

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Wanderley Nunes do Nascimento**

**Equação da onda com dissipação não efetiva  
dependente do tempo.**

**São Carlos - SP**  
**ABRIL DE 2012**

O presente trabalho teve suporte financeiro da CAPES

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Equação da onda com dissipação não efetiva  
dependente do tempo.**

**Wanderley Nunes do Nascimento**

**Orientador: Prof Dr. Rafael Augusto dos Santos Kapp**

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Matemática da UFSCar  
como parte dos requisitos para a obtenção  
do título de Mestre em Matemática

**São Carlos - SP**  
**ABRIL DE 2012**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

N244eo

Nascimento, Wanderley Nunes do.

Equação da onda com dissipação não efetiva dependente do tempo / Wanderley Nunes do Nascimento. -- São Carlos : UFSCar, 2012.

97 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.

1. Análise. 2. Equação da onda. 3. Estimativas de Strichartz. 4. Estimativas da solução. I. Título.

CDD: 515 (20<sup>a</sup>)

**Banca Examinadora:**

*Rafael Augusto dos Santos Kapp*

---

**Prof. Dr. Rafael Augusto dos Santos Kapp**  
**DM - UFSCar**

*José Ruidival dos Santos Filho*

---

**Prof. Dr. José Ruidival dos Santos Filho**  
**DM - UFSCar**

*Marcelo Rempel Ebert*

---

**Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert**  
**FFCLRP - USP**

# *Agradecimentos*

---

Primeiramente agradeço à Deus por ter me dado força e pela Sua infinita fidelidade.

Às pessoas mais importantes da minha vida, meus pais, Teresinha Nunes do Nascimento e Wander Nascimento Júnior, por toda motivação e confiança que depositaram em mim.

Aos meus irmãos Alessandra, Márcia e Fernando que mesmo distantes mostraram carinho e companheirismo.

Aos meus sobrinhos Igor, Natan e Cailainne que alegam minha vida!

Aos professores do departamento de matemática da UFSCar e da UFV que colaboraram para minha formação acadêmica, principalmente ao meu orientador Rafael pela paciência e dedicação, aos professores da banca Ruidival e Marcelo pela disponibilidade e a professora Lucy pelo carinho e amizade ao longo da minha graduação.

Aos meus amigos que tornaram meus dias mais felizes aqui em São Carlos, vocês são especiais para mim!

Aos servidores da UFSCar, especialmente a secretária Irma, pelo apoio e torcida em todos os momentos.

À CAPES pelo apoio financeiro deste projeto.

# Resumo

---

O objetivo desta dissertação é a construção de uma representação estrutural das soluções do problema de Cauchy, para equação da onda com dissipação fraca abaixo de escala e deduzir estimativas do tipo Strichartz  $L^p - L^q, q \geq 2$  para as soluções e sua energia. Além disso, mostraremos que existe uma certa equivalência assintótica entre as soluções para equação da onda livre e as soluções para a equação da onda com dissipação fraca.

# *Abstract*

---

The objective of this dissertation is to construct structural representations of the solutions to Cauchy problems for weakly dissipative wave equations below scaling and to deduce Strichartz type estimate  $L^p - L^q, q \geq 2$ , for the solutions and its energy. Furthermore, we show that there is a asymptotic equivalence between the solutions for free waves equation and the solutions for the weakly dissipative wave equation.

# Sumário

---

<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Pré-requisitos</b>	<b>4</b>
1.1 Espaços $L^P$ . . . . .	4
1.2 Espaço das Distribuições . . . . .	7
1.2.1 Operações com distribuições . . . . .	9
1.2.2 Transformada de Fourier . . . . .	10
1.2.3 Transformada Parcial de Fourier . . . . .	12
1.3 Espaços de Besov . . . . .	14
1.3.1 Resultados de Imersões . . . . .	16
<b>2 Representação da solução</b>	<b>18</b>
2.1 Zona Dissipativa . . . . .	23
2.2 Zona Hiperbólica . . . . .	35
2.2.1 Forma Normal . . . . .	35
2.2.2 Solução Fundamental do Sistema na Forma Normal . . . . .	44
2.3 Voltando ao problema inicial . . . . .	54



---

<b>3 Estimativas</b>	<b>56</b>
3.1 Estimativa de energia do tipo Strichartz $L^2 - L^2$ . . . . .	56
3.2 Estimativa de energia do tipo Strichartz $L^p - L^q$ . . . . .	65
3.3 Estimativas da solução . . . . .	74
3.4 Teoria do Espalhamento . . . . .	78
<b>Apêndice A: Ferramentas Básicas I</b>	<b>85</b>
<b>Apêndice B: Ferramentas Básicas II</b>	<b>86</b>
<b>Apêndice C: Teorema de Hörmander-Mikhlin</b>	<b>92</b>
<b>Apêndice D: Notações</b>	<b>94</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>96</b>

# Introdução

---

Considere o problema de Cauchy para equação da onda com dissipação fraca

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + b(t)u_t = 0 \\ u(0, \cdot) = u_1 \\ u_t(0, \cdot) = u_2 \end{cases}, \quad (1)$$

onde o coeficiente  $b(t)$  é por hipótese positivo e tende a zero quando  $t$  tende ao infinito. Este é um importante modelo para estudar a influência dos termos de ordem inferior da derivada em relação  $t$ .

Problemas análogos já foram considerados por outros autores, impondo determinadas hipóteses sobre o coeficiente  $b(t)$ . O caso conhecido como dissipação fraca com escala invariante, onde  $b(t) \sim t^{-1}$ , foi considerado pelo autor Jeans Wirth no artigo [15]. O caso em que o coeficiente é integrável foi estudado no trabalho de Mochizuki e co-autores no artigo [7] e também na tese de doutorado de Wirth [14].

O objetivo dessa dissertação é de demonstrar propriedades estruturais no caso abaixo de escala invariante, isto é, assumiremos que a função coeficiente decai mais rapidamente que  $t^{-1}$ , e a partir das propriedades estruturais derivar estimativas para a energia e estimativas a priori para a solução do problema. A referência básica é o artigo [16]. Faremos ainda uma relação entre as soluções para a equação de onda livre e as soluções da equação (1).

Assumiremos as seguintes propriedades para a função coeficiente:

- (A1) : positividade, isto é,  $b(t) \geq 0$ ;

- $(A2)_l$  : para todo  $k \leq l$  temos

$$\left| \frac{d^k}{dt^k} b(t) \right| \leq C_k \left( \frac{1}{1+t} \right)^{k+1};$$

- $(A3)$  :  $\limsup_{t \rightarrow \infty} tb(t) < 1$ .

Observe que a última hipótese é necessária para excluir o caso crítico, acima mencionado,  $b(t) = \frac{1}{1+t}$ . A hipótese  $(A2)_l$  é de fundamental importância para encontrarmos a forma normal de uma matriz, que será realizado a seguir.

Seguiremos o seguinte cronograma. No Capítulo 1 introduziremos alguns resultados importantes para obtermos estimativas para o operador de energia e para a solução de (1). Definiremos os espaços  $L^p$ , os espaços usuais de distribuições, os espaços de Sobolev e os espaços de Besov. Enunciaremos as principais imersões contínuas que serão úteis nesse texto e indicaremos as principais referências consultadas para as demonstrações dos resultados. No Capítulo 2 dividiremos o espaço de fase em duas zonas, com o objetivo de encontrar uma representação estrutural para a solução fundamental de um sistema relacionado com (1). Em uma das zonas determinaremos a forma normal da matriz associada a esse sistema a fim de encontrarmos tal representação. No capítulo 3 usaremos a representação desenvolvida no capítulo 2 para encontrarmos estimativas do tipo Strichartz  $L^p - L^q$  para o operador de energia. Em seguida, faremos estimativas a priori, do tipo Strichartz  $L^p - L^q$ , para a solução. Finalmente mostraremos que em determinados espaços, a menos de um fator  $\lambda(t)$ , as soluções para a equação da onda com dissipação em relação ao tempo se comportam como soluções para a equação de onda livre quando o tempo se torna suficientemente grande.

Os principais resultados dessa dissertação são a representação obtida no teorema (2.2.12) juntamente com suas consequências para as estimativas de energia no teorema (3.2.2) e a equivalência assintótica obtida no teorema (3.4.1). Como consequência desses teoremas obtemos os seguintes resultados:

**Resultado 0.0.1.** *A energia para a solução de (1) satisfaz a estimativa do tipo*

*Strichartz*

$$\|(\nabla, \partial_t)u(t, \cdot)\|_q \leq C \frac{1}{\lambda(t)} (1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left( \|u_1\|_{W_p^{r_p+1}} + \|u_2\|_{W_p^{r_p}} \right),$$

com a função auxiliar  $\lambda(t) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t b(\tau) d\tau\right)$  e para índices duais  $pq = p + q$ ,  $q \in [2, \infty]$  e com  $r_p > n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ .

**Resultado 0.0.2.** Para cada dado inicial  $(u_1, u_2) \in W^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$  existe um dado inicial  $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in W^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ , tal que para soluções correspondentes  $u(t, x)$  para (1) e  $\tilde{u}(t, x)$  para a equação da onda livre, é válida a seguinte equivalência assintótica,

$$\|\lambda(t)(\nabla u(t, \cdot), \partial_t u(t, \cdot)) - (\nabla \tilde{u}(t, \cdot), \partial_t \tilde{u}(t, \cdot))\|_2 \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

**Resultado 0.0.3.** A solução para (1) satisfaz as estimativas  $L^p - L^q$

$$\|u(t, \cdot)\|_q \leq c \left( \|u_1\|_{W_p^{r_p}} + \|u_2\|_{W_p^{r_p-1}} \right) \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2(t)} (1+t)^{1-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}, p \geq p^* \\ \frac{1}{\lambda(t)} (1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}, p < p^* \end{cases},$$

para índices duais  $pq = p + q$ ,  $q \in [2, \infty]$ , com  $r_p > n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$  o valor crítico  $p^*$  é escolhido de tal forma que

$$\lambda(t) \lesssim (1+t)^{1-\frac{n+1}{2}(\frac{2}{p^*}-1)}.$$

---

## Pré-requisitos

---

O objetivo deste capítulo é apresentar, de maneira sucinta, as ferramentas básicas que foram utilizadas para concluirmos os principais resultados dessa dissertação. Introduziremos importantes espaços de funções e enunciaremos os principais resultados relacionados a tais espaços. Indicaremos as referências onde se encontram as demonstrações de tais resultados.

### 1.1 Espaços $L^p$

Os espaços  $L^p$  são espaços de Banach cuja as normas são definidas em termos de integrais. Seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida, se  $f$  é uma função mensurável em  $X$  e  $1 \leq p < \infty$ , denotamos por

$$\|f\|_p = \left[ \int |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Definimos

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_p < \infty \right\}.$$

Para completarmos o cenário dos espaços  $L^p$ , introduzimos o espaço  $L^\infty$ . Se  $f$

é uma função mensurável em  $X$  definimos,

$$\|f\|_\infty = \inf \{a \geq 0; \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\},$$

a norma de  $L^\infty$  é chamada de supremo essencial. Agora definimos

$$L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Usaremos a notação  $L^p(X)$  ou simplesmente  $L^p$  quando não houver ambiguidades. Iniciamos com a clássica desigualdade de Hölder.

**Teorema 1.1.1. (Desigualdade de Hölder)** *Sejam  $(X, \mu)$  um espaço de medida e  $(p, q, r) \in [1, \infty]^3$  tais que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

*Se  $(f, g) \in L^p(X, \mu) \times L^q(X, \mu)$ , então  $fg \in L^r(X, \mu)$  e*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Demonstração:** Veja [4].

**Proposição 1.1.2. (Desigualdade de Minkowski)** *Sejam  $f, g \in L^p$  com  $1 \leq p < \infty$ . Então*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**Demonstração:** Veja [4].

Definiremos a seguir convolução que será uma importante ferramenta para estabelecermos desigualdades a priori para a solução do nosso problema.

**Definição 1.1.3.** *Seja  $f \in C(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Definimos o suporte de  $f$  da seguinte forma*

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

**Definição 1.1.4.** *Sejam  $f, g \in C(\mathbb{R}^n)$  e suponha que uma delas tenha suporte compacto. A convolução de  $f$  por  $g$  é dada da seguinte forma*

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy, x \in \mathbb{R}^n.$$

**Teorema 1.1.5. (Desigualdade de Young)** *Suponha que  $1 \leq p, q, r \leq \infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ . Se  $f \in L^p$  e  $g \in L^q$ , então  $f * g \in L^r$  e mais*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Demonstração:** Veja [4].

O próximo teorema é de fundamental importância para estabelecermos desigualdades para o operador de energia que iremos considerar adiante.

**Teorema 1.1.6. (Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin)** *Sejam  $p_i, q_i \in [1, \infty]$ , para  $i = 0, 1$  e se  $0 < \theta < 1$  defina  $p$  e  $q$  por*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

*Se  $T$  é um operador linear de  $(L^{p_0}, L^{q_0}) \mapsto (L^{p_1}, L^{q_1})$ , tal que*

$$\|Tu\|_{q_0} \leq M_0 \|u\|_{p_0},$$

$$\|Tu\|_{q_1} \leq M_1 \|u\|_{p_1},$$

*então,*

$$\|Tu\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|u\|_p.$$

**Demonstração:** Veja [3].

## 1.2 Espaço das Distribuições

Aqui vamos introduzir algumas notações que serão utilizadas nessa dissertação, mais especificamente quando fizermos o estudo para a transformada de Fourier.

Seja  $\mathbb{Z}_+$  o conjunto dos números inteiros maiores ou iguais a zero. Então  $\mathbb{Z}_+^n$  é o conjunto das  $n$ -uplas  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  tais que  $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+, \forall i$ . Tais  $n$ -uplas são chamadas de multi-índices. Definimos para cada  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ ,  $\alpha \leq \beta$  se, e só se,  $\alpha_i \leq \beta_i, \forall i = 1, \dots, n$  e  $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$ . Denotaremos ainda o operador  $D$  como sendo  $D = \frac{1}{i} \partial$ .

Se  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é uma variável em  $\mathbb{R}^n$ , denotamos para  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

As distribuições são objetos que estendem a noção de funções e suas operações.

**Definição 1.2.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Denotaremos por*

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty; \text{supp}(f) \text{ é compacto}\}$$

*o espaço das funções testes em  $\Omega$ .*

A seguinte proposição garante a existência de funções testes.

**Proposição 1.2.2.** *Seja  $K \subset \Omega$  compacto. Existe  $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $0 \leq \psi \leq 1$  e  $\psi \equiv 1$  numa vizinhança de  $K$ .*

**Demonstração:** Veja [5].

É possível munir o espaço das funções teste com uma topologia não metrizável de tal forma que a convergência em  $C_0^\infty(\Omega)$  seja da seguinte forma.

**Definição 1.2.3.** *Uma sequência  $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}} \in C_0^\infty(\Omega)$  converge a zero em  $C_0^\infty(\Omega)$  se*

- *Existe um compacto  $K \subset \Omega$  tal que  $\text{supp}(\phi_j) \subset K, j = 1, 2, \dots$ ;*



- Para todo inteiro positivo  $m$ , as derivadas de ordem  $m$  das funções  $\phi_j$  convergem uniformemente a zero quando  $j \rightarrow \infty$ .

**Definição 1.2.4.** *Seja  $f$  uma função mensurável, dizemos que  $f$  é uma função localmente integrável em  $\Omega$  se para todo compacto  $K \subset \Omega$*

$$\int_K |f| dx < \infty.$$

*Denotamos o espaço das funções localmente integráveis como  $L_{loc}^1(\Omega)$ .*

É fácil ver que  $C_0^\infty$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ . Podemos então falar de funcionais lineares sobre  $C_0^\infty(\Omega)$ .

**Definição 1.2.5.** *Uma distribuição definida em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um funcional linear contínuo  $u : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ . Denotaremos o espaço das distribuições definidas em  $\Omega$  por  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .*

**Observação 1.2.6.** *Denotaremos  $\langle u, \varphi \rangle$  para representar a ação de  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  em  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ .*

O próximo resultado nos permite identificar as funções localmente integráveis como distribuições.

**Proposição 1.2.7.** *Seja  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ . Então o funcional*

$$\begin{aligned} T_f : C_0^\infty(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\longmapsto T_f(\phi) = \int f(x)\phi(x)dx \end{aligned}$$

*é uma distribuição em  $\Omega$ . E mais, se  $T_f = T_g$  então  $f(x) = g(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Veja [5].

Esta identificação permite considerar muitos espaços de funções, como por exemplo os  $L^p(\Omega)$  e  $C^k(\Omega)$ , como subespaços de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . É nesse sentido que as distribuições são funções generalizadas.

Podemos munir o espaço das distribuições com uma topologia de tal forma que a convergência é dada da seguinte forma.

**Definição 1.2.8.** *Seja  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Dizemos que  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  converge a  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  se, e somente se,  $\langle u_j, \varphi \rangle$  converge a  $\langle u, \varphi \rangle$ , para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ .*

### 1.2.1 Operações com distribuições

Considere  $L : C_0^\infty \rightarrow C_0^\infty$  um operador linear e contínuo. Suponha que  $L$  possua um "transposto formal", ou seja, que exista  $L^t : C_0^\infty \rightarrow C_0^\infty$  linear e contínuo tal que

$$\int (L\varphi(x)) \psi(x) dx = \int \varphi(x) (L^t\psi(x)) dx, \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty.$$

**Definição 1.2.9.** *Seja  $L : C_0^\infty \rightarrow C_0^\infty$  um operador linear e contínuo e  $L^t : C_0^\infty \rightarrow C_0^\infty$  seu transposto formal. Podemos estender  $L$  de maneira única a um operador  $L : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  da seguinte forma*

$$\langle Lu, \varphi \rangle = \langle u, L^t\varphi \rangle, \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega), \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

A seguir daremos alguns exemplos importantes de operações com distribuições.

**Exemplo 1.2.10.** *Considere  $L\varphi = f\varphi$ ,  $\varphi \in C_0^\infty$ ,  $f \in C^\infty$ . Então  $L^t = L$ . Daí segue que*

$$\langle fu, \varphi \rangle = \langle u, f\varphi \rangle, \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

**Exemplo 1.2.11.** *Considere  $L = \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Usando a integração por partes conclui-se que  $L^t = -L$ . Sendo assim,*

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle, \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

**Exemplo 1.2.12.** *Seja  $\alpha$  um multi-índice e defina  $L = \partial^\alpha$ . Usando a integração por partes conclui-se que  $L^t = (-1)^{|\alpha|} L$ . Sendo assim,*

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Com uma motivação análoga podemos definir a convolução de uma distribuição com uma função teste.

**Definição 1.2.13.** *Se  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  e  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  então definimos a convolução de  $u$  por  $\varphi$  como*

$$u * \varphi(x) = \langle u, \check{\varphi}_x \rangle,$$

onde  $\check{\varphi}_x = \varphi(x - y)$ .

## 1.2.2 Transformada de Fourier

Queremos agora definir e enunciar importantes resultados sobre a transformada de Fourier que será uma importante ferramenta para estabelecermos estimativas à priori para a solução da equação da onda com dissipação.

**Definição 1.2.14.** *Seja  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , definimos a transformada de Fourier de  $f$  como sendo*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x) dx,$$

onde  $x\xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$  com  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ .

O teorema da convergência dominada implica na continuidade de  $\hat{f}$ . Facilmente vemos que  $\hat{f}$  é limitada uma vez que  $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$ .

Sabemos que a transformada de Fourier não é um operador bem definido em  $C_0^\infty$  pois a transformada de Fourier de uma função não nula não com suporte compacto tem suporte compacto. Por isso vamos introduzir o espaço de Schwarz, onde a transformada de Fourier é invariante.

**Definição 1.2.15.** *Definimos o espaço de Schwartz, e denotamos por  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , o subespaço de  $C^\infty$  consistindo das funções  $\varphi$  tais que,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ ,*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty.$$

Dizemos que  $\varphi_j \rightarrow 0$  em  $\mathcal{S}$  se para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ ,  $x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \rightarrow 0$  uniformemente.

**Teorema 1.2.16.** *A transformada de Fourier é um operador linear contínuo de  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{S}$  e vale,*

1.  $\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi),$
2.  $\mathcal{F}(x^\alpha \varphi(x))(\xi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{\varphi}(\xi),$

para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$ .

**Demonstração:** Veja [5].

**Corolário 1.2.17.** *Se  $f \in L^1$ , então  $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$  se  $|\xi| \rightarrow \infty$ .*

O próximo resultado mostra que o espaço de Schwartz é um espaço ideal para trabalharmos com a transformada de Fourier.

**Teorema 1.2.18.** *A transformada de Fourier é continuamente inversível de  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{S}$  e*

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} \varphi(\xi) d\xi.$$

Segue agora algumas propriedades para a transformada de Fourier.

**Teorema 1.2.19.** *Se  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ , então*

1.  $\int \hat{\varphi}(x)\psi(x)dx = \int \varphi(x)\hat{\psi}(x)dx;$
2.  $\int \varphi(x)\overline{\hat{\psi}(x)}dx = (2\pi)^{-n} \int \hat{\varphi}(x)\overline{\psi(x)};$
3.  $\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi}\hat{\psi};$
4.  $\widehat{\varphi\psi} = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\psi}.$

**Demonstração:** Veja [5].

Queremos nesse momento introduzir a transformada de Fourier para distribuições. O espaço das distribuições não será um bom espaço para se definir a transformada, por essa razão introduzimos as distribuições temperadas que é um subespaço de  $\mathcal{D}'$ .

**Definição 1.2.20.** Um funcional linear e contínuo sobre  $\mathcal{S}$  é dito ser uma distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas é denotado por  $\mathcal{S}'$ .

**Definição 1.2.21.** Se  $u \in \mathcal{S}'$ , então a transformada de Fourier é definida por

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

O seguinte teorema será usado quando fizermos estimativas para o operador de energia relacionado a equação da onda com dissipação.

**Teorema 1.2.22. (Fórmula de Plancharel)** Se  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  então  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$  e vale

$$\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{f}\|_2^2.$$

**Observação 1.2.23.** Valem as seguintes propriedades para a transformada de Fourier para distribuições temperadas:

- Se  $u \in \mathcal{S}'$ , então  $\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \hat{u}$  e  $\widehat{x^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{u}$ ;
- $\hat{\hat{u}} = (2\pi)^n \check{u}$ .

### 1.2.3 Transformada Parcial de Fourier

Consideremos  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f(t, x) \in L^1_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  onde  $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \Omega$  e  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Se para todo compacto  $K \subset \Omega$ , temos

$$\int_K \int_{\mathbb{R}^n} |f(t, x)| dx dt < \infty,$$

então definiremos a transformada parcial de Fourier de  $f$  com relação a  $x$  por

$$\mathcal{F}_x(f)(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi) = \int e^{-ix\xi} f(t, x) dx,$$

para q.t.p.  $t \in \Omega$ .

Denotamos por  $\pi : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega$  a projeção usual.

**Definição 1.2.24.** Denotamos por  $C_0^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$  o subespaço de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$  formado pelas funções  $\varphi(t, x)$  tais que  $\pi(\text{supp } \varphi) \subset \Omega$  é compacto.

Uma sequência  $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$  converge a zero em  $C_0^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$  se  $\varphi_j \rightarrow 0$  em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$  e se existe um compacto  $K \subset \Omega$  tal que  $\pi(\text{supp } \varphi_j) \subset K, \forall j$ . Valem as seguintes propriedades para a transformada parcial de Fourier cuja a prova é feita de maneira análoga ao caso anterior.

**Teorema 1.2.25.** A transformada parcial de Fourier com relação a  $x$  define um operador

$$\mathcal{F}_x : C_0^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow C_0^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$$

que é continuamente inversível com inversa dada por:

$$\mathcal{F}_x^{-1}(\varphi)(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} \varphi(t, \xi) d\xi.$$

Além disso, valem as seguintes fórmulas:

1.  $\widehat{D_x^\alpha \varphi}(t, \xi) = \xi^\alpha \widehat{\varphi}(t, \xi);$
2.  $\widehat{x^\alpha \varphi}(t, \xi) = (-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \widehat{\varphi}(t, \xi);$
3.  $\widehat{D_t^\beta \varphi}(t, \xi) = D_t^\beta \widehat{\varphi}(t, \xi);$
4.  $\int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x(\varphi) \psi dt dx = \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^n} \varphi \mathcal{F}_x(\psi) dt dx;$

para toda  $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ .

Queremos agora definir transformada parcial de Fourier para certas distribuições. Para isso definimos:

**Definição 1.2.26.** Um funcional linear e contínuo sobre  $C_0^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$  é dito uma distribuição temperada em  $x$ . Denotamos o espaço das distribuição temperada em  $x$  por  $\mathcal{D}'(\Omega, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ .

**Definição 1.2.27.** Se  $u \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$  definimos a transformada parcial de Fourier em  $x$  por

$$\langle \mathcal{F}_x u, \varphi \rangle = \langle u, \mathcal{F}_x \varphi \rangle, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

### 1.3 Espaços de Besov

Nessa seção vamos introduzir os espaços de Sobolev de ordem fracionária e os espaços de Besov. Enunciaremos algumas propriedades importantes para os espaços de Besov e os relacionaremos com os espaços de Sobolev.

Primeiramente definiremos os espaços de Sobolev.

**Definição 1.3.1.** Seja  $m$  um número inteiro não negativo. O espaço de Sobolev, denotado por  $W_p^m$ , é o espaço das funções  $f \in L^p$  tal que para todo  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$  com  $|\alpha| \leq m$ , tem-se que  $\partial^\alpha f \in L^p$ .

Vamos agora introduzir os espaços de Sobolev de ordem fracionária, também conhecidos como espaços potenciais de Bessel, que desempenham um papel importante na teoria de equação diferenciais parciais e adiante estabeleceremos uma importante imersão dos espaços de Sobolev de ordem fracionária nos espaços de Besov. Para mais detalhes veja [9].

**Definição 1.3.2.** Seja  $r$  um número real e seja  $1 < p < \infty$ . Então o espaço de Sobolev de ordem fracionária, denotado por  $W_p^r$ , é definido da seguinte forma

$$W_p^r = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{p,r} = \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[ (1 + |\xi|^2)^{\frac{r}{2}} \mathcal{F}f \right] \right\|_p < \infty \right\}.$$

Temos a seguinte relação entre os espaços de Sobolev e os espaços potenciais de Bessel.

**Proposição 1.3.3.** Se  $r$  é um número inteiro não negativo, então as definições (1.3.1) e (1.3.2) coincidem.

**Demonstração:** Veja [13].

Definiremos os espaços de Besov utilizando a transformada de Fourier. Para tais fins precisamos do seguinte lema.

**Lema 1.3.4.** *Existe uma função não negativa  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  com*

$$\text{supp}(\phi) \subset \left\{ \xi; \frac{1}{2} < |\xi| < 2 \right\},$$

tal que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(2^{-j}\xi) = 1, \quad \xi \neq 0.$$

**Demonstração:** Seja  $\tilde{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  positiva em  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq |\xi| \leq \sqrt{2}$  tal que  $\text{supp}(\tilde{\phi}) \subset \left\{ \xi; \frac{1}{2} < |\xi| < 2 \right\}$ , o resultado segue definindo

$$\phi(\xi) = \frac{\tilde{\phi}(\xi)}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(2^{-j}\xi)}.$$

■

A partir de agora vamos usar a notação

$$\phi_j(\xi) = \phi(2^{-j}\xi), \quad j \in \mathbb{Z},$$

onde  $\phi$  é a função do lema (1.3.4). Uma vez que  $\phi \in C_0^\infty$ , temos pela desigualdade de Young que  $\mathcal{F}^{-1}(\phi_j \hat{v}) = \mathcal{F}^{-1}(\phi_j) * v \in L^p$ , para  $v \in L^p$ .

Dizemos que  $\{\phi_j\}$  formam uma decomposição diádica do espaço.

Para sequências  $c = (c_j)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}}$ , onde  $\tilde{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$ , seja

$$\|c\|_{l_q(\tilde{\mathbb{Z}})} = \begin{cases} \left( \sum_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}} |c_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty \\ \sup_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}} |c_j|, & q = \infty. \end{cases}$$

**Definição 1.3.5.** *Sejam  $r > 0$ ,  $1 \leq p, q \leq \infty$ . Dizemos que  $v$  pertence ao Espaço de Besov  $B_{p,q}^r$  se  $v \in L^p$  e se a sequência  $\left\{ 2^{rj} \|\mathcal{F}^{-1}(\phi_j \hat{v})\|_p \right\} \in l_q$ .*



**Teorema 1.3.6.** *A definição dos espaços de Besov não dependem da decomposição diádica escolhida.*

**Definição 1.3.7.** *Sejam  $r > 0$ ,  $1 \leq p, q \leq \infty$ . Definimos o espaço de Sobolev homogêneo por*

$$\dot{B}_{p,q}^r = \left\{ v \in \mathcal{S}' ; \|v\|_{\dot{B}_{p,q}^r} = \left\| \left\{ 2^{rj} \|\mathcal{F}^{-1}(\phi_j \hat{v})\|_{l_q} \right\} \right\|_p < \infty \right\}$$

É possível provar que  $B_{p,q}^r$  é um espaço vetorial normado com a seguinte norma  $\|v\|_{B_{p,q}^r} = \|v\|_p + \|v\|_{\dot{B}_{p,q}^r}$ . De fato vale o seguinte teorema.

**Teorema 1.3.8.** *O espaço de Besov  $B_{p,q}^r$  é um espaço de Banach.*

**Demonstração:** Veja [2].

### 1.3.1 Resultados de Imersões

Queremos agora comparar o espaços de Besov com diferentes índices e também fazer uma relação entre os espaços de Besov e os espaços de Sobolev.

**Definição 1.3.9.** *Sejam  $B_1$  e  $B_2$  espaços de Banach. Temos que  $B_1$  está continuamente imerso em  $B_2$  se existe uma constante  $c > 0$  tal que*

$$\|v\|_{B_2} \leq c \|v\|_{B_1}, v \in B_1.$$

*Denotamos da seguinte forma  $B_1 \hookrightarrow B_2$ .*

Notemos que os espaços de Sobolev formam uma família decrescente de espaços, isto é, vale o seguinte teorema.

**Teorema 1.3.10.** *Sejam  $m \geq m'$  inteiros não negativos. Vale a seguinte imersão contínua*

$$W_p^m \hookrightarrow W_p^{m'}.$$

Para os espaços de Besov  $B_{p,q}^r$  com  $p$  fixado, vale o seguinte.

**Teorema 1.3.11.** *Seja  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq q \leq q_1 \leq \infty$  e  $r \geq r_1 > 0$ . Então*

$$B_{p,q}^r \hookrightarrow B_{p,q_1}^{r_1}.$$

**Demonstração:** Veja [2].

Relacionaremos os espaços de Besov com os espaços de Sobolev no seguinte teorema.

**Teorema 1.3.12.** *Seja  $1 \leq p \leq \infty$  e  $m$  um inteiro positivo. Então,*

$$B_{p,1}^m \hookrightarrow W_p^m \hookrightarrow B_{p,\infty}^m.$$

**Demonstração:** Veja [2].

A próxima imersão foi de fundamental importância no capítulo 3, para encontrarmos estimativas para os operadores solução fundamental e de energia.

**Teorema 1.3.13.** *Temos a seguinte imersão contínua*

$$W_p^r \hookrightarrow B_{p,2}^r.$$

**Demonstração:** Veja a proposição da página 14 e o teorema da página 30 de [9].

Para a prova veja [10] e [13].

---

## Representação da solução

---

Aplicando a transformada parcial de Fourier em relação a variável  $x$  transformamos o problema de Cauchy para a equação diferencial parcial (1) em um PVI de equação diferencial ordinária com parâmetro de frequência  $|\xi|$

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + |\xi|^2 \hat{u} + b(t) \hat{u}_t = 0 \\ \hat{u}(0, \cdot) = \hat{u}_1 \\ \hat{u}_t(0, \cdot) = \hat{u}_2 \end{cases} . \quad (2.1)$$

A solução para o problema (2.1) pode ser representada como

$$\hat{u}(t, \xi) = \Phi_1(t, \xi) \hat{u}_1 + \Phi_2(t, \xi) \hat{u}_2,$$

em relação aos seus dados de Cauchy  $\hat{u}_1, \hat{u}_2$  com funções  $\Phi_1, \Phi_2$  adequadas. Nosso objetivo é obter propriedades estruturais para  $\Phi_1, \Phi_2$  a fim de determinar propriedades assintóticas para a solução.

Obter estimativas para  $\Phi_i$  diretamente da equação não é uma tarefa fácil. Por isso é natural reescrevermos a equação de segunda ordem como um determinado sistema, relacionado a uma microenergia, e encontrar a forma normal para simplificar nosso problema, possibilitando assim determinar estimativas para a solução fundamental.

O objetivo deste capítulo é o de encontrar uma representação para a solução

da edo de tal forma que possamos usar tal representação para fazermos estimativas para o operador de energia e para a solução da equação de onda com dissipação fraca.

A fim de encontrarmos tal representação, vamos dividir o plano de fase em duas zonas. Para isso utilizaremos a seguinte função definida implicitamente

$$(1 + t_\xi)|\xi| = N, \quad (2.2)$$

com uma constante  $N$  adequada e definimos as zonas

$$Z_{hyp}(N) = \{(t, \xi); t \geq t_\xi\}, \quad Z_{diss}(N) = \{(t, \xi); 0 \leq t \leq t_\xi\}. \quad (2.3)$$

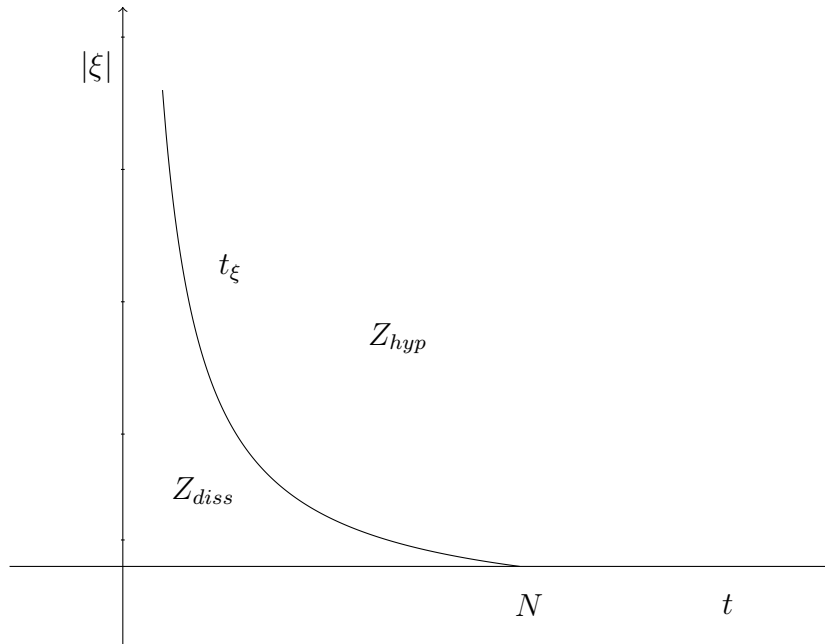


Figura 2.1: Zonas Dissipativa e Hiperbólica.

Com o objetivo de encontrarmos uma forma normal na zona hiperbólica, vamos introduzir a seguinte classe de símbolos.

**Definição 2.0.14.** *O símbolo  $a(t, \xi)$  de um operador pseudo-diferencial pertence a*

classe do símbolo hiperbólico  $S_N^{l_1, l_2}\{m_1, m_2\}$ , se satisfaz em  $Z_{hyp}(N)$  a desigualdade

$$|D_t^k D_\xi^\alpha a(t, \xi)| \leq C_{K, \alpha} |\xi|^{m_1 - |\alpha|} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{m_2+k} \quad (2.4)$$

para todo número natural  $k \leq l_1$  e para todo múlti-índice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  com  $|\alpha| \leq l_2$ .

Se a estimativa é válida para todas as derivadas escrevemos abreviadamente  $S_N\{m_1, m_2\}$  para indicar  $S_N^{\infty, \infty}\{m_1, m_2\}$ .

**Proposição 2.0.15.** (1)  $S_N\{m_1, m_2\}$  é um espaço de Fréchet.

(2)  $S_N^{l'_1, l'_2}\{m_1 - k, m_2 + l\} \hookrightarrow S_N^{l_1, l_2}\{m_1, m_2\}$ ,  $\forall l \geq k \geq 0, l'_1 \geq l_1, l'_2 \geq l_2$ .

(3)  $S_N\{m_1, m_2\} \cdot S_N\{m'_1, m'_2\} \hookrightarrow S_N\{m_1 + m'_1, m_2 + m'_2\}$ .

(4)  $D_t D_\xi^\alpha S_N\{m_1, m_2\} \hookrightarrow S_N\{m_1 - |\alpha|, m_2 + 1\}$ .

(5)  $S_N\{-1, 2\} \hookrightarrow L_\xi^\infty L_t^1(Z_{hyp})$ .

**Demonstração:** (1) Observe que  $S_N\{m_1, m_2\}$  munido com as operações de soma e multiplicação por escalar usuais sobre o corpo  $K$  já herda as propriedades de associatividade, comutatividade e distributividade. Além disso é claro que  $S_N\{m_1, m_2\}$  possui elemento neutro e inverso. Basta mostrar apenas que  $S_N\{m_1, m_2\}$  é fechado para a adição e multiplicação por escalares. Para isso, sejam  $a(t, \xi), b(t, \xi) \in S_N\{m_1, m_2\}$  e  $\lambda \in K$ . Então:

$$\begin{aligned} |D_t^k D_\xi^\alpha (a(t, \xi) + \lambda b(t, \xi))| &= |D_t^k D_\xi^\alpha (a(t, \xi)) + \lambda D_t^k D_\xi^\alpha (b(t, \xi))| \\ &\leq |D_t^k D_\xi^\alpha (a(t, \xi))| + |\lambda| |D_t^k D_\xi^\alpha (b(t, \xi))| \\ &\leq c_{k, \alpha} |\xi|^{m_1 - |\alpha|} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{m_2+k} + d_{k, \alpha} |\lambda| |\xi|^{m_1 - |\alpha|} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{m_2+k} \\ &= C_{k, \alpha} |\xi|^{m_1 - |\alpha|} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{m_2+k}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \end{aligned}$$

ou seja,  $a(t, \xi) + \lambda b(t, \xi) \in S_N\{m_1, m_2\}$ . Logo  $S_N\{m_1, m_2\}$  é um espaço de Fréchet.

(2) Seja  $a(t, \xi) \in S_N^{l'_1, l'_2}\{m_1 - k, m_2 + l\}$ , com  $l \geq k \geq 0$ . Estamos trabalhando na

zona hiperbólica, então

$$1 + t \geq 1 + t_\xi \Rightarrow \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+t_\xi} = \frac{|\xi|}{N}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} |D_t^\eta D_\xi^\alpha a(t, \xi)| &\leq c_{\eta, \alpha} |\xi|^{m_1 - k - |\alpha|} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{m_2 + l + \eta} \\ &= c_{\eta, \alpha} |\xi|^{m_1 - |\alpha|} |\xi|^{-k} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{m_2 + l - k + \eta} \left( \frac{1}{1+t} \right)^k \\ &\leq c_{\eta, \alpha} |\xi|^{m_1 - |\alpha|} |\xi|^{-k} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{m_2 + l - k + \eta} \left( \frac{1}{1+t_\xi} \right)^k \\ &= c_{\eta, \alpha} |\xi|^{m_1 - |\alpha|} |\xi|^{-k} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{m_2 + l - k + \eta} \frac{|\xi|^k}{N^k} \\ &= C_{\eta, \alpha} |\xi|^{m_1 - |\alpha|} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{m_2 + l - k + \eta} \\ &\leq C_{\eta, \alpha} |\xi|^{m_1 - |\alpha|} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{m_2 + \eta}, \forall \eta \leq l_1, \forall |\alpha| \leq l_2, \\ &\Rightarrow a(t, \xi) \in S_N^{l_1, l_2} \{m_1, m_2\}. \end{aligned}$$

O que conclui 2.

(3) Sejam  $a(t, \xi) \in S_N \{m_1, m_2\}$  e  $b(t, \xi) \in S_N \{m'_1, m'_2\}$ . Pela regra de Leibniz,

$$\begin{aligned} |D_t^k D_\xi^\alpha a(t, \xi) \cdot b(t, \xi)| &= \left| \sum_{k_1 + k_2 = k} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} c_{k_1, k_2, \alpha_1, \alpha_2} D_t^{k_1} D_\xi^{\alpha_1} a(t, \xi) D_t^{k_2} D_\xi^{\alpha_2} b(t, \xi) \right| \\ &\leq \sum_{k_1 + k_2 = k} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} c_{k_1, k_2, \alpha_1, \alpha_2} |D_t^{k_1} D_\xi^{\alpha_1} a(t, \xi)| |D_t^{k_2} D_\xi^{\alpha_2} b(t, \xi)| \\ &\leq \sum_{k_1 + k_2 = k} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} c_{k_1, k_2, \alpha_1, \alpha_2} |\xi|^{m_1 + m'_1 - |\alpha_1| - |\alpha_2|} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{m_2 + m'_2 + k_1 + k_2} \\ &= C_{k, \alpha} |\xi|^{m_1 + m'_1 - |\alpha|} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{m_2 + m'_2 + k}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \\ &\Rightarrow a(t, \xi) \cdot b(t, \xi) \in S_N \{m_1 + m'_1, m_2 + m'_2\}. \end{aligned}$$

(4) Seja  $a(t, \xi) \in S_N \{m_1, m_2\}$ . Pelo teorema de Schwarz,

$$\begin{aligned}
|D_t^k D_\xi^\alpha (D_t D_\xi^\alpha a(t, \xi))| &= |D_t^{k+1} D_\xi^{\alpha+\alpha} a(t, \xi)| \\
&\leq |\xi|^{(m_1 - |\alpha| - |\alpha|)} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{(m_2+1)+k}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \\
&\Rightarrow a(t, \xi) \in S_N \{m_1 - |\alpha|, m_2 + 1\}.
\end{aligned}$$

(5) Seja  $a(t, \xi) \in S_N \{-1, 2\}$ , então

$$\begin{aligned}
\|a(t, \xi)\|_{L_t^1(Z_{hyp})} &= \int_{Z_{hyp}} |a(t, \xi)| dt \\
&\lesssim \int_{Z_{hyp}} \frac{1}{|\xi|(1+t)^2} dt \\
&= \int_{t_\xi}^\infty \frac{1}{|\xi|(1+t)^2} dt = \frac{1}{N}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_\xi \|a(t, \xi)\|_{L_t^1(Z_{hyp})} \lesssim \frac{1}{N} \Rightarrow a(t, \xi) \in L_\xi^\infty L_t^1(Z_{hyp}).$$

■

Para a construção da representação das soluções, usaremos na zona dissipativa uma reformulação da equação integral de Volterra (3.8).

Consideremos a microenergia,

$$U = (h(t, \xi)\hat{u}, D_t\hat{u}) \tag{2.5}$$

com

$$h(t, \xi) = \frac{N}{1+t} \phi_{diss, N}(t, \xi) + |\xi| \phi_{hyp, N}(t, \xi). \tag{2.6}$$

A partir daqui vamos denotar por  $\phi_{diss, N}(t, \xi)$  a função corte da zona dissipativa e por  $\phi_{hyp, N}(t, \xi)$  a função corte da zona hiperbólica, isto é,  $\phi_{diss, N}(t, \xi) = \chi\left(\frac{(1+t)|\xi|}{N}\right)$  com  $\chi \in C_0^\infty(B(0, 2))$ ,  $\chi \equiv 1$  na  $B(0, \frac{1}{2})$  e  $\phi_{hyp, N}(t, \xi) = 1 - \phi_{diss, N}(t, \xi)$ . Particularmente segue que  $\phi_{hyp, N} \in S_N\{0, 0\}$ . A microenergia (2.5) está relacionada com o operador

de energia  $\mathbb{E}(t, D)$ ,

$$\mathbb{E}(t, D) : (\langle D \rangle u_1, u_2) \mapsto (|D|u(t, \cdot), D_t u(t, \cdot)), \quad (2.7)$$

onde  $\langle D \rangle$  e  $|D|$  são operadores pseudo-diferenciais com símbolos  $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + |\xi|^2}$  e  $|\xi|$  respectivamente.

Nosso objetivo é encontrar estimativas e uma representação estrutural para a solução fundamental  $\mathcal{E}(t, s, \xi)$  correspondente ao sistema  $D_t U = A(t, \xi)U$  e a partir disso deduzir desigualdades para o operador de energia  $\mathbb{E}(t, D)$ .

**Observação 2.0.16.** *Ao longo desse texto as hipóteses (A1), (A2)<sub>l</sub> e (A3) são aquelas consideradas na introdução.*

## 2.1 Zona Dissipativa

A idéia básica é reescrever o problema como uma equação integral. Na zona dissipativa a microenergia (2.5) simplifica-se para

$$U = \left( \frac{N}{1+t} \hat{u}, D_t \hat{u} \right)^T$$

e então temos que resolver o sistema

$$D_t \mathcal{E}(t, s, \xi) = A(t, \xi) \mathcal{E}(t, s, \xi) = \begin{bmatrix} \frac{i}{1+t} & \frac{N}{1+t} \\ \frac{(1+t)|\xi|^2}{N} & ib(t) \end{bmatrix} \mathcal{E}(t, s, \xi), \quad \mathcal{E}(s, s, \xi) = I. \quad (2.8)$$

a fim de obter a relação  $U(t, \xi) = \mathcal{E}(t, s, \xi)U(s, \xi)$ , para a demonstração dessa relação é suficiente que ambos os lados da igualdade satisfazem o mesmo PVI. Vamos usar a função auxiliar definida como:

$$\lambda(t) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t b(\tau) d\tau \right\}. \quad (2.9)$$



**Proposição 2.1.1.** *Suponha (A1) e (A3). Então para função auxiliar definida em (2.9), temos que*

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)} \sim \frac{t}{\lambda^2(t)}$$

e  $\frac{t}{\lambda^2(t)}$  é monótona crescente para  $t$  suficientemente grande e tende para o  $\infty$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Particularmente  $\lambda^2(t) \lesssim 1 + t$ ,  $t \geq 0$ .

**Demonstração:** A monotonicidade é consequência de:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{t}{\lambda^2(t)} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{t}{\exp\{\int_0^t b(\tau)d\tau\}} \right\} \\ &= \frac{\exp\{\int_0^t b(\tau)d\tau\} - t \exp\{\int_0^t b(\tau)d\tau\} b(t)}{\exp^2\{\int_0^t b(\tau)d\tau\}} \\ &= \frac{1 - tb(t)}{\lambda^2(t)}. \end{aligned}$$

Agora observe que

$$\frac{1 - tb(t)}{\lambda^2(t)} \sim \frac{1}{\lambda^2(t)}.$$

De fato, como  $t \geq 0$  e  $b(t) \geq 0$ , é claro que

$$\frac{1 - tb(t)}{\lambda^2(t)} \leq \frac{1}{\lambda^2(t)}.$$

Por outro lado, como  $\limsup_{t \rightarrow \infty} tb(t) < 1$ , para  $t \geq 0$  suficientemente grande existe  $c$  tal que  $0 \leq tb(t) \leq c < 1$ . Daí que,

$$\frac{1 - tb(t)}{\lambda^2(t)} \geq \frac{1 - c}{\lambda^2(t)} = k \frac{1}{\lambda^2(t)}, \quad k > 0$$

concluindo a afirmação. Porque  $\frac{1}{\lambda^2(t)} > 0$ , conclui-se que  $\frac{t}{\lambda^2(t)}$  é monotonicamente crescente, para  $t$  suficientemente grande.

Mostremos agora que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\lambda^2(t)} = \infty$ . De fato, sabemos que para  $t$  suficiente-

mente grande tem-se

$$\begin{aligned} 0 \leq b(t) \leq \frac{c}{t} &\Rightarrow \int_0^t b(t)dt \leq \int_0^t \frac{c}{s} ds \Rightarrow \exp \int_0^t b(t)dt \leq \exp c(\ln t - 1) \\ &\Rightarrow \frac{1}{\lambda^2(t)} \geq \frac{1}{t^c e^{-c}} \Rightarrow \frac{t}{\lambda^2(t)} \geq \frac{t}{t^c e^{-c}} = t^{1-c} e^c \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

pois  $c < 1$ .

Para mostrarmos a compatibilidade entre as funções observemos que,

$$\frac{1 - tb(t)}{\lambda^2(t)} \leq \frac{1}{\lambda^2(t)},$$

integrando de 0 a  $t$  ambos os lados da desigualdade,

$$\frac{t}{\lambda^2(t)} \leq \int_0^t \frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)} \quad (2.10)$$

Por outro lado, para  $t$  suficientemente grande

$$\frac{1 - c}{\lambda^2(t)} \leq \frac{1 - tb(t)}{\lambda^2(t)},$$

integrando de 0 a  $t$  ambos os lados da desigualdade,

$$(1 - c) \int_0^t \frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)} \leq \frac{t}{\lambda^2(t)}, \quad 1 - c > 0. \quad (2.11)$$

As desigualdades (2.10) e (2.11), implicam que  $\int_0^t \frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)} \sim \frac{t}{\lambda^2(t)}$ .

Finalmente, como  $\frac{t}{\lambda^2(t)}$  é monotonicamente crescente a partir de um certo  $t_0$  temos que

$$\frac{t_0}{\lambda^2(t_0)} \leq \frac{t}{\lambda^2(t)}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Sabemos ainda que  $\frac{t}{\lambda^2(t)}$  é contínua, logo assume um mínimo  $k > 0$  em  $[\varepsilon, t_0]$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ .

Tomando  $\tilde{C} = \min \left\{ \frac{t_0}{\lambda^2(t_0)}, k \right\}$ , temos que

$$1 \lesssim \frac{t}{\lambda^2(t)} \Rightarrow \lambda^2(t) \lesssim 1 + t, \forall t > 0.$$

■

Após a Proposição (2.1.1) estamos aptos para encontrar uma desigualdade para a norma da solução fundamental.

**Lema 2.1.2.** *Suponha (A1) e (A3). Então,*

$$\|\mathcal{E}(t, s, \xi)\| \leq \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)}, \quad t_\xi \geq t \geq s. \quad (2.12)$$

**Demonstração:** Vamos denotar por  $v(t, s, \xi)$  e  $w(t, s, \xi)$  as entradas de uma coluna de  $\mathcal{E}(t, s, \xi)$ . Então resolver a equação (2.8) é equivalente a resolver as seguintes edo's:

$$\begin{cases} v_t(t, s, \xi) = -\frac{1}{1+t}v(t, s, \xi) + \frac{iN}{1+t}w(t, s, \xi) \\ v(s, s, \xi) = \eta_1 \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} w_t(t, s, \xi) = \frac{i(1+t)}{N}|\xi|^2v(t, s, \xi) - b(t)w(t, s, \xi) \\ w(s, s, \xi) = \eta_2 \end{cases} \quad (2.14)$$

onde  $\eta = (\eta_1, \eta_2) = (1, 0)$  para a primeira coluna e  $\eta = (0, 1)$  para a segunda coluna. Para resolve-las utilizaremos o método do fator integrante. Para a edo (2.13) temos que o fator integrante é:

$$\mathcal{M}(t) = \exp \left( \int_s^t \frac{1}{1+\tau} d\tau \right) = \exp (\ln(1+\tau)|_s^t) = \frac{1+t}{1+s}, \quad (2.15)$$

multiplicando (2.13) por (2.15), obtemos,

$$\frac{d}{dt} \left( v(t, s, \xi) \frac{1+t}{1+s} \right) = i \frac{N}{1+s} w(t, s, \xi)$$

integrando de  $s$  a  $t$ , substituindo o dado inicial e isolando  $v(t, s, \xi)$ ,

$$v(t, s, \xi) = \frac{1+s}{1+t}\eta_1 + i\frac{N}{1+t} \int_s^t w(\tau, s, \xi) d\tau \quad (2.16)$$

Agora para a edo (2.14), o fator integrante é

$$\beta(t) = \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) = \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} \quad (2.17)$$

multiplicando (2.14) por (2.17), obtemos,

$$\frac{d}{dt} \left( w(t, s, \xi) \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} \right) = \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} \frac{i}{N} |\xi|^2 (1+t) v(t, s, \xi)$$

integrando de  $s$  a  $t$ , substituindo o dado inicial e isolando  $w(t, s, \xi)$ ,

$$w(t, s, \xi) = \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} \eta_2 + \frac{i}{N} \frac{|\xi|^2}{\lambda^2(t)} \int_s^t \lambda^2(\tau) (1+\tau) v(\tau, s, \xi) d\tau. \quad (2.18)$$

Multiplicando (2.16) e (2.18) pelo fator peso  $\frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)}$ , chegaremos a

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} v(t, s, \tau) &= \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} \frac{1+s}{1+t} \eta_1 + \frac{iN\lambda^2(t)}{1+t} \int_s^t \frac{1}{\lambda^2(\tau)} \left( \frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(s)} w(\tau, s, \xi) \right) d\tau \\ \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} w(t, s, \xi) &= \eta_2 + \frac{i|\xi|^2}{N} \int_s^t (1+\tau) \left( \frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(s)} v(\tau, s, \xi) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Objetivando provar a existência das funções  $v, w \in L^\infty\{t \geq s, (t, \xi), (s, \xi) \in Z_{diss}(N)\}$ , vamos substituir a primeira equação na segunda e logo depois encontrar uma limitação uniforme para ambas funções. Fazendo a substituição chegaremos a:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} w(t, s, \xi) &= \eta_2 + \frac{i|\xi|^2}{N} \int_s^t (1+s) \frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(s)} \eta_1 d\tau \\ &\quad - |\xi|^2 \int_s^t \lambda^2(\tau) \int_s^\tau \frac{1}{\lambda^2(\theta)} \left( \frac{\lambda^2(\theta)}{\lambda^2(s)} w(\theta, s, \xi) \right) d\theta d\tau. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Fazendo

$$f(t, \xi) = \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} w(t, s, \xi),$$

$$\psi(t, \xi) = \eta_2 + \frac{i|\xi|^2}{N} \int_s^t (1+s) \frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(s)} \eta_1 d\tau,$$

e

$$k(\tau, \theta, \xi) = \frac{1}{\lambda^2(\theta)} \int_s^{\tau} |\xi|^2 \lambda^2(\tau) d\tau,$$

teremos que,

$$f(t, p) + \int_s^{\tau} k(t, \theta, \xi) f(\theta, \xi) d\theta = \psi(t, \xi).$$

Pelo teorema (3.4.10) garantimos a existência de  $\frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} w(t, s, \xi)$  e conseqüentemente a existência de  $w(t, s, \xi)$ .

Lembre-se que estamos trabalhando na zona dissipativa, isto é,  $t_\xi \geq t \geq s$  e que  $\lambda(t)$  é uma função crescente. Sendo assim,

$$|\xi|^2 \int_s^t (1+s) \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(\tau)} d\tau \lesssim |\xi|^2 (1+t) \lambda^2(t) \int_s^t \frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)} \quad (2.20)$$

$$\lesssim |\xi|^2 (1+t) \lambda^2(t) \frac{t}{\lambda^2(t)} \quad (2.21)$$

$$\lesssim |\xi|^2 (1+t) t \quad (2.22)$$

$$\lesssim |\xi|^2 (1+t)^2 \quad (2.23)$$

$$\lesssim [|\xi|(1+t_\xi)]^2 = N^2 \lesssim 1 \quad (2.24)$$

onde usamos a proposição (2.1.1) para a estimativa (2.21). Ainda

$$\int_s^t |\xi|^2 \int_s^{\tau} \frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(\theta)} d\theta d\tau \lesssim \int_s^t |\xi|^2 \frac{\tau}{\lambda^2(\tau)} \lambda^2(\tau) d\tau \quad (2.25)$$

$$= \frac{|\xi|^2}{2} (t^2 - s^2) \quad (2.26)$$

$$\lesssim \frac{(|\xi| t_\xi)^2}{2} \quad (2.27)$$

$$\lesssim \frac{[|\xi|(t_\xi + 1)]^2}{2} = \frac{N^2}{2} \lesssim 1 \quad (2.28)$$

onde usamos a proposição (2.1.1) para a estimativa (2.25).

Da expressão (2.19), juntamente com (2.24) e (2.28) obtemos que,

$$\frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} |w(t, s, \xi)| \leq K + \int_s^t |\xi|^2 \int_s^\tau \frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(\theta)} d\tau \frac{\lambda^2(\theta)}{\lambda^2(s)} |w(t, s, \xi)| d\theta,$$

pela desigualdade de Gronwall,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} |w(t, s, \xi)| &\leq K \exp \left( \int_s^\tau |\xi|^2 \int_s^t \frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(\theta)} d\tau d\theta \right) \\ &\lesssim Ke \lesssim 1, \end{aligned}$$

portanto,

$$\|w(t, s, \xi)\| \lesssim \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)}.$$

Analogamente prova-se a existência de  $v(t, s, \xi)$  e que  $\|v(t, s, \xi)\| \lesssim \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)}$ . Concluindo assim o lema. ■

A fim de encontrarmos a forma normal perfeita na zona hiperbólica é essencial encontrar uma estimativa para  $\mathcal{E}(t_\xi, 0, \xi)$  para  $|\xi| \leq N$ . É o que faremos no próximo lema.

**Lema 2.1.3.** *Suponha (A1), (A2)<sub>l</sub> e (A3). Então para  $|\xi| \leq N$  e  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  a estimativa*

$$\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t_\xi, 0, \xi)\| \leq C_\alpha \frac{1}{\lambda^2(t_\xi)} |\xi|^{-|\alpha|}$$

*é válida para todo multi-índice  $|\alpha| \leq l + 1$ .*

**Demonstração:** Temos que  $D_t \mathcal{E} = A \mathcal{E}$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{i}{1+t} & \frac{N}{1+t} \\ \frac{(1+t)|\xi|^2}{N} & ib(t) \end{bmatrix}.$$

**Afirmação 1:**

$$\|A(t, \xi)\| \lesssim \frac{1}{1+t}. \quad (2.29)$$

De fato, pela hipótese e pela definição da zona dissipativa segue que,

$$|ib(t)| = |b(t)| \leq C_0 \frac{1}{1+t} \Rightarrow |b(t)| \lesssim \frac{1}{1+t}$$

e

$$\frac{1+t}{N} |\xi|^2 \leq \frac{1+t_\xi}{N} |\xi|^2 = \frac{(1+t_\xi)|\xi|}{N} |\xi| = |\xi| \leq \frac{N}{1+t} \Rightarrow \frac{1+t}{N} |\xi|^2 \lesssim \frac{1}{1+t}.$$

O que conclui a afirmação.

Para  $|\alpha| = 1$  temos que,

$$D_t D_\xi^\alpha \mathcal{E} = D_\xi^\alpha (A\mathcal{E}) = (D_\xi^\alpha A) \mathcal{E} + A (D_\xi^\alpha \mathcal{E}). \quad (2.30)$$

Usando a propriedade da solução fundamental com condição inicial  $D_\xi^\alpha \mathcal{E}(0, 0, \xi) = 0$ ,

$$D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t, 0, \xi) = \int_0^t \mathcal{E}(t, \tau, \xi) (D_\xi^\alpha A(\tau, \xi)) \mathcal{E}(\tau, 0, \xi) d\tau.$$

O lema (2.1.2) nos dá uma estimativa para  $\mathcal{E}(t, s, \xi)$  e sabemos que para  $|\alpha| = 1$  temos

$$\|D_\xi^\alpha A(t, \xi)\| \lesssim 1, \quad (2.31)$$

pois quando derivarmos cada entrada da matriz  $A$  em relação a  $\xi$ , o único termo não nulo que restará é  $\left| D_\xi^\alpha \left( \frac{(1+t)|\xi|^2}{N} \right) \right| \lesssim |\xi_i| \lesssim |\xi| \lesssim N$ . Então,

$$\begin{aligned} \|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t, 0, \xi)\| &= \left\| \int_0^t \mathcal{E}(t, \tau, \xi) (D_\xi^\alpha A(\tau, \xi)) \mathcal{E}(\tau, 0, \xi) d\tau \right\| \\ &\leq \int_0^t \|\mathcal{E}(t, \tau, \xi)\| \|(D_\xi^\alpha A(\tau, \xi))\| \|\mathcal{E}(\tau, 0, \xi)\| d\tau \\ &\lesssim \int_0^t \frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(t)} \frac{\lambda^2(0)}{\lambda^2(\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Daí

$$\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t, 0, \xi)\| = \frac{t}{\lambda^2(t)}$$

Ainda, pela a definição da zona dissipativa, temos

$$t \leq t_\xi \leq t_\xi + 1 \Rightarrow t|\xi| \leq (1 + t_\xi)|\xi| = N \Rightarrow t \lesssim |\xi|^{-1}$$

$$\therefore \|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t, 0, \xi)\| \lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)} |\xi|^{-1}, \forall (t, \xi) \in Z_{diss}(N). \quad (2.32)$$

Usando novamente a solução fundamental, também é verdade que:

$$D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t, s, \xi) = \int_0^t \mathcal{E}(t, \tau, \xi) (D_\xi^\alpha A(\tau, \xi)) \mathcal{E}(\tau, s, \xi) d\tau.$$

Daí que,

$$\begin{aligned} \|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t, s, \xi)\| &= \left\| \int_0^t \mathcal{E}(t, \tau, \xi) (D_\xi^\alpha A(\tau, \xi)) \mathcal{E}(\tau, s, \xi) d\tau \right\| \\ &\leq \int_0^t \|\mathcal{E}(t, \tau, \xi)\| \|(D_\xi^\alpha A(\tau, \xi))\| \|\mathcal{E}(\tau, s, \xi)\| d\tau. \\ &\lesssim \int_0^t \frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(t)} \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(\tau)} d\tau \\ &= \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)} t \\ &\leq \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(t)} t \\ &\lesssim |\xi|^{-1}. \end{aligned}$$

**Afirmação 2:** Para qualquer  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , temos que

$$\|D_\xi^\alpha A(t, \xi)\| \lesssim |\xi|^{1-|\alpha|}.$$

De fato, para  $|\alpha| = 1$  segue veracidade pela desigualdade (2.31). Para  $|\alpha| = 2$ ,



usando o fato de estarmos na zona dissipativa,

$$\|D_\xi^\alpha A(t, \xi)\| \leq \frac{1+t}{N} \leq |\xi|^{-1}.$$

Para  $|\alpha| > 2$  temos que as derivadas das entradas da matriz  $A(t, \xi)$  se anulam, portanto a afirmação está provada.

**Afirmação 3:** Para todo  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,

$$\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t, s, \xi)\| \leq |\xi|^{-|\alpha|} \quad (2.33)$$

A prova desta afirmação é feita de maneira análoga a:

**Afirmação 4:** Para todo  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,

$$\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t, 0, \xi)\| \leq \frac{1}{\lambda^2(t)} |\xi|^{-|\alpha|} \quad (2.34)$$

Usaremos a regra de Leibniz e indução sobre  $|\alpha|$ . É verdade para  $|\alpha| = 1$  pela desigualdade (2.32). Suponhamos que a afirmação seja válida para todo  $|\alpha| \leq l$ . Seja  $e_i$  um elemento da base canônica de  $\mathbb{R}^n$  e considere  $\beta = \alpha - e_i$ , então para  $|\alpha| = l + 1$  temos  $|\beta| = l$  e

$$\begin{aligned} \|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t, 0, \xi)\| &= \left\| D_\xi^\beta D_\xi^{e_i} \mathcal{E}(t, 0, \xi) \right\| \\ &= \left\| D_\xi^\beta \int_0^t \mathcal{E}(t, \tau, \xi) (D_\xi^{e_i} A(\tau, \xi)) \mathcal{E}(\tau, 0, \xi) d\tau \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t, 0, \xi)\| &= \left\| \int_0^t \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} \sum_{\beta' + \beta'' = \beta_1} D_\xi^{\beta'} \mathcal{E}(t, \tau, \xi) \left( D_\xi^{\beta'' + e_i} A(\tau, \xi) \right) D_\xi^{\beta_2} \mathcal{E}(\tau, 0, \xi) d\tau \right\| \\ &\leq \int_0^t \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} \sum_{\beta' + \beta'' = \beta_1} \left\| D_\xi^{\beta_1} \mathcal{E}(t, \tau, \xi) \right\| \left\| \left( D_\xi^{\beta'' + e_i} A(\tau, \xi) \right) \right\| \left\| D_\xi^{\beta_2} \mathcal{E}(\tau, 0, \xi) \right\| d\tau. \end{aligned}$$

Pelas afirmações 2, 3 e pela hipótese de indução, segue que

$$\begin{aligned}
\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t, 0, \xi)\| &\lesssim \int_0^t \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} \sum_{\beta' + \beta'' = \beta_1} \frac{1}{\lambda^2(t)} |\xi|^{-|\beta'|} |\xi|^{1-|\beta''|+1} |\xi|^{-|\beta_2|} d\tau. \\
&= \int_0^t \frac{1}{\lambda^2(t)} \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} \sum_{\beta' + \beta'' = \beta_1} |\xi|^{-|\beta_1|} |\xi|^{-|\beta_2|} d\tau. \\
&= \int_0^t \frac{1}{\lambda^2(t)} \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} \sum_{\beta' + \beta'' = \beta_1} |\xi|^{-|\beta|} d\tau. \\
&\lesssim \int_0^t \frac{1}{\lambda^2(t)} |\xi|^{-|\beta|} d\tau. \\
&\lesssim \frac{t}{\lambda^2(t)} |\xi|^{-|\beta|} \\
&\lesssim \frac{t}{\lambda^2(t)} |\xi|^{-|\beta|-1}.
\end{aligned}$$

Concluindo assim a afirmação 4.

Das afirmações 2 e 4, segue que

$$\|(D_\xi^{\alpha_1} A(t, \xi)) (D_\xi^{\alpha_2} \mathcal{E}(t, 0, \xi))\| \lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)} |\xi|^{1-|\alpha_1|-|\alpha_2|}. \quad (2.35)$$

para  $|\alpha_1| + |\alpha_2| \leq l$ .

Integrando (2.30) de 0 a  $t$  e usando a estimativa (2.35),

$$\begin{aligned}
\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t, 0, \xi)\| &= \left\| \int_0^t [(D_\xi^\alpha A) \mathcal{E} + A (D_\xi^\alpha \mathcal{E})] d\tau \right\| \\
&\leq \int_0^t [\|(D_\xi^\alpha A) \mathcal{E}\| + \|A (D_\xi^\alpha \mathcal{E})\|] d\tau \\
&\lesssim \int_0^t \left[ \frac{1}{\lambda^2(t)} |\xi|^{1-|\alpha|} + \frac{1}{\lambda^2(t)} |\xi|^{1-|\alpha|} \right] d\tau \\
&\lesssim \int_0^t \frac{1}{\lambda^2(t)} |\xi|^{1-|\alpha|} d\tau,
\end{aligned}$$

pela proposição (2.1.1),

$$\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t, 0, \xi)\| \lesssim \frac{t}{\lambda^2(t)} |\xi|^{1-|\alpha|}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \frac{|\xi|^{-1}}{\lambda^2(t)} |\xi|^{1-|\alpha|} \\
&= \frac{1}{\lambda^2(t)} |\xi|^{-|\alpha|}.
\end{aligned}$$

A hipótese sobre as derivadas de  $b(t)$  implica

$$\|D_t^k A(t, \xi)\| \lesssim \left(\frac{1}{1+t}\right)^{k+1}, k \leq l.$$

Segue das observações anteriores que

$$\|D_t^k D_\xi^\alpha A(t, \xi)\| \lesssim |\xi|^{1-|\alpha|} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{k+1}$$

Usando o fato de que  $D_t \mathcal{E} = A\mathcal{E}$ , a fórmula de Leibniz e as estimativas acima, concluímos:

$$\|D_t^k D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t, 0, \xi)\| \lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)} \left(\frac{1}{1+t}\right)^k |\xi|^{1-|\alpha|}. \quad (2.36)$$

Finalmente, de  $(1+t_\xi)|\xi| = N$  é fácil observar o que se segue

$$|D_\xi^\alpha t_\xi| \lesssim |\xi|^{-1-|\alpha|} \quad (2.37)$$

Da fórmula de Faà de Bruno e das estimativas (2.36) e (2.37) concluímos a demonstração do lema. ■

Este resultado pode ser reformulado para mostrar que

$$\lambda^2(t_\xi) \mathcal{E}(t_\xi, 0, \xi) \in \dot{S}^0,$$

onde

$$\dot{S}^0 = \{m \in C^\infty(\mathbb{R}^n - 0); |D^\alpha m(\xi)| \leq C_\alpha |\xi|^{k-\alpha}\}$$

denota a classe de símbolo homogêneo de ordem  $k$ .

## 2.2 Zona Hiperbólica

Vamos usar a classe de símbolos introduzidos na definição (2.0.14). Note que  $|\xi|\phi_{hyp,N} \in S_N\{1,0\}$  e que pela hipótese sobre as derivadas de  $b(t)$ , temos que o coeficiente  $b(t)\phi_{hyp,N} \in S_N^{l,\infty}\{0,1\}$ .

### 2.2.1 Forma Normal

Na zona hiperbólica a microenergia (2.5) simplifica para  $U = (|\xi|\hat{u}, D_t\hat{u})^T$ . Sendo assim devemos considerar o seguinte sistema

$$D_t U = A(t, \xi)U = \begin{bmatrix} 0 & |\xi| \\ |\xi| & ib(t) \end{bmatrix} U. \quad (2.38)$$

Vamos aplicar duas transformações. No primeiro passo vamos diagonalizar a parte homogênea principal. Depois executaremos mais passos de diagonalização para fazer o restante pertencer a uma classe de símbolos suficientemente boa.

**Passo 1:** A fim de diagonalizarmos a parte homogênea principal do sistema (2.38), vamos encontrar os autovetores da matriz  $A(t, \xi)$ . Os autovalores de  $A(t, \xi)$  são:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} \lambda & |\xi| \\ |\xi| & \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = |\xi|^2 \Rightarrow \lambda = \pm|\xi|.$$

Portanto os autovetores associados aos autovalores  $|\xi|$  e  $-|\xi|$  são respectivamente,

$$\begin{bmatrix} |\xi| & |\xi| \\ |\xi| & |\xi| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -y$$

escolha o autovetor  $(-1, 1)$  e

$$\begin{bmatrix} -|\xi| & |\xi| \\ |\xi| & -|\xi| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = y$$

escolha o autovetor  $(1, 1)$ .

Seja então

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

a matriz constituída de autovetores de  $A(t, \xi)$ .

Então obtemos que  $U^{(0)} = M^{-1}U$  satisfaz

$$\begin{aligned} D_t U^{(0)} &= M^{-1} D_t U = M^{-1} A(t, \xi) U \\ &= M^{-1} A(t, \xi) (M M^{-1}) U \\ &= M^{-1} A(t, \xi) M U^{(0)} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & |\xi| \\ |\xi| & ib(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} U^{(0)} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2|\xi| + ib(t) & ib(t) \\ ib(t) & -2|\xi| + ib(t) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow D_t U^{(0)} &= (D(\xi) - R(t)) U^{(0)}, \end{aligned}$$

onde

$$D(\xi) = \begin{bmatrix} |\xi| & 0 \\ 0 & |\xi| \end{bmatrix} \in S_N\{1, 0\} \quad e \quad R(t) = -i \frac{b(t)}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in S_N^{l, \infty}\{0, 1\}. \quad (2.40)$$

**Passo  $k+1$ ,  $k \geq 1$ :** Construiremos recursivamente a matriz  $N_k(t, \xi)$ . Sejam,

$$N_k(t, \xi) = \sum_{j=0}^k N^{(j)}(t, \xi) \quad e \quad F_k(t, \xi) = \sum_{j=0}^k F^{(j)}(t, \xi), \quad (2.41)$$

onde  $N^{(0)} = I, B^{(0)} = R(t)$  e  $F^{(0)} = \text{diag} B^{(0)} = F_0(t)$ . Note que  $F_0$  é um múltiplo

da  $I$ . A construção segue o seguinte esquema

$$F^{(j)} = \text{diag} B^{(j)} \quad (2.42)$$

$$N^{(j+1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{B_{12}^{(j)}}{2|\xi|} \\ \frac{-B_{21}^{(j)}}{2|\xi|} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$B^{(j+1)} = (D_t - D + R) N_{j+1} - N_{j+1} (D_t - D + F_j) \quad (2.44)$$

Antes de prosseguirmos com as observações sobre a forma normal, vamos provar a seguinte proposição que será útil na demonstração do próximo lema.

**Proposição 2.2.1.** *Seja  $s \in \mathbb{N}$ . Então  $\forall (t, \xi) \in Z_{hyp}(N)$  temos que*

$$S_N^{l_1, l_2} \{m_1, m_2\} \leftrightarrow S_N^{l_1, l_2} \{m_1 + s, m_2 - s\}.$$

**Demonstração:** Seja  $a(t, \xi) \in S_N^{l_1, l_2} \{m_1, m_2\}$ . Como  $(t, \xi) \in Z_{hyp}(N)$ , então

$$\frac{1}{1+t} \leq \frac{|\xi|}{N}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |D_t^k D_\xi^\alpha a(t, \xi)| &\lesssim |\xi|^{m_1 - |\alpha|} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2 + k}, \forall k \leq l_1, |\alpha| \leq l_2 \\ &= |\xi|^{m_1 - |\alpha|} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2 - s + k} \left(\frac{1}{1+t}\right)^s \\ &\lesssim |\xi|^{m_1 - |\alpha|} |\xi|^s \left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2 - s + k} \\ &= |\xi|^{m_1 + s - |\alpha|} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2 - s + k}. \end{aligned}$$

Portanto  $a(t, \xi) \in S_N^{l_1, l_2} \{m_1 + s, m_2 - s\}$ . ■

**Proposição 2.2.2.** *Suponha que (A1) e (A2)<sub>l</sub>. Sejam  $N^{(j)}$ ,  $B^{(j)}$  como definidas anteriormente. Então  $N^{(j)} \in S_N^{l-j+1, \infty} \{-j, j\}$  e  $B^{(j)} \in S_N^{l-j, \infty} \{-j, j+1\}$ . E mais, a*

matriz  $N^{(j)}$  é invertível em  $Z_{hyp}(N)$ .

**Demonstração:** Vamos provar usando o princípio da indução finita sobre  $j$ .

1) Para  $j = 0$ , usando a hipótese sobre as derivadas de  $b(t)$ , sabemos que

$$F^{(0)}(t, \xi) = F_0(t) = ib(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S_N^{l, \infty} \{0, 1\}.$$

Ainda,

$$N^{(1)}(t, \xi) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{B_{12}^{(0)}}{2|\xi|} \\ \frac{-B_{21}^{(0)}}{2|\xi|} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{ib(t)}{4|\xi|} \\ \frac{-ib(t)}{4|\xi|} & 0 \end{bmatrix} \in S_N^{l, \infty} \{-1, 1\}.$$

Daí que,

$$\begin{aligned} B^{(1)} &= (D_t - D + R) N_1 - N_1 (D_t - D + F_0) \\ &= (D_t - D + R) (N^{(0)} + N^{(1)}) - (N^{(0)} + N^{(1)}) (D_t - D + F_0) \\ &= [D_t, N^{(1)}] + (B^{(0)} + [N^{(1)}, D] - F_0) - N^{(1)} F_0 + RN^{(1)}, \end{aligned}$$

observe que a igualdade (2.42), implica que

$$B^{(0)} - F_0 = \frac{ib(t)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$[N^{(1)}, D] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{ib(t)}{4|\xi|} \\ \frac{-ib(t)}{4|\xi|} & 0 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} |\xi| & 0 \\ 0 & -|\xi| \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} |\xi| & 0 \\ 0 & -|\xi| \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 0 & \frac{ib(t)}{4|\xi|} \\ \frac{-ib(t)}{4|\xi|} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{ib(t)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{(0)} + [N^{(1)}, D] - F_0 = 0.$$

Sendo assim,

$$B^{(1)} = [D_t, N^{(1)}] - N^{(1)} F_0 + RN^{(1)}. \quad (2.45)$$

Segue da proposição (2.0.15),

$$\begin{aligned} N^{(1)} \in S_N^{l,\infty}\{-1, 1\} &\Rightarrow [D_t, N^{(1)}] \in S_N^{l-1,\infty}\{-1, 2\} \\ F_0 \in S_N^{l,\infty}\{0, 1\}, N^{(1)} \in S_N^{l,\infty}\{-1, 1\} &\Rightarrow N^{(1)}F_0 \in S_N^{l,\infty}\{-1, 2\} \\ R \in S_N^{l,\infty}\{0, 1\}, N^{(1)} \in S_N^{l,\infty}\{-1, 1\} &\Rightarrow RN^{(1)} \in S_N^{l,\infty}\{-1, 2\} \end{aligned}$$

Como  $S_N^{l-1,\infty}\{-1, 2\}$  é um espaço vetorial, concluímos que  $B^{(1)} \in S_N^{l-1,\infty}\{-1, 2\}$ .

2) Para  $j \geq 1$ , suponha que  $B^{(j)} \in S_N^{l-j,\infty}\{-j, j+1\}$ . Então pela definição de  $N^{(j+1)}$  e porque  $|\xi|^{-1} \in S_N\{-1, 0\}$  segue pela proposição (2.0.15) que  $N^{(j+1)} \in S_N^{l-j,\infty}\{-j-1, j+1\}$  e que  $F^{(j)} \in S_N^{l-j,\infty}\{-j, j+1\}$ .

3) Para  $B^{(j+1)}$ , temos

$$\begin{aligned} B^{(j+1)} &= (D_t - D + R)N_{j+1} - N_{j+1}(D_t - D + F_j) \\ &= (D_t - D + R) \sum_{v=0}^{j+1} N^{(v)} - \sum_{v=0}^{j+1} N^{(v)} \left( D_t - D + \sum_{v=0}^j F^{(v)} \right) \\ &= (D_t - D + R) \sum_{v=0}^{j+1} N^{(v)} - \sum_{v=0}^{j+1} N^{(v)} \left( D_t - D + \sum_{v=0}^{j-1} F^{(v)} \right) - \sum_{v=0}^{j+1} N^{(v)} F^{(j)} \\ &= B^{(j)} + (D_t - D + R)N^{(j+1)} - N^{(j+1)} \left( D_t - D + \sum_{v=0}^{j-1} F^{(v)} \right) - \sum_{v=1}^{j+1} N^{(v)} F^{(j)} - F^{(j)} \\ &= B^{(j)} + [N^{(j+1)}, D] - F^{(j)} + [D_t, N^{(j+1)}] - N^{(j+1)} \sum_{v=0}^{j-1} F^{(v)} + RN^{(j+1)} - \sum_{v=1}^{j+1} N^{(v)} F^{(j)}. \end{aligned}$$

De modo análogo ao passo 1 da indução mostra-se que:

$$\begin{aligned} B^{(j)} + [N^{(j+1)}, D] - F^{(j)} &= 0 \\ \therefore B^{(j+1)} &= [D_t, N^{(j+1)}] - N^{(j+1)} \sum_{v=0}^{j-1} F^{(v)} + RN^{(j+1)} - \sum_{v=1}^{j+1} N^{(v)} F^{(j)}. \end{aligned}$$



As proposições (2.0.15) e (2.2.1) implicam que

$$\begin{aligned}
N^{(j+1)} \in S_N^{l-j,\infty}\{-j-1, j+1\} &\Rightarrow [D_t, N^{(j+1)}] \in S_N^{l-j-1,\infty}\{-j-1, j+2\} \\
\sum_{v=0}^{j-1} F^{(v)} \in S_N^{l-j+1,\infty}\{0, 1\} &\Rightarrow N^{(j+1)} \sum_{v=0}^{j-1} F^{(v)} \in S_N^{l-j-1,\infty}\{-j-1, j+2\} \\
R \in S_N^{l,\infty}\{0, 1\} &\Rightarrow RN^{(j+1)} \in S_N^{l-j-1,\infty}\{-j-1, j+2\} \\
\sum_{v=1}^{j+1} N^{(v)} \in S_N^{l-j,\infty}\{-1, 1\} &\Rightarrow \sum_{v=1}^{j+1} N^{(v)} F^{(j)} \in S_N^{l-j-1,\infty}\{-j-1, j+2\}.
\end{aligned}$$

Como  $S_N^{l-j-1,\infty}\{-j-1, j+2\}$  é um espaço vetorial segue que  $B^{(j+1)} \in S_N^{l-j-1,\infty}\{-j-1, j+2\}$ .

Que  $N_k$  é invertível em  $Z_{hyp}(N)$  basta observar que  $N_k - I \in S_N^{l,\infty}\{-1, 1\}$ , sendo assim

$$\begin{aligned}
\|N_k - I\| &\lesssim \frac{1}{|\xi|(1+t)} \lesssim \frac{1}{|\xi|(1+t_\xi)} = \frac{1}{N} \\
\therefore \|N_k - I\| &\rightarrow 0, N \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Por conseguinte  $N_k$  é invertível para  $N$  suficientemente grande. ■

Após as proposições (2.2.1) e (2.2.2), denotando  $R_k(t, \xi) = -N_k^{-1}(t, \xi)B^{(k)}(t, \xi)$ , obteremos o seguinte

**Lema 2.2.3.** *Suponha (A1) e (A2)<sub>l</sub>. Para cada  $1 \leq k \leq l$ , existem uma zona constante  $N$  e matrizes*

1.  $N_k(t, \xi) \in S_N^{l-k+1,\infty}\{0, 0\}$  invertível parra todo  $(t, \xi) \in Z_{hyp}(N)$  com  $N_k^{-1}(t, \xi) \in S_N^{l-k+1,\infty}\{0, 0\}$ .
2.  $F_{k-1}(t, \xi) \in S_N^{l-k+1,\infty}\{0, 1\}$  diagonal com  $F_{k-1}(t, \xi) - \frac{ib(t)}{2}I \in S_N^{l-k+1,\infty}\{-1, 2\}$ .
3.  $R_k(t, \xi) \in S_N^{l-k,\infty}\{-k, k+1\}$ ,

tais que a identidade entre os operadores

$$(D_t - D(\xi) + R(t)) N_k(t, \xi) = N_k(t, \xi) (D_t - D(\xi) + F_{k-1}(t, \xi) - R_k(t, \xi)), \quad (2.46)$$

acontece  $\forall (t, \xi) \in Z_{hyp}(N)$ .

**Demonstração:**

1. Que  $N_k$  é invertível segue da proposição (2.2.2). Por que  $S_N^{l-k+1, \infty}\{0, 0\}$  é um espaço vetorial e pela proposição (2.2.1) conclui-se a afirmação.
2. Segue diretamente da proposição (2.2.1) e porque  $S_N^{l-k+1, \infty}\{0, 1\}$  é um espaço vetorial.
3. Como  $B^{(k)} \in S_N^{l-k, \infty}\{-k, k+1\}$  e  $N_k^{-1} \in S_N^{l-k+1, \infty}\{0, 0\}$  segue pela proposição (2.0.15) que  $R_k(t, \xi) \in S_N^{l-k, \infty}\{-k, k+1\}$ , e é claro que a identidade (2.46) acontece  $\forall (t, \xi) \in Z_{hyp}(N)$ .

■

O lema (2.2.3) pode ser entendido como a forma normal perfeita do sistema original. A fim de definir soma assintótica, vamos assumir a hipótese (A2) para todas as derivadas em  $t$  de  $b(t)$ .

**Definição 2.2.4.** Dizemos que  $F(t, \xi)$  é soma assintótica de  $F^{(k)}(t, \xi)$  se, e somente se,

$$F(t, \xi) - F_k(t, \xi) \in S_N\{-k-1, k+2\}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Denotamos por

$$F(t, \xi) \sim F^{(k)}(t, \xi).$$

**Definição 2.2.5.** Dizemos que  $N(t, \xi)$  é soma assintótica de  $N^{(k)}(t, \xi)$  se, e somente se,

$$N(t, \xi) - N_k(t, \xi) \in S_N\{-k-1, k+1\}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Denotamos por

$$N(t, \xi) \sim N^{(k)}(t, \xi).$$

**Observação 2.2.6.** A soma assintótica  $N(t, \xi)$  pode ser escolhida invertível. De fato, sabemos que  $N(t, \xi) - N_k(t, \xi) \in S_N\{-k-1, k+1\}, \forall k \in \mathbb{N}$ . Daí que

$$\begin{aligned} \|N - N_k\| &\lesssim |\xi|^{-k-1} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{k+1} \\ &= \left( \frac{1}{|\xi|(1+t)} \right)^{k+1} \\ &\lesssim \frac{1}{N^{k+1}} \rightarrow 0, N \gg 0. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\|N - I\| \leq \|N - N_k\| + \|I - N_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**Proposição 2.2.7.** Sejam  $F(t, \xi)$  e  $N(t, \xi)$  as somas assintóticas de  $F^{(k)}(t, \xi)$  e  $N^{(k)}(t, \xi)$  respectivamente. Então,

$$(D_t - D(\xi) + R(t)) N(t, \xi) - N(t, \xi) (D_t - D(\xi) + F(t, \xi)) \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_N\{-k, k+1\}.$$

**Demonstração:** Sejam  $k \in \mathbb{N}$  e  $I = (D_t - D + R)N - N(D_t - D + F)$ . Então temos que

$$\begin{aligned} I &= (D_t - D + R)(N - N_k) - (N - N_k)(D_t - D + F) + (D_t - D + R)N_k - \\ &\quad - N_k(D_t - D + F) \\ &= (D_t - D + R)(N - N_k) - (N - N_k)(D_t - D + (F - F_{k-1})) - (N - N_k)F_{k-1} - \\ &\quad - N_k(D_t - D + F - F_{k-1} + F_{k-1}) + (D_t - D + R)N_k \\ &= (D_t - D + R)N_k - N_k(D_t - D + F_{k-1}) + (D_t - D + R)(N - N_k) - \\ &\quad - (N - N_k)(D_t - D + (F - F_{k-1})) - N_k(F - F_{k-1}) - (N - N_k)F_{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= (D_t - D + R) N_k - N_k (D_t - D + F_{k-1}) - N_k (F - F_{k-1}) - (N - N_k) F_{k-1} + \\
&+ [D_t, N - N_k] + [N - N_k, D] + R(N - N_k) - (N - N_k)(F - F_{k-1}).
\end{aligned}$$

As proposições (2.0.15) e (2.2.2) implicam que

$$\begin{aligned}
(D_t - D + R) N_k - N_k (D_t - D + F_{k-1}) &\in S_N\{-k, k+1\} \\
N_k (F - F_{k-1}) &\in S_N\{-k, k+1\} \\
(N - N_k) F_{k-1} &\in S_N\{-k-1, k+2\} \hookrightarrow S_N\{-k, k+1\} \\
[D_t, N - N_k] &\in S_N\{-k-1, k+2\} \hookrightarrow S_N\{-k, k+1\} \\
R(N - N_k) &\in S_N\{-k-1, k+2\} \hookrightarrow S_N\{-k, k+1\} \\
(N - N_k)(F - F_{k-1}) &\in S_N\{-k, k+1\}.
\end{aligned}$$

Concluindo assim a proposição. ■

**Definição 2.2.8.** *Definimos a classe de símbolo residual  $\mathcal{H}\{m\}$  como sendo*

$$\mathcal{H}\{m\} := \bigcap_{m_1+m_2=m} S_N\{-k, k+1\}.$$

**Observação 2.2.9.** *Existe  $P_\infty(t, \xi) \in \mathcal{H}\{1\}$  tal que*

$$(D_t - D(\xi) + R(t)) N(t, \xi) = N(t, \xi) (D_t - D(\xi) + F(t, \xi) - P_\infty(t, \xi)). \quad (2.47)$$

*De fato, pela proposição (2.2.7) temos que*

$$\begin{aligned}
(D_t - D + R) N &= N(D_t - D + F) + B, B \in S_n\{-k, k+1\}, \forall k \in \mathbb{N} \\
&= N(D_t - D + F - P_\infty),
\end{aligned}$$

*onde  $P_\infty = -N^{-1}B$ . Como  $N - N_k \in S_N\{-k-1, k+1\} \hookrightarrow S_N\{0, 0\}$ , temos que  $N \in S_N\{0, 0\}$ , e por conseguinte  $P_\infty(t, \xi) \in S_N\{-k, k+1\}, \forall k \in \mathbb{N}$ . Então*

$P_\infty(t, \xi) \in \mathcal{H}\{1\}$ .

A classe  $\mathcal{H}\{m\}$  é invariante sob multiplicação por  $\exp(\pm it|\xi|)$ . Isto explica o fato de termos efetuado mais de um passo para encontrar a forma normal. A multiplicação por  $\exp(\pm it|\xi|)$  não é uma operação bem definida em  $S_N\{m_1, m_2\}$ , ela "destrói" a estimativa do símbolo, enquanto a classe residual preserva. Fato que pode ser observado na seguinte proposição.

**Proposição 2.2.10.** *Temos que*

1.  $\exp(\pm it|\xi|)S_N^{l_1, l_2}\{m_1, m_2\} \hookrightarrow S_N^{l_1, l_2}\{m_1 + l, m_2 - l\}$ , com  $l = l_1 + l_2$ .
2.  $\exp(\pm it|\xi|)\mathcal{H}\{m\} \hookrightarrow \mathcal{H}\{m\}$ .

**Demonstração:** É suficiente provarmos a primeira afirmação. Seja  $a(t, \xi) \in S_N^{l_1, l_2}\{m_1, m_2\}$ . Usando a regra de Leibniz e a definição da zona hiperbólica, obtemos

$$\begin{aligned} D_t^k D_\xi^\alpha (\exp(\pm it|\xi|)a(t, \xi)) &= \sum_{k_1+k_2=k} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} C_{k_2, k_2, \alpha_1, \alpha_2} |\xi|^{k_1} t^{\alpha_1} e^{it|\xi|} D_t^{k_2} D_\xi^{\alpha_2} a(t, \xi) \\ &= \sum_{k_1+k_2=k} \sum_{\alpha_1+\alpha_2} \sum_{k'+k''=k_1} C'_{k_2, k_2, \alpha_1, \alpha_2} |\xi|^{m_1-\alpha_2+k_1} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2+k_2-\alpha_1} \\ &\leq C_{k, \alpha} |\xi|^{m_1+l-\alpha} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2-l+k}. \end{aligned}$$

■

## 2.2.2 Solução Fundamental do Sistema na Forma Normal

Depois de realizar vários passos para encontrar a forma normal adequada, queremos construir uma solução para o sistema,

$$\begin{cases} (D_t - D(\xi) - F_{k-1} - R_k(t, \xi)) \mathcal{E}_k(t, s, \xi) = 0 \\ \mathcal{E}_k(s, s, \xi) = I \end{cases} \quad (2.48)$$

e obter propriedade estruturais para a solução. A construção segue os seguintes passos:

- Determinar uma solução fundamental de  $\mathcal{E}_0(t, s, \xi)$  para  $D_t - D(\xi)$ .
- Analisar a influência do termo principal de  $F^{(0)}(t, \xi)$  de  $F_{k-1}(t, \xi)$ .
- Analisar a influência de  $F_k(t, \xi) - F^{(0)}(t, \xi)$  e  $R_k(t, \xi)$ .

Sabemos que a solução para  $\mathcal{E}_0(t, s, \xi)$  para

$$\begin{cases} (D_t - D(\xi)) \mathcal{E}_0(t, s, \xi) = 0 \\ \mathcal{E}_0(s, s, \xi) = I \end{cases}$$

é dada por

$$\mathcal{E}_0(t, s, \xi) = \exp \{i(t-s)D(\xi)\} = \begin{bmatrix} e^{i(t-s)|\xi|} & 0 \\ 0 & e^{-i(t-s)|\xi|} \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Fazendo  $\tilde{\mathcal{E}}_0(t, s, \xi) = \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)} \mathcal{E}_0(t, s, \xi)$ , com  $\lambda(t) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t b(\tau) d\tau \right\}$  temos que

$$\begin{aligned} D_t \tilde{\mathcal{E}}_0(t, s, \xi) &= D_t \left( \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)} Id \right) \mathcal{E}_0(t, s, \xi) + \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)} D_t \mathcal{E}_0(t, s, \xi) \\ &= \left( i \frac{\lambda(s)\lambda'(t)}{\lambda^2(t)} Id + \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)} D(\xi) \right) \mathcal{E}_0(t, s, \xi) \\ &= \left( i \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} Id + D(\xi) \right) \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)} \mathcal{E}_0(t, s, \xi) \\ &= \left( \frac{i}{2} b(t) Id + D(\xi) \right) \tilde{\mathcal{E}}_0(t, s, \xi) \\ &= (D(\xi) - F^{(0)}(t, \xi)) \tilde{\mathcal{E}}_0(t, s, \xi). \end{aligned}$$

Portanto  $\tilde{\mathcal{E}}_0(t, s, \xi)$  satisfaz

$$D_t \tilde{\mathcal{E}}_0(t, s, \xi) = (D(\xi) + F^{(0)}(t, \xi)) \tilde{\mathcal{E}}_0(t, s, \xi). \quad (2.50)$$

Então  $\tilde{\mathcal{E}}_0(t, s, \xi)$  descreve a influência do termo principal  $F^{(0)}(t, \xi)$  de  $F_{k-1}(t, \xi)$ , ou seja, descreve a influência dos termos da diagonal principal.

A fim de analisar a influência de  $-F_k(t, \xi) + F^{(0)}(t, \xi)$  e  $R_k(t, \xi)$ , definiremos, com o auxílio de  $\mathcal{F}_0(t, s, \xi)$ , a seguinte matriz

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k(t, s, \xi) &= \tilde{\mathcal{E}}_0(t, s, \xi) \left( -F_{k-1}(t, \xi) + R_k(t, \xi) + F^{(0)}(t, \xi) \right) \tilde{\mathcal{E}}_0(s, t, \xi) \\ &= -\mathcal{E}_0(t, s, \xi) F_{k-1} \mathcal{E}_0(s, t, \xi) + \mathcal{E}_0(t, s, \xi) R_k(t, \xi) \mathcal{E}_0(s, t, \xi) + \\ &+ \mathcal{E}_0(t, s, \xi) F^{(0)}(t, \xi) \mathcal{E}_0(s, t, \xi), \end{aligned}$$

como as matrizes  $\mathcal{E}_0(t, s, \xi)$ ,  $F^{(0)}(t, \xi)$  e  $F_{k-1}$  são diagonais, elas comutam e

$$\mathcal{E}_0(t, s, \xi) \mathcal{E}_0(s, t, \xi) = I,$$

segue que

$$\mathcal{R}_k(t, s, \xi) = -F_{k-1} + \mathcal{E}_0(t, s, \xi) R_k(t, \xi) \mathcal{E}_0(s, t, \xi) + F^{(0)}(t, \xi). \quad (2.51)$$

Consideremos agora o seguinte sistema

$$\begin{cases} D_t \mathcal{Q}_k(t, s, \xi) = \mathcal{R}_k(t, s, \xi) \mathcal{Q}_k(t, s, \xi) \\ \mathcal{Q}_k(s, s, \xi) = I \end{cases} \quad (2.52)$$

e observemos que a solução do sistema diagonalizado  $\mathcal{E}_k(t, s, \xi)$  pode ser representada da seguinte maneira,

$$\mathcal{E}_k(t, s, \xi) = \tilde{\mathcal{E}}_0(t, s, \xi) \mathcal{Q}_k(t, s, \xi) = \frac{\lambda(t)}{\lambda(s)} \mathcal{E}_0(t, s, \xi) \mathcal{Q}_k(t, s, \xi). \quad (2.53)$$

De fato,

$$\begin{aligned} D_t \mathcal{E}_k &= \left( D_t \tilde{\mathcal{E}}_0 \right) \mathcal{Q}_k + \tilde{\mathcal{E}}_0 (D_t \mathcal{Q}_k) \\ &= (D - F^{(0)}) \tilde{\mathcal{E}}_0 \mathcal{Q}_k + \tilde{\mathcal{E}}_0 (\mathcal{R}_k \mathcal{Q}_k) \\ &= (D - F^{(0)}) \tilde{\mathcal{E}}_0 \mathcal{Q}_k + (-F_{k-1} + R_k + F^{(0)}) \tilde{\mathcal{E}}_0 \mathcal{Q}_k \\ &= (D - F_{k-1} + R_k) \mathcal{E}_k. \end{aligned}$$

A solução para o sistema (2.52) é dada pela fórmula de Peano-Baker (3.7)

$$\mathcal{Q}_k(t, s, \xi) = I + \sum_{l=1}^{\infty} i^l \int_s^t \mathcal{R}_k(t_1, s, \xi) \int_s^{t_1} \mathcal{R}_k(t_2, s, \xi) \dots \int_s^{t_{l-1}} \mathcal{R}_k(t_l, s, \xi) dt_l \dots dt_1.$$

Para estimar esta representação, utilizaremos a proposição (3.4.7).

**Afirmção:** A representação da solução de (2.52) dada pela fórmula de Peano-Backer implica que  $\|\mathcal{Q}_k(t, s, \xi)\| \lesssim 1$ .

De fato, primeiramente observemos que

$$\|\mathcal{R}_k(t, s, \xi)\| \leq \|F_{k-1} - F_0\| + \|R_k(t, \xi)\| \lesssim \frac{1}{(1+t)^2|\xi|},$$

uma vez que  $F_{k-1} - F_0 \in S_N^{l-k, \infty} \{-1, 2\}$ ,  $R_k(t, \xi) \in S_N^{l-k, \infty} \{-1, 2\}$  e  $\|\mathcal{E}_0(t, s, \xi)\| = 1$ .

Daí que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_k(t, s, \xi)\| &= \left\| I + \sum_{l=1}^{\infty} i^l \int_s^t \mathcal{R}_k(t_1, s, \xi) \int_s^{t_1} \mathcal{R}_k(t_2, s, \xi) \dots \int_s^{t_{l-1}} \mathcal{R}_k(t_l, s, \xi) dt_l \dots dt_1 \right\| \\ &\leq 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \int_s^t \|\mathcal{R}_k(t_1, s, \xi)\| \int_s^{t_1} \|\mathcal{R}_k(t_2, s, \xi)\| \dots \int_s^{t_{l-1}} \|\mathcal{R}_k(t_l, s, \xi)\| dt_l \dots dt_1 \\ &\lesssim 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \int_s^t \frac{1}{|\xi|(1+t)^2} \int_s^{t_1} \frac{1}{|\xi|(1+t_1)^2} \dots \int_s^{t_{l-1}} \frac{1}{|\xi|(1+t_l)^2} dt_l \dots dt_1 \\ &\leq 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left( \int_s^t \frac{d\tau}{|\xi|(1+\tau)} \right)^l \\ &= \exp \left( \int_s^t \frac{d\tau}{|\xi|(1+\tau)} \right) \\ &\leq \exp \left( \int_{t_\xi}^{\infty} \frac{d\tau}{|\xi|(1+\tau)} \right) = \exp \left( \frac{1}{N} \right) \lesssim 1. \end{aligned}$$

Nosso objetivo agora é estabelecer estimativas para as derivadas em relação a  $\xi$  de  $\mathcal{Q}_k(t, s, \xi)$ . Uma vez que  $R_k(t, \xi) \in S_N^{l-k, \infty} \{-k, k+1\}$  sob a hipótese  $(A2)_l$  com  $k-1 \leq l-k$ , a proposição (2.2.10) implica que  $\mathcal{R}_k(t, s, \xi) \in S_N^{k-1, k-1} \{-1, 2\}$  uniformemente em  $s$ . Observe ainda que a expressão de  $\mathcal{Q}_k(t, s, \xi)$  dada pela fórmula de Peano-Baker implica que as suas derivadas em relação a  $s$  se comportam como



multiplicação por  $|\xi|$ .

**Proposição 2.2.11.** *Suponha que  $a \in S_N^{l,l}\{-1, 2\}$ . Então*

$$b(t, s, \xi) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \int_s^t a(t_1, \xi) \int_s^{t_1} a(t_2, \xi) \dots \int_s^{t_{j-1}} a(t_j, \xi) dt_j \dots dt_1$$

define um símbolo de  $S_N^{l,l}\{0, 0\}$  uniformemente em  $s \geq t_\xi$ .

**Demonstração:** Sejam  $k, j \in \mathbb{N}$ , tais que  $k \leq j$  e  $k < l$ . Pelo teorema fundamental do cálculo e pela regra de Leibniz tem-se,

$$\begin{aligned} D_t^k b(t, s, \xi) &= \sum_{j=1}^{\infty} D_t^k \int_s^t a(t_1, \xi) \int_s^{t_1} a(t_2, \xi) \dots \int_s^{t_{j-1}} a(t_j, \xi) dt_j \dots dt_1 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} D_t^{k-1} a(t, \xi) \int_s^t a(t_2, \xi) \dots \int_s^{t_{j-1}} a(t_j, \xi) dt_j \dots dt_1 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=k-1} D_t^{k_1} a(t, \xi) D_t^{k_2} \int_s^t a(t_2, \xi) \dots \int_s^{t_{j-1}} a(t_j, \xi) dt_j \dots dt_2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=k-1} D_t^{k_1} a(t, \xi) D_t^{k_2-1} a(t_2, \xi) \int_s^t a(t_3, \xi) \dots \int_s^{t_{j-1}} a(t_j, \xi) dt_j \dots dt_3 \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{2l+1}} D_t^{k_1} a(t, \xi) \dots D_t^{k_{2l+1}} a(t, \xi) \int_s^t a(t_{2l+1}, \xi) \dots \int_s^{t_{j-1}} a(t_j, \xi) dt_j \dots dt_{2l+1} \end{aligned}$$

com  $k_1 + k_2 + \dots + k_{2l+1} = k - (l+1)$ . A seguir vamos omitir os pontos em que os símbolos  $b(t, s, \xi)$  e  $a(t, \xi)$  serão aplicados. Como estamos na zona hiperbolica obteremos que,

$$\begin{aligned} \|D_\xi^\alpha D_t^k b\| &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{2l+1}} \sum_{\alpha_0 + \dots + \alpha_w = \alpha} (D_\xi^{\alpha_0} D_t^{k_1} a) \dots (D_\xi^{\alpha_l} D_t^{k_{2l+1}} a) \int_s^t D_\xi^{\alpha_{l+1}} a \dots \int_s^{t_{j-1}} D_\xi^{\alpha_w} a \right\| \\ &\lesssim |\xi|^{-\alpha-l} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{k-(l+1)+2l+1} \sum_{j=1}^{\infty} \int_s^t \frac{1}{|\xi|(1+t_{2l+1})^2} \dots \int_s^t \frac{1}{|\xi|(1+t_j)^2} dt_{2l+1} \dots dt_j \\ &\lesssim |\xi|^{-\alpha} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{l+k} \left( \frac{1}{1+t} \right)^{-l}, \quad s \geq t_\xi \\ &= |\xi|^{-\alpha} \left( \frac{1}{1+t} \right)^k, \quad \forall k \leq l, \forall |\alpha| \leq l. \end{aligned}$$

Portanto  $b(t, s, \xi) \in S_N^{l,l}\{0, 0\}$ .

■

Como consequência imediata desta proposição e do parágrafo anterior, segue a representação estrutural da solução fundamental do sistema (2.48).

**Teorema 2.2.12.** *Suponha (A1) e (A2)<sub>2k-1</sub>,  $k \geq 1$ . Então a solução fundamental  $\mathcal{E}_k(t, s, \xi)$  do sistema diagonalizado (2.48) pode ser representado como*

$$\mathcal{E}_k(t, s, \xi) = \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)} \mathcal{E}_0(t, s, \xi) \mathcal{Q}_k(t, s, \xi), \quad t, s \geq t_\xi, \quad (2.54)$$

com o símbolo  $\mathcal{Q}_k(t, s, \xi) \in S_N^{k-1, k-1}\{0, 0\}$ . Valendo a seguinte estimativa,

$$\|D_s^l D_\xi^\alpha \mathcal{Q}_k(t, s, \xi)\| \leq C_{l,\alpha} |\xi|^{l-|\alpha|}, \quad t, s \geq t_\xi, \quad (2.55)$$

para todo multi-índice  $|\alpha| \leq k-1$  e para todo  $l \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Segue diretamente das observações anteriores.

■

**Observação 2.2.13.** *A primeira derivada de  $\mathcal{Q}_k$  com respeito a  $t$  pode ser estimada diretamente pela sua expressão herdada da fórmula de Peano-Backer.*

De fato, segue pela proposição (3.4.7)

$$\begin{aligned} \|D_t \mathcal{Q}_k(t, s, \xi)\| &= \left\| \sum_{l=1}^{\infty} i^l \mathcal{R}_k(t, s, \xi) \int_s^t \mathcal{R}_k(t_2, s, \xi) \dots \int_s^{t_{l-1}} \mathcal{R}_k(t_l, s, \xi) dt_l \dots dt_2 \right\| \\ &\lesssim \frac{1}{|\xi|(1+t)^2} \sum_{l=1}^{\infty} \int_s^t \frac{1}{|\xi|(1+t_2)^2} \dots \int_s^{t_{l-1}} \frac{1}{|\xi|(1+t_l)^2} dt_l \dots dt_2 \\ &\lesssim \frac{1}{1+t}, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o fato de estarmos na zona hiperbólica.

Mais adiante veremos que é importante fazermos estimativas para  $\mathcal{E}_k(t, t_\xi, \xi)$ . Sendo assim, com as propriedades das derivadas de  $t_\xi$  segue o seguinte,

**Corolário 2.2.14.** *Suponha  $(A_1)$  e  $(A_2)_{2k-1}, k \geq 1$ . Então,*

$$\mathcal{Q}_k(t, t_\xi, \xi) \in S_N^{1, k-1}\{0, 0\},$$

para  $t \geq t_\xi$  e  $|\xi| \leq N$ .

**Demonstração:** Para demonstrarmos esse corolário, suponhamos que as derivadas em relação a  $\xi$  sejam todas na mesma direção, este fato nos permitirá aplicar a fórmula de Faà de Bruno. Faça  $s = t_\xi$  e seja  $|\alpha| = n$ , sendo assim

$$\begin{aligned} \|D_t D_\xi \mathcal{Q}_k(t, s, \xi)\| &= \left\| D_t \left[ \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} C_{k_1, \dots, k_n} D_s^k \mathcal{Q}_k(t, s, \xi) (D_\xi t_\xi)_1^k \dots (D_\xi t_\xi)_n^k \right] \right\| \\ &= \left\| \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} C_{k_1, \dots, k_n} D_t D_s^k \mathcal{Q}_k(t, s, \xi) (D_\xi t_\xi)_1^k \dots (D_\xi t_\xi)_n^k \right\|, \end{aligned}$$

com  $k = k_1 + \dots + k_n$ . Agora da desigualdade (2.37), pela observação (2.2.13) e lembrando que derivação em relação a  $s$  se comporta como multiplicação por  $|\xi|$ , teremos que

$$\begin{aligned} \|D_t D_\xi \mathcal{Q}_k(t, s, \xi)\| &\lesssim \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \frac{1}{1+t} |\xi|^k (|\xi|^{-1-1})^{k_1} \dots (|\xi|^{-1-n})^{k_n} \\ &\lesssim \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \frac{1}{1+t} |\xi|^k |\xi|^{-k} |\xi|^{-n} \\ &\lesssim \frac{1}{1+t} |\xi|^{-n}. \end{aligned}$$

Logo  $\mathcal{Q}_k(t, t_\xi, \xi) \in S_N^{1, k-1}\{0, 0\}$ . Para concluir o caso geral, basta fixarmos uma direção e aplicar Faà de Bruno repetidas vezes. ■

A matriz  $\mathcal{Q}_k(t, s, \xi)$  converge para um limite bem definido quando  $t \rightarrow \infty$ . Este limite será usado futuramente para concluir a equivalência assintótica entre as soluções para a equação da onda livre e a equação da onda com dissipação fraca.

**Teorema 2.2.15.** *Suponha  $(A_1)$  e  $(A)_{2k-1}, k \geq 1$ . O limite,*

$$\mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_k(t, s, \xi)$$

*existe uniformemente em  $\xi$  para  $s \geq t_\xi$ . E mais*

$$\|D_\xi^\alpha \mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi)\| \leq C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|} \quad (2.56)$$

*para todo multi-índice  $|\alpha| \leq k - 1$ .*

**Demonstração:** Vamos fixar o valor inicial de  $s$  e vamos considerar  $s \geq t_\xi$ . Tomando a diferença  $I = \|\mathcal{Q}_k(t, s, \xi) - \mathcal{Q}_k(t_1, s, \xi)\|$  na representação em série, pela proposição (3.4.7) teremos,

$$\begin{aligned} I &= \left\| \sum_{l=1}^{\infty} i^l \int_{t_1}^t \mathcal{R}_k(t_1, s, \xi) \int_s^{t_1} \mathcal{R}_k(t_2, s, \xi) \dots \int_s^{t_{l-1}} \mathcal{R}_k(t_l, s, \xi) dt_l \dots dt_1 \right\| \\ &\leq \int_{t_1}^t \|\mathcal{R}_k(t_1, s, \xi)\| \sum_{l=1}^{\infty} \int_s^{t_1} \|\mathcal{R}_k(t_2, s, \xi)\| \dots \int_s^{t_{l-1}} \|\mathcal{R}_k(t_l, s, \xi)\| dt_l \dots dt_1 \\ &\leq \int_{t_1}^t \|\mathcal{R}_k(t_1, s, \xi)\| \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left( \int_s^{t_1} \|\mathcal{R}_k(\tau, s, \xi)\| d\tau \right)^l dt_1 \\ &\leq \int_{t_1}^t \|\mathcal{R}_k(t_1, s, \xi)\| \exp \left( \int_s^{t_1} \|\mathcal{R}_k(\tau, s, \xi)\| d\tau \right) dt_1 \\ &\leq \int_{t_1}^t \|\mathcal{R}_k(t_1, s, \xi)\| \exp \left( \int_{t_\xi}^{\infty} \|\mathcal{R}_k(\tau, s, \xi)\| d\tau \right) dt_1 \\ &\lesssim \int_{t_1}^t \|\mathcal{R}_k(t_1, s, \xi)\| dt_1 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando  $t, t_1 \rightarrow \infty$ . Logo

$$\|\mathcal{Q}_k(t, s, \xi) - \mathcal{Q}_k(t_1, s, \xi)\|_{L^\infty(\{s \geq t_\xi\})} \lesssim \int_{t_1}^t \|\mathcal{R}_k(t_1, s, \xi)\| dt_1 \rightarrow 0, \quad t, t_1 \rightarrow \infty.$$

Daí que  $\mathcal{Q}_k(t_n, s, \xi)$  é uma sequência de Cauchy em  $L^\infty(\{s \geq t_\xi\})$  que é um espaço de Banach e portanto convergente.

Antes de falarmos da estimativa (2.56), precisamos garantir a existência de  $D_\xi^\alpha \mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi)$ . Agindo de modo análogo, obtemos para  $|\alpha| \leq k - 1$

$$\|D_\xi^\alpha \mathcal{Q}_k(t, s, \xi) - D_\xi^\alpha \mathcal{Q}_k(t_1, s, \xi)\| \lesssim |\xi|^{-|\alpha|} \int_{t_1}^t \frac{d\tau}{(1+\tau)^2} \rightarrow 0, \quad t, t_1 \rightarrow \infty,$$

uniformemente para  $s \geq t_\xi$ . Logo existe  $D_\xi^\alpha \mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi)$ . Por conseguinte, a estimativa (2.56) segue da fórmula de Faà de Bruno, aplicada como no corolário anterior, e da estimativa (2.37). ■

A proposição (3.4.7), também pode ser usada para estimar a representação  $\mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi)$  como um símbolo em  $(s, \xi)$ . É o que temos no corolário a seguir.

**Corolário 2.2.16.** *A representação em série*

$$\mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi) = I + \sum_{l=1}^{\infty} i^l \int_s^\infty \mathcal{R}_k(t_1, s, \xi) \int_s^{t_1} \mathcal{R}_k(t_2, s, \xi) \dots \int_s^{t_{l-1}} \mathcal{R}_k(t_l, s, \xi) dt_l \dots dt_1,$$

nos fornece uma expansão assintótica de  $\mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi)$  em  $S_N^{0, k-1}\{0, 0\}$ , isto é, o  $j$ -ésimo termo pertence a  $S_N^{0, k-1}\{-j, j\}$ .

**Demonstração:** Seja  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , com  $|\alpha| \leq k - 1$ . Então,

$$\begin{aligned} \|D_\xi^\alpha \mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi)\| &= \left\| \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_l = \alpha} \int_s^\infty i^l D_\xi^{\alpha_1} \mathcal{R}_k(t_1, s, \xi) \dots \int_s^{t_{l-1}} D_\xi^{\alpha_l} \mathcal{R}_k(t_l, s, \xi) dt_l \dots dt_1 \right\| \\ &\lesssim \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_l = \alpha} \int_s^\infty \frac{1}{|\xi|^{1+|\alpha_1|} (1+t)^2} \int_s^{t_1} \dots \int_s^{t_{l-1}} \frac{1}{|\xi|^{1+|\alpha_l|} (1+t_l)^2} dt_l \dots dt_1 \\ &\lesssim \sum_{l=1}^{\infty} |\xi|^{-|\alpha|} \int_s^\infty \frac{1}{|\xi| (1+t)^2} \int_s^{t_1} \dots \int_s^{t_{l-1}} \frac{1}{|\xi| (1+t_l)^2} dt_l \dots dt_1 \\ &\lesssim |\xi|^{-|\alpha|} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left( \int_{t_\xi}^\infty \frac{1}{|\xi| (1+\tau)^2} d\tau \right) \\ &\lesssim |\xi|^{-|\alpha|}. \end{aligned}$$
■

Vamos agora explorar um pouco sobre a matriz inversa de  $\mathcal{Q}_k$ . Primeiramente faremos a seguinte observação.

**Observação 2.2.17.** *A matriz  $\mathcal{Q}_k^T(\infty, s, \xi)$  é invertível. De fato, é suficiente mostrarmos que  $\mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi)$  é invertível.*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_k(t, s, \xi) - I\| &= \left\| \sum_{l=1}^{\infty} i^l \int_s^t \mathcal{R}_k(t_1, s, \xi) \int_s^{t_1} \mathcal{R}_k(t_2, s, \xi) \dots \int_s^{t_{l-1}} \mathcal{R}_k(t_l, s, \xi) dt_l \dots dt_1 \right\| \\ &\lesssim \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left( \int_{t_\xi}^t \frac{1}{|\xi|(1+\tau)} d\tau \right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{N}\right) - 1 \rightarrow 0, N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**Proposição 2.2.18.** *A transposta inversa de  $\mathcal{Q}_k$  satisfaz a equação*

$$\begin{cases} D_t \mathcal{Q}_k^{-T}(t, s, \xi) + \mathcal{R}_k^T(t, s, \xi) = 0 \\ \mathcal{Q}_k^{-T}(s, s, \xi) = I \end{cases}. \quad (2.57)$$

**Demonstração:** De fato,

$$\begin{aligned} 0 &= D_t I = D_t(\mathcal{Q}_k \mathcal{Q}_k^{-1}) \\ &\Rightarrow (D_t \mathcal{Q}_k) \mathcal{Q}_k^{-1} + \mathcal{Q}_k (D_t \mathcal{Q}_k^{-1}) = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{R}_k \mathcal{Q}_k \mathcal{Q}_k^{-1} + \mathcal{Q}_k (D_t \mathcal{Q}_k^{-1}) = 0 \\ &\Rightarrow D_t \mathcal{Q}_k^{-1} + \mathcal{Q}_k^{-1} \mathcal{R}_k = 0 \\ &\Rightarrow D_t \mathcal{Q}_k^{-T}(t, s, \xi) + \mathcal{R}_k^T(t, s, \xi) = 0. \end{aligned}$$

■

A matriz  $\mathcal{R}_k^T(t, s, \xi)$  satisfaz as mesmas estimativas que  $\mathcal{R}_k(t, s, \xi)$ , e portanto, de maneira análoga, os resultados anteriores relacionados a  $\mathcal{Q}_k(t, s, \xi)$  são válidos para  $\mathcal{Q}_k^{-T}(t, s, \xi)$ . Especialmente  $\mathcal{Q}_k^{-1}(\infty, s, \xi)$  existe.

**Corolário 2.2.19.** *Suponha (A1) e (A2)<sub>2k-1</sub>, k ≥ 1. Então o limite*

$$\mathcal{Q}_k^{-1}(\infty, s, \xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_k^{-1}(t, s, \xi),$$

*existe uniformemente em  $\xi$ , para  $s \geq t_\xi$ .*

**Demonstração:** Análogo ao teorema (2.2.15). ■

### 2.3 Voltando ao problema inicial

Depois de construirmos a solução fundamental  $\mathcal{E}_k(t, s, \xi)$ , vamos voltar ao problema original obtendo a seguinte representação para a zona hiperbólica para frequências grandes, isto é, para  $t \geq s \geq t_\xi$ ,

$$\mathcal{E}(t, s, \xi) = M N_k(t, \xi) \mathcal{E}_k(t, s, \xi) N_k^{-1}(t, \xi) M^{-1}, \forall s \geq t_\xi \quad (2.58)$$

com matrizes uniformemente limitadas  $N_k, N_k^{-1} \in S_N\{0, 0\}$ . De fato, já sabemos que

$$N_k^{-1}(t, \xi) (D_t - D(\xi) + R(t)) N_k(t, \xi) = (D_t - D(\xi) + F_{k-1}(t, \xi) - R_k(t, \xi)),$$

como  $\mathcal{E}_k(t, s, \xi)$ , é solução de  $(D_t - D(\xi) + F_{k-1}(t, \xi) - R_k(t, \xi))$ , segue que

$$(D_t - D(\xi) + R(t)) N_k(t, \xi) \mathcal{E}_k(t, s, \xi) = 0,$$

Denotemos por  $\mathcal{E}^{(0)}(t, s, \xi)$  a solução fundamental relacionada ao sistema  $D_t U^{(0)} = (D(\xi) - R(t)) U^{(0)}$ . Desta forma,  $\mathcal{E}^{(0)}(t, s, \xi) N_k(s, \xi)$  e  $N_k(t, \xi) \mathcal{E}_k(t, s, \xi)$  satisfazem o mesmo PVI. Daí segue que,

$$\mathcal{E}^{(0)}(t, s, \xi) N_k(s, \xi) = N_k(t, \xi) \mathcal{E}_k(t, s, \xi) \Rightarrow \mathcal{E}^{(0)}(t, s, \xi) = N_k(t, \xi) \mathcal{E}_k(t, s, \xi) N_k^{-1}(s, \xi).$$

Temos ainda que  $\mathcal{E}^{(0)}(t, s, \xi)$  e  $M^{-1}\mathcal{E}(t, s, \xi)M$  satisfazem o mesmo PVI. Pelo teorema de existência e unicidade segue a representação desejada.

Queremos agora encontrar uma representação para frequências pequenas, isto é, para  $s \leq t_\xi \leq t$ . Para o tal basta observar a propriedade de solução fundamental. Sabemos que para  $0 \leq s \leq t_\xi \leq t$  acontece,

$$\mathcal{E}(t, s, \xi) = \mathcal{E}(t, t_\xi, \xi)\mathcal{E}(t_\xi, s, \xi)$$

isto implica que para todo  $0 \leq s \leq t_\xi \leq t$ . Podemos aplicar (2.58) para  $\mathcal{E}(t, t_\xi, \xi)$ . Daí segue que,

$$\mathcal{E}(t, s, \xi) = \frac{1}{\lambda(t)}MN_k(t, \xi)\mathcal{E}_0(t, t_\xi, \xi)\mathcal{Q}_k(t, t_\xi, \xi)N_k^{-1}(t_\xi, \xi)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi, s, \xi). \quad (2.59)$$



## *Estimativas*

Até agora obtemos uma representação da solução para o sistema de edo. Nosso objetivo nesse momento é fazer estimativas utilizando essa representação para concluirmos o comportamento assintótico da solução. Este capítulo é dedicado para estudar estimativas que estão diretamente relacionadas com nossa microenergia, isto é, estimativas para a solução fundamental  $\mathcal{E}(t, s, D)$  ou para o operador de energia  $\mathbb{E}(t, D)$ .

### 3.1 Estimativa de energia do tipo Strichartz $L^2 - L^2$

Nesta seção estamos interessados em encontrar desigualdade do tipo Strichartz  $L^2 - L^2$  para a equação da onda com dissipação fraca dependente do tempo.

O teorema (2.2.12) juntamente com a estimativa do lema (2.1.2) implicam, pelo teorema de Plancherel, a seguinte estimativa para a norma do operador.

**Teorema 3.1.1.** *Suponha (A1), (A2)<sub>1</sub> e (A3). Então vale a seguinte estimativa  $L^2 - L^2$*

$$\|\mathcal{E}(t, s, D)\|_{2 \rightarrow 2} \lesssim \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)}.$$

**Demonstração:** Para a zona dissipativa temos que o lema (2.1.2) implica que

$$\|\mathcal{E}(t, s, \xi)\| \lesssim \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)} \lesssim \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)}, \forall t_\xi \geq t \geq s. \quad (3.1)$$

Para a zona hiperbólica temos que analisar dois casos: frequências pequenas, que acontecem quando  $0 \leq s \leq t_\xi \leq t$  e frequências grandes que ocorrem para  $0 \leq t_\xi \leq s \leq t$ . Quando temos frequências pequenas segue que,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}(t, s, \xi)\| &= \left\| \frac{1}{\lambda(t)} MN_k(t, \xi) \mathcal{E}_0(t, t_\xi, \xi) \mathcal{Q}_k(t, t_\xi, \xi) N_k^{-1}(t_\xi, \xi) M^{-1} \lambda(t_\xi) \mathcal{E}(t_\xi, s, \xi) \right\| \\ &\lesssim \left\| \frac{1}{\lambda(t)} \lambda(t_\xi) \mathcal{E}(t_\xi, s, \xi) \right\| \\ &\lesssim \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)}. \end{aligned}$$

Para frequências grandes temos que,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}(t, s, \xi)\| &= \|MN_k(t, \xi) \mathcal{E}_k(t, s, \xi) N_k^{-1}(t, \xi) M^{-1}\| \\ &\lesssim \|\mathcal{E}_k(t, s, \xi)\| \\ &= \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)} \|\mathcal{E}_o(t, s, \xi) \mathcal{Q}_k(t, s, \xi)\| \\ &\lesssim \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)}. \end{aligned}$$

Sendo assim, a desigualdade (3.1) é válida em todo espaço de fase. Seja  $u \in L^2$ , então

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}(t, s, D)u(x)\|_2 &= \|\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{E}(t, s, \cdot)\hat{u}(\cdot)]\|_2 \\ &\sim \|\mathcal{E}(t, s, \cdot)\hat{u}(\cdot)\|_2 \\ &\leq \|\mathcal{E}(t, s, \cdot)\|_\infty \|\hat{u}(\cdot)\|_2 \\ &\lesssim \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)} \|u(\cdot)\|_2. \end{aligned}$$

Concluindo assim o teorema. ■

Usando a definição da microenergia (2.5), podemos reformular esta estimativa em termos do operador de energia  $\mathbb{E}(t, D)$ . Por conveniência faremos uma relação entre a solução fundamental  $\mathcal{E}(t, s, \xi)$  e  $\mathbb{E}(t, \xi)$ . Citaremos esses resultados na seguinte

proposição que é consequência imediata da definição de nossa microenergia (2.5) e do lema a seguir.

**Lema 3.1.2.** *O símbolo  $\mathbb{E}(t, \xi)$  satisfaz a seguinte edo,*

$$D_t \mathbb{E}(t, \xi) = A(t, \xi) \mathbb{E}(t, \xi),$$

para  $s \geq t_\xi$ .

**Demonstração:** De fato, por um lado temos que

$$\mathbb{E}(t, D)(\langle D \rangle u_1, u_2)^T = (2\pi)^{-n} \int e^{-ix\xi} \mathbb{E}(t, \xi) (\langle \xi \rangle \hat{u}_1, \hat{u}_2)^T d\xi. \quad (3.2)$$

Por outro lado, a definição do nosso operador de energia implica que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(t, D)(\langle D \rangle u_1, u_2)^T &= (|D|u(t, \cdot), D_t u(t, \cdot))^T \\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{-ix\xi} (|\xi| \hat{u}(t, \xi), D_t \hat{u}(t, \xi))^T d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{-ix\xi} U(t, \xi) d\xi, \end{aligned}$$

onde a última igualdade se justifica por estamos trabalhando na zona hiperbólica, pois  $s \geq t_\xi$ . Igualando a (3.2) obteremos o seguinte

$$(2\pi)^{-n} \int e^{-ix\xi} \mathbb{E}(t, \xi) (\langle \xi \rangle \hat{u}_1, \hat{u}_2)^T d\xi = (2\pi)^{-n} \int e^{-ix\xi} U(t, \xi) d\xi.$$

Derivando os dois lados em relação a  $t$  chegaremos à

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-n} \int e^{-ix\xi} D_t \mathbb{E}(t, \xi) (\langle \xi \rangle \hat{u}_1, \hat{u}_2)^T d\xi &= (2\pi)^{-n} \int e^{-ix\xi} D_t U(t, \xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{-ix\xi} A(t, \xi) U(t, \xi) d\xi \\ &= A(t, D)(|D|, u(t, \cdot), D_t u(t, \cdot)) \\ &= A(t, D)(2\pi)^{-n} \int e^{-ix\xi} \mathbb{E}(t, \xi) (\langle \xi \rangle \hat{u}_1, \hat{u}_2)^T d\xi. \end{aligned}$$

Então,

$$(2\pi)^{-n} \int e^{-ix\xi} D_t \mathbb{E}(t, \xi) (\langle \xi \rangle \hat{u}_1, \hat{u}_2)^T d\xi = (2\pi)^{-n} \int e^{-ix\xi} A(t, \xi) \mathbb{E}(t, \xi) (\langle \xi \rangle \hat{u}_1, \hat{u}_2)^T d\xi.$$

Portanto  $D_t \mathbb{E}(t, \xi) = A(t, \xi) \mathbb{E}(t, \xi)$ . ■

**Proposição 3.1.3.** (1) Temos que  $\mathbb{E}(t, \xi) = \mathcal{E}(t, s, \xi) \mathbb{E}(t, s)$ , para  $s \geq t_\xi$ .

(2) O símbolo do operador de energia se relaciona com a solução fundamental  $\mathcal{E}(t, s, \xi)$  da seguinte forma

$$\mathbb{E}(t, \xi) \begin{bmatrix} \frac{\langle \xi \rangle}{h(0, \xi)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|\xi|}{h(t, \xi)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{E}(t, 0, \xi).$$

(3) O multiplicador  $\frac{|\xi|}{h(t, \xi)}$  induz uma família de operadores uniformemente limitados em  $L^p$ ,  $p \in (1, \infty)$ , convergindo fortemente para a identidade quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Demonstração:** (1) Sabemos pelo lema (3.1.2) que para  $s \geq t_\xi$ ,  $V(t, \xi) = \mathbb{E}(t, \xi)$  satisfaz o seguinte PVI

$$\begin{cases} D_t V(t, \xi) = A(t, \xi) V(t, \xi) \\ V(s, \xi) = \mathbb{E}(s, \xi) \end{cases}, \quad (3.3)$$

ainda temos que a solução fundamental  $\mathcal{E}(t, s, \xi)$  satisfaz

$$\begin{cases} D_t \mathcal{E}(t, s, \xi) = A(t, \xi) \mathcal{E}(t, s, \xi) \\ \mathcal{E}(s, s, \xi) = I \end{cases}.$$

Fazendo  $\tilde{U}(t, \xi) = \mathcal{E}(t, s, \xi) \mathbb{E}(s, \xi)$ , temos que

$$\begin{cases} D_t \tilde{U}(t, \xi) = A(t, \xi) \mathcal{E}(t, s, \xi) \mathbb{E}(s, \xi) = A(t, \xi) \tilde{U}(t, \xi) \\ \tilde{U}(s, \xi) = \mathcal{E}(s, s, \xi) \mathbb{E}(s, \xi) = \mathbb{E}(s, \xi) \end{cases}.$$

Logo,  $\tilde{U}(t, \xi)$  satisfaz o P.V.I. (3.3), logo pelo teorema de existência e unicidade para edo segue o resultado desejado.

(2) Vamos mostrar a identidade entre os operadores pseudo-diferenciais relacionadas com tais símbolos. Temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(t, D) \begin{bmatrix} \frac{\langle D \rangle}{h(0, D)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0, D)u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \mathbb{E}(t, D) \begin{bmatrix} \langle D \rangle u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} |D|u \\ D_t u \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{|D|}{h(t, D)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(t, D)u \\ D_t u \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{|D|}{h(t, D)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U(s, D) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{|D|}{h(t, D)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{E}(t, 0, D) U(0, D) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{|D|}{h(t, D)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{E}(t, 0, D) \begin{bmatrix} h(0, D)u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo vale a igualdade dos símbolos correspondentes a esses operadores.

(3) Temos que  $|\xi| \in S_N\{1, 0\}$  e que  $\frac{1}{h(t, \xi)} \in S_N\{-1, 0\}$ . Logo  $\frac{|\xi|}{h(t, \xi)} \in S_N\{0, 0\}$ , isto implica que  $\frac{|\xi|}{h(t, \xi)}$  e suas derivadas em relação a  $\xi$  são uniformemente limitadas em  $t$  e que  $\frac{|\xi|}{h(t, \xi)} \in \dot{S}_k^0$ . Pelo teorema de Hörmander-Mickhlin (3.4.16) segue que  $\frac{|\xi|}{h(t, \xi)}$  induz uma família uniformemente limitada de operadores em  $L^p$ . A convergência segue do fato que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\xi|}{h(t, \xi)} = 1$ .

■

**Proposição 3.1.4.** *A aplicação  $W^1 \times L^2 \ni (u_1, u_2) \mapsto (\langle D \rangle u_1, u_2) \in L^2 \times L^2$  é sobrejetora. E mais,  $\|\langle D \rangle u\|_2 \lesssim \|u\|_{W^1}$ .*

**Demonstração:** De fato, para a sobrejetividade, tomando  $(u, v) \in L^2 \times L^2$ , basta considerarmos o par  $(\langle D \rangle^{-1}u, v) \in W^1 \times L^2$ . Que  $\langle D \rangle^{-1}u \in W^1$  segue de,

$$\begin{aligned}
\|\langle D \rangle^{-1}u\|_{W^1}^2 &= \|\mathcal{F}^{-1}[\langle \xi \rangle^{-1}\hat{u}]\|_{W^1}^2 \\
&= \int \langle \xi \rangle^2 |\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[\langle \xi \rangle^{-1}\hat{u}(\xi)]|^2 d\xi \\
&= \int |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \|\hat{u}\|_2^2 \\
&\sim \|u\|_2^2.
\end{aligned}$$

Para concluirmos a proposição veja que o teorema de Plancharel implica que

$$\begin{aligned}
\|\langle D \rangle u\|_2^2 &= \|\mathcal{F}^{-1}[\langle \xi \rangle \hat{u}]\|_2^2 \\
&\sim \|\langle \xi \rangle \hat{u}\|_2^2 \\
&= \|u\|_{W^1}^2.
\end{aligned}$$

■

Após feitas tais relações podemos provar o seguinte

**Corolário 3.1.5.** *As hipóteses (A1), (A2)<sub>1</sub> e (A3) implicam que*

$$\|\mathbb{E}(t, D)\|_{2 \rightarrow 2} \lesssim \frac{1}{\lambda(t)}.$$

**Demonstração:** Seja  $(u_1, u_2) \in W^1 \times L^2$ , então pela observação anterior, temos que  $u = (\langle D \rangle u_1, u_2) \in L^2 \times L^2$ . O teorema de Plancharel e a proposição (3.1.3) ítems (b) e (c) implicam que

$$\|\mathbb{E}(t, D)u\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} \frac{|D|}{h(t, D)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{E}(t, 0, D) \begin{bmatrix} \frac{h(0, D)}{\langle D \rangle} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \right\|_2$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}(t, D)u\|_2 &\lesssim \left\| \mathcal{E}(t, 0, D) \begin{bmatrix} \frac{h(0, D)}{\langle D \rangle} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \right\|_2 \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda(t)} \left\| \begin{bmatrix} \frac{h(0, D)}{\langle D \rangle} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \right\|_2 \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda(t)} \|u\|_2.
\end{aligned}$$

Observando que  $\frac{h(0, \xi)}{\langle \xi \rangle} \in S_N\{0, 0\}$ , logo induz um operador de  $L^p - L^p$ . Por conseguinte

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}(t, D)u\|_2 &\lesssim \frac{1}{\lambda(t)} (\|\langle D \rangle u_1\|_2 + \|u_2\|_2) \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda(t)} (\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2).
\end{aligned}$$

Provando assim o resultado desejado. ■

Encerraremos esta seção dando alguns exemplos importantes onde podemos aplicar a técnica utilizada nessa dissertação.

**Exemplo 3.1.6.** *Seja*

$$b(t) = \frac{\beta}{1+t}, \beta \in (0, 1).$$

Esse exemplo foi considerado pelo autor Jeans Wirth no artigo [15]. As hipóteses (A1), (A2)<sub>l</sub> e (A3) são satisfeitas. De fato,

- (A1) é trivialmente satisfeita;
- Para provar (A2)<sub>l</sub> veja que

$$\left| \frac{d^k}{dt^k} b(t) \right| = \beta \left( \frac{1}{1+t} \right)^{k+1} \lesssim \left( \frac{1}{1+t} \right)^{k+1}, \forall k \leq l;$$

- Finalmente para (A3) observe que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} tb(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} tb(t) = \beta < 1.$$

Logo o corolário (3.1.5) implica que

$$\|\mathbb{E}(t, D)\|_{2 \rightarrow 2} \lesssim \frac{1}{\lambda(t)}.$$

Como

$$\lambda(t) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t \frac{\beta}{1+\tau} d\tau\right) = \exp\left(\ln(1+t)^{\frac{\beta}{2}}\right) = (1+t)^{\frac{\beta}{2}},$$

temos que

$$\|\mathbb{E}(t, D)\|_{2 \rightarrow 2} \lesssim (1+t)^{-\frac{\beta}{2}}.$$

**Exemplo 3.1.7.** *Seja  $\beta > 0$  e  $n \geq 1$ . Consideremos*

$$b(t) = \frac{\beta}{(1+t) \ln(e+t) \dots \ln^{[n]}(e^{[n]}+t)}.$$

Nossa notação aqui tem o seguinte sentido,  $\ln^{[n]}$  é a  $n$ -ésima interação do logaritmo, isto é,  $\ln^{[0]}(\tau) = \tau$  e  $\ln^{[k+1]}(\tau) = \ln(\ln^{[k]}(\tau))$ . Analogamente,  $e^{[0]} = 1$  e  $e^{[k+1]} = e^{e^{[k]}}$ . Este exemplo foi considerado pelo autor Mochizuki e Nakazawa no artigo [7]. As hipóteses (A1), (A2)<sub>l</sub> e (A3) são satisfeitas. De fato,

- (A1) é trivialmente satisfeita;
- Para (A2)<sub>l</sub> basta observarmos que

$$\frac{1}{1+t} \in S_N\{0, 1\}, \quad \frac{1}{\ln^{[n]}(e^{[n]}+t)} \in S_N\{0, 0\},$$

afirmação esta que pode ser provada por indução sobre  $n$ . Sendo assim  $b(t) \in S_N\{0, 1\}$  e particularmente satisfaz a hipótese (A2)<sub>l</sub>;



- Para (A3) tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \frac{\beta}{(1+t) \ln(e+t) \dots \ln^{[n]}(e^{[n]}+t)} = 0 < 1.$$

Logo o corolário (3.1.5) implica que

$$\|\mathbb{E}(t, D)\|_{2 \rightarrow 2} \lesssim \left( \ln^{[n]}(e^{[n]}+t) \right)^{-\frac{\beta}{2}}.$$

Sendo assim a energia decai em uma taxa arbitrariamente pequena.

**Exemplo 3.1.8.** *Podemos considerar funções oscilatórias do tipo*

$$b(t) = \frac{2 + \cos(\alpha \ln(e+t))}{4(e+t)},$$

com  $\alpha \in \mathbb{R}$  suficientemente grande.

Neste último exemplo observe que as funções coeficientes  $b(t)$  não precisam ser necessariamente monótonas. As hipóteses (A1), (A2)<sub>l</sub> e (A3) são satisfeitas. De fato,

- (A1) é satisfeita trivialmente;
- Podemos concluir (A2)<sub>l</sub> observando que

$$b(t) = \frac{1}{2(e+t)} + \frac{1}{4(e+t)} \cos(\alpha \ln(e+t))$$

e mais,  $\frac{1}{2(e+t)} \in S_N\{0, 1\}$ ,  $\frac{1}{4(e+t)} \in S_N\{0, 1\}$  e  $\cos(\alpha \ln(e+t)) \in S_N\{0, 0\}$ .  
Daí que  $b(t) \in S_N\{0, 1\}$  e consequentemente  $b(t)$  satisfaz (A2)<sub>l</sub>;

- (A3) ocorre uma vez que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e+t} \left( \frac{2 + \cos(\alpha \ln(e+t))}{4} \right) = 1 \left( \frac{2+1}{4} \right) = \frac{3}{4} < 1.$$

Logo o corolário (3.1.5) implica que

$$\|\mathbb{E}(t, D)\|_{2 \rightarrow 2} \lesssim \frac{1}{\lambda(t)}.$$

A mudança de variáveis para integrais implica que

$$\int_0^t b(t) dt = \frac{1}{2} \ln(e+t) + \frac{1}{4\alpha} \text{sen}(\alpha \ln(e+t)).$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \exp\left(\int_0^t b(t) dt\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2} \ln(e+t) + \frac{1}{4\alpha} \text{sen}(\alpha \ln(e+t))\right) \\ &\sim \exp \ln \sqrt{e+t} \exp\left(\frac{1}{4\alpha} \text{sen}(\alpha \ln(e+t))\right) \\ &\gtrsim \sqrt{e+t}. \end{aligned}$$

Daí segue que

$$\|\mathbb{E}(t, D)\|_{2 \rightarrow 2} \lesssim (e+t)^{-\frac{1}{2}},$$

que independe da escolha de  $\alpha$ .

## 3.2 Estimativa de energia do tipo Strichartz $L^p - L^q$

Esta seção está destinada a encontrar desigualdade do tipo Strichartz  $L^p - L^q$ , com  $p, q$  índices duais, para equação da onda com dissipação fraca dependente do tempo. Uma importante ferramenta utilizada aqui foi a representação da solução obtida no capítulo anterior.

A estimativa básica encontra-se no próximo teorema, onde mostraremos um resultado para ondas livres na linguagem de nosso operador.

**Teorema 3.2.1.** *A seguinte desigualdade acontece*

$$\|\mathcal{E}_0(t, 0, D)\|_{p,r \rightarrow q} \leq C_{p,q}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})},$$

para índices duais  $p$  e  $q$ ,  $p \in (1, 2]$  e com regularidade  $r = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ .

**Demonstração:** A matriz  $\mathcal{E}_0(t, 0, \xi)$  tem entradas que são combinações lineares de termos  $e^{\pm it|\xi|}$ . Portanto, é suficiente considerarmos apenas esses termos. Faremos duas decomposições diádicas para o retrato de fase, lembrando que os espaços de Besov independem da decomposição diádica escolhida. Essa decomposição diádica no retrato de fase tem o objetivo de dividir o operador em componentes. Primeiramente, para  $t \leq 1$  efetuaremos a seguinte decomposição diádica: Tome  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , com  $\text{supp } \psi \subset [\frac{1}{2}, 2]$  tal que,  $\phi_j(\xi) = \psi(2^{-j}|\xi|)$  para  $\xi \neq 0$  satisfazendo  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_j(\xi) = 1$ . Pelo Lema de Brenner (3.4.12) e fazendo a mudança de variável  $\eta = 2^{-j}|\xi|$ , obtemos

$$\begin{aligned} I_j &= \|\mathcal{F}^{-1} [\phi_j(\xi)e^{\pm it|\xi|}]\|_\infty \\ &= \|\mathcal{F}^{-1} [\psi(2^j|\xi|)e^{\pm it|\xi|}]\|_\infty \\ &= 2^{jn} \left\| \mathcal{F}^{-1} [\psi(\eta)e^{\pm it2^j|\eta|}] \right\|_\infty \\ &\leq C2^{jn}(1+2^jt)^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{|\alpha| \leq M} \|D^\alpha \psi(\eta)\|_1 \\ &\leq \tilde{C}2^{jn}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}, \end{aligned}$$

na última passagem usamos que  $\frac{1+t}{1+2^jt} \leq 2$ , para  $t \leq 1$ .

Agora para  $t \geq 1$ , consideremos a seguinte decomposição diádica: Tome  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , com  $\text{supp } \psi \subset [\frac{1}{2}, 2]$  tal que,  $\phi_j(t, \xi) = \psi(2^{-j}(t+1)|\xi|)$  para  $\xi \neq 0$  satisfazendo  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_j(t, \xi) = 1$ . Fazendo a mudança de variável  $\eta = 2^{-j}(t+1)|\xi|$ ,

obtemos,

$$\begin{aligned}
I_j &= \left\| \mathcal{F}^{-1} [\phi_j(t, \xi) e^{\pm it|\xi|}] \right\|_{\infty} \\
&= \left\| \mathcal{F}^{-1} [\psi(2^{-j}(t+1)|\xi|) e^{\pm it|\xi|}] \right\|_{\infty} \\
&= 2^{jn}(1+t)^{-n} \left\| \mathcal{F}^{-1} [\psi(\eta) e^{\pm i \frac{t}{t+1} 2^j |\eta|}] \right\|_{\infty} \\
&\leq k 2^{jn}(1+t)^{-n} \left\| \psi(\eta) e^{\pm i \frac{t}{t+1} 2^j |\eta|} \right\|_1 \\
&\leq \tilde{k} 2^{jn}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}},
\end{aligned}$$

pois  $(t+1)^{-1} \leq \frac{1}{2}$ ,  $n > \frac{n-1}{2}$ ,  $\|\psi(\eta) e^{\pm i \frac{t}{t+1} 2^j |\eta|}\|_{\infty} \sim 1$  e  $\psi$  tem suporte compacto. Sendo assim, tomando  $K = \max\{\tilde{C}, \tilde{k}\}$ , concluiremos que,

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} [\phi_j(t, \xi) e^{\pm it|\xi|}] \right\|_{\infty} \leq K 2^{jn}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Queremos utilizar o teorema (1.1.6), para isso vamos provar que nosso operador satisfaz as hipóteses do mesmo. Tome  $u \in L^1$ , então pela desigualdade de Young segue que,

$$\begin{aligned}
\left\| \mathcal{F}^{-1} [\phi_j(t, \xi) e^{\pm it|\xi|} \hat{u}(\xi)] \right\|_{\infty} &= \left\| \mathcal{F}^{-1} [\phi_j(t, \xi) e^{\pm it|\xi|}] * \mathcal{F}^{-1} \hat{u}(\xi) \right\|_{\infty} \\
&\leq \left\| \mathcal{F}^{-1} [\phi_j(t, \xi) e^{\pm it|\xi|}] \right\|_{\infty} \|u(\xi)\|_1 \\
&\lesssim 2^{jn}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}} \|u(\xi)\|_1.
\end{aligned}$$

Tome  $u \in L^2$ , então pela fórmula de Plancharel segue que,

$$\begin{aligned}
\left\| \mathcal{F}^{-1} [\phi_j(t, \xi) e^{\pm it|\xi|} \hat{u}] \right\|_2 &\sim \left\| \phi_j(t, \xi) e^{\pm it|\xi|} \hat{u}(\xi) \right\|_2 \\
&\leq \left\| \phi_j(t, \xi) e^{\pm it|\xi|} \right\|_{\infty} \|\hat{u}(\xi)\|_2 \\
&\lesssim \|u(\xi)\|_2.
\end{aligned}$$

Então pelo teorema de interpolação de Riez-Thorin, tem-se que se  $u \in L^p$  então

$\mathcal{F}^{-1} [\phi_j(t, \xi) e^{\pm it|\xi|} \hat{u}] \in L^q$ , onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2}{q}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2}.$$

Teremos ainda pelo teorema (1.1.6) que

$$\|\mathcal{F}^{-1} [\phi_j(t, \xi) e^{\pm it|\xi|} \hat{u}(\xi)]\|_q \lesssim 2^{jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|u(\xi)\|_p. \quad (3.4)$$

A desigualdade acima implica a seguinte propriedade para o operador

$$e^{\pm it|D|} : \dot{B}_{p,2}^r \rightarrow L^q,$$

com regularidade  $r = n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$ . De fato, seja  $u \in \dot{B}_{p,2}^r$ , a relação entre os suportes das  $\phi_{j's}$ , a desigualdade de Minkowsky e a desigualdade (3.4) implicam que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^{-1} [e^{\pm it|\xi|} \hat{u}(\xi)]\|_q^2 &\sim \left( \sum_j \|\mathcal{F}^{-1} [\phi_j(t, \xi) e^{\pm it|\xi|} \hat{u}(\xi)]\|_q^2 \right) \\ &= \left( \sum_j \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[ \phi_j(t, \xi) e^{\pm it|\xi|} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi_k(t, \xi) \hat{u}(\xi) \right] \right\|_q^2 \right) \\ &\leq \sum_{k=-1}^1 \left( \sum_j \|\mathcal{F}^{-1} [\phi_j(t, \xi) e^{\pm it|\xi|} \phi_{j+k}(t, \xi) \hat{u}(\xi)]\|_q^2 \right) \\ &\leq \sum_{k=-1}^1 \left( \sum_j \|\mathcal{F}^{-1} [\phi_j(t, \xi) e^{\pm it|\xi|} \mathcal{F} [\mathcal{F}^{-1} \phi_{j+k}(t, \xi) \hat{u}(\xi)]]\|_q^2 \right) \\ &\lesssim (1+t)^{-(n-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \sum_j \left( \left\| 2^{jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} [\mathcal{F}^{-1} (\phi_{j+k}(t, \xi) \hat{u}(\xi))] \right\|_p^2 \right), \end{aligned}$$

por conseguinte,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^{-1} [\phi_j(t, \xi) e^{\pm it|\xi|} \hat{u}(\xi)]\|_q &\lesssim (1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \sum_j \left( \left\| 2^{jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} [\mathcal{F}^{-1} (\phi_{j+k}(t, \xi) \hat{u}(\xi))] \right\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|u\|_{\dot{B}_{p,2}^r}. \end{aligned}$$

Concluindo assim a propriedade do operador.

Para concluirmos o teorema usaremos a imersão contínua,

$$W_p^r \hookrightarrow B_{p,2}^r \doteq \dot{B}_{p,2}^r \cap L^p.$$

Tome  $u \in W_p^r$ , então

$$\begin{aligned} \|e^{\pm it|D|}u(\xi)\|_q &= \|\mathcal{F}^{-1}[e^{\pm it|\xi|}\hat{u}(\xi)]\|_q \\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|u\|_{\dot{B}_{p,2}^r} \\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\left(\|u\|_p + \|u\|_{\dot{B}_{p,2}^r}\right) \\ &= (1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|u\|_{B_{p,2}^r} \\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|u\|_{p,r}. \end{aligned}$$

■

Este teorema é a principal ferramenta para entender o operador  $\mathbb{E}(t, D)$  restrito a zona hiperbólica. Estamos aptos agora a provar o seguinte teorema.

**Teorema 3.2.2.** *Suponha (A1), (A2) e (A3). Então o operador  $\mathcal{E}(t, 0, D)$  satisfaz para índices duais  $p$  e  $q$ ,  $p \in (1, 2]$ , a seguinte estimativa*

$$\|\mathcal{E}(t, 0, D)\|_{p,r \rightarrow q} \lesssim \frac{1}{\lambda(t)}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})},$$

com regularidade  $r = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ .

**Demonstração:** Vamos dividir a prova em duas etapas.

**Etapa 1:** Primeiramente vamos considerar  $\mathcal{E}(t, 0, D)\phi_{diss,N}(t, D)$ , isto é, o operador localizado na zona dissipativa. Note que  $\sqrt{\phi}$  continua sendo uma função corte da zona dissipativa. Pelo lema (2.1.2), já sabemos que

$$\left\|\mathcal{E}(t, 0, D)\phi_{diss,N}^{\frac{1}{2}}(t, D)\right\| \lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)}.$$

Queremos aplicar a desigualdade de interpolação de Riez-Thorin, para isto observe que, se  $u \in L^1$  então pela desigualdade de Young e propriedades da transformada de Fourier temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{E}(t, 0, \cdot)\phi_{diss,N}(t, \cdot)\hat{u}(\cdot)]\|_{\infty} &= \|\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{E}(t, 0, \cdot)\phi_{diss,N}(t, \cdot)] * u(\cdot)\|_{\infty} \\
&\leq \|\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{E}(t, 0, \cdot)\phi_{diss,N}(t, \cdot)]\|_{\infty} \|u(\cdot)\|_1 \\
&\leq \|\mathcal{E}(t, 0, \cdot)\phi_{diss,N}(t, \cdot)\|_1 \|u(\cdot)\|_1 \\
&\leq \left\| \mathcal{E}(t, 0, \cdot)\phi_{diss,N}^{\frac{1}{2}}(t, \cdot) \right\|_{\infty} \left\| \phi_{diss,N}^{\frac{1}{2}}(t, \cdot) \right\|_1 \|u(\cdot)\|_1 \\
&\leq \frac{1}{\lambda^2(t)} \left\| \phi_{diss,N}^{\frac{1}{2}}(t, \cdot) \right\|_1 \|u(\cdot)\|_1.
\end{aligned}$$

Agora se  $u \in L^2$ , segue pelo teorema de Plancharel,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{E}(t, 0, \cdot)\phi_{diss,N}(t, \cdot)\hat{u}(\cdot)]\|_2 &\sim \|\mathcal{E}(t, 0, \cdot)\phi_{diss,N}(t, \cdot)\hat{u}(\cdot)\|_2 \\
&\leq \|\mathcal{E}(t, 0, \cdot)\phi_{diss,N}(t, \cdot)\|_{\infty} \|\hat{u}(\cdot)\|_2 \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)} \|u(\cdot)\|_2.
\end{aligned}$$

Como  $1 - \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ , segue pela desigualdade de interpolação de Riez-Thorin que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{E}(t, 0, \cdot)\phi_{diss,N}(t, \cdot)\hat{u}(\cdot)]\|_q &\leq \left( \frac{1}{\lambda^2(t)} \right)^{\theta} \left( \frac{1}{\lambda^2(t)} \|\phi_{diss,N}(t, \cdot)\|_1 \right)^{1-\theta} \|u\|_p \\
&= \frac{1}{\lambda^2(t)} \|\phi_{diss,N}(t, \cdot)\|_1^{1-\theta} \|u\|_p \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)} (1+t)^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|u\|_p,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos a mudança de variável  $x = \frac{(1+t)|\xi|}{N}$  para resolvermos a integral de  $\phi_{diss,N}$ .

Para concluirmos o resultado, tome  $u \in W_p^r$ , particularmente  $u \in B_{p,2}^r \doteq \dot{B}_{p,2}^r \cap L^p$ .

Daí que,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{E}(t, 0, \cdot)\phi_{diss,N}(t, \cdot)\hat{u}(\cdot)]\|_q &\lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)}(1+t)^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|u\|_p \\
&\leq \frac{1}{\lambda^2(t)}(1+t)^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\left(\|u\|_p + \|u\|_{\dot{B}_{p,2}^r}\right) \\
&= \frac{1}{\lambda^2(t)}(1+t)^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|u\|_{B_{p,2}^r} \\
&\leq \frac{1}{\lambda^2(t)}(1+t)^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|u\|_{p,r},
\end{aligned}$$

que é uma estimativa de maior decaimento do que a dada no teorema.

**Etapa 2:** Na segunda etapa vamos considerar o operador localizado na zona hiperbólica. Vamos usar a função corte e separar os casos onde temos frequências grandes das frequências pequenas.

Para frequências pequenas vamos usar a representação (2.59):

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t, 0, D)\phi_{hyp,N}(t, D) &= \frac{1}{\lambda(t)} \underbrace{MN_k(t, D)}_{q \rightarrow q} \underbrace{\mathcal{E}_0(t, t_\xi, D)}_{p,r \rightarrow q} \underbrace{\mathcal{Q}_k(t, t_\xi, D)}_{p,r \rightarrow p,r} \\
&\quad \underbrace{N_k^{-1}(t_\xi, D)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi, 0, D)}_{p,r \rightarrow p,r} \phi_{hyp,N}(t, D).
\end{aligned}$$

De fato,

- Sabemos que  $MN_k(t, \xi) \in S_N^{l-k+1, \infty}\{0, 0\}$ , conseqüentemente  $MN_k(t, \xi) \in \dot{S}^0$ , logo pelo teorema de Hörmander-Mikhlin, veja (3.4.16), segue que  $MN_k(t, D) \in M_q^q$ , uniformemente em  $t$ ;
- Que  $\mathcal{E}_0(t, t_\xi, D) : W_p^r \rightarrow L_q$  segue do teorema (3.2.1), uma vez que  $\mathcal{E}_0(t, t_\xi, D) = \mathcal{E}_0(t, 0, D)\mathcal{E}_0(0, t_\xi, D)$ ;
- Temos  $\mathcal{Q}_k(t, t_\xi, \xi) \in S_N^{1, k-1}\{0, 0\}$ , logo  $\mathcal{Q}_k(t, t_\xi, \xi) \in \dot{S}^0$ , pelo teorema de Hörmander-Mikhlin  $\mathcal{Q}_k(t, t_\xi, D) : W_p^r \rightarrow W_p^r$ , uniformemente em  $t$ ;



- Finalmente, temos que  $N_k^{-1}(t_\xi, \xi)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi, 0, \xi) \in \dot{S}^0$ , usando o análogo da proposição (2.0.15) parte (3) para a classe de símbolo  $\dot{S}^0$ , segue pelo teorema (3.4.16) que  $N_k^{-1}(t_\xi, D)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi, 0, D) : W_p^r \rightarrow W_p^r$ , uniformemente em  $t$ ;

Por conseguinte seja  $u \in W_p^r$ . Denote por  $\|\mathcal{L}u\|_q = \|\mathcal{E}_0(t, 0, D)\phi_{hyp,N}(t, D)u\|_q$ , então

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}u\|_q &= \left\| \frac{1}{\lambda(t)} MN_k(t, D)\mathcal{E}_0(t, t_\xi, D)\mathcal{Q}_k(t, t_\xi, D)N_k^{-1}(t_\xi, D)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi, 0, D)\phi_{hyp,N}(t, D)u \right\|_q \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda(t)} \|\mathcal{E}_0(t, t_\xi, D)\mathcal{Q}_k(t, t_\xi, D)N_k^{-1}(t_\xi, D)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi, 0, D)\phi_{hyp,N}(t, D)u\|_q \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda(t)} (1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\mathcal{Q}_k(t, t_\xi, D)N_k^{-1}(t_\xi, D)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi, 0, D)\phi_{hyp,N}(t, D)u\|_{p,r} \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda(t)} (1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|N_k^{-1}(t_\xi, D)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi, 0, D)\phi_{hyp,N}(t, D)u\|_{p,r} \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda(t)} (1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\phi_{hyp,N}(t, D)u\|_{p,r} \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda(t)} (1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\phi_{hyp,N}(t, D)\|_\infty \|u\|_{p,r} \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda(t)} (1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|u\|_{p,r}.
\end{aligned}$$

Para frequências grandes, usamos a representação (2.58):

$$\mathcal{E}(t, 0, D)\phi_{hyp,N}(t, D) = MN_k(t, D)\mathcal{E}_k(t, 0, D)N_k^{-1}(t, D)M^{-1}\phi_{hyp,N}(t, D).$$

Lembrando que  $\mathcal{E}_k(t, 0, \xi) = \frac{1}{\lambda(t)}\mathcal{E}_0(t, 0, \xi)\mathcal{Q}_k(t, 0, \xi)$ , teremos

$$\mathcal{E}(t, 0, D)\phi_{hyp,N}(t, D) = \frac{1}{\lambda(t)} \underbrace{MN_k(t, D)}_{q \rightarrow q} \underbrace{\mathcal{E}_0(t, 0, D)}_{p, r \rightarrow q} \underbrace{\mathcal{Q}_k(t, 0, D)}_{p, r \rightarrow p, r} \underbrace{N_k^{-1}(t, D)M^{-1}}_{p, r \rightarrow p, r} \phi_{hyp,N}(t, D).$$

Analogamente para o caso de frequências pequenas segue o resultado. ■

**Observação 3.2.3.** *Com a notação*

$$l_n = 2 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = \begin{cases} n + 1, & n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \\ n + 2, & n = 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

podemos provar a estimativa anterior com a hipótese mais fraca  $(A2)_{l_n}$  sobre a função  $b(t)$ . Se usarmos essa regularidade na função coeficiente e fizermos  $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  passos na diagonalização, obteremos  $N_k \in S_N^{0,\infty}\{0,0\}$  e  $\mathcal{Q}_k(t, s, \xi)$  um símbolo de suavidade  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  uniformemente em  $t \geq s \geq t_\xi$ . Daí o teorema (3.4.16) implicará que  $N_k \phi_{hyp}$ ,  $\mathcal{Q}_k \phi_{hyp}$  definem operadores  $L^p \rightarrow L^p$ , para todo  $p \in (1, \infty)$  uniformemente em  $t$ .

**Observação 3.2.4.** *Vale a seguinte imersão contínua*

$$L_{p,r+1} \times W_p^r \ni (u_1, u_2) \hookrightarrow (\langle D \rangle u_1, u_2) \in W_p^r \times W_p^r.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|\langle D \rangle u_1\|_{p,r} &= \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[ \langle \xi \rangle^r \widehat{\langle D \rangle u_1} \right] \right\|_p \\ &= \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[ \langle \xi \rangle^r \mathcal{F} \left[ \mathcal{F}^{-1} [\langle \xi \rangle \hat{u}_1] \right] \right] \right\|_p \\ &= \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[ \langle \xi \rangle^{r+1} \hat{u}_1 \right] \right\|_p \\ &= \|u_1\|_{p,r_p+1}. \end{aligned}$$

Segue diretamente do teorema (3.2.1) e pela proposição (3.1.3) o seguinte corolário.

**Corolário 3.2.5.** *As hipóteses (A1), (A2) e (A3) implicam que*

$$\|\mathbb{E}(t, D)\|_{p,r \rightarrow q} \lesssim \frac{1}{\lambda(t)} (1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

**Demonstração:** Análoga a do corolário (3.1.5).

### 3.3 Estimativas da solução

As estimativas para a solução seguem basicamente das estimativas para a microenergia  $U(t, \xi) = (h(t, \xi)\hat{u}, D_t\hat{u})$ . Usaremos basicamente a representação estrutural que obtivemos para a solução fundamental  $\mathcal{E}(t, s, \xi)$ .

**Proposição 3.3.1.** *Sejam  $u_1 \in W^1$  e  $u_2 \in L^2$ . Temos que a microenergia satisfaz a seguinte estimativa  $L^2 - L^2$ ,*

$$\|U(t, \xi)\|_2 \lesssim \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2(t)} (\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2), & s \leq t \leq t_\xi. \\ \frac{1}{\lambda(t)} (\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2), & t_\xi \leq s \leq t \end{cases}$$

e mais,

$$\|U(t, \xi)\lambda(t_\xi)\|_2 \lesssim \frac{1}{\lambda(t)} (\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2), \quad s \leq t_\xi \leq t.$$

**Demonstração:** De fato, na zona dissipativa temos a seguinte relação com a solução fundamental

$$\begin{aligned} U(t, \xi) = \mathcal{E}(t, s, \xi)U(s, \xi) &\Rightarrow U(t, \xi) = \mathcal{E}(t, s, \xi)\mathcal{E}(s, 0, \xi)U(0, \xi) \\ &\Rightarrow U(t, \xi) = \mathcal{E}(t, s, \xi)\mathcal{E}(s, 0, \xi)(N\hat{u}_1, \hat{u}_2), \quad s \leq t \leq t_\xi. \end{aligned}$$

Daí segue pelo lema (2.1.2) e pelo teorema de Plancharel que,

$$\begin{aligned} \|U(t, \xi)\|_2 &\lesssim \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)} \frac{\lambda^2(0)}{\lambda^2(s)} \|(N\hat{u}_1, \hat{u}_2)\|_2 \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)} (\|u_1\|_2 + \|u_2\|_2) \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)} (\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2). \end{aligned}$$

Para a zona hiperbólica temos que analisar dois casos. Faça  $I = \|U(t, \xi)\|_2$ .

Para frequências grandes, isto é, para  $t_\xi \leq s \leq t$  vamos usar a propriedade para

solução fundamental. Tome  $\tilde{t} \leq t_\xi$ , então

$$\begin{aligned} I &= \|\mathcal{E}(t, s, \xi)\mathcal{E}(s, 0, \xi)U(0, \xi)\|_2 \\ &= \|\mathcal{E}(t, s, \xi)\mathcal{E}(s, \tilde{t}, \xi)\mathcal{E}(\tilde{t}, 0, \xi)U(0, \xi)\|_2. \end{aligned}$$

Agora observe que para  $\mathcal{E}(t, s, \xi)$  podemos usar a representação para frequências grandes, para  $\mathcal{E}(s, \tilde{t}, \xi)$  podemos usar a representação para frequências pequenas e para  $\mathcal{E}(\tilde{t}, 0, \xi)$  podemos usar o lema (2.1.2). Daí segue que,

$$\|U(t, \xi)\|_2 \lesssim \frac{1}{\lambda(t)} (\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2).$$

Faça  $J = \|U(t, \xi)\lambda(t_\xi)\|_2$ . Para frequências pequenas, isto é, para  $0 \leq s \leq t_\xi \leq t$ , temos pelo lema (2.1.2)

$$\begin{aligned} J &= \|\mathcal{E}(t, s, \xi)\mathcal{E}(s, 0, \xi)U(0, \xi)\lambda(t_\xi)\|_2 \\ &= \left\| \frac{1}{\lambda(t)} MN_k(t, \xi)\mathcal{E}_0(t, t_\xi, \xi)\mathcal{Q}_k(t, t_\xi, \xi)N_k^{-1}(t_\xi, \xi)M^{-1}\lambda^2(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi, s, \xi)\mathcal{E}(s, 0, \xi)U(0, \xi) \right\|_2 \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda(t)} (\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2). \end{aligned}$$

■

Vamos definir o operador solução

$$\mathbb{S}(t, D) : (u_1, \langle D \rangle^{-1}u_2) \longmapsto u(t, \cdot),$$

a fim de obteremos estimativas  $L^p - L^q$  para a solução.

Observe que a aplicação  $W^1 \times L^2 \ni (u_1, u_2) \longmapsto (u_1, \langle D \rangle^{-1}u_2) \in L^2 \times L^2$  está bem definida uma vez que vale o seguinte isomorfismo

$$\langle D \rangle^r : W_p^r(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n).$$

**Teorema 3.3.2.** *Suponha (A1), (A2)<sub>1</sub> e (A3). Então a solução  $u(t, x)$  satisfaz a*

seguinte estimativa  $L^2 - L^2$

$$\|\mathbb{S}(t, D)\|_{2 \rightarrow 2} \lesssim \frac{1+t}{\lambda^2(t)}.$$

**Demonstração:** Seja  $(u_1, u_2) \in W^1 \times L^2$ . A demonstração segue basicamente da proposição (3.3.1).

Para a zona dissipativa temos que  $h(t, \xi) = \frac{N}{1+t}$ . Como  $U(t, \xi) = (h(t, \xi)\hat{u}, D_t\hat{u})$ , segue que

$$\|h(t, \xi)u\|_2 \lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)} (\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2).$$

Então

$$\begin{aligned} \|\mathbb{S}(t, D)(u_1, \langle D \rangle^{-1}u_2)\|_2 &= \|u(t, \cdot)\|_2 \\ &= \|h^{-1}(t, \xi)h(t, \xi)u(t, \cdot)\|_2 \\ &\lesssim (1+t)\|h(t, \xi)u(t, \cdot)\|_2 \\ &\lesssim \frac{1+t}{\lambda^2(t)} (\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2). \end{aligned}$$

Para a zona hiperbólica temos dois casos. Para  $t_\xi \leq s \leq t$ , temos que  $h(t, \xi) = |\xi| > c > 0$  e

$$\|h(t, \xi)u\|_2 \lesssim \frac{1}{\lambda(t)} (\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2).$$

Então,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{S}(t, D)(u_1, \langle D \rangle^{-1}u_2)\|_2 &= \|u(t, \cdot)\|_2 \\ &= \|h^{-1}(t, \xi)h(t, \xi)u(t, \cdot)\|_2 \\ &\lesssim \|h(t, \xi)u(t, \cdot)\|_2 \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda(t)} (\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2) \\ &\lesssim \frac{1+t}{\lambda^2(t)} (\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2), \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos a proposição (2.1.1) da seguinte forma

$$\frac{\lambda^2(t)}{\lambda(t)} \lesssim 1+t \Rightarrow \frac{1}{\lambda(t)} \lesssim \frac{1+t}{\lambda^2(t)}.$$

Para  $s \leq t_\xi \leq t$ , temos que  $h(t, \xi) = |\xi|$  e

$$\|\lambda(t_\xi)h(t, \xi)u\|_2 \lesssim \frac{1}{\lambda(t)} (\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2).$$

Então,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{S}(t, D)(u_1, \langle D \rangle^{-1}u_2)\|_2 &= \|u(t, \cdot)\|_2 \\ &= \|h^{-1}(t, \xi)\lambda^{-1}(t_\xi)\lambda(t_\xi)h(t, \xi)u(t, \cdot)\|_2 \\ &\lesssim \left\| \frac{1}{|\xi|\lambda(t_\xi)} \right\|_\infty \|\lambda(t_\xi)h(t, \xi)u(t, \cdot)\|_2 \\ &\lesssim \left\| \frac{1}{|\xi|\lambda(t)\lambda(t_\xi)} \right\|_\infty (\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2) \\ &\lesssim \frac{1+t}{\lambda^2(t)} (\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2), \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o seguinte

$$\frac{1}{|\xi|\lambda(t)\lambda(t_\xi)} \sim \frac{1+t_\xi}{\lambda(t)\lambda(t_\xi)} \lesssim \frac{1+t}{\lambda^2(t)},$$

observando que para  $t$  suficientemente grande a função  $\frac{1+t}{\lambda(t)}$  é crescente. ■

Uma reformulação do teorema (3.2.2) juntamente com a representação estrutural da solução fundamental e a estrutura do símbolo  $\mathbb{S}(t, \xi)$  nos fornece estimativas  $L^p - L^q$  para o operador solução.

**Teorema 3.3.3.** *Suponha (A1), (A2)<sub>l<sub>n</sub></sub> e (A3). Então a solução  $u(t, x)$  satisfaz a*

seguinte estimativa  $L^p - L^q$

$$\|\mathbb{S}(t, D)\|_{p,r \rightarrow q} \lesssim \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2(t)}(1+t)^{1-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}, & p \geq p^* \\ \frac{1}{\lambda(t)}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}, & p < p^* \end{cases},$$

para índices duais  $p$  e  $q$ ,  $p \in (1, 2]$  e com regularidade  $r = n \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ . O valor crítico de  $p^*$  é escolhido de tal forma que

$$\lambda(t) \lesssim (1+t)^{1-\frac{n+1}{2}(\frac{2}{p^*}-1)}.$$

■

**Observação 3.3.4.** Quando  $tb(t) \rightarrow \infty$  o valor crítico  $p^*$  simplifica-se para  $p^* = \frac{2n+2}{n+3}$ .

### 3.4 Teoria do Espalhamento

Nesta seção temos como objetivo mostrar que, a menos de um fator  $\lambda(t)$ , as soluções da equação de onda com dissipação fraca em relação ao tempo, com algumas hipóteses sobre o coeficiente  $b(t)$ , se comportam, em determinados espaços, como soluções da equação de onda livre quando o tempo se tornar suficientemente grande.

A idéia principal é definir um operador que leva condições iniciais do problema de onda livre,

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \Delta \tilde{u} = 0 \\ \tilde{u}(0, \cdot) = \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_t(0, \cdot) = \tilde{u}_2 \end{cases},$$

às condições iniciais do problema da onda com dissipação fraca,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - b(t)u_t = 0 \\ u(0, \cdot) = u_1 \\ u_t(0, \cdot) = u_2 \end{cases},$$

de tal forma que haja uma certa equivalência assintótica entre as soluções dos problemas supracitados.

O operador que relaciona  $(u_1, u_2)$  à  $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$  será denominado como operador de onda de Møller. Esta denominação está de acordo com a convenção para a teoria do espalhamento para as equações de onda e de Schrödinger. Para mais detalhes veja [14].

Primeiramente vamos definir o operador de energia para o problema de onda livre da seguinte maneira. Seja  $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in H^1 \times L^2$ ,

$$\mathbb{E}_0(t, D) : (\langle D \rangle \tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \longmapsto (|D| \tilde{u}(t, \cdot), D_t \tilde{u}(t, \cdot)).$$

A matriz  $M\mathcal{E}_0(t, 0, \xi)M^{-1}$  é o símbolo do operador  $\mathbb{E}_0(t, D)$ .

Lembramos que o operador de energia para equação da onda com dissipação foi definido da seguinte forma. Seja  $(u_1, u_2) \in H^1 \times L^2$ ,

$$\mathbb{E}(t, D) : (\langle D \rangle u_1, u_2)^T \longmapsto (|D| u(t, \cdot), D_t u(t, \cdot))^T$$

Vamos relacionar esses dois operadores afim de definirmos o operador de onda de Møller. Veja a figura (3.1) e observa que se o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) (\mathbb{E}_0(t, D))^{-1} \mathbb{E}(t, D)$$

existe, então estaremos definindo o operador de onda de Møller.

Nosso objetivo então é provar o seguinte teorema.

**Teorema 3.4.1.** *Suponha (A1), (A2) e (A3). Então o limite*

$$W_+(D) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) (\mathbb{E}_0(t, D))^{-1} \mathbb{E}(t, D)$$

*existe pontualmente em  $L^2 - L^2$  e define o operador de Møller  $W_+$ . E mais, o símbolo*



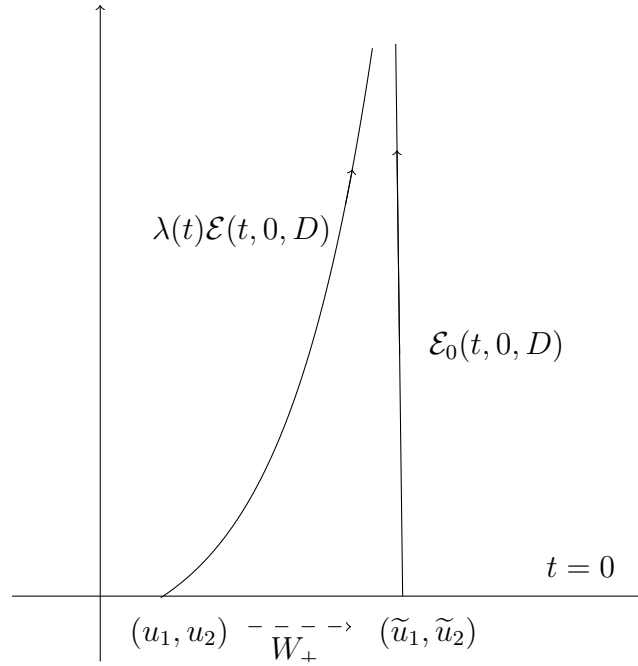


Figura 3.1: Operadores de energia para onda livre e com dissipação.

do operador  $W_+$  satisfaz

$$W_+(\xi) = (\mathbb{E}_0(t_\xi, \xi))^{-1} M Q_k(\infty, s, \xi) N_k^{-1}(t_\xi, \xi) M^{-1} \lambda(t_\xi) \mathbb{E}(t_\xi, \xi),$$

para todo  $k \geq 1$ .

**Demonstração:** A prova consiste em três etapas:

**Etapa 1:** Com a notação

$$V_c = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2); \text{dist}(0, \text{supp } \hat{u}) \geq c\},$$

podemos construir o subespaço denso  $U = \bigcup_{c>0} V_c$  de  $L^2$ . Agora o teorema (2.2.15) juntamente com a representação  $\mathbb{E}(t, \xi) = \mathcal{E}(t, t_\xi, \xi) \mathbb{E}(t_\xi, \xi)$  implica a existência do limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) (\mathbb{E}_0(t, D))^{-1} \mathbb{E}(t, D)$$

pontualmente, como um operador de  $V_c \rightarrow V_c$ , para todo  $c > 0$ . De fato, para  $t$

suficientemente grande, teremos que  $|\xi|$  é pequeno, ou seja, estamos trabalhando com frequências pequenas. Então,

$$\begin{aligned}\lambda(t) (\mathbb{E}_0(t, \xi))^{-1} \mathbb{E}(t, \xi) &= \lambda(t) (\mathbb{E}_0(t, \xi))^{-1} \mathcal{E}(t, t_\xi, \xi) \mathbb{E}(t_\xi, \xi) \\ &= (\mathbb{E}_0(t, \xi))^{-1} M N_k(t, \xi) \lambda(t_\xi) \mathcal{E}_0(t, t_\xi, \xi) \mathcal{Q}_k(t, t_\xi, \xi) N_k^{-1}(t, \xi) \mathbb{E}(t_\xi, \xi).\end{aligned}$$

Agora observe que

$$(\mathbb{E}_0(t, \xi))^{-1} = M \mathcal{E}_0(0, t, \xi) M^{-1},$$

temos ainda que

$$\mathcal{E}_0(0, t, \xi) = \mathcal{E}_0(0, t_\xi, \xi) \mathcal{E}_0(t_\xi, t, \xi).$$

Logo,

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}_0(t, \xi))^{-1} &= M \mathcal{E}_0(0, t_\xi, \xi) M^{-1} M \mathcal{E}_0(t_\xi, t, \xi) M^{-1} \\ &= (\mathbb{E}_0(t, \xi))^{-1} M \mathcal{E}_0(t_\xi, t, \xi) M^{-1}.\end{aligned}$$

Daí que,

$$\begin{aligned}\lambda(t) (\mathbb{E}_0(t, \xi))^{-1} \mathbb{E}(t, \xi) &= (\mathbb{E}_0(t, \xi))^{-1} M \mathcal{E}_0(t_\xi, t, \xi) N_k(t, \xi) \mathcal{E}_0(t, t_\xi, \xi) \times \\ &\quad \times \mathcal{Q}_k(t, t_\xi, \xi) N_k^{-1}(t, \xi) M^{-1} \lambda(t_\xi) \mathbb{E}(t_\xi, \xi),\end{aligned}$$

onde  $\mathcal{Q}_k(t, t_\xi, \xi) \rightarrow \mathcal{Q}_k(\infty, t_\xi, \xi)$  quando  $t \rightarrow \infty$ , uniformemente para  $|\xi| \geq c$ , e

$$\mathcal{E}_0(t_\xi, t, \xi) N_k(t, \xi) \mathcal{E}_0(t, t_\xi, \xi) = I + \mathcal{E}_0(t_\xi, t, \xi) (N_k(t, \xi) - I) \mathcal{E}_0(t, t_\xi, \xi) \rightarrow I$$

Finalmente concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) (\mathbb{E}_0(t, \xi))^{-1} \mathbb{E}(t, \xi) = (\mathbb{E}_0(t_\xi, \xi))^{-1} M \mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi) N_k^{-1}(t_\xi, \xi) M^{-1} \lambda(t_\xi) \mathbb{E}(t_\xi, \xi).$$

Então o limite existe pontualmente em  $U$ .

**Etapa 2:** A estimativa de energia, corolário (3.1.5), implica que  $\lambda(t) (\mathbb{E}_0(t, D))^{-1} \mathbb{E}(t, D)$  é uniformemente limitado em  $L^2 \rightarrow L^2$ , pois

$$\|\lambda(t) (\mathbb{E}_0(t, D))^{-1} \mathbb{E}(t, D)\|_2 \lesssim \|(\mathbb{E}_0(t, D))^{-1}\|_\infty \|\lambda(t) \mathbb{E}(t, D)\|_2 \lesssim 1.$$

Então o teorema de Banach-Steinhaus, veja (3.4.11), garante a existência do limite pontualmente e define  $W^+$ .

**Etapa 3:** Acabamos de definir o operador  $W^+$  em cada subespaço  $V_c$  como sendo um operador cujo o símbolo é

$$W^+(\xi) = (\mathbb{E}_0(t_\xi, \xi))^{-1} M \mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi) N_k^{-1}(t_\xi, \xi) M^{-1} \lambda(t_\xi) \mathbb{E}(t_\xi, \xi),$$

que é independente de  $c$ . Então a representação é válida em  $U$ , e usando a limitação de  $W^+$ , a representação é válida em todo o espaço. ■

Note que para o teorema acima precisamos da hipótese  $(A2)_{2k-1}$  para a representação de  $W_+(\xi)$  em termos de  $\mathcal{Q}_k(t, s, \xi)$ . Logo hipótese a  $(A2)$  é suficiente para garantir a existência do operador de onda de Møller.

Faremos agora uma observação que segue diretamente do teorema de Liouville e nos dá uma expressão para o determinante de  $\mathbb{E}(t, \xi)$ .

**Lema 3.4.2.** *A seguinte relação é válida  $\det \mathbb{E}(t, \xi) = \frac{1}{\lambda^2(t)} [\xi]$ , onde  $[\xi] = \frac{|\xi|}{\langle \xi \rangle}$ , para  $t$  suficientemente grande.*

**Demonstração:** Segue diretamente do item (b) da proposição (3.1.3) e pelo teorema de Liouville (3.4.9). ■

**Corolário 3.4.3.** *A seguinte relação é válida*

$$\det W_+(\xi) = [\xi],$$

e isto implica que o núcleo do operador  $W_+(D)$  só contém o vetor nulo, ou seja,  $W_+(D)$  é um operador injetivo em  $L^2$ .

**Demonstração:** Segue pelo teorema (3.4.1), pela continuidade da função determinante e pelo (3.4.2) que

$$\begin{aligned}
\det W_+(\xi) &= \det \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) (\mathbb{E}_0(t, \xi))^{-1} \mathbb{E}(t, \xi) \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \det \left[ \lambda(t) (\mathbb{E}_0(t, \xi))^{-1} \mathbb{E}(t, \xi) \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^2(t) \det (\mathbb{E}_0(t, \xi))^{-1} \det \mathbb{E}(t, \xi) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^2(t) \det M \det \mathcal{E}_0(0, t, \xi) \det M^{-1} \det \mathbb{E}(t, \xi) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^2(t) \frac{1}{\lambda^2(t)} [\xi] \\
&= [\xi].
\end{aligned}$$

A injetividade segue do fato de que  $\det W_+(\xi) \neq 0$ , isto é, a matriz  $W_+(\xi)$  é inversível. ■

Veja que o teorema (3.4.1) pode ser usado para construir para cada dado inicial  $(\langle D \rangle u_1, u_2)^T \in L^2$  do problema de Cauchy com dissipação, um dado inicial  $(\langle D \rangle \tilde{u}_1, \tilde{u}_2)^T = W_+(D)(\langle D \rangle u_1, u_2)^T$  do problema de Cauchy para ondas livres, de tal forma que a seguinte equivalência assintótica é verdadeira.

**Proposição 3.4.4.** *A equivalência assintótica é válida*

$$\left\| \mathbb{E}_0(t, D)(\langle D \rangle \tilde{u}_1, \tilde{u}_2)^T - \lambda(t) \mathbb{E}(t, D)(\langle D \rangle u_1, u_2)^T \right\|_2 \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

**Demonstração:** De fato, seja  $J = \left\| \mathbb{E}_0(t, D)(\langle D \rangle \tilde{u}_1, \tilde{u}_2)^T - \lambda(t) \mathbb{E}(t, D)(\langle D \rangle u_1, u_2)^T \right\|$ . Então,

$$\begin{aligned}
J &= \left\| (\mathbb{E}_0(t, D)W_+(D) - \lambda(t)\mathbb{E}(t, D)) (\langle D \rangle u_1, u_2)^T \right\| \\
&= \left\| \mathbb{E}_0(t, D) (W_+(D) - \lambda(t) (\mathbb{E}_0(t, D))^{-1} \mathbb{E}(t, D)) (\langle D \rangle u_1, u_2)^T \right\|.
\end{aligned}$$

Como  $\lambda(t) (\mathbb{E}_0(t, D))^{-1} \mathbb{E}(t, D) \rightarrow W_+(D)$ , quando  $t \rightarrow \infty$  e  $\mathbb{E}_0(t, D)$  é um operador limitado, segue que  $J \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Concluindo assim a proposição.

■

# Apêndice A: Ferramentas Básicas I

---

Neste apêndice vamos enunciar alguns resultados básicos que envolvem derivadas e indicaremos referências onde podem ser encontradas as provas dos mesmos. Vamos começar enunciando a fórmula de Leibniz.

**Proposição 3.4.5. (Regra de Leibniz):** *Sejam  $f$  e  $g$  funções com todas as derivadas necessárias definidas. Então,*

$$D_t^n (f(t).g(t)) = \sum_{k_1+k_2=n} \binom{n}{k} D_t^{k_1} f(t) D_t^{k_2} g(t).$$

**Demonstração:** Veja [6].

Um outro resultado que foi utilizado nessa dissertação foi a fórmula de Faà di Bruno.

**Teorema 3.4.6. (Fórmula de Faà di Bruno):** *Sejam  $f$  e  $g$  funções com todas as derivadas necessárias definidas. Então,*

$$D_t^n [f(g(t))] = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} (D_t^k f)(g(t)) \left( \frac{D_t g(t)}{1!} \right)^{k_1} \dots \left( \frac{D_t g(t)}{n!} \right)^{k_n},$$

onde  $k = k_1 + \dots + k_n$ .

**Demonstração:** Veja [8].

■

## Apêndice B: Ferramentas Básicas II

---

Neste apêndice vamos enunciar e provar alguns resultados básicos usados nessa dissertação. Primeiramente vamos relembrar que qualquer sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u = A(t)u \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

pode ser resolvido em termos da sua solução fundamental  $\mathcal{E}(t, s)$ , como  $u(t) = \mathcal{E}(t, 0)u_0$ , sabendo que a solução fundamental satisfaz o seguinte PVI,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{E}(t, s) = A(t)\mathcal{E}(t, s) \\ \mathcal{E}(s, s) = I \end{cases}. \quad (3.5)$$

Quando a matrix  $A(t)$  tem coeficientes constantes, sabemos que a solução fundamental pode ser expressa como a exponencial da matrix  $A$ . A pergunta natural que surge é se o mesmo resultado é válido para matrizes com coeficientes variáveis. A resposta é não, porém temos um resultado para esse caso que será dado a seguir. Antes de enunciá-lo vamos provar outro resultado importante que será usado na demonstração do mesmo e também foi usado em outras oportunidades na dissertação.

**Proposição 3.4.7.** *Seja  $r \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Então*

$$\left| \int_s^t r(t_1) \int_s^{t_1} r(t_2) \dots \int_s^{t_{k-1}} r(t_k) dt_k \dots dt_1 \right| \leq \frac{1}{k!} \left( \int_s^t |r(\tau)| d\tau \right)^k, \quad (3.6)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Faremos indução sobre  $k$ . Para  $k = 1$  a igualdade segue trivial-

mente. Suponhamos que a desigualdade seja válida para  $k$ , isto é,

$$\left| \int_s^t r(t_1) \int_s^{t_1} r(t_2) \dots \int_s^{t_{k-1}} r(t_k) dt_k \dots dt_1 \right| \leq \frac{1}{k!} \left( \int_s^t |r(\tau)| d\tau \right)^k.$$

Então para  $k + 1$  temos que,

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t r(t_1) \int_s^{t_1} r(t_2) \dots \int_s^{t_k} r(t_{k+1}) dt_{k+1} \dots dt_1 \right| &\leq \int_s^t |r(t_1)| \frac{1}{k!} \left( \int_s^{t_1} |r(\tau)| d\tau \right)^k dt_1 \\ &= \frac{1}{k!} \int_s^t |r(t_1)| \left( \int_s^{t_1} |r(\tau)| d\tau \right)^k dt_1 \\ &= \frac{1}{k!} \frac{1}{(k+1)} \left( \int_s^t |r(\tau)| d\tau \right)^{k+1}, \end{aligned}$$

onde na última passagem usamos a mudança de variáveis para resolvermos a integral. Logo pelo princípio da indução finita segue o resultado. ■

**Teorema 3.4.8.** *Seja  $A(t) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n \times n})$ . Então a solução fundamental  $\mathcal{E}(t, s)$  de (3.5) é dado pela fórmula de Peano-Baker*

$$\mathcal{E}(t, s) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \int_s^t A(t_1) \int_s^{t_1} A(t_2) \dots \int_s^{t_{k-1}} A(t_k) dt_k \dots dt_1. \quad (3.7)$$

**Demonstração:** Antes do mais nada vamos demonstrar a convergência da série a acima e da sua derivada. Observe que a proposição (3.4.7) implica que

$$\left| \int_s^t A(t_1) \int_s^{t_1} A(t_2) \dots \int_s^{t_{k-1}} A(t_k) dt_k \dots dt_1 \right| \leq \frac{1}{k!} \left( \int_s^t |A(\tau)| d\tau \right)^k.$$

Como a série  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \int_s^t |A(\tau)| d\tau \right)^k$  converge uniformemente sobre compactos, por se tratar da exponencial, segue pelo teste M de Weierstrass a convergência uniforme de (3.7) sobre compactos. Para provarmos a convergência da série da derivada, basta agirmos de maneira análoga, lembrando que  $A(t) \in L_{loc}^1$ . Resta agora mostrar que



(3.7) satisfaz o sistema (3.5). De fato, derivando a série termo a termo, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t, s) &= A(t) \sum_{k=1}^{\infty} \int_s^t A(t_2) \dots \int_s^{t_{k-1}} A(t_k) dt_k \dots dt_2 \\ &= A(t)\mathcal{E}(t, s) \\ \mathcal{E}(s, s) &= I.\end{aligned}$$

Logo,  $\mathcal{E}(t, s)$  é solução de (3.5). ■

O próximo resultado foi utilizado para provar a injetividade do operador de onda de Møller.

**Teorema 3.4.9. (Teorema de Liouville)** *Seja  $A(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{n \times n})$ . Então a solução fundamental  $\mathcal{E}(t, s)$  satisfaz*

$$\det \mathcal{E}(t, s) = \exp \int_s^t \text{tr} A(\tau) d\tau.$$

Para a construção da representação da solução na zona dissipativa, transformamos o problema de resolver a E.D.O. em uma equação integral, conhecida como equação integral de Volterra. Considerando

$$f(t, p) + \int_0^t k(t, \tau, p) f(\tau, p) d\tau = \psi(t, p), \quad (3.8)$$

com  $\psi(0, p)$  dependendo apenas do parâmetro  $p \in P \subset \mathbb{R}^n$ , a seguinte proposição é válida.

**Proposição 3.4.10.** *Sejam  $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times P)$ ,  $k \in L^\infty(\mathbb{R}_+^2 \times P)$  e*

$$\int_0^t \|k(\cdot, \tau, p)\|_\infty d\tau \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times P).$$

*Então existe uma única solução  $f(t, p) \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times P)$  de (3.8).*

**Demonstração:** Observe que provar (3.8) é equivalente mostrar que

$$(I - T)f = \psi(t, p),$$

onde

$$\begin{aligned} T : L^\infty(\mathbb{R}_+ \times P) &\longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}_+^2 \times P) \\ f &\longmapsto \int_0^t k(t, \tau, p) f(\tau, p) d\tau. \end{aligned}$$

Temos que  $T$  é linear, está bem definida e é contínua. De fato,

$$\begin{aligned} \|Tf(t, p)\| &= \left\| \int_0^t k(t, \tau, p) f(\tau, p) d\tau \right\| \\ &\leq \int_0^t \|k(t, \tau, p)\| \|f(\tau, p)\| d\tau \\ &\leq \|f(t, p)\|_\infty \int_0^t \|k(t, \tau, p)\|_\infty d\tau \\ &\leq M \|f(t, p)\|_\infty < \infty \end{aligned}$$

Sendo assim basta determinar a inversa de  $I - T$  para resolvermos a equação. Observemos que a candidata para inversa é  $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$ , uma vez que  $(I - T) \sum_{j=0}^{\infty} T^j = I$ .

Para que  $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$  esteja bem definida basta que  $\|T^j\| \leq k, k > 0$ .

Sabemos que  $\|T^j\| = \sup_{|f| \leq 1} \|T^j f\|$ . Tome  $f$  tal que  $|f| \leq 1$ , então pela proposição (3.4.7)

$$\begin{aligned} \|T^k f\| &= \left\| \int_0^t k(t, t_1, p) \int_0^{t_1} k(t, \tau_2, p) \dots \int_0^{t_{k-1}} k(t, t_k, p) f(t_k, p) dt_1 \dots dt_k \right\| \\ &\leq \int_0^t \|k(t, t_1, p)\| \int_0^{t_1} \|k(t, t_2, p)\| \dots \int_0^{t_{k-1}} \|k(t, t_k, p)\| \|f(t_k, p)\| dt_1 \dots dt_k \\ &\leq \int_0^t \|k(t, t_1, p)\| \int_0^{t_1} \|k(t, t_2, p)\| \dots \int_0^{t_{k-1}} \|k(t, t_k, p)\| dt_1 \dots dt_k \\ &\leq \frac{1}{k!} \left( \int_0^t \|k(t, \tau, p)\| d\tau \right) \end{aligned}$$

$$\leq \exp \left( \int_0^t \|k(t, \tau, p) d\tau\| \right) \leq k.$$

Logo  $I - T$  é inversível. A unicidade segue diretamente. ■

O seguinte teorema foi utilizado para mostrar a existência do operador de onda de Møller.

**Teorema 3.4.11. (*Banach-Steinhaus*)** *Sejam  $A$  e  $B$  espaços de Banach e suponha que  $\{F_n\}$  seja uma sequência de operadores lineares contínuos de  $A$  para  $B$ . Então  $F_n$  converge pontualmente a um operador linear contínuo  $F : A \rightarrow B$ , isto é,  $F_n x$  converge a  $Fx$  para todo  $x \in A$  se, e somente se,*

- *A sequência das normas dos operadores  $\|F_n\|$  é limitada;*
- *A sequência  $F_n x$  converge para  $Fx$  para todo  $x \in M$ , onde  $M$  é um subconjunto denso de  $A$ .*

**Demonstração:** Veja [3]. ■

Agora enunciaremos o lema de Brenner, que foi importante na demonstração do teorema (3.2.1).

**Lema 3.4.12. (*Lema de Brenner*)** *Seja  $P$  uma função real, suave em uma vizinhança do  $\text{supp } \phi$ , com  $\phi \in C_0^\infty$ . Suponhamos ainda que o posto da matriz hessiana  $H_P(\xi) = \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right)$  seja pelo menos  $\rho$  no  $\text{supp } \phi$ . Então existe um inteiro  $M$ , dependendo da dimensão do espaço, e uma constante  $C > 0$ , dependendo das derivadas de  $P$  no  $\text{supp } \phi$ , tal que*

$$\|\mathcal{F}^{-1} [e^{itP(\xi)} \phi(\xi)]\|_\infty \leq C(1+t)^{-\frac{\rho}{2}} \sum_{|\alpha| \leq M} \|D^\alpha \phi\|_1.$$

**Demonstração:** Veja o artigo [1].



# Apêndice C: Teorema de Hörmander-Mikhlin

---

A seguir faremos algumas definições que serão importante para enunciarmos o teorema de Hörmander-Mikhlin. Usamos este teorema na prova das estimativas para o operador de energia.

**Definição 3.4.13.** *Seja  $f \in \mathcal{S}'$ . Definimos o seguinte operador*

$$m(D)f = \mathcal{F}^{-1} [m(\xi)\mathcal{F}(f)],$$

onde  $m(\xi)$  é uma distribuição. Chamamos tais distribuições de multiplicadores de Fourier.

**Definição 3.4.14.** *Denotamos para  $p \leq q$*

$$M_p^q = \{m(\xi); m(D) : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)\},$$

chamamos  $M_p^q$  de espaço dos multiplicadores.

O espaço  $M_p^q$  é um espaço de Banach munido com a respectiva norma do operador. A seguir enunciaremos algumas propriedades para o espaço  $M_p^q$ .

- Proposição 3.4.15.**
1.  $M_2^2(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,
  2.  $M_p^p(\mathbb{R}^n) \subset M_2^2(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $p \in [1, \infty]$ ,
  3.  $M_p^p(\mathbb{R}^n) = M_q^q(\mathbb{R}^n)$ , para índices duais  $p$  e  $q$ ,
  4.  $L^1(\mathbb{R}^n) \subset M_1^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,
  5.  $M_1^\infty(\mathbb{R}^n) \cap M_2^2(\mathbb{R}^n) \subset M_p^q(\mathbb{R}^n)$ , para índices duais  $p$  e  $q$  arbitrários.

---

A seguir enunciaremos o teorema de Hörmander-Mikhlin.

**Teorema 3.4.16.** *Suponha que  $m(\xi) \in C^k(\mathbb{R}^n - \{0\})$  para  $k = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  e que*

$$|D_\xi^\alpha m(\xi)| \leq C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|}, \forall |\alpha| \leq k$$

*isto é,  $m(\xi) \in \dot{S}_k^0$ . Então  $m(\xi) \in M_p^p(\mathbb{R}^n)$  para todo  $p \in [1, \infty]$ .*

**Demonstração:** Veja [11].

■

## Apêndice D: Notações

---

A seguir fixaremos as notações usadas neste texto. Iniciaremos com alguns símbolos com significado especial:

$\langle \cdot \rangle$	$\langle x \rangle = \sqrt{1 +  x ^2}$ ,
$ \cdot $	denota o valor absoluto,
$[\xi]$	por definição é $[\xi] = \frac{ \xi }{\langle \xi \rangle}$
$\lceil \cdot \rceil$	denota o menor inteiro maior que um dado número, isto é, $\lceil x \rceil = \min\{m \in \mathbb{Z}; x \leq m\}$ ,
$\ \cdot\ $	denota a norma para um vetor ou para uma matriz,
$\ \cdot\ _p$	norma nos espaços $L^p$ ,
$L^p \rightarrow L^q$	operadores definidos em $L^p$ chegando em $L^q$ ,
$\ \cdot\ _{p,r \rightarrow q}$	norma do operador $W_p^r \rightarrow L^q$ ,
$f \lesssim g$	existe uma constante $c > 0$ tal que $f \leq cg$ ,
$f \gtrsim g$	existe uma constante $c > 0$ tal que $cf \geq g$ ,
$f \sim g$	se $f \gtrsim g$ e $f \lesssim g$ .

A seguir faremos uma lista dos principais espaços usados nessa dissertação.

$L^p(\mathbb{R}^n)$	espaços $L^p$ , $1 \leq p \leq \infty$ ,
$L^p L^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$	espaço $L^p(\mathbb{R}^n, L^r(\mathbb{R}^m))$ ,
$L_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$	espaço potencial de Bessel, $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n) = \langle D \rangle^{-\alpha} L^p(\mathbb{R}^n)$
$C^k(\mathbb{R}^n)$	espaço das funções $k$ vezes diferenciáveis,
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	espaço de Schwartz das funções com decaimento rápido,

---

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$	espaço das distribuições,
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	espaço das distribuições temperadas,
$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$	espaços de Besov,
$M_p^q(\mathbb{R}^n)$	espaço dos multiplicadores que induzem operadores limitados $L^p \rightarrow L^q$ .

Algumas notações definidas ao longo do texto,

$h(t, \xi)$	$h(t, \xi) = \frac{N}{1+t} \phi_{diss,N}(t, \xi) +  \xi  \phi_{hyp,N}(t, \xi)$ , com $\phi_{diss,N}(t, \xi)$ e $\phi_{hyp,N}(t, \xi)$ funções cortes das zonas dissipativas e hiperbólica respectivamente,
$U(t, \xi)$	microenergia $U = (h(t, \xi)\hat{u}, D_t\hat{u})$ , satisfazendo $D_t U = A(t, \xi)U$ ,
$\mathcal{E}(t, s, \xi)$	solução fundamental para o sistema $D_t - A(t, \xi)$ ,
$\mathcal{E}_0(t, s, \xi)$	solução fundamental para a equação de onda livre,
$\mathcal{E}_k(t, s, \xi)$	solução fundamental para o sistema depois de $k$ iterações para encontrar a forma normal,
$\lambda(t)$	$\lambda(t) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t b(\tau) d\tau\right)$ ,
$W_+(\xi)$	símbolo correspondente ao operador de onda de Møller,
$\mathbb{E}(t, \xi)$	símbolo correspondente ao operador de energia,
$\mathbb{S}(t, \xi)$	símbolo correspondente ao operador solução.



## Referências Bibliográficas

---

- [1] Brenner, J. - *On  $L^p - L^q$  estimates for wave equation*, Math. Z. 145 251-254. (1975).
- [2] Brenner, J., Thomée, V., Wahlbin, L.B. - *Besov Spaces and Applications to Difference Methods for Initial Value Problems*, Springer-Verlag, Berlin (1941).
- [3] Brezis, H., - *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Differential Partial Equations*, Springer (2010).
- [4] Folland, Gerald B., - *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, INC (1999).
- [5] Hounie, J., - *Teoria Elementar das distribuições*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro - (1970).
- [6] Jordan, Charles - *Calculus of finite differences*, Chelsea publishing company, New York, N.Y. (1950).
- [7] Mochizuki, K., Nakazawa, H., - *Energy decay and asymptotic behavior of solutions to the wave equation with linear dissipation*, Publ. Res. Inst. Math Sci. 32 (3) (1996) 401-414.
- [8] Roman, Steven - *The formula of Faa di Bruno.*, American Mathematical Monthly vol 87 (805-809), (1980).
- [9] Runst, T., Sickel, W., - *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin - New York. (1996).

- 
- [10] Sickel, S., and Triebel, H., - *Hölder inequalities and sharp embeddings in function spaces of  $B_{p,q}^s$  e  $F_{p,q}^s$  type.*, Z. Anal. Anwendungen, 14 (1965), 105-140.
- [11] Stein, Elias M. - *Singular Integrals and differentiability properties of functions.*, Princeton, Mathematical Series, Princeton, N.J. (1970).
- [12] Treves, François. - *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, New York (1975).
- [13] Triebel, H. - *Theory of function spaces.*, Geest e Porting, Leipzig, (1983) and Birkhäuser, Basel, (1983).
- [14] Wirth, J. - *Asymptotic properties of solutions to wave equations with time-dependent dissipation*, Tese de Doutorado apresentada à Faculty of Mathematics and Computer Science of the Technical University Bergakademie Freiberg - (2005)
- [15] Wirth, J. - *Solution representations for a wave equation with weak dissipation*, Math. Methods Appl. Sci. 27 (1), (2004) 101-124.
- [16] Wirth, J. - *Wave equation with time-dependent dissipation I. Non-effective dissipation*, J. Differential Equations 222 (2) (2006) 487-514.
- [17] Zygmund, A. - *Trigonometric Series II*, Cambridge University Press, Cambridge (1959).