

**Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Departamento de Física**

**Natalí Soler Matubaro de Santi**

**Termodinâmica de buracos negros de Schwarzschild**

**São Carlos - SP**

**2018**



**Natalí Soler Matubaro de Santi**

## **Termodinâmica de buracos negros de Schwarzschild**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, do Departamento de Física, da Universidade Federal de São Carlos, para a obtenção do título de Mestra em Física.

Orientador: Prof. Dr. Raphael Santarelli

**Versão corrigida**

**São Carlos - SP**

**2018**

Soler Matubaro de Santi, Natali

Termodinâmica de buracos negros de Schwarzschild / Natali Soler  
Matubaro de Santi. -- 2018.  
67 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São  
Carlos, São Carlos

Orientador: Raphael Santarelli  
Banca examinadora: Raphael Santarelli, Daniel Augusto Turolla Vanzella,  
Javier Fernando Ramos Caro  
Bibliografia

1. Termodinâmica de buracos negros de Schwarzschild. 2. Radiação  
Hawking. 3. Evolução temporal da massa de buracos negros de  
Schwarzschild. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III.  
Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

Bibliotecário(a) Responsável: Ronildo Santos Prado – CRB/8 7325



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Física

---

Folha de Aprovação

---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Natali Soler Matubaro de Santi, realizada em 28/05/2018:

---

Prof. Dr. Raphael Santarelli  
UFSCar

---

Prof. Dr. Daniel Augusto Turolla Vanzela  
USP

---

Prof. Dr. Javier Fernando Ramos Caro  
UFSCar



*Aos meus pais, Aparecida e Ricardo.*



# AGRADECIMENTOS

Essa dissertação é dedicada a todos que contribuíram para que eu conseguisse chegar até aqui. Desde já peço desculpas caso eu tenha esquecido de agradecer a alguém. Primeiramente, gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Raphael Santarelli pela orientação e por todo o tempo dedicado a minha pessoa. Muito obrigada pelo apoio, pela confiança, por toda a paciência e vontade de me ensinar e ajudar.

Aos meus pais, Aparecida e Ricardo, agradeço por todo o amor e confiança depositados em mim. Obrigada por me apoiarem e me aturarem em todos os momentos da minha vida. Foram vocês que me derrubaram e, então, ensinaram a me levantar, me transmitiram muito mais que valores, vocês moldaram a minha personalidade e, acima de tudo, me ensinaram a nunca desistir dos meus sonhos. Vocês são e sempre serão meus melhores exemplos e inspiração. Sem vocês eu não seria nada!

Agradeço aos meus irmãos, Mario e Nicole, que, além de me apoiarem, sempre me ajudaram a deixar os estudos um pouco de lado e a rir das situações mais inusitadas possíveis. Nossa interação vai muito além de compartilharmos o dia a dia, segredos, felicidades e frustrações, inclui algo que só ocorre entre irmãos, a naturalidade da afinidade. Peço desculpas por não estar presente em todos os momentos de suas vidas mas tenham certeza que me orgulho muito e sempre me orgulharei de quem vocês se tornaram.

Quero agradecer a todos os meus familiares, minhas tias Angela, Delma, Maria, Dirce e Eliane, meus tios Adilson, Paulo, Carlos, Zé, Neco e Jorge, meus primos Peterson, Emerson e Jonathan, minhas primas Jéssica, Jennifer, Suelen, Rafaela e Tata, minhas avós Bá e Miquilina e meus avôs Miguel e Mario que completam e completaram a minha existência. Obrigada pelas conversas, pela amizade e por sempre me receberem de braços abertos não importando a hora ou a situação.

Ao meu namorado Nicolás, agradeço por estar comigo em todos os bons e maus momentos. Por compartilharmos nossos sonhos, nossas frustrações e realizações desde o comecinho de nossas graduações em Física. Com você aprendi, e aprendo diariamente, muito sobre a beleza da vida e do amor. Você sempre acreditou e acredita em mim, mesmo quando eu não consigo. Obrigada por tudo o que passamos juntos até hoje e por tudo o que pretendemos e sonhamos em vivenciar juntos. Eu te amo!

Gostaria de agradecer a todos os professores que contribuíram para a minha formação, em especial destaco aqui aqueles que tive o prazer de ter um maior contato. À minha tia e professora Angela. À minha professora da terceira série Cláudia Maria Botassi. À minha prima e professora Fumi. Aos meus orientadores e coorientadores Antonio Carlos Hernandez, Ariane Baffa Lourenço, Marcelo Rubens Barsi Andreeta, Thiago Martins Amaral, Attilio Cucchieri e,

novamente, Raphael Santarelli. Aos meus professores de graduação e pós-graduação Rodrigo Gonçalves Pereira, Luis Nunes de Oliveira, Leonardo Paulo Maia, José Fabián Schneider, Tereza Mendes, Francisco Castilho Alcaraz, Máximo Siu Li, Luis Agostinho Ferreira, Paulo Daniel Emmel e Wilson Aires Ortiz. Obrigada por tudo o que vocês me ensinaram tanto acadêmica quanto pessoalmente.

Às minhas amigas desde o colégio Carol, Mayara e Julia, aos meus amigos de graduação Nicolás (de novo e sempre), Gustavo, Peterlevitz, Noel, Murilo H. de O., Murilo L., Alfredo, Lício, Sálvio, Fábio, Edmilson, Lucas, Guilherme M. L., Ian e Alex e aos meus colegas de sala Vitor, Joshua, Ricardo e Rogério muito obrigada pela amizade, conversas e por tudo o que pude aprender na companhia de vocês.

Não posso esquecer de agradecer ao meu companheiro Tesla. É ele que todas as manhãs perambula da minha janela até minha porta e fica chorando até eu acordar, que quase levanta voo abanando seu rabo de felicidade ao me ver e que me leva para passear para me sentir viva.

Por fim, agradeço ao Departamento de Física (DF) e à Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), pela oportunidade de realização do meu Mestrado, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro para o mesmo e à banca examinadora pela disponibilidade para avaliar este trabalho.

*“Science, my lady, has been built upon many errors;  
but they are errors which it was good to fall into, for they led to the truth.”*

Journey to the centre of the Earth - Jules Verne

*“Hey you, don’t help them to bury the light  
Don’t give in, without a fight.”*

Hey you - Roger Waters

*“Every problem contains its own solution, Mr. Arnold”*

Mr. Collins - The Wonder Years



# RESUMO

A presente dissertação consiste em uma revisão sobre alguns aspectos da termodinâmica de buracos negros de Schwarzschild e inclui uma discussão acerca da evolução temporal da massa dos mesmos num contexto termodinâmico. Para isso fizemos um apanhado da teoria da relatividade geral. Em especial trabalhamos com os espaços-tempo de Minkowski, sob a perspectiva de um observador acelerado, e de Schwarzschild. Em seguida fizemos um estudo sobre a teoria quântica de campos em espaços curvos. Introduzimos o efeito Unruh como motivação para o estudo da radiação Hawking, principal objetivo do trabalho, deduzindo a temperatura de um buraco negro de Schwarzschild. Apresentamos as leis da termodinâmica de buracos negros e fizemos um paralelo com as leis da termodinâmica clássica. Por fim, fizemos uma discussão sobre a evolução temporal da massa de buracos negros de Schwarzschild analisando diferentes condições iniciais e diferentes condições de ambientes externos, a saber o vazio, a radiação cósmica de fundo com temperatura constante e evoluindo no tempo de acordo com as eras do universo.

**Palavras-chave:** Termodinâmica de buracos negros de Schwarzschild. Relatividade geral. Teoria quântica de campos em espaços curvos. Radiação Hawking. Evolução temporal da massa de buracos negros de Schwarzschild.



# ABSTRACT

This dissertation consists of a review about some aspects of Schwarzschild black hole thermodynamics and includes a discussion related to the temporal evolution of the masses of these black holes in a thermodynamic context. We started studying some aspects of general relativity, verifying some properties first in Minkowski space-time, from perspective of an accelerated observer, and then in Schwarzschild space-time. After that we moved to quantum field theory in curved spaces, starting with the Unruh effect as a motivation for the Hawking radiation, which is the main goal of this work, deducing the temperature for a Schwarzschild black hole. Later we presented the laws of the black hole thermodynamics and an analogy with classical thermodynamics laws. Lastly, we discussed the temporal evolution of the masses of Schwarzschild black holes for different initial values and environment conditions: empty space, cosmic microwave background with constant temperature and with temperature varying with time according with the eras of the universe.

**Keywords:** Schwarzschild black hole thermodynamics. General relativity. Quantum field theory in curved space-time. Hawking radiation. Time evolution of mass of the Schwarzschild black hole.



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Cone de luz do ponto P para representação de sua estrutura causal em um diagrama do espaço-tempo: $t \times x$ . Representamos 3 vetores: tipo nulo, tipo espaço e tipo tempo. Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	35
Figura 2 – Representação de um subconjunto $S$ de uma hiper-superfície $\Sigma$ e sua estrutura causal. Representamos os domínios de dependência futuro e passado $D^\pm(S)$ e seus respectivos horizontes de Cauchy $H^\pm(S)$ . Além disso representamos os pontos $P^\pm$ conjuntamente com seus cones de luz. Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	36
Figura 3 – Diagrama de Penrose do espaço-tempo de Minkowski. Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	37
Figura 4 – Espaço-tempo de Minkowski nas coordenadas de Rindler dividido em 4 regiões com as órbitas de observadores uniformemente acelerados de módulo $\alpha$ . Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	39
Figura 5 – Diagrama de Penrose do espaço-tempo de Rindler evidenciando seus lados Direito e Esquerdo. Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	40
Figura 6 – Representação pictórica da anatomia de um buraco negro de Schwarzschild. Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	44
Figura 7 – Representação das coordenadas nulas de Eddington-Finkelstein. Utilizamos $M = 1$ e o horizonte está marcado em preto para $r = 2M _{M=1} = 2$ . Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	46
Figura 8 – Espaço-tempo de Schwarzschild estendido: representação nas coordenadas de Kruskal-Szekeres. Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	47
Figura 9 – Diagrama de Penrose do espaço-tempo de Schwarzschild estendido: representação nas coordenadas de Kruskal-Szekeres. Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	48
Figura 10 – Diagrama de Penrose de uma estrela colapsando esféricamente. A estrela colapsando é representada pela região hachurada em cinza. A linha em zigue-zague representa a singularidade $r = 0$ . O horizonte de eventos é representado por $H^+$ . Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	50
Figura 11 – Representação do colapso esféricamente simétrico de uma estrela no espaço-tempo $t \times r$ . Estão representados raios de luz próximos da formação do buraco negro. O raio $\gamma_H$ forma o horizonte de eventos e marca o limite entre os raios que ficam presos dentro do buraco negro e aqueles que alcançam o infinito. Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	74
Figura 12 – Diagrama de Penrose representando o colapso esféricamente simétrico de uma estrela e as geodésicas nulas $\gamma$ e $\gamma_H$ . Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	75

Figura 13 – Decaimento geral da massa de um buraco negro no espaço vazio. Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	89
Figura 14 – <i>Streamplot</i> da evolução temporal da massa para um buraco negro no espaço vazio. Note que utilizamos unidades arbitrárias (UA). Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	89
Figura 15 – Comparação da evolução temporal da massa para um buraco negro no espaço vazio, com massa inicial do Sol $M_0^\odot \simeq 2.0 \cdot 10^{30} kg$ , para a solução analítica e numérica. Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	90
Figura 16 – <i>Streamplot</i> da evolução temporal da massa de um buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo com temperatura constante. Note que utilizamos unidades arbitrárias (UA). Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	93
Figura 17 – Comparação da evolução temporal da massa de um buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo, com massa inicial $M_0^{hip} \simeq 5.6 \cdot 10^{18} kg$ de Hipérion, para a <i>solução analítica do primeiro termo e numérica completa</i> . Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	94
Figura 18 – Comparação da evolução temporal da massa de um buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo, com massa inicial do Sol $M_0^\odot \simeq 2.0 \cdot 10^{30} kg$ , para a <i>solução analítica do segundo termo e numérica completa</i> . Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	94
Figura 19 – Interpolação numérica para a evolução temporal da massa de um buraco negro em 3 situações distintas. Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	95
Figura 20 – <i>Streamplots</i> da evolução temporal da massa de um buraco negro trocando energia com a radiação cósmica de fundo nas eras de radiação, matéria e energia escura. Utilizamos unidades arbitrárias (UA). Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	99
Figura 21 – Interpolação numérica para a evolução temporal da massa de um buraco negro com massa inicial $M_0^{Hip} \simeq 5.6 \cdot 10^{18} kg$ de Hipérion e $M_0^\odot \simeq 2.0 \cdot 10^{30} kg$ do Sol para as eras de radiação, matéria e energia escura. Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	100
Figura 22 – Comparação da evolução temporal da massa de um buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo com sua temperatura evoluindo conforme as eras do universo, com massas iniciais $M_0^{hip} \simeq 5.6 \cdot 10^{18} kg$ de Hipérion e $M_0^\odot = 2.0 \cdot 10^{30} kg$ do Sol, para a <i>solução analítica do primeiro termo e numérica completa de cada era</i> . Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	101

Figura 23 – Comparação da evolução temporal da massa de um buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo com temperatura evoluindo de acordo com as eras do universo, para uma massa inicial equivalente a massa de buraco negro com tempo de vida da ordem do período de cada era, para a <i>solução analítica do primeiro termo e numérica completa para cada era</i> . Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	103
Figura 24 – Interpolação numérica para a evolução temporal da massa de um buraco negro, com massa inicial a partir da qual a massa do mesmo cresce, para um buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo com temperatura variando de acordo com as eras de radiação, matéria e energia escura. Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	104
Figura 25 – Interpolação numérica para a evolução temporal da massa de um buraco negro, com massa inicial a partir da qual a massa do mesmo cresce “indefinidamente”, para um buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo com temperatura variando de acordo com as eras de radiação, matéria e energia escura. Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	105
Figura 26 – Evolução das densidades de radiação, matéria e energia escura como função da razão do fator de expansão $\frac{a}{a_0}$ do universo. Note que utilizamos escala logarítmica em ambos os eixos. Fonte: Elaborada pela autora. . . . .	130



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Cálculo das temperaturas para buracos negros com determinadas massas. . .	82
Tabela 2	– Tempo de vida para buracos negros com determinadas massas. . . . .	90
Tabela 3	– Massas de buracos negros com tempos de vida da ordem dos períodos das eras de radiação, matéria e energia escura. . . . .	102
Tabela 4	– Massas de buracos negros a partir da qual temos seu crescimento para as respectivas eras. . . . .	102



# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ME	Mecânica Estatística
MQ	Mecânica Quântica
OHQ	Oscilador Harmônico Quântico
RE	Relatividade Especial
RG	Relatividade Geral
TQC	Teoria Quântica de Campos
TQCEC	Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos



# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>2</b>	<b>A TEORIA DA RELATIVIDADE . . . . .</b>	<b>29</b>
2.1	As equações de Einstein e o espaço-tempo curvo . . . . .	29
2.2	Algumas propriedades do espaço-tempo curvo . . . . .	31
2.3	Simetrias e vetores de Killing . . . . .	32
2.4	A estrutura causal do espaço-tempo . . . . .	34
2.5	O espaço-tempo de Minkowski sob a perspectiva de um referencial uniformemente acelerado . . . . .	37
2.5.1	O referencial uniformemente acelerado . . . . .	38
2.6	O espaço-tempo de Schwarzschild . . . . .	41
2.6.1	A dedução da métrica de Schwarzschild . . . . .	41
2.7	Analisando a métrica de Schwarzschild . . . . .	42
2.7.1	Coordenadas de Eddington-Finkelstein . . . . .	43
2.7.2	Coordenadas de Kruskal-Szekeres . . . . .	46
2.8	Buracos negros . . . . .	48
<b>3</b>	<b>TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS EM ESPAÇOS CURVOS . . . . .</b>	<b>53</b>
3.1	Teoria quântica de campos em espaços planos . . . . .	54
3.1.1	A equação de Klein-Gordon . . . . .	54
3.1.2	O campo de Klein-Gordon . . . . .	54
3.1.3	Quantização do campo escalar no espaço-tempo plano . . . . .	56
3.2	Teoria quântica de campos em espaços-tempo curvos . . . . .	58
3.2.1	O operador número e a temperatura . . . . .	62
3.3	O efeito Unruh . . . . .	62
3.3.1	Expandindo o campo escalar . . . . .	63
3.3.2	Calculando o número de partículas para o observador acelerado . . . . .	65
3.4	A radiação Hawking . . . . .	69
3.4.1	A radiação Hawking para o colapso esfericamente simétrico . . . . .	69
3.4.2	Uma pequena discussão acerca da radiação Hawking . . . . .	79
<b>4</b>	<b>TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS . . . . .</b>	<b>83</b>
4.1	Leis da termodinâmica de buracos negros . . . . .	84
4.2	A inacessibilidade do equilíbrio térmico com um reservatório de energia e suas implicações . . . . .	87
4.2.1	Buraco negro e o espaço vazio . . . . .	88

4.2.2	Buraco negro e a radiação cósmica de fundo . . . . .	91
4.2.3	Buraco negro e a evolução térmica do universo . . . . .	96
5	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>107</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>109</b>
	<b>APÊNDICE A – GRAVIDADE SUPERFICIAL . . . . .</b>	<b>113</b>
A.1	A interpretação do nome gravidade superficial . . . . .	113
A.2	A gravidade superficial para um buraco negro de Schwarzschild . . . . .	114
A.3	Algumas relações com a gravidade superficial . . . . .	115
A.4	Gravidade superficial constante ao longo do horizonte de eventos . . . . .	116
	<b>APÊNDICE B – DESTRINCHANDO A DEDUÇÃO DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD . . . . .</b>	<b>117</b>
	<b>APÊNDICE C – LIMITE NEWTONIANO . . . . .</b>	<b>119</b>
	<b>APÊNDICE D – A RELAÇÃO ENTRE AS EXPANSÕES DISCRETA E CONTÍNUA DO CAMPO DE KLEIN-GORDON . . . . .</b>	<b>121</b>
	<b>APÊNDICE E – TRANSFORMAÇÕES DE BOGOLIUBOV . . . . .</b>	<b>125</b>
	<b>APÊNDICE F – EVOLUÇÃO TÉRMICA DO UNIVERSO . . . . .</b>	<b>129</b>

# 1 INTRODUÇÃO

No final do século XIX e início do século XX nasceram a Mecânica Quântica (MQ) e a Relatividade Geral (RG), duas teorias aparentemente distintas e que revolucionaram toda a Física existente até o momento [1]. Distintas porque são capazes de descrever fenômenos nas duas pontas opostas da escala de comprimento. Ao passo que a MQ descreve muito bem a Física do “microscópico”, isto é, a Física dos átomos e das partículas elementares<sup>1</sup>, a RG descreve muito bem a Física do “macroscópico”, ou seja, a Física dos astros e do universo. A distância entre essas duas teorias diminui quando pensamos na proposta de Max Karl Ernst Ludwig Planck, de 1899, na qual combinamos constantes universais da Física como a velocidade da luz  $c$ , a constante universal da gravitação  $G$  e a constante de Planck reduzida  $\hbar = h/2\pi$  para criar unidades fundamentais de comprimento  $l_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-35} m$  e tempo  $t_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \sim 10^{-44} s$  [3]. Essas unidades ficaram conhecidas como *escala de Planck* e, por misturarem constantes de ambas teorias aqui destacadas, se impõe como a escala de unidades fundamentais do que esperamos por uma Teoria Quântica da Gravitação, uma teoria que quantizaria a única interação fundamental restante, unindo as duas pontas da escala.

Até o presente momento não temos uma Teoria Quântica da Gravitação, mas esforços incontáveis, desde a década de 70, criaram o que chamamos hoje de Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos (TQCEC) [3]. Ela é considerada como uma teoria suplente para o que esperamos de uma Teoria Quântica da Gravitação. Isso porque ela é entendida como uma junção entre a Teoria Quântica de Campos (TQC) e a RG, considerando os campos de matéria quantizados sobre o espaço-tempo que atua como “pano de fundo”, ou seja, a gravitação continua clássica. Em outras palavras, é uma teoria que analisa como os campos quânticos se comportam no espaço-tempo curvo, afinal, para todos os efeitos, não temos apenas o espaço-tempo de Minkowski. Essa teoria prevê uma série de fenômenos extremamente interessantes, não intuitivos e muitas vezes intrigantes para a comunidade científica como um todo. Fenômenos estes como a Radiação Hawking e o Efeito Unruh, ambos estudados na presente dissertação.

O Efeito Unruh põe em cheque o conceito de partícula: o que antes era pensado como universal, passa a depender do referencial. Em 1976 William George Unruh mostrou que observadores constantemente acelerados, ainda no espaço-tempo de Minkowski, medem um banho térmico de partículas reais onde observadores inerciais medem o estado de vácuo [4]. Esse efeito consolidou a relatividade da quantidade de partículas.

Já a Radiação Hawking contraria a ideia clássica de que buracos negros são objetos passivos, no sentido de apenas absorverem matéria e nunca emití-la. Em 1975, Stephen William Hawking mostrou que buracos negros são capazes de “emitir partículas” com espectro de corpo

<sup>1</sup> Quando falamos de partículas elementares estamos nos referimos à Física do Modelo Padrão. Para mais detalhes ver Referência [2].

negro a temperatura  $T = \frac{\hbar c^3}{G k_B} \frac{\kappa}{2\pi}$ , sendo  $\kappa$  a gravidade superficial do buraco negro e  $k_B$  a constante de Boltzmann [5]. O trabalho de Hawking firmou que a RG, a Termodinâmica e a TQC estão profundamente interconectadas, dando o suporte e a evidência necessários a TQCEC e a Termodinâmica de Buracos Negros.

Podemos dizer que a Termodinâmica de Buracos Negros surgiu em 1972, quando Jacob David Bekenstein propôs que um buraco negro teria entropia [6]. Possuindo entropia, o buraco negro possuiria temperatura, o que discordava da noção clássica de buracos negros. Entretanto Bekenstein não elaborou uma explicação para sua proposta. Deste modo, até a descoberta da Radiação Hawking, essa área não passava de uma “especulação”. As Leis da Termodinâmica de Buracos Negros representam o paralelo entre os observáveis dos buracos negros, conjuntamente com suas leis, e os equivalentes físicos de grandezas termodinâmicas. Uma propriedade muito intrigante de buracos negros é sua capacidade térmica negativa<sup>2</sup>, o que impossibilita seu equilíbrio térmico com um reservatório de energia, resultando em sua evaporação ou na absorção de toda a radiação emitida pelo reservatório.

Nesse sentido a presente dissertação busca fazer uma revisão sobre alguns aspectos da Termodinâmica de Buracos Negros de Schwarzschild e inclui uma discussão sobre a evolução temporal da massa dos mesmos num contexto termodinâmico. Para isso vamos iniciar com um breve resumo das ferramentas da RG, que serão úteis no desenvolvimento desse trabalho, no Capítulo 2. Em especial apresentamos uma noção de causalidade e trabalhamos com os espaços-tempo de Minkowski, sob a perspectiva de um referencial acelerado, e de Schwarzschild.

No Capítulo 3 fazemos uma introdução a TQCEC. Iniciamos com uma descrição do campo de Klein-Gordon no espaço-tempo plano e quantizamos o mesmo. Seguimos com a transição para espaços curvos mostrando as alterações necessárias na teoria. Então, introduzimos o Efeito Unruh e a Radiação Hawking.

Por fim, no Capítulo 4 desenvolvemos a Termodinâmica de Buracos Negros, apresentando suas leis e fazendo seu paralelo com a Termodinâmica Clássica. Em seguida adentramos ao tema relacionado à evolução temporal da massa de um buraco negro de Schwarzschild. Primeiro, mostramos porque um buraco negro não alcança o equilíbrio térmico quando em contato com um reservatório de energia. Então, modelamos o comportamento da massa de um buraco negro de Schwarzschild quando no espaço vazio e quando imerso na radiação cósmica de fundo em duas situações distintas: com temperatura constante e com temperatura dependente do tempo, de acordo com as eras do universo. Finalizamos com uma apresentação das conclusões e comentários finais deste trabalho no Capítulo 5.

### **Notação e convenções:**

No decorrer da dissertação utilizamos as unidades de Planck, ou seja, definimos as

<sup>2</sup> Veja que a capacidade térmica negativa não é apenas uma característica dos buracos negros, ela ocorre também em estrelas e aglomerados estelares. Para mais informações ver Referência [7].

---

constantes fundamentais: velocidade da luz  $c$ , constante universal da gravitação  $G$ , constante de Planck reduzida  $\hbar = h/2\pi$  e constante de Boltzmann  $k_B$  como valendo 1. Retomamos as mesmas quando conveniente. Representamos com índices latinos coordenadas espaciais valendo 1, 2 ou 3 e com índices gregos coordenadas temporais e espaciais, sendo a componente 0 referente ao tempo e as outras referentes ao espaço valendo 1, 2 ou 3. Vetores espaciais são escritos em negrito. A derivada ordinária é representada como  $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  e a covariante como  $\nabla_\mu$ . Sobre todos os índices repetidos “em cima” e “em baixo” consideramos a convenção da soma de Einstein. Todas as constantes e parâmetros numéricos utilizados, a menos de quando expressa uma referência específica, foram retirados da Referência [8]. Além disso, adotamos a assinatura da métrica como  $(-, +, +, +)$ .



## 2 A TEORIA DA RELATIVIDADE

No início do século XX a Teoria da Relatividade surgiu, revolucionando a Física existente até o momento [1]. Noções de que o espaço e o tempo seriam partes de uma entidade única e fundamental, o *espaço-tempo*, nortearam o desenvolvimento da Relatividade Especial (RE) [9, 10]. Essa teoria impunha que as leis da Física seriam as mesmas em todos os referenciais inerciais e que a velocidade da luz seria um limite natural independente do referencial em questão. Dessa forma, ela confrontava as tão bem estabelecidas Leis de Newton, porque, segundo as mesmas, a interação gravitacional agiria instantaneamente. Assim, a ideia de unir a RE à gravitação foi uma das bases para o desenvolvimento da RG.

Em 1915 Albert Einstein propôs uma série de equações que consolidaram a RG [11]. A RG pode ser descrita como uma teoria da gravitação que proporciona uma nova conotação para a gravidade: ela não seria mais considerada como uma força entre dois corpos, como na teoria Newtoniana, mas sim uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. Além disso, essa teoria mantinha as noções de causalidade e localidade da RE. Diversos testes e experimentos foram e ainda são feitos com essa teoria, a saber: o avanço no periélio de Mercúrio, a deflexão e o desvio espectral da luz e, mais recentemente, as ondas gravitacionais, obtendo extrema precisão experimental. Em 1916, a primeira solução para as equações de Einstein foi criada por Karl Schwarzschild [12] e após muita relutância, ela foi o ponto de partida para a teoria dos *buracos negros*.

No presente capítulo discorreremos resumidamente sobre os fundamentos da Relatividade Geral baseados nas Referências [3, 13–20]. Iniciamos com uma breve descrição das equações de Einstein, na Seção 2.1, e exploramos uma série de conceitos e definições que fomentam a estrutura causal do espaço-tempo, nas Seções 2.2, 2.3 e 2.4. Em seguida fazemos um breve apanhado sobre o espaço-tempo plano de Minkowski enfatizando um observador acelerado, na Seção 2.5. Posteriormente estudamos o espaço-tempo de Schwarzschild, no qual desenvolvemos sua solução e exploramos seus principais pontos, nas Seções 2.6 e 2.7. Finalizamos com uma definição de buracos negros e seus observáveis, na Seção 2.8.

### 2.1 As equações de Einstein e o espaço-tempo curvo

O cerne da RG se baseia nas equações de Einstein [13–17]. Resumidamente podemos dizer que essas equações relacionam a curvatura do espaço-tempo, representada pelo *tensor de Einstein*  $G_{\mu\nu}$ , com a densidade de matéria e energia presentes, representada pelo *tensor de energia-momento*  $T_{\mu\nu}$ . Assim, podemos escrever

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico,  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci,  $R$  é o seu traço e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia-momento. Escrevemos  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  como

$$R_{\mu\nu} \equiv \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda, \quad (2.2)$$

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu{}_\mu, \quad (2.3)$$

sendo  $g^{\mu\nu}$  o inverso do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , tal que  $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g_{\lambda\sigma} g^{\lambda\mu} = \delta_\sigma^\mu$  ou também  $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \mathbb{I}$  e  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  o símbolo de Christoffel, que é dado por

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \equiv \frac{g^{\alpha\delta}}{2} (\partial_\beta g_{\delta\gamma} + \partial_\gamma g_{\beta\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}). \quad (2.4)$$

Ele também é conhecido como *conexão* porque relaciona pontos diferentes de uma trajetória no espaço-tempo curvo. Como podemos notar, a partir das definições (2.2-2.4), a curvatura do espaço-tempo está atrelada ao comportamento do tensor métrico.

O tensor métrico é simétrico e pode ser escrito como o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.5)$$

porque fornece a distância infinitesimal entre pontos do espaço-tempo. Ele é utilizado para classificar objetos do espaço-tempo<sup>1</sup> e para “subir” ou “abaixar” os índices dos tensores<sup>2</sup>.

O tensor de Ricci origina-se da contração  $R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$  do tensor de Riemann

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (2.6)$$

A curvatura de um espaço-tempo é diretamente relacionada ao tensor de Riemann, sendo o mesmo nulo para todo espaço-tempo plano.

O tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$  representa o conteúdo de energia e momento que age como fonte da curvatura do espaço-tempo. A determinação desse tensor é, em geral, complicada. Assim, usamos aproximações, como por exemplo a consideração de um *fluido perfeito*. Um fluido perfeito pode ser considerado como um fluido representado em seu referencial inercial local, cujas componentes  $T_{j0}$  e  $T_{0j}$  são nulas e que pode ser completamente caracterizado por

<sup>1</sup> Dado um objeto do espaço-tempo, um 4-vetor  $V^\mu$  ou uma curva  $x^\mu(\alpha)$  com vetor tangente  $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\alpha}$ , ele será classificado como

- *Tipo Tempo*  $\Rightarrow g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu < 0$ ,
- *Tipo Luz* ou *Tipo Nulo*  $\Rightarrow g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 0$ ,
- *Tipo Espaço*  $\Rightarrow g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu > 0$ .

Essa quantidade é independente do sistema de coordenadas utilizado.

<sup>2</sup> A representação de um 4-vetor  $V$  pode ser feita com sua forma covariante  $V_\mu$  (índices para baixo) ou contravariante  $V^\mu$  (índices para cima). Passamos de uma forma para a outra utilizando o tensor métrico:  $V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$  ou  $V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu$ .

sua pressão  $p$  e sua densidade de energia  $\rho$ . Dessa forma, em termos de sua 4-velocidade  $u_\mu$  podemos escrever

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Para o espaço-tempo vazio  $T_{\mu\nu} = 0$ .

Resolver as equações de Einstein significa encontrar a forma do *tensor métrico*. Porém, elas são não lineares, o que faz com que suas soluções não sejam facilmente obtidas. Ainda assim, uma vez que nos atentemos às simetrias do espaço-tempo essas equações se tornam mais tangíveis, como veremos com a dedução da métrica de Schwarzschild, na Subseção 2.6.1.

## 2.2 Algumas propriedades do espaço-tempo curvo

Dadas as equações de Einstein, que constroem o espaço-tempo curvo, podemos analisar algumas de suas propriedades, que diferem de suas equivalentes no espaço-tempo plano [13–17]. Antes de tudo, embora tenhamos falado até agora de espaço-tempo, ainda não fornecemos uma definição formal para o mesmo, logo:

**Definição** (Espaço-tempo). *Definimos um espaço-tempo como o par  $(M, g_{\mu\nu})$ , com  $M$  sendo uma variedade diferenciável real, suave e munida de uma métrica  $g_{\mu\nu}$  Lorentziana.*

Por variedade  $M$  entendemos uma superfície que possui dimensão  $n$  e que suporta estruturas diferenciáveis. Os pontos de uma variedade podem ser nomeados por  $n$  coordenadas reais  $x^1, x^2, \dots, x^n$ . Já uma métrica Lorentziana é aquela que, quando diagonalizada, possui pelo menos uma componente negativa e as outras todas positivas. No caso 4-dimensional temos  $(-, +, +, +)$ . Consideramos métricas obtidas por meio das equações de Einstein (2.1).

Agora que definimos o “objeto” com o qual estamos trabalhando, vamos para a primeira propriedade, a *derivada covariante*. A derivada covariante é a representação de derivada num espaço-tempo curvo. Ela é definida, para dois 4-vetores  $V^\nu$  e  $V_\nu$ , como

$$\nabla_\mu V^\nu \equiv \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu V^\sigma, \quad (2.8)$$

$$\nabla_\mu V_\nu \equiv \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma V_\sigma \quad (2.9)$$

e pode ser generalizada para um tensor arbitrário  $T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k}$  da forma

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} &= \partial_\sigma T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} \\ &+ \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\lambda \dots \mu_k} + \dots + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_k} T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \lambda} \\ &- \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T_{\lambda \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} - \dots - \Gamma_{\sigma\nu_l}^\lambda T_{\nu_1 \dots \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_k}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dada a noção de derivada covariante, podemos nos ater ao que chamamos de *transporte paralelo*. Podemos dizer que o mesmo se resume a manter um tensor constante ao longo de um

caminho. Mais especificamente, dado um 4-vetor tangente  $t^\sigma = \frac{dx^\sigma}{d\lambda}$  a uma curva  $x^\sigma(\lambda)$  e um tensor arbitrário  $T_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_k}$ , o *transporte paralelo* desse tensor é tal que

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_k} = t^\sigma \nabla_\sigma T_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_k} = 0. \quad (2.11)$$

O termo  $\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma$  é definido como *derivada covariante direcional* e pode ser escrito como  $\nabla_\lambda \equiv \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma$ .

Por fim, temos a noção de trajetória em RG, que é dada pelas *geodésicas*. As geodésicas são uma generalização de uma linha reta no espaço-tempo curvo. Precisamente podemos definir uma geodésica como uma curva  $x^\mu(\lambda)$  ao longo da qual seu 4-vetor tangente  $t^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$  é paralelamente transportado, assim

$$t^\nu \nabla_\nu t^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (2.12)$$

O parâmetro de dependência  $\lambda$  é chamado de *parâmetro afin*.

Dadas essas propriedades, vamos apresentar uma breve discussão acerca das simetrias do espaço-tempo.

## 2.3 Simetrias e vetores de Killing

Como já dissemos, no final da Seção 2.1, as soluções das equações de Einstein se tornam mais tangíveis a medida que nos atentamos às simetrias do espaço-tempo. Não daremos aqui uma definição precisa de simetria, apenas veremos como trabalhar com ela. Podemos dizer que por simetria nos referimos a uma transformação que faça com que o tensor métrico se mantenha inalterado. Baseados nessa ideia temos a definição do *vetor de Killing*  $K$  [13, 15, 17–19].

Dado um tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  que seja independente de uma coordenada  $x^\mathbb{X}$ , tal que  $\partial_{\mathbb{X}} g_{\mu\nu} = 0$ , definimos

$$K = \partial_{\mathbb{X}} \Rightarrow \text{representação de derivada direcional}, \quad (2.13)$$

$$K^\mu = (\partial_{\mathbb{X}})^\mu = \delta_{\mathbb{X}}^\mu \Rightarrow \text{representação em componentes}, \quad (2.14)$$

sendo  $\mathbb{X}$  um índice fixo. Vetores de Killing representam simetrias de translação, ou seja, dada uma transformação da forma  $x^\mathbb{X} \Rightarrow x^\mathbb{X} + a^\mathbb{X}$ , sendo  $a^\mathbb{X}$  um valor constante, o tensor métrico permanece inalterado. Eles são definidos pela equação de Killing

$$\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0. \quad (2.15)$$

Os vetores de Killing estão intrinsecamente relacionados com a noção de conservação em RG. Dado um vetor tangente  $t^\mu$  a uma geodésica afinamente parametrizada, tal que siga (2.12), temos

$$t^\nu \nabla_\nu (t^\mu K_\mu) = t^\nu (\nabla_\nu t^\mu) K_\mu + t^\nu t^\mu (\nabla_\nu K_\mu) = 0, \quad (2.16)$$

sendo nulo devido a equação geodésica (2.12), para o primeiro termo e a equação de Killing (2.15) devido a simetria dos índices  $\mu$  e  $\nu$ . Portanto, a quantidade  $t^\mu K_\mu = \text{cte}$  é conservada ao longo da geodésica. Por exemplo, temos a conservação de energia  $E$  (devido ao vetor de Killing associado à simetria temporal:  $E = -t_\mu (\partial_t)^\mu$ ) e de momento angular  $L$  (devido ao vetor de Killing associado à simetria de rotação:  $L = t_\mu (\partial_\phi)^\mu$ ).

Vetores de Killing também podem ser utilizados para algumas definições como *horizonte de Killing*, *gravidade superficial* e até mesmo para a classificação de espaços-tempo. Vamos começar com a definição de *horizonte de Killing*, mas para fazê-la precisamos definir o que é uma *hiper-superfície nula*. Uma hiper-superfície<sup>3</sup>  $\Sigma$  é nula de acordo com a classificação de seu vetor normal  $n^\mu$  como nulo, ou seja,  $g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 0$  para cada ponto de  $\Sigma$ . Vale notar que para uma hiper-superfície nula seu vetor normal é também tangente à mesma<sup>4</sup>. Além disso, elas podem ser pensadas como uma coleção de geodésicas nulas  $x^\mu(\lambda)$ , chamadas *geradoras da hiper-superfície*  $\Sigma$ . Os vetores tangentes a essas geodésicas são proporcionais aos vetores normais de  $\Sigma$  da forma  $t^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = h(x)n^\mu$ , sendo  $h(x)$  uma função suave<sup>5</sup>. Portanto, um *horizonte de Killing* é uma hiper-superfície  $\Sigma$  tipo nula para um dado vetor de Killing  $K^\mu$  se

$$K^\mu K_\mu|_\Sigma = 0. \quad (2.17)$$

Já a *gravidade superficial* é definida por meio de um vetor normal  $n^\mu$  a uma hiper-superfície  $\Sigma$  que seja um horizonte de Killing, satisfazendo  $n^\mu \nabla_\mu n^\nu = 0$ . Podemos escrever o vetor de Killing como proporcional ao vetor normal da forma  $K^\mu = h(x)n^\mu$ , sendo  $h(x)$  uma função suave. Assim, calculando sua variação, temos

$$\begin{aligned} K^\mu \nabla_\mu K^\nu &= K^\mu \nabla_\mu (hn^\nu) = K^\mu [n^\nu (\nabla_\mu h) + h(\nabla_\mu n^\nu)] = K^\mu n^\nu (\nabla_\mu h) \\ &= K^\mu \frac{K^\nu}{h} (\nabla_\mu h) = [K^\mu \nabla_\mu (\log h)] K^\nu = \kappa K^\nu, \end{aligned} \quad (2.18)$$

sendo  $\kappa = K^\mu \nabla_\mu [\log h(x)]$  a *gravidade superficial* do *horizonte de Killing*. Ela surge quando as curvas definidas pelo vetor de Killing não estão afinamente parametrizadas. No Apêndice A fornecemos uma interpretação do nome “gravidade superficial”.

Para finalizar, podemos classificar um espaço-tempo utilizando suas simetrias. Assim, um espaço-tempo é *estacionário* se existe um campo de Killing  $K$  tipo tempo, relacionado a conservação de energia, e que leva a  $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$ . Podemos dizer que temos um *espaço-tempo estático* se o mesmo for estacionário e admitir uma família de hiper-superfícies  $\Sigma$ 's tipo espaço e ortogonais ao seu campo de Killing em todo ponto. Outra simetria útil é a esférica: um espaço-tempo é *esfericamente simétrico*, sendo 4-dimensional, se possuir 3 vetores de Killing,

<sup>3</sup> Uma hiper-superfície  $\Sigma$  é uma subvariedade de dimensão  $(n - 1)$  de uma variedade  $M$  de dimensão  $n$ .

<sup>4</sup> Isso porque, sendo  $t^\mu$  um vetor tangente a hiper-superfície  $\Sigma$ , então  $t^\mu n_\mu = 0$ . Como  $n^\mu$  é nulo,  $n^\mu$  é normal e tangente à hiper-superfície  $\Sigma$ .

<sup>5</sup> Essa função é escolhida de forma que as geodésicas do vetor tangente sejam afinamente parametrizadas, ou seja,  $g_{\mu\nu} t^\mu t^\nu = 0$  e  $t^\sigma \nabla_\sigma t^\mu = 0$ .

nomeados por exemplo como  $U$ ,  $V$  e  $W$  (associados as simetrias de rotação com relação a cada um dos eixos espaciais), que satisfaçam as seguintes relações de comutação

$$[U, V] = W \quad (2.19)$$

$$[V, W] = U \quad (2.20)$$

$$[W, U] = V. \quad (2.21)$$

Em Teoria de Grupos<sup>6</sup> diz-se que esses vetores compreendem o grupo de simetria  $SO(3)$ . Se o tensor métrico de um espaço-tempo se aproximar do tensor métrico de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  quando nos afastamos de suas fontes de curvatura, ou seja, indo para o infinito, temos um *espaço-tempo assintoticamente plano*.<sup>7</sup>

Feito esse breve comentário acerca das simetrias e classificações de espaços-tempo, vamos discorrer um pouco sobre a estrutura causal do mesmo.

## 2.4 A estrutura causal do espaço-tempo

A Teoria da Relatividade se baseia na *causalidade*. A causalidade pode ser entendida como o fato de que eventos futuros são consequências de eventos passados. Dessa forma, mantém-se a ideia da RE de que nenhum sinal pode viajar mais rápido do que a luz fazendo com que qualquer trajetória que carregue informação seja tipo tempo (para partículas com massa) ou tipo luz (para partículas sem massa), nunca tipo espaço [13, 17–19, 21].

A visualização da causalidade em RE, é dada por cones de luz em cada evento, ponto  $P$  do espaço-tempo, como podemos ver na Figura 1. Dividimos o mesmo em cone de luz futuro e passado. Eventos no interior do cone de luz futuro podem ser alcançados por uma partícula com massa a partir do ponto  $P$ . Essa região é chamada de *futuro cronológico* de  $P$ . O futuro cronológico juntamente com os eventos repousando no cone de luz futuro compreendem o *futuro causal* de  $P$ . Eventos nessa região podem ser influenciados por um sinal luminoso emitido em  $P$ . Analogamente, a mesma interpretação é feita para eventos no passado. Localmente a causalidade, como é entendida em RG, é idêntica em RE. As diferenças residem nas definições globais devido a peculiaridades da geometria do espaço-tempo curvo, como as *singularidades*.<sup>8</sup>

Para lidarmos com a causalidade precisamos definir que tipo de curvas que a obedecem. Essas são as *curvas causais*. Curvas  $x^\mu(\alpha)$  tais que para cada ponto  $P \in x^\mu$  seu vetor tangente  $t^\mu$  seja tipo tempo ou tipo luz. Dizemos que uma curva, causal ou qualquer, aponta para o *futuro* ou

<sup>6</sup> Para mais detalhes ver Referências [2, 13].

<sup>7</sup> Não forneceremos aqui uma definição técnica de *espaço-tempo assintoticamente plano* (para uma discussão completa ver Referência [17]). Entretanto, podemos dizer que ela é relacionada ao fato do espaço-tempo poder ser “compactificado” por meio de uma transformação conforme, possuindo uma “borda”  $\partial M$  para a variedade  $M$ . Essa “borda” equivale a união de 3 construções:  $i^0$  (*infinito tipo espaço*),  $\mathcal{I}^+$  (*infinito futuro nulo*) e  $\mathcal{I}^-$  (*infinito passado nulo*). Para mais detalhes sobre a *compactificação conforme* ver Nota de Rodapé 9 a seguir.

<sup>8</sup> Locais do espaço-tempo onde sua curvatura diverge e as equações de Einstein perdem validade [13].

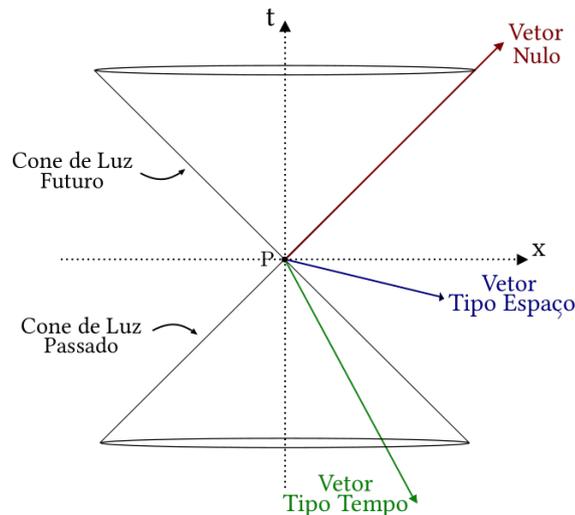


Figura 1 – Cone de luz do ponto  $P$  para representação de sua estrutura causal em um diagrama do espaço-tempo:  $t \times x$ . Representamos 3 vetores: tipo nulo, tipo espaço e tipo tempo. Fonte: Elaborada pela autora.

*passado* se seus vetores tangentes apontarem para o futuro ou para o passado, respectivamente. Tal como destacamos em RE para um ponto  $P$ , podemos definir para RG o *futuro cronológico*  $I^+$  e o *futuro causal*  $J^+$ , tanto para um ponto  $P$  quanto para uma região  $S$  do espaço-tempo. Dado um subconjunto  $S$  de uma variedade  $M$ , o *futuro cronológico*  $I^+(S)$  é o conjunto de pontos que, partindo de  $S$ , podem ser alcançados seguindo uma curva tipo tempo dirigida para o futuro. Já o *futuro causal*  $J^+(S)$  representa o conjunto de pontos que, partindo de  $S$ , pode ser alcançado seguindo curvas causais dirigidas para o futuro. A mesma ideia segue para o *passado cronológico*  $I^-(S)$  e para o *passado causal*  $J^-(S)$ . Podemos restringir ainda mais condições sobre o subconjunto  $S$  e associar ao mesmo regiões com as quais ele está causalmente conectado. Essas regiões são definidas como:

**Definição** (Domínios de Dependência Futuro e Passado). *Dado um subconjunto acronal fechado  $S$ , tal que  $S \subset M$ , definimos o domínio de dependência futuro  $D^+(S)$  como o conjunto de todos os eventos  $P$  tal que cada curva causal apontando para o passado e inextensível que atravessa  $P$  intercepte  $S$ . Analogamente definimos o domínio de dependência passado  $D^-(S)$ .*

Por *conjunto acronal fechado*  $S$  entendemos um conjunto tal que nenhum par de pontos  $P, Q \in S$  possa ser unido por uma curva tipo tempo e por curva *inextensível* entendemos uma curva que não possui um ponto final passado ou futuro (de acordo para onde a curva apontar). As superfícies de  $D^+(S)$  e  $D^-(S)$  recebem os nomes de *horizonte futuro*  $H^+(S)$  e *passado*  $H^-(S)$  *de Cauchy* e representam superfícies nulas, pois como “bordas” de  $D^+$  e  $D^-$  são geradas por curvas causais nulas. A junção do domínio de dependência futuro  $D^+(S)$  com o passado  $D^-(S)$  de uma região  $S$  recebe o nome de *domínio de dependência*  $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$ .

Podemos ver os domínios de dependência futuro  $D^+(S)$  e passado  $D^-(S)$  para uma sub-região  $S$  de uma hiper-superfície  $\Sigma$  na Figura 2. Na mesma os horizontes de Cauchy futuro

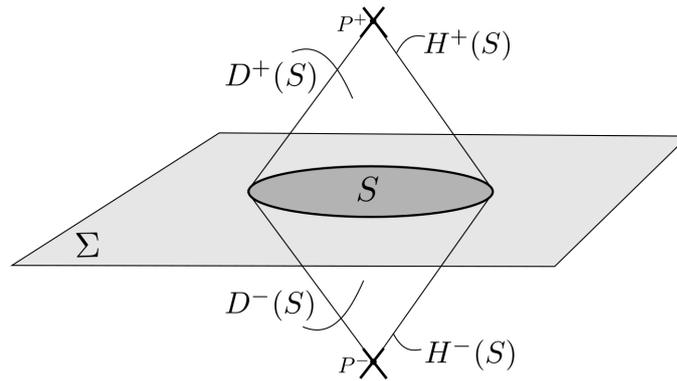


Figura 2 – Representação de um subconjunto  $S$  de uma hiper-superfície  $\Sigma$  e sua estrutura causal. Representamos os domínios de dependência futuro e passado  $D^\pm(S)$  e seus respectivos horizontes de Cauchy  $H^\pm(S)$ . Além disso representamos os pontos  $P^\pm$  conjuntamente com seus cones de luz. Fonte: Elaborada pela autora.

$H^+(S)$  e passado  $H^-(S)$  representam os cones de luz passado e futuro para os pontos  $P^\pm$ . Portanto, qualquer curva que permaneça dentro ou sobre esse cone deve interceptar  $S$ , de forma que as informações obtidas em  $S$  sejam suficientes para predizer informações nos pontos  $P^\pm$ . Ainda da Figura 2, notamos que como  $S$  encontra-se no cone de luz passado de  $P^+$  e no cone de luz futuro de  $P^-$ , seu domínio de dependência não é o espaço-tempo completo. Isso é equivalente a dizer que o domínio de dependência  $D(S)$  representa o conjunto completo de eventos que podem ser determinados em  $S$ .

Agora que definimos causalidade para um subconjunto  $S \subset M$ , falta definirmos a causalidade para a variedade  $M$ , ou seja, para o espaço-tempo como um todo. Dizemos que um espaço-tempo é causalmente conectado se o mesmo puder ser definido como:

**Definição** (Espaço-tempo Globalmente Hiperbólico). *Um espaço-tempo é globalmente hiperbólico se possuir uma superfície de Cauchy  $\Sigma$ .*

Por uma *superfície de Cauchy* entendemos uma superfície  $\Sigma$  que seja acronal e fechada de modo que seu domínio de dependência seja a variedade  $M$  completa  $D(\Sigma) = M$ . Uma superfície de Cauchy para uma variedade Lorentziana  $M$  é uma hiper-superfície que é interceptada exatamente uma vez por toda curva causal inextensível em  $M$ . Pode-se mostrar (ver Referência [17]) que um espaço-tempo globalmente hiperbólico pode ser folheado por uma família de superfícies de Cauchy  $\Sigma_t$  descritas por um parâmetro real  $t = \text{cte}$ . Dessa forma, todo o futuro e o passado do mesmo pode ser previsto ou revisto a partir de condições dadas sob uma superfície de Cauchy  $\Sigma_t$ .

Essas definições nos serão úteis na análise dos diagramas de Penrose<sup>9</sup> (ver Figuras 3, 5, 9, 10) dos espaços-tempo em questão e na definição dos campos sob o espaço-tempo (ver Seção

<sup>9</sup> Um diagrama de Penrose é uma representação compacta e finita de um espaço-tempo infinito. Eles são construídos por meio de uma transformação conforme. Essa transformação é definida tal que a métrica resultante da transformação  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  esteja relacionada com a métrica original  $g_{\mu\nu}$  da forma  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}$ , tal que  $\Omega(x)$  seja uma função suave e  $\Omega(x) \neq 0, \forall x$ . Ela preserva a estrutura causal do espaço-tempo.

3.2).

## 2.5 O espaço-tempo de Minkowski sob a perspectiva de um referencial uniformemente acelerado

O espaço-tempo de Minkowski é a solução de vácuo espacialmente plana, homogênea e isotrópica das equações de Einstein (2.1). É nele que se baseia a RE [13–17]. Sua representação em 2 dimensões com coordenadas  $(t, x)$  pode ser feita pelo elemento de linha

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2, \quad (2.22)$$

onde  $t, x \in (-\infty, \infty)$ . A simetria temporal é expressa pelo vetor de Killing  $K_M = \partial_t$ . Outra representação muito útil é dada pelas *coordenadas do cone de luz*  $(u, v)$ , coordenadas obtidas requerendo-se geodésicas nulas, ou seja,  $ds^2 = 0^{10}$ . Elas são escritas como

$$t = \pm x + \text{cte} \Rightarrow \begin{cases} u = t - x \\ v = t + x \end{cases}, \quad (2.23)$$

com  $u, v \in (-\infty, \infty)$  e elemento de linha  $ds^2 = -dudv$ .

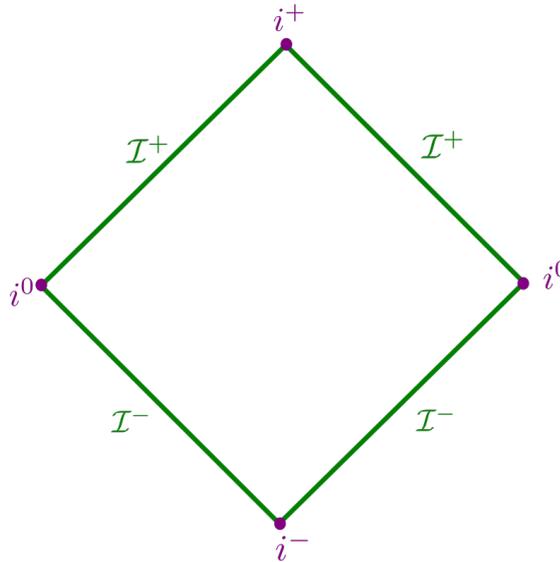


Figura 3 – Diagrama de Penrose do espaço-tempo de Minkowski. Fonte: Elaborada pela autora.

Uma boa forma de visualizar causalmente o espaço-tempo de Minkowski é por seu diagrama de Penrose (ver Nota de Rodapé 9 da Subseção 2.4). Para montar esse diagrama Esses diagramas são delimitados por superfícies e pontos de extremo. As superfícies são nulas e são chamadas *infinitos futuro e passado nulos*  $\mathcal{I}^\pm$ . Para os pontos temos os *infinitos futuro/passado tipo tempo*  $i^\pm$  que representam a coordenada temporal  $t \rightarrow \pm\infty$  com a coordenada espacial  $r = \text{cte}$  e o *infinito tipo espaço*  $i^0$  que representa a coordenada espacial  $r \rightarrow \pm\infty$  com a coordenada temporal  $t = \text{cte}$ . Nesses diagramas as geodésicas nulas são representadas com  $\pm 45^\circ$  com relação a vertical  $t$  no plano  $t \times x$ , possuindo seus pontos iniciais em  $\mathcal{I}^-$  e finais em  $\mathcal{I}^+$ .

<sup>10</sup> Quando requeremos  $ds^2 = 0$  estamos requerendo que o vetor tangente  $t^\mu = \frac{dx^\mu}{d\alpha}$  à geodésica  $x^\mu(\alpha)$  seja nulo, ou seja,  $\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\alpha} \frac{dx^\nu}{d\alpha} = 0$ . Para mais detalhes veja Nota de Rodapé 1 da Subseção 2.1.

precisamos da seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{cases} \tilde{u} = \tanh u \\ \tilde{v} = \tanh v \end{cases}, \quad (2.24)$$

com  $\tilde{u}, \tilde{v} \in (-1, 1)$  e elemento de linha  $d\tilde{s}^2 = -\Omega^2(\tilde{u}, \tilde{v})d\tilde{u}d\tilde{v}$ , tal que  $\Omega^2(\tilde{u}, \tilde{v}) = (1 - \tilde{u}^2)(1 - \tilde{v}^2)$ . Escolhendo

$$\begin{cases} \tilde{u} = T - X \\ \tilde{v} = T + X \end{cases}, \quad \begin{cases} T = \frac{(\tilde{u} + \tilde{v})}{2} \\ X = \frac{(\tilde{v} - \tilde{u})}{2} \end{cases}, \quad (2.25)$$

temos o diagrama de Penrose do espaço-tempo de Minkowski plotando  $T \times X$ , que é globalmente hiperbólico e pode ser visto na Figura 3. Nesse diagrama todas as geodésicas tipo espaço possuem seus extremos nos pontos  $i^0$ , todas as geodésicas tipo tempo possuem extremos em  $i^\pm$  e todas as geodésicas tipo nulas/luz possuem seus extremos em  $\mathcal{I}^\pm$ .

### 2.5.1 O referencial uniformemente acelerado

Vamos considerar, no espaço-tempo de Minkowski em 2 dimensões, um observador uniformemente acelerado com aceleração própria de módulo constante  $\alpha$  se movendo na direção  $x$ , cuja trajetória seja

$$\begin{cases} t(\tau) = \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau) \\ x(\tau) = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau) \end{cases}, \quad (2.26)$$

onde  $\tau$  é o tempo próprio do observador [3, 13, 18–20, 22]. A 2-aceleração  $a^\mu$  é dada por

$$a^\mu = \nabla_\tau^2 x^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = [\alpha \sinh(\alpha\tau), \alpha \cosh(\alpha\tau)], \quad (2.27)$$

tal que

$$a^2 = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = \alpha^2 \Rightarrow |a| = \alpha, \quad (2.28)$$

confirmando que  $\alpha$  é o módulo da aceleração própria. Esse observador acelerado segue uma trajetória hiperbólica do tipo

$$x^\mu x_\mu = -t^2 + x^2 = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (2.29)$$

Uma outra escolha de coordenadas torna-se bem útil: em vez de  $(t, x)$ , podemos utilizar as coordenadas  $(\eta, \xi)$ , nas quais os observadores acelerados são estáticos<sup>11</sup>. Elas ficam definidas como

$$\begin{cases} t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\eta) \\ x = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\eta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta = \frac{\alpha}{a} \tau \\ \xi = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\alpha}{a}\right) \end{cases} \quad (2.30)$$

<sup>11</sup> Aqui, quando dizemos que as coordenadas  $(\eta, \xi)$  levam ao fato do observador acelerado ser estático, queremos dizer que o mesmo está em “repouso” para  $\xi = 0$ . Então, a coordenada temporal  $\eta$  coincide com o tempo próprio  $\tau$ :  $\eta = \tau$ . O que é verificado, por meio da definição (2.30), para  $a = \alpha$ .

onde  $a$  é uma constante e recebem o nome de *coordenadas direitas de Rindler*. Caso tomássemos  $t \rightarrow -t$  e  $x \rightarrow -x$ , nas equações (2.30), teríamos as *coordenadas esquerdas de Rindler*. Calculando  $x^\mu x_\mu$  nesse caso obtemos  $\frac{e^{2a\xi}}{a^2}$ . Portanto, comparando com (2.29) temos o módulo da aceleração valendo  $\alpha = ae^{-a\xi}$ . Ou seja, para  $\xi = 0$  o módulo da aceleração é simplesmente  $a$ .

Nas *coordenadas direitas de Rindler* o elemento de linha fica

$$ds^2 = e^{2a\xi} (-d\eta^2 + d\xi^2), \quad (2.31)$$

com  $\eta, \xi \in (-\infty, \infty)$ . Como a métrica independe da coordenada  $\eta$ , temos um vetor de Killing da forma  $K_R^D = \partial_\eta$ . Escrevendo-o nas coordenadas  $(t, x)$  temos

$$K_R^D = \partial_\eta = \frac{\partial t}{\partial \eta} \partial_t + \frac{\partial x}{\partial \eta} \partial_x = e^{a\xi} [\cosh(a\eta) \partial_t + \sinh(a\eta) \partial_x] = a(x\partial_t + t\partial_x), \quad (2.32)$$

que pode ser encarado como um “boost” na direção  $x$ . Analogamente, para as *coordenadas esquerdas de Rindler*, temos o vetor de Killing dado por  $K_R^E = -\partial_\eta$ , também visto como um “boost”, só que agora na direção  $-x$ . Além disso, analisando o módulo desse vetor de Killing  $K_\mu K^\mu$ , podemos dizer que o mesmo pode ser: tipo tempo para  $|t| < x$  e  $|t| < -x$ , tipo luz para  $t = \pm x$  e tipo espaço para  $|t| > x$  e  $|t| > -x$ . Dessa forma, tal como vimos na Seção 2.3, as hiper-superfícies  $t = \pm x$  são horizontes de Killing.

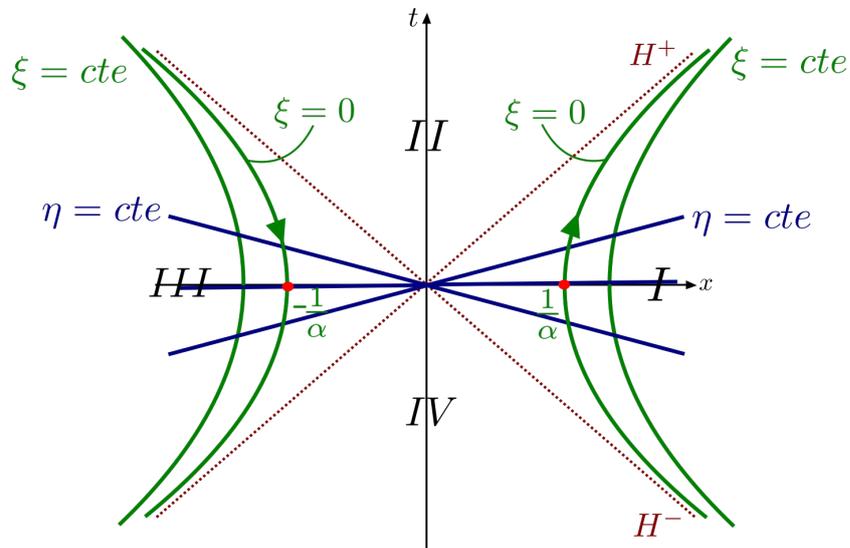


Figura 4 – Espaço-tempo de Minkowski nas coordenadas de Rindler dividido em 4 regiões com as órbitas de observadores uniformemente acelerados de módulo  $\alpha$ . Fonte: Elaborada pela autora.

O espaço-tempo de Minkowski nas coordenadas de Rindler pode ser visto na Figura 4. Vemos que o espaço-tempo fica dividido em 4 regiões distintas e apenas nas regiões  $I$  e  $III$  temos trajetórias hiperbólicas tipo tempo, representando as linhas de mundo de um observador uniformemente acelerado (2.26) e (2.30). Essas são as curvas hiperbólicas com a coordenada espacial  $\xi = \text{cte}$ . A coordenada temporal  $\eta = \text{cte}$  é representada por linhas retas que cruzam a origem. No caso em que  $t = \pm x$  temos as hiper-superfícies nulas, que são representadas pelos *horizontes de Killing futuro e passado*  $H^\pm$ , funcionando como um *horizonte de eventos*

para os observadores acelerados, porque qualquer ponto nas regiões *II* e *IV* está “causalmente desconectado”<sup>12</sup> com os mesmos.

Dados esses sistemas de coordenadas também nos será útil definirmos as *coordenadas do cone de luz* ( $\tilde{u}, \tilde{v}$ )<sup>13</sup> para o espaço-tempo de Rindler

$$\begin{cases} \tilde{u} = \eta - \xi \\ \tilde{v} = \eta + \xi \end{cases}, \quad (2.33)$$

sendo  $\tilde{u}, \tilde{v} \in (-\infty, \infty)$  e o elemento de linha nessas coordenadas fica  $ds^2 = -e^{2a\xi} d\tilde{u}d\tilde{v}$ . A relação entre as *coordenadas do cone de luz* usuais de Minkowski e de Rindler pode ser escrita como

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{a}e^{-a\tilde{u}} \\ v = \frac{1}{a}e^{a\tilde{v}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{u} = -\frac{1}{a}\ln(-au) \\ \tilde{v} = \frac{1}{a}\ln(av) \end{cases}, \quad (2.34)$$

sendo facilmente obtida da relação entre as coordenadas  $(t, x)$  e  $(\eta, \xi)$  das equações (2.30). Fornecemos aqui uma última representação, o diagrama de Penrose de Rindler, na Figura 5. Representamos as regiões *I, II, III* e *IV* e evidenciamos os lados de *direito D* e *esquerdo E* de Rindler, juntamente com os *horizontes de Killing*  $H^{\pm}$ <sup>14</sup>.

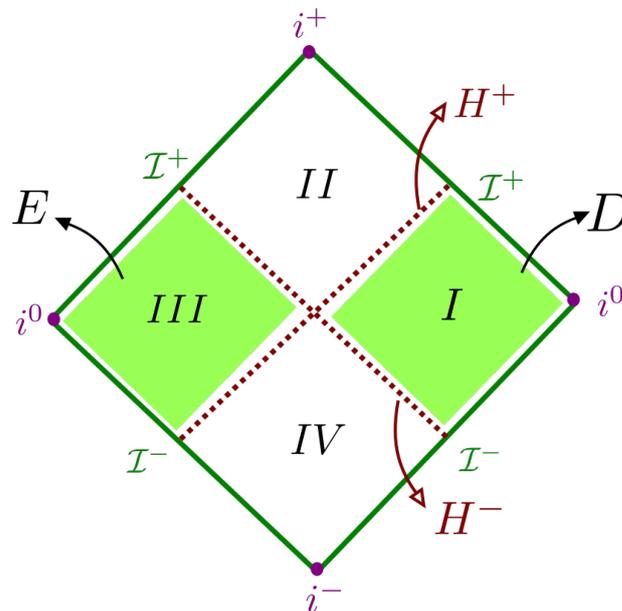


Figura 5 – Diagrama de Penrose do espaço-tempo de Rindler evidenciando seus lados Direito e Esquerdo. Fonte: Elaborada pela autora.

<sup>12</sup> Com a expressão “causalmente desconectado” queremos dizer que o observador acelerando para a direção positiva de  $x$  não consegue receber nenhum sinal da região *II* e não consegue enviar nenhum sinal para a região *IV*. Já o observador acelerando na direção negativa de  $x$  não consegue receber nenhum sinal da região *IV* e não consegue enviar nenhum sinal para a região *II*.

<sup>13</sup> Também obtidas requerendo-se geodésicas nulas ( $ds^2 = 0$ ) para a métrica (2.31).

<sup>14</sup> Note que esse diagrama é montado analogamente ao diagrama de Penrose do espaço-tempo de Minkowski. Entretanto, observadores acelerados interceptam  $\mathcal{I}^{\pm}$  e não  $i^{\pm}$ , de forma que os horizontes de Killing funcionam como uma espécie de horizonte de eventos para os mesmos. Os horizontes de Killing  $H^{\pm}$  são descritos pelas retas  $T = X$  e  $T = -X$ .

## 2.6 O espaço-tempo de Schwarzschild

Em 1916 Schwarzschild desenvolveu a primeira solução para as equações de Einstein, utilizando argumentos de simetria. Essa solução descreve o espaço-tempo ao redor de um objeto massivo, estático, com simetria esférica, sem rotação, sem carga elétrica no vácuo e é resultado do teorema de Birkhoff<sup>15</sup>.

### 2.6.1 A dedução da métrica de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild, tal como foi obtida pelo trabalho original de Schwarzschild [12] e como é obtida na maior parte dos livros textos [13–17], é dada postulando um tensor métrico que satisfaça as seguintes condições:

1. Todas as suas componentes sejam independentes do tempo e não possua elementos cruzados com relação a coordenada temporal  $\Rightarrow$  *solução estática* ;
2. Seja espacialmente simétrico com relação a origem quando submetido a uma rotação  $\Rightarrow$  *simetria esférica*;
3. Se assemelhe ao espaço-tempo plano quando no infinito  $\Rightarrow$  *espaço-tempo assintoticamente plano* .

Dessa forma aqui vamos dispor das coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \phi)$ , sendo  $r$  a coordenada radial,  $\theta$  e  $\phi$  as coordenadas angulares e postularmos o elemento de linha

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.35)$$

onde  $A(r)$  e  $B(r)$  são funções a serem determinadas. Como  $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$  e  $g_{0i} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , satisfazemos a condição 1. Mantendo  $t$  e  $r$  constantes o elemento de linha  $ds^2$  se torna  $dL^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$ , o que cumpre a condição 2. Por fim, a condição 3 é satisfeita requerendo-se que as funções  $A(r)$  e  $B(r)$  satisfaçam condições de contorno da forma  $A(r \rightarrow \infty) = 1$  e  $B(r \rightarrow \infty) = 1$ .

O próximo passo consiste em resolvermos as equações de Einstein para o espaço-tempo vazio, ou seja,  $R_{\mu\nu} = 0$ . Primeiramente determinamos os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  e então calculamos as componentes do tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ . Ao resolvermos  $R_{\mu\nu} = 0$ , encontramos um sistema para as equações  $A(r)$  e  $B(r)$ , cuja solução é

$$A(r) = \left(1 + \frac{k}{r}\right) \quad \text{e} \quad B(r) = \left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-1}, \quad (2.36)$$

<sup>15</sup> O teorema de Birkhoff diz que a única solução esfericamente simétrica e no vácuo das equações de Einstein equivale a solução de Schwarzschild. Além disso, não há nenhuma solução dependente do tempo que possua essas características. Para mais detalhes ver Referências [13, 15, 17].

onde  $k$  é uma constante de integração a ser determinada. Essas contas estão feitas no Apêndice B.

Para valores suficientemente grandes de  $r$ , no limite de *espaço-tempo assintoticamente plano*, podemos considerar o *limite Newtoniano* da RG, ver Apêndice C. Nesse limite o tensor métrico pode ser escrito como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.37)$$

sendo  $h_{\mu\nu}$  pequeno. Aqui  $g_{00} = -(1 + k/r)$ , com  $h_{00} = -k/r$ . Essa aproximação escreve a geodésica para uma partícula de massa ínfima na forma (C.6), que fica

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \partial_i h_{00} \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{k}{r^2}. \quad (2.38)$$

Dada essa geodésica, fazendo o paralelo com a equação de movimento, de uma partícula de massa ínfima, sujeita ao potencial gravitacional  $\Phi = -M/r$  da *dinâmica Newtoniana*, escrita como

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla \Phi = -\frac{M}{r^2} \hat{r}, \quad (2.39)$$

sendo  $M$  a massa do gerador do campo, obtemos

$$k = -2M. \quad (2.40)$$

Portanto, na solução de Schwarzschild, a métrica possui um termo  $k$  que está diretamente associado ao potencial gravitacional.

Finalmente, podemos reescrever o elemento de linha da equação (2.35) como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.41)$$

e, isolando o tensor métrico, encontramos

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left[ - (1 - 2M/r), (1 - 2M/r)^{-1}, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right]. \quad (2.42)$$

A partir da métrica de Schwarzschild, que é estática e esfericamente simétrica, temos 4 vetores de Killing linearmente independentes:  $K = \partial_t$ , associado à simetria temporal e os 3 geradores de rotações ( $K = \partial_\phi$ , associado à simetria azimutal, em torno do eixo  $z$  e os outros 2 associados à rotação em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , que são respectivamente  $K = -\sin \phi \partial_\theta - \cot \theta \cos \phi \partial_\phi$  e  $K = \cos \phi \partial_\theta - \cot \theta \sin \phi \partial_\phi$ ).

## 2.7 Analisando a métrica de Schwarzschild

Uma análise rápida da métrica de Schwarzschild mostra que, ao tomarmos os valores  $r = 0$  ou  $r = 2M$ , uma de suas componentes diverge [13]. Essas divergências podem ou não estar associados ao sistema de coordenadas utilizado, ou seja, fazendo uma mudança de

coordenadas adequada, essa divergência desaparece. Quando estão, temos uma *singularidade removível*, que é o caso de  $r = 2M$ . Quando não, temos uma *singularidade*.

Um modo simples de verificarmos a existência ou não de uma singularidade em um determinado ponto do espaço-tempo é fazendo o cálculo de um escalar associado a curvatura da métrica em questão. Como a curvatura é dada pelo tensor de Riemann  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda}R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu}$  (2.6), podemos calcular seu escalar, de modo que

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} \propto \frac{M^2}{r^6}. \quad (2.43)$$

Assim,  $R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow \infty$  para  $r \rightarrow 0$ , e  $R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} \propto \frac{1}{M^4}$ , para  $r \rightarrow 2M$ . Portanto,  $r = 0$  é realmente uma singularidade e  $r = 2M$  é conhecido como *raio de Schwarzschild*. Esse cálculo é feito porque, como escalares são independentes do sistema de coordenadas utilizado, se tivermos uma determinada divergência em um sistema de coordenadas a mesma ocorrerá em todos os outros.

Podemos encontrar o raio de Schwarzschild através de uma analogia com a Mecânica Newtoniana, utilizando a velocidade de escape de um corpo sob a ação do potencial gravitacional [13, 23]. Dessa forma, igualamos a energia cinética de um corpo de massa  $m$  com a energia potencial gravitacional gerada por um objeto de massa  $M$ , obtendo

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

e tomando  $v \equiv c$  encontramos

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \Rightarrow r \equiv r_S = \frac{2GM}{c^2}.$$

Devido ao fato de ser um número, dadas constantes universais e uma característica única de cada corpo (sua massa  $M$ ), o raio de Schwarzschild fornece uma escala de classificação, ou seja, dada a massa de um corpo temos seu  $r_S$  (para o Sol temos:  $r_S^{\odot} \simeq 3 \cdot 10^3$  m).

As singularidades da métrica de Schwarzschild são o ponto de partida para a Teoria de Buracos Negros. O raio de Schwarzschild representa o raio do *horizonte de eventos*, que é a distância máxima que um observador externo consegue ver, ou, em outras palavras, é a superfície a partir da qual partículas não conseguem mais escapar para o infinito. A singularidade  $r = 0$  é o ponto no qual toda a energia está concentrada, razão da curvatura infinita. Tais pontos podem ser vistos na singela representação da Figura 6.

Vamos agora apresentar dois sistemas de coordenadas convenientes para reescrevermos a métrica de Schwarzschild: as coordenadas de Eddington-Finkelstein e as coordenadas de Kruskal-Szekeres.

### 2.7.1 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

O sistema de coordenadas de Schwarzschild pode ser modificado de modo a ficar livre de sua singularidade em  $r = 2M$  [13–15, 17, 18]. Um dos modos de fazermos isso é por meio

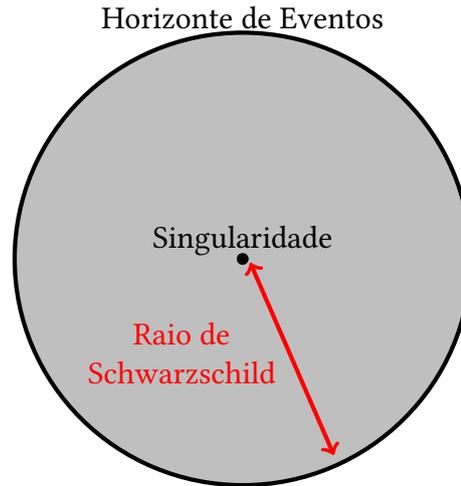


Figura 6 – Representação pictórica da anatomia de um buraco negro de Schwarzschild. Fonte: Elaborada pela autora.

das coordenadas de Eddington-Finkelstein, que são obtidas requerendo-se geodésicas nulas, ou seja,  $ds^2 = 0$ . Em vez de apenas lidarmos com o elemento de linha nulo, tal como fizemos na Seção 2.5 e Subseção 2.5.1, por questões de resultados posteriores (ver Subseção 3.4.1), aqui, para encontrarmos as geodésicas nulas que percorrem o espaço-tempo de Schwarzschild (2.42), vamos fazer uso das simetrias dessa métrica [24]. Inicialmente vamos requerer a conservação da energia  $E$  e do momento angular  $L$  para essas geodésicas. Portanto, as mesmas serão definidas sob um plano que contém geodésicas definidas por  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Dessa forma, o vetor tangente as mesmas é

$$t^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left( \frac{dt}{d\lambda}, \frac{dr}{d\lambda}, 0, \frac{d\phi}{d\lambda} \right), \quad (2.44)$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro afim ao longo destas. Podemos utilizar os vetores de Killing associados às simetrias temporal  $K = \partial_t$  e angular  $K = \partial_\phi$  para escrever, utilizando (2.16), as quantidades conservadas ao longo dessas geodésicas

$$E \equiv -t_\mu (\partial_t)^\mu = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda}, \quad (2.45)$$

$$L \equiv t_\mu (\partial_\phi)^\mu = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}, \quad (2.46)$$

sendo  $E$  a energia e  $L$  o momento angular. Como queremos as geodésicas nulas não iremos utilizar a equação (2.12), mas sim tomaremos um atalho usando o fato de que para geodésicas nulas o vetor tangente é nulo<sup>16</sup>, então

$$0 = t^\mu t_\mu = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} E^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2}. \quad (2.47)$$

Restringindo-nos a geodésicas nulas radiais temos  $L = 0$ , bem como  $\frac{d\phi}{d\lambda} = 0$ , de forma que a equação (2.47) fica

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm E. \quad (2.48)$$

<sup>16</sup> Ver Nota de Rodapé 10.

Podemos substituir esse resultado na equação (2.45) encontrando

$$\frac{dt}{d\lambda} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dr}{d\lambda} = \pm \frac{dr_*}{d\lambda}, \quad (2.49)$$

onde definimos a *coordenada tartaruga*  $r_*$  que pode ser escrita, integrando (2.49) em  $r$ , da forma

$$r_* = r + 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (2.50)$$

Porque  $r \in (2M, \infty)$ , temos  $r_* \in (-\infty, \infty)$  já que  $\lim_{r \rightarrow 2M} r_* \rightarrow -\infty$  e  $\lim_{r \rightarrow \infty} r_* \rightarrow \infty$ . Assim, a integração da equação (2.49), em  $t$  e  $r_*$ , leva as geodésicas nulas radiais que são escritas como

$$t = \pm r_* + \text{cte} \Rightarrow \begin{cases} u = t - r_* \\ v = t + r_* \end{cases}, \quad (2.51)$$

válidas nos intervalos  $u, v \in (-\infty, \infty)$ . As coordenadas  $(u, v)$  são conhecidas como *coordenadas tartaruga do cone de luz*. Podemos reescrever o elemento de linha de Schwarzschild (2.41) em cada uma dessas coordenadas, no lugar de  $t$ , de modo que

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.52)$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.53)$$

Dessa forma, não há divergências em  $r = 2M$ . Para essas duas métricas, desconsiderando-se a parte angular, temos duas soluções, para cada uma delas, considerando geodésicas nulas ( $ds^2 = 0$ <sup>17</sup>):

$$\frac{du}{dr} \left[ - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{du}{dr} - 2 \right] = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dr} \left[ - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dv}{dr} + 2 \right] = 0, \quad (2.54)$$

tais que as soluções são

$$u = \text{cte} \quad \text{ou} \quad u = - \left[ 2r + 4M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right] + \text{cte} \quad (2.55)$$

$$v = \text{cte} \quad \text{ou} \quad v = \left[ 2r + 4M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right] + \text{cte}. \quad (2.56)$$

Na Figura 7 vemos à esquerda as soluções para  $u$  e à direita para  $v$ . No gráfico à esquerda graficamos ( $t_* \equiv u + r \times r$ ), de forma que as geodésicas nulas com  $u = \text{cte}$  “saem” de  $r = 0$  e as com  $u = - \left[ 2r + 4M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right] + \text{cte}$  vão em direção a  $r = 2M$ , assintotando-o no infinito, mas não ultrapassam tal ponto, tanto para  $r < 2M$  quanto para  $r > 2M$ . Analisando os cones de luz vemos que toda geodésica na região com  $r < 2M$  é ejetada da mesma, assim temos a representação de um *buraco branco*, a inversão temporal de um *buraco negro*. Já no gráfico à direita graficamos ( $t_* \equiv v - r \times r$ ), de modo que geodésicas nulas com  $v = \text{cte}$  “adentram” em direção a  $r = 0$  e as com  $v = \left[ 2r + 4M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right] + \text{cte}$  demoram cada vez mais

<sup>17</sup> Novamente, ver Nota de Rodapé 10.

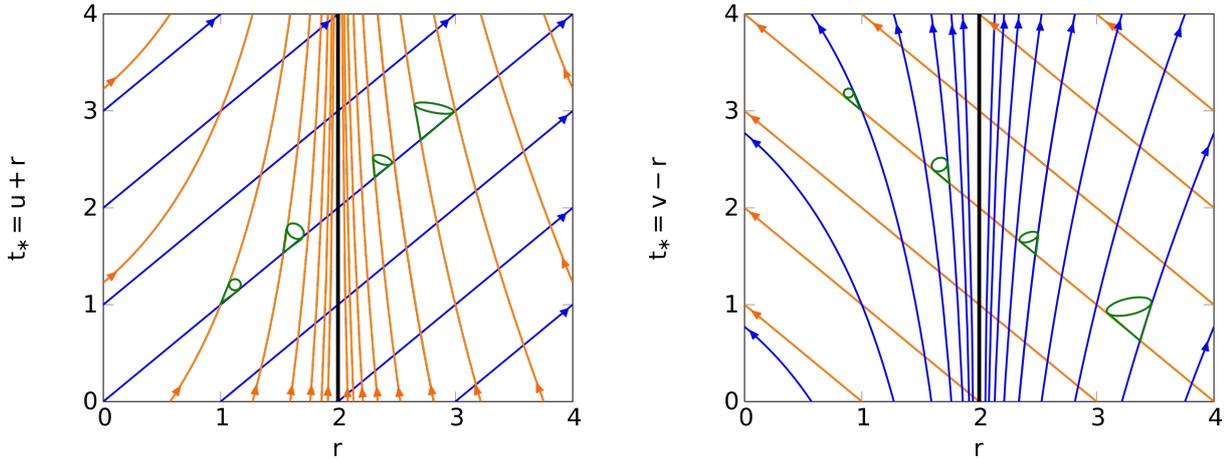


Figura 7 – Representação das coordenadas nulas de Eddington-Finkelstein. Utilizamos  $M = 1$  e o horizonte está marcado em preto para  $r = 2M|_{M=1} = 2$ . Fonte: Elaborada pela autora.

para serem observadas por um observador externo, na região com  $r > 2M$  ou nem mesmo conseguem ultrapassar o ponto  $r = 2M$  se estiverem na região com  $r < 2M$ , alcançando o ponto  $r = 0$ . Os cones de luz indicam que toda geodésica na região com  $r < 2M$  não consegue mais sair, alcançando o ponto  $r = 0$ . Veremos a definição formal de buracos negros na Seção 2.8.

## 2.7.2 Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Vimos que, usando as coordenadas  $u$  e  $v$  definidas em (2.51), conseguimos reescrever a métrica de Schwarzschild removendo a singularidade  $r = 2M$ . Porém, da própria definição de  $u$  e  $v$  notamos que temos duas regiões diferentes do espaço-tempo: passado e futuro<sup>18</sup>. Assim vamos escrever o espaço-tempo completo, utilizando as coordenadas  $u$  e  $v$ , formando o que é chamado de *espaço-tempo de Schwarzschild estendido* [13, 15, 17, 18, 20]. Para isso, temos que reescrever (2.42), mantendo essa singularidade e fazendo uso das coordenadas  $(u, v, \theta, \phi)$  como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.57)$$

sendo  $r = r(u, v)$ , pois  $r_* = (v - u)/2$ . Fazendo a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{cases} U = -e^{-u/4M} \\ V = e^{v/4M}, \end{cases} \quad (2.58)$$

válida portanto para  $r > 2M$ , com os intervalos  $U \in (-\infty, 0)$  e  $V \in (0, \infty)$ , reescrevemos a métrica (2.57) como

$$ds^2 = - \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dUdV + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.59)$$

<sup>18</sup> Essa ideia é dada pensando na definição (2.51). Mantendo  $u$  e  $v$  constantes, ao tomarmos  $r \rightarrow 2M$  temos, respectivamente,  $t \rightarrow -\infty$  e  $t \rightarrow \infty$ . O que implica que  $u$  está relacionado ao passado e  $v$  ao futuro do espaço-tempo de Schwarzschild.

sendo agora  $r = r(U, V)$ , definido implicitamente por  $UV = \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{\frac{r}{2M}}$ .

Vale notar que, definindo coordenadas tipo tempo  $T$  e tipo espaço  $R$  de acordo com

$$\begin{cases} U = T - R \\ V = T + R, \end{cases} \quad (2.60)$$

podemos reescrever a métrica (2.59) da forma

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (dT^2 - dR^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.61)$$

sendo agora  $r = r(T, R)$ , definido implicitamente por  $T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{\frac{r}{2M}}$ . Note que  $R \in (-\infty, \infty)$  e  $T^2 < R^2 + 1$ . As coordenadas  $(T, R, \theta, \phi)$  são conhecidas como as *coordenadas de Kruskal-Szekeres* e as coordenadas nulas  $(U, V)$  são suas *coordenadas do cone de luz*. Além disso, nessas coordenadas *não temos* um campo de Killing associado a simetria temporal da forma  $K_K = \partial_T$ . Isso ocorre devido ao fato de que temos uma dependência implícita da métrica com relação a coordenada  $T$  devido a coordenada  $r$  depender de  $T$  e  $R$ .

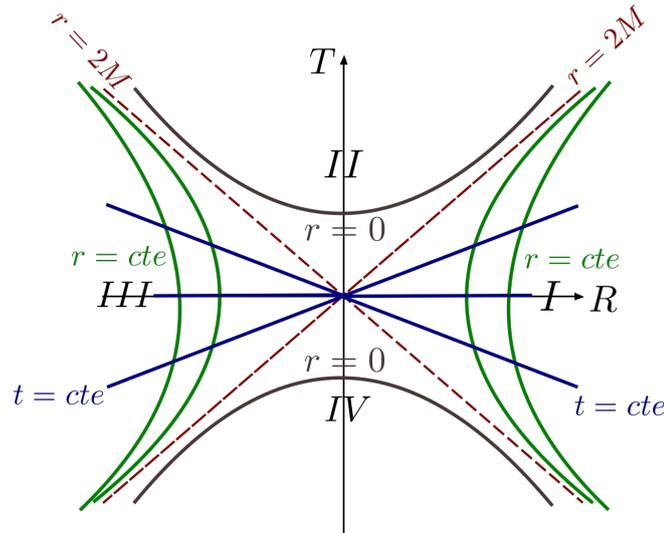


Figura 8 – Espaço-tempo de Schwarzschild estendido: representação nas coordenadas de Kruskal-Szekeres. Fonte: Elaborada pela autora.

A métrica nas coordenadas de Kruskal-Szekeres (2.59) é claramente bem definida para  $r = 2M$ , ou seja,  $U = V = 0$  e para todo  $r > 0$ . Dessa forma, podemos fazer uma extensão analítica de forma que  $U, V \in (-\infty, \infty)$ , com a restrição de que  $UV < 1$ , ou seja,  $r > 0$ . Portanto, essa métrica fornece o espaço-tempo de Schwarzschild estendido, que pode ser visto na Figura 8, para representação gráfica  $T \times R$ . O espaço-tempo de Schwarzschild estendido pode ser dividido em 4 regiões, sendo  $I$  a região exterior ao buraco negro,  $II$  o buraco negro em questão,  $III$  uma região “espelho” ao exterior do buraco negro mas não conectada causalmente com a outra e  $IV$  um buraco branco, ou seja, o oposto de um buraco negro, no sentido que nada consegue adentrar em tal região.

Na Figura 8 as curvas com a coordenada espacial  $r = \text{cte}$  são representadas por hipérbolas (definidas por  $T^2 - R^2 = \text{cte}$ ), que existem nas 4 regiões do diagrama. As curvas com

coordenada temporal  $t = \text{cte}$  são representadas por linhas retas (definidas por  $\frac{T}{R} = \tanh\left(\frac{t}{4M}\right)$ ) que cruzam a origem. No caso em que  $r = 2M$  temos as curvas  $T = \pm R$ , representando o horizonte de eventos do buraco negro de Schwarzschild. A singularidade  $r = 0$  é representada por duas hipérbolas nas regiões *II* e *IV*.

Uma boa forma de visualizar causalmente o espaço-tempo de Schwarzschild estendido é por seu diagrama de Penrose. Para montar esse diagrama precisamos da seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{cases} \tilde{U} = \tanh U \\ \tilde{V} = \tanh V \end{cases}, \quad (2.62)$$

com  $\tilde{U}, \tilde{V} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  e elemento de linha  $d\tilde{s}^2 = \Omega^2(\tilde{U}, \tilde{V})g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ , tal que  $\Omega^2(\tilde{U}, \tilde{V}) = \cos^2 \tilde{U} \cos^2 \tilde{V}$ . Escolhendo

$$\begin{cases} \tilde{U} = \eta - \chi \\ \tilde{V} = \eta + \chi \end{cases}, \quad \begin{cases} \eta = \frac{(\tilde{U} + \tilde{V})}{2} \\ \chi = \frac{(\tilde{V} - \tilde{U})}{2} \end{cases}, \quad (2.63)$$

temos o diagrama de Penrose do espaço-tempo de Schwarzschild estendido plotando  $\eta \times \chi$ , que pode ser visto na Figura 9. O mesmo é *globalmente hiperbólico* e possui a interpretação de suas regiões *I*, *II*, *III* e *IV* analogamente a Figura 8. Nesse diagrama geodésicas tipo luz/nulas são representadas por superfícies com  $\pm 45^\circ$  com relação a vertical e geodésicas tipo tempo possuem extremos em  $i^\pm$ . Toda geodésica tipo tempo e luz/nula que é originada na região *II* permanece nessa região e termina na singularidade  $r = 0$ , que portanto representa o interior do buraco negro.

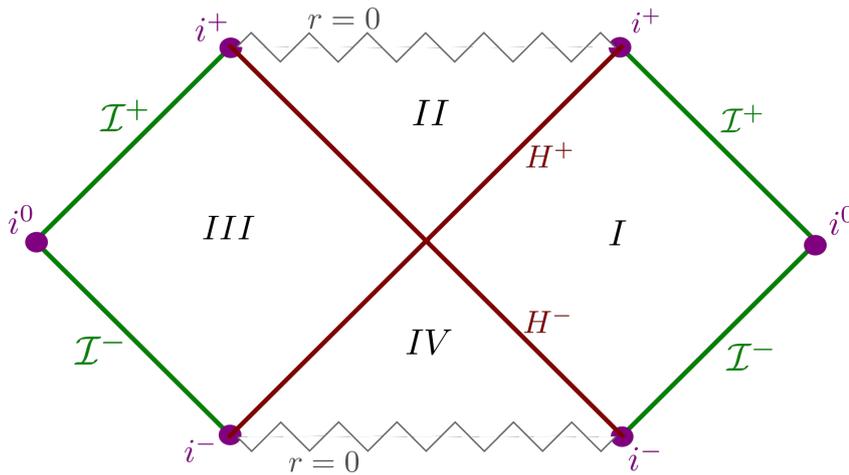


Figura 9 – Diagrama de Penrose do espaço-tempo de Schwarzschild estendido: representação nas coordenadas de Kruskal-Szekeres. Fonte: Elaborada pela autora.

## 2.8 Buracos negros

Até a presente seção, muito dissemos a respeito da concepção geral de um buraco negro: que os mesmos absorvem matéria e nunca a emitem, relacionamos pontos da solução de

Schwarzschild à “anatomia” do mesmo, verificamos o que acontece com as geodésicas nulas na solução de Eddington-Finkelstein e até já o representamos no diagrama de Penrose do espaço-tempo de Schwarzschild estendido. Porém, até agora não fornecemos uma definição precisa, não dissemos nada sobre a formação e nem mencionamos que existe uma classificação para os mesmos [13, 15, 17, 18]. Esses são os objetivos dessa seção.

Uma definição formal para um buraco negro é dada como:

**Definição** (Buraco Negro). *Um espaço-tempo assintoticamente plano  $(M, g_{\mu\nu})$  admite um buraco negro  $\mathcal{B}$  tal que*

$$\mathcal{B} = M - J^-(\mathcal{I}^+) \neq \emptyset \quad (2.64)$$

sendo  $J^-(\mathcal{I}^+)$  o passado causal do infinito futuro nulo  $\mathcal{I}^+$ .

Por *passado causal*  $J^-(\Sigma)$  entendemos o conjunto de eventos que pode ser atingido por  $\Sigma$  seguindo uma curva causal dirigida para o passado e por *futuro infinito nulo*  $\mathcal{I}^+$  entendemos uma superfície nula que delimita o espaço-tempo como um todo. Dada a definição de buraco negro definimos seu horizonte de eventos da forma:

**Definição** (Horizonte de Eventos). *Dado um buraco negro  $\mathcal{B}$  seu horizonte de eventos é definido como sua borda  $H^+$  tal que*

$$H^+ = \dot{J}^-(\mathcal{I}^+) \quad (2.65)$$

sendo  $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$  a fronteira de  $J^-(\mathcal{I}^+)$  do infinito futuro nulo  $\mathcal{I}^+$ .

Portanto, um buraco negro é a região a partir da qual nenhum sinal causal consegue atingir  $\mathcal{I}^+$ . E o horizonte de eventos do mesmo é superfície que separa os pontos do espaço-tempo que estão conectados com o infinito por uma curva tipo tempo dos que não estão, ou seja, o limite da região visível para um observador em  $\mathcal{I}^+$ .

Na Seção 2.3 falamos sobre horizonte de Killing. É claro que a noção dos mesmos é independente da ideia de horizontes de eventos, mas, em espaços-tempo que possuem simetrias temporais, eles estão profundamente conectados: horizontes de eventos  $\Sigma$ 's de um espaço-tempo estacionário e assintoticamente plano são horizontes de Killing para algum vetor de Killing  $K^\mu$ . Podemos interpretar o horizonte de eventos para um buraco negro de Schwarzschild por meio da análise do módulo do vetor de Killing  $K_S = \partial_t$ . Seu cálculo leva a

$$K_\mu K^\mu = g_{\mu\nu} K^\mu K^\nu = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right), \quad (2.66)$$

que indica que o vetor de Killing é: tipo tempo para  $r > 2M$ , tipo luz para  $r = 2M$  e tipo espaço para  $r < 2M$ . Assim, quando o vetor de Killing é tipo luz temos um *horizonte de Killing*, de acordo com a definição da Seção 2.3, e, portanto, temos o *horizonte de eventos* do buraco negro em questão.

Podemos dizer que até hoje não temos uma concepção completa da formação geral de buracos negros. Isso porque, por exemplo, não sabemos exatamente como e quais processos seriam responsáveis pela formação dos buracos negros primordiais, possivelmente formados no início da formação do universo. Além disso, o estudo sobre a formação de buracos negros foge dos objetivos da presente dissertação. De forma geral, buracos negros são formados pelo colapso gravitacional estelar. Uma estrela pode ser pensada como uma estrutura que se sustenta pelo equilíbrio da pressão, devido a fusão nuclear de seus constituintes, com a força gravitacional. Quando a força gravitacional começa a ganhar dizemos que a estrela entra em estágio de colapso: a combustão nuclear se esgota. A partir daí a densidade da estrela aumenta consideravelmente de forma que, ao passar de um determinado ponto (o raio de Schwarzschild e seu então horizonte de eventos), o espaço-tempo fica tão distorcido que nada mais consegue escapar. Temos então um buraco negro.

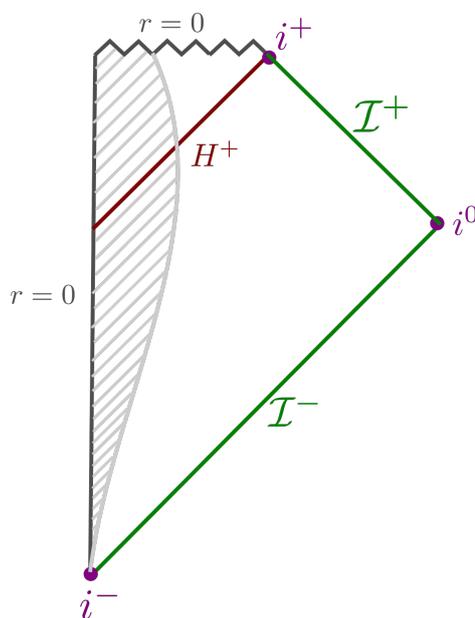


Figura 10 – Diagrama de Penrose de uma estrela colapsando esféricamente. A estrela colapsando é representada pela região hachurada em cinza. A linha em zig-zague representa a singularidade  $r = 0$ . O horizonte de eventos é representado por  $H^+$ . Fonte: Elaborada pela autora.

Dessa forma, o espaço-tempo de Schwarzschild estendido representa uma idealização para o que esperamos de um buraco negro: ele não representa sua evolução temporal pelo colapso gravitacional. Ainda assim, podemos utilizar a solução de Schwarzschild (2.42) para descrever a região exterior ao *colapso esféricamente simétrico* de uma estrela de massa  $M$ <sup>19</sup>. O teorema de Birkhoff garante que o exterior de uma estrela em colapso esféricamente simétrico é descrito pela métrica de Schwarzschild, que é estática. É claro que o interior da estrela envolve uma dinâmica estelar interna extremamente complexa, porém nesse modelo não estamos considerando como essa dinâmica funciona. O que importa no mesmo é a solução do exterior

<sup>19</sup> O colapso esféricamente simétrico também é uma situação idealizada: não apenas pela simetria esférica, mas principalmente por ser completamente livre de qualquer outro parâmetro físico (como momento angular  $L$ , por exemplo) além da massa  $M$ .

da matéria em colapso e o momento a partir do qual, ao passar de um determinado ponto (o raio de Schwarzschild), temos a formação do horizonte de eventos  $H^+$  e então seu desenvolvimento temporal até a singularidade  $r = 0$ . A representação do *colapso esféricamente simétrico* pode ser vista por meio do diagrama de Penrose 10, sendo as geodésicas nulas representadas por superfícies com  $\pm 45^\circ$  com relação à vertical e a região do buraco negro representada acima do horizonte de eventos  $H^+$ , como região tal que todas as curvas causais que dela saem não alcançam o infinito futuro nulo  $\mathcal{I}^+$ .

Até hoje conhecemos apenas um pequeno número de soluções para as equações de Einstein. Para buracos negros esse número se limita a 4 se nos referirmos as soluções que descrevem buracos negros 4-dimensionais, estacionários e assintoticamente planos, a saber: Schwarzschild (caracterizada pela massa  $M$  do buraco negro), Kerr (caracterizada pela massa  $M$  e pelo momento angular  $L$  do buraco negro), Reissner-Nordström (caracterizada pela massa  $M$  e pela carga  $Q$  do buraco negro) e Kerr-Newman (caracterizada pela massa  $M$ , carga  $Q$  e momento angular  $L$  do buraco negro). O interesse para os casos estacionários se concentra no fato de serem o estágio final do colapso gravitacional. Essas 4 soluções consideram apenas 3 parâmetros observáveis para o exterior dos buracos negros, que são dadas pelo teorema do “no-hair”. Esse teorema estabelece que buracos negros possuem apenas esses parâmetros para caracterizá-los.

Na presente dissertação vamos nos restringir apenas ao buraco negro de Schwarzschild, como vimos no presente capítulo e como veremos nos Capítulos 3 e 4.



### 3 TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS EM ESPAÇOS CURVOS

A origem da MQ é geralmente associada a Planck por seu trabalho sobre o espectro da radiação de corpo negro em 1901 [25]. Planck fez um tratamento fenomenológico capaz de modelar os dados experimentais observados da radiação emitida por um corpo, associando a mesma uma temperatura. Pouco tempo depois, em 1905, Einstein propôs a ideia da quantização da radiação eletromagnética em seu trabalho sobre o Efeito Fotoelétrico [26]. Assim, a luz passou a ser vista como pacotes de partículas de massa nula carregando energia  $E = h\nu$ , sendo  $h$  a constante de Planck e  $\nu$  a frequência da radiação emitida ou absorvida. Em 1926 Erwin Schrödinger, inspirado por Louis de Broglie ao tentar associar ondas às partículas, elaborou uma equação para descrever partículas não relativísticas [27]. Essa equação ficou conhecida como *equação de Schrödinger* e permitiu o cálculo dos valores dos níveis de energia do átomo de hidrogênio e o estudo da emissão e absorção da radiação atômica. Esses trabalhos, em conjunto com muitos outros e tantos outros nomes, foram primordiais para o desenvolvimento da MQ [1].

A partir da década de 20 uma nova teoria começou a ser formulada, uma teoria que pretendia explicar o universo do “pequeno” e do “rápido”, que podia ser interpretada como a junção da MQ com a RE, surgiu a TQC. Em 1926 Oscar Klein e Walter Gordon formularam uma equação, que muitas vezes é considerada como uma versão relativística da equação de Schrödinger, para descrever partículas quânticas escalares em regime relativístico [28]. Paul Adrien Maurice Dirac, em 1927, propôs uma equação capaz de descrever elétrons livres com energia relativística [29]. Essa teoria previa a existência das antipartículas, explicava a criação e a aniquilação de partículas e, juntamente com a equação de Klein-Gordon, foram primordiais para o desenvolvimento da Teoria Quântica de Campos Eletromagnética. Posteriormente, a força fraca e a forte também ganharam tratamento aos olhos da TQC [1, 2].

Dentre as quatro interações fundamentais a interação gravitacional ainda é a única não quantizada. É nesse panorama que surge a TQCEC, uma teoria suplente para o que esperamos de uma Teoria Quântica da Gravitação. Suplente porque embora ela possa ser entendida como uma junção da TQC com a RG, ela considera todos os campos da matéria quantizados, porém a interação gravitacional continua clássica. Essa teoria afirma que o conceito de partícula é dependente do observador e que buracos negros podem emitir partículas, afirmações tais consequências do Efeito Unruh e da Radiação Hawking.

No presente capítulo faremos um apanhado sobre a TQC em espaços-tempo planos, na Seção 3.1. Motivaremos a equação de Klein-Gordon, na Subseção 3.1.1, e passaremos para sua visão campística, na Subseção 3.1.2, finalmente quantizando este campo, no espaço-tempo plano,

na Subseção 3.1.3. Iniciaremos o tratamento para a abordagem em espaços-tempo curvos na Seção 3.2. Finalizaremos o capítulo discutindo sobre o Efeito Unruh, na Seção 3.3, e a Radiação Hawking, na Seção 3.4. Para o desenvolvimento desse capítulo nos apoiaremos nas Referências [3, 13, 18–20, 22, 24, 30, 31].

## 3.1 Teoria quântica de campos em espaços planos

### 3.1.1 A equação de Klein-Gordon

A equação de Klein-Gordon foi proposta para descrever partículas relativísticas, escalares e sem carga [2]. Dessa forma, dada uma partícula com massa  $m$  e 4-momento  $k^\mu = (E, \mathbf{k})$ , ela obedece a seguinte relação relativística

$$k^\mu k_\mu = -m^2 \Rightarrow E^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + m^2. \quad (3.1)$$

Definimos partículas como possuindo energia positiva  $E = \sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + m^2}$ .

Reescrevendo e atribuindo aos constituintes da equação (3.1) interpretações operacionais da MQ:  $E = H = i\partial_t$ , sendo  $H$  o operador hamiltoniano e  $\mathbf{k} = -i\nabla$  e aplicando no campo escalar  $\phi(x)$ <sup>1</sup>, temos

$$\begin{aligned} (E^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - m^2) \phi(x) &= 0 \\ [(i\partial_t)^2 - (-i\nabla)^2 - m^2] \phi(x) &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

o que define a *equação de Klein-Gordon*

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \phi(x) = 0. \quad (3.3)$$

Agora vamos para o tratamento campístico.

### 3.1.2 O campo de Klein-Gordon

Toda teoria de campos clássicos nasce da ação clássica, que, para um campo  $\phi(x)$  é da forma

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x), \quad (3.4)$$

sendo  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x)$  a densidade de Lagrangiana do respectivo campo [3, 13, 19, 20]. Podemos extremizar essa ação, pelo método das variações, calculando

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \right\} \delta \phi = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] = 0, \quad (3.6)$$

<sup>1</sup> Aqui denotamos, pela dependência em  $x$ , a dependência com relação às componentes do 4-vetor  $x^\mu$ .

onde o lado direito da equação (3.6) nos dá as equações de Euler-Lagrange. Para o campo escalar real  $\phi(x)$ , de massa  $m$  e sem interações, a densidade de Lagrangiana  $\mathcal{L}$  é escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2), \quad (3.7)$$

na qual  $\eta^{\mu\nu}$  é a inversa do tensor métrico de Minkowski e as equações de Euler-Lagrange nos levam a equação de Klein-Gordon

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - m^2 \phi = 0, \quad (3.8)$$

tal como na equação (3.3). As soluções para essa equação podem ser expandidas no espaço dos momentos  $\mathbf{k}$  e vamos representá-las por meio de ondas planas da forma

$$\phi \propto f_{\mathbf{k}} \Rightarrow f_{\mathbf{k}} \propto e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (3.9)$$

sendo  $\omega_{\mathbf{k}}$  a frequência de oscilação do campo e  $\mathbf{k}$  o vetor de onda. A frequência de oscilação, obtida substituindo a solução (3.9) na equação (3.8), é

$$\omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + m^2}. \quad (3.10)$$

Para que a solução do campo  $\phi(x)$  seja expandida em um conjunto completo e ortogonal de soluções temos que fazer uso do *produto interno* do campo de Klein-Gordon, que é definido nas Referências [3, 13, 19, 31], para duas funções  $f$  e  $g$ , como

$$(f, g)_{KG} \equiv -i \int d^3x (f \partial_t g^* - g^* \partial_t f). \quad (3.11)$$

Calculando-o para  $f_{\mathbf{k}_1} = e^{-i(\omega_{\mathbf{k}_1} t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x})}$  e  $f_{\mathbf{k}_2} = e^{-i(\omega_{\mathbf{k}_2} t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x})}$  obtemos

$$\begin{aligned} (f_{\mathbf{k}_1}, f_{\mathbf{k}_2}) &= -i \int d^3x i(\omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2}) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2})t} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \\ &= (\omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2}) \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) (2\pi)^3 e^{-i(\omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2})t}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde usamos que

$$\delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}}, \quad (3.13)$$

representando a *delta de Dirac* 3-dimensional. Da equação (3.12) inferimos que o produto interno se anula a menos que  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 \equiv \mathbf{k}$  e, por conseguinte,  $\omega_{\mathbf{k}_1} = \omega_{\mathbf{k}_2} \equiv \omega_{\mathbf{k}}$ . Por fim, normalizamos os modos (3.9) como

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{ik_\mu x^\mu}. \quad (3.14)$$

A partir dos modos normalizados (3.14) associados ao produto interno (3.12) obtemos as relações

$$(f_{\mathbf{k}}, f_{\mathbf{k}'}) = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.15)$$

$$(f_{\mathbf{k}}, f_{\mathbf{k}'}^*) = 0, \quad (3.16)$$

$$(f_{\mathbf{k}}^*, f_{\mathbf{k}'}) = -\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.17)$$

sendo que a relação (3.15) implica que os modos  $f_k$  são ortonormais entre si com norma positiva, a relação (3.16) diz que os modos  $f_k$  e  $f_k^*$  são ortogonais e a relação (3.17) mostra que os modos  $f_k^*$  são ortonormais entre si com norma negativa. Nesse sentido, o conjunto  $\{f_k, f_k^*\}$  é completo e ortogonal, possibilitando a expansão do campo  $\phi(x)$  como a combinação de modos  $f_k$  e  $f_k^*$ .

Antes de apresentarmos a expansão do campo  $\phi(x)$  nesses modos, vamos defini-los como: *modos de frequência positiva* e *modos de frequência negativa*. Vamos chamar o conjunto de modos  $\{f_k\}$  de *modos de frequência positiva*, satisfazendo

$$\partial_t f_k = -i\omega_k f_k, \quad \omega_k > 0 \quad (3.18)$$

e o conjunto de modos  $\{f_k^*\}$  de *modos de frequência negativa* satisfazendo

$$\partial_t f_k^* = i\omega_k f_k^*, \quad \omega_k > 0, \quad (3.19)$$

sendo assim definidos com relação ao tempo  $t$ , de um referencial inercial, do espaço-tempo de Minkowski<sup>2</sup>. Essa definição é importante para a padronização do conceito de partículas que será apresentada e que ficará mais clara na próxima seção.

Finalmente, podemos expandir o campo  $\phi(x)$  como uma combinação dos modos de frequência positiva  $f_k$  e negativa  $f_k^*$ . Portanto, expandindo-o continuamente no espaço dos momentos temos

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[ a_k e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a_k^* e^{i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right] \\ &= \int d^3k (a_k f_k + a_k^* f_k^*), \end{aligned} \quad (3.20)$$

sendo  $a_k$  e  $a_k^*$  coeficientes da expansão. Vamos agora quantizar o campo de Klein-Gordon.

### 3.1.3 Quantização do campo escalar no espaço-tempo plano

A construção de uma teoria quântica a partir de uma teoria clássica consiste na escolha de um espaço de Hilbert de estados  $\mathcal{H}$  e de operadores auto-adjuntos  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  que representem observáveis clássicos fundamentais [3, 13, 18–20, 24]. Essa escolha é, historicamente, baseada

<sup>2</sup> A nomeação: *modos de frequência positiva* e *modos de frequência negativa* para  $f_k$  e  $f_k^*$ , respectivamente, possui uma *origem histórica* [20]. Ela remete-se a interpretação do operador Hamiltoniano  $\hat{H}$  fornecendo a autoenergiza  $E$  do campo e, então, de sua partícula em questão. Assim,  $f_k$  descreve partículas com energia positiva  $E > 0$  e  $f_k^*$  descreve partículas com energia negativa  $E < 0$  da forma

$$\begin{aligned} \hat{H} f_k &= i\hbar \partial_t f_k = \hbar \omega_k f_k \Rightarrow E > 0 \\ \hat{H} f_k^* &= i\hbar \partial_t f_k^* = -\hbar \omega_k f_k^* \Rightarrow E < 0, \end{aligned}$$

onde retomamos a unidade de energia. Como definimos partículas com energia positiva em TQC e, por conseguinte, no presente texto (ver Subseção 3.1.1), essa interpretação consolida-se apenas historicamente. Entretanto, emprestamos essa nomeação para a diferenciação dos modos  $f_k$  e  $f_k^*$ .

nos *parênteses de Poisson*  $\{ , \}$ , que fornecem a estrutura algébrica  $[ , ]$  dos operadores em questão

$$[\hat{a}, \hat{b}] = i \{a, b\}. \quad (3.21)$$

Assim, o comutador fundamental da MQ fica  $[\hat{x}, \hat{p}] = i$ , pois  $\{x, p\} = 1$ . Na TQC fazemos a chamada *segunda quantização* onde promovemos o campo  $\phi(x)$  e seu campo canonicamente conjugado  $\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = \partial_t \phi$  a operadores  $\hat{\phi}(x)$  e  $\hat{\pi}(x)$  [32]. Vale dizer que, de acordo com esse procedimento de quantização, estamos fazendo uso da *representação de Heisenberg*<sup>3</sup>.

Essa quantização é feita postulando as seguintes relações de comutação

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.22)$$

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y)] = 0, \quad (3.23)$$

que são tomadas em tempos iguais. Dessa forma, os coeficientes  $a_k$  e  $a_k^*$ , da equação (3.20), são promovidos a operadores  $\hat{a}_k$  e  $\hat{a}_k^\dagger$  satisfazendo

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.24)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0. \quad (3.25)$$

Essas relações de comutação são similares às relações do Oscilador Harmônico Quântico (OHQ). Similares porque a expressão (3.24) conta com uma *delta de Dirac*  $\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  e não uma *delta de Kronecker*  $\delta_{k,k'}$  (como é o caso do OHQ) [24], de modo que há um infinito número de operadores indexados por  $k$  [13]. Assim, os operadores  $\hat{a}_k^\dagger$  e  $\hat{a}_k$  não possuem interpretação física tão direta como no caso do OHQ, como operadores de criação e destruição, respectivamente. Para mais detalhes ver Apêndice D.

Portanto, os campos  $\phi(x)$  e  $\pi(x)$  quantizados ficam escritos como

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[ e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \hat{a}_k + e^{i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \hat{a}_k^\dagger \right], \quad (3.26)$$

$$\hat{\pi}(x) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left[ e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \hat{a}_k - e^{i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \hat{a}_k^\dagger \right], \quad (3.27)$$

Esses campos são expressos no espaço de Hilbert de estados de partículas  $\mathcal{F}_{KG}$ , conhecido como *espaço de Fock* [3, 24, 31]. O espaço de Fock  $\mathcal{F}_{KG}$  é acompanhado da *representação/base de Fock* que descreve estados de partículas descritos por kets  $|\rangle$  construídos a partir do *estado de vácuo*  $|0\rangle$ . Esse estado tem seu nome devido ao fato dele representar o estado sem partículas e possui a propriedade de ser aniquilado por cada operador destruição  $\hat{a}_k$  da forma

$$\hat{a}_k |0\rangle \equiv 0, \quad \forall \mathbf{k}. \quad (3.28)$$

<sup>3</sup> Por *representação de Heisenberg* estamos nos referindo a evolução temporal do campo sendo atribuída aos operadores (no nosso caso  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\pi}$ ) e não aos estados do campo em questão.

Por fim, para explorarmos a interpretação física dos *estados de Fock*, é interessante definirmos mais um operador, o *operador número*

$$\hat{N}_k \equiv \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k. \quad (3.29)$$

Quando definido no caso do OHQ, seu valor esperado fornece exatamente o número de partículas de um determinado estado. O mesmo acontece, por exemplo, quando o definimos para a expansão discreta do campo  $\hat{\phi}$  (ver Apêndice D). Porém, sua interpretação física no contínuo não é tão direta como para o OHQ, dado que ele expressa o produto de  $\hat{a}_k^\dagger$  e  $\hat{a}_k$ , como comentamos após as equações (3.24) e (3.25). Portanto, seguindo a discussão do Apêndice D, podemos interpretar seu valor esperado como uma *densidade de partículas*.

Aqui mostramos a quantização do campo escalar no espaço-tempo plano. A quantização em espaços-tempo curvos segue o mesmo princípio.

## 3.2 Teoria quântica de campos em espaços-tempo curvos

A generalização da teoria clássica de campos em espaços-tempo planos para curvos [3, 13, 18–20, 22, 30] se dá com:

1. A substituição da métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  pela métrica geral  $g_{\mu\nu}$ ;
2. A substituição das derivadas ordinárias  $\partial_\mu$  por derivadas covariantes  $\nabla_\mu$ ;
3. A substituição do elemento de volume  $d^4x$  pelo elemento de volume covariante:  $d^4x\sqrt{-g}$ , sendo  $g \equiv \det[g_{\mu\nu}]$ .

Assim, para um espaço-tempo  $(M, g_{\mu\nu})$  que seja globalmente hiperbólico, a propagação do campo escalar  $\phi(x)$  possui a densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + m^2 \phi^2), \quad (3.30)$$

obtida utilizando (3.7). Além disso a ação clássica  $S$  fica

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + m^2 \phi^2) \right], \quad (3.31)$$

sendo que para o campo escalar  $\nabla_\mu \phi \equiv \partial_\mu \phi$ . Essa densidade de Lagrangiana e ação descrevem um campo escalar minimamente acoplado com a gravidade<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> O tratamento geral em TQCEC considera a ação para o campo escalar como

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2) \right], \quad (3.32)$$

sendo  $\xi \in \mathbb{R}$  um termo que determina o acoplamento entre o campo escalar e a curvatura  $R$ , escalar de Ricci. No nosso caso, como utilizamos  $\xi = 0$ , consideramos o acoplamento mínimo do campo escalar  $\phi$  com a gravidade.

Então, a variação da ação  $\delta S = 0$  fornece as equações de movimento como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \phi - m^2 \phi \equiv (\square - m^2) \phi = 0, \quad (3.33)$$

onde  $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$ , representando a equação de Klein-Gordon (3.8) no espaço-tempo curvo. As soluções nem sempre serão representadas por meio de ondas planas da forma (3.9), porém, a obtenção de um conjunto completo e ortogonal de soluções continua sendo feita por meio do *produto interno*, para duas funções  $f$  e  $g$ , agora definido como

$$(f, g)_{KG} \equiv -i \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma} n^\mu (f \nabla_\mu g^* - g^* \nabla_\mu f), \quad (3.34)$$

onde  $\Sigma_t$  é uma superfície de Cauchy de parâmetro  $t$  com vetor normal  $n^\mu$  e métrica induzida  $\gamma_{\mu\nu}$ <sup>5</sup>. Esse produto interno independe da superfície de Cauchy  $\Sigma_t$  escolhida. Vale frisar que é nesse ponto que precisamos de um espaço-tempo que seja *globalmente hiperbólico*<sup>6</sup>.

O produto interno, definido em (3.34), permite uma base ortonormal  $\{f_i, f_j^*\}$  satisfazendo

$$(f_i, f_j) = \delta_{i,j} \quad (3.36)$$

$$(f_i, f_j^*) = 0 \quad (3.37)$$

$$(f_i^*, f_j^*) = -\delta_{i,j}, \quad (3.38)$$

tal como nas relações (3.15-3.17). Os índices  $i$  e  $j$  podem representar que as funções  $f_i$  e  $f_j$  são discretas (utilizando a *delta de Kronecker*  $\delta_{i,j}$ ) ou contínuas (utilizando a *delta de Dirac*  $\delta^3(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ ). Por conveniência, para a deduções de algumas transformações, vamos trabalhar com a notação discreta. Entretanto, as expressões e discussões a seguir valem para ambos os casos.

Para que possamos desenvolver o formalismo canônico de quantização definimos o momento  $\pi$  associado ao campo  $\phi$  como

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}. \quad (3.39)$$

Dessa forma, a quantização do campo escalar em espaços-tempo globalmente hiperbólicos segue exatamente como em espaços-tempo planos: escolhe-se um espaço de Hilbert de estados  $\mathcal{F}_{KG}$  com a promoção dos campos  $\phi(x)$  e  $\pi(x)$  a operadores  $\hat{\phi}(x)$  e  $\hat{\pi}(x)$ . Então, impomos as relações canônicas de comutação

$$\left[ \hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y) \right]_{\Sigma_t} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.40)$$

$$\left[ \hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y) \right]_{\Sigma_t} = \left[ \hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y) \right]_{\Sigma_t} = 0, \quad (3.41)$$

<sup>5</sup> A métrica induzida  $\gamma_{\mu\nu}$  é a representação do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  definida sobre uma hiper-superfície  $\Sigma_t$  (de dimensão  $(n-1)$ ) e parâmetro  $t$  mergulhada numa superfície  $M$  (de dimensão  $n$ ), onde o tensor métrico é definido. Dado o vetor normal  $n^\mu$  à hiper-superfície  $\Sigma_t$  escrevemos

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (3.35)$$

<sup>6</sup> Para mais detalhes ver Seção 2.4.

tal como em (3.22) e (3.23), mas agora tomadas sobre uma superfície de Cauchy  $\Sigma_t$  com parâmetro  $t$ , sendo a coordenada temporal, constante. Analogamente, temos os operadores de criação  $\hat{a}_i^\dagger$  e aniquilação  $\hat{a}_i$  seguindo as relações de comutação

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad (3.42)$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0, \quad (3.43)$$

como em (3.24) e (3.25). Portanto, o campo escalar  $\phi$  fica quantizado no espaço-tempo curvo como

$$\hat{\phi} = \sum_i \left( \hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^* \right). \quad (3.44)$$

As definições do estado de vácuo e do operador número seguem respectivamente (3.28) e (3.29).

O campo escalar quantizado  $\hat{\phi}$  possui uma expansão *não única*. Isso porque qualquer modo que satisfaça o produto interno (3.34), formando uma base ortonormal, pode ser utilizado para representar o mesmo. Portanto, o campo  $\hat{\phi}$  pode ser expandido em qualquer sistema de coordenadas desejado que descreva o espaço-tempo em questão. Dessa forma, considerando um conjunto de modos alternativo  $g_j(x)$ , temos a expansão

$$\hat{\phi} = \sum_j \left( \hat{b}_j g_j + \hat{b}_j^\dagger g_j^* \right), \quad (3.45)$$

satisfazendo relações equivalentes a (3.36-3.38), (3.42), (3.43), (3.28) e (3.29). Podemos correlacionar os coeficientes ( $f_i$ 's e  $g_j$ 's) e os operadores ( $\hat{a}_i$ 's e  $\hat{b}_j$ 's) das expansões do campo escalar  $\hat{\phi}$  (3.44) e (3.45) a partir das chamadas *transformações de Bogoliubov*, como por exemplo

$$g_j = \sum_i (A_{ji} f_i + B_{ji} f_i^*), \quad (3.46)$$

$$f_i = \sum_j (A_{ji}^* g_j - B_{ji} g_j^*) \quad (3.47)$$

e

$$\hat{a}_i = \sum_j \left( A_{ji} \hat{b}_j + B_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger \right), \quad (3.48)$$

$$\hat{b}_j = \sum_i \left( A_{ji}^* \hat{a}_i - B_{ji} \hat{a}_i^\dagger \right). \quad (3.49)$$

Essas transformações, e suas respectivas inversões, estão feitas no Apêndice E.

Mas qual seria a motivação física para a existência de mais de uma forma de expansão para o campo  $\hat{\phi}$ ? Desde RE imaginamos um sistema de coordenadas associado a um observador em questão. Assim, dados dois sistemas de coordenadas distintos, ligados por uma transformação, podemos correlacionar medidas feitas pelos mesmos. Essa ideia se encaixa na expansão do campo  $\hat{\phi}$  ao pensarmos na existência de dois observadores distintos, por exemplo  $A$  e  $B$ , cada um com sua expansão de campo (3.44) e (3.45), estados de vácuo  $|0_A\rangle$  e  $|0_B\rangle$ , tais que

$\hat{a}_i|0_A\rangle = 0, \forall i$  e  $\hat{b}_j|0_B\rangle = 0, \forall j$  e ligados pelas *transformações de Bogoliubov*. A noção da relação de medidas é o ponto chave da TQCEC, ponto que ficará mais claro na Seção 3.2.1.

Por fim, tal como fizemos no espaço-tempo plano, precisamos definir os modos de frequência positivas e negativas para a padronização do conceito de partículas no espaço-tempo curvo<sup>7</sup>. Como acabamos de ver, podemos escrever o campo  $\hat{\phi}$  em bases distintas, pensando em observadores distintos, portanto nossa definição de partículas deve abranger essas distinções. Como cada observador possui seu tempo próprio  $\tau$ , definimos partículas como os modos de frequência positiva com base em  $\tau$  do observador em questão

$$\partial_\tau f_i = -i\omega f_i. \quad (3.50)$$

Para um espaço-tempo estático, como a métrica é independente do tempo  $t$  a equação de Klein-Gordon (3.33) faz com que os modos  $f_i$  sejam soluções com variáveis separáveis  $f_i(x) = e^{-i\omega_i t} \bar{f}_i(\mathbf{x})$  de modo que sempre  $\partial_t f_i = -i\omega_i f_i$ . Essa relação pode ser definida de forma independente do sistema de coordenadas utilizando os vetores de Killing  $K = K^\mu \partial_\mu$  associados a simetrias temporais. Portanto, definimos os *modos de frequência positiva* satisfazendo

$$K f_i = \partial_t f_i = -i\omega_i f_i, \quad \omega_i > 0. \quad (3.51)$$

E os *modos de frequência negativa* como

$$K f_i^* = \partial_t f_i^* = i\omega_i f_i^*, \quad \omega_i > 0. \quad (3.52)$$

Desde que a trajetória dos observadores siga ao longo do campo de Killing, o tempo próprio  $\tau$  será proporcional ao parâmetro temporal de Killing  $t$  e, portanto, os modos de frequência positiva dados com respeito ao vetor de Killing fornecerão a base ortonormal para descrever o espaço de Fock de cada observador. Vale notar que essa definição de partículas é válida desde que tenhamos um espaço-tempo com uma simetria temporal, de modo a possuímos um campo de Killing relacionado a mesma. Além disso, ela reforça a ideia da expansão não única do campo  $\hat{\phi}$  porque, como não há nenhuma coordenada temporal privilegiada no espaço-tempo curvo, ela vale para qualquer referencial.

No caso do Efeito Unruh (ver Seção 3.3) vamos lidar com dois observadores distintos: um observador inercial associado ao vetor de Killing  $K_M = \partial_t$  de Minkowski e um observador acelerado, associado ao vetor de Killing  $K_R = \partial_\eta$  de Rindler. Já no caso da Radiação Hawking, para o colapso esfericamente simétrico (ver Seção 3.4.1), precisamos nos atentar ao fato de que não temos um vetor de Killing temporal global. Entretanto, esse espaço-tempo possui duas regiões estacionárias distintas (muito antes e muito depois do colapso), que nos permitem a definição de partículas para observadores estáticos nessas regiões. Assim, definimos os modos

<sup>7</sup> Veja que essa padronização é importante porque define qual modo (diferenciando-o como de frequência positiva ou de frequência negativa) acompanha cada operador (de criação ou de destruição) para cada expansão do campo  $\hat{\phi}$ , de forma que as medidas entre as expansões façam sentido físico.

de frequência positiva nessas regiões com relação a coordenada temporal e ao seu respectivo vetor de Killing no passado e no futuro. Essas ideias ficarão mais claras no desenvolvimento das respectivas seções.

Agora vamos ver como relacionar a TQCEC à temperatura, resultado primordial da Radiação Hawking e do Efeito Unruh.

### 3.2.1 O operador número e a temperatura

De acordo com o Apêndice D, para a expansão discreta de  $\hat{\phi}$ , o número de partículas no estado de vácuo do próprio campo é sempre nulo (ver equação (D.16))<sup>8</sup>. Porém, podemos calcular o número de partículas esperado por um operador número de base diferente do vácuo considerado, utilizando as expansões (3.44) e (3.45). Esse cálculo é equivalente a resposta para a pergunta: *quantas partículas um observador B, vê no vácuo A?* Assim, precisamos calcular

$$N_j = \langle 0_A | \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j | 0_A \rangle, \quad (3.53)$$

sendo que os operadores  $\hat{b}_j^\dagger$  e  $\hat{b}_j$  se relacionam aos operadores  $\hat{a}_i^\dagger$  e  $\hat{a}_i$  através das *transformações de Bogoliubov*, vistas no Apêndice E. Portanto, utilizando as expressões (E.21) e (E.22), temos

$$\begin{aligned} N_j &= \langle 0_A | \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j | 0_A \rangle = \langle 0_A | \left[ \sum_p (-B_{jp} \hat{a}_p + A_{jp} \hat{a}_p^\dagger) \right] \left[ \sum_q (A_{jq}^* \hat{a}_q - B_{jq}^* \hat{a}_q^\dagger) \right] | 0_A \rangle \\ &= \langle 0_A | \sum_{p,q} B_{jp} B_{jq}^* \hat{a}_p \hat{a}_q^\dagger | 0_A \rangle = \sum_{p,q} B_{jp} B_{jq}^* \delta_{p,q} \langle 0_A | 0_A \rangle = \sum_q |B_{jq}|^2, \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde utilizamos que os operadores  $\hat{b}_j$  e  $\hat{b}_j^\dagger$  satisfazem a relação de comutação (3.42)<sup>9</sup>. Não há nenhuma razão para que o número de partículas  $N_j$  seja nulo, desde que o coeficiente  $B_{jq}$  não seja nulo. Esse coeficiente basicamente descreve a mistura de operadores de criação e aniquilação de uma base para a outra, como podemos ver pelas expressões (E.19) e (E.21). Portanto, o que seria vácuo na perspectiva de  $A$  está cheio de partículas na perspectiva de  $B$ . Além disso, como veremos a seguir, esse resultado nos leva a *distribuição de Planck*, no caso do Efeito Unruh e da Radiação Hawking, firmando a ideia de termos uma temperatura  $T$ .

Esse cálculo será muito importante no decorrer da dissertação. Agora vamos ver como o formalismo apresentado aqui pode ser desenvolvido no Efeito Unruh e na Radiação Hawking.

## 3.3 O efeito Unruh

Classicamente a noção de vácuo é associada ao estado físico obtido com a exclusão de toda a matéria de uma dada região do espaço. No entanto, o vácuo quântico é povoado por uma

<sup>8</sup> A mesma relação é válida para o contínuo, dadas as ressalvas da interpretação do operador número (3.29).

<sup>9</sup> É interessante notar que, para o contínuo, temos uma divergência infinita nesse ponto. A discussão relativa a mesma seguirá nas Seções 3.3 e 3.4.

legião de partículas, denominadas virtuais, que surgem e se aniquilam tão rapidamente que sua detecção direta é impossível. Porém, o vácuo quântico continua sendo vazio com relação as partículas reais, ou seja, de detecção direta. Com o advento da TQC os campos passaram a ser entendidos como entes fundamentais da natureza, sendo as partículas meras excitações dos mesmos. Em 1976 Unruh mostrou que observadores com aceleração constante  $a$ , no espaço-tempo de Minkowski, medem um banho térmico de partículas reais onde observadores inerciais medem o estado de vácuo. Esse efeito ficou conhecido como Efeito Unruh e consolidou a relatividade da quantidade de partículas. Historicamente, o mesmo foi descoberto após a Radiação Hawking com o intuito de entendê-la melhor.

Nessa seção iremos apresentar a quantização do campo escalar não massivo em 2 dimensões expandindo-o no espaço-tempo de Minkowski e de Rindler (sub-região de Minkowski para um observador com aceleração constante  $a$ ) [3, 13, 18–20]. Faremos o cálculo do número de partículas visto pelo observador acelerado no vácuo de Minkowski obtendo a temperatura do banho térmico de partículas. O estudo do Efeito Unruh é primordial para o entendimento da Radiação Hawking, que veremos na próxima seção, por possuir uma formulação matemática equivalente.

### 3.3.1 Expandindo o campo escalar

Como vimos na Seção 2.5, dado o espaço-tempo de Minkowski podemos definir três regiões, a primeira vista distintas, quando queremos considerar um observador acelerado. A primeira delas compreende todo o espaço-tempo de Minkowski, que é integralmente acessível para um *observador inercial*. A segunda e a terceira compreendem o espaço-tempo de Rindler Direito e Esquerdo, como podem ser revistos na Figura 5. O espaço-tempo de Rindler Direito diz respeito ao espaço-tempo visto por um *observador acelerando* na direção positiva de  $x$ . Já o espaço-tempo de Rindler Esquerdo diz respeito ao espaço-tempo visto por um *observador acelerando* na direção negativa de  $x$ .

Para que possamos definir e quantizar o campo escalar  $\phi$  nesse espaço-tempo precisamos lembrar da definição de partícula, dada por (3.50-3.52). Como o espaço-tempo de Minkowski é estático podemos utilizar os vetores de Killing, de Minkowski  $K_M = \partial_t$  e de Rindler direito  $K_R^D = \partial_\eta$  e esquerdo  $K_R^E = -\partial_\eta$  para a definição dos modos de frequência positivas e negativas na construção da base de Fock para o campo escalar  $\phi$  em cada uma dessas regiões como:

#### **Espaço-tempo de Minkowski (2 D): observador inercial**

No espaço-tempo de Minkowski a equação de Klein-Gordon  $(-\partial_t^2 + \partial_x^2)\phi = -\partial_u\partial_v\phi = 0$  admite soluções da forma

$$f_k(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (3.55)$$

onde  $\omega = |k| > 0$ . Esses modos possuem frequência positiva com relação ao vetor de Killing

$K_M = \partial_t$ . Ao considerarmos o sinal do vetor de onda  $k$  temos

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u}, & k > 0 \Rightarrow \text{se movendo para a direita ao longo de } u = \text{cte}, \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v}, & k < 0 \Rightarrow \text{se movendo para a esquerda ao longo de } v = \text{cte}. \end{cases} \quad (3.56)$$

Assim, o campo escalar  $\phi$  quantizado fica definido como

$$\hat{\phi} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \left( \hat{a}_k f_k + \hat{a}_k^\dagger f_k^* \right), \quad (3.57)$$

satisfazendo as relações de comutação  $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0$  e  $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta(k - k')$ . Juntamente, o estado de vácuo fica  $|0_M\rangle$ , tal que  $\hat{a}_k|0_M\rangle = 0, \forall k$ .

### Espaço-tempo de Rindler (2 D): observador acelerado

No espaço-tempo de Rindler a equação de Klein-Gordon  $(-\partial_\eta^2 + \partial_\xi^2)\phi = -\partial_{\tilde{u}}\partial_{\tilde{v}}\phi = 0$  admite soluções da forma

$$g_K(\eta, \xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} e^{i(K\xi \pm \Omega\eta)}, \quad (3.58)$$

sendo  $\Omega = |K| > 0$ . O sinal positivo (+) corresponde ao *lado esquerdo de Rindler* e o sinal negativo (-) ao *lado direito de Rindler*. Essa diferença de sinais reflete a definição dos modos de frequências positivas, que são definidos com relação ao vetor de Killing  $K_R^E = -\partial_\eta$ , para o *lado esquerdo* e  $K_R^D = \partial_\eta$ , para o *lado direito* de Rindler.

Se pensarmos no modo (3.58) como

$$g_K(\eta, \xi) = \begin{cases} g_K^E = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} e^{i(K\xi + \Omega\eta)}, & \text{lado esquerdo} \\ g_K^D = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} e^{i(K\xi - \Omega\eta)}, & \text{lado direito} \end{cases} \quad (3.59)$$

os mesmos formam um conjunto ortogonal completo em cada um de seus lados:  $\{g_K^E, g_K^{E*}\}$  no lado esquerdo e  $\{g_K^D, g_K^{D*}\}$  no lado direito, mas não no espaço-tempo de Minkowski como um todo. Isso porque, os modos  $g_K^E$  e  $g_K^D$  não são definidos por toda uma superfície de Cauchy para todo o espaço-tempo de Minkowski, como por exemplo  $\Sigma_t$ , para  $t = \text{cte}$ . Eles estão apenas definidos em suas bordas (esquerda e direita). Isso faz com que esses modos não formem um conjunto completo de funções com respeito ao espaço-tempo de Minkowski como um todo. Porém, podemos aproveitar esse fato e definir

$$g_K^D(\eta, \xi) \equiv g_\Omega^D(\tilde{u}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} e^{-i\Omega\tilde{u}}, & \text{no espaço de Rindler Direito} \\ 0, & \text{no espaço de Rindler Esquerdo} \end{cases}, \quad (3.60)$$

$$g_K^E(\eta, \xi) \equiv g_\Omega^E(\tilde{v}) = \begin{cases} 0, & \text{no espaço de Rindler Direito} \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} e^{i\Omega\tilde{v}}, & \text{no espaço de Rindler Esquerdo} \end{cases}. \quad (3.61)$$

De modo que o campo seja definido sob o espaço-tempo completo, sendo as superfícies com  $\eta = \text{cte}$  superfícies de Cauchy entre os lados direitos e esquerdo de Rindler. Note que fazemos uso das *coordenadas do cone de luz*, definidas na equação (2.33) e que o sinal do expoente da

equação (3.61) é positivo porque estamos considerando as frequências positivas com relação ao vetor de Killing  $K_R^E \equiv K_\Omega^E = -\partial_\eta$ . Dessa forma, os conjuntos  $\{g_\Omega^D, g_\Omega^{D*}\}$  e  $\{g_\Omega^E, g_\Omega^{E*}\}$  formam um conjunto completo de funções para o espaço-tempo como um todo. Vale frisar que o produto interno entre os modos direitos e esquerdos vale  $(g_\Omega^D, g_\Omega^E) = 0$ . Portanto o campo  $\hat{\phi}$  fica expandido nas coordenadas de Rindler como

$$\hat{\phi} = \int_{-\infty}^{\infty} dK \left( \hat{b}_K g_K^D + \hat{b}_K^\dagger g_K^{D*} + \hat{c}_K g_K^E + \hat{c}_K^\dagger g_K^{E*} \right), \quad (3.62)$$

satisfazendo as relações de comutação  $[\hat{b}_K, \hat{b}_{K'}] = [\hat{b}_K^\dagger, \hat{b}_{K'}^\dagger] = [\hat{c}_K, \hat{c}_{K'}] = [\hat{c}_K^\dagger, \hat{c}_{K'}^\dagger] = 0$  e  $[\hat{b}_K, \hat{b}_{K'}^\dagger] = [\hat{c}_K, \hat{c}_{K'}^\dagger] = \delta(K - K')$ . Juntamente o estado de vácuo fica  $|0_R\rangle$ , tal que  $\hat{b}_K |0_R\rangle = \hat{c}_K |0_R\rangle = 0, \forall K$ .

Finalmente temos as expansões do campo  $\hat{\phi}$  em Minkowski e em Rindler das formas

$$\hat{\phi} = \int_{-\infty}^{\infty} dK \left( \hat{b}_K g_K^D + \hat{b}_K^\dagger g_K^{D*} + \hat{c}_K g_K^E + \hat{c}_K^\dagger g_K^{E*} \right), \quad (3.63)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk \left( \hat{a}_k f_k + \hat{a}_k^\dagger f_k^* \right). \quad (3.64)$$

### 3.3.2 Calculando o número de partículas para o observador acelerado

Dadas as expansões (3.63) e (3.64) podemos nos perguntar: *quantas partículas um observador acelerado vê no vácuo de Minkowski?* Para responder a essa pergunta precisamos lembrar que o espaço-tempo de Rindler é definido para um observador acelerado se movendo no sentido positivo ou negativo de  $x$ , ou seja, precisamos escolher se o observador estará no lado direito ou esquerdo de Rindler. Portanto, essa pergunta deve se restringir a um deles<sup>10</sup>. Definido por exemplo, o observador direito, basta calcularmos o número de partículas  $N_\Omega$ <sup>11</sup>, utilizando o resultado (3.54) no contínuo.

Para tanto, vamos considerar o campo escalar expandido em Minkowski utilizando os modos  $f_\omega$  (3.55) que se propagam para a direita, de modo que contemplemos o espaço de Rindler Direito. Fazemos isso por meio das coordenadas do cone de luz (2.23). Assim, utilizando (E.1), vamos expandir o modo  $g_\Omega^D$ , no espaço das frequências  $\omega$  e na variável  $u$ , como

$$\begin{aligned} g_\Omega^D(u) &= \int_0^\infty d\omega (A_{\omega\Omega} f_\omega + B_{\omega\Omega} f_\omega^*) \\ &= \int_0^\infty d\omega \left( A_{\omega\Omega} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{-i\omega u} + B_{\omega\Omega} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{i\omega u} \right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

<sup>10</sup> Os cálculos são completamente análogos para o observador direito ou para o esquerdo. Portanto essa escolha é neutra.

<sup>11</sup> Observe que aqui nos referimos ao número de partículas com índice expresso no espaço das frequências. Essa relação é direta dado que  $\omega = |k|$  e  $\Omega = |K|$ , diferindo em unidades de medida apenas quando recuperamos a velocidade da luz  $c$ :  $\omega = |k|c$  e  $\Omega = |K|c$ . Por conveniência, vamos escrever os modos e os operadores nesse espaço.

Essa expansão tem total semelhança com a expansão de Fourier de  $g_{\Omega}^R(u)$  pois

$$g_{\Omega}^D(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega u} \tilde{g}_{\Omega}^D(\omega), \quad (3.66)$$

onde

$$\tilde{g}_{\Omega}^D(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{i\omega u} g_{\Omega}^D(u). \quad (3.67)$$

Assim podemos reescrever (3.65) como

$$g_{\Omega}^D(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega [e^{-i\omega u} \tilde{g}_{\Omega}^D(\omega) + e^{i\omega u} \tilde{g}_{\Omega}^D(-\omega)], \quad (3.68)$$

onde trocamos o sinal de integração da variável  $\omega \rightarrow -\omega$  no segundo termo devido ao sinal da exponencial. Portanto, comparando as expressões (3.65) e (3.68) podemos escrever os coeficientes de Bogoliubov da forma

$$A_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \tilde{g}_{\Omega}^D(\omega) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{i\omega u} g_{\Omega}^D(u), \quad (3.69)$$

$$B_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \tilde{g}_{\Omega}^D(-\omega) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-i\omega u} g_{\Omega}^D(u). \quad (3.70)$$

Como  $\tilde{u}$  está diretamente relacionado com  $u$  por meio da relação (2.34), podemos escrever  $g_{\Omega}^D(\tilde{u})$  com relação à coordenada  $u$  tal que

$$g_{\Omega}^D(\tilde{u}, u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} e^{-i\Omega\tilde{u}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} e^{\frac{i\Omega}{a} \ln(-au)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} (-au)^{\frac{i\Omega}{a}}, \quad u < 0. \quad (3.71)$$

Substituindo nos coeficientes de Bogoliubov (3.69) e (3.70) temos

$$A_{\omega\Omega} = C \int_{-\infty}^0 du e^{i\omega u} (-au)^{\frac{i\Omega}{a}}, \quad (3.72)$$

$$B_{\omega\Omega} = C \int_{-\infty}^0 du e^{-i\omega u} (-au)^{\frac{i\Omega}{a}}, \quad (3.73)$$

sendo  $C = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}}$ . Vamos focar nos cálculos relacionados ao coeficiente  $A_{\omega\Omega}$ . Assim, podemos reescrever (3.72) da forma

$$A_{\omega\Omega} = C a^{i\Omega/a} \int_0^{\infty} du e^{-i\omega u} u^{i\Omega/a} = C a^{(i\Omega/a-1)} \int_0^{\infty} du \left(\frac{\Omega}{\omega}\right) e^{-i\omega u} u^{(i\Omega/a-1)}, \quad (3.74)$$

sendo que mudamos de variáveis  $u \rightarrow -u$  e integramos por partes. Essa integral não é trivial e, para resolvê-la, faremos uso de uma série de passos.

Primeiramente, dada a definição da *função Gama*<sup>12</sup>

$$\Gamma(z) = x^z \int_0^{\infty} dt e^{-xt} t^{z-1}, \quad \text{Re}[z] > 0 \text{ e } \text{Re}[x] > 0, \quad (3.75)$$

<sup>12</sup> Ver Referência [33], equação 8.312.2.

podemos escrever

$$\int_0^{\infty} dt e^{-xt} t^{z-1} = x^{-z} \Gamma(z) = e^{-z \ln x} \Gamma(z). \quad (3.76)$$

Porém, desde que  $x, z \in \mathbb{C}$  temos que nos atentar que o logaritmo de um número complexo  $x = A + iB$  é indiferente por rotações de  $2\pi$ , ou seja,

$$\ln x = \ln \left[ |A + iB| e^{i \left[ \arctan\left(\frac{B}{A}\right) + 2n\pi \right]} \right], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.77)$$

Assim, já pensando no uso da expressão (3.76), definimos

$$\ln x \equiv \ln |A + iB| + i \operatorname{sign}(B) \arctan\left(\frac{|B|}{A}\right), \quad A > 0. \quad (3.78)$$

Para resolvermos a equação (3.74) devemos fazer a seguinte mudança de variáveis

$$x \equiv \epsilon + i\omega, \quad (3.79)$$

$$z \equiv \epsilon + i\frac{\Omega}{a}, \quad (3.80)$$

sendo  $\epsilon \ll 1$  e  $\epsilon > 0$ , de forma a utilizar a função Gama (3.76) no limite em que  $\epsilon \rightarrow 0_+$ . Assim, utilizando (3.76) e as variáveis definidas em (3.79) e (3.80) podemos reescrever a equação (3.74) da forma

$$\begin{aligned} A_{\omega\Omega} &= Ca^{i\Omega/a-1} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \int_0^{\infty} du e^{-i\omega u} u^{i\Omega/a-1} \\ &= Ca^{i\Omega/a-1} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [e^{-z \ln x} \Gamma(z)] \\ &= Ca^{i\Omega/a-1} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ e^{-(\epsilon + i\frac{\Omega}{a}) \left[ \ln \sqrt{\epsilon^2 + \omega^2} + i \operatorname{sign}(\omega) \arctan\left(\frac{|\omega|}{\epsilon}\right) \right]} \Gamma\left(\epsilon + i\frac{\Omega}{a}\right) \right] \\ &= Ca^{i\Omega/a-1} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right) e^{-i\frac{\Omega}{a} \left[ \ln |\omega| + i \operatorname{sign}(\omega) \frac{\pi}{2} \right]} \Gamma\left(i\frac{\Omega}{a}\right) \\ &= Ca^{i\Omega/a-1} \left(\frac{\Omega}{|\omega|}\right) \operatorname{sign}(\omega) e^{-i\frac{\Omega}{a} \ln |\omega|} e^{\frac{\Omega}{a} \operatorname{sign}(\omega) \frac{\pi}{2}} \Gamma\left(i\frac{\Omega}{a}\right) \end{aligned} \quad (3.81)$$

Portanto, obtemos

$$A_{\omega\Omega} = Ca^{i\Omega/a-1} \left(\frac{\Omega}{|\omega|}\right) e^{-i\frac{\Omega}{a} \ln |\omega|} e^{\frac{\Omega}{a} \frac{\pi}{2}} \Gamma\left(i\frac{\Omega}{a}\right), \quad (3.82)$$

$$B_{\omega\Omega} = Ca^{i\Omega/a-1} \left(-\frac{\Omega}{|\omega|}\right) e^{-i\frac{\Omega}{a} \ln |\omega|} e^{-\frac{\Omega}{a} \frac{\pi}{2}} \Gamma\left(i\frac{\Omega}{a}\right). \quad (3.83)$$

Assim, escrevemos o coeficiente de Bogoliubov  $A_{\omega\Omega}$  em função de  $B_{\omega\Omega}$  como

$$|A_{\omega\Omega}|^2 = e^{2\pi\Omega/a} |B_{\omega\Omega}|^2. \quad (3.84)$$

Usando a relação (E.5) na forma contínua temos

$$\int_0^{\infty} d\omega \left( A_{\omega\Omega} A_{\omega\Omega'}^\dagger - B_{\omega\Omega} B_{\omega\Omega'}^\dagger \right) = \delta(\Omega - \Omega'), \quad (3.85)$$

mas como  $\Omega = \Omega'$ , então

$$\int_0^\infty d\omega (|A_{\omega\Omega}|^2 - |B_{\omega\Omega}|^2) = \delta(0). \quad (3.86)$$

Substituindo o resultado (3.84) na relação (3.86), obtemos

$$\int_0^\infty d\omega |B_{\omega\Omega}|^2 = \frac{\delta(0)}{(e^{2\pi\Omega/a} - 1)}. \quad (3.87)$$

O resultado (3.87) é suficiente para respondermos nossa questão inicial: *quantas partículas um observador acelerado vê no vácuo de Minkowski?* Portanto, basta plugarmos o mesmo na equação (3.54), obtendo finalmente

$$N_\Omega = \langle 0_M | \hat{b}_\Omega^\dagger \hat{b}_\Omega | 0_M \rangle = \int_0^\infty d\omega |B_{\omega\Omega}|^2 = \frac{\delta(0)}{(e^{2\pi\Omega/a} - 1)}. \quad (3.88)$$

O “número de partículas” obtido com a expressão (3.88) destaca o ponto que levantamos com a discussão da interpretação física do operador número: o mesmo é uma *densidade de partículas* no contínuo (ver Apêndice D). Dessa forma, o fator divergente  $\delta(0)$  (ver comentário feito na Nota de Rodapé 9 da Subseção 3.2.1) seria proporcional a um volume  $V \equiv L$  (por termos feito o tratamento em 2 D) se realizássemos a quantização em uma “caixa” finita de volume  $V \equiv L$ . Ou seja, discretizaríamos o espaço-tempo e, então,  $\delta(0) \rightarrow \frac{V}{2\pi}$  (ver equação (D.21)). Portanto, a densidade média de partículas  $n_\Omega$ , por unidade de volume ( $V \equiv L$ ) e de frequência<sup>13</sup>, fica

$$n_\Omega = \frac{N_\Omega}{V/2\pi} = \frac{1}{(e^{2\pi\Omega/a} - 1)}. \quad (3.89)$$

Essa densidade é exatamente idêntica a *distribuição de Planck* para um gás de fótons. Como fizemos a quantização do campo escalar de Klein-Gordon para partículas sem massa, esse resultado confirma que as mesmas obedecem a estatística de Bose-Einstein e correspondem a um estado térmico de temperatura

$$T_U \equiv \frac{a}{2\pi}. \quad (3.90)$$

Essa temperatura é chamada de *temperatura Unruh* e representa o banho térmico de partículas que um observador acelerado vê no vácuo de Minkowski.

Recuperando as unidades da temperatura (3.90), obtemos

$$T_U = \frac{\hbar}{k_B c} \frac{a}{2\pi}. \quad (3.91)$$

A análise dessa temperatura mostra que a aceleração necessária para produzir uma temperatura mensurável é enorme: para termos uma temperatura de  $T_U \sim 1K$  precisamos de uma aceleração

<sup>13</sup> Veja que, se recuperássemos as unidades do problema,  $n_\Omega$  seria não apenas uma densidade de partículas por unidade de volume ( $V \equiv L$ ) e de frequência, mas por unidade de frequência e de tempo. Isso porque, os fatores de conversão do Apêndice D equivalem ao elemento de volume do vetor de onda. Como  $\Omega = |K|c$ , teríamos  $\delta(0) \rightarrow \frac{V}{2\pi c}$ , que possui unidade de tempo  $T$ . Além disso, caso não dividíssemos pelo fator  $2\pi$  teríamos uma densidade de partículas por unidade de volume ( $V \equiv L$ ) e de frequência angular.

$a \sim 10^{20} \frac{m}{s^2}$ . Assim, qualquer medida direta desse fenômeno é muito difícil. Todavia, já existem propostas de medição direta do Efeito Unruh utilizando Eletrodinâmica Clássica [34]. Trabalhos como esse firmam que o Efeito Unruh não pode ser desconsiderado ou mesmo posto em dúvida e declaram a interpretação física mais fundamental do mesmo, de que o conceito de partícula é relativo: a existência ou não de partículas passa a depender do observador.

## 3.4 A radiação Hawking

Informalmente um buraco negro pode ser entendido como uma região do espaço-tempo que possui uma atração gravitacional tão forte que nada, nem mesmo a luz, consegue escapar. Dessa forma, somando a definição formal de buracos negros que vimos na Seção 2.8, podemos dizer que um buraco negro se comporta como um objeto passivo, no sentido que apenas absorve matéria e não a emite, possuindo assim temperatura nula. Porém, em 1975 Hawking mostrou que buracos negros são capazes de “emitir partículas”, irradiando-as assintoticamente no futuro com espectro térmico com relação a observadores estáticos no infinito. O trabalho de Hawking firmou que a RG, a Termodinâmica e a TQC estão profundamente interconectadas, dando o suporte e evidência necessários a TQCEC e a Termodinâmica de Buracos Negros, vistas respectivamente no presente e no próximo capítulo.

Na atual seção vamos apresentar a quantização do campo escalar não massivo para o colapso esfericamente simétrico de uma estrela, ver diagrama de Penrose 10. Esta abordagem segue as ideias do artigo original do Hawking [5]. Vamos nos basear nas seguintes Referências [3, 5, 13, 18–20, 22, 24, 31].

### 3.4.1 A radiação Hawking para o colapso esfericamente simétrico

Em seu trabalho [5] Hawking considerou a quantização do campo escalar não massivo para o colapso esfericamente simétrico de uma estrela formando um buraco negro de Schwarzschild, que pode ser visto na Figura 10. Dessa forma, a ideia da radiação Hawking consiste em, supondo um estado de vácuo inicial muito antes da formação do buraco negro, saber como a formação deste e de seu horizonte de eventos leva a criação de partículas e seu espectro de radiação para longos tempos após a estabilização do mesmo.

O espaço-tempo de Schwarzschild estendido é um espaço-tempo estático, porém o espaço-tempo de uma estrela colapsando esfericamente não. Entretanto, como discutimos na Seção 2.8, podemos descrever a métrica do exterior do colapso esfericamente simétrico com a métrica de Schwarzschild (2.42). Além disso, o espaço-tempo de um colapso esfericamente simétrico é estacionário em duas regiões distintas: no *infinito passado nulo*  $\mathcal{I}^-$ , antes do colapso e no *infinito futuro nulo*  $\mathcal{I}^+$ , após o colapso gravitacional. Assim, podemos “ensanduicar” o espaço-tempo de modo que tenhamos 3 diferentes regiões: passado (antes do colapso), presente

(colapso) e futuro (após o colapso). Essa divisão é primordial já que estamos interessados em observadores para a definição do campo escalar nessas regiões assintóticas. Com esse intuito, antes de mais nada, temos que resolver a equação de Klein-Gordon considerando a métrica de Schwarzschild.

### A equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Schwarzschild e sua quantização:

O espaço-tempo de Schwarzschild, cuja métrica vimos em (2.42), é um espaço-tempo com curvatura não nula<sup>14</sup>. Dessa forma, a equação de Klein-Gordon para o mesmo não é simples como em (3.8). Devemos usar a expressão geral para espaços curvos dada em (3.33) e, para  $m = 0$ , temos

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \right] \phi = \square \phi = 0. \quad (3.92)$$

Como  $\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta$ , ficamos com

$$\begin{aligned} \square \phi = \partial_t \left[ - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \partial_t \phi \right] + \frac{1}{r^2} \partial_r \left[ r^2 \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \partial_r \phi \right] \\ + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta [\sin \theta \partial_\theta \phi] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \phi = 0. \end{aligned} \quad (3.93)$$

A solução da equação (3.93) pode ser encontrada por meio do “ansatz”

$$\phi(t, r, \theta, \phi) = \frac{R(r_*, t)}{r} Y_m^l(\theta, \phi), \quad (3.94)$$

sendo  $R(r_*, t)$  escrito em função da coordenada tartaruga  $r_*$ , definida em (2.50) e  $Y_m^l(\theta, \phi)$  os *harmônicos esféricos*<sup>15</sup>. A substituição de (3.94) na equação (3.93) nos leva a

$$\begin{aligned} - \frac{r^2}{R} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \partial_t^2 R + \frac{r}{R} \partial_r \left[ r^2 \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \partial_r \left( \frac{R}{r} \right) \right] \\ + \frac{1}{Y_m^l \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta Y_m^l) + \frac{1}{Y_m^l \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 Y_m^l = 0 \end{aligned} \quad (3.96)$$

de onde, igualando as partes a  $l(l+1)$  e  $-l(l+1)$ , podemos obter as seguintes equações

$$\sin \theta \partial_\theta (\sin \theta Y_m^l) + \partial_\phi^2 Y_m^l + l(l+1) \sin^2 \theta Y_m^l = 0, \quad (3.97)$$

<sup>14</sup> Isso porque seu *tensor de Riemann* é não nulo. Ver comentário após a equação (2.6) e seu cálculo indireto na equação (2.43).

<sup>15</sup> Veja que os índices  $l, m \in \mathbb{Z}$  são índices discretos tais que  $|l| \geq |m|$  e  $m \in [-l, l]$ . Além disso, formam um conjunto ortonormal completo de acordo com

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_m^l(\theta, \phi) Y_{m'}^l(\theta, \phi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}, \quad (3.95)$$

ver equação (12.154) na Referência [35]. Para mais detalhes ver Referências [33, 35].

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_t^2 R + \frac{2M}{r^2} \left(\partial_r R - \frac{1}{r} R\right) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \partial_r^2 R - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0, \quad (3.98)$$

sendo que a equação (3.97) é exatamente a equação diferencial dos harmônicos esféricos<sup>16</sup>. Nesse ponto, podemos fazer a seguinte mudança de coordenadas  $\partial_r \rightarrow \partial_{r^*}$ , tal que

$$\partial_r = \frac{\partial_{r^*}}{\partial r} \partial_{r^*} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_{r^*}, \quad (3.99)$$

$$\partial_r^2 = \partial_r \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_{r^*} \right] = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \partial_{r^*}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \frac{2M}{r^2} \partial_{r^*}. \quad (3.100)$$

Substituindo em (3.98) obtemos

$$\left\{ (-\partial_t^2 + \partial_{r^*}^2) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \right\} R = [-\partial_t^2 + \partial_{r^*}^2 - V(r)] R = 0, \quad (3.101)$$

sendo  $V(r)$  uma espécie de “barreira de potencial” da forma

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right]. \quad (3.102)$$

A equação (3.101) não possui solução formal fechada. Entretanto, uma simples análise do potencial  $V(r)$  nos diz que

$$r \rightarrow 2M \Rightarrow r^* \simeq -\infty \Rightarrow V(r) \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Próximo de } H^+ \quad (3.103)$$

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow r^* \simeq +\infty \Rightarrow V(r) \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Próximo de } \mathcal{I}^\pm, \quad (3.104)$$

onde tomamos  $t \rightarrow \pm\infty$  na consideração da equação (3.104), respectivamente para  $\mathcal{I}^\pm$ . Logo, o potencial  $V(r)$  é “inexistente” nas regiões *futuro* e *passado infinitos nulos*  $\mathcal{I}^\pm$  (regiões de interesse para o nosso cálculo) e ainda no horizonte de eventos  $H^+$ . Nessas regiões a equação de Klein-Gordon fica escrita como

$$(-\partial_t^2 + \partial_{r^*}^2) R(r^*, t) = 0, \quad (3.105)$$

apresentando solução geral, tal como em (3.14) só que para 2 D, da forma

$$R(r^*, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i(\omega t - k r^*)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \begin{cases} e^{-i\omega u}, & k > 0 \\ e^{-i\omega v}, & k < 0 \end{cases} \quad (3.106)$$

onde utilizamos as coordenadas do cone de luz de Eddington-Finkelstein (2.51). Vale notar que, tendo em vista as soluções (3.106), estaremos considerando os *modos de frequência positiva* com relação a coordenada temporal  $t$  de Schwarzschild e, então, com relação ao vetor de Killing  $K = \partial_t$ .

Definidos os modos com os quais iremos trabalhar temos que definir quais deles utilizaremos para o nosso cálculo. Para entender a radiação Hawking estamos interessados numa

<sup>16</sup> Para mais detalhes, ver Referência [33], equação (8.810).

solução que sai do passado infinito nulo  $\mathcal{I}^-$  e chega no futuro infinito nulo  $\mathcal{I}^+$ . Portanto, utilizando a solução em Schwarzschild (3.94) e (3.106), vamos considerar os *modos do passado*, definidos sob a superfície  $\mathcal{I}^-$  e os *modos do futuro*, definidos sob a superfície  $\mathcal{I}^+$ , como

$$f_\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \frac{Y_m^l}{r} e^{-i\omega v}, \text{ vindo de } \mathcal{I}^- \quad (3.107)$$

$$g_\Omega \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} \frac{Y_m^l}{r} e^{-i\Omega u}, \text{ indo para } \mathcal{I}^+. \quad (3.108)$$

Observe que temos duas bases ortonormais  $\{f_\omega, f_\omega^*\}$  e  $\{g_\Omega, g_\Omega^*\}$ , pois

$$\begin{aligned} (f_\omega, f_{\omega'}) &= \delta_{mm'} \delta_{ll'} \delta(\omega - \omega') & (g_\Omega, g_{\Omega'}) &= \delta_{mm'} \delta_{ll'} \delta(\Omega - \Omega') \\ (f_\omega, f_\omega^*) &= 0 & (g_\Omega, g_\Omega^*) &= 0 \\ (f_\omega^*, f_{\omega'}^*) &= -\delta_{mm'} \delta_{ll'} \delta(\omega - \omega') & (g_\Omega^*, g_{\Omega'}^*) &= -\delta_{mm'} \delta_{ll'} \delta(\Omega - \Omega') \end{aligned} \quad (3.109)$$

Agora, antes de definirmos os campos, temos que nos ater ao fato de quais superfícies de Cauchy estaremos considerando para a definição dos mesmos como um conjunto completo e ortogonal. Dado o diagrama de Penrose da Figura 10, podemos ver que a superfície  $\mathcal{I}^-$  é uma superfície de Cauchy (porque seu *domínio de dependência*  $D$  equivale ao espaço-tempo completo  $M$ , ou seja,  $D(\mathcal{I}^-) = M$ ), porém  $\mathcal{I}^+$  não é (não há curvas causais que a cruzem que alcancem a região interior a  $H^+$ ). Entretanto, se considerarmos a superfície conjunta  $H^+ \cup \mathcal{I}^+$  temos uma superfície de Cauchy e podemos definir o campo escalar na mesma. Assim, podemos definir 3 conjuntos de modos:

$$\begin{cases} f_\omega: \text{modos definidos sobre } \mathcal{I}^- \\ g_\Omega: \text{modos definidos sobre } \mathcal{I}^+ \text{ e nulos sobre } H^+ \\ h_\Omega: \text{modos definidos sobre } H^+ \text{ e nulos sobre } \mathcal{I}^+ \end{cases},$$

sendo que os modos  $h_\Omega$  devem formar um conjunto ortonormal  $\{h_\Omega, h_\Omega^*\}$  sobre a superfície  $H^+$ . Note que, como os modos  $h_\Omega$  são definidos sobre o horizonte de eventos  $H^+$  e o mesmo não possui um vetor de Killing temporal ( $K = \partial_t$  é nulo no horizonte), a definição dos modos de frequência positiva com relação a essa superfície torna-se ambígua. Como estamos interessados nas medidas realizadas por observadores distantes não vamos utilizar os modos  $h_\Omega$ . Isso porque esses modos eventualmente atravessam o horizonte de eventos  $H^+$  e nunca alcançam o futuro infinito nulo  $\mathcal{I}^+$ . Além disso, como veremos a seguir, o resultado do espectro térmico esperado é alcançado sem a utilização dos mesmos. Mais ainda, devemos satisfazer  $(g_\Omega, h_\Omega) = 0$ ,  $(g_\Omega, h_\Omega^*) = 0$  e  $(g_\Omega^*, h_\Omega) = 0$ .

Finalmente, dados os modos  $f_\omega$ ,  $g_\Omega$  e  $h_\Omega$ , definidos em suas respectivas superfícies de Cauchy, temos dois conjuntos completos e ortogonais de funções:  $\{f_\omega, f_\omega^*\}$  e  $\{g_\Omega, g_\Omega^*\} \cup \{h_\Omega, h_\Omega^*\}$  de forma que podemos expandir, já quantizando os campos nessas regiões, como

$$\hat{\phi} = \sum_{l,m} \int d\omega (\hat{a}_\omega f_\omega + \hat{a}_\omega^\dagger f_\omega^*), \text{ em } \mathcal{I}^-, \quad (3.110)$$

$$\hat{\phi} = \sum_{l,m} \int d\Omega (\hat{b}_\Omega g_\Omega + \hat{b}_\Omega^\dagger g_\Omega^* + \hat{c}_\Omega h_\Omega + \hat{c}_\Omega^\dagger h_\Omega^*), \text{ em } \mathcal{I}^+ \cup H^+. \quad (3.111)$$

satisfazendo as relações de comutação  $[\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}] = [\hat{a}_\omega^\dagger, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = 0$ ,  $[\hat{b}_\Omega, \hat{b}_{\Omega'}] = [\hat{b}_\Omega^\dagger, \hat{b}_{\Omega'}^\dagger] = [\hat{c}_\Omega, \hat{c}_{\Omega'}] = [\hat{c}_\Omega^\dagger, \hat{c}_{\Omega'}^\dagger] = 0$ ,  $[\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega')$  e  $[\hat{b}_\Omega, \hat{b}_{\Omega'}^\dagger] = [\hat{c}_\Omega, \hat{c}_{\Omega'}^\dagger] = \delta(\Omega - \Omega')$ . Juntamente os estados de vácuo ficam  $|0_{pass}\rangle$ , tal que  $\hat{a}_\omega|0_{pass}\rangle = 0, \forall\omega$  e  $|0_{fut}\rangle$ , tal que  $\hat{b}_\Omega|0_{fut}\rangle = \hat{c}_\Omega|0_{fut}\rangle = 0, \forall\Omega$ .

A pergunta a ser feita agora é: *quantas partículas um observador no futuro infinito nulo vê no vácuo do passado infinito nulo?* Para responder a essa pergunta podemos fazer uso das transformações de Bogoliubov tal como vimos para o Efeito Unruh na Subseção 3.3. Porém, antes de respondê-la temos que responder a outra pergunta, que é intrinsecamente relacionada ao colapso esfericamente simétrico: *como podemos relacionar os modos futuro  $g_\Omega$  com os modos do passado  $f_\omega$ ?* Podemos simplesmente dizer que um modo  $g_\Omega$ , que chegou no infinito futuro nulo  $\mathcal{I}^+$ , viajou pelo espaço-tempo após abandonar o infinito passado nulo  $\mathcal{I}^-$  apenas passando pela estrela colapsando?

### De volta para o passado

Para descrever a radiação Hawking precisamos entender como a formação do buraco negro leva a criação de partículas no futuro assintótico, juntamente com seu espectro térmico. Traduzindo essa ideia para a formulação que fizemos precisamos expandir os *modos do futuro assintótico nulo  $g_\Omega$*  em termos dos *modos do passado assintótico nulo  $f_\omega$* . Vamos construir essa ideia agora.

Qual seria o trajeto de um sinal luminoso que fosse emitido no infinito passado nulo  $\mathcal{I}^-$ , passasse pela estrela colapsando e chegasse no infinito futuro nulo  $\mathcal{I}^+$ ? Podemos dizer que os modos  $f_\omega$  e  $g_\Omega$  seguiriam esse trajeto? Devido a existência do colapso gravitacional o tratamento da propagação de geodésicas nulas não é tão simples, principalmente para aquelas que passam pelo centro da estrela em tempos cada vez mais próximos da formação do horizonte de eventos. Essas geodésicas demoram cada vez mais para conseguir escapar para o infinito ( $t \rightarrow \infty$  e  $r \rightarrow \infty$ ), até o limite em que nunca escapam. Assim, algumas geodésicas adentram o buraco negro e ficam presas para sempre dentro do mesmo. Outras escapam para o infinito com um enorme desvio para o vermelho (representamos com  $\gamma$  a geodésica que alcança  $\mathcal{I}^+$  com  $t \rightarrow \infty$ ). E ainda algumas ficam tão próximas da singularidade que acabam por “formar” o horizonte de eventos do buraco negro (representada pela onda  $\gamma_H$ ). Essa ideia é expressa na Figura 11.

Como estamos interessados nas geodésicas que alcançam  $\mathcal{I}^+$  com influência do colapso, estamos interessados naquelas com altíssimas frequências (aquelas capazes de enfrentar e sobreviver ao enorme desvio para o vermelho gravitacional) e que se acumulam próximas ao horizonte de eventos. Elas são representadas como superfícies de fase constante e nos permitem o uso da *aproximação de óptica geométrica*<sup>17</sup>. A utilização dessa aproximação nos

<sup>17</sup> A aproximação de óptica geométrica consiste no fato de que, dada uma solução de onda geral da forma

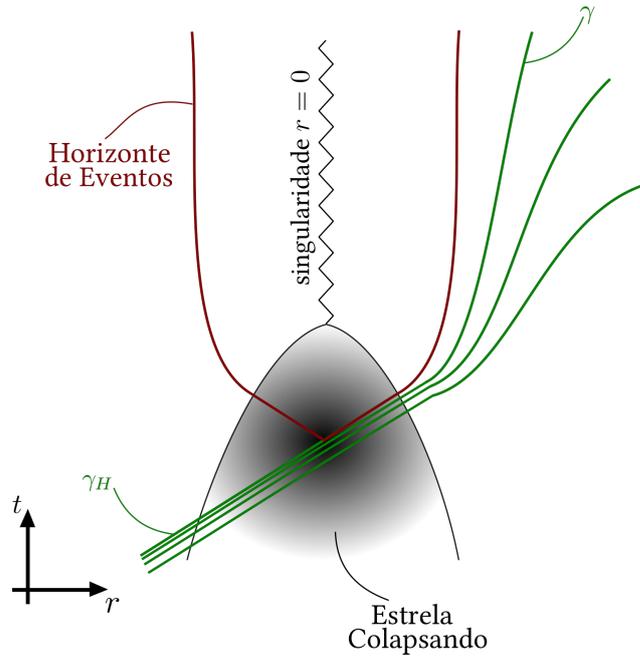


Figura 11 – Representação do colapso esféricamente simétrico de uma estrela no espaço-tempo  $t \times r$ . Estão representados raios de luz próximos da formação do buraco negro. O raio  $\gamma_H$  forma o horizonte de eventos e marca o limite entre os raios que ficam presos dentro do buraco negro e aqueles que alcançam o infinito. Fonte: Elaborada pela autora.

permite visualizar os modos  $f_\omega \propto e^{-i\omega v}$  e  $g_\omega \propto e^{-i\omega u}$  percorrendo trajetórias retilíneas, ou equivalentemente geodésicas nulas, ao longo de  $v = \text{cte}$  e  $u = \text{cte}$ .<sup>18</sup> Essas trajetórias podem ser vistas na Figura 12. Por fim, vale dizer que o nome *óptica geométrica* refere-se, literalmente, ao tratamento da luz por meio de raios. Note que, porque estamos trabalhando com frequências elevadas, podemos negligenciar o potencial  $V(r)$  (3.102) na equação (3.101). Portanto, o fato de que o campo  $\hat{\phi}$  é livre, implica que o mesmo não interage com a matéria do interior da estrela em colapso.

Para lidarmos com esse problema, vamos analisar a Figura 12. A mesma equivale ao diagrama de Penrose do colapso esféricamente simétrico (ver Figura 10), apenas sem a representação da estrela colapsando de modo que possamos analisar as geodésicas nulas que percorrem o diagrama. Nessa figura vemos que o *passado infinito nulo*  $\mathcal{I}^-$  representa a superfície a partir da qual as geodésicas nulas se originam e é descrito pelo parâmetro  $v$ . O *futuro infinito nulo*  $\mathcal{I}^+$  representa a superfície onde as geodésicas nulas terminam e é descrito pelo parâmetro  $u$ . Temos uma geodésica nula entrando no buraco negro e descrita pelo parâmetro  $v = v_1$  e outra saindo da matéria colapsando e descrita pelo parâmetro  $u = u_1$ . A superfície  $H^+$  representa o horizonte de eventos do buraco negro que se formou, ou seja, a geodésica nula

$\Psi = A e^{iF}$ , com uma superfície de fase constante  $F(x)$ , temos  $A$  variando lentamente com relação a fase  $F$ . A equação de onda  $\square\Psi = 0$ , nos diz que  $(\nabla_\mu F)(\nabla^\mu F) = 0$ , ou seja, as superfícies  $F(x)$  são nulas.

<sup>18</sup> Lembrando da definição das coordenadas do cone de luz  $u$  e  $v$  (2.51), sabemos que  $v = \text{cte}$  representa geodésicas nulas entrando no buraco negro e que  $u = \text{cte}$  representa geodésicas nulas saindo do mesmo, o que condiz com essa interpretação.

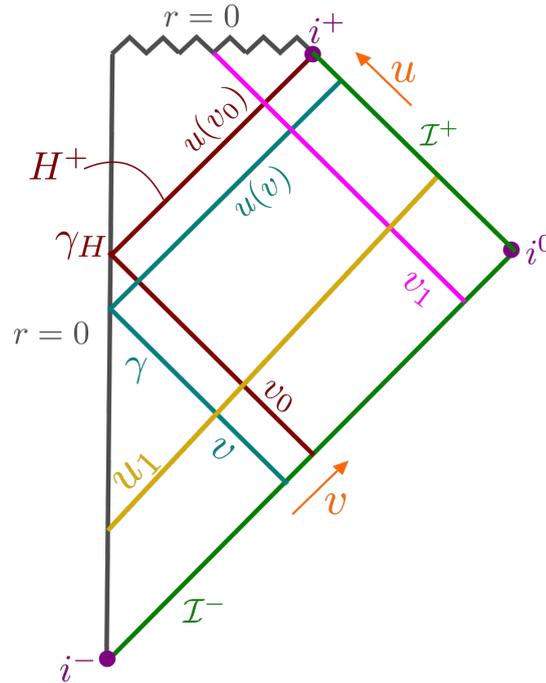


Figura 12 – Diagrama de Penrose representando o colapso esféricamente simétrico de uma estrela e as geodésicas nulas  $\gamma$  e  $\gamma_H$ . Fonte: Elaborada pela autora.

que começa em  $r = 0$  e alcança  $\mathcal{I}^+$  terminando no *futuro infinito tipo tempo*  $i^+$ . E por fim as duas geodésicas nulas  $\gamma$  e  $\gamma_H$  (com a correspondência para a Figura 11). A geodésica nula  $\gamma_H$  se origina em  $\mathcal{I}^-$  com parâmetro  $v_0$ , passa pelo centro da estrela colapsando e fica presa no horizonte de eventos (se tornando seu gerador) em direção a  $\mathcal{I}^+$  com parâmetro  $u = u(v_0)$ . Já a geodésica nula  $\gamma$  se origina em  $\mathcal{I}^-$  com parâmetro  $v$ , passa pelo centro da estrela colapsando e emerge em direção a  $\mathcal{I}^+$  com parâmetro  $u = u(v)$ . Note que geodésicas nulas que partem de  $\mathcal{I}^-$  com  $v > v_0$  entram no buraco negro e terminam na singularidade  $r = 0$  e vale repetir que estamos interessados nas geodésicas nulas tipo  $\gamma$  que passam muito próximas do horizonte de eventos alcançando  $\mathcal{I}^+$  para tempos muito longos.

Dito isso, vamos relacionar o parâmetro  $u$  com o parâmetro  $v$  encontrando  $u = u(v)$ . Faremos uma análise similar a das geodésicas nulas da Seção 2.7.1, utilizando alguns de seus resultados. Atentando-nos a geodésica com  $v = v_1 = \text{cte}$  (ver Figura 12) que cruza o horizonte de eventos, entrando no buraco negro, podemos encontrar  $u = u(\lambda)$ , sendo  $\lambda$  o parâmetro afim ao longo da mesma. Tomando a derivada de  $u$  com relação ao parâmetro afim  $\lambda$  temos

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{d(t - r_*)}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda} - \frac{dr_*}{dr} \frac{dr}{d\lambda}. \quad (3.112)$$

Utilizando (2.48) com a escolha do sinal negativo mas com  $E > 0$ , (2.45) e (2.49), de forma que

$$\frac{dr}{d\lambda} = -E \quad , \quad \frac{dt}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E \quad , \quad \frac{dr_*}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad (3.113)$$

encontramos

$$\frac{du}{d\lambda} = 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E. \quad (3.114)$$

Com o intuito de integrarmos a expressão (3.114), em termos de  $u$  e  $\lambda$ , precisamos reescrever o termo de dependência em  $r$ . Então, utilizando novamente a expressão (2.48), podemos integrá-la de  $r = 2M$  até um  $r$  qualquer de modo que o parâmetro afim  $\lambda$  seja nulo para  $r = 2M$ . Assim,

$$r - 2M = -E\lambda, \quad (3.115)$$

onde  $\lambda < 0$  para  $r > 2M$ . Dessa forma, podemos reescrever a equação (3.114) como

$$\frac{du}{d\lambda} = 2E - \frac{4M}{\lambda}. \quad (3.116)$$

E, integrando (3.116) obtemos

$$u(\lambda) = 2E\lambda - 4M \ln \left( \frac{\lambda}{C_1} \right), \quad (3.117)$$

sendo  $C_1$  uma constante de integração negativa. Os valores de  $u(\lambda)$  nas regiões de interesse são

$$u(\lambda) \simeq \begin{cases} -4M \ln \left( \frac{\lambda}{C_1} \right), & \text{próximo de } H^+(\lambda = 0) \\ 2E\lambda, & \text{distante de } H^+(\lambda < 0). \end{cases} \quad (3.118)$$

Vale notar que a coordenada nula  $u$  vale  $-\infty$  no passado infinito nulo  $\mathcal{I}^-$  e  $\infty$  no horizonte de eventos  $H^+$ .

Mas como vamos obter  $u = u(v)$  a partir de  $u = u(\lambda)$ ? O parâmetro  $\lambda$  é o parâmetro de distância afim  $\delta$  entre as geodésicas que saem da estrela colapsando percorrendo  $u = u(v_0)$  e  $u = u(v)$  e é constante ao longo dessas geodésicas por todo o espaço-tempo em questão. Podemos entender isso pensando na geodésica nula  $v = v_1$  que entra no buraco negro. A geodésica  $v_1$  cruza a geodésica  $u(v)$  antes de cruzar o horizonte  $u = u(v_0)$ , logo existe um parâmetro afim  $\lambda = \lambda(v)$  tal que

$$u[\lambda(v)] = -4M \ln \left[ \frac{\lambda(v)}{C_1} \right], \quad (3.119)$$

e  $\lambda(v_0) = 0$  já que  $u[\lambda(v_0)] \rightarrow \infty$  no horizonte. Portanto a separação afim  $\delta$  entre as geodésicas  $u(v)$  e  $u(v_0)$  é  $\delta = \lambda(v) - \lambda(v_0) = \lambda(v)$ .

Tal como fizemos para a geodésica nula entrando no buraco negro podemos definir uma geodésica com  $u = u_1 = \text{cte}$ , saindo da estrela colapsando, de modo que a coordenada  $v$  seja função de um novo parâmetro afim, ou seja, de forma que  $v = v(\lambda')$ , sendo  $\lambda'$  o parâmetro afim dessa geodésica. Tomando a derivada de  $v$  com relação a esse parâmetro temos

$$\frac{dv}{d\lambda'} = \frac{d(t + r_*)}{d\lambda'} = \frac{dt}{d\lambda'} + \frac{dr_*}{dr} \frac{dr}{d\lambda'}. \quad (3.120)$$

Utilizando (2.48) com a escolha do sinal positivo, com  $E > 0$ , (2.45) e (2.49), com relação ao parâmetro afim  $\lambda'$ , de forma que

$$\frac{dr}{d\lambda'} = E \quad , \quad \frac{dt}{d\lambda'} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E \quad , \quad \frac{dr_*}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad (3.121)$$

encontramos

$$\frac{dv}{d\lambda'} = 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E. \quad (3.122)$$

Como estamos interessados na região bem distante da estrela colapsando, ou seja, no passado infinito assintótico  $\mathcal{I}^-$  (que equivale ao limite  $r \rightarrow \infty$  e  $t \rightarrow -\infty$ ), a coordenada  $v$  pode ser escrita em função de  $\lambda'$  como

$$v(\lambda') \simeq 2E\lambda'. \quad (3.123)$$

Tomando  $\lambda' = \lambda'(v)$  e  $\lambda' = \lambda'(v_0)$  como os parâmetros afim quando a geodésica  $u = u_1$  cruza as geodésicas entrando na estrela colapsando  $v$  e  $v_0$ , podemos definir sua separação da forma

$$\delta = \lambda'(v) - \lambda'(v_0) = \frac{v - v_0}{2E} = \frac{v_0 - v}{C_2}, \quad (3.124)$$

tal que  $C_2 = -2E < 0$ .

Portanto, se pensarmos que estamos percorrendo as geodésicas  $u$  e  $u_0$  **de volta para o passado**, passando pelo colapso gravitacional e chegando até as geodésicas  $v$  e  $v_0$  a separação afim entre as geodésicas deve permanecer constante ao longo de todo o percurso, de forma que

$$\delta = \lambda(v) = \frac{v_0 - v}{C_2}. \quad (3.125)$$

Finalmente, substituindo (3.125) em (3.119) obtemos a tão esperada relação entre  $u$  e  $v$  como

$$u(v) = -4M \ln \left( \frac{v_0 - v}{C} \right), \quad (3.126)$$

tal que  $C = C_1 C_2 > 0$ .

Dessa forma, chegamos a relação necessária para relacionar os modos  $g_\Omega \propto e^{-i\Omega u}$  com relação ao parâmetro afim  $v$  em  $\mathcal{I}^-$ , possibilitando que escrevamos

$$g_\Omega \propto \begin{cases} e^{i\frac{\Omega}{\kappa} \ln\left(\frac{v_0-v}{C}\right)} & \text{para } v < v_0, \\ 0, & \text{para } v > v_0, \end{cases} \quad (3.127)$$

onde já substituímos  $\kappa = \frac{1}{4M}$ . Esse resultado confirma o que supomos desde o começo dessa análise, de que não há modos que alcancem  $\mathcal{I}^+$  oriundos de dentro do buraco negro.

### Calculando o número de partículas

Após todos esses cálculos, voltamos a pergunta: *quantas partículas do vácuo do passado assintótico são esperadas no futuro assintótico?* Assim, podemos prosseguir exatamente como na Seção 3.3, apenas trocando as variáveis da análise. Aqui, os coeficientes de Bogoliubov, tal como em (3.65), são obtidos por

$$\begin{aligned} g_\Omega(v) &= \int_0^\infty d\omega (A_{\omega\Omega} f_\omega + B_{\omega\Omega} f_\omega^*) \\ &= \int_0^\infty d\omega \left( A_{\omega\Omega} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{-i\omega v} + B_{\omega\Omega} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{i\omega v} \right), \end{aligned} \quad (3.128)$$

onde a única modificação se dá na redefinição do modo  $g_\Omega$  como função direta de  $v$ . A análise segue completamente equivalente, sendo que temos as relações das transformadas de Fourier entre os modos  $g_\Omega(v)$  e  $\tilde{g}_\Omega(\omega)$  tais como (3.66) e (3.67), a expansão utilizando essas transformadas tal como em (3.68) e, então, podemos escrever os coeficientes de Bogoliubov como

$$A_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \tilde{g}_\Omega(\omega) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{i\omega v} g_\Omega(v), \quad (3.129)$$

$$B_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \tilde{g}_\Omega(-\omega) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-i\omega v} g_\Omega(v). \quad (3.130)$$

A expressão equivalente a (3.71) fica definida por meio de (3.127), como

$$g_\Omega(v) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} e^{i\frac{\Omega}{\kappa} \ln\left(\frac{v_0-v}{C}\right)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} \left(\frac{v_0-v}{C}\right)^{\frac{i\Omega}{\kappa}}, \quad v < v_0. \quad (3.131)$$

Substituindo nos coeficientes de Bogoliubov (3.129) e (3.130) temos

$$A_{\omega\Omega} = D \int_{-\infty}^{v_0} dv e^{i\omega v} \left(\frac{v_0-v}{C}\right)^{\frac{i\Omega}{\kappa}}, \quad (3.132)$$

$$B_{\omega\Omega} = D \int_{-\infty}^{v_0} dv e^{-i\omega v} \left(\frac{v_0-v}{C}\right)^{\frac{i\Omega}{\kappa}}, \quad (3.133)$$

sendo  $D = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}}$ . Novamente, vamos focar nos cálculos relacionados ao coeficiente  $A_{\omega\Omega}$ . Fazendo uma mudança de variáveis da forma  $V = v_0 - v$  para (3.132), ficamos com

$$\begin{aligned} A_{\omega\Omega} &= D \int_0^{\infty} dV e^{i\omega v_0} e^{-i\omega V} \left(\frac{V}{C}\right)^{\frac{i\Omega}{\kappa}} \\ &= \frac{D}{\kappa C^{\frac{i\Omega}{\kappa}}} e^{i\omega v_0} \int_0^{\infty} dV \left(\frac{\Omega}{\omega}\right) e^{-i\omega V} V^{\frac{i\Omega}{\kappa}-1}. \end{aligned} \quad (3.134)$$

sendo que integramos por partes após a segunda igualdade. Essa integral, tal como (3.74), não é trivial e, para resolvê-la, os cálculos seguem exatamente como feito na Seção 3.3.2: fazemos uso da *função Gama* utilizando (3.76), da definição (3.78) e da mudança de variáveis (3.79) e (3.80) apenas trocando  $a \rightarrow \kappa$ . Dessa forma, podemos escrever (3.134) como

$$A_{\omega\Omega} = \frac{D}{\kappa C^{\frac{i\Omega}{\kappa}}} e^{i\omega v_0} \left(\frac{\Omega}{|\omega|}\right) e^{-i\frac{\Omega}{\kappa} \ln|\omega|} e^{\frac{\Omega}{\kappa} \frac{\pi}{2}} \Gamma\left(i\frac{\Omega}{\kappa}\right). \quad (3.135)$$

Similarmente escrevemos o coeficiente  $B_{\omega\Omega}$  da forma

$$B_{\omega\Omega} = \frac{D}{\kappa C^{\frac{i\Omega}{\kappa}}} e^{-i\omega v_0} \left(-\frac{\Omega}{|\omega|}\right) e^{-i\frac{\Omega}{\kappa} \ln|\omega|} e^{-\frac{\Omega}{\kappa} \frac{\pi}{2}} \Gamma\left(i\frac{\Omega}{\kappa}\right). \quad (3.136)$$

Assim, escrevemos o coeficiente de Bogoliubov  $A_{\omega\Omega}$  em função de  $B_{\omega\Omega}$  como

$$|A_{\omega\Omega}|^2 = e^{2\Omega\pi/\kappa} |B_{\omega\Omega}|^2, \quad (3.137)$$

exatamente como em (3.84).

Portanto, é direto que podemos obter o número de partículas do passado assintótico  $\mathcal{I}^-$  no futuro assintótico  $\mathcal{I}^+$  da forma

$$N_\Omega = \langle 0_{pass} | \hat{b}_\Omega^\dagger \hat{b}_\Omega | 0_{pass} \rangle = \int_0^\infty d\omega |B_{\Omega\omega}|^2 = \frac{\delta(0)}{(e^{2\pi\Omega/\kappa} - 1)}. \quad (3.138)$$

Novamente, esse “número de partículas” representa uma *densidade de partículas* de modo que o fator divergente  $\delta(0)$  pode ser atribuído a um volume  $V \equiv L$  (porque estamos considerando a integração em  $r_*$ ). Portanto, tal como discutido no efeito Unruh, a densidade média de partículas, por unidade de volume ( $V \equiv L$ ) e de frequência<sup>19</sup>, fica

$$n_\Omega = \frac{N_\Omega}{V/2\pi} = \frac{1}{(e^{2\pi\Omega/\kappa} - 1)}. \quad (3.139)$$

Esse é o espectro de Planck, de partículas que obedecem a estatística de Bose-Einstein, com *temperatura Hawking*

$$T_H \equiv \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M}. \quad (3.140)$$

Portanto um buraco negro é visto como um corpo que emite partículas e, então, radiação no futuro assintótico com temperatura  $T_H$  proporcional ao inverso de sua massa  $M$ . Vale dizer que esse resultado não possui nenhum detalhe remanescente do colapso esfericamente simétrico.

### 3.4.2 Uma pequena discussão acerca da radiação Hawking

Acabamos de ver o mesmo argumento utilizado no Efeito Unruh para justificar a divergência infinita do resultado (3.138). Entretanto, como comentamos no final do Apêndice D, podemos justificar esse resultado apenas pensando na interpretação física do operador número  $\hat{N}_\Omega \equiv \hat{b}_\Omega^\dagger \hat{b}_\Omega$  [24]. Como o valor esperado do mesmo equivale a uma *densidade de partículas*  $n_\Omega$ , se  $\delta(\Omega - \Omega')$  for escrita como

$$\delta(\Omega - \Omega') = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{dt}{2\pi} e^{i(\Omega - \Omega')t}, \quad (3.141)$$

podemos reescrever formalmente a expressão (3.86) da forma

$$\int_0^\infty d\omega (|A_{\omega\Omega}|^2 - |B_{\omega\Omega}|^2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi}. \quad (3.142)$$

Assim, reescrevemos  $N_\Omega$  (3.138) tal que

$$N_\Omega = \int_0^\infty d\omega |B_{\Omega\omega}|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi} \frac{1}{(e^{2\pi\Omega/\kappa} - 1)}, \quad (3.143)$$

de modo que  $n_\Omega$  (3.139) fique escrita da forma

$$n_\Omega = \frac{N_\Omega}{T/2\pi} = \frac{1}{(e^{2\pi\Omega/\kappa} - 1)}, \quad (3.144)$$

<sup>19</sup> Ver Nota de Rodapé 13 na Seção 3.3.

representando exatamente a densidade de partículas por unidade de tempo e de frequência, que discutimos nos finais das Subseções 3.3.2 e 3.4.1, com unidades de acordo com a Nota de Rodapé 13.

Outro tópico notável equivale ao fato de que o resultado (3.140) não possui nenhum detalhe remanescente do colapso esfericamente simétrico. Isso leva a outras possíveis deduções para a Radiação Hawking, como a *radiação Hawking para o buraco negro eterno* [3, 20]. Essa dedução considera o buraco negro no espaço-tempo de Schwarzschild estendido (ver Figura 9) e é dita “completamente equivalente ao Efeito Unruh” porque equivale a todo o desenvolvimento da Seção 3.3 apenas trocando a aceleração de módulo  $a$  por  $\kappa$ . Pode-se mostrar que, para que um observador permaneça estático fora de um buraco negro de Schwarzschild, ele deve possuir uma aceleração radial constante apontando para fora do mesmo [13, 14]. Nesse caso a temperatura  $T_H$  (3.140) é medida por um observador estático assintoticamente distante do buraco negro em questão. Esses observadores seguem o campo de Killing  $K = \partial_t$ , possuem modos de frequência positiva com relação ao mesmo, tal como o observador acelerado em Minkowski, possuem um vácuo chamado de *vácuo de Boulware*  $|0_B\rangle$ , similar ao vácuo de Rindler do observador acelerado  $|0_R\rangle$ , e não contém partículas do ponto de vista de um observador estático fora do buraco negro. Utilizando o sistema de coordenadas de Kruskal-Szekeres (2.60) podemos expandir o campo  $\hat{\phi}$  por todo o espaço-tempo, definir modos de frequência positiva com relação ao vetor  $K_K = \partial_T$  e definir um estado de vácuo chamado de *vácuo de Hartle-Hawking*  $|0_K\rangle$ , similar ao vácuo de Minkowski  $|0_M\rangle$ , que contém partículas do ponto de vista de um observador distante e estático fora do buraco negro. Entretanto, esse estado e essa expansão não são associados a um observador seguindo um campo de Killing (afinal o espaço-tempo de Schwarzschild possui apenas um campo de Killing relacionado à simetria temporal  $K = \partial_t$ ) de modo que não podemos definir partículas com relação ao mesmo de acordo com a nossa definição<sup>20</sup>. Ainda assim, a interpretação física da temperatura de um buraco negro eterno é consistente desde que pensemos que o mesmo foi formado a partir do colapso esfericamente simétrico e confinado em um sistema de forma que tenha atingido o equilíbrio térmico com temperatura  $T_H$  (3.140). Outra dedução para o caso do buraco negro eterno foi feita por Unruh [4], na qual ele define um estado de vácuo  $|0_U\rangle$  no horizonte de eventos passado  $H^-$ . Esse estado possui modos de frequência positiva com relação ao vetor  $\partial_U$  (que é um vetor de Killing no horizonte de eventos passado  $H^-$ ) e corresponde a um fluxo térmico de partículas deixando a região do buraco negro<sup>21</sup>.

Além disso, vale notar que o resultado do espectro de Planck que obtivemos (3.139) representa o espectro de um corpo negro perfeito. Isso porque utilizamos uma série de aproximações para alcançarmos tal resultado, como a desconsideração do retroespalhamento pelo

<sup>20</sup> Ver definição de partículas no final da Seção 3.2 e ver que  $K_K = \partial_T$  não equivale a um campo de Killing, tal como discutido na Subseção 2.7.2.

<sup>21</sup> Para uma análise detalhada dos vácuos de *Boulware*  $|0_B\rangle$ , de *Hartle-Hawking*  $|0_K\rangle$  e *Unruh*  $|0_U\rangle$  ver Referência [36].

potencial  $V(r)$  (3.102), ao considerarmos apenas os modos de frequência transmitidos. Caso quiséssemos considerar o mesmo, ao imaginarmos a *propagação de volta para o passado* de um modo  $g_\Omega$  teríamos que considerar que uma parte do mesmo é espalhada  $g_\Omega^R$  pelo potencial  $V(r)$  para fora da estrela colapsando e alcança o passado infinito nulo  $\mathcal{I}^-$  com praticamente a mesma frequência  $\Omega$  e outra parte entra na estrela colapsando  $g_\Omega^T$ , passa pelo centro  $r = 0$  e se propaga de volta para o passado até alcançar  $\mathcal{I}^-$ . Ao voltar para o futuro, o modo  $g_\Omega^T$  emerge da estrela em colapso um pouco antes da formação do horizonte de eventos e então sofre um enorme desvio para o vermelho até alcançar  $\mathcal{I}^+$ . Dessa forma, uma fração  $1 - \Gamma_{\Omega,l}$  do modo  $g_\Omega$ , correspondente a  $g_\Omega^R$  será espalhada e outra  $\Gamma_{\Omega,l}$  será transmitida, correspondente ao modo  $g_\Omega^T$ . Assim, a equação (E.5) na forma contínua<sup>22</sup>, seria interpretada como uma conservação de probabilidade de modo que ficasse escrita como

$$\int_0^\infty d\omega \left( A_{\omega\Omega,l} A_{\omega\Omega',l} - B_{\omega\Omega,l} B_{\omega\Omega',l}^\dagger \right) = \delta(\Omega - \Omega') \Gamma_{\Omega,l}. \quad (3.145)$$

Esse fator faz com que o espectro (3.139) fique

$$n_\Omega = \frac{\Gamma_{\Omega,l}}{(e^{2\pi\Omega/\kappa} - 1)}, \quad (3.146)$$

de forma que se torne um *espectro de corpo cinza*. Expressões analíticas desse fator são difíceis de se obter (para mais detalhes ver discussões nas Referências [3, 13, 20]). Entretanto, para o tratamento que propusemos nesse trabalho e para as considerações do próximo capítulo, o resultado aproximado (3.139) já é suficiente.

Recuperando as unidades da temperatura (3.140), obtemos

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{G k_B} \frac{1}{8\pi M}. \quad (3.147)$$

Calculando a temperatura para buracos negros com determinadas massas, como a massa de Planck  $(m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}})$ , a massa do Sol ou mesmo a massa do buraco negro do centro da Via Láctea, obtemos a Tabela 1<sup>23</sup>. Vemos que buracos negros com massas realistas ou de objetos conhecidos possuem temperaturas de radiação Hawking baixíssimas, temperaturas tais que  $T \ll T_{RCF} \sim 2.7255K$  (sendo  $T_{RCF}$  a temperatura da *radiação cósmica de fundo*<sup>24</sup>). Como a radiação cósmica de fundo permeia o espaço-tempo, qualquer valor de temperatura muito menor que a mesma é dificilmente mensurável. Já buracos negros com massas extremamente pequenas possuem temperaturas altíssimas, tais que  $T \sim T_P = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}}$  (sendo  $T_P$  a temperatura de Planck).

Embora não tenhamos nenhum tipo de medida direta da radiação Hawking, análogos teóricos e experimentais ao efeito não faltam. Já em 1981 Unruh se propôs a modelar, teoricamente, o movimento de ondas sonoras em um fluxo convergente de ondas [38]. Nesse modelo

<sup>22</sup> Note que representamos o índice  $l$ , relacionado ao potencial  $V(r)$  (3.102), nos coeficientes de Bogoliubov  $A_{\omega\Omega,l}$  e  $B_{\omega\Omega,l}$  da expressão (3.145).

<sup>23</sup> O valor para a massa do buraco negro do centro da Via Láctea foi retirado da Referência [37].

<sup>24</sup> A radiação cósmica de fundo é uma radiação eletromagnética que preenche isotropicamente e remete-se ao início temporal do universo.

Tabela 1 – Cálculo das temperaturas para buracos negros com determinadas massas.

	<b>M (kg)</b>	<b>T (K)</b>
<b>Massa de Planck</b>	$2.2 \cdot 10^{-8}$	$5.6 \cdot 10^{30}$
<b>Sol</b>	$2.0 \cdot 10^{30}$	$6.2 \cdot 10^{-8}$
<b>Buraco Negro do centro da Via Láctea</b>	$4.5 \cdot 10^6 M_{\odot}$ $9.0 \cdot 10^{36}$	$1.4 \cdot 10^{-14}$

Fonte: Elaborada pela autora.

haveria a observação de um espectro térmico de ondas sonoras, tal como o espectro térmico de partículas da radiação Hawking, saindo de um horizonte sônico, representando o horizonte de eventos de um buraco negro, criado em um fluido. Em 2010, um grupo de pesquisadores (Silke Weinfurtner, Edmund W. Tedford, Matthew C. J. Penrice, Gregory A. Lawrence e o próprio Unruh) fez a primeira observação experimental da radiação Hawking na água [39]. Mais recentemente, em 2016, Jeff Steinhauer observou experimentalmente a emissão de radiação Hawking emanando de um condensado de Bose-Einstein atômico [40]. Em todos esses análogos, teóricos e/ou experimentais, o principal ponto é a existência de uma métrica efetiva que proporcione o surgimento de um horizonte. Portanto, além dos inúmeros modos de dedução da Radiação Hawking, temos motivos mais do suficientes para firmarmos a mesma como um fenômeno chave para a TQCEC, para a Termodinâmica de Buracos Negros e como fenômeno teste para o que esperamos de uma Teoria Quântica da Gravitação.

## 4 TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS

A Termodinâmica de Buracos Negros possui suas origens na década de 70 quando uma série de trabalhos [6, 41, 42] começaram a apontar as semelhanças entre as grandezas observáveis dos buracos negros e suas leis com as grandezas e leis da Termodinâmica Clássica. A ideia de se atribuir entropia a um buraco negro surgiu, além do fato de que tudo o que conhecemos possui entropia, de uma questão fundamental: a não violação da Segunda Lei da Termodinâmica Clássica ao “perder-se” entropia do universo quando um corpo adentrasse um buraco negro. Essa ideia é creditada a Bekenstein [43]. Em 1973, Bekenstein postulou que um buraco negro teria entropia  $S_{BN}$  proporcional a área  $A$  da forma

$$S_{BN} = \frac{\eta k_B A}{l_P^2}, \quad (4.1)$$

sendo  $\eta$  uma constante numérica e  $l_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$  o comprimento de Planck [6]. Para ele a entropia do buraco negro seria uma medida da informação sobre o interior do mesmo, inacessível para um observador externo. Assim a perda de entropia de um corpo a ser engolido seria compensada pelo aumento da entropia, e então da área do horizonte de eventos, do buraco negro. Possuindo entropia, o buraco negro possuiria temperatura. Nesse mesmo trabalho, Bekenstein postulou a Segunda Lei da Termodinâmica Generalizada, impondo que a variação da entropia de um buraco negro somada a variação da entropia do exterior nunca diminuiriam. Entretanto, ele não elaborou uma explicação física para tais postulados, apenas suportou sua ideia com elementos de teoria da informação e experimentos pensados. Por essa razão, em conjunto com a interpretação clássica de que um buraco negro absorve todo e qualquer tipo de matéria, não emitindo nada e a recém descoberta, por Hawking [44], de que o horizonte de eventos de um buraco negro nunca diminui, a entropia e a temperatura de um buraco negro eram tratadas apenas como analogias ou até mesmo sendo vistas como especulação.

Foi apenas em 1975, com a descoberta da Radiação Hawking [5], que os buracos negros saíram da escuridão e ganharam enfim seu espectro térmico, emitindo partículas, como vimos na Seção 3.4. A partir daí a Termodinâmica de Buracos Negros se consolidou como uma área de intensa pesquisa. Foram elaboradas as Leis da Termodinâmica de Buracos Negros, representando o paralelo entre os observáveis dos mesmos e os equivalentes físicos de grandezas termodinâmicas. Propriedades simples, como a capacidade térmica de um buraco negro, tornaram-se intrigantes impossibilitando seu equilíbrio térmico com um reservatório de energia e implicando inclusive na evaporação ou crescimento sem fim dos mesmos. A evaporação de um buraco negro é um ponto muito contraditório porque, quando completa, leva a paradoxos como o da perda de informação<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> O paradoxo da perda da informação está associado a evaporação de um buraco negro. Ao evaporar

Iniciaremos esse capítulo com as leis da termodinâmica de buracos negros na Seção 4.1, onde iremos abordar o paralelo com as leis da Termodinâmica Clássica, esta última com base na Referência [45] e suas devidas modificações, com base nas Referências [20, 46, 47]. Finalizaremos com uma discussão acerca do processo de evaporação ou aumento sem fim da massa de buracos negros, em alguns casos específicos, na Seção 4.2, com base nas Referências [3, 13, 20, 46]. Reforçamos que não pretendemos explicar as implicações físicas<sup>2</sup> da ocorrência ou não da evaporação completa de um buraco negro, apenas trataremos o problema termodinamicamente. Mostraremos porque um buraco negro não alcança o equilíbrio trocando energia com um reservatório térmico e modelaremos o comportamento da massa de um buraco negro de Schwarzschild quando no espaço vazio e quando imerso na radiação cósmica de fundo em duas situações distintas: com temperatura constante e com temperatura dependente do tempo.

## 4.1 Leis da termodinâmica de buracos negros

Após toda a discussão feita na Seção 3.4 mostramos que buracos negros de Schwarzschild emitem radiação com espectro térmico dado por (3.140). Portanto, temos motivos mais do que suficientes para tratar um buraco negro como um sistema termodinâmico com temperatura  $T$  e entropia  $S$ . Nessa seção vamos mostrar que podemos atribuir quantidades físicas que operam analogamente às grandezas termodinâmicas, fazendo o paralelo com as leis da Termodinâmica Clássica [45] e suas devidas modificações [18–20, 46, 47].

### A Lei Zero

A Lei Zero da Termodinâmica é a lei do equilíbrio térmico. Se dois sistemas estão em equilíbrio térmico com um terceiro eles estarão em equilíbrio térmico entre si. Assim, a temperatura de um sistema é a propriedade que determina se um sistema está em equilíbrio térmico com outros sistemas. No caso de um sistema único a Lei Zero diz que, para que o mesmo esteja em equilíbrio térmico, sua temperatura deve ser uniforme ao longo do mesmo.

Para a termodinâmica de buracos negros, assumindo a temperatura de um buraco negro como  $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ , sendo  $\kappa$  a gravidade superficial do mesmo, postulamos:

*A gravidade superficial  $\kappa$  de um buraco negro estacionário é constante ao longo de seu horizonte de eventos.*

No caso de um buraco negro de Schwarzschild a gravidade superficial vale  $\kappa = \frac{1}{4M}$ . O cálculo de  $\kappa$  para Schwarzschild e os cálculos referentes ao fato de que ela é constante ao longo do horizonte de eventos podem ser vistos no Apêndice A.

---

o mesmo perde seu horizonte de eventos, a entidade que “esconde” seus estados internos. Assim, a informação que entrou no buraco negro “desaparece” com a evaporação do mesmo.

<sup>2</sup> Ver Nota de Rodapé 1 do presente capítulo.

### A Primeira Lei

A Primeira Lei da Termodinâmica é a lei da conservação da energia. Ela pode ser escrita como

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W, \quad (4.2)$$

relacionando a variação da energia interna  $\Delta U$  com a troca de calor  $\Delta Q$  e trabalho  $\Delta W$  realizado ( $\Delta W > 0$ ) ou absorvido ( $\Delta W < 0$ ) pelo sistema. A versão diferencial da expressão (4.2), seguindo a definição usual da entropia  $dS = \frac{dQ}{T}$ , fica

$$dU = TdS - dW, \quad (4.3)$$

sendo  $U$  a energia interna,  $T$  a temperatura,  $S$  a entropia e  $W$  o trabalho.

Como a Primeira Lei é a lei da conservação da energia, para desenvolver sua versão para buracos negros temos que saber como relacionar seus observáveis e suas respectivas variações de forma a descrever como essas grandezas ficam quando perturbadas infinitesimalmente para um novo estado estacionário.

Para a termodinâmica de buracos negros, postulamos:

*Dado um buraco negro estacionário inicialmente de massa  $M$ , área  $A$  e gravidade superficial  $\kappa$ , variamos esses parâmetros de forma que*

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA. \quad (4.4)$$

Um buraco negro de Schwarzschild possui como parâmetro externo apenas a sua massa  $M$  e é descrito pela métrica (2.42). A área  $A$  de seu horizonte de eventos é dada pela intersecção das hiper-superfícies  $\Sigma_t$ , para  $t = \text{cte}$  e do horizonte de eventos  $H^+$ , definido para  $r = 2M$ . Assim a métrica induzida fica

$$ds^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.5)$$

com  $\sqrt{\gamma} = r^2 \sin \theta$ . Portanto a área é

$$A = \int_{H^+ \cup \Sigma_t} \sqrt{\gamma} d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta (2M)^2 \sin \theta = 16\pi M^2. \quad (4.6)$$

Variando a área com relação a massa  $M$  temos

$$dA = 32\pi M dM. \quad (4.7)$$

Rearranjando a expressão anterior chegamos a

$$dM = \frac{1}{32\pi M} dA = \frac{\kappa}{8\pi} dA. \quad (4.8)$$

Essa é a Primeira Lei da Termodinâmica para um buraco negro de Schwarzschild. Fazendo o paralelo com a Primeira Lei Clássica (4.3),  $M$  é o equivalente da energia  $U$ ,  $\kappa$  equivale a temperatura  $T$ ,  $A$  representa a entropia  $S$ .

Vale comentar que, de forma geral, formula-se a Primeira Lei da Termodinâmica de buracos negros com relação aos observáveis: massa  $M$ , carga  $Q$  e momento angular  $L^3$ . Assim ela é enunciada como

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dL + \Phi_H dQ. \quad (4.9)$$

Nessa expressão  $\Omega_H$  é a velocidade angular e  $\phi_H$  é o potencial elétrico na superfície do buraco negro. Fazendo o paralelo com a Primeira Lei Clássica (4.3),  $M$  é o equivalente da energia  $U$ ,  $\kappa$  equivale à temperatura  $T$ ,  $A$  representa a entropia  $S$  e  $\Omega_H$  e  $\Phi_H$ , em conjunto com suas respectivas variações de momento angular  $L$  e carga  $Q$ , representam o trabalho  $W$  realizado.

Voltando ao caso de Schwarzschild, como sabemos que  $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ , comparando (4.8) com (4.3), associamos a entropia  $S$  da forma

$$S = \frac{A}{4} = 4\pi M^2, \quad (4.10)$$

sendo diretamente proporcional a área, tal como a entropia postulada por Bekenstein (4.1). Recuperando as unidades de (4.10) ficamos com  $S = \frac{k_B c^3}{hG} \frac{A}{4}$  e verificamos que o fator numérico  $\eta$  da entropia de Bekenstein (4.1) vale  $\eta = \frac{1}{4}$ .

### A Segunda Lei

A Segunda Lei da Termodinâmica possui duas formulações históricas, a de Kelvin e a de Clausius, ambas baseadas em máquinas térmicas mas que levam a definição de entropia e de sua propriedade máxima de que

$$\delta S \geq 0, \quad (4.11)$$

ou seja, a variação de entropia do universo (sistema + exterior) é sempre positiva ou permanece nula.

Para buracos negros, assumia-se a segunda lei da termodinâmica de buracos negros como: *a área do horizonte de eventos de um buraco negro nunca decresce com o tempo, ou seja,  $\delta A \geq 0$  [41].* O que é provado de acordo com o *teorema da Área de Hawking* e que firma a relação entre a área  $A$  de um buraco negro e sua entropia  $S$ . Entretanto, Bekenstein [6, 42] propôs que

$$\delta S_{BH} + \delta S_{ext} \geq 0, \quad (4.12)$$

*a variação da entropia de um buraco negro, somada a variação da entropia do exterior nunca decrescem.* Que é conhecida como a *Segunda Lei da Termodinâmica Generalizada*.

<sup>3</sup> Ver Seção 2.8.

É importante notar que ela contempla a *radiação Hawking* porque a diminuição da entropia do buraco negro, devido a diminuição de sua massa e de sua área, é compensada pelo aumento da entropia do exterior.

### A Terceira Lei

A Terceira Lei da Termodinâmica possui várias formulações históricas. Aqui vamos citar apenas a *inacessibilidade do zero absoluto*. Segundo essa formulação clássica é impossível alcançarmos o zero absoluto através de um número finito de processos termodinâmicos.

Para buracos negros postula-se que:

*É impossível reduzir a gravidade superficial  $\kappa$  de um buraco negro a zero por um número finito de processos.*

As Leis da Termodinâmica de Buracos Negros possuem inúmeras demonstrações e fornecem uma extensa discussão, tópicos que vão além dos objetivos da presente dissertação. Mais detalhes podem ser encontrados nas Referências [6, 41, 42]. Agora, relacionadas as Leis da Termodinâmica de Buracos Negros com a Leis da Termodinâmica Clássica, vamos discutir a evaporação ou o aumento da massa de Buracos Negros de Schwarzschild num contexto termodinâmico.

## 4.2 A inacessibilidade do equilíbrio térmico com um reservatório de energia e suas implicações

Na Termodinâmica Clássica corpos trocando energia com um reservatório térmico alcançam o equilíbrio térmico estável, ou seja, adquirem a temperatura do reservatório em um tempo finito e permanecem com essa temperatura a partir daí. Porém, a análise das propriedades termodinâmicas dos buracos negros nos permite verificar que os mesmos nunca alcançam uma situação de equilíbrio térmico estável, com um reservatório térmico, em razão de sua capacidade térmica ser negativa  $C_{BN} < 0$  [20, 46].

É possível mostrar isso apenas pensando no fluxo de energia entre um reservatório térmico e um buraco negro utilizando a capacidade térmica deste último. Calculamos a capacidade térmica de um buraco negro tomando sua massa  $M$  como o equivalente de sua energia  $E$  (lembrando que utilizamos o sistema de unidades de Planck). Assim, a capacidade térmica  $C_{BN}$  fica

$$C_{BN} = \frac{dE}{dT} = \frac{dM}{dT} = -\frac{1}{8\pi T^2} = -8\pi M^2 < 0. \quad (4.13)$$

Se considerarmos um buraco negro imerso em um reservatório de energia com uma temperatura  $T_R$  diferente da do buraco negro, temos duas situações possíveis:  $T > T_R$  ou  $T < T_R$ . Para  $T > T_R$  o buraco negro *emite radiação*, diminuindo sua massa, ou seja, evaporando, enquanto

aumenta sua temperatura. Já no caso em que  $T < T_R$  o mesmo *absorve radiação*, aumentando sua massa “para sempre”, enquanto diminui sua temperatura. Dessa forma, o buraco negro nunca alcança a temperatura do reservatório térmico  $T_R$ .

### 4.2.1 Buraco negro e o espaço vazio

Dado um buraco negro de Schwarzschild com massa  $M$  no espaço vazio com  $T = 0$ , podemos dizer que o mesmo emite radiação, aumenta sua temperatura e, então, perde massa até “evaporar completamente” [20, 46]. Uma maneira simples para entender como a massa do buraco negro varia no tempo é calcular o fluxo de energia irradiada  $L$  pelo buraco negro, utilizando a lei de Stefan-Boltzmann<sup>4</sup>

$$L = \sigma AT^4 = \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2} \frac{1}{M^2}, \quad (4.14)$$

na qual  $\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}$  é a constante de Stefan-Boltzmann,  $A = 4\pi r_S^2$  é a área do buraco negro com raio de Schwarzschild  $r_S = \frac{2GM}{c^2}$  e usamos que a temperatura do mesmo é  $T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M}$ . Note que vamos utilizar as unidades internacionais para facilitar a análise de comparação de massas e temperaturas. Assim, a massa do buraco negro decresce com o tempo da forma

$$\frac{d(c^2 M)}{dt} = -L = -\frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2} \frac{1}{M^2}. \quad (4.15)$$

A equação (4.15) possui solução analítica simples. Ela é uma equação diferencial ordinária, não linear e de primeira ordem, portanto, podemos apenas integrá-la e obter a solução a menos de uma constante de integração. Considerando o tempo inicial como  $t = 0$ , a constante de integração é traduzida na massa inicial do buraco negro e expressa por  $M(t = 0) = M_0$ . Portanto, sua solução fica

$$M(t) = M_0 \left(1 - \frac{t}{t_V}\right)^{1/3}, \quad t \in [0, t_V) \quad (4.16)$$

sendo  $t_V = 5120\pi \frac{G^2}{\hbar c^4} M_0^3$  o *tempo de vida*<sup>5</sup> do buraco negro. Veja que explicitamos o intervalo de  $t$ . Isso é importante para a interpretação física de  $t_V$ , com  $t \lesssim t_V$ . O comportamento geral desse decaimento pode ser visto na Figura 13. Geral porque, ao graficarmos as razões  $\frac{M}{M_0}$  e  $\frac{t}{t_V}$ , a expressão (4.16) fica livre de parâmetros e, portanto, seu intervalo vale  $\frac{M}{M_0}, \frac{t}{t_V} \in [0, 1)$ .

<sup>4</sup> Ao impormos o uso da Lei de Stefan-Boltzmann estamos fazendo uso de uma aproximação termodinâmica emprestando o resultado da temperatura (3.140) e considerando o espectro de corpo negro perfeito de Planck (3.139). Para impormos essa igualdade mais rigorosamente deveríamos integrar o resultado (3.139) sobre todos os modos, considerarmos inclusive a dependência relacionada a  $l$ , ou seja, considerando o fator  $\Gamma_{\Omega,l}$ , discutido na Subseção 3.4.2. Porém, vamos aqui fazer uso de uma simplificação, até porque não consideramos qualquer característica do campo quantizado para lidarmos com o fator  $\Gamma_{\Omega,l}$  (ver discussão nas Referências [3, 20]). Trabalhos como o de Don Page [48] o fazem e estimam um fator numérico  $\alpha \simeq 10^{-4}$  em  $L = \alpha\sigma AT^4$ .

<sup>5</sup> Por tempo de vida de um buraco negro nos referimos ao tempo necessário para que a massa do mesmo se anule, ou equivalentemente, o tempo necessário até a evaporação completa do mesmo.

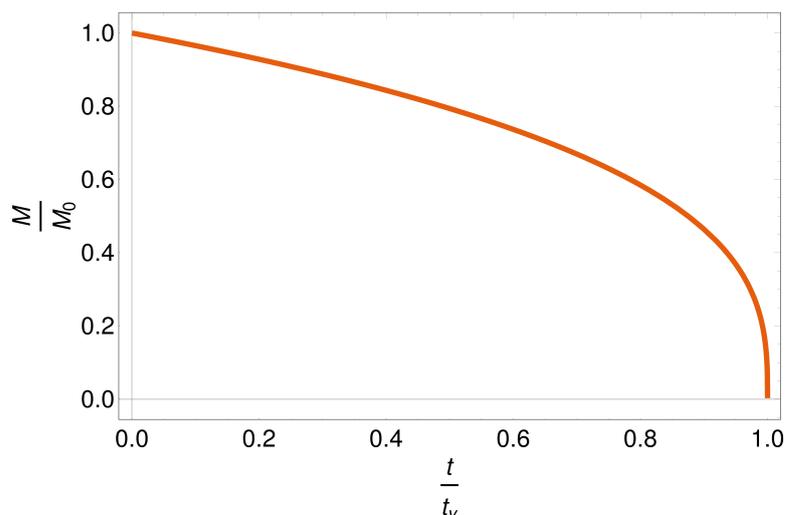


Figura 13 – Decaimento geral da massa de um buraco negro no espaço vazio. Fonte: Elaborada pela autora.

Não necessariamente a equação diferencial que iremos trabalhar possui solução analítica simples. Para certos casos, como veremos nas próximas seções, é útil a análise da equação diferencial por meio do *streamplot*<sup>6</sup>, representado na Figura 14. O comportamento obtido

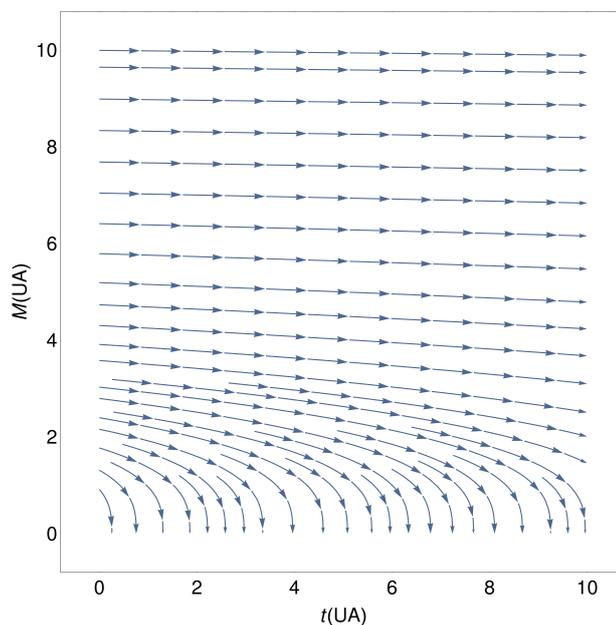


Figura 14 – *Streamplot* da evolução temporal da massa para um buraco negro no espaço vazio. Note que utilizamos unidades arbitrárias (UA). Fonte: Elaborada pela autora.

é completamente equivalente a solução analítica (4.16) e gráfica da Figura 13. Além disso, verificamos que, independente da condição inicial, temos o decaimento da massa do buraco negro, demorando mais para uma maior massa inicial mas sempre tendendo a evaporação

<sup>6</sup> Um *streamplot* é um gráfico que fornece o comportamento, por meio do traçado de derivadas ponto a ponto e representação por vetores, de uma equação diferencial de primeira ordem para diferentes condições iniciais. O mesmo é uma ferramenta do software *Mathematica 11.1*®.

completa. Note que utilizamos unidades arbitrárias para fazer esse gráfico<sup>7</sup>. Outra análise muito útil é a solução da equação diferencial por meio da *solução e interpolação numérica*<sup>8</sup>. É interessante fazê-la, no caso do espaço vazio, porque podemos comparar a solução analítica (4.16) com a solução numérica, dada uma mesma condição inicial. Na Figura 15 comparamos ambas as soluções considerando a massa inicial do Sol. Vemos necessariamente que as soluções são equivalentes, ou seja, apresentam exatamente o mesmo comportamento por estarem sobrepostas. Logo, os métodos do *streamplot* e a *solução e interpolação numérica* apresentam-se como uma excelente análise para a solução das equações diferenciais.

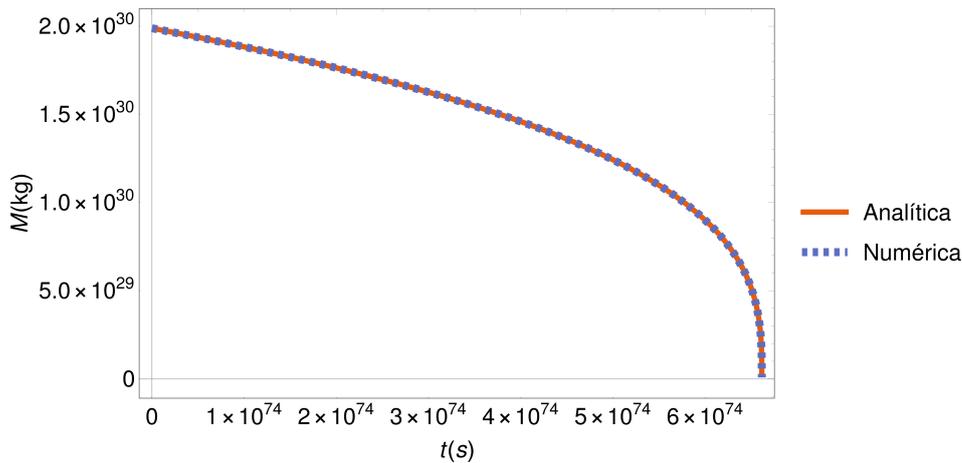


Figura 15 – Comparação da evolução temporal da massa para um buraco negro no espaço vazio, com massa inicial do Sol  $M_0^{\odot} \simeq 2.0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ , para a solução analítica e numérica. Fonte: Elaborada pela autora.

Voltando para a interpretação física da equação (4.16) podemos calcular o tempo de vida  $t_V$  para qualquer corpo massivo. Fazendo esse cálculo para o Sol e para o buraco negro do centro da Via Láctea obtemos a Tabela 2<sup>9</sup>. Esses valores são muito maiores que o tempo do

Tabela 2 – Tempo de vida para buracos negros com determinadas massas.

	M (kg)	$t_V$ (s)
<b>Sol</b>	$2.0 \cdot 10^{30}$	$6.6 \cdot 10^{74}$
<b>Buraco Negro do centro da Via Láctea</b>	$4.5 \cdot 10^6 M_{\odot}$ $9.0 \cdot 10^{36}$	$6.0 \cdot 10^{94}$

Fonte: Elaborada pela autora.

<sup>7</sup> A utilização de unidades arbitrárias é feita apenas para a verificação do comportamento geral, em um gráfico único, da equação diferencial. Utilizando as unidades físicas do problema muitas vezes há a necessidade de apresentarmos mais de um *streamplot* para a análise do comportamento completo.

<sup>8</sup> A *solução numérica* de uma equação diferencial corresponde a solução ponto a ponto, dada sua condição inicial e o intervalo do parâmetro da mesma. Já a *interpolação numérica* consiste em “ligar os pontos” fornecidos pela solução numérica de modo a fornecer o comportamento gráfico da solução da equação diferencial em questão. Para a elaboração das soluções e dos gráficos apresentados aqui utilizamos as ferramentas *NDSolve* e *Plot*, também do software *Mathematica 11.1*®.

<sup>9</sup> Ver Nota de Rodapé 23 na Subseção 3.4.2.

universo  $t_{uni} \simeq 4.4 \cdot 10^{17} s$ , o que indica que buracos negros com massas apenas um pouco maiores do que a massa solar não evaporarão na escala de tempo do universo. Dessa forma, se quisermos considerar buracos negros com tempo de vida da ordem do tempo de vida do universo temos que considerar buracos negros com massa inicial pertencente ao intervalo  $M \in (10^{-9}, 10^{11}) kg$ , obtido tomando o tempo de vida de um buraco negro utilizando o tempo de Planck  $t_P \simeq 5.4 \cdot 10^{-44} s$  e o tempo do universo  $t_{uni}$ .

## 4.2.2 Buraco negro e a radiação cósmica de fundo

Agora vamos considerar um buraco negro de Schwarzschild com massa  $M$  imerso na radiação cósmica de fundo, que atuará como um reservatório térmico<sup>10</sup> para o mesmo. A radiação cósmica de fundo irradia como um corpo negro com temperatura constante de  $T_{RCF} \simeq 2.7255 K$ <sup>11</sup>. Isso faz com que o buraco negro troque energia com a radiação cósmica de fundo e podemos usar a Lei de Stefan-Boltzmann como uma corrente térmica entre essas duas temperaturas, paralelamente à equação (4.14), de forma que

$$J = \sigma A (T^4 - T_{RCF}^4). \quad (4.17)$$

Tal como fizemos na equação (4.15), obtemos o comportamento da massa do buraco negro em função do tempo fazendo  $J = -\frac{d(Mc^2)}{dt}$  e encontramos

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{a}{M^2} + bM^2, \quad (4.18)$$

sendo  $a \equiv \frac{\hbar c^4}{15360\pi G^2} \simeq 4.0 \cdot 10^{15} \frac{kg^3}{s}$  e  $b \equiv \frac{4\pi^3 k_B^4 G^2 T_{RCF}^4}{15\hbar^3 c^8} \simeq 9.6 \cdot 10^{-76} \frac{1}{s \cdot kg}$ . É importante reparar que, de acordo com a condição inicial de massa do buraco negro, o mesmo estará emitindo ou absorvendo energia do reservatório térmico, respectivamente para  $T > T_{RCF}$  e  $T < T_{RCF}$ , de forma que o lado direito da igualdade da equação (4.18) seja negativo ou positivo, também respectivamente. Se quisermos pensar em termos de massa, podemos calcular a massa de um buraco negro com temperatura equivalente a  $T_{RCF}$  como

$$M_{RCF} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B T_{RCF}} \simeq 4.5 \cdot 10^{22} kg. \quad (4.19)$$

Esse é o valor esperado da massa do buraco negro para que  $\frac{dM}{dt}$ , da expressão (4.18), se anule.

A equação diferencial (4.18) não é tão simples como a equação (4.15). Embora ela seja uma equação diferencial ordinária, não linear e de primeira ordem, sua integração direta e indefinida nos leva a

$$t = \frac{1}{4b^{3/4}a^{1/4}} \left\{ 2 \arctan \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^{1/4} M \right] + \log (a^{1/4} - b^{1/4} M) - \log (a^{1/4} + b^{1/4} M) \right\}, \quad (4.20)$$

<sup>10</sup> Note que não teremos o equilíbrio térmico alcançado do sistema, como endossado pela discussão realizada no presente capítulo.

<sup>11</sup> Observe que essa é a temperatura da radiação cósmica de fundo medida nos dias de hoje. A mesma assume valores diferentes de acordo com a evolução temporal do universo. Para um modelo de sua evolução temporal ver Apêndice F.

que não é uma expressão<sup>12</sup> analítica facilmente inversível para  $M(t)$ . Porém, a análise da mesma nos diz que há uma diferença de comportamento quando os termos internos dos logaritmos são nulos. São os casos em que

$$a^{1/4} - b^{1/4}M = 0, \quad (4.21)$$

$$a^{1/4} + b^{1/4}M = 0. \quad (4.22)$$

É claro que a equação (4.22) nos fornece massa negativa, portanto vamos desprezá-la. Logo, considerando apenas o caso com massa positiva (4.21) chegamos a massa crítica do problema em questão

$$M_C = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/4} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B T_{RCF}} = M_{RCF} \simeq 4.5 \cdot 10^{22} kg. \quad (4.23)$$

Como esperado esse valor é igual ao da massa de um buraco negro com temperatura equivalente a temperatura da radiação cósmica de fundo (4.19). Portanto, a solução analítica da equação (4.18) é matemática e fisicamente condizente. Fisicamente porque, além de possuir unidades físicas em concordância, possui uma diferença de comportamento para o buraco negro, sendo de emissão ou de absorção de energia, de acordo com sua condição inicial de massa com relação a  $M_C$ .

A análise da solução (4.20), conjuntamente com a própria interpretação da equação diferencial (4.18), nos leva a pensar em comportamentos assintóticos para condições iniciais de pequenas ou grandes massas para os buracos negros. Dessa forma, podemos pensar que a *emissão de energia* está associada ao primeiro termo  $-\frac{a}{M^2}$  (para buracos negros com massas iniciais pequenas, ou seja, menores que  $M_C$ ) e que a *absorção de energia* está associada ao segundo termo  $bM^2$  (para buracos negros com massas iniciais grandes, ou seja, maiores que  $M_C$ ), ambos da equação diferencial (4.18). Assim, temos as seguintes solução assintóticas

$$1^\circ \text{ termo: } \frac{dM}{dt} = -\frac{a}{M^2} \Rightarrow M(t) = M_0 \left(1 - \frac{t}{t_V}\right)^{1/3}, \quad t \in [0, t_V) \quad (4.24)$$

$$2^\circ \text{ termo: } \frac{dM}{dt} = bM^2 \Rightarrow M(t) = \frac{M_0}{(1 - bM_0 t)}, \quad t \in \left[0, \frac{1}{bM_0}\right) \quad (4.25)$$

sendo que novamente explicitamos os intervalos de  $t$  de modo a obtermos valores reais e positivos para  $M(t)$ . Além disso, a equação (4.24) é idêntica a solução (4.16) para o espaço vazio. Vamos comparar as soluções numéricas às soluções assintóticas a seguir.

Analisando a equação diferencial (4.18) por meio do *streamplot* obtemos a Figura 16, com a utilização de unidades arbitrárias. São evidentes 3 comportamentos para a evolução da massa do buraco negro: a diminuição (para massa inicial  $M < 1$ ), a constância (para massa inicial  $M = 1$ ) e o aumento indefinido (para massa inicial  $M > 1$ ). A diminuição da massa do buraco negro, que ocorre para  $M < 1$ , deixa claro que temos um comportamento de

<sup>12</sup> Essa expressão foi obtida por integração indefinida de  $dt = \frac{M^2 dM}{(bM^4 - a)}$  no software *Mathematica 11.1*

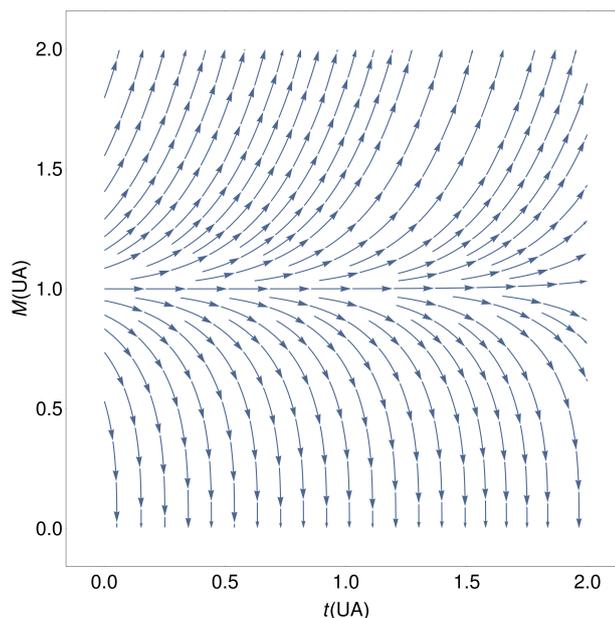


Figura 16 – *Streamplot* da evolução temporal da massa de um buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo com temperatura constante. Note que utilizamos unidades arbitrárias (UA). Fonte: Elaborada pela autora.

emissão de radiação, aumento da temperatura e diminuição da massa do buraco negro até a “evaporação completa” para um longo período de tempo. Independente da condição inicial, esse comportamento se repete demorando mais para uma maior massa inicial. A constância da massa do buraco negro, que ocorre para massa inicial  $M = 1$ , indica que o mesmo possui, desde o princípio, uma temperatura igual a temperatura da radiação cósmica de fundo, de forma que não há emissão nem absorção de radiação pelo mesmo. Essa condição representa uma “condição de equilíbrio” da equação diferencial, que é completamente instável. Observe que  $M = 1$  representa exatamente a massa  $M_{RCF}$  (4.23), como discutido anteriormente. Já o aumento indefinido da massa de um buraco negro, que ocorre para  $M > 1$ , indica que a temperatura desses buracos negros é menor do que a temperatura da radiação cósmica de fundo. Dessa forma, há a absorção de radiação, diminuição da temperatura e aumento da massa dos buracos negros indefinidamente. Novamente, independente da condição inicial, esse comportamento se repete, mas agora sendo mais rápido para uma maior massa inicial.

Agora analisaremos as massas em função do tempo por meio da *solução e interpolação numérica* da equação diferencial (4.18) e compararemos as mesmas com as soluções assintóticas (4.24) e (4.25). Para essa análise consideramos massas iniciais específicas para a observação da diminuição e do aumento da massa do buraco negro em questão. Na Figura 17 utilizamos como condição inicial a massa de Hipérion<sup>13</sup>  $M_0^{hip} \simeq 5.6 \cdot 10^{18} kg$ , menor que a massa crítica  $M_C$  (4.23). Assim, comparamos a *solução numérica completa* (da equação (4.18)) com a *solução analítica do primeiro termo* (4.24). Verificamos a superposição das duas soluções com a diminuição da massa

<sup>13</sup> Hipérion é a oitava lua de Saturno. O valor exato de sua massa pode ser encontrado na Referência [49].

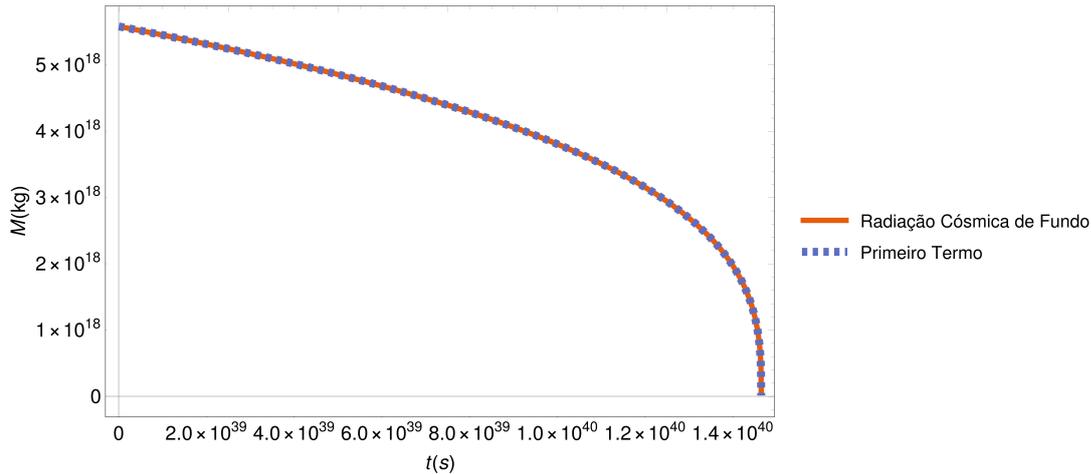


Figura 17 – Comparação da evolução temporal da massa de um buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo, com massa inicial  $M_0^{hip} \simeq 5.6 \cdot 10^{18} kg$  de Hipérior, para a *solução analítica do primeiro termo* e *numérica completa*. Fonte: Elaborada pela autora.

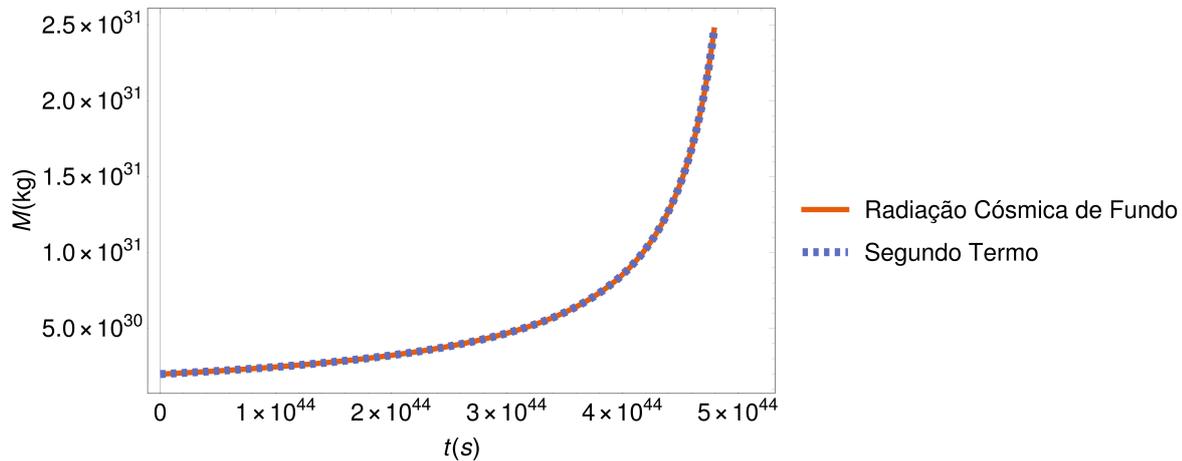


Figura 18 – Comparação da evolução temporal da massa de um buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo, com massa inicial do Sol  $M_0^{\odot} \simeq 2.0 \cdot 10^{30} kg$ , para a *solução analítica do segundo termo* e *numérica completa*. Fonte: Elaborada pela autora.

no decorrer do tempo até a evaporação completa do buraco negro com  $M_0^{hip}$ , exatamente como esperado pelo *streamplot* da Figura 16. Já na Figura 18, consideramos como condição inicial a massa do Sol  $M_0^{\odot} \simeq 2.0 \cdot 10^{30} kg$ , maior que a massa crítica  $M_C$  (4.23). Então, comparamos a *solução numérica completa*, da equação (4.18), com *solução analítica do segundo termo* (4.24). Vemos a perfeita concordância das duas soluções e o aumento indefinido da massa de um buraco negro com  $M_0^{\odot}$ , exatamente como esperado pela análise anterior. Portanto, as soluções assintóticas (4.24) e (4.25) modelam muito bem o comportamento da massa de buracos negros para essas condições iniciais.

Veja que, fisicamente esperamos o aumento indefinido “para sempre”, ou seja, para  $t \rightarrow \infty$  da massa de buracos negros com  $M_0 > M_C$ . Para discutir essa máxima precisamos explicar 2 pontos. Primeiramente, nem a solução numérica, nem a solução analítica assintótica são capazes de fornecer o comportamento de massas maiores que o último par de pontos no

gráfico obtido para a condição inicial da massa do Sol  $M_0^\odot$ <sup>14</sup>. Numericamente, o software utilizado não nos permite a análise para intervalos de tempo maiores do que o apresentado aqui, até porque a massa fica muito grande. Já analiticamente, a solução assintótica (4.25) possui um intervalo temporal de validade, um tempo crítico que chamamos de  $t_C = \frac{1}{bM_0}$ <sup>15</sup> no qual a massa do buraco negro diverge, num tempo finito, e a partir do qual  $M(t)$  torna-se negativa e, portanto, fisicamente desconsiderável. Dessa forma, fisicamente, para  $M(t) > M(t_C)$  o modelo apresentado aqui, para a evolução temporal da massa de um buraco negro, perde validade. Além disso, fisicamente podemos pensar que, ao passo que aumentamos cada vez mais a massa do buraco negro, por um número finito de processos físicos, diminuimos cada vez mais sua temperatura e, então, sua gravidade superficial. Portanto, a *terceira lei da termodinâmica de buracos negros* faz-se por valer nesse limite.

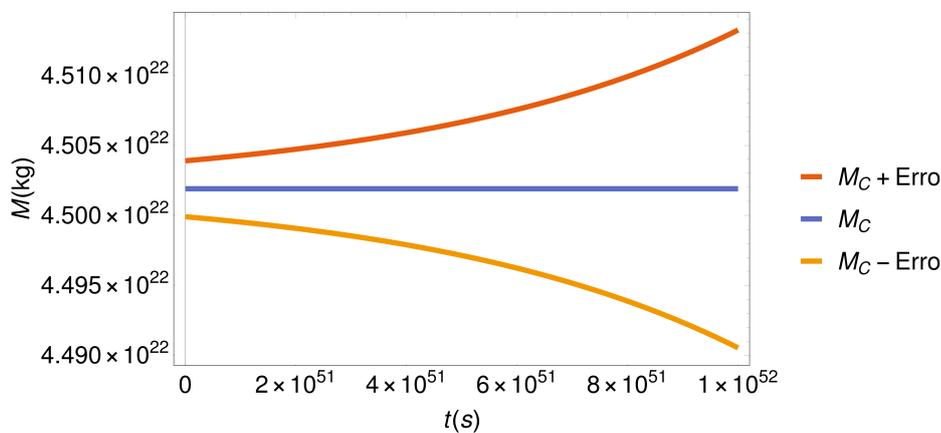


Figura 19 – Interpolação numérica para a evolução temporal da massa de um buraco negro em 3 situações distintas. Fonte: Elaborada pela autora.

Por fim, podemos fazer a comparação dos gráficos fornecidos pela interpolação numérica completa da equação diferencial (4.18) para buracos negros com massa inicial: igual a massa crítica  $M_C$  (4.23), maior que a massa crítica pelo erro de medidas experimentais das constantes envolvidas  $M_C + \text{Erro}$  e menor que a massa crítica por esse mesmo erro  $M_C - \text{Erro}$ . O *Erro* equivale ao erro obtido por propagação numérica usual utilizando os erros experimentais das constantes envolvidas para o cálculo de  $M_C$  (4.23), valendo  $\text{Erro} \sim 2 \cdot 10^{19} \text{ kg}$ . Vemos essa comparação através da Figura 19. Claramente, apenas o erro experimental, obtido pelo uso das constantes fundamentais e parâmetros é suficiente para gerar os diferentes comportamentos: massa constante, aumento indefinido da massa e diminuição da massa até a evaporação do buraco negro.

Na subsecção seguinte veremos o comportamento da massa de um buraco negro considerando a temperatura, dependente do tempo, de acordo com a evolução térmica do universo.

<sup>14</sup> Observe que o mesmo ocorre para outras condições iniciais de massa, de crescimento, para um buraco negro.

<sup>15</sup> Ver intervalo de validade da expressão (4.25).

### 4.2.3 Buraco negro e a evolução térmica do universo

Acabamos de ver o que acontece com um buraco negro trocando energia com a radiação cósmica de fundo com temperatura constante. Verificamos que nunca alcançamos o equilíbrio térmico e que o mesmo “acontece” apenas quando a temperatura do buraco negro é igual a temperatura da radiação cósmica de fundo, como uma forma de “equilíbrio instável” da equação diferencial. Porém, para todos os efeitos, sabemos que o universo evolui temporalmente e que, portanto, há uma evolução térmica da matéria e da energia do mesmo, principalmente considerando grandes escalas de tempo. Dessa forma convém a análise do comportamento da massa, e então, da temperatura de um buraco negro considerando a evolução térmica do universo. Os detalhes, aproximações e comentários aqui utilizados para a descrição da evolução térmica do universo encontram-se no Apêndice F.

Nessa análise vamos considerar que o buraco negro troca energia com a radiação cósmica de fundo e a temperatura da mesma evolui temporalmente de acordo com as diferentes eras do universo: *era de radiação*, *era de matéria* e *era de energia escura*<sup>16</sup>. Assim, a evolução térmica da radiação cósmica de fundo, de acordo com (F.16), fica

$$T_R = \frac{T_{RCF}}{\left(\frac{32\pi G}{3}\rho_{R_0}\right)^{1/4}} \frac{1}{t^{1/2}}, \quad t \in (0, t_{p_1}) \quad (4.26)$$

$$T_M = \frac{T_{RCF}}{(6\pi G\rho_{M_0})^{1/3}} \frac{1}{t^{2/3}}, \quad t \in (t_{p_1}, t_{p_2}) \quad (4.27)$$

$$T_\Lambda = T_{RCF} \text{Exp} \left[ - \left( \frac{8\pi G}{3}\rho_{\Lambda_0} \right)^{1/2} t \right], \quad t \in (t_{p_2}, \infty). \quad (4.28)$$

onde  $t_{p_1} = \left[ \frac{3}{32\pi G\rho_{R_0}} \left( \frac{\rho_{R_0}}{\rho_{M_0}} \right)^4 \right]^{1/2} \simeq 9.3 \cdot 10^{11} s$  é o tempo que limita a *era de radiação*,  $t_{p_2} = \frac{1}{(6\pi G\rho_{\Lambda_0})^{1/2}} \simeq 3.7 \cdot 10^{17} s$  é o tempo que limita a *era de matéria*,  $T_{RCF}$  representa a temperatura da radiação cósmica de fundo hoje e  $\rho_{R_0}$ ,  $\rho_{M_0}$  e  $\rho_{\Lambda_0}$  representam as densidades atuais de radiação, matéria e energia escura, respectivamente.

Assim, tal como fizemos na Subseção 4.2.2, vamos utilizar a Lei de Stefan-Boltzmann como uma corrente térmica entre a temperatura do buraco negro e a temperatura do universo, de forma que

$$J_i = \sigma A (T^4 - T_i^4), \quad (4.29)$$

sendo  $i = R$  (radiação),  $M$  (matéria) ou  $\Lambda$  (energia escura). Novamente, o buraco negro estará emitindo ( $T > T_i$ ) ou absorvendo ( $T < T_i$ ) energia do universo, que se comporta como um

<sup>16</sup> A evolução temporal do universo é marcada por 3 eras, ou seja, 3 intervalos de tempo que demarcam o tipo de matéria dominante em cada época. Considerando o “big bang” como origem dos tempos, as eras e os intervalos de tempo aproximados são: *era da radiação*  $t \in (0, 9.3 \cdot 10^{11})s$ , *era da matéria*  $t \in (9.3 \cdot 10^{11}, 3.7 \cdot 10^{17})s$  e *era da energia escura*  $t \in (3.7 \cdot 10^{17}, \infty)s$ . Para mais informações, ver Apêndice F.

reservatório térmico<sup>17</sup>. Assim, substituindo as temperaturas (4.26-4.28) e já transformando  $J = -\frac{d(Mc^2)}{dt}$ , temos

$$\text{Radiação: } \frac{dM}{dt} = -\frac{a}{M^2} + b a_R \frac{M^2}{t^2} \quad (4.30)$$

$$\text{Matéria: } \frac{dM}{dt} = -\frac{a}{M^2} + b a_M \frac{M^2}{t^{8/3}} \quad (4.31)$$

$$\text{Energia Escura: } \frac{dM}{dt} = -\frac{a}{M^2} + b M^2 e^{-a_\Lambda t} \quad (4.32)$$

com  $a = \frac{\hbar c^4}{15360\pi G^2} \simeq 4.0 \cdot 10^{15} \frac{kg^3}{s}$ ,  $b = \frac{4\pi^3 k_B^4 G^2 T_{RCF}^4}{15\hbar^3 c^8} \simeq 9.6 \cdot 10^{-76} \frac{1}{s \cdot kg}$ ,  $a_R = \frac{1}{\left(\frac{32\pi G}{3} \rho_{R0}\right)} \simeq 9.6 \cdot 10^{38} s^2$ ,  $a_M = \frac{1}{(6\pi G \rho_{M0})^{4/3}} \simeq 2.0 \cdot 10^{47} s^{8/3}$  e  $a_\Lambda = \left(\frac{128\pi G}{3} \rho_{\Lambda 0}\right)^{1/2} \simeq 7.2 \cdot 10^{-18} s^{-1}$ .

As equações (4.30-4.32) são ainda mais complicadas que a equação (4.18), elas são equações diferenciais ordinárias, não lineares e de primeira ordem com dependência direta em relação a variável  $t$ . Dessa forma, não possuem solução analítica direta.

Entretanto, tal como fizemos na Subseção 4.2.2, podemos analisar os comportamentos assintóticos para condições iniciais de pequenas ou grandes massas para os buracos negros das equações diferenciais (4.30-4.32). A 3 equações possuem 2 termos que levam a duas soluções assintóticas distintas. Porém, diferentemente da Subseção 4.2.2, não teremos uma massa crítica  $M_C$  (4.19) que leva a uma ou a outra solução assintótica, de acordo com a condição inicial. Isso porque as equações diferenciais (4.30-4.32) possuem dependência temporal  $t$  explícita. Assim, o *primeiro termo* das equações diferenciais (4.30-4.32), que é igual para as 3, vale e possui solução

$$1^\circ \text{ termo: } \frac{dM_i}{dt} = -\frac{a}{M_i^2} \Rightarrow M_i(t) = M_{0_i} \left[ 1 - \frac{(t - t_{0_i})}{t_{V_i}} \right]^{1/3}, \quad (4.33)$$

onde o índice  $i = R, M$  ou  $\Lambda$  representa respectivamente a era de radiação, matéria ou energia escura,  $M_i(t_{0_i}) = M_{0_i}$  equivale a massa inicial do buraco negro para cada era,  $t_{0_i}$  representa o tempo inicial de cada era, valendo  $t_{0_R} = 0^{18}$  para a era de radiação,  $t_{0_M} = t_{p_1} \simeq 9.3 \cdot 10^{11} s$  para a era de matéria e  $t_{0_\Lambda} = t_{p_2} \simeq 3.7 \cdot 10^{17} s$  para a era de energia escura e  $t_{V_i} = 5120\pi \frac{G^2}{\hbar c^4} M_{0_i}^3$  representa o tempo de vida de um buraco negro<sup>19</sup>. A expressão (4.33) é válida nos intervalos:

$$t \in (t_{0_i}, t_{0_i} + t_{V_i}), \text{ se } t_{0_i} + t_{V_i} < t_{\text{final da era}}^i \quad (4.34)$$

$$t \in (t_{0_i}, t_{\text{final da era}}^i), \text{ se } t_{0_i} + t_{V_i} > t_{\text{final da era}}^i \quad (4.35)$$

sendo  $t_{\text{final da era}}^i$  o tempo final de cada era, que é igual a  $t_{\text{final da era}}^R = t_{p_1} \simeq 9.3 \cdot 10^{11} s$ , para a era de radiação, a  $t_{\text{final da era}}^M = t_{p_2} \simeq 3.7 \cdot 10^{17} s$ , para a era de matéria e  $t_{\text{final da era}}^\Lambda \sim \infty s$ , para a era

<sup>17</sup> Mesmo mudando sua temperatura com o tempo, vamos considerar que essa mudança, para a temperatura do universo, não sofre “interferência” da troca energética com o buraco negro.

<sup>18</sup> Observe que, fisicamente  $t_{0_i} = 0$ , para a era de radiação. Porém, como resolvemos as expressões numericamente, fixamos um valor inicial para o tempo, sendo pequeno mas não nulo. O valor escolhido foi  $t_{0_R} \equiv 10^{-3} s$ .

<sup>19</sup> Note que o tempo de vida  $t_{V_i}$  só depende da massa inicial do buraco negro, ou seja, é independente de qualquer parâmetro relativo as eras. Isso acontece porque as equações (4.30-4.32) possuem o primeiro termo sempre igual.

de energia escura. Mais ainda, a equação (4.35) firma que, para buracos negros com massas, de modo que seu tempo de vida  $t_{V_i}$  ultrapasse o limite da era considerada, devemos considerar a solução relativa a próxima era, utilizando sua então massa final (relativa ao tempo de intersecção das eras) como massa inicial para a era consecutiva<sup>20</sup>. Além disso, o *primeiro termo* continua associado a *emissão de energia* para buracos negros com massas iniciais pequenas.

Já as soluções para o *segundo termo* das equações diferenciais (4.30-4.32) são diferentes, valem e possuem solução da forma

$$2^\circ \text{ Radiação: } \frac{dM}{dt} = b a_R \frac{M^2}{t^2} \Rightarrow M(t) = \frac{M_{0R} t_{0R} t}{t_{0R} t + M_{0R} b a_R (t_{0R} - t)}, \quad (4.36)$$

$$2^\circ \text{ Matéria: } \frac{dM}{dt} = b a_M \frac{M^2}{t^{8/3}} \Rightarrow M(t) = \frac{5 M_{0M} t_{0M}^{5/3} t^{5/3}}{5 t_{0M}^{5/3} t^{5/3} + 3 b a_M M_{0M} (t_{0M}^{5/3} - t^{5/3})}, \quad (4.37)$$

$$2^\circ \text{ Energia Escura: } \frac{dM}{dt} = b M^2 e^{-a_\Lambda t} \Rightarrow M(t) = \frac{M_{0\Lambda} a_\Lambda}{a_\Lambda + M_{0\Lambda} b (e^{-a_\Lambda t} - e^{-a_\Lambda t_{0\Lambda}})}, \quad (4.38)$$

onde  $M_{0R}$ ,  $M_{0M}$ ,  $M_{0\Lambda}$ ,  $t_{0R}$ ,  $t_{0M}$  e  $t_{0\Lambda}$  possuem os mesmos valores e interpretações discutidos após a equação (4.33). Os intervalos de validade dessas expressões são

$$\text{Radiação: } t \in (t_{0R}, t_C^R) \Rightarrow t_C^R = \frac{b a_R M_{0R} t_{0R}}{(b a_R M_{0R} - t_{0R})} \text{ se } t_C^R < t_{\text{final da era}}^R, \quad (4.39)$$

$$\text{Matéria: } t \in (t_{0M}, t_C^M) \Rightarrow t_C^M = \frac{(3 b a_M M_{0M})^{3/5} t_{0M}}{(3 b a_M M_{0M} - 5 t_{0M}^{5/3})^{3/5}} \text{ se } t_C^M < t_{\text{final da era}}^M, \quad (4.40)$$

$$\text{Energia Escura: } t \in (t_{0\Lambda}, t_C^\Lambda) \Rightarrow t_C^\Lambda = -\frac{1}{a_\Lambda} \ln \left( e^{-a_\Lambda t_{0\Lambda}} - \frac{a_\Lambda}{b M_{0\Lambda}} \right) \text{ se } t_C^\Lambda < t_{\text{final da era}}^\Lambda, \quad (4.41)$$

sendo  $t_C^i$ , para  $i = R, M$  ou  $\Lambda$ , o tempo crítico que representa o tempo a partir do qual a  $M(t)$  torna-se negativa e  $t_{\text{final da era}}^i$  possui a mesma interpretação e os mesmos valores conforme discutido após as equações (4.34) e (4.35). Então, temos um segundo caso para os intervalos de validades para as 3 eras dado por

$$t \in (t_{0_i}, t_{\text{final da era}}^i), \text{ se } t_C^i > t_{\text{final da era}}^i. \quad (4.42)$$

Assim, a equação (4.42) estabelece que, para buracos negros com massas cujo  $t_C^i$  ultrapasse o limite da era considerada, devemos considerar a solução relativa a próxima era, utilizando sua então massa final (relativa ao tempo de intersecção das eras) como massa inicial para a era consecutiva<sup>21</sup>. Mais uma vez, o *segundo termo* está associado a *absorção de energia* para buracos

<sup>20</sup> É interessante notar que isso é importante caso alguma condição inicial seja assintoticamente decrescente para a era de radiação e assintoticamente crescente para as próximas eras: matéria ou energia escura. Mais ainda, caso a condição inicial seja assintoticamente decrescente para as 3 eras, a solução completa, ou seja, até a evaporação completa do buraco negro segue exatamente como (4.16), que é a solução exata do *primeiro termo* das 3 equações (4.30-4.32). O que acontece com o caso da Figura 22, que veremos adiante.

<sup>21</sup> Essa ideia é paralela a levantada na discussão que leva a Nota de Rodapé 20. Então, caso alguma condição inicial seja assintoticamente crescente para a era de radiação ela pode seguir sendo assintoticamente decrescente e/ou crescente para as próximas eras: matéria ou energia escura.

negros com massas iniciais grandes. Novamente, vamos comparar as soluções assintóticas às soluções numéricas a seguir.

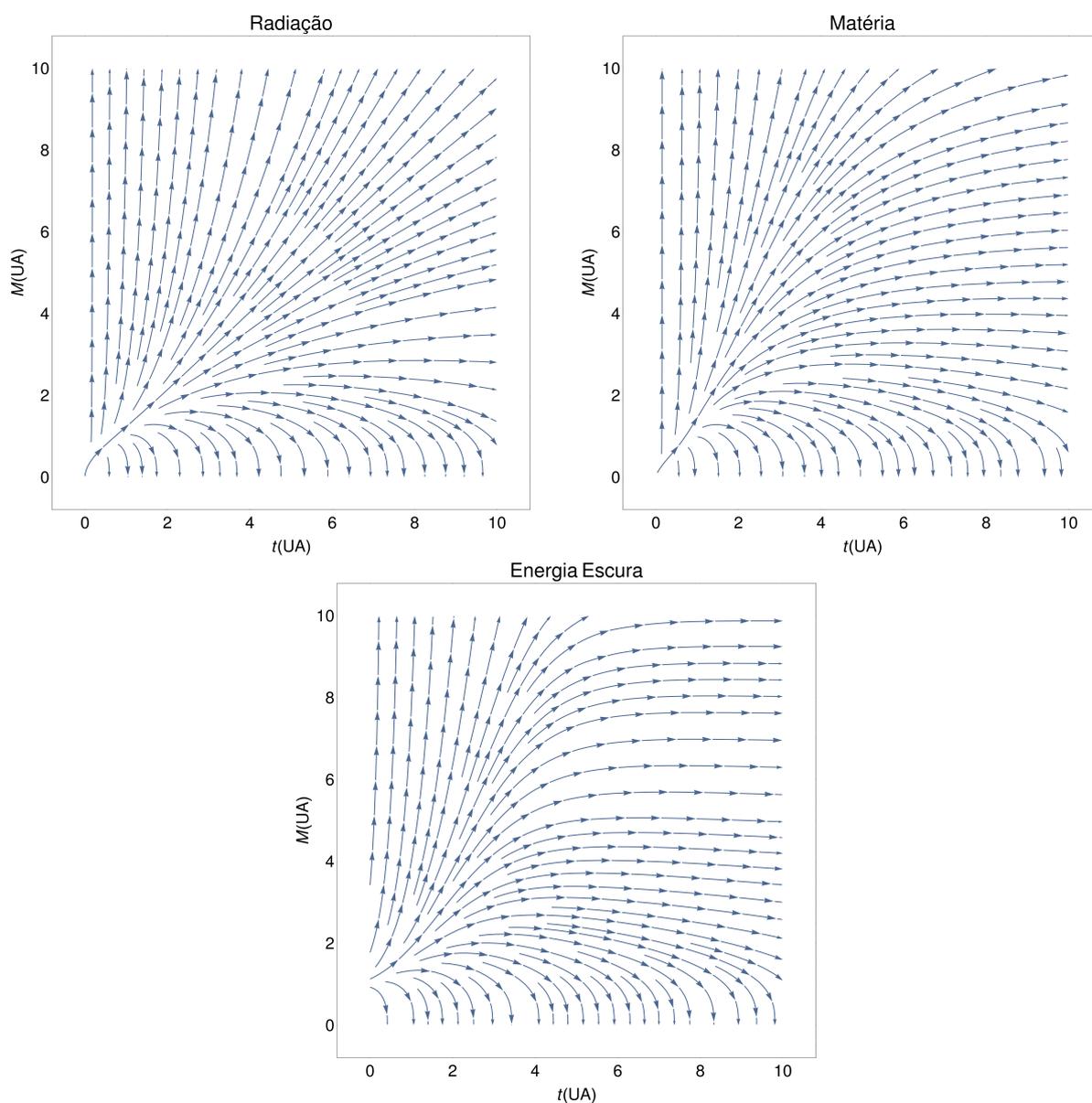


Figura 20 – *Streamplots* da evolução temporal da massa de um buraco negro trocando energia com a radiação cósmica de fundo nas eras de radiação, matéria e energia escura. Utilizamos unidades arbitrárias (UA). Fonte: Elaborada pela autora.

Para analisarmos as soluções dessas equações graficamos seus *streamplots* na Figura 20. Nos 3 casos são evidentes 2 comportamentos para a evolução da massa do buraco negro: a diminuição (para condições iniciais de baixas massas) e o aumento indefinido (para condições iniciais de massas elevadas). Diferentemente da análise do buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo com temperatura constante não há um equilíbrio instável simples (antes o equilíbrio instável era uma constante, sendo a massa de equilíbrio equivalente a massa de um buraco negro com temperatura igual a temperatura da radiação cósmica de fundo). Agora o equilíbrio instável “evolui” no tempo. Porém, igualmente a tal caso, a diminuição da massa do

buraco negro equivale a emissão de radiação, aumento da temperatura e diminuição da massa do mesmo até sua evaporação completa para um longo período de tempo. Esse comportamento independe da condição inicial e se repete demorando mais para maiores massas. Para massas muito grandes o comportamento das 3 equações se inverte e o buraco negro começa a aumentar sua massa “para sempre”. Daí temos a absorção de radiação e diminuição de temperatura. Novamente esse comportamento se repete, independente da condição inicial, sendo mais rápido para uma maior massa inicial.

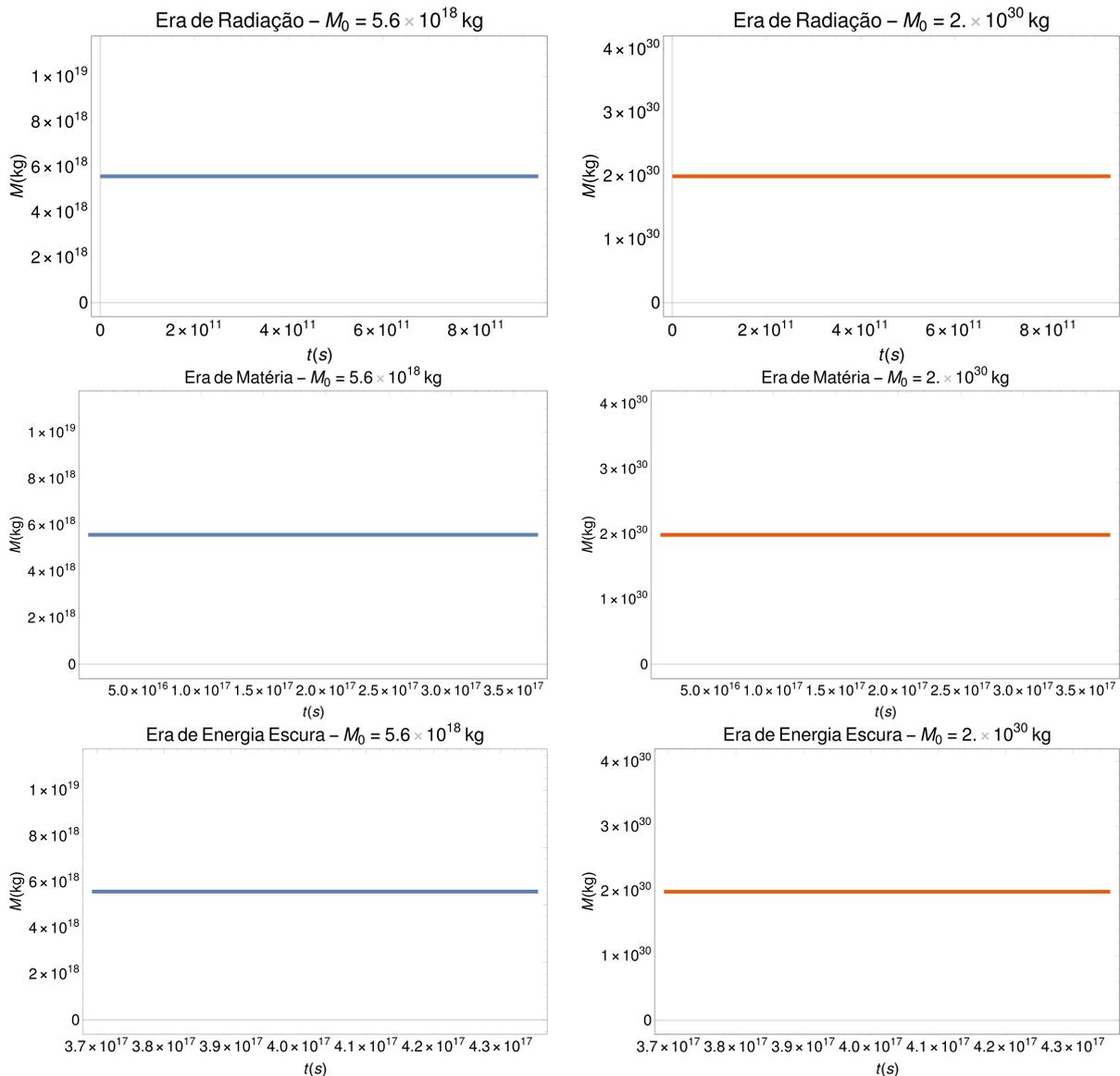


Figura 21 – Interpolação numérica para a evolução temporal da massa de um buraco negro com massa inicial  $M_0^{Hip} \simeq 5.6 \cdot 10^{18} kg$  de Hipérion e  $M_0^{\odot} \simeq 2.0 \cdot 10^{30} kg$  do Sol para as eras de radiação, matéria e energia escura. Fonte: Elaborada pela autora.

Assim, nos resta analisar as massas em função do tempo por meio da *solução e interpolação numérica* das equações (4.30-4.32). Primeiramente, vamos estudar o comportamento de buracos negros com massas iniciais iguais as de Hipérion e a do Sol, como fizemos para o caso da radiação cósmica de fundo com temperatura constante. Tanto para Hipérion quanto

para o Sol, ver Figura 21, verificamos que, para os tempos de cada era, a massa se mantém constante. Portanto, evidenciamos que para essas condições iniciais espera-se o decaimento, e não o aumento, dessas massas para tempos longos. É interessante notar que, se compararmos essa evolução para o Sol com o caso da radiação cósmica de fundo com temperatura constante, agora temos seu comportamento de diminuição de massa.

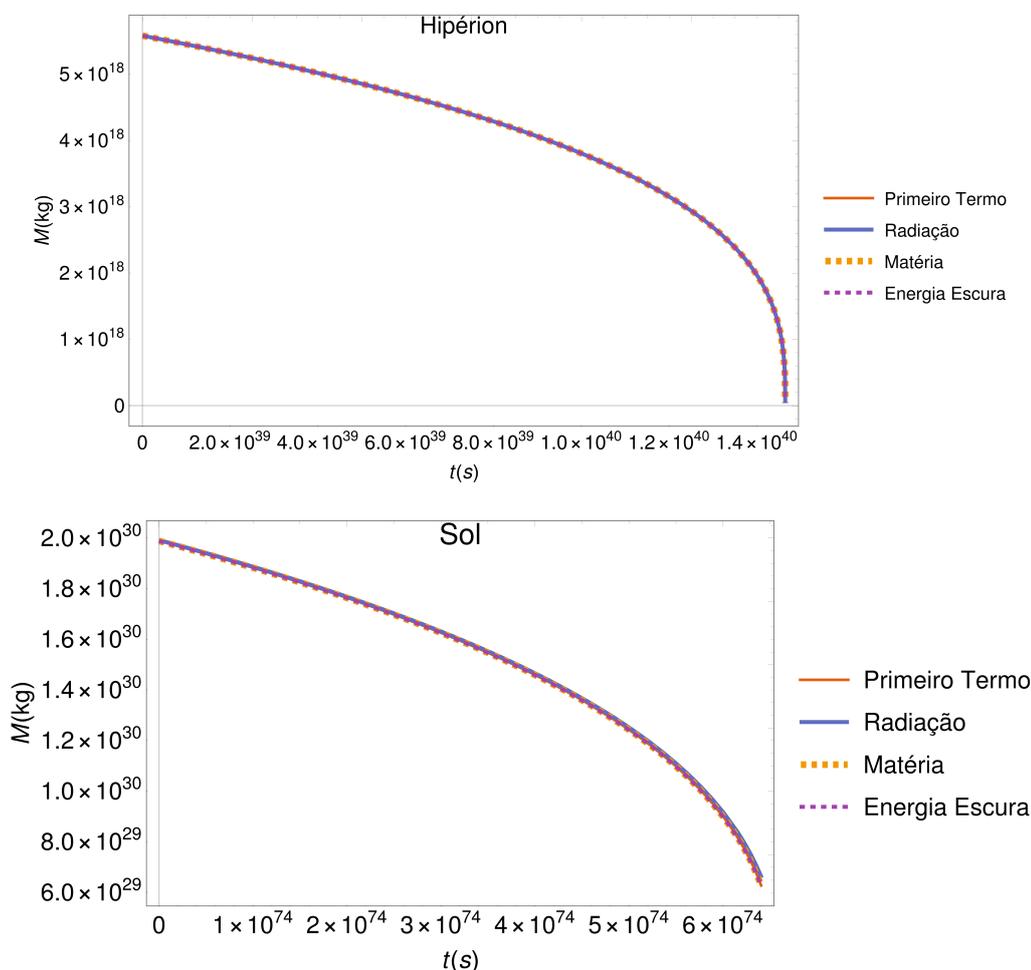


Figura 22 – Comparação da evolução temporal da massa de um buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo com sua temperatura evoluindo conforme as eras do universo, com massas iniciais  $M_0^{hip} \simeq 5.6 \cdot 10^{18} \text{ kg}$  de Hipérion e  $M_0^{\odot} = 2.0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  do Sol, para a *solução analítica do primeiro termo* e *numérica completa de cada era*. Fonte: Elaborada pela autora.

Agora analisaremos o comportamento das massas de Hipérion e do Sol, ainda por meio da *solução e interpolação numérica*, mas extrapolando os intervalos temporais de validade de cada era, ou seja, tomando-os como  $t \in (0, t_V)$ , sendo  $t_V$  o tempo de vida de cada corpo ( $t_V^{Hip} \simeq 1.5 \cdot 10^{40} \text{ s}$  e  $t_V^{\odot} \simeq 6.6 \cdot 10^{74} \text{ s}$ ). Fazemos isso porque comparamos essas soluções com a solução assintótica do *primeiro termo* (4.33) das equações diferenciais (4.30-4.32), que é equivalente a solução do *vazio* (4.16). Essa comparação é dada na Figura 22, onde vemos a superposição das diferentes dependências das massas dos buracos negros com relação a solução analítica do *primeiro termo* e as soluções numéricas de extrapolações temporais para as eras do universo. Vemos a diminuição da massa dos mesmos, levando a sua evaporação, devido a

emissão de radiação e aumento da temperatura. Logo, a solução assintótica do *primeiro termo* fornece perfeitamente o comportamento da massa de um buraco negro para essas condições iniciais.

Tabela 3 – Massas de buracos negros com tempos de vida da ordem dos períodos das eras de radiação, matéria e energia escura.

	$t_V$ (s)	M (kg)
<b>Era de Radiação</b>	$9.3 \cdot 10^{11}$	$2.2 \cdot 10^9$
<b>Era de Matéria</b>	$3.7 \cdot 10^{17}$	$1.6 \cdot 10^{11}$
<b>Era de Energia Escura</b>	$6.6 \cdot 10^{16}$	$9.2 \cdot 10^{10}$

Fonte: Elaborada pela autora.

Seguindo a ideia de evaporação completa de um buraco negro, calculamos a massa inicial de um buraco negro com tempo de vida da ordem do intervalo de tempo de cada era, vide Tabela 3. Por questões de completeza, consideramos o fim da era da energia escura como o tempo do universo. Então verificamos o comportamento esperado de evaporação do buraco negro para tais massas para a *solução numérica* das equações (4.30-4.32) comparando com a solução analítica *do primeiro termo* (4.33), equivalente ao espaço vazio. Como podemos ver na Figura 23, as curvas do buraco negro *do primeiro termo* e as *soluções numéricas* para as eras sempre se superpõem, confirmando a ideia anteriormente apresentada. Portanto, para buracos negros com massas menores que as massas encontradas sempre teremos a evaporação completa dos mesmos em cada era.

Encontramos a massa inicial a partir da qual a massa de um buraco negro começa a crescer para cada era, ou seja, o que esperamos ser o “equilíbrio instável” que comentamos nos *streamplots* da Figura 20. Estimamos esse valor calculando a massa a partir da qual a segunda derivada no tempo, das equações (4.30-4.32), se anula, como pode ser visto na Tabela 4. Essa

Tabela 4 – Massas de buracos negros a partir da qual temos seu crescimento para as respectivas eras.

	$t_0$ (s)	M (kg)
<b>Era de Radiação</b>	$10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{33}$
<b>Era de Matéria</b>	$9.3 \cdot 10^{11}$	$6.2 \cdot 10^{47}$
<b>Era de Energia Escura</b>	$3.7 \cdot 10^{17}$	$5.4 \cdot 10^{58}$

Fonte: Elaborada pela autora.

avaliação é uma estimativa, visto que a análise utilizada fornece a inversão de comportamento (de diminuição de massa para aumento da mesma) para a curva no ponto específico de início de cada era e não ao longo das curvas em questão. Vemos, para as condições iniciais encontradas, o comportamento de crescimento de massa para as 3 eras na Figura 24. Note que para as 3 eras o crescimento é ditado pela forma dos *streamplots* da Figura 20. Além disso, quando observamos a repetição dos valores da massa no eixo vertical dos gráficos temos o aumento da mesma para dígitos além dos mostrados pelos gráficos.

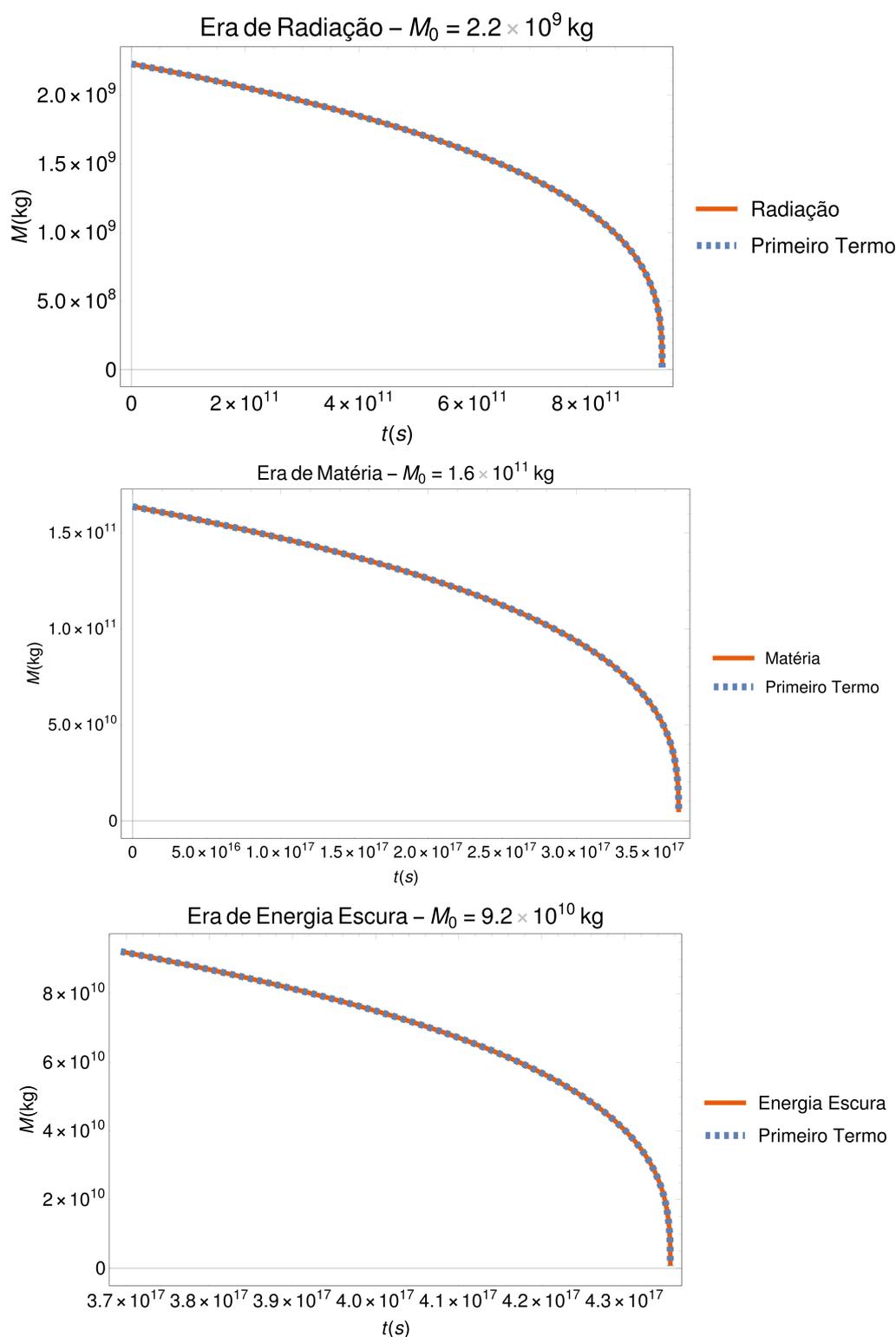


Figura 23 – Comparação da evolução temporal da massa de um buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo com temperatura evoluindo de acordo com as eras do universo, para uma massa inicial equivalente a massa de buraco negro com tempo de vida da ordem do período de cada era, para a *solução analítica do primeiro termo* e *numérica completa para cada era*. Fonte: Elaborada pela autora.

Por fim, para condições iniciais maiores que as encontradas com a estimativa anterior esperamos o aumento indefinido da massa dos buracos negros, com a absorção de radiação e

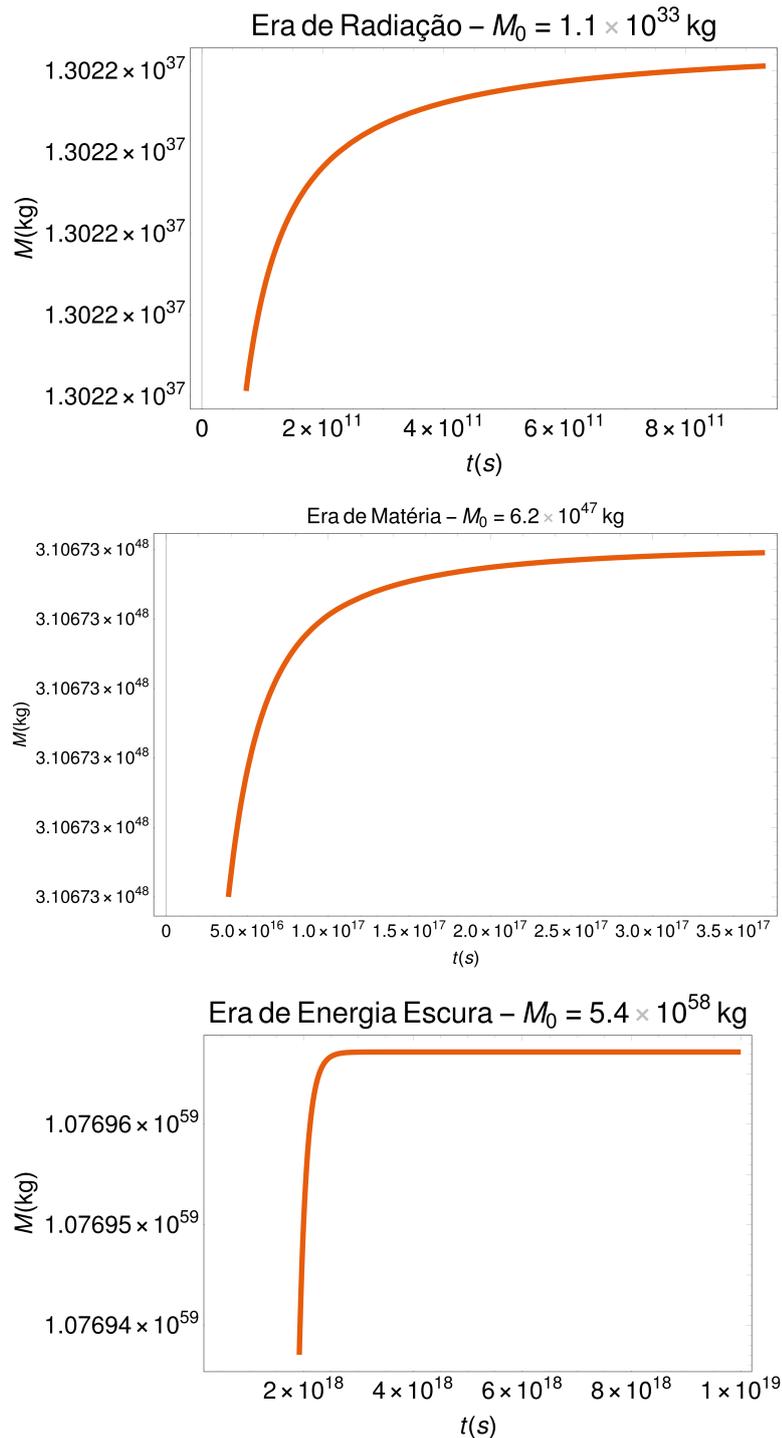


Figura 24 – Interpolação numérica para a evolução temporal da massa de um buraco negro, com massa inicial a partir da qual a massa do mesmo cresce, para um buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo com temperatura variando de acordo com as eras de radiação, matéria e energia escura. Fonte: Elaborada pela autora.

diminuição da temperatura, relativo a dependência das 3 eras, que pode ser visto na Figura 25. Na mesma, vemos a comparação da *solução numérica completa* para cada era com relação a sua respectiva solução assintótica analítica do *segundo termo* (4.36-4.38). Em todos os casos vemos a superposição das soluções, concluindo que, mais uma vez, as soluções assintóticas *do segundo*

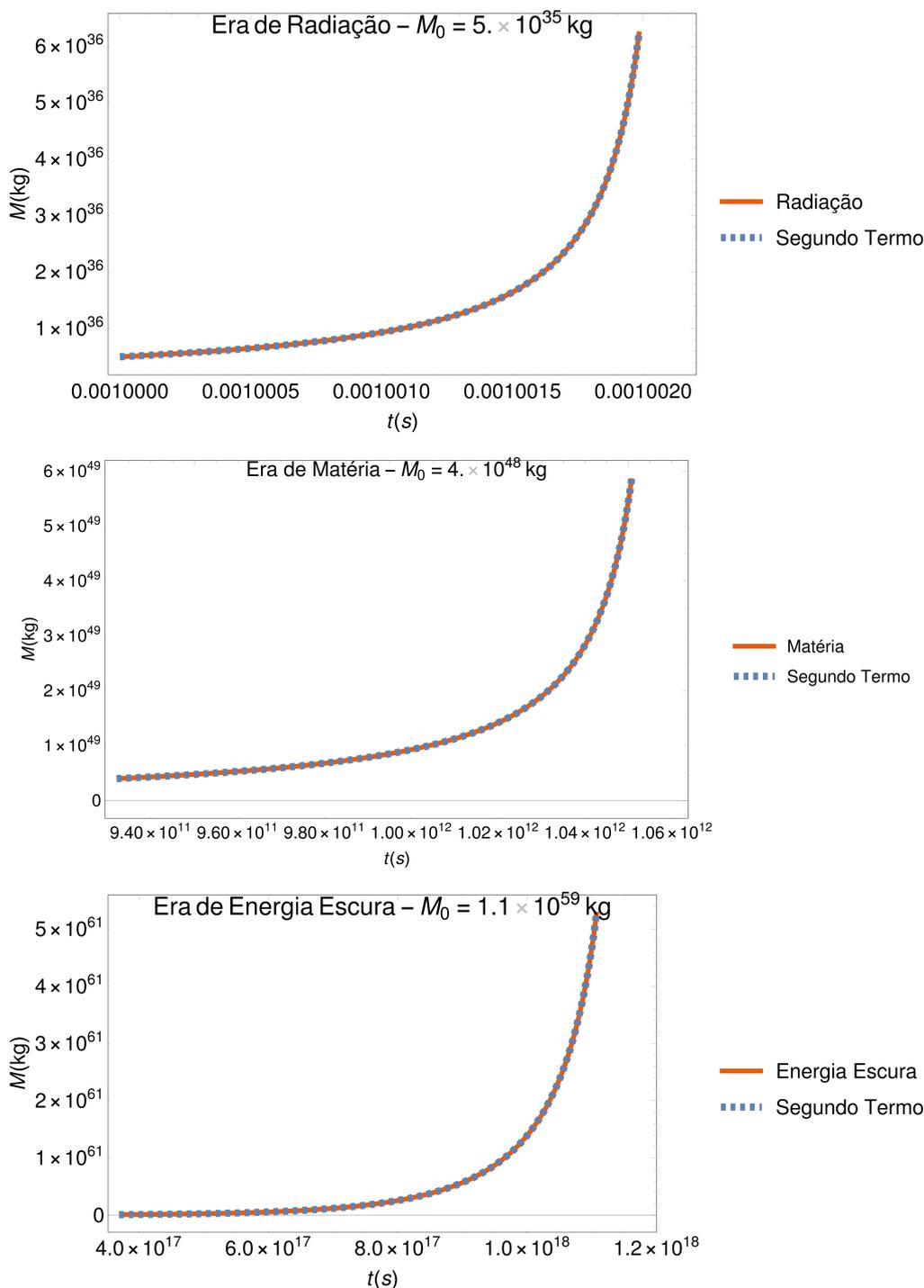


Figura 25 – Interpolação numérica para a evolução temporal da massa de um buraco negro, com massa inicial a partir da qual a massa do mesmo cresce “indefinidamente”, para um buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo com temperatura variando de acordo com as eras de radiação, matéria e energia escura. Fonte: Elaborada pela autora.

*termo* descrevem com maestria a *solução numérica* para as devidas condições iniciais.

Note que, assim como no caso do buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo com temperatura constante (ver Seção 4.2.2), fisicamente esperamos o aumento indefinido “para sempre”, ou seja, para  $t \rightarrow \infty$  da massa dos buracos negros. Para discutir essa assertividade

precisamos explicar 2 pontos. Primeiramente, nem a solução numérica, nem a solução analítica assintótica são capazes de fornecer o comportamento de massas maiores que o último par de pontos nos gráficos obtidos para as devidas condições iniciais<sup>22</sup>. Numericamente, o software utilizado não nos permite a análise para intervalos de tempo maiores do que os apresentados aqui, até porque a massa fica muito grande. Já analiticamente, cada solução assintótica (4.36-4.38) possui um intervalo temporal de validade, um tempo crítico que chamamos de  $t_C^i$  (para  $i = R, M$  ou  $\Lambda$ )<sup>23</sup> a partir do qual  $M(t)$  torna-se negativa e, portanto, fisicamente desconsiderável. Dessa forma, fisicamente, para  $M(t) > M(t_C^i)$  o modelo apresentado aqui, para a evolução temporal da massa de um buraco negro, perde validade e, mais uma vez, podemos dizer que a *terceira lei da termodinâmica de buracos negros* faz-se por valer nesse limite pelos mesmos argumentos utilizados no final da Subseção 4.2.2. O segundo ponto refere-se a nossa divisão do intervalo temporal em eras. Como optamos por essa divisão, temos um buraco negro com uma diferente massa inicial para o início de cada era, de modo que, em cada era, a massa do buraco negro possa ser regida como crescimento ou decrescimento (e possível evaporação) e que esse comportamento possa mudar (ou não) de acordo com a condição inicial alcançada para a era seguinte. Portanto, se observarmos a Tabela 4, podemos dizer que, para que um buraco negro consiga aumentar sua massa “para sempre”, o mesmo deve possuir uma massa inicial na era de radiação  $M_{0R} \gtrsim 1.1 \cdot 10^{33} kg$ , alcançar a era de matéria com  $M_{0M} \gtrsim 6.2 \cdot 10^{47} kg$  e adentrar a era de energia escura com  $M_{0\Lambda} \gtrsim 5.4 \cdot 10^{58} kg$ , crescendo de acordo com o modelo que elaboramos até o tempo máximo predito por  $t_C^\Lambda$  (ver equação (4.41)). Por isso, para  $t \rightarrow \infty$ , ou seja,  $t > t_C^\Lambda$ , o modelo apresentado aqui, para a evolução temporal da massa de um buraco negro, perde validade.

<sup>22</sup> Observe que o mesmo ocorre para outras condições iniciais de crescimento de massa de um buraco negro.

<sup>23</sup> Ver intervalos de validade (4.39-4.42).

## 5 CONCLUSÃO

Na presente dissertação fizemos uma revisão geral de aspectos relacionados a Termodinâmica de Buracos Negros de Schwarzschild. Dedicamos a primeira parte da mesma para uma revisão de ferramentas da RG que utilizamos no decorrer do trabalho como um todo. Em seguida utilizamos a maior parte desta dissertação para a discussão acerca da TQCEC, onde deduzimos a temperatura do Efeito Unruh e da Radiação Hawking em detalhes. Por fim, adentramos finalmente ao tópico Termodinâmica de Buracos Negros, no qual discorreremos acerca das Leis da Termodinâmica de Buracos Negros, com seu paralelo clássico e incluímos uma discussão de caráter termodinâmico sobre a evolução temporal da massa de buracos negros de Schwarzschild.

No Capítulo 2 demos uma maior atenção aos conceitos, espaços-tempo e equações que viríamos a utilizar no Capítulo 3. Podemos destacar como principais tópicos: a análise da estrutura causal do espaço-tempo, vista na Seção 2.4, os vetores de Killing, vistos na Seção 2.3 e a noção de buracos negros, vista durante a Seção 2.6 e mais precisamente na Seção 2.8. A estrutura causal é primordial porque a definição dos campos em espaços-tempo curvos é estruturada de modo a conseguirmos definir os mesmos por todo o espaço-tempo, daí o fato de lidarmos com um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Os vetores de Killing são as entidades que definem partículas no espaço-tempo curvo. São eles que são utilizados na definição dos modos de frequência positivas. Claramente, eles também são primordiais na definição de horizonte de Killing e Horizonte de Eventos, sendo este último responsável por esconder a informação interna dos buracos negros. É claro que as definições e interpretações dos buracos negros nortearam esse trabalho.

A densidade envolvida no Capítulo 3 foi de extrema importância para a introdução da autora no seguimento da TQCEC. Apresentamos a “conversão” de TQC em espaços-tempo planos para espaços-tempo curvos focando no cálculo do número de partículas. Esse cálculo foi feito em um vácuo diferente do operador número considerado, para a obtenção do espectro de Planck e de sua então temperatura de forma geral. Daí, utilizamos essa “receita” para o Efeito Unruh e para a Radiação Hawking. Introduzimos o Efeito Unruh como uma motivação para a Radiação Hawking, por possuir uma formulação matemática equivalente. Então apresentamos a dedução da Radiação Hawking para o colapso esfericamente simétrico, seguindo e destrinchando o trabalho original do Hawking [5].

Muito embora tenha servido como motivação para o estudo da Radiação Hawking, o Efeito Unruh, estudado na Seção 3.3, é notável com relação ao seu principal resultado: de que a noção de partículas, a sua existência ou não, passa depender do observador em questão. Além de revolucionária, essa ideia orienta o que esperamos de fenômenos em TQCEC: a relatividade

das medidas e declarações com relação a que entidades são ou não fundamentais. Isso porque a Física continua a mesma com relação a qualquer referencial, mas as medidas podem diferir.

O trabalho sobre a Radiação Hawking [5], em 1975, quebrou com o que se entendia na época com relação à Física de buracos negros. Os mesmos passaram a emitir partículas para o infinito com um espectro térmico. Aqueles corpos que eram tidos como objetos a partir dos quais nada, nem mesmo a luz, poderia escapar, não seriam mais os mesmos. Como discutimos no final da Seção 3.4, o fato de podermos chegar a temperatura de um buraco negro de Schwarzschild considerando diferentes deduções, como o buraco negro eterno, mostra que o resultado do colapso esfericamente simétrico é totalmente independente das características do mesmo. Portanto, a temperatura de um buraco negro de Schwarzschild  $T_H$  apresenta-se mais como uma consequência da estrutura causal do espaço-tempo do que da geometria do mesmo.

Embora muitas vezes tidos como fenômenos pormenorizados, por não possuírem caráter experimental, comentamos que tanto o Efeito Unruh quanto a Radiação Hawking possuem experimentos propostos e análogos experimentais. Esses experimentos endossam ainda mais a credibilidade desses fenômenos. Além disso, os fixam como fenômenos testes para qualquer proposta de Teoria Quântica de Gravitação que venha a ser elaborada.

Por fim, o Capítulo 4 fecha todas as ideias desenvolvidas no decorrer dessa dissertação apresentando as Leis da Termodinâmica de Buracos Negros, que ganharam seguidores após as ideias de Bekenstein [6], mas que se estabeleceram como linha de intensa pesquisa após o trabalho de Hawking. Apresentamos o paralelo com as Leis da Termodinâmica Clássica. A principal ideia desenvolvida nesse capítulo foi a da evaporação ou do crescimento indefinido de buracos negros com um caráter termodinâmico. Discorremos acerca da mesma para um buraco negro no espaço vazio, mostrando que o mesmo sempre evapora e que demora mais para fazê-lo quanto maior for a sua massa. Então, consideramos um buraco negro imerso na radiação cósmica de fundo com temperatura constante. Encontramos três diferentes comportamentos: o de aumento indefinido da massa, o equilíbrio instável de constância da massa (por possuir massa equivalente a temperatura da radiação cósmica de fundo) e o da própria evaporação. Assim, partimos para considerar a radiação cósmica de fundo com temperatura evoluindo no tempo com dependência temporal relacionada à evolução do conteúdo de matéria e energia do universo. Obtemos dois comportamentos distintos: o de aumento indefinido da massa e o da evaporação. O caso do “equilíbrio instável” passou a ser visto por sua evolução temporal. Em todas as análises fizemos uso das soluções numéricas comparando-as sempre que possível às soluções analíticas assintóticas, discutindo seus intervalos de validade e comportamentos.

## REFERÊNCIAS

- 1 PIRES, A. S. T. **Evolução das idéias da física**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- 2 GRIFFITHS, D. **Introduction do elementary particles**. 2. ed. Weinheim: Wiley-VCH, 2011.
- 3 BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W. **Quantum Fields in Curved Space**. New York: Cambridge University Press, 1982.
- 4 UNRUH, W. G. Notes on black-hole evaporation. **Phys. Rev. D**, v. 14, p. 870–892, 1976.
- 5 HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. **Comm. Math. Phys.**, v. 43, n. 3, p. 199–220, 1975.
- 6 BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. **Phys. Rev. D**, v. 7, p. 2333–2346, 1973.
- 7 LYNDEN-BELL, D.; LYNDEN-BELL, R. M. On the negative specific heat paradox. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 181, n. 3, p. 405–419, 1977.
- 8 OLIVE, K. A. et al. Review of Particle Physics. **Chin. Phys.**, C38, p. 090001, 2014.
- 9 EINSTEIN, A. Zur elektrodynamik bewegter körper. **Annalen der Physik**, v. 322, n. 10, p. 891–921, 1905.
- 10 MARTINS, R. d. A. A dinâmica relativística antes de einstein. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 27, n. 1, p. 11 – 26, 2005.
- 11 MARTIN, J. K.; KOX, A. J.; SCHULMAN, R. **The Collected Papers of Albert Einstein: Volume 6 - the berlin years: Writings 1914 - 1917**. New Jersey: Princeton University Press, 1996. v. 6.
- 12 SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. **Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math.Phys.)**, v. 3, p. 189–196, 1999. Tradução por Antoci, S. and Loinger. A.
- 13 CARROLL, S. M. **Spacetime and Geometry: An introduction to general relativity**. San Francisco: Addison Wesley, 2004.
- 14 FOSTER, J.; NIGHTINGALE, J. D. **A Short Course in General Relativity**. 3. ed. New York: Springer, 2006.
- 15 HARTLE, J. B. **Gravity: An introduction to einstein's general relativity**. San Francisco: Addison-Wesley, 2003.
- 16 DIRAC, P. A. M. **General Theory of Relativity**. New York: Wiley, 1975.
- 17 WALD, R. M. **General Relativity**. Chicago: University of Chicago Press, 1984.
- 18 DOWKER, F. **Black Holes**. 2014/2015. Último acesso em Abril de 2018. Disponível em: <[http://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/theoretical-physics/msc/current/black-holes/bh-notes-2014\\_15.pdf](http://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/theoretical-physics/msc/current/black-holes/bh-notes-2014_15.pdf)>.

- 19 LAMBERT, P.-H. **Introduction to Black Hole Evaporation**. 2013. Último acesso em Abril de 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1310.8312>>.
- 20 MUKHANOV, V.; WINITZKI, S. **Introduction to Quantum Effects in Gravity**. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- 21 GEROCH, R. Domain of dependence. **Journal of Mathematical Physics**, v. 11, n. 2, p. 437–449, 1970.
- 22 TRASCHEN, J. H. **An Introduction to black hole evaporation**. 2000. Último acesso em Abril de 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/gr-qc/0010055>>.
- 23 SAA, A. Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de schwarzschild. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 38, n. 4, p. e4201:1–14, 2016.
- 24 PARKER, L. E.; TOMS, D. J. **Quantum Field Theory in Curved Spacetime**. United Kingdom: Cambridge University Press, 2009.
- 25 PLANCK, M. Ueber das gesetz der energieverteilung im normalspectrum. **Annalen der Physik**, v. 309, n. 3, p. 553–563, 1901.
- 26 ARONS, A. B.; PEPPARD, M. B. Einstein's proposal of the photon concept — a translation of the annalen der physik paper of 1905. **American Journal of Physics**, v. 33, n. 5, p. 367–374, 1965.
- 27 SCHRÖDINGER, E. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. **Phys. Rev.**, v. 28, p. 1049–1070, 1926.
- 28 KRAGH, H. Equation with the many fathers: The klein–gordon equation in 1926. **American Journal of Physics**, v. 52, n. 11, p. 1024–1033, 1984.
- 29 DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 117, n. 778, p. 610–624, 1928.
- 30 FULLING, S. A. **Aspects of Quantum Field Theory in Curved Spacetime**. Cambridge New York: Cambridge University Press, 1989.
- 31 FABBRI, A.; NAVARRO-SALAS, J. **Modeling Black Hole Evaporation**. London: Imperial College Press, 2005.
- 32 WALD, R. M. **Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics**. Chicago London: University of Chicago Press, 1994.
- 33 GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of Integrals, Series, and Products**. 7. ed. Burlington San Diego London: Academic Press, 2007.
- 34 COZZELLA, G.; LANDULFO, A. G. S.; MATSAS, G. E. A.; VANZELLA, D. A. T. Proposal for observing the unruh effect using classical electrodynamics. **Phys. Rev. Lett.**, v. 118, p. 161102:1–6, 2017.
- 35 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical Methods for Physicists**. 6. ed. Boston: Elsevier Academic Press, 2005.

- 36 FULLING, S. A. Alternative vacuum states in static space-times with horizons. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 10, n. 6, p. 917, 1977.
- 37 GHEZ, A. M.; SALIM, S.; WEINBERG, N. N.; LU, J. R.; DO, T.; DUNN, J. K.; MATTHEWS, K.; MORRIS, M.; YELDA, S.; BECKLIN, E. E.; KREMENEK, T.; MILOSAVLJEVIC, M.; NAIMAN, J. Measuring distance and properties of the milky way's central supermassive black hole with stellar orbits. **Astrophys. J.**, v. 689, p. 1044–1062, 2008.
- 38 UNRUH, W. G. Experimental black-hole evaporation? **Phys. Rev. Lett.**, v. 46, p. 1351–1353, 1981.
- 39 WEINFURTNER, S.; TEDFORD, E. W.; PENRICE, M. C. J.; UNRUH, W. G.; LAWRENCE, G. A. Measurement of stimulated hawking emission in an analogue system. **Phys. Rev. Lett.**, v. 106, p. 021302:1–4, 2011.
- 40 STEINHAEUER, J. Observation of quantum hawking radiation and its entanglement in an analogue black hole. **Nature Physics**, v. 12, p. 959–965, 2016.
- 41 BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W. The four laws of black hole mechanics. **Comm. Math. Phys.**, v. 31, n. 2, p. 161–170, 1973.
- 42 BEKENSTEIN, J. D. Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. **Phys. Rev. D**, v. 9, p. 3292–3300, 1974.
- 43 \_\_\_\_\_. Black-hole thermodynamics. **Physics Today**, v. 33, n. 1, p. 24–31, 1980.
- 44 HAWKING, S. W. Black holes in general relativity. **Comm. Math. Phys.**, v. 25, n. 2, p. 152–166, 1972.
- 45 EMMEL, P. D. **Notas de Aula de Mecânica Estatística**. São Carlos: Departamento de Física - Universidade Federal de São Carlos, 2016.
- 46 LOPRESTO, M. C. Some simple black hole thermodynamics. **The Physics Teacher**, v. 41, n. 5, p. 299–301, 2003.
- 47 PARKER, B. R.; MCLEOD, R. J. Black hole thermodynamics in an undergraduate thermodynamics course. **American Journal of Physics**, v. 48, n. 12, p. 1066–1070, 1980.
- 48 PAGE, D. N. Particle emission rates from a black hole: Massless particles from an uncharged, nonrotating hole. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 13, p. 198–206, 1976.
- 49 JACOBSON, R. A.; ANTREASIAN, P. G.; BORDI, J. J.; CRIDDLE, K. E.; IONASESCU, R.; JONES, J. B.; MACKENZIE, R. A.; MEEK, M. C.; PARCHER, D.; PELLETIER, F. J.; OWEN, J. W. M.; ROTH, D. C.; ROUNDHILL, I. M.; STAUCH, J. R. The gravity field of the saturnian system from satellite observations and spacecraft tracking data. **The Astronomical Journal**, v. 132, n. 6, p. 2520–2526, 2006.
- 50 THORNE, K.; BLANDFORD, R. **Modern Classical Physics: Optics, Fluids, Plasmas, Elasticity, Relativity, and Statistical Physics**. New Jersey: Princeton University Press, 2017.



## APÊNDICE A – GRAVIDADE SUPERFICIAL

A gravidade superficial, em um espaço-tempo estático e assintoticamente plano, pode ser interpretada como a aceleração de um observador estático perto do horizonte de eventos de um buraco negro medida por um observador estático no infinito. Dessa forma, neste apêndice vamos explicar essa interpretação (ver Seção 2.3), calculá-la para um buraco negro de Schwarzschild (ver Seções 2.6, 2.7 e 2.8), utilizando a interpretação apresentada e mostrar que a mesma é constante ao longo do horizonte de eventos de um buraco negro (ver Seções 2.8 e 4.1) [13, 17, 19, 32].

### A.1 A interpretação do nome gravidade superficial

Primeiramente precisamos considerar um *observador estático*. A ideia geral de um observador estático consiste em um observador “parado”, ou seja, cujas coordenadas espaciais permaneçam fixas no tempo. Assim, um observador estático é aquele que possui as componentes espaciais da 4-velocidade nulas ( $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$ ) ou, mais especificamente, está relacionado à simetria temporal. Assim, um observador estático possui uma trajetória no espaço-tempo que segue o campo de Killing associado a vetores de Killing temporais. Portanto, sua 4-velocidade será proporcional ao vetor de Killing

$$u^\mu = AK^\mu, \quad (\text{A.1})$$

sendo  $A$  uma constante de normalização obtida requerendo-se que  $u^2 = u_\mu u^\mu = -1$ , ou seja,  $A = \frac{1}{\sqrt{-K^2}}$ . A 4-aceleração é dada calculando

$$\begin{aligned} a^\mu &= u^\sigma \nabla_\sigma u^\mu = \frac{K^\sigma}{\sqrt{-K^2}} \nabla_\sigma \left( \frac{K^\mu}{\sqrt{-K^2}} \right) \\ &= \frac{K^\sigma}{\sqrt{-K^2}} \left\{ \frac{\sqrt{-K^2} (\nabla_\sigma K^\mu) - K^\mu (\nabla_\sigma \sqrt{-K^2})}{(\sqrt{-K^2})^2} \right\} \\ &= \frac{K^\sigma \nabla_\sigma K^\mu}{-K^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

sendo que da segunda para a terceira linha fizemos uso da anti-simetrização dos índices de forma que  $K^\sigma \nabla_\sigma K^2 = 2K^\sigma K^\nu \nabla_\sigma K_\nu = 0$ .

Podemos escrever  $a = \sqrt{-a^2}$  representando o módulo da aceleração e  $V = \sqrt{-K^2}$  representando o módulo do vetor de Killing<sup>1</sup>. Desde que estejamos no limite do horizonte de

<sup>1</sup>  $V$  também é chamado de *fator de desvio para o vermelho* porque pode ser utilizado para relacionar frequências emitidas e observadas por observadores estáticos. Como a energia de um fóton é  $E = \omega$ , sendo  $\omega$  sua frequência e a energia desse fóton medida por um observador estático, com 4-velocidade  $u^\mu$ , é  $\omega = -p_\mu u^\mu$ , podemos escrever  $\omega = -p_\mu \frac{K^\mu}{V} = \frac{E}{V}$ . Portanto, sendo  $\lambda_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$  o comprimento de onda medido por um observador, que chamaremos de 2, com relação a outro que chamaremos de

eventos do buraco negro (o que para um buraco negro de Schwarzschild equivale a  $r \rightarrow 2M^2$ ), ou seja, possamos escrever  $K^\mu \nabla_\mu K^\nu = \kappa K^\nu$  da equação (2.18), temos

$$a^\mu = \lim_{r \rightarrow 2M} \frac{K^\sigma \nabla_\sigma K^\mu}{-K^2} = \frac{\kappa K^\mu}{-K^2}, \quad (\text{A.4})$$

de modo que a gravidade superficial  $\kappa$ , seja escrita como

$$\kappa = \lim_{r \rightarrow 2M} Va. \quad (\text{A.5})$$

Portanto, a gravidade superficial  $\kappa$  é interpretada como a aceleração limite da partícula quando ela se aproxima do horizonte de eventos de um buraco negro.

## A.2 A gravidade superficial para um buraco negro de Schwarzschild

Para calcular  $\kappa$  para um buraco negro de Schwarzschild, utilizando a métrica (2.42), seguindo a interpretação acima, podemos reescrever (A.2) como

$$a_\mu = \nabla_\mu \ln V = \frac{1}{V} \nabla_\mu V = -\frac{1}{2} \frac{[K^\alpha (\nabla_\mu K_\alpha) + K_\alpha (\nabla_\mu K^\alpha)]}{(K_\alpha K^\alpha)} = \frac{K^\gamma \nabla_\gamma K_\mu}{(-K_\alpha K^\alpha)}. \quad (\text{A.6})$$

Assim, tomando:  $K^\mu = (1, 0, 0, 0)$ ,  $u^\mu = \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, 0, 0, 0 \right]$ ,  $V = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$ , obtemos

$$a_\mu = \frac{M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \nabla_\mu r = \frac{M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \delta_\mu^r. \quad (\text{A.7})$$

Sendo que  $a^2 = \frac{M^2}{r^4 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$ , o módulo da aceleração fica

$$a = \frac{M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}}. \quad (\text{A.8})$$

Portanto, a gravidade superficial vale

$$\kappa = \lim_{r \rightarrow 2M} Va = \lim_{r \rightarrow 2M} \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \frac{M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}} = \frac{1}{4M}. \quad (\text{A.9})$$

Como esperado o resultado (A.9) representa exatamente o valor que relaciona as coordenadas de Eddington-Finkelstein e Kruskal-Szekeres em (2.58) e é diretamente proporcional à temperatura de um buraco negro de Schwarzschild (3.140).

1, é

$$\lambda_2 = \frac{V_2}{V_1} \lambda_1. \quad (\text{A.3})$$

Temos o *desvio para o vermelho* quando  $\lambda_2 > \lambda_1$ . A situação contrária é dita como *desvio para o azul*.

<sup>2</sup> Para mais detalhes ver Seções 2.6, 2.7 e 2.8.

### A.3 Algumas relações com a gravidade superficial

Agora vamos deduzir duas relações úteis para a gravidade superficial  $\kappa$ . A primeira delas relaciona o tensor de Riemann  $R_{\mu\nu\sigma\lambda}$  e o comutador da derivada covariante para um vetor de Killing  $K_\sigma$ . Pode-se mostrar (utilizando as expressões (2.6) e (2.10)) que, para um vetor qualquer  $v_\sigma$ , vale

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] v_\sigma = R_{\mu\nu\sigma\lambda} v^\lambda. \quad (\text{A.10})$$

Assim, tomando  $v_\sigma = K_\sigma$  temos

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] K_\sigma = \nabla_\mu \nabla_\nu K_\sigma - \nabla_\nu \nabla_\mu K_\sigma = \nabla_\mu \nabla_\nu K_\sigma + \nabla_\nu \nabla_\sigma K_\mu = R_{\mu\nu\sigma\lambda} K^\lambda, \quad (\text{A.11})$$

onde usamos a equação de Killing (2.15) para escrever a expressão após a segunda igualdade. Reescrevendo a expressão (A.11) como permutações da forma

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\sigma\lambda} K^\lambda &= \nabla_\mu \nabla_\nu K_\sigma + \nabla_\nu \nabla_\sigma K_\mu \\ R_{\nu\sigma\mu\lambda} K^\lambda &= \nabla_\nu \nabla_\sigma K_\mu + \nabla_\sigma \nabla_\mu K_\nu \\ R_{\sigma\mu\nu\lambda} K^\lambda &= \nabla_\sigma \nabla_\mu K_\nu + \nabla_\mu \nabla_\nu K_\sigma \end{aligned}$$

podemos combiná-las e obtermos

$$(R_{\mu\nu\sigma\lambda} - R_{\nu\sigma\mu\lambda} + R_{\sigma\mu\nu\lambda}) K^\lambda = 2\nabla_\mu \nabla_\nu K_\sigma. \quad (\text{A.12})$$

Usando a Identidade de Bianchi

$$R_{\mu\nu\sigma\lambda} + R_{\sigma\mu\nu\lambda} + R_{\nu\sigma\mu\lambda} = 0, \quad (\text{A.13})$$

reescrevemos (A.12) como

$$\nabla_\mu \nabla_\nu K_\sigma = -R_{\nu\sigma\mu\lambda} K^\lambda = R_{\sigma\nu\mu\lambda} K^\lambda. \quad (\text{A.14})$$

Outra relação bastante útil relaciona  $\kappa^2$  a derivadas covariantes do vetor de Killing  $K^\mu$ . Para deduzi-la fazemos uso da relação

$$0 = K_\mu \nabla_\nu K_\sigma + K_\nu \nabla_\sigma K_\mu + K_\sigma \nabla_\mu K_\nu, \quad (\text{A.15})$$

que vem do fato de que os vetores de Killing são ortogonais aos horizontes de Killing<sup>3</sup>. Utilizando a equação de Killing (2.15), reescrevemos a expressão acima como

$$0 = K_\mu \nabla_\nu K_\sigma - K_\nu \nabla_\mu K_\sigma + K_\sigma \nabla_\mu K_\nu \Rightarrow K_\sigma \nabla_\mu K_\nu = -(K_\mu \nabla_\nu K_\sigma - K_\nu \nabla_\mu K_\sigma) \quad (\text{A.16})$$

e multiplicando  $K_\sigma \nabla_\mu K_\nu$  por  $\nabla^\mu K^\nu$  temos

$$\begin{aligned} K_\sigma (\nabla_\mu K_\nu) (\nabla^\mu K^\nu) &= -(\nabla^\mu K^\nu) [K_\mu \nabla_\nu K_\sigma - K_\nu \nabla_\mu K_\sigma] \\ &= -2K_\mu (\nabla^\mu K^\nu) (\nabla_\nu K_\sigma) \\ &= -2\kappa^2 K_\sigma. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Portanto, chegamos em

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} (\nabla^\mu K^\nu) (\nabla_\mu K_\nu). \quad (\text{A.18})$$

<sup>3</sup> Para mais detalhes ver teorema de Frobenius na Referência [17].

## A.4 Gravidade superficial constante ao longo do horizonte de eventos

Podemos mostrar que a gravidade superficial é constante ao longo do horizonte de eventos de um buraco negro tomando a derivada covariante direcional para um vetor tangente  $t^\mu$  ao horizonte de eventos  $H^+$ . Assim,

$$\begin{aligned} t^\rho \nabla_\rho (\kappa^2) &= t^\rho \nabla_\rho \left[ -\frac{1}{2} (\nabla^\mu K^\nu) (\nabla_\mu K_\nu) \right] \\ &= -(\nabla^\mu K^\nu) t^\rho \nabla_\rho (\nabla_\mu K_\nu), \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

sendo que  $\kappa^2$  é expressa por (A.18). Como o vetor de Killing  $K^\mu$  é nulo no horizonte de eventos então ele é normal e tangente a  $H^+$ , de modo que usando  $t^\mu = K^\mu$  e a relação (A.14), temos

$$\begin{aligned} K^\rho \nabla_\rho (\kappa^2) &= -(\nabla^\mu K^\nu) K^\rho \nabla_\rho \nabla_\mu K_\nu \\ &= -(\nabla^\mu K^\nu) K^\rho R_{\nu\mu\rho\lambda} K^\lambda \\ &= (\nabla^\mu K^\nu) K^\rho R_{\mu\nu\rho\lambda} K^\lambda = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Isso porque enquanto  $K^\rho K^\lambda$  possui índices simétricos, o tensor de Riemann é anti simétrico nesses índices, ou seja,  $R_{\mu\nu\rho\lambda} = -R_{\mu\nu\lambda\rho}$ . Portanto a gravidade superficial  $\kappa$  é constante ao longo do horizonte de eventos  $H^+$ . No caso de um buraco negro de Schwarzschild, como acabamos de ver, a gravidade superficial vale  $\kappa = \frac{1}{4M}$ .

## APÊNDICE B – DESTRINCHANDO A DEDUÇÃO DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

Este apêndice consiste nas contas da dedução da métrica de Schwarzschild [14]. Primeiramente, utilizando a equação (2.4), calculamos os símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{01}^0 &= \frac{A'(r)}{2A(r)} & \Gamma_{00}^1 &= \frac{A'(r)}{2B(r)} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{B'(r)}{2B(r)} \\
 \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{B(r)} & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2 \theta}{B(r)} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

e com eles, lembrando de (2.2), calculamos  $R_{\mu\nu} = 0$ , obtendo

$$R_{00} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rB} = 0, \tag{B.2}$$

$$R_{11} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rB} = 0, \tag{B.3}$$

$$R_{22} = -\frac{1}{B} - \frac{r}{2B} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + 1 = 0, \tag{B.4}$$

$$R_{33} = -\sin^2 \theta R_{22} = 0, \tag{B.5}$$

onde  $R_{\mu\nu} = 0$  para  $\mu \neq \nu$ . Essas equações fornecem um sistema para as funções  $A(r)$  e  $B(r)$ . Multiplicando a equação (B.2) por  $B(r)/A(r)$  e somando com a equação (B.3) temos

$$\frac{A'(r)}{rA(r)} + \frac{B'(r)}{rB(r)} = 0, \tag{B.6}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 A'(r)B(r) + B'(r)A(r) &= 0 \\
 \frac{d}{dr} [A(r)B(r)] &= A'(r)B(r) + B'(r)A(r) = 0 \\
 A(r)B(r) &= 1.
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

Veja que definimos a constante de integração da equação (B.7) como 1, por conveniência, devido a condição de espaço-tempo assintoticamente plano. Substituindo o resultado (B.7) na equação (B.4) ficamos com

$$A(r) + rA'(r) = 1. \tag{B.8}$$

Notando que  $d[A(r)r]/dr = A(r) + rA'(r)$ , podemos simplesmente integrar (B.8) e obter como solução

$$A(r) = \left( 1 + \frac{k}{r} \right) \quad \text{e} \quad B(r) = \left( 1 + \frac{k}{r} \right)^{-1}, \tag{B.9}$$

onde  $k$  é uma constante de integração a ser determinada. Esse é exatamente o resultado apresentado na Subseção 2.6.1.



## APÊNDICE C – LIMITE NEWTONIANO

O limite Newtoniano é obtido ao considerarmos a RG com velocidades  $v$  muito menores que a velocidade da luz  $c \equiv 1$ , campo gravitacional suficientemente pequeno (já que vamos fazer uma perturbação no espaço-tempo plano) e estático, de modo que o tensor métrico, tal como na equação (2.37), seja

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (\text{C.1})$$

considerando  $h_{\mu\nu}$  pequeno nesse limite [13, 14].

Podemos calcular a geodésica de uma partícula de massa ínfima como

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (\text{C.2})$$

Sendo  $v \ll 1$  então  $\frac{dx^i}{dt} \ll 1$ , ou equivalentemente,  $dx^i/d\tau \ll dt/d\tau$ , o que faz com que a expressão (C.2) fique

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} &= -\Gamma_{ij}^\mu \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} - \Gamma_{i0}^\mu \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} - \Gamma_{00}^\mu \frac{dt}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} \\ &= -\left[ \Gamma_{ij}^\mu \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \Gamma_{i0}^\mu \frac{dx^i}{dt} + \Gamma_{00}^\mu \right] \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\ &= -\Gamma_{00}^\mu \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Assim, utilizando (2.4), calculamos

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^\mu &= \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda g_{00} \\ &= -\frac{1}{2} (g^{\mu\lambda} \partial_\lambda \eta_{00} + \eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda h_{00}) = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda h_{00}, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

sendo que não mantemos termos quadrados em  $h_{\mu\nu}$ . Como a métrica é postulada como independente do tempo, sabemos que  $\partial_0 h_{00} = 0$ , logo reescrevemos (C.3) na forma

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \partial_i h_{00} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2. \quad (\text{C.5})$$

Multiplicando (C.5) por  $\left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2$  finalmente chegamos a

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \partial_i h_{00}. \quad (\text{C.6})$$

Essa é exatamente a expressão requerida para o paralelo feito com a Mecânica Newtoniana na Subseção 2.6.1.



## APÊNDICE D – A RELAÇÃO ENTRE AS EXPANSÕES DISCRETA E CONTÍNUA DO CAMPO DE KLEIN-GORDON

Tal como enfatizado na Subsecção 3.1.3, os operadores  $\hat{a}_k^\dagger$  e  $\hat{a}_k$ , da expansão do campo de Klein-Gordon no contínuo (3.26), não possuem uma interpretação física tão direta como no caso do OHQ. Podemos obter essa interpretação direta de partículas de duas formas distintas: expandindo o campo  $\hat{\phi}$  como um conjunto de pacotes de ondas  $F_j(x)$  por meio das ondas planas (3.9), sendo  $j$  um índice discreto ou discretizando o campo de Klein-Gordon por meio de condições periódicas de contorno [24].

No presente apêndice vamos mostrar como chegamos a interpretação física direta dos operadores  $\hat{a}_k^\dagger$  e  $\hat{a}_k$ , como operadores de criação e aniquilação, respectivamente, discretizando o campo de Klein-Gordon e expandindo-o “numa caixa” de lado  $L$ . Forneceremos uma interpretação para os mesmos operadores no caso do contínuo. Além disso, daremos uma interpretação física para o operador número (3.29) definido no contínuo, relacionando-o com sua versão definida na expansão discreta.

Primeiramente vamos recorrer a discretização do campo escalar  $\hat{\phi}$ . Podemos fazê-la impondo condições periódicas de contorno, ao campo quantizado, tais que

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x} + \mathbf{m}L) = \hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \quad (\text{D.1})$$

onde  $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)$ , tal que  $m_i \in \mathbb{Z}$ , com  $i = x, y$  ou  $z$ . Essa ideia é equivalente a dizer que estamos quantizando o campo “numa caixa” de lado  $L$ . Assim, temos os modos de expansão do campo dados por

$$f_k = \frac{1}{V^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (\text{D.2})$$

onde  $V = L^3$ , representando o volume de caixa e  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{m}$ . As condições periódicas de contorno tomadas sobre  $x^i$  variando de 0 até  $L$  permitem que os modos  $f_k$  satisfaçam

$$(f_k, f_{k'}) = \delta_{k,k'} \quad (\text{D.3})$$

$$(f_k, f_{k'}^*) = 0 \quad (\text{D.4})$$

$$(f_k^*, f_{k'}^*) = -\delta_{k,k'} \quad (\text{D.5})$$

e podemos escrever o campo  $\hat{\phi}$  discretamente como

$$\hat{\phi}(x) = \sum_k \left[ f_k \hat{a}_k + f_k^* \hat{a}_k^\dagger \right]. \quad (\text{D.6})$$

Finalmente, dadas essas definições satisfazemos as relações de comutação, exatamente como no caso OHQ, da forma

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}, \quad (\text{D.7})$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0. \quad (\text{D.8})$$

tais que os operadores  $\hat{a}_k^\dagger$  e  $\hat{a}_k$  são *diretamente interpretados* como *operadores de criação e aniquilação*, respectivamente.

Os estados de partículas são expressos pelo espaço de Fock  $\mathcal{F}_{KG}$ , tal como descrito na Seção 3.1.3. Temos o estado de vácuo exatamente como (3.28) e as excitações da base de Fock são interpretadas como partículas. Assim, o estado de 1 partícula de momento  $\mathbf{k}$ , expresso por  $|1_k\rangle$ , é dado atuando o operador criação  $\hat{a}_k^\dagger$  no estado de vácuo  $|0\rangle$ , tal que

$$|1_k\rangle = \hat{a}_k^\dagger |0\rangle. \quad (\text{D.9})$$

O estado de  $j$  partículas de momentos  $\mathbf{k}_i, i = 1, \dots, j$  é dado atuando seus respectivos operadores de criação  $\hat{a}_{k_i}^\dagger$  no estado de vácuo  $|0\rangle$ , sendo escrito como

$$|1_{k_1}, 1_{k_2}, \dots, 1_{k_j}\rangle = \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2}^\dagger \dots \hat{a}_{k_j}^\dagger |0\rangle \quad (\text{D.10})$$

Similarmente os estados de  $n$  partículas de momento  $\mathbf{k}$  e de  $N = \sum_{i=1}^j i n_{k_i}$  total de partículas, sendo  $i n$  o número de partículas de momento  $\mathbf{k}_i, i = 1, \dots, j$ , são dados por

$$|n_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left( \hat{a}_k^\dagger \right)^n |0\rangle, \quad (\text{D.11})$$

$$|{}^1 n_{k_1}, {}^2 n_{k_2}, \dots, {}^j n_{k_j}\rangle = \frac{1}{\sqrt{{}^1 n! {}^2 n! \dots {}^j n!}} \left( \hat{a}_{k_1}^\dagger \right)^{{}^1 n} \left( \hat{a}_{k_2}^\dagger \right)^{{}^2 n} \dots \left( \hat{a}_{k_j}^\dagger \right)^{{}^j n} |0\rangle. \quad (\text{D.12})$$

Observe que os fatores de raízes das expressões (D.11) e (D.12) surgem para que os estados fiquem normalizados. Essa normalização é obtida devido a atuação dos operadores de criação e aniquilação, dadas por

$$\hat{a}_k^\dagger |n_k\rangle = \sqrt{(n+1)} | (n+1)_k \rangle \quad (\text{D.13})$$

$$\hat{a}_k |n_k\rangle = \sqrt{n} | (n-1)_k \rangle. \quad (\text{D.14})$$

Como estamos com a expansão do campo  $\hat{\phi}$  no discreto, a interpretação física dos estados de Fock é diretamente fornecida pelo *operador número*

$$\hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k. \quad (\text{D.15})$$

Tomando seu valor esperado com relação aos estados de Fock (3.28), (D.11) e (D.12), obtemos

$$\langle 0 | \hat{N}_k | 0 \rangle = 0, \quad \forall k, \quad (\text{D.16})$$

$$\langle {}^1 n_{k_1}, {}^2 n_{k_2}, \dots, {}^j n_{k_j} | \hat{N}_{k_i} | {}^1 n_{k_1}, {}^2 n_{k_2}, \dots, {}^j n_{k_j} \rangle = N_i, \quad \forall k_i \quad (\text{D.17})$$

$$\sum_{i=0}^j \langle {}^1 n_{k_1}, {}^2 n_{k_2}, \dots, {}^j n_{k_j} | \hat{N}_{k_i} | {}^1 n_{k_1}, {}^2 n_{k_2}, \dots, {}^j n_{k_j} \rangle = N, \quad \forall k_i \quad (\text{D.18})$$

sendo nulo o número de partículas esperado para o vácuo  $|0\rangle$ ,  $N_i$  o número de partículas de momento  $\mathbf{k}_i$  e  $N$  o número total de partículas do estado  $|^1 n_{k_1}, ^2 n_{k_2}, \dots, ^j n_{k_j}\rangle$ .

Voltando agora para os comentários relativos as expansões do campo  $\hat{\phi}$ , podemos dizer que, retomamos o limite do contínuo tomando  $L \rightarrow \infty$ . Uma maneira de fazermos isso é enxergarmos a relação do somatório  $\Sigma_k$  com a integral  $\int d^3k$ , no espaço dos vetores de onda  $\mathbf{k}$ , como

$$\Sigma_k = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \sum_k \Delta^3 k \sim \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k. \quad (\text{D.19})$$

Então, comparando a expansão para o campo  $\hat{\phi}$  no contínuo (3.26) com sua expansão no discreto (D.6), vemos que

$$\hat{a}_k^{\text{contínuo}} \sim \frac{V^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \hat{a}_k^{\text{discreto}} \quad (\text{D.20})$$

$$\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \sim \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{k,k'}. \quad (\text{D.21})$$

Portanto, o *operador número contínuo*  $\hat{N}_k^{\text{contínuo}} \equiv (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k)^{\text{contínuo}}$  (3.29) se relaciona com o *operador número discreto*  $\hat{N}_k^{\text{discreto}} \equiv (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k)^{\text{discreto}}$  (D.15), da forma

$$\hat{N}_k^{\text{contínuo}} \sim \frac{V}{(2\pi)^3} \hat{N}_k^{\text{discreto}}, \quad (\text{D.22})$$

de modo que o valor esperado do operador número no caso do contínuo seja visto como uma *densidade de partículas*. Utilizaremos essa relação e sua interpretação nas Seções 3.3 e 3.4. Vale comentar que, mesmo não pensando na discretização “numa caixa” do campo escalar  $\hat{\phi}$ , a interpretação do operador número como uma *densidade de partículas* prevalece (ver final da Seção 3.4).



## APÊNDICE E – TRANSFORMAÇÕES DE BOGOLIUBOV

Podemos correlacionar os modos  $g_j$  e  $g_j^*$ , da expressão (3.45), com relação aos modos  $f_i$  e  $f_i^*$ , da expressão (3.44), através das *transformações de Bogoliubov* [3, 13, 19]

$$g_j = \sum_i (A_{ji}f_i + B_{ji}f_i^*), \quad (\text{E.1})$$

$$g_j^* = \sum_i (B_{ji}^*f_i + A_{ji}^*f_i^*) \quad (\text{E.2})$$

e os coeficientes  $A_{ji}$ ,  $B_{ji}$ ,  $A_{ji}^*$ ,  $B_{ji}^*$ , chamados de *coeficientes de Bogoliubov*, são dados pelos produtos internos

$$A_{ji} = (g_j, f_i) \text{ e } B_{ji} = -(g_j, f_i^*), \quad (\text{E.3})$$

$$B_{ji}^* = (g_j^*, f_i) \text{ e } A_{ji}^* = -(g_j^*, f_i^*) \quad (\text{E.4})$$

sendo obtidos por meio das relações (3.36-3.38). Como os modos  $g_j$  e  $g_j^*$  são expandidos em termos de combinações lineares de  $f_i$  e  $f_i^*$ , que formam um conjunto completo e ortogonal devido as relações (3.36-3.38), esperamos que  $g_j$  e  $g_j^*$  também formem um conjunto completo e ortogonal. Logo, vamos encontrar relações equivalentes para os modos  $g_j$  e  $g_j^*$ . Sabendo que  $(\alpha f, \beta g) = \alpha\beta^*(f, g)$ , podemos utilizar as expansões (E.1, E.2) e calcular

$$\begin{aligned} (g_i, g_j) &= \sum_{k,l} (A_{ik}f_k + B_{ik}f_k^*, A_{jl}f_l + B_{jl}f_l^*) \\ &= \sum_{k,l} [A_{ik}A_{jl}^*(f_k, f_l) + A_{ik}B_{jl}^*(f_k, f_l^*) + B_{ik}A_{jl}^*(f_k^*, f_l) + B_{ik}B_{jl}^*(f_k^*, f_l^*)] \\ &= \sum_{k,l} [A_{ik}A_{jl}^*\delta_{k,l} + B_{ik}B_{jl}^*(-\delta_{k,l})] = \sum_l (A_{il}A_{jl}^* - B_{il}B_{jl}^*) \\ &= \sum_l (A_{il}A_{lj}^\dagger - B_{il}B_{lj}^\dagger) = \delta_{i,j}, \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$\begin{aligned} (g_i, g_j^*) &= \sum_{k,l} (A_{ik}f_k + B_{ik}f_k^*, B_{jl}^*f_l + A_{jl}^*f_l^*) \\ &= \sum_{k,l} [A_{ik}B_{jl}^*(f_k, f_l) + A_{ik}A_{jl}^*(f_k, f_l^*) + B_{ik}B_{jl}^*(f_k^*, f_l) + B_{ik}A_{jl}^*(f_k^*, f_l^*)] \\ &= \sum_{k,l} [A_{ik}B_{jl}^*\delta_{k,l} + B_{ik}A_{jl}^*(-\delta_{k,l})] = \sum_l (A_{il}B_{jl}^* - B_{il}A_{jl}^*) \\ &= \sum_l (A_{il}B_{lj}^{*T} - B_{il}A_{lj}^{*T}) = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned}
(g_i^*, g_j^*) &= \sum_{k,l} (B_{ik}^* f_k + A_{ik}^* f_k^*, B_{jl}^* f_l + A_{jl}^* f_l^*) \\
&= \sum_{k,l} [B_{ik}^* B_{jl} (f_k, f_l) + B_{ik}^* A_{jl} (f_k, f_l^*) + A_{ik}^* B_{jl} (f_k^*, f_l) + A_{ik}^* A_{jl} (f_k^*, f_l^*)] \\
&= \sum_{k,l} [B_{ik}^* B_{jl} \delta_{k,l} + A_{ik}^* A_{jl} (-\delta_{k,l})] = \sum_l (B_{il}^* B_{jl} - A_{il}^* A_{jl}) \\
&= \sum_l (B_{li}^\dagger B_{jl} - A_{li}^\dagger A_{jl}) = -\delta_{i,j}, \tag{E.7}
\end{aligned}$$

onde usamos (3.36-3.38) da segunda para a terceira linha das 3 equações. Os produtos internos (E.5-E.7) levam a relações entre os coeficientes  $A_{il}$ ,  $B_{il}$ ,  $A_{lj}^\dagger$ ,  $B_{lj}^\dagger$ ,  $B_{lj}^T$  e  $A_{lj}^T$  que podem ser escritas como

$$AA^\dagger - BB^\dagger = 1 \tag{E.8}$$

$$AB^T - BA^T = 0. \tag{E.9}$$

Encontrados os produtos internos dos modos  $g_j$  e  $g_j^*$  vamos agora obter as *transformações inversas de Bogoliubov*, ou seja, vamos obter os modos  $f_i$  e  $f_i^*$  em termos dos modos  $g_j$  e  $g_j^*$ . Para isso podemos reescrever as equações (E.1) e (E.2) matricialmente da forma

$$\begin{pmatrix} g \\ g^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f^* \end{pmatrix}, \tag{E.10}$$

identificando esse produto de matrizes como  $G = MF$ . Definindo-se dessa forma, podemos inverter a relação (E.10) de modo a escrevermos  $F = M^{-1}G$ , porque  $M^{-1}M = \mathbb{I}$ . Assim,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^\dagger & -B^T \\ -B^\dagger & A^T \end{pmatrix}, \tag{E.11}$$

porque

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\dagger & -B^T \\ -B^\dagger & A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{E.12}$$

usando (E.8) e (E.9). Finalmente podemos escrever  $F = M^{-1}G$  como

$$\begin{pmatrix} f \\ f^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\dagger & -B^T \\ -B^\dagger & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ g^* \end{pmatrix}, \tag{E.13}$$

e portanto

$$f_i = \sum_j (A_{ji}^* g_j - B_{ji} g_j^*), \tag{E.14}$$

$$f_i^* = \sum_j (-B_{ji}^* g_j + A_{ji} g_j^*). \tag{E.15}$$

Além de trabalharmos com as transformações de Bogoliubov entre os modos de expansão  $f_i$ ,  $f_i^*$ ,  $g_j$  e  $g_j^*$  vamos utilizá-las para escrever relações entre os operadores de aniquilação e

criação das expansões do campo escalar  $\hat{\phi}(x)$ . Então, escrevendo o campo  $\hat{\phi}(x)$  matricialmente, dado pelas equações (3.44) e (3.45), temos

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{a}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b} & \hat{b}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ g^* \end{pmatrix}. \quad (\text{E.16})$$

Assim, usando (E.10) e (E.13) em (E.16) conseguimos relacionar

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T & B^\dagger \\ B^T & A^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{b}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (\text{E.17})$$

$$\begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{b}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & -B^* \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix} \quad (\text{E.18})$$

e então

$$\hat{a}_i = \sum_j \left( A_{ji} \hat{b}_j + B_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger \right), \quad (\text{E.19})$$

$$\hat{a}_i^\dagger = \sum_j \left( B_{ji} \hat{b}_j + A_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger \right), \quad (\text{E.20})$$

$$\hat{b}_j = \sum_i \left( A_{ji}^* \hat{a}_i - B_{ji}^* \hat{a}_i^\dagger \right), \quad (\text{E.21})$$

$$\hat{b}_j^\dagger = \sum_i \left( -B_{ji} \hat{a}_i + A_{ji} \hat{a}_i^\dagger \right). \quad (\text{E.22})$$

Portanto, essas são as principais relações obtidas através das *transformações de Bogoliubov* que utilizamos no decorrer do Capítulo 3.



## APÊNDICE F – EVOLUÇÃO TÉRMICA DO UNIVERSO

A evolução térmica do universo pode ser modelada utilizando o universo plano ( $\varkappa = 0$ , nas equações de Friedmann (F.2) e (F.3)) [13, 15, 50]. Para isso vamos introduzir no presente apêndice a métrica de Robertson-Walker, as equações de Friedmann, o tensor de energia momento para um fluido perfeito e as devidas aproximações do modelo.

Sabemos que o universo é homogêneo, isotrópico e evolui temporalmente. Para descrevermos o universo utilizamos a métrica de Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{(1 - \varkappa r^2)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (\text{F.1})$$

sendo  $a(t)$  o fator de expansão do universo,  $r$  a coordenada radial,  $\theta$  e  $\phi$  as coordenadas esféricas angulares e  $\varkappa^1$  um parâmetro indicador de curvatura com dimensões de comprimento  $L^{-2}$ . A consideração de um fluido perfeito<sup>2</sup> como gerador da curvatura e o uso das equações de Einstein nos levam ao que chamamos de *equações de Friedmann*, equações que definem a evolução temporal da matéria e da energia do espaço-tempo. São elas

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \rho - \frac{\varkappa}{a^2}, \quad (\text{F.2})$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} (\rho + 3p), \quad (\text{F.3})$$

sendo  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ ,  $\rho$  a densidade da matéria considerada e  $p$  a pressão da mesma. Além das equações de Friedmann, podemos nos ater a algumas propriedades do tensor de energia-momento e calcular

$$\nabla_{\mu} T_0^{\mu} = \partial_0(-\rho) + (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) (-\rho) - (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) p. \quad (\text{F.4})$$

Como  $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$  e calculando os símbolos de Christoffel, para a métrica (F.1), utilizando (2.4) obtemos

$$-\partial_t \rho - \frac{3}{2} \frac{\partial_t a^2}{a^2} \rho = \frac{3}{2} \frac{\partial_t a^2}{a^2} p. \quad (\text{F.5})$$

Daqui basta notar que podemos substituir  $\partial_t a^3 = 3a^2 \partial_t a$  e  $\partial_t a^2 = 2a \partial_t a$  e chegamos a seguinte *equação de estado*

$$\frac{d(a^3 \rho)}{dt} = -p \frac{da^3}{dt}. \quad (\text{F.6})$$

<sup>1</sup> O parâmetro de curvatura  $\varkappa$  classifica o universo como: *fechado* e com curvatura positiva ( $\varkappa = 1$ ), *plano* e sem curvatura ( $\varkappa = 0$ ) e *aberto* e com curvatura negativa ( $\varkappa = -1$ ).

<sup>2</sup> Escolhemos as 4-velocidades da forma  $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ . Para mais informações sobre um fluido perfeito ver Seção 2.1.

Vale notar que a equação (F.6) não substitui as equações de Friedmann. Isso porque, embora ela forneça uma descrição temporal do conteúdo de matéria e energia do universo, ela não está diretamente relacionada à curvatura do mesmo.

Podemos dividir o conteúdo de matéria e energia do universo em *radiação*, *matéria* e *energia escura*. A *radiação* inclui os fótons, a radiação cósmica de fundo, os grávitons e os neutrinos, ou seja, partículas que satisfaçam a equação de estado  $p_R = \frac{\rho_R}{3}$ . Por *matéria* nos referimos a matéria hadrônica e matéria escura<sup>3</sup>, entidades cuja pressão seja negligível se comparada a densidade:  $p_M = 0$ . E por fim, a *energia escura*<sup>4</sup> que obedece a seguinte equação de estado  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ . Dadas essas equações de estado podemos integrar a expressão (F.6) e obtermos

$$\rho_R = \rho_{R_0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 \quad (\text{F.7})$$

$$\rho_M = \rho_{M_0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \quad (\text{F.8})$$

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda_0}, \quad (\text{F.9})$$

sendo  $\rho_{i_0}$  a densidade de radiação ( $i = R$ ), matéria ( $i = M$ ) e energia escura ( $i = \Lambda$ ) hoje e  $a_0$  o fator de expansão também hoje.

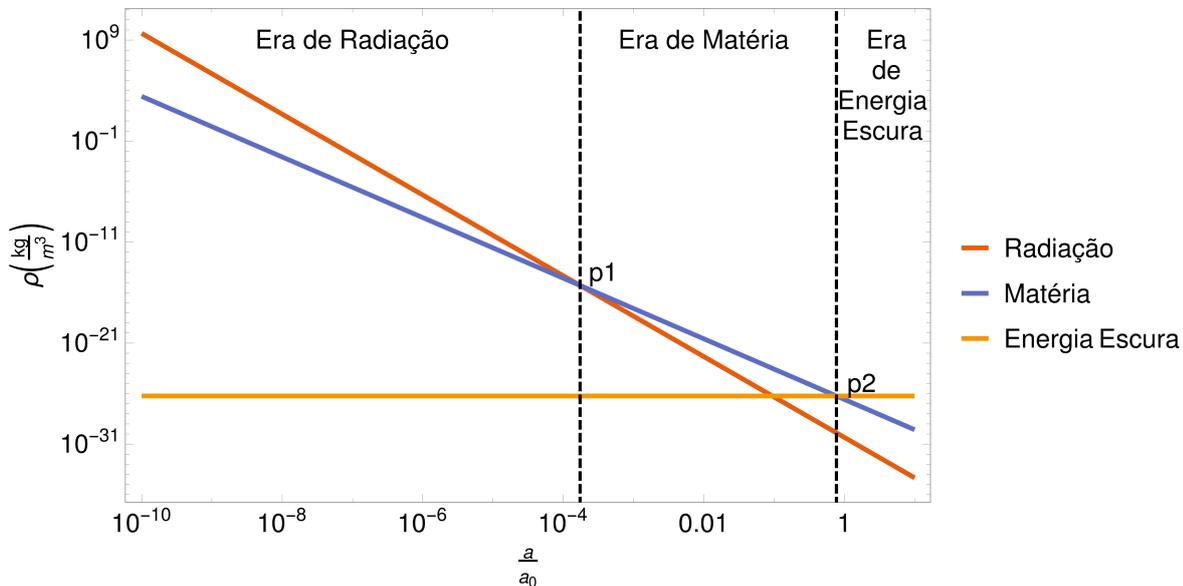


Figura 26 – Evolução das densidades de radiação, matéria e energia escura como função da razão do fator de expansão  $\frac{a}{a_0}$  do universo. Note que utilizamos escala logarítmica em ambos os eixos. Fonte: Elaborada pela autora.

Utilizando valores dos parâmetros de medidas experimentais, encontrados na Referência [8], para a radiação, matéria e energia escura, calculamos suas respectivas densidades atuais

<sup>3</sup> Por matéria escura entende-se um tipo de matéria não hadrônica que não interage com a radiação eletromagnética.

<sup>4</sup> Por energia escura entende-se uma forma de energia ainda desconhecida que permeia uniformemente todo o universo e mimetiza a “energia do vácuo”. Por essa razão, uma de suas propostas é associada a *constante cosmológica*  $\Lambda$  não nula.

$\rho_{R_0} \simeq 4.6 \cdot 10^{-31} \frac{kg}{m^3}$ ,  $\rho_{M_0} \simeq 2.7 \cdot 10^{-27} \frac{kg}{m^3}$  e  $\rho_{\Lambda_0} \simeq 5.8 \cdot 10^{-27} \frac{kg}{m^3}$  e graficamos a evolução de suas densidades  $\rho_R$ ,  $\rho_M$  e  $\rho_\Lambda$  em função da razão do parâmetro de expansão do universo  $\frac{a}{a_0}$ , que pode ser vista na Figura 26. Note que evidenciamos 3 fases, que chamamos de *era da radiação*, *era da matéria* e *era da energia escura*. Nessas fases a respectiva densidade supera as outras duas. Essas são as estabelecidas eras de evolução temporal de matéria do universo. As divisões foram traçadas nos pontos de cruzamentos das curvas:  $p_1 = \frac{a}{a_0} = \frac{\rho_{R_0}}{\rho_{M_0}} \simeq 1.7 \cdot 10^{-4}$  e  $p_2 = \frac{a}{a_0} = \left(\frac{\rho_{M_0}}{\rho_{\Lambda_0}}\right)^{1/3} = 7.7 \cdot 10^{-1}$ .

Ainda utilizando os dados experimentais da Referência [8], podemos dizer que o universo atualmente é plano, ou seja, o parâmetro de curvatura  $\varkappa = 0$ . Este fato é verificado reescrevendo a equação (F.2) como

$$\Omega - 1 = \frac{\varkappa}{H^2 a^2}, \quad (\text{F.10})$$

sendo  $\Omega = \frac{8\pi}{3H^2} \rho = \frac{\rho}{\rho_{crit}}$  o que chamamos de *parâmetro de densidade*,  $\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi}$  o que chamamos de *densidade crítica* e  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  o *parâmetro de Hubble*. Dado que  $\Omega$  é a soma dos parâmetro de densidade de radiação, matéria e energia escura, utilizando seus valores experimentais vemos

$$\Omega = \Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda \simeq 5.46 \cdot 10^{-5} + 0.315 + 0.685 \sim 1, \quad (\text{F.11})$$

que implica automaticamente, pela equação (F.10), que  $\varkappa = 0$ .

Agora vamos conectar a evolução temporal da matéria e da energia que compõem o universo com as equações de Einstein. Para isso, basta substituímos os resultados (F.7-F.9) nas equações de Friedmann (F.2) e (F.3). É nesse ponto que temos que “escolher” o tipo de universo que vamos considerar: fechado ( $\varkappa = 1$ ), plano ( $\varkappa = 0$ ) ou aberto ( $\varkappa = -1$ ). Como acabamos de argumentar, hoje o universo é considerado plano e, portanto, vamos escolher  $\varkappa = 0$  não apenas para hoje mas para toda a evolução temporal do universo<sup>5</sup>. Portanto, substituindo as densidades na primeira equação de Friedmann (F.2), encontramos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \rho_{R_0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \Rightarrow \left(\frac{a}{a_0}\right) = \left(\frac{32\pi}{3} \rho_{R_0}\right)^{1/4} t^{1/2}, \quad t \in (0, t_{p_1}) \quad (\text{F.12})$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \rho_{M_0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{a}{a_0}\right) = (6\pi \rho_{M_0})^{1/3} t^{2/3}, \quad t \in (t_{p_1}, t_{p_2}) \quad (\text{F.13})$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \rho_{\Lambda_0} \Rightarrow \left(\frac{a}{a_0}\right) = \text{Exp} \left[ \left(\frac{8\pi}{3} \rho_{\Lambda_0}\right)^{1/2} t \right], \quad t \in (t_{p_2}, \infty), \quad (\text{F.14})$$

onde, recuperando as unidades,  $t_{p_1} = \left[ \frac{3}{32\pi G \rho_{R_0}} \left(\frac{\rho_{R_0}}{\rho_{M_0}}\right)^4 \right]^{1/2} \simeq 9.3 \cdot 10^{11} s$  e  $t_{p_2} = \frac{1}{(6\pi G \rho_{\Lambda_0})^{1/2}} \simeq 3.7 \cdot 10^{17} s$ , obtidos substituindo  $p_1$  e  $p_2$  respectivamente em (F.12) e (F.13). Note que integramos indefinidamente, em  $a$  e em  $t$ , as expressões (F.12) e (F.13), desprezando qualquer constante de integração. Já em (F.14) também integramos indefinidamente, porém definimos  $a_0$  como constante de integração. Destacamos que fizemos aqui uma aproximação para a solução da

<sup>5</sup> Note que essa escolha equivale a aproximação tomada para a elaboração do modelo.

equação diferencial (F.2), validando-a em intervalos de dominância de radiação, matéria e energia escura. É claro que esse resultado fica indefinido por conta das constantes de integração. Todavia, como não estamos interessados na continuidade da solução de (F.2) mas sim em sua forma, o resultado alcançado é conveniente para nossa análise.

Porém, como vamos associar a temperatura à densidade de matéria e energia do universo? Sabemos que um corpo negro emite radiação com densidade de energia de acordo com a lei de Stefan-Boltzmann, ou seja,  $L \propto T^4$ . Vimos que a densidade de radiação do universo pode ser escrita como  $\rho_R \propto \left(\frac{a_0}{a}\right)^4$ . Então, fazendo um paralelo dimensional, podemos dizer que a temperatura da radiação evolui como

$$T_R = T_{RCF} \left(\frac{a_0}{a}\right), \quad (\text{F.15})$$

sendo  $T_{RCF}$  a temperatura da radiação cósmica de fundo hoje. Portanto, se considerarmos que a radiação possui temperatura  $T_i$ , tal que  $i = R, M, \Lambda$ , ditada pela razão  $\frac{a_0}{a}$  e que essa razão assume as dependências de acordo com a radiação ( $R$ ), a matéria ( $M$ ) e a energia escura ( $\Lambda$ ) para cada era do universo, temos

$$\begin{aligned} T_R &= \frac{T_{RCF}}{\left(\frac{32\pi G}{3}\rho_{R_0}\right)^{1/4}} \frac{1}{t^{1/2}}, & t \in (0, t_{p_1}), \\ T_M &= \frac{T_{RCF}}{(6\pi G\rho_{M_0})^{1/3}} \frac{1}{t^{2/3}}, & t \in (t_{p_1}, t_{p_2}), \\ T_\Lambda &= T_{RCF} \text{Exp} \left[ -\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{\Lambda_0}\right)^{1/2} t \right], & t \in (t_{p_2}, \infty). \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

mais uma vez, válidas nos mesmos intervalos discutidos. Dessa forma, podemos utilizar esses resultados na consideração de um buraco negro trocando energia com o universo considerando suas diferentes formas de evolução térmica na Subseção 4.2.3.