UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCAR

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL

EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – DM

PATRICK THIAGO PASCHOALINO

NÚMEROS COMPLEXOS E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

São Carlos – SP

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCAR
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – DM

PATRICK THIAGO PASCHOALINO

NÚMEROS COMPLEXOS E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) – Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre.

Orientação:
Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello

São Carlos – SP

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Patrick Thiago Paschoalino, realizada em 29/06/2018:

Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello
UFSCar

Profa. Dra. Ires Dias
USP

Profa. Dra. Vera Lucia Carbone
UFSCar

Aos meus pais – Dona Deusa e Seu Valdir – pelo incentivo, valores ensinados e pelo amor verdadeiro

AGRADECIMENTOS

Agradeço

A Deus pela vida, saúde e por permitir a realização deste trabalho.

A minha família, por toda estrutura, tanto material quanto emocional, para que pudesse chegar até aqui.

Aos colegas do curso que fizeram esta caminhada se tornar mais agradável e divertida.

A todos os professores, por suas aulas, atenção e ensinamentos que nos tornam profissionais e pessoas melhores sempre.

A Professora Luciene Nogueira Bertoncello, por sua competência, paciência e orientação prestada na elaboração deste trabalho.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

MUITO OBRIGADO A TODOS!

“Nunca saberemos o quão forte somos até
que ser forte seja a única escolha”

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento de uma sequência didática para a apresentação do conjunto dos números complexos aos alunos da terceira série do Ensino Médio. As atividades realizadas priorizaram a abordagem geométrica, visando a aplicação das operações em transformações geométricas de figuras (rotação, translação e homotetia), o que representa uma das situações de aprendizagem do Caderno do Aluno. Estas atividades foram realizadas com o intuito de minimizar a resistência e o desinteresse apresentados, na maioria das vezes, pelos alunos em relação ao conteúdo “Números Complexos”. Foram realizados estudos preliminares sobre a história e a teoria que fundamentaram a sequência didática.

Palavras-chave: Números Complexos, transformações geométricas, vetores, representação no plano.

ABSTRACT

The objective of this work was the development of a didactic sequence for the presentation of the set of complex numbers for the students of the third year of High School. The activities carried out prioritized the geometric approach, aiming at the application of operations in geometric transformations of figures (rotation, translation and homotetia), which represents one of the learning situations in the Student Book. These activities were carried out with the intention of minimizing the resistance and disinterest presented, in most cases, by students in relation to the content "Complex Numbers". Preliminary studies were carried out on the history and theory behind the didactic sequence.

Keywords: Complex numbers, geometric transformations, vectors, representation in the plane.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O ano de 2017 representa um período de transição para o Ensino Médio. Desde 2000, quando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Médio foram lançados, sempre existiu a discussão sobre o que é relevante, ou não, estudar nos anos finais da Educação Básica para que os alunos possam ter um ensino que proporcione as habilidades para a vida profissional e social, ou seja, as habilidades que sejam utilizadas em seu trabalho, bem como as que o tornam um cidadão atuante na sociedade.

Aliado ao PNE (Plano Nacional de Educação) – conjunto de diretrizes, metas e estratégias para a política educacional dos próximos dez anos – está sendo discutida a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) que

> "É um conjunto de orientações que deverá nortear os currículos das escolas, redes públicas e privadas de ensino, de todo o Brasil. A Base trará os conhecimentos essenciais, as competências e as aprendizagens pretendidas para crianças e jovens em cada etapa da educação básica em todo país. A BNCC pretende promover a elevação da qualidade do ensino no país por meio de uma referência comum obrigatória para todas as escolas de educação básica, respeitando a autonomia assegurada pela Constituição aos entes federados e às escolas". (http://portal.mec.gov.br/)

Em Agosto deste ano, no site do MEC, estava disponibilizada a 2ª versão da BNCC (de Abril de 2016 com 652 páginas) que destacava os conteúdos que deveriam ser trabalhados em Matemática no Ensino Médio, divididos em cinco unidades de conhecimento: Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, Números e Operações, Álgebra e Funções. Analisando este documento, o assunto “Números Complexos” não foi citado (de forma explícita), porém em Geometria, os conteúdos “Vetores” e “Transformações Isométricas” – reflexão, rotação e translação – apareceram como temas a serem trabalhados.

Após dois meses, quando acessamos novamente o site do MEC, a 2ª versão já não estava disponível. O novo documento, que substituiu a 2ª versão, contém 396 páginas e só aborda as habilidades/competências para o Ensino Fundamental. Isto aconteceu devido a aprovação da Lei 13.415 relacionada com a reforma do Ensino Médio e, portanto, no que diz respeito a esta etapa do Ensino, nenhum documento foi entregue ao Conselho Nacional de Educação até a presente data.

Atualmente, os documentos oficiais para a educação básica são a Lei nº 9.394, que estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), as Diretrizes Nacionais Curriculares (DCNs) e o Plano Nacional de Educação. A partir das DCNs, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) foram consolidados, destacando alguns aspectos fundamentais de cada disciplina.

As escolas de Ensino Médio, tendo como norte os documentos oficiais, adaptam os conteúdos para a realidade e objetivos dos seus alunos, levando em consideração a Proposta Político-Pedagógica da Instituição. Portanto, alguns conteúdos do Ensino Médio podem não constar no currículo. Particularmente, o conteúdo “Números Complexos”, é um dos casos que mais dividem opiniões quanto à relevância.

Analisando um dos documentos oficiais, os PCN+, temos:

> “Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas” (PCN+, 2002, página 122)

Na sua dissertação de Mestrado, Chagas (2013), realizou uma pesquisa online com 151 professores de diversos estados e obteve resultados que retratam essa discrepância quanto à relevância deste assunto:

> “Para grande parte dos professores (48%) o estudo dos números complexos no Ensino Médio é relevante. 20% deles o consideram indispensável. Apenas 3% o consideram irrelevante e uma parcela significativa (29%) vê pouca relevância nesse estudo” (Chagas, 2013, página 44)

Quase uma década antes, o professor José Paulo Carneiro, na edição 55 da Revista do Professor de Matemática, já abordava este dilema:

> “Os números complexos ocupam uma posição singular no ensino de Matemática. Não merecem grande atenção nos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, por serem considerados como “assunto elementar” de nível médio. Já no Ensino Médio, são evitados, sendo taxados de estranhos, de compreensão difícil e, sobretudo, inúteis. De fato, que utilidade poderiam ter objetos cuja existência é motivada, logo no primeiro contato, pela capacidade que possuem de fornecer uma solução “imaginária” para uma equação que “sabemos” que não tem solução, como nos foi antes demonstrado várias vezes? Pois é assim que quase sempre aprendemos e ensinamos os números complexos” (CARNEIRO, 2004)

A observação acima pode ser ratificada por outro documento oficial, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

> “Os números complexos devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber, $x^2 + 1 = 0$” (OCEM, 2006, p. 71).

Porém, a História da Matemática, que será tratada no capítulo 2, nos mostra que desenvolvimento dos números complexos foi motivado pelo estudo das equações do 3º grau no século XVI, o que nos faz discordar do trecho citado anteriormente.

Além disso, por muito tempo, os números complexos não foram aceitos, mesmo quando o seu uso confirmava certos resultados já validados. O seu reconhecimento só aconteceu no momento em que eles foram interpretados geometricamente. De fato, conhecendo a História do objeto a ser estudado, podemos compreender algumas dificuldades que são apresentadas pelos alunos, pois elas podem refletir as dificuldades históricas enfrentadas no desenvolvimento da teoria.

Consultando Duval (2013), acreditamos que o desinteresse apresentado por parte dos alunos em relação aos Números Complexos é decorrência, na maioria dos casos, do tratamento puramente algébrico, deixando de lado o significado geométrico das operações e as aplicações destes números em outras áreas do conhecimento.

Raymond Duval desenvolveu a "Teoria dos Registros de Representação Semiótica" que investiga a aprendizagem matemática e busca analisar a influência das representações dos objetos matemáticos no processo de ensino-aprendizagem. Duval explica que a representação semiótica é uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais (signos). Assim, os registros semióticos são importantes não somente por se constituírem num sistema de comunicação, mas também por possibilitarem a organização de informações a respeito do objeto representado.

Dentre os registros de representação que se podem pensar em Matemática, desde a Educação Básica ao Ensino Superior, temos quatro que são predominantes: "Língua Materna", "Registro Algébrico", "Registro Gráfico" e "Registro Numérico". O que possibilita o aprendizado e a construção do conhecimento nas atividades matemáticas é a conversão das várias representações manifestadas sobre um objeto de estudo. Nesse sentido, quanto mais diversificada é a representação de um objeto, maior é a compreensão que se tem a seu respeito, e a apropriação do seu significado se dá a partir de conversões estabelecidas entre as diversas maneiras de representá-lo.

Nesta teoria, as conversões são diferentes dos tratamentos. Segundo PANTOJA (2008), "Os *tratamentos* são procedimentos de justificação do objeto de estudo baseados em fenômenos congruentes, segundo os quais os registros permanecem num mesmo sistema de representação, seja através da escrita, de figuras, gráficos, diagramas, dentre outros; já a *conversão* é um processo de transformação de um tratamento em outro no qual há mudança de sistema de registro com a conservação da referência ao objeto estudado".

Sobre o tratamento e conversão, Duval descreve que:

> “Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação”
>
> “As conversões são transformações de representação que consistem em mudança de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, reconhecer a escrita algébrica de uma equação em sua representação gráfica”. (DUVAL, 2003, p.16)

Portanto, para que o aprendizado seja sólido quando se trata dos objetos matemáticos, o trabalho deve ser feito para atingir os dois níveis descritos por Duval: tratamento e conversão. Mas, em relação aos Números Complexos, isto não acontece sempre. Confirmando este fato, podemos citar outro trecho do professor José Paulo Carneiro no seu artigo da RPM, nº 55:

> “Quem consultar os livros do Ensino Médio ou ouvir os testemunhos de professores e alunos, vai constatar que a maneira mais comum de introduzir os números complexos é por meio da seguinte definição: “Um número complexo é um objeto da forma $a + bi$, onde a e b são reais, $i = \sqrt{-1}$ e permanecem válidas as leis da álgebra” (esta última parte significando que são válidas as propriedades comutativa e associativa da adição e da multiplicação, etc., etc.). Logo em seguida, passamos a fazer lotes de exercícios do tipo: “calcule $(2 + i)(2 + 4i)$” ou, então, “calcule $\frac{2+3i}{1-i}$ ”, etc. E a maioria das questões de provas sobre complexos - inclusive em concursos - não passam de variantes mais ou menos complicadas destes exercícios” (Carneiro, 2004)

Então, para que o ensino dos Números Complexos seja relevante para os alunos, ele deve estar aliado à História da Matemática, às várias representações do número complexo, as interpretações geométricas das operações e as aplicações geométricas. Trabalhando desta forma, são proporcionados aos alunos os subsídios para um aprendizado significativo, enquanto o professor realiza uma das orientações que são dadas nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

> “Outro tópico que pode ser tratado como tema complementar é o estudo mais aprofundado dos números complexos. Por um lado, podem-se explorar os aspectos históricos da introdução dos números complexos e de seu papel fundamental no desenvolvimento da álgebra. Por outro lado, podem-se explorar as conexões entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano”. (OCEM, 2002, páginas 93 e 94)

Este estudo mais aprofundado dos números complexos é o que realmente enaltece a sua beleza. Segundo as palavras de Elon Lages Lima:

> “As aplicações geométricas das operações entre complexos (principalmente a multiplicação), tão belas como variadas, não são exploradas. Isto é imperdoável, pois todo matemático ou usuário da Matemática, ao pensar num número complexo, sempre o imagina como um ponto do plano coordenado e as operações são interpretadas como transformações geométricas” (LIMA, 2001, página 467)

Portanto, tomando como base estas reflexões, o objetivo deste trabalho foi a realização de uma sequência didática com os alunos da 3ª série do Ensino Médio com a finalidade de introduzir o conjunto dos Números Complexos com enfoque geométrico, possibilitando aos alunos a interpretação das operações e suas aplicações nas transformações de figuras.

O capítulo 2 apresenta tópicos relevantes da História da Matemática acerca dos Números Complexos, desde o desenvolvimento da teoria das equações do 3° grau até os matemáticos que foram responsáveis pela representação geométrica.

A teoria que fundamenta as atividades aplicadas é desenvolvida no capítulo 3, onde são apresentadas as definições, propriedades, diferentes representações dos Números Complexos e as interpretações geométricas de suas operações.

No capítulo 4, são relatadas as atividades da sequência didática e exibidos os registros realizados pelos alunos. Antes, porém, comentamos sobre o currículo do Estado de SP e como os Números Complexos são trabalhados no caderno do aluno.

Finalmente, no capítulo 5, são feitas as considerações finais.

CAPÍTULO 2

HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Geralmente, na apresentação do conjunto dos números complexos aos alunos do Ensino Médio, usamos como motivação a possibilidade de resolver todas equações quadráticas, inclusive aquelas onde o discriminante é negativo. Por exemplo, se considerarmos a equação $x^2 + 1 = 0$, existe a necessidade de definir a unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$.

Porém, a História da Matemática nos mostra que o surgimento dos números imaginários tem seu início no estudo da resolução geral das equações cúbicas, no século XVI na Itália. Nesta época, as equações quadráticas, bem como as suas soluções, já não representavam mais um problema a ser resolvido.

Explicando: durante muitos séculos, as equações algébricas foram usadas para a resolução de problemas concretos que não envolviam apenas equações lineares. Para se ter uma ideia de quão antigo são estes problemas, os estudos de documentos da antiga Babilônia revelam que, em meados do ano 1700 aC, as equações quadráticas foram tratadas de forma eficiente. E, até os tempos modernos, não havia ideia de resolver uma equação quadrática da forma $x^2 + px + q = 0$, onde p e q são positivos, pois as soluções (que neste caso são números negativos) não faziam muito sentido e, portanto, eram desconsideradas.

Mesmo quando a resolução de uma equação quadrática levava à uma raiz quadrada de um número negativo, o sentimento era que o aparecimento destas raízes significava que o problema não tinha solução. Podemos citar o exemplo de Descartes que, no início do século XVII, lembrou que para tentar achar o ponto de intersecção entre uma reta e um círculo, era necessário resolver uma equação quadrática. Caso a resolução, pela fórmula geral da equação quadrática, levasse à uma raiz quadrada de um valor negativo, esta representava o caso em que a reta não intersectava a circunferência.

Então, em qual momento estas raízes quadradas de números negativos começaram a levantar controvérsias e, de certa forma, suscitar o desenvolvimento de novas técnicas que permitissem manipular números que eram considerados “impossíveis”?

2.1 AS EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU

O enredo que envolve as personagens que participaram da descoberta da fórmula geral das equações cúbicas contém desafios públicos, segredos, juramentos, traições, frustações e muitas outras situações que revelam o lado obscuro dos homens pela busca do reconhecimento e poder.

A figura central, sem dúvida, é Girolamo Cardano (1501-1576). Além de praticar medicina em Milão e ensinar Matemática, habilidades que por si só enobrecem qualquer pessoa, sua genialidade aliada a falta de caráter e a brilhante descoberta de um de seus discípulos – Ludovico Ferrari (1522-1565) – fez com que Cardano publicasse sua obra prima: “Ars Magna” – um tratado erudito (escrito em latim) que continha explicações detalhadas para a resolução de equações de terceiro e quarto graus.

Antes de apresentarmos a resolução de um dos casos das equações de terceiro grau que consta no trabalho de Cardano, vamos aos fatos que antecedem esta publicação.

Scipione del Ferro (1465 – 1526) foi professor de Matemática da Universidade de Bolonha e conseguiu encontrar a solução algébrica da equação cúbica $x^3 + mx = n$, provavelmente usando fontes árabes. Como nesta época, havia competições públicas entre estudiosos, era comum que as descobertas fossem mantidas em segredo, pois as mesmas representavam trunfos para desafiar os adversários com problemas que não soubessem resolver. Dessa forma, Scipione não publicou o seu trabalho, mas revelou sua descoberta a um de seus discípulos: Antonio Maria Fiore.

Passados vinte anos da descoberta de Scipione, em 1535, Niccolo Fontana (1499-1557), mais conhecido como “Tartaglia” (gago ou tartamudo), alcunha recebida devido a problemas na fala ocasionado por um ferimento na boca quando criança, anunciou que sabia resolver equações cúbicas e que havia encontrado a solução algébrica para o caso $x^3 + px^2 = n$. Diferente de Scipione ou Cardano, que tinham prestígio e eram bem-sucedidos em seus trabalhos, Tartaglia não tinha nenhuma fonte substancial de recursos (geralmente, vindas de um patrono rico) e um reconhecimento que não condizia com o seu talento matemático e notável inteligência. Devido a estes fatos, sua descoberta sobre a solução das equações cúbicas foi encarada como um blefe. Portanto, não tardou para que o discípulo de Del Ferro o desafiasse para uma competição com a intenção de desmascará-lo.

Porém, aconteceu exatamente o contrário: Tartaglia saiu vitorioso. O seu sucesso pode ser justificado pelo fato de Fiore conhecer apenas a solução das cúbicas que foi confiado pelo seu mestre onde cubos e raízes estão igualados a um número ($x^3 + mx = n$) enquanto Tartaglia, além desta, sabia resolver equações em que cubos e quadrados são igualados a um número ($x^3 + px^2 = n$).

A notícia sobre esta vitória se espalhou e, com isso, a confirmação que Tartaglia realmente conhecia a solução daquelas equações cúbicas. Não tardou para que Cardano entrasse em contato com o campeão para convencê-lo a compartilhar a sua descoberta, o que não aconteceu de imediato.

Depois de várias tentativas frustradas, Cardano fez um juramento solene, prometendo não revelar a mais ninguém as informações que lhe seriam confiadas e que, mesmo depois de sua morte, as pessoas não entenderiam suas anotações, pois ele as escreveria usando códigos. Nestas condições, Tartaglia sentiu-se inclinado a acreditar na palavra de Cardano e revelou, então, as soluções das equações cúbicas que tinha conhecimento.

Aprendendo estes métodos, Cardano não perdeu tempo e se concentrou no problema da resolução geral das equações cúbicas, obtendo êxito depois de alguns anos de intenso trabalho. Aplicando as mesmas ideias do seu mestre nas equações de quarto grau, Ludovico Ferrari conseguiu encontrar a solução das quárticas.

Cardano sabia que havia realizado uma contribuição verdadeira para a Matemática. E, eis que no ano de 1545, publicou, em Nuremberg (uma cidade da Alemanha), “Ars Magna” que continha a descrição completa de como resolver qualquer equação cúbica, com justificativas geométricas e, também, incluía as descobertas de Ferrari. Este trabalho representou um progresso tão notável quanto imprevisto, o que causou impacto sobre os algebristas e atingiu os estudiosos de toda a Europa. E, claro, Tartaglia.

Quando viu que as resoluções, confiadas sob a promessa de nunca serem divulgadas, foram publicadas em Ars Magna, Tartaglia sentiu-se muito mal e furioso por ter sido iludido e protestou impetuosamente contra Cardano, tornando pública a traição que sofrera. Estes ataques contra Cardano foram rebatidos por Ferrari com a alegação de que o seu mestre havia obtido as informações diretamente de Del Ferro, através de uma terceira pessoa. Essa justificativa, dada por Ferrari, desobrigava Cardano de qualquer promessa, enquanto levantava suspeitas de Tartaglia ter se apropriado das ideias desta mesma pessoa. Após as polêmicas e troca de acusações, Tartaglia apenas conseguiu que o seu ressentimento aumentasse, assim como a reputação de Cardano, que alguns anos depois foi considerado o algebrista mais competente da Europa.

2.2 UMA EQUAÇÃO CONTROVERSA

O método que Cardano publicou em Ars Magna para resolver as equações cúbicas do tipo $x^3 + mx = n$, de uma forma mais resumida e usando a notação atual, foi:

(I) Considere a diferença entre os cubos de dois valores a e b dada pela expressão:

$$(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3$$

(II) Escolhendo a e b como:

$$3ab = m, \qquad \text{e} \qquad a^3 - b^3 = n\ ,$$

Temos que o valor de x é dada pela expressão que está dentro dos parênteses, ou seja $(a-b)$

(III) Resolvendo para a e b o sistema formado pelas últimas duas equações, obtemos:

$$a = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} \qquad \text{e} \qquad b = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

E assim x fica determinado.

Porém, a aplicação deste método em algumas equações, levava a expressões que pareciam não fazer sentido algum. Ou seja, a fórmula apresentada por Cardano, resultava em uma "aparente anomalia" quando o radicando $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3$ era negativo. O mesmo já havia entrado em contato com raízes quadradas de números negativos quando discutiu o problema "dividir 10 em duas partes de tal forma que o produto seja 40". Pelas regras usuais da Álgebra, as respostas que obteve foram $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$ para as partes. Cardano, que se referia as raízes quadradas de números negativos como "sofísticas", considerou o resultado obtido "tão sutil quanto inútil", concluindo que o problema não tinha solução.

E, o que dizer da equação $x^3 = 15x + 4$?

Sem muito esforço, por tentativas, é possível obter a solução $x = 4$. Agora, usando as expressões anteriores, chegamos em:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Portanto, dizer que a equação não tem solução real, usando como base a experiência das equações quadráticas, seria uma conclusão errada. Afinal, como foi citado anteriormente, a equação tem solução.

Então, neste ponto, as raízes quadradas de números negativos começaram a ser encaradas de outra maneira. Tornou-se necessário investigar o "estatuto" destas quantidades. Não porque elas apareciam nas soluções. Se este fosse o caso, bastava dizer que o problema não tinha solução.

A controvérsia era: "Como justificar o aparecimento, em um método válido para a obtenção de uma resposta válida, de operações com quantidades inválidas? "

Cardano tinha o conhecimento sobre este fato, porém não soube como contornar a situação. Ficaria para outros matemáticos lidarem com a "sujeira" que Cardano "varreu para debaixo do tapete".

2.3 UMA IDEIA LOUCA

Rafael Bombelli (1526-1573), um outro algebrista italiano, foi o primeiro que propôs uma saída para este problema, publicando uma álgebra que representou uma contribuição admirável para a resolução das equações cúbicas.

Este trabalho – escrito em 1560 e impresso, só em parte, em 1572 – apresenta um aprimoramento da notação algébrica corrente. Podemos citar, por exemplo, "R.q." e "R.c." usado para designar, respectivamente, as "raízes quadradas" e "raízes cúbicas" e a representação das potências das incógnitas representadas como numeral arábico acima de um pequeno arco de círculo.

Entretanto, não foi a notação que tornou esta álgebra um trabalho ímpar. A principal novidade estava reservada para o final da primeira parte. Neste ponto, Bombelli aborda um "novo tipo cubo", exatamente aquele que contém as raízes quadradas de números negativos que tanto incomodavam os antigos algebristas, apresentando um conjunto de "regras operacionais" que permitiam transformar expressões complicadas como

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

em expressões mais simples. Segundo estes algoritmos, seria possível representar

$$\left(2 \pm \sqrt{-1}\right)^3 = 2 \pm \sqrt{-121}$$

De modo que

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}= \left(2+\sqrt{-1}\right)+\left(2-\sqrt{-1}\right)=4$$

Com isto, Bombelli chamou a atenção para o seguinte fato: quando a expressão $\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3$ era negativa, a fórmula de Tartaglia – Cardano exibia as raízes quadradas que causavam transtorno aos matemáticos. Mas, na verdade, tudo não passava de um "disfarce" para números reais. Inclusive, na teoria das equações cúbicas, o caso onde $D=\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3<0$ é chamado de "irredutível" e a equação apresenta três raízes reais e distintas. Considerando a equação do nosso exemplo, $x^3=15x+4$, além da solução $x=4$, temos outras duas raízes reais. A saber: $x=-2-\sqrt{3}\ e\ x=-2+\sqrt{3}$.

Além das notações citadas anteriormente, no caso particular das raízes quadradas de números negativos, Bombelli utiliza "p.dm" e "m.dm" (abreviações de "più di meno" e "meno di meno", em italiano) como um código para indicar a "soma" e a "subtração" destas raízes.

Desta forma, a expressão

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

seria representada como

$$R.c.2\ .p.dm.R.q.121+\ R.c.2\ .m.dm.R.q.121$$

Onde fica claro que "dm.R.q. 121" representa $\sqrt{-121}$.

Para a multiplicação, as leis que foram apresentadas indicavam como obter o produto destas raízes (dm.R.q.) entre si e entre outros números. Algumas destas leis eram declaradas como:

Più di meno via più di meno, fà meno	interpretado como	$\left(\sqrt{-1}\right)\times\left(\sqrt{-1}\right)=\ -1$
Meno di meno via meno di meno, fà meno	interpretado como	$\left(-\sqrt{-1}\right)\times\left(-\sqrt{-1}\right)=\ -1$
Più di meno via meno di meno, fà più	interpretado como	$\left(\sqrt{-1}\right)\times\left(-\sqrt{-1}\right)=\ 1$

Mesmo que as regras anteriores possam ser comparadas às que usamos atualmente, não podemos ser precipitados dizendo que Bombelli tinha o conhecimento dos números complexos e que “più di meno” e “meno di meno” representam os nossos "i" e "$-i$", respectivamente. Inclusive, o mesmo considerou a sua iniciativa como uma “ideia louca”, pois observou que “toda a questão parecia apoiar-se em sofismas”.

Portanto, é provável que ele tenha desenvolvido estas regras criando uma analogia com as operações conhecidas entre números reais. Além disso, Bombelli não foi capaz de apresentar demonstrações rigorosas ou de responder a todas questões, pois nem mesmo ele sabia o que esses “números” realmente eram.

Mesmo sendo uma obra pioneira e, de certa forma audaciosa, que permitia aos matemáticos lidarem com as “famigeradas” raízes quadradas, este trabalho não teve muita repercussão, com exceção do fato de que raízes quadradas de números negativos representavam um intermediário para se chegar a raízes reais e, portanto, havia algum sentido em trabalhar com elas. Desta forma, não é surpreendente que demoraria um bom tempo até que os matemáticos se sentissem completamente seguros com os números complexos. Isto pode ser verificado pelos vários tipos de nomenclaturas que eram atribuídos a estas quantidades desde a época de Cardano até o século XIX: sofísticas, falsas, absurdas, imaginárias, irreais, fictícias, etc.

Então, o trabalho que começou no início do século XIX, possibilitou que estas quantidades ganhassem uma “cidadania” matemática plena, com uma representação, estatuto e deixaram de ser consideradas apenas como auxiliares no cálculo ou quantidades “falsas” que deveriam ser admitidas pela generalidade de um determinado resultado, como o Teorema Fundamental da Álgebra. Na época de Descartes e alguns outros matemáticos da época, como por exemplo Albert Girard (um dos responsáveis pelas primeiras versões do “Teorema Fundamental da Álgebra”), já era conhecido que dada uma equação de um grau qualquer, essa equação deveria ter o mesmo número de raízes tal qual o grau maior. Só que, dentre estas raízes, para que esse resultado seja válido, é preciso que algumas destas raízes possam ser admitidas como negativas ou raízes quadradas de quantidades negativas.

Isto começou no início do século XIX, principalmente com o trabalho de Gauss e de Hamilton, mas algumas antecipações apareceram no trabalho de alguns matemáticos muito menos conhecidos como é o caso de Argand (ele trabalhou por volta de 1813) que propôs uma representação geométrica destas quantidades.

2.4 INTERPRETAÇÕES GEOMÉTRICAS DE NÚMEROS COMPLEXOS

2.4.1 John Wallis

A primeira tentativa de dar aos números complexos uma interpretação concreta foi feita por John Wallis (1616 -1703) em 1673, em uma carta endereçada a John Collins. Esta tentativa foi insatisfatória, como veremos a seguir, mas, no entanto, foi interessante.

Wallis queria dar uma interpretação geométrica às raízes da equação quadrática (representada em notação atual):

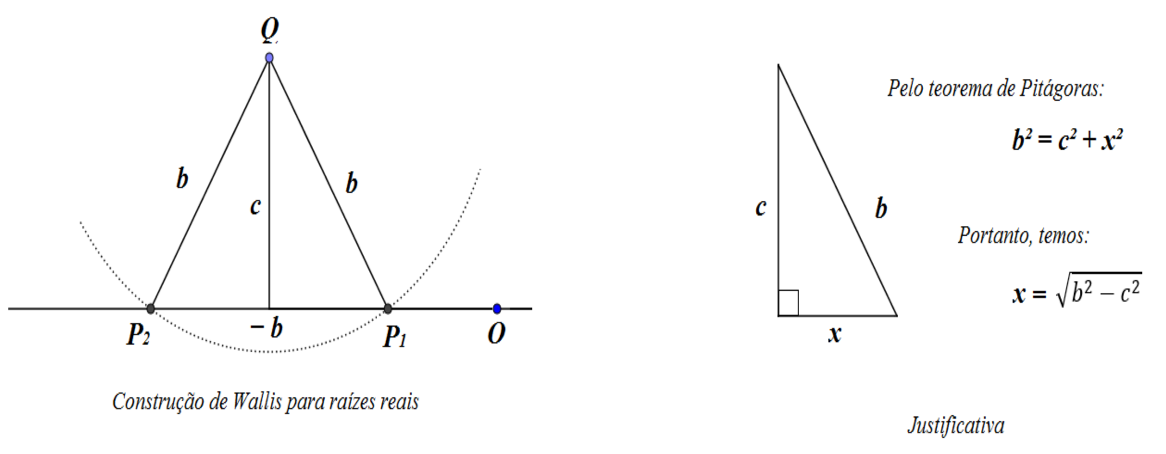
$$x^2 + 2bx + c^2 = 0, (b, c \ \geq \ 0)$$

As raízes são:

$$x = -b \ \pm \sqrt{b^2 - c^2}$$

Quando b ≥ c, estas raízes são reais. Neste caso, as raízes podem ser representadas pelos pontos P1, P2 na reta dos números reais que são ilustradas pela construção geométrica da figura abaixo.

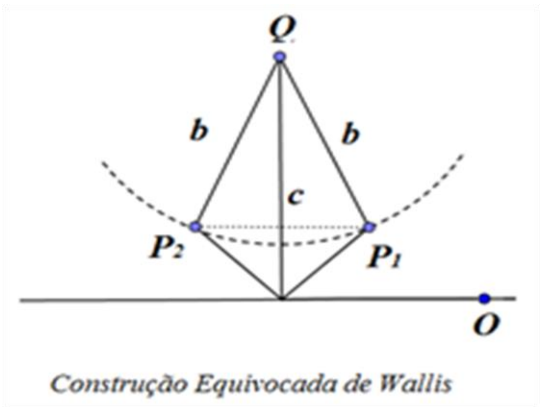
Figura 1



Fonte: O Autor

Na próxima figura, temos a representação equivocada para b < c:

Figura 2



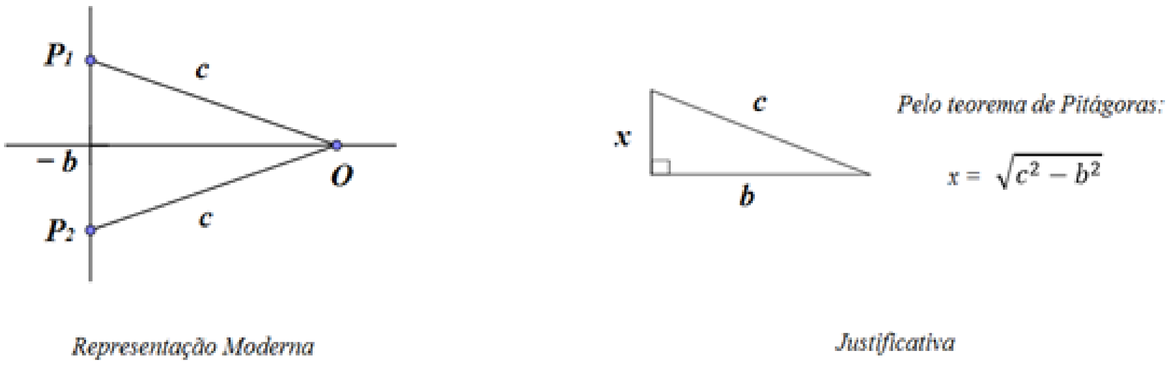
Fonte: O Autor

Quando b < c, as linhas de comprimento b anexadas a Q são muito curtas para alcançar a reta numérica real, então os pontos P1, P2 “não podem estar na linha”, e Wallis os representa “fora dessa linha” (porém, no mesmo plano). Ele está no caminho certo, mas chega em posições erradas para P1, P2, pois pensou que os sinais positivos (+) e negativo (-) deveriam continuar a corresponder a "direita" e a “esquerda". Pela construção de Wallis, se o valor de b for zero, temos uma consequência inaceitável que $i = -i$.

Finalmente, a figura a seguir ilustra a representação moderna para as raízes complexas dadas pelos pontos

$$P_1, P_2 = -b \pm i\sqrt{c^2 - b^2}$$

Figura 3



Fonte: O Autor

2.4.2 Caspar Wessel

O Boletim de Notícias número 33 da “European Mathematica Society”, de setembro de 1999, reconhece Caspar Wessel como o primeiro matemático a dar uma interpretação geométrica de números complexos. Na página 13 deste artigo, na seção “Aniversariantes”, é comemorado o bicentenário do trabalho publicado por Wessel intitulado *“A Designação Analítica da Direção, uma proposta usada de forma sensata para polígonos planos e esféricos”* onde, sem revelar tal intenção, o mesmo apresenta uma representação geométrica dos números complexos. Esta obra, escrita em dinamarquês e publicada em 1799, foi inspirada claramente em seu trabalho como topógrafo, porém não foi notada pela comunidade matemática e permaneceu ignorada por quase um século. Neste trabalho, Wessel torna-se o primeiro a apresentar o conceito do que hoje chamamos de vetor.

Na sua descrição de como calcular as coordenadas de um ponto no desdobramento, ele expressou uma direção no plano por $\left(\cos(\theta) + \sqrt{-1}\, sen(\theta)\right)$. Assim, ele teve a interpretação geométrica de números complexos como direções em um plano.

Não há vestígio da regra do produto neste trabalho. Mas, sabendo que ele era um mestre no tratamento de fórmulas trigonométricas e percebendo como ele desejava mudar de uma direção dada por $\cos(\theta_1) + \sqrt{-1}\, sen(\theta_1)$ para uma dada direção dada por $\cos(\theta_2) + \sqrt{-1}\, sen(\theta_2)$ através de uma curva de um ângulo $(\theta_2 - \theta_1),$ é possível que ele tenha obtido a interpretação geométrica da regra do produto. É importante deixar registrado que Wessel pensou em representar segmentos (orientados) como números imaginários, mas não o inverso.

O objetivo de Wessel em “A Designação Analítica da Direção” não era, inicialmente, relacionado a números complexos como tal. Ele sentiu que certos conceitos geométricos poderiam ser mais claramente compreendidos se houvesse uma maneira de representar o comprimento e a direção de um segmento de linha no plano por uma única expressão algébrica.

Wessel deixou claro que essas expressões tinham que ser capazes de ser manipuladas algebricamente. Em particular, ele queria uma maneira de expressar algebricamente uma mudança arbitrária de direção mais geral do que o simples uso de um sinal negativo para indicar a direção oposta.

Ele começou a lidar com a adição:

"Duas linhas retas são adicionadas se as unirmos de tal forma que a segunda linha comece onde a primeira termina e, depois, passarmos uma linha reta do primeiro ao último ponto das linhas unidas”.

Figura 4

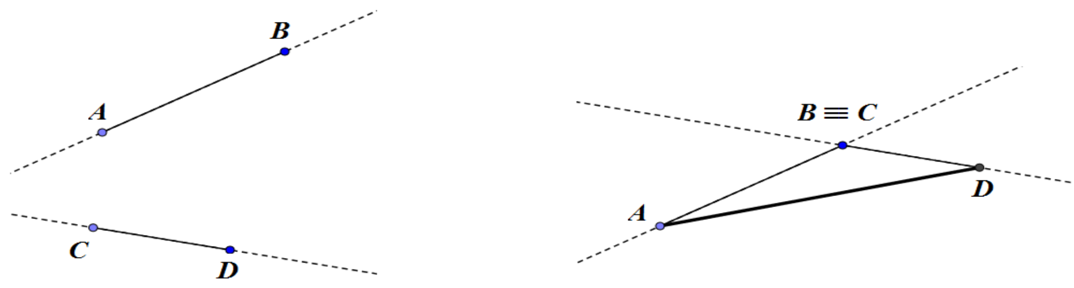


Ilustração da Soma de Wessel

Fonte: O Autor

Assim, seja qual for a expressão algébrica de um segmento de reta, a adição de dois segmentos deve satisfazer esta propriedade óbvia tirada da concepção de movimento de Wessel. Em outras palavras, ele concebeu segmentos de linha como vetores representativos.

No entanto, foi uma multiplicação que proporcionou a Wessel a resposta básica à sua questão da representação da direção. Para determinar essa multiplicação, ele estabeleceu propriedades que ele considerava essenciais:

I. o produto de duas linhas no plano devem permanecer no plano.

II. o comprimento da linha do produto tinha que ser o produto dos comprimentos das duas linhas dos fatores.

Finalmente, se todas as direções fossem medidas a partir da linha de unidade positiva, o que ele chamou 1:

III. o ângulo de direção do produto era a soma dos ângulos de direção dos dois fatores.

Designando por ε um segmento perpendicular à linha 1 e que possui o mesmo comprimento que a unidade, ele facilmente mostrou que suas propriedades desejadas implicavam que $\varepsilon^2 = (-\varepsilon)^2 = -1$ ou que $\varepsilon = \sqrt{-1}$ (figura A). Uma linha de comprimento igual a unidade e que faz um ângulo θ com a linha de unidade positiva agora pode ser designado por $\cos(\theta) + \sqrt{-1}\, sen(\theta)$ (figura B). E, de forma geral, uma linha de comprimento A e ângulo θ pode ser representado por

$$A\left(\cos(\theta) + \sqrt{-1}\, sen(\theta)\right) = a + \varepsilon b,$$

onde a e b são escolhidos adequadamente.

Figura 5

Figura A

Figura B

Ilustração Geométrica da Direção de Wessel

Fonte: O Autor

Assim, a interpretação geométrica dos números complexos surgiu da interpretação algébrica de Wessel de um segmento de reta. A regra algébrica óbvia para a adição satisfez os requisitos de Wessel para essa operação, enquanto a multiplicação

$$(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = ac - bd + \varepsilon(ad + bc)$$

satisfaz seus axiomas para a multiplicação.

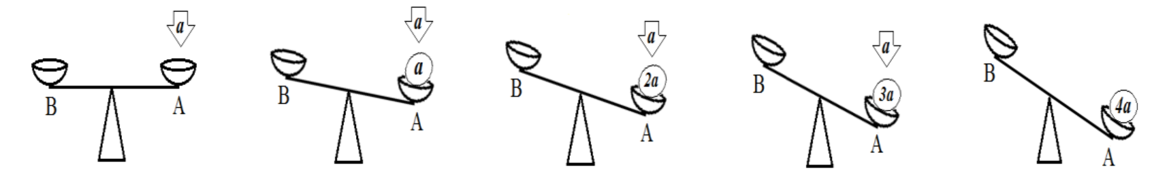
Infelizmente, o ensaio de Wessel não foi lido na maior parte da Europa após a sua publicação. O mesmo destino aguardava a interpretação geométrica de Argand.

2.4.3 Jean-Robert Argand

O contador suíço Jean-Robert Argand (1768-1822) em um pequeno livro publicado em 1806, propôs uma interpretação geométrica para os números complexos. Porém, antes, ele começa fazendo uma interpretação das quantidades negativas, visto que elas já serviam como base para vários resultados algébricos importantes, mas ainda não eram consideradas rigorosas.

Argand começa a sua interpretação considerando uma balança com dois pratos A e B. Acrescentar quantidades pode ser feito indefinidamente. Na figura abaixo, esta operação é ilustrada acrescentando as quantidades $a, 2a, 3a, 4a$ no prato A, o que faz a balança sair da posição de equilíbrio e pender para o lado de A:

Figura 6

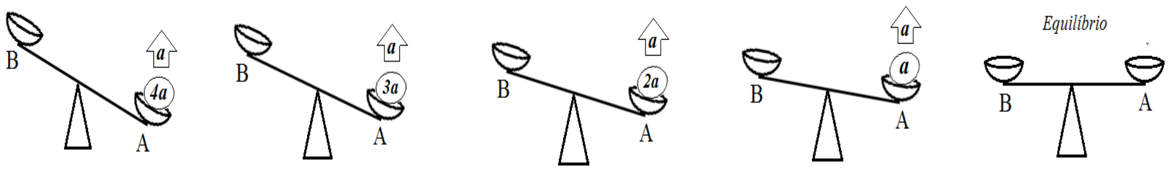


Interpretação de Argand para adicionar quantidades

Fonte: O Autor

Podemos, então, começar a retirar estas quantidades $a, 2a, 3a, 4a$, uma de cada vez, de tal forma que seja reestabelecido o equilíbrio:

Figura 7



Interpretação de Argand para retirar quantidades

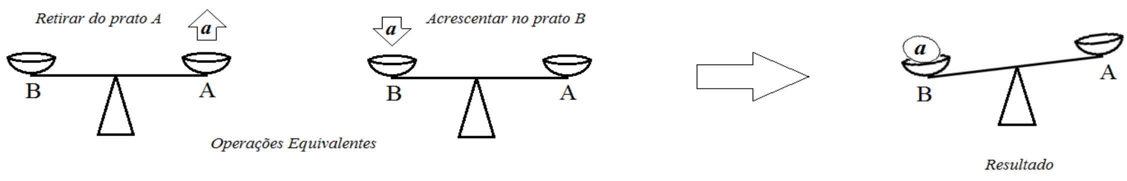
Fonte: O Autor

Atingido o equilíbrio, que pode ser interpretado pelo número zero, é possível continuar retirando estas quantidades? Ou seja, é possível realizar a operação $0 - a$?

Se partirmos do paradigma onde os números são quantidades, então o zero é considerado um “nada”, ou seja, a ausência de quantidade. Desta maneira, a subtração anterior é impossível, uma contradição. Neste modelo, as quantidades negativas colocam problemas e não seria possível atribuir um significado à operação $0 - a$.

Porém, Argand afirma que existe a possibilidade de resolver esta subtração, desde que seja realizada uma operação equivalente (e possível!): acrescentar a mesma quantidade a no prato B. Neste ponto, as quantidades negativas passam a ser consideradas "relativas"

Figura 8

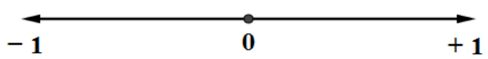


Noção relativa de "retirar"

Fonte: O Autor

Baseado nesta ideia, Argand propõe uma representação dos números positivos e negativos como quantidades orientadas, o que está ilustrado na próxima figura para as unidades (os outros números seriam análogos). Nesta concepção, o zero não seria mais interpretado como "nada", mas com um ponto de referência para uma inversão de sentido que permitiria criar dois sentidos opostos, representados pelo $+1$ e pelo -1:

Figura 9

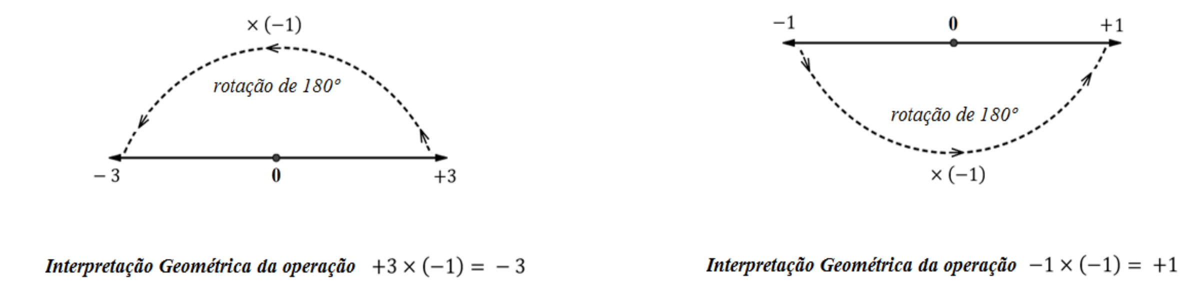


Representação de Argand para quantidades positivas e negativas

Fonte: O Autor

Com esta representação, Argand permite atribuir um significado às operações com números negativos. Além da subtração $0 - a$, é possível atribuir um significado à multiplicação pelo -1, interpretando-a como uma reflexão em relação à origem. Isto possibilita dar sentido e, consequentemente, entender mais facilmente porque $(-1) \times (-1) = +1$, como ilustra a próxima figura:

Figura 10



Fonte: O Autor

Segundo Roque (2012), para obter a representação das quantidades imaginárias, Argand começa analisando as possibilidades de relação entre as grandezas orientadas (positivas e negativas), como por exemplo:

$$+1 : +1 :: -1 : -1 \qquad "+1 \; está \; para \; +1 \; assim \; como \; -1 \; está \; para \; -1"$$

No caso das meias proporcionais, o problema estava resolvido quando os extremos possuem o mesmo sinal:

$$+1 : +x :: +x : +1 \qquad ou \qquad -1 : +x :: +x : -1$$

Nas proporções acima, os valores das meias proporcionais são $-1 \; ou +1$. Inclusive, utilizando a notação algébrica atual, temos:

$$\frac{+1}{+x} = \frac{+x}{+1} \quad ou \quad \frac{-1}{+x} = \frac{+x}{-1}$$

$$e \; pela \; propriedade \; fundamental \; das \; proporções, obtemos: \quad x^2 = 1$$

Porém, existia um problema que ainda não estava resolvido: qual é a meia proporcional entre $-1 \; e +1$ ou $+1 \; e -1$? Ou seja, para quais valores de x as proporções

$$-1 : +x :: +x : +1 \qquad ou \qquad +1 : +x :: +x : -1$$

são verdadeiras?

Ou ainda, utilizando a notação atual, ambas as proporções nos levam à equação:

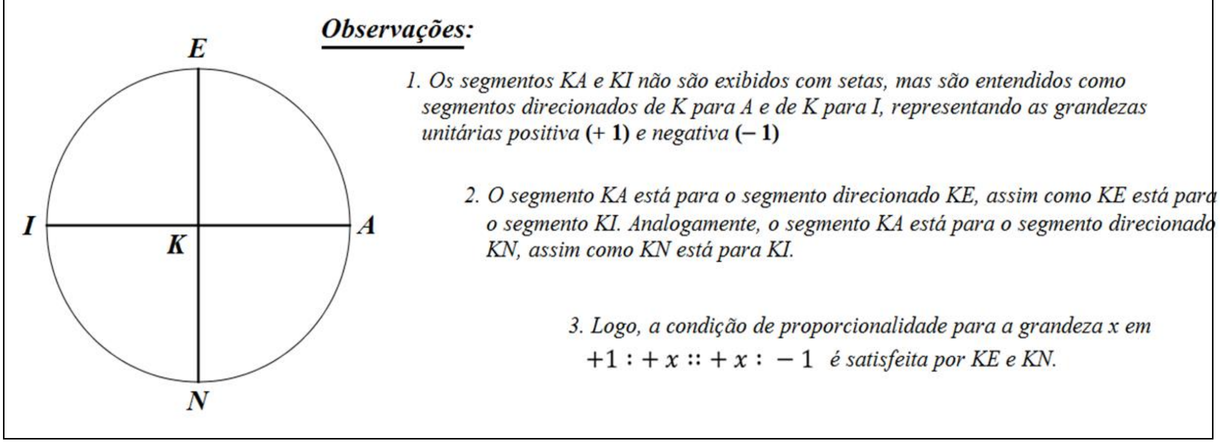
$$x^2 = -1$$

Argand investiga as grandezas que satisfazem a proporção

$$+1 : +x :: +x : -1$$

e propõe uma solução geométrica para este problema, usando o seguinte diagrama:

Figura 11

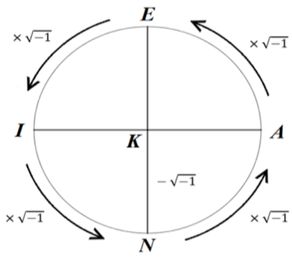


Fonte: O Autor

Portanto, os segmentos KE e KN resolvem geometricamente o problema das meias proporcionais que, algebricamente, seria resolvido pela equação $x^2 = -1$. Então, Argand afirma que $KE = +\sqrt{-1}$ e $KN = -\sqrt{-1}$.

Como a proporção impõe que $+1$ esteja para $+x$ assim como $+x$ está para -1, se faz necessária uma nova direção. A primeira representação proposta por Argand, que ilustra as grandezas positivas e negativas dadas por orientações opostas sobre uma mesma reta, não é suficiente para a representação destas meias proporcionais. Portanto, a nova direção é uma perpendicular. E, a multiplicação por $\sqrt{-1}$ deve ser entendida como uma rotação. E, novamente, o zero (ponto K) passa a ter um papel importante, pois é visto como um centro de rotação – o ponto que organiza o giro – e não apenas considerado a “ausência de quantidade”.

Figura 12



Pelo diagrama de Argand, temos:

$$\boxed{\begin{aligned} KA &= +1 \\ KE &= +\sqrt{-1} \\ KI &= -1 \\ KN &= -\sqrt{-1} \end{aligned}}$$

$KA \times \sqrt{-1} = KE,$ *ou seja:* $+\ 1 \times \sqrt{-1} = +\sqrt{-1}$

$KE \times \sqrt{-1} = KI,$ *ou seja:* $+\ \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -\ 1$

$KI \times \sqrt{-1} = KN,$ *ou seja:* $-\ 1 \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$

$KN \times \sqrt{-1} = KA,$ *ou seja:* $-\ \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = +\ 1$

Interpretação geométrica da multiplicação como uma rotação de 90°

Fonte: O Autor

Esta interpretação geométrica nos permite entender e visualizar a operação: $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1.$

Apesar de ter proposto essa representação geométrica que nos permite interpretar e entender diversas operações com números que na época não eram admitidos como “legítimos”, Argand não era um matemático e não tinha nenhuma projeção ou circulação neste meio. Portanto, não podemos afirmar que foi a partir deste trabalho que os números complexos receberam uma “cidadania” ou foram aceitos plenamente pela comunidade matemática.

Isto só começa a acontecer com o trabalho de Gauss.

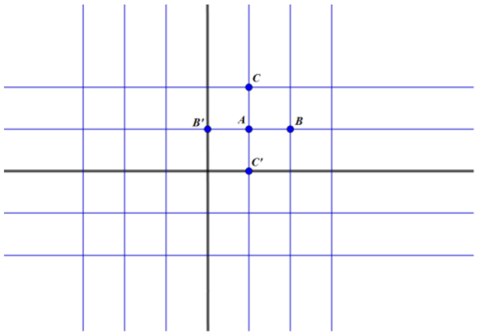
2.4.4 Carl Friedrich Gauss

Em 1831, Gauss (1777 – 1855) publicou um artigo intitulado “Metafísica das Grandezas Imaginárias” onde ele afirma que não é mais necessário qualificar as quantidades negativas e imaginárias pela sua natureza, o que as levava a serem consideradas “sofísticas”, “absurdas”, “impossíveis”, etc. mas, sim, como relações. Como defensor da abstração como característica essencial da Matemática, Gauss concebe as quantidades imaginárias como objetos plenamente abstratos, o que era suficiente para que tivessem lugar na Matemática.

Segundo Roque (2012), para destacar estas relações, Gauss considera no plano um duplo sistema de retas paralelas que se intersectam perpendicularmente.

Os pontos de intersecção serão os números complexos e, dado um certo ponto A, ele é envolvido por quatro pontos adjacentes B, B', C e C'.

Figura 13



Simbolo $"+\mathbf{1}"$ *indica a relação do ponto A com algum ponto adjacente*

Consequentemente, $"-\mathbf{1}"$ *indica a relação de A com o ponto adjacente, no sentido oposto*

O símbolo $"+\boldsymbol{i}"$ *indicará a relação com um dos pontos adjacentes restantes, dependendo da escolha anterior para* $"+\mathbf{1}"$

Finalmente, o símbolo $"-\boldsymbol{i}"$ *indicará a relação com o adjacente no sentido oposto*

Representação geométrica proposta por Gauss

Fonte: O Autor

Gauss começa, então, a destacar a semelhança entre a relação de $+1$ com -1 e a relação de $+i$ com – i (símbolos que foram introduzidos por ele) e, esta ideia, não está muito distante da "meia proporcional" proposta por Argand. A representação escolhida utiliza a propriedade do plano que, escolhidos um "em cima" e um "embaixo", a distinção entre uma "direita" e uma "esquerda" fica automaticamente determinada.

A nomenclatura de "positivo", "negativo" e "imaginário", ao invés de "unidade direita", "inversa" e "lateral" para $+1, -1\ e\ \sqrt{-1}$, respectivamente, foi exatamente o que deu margem, segundo Gauss, para muitas confusões.

A associação dos números complexos aos pontos do plano é enfatizada por Gauss como nenhum outro matemático antes dele. Porém, o passo decisivo para que os números complexos adquirissem uma "base sólida" foi a construção de uma teoria algébrica para estes números, o que só foi possível com a introdução da noção de vetor e o trabalho de Hamilton.

CAPÍTULO 3

O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Na maioria dos textos de Ensino Médio, os elementos do conjunto dos números complexos são apresentados usando a forma algébrica e, só depois, são feitas as representações geométrica, pois a forma algébrica permite que as operações sejam realizadas sem muita dificuldade. Neste trabalho, como o objetivo é explorar geometricamente as operações e propriedades dos números complexos, será realizado um estudo mais abrangente sobre o conjunto dos números complexos e as representações de seus elementos.

3.1 DEFINIÇÃO

Consideremos o produto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\, (x;y) \mid x\,,y \in \mathbb{R} \,\}$, ou seja, o conjunto de todos os pares ordenados de números reais. Neste conjunto, temos que dois pares ordenados são iguais quando possuem as mesmas coordenadas:

$$dados\ (x_1, y_1)\ e\ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2\,, \qquad (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2\ \ e\ \ y_1 = y_2$$

Além da igualdade, serão definidas duas operações entre dois pares ordenados:

$soma\ +\ :\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad dada\ por$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2\ , y_1 + y_2)$$

$multiplicação\ \cdot :\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad dada\ por$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (\ x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2\ ,\ x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$$

O conjunto $\mathbb{R}^2$ munido das operações definidas anteriormente será denominado conjunto dos números complexos e será denotado por $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2\ , +\ ,\ \cdot\ )$. Um elemento em $\mathbb{C}$, denotado por $z = (a, b)$, será chamado de número complexo, no qual $a, b \in \mathbb{R}$ representam, respectivamente, a parte real e parte imaginária do número complexo z, denotados por:

$$a = Re(z) \quad \text{e} \quad b = Im\ (z)$$

Veremos, a seguir, que $\mathbb{R}^2$ juntamente com as operações assim definidas, satisfazem as propriedades de uma estrutura classificada como corpo.

3.2 O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS É UM CORPO

Para provar que o conjunto dos números complexos é um corpo, precisamos verificar algumas propriedades em relação as operações, a saber:

(I) A operação ADIÇÃO tem as seguintes propriedades:

A1: Associatividade

$\forall\ z_1\ , z_2\ , z_3\ \in \mathbb{C}$ vale $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

A2: Comutatividade

$\forall\ z_1\ , z_2\ \in \mathbb{C}$ vale $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

A3: Elemento Neutro

$\exists\ e_a \in \mathbb{C}$ tal que $e_a + z = z + e_a = z\ ,\ \forall\ z \in \mathbb{C}$

A4: Elemento Oposto

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \exists\, z' \text{ tal que } z' + z = z + z' = e_a$$

(II) Em relação a MULTIPLICAÇÃO:

M1: Associatividade

$$\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \text{ vale } (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

M2: Comutatividade

$$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ vale } z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

M3: Elemento Neutro

$$\exists\, e_m \in \mathbb{C} \text{ tal que } e_m \cdot z = z \cdot e_m = z,\ \forall\, z \in \mathbb{C}$$

M4: Elemento Inverso

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ z \neq (0{,}0),\ \exists\, z' \text{ tal que } z' \cdot z = z \cdot z' = e_m$$

(III) Distributividade: A multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \text{ vale } z_1 \cdot (z_1 + z_2) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Demonstração:

Para realizar algumas etapas das demonstrações, consideramos conhecidas as propriedades algébricas do conjunto dos números reais.

ADIÇÃO

A1. Associatividade:

Sejam os números complexos $z_1 = (a, b)$; $z_2 = (c, d)$ e $z_3 = (e, f)$.

Temos:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = [(a,b) + (c,d)] + (e,f) = (a+c, b+d) + (e,f) =$$

$$= (a+c+e, b+d+f) = [a+(c+e), b+(d+f)] =$$

$$= (a,b) + (c+e, d+f) = (a,b) + [(c,d) + (e,f)] =$$

$$= z_1 + (z_2 + z_3)$$

A2. Comutatividade:

Sejam os números complexos $z_1 = (a,b)$ e $z_2 = (c,d)$.

Temos:

$$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) =$$

$$= (c,d) + (a,b) = z_2 + z_1$$

A3. Existência do Elemento Neutro:

Afirmação: $e_a = (0,0)$ é o elemento neutro.

De fato, tomando um elemento arbitrário $z = (x,y)$, temos:

$$e_a + z = (0,0) + (x,y) = (0+x, 0+y) = (x,y) = z$$

A4. Existência do Elemento Oposto ou Simétrico:

Dado um número complexo $z = (x,y)$ qualquer, vamos provar que existe $z' = (x',y')$.

Temos:

$$(x,y) + (x',y') = (0,0) \Leftrightarrow (x+x', y+y') = (0,0) \Leftrightarrow x + x' = 0 \; e \; y + y' = 0$$
$$\Leftrightarrow x' = -x \; e \; y' = -y$$

Assim, $z' = (-x,-y)$ é o simétrico do número complexo z.

PRODUTO

M1. Associatividade:

Sejam os números complexos $z_1 = (a,b)$; $z_2 = (c,d)$ e $z_3 = (e,f)$.

Temos:

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = [(a,b) \cdot (c,d)] \cdot (e,f) = (a \cdot c\ - b \cdot d\ , a \cdot d + b \cdot c) \cdot (e,f) =$

$= \ [(a \cdot c\ - b \cdot d) \cdot e - (a \cdot d + b \cdot c) \cdot f\ , (a \cdot c\ - b \cdot d) \cdot f + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot e] =$

$= \ [a \cdot c \cdot e\ - b \cdot d \cdot e - a \cdot d \cdot f - b \cdot c \cdot f\ , a \cdot c \cdot f\ - b \cdot d \cdot f + a \cdot d \cdot e + b \cdot c \cdot e\,] =$

$= \ [a \cdot (c \cdot e\ - d \cdot f) - b \cdot (d \cdot e + c \cdot f)\ , a \cdot (c \cdot f + d \cdot e) + b \cdot (c \cdot e - d \cdot f)\,] =$

$= (a,b) \cdot (c \cdot e\ - d \cdot f, d \cdot e + c \cdot f) = (a,b) \cdot [(c,d) \cdot (e,f)] = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

M2. Comutatividade:

Sejam os números complexos $z_1 = (a,b)$ e $z_2 = (c,d)$.

Temos:

$$z_1 \cdot z_2 = (a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c - b \cdot d\ , a \cdot d + b \cdot c) =$$

$$= (c \cdot a - d \cdot b\ , d \cdot a + c \cdot b) = (c,d) \cdot (a,b) = z_2 \cdot z_1$$

M3. Existência do Elemento Neutro:

Afirmação: $e_m = (1{,}0)$ é o elemento neutro.

De fato, tomando um elemento arbitrário $z = (x,y)$, temos:

$$e_m \cdot z = (1{,}0) \cdot (x,y) = (1 \cdot x - 0 \cdot y, 1 \cdot y + 0 \cdot x) = (x,y) = z$$

M4. Existência do Elemento Inverso:

Dado um número complexo $z = (x,y)$, $z \neq (0{,}0)$, vamos provar que existe $z'' = (x'',y'')$.

Temos:

$$(x,y) \cdot (x'',y'') = (1{,}0) \Leftrightarrow (x \cdot x'' - y \cdot y''\ , x \cdot y'' + y \cdot x'') = (1{,}0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \cdot x'' - y \cdot y'' = \ 1\ \ e\ \ x \cdot y'' + y \cdot x'' = 0$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x \cdot x'' - y \cdot y'' = \ 1 \\ x \cdot y'' + y \cdot x'' = 0 \end{cases}$$

Obtemos:

$$x'' = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad e \quad y'' = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Assim, o elemento inverso é dado por:

$$z'' = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \; ; \; \frac{-\,y}{x^2 + y^2}\right)$$

DISTRIBUTIVA

Sejam os números complexos $z_1 = (a, b)$; $z_2 = (c, d)$ e $z_3 = (e, f)$.

Temos:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot (c + e, d + f) =$$

$$= [a \cdot (c + e) - b \cdot (d + f)\,, a \cdot (d + f) + b \cdot (c + e)] =$$

$$= [a \cdot c + a \cdot e - b \cdot d\; - b \cdot f\,, a \cdot d + \; a \cdot f + b \cdot c + b \cdot e] =$$

$$= [(a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot e - b \cdot f)\,, (a \cdot d + b \cdot c) + (a \cdot f + b \cdot e)] =$$

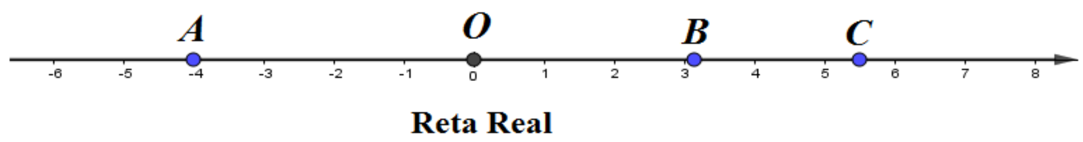
$$= [(a \cdot c - b \cdot d)\,, (a \cdot d + b \cdot c)] + [(a \cdot e - b \cdot f)\,, (a \cdot f + b \cdot e)] =$$

$$= (a, b)\; \cdot\; (c, d) + (a, b)\; \cdot (e, f) = z_1 \cdot z_2 + \; z_1 \cdot z_3$$

3.3 COORDENDAS NO PLANO

Os elementos do conjunto dos números reais estão associados biunivocamente aos pontos de uma reta. Esta correspondência é feita da seguinte maneira: cada número real $a\ \in \mathbb{R}$ está associado um único ponto A distante $|a|$ de um ponto O dado. Este ponto O será chamado de origem e associado ao número real 0 (zero). Se $a > \ 0$, o ponto A está à direita de O, se $a < 0$, o ponto A está à esquerda de O e se $a = 0$, os pontos A e O são os mesmos. Na próxima figura, estão ilustrados a retal real e os pontos O, A, B e C associados aos números 0 (zero), - 4, π e $\frac{11}{2}\ ou\ 5{,}5$, respectivamente:

Figura 14

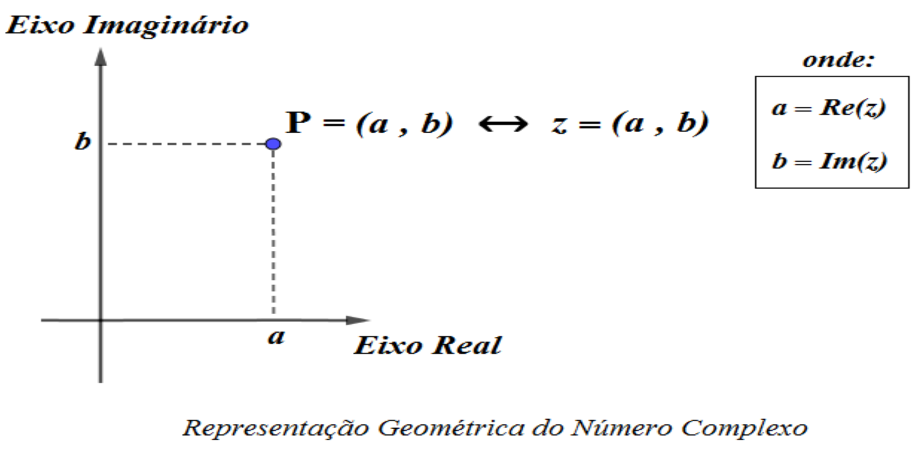


Fonte: O Autor

Considerando uma reta perpendicular à reta real passando pelo zero, temos um par de eixos coordenados e ortogonais. Este sistema nos permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais do conjunto $\mathbb{R}^2 = \{ (x; y) \mid x , y \in \mathbb{R} \}$.

Desta maneira, podemos identificar cada número complexo (a, b) com o ponto $P = (a, b)$ do plano:

Figura 15



Fonte: O Autor

O plano acima, usado para a representação dos números complexos, é chamado de “Plano de Argand-Gauss” ou “Plano Complexo”. Neste plano, o eixo horizontal é chamado de “Eixo Real” ao passo que o eixo vertical é chamado de “Eixo Imaginário”. O ponto P que representa o número complexo é chamado de imagem do número complexo z e, por sua vez, o número complexo z é chamado de afixo do ponto P.

Posteriormente, usaremos o plano para obter novas representações dos números complexos, bem com interpretar geometricamente as operações.

3.4 O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS É SUBCONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Nesta seção, usaremos dois conceitos (subcorpo e isomorfismo) que serão definidos a seguir:

<u>Subcorpo</u>*: subconjunto de um corpo que, munido das mesmas operações deste, também é um corpo.*

<u>Isomorfismo</u>*: correspondência biunívoca entre elementos de dois grupos que preserva as operações de ambos.*

Seja R' o subconjunto de $\mathbb{C}$ que contém todos os números complexos cuja parte imaginária é igual à zero, ou seja:

$$R' = \{(a, b) \ \in \mathbb{C}\,, b = 0\,\}$$

Seja uma aplicação de $\mathbb{R}$ em R', que leva cada $x \in \mathbb{R}$ ao par $(x, 0) \in R'$:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow R', dada\ por: f(x) = (x, 0)$$

Esta aplicação é bijetiva. De fato:

1. f é $sobrejetiva$: todo par $(x, 0) \in R'$ é imagem de $x \in \mathbb{R}$ pela aplicação f.

2. f é $injetiva$: dados $x, x' \in \mathbb{R}$, com $x \neq x'$, temos que $(x, 0) \neq (x', 0)$, ou seja, $f(x) \neq f(x')$.

Verificamos, também, que a aplicação f preserva as operações de adição e multiplicação:

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ temos:

1. $f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$
2. $f(a \cdot b) = (a \cdot b, 0) = (a \cdot b\ - 0 \cdot 0,\ a \cdot 0\ + 0 \cdot b) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a) + f(b)$

Por ser $f: \mathbb{R} \rightarrow R'$ uma aplicação bijetiva, que preserva as operações de adição e multiplicação, dizemos que $\mathbb{R}$ e R' são isomorfos. Desta forma, $\mathbb{R}$ é considerado subcorpo de $\mathbb{C}$ (dizemos que foi realizado um "mergulho" de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$) e, portanto, fica justificada a igualdade $x = (x, 0), \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Temos, então, que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

3.5 VÁRIAS REPRESENTAÇÕES DE UM NÚMERO COMPLEXO

3.5.1 A Unidade Imaginária e a Forma Algébrica

Consideremos, no conjunto dos números complexos, o par $(0,1)$. Este número complexo, chamado de unidade imaginária e denotado pelo símbolo i, possui a seguinte propriedade:

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$

Anteriormente, vimos que todo número complexo cuja segunda coordenada é nula, é um número real. Portanto:

$$i^2 = (-1,0) = -1.$$

Usando a unidade imaginária i, podemos fazer uma decomposição do número complexo $z = (a, b)$ e representá-lo na forma algébrica (ou cartesiana):

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

Ou seja, como $(a, 0) = a$, $(b, 0) = b$ e $(0,1) = i$, temos:

$$z = a + bi, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}.$$

A representação algébrica do número complexo nos oferece uma alternativa para realização das operações de adição e multiplicação, pois podemos efetuá-las como se estivéssemos operando com binômios do primeiro grau, considerando a unidade imaginária i como a variável.

Consideremos dois números complexos representados na forma algébrica $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ e vamos realizar as operações:

Adição: Eliminamos os parênteses agrupando as partes real e imaginária:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d)i$$

Multiplicação: Aplicamos a propriedade distributiva juntamente com a propriedade da unidade imaginária:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + (a \cdot d)i + (b \cdot c)i + (b \cdot d)i^2 =$$

$$= a \cdot c + (a \cdot d)i + (b \cdot c)i + (b \cdot d) \cdot (-1) =$$

$$= (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$$

Observação: Podemos obter a multiplicação entre um número real $c \in \mathbb{R}$ e o complexo $z = a + bi$:

$$c \cdot z = (c + 0i) \cdot (a + bi) = (c \cdot a - 0 \cdot b) + (c \cdot b + 0 \cdot a)i$$
$$= (ca) + (cb)i = (ca, cb)$$

3.5.2 Representação Matricial do Número Complexo

Primeiramente, note que se ao número real a associamos a matriz

$$a \cdot I = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

então, temos que à soma $a + c = c + a$ fica associada a matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & 0 \\ 0 & a + c \end{pmatrix}$$

e, ao produto $a \cdot c = c \cdot a$, corresponde

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot c & 0 \\ 0 & a \cdot c \end{pmatrix}.$$

Portanto, as matrizes da forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ se comportam exatamente da mesma maneira que os números reais em relação à soma e ao produto. Ou seja, podemos dizer que $\mathbb{R}$ é isomorfo ao corpo cujos elementos são as matrizes $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ onde $a \in \mathbb{R}$.

Podemos considerar a unidade imaginária i como a matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

De fato:

$$i^2 = i \cdot i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot I = -1$$

Então, o número complexo $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ fica representado como:

$$z = a + bi = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

3.5.3 Representação Polar do Número Complexo

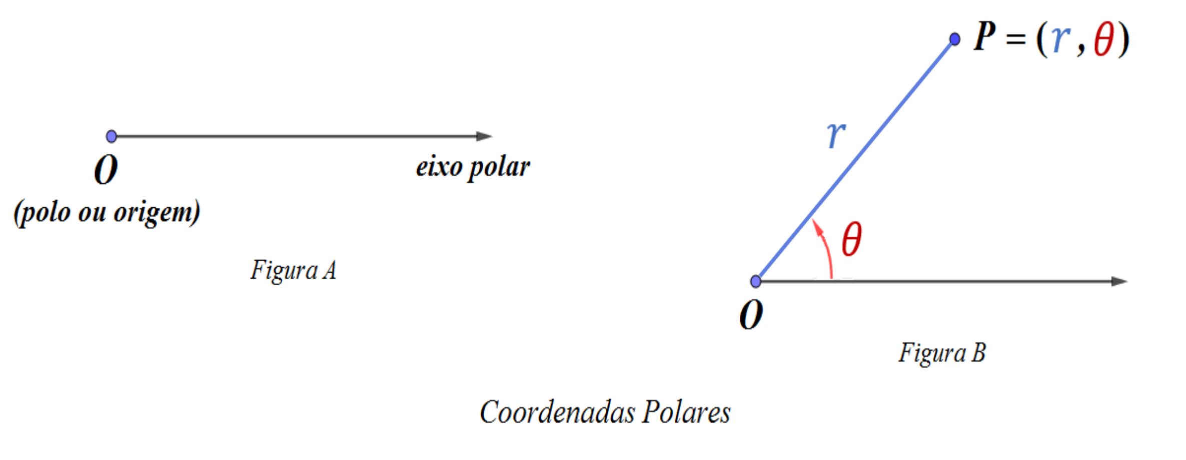
Um sistema de coordenadas representa um ponto no plano por um par ordenado de números chamados de coordenadas. Geralmente, para a representação de pontos no plano usamos as coordenadas cartesianas. Nesta seção, vamos fazer a representação usando o sistema de coordenadas polares que, para alguns propósitos, se mostra mais conveniente.

Escolhemos um ponto no plano chamado polo (ou origem) e o denotamos pela letra O. Então, representamos uma semirreta, chamada de eixo polar, com extremidade em O na direção horizontal e no sentido da esquerda para a direita. Esta semirreta corresponde ao eixo x das coordenadas cartesianas (figura 16A).

Se P for qualquer outro ponto no plano, seja r a distância de O até P e seja θ o ângulo (medido em graus ou radianos) entre o eixo polar a o segmento $\overline{OP}$ (figura 16B).

Assim, o ponto P é representado pelo par ordenado (r, θ), onde r, θ são chamados coordenadas polares de P. Usamos a convenção de que um ângulo é positivo se for medido no sentido anti-horário a partir do eixo polar e negativo se for medido no sentido horário:

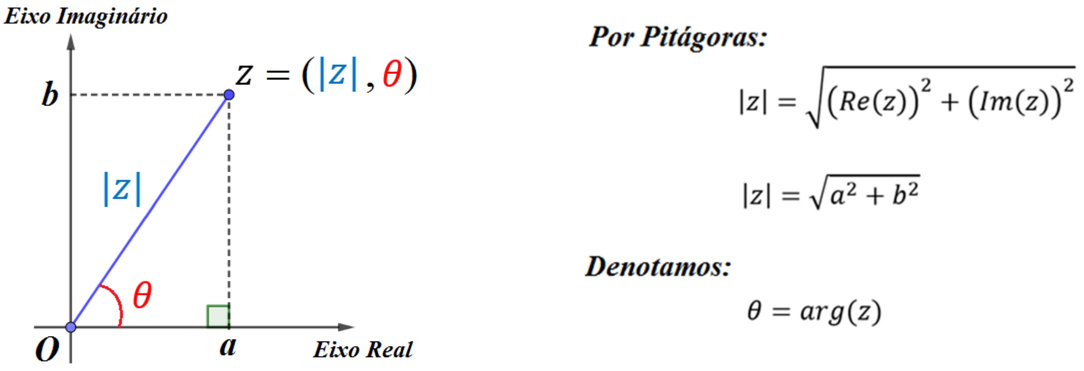
Figura 16



Fonte: O Autor

Portanto, podemos fazer a representação do número complexos $z = (a, b)$ usando este sistema de coordenadas. Para isto, vamos denotar a distância de O até P como $|z|$ e, usando o teorema de Pitágoras, podemos determinar a medida do segmento $\overline{OP}$. Além disso, o ângulo θ será chamado de argumento de z e denotado por $\theta = arg(z)$:

Figura 17

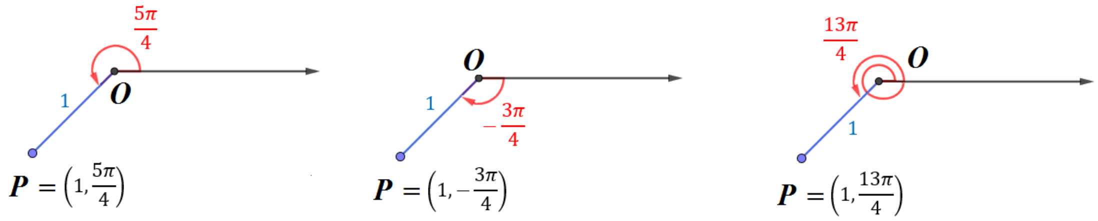


Representação Polar do Número Complexo

Fonte: O Autor

No sistema de coordenadas cartesianas, cada ponto tem apenas uma representação. Mas, no sistema de coordenadas polares, cada ponto tem muitas representações dependendo do seu argumento. Por exemplo, na figura a seguir, temos três exemplos de representações para um mesmo ponto:

Figura 18



Algumas representações do ponto P usando coordenadas polares

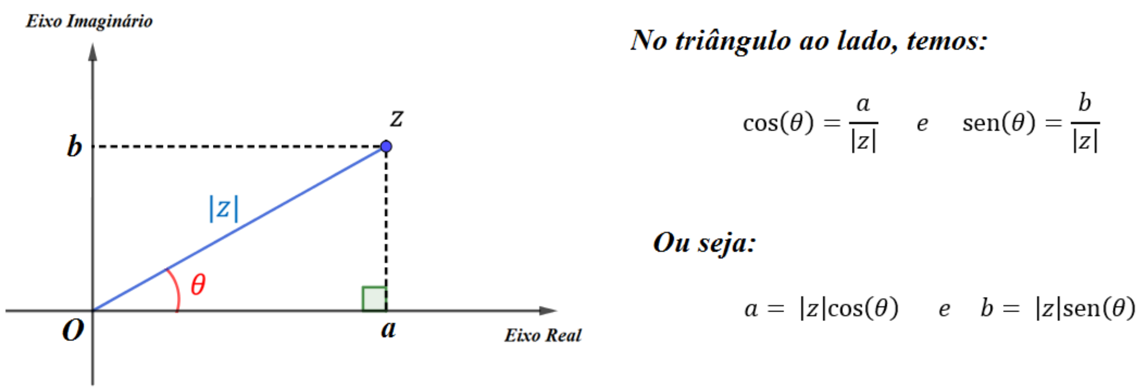
Fonte: O Autor

De fato, como uma rotação completa no sentido anti-horário é dada por $2\pi\ (ou\ 360°)$ e um ângulo pode ser representado no sentido horário (usando valores negativos), o ponto representado pelas coordenadas polares (r, θ) pode, também, ser representado por $(r, \theta + 2n\pi)$, onde n é qualquer inteiro.

Portanto, para que a representação usando a forma polar seja única, vamos considerar $\theta = arg(z)\ \in [0\ , 2\pi)$.

A relação entre as coordenadas polares e as partes real e imaginária de um número complexo pode ser vista na próxima figura, na qual o polo corresponde ao número complexo $O =\ (0{,}0)$ e o eixo polar coincide com o eixo real. Usando as razões trigonométricas, temos:

Figura 19



Relação entre coordenadas cartesianas e polares

Fonte: O Autor

Podemos, então, escrever o número complexo z:

$$z = (a, b) = a + bi = |z|\cos(\theta) + |z|\mathrm{sen}(\theta)\, i$$

Colocando o módulo $|z|$ em evidência e trocando a ordem dos fatores da parte imaginária e do seno, temos a forma polar (ou trigonométrica) do número complexo z:

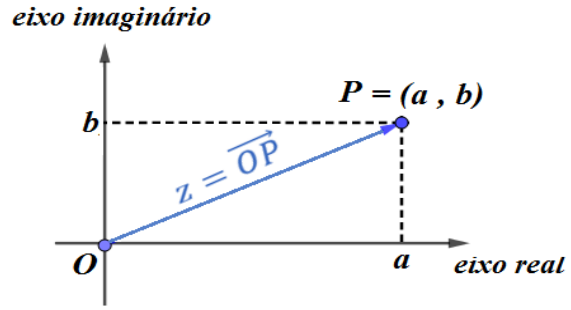
$$z = |z|(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))$$

3.6 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

3.6.1 Adição

Considerando a bijeção entre os números complexos e os pontos do plano, podemos considerar o número complexo $z = (a, b)$ como um segmento orientado (vetor) $\overrightarrow{OP}$ com origem no ponto $O = (0,0)$ e extremidade no ponto $P = (a, b)$, como ilustra a próxima figura:

Figura 20



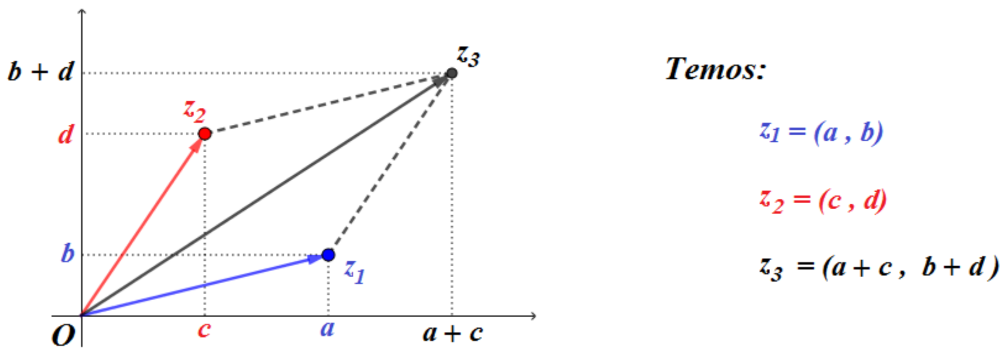
Representação Vetorial do Número Complexo

Fonte: O Autor

Considerando os números complexos como vetores, podemos interpretar geometricamente as operações com números complexos.

A adição de números complexos pode ser visualizada usando a regra do paralelogramo:

Figura 21



Interpretação Geométrica da Adição em $\mathbb{C}$

Fonte: O Autor

3.6.2 Multiplicação

Antes da interpretação geométrica da multiplicação entre dois números complexos, vamos efetuá-la algebricamente usando a representação polar.

Dados

$z_1 = (a,b) = (|z_1|\cos(\theta_1), |z_1|\operatorname{sen}(\theta_1))$ e $z_2 = (c,d) = (|z_2|\cos(\theta_2), |z_2|\operatorname{sen}(\theta_2))$,

temos:

$$z_1 \cdot z_2 = (a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot c - b\cdot d\,, a\cdot d + b\cdot c)$$

$$\begin{cases} a\cdot c - b\cdot d = |z_1|\cos(\theta_1)\,|z_2|\cos(\theta_2) - |z_1|\operatorname{sen}(\theta_1)\,|z_2|\operatorname{sen}(\theta_2) \\ a\cdot d + b\cdot c = |z_1|\cos(\theta_1)\,|z_2|\operatorname{sen}(\theta_2) + |z_1|\operatorname{sen}(\theta_1)\,|z_2|\cos(\theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\cdot c - b\cdot d = |z_1|\,|z_2|(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2)) \\ a\cdot d + b\cdot c = |z_1||z_2|\,(\cos(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2) + \operatorname{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\cdot c - b\cdot d = |z_1||z_2|\cos(\theta_1+\theta_2) \\ a\cdot d + b\cdot c = |z_1||z_2|\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$

Ou seja:

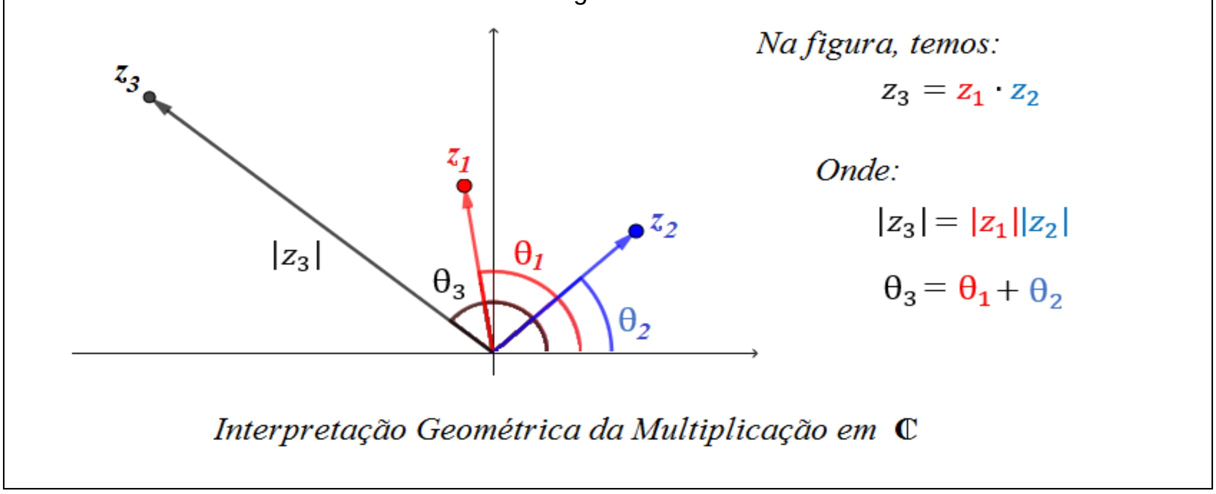
$$z_1\cdot z_2 = (a,b)\cdot(c,d) = (|z_1||z_2|\cos(\theta_1+\theta_2)\ , |z_1||z_2|\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)) =$$

$$= |z_1||z_2|\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,|z_1||z_2|\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) =$$

$$= |z_1||z_2|[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)]$$

Ou seja, geometricamente, o produto $z_1 \cdot z_2$ representa o número complexo de módulo $|z_1||z_2|$ e argumento $\theta_1+\theta_2$, como ilustra a figura a seguir:

Figura 22

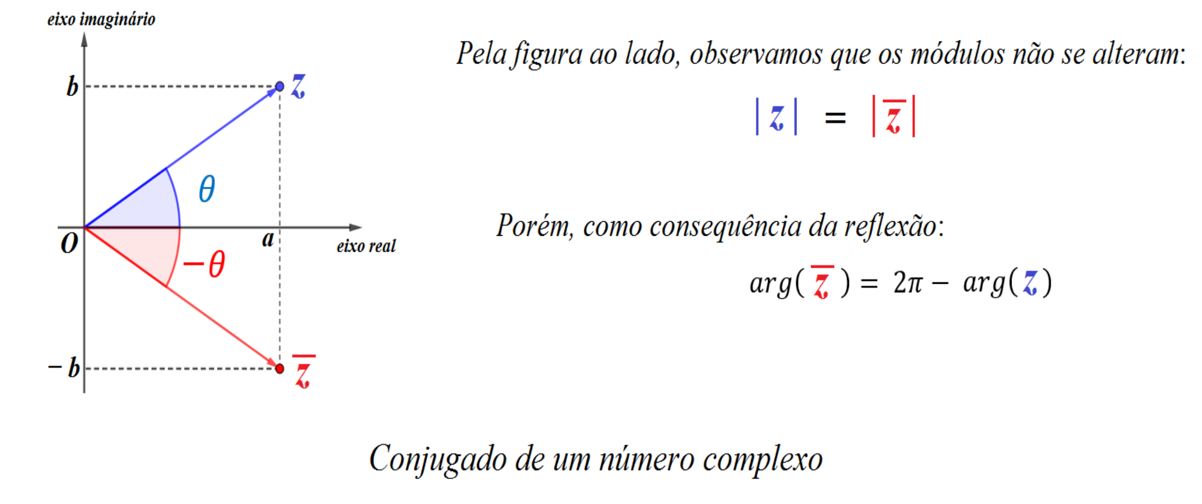


Fonte: O Autor

3.7 CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

O conjugado de um número complexo $z = (a, b)$, denotado por $\bar{z}$, é obtido pela reflexão de z em torno do eixo horizontal (eixo real) como mostra a figura a seguir:

Figura 23



Fonte: O Autor

Portanto, o conjugado de um número complexo $z = (a, b)$, é dado por $\bar{z} = (a, -b)$.

No caso do número complexo que possui a parte imaginária nula (número real), o conjugado é o próprio número. Ou seja, dado $z = (a, 0)$, temos:

$$\bar{z} = (a, -0) = (a, 0) = z.$$

O conjugado possui algumas características e propriedades interessantes, entre elas

1. Conjugado do conjugado: $\bar{\bar{z}} = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$

Denotando $z = a + bi$, temos:

$$\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a + bi}} = \overline{a - bi} = a + bi = z$$

2. Conjugado da soma: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}, \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Sejam os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. Então:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + bi) + (c + di)} =$$

$$= \overline{(a + c) + (b + d)i} =$$

$$= (a + c) - (b + d)i =$$

$$= a - bi + c - di = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

3. Conjugado do produto: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},\ \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Sejam os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. Então:

$$\overline{z_1 \cdot\ z_2} = \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} =$$

$$= \overline{a \cdot c + (a \cdot d)i + (b \cdot c)i + (b \cdot d)i^2} =$$

$$= \overline{a \cdot c + (a \cdot d)i + (b \cdot c)i + (b \cdot d) \cdot (-1)} =$$

$$= \overline{(a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i} =$$

$$= (a \cdot c - b \cdot d) - (a \cdot d + b \cdot c)i =$$

$$= a \cdot c - b \cdot d - (a \cdot d)i - (b \cdot c)i =$$

$$= a \cdot (c - di) - b \cdot d - (b \cdot c)i =$$

$$= a \cdot (c - di) + i^2 b \cdot d - (b \cdot c)i =$$

$$= a \cdot (c - di) - bi(c - di) = (a - bi) \cdot (c - di) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

4. $z \cdot \bar{z} = |z|^2,\ \forall\, z \in \mathbb{C}$

Denotando $z = a + bi$, temos:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 \cdot i^2 =$$

$$= a^2 - b^2 \cdot (-1) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Esta última propriedade nos permite obter o inverso de um número complexo como:

$$z'' = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$$

De fato, vimos anteriormente que o inverso de um número complexo $z = (a, b)$, $z \neq (0{,}0)$, é dado por:

$$z'' = \left(\frac{a}{a^2 + a^2} \; ; \; \frac{-\, b}{a^2 + b^2}\right)$$

Além disso, a multiplicação entre um número real $c \in \mathbb{R}$ e o complexo $z = (a, b)$ é dado por $cz = (ca, cb)$ e como

$$\frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{a^2 + a^2}$$

é um número real, temos:

$$\frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z} = \left(\frac{1}{a^2 + b^2}\right) \cdot (a, -b) = \left(\frac{1}{a^2 + b^2} \cdot a, \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot (-b)\right) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = z''$$

Desta maneira, é possível definir a divisão entre dois números complexos:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{|z_2|^2} \cdot \overline{z_2} = \frac{1}{|z_2|^2} \cdot z_1 \cdot \overline{z_2}$$

3.8 OS COMPLEXOS E AS TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

Uma Transformação no Plano Complexo é uma função definida de $\mathbb{C}\; em \;\mathbb{C}$ que estabelece uma relação entre dois subconjuntos de números complexos.

Quando a relação é estabelecida biunivocamente, temos um isomorfismo, isto é, uma transformação que preserva a forma geral do objeto transformado. Por exemplo, a Homotetia.

Quando as distâncias entre os pontos correspondentes são preservadas, temos uma isometria. São exemplos de transformações isométricas: as Translações e as Rotações.

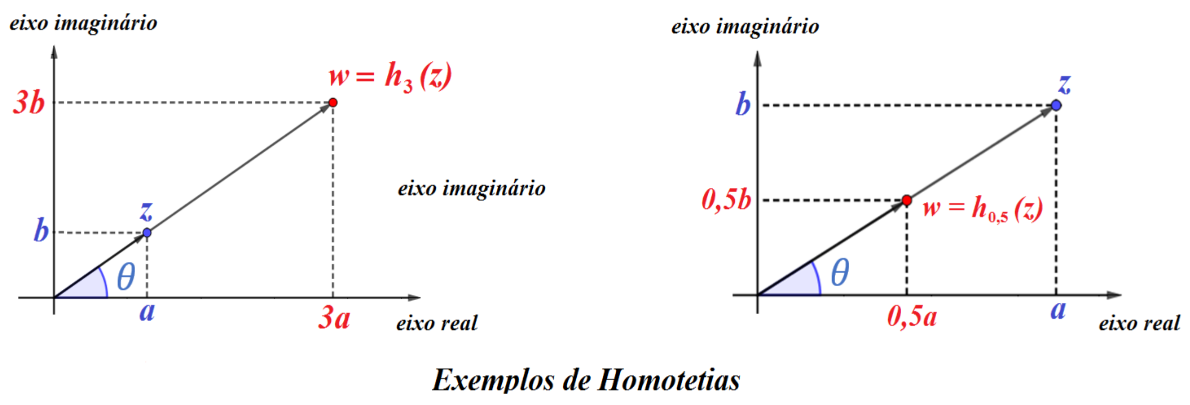
3.8.1 Homotetia

Para cada $r \in \mathbb{R}^+$, a função $h_r\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,;\; z \mapsto w$, definida por

$$w = h_r(z) = r \cdot z$$

é chamada homotetia de razão r e centro na origem. O argumento de z mantém-se e o módulo é multiplicado por r. Trata-se de uma expansão (se $r > 1$) ou de uma contração (no caso em que $0 < r < 1$) a partir da origem. A figura abaixo ilustra duas homotetias, sendo uma expansão ($r = 3$) e uma contração ($r = 0{,}5$):

Figura 24

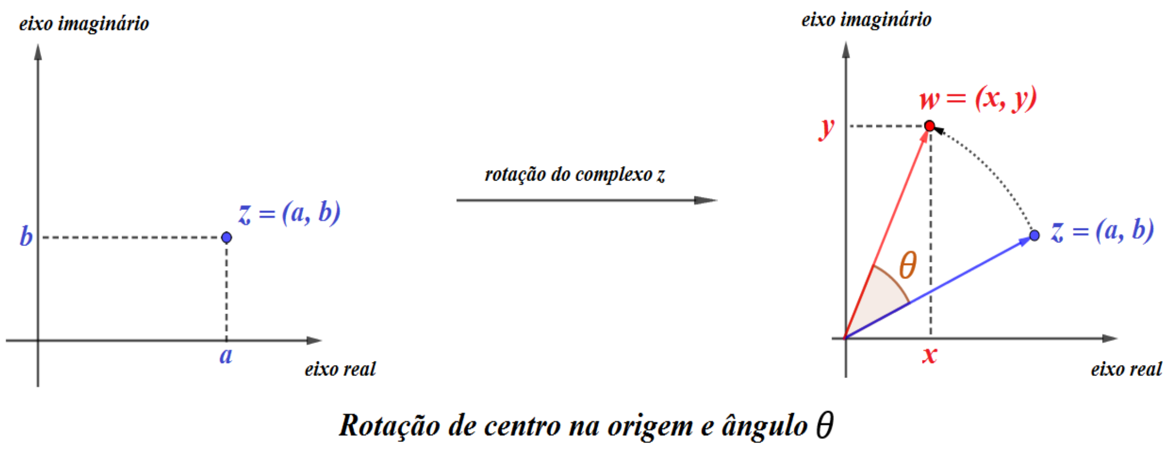


Fonte: O Autor

3.8.2 Rotação

Seja um número complexo $z = (a, b)$ representado no plano de Argand-Gauss e uma rotação aplicada em z:

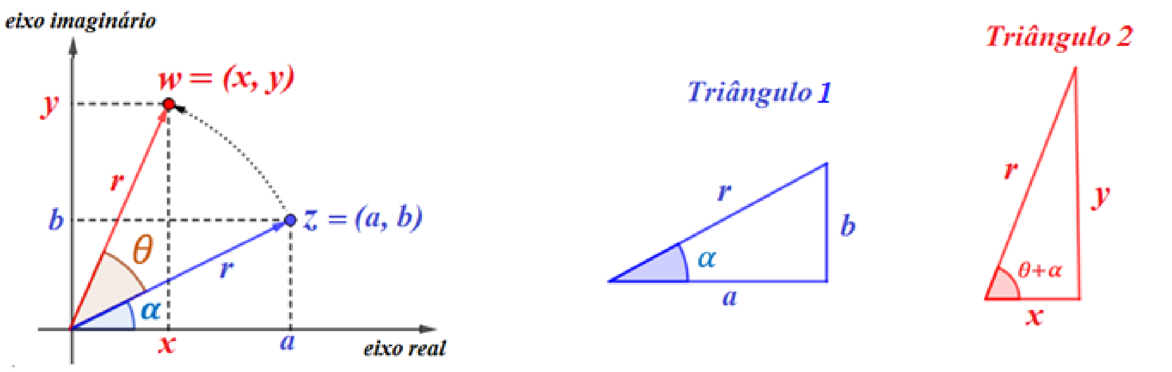
Figura 25



Fonte: O Autor

Desejamos encontrar as coordenadas (x, y) de w em função das coordenadas anteriores (a, b) e do ângulo θ. Para isto, vamos considerar as seguintes figuras:

Figura 26



Triângulos retângulos obtidos pelas coordenadas de z e w

Fonte: O Autor

Pelo triângulo 1, temos:

$$\frac{b}{r} = \operatorname{sen}(\alpha) \quad e \quad \frac{a}{r} = \cos(\alpha)$$

Ou seja:

$$b = r \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \ \ e \ a = r \cdot \cos(\alpha)$$

Pelo triângulo 2, temos:

$$\frac{x}{r} = \cos(\theta + \alpha)$$

$$x = r \cdot [\cos(\theta)\cos(\alpha) - sen(\theta)sen(\alpha)]$$

$$x = r \cdot \cos(\theta)\cos(\alpha) - r \cdot sen(\theta)sen(\alpha)$$

E, também:

$$\frac{y}{r} = \operatorname{sen}(\theta + \alpha)$$

$$y = r \cdot [\operatorname{sen}(\theta)\cos(\alpha) + sen(\alpha)cos(\theta)]$$

$$y = r \cdot sen(\theta)\,cos(\alpha) + r \cdot sen(\alpha)cos(\theta)$$

Fazendo as substituições das expressões do triângulo 1 nas expressões do triângulo 2, obtemos:

$$x = \cos(\theta) \cdot a - sen(\theta) \cdot b$$

$$y = sen(\theta) \cdot a + cos(\theta) \cdot b$$

Finalmente, as coordenadas de w podem ser expressas por:

$$w = (\ \cos(\theta) \cdot a - sen(\theta) \cdot b\ , \mathrm{sen}(\theta) \cdot a + cos(\theta) \cdot b\ ) =$$

$$= (\ \cos(\theta)\ , sen(\theta)\ ) \cdot (a, b) = \big(\cos(\theta)\ , sen(\theta)\big) \cdot z$$

Como $(\ \cos(\theta)\ , sen(\theta)\ )$ representa um número complexo de módulo unitário e argumento θ, podemos definir a rotação:

Para cada complexo unitário $u = (\cos(\theta)\ , sen(\theta))$, $\theta \in [0\ , 2\pi)$, a função $\rho_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ ;\ z \mapsto w$, definida por

$$w = \rho_\theta(z) = (cos(\theta)\ , sen(\theta)) \cdot z$$

é chamada rotação de centro na origem e ângulo θ. O módulo de z não se altera e, ao seu argumento, é somado θ.

3.8.3 Translação

Para cada $v \in \mathbb{C}$, a função $\tau_v : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ ;\ z \mapsto w,$ definida por

$$w = \tau_v(z) = v + z$$

é chamada translação associada a m. Em termos geométricos, todos os pontos z do plano são deslocados na direção e sentido do segmento orientado $\overrightarrow{OA}$ que representa o complexo v de uma distância igual a $|v|$. A translação afeta apenas a posição de uma figura no plano e pode ser visualizada como a Figura 21 “Interpretação Geométrica da Adição nos Complexos”.

3.8.4 Homotetia e Rotação

Para cada complexo não nulo $v = |v|(cos(\theta) + isen(\theta))$, $\theta \in [0\,, 2\pi)$, a função $f_v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,;\ z \mapsto w$, definida por

$$w = f_v(z) = v \cdot z = |v|\left[\left(\cos(\theta)\,, sen(\theta)\right) \cdot z\right] = \left(\cos(\theta)\,, sen(\theta)\right) \cdot (|v| \cdot z); v \neq 0$$

traduz-se por uma rotação de centro na origem, associada a $\left(\cos(\theta)\,, sen(\theta)\right)$, seguida de uma homotetia de centro $O = (0,0)$ e razão $r = |v|$ (ou vice-versa). O módulo de z é multiplicado por $|v|$ e, ao argumento de z, é somado o ângulo θ e pode ser visualizada como a Figura 22 “Interpretação Geométrica da Multiplicação em $\mathbb{C}$”.

CAPÍTULO 4

RELATO DAS ATIVIDADES

4.1 CONTEXTO

O local escolhido para a realização da sequência didática foi a 3ª série A do Ensino Médio regular da Escola Estadual André Donatoni da cidade de Ibaté, São Paulo. Sou professor nesta escola desde 2004, quando fui aprovado no concurso público do Estado de São Paulo.

Nestes 13 anos, a escola sofreu algumas mudanças em sua estrutura. Em 2006, a escola passou a ser de tempo integral (ETI) apenas para o Ensino Fundamental. O Ensino Médio continuou no período da manhã e, no período noturno, a escola oferecia aulas para o EJA até 2013.

Quando ingressei, a maioria das minhas aulas era no EJA e, no período regular, só trabalhava com uma turma do Ensino Fundamental no período da manhã. Comecei a trabalhar com o Ensino Médio apenas em 2010, devido a remoção de outros professores de Matemática.

A sequência didática foi realizada em 7 atividades durante as aulas do mês de agosto, no início do 3º Bimestre. Neste ano de 2017, os conteúdos foram adiados por um mês, devido a orientação dada pela Diretoria de Ensino: as escolas que não alcançaram os índices do SARESP deveriam usar o primeiro mês como uma retomada de conteúdos relacionados com as habilidades em defasagem.

Como o Ensino Médio não alcançou o índice, foram realizadas atividades de retomada de conteúdos envolvendo as competências e habilidades em defasagem no mês de fevereiro. Desta maneira, os “Números Complexos” que seriam trabalhados no final do 2º Bimestre, foram trabalhados em agosto, no início do 3º Bimestre.

A escolha por esta turma foi consequência de algumas reflexões:

1. As atividades desta dissertação deveriam estar relacionadas, preferencialmente, com os conteúdos do Ensino Médio. Como neste ano, tenho duas turmas do Ensino Fundamental (9º anos) e duas turmas do Ensino Médio (2ª e 3ª séries), minhas opções ficaram restritas para as duas últimas.
2. A quantidade de alunos da 3ª série é mais indicada para a realização de uma sequência didática. São 25 alunos, enquanto na 2ª série, 39. Ou seja, a atenção e o feedback dados aos alunos durante as atividades seriam mais proveitosos, sem dizer que o êxito em realizar as atividades em grupos seria maior.
3. Esta era uma turma que precisava de uma atenção especial: além dos alunos estarem se preparando para o vestibular, esta série realiza as provas externas (SARESP, Prova Brasil) e, como algumas habilidades e competências precisavam ser resgatadas, uma atividade diferenciada seria de grande valia.

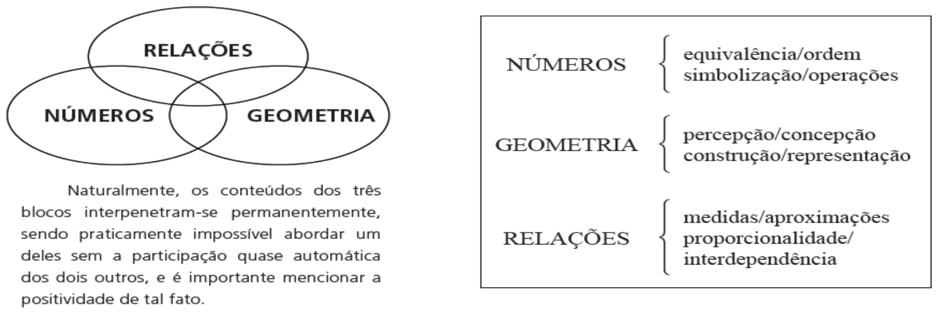
Em relação ao conteúdo, tinha algumas opções: Geometria Analítica, Polinômios ou Números Complexos. Após algumas pesquisas, percebi que um desafio seria o tema “Números Complexos”. Esta pesquisa foi realizada usando alguns trabalhos sobre o assunto. Em todos os trabalhos consultados, era ressaltado o desinteresse apresentado por grande parte dos alunos quando o assunto se tratava de Números Complexos. Refletindo sobre minhas atuações em anos anteriores, lembrei-me que este assunto sempre causou certa “resistência” na maioria dos alunos. Mesmo fazendo um bom planejamento, um estudo sobre o tema, a apresentação deste novo conjunto numérico não despertava o interesse que esperava.

Entre os trabalhos pesquisados, dois me chamaram a atenção: a dissertação da Cláudia Rosana da Costa Caldeira (2013) e de Carlos Nely Clementino de Oliveira (2010), onde eles relatam como foram aplicadas uma sequência didática para os alunos que já haviam estudado Números Complexos usando uma abordagem geométrica. Os resultados obtidos foram bem interessantes, pois nos dois trabalhos os professores conseguiram que os alunos tivessem um maior interesse e pudessem atribuir um significado as operações.

Refletindo sobre estas sequências didáticas, pensei em introduzir os números complexos usando uma abordagem geométrica também. As atividades deveriam ser adaptadas, pois diferente dos outros trabalhos, os meus alunos não tinham estudado este conteúdo. Seria uma atividade de apresentação deste conjunto numérico.

No currículo oficial do Estado de São Paulo, os conteúdos são organizados em três grandes blocos temáticos: “Números”, “Geometria” e “Relações” como ilustra a figura abaixo retirada da página 39:

Figura 27



Blocos Temáticos dos Conteúdos Disciplinares de Matemática

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo – Matemática e suas Tecnologias, página 39

O conteúdo “Números Complexos” é trabalhado no 2º bimestre da 3ª série do Ensino Médio no bloco temático “Números”. Abaixo segue uma ilustração contendo todos os conteúdos e habilidades:

Figura 28

3ª série do Ensino Médio			
	Conteúdos	**Habilidades**	
2º Bimestre	**Números** Equações algébricas e números complexos • Equações polinomiais • Números complexos: operações e representação geométrica • Teorema sobre as raízes de uma equação polinomial • Relações de Girard	• Compreender a história das equações, com o deslocamento das atenções das fórmulas para as análises qualitativas • Conhecer as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica • Saber reduzir a ordem de uma equação a partir do conhecimento de uma raiz	• Saber expressar o significado dos números complexos por meio do plano de Argand-Gauss • Compreender o significado geométrico das operações com números complexos, associando-as a transformações no plano

Conteúdos e Habilidades - Currículo do Estado de SP

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo – Matemática e suas Tecnologias, página 69

No caderno do aluno, os números complexos aparecem em dois momentos:

- no final da *situação de aprendizagem 5* (Equações do 3º grau e o aparecimento natural dos números complexos);
- na *situação de aprendizagem 8* (Números complexos: representação no plano e significado das operações – translações, rotações, ampliações).

Historicamente, o caderno do aluno aborda corretamente os números complexos no contexto das equações do 3º grau. Porém, a forma como as atividades são trabalhadas no primeiro contato com os números complexos podem causar desinteresse nos alunos por explorar apenas as regras operacionais.

Novamente, citando o trecho de José Paulo Carneiro na RPM número 55:

> "[...] A maneira mais comum de introduzir os números complexos é por meio da seguinte definição: Um número complexo é um objeto da forma $a + bi$, onde a e b são reais, $i = \sqrt{-1}$ e permanecem válidas as leis da álgebra[...]. Logo em seguida, passamos a fazer lotes de exercícios do tipo: "calcule $(2 + i)(3 + 4i)$", "calcule $\frac{2+3i}{1-i}$", etc. [...] Depois que nós realmente entendemos o que é um número complexo, sabemos que esta definição não contém nada de errado. Todavia, introduzir os complexos por esta definição é análogo a introduzir as frações, para um estudante que conheça números inteiros, do seguinte modo: "uma fração é um objeto da forma $\frac{a}{b}$, onde *a* e *b* são inteiros (sendo b≠0), com $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, e que seguem as seguintes leisda álgebra: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$". Em seguida, passamos aos exercícios: "calcule $\frac{2}{3} + \frac{5}{9}$", etc. Também não haveria absolutamente nada de errado com esta definição e ela também permitiria resolver todas as contas usuais com frações. Mas, pergunto: alguém, em plena posse do seu bom senso e com um mínimo de compaixão com seus alunos, faria esta barbaridade? Pois é mais ou menos isto que fazemos com os números complexos"

As figuras seguintes mostram a primeira abordagem dos números complexos que acontecem nas páginas 58 a 61 da situação de aprendizagem 5. Após ser feita a dedução da fórmula de "Cardano-Tartaglia" é trabalhada uma situação-problema que envolve a equação $x^3 = 15x + 4$ e o aparecimento do radical $\sqrt{-121}$:

Figura 29

6. Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com a forma de um cubo de aresta **x**, outra com a forma de um paralelepípedo com a base retangular, de lados 3 m e 5 m, e de altura igual à altura do cubo. O valor de **x** deve ser escolhido de tal forma que o volume do cubo seja 4 m^3 maior que o do paralelepípedo.

   a) Escreva a equação que traduz a exigência a ser satisfeita pelo valor de **x**.

   b) Use a fórmula de *Cardano-Tartaglia* para determinar as raízes da equação do item a. A que conclusão você chega?

   c) Verifique diretamente na equação apresentada que $x = 4$ é uma raiz, ou seja, fazendo $x = 4$ m, temos o cubo com volume de 64 m^3 e o paralelepípedo com volume de 60 m^3.

Observação!

Como podemos interpretar o resultado do item b? Será que a fórmula de *Cardano-Tartaglia* não funciona sempre? Você verá, na situação seguinte, um modo de prosseguir nos cálculos e encontrar o resultado $x = 4$.

7. Sabemos que o quadrado de qualquer número real não nulo, positivo ou negativo, é sempre positivo. Até aqui, em nosso percurso escolar, sempre que nos deparamos com a extração da raiz quadrada de um número negativo, dizemos que ela não existe. Na atividade 5 desta seção, tal decisão nos impediu de chegar a uma das raízes da equação, uma vez que teríamos de extrair a raiz quadrada de -121. Faremos, agora, uma atividade de imaginação: suponha que existam números estranhos (certamente, não seriam números da reta real) cujo quadrado seja negativo.

   a) Podemos verificar que, na verdade, bastaria existir um número estranho desses, como a raiz quadrada de -1, para que dele decorressem todas as outras raízes de negativos. De fato, como $-121 = 121 \cdot (-1)$, bastaria sabermos quanto vale a raiz quadrada de -1. Como -1 não tem raiz real, vamos considerar que sua raiz é um número imaginário e o representaremos por **i**. Assim, **i** é um número tal que $i^2 = -1$.

   b) Retorne ao item b da atividade 6 desta seção. Considere $\sqrt{-121} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{-1} = 11\sqrt{-1}$. Denominando $\sqrt{-1} = i$, escreva $11i$ no lugar de $\sqrt{-121}$ e indique a solução da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

   c) Usando o fato de que a raiz cúbica de um número é outro número que, elevado ao cubo, reproduz o primeiro, mostre que $2 + i$ é uma raiz cúbica de $2 + 11i$. Ou seja, mostre que $(2 + i)^3 = 2 + 11i$. Para isso, lembre-se de que $i^2 = -1$.

   d) Retorne à atividade 6 desta seção. Mostre que a solução $x = 4$ pode ser obtida a partir da fórmula para as raízes cúbicas da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

LIÇÃO DE CASA

8. Resolva a equação $2x^2 - 10x + 12 = 0$.

9. Determine uma raiz das seguintes equações de 3º grau:

   a) $x^3 - x - 6 = 0$

   b) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

VOCÊ APRENDEU?

10. Supondo que são válidas as propriedades das operações com números reais para os números formados por uma parte real **x** e uma parte imaginária **yi**, sendo $i = \sqrt{-1}$, efetue as operações indicadas, apresentando o resultado mais simples possível:

   a) $(3 - 4i) + (-5 + 3i)$

   b) $(-11i + 7) - (-5 - 8i)$

   c) $(2i - 13) \cdot (7 - 5i)$

   d) $(13 - i) \cdot (13 + i)$

   e) $i^3 + i^5 + i^7$

   f) i^{13}

Fonte: Caderno do Aluno – Matemática, Ensino Médio – 3ª Série, volume 1, páginas 58 a 61

No caderno do professor, é dada a seguinte sugestão:

Figura 30

Professor, uma sugestão!

Novamente precisamos refletir, pois não sabemos calcular a raiz cúbica do estranho número $2 + 11i$. Tal número é "composto" por uma parte real, que é 2, e por uma parte imaginária, que é $11i$. Esses números são chamados "números complexos", e serão estudados a seguir. Por enquanto, vamos supor que possamos continuar a operar com tais números como se opera com os números reais, respeitando-se apenas a novidade que decorre do fato de termos $i^2 = -1$. Por exemplo:

- para somar $3 + 4i$ com $5 + 7i$, somamos as partes reais e imaginárias separadamente e obtemos: $(3 + 4i) + (5 + 7i) = (3 + 5) + (4i + 7i) = 8 + 11i$.
- para multiplicar $(3 + 4i)$ por $(5 + 7i)$, utilizamos a propriedade distributiva e escrevemos: $(3 + 4i) \cdot (5 + 7i) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 7i + 4i \cdot 5 + 4i \cdot 7i$.
- agrupando termos do mesmo tipo, obtemos: $(3 + 4i) \cdot (5 + 7i) = 15 + 21i + 20i + 28i^2$.
- como $i^2 = -1$, o resultado final seria o seguinte:

  $(3 + 4i) \cdot (5 + 7i) = 15 + 41i - 28 = -13 + 41i$.

Como veremos, essas operações envolvendo números imaginários vão se mostrar recurso fecundo para superarmos as limitações resultantes da impossibilidade de extrair raízes quadradas de números negativos. Com base nelas, vamos conseguir harmonizar o fato de sabermos que a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ admite efetivamente a raiz real $x = 4$, ainda que a fórmula resolutiva nos conduza à raiz quadrada de um número negativo.

Fonte: Caderno do Professor – Matemática, Ensino Médio – 3ª Série, volume 1, página 67

Fazendo um estudo mais aprofundado sobre a história dos Números Complexos, percebemos que durante muito tempo eles não foram aceitos pela comunidade matemática. Seu reconhecimento, sua "cidadania" só aconteceu quando puderam ser interpretados geometricamente. Portanto, a História da Matemática ajudaria a identificar e superar os empecilhos que apareceriam neste estudo.

Inclusive, esta é uma das sugestões das Orientações Curriculares:

> "A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. [...] A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática. A História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que, de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes também na construção do conhecimento matemático". (OCEM, 2006, página 86)

Portanto, nesta sequência didática, a primeira atividade consistiu na resolução de uma situação-problema que produzisse um conflito cognitivo que motivasse o estudo de um novo conjunto numérico juntamente com a História da Matemática. Ou seja, os alunos resolveram a situação-problema que foi apresentada nas figuras anteriores (Atividade 6 da página 58 do caderno do aluno). Porém, quando foi feita a modelagem matemática para que usássemos a fórmula de "Cardano-Tartaglia", obtivemos um número que não é real: $\sqrt{-121}$.

As outras atividades da sequência didática, foram retomadas de conteúdos que são fundamentais para o estudo dos Números Complexos com abordagem geométrica, objetivo principal da situação de aprendizagem 8 do caderno do aluno. Portanto, as atividades que foram realizadas proporcionaram aos alunos os subsídios para a compreensão geométrica.

Novamente, as atividades no caderno do aluno são trabalhadas de uma forma bem resumida e que trazem algumas lacunas que devem ser preenchidas por atividades extras. Nas figuras seguintes, temos os textos e as atividades das páginas 79 a 85 do caderno do aluno, quando os números complexos são trabalhados pela primeira vez (alguns espaços em branco foram recortados):

Figura 31

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 8
NÚMEROS COMPLEXOS: REPRESENTAÇÃO NO PLANO E SIGNIFICADO DAS OPERAÇÕES (TRANSLAÇÕES, ROTAÇÕES, AMPLIAÇÕES)

Leitura e análise de texto

Complexos, para quê?

É muito frequente ouvir falar "mal" dos números complexos – aqueles números "estranhos", formados por uma parte real **x** e uma parte "imaginária" **yi**, em que **i** é um número tal que seu quadrado é igual a –1, ou seja, $i^2 = -1$. Os números complexos são, efetivamente, "estranhos" ao primeiro olhar. Mas eles podem ser interpretados de modo significativo, bem como as operações que realizamos sobre eles, e, ao sermos apresentados a tais temas, ampliamos nossa capacidade de expressão, de compreensão de fenômenos que a realidade nos apresenta. Querer limitar o estudo da Matemática ao de conteúdos de aplicação imediata, sem levar em consideração seu valor expressivo, é como querer limitar o ensino da língua ao da redação de cartas, de memorandos, de relatórios, desprezando, por exemplo, a apreciação de um poema; afinal, "Para que serve um poema?". A aprendizagem da língua, no entanto, não pode prescindir de recursos expressivos que deem força ao texto, da construção de imagens metafóricas etc. Não se trata apenas de ensinar regras de redação, mas de desenvolver instrumentos e formas pessoais de expressão, e a literatura, de modo geral, é fundamental para isso.

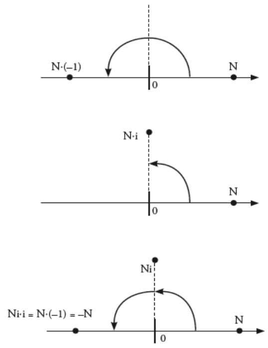
Também no estudo de Matemática existem assuntos para os quais não vislumbramos "aplicações práticas" diretas, mas que se compõem com os outros, contribuindo para a construção de uma forma consistente de expressão, de compreensão dos fenômenos que observamos. Às vezes, um tema de Matemática serve apenas de apoio a outro tema, este, sim, com uma ligação direta com a prática; ambos, tanto o apoiador quanto o apoiado, precisam ser estudados. Como será visto a seguir, os números complexos e as operações sobre eles podem ser associados à realização de movimentos de translação, de rotação, de ampliação etc. Para que isso seja possível, será preciso conhecer um novo sistema de representação de números: o plano complexo, ou plano de *Argand-Gauss*.

Plano complexo – significado dos complexos e das operações sobre eles

Representa-se um número real em uma reta numérica, como você já deve ter feito inúmeras vezes em sua vida escolar.

Um número imaginário como i não pode ter as mesmas propriedades de um número real porque não é um número real, ou seja, não se encontra na reta real ou entre os reais representados na reta. A reta real $\mathbb{R}$ encontra-se inteiramente preenchida com os números racionais e os irracionais. Como representar, então, tal número **i** e seus "derivados", como toda a família de imaginários **yi**, onde **y** é um número real, bem como os números "mistos" ou "complexos", resultantes da soma dos reais **x** com os imaginários **yi**? Como representar os números complexos de modo a dar significado às operações realizadas com eles?

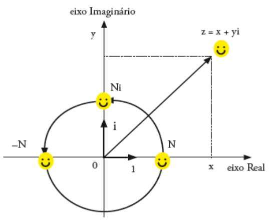
A ideia de representar os números na forma z = x + yi como pontos de um plano pode parecer natural, mas permaneceu latente desde os trabalhos de John Wallis (1616-1703), durante muitas décadas. Wessel e Argand trabalharam com tal ideia em situações concretas, mas somente quando foi apresentada por Gauss, em 1799, como parte de sua tese de doutorado, tal representação ganhou força e foi divulgada de modo amplo. Em resumo, a inspiração fundamental é a seguinte:



- quando se multiplica um número real por –1, sua imagem na reta real é deslocada segundo um arco de 180º, passando da semirreta positiva para a negativa, e vice-versa: N·(–1) = –N (resultado: rotação de 180º);
- quando se multiplica um número real por i^2, ou seja, por –1, é como se tivéssemos multiplicado o número real por i e multiplicássemos o resultado novamente por i: N·(–1) = N·i·i = –N;
- se o resultado das duas multiplicações idênticas e sucessivas foi uma rotação de 180º, seria natural considerar o resultado de cada uma das multiplicações parciais por i como resultado de uma rotação de 90º: **N·i = Ni** (rotação de 90º);

- assim, multiplicar um número real por i corresponderia a representar tal número em um eixo perpendicular ao eixo real.

Essa pode ter sido a inspiração para a representação do número imaginário **i** no eixo perpendicular ao eixo real, o que conduziu à representação de todo complexo **z = x + yi** como um ponto do plano gerado pelas unidades real 1 e imaginária **i**. O plano em que os complexos são representados constitui uma extensão da reta real e é conhecido como plano complexo, ou plano de *Argand-Gauss*.



VOCÊ APRENDEU?

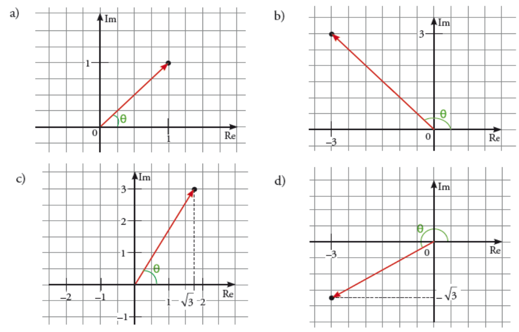
1. Dados os números complexos $z_1 = 3 + 4i$; $z_2 = 7$; $z_3 = 7i$ e $z_4 = 3 - 4i$, calcule o número complexo **a + bi** resultado de:

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 + z_3$ c) $z_1 + z_4$
d) $z_1 - z_4$ e) $z_1 \cdot z_2$ f) $z_1 \cdot z_3$
g) $z_3 \cdot z_4$ h) $(z_1 \cdot z_4)^2$ i) $(z_1 + z_4)^3$
j) $(z_1 - z_4)^3$ k) $(z_3 - z_1 + z_4)^3$ l) $(-z_2 + z_1 + z_4)^{15}$

2. Dados os complexos a seguir, represente-os no plano complexo, determinando o módulo e o argumento de cada um deles:

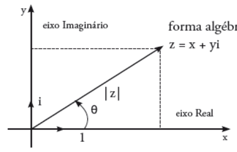
a) $z_1 = 3 + 3i$ b) $z_2 = -3 + 3i$ c) $z_3 = 3 - 3i$ d) $z_4 = -3 - 3i$

3. Observe os números complexos a + bi representados no plano de *Argand-Gauss* e determine, para cada um, a medida do ângulo θ e do segmento que une o ponto (**a**; **b**) à origem do sistema.



Forma trigonométrica de um número complexo

Um número complexo z = x + yi também pode ser escrito de outra forma, destacando-se seu módulo |z| e seu argumento θ. Sendo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, basta observarmos na representação plana dos complexos que $\begin{cases} x = |z|\cos\theta \\ y = |z|\operatorname{sen}\theta \end{cases}$. Substituindo-se na forma algébrica tais expressões, obtemos $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, que é chamada forma trigonométrica dos números complexos.



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \begin{cases} x = |z|\cos\theta \\ y = |z|\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

forma trigonométrica

VOCÊ APRENDEU?

4. Retorne ao enunciado da atividade 2. Escreva cada um dos complexos de z_1 a z_4 na forma trigonométrica: $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$.

Fonte: Caderno do Aluno – Matemática, Ensino Médio – 3ª Série, volume 1, páginas 58 a 61

Portanto, as atividades que são relatadas a seguir, envolvem os conceitos apresentados na figura anterior. Porém, como acreditamos que seja mais produtivo, de forma gradativa e que ofereça aos alunos uma oportunidade de retomada de conteúdos que foram estudados em anos anteriores.

4.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

4.2.1 Atividade 1 – Aparecimento dos Números Complexos

Objetivos: Causar nos alunos um conflito cognitivo através da resolução de uma situação-problema para que os mesmos sejam motivados a estudar um novo conjunto numérico, os Números Complexos.

Conteúdos: Representação de sólidos geométricos, cálculo de volumes, uso das expressões algébricas para equacionar um problema e valor numérico.

Material: Caderno, lápis, régua (se necessário) e slides apresentados pelo professor

Tempo: Duas aulas de 50 minutos

Descrição da atividade:

A atividade foi realizada na sala ambiente (sala reservada para a apresentações de trabalhos, aulas com recursos multimídia). Neste dia, dos 25 alunos, faltaram 4 alunos. O professor usou uma apresentação em Power Point e a atividade foi dividida em duas etapas.

1ª Etapa:

Trabalhamos direto com a situação-problema que está sugerida na página 58 do caderno do aluno, como ilustra a figura abaixo:

Figura 32

Matemática – 3ª série – Volume 1

6. Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com a forma de um cubo de aresta **x**, outra com a forma de um paralelepípedo com a base retangular, de lados 3 m e 5 m, e de altura igual à altura do cubo. O valor de **x** deve ser escolhido de tal forma que o volume do cubo seja 4 m^3 maior que o do paralelepípedo.

Fonte: Caderno do Aluno – Matemática, Ensino Médio – 3ª Série, volume 1, página 58

No caderno do aluno, os itens que aparecem para a resolução desta situação-problema são:

Figura 33

a) Escreva a equação que traduz a exigência a ser satisfeita pelo valor de **x**.

b) Use a fórmula de *Cardano-Tartaglia* para determinar as raízes da equação do item a. A que conclusão você chega?

c) Verifique diretamente na equação apresentada que x = 4 é uma raiz, ou seja, fazendo x = 4 m, temos o cubo com volume de 64 m^3 e o paralelepípedo com volume de 60 m^3.

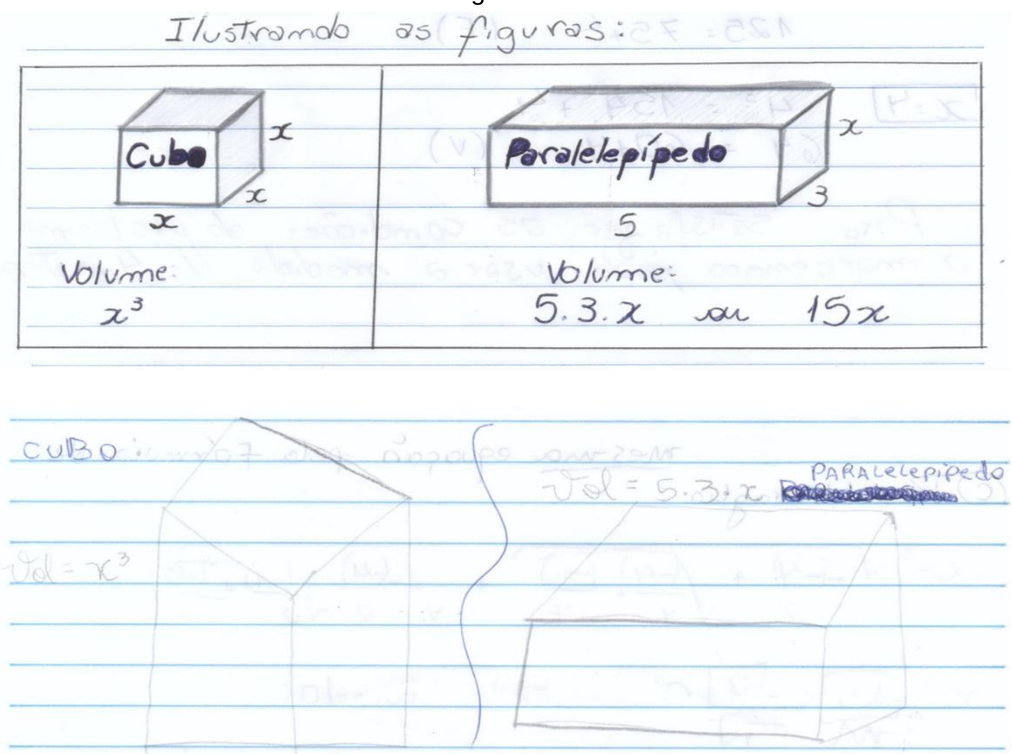
Fonte: Caderno do Aluno – Matemática, Ensino Médio – 3ª Série, volume 1, página 58

Foi feita uma adaptação nos itens desta atividade para direcionar os alunos:

a) Ilustrar os sólidos geométricos do enunciado, indicando os seus respectivos volumes

A maioria dos alunos não teve dificuldade para realizar este item. Mas, alguns alunos não conseguiram representar os sólidos de maneira satisfatória. Como a atividade foi realizada no caderno, sem o uso de folhas quadriculadas, faltou habilidade para realizar a perspectiva. Abaixo, seguem duas representações que ilustram essa discrepância:

Figura 34



Fonte: Arquivo do Autor

b) Escrever a equação que modela este problema

Quase todos os alunos conseguiram fazer este item, pois os volumes já estavam determinados no item (a). Porém, dois alunos esqueceram de adicionar quatro unidades ao volume do paralelepípedo. Abaixo, seguem duas figuras com a equação correta e o erro cometido por um dos dois alunos:

Figura 35

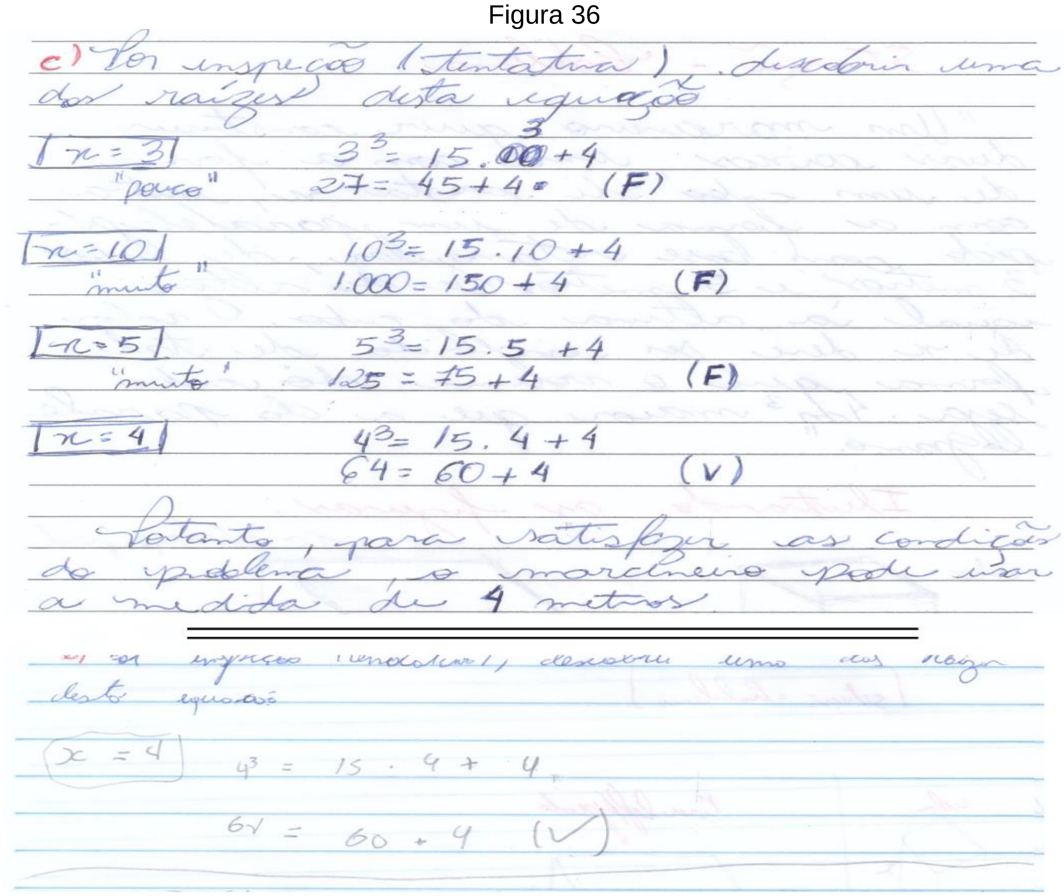
Equações que modelam a situação-problema

Fonte: Arquivo do Autor

c) Por inspeção (tentativas), descobrir uma das raízes da equação

Aqui, dos 21 alunos, apenas 10 conseguiram chegar na resposta. Um dos alunos chegou na resposta usando apenas uma tentativa; os outros, testaram mais números. A seguir, uma resolução com mais tentativas e a resolução com apenas um valor:

Figura 36



Resoluções por tentativas apresentadas por dois alunos

Fonte: Arquivo do Autor

Após o término dos três primeiros itens, foi pedido para que os alunos entregassem as folhas com a primeira parte da atividade.

Contextualização História – Parte 1

Figura 37

Registro da aula sobre História dos Números Complexos

Fonte: Arquivo do Autor

Apresentação dos matemáticos do início do século XVI, do contexto histórico e das curiosidades que antecederam a publicação do trabalho de Cardano: “Ars Magna”.

2ª Etapa

Aqui, os alunos usaram a fórmula de Cardano-Tartaglia para resolver a equação obtida anteriormente. O objetivo desta atividade foi criar um conflito cognitivo: sabiam que a equação tinha uma solução ($x = 4$). Mas, com o uso desta fórmula, chegariam em uma raiz quadrada que não era um número real. Diante disso, seria necessário o estudo de um novo tipo de número para que pudessem justificar este conflito e, assim, reestabelecer o equilíbrio cognitivo.

Segundo Sérgio Antonio Silva, em sua dissertação de mestrado sobre conflito cognitivo:

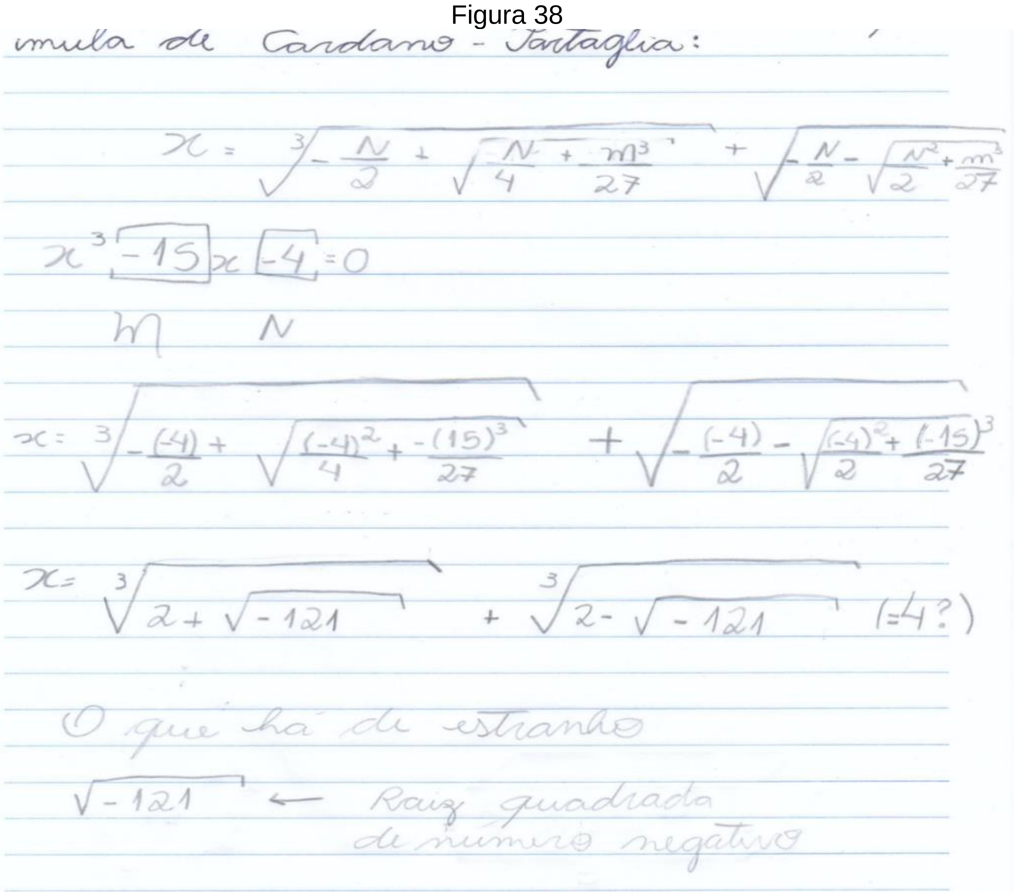
> “O sujeito está adaptado, ou seja, em equilíbrio quando os dois processos estão em harmonia ocorrendo simultaneamente tanto à assimilação quando a acomodação. Por outro lado, o desequilíbrio seria provocado quando o sujeito, passando por uma experiência em que sua lógica não pudesse

> dar conta da realidade, se veria obrigado a reformular suas estruturas cognitivas para a apreensão do novo. Este mecanismo, responsável em produzir uma mudança em direção a um estado superior e mais complexo de equilíbrio, foi denominado de "equilibração majorante". Portanto, a mola propulsora do desenvolvimento, ou melhor, em extensão e complexidade - está intrinsecamente ligada ao desequilíbrio, obrigando "um sujeito a ultrapassar o seu estado atual e procurar seja o que for em direções novas" (Piaget, 1977, página 23). Ou seja, é o desequilíbrio que produz a motivação intrínseca necessária para o sujeito buscar o conhecimento capaz de promover o retorno à sua condição de equilíbrio” (SILVA, 2014, páginas 24 e 25)

Durante a atividade, o slide com a fórmula ficou projetado para não haver dúvidas onde substituir os coeficientes.

Para que todos pudessem chegar no radical $\sqrt{-121}$, foi usada a seguinte estratégia: os alunos que haviam conseguido chegar na resposta auxiliavam os que não estavam conseguindo realizar as operações. Abaixo, segue a resolução do aluno que conseguiu realizar primeiro e sem ajuda:

Figura 38



Aplicação da fórmula de Cardano-Tartaglia realizado por um aluno

Fonte: Arquivo do Autor

Contextualização História – Parte 2

Na parte final, a apresentação foi sobre Rafael Bombelli e o seu trabalho inovador e audacioso que chegava na solução conhecida através da fórmula “Cardano-Tartaglia”. Além disso, foi comentado sobre o intervalo de tempo e a resistência da comunidade matemática em relação aos números complexos e os matemáticos que contribuíram, através das representações geométricas, para a aceitação destes números.

4.2.2 Atividade 2 – Coordenadas Cartesianas e Polares

Objetivos: Representar pontos do plano usando coordenadas polares e fazer a conversão entre o sistema de coordenadas cartesiana e polar

Conteúdos: Localização de pares ordenados no plano cartesiano, distância entre pontos no plano e razões trigonométricas

Material: Folha de atividades fornecida pelo professor, régua, transferidor e calculadora científica

Tempo: Duas aulas de 50 minutos

Descrição da atividade:

Os alunos trabalharam com Geometria Analítica nos dois primeiros bimestres. Portanto, o plano cartesiano e a representação dos pares ordenados é um assunto bastante conhecido. Porém, a representação de pontos na forma polar não foi trabalhada.

Como uma das representações dos números complexos é a forma trigonométrica (polar), foi realizada esta atividade para os alunos se familiarizassem com este novo sistema de coordenadas antes de qualquer trabalho com os números complexos.

Inicialmente, foi ilustrado na lousa um exemplo usando o ponto P de coordenadas (4; 3) no plano cartesiano. Após a representação no plano cartesiano, foi ilustrado o segmento $\overline{OP}$, ligando a origem $O = (0; 0)$ ao ponto P e calculada a distância usando a relação da distância entre dois pontos do plano. Esta medida foi chamada de r.

Retomando as razões trigonométricas, foram calculados o seno e o cosseno do ângulo formado pelo segmento $\overline{OP}$ e o $eixo\ x$. Usando uma calculadora científica, determinamos qual era este ângulo, usando $arc\,sen$ e $arc\,cos$ que nas calculadoras são representadas por sen^{-1} e cos^{-1}.

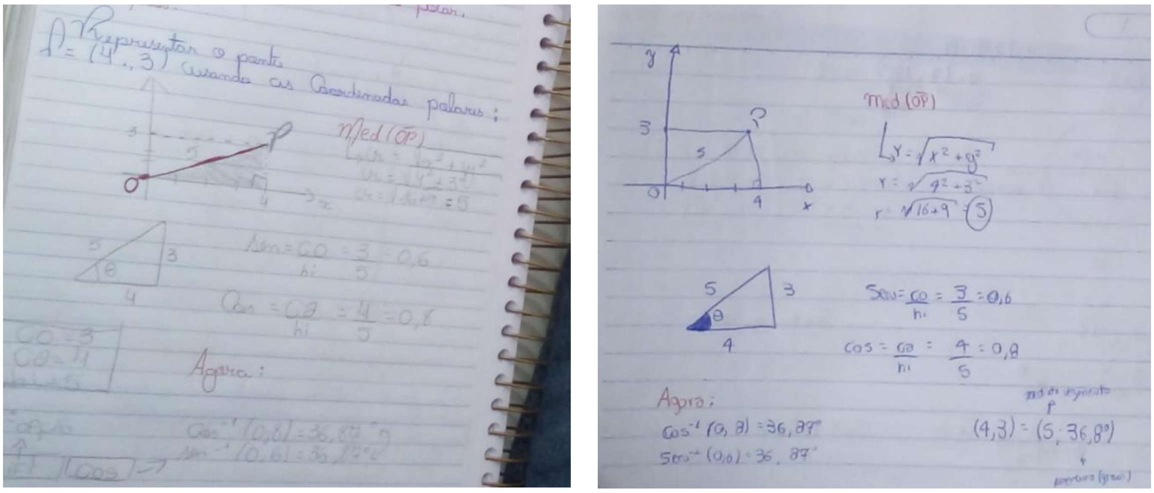
Com estas duas informações, pudemos representar o ponto P usando novas coordenadas.

Para converter das coordenadas polares para as coordenadas cartesianas, bastava fazer uma multiplicação:

$$x = r \cdot \cos(\theta) \qquad e \qquad y = r \cdot \mathrm{sen}(\theta).$$

Na figura seguinte, temos os registros deste exemplo feito por dois alunos:

Figura 39



Dois registros sobre a aula de coordenadas polares

Fonte: Arquivo do Autor

Antes do professor entregar a folha de atividades, surgiram algumas dúvidas sobre a utilidade das coordenadas polares e o que aconteceria se um ponto tivesse coordenadas negativas. No caso das coordenadas negativas, foi explicado que o sinal negativo seria decorrência das razões trigonométricas para ângulos maiores de 90°, porém a distância entre a origem (polo) e o ponto sempre seria positiva (o professor representou o ciclo trigonométrico e fez a retomada dos sinais do seno e cosseno). Já sobre a utilidade, o professor comentou que as coordenadas polares são usadas para facilitar os cálculos em algumas situações que envolvem movimentos de objetos em relação a um ponto fixo, como o estudo das órbitas dos planetas e que estas coordenadas são mais comuns no Ensino Superior. Porém, no contexto da 3ª série do Ensino Médio, as coordenadas polares seriam usadas apenas no estudo dos números complexos.

A atividade foi realizada com os alunos organizados em duplas, visando uma otimização nas tarefas: enquanto um aluno fez a representação geométrica, o outro ficou responsável para registrar os cálculos.

Figura 40

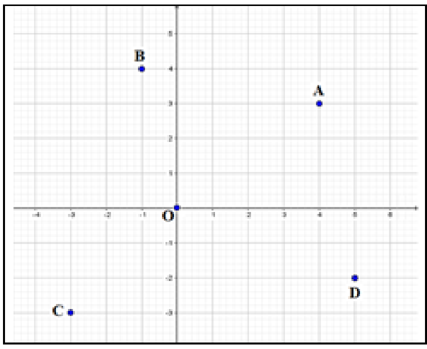
Alunos dispostos em duplas para a 2ª atividade

Na figura abaixo, temos a folha de atividades entregue aos alunos:

Figura 41

Atividade 2 – Coordenadas Cartesianas e Coordenadas Polares

1) No plano cartesiano, estão representados cinco pontos (*o ponto O é a origem*). Fazer:



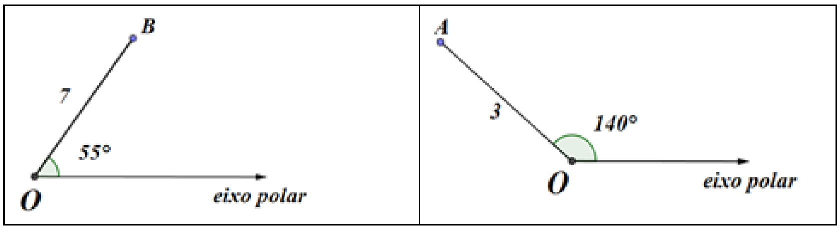
a) Representar as coordenadas cartesianas dos cinco pontos

b) Determinar a distância dos pontos A, B, C e D até a origem. Caso esta medida não seja exata, usar uma aproximação com duas casas decimais

c) Usando um transferidor, determinar as medidas dos ângulos formados pelos segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$ com o eixo x, no sentido anti-horário.

d) Representar os pontos A, B, C e D usando as coordenadas polares

2) Nas duas figuras, temos os pares ordenados representados no sistema de coordenadas polares. Em cada caso fazer:
a) Representar as coordenadas polares de cada ponto
b) Usando a calculadora científica com aproximação de duas casas decimais, calcular o seno e o cosseno dos ângulos
c) Converter as coordenadas polares do item (a) em coordenadas cartesianas



3) Usando transferidor e compasso, representar os pontos P e Q, sabendo que as suas coordenados polares são P = (4 , 310°). Depois, convertê-las para coordenadas cartesianas e representar o ponto P no plano cartesiano, comparando as duas representações.

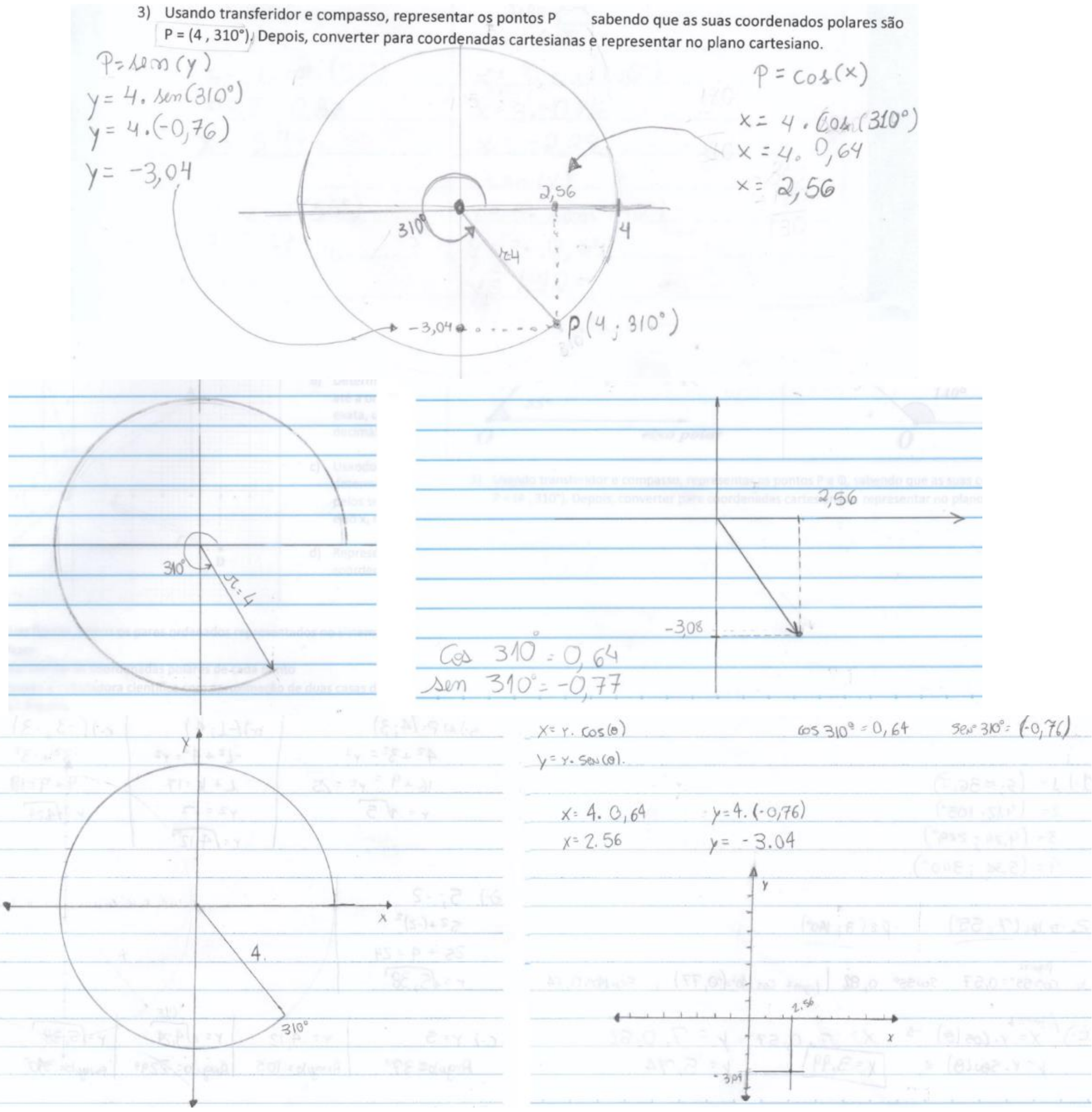
Folha de Atividades

Fonte: O Autor

Foram formados 12 grupos (11 duplas e um trio). Todos os grupos conseguiram realizar os dois primeiros exercícios. Porém, o exercício 3, foi realizado por 8 grupos. Questionados sobre a não realização da atividade, os motivos apontados pelos grupos foi a falta de tempo e a falta de habilidade em manusear o transferidor para representar o ângulo da atividade (o transferidor usado para a atividade foi o de 180°).

Na próxima figura são exibidas três resoluções do exercício 3. Nas duas primeiras, a resolução está correta. Porém, uma delas fez as representações usando apenas um sistema de coordenadas. O grupo fez o plano cartesiano sem usar a régua e, portanto, os pontos ficaram em posições diferentes:

Figura 42



Três registros do exercício 3 da segunda atividade

Fonte: Arquivo do Autor

4.2.3 Atividade 3 – Vetores: Representação, Adição e Multiplicação por Escalar

<u>Objetivos</u>: Representação de vetores a partir de pares ordenados, cálculo do módulo e direção (ângulo) e interpretação geométrica da soma e multiplicação por escalar

<u>Conteúdos</u>: Localização de pares ordenados no plano cartesiano, distância entre pontos no plano, razões trigonométricas e regra do paralelogramo (soma de vetores)

<u>Material</u>: Folha quadriculada fornecida pelo professor, régua e calculadora científica

<u>Tempo</u>: Duas aulas de 50 minutos

<u>Descrição da atividade</u>:

Como os números complexos podem ser representados por vetores, esta atividade foi realizada com o objetivo de retomar o conceito de vetor que foi estudado na 1ª série, na disciplina de Física. Desde então, os alunos não trabalharam mais com este conteúdo.

Nesta atividade, foi realizada a representação dos vetores – com origem no ponto $O = (0\,;0)$ – e cálculo dos módulos e ângulos formados com o $eixo\ x$. Foi apresentada uma nova notação para os vetores além dos pares ordenados: as matrizes colunas. Após esta primeira etapa, foi realizada a soma dos vetores e a representação geométrica usando a regra do paralelogramo. Na parte final, após os alunos entregarem as atividades, foi explicado sobre a homotetia e realizado um exemplo na lousa de uma expansão (k = 2) de um triângulo. Esta atividade, além de servir como embasamento para os números complexos, seguiu uma das orientações curriculares:

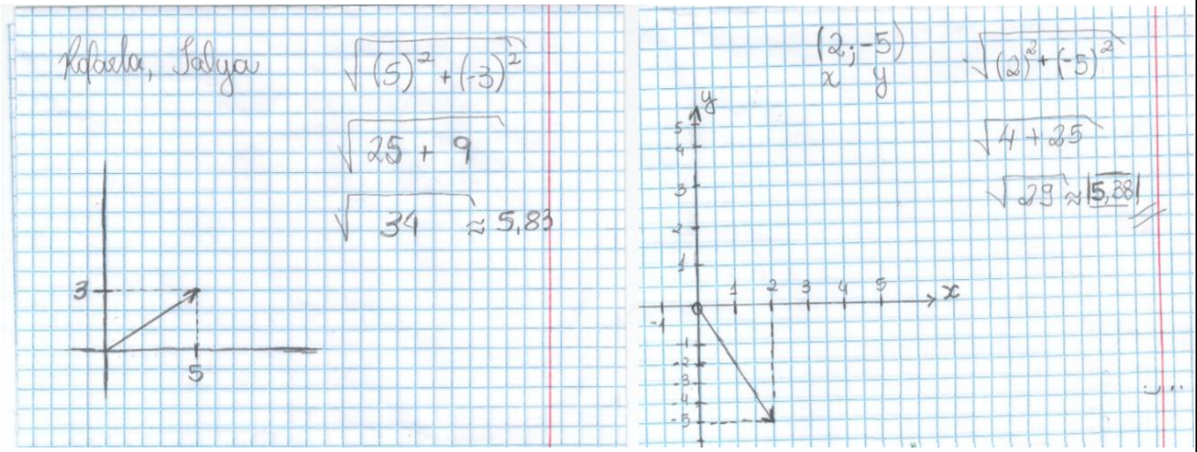
> "É desejável, também, que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física. (OCEM, 2002, página 77)."

Na primeira parte da atividade, os alunos foram separados em duplas (neste dia, apenas um aluno faltou) e cada dupla ficou responsável por dois vetores.

A escolha dos pares ordenados usados nos exercícios foi aleatória: cada integrante da dupla sorteou um par ordenado para representação, cálculo do módulo e do ângulo formado com o $eixo\ x$.

Abaixo, seguem as representações de duas duplas. A primeira representou os pares ordenados, calculou os módulos, mas não fez a determinação do ângulo. Além disso, na figura da direita, houve um erro na escala do eixo y:

Figura 43

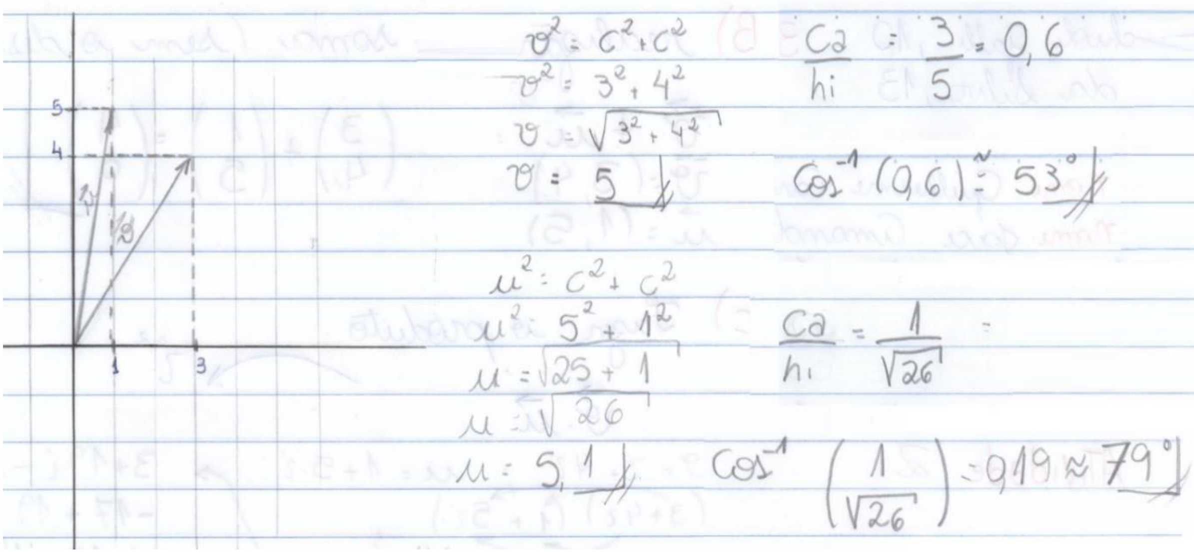


Resoluções insatisfatórias da terceira atividade

Fonte: Arquivo do Autor

Neste caso, a dupla realizou atividade por completo e de maneira satisfatória:

Figura 44

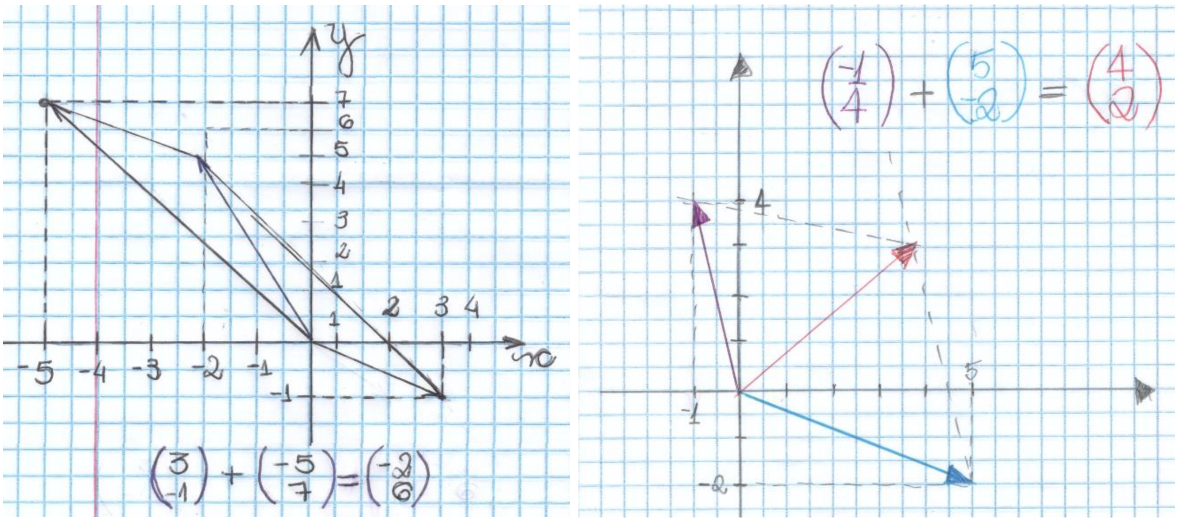


Resolução completa da terceira atividade

Fonte: Arquivo do Autor

Na soma, os alunos não tiveram dúvidas em realizar os cálculos, porém houve uma certa dificuldade em representar o vetor soma pela regra do paralelogramo. Esta dificuldade apareceu por dois motivos: erro ao representar a escala nos eixos e imperícia ao representar os segmentos paralelos aos vetores, como mostram as figuras abaixo:

Figura 45

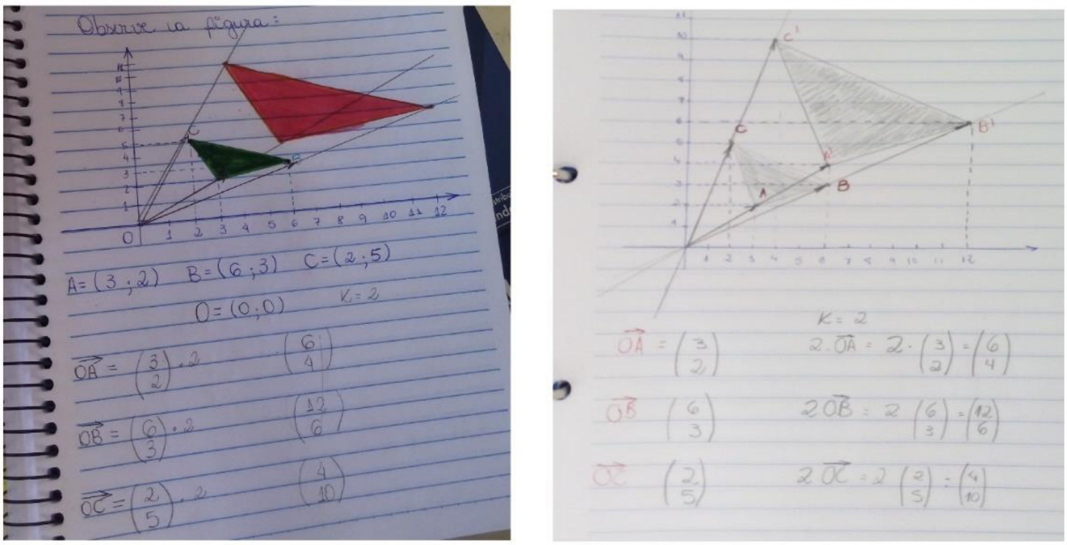


Regra do paralelogramo com erros

Fonte: Arquivo do Autor

No final, os alunos fizeram o registro da explicação sobre a multiplicação por um escalar e a interpretação geométrica desta operação:

Figura 46



Dois registros sobre a aula de homotetia

Fonte: Arquivo do Autor

4.2.4 Atividade 4 – Vetores: Rotação

Objetivos: Realizar a rotação de vetores em relação a origem

Conteúdos: Representação de vetores no plano, multiplicação de matrizes, razões trigonométricas e ciclo trigonométrico

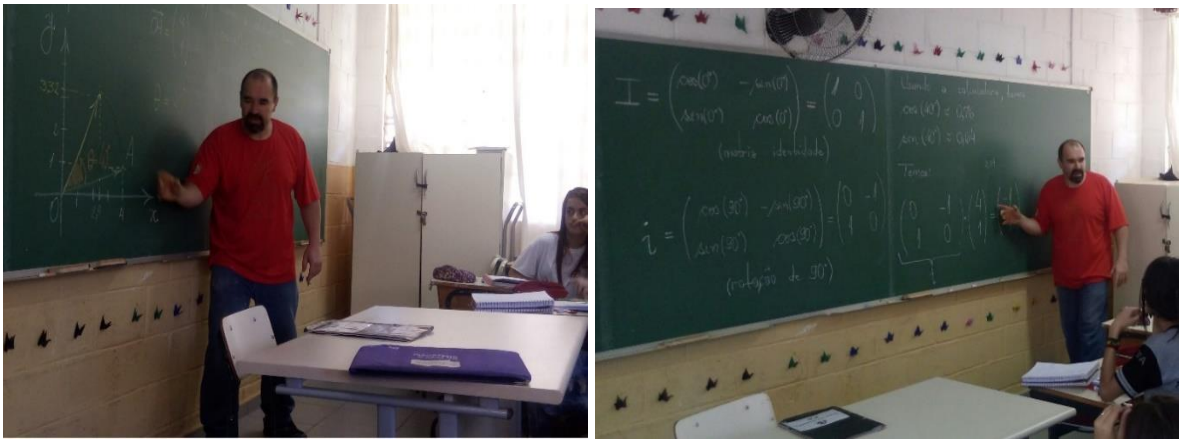
Material: Folha quadriculada fornecida pelo professor, régua e calculadora científica

Tempo: Duas aulas de 50 minutos

Descrição da atividade:

Para a realização desta atividade, foi necessária um pouco mais de uma aula para a apresentação da matriz que é usada para realizar a rotação e a retomada de conteúdos sobre a multiplicação de matrizes. Como exemplo, foi realizado a rotação do vetor $\overrightarrow{OA} = (4\,,1)$ por um ângulo de 40° no sentido anti-horário. Além disso, como a matriz identidade I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, ela foi definida como a rotação de 0° (rotação nula), enquanto a matriz que realiza a rotação de 90°, foi denotada pela letra i.

Figura 47



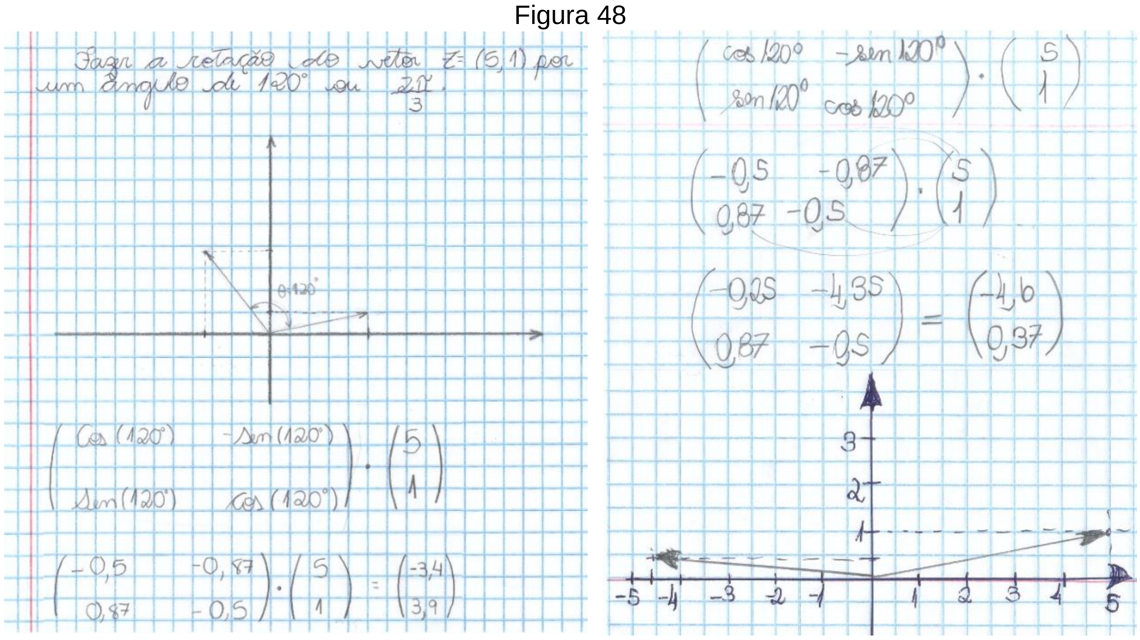
Registro sobre a aula de rotação

Fonte: Arquivo do Autor

A atividade proposta aos alunos foi a rotação, em relação a origem $O = (0\,,0)$, do vetor $(5\,,1)$ por um ângulo de 120°. Nesta atividade, os alunos não foram separados em duplas. Dos 21 alunos que estavam presentes, 15 entregaram a atividade e 6 não quiseram fazer, alegando não ter entendido o exemplo. Mesmo o professor se colocando à disposição para ajudá-los, eles se recusaram a entregar a atividade.

Dos 15 que entregaram, 7 estavam totalmente corretos. Nas outras resoluções, 6 apresentaram erros no algoritmo da multiplicação de matrizes e dois alunos representaram os vetores sem demonstrar os cálculos. Abaixo, seguem duas resoluções: uma correta e outra que contém erros na multiplicação de matrizes:

Figura 48



Duas representações da rotação usando matrizes

Fonte: Arquivo do Autor

4.2.5 Atividade 5 – Representações dos Números Complexos

Objetivos: Representar um número complexo usando a forma algébrica, representação geométrica e forma trigonométrica.

Conteúdos: Razões trigonométricas, módulo de um número complexo, representação de pontos no plano cartesiano e identificação dos ângulos notáveis.

Material: Caderno do aluno.

Tempo: Três aulas de 50 minutos

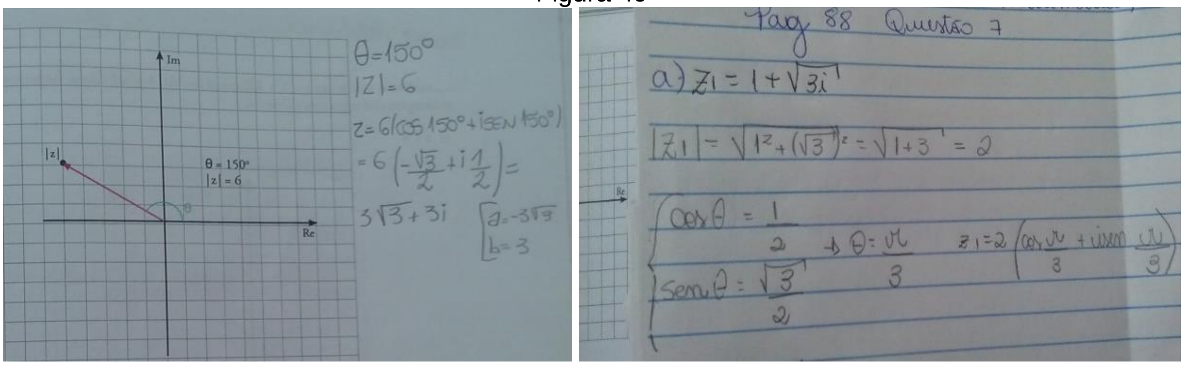
Descrição da atividade:

Nestas três aulas, foram trabalhados os exercícios das páginas 83 a 91 do Caderno do Aluno, onde foram abordadas as diferentes representações dos números complexos. São atividades para desenvolver as habilidades de conversão entre as representações algébrica, geométrica e trigonométrica. Além disso, nesta sequência didática, estes exercícios foram usados para uma retomada dos conceitos trabalhados, possibilitando aos alunos uma nova oportunidade para tirar as suas dúvidas.

Foi disponibilizado o tempo das três aulas para a realização dos exercícios e as resoluções foram registradas no próprio caderno do aluno. Os alunos puderam escolher realizar as atividades em duplas, trios ou individualmente. Durante as aulas, fiquei monitorando as resoluções e tirando as eventuais dúvidas que iam aparecendo nos grupos.

Nas figuras abaixo, seguem duas resoluções feitas pelos alunos usando os conhecimentos vistos em sala:

Figura 49

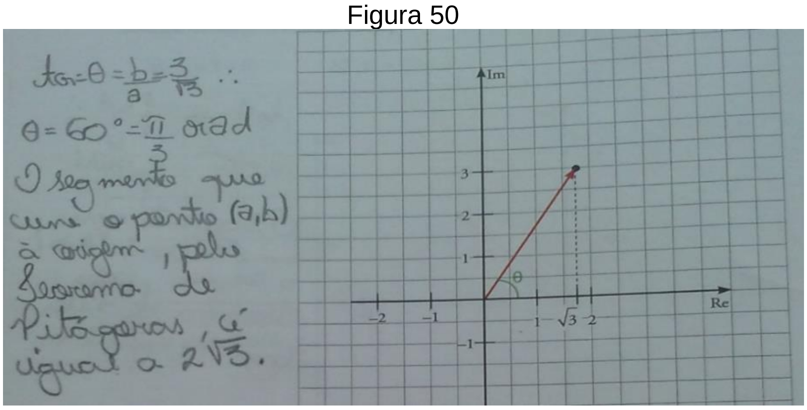


Dois registros das atividades sobre as representações de números complexos

Fonte: O Autor

Enquanto circulava entre os grupos, fazendo a observação do trabalho realizado pelos alunos, a resolução do exercício 3 da página 84 (encontrar módulo e argumento) feita por uma aluna despertou a minha atenção. Abaixo, segue o item (c) deste exercício:

Figura 50



Resolução usando uma nova estratégia – a tangente

Fonte: Arquivo do Autor

Nas atividades anteriores, a determinação do argumento era realizada pelas razões trigonométricas seno e cosseno. Porém, na resolução apresentada pela aluna, ela usou a tangente. Elogiei a sua resolução, comentando que estratégia usada para a determinação do ângulo estava correta. Perguntei se ela tinha consultado outro material didático que apresentava esta técnica, visto que não tínhamos trabalhado com a tangente. Ela me disse que o professor da monitoria do cursinho pré-vestibular explicou desta forma e perguntou se não havia problema em apresentar o exercício desta maneira. Comentei que em Matemática podemos chegar na resposta usando caminhos diferentes e, desde que não houvesse dúvidas na resolução, aceitaria esta apresentação.

Após conversar com esta aluna, pensei em convidá-la para resolver o exercício na lousa para os colegas. Mas, refletindo sobre o andamento das atividades da sequência didática, resolvi não fazer esta dinâmica. Justificando a decisão tomada: a última atividade é a transformação de uma figura usando a multiplicação de números complexos. Como a forma trigonométrica é usada para indicar a homotetia e a rotação, não quis comentar sobre uma razão trigonométrica diferente para não causar dúvidas. Claro que, se outro aluno fizesse o questionamento sobre a resolução usando a tangente, explicaria esta outra estratégia de resolução.

4.2.6 Atividade 6 – Multiplicação de Números Complexos

Objetivos: Realizar a multiplicação de números complexos usando a forma algébrica e fazer a interpretação geométrica do produto: soma dos argumentos e multiplicação dos módulos.

Conteúdos: Representação de números complexos no plano, razões trigonométricas, módulo de um número complexo, propriedade distributiva nas expressões algébricas e multiplicação de números complexos na forma algébrica.

Material: Folha quadriculada fornecida pelo professor, calculadora científica, régua e lápis.

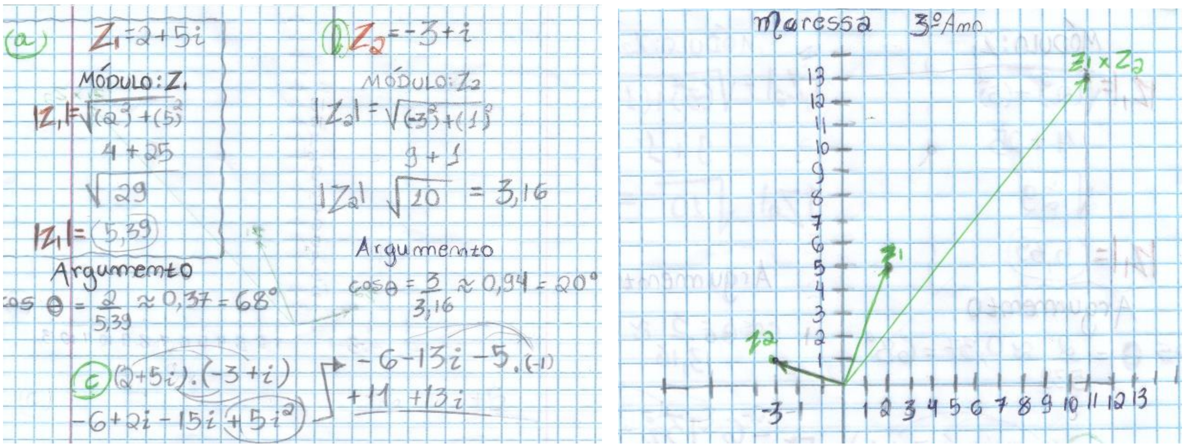
Tempo: Uma aula de 50 minutos

Descrição da atividade:

Os alunos não foram separados em duplas e sortearam exercícios diferentes. Cada aluno sorteou dois números complexos escritos na forma algébrica e deveriam representá-los como vetores no plano, calcular módulo e argumento. Após isto, multiplicá-los usando a forma algébrica e representar o produto como um terceiro vetor. Finalmente, deveriam verificar que o módulo e argumento do resultado eram, respectivamente, o produto dos módulos e a soma dos argumentos dos fatores.

Nesta atividade, apenas um aluno realizou todas as etapas de forma satisfatória. A maioria dos alunos fez a multiplicação e a representação no plano, mas sem determinar os módulos ou argumentos. Abaixo, são exibidas três resoluções – uma resolução com erros, uma resolução incompleta e a resolução completa e sem erros:

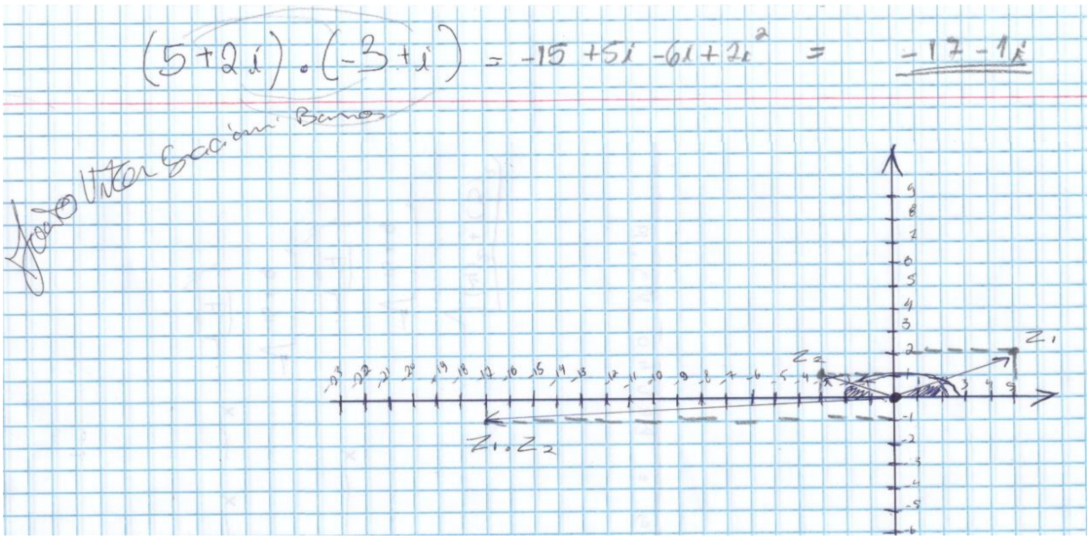
Figura 51



Resolução com erros

Fonte: Arquivo do Autor

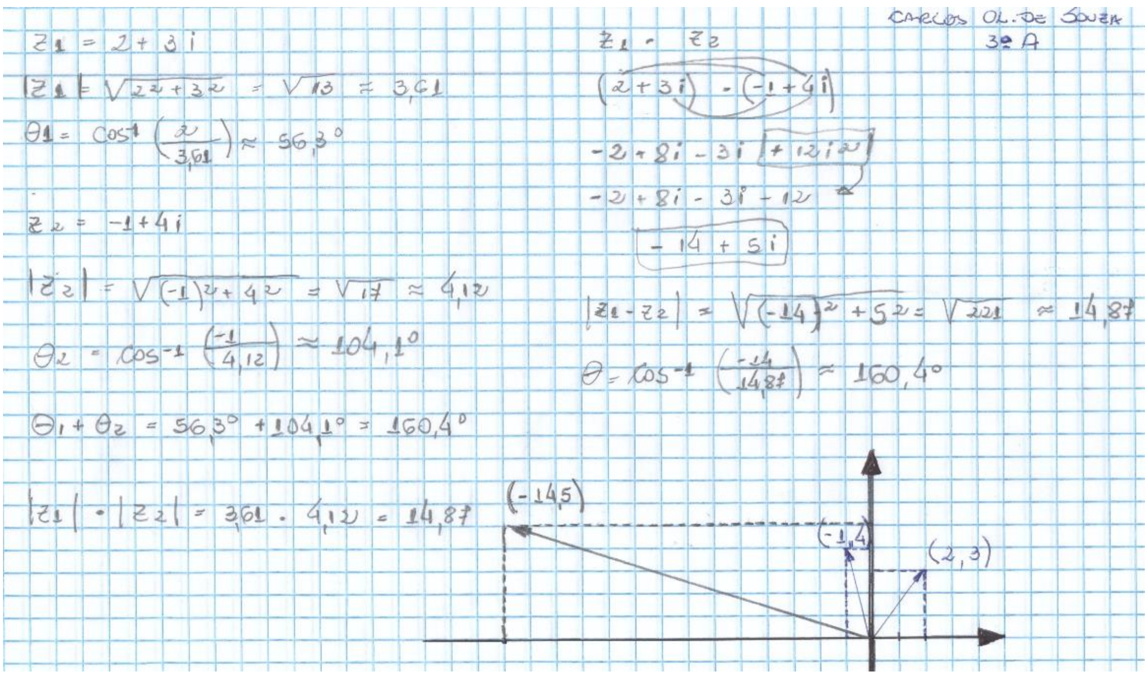
Figura 52



Resolução incompleta

Fonte: Arquivo do Autor

Figura 53



Resolução completa e sem erros

Fonte: Arquivo do Autor

4.2.7 Atividade 7 – Transformação de polígonos usando multiplicação de números complexos

Objetivos: Realizar a homotetia e a rotação em uma figura poligonal, através da multiplicação das coordenadas dos seus vértices por um número complexo.

Conteúdos: Representação de figuras no plano cartesiano, uso da forma trigonométrica para representar homotetia e rotação, transformação da forma trigonométrica para a algébrica e multiplicação de números complexos na forma algébrica.

Material: Folha quadriculada fornecida pelo professor, calculadora científica, régua e lápis.

Tempo: Duas aulas de 50 minutos

Descrição da Atividade:

Na primeira aula, foi retomado o conceito de homotetia e de rotação. Como nas aulas anteriores estas transformações eram realizadas usando matrizes, a atividade inicial foi a identificação destas transformações na representação trigonométrica do número complexo, onde o módulo indica a homotetia e os parênteses – que contém a soma das razões trigonométricas – indica a rotação. Para realizar estas transformações, as coordenadas dos vértices eram escritas como números complexos e era realizado uma multiplicação usando o número complexo (já transformado na forma algébrica) que representava as transformações desejadas.

Foram realizados alguns exemplos de transformações, como ilustrado na figura a seguir, onde foi representada uma expansão usando o fator $k = 3$ e uma rotação de 70° no sentido anti-horário em relação à origem.

Figura 54

Registro da aula sobre as transformações homotetia e rotação através da multiplicação de complexos

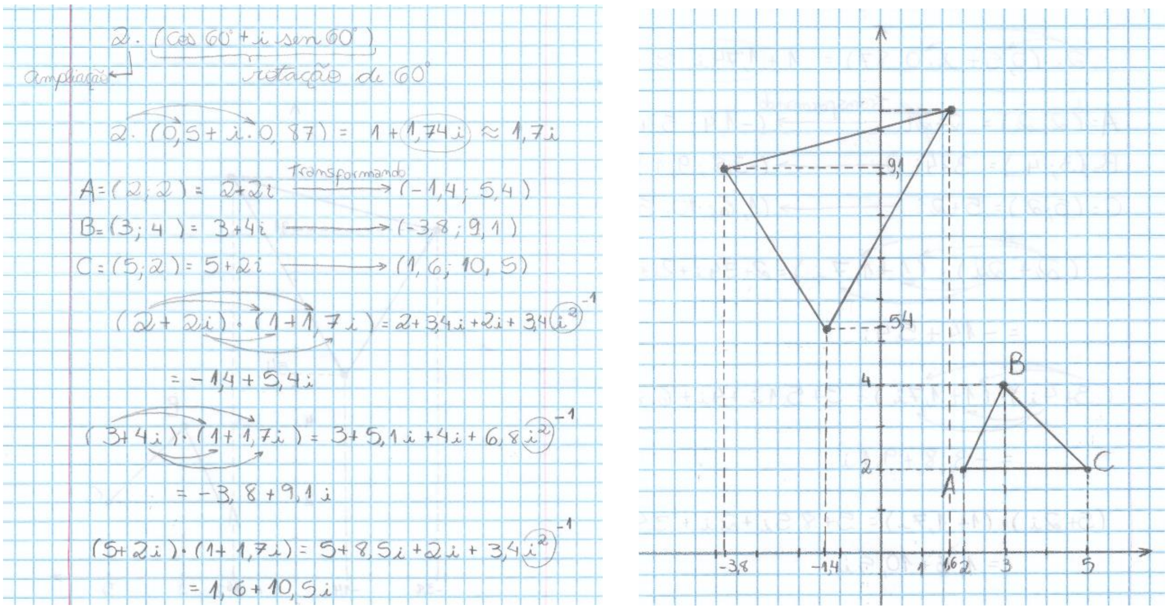
Na segunda aula, os alunos foram separados em duplas para realizar a última atividade desta sequência didática: aplicar sobre uma figura poligonal uma rotação em relação à origem e uma homotetia, através da multiplicação por um número complexo escrito na forma trigonométrica.

Os alunos poderiam escolher entre duas transformações:

1. Dobrar as medidas de um triângulo de vértices $A = (2\,,2)\,; B = (3\,,4)\ e\ C = (5\,,2)$ e aplicar uma rotação por um ângulo 60° no sentido anti-horário
2. Em um retângulo de vértices $A = (2\,,1)\,; B = (2\,,5)\,;\ C = (4\,,5)\ e\ D = (4\,,1)$ fazer uma redução de suas medidas para 70% e aplicar uma rotação de 90° no sentido anti-horário

Como 4 alunos faltaram, foram formadas 10 duplas e um aluno escolheu não formar um trio e realizou sozinho as atividades. Para que todos obtivessem êxito nesta atividade, segui a mesma estratégia da atividade 1: a dupla que terminava, auxiliava outras duplas para que todos conseguissem fazer por completo a transformação. Nas figuras seguintes, são exibidas as soluções das duas primeiras duplas que terminaram antes e sem auxílio dos colegas de outras duplas:

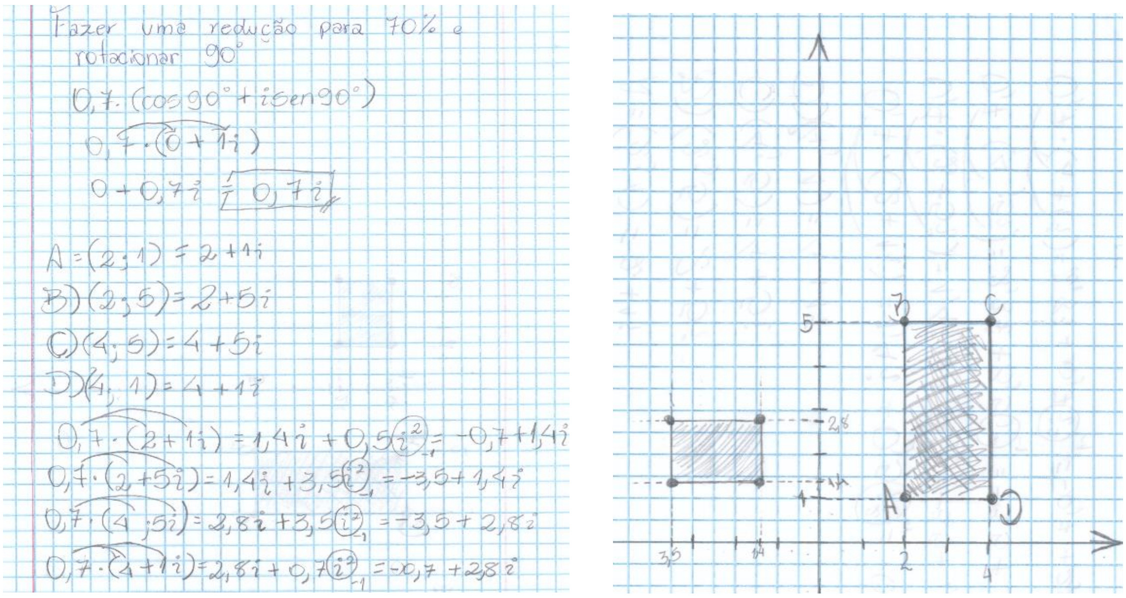
Figura 55



Apresentação das transformações aplicadas no triângulo

Fonte: Arquivo do Autor

Figura 56



Apresentação das transformações aplicadas no retângulo

Fonte: Arquivo do Autor

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES FINAIS

O trabalho desenvolvido com os alunos foi importante em vários aspectos, não apenas por ser uma atividade inédita, mas por despertar um ponto de vista que muitas vezes não é percebido.

Refletindo sobre minha prática docente e atuação em sala de aula, posso afirmar que as dificuldades enfrentadas em Matemática no Ensino Médio têm, na maioria dos casos, relação com as séries anteriores.

No que diz respeito aos Números Complexos, um dos maiores obstáculos enfrentados é o envolvimento de assuntos trabalhados em anos anteriores. Por muitas vezes, a resistência e o desinteresse são ocasionados pela deficiência nos conteúdos que fundamentam o trabalho deste tema. Podemos citar, por exemplo, a Trigonometria e as manipulações algébricas utilizadas nas operações.

Atualmente, com a revolução digital, ocorre uma confusão sobre o que é informação e conhecimento. Na verdade, a velocidade e abundância no acesso às informações, cria a ilusão de que o conhecimento já foi adquirido.

Em Matemática, para atingir este estágio, são necessárias algumas atitudes *sine qua non* como esforço intelectual, estudo solitário, disciplina e tempo. Porém, o que vêm de encontro com estas atitudes, são comportamentos contrários apresentados por esta nova geração de alunos.

Então, mais do que mero transmissor de informações, o professor precisa lidar com essa realidade educacional e ser um incentivador, criando situações para que os alunos articulem as informações recebidas, como se desenvolvesse um trabalho de “curadoria”: selecionar, entre tantas informações, o que é fundamental para ser trabalhado em cada assunto. Pois, seja em qualquer área, o excesso de informações pode atrapalhar a construção do conhecimento.

Com base nisto, voltamos aos questionamentos do primeiro parágrafo desta dissertação: o que é relevante estudar nos anos finais da Educação Básica?

Seja em Números Complexos ou em qualquer outro tema, a integração entre os diferentes assuntos estudados, mesmo que em séries diferentes, faz o aluno enxergar um sentido naquilo que ele está estudando. E foi com este pensamento em mente que desenvolvemos a sequência didática apresentada neste trabalho.

Portanto, diante de todas as dificuldades enfrentadas no âmbito escolar, sejam elas políticas, estruturais, sociais, comportamentais, etc., o professor precisa ser um entusiasta, um eterno aprendiz, para que esteja sempre motivado a saber mais e compartilhar (um verbo tão praticado na era digital) o seu conhecimento como um curador – aquele que seleciona e distribui adequadamente algo para determinada audiência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs+): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Brasília: MEC/SEF, 2002

BRASIL, Orientações Curriculares para o Ensino Médio, volume 2, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Brasília: MEC/SEF, 2006

CARNEIRO, J. P. Q. “A Geometria e o Ensino dos Números Complexos”, RPM: 2004 http://www.rpm.org.br/cdrpm/55/3.htm (Acesso em 04/11/2017)

DUVAL, R. “Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática”. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). “Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica”. Campinas: Papirus, 2003

LIMA, E. L., “Exame de textos: análise de livros de Matemática para o Ensino Médio” – Rio de Janeiro: SBM, 2001

PANTOJA, L. F. L. "A conversão de registros de representações semióticas no estudo de sistemas de equações algébricas lineares" - Belém: Universidade Federal do Pará, 2008

EVES, H. “Introdução à História da Matemática” - Tradução Hygino H. Domingues. 5ª Edição – Campinas, SP : Editora da UNICAMP, 2001

BOYER, Carl B. ; Merzbach, U. C. – “História da Matemática” – Tradução Elza F. Gomide .2ª Edição – São Paulo: Editora Edgard Blücher 2007

BERLINGHOFF, W. P. ; GOUVÊA, F. Q. “A Matemática Através dos Tempos: Um Guia Fácil e Prático Para Entusiastas” – Tradução Elza Gomide, Helena Castro. São Paulo, SP: Editora Blücher, 2008

KATZ, V. J. “A History of Mathematics: An Introduction” – 2nd Ed. Addison Wesley Longman, Inc.Stillwell, J. “Mathematics and Its History” – Third Edition, Springer

ROQUE, T. ; Carvalho, J. B. P. – “Tópicos de História da Matemática” – Coleção PROFMAT, 1ª Edição – Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2012

WAGNER, E. ; CARNEIRO, J. P. – “Construções Geométricas” – Coleção do Professor de Matemática, 4ª Edição – Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2000

https://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/1999-09-33.pdf (acesso em 26/08/2017)

AVELAR, C. B. “O fascinante mundo dos números complexos”. 2016. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-16012017-153650/>. Acesso em: 2017-10-29.

CHAGAS, J. S. B. “A Relevância do Ensino de Números Complexos no Ensino Médio na Opinião os Professores de Matemática”. 2013. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - UENF, Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro, 2013.

SOARES, M. G. “Cálculo em uma Variável Complexa” – Coleção Matemática Universitária, 3ª Edição. Rio de Janeiro, RJ: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003

RIBEIRO, C. M. “Álgebra Linear e Geometria Analítica, volume 1” – Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Versão 3.9, 2012.

STEWART, J. “Cálculo, Volume 2” 7ª Edição – Tradução EZ2, Cengage Learning, São Paulo, SP, 2014

SILVA, G. L. da S., “Álgebra Linear” 1ª Edição – Manaus; Boa Vista-RR: Editora Uirapuru, 2016

CALDEIRA, C. R. da C., “Números Complexos: uma proposta geométrica”. 2013, Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013.

OLIVEIRA, C. N. C. de, “Números complexos: um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos”. 2010, Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010.

SILVA, Sergio Antonio da., “Conflito cognitivo e metas de realização: uma experiência nas aulas de física do ensino médio”. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) - Ensino de Ciências (Física, Química e Biologia), Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

SÃO PAULO., “Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática”; Coord. Maria Inês Fini. – São Paulo: SEE, 2011.

___________, “Caderno do Professor: Matemática, Ensino Médio – 3ª Série, vol. 1; Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Elizabete da Costa; equipe, Nilson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Walter Spinelli, Rogério Ferreira da Fonseca, Ruy César Pietropaolo. – São Paulo: SEE, 2017

___________, “Caderno do Aluno: Matemática, Ensino Médio – 3ª Série, vol. 1; Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Elizabete da Costa; equipe, Nilson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Walter Spinelli, Rogério Ferreira da Fonseca, Ruy César Pietropaolo. – São Paulo: SEE, 2017