UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS

EXATAS - PPGECE

SILVANA VALDÍVIA NAJAR LUCISANO

CONTEXTO MATEMÁTICO INSERIDO NA VIVÊNCIA DE AGRIMENSURA

São Carlos

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS

EXATAS - PPGECE

SILVANA VALDÍVIA NAJAR LUCISANO

CONTEXTO MATEMÁTICO INSERIDO NA VIVÊNCIA DE AGRIMENSURA

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas – PPGECE da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Salvador

SÃO CARLOS

2018

Ficha Catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar

Processamento Técnico com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Lucisano, Silvana Valdívia Najar

Contexto Matemático inserido na vivência de Agrimensura / Silvana Valdívia Najar Lucisano. - - São Carlos : UFSCar, 2018.

93 p.

Dissertação (Mestrado) - - Universidade Federal de São Carlos, 2018.

1. Agrimensura. 2. Matemática Aplicada. 3. Aula no Campo. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Silvana Valdivia Najar Lucisano, realizada em 27/04/2018:

Prof. Dr. José Antonio Salvador
UFSCar

Érica Filletti

Prof. Dr. Érica Regina Filletti Nascimento
UNESP

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
UFSCar

...

Um arquiteto de sonhos
Engenheiro do futuro
Um motorista da vida
dirigindo no escuro
Um plantador de esperança
plantando em cada criança
um adulto sonhador
e esse cordel foi escrito
por que ainda acredito
na força do professor.

Bráulio Bessa

Dedico este trabalho àquele, que de certa forma, realiza sonhos através da arte do pensar, planta esperança quando se torna reflexivo e "reexamina constantemente seus objetivos, seus procedimentos, suas evidências e seus saberes": Professor, "ensinante" que conduz seu "aprendente" à autonomia, à capacidade de reconhecer e criar seu caminho; "ensinante", capaz de "intervir (vir entre)" sem permitir que o meio possa "interferir (ferir entre)" de forma negativa.

AGRADECIMENTOS

*"Agradeço todas as dificuldades que enfrentei. Não fosse por elas, eu não teria saído do lugar...
As facilidades nos impendem de caminhar. Mesmo as críticas nos auxiliam muito".
(Chico Xavier)*

Aos meus filhos Renata, Paula e Marcio, vidas, que nesta existência foram confiadas a mim, inspirando-me força e coragem sempre, por me apoiarem e incentivarem com alegria e orgulho. Obrigada pela amizade que nutrem por minha alma, pelo companheirismo em todos os meus momentos importantes e decisivos, por participarem efetivamente da minha vida, demonstrando o quanto se tornaram cúmplices dos meus objetivos.

Não posso deixar de demonstrar minha eterna gratidão e admiração a minha filha Renata, alma generosa e altruísta, que em todas as etapas desse trabalho, colaborou com sua leitura e sugestões, me incentivando-me a não desistir de tão nobre tarefa. Agradeço aos meus filhos Paula e Marcio por terem colaborado prontamente em parte do meu trabalho.

Ao meu estimável orientador professor dr José Antonio Salvador, pela admirável dedicação e sensibilidade, entusiasmo e excelência em tudo que faz. Minha alma se sente honrada e a gratidão permeia meu coração pela sua participação em minha evolução acadêmica.

Aos meus alunos, pois sem eles nada teria se realizado. Agradeço a oportunidade de conhece-los mais de perto e participar das descobertas de seus próprios talentos.

A minha banca de defesa, pelas valiosas contribuições.

RESUMO

A Vivência de Agrimensura pode ser vista como parte das Ciências da Natureza e Matemática do currículo do Ensino Médio, e proporciona ao estudante conhecer como se nasce o "mapa", objeto de uso para a construção de diversos tipos de obras. O presente trabalho tem como objetivo abordar uma experiência em campo, de atividades com conceitos matemáticos, principalmente da trigonometria e da geometria, que são utilizados na prática da Agrimensura, esclarecendo ao estudante, a importância e a aplicação dos mesmos. Essa experiência foi desenvolvida com um grupo de estudantes da primeira série do Ensino Médio de uma escola particular, cuja proposta é pautada no processo de ensino da pedagogia Waldorf, que sugere, principalmente, ministrar algumas aulas externas, como uma extensão de sala de aula. Foram utilizados diversos instrumentos próprios para a medição de terrenos, como teodolito, trena, mira, baliza, além de materiais para desenhos como esquadro, transferidor, compasso, escalímetro, régua e outros. Através desse trabalho, pode-se perceber o grande interesse e um novo olhar dos estudantes nesta área da matemática, o que o torna possível e eficaz.

Palavras-chave: Agrimensura, geometria, Matemática aplicada, aula no campo, trigonometria.

ABSTRACT

The Surveying Experience can be seen as part of the Science of Nature and Mathematics of the High School curriculum, and allows the student to know how to create the "map", object of use for the construction of various types of works. The present work has as objective to approach an experience in the field, of activities with mathematical concepts, mainly of the trigonometry and the geometry, that are used in the practice of the Surveying, clarifying to the student, the importance and the application of the same ones. This experience was developed with a group of students from the first grade of a private school, whose proposal is based on the teaching process of Waldorf pedagogy, which suggests, mainly, to teach some external classes, such as an extension of the classroom. Various instruments were used to measure terrains, such as theodolite, trena, sights, beacon, as well as materials for drawings such as square, protractor, compass, scaler, ruler and others. Through this work, one can perceive the great interest and a new look of the students in this area of mathematics, which makes it possible and effective.

Keywords: Surveying, geometry, applied mathematics, field class, trigonometry.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. Introdução

O lidar com situações concretas e experiências vividas, conhecendo o verdadeiro mundo do trabalho e se afirmar nele, tem se tornado cada vez mais necessário ao jovem para uma efetiva compreensão das inter-relações. Dessa forma, esse mesmo jovem, pode ter acesso à matemática e verificar como cálculos matemáticos podem ser realizados com segurança.

No presente trabalho, são apresentadas atividades que trazem aos estudantes uma contribuição para a sua aprendizagem, na geometria e na trigonometria, resgatando conceitos de medidas, escalas e ângulos, trabalhados no Ensino Fundamental, agora como uma aplicação mais aprofundada e eficaz no Ensino Médio.

Percebe-se que, quando nós professores, só ficamos em sala de aula, utilizando somente o recurso da lousa, alguns dos alunos apresentam dificuldades em relacionar o conteúdo trabalhado às situações reais, em que são aplicadas essas teorias, ficando desmotivados e com desempenhos insatisfatórios. Por esse motivo, nos animamos a criar meios e formas de mostrar-lhes de fato a aplicação da matemática em situações reais que os estimulem e, posteriormente, se tornem capazes de obter resultados positivos.

Os temas da matemática, citados acima, são utilizados na prática da Agrimensura, esclarecendo ao estudante a importância e a aplicação dos mesmos. Para isso, tendo a sugestão e o apoio da escola "João Guimarães Rosa" que traz, como proposta pedagógica, a pedagogia Waldorf, fundamentada na Antroposofia conseguimos realizar o trabalho prático.

Como parte da tecnologia e ciência da vida, segundo o planejamento da escola, os alunos trabalham no campo a agrimensura, com aplicação prática da matemática e geografia. Como professora da disciplina de matemática, em reuniões com colegas de outras escolas Waldorf, durante encontros pedagógicos, como seminários entre outros, procuramos adaptar essa vivência dentro da nossa realidade de ensino, uma vez que a proposta inicial veio do filósofo social Rudolf Steiner (1861-1925), fundador da primeira escola Waldorf na cidade de Stuttgart, Alemanha.

"A nossa mais elevada tarefa deve ser a de formar seres humanos livres que sejam capazes de, por si mesmos, encontrar propósito e direção para suas vidas".

(Rudolf Steiner)[1]

[1] *http://www.antroposofy.com.br/forum/a-pedagogia-waldorf/*

1.1 O que consta no trabalho

Neste trabalho, uma experiência na área da Agrimensura foi idealizada, no intuito de estabelecer uma relação entre a teoria e a prática de tópicos de geometria, abordando o ensino de leitura de ângulos e distâncias, através de instrumentos desenvolvidos para o auxílio de medições de terras e cálculo de suas áreas. Tais atividades são planejadas para estudantes da primeira série do Ensino Médio.

A dissertação foi dividida em quatro capítulos.

No capítulo 1 foi feita uma breve introdução explicitando o propósito do estudo e as atividades extraclasse, bem como os conceitos matemáticos utilizados durante a prática da agrimensura. A proposta faz parte da pedagogia de ensino da Escola Waldorf João Guimarães Rosa da cidade de Ribeirão Preto. Os ambientes escolar e rural são descritos quanto seu espaço físico e funcionamento. O ambiente escolar também é caracterizado em relação às suas instâncias pedagógicas e financeiras e os membros que as compõem, a fundamentação da pedagogia, e como são realizadas as atividades. Do ambiente rural, encontram-se dados sobre a escolha do local e sua logística de funcionamento. Após isso, são colocados a série e os conteúdos que foram trabalhados nessa vivência, além do planejamento da proposta.

No capítulo 2 consta o referencial teórico, contendo alguns tópicos do currículo da escola Waldorf e o currículo oficial do Estado de São Paulo, sendo citados para a série trabalhada. São feitas algumas observações e citações sobre o ensino da matemática e é discorrido sobre a temática da agrimensura. Ainda nesse capítulo, são apresentados todos os conceitos básicos em uma minuciosa matemática preparatória especificamente para a atividade proposta. Foram colocadas demonstrações de fórmulas com exemplos e desenhos realizados pela autora.

O capítulo 3 trata-se da metodologia e traz os objetivos da aula prática e o roteiro das atividades, a dinâmica de grupo e as etapas do trabalho, que são: visitação nos ambientes da fazenda, apresentação dos instrumentos utilizados, reconhecimento do terreno, levantamento topográfico, taqueometria, curvas de nível, nivelamento, confecção da planta e seus dados e cálculo da área do terreno.

E por fim, no capítulo 4, são apresentadas as fichas de atividades, constando os objetivos, materiais utilizados e algumas questões feitas aos estudantes. Após, é descrita a avaliação do trabalho e a conclusão.

1.2 O ambiente escolar

O trabalho de agrimensura foi desenvolvido com estudantes da Escola Waldorf João Guimarães Rosa que se localiza em um bairro residencial do município de Ribeirão Preto. Trata-se de uma escola, cujo ambiente é muito acolhedor, com muitos jardins e atendimento a todos os níveis de ensinos, desde o Maternal até o Ensino Médio.

É uma escola particular, sem fins lucrativos e é conduzida por três instâncias: Direção pedagógica, formada por sete membros, que cuidam de todas as necessidades pedagógicas do aluno; Coordenadoria de Pais, também formada por sete pais, que apoiam a equipe da direção pedagógica, tornando possíveis as suas necessidades, como por exemplo, promovendo palestras e estudos junto à comunidade; e a APJ (Associação Pedagógica Jatobá) formada também por pais interessados em cuidar do financeiro da escola, bem como aprovar possíveis adequações, como reformas, compra de mobiliários e outras demandas. O trabalho desse tripé é voluntário e os membros eleitos tem um tempo de duração para cada instância, elegendo outros membros dispostos a assumir os cargos, quando é expirado.**...**

“A pedagogia Waldorf orienta-se pelas leis da evolução e usa a matéria a ser ensinada não como um fim, mas como um meio de formação que estimula e apoia o desabrochar de todas as aptidões inerentes ao homem segundo seu momento de evolução. Sua didática dirige-se à harmonização e ao equilíbrio das atividades do querer, sentir e pensar. Esta proposta, que define, como princípio, o conhecimento do ser humano em sua integralidade, tem sido uma resposta coerente e realista às questões e exigências culturais, sociais e econômicas da humanidade atual (Waldorf “João Guimarães Rosa)

A Escola Waldorf João Guimarães Rosa concebe o desenvolvimento do ser humano a partir dos pontos de vista antropológico, pedagógico, curricular e administrativo; todos ancorados na Antroposofia – palavra que significa "sabedoria humana".

Embasada na concepção de ser humano e mundo desenvolvida pelo filósofo austríaco Rudolf Steiner (1861-1925), essa pedagogia tem como objetivo o cultivo das potencialidades individuais. Leva em consideração a diversidade cultural e se compromete com princípios éticos humanos amplos e gerais. (Escola Waldorf Rudolf Steiner)

Portanto, na Escola Waldorf João Guimarães Rosa, o ser humano é desenvolvido integralmente, de acordo com suas características pessoais, e considerando-se seu pensar, sentir e querer. O ensino teórico é sempre acompanhado, na medida do possível, pelo prático, com grande enfoque nas atividades corpóreas, artísticas e artesanais, que indica este tipo de vivência, a qual facilitou a aplicação de nosso trabalho extra classe explorando a matemática numa atividade de estágio rural.

Figura 1: Escola Waldorf João Guimarães Rosa

Fonte: http://www.waldorfribeirao.org/fotos/a-escola

Figura 2: Outra vista da Escola Waldorf João Guimarães Rosa

Fonte: http://www.waldorfribeirao.org/fotos/a-escola

1.3. O ambiente rural

O ambiente rural escolhido para desenvolver as atividades foi a fazenda "Estância Jacutinga" localizada no município de Botucatu - SP, que produz leite, gado de corte, produtos apícolas, verduras orgânicas e reflorestamento. O proprietário, que tem interesse em visitações e em receber grupos para estudos, nos ofereceu uma estrutura adequada, em se tratando de acomodações, bem como uma boa alimentação, para que os estudantes pudessem “trabalhar” saudavelmente, durante um período, orientados por um grupo de professores que os acompanharam (a professora de matemática, um técnico agrimensor e um professor de educação física para auxiliar na logística).

A área escolhida para estudos foi dividida de acordo com o número de grupos de estudantes formados. Foram considerados alguns acidentes presentes na área da fazenda, que foi explorada, como lagos, pastos, árvores de grande porte, cercas, caixa d’água e outros, que constaram no trabalho pedagógico.

Os estudantes, que participaram das atividades, fizeram as medições através de um levantamento topográfico dessa pequena área da fazenda, circulando nos períodos da manhã e tarde, durante 7 dias, com intervalo de 01h30 min para almoço e descanso. Conforme finalizavam as etapas da medição, em um galpão com várias mesas, iniciam os desenhos, marcando os pontos lidos e suas observações. À noite, diariamente, reuniam-se com os professores, por um período de uma hora, para relatar o que fizeram no campo, para discussão e absorção dos conteúdos inerentes a prática, bem como sanar possíveis dúvidas que foram surgindo durante as atividades do dia.

Figura 3: Entrada da Estância Jacutinga

Fonte: https://www.facebook.com/estanciajacutinga/photos

Figura 4: Vista aérea da Estância Jacutinga

Fonte: https://www.facebook.com/estanciajacutinga/photos

1.4. A série e conteúdos trabalhados

As atividades foram aplicadas para os alunos do 10º ano da Escola Waldorf João Guimarães Rosa, correspondente ao 1º (primeiro) ano do Ensino Médio, quando estuda-se a trigonometria (sistema de ângulos em grau e radiano, relações trigonométricas no triângulo retângulo, ciclo trigonométrico, funções trigonométricas, leis dos senos e cossenos), e a Geometria plana (polígonos, perímetros e áreas). Antes de partir para o trabalho de campo, os estudantes foram preparados, revisando e aprofundando conceitos já trabalhados no ensino fundamental.

Ministramos um pequeno curso de "Matemática Preparatória", com uma revisão de polígonos e desenvolvimento da fórmula da soma de seus ângulos internos, perímetro e área; aplicação da fórmula de Heron para cálculo de áreas do triângulo através do seu perímetro; desenvolvimento da fórmula trigonométrica da área; ponto, reta, semirreta e segmento de reta, para que os estudantes pudessem realizar o trabalho de campo com um conhecimento anterior reavivado dos pré-requisitos necessários.

1.4.1. Planejamento da proposta para os estudantes da classe

Nas primeiras semanas de aula, já se iniciam os planejamentos das viagens programadas para cada série. Para a viagem de Agrimensura, da primeira série do ensino médio, primeiramente foi definido o local que seria adequado e acessível para o trabalho. Foram pensados: quantos dias seriam suficientes para a atividade, qual seria o melhor mês, tipo de transporte, quais professores acompanhariam o professor da disciplina, o contato e contrato com o profissional que forneceria os aparelhos a serem utilizados e daria assistência em campo, o contato com a fazenda escolhida e pedido do orçamento para estadia e alimentação dos participantes, e, por fim, o levantamento dos gastos de cada aluno. Após esse levantamento, em reunião de classe, foram passados, aos pais dos estudantes, a data escolhida para a vivência; os orçamentos detalhados e forma de pagamento; a cidade, o endereço do destino e meios de comunicação; uma lista do que levar, como materiais escolares a serem utilizados, vestimentas e calçados adequados, objetos de uso pessoal e de higiene, bonés, chapéus, capas de chuva, protetores solares, repelentes, lanternas, remédios de uso dos alunos; e os documentos pessoais. Assim, ficou combinada a viagem da Vivência de Agrimensura.

2. Referencial Teórico

2.1. Ensino da Matemática

O currículo da escola Waldorf é muito próximo do Currículo fornecido pelo Ministério da Educação intitulado Orientações Curriculares para o Ensino Médio-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias- Capítulo 3: Conteúdo de Matemática. Este capítulo parte do princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o "pensar matematicamente". Nesse sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um "fazer matemático" por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento (ME/SEB, 2006).

Tal qual a proposta da pedagogia Waldorf, no capítulo 3 citado acima, recomenda-se retomar assuntos tratados no Ensino Fundamental a fim de consolidar conceitos e ideias matemáticas, desta vez com uma compreensão que exige uma maior maturidade. A Pedagogia Waldorf, da mesma forma, está pautada na qualidade do processo, sem se preocupar com a quantidade de assuntos a serem trabalhados.

Uma parte dos conteúdos recomendados pelo Ministério da Educação, nas escolas Waldorf, são abordados no primeiro ano do Ensino Médio. Através do pensar analítico, o jovem pode avançar da experiência para a observação e daí para a lei, para a fórmula e para o cálculo; faz-se o estudo das funções. O principal assunto do referido ano, é a Trigonometria, cujos conteúdos serão aplicados na Agrimensura. A lei dos cossenos servirá para os cálculos de estática em Física. Abordam-se os logaritmos e suas aplicações; reconhecem-se padrões numéricos através das progressões numéricas. Relaciona-se a matemática desse ano com a vida prática.

A Matemática é uma ciência que deve ser ensinada de um modo especial por ter conteúdos que permitem desenvolver o raciocínio em qualquer situação cotidiana.

O que é a Matemática de hoje? Como criar uma forma de ensiná-la de modo a motivar o aluno? Como mostrar ao aluno a importância de certos conceitos para a aplicação em atividades futuras? Como conduzir o aluno para que desenvolva a autonomia?

Essas e outras indagações são frequentes entre professores preocupados em adequar, para os dias de hoje, formas e processos de ensino, devido a aceleração crescente da tecnologia e complexidades dos conceitos teóricos.

Se todos os professores compreendessem que a qualidade do processo mental, não a produção de respostas corretas, é a medida do desenvolvimento educativo, algo de pouco menos do que uma revolução no ensino teria lugar na escola (DEWEY, 1996).

De acordo com Andrade (2012), faz-se necessário que os educadores mostrem a matemática como uma ciência que não é meramente composta de teorias, mas que está presente nos mais diversos setores. Como, por exemplo, a área da tecnologia tem alcançado enormes avanços nos últimos anos, que só é possível, graças à matemática, que se apresenta como um dos pilares responsáveis por esse crescimento. A contribuição da matemática na vida do ser humano é importante no sentido de facilitar, organizar, inovar e representar quantidades, mapas, formas, localização, ordem, massa, força, volume, áreas, etc.

O ensino dividido em setênios representa um dos princípios da pedagogia Waldorf, cujo objetivo é o desenvolvimento equilibrado do indivíduo. (LANZ, 2009).

A Pedagogia Waldorf, aos 15 anos, já no terceiro setênio, concentra-se especialmente nas capacidades do pensamento e do julgamento independentes, a serem desenvolvidas no aluno. Desta forma, o pensamento e a visão do jovem em relação ao mundo, são estruturados de forma abstrata, quando há o desenvolvimento das forças do "pensar lógico, analítico e sintético". O professor desse jovem, deve dominar bem a matéria que leciona, e despertar no aluno todo o entusiasmo que ele sente.

A escola Waldorf, tem, como indicação e currículo, a aplicação prática da matemática e geometria no 10º ano, como uma de suas ações pedagógicas, realizada através de alguns dias no campo, para onde os alunos viajam e aprendem agrimensura, partindo do "vivo" para o conceito, onde eles podem relacionar toda essa ação aos conhecimentos adquiridos em sala de aula.

"Cada ato de olhar se torna uma observação, cada ato de observação uma reflexão, cada ato da reflexão produz associações; assim, fica evidente que teorizamos cada vez que olhamos o mundo cuidadosamente". (Goethe)

2.2. Algo sobre Agrimensura

Nesta seção apresentamos algumas considerações sobre agrimensura.

A Agrimensura, objeto do presente estudo, é o ramo da Engenharia que, por meio de medições realizadas em uma determinada área (topografia), coleta dados geográficos, que podem ser distâncias, ângulos e outros, a fim de facilitar o preparo de áreas urbanas e rurais. Com isso, pode-se realizar projetos de construção civil e/ou modificação na infraestrutura das áreas estudadas (RIOS, 2004).

Agrimensura é a parte da topografia que tem por fim o levantamento e o cálculo das áreas de propriedades públicas e privadas. Os limites das propriedades constam dos títulos de propriedade (escritura) originários dos títulos primitivos proprietários, passando pelos donos sucessivos ou desmembramentos em parcelas autônomas, em virtude de partilhas (SOUSA, 1995).

O Agrimensor pode operar com elementos da Matemática (aritmética, geometria e trigonometria), física (luneta, telescópio), engenharia (agronômica), geografia, entre outros. Atualmente, são utilizados os modernos teodolitos ou estações totais, estações totais robóticas, receptores, GPS (Global Positioning System- Sistema de Posicionamento Global), níveis digitais, software de levantamento e outros como ferramentas de trabalho do agrimensor.

Segundo Espartel (1969), os processos empregados nesta prática são os gráficos (Geometria), os numéricos e os analíticos (Aritmética, Trigonometria e Geometria Analítica).

Assim, a matemática exerce papel importante no desenvolvimento da topografia, sendo uma das responsáveis pelo aperfeiçoamento dos instrumentos usados na mesma, o que demonstra que a agrimensura e a topografia evoluíram em termos tecnológicos, isto é, os procedimentos e técnicas atuais empregadas para fazer, por exemplo, um desmembramento (divisão em parcelas de uma determinada superfície de terra seja urbano ou rural) não são as mesmas de quando a agrimensura surgiu (ANDRADE, 2012).

É necessário, para tanto, definir alguns conceitos básicos referentes à topografia para que os estudantes consigam relacioná-los às aplicações práticas do estágio de agrimensura. Para o 1º ano do ensino médio, usaremos somente os processos gráficos e numéricos. São eles: o levantamento dos dados da área, representação gráfica (plana), escala, planimetria e altimetria.

O Levantamento consiste em medições necessárias para reproduzir, na planta topográfica, um trecho de uma parte da superfície terrestre.

A representação gráfica é usada como plano para representar graficamente a planta topográfica que é a projeção horizontal dos pontos levantados durante a medição, contendo todas as características de uma área; incluindo relevo, curvas de nível, perfil longitudinal, seções transversais, os elementos relevantes existentes no local, metragem, cálculo de área, pontos cotados e norte magnético.

A escala é a relação de semelhança constante entre as figuras da planta e do terreno. Utilizamos a escala 1:100 conforme será explicitada e justificada no capítulo 2, item 2.3.3.

A planimetria é a parte da geometria que estuda as figuras planas, (representação de um terreno sem levar em conta o relevo), medição de superfícies planas com o emprego do planímetro. É quando a partir do levantamento de um local, os detalhes existentes (divisas, divisões internas, construções, etc.) são representados em projeção horizontal. Para tal, utilizam-se de ângulos e distâncias horizontais.

E, a altimetria estuda o relevo do solo, medindo-se as alturas relativas entre pontos, com base em um plano de referência de nível, medindo-se distâncias verticais (GODOY, 1988).

2.3 Matemática Preparatória para a Vivência – Conceitos Básicos

A Educação do Ensino Médio, especialmente na disciplina de Matemática, tem caráter formativo e se baseia na estrutura do pensamento e do raciocínio dedutivo, e tem um papel importante de fornecer ferramentas para situações cotidianas e outras atividades específicas. Isso tudo vem a contribuir para o desenvolvimento nos processos do pensamento, formando nos estudantes a capacidade de investigação e resolução de problemas. Para tanto, o jovem, cursando o Ensino Fundamental, necessita de uma aproximação de vários campos do conhecimento da Matemática para poder interpreta-los, abstraí-los e utiliza-los de uma forma ampla e consciente da própria realidade. Já, no Ensino médio, é necessário complementar a formação iniciada no Ensino Fundamental, rever e redimensionar temas tradicionalmente ensinados, através de novos conceitos.

Os assuntos que são abordados anteriormente à vivência vêm a ser: ângulos em graus, minutos e segundos e em radianos; polígonos convexos, ângulos internos de um polígono, soma dos ângulos internos de um polígono; cálculo de perímetros e áreas de figuras planas, especialmente de triângulos; seno e cosseno de um ângulo; leis dos senos e cossenos, manuseio de instrumentos de desenho como esquadros, régua e transferidor.

Os assuntos, a seguir descritos, trabalhados no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, são requisitos básicos para a aplicação na atividade de Agrimensura.

2.3.1. Reta e Ponto

Alguns elementos da matemática, como o ponto e a reta, dão base para a construção dos conhecimentos geométricos. Os conceitos de ponto e reta são conceitos primitivos, por isso não há uma definição exata para esses elementos.

- Reta

"Reta é a figura geométrica constituída por uma linha que estabelece a menor distância entre duas posições"

Características da reta:

. a reta só possui uma dimensão, comprimento;

. a reta é ilimitada, não possui início e fim.

Conceitos derivados dos primitivos:

. Semirreta é a parte da reta limitada por um ponto.

. Segmento de reta é a parte da reta limitada por dois pontos.

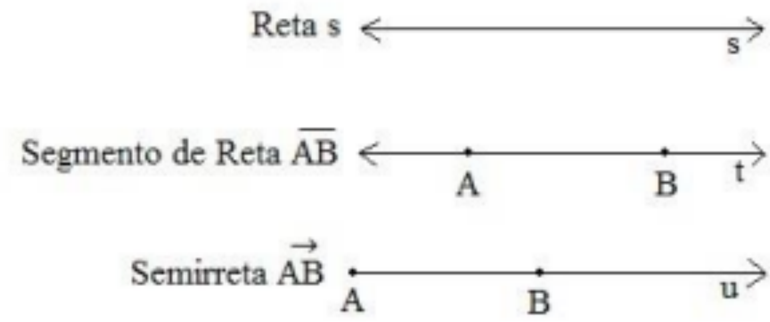


Figura 5: Reta, segmento de reta e semirreta

Fonte: https://www.todamateria.com.br/segmento-de-reta

- Ponto

Ponto do latim “punctum” é um sinal circular de dimensões pequenas.

Ponto é a figura geométrica formada pelo encontro de duas retas.

Característica do ponto: o ponto não possui dimensões.

Notação: O ponto é representado por letra latina maiúscula.

Figura 6: Ponto

Fonte: Da Autora

http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/10396/geo0101.htm

2.3.2. Ângulos

Definição formal: Ângulo é uma medida expressa em graus que é atribuível à região ou conjunto de pontos situados entre duas semirretas de mesma origem. Uma ilustração de ângulo se encontra na Figura 1.

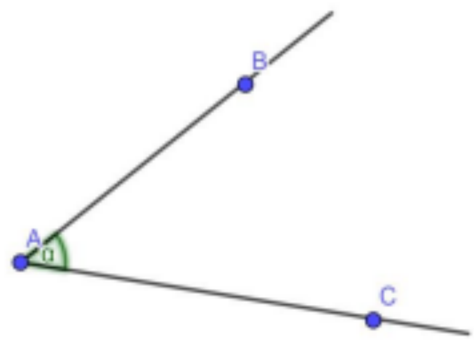


Figura 7: Ângulo BÂC formado pelo Vértice A e semirretas AB e AC

Fonte: Da Autora

Unidades de medida do ângulo: Existem algumas unidades com as quais podemos medir um ângulo. Estudaremos duas delas: o grau (º) e o radiano (rad).

O transferidor é o objeto utilizado para medir ângulos em graus.

Figura 8: Transferidor

Fonte: Foto

Muitas vezes utilizamos o transferidor para medir um ângulo qualquer e percebemos que a medida do ângulo fica entre dois valores inteiros. Existem submúltiplos do grau para representar o ângulo nessa situação. Os submúltiplos do grau são os minutos e os segundos de arco, e expressam medidas menores do que 1°.

Quando dividimos um grau (unidade de medida de ângulos) em 60 partes iguais, cada uma dessas partes é chamada de minuto. Quando dividimos um minuto em 60 partes iguais, cada uma dessas partes é chamada de segundo. Dessa maneira, um minuto é igual a 60 segundos e um grau é igual a 60 minutos.

Quando o comprimento do arco de uma circunferência for igual ao seu raio, então dizemos que o ângulo formado é de 1 radiano (rad).

Para converter o grau em radianos, ou vice-versa, usa-se uma regra de três, pois 180º (graus) corresponde a 1 pi rad.

2.3.3. Polígonos

"**Polígonos** são figuras geométricas planas que são formadas por segmentos de reta a partir de uma sequência de pontos de um plano, todos distintos e não colineares, onde cada extremidade de qualquer um desses segmentos é comum a apenas um outro." (https://www.infoescola.com/geometria/poligonos)

Eles podem ser côncavos ou convexos.

Polígono convexo: Um polígono ABCDE é convexo se dados dois pontos F e G, interiores ao referido polígono, o segmento de reta FG estiver contido inteiramente no polígono. Caso contrário, ele será côncavo.

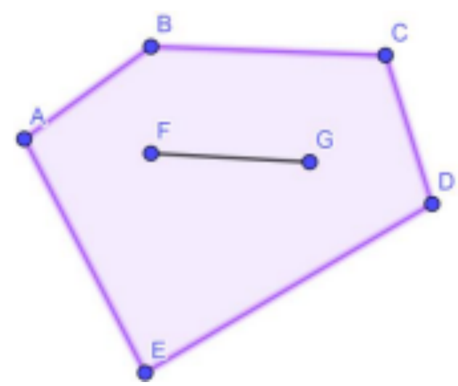


Figura 9: Polígono Convexo

Fonte: Da Autora

Polígono côncavo ou não convexo: Um polígono é côncavo ou não convexo se existem pontos H e I no interior do polígono, tal que o segmento de reta HI, cujas extremidades são os pontos H e I, não está inteiramente contido no polígono.

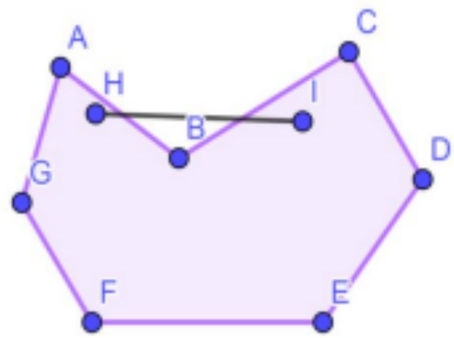


Figura 10: Polígono côncavo ou não convexo

Fonte: Da Autora

Polígonos Regulares e Irregulares

Um polígono que possui todos os lados congruentes é chamado de equilátero. Quando ele possui todos os ângulos (internos) congruentes, é chamado de equiângulo.

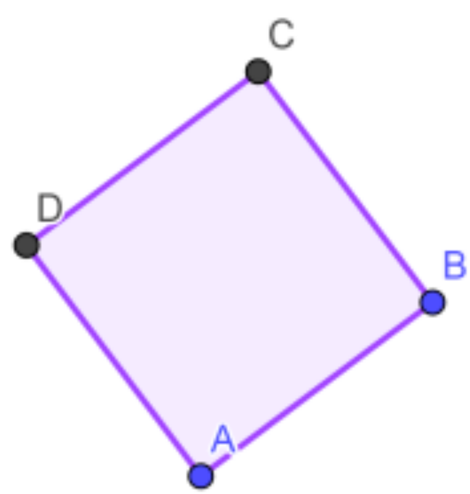


Figura 11: Polígono Equilátero

Fonte: Da Autora

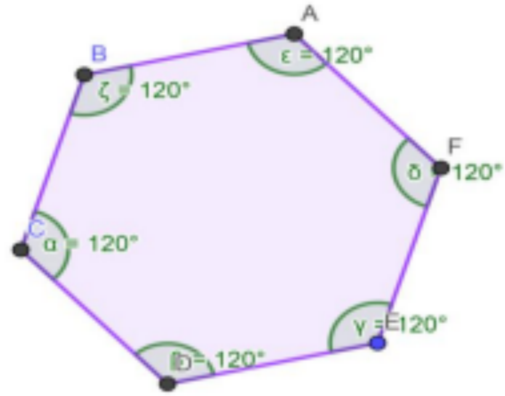


Figura 12: Polígono equiângulo

Fonte: Da Autora

Um polígono convexo é regular se for equilátero e equiângulo, ou seja, quando seus lados possuem a mesma medida e seus ângulos internos também são iguais.

Nome dos polígonos principais ou mais usados

Podemos dar nomes aos polígonos de acordo com a quantidade de lados que ele possui. Veja a tabela 1

Tabela 1: Nomenclatura dos polígonos

Número de lados	**Nome**
3	Triângulo ou trilátero
4	Quadrângulo ou quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono

9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono (Hendecágono)
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono
n	n-látero

Geralmente, para polígonos com lados maiores que 20, nos referimos a ele apenas explicitando o seu número de lados. Por exemplo, um polígono de 27 lados.

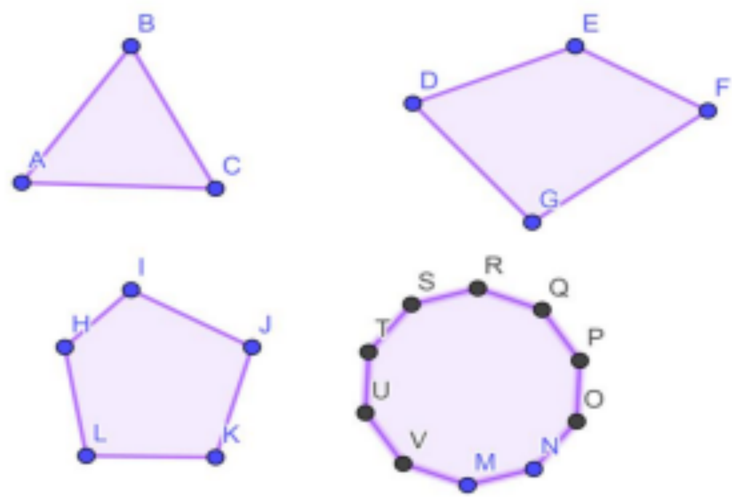


Figura 13: Polígonos: Triângulo, quadrilátero, pentágono, decágono

Fonte: Da Autora

Soma dos ângulos internos de um polígono convexo:

Através da demonstração abaixo, podemos constatar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo plano equivale a 180º.

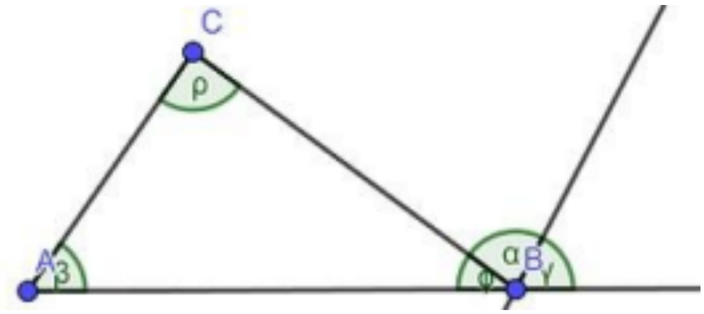


Figura 14: Triângulo ABC

Fonte: Da Autora

1- Construir um triângulo ABC qualquer;

2- Construir a reta r passando por B paralela ao lado AC;

3- O ângulo Y é congruente a β (pois Y e β são correspondentes);
4- O ângulo α é congruente a ρ (pois α e ρ são alternos internos)

Como Φ + α + Y = 180º, por 3 e 4, concluímos que:

$\Phi + \beta + \rho = 180^{\circ}$

Podemos obter a soma dos ângulos internos dos polígonos convexos, ao dividi-los em triângulos.

Um quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos. Assim, a soma das medidas de seus ângulos internos é dada por:

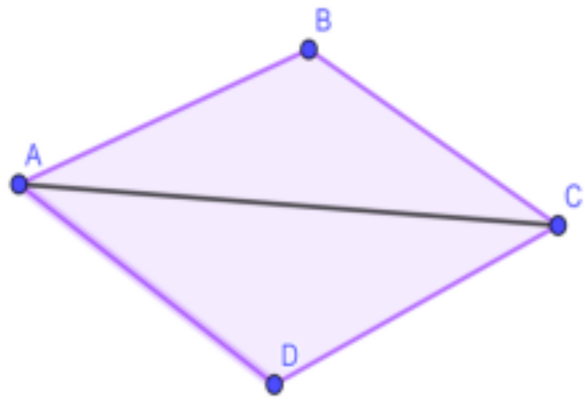


Figura 15: Quadrilátero: dividido em dois triângulos

Fonte: Da Autora

$$S = 2 \cdot 180^{O} = 360^{O}$$

Um pentágono pode ser dividido em três triângulos. Assim, a soma das medidas dos ângulos internos é dada por:

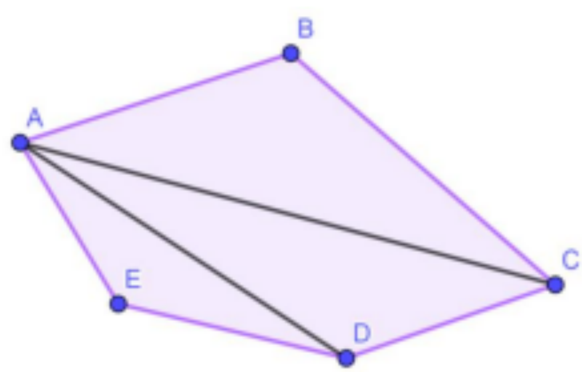


Figura 16: Pentágono

Fonte: Da Autora

$$S = 3 \cdot 180^{O} = 540^{O}$$

Da mesma forma, um hexágono pode ser dividido em quatro triângulos. Assim, a soma das medidas dos ângulos internos é dada por:

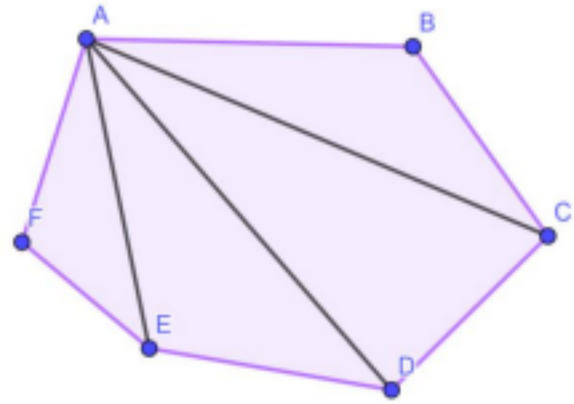


Figura 17: Hexágono

Fonte: Da Autora

$$S = 4 \cdot 180^{O} = 720^{O}$$

Generalizando, um polígono convexo que possui n lados, n natural maior ou igual a 3, a soma das medidas de seus ângulos internos será dada por:

$$S = (n - 2) \,.\, 180º$$

Medida de um ângulo interno de um polígono regular:

Sabemos que um polígono convexo que tem n lados é equilátero e equiângulo ele é regular. Assim, para se obter a medida do ângulo interno de um polígono regular, basta dividir a soma de seus ângulos internos pelo número de ângulos, ou seja, por n.

$$Ai = S/n = [\,(n - 2) \,.\, 180º] \,/\, n$$

2.3.4. Escalas Métricas

Escala é a relação entre as medidas do desenho de um objeto em seu tamanho real. Escrevemos

Escala = medida do desenho/medida real.

Exemplo: A escala 1:100 significa que a cada unidade de medida no desenho corresponde a 100 unidades de medida real.

A escala gráfica é uma régua graduada que serve para determinar de forma imediata, a distância gráfica, uma vez sabida a distância real, e vice versa.

Figura 18: Escalímetro

Fonte: https://www.desenhoepintura.com.br/categoria/escalimetro-triangular

2.3.5. Seno e Cosseno de um ângulo e as suas leis

Considerando o círculo unitário,

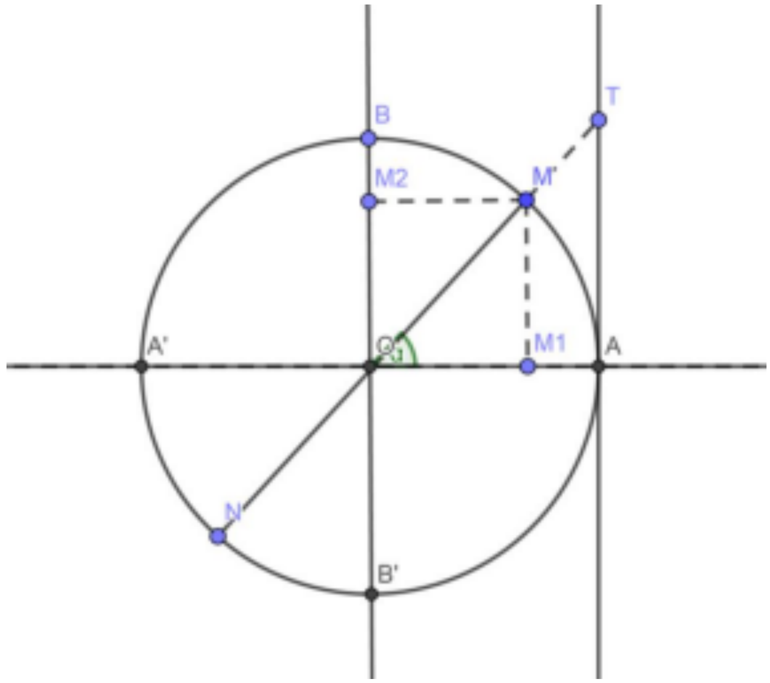


Figura 19: Ângulo α central na circunferência de raio igual a 1
Fonte: Da Autora

As quantidades seno, cosseno e tangente do ângulo α são dados pelas relações:

$$sen\alpha = \overline{OM_2}\,,\quad cos\alpha = \overline{OM_1}\quad e\quad tg\alpha = \overline{AT}$$

-cos α *e* sen α são as coordenadas do ponto M, isto é, M = (cos α , sen α)

-tg α é a segunda coordenada do ponto T, isto é, T = (1 , tg α)

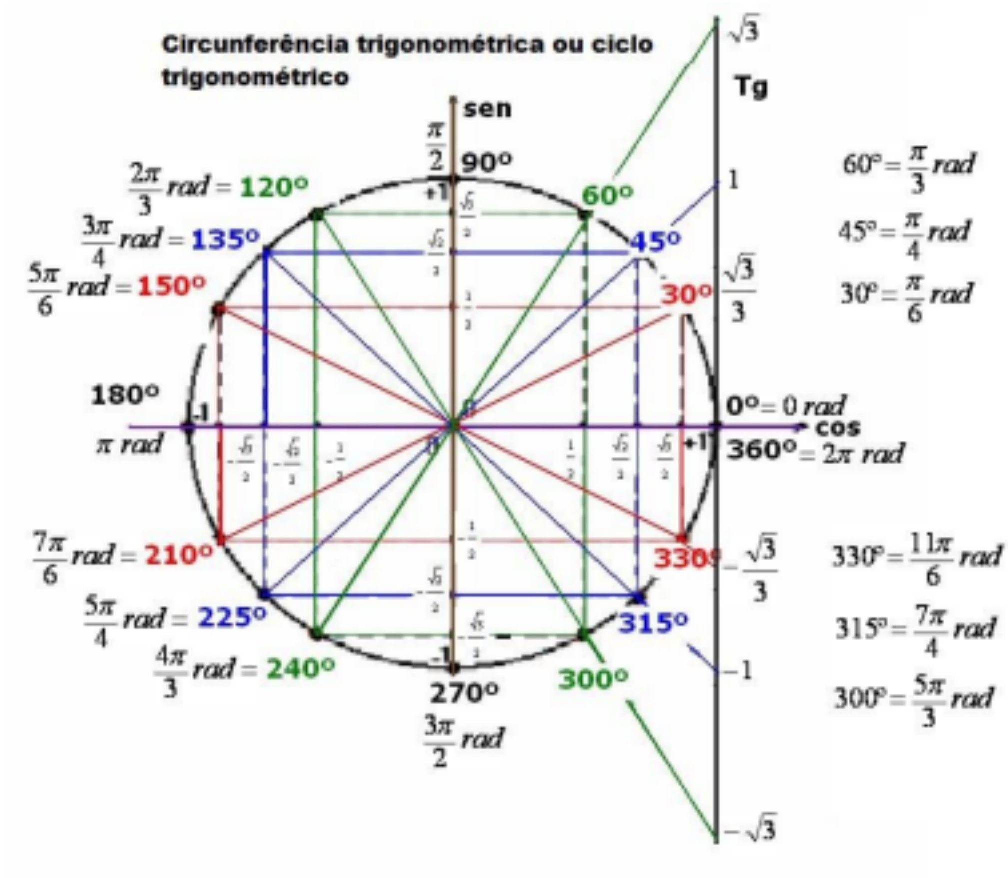


Figura 20: Ciclo Trigonométrico

Fonte: https://brainly.com.br

Lei dos cossenos

Consideremos o triângulo ABC conforme a figura a seguir:

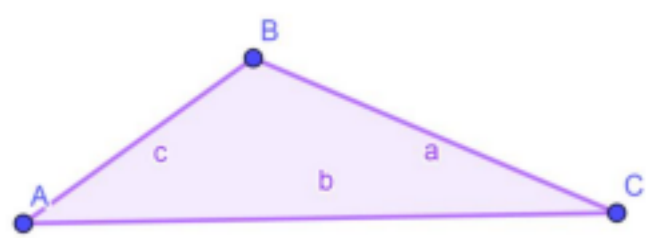


Figura 21: Triângulo ABC

Fonte: Da Autora

Em qualquer triângulo ABC , o quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles.

A saber:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \hat{C}$$

Demonstração:

Para chegarmos na lei dos cossenos, vamos conhecer as relações métricas no triângulo retângulo.

Dado o triângulo ABC retângulo em A,

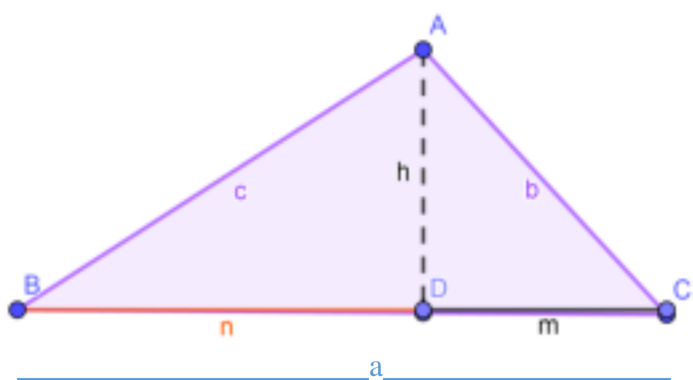


Figura 22: Triângulo ABC

Fonte: Da Autora

Onde,

BC = a (medida da hipotenusa)

AC = b (medida do cateto menor)

AB = c (medida do cateto maior)

AD = h (medida da altura)

BD = n (projeção do cateto c sobre a hipotenusa a)

DC = m (projeção do cateto b sobre a hipotenusa a)

Pela semelhança dos triângulos BAC e BDA temos,

$$\Delta BAC \sim \Delta\, BDA$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \rightarrow c^2 = a.n\ (I)$$

Pela semelhança dos triângulos BAC e ADC temos,

$$\Delta BAC \sim \Delta\, ADC$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \rightarrow b^2 = a.m\ \ (II)$$

Pela semelhança dos triângulos BDA e ADC temos,

$$\Delta BDA \sim \Delta\, ADC$$

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \rightarrow\ h^2 = \ m.n\ \ (III)$$

Somando (I) e (II), e considerando que a = m + n, temos,

$$b^2 + c^2 = a\ (m+n) \rightarrow b^2 + c^2 = a^2\ (IV)$$

Além disso, multiplicando (I) e (II) e usando (III), temos,

$$b^2 .\ c^2 = a^2 .m.n \rightarrow b.c = a.h\ \ (V)$$

Então:

- O quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos, teorema de Pitágoras (IV).

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- A medida de qualquer cateto ao quadrado é igual à medida proporcional
das medidas da hipotenusa e da projeção de cada cateto sobre ela (I e II).

$$b^2 = a.m \quad e \quad c^2 = a.n$$

- A medida da altura relativa à hipotenusa é igual à média geométrica entre as medidas dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa (III).

$$h^2 = m.n$$

- O produto das medidas dos catetos é igual ao produto das medidas da hipotenusa e a altura relativa a ela (V).

$$b.c = a.h$$

Sabemos que as relações trigonométricas do seno, cosseno e tangente são válidas somente em triângulos retângulos. Para triângulos acutângulos ou obtusângulos, temos que estabelecer outras identidades trigonométricas, chamadas de leis dos senos e cossenos. Faremos aqui, o estudo da lei dos cossenos.

Considere agora, o triângulo acutângulo a seguir, de lados a, b e c , sendo CH a altura relativa ao lado AB de medida c.

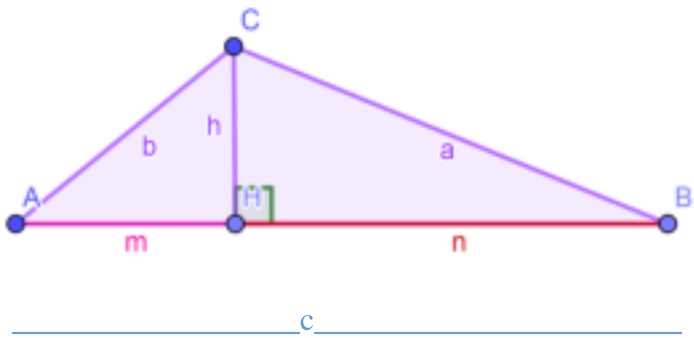


Figura 23: Triângulo ABC

Fonte: Da Autora

No triângulo BCH, onde n= c – m, temos que:

a = h + (c – m)

a = h + c - 2cm + m

a = (h + m) + c - 2cm (I)

No triângulo ACH, temos que:

b = h + m (II)

e

cos Â = m/b

m = b. cos Â (III)

Substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}$$

De forma análoga, obtemos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \hat{C}$$

As três igualdades anteriores são chamadas de Lei dos Cossenos, que diz: “Num triângulo qualquer, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos o dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado”.

Observação: A lei dos cossenos também é válida para triângulos com dois ângulos agudos e um ângulo obtuso:

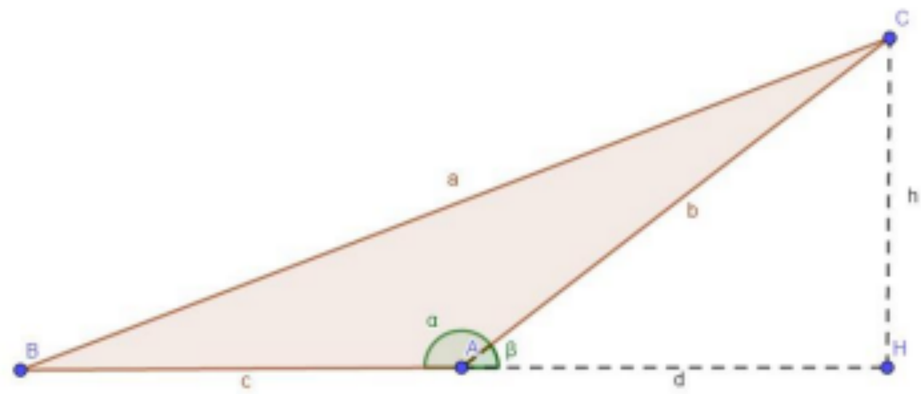


Figura 24: Triângulo ABC (obtuso)

Fonte: Da Autora

Demonstração:

Seja um segmento de reta HC, perpendicular ao lado AB. Dizemos que HC é a altura h do triângulo, relativa ao lado AB, passando pelo vértice C.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo CHB, temos que:

$$a = h + (d + c)$$

$$a = h = d + 2cd + c$$

$$a = (h + d) + c + 2cd \qquad (I)$$

No triângulo AHC, temos que:

$$b = h + d \qquad (II) \qquad e$$

$$\cos \beta = \frac{d}{b}$$

mas,

$\cos \beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

então,

$-\cos \alpha = \frac{d}{b}$ => $d = -b \cos \alpha$ (III)

Substituindo os resultados (II) e (III) na equação (I), obtemos:

$a = b + c + 2c.(-b \cos \alpha)$

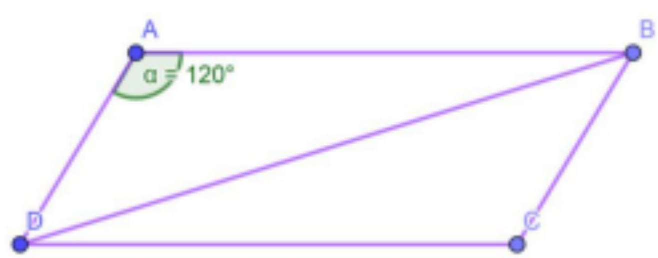
$a = b + c - 2b\, c \cos \alpha$

De forma análoga, temos:

$b = a + c - 2\, a\, c \cos \rho$

$c = a + b - 2\, a\, b \cos \theta$

Exemplo 1: Calcule a medida da maior diagonal do paralelogramo da figura a seguir utilizando a **lei dos cossenos**.



Dados: AB = CD = 10 cm

AD = BC = 5 cm

Resolução:

$\cos 120^{\circ} = -\cos(180^{\circ} - 120^{\circ}) = -\cos 60^{\circ} = -0{,}5$

BD = x

Aplicando a lei dos cossenos, temos,

$$x = 5 + 10 - 2 . 5 . 10 . (- \cos 60º)$$

$$x = 25 + 100 - 100 . (-0,5)$$

$$x = 125 + 50$$

$$x = 175$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{175}$$

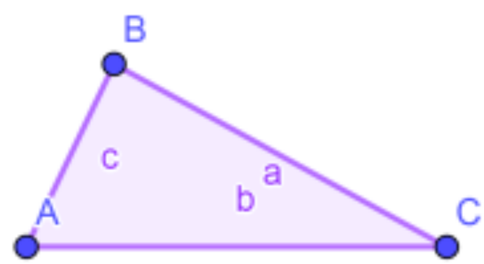
$$x = \sqrt{5^2.7}$$

$$x = 5\sqrt{7}$$

Portanto, a diagonal do paralelogramo mede $5\sqrt{7}$cm.

Exemplo 2: Em um triângulo ABC, temos as seguintes medidas: AB = 6 cm, AC = 5 cm e BC = 7 cm. Determine a medida do ângulo A.

Vamos construir o triângulo com as medidas fornecidas no exercício:



Resolução:

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$a = 7, b = 6 \text{ e } c = 5$$

$$7 = 6 + 5 - 2.6.5.\cos \hat{A}$$

$$49 = 36 + 25 - 60.\cos \hat{A}$$

$$49 - 36 - 25 = -60.\cos \hat{A}$$

$$-12 = -60.\cos \hat{A}$$

$$12 = 60.\cos \hat{A}$$

$$12/60 = \cos \hat{A}$$

$$\cos\hat{A} = 0{,}2$$

O ângulo que possui cosseno com valor aproximado de 0,2 mede 78º.

Em seguida, faremos o estudo da lei dos senos:

Lei dos senos

Demonstração:

Considere o triângulo ABC, acutângulo, abaixo, onde CH é a altura relativa ao lado AB.

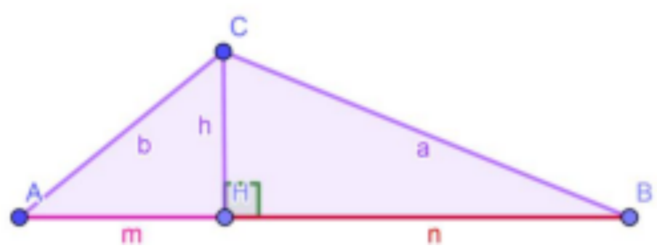


Figura 25: Triângulo ABC

Fonte: Da Autora

No triângulo ACH, temos que:

sen A = h/b

h = b. sen A (I)

No triângulo BCH, temos que:

Sen B = h/a

h = a . sen B (II)

De (I) e (II), obtemos:

$b.\,sen\,A \;=\; a\,.\,sen\,B$

Ou

$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B}$

Do mesmo modo, obtemos:

$$\frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Assim, podemos concluir que:

$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C}$

Que é chamada de Lei dos senos ou Teorema dos senos.

Essa demonstração foi feita para um triângulo acutângulo, mas a mesma pode ser realizada para qualquer triângulo de forma análoga, chegando ao mesmo resultado.

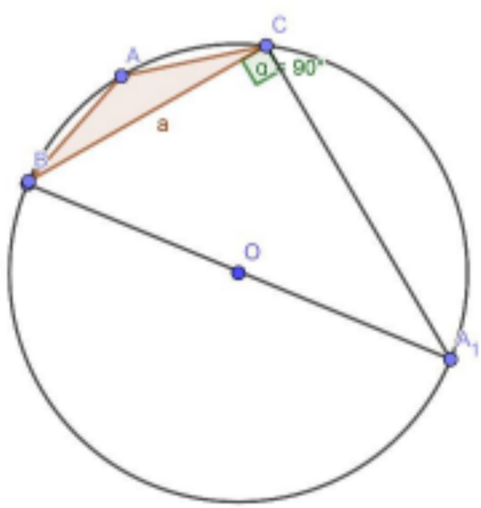


Figura 26: Triângulo ABC 1 (obtuso)

Fonte: Da Autora

Se A e A1 são os ângulos que correspondem aos vértices A e A1, a relação entre eles é dada por A1 = π – A, pois são ângulos inscritos à circunferência correspondentes aos arcos replementares BAC e BA1C.

Então,

$$\text{Sen}(\pi - A) = \frac{a}{2R} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\text{Sen}(\pi - A)} = 2R$$

Mas,

sen A = sen (π – A)

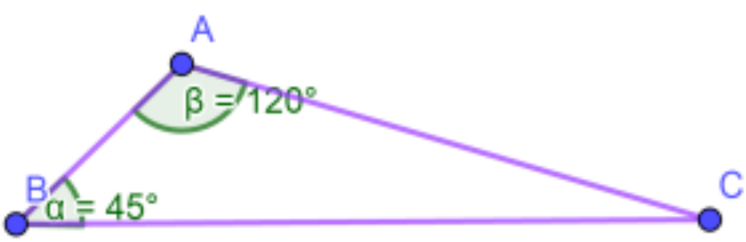
Logo,

$$\frac{a}{\text{sen A}} = 2R$$

Repetindo o mesmo processo para as bases AC e AB, encontraremos os outros quocientes

$$\frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C} = 2R$$

Exemplo 1: Determine o valor de BC no triângulo a seguir.



Dados: AC = 100 m

BC = x

Sen(120º) = sen(180º – 120º) = sen(60º) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou 0,865

Sen(45º) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou 0,705

$$\frac{x}{sen(60°)} = \frac{100}{sen(45°)}$$

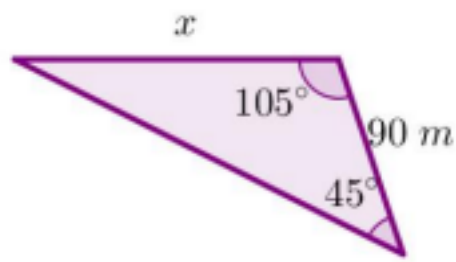
$$\frac{x}{0{,}866} = \frac{100}{0{,}707}$$

$$0{,}707x = 86{,}6$$

$$x = 122{,}5$$

Logo, a medida solicitada é 122,5 metros.

Exemplo 2: No triângulo a seguir, temos dois ângulos (45º e 105º, respectivamente), e um dos lados mede 90 metros. Com base nesses valores, determine a medida do lado x.



Para determinar a medida de x, devemos utilizar a lei dos senos, mas, para isso, precisamos descobrir o valor do terceiro ângulo do triângulo. Para tal cálculo, utilizaremos a seguinte definição: a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.

$$\alpha + 105° + 45° = 180°$$

$$\alpha + 150° = 180°$$

$$\alpha = 180° - 150°$$

$$\alpha = 30°$$

Agora vamos aplicar a lei dos senos:

$$\frac{x}{sen45°} = \frac{90}{sen30°}$$

$$\frac{x}{0{,}707} = \frac{90}{0{,}5}$$

$$0,5x = 63,63$$

$$x = 127,26$$

Portanto, a medida de x é igual a 127,26 metros.

2.3.6. Perímetros de Figuras planas

A palavra perímetro tem sua origem do grego perí (em volta de) e métron (medida). Perímetro de figuras planas ou de superfícies compõe o contorno destas e a sua medida.

A unidade de medida utilizada no cálculo do perímetro é a mesma unidade de medida do comprimento: centímetro, metro, quilômetro, e outras medidas de comprimento.

Considere o polígono ABCDEFGHA a seguir, sendo AB = 3 cm, BC = 2 cm, CD = 7 cm, DE = 2 cm, EF = 1 cm e FG = 3 cm.

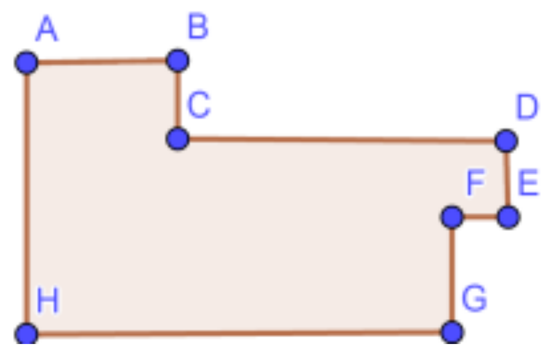


Figura 27: Polígono

Fonte: Da Autora

Vamos calcular seu perímetro:

Temos que GH = 9 cm e HA = 7 cm.

Assim, o perímetro da figura é dado por:

P = (7 + 3 + 2 + 7 + 2 + 1 + 3 + 9) cm

P = 34 cm (centímetros)

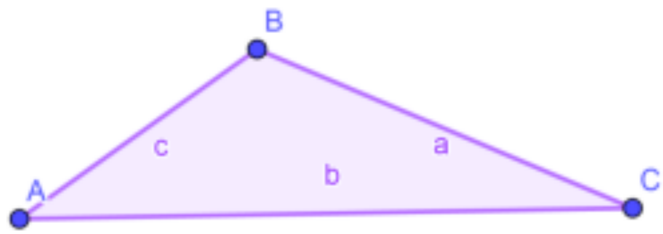
2.3.7. Áreas de Figuras planas

A necessidade de determinar a medida de superfícies de áreas para futuras construções vem desde a antiguidade. Área ou superfície de uma figura plana tem a ver com o conceito (primitivo) de sua extensão (bidimensional).

A unidade de medida da área é iguala unidade de comprimento ao quadrado: cm, m, km e outras.

Pode-se calcular a área de um triângulo qualquer através de diversas fórmulas de acordo com os dados que se tem desse triângulo:

- Conhecendo os três lados do triângulo e sendo a, b e c os lados do triângulo, calcula-se o semi perímetro p e aplica-se a fórmula abaixo:



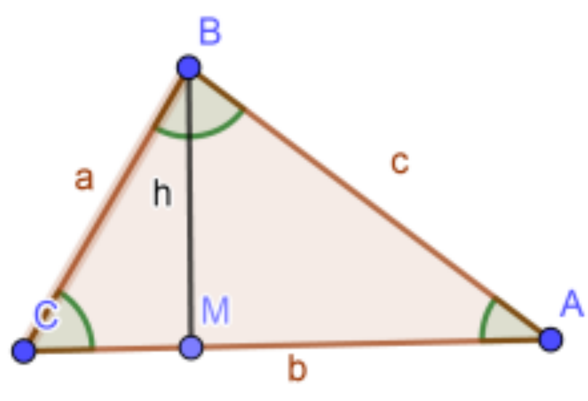
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ sendo}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Figura 28: Fórmula de Heron

Fonte: Da Autora

A fórmula de Herão (ou de Heron) nos fornece a área do triângulo em função da medida dos três lados do triângulo. O nome faz referência ao matemático grego Herão de Alexandria. Seja o triângulo ABC, podemos demonstrá-la:



Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo CBM, encontramos o comprimento BM:

$$a^2 = h^2 + (\overline{CM})^2$$

$$(\overline{CM})^2 = a^2 - h^2$$

$$(\overline{CM}) = \sqrt{a^2 - h^2}$$

Em seguida, encontramos o cosseno de c, através da relação trigonométrica no triângulo retângulo ABM (item 2.3.5):

$$\cos c = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{a}$$

No triângulo ABC, aplicando a lei dos cossenos (item 2.3.6), relativa ao ângulo c, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{a}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2b\sqrt{a^2 - h^2}$$

Logo,

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)^2 \qquad (I)$$

e

$$A^2 = \frac{b^2h^2}{4} \qquad (II)$$

Substituindo (I) em (II), temos,

$$A^2 = \frac{b^2\left(a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)^2\right)}{4}$$

$$A^2 = \frac{b^2a^2 - b^2.\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2}}{4}$$

$$A^2 = \frac{4b^2a^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}{16}$$

$$A^2 = \frac{(2ab)^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}{16}$$

Aplicando a diferença de dois quadrados:

$$A^2 = \frac{(2ab-(a^2+b^2-c^2))\big(2ab+(a^2+b^2-c^2)\big)}{16}$$

$$A^2 = \frac{(-(a^2-2ab+b^2)+c^2)\big((a^2+2ab+b^2)-c^2\big)}{16}$$

$$A^2 = \frac{(c^2-(a-b)^2)((a+b)^2-c^2)}{16}$$

Novamente pela diferença de quadrados:

$$A^2 = \frac{\big(c-(a-b)\big)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}{16}$$

$$A^2 = \frac{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}{16}$$

$$A^2 = \frac{(c-a+b)}{2}.\frac{(c+a-b)}{2}.\frac{(a+b-c)}{2}.\frac{(a+b+c)}{2}$$

$$A^2 = \left(\frac{c+a+b-2a}{2}\right)\left(\frac{c+a+b-2b}{2}\right)\left(\frac{c+a+b-2c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$A^2 = \left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$$

Como p = (a + b + c) / 2, tal que p é o semi perímetro (metade do perímetro), vem:

$A^2 = (p - a)(p - b)(p - c).p$

Por fim,

A = $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c).p}$, sendo p o semi perímetro e a, b e c os lados do triângulo.

- Conhecendo as medidas da base B e altura h do triângulo

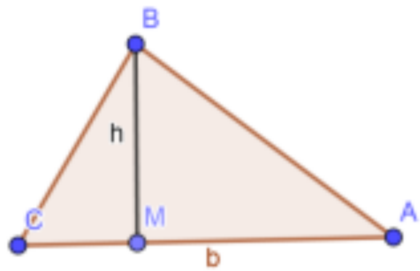


Figura 29: Triângulo ABC (base b e altura h)

Fonte: Da Autora

Demonstração:

A área de um triângulo pode ser obtida calculando-se a metade da área de um paralelogramo, que é dada pelo produto de sua base pela altura (b.h).

Logo, a área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{b.h}{2}$$

Observe que, ao desenhar uma diagonal no paralelogramo, obtemos dois triângulos distintos e congruentes. Isso acontece porque os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, logo, os triângulos formados são congruentes. Concluímos que as áreas desses triângulos são iguais.

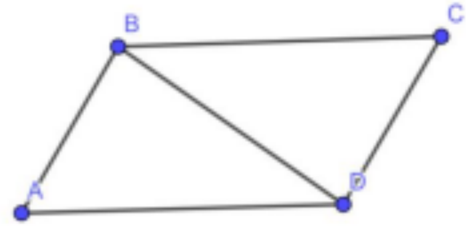


Figura 30: Paralelogramo dividido em duas partes iguais por uma diagonal

Fonte: Da autora

Como possuem áreas iguais, podemos concluir que a área do triângulo A é igual à metade da área do paralelogramo:

$$A = \frac{b.h}{2}$$

Essa fórmula vale para qualquer triângulo, pois todo triângulo pode ser usado para construir um paralelogramo.

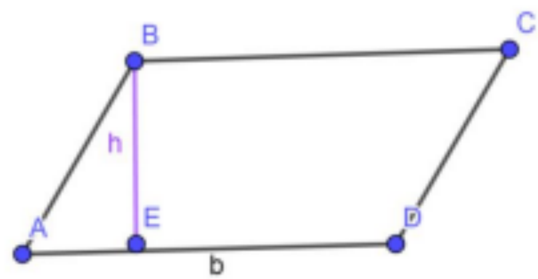


Figura 31: Paralelogramo

Fonte: Da autora

Observe apenas que a altura do triângulo é a distância entre a reta suporte do lado escolhido como base e o terceiro vértice do triângulo, aquele que não está contido na base. Assim, a altura é um segmento de reta que sempre forma com a base do triângulo um ângulo de 90º.

- Conhecendo dois lados e um ângulo entre esses lados do triângulo

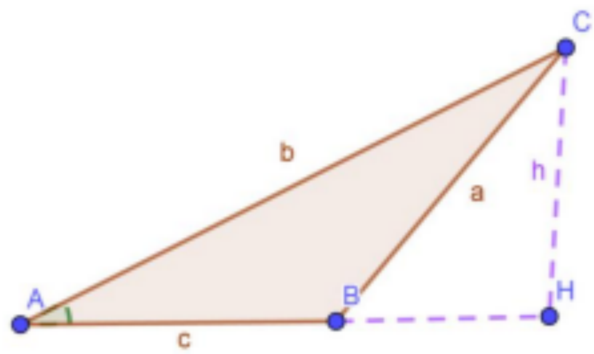


Figura 32: Triângulo ABC e altura h

Fonte: Da Autora

Demonstração:

Cálculo da área do triângulo utilizando o ângulo Â.

Temos que a área do triângulo é dada por A = 1/2 c. h. O triângulo ΔAHC é retângulo. Então, usando a relação trigonométrica, temos

sen Â = h/b ou h = b. sen Â.

Substituindo h em A = 1/2 c. h, temos

A = 1/2 c. b. sen Â.

3. Metodologia

Como uma forma de utilizar operações matemáticas, as quais os alunos sempre se perguntam para que servem de fato, propõe-se uma atividade extra, visando mostrar aos estudantes a correlação dos assuntos estudados, na teoria com as atividades práticas proporcionadas a eles, bem como manejar aparelhos de precisão, cultivar a exatidão, trabalhar em grupo, obedecer critérios que são profissionais, efetuar cálculos, preencher planilhas específicas, analisar possíveis erros, adquirir autonomia, responsabilidade e iniciativa. Através dessa atividade extra, deve-se instigar os estudantes a se interessarem por situações cotidianas relacionadas ao seu próprio futuro, seja de ordem profissional ou não.

Assim, os jovens são levados a uma área rural, por um breve período, para vivenciarem o que batizamos de "Vivência de Agrimensura".

A vivência de "Agrimensura" que abordamos se resume em um trabalho no campo com duração de uma semana, como uma atividade de extensão de sala de aula, para estudantes que estão cursando a 1ª série do Ensino Médio da Escola Waldorf "João Guimarães Rosa" de Ribeirão Preto-SP, em uma fazenda (ambiente rural) escolhida com uma estrutura adequada para tal atividade. Neste ambiente, uma área de até 10.000 m (dez mil metros quadrados), ficou disponível para que os estudantes pudessem transitar com tranquilidade e instalar os aparelhos para efetuar os trabalhos de medição. É necessário também, que a determinada área seja próxima dos outros ambientes a serem utilizados pelos grupos, tais como o refeitório, o galpão destinado para estudos e para guardar adequadamente os materiais, e os dormitórios.

Quando o grupo ficou devidamente instalado na fazenda, pôde-se iniciar o trabalho.

Os estudantes realizaram todos os passos, desde o levantamento topográfico até a confecção do mapa (planta baixa), constatando a importância da medição como base para futuras construções de edifícios e outras obras.

O trabalho foi realizado de forma cuidadosa, pois os jovens se depararam com as mais variadas possibilidades de errar, levando-os a uma noção do significado de "precisão". Cada estudante pôde conhecer o procedimento global e dar sua contribuição individual. Foi proporcionada também a possibilidade de se discutir os problemas relacionados com a propagação e distribuição de erros.

Os objetivos da vivência como extensão de sala de aula foram:

- Proporcionar aos alunos noções de espaço, trabalhando conceitos vistos nas aulas teóricas como geometria e trigonometria, trazendo-lhe clareza no pensar, bem como julgamentos racional e conceitual.
- Trabalhar a disponibilidade dos alunos no fazer, a convivência com o outro na prática e ajuda mútua, fazendo com que os estudantes se completassem em suas habilidades individuais.
- Verificar, em campo, como cálculos exatos puderam ser realizados com segurança.
- Conhecer o modo como se confecciona com precisão um mapa geográfico.

O levantamento topográfico foi pautado na medição de ângulos e distâncias. O manuseio correto do equipamento e a técnica utilizada trouxeram um melhor resultado de precisão ou próximo desta. Os ângulos medidos foram os horizontais e de inclinação.

Foram divididos em grupos pequenos, de três ou quatro pessoas, de acordo com o número de aparelhos disponíveis e o número de estudantes da turma em atividade, que fizeram medições e calcularam a área pré-definida.

No campo, os estudantes usaram um kit contendo os instrumentos de agrimensura que são: teodolito, lupa, piquetes, martelo, trena, nível bolha, linha e prumo, e uma prancheta com papel sulfite para a confecção do croqui e anotações das leituras dos ângulos e distâncias.

Na sala utilizada para reuniões após cada etapa em campo realizada, bem como a confecção da planta de cada grupo, ficaram disponíveis instrumentos de desenho como régua, esquadros, transferidor, lápis com grafites próprias para rascunho e caneta nanquim. Os estudantes fizeram uma planta rascunho, marcando todas as características observadas e anotadas de sua própria área, Em seguida, uma vez conferidas todas as anotações, passaram a limpo em papel vegetal com caneta nanquim preta 0,5 mm.

As etapas do trabalho envolveram:

-Visitação em todos os ambientes da fazenda;

-Apresentação dos aparelhos utilizado: o Teodolito;

-Reconhecimento do terreno (croqui);

-Poligonal de base;

-Taqueometria;

-Curvas de nível;

-Cálculo da área do terreno e posicionamento do Norte;

-Confecção da planta e seus dados.

Todos esses itens estão melhor descritos a seguir:

3.1. Visitação em todos os ambientes da fazenda

Na escola Waldorf, foram planejadas as atividades de pré-requisitos (assuntos e conceitos matemáticos), e a preparação da viagem, como orçamento do transporte do grupo, o aluguel dos instrumentos (teodolitos), a assistência do técnico em Agrimensura e a orientação sobre as vestimentas adequadas dos alunos na área rural. O professor responsável pela viagem fez um primeiro contato com o proprietário da fazenda, a fim de verificar disponibilidade de datas e orçamento para estadia, alimentação e uso da mesma para a realização do trabalho de agrimensura. Uma vez fechado o contrato com o proprietário da fazenda, os estudantes e os professores responsáveis partiram para os estudos planejados.

Chegaram na fazenda por volta das 8h, tomaram um bom café e foram para os dormitórios, onde se instalaram e guardaram seus objetos pessoais.

Em seguida, todos os estudantes reunidos, após a acomodação dos mesmos, fizeram uma visitação nos ambientes da fazenda, locais que utilizariam para guardar material, conferir dados coletados, anotar e desenhar etapas da planta da área que trabalhariam, onde fariam as refeições, e, por fim, a área em que fariam o levantamento topográfico, passando a eles qual seria o objetivo dessa vivência. Foi feita uma observação detalhada de todas as características do campo.

3.1.1.Apresentação dos instrumentos utilizados:

Os estudantes puderam conhecer os instrumentos que seriam utilizados durante todo o trabalho. Foram eles: teodolito, martelo, trena, nível bolha, linha, prumo, lupa, prancheta com papel sulfite para anotações de algumas características observadas no terreno e confecção do croqui e planilhas para anotações das leituras dos ângulos e distâncias que foram consideradas para a confecção da planta baixa.

Faremos agora, a descrição dos instrumentos e suas utilidades:

3.1.1.1.Teodolito

Essa etapa teve como objetivo conhecer as partes do Teodolito (figura 31, 32 e 33) e suas respectivas funções, montar o aparelho sobre um tripé e fazer o ajuste do nível, aprender a fazer a leitura de ângulos, graus e minutos. Além disso, uma boa orientação sobre todo o cuidado com o aparelho, se fez necessária.

O teodolito é um instrumento óptico utilizado na topografia, para realizar medidas de ângulos verticais e horizontais com o objetivo de facilitar o cálculo de distâncias e alturas. Empregado na Geodésia e na Agrimensura para triangulação em redes, o instrumento é também usado pela engenharia, arquitetura e por outros profissionais e técnicos, em grandes construções de estradas, demarcações de fazendas e sítios (ZILKHA, 2014).

Figura 33: Teodolito

Fonte: http://www.fec.unicamp.br/~museuLTG

Figura 34: Teodolito

Fonte: http://www.fec.unicamp.br/~museuLTG

Figura 35: Parte do Teodolito

Fonte: http://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2006/teodolito.htm

Figura 36: Apresentação do Teodolito

Fonte: Da Autora

Figura 37: Aprendendo a manusear o aparelho-Montagem e nivelamento

Fonte: Da Autora

Ao iniciar um trabalho de campo com os alunos, mostrou-se como instalar o aparelho corretamente. Sobre um piquete (figura 36) montou-se o tripé, em uma altura adequada para o uso do teodolito (figura 37). Fixou-se, em seguida, o aparelho no tripé, colocando o fio de prumo no gancho adequado, abaixo do teodolito, em seu eixo (figura 38). Ajustou-se o aparelho para que o fio de prumo ficasse exatamente em direção ao piquete (figura 39). A base do aparelho deveria ficar na direção horizontal (figura.40).

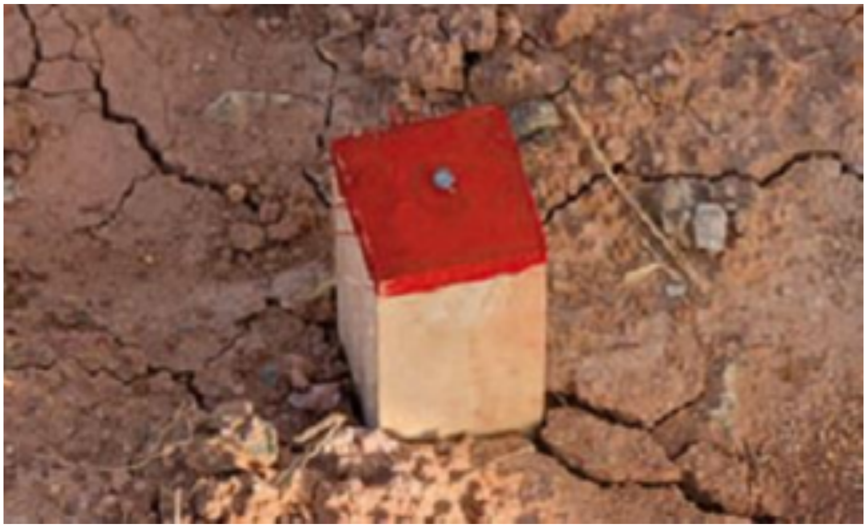


Figura 38: Piquete onde direciona o prumo

Fonte: Da Autora

Figura 39 : Tripé (suporte do teodolito)

Fonte: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAXr0AF/instrumento-topografia

Figura 40: Tripé fixo

Fonte: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAXr0AF/instrumento-topografia

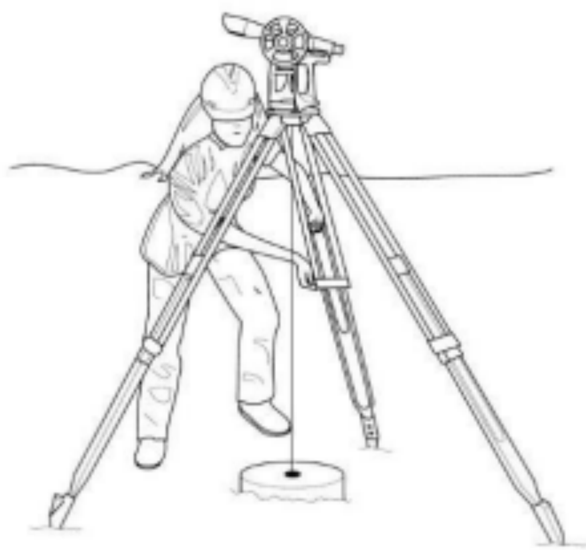


Figura 41: Tripé com o teodolito ajustado ao piquete

Fonte: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAXr0AF/instrumento-topografia

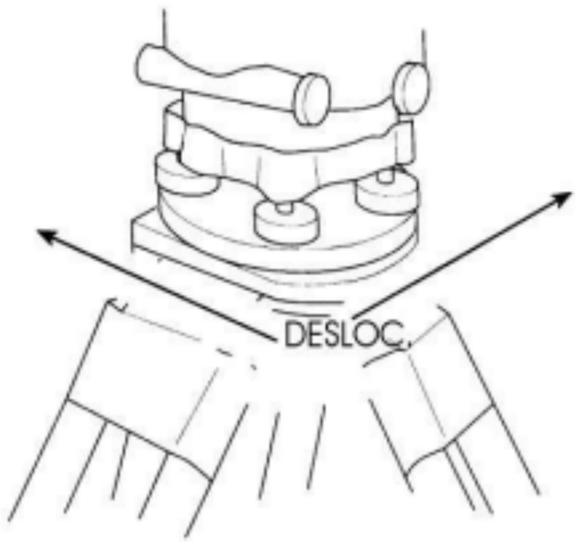


Figura 42: Base do Tripé na direção horizontal
Fonte: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAXr0AF/instrumento-topografia

Em seguida, foi pedido para cada estudante desenhar o aparelho.

Figura 43: Estudantes desenhando o teodolito

Fonte: Da Autora

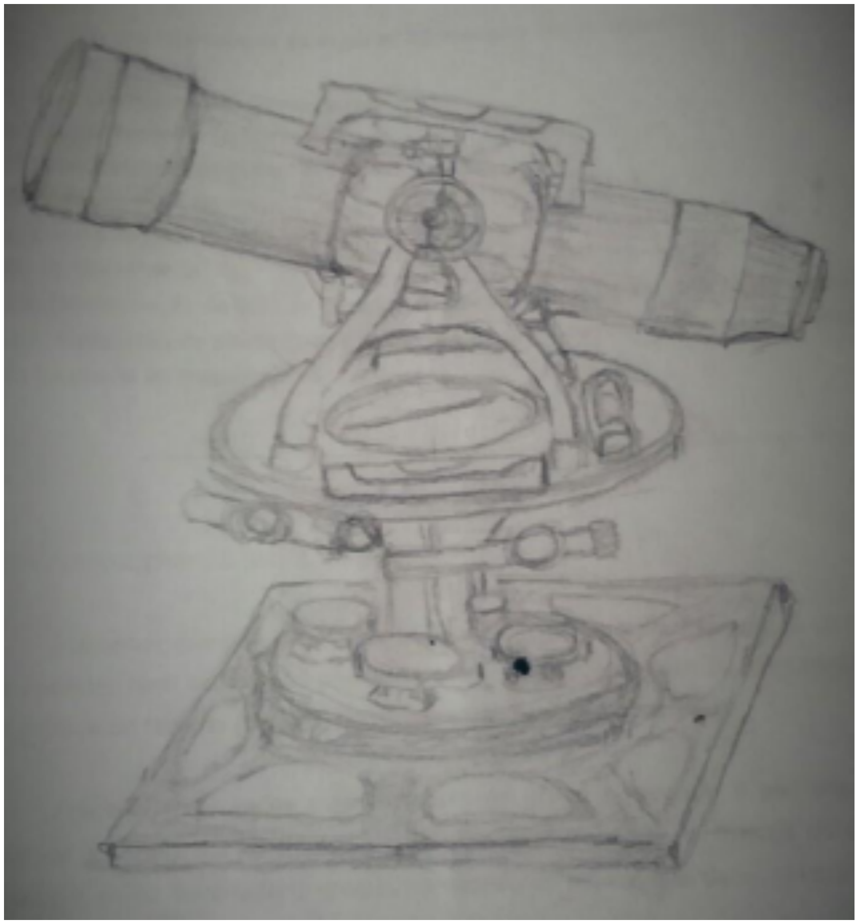


Figura 44: Desenho de um teodolito feito por um estudante

Fonte: Da Autora

Após a montagem do aparelho, foi preciso que se fizesse o ajuste do nível, ou seja, foi feito o nivelamento do teodolito preparando-o para o uso. Isso foi feito através dos calantes (parafusos contidos na base do aparelho), criando um eixo imaginário alinhado à direção das bolhas da base. Uma vez centralizadas as bolhas e estando o fio do prumo sobre o centro do piquete, o aparelho ficou pronto para o uso.

Estando pronto para o uso, pôde-se fazer a leitura de ângulo. Posicionou-se os piquetes A e B, em pontos diferentes, que foram as extremidades a formar o ângulo que foi medido (Figura 43). Apertou-se o parafuso geral e soltou-se o parafuso particular. Alinhou-se precisamente o zero do transferidor interno ao zero do transferidor externo, com o auxílio de uma lupa. Apertou-se o parafuso particular e, desta vez, soltou-se o parafuso geral. Em seguida, girou-se a base do aparelho e direcionou-o ao piquete (que estava à esquerda do aparelho). Observando através da luneta, ajustou-se o retículo vertical. Apertou-se o parafuso geral e fez-se o ajuste fino (Figura 44).

O aparelho ficou pronto para medir o ângulo: soltou-se o parafuso particular e girou-se o teodolito no sentido horário em direção ao piquete da leitura, repetindo o procedimento do alinhamento do retículo vertical, apertando o parafuso particular. Fez-se novamente o ajuste fino. Em seguida, fez-se a leitura do ângulo no transferidor externo, utilizando uma lupa, e, tendo como referência, o zero localizado no transferidor interno.

Figura 45: Estudante aprendendo a leitura de ângulos no teodolito

Fonte: Da Autora

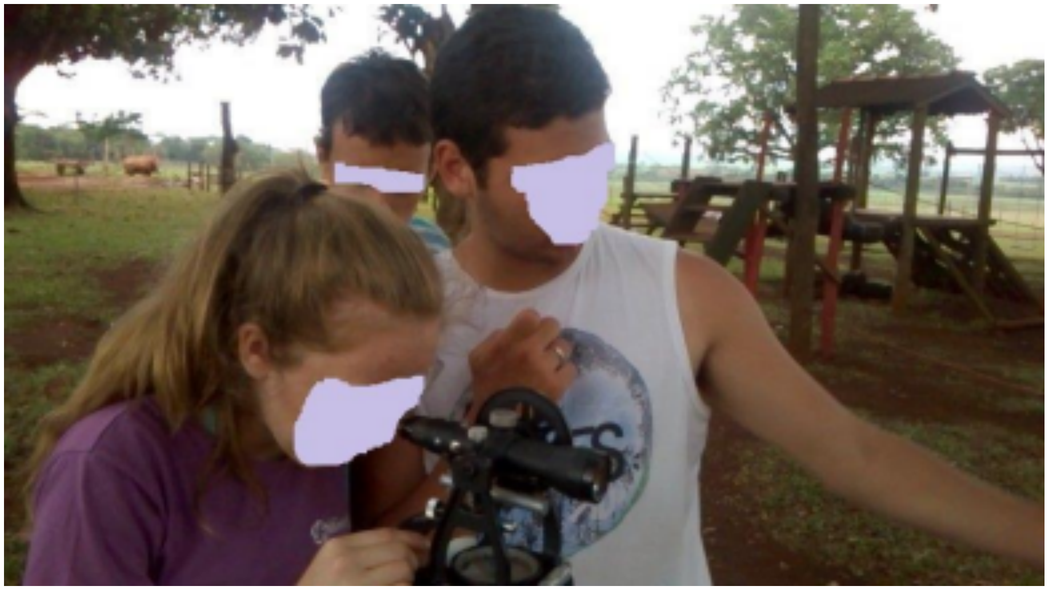


Figura 46: Treinando a leitura de ângulos e distâncias (ajuste fino)
Fonte: Da Autora

A escala do transferidor externo está em um intervalo de 30 minutos (30’), mas o aparelho, através do **nônio** permite uma medição com variação de apenas 1’ (um minuto).

O ***Nônio*** ou Vernier (pronuncia-se Verniê – figuras 45 e 46) é um dispositivo tecnológico que aumenta a sensibilidade de uma ***escala*** ao subdividir a menor divisão dela (VIANA, 2009).

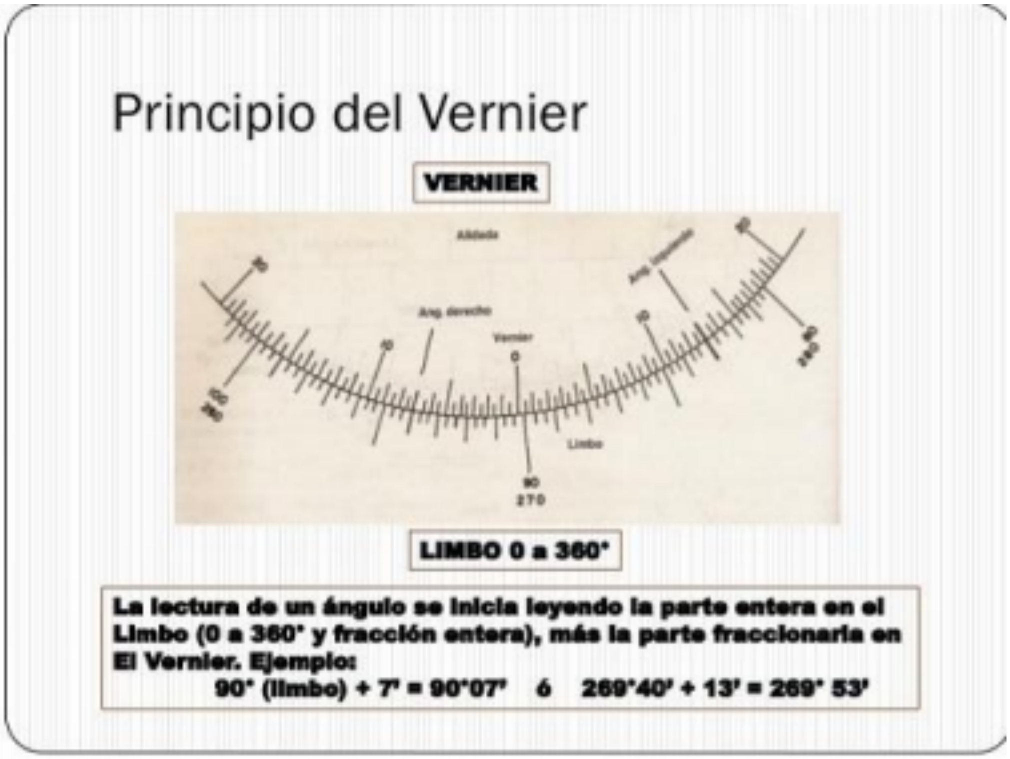


Figura 47: Nônio ou Vernier

Fonte: https://es.slideshare.net/chino1916/teodolito-topografa

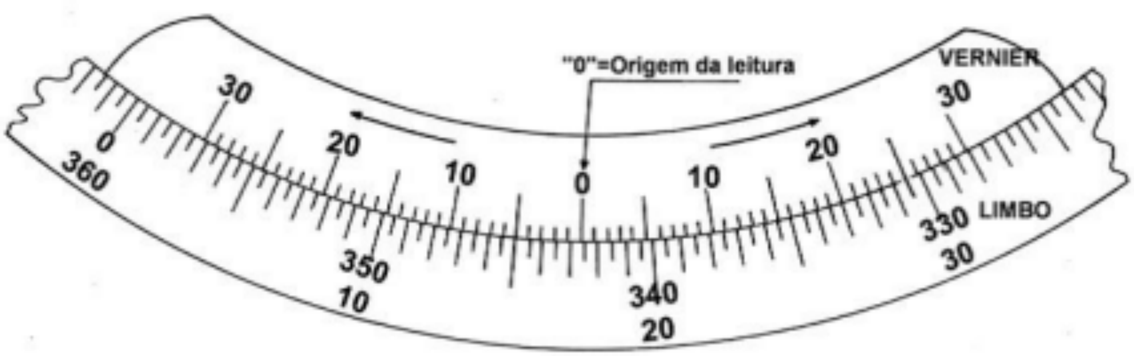


Figura 48: Nônio/ Vernier

Fonte: Apostila Top.1 (Ariclo Pulinho Pires de Almeida, José Carlos de Paula Freitas e Maria Márcia Magela Machado, Fig. IV-28)

“Conforme se verifica, o limbo (parte inferior) é graduado em duas direções, sendo que no sentido horário na parte interna e no sentido anti-horário na parte externa. O vernier (parte superior) também tem duas graduações a partir do “0”, uma no sentido horário e outra no anti-horário, que acompanham as graduações respectivas do limbo (horário e anti)”.

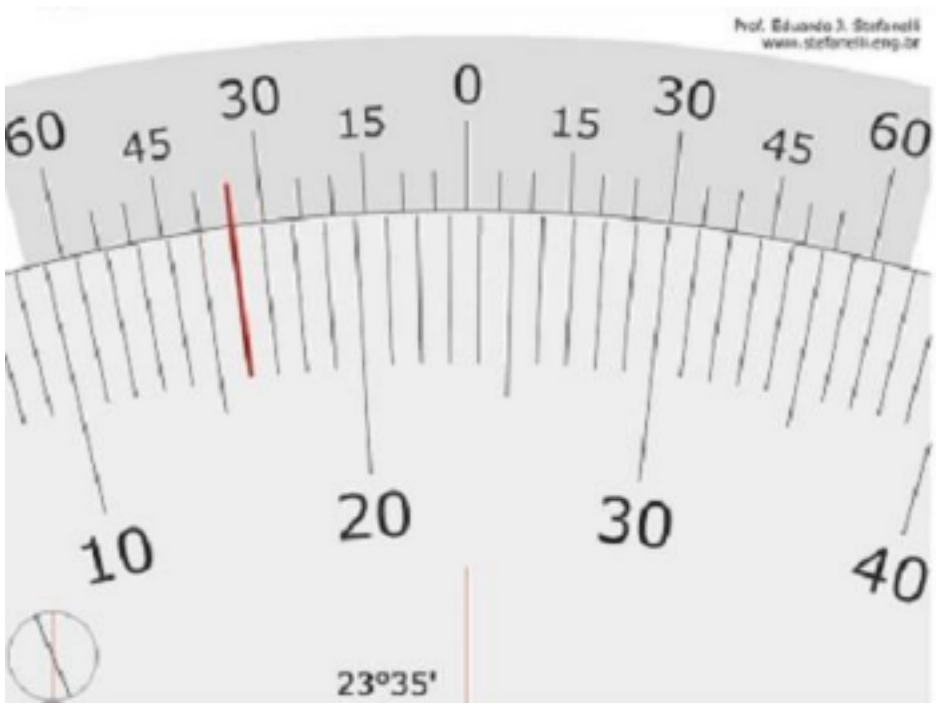


Figura 49: Exemplo de leitura de um ângulo

Fonte: http://slideplayer.com.br/slide/10662899

Figura 50: Nônio ou Vernier

Fonte: http://www.fec.unicamp.br/~museuLTG/equipamentos/teodolitorepetidor.htm

Assim, com o auxílio de uma lupa, observa-se qual o valor da escala superior está alinhado com a escala inferior. Essa leitura corresponde ao valor em minutos que deve ser acrescentado ao indicado no transferidor externo.

3.1.1.2 Martelo

Instrumento que no caso serviu para firmar o piquete na terra.

3.1.1.3 Trena

Fita métrica utilizada para medir distâncias entre piquetes e outras.

3.1.1.4 Nível bolha

Instrumento que serviu para indicar variações de inclinações em relação ao plano horizontal.

3.1.1.5 Linha

Utilizada para contornar a poligonal e facilitar a medição. No caso utilizamos linha de nylon.

3.1.1.6 Prumo

Corpo pequeno e pesado amarrado a um fio (de nylon ou barbante) para verificar a verticalidade do local da medição.

3.1.1.7 Lupa

Lente de aumento que auxiliou na leitura dos ângulos e distâncias.

3.1.1.8 Prancheta

Peça de madeira utilizada como apoio para papel sulfite, onde foram feitas as anotações de campo, bem como o desenho do croqui.

Figura 51: Materiais utilizados no campo

Fonte: Da Autora

Figura 52: Mais materiais utilizados no campo

Fonte: Da Autora

3.1.2 Reconhecimento do terreno

O objetivo dessa etapa foi, principalmente, observar a área de trabalho de cada grupo, percorrendo os limites demarcados, bem como os possíveis e principais acidentes existentes, tais como cercas, árvores, construções e outros. Outra finalidade foi fazer um esboço do terreno reconhecido, registrando no mesmo as características observadas.

Cada um dos grupos percorreu a periferia do seu respectivo terreno a ser medido para que observassem atentamente os limites da área que trabalhariam e os acidentes que nela existiam. Após o reconhecimento do terreno, esboçaram o que imaginavam ser o terreno, em uma situação sem escala, denominado “croqui”, para que ali anotassem todos os acidentes observados, bem como suas características principais, nomeando os pontos que delimitavam a área.

Os alunos logo perceberam que é impossível medir os ângulos e as distâncias sobre exatamente as divisas da área que seria trabalhada.

3.1.3 Levantamento Topográfico

O levantamento de dados para representar uma determinada área possui duas etapas. A primeira consiste em determinar quais serão os pontos de apoio (planialtimétricos); e, a segunda etapa consiste em um levantamento mais detalhado.

Usamos, como pontos de apoio, em nosso trabalho, piquetes e estacas.

O método que usamos para determinar as coordenadas de pontos foi a "Poligonação". Desenvolvemos então, uma forma de se poder obter as medidas, criando uma poligonal de base.

Assim, a poligonal de base consiste na escolha de pontos estratégicos, de forma que se possa levantar todos dados das divisas, bem como os acidentes que possam existir como cercas, árvores, rio, lagos, construções e outros. Tivemos o cuidado para que, de cada ponto escolhido, pudéssemos avistar os pontos anterior e o posterior.

Esse levantamento da poligonal foi feito através do método do caminhamento, onde fixamos um ponto inicial que orientaria o contorno definido por pontos escolhidos, medindo os ângulos e lados.

A partir desses dados, pudemos encontrar as coordenadas de todos os pontos.

Especificamente, nesse trabalho, utilizamos a poligonal fechada, pois nos possibilitou verificar possíveis erros angulares e lineares lidos no decorrer do levantamento topográfico.

Na poligonal determinada medimos os seus ângulos internos e de deflexão dos lados da mesma (Figura 51).

Para realizar o trabalho de campo, foram necessárias aulas teóricas ministradas previamente em sala de aula. Em uma escola Waldorf, as disciplinas são divididas em períodos: durante quatro semanas, as duas primeiras aulas da manhã são dedicadas a somente uma matéria, Matemática, Geografia, História, Física, Química ou Biologia, havendo um revezamento das mesmas de quatro em quatro semanas. Esses períodos são chamados de "Épocas". Então, na Época de Matemática, durante duas semanas, perfazendo um total de 20 aulas, são passados os conceitos necessários para a atividade de campo. Na terceira semana, faz-se a viagem de Agrimensura e na quarta semana, retornando à escola, faz-se o fechamento, que consiste na finalização de alguns itens que por ventura ficaram pendentes e a conclusão do trabalho. Assim, conteúdos tais como a soma dos ângulos internos de um polígono e outros assuntos são ensinados e/ou revisados nas duas primeiras semanas da Época de Matemática.

A soma dos ângulos internos de uma poligonal (convexa) depende do número de lados que ela tem. Depois de revisar a soma dos ângulos internos de um triângulo, conteúdo trabalhado no ensino fundamental, faz-se a dedução da fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono, relacionando o número de lados e a quantidade de triângulos que se pode formar com as diagonais traçadas no polígono. Essa fórmula, vista no curso de "Matemática Preparatória", conforme está descrita no capítulo 2, item 2.3.

$$S = (n - 2).180^{o}, \text{ onde } n = \text{número de lados}$$

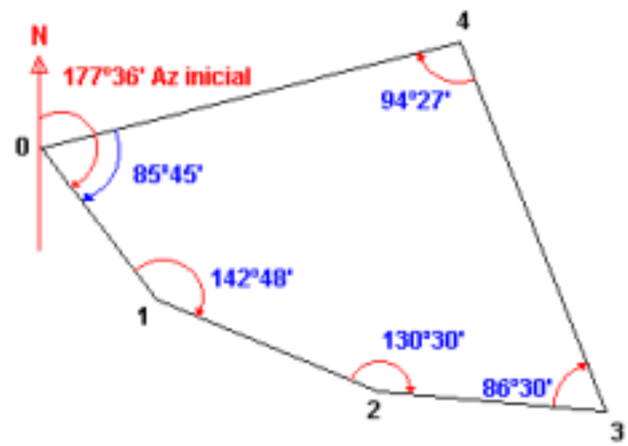


Figura 53: Poligonal

Fonte: http://www.ebah.com.br

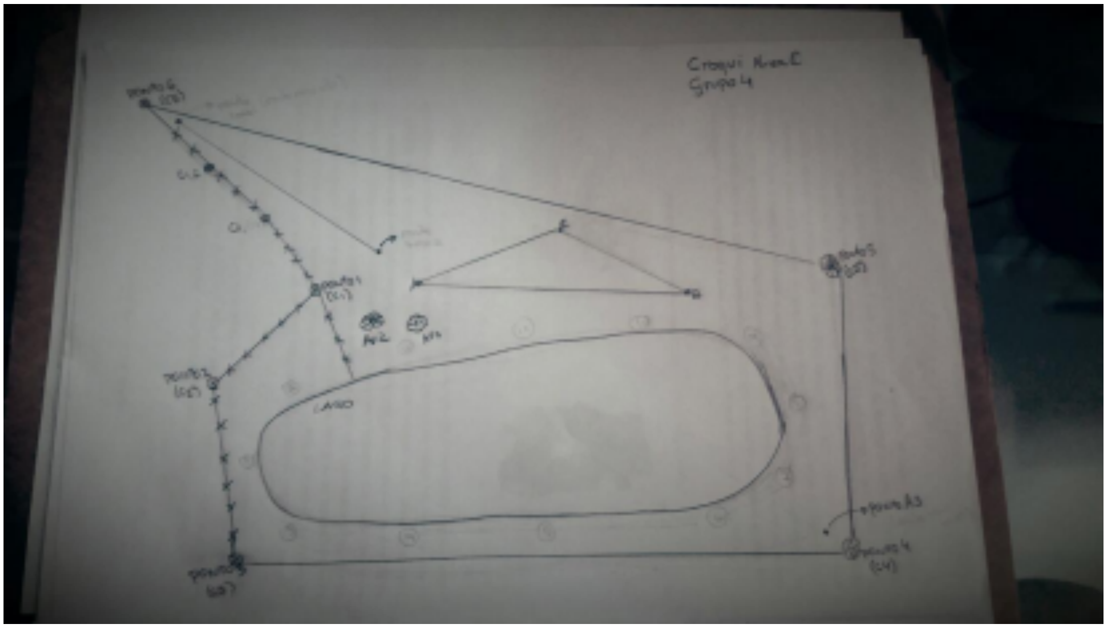


Figura 54: Croqui e Poligonal feita pelos estudantes

Fonte: Da Autora

A cada vértice da poligonal interna (triângulo da Figura 52) demos o nome de “estação”. Alguns grupos necessitaram de mais de três estações (poligonais de mais lados). Nesta vivência utilizamos poligonais de até cinco lados. Ocupamos uma estação e, caminhamos no sentido horário. Nesse sentido, a estação anterior, denominada “estação ré” e a seguinte, “vante”. A poligonal foi escolhida de modo que em cada estação fosse possível visualizar as duas estações adjacentes, a ré (anterior) e a vante (seguinte).

3.1.4 Taqueometria

A Taqueometria, do grego “takhys” (rápido) e “metren” (medição), permite a obtenção da distância horizontal de uma forma indireta, com o auxílio de uma “mira” telescópia.

Para obter a distância, através da luneta do teodolito, focou-se a mira telescópica e fez-se a leitura dos valores que apareceram nos retículos horizontais superior (d1) e inferior (d2). A diferença de 1 cm entre as duas leituras, corresponde a 100 cm (1 m), já que a relação óptica é de 1:100 entre a luneta e a mira (Figuras 53, 54 e 55). Como o aparelho estava alinhado com o horizonte, e se o ângulo vertical estivesse acima de $\alpha = 2°$ (graus), deveria ser aplicado um fator de correção, ficando a distância da seguinte forma:

$$D = (d1 - d2) \cdot 100 \cdot \cos \alpha$$

Essa fórmula de medida indireta foi apresentada aos alunos sem justificativa, pois a mesma será vista em outras séries.

Figura 55: Mira

Fonte: VEIGA, ZANETTI, FAGGION (2012)

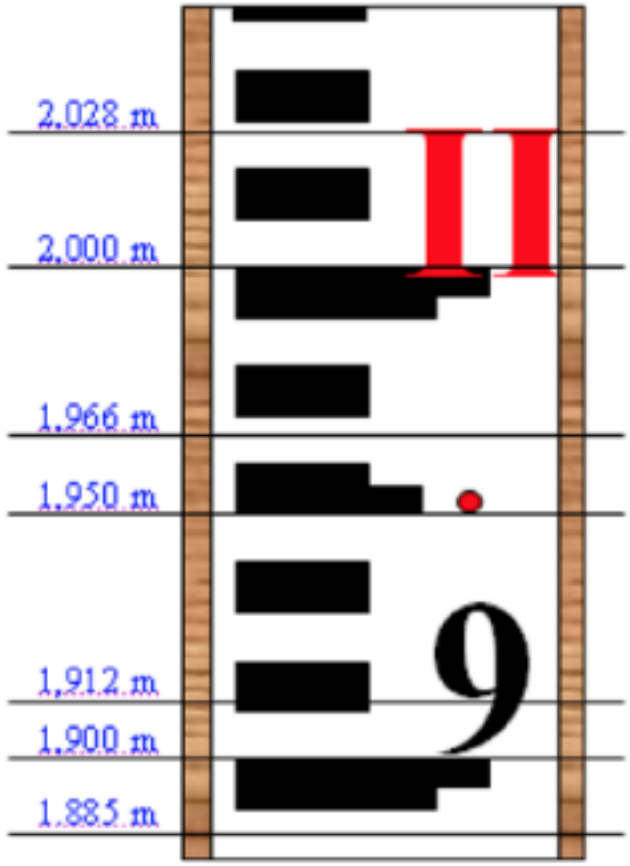


Figura 56: Detalhe da Mira

Fonte: Fonte: VEIGA, ZANETTI, FAGGION (2012).

Figura 57: Estudantes manuseando a Mira com nível bolha

Fonte: Da Autora

3.1.5 Curvas de Nível

Deve-se encontrar um conjunto de pontos de mesma cota altimétrica, permitindo assim, a confecção da curva de nível (Figura 56).

Esse procedimento se inicia marcando, no terreno, os pontos mais alto e mais baixo respectivamente, unindo-os com uma linha. Depois de instalar o teodolito no ponto mais alto do terreno, zera-lo no ponto mais baixo e nivela-lo, deixando o ângulo vertical nulo, mede-se a altura do aparelho.

Marca-se a mesma altura na mira, pode ser com um elástico, focando o retículo médio sobre o elástico. Identifica-se outros pontos no terreno que tenham a mesma altitude do ponto onde se encontra o teodolito, o suficiente para traçar uma curva de nível.

Figura 58: Leitura da Mira

Fonte: Da autora

Figura 59:Estudantes fazendo a leitura de ângulo e distância-curva de nível

Fonte: Da Autora

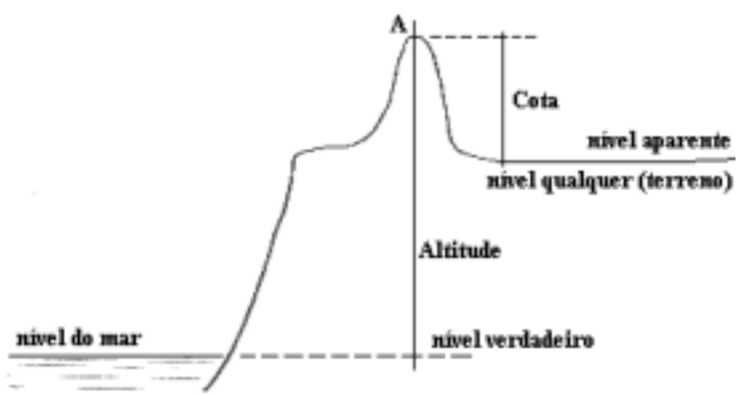


Figura 60: Modelo de um recorte de um terreno

Fonte: http://www.ebah.com.br

Figura 61: Perfil de elevação do Corte A-A parte explorada da fazenda
Fonte: Da Autora

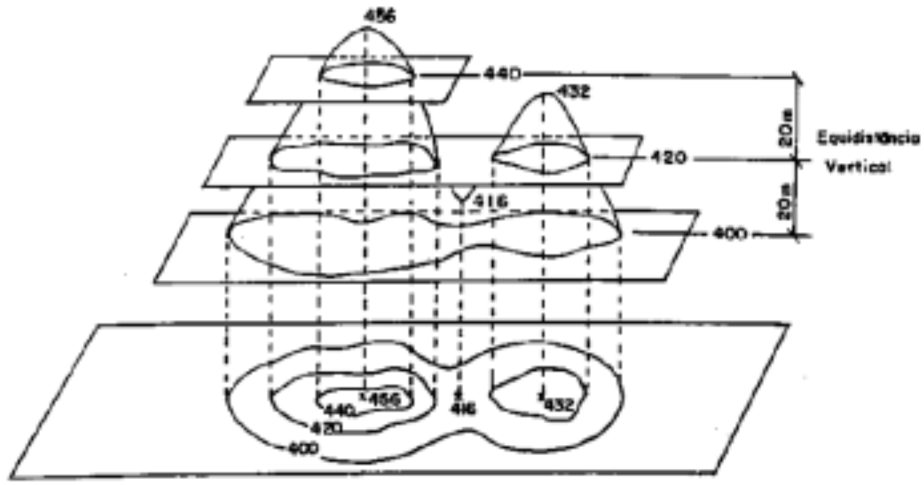


Figura 62: Modelo de curvas de Nível

Fonte: www.geodesia.ufba.br/

Obs. No ensino universitário determinamos as curvas de nível de uma superfície dada por uma função de duas variáveis f(x,y), com x, y ϵ R fazendo f(x,y) = c, em que c uma constante.

3.1.6 Nivelamento

Percorre-se estações do terreno ao longo da linha, a fim de se obter a variação de altitude entre os pontos.

O procedimento inicia-se mantendo a mira sobre o piquete e o teodolito colocado a uma distância de maneira que permita observar a mira com luneta nivelada (medida de ré). Anota-se o valor observado. Em seguida, gira-se o teodolito a 180°, na horizontal, para medir à vante, fazendo a leitura do valor no fio médio. No próximo passo, desta vez, é a mira que gira de 180° e o teodolito é deslocado para uma nova leitura de ré. E assim por diante, até que se termine todas as leituras. Para obter os valores do desnível entre uma estação e outra, calcula-se a diferenças entre cada par ré- à vante.

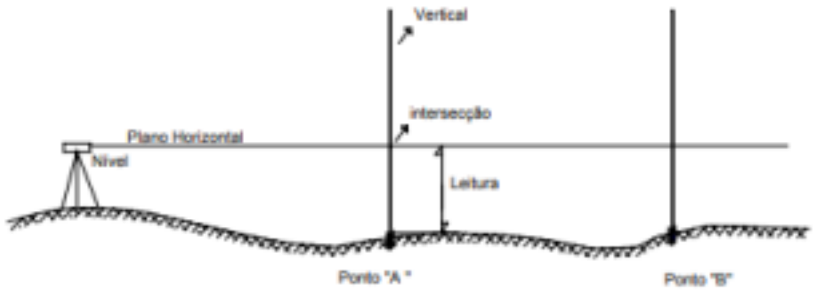


Figura 63: Nivelamento
Fonte: http://www.ufrgs.br

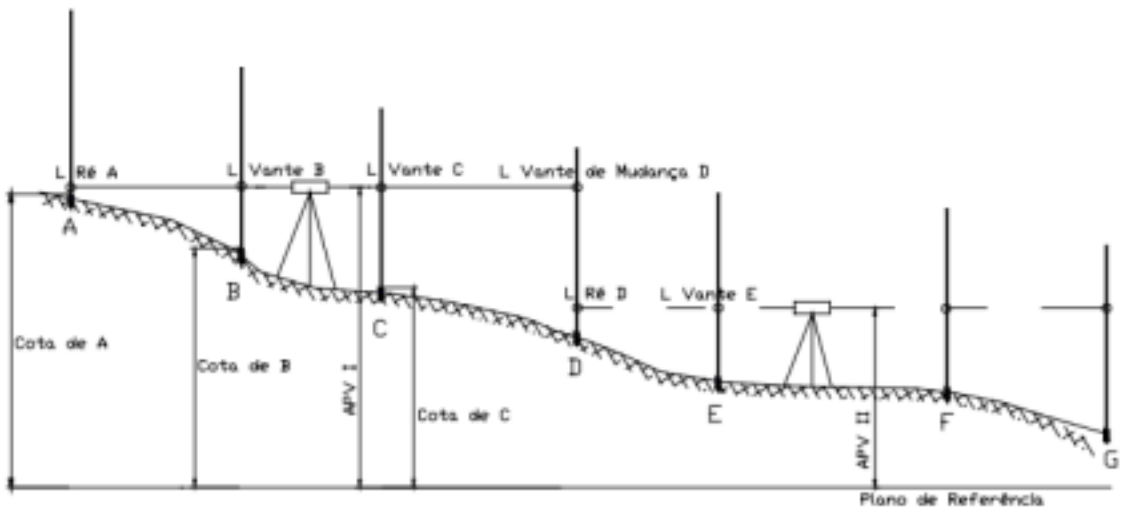


Figura 64: Nivelamento Geométrico (leitura das cotas alternando a mira e o teodolito)
Fonte: http://www.ufrgs.br

3.1.7 Confecção da planta e seus dados

Todos os dados coletados foram registrados em planilhas específicas que serviu como orientação para a confecção da planta, marcando todas as anotações efetuadas. Essa etapa é feita com instrumentos de desenho como régua, esquadros e transferidor em um papel rascunho. Na planta rascunho, devem constar todos os dados como ângulos, distâncias, árvores, caixa d'água, enfim, todos os elementos existentes e observados no terreno. Após conferência e correção de possíveis erros, iniciou-se a confecção da planta definitiva em papel vegetal. Apesar de constarem, na planta definitiva, dados exigidos pelos órgãos oficiais das Prefeituras, os alunos da Escola Waldorf usam da criatividade e apresentam um aspecto estético, utilizando-se das cores da natureza para obter um acabamento artístico.

Rudolf Steiner fundamenta a Pedagogia Waldorf através da cosmovisão Goethiana, que propõe que se utilize a arte como metodologia para a aquisição de conhecimento; e a visão de Schiller sobre a necessidade de uma educação estética do homem (GOETHE-1993; SCHILLER-1995).

A apreensão da cultura pelo viés da arte aprimora a sensibilidade e permite que a razão utilize o refinamento para conceituar aquilo que da natureza e da cultura se apresentam diante dos olhos do indivíduo (ROMANELLI, 2008).

Figura 65: Alunos confeccionando a planta rascunho

Fonte: Da autora

Figura 66: Estudantes confeccionando a planta artística

Fonte: Da Autora

Figura 67: Parte da área medida da fazenda

Fonte: Da Autora

Figura 68: Planta artística confeccionada por um aluno da área da figura 65

Fonte: Da Autora

3.1.8 Cálculo da área do Terreno e posicionamento do Norte

Nessa vivência, o terreno foi subdividido em áreas menores em formato de polígonos, de preferência triângulos, para que facilitasse o cálculo da área total. Os estudantes, já com o conhecimento dos diferentes modos de cálculos de áreas, puderam utilizar a fórmula de área de acordo com os dados de cada trabalho. Uma fórmula que caiu bem foi a fórmula de Herão já estudada no minicurso de Matemática preparatória, no capítulo 2.3, item 2.3.7.

Após o cálculo das diferentes subáreas dos triângulos, tem-se como resultado, a soma das mesmas sendo o valor da área total do terreno.

4. Ficha de atividades

O trabalho de campo é um procedimento pedagógico que facilita a construção do conhecimento, tornando-o uma atividade significativa, a fim de propiciar mais autonomia ao estudante através da teoria e da prática.

A atividade prática foi dividida em 7 dias. No ano de 2017, em que relatamos as atividades do primeiro ano do Ensino Médio era composto por 20 estudantes que participaram das atividades práticas da agrimensura, divididos em 2 grupos de quatro estudantes e 4 grupos de três estudantes, conforme suas habilidades, de modo que as equipes ficassem mais equilibradas segundo a professora orientadora. O critério para essa divisão foi de acordo com o conhecimento que o professor tem de cada aluno, quanto à capacidade de agir e tomar decisões, bem como o potencial de cada um, pois, alguns alunos têm maior habilidade para o "fazer" e outros têm maior habilidade para o "pensar".

No coração, tece o sentir

Na cabeça, luze o pensar

Nos membros, vigora o querer

Luzir que tece

Pensar que vigora

Vigorar que luze

Eis o homem!

(Rudolf Steiner)

Abaixo uma síntese sobre o pensar, o querer e o sentir.

Segundo Rudolf Steiner, a trimembração do ser humano é representada por três forças: o pensar, o sentir e o querer. O pensar é a força localizada na parte mais fria de nosso corpo, o cérebro, caracterizada pela lógica, clareza, consistência, racionalidade e guarda a essência das coisas. O querer ou agir se localiza no sistema metabólico-locomotor (membros superiores e inferiores) e é a força complementar da força do pensar, ou seja, o pensar é colocado em ação por meio das mãos, braços, pernas, com a fala e outros movimentos. É onde está nossa capacidade de transformação. E, por fim, o sentir fica no sistema rítmico do ser humano, formado pelo coração, pulmões e sistema circulatório, e é a força que une o pensar e o querer e atua com as polaridades da simpatia e antipatia. Essa energia mais volátil impulsiona as demais.

A atividade de campo é feita pelo método do caminhamento, pois é um método mais acessível para alunos dessa idade e da série trabalhada. Outra opção seria por coordenadas o que não é viável para este nível. As atividades do trabalho diário em campo estão relacionadas às etapas do levantamento topográfico.

As atividades foram divididas por dias com reuniões no início e final das atividades diárias com toda a turma para discussão e possíveis soluções dos problemas encontrados.
No início da manhã de cada dia, tanto na escola quanto no campo, recita-se o "verso da manhã" juntamente com os alunos em uníssono.

Eu contemplo o mundo,
onde o sol reluz,
onde as estrelas brilham,
onde as pedras jazem,
onde as plantas vivem e vivendo crescem,
onde os bichos sentem e sentindo vivem,
onde já o homem, tendo em si a alma, abrigou o espírito.
Eu contemplo a alma,
que reside em mim,
o divino espírito age dentro dela,
assim como atua sobre a luz do sol.
Ele paira fora
Na amplidão do espaço
E nas profundezas da alma também.
A ti eu suplico,
ó divino espírito,
que bênção e força
para o aprender,
para o trabalhar
cresçam dentro em mim.
(Rudolf Steiner)

Atividade I Reconhecendo o local e instrumentos

Objetivos: Conhecer as partes do teodolito, compreender suas funções, treinar sua montagem e nivelamento, e, por fim, aprender a fazer a leitura de ângulos. Observar a área toda a ser estudada e confeccionar o desenho de um croqui.

Materiais utilizados: teodolito, prancheta, papel e lápis.

Em reunião com os alunos, logo no início da manhã, explica-se qual é o objetivo da atividade do dia a ser realizada no campo, o que se trata um levantamento topográfico propriamente dito, bem como a relação dos conceitos de trigonometria trabalhados em sala de aula e as atividades propostas, justificando o motivo de não se utilizar os modernos aparelhos existentes atualmente. Apresenta-se a eles, o instrumento que será utilizado no trabalho, o teodolito. Depois de participarem de um treinamento da montagem correta do aparelho e nivelamento, dá-se início à leitura de ângulos. Este treino consiste em muitas repetições, a fim de torna-los hábeis e preparados para realizarem o trabalho com mais precisão e segurança. Após o treino, solicita-se para que façam um desenho, a mão livre, do aparelho teodolito, observando-o, com detalhes, suas partes e funções.

Depois de bem treinados, os estudantes percorrem a área que será medida para um reconhecimento e observação da mesma. Em seguida, faz-se uma divisão em 4 (quatro) grupos de 3 (três) estudantes e 2 (dois) grupos de 4 (quatro) estudantes, e cada grupo recebe uma parte da área escolhida, por meio de sorteio, já marcada anteriormente pelo professor e o profissional de campo, para que deem início ao trabalho proposto. As áreas são numeradas e os grupos divididos em A, B, C, D, E e F.

Ainda, no 1º dia, faz-se uma sugestão aos grupos para pensarem em uma forma de medir o terreno com o instrumento e ferramentas fornecidas a eles, podendo utilizá-los se assim o desejarem. O objetivo dessa ideia é de promover o uso de criatividade e raciocínio. Os estudantes relatam as diversas formas que "encontraram" para a medição da área sorteada com bastante entusiasmo e curiosidade.

De posse de uma prancheta, papel e lápis, depois de observarem bem a área do seu grupo, os estudantes esboçam um croqui, a mão livre, da referida área de maneira que fique bem perto da realidade.

A atividade no campo do 1º dia termina após o desenho do croqui.

Encerrado o trabalho de campo do dia, após o jantar e descanso, em reunião com os estudantes, as atividades de todo o dia são recapituladas e algumas **q**uestões são feitas para que possam ir construindo o conhecimento, refletindo e buscando possíveis soluções para as dificuldades que, por ventura são encontradas. Por exemplo, a área sorteada é plana? Existem construções na área a ser medida? Arvoredo? Se sim, árvores de grande porte? Cercas? Após percorrer todo o perímetro, o que observaram de mais relevante? Se for íngreme, como a medição da mesma poderia ser feita, de forma que seja mais perto da realidade? Qual a forma da área a ser medida? Tem forma regular?

Após a reunião, os estudantes são dispensados para descanso, jogos, música, fogueira e outras formas de interação.

Figura 69: Reunião matutina com os grupos de alunos

Fonte: Da Autora

Figura 70: Caminhada de reconhecimento da área

Fonte: Da Autora

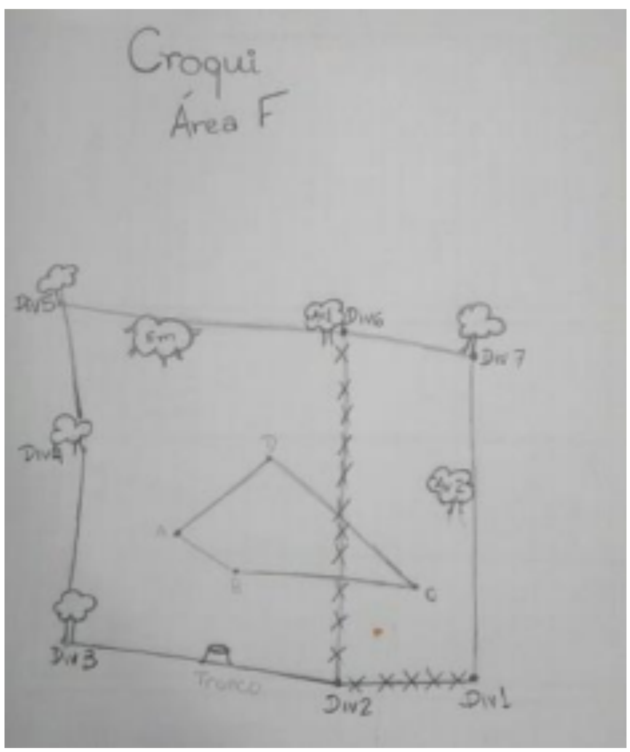


Figura 71: Croqui feito por um dos grupos de alunos

Fonte: Da Autora

Atividade II Investigando, explorando e construindo poligonais.

Objetivos: Compreender o que é uma poligonal de base. Saber definir pontos estratégicos de modo a facilitar todo o levantamento de dados da divisa. Relacionar ângulos e distâncias.

Materiais utilizados: Prancheta, papel e lápis, piquetes, linha, trena, nível bolha, baliza, teodolito e seus acessórios, calculadora e planilha.

No início do dia, logo após o verso da manhã, em reunião, distribui-se as tarefas e faz-se a entrega dos kits de medição. Cada grupo recebe seu kit de materiais, numerado, contendo um teodolito com tripé, um prumo, um martelo, uma trena, um rolo de linha, três balizas, dois níveis bolha, uma mira, dez piquetes, uma lupa e uma prancheta com folhas de papel sulfite. Esse material é de total responsabilidade do grupo que o recebe, devendo ser guardado todas as vezes que não esteja sendo usado. No final do trabalho, o mesmo deve ser entregue limpo, completo e no estado em que lhes é confiado.

Os estudantes também recebem uma planilha para anotações das coletas do dia. Essa planilha é a da Poligonal por caminhamento, conforme a figura 70. Os mesmos devem estar de posse de seus materiais pessoais, tais como lápis, borracha e calculadora científica.

Nessa nova etapa de trabalho, uma noção espacial se faz necessária, pois os estudantes devem escolher pontos estratégicos de modo a poder visualizar todo o perímetro do terreno. Devem fazer as leituras corretamente dos ângulos e da medição com trena.

Os estudantes podem perceber o conteúdo relacionado à atividade, que é a soma dos ângulos internos de um polígono, bem como identificar os elementos da geometria.

Feito o croqui e o treinamento no manuseio do aparelho, os estudantes, já no campo, marcam uma poligonal de base, ou seja, procuram pontos estratégicos, os quais possibilitam o levantamento de todos os dados relevantes da divisa, bem como seus acidentes existentes na área considerada. Determinados esses pontos estratégicos, podendo inclusive se situarem fora da área em questão, colocam um piquete em cada ponto escolhido, de forma a visualizarem o piquete anterior e o posterior já colocados em outros pontos também escolhidos. São colocados quantos piquetes forem necessários. Essa poligonal, quanto ao número de ângulos, depende da necessidade dos números de pontos que os estudantes marcam e depende também da área que recebem, dos acidentes existentes e visibilidade. Em seguida, amarram os piquetes com uma linha, pois ali permanecem fixos até a finalização de todo o trabalho, caso precisem recorrer a eles se, por ventura, os dados não estejam corretos. A poligonal determinada é a estrutura básica para que o trabalho seja realizado com a maior precisão, exigindo dos estudantes capricho e atenção.

Após a leitura correta dos ângulos com o uso do teodolito e a medição das distâncias entre os piquetes (vértices) da poligonal, que, neste caso poderia ser feito com trena, os estudantes transferem todos os dados coletados e anotados na planilha que recebem. Ao término do desenho da poligonal, a mesma deve estar "fechada", sem erro, e todos os ângulos internos marcados, de forma que a soma dos mesmos esteja correta (soma dos ângulos internos de um polígono convexo). Todos os vértices da Poligonal são nomeados por letras maiúsculas. Finalizado esse procedimento, os grupos dirigem-se ao galpão, onde passam os dados coletados, da poligonal, em uma planta rascunho, verificando se a mesma está correta quanto às medidas dos lados e às medidas dos ângulos internos. Mesmo estando correta a soma dos ângulos internos do polígono, as medidas de seus lados devem estar corretas também. Assim, quando os dados da poligonal são passados para o papel, a mesma deve "fechar". Caso essa poligonal não feche, os alunos devem voltar ao terreno para checar as leituras feitas nas atividades anteriores. Em resumo, este dia é aproveitado para correção de possíveis erros de leitura.

A final do trabalho do dia, algumas perguntas são feitas aos grupos:

Qual o grau de dificuldade para se fazer a leitura dos minutos dos ângulos?

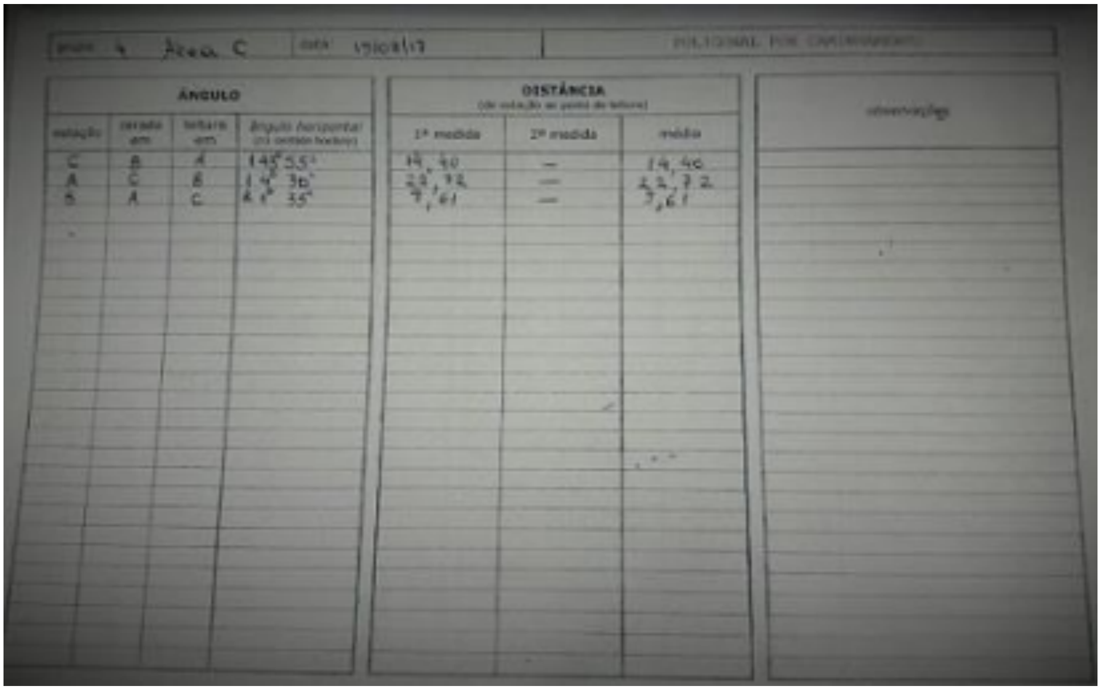
Souberam utilizar o Nônio?

Fizeram uso da calculadora para a soma dos ângulos internos?

Perceberam a necessidade de uma leitura correta?

A poligonal "fechou", ou seja, a soma dos ângulos internos está correta?

Qual a margem de erro que supõem que pode ter?



Área C 17/08/17

POLIGONAL POR CAMINHAMENTO

ÂNGULO				DISTÂNCIA		
estação	visada em	leitura em	ângulo horizontal	1ª medida	2ª medida	média
C	B	A	145°55'	14,40	—	14,40
A	C	B	14° 30'	22,72	—	22,72
B	A	C	[illegible]1° 35'	7,61	—	7,61

Figura 72: Planilha 1 – Poligonal

Fonte: Da Autora

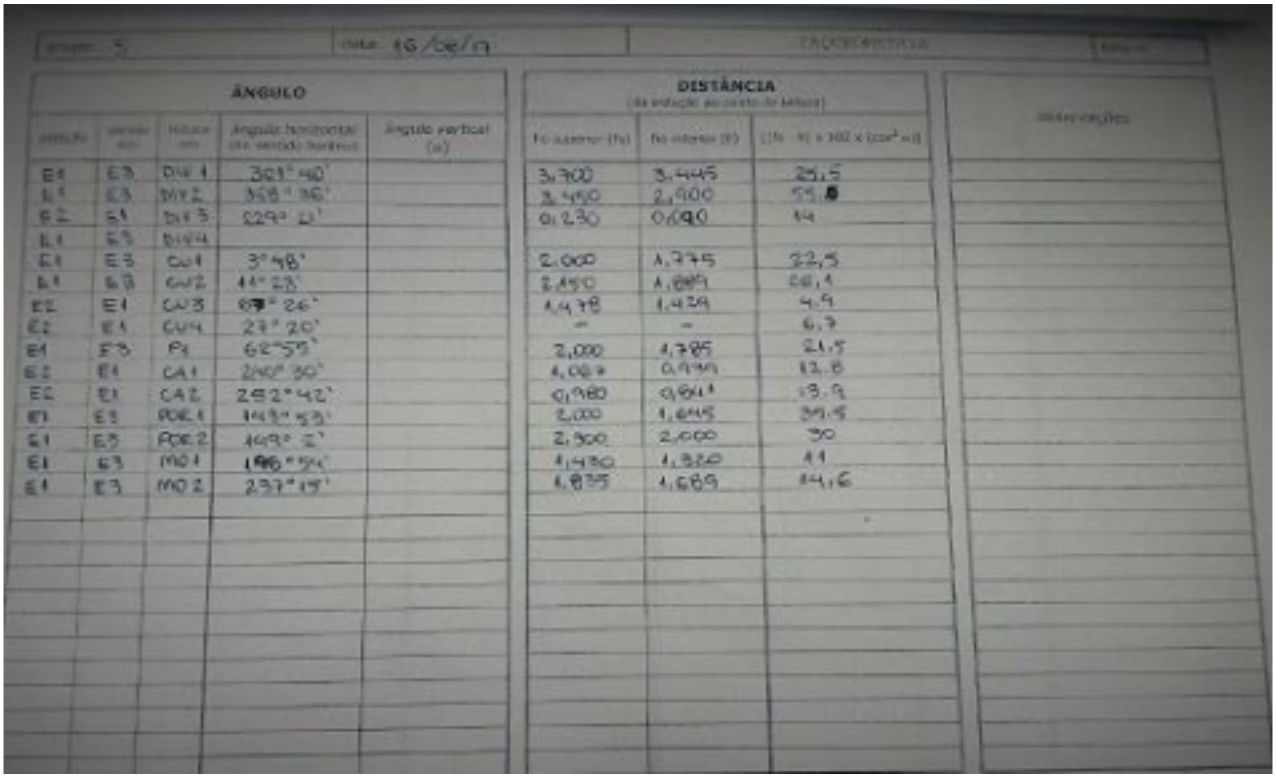
Atividade III e IV Completando a coleta de dados

Objetivos: Fazer o levantamento de todos os acidentes naturais e obstáculos existentes no terreno. Aprender a fazer, principalmente, a leitura da mira, uma vez que a leitura dos ângulos horizontais já foi bastante treinada na etapa anterior.
Materiais utilizados: Prancheta, papel, lápis, mira, nível bolha, teodolito, planilha.

Os estudantes, nessa etapa, praticam bem a leitura das casas decimais, percebem a importância de estarem corretas; por isso leem a mesma distância duas vezes (revezando-se entre os alunos do grupo) e calculam a média aritmética dos dois valores obtidos, a fim de assegurarem um trabalho eficaz.

Nessa etapa, faz-se o levantamento de todos os pontos relevantes da área, através da taqueometria. Após o teodolito ser instalado sobre uma Estação (um dos piquetes da poligonal), nivelado e zerado em outro ponto conhecido (outro piquete da poligonal), obtém-se os valores dos ângulos horizontais formados por todos os acidentes em relação ao ponto de leitura, bem como as distâncias destes em relação ao mesmo ponto de leitura. Todas essas leituras são anotadas em uma planilha, conforme figura 71 (taqueometria), fornecida aos grupos.

Algumas questões feitas aos estudantes:
Qual a maior dificuldade ao realizar a leitura na mira?
Quantas casas decimais conseguiram na referida leitura?



			ÂNGULO		DISTÂNCIA			
[illegible]	[illegible]	[illegible]	Ângulo horizontal	Ângulo vertical (α)	Fio superior (fs)	Fio inferior (fi)	[illegible]	Observações
E1	E3	DIV 1	301° 40'		3,700	3,445	25,5	
E1	E3	DIV 2	358° 36'		3,450	2,900	55,[illegible]	
E2	E1	DIV 3	229° 13'		0,230	0,090	14	
E1	E3	DIV 4						
E1	E3	CU 1	3° 48'		2,000	1,775	22,5	
E1	E3	CU 2	11° 23'		2,850	1,889	96,1	
E2	E1	CU 3	8[illegible]° 26'		1,478	1,429	4,9	
E2	E1	CU 4	27° 20'		–	–	6,7	
E1	E3	P1	62° 55'		2,000	1,785	21,5	
E2	E1	CA 1	240° 30'		1,027	0,899	12,8	
E2	E1	CA 2	252° 42'		0,980	0,841	13,9	
E1	E3	POE 1	143° 53'		2,000	1,645	35,5	
E1	E3	POE 2	149° 2'		2,300	2,000	30	
E1	E3	MO 1	1[illegible]° 54'		1,430	1,320	11	
E1	E3	MO 2	237° 19'		1,835	1,689	14,6	

Figura 73: Planilha 2 – Taqueometria

Fonte: Da Autora

Atividade V Obtenção das curvas de nível

Objetivos: Obter um conjunto de pontos de mesma cota altimétrica para o traçado das curvas de nível.

Materiais usados: prancheta, papel e lápis, teodolito, linha, piquetes, mira e nível bolha.

Nesta etapa, os estudantes fazem a leitura de medidas verticais, chamadas cotas. A diferença entre o ponto mais alto e o mais baixo deve ser observada com bastante interesse.

Após o término da taqueometria, os estudantes iniciam a leitura dos pontos para o traçado das curvas de nível. As áreas que são medidas nem sempre são planas. Geralmente os terrenos são levemente íngremes ou íngremes. Desta forma, se faz necessário obter e demarcar pontos em diversos níveis para constar na planta, a fim de auxiliar em possíveis construções futuras ou uso da terra para plantio, etc. Escolhendo os pontos mais alto e mais baixo do terreno em questão, amarra-se uma linha nos piquetes cravados nesses pontos escolhidos, ligando-os, iniciando o processo que é obter os próximos pontos para o traçado das curvas de nível. O Teodolito é nivelado no ponto mais alto do terreno sobre o piquete, anotando-se sua altura e um elástico colocado na mira marca a mesma altura desse aparelho. O número de pontos nessa mesma altitude deve ser tal que dê para traçar uma curva ao longo do terreno. Para obter uma nova curva, um elástico é colocado 01 m (um metro) acima do valor inicial na mira, procurando-se uma posição ao longo da linha até que o elástico da mira coincida com o fio médio. Encontrado este ponto, um novo piquete é cravado neste para marcar tal posição.

Esse procedimento deve ser realizado quantas vezes se julgar necessário, até que todo o desnível do terreno seja obtido. Para as curvas de nível, orienta-se que o teodolito seja zerado no ponto final da linha estabelecida pelo barbante esticado previamente, e todas as leituras anotadas na planilha de curvas de nível, conforme figura 72.

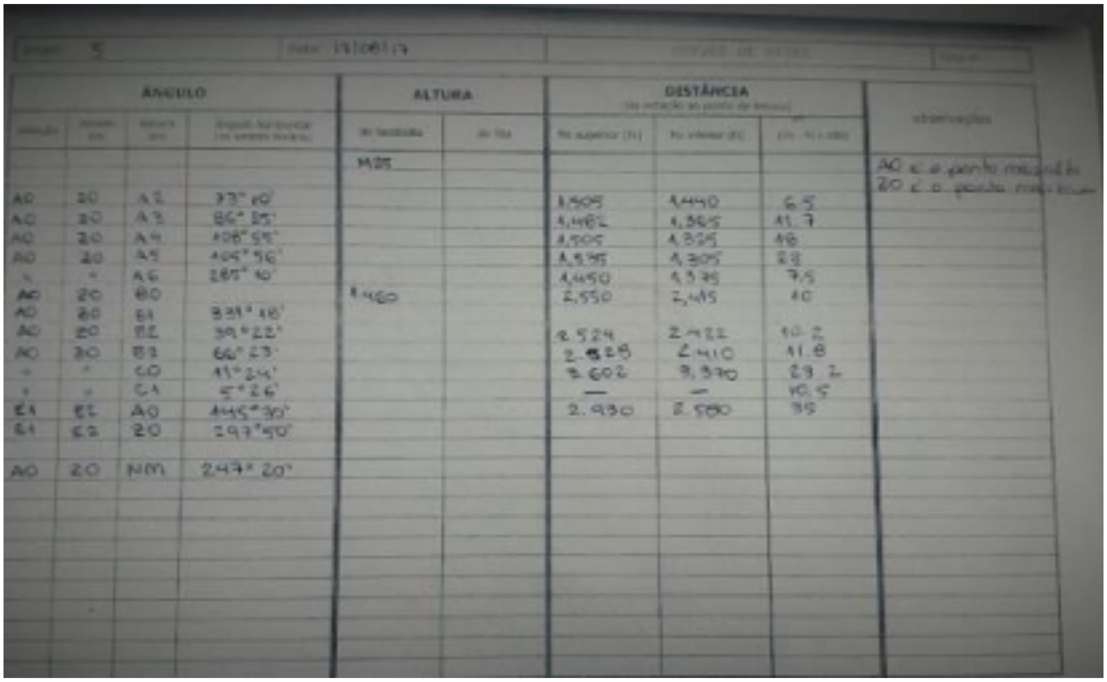
Depois de obtidos pontos relativos a três curvas de nível, o teodolito é transferido para o piquete, sobre a linha, que demarca a última curva de nível.

Algumas questões feitas aos estudantes ao final dessa atividade:

Como perceber o ponto mais alto? E o mais baixo?

Os pontos na mesma cota se encontram em linha reta?

Como se pode observar isto?



ÂNGULO				ALTURA		DISTÂNCIA			observações
				M25					AO é o ponto ma[illegible]
									20 é o ponto ma[illegible]
AO	20	A2	73° 10'			1,505	1,440	6.5	
AO	20	A3	86° 35'			1,482	1,365	11.7	
AO	20	A4	108° 55'			1,505	1,325	18	
AO	20	A5	105° 56'			1,535	1,305	23	
"	"	A6	285° 10'			1,450	1,375	7.5	
AO	20	B0		1,460		2,550	2,415	10	
AO	20	B1	331° 18'						
AO	20	B2	39° 22'			2.524	2.422	10.2	
AO	20	B3	66° 23'			2.528	2.410	11.8	
"	"	C0	11° 24'			3.602	3.370	23.2	
"	"	C1	5° 26'			—	—	10.5	
E1	E2	A0	145° 30'			2.930	2.580	35	
E1	E2	20	297° 50'						
AO	20	NM	247° 20'						

Figura 74: Planilha 3 – Curvas de Nível

Fonte: Da Autora

Atividade VI Nivelamento, diferença de nível

Objetivo: Determinar à diferença de nível de pontos da superfície em relação a outros, ou seja, aprender como obter a variação de altitude. Transpor dados para o papel.
Materiais usados: Prancheta, papel e lápis, mira, piquetes, nível bolha, teodolito, esquadros, transferidor e régua.

Nesta etapa, os estudantes percorrem o trajeto já marcado pela linha utilizado na etapa das curvas de nível e obtêm as leituras de “ré” e “avante”, no fio médio da mira. Após a primeira leitura no fio médio, chamada de leitura de “ré” com a luneta nivelada, os estudantes giram o teodolito em 180º e fazem a leitura do “avante”. Em seguida, deslocam a mira em 180º e com o aparelho já instalado em outra posição escolhida, fazem novamente a leitura de “ré”; giram o teodolito em 180º e fazem a leitura de “avante”, repetindo o procedimento até acabar o trajeto. Quando acabam o percurso, calculam as diferenças dos pares “ré” e “avante”, obtendo os valores de desnível entre as estações. Conclui-se esse procedimento no período da manhã.

Após o almoço e um breve descanso, os grupos se dirigem ao galpão, se instalam em suas mesas e iniciam efetivamente o desenho, conforme ilustra a figura 73.

Cada grupo confecciona apenas uma planta rascunho. Estando o primeiro desenho pronto e correto, ou seja, a poligonal, os estudantes iniciam a próxima etapa, que se resume em transpor para a planta, todas as leituras efetuadas nas atividades anteriores

Figura 75: Alunos confeccionando a planta rascunho

Fonte: Da autora

Atividade VII Concluindo a planta rascunho, calculando a área e confeccionando a planta definitiva

Objetivo: Escolher a fórmula adequada para cálculo da área. Confeccionar planta definitiva em papel vegetal.

Materiais usados: papel rascunho, papel vegetal, lápis 2B, escalímetro, borracha macia, esquadros, régua, curva francesa, transferidor e calculadora.

Nesta etapa, os alunos praticam o uso dos esquadros, régua e escalímetro para a confecção da planta.

De posse da planta rascunho, os estudantes já podem calcular a área total da mesma. Os estudantes fazem o cálculo da área total, dividindo-se a planta em diversos triângulos, região mais simples, calculando suas áreas parciais, cuja soma resulta em sua área total.

Escolhe-se uma escala apropriada, normalmente 1:100, podendo mudar caso algum grupo preferir. Marca-se todos os acidentes tais como árvores, lagos, construções, cercas e outros. A partir desses dados, traça-se a divisa.

Em seguida, passa-se a limpo em papel vegetal colocando os detalhes artisticamente.

Na planta definitiva, deve constar as divisas reais, o norte magnético, legenda, margem, árvores, os acidentes ou construções, as curvas de nível e etiqueta.

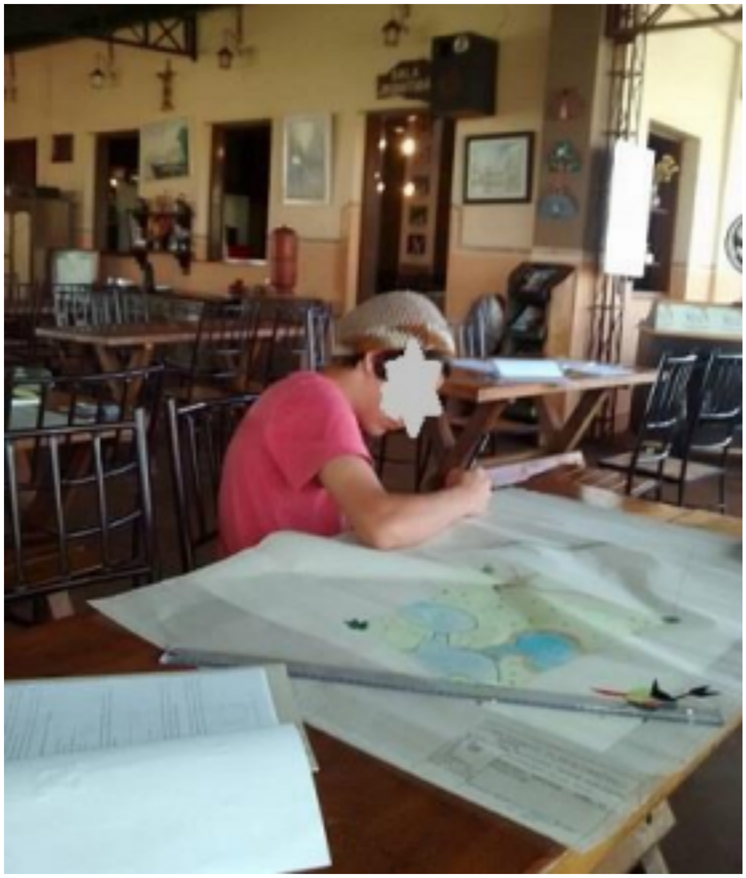


Figura 76: Planta artística

Fonte: Da Autora

4.1 Avaliação do Trabalho:

A vivência de Agrimensura trouxe a possibilidade ao estudante de manejar aparelhos de precisão, o que o ajudou a lidar com a sua eficiência, efetuar cálculos em planilhas e analisar possíveis erros; e, principalmente fazer a conexão entre as aulas teóricas e práticas, o que o fez entender as operações e os conceitos matemáticos que até então não sabia quais suas utilidades na agrimensura.

A interação entre os estudantes foi notória durante essas atividades extraclasse. Os estudantes tiveram o dia cheio de atividades, mas também tiveram suas compensações. No convívio com colegas e sem televisão ou outro meio de comunicação, foi proporcionada uma aproximação maior entre eles. Essa condição contribuiu para que resgatassem brincadeiras saudáveis como jogos sociais, vôlei, futebol; tocassem e cantassem em volta da fogueira que acenderam; aproveitassem a piscina; a convivência com os animais da fazenda, o ar puro do local; além das refeições preparadas com muito carinho para eles. Uma experiência única!

Em cada etapa das atividades realizadas, o professor pode auxiliar o estudante a detectar e retomar o conteúdo visto na sala de aula, orientar quais os tipos de operações matemáticas deveriam ser empregados. Desta forma, torna-se muito gratificante a ele perceber a relação dos seus alunos com o conteúdo trabalhado em sala de aula. A convivência extraclasse entre professor e aluno certamente faz com que haja mais comprometimento de ambas as partes, promovendo uma nítida melhora no envolvimento e desempenho desse aluno.

O trabalho proposto ficaria mais completo se o professor responsável conseguisse realizar esse trabalho por um período maior e explorar outros temas. Após a vivência no campo, poderia, juntamente com seus alunos, fazer uma visita nas universidades que possuem este curso, para que pudessem conhecer os métodos modernos de medições de terrenos, bem como os atuais instrumentos utilizados para este fim.

Diante da riqueza desse aprendizado, e uma pequena amostra do mundo verídico que o jovem vai enfrentar na vida adulta, deixo aqui minha sugestão, a todos os colegas que lecionam a disciplina de matemática, de mostrarem aos seus alunos, o sentido de cada assunto e de cada conceito matemático apresentado em sala de aula, na forma de aplicação real dos conteúdos estudados, fora da escola, em um espaço apropriado, fazendo com que os mesmos possam perceber as leis que regem o mundo e se tornem conscientes desse mesmo mundo, através da condução do julgamento racional para o julgamento conceitual.

Alguns critérios são escolhidos para avaliar cada aluno, como, por exemplo, postura, envolvimento, empenho e desempenho. Outras atitudes são observadas, tais como, cumprimento do horário acordado entre professor e alunos; a forma que o estudante trabalha em grupo, pensou em grupo? Ou foi individualista? Foi ajudado pelo grupo? Ou ficou de fora apenas observando? Qual foi o papel do aluno nas atividades? Teve uma atitude de líder implicitamente? Foi orientado por outro colega? Outro líder? Quanto participou efetivamente do trabalho? Quando foi orientado, aceitou sem questionar as orientações dadas? Conseguiu entender completamente o que estava fazendo?

Para que a avaliação seja mais eficaz, pede-se também a cada um dos estudantes para que, diante dessas mesmas indagações, mencionadas acima, façam a sua própria reflexão e auto avaliação. Dessa forma, como critério pedagógico, observa-se que personalidades individuais começam a destacar-se no trabalho da “massa”, usando a objetividade, clareza no pensar, precisão no agir, desenvolvendo a responsabilidade progressiva do fazer.

5. Conclusão

Todos os passos desde o planejamento inicial, das aulas preparatórias, da viagem, local, data, o trabalho de campo com o levantamento topográfico até o desenho final da área medida, foram realizados para que os estudantes compreendessem a importância de uma medição como base para a construção civil e outras obras. O aluno pode compreender ainda as exigências objetivas, o método e o funcionamento dos aparelhos de medição. De um modo geral, o estudante pode compreender o significado de “precisão”. Através do trabalho gráfico, a precisão do desenho e a medição coincidem, trazendo ao aluno um aprofundamento do conteúdo relacionado e o correto entendimento da necessidade dessa necessidade.

Algumas dificuldades podem aparecer, tais como divisão dos alunos em grupos para execução das atividades, de forma não justa ou adequada, dificuldades no nivelamento do aparelho teodolito e leitura no nônio. Explicações complementares foram dadas para eliminar todas as dúvidas possíveis.

O trabalho de campo, intitulado “Vivência de Agrimensura”, certamente traz uma melhor clareza e sentido dos conteúdos tratados em sala de aula. Vivenciando a aplicação dos conteúdos já estudados anteriormente, o estudante pode interioriza-los com mais eficácia e clareza. É válido salientar que, quando um grupo de estudantes, passa a conviver em conjunto, em outro ambiente, que não o da sala de aula, por um determinado período, no caso desse trabalho, durante sete dias, nota-se que os laços de amizade, admiração e respeito, se estreitam. Isso se explica em razão de determinados alunos se sobressaírem perante os outros, pois, quando estão na sala de aula, não demonstram suas potencialidades e também suas habilidades do “fazer”, surpreendendo o resto da turma.

A partir dessa convivência, nota-se que o grupo fica bem próximo de se tornar homogêneo, no que diz respeito às mesmas metas e interesses, no que diz respeito aos estudos. O mesmo ocorre com o professor que os acompanha e orienta, que, além de experimentar a satisfação e entusiasmo do aluno, pode, a cada vivência, observar os alunos individualmente, perceber suas necessidades de orientação e tentar melhorar a forma de abordar os temas relacionados a esta aula externa.

6. Referências

ANDRADE, C.F. **Matemática aplicada à agrimensura.** 2012. 54 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Fundação Universidade Federal de Rondônia - UNIR, *Campus* de Ji-Paraná. 2012.

BERLINGHOFF, W.P.; GOUVÊA, F.Q. **A Matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas.** 2ª ed. São Paulo: Blücher, 2010.

Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias/Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2).

Citação_Lanz 2009_ ROTEIRO DE AULA DE CIÊNCIAS À LUZ DA PEDAGOGIA WALDORF_CLARISSA MOESCH WELTER **CUIABÁ_2015**

DEWEY, J. **Democracy and Education: an introduction to the philosophy education.** Nova York/Londres: Free Press, 1996.

ESPARTEL, Lelis. **Curso de Topografia**. Porto Alegre: Globo. 1ª ed.1969, 655p.

GODOY, R. **Topografia Básica.** São Paulo: FEALQ, 1988.

GOETHE, J. W. **Teoria de la Naturaleza.** Madrid: Oikos-Tau, 1993.

GOETHE, J. W. **Doutrina das Cores.** São Paulo: Ed. Nova Alexandria, 1993.

LANZ, R. **A pedagogia Waldorf: caminho para um ensino mais humano**. 9. ed. São Paulo: Antroposófica, 2009.

RIOS, D.R. **Dicionário Global da Língua Portuguesa Ilustrado.** São Paulo: Difusão Cultural do Livro-DCL, 2004. 748p.

ROMANELLI, R.A. **A arte e o desenvolvimento cognitivo: um estudo sobre os procedimentos artísticos aplicados ao ensino em uma escola Waldorf.** São Paulo: 270 p. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2008.

SCHILLER, Friedrich. **A Educação Estética do Homem.** São Paulo: Ed. Iluminuras, 1995.
________________. **A Arte da Educação - I**, SP, Ed. Antroposófica, 1995, 2 ª edição.

________________. **A Arte da Educação II – metodologia e didática no ensino Waldorf**. S. Paulo, SP, Ed. Antroposófica, 1992. ________________. Arte e Estética Segundo Goethe, SP, Ed. Antroposófica, 1997.

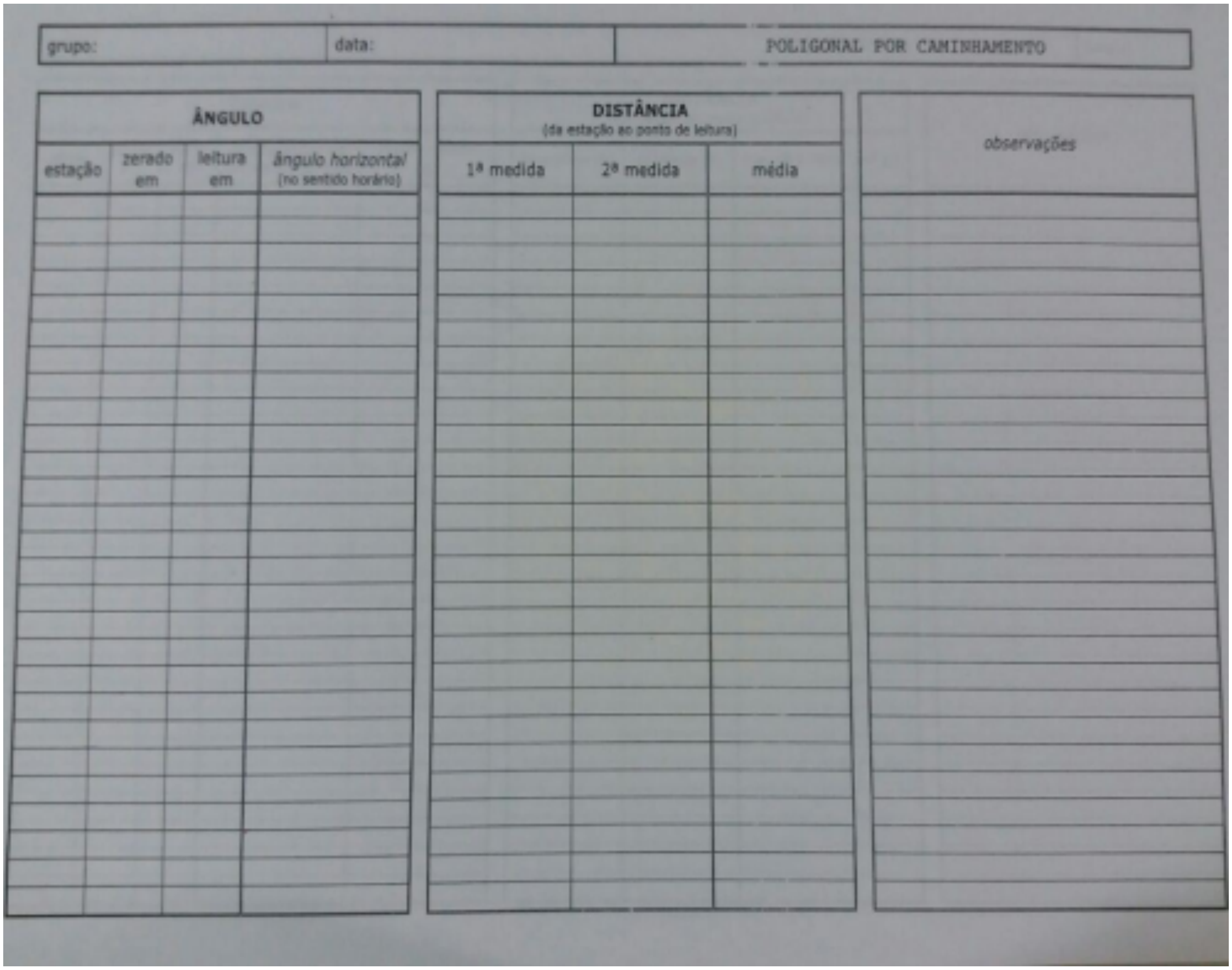
SOUSA, J.S. Aristeu Mendes Peixoto. Francisco Ferraz de Toledo**. Enciclopédia Agrícola Brasileira A-B/ ESALQ, Apresentação Humberto de Campos** – São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1995. 499 p.

VIANA, S. **Notas de aula de Metrologia.** 2009. Disponível em: <http://www.sergioviana.com.br/Notas%20de%20aula%20de%20Metrologia%20Prof.pdf> Acesso em 09 de abril de 2017.

ZILKHA, E. **Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos Teodolito**. 2014. 50f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro. 2014.

ANEXOS

ANEXO A – Poligonal por caminhamento



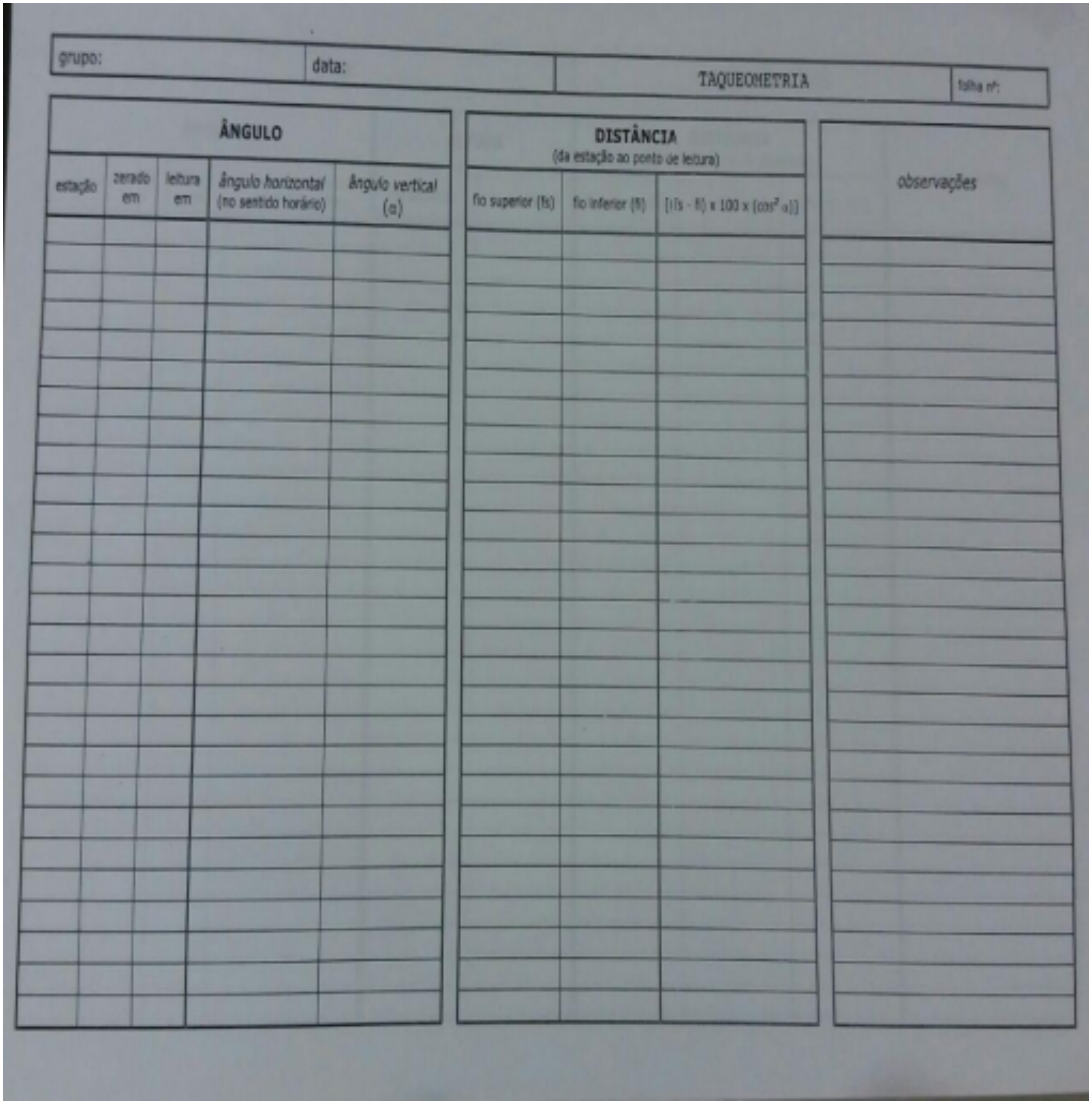
grupo: | data: | POLIGONAL POR CAMINHAMENTO

ÂNGULO				DISTÂNCIA (da estação ao ponto de leitura)			observações
estação	zerado em	leitura em	ângulo horizontal (no sentido horário)	1ª medida	2ª medida	média	

Questionamento: ao final do trabalho do dia, algumas perguntas são feitas aos grupos:

- Qual o grau de dificuldade para se fazer a leitura dos minutos dos ângulos?
- Souberam utilizar o Nônio?
- Fizeram uso da calculadora para a soma dos ângulos internos?
- Perceberam a necessidade de uma leitura correta?
- A poligonal "fechou", ou seja, a soma dos ângulos internos está correta?
- Qual a margem de erro que supõem que pode ter?

ANEXO B – Taqueometria



grupo:	data:	TAQUEOMETRIA	folha nº:

ÂNGULO					DISTÂNCIA (da estação ao ponto de leitura)			observações
estação	zerado em	leitura em	ângulo horizontal (no sentido horário)	ângulo vertical (α)	fio superior (fs)	fio inferior (fi)	$[(fs - fi) \times 100 \times (\cos^2 \alpha)]$	

Questionamentos - Algumas questões feitas aos estudantes:

- Qual a maior dificuldade ao realizar a leitura na mira?
- Quantas casas decimais conseguiram na referida leitura?

ANEXO C – Curvas de Nível

grupo:	data:	CURVAS DE NÍVEL	folha nº:

ÂNGULO				ALTURA		DISTÂNCIA (da estação ao ponto de leitura)			observações
estação	zerado em	leitura em	ângulo horizontal (no sentido horário)	do teodolito	da fita	fio superior (fs)	fio inferior (fi)	[(fs - fi) x 100]	

Questionamentos: Algumas questões feitas aos estudantes ao final dessa atividade:

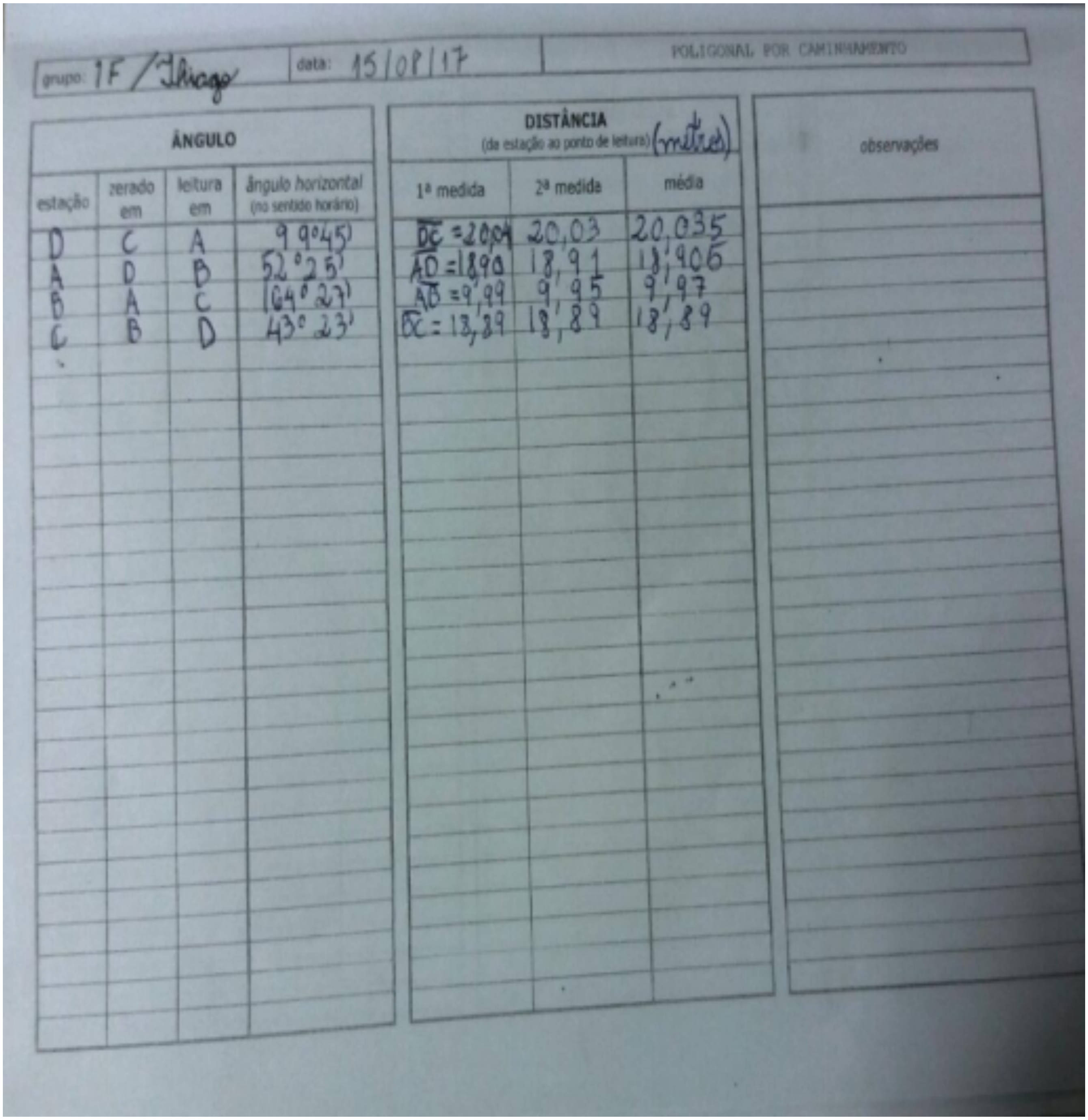
- Como perceber o ponto mais alto? E o mais baixo?
- Os pontos na mesma cota se encontram em linha reta?
- Como se pode observar isto?

ANEXO D – Nivelamento

grupo:	data:	NIVELAMENTO

pontos		ré (r)	avante (v)	diferença: (r - v)	correção	cota	cota corrigida	cota final	observações
r	v								

ANEXO E – Poligonal por caminhamento



grupo: 1F / Thiago	data: 15/08/17	POLIGONAL POR CAMINHAMENTO

ÂNGULO				DISTÂNCIA (da estação ao ponto de leitura) (metros)			observações
estação	zerado em	leitura em	ângulo horizontal (no sentido horário)	1ª medida	2ª medida	média	
D	C	A	99°45'	$\overline{DC}$ = 20,04	20,03	20,035	
A	D	B	52°25'	$\overline{AD}$ = 18,90	18,91	18,906	
B	A	C	164°27'	$\overline{AB}$ = 9,99	9,95	9,97	
C	B	D	43°23'	$\overline{BC}$ = 18,89	18,89	18,89	

ANEXO F – Taqueometria

grupo: 1F / Thiago | data: 16/08/17 | TAQUEOMETRIA | folha nº

estação	zerado em	leitura em	ÂNGULO: ângulo horizontal (no sentido horário)	ângulo vertical (α)	DISTÂNCIA (da estação ao ponto de leitura): fio superior (fs)	fio inferior (fi)	[(fs - fi) x 100 x (cos² α)]	observações
D	C	Div1	0°26'		2,121	2,415	29,00	
D	C	Div.2	26°06'		3,595	3,400	19,50	
D	C	Trevo	67°30'		0,712	0,520	19,20	
D	C	Div3	105°		1,750	1,330	42,00	
D	C	Div4	146°45'		3,730	3,465	26,50	
D	C	Div5	166°10'		3,185	2,810	37,50	
D	C	Div6	291°09'		1,995	1,850	14,50	
D	C	EM1	147°23'		1,442	1,200	24,20	
D	C	EM2	164°40'		1,825	1,585	24,00	
D	C	Arv.1	294°07'		2,445	2,330	11,50	
D	C	Div7	340°20'		2,425	2,210	21,50	
D	C	Arv2	350°40'		3,870	3,658	21,20	
D	C	MD	344°29'		3,355	3,245	11,00	

ANEXO G – Curvas de Nível

grupo: 1F/Thiago	data: 17/08/17	CURVAS DE NÍVEL	folha nº:

ÂNGULO				ALTURA		DISTÂNCIA (da estação ao ponto de leitura)			observações
estação	zerado em	leitura em	ângulo horizontal (no sentido horário)	do teodolito	da fita	fio superior (fs)	fio inferior (fi)	[(fs - fi) x 100]	
D	C	P1	243°37'			2,512	2,449	6,30	
D	C	P2	94°05'			2,295	2,032	26,30	
P1	C	C1	312°30'	1,31		1,330	1,295	3,50	
P1	C	C1	315°30'	1,31		1,365	1,267	9,80	
P1	C	C1	140°40'	1,31		1,340	1,295	4,50	
P1	C	C2	73°40'	1,31		2,345	2,280	6,50	
P1	C	C2	13°19'	1,31		2,360	2,850	4,90	
P1	C	C_2	343°50'	1,31		2,315	2,245	13,00	
P1	C	C_2	339°30'	1,31		2,400	2,218	18,20	
P1	C	C_2	107°35'	1,31		2,386	2,260	12,00	
P1	C	C_2	118°50'	1,31		2,395	2,205	19,00	
P1	C	P_3	73°20'			2,345	2,275	7,00	
P_3	D	C_3		1,28					
P_3	D	C_3	173°50'	1,28		1,312	1,255	5,70	
P_3	D	C_3	177°06'	1,28		1,345	1,238	10,70	
P_3	D	C_3	173°20'	1,28		1,370	1,230	14,00	
P_3	D	C_3	176°10'	1,28		1,450	1,160	29,00	
P_3	D	C_3	332°15'	1,28		1,325	1,250	7,50	
P_3	D	C_3	356°24'	1,28		1,305	1,120	18,50	
P3	D	C4	110°11'	1,28		2,315	2,232	8,30	
P3	D	C4	152°04'	1,28		2,215	2,356	14,10	
P3	D	C4	161°10'	1,28		2,400	2,136	26,50	
P3	D	C4	23°46'	1,28		2,350	2,200	15,00	
P3	D	C4	9°28'	1,28		2,173	2,398	22,50	
P3	D	NM	287°16'						

ANEXO H – Nivelamento

grupo: 1F / Abigail	data: 18/08/18	NIVELAMENTO

pontos r	pontos v	ré (r)	avante (v)	diferença: (r - v)	correção	cota	cota corrigida	cota final	observações
A	1	3,742	–			–	13,742	10	
	2		3,513					10,229	
	3		3,324					10,418	
	4		2,942					10,800	
	5		1,872					11,870	
	6		1,134					12,608	
	7		1,267					12,475	

ANEXO I – Versos

...

Um arquiteto de sonhos
Engenheiro do futuro
Um motorista da vida
dirigindo no escuro
Um plantador de esperança
plantando em cada criança
um adulto sonhador
e esse cordel foi escrito
por que ainda acredito
na força do professor.
Bráulio Bessa

"A nossa mais elevada tarefa deve ser a de formar seres humanos livres que sejam capazes de, por si mesmos, encontrar propósito e direção para suas vidas". (Rudolf Steiner)

"Cada ato de olhar se torna uma observação, cada ato de observação uma reflexão, cada ato da reflexão produz associações; assim, fica evidente que teorizamos cada vez que olhamos o mundo cuidadosamente". (Goethe)

No coração, tece o sentir
Na cabeça, luze o pensar
Nos membros, vigora o querer
Luzir que tece
Pensar que vigora
Vigorar que luze
Eis o homem!
(Rudolf Steiner)

Eu contemplo o mundo,
onde o sol reluz,
onde as estrelas brilham,
onde as pedras jazem,
onde as plantas vivem e vivendo crescem,
onde os bichos sentem e sentindo vivem,
onde já o homem, tendo em si a alma, abrigou o espírito.
Eu contemplo a alma,
que reside em mim,
o divino espírito age dentro dela,
assim como atua sobre a luz do sol.
Ele paira fora
Na amplidão do espaço
E nas profundezas da alma também.
A ti eu suplico,
ó divino espírito,
que bênção e força
para o aprender,
para o trabalhar
cresçam dentro em mim.
(Rudolf Steiner)