UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

FLÁVIO MIGUEL DOS SANTOS FERNANDES

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

SOROCABA

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

FLÁVIO MIGUEL DOS SANTOS FERNANDES

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Flávio Miguel Dos Santos Fernandes

ORIENTADOR: Prof. Dr. Rogério Fernando Pires

SOROCABA

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

FLÁVIO MIGUEL DOS SANTOS FERNANDES

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Dissertação elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional.

Orientação: Prof. Dr. Rogério Fernando Pires

SOROCABA

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Flávio Miguel dos Santos Fernandes, realizada em 05/11/2018:

Rogério Pires

Prof. Dr. Rogerio Fernando Pires
UFU

Profa. Dra. Sandra Regina Monteiro Masalskiene Roveda
UNESP

Magda Peixoto

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
UFSCar

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho a Deus pai criador, a Jesus Cristo Salvador e ao Espírito Santo que me iluminou.

Dedico a meus pais Mara e Cicero meus incentivadores.

Dedico à memória de minhas avós Ziza e Geni.

AGRADECIMENTO

A Deus primeiramente, que iluminou e abençoou minha vida.

A toda minha família, em especial minha mãe, meu pai e irmãs que me incentivaram e apoiaram em toda minha formação.

Ao meu orientador Rogério pela auxílio, dicas, paciência e apoio na escrita desse trabalho.

A todos os professores da universidade que tive contato pelo conhecimento passado: Magda, Paulo, Silvia, Venezuela, Sadao, Noel e Geraldo.

A todos os funcionários da UFSCar que colaboraram diretamente para o desenvolvimento do meu curso, funcionários da biblioteca da UFSCar Sorocaba e da secretaria do curso.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

A todos os colegas do curso: Sandra, Denis, Lindinalva, Mauro, Gilmar, Armando, Mariana, Fábio, Gladys, Wagner, Lucas pela ajuda e amizade.

A todos os meus amigos que me ajudaram e incentivaram, em especial a Renata.

A meus colegas de trabalho e gestão das escolas que trabalhei pela compreensão e ajuda para a conclusão do curso.

A todos que estiveram direta ou indiretamente envolvidos na elaboração desse trabalho.

Muito Obrigado!

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de ensino sobre Probabilidade para o Ensino Médio. Para tanto, foi realizada uma descrição sobre a construção histórica e conceitual, definições e teoremas sobre Probabilidade, como a explicação dos enfoques clássicos e frenquentistas, Probabilidade condicional e Probabilidade geométrica. A motivação da escolha do tema foi a necessidade de uma abordagem eficaz no ensino, conforme também os documentos oficiais orientam o ensino no país. Para essa construção foram abordados alguns conceitos e ideias da Educação Matemática, utilizando-as como embasamento teórico para compreensão e estratégias metodológicas na construção das atividades, são elas: o ensino através da Resolução de Problemas, tendo como referência Onuchic (1999), com características históricas e orientações do ensino de Matemática e a Educação Matemática Crítica definida por Skovsmose (2008), com preceitos importantes e uma visão crítica do papel da Matemática na sociedade. De acordo com os estudos prévios foi apresentada uma proposta com sete sequências de atividades, juntamente com uma análise teórica do que é esperado no seu desenvolvimento. A proposta não foi implementada, porém a intenção é num futuro próximo aplicá-la e analisá-la em alguma turma para poder avaliar os resultados obtidos.

Palavras-chave: Probabilidade, Educação Básica, Resolução de Problemas, Educação Matemática Crítica.

ABSTRACT

The present study is a proposal to the teaching of probability to high school students. A description of the historical and conceptual construction, definitions and theorems about probability as an explanation of classic and frequentist approaches and conditional and geometric probability are presented. . The necessity of an efficient teaching approach was the motivation for the selection of this topic, as well as the official documents. For this construction, concepts and ideas in the teaching of mathematics were used as a theoretical basis for the activity comprehension and methodological strategies, listed next: teaching through problem solving, being Onuchic (1999) as the main reference, with historical characteristics and orientations of teaching of mathematics and critic mathematical education defined by Skovsmose (2008), with important principles and a critic view of role of mathematics on society. With that, a teaching proposal with seven sequential activities is presented. The activities are in accordance with what it was studied and with the theoretical analysis of what is expected on its development. The proposal is not implemented yet, but we expect that it will be implemented, and analyze it in the future.

Key words: Probability, Basic Education, Problem Solving, Critic Mathematical Education

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação do terreno do exemplo 2 26
Figura 2: Volante de aposta da loteria Mega Sena – Exemplo para a atividade 68
Figura 3: Exemplo de mapa com as marcações solicitadas 90

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Obras relacionadas ao avanço histórico do estudo de Probabilidade 16
Tabela 2: Exemplo de tabela - Coleta de dados da atividade 1 57
Tabela 3: Resultados possíveis para a soma do lançamento de 2 dados - Para o preenchimento pelos alunos.. 62
Tabela 4: Resultados possíveis para a soma do lançamento de 2 dados – Preenchida 62
Tabela 5: Dados sobre as rodadas do jogo da sorte da atividade 3................................ 67
Tabela 6: Exemplo da Probabilidade da ocorrência de alguns eventos.......................... 69
Tabela 7:Exemplo de tabela com dados sobre a pergunta 1, separado por sexo......... 78
Tabela 8: Exemplo de tabela com dados sobre a pergunta 1, separado por bairro...... 78
Tabela 9: Exemplo de tabela com dados sobre a pergunta 2, separado por sexo........ 79
Tabela 10: Exemplo de tabela com dados sobre a pergunta 2, separado por bairro.... 79
Tabela 11: Exemplo de tabela geral com dados sobre a pergunta 1 e 2........................ 79
Tabela 12: Dados da turma- proposta de exercício... 81
Tabela 13: Exemplo de tabela com os dados da pesquisa da atividade 7 89

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 13

1. INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE 15

1.1 Aspectos históricos 15

1.2. Conceituação teórica 17

1.2.1. Conceitos Básicos 18

1.2.2. Definições 20

1.2.3. Propriedades 22

1.2.4. Probabilidade Condicional 23

1.2.5. Probabilidade Geométrica 25

2. Revisão Bibliográfica 28

2.1. Análise de trabalhos desenvolvidos 28

2.2. Análise de documentos oficiais 33

3. REFERENCIAL TEÓRICO DIDÁTICO 37

3.1. Resolução de Problemas 38

3.2. Educação Matemática Crítica 46

4. METODOLOGIA DE ENSINO: ATIVIDADES DIDÁTICAS 54

4.1. Atividade 1: Estimando Valores: Probabilidade Frequentista 55

4.2. Atividade 2: Introdução a Probabilidade: Experimentação com Dados 60

4.3. Atividade 3: Jogos de Sorte: Relação entre Análise Combinatória e Probabilidade 65

4.4. Atividade 4: Cor de lápis – Eventos independentes 71

4.5. Atividade 5: Política e Probabilidade - União de eventos 76

4.6. Atividade 6: Jogo da dica - Probabilidade Condicional 83

4.7. Atividade 7: Analisando o bairro - Probabilidade Geométrica 87

4.8. Discussão das atividades didáticas 93

CONSIDERAÇÕES FINAIS 98

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 101

INTRODUÇÃO

Como docente desde 2012 pude observar em sala de aula as dificuldades dos alunos em Matemática e a imagem que eles fazem dela, em consequência da não compreensão dos conteúdos trabalhados, que é evidenciado por diversos fatores, como a defasagem de aprendizagem, a falta de motivação, o desinteresse, entre outros.

No Ensino Médio pude observar que os alunos sentem dificuldades quando se trata de temas que necessitam de raciocínio para a resolução de problemas, pois eles já se acostumaram com um ensino que os processos de resolução se restringem a aplicação de fórmulas e algoritmos, ou seja, não precisam compreender o que estão fazendo, mas sabem resolver automaticamente. Dessa forma, o tema Probabilidade foi escolhido como foco do meu trabalho, pois envolve o raciocínio para resolução de problemas, além de ser um conceito importante para a formação do aluno, ao servir como instrumento para a vida em sociedade.

O estudo aprofundado de Probabilidade é importante para a minha formação continua como professor, pois colabora com a compreensão dos estudos e definições, explorados durante o desenvolvimento histórico desse conceito, facilitando o entendimento e a elaboração de atividades para o ensino de Probabilidades no Ensino Médio.

O objetivo desse trabalho é apresentar uma proposta de ensino sobre Probabilidade a partir de uma pesquisa sobre a história da Probabilidade e a conceituação, definição e teoremas. A proposta de ensino será fundamentada pela metodologia da Resolução de problemas e pela Educação Matemática Crítica.

Assim, para o desenvolvimento desse trabalho foram pesquisados a história da Probabilidade, definições e fundamentações da Educação Matemática, que contribuíram para a elaboração de uma proposta de atividades com o seguinte formato:

O Capítulo I, Introdução à Probabilidade, discorre sobre o desenvolvimento histórico do conceito de Probabilidade e a utilização do cálculo através dos anos, apresentando obras e pesquisas que contribuíram para o campo de estudo presente hoje em dia. Na sequência, serão definidos os conceitos básicos, como os de aleatoriedade, espaço amostral, eventos, união de eventos, evento independente, entre outros, que são fundamentais para a compreensão. E, por fim, o estudo de Probabilidade condicional e Probabilidade geométrica com exemplificações.

O capítulo II, revisão bibliográfica, apresenta resumos de outros trabalhos, pesquisas e dissertações que possuem características, conceitos e estruturas parecidas àquelas propostas em meu trabalho, e farei uma análise de alguns documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais e o Currículo do Estado de São Paulo sobre o estudo de Probabilidade e metodologias de ensino a serem estudados.

O capítulo III apresenta alguns elementos da Educação Matemática que irão contribuir na elaboração da proposta de ensino de Probabilidade. Os conceitos utilizados serão os de resolução de problemas e de Educação Matemática Crítica, os quais apresentam questionamentos e características que contribuem no desenvolvimento e no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo em sala de aula. Ainda nesse capítulo, indicarei de que forma os documentos oficiais, como o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) orientam quanto às competências e habilidades no ensino de Probabilidade.

No capítulo IV estão dispostas as sequências de atividades, que serão propostas de acordo com o que foi observado e pesquisado nos capítulos anteriores. Apresentando e explicando cada atividade, estrutura, características, de que forma se espera que o problema seja apresentado e orientado ao aluno, qual é o objetivo de cada questão e uma análise conceitual das etapas do processo proposto.

Nas considerações finais serão apresentadas reflexões após a pesquisa e construção da sequência de ensino e propostas futuras de aplicação dessa sequência de atividades em sala de aula. Além de uma conclusão à cerca dos objetivos desse trabalho que estão aqui descritos.

1. INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

Neste capítulo são abordados os aspectos conceituais e históricos sobre Probabilidade, descrevendo o desenvolvimento da Probabilidade durante os tempos, definições e conceitos, sua aplicabilidade histórica e atual. Esse capítulo é necessário para que se compreenda um pouco sobre os conceitos e a abordagem histórica sobre o assunto, e assim possa facilitar e colaborar na construção de atividades e situações de aprendizagem envolvendo Probabilidade, além de estruturar e concretizar o conhecimento pertinente para o ensino desses conceitos.

1.1 Aspectos históricos

O desejo do homem em entender e quantificar as possibilidades de um determinado acontecimento fez surgir a Probabilidade. Probabilidade derivado do latim "probare", que significa provar ou testar, é um ramo da Matemática que formula e utiliza modelos teóricos para representar a ocorrência de fenômenos aleatórios.

O início do estudo sobre o tema Probabilidade tem início com os estudos sobre jogos e apostas, também no intuito de antecipar o futuro. Os estudos e avanços dos cálculos probabilísticos podem ser atribuídos a vários matemáticos.

A Probabilidade, na sua origem, no século XVII, está associada primeiramente ao livro "Liber de Ludo Aleae", que significa livros dos jogos de azar, escrito por Girolamo Cardano (Itália, 1501 – 1576), mas que só foi impresso em 1663.

Podemos citar diversos matemáticos que se dedicaram e contribuíram ao início dos estudos de Probabilidade como: Luca Pacioli (Itália, 1445- 1517), Tartaglia (Itália, 1499- 1557), Galileo (Itália, 1564- 1642).

Apesar da contribuição de diversos matemáticos, o início sobre o estudo de Probabilidade atribui-se à troca de correspondência entre os matemáticos Blaise Pascal (França, 1623 – 1662) e Pierre de Fermat (França,1601 – 1665) que em meado do século XVII, tratavam sobre o Problema apresentado por

Cevalier de Meré (França, 1607,1684) à Pascal, sobre alguns questionamentos feitos por ele, com a seguinte condição:

> “A e B jogam dados, vamos supor que A ganha 1 ponto quando o resultado pertence ao conjunto {1, 2} enquanto B ganha 1 ponto quando o resultado pertence ao conjunto {3, 4, 5, 6}. Se A precisa de n pontos para ganhar e B necessita m pontos para ganhar. Qual Probabilidade que A ganhe o jogo? (BRAGA, 2016, pág.7)

E apresentando o seguinte questionamento: “Dois jogadores, aos quais faltam a e b pontos, respectivamente, decidem interromper o jogo. Como as apostas devem ser divididas?” (GONDIM, 2013, pág.16)

Tanto Pascal, quanto Fermat resolveram o problema dado, mas de formas diferente, com resultados finais iguais. Interessando assim Cristiaan Huygens (Holanda, 1629 – 1695) a estudar a teoria de Probabilidades, tratando como ciência. O estudo de Huygens incentivou Jacques Bernoulli (Suíça, 1654 – 1705) a utilizar o cálculo de Probabilidade em seus estudos de Cálculo.

Abaixo uma tabela com algumas obras importantes de alguns matemáticos acerca dos estudos da Probabilidade durante os séculos, e algumas observações sobre a importância dessas obras no desenvolvimento de teorias e estudo da Probabilidade

Tabela 1: Obras relacionadas ao avanço histórico do estudo de Probabilidade

Matemático	Obra	Observações
Jacques Bernoulli (1713)	“*Ars Conjestandi*”, Arte da Conjectura (1713)	Trata inicialmente a Probabilidade como um ramo da Matemática
Abrahan de Moivre (França, 1667- 1754).	“*the Doctrini of chances*”, Doutrina da Probabilidade (1738)	Trata inicialmente a Probabilidade como um ramo da Matemática
Carl Friedrich Gauss (Alemanha, 1777-1855)	“*Theoria Combinations Observatorium Erroriluns Minimus Obnoxia*” teoria dos erros de observação (1809)	O estudo de Probabilidade é voltado para a aplicação nas ciências

Pierre Simom, marquês de Laplace (França, 1749 – 1827)	“*Theórie Analytique des probabilites*”, Teoria analítica das Probabilidades (1812)	Apresenta uma teoria analítica das Probabilidades, melhorando o método de calcular a Probabilidade utilizando a proporcionalidade de casos
Pierre Simom, marquês de Laplace (França, 1749 – 1827)	“*Essai Philosophique Sur Les Probabilites*” ensaio filosófico sobre as Probabilidades (1814)	Apresenta um mecanismo matemático para o cálculo de Probabilidade, utilizando raciocínio indutivo.

Fonte: Autor

Apesar dos estudos durante os séculos, foi somente no século XX que a Teoria da Probabilidade, de forma mais rigorosa, com definições, teoremas e axiomas, foi desenvolvida, com conceitos construídos de forma mais completas, propostas por Andrei Nikolaevich Kolmogorow (Rússia, 1903 – 1987).

Temos atualmente a utilização dessa teoria em diversas situações em consequência desse aprofundamento, e de teoremas bem estruturados sobre o assunto. É aplicado em estudos de jogos e prêmios, estatística indutiva, resultados à população e na tentativa de prever acontecimentos antecipadamente.

1.2. Conceituação teórica

Nesta seção apresentarei as definições, conceitos e a construção da ideia de Probabilidade, de acordo com a pesquisa realizada, utilizando como referencial principal LIMA et al. (2006) e as representações utilizadas por eles, além de outros autores pesquisados, como Hazzan (2004), Caberlim (2015) e Carvalho (2015), que também apresentam observações sobre os conceitos e orientações do ensino de Probabilidade e, também, as noções e aplicações como a de Probabilidade condicional e a Probabilidade geométrica.

1.2.1. Conceitos Básicos

É necessário para a construção e desenvolvimento do conhecimento acerca de Probabilidade, definir e discutir alguns conceitos básicos para seu estudo, como a ideia de experimentos aleatórios, acaso e as definições de espaço amostral e evento.

Quando experiências com condições iguais são produzidas repetidamente produzindo diferentes resultados são chamados de experimentos aleatórios, como definida por Hazzan (2004):

> “Chamamos de experimentos aleatórios aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza. Embora não saibamos os resultados que irá ocorrer num experimento em geral conseguimos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que pode ocorrer.” (HAZZAN, 2004, p. 89)

Todas as variações e características que diferem o resultado de um experimento de outro experimento, e todas as causas disso ocorrer, as quais não se pode controlar, é o que denominamos de acaso, segundo Hazzan (2004), que também é apontada e diferenciada por Caberlim (2015) como no trecho a seguir:

> Percebe-se aqui a percepção do acaso sob um ponto de vista determinista: o resultado de um processo aleatório devido a uma complexidade de causas imperceptíveis, complexidade esta que escapa à compreensão do homem e seus instrumentos (CABERLIM, 2015, p. 22)

Outro conceito básico do ensino de Probabilidade é a ideia de espaço amostral, que é o conjunto com todas as soluções possíveis em um experimento aleatório. Utilizarei a mesma representação utilizada por LIMA et al. (2006), o espaço amostral em determinado experimento será representado por S, sendo S finito ou infinito enumerável. Outro conceito importante é o de evento, evento é todo subconjunto de S, que será representado por letras minúsculas como A,B,C,...

Exemplo: No lançamento de um dado comum de 6 faces, observar o lado que cai para cima. O espaço amostral é S = {1,2,3,4,5,6}, e todo subconjunto desse espaço amostral é um evento, exemplo: sair um número par, A = {2,4,6}.

Caberlim (2015) cita que na análise de alguns livros didáticos, na maioria das vezes é dada inicialmente a abordagem da Probabilidade pelas definições e exemplos sem a concepção de aleatoriedade e acaso. Ela cita características a serem observadas nos alunos no ensino de Probabilidade na observação de um experimento aleatório:

> a) Existência de um protocolo experimental, que permite a descrição completa das condições para a realização de um experimento, e consequentemente a sua reprodução com as mesmas condições, ou seja, garantia de reprodutibilidade
> b) A identificação da imprevisibilidade, que possa impossibilitar ao resultado final do experimento, ou seja, a ação do acaso.
> c) A descrição com precisão de um conjunto de resultados possíveis do experimento, a partir de um protocolo experimental, ou seja, explicação do espaço amostral. (CABERLIM, 2015, p. 22)

Essas características citadas no trecho acima são importantes na aplicação da Probabilidade através de experimentação, pois dá a devida importância a forma e as condições do evento e do experimento ocorrer, mostra a questão do acaso como imprescindível no experimento e cita a importância da análise dos resultados possíveis para a compreensão do espaço amostral.

Também irei apresentar e explicar as duas formas, das quais podemos calcular a Probabilidade de um evento ocorrer, a forma frequentista e a clássica, segundo Caberlim (2015), que define e questiona o estudo desses dois modos de calcular Probabilidade.

O enfoque Clássico ou Laplaciano de Probabilidade, é quando se divide o espaço amostral em eventos considerados equiprováveis (tem a mesma Probabilidade de ocorrer), na análise de dados e resultados de um determinado experimento aleatório, aparece com a axiomatização da Probabilidade por Laplace no século XIX, que desenvolve uma expressão algébrica para o cálculo da Probabilidade.

> Quando todos os resultados têm a mesma chance de ocorrer, a Probabilidade de um evento é a razão entre o número de resultados relativos ao evento e o número total de resultados. Em outras palavras, é a razão entre o número de casos favoráveis à ocorrência do evento e o número total de casos. (CARVALHO, 2015, p.17)

Já o enfoque frequentista é apresentado por Caberlim (2015) como a “razão entre o número m de casos ou estimativa de seu valor obtido pela observação da frequência experimental”, ou seja, é calculado através da realização da experimentação e observação de seus resultados, calculando a

Probabilidade por meio da razão entre o evento e o todo. Afirma também que é necessário se observar a frequência relativa em um número grande de repetições, para não se obter somente uma estimativa, pois a “série das frequências relativas acumuladas tende a se estabilizar em torno de um valor”, que é o valor mais coerente para a Probabilidade de ocorrer o determinado evento.

1.2.2. Definições

Segundo LIMA et al. (2006), a Probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número P(A), associando a cada evento um número denominado Probabilidade do evento, “que traduzirá a confiança na capacidade do evento ocorrer”, sendo S o espaço amostral, de forma que:

i. Para todo evento A , $0 \leq P(A) \leq 1$
ii. $P(S) = 1$
iii. Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente ($A \cap B = \varnothing$) então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemplo : Ao lançar uma moeda e observar a face que cai pra cima, temos o espaço amostral s = {coroa, cara}.

Temos 4 eventos possíveis: Ø , A = {cara} , B= {coroa} e S={cara ou coroa}. Uma Probabilidade que pode ser definida é:

$P(\varnothing) = 0$, $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}6$, $P(S) = 1$ ou
$P(\varnothing) = 0$, $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}5$, $P(S) = 1$

É possível observar que ocorre “i, ii e iii“ nos exemplos dados. Como queremos que a Probabilidade represente a confiança na capacidade de ocorrer o evento, e ocorrer A é tão provável quanto ocorrer B, logo $P(A) = P(B) = 0{,}5$ seria um modelo mais adequado, mas também seria correto através de experimento, ao lançar a moeda inúmeras vezes obtermos outros valores.

Para tal representação desse modelo probabilístico, podemos citar o modelo para eventos equiprováveis, ou seja, onde cada evento possui a mesma Probabilidade de ocorrer. Representando isso temos:

Um espaço amostral S, com ”n” elementos, S= $\{x_1, x_{2,} x_3, \ldots x_n\}$, sendo todo o evento unitário tem a mesma Probabilidade de ocorrer (modelo equiprobabilístico), P $\{x_1\}$ = P $\{x_2\}$= P $\{x_3\}$=... = P $\{x_n\}$ = K, temos então pela definição de Probabilidade que:

1 = P(S) = P($x_1, x_{2,} x_3, \ldots x_n$) = P ($\{x_1\}$ ∪ $\{x_2\}$ ∪ $\{x_3\}$ ∪ ... ∪ $\{x_n\}$) =

P $\{x_1\}$ + P $\{x_2\}$ + P $\{x_3\}$ +... + P $\{x_n\}$ $= \ K \ + \ K \ + \ K + \ldots K \ = \ nK$

Logo $1 = \ nK \ \Rightarrow K = \frac{1}{n}$, portanto a Probabilidade de ocorrer o evento unitário é $\frac{1}{n}$

Isso é válido para um evento M, formado por j elementos, então P(M) = $\frac{j}{n}$. Portanto, a Probabilidade de um evento, no modelo equiprobabilístico, é a razão entre o número de casos favoráveis ao evento e o número total de casos possíveis.

$$P(A) \ = \frac{Número \ de \ casos \ favoráveis \ a \ \text{“}A\text{”}}{Número \ total \ de \ casos \ possíveis} \ = \ \frac{n(A)}{n(S)}$$

Esse modelo clássico foi utilizado por inúmeros matemáticos no estudo da Probabilidade, como Cardano, Pascal e Laplace.

O outro modelo é o frequentista, que é calculado por meio de experiências, ao repeti-la inúmeras vezes e anotar a frequência na qual ocorreu determinado evento. Tomamos para a Probabilidade do evento “A” a frequência relativa, o número de vezes que ocorreu “A” dividido pelo total de vezes que foi realizada a experiencia, ou seja:

$$P(A) = \frac{frequência \ relativa \ de \ \text{“}A\text{”}}{Total \ de \ vezes \ que \ a \ experiência \ foi \ realizada} \ = \ \frac{a}{n}$$

1.2.3. Propriedades

Nesta seção apresentarei algumas consequências e propriedades, através da definição de Probabilidade, de acordo com LIMA et al.(2006) e Hazzan (2004), assim como os conceitos envolvidos e as demonstração de tais afirmações, então temos abaixo algumas das propriedades do estudo de Probabilidade:

Se A e B são eventos e S é o espaço amostral temos:

I. Se A é um evento certo, então P(A) = 1

Demonstração: P(A) = P($x_1, x_{2,} x_3, \ldots x_n$) = P(S) = 1

II. $P(\emptyset) = 0$

Podemos denominar como a Probabilidade de um evento impossível.

Como S e Ø, são mutualmente excludentes temos: Demonstração: $P\,(S) = P\,(S \cup \emptyset) = P\,(S) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$ ■

III. $P(\bar{A}\,) = 1 - P(A)$

$P(\bar{A}\,)$, é a Probabilidade de não ocorrer o evento A, ou de ocorrer o evento complementar de A

Demonstração:

$$1 = P\,(S) = P(A \cup \bar{A}\,) = P(A) + P(\bar{A}\,) \Rightarrow P(\bar{A}\,) = 1 - P(A) \quad ■$$

IV. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Sendo $P(A - B)$ a Probabilidade de ocorrer o evento A, mas não ocorrer o evento B.

$P(A \cap B)$ é a Probabilidade de ocorrer os eventos A e B ao mesmo tempo. Como $A - B$ e $A \cap B$ mutualmente excludentes, temos:

Demonstração:

$$P(A) = P\,\{\,(A - B) \cup (A \cap B)\} = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow$$
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \text{ ■}$$

V. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Sendo $P(A \cup B)$ a Probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B, é o que chamamos de união de eventos.

Como $A - B \ e \ B$ são mutualmente excludentes, temos:

Demonstração:

$$P(A \cup B) = P[(A - B) U\ B] = P\ (A - B) + P(B), \quad \text{(por III)}$$
$$P\ (A - B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P\ (B) \Rightarrow$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ ■$$

Em particular, se A e B são mutuamente exclusivos, ou seja $A \cap B$ = Ø, então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\emptyset) = P(A) + P(B)$

VI. Se $B \subset A$, então $P(A) \geq P(B)$

Demonstração: (por III)

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, como $B \subset A$, logo $P(A \cap B) = P(B)$, então

$P(A - B) = P(A) - P(B)$, e $P(A - B) \geq 0$, então

$P(A) - P(B) \geq 0 \Rightarrow P(A) \geq P(B)$ ■

1.2.4. Probabilidade Condicional

Segundo Hazzan (2004), Probabilidade condicional é a Probabilidade de ocorrer o evento A dado que B ocorreu, representando esse fato por P(A | B). Quando calculamos a Probabilidade condicional, é como se o espaço amostral fosse reduzido ao evento B, dentro do qual queremos calcular a Probabilidade de A ocorrer.

Exemplo: No lançamento de um dado, qual é a Probabilidade de sair 3, sabendo que saiu um número ímpar? Então se calcula P(A | B), onde A é o evento "sair o número 3" e B é o evento "sair número ímpar", pois ele é a condição já informada.

Para se definir formalmente P(A | B), se utilizará os conceitos de cálculo de Probabilidade vistos anteriormente, válidos tanto para o modelo frequentista, quanto para o clássico. Num experimento aleatório que foi repetido "N" vezes, temos:

$n(A)$ = número de vezes que ocorreu A;

$n(B)$ = número de vezes que ocorreu B;

$n\ (A \cap B)\ =$ número de vezes que ocorreu A e B .

Temos então que a frequência relativa de A, naqueles resultados em que B ocorre é: $\frac{n\ (A \cap B)}{n(B)}$, essa é a frequência relativa de A condicionada a ocorrência de B.

Se dividirmos o numerador e o denominador por N, temos:

$$\frac{n\ (A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n\ (A \cap B)}{N}}{\frac{n(B)}{N}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Portanto, $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Uma consequência da definição formal de Probabilidade condicional é:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A \mid B).P(B)\ ,$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)\ .P(B \mid A)$$

Ou seja, "A Probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos ($P(A \cap B)$) é o produto da Probabilidade de um deles pela Probabilidade do outro, dado o primeiro" (Hazzan,2004, p.123)

E a partir disso podemos chegar a outro resultado, para o caso de dois eventos independentes:

Definição: dados 2 eventos A e B de um espaço amostral S, diremos que A independe de B se: $P(A \mid B) = P(A)$. Ou seja, A independe de B se a ocorrência de B não afeta a Probabilidade de A.

Se A independe de B (P(A)>0), então B é independente de A, pois:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B).P(B)}{P(A)} = \frac{P(A).P(B)}{P(A)} = P(B)$$

A partir disso também temos que: $P(A \cap B) = P(A \mid B).P(B) = P(A).P(B)$, Ou seja, dois eventos são chamados independentes se:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Isso também é válido para 3 ou mais eventos.

Exemplo: $P(A \cap B \ \cap C) = P(A).P(B).\ P(C)$

1.2.5. Probabilidade Geométrica

Entende-se por Probabilidade geométrica, o estudo de Probabilidade, ou a resolução de algum problema de cálculo de Probabilidade no qual está envolvido a geometria e o uso de algumas noções geométricas, como comprimento, área, volume, e até mesmo o de proporcionalidade. O cálculo pode ser feito da mesma maneira, através da razão entre a parte e o todo, assim como define Caberlim (2015):

> A Probabilidade Geométrica não é considerada como um novo enfoque para a Probabilidade, mas sim uma apresentação do problema do cálculo de uma Probabilidade em um contexto geométrico. Nesse caso, esta Probabilidade será dada, por exemplo, pela razão entre duas grandezas, tais como comprimento ou áreas. (CABERLIM, 2015, p. 37)

Foi possível observar em minha pesquisa, por meio da afirmação de vários autores, como por exemplo: Gondim (2013) e Lima (2013), que a Probabilidade geométrica, assim como sua aplicação, é pouco utilizada como ferramenta de ensino e aprendizagem no ensino básico. Assim como Caberlim (2015) que afirma que não encontrou "nenhum exemplo de abordagem de Probabilidade geométrica nos livros didáticos aprovados no PNLD 2012" e Araújo (2017) afirma que o conceito de Probabilidade geométrica "é pouco abordado no Ensino Médio, por professores e em livros didáticos", e também há predominância na abordagem clássica do cálculo de Probabilidade.

A abordagem mais comum de Probabilidade geométrica é na qual fazemos a escolha de um objeto como, por exemplo, um ponto dentro de um outro objeto maior como um segmento de reta ou uma figura plana. São inúmeros os modelos que podemos construir usando as noções de geometria.

Como exemplo, a Probabilidade utilizando comprimento de um segmento de reta, tendo como espaço amostral o segmento maior, e como evento a escolha de um seguimento contido nesse segmento:

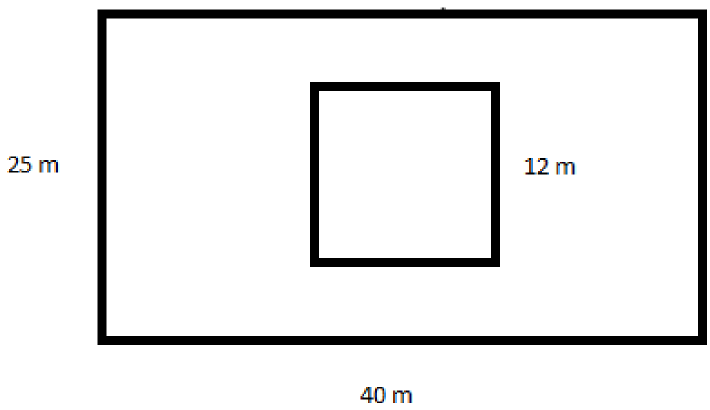
Exemplo 1: Qual a Probabilidade de, em uma corda de comprimento 3 metros, um ponto pertencer exatamente aos 30 centímetros iniciais?

Calculamos então a Probabilidade como a razão entre o comprimento da ocorrência do evento, 30 centímetros e o todo (espaço amostral) que é de 300 centímetros. A Probabilidade então é: P = 30/300 = 0,1

Assim como a abordagem da Probabilidade geométrica pode ser feita através do conceito de área e de volume, calculando a razão entre as grandezas do que se é pedido e o todo.

Exemplo 2: Há um tesouro escondido num terreno retangular, com 25 metros de largura por 40 metros de comprimento, qual é a Probabilidade do tesouro estar no quadrado de 12 metros de largura no centro do terreno? Como mostra a figura 1.

Figura 1: Representação do terreno do exemplo 2



Fonte: Autor

Da mesma maneira, para se calcular a Probabilidade desse evento ocorrer, devemos calcular a área do retângulo, que se encontra todos os resultados possíveis (espaço amostral) e a área do quadrado central (evento). A Probabilidade é a razão entre a área do quadrado e a área total do terreno, então a Probabilidade do evento acontecer é: P = 144 m² / 1000m² = 0,144

Outro exemplo de Probabilidade geométrica é de um jogo antigo, citado por Caberlim (2015), no qual se deve lançar uma moeda sobre um piso de azulejos quadrados e se apostar onde a moeda iria cair: sobre um único azulejo ou sobre dois azulejos (rejunte). Esse jogo foi utilizado por alguns matemáticos como estudo da Probabilidade, como o conde de Buffon que apresentou esse jogo, no século XVIII.

Observo aqui também que as características e propriedades apontadas nos outros itens sobre Probabilidade, assim como os conceitos de união de eventos, evento complementar, eventos independentes, entre outros, também podem ser utilizados na resolução de problemas envolvendo Probabilidade geométrica.

O estudo de Probabilidade geométrica é importante e serve como instrumento no ensino de Probabilidade, ao fazer essa relação entre os conceitos de geometria e Probabilidade, também como exemplo de aplicação dos conceitos de Probabilidade desenvolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Portanto, tudo o que foi a abordado e estudado nesse capítulo é de suma importância e contribui com minha formação continuada como professor, ao analisar e compreender conceitos de forma mais aprofundada, para então tentar transformar isso em práticas pedagógicas mais eficazes. Para isso nos próximos capítulos desse trabalho discutirei de que forma as teorias conceituais e os documentos oficiais podem orientar e auxiliar na construção de atividades práticas para o desenvolvimento em sala de aula.

2. Revisão Bibliográfica

Neste capítulo abordo e discorro acerca de outros trabalhos e artigos relacionados ou que têm propostas parecidas com esta pesquisa. O objetivo do capítulo é mostrar pesquisas realizadas sobre o assunto, assim como destacar o motivo da escolha do tema Probabilidade, e escolha dos referenciais teóricos: Resolução de problemas e Educação Matemática Crítica que contribuirão com este estudo.

Também discuto as orientações dos documentos oficiais que norteiam o ensino de Matemática no Brasil: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), bem como, o Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias; no que tange aos objetivos, competências e habilidades a serem desenvolvidos nas atividades durante o ensino, que visam auxiliar na orientação desses aspectos didáticos na elaboração dessas atividades, assim como no alcance e justificativa dos objetivos dos referencias teóricos.

2.1. Análise de trabalhos desenvolvidos

Apresento a seguir algumas pesquisas que já utilizaram características e aspectos parecidos com aqueles propostos neste trabalho, tanto na abordagem conceitual de Probabilidade, quanto no referencial didático que foi proposto: Resolução de Problemas e Educação Matemática Crítica, para a construção de sequências didáticas e situações problemas a serem trabalhadas.

A revisão deu início com a dissertação de Hellen Fernandes Gondim (2013) intitulada “Probabilidade e Probabilidade Geométrica: conceitos e exemplos aplicáveis no ensino básico”. O trabalho dela tem por objetivo expor conceitos básicos e históricos de Probabilidade, buscando questões aplicáveis do ensino desse conteúdo no Ensino Médio, explorando a parte histórica e conceitos. Utiliza para isso, o ensino através da resolução de problemas em sala de aula, propondo problemas distintos.

Um dos motivos da escolha dela foi de que o tema Probabilidade apesar de ser importante para as áreas de atuação como a Medicina, Administração e Engenharia, é pouco trabalhado no Ensino Fundamental e Médio.

A proposta é que através da experimentação o aluno busque as soluções teóricas para os problemas dispostos na atividade, utilizando para isso experimentos, jogos e desafios como forma de recursos para trabalhar os conceitos de Probabilidade e Probabilidade geométrica. O que contribui para o desenvolvimento das habilidades dos alunos no conhecimento matemático, ao propiciar uma dinâmica diferenciada no ensino de Probabilidade.

Aspectos como a abordagem da conceituação teórica e histórica da ideia de Probabilidade e apresentação de uma sequência didática são ideias comuns entre o trabalho proposto por Gondim (2013) e as ideias propostas em meu trabalho. Entretanto o trabalho dela evidencia mais a Probabilidade geométrica, e utiliza somente a resolução de problemas como metodologia para apresentar uma proposta de ensino diferente, características essas que se diferem do meu trabalho.

Dando sequência na revisão, a dissertação da Cristiane Candido Luz Caberlim (2015), com o título “Letramento probabilístico no Ensino Médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos”, cujo foco é o “processo de aprendizagem da Probabilidade”, voltando à pesquisa ao clássico e frequentista, por meio da Probabilidade geométrica e com a utilização de um ambiente computacional para as simulações dos experimentos aleatórios. O objetivo do trabalho então é escrito pela autora da seguinte forma:

> Diagnosticar invariantes operatórios mobilizados por alunos em situação de resolução de problemas, para que busquemos elementos para identificar o letramento probabilístico desses alunos (CABERLIM, 2015 , p.17)

Caberlim (2015), de uma maneira geral, mostra em seu trabalho que vem crescendo muito a discussão sobre o processo de ensino e aprendizagem da Probabilidade no campo da Educação Matemática, sendo isso abordado em documentos oficiais assim como em pesquisas neste campo. E ressalva a importância sobre tais conhecimentos, pois contribuem para a tomada de decisões, que podem estar relacionadas direta ou indiretamente com questões de responsabilidade social, política e econômica, que interferem na formação de alunos que serão os futuros profissionais das mais diversas áreas de conhecimento.

Diante do problema apresentado, foi feito uma pesquisa, com o objetivo de diagnosticar quais os tipos de compreensão e conhecimentos dos alunos em situação de resolução de problemas, para assim buscar um modelo de evolução de aprendizagem.

Apesar da metodologia de estudo de caso descrita pela autora, estrutura e a abordagem do letramento probabilístico serem características que diferem dessa minha pesquisa, o trabalho de Caberlim pode ser comparado ao meu pela abordagem conceitual do tema de Probabilidade e Probabilidade geométrica, a construção da sequência de atividades voltadas a resolução de problemas e a construção do conhecimento pelo próprio aluno saindo do concreto (problema) para o alcance do abstrato (conceitos e definições).

Já a tese de Otávio Roberto Jacobini (2004), intitulada “A modelagem matemática como instrumento de ação política na sala de aula”. Nesse trabalho o autor buscou analisar quais são as situações de crescimento político dos estudantes, quando se utiliza a modelagem matemática como estratégia para o processo de ensino e aprendizagem da área. Ele avalia a possibilidade de crescimento da visão política dos estudantes através dos processos de reflexões observados durante os questionamentos, críticas, ações e transformações dos alunos, inserindo o estudo, segundo ele, no contexto da Educação Matemática Crítica.

Para desenvolver o trabalho Jacobini organizou três ambientes de aprendizagem, denominando-os de "cenários para investigação". A análise dos dados aponta que o crescimento da visão política dos alunos associa-se à ação investigativa baseada em atividades de modelagem; as discussões e debate que aparecem no desenvolvimento das atividades, e aos resultados obtidos a respeito das consequências sociais sobre o tema. Esse crescimento também foi observado no envolvimento dos alunos com os problemas da comunidade e as ações políticas por eles tomados. Ao relacionar o crescimento da visão política dos estudantes e a Educação Matemática, Jacobini afirma:

> o processo de crescimento político dos estudantes deve ser

> pensado como uma forma de alfabetização matemática, estreitamente relacionada com o núcleo de uma literácia matemática voltada para mudanças sociais. (JACOBINI, 2004, p. 16)

Ao detalhar os "ambientes de aprendizagem", Jacobini destaca a importância de se refletir sobre "o que se aprende, o como se aprende e para que se aprende" tanto na perspectiva dos conceitos matemáticos trabalhados, quanto de suas aplicações e interesse para os alunos e para a comunidade. Chama a atenção ainda sobre o real papel da educação matemática em um sistema democrático, enfatizando a necessidade dos posicionamentos críticos e a reflexão sobre a razão e a finalidade do ensino de matemática. O trabalho citado se difere ao meu na abordagem da modelagem matemática e no tema abordado, e pode ser comparado a característica de que em minha pesquisa também buscarei propor esse ambiente de aprendizagem que enfatize a busca da formação do aluno crítico.

A Dissertação de Felipe Mascagna Bittencourt Lima (2013), com o título: “O Ensino de Probabilidade com o uso do Problema do Jogo dos Discos”. O autor apresenta uma proposta de ensino através de uma sequência didática para a introdução do ensino de Probabilidade. A proposta com as aulas tem por fundamento o “Jogo dos discos” como problema inicial para o desenvolvimento da Probabilidade geométrica com o objetivo de determinar a Probabilidade de um disco interceptar as linhas de separação de um piso quadrado.

Ele propôs essa sequência de atividade a alunos da terceira série do ensino médio da escola pública estadual antes da abordagem do assunto Probabilidade pelo professor. A experimentação no ensino de matemática é eficaz na aprendizagem de Probabilidade de acordo com o autor, que apresenta os resultados obtidos e afirma que essa proposta se mostrou eficiente, ao propiciar um ambiente a exercitar a criatividade do aluno.

O autor apresenta as dificuldades, como tempo, o uso de equipamentos tecnológicos, e o interesse dos alunos durante o desenvolvimento da atividade, além de citar que há poucos experimentos propostos sobre o conceito em livros didáticos, mas ao mesmo tempo há recomendações dos documentos oficiais, como a proposta curricular do Estado de São Paulo sobre o ensino de

Probabilidade.

Segundo o autor, após a apresentação de um problema contextualizado os alunos tiveram que pensar em uma solução com o mínimo de ajuda do professor, mostrando assim ao aluno também a importância de aprender Probabilidade. Essa forma de abordar a Probabilidade frequentista através da experimentação também buscará ser desenvolvida em meu trabalho, procurando facilitar a relação ensino-aprendizagem, a compreensão e a resolução de problemas sobre o conceito, entretanto se difere do meu trabalho pois o autor tem como foco principal a Probabilidade geométrica e o jogo proposto, já o meu buscará abordar outras ideias em Probabilidade em variadas atividades.

Por fim, discorrerei acerca da dissertação de Simone Regina dos Reis (2013), com título "Matemática Financeira na Perspectiva da Educação Matemática Crítica". A autora apresenta sugestões para o ensino dos conceitos básicos da matemática financeira por meio de estratégias pedagógicas orientadas pela Educação Matemática Crítica.

O tema do trabalho que é a Matemática financeira, e a utilização de reportagens são características que diferem do meu trabalho, contudo a autora busca, através das atividades propostas, desenvolver competências que tornem os alunos participativos, reflexivos e críticos aos problemas do cotidiano, que é também um dos objetivos das atividades que eu irei propor. Para isso, a autora utilizou-se de reportagens que buscavam levar os alunos à reflexão de diferentes situações bem como os possibilitava visualizar a importância do tema, ou seja, no trabalho, a autora teve como objetivo fornecer ferramentas (conceitos da matemática financeira) e meios para que os alunos aprendessem a atuar sobre problemas do mundo em que vivem, contribuindo assim para suas formações de cidadãos críticos.

2.2. Análise de documentos oficiais

O documento Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN (1997) trata de maneira geral sobre os objetivos do ensino de Matemática e faz orientações sobre a forma que a relação ensino-aprendizagem pode ocorrer. Especificamente do que se trata esse trabalho podemos citar a seguinte característica a ser desenvolvida:

> Um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão “tratar” as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à Probabilidade e à combinatória. (BRASIL, 1997, p.38)

A abordagem da Probabilidade e das estatísticas vão ao encontro ao ensino de formação do aluno para a vida em sociedade, pois o desenvolvimento de certas competências contribui de maneira importante na sua formação e construção do pensamento crítico.

Os PCN ainda enfocam que o ensino não deve ser baseado em definições ou fórmulas, mas sim no envolvimento do aluno em tais assuntos. Com relação a Probabilidade, o aluno deve compreender que os fatos e eventos são decorrente de algo natural e aleatório em acontecimentos do dia-a-dia, e que é possível mensurar e identificar o resultado provável de algo acontecer ou não.

Situações de experimentos levam os alunos a explorar e observar eventos, aprofundando ideias como a de acaso e incerteza. Compreender e diferenciar casos é uma habilidade que deve ser desenvolvida pelo aluno, assim como identificar sucessos possíveis, e aqueles que dependem de “sorte”, durante o desenvolvimento de situações-problemas.

O aluno deve saber se posicionar de “maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas” (BRASIL, 1997, p.6) e para isso a Matemática deve servir como instrumento de argumentação.

Para o desenvolvimento desse trabalho e elaboração das atividades busca-se uma metodologia de ensino que desenvolva que leve o aluno a desenvolver competências a partir questionamentos e formulação de problemas na intervenção do real ao resolvê-los, utilizando para isso a criatividade, o raciocínio crítico, o pensamento lógico, selecionando procedimentos e verificando sua adequação:

> Para tanto, o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. (BRASIL, 1997, p.26)

Os PCN enfatizam que o ensino de matemática deve proporcionar um ambiente que propicie desenvolver competências e valores socialmente relevantes, contribuindo no desenvolvimento intelectual do aluno para a construção do “pensamento lógico-matemático”, da criatividade e da capacidade de análise e crítica, para agir em fatos e situações da vida real.

Sobre Resolução de Problemas o documento diz que “é um caminho para o ensino de Matemática”, mas os problemas devem ter um papel importante no ensino e não somente usado como aplicação de conhecimentos já adquiridos. Para isso, o problema proposto em sala de aula deve ser “uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la” (BRASIL, 1997, p.33)

Elaborar procedimentos para resolver os problemas, através de simulações, exemplificação, tentativas e formulação de hipóteses, assim como validar o que está propondo como solução e a comparação dos resultados em grupo, são características e habilidades a serem desenvolvidas no aluno no ensino através da Resolução de Problemas.

Por fim é importante citar que os PCN propõem como competência a se desenvolver em sala de aula a ideia de resolver e compreender problemas ao vivenciá-los e desenvolver os processos de resolução, propondo e executando um plano de solução, assim como a verificação e a maneira correta de comunicação dessa resposta. Se atentando nos objetivos para o ensino e aprendizagem de Matemática na abordagem de seus conteúdos e na interpretação, incluindo diversas situações como a resolução de problemas, os jogos e os recursos tecnológicos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2000) citam a Probabilidade como uma subárea da Matemática ligada a aplicação para a compreensão de fenômenos, e interpretação da realidade, tratando a Matemática como uma linguagem de comunicação. Cita também a abordagem desse conteúdo no Ensino Médio, que deve ser feita com atenção, pois as técnicas e raciocínios de Probabilidade são instrumentos para as ciências e para o desenvolvimento das habilidades, como por exemplo:

> descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideais de Probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real (BRASIL, 2000, p. 44)

A resolução de problemas para o PCNEM é uma importante estratégia de ensino, e é esperado que a partir disso os alunos aprendam a desenvolver estratégias, planejar, relacionar, autoconfiança e responsabilidade, verificar regularidades, pesquisar, consultar, experimentar, organizar dados, sistematizar e validar soluções. Desenvolvendo também sua capacidade de raciocínio, que é uma habilidade proposta: “desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo” (Brasil, 2000, p. 42) para então ampliar sua autonomia e capacidade de argumentação.

O começo disso deve ocorrer a partir do ensino através da resolução de problemas, pois:

> Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2000, p. 41)

Da mesma forma o Currículo do Estado de São Paulo (2011) enfatiza a importância de resolver problemas decorrentes da intervenção e ação em situações e fenômenos no desenvolvimento do raciocínio e compreensão desses fenômenos, como forma de antecipação e intervenção no real. A problematização, formulação e equacionamento de problemas é uma estratégia de exploração.

Sobre o uso da tecnologia e de instrumentos como o computador e a calculadora, o Currículo orienta que devem ser cada vez mais usados para aumentar as habilidades e capacidades de expressão e cálculo dos alunos, de modo crítico.

É necessário ter a capacidade de reconhecer, identificar e ter visão crítica em determinada área de conhecimento, e a partir disso compreender a importância dela em sua vida. O desenvolvimento de competências e habilidades de decisão de argumentação no tratamento da informação deve servir como uma busca de uma visão crítica do tema, o aluno deve compreender que os conteúdos disciplinares são meios para a sua formação como cidadão e como pessoas, assim como:

> um currículo referenciado em competências supõe que se aceite o desafio de promover os conhecimentos próprios de cada disciplina articuladamente às competências e habilidades do aluno. É com essas competências e habilidades que o aluno contará para fazer a leitura crítica do mundo, questionando-o para melhor compreendê-lo, inferindo questões e compartilhando ideias, sem, pois, ignorar a complexidade do nosso tempo. (São Paulo, 2011, p. 12)

Portanto, dessa forma, busquei com essas ideias e exemplos de outros trabalhos e com a orientações dos documentos oficiais conduzir e produzir a pesquisa desse trabalho que será disposta no próximo capítulo, assim como buscar alcançar os objetivos propostos na elaboração das atividades.

3. REFERENCIAL TEÓRICO DIDÁTICO

Neste capítulo abordo e discuto alguns preceitos da Educação Matemática, que foram pesquisados, e que contribuíram na construção e elaboração das propostas de atividades e na estruturação de seus objetivos, para que o conteúdo seja abordado de forma coerente, baseada em ideias e estratégias já estudadas no ensino da Matemática e que são importantes para o planejamento e desenvolvimento do ensino em sala de aula.

São apresentadas a principais ideias que orientaram a construção das atividades, inicialmente a Resolução de Problemas, tendo como referencial principal Onuchic (1999), abordando os conceitos e orientações acerca das atividades didáticas, a sua construção durante as décadas e de que forma ela pode contribuir na relação ensino-aprendizagem.

Nesse capítulo ainda abordo a Educação Matemática Crítica, tendo como referencial principal Skovsmose (2008), explicando a ideia que ele introduz e as definições dadas por ele. Este autor afirma que Educação Matemática Crítica deve ser vista pelas preocupações de natureza crítica que surgem durante o processo ensino e aprendizagem.

As escolhas desses referenciais se dão pela minha visão como professor e as dificuldades encontradas em sala de aula em produzir atividades didáticas que facilitem e estimulem a aprendizagem e interesse dos alunos, fazendo com que eles compreendam melhor o papel da Matemática na sociedade e a importância de seu estudo para o dia-a-dia. Essas linhas de pesquisa foram escolhidas na busca de melhor conhecer esses temas, como contribuição na minha formação contínua como professor e de como isso pode ser utilizado na construção e desenvolvimento de atividades para sala de aula.

3.1. Resolução de Problemas

A Resolução de Problemas (R.P.), durante os anos em que foi desenvolvida e estudada, se tornou uma metodologia de ensino de Matemática, por vezes, se pensou como um ponto de partida das situações de aprendizagem e em outros momentos foi pensado como um meio de se ensinar Matemática, passando a ser bastante abordada nas pesquisas nos anos 90, segundo Onuchic (1999).

> (...) tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como um coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade. (Onuchic, 1999, p. 203)

Segundo Onuchic (1999), problema é “tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”, ou seja, uma situação que “estimule” o raciocínio e interesse do aluno, que seja para ele um desafio a se resolver. Também é esperado que o problema esteja relacionado a realidade do aluno que irá resolver, por isso a importância da R.P. como ferramenta de ensino, e seu estudo. Nos deparamos a todo o momento com problemas a serem resolvidos e, isso também ocorre na Matemática, historicamente ao se obter um problema e se construir conceitos e teoremas novos, assim como no nosso dia-a-dia, quando aparecem situações diferentes para resolvermos.

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter. (Polya,1944 apud ONUCHIC, 1999, p. 217)

Um problema passa a ser importante ao instigar a curiosidade do aluno, por desafiá-lo, e faz com que o aluno desenvolva seu próprio conhecimento através da experimentação.

De acordo com Zuffy & Onuchic (2007), a introdução da resolução de problemas como uma metodologia no desenvolvimento de atividades para o ensino e aprendizagem de Matemática, pode colaborar para que haja algumas mudanças na perspectiva do trabalho docente, mais do que só a organização de conteúdo.

A resolução de problemas pelo aluno, pode desenvolver neles algumas competências gerais em seu desenvolvimento, tendo essas características também como objetivo do desenvolvimento dessa metodologia, como:

> Compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações, saber comunicar resultados e ser capaz de usar técnicas conhecidas são aspectos que devem ser estimulados em um processo de aprendizagem *através* da resolução de problemas. (Zuffy & Onuchic, 2007, p. 83)

Não se deve restringir à técnicas, conceito e definições a resolução de problema, mas sim estender a uma amplitude de conhecimentos e relações entre eles e aos seus princípios.

> O problema não pode ser tratado como um caso isolado. A matemática precisa ser ensinada como matemática não como um acessório subordinado a seus campos de aplicação. Isso pede uma atenção continuada à sua natureza interna e a seus princípios organizados, assim como a seu usos e aplicações. (Onuchic, 1999, p. 205)

No desenvolvimento da resolução de problemas, o processo, a formalização, as conceituações, os simbolismos e as técnicas formais da matemática são introduzidas após a resolução trabalhada, para que haja liberdade por parte dos alunos na construção do conhecimento, e deve-se evitar indicar o caminho para a resolução do problema.

No estudo de Resolução de Problemas, aparece a proposta de atividades em que os alunos desenvolvem problemas, a partir de situações propostas, ou em adição à resolução de outros problemas apresentados.

Um ponto de discussão acerca do estudo de resolução de problemas é quanto à pesquisa sobre a prática e os trabalhos desenvolvidos para ensinar através da resolução de problemas. A pesquisa sobre Resolução de Problemas e a sua utilização como uma forma de ensino da Matemática, foi desenvolvida a partir de Polya (1944). Em sua pesquisa, Polya, aborda como resolver problemas e como desenvolver estratégias que levem a caminhos para a resolução de problemas.

O movimento de renovação conhecido como Matemática Moderna, foi um influenciador do ensino de Matemática no Brasil e em outros países nas décadas de 60 e 70, aonde se enfatizava a Teoria dos Conjuntos , as propriedades e abstração, definia uma linguagem matemática universal, concisa e precisa, também dava importância ao ensino de símbolos e de terminologias mais complexas, o que dificultava o aprendizado em sala de aula. O aluno muitas vezes não compreendia a relação daqueles com as propriedades com os problemas, ou com a sua realidade, além de observar muitas vezes a insegurança no que dizia o professor em sala de aula. Havia-se uma preocupação maior na formalização e distanciavam-se das questões prática, Onuchic (1999) faz os seguintes questionamentos: essa reforma é útil a sociedade? Ou prepara o aluno para o mundo do trabalho?

Historicamente a R.P. somente se preocupava na obtenção da solução do problema, mas Polya já se preocupava com outros aspectos, e partir dos anos 60 a Resolução de Problemas começou a ser investigada nos Estados Unidos com a influência de Polya. No fim dos anos 70 a R.P. começou a ser estudada amplamente no mundo inteiro, isso ocorreu após o enfraquecimento do movimento da Matemática Moderna, pois "o tratamento excessivamente abstrato, o despreparo dos professores para este trabalho, assim como a falta de participação dos pais de alunos, nesse movimento, fadou-o ao fracasso." (Onuchic, Allevato, 2011, p.78)

Em 1980, a NCTM (National Council of teachers of Mathematichs), nos Estados Unidos, publicou um chamado para que houvesse cooperação na melhora na Educação Matemática, recomendando a resolução de problemas como foco da matemática no Ensino Básico, cobrando esforços dos educadores. Dessa forma, muitos trabalhos foram desenvolvidos em Resolução de Problemas, objetivando o desenvolvimento em sala de aula, através de orientações na avaliação de desempenho, listas de estratégias, coleções de problemas e sugestões de atividades.

Onuchic (1999, p.206) cita Scroeder & Lester(1989) ao comentar sobre os três modos de abordar resolução de problemas, afirmando que apesar de poder diferencia-las, na "prática elas se superpõe e acontecem em várias combinações e sequências", esses modos são:

- Ensinar sobre resolução de problemas: Está relacionado ao modelo de resolução de problemas de Polya. Tendo 4 fases esse processo de resolução de problemas, compreender, criar um plano, desenvolver esse plano e retomar o problema original;

- Ensinar a resolver problemas: É a maneira com a qual o professor observa a forma na qual ele ensina matemática e como ela pode ser aplicada na resolução de problemas do cotidiano ou não rotineiros.;
- Ensinar matemática através da resolução de problemas: Os problemas são importantes como início do processo de ensino e aprendizagem, e não somente como o propósito de aprendizado. Esse processo deve começar com uma situação problema e depois são desenvolvidas técnicas matemáticas em consequência desse estudo, deve-se entender como um movimento do concreto (problemas) para o abstrato (representações matemáticas);

A R.P. passou a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um início e meio de aprendizagem a partir de Andrade (1998), é olhado como instrumento que introduz a construção do conhecimento, contribuindo "para a formação dos conceitos antes mesmo de sua linguagem matemática formal, o foco está na ação por parte do aluno" (Onuchic, 1999, p. 207). A partir de então, nos anos 90, passa a ser foco das pesquisas e estudos relacionados ao ensino de Matemática.

A autora defende o objetivo principal e o interesse no ensino de Matemática através da resolução de problemas que é o de ensinar matemática para os alunos, fazendo com que eles compreendam aquilo que está sendo estudado, o desenvolvimento, os processos, a teoria e técnicas do que é proposto:

> O ponto central de nosso interesse em trabalhar o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática. (Onuchic, 1999, p. 208)

O aluno deve ser capaz de compreender determinado conceito ou ideia matemática ao relacioná-lo a diversos contextos, compreendendo sua aplicabilidade em diversas situações. É recomendável que o estudante consiga "construir relações entre várias ideias matemáticas contidas num problema" (Onuchic, 1999, p. 208). A autora afirma que é necessário olhar para a R.P., através de seus objetivos, não somente como foco, ou usando a matemática como ferramenta, e sim como um “caminho de pensar”, numa visão mais ampla.

A resolução de problemas dentro da relação de ensino-aprendizagem deixaria de ter o papel de uma atividade qualquer após a ensino de certo conceito ou fórmula e sim passaria a ser um meio de adquirir conhecimento, e pode ser desenvolvido em outras situações, aplicando o que foi construído com o decorrer da situação problema.

Compreender deve ser o principal objetivo do ensino, e quando esse conhecimento é desenvolvido e gerado pelo próprio aluno na Matemática, ele é melhor do que quando o ensino é forçado pelo professor ou por um livro. O ensino de Matemática através da R. P. é um meio muito importante para desenvolver no aluno a própria compreensão do tema estudo, já que a “compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente” (Onuchic, 1999, p. 208)

Sobre o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas no Brasil é importante citar a reflexão feita sobre os objetivos da educação no Brasil e sua qualidade, a educação é vista como um caminho e preparo do aluno para seu futuro, na construção de uma vida numa “sociedade melhor”.

Na Matemática, podemos citar a importância de seu ensino na formação do cidadão, já que cada vez mais a sociedade utiliza de conhecimentos científico e tecnológicos. Os documentos oficiais, como os PCN, indicam o ensino de Matemática como uma forma de contribuir para que todos se apropriem do conhecimento, para que o aluno se insira no mundo, no mercado de trabalho e nas relações sociais e culturais.

Os objetivos propostos para o ensino da Matemática são de fazer com que os alunos:

> Possam pensar matematicamente, estabelecer relações entre elas, saber se comunicar ao falar sobre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e outras áreas, poder construir conhecimentos matemáticos e desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los e até propor novos problemas a partir deles. (Onuchic, 1999, p. 209)

Esses objetivos vão ao encontro com aquilo que é proposto no ensino de matemática através da resolução de problemas, ao tratar essa relação entre o ensinar matemática e o seu principal objetivo, que é fazer com que o aluno compreenda e aprenda a utilizar determinada ideia matemática, fazendo a conexão com outras situações problemas a serem resolvidas.

Outro ponto abordado por Onuchic (1999) é a influência nos estudos e pesquisas em resolução de problemas das teorias construtivistas, que tem a perspectiva de que "o aluno deve ser engajado ativamente na construção de seu próprio conhecimento", ou seja, o conhecimento deve ser adquirido pelo estudante no processo de aprendizagem de maneira individual e sem lhe ser imposto informações prontas. O aluno deve ser visto como ser pensante, capaz de interpretar e produzir conhecimento a partir de suas próprias experiências.

Podemos citar algumas das características que um ensino de Matemática construtivista deve ter:

> Construir sobre um conhecimento prévio; enfatizar sobre o pensar; dar tempo para pensar; esperar por explicações ou justificativas para as respostas ou pelo modo de pensar; fazer perguntas e saber ouvir; reconhecer que matemática é "parte investigação" e parte convenção"; trabalhar os conceitos e procedimentos matemáticos em termos de resolução de problemas (Onuchic, 1999, p. 210)

Essas características são observáveis durante o processo ensino-aprendizagem, e devem ser considerados como facilitadores desse processo, pois sua principal importância é a de ensinar o aluno a pensar.

O aluno deve aprender matemática resolvendo problemas e também aprender matemática para resolver problemas, quando se utiliza a R.P. como metodologia de ensino. Faz parte de um processo de ensino num todo e não deve ser isolado, principalmente por se utilizar de todos os meios e conhecimento adquiridos pelos alunos.

Uma das preocupações ao se desenvolver a ideia de R.P., é a forma com que o professor desenvolve seu trabalho em sala de aula, além de sua formação: como ensinar matemática? Como o aluno pode aprender melhor matemática? "Resolver problemas é um bom caminho para isso", mas como levar o professor a desenvolver essa experiência em sala de aula? Todos esses e outros questionamentos são apresentados e colocados em discussão nos trabalhos e pesquisas sobre a R.P.

Um dos apontamentos feito são de que a o ensino através da R.P., exige mudanças na postura do professor e dos alunos no seu trabalho em sala de aula, o que não é fácil conseguir, pois é necessário um olhar diferente do professor, e construir situações de aprendizagem em que ele não seja foco principal.

> O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. (Onuchic, Allevato, 2011, p.82)

Segundo Onuchic (1999) apesar das pesquisas e trabalhos dando importância a R.P. e aos diversos questionamentos feitos nas décadas de 80 e 90, avanços e mudanças, ainda há muito a se fazer para mudar o cenário atual do ensino de Matemática. Um dos pontos abordado por ela é o da formação do professor para a qualidade do ensino, pois esse é um fator que tem impacto direto sobre os alunos.

Onuchic afirma também que pouco se aborda sobre as questões que se relacionam a problemas de natureza sócio-política e cultural nas pesquisas, estudos e práticas em R.P. e muitas vezes desenvolvidas em ambientes laborarias e não focado a sua operação em sala de aula. Para ela é necessário que se apresente "experiências e episódios da sala de aula de matemática, apontando o movimento de ida e vinda entre teoria e prática" (Onuchic, 1999, p. 212)

Com isso ela discute um questionamento feito, "como operacionalizar as recomendações e orientações dadas pelos PCN?" E com isso cita Putman et al (1992), que faz uma análise de como a Matemática pode ser ensinada e aprendida da melhor maneira e diz que não podemos reduzir o ensino de matemática "com compreensão" a trabalhos em grupos ou atividades ligadas ao seu cotidiano, e sim usar isso como recurso para um bom ensino.

Também há citações da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática através da resolução de problemas, "em que o ensino e a aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento" (Onuchic, 2012, p. 12). A autora diz que é uma metodologia atualizada de avaliação e faz parte de seus estudos, seria uma avaliação desenvolvida durante a resolução da situação problema, ao acompanhar a construção e o crescimento do aluno, e a relação ensino-aprendizagem.

Nessa metodologia os 3 elementos ensino-aprendizagem-avaliação devem ocorrer ao mesmo tempo durante o processo, nisso “pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos” (Onuchic, Allevato, 2011, p.81), o aluno deve, em consequência disso, ser levado a analisar os métodos, a pensar matematicamente na elaboração de argumentos e justificativas, construir seu próprio conhecimento.

Onuchic e Alevatto (2011) apresentam um roteiro de desenvolvimento do ensino de Matemática através da resolução de problemas após algumas observações sobre a dificuldade dos professores trabalharem a matemática em sala de aula. A seguir será apresentado resumo desse roteiro proposto por elas, e o que se desenvolverá em cada etapa

- Leitura individual e leitura em conjunto: ler sozinho e depois em grupo observando as dificuldades de leituras e de interpretação.
- Resolução do problema: Buscar resolver o problema em grupo, o aluno deve construir o conteúdo esperado pelo professor.
- Observar e incentivar: O professor deve observar, intervir nas dificuldades, incentivar o trabalho e a troca de ideia em grupo e questionar, levando os alunos a pensarem, estimulando a desenvolverem caminhos diferentes.
- Registro das resoluções na lousa: representantes dos grupos são convidados a apresentar para a sala a resolução proposta pelo grupo, corretas ou erradas e por diferentes caminhos.
- Plenária: Todos os alunos são convidados a discutir as soluções argumentando e questionando. O professor deve ser mediador das discussões.
- Busca do consenso: A turma e o professor devem tomar uma decisão sobre a resposta correta.
- Formalização do conteúdo: O professor apresenta um conceito formal, com organização e estrutura, com princípios e procedimentos.

Para finalizar as autoras afirmam que:

> nesta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita continuamente, durante a resolução do problema. (Onuchic, Allevato, 2011, p.85)

Ou seja, aspectos e técnicas de conceitos matemáticos não devem ser ensinados, mas sim aprendidos pelos alunos diante da resolução de problemas, pois a construção do saber deve ocorrer na relação ensino-aprendizado-avaliação através da resolução de problemas, para que ele seja mais eficaz e que o aluno se aproprie do conhecimento.

Nesse mesmo sentido da importância da apropriação do conhecimento e da formação do aluno, discutirei na próxima seção o conceito de Educação Matemática Crítica, mostrando de que forma essa ideia pode explicar a importância da relação de aprendizagem com o aluno.

3.2. Educação Matemática Crítica

Caracterizada e formalizada por Ole Skovsmose, a Educação Matemática Crítica (E.M.C.) vem do questionamento do autor sobre o papel da Educação, em particular da Educação Matemática, frente às questões políticas, sociais, econômicas e culturais bem como sobre as possíveis contribuições da Matemática na formação do aluno. O autor também reforça a importância do papel do professor em provocar situações de aprendizagem em sala de aula baseadas na resolução de problemas e na promoção de um ensino baseado em diálogos e discussões e, não somente, estruturado na fala do professor, o professor passa a ser orientador do trabalho em sala de aula.

Alguns conceitos são apresentados pelo autor com o objetivo de estruturar e concretizar as ideias na relação ensino-aprendizagem através do olhar da Educação Matemática Crítica, alguns desses conceitos são o de matemática em ação, cenários de investigação e também a classificação das atividades de acordo com a forma de abordagem. Essas ideias serão apresentadas neste item, buscando compreender essa análise da E.M.C. feita pelo autor

Skovsmose se refere ao papel social da matemática, trabalhando o conceito da matemática em ação, afirmando que:

> (...) como as inovações tecnológicas, os procedimentos de automação, o gerenciamento e a tomada de decisão fazem parte do dia a dia (do educando), (...) a matemática em ação faz parte de nossos mundos-vida, podendo servir aos propósitos mais variados. (...). Dirigir esse olhar crítico para a matemática faz parte da educação matemática crítica. (SKOVSMOSE, 2008, p. 12).

Portanto a matemática em ação é a forma como o autor faz essa relação do que é vivenciado por nós, em nosso cotidiano e a matemática, que pode ser observada ao nosso redor, com inúmeras utilidades, servindo como instrumento para a nossa vida em sociedade. Os aspectos de confiabilidade e de responsabilidade da matemática na sociedade são exemplos da importância dessa matemática em ação.

O autor define como "cenário para investigação" um ambiente que oferece ao professor e ao aluno recursos para o desenvolvimento de uma investigação, no qual o aluno irá interpretar e agir sobre uma situação social ou política que pode ser estruturada através da matemática. Para ele, um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e a procurarem explicações, que "os alunos são os responsáveis pelo processo (de aprendizagem)." (Skovsmose, 2008, p. 21).

Essa situação leva a refletirmos, a partir de um ambiente proposto dentro do processo de ensino e aprendizagem, o que estrutura esse cenário para investigação. Para isso é necessário que o aluno participe, compreenda e esteja inserido nesse cenário, ou seja, depende do aluno para que tal situação se torne um cenário para investigação, podendo ou não ser um cenário para um determinado grupo de alunos.

A partir desses conceitos, Skovsmose classifica as atividades matemáticas em três tipos: as com referências à matemática pura, as referentes à semi-realidade e aquelas referentes à realidade.

- Atividades com referências à matemática pura: são caracterizadas por ambientes que envolvam números e figuras geométricas e não apresentam contextualização. Exemplo de tais atividades é a solicitação da resolução de uma equação sem que esta tenha um problema envolvido ou um exercício que cobre do aluno apenas conhecimento matemático adquirido por explicação ou demonstração do professor, como o cálculo do vértice de uma parábola sem que o aluno compreenda sua utilidade:

Exemplo:

"Encontre as coordenadas do vértice da parábola representada pela equação: $y = x^2 - 4x + 4$ "

- Atividades referentes à semirrealidade: envolvem situações sem impressões de sentido, mas com contextualização imprecisa sobre certa realidade. Exemplo desse tipo de atividade seria uma situação em que uma pessoa quer comprar mil carros, ou seja, sem uma contextualização coerente. Ou algo que não faça parte de sua natureza ou cotidiano e por vezes nunca será algo aplicável em sua vida:

  Exemplo:

  "Qual é o gasto de combustível de uma viagem para a lua, utilizando um meio de transporte que gasta 0,5 litro de combustível por quilômetro? "

  Apesar de estar contextualizado, não foi feita uma análise ou investigação da utilidade dessas informações para o aluno.

- Atividades referentes a uma realidade: baseadas em situações da vida real, devem oferecer condição diferenciada de comunicação entre o professor e os alunos, e para tanto se fazem necessários questionamentos e informações suplementares. Exemplo de tais atividades seriam situações em que o aluno necessite interagir com a realidade investigada de modo tal que ele se envolva no processo de aprendizagem, como uma situação envolvendo problemas de sua comunidade:

  Exemplo:

  "Na praça em frente à escola há um lugar pra lazer e atividades físicas. Sabendo que é necessário uma área de 2 m² para cada pessoa poder se locomover de forma confortável, qual deve ser a quantidade máxima de pessoas que podem utilizar esse espaço ao mesmo tempo? "

É importante observar que em nenhum dos três tipos de classificação das atividades é feita uma análise qualitativa em suas propostas, mas essa classificação contribui na observação geral de cada exercício proposto e na obtenção de seus objetivos.

Quanto ao envolvimento dos alunos no processo educacional, na visão da E.M.C. eles devem ser estimulados a interagir com a realidade e, através do diálogo, identificarem os assuntos e os conceitos necessários a serem trabalhados. Afirma ainda que tal competência não pode ser imposta ao estudante, mas sim desenvolvida nele, a “investigação” dos alunos é um elemento essencial no trabalho de projeto.

Para Skovsmose (2008, p.30) o papel do professor é orientar o aluno na aquisição de sua autonomia intelectual, por meio de uma matemática investigativa, na qual ele, aluno, tome decisões e avalie, a partir de seus conhecimentos matemáticos, os caminhos a seguir. E enfatiza que o professor deve propor questões que levem o aluno a um pensamento reflexivo sobre o que está sendo investigado, que norteiem uma discussão.

A ideia de incerteza está diretamente relacionada a ideia de crítica, no momento em que se insere em uma situação algo inovador e novas possibilidades educacionais e que nos leva a reflexão, “toda prática traz incertezas”, isso se dá também na forma do trabalho do professor, que deve assumir essa “zona de risco”, ao abandonar as rotinas e tradições educacionais.

Segundo a visão do autor sobre Educação Matemática Crítica, o processo educacional deve ser democrático. Para isso, um dos instrumentos é o diálogo estabelecido no decorrer da aprendizagem entre professor e aluno. A educação tem um papel importante na sociedade, ao fazer parte desse processo de democratização, por isso essa relação entre professor e aluno deve se dar através do diálogo.

> As ideias relativas ao diálogo e à relação estudante-professor são desenvolvidas do ponto de vista geral de que a educação deve fazer parte de um processo de democratização. Se queremos desenvolver uma atitude democrática por meio da educação, a educação como relação social não deve conter aspectos fundamentalmente não democráticos. É inaceitável que o professor (apenas) tenha um papel decisivo e prescritivo (SKOVSMOSE, 2001, p. 18)

Durante esse diálogo é possível a troca de experiências, podendo assim serem observados pelo professor os domínios e as fragilidades em um determinado assunto “relevantes tanto em relação aos interesses imediatos dos estudantes quanto em relação à perspectiva geral do processo educacional” (SKOVSMOSE, 2001,p.18), de modo a tornar a educação matemática como parte das nossas preocupações com a democracia dentro da sociedade a partir da sala de aula.

Além disso o desenvolvimento do aluno como um ser crítico, e o desenvolvimento de outras competências não podem ser impostas aos alunos, por isso essa necessidade da democratização do ensino. O que leva o autor a fazer o seguinte questionamento: “É possível desenvolver o conteúdo e a forma da educação matemática de tal modo que possam servir como ferramenta na democratização?” (SKOVSMOSE, 2001,p.38). Isso ocorre, pois a matemática modifica a realidade do aluno como ser social ao ser ferramenta de organização nos processos de trabalho e economia

Para o autor, tanto a prática quanto a pesquisa em educação matemática devem ser consideradas como críticas ao afirmar que elas:

> (...) devem discutir as condições básicas para a obtenção do conhecimento, devem estar a par dos problemas sociais, das desigualdades, da supressão (...) e devem fazer da educação uma força social (e) progressivamente ativa. (SKOVSMOSE, 2001, p. 101).

Skovsmose faz ainda considerações sobre a tendência da E.M.C. quanto à orientação da aprendizagem de matemática e sobre os processos de pensamentos desenvolvidos pelos alunos. Destaca a importância da aplicabilidade da matemática no cotidiano da sociedade, enfatizando ser ela essencial ao seu desenvolvimento e expondo seu importante papel na análise e na busca de solução de problemas políticos e sociais.

Ao se referir a matemática investigativa, seus objetivos e esforços para que ela se estabeleça como tradição, acima daquilo que tratamos como o ensino tradicional, o autor trata da “autonomia intelectual” do aluno como um dos principais objetivos e meios dentro desse ensino, ao contribuir na sua formação humana transformando a matemática em um instrumento de argumentação, decisão e de julgamento.

> A autonomia intelectual é caracterizada em termos da consciência e da disposição do aluno para recorrer às suas próprias capacidades intelectuais quando envolvidos em decisões e julgamentos matemáticos (...) pode ser associada a atividades de exploração e explicação, como nos cenários de investigação. (SKOVSMOSE, 2008, p. 37).

A ideia de reflexão é discutida e enaltecida por Skovsmose (2008), ao tratar os desafios da educação matemática e a forma como deve ser abordada em sala de aula. Segundo ele a "noção de reflexão é importante para qualquer tipo de educação matemática crítica" (SKOVSMOSE, 2008, p. 13).

Um dos objetivos é proporcionar, dentro das situações de aprendizagem propostas, novos recursos e um ambiente que leve o aluno a agir e refletir, oferecendo a ele uma educação matemática de "dimensão crítica". Para que se estabeleça uma reflexão sobre o modo como a matemática está presente em nosso dia-a-dia, é preciso se fazer referências a vida real no ensino de matemática, para transformar o indivíduo em um sujeito reflexivo e crítico.

Para abordar o tema "reflexão" o autor inicia comentando sobre a matemática em ação, ao falar sobre práticas profissionais e sociais que incluem a matemática, como por exemplo a tecnologia, a produção, a economia, o gerenciamento, a estimativa, etc. E essa ação serve como "objeto de reflexão", pois nessas práticas temos ações que são motivos para a reflexão.

A criatividade matemática se dá através das reflexões e questionamentos que podem ser feitas a partir dessas ações, o que leva o autor a alertar sobre as condições de "especialista", que pode retirar da pessoa a auto-reflexão, algo natural do ser humano e que o leva a se tornar "mecanizado".

> A atuação do especialista foge a qualquer auto-reflexão, e ele se submete aos propósitos de projetos maiores e grandiosos de que participa, cuja natureza é assumida a priori. Dessa forma, a especialização pode levar a pessoa a ignorar sua própria condição humana e a tornar-se mecanizada. (SKOVSMOSE, 2008, p. 54).

Skovsmose (2008) ainda cita a necessidade da reflexão ao fazer um comparativo do progresso científico e o progresso sociopolítico econômico, mostrando assim que reflexão se faz importante ao se buscar um progresso crítico e social e não somente procedimentos mecanizados.

A matemática em ação nos mostra que há uma variedade de situações e de práticas que envolvem a reflexão e a matemática, “do mesmo modo que qualquer outra prática social, as práticas baseadas na matemática requerem reflexão crítica” (SKOVSMOSE, 2008, p. 55), pois essas situações leva a tomada de decisões e a vivenciar as ações baseadas em matemática.

Segundo o autor, comunicação, questionamento e desafios durante o processo de ensino e aprendizagem são importantes para provocar reflexões, através da interação entre professor e alunos e entre os alunos. Portanto para a abordagem da matemática em ação a comunicação e a interação são elementos essenciais.

Para que haja reflexão é necessário envolvimento e interesse do aluno, eles devem ter a oportunidade de apontar direções, fazer questionamentos, tomar decisões, etc, deve haver “intencionalidade” na reflexão do aluno, para isso é necessário propor cenários de aprendizagem que os incentivem a participar da reflexão, para que ele desenvolva seu próprio processo de aprendizagem.

É destacado também a importância da tecnologia e do acesso a informação, pois está diretamente ligado a inclusão digital, que é uma questão sociopolítica importante, e ao mesmo tempo contribui na elaboração e desenvolvimento da aula numa visão tecnológica e experimental.

Debates, inovações, formas diferentes de enxergar o problema são inseridas ao trabalhar com a questão do uso das tecnologias. O uso desses equipamentos, como o computador, em aula remete ao ganho de aprendizagem, mas também é preciso discutir e observar essa inserção como uma relação de inclusão do aluno socialmente.

Impedir o aluno de ter contato com a tecnologia vai na contramão daquilo que foi discutido e consequentemente dos objetivos a serem alcançados, que é de propiciar um cenário de investigação relacionado ao dia-a-dia do aluno e de algo que o instigue a aprender e que chame sua atenção.

Por fim, na perspectiva de Skovsmose (2008), a Educação Matemática Crítica não deve ser compreendida como um ramo da Educação Matemática. Ele afirma que esta:

> não pode ser identificada como uma metodologia para sala de aula, nem pode ser construída com base em um dado currículo. Em vez disso, (...) a educação matemática crítica deve ser marcada pelas preocupações que surgem da natureza crítica da educação matemática. (Skovsmose, 2008, p. 106).

Portanto, a partir dessa visão mais ampla do ensino de Matemática, o debate e discussões sobre as dificuldades de produzir uma situação que melhore a relação ensino-aprendizagem em sala de aula, até a construção dos conceitos, metodologias e roteiro de ensino, temos questionamentos e caminhos diferentes no âmbito da Educação Matemática. A Resolução de problemas e a Educação Matemática crítica, e o estudo relacionado a eles, contribuirão nesse trabalho no planejamento e estruturação da atividade e dos objetivos de cada situação proposta

4. METODOLOGIA DE ENSINO: ATIVIDADES DIDÁTICAS

Neste capítulo são apresentadas as atividades pensadas e construídas com a finalidade de atingir o objeto desta pesquisa. Em cada atividade será explicado o tempo e os conhecimentos necessários, os conceitos a serem trabalhados, materiais necessários, objetivos, competência e habilidades a serem desenvolvidas e uma análise sobre o que é esperado no desenvolvimento da atividade na perspectiva da Resolução de problemas e Educação Matemática Crítica. Propondo assim uma sequência didática que é um conjunto de atividades relacionados com diversas etapas relacionadas entre si como objetivo de tornar mais eficiente o processo de aprendizado

O público para o qual essas atividades foram planejadas são alunos da 2ª série do Ensino Médio. Elas estão dispostas numa ordem conceitual, do básico ao mais aprofundado, em função do principal conteúdo proposto em cada atividade, porém não possuem uma relação que seja obrigatória de se seguir todas as atividades, ou nessa sequência, ou seja, essas atividades podem ser propostas individualmente ou em ordem diferente.

Nas atividades são listados materiais que podem ser usados para a atividade, mas o professor pode variar a quantidade e os materiais que serão utilizados, de acordo com a situação e disposição, sem alterar ou prejudicar os objetivos a serem desenvolvidos nas atividades.

Durante a construção das atividades e da estruturação de seus objetivos no processo e organização educacional, é necessário vincular a concepção do sujeito para resolver situações-problema do cotidiano, e são nessas situações que o aluno passará a desenvolver habilidades e competências por meio dos conteúdos. Entende-se aqui por competências, os conhecimentos, os valores e as atitudes que o indivíduo mobiliza durantes as ações na resolução de situações problema e por habilidades, a tomada de decisões para a resolução do problema, a procura e análise das informações e o saber fazer relacionado ao contexto, para que os alunos consigam mobilizar o conhecimento para aplicá-los em situações do dia-a-dia.

4.1. Atividade 1: Estimando Valores: Probabilidade Frequentista

- **Tempo**: 4 aulas de 50 minutos
- **Conhecimentos necessários**:

Leitura, escrita e interpretação de texto

Cálculos básicos: Adição, subtração, multiplicação e divisão

Fração, razão e proporção

Porcentagem

- **Conceitos trabalhados**:

Probabilidade frenquentista;

Razão e proporção

Estatística: coleta de dados e amostra

Representações de Probabilidade

- **Materiais necessários**:

Objetos de cores diferentes, que tenham o mesmo tamanho (exemplo: pode recortar quadrados de cartolina de mesmo tamanho), que serão na atividade chamados de fichas.

Serão utilizados para cada grupo de alunos 50 fichas, sendo 30 azuis, 10 vermelhas e 10 verdes, que serão colocados numa caixa, onde o aluno consiga fazer o sorteio dessas fichas

Lousa e giz para orientações gerais

- **Objetivos, competências e habilidades a serem desenvolvidos**

Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

Formular hipóteses e prever resultados.

Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;

Selecionar estratégias de resolução de problemas.

Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.

Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

Saber calcular Probabilidades de eventos em diferentes situações-problema, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais

Compreender os raciocínios combinatórios aditivo e multiplicativo na resolução de situações-problema de contagem indireta do número de possibilidades de ocorrência de um evento.

- **Desenvolvimento**:

  1ª Parte

- Dividir a turma em grupos.
- Entregar para cada grupo uma caixa com as fichas, eles não devem saber a quantidade de fichas de cada cor dentro da caixa.
- Apresentação geral da atividade e do problema inicial:

  Utilizando somente sorteios com reposição das fichas da caixa, qual é a quantidade de cada ficha de cada cor? De que forma podemos calcular e concluir isso?

- Pedir que o grupo faça um sorteio com reposição da caixa, observando qual cor saiu e anotando.

  Orienta-los sobre a anotações dos dados obtidos numa folha.
- Solicitar que repitam esse procedimento diversas vezes, sempre anotando os resultados.
- Acompanhar o desenvolvimento dessa etapa, orientando os alunos.
- Após uns 8 minutos, apresentar alguns questionamentos aos alunos e propor uma discussão sobre isso em sala:

Fichas de qual cor estão em maior quantidade na caixa?

Posso afirmar isso com toda certeza?

Sabendo que há 50 fichas no total, quantas fichas vocês acham que há de cada cor?

- Após essa discussão, solicitar que continuem com os sorteios por mais 10 minutos, anotando os resultados, e que escrevam um palpite de quantas fichas de cada cor há dentro da caixa.
- Decorrido o tempo observar a resposta dos alunos, pedir que os grupos discutam os resultados obtidos e justifiquem a resposta escolhida.

Questioná-los sobre possíveis formas de fazer esse cálculo.

- Agora com os dados em mãos pedir que eles calculem a razão do total de vezes que sortearam a ficha vermelha pelo total de sorteios obtidos, e que convertam essa fração em números decimais e também em porcentagem, explicando o objetivo dessas representações.
- Pedir que façam o mesmo cálculo para o número de fichas azuis e verdes
- Solicitar que comparem os resultados obtidos no cálculo realizado, com aquilo que foi estimado.
- Se houver algum dado muito diferente, discutir em sala o motivo do possível erro ou imprecisão.
- Fazer os seguintes questionamentos aos alunos:

Qual deve ser a quantidade de sorteios a se realizar para se obter um resultado confiável?

2ª parte

- Dividir a turma novamente em grupos
- Orienta-los sobre uma nova coleta de dados, que deve ser feita fora do momento de aula (intervalo, entrada ou saída), da seguinte forma:

Pesquisar entre os colegas da escola a cor do celular, anotando os dados obtidos. Escolhendo a quantidade de alunos a serem questionados, e de que forma escolheriam as pessoas que iriam ser pesquisadas. Solicitar que tragam os resultados em determinada aula.

Tabela 2: Exemplo de tabela - Coleta de dados da atividade 1

Cor do celular	Nome	Idade	Turma

- Na aula em que os grupos trouxerem os resultados obtidos, pedir que eles apresentem esses resultados aos colegas.
- Utilizando a mesma ideia da parte anterior, usar a razão dos dados obtidos, para estimar uma porcentagem e relacioná-la com o total de alunos da escola
- Comparar os dados de cada grupo, e questionar aos alunos o motivo da obtenção de dados diferentes, como, por exemplo, a escolha da amostra e suas características, como aluno de turmas diferentes, gênero, etc.
- Propor outras questões de comparação de dados, obtenção da razão, e a relação com o todo. Para então formalizar os conceitos de Probabilidade frequentista, aleatoriedade, etc.

Análise e observações:

A atividade se inicia com um problema que deve ser resolvido em determinadas condições, espera-se que o aluno apresente questionamentos ou comente sobre outras formas de resolver esse problema de maneira mais ampla, como num sorteio sem reposição, dessa forma ele estará interagindo com a atividade proposta.

O objetivo do problema é instigar a curiosidade do aluno ao desafiá-lo, e fazer com que o aluno desenvolva seu próprio conhecimento por meio da experimentação, que de acordo com Zuffy & Onuchic (2007) é um dos objetivos da R.P.

Ao desenvolver essa atividade em grupo espera-se a construção de um diálogo entre os alunos, e que através desse diálogo haja uma possível troca de experiência e de conhecimento. Pois para Skovsmose (2008) eles devem ser estimulados a interagir com a realidade e, através do diálogo, identificarem os assuntos e os conceitos necessários a serem trabalhados.

Durante o desenvolvimento das atividades o papel do professor é ser apenas orientador, para que o aluno desenvolva seu próprio conhecimento por meio da experimentação, dessa forma , segundo Onuchic e Allevato (2011), nesse processo deve ocorrer a relação ensino-aprendizagem-avaliação, que deve ser observada pelo professor, em consequência disso o aluno deve ser levado a pensar matematicamente na resolução do problema.

Na resolução do problema em que são feitos os questionamentos aos alunos, o objetivo é de que eles construam o conhecimento por meio do que é compartilhado entre eles, é necessário que o professor ouça os alunos e dê espaços para que eles proponham uma solução para os questionamentos feitos, dando importância aos possíveis erros e acertos, podendo assim serem observados, a partir das discussões, os domínios e as fragilidades em um determinado assunto, tanto em relação aos interesses imediatos dos estudantes quanto em relação à perspectiva geral do processo educacional.

Espera-se que os próprios alunos cheguem a conclusão de que a razão entre as grandezas no experimento possa ser comparada proporcionalmente aos dados referidos, respostas como: metade são da cor vermelha" ou "10% das fichas são azuis" são esperadas, no intuito de que eles consigam enxergar essa proporção entre as informações.

Almeja-se com isso que o aluno chegue a conclusão que a razão entre a parte e o todo nos dá um valor importante para a resolução do problema, e só após isso o professor explicará a ideia de Probabilidade. Pois, conforme a R.P., de acordo com Onuchic (1999), o processo, a formalização, as conceituações, os simbolismos e as técnicas formais da matemática devem ser introduzidas após a resolução trabalhada, para que haja liberdade na construção do conhecimento.

Na segunda etapa, a proposta é mostrar para o aluno como o cálculo de Probabilidade frequentista pode ser utilizado na estatística, para obtenção de dados, quando queremos generalizar algo ou obter dados maiores. A ideia de pesquisa é fazer com que eles se interessem em buscar informações e possam partilhar experiência e conhecimento. O que para a E.M.C proporciona, dentro das situações de aprendizagem propostas, novos recursos e um ambiente que leve o aluno a agir e refletir, oferecendo a ele uma educação matemática de "dimensão crítica".

Para a E.M.C. a apresentação dos dados obtidos em sala de aula, a comparação de resultados e as estimativas feitas, colocariam em debate as diferenças entre os dados obtidos, pois a comunicação, os questionamentos e os desafios durante o processo de ensino e aprendizagem são importantes para provocar reflexões, que segundo Skovsmose (2008) estimula a criatividade matemática através das reflexões e questionamentos que podem ser feitas a partir dessas ações.

4.2. Atividade 2: Introdução a Probabilidade: Experimentação com Dados

- **Tempo**: 3 aulas de 50 minutos
- **Conhecimentos necessários**:

Leitura, escrita e interpretação de texto

Cálculos básicos: Adição, subtração, multiplicação e divisão

Fração, razão e proporção

Porcentagem

- **Conceitos trabalhados**:

Cálculo de Probabilidade

Conceito básicos de Probabilidade: Evento, evento equiprovável, espaço amostral

Razão e proporção

Estatística: coleta de dados e amostra

Representações de Probabilidade

- **Materiais necessários**:

2 Dados não viciados de seis faces para cada grupo

Lousa e giz para orientações gerais

- **Objetivos, competências e habilidades a serem desenvolvidos**

Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos.

Expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;

Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc).

Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações.

Formular hipóteses e prever resultados.

Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Saber calcular Probabilidades de eventos em diferentes situações, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de formulas especificas

- **Desenvolvimento**:

▪ Dividir a turma em grupos
▪ Entregar a cada grupo 2 dados
▪ Pedir que eles façam o lançamento dos 2 dados simultaneamente, observando os resultados e calculando a soma obtida com os números presentes nos dois dados após o lançamento.

  Orientar os alunos sobre a coleta e anotação dos dados obtidos

▪ Solicitar que repitam o procedimento por diversas vezes
▪ Após uns 8 minutos, abrir uma discussão em grupo do resultado mais obtido, e questioná-los o motivo disso.
▪ Pedir então que eles construam uma tabela da seguinte forma:

Tabela 3: Resultados possíveis para a soma do lançamento de 2 dados - Para o preenchimento pelos alunos

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1						
2						
3		5				
4						
5						
6						

Aonde a coluna representa um dos dados e linha o outro dado, pedindo que eles preencham a tabela com os resultados que podem ser obtidos,

Por exemplo: coluna 2, linha 3, seria o caso em que um dos dados teria resultado 2, e o outro resultado 3, a soma seria então 5.

Dessa forma a tabela ficaria preenchida da seguinte forma:

Tabela 4: Resultados possíveis para a soma do lançamento de 2 dados – Preenchida

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- Com os resultados possíveis em mão, retomar a discussão, fazendo os seguintes questionamentos a eles:

  Qual é o resultado mais provável?

  Quantos são os resultados possíveis?

  Se fosse uma aposta quais valores você escolheria para a possível soma?

  A partir disso formalizar os conceitos de espaço amostral e evento

- Se nenhum aluno durante a discussão fizer a sugestão de representar em forma de fração as chances de dar determinada soma, ou de outra forma, orienta-los da seguinte maneira:

Pedir que calculem a razão entre a chance de dar a soma 7 e total de resultados possíveis?

Realizar o mesmo cálculo para a soma 6 e 8 e para a soma 1 e 12

- Transformar essas frações obtidas em decimais e em frações, e questiona-los sobre o que essas informações indicam.
- Questionar sobre a chance de obter cara e coroa num lançamento de moeda, sem fazer experimentação, qual conclusão eles podem chegar?

A partir disso formalizar o conceito de cálculo de Probabilidade

Análise e observações:

A disposição inicial da atividade, em que haverá a divisão da turma em grupos, vem da ideia de proporcionar um ambiente de ensino e aprendizagem com a troca de conhecimentos entre os próprios alunos, que irão desenvolver a atividade e responder os questionamentos feitos com base na experimentação, o que é uma das características da etapa no ensino através da resolução de problemas, conforma Onuchic e Alevatto (2011).

Espera-se que durante os sorteios inicias os alunos já consigam fazer alguma observação dos dados obtidos, discutindo entre eles, e até mesmo tentem entender e justificar o porquê da soma resultar na maioria das vezes em sete.

Com isso, podemos afirmar que é uma tentativa de proporcionamos um “cenário para investigação”, de acordo com a E.M.C e as definições propostas por Skovsmose (2008), pois é um ambiente que oferece ao professor e ao aluno recursos para o desenvolvimento de uma investigação, em que o aluno deverá interpretar e agir sobre uma situação, que pode ser estruturada por meio da matemática, convidando os alunos a formularem questões e a procurarem explicações sendo eles os responsáveis pelo processo.

A orientação do professor na construção da tabela se dá no intuito de mostrar aos alunos que é possível, neste caso, apresentar todos os resultados possíveis para determinado experimento e analisa-los. Com isso se introduzir as ideias de espaço amostral e evento, ou seja, sair do exemplo e concretizar as ideias, generalizando e formalizando, após a experimentação e discussão. Esse movimento do concreto (problemas) para o abstrato (representações matemáticas); também é uma característica da R.P., segundo Onuchic (1999).

A ideia é ensinar matemática para os alunos fazendo com que eles compreendam aquilo que está sendo estudado, o desenvolvimento, os processos, a teoria e técnicas do que é proposto. Tudo isso, partindo também da discussão proposta, pois é necessário esse diálogo entre os alunos e professor, sobre o que deve ser observado dentro da experimentação.

Nesse momento espera-se que os alunos possam observar e chegar a conclusões como: “a chance da soma ser 7 é maior”, “a chance da soma dar 2 ou 12 é menor” ou “os resultados possíveis estão entre o 2 e o 12”, entre outras reflexões que podem ser feitas pelos alunos, e até mesmo questionamentos que podem ser direcionados ao professor. Segundo Skovsmose (2008) comunicação, questionamento e desafios durante o processo de ensino e aprendizagem são importantes para provocar reflexões, através da interação entre professor e alunos e entre os alunos.

O professor deve ser orientador nessa etapa, e leva-los a concluir que para se calcular as chances da soma ser de determinado valor devemos utilizar a razão entre a quantidade de vezes que aquele evento pode ocorrer, e o total de casos, espaço amostral, para somente depois disso o professor formalizar esses conceitos. Segundo Onuchic (1999) o processo, a formalização, as conceituações, os simbolismos e as técnicas formais da matemática são introduzidas após a resolução trabalhada, para que haja liberdade por parte dos alunos na construção do conhecimento.

Mesmo após os cálculos realizados é necessário que se faça uma análise dos dados obtidos, para que o aluno tente compreender o que indicam os números, e não somente resolvam um problema usando a mesma ideia. Um dos objetivos da E.M.C. é proporcionar, dentro das situações de aprendizagem propostas, novos recursos e um ambiente que leve o aluno a saber agir e refletir, o que segundo Skovsmose (2008) deve convidar os alunos a formular questões e a procurarem explicações, fazendo com que os alunos sejam os responsáveis pelo processo de aprendizagem. Por esse motivo se orienta no final da atividade que o professor apresente outros problemas para que o aluno consiga colocar em prática o que foi desenvolvido.

4.3. Atividade 3: Jogos de Sorte: Relação entre Análise Combinatória e Probabilidade

- **Tempo**: 3 aulas de 50 minutos
- **Conhecimentos necessários**:

Leitura, escrita e interpretação de texto

Cálculos básicos: Adição, subtração, multiplicação e divisão

Fração, razão e proporção

Porcentagem

Análise combinatória

Conceitos básicos de Probabilidade: Espaço amostral, evento, aleatoriedade.

- **Conceitos trabalhados**:

Probabilidade:

Razão e proporção

Representações de Probabilidade

Relação entre Probabilidade e análise combinatória.

- **Materiais necessários**:

Fichas de números de 1 a 20, para o sorteio.
Computador com as informações, para os alunos que irão ajudar na parte 1.
Lousa e giz para as anotações e orientações gerais

Folhas com os jogos da loteria, Mega-sena, Lotofácil, etc.

- **Objetivos, competências e habilidades a serem desenvolvidos**

Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na

Compreender os raciocínios combinatórios aditivo e multiplicativo na resolução de situações-problema de contagem indireta do número de possibilidades de ocorrência de um evento.

Saber resolver problemas que envolvam o cálculo de Probabilidades de eventos simples.

Capacidade de contextualizar, de estabelecer relações entre os conceitos e teorias estudados e as situações que lhes dão vida e consistência.

Capacidade de abstrair, de imaginar situações fictícias, de projetar situações ainda não existentes.

interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas.

Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade.

Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo.

Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

- **Desenvolvimento:**

1ª Parte:

a) Propor um jogo para os alunos da seguinte forma:

Pedir ajuda de 2 alunos para anotação de apostas e de valores de cada aluno da turma. Usar uma tabela na planilha do *excel* para anotarem os dados.

Cada aluno teria “5 reais imaginários” para fazer as apostas.

Em cada rodada os alunos podem se dirigir aos alunos que estão ajudando e anotar a sua aposta, para conferência posterior

Como serão 4 rodadas, cada aluno decide quanto irar usar do seu dinheiro imaginário em cada rodada

Sendo que as rodadas serão dispostas da seguinte forma

Tabela 5: Dados sobre as rodadas do jogo da sorte da atividade 3

1ª rodada:
Cada aposta deve ser da escolha 3 números de 1 a 10. O sorteio será de 3 números de 1 a 10 O valor da aposta é de 50 centavos O prémio para quem acertar os 3 números é de 25 reais imaginários.
2ª rodada:
Cada aposta deve ser da escolha 4 números de 1 a 10. O sorteio será de 4 números de 1 a 10 O valor da aposta é de 1 real O prémio para quem acertar os 4 números é de 40 reais imaginários.
3ª rodada:
Cada aposta deve ser da escolha 4 números de 1 a 8. O sorteio será de 4 números de 1 a 8 O valor da aposta é de 50 centavos O prémio para quem acertar os 4 números é de 10 reais imaginários.
4ª rodada:
Cada aposta deve ser da escolha 5 números de 1 a 20. O sorteio será de 5 números de 1 a 20 O valor da aposta é de 2 reais O prémio para quem acertar os 5 números é de 200 reais imaginários.

b) Após a explicação e apresentação das etapas dos jogos aos alunos, desenvolver cada rodada dos jogos, observando o comportamento e decisões tomadas por eles.

c) Se preciso, intervir orientando sobre algo, ou fazendo questionamento a eles, instigando o pensamento e a reflexão na tomada de decisões. Como:

Qual rodada é mais fácil de se ganhar?

Devemos apostar mais na rodada que o prêmio é maior ou na rodada que é mais fácil de ganhar?

Em quais números devo apostar? Há diferença? O número 7 tem mais chance de ser sorteado do que o 10?

d) Após o jogo, com a turma disposta em círculo, propor uma discussão dos resultados obtidos, como:

   Quem ficou com mais dinheiro imaginário no final?

   Você teria feito algo de diferente após o resultado?

   Quantas apostas devem ser feitas para se ter certeza de ganhar?

   É possível calcular as chances de se ganhar?

   Mostrar aos alunos qual foi o valor total dos gastos com as apostas

e) Pedir que eles tentem realizar o cálculo de apostas diferentes e calculem a Probabilidade de ganhar com número de apostas diferentes.

f) Realizar os cálculos de combinações diferentes em cada rodada do jogo e a Probabilidade de se ganhar.

2ª Parte

a) Dividir a turma em duplas

b) Apresentar aos alunos folhas de jogos, como a Quina, a Mega-Sena, a Lotofácil, etc., como por exemplo a figura 2, explicando a eles como cada jogo funciona.

Figura 2: Volante de aposta da loteria Mega Sena – Exemplo para a atividade

Fonte: Divulgação Caixa Econômica Federal

c) Pedir que calculem a quantidade de resultados possíveis diferentes, utilizando o conhecimento prévio em análise combinatória.

d) Após isso, calcular a Probabilidade de ganhar o prémio principal fazendo uma única aposta, ou fazendo outras apostas, com mais números.
e) Comparar os resultados com a Probabilidade da ocorrência de outros eventos, como nos exemplos da tabela 6:

Tabela 6: Exemplo da Probabilidade da ocorrência de alguns eventos

Evento	**Probabilidade**
Ataque cardíaco	1/300
Câncer	1/509
Acidente de carro	1/18.800
Acidente de barco	1/402.000
Terremoto	1/5.930.000
Acidente de avião	1/8.450.000

Fonte: Revista Brasília Encontro – publicado em 07/01/2015 por João Paulo Martins

Discutindo com a turma os resultados obtidos

Análise e observações:

Elaborar um jogo com a participação e organização dos alunos tem o objetivo de mostrar aos alunos que a matemática pode ser prática e que eles devem participar do processo de aprendizagem, refletindo sobre a situação proposta, ou seja, a ideia é construir um ambiente que ofereça ao professor e ao aluno recursos para o desenvolvimento de uma investigação, o que segundo a E.M.C., podemos chamar de "cenário para investigação", em que o aluno irá interpretar e agir sobre uma situação que pode ser estruturada por meio da matemática,.

A ideia é estimular os alunos a formularem questões e a procurarem explicações durante as rodadas, tomar decisões durante o jogo e fazer reflexões como "em qual rodada é mais fácil ganhar?", "Em qual rodada devo investir mais?" ou "Quando as chances são maiores?", entre outros. O professor pode observar e orientar durante o desenvolvimento das atividades, mas deixando que o aluno reflita e decida qual atitude tomar. Pois no ensino de matemática através da resolução de problemas "a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias” (Onuchic, 1999, p. 208).

Para a E.M.C. o processo educacional deve ser democrático, por isso, um dos instrumentos é o diálogo estabelecido no decorrer da atividade e a discussão feita após as rodadas. A troca conhecimento é importante, pois se espera que aquilo que está sendo discutido seja relevante, tanto em relação aos interesses dos estudantes quanto em relação à perspectiva geral do processo educacional.

Como o conhecimento em combinatória é um conceito prévio, espera-se que os alunos consigam estabelecer a relação das quantidades de apostas feitas e o total de apostas diferentes que é possível realizar, para então representar numericamente as chances de ganhar, construindo assim, a partir do conhecimento prévio, o conhecimento, um dos objetivos da R.P, conforme o trecho abaixo:

> Compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações, saber comunicar resultados e ser capaz de usar técnicas conhecidas são aspectos que devem ser estimulados em um processo de aprendizagem *através* da resolução de problemas. (Zuffy & Onuchic, 2007, p. 83)

Na segunda etapa, ao relacionar análise combinatória e Probabilidade com os jogos da loteria, um dos objetivos é de que os alunos compreendam a importância e a aplicabilidade da matemática no cotidiano e na sociedade, observando ser ela essencial ao seu desenvolvimento e expondo seu importante papel na análise e na busca de solução de problemas políticos e sociais, ou seja, por meio da situação proporcionada compreendam a necessidade desse conhecimento para se produzir argumentos e dados matemáticos em outras situações, característica essa da “matemática em ação” proposta por Skovsmose (2008), que é a forma como o autor apresenta a relação do que é vivenciado por nós, em nosso cotidiano e a matemática.

Por fim, no item “e”, da parte 2 em que a proposta é comparar os resultados com a Probabilidade da ocorrência de outros eventos com os exemplos da tabela 6, tem por objetivo fazer com que o aluno faça uma comparação dos valores obtidos em seus cálculos com dados reais e ao mesmo tempo em que faz uma análise matemática e um comparativo de valores, relacione isso com a realidade, desenvolvendo seu pensamento crítico, refletindo sobre o assunto e podendo entender nesse momento a matemática como um instrumento de argumentação, que é algo proposto por Skovsmose (2008), na E.M.C., desenvolvendo assim nos alunos a capacidade de fazer uma análise crítica da situação, levando-os a um pensamento reflexivo sobre questões sociais.

4.4. Atividade 4: Cor de lápis – Eventos independentes

- **Tempo**: 3 aulas de 50 minutos
- **Conhecimentos necessários**:

Leitura, escrita e interpretação de texto

Cálculos básicos: Adição, subtração, multiplicação e divisão

Fração, razão e proporção

Cálculo de Probabilidade simples

- **Conceitos trabalhados:**

Probabilidade, razão e proporção

Relação entre Probabilidade e análise combinatória.

Princípio multiplicativo no cálculo de Probabilidade em eventos independentes

- **Materiais necessários:**

Lousa e giz para as anotações

Lápis de cor para cada grupo, ou solicitar que tragam para a aula.

Mapa da região Sul e Sudeste em folha de sulfite

- **Objetivos, Competências e habilidades a serem desenvolvidas**

Saber calcular Probabilidades de eventos em diferentes situações-problema, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de fórmulas especificas

Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades. Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações.

Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema. Formular hipóteses e prever resultados. Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo, como proporção e o princípio multiplicativo.

Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas. Capacidade de abstrair, de imaginar situações fictícias, de projetar situações ainda não existentes

Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral.

Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

Relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

- **Desenvolvimento:**

Propor o seguinte problema a eles:

Deseja-se pintar no mapa da região Sul e Sudeste os estados do Rio Grande do Sul, Santa Catarina, Paraná, São Paulo, Minas Gerais, Espirito Santo e Rio de Janeiro, nesta ordem, mas os lápis de cor disponíveis para realizar essa tarefa são: 3 lápis vermelhos, 3 verdes e 1 laranja. Para decidir com qual cor pintar irá se fazer um sorteio de dentro do estojo que contem esse lápis.

Vamos propor dois cenários:

1- Com reposição do lápis no estojo
2- Sem reposição do lápis no estojo

- Apresentar um questionamento aos alunos, dando tempo para eles pensarem, trocarem ideias e tentar calcular, com as seguintes questões em ambos cenários:
  a) Quais são as chances do primeiro e do segundo estados serem pintados com a mesma cor?
  b) Quais são as chances dos três estados da região sul serem pintados de verde?
- Propor então a experimentação, dividindo a turma em grupos, e para cada grupo entregar um mapa dessas regiões e os lápis.
- Orienta-los então sobre o sorteio, da seguinte maneira:

  Primeiro com reposição:

  Sortear a cor e anotar no caderno, devolver o lápis no estojo e sortear a próxima cor. Anotando sempre o resultado até o final

  Fazer isso 10 vezes, observando quando haverá estados vizinhos com a mesma cor

  Depois sem reposição

  Sortear a cor anotar no caderno e sem devolver no estojo sortear a próxima cor até o último estado sempre anotando os resultados. Repetir a experiência 10 vezes, observando quando há estados próximos com a mesma cor.
- Após o experimento questionar os alunos em que caso houve mais estados vizinhos pintados da mesma cor, qual o motivo disso acontecer, debatendo os resultados diferentes.
- Após isso propor aos alunos que realizem os cálculos de Probabilidade da seguinte forma:
  1. Qual é a Probabilidade de:

a) Se pintar o estado do Rio Grande do Sul de verde? (com reposição)
b) Se pintar o estado de Santa Catarina de verde? (com reposição)
c) Se pintar o Rio Grande do Sul e Santa Catarina de verde? (com reposição) Usando as respostas dos itens “a” e “b”, que tipo de relação podemos utilizar para encontrarmos a resposta do item “c“? Há alguma operação matemática que podemos utilizar para encontrarmos a solução?

d) Se pintar o estado do Rio Grande do Sul de verde? (sem reposição)
e) Se pintar o estado de Santa Catarina de verde? (sem reposição)
f) Se pintar o Rio Grande do Sul e Santa Catarina de verde? (sem reposição) Usando as respostas dos itens “d” e “e”, que tipo de relação podemos utilizar para encontrarmos a resposta do item “f“? Há alguma operação matemática que podemos utilizar para encontrarmos a solução?

- Espera-se que os alunos consigam entender e chegar a conclusão que podemos multiplicar as Probabilidades para que ocorram os dois eventos, mas após isso explicar aos alunos a ideia de evento independente, o cálculo de Probabilidade nesses casos.
- Propor outras questões que envolvam Probabilidade de eventos independentes e até exemplos que não são com eventos independentes, para uma discussão da diferença entre eles.

- **Análise e observações:**

A apresentação do problema inicial e as propostas sobre as formas de pintar o mapa tem por objetivo desenvolver no aluno a capacidade de resolver problemas, analisar situações diferentes para que no desenvolvimento da atividade, o raciocínio e a curiosidade do aluno sejam estimulados desenvolvendo assim um conhecimento próprio por meio da experimentação, de acordo com o ensino através da resolução de problemas.

Ao propor casos diferentes, como o de dividir com reposição ou sem reposição dos lápis, o professor pode mostrar aos alunos que as situações podem diversificar e são variáveis, o professor nesse momento pode também observar os questionamentos e sugestões dos alunos, dinamizando a situação dada, pois na resolução de problemas, o papel do professor é de provocar situações de aprendizagem em sala de aula baseando o ensino em diálogos e discussões.

A resolução do problema inicial, a experimentação, os questionamentos, e a construção do conceito tem por foco principal que eles compreendam aquilo que está sendo estudado, o desenvolvimento, os processos, a teoria e técnicas do que é proposto e de outras situações que podem aparecer. Evitando a indicação do caminho para a resolução do problema, para que somente após isso as conceituações formais da Matemática sejam introduzidas pensando na amplitude do conhecimento por parte dos alunos na sua construção.

De acordo com a R.P. esse movimento de ida e vinda, entre teoria e prática é importante ao desenvolver experiências e situações matemáticas distintas, busca-se isso nos questionamentos finais sobre a Probabilidade de se pintar certo Estado do mapa com determinada cor.

No ensino através da R.P o aluno deve compreender e aprender a utilizar determinada ideia matemática fazendo a conexão com outras situações problemas a serem resolvidas, é o que se espera no desenvolvimento dessa atividade. Os objetivos propostos para o ensino da matemática são de fazer com que os alunos consigam desenvolver:

> formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e outras áreas, poder construir conhecimentos matemáticos e desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los e até propor novos problemas a partir deles. (Onuchic, 1999, p. 209)

Podemos citar como relação dessa atividade com a E.M.C a construção do conhecimento e da habilidade de diferenciação de eventos independentes, pois nessa etapa o papel do professor é de orientar o aluno na aquisição de sua autonomia e propor questões que norteiem discussões e o pensamento reflexivo do aluno, o que vai possibilitar que ele tome decisões e avalie a partir de seus conhecimentos matemáticos os caminhos a seguir, segundo Skovsmose (2008).

Sobre a estrutura e a disposição da atividade baseada na R.P. podemos observar e comparar alguns tópicos citados por Onuchic e Alevatto (2011):

1. Leitura em conjunto: problema e experimentação apresentados, auxilio nas dificuldades apontadas na interpretação;
2. Resolução do problema: busca da resolução do problema em grupo, o aluno deve desenvolver a ideia de Probabilidade em eventos independentes, ou observar características pertinentes;
3. Observar e incentivar: nos questionamentos propostos pelo professor e orientação sobre a diferença nos eventos e casos da cor do lápis, levando o aluno ao raciocínio na construção do caminho para a resolução do problema;
4. Registro na lousa, plenária e busca do consenso: na parte da exposição da atividade em classe onde os alunos são convidados a dispor as soluções durante o diálogo e as discussões;
5. Formalização do conteúdo: a conceituação é presentada e estruturada no fim da atividade.

A relação ensino-aprendizagem-avaliação está apresente nessa atividade, pois ao mesmo tempo que o professor a desenvolve está fazendo com que o aluno participe ativamente dessa atividade, e que a avaliação ocorra nesse período, ou seja, enquanto o professor ensina, também avalia e o aluno deve participar ativamente.

4.5. Atividade 5: Política e Probabilidade - União de eventos

- **Tempo**: 4 aulas de 50 minutos
- **Conhecimentos necessários:**

Leitura, escrita e interpretação de texto

Cálculos básicos: Adição, subtração, multiplicação e divisão

Fração, razão e proporção

- **Conceitos trabalhados:**

Probabilidade, razão e proporção

Probabilidade de união de eventos

- **Materiais necessários:**

Lousa e giz para as anotações e orientações gerais

Folha com as tabelas para preenchimento com os dados

- **Objetivos, competências e habilidades a serem desenvolvidas**

Saber calcular Probabilidades da união de eventos em diferentes situações-problemas.

Capacidade de argumentação, de construção de análises, justificativas de procedimentos, demonstrações etc. Capacidade de abstrair, de imaginar situações fictícias, de projetar situações ainda não existentes.

Selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema

Compreender a cidadania como participação social e política, assim como exercício de direitos e deveres políticos, civis e sociais, adotando, no dia-a-dia, atitudes de solidariedade, cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro.

Posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas. Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;

Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo, como a estatística e o tratamento da informação. Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

- **Desenvolvimento:**

- Iniciar a atividade pedindo aos alunos que se dividam em grupos e façam uma pesquisa de opinião com as pessoas da cidade, fazendo a essas pessoas as seguintes perguntas:

  1. O que acham da gestão do prefeito atual?

  Com as opções de resposta: ótimo, bom, regular ou ruim (utilizando a tabela 7 e 8)

  2. E nas próximas eleições para prefeito em quem você votaria? (utilizando a tabela 9 e 10)

Anotando as respostas, e algumas características de quem opinou, como o sexo e o bairro em que reside.

- Orienta-los a criar uma tabela com os dados e como preenche-la, tanto de modo geral (Tabela 11), quanto específicos por sexo, ou por bairro

Tabela 7:Exemplo de tabela com dados sobre a pergunta 1, separado por sexo

Dados – Pergunta 1					
Quantidade	Ótimo	Bom	Regular	Ruim	Total
Sexo Masculino					
Sexo Feminino					
Total					

Tabela 8: Exemplo de tabela com dados sobre a pergunta 1, separado por bairro

Dados – Pergunta 1					
Quantidade	Ótimo	Bom	Regular	Ruim	Total
Bairro A					
Bairro B					
Bairro C					
Total					

Tabela 9: Exemplo de tabela com dados sobre a pergunta 2, separado por sexo

Dados – Pergunta 2					
	Candidato A	Candidato B	Candidato C	Outros candidatos	Total
Sexo Masculino					
Sexo Feminino					
Total					

Tabela 10: Exemplo de tabela com dados sobre a pergunta 2, separado por bairro

Dados – Pergunta 2					
	Candidato A	Candidato B	Candidato C	Outros candidatos	Total
Bairro A					
Bairro B					
Bairro C					
Total					

Tabela 11: Exemplo de tabela geral com dados sobre a pergunta 1 e 2

Dados – Pergunta 2					
	Candidato A	Candidato B	Candidato C	Outros candidatos	Total
Ótimo					
Bom					
Regular					
Ruim					
Total					

Observação: a tabela 10 pode ser dividida também por sexo e bairro

- Pedir que tragam os resultados em determinada aula, com as tabelas e solicitar que calculem as seguintes Probabilidades:
  a) Ao escolher uma pessoa aleatoriamente, qual é a Probabilidade dela avaliar a qualidade da gestão atual como ruim?
  b) Ao escolher uma pessoa aleatoriamente, qual é a Probabilidade dela votar no candidato A nas próximas eleições?
  c) Ao escolher uma pessoa aleatoriamente, quais são as chances dela avaliar a qualidade da gestão atual como ruim **e** votar no candidato A nas próximas eleições?
  d) Ao escolher uma pessoa aleatoriamente, quais são as chances dela avaliar a qualidade da gestão atual como ruim **ou** votar no candidato A nas próximas eleições?

Se os alunos tiverem dificuldade em responder essas perguntas, o professor deve orientá-los e dar dicas de como devem proceder, sem dar a resposta

Após o cálculo perguntar aos grupos como fizeram para resolver os problemas, e junto com eles explicar a maneira correta de se calcular a Probabilidade em cada alternativa, e na última alternativa explicar e generalizar a forma de se calcular Probabilidade da união de dois eventos

Repetir os questionamentos com outras informações sobre Probabilidade, como:

a) Opção ótima na avaliação da gestão ou Candidato “B” nas próximas eleições
b) Opção Regular na avaliação da gestão ou candidato “C” nas próximas eleições

Pedir que façam cálculos também com as outras tabelas, por bairro ou por gênero, explicando as diferenças de Probabilidade caso a caso.

Abrir uma discussão com eles sobre os dados obtidos, fazendo os seguintes questionamentos:

1. Com o cálculo de Probabilidade é possível fazer alguma afirmação sobre o cenário político? Qual?

2. Os eleitores insatisfeitos com a atual gestão, votariam em quem nas próximas eleições?
3. É possível informar características do eleitor de algum candidato, através dos dados obtidos?

Por fim, apresentar outros problemas ou tabelas aos alunos, com outras informações pedindo que calculem a Probabilidade de ocorrerem determinados eventos. Como por exemplo os problemas abaixo:

a) Preencha a tabela 12 com o número de alunos da turma com as características de sexo e se estão ou não usando óculos

Tabela 12: Dados da turma- proposta de exercício

Turma			
	Usam óculos	Não usam óculos	Total
Sexo Masculino			
Sexo Feminino			
Total			

Ao escolher aleatoriamente um aluno da turma, qual é a Probabilidade de se escolher um aluno do sexo feminino ou um aluno que não usa óculos? (pode ser feita variações desse questionamento)

b) No sorteio aleatório de um número natural de 1 a 30, qual é a Probabilidade desse número ser múltiplo de 2 ou 5?

Nesse exercício observar se o aluno consegue compreender e escrever todos os casos possíveis, e não somente aplicar fórmulas.

- **Análise e observações:**

Nessa atividade busca-se ensinar Matemática através da resolução de problemas, ao apresentar situações-problemas como parte importante no início do processo de ensino e aprendizagem para depois desenvolver as técnicas matemáticas em consequência desses problemas, observando a relação do concreto (dados políticos) e do abstrato (Probabilidade da união de eventos).

Para a E.M.C a educação deve ser democrática, por isso são importantes os trabalhos em grupo e a exposição dos resultados, com diálogo e participação de todos durante a relação de ensino e aprendizagem. Também na matemática temos que observar a importância do seu ensino na formação do cidadão, pois é ela uma ferramenta de argumentação e formação social e cada vez mais a sociedade utiliza-se de conhecimentos científicos e tecnológicos.

A abordagem política vem ao encontro com o ensino da Matemática que contribui para que o aluno se insira no mundo, no mercado de trabalho, nas relações sociais e culturais, pois o objetivo é usar a matemática como um "caminho de pensar" numa visão mais ampla. Saber comparar e relacionar dados contribui com uma educação que é vista como um preparo para o futuro.

Conforme o conceito de atividades referentes a uma realidade, definido por Skovsmose (2008), podemos dizer que essa proposta de ensino busca possuir determinadas características desse conceito, que é uma atividade baseada em situações da vida real, essa atividade deve apresentar condições diferenciadas de diálogo e comunicação em sala, ao propor questionamentos e expor informações na situação problema em que o aluno interaja com a realidade investigada de tal modo que ele participe ativamente do processo de aprendizagem.

Ao fazer referência à vida real abordando a política local, durante o ensino de matemática, está se buscando uma reflexão sobre a presença da matemática no cotidiano, com o objetivo de transformar o aluno num indivíduo reflexivo e crítico, buscando propor um ambiente com recursos de modo a levar o aluno a isso. Espera-se que na atividade essas características sejam observáveis durante o processo de ensino e aprendizagem e sirvam como facilitadores de ensino, o mais importante é ensinar o aluno a pensar.

Política, que é o tema abordado nesta atividade, leva também o aluno a reflexão do papel da Matemática nas questões sócio-políticas e econômicas ao fazer uma reflexão sobre a utilidade disso no dia-a-dia da sociedade e não somente dos procedimentos mecanizados, essa importância é citada por Skovsmose (2008).

Um dos objetivos dessa atividade é mostrar aos alunos de que forma a Matemática pode servir como instrumento de argumentação e decisão contribuindo para a sua formação como cidadão, utilizando o ensino de Matemática como um meio para desenvolver no aluno uma autonomia de raciocínio lógico, o que é chamado de “autonomia intelectual” por Skovsmose (2008).

4.6. Atividade 6: Jogo da dica - Probabilidade Condicional

- **Tempo**: 3 aulas de 50 minutos
- **Conhecimentos necessários:**

Leitura, escrita e interpretação de texto

Cálculos básicos: adição, subtração, multiplicação e divisão

Fração, razão e proporção

Cálculo de Probabilidade simples, conceitos de evento e espaço amostral.

- **Conceitos trabalhados:**

Probabilidade, razão e proporção

Representações de Probabilidade

Probabilidade condicional

- **Materiais necessários:**

Lousa e giz para as anotações

Baralhos comuns com 52 cartas

- **Objetivos, competências e habilidades a serem desenvolvidas**

Compreender Probabilidade condicional na resolução de situações-problemas. Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações.

Selecionar estratégias de resolução de problemas. Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades. Formular hipóteses e prever resultados.

Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas.

Relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

Capacidade de contextualizar, de estabelecer relações entre os conceitos e teorias estudados e as situações que lhes dão vida e consistência.

- **Desenvolvimento:**

1ª Parte

- Propor um jogo de desafio aos alunos, com as seguintes orientações:

Um aluno sai da sala por um momento, um objeto, como por exemplo uma carta, será entregue a um dos alunos, que irá esconder o objeto.

O aluno volta para a sala e deve adivinhar com quem está o objeto escondido, porém ele só pode dar um palpite por vez, sendo que depois de cada palpite o professor pode dar uma dica com características da pessoa que está com o objeto, por exemplo: "a pessoa está usando óculos" ou "a pessoa senta do lado da janela", fazendo com que o aluno elimine alternativas, para encontrar o objeto.

Para dinamizar o jogo, pode ser elaborado um sistema de pontuação, como por exemplo, quem acerta com quem está o objeto com menos dicas recebe mais pontos.

Desenvolver o jogo em sala de aula, por uns 30 minutos

Após o jogo, fazer algumas perguntas aos alunos

1. Qual é a Probabilidade do aluno acertar como quem está o objeto no primeiro palpite?
2. E após a primeira dica, qual é a Probabilidade do aluno acertar?
3. E após a segunda dica, qual é a Probabilidade do aluno acertar?

4. Por que as chances aumentaram?

Comentar nas respostas dos alunos quem são os elementos que representam o evento, e qual seria o espaço amostral em cada caso.

2ª Parte

Propor outro jogo, dessa vez em grupos de 4 alunos, dando as seguintes orientações:

Cada grupo terá um baralho, um aluno por vez, em cada grupo, retira uma carta, e não deve mostrar aos colegas, os outros integrantes do grupo devem tentar adivinhar qual carta está com ele, sendo que cada um pode dar um palpite por vez. Se um integrante do grupo acertar sem dicas ele ganha 5 pontos.

Após isso o aluno que está com a carta deve dizer qual o naipe da carta, e novamente seus colegas do grupo devem tentar adivinhar qual a carta, se alguém acertar ganha 3 pontos.

E por fim, se ninguém tiver acertado qual carta é, quem está com a carta deve dizer se a carta é uma letra, um número par ou um número ímpar, e novamente os colegas devem dar palpites, quem acertar ganha um ponto.

Os alunos devem desenvolver esse jogo durante 30 minutos. O Professor deve acompanhar os alunos e orientá-los durante a realização da atividade.

Após a realização da experimentação proposta, o professor deve fazer questionamentos aos alunos acerca da Probabilidade de se acertar qual é a carta em cada etapa do jogo.

E só então, após isso, propor uma discussão com a turma sobre de que forma podemos generalizar o cálculo da Probabilidade de ocorrer determinado evento em condições específicas, ou seja, sabendo que determinado evento ocorreu, formalizando assim o conceito de Probabilidade condicional e a forma de calcular.

Propor outros exercícios envolvendo Probabilidade condicional para finalizar a abordagem do assunto.

- **Análise e observações:**

No início da atividade, onde temos o desenvolvimento dos jogos, um dos objetivos é fazer com que o aluno se interesse e consiga compreender o que está aprendendo, de acordo com Onuchic (1999) compreender deve ser o principal objetivo do ensino, e quando esse conhecimento é gerado pelo próprio aluno é melhor, e desenvolver no aluno a própria compreensão do que está sendo estudado, de acordo com R.P. é um meio importante para isso, pois torna mais aprofundada suas habilidades matemáticas, as aumentando de forma considerável.

Na parte da atividade em que os alunos são questionados, a ideia é que o professor construa uma situação de aprendizagem em que ele não seja protagonista, mas sim o aluno, é uma tentativa de mudança da abordagem do professor e do aluno em sala de aula através de um olhar diferenciado. Essa é uma característica do ensino através da Resolução de Problemas.

Na busca da solução, a investigação dos alunos é um elemento essencial no trabalho, os alunos devem envolver-se no processo educacional, pois para a E.M.C. eles devem ser estimulados através do diálogo, identificando os conceitos a ser trabalhado, não sendo essa competência imposta, mas sim desenvolvidas durante a atividade. Não podemos reduzir o ensino de Matemática com compreensão a trabalhos em grupos ou atividades ligadas ao cotidiano, utiliza-se tudo isso como recurso para um bom ensino, se fazendo uma análise de como pode ser ensinada e aprendida da melhor maneira.

Durante a atividade questionamentos como: “Por que fica mais fácil descobrir?”, “Qual pergunta facilitaria mais a descoberta da carta?”, estão diretamente relacionados às reflexões desenvolvidas a partir das ações das atividades propostas, e no desenvolvimento da criatividade matemática, isso é proporcionado através daquilo que a E.M.C. chama de “cenário para investigação” que é um ambiente oferecido ao aluno com recursos para uma investigação, reflexão e questionamento para o aluno interpretar e agir sobre determinada situação problema que pode ser solucionada através da Matemática, convidando os alunos a formularem tais questões e procurar uma resposta, sendo assim responsáveis pelo processo de aprendizagem do conceito matemático.

4.7. Atividade 7: Analisando o bairro - Probabilidade Geométrica

- **Tempo**: 4 aulas de 50 minutos
- **Conhecimentos necessários:**

Cálculos básicos: Adição, subtração, multiplicação e divisão

Cálculo de Probabilidade simples

Interpretação de tabelas e gráficos

Leitura e compreensão de mapas e escalas

Área de figuras planas

- **Conceitos trabalhados:**

Probabilidade Geométrica e representação

Razão e proporção

Relação entre Probabilidade e geometria

- **Materiais necessários:**

Lousa e giz para as anotações

Régua e compasso, ou fazer a construção do mapa no computador utilizando o "Geogebra"

Trazer mapas de bairros da cidade ou solicitar que os alunos pesquisem.

- **Objetivos, competências e habilidades a serem desenvolvidas**

Saber calcular Probabilidade geométrica de eventos em diferentes situações-problema.

Desenvolver a capacidade de argumentação, de construção de análises, justificativas de procedimentos, demonstrações etc. Selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

Desenvolver a capacidade propositiva, de ir além dos diagnósticos e intervir na realidade de modo responsável e solidário. Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas.

Desenvolver a capacidade de contextualizar, de estabelecer relações entre os conceitos e teorias estudados e as situações que lhes dão vida e consistência. Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

Relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente. Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.

Posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas.

Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo, como conhecimento geométrico, áreas de figuras planas e tratamento da informação

- **Desenvolvimento:**

O professor precisa dedicar 1 aula para orientação da atividade, da seguinte forma:

Separar a turma em grupos, cada grupo deverá fazer pesquisa do mapa dos bairros e da cidade, e ter com eles uma cópia desse mapa, com a área da região que eles irão utilizar, se possível.

Após a obtenção do mapa, os alunos devem coletar dados nesse bairro, em forma de pesquisa, fazendo as seguintes perguntas a alguns moradores desses bairros:

1. “Você já teve dengue?”
2. “Alguém da sua família já teve dengue?”

O aluno deve coletar as respostas e local da coleta do dado, anota-las e organiza-las em tabelas.

Tabela 13: Exemplo de tabela com os dados da pesquisa da atividade 7

	Já teve dengue?		Alguém da família já teve dengue?	
Resposta	Sim	Não	Sim	Não
Bairro A				
Bairro B				
Bairro C				

O aluno deve marcar no mapa aonde foram obtidas respostas “sim”

Após a obtenção desses dados, marcar um dia para diálogo e desenvolvimento da atividade em sala de aula. Neste dia pedir que cada grupo exponha os dados obtidos para a turma.

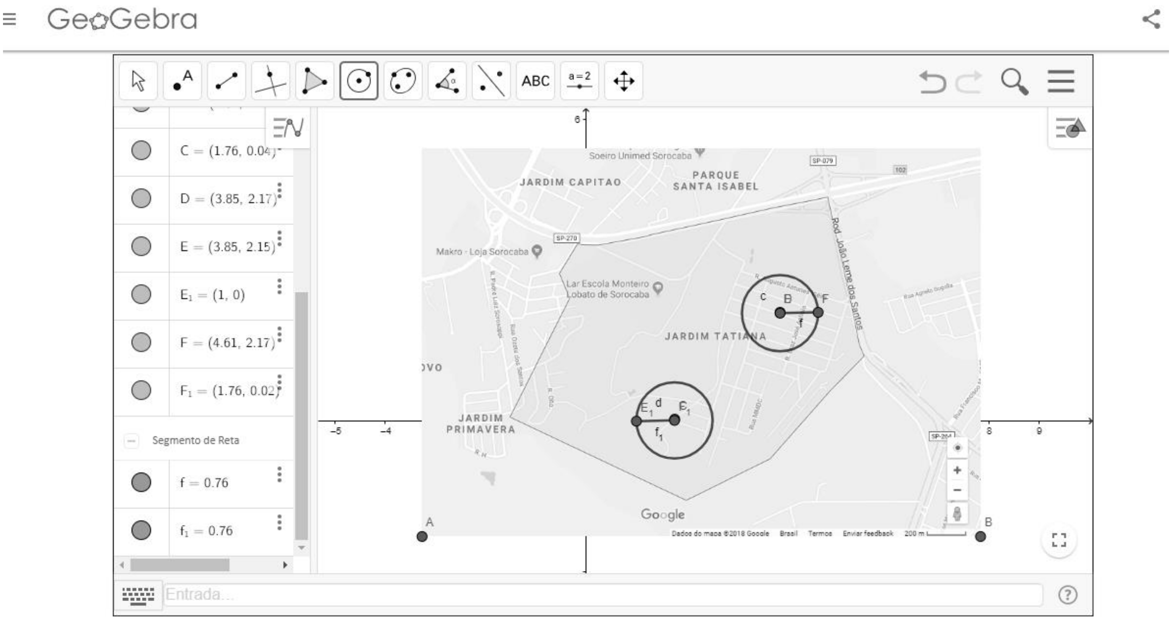
Apresentar aos alunos as seguintes questões:

1. “Em qual desses bairros há mais casos de dengue?”
2. “Em qual bairro há menos casos?”
3. “Em qual lugar ou região há mais chances de se contrair dengue?”

O professor deve explicar o seguinte aos alunos:

Supor que onde obteve respostas positivas para caso de dengue e num raio de 200 m desse local é considerado área de risco de dengue. Pedir então que eles façam essa marcação, do círculo correspondente a área de risco no mapa, utilizando o Geogebra (como o exemplo na figura 3, se o professor tiver acesso a computadores, com o aplicativo Geogebra instalado, para os alunos desenvolverem a atividade) ou utilizando régua e compasso num mapa impresso.

Figura 3: Exemplo de mapa com as marcações solicitadas



Fonte: Google Maps (com adaptações)

Discutir e pedir que eles escrevam em forma de razão as chances de se estar em uma área de risco. Ouvir as sugestões deles de que forma podemos quantificar essas chances, para só depois disso explicar a ideia de Probabilidade geométrica utilizando áreas e pedir que eles calculem a Probabilidade de estar num local de risco de dengue no bairro e na cidade.

Por fim, demonstrar os conceitos e a forma de se calcular a Probabilidade geométrica e propor outros problemas envolvendo o tema. Como exemplo os problemas abaixo:

1. Há um tesouro escondido num terreno retangular, com 25 metros de largura por 40 metros de comprimento, qual é a Probabilidade do tesouro estar no quadrado de 12 metros de largura no centro do terreno?
2. Ao lançar um dardo num alvo de forma circular de 20 cm de diâmetro, sabendo que o alvo foi acertado, qual é a Probabilidade de acertar uma marcação em forma de um quadrado de lado 2 cm nesse alvo?

- **Análise e observações:**

O intuito dessa atividade é fugir dos padrões e características tradicionais e propor uma atividade que nos remete a incertezas, que está diretamente relacionada a ideia de crítica, pois busca-se desenvolver uma situação inovadora e propõem possibilidades novas levando a reflexão de forma direta no trabalho do professor, que assume uma "zona de risco" ao abandonar tradições educacionais.

Busca-se classificar essa atividade como "referente a uma realidade" (Skovsmose, 2008), ao desenvolver situações baseadas na vida real e oferecer atividades diferenciadas, usando questionamentos e informações necessárias sobre a vivência em comunidade dos alunos, fazendo com que a realidade esteja presente nas interações de ensino e aprendizagem.

A E.M.C. enfatiza que a matemática tem papel importante no desenvolvimento do aluno na resolução de problemas, na análise de busca de soluções políticas e sociais, por isso a importância do desenvolvimento do pensamento e da formação matemática do aluno.

Na etapa da atividade em que se utiliza da tecnologia para resolução de problemas está diretamente ligada às questões sócio-políticas, pois ao mesmo tempo que contribui na elaboração e desenvolvimento da aula numa perspectiva de visão experimental e tecnológica está se desenvolvendo o acesso a informação, juntamente com a inclusão no ensino de Matemática.

A relação de tudo que vivemos e vemos em nosso dia-a-dia e a Matemática é denominada "matemática em ação", que é tudo aquilo que serve como instrumento social ou se tem uma utilidade ao nosso redor. Nessa atividade a matemática em ação é observada na relação do conteúdo de Probabilidade com o problema social "dengue", analisando a situação da comunidade em que vive, dessa forma busca-se mostrar a confiabilidade e a responsabilidade da matemática na sociedade que é um dos objetivos da E.M.C.

Sobre a forma como essa proposta de atividade se estrutura em comparação com o que foi exposto na discussão de R.P. podemos citar:

- Apresentação e leitura: na explicação da pesquisa que é proposta e na apresentação do problema, busca-se explicar o que deve ser feito e qual deve ser a reflexão sobre os dados a serem obtidos, expondo objetivos, sanando as dificuldades de compreensão daquilo que é proposto;

- Resolução do problema: Após a coleta das informações, na resolução do que é proposto em sala de aula, o aluno deve construir ou iniciar o desenvolvimento do conteúdo de Probabilidade geométrica;
- Observar e incentivar: Isso ocorrerá na troca de dados e informações e o professor deve observar, questionar, incentivar o trabalho em grupo para que eles desenvolvam o caminho para resolver o problema;
- Registro, exposição e formalização: Todos os alunos da turma em conjunto com o professor devem chegar a uma conclusão sobre a forma de utilizar, calcular e representar Probabilidade geométrica.

4.8. Discussão das atividades didáticas

Nas atividades propostas busquei contemplar o máximo de enfoques conceituais estudados com o intuito de desenvolver no aluno a capacidade de compreender e utilizar todos esses conceitos em situações problema diversificadas. Na atividade 1 busquei desenvolver o conceito de Probabilidade no enfoque frequentista, o cálculo e estruturas nesse caso experimental, além das ideias de acaso e incerteza. Já na atividade 2 o enfoque clássico da Probabilidade é desenvolvido, assim como o cálculo como forma de razão entre 2 valores, estrutura e as definições de evento e espaço amostral.

A atividade 3 aborda a relação entre o tema análise combinatória e Probabilidade ao desenvolver uma atividade voltada aos jogos de azar, dando ênfase ao cálculo do espaço amostral ao encontrar todos os casos possíveis. A ideia de eventos independentes é abordada na atividade 4 ao desenvolver no aluno o raciocínio matemático em casos diferentes de Probabilidade, na resolução dos problemas com ou sem reposição do lápis de cor no estojo, desenvolvendo a capacidade de calcular a Probabilidade de 2 eventos ocorrerem simultaneamente. Ao relacionar o tema tratamento da informação através de tabelas na atividade 5 buscou-se desenvolver o conceito do cálculo da Probabilidade da união de eventos, ou seja, a Probabilidade de um evento ocorrer “ou” outro evento ocorrer.

Na atividade 6, é desenvolvida a ideia de Probabilidade condicional, ao estudar representações do espaço amostral em situações diferentes com condições já estabelecidas nos jogos e atividades propostas. Por fim, na atividade 7 ao relacionar à geometria a ideia de Probabilidade na pesquisa proposta ao aluno, a intenção foi desenvolver no aluno as habilidades de cálculo de Probabilidade geométrica utilizando ferramentas tecnológicas como o Geogebra, além de relacioná-las à algumas ideias do estudo de estatística.

Na R.P. para Onuchic (1999) um problema passa a ser importante ao instigar a curiosidade do aluno, por desafiá-lo, e faz com que ele desenvolva seu próprio conhecimento por meio da experimentação. Isso foi contemplado neste trabalho ao iniciar os problemas sempre partindo de experimentações como nas atividades 1 (experimentos com fichas), atividade 2 (experimentos com dados) e atividade 4 (experimentos com lápis), observando o comportamento e a frequência na situações propostas, ou por meio de jogos como na atividade 3 (jogo da sorte) e atividade 6 (jogo da dica), buscando incentivar a curiosidade e desafiando a pensar como ponto de partida do ensino.

É recomendado que o estudante seja capaz de compreender determinado conceito ou ideia matemática ao relaciona-lo a diversos contextos, compreendendo sua aplicabilidade em diversas situações. Nesse sentido busquei relacionar as situações de aprendizagem propostas a fatos relacionados diretamente ao dia-a-dia do aluno como a própria localidade nas atividades 5 e 7, objetos pessoais e comuns ao cotidiano do aluno ao abordar coisas como o lápis de cor na atividade 4 e a pesquisa sobre aparelhos celulares na atividade 1. Tudo isso com o objetivo de mostrar ao aluno a proximidade da Matemática como o seu cotidiano.

No desenvolvimento da resolução de problemas, os problemas são importantes como início do processo de ensino, já a formalização, as conceituações, os simbolismos e as técnicas formais da Matemática são introduzidas após a resolução trabalhada. Em todas as atividades propostas busquei desenvolver isso, ao propor a formalização, somente após o debate e a compreensão daquilo que estava sendo estudado, pois o principal objetivo para a R. P. é que os alunos compreendam aquilo que está sendo estudado, o desenvolvimento, os processos.

É recomendável que o estudante consiga construir relações entre várias ideias matemáticas contida num problema com outros temas já estudos, como conceitos matemáticos ou até de outras áreas do conhecimento, como por exemplo é esperado na atividade 3 que o aluno consiga compreender a relação de análise combinatória e a Probabilidade, ou a relação da geometria e da Probabilidade na atividade 7, ou até mesmo observar uma relação da geografia e da matemática na utilização de mapas nas atividades 4 e 7.

Para Onuchic (1999) o aluno deve aprender matemática resolvendo problemas e aprender matemática para resolver problemas, o que foi buscado desenvolver nas atividades através de questionamentos e problemas iniciais e no final das atividades com outras perguntas e outros problemas relacionados que foram propostos. Para a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação é necessário um olhar diferente do professor, ao construir situações de aprendizagem em que ele não seja foco principal, por isso os questionamentos propostos para a turma com o objetivo de fazer o aluno pensar e refletir.

Sobre o roteiro proposto na teoria de R.P. alguns dos pontos, não foram estabelecidos diretamente ou de maneira separada, mas sim foram pensados como características a serem desenvolvidas como: a leitura na maioria das atividades pode ser relacionada com a compreensão do problema proposto para depois buscar resolvê-lo, para que haja a construção do conhecimento proposto. Já a parte de observar, incentivar e orientar foi proposta de maneira direta ao apresentar os questionamentos nas atividades levando os alunos a pensarem, estimulando a desenvolvimento da atividade.

Sobre o registro, plenária e busca de um consenso que trata o roteiro, é proposto o desenvolvimento nas atividades em forma de debate e na busca de uma solução em grupo dos problemas propostos, para que os alunos compreendessem o conceito que estava sendo estudado, e somente no final da atividade ocorrer a formalização do conteúdo e a estruturação dos conceitos e procedimentos matemáticos.

Na Educação Matemática Crítica, segundo Skovsmose (2001), o ensino deve ser baseado em diálogos e discussões e, não somente, estruturado na fala do professor, o professor passa a ser orientador do trabalho em sala de aula. Por isso nas atividades propostas as ideias de trabalhos em grupos e o diálogo constante entre os alunos e o professor, e os questionamentos que o professor deve fazer com o objetivo de desenvolver o raciocínio deles, pois o envolvimento dos alunos no processo educacional deve ser estimulado na interação com a realidade e através do diálogo identificar os assuntos e os conceitos necessários a serem trabalhados. Nesse diálogo e discussão há troca de experiências, de modo a tornar a educação matemática como parte das preocupações com a democracia dentro da sociedade a partir da sala de aula.

Ao tratar de temas do cotidiano, ou de assuntos vivenciados pelos alunos em seu dia-a-dia, busquei mostrar ao aluno a utilidade da matemática, ou seja, é sugerido que o conteúdo seja apresentado aos alunos de maneira que eles vejam uma Matemática em ação, que é a forma como Skovsmose (2001) se refere a relação do que é vivenciado por nós, em nosso cotidiano e a matemática, que pode ser observada ao nosso redor, com inúmeras utilidades, servindo como instrumento para a nossa vida em sociedade.

Além disso, debates, inovações são inseridas ao trabalhar com a questão do uso das tecnologias. O professor não deve proibir o uso de calculadora nessas atividades proposta, pois não interfere na aprendizagem do conceito trabalhado, também em algumas atividades há a proposta do uso do computador para auxiliar o desenvolvimento dela, como exemplo, o jogo da atividade 3 e a construção do mapa da atividade 7. Segundo Skovsmose (2001), o uso desses equipamentos em aula está diretamente relacionado ao ganho de aprendizagem e ao mesmo tempo pode ser compreendido como uma inserção, uma relação de inclusão do aluno socialmente.

Proporcionar situações de aprendizagem que propicie a aprendizagem dos alunos foi um dos objetivos dessa proposta de ensino, ou seja, construir um “cenário para investigação”, um ambiente que oferece ao professor e ao aluno recursos para o desenvolvimento de uma investigação, no qual o aluno irá interpretar e agir sobre uma situação matemática, busquei isso através de jogos, experimentos e coleta de dados. Além disso nas atividades há sempre orientações e questionamentos que o professor pode fazer pois comunicação, questionamento e desafios durante o processo de ensino e aprendizagem são importantes para provocar reflexões.

Podemos citar como exemplo a atividade 3 na comparação da Probabilidade de ganhar um jogo da loteria com a Probabilidade de ocorrer um evento do cotidiano, ou a atividade 5 que se utiliza de uma pesquisa de opinião sobre a política para se calcular Probabilidade condicional e a atividade 7 que se trata de uma questão social importante que é a dengue ao mesmo tempo que se estuda matemática, com o objetivo de mostrar ao aluno a necessidade da matemática na sua formação social como cidadão, buscando uma atividade que segundo a E.M.C. pode ser classificada como atividades referentes a uma realidade, ao serem baseadas em situações da vida real, ou seja buscou-se construir um ambiente que leve o aluno a agir e refletir, oferecendo a ele uma educação matemática de “dimensão crítica”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse trabalho é de apresentar uma proposta de ensino a partir de uma pesquisa sobre a história da Probabilidade, conceituação, definição e teoremas, assim como, fundamentar essas atividades utilizando a metodologia de ensino através de Resolução de problemas e da Educação Matemática Crítica. Dessa forma para a finalização deste trabalho, apresento nesse capítulo reflexões após a pesquisa e construção da sequência de ensino, uma conclusão acerca das questões e objetivo desse trabalho e propostas futuras de aplicação dessa sequência de atividades em sala de aula.

Observei durante minha pesquisa a importância da Probabilidade e da aprendizagem dela no Ensino Básico, ao estudar sua aplicabilidade, formas de utilização e a necessidade de compreensão para se raciocinar ou tomar decisões em questões que tratam do tratamento da informação ou da estatística. Pude observar isso, tanto na construção conceitual e histórica do assunto, quanto nas orientações pedagógicas dos documentos oficiais e dos referenciais estudados. O qual podemos comparar a motivação da escolha do tema Probabilidade desse trabalho, que era devido a importância do conceito para a formação do aluno, ao servir como instrumento para a sua vida em sociedade.

A compreensão dos estudos, definições, conceitos e desenvolvimento histórico de Probabilidade e a pesquisa sobre Resolução de problemas e Educação Matemática Crítica, facilitaram o meu entendimento sobre vários aspectos estudados para elaboração das atividades para o ensino de Probabilidades no Ensino Médio, que era o objetivo proposto neste trabalho. Atividades essas que foram estruturadas no capítulo 4 como produto final de tudo que foi pesquisado nos demais capítulos.

No capítulo 1 foi escrito sobre o desenvolvimento histórico e conceitual de Probabilidade, mostrando grandes pensadores e obras que contribuíram na construção do que temos hoje formalizado e também as definições de Probabilidade na abordagem frequentista e clássica, assim como formas diferentes de encontrarmos e calcularmos Probabilidade, como exemplo, a Probabilidade Condicional e a Geométrica, esse estudo e aprofundamento conceitual foram de grande importância na compreensão do tema e sua estrutura para depois observarmos de que forma podemos trabalhar isso com os alunos em sala de aula.

Sobre o referencial teórico que foi estudado no capítulo 3, podemos dizer que foi importante na construção metodológica e estruturação das atividades, pois foi possível compreender os conceitos e ideias do estudo da Educação Matemática e as contribuições para o ensino desenvolvida em Resolução de Problemas e na Educação Matemática Crítica. Esse estudo contribuiu de maneira significativa na elaboração das atividades, ao mostrar um olhar crítico sobre a forma de aprender matemática dos alunos, ao buscar compreender a melhor forma de ensinar a Matemática.

Os preceitos estudados sobre o ensino através da R.P. e na E.M.C., busquei inserir nas atividades em forma de propostas, apesar de que na aplicação das atividades, outros fatores como a turma, ou a estrutura escolar podem interferir diretamente em algumas dessas características e abordagens.

Algumas dificuldades e problemas podem aparecer no desenvolvimento das atividades, cabe ao professor tentar adaptar ou corrigir as falhas encontradas. Observando e avaliando a proposta de ensino com minha experiência de professor em escola pública posso citar algumas dessas dificuldades que podem ocorrer: a coleta de dados pode não acontecer da maneira desejada, pois os alunos podem demonstrar desinteresse ou falta de desenvoltura social na coleta desses dados, ou até má organização do grupo, também dentro de uma sala há alunos com pensamentos e gostos diferentes, o que dificulta em saber qual assunto é do interesse dos alunos para desenvolver a atividade e também em sala de aula durante os debates e discussão com a turma, muitos alunos podem ter dificuldade em se comunicar na frente de todos.

Por fim, demonstro aqui meu interesse em desenvolver essas atividades propostas em sala de aula, para observar de forma prática e objetiva alguns dos aspectos e objetivos esperados, avaliando, encontrando e corrigindo as possíveis falhas que essa proposta possa apresentar na prática em sala de aula. Analisando dentro do possível a relação ensino-aprendizagem-avaliação desenvolvida e os resultados positivos e negativos do ensino através dessa proposta. O objetivo é desenvolver pesquisas futuras a partir dessas ideias, aplicando todas as atividades propostas tentando alterá-las o mínimo possível para alguma turma do Ensino Médio da Escola Pública em que eu leciono, para a coleta de dados e análise posterior dos resultados e possível publicação dessa pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, E. A. *Probabilidade Geométrica no Ensino Médio: Uma experiência usando Geogebra.* 2017. 61 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Paraíba, Paraíba, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília: MEC, 1997.

CAIXA ECONÔMICA FEDERAL. Volante (frente e verso) Mega-Sena. (documento icônico). Juiz de Fora - MG, 2018.

CARBELIM, C. C. L. Letramento Probabilístico no Ensino Médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos. 2015.141 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) –Pontifícia universidade Católica, São Paulo, 2015.

CARVALHO, P. C. P. Métodos de Contagem e Probabilidade. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 97 p.

COUTINHO, C. Q. S. Conceitos Probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 23, p. 50-67, 2007. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12991/12092>. Acesso em: 25 de mar. 2018.

DUARTE, P. C. X.; Desenvolvendo cidadãos atuantes por meio do ensino da matemática: o caso do programa PAIE do governo de Minas Gerais. 2004.153 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

FONSECA, V. J. *PROBABILIDADE - UMA PROPOSTA DE ENSINO - O uso do Teorema da Multiplicação de Probabilidades como um facilitador e* *integrador de diversas abordagens deste assunto*. 2013. 48 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiás, 2013.

GONDIM, H. F. *Probabilidade e Probabilidade Geométrica: Conceitos e Exemplos Aplicáveis no Ensino Básico*. 2013. 78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mato Grosso do Sul, 2013.

GOOGLE MAPS. **[Jardim Tatiana – Sorocaba/SP]**. [2017] Disponível em: <https://www.google.com.br/maps/place/Jardim+Tatiana,+Sorocaba++State+of+S%C3%A3o+Paulo/@23.5413474,47.5046234,15z/data=!3m1!4b1!4m5!3m4!1s0x94c58ba8d9e770ab:0xa6f66bed80dc65b0!8m2!3d23.5407507!4d-47.4944096>. Acesso em: 14 fev. 2018.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Combinatória, Probabilidade. 7. ed. São Paulo: Editora Atual, 2004. 208 p.

JACOBINI, O. R.; A modelagem matemática como instrumento de ação política na sala de aula. 2004. 267 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio Volume 2.** 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006, 303 p.

LIMA, F. M. B. *O Ensino de Probabilidade coo Uso do Problema do Jogo dos Discos.* 2013. 121 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

LOPES C. E., MEIRELLES E. O Desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística. In: ENCONTRO REGIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 18, 2005, Campinas. **Anais...** Campinas, SP: Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas. p. 1-8.

MARTINS, J. P. Qual o meio de transporte mais seguro? Brasília Encontro. Disponível em: http://sites.correioweb.com.br/app/noticia/encontro/atualidades/2015/01/07

/interna_atualidades,1959/qual-o-meio-de-transporte-mais-seguro.shtml. Acesso em: 26 jan. 2017.

MORAES, J. A. O. *Probabilidade Geométrica e Aplicações*. 2014. 35 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiás, 2014.

MORGADO, A. C.. CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta-Coleção Profmat**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015, p. 192.

NOE, M. História da Probabilidade. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/historia-Probabilidade.htm>. Acesso em: 30 de nov. 2017.

ONUCHIC, L. R. A Resolução De Problemas na Educação Matemática: Onde Estamos e Para Onde Iremos? In: JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO EM MÁTEMÁTICA, 4, JORNADA REGIONAL DE EDUCAÇÃO EM AMTEMÁTICA, 17, 2012, Passo Fundo. **Anais...** Passo Fundo, SP: Universidade de Passo Fundo. p. 1-15.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática,** v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

REIS, S. R.; *Matemática financeira na perspectiva da educação matemática crítica*. 2013. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade de Santa Maria, Santa Maria, 2013.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias*. 1. ed. São Paulo: Secretaria de Educação, 2011. 72 p.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica.** 1. ed. Campina: Papirus, 2008. 138 p.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica: a questão da democracia**. 3. ed. Campinas: Papirus, 2001. 160 p.

WAGNER, E. O Problema do Macarrão e um Paradoxo Famoso. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/34/6.htm>. Acesso em: 20 de nov. 2017.

ZUFFY, E. M.; ONUCHIC, L. R. O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n.11, p.79-97, 2007.