Universidade Federal de São Carlos

Programa de Mestrado Profissionalizante

Análise Combinatória:
Uma abordagem diferenciada sem a utilização de fórmulas

Thiago Miguel Roda

São Carlos
2018

Thiago Miguel Roda

Análise Combinatória:
Uma abordagem diferenciada sem a utilização de fórmulas

Dissertação apresentada como exigência para obtenção do grau de Mestrado em Programa de Mestrado Profissionalizante da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Drª Profª Luciene Nogueira Bertoncello

São Carlos
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Thiago Miguel Roda, realizada em 29/06/2018:

Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello
UFSCar

Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior
USP

Grazielle F. Barbosa.

Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa
UFSCar

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por sempre estar comigo, e é Ele que me guia.

Dedico a minha esposa por sempre me encorajar, a minha filha que é minha motivação.

Dedico aos meus pais, pois eles que me mostraram o caminho que eu ando hoje.

Dedico a todos meu amigos e colegas da profissão.

Dedico aos meus professores do Profmat.

Dedico aos meus alunos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela sua misericódia e bondade, a Jesus Cristo meu Salvador, ao Espírito Santo que está comigo todos os dias.

Agradeço a minha esposa pela compreensão, pela motivação e pelo seu amor.

Agradeço aos meus mais pais pela educação que me deram, e por ter feito de tudo para que hoje eu estivesse bem estruturado.

Agradeço a minha orientadora pela paciência e dedicação ao me orientar.

Agradeço aos professores do Profmat pelos ensinos, e levo toda bagagem que eles me passaram.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos de Mestrado.

Agradeço aos meus amigos e colegas por sempre estarem ao meu lado, trocando experiências e um ajudando ao outro.

Agradeço aos meus alunos, pois sem eles não teríamos feito esse trabalho.

RESUMO

Diante das dificuldades encontradas no ensino aprendizagem da Análise Combinatória nas escolas públicas, tanto para o aluno quanto para o professor do Ensino Médio, o presente trabalho ganhou forma para propor uma abordagem diferenciada. O trabalho tem como objetivo abordar a Análise Combinatória sem o uso das fórmulas, pois se tem percebido que Análise Combinatória é tratada por muitos como um ramo da Matemática que precisa decorar fórmulas, mecanizando o aprendizado dos alunos. Com isso, o conteúdo é intitulado como um dos mais difíceis em Matemática, portanto propomos trabalhar apenas com o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) como ferramenta das resoluções dos exercícios. Trabalhamos a proposta na prática com uma sala de 2ª série do Ensino Médio, e obtemos resultados muito bons. Esperamos que o tranalho seja um material para estudos de professores e alunos.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Princípio Fundamental da Contagem,
Ensino Médio, Ensino Aprendizagem.

ABSTRACT

In view of the difficulties encountered in the teaching of Combinatorial Analysis in public schools, both the student and the teacher of the High School, the present work has gained form to propose a differentiated approach. The work aims to approach Combinatorial Analysis without the use of formulas, because it has been perceived that Combinatorial Analysis is treated by many as a branch of Mathematics that needs to decorate formulas, mechanizing students' learning. With this, the content is titled as one of the most difficult in Mathematics, so we propose to work only with the Fundamental Principle of Counting (PFC) as a tool of the resolutions of the exercises. We worked on the proposal in practice with a high school room, and we get very good results. We hope that the study will be a material for studies of teachers and students.

Keywords: Combinatorial Analysis, Fundamental Principle of Counting, High School, Teaching Learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Inicialmente farei um breve comentário de minha trajetória.

Quando aluno de Ensino Médio decidi que seria professor de matemática, pois era a matéria que sempre adorei desde criança, e a facilidade que tinha de aprender sempre assuntos novos envolvidos com a disciplina.

Comecei o curso de licenciatura em Matemática nas Faculdades Integradas de Jaú no ano de 2007, e já no primeiro ano tive o prazer de ministrar aulas, fui chamado em um programa de estágio em duas escolas uma particular e a outra municipal em Jaú, com tal desafio pela frente, precisei estudar várias partes da matemática sozinho, pois certas disciplinas não estavam na grade daquele ano da faculdade e até então tinha apenas o conhecimento que um aluno de ensino médio tem. Esse momento foi um dos mais importantes da minha trajetória, pois busquei muito conhecimento, pois sempre pensei “para ensinar, eu preciso saber além do que será ensinado”.

Me formei no final do ano de 2009 e comecei a trabalhar em um banco, e durante a noite ministrava aulas no programa Jovens e Adultos (EJA) pelo governo do Estado de São Paulo, nesse programa pude contemplar, muitos alunos sendo aprovados em concursos públicos e até em faculdades. Aqui, a minha realização como profissional e a, alegria de ver o trabalho sendo bem sucedido estavam apenas começando.

Nos anos seguintes continuei como professor de PEB II e Ensino Médio em escolas tanto estaduais como particulares. Em 2014 quis avançar meus conhecimentos na área de matemática, então decidi prestar o exame de acesso para o PROFMAT, Mestrado Profissional em Matemática da SBM, na Universidade Federal de São Carlos. Universidade que eu sempre admirei e tinha vontade de estudar nela. Passei no exame de acesso e, iniciava em 2015, meu mestrado.

Foram dois anos cursando disciplinas que eu nem imaginava que existiam, onde a paixão pela disciplina de matemática só aumentou. Nos dias atuais ministro aulas na rede pública e na rede particular, colocando em prática tudo que tenho aprendido e buscando me aperfeiçoar cada vez mais.

Quanto a proposta do presente trabalho. Desde minha formação como professor de Matemática ouvi muitos alunos e colegas de profissão afirmarem que aprender e ensinar a Análise Combinatória era muito difícil, que esta matéria era a pior parte da Matemática, pois haviam fórmulas para arranjo e combinação e que muitas vezes não sabia em qual problema utilizar tais fórmulas, ou seja, não sabiam diferenciar quando uma situação estava associada a ideia de arranjo ou a ideia de combinação.

Tenho percebido ao longo dos anos que a ideia da combinatória tem sido apresentada aos alunos apenas de uma forma mecanizada, é colocada as fórmulas, alguns exercícios costumeiros e a matéria está totalmente concluída. Desse modo, quando o aluno se depara em um problema numa prova, seja um vestibular, até mesmo o ENEM, vem a dificuldade de interpretar qual conceito está ligado àquela.

O fato da dificuldade dos alunos em combinatória é devido ao método de como ensinar tal matéria. Vejo a combinatória como uma rica matéria em problematização do dia a dia do aluno, podendo fazer com que os alunos se interajam e se interessem pela matéria a ser estudada. Na minha opinião, trazendo a disciplina para o cotidiano dos alunos, e não fazendo do estudo de contagem apenas um uso abusivo de fórmulas os alunos terão melhores resultados.

Diante desse cenário, a proposta do presente trabalho é, fazer um estudo da Análise Combinatória diferenciado, sem o uso abusivo de fórmulas, fazendo com que os alunos se interessem mais pelas aulas, e também ser um norte para professores que querem ministrar aulas de contagem e tem certa dificuldade sobre o assunto. Então para ter um resultado concreto foi aplicada uma sequência didática em uma 2ª série do Ensino Médio da escola estadual Professora Esmeralda Leonor FurlaniCalaf da cidade de Pederneiras do estado de São Paulo.

O presente trabalho está disposto em 5 capítulos: O capítulo 1abordaremos a justificativa em fazer um trabalho dessa forma. Já no capitulo 2faremos um pouco da história da Análise Combinatória, bem como suas subdivisões, e comentaremos como, nos documentos oficiais essa disciplina é empregada. No capítulo 3 descreveremos a metodologia usada que foi a resolução de problemas. No capítulo 4 descrevemos a aplicação da sequência didática. E por fim o capítulo 5 vem o desfecho do trabalho com as considerações finais.

1 JUSTIFICATIVA

O presente trabalho tem o seu foco principal em mostrar uma maneira de ensinar a Análise Combinatória sem recorrer ao uso excessivo de fórmulas. Para isso, a proposta é trabalhar com o Princípio Fundamental da Contagem como ferramenta principal.

A Análise Combinatória pode ser apresentada em problemas que possam envolver os alunos, tais como exercícios de contagem que estão totalmente ligados ao dia a dia do aluno, porém, o que temos visto no cenário do Ensino Médio, mais precisamente no 2º ano do Ensino Médio, é que este assunto se torna uns dos mais difíceis para os alunos na matemática, justamente pelo fato deles terem apenas como ferramenta fórmulas para o manuseio, apresentando uma dificuldade para encontrar o raciocínio correto para desenvolver cada problema, pois quando o aluno se depara com os problemas de combinatória, eles têm como costume tentar descobrir se o exercício a ser tratado é um problema de permutação, arranjo ou combinação. A maneira que pensamos para conduzir problemas de combinatória é bem diferente desse modo que muitos utilizam, pois utilizar apenas fórmulas para a resolução de problemas acreditamos que se torna mecânico, limitando-se apenas na utilização e memorização de fórmulas.

A ideia principal de resolução de problemas é habituar o aluno a analisar cuidadosamente cada problema. Portanto, para resolver problemas de contagem o aluno precisará de um senso crítico na análise do problema, ter calma ao resolver, não ser precipitado em suas decisões. Dessa forma a Análise Combinatória não se torna uma matéria que apresenta apenas fórmulas complicadas para os alunos terem que decorar, mas uma matéria em que o aluno terá que analisar cada situação, cada exercício, tornando-se a matéria mais atrativa.

Segundo Lima (2006), um dos aspectos que pode contribuir para o sucesso dos estudantes do Ensino Médio, quando se refere à aprendizagem da Análise Combinatória, é evitar o uso abusivo ou excesso de casos particulares, que obscurece as ideias gerais e torna o entendimento do assunto mais complicado. De fato, quando temos um problema que o aluno precisa somente de fórmulas para o resolver, esse tipo de problema é o que os alunos menos gostam pelo motivo de ter que “decorar” fórmulas.

De acordo com Pinto (2011), um dos objetivos do Ensino da Matemática, em qualquer nível, é desenvolver habilidades para a solução de problemas. Portanto, é importante munir os alunos de ferramentas para atuar de forma mais ativa na resolução de problemas, principalmente no nosso caso, problemas de contagem, que exigem do aluno um senso crítico na hora de resolver.

Portanto os professores que são os mediadores entre alunos e o conhecimento devem ter em mente que os estudantes devem ser estimulados para adotarem uma postura mais crítica e reflexiva quanto à resolução de problemas em contagem, não agindo de forma mecanicista através da memorização de fórmulas, pois dessa forma o aluno passa a ser um robô no aprendizado, pois, ouve a explicação do professor, veja o mesmo colocar uma fórmula na lousa e faz um exemplo para a "demonstração" do uso da fórmula, e em seguida é colocado vários exercícios de "fixação" para que os alunos resolvam. Podemos perceber que isso é uma verdade que acontece, a ideia da repetição de exercícios, não é para os alunos desenvolverem habilidades de resoluções de problemas, e sim apenas para que o aluno consiga decorar uma fórmula.

É por esses motivos que o presente trabalho foi elaborado, para mostrar aos professores, futuros docentes, até mesmo àqueles que querem entender um pouco mais de contagem, que não precisamos, para resolver problemas de contagem, o uso de fórmulas, e sim um senso crítico e reflexivo de cada problema, que será relatado nos demais capítulos.

Descrição da escola, turma, alunos.

Os alunos selecionados para o presente trabalho são da 2ª série do Ensino Médio da Escola Estadual Professora Esmeralda Leonor Furlani Calaf da cidade de Pederneiras do estado de São Paulo, na qual eu leciono.

Quanto à escola, ela é da rede estadual, está localizada no Núcleo de Habitação Leonor de Barros, é um bairro periférico da cidade, conhecida muito pelos moradores da cidade como "CAIC", pois o prédio e a escola anteriormente eram chamados como tal. O público da escola é formado por alunos do próprio bairro e alunos que moram em sítios e chácaras próximas à escola.

A turma escolhida foi a 2ª série A do Ensino Médio do período da manhã, contendo 25 alunos. O perfil da sala éuma sala comprometida com os estudos, participativa, frequentes, muitos dos alunos trabalham no período em que não estão na escola, alguns fazem cursos técnicos, e posso dizer que esses alunos me surpreendem com a visão que eles têm quanto ao futuro, são jovens promissores.

2 ANÁLISE COMBINATÓRIA

Neste capítulo falaremos sobre um pouco sobre a história da Análise Combinatória, a Análise Combinatória nos documentos oficiais e suas divisões: fatorial, arranjos simples, permutações e combinações simples

2.1 Um pouco da história da Análise Combinatória

Acredita-se que a Análise Combinatória tenha tido origem na antiguidade, antes mesmo dos registros históricos, mas foi através do matemático grego Arquimedes, que viveu em Siracusa, na Silícia, no século III a.C., que passou-se a ter conhecimento acerca dos problemas de contagem. O problema de combinação proposto por ele são peças em um tabuleiro conhecido como *Stomachion* (Figura 1). Não se sabe de fato, se foi realmente Arquimedes que inventou o jogo ou ele apenas o explorou em alguns manuscritos antigos.

O jogo consistia em 14 peças planas de diversas formas poligonais, e o objetivo era organizar essas peças de diferentes maneiras a formar um quadrado. Uma propriedade importante dessas peças é o fato de que as áreas de cada polígono era comensurável, ou seja, a razão entre a área da peça pela área do quadrado era um número racional. O valor das áreas dos polígonos pode ser encontrado através do Teorema de Pick. Dado um polígono com vértices sobre os nós de uma malha, a fórmula de Pick fornece a área do polígono sabendo apenas quantos são os nós da malha sobre a borda do polígono, *b*, e quantos são os nós da malha interiores ao polígono, *i*. Sua área é dada por $A = i + b/2 - 1$.

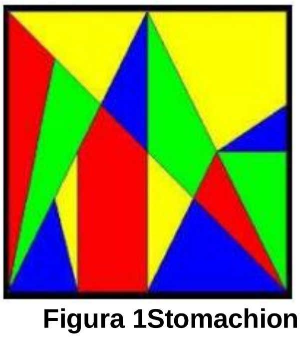


Figura 1Stomachion

Como exemplo, calcularemos um Stomachion pelo Teorema de Pick de quadrado de lado igual a 12.

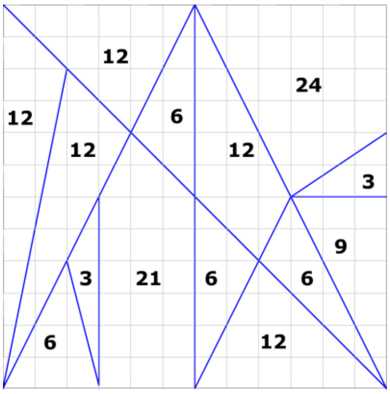


Figura 2Stomachion na malha quadriculada

Seja *b* os nós da malha sobre a borda e seja *i* os nós internos da malha de cada figura. Os números contidos no interior da figura são a área de cada polígono. Vamos começar por ordem crescente de áreas.

Áreas	b	i	Teorema de Pick	Total
3	8	0	0 + 8/2 - 1	3
	6	1	1 + 6/2 - 1	3
6	10	2	2 + 10/2 - 1	6
	8	3	3 + 8/2 - 1	6
	6	4	4 + 6/2 - 1	6
	10	2	2 + 10/2 - 1	6
9	12	4	4 + 12/2 - 1	9
12	12	7	7 + 12/2 -1	12
	16	5	5 + 16/2 - 1	12
	8	9	9 + 8/2 - 1	12
	12	7	7 + 12/2 -1	12
	12	7	7 + 12/2 -1	12
21	18	13	13 + 18/2 - 1	21
24	14	18	18 + 14/2 - 1	24
Soma das áreas				144

Tabela 1 Áreas

Durante muito tempo a Análise Combinatória ou Contagem foi considerada completamente desligado do cálculo aritmético, segundo Wieleitner (1932) o problema mais antigo que se relaciona com a teoria dos números e com a Análise Combinatória, é o da formação dos quadrados mágicos. Chamamos de quadrados mágicos (de ordem n) um arranjo de números 1,2,3...n^2 em um quadrado n x n de forma que cada linha, coluna e diagonal deste quadrado possua a mesma soma. Como vemos abaixo:

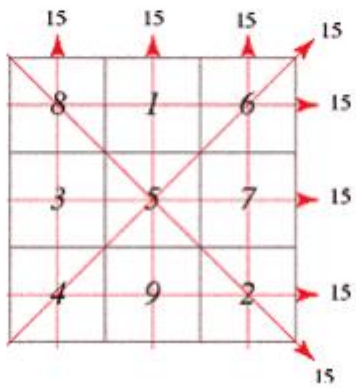


Figura 3Quadrado Mágico de soma 15

Segundo Needham (1959) o primeiro quadrado mágico conhecido é o Lo Shu data do século I d.C., mas que pode ser tão antigo a ponto de ter sido escrito por volta de 2000 a.C. (Berge, 1971):

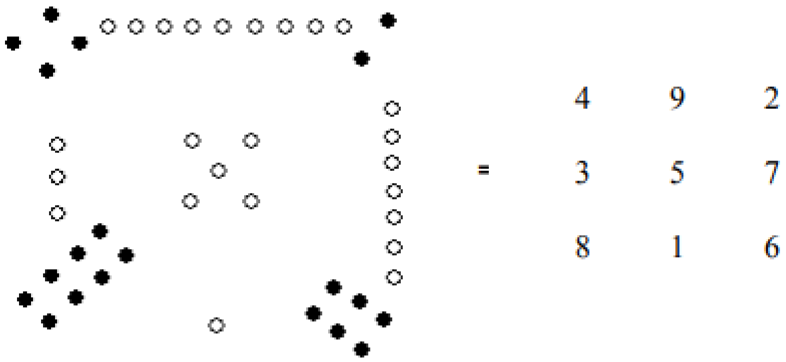


Figura 4Quadrado Mágico denominado Lo Shu (VAZQUEZ, p.2)

Este diagrama está associado às nove salas do palácio mítico de Ming Thang, onde vários ritos eram realizados, sendo que a substituição destes símbolos por números inteiros determina o famoso quadrado mágico denominado Saturn. Este quadrado causava uma grande fascinação, pois nesta época, mesmo a mais simples aritmética era algo espantoso. Acredita-se que a idéia dos quadrados mágicos foi transmitida pelos chineses para os árabes, que fizeram grandes contribuições e construíram quadrados maiores que o antigo Lo Shu.

Uma poesia infantil que parece ter sobrevivido em várias culturas e que serve para introduzir o campo de problemas combinatórios (Biggs, 1979):

> "Quando eu estava indo para St. Ives, eu encontrei um homem com sete mulheres, cada mulher tem sete sacos, cada saco tem sete gatos, cada gato tem sete caixas, caixas, gatos, sacos e mulheres, quantos estavam indo para St. Ives?" (BIGGS, 1979)

Esta poesia data, pelo menos de 1730 e é usualmente interpretada como uma brincadeira, entretanto, poderia se imaginar que por trás dela existiriam propósitos bem mais sérios, pois existe um problema similar no Líber Abaci, “Sete mulheres velhas estão indo para Roma; cada uma delas têm sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas; e cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas?” Escrito por Leonardo de Pisa que dificilmente negaria uma conexão entre este problema e a poesia infantil. As duas citações mostram aspectos artificiais do problema envolvendo a adição e a repetição do número sete, reforçando a memorização do mesmo.

Segundo Wilson (1990), as regras básicas de contar e suas aplicações têm sido enfatizadas, desde as civilizações mais antigas por exemplos absurdos onde era destacada a elusiva propriedade da memorização, como o Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.) que segue:

> "Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat de grãos; quantos itens têm ao todo?" (VAZQUEZ, 2011)

Alguns quadrados mágicos maiores que o Lo Shu foram encontrados por um grupo de estudantes árabes conhecido como os Ikhwan-al-Safa, que apresentaram os quadrados de ordem 4, 5 e 6 e afirmaram existir os de ordem 7, 8 e 9.

A teoria combinatória apareceu como um capítulo novo da Matemática em fins do século XVII e dentro de poucos anos três notáveis livros surgiram: *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz e *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher e também em trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718).

O matemático francês Frénicle (1693) apresentou todos os 880 quadrados de ordem 4, e nesta mesma época seu compatriota, De La Loubère (1691) descreveu um método de construção de quadrados de ordem ímpar conhecido como “método de fronteira” que aprendeu com o povo de Sião.

Leibniz descreveu em 1666 a combinatória como sendo “o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos” enquanto Nicholson em 1818 definiu-a como “o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si”.

No ano de 1736, o matemático Leonard Euler, resolveu um famoso problema que intrigava na época. O problema, consistia em descobrir, a partir de um mapa dado, se era possível dar uma volta em torno da cidade, que possuía sete pontes (das quais cinco ligavam a cidade a uma ilha), passando por todas elas uma única vez, Eule descobriu que não era possível.

Segundo Berge (1971) a definição de combinatória depende de conceitos de “configurações”, pois instintivamente os matemáticos acreditam que certos problemas são de natureza combinatória e que os métodos para resolvê-los devem ser estudados.

Há, em geral, quatro aspectos da combinatória moderna: listar, contar, estimar e existir – muitos dos quais podem ser ilustrados pelo problema de dispor uma quantidade de n distinguíveis objetos em uma fileira

Para Biggs (1979) há dois princípios de contagem que são a base da maioria da aritmética e que podem também ser considerados como a pedra fundamental da combinatória: o princípio da adição e o princípio da multiplicação, sendo que o 1º diz que se queremos contar um conjunto de objetos, podemos dividir isso em duas partes, contar as partes separadamente, e somar os resultados. Já no 2º princípio temos que se uma decisão pode ser tomada de x maneiras e a partir dessa, outra decisão pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras possíveis será a multiplicação entre x e y, ou seja, xy.

Na Análise Combinatória estuda-se formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção. Esses agrupamentos distinguem-se, fundamentalmente, em três espécies: arranjos, permutações e combinações, e podem ser formados de objetos distintos ou repetidos.

Ainda no princípio do século XIX não havia significado preciso para o emprego dos termos arranjo e permutação. Leibniz designava as permutações por variações, que é a palavra hoje utilizada por alguns autores para indicar arranjos.

Durante o desenvolvimento da Análise Combinatória, muitos matemáticos adotaram diferentes simbologias para denominar as mesmas operações. O símbolo π (n) foi instituído por Gauss (1777-1855) para representar o produto dos n primeiro números naturais (fatorial de n), A. M. Legendre (Paris, 1811) usava o símbolo Γ(n +1); a notação n! é devida a Cristian Kramp (Colônia, 1808) e (n) Γ(n +1) n usada por outros autores. A Arbogast (Strasburgo, 1800) deve-se a denominação fatorial.

2.2 Contagem

A Análise Combinatória, segundo Morgado, Carvalho e Fernadez (1991) é um ramo da Matemática que se destina a analisar estruturas e relações discretas, apresentando dois tipos de problemas que ocorrem com mais frequência, em seu estudo. São eles: 1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; e 2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem condições dadas (Morgado, et al, 1991, p. 2).

> A Análise Combinatória nos permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias ou de determinadas fórmulas, pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação sem necessariamente ter que contá-los um a um. (BORBA; PESSOA, 2009b, p.3)

O estudo da Análise Combinatória é indicado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997) desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e trabalhada com mais aprofundamento no Ensino Médio e essa continuidade pode fazer com que os diferentes tipos de problema combinatórios sejam tratados de uma forma mais sistemática e generalizadora.

Por mais que a Análise Combinatória tenha princípio fundamental da contagem, fatorial, arranjo, permutação simples e combinação simples. Quero aqui mostrar que o nome do conceito trabalhado não é importante, quer seja arranjo quer seja combinação, e sim o aluno entender o conceito na prática, e identificar no exercício que conceito usará, trataremos disso mais adiante. Os conceitos que usaremos serão o Principio Fundamental da Contagem e o Fatorial, os demais termos virão com práticas e análises das situações.

> Por outro lado, se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas (MORGADO *et al.*, 1991).

Já as Orientações Educacionais Complementares (BRASIL, 2002) indicam que as fórmulas usadas no ensino da Combinatória sejam consequência do raciocínio desenvolvido pelos alunos e que as mesmas tenham a função de simplificar os cálculos quando os dados do problema forem muito grandes. De acordo com os Guias do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD para o Ensino Médio (BRASIL, 2011, p. 29; BRASIL, 2014, p. 92), "É prejudicial um ensino que habitue o aluno a sempre tentar resolver qualquer problema de contagem com o uso somente de fórmulas".

2.3 Análise Combinatória nos documentos oficiais

Em relação à Análise Combinatória, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) recomendam para o 1º e 2º ciclos "levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos e permutações e, principalmente, o princípio fundamental da contagem" (p. 57) e para o 3º e 4º ciclos referindo-se aos problemas de contagem "o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para aplicação no cálculo de probabilidade" (BRASIL, 1998, p.52). No que concerne às orientações para o trabalho com a Matemática no Ensino Médio, é indicado que a Combinatória tem um papel importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico, uma vez que esse mesmo raciocínio contribui para a operação e resolução de problemas no dia a dia. Os PCN apontam o papel importante do raciocínio combinatório, assim como de outros conteúdos, para a formação dos alunos do Ensino Médio:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio (BRASIL, 2000, p.44).

Ensinar Análise Combinatória em salas de aula do Ensino Fundamental e Médio tem sido um problema difícil de resolver para muitos professores de Matemática. Buscar subsídios que possam contribuir no processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo presente na matriz curricular de várias escolas de Ensino Médio e até mesmo em algumas do Ensino Fundamental é uma necessidade que se verifica não apenas no Brasil, mas em diversos países. Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam, entre outros conteúdos, o papel importante do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio.

Para que o aprendizado das combinatórias se realizasse de forma satisfatória seria necessário o trabalho com desenvolvimento de noções desse conteúdo ainda nos anos iniciais do ensino fundamental, o que não ocorre geralmente, contudo essa proposta é prevista nos Parâmetros Curriculares Nacionais, que indica que:

> No decorrer dos primeiros ciclos do Ensino Fundamental os alunos devem ser levados a desenvolver a familiarização com a contagem de agrupamentos, de maneira informal e direta, fazendo, por exemplo, uma lista de todos os agrupamentos possíveis para depois contá-los (BRASIL, 1999, p.52)

Todavia, na maioria das escolas brasileiras, este conteúdo é iniciado somente a partir da 2ª série do ensino médio, ocasionando frequentemente certa dificuldades de compreensão, tanto por parte de alunos como de professores, pois esse conteúdo baseia-se em construções gradativas de contagem, que restringido a um curto tempo para o seu desenvolvimento acarreta um significativo grau de dificuldade de aprendizagem.

2.4 Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou Princípio Multiplicativo

O Princípio Fundamental da Contagem, segundo Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006, p. 125), como, “Se uma decisão D1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D1 e D2 é igual a pq”. Salienta-se que o princípio pode ser ampliado para outras decisões, como D3 (tomado a r modos), D4 (tomado a s modos), D5 (tomado a t modos) e assim por diante. O número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D1, D2, D3, D4 e D5 seria, portanto p . q . r . s . t.

Assim, por exemplo, quantas maneiras Manuela poderá se vestir tendo 4 blusas e 5 calças, pelo PFC: 4 x 5, portanto, 20 maneiras diferentes de se vestir. Neste caso de exercício pode ser mostrado a árvore de possibilidades:

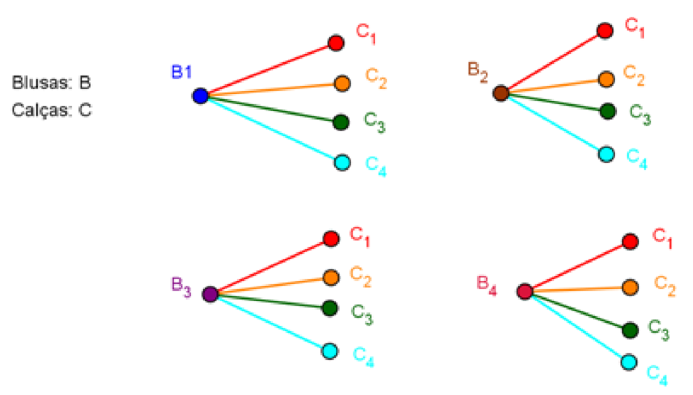


Figura 5Árvore de possibilidades

A Contagem, ao mesmo tempo em que possibilita uma abordagem

> mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação (BRASIL, 2000).

Exemplo 2: para verificar de quantos modos distintos cinco pessoas podem se posicionar em um banco de cinco lugares, se tem, segundo o PFC, que para o primeiro lugar há cinco possibilidades de escolha, ou seja, qualquer uma das cinco pessoas pode ocupar o primeiro lugar; para o segundo lugar há quatro possibilidades de escolha – uma vez que uma das pessoas já estaria sentada no primeiro lugar; há três possibilidades para o terceiro lugar – já que o primeiro e segundo lugares estariam ocupados por duas pessoas; duas possibilidades de escolha para o quarto lugar e apenas uma possibilidade para o quinto lugar – pois todos os outros lugares já estariam ocupados pelas outras pessoas. A solução da situação poderia, assim, ser representada por $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, ou seja, seriam 120 maneiras distintas das cinco pessoas se posicionarem. Este exemplo será falado novamente no próximo capítulo.

Exemplo 3: Em uma corrida, 10 corredores disputam os três primeiros lugares. De quantas formas diferentes podemos obter estas colocações? Qualquer um dos corredores pode chegar em primeiro lugar e tem-se, assim, 10 possibilidades de corredores para esta colocação; para o segundo lugar haverá nove corredores, uma vez que um dos corredores já terá sido o primeiro colocado; e, para o terceiro lugar, tem-se oito corredores, uma vez que dois dos que disputam a corrida já ocupam o primeiro e segundo lugares. Neste caso, a solução poderia ser representada pelo PFC da seguinte maneira: $10 \times 9 \times 8$, ou seja, teríamos 720 maneiras diferentes de formação do pódio. Perceba que este exemplo é um problema de arranjo, ou seja, a ordem em que as escolhas serão dispostas tem importância.

Exemplo 4: Mais um exemplo de que a ordem importa é: Dados os números 1,2,3,4,5 e 6, quantos algarismos distintos de três dígitos podemos formar?

Perceba que neste exemplo se formarmos o número 123 e 321, são números distintos, ou seja, a ordem aqui tem sua importância, então pelo PFC temos: na primeira casa, a chamamos da casa das centenas, podem ocupar 6 números, na segunda casa, chamamos de casa das dezenas, podemos colocar 5 números, uma vez que um dos números já ficou na casa das centenas, na última casa a casa das unidades podemos colocar 4 números, uma vez que outro número ficou na casa das dezenas, o resultado obtido 5 x 4 x 3 = 120 números distintos.

Exemplo 5: Se, em outra situação, um técnico fosse escolher, dentre 12 atletas, cinco para comporem a equipe titular de um time de basquete. Usando o PFC se teria: para a escolha do primeiro componente 12 possibilidades de escolha, ou seja, qualquer um dos 12 atletas; para a escolha do segundo componente haveria 11 possibilidades de escolha, já que um atleta já foi escolhido; 10 possibilidades para a escolha do terceiro atleta; 9 possibilidades para a escolha do quarto atleta e 8 possibilidades para a escolha do quinto e último componente da equipe. Nesse caso, além dessa aplicação do PFC, seria necessário aplicá-lo outra vez, dividindo o resultado obtido pelo produto 12 x 11 x 10 x 9 x 8 pela permutação dos cinco elementos escolhidos entre si, pois um time composto por Alfa, Beta, Gama, Delta e Épsilon, por exemplo, é idêntico ao time composto por Beta, Gama, Delta, Épsilon e Alfa. A permutação dos cinco elementos, semelhantemente ao exemplo anterior, poderia ser obtido pelo produto 5 x 4 x 3 x 2 x 1, e o resultado final será dado por:

$$\frac{12.11.10.9.8}{5.4.3.2.1} = 792$$

Figura 6Método de Cálculo

Este exemplo é classificado em um problema de combinação, porém, não se faz a necessidade de utilizar uma fórmula, mas sim a ideia do desprezo da ordem, o desprezo da ordem seria, que as escolhas por exemplo do time de basquete citado acima, não importa quem será chamado em primeiro, segundo ou terceiro, e sim o importante é que a pessoa foi chamada para compor o time.

Vamos aqui mostrar outros exemplos que a ordem não é importante.

Exemplo 6: Em um hospital tem 8 enfermeiros de plantão, porém 4 deles serão chamados para auxiliar em uma cirurgia de emergência. Quantas maneiras diferentes 4 de 8 enfermeiros podem ser chamados?

Note que nesse exemplo mais uma vez a ordem em que os enfermeiros serão chamados não tem importância, então neste exercício usa-se o critério do desprezo da ordem:

$$\frac{8.7.6.5}{4.3.2.1} = 70$$

Figura 7Cálculo exemplo 6

O resultado será de 70 maneiras diferentes 4 enfermeiros serão chamados de um total de 8.

Exemplo 7: A mega sena consiste em uma cartela de 60 números dentre os quais devemos acertar 6 (prêmio principal). Calcule a quantidade total de resultados possíveis para o prêmio principal.

Note mais uma vez que a ordem que os valores serão aqui sorteados também não tem importância, pois, por exemplo, se uma pessoa tivesse escolhido os números 4, 16, 23, 38, 40, 51, e na hora do sorteio tivesse saído nessa sequência 16, 4, 38, 51, 40, 23, a pessoa seria ganhadora do mesmo jeito. Portanto aqui será feito novamente o desprezo da ordem, temos:

$$\frac{60.59.58.57.56.55}{6.5.4.3.2.1} = 50.063.860$$

Figura 8Cálculo exemplo 7

2.5 Fatorial

Fatorial é um número natural inteiro positivo, o qual é representado por n!. A representação de n! foi introduzida por Christian Kramp em 1808.

O fatorial de um número é calculado pela multiplicação desse número por todos os seus antecessores até chegar ao número 1. Note que nesses produtos, o zero (0) é excluído.

O fatorial é representado por:

n! = n.(n-1).(n-2).(n-3) ....3.2.1, para todo n pertencente aos números naturais, por definição 0! = 1

Exemplos:

$$5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

$$0! = 1$$

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8.7.6.5!}{5!} = 8.7.6 = 336$$

Figura 9Exemplos de Fatorial

Abaixo na tabela estão os fatoriais de 0 a 15

Tabela 2 - Tabela de Fatoriais

n	n!
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000

Fonte: Autoria própria.

Conseguimos perceber que por mais que o número 15 seja um número pequeno, o seu fatorial é um número consideravelmente grande.

2.6 Permutação e Arranjo Simples

Proposição 2.1.2. O número de permutações de *n* objetos distintos é igual a *n!*. Faremos a prova por indução, que é um caminho curto e elegante.

Demonstração. Para $n = 1$, o conjunto tem em questão tem apenas um elemento. Logo, existe apenas uma permutação. Como $1! = 1$, temos a base de indução. Suponha que o resultado seja válido para um certo n, ou seja, suponha que o número de permutações de qualquer conjunto com n elementos seja igual a $n!$. Considere agora um conjunto M com $n + 1$ elementos. Uma permutação dos elementos de M é uma $(n + 1)$-*upla* $(x_1, \ . \ . \ . \ , x_{n+1})$ cujas entradas são todos elementos de X, e não há repetições. Contemos quantas são as permutações de X. Para a escolha da primeira entrada, x_1, há $n + 1$ possibilidades. Para cada uma dessas possibilidades, restam n elementos a serem distribuídos nas entradas restantes. Pela hipótese de indução, o número de arrumações dos n elementos restantes é igual a $n!$. Logo, temos que o total de permutações em X é igual a $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$. Assim, pelo Princípio de Indução, concluímos que o número de permutações de n objetos distintos é igual a $n!$ para qualquer $n \in \mathbf{N}$. $\square$

$$P_n = n!$$

Figura 10Permutação de n objetos distintos

Permutação simples com repetição: de modo geral, o número de permutações de n objetos, dos quais α são iguais a A, β são iguais a B, γ são iguais a C, etc, é:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\dots} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\dots}$$

Figura 11Permutação simples com repetição

A seguir, vejamos a fórmula para o números de maneiras de se escolher, com ordem, p objetos dentre n objetos, que chamaremos de arranjo de p objetos escolhidos dentre n, ou arranjo de n escolhe p, com $1 \leq p \leq n$. Note que um arranjo de n objetos escolhidos dentre n é uma permutação. Ou seja, permutação é um caso particular de arranjo. Observamos que alguns livros não utilizam o termo arranjo, sendo o termo permutação utilizado para ambos, arranjo e permutação.

Proposição 2.1.3. Seja A conjunto com |A| = *n*. Então o número de *p-uplas* ordenadas $(a_1, \ldots, a_p) \in A \times \cdots \times A$ sem elementos repetidos é igual a

$$A_p^n := n(n-1)\cdots(n-p+1).$$

Há várias notações diferentes na literatura para $(n)_k$, como A_p^n ou P(n, k).

Demonstração. Fixando um $p \in \mathbf{N}$ qualquer, pode-se fazer a prova por indução em *n*, para $n \geq p$. Como a prova é bastante similar à da Proposição 2.1.2, será omitida aqui. Fica para o leitor diligente escrevê-la em detalhes.

A expressão do enunciado

$$n(n-1)\cdots(n-p+1),$$

não é muito elegante, pois envolve reticências... Para melhorá-la esteticamente, vamos escrevê-la em termos da função fatorial. Multiplicando e dividindo por $(n-p)!$, temos que

$$A_{n,p} = n.(n-1).(n-2)\ldots.(n-p+1)$$

Agora multiplicando e dividindo por (n-p)! , e aplicando propriedades de fatoriais temos:

$$A_{n,p} = n.(n-1).(n-2)\ldots.(n-p+1).\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Figura 12Generalização de Arranjo simples de n elementos distintos, tomados de p a p

que é uma fórmula mais sucinta do que $n(n-1)\cdots(n-p+1)$. Além disso, para que a fórmula acima faça sentido quando p = *n*, é necessário definir $0! = 1$. Em resumo, escreveremos sempre

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ para quaisquer } 0 \leq k \leq n \text{ inteiros },$$

que também é chamado de número de arranjos de *p* elementos dentre *n* objetos distintos. Um caso particular importante é o caso $p = n$ visto anteriormente, que é o número de maneiras para colocar *n* elementos em *n* posições numa fila, dado por A_n^n = n!.

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n$$

Figura 13Generalização de permutação através de arranjo simples de n elementos, tomados de n a n

2.8 Combinação Simples

Uma combinação (simples) de n elementos (distintos), tomados p a p, é qualquer escolha de p elementos dentre os n elementos dados. Em uma combinação, apenas o conjunto dos elementos escolhidos é relevante, de modo que a ordem em que eles forem tomados não importa.

Para obter uma fórmula geral para combinação de n elementos, tomados de p a p, podemos contar quantos são os conjuntos de p elementos, escolhidos dentre n elementos distintos dados. Podemos montar um tal conjunto de p elementos escolhendo (ou, se você preferir, sorteando) seus elementos um a um. Assim, primeiro montamos uma lista ordenada com p elementos, o que pode ser feito de An,p maneiras. Acontece que cada conjunto de p elementos será obtido a partir de exatamente p! dessas listas, uma vez que p! é, como sabemos, o número de maneiras de montar uma lista com os p elementos do conjunto. Dessa forma, a quantidade de conjuntos com p elementos, escolhidos dentre os n elementos dados, é igual a $\frac{A_{n,p}}{p!}$. Concluímos, então, que:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$$

Figura 14Generalização de Combinação Simples

3 METODOLOGIA

Um dos pontos como base que conduz as mudanças educacionais é o fato de se buscar desenvolver nos alunos a capacidade de aprender a aprender.

Em nenhum momento pode-se colocar o conhecimento prévios em segundo plano, pois, é sempre o ponto de partida para o conhecimento novo, como bem mostra a hermenêutica. Um conceito equivocado é que na escola se faça apenas repasse, ou que nela apenas se ensina e apenas se aprende. O desafio do processo educativo, em termos propedêuticos e instrumentais, é construir condições do aprender a aprender e do saber pensar.

Nas diferentes áreas da educação e em todas as etapas percebe-se a necessidade de que os alunos obtenham habilidades e estratégias que lhes proporcionem o aprendizado, por si mesmos, de novos conhecimentos e não tenham os conhecimentos prontos e acabados que fazem parte da nossa cultura, ciência e sociedade.

Visando-se uma sociedade mais justa, crítica e criativa, buscando uma melhoria na qualidade de vida do cidadão, não é suficiente apresentar conhecimentos cristalizados e fora do contexto moderno. É preciso fazer com que os alunos tornem-se cidadãos que enfrentam situações diferentes dentro de contextos diversificados, que façam com que eles busquem aprender novos conhecimentos e habilidades. Só assim estarão melhores preparados para conviver com mudanças culturais, tecnológicas e profissionais do novo milênio.

Uma das formas mais acessíveis de proporcionar aos alunos que aprendam a aprender é a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino.

3.1 Resoluções de Problemas como Metodologia de Ensino

O presente trabalho terá como metodologia a resolução de problemas, na qual, o assunto será tratado abaixo.

'A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes. '(POZO e ECHEVERRÍA, 1988, p.09).

Acredita-se que, quando se ensina através da resolução de problemas, ajuda aos alunos a desenvolver a capacidade de aprender a aprender, possibilitando-os a determinarem por si próprios respostas às questões, sejam elas escolares ou de sua vida secular, sem ter necessidade de esperar uma resolução pronta feita pelo professor ou pelo livro texto.

Os PCN pontuam “a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática” (BRASIL, 1998, p.39-40). Esta abordagem explorando problemas traz a participação do aluno, desta forma os conceitos e ideias matemáticas são construídas pelos alunos, e a aula torna-se mais atrativa, pois não é mais algo mais mecanizado, que só o professor obtém a resposta do problema.

POZO e ECHEVERRÍA acrescentam que não é suficiente "dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes" mas faz-se necessário "Criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta". (POZO e ECHEVERRÍA, 1988, p. 14).

É importante a participação do aluno na determinação de situações-problema pois o que é desconhecido para alguns, pode ser resolvido muito rapidamente por outros. O problema deverá ser uma situação diferente da que já se tenha trabalhado, mas que se utilize de técnicas e estratégias já aprendidas para a sua solução.

A resolução de problemas tem grande poder motivador para o aluno, pois envolvem situações novas e diferentes atitudes e conhecimentos, uma vez que, o aluno está apenas acostumado a adquirir a informação dada pelo professor e a partir disso ele começa a fazer "cópias" de resoluções já passadas pelo professor.

4SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capitulo terá a aplicação do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) como ferramenta principal na resolução de exercícios da Análise Combinatória. A classe escolhida é uma 2ª série da escola estadual Professora Esmeralda Leonor Furlani Calaf da cidade de Pederneiras estado de São Paulo.

A prática ocorreu nos dias em que ministro as aulas para essa sala, quarta, quinta e sexta feira, a média de alunos envolvidos na prática foram por volta de 25 alunos. O tempo necessário para aplicar todo o contexto foram 15 aulas, nessas aulas foram resolvidos vários exercícios usando apenas o PFC e no fim foi aplicado uma avaliação para uma conclusão se a proposta foi válida ou se precisaria mudar algo na estratégia e planejamento das aulas.

No planejar das aulas que iriam ser ministradas, a grande questão era que os alunos que não utilizassem fórmulas para resolver exercícios de Análise Combinatória e focar apenas no Princípio Fundamental da Contagem.

Listarei os exercícios que serão utilizados em sala e seus objetivos.

1) “Manuela tem 5 blusas e 4 calças, quantas maneiras diferentes Manuela tem de vestir uma blusa e uma calça?”

   Tem como objetivo que os alunos analisassem a situação e escrevessem os resultados de forma direta ou pela a árvore de possibilidades.

2) Em uma lanchonete tem a opção de escolha do pão, salada, carne, molho e queijo.

- Pão: normal, três queijos, sete grãos
- Salada: alface, tomate, pepino
- Carnes: hambúrguer, frango, lombo
- Molho: maionese, ketchup.
- Queijo: mussarela, cheddar, ricota.

Quantos lanches essa lanchonete pode oferecer ao consumidor, sendo que a pessoa pode escolher apenas um item de cada opção?

Esse exercício tem como objetivo mostrar para o aluno que a utilização da árvore de possibilidades não é a resolução mais viável e sim multiplicar os valores de cada opção.

3) Uma pessoa possui 5 camisetas, 4 calças e 3 pares de sapatos. Quantas

maneiras essa pessoa pode vestir uma camiseta, uma calça e um par de sapatos?

Tem como objetivo compreender que cada camisa das 5 combina com 4 calças e 3 sapatos

4) Em uma sala tem cinco pessoas para sentar-se em cinco lugares, quantas maneiras diferentes essas cinco pessoas podem se sentar?

   O objetivo desse exercício é mostrar possibilidades, que na primeira cadeira existe 5 possibilidades para se sentar, na próxima cadeira existe 4, sendo que uma já se sentou, e assim por diante. Talvez de principio a dificuldade desse exercício é, os alunos compreenderem que estamos falando de todas as possíveis possibilidades de se assentarem em qualquer uma das cadeiras

5) Sete amigos foram ao cinema, e numa fileira tinha sete cadeiras para que eles pudessem se sentar. Quantas maneiras diferentes esses sete amigos podem se sentar?

   O mesmo objetivo do exercício anterior

6) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra FILHO?

   Aqui tem como objetivo o aluno formar anagramas com as letras formando ou não sentindo nas palavras formadas.

7) Quais e quantos números de dois algarismos podemos formar com os números 1 e 2?

- Quais e quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com os números 1 e 2?
- Quais e quantos números de dois algarismos podemos formar com os números 1, 2 e 3?
- Quais e quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com os números 1, 2 e 3?
- Quais e quantos números de três algarismos podemos formar com os números 1, 2 e 3?
- Quais e quantos números de três algarismos podemos formar com os números 1, 2 e 3?
- Você saberia como calcular a quantidade dos números de dois algarismos distintos e com repetição, usando os números 1 e 2 sem achar todas as possibilidades? Se sim mostre seu raciocínio.

- Você saberia como calcular a quantidade dos números de dois algarismos distintos e com repetição, usando os números 1, 2 e 3 sem achar todas as possibilidades? Se sim mostre seu raciocínio.
- Você saberia como calcular a quantidade dos números de três algarismos distintos e com repetição, usando os números 1, 2 e 3 sem achar todas as possibilidades? Se sim mostre seu raciocínio.

O objetivo desse exercício é fazer com o que o aluno entenda que temos formações de algarismos com repetições e com números distintos.

8) Num colégio, há 5 bons esportistas. O professor de educação física vai escolher 2 de deles para representar a escola. Quantas são as possibilidades dessa escolha?

   Aqui é fazer com que o aluno perceba que a escolha dos alunos não está relacionada com a ordem que o professor escolha, sendo o importante é que a pessoa tenha sido escolhida

9) Um coquetel é preparado com três bebidas distintas. Se existem 7 bebidas distintas, quantos coquetéis diferentes podem ser preparados?

Mesmo objetivo da atividade anterior a escolha das 3 bebidas não estão relacionadas com a ordem que cada bebida será colocada no coquetel

10) Uma circunferência são marcados 9 pontos, dois a dois distintos. Quantas retas podem ser construídas passando por estes 9 pontos?

Compreender que a escolha dos pontos seja AB ou BA são equivalentes, portanto a ordem é desprezada

11) Uma prova consta de 10 questões das quais o aluno deve resolver 5. De quantas formas ele poderá escolher as 5 questões?

Entender que a escolha das questões não está relacionada com a ordem que as questões estão dispostas.

12) Uma organização dispõe de 8 economistas e 5 engenheiros. De quantos modos podemos formar uma comissão com 7 membros, sendo 3 economistas e 4 engenheiros?

Compreender que é necessário escolher 3 dos 8 economistas, sendo que a escolha não está relacionada com a ordem, e também escolher 4 dos 5 engenheiros sem se importar com a ordem das escolhas e no final obter o resultado somando os valores.

13) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar empregando os

caracteres 1, 3, 5, 6, 8 e 9?

Compreender que a ordem em que os números serão colocados tem importância.

14) O quadrangular final de um torneio de Vôlei é disputado por 4 seleções:Brasil, Canadá, Cuba e EUA. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados(1º,2º e 3º)

Entender que a ordem em que as seleções serão colocadas terá significado

15) O vagão de um trem possui 7 portas. De quantas maneiras distintas um passageiro pode entrar no trem e sair dele por uma porta diferente da que entrou?

Saber que a ordem das portas do vagão tem importância, ou seja, se você entrou por uma, você não pode sair pela mesma.

16) Um artista tem 3 cartolas, 4casacos e 2 bengalas, todos diferentes. Quantas apresentações ele pode fazer sem repetir as três mesmas peças.

Entender que basta multiplicar todas as opções.

4. 1 Aplicação das Atividades e análises de resultados

Descreverei cada momento feito durante as aulas, todos exercícios feitos foram entregues a mim, e colocarei algumas fotos, mostrando acertos e erros que os alunos tiveram durante essas aulas.

1º momento: Conhecimento prévio dos alunos

Foi colocado aos alunos um problema simples de contagem para que eles se habituassem ao tipo de situações que eles começariam a estudar

Problema 1: Manuela tem 5 blusas e 4 calças, quantas maneiras diferentes Manuela tem de vestir uma blusa e uma calça?

Neste primeiro exercício, a forma que eles apresentaram a resolução foi um tanto que diversificada. Teve alunos que trouxeram apenas o cálculo de 5 x 4, ou seja, tais alunos já tinham um conhecimento prévio do PFC, outros trouxeram todas as combinações de roupas que apresentava no problema, até mesmo a árvore de possibilidades alguns alunos entregaram.

Na foto abaixo o aluno fez o uso das flechas para mostrar a quantidade total de maneiras que o exercício propôs.

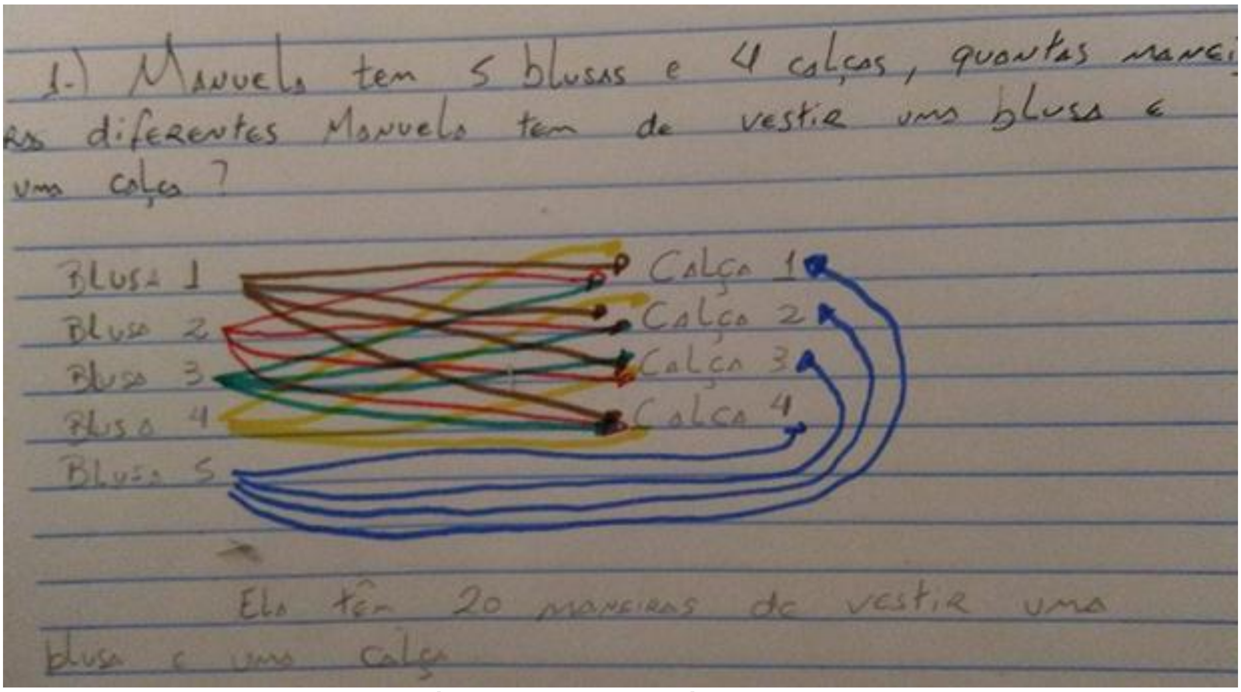


Figura 15Resolução de aluno

Essa aluna resolveu pelo PFC, mesmo sem ter explicado a definição.

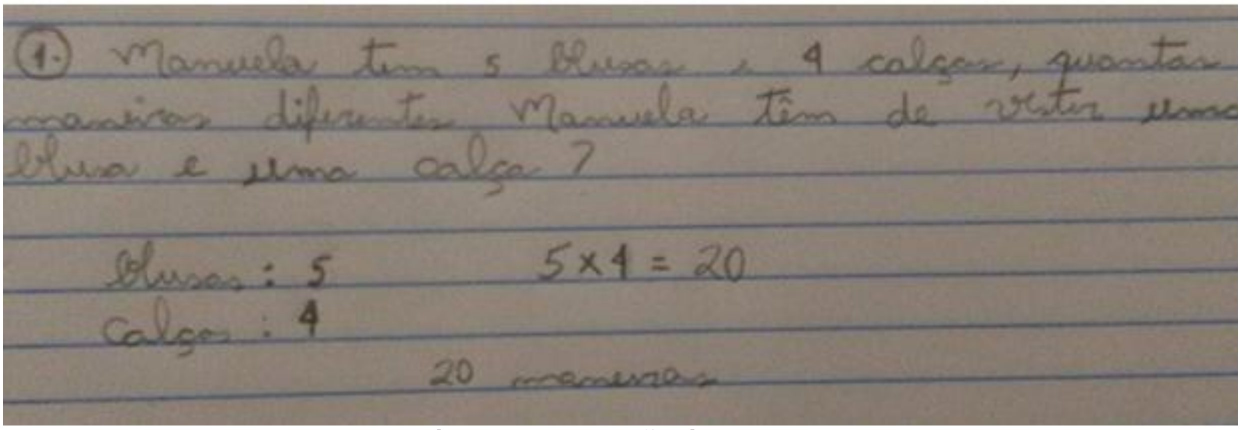


Figura 16Resolução de aluno

Diante das respostas dos alunos, percebi que esse tipo de exercício eles já sabiam resolver independente da maneira de resolução, então propus a eles um novo exercício.

2° Momento: Definição do PFC na prática

Depois dos alunos terem apresentado as diversas soluções do primeiro exercício, foi dado aos alunos em uma folha mais um problema.

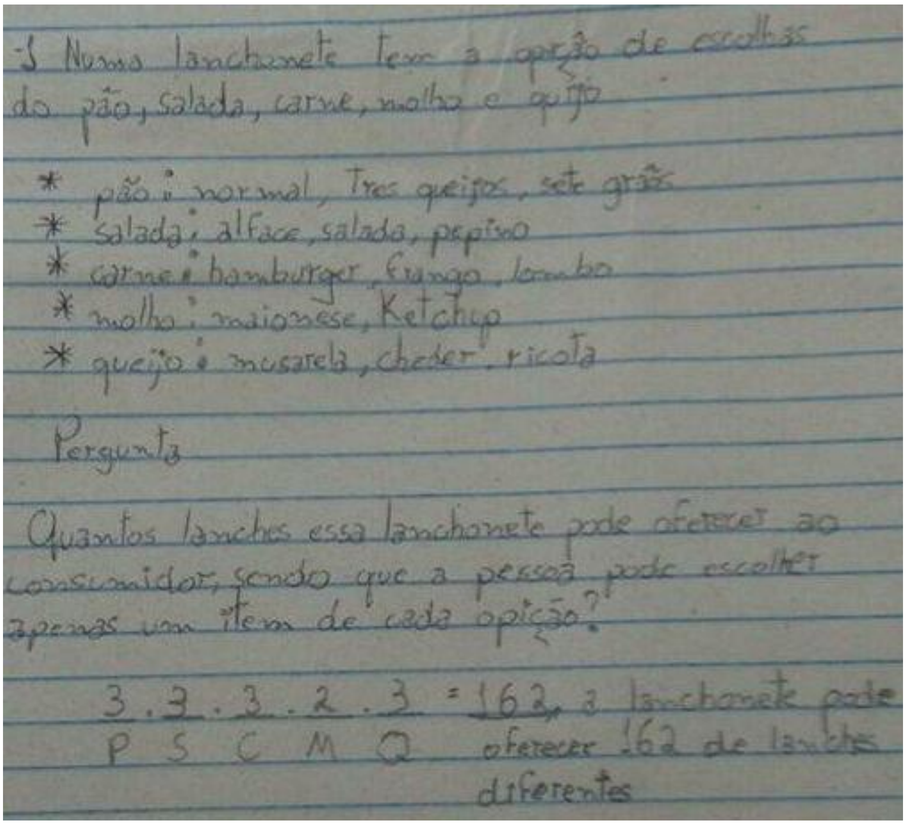
Problema 2: Em uma lanchonete tem a opção de escolha do pão, salada, carne, molho e queijo.

- Pão: normal, três queijos, sete grãos
- Salada: alface, tomate, pepino
- Carnes: hambúrguer, frango, lombo
- Molho: maionese, ketchup.
- Queijo: mussarela, cheddar, ricota.

Quantos lanches essa lanchonete pode oferecer ao consumidor, sendo que a pessoa pode escolher apenas um item de cada opção?

Deixei que cada aluno resolvesse da sua forma, como eles entendiam.

A maioria das respostas veio com todas as opções de lanches feitas com a árvore de possibilidades, a minoria fez o produto das opções dando o resultado, alguns também deixaram em branco, porque disseram que seria muito grande a árvore de possibilidades, mas que não sabiam outra forma de resolver. Mostrarei algumas fotos das resoluções:


-1 Numa lanchonete tem a opção de escolhas do pão, salada, carne, molho e queijo

* pão: normal, Tres queijos, sete grãos
* salada: alface, salada, pepino
* carne: hamburger, frango, lombo
* molho: maionese, Ketchup
* queijo: musarela, cheder, ricota

Pergunta

Quantos lanches essa lanchonete pode oferecer ao consumidor, sendo que a pessoa pode escolher apenas um item de cada opição?

3 . 3 . 3 . 2 . 3 = 162, a lanchonete pode
P S C M Q oferecer 162 de lanches
diferentes

Figura 17Resolução do aluno pelo PFC

Resolução pela árvore das possibilidades:

Figura 18Resolução feita por aluno com a árvore de possibilidades

No recolhimento das respostas, coloquei para os alunos analisarem quais das resoluções corretas eram mais eficientes para tipos de exercícios como esse. Coloquei a disposição deles as duas fotos acima, uma com a árvore de possibilidades, e a outra o produto das opções, enfatizei que todas estavam corretas, mas em algumas situações tem resoluções que não convém fazer pela falta de tempo, todos obviamente disseram que era a opção do produto das opções. Diante da resposta deles eu expliquei que esse produto das opções recebia o nome de Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Depois da breve explicação coloquei na lousa um exercício para a fixação do PFC, obtive como respostas com o uso do PFC

Problema 3: uma pessoa possui 5 camisetas, 4 calças e 3 pares de sapatos. Quantas maneiras essa pessoa pode vestir uma camiseta, uma calça e um par de sapatos?

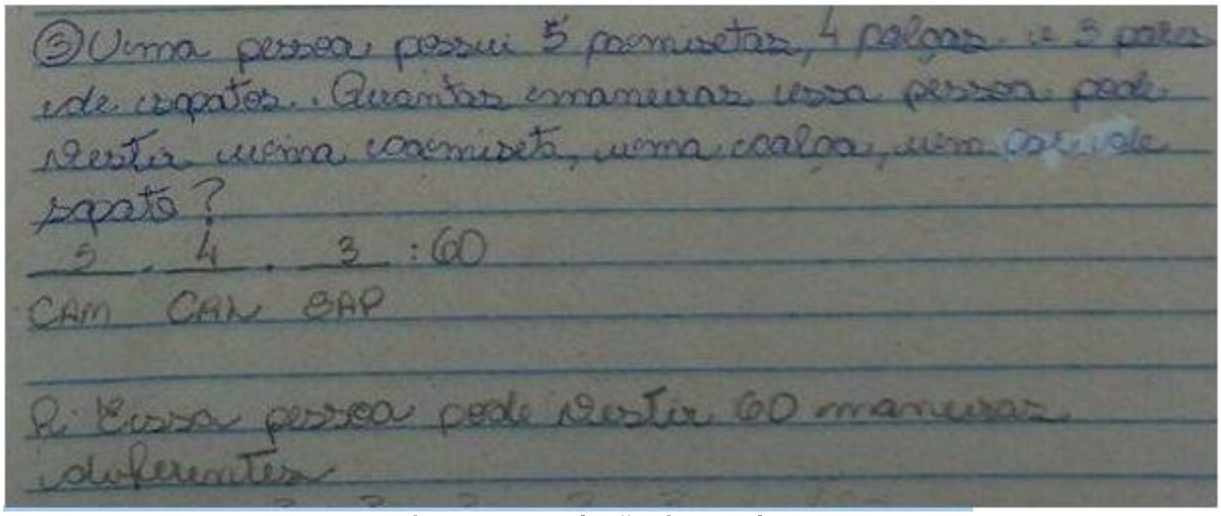


Figura 19Resolução de um aluno

3º Momento: Explanando a ideia do PFC em outras situações: (permutação) Neste momento com os alunos já habituados com o PFC, começamos aqui passar pelas outras definições da análise combinatória, mas sem nos preocupar de início com os nomes específicos, começamos com a ideia da permutação. Foi dado tal exercício.

Problema 4: em uma sala tem cinco pessoas para sentar-se em cinco lugares, quantas maneiras diferentes essas cinco pessoas podem se sentar?

Deixei que os alunos novamente resolvessem da forma que eles entendiam tal situação. Obtive muitos exercícios errados, outros deixaram em branco, pois não tinham ideia de como fazer o exercício. Mostrarei alguns erros

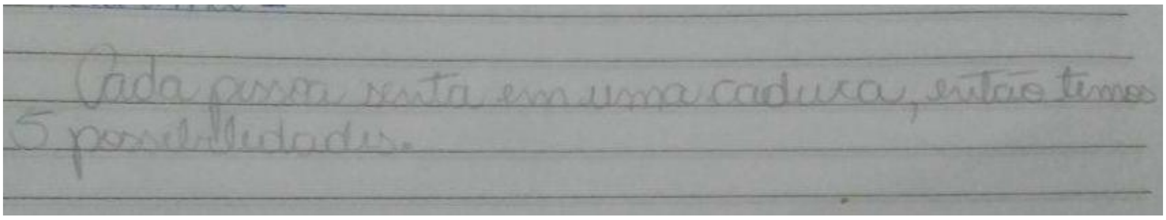


Figura 20Resolução incorreta feita por um dos alunos

Aqui o aluno pensou que cada pessoa tem sua cadeira já para se sentar, então cada uma sentando na sua, tem cinco maneiras de se sentar, forma equivocada de se pensar

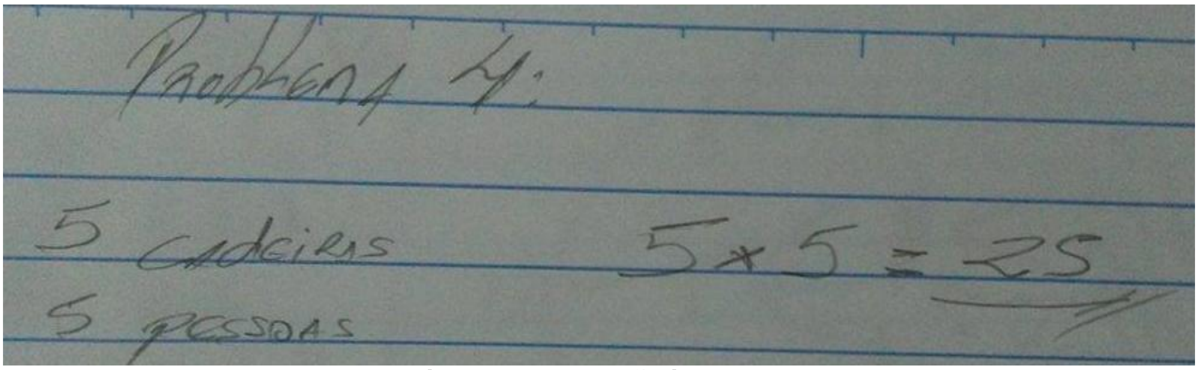


Figura 21Resolução incorreta

O aluno apenas multiplicou a quantidade de cadeiras pela quantidade de pessoas.

Em seguida chamei na frente da sala 5 alunos aleatórios e pedi para que cada um trouxesse sua cadeira e deixasse todas uma do lado da outra. Em seguida pedi para que todos os alunos chamados ficassem em pé do lado das cadeiras, e comecei a explicação sobre possibilidades, pedi para que a sala me respondesse quantas possibilidades de alguma pessoa que está em pé podiam sentar na primeira cadeira, todos disseram “cinco”, então eu pedi que um dos cinco se sentasse na primeira cadeira. Agora com um já sentado na primeira cadeira, parti para a segunda cadeira e fiz a mesma pergunta, quantas possibilidades de alguma pessoa em pé se sentar, todos disseram “quatro”, pedi que outro se sentasse, fiz isso até terminar os alunos e as cadeiras. Aí então expliquei que como cada cadeira é um evento, ou seja, quis mostrar aos alunos que o exercício pode ser resolvido pelo PFC, no final podíamos multiplicar as possibilidades que tivemos em cada cadeira para obter o resultado final que seria 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120, ou seja, temos 120 possibilidades de 5 pessoas se sentarem e cinco cadeiras.

Para fixar o conhecimento foram realizados mais alguns exercícios com o mesmo princípio.

Problema 5: Sete amigos foram ao cinema, e numa fileira tinha sete cadeiras para que eles pudessem se sentar. Quantas maneiras diferentes esses sete amigos podem se sentar?

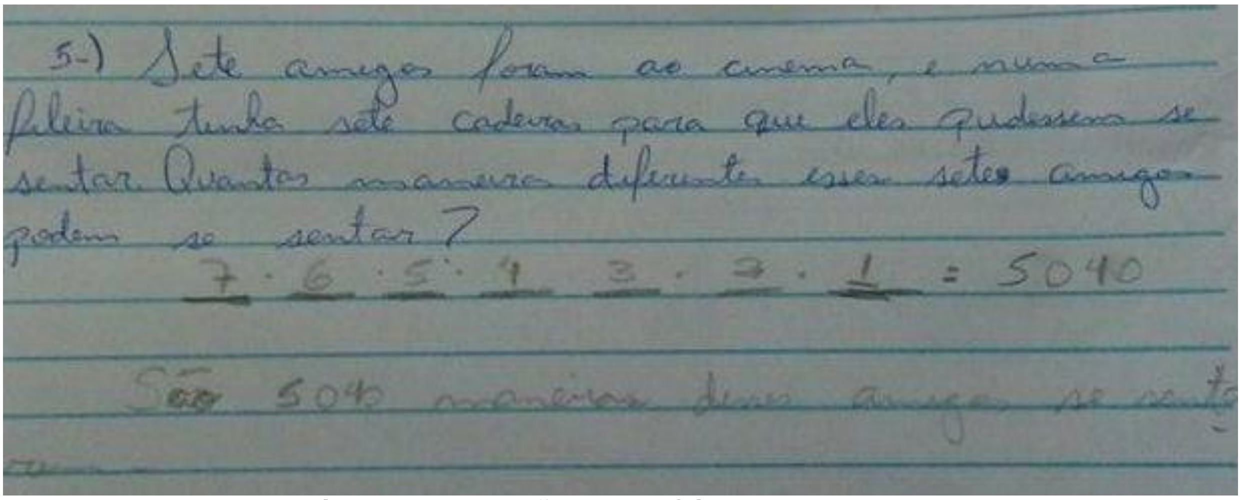


Figura 22 Resolução correta feita por um aluno

Outros exercícios desse formato que foram passados para a sala é quantos anagramas podemos formar com as letras de certa palavra. Primeiramente eu foquei apenas em palavras que não tinha repetição de letras.

Problema 6: Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra FILHO?

Pedi para que os alunos resolvessem primeiro, teve alunos que não me entregaram o exercício, e os que entregaram, entregaram de forma correta, desenvolvendo pelo PFC.

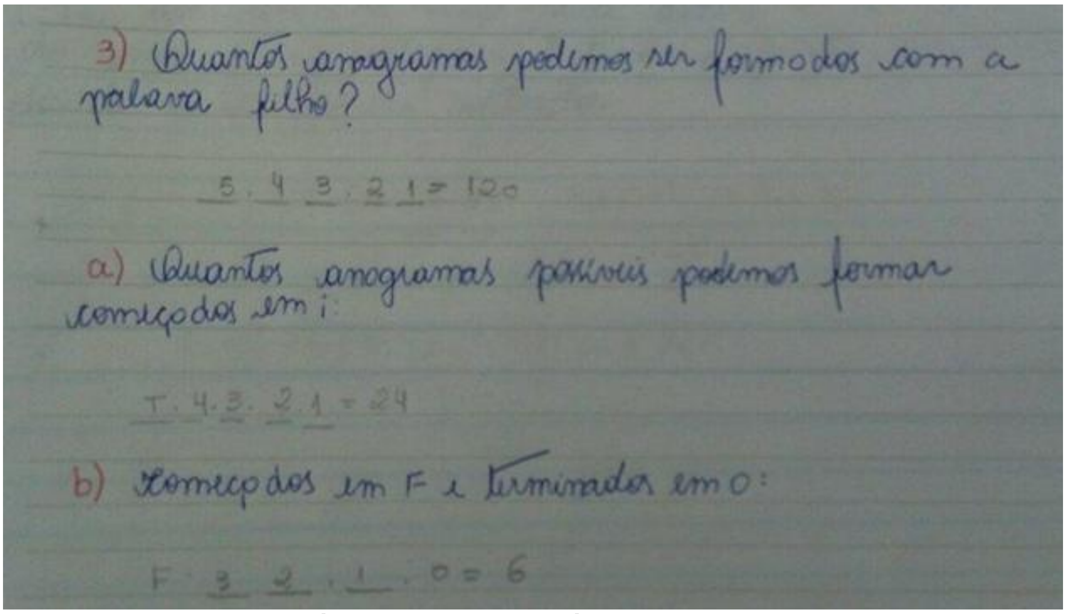


Figura 23Resolução dos anagramas

Após esse exercício foi explicado quando é pedido anagramas na qual algumas letras estejam juntas em qualquer ordem, ou na ordem que o exercício dizer. Então fizemos o exemplo na lousa, quantos anagramas podem formar com as letras do nome THIAGO, sendo que as letras AGO fiquem juntas? E fiquem juntas nesta ordem?

Dado um tempo para que os alunos resolvessem, pude perceber que ninguém conseguiu fazer.

Foi mostrado para os alunos que quando o exercício pede que letras fiquem juntas, no caso AGO, temos que contar essas três letras sendo um bloco, ou seja, contar como se elas fossem apenas uma única letra, no caso teríamos quatro letras para permutarmos "AGO","T", "H", "I", 4 x 3 x 2 x 1, porém, como a primeira pergunta disse que as letras AGO fiquem juntas, mas não disse em nenhum momento em qual ordem elas devem estar, significa que essas três letras podem permutar-se entre si, então foi explicado aos alunos que essas letras poderiam mudar de posição então para o exercício ficar correto teríamos que fazer o produto de 4x3x2x1 por 3x2x1 pois as letras AGO podem permutar entre si, 4x3x2x1x3x2x1 totalizando 144 anagramas. Agora na segunda pergunta disse que as letras AGO fiquem juntas nessa ordem, ou seja, elas não mudarão de posição entre si, então basta contar o bloco AGO com as demais letras 4 x 3 x 2 x 1 totalizando 24 anagramas.

Foi dado um exercício similar para os alunos resolver

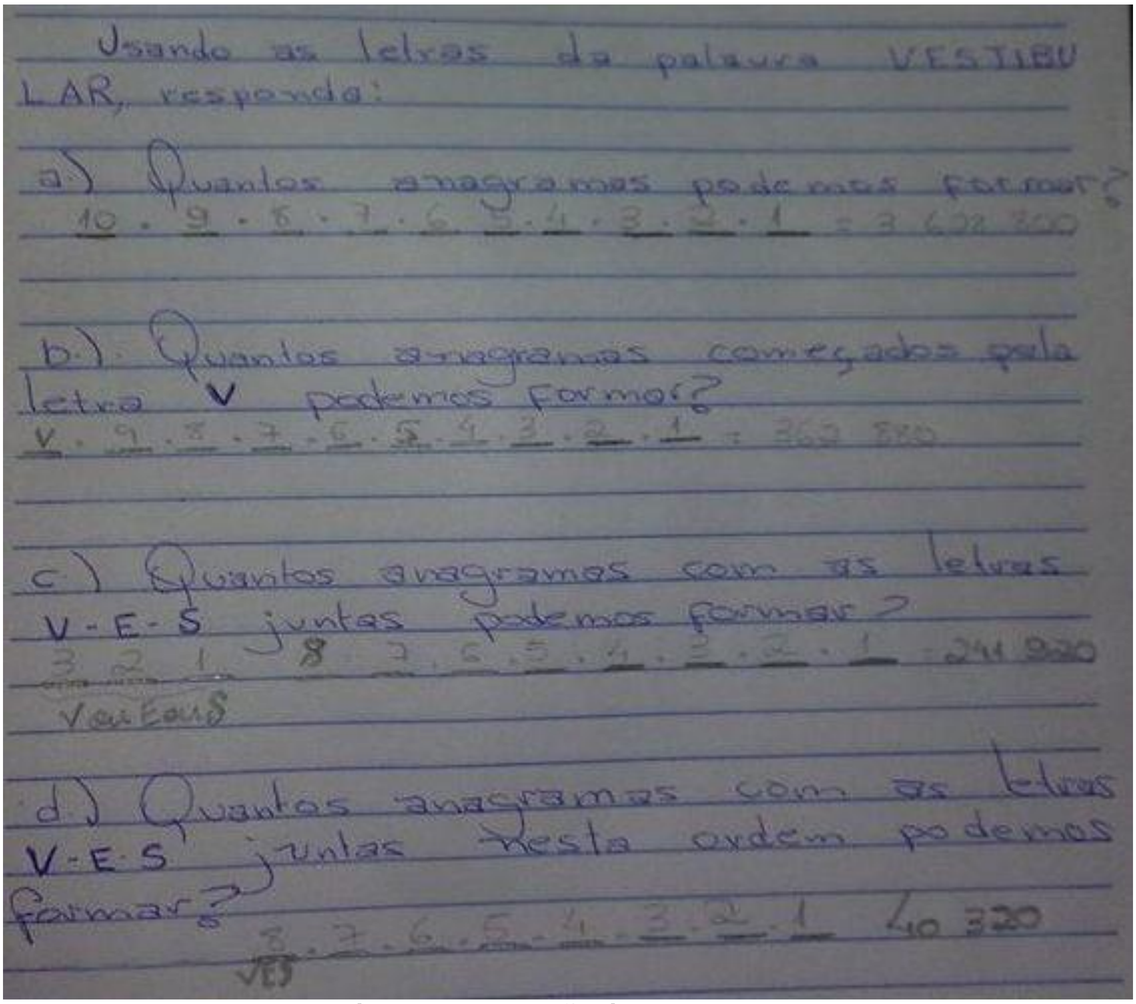


Figura 24Resolução dos anagramas

4º Momento: Esse momento começamos a trabalhar com o critério de ordem, ou seja, arranjos, mas também sem nos preocupar com o nome.

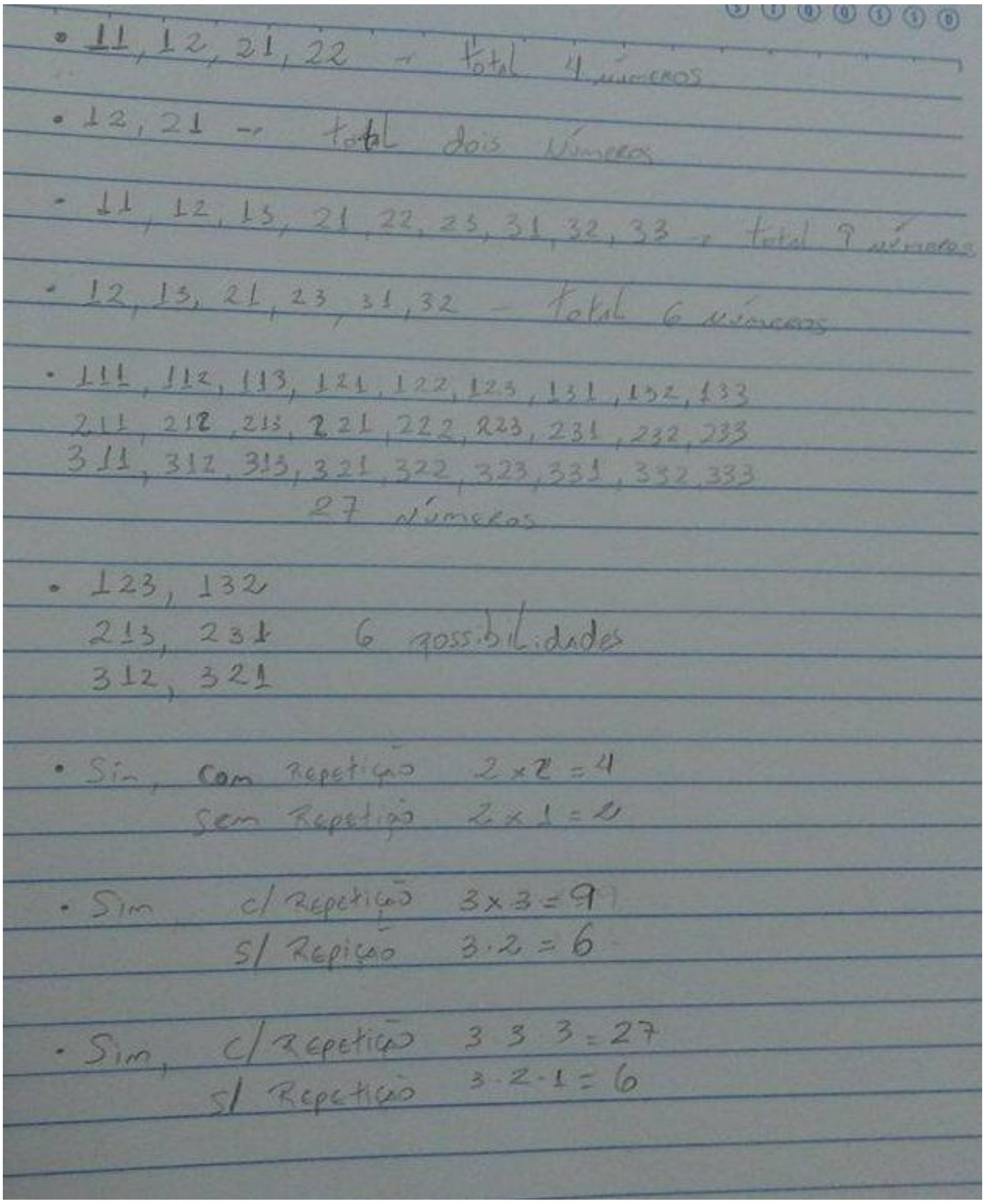
Foram dados aos alunos estes exercícios numa folha impressa

- Quais e quantos números de dois algarismos podemos formar com os números 1 e 2?
- Quais e quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com os números 1 e 2?
- Quais e quantos números de dois algarismos podemos formar com os números 1, 2 e 3?
- Quais e quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com os números 1, 2 e 3?
- Quais e quantos números de três algarismos podemos formar com os números 1, 2 e 3?

- Quais e quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os números 1, 2 e 3?
- Você saberia como calcular a quantidade dos números de dois algarismos distintos e com repetição, usando os números 1 e 2 sem achar todas as possibilidades? Se sim mostre seu raciocínio.
- Você saberia como calcular a quantidade dos números de dois algarismos distintos e com repetição, usando os números 1, 2 e 3 sem achar todas as possibilidades? Se sim mostre seu raciocínio.
- Você saberia como calcular a quantidade dos números de três algarismos distintos e com repetição, usando os números 1, 2 e 3 sem achar todas as possibilidades? Se sim mostre seu raciocínio.

Quando peguei dos alunos as respostas percebi que até a sexta pergunta todos acertaram, mas da sétima em diante que era para achar uma maneira de calcular sem ter que achar todas as possibilidades apenas dois mostrou um raciocínio do PFC, os demais deixaram em branco ou colocaram que não conseguiram chegar a uma forma de calcular, vejamos alguns exemplos:

Este aluno fez de forma correta, veja:



• 11, 12, 21, 22 → total 4 números

• 12, 21 → total dois números

• 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 → total 9 números

• 12, 13, 21, 23, 31, 32 → total 6 números

• 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133
211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233
311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333
27 números

• 123, 132
213, 231 6 possibilidades
312, 321

• Sim, com Repetição $2 \times 2 = 4$
sem Repetição $2 \times 1 = 2$

• Sim c/ Repetição $3 \times 3 = 9$
s/ Repição $3 \cdot 2 = 6$

• Sim, c/ Repetição $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
s/ Repetição $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Figura 25Resolução correta

Este aluno fez todas as possibilidades, mas quando pediu para que ele fizesse o cálculo sem ter enumerar todas as possibilidades ele não conseguiu.

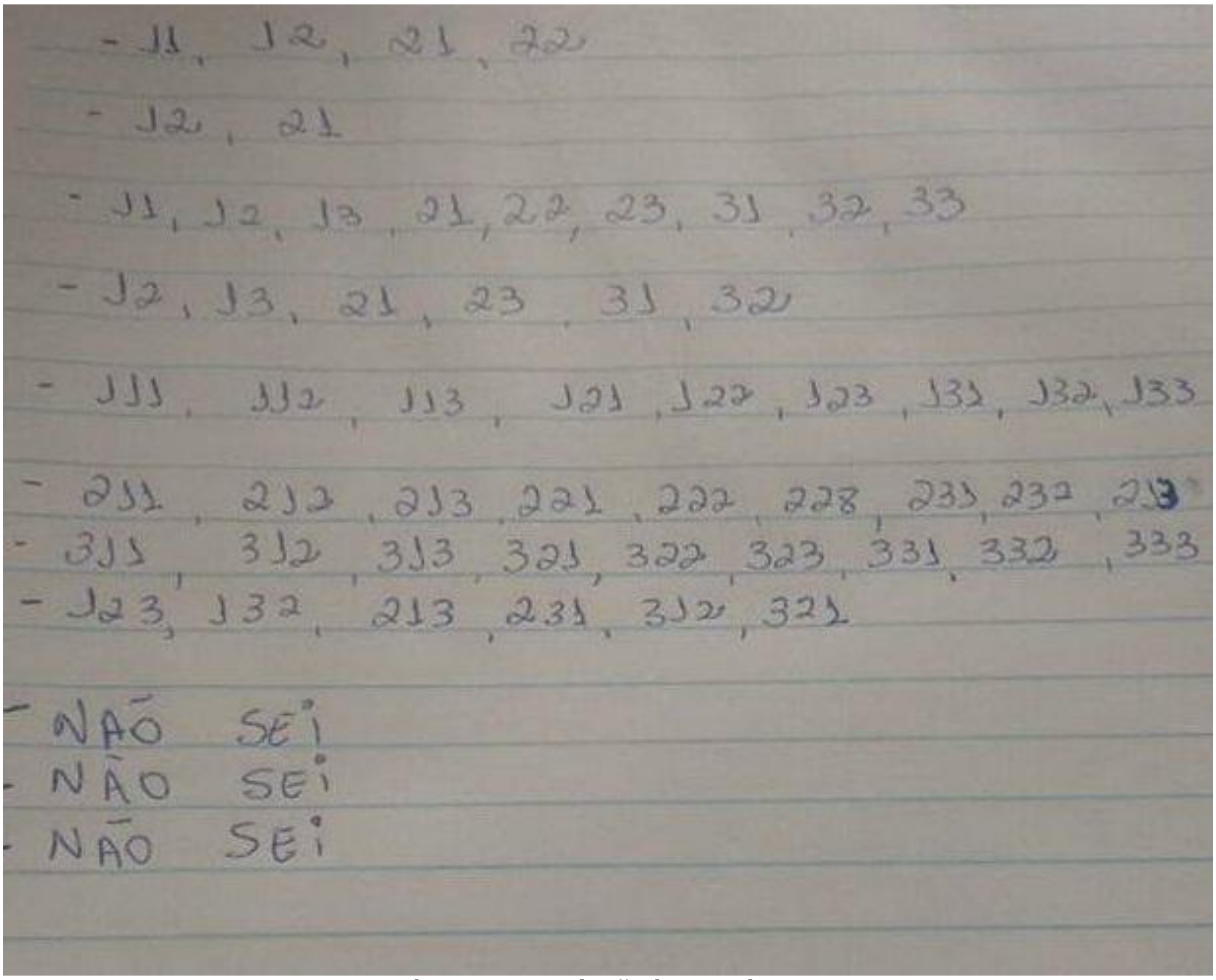

- 11, 12, 21, 22
- 12, 21
- 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33
- 12, 13, 21, 23, 31, 32
- 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133
- 211, 212, 213, 221, 222, 228, 231, 232, 233
- 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333
- 123, 132, 213, 231, 312, 321
- NÃO SEI
- NÃO SEI
- NÃO SEI

Figura 26Resolução incompleta

Diante dessa situação coloquei para eles que quando temos números de dois algarismos podendo usar dois números, basta multiplicar, 2x2 = 4, agora se pede números distintos na primeira “casa” colocamos 2 e na segunda “casa” colocamos 1, pois um número já tinha sido utilizado, então o calculo seria 2x1 = 2.

Agora com números de dois algarismos podendo usar três números teríamos 3x3= 9, uma vez que podemos repetir os números, já quando os números são distintos temos 3 x 2 = 6. Com três algarismos podendo usar três números, temos 3x3x3= 27, e distintos temos 3x2x1=6.

Veja um exercício que um aluno desenvolveu.

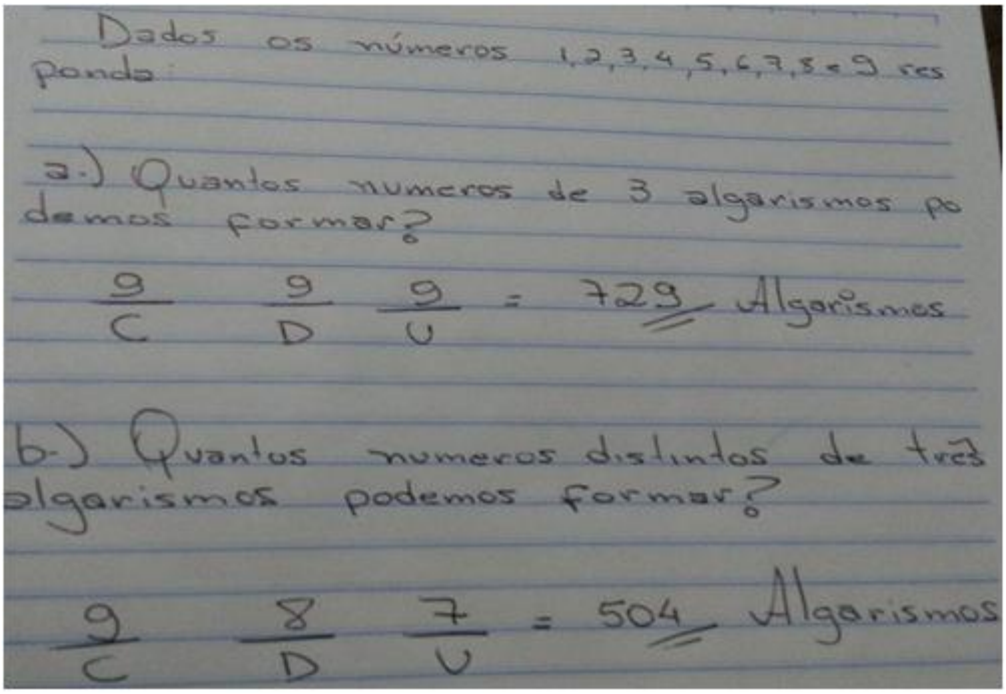


Figura 27Resolução de quantidade de números de três algarismos

Quando terminado o exercício, perguntei aos alunos como faria para determinar os números impares, houve a princípio a dúvida por parte dos alunos de como fazer um cálculo para determinar tais números, aí perguntei o que é um número ímpar, aí me responderam que um número ímpar é aquele terminado em 1, 3, 5, 7, ou 9. Então expliquei que se queremos encontrar números ímpares, significa que na última casa “das unidades” tem que ter apenas números ímpares, portanto, se queremos encontrar a quantidade de números de três algarismos ímpares, temos que colocar 5 possibilidades na casa das unidades, pois temos cinco números ímpares, na casa das centenas colocamos 9 pois o exercício não disse nada sobre números distintos, e na casa das dezenas colocamos novamente 9, 9x9x5, totalizando 405 números. Em seguida perguntei e se quiséssemos números de três algarismos distintos ímpares, os próprios alunos responderam na casa das unidades colocamos 5, pois são cinco números ímpares, na casa das centenas colocamos 8, pois um dos números já foi utilizado nas unidades, e na casa das dezenas colocamos 7, 8x7x5, obtendo 280 números distintos impares. Disse aos alunos que quando os problemas pedissem números pares sem ter o zero nos números, o processo é feito de forma análoga ao dos impares.

Situação 2: quando o zero entra na história

Quando os problemas são de quantidades de números sejam com repetições ou distintos e tem a inclusão do zero, temos que tomar cuidado, e foi isso que disse aos alunos para iniciar esse estudo. Coloquei na lousa um problema semelhante ao citado acima, a única diferença e que continha o zero. Foi exposto aos alunos, quanto números de três algarismos podemos formar utilizando números de 0 até 9?

Fiz a pergunta aos alunos quantas possibilidades de números poderíamos colocar na casa das centenas, a maioria respondeu o esperado, disseram “10 possibilidades”, até que um dos alunos respondeu “professor não seria 9? Então o indaguei o porquê ele achava que eram 9 possibilidades, e o aluno me respondeu de forma precisa, dizendo que como temos o zero na opção dos números, e supondo que o número da centena seja o zero, o número deixaria de ter três algarismos e passariam a ter apenas dois, a dezena e a unidade, após o seu comentário a sala toda concordou com o mesmo. Refiz a pergunta e todos disseram 9 possibilidades na casa das centenas, fiz a pergunta sobre a casa das dezenas, e responderam que seriam 10 possibilidades, uma vez que o zero pode estar nas demais casas e pode ter repetição, e na casa das unidades também 10 possibilidades, 9x10x10 obtendo 900 números.

Para os números distintos perguntei quantos números podemos colocar na casa das centenas, todos disseram 9, sabiam que tinham que tirar o zero, na casa das dezenas quando foi perguntado as possibilidades a maioria dos alunos disseram 8, resposta errada, uma vez que o zero entra novamente como possibilidades, então um dos alunos que não respondeu, disse exatamente o que foi citado acima, que seria 9 possibilidades que o zero poderia ser contado, na casa das unidades todos disseram 8, gerando um produto de 9x9x8 totalizando 648 números distintos.

Entramos no assunto de números pares distintos usando números de 0 - 9, pedi para que eles me entregasse suas resoluções. Muitos não resolveram e um me entregou dessa forma que segue na foto:

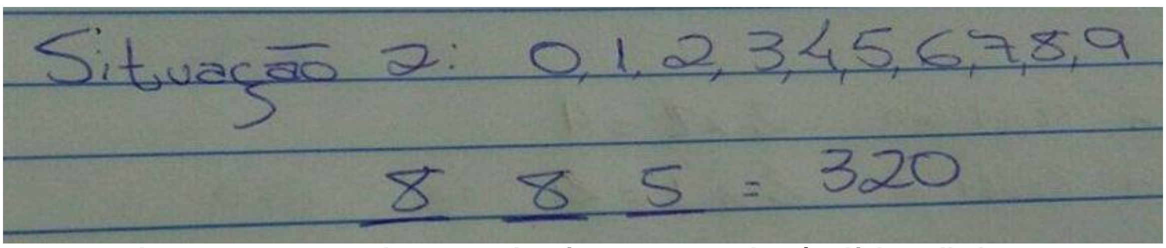


Figura 28Resolução incorreta de números pares de três dígitos distintos

Perceba que o aluno colocou 5 números na última casa sendo as possibilidades de números pares, na primeira ele tirou o número que o usou na última casa e o zero. Diante desse exercício expliquei aos alunos que este tipo de exercício existe uma certa complexidade, pois temos restrição na casa das unidades (os números serem pares) e na casa das centenas (o zero não entra), disse que a dificuldade do exercício é fazer todas restrições ao mesmo tempo, na casa das unidades as possibilidades são 2, 4, 6, 8, 0, e na casa das centenas é a ausência do zero, porém, como estamos falando de possibilidades, quando dizemos que temos 5 números pares na casa das unidades e 8 números na casa das centenas, não conseguimos garantir de fato a quantidade certa de número pares, pois podemos pensar e se o número que está na casa das unidades seja o zero, então na casa das centenas podemos usar 9 números, portanto, disse aos alunos que se quiséssemos achar a quantidade de números pares, deveríamos fazer tudo separado. Entretanto, disse aos alunos que tinha uma forma mais rápida e certeira para achar os números pares, dei um exemplo a eles se numa sequência numérica de 11 números no total, se 5 são ímpares, quantos são os números pares, todos responderam 6, fiz mais uma pergunta, que conta que vocês fizeram para determinar os números pares? Disseram a diferença do valor total pelos números impares. Então conclui o raciocínio que se queremos determinar quantos números pares distintos temos de três dígitos utilizando os números de 0 – 9, basta acharmos a quantidade total de algarismos distintos de três dígitos, a quantidade de números ímpares distintos de três dígitos, e por fim efetuar a diferença entre eles, obtendo assim os números pares. Veja:

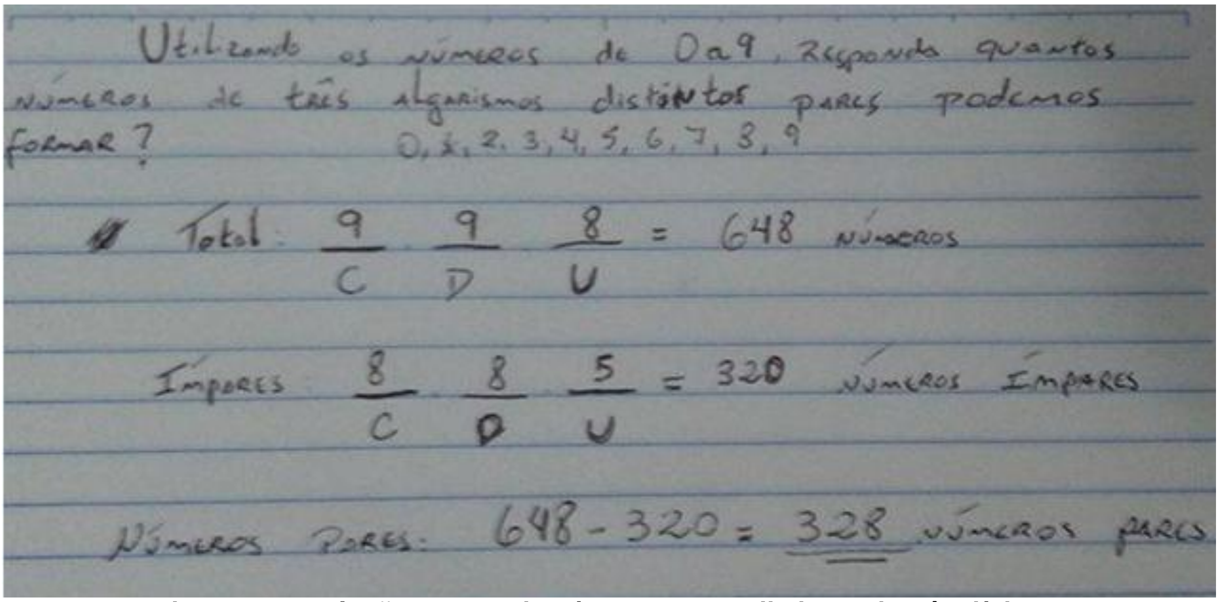


Figura 29Resolução correta de números pares distintos de três dígitos

5º Momento: Quando a ordem é importante e quando ela é desprezada

Neste momento os alunos já estavam habituados a trabalhar com o PFC, porém chegou o momento dos alunos analisarem alguns tipos de situações e perceberem que certas situações a ordem das escolhas são importantes, e outras precisam ser desprezadas. O exemplo que eu passei a eles foi o seguinte: Temos três pessoas A, B e C numa corrida, sendo que terá premiações para o primeiro e segundo lugar, quantas são as possibilidades que esses três ganhadores ganhem as premiações? Pedi para que os alunos me descrevessem quais seriam as opções de primeiro e segundo lugar, fui colocando na lousa conforme eles iam dizendo: AB, AC, BA, BC, CA e CB, totalizando 6 possibilidades. Perguntei como poderia ser feito com o PFC, eles me responderam em primeiro lugar temos 3 possibilidades e em segundo lugar temos 2 possibilidades, uma vez que o primeiro lugar já estava ocupado, 3x2 = 6. Coloquei uma nova situação na lousa: Temos três pessoas A, B, C para formar uma dupla, quantas são as possíveis duplas que podemos formar com essas três pessoas? Assim que terminei de colocar na lousa, alguns alunos disseram, “mas professor não é a mesma situação que o professor colocou antes?”. Então falei a eles vamos analisar a situação coloquei todas as opções novamente do exercício anterior AB, AC, BA, BC, CA e CB e disse que o exercício estava querendo duplas, aí perguntei olhem para AB e BA, elas não são a mesma dupla? Assim como AC e CA e BC e CB, aqui expliquei que terá situações que a ordem das escolhas não importa na hora da contagem, o importante nesse caso é que a pessoa foi chamada para compor a dupla, seja ela chamada em primeiro ou em segundo, portanto a partir de agora, teremos que analisar cada situação se a ordem das escolhas é importante ou serão desprezadas.

Quando a ordem for desprezada disse aos alunos que tínhamos que dividir o resultado das possibilidades encontradas pela permutação da quantidade das escolhas.

Cada exercício que foi passado aos alunos nessa etapa, foi perguntado a eles, vocês acham que as ordens das escolhas são importantes? E eles respondiam conforme a análise do problema.

Foi dado uma lista aos alunos com alguns exercícios e descreverei aqui, alguns dos exercícios que acertaram e que erraram:

1. Num colégio, há 5 bons esportistas. O professor de educação física vai escolher 2 de deles para representar a escola. Quantas são as possibilidades dessa escolha?

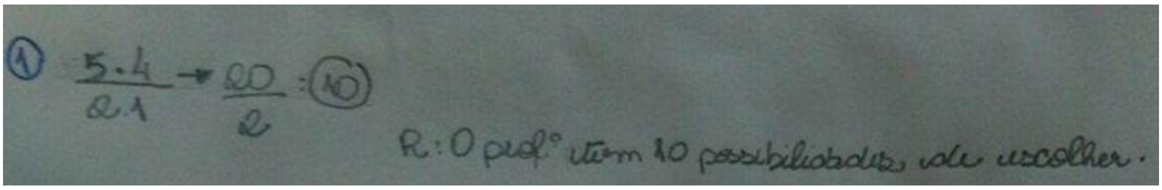


Figura 30Ex 1: Resolução correta

Note que o aluno de forma correta dividiu o valor, desprezando a ordem.

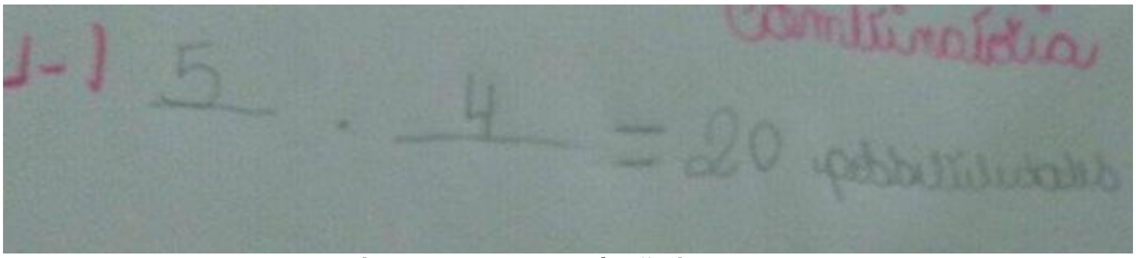


Figura 31Ex 1: Resolução incorreta

Esta aluna não desprezou a ordem, portanto, seu cálculo está incorreto, pois o importante é escolher dois, independente de que será chamado em primeiro ou segundo.

2. Um coquetel é preparado com três bebidas distintas. Se existem 7 bebidas distintas, quantos coquetéis diferentes podem ser preparados?

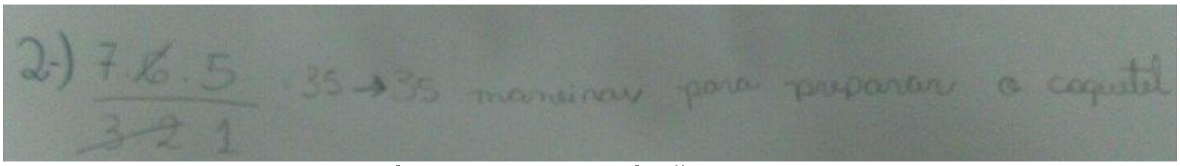


Figura 32Ex 2: Resolução correta

O aluno desprezou a ordem de forma correta.

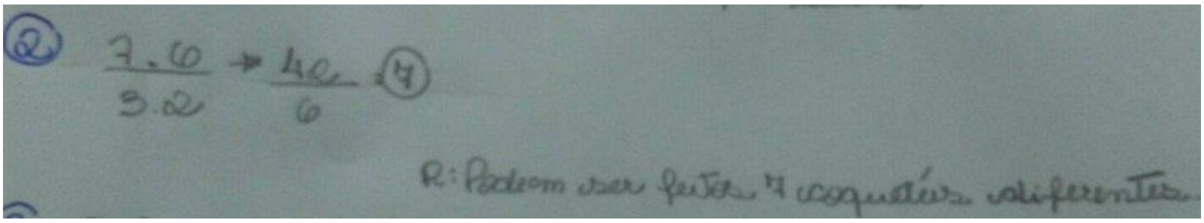


Figura 33Ex 2: Resolução incorreta

O aluno de forma equivocada não colocou a terceira bebida, pois é um coquetel que se escolhe três bebidas

3. Sobre uma circunferência são marcados 9 pontos, dois a dois distintos. Quantas retas podem ser construídas passando por estes 9 pontos?

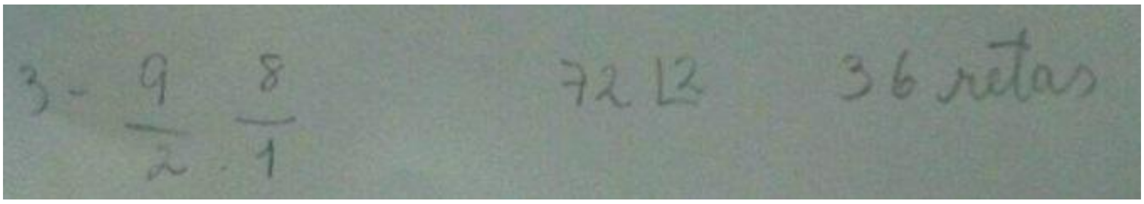


Figura 34Ex 2: Resolução correta

O aluno fez corretamente, pois o mesmo desprezou a ordem das retas.

Figura 35sem resolução

Um aluno deixou em branco, pois não conseguiu fazer.

4. Uma prova consta de 10 questões das quais o aluno deve resolver 5. De quantas formas ele poderá escolher as 5 questões?

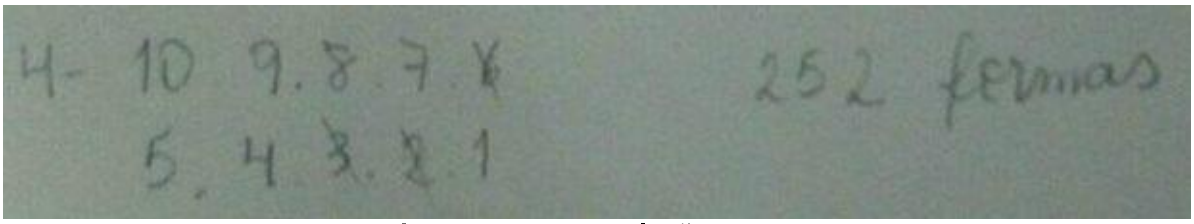


Figura 36Ex 4: Resolução correta

Todos alunos acertaram essa questão.

5. Uma organização dispõe de 8 economistas e 5 engenheiros. De quantos modos podemos formar uma comissão com 7 membros, sendo 3economistas e 4 engenheiros?

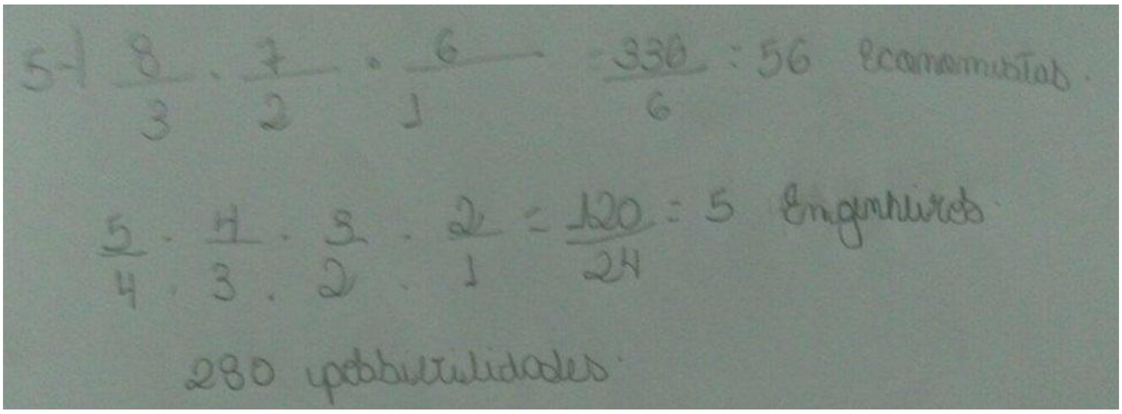


Figura 37 Ex 5: Resolução correta

O aluno resolveu de forma correta, desprezando a ordem e multiplicando os valores no final.

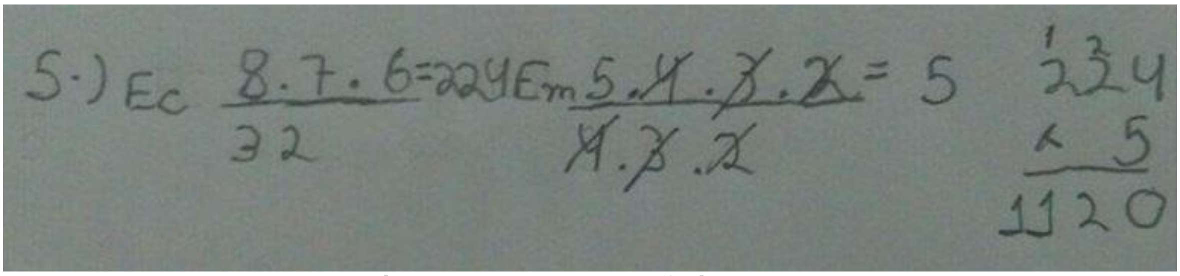


Figura 38Ex 5: Resolução incorreta

O aluno errou cálculos, mas perceba que ele entendeu o desprezo da ordem.

6. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar empregando os caracteres 1, 3, 5, 6, 8 e 9?

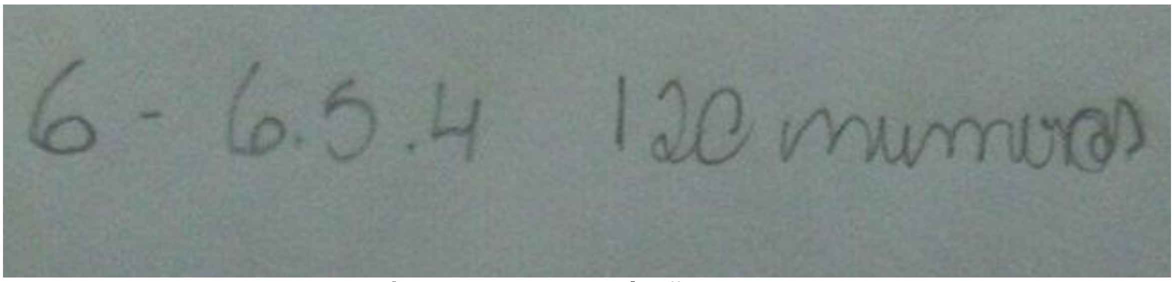


Figura 39Ex 6: Resolução correta

O aluno desenvolveu corretamente.

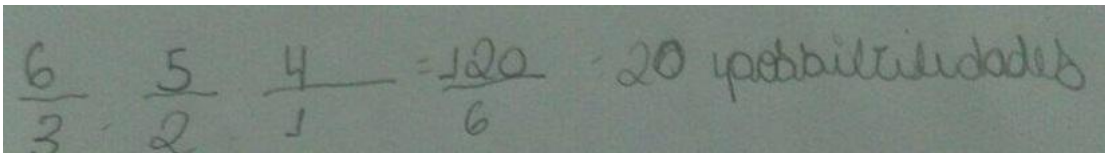


Figura 40Ex 6: Resolução incorreta

O aluno desprezou a ordem, porém nesse exercício a ordem não pode ser desprezada uma vez que é formação de números.

7. O quadrangular final de um torneio de Vôlei é disputado por 4 seleções:Brasil, Canadá, Cuba e EUA. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados(1º,2º e 3º)

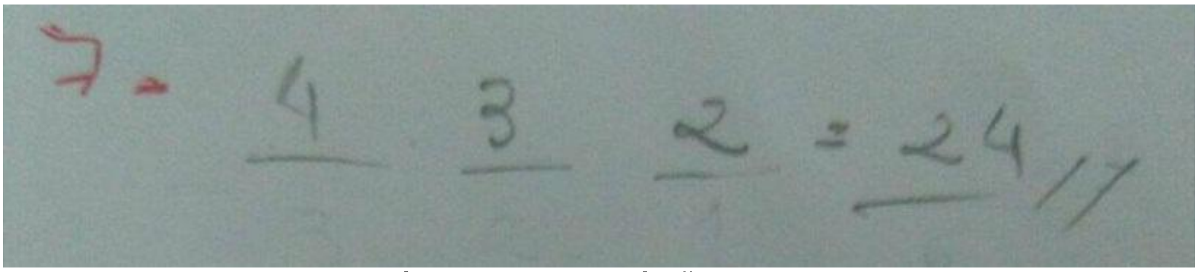


Figura 41Ex 7: Resolução correta

Mais uma resolução correta, mostrando que a ordem é importante

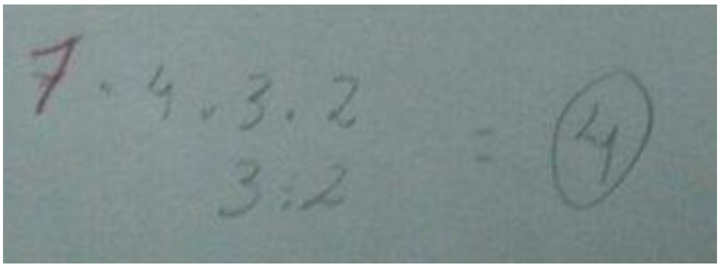


Figura 42Ex 7: Resolução incorreta

Forma incorreta, pois o aluno desprezou a ordem, e neste exercício a ordem em que os times aparecem faz diferença.

8. O vagão de um trem possui 7 portas. De quantas maneiras distintas um passageiro pode entrar no trem e sair dele por uma porta diferente da que entrou?

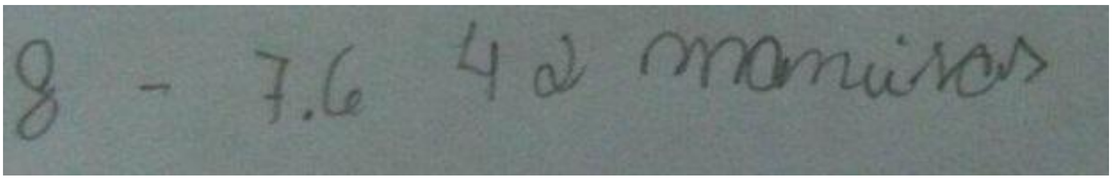


Figura 43Ex 8: Resolução correta

O aluno acertou, pois o mesmo pensou em uma porta de entrada e uma porta de saída, então a ordem aqui é importante.

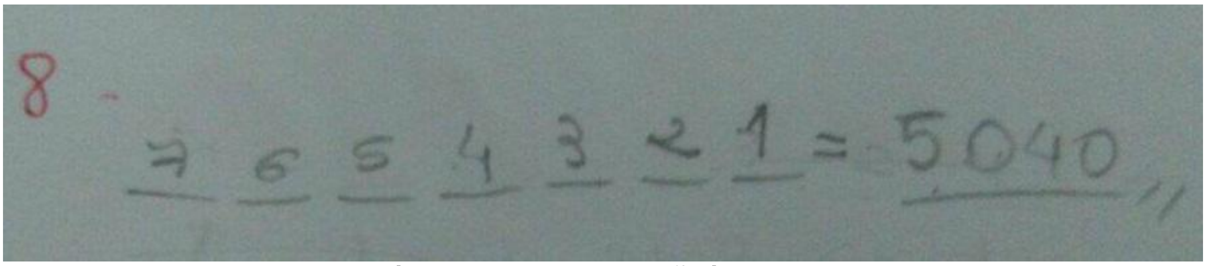


Figura 44Ex 8: Resolução incorreta

O aluno interpretou o exercício de forma equivocada.

9. Um artista tem 3 cartolas, 4casacos e 2 bengalas, todos diferentes.Quantas apresentações ele pode fazer sem repetir as três mesmas peças.

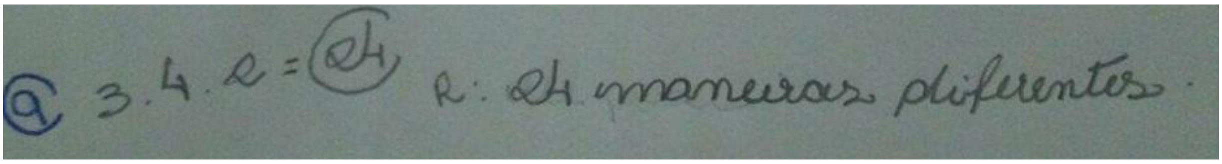


Figura 45Ex 9: Resolução correta

O aluno simplesmente multiplicou as peças de roupa obtendo o resultado.

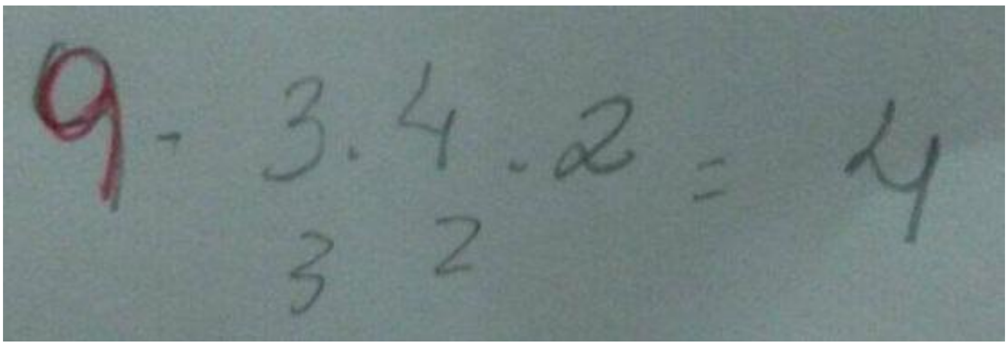


Figura 46Ex 9: Resolução incorreta

O aluno desprezou a ordem, neste exercício era apenas para multiplicar as peças.

10. Quantos anagramas podemos obter da palavra PASTEL? Quantos começam por L? Quantos terminam por vogal?

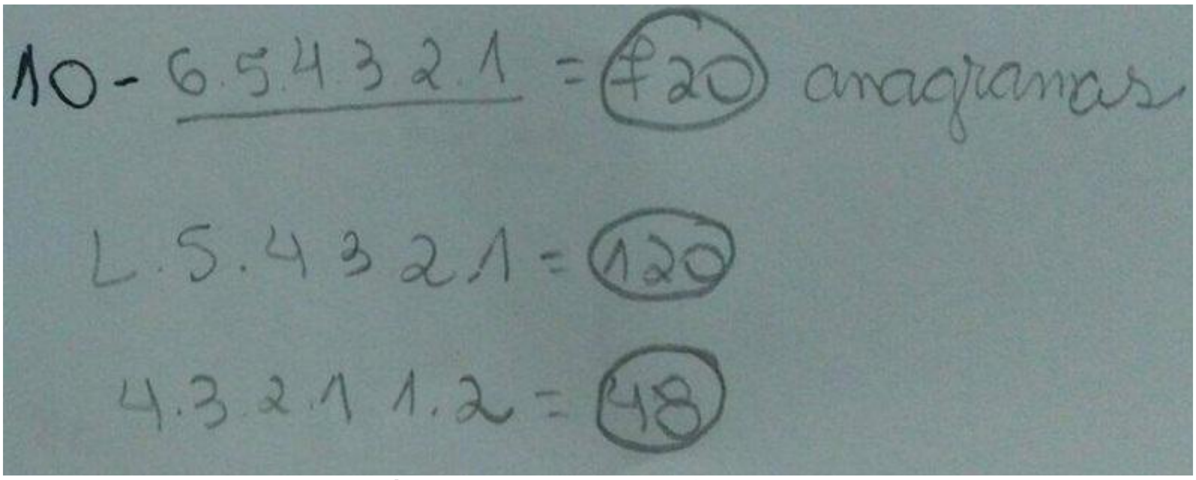


Figura 47Ex 10: Resolução Correta

Forma correta, anagramas a ordem das letras tem importância.

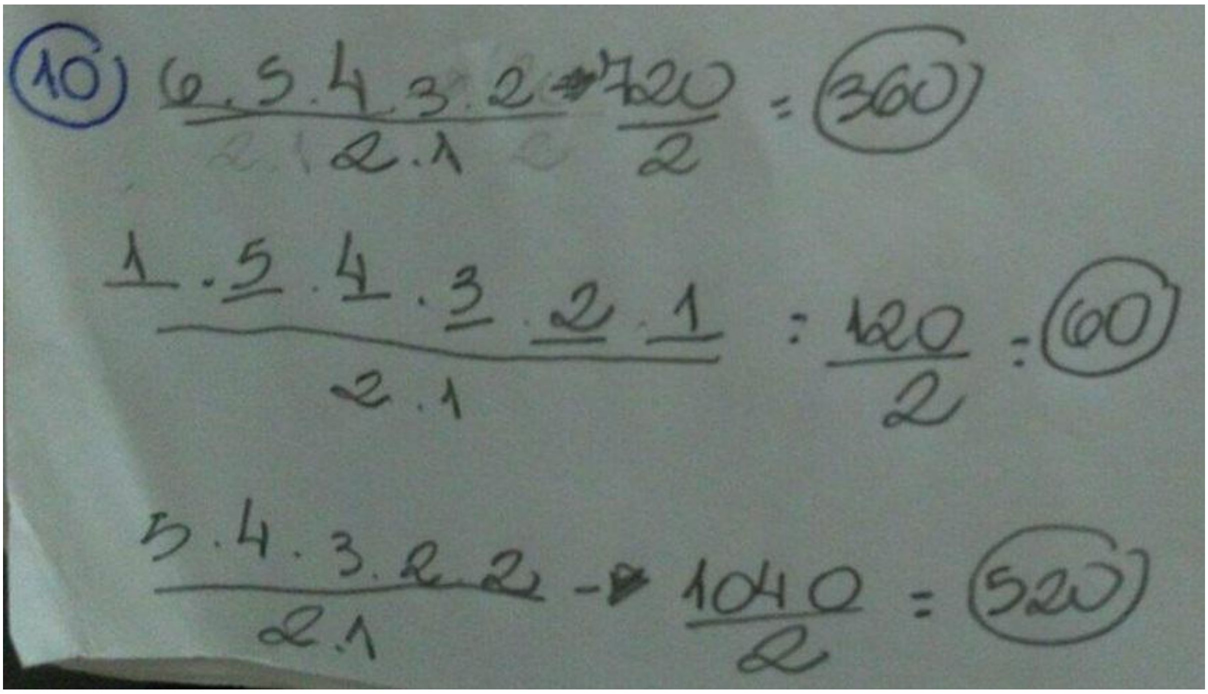


Figura 48Ex 10: Resolução incorreta

O aluno desprezou a ordem, porém em anagramas a ordem em que as letras ficam dispostas tem a importância, se você altera apenas uma letra de lugar, já temos um anagrama diferente do que tínhamos.

Ao final de todas as atividades de contagem utilizando apenas o PFC sem se preocupar com o uso de fórmulas, percebeu-se grande interação dos alunos na sua totalidade. A parte negativa de todo esse processo foi a falta de tempo para que pudesse explorar mais conceitos e mais problemas desse tema. Talvez na próxima aplicação sem se preocupar com o tempo de cumprimento, os resultados sejam ainda melhores do que foi obtido.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal desta dissertação foi mostrar uma abordagem diferenciada da Análise Combinatória na 2ª série do Ensino Médio, onde deixamos de utilizar fórmulas mecanizadas de permutação, arranjos e combinações, e desenvolvermos os exercícios através do uso do Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Acreditamos que ao invés do aluno "decorar" uma fórmula, ele tenha que analisar cada situação que os exercícios apresentam e desenvolvê-los apenas com o uso do PFC, seja exercícios de permutar objetos, seja exercícios que a ordem da colocação de cada objeto faça diferença e também aqueles que a ordem da colocação seja desprezada.

A proposta é mostrar tanto para alunos quanto para professores que a Análise Combinatória não é da maneira que muitos falam que é uma matéria que apresenta um alto nível de dificuldade. O que vemos é que a dificuldade que muitos falam é pelo motivo de ainda acreditarem que a única forma de resolução destes exercícios é decorando fórmulas. Muito pelo contrário, quando analisamos cada situação e utilizamos como ferramenta o PFC não temos que nos preocupar com fórmulas.

Se tivéssemos um maior tempo para trabalhar com esta matéria, pois temos um currículo que precisamos cumprir, acreditamos que podíamos explorar muitos mais os conteúdos abordados e ir além deles.

A ideia de usar o PFC como principal ferramenta nas resoluções de exercícios da Análise Combinatória foi aplicada em uma 2ª série do Ensino Médio comentada no capítulo anterior. Percebemos que diante das atividades os alunos tiveram grande interação envolvimento com a disciplina, com acertos e erros os alunos compreenderam a matéria, e tivemos como retorno aquilo que esperávamos.

Enfim, esperamos que esta dissertação possa ser usada por alunos e professores no ensino da Análise Combinatória.

REFERÊNCIAS

BERGE, C. **Principles of Combinatorics**. 1. ed. New York: Academic Press, 1971. 175p.

BIGGS, N. L. **The Roots of Combinatorics**. Historia Mathematica, Egham, Inglaterra, n.6, p.109-136, 1979.

BORBA, R. E. S. R.; PESSOA, C. A. S. **O desenvolvimento do raciocínio combinatório dos anos iniciais aos finais da escolarização básica**. Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Eduacação Matemática - IV SIPEM, Taguatinga - DF, n.2009, p.1-21, 2009.

BRASIL, M. E. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Matemática)**. Brasília: MEC/SEMT, 1999. 152p.

BRASIL, M. E. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: Secretária de Educação Média e Tecnológica, 2000. 58p.

BRASIL, M. E. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEMT, 2002. 150p.

BRASIL, M. E. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEMT, 2014. 92p.

CARVALHO *et al.***Análise Combinatória e probabilidade**. Rio de Jeneiro: Graftex, 1991. 352p.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. **Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1988. 64p.

LIMA *et al.***A Matemática do Ensino Médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 303p.

LLOYD, E. K.; WILSON, R. J. **Combinatorics**. London: Geometries and Topology, 1990. 965p.

NEEDHAM, J. **Science and Civilisation in China**. London: Cambridge University Press, 1959. 58p.

PINTO, V. G. **Proposta Curricular CBC Ensino Médio**. Minas Gerais: Secretária da Educação, 2011. 32p. Disponível em: <www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/disciplinas/2016.2/esp00001/biblioteca/2011-minas-gerais-ensino-medio.pdf> Acesso em: 16 ago. 2017

VAZQUEZ, C. M. R. **O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por meio de Atividades Orientadoras em uma Escola Estadual do Interior Paulista**. 2011. 90f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - UFSCar, São Carlos, 2011.

WIELEITNER, H. **Historia de la Matemática**. 2. ed. Barcelona: Labor, 1932. 134p.

Stomachion. Disponível em: <https://www.google.com.br/search?q=stomachion&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjQ0Nyy-eHaAhUBG5AKHbc8CosQ_AUICigB&biw=1366&bih=662#imgrc=ZQw9RMX1OJCkLM:> Acesso em: 30 abr. 2018