UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

SANDRA IRIS NAVEIRO GALERA

ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO: O CIRCUNCENTRO NAS TAREFAS VIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

SOROCABA

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

SANDRA IRIS NAVEIRO GALERA

ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO: O CIRCUNCENTRO NAS TAREFAS VIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Sandra Iris Naveiro Galera

ORIENTADOR: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Sandra Iris Naveiro Galera

ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO: O CIRCUNCENTRO NAS TAREFAS VIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA

2018

“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse, mas o ato de chegar lá que concede a maior satisfação.”

— Carl Friedrich Gauss

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Sandra Iris Naveiro Galera, realizada em 31/08/2018:

Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira
UFSCar

Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela
UFSCar

Prof. Dr. Nelson Antônio Pirola
UNESP

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida.

Aos meus queridos pais Carlos Tadeu e Maria pelo apoio incondicional aos meus estudos, desde a infância à concretização deste sonho.

Aos meus amados filhos Lucas e João Pedro pelo incentivo e alegria que desprenderam durante todo o desenvolvimento da pesquisa, mesmo que por vezes, superando minha ausência.

Ao meu esposo Carlos Henrique por me apoiar na decisão de ingressar no Mestrado.

Ao meu irmão Carlos Naveiro que sempre promoveu discussões pertinentes à educação enriquecendo meu aprendizado.

À minha madrinha Izabel que sempre esteve ao meu lado nos momentos mais importantes da minha caminhada.

Aos meus sobrinhos Otávio, Isabela e Beatriz por alegrarem a minha vida.

Aos meus sogros Inês e Antônio Carlos e família pelo apoio e incentivo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Paulo César Oliveira que gentilmente me aceitou como orientanda, voltando total apoio em todos os momentos da pesquisa e me presenteou com grande aprendizado.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), que financiou e possibilitou a realização deste trabalho.

A todos os amigos que fiz durante o PROFMAT. Sempre juntos na superação dos desafios.

A todos os meus professores do PROFMAT pela contribuição efetiva durante as aulas e orientações para o exame de qualificação.

À direção e coordenação da escola Prof.ª Lienette Avalone Riberio que me apoiaram durante a pesquisa.

Aos educadores e amigos Luís Rossi e Adriana Innocêncio pelo carinho e aprendizado diário que me proporcionam.

E, finalmente, uma imensa gratidão aos alunos do 9º ano participantes da pesquisa de campo que não mediram esforços para realizar as tarefas e a todos os meus ex-alunos e alunos, afinal foram e são os grandes protagonistas da minha história como educadora.

RESUMO

A presente pesquisa de natureza qualitativa, contemplou um trabalho de campo voltado ao aprendizado de geometria, mais precisamente sobre a construção e apreensão do conteúdo circuncentro de um triângulo. A questão objeto de pesquisa se baseou em quais são as contribuições das tarefas geométricas planejadas segundo a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através de Resolução de Problemas, voltadas a alunos do 9°ano do Ensino Fundamental. Os sujeitos participantes (em total de 24 alunos) da pesquisa pertencem a uma unidade escolar do município de Tatuí, Interior de São Paulo. Para subsidiar a pesquisa fizemos um estudo da abordagem de cada conteúdo que contribui para o conceito do circuncentro, com base nos documentos oficiais PCN e Currículo do Estado de São Paulo. Nossa proposta de tarefas teve como objetivo complementar o que já tem sido trabalhado em sala de aula. Delineamos, brevemente, no aporte teórico, como a Resolução de Problemas foi estudada desde a colocação dos problemas singulares até os estudos atuais pelo grupo GTERP (Grupo de Trabalho e Estudos em resolução de Problemas) através da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de ONUCHIC, 1999. Diante do objetivo, aplicamos três tarefas desenvolvidas, segundo as etapas da metodologia em questão e analisamos, suas contribuições para o aprendizado de geometria, especialmente o conteúdo circuncentro de um triângulo, suas propriedades e aplicações. As produções dos alunos foram analisadas de forma qualitativa-interpretativa e, desta forma, inferimos, com exemplos pontuais, como as faces do aprendizado geométrico (percepção, concepção, representação e construção) se fizeram presentes em cada atividade desenvolvida em pequenos grupos de alunos.

Palavras-chave: circuncentro, ensino fundamental, geometria, resolução de problemas, ensino-aprendizagem-avaliação

ABSTRACT

The paper presents a field research focused on the learning of geometry, more precisely on the construction and apprehension of the content about circumcenter of a triangle. The research question is based on what are the contributions of the elaborated and applied geometric tasks permeated by the Teaching-Learning-Assessment Methodology through Problem Solving to the students of the 9th year of elementary school. The research was applied to a 9th grade class from a school in the city of Tatuí, State of São Paulo. To support the research, we did a study on the approach of each geometric content that involves the construction of the circumcenter, in the official documents of the State of São Paulo and we tried to complement it through the proposed tasks. We briefly outline the theoretical contribution, as Problem Solving was studied from the placement of the singular problems to the present studies by the GTERP group through Lourdes de La Rosa Onuchic's Teaching-Learning-Assessment Methodology. Facing the objective, we applied the three tasks developed, according to the steps of the methodology in question and we analyzed, as in the target audience, contributed to the learning of geometry, especially the circumcenter content of a triangle, its properties and applications. The students' productions were analyzed in a qualitative-interpretative way; thus, we infer, with precise examples, how the faces of geometric learning (perception, conception, representation and construction) became present in each assignment.

Keywords: circumcenter, elementary school, geometry, problem solving, teaching-learning-assessment

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMARIO

INTRODUÇÃO

Ao longo dos vinte e um anos de trabalho docente, mais precisamente na formação de alunos do Ensino Fundamental II e Médio na disciplina de matemática, as reflexões e observações foram constantes em torno da geometria, resolução de problemas e suas peculiaridades no aprendizado de cada um dos educandos.

É notório perceber que a defasagem no aprendizado de geometria pode, também, ser consequência da abordagem dos conteúdos de forma linear, sem conexão com outros blocos temáticos propostos em documentos curriculares (Números e Relações, por exemplo), bem como a ausência de trabalho com materiais manipulativos.

Partindo dos pressupostos mencionados, a vida profissional e acadêmica da pesquisadora é permeada por questionamentos sobre formação dos educandos em geometria, suas implicações e como podemos através da resolução de problemas promover uma base consistente de aprendizagem em uma área potencialmente intradisciplinar, ou seja, aquilo que é próprio ou pertence a uma única disciplina.

Em 1997 iniciei minha carreira como professora da rede pública do estado de São Paulo. Ministrei diversas aulas como professora eventual e substituta das disciplinas de Matemática e Ciências. No ano de 2004 assumi o cargo de professora efetiva do estado de São Paulo, na cidade de Tatuí e comecei também, a lecionar no setor privado. No último passei a ministrar aulas voltadas apenas aos conteúdos de Geometria, convencionalmente denominada de ‘frente’ em sistemas escolares apostilados. A paixão começou a partir deste ponto. Minhas concepções sobre a área escolar da geometria começaram a mudar gradativamente e o olhar sobre a forma com a qual ensinávamos essa matéria tornou-se uma grande preocupação.

No ano de 2016 ingressei no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) na UFSCar, polo Sorocaba. Durante o segundo semestre cursamos Geometria (MA 13) e minhas aspirações quanto à geometria plana e seu ensino aumentaram, tanto no aspecto de aprimoramento de saberes proporcionados pelo desenvolvimento da referida disciplina quanto no processo ensino-aprendizagem dos meus alunos.

No terceiro semestre letivo cursamos a disciplina Avaliação educacional (MA 42), ministrada pelo orientador dessa pesquisa. No decorrer das aulas o projeto de pesquisa para o desenvolvimento de uma dissertação na área da Educação Matemática sobre ensino-aprendizagem em Geometria Plana foi sendo lapidado.

A participação nas atividades de pesquisa do Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática (GEPLAM) propiciou o conhecimento sobre a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas difundida pela Profª Drª Lourdes de la Rosa Onuchic, líder do Grupo de Trabalho e Estudo sobre Resolução de Problemas (GTERP).

A identificação dessa pesquisadora com a metodologia de resolução de problemas em questão foi imediata, tendo em vista as minhas ações docentes em sala de aula. Em termos do relatório da pesquisa de dissertação de mestrado, destacamos aspectos que justificam esta identificação, na condição de professora-pesquisadora. Como em D`Ambrósio (2006, p.83) e “entendemos o professor-pesquisador como aquele que encara a pesquisa como o ato de construir novas ideias e entendimentos, ou seja, uma ação que resulta em aprendizagem”. No nosso caso a pesquisa gerou compreensões sobre a aprendizagem matemática, em especial a geométrica.

Para o planejamento do trabalho de campo da dissertação do Mestrado, foi analisado o tratamento metodológico dado aos conteúdos de geometria nos seguintes documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) e o material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo, o Caderno do Professor e do Aluno para os anos do Ensino Fundamental II.

Na análise documental constatamos que elementos de geometria como **os pontos notáveis de um triângulo** não são contemplados nos referidos materiais de apoio. Conceitos geométricos necessários para abordagem desse conteúdo como as mediatrizes, losango, circunferência e triângulos, são distribuídos em diversas situações de aprendizagem como objeto para construção de outros conceitos inter-relacionados nos eixos Relações e Números. Podemos exemplificar uma tarefa na qual se é pedido para encontrar na reta dos números reais o número ½: a motivação é a construção da mediatriz para obtenção do ponto médio de um segmento de uma unidade.

Desta forma, do planejamento à avaliação contínua das atividades produzidas pelos alunos, foi proposta uma sequência didática com o objetivo de complementar as Situações de Aprendizagens já existentes no Caderno do Professor e do Aluno, de forma a introduzir, em especial, o ponto notável circuncentro do triângulo. Em termos de questão de investigação da pesquisa, elaboramos a seguinte formulação: **quais as contribuições que as tarefas trarão ao aprendizado dos alunos do 9º ano, referentes aos conceitos geométricos necessários para construção do circuncentro do triângulo, permeadas pela metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas?**

A referida tríade ensino-aprendizagem-avaliação implica no estudo dos métodos utilizados desde a formulação dos problemas pelo professor, realização e análise das produções pelos alunos.

Os estudos neste âmbito foram e ainda são realizados pelo grupo GTERP (Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas), um grupo de pesquisadores brasileiros, coordenados pela Prof.ª Drª Lourdes de La Rosa Onuchic, na UNESP de Rio Claro, o qual passou a empregar a expressão composta ensino-aprendizagem-avaliação, ao considerar um trabalho em que os três elementos ocorrem simultaneamente. Nesse processo, é desejável que enquanto o professor ensina, o aluno de forma ativa participa do processo e a avaliação seja realizada por todos os integrantes do processo, tanto alunos quanto professor. Um dos princípios é que o aluno elabore justificativas de seu trabalho e atribua sentido ao que faz.

O objetivo geral da pesquisa consiste em analisar as produções escritas dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental envolvidos com a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de resolução de problemas, na construção dos conceitos e aplicação do conteúdo geométrico circuncentro do triângulo. Os materiais propostos como recursos didáticos nas aplicações das tarefas foram: régua e compasso, barbante, canudos, dicionário, e um recurso computacional.

De forma a atender às necessidades de nossa investigação, desenvolvemos uma pesquisa de natureza qualitativa, na modalidade interpretativa. A análise da produção de informações deu-se a partir da produção escrita dos alunos, das fases de metodologia de resolução de problemas utilizada na pesquisa, além de categorias pré-estabelecidas e denominadas faces do aprendizado geométrico: percepção, concepção, representação e construção.

O relatório da pesquisa foi subdividido em seis capítulos, acrescido das referências bibliográficas efetivamente utilizadas no decorrer da redação desta dissertação de mestrado. O primeiro capítulo trata da introdução da dissertação. O Capítulo 2 foi destinado à análise do tratamento dado à geometria, às construções geométricas e às propriedades das figuras geométricas, tomando por base a resolução de problemas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) e no Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2014-2017).

No capítulo 3, abordamos uma breve história de como os problemas aparecem desde os primórdios; como o ensino através de problemas interfere na compreensão da matemática pelos alunos; bem como a concepção sobre a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas em geometria.

O Capítulo 4 traz o percurso metodológico traçado para o desenvolvimento da nossa pesquisa, especificamente, a modalidade da pesquisa, os sujeitos participantes, as etapas do trabalho de campo, os instrumentos para obter a produção de informações, bem como a forma de análise do material a ser investigado.

O Capítulo 5 contemplou os resultados obtidos a partir da análise da produção das informações obtidas no decorrer do trabalho de campo.

No capítulo das Considerações Finais, apresentamos as contribuições advindas da análise da parte empírica da pesquisa frente ao que foi analisado dos documentos curriculares oficiais vigentes, bem como reflexões sobre a metodologia através da resolução de problemas para o campo da pesquisa em Educação Matemática.

Reservamos o tópico ‘referências bibliográficas’ para listar todo o material efetivamente utilizado na redação desta dissertação de mestrado.

2. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA CONTEÚDOS GEOMÉTRICOS NOS DOCUMENTOS CURRICULARES

Destinamos este capítulo à análise do tratamento dado à geometria, às construções geométricas e às propriedades das figuras geométricas, tomando por base a resolução de problemas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) e Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2014-2017).

2.1. A Geometria e a Resolução de Problemas nos anos finais do Ensino Fundamental: um olhar sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais

Para tratar do ensino de Geometria é de grande valia mencionar o percurso do ensino da Matemática e sua influência atualmente. Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) contém a descrição de parte desse percurso.

A princípio esse documento retrata a trajetória do ensino da matemática com ênfase no movimento de renovação conhecido como Matemática Moderna que influenciou países diversos, inclusive o Brasil.

No decorrer das décadas de 60 e 70, a matemática juntamente com as Ciências Naturais formavam uma via de acesso de grande privilégio para o pensamento científico e tecnológico tornavam-se base para o vínculo com a política de modernização econômica. Houve assim a necessidade de renovar a didática da disciplina aproximando a Matemática escolar da Matemática pura, subsídio oportuno para os fins do Movimento da Matemática Moderna.

O texto do PCN retrata a preocupação com uma reforma pedagógica que levou a concepção da necessidade de novos estudos e consequentemente a ampliação na área da pesquisa. A Didática da Matemática ficaria voltada ao estudo de sua linguagem e da lógica o que trouxe problemas principalmente aos anos iniciais, como a abstração neste segmento escolar. A linguagem da Teoria dos Conjuntos foi introduzida a tal rigor que comprometia o ensino do Cálculo, da Geometria e das Medidas.

> No Brasil, o movimento Matemática Moderna, veiculado principalmente pelos livros didáticos, teve grande influência, durante longo período, só vindo a refluir a partir da constatação de inadequação de alguns de seus princípios básicos e das distorções e dos exageros ocorridos (BRASIL, 1998, p.19).

O declínio do Movimento da Matemática Moderna mobilizou na década de 80 o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) dos Estados Unidos, que apresentou o documento “Agenda para Ação” no qual enfatizava a resolução de problemas como foco do ensino de Matemática:

> Entre essas ideias também se compreendiam a importância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, além dos cognitivos, na aprendizagem da Matemática, o que imprimiu novos rumos às discussões curriculares. (BRASIL, PCN, 1998, p.20)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p.40) trazem a resolução de problemas, “como um eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática” e ao colocá-la como procedimento, defende uma proposta resumida nos princípios:

- O ponto de partida da atividade proposta ao aluno não é a definição e sim o problema: os conceitos, ideias e métodos matemáticos devem abordados através da exploração (o aluno deve desenvolver estratégias a partir de uma situação de modo a resolvê-la)

- O Problema não é um exercício a se resolver a partir de fórmulas, operações de maneira quase mecânica: assim se considera problema uma atividade que leva o aluno a interpretar seu enunciado e organizar as hipóteses que lhe são apresentadas.

- Sequências de atividades cujas resoluções se aproximam sucessivamente de um conceito e após aplica o que aprendeu para resolver outros desafios: Isso implica em retificações e transferências do que se construiu de forma análoga à história da matemática.

- Construção de um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas: articulação de vários conceitos apreendidos.

- A resolução de problemas como orientação para aprendizagem:

> a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (BRASIL, 1998, p.33)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) tratam a resolução de problemas como orientação para a aprendizagem, porém, sem apresenta-la pautada em uma concepção.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais contemplam a seleção de conteúdos em quatro blocos eixos: Números e Operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), Grandezas e Medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento), Tratamento da Informação (lida com dados estatísticos, tabelas e gráficos, raciocina utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória) e Espaço e Forma. Este último traz a Geometria como objeto de estudo, cujo propósito de aprendizagem é desenvolver o pensamento que subsidia compreender, descrever e representar, organizadamente, o mundo em que o aluno vive.

Ao se tratar da Geometria, assim como os demais eixos dos conteúdos curriculares a demanda é de um conhecimento singular e com interferência do meio e não necessariamente da forma que as vezes se conduz com uma concepção linear:

> Por vezes, essa concepção linear faz com que, ao se definir qual será o elo inicial da cadeia, tomem-se os chamados fundamentos como ponto de partida. É o que ocorre, por exemplo, quando se privilegiam as noções de “ponto, reta e plano” como referência inicial para o ensino de Geometria ou quando se tomam os “conjuntos” como base para a aprendizagem de números e operações, o que não é, necessariamente, o caminho mais adequado. (BRASIL, 1998, p.22)

Vale ressaltar que, se o trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998). Mas, é importante reconhecer a conexão dos conteúdos da geometria com a própria Matemática e seu desenvolvimento histórico.

Quando se trata especificamente do conhecimento matemático no 6º ao 9º ano do ensino fundamental, esse documento propicia discutir sobre a natureza, as características e os métodos particulares desse conhecimento com objetivo de formar para a cidadania.

Das características peculiares da matemática, as quais se dissociam em frequentes concepções, as de aplicação no cotidiano e das mais complexas elaborações em outras ciências são as de maior especulação. Como explanado no documento, é evidente que não são características dissociáveis:

> No entanto, esse conhecimento vai muito além, criando sistemas abstratos, ideias que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados quase sempre a fenômenos do mundo físico. Fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evoluiu de forma linear e logicamente organizada. (BRASIL, 1998, p.25)

O documento discorre que da pluralidade de sistemas e teorias matemáticas, evidencia-se que há uma variedade de caminhos que ligam a Matemática e o mundo físico como, por exemplo, os sistemas axiomáticos euclidianos e hiperbólicos na Geometria são dois possíveis modelos físicos.

Embora no 8º e 9º ano se inicie um trabalho com algumas demonstrações, com o objetivo de mostrar sua força e significado, é desejável que não se abandonem as verificações empíricas, pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos. (BRASIL, 1998).

Especificamente em relação aos conteúdos da nossa dissertação (mediatriz, circunferência e triângulos), apresentamos no quadro a seguir os procedimentos metodológicos para a abordagem desses conceitos geométricos:

Quadro 1: Conceitos e Procedimentos em Geometria

Conteúdo	**Procedimento metodológico**

Mediatriz do segmento	Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor; Identificação e construção das mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso. (BRASIL, 1998, p.89)
Circunferência	Estabelecimento da razão aproximada entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. (BRASIL, 1998, p.88)
Estudo de triângulos	Verificação das propriedades de triângulos pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos. (BRASIL, 1998, p. 89)

Fonte: elaborado pela pesquisadora

Com relação aos conceitos e procedimentos em geometria esse documento não menciona o circuncentro de um triângulo, desigualdade triangular, lugar geométrico e losango. O motivo pelo qual isso ocorre pode ser interpretado pela especificidade de tais conceitos; um dos nortes motivadores para essa dissertação.

A resolução de problemas na área de Geometria é vista com importância por permitir conexões com o aprendizado de números e medidas, entre outros conteúdos, desde que a criança seja instigada a observar, perceber semelhanças e regularidades e de forma análoga às diferenças. No entanto, a forma linear de apresentação dos conteúdos pode ser um entrave nesta abordagem:

> Assim, por exemplo, a abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas - ainda bastante desconhecida por parte dos professores - quando é incorporada, aparece como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos. (BRASIL, 1998, p. 21)

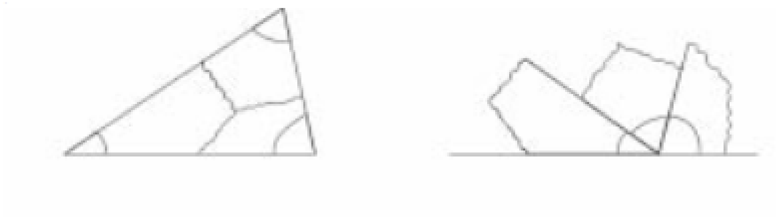
O texto também pontua que o exercício da indução e da dedução em Geometria reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas. Uma vez que o aluno exercita sua capacidade de levantar hipóteses, realizar experimentações, retificar e, por meio de correlações conceituais obter conclusões, discorrendo sobre a tese, tanto as induções quanto as deduções se tornam amplamente férteis na construção do aprendizado.

De fato, é de imediato perceber que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) trazem o procedimento de resolução de problemas como um dos pontos cruciais para o aprendizado da Geometria que se revela em âmbitos diferentes como, por exemplo, através da situação-problema o aluno se dispõe a verificações experimentais de um teorema.

Um exemplo disto é destacado do documento:

Há casos em que a concretização utilizada se distancia da prova formal adotada. Nesses casos, a exemplificação num contexto pode apenas desempenhar um papel de fontes de conjecturas a serem provadas formalmente. Um exemplo desse fato pode ser identificado na comprovação de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale 180º, feita por meio da decomposição e composição de um modelo material de um triângulo. (BRASIL, 1998, p. 126)

Figura 1: Experimentação sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo



Fonte: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf

As construções com régua e compasso e demais instrumentos de medidas, além de contribuir com os aspectos cognitivos, também são de grande importância para construção de conceitos e de forma procedimental leva o aluno a compreender a Geometria de forma mais prática (BRASIL, 1998).

Em suma, este documento curricular mostra que a abordagem dos conteúdos de geometria, assim como os demais, se forem tratados de forma linear e hierarquizada; apenas em função de sua complexidade não permite que o aluno os explore em contextos mais amplos e também cria obstáculos para que os professores mudem sua prática pedagógica a se direcionar ao recurso de resolução de problemas e a participação do aluno.

2.2 A abordagem dos conceitos geométricos através de problemas no Currículo do Estado de São Paulo

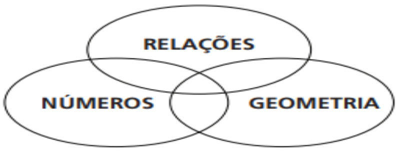
Neste tópico tratamos das concepções do ensino da Geometria e sua apropriação através da Resolução de Problemas com foco nas propriedades específicas das figuras que são objetos deste trabalho, embasadas no Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) e em seu material de apoio, o Caderno do Professor e do Aluno (SÃO PAULO, 2014-2017).

O Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) é um documento que norteia a forma com a qual os conteúdos podem ser trabalhados em todos os anos do Ensino Básico. Em sua apresentação, há o intuito de apoiar o trabalho docente nas escolas estaduais e de contribuir para a melhoria da aprendizagem dos alunos nos níveis de Ensino Fundamental (ciclo II) e Ensino Médio.

O Caderno do Professor consiste em um material de apoio que contém sugestão para subsidiar o trabalho docente na aplicação e mediação das situações de aprendizagem contidas nos Cadernos dos Alunos. Estes últimos são organizados por disciplinas e distribuídos em dois volumes anuais. Neles constam Situações de Aprendizagem.

Em Matemática e suas tecnologias os conteúdos são organizados em três blocos temáticos relacionados entre si: Números, Geometria e Relações.

Figura 2: Números, Geometria e Relações



NÚMEROS	equivalência/ordem simbolização/operações
GEOMETRIA	percepção/concepção construção/representação
RELAÇÕES	medidas/aproximações proporcionalidade/ interdependência

Fonte: http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/783.pdf

O bloco Geometria se baseia na percepção das formas e as relações entre os elementos das figuras planas e espaciais; na construção e na representação das formas geométricas existentes ou abstratas, e na concepção do espaço a compreensão do mundo físico. (SÃO PAULO, 2012)

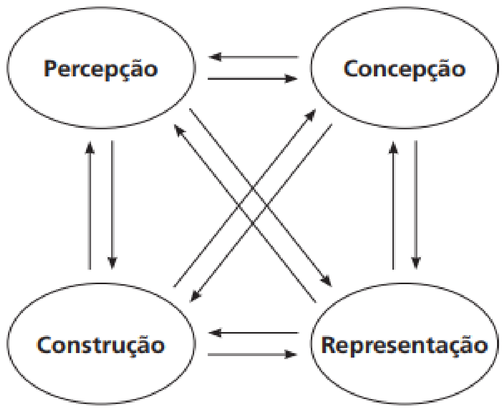
Sobre o processo de ensino-aprendizagem no bloco Geometria podemos destacar que a preocupação inicial, no Ensino Fundamental (especificamente no 6º e 7º ano) é trazer o estudo das formas planas e espaciais para situações concretas. Já a ênfase na construção de raciocínios lógicos, de deduções simples de resultados a partir de outros anteriormente conhecidos poderá ser a tônica dos trabalhos no 8º e 9º ano.

Sobre a Geometria, no decorrer de todos os anos do Ensino Fundamental e Médio, o documento enfatiza:

> Consideramos que a Geometria deve ser tratada, ao longo de todos os anos, em abordagem espiralada, o que significa dizer que os grandes temas podem aparecer tanto nas séries/anos do Ensino Fundamental quanto nas do Ensino Médio, sendo a diferença a escala do tratamento dada ao tema. Por exemplo, o número irracional π, associado aos cálculos da circunferência e do círculo, pode e deve ser apresentado nos cursos de geometria elementar, assim como deve ser trabalhado no Ensino Médio, desta vez em contextos associados à Trigonometria, ao estudo dos corpos redondos e aos conjuntos numéricos. (SÃO PAULO, 2012, p.41)

Da apresentação da Geometria no Ensino Fundamental e Médio, destaca-se o fato de que o conhecimento geométrico se apresenta em quatro faces relacionadas, caracterizam o espaço e não ocorrem linearmente: a percepção, a concepção, a construção e a representação.

Figura 3: Percepção, Concepção, Representação e Construção



Fonte:http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/783.pdf

A face da **percepção** refere-se à observação e caracterização das formas presentes no mundo ao nosso redor e à manipulação de objetos concretos. Frente ao aprendizado de geometria é a face que ocorre por meio de atividades empíricas, ou seja, apoia-se em experiências vividas e observações das coisas. Nesta pesquisa tratamos, por exemplo, da localização das moradias dos alunos por meio de mapas.

A **construção** remete-se à produção de materiais a serem manipulados tal qual a elaboração de objetos em sentido físico. No trabalho de campo com nossos alunos utilizamos manipulações com canudos e barbantes.

A **representação** refere-se à reprodução através de desenhos percebidos ou construídos. Tomamos por base as construções em desenho geométrico: primeiro, por meio do enunciado gráfico e depois com régua e compasso.

A face da **concepção** traz a busca do conhecimento geométrico e a organização dos conceitos através do raciocínio lógico-dedutivo e da teoria: sistematização do conhecimento geométrico; predomínio das definições formais;

presença das propriedades, proposições e demonstrações. Entendemos que em nosso processo de investigação a forma de tratamento às faces (percepção, construção e representação), emerge a concepção geométrica em questão.

Sobre a resolução de problema como procedimento o documento traz e a exploração de cada centro de interesse como uma estratégia fecunda. Assim refere-se:

> Muito além dos problemas estereotipados em que a solução consiste em construir procedimentos para usar os dados e com eles chegar aos pedidos, os problemas constituem, em cada situação concreta, um poderoso exercício da capacidade de inquirir, de perguntar. (SÃO PAULO, 2012 p. 45)

O Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) contém um quadro de conteúdos e habilidades de matemática especificando seu(s) bloco(s) temático(s) em cada ano/série.

É notório que nos quadros de conteúdos e habilidades presentes no referido documento não há as especificidades de cada conteúdo. Neste sentido, tomamos como parâmetro os Cadernos do Professor e do Aluno para identificação das tarefas que envolvem os conceitos a serem trabalhados nessa pesquisa (mediatrizes, losangos, circunferências, triângulos e circuncentro).

Os módulos dos Cadernos do Professor estão divididos em: Orientação Geral sobre os Cadernos; Situações de Aprendizagem; Orientações para Recuperação; Recursos para ampliar a perspectiva do professor e do aluno para a compreensão do tema; Considerações Finais e Quadro de Conteúdos do Ensino Fundamental Anos Finais. (SÃO PAULO, 2014-2017). Às sequências didáticas que possuem problemas subdivididos em etapas que conduzem a apropriação ou aplicação de novos conceitos nomeia-se Situação de Aprendizagem.

Há entre 8 a 16 Situações de Aprendizagem em cada um dos dois volumes dos quatro anos do Ensino Fundamental II.

A seguir, tratamos de cada conteúdo trabalhado em nossa pesquisa no âmbito dos materiais didáticos (Caderno do Professor e do Aluno) do Estado de

São Paulo para o Ensino Fundamental II. Apresentamos as orientações didático-pedagógicas do Caderno do Professor para determinada Situação Aprendizagem, tarefas e o que cada uma das atividades implica em nossa pesquisa bem como as lacunas que podem ser preenchidas e as correlações entre as faces do aprendizado de Geometria (Percepção, Concepção, Construção e Representação).

2.2.1 O tratamento escolar para mediatriz

A mediatriz de um segmento é o conjunto de pontos do plano que equidistam das extremidades desse segmento. Sendo essas características somente de determinados pontos do plano a mediatriz é um lugar geométrico. De acordo com Dutenhefner; Cadar (2015, p.74)

> Lugar geométrico é um conjunto de pontos caracterizado por uma propriedade. Deste modo, uma figura descrita por uma propriedade é um lugar geométrico se:
> (a) Todos os pontos da figura têm a propriedade.
> (b) Somente os pontos da figura têm a propriedade.

No quadro a seguir localizamos no Caderno do Aluno a abordagem desse conteúdo, sua Situação de Aprendizagem e a sessão a qual se encontra e o número de tarefas/etapas.

Quadro 2: O tratamento escolar para mediatriz

Caderno do Aluno	**Situação de Aprendizagem**	**Sessão**	**Tarefas/Etapas**
9° ano, volume 1	Aritmética, Álgebra e Geometria com a reta Real	Você aprendeu?	2
		Leitura e Análise de Texto	1 e 2

Fonte: Elaborado pela Pesquisadora

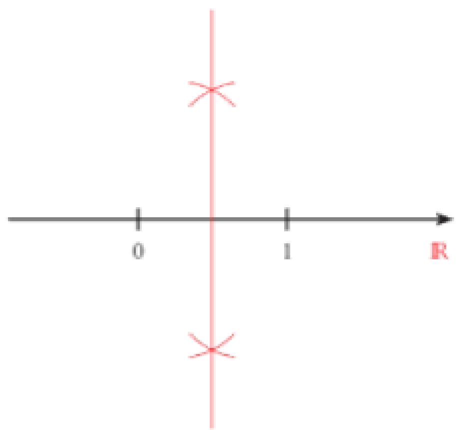
Como visto o tratamento dado a mediatriz se faz em uma única Situação de Aprendizagem no Caderno do Aluno do 9° ano, volume 1. Destaca-se em duas sessões. Na sequência apresentamos a Situação de Aprendizagem e a análise do seu conteúdo.

2.2.1.1. Aritmética, Álgebra e Geometria com a Reta Real

A Situação de Aprendizagem 3, do Caderno do Aluno para o 9º ano, tarefa 2, Sessão “Você Aprendeu?” apresenta a mediatriz como base para construção que leva o aluno encontrar o número racional que representa metade da unidade, vejamos:

> Faça a construção de ½ na reta real (Sugestão: marque com o compasso o número1 e, em seguida, trace a mediatriz do segmento que liga os números 0 e 1)

Figura 4: Construção de $\frac{1}{2}$ na reta real



Fonte: Caderno do Aluno, 9º ano, v.1 (SÃO PAULO, 2014 - 2017, p. 26)

As vertentes do aprendizado geométrico podem ser destacadas nesta atividade do seguinte modo:

- **Percepção:** Identificar a reta numérica para associar cada ponto a um número;

- **Construção:** Produzir com instrumentos como régua e compasso a figura de uma reta numérica, cada ponto igualmente espaçado para representar os números inteiros e construir a mediatriz para determinar os números racionais que representam metades;

- **Representação:** Associar os segmentos de reta representados a partir das construções aos espaços entre os números racionais;

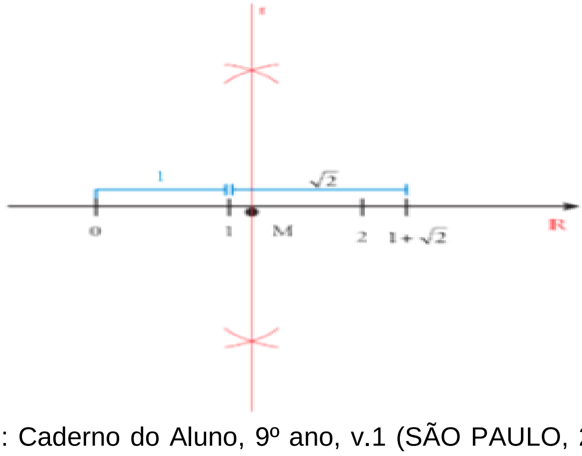
- **Concepção:** Saber localizar na reta numérica os números Inteiros e Racionais que representam metades.

O Caderno do Professor traz orientações de como encontrar o ponto médio a partir da mediatriz para assim localizar o número 0,5 e de forma análoga o número 0,25, porém, sem conceituar mediatriz.

Na Sessão “Leitura e Análise de Texto” da presente Situação de Aprendizagem, temos uma tarefa para encontrar números irracionais na reta numérica Mais uma vez a Mediatriz é pedida como construção suporte. Seu papel na concepção do aprendizado é o mesmo da abordagem da atividade anterior. Segue o enunciado da tarefa:

> **Leitura e Análise de Texto**
> Acompanhe os procedimentos necessários para a construção de $\sqrt[4]{2}$, com régua sem escala e compasso.
> 1. Trace com régua e compasso os números reais 1 e $1 + \sqrt{2}$
> 2. Trace a mediatriz t do segmento de extremos em 0 e $1 + \sqrt{2}$ para determinar M, ponto médio deste segmento.

Figura 5: A mediatriz como suporte para construção de um número Irracional na reta real



Fonte: Caderno do Aluno, 9º ano, v.1 (SÃO PAULO, 2014 - 2017, p. 33-34)

Constatamos que a mediatriz foi suporte para obtenção do ponto médio do segmento que representa a unidade na reta real, o que é claro por sua definição.

2.2.2 O tratamento escolar para triângulos

Os triângulos são trabalhados inúmeras vezes nos materiais didáticos. São as figuras que, por suas propriedades e, também por sua apresentação desde a antiguidade, trazem em sua história um grande atrativo ao ensino da geometria. Segundo Dutenhefner; Cadar (2015, p.18):

> Os segmentos de reta que unem três pontos não colineares A, B e C formam um triângulo, que será indicado como o triângulo ABC. Neste caso, os pontos A, B e C são os vértices e os segmentos AB, BC e CA são os lados do triângulo. Os ângulos $\alpha = C\hat{A}B$, $\beta = A\hat{B}C$ e $\gamma = B\hat{C}A$ são os ângulos internos do triângulo.

Como nosso estudo implica em abordar propriedades dos triângulos desde as possibilidades para sua construção (desigualdade triangular) bem como a intersecção das mediatrizes (circuncentro), é de tamanha importância identificar nos materiais didáticos as atividades e Situações de Aprendizagem que se apropriam dos triângulos e como cada uma traz ou não os estudos dos conceitos que aqui serão tratados (Quadro 3).

Quadro 3: O tratamento escolar para triângulos

Caderno do Aluno	**Situação de Aprendizagem**	**Sessão**	**Tarefas /Etapas**
6° ano, volume 1	Na medida certa: dos naturais às frações	Você aprendeu?	1
6° ano, volume 2	Definir e Classificar experimentando	Atividade Diagnóstica.	1, 2
		Lição de casa	3
		Você aprendeu?	4,5 e 6
6° ano, volume 2	Geometria e frações com Geoplano e malhas quadriculadas	Você aprendeu?	3
7° ano, volume 1	A Geometria dos Ângulos	Você aprendeu?	2 a 6
		Lição de casa	12
7° ano, volume 2	Investigando sequências por Aritmética e Álgebra	Lição de casa	2
8° ano, volume 2	Teorema de Tales: A proporcionalidade na Geometria	Você aprendeu?	1, 2 e 4

8° ano, volume 2	Padrões Numéricos e Geométricos	Pesquisa de campo	Única

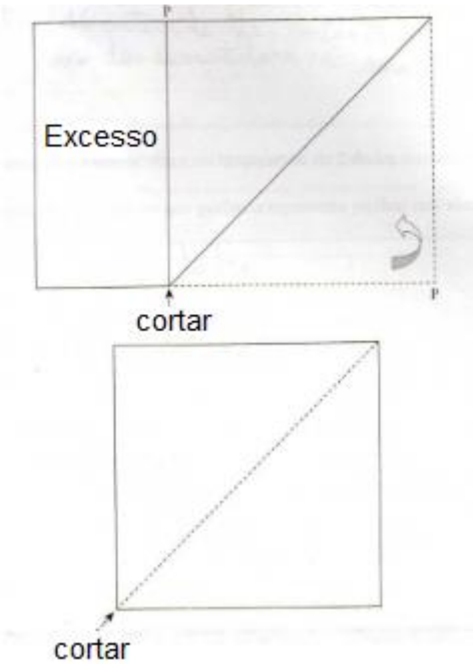
Fonte: Elaborado pela pesquisadora

A seguir, analisamos o tratamento dado ao conceito e propriedades dos triângulos, mesmo que certas tarefas não seja o principal objeto do estudo, mas com importância para a abordagem de outros conceitos da matemática.

2.2.2.1. Na medida certa: dos naturais às frações – As frações no Tangram

A Situação de Aprendizagem 3 apresentada no Caderno do Aluno e Caderno do Professor 6º ano, volume I, aborda o Tangram. Para sua confecção, que ocorre em cinco etapas, discorre um pouco sobre as figuras que o compõem. A Etapa 1 está disposta no enunciado a seguir:

> **As frações no Tangram**
>
> O Tangram é um quebra-cabeça chinês composto por sete figuras geométricas: cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo. Nesta atividade você vai construir um Tangram por meio de dobraduras e recortes. Acompanhe as instruções a seguir:
>
> Material: Uma folha de papel, A4, tesoura, régua e lápis.
> 1ª Etapa: recorte um quadrado da folha de papel. Em seguida, dobre o quadrado ao meio e recorte dois triângulos retângulos, unindo o ponto P ao ponto P'.
> **Figura 6:** As frações no Tangram



Fonte: Caderno do Aluno, 6º ano, v.1 (SÃO PAULO, 2014 - 2017, p. 32)

Notamos que na Etapa 1 aparece a expressão “triângulos retângulos” pela primeira vez neste material didático, porém, sem o propósito de definição.

Três faces do aprendizado de geometria (Construção, Percepção e Concepção) são trabalhadas concomitantemente na presente situação de aprendizagem: ao passo que a **construção** do Tangram é realizada através da manipulação por dobraduras o aluno **percebe** sua conexão com formas a sua volta e **concebe** o significado de unidade de medida.

O primeiro volume do Caderno do Professor para o 6º ano traz as competências e habilidades a serem alcançadas com a terceira Situação Aprendizagem: “desenvolver a ideia de que medir significa comparar grandezas de mesma natureza; ampliar a noção de número por meio de situações em que a grandeza tomada como unidade não cabe um número exato de vezes na grandeza a ser medida”. (SÃO PAULO, 2014 - 2017, p.38)

Neste sentido, o triângulo retângulo é utilizado como unidade de medida de acordo com o que se pretende atingir com essa tarefa, desconsiderando sua definição, mas promovendo sua importância na construção do conteúdo.

2.2.2.2. Definir e Classificar experimentando – Atividade Diagnóstica.

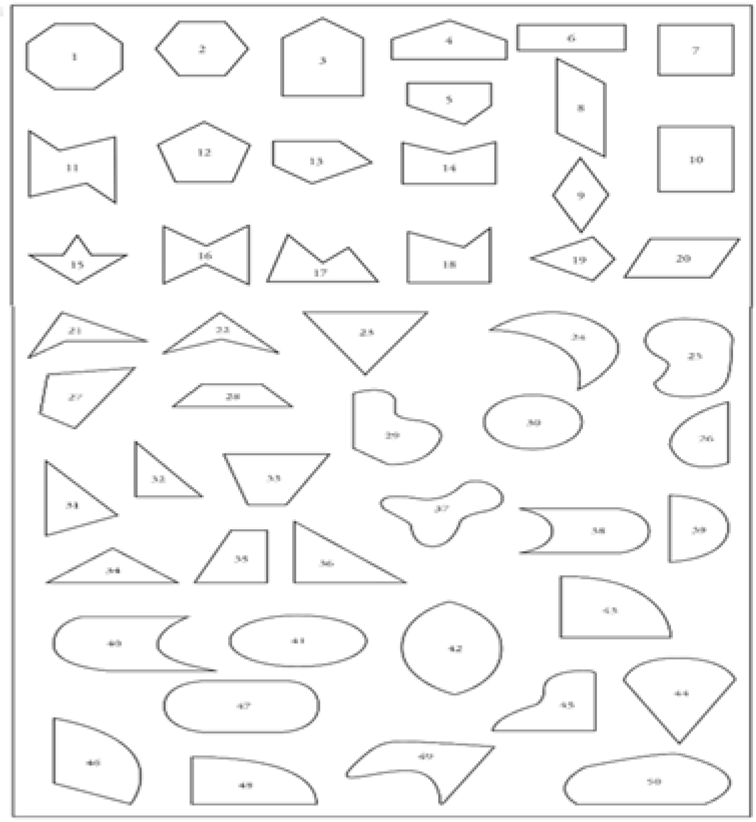
Trata-se de uma atividade apresentada no Caderno do Aluno e Caderno do Professor 6º ano, volume II, Situação Aprendizagem 1. Vejamos como o caderno traz o enunciado da tarefa. Primeiramente apresenta duas regras para execução das atividades.

> **Atividade diagnóstica**
> Agora você vai trabalhar em grupo. Com a ajuda de seu professor, forme pequenos grupos (de 3 ou 4 participantes), discuta cada uma das perguntas a seguir e escreva em seu caderno as conclusões de seu grupo. Lembrem-se de que, para realizar um bom trabalho coletivo, seu grupo deve estar atento às seguintes regras:
>
> - Quando um participante do grupo está falando, os outros devem ouvi-lo em silêncio. Essa regra é importante porque, quando mais de uma pessoa fala ao mesmo tempo, dificilmente conseguimos entender o que cada um quer dizer.
> - Todos os membros do grupo devem participar das discussões. Se um integrante estiver participando mais do que outro, ele deve deixar que aqueles que tenham participado menos possam expressar suas ideias.
>
> Ao final da atividade, seu grupo deverá fazer uma autoavaliação do trabalho levando em consideração as regras estabelecidas. (SÃO PAULO, 2014 - 2017, p.13-14)

Na sequência são apresentadas as figuras para realização das atividades as quais estimulam os alunos a identificarem diferenças e semelhanças entre as figuras.

Figura 7: Formas poligonais e não poligonais

Figuras para realização da atividade



Fonte: Caderno do Aluno, 6º ano, v.2 (SÃO PAULO, 2014 - 2017, p. 6)

Um dos objetivos desta tarefa é a identificação das formas, especificamente as poligonais e não poligonais. A primeira tarefa propõe que cada aluno do grupo escolha uma figura e escreva suas características no quadro.

Quadro4: Características de algumas figuras planas

Nome do aluno que escolheu a figura:	
Número da figura escolhida:	
Nome do aluno:	Característica identificada

Fonte: Caderno do Aluno, 6º ano, v. 2. (SÃO PAULO, 2014 - 2017, p. 7)

Na segunda tarefa cada integrante fala uma característica e os demais escrevem o número correspondente às figuras que a contém.

Quadro 5: Figuras com características semelhantes

Nome do aluno que escolheu a figura	
Número da figura e característica escolhida	
Número das figuras com a característica escolhida	

Fonte: Caderno do Aluno, 6º ano, v. 2. (SÃO PAULO, 2014 - 2017, p. 7)

Na sequência, o material didático dispõe a sessão LIÇÃO DE CASA (tarefa três). É pedido para que o aluno identifique dentre as 50 figuras as que tenham características especificadas em um quadro.

Quadro 6: Encontrando figuras dadas suas características

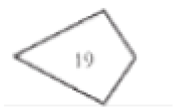
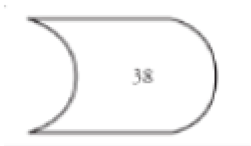
Característica	**Número das figuras**
Figuras com apenas 3 lados (retos ou “curvos”)	
Figuras com apenas 3 lados retos	
Figuras com apenas 3 “bicos”	
Figuras com pelo menos 4 lados retos	
Figuras com pelo menos um par de lados paralelos	
Figuras com todos os lados de mesma medida	
Figuras com lados que formam uma “quina” perfeita. (Lados “em cruz”) ou que possuem ângulo reto.	

Fonte: Caderno do Aluno, 6º ano, v. 2. (SÃO PAULO, 2014 - 2017, p. 9)

Verificamos que na primeira linha da tabela a característica de três lados é apresentada, mesmo que sem a distinção da forma poligonal ou não poligonal. Já na segunda linha a palavra “*lados”* vem acompanhada do termo “*retos”.* Os vértices são tratados como “*bicos”* na quarta linha e a última linha apresenta o termo ângulo reto. Espera-se que os alunos já identifiquem que a proposta se volta, também, à busca de triângulos.

Na tarefa quatro os conceitos devem ser trabalhados pelo professor juntamente com os alunos. Espera-se que neste momento o aluno consiga definir triângulos mesmo que a sua maneira.

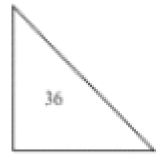
Quadro 7: Características das formas geométricas

Nomenclatura “oficial” na matemática	**Característica correspondente e um exemplo**
Polígono	
	Figuras com 4 lados retos ou (polígonos de 4 lados). Exemplo: 
Triângulo	
	Figuras com pelo menos um lado “curvo”. Exemplo: 
	Figuras com lados retos e “buracos” (ou polígonos que têm pelo menos um ângulo interno maior que 180°). Exemplo: 

Fonte: Caderno do Aluno, 6º ano, v. 2. (SÃO PAULO, 2014 - 2017, p. 10)

Da mesma forma, apresentam-se as classificações dos triângulos quanto ao número de lados e ângulos.

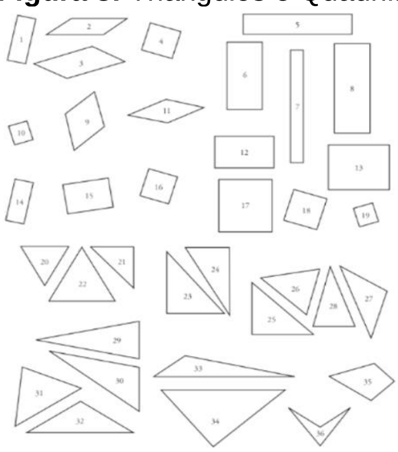
Quadro 8: Triângulos e suas classificações quanto aos lados e ângulos

	Triângulo com um ângulo formado por lados “em cruz” (“em quina perfeita”). Exemplo: 
	Triângulo que tem pelo menos 2 lados iguais. Exemplo: 
Triângulo Escaleno	

Fonte: Caderno do Aluno 6º ano, v.2 (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 11)

Na tarefa 5 os alunos juntamente com o professor deverão escrever as definições para as formas poligonais, ângulos e ângulos retos.

Na tarefa 6 da mesma Situação de Aprendizagem são apresentadas 36 figuras. Há uma tabela que consta “triângulo” como a nomenclatura “oficial” na Matemática e sua definição oficial como “Polígono de três lados” e um exercício experimental com o uso do Tangram na constatação de semelhança de triângulos na aplicação de frações. Vejamos o enunciado:

> Preencha a tabela a seguir com base nas 36 figuras apresentadas.
>
> **Figura 8:** Triângulos e Quadriláteros
>
> 
>
> Fonte: Caderno do Aluno 6º ano, v.2 (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 11)

Nesta tarefa se faz pertinente a discussão quanto às características dos quadriláteros notáveis. Para nosso trabalho a apropriação do conceito losango é muito útil. No entanto, as tarefas que serão apresentadas aos alunos implicam na liberdade de pesquisa e dão autonomia para que os conceitos sejam construídos no decorrer do desenvolvimento da atividade.

Quadro 9: Nomenclatura “Oficial” na Matemática

Nomenclatura oficial na Matemática	**Definição**	**Figuras**
Triângulo	Polígono de 3 lados	20 a 34
	Polígono de 4 lados	
Triângulo equilátero		
	Quadrilátero com 4 ângulos retos	
		4, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 19
Polígono não-convexo		

Fonte: Caderno do Aluno 6º ano, v.2 (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 11)

A face de aprendizado geométrico da Concepção se faz através das etapas que conduzem o aluno a definir e conceituar triângulos e outras formas (polígonos, polígonos convexos, quadriláteros, ângulos) de forma inter-relacionada à face da Representação e Construção através de seus esboços. A Percepção permeia todo o processo quando intuitivamente o aluno associa as figuras construídas a outras já concebidas por ele.

Sobre as primeiras seis tarefas apresentadas no segundo volume do Caderno do Professor e do Aluno para o 6º ano, destaca-se o seguinte parecer:

> As atividades propostas permitem fazer um diagnóstico dos conhecimentos geométricos da turma, bem como trabalhar o desenvolvimento de vocabulário geométrico ao convencionar com a classe algumas palavras para descrever certas características das figuras (paralelo, perpendicular, vértice, convexo, congruente, ângulo, quadrilátero, triângulo, etc). (SÃO PAULO, 2014-2017, p.20)

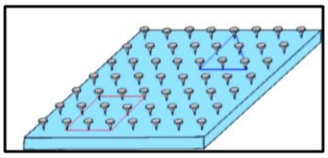
Consideramos que as definições devem ser apropriadas pelo aluno no decorrer do desenvolvimento de cada tarefa do Caderno do Aluno, mas é essencial o trabalho mediador do professor. Percebemos que o tema triângulos surge da necessidade de identificação das características das formas poligonais (figuras formadas por segmentos de retas, fechadas, planas e com ângulos) e suas diferenças das demais figuras geométricas que possuem formas arredondadas, por exemplo.

2.2.2.3. Geometria e frações com Geoplano e malhas quadriculadas

O tema é apresentado na Situação de Aprendizagem 3, no Caderno do Professor e do Aluno, 6º ano, volume 2. Na tarefa 3 da Seção “Você Aprendeu?”, propõe-se que o aluno construa quadriláteros e triângulos com especificidades. A proposta do Caderno do Professor é que na falta de um Geoplano o aluno possa disponibilizar de malhas quadriculadas.

O Geoplano é um material muito útil para o ensino da geometria plana mais precisamente o estudo das formas poligonais. É confeccionado a partir de uma placa de madeira com pregos cravados em forma de uma malha composta por linhas e colunas. Os elásticos são utilizados para formar as figuras com limites nos pregos (vértices).

Figura 9: Geoplano



Fonte: http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/materiais/geoplano.htm

Com a manipulação do Geoplano é permitido uma melhor assimilação de conceitos matemáticos como: áreas, perímetro, vértices, lados, entre outros.

A seguir, a tarefa 3 estimula o aluno a construir quadriláteros convexos e não convexos e diferentes triângulos, agora com o uso da malha quadriculada. Uma característica que pode ser mais aproveitada neste tipo de material é que o espaçamento menor entre os pontos permite representar figuras de maiores unidades de comprimento.

Segue o enunciado da referida tarefa 3:

> “Desenhe na malha: 5 quadriláteros diferentes (3 deles convexos e 2 não convexos), 3 triângulos diferentes (1 triângulo isósceles, 1 triângulo retângulo isósceles e 1 triângulo escaleno)” (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 29).

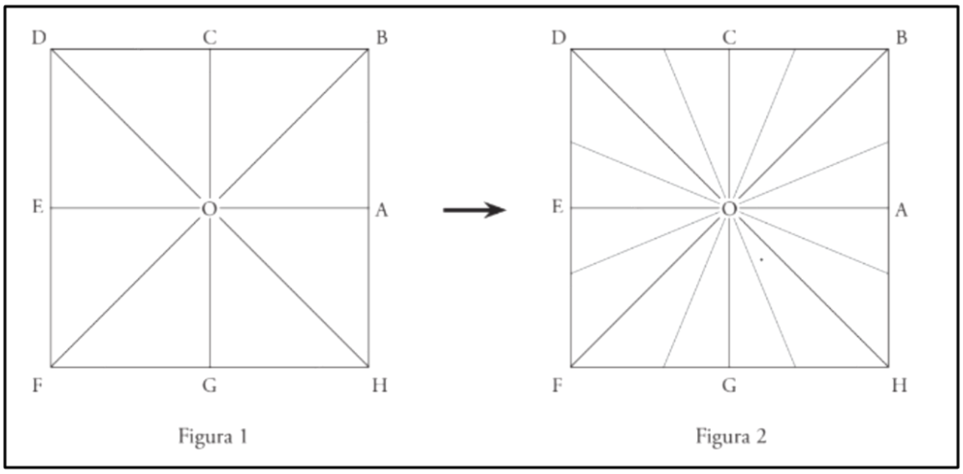
Partindo do pressuposto que os conceitos sobre polígonos convexos e não convexos já tenham sido discutidos ou ainda que, possam ser construídos, os alunos devem, através da Representação, face do aprendizado da geometria, construir as figuras pedidas. Se faz necessária a Concepção das classificações dos triângulos quanto aos lados.

Uma abordagem sobre as impossibilidades na construção de um triângulo dados três comprimentos de lados, seria adequado para que os alunos pudessem se deparar com a desigualdade triangular. Reiteramos que frente a situações deste tipo e da percepção da necessidade desta importante propriedade, nossa pesquisa trará uma proposta pertinente a abordagem da desigualdade triangular.

2.2.2.4. A Geometria dos Ângulos

Na Situação de Aprendizagem 5 do Caderno do Aluno do 7º ano, volume I, tarefa 1, o tratamento dado aos ângulos, inicia-se com a construção de uma unidade de medida não convencional: o TUTI. Através de dobraduras a atividade propõe aos alunos a divisão de um quadrado em 16 partes iguais.

Figura 10: Construção de TUTIS



Fonte: Caderno do Aluno 7º ano, v.1 (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 37)

Utilizando a unidade TUTI os alunos deverão medir diferentes ângulos nas tarefas de 2 a 4.

A propósito, a Tarefa 5 do referido material instiga a construção de um triângulo qualquer e que o aluno meça, em TUTIS, a medida de cada um de seus ângulos e por fim a soma dessas medidas, conforme enunciado:

> “Construa, com auxílio de uma régua, um triângulo qualquer; meça cada um de seus ângulos em TUTIS e, em seguida, calcule a soma das medidas dos ângulos internos desse seu triângulo (em TUTIS)” (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 40).

Na próxima tarefa (sexta), a proposta é a construção de outro triângulo e leva o aluno a conjecturar que a soma das medidas de seus ângulos em TUTIS é a mesma que, de acordo com a quinta tarefa. Segue o enunciado da tarefa:

> Construa um triângulo diferente do que construiu na atividade anterior. Repita todos os passos e compare as somas das medidas dos ângulos internos dos triângulos construídos. O que você observou? Com base nos resultados de sua observação, levante uma hipótese a respeito da soma dos ângulos internos de qualquer triângulo e busque uma forma de justificá-la com argumentos lógicos (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 40).

O aluno ao se deparar com a expressão “argumentos lógicos” provavelmente solicitará a mediação do professor, essencial nesta etapa.

No Caderno do Professor é apresentado o que se espera como resolução da tarefa:

> A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 8 TUTIS. Para verificar a medida, o aluno pode “recortar” os ângulos do triângulo e juntá-los de forma a construir um ângulo raso, ou 8 TUTIS. (SÃO PAULO, Caderno do Professor,7º ano, v.1, 2014-2017, p.45)

Novamente temos uma tarefa envolvendo a construção de um triângulo sem incluir suas impossibilidades. O momento é propício para que o professor formule indagações, tais como:

- É possível obter um triângulo com dois ângulos de medida 4 TUTIS?
- É possível construir um triângulo com lados de medidas 5, 2 e 2?

Quanto às faces do aprendizado de Geometria é possível encontrar os quatro eixos:

a) Construção – mediante à dobraduras e recortes para obtenção das medidas TUTIS;

b) Percepção – permeando todo o aprendizado ao relacionar as partes do todo e associar os TUTIS as medidas;

c) Concepção: ao se apropriar do conceito de ângulos;

d) Representação: quando se dá a medida do ângulo em TUTIS e pede-se para construir o mesmo ou construir o triângulo e medir seus ângulos.

Ainda nesta mesma Situação de Aprendizagem, a tarefa 12 da seção Lição de Casa do Caderno do Aluno, há a proposta de construir polígonos com características específicas de determinados ângulos. No item “a” a construção solicitada é de um triângulo acutângulo.

Em relação à referida tarefa, a orientação didático-pedagógica para o professor é a seguinte:

> “apresentamos uma atividade em que o principal objetivo será favorecer tanto a aquisição de novo vocabulário geométrico associado à ideia de um ângulo como a formação de hipóteses e raciocínio dedutivo”. (SÃO PAULO, 2014-2017, p.51)

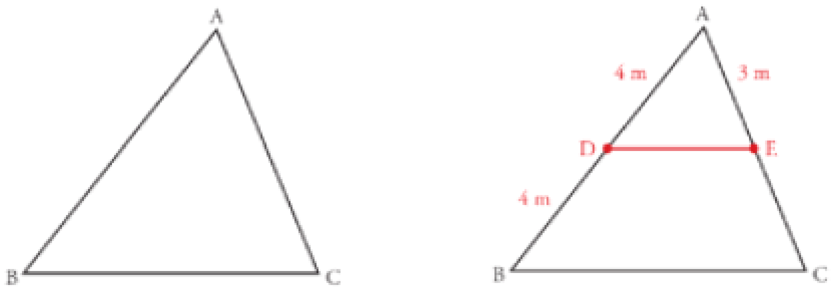
Uma sugestão de interferência complementar ao que foi proposto é uma abordagem sobre as possibilidades de construção de um triângulo com dois ângulos com medidas superiores ou iguais a 90°.

2.2.2.5 Teorema de Tales: A proporcionalidade na Geometria

Apresentamos a seguir o enunciado da Situação Aprendizagem 6, do Caderno do Aluno do 8ºano, volume II. A sessão é “Você Aprendeu?”, tarefas 1 e 2:

> Sílvio é um jardineiro que está trabalhando no projeto de um canteiro triangular, em uma esquina de seu bairro.
> Inicialmente, ele propõe que o canteiro seja composto por dois tipos diferentes de folhagens rasteiras, e que a divisão entre elas seja feita por uma faixa paralela à base BC, indicada na figura pelo segmento DE. Desse modo, Sílvio fez as seguintes medições no canteiro: AD = 4m, DB = 4m e AE = 3m. Qual deve ser a medida EC?

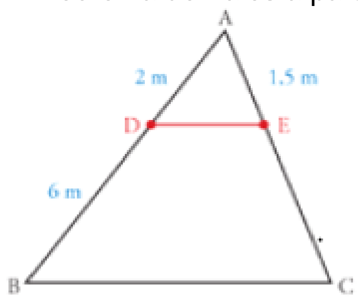
Figura 11: Projeto de um Canteiro Triangular



Fonte: Caderno do Aluno 8º ano, v.2 (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 75)

Para fazer um ajuste em seu projeto, Sílvio posicionou o ponto D a 2 m do ponto A, conforme indicado na figura a seguir. Encontre a nova medida de EC.

Figura 12: Teorema de Tales a partir de um triângulo



Fonte: Caderno do Aluno 8º ano, v.2 (SÃO PAULO, 2014-2017,p.76)

No Caderno do Professor a abordagem desta tarefa contém o embasamento para o professor:

A primeira noção a ser desenvolvida com os alunos é uma interpretação do teorema de Tales relativo aos triângulos, que pode ser expressa da seguinte forma:

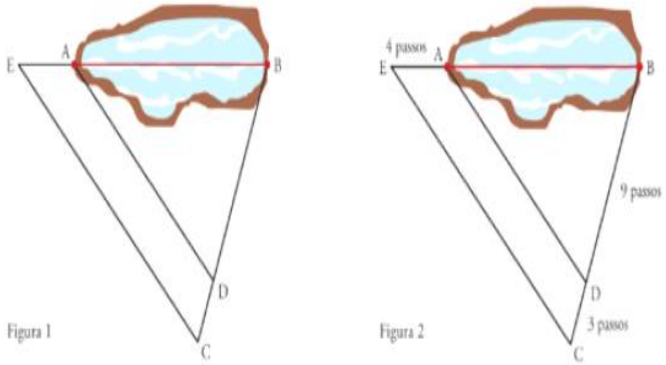
> “Se uma reta paralela a um lado de um triângulo intersecta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a esses lados”. (SÃO PAULO, 2014-2017, p.85)

Percebemos que esta situação-problema instiga a face do aprendizado geométrico ‘percepção’ quando menciona o projeto do canteiro triangular, a qual demanda que o aluno associe a figura abstrata a um canteiro. A construção atrelada a ‘representação’ na forma da figura do triângulo, e os segmentos nele traçados levam o aluno a conceber a proporcionalidade entre os segmentos formados. Acrescentamos que o conteúdo da tarefa 1 seria uma ótima oportunidade de definir ponto médio.

A tarefa 4 também traz um problema vinculado a aplicação do teorema de Tales em triângulos, conforme enunciado:

> Lucas queria estimar a medida mais extensa do pequeno lago que havia perto de sua casa. Pensando sobre o problema, ele inicialmente fez um esquema da situação, indicando essa extensão por AB e imaginando dois triângulos ABD e BCE, sendo as bases AD e EC paralelas (Figura1). Depois, foi ao local e fincou 5 estacas, cada uma correspondente a um vértice dos triângulos de seu esquema. Contou com passos as medidas correspondentes aos lados AE, BD e DC, e completou seu esquema como na figura 20.

Figura 13: O problema das estacas



Fonte: Caderno do Aluno 8º ano, v.2 (SÃO PAULO, 2014-2017, p.77)

No Caderno do Professor é relatado que o objetivo desta atividade é fazer o aluno explicitar por meio de uma argumentação lógica as propriedades aprendidas. Mais uma vez os triângulos aparecem de forma a preparar o aluno para um novo conceito. Este, é um dos motivos pelos quais escolhemos tratar desta figura plana em nosso trabalho de pesquisa.

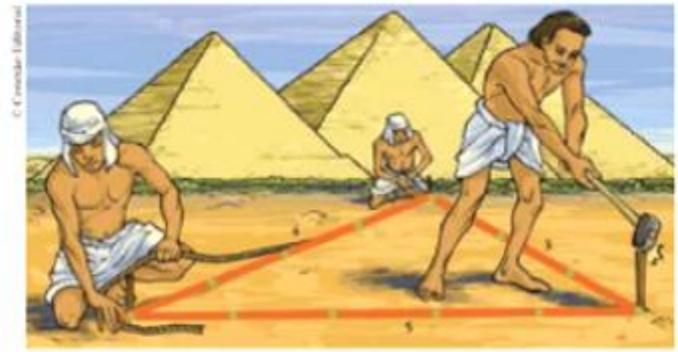
2.2.2.6. Padrões Numéricos e Geométricos

Na Situação de Aprendizagem 7, Caderno do Aluno do 8º ano, volume 2, na Sessão “Pesquisa de Campo” há uma tarefa interessante instigando os alunos na construção de um triângulo retângulo utilizando um barbante com 13 nós.

> A civilização egípcia é notável quando o assunto é construção. Apoiada em uma matemática experimental, essa civilização construiu um conjunto arquitetônico cujo destaque são as enormes pirâmides. Grande parte do processo de construção civil se apoia na formação de ângulos retos. Para se

> ter uma ideia, a base da pirâmide de Quéops, construída há mais de 4500 anos, é composta de pedras esquadrejadas e tem por base um quadrilátero muito próximo de um quadrado. O problema de traçar ângulos retos foi resolvido pelos egípcios de modo tão engenhoso quanto simples. Como descobriram que todo triângulo de lados 3, 4 e 5 unidades de comprimento era necessariamente um triângulo retângulo, os arquitetos e construtores egípcios usavam uma corda om 13 nós distribuídos em intervalos iguais. Dobrando a corda de modo que formasse um triângulo de lados 3, 4 e 5, e emendando-a pelas extremidades (1° e 13° nós), obtinham um ângulo reto oposto ao lado 5.

Figura 14: Esquadro de Barbante



Fonte: Caderno do Aluno 8º ano, v.2 (SÃO PAULO, 2014-2017, p.80)

Em nossa pesquisa de campo utilizamos uma tarefa complementar a essa, considerando o fato de que com os 12 espaços formados pelos nós não podem ser divididos aleatoriamente de forma a se obter uma região triangular. Neste sentido, aproveitamos deste fato para estudar a questão da desigualdade triangular.

Mesmo que redundante é importante destacar que as fases do aprendizado geométrico estão intrinsecamente ligadas na atividade abordada:

- Percepção: associação do triângulo com a construção do esquadro;
- Representação: forma triangular;
- Concepção: definição e propriedades dos lados do triângulo retângulo;
- Construção: atividade prática de forma análoga às atividades empíricas dos povos antigos.

2.2.3 O tratamento escolar para circunferências

A circunferência pode ser denominada como uma curva fechada, plana, formada por um conjunto de pontos que são equidistantes de um ponto fixo (centro), o que faz dela o Lugar Geométrico desse conjunto de pontos.

No quadro a seguir situamos a presença das tarefas contidas no volume 1 do Cadernos do Aluno para o 6º e 9º ano do Ensino Fundamental.

Quadro 10: O tratamento escolar para circunferências

Caderno do Aluno	Situação de Aprendizagem	Sessão	Tarefas/Etapas
6ºano, volume I	Na medida certa: dos naturais às frações	Você aprendeu?	3
9° ano, volume I	Localização de Irracionais na Reta Numérica	Leitura e análise de texto	1 a 5

Fonte: Elaborado pela Pesquisadora

Nos subitens a seguir abordamos o conteúdo das tarefas com base nos Cadernos do Aluno e do Professor.

2.2.3.1 Na medida certa: dos naturais às frações – Números mistos, frações e medidas.

O Caderno do Aluno, 6º ano, volume 1, traz na situação de Aprendizagem 3, uma tarefa que consiste em medir os objetos de algumas figuras. Cada figura possui uma régua graduada em polegadas. Como a unidade de medida polegadas não é convencional; faz-se necessário uma abordagem do seu significado, bem como a comparação com a unidade padrão de comprimento.

> Determine a medida em polegadas do seguinte objeto (como número misto e fração). A régua está graduada em inteiros, meios e oitavos de polegada.

Figura 15: Diâmetro de um CD.

Fonte: Caderno do Aluno 6º ano, v.1 (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 36 - 37)

Podemos perceber que o significado de diâmetro pode ser apropriado pelo aluno através da comparação indicada na figura. Não se apresenta a definição ou o diâmetro como elemento de uma circunferência, o que pode suscitar questionamentos em sala de aula.

No Caderno do Professor o objetivo principal desta tarefa é levar o aluno a se deparar com necessidades de fracionamento de uma unidade ao medir um objeto.

A concepção como uma das faces do aprendizado em geometria, se faz necessária, no âmbito de se definir o conceito de diâmetro. Já a percepção como fato de se relacionar o diâmetro com outras referências do cotidiano: diâmetro de uma cesta de basquete ou pneu de bicicleta, por exemplo.

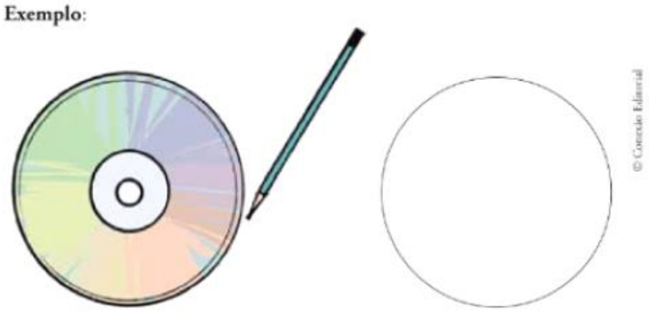
2.2.3.2. Razões na Geometria

Na Situação de Aprendizagem 3, na seção "Atividade de Investigação" do segundo volume do Caderno do Aluno para o 7º ano, há uma tarefa: Proporcionalidade na Circunferência. Nessa proposta, há uma conexão entre os blocos temáticos de conteúdo (Relações e Geometria), de modo a subsidiar a resolução de problemas através da exploração e experimentação.

> Uma das características mais importantes de uma circunferência é a equidistância de seus pontos em relação ao centro. Por essa razão, ela é considerada a figura geométrica mais perfeita em termos de simetria. Além disso, qualquer que seja a circunferência, sua forma é sempre a mesma. Uma circunferência maior é uma ampliação perfeita de uma menor.

Será, então, que há proporcionalidade entre suas partes? É o que vamos verificar a seguir.
Material Necessário: objetos circulares, por exemplo, um CD, uma lata de leite condensado, uma moeda etc., fita métrica; régua; compasso; folha de papel sulfite
Etapas:
I) Meça o comprimento da circunferência do objeto usando a fita métrica.
II) Coloque o objeto sobre o papel sulfite e desenhe o seu contorno (circunferência).

Figura 16: Proporcionalidade na circunferência

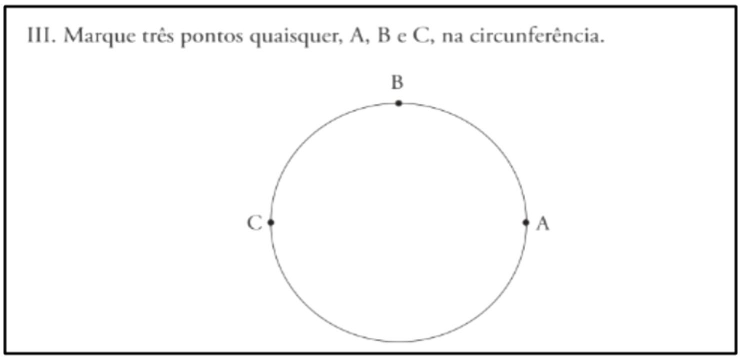


Fonte: SÃO PAULO (2014-2017, p. 31)

O conteúdo da figura 16 envolve uma atividade experimental para avaliar a proporcionalidade, a partir do fato de obter o valor aproximado do número pi (π) como razão entre o comprimento da circunferência e seu respectivo diâmetro. É um momento fecundo para o professor tratar com o aluno a fórmula do comprimento da circunferência.

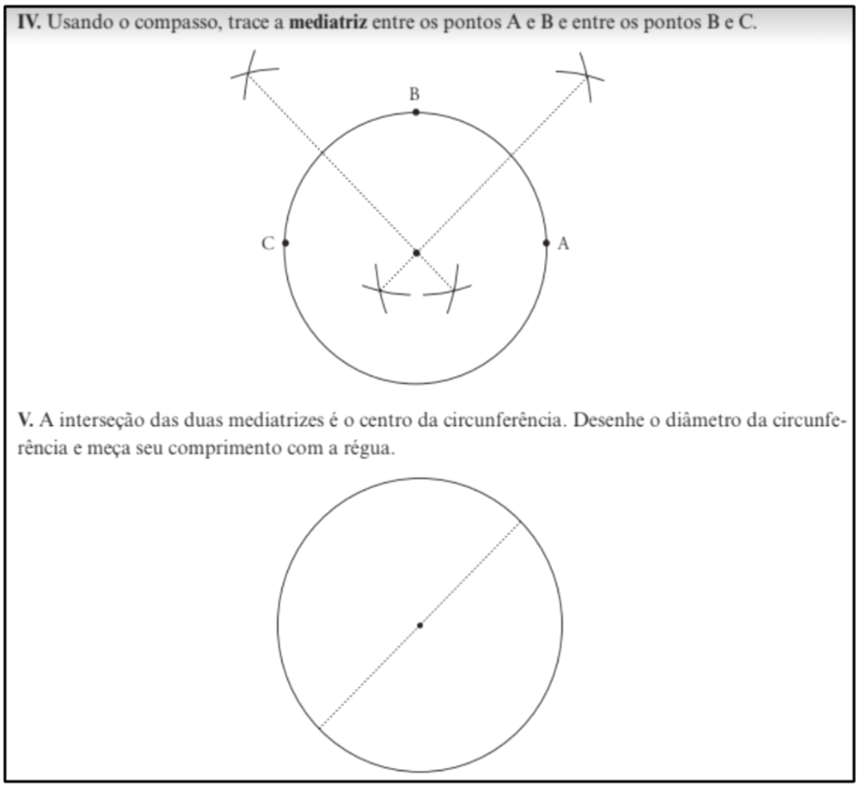
Na figura 17 e 18 há a descrição de procedimentos via desenho geométrico para determinar o centro da circunferência através do encontro das mediatrizes. No entanto, o material não aborda este conceito. Consequentemente, os procedimentos da construção geométrica configuram como algoritmo.

Figura 17: Três pontos na circunferência



Fonte: Caderno do Aluno 7º ano, v.2 (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 31)

Figura 18: Centro da circunferência



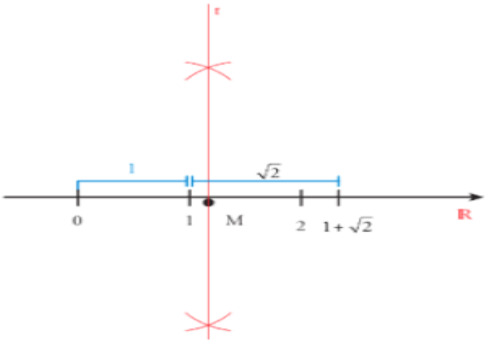
Fonte: Caderno do Aluno 7º ano, v.2 (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 32)

2.2.3.3. Localização de Irracionais na Reta Numérica

Na sessão “Leitura e Análise de texto” do Caderno do Aluno do 9º ano, volume 1, já discutida no subtópico sobre as mediatrizes, há cinco etapas para o procedimento de se localizar um número Irracional $\sqrt[4]{2}$. Vejamos as etapas:

1. Trace com régua e compasso os números 1 e 1 + $\sqrt{2}$
2. Trace a mediatriz t do segmento de extremos em 0 e 1+ $\sqrt{2}$ para determinar M, ponto médio desse segmento

Figura 19: Ponto médio do segmento de comprimento $\mathbf{1+\sqrt{2}}$

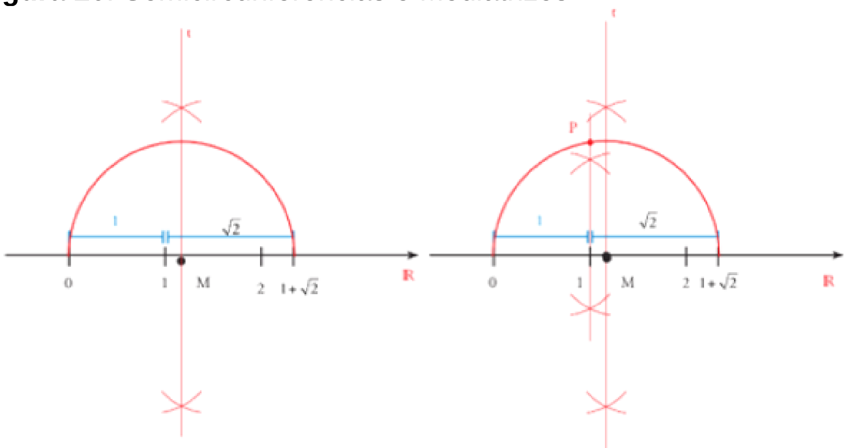


Fonte: Caderno do Aluno 9º ano, v.1 (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 33)

3. Trace uma semicircunferência de centro M e raio $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

4. Trace uma perpendicular à reta real passando pelo número 1, e em seguida, marque com o ponto P sua intersecção com a semicircunferência

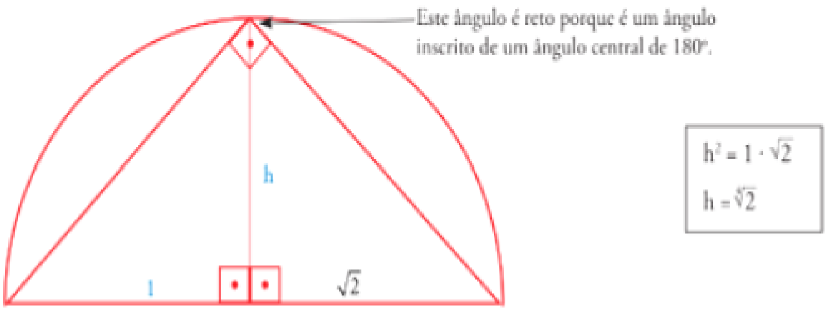
Figura 20: Semicircunferências e Mediatrizes



Fonte: Caderno do Aluno 9º ano, v.1 (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 34)

5. Observe o segmento de extremos em P e no número 1 tem comprimento $\sqrt[4]{2}$, porque é a altura de um triângulo retângulo de projeções ortogonais dos catetos sobre a base medindo 1 e $\sqrt{2}$.

Figura 21: Triângulo retângulo Inscrito na Circunferência



Fonte: Caderno do Aluno 9º ano, v.1 (SÃO PAULO, 2014-2017, p 35)

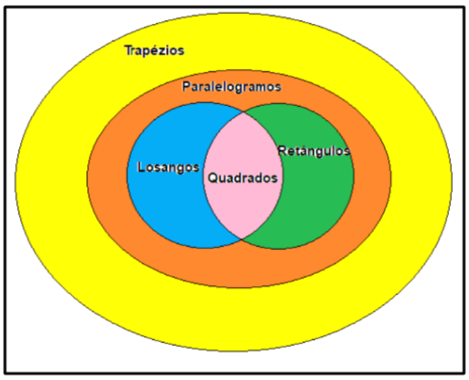
Podemos notar que a tarefa possui alguns conteúdos geométricos que não foram explorados até então, como o caso do ângulo central e inscrito em uma circunferência. O momento seria propício para mostrar que o triângulo retângulo está inscrito a uma circunferência e sua hipotenusa coincide com o diâmetro por conta da propriedade do ângulo inscrito de 90° e que o pé de da altura relativa à hipotenusa é o circuncentro. (Ponto de intersecção das mediatrizes). Abordaremos mais adiante essa propriedade na pesquisa.

2.2.4 O tratamento escolar para losangos

No material didático Caderno do Aluno do estado de São Paulo, especificamente no ramo dos quadriláteros, os losangos são tratados como figuras caracterizadas pelos seus lados com mesmo comprimento. São apresentados, geralmente, na forma de ‘pipa’ e com a seguinte conceituação: “losango é um paralelogramo equilátero, isto é, com lados congruentes”. (SÃO PAULO, 2014-2017, p71).

Com o intuito de complementar a conceituação é apresentada um diagrama de Venn para os quadriláteros notáveis, no qual o losango está contido no conjunto dos paralelogramos e, este último, contido no conjunto dos trapézios.

Figura 22: Quadriláteros Notáveis



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

A distribuição das tarefas com losango está sistematizada no quadro a seguir. Posteriormente, abordamos o conteúdo das tarefas.

Quadro 11: O tratamento escolar para losangos

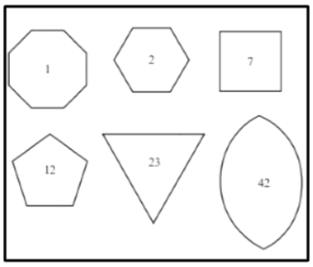
Caderno do Aluno	Situação de Aprendizagem	Sessão	Tarefas/Etapas
6° ano, volume II	Definir e Classificar experimentando	Atividade diagnóstica	3
8º ano, volume II	A Área do Losango	Leitura e Análise de Texto	
9º ano, volume I	Conjuntos e Números	Você aprendeu?	3, item b

Fonte: Elaborado pela Pesquisadora

2.2.4.1. Definir e Classificar experimentando – Atividade Diagnóstica

Na tarefa 3, Lição de casa, do Caderno do Aluno 6º ano, volume 2I, Situação Aprendizagem 1, faz a referência às figuras equiláteras. Como já abordada na seção 2.2.2.1 deste trabalho, a tarefa conduz o aluno a identificar e relacionar as figuras por suas características semelhantes.

Figura 23: Figuras com características equiláteras



Fonte: Caderno 6º ano, v. 2 (SÃO PAULO, 2014-2017, p.14-15)

Podemos ver que uma das finalidades do exercício é a verificação dos comprimentos iguais e não os diferenciar como polígonos ou não polígonos, fato que levanta a possibilidade de o aluno incluir a figura 42.

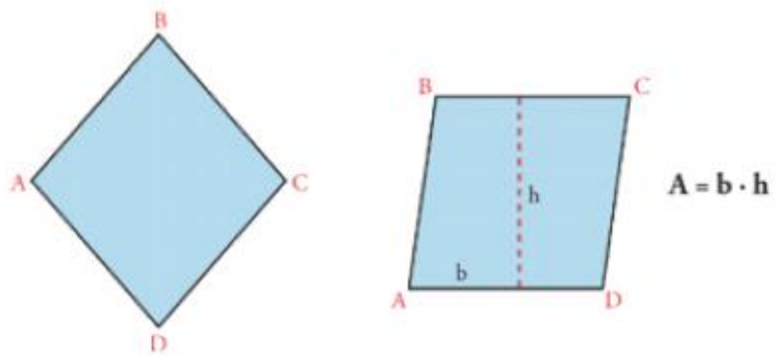
Mais uma vez a abordagem (sob a forma de ver a geometria) do que se é uma figura equilátera, se faz indissociável da percepção (formas com lados congruentes).

2.2.4.2. A Área do Losango – Leitura e Análise de Texto

Na Situação de Aprendizagem 5, Caderno do Aluno, 8º ano, volume 2, Seção Leitura e Análise de texto, o aluno é levado a conhecer e compreender as fórmulas das áreas de algumas figuras planas: paralelogramos, losangos e triângulos. Na Seção Desafio, o foco é a área do trapézio. Particularmente sobre a área do Losango é apresentado:

> Primeiramente lembre-se de que chamamos de losango um paralelogramo equilátero, isto é, com lados congruentes.
> Como o losango é um paralelogramo, sua área pode ser obtida pelo produto da base (lado do losango) pela altura (distância entre a base e o lado paralelo a essa base).

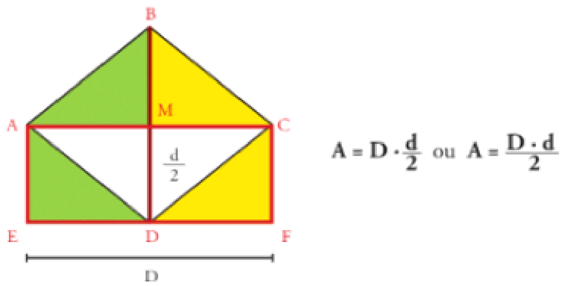
Figura 24: Área do paralelogramo



Fonte: Caderno do Aluno 8º ano, v. 2 (SÃO PAULO, 2014-2017, p.72)

> Outra possibilidade é mostrar que o losango ABCD equivale a um retângulo ACFE em que um lado é igual a uma das diagonais do losango e o outro é metade da outra diagonal.

Figura 25: Área do losango



Fonte: Caderno do Aluno 8º ano, v. 2 (SÃO PAULO, 2014-2017, p.72)

Podemos perceber que a área do losango é determinada de duas formas diferentes. Por um lado, a partir de sua classificação como paralelogramo e, portanto, sua área é equivalente a área do paralelogramo; por outro lado, por decomposição do Losango a partir de suas diagonais em triângulos congruentes e a composição de um retângulo equivalente ao losango inicial.

A segunda maneira nos permite abordar o conceito das diagonais do losango e suas características. Algo como a posição relativa das diagonais será tratado em nossa pesquisa.

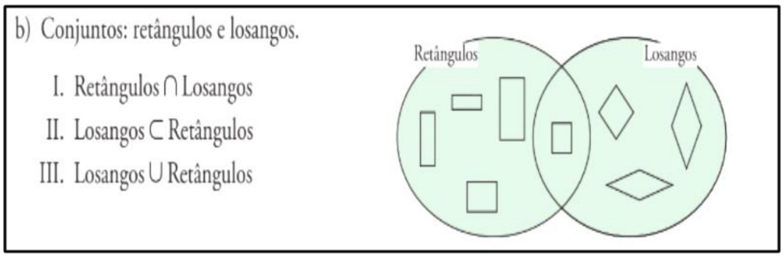
O Caderno do Professor sugere que, após a dedução das fórmulas, o professor disponha de exercícios para colaborar com a prática do tema pelos alunos, não somente para aplicação das fórmulas, mas também para o reconhecimento de cada figura.

A face percepção do aprendizado geométrico se faz perante a situação a qual o aluno se depara com a conexão entre as propriedades do losango como paralelogramo; a construção pode ser concretizada a partir de recortes e colagens para decomposição e composição das figuras equivalentes; a representação das áreas por composição e decomposição e a concepção quando os alunos se apropriam das deduções de fórmulas.

2.2.4.3. Conjuntos e Números

Na tarefa 3, da Sessão "Você Aprendeu?", Caderno do Aluno do 9º ano, volume 1, o item 'b' estimula o aluno a escolher uma dentre três alternativas que melhor representa o diagrama que relaciona o conjunto de alguns dos quadriláteros notáveis, vejamos:

Figura 26: Conjuntos: Retângulos e Losangos



Fonte: Caderno do Aluno, 9º ano, v. 1 (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 11)

A conexão entre os conteúdos curriculares Números e Geometria se faz de forma sutil nesta tarefa. O fato é que o professor pode aproveitar o momento para questionar os alunos sobre alguns conceitos geométricos como:

- O que faz o conjunto do Quadrados ser a intersecção dos Losangos e Retângulos?
- Quais características devemos relevar para que os Quadrados sejam considerados Losangos e Retângulos?

As relações constatadas pelos alunos podem leva-los à definição de um losango. As propriedades dos losangos (congruência entre lados) será ponto crucial em um determinado momento da realização de nossa pesquisa.

Podemos concluir que na diversidade das Situações de Aprendizagem há problemas também de caráter exploratório de modo a levar os discentes a conjecturar propriedades relevantes dos triângulos, circunferências, losangos e mediatrizes, no entanto sentimos a falta de uma especificidade em atividades sobre os conceitos explorados nas situações de aprendizagem identificadas.

No trabalho de campo de nossa pesquisa, o foco foi o trabalho com a propriedade do circuncentro do triângulo. O planejamento de tarefas que fizemos para os alunos foi norteado pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas, estudada e difundida por pela profª Drª Lourdes de La Rosa Onuchic e seus colaboradores.

3. PERCURSO TEÓRICO: FOCO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, abordamos uma breve história de como os problemas permeiam desde os primórdios da humanidade e como o ensino através de problemas interfere na compreensão da matemática pelos alunos, especialmente em geometria.

3.1. Resolver problemas: uma breve história

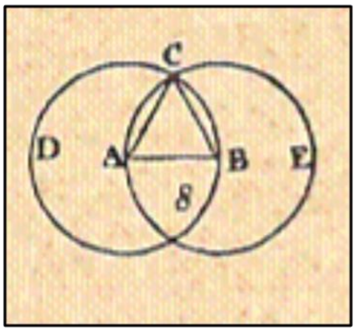
Nas últimas décadas do século passado os estudos na área da Educação Matemática começaram a dar a devida ênfase à Resolução de Problemas.

Os problemas sempre fizeram parte do desenvolvimento da matemática, inclusive em seu contexto escolar, mas é bem recente a preocupação em desenvolver a capacidade de resolver problemas de forma holística nos educandos. A holística diz respeito a concepção que, um fenômeno só pode ser analisado e, portanto, compreendido a partir da perspectiva global acerca das interações que o definem e caracterizam. Assim, a intervenção através de Resolução de Problemas permeia o aprendizado através de uma interação entre as partes e o todo, tanto ao nos referirmos às estratégias para resolver o problema quanto ao envolvimento do professor e alunos e suas interações.

Em termos históricos, vale lembrar que o geômetra grego Euclides há aproximadamente, 300 a.C já trazia em sua obra 'Os Elementos', alguns problemas sob a forma de proposições. Um exemplo disto são as proposições I e V, do livro 1 (COMMANDINO, 1944). Em ambas, instiga-se o uso dos instrumentos de desenho geométrico (régua e compasso).

> Proposição I- Sobre uma linha reta determinada, descrever um triângulo equilátero

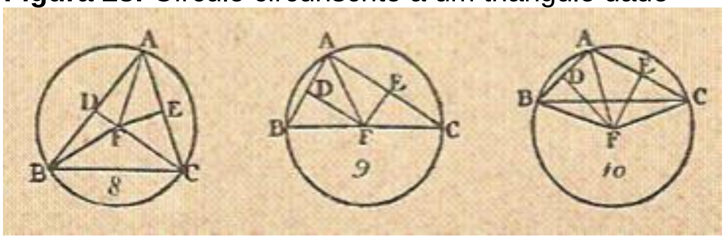
Figura 27: Construção de um triângulo equilátero a partir de um segmento AB.



Fonte: Commandino (1944, p.30)

Proposição V**-** Circunscrever um círculo a um triângulo dado **(**COMMANDINO, 1944)

Figura 28: Círculo circunscrito a um triângulo dado



Fonte: COMMANDINO, p. 210

Historicamente, no contexto escolar da matemática, é relevante a contribuição de George Polya na obra “A arte de resolver problemas”, cuja difusão no cenário educacional brasileiro deu-se na década de 80. Em seu livro, Polya dedica o terceiro e mais longo capítulo a um Pequeno Dicionário de Heurística, e no verbete Heurística, lemos: “o objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção” (POLYA, 1978, p.86).

Para Polya (1978), resolver um problema de qualquer tipo é contornar um obstáculo. Basicamente, este autor tratou de dois tipos de problemas: os de demonstração e os de determinação. Os problemas de determinação são mais importantes na Matemática elementar; os problemas de demonstração o são na Matemática superior. Vamos nos ater ao primeiro tipo, dado o segmento escolar (Ensino Fundamental II) com o qual trabalhamos as tarefas contempladas em nossa dissertação de mestrado.

Para resolver um problema de determinação é preciso conhecer, com grande exatidão, as suas partes principais, a incógnita, os dados e a condicionante, ou seja, as circunstâncias que devem ser observadas no enunciado. No referido livro, Polya (1978) indicou que há quatro etapas fundamentais e necessárias para a resolução de problemas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Na etapa de compreensão do problema, o primeiro passo é entender o problema. É importante fazer perguntas, tais como: qual é a incógnita? Quais são os dados? É possível satisfazer as condicionantes?

Quanto ao estabelecimento de um plano (2ª etapa) é possível determiná-lo quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. O principal feito na resolução de um problema é encontrar conexões entre os dados e a incógnita.

Frequentemente, a execução do plano é a etapa mais fácil do processo de resolução de um problema. Contudo, a maioria dos principiantes tende a pular esta etapa prematuramente e acabam se dando mal. Outros elaboram estratégias inadequadas e acabam se enredando terrivelmente na execução (e, deste modo, acabam sendo obrigados a voltar para a etapa anterior e elaborar uma nova estratégia).

Se fizerem um retrospecto (4ª etapa) da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. A revisão da solução é a etapa mais importante, segundo Polya (1978), pois esta etapa propicia uma depuração e uma abstração da solução do problema.

Todas as etapas apresentadas têm a sua importância. Pular qualquer uma delas ou não lhes dar a devida atenção resultará na não compreensão do problema. Cada passo deve ser bem planejado, caso contrário podem acontecer falhas na execução do plano, comprometendo os resultados obtidos.

Em nossa pesquisa não pautamos na concepção de resolução de problemas de George Polya, pois a mesma não é compatível com o nosso propósito, ou seja, inserir um problema e através da resolução do mesmo a desenvolver um determinado conceito almejado levando em conta a bagagem de saberes prévios de nossos alunos.

3.2. A Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação na resolução de problemas

Um grupo de pesquisadores brasileiros, coordenados pela Prof.ª Drª Lourdes de la Rosa Onuchic, da UNESP – Rio Claro, SP – GETERP (Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas), desenvolve suas atividades desde 1992, sendo que atualmente se dedica ao estudo da Metodologia de Ensino – Aprendizagem – Avaliação em Resolução de Problemas. O grupo é constituído por alunos e ex-alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática que compartilham o interesse por se aprofundar no tema, auxiliar seus projetos futuros e aprimorar sua prática docente. Desta forma, o GETERP é um núcleo gerador de atividades que motivam o aperfeiçoamento, a investigação e produção científica na linha de Resolução de Problemas.

A Resolução de Problemas como metodologia ocorre quando um problema é o ponto de partida e orientação para aprendizagem e a construção do conhecimento faz-se através de sua resolução. O conhecimento é construído pelo professor e alunos, juntos assim a aprendizagem que ocorre de modo colaborativo em sala de aula: professor e alunos, alunos e alunos, compartilham suas ideias de forma a colaborar com cada integrante no processo de Ensino-Aprendizagem (ONUCHIC, 1999).

As três palavras de forma composta, Ensino-Aprendizagem-Avaliação, tem o objetivo de expressar uma concepção em que o ensino e aprendizagem devem ocorrer de forma simultânea através da mediação do professor e participação efetiva dos alunos na construção do conhecimento. A Avaliação ocorrerá durante todo o processo, articulada às formulações e construções dos alunos e a mediação do professor. Todo desenvolvimento da metodologia será permeado durante a resolução do problema. O problema como gerador é que conduzirá ao conteúdo que o professor planejou construir naquela aula.

Segundo Pironel e Onuchic (2016, p.3), pode ocorrer ensino e aprendizagem sem que haja a avaliação desse processo;

1- Pode haver ensino e avaliação sem que haja aprendizagem; e

2- Pode haver aprendizagem e avaliação dessa aprendizagem, sem que ela tenha acontecido a partir do ensino;

3- Porém, compreende-se a necessidade de que os processos de ensino, aprendizagem e avaliação ocorram integralmente quando pensamos na sala de aula e matemática.

Tomando como referência o texto intitulado “Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas” (ONUCHIC, 1999), verificamos que quando historicamente é mencionado o conjunto de reformas ocorridas no século XX, e em seu início, o Ensino de Matemática foi caracterizado por um trabalho embasado em técnicas de repetição (memorização de procedimentos). Depois de alguns anos os estudos apoiam um trabalho onde os alunos deveriam aprender com compreensão, mesmo que ainda, contemplava o papel de expectador: o professor explicava, o aluno escutava e reproduzia, sendo assim, o aluno não participava ativamente da construção de seu conhecimento.

Para Onuchic (1999, p.215) um problema “[...] é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver” e não é um exercício no qual o aluno aplica uma fórmula de forma quase mecânica ou alguma técnica operatória.

Considerando, a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino-aprendizam-avaliação, Onuchic e Allevato (2009) sugerem as seguintes etapas para a organização do trabalho do professor em sala de aula:

1. **Preparação do problema:** fase na qual o problema é selecionado visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento;

2. **Leitura individual**: Cada aluno recebe o mesmo problema e são motivados a realizar sua leitura;

3. **Leitura em conjunto:** Uma nova leitura do problema é solicitada em conjunto de pequenos grupos de alunos.

4. **Resolução do problema**: Sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos buscam resolvê-lo;

5. **Observação e Incentivo:** Enquanto os alunos buscam estratégias para resolução do problema o professor observa, analisa e incentiva o trabalho de colaboração entre os integrantes dos grupos. O professor não é mais o transmissor do conhecimento e como mediador, leva os alunos a pensarem e trocar ideias;

6. **Registro das resoluções na lousa**: Representantes de cada grupo registram suas resoluções na lousa;

7. **Plenária:** Todos os alunos são convidados a discutir as resoluções, defender suas teses e, principalmente esclarecer suas dúvidas;

8. **Busca do consenso**: O professor conduz a classe a chegar num consenso sobre o resultado correto após as dúvidas sanadas e analisadas as diferentes resoluções do problema;

9. **Formalização do conteúdo**: Momento o qual o professor registra na lousa uma apresentação formal do conteúdo matemático, organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando conceitos, princípios e procedimentos construídos através da resolução do problema.

O desenvolvimento das etapas listadas demanda o ensino-aprendizagem do conteúdo a ser estudado comece através da resolução de problema, o qual deve expressar aspectos condutores para domínio de um conceito. A avaliação, por sua vez, perpassa o desenvolvimento das etapas em questão.

3.3. A Resolução de Problemas em Geometria

Quando tratamos do Ensino da Geometria com abordagens na sua história percebemos que pode ser um componente motivador que promove oportunidades de investigação em sala de aula através de resolução de problemas, permeando sua evolução.

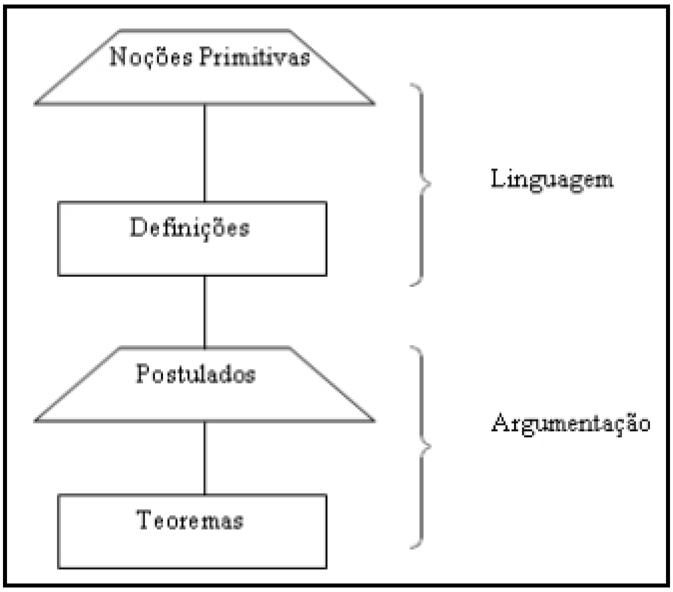
Com uma breve história sobre a Geometria Euclidiana podemos verificar a presença dos problemas e nos motivar a trabalhar com a Metodologia da Resolução de Problemas.

A Geometria é um dos ramos mais antigos da matemática que data de cerca de 4.000 anos com as antigas Civilizações Egípcia e Babilônicos. Estes últimos foram os primeiros a utilizar o produto do comprimento pela largura para achar a área de pedações retangulares de terra. Já os Antigos Egípcios usavam a Geometria para encontrar as áreas e os limites de seus terrrenos. Outro grande exemplo é a construção das pirâmides que seria impossível sem conhecimentos de Geometria. Inferimos que a Geometria nessas Civilizações se preocupava principalmente com a medida. A essência era o empirísmo, ou seja, baseada em observações, experiências, medição e intuição, sem organização e estrutura.

Acerca de 2.000 anos depois, aqueles que começaram a desenvolver a geometria num Sistema lógico-matemático e dedutivo forma os Gregos. O primeiro dos matemáticos a organizer a Geometria e estabelecer sua estrutura foi Euclides. Ele começou com algumas definições básicas e um conjunto de hipóteses que chamava de axiomas ou postulados. Assim, escreveu os elementos “Os Elementos”, formado por 13 livros.

A estruturação da Geometria de Euclides pode ser representada por um esquema. Observe a figura:

Figura 29: A Estruturação da Geometria por Euclides



Fonte: NUNES (2010, p.22)

E assim, desde a antiguidade o trabalho com a Geometria vem se desenvolvendo e juntamente com ele a Resolução de Problemas se fortalece.

É muito importante saber diferenciar o que é um problema de um exercício. De acordo com Echeverría (1998) para defender se uma situação é classificada como problema é preciso que haja obstáculos entre a proposta e o objetivo (proposição e meta), assim podemos caracterizar a demonstração de um Teorema como um problema a ser resolvido: para chegarmos da Hipótese à Tese é necessário a compilação de um conjunto de relações e construções (obstáculos) que compõe a demonstração.

Os conceitos geométricos, por diversas vezes, não são apropriados pelos alunos pela forma que são apresentados sejam elas na forma de um problema isolado em um material didático ou proposta sem contexto em aula. Essas abordagens criam no aluno concepções inadequadas para aprimoramento dos conceitos geométricos. Para minimizar essas dificuldades é primordial integrar no Ensino e Aprendizagem os seguintes tipos de apreensões identificados por Duval (1995):

> a) sequencial: é solicitada nas tarefas de construção ou nas de descrição com objetivo de reproduzir uma figura;
> b) perceptiva: é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica;
> c) discursiva: é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados através da imersão dos mesmos numa rede semântica de propriedades do objeto;
> d) operatória: é uma apreensão centrada nas modificações possíveis de uma figura e na reorganização perceptiva que essas modificações sugerem. (DUVAL, 1995, p. 190)

É perceptível que o estudo da Resolução de Problemas de Geometria se fortalece quando junto há entendimento da distinção das formas de apreensão da figura por se dispor da utilização do raciocínio que exige do aluno. As modificações possíveis de uma figura pela apreensão operatória são, assim, classificadas por Duval (1995):

> a) modificação “mereológica”: a figura pode decompor-se em subfiguras, fracionando-se e reagrupando-se convenientemente segundo uma relação parte–todo;

> b) modificação ótica: é a transformação de uma figura em outra, que será denominada “imagem”;
> c) modificação posicional: é o deslocamento da figura em relação a um referencial. Essas modificações são realizadas graficamente e/ou mentalmente. O interesse de fracionar uma figura ou de examiná-la a partir de partes elementares está ligado à operação de reconfiguração intermediária. Essa operação consiste em organizar uma ou várias subfiguras diferentes de uma figura dada, formando uma outra figura. Com efeito, as partes elementares obtidas por fracionamento podem ser reagrupadas em muitas subfiguras, todas dentro da figura de origem. Nessa operação podemos, por exemplo, realizar tratamentos como a obtenção de medidas de áreas por soma das medidas das áreas de partes elementares, ou ainda evidenciar a equivalência de dois reagrupamentos intermediários. (DUVAL, 1995 p. 190).

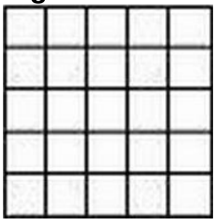
Ao atrelar as apreensões de Duval à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através de Resolução de Problemas podemos elaborar e aplicar tarefas de Geometria que venham enriquecer todo o processo.

3.4. Aspectos da produção acadêmica do GTERP em geometria

As pesquisas atuais sobre a Resolução de Problemas, como já mencionado na sessão 3.2, são fortemente trabalhadas sob a concepção da Dr.ª Rosa de La Rosa Onuchic com o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP) da UNESP de Rio Claro. Sob este olhar situamos a pesquisa do tema através da obra Perspectiva para Resolução de Problemas (ONUCHIC; LEAL; PIRONEL, 2017). Os organizadores dessa obra reuniram uma coleção de trabalhos pertinentes e motivadores de autores destacados do Brasil e do exterior. São traçadas importantes considerações sobre o Estado da Arte dessas pesquisas nos dias de hoje. Os ensaios revisam os conceitos e práticas de Resolução de Problemas em Matemática. Destacamos nas linhas seguintes aqueles que tratam especificamente de alguns aspectos na Geometria.

Podemos levantar a resolução de um problema que envolve os eixos Geometria e Números através da exploração de casos particulares. É uma proposta apresentada no trabalho ‘Resolução de Problemas e Formação de Professores: Um Olhar sobre a Situação de Portugal’. A exploração de casos particulares é uma estratégia que consiste em resolver um problema do mesmo tipo, mas que corresponda a um caso particular daquilo que se quer resolver. (SERRAZINA, 2014). Vejamos um exemplo: quantos quadrados existem na figura?

Figura 30: Número de quadrados



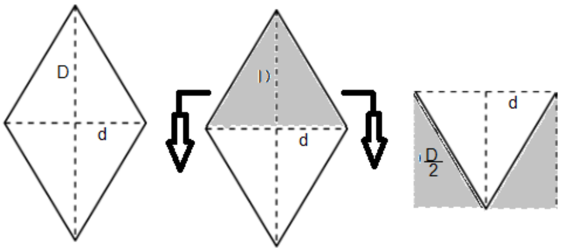
Fonte: Domínio Público

Serrazina (2014) relatou que o problema da figura 30 pode começar a ser resolvido contando uma figura mais simples, por exemplo, um quadrado 2x2. Destaca também:

> Estas estratégias devem ser trabalhadas ao nível do ensino básico e consequentemente na formação de professores. Para além de discutir diferentes estratégias, estas permitem alargar o conceito de problema para além dos problemas aritméticos, tradicionalmente apresentados nos livros didáticos para o ensino básico, que por vezes, nem sequer constituem problemas para alunos a quem são propostos (SERRAZINA, 2014, apud ONUCHIC; LEAL; PIRONEL, 2017, p.65)

No trabalho de Valle (2015) intitulado ‘Resolução de Problema um Tema em Contínua Discussão: vantagens das Resoluções Visuais’, contém a análise de um problema de área do losango. O texto sugere que uma boa maneira de se deduzir a fórmula para determinação da área do losango será inicialmente desenhar o losango, decompô-lo em triângulos e obter uma figura equivalente, da qual se saiba determinar a área, como um retângulo.

Figura 31: Decomposição do losango e composição em um retângulo



Fonte: elaborada pela pesquisadora

Considerando que a área de um retângulo é determinada pelo produto entre as medidas da base e a altura, conclui-se que: $\frac{D}{2} \times d$. Segundo Valle (2015, p.150) as transformações visuais utilizadas permitem reconfigurar a figura original:

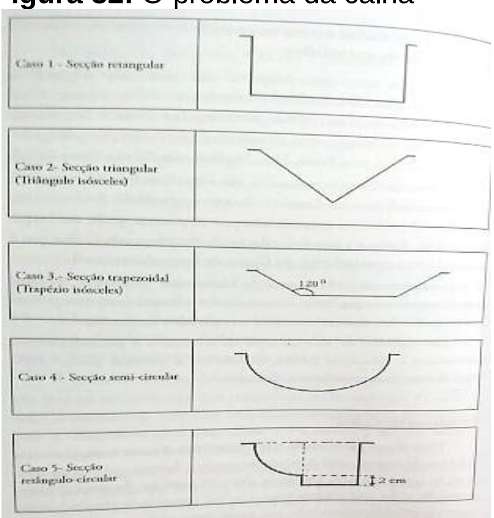
> Este processo é puramente visual, ocorrendo sem recurso a nenhuma expressão matemática. Com este exemplo, a evidência visual obtida pode ser utilizada durante o processo de ensino e aprendizagem, uma vez que explica intuitivamente um resultado matemático.

Santos; e Onuchic (2005) na formulação do Problema da Calha e o uso de sua metodologia através de resolução de problemas em cursos de engenharia, apresentaram uma proposta de trabalho para a sala de aula dentro de um contexto. O trabalho foi desenvolvido durante os anos de 2004 a 2010, nos cursos de Engenharia Civil do centro Universitário da Fundação Educacional de Barretos, SP.

O problema teve a seguinte formulação:

> Uma chapa galvanizada retangular, com 3 m de comprimento e 62 cm de largura, será dobrada de modo a formar uma calha com 3 m de comprimento. Deseja-se obter as medidas da secção transversal da calha que proporciona a maior capacidade possível, bem como a referida capacidade, em litros, para cada caso abaixo. Em todos eles, “a dobra” de cada lado ao alongo da calha mede 1 cm.

Figura 32: O problema da calha



Fonte: Santos; Onuchic (2017, p. 230)

A aplicação dessa tarefa em sala de aula e análise da resolução do problema levou em conta as nove etapas descritas por nós na seção anterior.

Na sequência apresentamos o percurso metodológico da nossa pesquisa.

4. PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos percurso metodológico traçado para o desenvolvimento da nossa pesquisa. Desta forma, iniciamos com os objetivos do estudo e suas características. Na sequência indicaremos os sujeitos participantes, o campo e as etapas de desenvolvimento da pesquisa. Para finalizar, realizamos uma análise qualitativa detalhada das produções da sequência didática e se os objetivos foram alcançados.

4.1. Objetivos do estudo

Retomamos o objetivo geral, de caráter explicativo, o estudo consistiu em analisar as produções de uma sequência didática aplicada com embasamento na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Resolução de Problemas, na construção dos conceitos e aplicação do conteúdo geométrico circuncentro do triângulo, utilizando régua e compasso, barbante e canudos e Google Maps, como recursos didáticos. Priorizamos o desenvolvimento do de pensamento geométrico nos estudantes do 9º ano do ensino fundamental e como se caracterizam as faces do aprendizado geométrico Percepção, Concepção, Representação e Construção. Para tanto, essa pesquisa também se baseia no seguinte questionamento:

Quais as contribuições que nossas tarefas trarão ao aprendizado dos alunos do 9º ano, referentes aos conceitos geométricos necessários para construção do circuncentro do triângulo, permeadas pela metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Resolução de Problemas?

Na sequência caracterizamos o delineamento da Pesquisa.

4.2. Caracterização da Pesquisa

O presente estudo consiste em uma Pesquisa de Campo, cuja análise qualitativa é das produções dos alunos em uma sequência didática, composta por 3 tarefas, aplicadas através da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Resolução de Problemas.

A pesquisa é qualitativa, especificamente, norteada pela modalidade de estudos naturalistas ou de campo, e é uma pesquisa de intervenção (NACARATO et al, 2005). A produção de informações para nossa pesquisa foi obtida via registros escritos das três atividades desenvolvidas pelos alunos em sala de aula, fotos, vídeos e anotações do professor-pesquisador. Caracteriza-se por uma pesquisa de intervenção, devido à presença do professor-pesquisador na análise da aprendizagem dos conteúdos e temas

4.3. Campo da Pesquisa e Sujeitos Participantes

A questão base desta pesquisa foi a análise dos efeitos gerados nas produções dos alunos em uma sequência didática cuja aplicação permeia-se pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Resolução de Problemas, especificamente na construção e aplicação das propriedades do circuncentro de um triângulo.

Nesse contexto escolhemos alunos do 9º ano pelo fato da necessidade de se atrelar a construção geométrica e sua importância sob o viés das faces do aprendizado desse conteúdo em específico e as lacunas na sua abordagem nos materiais didáticos, desde o 6º ano do fundamental. Algumas das vezes os temas triângulos, circunferências, losangos e mediatrizes são retratados como suporte para construção de novos conceitos, porém em nenhum momento se inter-relacionam em uma mesma Situação de Aprendizagem, de acordo com os PCN. O conteúdo sobre pontos notáveis em um triângulo não se apresenta e, consequentemente não há um estudo sobre o circuncentro do triângulo.

É notório que professores percebam as dificuldades dos alunos ao interpretarem um enunciado de problemas/exercícios de Matemática, por isso a escolha da Metodologia. A divisão das etapas leva a uma participação integral de cada aluno, onde cada um tem fundamental importância na construção de seu conhecimento. A intervenção mediadora do professor se faz durante toda a aplicação, mas é necessário que os alunos percebam que chegaram as conclusões e dominaram conceitos como protagonistas.

O Campo da Pesquisa deste estudo foi uma turma de 9º ano de uma escola de Ensino Básico na Cidade de Tatuí, interior de São Paulo. Na época, a escola possuía Ensino Fundamental e Ensino Médio, com uma turma para cada ano do Ensino Fundamental (I e II) e duas turmas de cada ano do Ensino Médio.

A turma de 9º ano que participou da pesquisa possuía 24 alunos dos quais, a maior parte, foram alunos da professora pesquisadora. Não havia aluno com idade em desacordo idade/série para turma. Eram alunos participativos, porém agitados. Gostavam de desafios, no entanto não se engajavam para a produção da escrita daquilo que pensavam (aspecto que foi trabalhado desde o 6º ano do fundamental). Desde o 6º ano ao 9º obtiveram melhorias significativas nesse âmbito, pois foi desenvolvido um trabalho em conjunto com os professores de disciplinas diversas.

Para a realização da pesquisa, a sala foi dividida em seis grupos com quatro alunos em cada. A seguir, descrevemos a Sequência Didática e a forma de direcionamento de trabalho que, como amplamente citado, foi permeado pela metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Resolução de Problemas.

4.4. A Sequência Didática

A descrição da Sequência Didática foi realizada de forma a contemplar todas as etapas desde a Preparação dos Problemas, seguida da realização das tarefas pelos alunos e a formalização do conteúdo construída por ambas as partes em busca de um consenso.

4.4.1 Etapa 1: Preparação do Problema

Segundo Onuchic e Allevato (2009), esta etapa é a qual o problema é selecionado visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento.

Os problemas escolhidos foram divididos em três Situações de Aprendizagem subdivididas em Problemas com suas respectivas Tarefas.

Enquanto preparávamos as TAREFAS levamos em consideração os principais objetivos da pesquisa. São problemas que se caracterizam por etapas que conduzem através da representação de figuras geométricas de forma empírica a construção de conceitos geométricos e sua aplicação.

De forma a abordar os conteúdos de maneira integrada as três TAREFAS foram elaboradas e divididas da seguinte forma:

Quadro 12: Divisão das tarefas

TAREFAS	**Tema**	**Número de Questões**	**Conteúdos**
1	Explorando o conceito e as propriedades da Mediatriz	Cinco	Ponto Médio, Losango como quadrilátero Notável e suas propriedades, Circunferência e mediatriz
2	O Circuncentro de um triângulo e suas propriedades	Quatro	Triângulos, Desigualdade triangular, Mediatrizes dos lados dos triângulos, Ponto de Intersecção das mediatrizes (posição relativa à superfície triangular), Circuncentro e suas propriedades.
3	Aplicação das propriedades do CIRCUNCENTRO	Uma	Circuncentro e suas propriedades

Fonte: Elaborado pela Pesquisadora

A seguir, destacamos o que fizemos na Etapa de Leitura Individual

4.4.2 Etapa 2: Leitura individual.

Nesta etapa cada aluno recebe os mesmos problemas e são motivados a realizar a leitura. Foi um momento oportuno para cada aluno compreender o todo do problema, ou seja, levar o aluno a se questionar sobre do que se trata, quais palavras desconhece, etc., por isso foi imprescindível criar um ambiente calmo e silencioso. Sabemos das dificuldades de concentração dos adolescentes nesta faixa etária e, portanto, tivemos que dialogar sobre a importância de se manter concentrado nesta etapa.

Após a leitura individual, os questionamentos já começaram a surgir a respeito dos enunciados. Pedimos que anotassem as dúvidas para que, em grupos, fossem discutidas.

4.4.3. Etapa 3: Leitura em conjunto

Quando sugerido para lerem em conjunto os alunos precisaram de ajuda para que a leitura fosse realizada em sincronia. Essa etapa, (ênfase para a turma em questão) não foi muito produtiva: apesar dos alunos aprenderem coisas do tipo *ler em sincronia, respeitar a leitura do próximo, etc,* percebemos que para a interpretação do problema, foi mais preciso quando um indivíduo do grupo realizou a leitura e, os demais atentos a ela, anotaram dúvidas e discutiram depois.

4.4.4. Etapa 4: Resolução do problema

Segundo Onuchic e Allevato (2009) nesta fase, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos buscam resolvê-lo.

Figura 33: Resolução do Problema

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Constatamos que esta fase foi a de maior produção pelos alunos, no entanto, houve uma divergência quanto ao propósito da etapa destacado a princípio: parte dos alunos ainda perguntavam sobre o enunciado no decorrer das atividades. Na etapa individual ou em grupo de leitura sempre alguma informação não é relevada, no entanto com o estimulo do professor aos alunos os motivando a pesquisar as palavras desconhecidas com o auxílio do dicionário ou conceitos com o auxílio da internet esse problema foi parcialmente sanado, visto que em algumas vezes foi necessária a intervenção da professora.

A seguir destacamos as propostas e as respectivas análises das atividades realizadas pelos grupos.

4.4.4.1. Apresentação e Análises gerais das aplicações e desenvolvimento das atividades

No decorrer desse subtópico apresentamos cada Situação de Aprendizagem com todos os problemas que a compõem e suas respectivas tarefas

4.4.4.1.1. Primeira Tarefa: Explorando o Conceito e as propriedades da Mediatriz.

Inicialmente apontamos os conteúdos abordados, os recursos utilizados e os objetivos da sequência de tarefas

Quadro 13: Objetivos da Primeira Tarefa

CONTEÚDOS	RECURSOS	OBJETIVOS
Ponto médio; Losango como quadrilátero notável; Propriedades do losango Construção da circunferência; Mediatrizes e suas propriedades	Materiais de DG (régua e compasso); Transferidor; Canudos; Dicionário; Internet	Compreender o significado de ponto médio de um segmento através de atividades experimentais; Retomar as características de uma circunferência através da construção com compasso, dado seu raio; Utilizar as propriedades do losango para construção da mediatriz com régua e compasso;

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Apresentamos a seguir, as questões 1 as Primeira Tarefa e as respectivas análises gerais da aplicação e desenvolvimento das atividades pelos alunos.

Questão 1 - João dispõe de um canudo e uma régua. Sua professora solicitou que com os materiais disponibilizados João comparasse o canudo a um segmento de reta e o denominasse de $\overline{\mathrm{AB}}$. Auxilie João nessa atividade!

a) Qual é a medida do segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ em centímetros? Construa com régua um segmento congruente.

b) Determine o PONTO MÉDIO do canudo sem utilizar a régua. Explique como fez. Corte o canudo no ponto que você determinou no item anterior. Qual é o comprimento, em centímetros, de cada pedaço? Marque no segmento que construiu o ponto médio e o denomine M.

c) De acordo com as atividades realizadas, como você definiria o PONTO MÉDIO de um segmento?

Como disposto, verificamos que o objetivo desta questão é a identificação do ponto médio de um segmento.

Constatamos que, durante a resolução da questão 1 pelos alunos, logo no item a, quando se tratou da construção do segmento $\overline{AB}$, que como exposto, seu comprimento é congruente ao comprimento do canudo, os alunos imediatamente se depararam com o desafio de entender o significado de CONGRUÊNCIA neste contexto. Perguntas que surgiram:

- Como criar um segmento congruente ao canudo?
- Posso medir o canudo e utilizar a régua na construção?

Isso nos levou a crer que a insegurança e o vocabulário geométrico deficitário por muitas vezes atrapalham o raciocínio e a construção do conhecimento geométrico. Os alunos foram motivados a agir com liberdade no desenvolvimento das atividades e procuramos interferir o mínimo possível de forma que eles mesmos chegassem às conclusões.

Uma maneira que utilizamos para responder às questões, foi instigando-os com outros questionamentos, por exemplo:

- O que você entende por congruente?
- Além da régua, qual outra maneira você disporia de forma a construir um segmento de comprimento congruente ao do canudo?

No item b, o que parecia tão óbvio que consistia na obtenção do ponto médio do canudo sem interferência de uma régua, levou os alunos a várias indagações. Como seria possível obter a metade sem utilizar a régua? Até que um dos grupos apontou como uma brincadeira: devemos dobrar o canudo ao meio, claro!

Figura 34: Ponto médio do canudo

Fonte: Arquivo da pesquisadora

.

No item c os alunos não tiveram dificuldades na realização. Já no item d, a expressão "como você definiria" foi amplamente discutida nos grupos. Até que a mediação os levou a crer que poderiam escrever o significado de ponto médio utilizando suas próprias palavras utilizando as conjecturas levantadas durante a realização do problema 1.

A face da Percepção Geométrica se faz presente na proposta e realização desta atividade, visto que os alunos devem associar o segmento de reta a um canudo; a Face da Construção permeia a resolução, pois o aluno teve que se dispor da régua e produziu o conhecimento através da construção do segmento se reta; a Representação complementa a face da Construção neste contexto, pois através da resolução desta tarefa o segmento de reta é confeccionado e a Concepção de cada elemento geométrico foi definido e assim compreendido e

Questão 2 - A professora propôs um novo desafio a João: Será possível encontrarmos pontos que sejam EQUIDISTANTES dos pontos A e B do segmento $\overline{AB}$?

a) Você sabe o significado da palavra equidistante? Em caso afirmativo explique seu significado, caso contrário pesquise e depois registre.

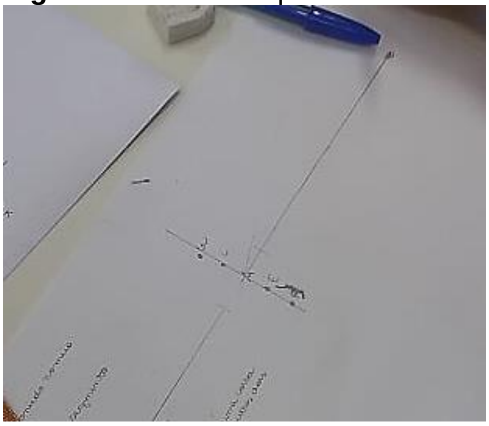
b) Tente identificar no desenho que construiu na Atividades 1 o segmento $\overline{AB}$, pontos que sejam equidistantes do ponto A e do ponto B. Como você faria para se certificar disso?

c) Ligue os pontos obtidos no exercício anterior. O que você observa quanto a curva obtida?

Logo no princípio da resolução do problema 2 o termo "equidistante" foi amplamente discutido em dois dos grupos. Os demais, como já se apropriavam deste conceito não houve muito empecilho. Os primeiros, orientamos que pesquisassem no dicionário e/ou na internet sobre o significado de tal palavra para concluir o item a. No contexto abordado, já no item b, todos os grupos chegaram à conclusão precipitada que o único ponto equidistante de A e de B era o ponto M (ponto médio). Assim, coube à professora motivá-los a identificar, por exploração e investigação, outros pontos da folha que, possuem a mesma distância de A e B.

Os resultados foram surgindo:

Figura 35: Pontos equidistantes de A e B



Fonte: arquivo da pesquisadora

Ainda no item b a proposta se estendeu para explicar como o aluno se certificaria de que os pontos são equidistantes de A e B. Todos os grupos utilizaram a régua e constataram que os pontos encontrados possuíam distâncias aproximadas quando comparadas a A e B.

Para concluir o problema 2, no item c a palavra “curva” não foi entendida pela maioria dos grupos. Tivemos que intervir com o conceito de curvas em geometria até a conclusão que ao unir os pontos encontrados obteríamos uma curva cada vez mais próxima de uma reta. A construção adequada desta reta somente seria possível com o uso do compasso e a régua.

Questão 3 - João observou algo muito importante sobre os pontos que equidistam dos pontos A e B: todos possuem uma mesma propriedade e pertencem a “UM MESMO LUGAR”. A esse conjunto de pontos denominamos como “LUGAR GEOMÉTRICO”. Qual é o objeto geométrico que representa esse conjunto de pontos que você obteve no exercício anterior? Conjecture e pesquise para validar sua resposta.

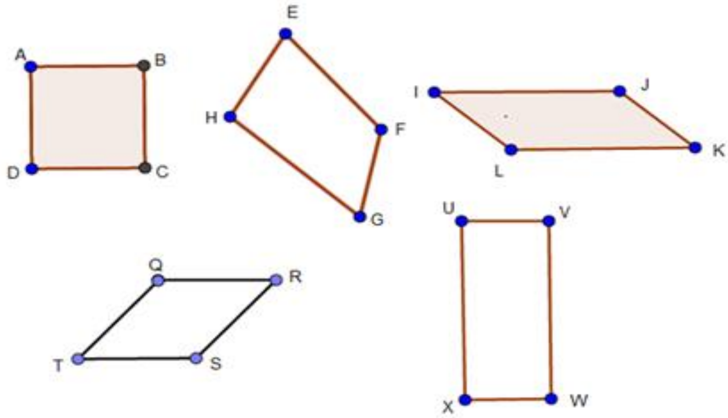
No Problema 3, mais uma vez a forma de exploração e investigação se fez presente visto que os alunos deveriam encontrar o significado da expressão lugar geométrico, onde as tarefas anteriores já o levaram a percepção e construção deste conceito quando exploraram a localização dos pontos que formam a mediatriz.

Questão 4 - Vamos auxiliar João a construir com régua e compasso a MEDIATRIZ do segmento $\overline{AB}$.
Para tanto, inicialmente vamos retomar as propriedades do LOSANGO e da CIRCUNFERÊNCIA

- LOSANGO.

a) Do conjunto de quadriláteros abaixo, circule aqueles que apresentam os quatro lados com o mesmo comprimento. Indique a medida de cada lado nas figuras.

Figura 36: Quadriláteros equiláteros



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

b) Qual é o nome dado ao quadrilátero notável que possui os quatro lados com a mesma medida?

c) Trace as diagonais dos losangos das figuras. Quantas diagonais possui um losango? O que você entende por diagonal? Agora, valide: pesquise!

d) O que você pode observar quanto à posição relativa entre as diagonais de um losango?

e) No losango QRST, trace suas diagonais e nomeie P o ponto de intersecção entre as diagonais.

f) Meça os comprimentos QP e PS. O que você conclui?

g) Proceda da mesma maneira com os comprimentos TP e PR. O que podemos concluir com essa experimentação?

h) O que o ponto P representa com relação às diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$?

i) Meça com o transferidor os quatro ângulos obtidos a partir das diagonais AD e BC. O que você observa?

- CIRCUNFERÊNCIA

a) Utilizando seu compasso desenhe no uma circunferência de centro O e raio 5 cm.

b) A circunferência é formada por um conjunto de ponto que gozam de uma mesma propriedade, sendo assim um LUGAR GEOMÉTRICO. Que propriedade é essa?

- Construindo a MEDIATRIZ

a) Trace novamente um segmento $\overline{AB}$, tal que AB = 8 cm

b) Com seu compasso trace uma circunferência de centro em A com raio 5 cm. Faça o mesmo com centro em B. As circunferências traçadas se intersectaram? Em caso afirmativo, em quantos pontos?

c) Nomeie os pontos obtidos a partir da intersecção das circunferências de P e Q.

d) Qual o nome dado a circunferências que se intersectam em dois pontos?

e) Trace os segmentos $\overline{AP}, \overline{PB}, \overline{BQ}$ e $\overline{QA}$. Como você classifica o polígono APBQ? Justifique.

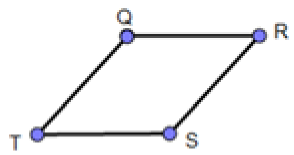
f) O que o segmento $\overline{PQ}$ representa do polígono APBQ? E do segmento $\overline{AB}$?

g) Escreva um roteiro para construir a mediatriz de um segmento, faça o enunciado gráfico e em seguida construa com régua e compasso.

O problema 4, não somente roteiriza a construção da mediatriz, bem como os fez perceber propriedades importantes das figuras geométricas que são suporte para a sua construção (losango e circunferência). A tarefa a e b sobre LOSANGOS os estimulou a relembrar sua propriedade de ser equilátero. Em geral, os alunos não tiveram dificuldades em reconhecer este fato, porém quando tratamos da expressão “quadriláteros notáveis” na tarefa b, foi imediato o questionamento. O momento foi propício para retomar, também esse conceito. Parte dos grupos mencionaram o nome deste tipo de quadrilátero notável como QUADRADO, no entanto questionamos:

- E o quadrilátero QRST? É um quadrado? Por que?

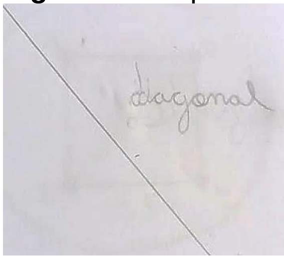
Figura 37: Quadrilátero QRST



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Mais um conceito foi reforçado ou apropriado na tarefa c: diagonais de um polígono. Ficou claro que há uma deturpação sobre o que é uma diagonal, posto que alguns alunos associaram essa forma geométrica a um segmento inclinado quando indagados sobre seu significado. Um aluno assim a fez:

Figura 38: Representação de diagonal



Fonte: arquivo da pesquisadora

Desta forma tivemos de conduzir a pesquisa dos alunos para o significado de diagonal. Um determinado aluno conjecturou que a diagonal é um segmento que “vai de um vértice a outro de um polígono”. Aproveitamos sua conjectura para mediarmos a situação e o questionamos:

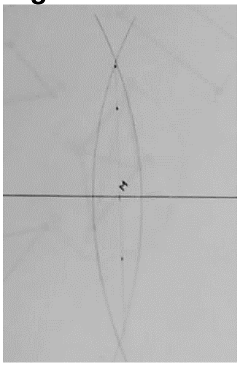
- A diagonal de um polígono pode ir de um vértice a QUALQUER outro vértice do polígono?

Da tarefa d à tarefa h esperávamos que os alunos concluíssem que as diagonais de um losango se intersectam em seu ponto médio e que, em especial no quadrado os segmentos obtidos a partir dessa intersecção são congruentes; e que além disto as diagonais são perpendiculares entre si.

Ainda no problema 4 quando pedido para construir a Circunferência, identifica-a como um LUGAR GEOMÉTRICO e caracterizar seu raio os alunos não tiveram dificuldades.

Na Etapa de Construção da Mediatriz, os alunos que já sabiam fazer sua construção de forma breve, ou seja, sem as construções suportes fizeram-na diretamente.

Figura 39: Mediatriz



Arquivo da Pesquisadora

O momento foi muito oportuno para indagá-los sobre o porquê destes passos para a construção da mediatriz. Nenhum grupo chegou à conclusão. Desta forma os incentivamos a realizar a tarefa “Construindo a Mediatriz”.

As tarefas de a a f conduziram aos alunos perceberem:

- que a abertura do compasso, quando sua ponta seca estiver sobre a extremidade do segmento deve ser maior que a metade para que as circunferências construídas sejam SECANTES;

- que os raios devem ser iguais para que a figura obtida pela união dos pontos de intersecção das circunferências e os centros das mesmas seja um losango (já que os lados são representados pelos raios congruentes);

- que, como o quadrilátero é um losango, as distâncias dos pontos que representam as extremidades do segmento (centro das circunferências) aos pontos de intersecção das circunferências são iguais.

Os grupos concluíram assim, que a abertura do compasso poderia ser qualquer para definir os raios das circunferências, desde que fossem de maior comprimento que a metade do segmento e fossem iguais para ambas.

A tarefa g propôs a construção da mediatriz e que cada grupo escrevesse um roteiro para sua construção.

4.4.4.1.2. Segunda Tarefa: O Circuncentro de um triângulo e suas propriedades.

De forma análoga a Primeira Tarefa, apresentamos a seguir os conteúdos, recursos utilizados e objetivos das tarefas.

Quadro 14: Objetivos da Segunda Tarefa

CONTEÚDOS	RECURSOS	OBJETIVOS
Triângulos Desigualdade triangular Mediatrizes dos lados dos triângulos Ponto de Intersecção das mediatrizes (posição relativa à superfície triangular) Circuncentro e suas propriedades.	Materiais de DG (régua e compasso) Dicionário Internet Barbante	Perceber que não são três comprimentos quaisquer que podem representar os lados de um triângulo e desta forma conjecturar a propriedade da desigualdade triangular; Construir com régua e compasso as mediatrizes dos lados de um triângulo retângulo, isósceles e escaleno; Identificar o ponto de intersecção das mediatrizes como o circuncentro e compreender suas propriedades;

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Adiante segue o enunciado da questão 1, tarefa 2 e as respectivas análises gerais da aplicação e desenvolvimento das atividades pelos alunos:

Questão 1 - Com um pedaço de barbante de aproximadamente 80 cm de comprimento faça nós igualmente espaçados de forma a se obter 10 espaços.

a) Construa com esse barbante um triângulo. Qual é o perímetro desse triângulo? Quais as medidas de seus lados?

b) Agora, construa outros triângulos com esse mesmo barbante. Quantos triângulos diferentes você conseguiu descobrir? Registre a medida de seus lados.

c) Tente construir um triângulo com lados medindo 6, 2 e 2. O que você observa? (Registre suas hipóteses)

d) Com quaisquer medidas podemos formar um triângulo? Registre como pensou.

Após cortar os pedaços de barbante, os grupos começaram a trabalhar nos espaçamentos e nós. Esta etapa foi a que mais demorou na atividade. Algumas questões e colocações surgiram, como:

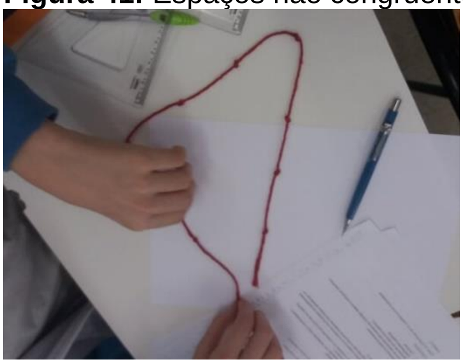
- Quando realizamos os nós, se perdem alguns "pedaços" do comprimento total do barbante, isso tem algum problema, professora?
- Os espaços entre os nós não ficarão exatamente do mesmo tamanho.

A propósito os levamos a refletir sobre o objetivo da atividade: construir triângulos cuja unidade de medida é o espaço entre os nós. Assim, os grupos perceberam que havia necessidade de os espaços serem iguais, no entanto como a tarefa inicial é uma experimentação, não seria possível conseguir espaços absolutamente congruentes.

Figura 40: Nós em barbantes

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 41: Espaços não congruentes entre os nós



Fonte: arquivo da pesquisadora

Ao realizarem o item a da questão 1, os grupos perceberam imediatamente que o perímetro do triângulo construído por eles, independentemente do comprimento de seus lados, seria constante, ou seja, 10 espaços ou aproximadamente 80 cm, considerando os nós como vértices dos triângulos). Os grupos também conceberão que, o melhor seria utilizar os espaços como unidade, portanto o perímetro dos triângulos seria 10 unidades de comprimento.

No item b, as primeiras discussões entre os grupos foram em torno de muitas possibilidades de construção de triângulos, mas quando manipularam o barbante perceberam que não era bem assim: algumas possibilidades de medidas dos lados não tornavam possível que o triângulo "fechasse".

Um dos grupos, ao realizar a experimentação do item c, que consistia em montar um triângulo com lados medindo 6, 2 e 2, conseguiu fechar o triângulo. Pedimos para que os demais grupos tentassem fazer o mesmo. Claramente não conseguiram. Pedimos para que cada grupo levantassem as hipóteses sobre esse acontecimento. O próprio grupo que levou a possibilidade da construção percebeu que os espaços entre os nós estávamos divergentes.

Questionamos: Por que não é possível construir um triângulo com lados medindo 6, 2 e 2? Um aluno respondeu: Porque não fecha!

Nossas expectativas sobre o item d era que os alunos conjecturassem as propriedades da desigualdade triangular. Obtivemos boas respostas, porém imaturas, ainda.

Na sequência apresentamos o enunciado da questão 2, tarefa 2 e as colocações referentes ao momento de sua aplicação e desenvolvimento das atividades pelos alunos:

Questão 2 - A propriedade que acabamos de conjecturar é a desigualdade triangular. O próximo desafio consiste em construir triângulos com régua e compasso.

a) Construa com régua um segmento de 8 cm. Nomeei-o $\overline{AB}$

b) Tomando AB como a base de um triângulo equilátero, como você faria para construir os demais lados desse triângulo? Utilize régua e compasso. Nomeie o terceiro vértice de C.

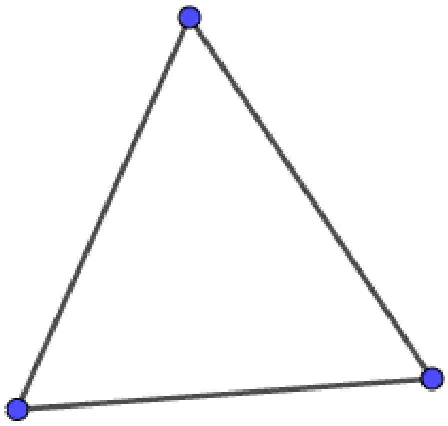
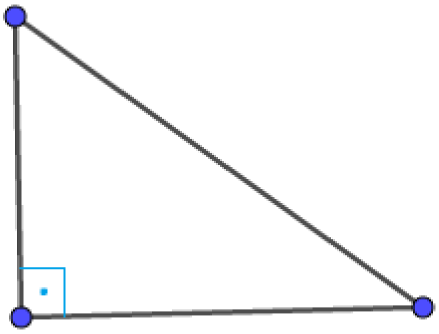
c) Escreva um roteiro para construção de um triângulo com régua e compasso.

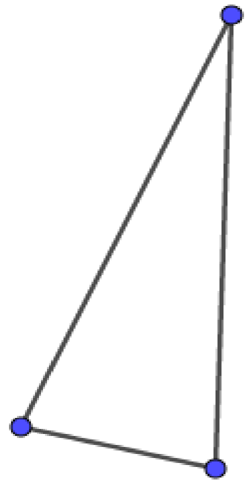
d) Construa triângulos de perímetro 12 cm. Quais as possíveis medidas inteiras para os lados desses triângulos?

e) Dentre os triângulos construídos no item anterior há um que é um triângulo retângulo. Quais as medidas de seus lados?

Os itens de a a c foram realizados sem muitas dificuldades pelos grupos. A partir do item d os grupos sentiram a necessidade de verificar com os demais se o número de triângulos diferentes encontrados coincidia com os deles. Pedimos para que aguardassem o momento da Plenária para essa constatação. Todos os grupos concluíram que há 3 possibilidades para construir um triângulo de 12 cm de perímetro, com medidas inteiras para os lados:

Quadro 15: Triângulos de Perímetro 12

Medidas dos lados:	Triângulo
4cm, 4cm e 4 cm	
5cm, 4cm e 3cm	

5cm, 5cm e 2cm	

Elaborado pela pesquisadora

A observação das construções realizadas pelos alunos os levou a concluir que o triângulo retângulo é o de medidas de lados: 3cm, 4cm e 5cm.

Agora, enunciamos a questão 3 e sua respectiva análise:

Questão 3 - Na Primeira Tarefa aprendemos o que é uma mediatriz. Agora vamos trabalhar com as mediatrizes dos lados de um triângulo.

a) Construa três triângulos. (retângulo, acutângulo e obtusângulo). Não esqueça de nomear seus vértices.

b) Construa em cada um deles as mediatrizes de seus lados.

c) O que você observa quanto as mediatrizes em cada um dos triângulos? O que há em comum nos três triângulos quanto às mediatrizes?

d) Nomeie os pontos de intersecção de C1, C2 e C3, respectivamente. O que acontece com os pontos de intersecção das mediatrizes nos três triângulos construídos quanto a sua localização em relação à superfície triangular?

e) Com o centro do compasso no ponto de intersecção das mediatrizes e abertura em um dos vértices, trace uma circunferência em cada uma das três construções. O que você observa?

f) Como se chama o ponto de intersecção das mediatrizes de um triângulo? Escreva suas características.

Os alunos não tiveram grandes problemas para construir os triângulos e as mediatrizes relativas a cada lado, mas entendemos o quanto os mesmos resistiram a apagar e refazer quando sua construção não foi bem-feita, não pela falta do conhecimento e sim por desinteressar-se em fazer todo o processo novamente. Como mediadores do processo, os incentivamos a fazer isso, no entanto respeitamos a forma apresentada por alguns grupos e mostramos na sequência do trabalho, tal como foi realizada por eles.

Todos tiveram dificuldades em entender o que o enunciado da tarefa c propunha. Tivemos que conduzir e os questionamos:

- Qual a posição relativa entre as mediatrizes construídas sobre os lados de cada triângulo?

Parte dos alunos responderam que elas se cruzavam em um único ponto e um dos grupos respondeu que as mediatrizes eram concorrentes.

Nossa expectativa sobre o item e é que os grupos respondessem que a circunferência traçada intersectava os vértices dos triângulos, sendo assim circunscrita a ele. A maioria chegou a esta conclusão e explanaram com suas palavras.

Para o item f os alunos tiveram que usufruir da internet para pesquisar o nome do ponto de intersecção das mediatrizes construídas a partir dos lados de um triângulo: o circuncentro. Esperávamos que os alunos chegassem a conclusão que o circuncentro equidista dos vértices do triângulo, já que é o centro da circunferência circunscrita, porém não tiveram dificuldades de entender após socializado por todos.

4.4.4.1.3. Terceira Tarefa: Aplicação das propriedades do circuncentro.

Apresentamos no quadro os ojetivos, conteúdos e recursos utilizados na atividade.

Quadro 16: Objetivos da Terceira Tarefa

CONTEÚDOS	RECURSOS	OBJETIVOS
Circuncentro e suas propriedades	Materiais de DG (régua e compasso) Computadores com acesso à internet	Compreender a aplicação das propriedades do circuncentro em um contexto.

Elaborado pela pesquisadora

Segue o enunciado da Terceira Tarefa:

Você e dois amigos de grupo resolveram marcar um passeio. Pensaram em marcar o encontro de saída em um lugar que seja equidistante das casas de cada um. Como vocês devem proceder para descobrir esse lugar? Siga as instruções dadas pela professora.

Levamos os grupos à sala de informática para realização da Terceira Tarefa.

Figura 42: Realização da terceira tarefa com auxílio do computador

Fonte: arquivo da pesquisadora

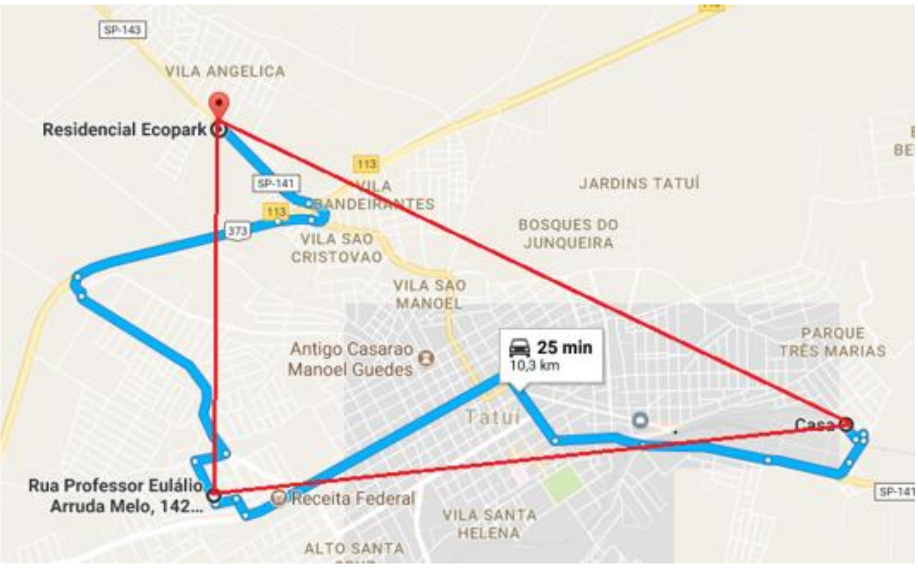
Mediamos a atividade da seguinte forma:

1) Pedimos aos alunos que procurasse no Google Maps a sua residência e as de mais dois amigos e marcassem com as ferramentas do próprio aplicativo a localização das três. No Mapa ficaram identificada com três pontos.

2) Utilizando a ferramenta de Captura pedimos que os grupos selecionassem a imagem, copiassem e a colassem no programa Paint. Neste, os alunos ligariam os três pontos com segmentos de retas e formariam um triângulo.

3) Cada grupo salvou sua imagem e imprimimos cada uma. Segue um modelo:

Figura 43: Modelo para terceira tarefa



Fonte: elaborado pela pesquisadora

4) As folhas com as impressões foram entregues a cada grupo e os orientamos a localizar o ponto pedido na terceira tarefa 3.

A primeira questão levantada pela professora-pesquisadora foi: quem é este ponto?

A questão foi muito genérica, então os conduzimos a uma discussão em cada grupo e assim, propomos as seguintes reflexões:

- Quais características devem ter este ponto?
- O que o tornará equidistante dos pontos que representam as residências de vocês?
- O que as residências representam do triângulo formado?
- Quem é o ponto que equidista dos vértices dos triângulos?

A maioria dos grupos não demorou para entender que se tratava do circuncentro. Isto se deve ao fato de terem realizado previamente uma tarefa que os conduzia a construir e definir o circuncentro. Desta forma, com régua e compasso construíram as mediatrizes dos lados e encontraram o circuncentro.

Também levantamos as reflexões aos grupos:

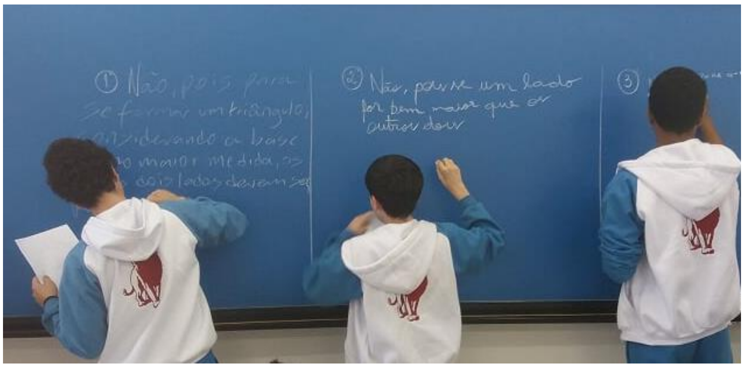
- Esse lugar que representa o circuncentro no mapa é conveniente para se marcar um encontro?

Diante das reflexões os alunos puderam conhecer uma forma de aplicação das propriedades do circuncentro de um triângulo.

4.4.5. Etapa 6: Resolução na lousa.

Para cada uma das Tarefas, ao final da resolução das questões propostas, pedimos para que cada grupo respondesse na lousa uma em especial. A questão foi selecionada pela professora pesquisadora. Como por exemplo, na Segunda Tarefa pedimos para que os grupos respondessem à questão 1, item d: *Com quaisquer medidas podemos formar um triângulo? Registre como pensou.*

Figura 44: Resolução na lousa



,

Fonte: Arquivo da pesquisadora

4.4.6. Etapas 7 e 8: Plenária e Busca do Consenso

Na Etapa 7, segundo Onuchic (2004), todos os alunos são convidados a discutir as resoluções, defender suas teses e, principalmente esclarecer suas dúvidas. Na Etapa 8, o professor conduz a classe a chegar num consenso sobre o resultado correto após as dúvidas sanadas e analisadas as diferentes resoluções do problema.

Durante a aplicação das nossas Tarefas procuramos realizar essas etapas em um momento especial, ou seja, um momento definido como “Plenária e Busca de um Consenso.”, no entanto, como cada tarefa possuía diversas questões algumas discussões foram surgindo durante todo o processo, porém os orientamos a discutir somente com o próprio grupo para depois no momento adequado discutir com os demais.

Depois que cada grupo explanou suas ideias, os levamos a novas reflexões. Perguntamos:

- Qual das respostas dos grupos estava mais completa?
- Vocês acrescentariam algo?

Quando algumas definições ficavam vagas conduzíamos a uma completude, sempre questionando de forma que, a construção das ideias, fosse concluída pelos alunos.

Ainda, tomando como exemplo a questão 1, item d da Segunda Tarefa, apresentamos a reposta considerada mais completa pelas equipes, escrita na lousa por um dos grupos:

- Não, pois para que um triângulo se forme, é necessário que a soma de dois de seus lados seja maior que o terceiro lado.

4.4.7. Etapa 9: Formalização do conteúdo

Segundo Onuchic (2004) esta etapa é o momento o qual o professor registra na lousa uma apresentação formal do conteúdo matemático, organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando conceitos, princípios e procedimentos construídos através da resolução do problema.

Depois do Consenso entre os Grupos apresentamos a propriedade da desigualdade triangular.

“Em todo triângulo a medida de um lado qualquer é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois e maior que a diferença positiva, entre eles”

Dado um triângulo qualquer de lados com medidas a,b e c, então:

$$a < b + c \qquad a > b - c$$

$$b < a + c \quad \text{e} \quad b > a - c$$

$$c < a + b \qquad c > b - a$$

As três primeiras desigualdades foram entendidas rapidamente pelos alunos, mas o conjunto das outras três, eles tiveram dificuldades de, através da forma empírica, chegar à conclusão.

Assim, fomos construindo com eles a dedução:

Tomamos inicialmente a desigualdade:

$$b < a + c$$

Subtraímos c de ambos os membros da desigualdade:

$$b - c < a + c - c$$

Assim, obtemos:

$b - c < a$, *ou seja* $a > b - c$ *c.q.d*

De forma análoga podemos obter as demais sentenças.

Após a demonstração pedimos para que explicassem o porquê da expressão “diferença positiva” da enunciação da propriedade. Um grupo respondeu que era porque se tratava de comprimentos e não existem comprimentos com medidas negativas.

Da forma que foi apresentada a questão específica da desigualdade triangular, fizemos com as demais Tarefas.

Ao fim da Etapa 9 retomamos com os alunos todos os conceitos construídos por eles e percebemos que o resultado foi bom: os alunos se apropriaram dos conteúdos objetos dessa pesquisa. Claro, que cada um com a profundidade inerente de sua forma de aprender.

5. ANÁLISE DAS INFORMAÇÕES: ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELOS GRUPOS

No presente capítulo apresentamos as atividades já realizadas pelos Grupos. Analisamos de forma descritiva cada um dos resultados obtidos e constamos se o Grupo atingiu o esperado por uma das Tarefas escolhidas de forma aleatória. É importante ressaltar que, mesmo se tratando de um trabalho em grupo, cada aluno registrou em folhas separadas e que, possivelmente algumas resoluções podem divergir mesmo que em integrantes do mesmo grupo. Selecionamos parte das resoluções.

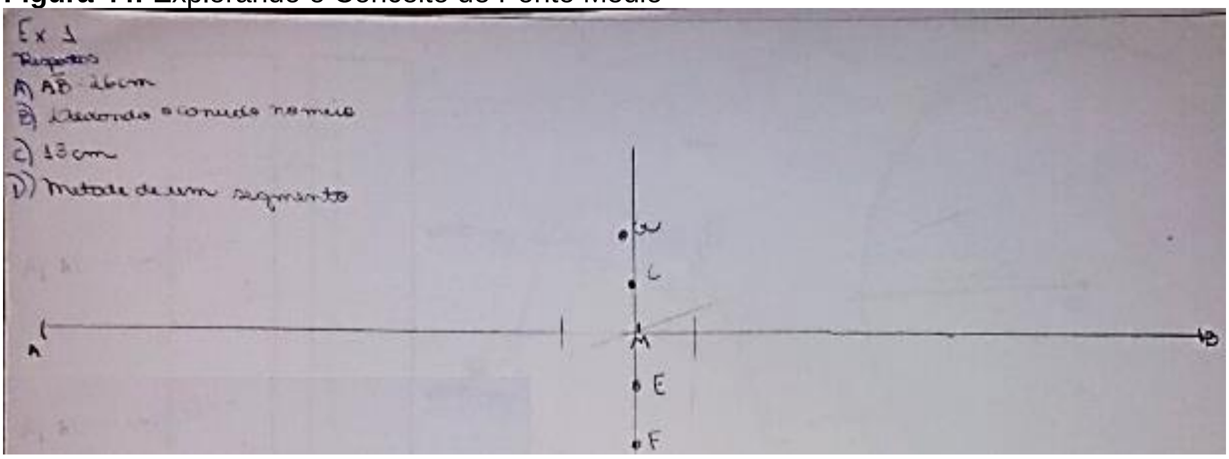
5.1. Primeira Tarefa: Resolução do Grupo 1

Escolhemos apenas um grupo para análise desta questão por conta da diversidade de escrita de todos os redatores: mesmo partilhando as ideias os redatores escreveram a seu modo, o que justifica algumas formas distintas de escrita

5.1.1. Questões 1 e 2: Ponto Médio de um segmento e explorando o conceito de Mediatriz.

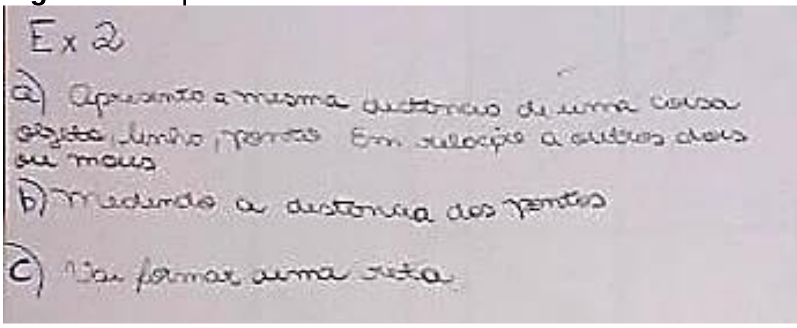
Observamos os registros do Grupo 1 para as Questões 1 e 2 da Primeira tarefa.

Figura 44: Explorando o Conceito de Ponto Médio



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 45: Equidistância


Ex 2

a) Apresenta a mesma distância de uma coisa objeto linha pontos Em relação a outros dois ou mais

b) Medindo a distância dos pontos

c) Vai formar uma reta

Fonte: Arquivo da pesquisadora

O objetivo específico da questão 1 é a apropriação do significado de ponto médio e, como já vimos, os alunos dispunham de um canudo que associaram a um segmento de reta. Constatamos que o grupo compreendeu o significado de ponto médio e conseguiu associar o comprimento do canudo ao comprimento do segmento, no entanto ao definir “ponto médio” no item d, a aluna redatora “Laura” escreveu que o ponto médio é “metade de um segmento”. Faltou detalhar mais.

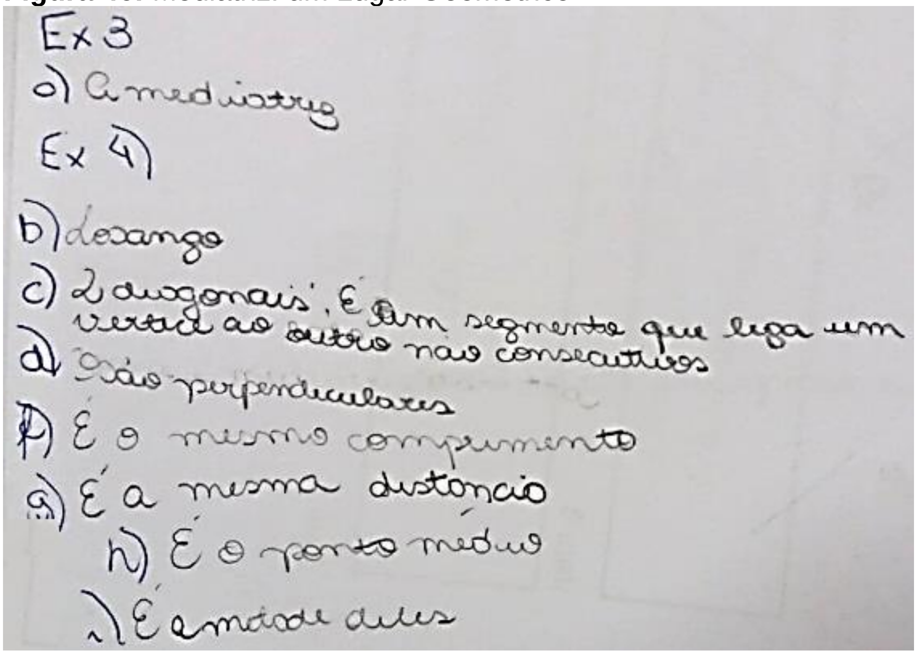
A expectativa para a Questão 2 é de que, o aluno consiga identificar os pontos equidistantes das extremidades do segmento $\overline{AB}$. Como vimos na questão 1, o Grupo entendeu a proposta do exercício e identificaram alguns pontos (E, F e C) através de experimentação que, possivelmente equidistam de A e B, como relatado pela aluna “Laura”. No item b, a aluna escreveu que se certificou da distância “medindo a distância dos pontos”, mas ficou vago. Uma resposta possível:

“Para se certificar disto medimos a distância dos pontos E, F e C identificados até as extremidades A e B do segmento $\overline{\mathrm{AB}}$”

5.1.2. Questões 3 e 4 – Mediatriz como Lugar Geométrico e Construção da Mediatriz

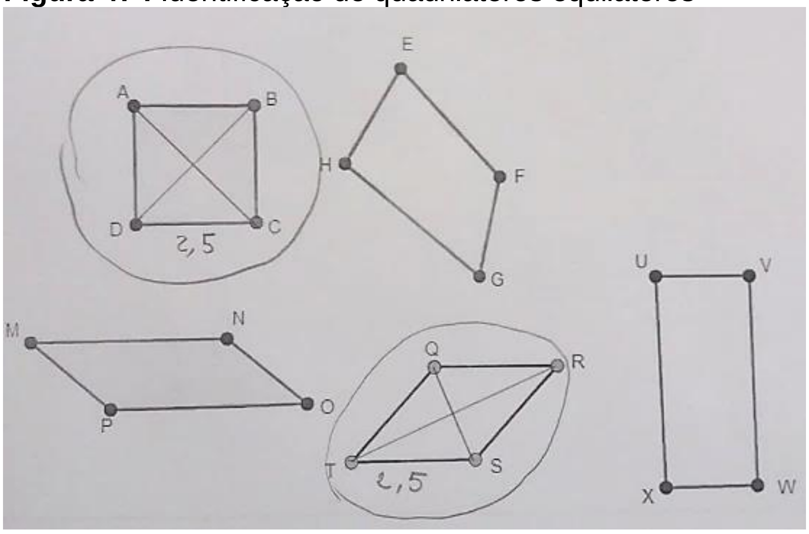
Apresentamos a seguir, a resolução do Grupo 1 para a Questão 3:

Figura 46: Mediatriz: um Lugar Geométrico



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 47 : Identificação de quadriláteros equiláteros

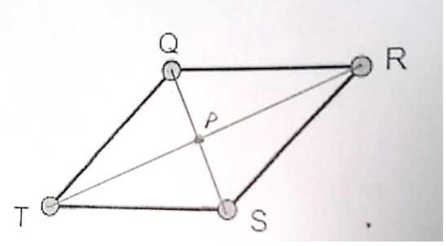


Fonte: Arquivo da pesquisadora

O Grupo respondeu corretamente à questão 3.

Na questão 4, sobre os LOSANGOS, os itens a ao f foram respondidos de forma correta. O item g exigia uma resposta mais completa. O grupo respondeu: “é a mesma distância” e esperávamos que concluíssem que as diagonais de um losango, intersectam em um ponto e, este por sua vez, é o ponto médio das diagonais.

Figura 48: Propriedades das diagonais do losango

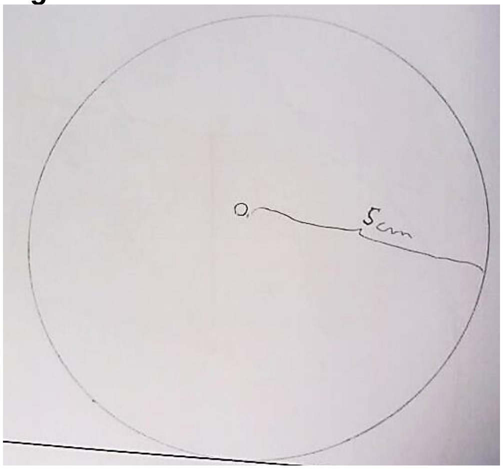


Fonte: Arquivo da pesquisadora

O item i desta tarefa está incorreto. O enunciado pedia para medir com o transferidor os quatro ângulos obtidos a partir da intersecção das diagonais. O Grupo respondeu: “é metade deles”. Esperávamos que respondessem que os ângulos eram retos e, assim as diagonais perpendiculares entre si.

Ainda na questão 4, sobre a CIRCUNFERÊNCIA, item a, os alunos construíram facilmente a circunferência de raio 5 cm, no entanto, a forma de representar o seu raio não foi adequada. Vejamos:

Figura 49: Circunferência de raio 5 cm

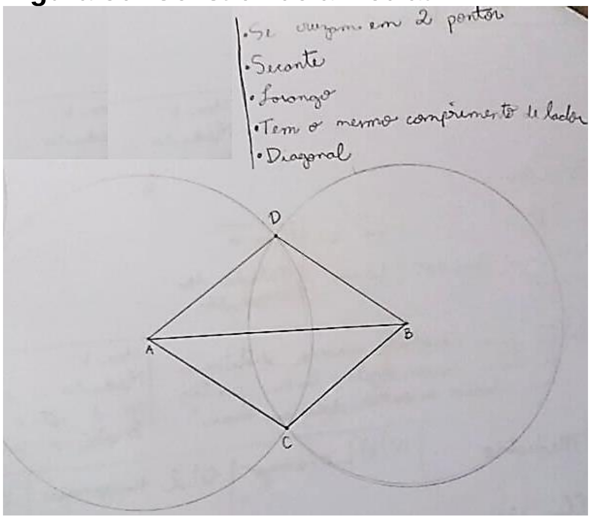


Fonte: Arquivo da pesquisadora

Já no item b, que se tratava do Lugar Geométrico do conjunto dos pontos que equidistam de um ponto central, o aluno “Diego” do Grupo 1, escreveu: “Distar 5 do ponto O”. podemos constatar que nesta escrita está implícito que o aluno se apropriou de que a circunferência é um lugar geométrico, no entanto não soube discorrer melhor sobre isto.

Na tarefa “Construindo a Mediatriz”, os alunos construíram de acordo com as etapas pedidas nas tarefas de a a f e na tarefa g construíram a mediatriz sem o processo longo. Vejamos a atividade, agora do aluno redator “João” do Grupo 2:

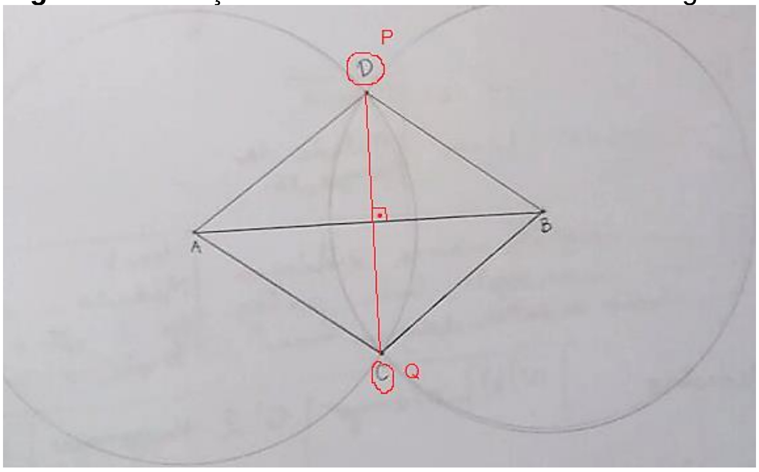
Figura 50: Construindo a Mediatriz



Fonte: Arquivo da pesquisadora

O aluno respondeu aos itens sem identificá-los. Os itens b, d, e e foram respondidos nesta ordem e as respostas estão corretas. No item c, o enunciado pede para nomear os pontos obtidos a partir da intersecção das circunferências de P e Q. “João” os nomeou como D e C. A tarefa f pergunta “O que o segmento PQ representa do polígono APBQ? E o segmento AB?” e o aluno respondeu “Diagonal”. Esperávamos que o aluno constatasse que, como as diagonais do losango são perpendiculares e como o segmento PQ (no caso do aluno, DC) está sobre a mediatriz de AB, portanto esta, é perpendicular ao segmento AB. Na etapa da plenária esse assunto foi discutido.

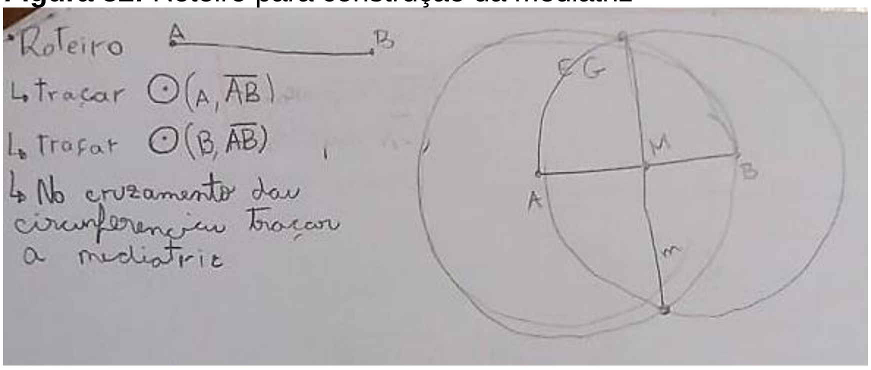
Figura 51: Posição relativa entre a mediatriz e o segmento AB



Fonte: Arquivo da pesquisadora

A tarefa g consiste em escrever um roteiro para construção da mediatriz de um segmento, um enunciado gráfico (E.G.) e construir uma mediatriz com régua e compasso. Vejamos a resolução de "João":

Figura 52: Roteiro para construção da mediatriz



Fonte: Arquivo da pesquisadora

A forma com a qual "João" escreveu seu roteiro foi bem interessante: utilizou uma linguagem mais simbólica e dispôs de um mapa mental. Quando escreveu: "Traçar ⊙ (A, $\overline{AB}$)" se referiu a uma circunferência de centro A e raio AB.

Ao finalizar a Primeira Tarefa, o aluno deveria ser capaz de construir a mediatriz não somente de forma mecânica, mas entender todo o procedimento, fazendo as relações entre cada objeto geométrico estudado nas etapas da tarefa e importância da compreensão de cada um deles para a construção.

Cada face do aprendizado geométrico foi bem explorada com a primeira tarefa. No quadro a seguir expomos apenas um exemplo de como as faces desse aprendizado se fez:

Quadro 17: Faces do Aprendizado Geométrico na Primeira Tarefa

Faces do aprendizado Geométrico	
Construção	“João” construiu a mediatriz com régua e compasso
Percepção	“Laura” relacionou o canudo ao segmento de reta AB.
Concepção	Através do roteiro, “João” mostrou que compreendeu como construir e a importância de cada passo na construção de uma mediatriz
Representação	“João” fez o enunciado gráfico da construção da mediatriz.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Após a análise da Primeira Tarefa desenvolvida pelo grupo1 podemos constatar que as questões foram resolvidas, quase que em sua totalidade, de forma correta.

5.2. Segunda Tarefa: Resoluções dos Grupos 2, 3 e 4.

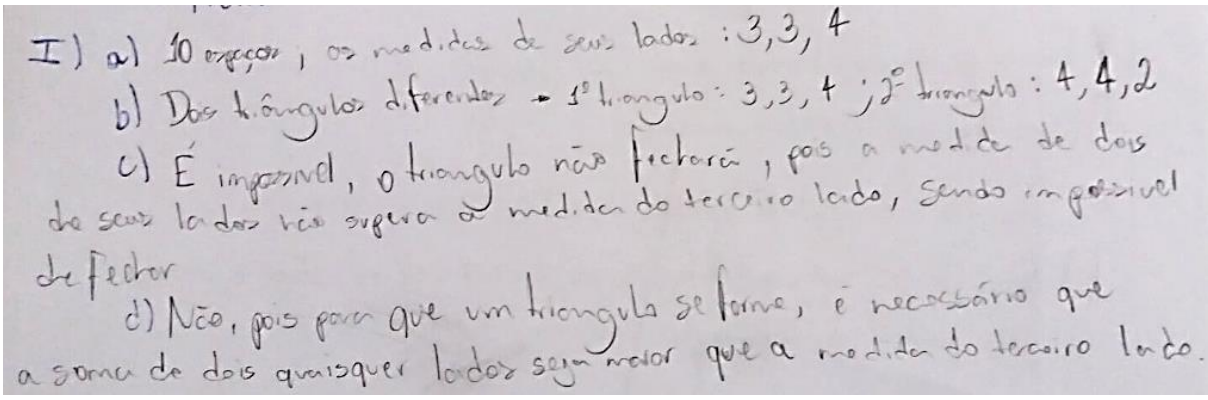
No presente subtópico apresentamos a resolução das questões da Segunda Tarefa realizadas pelos grupos 2, 3 e 4. Escolhemos três grupos por conta do número de questões: A segunda tarefa contém três questões com vários subtópicos.

5.2.1 Questão 1 – Explorando a Desigualdade Triangular

A questão 1 tem por objetivo específico que, através de uma atividade experimental, os alunos consigam compreender que não são quaisquer medidas inteiras de comprimento, que formam um triângulo, ou seja, conduz a interpretação da Desigualdade Triangular.

Apresentamos a seguir a resolução do Grupo 3, pela aluna redatora “Pietra”:

Figura 53: Explorando a Desigualdade Triangular


I) a) 10 espaços, as medidas de seus lados: 3,3,4
b) Dois triângulos diferentes → 1º triângulo: 3,3,4 ; 2º triângulo: 4,4,2
c) É impossível, o triângulo não fechará, pois a medida de dois de seus lados não supera a medida do terceiro lado, sendo impossível de fechar
d) Não, pois para que um triângulo se forme, é necessário que a soma de dois quaisquer lados seja maior que a medida do terceiro lado.

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Podemos constatar que o Grupo 3 compreendeu o objetivo da Questão. No item a, chegaram ao triângulo isósceles de lados 3, 3, e 4 unidades e perceberam que o perímetro é de 10 unidades. Utilizaram como unidade de medida “os espaços”.

No item b, conjecturaram que havia duas possibilidades para construir triângulos com medidas inteiras de lados: 3, 3 e 4 espaços e 4, 4 e 2 espaços.

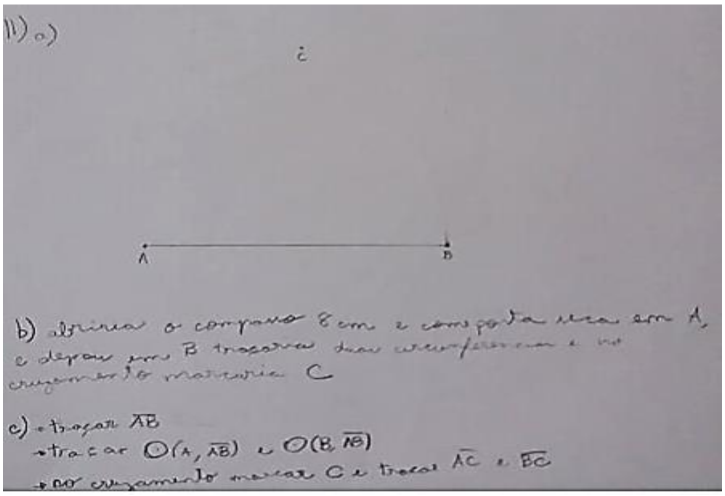
O item c pedia o seguinte: *“Tente construir um triângulo com lados medindo 10, 4 e 4. O que você observa? (Registre suas hipóteses)”.* O grupo respondeu que *“é impossível e justificou que a medida de dois de seus lados não supera a medida do terceiro”.*

Nossa expectativa para o último item era de que, o grupo conjecturasse a Desigualdade Triangular. O Grupo 3, assim como todos os grupos, conseguiu apreender a proposta, no entanto precisamos deduzir que a diferença entre dois de seus lados supera a medida do terceiro, no momento da formalização do conteúdo, como consta no capítulo 4, subtópico 4.4.7 dessa dissertação.

5.2.2 Questão 2 – Construção de um triângulo com Régua e Compasso

Agora, analisamos a questão 2. O aluno redator “João” do grupo 2, assim resolveu:

Figura 54: Construção de triângulos com régua e compasso



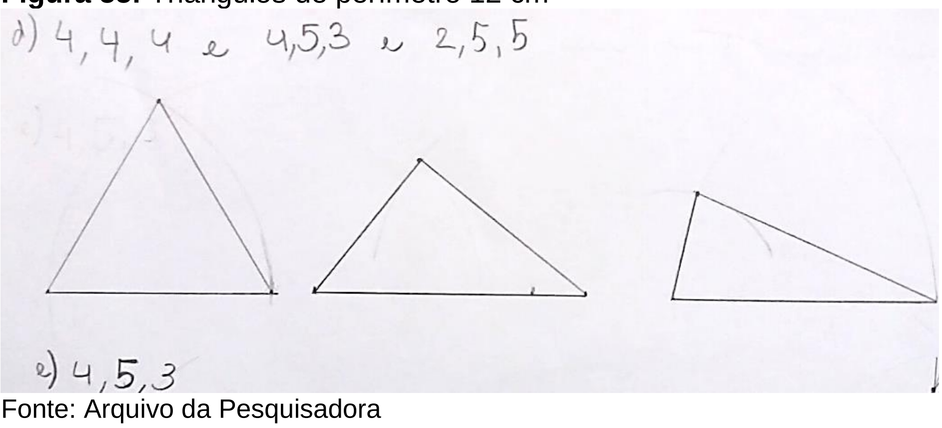
Fonte: Arquivo da Pesquisadora

O item a foi respondido corretamente: o aluno construiu o segmento AB = 8 cm. No item b, “João” descreveu corretamente como construir o triângulo equilátero de lado 8 cm, no entanto se esqueceu de concluir a construção: não ligou o vértice A ao C e o mesmo do B ao C, obtendo, assim, os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

No item c, cabia ao aluno escrever o roteiro para construção, com régua e compasso, de um triângulo qualquer. Verificamos que o aluno “João” descreveu a construção em 3 etapas bem definidas.

A proposta do item d, é identificar todos os triângulos de perímetro 12 cm cujas medidas dos lados são inteiras e no item e, identificar dentre eles um triângulo retângulo. Vejamos a solução do grupo 2 redigida por “João”.

Figura 55: Triângulos de perímetro 12 cm



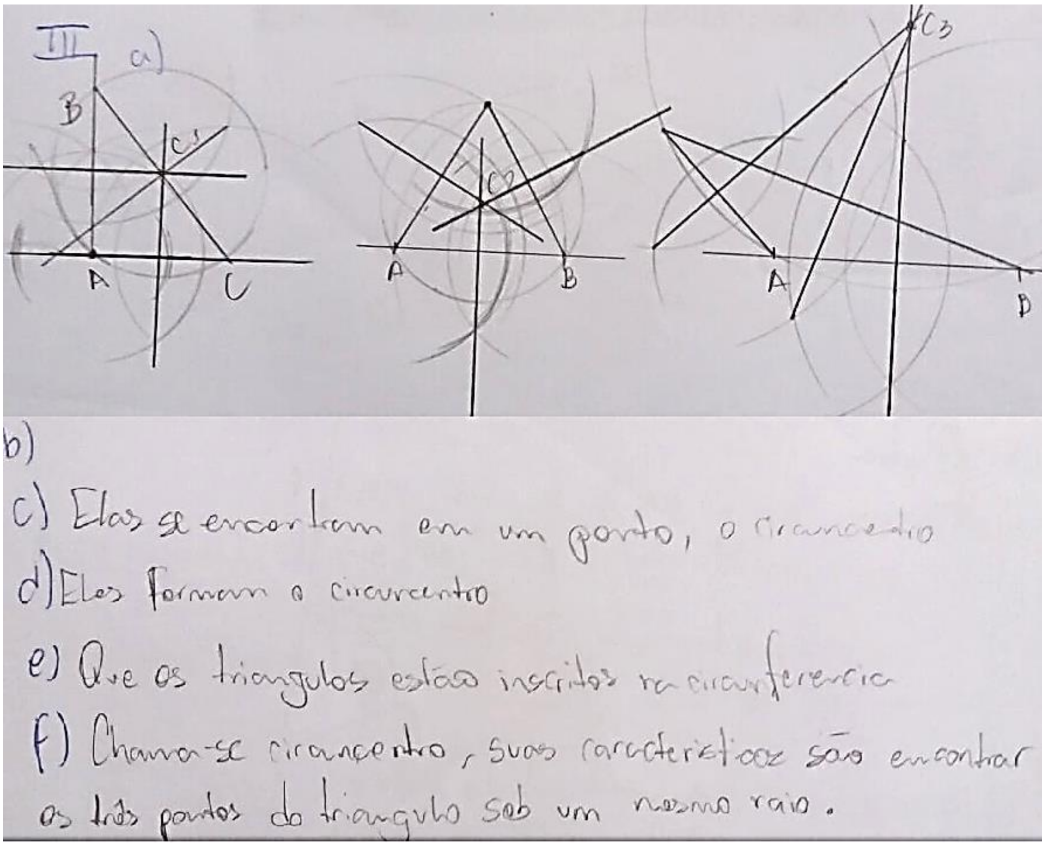
Fonte: Arquivo da Pesquisadora

O Grupo resolveu adequadamente questão.

5.2.3. Questão 3 – Encontrar o Circuncentro e identificar suas propriedades.

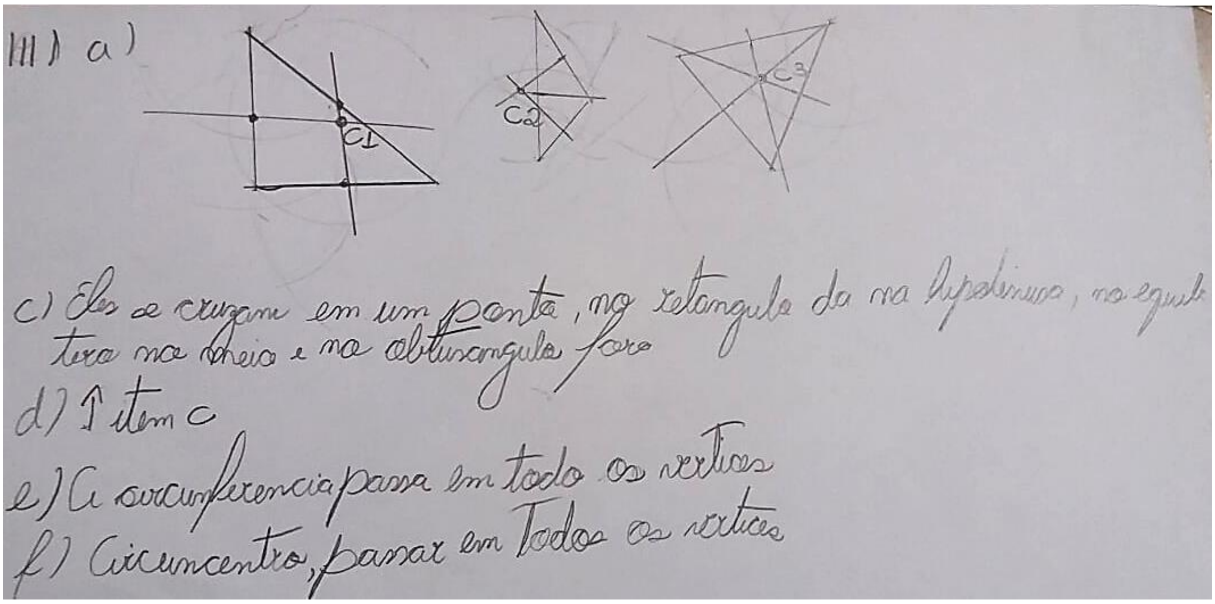
O objetivo específico para a Questão 3 é identificar o ponto circuncentro do triângulo e sua posição relativa à superfície nos triângulos retângulo, acutângulo e obtusângulo. Observamos, adiante as resoluções dos grupos 3 e 4 para a questão. Os alunos redatores foram “Pietra” e “Pedro”, respectivamente.

Figura 56: Posições relativas do circuncentro – Grupo 3



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 57: Posições relativas do circuncentro – Grupo 4



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Podemos verificar que os alunos entenderam a proposta dos itens a,b e c: encontrar o circuncentro com o uso de régua e compasso nos três tipos de triângulos: retângulo, acutângulo e obtusângulo. O enunciado do item a pedia para que o aluno nomeasse os vértices. A aluna “Pietra” identificou parcialmente nas suas construções e o aluno “Pedro” não nomeou nenhum.

Quanto as construções podemos observar que a aluna “Pietra” conseguiu fazer mais adequadamente. No triângulo retângulo, o aluno “Pedro” não se atentou à construção da mediatriz de acordo com sua propriedade de ser perpendicular aos lados, e, portanto, não encontrou com precisão a posição do circuncentro.

No item c, esperávamos que os alunos constatassem que as mediatrizes dos lados de um triângulo se intersectam em um mesmo ponto: “o circuncentro”. Constatamos que o Grupo 3 respondeu adequadamente, já o Grupo 4 além de responder ao item c, adiantou-se e concluiu parcialmente sobre o que se pede no item d.

Para o item d, esperava-se que o aluno concluísse que, a partir de suas construções, o circuncentro se localiza na região interna de um triângulo acutângulo; na metade da hipotenusa no triângulo retângulo e externamente à superfície do triângulo acutângulo. O Grupo 3 não constatou esse fato.

O item e, pedia para que os alunos construíssem a circunferência de centro em C1, C2 e C3 (circuncentros) e raio de comprimento igual a abertura do centro a um vértice. Nossa expectativa era de que os alunos percebessem que essas circunferências tangenciam os vértices dos triângulos. Momento o qual, discutimos a questão de o circuncentro ser equidistante dos vértices de um triângulo qualquer, já que sua distância a todos os vértices coincide com o raio da circunferência. O Grupo 3 respondeu: *“Que os triângulos estão inscritos na circunferência” e* o Grupo 4: *“A circunferência passa em todos os vértices”.*

No item f, o esperado era que os alunos escrevessem que o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo chama-se circuncentro e de que anotassem as propriedades observadas:

- ponto equidistante dos vértices de um triângulo qualquer;
- centro da circunferência circunscrita a cada triângulo;
- interno ao triângulo acutângulo, externo ao triângulo obtusângulo e no ponto médio da hipotenusa no triângulo retângulo.

Podemos constatar que tanto o Grupo 3 quanto o Grupo 4 não responderam conforme o esperado visto que escreveram, respectivamente:

- “*Suas características são encontrar os três pontos de um triângulo sob um mesmo raio”*

- *“Passar em todos os vértices”*

Durante a aplicação das atividades podemos constatar com a oralidade dos grupos nas Etapas da Plenária e Consenso que as propriedades foram assimiladas, no entanto os alunos tiveram dificuldades na escrita dessas propriedades.

Através da Segunda Tarefa exploramos as faces do aprendizado geométrico de várias formas das quais destacamos algumas no quadro a seguir:

Quadro 18: Faces do Aprendizado Geométrico para a Segunda Tarefa

Faces do aprendizado Geométrico	
Construção	Com 9 nós, o Grupo de "Pietra" conseguiu dividir o barbante em 10 espaços com medidas de comprimento muito próximas e construíram com ele um triângulo de lados 3, 3 e 4 "espaços"
Percepção	"Pedro" constatou que os nós representavam os vértices de um triângulo
Concepção	"Pietra" escreveu que para formar um triângulo é necessário que a soma de dois quaisquer lados seja maior que a medida do terceiro lado.
Representação	"Pedro" construiu corretamente as mediatrizes do triângulo acutângulo, com régua e compasso.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

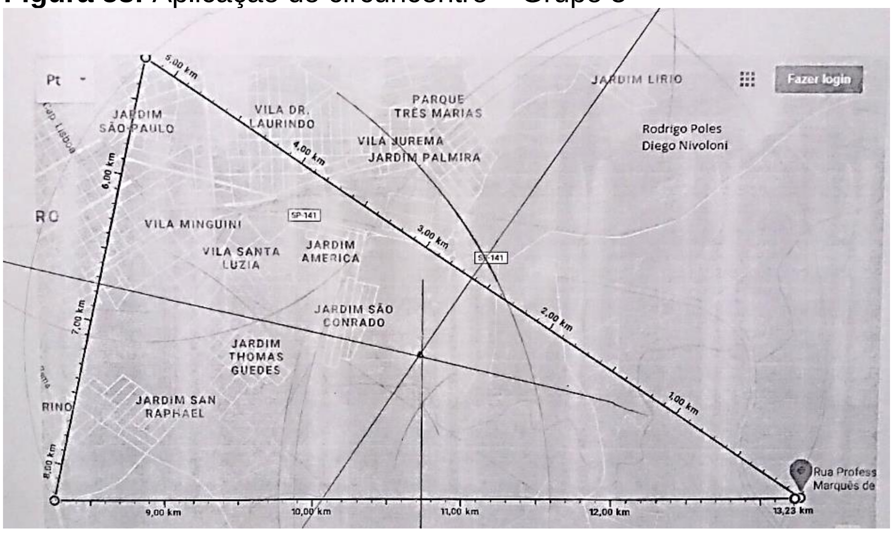
5.3 Terceira Tarefa: Resoluções dos Grupos 5 e 6

Optamos por analisar as construções de dois grupos para assim pudéssemos traçar um paralelo entre as resoluções.

O principal objetivo para a resolução dessa questão é de que o aluno consiga aplicar as propriedades observadas na questão anterior sobre o circuncentro de um triângulo.

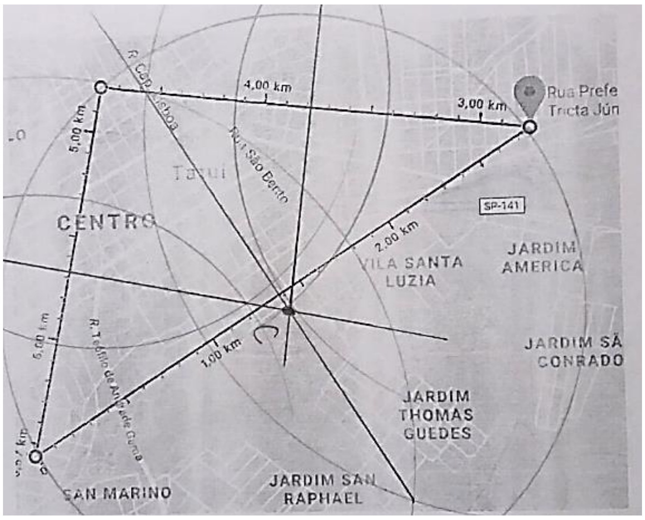
Analisamos a seguir as resoluções dos Grupos 5 e 6 para a presente questão. Os alunos redatores foram, respectivamente, "Lívia" e "Enzo"

Figura 58: Aplicação do circuncentro – Grupo 5



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 59: Aplicação do circuncentro – Grupo 6



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Os grupos não apresentaram muitas dificuldades em realizar a Terceira Tarefa.

Apresentamos no quadro abaixo um exemplo de como cada face do aprendizado geométrico foi explorada com esta Tarefa.

Quadro 19: Faces do Aprendizado Geométrico na Terceira Tarefa

Faces do aprendizado Geométrico	
Construção	Os Grupos 5 e 6 produziram seus triângulos com o auxílio de recursos computacionais para depois imprimir as imagens e as utilizarem para próxima etapa da tarefa.
Percepção	Os Grupos 5 e 6 perceberam que a construção das mediatrizes e identificação do circuncentro resolveria o problema de se encontrar o ponto equidistante de suas casas.
Concepção	Os dois grupos se apropriaram das propriedades do circuncentro quando realizaram as construções de forma adequada ou através das discussões na Plenária
Representação	“Enzo” construiu com régua e compasso as mediatrizes do triângulo e, assim, encontrou corretamente o ponto de intersecção. Como o triângulo obtido a partir das suas residências (vértices) é obtusângulo, o circuncentro ficou externo à superfície triangular.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Com a última tarefa constatamos que os alunos conseguiam concluir como, a partir do contexto prático, que através do encontro do circuncentro com régua e compasso, podemos identificar um ponto equidistante de outros três.

Atentem-se ao fato que para cada tarefa foi apresentada de uma a duas resoluções, isto ocorreu pelo fato de que tínhamos três tarefas elaboradas e cada uma delas com determinado número de questões e cada questão continha ou não itens, assim escolhemos, (sem alguma pretensão), as atividades de alguns grupos. O objetivo foi apresentar a proposta da tarefa e uma ou duas possíveis argumentações dos alunos.

Ao compararmos as tarefas realizadas pelos grupos destacados e a totalidade da turma, inferimos que nenhum grupo destoou efetivamente dos demais quanto ao objetivo das tarefas. Quando uma ou outra resolução se tornava incabível o próprio grupo ou professora se aproximava para da o suporte adequado.

As faces do aprendizado geométrico se mantiveram durante todo o percurso metodológico, sendo assim, infundada a pontuação de cada momento, e por isso, decidimos exemplificar alguns momentos durante o aprendizado do grupo ou de um aluno em específico, para concluir que essas apreensões podem ocorrer em grupo, individualmente e de forma indissociável, tanto quanto a expressão Ensino-Aprendizagem-Avaliação.

A Avaliação inerente do processo, como acima citada, ocorreu durante toda a aplicação, de forma tão natural que imperceptível aos educandos.

Desta forma podemos concluir nossa pesquisa através das Considerações Finais do presente trabalho.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conscientes de que todo conhecimento é infindável, desenvolvemos esta pesquisa com o intuito de que o assunto abordado venha a acrescentar aos educadores e educandos envolvidos e, também aos interessados e estudantes da área. Desta forma apresentamos uma proposta de tarefas geométricas, mais especificamente o estudo do circuncentro de um triângulo, que foram aplicadas a uma turma de 9º ano, através da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Resolução de Problemas, desenvolvida e estudada por Lourdes de La Rosa Onuchic e o grupo GTERP com o propósito de responder à questão de investigação: quais as contribuições que nossas tarefas trarão ao aprendizado dos alunos do 9º ano, referentes aos conceitos geométricos necessários para construção do circuncentro do triângulo, permeadas pela metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Resolução de Problemas?

Para tanto, realizamos um estudo dos documentos curriculares do Estado de São Paulo (Parâmetros Curriculares Nacionais, Currículo de Matemática do Estado de São Paulo através do Caderno do Aluno e orientado pelo Caderno do Professor) sobre como determinados conteúdos geométricos são abordados. Demos ênfase a compilar as Situações de Aprendizagens que envolveram os conteúdos abordados nesta pesquisa: mediatrizes, triângulos, losangos e circunferência, como tais conteúdos são apresentados no Caderno do Aluno e o encaminhamento orientado do Caderno do Professor. Fizemos também, uma análise de como as faces do aprendizado em geometria (percepção, construção, representação e concepção) se apresentam em cada Situação de Aprendizagem citada. Nos documentos oficiais também identificamos a forma com a qual o ensino sobre resolução de problemas é feito e inferimos que os problemas são como uma das ferramentas para o ensino da geometria.

Escolhemos a metodologia qualitativa para responder à questão norteadora, visto que a análise das produções escritas dos alunos nos subsidiou para constatação de que, se o objetivo foi ou não atingido. Para tanto, a professora pesquisadora, dividiu o trabalho de campo em 9 etapas, as mesmas que permeiam a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através de Resolução de Problemas. Com os seis grupos de alunos na sala, desenvolvemos a pesquisa e as etapas foram:

- Formulação das tarefas pela professora pesquisadora;
- Leitura individual das tarefas pelos alunos;
- Leitura em conjunto;

- Resolução dos problemas;
- Observação e incentivo da professora pesquisadora;
- Escrita na lousa;
- Plenária;
- Busca do Consenso;
- Formalização dos conteúdos;

Por meio das análises feitas das produções escritas dos alunos destacadas no capítulo anterior, podemos inferir que:

- primeira Tarefa os alunos aprimoraram as estratégias de como construir mediatrizes e compreenderam os objetivos de cada etapa de construção com base em conceitos geométricos;
- Segunda tarefa os alunos se apropriaram do significado e das propriedades do circuncentro de um triângulo;
- Terceira tarefa os alunos compreenderam como aplicar as propriedades do circuncentro de um triângulo em um problema geométrico de contexto prático.

Em cada tarefa citada analisamos como as apreensões das faces do aprendizado geométrico ocorreram em cada uma das atividades dos alunos.

Constatamos que tão quão importante a elaboração de uma boa tarefa, é a aplicação e mediação da professora pesquisadora através da metodologia de resolução de problemas. A etapa da leitura individual foi o momento que levou cada um identificar as palavras desconhecidas e interpretar o enunciado.

A leitura coletiva não foi a etapa que se destacou, pois apesar das regras propostas e condução pela professora, os alunos preferiram eleger um leitor para o grupo.

A resolução dos problemas gerou grandes discussões nos grupos; a observação e incentivo da professora pesquisadora foi essencial para que os alunos se motivassem a buscar autonomia na busca por resoluções.

A escrita na lousa fez com que os alunos desenvolvessem a habilidade de escrita.

A plenária ganhou grande destaque, até mesmo sob o olhar dos alunos, pois foi o momento que através da exposição de suas ideias puderam verificar as incompletudes ou erros na resolução. Com a busca do consenso identificamos a necessidade de aprender a ouvir, de ser ouvido, respeitar as colocações dos demais envolvidos, argumentar e trabalhar em conjunto para a constatação de um novo aprendizado; e por final a formalização do conteúdo, confirma e complementa as apreensões dos alunos, construindo as definições e conceitos geométricos pretendidos, no nosso caso, em específico o circuncentro do triângulo e sua aplicação.

É claro que entraves ocorreram e, também, pudemos perceber pontos a serem aprimorados tanto na elaboração das tarefas quanto em sua aplicação. Quando os alunos perguntaram a respeito de algumas palavras foram incentivados a pesquisar no material disponibilizado (internet, apostila, dicionário). No entanto, quando questionados em uma tarefa: “O que você observa quanto as mediatrizes em cada um dos triângulos? O que há em comum nos três triângulos quanto às mediatrizes?”, os alunos tiveram dificuldades em identificar o que, exatamente, lhe foi proposto. Dentre as respostas tivemos: “as mediatrizes são retas que dividem o lado ao meio”. Desta forma tivemos que interferir levando os a pensar em outras características comuns, até chegarem no pretendido: “intersectam-se em um mesmo ponto”.

Outra dificuldade constatada foi a questão de explanação através da escrita sobre um conteúdo aprendido. A maior parte limita-se nesse momento: uns por ter dificuldade de se expressar por este meio e outros por indisposição. Foi de grande importância a intervenção da professora para que os educandos compreendessem a importância da escrita também, na matemática, disciplina a qual, erroneamente é caracterizada como somente a ciência dos números e formas.

Alguns alunos não conseguiram se expressar no momento da Plenária e, por isso, incentivamos que o grupo indicasse um representante. Momento oportuno para destacar que cada um possui uma maior facilidade e, portanto, poderia ocupar um papel diferenciado no grupo, como por exemplo, os que não apresentaram as resoluções na plenária foram monitores daqueles que apresentavam dificuldades nas construções.

Os estudantes do 9º ano, público alvo desta pesquisa, participaram efetivamente e, em geral, não mediram esforços para contemplar as atividades. Ao final da segunda atividade já compreenderam o significado de circuncentro e na sequência, ao resolverem a terceira tarefa, que de forma implícita, não tiveram maiores dificuldades de percepção que a mesma requeria a construção de um triângulo, suas mediatrizes e com o objetivo de encontrar o circuncentro para determinar o ponto equidistante de suas residências.

Desta maneira inferimos a validação da proposta das três tarefas e a forma com a qual as conduzimos. Podemos assim responder ao questionamento inicial da pesquisa: contribuímos com o aprendizado dos alunos envolvidos para o conteúdo circuncentro (também, todo conteúdo base para sua apropriação) e sua aplicação mediante a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através de Resoluções de Problemas.

A partir daqui, tecemos um convite aos que se interessam pela área a relevar nossa proposta como subsídio ou inspiração a novas pesquisas na área da geometria e resolução de problemas e, especificamente, de pontos notáveis do triângulo.

Finalmente gostaria de apresentar este parágrafo na primeira pessoa do singular para destacar que como professora-pesquisadora pude aprender com a presente pesquisa. Aprendi que minha evolução profissional na Educação Matemática se fez mediante ao aprendizado diário com os alunos que conheci, e se fará por toda a vida, mas também, foi de grandiosa importância o aperfeiçoamento através da pesquisa nesta área. Obtive contribuições em diversos contextos, mas especialmente constatei que os conhecimentos adquiridos na pesquisa foram aplicados em sala de aula favorecendo os protagonistas de minha amada profissão: os alunos. Através do sucesso no aprendizado dos educandos me realizo como profissional. E, certamente, esta busca é constante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática (Ensino Fundamental II). Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p

COMMANDINO, Frederico. **Euclides: Elementos de Geometria.** São Paulo: Edições Cultura, 1944.

DUTENHEFNER, Francisco; CADAR, Luciana. **Encontros de geometria:** parte 1. Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, 2015.

ECHEVERRÍA, M. P. P. A solução de problemas em matemática. In: POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998, p. 43-65.

NCTM. **Principles to actions: ensuring mathematical success for all**. Reston: NCTM, 2014

NACARATO, Adair Mendes et al. Modalidades de pesquisas em educação matemática: um mapeamento de estudos qualitativos do GT-19 da Anped. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 28., 2005, Caxambu. **Anais...** 19p. Caxambu, 2005. CD-ROM.

NUNES, Célia Barros. **O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas:** perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. 430f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2010.

ONUCHIC, L.R. **Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectiva. São Paulo, SP: Editora UNESP, 1999, p. 199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Formação de Professores – Mudanças Urgentes na Licenciatura em Matemática**. In: FROTA, M. C. R.; NASSE, L. (Org). Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009, 169-187.

ONUCHIC, L. R.; LEAL, L. C.; PIRONEL, M. (org). **Perspectivas para resolução de problemas.** São Paulo: Livraria da Física, 2017. 473p.

PIRONEL, M. ONUCHIC, L, R. **Avaliação para a aprendizagem: uma proposta a partir de transformações do conceito de avaliação na sala de aula no**

século XXI. Anais do IV Congresso Nacional de Avaliação em Educação : IV CONAVE. Bauru: CECEMCA/UNESP, 2016.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias – Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio. Coordenação de área: Nilson José Machado. 1ª ed. atual. São Paulo, SEE, 2012. 72p.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor:** 6º ano do Ensino Fundamental, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.1, .

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor:** 6º ano do Ensino Fundamental, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.2.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor: 7**º ano do Ensino Fundamental, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.1.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor: 7**º ano do Ensino Fundamental, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.2.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor: 8**º ano do Ensino Fundamental, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.1.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor: 8**º ano do Ensino Fundamental, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.2.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor:** 9º ano do Ensino Fundamental, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.1.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor: 9**º ano do Ensino Fundamental, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.2.

STANIC, George M. A. ; KILPATRICK, Jeremy. **Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de Matemática.** Georgia: Universidade da Georgia, 1989. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/stanic-kilpatrick%2089.pdf>. Acesso em 02 abr. 2018.