz, Piotr. *Sobolev Spaces on Metric Measure Space*, Contemporary Math, 2003.
- [15] Heinonen, Juha e Koskela, Pekka. *Quasiconformal maps on metric spaces with controlled geometry*, Acta Mathematica, 1998.
- [16] Heinonen, Juha. *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Universitext, Springer, New York, 2001.
- [17] Kinnunen, Juha. *Sobolev Spaces*, Department of Mathematics and Systems Analysis, Aalto University, 2017.
- [18] Heinonen, Juha e Koskela, Pekka e Shanmugalingam, Nageswari e Tyson, Jeremy. *Sobolev Spaces on Metric Measure Spaces - An Approach Based on Upper Gradients*, Cambridge University Press, 2015.
- [19] Hounie, Jorge. *Teoria Elementar da Distribuições*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - Rio de Janeiro, 1979.
- [20] Oliveira, César Rogério. *Introdução à análise funcional*. Coleção: Coleção Projeto Euclides. Rio de Janeiro, 2010.
- [21] Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Inc. terceira edição, 1987.
- [22] Rudin, Walter. *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc. segunda edição, 1991.
-