UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RENAN DANTAS MEDRADO

São Carlos - SP
Março de 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RENAN DANTAS MEDRADO

ANÁLISE MICROLOCAL NAS CLASSES DE DENJOY-CARLEMAN

Tese apresentada ao PPGM da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Orientador: Prof Dr. Gustavo Hoepfner

São Carlos - SP
Março de 2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Medrado, Renan Dantas
M492a Análise microlocal nas classes de Denjoy-Carleman / Renan Dantas Medrado. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
131 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. FBI. 2. Conjunto frente de onda. 3. Propagação de regularidade. 4. Estrutura hipo DC. 5. Operador tipo Mizohata. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Renan Dantas Medrado, realizada em 07/03/2016:

Prof. Dr. Gustavo Hoepfner
UFSCar

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
UFSCar

Prof. Dr. Jose Ruidival Soares dos Santos Filho
UFSCar

Prof. Dr. Andrew Seth Raich
UARK

Prof. Dr. David Jornet Casanova
UPV

Sumário

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por guiar minha vida, me consolar e animar em momentos de dificuldade.

Aos meus pais, David Lúcio e Miriam, pela educação, incentivo e amor. A minha irmã, sobrinho e cunhado, pelo companheirismo, pelos momentos de alegria e pelos de tristeza que compartilhamos.

A minha esposa Ellen Tammy por estar em minha vida, pelo companheirismo, por me ajudar, apoiar, animar e amar.

Ao programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, pela oportunidade da realização deste trabalho. Agradeço aos professores César Rogério de Oliveira, Dirceu Penteado, Edivaldo Lopes dos Santos, Gerson Petronilho, Gustavo Ferron Madeira, Gustavo Hoepfner, João Nivaldo Tomazella, José Ruidival Soares dos Santos Filho, Luís Antônio Carvalho dos Santos, Luiz Roberto Hartmann Junior, Pedro Luiz Queiroz Pergher e Rafael Fernando Barostichi, os quais foram responsáveis por disciplinas que cursei ou coordenador do PPGM.

Ao professor Gustavo Hoepfner, pela orientação, pelos ensinamentos, pelas horas dedicadas a este trabalho (incluindo algumas noites e finais de semana) e pela amizade.

Agradeço aos professores, Jorge Guillermo Hounie, José Ruidival Soares dos Santos Filho, Davi Jornet Casanova e Andrew Raich por terem aceito o convite para compor a banca examinadora da defesa da tese de doutorado, pelas perguntas e sugestões. Agradeço especialmente aos professores Jornet e Raich por terem aceito vir de tão longe (Espanha e EUA respectivamente).

Agradeço a todos amigos que fiz no DM, pelas conversas, risadas, choros (em épocas de provas e exames) e pela companhia nos cafés, Karen, Vanderléa, Juan, Renan, Elard, Luciele, Miguel, Igor, Danilo, Carlos, Pedrinho, Marcos, Sérgio (peruano), Sérgio (Japa), Alan, Sandrinha, Alex, entre tantos outros que não caberiam nessa página. Agradeço também aos amigos de graduação cuja amizade e apoio continuam mesmo com a distancia, Farid, Pedro, Bianca e Suzana.

À CAPES, pelo auxilio financeiro.

Resumo

Usando uma classe de transformadas FBI generalizadas introduzida por S. Berhanu e J. Hounie, em [16], nós completamente caracterizamos a regularidade e a micro regularidade nas classes de Denjoy-Carleman (não quase analíticas), incluindo as classes de Gevrey e a transformada definida por M. Christ em [27]. Como aplicação apresentaremos um resultado para propagação de singularidades (Teorema 2.4.5).

Para variedades com estruturas hipo-Denjoy-Carleman de coposto arbitrário (Definição 3.1.2) apresentaremos uma definição de $M-$conjunto frente de onda e resultados similares aos obtidos em [2], [7], [30] e [32].

No caso de equações não lineares, seguindo [1], [41], [53] e [56], introduziremos a noção de equação não linear do tipo Mizohata e estudaremos a micro regularidade Denjoy Carleman para soluções u de equações não lineares. Para os principais resultados de [1], [13, 14], [35] e [43] apresentaremos uma versão nas classes DC.

Abstract

Using a more general class of FBI transforms, introduced by S. Berhanu and J. Hounie in [16], we completely characterize regularity and microregularity in Denjoy-Carleman (non quasi analytic) classes, which includes the Gevrey classes and M. Chist FBI transform defined in [27] as examples.

Using the classic FBI transform we completely describe the $M-$wave-front set of the boundary values of solutions in wedges $\mathcal{W}$ of hypo Denjoy-Carleman structures $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$ (Definição 3.1.2) proving similar results first obtained by [1], [5], [13, 14], [35] and [43].

Inspired by [53], [56], [41] and [1] we introduce the notion of nonlinear Mizohata type equations and study microlocal Denjoy-Carleman regularity for solutions u of non linear equations, extending the main results of [1], [5], [13, 14], [35] and [43].

Introdução

O principal objetivo deste trabalho é estudar a regularidade microlocal nas classes de Denjoy e Carleman (DC) a partir das transformadas FBI (Teorema 2.3.5 e Teorema 2.3.6). Como consequência apresentaremos uma caracterização para micro-regularidade DC de soluções de equações diferenciais parciais (Teorema 2.4.5 e Teorema 4.2.5) e uma definição para o conjunto frente de onda de soluções de estruturas hipo DC (Teorema 3.4.3).

Sabemos que o espaço das funções analíticas é um subespaço das funções Gevrey que são subespaços das funções C^∞. Nesse trabalho nos concentraremos nas classes de Denjoy-Carleman, as quais constituem classes intermediarias mais gerais que as Gevrey. Entre outros motivos a concepção das funções DC se dá graças aos trabalhos [19] e [20] de E. Borel, nos quais são apresentados exemplos de conjuntos E cujos elementos são funções $f : U \overset{abeto}{\subset} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ que não são analíticas e satisfazem a seguinte propriedade

$$f^{(j)}(0) = 0, \;\; j = 0, 1, \dots \quad \Longrightarrow \quad f \equiv 0. \tag{1}$$

Estes exemplos motivaram J. Hadamard (em 1912) propor a seguinte questão: "existe uma condição em termos de crescimento da derivada que garanta a propriedade (1)?". Separadamente A. Denjoy ([31]) e T. Carleman ([25]) apresentaram uma resposta para a questão de J. Hadamard. Para isso eles consideraram funções $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que para todo $K \Subset \mathbb{R}$ existe uma constante $C > 0$ [1] de modo que

$$\sup_{x \in K} |f^{(j)}(x)| < C^{j+1} M_j, \;\; j = 0, 1, \dots, \tag{2}$$

em que $M = (M_j)$ representa uma sequência crescente. Tais funções são chamadas funções de Denjoy-Carleman (DC) e denotadas por $\mathcal{E}_M$. Além disso é comum a definição de $\mathcal{E}_M(U)$ para funções $f : U \overset{\text{aberto}}{\subset} \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, para tanto basta trocar os naturais j em (2) por multi-índices $\alpha \in \mathbb{N}^n$

[1]Ao longo deste texto usaremos diversas desigualdades envolvendo potencias de constantes as quais poderão ser aumentadas um número finito de vezes. Para simplificar a notação, quando não houver confusão, denotaremos as constantes por C (ou seja, denotaremos por C o máximo das constantes previamente consideradas).

e M_j por $M_{|\alpha|}$ (veja por exemplo [42]). As funções em $\mathcal{E}_M(U)$ que satisfazem a propriedade (1) são chamadas funções quase analíticas (caso contrário, não quase analíticas). Denjoy e Carleman apresentaram uma condição sobre a sequência M que é satisfeita se e somente se o espaço $\mathcal{E}_M(U)$ é quase analítico. As classe Gevrey ($M_j = j!^s$) são exemplos de classes DC não quase analíticas. Em [6], T. Bang mostra que a interseção de todas as classes não quase analíticas $\mathcal{E}_M$ é igual a classe das funções real-analíticas. Todavia a interseção de todas classes Gevrey G^s contem a classe quase analítica $\mathcal{E}_M \supsetneq C^\omega$, com $M_j = j!(\log j)^j$. Quando trabalhamos com classes DC, dependendo do objetivo do estudo, é comum assumir que a sequencia M satisfaça certas propriedades, as quais implicam (ou são equivalentes) em propriedades da classe $\mathcal{E}_M$. Por exemplo, no importante trabalho [45] S. Mandelbrojt exibiu condições sobre a sequência M que equivalem ao fechamento da classe $\mathcal{E}_M$ quanto à diferenciações. No primeiro capítulo desta tese apresentamos uma rápida revisão de funções DC. Para uma revisão mais detalhada recomendamos [51], [44] e [42].

Por volta de 1970, independentemente e por diferentes pontos de vista, vários matemáticos iniciaram o estudo da classificação de singularidades de acordo com o espectro. Talvez o primeiro tenha sido M. Sato o qual introduziu e estudou o espectro singular analítico de hiperfunções ([54]). Em [36] L. Hörmander usando operadores pseudo diferenciais introduziu a notação $WF(u)$ (conjunto frente de onda suave). Posteriormente, usando múltiplas funções corte (funções C^∞ com suporte compacto, limitadas inferiormente por 0 e superiormente por 1 e identicamente 1 em uma vizinhança de um certo ponto), L. Hörmander definiu o conjunto frente de onda analítico via transformada de Fourier (veja [37] e [39, Proposition 8.4.2]). Também via transformada de Fourier em [38, 39] L. Hörmander definiu o conjunto frente de onda com respeito a classes de Denjoy-Carleman. A definição de conjunto frente de onda analítico apresentada por L. Hörmander pode ser de complicada aplicabilidade, comparando com o caso C^∞, já que necessita considerar um sequência de funções corte. Uma adaptação da transformada de Fourier foi proposta por J. Bros e D. Iagolnitzer, com essa transformada eles definiram e estudaram o espectro essencial (sem necessidade de considerar uma família de funções corte) [22, 23]. Em 1976 J. M. Bony, [18] unificou as diferentes noções: i)espectro essencial de J. Bros e D. Iagolnitzer; ii) o espectro singular analítico de Sato; e iii) o conjunto frente de onda de Hörmander. Assim, é natural que a transformada de Fourier-Bros-Iagolnitzer (transformada FBI) seja a ferramente escolhida para estudar o conjunto frente de onda hipo analítico para as estruturas hipoanalíticas, as quais constituem uma generalização de estruturas analíticas (veja [7])). A caracterização de micro-regularidade também foi estudada J. Sjöstrand em [54], o qual usou a seguinte generalização das transformadas FBI

$$Fu(x,\xi)=\int_{\mathbb{R}^m} e^{i\xi\Phi(x,x')}a(x,x',\xi)\chi(x')u(x')dx', \quad x,\xi\in\mathbb{R}^m;$$

em que Φ é uma função holomorfa, a um símbolo analítico e $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$.

No capítulo V do livro [15], vemos que as transformadas FBI também podem ser úteis para estudar regularidade (e micro-regularidade) C^∞. O recente trabalho [16] S. Berhanu e J. Hounie mostraram que a micro-regularidade (suave e analítica) de distribuições pode ser estudada a partir de transformadas mais gerais (as quais denotaremos por FBI-BH) que as transformadas FBI . Além disso, S. Berhanu e J. Hounie apresentam uma aplicação para as transformadas FBI generalizadas que dificilmente poderia ser demonstrada usando a transformada FBI clássica. Para o estudo de regularidade (local) Gevrey, M. Christ em [27] apresentou uma classe de transformadas $FBI's$ generalizadas (que em certo sentido é um caso particular das classes de transformadas FBI-BH, veja Observação 2.1.2) que podem ser usadas para caracterizar regularidade Gevrey. No segundo capítulo deste trabalho consideraremos as transformadas FBI-BH definidas para ultradistribuições no sentido mais geral. Além disso apresentaremos uma subclasse de transformadas possuem uma fórmula de inversão (veja Lema 2.1.5). Motivados pelas condições para existência de ultradistribuições a valores de fronteira apresentadas por Z. Adwan e G. Hoepfner em [4] e a definição de micro-regularidade apresentada em [15] apresentamos uma definição de micro-regularidade DC a partir de ultradistribuições a valores de fronteira (Definição 2.3.3). No Exemplo 2.1.3 apresentamos uma classe de transformadas FBI-BH ($\mathcal{F}_p^\lambda$, a qual é mais geral que as transformadas consideradas em [16, Chapter 4] e [27]) as quais caracterizam regularidade e micro-regularidade DC (Teoremas 2.2.4, 2.3.5 e 2.3.6). Por fim, mostramos que a definição de micro-regularidade DC aqui apresentada é equivalente a definição apresentada por L. Hörmander (e L. Rodino [49], no caso Gevrey).

Em 1983 M. S. Baouendi, C. H. Chang e F. Treves, no importante trabalho [7], introduziram as estruturas hipoanalíticas, funções hipoanalíticas, micro-regularidade hipoanalítica, transformada FBI em estruturas hipoanalíticas, caracterizam micro hipoanaliticidade pelo decaimento desta transformada FBI (no caso de coposto zero) e para poder estabelecer a noção de conjunto frente de onda nas estruturas hipoanalíticas provaram a invariância do conjunto frente de onda hipoanalítico por subvariedades maximalmente reais (é importante destacar que os autores usaram uma mudança de variável que implica que a subvariedade é analítica real, mas uma mudança de variável apropriada para o caso geral foi introduzida por M. G. Eastwood e C. R. Graham em 2003 no artigo [32], possibilitando assim a validade dos resultados de [7] no caso de variedades arbitrárias). O caso de variedades C^∞ com estruturas localmente integráveis foi estudado por Z. Adwan e G. Hoepfner em [2], neste trabalho os autores provaram a invariância do conjunto frente de onda suave por variedades maximalmente reais. No terceiro capítulo deste trabalho introduziremos as estruturas hipo Denjoy-Carleman (Definição 3.1.2) e a partir de distribuições a valores de fronteira definiremos o conjunto frente de onda nas classes DC (no caso de coposto zero). Assim como feito por M. S. Baouendi, C. H. Chang and F. Treves em [7] (no caso de estruturas hipoanalíticas) apresentaremos uma condição suficiente e necessária (via decaimento da transformada FBI) para um ponto no cotangente da variedade pertencer ao conjunto frente de onda de classe DC. Além disso, também provaremos a independência do conjunto frente de onda $\mathcal{D}_M$ por subvariedades maximalmente reais e deste modo poderemos definir o conjunto frente de onda DC em estruturas hipo Denjoy-Carleman de coposto arbitrário.

Uma aplicação bem conhecida para transformadas FBI (demonstrada por N. Hanges e F. Treves em [35]) é que o conjunto frente de onda analítico de uma solução de uma equação não linear ($\partial_t u = f(x,t,u,u_x)$, em que $f = f(x,t,\zeta_0,\zeta)$ é holomorfa em todas variáveis) está contido no conjunto característico do operador linearizado ($\mathcal{L}^v = \partial_t - \sum_{j=1}^N f_{\zeta_j}(x,t,u,u_x)\partial_{x_j}$). Com hipóteses mais fracas sobre a função f, supondo-a suave nas variáveis (x,t), J.Y. Chemin em [26] provou via métodos de cálculo paradiferencial que o conjunto frente de onda suave de uma solução da equação $\partial_t u = f(x,t,u,u_x)$ está contido no conjunto característico do operador linearizado. Posteriormente, em [5], via transformada FBI C. Asano apresentou uma demonstração alternativa para este o principal resultado do artigo [26]. G. Petronilho e R. F. Barostichi mostraram em [11] que o conjunto frente de onda Gevrey da solução de uma equação linear de classe Gevrey (coeficientes são funções Gevrey) está contido no conjunto característico e em [12] eles demonstraram que no caso de sistemas este resultado continua válido. Em [7] e [32, Theorem 3.1] encontramos a demonstração do importante resultado:

Teorema 0.0.1 (Theorem 3.1, [32])**.** *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade hipoanalítica, $E \subset \mathcal{M}$ uma subvariedade fortemente não característica (com respeito à um fibrado $\mathcal{V}$) e $\mathcal{W}$ uma cunha em $\mathcal{M}$ com aresta E. suponha que $f \in \mathcal{D}'(E)$ é o valor de fronteira de uma solução de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$. Então $WF^E f \subset (\Gamma^T(\mathcal{W}))^\circ$ (em que o polar se refere à dualidade entre TE e T^*E).*

No trabalho [43], N. Lerner, Y. Morimoto e C.-J. Xu estudam a analiticidade microlocal do problema de Cauchy quase linear do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_j(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = b(x,t,u), & 0 < t < T \quad x \in \Omega \\ \qquad u(x,0) = \omega(x), & \qquad x \in \Omega \end{cases} \tag{3}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e $T > 0$. As funções a_j, b, $j = 1, ..., N$, são restrições em $\Omega \times [0,T] \times V_3$ de funções holomorfas definidas em algum domínio $V = V_1 \times V_2 \times V_3 \subset \mathbb{C}^{N+2}$. Considerando

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} a_j(x,t,v)\frac{\partial}{\partial x_j} + b(x,t,v)\frac{\partial}{\partial v} \text{ e}$$

$$\nu_0 = (a_1, \ldots, a_N),\ \nu_1 = (L(a_1), \ldots, L(a_N)) = L(\nu_0), \ldots, \nu_k = L(\nu_{k-1}) = L^k(\nu_0),$$

em [43] é encontrada a demonstração do seguinte resultado:

Teorema 0.0.2. *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e u uma solução do problema de Cauchy* (3), *C^{k+1} para $t > 0$ em uma vizinhança de $(x_0, 0)$. Se para cada $x \in \Omega$ tivermos $\Im\nu_j(x, 0, \omega(x)) = 0$, $\Im\nu_k(x, 0, \omega(x_0)) \neq 0$, para todo $0 \leqslant j < k$, então $\forall \xi^0 \in \mathbb{R}^N$ tais $\Im\nu_k(x_0, 0, \omega(x_0)) \cdot \xi^0 > 0$, o ponto $(x_0, \xi^0) \notin WF_a(\omega)$.*

Note que o Teorema 0.0.2 não considerar o caso $k = 0$, todavia o Teorema 0.0.1 é uma versão do Teorema 0.0.2 para o caso $k = 0$. Nos trabalhos [13] e [14] S. Berhanu, prova que múltiplos colchetes de Lie de L e seu conjugado também dão informações sobre regularidade microlocal do traço ω. O análogo para equações não lineares foi estudado por Z. Adwan e S. Berhanu em [1], apresentando um surpreendente trabalho no qual os autores apresentaram uma extensão para o Teorema 0.0.2; para uma equação $u_t = f(x, t, u, u_x)$, em que $f = f(x, t, \zeta_0, \zeta)$ é suave e holomorfa nas duas últimas variáveis. Para ser mais específico em [1] foi demonstrado o seguinte resultado:

Teorema 0.0.3. *Seja k natural, Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, T real, $f = f(x, t, \zeta_0, \zeta)$ uma função C^∞ em $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$, holomorfa nas variáveis (ζ_0, ζ) . Se a equação não linear de primeira ordem*

$$\partial_t u = f(x, t, u(x,t), u_x(x,t)),\ \ 0 < t < T,\ \ x \in \Omega$$

tem uma solução C^{k+1}, para $t \geqslant 0$, em uma vizinhança de $(x_0, 0)$ e

$$\forall x \in \Omega,\ \ 0 \leqslant j < k,\ \ \Im(\mathcal{H}^j f_\zeta)^v(x,0) = 0,\ \ \Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0,0) \neq 0, \tag{4}$$

então, para todo $\xi^0 \in S^{N-1}$ *tal que* $\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0, 0) \cdot \xi^0 < 0$, *temos que o ponto* (x_0, ξ^0) *não pertence ao conjunto frente de onda do traço* $\omega \doteq u(x, 0)$ *(*$(x_0, \xi^0) \notin WF(\omega)$*).*

Em [1] também foi demonstrada uma versão analítica do resultado acima, supondo f holomorfa em todas variáveis. No quarto capítulo deste trabalho, motivados pela definição de operadores do tipo Mizohata generalizado - apresentada por F. Treves em [56], J. Sjöstrand em [53] e J. Kim e S.-O. Kim em [41]- apresentaremos uma definição de DC-equações não lineares do tipo Mizohata. Para essas equações apresentaremos uma versão DC do Teorema 0.0.3 (veja Teorema 4.2.5).

Capítulo

1

Pré-requisitos

1.1 Espaços de Denjoy-Carleman

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados básicos (os quais podem ser encontrados em [42] e [44]) sobre os espaços de Denjoy-Carleman. Além disso, também apresentaremos resultados técnicos novos que serão importantes nas próximas seções.

Ao longo deste trabalho consideraremos uma sequência $M = (M_j)$ de números positivos.

Definição 1.1.1. *Dado um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ dizemos que uma função $f \in C^\infty(U)$ é uma função de classe $M-$Denjoy-Carleman (ou simplesmente DC) em U se para todo compacto $K \subset U$ existe uma constante $C > 0$ tal que:*

$$\sup_{x \in K} |\partial_x^\alpha f(x)| \leqslant C^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|}, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^m. \tag{1.1}$$

Denotaremos o conjunto de todas as funções DC em U por $\mathcal{E}_M(U)$ e o subespaço das funções em $\mathcal{E}_M(U)$ com suporte compacto será denotado por $\mathcal{D}_M(U)$.

Observe se $M_j = j!^s$ ($s \geqslant 1$) a classe $\mathcal{E}_M(U)$ coincide com a classe de Gevrey $G^s(U)$ (para o leitor interessado em informações sobre as classes de Gevrey recomendamos a leitura de [49]).

É importante destacar que certas propriedades sobre a sequência M são equivalentes a (ou implicam em) propriedades sobre os espaços $\mathcal{E}_M(U)$. É comum considerar sequências M satisfazendo certas propriedades para que $\mathcal{E}_M$ satisfaça propriedades satisfeitas pelas classes de Gevrey, para maiores informações recomendamos a leitura de [42], [45], [46] e [51]). É usual supor que a sequência M satisfaça:

C1. (Log convexidade)

$$M_p^2 \leqslant M_{p-1}M_{p+1}, \;\; p = 1, 2, \ldots; \tag{1.2}$$

C2. (Estabilidade sobre ação de operadores diferenciais) Existem constantes A e H tais que:

$$M_p \leqslant AH^p \min_{0 \leqslant q \leqslant p} M_q M_{p-q}, \quad p = 0, 1, 2, ;s \tag{1.3}$$

C3. (Não quase analiticidade forte) Existe constante A tal que:

$$\sum_{p=q}^{\infty} \frac{M_p}{M_{p+1}} \leqslant Aq\frac{M_q}{M_{q+1}}, \;\; q = 1, 2, \ldots. \tag{1.4}$$

Observe que a sequencia $M_j = (j!)^s$ (com $s > 1$) satisfaz as condições acima são satisfeitas. Observe também que dados M uma sequência positiva arbitrária, $C > 0$ e N uma sequência definida por $N_j = C\,M_j$ (para todo $j \in \mathbb{N}$) segue que $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_N$. Assim, sem perda de generalidade podemos supor:

C4. (Condições iniciais)

$$M_0 = M_1 = 1 \tag{1.5}$$

Alguns resultados continuam válidos ao enfraquecermos as exigências (1.3) e (1.4). É comum considerar as seguintes propriedades mais fracas:

C2'. (Estabilidade sobre operadores diferenciais) Existe A e H tais que

$$M_p \leqslant AH^p M_{p-1}, \;\; p = 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

C3'. (Não quase analiticidade)

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < \infty. \tag{1.7}$$

Note que para $q = 1$ a propriedade (1.3) implica na propriedade (1.6) e a propriedade (1.4) implica na propriedade (1.7)

O teorema de Denjoy-Carleman-Mandelbrojt (veja [42, Theorem 4.2]) garante que dada uma sequencia de números positivos M satisfazendo a propriedade (1.3) a propriedade (1.7) é satisfeita se e somente se $\mathcal{D}_M(U) \neq \varnothing$.

Teorema 1.1.2. *Seja M uma sequência satisfazendo (1.2) e (1.5). Para todo n natural temos que*

$$M_j \cdot M_{n-j} \leqslant M_n, \quad 0 \leqslant j \leqslant n. \tag{1.8}$$

Demonstração. Provaremos esse resultado por finita sobre n. Para $n = 0$ e $n = 1$ a propriedade (1.8) é trivialmente satisfeita. Suponhamos que existe $n \geqslant 1$ que satisfaça (1.8), a seguir provaremos que (1.8) vale para $n + 1$ (ou seja, provaremos que $M_j M_{n+1-j} \leqslant M_{n+1}$,sempre que $0 \leqslant j \leqslant n + 1$). Como os casos $j = 0$ e $j = n+1$ são imediatos, consideraremos $1 \leqslant j \leqslant n$ (ou seja, $0 \leqslant j-1 \leqslant n-1$). Por (1.2) e pela hipótese de indução temos que

$$M_j M_{n+1-j} \overset{(1.2)}{\leqslant} \frac{M_{j+1}}{M_j} M_{j-1} M_{n-(j-1)} \leqslant \frac{M_{j+1}}{M_j} M_n.$$

Observe que se $j = n$ a demonstração está completa, caso contrário (aplicando (1.2) $n - j$ vezes) temos

$$M_j M_{n+1-j} \overset{(1.2)}{\leqslant} \frac{M_{j+1}}{M_j} \frac{M_{n-1}}{M_n} M_{n+1} \overset{(1.2)}{\leqslant} \frac{M_{j+2}}{M_{j+1}} \frac{M_{n-1}}{M_n} M_{n+1} \overset{(1.2)}{\leqslant} \cdots \leqslant M_{n+1}.$$

■

Observação 1.1.3. *Se M satisfaz (1.2), (1.3) e (1.5), então por (1.8) existe constante $C > 0$ tal que*

$$M_j^k \overset{(1.3)}{\leqslant} (C^j M_1 M_{j-1})^k \overset{(1.5),\,(1.8)}{\leqslant} C^{jk} M_{kj-k}. \tag{1.9}$$

Observe também que se M satisfaz as propriedades (1.8) e (1.9) então, pelo Lema A.1.3, o espaço $\mathcal{E}_M(U)$ é fechado quando a composições.

Observação 1.1.4 ([50], Corollary 6.2, página 772)**.** *1. Se a sequência M satisfaz a condição de convexidade logarítmica fraca, a saber,*

$$\left(\frac{M_j}{j!}\right)^2 \leqslant \frac{M_{j+1}}{(j+1)!} \frac{M_{j-1}}{(j-1)!} \tag{1.10}$$

então

$$\left(\frac{M_j}{j!}\right)^{1/j} \quad \text{é crescente.} \tag{1.11}$$

2. Se M satisfaz (1.11) então a classe $\mathcal{E}_M(U)$ é inversamente fechada, isto é, se $f \in \mathcal{E}_M(U)$ e $\inf_{x \in U} |f(x)| > 0$, então $f^{-1} \in \mathcal{E}_M(U)$. Deste modo (1.10) garante a existência do teorema da função inversa e implícita para classes $\mathcal{D}_M$ (veja [42]).

3. Se a sequência satisfaz (1.11) *então,*

$$\binom{n}{j} M_j M_{n-j} \leqslant M_n, \quad 0 \leqslant j \leqslant n. \tag{1.12}$$

Além disso, se a sequencia M satisfaz (1.12) segue que $\mathcal{E}_M(U) \subset C^\omega(U)$, i.e.,

$$M_j \geqslant j!, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

Note que se $f \in \mathcal{E}_M(U)$ é tal que $\inf_{x \in U}\{|f(x)|\} > 0$ então, por (1.13) e (A.1.3), segue que $f^{-1} \in \mathcal{E}_M(U)$. Como a propriedade (1.8) implica na propriedade (1.12), ao longo deste trabalho consideraremos sequencias M satisfazendo a propriedade (1.8).

A seguir definiremos a topologia usual para os espaços de Denjoy-Carlemam. Dados um conjunto $K \subset \mathbb{R}^m$ e uma função $g : K \longrightarrow \mathbb{C}$ denotaremos $\|g\|_{C(K)} \doteq \sup_K\{|g|\}$.

Notação: Sejam K um conjunto compacto em $\mathbb{R}^m$, uma sequência positiva M e $h > 0$. O espaço de todas funções $f \in C^\infty(K)$ satisfazendo: existe $C > 0$ tal que

$$\|\partial^\alpha f\|_{C(K)} \leqslant C h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+,$$

será denotado por $\mathcal{E}_{M,h}(K)$. Supondo que o interior de K seja não vazio o espaço das funções $f \in \mathcal{E}_{M,h}$ com suporte compacto será denotado por $\mathcal{D}^{M,h}(K)$.

Os espaços $\mathcal{E}_{M,h}(K)$ e $\mathcal{D}_{M,h}(K)$ equipados da norma

$$\|f\|_{\mathcal{E}_{M,h}(K)} = \sup_\alpha \frac{\|\partial^\alpha f(x)\|_{C(K)}}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}$$

são espaços de Banach e $\mathcal{D}_{M,h}(K)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{E}_{M,h}(K)$ (veja [42]). Dado um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^m$ e um aberto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ consideraremos $\mathcal{E}_M(K) = \varinjlim_{h \to \infty} \mathcal{E}_{M,h}(K)$, $\mathcal{E}_M(\Omega) = \varprojlim_{K \Subset \Omega} \mathcal{E}_M(K)$, $\mathcal{D}_M(K) = \varinjlim_{h \to \infty} \mathcal{D}_{M,h}(K)$ e $\mathcal{D}_M(\Omega) = \varprojlim_{K \Subset \Omega} \mathcal{D}_M(K)$; em que $\varprojlim$ e $\varinjlim$ representam respectivamente os limites projetivo e indutivo de uma cadeia de espaços de Banach.

A seguir apresentaremos as definições de sequência convergente em $\mathcal{E}_M(U)$ e $\mathcal{D}_M(U)$ a partir destas topologias.

Definição 1.1.5. *Dadas uma sequência $f_j \in \mathcal{E}_M(U)$ e $f \in \mathcal{E}_M(U)$. Dizemos que f_j converge para f em $\mathcal{E}_M(U)$ se e somente se para todo compacto $K \subset U$ existe uma constante $h > 0$ (independente de*

j, podendo depender de K) tal que

$$\sup_{\alpha} h^{-|\alpha|} M_{|\alpha|}^{-1} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha f_j(x) - \partial^\alpha f(x)| \to 0, \quad \textit{quando} \quad j \to +\infty. \tag{1.14}$$

Se $f_j, f \in \mathcal{D}_M(U)$ diremos que $f_j \to f$ em $\mathcal{D}_M(U)$ se e somente se vale (1.14) e ainda existe $K \Subset U$ tal que $\sup f \subset K$ e $\sup f_j \subset K$, para todo j.

Os espaços de ultradistribuições, $\mathcal{E}'_M(K)$, $\mathcal{E}'_M(\Omega)$, $\mathcal{D}'_M(K)$ e $\mathcal{D}'_M(\Omega)$ são os duais topológico fraco de $\mathcal{E}_M(K)$, $\mathcal{E}_M(\Omega)$, $\mathcal{D}_M(K)$ e $\mathcal{D}_M$ respectivamente.

O conhecido teorema estrutural para distribuições (cuja demonstração pode ser vista em [55]) garante que uma distribuição pode ser escrita como soma finita de derivadas de medidas borelianas. A seguir apresentamos o primeiro teorema estrutural, o qual escreve as ultradistribuições como soma (infinita) de derivadas de medidas borelianas.

Teorema 1.1.6 ([42], Theorem 8.7)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto. $u \in \mathcal{D}'_M(U)$ se e somente se existem medidas u_α sobre U tais que para todo compacto $K \subset U$ e $L > 0$ existe $C_L > 0$ de modo que*

$$|u_\alpha(K)| \leqslant \frac{C_L L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}}, \quad |\alpha| = 0, 1, \dots, \tag{1.15}$$

e ainda

$$\langle u, \phi \rangle = \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \int \partial^\alpha \phi(x) du_\alpha(x), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_M(K). \tag{1.16}$$

Observação 1.1.7. *Observe que, pelo teorema anterior segue que dada uma ultradistribuição u para todo $L > 0$ existe $C_L > 0$ tal que*

$$|\langle u, \phi \rangle| \leqslant C_L \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} \left\{ L^{|\alpha|} M_{|\alpha|}^{-1} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)| \right\}, \quad \phi \in \mathcal{D}_M(K). \tag{1.17}$$

Outro importante teorema estrutural foi apresentado por R. W. Braun ([21, Corollary 10])), garantindo que se $u \in \mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^m)$, então para toda sequência $N \prec M$ (i.e, existe $C > 0$ tal que $N_j \leqslant C^j M_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$), existe uma família de constantes $\{b_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^m}$ tal que para todo $L > 0$ existe $C_L > 0$ de modo que

$$|b_\alpha| \leqslant \frac{C_L L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}}, \quad |\alpha| = 0, 1, \dots.$$

e uma função $f \in \mathcal{E}_N(U)$ em que

$$\langle u, \phi \rangle = \sum_{\alpha} b_\alpha \int \partial^\alpha f(x) \cdot \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{E}_M(V).$$

A seguir apresentaremos outro modo de definir ultra funções, a parti de funções peso. Uma função $\omega : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ contínua, par e crescente em $[0, +\infty[$ é dita função peso se satisfaz as seguintes propriedades,

1. $\omega(0) = 0$.
2. $\omega(2t) = O(\omega(t))$, $t \to +\infty$.
3. $\log t = o(\omega(t))$, $t \to +\infty$.
4. $\phi : t \mapsto \omega(e^t)$ é convexa em $[0, +\infty[$.

O conjugado de Young da função ϕ é definido por

$$\phi^*(x) \doteq \sup_{y>0}\{xy - \phi(y)\}, \quad x \geqslant 0.$$

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto aberto. O espaço das funções $\omega-$ultradiferenciáveis de Roumieu em Ω é definido por,

$$\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega) \doteq \left\{ f \in C^\infty(\Omega) : \forall K \subset\subset \Omega \ \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sup_{x \in K} \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^m} |f^\alpha(x)| \exp\left(-\frac{1}{m} \phi^*(m|\alpha|) \right) < +\infty \right\}.$$

Dada uma sequencia M como antes, podemos definir a seguinte função peso.

Definição 1.1.8. *Para cada sequência M definimos sua função associada $M(t)$ por:*

$$M(t) = \sup_j \log \frac{t^j}{M_j}, \quad t \in [0, \infty). \tag{1.18}$$

Para maiores detalhes sobre a função associada recomendamos a leitura de [17], [42] e [48]. Em [17, Theorem 14] J. Bonet, R. Meise e S. Melikhov provaram que se a sequencia M satisfaz (1.3)

$$\mathcal{E}_M(\Omega) = \mathcal{E}_{\{M\}}(\Omega).$$

A seguir apresentaremos resultados técnicos que serão importantes para as próximas seções.

Lema 1.1.9. *Seja M uma sequência de números positivos satisfazendo (1.5) e (1.13). Se $M(t)$ é a função associada à essa sequência as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Para todo $t \geqslant 0$,*
$$\log t \leqslant M(t) \leqslant t. \tag{1.19}$$

2. *$M(t)$ é uma função crescente, convexa em $\log t$ com anulamento para $t > 0$ suficientemente pequeno e além disso $M(t)$ cresce mais rápido que $\log t$, quando $t \to +\infty$.*

3. *Suponha que a sequência (M_j) satisfaz a condição (1.6). Então para todo $k > 0$ e para todo $t > 0$ temos:*
$$M(kt) - M(t) \geqslant \frac{\log(t/A)\log k}{\log H}, \tag{1.20}$$
onde A e H são os mesmos da condição (1.3).

4. *A sequência M satisfaz a condição (1.3) se e somente se*
$$M\left(\frac{t}{H}\right) \leqslant \frac{1}{2}M(t) + \log\sqrt{A}. \tag{1.21}$$

5. *Supondo também que a sequência M satisfaça (1.6). Fixado $k > 0$ existe $c = c(k)$ tal que,*
$$\frac{3}{2}M(kt) - M(t) \geqslant 0, \tag{1.22}$$
para $t > c$.

6. *Se M satisfaz as condições (1.3) e (1.8), então para todo real $\theta > 0$ e naturais $k \geqslant r \geqslant 0$ segue que*
$$t^r M_{k-r} \leqslant \sqrt{A}\frac{H^r}{\theta^r}M_k e^{\frac{1}{2}M(\theta t)}, \ \ t > 0; \tag{1.23}$$
em que A e H são os mesmos da condição (1.3).

7. *Sendo $c, \gamma > 0$ temos*
$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-cM(\gamma|\xi|)}d\xi < +\infty. \tag{1.24}$$

8. *Seja M satisfazendo a propriedade (1.3). Dados c_1, $c_2 > 0$ existe $c' > 0$ tal que*
$$c_1 M(c_2 t) \geqslant M(c' t), \ \ \forall t > 0. \tag{1.25}$$

Demonstração.

1. Por (1.5), (1.13) e (1.18) temos que

$$\log t \overset{(1.5)}{=} \log \frac{t^1}{M_1} \leqslant \sup_p \log \frac{t^p}{M_p} \overset{(1.18)}{=} M(t) \overset{(1.13)}{\leqslant} \sup_p \log \frac{t^p}{p!} \leqslant t,$$

em que na última desigualdade usamos que $e^t = \sum_j \frac{t^j}{j!}$.

2. Como, por (1.5) e (1.13), temos

$$\left(\frac{M_p}{M_0}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\frac{p!}{1}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 1.$$

Assim, prova segue de [42, p. 49].

3. [42, Proposition 3.4].

4. [42, Proposition 3.6].

5. Observe que como a função associada M é crescente o caso em que $k \geqslant 1$ é trivialmente satisfeito para $c = 0$. Deste modo a seguir assumiremos $0 < k < 1$. Como M satisfaz a condição (1.6) segue que a propriedade (1.20) é satisfeita e aplicando (1.20) obtemos,

$$\frac{3}{2}M(kt) - M(t) \geqslant \frac{1}{2}M(kt) + \frac{\log(t/A)\log k}{\log H}.$$

Como $M_0 = M_1 = 1$, pela definição da função associada M, para cada número natural j temos;

$$\frac{1}{2}M(kt) + \frac{\log(t/A)\log k}{\log H} \geqslant \frac{1}{2}\log\frac{(kt)^j}{M_j} + \frac{\log k}{\log H}\cdot\log(t/A).$$

Sem perda de generalidade podemos assumir $H > 1$ em (1.6). E, lembrando que $0 < k < 1$, temos $p \doteq -\frac{\log k}{\log H} > 0$. Já que $M_0 = 1$ e a sequencia M é crescente temos que $M_j \geqslant 1$. Assim,

$$\frac{3}{2}M(kt) - M(t) \geqslant \log\left\{t^{(j/2)-p}\, k^{j/2}\, M_j^{-1/2} A^p\right\} \overset{M_j \geqslant 1}{\geqslant} \log\left\{(M_j^{-1}kt)^{\frac{j-2p}{2}}\, A^p\, M_j^{-p}\, k^p\right\},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e $t \geqslant 0$. Assim, fixando algum $j > 2p$ temos

$$\frac{3}{2}M(kt) - M(t) \geqslant \log 1 = 0,$$

para $t > c \doteq (k^{-j}M_j^j A^{-2p})^{\frac{1}{j-2p}}$, pois

$$M_j^{-1}kt \geqslant (M_j^{-j+2p}k^{j-2p}k^{-j}M_j^j A^{-2p})^{\frac{1}{j-2p}} = \left(M_j^{2p}k^{-2p}A^{-2p}\right)^{\frac{1}{j-2p}} = \left(\frac{M_j}{kA}\right)^{\frac{2p}{j-2p}}.$$

6. Sejam $A > 0$ e $H > 0$ como na condição (1.3). Dados $\theta > 0$ e números naturais $k \geqslant r \geqslant 0$, aplicando (1.8), obtemos

$$t^r M_{k-r} = \frac{H^r\theta^r}{H^r\theta^r} t^r M_{k-r}\frac{M_r}{M_r} \overset{(1.8)}{\leqslant} \frac{H^r}{\theta^r}M_k\frac{(\frac{\theta t}{H})^r}{M_r} \overset{(1.18)}{\leqslant} \frac{H^r}{\theta^r}M_k e^{M((\theta t)/H)}.$$

Já que a sequência M satisfaz (1.3) podemos aplicar a desigualdade (1.21) e concluir,

$$t^r M_{k-r} \leqslant \sqrt{A}\frac{H^r}{\theta^r}M_k e^{\frac{1}{2}M(\theta t)}.$$

7. Dados γ, $c > 0$, passando à coordenadas polares, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-cM(\gamma|\xi|)}d\xi &= C\int_0^\infty e^{-cM(\gamma t)}t^{m-1}dt \\ &= C\int_0^{\gamma^{-1}} e^{-cM(\gamma t)}t^{m-1}dt + C\int_{\gamma^{-1}}^{+\infty} e^{-cM(\gamma t)}t^{m-1}dt.\end{aligned}$$

Pela definição da função associada M temos,

$$e^{-cM(\gamma t)} = \exp\left\{-c\sup_k\left[\log\frac{(\gamma t)^k}{M_k}\right]\right\} = \exp\left\{\inf_k\left[\log\left(\frac{(\gamma t)^k}{M_k}\right)^{-c}\right]\right\}$$

Então,

$$\int e^{-cM(\gamma|\xi|)} \leqslant C\int_0^{\gamma^{-1}}\left[\frac{(\gamma t)^k}{M_k}\right]^{-c} t^{m-1}dt + C\int_{\gamma^{-1}}^{\infty}\left[\frac{(\gamma t)^j}{M_j}\right]^{-c} t^{m-1}dt,$$

para k e j naturais arbitrários. Primeiro assumiremos $c \leqslant 1$. Logo, escolhendo $k \leqslant m-1 \leqslant \frac{m-1}{c}$

e $j > \frac{m+1}{c}$ (assim, $jc > m-1+2$), temos

$$\begin{aligned}\int e^{-cM(\gamma|\xi|)}d\xi &\leqslant C\int_0^{\gamma^{-1}}(\gamma t)^{-kc+m-1}M_k^c\gamma^{-m+1}dt + C\int_{\gamma^{-1}}^{\infty}(\gamma t)^{-jc+m-1}M_j^c\gamma^{-m+1}dt\\ &\leqslant C\int_0^{\gamma^{-1}}M_k\gamma^{-m+1}dt + C\int_{\gamma^{-1}}^{\infty}\frac{1}{(\gamma t)^2}M_j\gamma^{-m+1}dt < +\infty.\end{aligned}$$

No caso em que $c > 1$ basta observar que

$$\int e^{-cM(\gamma|\xi|)}d\xi \leqslant \int e^{-M(\gamma|\xi|)}d\xi < +\infty,$$

em que a finitude da última integral vem do caso anterior ($c = 1$).

8. Note que é suficiente provar o caso em que $c_1 < 1$. Considere $k \in Z_+$ tal que $\frac{1}{k} < c_1$. Assim,

$$\begin{aligned}c_1M(c_2t) &> \frac{1}{k}\sup_j\log\frac{(c_2t)^j}{M_j} = \sup_j\log\left(\frac{(c_2t)^j}{M_j}\right)^{1/k} \geqslant \sup_j\log\left[\frac{(c_2t)^{kj}}{M_{kj}}\right]^{1/k}\\ &\overset{(1.3)}{\geqslant} \sup_j\log\frac{(c_2t)^j}{(AH^{kj}M_{(k-1)j}M_j)^{1/k}}\\ &\geqslant \cdots \geqslant \sup_j\log\frac{(c_2t)^j}{[AH^{kj}\cdot AH^{(k-1)j}\cdots AH^{2j}(M_j)^k]^{1/k}}\\ &= \sup_j\log\frac{(c't)^j}{M_j} = M(c't),\end{aligned}\tag{1.26}$$

para $c' = c_2\left\{A^{(k-1)/k}H^{[k+(k-1)+(k-2)+\cdots+2]/k}\right\}^{-1}$.

■

Exemplo 1.1.10. *Seja um número real $s > 1$ e uma sequência $M_j = j!^s$. Sendo M a função associada a sequência (M_j) temos,*

$$M(t) = \sup_j\log\frac{t^j}{j!^s} = s\sup_j\log\frac{t^{j/s}}{j!} \leqslant s\log\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(t^{1/s})^j}{j!} = s\log e^{t^{1/s}} = st^{1/s}$$

e

$$\begin{aligned}t^{1/s} &= s\left(\frac{t}{s^s}\right)^{1/s} = s\log\exp\left[\left(\frac{t}{s^s}\right)^{1/s}\right] = s\log\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{t}{s^s}\right)^{k/s}\frac{1}{k!}\\ &\leqslant s\log\left[\sup_{k\geqslant 0}\left(\frac{t^{k/s}}{k!}\right)\cdot\frac{1}{1-s^{-1}}\right] = \log\sup_k\frac{t^k}{k!^s} + s\log\frac{1}{1-s^{-1}}.\end{aligned}$$

Assim,

$$t^{1/s} - s\log\frac{1}{1-s^{-1}} \leqslant M(t) \leqslant st^{1/s}. \tag{1.27}$$

Observe que quando $M_j = j!^s$ a propriedade (1.3) é satisfeita para $A = 1$ e $H = 2^s$. Logo, por (1.22), temos

$$\frac{3}{2}M(kt) - M(t) \geqslant 0,$$

para todo $t \geqslant c(k) = (k^{-j}M_j^j)^{1/(j-2p)}$ em que $p = -\frac{\log k}{\log 2^s}$ e j é um natural fixo maior que $2p$.

Observação 1.1.11. *Em [28] os autores afirmam que para toda constante $k > 0$ temos*

$$\frac{3}{2}M(kt) - M(t) \geqslant 0, \quad \textit{quando} \quad t \geqslant k^{-3}. \tag{1.28}$$

Mas para $M_p = p!^s$, $0 < k < 1$ e $t = k^{-3}$, por (1.27), segue que

$$\frac{3}{2}M(kt) - M(t) < \frac{3}{2}s(k^{-2})^{1/s} - k^{-3/s} + s\log\frac{1}{1-s^{-1}} = \left(\frac{3}{2}sk^{1/s} - 1\right)k^{-3/s} + s\log\frac{1}{1-s^{-1}}.$$

Considerando k suficientemente pequeno, de modo que $\frac{3}{2}sk^{1/s} - 1 < -\frac{1}{2}$ e $k < \left[2\left(1 + s\log\frac{1}{1-s^{-1}}\right)\right]^{s/3}$, temos

$$\frac{3}{2}M(kt) - M(t) < -\frac{1}{2}k^{-3/s} + s\log\frac{1}{1-s^{-1}} < -1.$$

Disso, para $0 < k < 1$, suficientemente pequeno, temos $\frac{3}{2}M(kt) - M(t) < 0$, em uma vizinhança de $t = k^{-3}$. Deste modo vemos que nem sempre (1.28) é satisfeita.

1.2 Estruturas involutivas

Nessa seção, seguindo [15], lembramos de alguns conceitos básicos sobre estruturas de classe C^∞. Seja $\mathcal{M}$ um espaço topológico de Hausdorff, com uma base topológica enumerável. Um atlas de classe C^∞ e dimensão N sobre $\mathcal{M}$ é uma coleção de pares $\mathcal{F} = \{(U, x)\}$ em que $U \subset \mathcal{M}$ é um subconjunto aberto não vazio, $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é um homeomorfismo sobre um subconjunto aberto $x(U) \subset \mathbb{R}^N$ e as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. $\bigcup_{(U,x)\in\mathcal{F}} U = \mathcal{M}$

2. $x(U\cap U') \stackrel{x'\circ x^{-1}}{\longrightarrow} x'(U\cap U')$ é de classe C^∞ para cada par (U,x), $(U',x')\in\mathcal{F}$ com $U\cap U'\neq\varnothing$

3. $\mathcal{F}$ é maximal com respeito aos itens anteriores, isto é, se $\varnothing\neq V\subset\mathcal{M}$ é aberto e $y: V\longrightarrow y(V)$ é um homeomorfismo sobre um subconjunto aberto $y(U)\subset\mathbb{R}^N$, tal que, para todo $(U,x)\in\mathcal{F}$ com $U\cap V\neq\varnothing$, a composição $x(U\cap V) \stackrel{y\circ x^{-1}}{\longrightarrow} y(U\cap V)$ é de classe C^∞, então $(V,y)\in\mathcal{F}$.

Definição 1.2.1. *Uma variedade de classe C^∞ e dimensão N é um espaço topológico Hausdorff $\mathcal{M}$, com base enumerável, munido de um atlas de classe C^∞ e dimensão N.*

Observação 1.2.2. *Uma variedade de classe C^∞ tal que nas condições do item 2 segue que $x'\circ x$ é de classe $\mathcal{E}_M$, é dita de classe $\mathcal{E}_M$.*

Um elemento $(U,x)\in\mathcal{F}$ será chamado de carta local ou de sistema local de coordenadas de $\mathcal{M}$. Escrevendo $x=(x_1,\ldots,x_N)$, para todo $p\in U$ as coordenadas locais (com respeito a carta local) são dadas por $(x_1(p),\ldots,x_N(p))$.

A partir de agora iremos fixar uma variedade $\mathcal{M}$ de classe C^∞, dimensão N e atlas $\mathcal{F}$. Dizemos que $f:\mathcal{M}\longrightarrow\mathbb{C}$ é de classe C^∞ em $p\in M$ se existe $(U,x)\in\mathcal{F}$ tal que $p\in U$ e $f\circ x^{-1}: x(U)\longrightarrow\mathbb{C}$ é de classe C^∞ (de modo análogo podemos definir funções de classe $\mathcal{E}_M$ em variedades de classe $\mathcal{E}_M$). Dizemos que $f:\mathcal{M}\longrightarrow\mathbb{C}$ é de classe C^∞ quando f é de classe C^∞ em todo $p\in\mathcal{M}$. O conjunto de todas as funções de classe C^∞ definidas em $\mathcal{M}$ será denotado por $C^\infty(\mathcal{M})$ (analogamente definimos $\mathcal{E}_M(\mathcal{M})$).

Definição 1.2.3. *Um campo vetorial complexo de classe C^∞ (respectivamente $\mathcal{E}_M$) sobre $\mathcal{M}$ é uma aplicação $\mathbb{C}$- linear $L: C^\infty(\mathcal{M})\longrightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ (respectivamente acrescemos $L(\mathcal{E}_M(\mathcal{M}))\subset\mathcal{E}_M(\mathcal{M})$) tal que e $L(fg)=fL(g)+gL(f)$, para todo $f,g\in C^\infty(\mathcal{M})$. O conjunto de todos campos vetoriais de classe C^∞ ($\mathcal{E}_M$) sobre $\mathcal{M}$ é representado por $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ (respectivamente $\mathfrak{X}_M(\mathcal{M})$).*

Definição 1.2.4. *Um C^∞-sub fibrado (respectivamente $\mathcal{E}_M$-sub fibrado) vetorial complexo de $\mathbb{C}T\mathcal{M}$ de posto n (co-posto $N-n$) é um união disjunta*

$$\mathcal{V}=\bigcup_{p\in\mathcal{M}}\mathcal{V}_p$$

tal que:

1. *Para cada $p \in \mathcal{M}$, $\mathcal{V}_p$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}T_p\mathcal{M}$ de dimensão n.*

2. *Dado $p_0 \in \mathcal{M}$ existe aberto U de p_0 e campos $L_1, \ldots, L_n \in \mathfrak{X}_M(U)$, de tal forma que para cada $p \in U$ temos que $\{L_{1p}, \ldots, L_{np}\}$ é uma base para $\mathcal{V}_p$.*

O subespaço $\mathcal{V}_p$ é chamado fibra de $\mathcal{V}$ em p. Dado um C^∞(respectivamente $\mathcal{E}_M$)-sub fibrado $\mathcal{V}$, uma seção de $\mathcal{V}$ sobre um aberto $W \subset \mathcal{M}$ é um elemento $L \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tal que $L_p \in \mathcal{V}_p$, $\forall p \in W$. A seguir introduziremos um objeto de grande interesse:

Definição 1.2.5. *Uma estrutura formalmente integrável de classe C^∞ (respectivamente $\mathcal{E}_M$) sobre $\mathcal{M}$ é um C^∞(respectivamente $\mathcal{E}_M$)-sub fibrado $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\mathcal{M}$ que satisfaz a condição de involutividade (ou condição de Frobenius):*

- *Se $W \subset \mathcal{M}$ é um aberto e $L_1, L_2 \in \mathfrak{X}_M(W)$ (respec. $\mathfrak{X}_M(W)$) são seções de $\mathcal{V}$ sobre W, então $[L_1, L_2]$ também é uma seção de $\mathcal{V}$ sobre W.*

Dada uma estrutura $\mathcal{V}$ formalmente integrável (respec. formalmente integrável de classe $\mathcal{E}_M$) de classe C^∞ (respec. $\mathcal{D}_M$) sobre $\mathcal{M}$, o par $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$ é chamado estrutura involutiva.

Definição 1.2.6. *Uma estrutura involutiva $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$ é dita $\mathcal{D}_M$ localmente integrável se o ortogonal de $\mathcal{V}$ ($\mathcal{V}^\perp$) em $\mathbb{C}T^*\mathcal{M}$ é localmente gerado por formas exatas de classe $\mathbb{C}^\infty$.*

Capítulo

2

Uma classe de transformadas FBI generalizadas

O famoso teorema de Teorema de Paley-Wiener caracteriza analiticidade (local) de uma distribuição pelo decaimento da transformada de Fourier, como pode ser visto em [40]. Além de caracterizar analiticidade local a transformada de Fourier também pode ser usada para caracterização de regularidade nas classes C^∞ e $\mathcal{E}_M$, tanto no sentido local quanto no micro local. Para essas caracterizações há diversas aplicações, todavia há resultados cuja demonstração via transformada de Fourier é muito difícil. Em [39, Proposition 8.4.2] Hörmander caracterizou o conjunto frente de onda analítico via transfonada de Fourier, usando uma sequencia de funções teste para contornar a não existência de funções teste não triviais com suporte compacto, todavia tal caracterização pode ser de difícil aplicabilidade. Uma alternativa para facilitar o estudo do conjunto frente de onda analítico é o uso da transformada FBI, propostas por J. Bros e D. Iagolnitzer (para o leitor que desejar obter mais informações sobre a transformada FBI sugerimos a leitura do capítulo V do livro [15], [22] e [23]).

No recente trabalho [16] S. Berhanu e J. Hounie apresentaram uma classe de "transformadas FBI generalizada"(as quais nos referiremos por FBI-BH) que podem ter fase com Hessiana degenerada no ponto de interesse. Os autores utilizaram a classe de transformadas FBI-BH para caracterizar o conjunto frente de onda C^∞ de uma distribuição com suporte compacto. Além disso, usando uma subclasse das transformadas FBI-BH, os autores caracterizaram o conjunto frente de onda analítico de uma distribuição de suporte compacto. Como aplicação, eles apresentaram uma caracterização do conjunto frente de onda analítico de soluções de sistemas do tipo tubo, a qual dificilmente poderia ser demonstrada via transformada FBI clássica.

Neste capítulo apresentaremos um completo estudo de regularidade e micro-regularidade DC via transformada FBI-BH. Na primeira seção deste capítulo apresentaremos uma classe de transformadas FBI-BH para ultradistribuições e apresentaremos uma fórmula de inversão para essa classe de transformadas. Na segunda seção caracterizaremos a regularidade de uma ultradistribuição via a transformada $\mathcal{F}_p^\lambda$, que será apresentada no Exemplo 2.1.3. Na terceira seção apresentaremos uma definição de conjunto frente de onda nas classes DC (denotado por WF_M), e o caracterizaremos pelo decaimento das transformadas $\mathcal{F}_p^\lambda$. Na quarta seção apresentamos uma aplicação para transformada $\mathcal{F}_p^\lambda$ que dificilmente poderia ser demonstrada via transformada FBI clássica.

2.1 As transformadas FBI-BH

Considere uma constante $\lambda > 0$ e $\psi \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^m)$ uma função não nula tal que $\int \psi(x)dx = 1$. Seguindo [16], definiremos a transformada FBI generalizada (FBI-BH), com função generalizadora ψ e parâmetro λ, de uma ultradistribuição $u \in \mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^m)$, por

$$\mathcal{F}_{\psi,\lambda}u(x,\xi) = \left\langle u(x'), e^{i\xi(x-x')}\psi(|\xi|^\lambda(x-x'))\right\rangle. \tag{2.1}$$

Observação 2.1.1. *Se* $c = \left(\int e^{-|x|^2}dx\right)^{-1}$ *e* $\psi(x) = ce^{-|x|^2}$ *então, a transformada* $\mathcal{F}_{\psi,\frac{1}{2}}$ *representa a transformada de Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI). Por este motivo, nos referiremos à transformada* $\mathcal{F}_{\psi,\frac{1}{2}}$ *por transformada FBI clássica e as demais transformadas dadas por* (2.1) *por transformadas FBI-BH ou FBI generalizadas. Para maiores informações sobre transformada FBI clássica recomendamos a leitura de [15], [57] e [30].*

Observação 2.1.2 (M. Christ)**.** *Seja* $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. *Seguindo as notações usadas em [27]), considere*

$$\langle\xi\rangle_1 \doteq \left(1 + \sum_{j=1}^m \xi_j^2\right)^{1/2},$$

para todo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$. *Dada a forma* $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \wedge d(\xi_1 + ix_1\langle\xi\rangle_1^\gamma) \wedge \cdots \wedge d(\xi_m + ix_m\langle\xi\rangle_1^\gamma)$ *seja* a_γ *uma função tal que* $\omega = a_\gamma(x,\xi)dx_1 \wedge \ldots dx_m \wedge d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_m$. *Em [27] M. Christ caracterizou as classes Gevrey* (G^s) *a partir da seguinte transformada,*

$$\mathcal{F}_\gamma u(x,\xi) = \left\langle u_{x'}; e^{i\xi\cdot(x-x')-\langle\xi\rangle_1^\gamma(x-x')^2}a_\gamma(x-x',\xi)\right\rangle, \tag{2.2}$$

com $\frac{1}{s} \leqslant \gamma \leqslant 1$ *(veja [27, Theorem 2.3]). Note que a função* a_γ *é o determinante da matriz cujas* *colunas são as derivadas parciais* $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_m}, \partial_{\xi_1}, \ldots, \partial_{\xi_m}$ *da aplicação*

$$(x_1 \ldots, x_m, \xi_1, \ldots \xi_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, \xi_1 + ix_1\langle\xi\rangle_1^\lambda),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
a_\gamma(x,\xi) &= \begin{vmatrix}
1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\langle\xi\rangle_1^\gamma & \cdots & 0 & 1+\gamma x_1\xi_1\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2} & \cdots & \gamma x_1\xi_m\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \langle\xi\rangle_1^\gamma & \gamma x_m\xi_1\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2} & \cdots & 1+\gamma x_m\xi_m\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2}
\end{vmatrix}. \\
&= \begin{vmatrix}
1+\gamma x_1\xi_1\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2} & \gamma x_1\xi_2\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2} & \cdots & \gamma x_1\xi_m\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2} \\
\gamma x_2\xi_1\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2} & 1+\gamma x_2\xi_2\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2} & \cdots & \gamma x_2\xi_m\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\gamma x_m\xi_1\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2} & \gamma x_m\xi_2\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2} & \cdots & 1+\gamma x_m\xi_m\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2}
\end{vmatrix} \\
&= 1+\gamma x_1\xi_1\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2} + \gamma x_2\xi_2\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2} + \cdots + \gamma x_m\xi_m\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2}. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Além disso, como $|\xi| \leqslant \langle\xi\rangle_1$, *temos que*

$$|a_\gamma(x,\xi)| \leqslant 1 + m\gamma|x||\xi|\langle\xi\rangle_1^{\gamma-2} \leqslant 1 + m\gamma|x|\langle\xi\rangle_1^{\gamma-1}.$$

Logo, para x *em um conjunto limitado,* $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, *e* $\xi \in \mathbb{R}^m$ $(1 \leqslant \langle\xi\rangle)$, *temos que a função* $a_\gamma(x,\xi)$ *é uniformemente limitada. Além disso, para* $\xi \in \mathbb{R}^m$ *com* $|\xi| > 1$, *temos* $|\xi| \leqslant \langle\xi\rangle_1 \leqslant \sqrt{2}|\xi|$. *Neste caso, para* $\psi(x) = \pi^{m/2} \cdot e^{-|x|^2}$, *o decaimento da transformada FBI-BH* $\mathcal{F}_{\psi,\frac{\gamma}{2}}$ *é equivalente ao decaimento da transformada* $\mathcal{F}_\gamma$, *para* x *em conjuntos compactos.*

Exemplo 2.1.3 (As transformadas $\mathcal{F}_p^\lambda$)**.** *Seja* $k \in \mathbb{N}$ *e* p *um polinômio real homogêneo e elíptico de grau* $2k$ *ou seja,* $p(x) = \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha x^\alpha$ *para certas constantes reais* a_α *e existem constantes* $C, c > 0$ *tais que*

$$c|x|^{2k} \leqslant p(x) \leqslant C|x|^{2k}. \qquad (2.4)$$

Sendo $c_p = \left[\int e^{-p(x)}dx\right]^{-1}$, *temos que* $\psi(x) = c_p e^{-p(x)} \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^m)$ *e* $\int \psi = 1$. *Assim, podemos definir a transformada FBI-BH, com função generalizadora* ψ *e parâmetro* $\frac{\lambda}{2k}$ $(\lambda > 0)$*:*

$$\mathcal{F}_p^\lambda u(t,\xi) \doteq \mathcal{F}_{\psi,\lambda/(2k)} u(t,\xi) = c_p \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\xi\cdot(t-x')} e^{-|\xi|^\lambda p(t-x')} u(x')dx', \quad x, \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Nas próximas seções utilizaremos as transformadas $\mathcal{F}_p^\lambda$ para caracterizar a regularidade e micro-regularidade DC.

No próximo lema apresentaremos uma fórmula de inversão para transformada de Fourier (para ultradistribuições) a qual será fundamental na demonstração da fórmula de inversão de transformadas FBI mais gerais. Para isso a seguir consideraremos $\chi \in \mathcal{D}_M(\mathbb{R}^m)$, com $\int \chi(x)dx = 1$, e definiremos $\sigma(\xi) = \frac{\widehat{\chi}(\xi)}{(2\pi)^m}$, em que $\widehat{\chi}$ representa a transformada de Fourier de χ.

Lema 2.1.4. *Se* $u \in \mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^m)$ *então*

$$\int e^{i\xi x}\sigma(\epsilon\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \longrightarrow u, \quad em \;\; \mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^m); \tag{2.5}$$

quando $\epsilon \to 0^+$.

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^m)$, como u possui suporte compacto existe $V \subset \mathbb{R}^m$ aberto e limitado tal que $u \in \mathcal{E}'_M(V)$. Segue do Teorema 1.1.6 que existem medidas borelianas u_α satisfazendo a propriedade (1.15), de modo que

$$\begin{aligned} \int e^{i\xi\cdot x}\sigma(\epsilon\xi)\hat{u}(\xi)d\xi &= \int e^{i\xi x}\sigma(\epsilon\xi)\langle u_{x'}; e^{-i\xi\cdot x'}\rangle d\xi \\ &= \int e^{i\xi\cdot x}\sigma(\epsilon\xi)\sum_\alpha \int_V (-1)^{|\alpha|}\partial_{x'}^\alpha(e^{-i\xi\cdot x'})du_\alpha(x')d\xi. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Fixado $\epsilon > 0$ aplicaremos os teoremas de Fubini e da convergência dominada, para isso exibiremos uma função $g_\epsilon(\xi,\alpha) \geqslant 0$ tal que

$$\left| e^{i\xi\cdot x}\sigma(\epsilon\xi)\,\partial_{x'}^\alpha\left\{e^{-i\xi\cdot x'}\right\}\right| \leqslant g_\epsilon(x,\alpha)$$

e

$$\int \sum_\alpha \int_V g_\epsilon(\xi,\alpha)d|u_\alpha(x')|d\xi < +\infty,$$

em que $|u_\alpha|$ representa a variação total de u_α. Para construção das funções g_ϵ consideraremos separadamente os casos (i) $|\xi| < 1$ e (ii) $|\xi| \geqslant 1$:

Se $|\xi| < 1$ e $\epsilon < 1$ então existe $C > 0$ de modo que, $|\sigma(\epsilon\xi)| < C$ (pois $\sigma(\xi) = \frac{\hat{\chi}(\xi)}{(2\pi)^m}$ e $\chi \in \mathcal{D}_M$). Definindo

$$g_\epsilon(\xi, \alpha) = C, \quad \forall |\xi| < 1 \ \text{ e } \ \alpha \in \mathbb{N}^m$$

segue que

$$\left| e^{i\xi\cdot x} \sigma(\epsilon\xi)(i\xi)^\alpha e^{-i\xi\cdot x'} \right| \leqslant g_\epsilon(\xi, \alpha),$$

para $|\xi| < 1$ e $\alpha \in \mathbb{N}^m$ arbitrários. Além disso, para $L > 0$ suficientemente pequeno obtemos;

$$\int_{|\xi|<1} \sum_\alpha \int_V g_\epsilon(\xi,\alpha) d|u_\alpha(x')| d\xi \quad = \quad \int_{|\xi|<1} \sum_\alpha \int_V C d|u_\alpha(x')| d\xi \leqslant C_L \sum_\alpha L^{|\alpha|} < +\infty.$$

Caso $|\xi| \geqslant 1$. Para facilitar a notação, neste item denotaremos a transformada de Fourier por F. Como $F(\partial^\alpha \chi)(\xi) = (i\xi)^\alpha F(\chi)(\xi)$ e $\sigma(\xi) = \frac{\hat{\chi}(\xi)}{(2\pi)^m}$ temos

$$\begin{aligned} \left| e^{i\xi\cdot x} \sigma(\epsilon\xi)\, (i\xi)^\alpha e^{-i\xi\cdot x'} \right| &= \left| \frac{\hat{\chi}(\epsilon\xi)}{(2\pi)^m} \cdot (\epsilon\xi)^\alpha \frac{(\epsilon\xi_1)^2 \ldots (\epsilon\xi_m)^2}{\xi_1^2 \ldots \xi_m^2} \epsilon^{-|\alpha|-2m} \right| \\ &= \left| \frac{1}{(2\pi)^m}\, F\left\{ \partial^{\alpha+(2,\ldots,2)} \chi \right\}(\epsilon\xi)\ \frac{\epsilon^{-|\alpha|-2m}}{\xi_1^2 \ldots \xi_m^2} \right|. \end{aligned}$$

Por outro lado como $\chi \in \mathcal{D}_M$ e $M_{j+k} \leqslant C^{j+k} M_j \cdot M_k$, aumentando $C > 0$ (se necessário) segue que

$$|F\{\partial^{\alpha+(2,\ldots,2)}\chi\}(\xi)| \leqslant \int_{\operatorname{supp}\chi} |\partial^{\alpha+(2,\ldots,2)} \chi(x)| dx \leqslant C^{|\alpha|+1} M_{|\alpha}$$

Então, para $|\xi| \geqslant 1$ definiremos

$$g_\epsilon(\xi, \alpha) = \frac{1}{(2\pi)^m} C^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|}\ \frac{\epsilon^{-|\alpha|-2m}}{\xi_1^2 \ldots \xi_m^2}.$$

Assim,

$$\left| e^{i\xi\cdot x} \sigma(\epsilon\xi)\, \partial_{x'}^\alpha \{ e^{-i\xi\cdot x'} \} \right| \leqslant g_\epsilon(\xi, \alpha),$$

Como as medidas u_α satisfazem (1.15), considerando $L > 0$ suficientemente pequeno (aumentando

C, se necessário) segue que

$$\begin{aligned}\int\limits_{|\xi|\geqslant 1}\sum_\alpha\int_V g(\xi,\alpha)d|u_\alpha(x')|d\xi &\leqslant \int\limits_{|\xi|\geqslant 1}\sum_\alpha C^{|\alpha|+1}M_{|\alpha|}\frac{\epsilon^{-|\alpha|-2m}}{\xi_1^2\cdots\xi_m^2}\frac{C_L L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}}d\xi\\ &\overset{\epsilon<1}{\leqslant} C_{L,\epsilon}\sum_\alpha C^{|\alpha|+1}\left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{|\alpha|}\int_{|\xi|>1}\frac{1}{\xi_1^2\cdots\xi_m^2}d\xi<+\infty,\end{aligned}$$

para alguma constante $C_{L,\epsilon}$ dependente de L e ϵ.

Dos dois itens anteriores vemos que é possível aplicar o Teorema de Fubini e derivar sob o sinal de integração (pelo Teorema da convergência dominada) em (2.6), obtendo:

$$\begin{aligned}\int e^{i\xi\cdot x}\sigma(\epsilon\xi)\hat{u}(\xi)d\xi &= \sum_\alpha\int_V\int e^{i\xi\cdot x}\sigma(\epsilon\xi)(i\xi)^\alpha e^{-i\xi\cdot x'}d\xi du_\alpha(x')\\ &= \sum_\alpha\int_V\int e^{i\xi\cdot x}\sigma(\epsilon\xi)(-1)^{|\alpha|}\partial_{x'}^\alpha(e^{-i\xi\cdot x'})d\xi du_\alpha(x')\\ &= \sum_\alpha\int_V(-1)^{|\alpha|}\partial_{x'}^\alpha\left(\int e^{i\xi\cdot x}\sigma(\epsilon\xi)(-i\xi)^\alpha e^{-i\xi\cdot x'}d\xi\right)du_\alpha(x')\\ &= \sum_\alpha\left\langle u_\alpha(x');(-1)^{|\alpha|}\partial_{x'}^\alpha\left(\int e^{i\xi\cdot x}\sigma(\epsilon\xi)(-i\xi)^\alpha e^{-i\xi\cdot x'}d\xi\right)\right\rangle\\ &= \left\langle u_{x'};\int\frac{\hat{\chi}(\epsilon\xi)}{(2\pi)^m}e^{i\xi\cdot(x-x')}d\xi\right\rangle,\end{aligned}$$

em que na última igualdade foi usado o fato que $u=\sum_\alpha\partial^\alpha u_\alpha$ e a definição de σ. Como $\chi\in\mathcal{D}_M(\mathbb{R}^m)$, fazendo uma mudança de variável (multiplicação por escalar), pela fórmula de inversão da transformada de Fourier (para funções, ver [40]) temos

$$\int e^{i\xi\cdot x}\sigma(\epsilon\xi)\hat{u}(\xi)d\xi = \left\langle u_{x'};\frac{1}{(2\pi)^m\epsilon^m}\int\hat{\chi}(\xi)e^{i(\xi/\epsilon)\cdot(x-x')}d\xi\right\rangle=\left\langle u;\epsilon^{-m}\chi\left(\frac{x-x'}{\epsilon}\right)\right\rangle.$$

Pelo Teorema A.1.2 concluímos que

$$\int e^{i\xi\cdot x}\sigma(\epsilon\xi)\hat{u}(\xi)d\xi=u*\chi_\epsilon(x)\to u$$

em $\mathcal{E}'_M$ quando $\epsilon\to 0^+$. ■

Agora estamos prontos para apresentar a fórmula de inversão das transformadas FBI-BH.

Lema 2.1.5. *Seja $u \in \mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^m)$, $\psi \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^m)$ e*

$$u_\epsilon(x) \doteq \int\int e^{i\xi\cdot(x-t)}\sigma(\epsilon\xi)\mathcal{F}_{\psi,\lambda}u(t,\xi)|\xi|^{\lambda m}dtd\xi.$$

Se existe $C > 0$ tal que $\|\partial^\alpha\psi\|_{L^1} \leqslant C^{|\alpha|+1}M_{|\alpha|}$ então $u_\epsilon \to u$ em $\mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^m)$, quando $\epsilon \to 0^+$.

Demonstração. Pela definição das transformadas FBI-BH vemos que u_ϵ pode ser reescrita como:

$$u_\epsilon(x) \quad = \quad \int\int e^{i\xi\cdot(x-t)}\sigma(\epsilon\xi)\langle u_{x'}; e^{i\xi\cdot(t-x')}\psi(|\xi|^\lambda(t-x'))\rangle|\xi|^{\lambda m}dtd\xi.$$

Como $u \in \mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^m)$ existe um conjunto $V \subset \mathbb{R}^m$ aberto e limitado tal que supp $\{u\} \subset V$. Pelo Teorema 1.1.6 existem medidas borelianas u_α satisfazendo (1.15), de modo que

$$\langle u, \phi\rangle = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|}\int_V (\partial^\alpha\phi)\, du_\alpha,$$

para todo $\phi \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^m)$. Assim,

$$u_\epsilon(x) = \int\int\sum_\alpha(-1)^{|\alpha|}\int_V \sigma(\epsilon\xi)\partial^\alpha_{x'}\{e^{i\xi\cdot(x-x')}\psi(|\xi|^\lambda(t-x'))\}du_\alpha(x')dt|\xi|^{\lambda m}d\xi. \tag{2.7}$$

Como $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, note que para $\xi \in \mathbb{R}^m$ fixado, pelo Teorema de Tonelli, temos

$$\begin{aligned}
&\int\sum_\alpha\int_V|\sigma(\epsilon\xi)\partial^\alpha_{x'}\{e^{i\xi\,(x-x')}\psi(|\xi|^\lambda(t-x'))\}|d|u_\alpha|(x')dt\\
&\leqslant \int\sum_\alpha\int_V |\sigma(\epsilon\xi)|\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\xi^{\alpha-\beta}|\,|\xi|^{\lambda|\beta|}\,|(\partial^\beta_{x'}\psi)(|\xi|^\lambda(t-x'))|\,d|u_\alpha|(x')dt\\
&\leqslant \sum_\alpha\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\sigma(\epsilon\xi)||\xi|^{|\alpha-\beta|}\,|\xi|^{\lambda|\beta|}\int_V\int|(\partial^\beta_{x'}\psi)(|\xi|^\lambda(t-x'))|dtd|u_\alpha|(x')\\
&= \sum_\alpha\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\sigma(\epsilon\xi)||\xi|^{|\alpha-\beta|}\,|\xi|^{\lambda|\beta|-\lambda m}\int_V\int|(\partial^\beta_{x'}\psi)(t)|dtd|u_\alpha|(x')\\
&\leqslant \sum_\alpha\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\sigma(\epsilon\xi)||\xi|^{|\alpha-\beta|}\,|\xi|^{\lambda|\beta|-\lambda m}\,C^{|\alpha|+1}M_{|\alpha|}\,|u_\alpha|(V)\\
&\overset{(1.15)}{\leqslant} C_L\sum_\alpha|\xi|^{-\lambda m}(|\xi|\,+\,|\xi|^\lambda)^{|\alpha|}\,C^{|\alpha|+1}M_{|\alpha|}\frac{L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}} < +\infty,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

para $|\xi|$ fixado e $L > 0$ suficientemente pequeno, na última desigualdade foi usado que $\sigma = \frac{\hat{\chi}}{(2\pi)^m}$ é limitada (lembra-se que $\chi \in \mathcal{D}_M(\mathbb{R}^m)$). Logo, podemos aplicar o Teorema de Fubini, reescrevendo (2.7) do seguinte modo,

$$u_\epsilon = \int \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \int_V \int \sigma(\epsilon\xi)\partial^\alpha_{x'}\{e^{i\xi\cdot(x-x')}\psi(|\xi|^\lambda(t-x'))\}dtdu_\alpha(x')|\xi|^{\lambda m}d\xi.$$

Fixados $\alpha \in \mathbb{N}^m$, $\xi \in \mathbb{R}^m$ e $x' \in \mathbb{R}^m$, como $\|\partial^\alpha\psi\|_{L^1} \leqslant C^{|\alpha|+1}M_{|\alpha|}$, após uma mudança de variável $(t' = |\xi|^\lambda(t-x'))$ segue que

$$|\partial^\alpha_{x'}\{e^{i\xi\cdot(x-x')}\psi(|\xi|^\lambda(t-x'))\}| \leqslant 2^{|\alpha|}\sum_{\beta\leqslant\alpha}|\xi|^{|\alpha-\beta|}|\xi|^{\lambda|\beta|}|(\partial^\beta_{x'}\psi)(|\xi|^\lambda(t-x'))| \in L^1(\mathbb{R}^m),$$

na variável t. Deste modo, podemos derivar sob o sinal de integração (vide demonstração de [33, Theorem 2.27], substituindo o Teorema da convergência dominada pelo Teorema da convergência dominada generalizada, exercício 20 da página 59 de [33]). Assim, lembrando que $u = \sum_\alpha \partial^\alpha u_\alpha$, u_ϵ pode ser reescrito como,

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x) &= \int \sum_{|\alpha|\leqslant k}(-1)^{|\alpha|}\int_V \partial^\alpha_{x'}\left\{\int \sigma(\epsilon\xi)e^{i\xi\cdot(x-x')}\psi(|\xi|^\lambda(t-x'))dt\right\}du_\alpha(x')|\xi|^{\lambda m}d\xi \\ &= \int \left\langle u_{x'}; \sigma(\epsilon\xi)e^{i\xi\cdot(x-x')}\int \psi(|\xi|^\lambda(t-x'))|\xi|^{\lambda m}dt\right\rangle d\xi. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\int\psi(x)dx = 1$ segue que

$$\int \psi(|\xi|^\lambda(t-x'))|\xi|^{\lambda m}dt = 1, \quad \forall\, x',\, \xi \in \mathbb{R}^m$$

e então,

$$u_\epsilon(x) = \int \left\langle u_{x'}; \sigma(\epsilon\xi)e^{i\xi\cdot(x-x')}\right\rangle d\xi = \int e^{i\xi x}\sigma(\epsilon\xi)\hat{u}(\xi)d\xi.$$

Pelo lema anterior concluímos que $u_\epsilon \to u$ em $\mathcal{E}'_M$ quando $\epsilon \to 0$. ∎

O próximo lema mostra que as transformadas $\mathcal{F}^\lambda_p$ satisfazem as hipóteses do Lema 2.1.5 e portanto possuem uma fórmula de inversão (dada pelo Lema 2.1.5).

Lema 2.1.6. *Seja ψ como no Exemplo 2.1.3 ($\psi(x) = c_p e^{-p(x)}$, em que p é um polinômio real homogêneo e elíptico de grau $2k$). Existe $C > 0$ tal que $\|\partial^\alpha\psi\|_{L^1} \leqslant C^{|\alpha|+1}M_{|\alpha|}$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^m$.*

Demonstração. Observe que como $\psi \in \mathcal{E}_M$ segue que

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha \psi\|_{L^1} &= \int |\partial^\alpha \psi(x)| dx \\ &= \int_{|x|\leqslant 1} |\partial^\alpha \psi(x)| dx + \int_{|x|>1} |\partial^\alpha \psi(x)| dx \\ &\leqslant C^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|} + \int_{|x|>1} |\partial^\alpha \psi(x)| dx\end{aligned}$$

Assim, lembrando que $j! \leqslant M_j$ (para todo $j \in \mathbb{N}$), é suficiente provar que existe $C > 0$ tal que

$$|x|^{m+1} \cdot |\partial_x^\alpha \psi(x)| \leqslant C^{|\alpha|+1} |\alpha|!, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{N}^m \quad \text{e} \quad |x| > 1.$$

Já que $\psi(x) = c_p e^{-p(x)}$, segue do Teorema A.1.3 que

$$\partial_x^\alpha \psi(x) = \sum_{r=1}^{|\alpha|} e^{-p(x)} \sum_{\mathfrak{p}(\alpha,r)} \alpha! \prod_{j=1}^{|\alpha|} \frac{[\partial^{\alpha_j}\{-p(x)\}]^{k_j}}{k_j! \alpha_j!^{k_j}},$$

em que $\mathfrak{p}$ é o conjunto admitido pelo Teorema A.1.3. Como p é polinômio de grau $2k$ existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}|x|^{m+1} \cdot |\partial^\alpha \psi(x)| &\leqslant |x|^{m+1} \sum_{r=1}^{|\alpha|} e^{-c|x|^{2k}} \sum_{\mathfrak{p}(\alpha,r)} \alpha! \prod_{j=1}^{|\alpha|} \frac{[C|x|^{2k}]^{k_j}}{k_j! \alpha_j!^{k_j}} \\ &\overset{(A.5),(A.13)}{\leqslant} |x|^{2k(m+1)} \sum_{r=1}^{|\alpha|} e^{-c|x|^{2k}} C^{|\alpha|} |x|^{2k|\alpha|} \frac{4^{-|\alpha|}}{|\alpha|!} |\alpha|! \sum_{\mathfrak{p}(\alpha,r)} \prod_{j=1}^{|\alpha|} \frac{1}{k_j!} \\ &\overset{(A.9),(A.10)}{\leqslant} C^{|\alpha|} \left(\frac{2}{c}\right)^{m+1+|\alpha|} (m+1+|\alpha|)! e^{-\frac{c}{2}|x|^{2k}} C^{|\alpha|} \leqslant C^{|\alpha|+1} |\alpha|!,\end{aligned}$$

para $|x| > 1$, pois $\sum_{r=1}^{\alpha} 1 \leqslant 2^{|\alpha|}$ e $(m+1+|\alpha|)! \leqslant 2^{m+1+|\alpha|} (m+1)! \cdot |\alpha|!$. ■

2.2 Caracterização das classes de Denjoy-Carleman

Nessa seção caracterizaremos regularidade DC (local) pelo decaimento das transformações $\mathcal{F}_p^\lambda$ (apresentadas no Exemplo 2.1.3). Para tanto apresentaremos dois lemas auxiliares.

Lema 2.2.1. *Se $u \in \mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^m)$ se anula em uma vizinhança aberta W de x_0, então para todo $\theta > 0$*

existem constantes $C, a > 0$ *e uma vizinhança* V *de* x_0 *(independente de* C, p *e* λ*) tais que*

$$|\mathcal{F}_p^\lambda u(x,\xi)| \leqslant Ce^{H/\theta}\ e^{\frac{1}{2}M(\theta|\xi|)-a|\xi|^\lambda}, \tag{2.9}$$

para todo $x \in V$ *e* $|\xi| > 1$*.*

Demonstração. Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $u = 0$ em $B(x_0, 3\delta) = \{x : |x - x_0| < 3\delta\} \subset W$. Considere $\psi' \in \mathcal{D}_M(B(x_0, 3\delta))$ tal que $0 \leqslant \psi' \leqslant 1$ e $\psi(x) = 1$ para $|x - x_0| < 2\delta$ e defina $\psi = 1 - \psi'$. Sendo $K \doteq supp\, u \subset \mathbb{R}^m \backslash B(x_0, 3\delta)$, e $r > 0$ tal que $K \subset \{x : 3\delta < |x - x_0| < r\}$; pelo Teorema 1.1.6 segue que para todo $L > 0$ existe $C = C_L > 0$ tais que

$$|u(\phi)| = |u(\psi\phi) + u(\psi'\phi)| = |u(\psi\phi)| \leqslant C \sum_\alpha \frac{L^\alpha}{M_{|\alpha|}} \sup_{2\delta<|x-x_0|<r} \partial^\alpha(\psi\phi)(x),$$

para todo $\phi \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^m)$. Assim, considerando $\phi(x) = \phi_{\xi,t}(x) = c_p e^{i\xi\cdot(t-x)} e^{-|\xi|^\lambda p(t-x)}$, pela regra de Leibniz temos

$$|\mathcal{F}_p^\lambda u(t,\xi)| \ \leqslant\ C \sum_\alpha \frac{L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}} \sup_{2\delta<|x-x_0|<r} \sum_{\gamma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} |\partial_x^{\alpha-\gamma}\psi(x)| \left|\partial_x^\gamma \left\{e^{i(t-x)-|\xi|^\lambda p(t-x)}\right\}\right|.$$

Como $\psi \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^m)$, pelo Lema A.1.4 existe $C > 0$ (aumentando se necessário) tal que

$$\left|\mathcal{F}_p^\lambda u(t,\xi)\right| \ \leqslant\ C \sum_\alpha \frac{L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}} \sup_{2\delta<|x-x_0|<r} \sum_{\gamma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} C^{|\alpha-\gamma|+1} M_{|\alpha-\gamma|}\, e^{-|\xi|^\lambda p(t-x)} e^{\frac{1}{2}M(\theta|\xi|)} e^{H/\theta} C^{|\gamma|+1} M_{|\gamma|},$$

para todo $\theta > 0$ e $|\xi| > 1$. Por outro lado, aplicando a desigualdade (2.4) segue que,

$$-p(t-x) \leqslant -c|t-x|^{2k} \leqslant -c(|x-x_0| - |t-x_0|) \leqslant -c(2\delta - \delta) = -c\delta,$$

sempre que $|x - x_0| > 2\delta$ e $|t - x_0| \leqslant \delta$. Portanto, aplicando a propriedade (1.8), considerando L suficientemente pequeno, $a \doteq c\delta$ e $V \doteq B(x_0, \delta)$ temos que

$$|\mathcal{F}_p^\lambda u(t,\xi)| \leqslant Ce^{H/\theta} e^{-a|\xi|^\lambda + \frac{1}{2}M(\theta|\xi|)},$$

para $t \in V$ e $|\xi| > 1$. ∎

Note que o teorema anterior continua válido com a hipótese mais fraca, $p \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^m)$ tal que

$p(x) \geqslant c|x|^{2k}$.

Lema 2.2.2. *Sejam $u, v \in \mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^m)$ e $u = v$ em uma vizinhança de x_0. Se u satisfaz (2.9) em uma vizinhança V de x_0 então existe uma vizinhança U de x_0 tal que v também satisfaz (2.9).*

Demonstração. Se definirmos $w = v - u$ segue que w se anula em uma vizinhança de x_0 e pelo Lema anterior segue que existe uma vizinhança W de x_0 tal que (2.9) é satisfeita. Definindo $U = V \cap W$, pela linearidade da transformada FBI concluímos a demonstração. ∎

Observação 2.2.3 (λ admissível)**.**

1. *Observe que se supusermos $c', c'' > 0$ tais que*

$$t^\lambda \geqslant M(c't), \quad t \geqslant c'' \tag{2.10}$$

então

$$a|\xi|^\lambda \geqslant M\left(c' a^{1/\lambda}|\xi|\right),$$

sempre que $a^{1/\lambda}|\xi| > c''$. Deste modo, escolhendo $\theta = c' a^{1/\lambda}$ podemos substituir (2.9) por

$$|\mathcal{F}^\lambda_p u(x,\xi)| \leqslant C e^{-\frac{1}{2}M(\theta|\xi|)}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^m \tag{2.11}$$

(observando que pelo Teorema 1.1.6 temos que para todo $L > 0$,

$$|\mathcal{F}^\lambda_p u(t,\xi)| \quad \leqslant \quad C \sum_\alpha \frac{L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}} \sup_{x \in supp\ u} \left|\partial^\gamma_x \left\{ e^{i(t-x) - |\xi|^\lambda p(t-x)} \right\}\right|,$$

e assim temos que $|\mathcal{F}^\lambda_p u(t,\xi)| \cdot e^{bM(|\xi|)}$ é limitada em conjuntos compactos).

Os valores $\lambda > 0$ tais que a propriedade (2.10) é satisfeita (para algum $c', c'' > 0$) são chamados **admissíveis para a sequência M.**

2. *Em ([47, Corollary 1.4] encontramos uma condição equivalente à (2.10)).*

3. *Lembre-se que por [42, Lemma 3.10] temos que $G^{1/\lambda}(\Omega) \subset \mathcal{E}_M(\Omega)$ é equivalente a existir constantes positivas C_1, C_2 tais que $M(t) \leqslant C_1 \frac{1}{\lambda} t^\lambda + \log C_2$, para todo $t > 0$. Deste modo, $G^{1/\lambda}(\Omega) \subset \mathcal{E}_M(\Omega)$ se e somente se λ é admissível para a sequência M.*

4. *Por (1.19), a propriedade (2.10) sempre é satisfeita para $\lambda = 1$ e $c' = 1$.*

5. *É importante observar que M. Christ, em [27], caracterizou regularidade Gevrey (G^s) pelo decaimento das transformadas $\mathcal{F}_\gamma$ (definidas em (2.2)) que satisfazem a condição*

$$\frac{1}{s} \leqslant \gamma \leqslant 1. \tag{2.12}$$

a qual, no caso Gerey, é equivalente a condição (2.10).

6. *No caso analítico ($M_j = j!$) a propriedade (2.10) se valida apenas para $\lambda \geqslant 1$. Isto mais os Teoremas 2.2.4, 2.3.5 e 2.3.6 explicam o parâmetro das transformadas FBI-BH usado em [16] ($\lambda = 1$) para caracterizar analiticidade. Deste modo relacionamos os resultados deste capítulo com os trabalhos [27] e [16].*

A seguir apresentaremos uma caracterização de regularidade DC via transformadas $\mathcal{F}_p^\lambda$ em que o parâmetro λ é admissível para sequencia M.

Teorema 2.2.4. *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \leqslant 1$ satisfazendo a condição (2.10). Uma ultradistribuição $u \in \mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^m)$ é de classe $\mathcal{E}_M$ em uma vizinhança de x_0 se e somente se existem constantes $C, c_1, c_2 > 0$ e uma vizinhança U de x_0 tais que*

$$|\mathcal{F}_p^\lambda u(x,\xi)| \leqslant Ce^{-c_1 M(c_2|\xi|)}, \quad \forall x \in U,\ \xi \in \mathbb{R}^m. \tag{2.13}$$

Demonstração. Seja $r > 0$ a definir e $\phi \in \mathcal{D}_M(B(x_0,r))$ tal que $\phi \equiv 1$ em $B(x_0, \frac{r}{2})$ e $0 \leqslant \phi \leqslant 1$. Já que $\phi \equiv 1$ em $B(x_0, \frac{r}{2})$ segue que $u = \phi u$ em $B(x_0, \frac{r}{2})$. Assim, pelo Lema 2.2.3 e o primeiro item da Observação 2.2.2, é suficiente provar (2.13) para ϕu.

Considere r suficientemente pequeno, de modo que u seja de classe $\mathcal{E}_M$ em $B(x_0,r)$. A seguir provaremos que $\phi u \in \mathcal{D}_M(B(x_0,r))$ satisfaz a desigualdade (2.13), para $|\xi| > 1$ (como $\mathcal{F}_p^\lambda u$ é limitada em conjuntos compactos temos que é suficiente provar esse caso). Como $\phi u \in \mathcal{D}_M(B(x_0,r))$, temos que

$$\begin{aligned}
\xi^\alpha \mathcal{F}_p^\lambda \phi u(t,\xi) &= c_p \left\langle \phi u; \xi^\alpha e^{i\xi(t-\cdot)} e^{-|\xi|^\lambda p(t-\cdot)} \right\rangle \\
&= c_p \int_{B(x_0,r)} \phi(x)u(x)e^{-|\xi|^\lambda p(t-x)} i^{|\alpha|} \partial_x^\alpha [e^{i\xi(t-x)}]dx \\
&= c_p(-i)^{|\alpha|} \int_{B(x_0,r)} \partial_x^\alpha \left[\phi(x)u(x)e^{-|\xi|^\lambda p(t-x)}\right] e^{i\xi(t-x)}dx, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^m.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Como $\phi u \in \mathcal{D}_M(B(x_0,r))$, pela regra de Leibniz, pelo Lema A.1.4 (considerando $g \equiv 0$, $\psi = p$ e $f(x,y) = x$), por (1.8) e por (2.4) vemos que, existem constantes $C, c > 0$ tais que para todo $\theta > 0$ (independente de C e c) obtemos

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha\{\phi(x)u(x)e^{-|\xi|^\lambda p(t-x)}\}| &\leqslant \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\partial_x^{\alpha-\beta}\{\phi(x)u(x)\}|\ \partial_x^\beta\{e^{-|\xi|^\lambda p(t-x)}\} \\ &\leqslant \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}C^{|\alpha|+1}M_{|\alpha-\beta|}M_{|\beta|}e^{H/\theta}e^{\frac{1}{2}M(\theta|\xi|)}e^{-c|\xi|^\lambda|t-x|^{2k}} \\ &\leqslant C^{|\alpha|+1}M_{|\alpha|}e^{H/\theta}e^{\frac{1}{2}M(\theta|\xi|)}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

para $|x - x_0| < r$, $|t - x_0| < \delta$ (para algum $\delta > 0$, a determinar) e $|\xi| > 1$, lembrando que $\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta} = 2^{|\alpha|}$. Aplicando (2.15) em (2.14) temos;

$$|\xi^\alpha\mathcal{F}_p^\lambda\phi u(t,\xi)| \leqslant C^{|\alpha|+1}\,M_{|\alpha|}\,e^{H/\theta}\,e^{\frac{1}{2}\,M(\theta|\xi|)};\ \ |t-x_0| < \delta \ \text{ e } \ |\xi| \geqslant 1. \tag{2.16}$$

Denotando $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, vemos que para cada $j \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} |\xi|^j|\mathcal{F}_p^\lambda\phi u(x,\xi)| &\leqslant \sqrt{m}\max_{k=1}^{m}\{|\xi_k|^j\}|\mathcal{F}_p^\lambda\phi u(x,\xi)| \\ &\overset{(2.16)}{\leqslant} C^{j+1}e^{H/\theta}M_je^{\frac{1}{2}M(\theta|\xi|)} \leqslant C\frac{1}{c_2^j}e^{H/\theta}M_je^{\frac{1}{2}M(\theta|\xi|)}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

para $c_2 = \frac{1}{C} > 0$. Escolhendo $\theta = c_2$, já que a desigualdade (2.17) vale para todo j natural,

$$|\mathcal{F}_p^\lambda\phi u(x,\xi)| \leqslant Ce^{H/c_2}\inf_j\frac{M_j}{(|\xi|c_2)^j}e^{\frac{1}{2}M(c_2|\xi|)} \leqslant Ce^{-M(c_2|\xi|)}e^{\frac{1}{2}M(c_2|\xi|)} = Ce^{-\frac{1}{2}M(c_2|\xi|)}. \tag{2.18}$$

Definindo $c_1 = \frac{1}{2}$ concluímos que existem $C, c_1, c_2 > 0$ tais que

$$|\mathcal{F}_p^\lambda\phi u(t,\xi)| \leqslant Ce^{-c_1M(c_2|\xi|)},$$

para t em uma vizinhança limitada de x_0 e $\xi \in \mathbb{R}^m$. (Observe que por (2.15) é possível ver que essa prova continua válida para o caso mais geral em que p não é um polinômio).

Reciprocamente, considerando $u \in \mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^m)$ satisfazendo a desigualdade (2.13) provaremos que u é de classe $\mathcal{E}_M$ em uma vizinhança de x_0 (essa demonstração foi baseada na demonstração da recíproca de [15, Theorem V.2.4]). Assim como discutido no começo desta demonstração, é suficiente provar que ϕu ($\phi \in \mathcal{D}_M(B(x_0, r))$, com $\phi \equiv 1$ em $B(x_0, r/2)$ e r suficientemente pequeno a definir) é classe $\mathcal{E}_M$ em uma vizinhança de x_0. Todavia, para não carregar a notação consideraremos simplesmente $u \in \mathcal{E}'_M(B(x_0, r))$ com r suficientemente pequeno a definir. Pela fórmula de inversão das transformadas FBI-BH (conforme Lema 2.1.5), consideraremos

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m} e^{i\xi\cdot(x-t)}\sigma(\epsilon\xi)\mathcal{F}_p^\lambda u(t,\xi)|\xi|^{\lambda m/2k} dt d\xi \\ &= I_1^\epsilon(x) + I_2^\epsilon(x) + I_3^\epsilon(x) + I_4^\epsilon(x), \end{aligned}$$

em que $I_1^\epsilon(x)$, $I_2^\epsilon(x)$, $I_3^\epsilon(x)$ representam a integral de $e^{i\xi\cdot(x-t)}\sigma(\epsilon\xi)\mathcal{F}_p^\lambda u(t,\xi)|\xi|^{(\lambda m)/(2k)}$ nos respectivos domínios de integração:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(t,\xi) : |t - x_0| < A_1,\ \xi \in \mathbb{R}^m\} \\ U_2 &= \{(t,\xi) : |t - x_0| > A_2,\ \xi \in \mathbb{R}^m\} \\ U_3 &= \{(t,\xi) : A_1 \leqslant |t - x_0| \leqslant A_2,\ |\xi| \geqslant 1\}, \\ U_4 &= \{(t,\xi) : A_1 \leqslant |t - x_0| \leqslant A_2,\ |\xi| < 1\} \end{aligned}$$

com A_1, $A_2 > 0$ a definir e $\sigma(\xi) = \frac{\hat{\chi}(\xi)}{(2\pi)^m}$ tal que $\chi \in D^{\{M\}}(B(0,R))$ ($R > 0$ suficientemente pequeno a definir) e $\int \chi(x)dx = 1$. Provaremos que existe uma vizinhança U_{x_0} de x_0 em que cada I_j^ϵ converge em $\mathcal{E}'_M$ para uma função de classe $\mathcal{E}_M(U_{x_0})$.

Pela hipótese, podemos considerar $A_1 > 0$ tal que $|\mathcal{F}_p^\lambda u(t,\xi)| \leqslant Ce^{-c_1 M(c_2|\xi|)}$, quando $|t - x_0| < A_1$ e $\xi \in \mathbb{R}^m$. Por (1.25) existe $c' > 0$ tal que $|\mathcal{F}_p^\lambda u(t,\xi)| \leqslant Ce^{-M(c'|\xi|)}$, para todo $|t - x_0| < A_1$ e $\xi \in \mathbb{R}^m$. Como $\chi \in \mathcal{D}_M(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^m)$ (em que $\mathcal{S}$ representa o espaço de Schwartz) temos $\widehat{\chi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ e portanto $\sigma = \frac{\hat{\chi}}{(2\pi)^m}$ é limitada. Assim, por (1.23) e o item 7 do Lema 1.1.9 vemos que para todo $x \in \mathbb{R}^m$, $(t,\xi) \in U_1$ e $|\xi| > 1$;

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^\alpha \left(e^{i\xi(x-t)}\sigma(\epsilon\xi)\mathcal{F}_p^\lambda u(t,\xi)|\xi|^{\lambda m/2k}\right)\right| &\leqslant \frac{|\widehat{\chi}(\epsilon\xi)|}{(2\pi)^m} Ce^{-M(c'|\xi|)}|\xi|^{|\alpha|+\lambda m/2k} \\ &\leqslant C|\xi|^{|\alpha|+\lambda m/2k} e^{-M(c'|\xi|)} \\ &\leqslant C|\xi|^{|\alpha|+l} e^{-M(c'|\xi|)} \\ &\overset{(1.23)}{\leqslant} C\sqrt{A}\frac{H^{|\alpha|+l}}{c'^{|\alpha|+l}} M_{|\alpha|+l}\, e^{-\frac{1}{2}M(c'|\xi|)} \in L^1(\mathbb{R}^m) \end{aligned} \tag{2.19}$$

em que l é um inteiro tal que $\frac{\lambda m}{2k} \leqslant l < \frac{\lambda m}{2k} + 1$. Como $\mathcal{F}_p^{\lambda} u$ é limitada em conjuntos limitados temos uma desigualdade do tipo (2.19) satisfeita para o caso $|\xi| \leqslant 1$. Assim podemos aplicar o teorema da convergência dominada, obtendo

$$I_1^{\epsilon}(x) \longrightarrow I_1(x) \doteq \int_{U_1} e^{i\xi(x-t)}(2\pi)^m \mathcal{F}_p u(t,\xi)|\xi|^{(\lambda m)/(2k)} dt d\xi, \quad \text{quando } \epsilon \to 0^+, \tag{2.20}$$

uniformemente. Além disso, por (2.19) (considerando $\epsilon = 0$), podemos derivar sobre o sinal de integração obtendo:

$$\begin{aligned} |\partial_x^{\alpha} I_1(x)| &\leqslant C^{l+1} M_{|\alpha|+l} \int e^{-\frac{1}{2}M(c'|\xi|)} d\xi \\ &\overset{(1.3),(1.24)}{\leqslant} C^{|\alpha|+l+1} H^{|\alpha|+l+1} M_l M_{|\alpha|} \\ &\leqslant C^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

já que l é um natural fixo. Portanto I_1^{ϵ} converge para I_1 em $\mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^m)$ e além disso $I_1 \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^m)$.

Para I_2^{ϵ} considere $A_2 > 0$ suficientemente grande e r suficientemente pequeno de modo que $r < 1 < \frac{A_2}{2}$ (lembrando que $u \in \mathcal{E}'_M(B(x_0,r))$). Observe que $|t-x'| > \frac{A_2}{2} \geqslant 1$, quando $|t-x_0| > A_2$ e $|x'-x_0| < r < \frac{A_2}{2}$. Note que por (1.17), pela regra de Leibniz e pelo Teorema A.1.3 para todo $L > 0$ existe $C_L > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_p^{\lambda} u(t,\xi)| &= c_p \left|\langle u; e^{i\xi(t-x') - |\xi|^{\lambda} p(t-x')}\rangle\right| \overset{(1.17)}{\leqslant} c_p C_L \sum_{\alpha} L^{|\alpha|} M_{|\alpha|}^{-1} \sup_{|x'-x_0|<r} |\partial_{x'}^{\alpha}(e^{i\xi(t-x')} e^{-c|\xi|^{\lambda} p(t-x')})| \\ &\overset{(A.4)}{\leqslant} c_p C_L \sum_{\alpha} \frac{L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}} \sup_{|x'-x_0|<r} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\xi|^{|\alpha|-|\beta|} \sum_{q=1}^{|\beta|} e^{-c|\xi|^{\lambda}|t-x'|^{2k}} \sum_{\mathfrak{p}} \beta! \prod_{j=1}^{|\beta|} \frac{[|\xi|^{\lambda} \partial_{x'}^{\alpha_j} p(t-x')]^{k_j}}{k_j!(\alpha_j!)^{k_j}} \\ &\leqslant c_p C_L \sum_{\alpha} \frac{L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}} \sup_{|x'-x_0|<r} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\xi|^{|\alpha|-|\beta|} \sum_{q=1}^{|\beta|} e^{-c|\xi|^{\lambda}|t-x'|^{2k}} \sum_{\mathfrak{p}} \beta! \prod_{j=1}^{|\beta|} \frac{[|\xi|^{\lambda} c|t-x'|^{2k}]^{k_j}}{k_j!(\alpha_j!)^{k_j}}, \end{aligned}$$

para $|t-x_0| > A_2$, em que na última estimativa existe tal $c > 0$ pois p é um polinômio de grau $2k$. Como, $\frac{[(c/2)|\xi|^{\lambda}|t-x'|^{2k}]^{k_j}}{k_j!} \leqslant e^{(c/2)|\xi|^{\lambda}|t-x'|^{2k}}$, segue que para todo $\theta > 0$ temos,

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_p^{\lambda} u(t,\xi)| &\leqslant c_p C_L \sum_{\alpha} \frac{L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}} \sup_{|x'-x_0|<r} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\xi|^{|\alpha|-|\beta|} \sum_{r=1}^{|\beta|} e^{-(c/2)|\xi|^{\lambda}|t-x'|^{2k}} \sum_{\mathfrak{p}} \beta! \prod_{j=1}^{|\beta|} 2^{k_j} \\ &\leqslant c_p C_L \sum_{\alpha} (CL)^{|\alpha|} \sup_{|x-x_0|<r} e^{-(c/2)|\xi|^{\lambda}|t-x'|^{2k}} e^{\frac{1}{2}M(\theta|\xi|)} \left(1 + \frac{H}{\theta}\right)^{|\alpha|}, \end{aligned}$$

para $|t-x_0|>A_2$ e $\xi\in\mathbb{R}^m$, em que na última inequação usamos (1.13), (1.23), (A.5), (A.10), que $\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}t^{|\alpha|-|\beta|}=(1+t)^{|\alpha|}$ e que $q\geqslant k_j$. Por outro lado, observe que se $|t-x_0|>A_2$ e $|x-x_0|<r$ temos

$$|t-x'|\geqslant|t-x_0|-|x'-x_0|>A_2-r>\frac{A_2}{2},$$

pois $r<\frac{A_2}{2}$. Além disso,

$$|t-x'|\geqslant|t-x_0|-\frac{A_2}{2}>|t-x_0|-\frac{|t-x_0|}{2}=\frac{|t-x_0|}{2},$$

sempre que $|t-x_0|>A_2$ e $|x-x_0|<r<\frac{A_2}{2}$. Deste modo, denotando $a\doteq\left[\frac{c}{4}\left(\frac{A_2}{2}\right)^{2k}\right]^{1/\lambda}$, $\theta\doteq ac'$, considerando L suficientemente pequeno, aumentando C (se necessário) e aplicando a propriedade (2.10) segue que,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}_p^\lambda u(t,\xi)| &\leqslant Ce^{-(c/4)|\xi|^\lambda|t-x'|^{2k}}e^{-(c/4)|\xi|^\lambda|t-x'|^{2k}}e^{\frac{1}{2}M(\theta)|\xi|}\\
&\leqslant Ce^{-\frac{c}{2^{2k+2}}|\xi|^\lambda|t-x_0|^{2k}}e^{-(a|\xi|)^\lambda}e^{\frac{1}{2}M(\theta)|\xi|}\\
&\overset{(2.10)}{\leqslant} Ce^{-\frac{c}{2^{2k+2}}\left(\frac{c''}{a}\right)^\lambda|t-x_0|^{2k}}e^{-M(c'a|\xi|)+\frac{1}{2}M(\theta|\xi|)}\\
&= Ce^{-\frac{c}{2^{2k+2}}\left(\frac{c''}{a}\right)^\lambda|t-x_0|^{2k}}e^{-\frac{1}{2}M(\theta|\xi|)}
\end{aligned}\tag{2.22}$$

para $|\xi|>\frac{c''}{a}$. Observe ainda que, como $\mathcal{F}_p^\lambda u$ é limitada em conjuntos limitados segue que (2.22) é satisfeita para todo $\xi\in\mathbb{R}^m$. Já que (2.22) é satisfeita para todo $\xi\in\mathbb{R}^m$ podemos proceder de modo análogo ao caso anterior (veja (2.19), (2.20) e (2.21)) e concluir que

$$I_2^\epsilon(x)\to I_2(x)\doteq\int_{U_1}e^{i\xi\,(x-t)}(2\pi)^m\mathcal{F}_pu(t,\xi)|\xi|^{(\lambda m)/(2k)}dtd\xi,\ \ \text{quando }\epsilon\to0^+,$$

uniformemente e ainda $I_2\in\mathcal{E}_M$. Concluindo assim que em uma vizinhança de x_0 temos que I_2^ϵ converge em $\mathcal{E}'_M$ para uma função de classe $\mathcal{E}_M$.

Agora estudaremos o limite de

$$\begin{aligned}
I_3^\epsilon(x) &= \int_{|\xi|\geqslant1}\int_{A_1\leqslant|t-x_0|\leqslant A_2}\left\langle u(x');e^{i\xi(x-t)}\sigma(\epsilon\xi)e^{i\xi(t-x')}e^{-|\xi|^\lambda p(t-x')}|\xi|^{(\lambda m)/(2k)}\right\rangle dtd\xi\\
&= \int_{|\xi|\geqslant1}\int_{\{A_1\leqslant|t-x_0|\leqslant A_2\}}\sum_\beta\int_{B(x_0;r)}\sigma(\epsilon\xi)\partial_{x'}^\beta\{e^{i\xi(x-x')}e^{-|\xi|^\lambda p(t-x')}\}|\xi|^{(\lambda m)/(2k)}du_\beta(x')dtd\xi
\end{aligned}\tag{2.23}$$

em que u_β são medidas borelianas obtitas aplicando o Teorema 1.1.6. A principal diferença desse caso para os demais é que, nesse caso não é possível estimar diretamente a $\alpha-$ésima derivada (em x) do integrando por uma função integrável. Para podermos aplicar o teorema da convergência dominada e derivar sob o sinal de integração se fará necessário um "contorno" do domínio de integração na variável ξ.

A seguir, fixado $\epsilon > 0$, aplicaremos o teorema de Fubini. Para isso precisamos provar que o integrando em (2.23) em módulo é integrável. Note que como $\sigma = \frac{\hat{\chi}}{(2\pi)^m}$ e $\chi \in \mathcal{D}_M$ segue do Lema A.1.5 que existe $C, b > 0$ tais que $|\sigma(\zeta)| \leqslant Ce^{-M(b|\zeta|)}e^{R|\Im\zeta|}$, $\forall \zeta \in \mathbb{C}^m$. Dado $\frac{\lambda m}{2k} \leqslant l \in \mathbb{N}$, pelo Lema A.1.4 (com $g(x', x) = x - x'$, $f(x', x) = x'$, $\psi = p$ e $\theta = c\epsilon$), pela propriedade (2.4) e pelo Teorema 1.1.6, para arbitrário $L > 0$ existem constantes $C_L > 0, C$ e b (independente de L) tais que

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\{|\xi|\geqslant 1\}}\int\limits_{\{A_1\leqslant|t-x_0|\leqslant A_2\}}\sum_{\beta}\int\limits_{B(x_0,r)}\left|\sigma(\epsilon\xi)\partial^{\beta}_{x'}\{e^{i\xi\cdot(x-x')}e^{-|\xi|^{\lambda}p(t-x')}\}|\xi|^{(\lambda m)/(2k)}\right|d|u_\beta(x')|dtd\xi\\
&\quad\leqslant\; C_L\int_{|\xi|\geqslant 1}\int_{A_1\leqslant|t-x_0|\leqslant A_2}\sum_{\beta}\frac{(CL)^{|\beta|}}{M_{|\beta|}}Ce^{-M(b\epsilon|\xi|)}e^{-c|\xi|^{\lambda}|t-x'|^{2k}}e^{\frac{1}{2}M(b\epsilon|\xi|)}C^{|\beta|+1}M_{|\beta|}dtd\xi\\
&\quad\leqslant\; C\int_{|\xi|>1}e^{-\frac{1}{2}M(b\epsilon|\xi|)}d\xi\overset{(1.24)}{<}+\infty,
\end{aligned}$$

para L suficientemente pequeno e $\epsilon > 0$ fixado (observe que nesse caso dominamos o integrando por uma função dependente de ϵ, a grande dificuldade deste caso, que nos levará a contornar o domínio de integração, é encontrar estimativas dependentes de ϵ). Deste modo podemos aplicar o teorema Fubbini e escrever (2.23) do seguinte modo,

$$I^{\epsilon}_3(x) = \int\limits_{A_1\leqslant|t-x_0|\leqslant A_2}\sum_{\beta}\int\limits_{B(x_0;r),}\int\limits_{|\xi|\geqslant 1}e^{i\xi\cdot(x-t)}\sigma(\epsilon\xi)\partial^{\beta}_{x'}\{e^{i\xi\cdot(t-x')}e^{-|\xi|^{\lambda}p(t-x')}\}|\xi|^{\lambda m/(2k)}d\xi du_\beta(x')dt.$$

Também pelo fato do integrando da integral acima ser integrável em valor absoluto temos que

$$I^{\epsilon}_3(x) = \lim_{S\to+\infty} I^{\epsilon,S}_3(x) \tag{2.24}$$

em que (aplicando o Teorema A.1.3)

$$I^{\epsilon,S}_3(x) = \int\limits_{A_1\leqslant|t-x_0|\leqslant A_2}\sum_{\beta}\int\limits_{B(x_0;r),}\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant S}e^{i\xi\cdot(x-t)}\sigma(\epsilon\xi)\partial^{\beta}_{x'}\{e^{i\xi\cdot(t-x')}e^{-|\xi|^{\lambda}p(t-x')}\}|\xi|^{\lambda m/2k}d\xi du_\beta(x')dt$$

$$I_3^{\epsilon,S}(x) \;=\; \int\limits_{A_1\leqslant|t-x_0|\leqslant A_2} \sum_{\beta} \int\limits_{B(x_0;r),}\; \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant S} e^{i\xi\cdot(x-t)}\sigma(\epsilon\xi)\sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\gamma}(-i\xi)^{\beta-\gamma}e^{i\xi\cdot(t-x')}\sum_{q=1}^{|\gamma|}e^{-|\xi|^{\lambda}p(t-x')}\times$$
$$\times\sum_{\mathfrak{p}}(\gamma)!\prod_{j=1}^{|\gamma|}\frac{-|\xi|^{k_j\lambda}\{\partial_{x'}^{\alpha_j}p(t-x')\}^{k_j}}{k!(\alpha_j)!^{k_j}}|\xi|^{\lambda m/2k}d\xi du_\beta(x')dt,\ \forall S>0$$

pois $\mathbb{R}^m=\bigcup_{S=1}^{+\infty}\{\xi\in\mathbb{R}^m:|\xi|\leqslant S\}$. Defina $\zeta(\xi,s)=\xi+is|\xi|^{\lambda}(x-x')$, com $0<s\leqslant s'<\frac{1}{2r}$ ($s'>0$ fixo a escolher). Observe que o ramo da extensão holomorfa do módulo de $\zeta(\xi,s)$ (denotado por $\langle\zeta(\xi,s)\rangle$) está bem definido pois

$$|\Im\zeta(\xi,s)|\leqslant s|\xi|^{\lambda}(|x-x_0|+|x_0-x'|)\leqslant|\xi|=|\mathcal{R}\zeta(\xi,s)|, \tag{2.25}$$

para $|x'-x_0|,|x-x_0|<r$, $|\xi|\geqslant 1$, $\lambda\leqslant 1$ e $s\leqslant s'$. Para $D_{x'}^S=\{\zeta(\xi,s)=\xi+is|\xi|^{\lambda}(x-x'):\ 0\leqslant s\leqslant s',\ 1\leqslant|\xi|\leqslant S\}$, pelo teorema de Stokes vemos que

$$\begin{aligned} I_3^{\epsilon,S}(x) \;=\; \int\limits_{A_1\leqslant|t-x_0|\leqslant A_2}\sum_{\beta}\int\limits_{B(x_0,r)} \Bigg\{ & \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant S}\mathcal{I}_3^{\epsilon}(x,x',t,\zeta(\xi,s'),\beta)\,|\zeta_\xi(\xi,s')|d\xi \\ & + \int\limits_{|\xi|=S,\ 0\leqslant s\leqslant s'}\mathcal{I}_3^{\epsilon}(x,x',t,\zeta(\xi,s),\beta)\,|\zeta_{(\xi,s)}(\xi,s)|\,d(\xi,s) \\ & + \int\limits_{|\xi|=1,\ 0\leqslant s\leqslant s'}\mathcal{I}_3^{\epsilon}(x,x',t,\zeta(\xi,s),\beta)\,|\zeta_{(\xi,s)}(\xi,s)|\,d(\xi,s) \\ & + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{D_{x'}^S}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_j}\left[\mathcal{I}_3^{\epsilon}(x,x',t,\zeta,\beta)\right]d\zeta\Bigg\}\,du_\beta dt \end{aligned} \tag{2.26}$$

em que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3^{\epsilon}(x,x',t,\zeta,\beta) \;=\; & e^{i\zeta\cdot(x-x')}\sigma(\epsilon\zeta)\sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\gamma}(-i\zeta)^{\beta-\gamma}\times \\ & \times\sum_{r=1}^{|\gamma|}e^{-\langle\zeta\rangle^{\lambda}p(t-x')}\sum_{\mathfrak{p}}(\gamma)!\prod_{j=1}^{|\gamma|}\frac{-\langle\zeta\rangle^{k_j\lambda}\{\partial_{x'}^{\alpha_j}p(t-x')\}^{k_j}}{k!(\alpha_j)!^{k_j}}\langle\zeta\rangle^{\lambda m/2k},\end{aligned}$$

$|\zeta_{(\xi,s)}(\xi,s)|$ representa o determinante da jacobiana de $\zeta(\xi,s)$ (e para s' fixo representaremos o determinante da jacobiana de $\zeta(\xi,s')$ por $|\zeta_\xi(\xi,s')|$ no caso da primeira integral a direita em (2.26)); observe que $|\zeta_\xi(\xi,s')|$ é limitado (procedendo de modo análogo à (2.3), pois $|\xi_j|\cdot|\xi|^{\lambda-2}\leqslant|\xi|^{\lambda-1}\leqslant 1$, quando $|\xi| \geqslant 1$ e $0 < \lambda \leqslant 1$) e $J(\xi, s) \leqslant CS^m$. Nosso objetivo é provar que, independente de ϵ, cada uma das integrais converge uniformemente em uma vizinhança U_{x_0} de x_0 para uma função de classe $\mathcal{E}_M(U_{x_0})$, quando $S \to +\infty$ e $\epsilon \to 0$.

Como a terceira integral à direita em (2.26) possui domínio de integração limitado (não dependente de S) e ainda o integrando é uma função de classe $\mathcal{E}_M$ na variável x segue que quando $\epsilon \to 0$ esta integral converge à uma função de classe $\mathcal{E}_M$ na variável x (em uma vizinhança aberta, de modo análogo ao que fizemos para I_1^ϵ e I_2^ϵ).

A seguir provaremos que o integrando da quarta integral em (2.26) é zero. Observe que pelo teorema de Paley-Wiener temos σ é holomorfa. Deste modo é suficiente provar que $\langle\zeta\rangle^\rho$ é holomorfa (na variável ζ) em $D_{x'}^S$ para $\rho \in \{\frac{\lambda}{2k}, \lambda\}$ (logo, é suficiente provar para $\rho = \frac{\lambda}{2k}$). Lembrando que $\zeta(\xi, s) = \xi + is|\xi|^\lambda(x - x')$ e considerando $s \leqslant s' < 1$, com s' suficientemente pequeno, temos

$$\mathcal{R}\{[\zeta(\xi, s)]^2\} \geqslant |\xi|^2 - s^2|\xi|^{2\lambda}(r + r)^2 \geqslant |\xi|^2(1 - 4s^2r^2), \tag{2.27}$$

para $|x' - x_0| < r$ e $|x - x_0| < r$ (com r suficientemente pequeno tal que $1 - 4s^2r^2 \geqslant 1 - 4r^2 > 0$). Como $\Im\{[\zeta(\xi, s)]^2\} \leqslant 2s|\xi|^{\lambda+1}|x - x'| \leqslant 4s|\xi|^2 r$ (para $|x - x_0| < r$, $|x' - x_0| < r$ $|\xi| \geqslant 1$ e $0 < \lambda \leqslant 1$) e $\mathcal{R}\{[\zeta(\xi, s)]^2\} \leqslant |\xi|^2$ temos

$$\cos\{\arg([\zeta(\xi, s)]^2)\} = \frac{\mathcal{R}\{[\zeta(\xi, s)]^2\}}{[(\mathcal{R}\{[\zeta(\xi, s)]^2\})^2 + (\Im\{[\zeta(\xi, s)]^2\})^2]^{1/2}} \geqslant \frac{|\xi|^2(1 - s^2 4r^2)}{[|\xi|^4 + 16s^2r^2|\xi|^4]^{1/2}} = \frac{(1 - 4s^2r^2)}{\sqrt{1 + 16s^2r^2}}.$$

Como $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{(\cos\theta)+1}{2}$ e $0 < s < s'$ temos

$$\begin{aligned}
\cos \frac{\arg\,[\zeta(\xi, s)]^2}{2} &= \left(\frac{\cos\left(\arg\,[\zeta(\xi, s)]^2\right) + 1}{2}\right)^{1/2} \geqslant \left(\frac{\frac{1-4s^2r^2}{\sqrt{1+16s^2r^2}} + 1}{2}\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1 - 4s^2r^2 + \sqrt{1 + 16s^2r^2}}{2\sqrt{1 + 16s^2r^2}}\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\lim_{s \to 0^+} \left(\frac{1 - 4s^2r^2 + \sqrt{1 + 16s^2r^2}}{2\sqrt{1 + 16s^2r^2}}\right)^{1/2} = 1.$$

e

$$\cos \frac{\arg\,[\zeta(\xi, s)]^2}{2} \leqslant 1.$$

Assim, do teorema do confronto segue que

$$\lim_{s\to 0^+} \cos\frac{\arg\left[\zeta(\xi,s)\right]^2}{2} = 1.$$

Então,

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{\arg\left[\zeta(\xi,s)\right]^2}{2} \quad = \quad 0. \tag{2.28}$$

Logo, para todo $0<\rho\leqslant 1$ existe s' tal que

$$-\frac{\rho\pi}{4} < \frac{\arg\left[\zeta(\xi,s)\right]^2}{2} < \frac{\rho\pi}{4},$$

para $s<s'$. Sendo $\rho=\frac{\lambda}{2k}$ como $\langle\zeta\rangle^\rho = e^{\frac{\rho}{2}\{log|\zeta^2|+i\arg\zeta^2\}}$ e também $-\frac{\rho\pi}{2}<\arg\zeta^2<\frac{\rho\pi}{2}$ segue que $\langle\zeta\rangle^\rho$ é holomorfa em $D_{x'}$. Além disso, $\langle\zeta\rangle^\lambda$ também define uma função holomorfa em $D_{x'}$. Portanto concluímos que o integrando da quarta integral à direita de (2.26) é zero.

Antes de estudar a primeira e a segunda integral à direita em (2.26) mostraremos que existe $a>0$ tal que $\mathcal{R}\langle\zeta(\xi,s)\rangle^\lambda\geqslant a|\xi|^\lambda$. Observe que por (2.28) temos que $\cos\{(\lambda/2)\arg[\zeta(\xi,s)]^2\}\geqslant\frac{1}{4}$, para $s<s'$ (diminuindo s', se necessário) e de (2.27) obtemos $|\mathcal{R}[\zeta(\xi,s)]^2|\geqslant\frac{|\xi|^2}{2}$ (diminuindo s' de modo que $sr<\frac{1}{\sqrt{8}}$ e a partir de agora s' não será diminuído novamente). Como $|\left[\zeta(\xi,s)\right]^2|\geqslant|\mathcal{R}\left[\zeta(\xi,s)\right]^2|\geqslant\frac{|\xi|^2}{2}$ temos

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\{\langle\zeta(\xi,s)\rangle^\lambda\} &= \mathcal{R}\{e^{\frac{\lambda}{2}(\log|[\zeta(\xi,s)]^2|+i\arg\zeta^2)}\} = e^{\frac{\lambda}{2}\log|[\zeta(\xi,s)]^2|}\cos\{(\lambda/2)\arg[\zeta(\xi,s)]^2\}\\ &\geqslant \frac{1}{4}|[\zeta(\xi,s)]^2|^{(\lambda/2)}\geqslant\frac{1}{4\cdot 2^{\lambda/2}}|\xi|^\lambda\geqslant\frac{|\xi|^\lambda}{8}.\end{aligned} \tag{2.29}$$

A seguir serão estimados os integrandos da primeira e da segunda integral a direita em (2.26). Já que $\zeta(\xi,s)=\xi+is|\xi|^\lambda(x-x')$, segue que

$$|\langle\zeta(\xi,s)\rangle^\rho| \quad = \quad |e^{\frac{\rho}{2}(\log|\zeta(\xi,s)|^2+i\arg[\zeta(\xi,s)]^2)}|\leqslant|\zeta(\xi,s)|^\rho\leqslant(|\xi|+\frac{s}{2}|\xi|)^\rho\leqslant(2|\xi|)^\rho,$$

para todo $\rho>0$, $|x-x_0|<r$, $|x'-x_0|<r$ e $r<\frac{1}{4}$. Pelo Teorema A.1.5 (aplicado a $\chi\in\mathcal{D}_M(B(0,R))$), (2.4), (2.29), (A.9), (A.10) e (A.13),

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}_3^{\epsilon}(x,x',t,\zeta(\xi,s),\beta)| &\leqslant e^{-s|\xi|^{\lambda}|x-x'|^2}Ce^{-M(c'|\epsilon\zeta(\xi,s)|)}e^{Rs|\xi|^{\lambda}|x-x'|}\sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\gamma}|\zeta(\xi,s)|^{|\beta|-|\gamma|}\times\\
&\quad\times\sum_{r=1}^{|\gamma|}e^{-c(|\xi|^{\lambda}/8)|t-x'|^{2k}}\sum_{\mathfrak{p}}(\gamma)!\prod_{j=1}^{|\gamma|}\frac{(2|\xi|)^{k_j\lambda}C^{k_j}}{k!(\alpha_j)!^{k_j}}[2|\xi|]^{\lambda m/(2k)}\\
&\leqslant e^{-M(c'\epsilon 2|\xi|)}[2|\xi|]^{\lambda m/(2k)}e^{-s|\xi|^{\lambda}|x-x'|^2}e^{Rs|\xi|^{\lambda}|x-x'|}\sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\gamma}[2|\xi|]^{|\beta|-|\gamma|}\times\\
&\quad\times\sum_{r=1}^{|\gamma|}e^{-(c/8)|\xi|^{\lambda}|t-x'|^{2k}}\sum_{\mathfrak{p}}(\gamma)!\prod_{j=1}^{|\gamma|}\frac{[2|\xi|]^{|\gamma|\lambda}C^{|\gamma|}}{k!}4^{-|\gamma|}\frac{1}{|\gamma|!}\\
&\leqslant e^{-M(c'\epsilon 2|\xi|)}C^{|\beta|}[2|\xi|]^{\frac{\lambda m}{2k}+|\beta|}e^{-s|\xi|^{\lambda}|x-x'|^2}e^{Rs|\xi|^{\lambda}|x-x'|}e^{-(c/8)|\xi|^{\lambda}|t-x'|^{2k}},
\end{aligned}$$

para $|x'-x_0|\leqslant r$, x em uma vizinhança suficientemente pequena de x_0 a escolher e $s<s'<1$, lembrando que como p é um polinômio existe constante uma constante que (sobre compactos) domina p e suas derivadas. A seguir dividiremos as estimativas em dois casos:

1. Se $|x'-x_0|<\frac{A_1}{2}$ então
$$|t-x'|\geqslant|t-x_0|-|x'-x_0|\geqslant\frac{A_1}{2},$$
para $A_1\leqslant|t-x_0|\leqslant A_2$. Assim, lembrando que $s<1$ e assumindo $R<\frac{c}{2}\left(\frac{A_1}{2}\right)^{2k}$ segue que
$$e^{-s|\xi|^{\lambda}|x-x'|^2+Rs|\xi|^{\lambda}-c|\xi|^{\lambda}|t-x'|^{2k}}\leqslant e^{R|\xi|^{\lambda}-c\left(\frac{A_1}{2}\right)^{2k}|\xi|^{\lambda}}=e^{-\gamma_1|\xi|^{\lambda}}\leqslant e^{-\gamma_1 s|\xi|^{\lambda}},$$
para $\gamma_1=\frac{c}{2}\left(\frac{A_1}{2}\right)^{2k}$.

2. Se $A_1/2<|x_0-x'|\leqslant r$ (observe que se $r\leqslant A_1/2$ não é preciso considerar esse caso) então
$$|x-x'|\geqslant|x'-x_0|-|x-x_0|>\frac{A_1}{2}-\frac{A_1}{4}=\frac{A_1}{4},$$
para $|x-x_0|<\frac{A_1}{4}$.

   Logo,
$$e^{-s|\xi|^{\lambda}|x-x'|^2+Rs|\xi|^{\lambda}-c|\xi|^{\lambda}|t-x'|^{2k}}\leqslant e^{-s|\xi|^{\lambda}(\frac{A_1}{4})^2+Rs|\xi|^{\lambda}}\leqslant e^{-\gamma_2 s|\xi|^{\lambda}},$$
escolhendo R suficientemente pequeno de modo que $\gamma_2=-R+(A_1/4)^2>0$.

Por esses dois itens vemos que podemos fixar uma vizinhança U_{x_0} de x_0 de modo que diminuindo

R, se necessário, existem C, $\gamma > 0$ tais que

$$|\mathcal{I}_3^\epsilon(x, x', t, \zeta(\xi, s), \beta)| \leqslant C^{|\beta|+1}|\xi|^{|\beta|+m}e^{-M(c'\epsilon 2|\xi|)}e^{-\gamma s|\xi|^\lambda} \tag{2.30}$$

para $x \in U_{x_0}$ e $|\xi| \geqslant 1$ (lembrando que $0 < \lambda \leqslant 1$). Para $L > 0$ suficientemente pequeno, aplicando (1.15), segue que a segunda integral a direita em (2.26) (lembrando que nesse caso $|\zeta_{(\xi,s)}(\xi, s)| \leqslant S^m$) é estimada por

$$\begin{aligned}
&\int_{A_1 \leqslant |t-x_0| \leqslant A_2} \sum_\beta \int_B \int_{\{|\xi|=S,\, 0 \leqslant s \leqslant s'\}} |\mathcal{I}_3^\epsilon(x, x', t, \zeta(\xi, s), \beta)| \cdot |\zeta_{(\xi,s)}(\xi, s)| \cdot d(\xi, s) d|u_\beta|(x') dt \\
&\leqslant \int_{A_1 \leqslant |t-x_0| \leqslant A_2} \sum_\beta \int_B \int_{\{|\xi|=S,\, 0 \leqslant s \leqslant s'\}} C^{|\beta|+1}|\xi|^{|\beta|+m}e^{-M(c'\epsilon 2A)}e^{-\gamma s|\xi|^\lambda} \cdot S^m d(\xi, s) d|u_\beta|(x') dt \\
&\leqslant \sum_\beta \frac{C_L L^{|\beta|}}{M_{|\beta|}} \int_0^{s'} C^{|\beta|+1}e^{-M(c'\epsilon 2S)}e^{-\gamma s S^\lambda} \cdot S^{|\beta|+3m} ds \\
&\leqslant \sum_\beta C_L (CL)^{|\beta|} s' M_{3m}\sqrt{A}\frac{H^{|\beta|+3m}}{(2c'\epsilon)^{|\beta|}}e^{-\frac{1}{2}M(c'\epsilon 2S)},
\end{aligned}$$

em que a última desigualdade segue de (1.23) e (1.3). Observe que para cada $\epsilon > 0$ fixado existe $L > 0$ suficientemente pequeno de modo que a soma acima é finita (se reduzindo a $Ce^{-\frac{1}{2}M(c'\epsilon 2S)}$) e deste modo, com $\epsilon > 0$ fixado, a segunda integral à direita em (2.26) converge para zero, quando $S \to +\infty$. De fato, para $\epsilon > 0$ fixado, pela definição da função associada M(veja (1.18)) temos

$$e^{-\frac{1}{2}M(2c'\epsilon S)} \leqslant e^{-\frac{1}{2}\log\{(2c'\epsilon S)^2/M_2\}} \leqslant \frac{M_2^{1/2}}{2c'\epsilon S} \to 0,$$

quando $S \to +\infty$. Portanto podemos concluir que a segunda integral à direita em (2.26) converge para zero, quando $A \to +\infty$.

Para primeira integral à direita em (2.26) observe que, por (2.30), lembrando que $|\zeta_\xi(\xi, s')|$ é limitada e aplicando (2.10), temos

$$\begin{aligned}
||\mathcal{I}_3^\epsilon(x, x', t, \zeta(\xi, s), \beta)| \cdot |\zeta_\xi(\xi, s')|| &\leqslant C^{|\beta|+1}|\xi|^{|\beta|+m}e^{-\gamma s'|\xi|^\lambda} \overset{(2.10)}{\leqslant} C^{|\beta|+1}|\xi|^{|\beta|+m}e^{-M(c''|\xi|)} \\
&\overset{(1.23)}{\leqslant} C^{|\beta|+1}M_{|\beta|+m}e^{-\frac{1}{2}M(c''|\xi|)}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

para $\gamma^{1/\lambda}s'^{1/\gamma}|\xi| \geqslant c'$. Além disso, como $|\xi|^{|\beta|+m}e^{\frac{1}{2}M(c''|\xi|)}$ é limitado em conjuntos compactos temos que (2.31) é válida para $|\xi| > 1$. Por outro lado,

$$\int_{\{A_1 \leqslant |t-x_0| \leqslant A_2\}} \sum_\beta \int_B \int_{|\xi|\geqslant 1} C^{|\beta|+1} M_{|\beta|} e^{-M(c''|\xi|)} d\xi du_\beta(x') dt$$
$$\leqslant C_L \sum_\beta \frac{(CL)^\beta}{M_{|\beta|}} M_{|\beta|} \int_{|\xi|\geqslant 1} e^{-M(c''|\xi|)} d\xi < +\infty.$$

Assim, segue do teorema da convergência dominada que $I_3^\epsilon(x)$ converge para

$$\begin{aligned} I_3(x) \quad \doteq \quad & \int_{A_1 \leqslant |t-x_0| \leqslant A_2} \sum_\beta \int_B \left\{ \int_{1 \leqslant |\xi|} e^{i\zeta(\xi,s')\cdot(x-x')} \sigma(0) \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} (i\zeta(\xi,s'))^{\beta-\gamma} \times \right. \\ & \times \sum_{r=1}^{|\gamma|} e^{-\langle \zeta(\xi,s')\rangle^\lambda p(t-x')} \sum_{\mathfrak{p}} (\gamma)! \prod_{j=1}^{|\gamma|} \frac{-\langle \zeta(\xi,s')\rangle^{k_j\lambda} \{\partial_{x'}^{\alpha_j} p(t-x')\}^{k_j}}{k!(\alpha_j)!^{k_j}} \langle \zeta(\xi,s')\rangle^{\lambda m/2k} |\zeta_\xi(\xi,s')| d\xi \\ & + \int_{|\xi|=1} \int_{0 \leqslant s \leqslant s'} e^{i\zeta(\xi,s)\cdot(x-x')} \sigma(0) \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} (i\zeta(\xi,s))^{\beta-\gamma} \sum_{r=1}^{|\gamma|} e^{-\langle \zeta(\xi,s)\rangle^\lambda p(t-x')} \times \\ & \left. \times \sum_{\mathfrak{p}} (\gamma)! \prod_{j=1}^{|\gamma|} \frac{-\langle \zeta(\xi,s)\rangle^{k_j\lambda} \{\partial_{x'}^{\alpha_j} p(t-x')\}^{k_j}}{k!(\alpha_j)!^{k_j}} \langle \zeta(\xi,s)\rangle^{\lambda m/2k} |\zeta_{(\xi,s')}(\xi,s')| d(\xi,s) \right\}. \end{aligned}$$

Para provar que $I_3 \in \mathcal{E}_M$ em algum aberto basta ver que de modo análogo às estimativas feitas anteriormente (para $\epsilon = 0$) podemos dominar as derivadas parciais ∂_x^α dos integrandos (na definição de I_3) por funções integráveis e derivando sobre o sinal de integração podemos concluir que $I_3 \in \mathcal{E}_M$.

Como o domínio de integração U_4 é limitado segue que $I_4^\epsilon \in C^\omega \subset \mathcal{E}_M$, para cada $\epsilon > 0$, e I_4^ϵ converge uniformemente para uma função $I_4 \in C^\omega(\mathbb{C}^m)$, quando $\epsilon \to 0^+$.

Portanto existe vizinhança U_{x_0} (interseção das vizinhanças de x_0 dadas em cada caso) de x_0 tal que, $\lim_{\epsilon\to 0^+} u_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \sum_{j=1}^4 I_j^\epsilon = \sum_{j=1}^4 I_j \in \mathcal{E}_M$ uniformemente. ∎

2.3 Caracterização de micro-regularidade de classes de Denjoy-Carleman

O principal objetivo desta seção é definir e estudar a micro-regularidade DC de ultradistribuições. Seguindo as definições e resultados de micro-regularidade suave (e analítica) apresentados em [15, Chapter V] definiremos micro-regularidade DC via ultraditribuições a valores de fronteira bf (no sentido de $\mathcal{D}'_M$) e graças as condições necessárias e suficientes para existência de ultradistribuições a valores de fronteira bf apresentadas em [4] mostraremos que a micro-regularidade DC é equivalente a um decaimento das transformadas $\mathcal{F}_p^\lambda$.

Se M é a função associada a sequência (M_j), seu conjugado de Young $w^* : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ é definido por $w^*(r) = \sup_{t \geqslant 0}\{M(t) - rt\}$. Em [48] encontramos a definição da seguinte função

$$M^*(s) = -\log \inf_{p \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{s^p M_p}{p!} \right\}.$$

Além disso em [48] os autores provam que para todo $H > 1$ existe uma constante C tal que

$$M^*(Hs) - C \leqslant w^*(s) \leqslant M^*(s), \ \ \forall s > 0. \tag{2.32}$$

Outra propriedade importante para M^* é;

$$M(t) \leqslant \inf_s \{M^*(s) + st\}, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{2.33}$$

De fato, observe que pela definição de M^* e pela continuidade da função log temos

$$\begin{aligned} \inf_{s \geqslant 0}\{M^*(s) + st\} &= \inf_{s \geqslant 0} \left\{ -\log \inf_j \left\{ \frac{s^j M_j}{j!} \right\} + \log(e^{st}) \right\} = \inf_{s \geqslant 0}\{\sup_j \{\log \left(\frac{j!}{s^j M_j} \right) + \log(e^{st})\}\} \\ &\geqslant \inf_{s \geqslant 0} \left\{ \sup_j \left\{ \log \frac{j!}{s^j M_j} + \log \frac{(st)^j}{j!} \right\} \right\} = \sup_j \log \frac{t^j}{M_j} = M(t), \end{aligned}$$

para todo $t \geqslant 0$.

A seguir será apresentada uma condição equivalente a existência de ultradistribuições à valores de fronteira.

Teorema 2.3.1. ([4, Theorem 3.1]). *Sejam, $V \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto aberto, $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ um cone aberto com vertice na origem, $\Gamma_\delta = \Gamma \cap B(0, \delta)$, uma função $f \in C^0(V + i\Gamma_\delta)$ e $\mathcal{V}$ uma estrutura de posto n, de classe $\mathcal{E}_M$ (localmente gerada por campos $L_1, \ldots, L_n$ que possuem coeficientes de classe $\mathcal{E}_M$) e localmente integrável, satisfazendo*

1. *$L_j f \in L^\infty(V + i\Gamma_\delta)$, $1 \leqslant j \leqslant n$;*

2. *para todo $\eta > 0$ temos*

$$|f(x + it)| e^{-\eta M^*(|t|/\eta)} < \infty. \tag{2.34}$$

Então existe a **ultradistribuição a valor de fronteira** $bf \doteq \lim_{\Gamma \ni t \to 0} f(\cdot, t)$, *em que o limite é dado na topologia de* $\mathcal{D}'_M(V)$.

As funções que satisfazem (2.34) serão chamadas funções com **crescimento** M^*-**exponencial**.

Para definição de micro-regularidade DC se faz necessária a definição de extensão $M-$quase analítica.

Definição 2.3.2. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *aberto e* $f \in \mathcal{E}_M(\Omega)$. *Uma função* $\tilde{f} \in \mathcal{E}_M(\Omega \times (-1,1)^m)$ *é chamada extensão* $M-$*quase analítica de* f *se:*

1. $\tilde{f}(x, 0) = f(x)$, *para todo* $x \in \Omega$; *e*

2. *para todo* $z = x + iy \in U \times (-1,1)^m$ *e* $N = 1, 2, \ldots$ *existe uma constante* $C > 0$ *independente de* N *tal que*
$$\left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(z)\right| \leqslant C^{N+1}\frac{M_N}{N!}|y|^N. \tag{2.35}$$

Observe que a condição (2.35) é equivalente a

$$\left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(z)\right| \leqslant Ce^{-M^*(C|y|)}. \tag{2.36}$$

Uma função $\tilde{f} \in \mathcal{E}_M(\Omega \times V)$ satisfazendo a desigualdade (2.36) é chamada $M-$quase analítica. É importante lembrar que em [3] os autores demonstraram que toda função de classe $\mathcal{E}_M$ possui uma extensão $M-$quase analítica.

Lembrando que podemos definir a micro-regularidade suave de uma distribuição a partir da soma de distribuições a valores de fronteira bf, com f quase analítica e de crescimento temperado (veja [15, Definition V.2.5, Definition V.2.11 e Theorem V.3.7], no caso de micro-regularidade analítica a definição é análogo, considerando f analítica no lugar de quase analítica), somos motivados a definir $M-$micro-regularidade do seguinte modo:

Definição 2.3.3. *Sejam* $u \in \mathcal{D}'_M(\mathbb{R}^m)$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $\xi^0 \in \mathbb{R}^m$. *Dizemos que* u *é* $M-$*micro-regular em* (x_0, ξ^0) *se existem vizinhança* V *de* x_0 *e cones abertos e agudos* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ *em* $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ *satisfazendo:*

1. $\xi^0 \cdot \Gamma_j < 0$

2. *para algum* $\delta > 0$ *existem funções* f_j *as quais são* $M-$*quase analíticas em* $V + (\Gamma_j)_\delta$*, com crescimento* M^*-*exponencial (logo* bf_j *existe em uma vizinhança de* x_0*, para* $j = 1, 2, \ldots, k$ *) e ainda* $u = \sum_{j=1}^{k} bf_j$ *em uma vizinhança de* x_0.

Tendo definido $M-$micro-regularidade é natural definir o conjunto frente de onda de classe $\mathcal{E}_M$:

Definição 2.3.4. *Seja* $u \in \mathcal{E}'_M$*. O* $M-$*conjunto frente de onda de* u*, denotado por* $WF_M(u)$*, é o conjunto dos pares* $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ *em que* u *não é* $M-$*micro-regular. Nós denotaremos* $WF_M(u)_p = WF_M(u) \cap (\{p\} \times \mathbb{R}^m)$.

A seguir serão apresentados dois teoremas que caracterizaram o conjunto frente de onda $\mathcal{E}_M$ de uma $M-$ultradistribuição via decaimento das transformadas FBI-BH $\mathcal{F}_p^\lambda$ (apresentadas no Exemplo 2.1.3).

Teorema 2.3.5. *Sejam* $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^m)$, $0 < \lambda \leqslant 1$ *admissível para* M *(isto é, a propriedade* (2.10) *é satisfeita) e* $p(x) = \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha y^\alpha$ *um polinômio satisfazendo* (2.4)*. Se* $\xi_0 \notin WF_M(u)_0$ *então existe uma vizinhança* W *de* 0 *em* $\mathbb{R}^m$*, um cone aberto* $\mathcal{C}$ *em* $\mathbb{R}^m \backslash 0$ *contendo* ξ_0 *e constantes* $c, C > 0$ *tais que*

$$|\mathcal{F}_p^\lambda(u)(t, \xi)| \leqslant C e^{-M(c|\xi|)}, \quad (t, \xi) \in W \times \mathcal{C}. \tag{2.37}$$

Demonstração. Antes de demonstrar o caso geral demonstraremos o seguinte caso particular:

> Seja $\xi_0 \notin WF_M(u)|_0$ de modo que, existe $\delta > 0$, um cone $\Gamma \subset \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, tal que $\xi_0 \cdot \Gamma < 0$, uma vizinhança aberta $V \subset \mathbb{R}^m$ de 0 e uma função $M-$quase analítica $f \in \mathcal{E}_M(V + i\Gamma)$, com crescimento M^*-exponencial e tal que $u = bf$ em $\mathcal{D}'_M(V)$, então existe uma vizinhança W da origem e um cone aberto e conexo $\mathcal{C}$ com vértice na origem em que a desigualdade (2.37) é satisfeita.

Como $\xi_0 \cdot \Gamma < 0$, fixado $v_0 \in \Gamma$ podemos considerar $c' > 0$ suficientemente pequeno a ser definido de modo que

$$\frac{\xi_0}{|\xi_0|} \cdot \frac{v_0}{|v_0|} \leqslant -c'.$$

Seja $\sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha = \rho$ e $g \in \mathcal{D}_M(B_{\mathbb{C}}(0, c'/(8 \cdot 2^{2k}\rho)))$ [1] tal que $0 \leqslant g \leqslant 1$ e $g \equiv 1$ em $B_{\mathbb{C}}(0, 3c'/(32 \cdot 2^{2k}\rho))$. Já que $u = gu$ em $B_{\mathbb{C}}(0, 3c'/(32 \cdot 2^{2k}\rho))$ pelo Lema 2.2.2 é suficiente demonstrar a estimativa (2.37)

[1]Denotaremos $B_{\mathbb{C}}(0, r) = \left\{ z = (x_1 + iy_1, \ldots, x_m + iy_m) \in \mathbb{C}^m : \left(\sum_{j=1}^m x_j^2 + \sum_{j=1}^m y_j^2 \right)^{1/2} < r \right\}$, para $r > 0$.

para $\mathcal{F}_p^\lambda(gu)$, no lugar de $\mathcal{F}_p^\lambda(u)$. Como $u = bf$ em $\mathcal{D}'_M(V)$, considerando c' suficientemente pequeno tal que $B(0, c'/(8 \cdot 2^{2k}\rho)) \subset V$ e aplicando definição da transformada $\mathcal{F}_p^\lambda$, segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_p^\lambda(gu)(t,\xi) &= c_p \left\langle (g \cdot u)_y, e^{Q(t,y,\xi)} \right\rangle = c_p \left\langle u_y, g(y) e^{Q(t,y,\xi)} \right\rangle \\ &= c_p \lim_{\Gamma \ni v \to 0} \int f(y+iv) g(y) e^{Q(t,y,\xi)} dy = c_p \lim_{\mathbb{R} \ni \tau \to 0^+} \int f\left(y + i\tau \frac{v_0}{|v_0|}\right) g(y) e^{Q(t,y,\xi)} dy,\end{aligned}$$

em que $Q(t,y,\xi) = i\xi \cdot (t-y) - |\xi|^\lambda p(t-y)$. Considerando $\chi \in \mathcal{D}_M(B(0, c'/(16 \cdot 2^{2k}\rho)))$, tal que $0 \leqslant \chi \leqslant 1$ e $\chi = 1$ em $B(0, c'/(32 \cdot 2^{2k}\rho))$; e uma constante $\sigma > 0$ a ser determinada, defina

$$\tilde{z}(y,s) = y + is\chi(y)\frac{v_0}{|v_0|}.$$

Com o objetivo de contornar o domínio de integração, para cada $\tau > 0$ fixado aplicaremos o Teorema de Stokes na variável y para variedade

$$D = \{y + is\chi(y)\frac{v_0}{|v_0|} : |y| \leqslant c'/(16 \cdot 2^{2k}\rho),\ 0 \leqslant s \leqslant \sigma\}.$$

Supondo $0 < \tau$, $\sigma \leqslant 1$ suficientemente pequenos de modo a $\tilde{z}(y,s) + i\tau\frac{v_0}{|v_0|} \in B(x_0, c'/(16 \cdot 2^{2k}\rho)) + i\Gamma_\delta$, para todo $y \in B(x_0, c'/(16 \cdot 2^{2k}\rho))$ e $0 < s < \sigma$; aplicando o teorema de Stokes (para cada $\tau > 0$ suficientemente pequeno fixado) segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_p^\lambda(gu)(t,\xi) &= \lim_{\tau \to 0^+} \int f\left(\tilde{z}(y,\sigma) + i\tau\frac{v_0}{|v_0|}\right) \cdot g(\tilde{z}(y,\sigma)) e^{Q(t,\tilde{z}(y,\sigma),\xi)} |\tilde{z}_y(y,\sigma)| dy \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \int_D \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \left\{ f\left(z + i\tau\frac{v_0}{|v_0|}\right) \cdot g(z) e^{Q(t,z,\xi)} \right\} d\overline{w}_j \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m,\end{aligned}$$

em que $\tilde{z}_y(y,\sigma)$ representa o determinante da matriz jacobiana da função $y \mapsto \tilde{z}(y,\sigma)$.

Como $e^{Q(t,z,\xi)} = e^{i\xi\cdot(t-z) - |\xi|^\lambda p(t-z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^m)$ na variável z (com t e ξ como parâmetros) obtemos,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_p^\lambda(gu)(t,\xi) &= \lim_{\tau \to 0^+} \int f\left(\tilde{z}(y,\sigma) + i\tau\chi(y)\frac{v_0}{|v_0|}\right) g(\tilde{z}(y,\sigma)) e^{Q(t,\tilde{z}(y,\sigma),\xi)} |\tilde{z}_y(y,\sigma)| dy \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \int_D \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \left\{ f\left(z + i\tau\frac{v_0}{|v_0|}\right) g(z) \right\} e^{Q(t,z,\xi)} d\overline{z}_j \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m.\end{aligned}$$

Além disso, se $z \in D$ temos que $|z| \leqslant \frac{c'}{(16 \cdot 2^{2k}\rho)} + \sigma < \frac{3c'}{32 \cdot 2^{2k}\rho}$ (considerando $\sigma < c'/(32 \cdot 2^{2k}\rho)$) e então

$g(z) = 1$. Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_p^\lambda(gu)(t,\xi) &= \lim_{\tau\to 0^+}\int f\left(\tilde{z}(y,\sigma) + i\tau\chi(y)\frac{v_0}{|v_0|}\right) g(\tilde{z}(y,\sigma))e^{Q(t,\tilde{z}(y,\sigma),\xi)}|\tilde{z}_y(y,\sigma)|dy \qquad (2.38)\\ &+ \sum_{j=1}^m \int_D \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\left\{f\left(z + i\tau\frac{v_0}{|v_0|}\right)\right\} e^{Q(t,z,\xi)} d\overline{z}_j \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m.\end{aligned}$$

A seguir estimaremos a parte real de Q ($\mathcal{R}Q$). Como o produto interno é uma função contínua e $\frac{\xi_0}{|\xi_0|}\cdot\frac{v_0}{|v_0|} \leqslant -c'$ existe uma vizinhança aberta $W' \subset \mathbb{S}^{m-1}$ de $\frac{\xi_0}{|\xi_0|}$ tal que

$$\xi\cdot\frac{v_0}{|v_0|} < -\frac{c'}{2}, \quad \forall \xi \in W'.$$

Definindo

$$\mathcal{C} \doteq \{\xi \in \mathbb{R}^m : \frac{\xi}{|\xi|} \in W'\},$$

temos

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\{Q(t,\tilde{z}(y,s),\xi)\} =& \mathcal{R}\left\{i\xi\cdot\left(t - y - is\chi(y)\frac{v_0}{|v_0|}\right) - |\xi|^\lambda \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha\left(t - y - is\chi(y)\frac{v_0}{|v_0|}\right)^\alpha\right\}\\ \leqslant& -s\chi(y)\frac{c'}{2}|\xi| - |\xi|^\lambda \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(t-y)^{\alpha-\beta}\mathcal{R}\left\{\left(-is\chi(y)\frac{v_0}{|v_0|}\right)^\beta\right\}\\ \leqslant& -s\chi(y)\frac{c'}{2}|\xi| - |\xi|^\lambda p(t-y)\\ &- |\xi|^\lambda \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha \sum_{0<\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(t-y)^{\alpha-\beta}\mathcal{R}\left\{\left(-is\chi(y)\frac{v_0}{|v_0|}\right)^\beta\right\}\\ \overset{(2.4)}{\leqslant}& -s\chi(y)\frac{c'}{2}|\xi| - |\xi|^\lambda c|t-y|^{2k} + |\xi|^\lambda \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha \sum_{|\beta|=1}\binom{\alpha}{\beta}|t-y|^{|\alpha-\beta|}s\chi(y)\\ &+ |\xi|^\lambda \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha \sum_{0<\beta\leqslant\alpha,\ |\beta|>1}\binom{\alpha}{\beta}|t-y|^{|\alpha-\beta|}(s\chi(y))^2 \qquad (2.39)\end{aligned}$$

para $\xi \in \mathcal{C}$, $|y| < c/(8\cdot 2^{2k}\rho)$, $s \leqslant \sigma < 1$ e t em uma vizinhança da origem à definir. Para obter uma melhor estimativa consideraremos dois casos distintos:

1. Caso $|y| < c'/(32\cdot 2^{2k}\rho)$. Nesse caso $|t-y| \leqslant \frac{c'}{32\cdot 2^{2k}\rho} + \frac{c'}{32\cdot 2^{2k}\rho} = \frac{c'}{16\cdot 2^{2k}\rho} < 1$, para $|t| < \frac{c'}{32\cdot 2^{2k}\rho}$ e $c' < 16\cdot 2^{2k}\rho$. Além disso, pela definição de χ temos $\chi(y) = 1$. Então, lembrando que

$\sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha = \rho > 0$ e $\lambda \leqslant 1$ temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}\{Q(t,\tilde{z}(y,s),\xi)\} &\leqslant -s\frac{c'}{2}|\xi| + |\xi| \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha \sum_{|\beta|=1} \binom{\alpha}{\beta} |t-y|^{|\alpha-\beta|}\, s \\
&\quad + |\xi| \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha \sum_{0<\beta\leqslant\alpha,\ |\beta|>1} \binom{\alpha}{\beta} |t-y|^{|\alpha-\beta|} s^2 \\
&\leqslant -s|\xi| \left[\frac{c'}{2} - \rho 2^{2k} \left(\frac{c'}{16\cdot 2^{2k}\rho} \right)(1+s) \right] \\
&\leqslant -s|\xi| \left[\frac{c'}{2} - \frac{c'}{16}(1+\sigma) \right] \leqslant -s|\xi| \frac{3c'}{8}
\end{aligned}
$$

para $s \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|y| < c'/(32\cdot 2^{2k}\rho)$, $|t| < c'/(32\cdot 2^{2k}\rho)$ e $|\xi| > 1$.

2. Caso $c'/(32\cdot 2^{2k}\rho) \leqslant |y| \leqslant c'/(8\cdot 2^{2k}\rho)$. Nesse caso temos $|t-y| \leqslant \frac{3c'}{16\cdot 2^{2k}\rho} < 1$, para $|t| < \frac{c'}{16\cdot 2^{2k}\rho}$ (e considerando c' suficientemente pequeno de modo que $c' < 5\cdot 2^{2k}\rho$). Assim, escolhendo $c' < 5\cdot 2^{2k}\rho$ e $\sigma < \frac{1}{3}$, temos que

$$
\begin{aligned}
-\frac{c'}{4} + \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha \sum_{|\beta|=1} \binom{\alpha}{\beta} |t-y|^{|\alpha-\beta|} &+ \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha \sum_{0<\beta\leqslant\alpha,\ |\beta|>1} \binom{\alpha}{\beta} |t-y|^{|\alpha-\beta|} s\chi(y) \\
&\leqslant -\frac{c'}{4} + \frac{3c'}{16} + \frac{3c'}{16}\sigma < 0.
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

Por outro lado, $|t-y| \geqslant \frac{c'}{32\cdot 2^{2k}\rho} - \frac{c'}{64\cdot 2^{2k}\rho} = \frac{c'}{64\cdot 2^{2k}\rho}$, sempre que $c'/(32\cdot 2^{2k}\rho) \leqslant |y| \leqslant c'/(8\cdot 2^{2k}\rho)$, $|t| < \frac{c'}{64\cdot 2^{2k}\rho}$. Colocando $s|\xi|^\lambda \chi(y)$ em evidencia nos dois últimos termos de (2.39), por (2.40) segue que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}\{Q(t,\tilde{z}(y,s),\xi)\} &\leqslant -s\chi(y)\frac{c'}{2}|\xi| - |\xi|^\lambda c|t-y|^{2k} + s\chi(y)\frac{c'}{4}|\xi|^\lambda \\
&\leqslant -s\chi(y)\frac{c'}{4}|\xi| - s|\xi|^\lambda c \left(\frac{c'}{64\cdot 2^{2k}\rho} \right)^{2k},
\end{aligned}
$$

para $s \leqslant \sigma \leqslant 1$, $c'/(32\cdot 2^{2k}\rho) \leqslant |y| \leqslant c'/(8\cdot 2^{2k}\rho)$, $|t| < \frac{c'}{64\cdot 2^{2k}\rho}$, $|\xi| > 1$ e $\lambda \leqslant 1$.

Destes dois itens concluímos que existe $c_1 > 0$ tal que

$$
\mathcal{R}Q(t,\tilde{z}(y,s),\xi) < -c_1 s|\xi|, \qquad |y| < c'/(32\cdot 2^{2k}\rho); \tag{2.41}
$$

$$
\mathcal{R}\tilde{Q}(t,\tilde{z}(y,s),\xi) < -s\chi(y)c_1|\xi| - sc_1|\xi|^\lambda, \qquad c'/(32\cdot 2^{2k}\rho) \leqslant |y| \leqslant c'/(8\cdot 2^{2k}\rho); \tag{2.42}
$$

para $s \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| < \frac{c'}{64 \cdot 2^{2k}\rho}$, $\xi \in \mathcal{C}$ (tal que $|\xi| > 1$) e $\lambda \leqslant 1$. Com intuito de estimar $\mathcal{F}_p^\lambda(gu)(t,\xi)$ estimaremos as duas integrais à direita em (2.38). Observe que dado $z \in D$ existe $y \in B(0, c'/(16 \cdot 2^{2k}\rho))$ e $s \in [0,\sigma]$ tais que

$$f(z) = f\left(y + is\chi(y)\frac{v_0}{|v_0|} + i\tau\frac{v_0}{|v_0|}\right).$$

Para estimar a segunda integral à direita em (2.38) observe que como f é uma função $M-$quase analítica (ou seja, f satisfaz (2.36)) segue que

$$\left|\left(\partial_{\bar{z}_j} f\right)\left(y + is\chi(y)\frac{v_0}{|v_0|} + i\tau\frac{v_0}{|v_0|}\right) \cdot e^{Q(t,\tilde{z}(y,s),\xi)}\right| \quad \leqslant \quad Ce^{-M^*(c_2(s\chi(y)+\tau))}e^{\mathcal{R}Q(t,\tilde{z}(y,s),\xi)}.$$

Novamente separaremos em dois casos:

1. Caso $|y| < c'/(32 \cdot 2^{2k}\rho)$. Lembrando que nesse caso $\chi(y) = 1$ e aplicando (2.41) segue que

$$\begin{aligned} e^{-M^*(c_2(s\chi(y)+\tau))}e^{\mathcal{R}\tilde{Q}(y,t,\xi,s)} &\overset{(2.41)}{\leqslant} e^{-M^*(c_2(s+\tau))}e^{-c_1(s+\tau)|\xi|}e^{c_1\tau|\xi|} \leqslant e^{-\inf_\theta\{M^*(\theta)+\theta(c_1/c_2)|\xi|\}}e^{c_1\tau|\xi|} \\ &\overset{(2.33)}{\leqslant} e^{-M(c_3|\xi|)}e^{c_1\tau|\xi|} \xrightarrow{\tau\to 0} e^{-M(c_3|\xi|)} \end{aligned}$$

   para $c_3 = c_1/c_2$, $s \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| < \frac{c'}{64 \cdot 2^{2k}\rho}$, $\xi \in \mathcal{C}$ (tal que $|\xi| > 1$) e $\lambda \leqslant 1$.

2. Caso $c'/(32 \cdot 2^{2k}\rho) \leqslant |y| \leqslant c'/(8 \cdot 2^{2k}\rho)$. Por (2.33) e (2.42) temos

$$\begin{aligned} e^{-M^*(c_2(s\chi(y)+\tau))}e^{\mathcal{R}\tilde{Q}(y,t,\xi,s)} &\overset{(2.42)}{\leqslant} e^{-M^*(c_2(s\chi(y)+\tau))}e^{-s\chi(y)c_1|\xi|-sc_1|\xi|^\lambda} \\ &\leqslant e^{-M^*(c_2(s\chi(y)+\tau))}e^{-c_2(s\chi(y)+\tau)(c_1/c_2)|\xi|}e^{\tau c_1|\xi|} \\ &\overset{(2.33)}{\leqslant} e^{-M(c_3|\xi|)}e^{c_1\tau|\xi|} \xrightarrow{\tau\to 0} e^{-M(c_3|\xi|)}. \end{aligned}$$

Destes dois itens (observando que o determinante da matriz jacobiana da função $(y,s) \mapsto \tilde{z}(y,s)$ é limitado) podemos concluir que

$$\lim_{\tau\to 0^+}\sum_{j=1}^m \int_D \frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\left\{f\left(z + i\tau\frac{v_0}{|v_0|}\right)g(z)\right\}e^{i\xi\cdot(t-z)-|\xi|^\lambda p(t-z)}d\bar{z}_j \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m \leqslant Ce^{-M(c_3|\xi|)}, \quad (2.43)$$

para $\sigma \leqslant \frac{1}{3}$, $|t| < \frac{c'}{64 \cdot 2^{2k}\rho}$, $\xi \in \mathcal{C}$ (tal que $|\xi| > 1$) e $\lambda \leqslant 1$.

Para estimar a primeira integral à direita em (2.38) observe que como $u = bf$ em $\mathcal{D}'_M(\Omega)$, pela topologia estabelecida no espaço das $M-$ultradistribuições e pelo Teorema 1.1.6 podemos encontrar

$\delta_0 > 0$ tal que para todo $0 < \delta < \delta_0$ e $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\left|\left\langle f\left(\tilde{z}(\cdot) + i\tau\chi(\cdot)\frac{v_0}{|v_0|}\right), \phi(t,\cdot,\xi)\right\rangle\right| \leqslant C_\epsilon \sum_\alpha \epsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|}^{-1} \parallel \partial_y^\alpha \phi(t,y,\xi) \parallel_{L_y^\infty},$$

para todo $\phi(t,\cdot,\xi) \in D^M(\Omega)$ (em que t e ξ são encarados como parâmetros). Considerando

$$\phi(t,y,\zeta) = g(\tilde{z}(y,\sigma))e^{Q(t,\tilde{z}(y,\sigma)\xi)}\tilde{z}_y(y,\sigma),$$

e $W = B(0, \frac{c'}{64\cdot 2^{2k}\rho})$, por (2.38) e (2.43) temos

$$\left|\mathcal{F}_p^\lambda(gu)(z,\zeta)\right| \leqslant Ce^{-M(c_3|\xi|)} + C_\epsilon \sum_\alpha \epsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|}^{-1} \parallel \partial_y^\alpha \phi(t,y,\xi) \parallel_{L_y^\infty}. \tag{2.44}$$

para $\sigma \leqslant \frac{1}{3}$, $t \in W$ $\xi \in \mathcal{C}$ (tal que $|\xi| > 1$) e $\lambda \leqslant 1$. Observe que como $g, \tilde{z}, \tilde{z}_y(\cdot,\sigma) \in \mathcal{E}_M$, pela regra de Leibnitz, temos

$$|\partial_y^\alpha \phi(t,y,\xi)| = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C^{|\alpha-\beta|} M_{|\alpha-\beta|} \left|\partial_y^\beta e^{Q(t,\tilde{z}(y,\sigma),\xi)}\right|. \tag{2.45}$$

Pelo Lema A.1.4 (lembrando que $Q(t,\tilde{z}(y,\sigma),\xi) = i\xi\cdot(t-y-i\sigma\frac{v_0}{|v_0|}) - |\xi|^\lambda p(t-y-i\sigma\chi(y)\frac{v_0}{|v_0|}))$ temos:

$$|\partial_y^\alpha \phi(t,y,\xi)| = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C^{|\alpha-\beta|} M_{|\alpha-\beta|} e^{\mathcal{R}Q(t,\tilde{z}(y,\sigma),\xi)} e^{\frac{1}{2}M(\theta|\xi|)} e^{H/\theta} C^{|\beta|+1} M_{|\beta|},$$

em que $t \in W$, $|y| < \frac{c'}{8\cdot 2^{2k}\rho}$ e $|\xi| > 1$. Observe que de (1.19), (2.10) (2.41), (2.42) e diminuindo c_3 (se necessário) temos

$$\mathcal{R}Q(t,\tilde{z}(y,\sigma),\xi) < -M(c_3|\xi|), \qquad ,$$

em que $t \in W$, $|y| \leqslant c'/(8\cdot 2^{2k}\rho)$ e $\xi \in \mathcal{C}_R = \mathcal{C}\backslash B(0,R)$ com $R > 0$ suficientemente grande (dependendo apenas da sequencia M). Considerando $\theta = c_3$ temos

$$|\partial_y^\alpha \phi(t,y,\xi)| \leqslant C^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|} e^{-\frac{1}{2}M(c_3|\xi|)}, \quad (t,y,\xi) \in W \times B(0, c'/(8\cdot 2^{2k}\rho)) \times \mathcal{C}_R.$$

Assim, voltando em (2.44) e escolhendo ϵ suficientemente pequeno segue que,

$$|\mathcal{F}_p^\lambda(gu)(t,\xi)| \leqslant Ce^{-\frac{3}{2}M(c_3|\xi|)}, \tag{2.46}$$

para $(t,\xi) \in W \times \mathcal{C}$ (já que, $\mathcal{F}_p^\lambda(gu)e^{-M(c_3|\xi|)}$ é limitada em conjuntos limitados).

Deste modo completamos a demonstração do caso particular proposto no início. O caso geral segue pela linearidade das transformadas FBI-BH. ■

A seguir apresentaremos a recíproca do Teorema 2.3.5.

Teorema 2.3.6. *Seja $u \in \mathcal{D}'_M(\mathbb{R}^m)$, p um polinômio real homogêneo e elíptico de grau $2k$ e $0 < \lambda \leqslant 1$, tal que λ é admissível para sequencia M (isto é, a propriedade (2.10) é satisfeita). Se existe uma vizinhança aberta $W \subset \mathbb{R}^m$ de 0, uma vizinhança cônica aberta convexa centrada na origem $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^m$ de $\xi_0 \in \mathbb{R}^m$, e constantes $c, C > 0$ tais que*

$$|\mathcal{F}_p^\lambda(u)(t,\xi)| \leqslant Ce^{-M(c|\xi|)}, \quad \forall (z,\zeta) \in W \times \mathcal{C}, \tag{2.47}$$

então $\xi_0 \notin WF_M(u)|_0$.

Demonstração. Seja $r > 0$ um número real suficientemente pequeno (a definir) e $\phi \in \mathcal{D}_M(B(0,r))$ tal que $\phi \equiv 1$ em $B(0,r/2)$. O Lema 2.2.2 nos garante que para provar que $\xi_0 \notin WF_M(u)_0$ é suficiente provar que $\xi_0 \notin WF_M(\phi u)_0$. Para simplificar a notação, no lugar de ϕu escreveremos simplesmente $u \in \mathcal{E}'_M(B(0,r))$. Pelo Lema 2.1.5, temos

$$u(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m} e^{i\xi\cdot(x-t)}\sigma(\epsilon\xi)\mathcal{F}_p^\lambda u(t,\xi)|\xi|^{m/2k} dt d\xi,$$

em $\mathcal{E}'_M(B(0,r))$. Assim como feito em [15, Theorem V.3.7] podemos considerar cones agudos (com vértice na origem) $C_1, \ldots, C_m$ tais que:

1. $$\mathbb{R}^m \backslash \mathcal{C} = \bigcup_{j=1}^K \overline{C_j}, \tag{2.48}$$

2. $C_j \cap C_l = \varnothing$, para todo $j \neq l$; e

3. $\Gamma_j = \{v \in \mathbb{R}^m : \xi \cdot v > 0 \text{ para todo } \xi \in C_j \text{ e } \xi_0 \cdot v < 0\}$ é um cone agudo aberto não vazio.

Diminuindo Γ_j, se necessário, podemos encontrar uma constante $0 < c' < 1$ (suficientemente pequena a definir) tal que

$$\xi \cdot v \geqslant c'|\xi||v|, \quad (v,\xi) \in \Gamma_j \times C_j. \tag{2.49}$$

Para $r > 0$ suficientemente pequeno, de modo que $B(0,r) \subset W$, considere

$$u = u_1 + u_2 + u_3,$$

em que

$$u_1 = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathcal{C}} \int_{B(0,r)} e^{i\xi(x-t)} \sigma(\epsilon\xi) \mathcal{F}_p^\lambda(u)(t,\xi) |\xi|^{m/2k} dt d\xi,$$

$$u_2 = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{C}} \int_{B(0,r)} e^{i\xi(x-t)} \sigma(\epsilon\xi) \mathcal{F}_p^\lambda(u)(t,\xi) |\xi|^{m/2k} dt d\xi.$$

e

$$u_3 = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m \setminus B(0,r)} e^{i\xi(x-t)} \sigma(\epsilon\xi) \mathcal{F}_p^\lambda(u)(t,\xi) |\xi|^{m/2k} dt d\xi.$$

Observe que de modo análogo ao que fora feito à função I_1 na demonstração da recíproca do Teorema 2.2.4 vemos que $u_1 \in \mathcal{E}_M$. Além disso, observe também que a soma das funções I_2, I_3, I_4 definidas na demonstração da recíproca do Teorema 2.2.4 coincidem com u_3 e assim $u_3 \in \mathcal{E}_M$. Lembrando que toda função de classe $\mathcal{E}_M$ possui uma extensão $M-$quase analítica (veja [3, Lemma 17]) segue que $u_1 + u_3$ é valor de fronteira de uma função $M-$quase analítica. Assim, a demonstração se resume a mostrar que u_2 pode ser representado como uma soma de ultradistribuições a valor de fronteira, como na Definição 2.3.3. Para isso, consideraremos as funções

$$f_j(x+iy) = \int_{C_j} \int_{B(0,r)} e^{i\xi(x+iy-t)} \mathcal{F}_p^\lambda u(t,\xi) |\xi|^{m/2k} dt d\xi, \quad j = 1, \ldots, K$$

e

$$f_j^\epsilon(x) = \int_{C_j} \int_{B(0,r)} e^{i\xi(x-t)} \sigma(\epsilon\xi) \mathcal{F}_p^\lambda u(t,\xi) |\xi|^{m/2k} dt d\xi, \quad j = 1, \ldots, K$$

e a seguir provaremos que as funções f_j satisfazem as condições da Definição 2.3.3 e $bf_j = \lim_{\epsilon \to 0^+} f_j^\epsilon$.

Observe que pela definição de $\mathcal{F}_p^\lambda$ temos

$$f_j(x+iy) = c_p \int_{C_j} \int_{B(0,r)} \langle u(x'); e^{Q_1(x+iy,t,x',\xi)} |\xi|^{m/2k} \rangle dt d\xi, \tag{2.50}$$

com $Q_1(x+iy,t,x',\xi) = i\xi(x+iy-x') - |\xi|^\lambda p(t-x')$. Pelo Teorema 1.1.6 (lembrando que $\operatorname{supp} u \subset$

$B(0,r)$) existem medidas borelianas u_β satisfazendo (1.15) tais que

$$f_j(x+iy) = c_p \int_{C_j} \int_{B(0,r)} \sum_\beta \int_{|x'|<r} \partial_{x'}^\beta \left(e^{Q_1(x+iy,t,x',\xi)} |\xi|^{m/(2k)} \right) du_\beta(x') dt d\xi. \tag{2.51}$$

Afirmação: bf_j existe em $\mathcal{E}'_M$.

Usaremos o Teorema 2.3.1 (com $\mathcal{V} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m} \right\}$) para provar a existência de bf_j.

Primeiramente provaremos que para todo $\eta > 0$ temos que $|f(x+iy)|e^{-\lambda M^*(|y|/\eta)} < +\infty$. Pelo Lema A.1.4, para todo $\theta > 0$ segue que

$$\begin{aligned} \left| \partial_{x'}^\beta \left(e^{Q_1(x+iy,t,x',\xi)} |\xi|^{m/(2k)} \right) \right| &\leqslant e^{\mathcal{R} Q_1(x+iy,t,x',\xi)} e^{\frac{1}{2} M(\theta|\xi|)} e^{H/\theta} C^{|\beta|+1} M_{|\beta|} |\xi|^{m/(2k)} \\ &\leqslant e^{-\xi \cdot y} e^{\frac{1}{2} M(\theta|\xi|)} e^{H/\theta} C^{|\beta|+1} M_{|\beta|} |\xi|^{m/(2k)} \\ &\leqslant e^{-c|\xi||y|} e^{\frac{1}{2} M(\theta|\xi|)} e^{H/\theta} C^{|\beta|+1} M_{|\beta|} |\xi|^{m/(2k)} \end{aligned} \tag{2.52}$$

com $(x,y,x',t,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \Gamma_j \times B(0,3r) \times B(0,r) \times C_j$. Se além de $(x,y,x',t,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \Gamma_j \times B(0,3r) \times B(0,r) \times C_j$ supusermos $|\xi| \geqslant 1$, considerando $\frac{m}{2k} \leqslant l \in \mathbb{N}$, usando a definição da função M e que $e^{-a} \leqslant \frac{j!}{a^j}$ (para todo $j \in \mathbb{N}$ e $a > 0$), temos

$$\left| \partial_{x'}^\beta \left(e^{Q_1(x+iy,t,x',\xi)} |\xi|^{m/(2k)} \right) \right| \overset{(1.23)}{\leqslant} e^{-c|\xi||y|} e^{M(\theta|\xi|)} e^{H/\theta} C^{|\beta|+1} M_{|\beta|} M_l \sqrt{A} \frac{H^l}{\theta^l}.$$

Observe que no caso em que $|\xi| < 1$ encontramos uma desigualdade semelhante a desigualdade acima, considerando $l \in \mathbb{N}$ tal que $l \leqslant \frac{m}{2k}$. Portanto, aumentando $C > 0$ (se necessário) temos

$$\left| \partial_{x'}^\beta \left(e^{Q_1(x+iy,t,x',\xi)} |\xi|^{m/(2k)} \right) \right| \overset{(1.23)}{\leqslant} e^{-c|\xi||y|} e^{M(\theta|\xi|)} e^{H/\theta} C^{|\beta|+1} M_{|\beta|},$$

sempre que $(x,y,x',t,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \Gamma_j \times B(0,3r) \times B(0,r) \times C_j$. Por outro lado, observe que dado $\eta > 0$ arbitrário, por (1.26) existe c_η tal que

$$M(\theta|\xi|) = 2M(\theta|\xi|) - M(\theta|\xi|) \leqslant \eta M(c_\eta \theta|\xi|) - M(\theta|\xi|).$$

Assim, escolhendo $\theta = \theta_\eta = \frac{c}{c_\eta}$ (para cada $\eta > 0$) temos

$$\left| \partial_{x'}^\beta \left(e^{Q_1(x+iy,t,x',\xi)} |\xi|^{m/(2k)} \right) \right| \leqslant e^{\sup_{r>0}\{\eta M(r) - r|y|\}} e^{-M(\theta_\eta|\xi|)} e^{H/\theta_\eta} C^{|\beta|+1} M_{|\beta|}$$

$$\begin{aligned}\left|\partial_{x'}^{\beta}\left(e^{Q_1(x+iy,t,x',\xi)}|\xi|^{m/(2k)}\right)\right| &\leqslant e^{\eta\,\omega^*(|y|/\eta)}e^{-M(\theta_\eta\,|\xi|)}e^{H/\theta_\eta}C^{|\beta|+1}M_{|\beta|}\\ &\overset{(2.32)}{\leqslant} e^{\eta\,M^*(|y|/\eta)}e^{H/\theta_\eta}e^{-M(\theta_\eta\,|\xi|)}C^{|\beta|+1}M_{|\beta|}, \qquad (2.53)\end{aligned}$$

para $(x, y, x', t, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \Gamma_j \times B(0, 3r) \times B(0, r) \times C_j$. Deste modo, voltando em (2.51), para cada $\eta > 0$ temos $C_\eta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}|f_j(x+iy)| &\leqslant c_p \int_{C_j}\int_{|t|<r}\sum_\beta \frac{L^{|\beta|}}{M_{|\beta|}}e^{\eta\,M^*(|y|/\eta)}e^{-M(\theta_\eta\,|\xi|)}e^{H/\theta}C^{|\beta|+1}M_{|\beta|}dtd\xi\\ &\overset{(1.24)}{\leqslant} C_\eta e^{\eta M^*(|y|/\eta)}, \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^m\times\Gamma_j, \qquad (2.54)\end{aligned}$$

para $L > 0$ suficientemente pequeno.

A seguir provaremos que $f_j \in \mathcal{O}(B(0, r) + i\Gamma_j)$ e deste modo poderemos concluir que bf_j existe. Como $f_j \in \mathcal{O}(B(0, r) + i\Gamma_j)$ é uma propriedade local é suficiente provar que dado qualquer $y_j \in \Gamma_j$ existe $0 < r_j < |y_j|$ tal que f_j é holomorfa em $B(0, r)+i(\Gamma_j \cap B(y_j, r_j))$. Fixado r_j tal que $0 < r_j < |y_j|$, definindo $l_j = |y_j| - r_j$, temos $|y| \geqslant |y_j| - |y - y_j| > |y_j| - r_j = l_j$, para todo $y \in \Gamma_j \cap B(y_j, r_j)$. Como M^* é uma função decrescente em $(0, +\infty)$, por (2.53) temos que

$$j\left|\partial_{x'}^{\beta}\left(e^{Q_1(x+iy,t,x',\xi)}|\xi|^{m/(2k)}\right)\right| \leqslant e^{\eta\,M^*(l_j/\eta)}e^{H/\theta_\eta}e^{-M(\theta_\eta\,|\xi|)}C^{|\beta|+1}M_{|\beta|},$$

$\forall (x, y, x', t, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \Gamma_j \cap B(y_j, r_j) \times B(0, 3r) \times B(0, r) \times C_j$; e além disso

$$\int_{C_j}\int_{B(0,r)}\sum_\beta\int_{|x'|<r} e^{\eta\,M^*(l_j/\eta)}e^{H/\theta_\eta}e^{-M(\theta_\eta\,|\xi|)}C^{|\beta|+1}M_{|\beta|}du_\beta(x')dtd\xi < +\infty.$$

Assim, podemos derivar sob o sinal de integração em (2.51) e como $\partial_{x'}^{\beta}\left(e^{Q_1(x+iy,t,x',\xi)}|\xi|^{m/(2k)}\right)$ é holomorfa temos

$$\frac{\partial f(x+iy)}{\partial \overline{z}_k} = 0,$$

para $|y - y_j| < r_j$ e $k \in \mathbb{N}$ arbitrário e então $f_j \in \mathcal{O}(B(0, r) + i\Gamma_j)$. Portanto, podemos aplicar o Teorema 2.3.1 e concluir que bf_j existe em $\mathcal{D}'_M(B(0, r))$. ■

Para completar a prova (de que u_2 se escreve como soma de ultradistribuições a valor de fronteira) provaremos que $bf_j = \lim_{\epsilon\to 0} f_j^\epsilon$. Dada $\phi \in \mathcal{D}_M(\Omega)$, pelo Teorema 1.1.6 temos

$$\langle f_j^\epsilon;\phi\rangle = c_p\int_{\mathbb{R}^m}\left[\int_{C_j}\int_{B(0,r)}\sigma(\epsilon\xi)\sum_\beta\int_\Omega \partial_{x'}^\beta\left(e^{i\xi(x-x')-|\xi|^\lambda p(t-x')}|\xi|^{m/2k}\right)du_\beta(x')dtd\xi\right]\phi(x)dx.$$

Pelo Lema A.1.5, pelas propriedade (1.23) e (1.25) e pelo Lema A.1.4 (observando que $\mathcal{R}\{i\xi(x-x')-|\xi|^\lambda p(t-x')\}<0$), podemos aplicar o teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to0}\left\langle f_j^\epsilon;\phi\right\rangle &= c_p\lim_{\epsilon\to0}\int_{C_j}\int_{B(0,r)}\left\langle u(x');\int_{\mathbb{R}^m} e^{i\xi(x-x')-|\xi|^\lambda p(t-x')}\sigma(\epsilon\xi)|\xi|^{m/2k}\phi(x)dx\right\rangle dtd\xi\\
&= c_p\lim_{\epsilon\to0}\int_{C_j}\int_{B(0,r)}\left\langle u(x');\hat\phi(-\xi)e^{-i\xi x'-|\xi|^\lambda p(t-x')}\sigma(\epsilon\xi)|\xi|^{m/2k}\right\rangle dtd\xi\\
&= c_p\lim_{\epsilon\to0}\int_{C_j}\int_{B(0,r)}\sum_\beta\int_\Omega\partial_{x'}^\beta\left(\hat\phi(-\xi)e^{-i\xi x'-|\xi|^\lambda p(t-x')}\sigma(\epsilon\xi)|\xi|^{m/2k}\right)d|u_\beta|(x')dtd\xi.
\end{aligned}$$

Como $\phi\in\mathcal{D}_M(\Omega)$, pelo Lema A.1.5 existem constantes $C,c_1>0$ tais que $|\hat\phi(\xi)|\leqslant Ce^{-M(c_1|\xi|)}$, para todo $\xi\in\mathbb{R}^m$. Observe que, também pelo Lema A.1.5, $\sigma(\epsilon|\xi|)$ é limitada. Então, pelo fato de σ ser limitada e pelo Lema A.1.4 temos

$$\begin{aligned}
\left|\partial_{x'}^\beta\left(\hat\phi(-\xi)e^{-i\xi x'-|\xi|^\lambda p(t-x')}\sigma(\epsilon\xi)|\xi|^{m/2k}\right)\right| &\overset{(2.4)}{\leqslant} Ce^{-c|t-x'|^{2k}}e^{\frac12 M(c_1|\xi|)}C^{|\beta|+1}M_{|\beta|}e^{-M(c_1|\xi|)}|\xi|^l\\
&\leqslant e^{\frac12 M(c_1|\xi|)}C^{|\beta|+1}M_{|\beta|}e^{-M(c_1|\xi|)}\frac{(M_{4l})^{1/4}}{(c_1)^l}e^{\frac14 M(c_1|\xi|)}\\
&\leqslant C^{|\beta|+1}M_{|\beta|}e^{-\frac14 M(c_1|\xi|)}
\end{aligned}$$

para $|\xi|>1$ e $\frac{m}{2k}\leqslant l\in\mathbb{N}$ (lembrando que da definição da função M associada a sequência (M_j)). Além disso, das propriedades estabelecidas sobre as medidas borelianas u_β e por $e^{-\frac14 M(c_1|\xi|)}\in L^1(\mathbb{R}^m)$, segue que

$$\int_{C_j}\int_{B(0,r)}\sum_\beta\int_\Omega C^{|\beta|+1}M_{|\beta|}e^{-\frac14 M(c_1|\xi|)}d|u_\beta|(x')dtd\xi \quad<\quad +\infty.$$

Logo, pelo teorema da convergência dominada, temos

$$\lim_{\epsilon\to0}\left\langle f_j^\epsilon;\phi\right\rangle \;=\; c_p\sigma(0)\int_{C_j}\int_{B(0,r)}\left\langle u(x');\hat\phi(-\xi)e^{-i\xi x'-|\xi|^\lambda p(t-x')}|\xi|^{m/2k}\right\rangle dtd\xi.$$

Além disso, por (2.53) podemos aplicar o Teorema de Fubini obtendo;

$$\begin{aligned}
\langle bf_j,\phi\rangle &= \lim_{\Gamma_j\ni y\to 0}\int\int_{C_j}\int_{B(0,r)} e^{i\xi(x+iy-t)}c_p\left\langle u(x'); e^{i\xi(t-x')-|\xi|^{\lambda}p(t-x')}\right\rangle |\xi|^{m/2k}dtd\xi\phi(x)dx \\
&= c_p\lim_{\Gamma_j\ni y\to 0}\int_{C_j}\int_{B(0,r)}\left\langle u(x'); \int e^{i\xi(x+iy-x')-|\xi|^{\lambda}p(t-x')}\phi(x)dx\right\rangle |\xi|^{m/2k}dtd\xi \\
&= c_p\lim_{\Gamma_j\ni y\to 0}\int_{C_j}\int_{B(0,r)}\left\langle u(x'); \hat{\phi}(-\xi)e^{\xi\cdot(iy-x')-|\xi|^{\lambda}p(t-x')}\right\rangle |\xi|^{m/2k}dtd\xi \\
&= c_p\int_{C_j}\int_{B(0,r)}\left\langle u(x'); \hat{\phi}(-\xi)e^{-i\xi x'-|\xi|^{\lambda}p(t-x')}\right\rangle |\xi|^{m/2k}dtd\xi
\end{aligned}$$

em que na última igualdade usamos o teorema da convergência dominada (observe que pelo Teorema A.1.5 pela definição de M, de modo análogo à (2.52), temos $|\partial^{\alpha}\hat{\phi}(-\xi)e^{\xi\cdot(iy-x')-|\xi|^{\lambda}p(t-x')}|\xi|^{m/2k}| \leqslant Ce^{-\frac{1}{4}M(c'|\xi|)}C^{|\beta|+1}M_{|\beta|}$). Portanto, escolhendo χ de forma que $\sigma(0)=\hat{\chi}(0)/(2\pi)^m=1$, temos que $u_2=\sum_{j=1}^{K}bf_j$. ∎

O próximo resultado garante que a definição de WF_M apresentada nesta seção é equivalente a definição apresentada em [40] e [49] (no caso Gevrey).

Teorema 2.3.7. *Dada $u\in\mathcal{D}'_M(\mathbb{R}^m)$ e $(0,\xi_0)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$ temos que $(0,\xi_0)\notin WF_M(u)$ se e somente se existem vizinhança aberta U de 0, vizinhança cônica Γ de ξ_0, $\phi\in\mathcal{D}_M(U)$, tal que $\phi=1$ em uma vizinhança de 0 de modo que*

$$|\widehat{u\phi}(\xi)|\leqslant Ce^{-M(c|\xi|)},\quad \xi\in\Gamma, \tag{2.55}$$

para certas constantes $C,c>0$.

Demonstração. Seja $(0,\xi_0)\notin WF_M(u)$, então pela demonstração do Teorema 2.3.6 vemos que existem vizinhança aberta da origem V (podendo assumir $V=B(0,r)$, para algum $r>0$), cones agudos $\Gamma_1,\dots,\Gamma_k\subset\mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ (tais que $\xi_0\cdot\Gamma_j<0$), $\delta>0$, funções $f_j\in\mathcal{O}(V+(\Gamma_j)_\delta)$ $(j=1,\dots,k)$, cada bf_j existe em $\mathcal{D}_M{}'(V)$, e $u-\sum_{j=1}^{k}bf_j\in\mathcal{E}_M(V)$. Note que pela linearidade da transformada de Fourier basta mostrar que $\phi\cdot bf_j$ satisfaz (2.55). Observe que

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi\cdot bf_j}(\xi) = \left\langle bf_j(x), e^{-ix\xi}\phi(x)\right\rangle &= \lim_{\Gamma_j\ni y\to 0}\int f_j(x+iy)\phi(x)e^{-ix\xi}dx \\
&= \lim_{\theta\to 0^+}\int f_j(x+i\theta y_j)\phi(x)e^{-ix\xi}dx,
\end{aligned}$$

para qualquer $y_j\in\Gamma_j$ fixado. Seja Φ a extensão quase analítica de ϕ (veja [3]), é importante lembrar que pela construção de Φ podemos considerar $\Phi(x,\cdot)=0$ para $x\notin V$. Assim, aplicando o teorema de

Stokes e lembrando que as funções e exponencial são holomorfas em $V + (\Gamma_j)_\delta$, segue que

$$\begin{aligned}\widehat{\phi \cdot bf_j}(\xi) = \lim_{\theta\to 0^+} \Bigg\{ \int\!\!\int f_j(x+iy_j+i\theta y_j)\Phi(x+iy_j)e^{-i(x+iy_j)\xi}dx \\ + \sum_{k=1}^{m}\int_D f(z+i\theta y_j)\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}_k}(z)e^{-iz\cdot\xi}d\bar{z}_k\wedge dz_1\wedge\ldots dz_m\Bigg\},\end{aligned} \tag{2.56}$$

em que $D = \{x+isy_j \in \mathbb{C}^m : \ x \in V,\ 0 \leqslant s \leqslant 1\}$. Por outro lado, como $\xi_0\cdot\Gamma_j < 0$ podemos considerar $c > 0$ tal que $\xi_0\cdot y_j = -2c|y_j| < -c|y_j|$. Disso, existe uma vizinhança cônica aberta e convexa Γ de ξ_0 tal que $\xi\cdot y_j < -c|\xi|$, para todo $\xi \in \Gamma$. A seguir estimaremos as duas integrais de (2.56). Sem perda de generalidade, pela demonstração do teorema anterior, podemos considerar que para todo $\lambda > 0$ existe constante $D_\lambda > 0$ tal que $|f_j(x+iy)| \leqslant C_\lambda e^{\lambda M^*(|y|/\lambda)}$. Aumentando C, se necessário, temos

$$\begin{aligned}\left|\int\!\!\int f_j(x+iy_j+i\theta y_j)\Phi(x+iy_j)e^{-i(x+iy_j)\xi}dx\right| &\leqslant Ce^{\lambda M^*(\frac{1}{\lambda}|y_j+\theta y_j|)}e^{-c|\xi|} \\ &\leqslant Ce^{\lambda M^*(\frac{1}{\lambda}|y_j|)}e^{-M(c|\xi|)} = C'e^{-M(c|\xi|)},\end{aligned} \tag{2.57}$$

para $\xi \in \Gamma$ e $C' = Ce^{\lambda M^*(\frac{1}{\lambda}|y_j|)}$, já que M^* é decrescente e $\theta > 0$. Para estimar a segunda integral a direita em (2.56) observe que, como Φ é $M-$extensão quase analítica, pela definição de M^* e w^*, por M^* ser decrescente, usando a desigualdade (2.32) e ainda por (2.33), assumindo $\theta < 1$, existem $D_\lambda, C > 1$ (e $\lambda = \frac{1}{C} < 1$) tais que

$$\begin{aligned} f(z+i\theta y_j)\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}_k}(z)e^{-iz\cdot\xi} &\leqslant C_\lambda Ce^{\frac{\lambda}{2}M^*(2|sy_j+\theta y_j|/\lambda)}e^{-M^*(|sy_j|)}e^{sy_j\xi} \\ &\leqslant C_\lambda Ce^{\frac{1}{2}M^*(2(s+\theta)|y_j|/\lambda)}e^{-M^*(2(s+\theta)|y_j|/\lambda)}e^{-cs|y_j||\xi|} \\ &\leqslant C_\lambda Ce^{-\frac{1}{2}M^*(2(s+\theta)|y_j|/\lambda)-sc|y_j||\xi|} \\ &\leqslant C_\lambda Ce^{-\frac{1}{2}\{M^*(2(s+\theta)|y_j|/\lambda)-(s+\theta)c|y_j||\xi|\}+c\theta|y_j||\xi|} \\ &\leqslant C_\lambda Ce^{-\frac{1}{2}M(\frac{\lambda c|\xi|}{2})+c\theta|y_j||\xi|} \xrightarrow{\theta\to 0^+} C_\lambda Ce^{-\frac{1}{2}M(\frac{\lambda c|\xi|}{2})}\end{aligned}$$

$z = x+isy_j \in \partial\ 0 \leqslant s \leqslant 1$, $\theta < 1$ e $\xi \in \Gamma$. Assim, aumentando C (se necessário), por (1.6) existe $d > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{m}\int_D f(z+i\theta y_j)\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}_k}(z)e^{-iz\cdot\xi}d\bar{z}_k\wedge dz_1\wedge\ldots dz_m \leqslant De^{-M(d|\xi|)}, \tag{2.58}$$

para $\xi \in \Gamma$. De (2.57) e (2.58), temos

$$\widehat{\phi \cdot bf_j}(\xi) \leqslant Ce^{-M(d|\xi|)}, \ \ \xi \in \Gamma. \tag{2.59}$$

Portanto, diminuindo o cone Γ de modo que (2.59) seja satisfeita para cada $j = 1, \ldots, k$ podemos concluir que exite $\phi \in \mathcal{D}_M(\mathbb{R}^m)$ e constantes $C, c > 0$ tais que

$$\widehat{\phi u}(\xi) \leqslant Ce^{-M(c|\xi|)}, \ \ \ \xi \in \Gamma.$$

Reciprocamente suponha que existam uma vizinhança aberta U de 0, uma vizinhança cônica convexa Γ de ξ_0, constantes $c, C > 0$ e $\phi \in \mathcal{D}_M(U)$ tais que $\phi = 1$ em uma vizinhança da origem e $|\widehat{u\phi}(\xi)| \leqslant Ce^{-M(c|\xi|)}$, para todo $\xi \in \Gamma$. Observe que, como $\phi \equiv 1$ em uma vizinhança da origem é suficiente demonstrarmos o resultado para ϕu. Do Lema 2.1.4 segue que

$$u_\epsilon(x) = \int e^{i\xi x} \sigma(\epsilon\xi) \widehat{\phi u}(\xi) d\xi \to u, \quad \epsilon \to 0^+$$

em $\mathcal{E}^M(\mathbb{R}^m)$. Assim como na demonstração do teorema anterior considere

$$\mathbb{R}^m \backslash \Gamma = \bigcup_{j=1}^{K} \overline{C_j},$$

de modo que cada C_j é um cone agudo aberto tal que:

1. $C_j \cap C_l = \varnothing$, para todo $j \neq l$; e

2. $\Gamma_j = \{v\mathbb{R}^m : \xi \cdot v > 0 \text{ para todo } \xi \in C_j \text{ e } \xi_0 \cdot v < 0\}$ é um cone agudo aberto agudo não vazio.

Diminuindo Γ_j, se necessário, então podemos encontrar uma constante $0 < c$ (tão pequena quanto se queira) tal que

$$\xi \cdot v \geqslant c|\xi||v|, \ \ (v, \xi) \in \Gamma_j \times C_j.$$

Defina

$$f_j^\epsilon(x + iy) = \int_{\mathcal{C}_j} e^{i\xi(x+iy)} \sigma(\epsilon\xi) \widehat{\phi u}(\xi) d\xi,$$

$$f_j(x+iy) = \int_{\mathcal{C}_j} e^{i\xi(x+iy)}\widehat{\phi u}(\xi)d\xi = \int_{\mathcal{C}_j}\int e^{i\xi(x+iy-x')}\phi(x')u(x')dx'd\xi$$

e

$$g_1^{\epsilon}(x) = \int_{\Gamma} e^{i\xi x}\sigma(\epsilon|\xi|)\widehat{\phi u}(\xi)d\xi.$$

Pelo decaimento de $\widehat{\phi u}$ em Γ, de modo análogo à função u_1 da demonstração do teorema anterior, temos que g^{ϵ} converge para uma função $g \in \mathcal{E}^M(\mathbb{R}^m)$, quando $\epsilon \to 0^+$. A seguir provaremos que existe bf_j em $\mathcal{D}^{M'}(\mathbb{R}^m)$ e além disso $\lim_{\epsilon\to 0} f_j^{\epsilon}(x) = bf_j$. Observe que para $(y,\xi) \in \Gamma_j \times \mathcal{C}_j$ temos

$$\mathcal{R}\{i\xi(x+iy-x')\} \leqslant -c|\xi||y|.$$

Já que $\phi u \in \mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^m)$, sendo $K = supp\{\phi\}$ pelo Teorema 1.1.6 temos que para todo $L > 0$ existe $C_L > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |e^{i\xi(x+iy)}\widehat{\phi u}(\xi)| &= \left|\left\langle u(x'), e^{i\xi(x+iy-x')}\phi(x')\right\rangle\right| \\ &\leqslant C_L \sum_{\alpha} \frac{L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}} \sup_{x'\in K} \left|\partial_{x'}^{\alpha} e^{i\xi(x+iy-x')}\right| \\ &\leqslant C_L \sum_{\alpha} \frac{L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}} \sup_{x'\in K} |\xi|^{|\alpha|} e^{-c|\xi||y|}, \quad (y,\xi) \in \Gamma_j \times \mathcal{C}_j. \end{aligned}$$

A seguir provaremos que $f_j \in \mathcal{O}(V + i\Gamma_j)$. Para isso fixaremos $y_0 \in \Gamma_j$ arbitrário e como a propriedade holomorfa é local será suficiente provar que f_j é holomorfa em uma vizinhança de y_0. Como

$$\mathcal{R}\{i\xi(x+iy-x')\} \leqslant -c|\xi||y|,$$

para $(y,\xi) \in \Gamma_j \times C_j$ existe uma vizinhança W_0 de y_0 tal que

$$\mathcal{R}\{i\xi(x+iy-x')\} \leqslant -c|\xi|,$$

para $(y,\xi) \in W_0 \times C_j$ (redefinindo c, se necessário). Por (1.19) e (1.22), para $L > 0$ suficientemente pequeno existe $D > 0$ tal que

$$\left|\int e^{i\xi(x+iy-x')}\phi(x')u(x')dx'\right| \leqslant De^{M(|\xi|)-c|\xi|} \leqslant De^{-\frac{1}{2}M\left(\frac{c}{2}|\xi|\right)}$$

Pelo item 7 do Lema 1.1.9 e pelo fato de $e^{\xi z}$ ser holomorfa em z segue que $f_j \in \mathcal{O}(V \times \Gamma_j)$

Como

$$\left|\int e^{i\xi(x+iy-x')}\phi(x')u(x')dx'\right| \leqslant De^{M(|\xi|)-(c/2)|\xi||y|},$$

em que sem perda de generalidade podemos considerar $0 < c < 1$. De modo análogo ao teorema anterior podemos provar que

$$|f(x+iy)|e^{-\lambda w^*(|y|/\lambda)} < +\infty,$$

para todo $\lambda > 0$ e $(x,\xi) \in V \times \Gamma_j$. Pelo Teorema 2.3.1 segue que existe bf_j. Para completar a demonstração provaremos que $bf_j(x) = \lim_{\epsilon\to 0} f_j^\epsilon(x)$ em $\mathcal{D}^{M'}(\mathbb{R}^m)$. Para isso considere $\psi \in \mathcal{D}_M(\mathbb{R}^m)$ e observe que como o suporte de ϕ e ψ são compactos e $\sigma(\epsilon\xi) \in L^1(\mathbb{R}^m)$, pelo primeiro teorema estrutural, podemos aplicar o teorema de Fubinni e obter

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0^+}\int f_j^\epsilon(x)\psi(x)dx &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int\int_{\mathcal{C}_j}\int \phi(x')u(x')e^{i\xi(x-x')}\sigma(\epsilon\xi)dx'd\xi\psi(x)dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathcal{C}_j}\int \phi(x')u(x')e^{-i\xi x'}\sigma(\epsilon\xi)\int e^{i\xi x}\psi(x)dxdx'd\xi \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathcal{C}_j}\int \phi(x')u(x')e^{-i\xi x'}\sigma(\epsilon\xi)\hat{\psi}(-\xi)dx'd\xi.
\end{aligned}$$

Já que $\psi \in \mathcal{D}^M(\mathbb{R}^m)$, pelo Teorema 2.2.4 existem $D, d > 0$ tais que $|\hat{\psi}(-\xi)| \leqslant De^{-M(d|\xi|)} \in L^1(\mathbb{R}^m)$ (pelo item 7 do Lema 1.1.9). Além disso, como ϕ possui suporte compacto, pelo primeiro teorema estrutural e pelo teorema da convergência dominada (considerando, sem perda de generalidade, $\sigma(0) = 1$) temos que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int f_j^\epsilon(x)\psi(x)dx = \int_{\mathcal{C}_j}\int \phi(x')u(x')e^{-\xi x'}\hat{\psi}(-\xi)dx'd\xi$$

Por outro lado, por $\int e^{-c|y||\xi|}d\xi = C_y < +\infty$, pelo primeiro teorema estrutural, pelo fato de ψ e ϕ

possuírem suporte compacto e pelo teorema de Fubinni, de modo análogo,

$$\begin{aligned}
\int bf_j(x)\psi(x)dx &= \lim_{\Gamma_j \ni y \to 0} \int \int_{\mathcal{C}_j} \int e^{i\xi(x+iy-x')}\phi(x')u(x')dx'd\xi\psi(x)dx \\
&= \lim_{\Gamma_j \ni y \to 0} \int_{\mathcal{C}_j} \int e^{i\xi(iy-x')}\phi(x')u(x') \int e^{-i(-\xi)x}\psi(x)dxdx'd\xi \\
&= \lim_{\Gamma_j \ni y \to 0} \int_{\mathcal{C}_j} \int e^{i\xi(iy-x')}\phi(x')u(x')\hat{\psi}(-\xi)dx'd\xi \\
&= \int_{\mathcal{C}_j} \int e^{-i\xi x'}\phi(x')u(x')\hat{\psi}(-\xi)dx'd\xi,
\end{aligned}$$

a última igualdade segue do primeiro teorema estrutural e do teorema da convergência dominada pois,

$$|e^{-\xi y - i\xi x'}\hat{\psi}(-\xi)| \leqslant e^{-c|\xi||y|}De^{-M(d|\xi|)} \leqslant e^{-M(d|\xi|)} \in L^1(\mathbb{R}^m),$$

para $(y, \xi) \in \Gamma_j \times \mathcal{C}_j$. Concluindo que $bf_j(x) = \lim_{\epsilon \to 0} f_j^{\epsilon}(x)$, o que completa a prova. ■

2.4 Aplicação – Propagação de regularidade

Dado $J \subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança aberta da origem, considere uma estrutura do tipo tubo gerada pelos operadores

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j}(t)\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 1, \ldots, n;$$

com $\phi \doteq (\phi_1, \ldots, \phi_n) : J \to \mathbb{R}^m$ lipschitziana (observe que $Z(x,t) = x + i\phi(t)$ é integral primeira do sistema acima, ou seja, $L_j Z_k = 0$, para todo $k = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$). Em [9, Theorem 1.1] Bauendi e Treves provaram o seguinte resultado para propagação de regularidade para solução de uma estrutura do tipo tubo.

Teorema 2.4.1. *Seja h uma solução contínua e lipschitziana em $\Omega = B_r(0) \times J \subset \mathbb{R}^{m+n}$ da estrutura do tipo tubo descrita acima. Considere $\xi^0 \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, com $|\xi^0| = 1$, $\gamma \subset U$ uma curva lipschitziana com pontos extremos 0 e t^* satisfazendo,*

1. $-\phi(t^*) \cdot \xi^0 > 0$,
2. $\sup_{t \in \gamma} |\phi(t)| < r$,
3. $|\phi(t^*)|^2 \sup_{t \in \gamma} \phi(t) \cdot \xi^0 < [r^2 - \sup_{t \in \gamma} |\phi(t)|^2][-\phi(t^*) \cdot \xi^0]$

então $(0, \xi_0) \notin WF_a(h_0)$, $h_0(x) = h(x, 0)$.

Usando a transformada FBI-BH S. Berhanu e J. Hounie, em [16, Theorem 5.2], removeram a terceira hipótese do teorema anterior, demonstrando o seguinte resultado.

Teorema 2.4.2. *Seja* h *uma solução contínua e lipschitziana em* $\Omega = B_r(0) \times J \subset \mathbb{R}^{m+n}$ *da estrutura do tipo tubo descrita acima. Considere* $\xi^0 \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, *com* $|\xi^0| = 1$, $\gamma \subset U$ *uma curva lipschitziana com pontos extremos* 0 *e* t^* *satisfazendo, para algum* $\epsilon > 0$:

1. $-\phi(t^*) \cdot \xi^0 \geqslant \epsilon^7$,

2. $|\phi(t)| \leqslant \epsilon^2, \quad t \in \gamma$.

Existe $\epsilon_0 > 0$ *tal que se* $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_0$ *então* $(0, \xi_0) \notin WF_a(h_0)$, $h_0(x) = h(x, 0)$.

Assim como fora observado em [16] é importante destacar que o Teorema 2.4.2 continua válido se supusermos que a solução h é uma distribuição e $\phi \in C^\infty(J)$. O principal objetivo desta seção é estender o Teorema 2.4.2 em duas direções: i) para soluções $h \in \mathcal{E}'_M$ (essa hipótese mais fraca implicará em uma localização do conjunto frente de onda DC ao invés do conjunto frente de onda analítico); e ii) para estruturas mais gerais do que as estruturas do tipo tubo. Para facilitar a notação a seguir consideraremos apenas o caso $n = 1$.

Sejam, $U \subset \mathbb{R}^m$ uma vizinhança aberta da origem, I um intervalo aberto contendo a origem e $t^* \in I \cap (0, +\infty)$. Nesta seção consideremos um operador diferencial de primeira ordem,

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} a_k(y,t) \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad k = 1, \dots m \tag{2.60}$$

com $a_k \in \mathcal{E}_M(U \times I)$ e integrais primeiras (diminuindo U, se necessário) $Z_k(y,t) \in \mathcal{E}_M(U \times I)$ $(LZ_k = 0)$ tais que $Z_k(y, 0) = y_k$ para todo $k \in \{1, \dots, m\}$.

Dada uma ultradistribuição $u \in \mathcal{E}'_M(U)$, por [21, Corollary 10], temos que existem constantes b_α $(\alpha \in \mathbb{N}^m)$ tais que, para todo $L > 0$ existe $C_L > 0$ de modo que

$$|b_\alpha| \leqslant \frac{C_L \, L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}}, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^m. \tag{2.61}$$

e uma função $f \in C^\infty(U)$ de modo que,

$$\langle h, \phi \rangle = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} b_\alpha \int_U \partial_y^\alpha f(y)\, \phi(y)\, dy, \qquad \forall \phi \in \mathcal{E}_M(U). \tag{2.62}$$

Nesta seção suporemos que L possua uma solução $h \in \mathcal{E}'_M(U \times I)$[2] $(Lh = 0)$ suave na variável t, tal que [3]:

$$\langle h, \phi \rangle = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \int_{U \times I} b_\alpha(t) \cdot \partial_y^\alpha f(y,t) \cdot \phi(y,t)\, dydt, \qquad \forall \phi \in \mathcal{E}_M(U \times I), \tag{2.63}$$

com $f \in C_c^\infty(U \times I)$ e $b_\alpha \in C_c^\infty(I)$ uma função tal que para todo $L > 0$ existe $C_L > 0$ de modo que

$$|b_\alpha(t)| \leqslant \frac{C_L\, L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}}, \quad \forall\, (t, \alpha) \in I \times \mathbb{N}^m. \tag{2.64}$$

Afirmação 2.4.3. *Se h é definido como em (2.63) então $h \in \mathcal{E}'_M(U \times I)$.*

Demonstração. De fato, para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}) \in \mathbb{N}^{m+1}$ defina

$$u_\alpha(W) = \begin{cases} \int_W b_{\alpha'}(t) f(x,t) dxdt, & \alpha_{m+1} = 0 \text{ e } \alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, 0) \\ 0, & \alpha_{m+1} \neq 0 \end{cases}$$

para cada conjunto boreliano $W \subset U \times I$. Como $U \times I$ é limitado, $f \in C^\infty(U \times I)$ e $b_\alpha \in C^\infty(I)$ segue que u_α define uma medida boreliana em U. Além disso, por (2.64), para todo compacto $K \subset U \times I$ temos que, para todo $L > 0$ existe C'_L tal que $|u_\alpha(K)| \leqslant \frac{C'_L\, L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}}$.

Portanto, pelo Teorema 1.1.6 segue que $h \in \mathcal{E}'_M(U)$. ■

Fixado $t_0 \in I$ definimos a ultradistribuição h_{t_0} do seguinte modo,

$$\langle h_{t_0}, \phi \rangle \doteq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} b_\alpha(t_0) \int_{B(0,r) \times I} \partial_y^\alpha f(y, t_0) \cdot \phi(y) dy, \qquad \forall \phi \in \mathcal{E}_M(U).$$

Afirmação 2.4.4. $h_{t_0} \in \mathcal{D}'_M(U)$.

Demonstração. A demonstração desta afirmação segue de modo análogo à demonstração da afirmação anterior definindo

$$u_\alpha^0(W) = b_\alpha(t_0) \int_W f(x, t_0) dx, \forall \alpha \in \mathbb{N}^m,$$

para $W \subset U$ boreliano arbitrário. ■

A seguir apresentaremos o principal resultado desta seção. Considerando $h \in \mathcal{E}'_M(U \times I)$ uma solução de L, dada como em (2.63) apresentaremos condições suficientes para que $\xi^0 \notin WF_M(h_0)$.

[2]Sem perda de generalidade podemos considerar U e I limitados.

[3]Em [15, Section II.2] vemos que uma distribuição h solução para L é uma função C^∞ na variável t com valores no espaço das distribuições em u, ou seja $h \in C^\infty(I, \mathcal{D}'(U))$.

Teorema 2.4.5. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ uma vizinhança aberta da origem de $\mathbb{R}^m$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto contendo a origem de $\mathbb{R}$, $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{E}_M(U \times I)$, $t^* \in I$, L como em (2.60) com integral primeira $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$, tal que $Z_k(x, 0) = x_k$ (para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$), e $h \in \mathcal{E}'_M(U \times I)$ uma solução de L, dada como em (2.63). Considere também $\epsilon > 0$, $V \subset U$ uma vizinhança aberta de 0, $\psi_j(x, t) = Z_j(x, t) - x_j$ e $\xi^0 \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, com $|\xi^0| = 1$, tais que:*

$$\Im\psi(y, t^*) \cdot \xi^0 \leqslant -\epsilon^7, \tag{2.65}$$

$$|\Im\psi(y, t)| \leqslant \epsilon^2 \tag{2.66}$$

$$|\mathcal{R}\psi(y, t)| \leqslant |y| \tag{2.67}$$

$$|\mathcal{R}\psi(y, t)| \leqslant \epsilon^{2+3/2} \tag{2.68}$$

para $(y, t) \in V \times (0, t^*]$. Existe $\epsilon_0 > 0$ tal que se $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_0$ então $(0, \xi^0) \notin WF_M(h_0)$.

Demonstração.

Seja $r > 0$, a ser definido, tal que $B(0, r) \subset U$ e considere $g \in \mathcal{D}_M(B(0, r))$ de modo que $g \equiv 1$ em $B(0, \frac{r}{2})$. Sendo b_α com em (2.64), defina:

$$F(x, t, \xi) \doteq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} F_\alpha(x, t, \xi), \quad \forall (x, t, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \tag{2.69}$$

em que,

1. $F_\alpha(x, t, \xi) \doteq \displaystyle\int b_\alpha(t) \cdot \partial_y^\alpha f(y, t) \cdot g(y) e^{Q(x,y,t,\xi)} dy, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^m$;
2. $Q(x, y, t, \xi) = i(x - Z(y, t)) \cdot \xi - K|\xi|(x - Z(y, t))^4$;
3. $z^4 \doteq \left(\sum_{j=1}^m z_j^2\right)^2$, para todo $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ e
4. K uma constante positiva suficientemente grande a ser definida.

Considerando $p(z) = Kz^4$ e lembrando que $Z_k(x, 0) = x_k$, temos que $F(x, 0, \xi) = \mathcal{F}_p^1(g \cdot h_0)(x, \xi)$. Por outro lado, aplicando o Teorema de Stokes, segue que

$$\int_{B(0,r)\times(0,t^*]} d\left[b_\alpha(t) \cdot \partial_y^\alpha f(y, t) \cdot g(y) \cdot e^{Q(x,y,t,\xi)} dZ_1(y, t) \wedge \cdots \wedge dZ_m(y, t)\right] = F_\alpha(x, t^*, \xi) - F_\alpha(x, 0, \xi) \tag{2.70}$$

pois $g(y) = 0$ quando $|y| = r$.

Já que $\{dt, dZ_1, \ldots, dZ_m\}$ forma um conjunto linearmente independente (em uma vizinhança U' de $(0,0)$ em $\mathbb{R}^{m+1}$, temos que $\{dt, dZ_1, \ldots, dZ_m\}$ forma uma base para as formas definidas em U). Seja $\{M_1, \ldots, M_m\}$ ($M_j = \sum_{k=1}^m a_{k,j}\partial_{x_k}$) um conjunto linearmente independente em uma vizinhança de $(0,0)$ tal que

$$dZ_l(M_j) = \begin{cases} 0, & j \neq l \\ 1, & j = l. \end{cases}$$

Dada uma função $\phi = \phi(y,t)$ de classe C^1 segue que existem funções $A, B_1, ..., B_m$ tais que $d\phi = Adt + \sum_{j=1}^{m} B_j dZ_j$. Por outro lado,

$$M_l(\phi) = d\phi(M_l) = Adt(M_l) + \sum_{j=1}^{m} B_j dZ_j(M_l) = B_l, \text{ para cada } l = 1, \ldots, m;$$

e

$$d\phi(L) = Adt(L) + \sum_{j=1}^{m} M_j(\phi) \cdot dZ_j(L).$$

Deste modo temos que,

$$A = L(\phi) - \sum_{j=1}^{m} M_j(\phi) L(Z_j).$$

Então,

$$d\phi = \left(L\phi - \sum_{j=1}^{m} M_j(\phi) L(Z_j) \right) dt + \sum_{j=1}^{m} M_j(\phi) dZ_j.$$

Já que para cada $j = 1, \ldots, m$ temos $dZ_j \wedge dZ_1 \wedge \cdots \wedge dZ_m = 0$ e assim,

$$d(\phi dZ_1 \wedge \cdots \wedge dZ_m) \;=\; d\phi \wedge dZ_1 \wedge \cdots \wedge dZ_m = \left(L\phi - \sum_{j=1}^{m} M_j(\phi) L(Z_j) \right) dt \wedge dZ_1 \wedge \cdots \wedge dZ_m.$$

Deste modo, voltando em (2.70), segue que

$$F_\alpha(x, 0, \xi) = F_\alpha(x, t^*, \xi) - \int_{U \times (0, t^*)} \left(L\phi - \sum_{j=1}^{m} M_j(\phi) L(Z_j) \right) dt \wedge dZ_1 \wedge \cdots \wedge dZ_m,$$

em que $\phi(x, y, t, \xi) = b_\alpha(t) \cdot \partial_y^\alpha f(y, t) \cdot g(y) e^{Q(x,y,t,\xi)}$. Já que $LZ_j = 0$, para $j = 1, \ldots, m$, pela regra de Leibiniz temos

$$
\begin{aligned}
F_\alpha(x,0,\xi) &= F_\alpha(x,t^*,\xi) - \int_{U\times(0,t^*)} L\left[b_\alpha(t)\cdot\partial_y^\alpha f(y,t)\cdot g(y)\right] e^{Q(x,y,t,\xi)}|Z_y(y,t)|dtdy \\
&= F_\alpha(x,t^*,\xi) - \int_{B(0,r)}\int_{(0,t^*)} L\left[b_\alpha(t)\cdot\partial_y^\alpha f(y,t)\right]\cdot g(y)e^{Q(x,y,t,\xi)}|Z_y(y,t)|dtdy \\
&\quad - \int_{\frac{r}{2}<|y|<r}\int_{(0,t^*)} b_\alpha(t)\cdot\partial_y^\alpha f(y,t)\cdot L[g(y)]\cdot e^{Q(x,y,t,\xi)}|Z_y(y,t)|dtdy,
\end{aligned}
$$

pois $g(y)=1$, quando $|y|<\frac{r}{2}$, em que $|Z_y(y,t)|$ representa o determinante da matriz jacobiana de $y\mapsto Z(y,t)$, para cada t fixado. Da definição de F (vide (2.69)), temos que

$$
\begin{aligned}
F(x,0,\xi) &= F(x,t^*,\xi) - \sum_\alpha\cdot\int_{B(0,r/2)}\int_{(0,t^*)} L\left[b_\alpha(t)\cdot\partial_y^\alpha f(y,t)\right]\cdot g(y)e^{Q(x,y,t,\xi)}|Z_y(y,t)|dtdy \\
&\quad - \sum_\alpha\cdot\int_{\frac{r}{2}<|y|<r}\int_{(0,t^*)} b_\alpha(t)\cdot\partial_y^\alpha f(y,t)\cdot L[g(y)]\cdot e^{Q(x,y,t,\xi)}|Z_y(y,t)|dtdy.
\end{aligned}
$$

Por (2.63), vemos que

$$
\sum_\alpha\cdot\int_{B(0,r)}\int_{(0,t^*)} L[b_\alpha(t)\cdot\partial_y^\alpha f(y,t)]\cdot e^{Q(x,y,t,\xi)}|Z_y(y,t)|dtdy = \langle Lh, g(y)e^{Q(x,y,t,\xi)}|Z_y(y,t)|\rangle = 0.
$$

Integrando por partes segue que,

$$
\begin{aligned}
F(x,0,\xi) &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m} b_\alpha(t^*)(-1)^{|\alpha|}\int_{|y|<r} f(y,t^*)\cdot\left[\partial_y^\alpha\left(g(y)e^{Q(x,y,t,\xi)}\right)\right]_{t=t^*}dy \\
&\quad - \sum_\alpha(-1)^{|\alpha|}\int_{\frac{r}{2}<|y|<r}\int_0^{t^*} b_\alpha(t)\cdot f(y,t)\cdot\partial_y^\alpha\left\{e^{Q(x,y,t,\xi)}\cdot Lg(y)\cdot|Z_y(y,t)|\right\}dtdy.
\end{aligned}
$$

Como $f\in C^\infty(U\times I)$ (então f é limitada em $B(0,r)\times(0,t^*]$), por (2.64), temos que para cada $L>0$ existe $C_L>0$ tal que

$$
\begin{aligned}
|F(x,0,\xi)| &\leqslant \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m}\frac{C_L L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}}\sup_{|y|<r}\left|\partial_y^\alpha\left\{g(y)e^{Q(x,y,t,\xi)}\right\}\right|_{t=t^*} \\
&\quad + \sum_\alpha\frac{C_L L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}}\sup_{\frac{r}{2}<|y|<r,\ 0<t\leqslant t^*}\left|\partial_y^\alpha\left\{e^{Q(x,y,t,\xi)}\cdot Lg(y)\cdot|Z_y(y,t)|\right\}\right|.
\end{aligned}
$$

Além disso, aplicando o Teorema de Leibniz e o Lema A.1.4 existe $C > 0$ tal que,

$$
\begin{aligned}
|\partial_y^\alpha \left\{g(y)e^{Q(x,y,t,\xi)}\right\}| &\leqslant \left|\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha-\beta}g(y)\cdot\partial^\beta\{e^{Q(x,y,t,\xi)}\}\right| \\
&\leqslant \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}C^{|\alpha-\beta|+1}M_{|\alpha-\beta|}e^{\mathcal{R}Q(x,y,t,\xi)}C^{|\beta|+1}M_{|\beta|}e^{\frac{1}{2}M(|\xi|)} \\
&\overset{(1.8)}{\leqslant} C^{|\alpha|+1}M_{|\alpha|}e^{\mathcal{R}Q(x,y,t,\xi)}e^{\frac{1}{2}M(|\xi|)}.
\end{aligned}
$$

Deste modo (observando que $Lg\cdot|Z_y| \in \mathcal{E}_M$), para $L > 0$ suficientemente pequeno existe $C > 0$ suficientemente grande de modo que

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{F}_p^1(gh_0)(x,\xi)| &= |F(x,0,\xi)| \\
&\leqslant C\left(\sup_{|y|<r} e^{\mathcal{R}Q(x,y,t^*,\xi)} + \sup_{\frac{r}{2}<|y|<r,\ 0<t\leqslant t^*} e^{\mathcal{R}Q(x,y,t,\xi)}\right)e^{\frac{1}{2}M(|\xi|)}.
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

Para completar a demonstração, precisamos estimar $\mathcal{R}\,Q(x,y,t,\xi)$. Denotando $R = (R_1,\ldots,R_m) = \mathcal{R}\{Z(y,t)\}$ e $I = (I_1,\ldots,I_m) = \Im\{Z(y,t)\}$, observe que (analogamente a [16]),

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}\{(Z(y,t))^4\} &= \mathcal{R}\left\{\left[\sum_{k=1}^m (Z_k(y,t))^2\right]^2\right\} \\
&= \mathcal{R}\left\{\sum_{k=1}^m (Z_k(y,t))^4 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}(Z_i(y,t))^2(Z_j(y,t))^2\right\} \\
&= \sum_{k=1}^m (R_k^4 - 6R_k^2I_k^2 + I_k^4) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}\{(R_i^2-I_i^2)(R_j^2-I_j^2) - 4R_iI_iR_jI_j\} \\
&= \sum_{k=1}^m (R_k^4 - 6R_k^2I_k^2 + I_k^4) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}(R_i^2R_j^2 + I_i^2I_j^2) - 2\sum_{i\neq j}(R_i^2I_j^2 + 2R_iI_iR_jI_j)
\end{aligned}
$$

Como

$$
|R|^2|I|^2 = \sum_{k=1}^m R_k^2I_k^2 + \sum_{i\neq j}R_j^2I_i^2,
$$

para todo $j = 1, \ldots, m$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{(Z(y,t))^4\} &= |R|^4 + |I|^4 - 6|R|^2|I|^2 + 4\sum_{i\neq j}|R_i|^2|I_j|^2 - 4\sum_{i\neq j}R_iR_jI_iI_j \\ &= |R|^4 + |I|^4 - 6|R|^2|I|^2 + 2\sum_{i\neq j}(R_iI_j - R_jI_i)^2 \\ &\geqslant |R|^4 - 6|R|^2|I|^2 + |I|^4 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Assim, lembrando que $Z_k(y,t) = y_k + \psi_k(y,t)$ e $|\xi^0| = 1$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}Q(0,y,t,\xi^0) &= \mathcal{R}\{-iZ(y,t)\cdot\xi^0 - K|\xi^0|(Z(y,t))^4\} \\ &\leqslant \Im\{\psi(y,t)\}\cdot\xi^0 - K(|R|^4 + |I|^4 - 6|R|^2|I|^2) \end{aligned} \tag{2.73}$$

Por (2.65) e (2.66) (lembrando que $I = \Im\{\psi(y,t)\}$) obtemos

$$|\mathcal{R}Q(0,y,t^*,\xi^0)| \leqslant -\epsilon^7 - K(|R|^4 - 6\epsilon^4|R|^2). \tag{2.74}$$

Como o polinômio $P(s) = s^2 - 6\epsilon^4 s$ assume mínimo em $s = 3\epsilon^4$ (e assim, $P(s) \geqslant -9\epsilon^8$) segue que

$$|R|^4 - 6\epsilon^4|R|^2 \geqslant -9\epsilon^8.$$

Portanto, se considerarmos $\epsilon < \frac{1}{9K}$ temos

$$\mathcal{R}Q(0,y,t^*,\xi^0) \leqslant -\epsilon^7 + 9K\epsilon^8 \doteq -a$$

com $a > 0$ e pela continuidade de $\mathcal{R}Q$ e homogeneidade de grau um em $|\xi|$ existem uma vizinhança aberta W da origem e uma vizinhança cônica de ξ^0 tais que (diminuindo a, se necessário)

$$\mathcal{R}Q(x,y,t^*,\xi^0) \leqslant -a|\xi|, \tag{2.75}$$

$x \in W$ e $\xi \in \Gamma$.

Para o caso em que $t \in (0,t^*)$ usando as notações $\mathcal{R}\psi = \psi_1$ e $\Im\psi = \psi_2$, temos que $|R| =$

$|y + \psi_1(y,t)|$ e $|I| = |\psi_2(y,t)|$. Aplicando (2.66) e (2.67) em (2.73) segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}Q(0,y,t,\xi^0) &\leqslant \epsilon^2 - K(|R|^4 + |I|^4 - 6|R|^2|I|^2) \\
&\leqslant \epsilon^2 - K\left[(|y| - |\psi_1|)^4 + |\psi_2|^4 - 6(|y| + |\psi_1|)^2|\psi_2|^2\right] \\
&= \epsilon^2 - K\left[|y|^4 - 4|y|^3|\psi_1| + 6|y|^2|\psi_1|^2 - 4|y||\psi_1|^3 + |\psi_1|^4\right. \\
&\quad \left.-6(|y|^2 + 2|y||\psi_1| + |\psi_1|^2)|\psi_2|^2\right].
\end{aligned}$$

Considerando $r = \epsilon^{1/2}$ e aplicando (2.66) (ou seja, $|\psi_2| \leqslant \epsilon^2$), segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}Q(0,y,t,\xi^0) &\leqslant \epsilon^2 - K\left[(r/2)^4 - 4r^3|\psi_1| + 6(r/2)^2|\psi_1|^2 - 4r|\psi_1|^3 + |\psi_1|^4\right. \\
&\quad \left.-6(r^2 + 2r|\psi_1| + |\psi_1|^2)\epsilon^4\right] \\
&\leqslant \epsilon^2 - K\left(\frac{r^4}{16} - 6r^2\epsilon^4\right) + K\left[\left(4r^3 + 12r\epsilon^4\right)|\psi_1| - \left(6 \cdot \frac{r^2}{4} - 6\epsilon^4\right)|\psi_1|^2 + 4r|\psi|^3\right] \\
&\leqslant \epsilon^2 - K\left(\frac{\epsilon^2}{16} - 6\epsilon^5\right) + K\left[\left(4\epsilon^{3/2} + 12\epsilon^{9/2}\right)|\psi_1| - \left(6 \cdot \frac{\epsilon}{4} - 6\epsilon^4\right)|\psi_1|^2 + 4\epsilon^{1/2}|\psi|^3\right],
\end{aligned}$$

sempre que $\frac{r}{2} < |y| < r$. Deste modo, considerando $\epsilon \leqslant \frac{1}{4^{1/3}} \leqslant 1$ (então $(\epsilon/4) - \epsilon^4 \geqslant 0$), segue de (2.68) (i.e., $|\psi_1| \leqslant \epsilon^{2+3/2}$) que

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}Q(0,y,t,\xi^0) &\leqslant \epsilon^2 - K\left(\frac{\epsilon^2}{16} - 6\epsilon^5\right) + K\left[4\epsilon^5 + 12\epsilon^8 + 4\epsilon^{11}\right] \\
&\leqslant \epsilon^2 - K\left(\frac{\epsilon^2}{16} - 6\epsilon^5\right) + 20K\epsilon^3 \\
&\leqslant \epsilon^2 - K\left(\frac{\epsilon^2}{16} - 26\epsilon^5\right) \leqslant \epsilon^2\left[1 - K\left(\frac{1}{16} - 26\epsilon^3\right)\right]
\end{aligned}$$

Fixado $\epsilon_0 < \frac{1}{(26\times 32)^{1/3}}$, se $\epsilon < \epsilon_0$ então,

$$\mathcal{R}Q(0,y,t,\xi^0) < -\epsilon^2\left(\frac{K}{32} - 1\right).$$

Portanto, se $K > 32$ e $a \leqslant \epsilon^2\left(\frac{K}{32} - 1\right) > 0$ segue que:

$$\mathcal{R}Q(0,y,t,\xi^0) < -a,$$

para $c > 0$, $\frac{r}{2} \leqslant |y| \leqslant r$ e $0 < t \leqslant t^*$. Como $\mathcal{R}Q(x,y,t,\xi)$ é contínua e homogênea de grau um em $|\xi|$

segue que diminuindo W, Γ e a, se necessário, temos

$$\mathcal{R}Q(x,y,t,\xi) \leqslant -a|\xi|, \tag{2.76}$$

sempre que $x \in W$, $\frac{r}{2} \leqslant |y| \leqslant r$, $0 < t \leqslant t^*$ e $\xi \in \Gamma$. Voltando em (2.71), aplicando (2.75) e (2.76) temos

$$|\mathcal{F}_p^1(gh_0)(x,\xi)| \leqslant Ce^{-a|\xi|+\frac{1}{2}M(|\xi|)},$$

para $(x,\xi) \in W \times \Gamma$. Por (1.19) e (1.22) existe $c = c(|\xi|)$ tal que

$$-a|\xi| + \frac{1}{2}M(|\xi|) \leqslant -M(a|\xi|) + \frac{1}{2}M(|\xi|) \leqslant -\frac{2}{3}M(|\xi|) + \frac{1}{2}M(|\xi|) = -\frac{1}{6}M(|\xi|),$$

para $|\xi| > c$. Portanto, aplicando Teorema 2.3.6 completamos a prova. ■

Note que no Teorema 2.4.2 as hipóteses (2.65) e (2.66) também eram requisitadas. Além disso, no caso de estruturas do tipo tubo as hipóteses (2.68) e (2.67) sempre são satisfeitas.

2.4.6 Não aplicabilidade da transformada FBI clássica

Nesta subsessão mostraremos a dificuldade de demonstrar o Teorema 2.4.5 via transformada FBI clássica.

Sejam

$$z^2 = \sum_{j=1}^{m} z_j^2,$$

e $p_2(z) = Kz^2$ (para $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$), com constante $K > 0$ a determinar depois. Em vista da demonstração do teorema anterior considere $U = B(0,r)$ (para algum $r > 0$), $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto contendo a origem, $t^* \in I$ e denote

$$F^2(x,t,\xi) = \sum_{\alpha\mathbb{N}^{m+1}} b_\alpha(t) \int \partial^\alpha_{(y,t)} f(y,t) \cdot g(y) e^{Q_2(x,y,t,\xi)} dy,$$

para $Q_2(y,x,t,\xi) = i(x - Z(y,t)) \cdot \xi - K|\xi|[x - Z(y,t)]^2$. Poderíamos proceder de modo análogo a demonstração do Teorema 2.4.5, trocando F por F^2, exceto pelas estimativas apresentadas para $\mathcal{R}Q$.

A dificuldade encontrada ao usar a FBI clássica, é que podem existir casos em que

$$\mathcal{R}Q_2(x, x, t^*, \xi^0) < 0$$

(para x em uma vizinhança da origem) implique $\mathcal{R}Q_2(x, y, t^*, \xi^0) > 0$ (para y em um aberto que não contenha a origem) e deste modo não seria possível aplicar o Teorema (2.3.6). De fato, note que

$$\mathcal{R}Q_2(x, y, t, \xi^0) = \Im\psi(y, t) \cdot \xi^0 - K\left(|x - y - \mathcal{R}\psi(y, t)|^2 - |\Im\psi(y, t)|^2\right).$$

Se nós supusermos $|\mathcal{R}\psi(y, t^*)| = 0$, $\psi(y, t^*) \cdot \xi^0 = -\epsilon^7$ e $|\Im\,\psi(y, t^*)| = \epsilon^2$ (observe que tais suposições não contradizem (2.65), (2.66),(2.67) nem (2.68)) então

$$\mathcal{R}Q_2(x, x, t^*, \xi^0) = -\epsilon^7 + K\epsilon^4 = \epsilon^4(-\epsilon^3 + K).$$

Deste modo, $\mathcal{R}Q(x, x, t^*, \xi^0) < 0$ se e somente se $K < \epsilon^3$.

Por outro lado podemos supor $0 < t^{**} < t^*$ e $y \in B(0, r)\backslash B(0, r/2)$ tais que $|y| = 2r/3$, $\Im\psi(y, t^{**}) \cdot \xi^0 \geqslant C\epsilon^3$ (para $\frac{25r^2}{9} < C < \frac{1}{\epsilon}$ [4]) e $\mathcal{R}\psi(y, t^{**}) = 0$. Nesse caso segue que;

$$\mathcal{R}Q_2(x, y, t^{**}, \xi^0) \geqslant C\epsilon^3 - K|x - y|^2 \overset{K<\epsilon^3}{>} C\epsilon^3 - \epsilon^3(|x| + |y|)^2 \geqslant C\epsilon^3 - \epsilon^3\left(r + \frac{2r}{3}\right)^2,$$

sempre que $|x| < r$. Portanto,

$$\mathcal{R}Q_2(x, y, t^{**}, \xi^0) \geqslant \epsilon^3\left(C - \frac{25r^2}{9}\right) > 0,$$

para $|x| < r$.

Deste modo não conseguiríamos ter $\mathcal{R}Q_2(x, y, t, \xi) \leqslant -a|\xi|$ para x em uma vizinhança da origem e ξ em uma vizinhança cônica de ξ^0. Logo, seria muito difícil aplicar o Teorema (2.3.6) (para transformada FBI clássica) para demonstrar o Teorema 2.4.5.

O Teorema 2.4.5, mostra que há resultados que dificilmente poderíamos provar usando a transformada FBI clássica mas que conseguimos provar usando classes de transformadas FBI mais gerais.

[4]Lembre-se que $|\Im\psi(y, t)| \leqslant \epsilon^2$ e deste modo $C\epsilon^3 \leqslant \Im\psi(y, t^{**}) \cdot \xi^0 \leqslant \epsilon^2$. Por esse motivo pedimos $C < 1/\epsilon$.

Capítulo

3

Conjunto frente de onda de classes de $\mathcal{D}_M$ em estruturas de classes de $\mathcal{D}_M$

No Capítulo 2 estudamos o conjunto frente de onda DC de uma ultradistribuição $\mathcal{E}_M$ definida em um aberto de $\mathbb{R}^m$ (apresentando uma definição via ultradistribuições a valores de fronteira e uma equivalência via transformada FBI). Com isso surgem duas questões naturais: (i)"existe uma definição de conjunto frente de onda DC para ultra distribuições definidas em variedades?" (ii) "podemos caracterizar o conjunto frente de onda DC em termos da transformada FBI?". É importante destacar que por [40, Theorem 8.5.1] é possível definir conjunto frente de onda $\mathcal{E}_M$ em variedades analíticas. Deste modo, podemos trocar a questão (i) por: (iii) "podemos definir o conjunto frente de onda para variedades não analíticas?". No importante trabalho [7] os autores responderam as questões (ii) e (iii) para o caso analítico, eles introduziram o conceito de estruturas hipo analíticas e micro hipoanaliticidade de distribuições definidas nestas estruturas (para uma versão mais geral veja também [32]). Em [2] os autores definiram o conjunto frente de onda suave para distribuições definidas em variedades equipadas com um arbitrário subfibrado $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\mathcal{M}$ localmente integrável. O objetivo deste capítulo é estabelecer uma versão *DC* dos trabalhos [7], [30] e [2] (detalhes que já foram estudados nesses trabalhos e que serão necessários para nossa versão DC serão omitidos).

Na primeira seção deste capítulo definiremos estruturas hipo DC (o substituto natural de estruturas hipoanalíticas, usadas em [7] para estudar o caso analítico) e relembraremos a importante mudança de variáveis introduzida por M. G. Eastwood e C. R. Graahan em [32]. Na segunda seção definiremos micro-regularidade hipo DC (via ultradistribuições a valores de fronteira) para ultra distribuições definidas em estruturas hipo DC de coposto zero e caracterizaremos a micro-regularidade DC por um decaimento da transformada FBI para estruturas localmente integráveis (introduzida em

[7]). Na terceira seção apresentaremos uma definição de micro-regularidade hipo DC para subvariedades maximalmente reais em estruturas de coposto 1 e provaremos que essa definição independe da subvariedade maximal real escolhida. Na quarta seção relembraremos as mudanças de variáveis apresentadas em [2] e apresentaremos uma boa definição de micro-regularidade hipo DC para uma estrutura hipo DC de coposto arbitrário.

3.1 Estruturas hipo DC

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade C^∞ de dimensão $m+n$ e $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\mathcal{M}$ um subfibrado involutivo (ou seja, o colchete de Lie representa uma operação fechada em $\mathcal{V}$) de posto n (e coposto m), a estrutura involutiva $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$ é dita localmente integrável se o ortogonal de $\mathcal{V}$ (isto é, $\mathcal{V}^\perp$) em $\mathbb{C}T^*\mathcal{M}$ é localmente gerado por formas exatas [1]. A seguir apresentamos definições usuais de subvariedades maximalmente reais e fortemente não característica (para o leitor interessado em mais informações sobre essas subvariedades nós recomendamos a leitura de [15], [7], [32], [30] e [57])

Definição 3.1.1. *Dizemos que uma subvariedade $\mathcal{X}$ de $\mathcal{M}$ é:*

i) maximalmente real se

$$\mathbb{C}T_p\mathcal{M} = \mathbb{C}T_p\mathcal{X} \oplus \mathcal{V}_p, \quad \forall p \in \mathcal{X}; \tag{3.1}$$

ii) fortemente não caracteristica se

$$\mathbb{C}T_p\mathcal{M} = \mathbb{C}T_p\mathcal{X} + \mathcal{V}_p, \quad \forall p \in \mathcal{X}. \tag{3.2}$$

A seguir nós apresentaremos a definição de estrutura hipo DC.

Definição 3.1.2. *Seja J um conjunto de índices (não necessariamente enumerável). Uma estrutura localmente integrável $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$ é dita hipo DC (de posto posto m e coposto $\dim \mathcal{M} - m$) se existe uma cobertura de abertos $\{U_j\}_{j\in J}$ para $\mathcal{M}$ de modo que para cada $j \in J$, existe uma solução $Z_j^1, \dots Z_j^m \in C^\infty(U_j)$ de $\mathcal{V}$ em U_j, tais que*

1. *$dZ_j^1, \dots, dZ_j^m$ são linearmente independente em cada ponto de U_j;*

[1]Se Z é uma função tal que $dZ \in \mathcal{V}^\perp$ em um aberto U diremos que Z é uma solução de $\mathcal{V}$ em U.

2. *se $U_j \cap U_k \neq \varnothing$, existe vizinhança V_{jk} de $Z_j(U_j \cap U_k)$ em $\mathbb{C}^m$ e uma aplicação $F_k^j \in \mathcal{E}_M$ de V_{jk} em $\mathbb{C}^m$ tal que $Z_k = F_k^j \circ Z_j$ em $U_j \cap U_k$.*

Observação 3.1.3. *É importante destacar que com diferentes propósitos, em [24] os autores P. Caetano e P. Cordaro estudaram estruturas Gevrey localmente integráveis, isto é, $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$ é uma estrutura hipo Gevrey tal que $\mathcal{M}$ e as soluções Z são de classe Gevrey. Provavelmente eles foram os primeiros a estudar essas estruturas.*

Exemplo 3.1.4. *As estruturas hipoanalíticas (introduzidas em [7]) são estruturas hipo DC as quais as aplicações F_k^j do segundo item da Definição 3.1.2 são funções analíticas reais.*

Definição 3.1.5. *Seja $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$ uma estrutura hipo DC. Uma função $f : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ é dita hipo DC de classe M em um ponto $p \in \mathcal{M}$ se existe um par $(Z_j = (Z_j^1, \ldots, Z_j^m), U)$ como na Definição 3.1.2 tal que $p \in U$ e*

$$f = h \circ Z,$$

para alguma função h de classe $\mathcal{E}_M$ em uma vizinhança de $Z(p) = (Z1(p); \ldots; Zm(p)) \in \mathbb{C}^m$. Dizemos que f é de classe $\mathcal{E}^M$ em um aberto $U \subset \mathcal{M}$ ($f \in \mathcal{E}^M(U)$) se f é de classe $\mathcal{E}^m$ em cada ponto $p \in U$.

Exemplo 3.1.6. *Toda função hipoanalítica (veja [7]) é hipo DC pois toda função analítica real é de classe $\mathcal{E}^M$.*

A partir de agora fixaremos $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$ uma estrutura hipo DC e uma subvariedade maximalmente real $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}$. Em [32, Proposition II.2] M.G. Eastwood e C.R. Graham apresentaram a seguinte mudança de variável (a qual foi fundamental para os resultados apresentados em [32] e será fundamental para o desenvolvimento deste capítulo):

Proposição 3.1.7. *Sejam $p \in \mathcal{X}$, $d \doteq \dim_{\mathbb{R}} T_p^0$ e $r \doteq m - d$. Para todo inteiro $K > 0$ existem:*

i) uma vizinhança U de p em $\mathcal{M}$;

ii) carta local $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ se anulando em p;

iii) soluções Z_j, $j = 1, \ldots, m$ para estrutura localmente integrável sobre U de modo que $\mathcal{X} \cap U = \{y = 0\}$ e

$$Z_j(x, y) = x_j + iy_j + i\Psi_j(x), \quad 1 \leqslant j \leqslant r, \tag{3.3}$$

$$Z_j(x, y) = x_j + i\Phi_j(x, y), \quad r + 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{3.4}$$

em que $\Psi_j(x)$ *e* $\Phi_k(x,y)$ *são funções hipo DC a valores reais satisfazendo*

$$\Phi_k(0) = 0, \quad d_x\Phi_k(0,0) = 0 \quad \textit{and} \quad |\Psi_j(x)|, |\Phi_k(x,0)| = O(|x|^K). \tag{3.5}$$

Para simplificar nós consideraremos simplesmente

$$Z_j(x,y) = x_j + i\Phi_j(x,y), \quad j = 1, \ldots, m;$$

em que $\Phi_k(0) = 0, \quad d_x\Phi_k(0,0) = 0 \quad \text{and} \quad |\Phi_k(x,0)| = O(|x|^K)$. Nas próximas seções deste capítulo, por conveniência, nós usaremos a caracterização das integrais primeiras Z_j apresentadas acima.

Observação 3.1.8. *Observe que* $(x,y) \mapsto (Z(x,y),y)$ *é um mergulho (para mais detalhes deste mergulho recomendamos a leitura de [30, páginas 239 e 306]). Como os resultados apresentados neste capítulo são miro locais é suficiente considerar* $U' = \{(z,y) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^m : z, = Z(x,y),\ x \in V\}$ *e a estrutura hipo DC em* $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ *definida por* $\mathcal{V} = \{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\}$[2] *(para maiores informações desta construção veja [57, p. 76 e 77] e [30, Chapter IV]).*

3.2 Estruturas de coposto zero

Nesta seção nos concentraremos no caso de estruturas hipo DC $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$ de coposto zero (dim $\mathcal{V} = 0$). Nesse caso $\mathcal{M}$ é uma subvariedade maximalmente real de si mesma, ou seja $\mathcal{M} = \mathcal{X}$. Sendo (Z,U) uma carta como na Definição 3.1.2, pela Observação 3.1.8 (sem perda de generalidade, pois nossos resultados são locais) nesta seção substituiremos a estrutura dada pela estrutura hipo DC $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$ tal que $\mathcal{M} = \mathbb{C}^m$ e $\mathcal{V} = \{\partial_{\bar{z}_j} : j = 1, \ldots, m\}$, além disso consideraremos a subvariedade maximalmente real $\mathcal{X} = Z(U)$. Sendo (Z,U) como na Proposição 3.1.7 podemos assumir que $0 \in \mathcal{X}$, que $T_0\mathcal{X} = \mathbb{R}^m$, além disso consideraremos $\Omega = \{Z(x) : x \in \Omega\}$. Assim, $(z,\zeta) \in \mathbb{R}T^*\mathcal{X}$ se $z \in Z(U)$ e existe $(x,\xi) \in U \times \mathbb{R}^m$ tal que

$$z = Z(x) \quad e \quad \zeta = {}^t dZ(x)\xi. \tag{3.6}$$

Definição 3.2.1. *Uma subvariedade maximalmente real* $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^m$ *é dita bem posicionada em um ponto* $z_0 \in \mathcal{X}$ *se existe um número real* τ*,* $0 < \tau < 1$ *e uma vizinhança* Ω *de* z_0 *em* $\mathcal{X}$ *de modo que,*

[2] Observe que fixado $y \in W$, temos que $(Z(V,y),y)$ é uma subvariedade variedade maximalmente real de $\mathbb{C}^m$.

para todo $z, z' \in \Omega$ *e* $\zeta \in (\mathbb{R}T'_{\mathcal{X}}|_z) \cup (\mathbb{R}T'_{\mathcal{X}}|_{z'})$ *temos que*

$$|\Im\zeta| \quad < \quad \tau|\Re\zeta| \tag{3.7}$$

$$\Im[\zeta(z-z') + i\langle\zeta\rangle\langle z-z'\rangle^2] \quad \geqslant \quad (1-\tau)|\zeta||z-z'|^2, \tag{3.8}$$

em que $\langle\zeta\rangle = (\zeta\cdot\zeta)^{\frac{1}{2}}$ *denota o ramo principal da raiz quadrada. Dizemos que* $\mathcal{X}$ *é muito bem posicionada em* z_0 *se para todo* $0 \leqslant \tau < 1$ *existe uma vizinhança aberta* Ω *de* z_0 *em* $\mathcal{X}$ *tal que* (3.7) *e* (3.8) *são satisfeitas.*

Teorema 3.2.2. *([57, Proposition IX.2.2]) Dado qualquer subvariedade maximalmente real* $\mathcal{X}$ *de* $\mathbb{C}^m$*, e qualquer ponto* $z_0 \in \mathcal{X}$ *existe um biholomorfismo* H *de uma vizinhança aberta* $\mathcal{O}$ *de* z_0 *em* $\mathbb{C}^m$ *em uma vizinhança da origem, com* $H(z_0) = 0$*, tal que* $H(\mathcal{X} \cap \mathcal{O})$ *é muito bem posicionado em* 0*.*

Em vista do teorema anterior, a partir de agora sempre consideraremos $\mathcal{X}$ muito bem posicionada.

A seguir apresentaremos a definição de $M-$micro-regularidade (lembre-se da Definição 2.3.3) para o caso de estruturas hipo DC de coposto zero.

Definição 3.2.3 (Microregularidade)**.** *Seja* $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^m$ *uma subvariedade maximalmente real de* $\mathbb{C}^m$*. Dados* $p \in \mathcal{X}$ *e* $\xi \in T^*_p\mathcal{X}\backslash 0$*, dizemos que* u *é hipo DC em* (p,ξ) *se existem cones agudos* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ *em* $T_p\mathcal{X}$*, satisfazendo:*

1. $\langle\xi, v\rangle < 0$ *para todo* $v \in \Gamma_j$*,* $j = 1, 2, \ldots, k$*;*

2. *cunhas (wedges)* $\mathcal{W}_1, \ldots, \mathcal{W}_k$ *em* $\mathbb{C}^m$ *com aresta (edge)* $\mathcal{X}$ *tal que* $J\Gamma_j \subset \Gamma_p(\mathcal{W}_j)$ *e para cada* $j = 1, 2, \ldots k$*, existem funções* $M-$*quase analíticas* f_j *em* $\mathcal{W}_j$ *de crescimento* M^*-*exponencial (isto é, para todo* $\lambda > 0$*,* $|f_j(x,t)|e^{-\lambda M^*_s(|t/\lambda|)} < +\infty$*) tal que* bf_j *existe em* $\mathcal{D}'_M(\mathcal{X})$ *e* $u = \sum_{j=1}^k bf_j$ *em uma vizinhança de* p *em* $\mathcal{X}$*.*

Definição 3.2.4. *Seja* u *uma* $M-$*ultradistribuição. O conjunto frente de onda hipo DC de* u*, denotado por* $WF^{\mathcal{X}}_M(u)$*, é o conjunto dos elementos de* $T^*\mathcal{X}$ *em que* u *não é hipo DC. Nós denotaremos* $WF^{\mathcal{X}}_M(u)_p = WF^{\mathcal{X}}_M(u) \cap T^*_p\mathcal{X}$*.*

Assim como fora feito no capítulo anterior caracterizaremos o conjunto frente de onda hipo DC pelo decaimento de uma transformada FBI. A seguir apresentamos a transformada FBI introduzida em [30] (para maiores informações desta transformada recomendamos a leitura de [57] e [30]) a qual será usada para caracterizar o conjunto frente de onda hipo DC.

Definição 3.2.5. *Sejam Ω como acima, $\mathcal{C}_\tau = \{\zeta \in \mathbb{C}^m : |\Im\zeta| < \tau|\Re\zeta|\}$ e $u \in \mathcal{E}'_M(\Omega)$* [3] *uma $M-$ultradistribuição de suporte compacto $K \subset \Omega$. A transformada FBI de u é definida por:*

$$\mathcal{F}(u)(z,\zeta) = \left\langle u_{z'}, e^{i\zeta(z-z')-\langle\zeta\rangle\langle z-z'\rangle^2} \triangle(z-z',\zeta)\right\rangle, \ \forall(z,\zeta) \in \mathbb{C}^m \times \mathcal{C}_1, \tag{3.9}$$

em que $\triangle(z,\zeta)$ representa o determinante da jacobiana da aplicação $\zeta \to \zeta + i\langle\zeta\rangle z$.

Observe que, de certo modo, essa transformada coincide com a transformada $\mathcal{F}_1$ dada por (2.2).

Teorema 3.2.6. *Para toda $u \in \mathcal{E}'_M(\Omega)$ temos que $\mathcal{F}(u)(z,\zeta)$ é uma função holomorfa* [4] *.*

Demonstração. Sendo supp$u = K \subset \Omega$ podemos escrever

$$\mathcal{F}(u)(z,\zeta) = \left\langle u_{z'}, e^{i\zeta(z-z')-\langle\zeta\rangle\langle z-z'\rangle^2} \triangle(z-z',\zeta)\right\rangle \tag{3.10}$$

Sejam $\{\partial_{z'_j}\}$, $j = 1,2,\ldots,m$, campos vetoriais em $\mathcal{X}$ tais que $\partial_{z'_i}(z'_j|_{\mathcal{X}}) = \delta_{i,j}$; então $\{\partial_{z'_1},\ldots,\partial_{z'_m}\}$ forma uma base para $\mathbb{C}T\mathcal{X}$. Dada $u \in \mathcal{E}_M(\mathcal{X})$, seguindo o Teorema 1.1.6, existem medidas borelianas suportadas em em supp u tais que (1.15) é satisfeita e

$$u = \sum_\alpha \partial_{z'}^\alpha u_\alpha.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u)(z,\zeta) &= \left\langle u_{z'}, e^{i\zeta(z-z')-\langle\zeta\rangle\langle z-z'\rangle^2} \triangle(z,\zeta)\right\rangle && (3.11)\\
&= \sum_\alpha(-1)^\alpha \int_{\mathcal{X}} \partial_{z'}^\alpha\left\{e^{i\zeta(z-z')-\langle\zeta\rangle\langle z-z'\rangle^2}\cdot\triangle(z,\zeta)\right\} du_\alpha. && (3.12)
\end{aligned}$$

Portanto, pela regra de Leibniz, pelo Lema A.1.4 e pelo bom posicionamento de $\mathcal{X}$ podemos devivar sobre o sinal de integração em (3.12). Como o integrando em (3.12) define uma função holomorfa nas variáveis ζ e z' segue que $\mathcal{F}(u)$ define fuma função holomorfa

∎

A segui apresentamos uma fórmula de inversão para a transformada FBI.

[3] Pelo mergulho feito acima esta ultradistribuição pode ser vista como uma distribuição em um aberto de $\mathbb{R}^m$ (para maiores detalhes da construção desta ultradistribuições recomendamos a leitura de [30])

[4] Isto é, dado um compacto existe $C > 0$ tal que $|\partial_z^\alpha\partial_{\zeta_j}^\beta\mathcal{F}(u)(z,\zeta)| \leqslant C^{|\alpha|+1}M_{|\alpha|}$ sobre compactos

Teorema 3.2.7. *[30, Theorem II.2.4]. Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^m$ uma subvariedade maximalmente real bem posicionada em $z_0 \in \mathcal{X}$ e Ω uma vizinhança aberta de z_0 em $\mathcal{X}$ suficientemente pequena. Para todo $u \in \mathcal{E}'_M(\Omega)$ temos que*

$$u = \lim_{\epsilon \to 0^+} (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\epsilon\langle\zeta\rangle^2} \mathcal{F}u(z,\zeta)d\zeta.$$

Os próximos resultados que apresentaremos (cujas demonstrações são análogas aos Teoremas 2.3.5 e 2.3.6) fornecem uma caracterização do conjunto frente de onda hipo DC de uma $M-$ultradistribuição (definida em uma estrutura hipo DC de coposto zero) via transformada FBI.

Teorema 3.2.8. *Seja $u \in \mathcal{E}'_M(\mathcal{X})$ e assuma que $\xi_0 \notin WF^{\mathcal{X}}_M(u)_0$. Então existe uma vizinhança aberta $V \subset \mathcal{X}$ de 0, um cone aberto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ contendo ξ_0, e constantes δ, c, $C > 0$ de modo que*

$$|\mathcal{F}(gu)(z,\zeta)| \leqslant Ce^{-cM(\delta|\zeta|)}, \quad \forall (z,\zeta) \in V \times \mathcal{C} \tag{3.13}$$

para alguma função $g \in \mathcal{E}_M(U)$, em que $U \subset \mathcal{X}$ é uma vizinhança aberta da origem e $g(0) = 1$.

Demonstração. Seja $\xi_0 \notin WF^{\mathcal{X}}_M(u)|_0$, antes de fazer o caso geral consideraremos o caso em que:

1. existe um cone Γ em $T_0\mathcal{X}(\cong \mathbb{R}^m)$, tal que $\xi_0 \cdot \Gamma < 0$;

2. existe uma cunha $\mathcal{W}$ em $\mathbb{C}^m$ com aresta $\mathcal{X}$ tal que $\Gamma \subset \Gamma_0(\mathcal{W})$ (seguindo a Proposição 3.1.7 e [8, p. 184-186] podemos considerar $\mathcal{W} = \{(x + i\Phi(x) + iv) : x \in U \subset \mathbb{R}^m, v \in \Gamma_\delta\}$);

3. existe uma função f, $M-$ quase analítica $\mathcal{W}$, tal que $u = bf$ sobre $\mathcal{D}'_M(B_{\mathbb{C}}(0,r) \cap \mathcal{X})$ (para $r > 0$ suficientemente pequeno).

Como $\xi_0 \cdot \Gamma < 0$, fixado $v_0 \in \Gamma$ existe $c > 0$ tal que:

$$\frac{\xi_0}{|\xi_0|} \cdot \frac{v_0}{|v_0|} \leqslant -c < 0.$$

Antes de continuar a demonstração é importante notar que se u se anula em uma vizinhança da origem em $\mathcal{X}$ então a demonstração deste resultado é garantida por [30, Theorem II.2.5]. Deste modo, é suficiente provar o resultado para gu, em que $g \in \mathcal{D}_M(B_{\mathbb{C}}(0,c/8))$ é tal que $0 \leqslant g \leqslant 1$ e $g(z) = 1$, para todo $z \in B_{\mathbb{C}}(0,3c/32)$. Além disso, diminuindo c (se necessário) consideraremos $B_{\mathbb{C}}(0,c/8) \cap \mathcal{X} \subset \Omega$ uma vizinhança bem posicionada na origem. Aplicando a transformada FBI em

gu temos:

$$\mathcal{F}(gu)(z,\zeta) \;=\; \left\langle g(z')u_{z'}, e^{i\zeta(z-z')-\langle\zeta\rangle\langle z-z'\rangle^2} \triangle (z-z',\zeta)\right\rangle.$$

Como $u = bf$ sobre uma vizinhança da origem em $\mathcal{X}$ (diminuindo c, se necessário, consideraremos que o limite exista em $B_{\mathbb{C}}(0,c/8) \cap \mathcal{X}$) segue que

$$\mathcal{F}(gu)(z,\zeta) = \lim_{\tau\to 0}\int_U f(z'+i\tau\frac{v_0}{|v_0|})g(z')e^{Q(z,z',\zeta)} \triangle (z-z',\zeta)dz', \tag{3.14}$$

em que $Q(z,z',\zeta) = i\zeta(z-z') - \langle\zeta\rangle\langle z-z'\rangle^2$. Considere $\chi \in \mathcal{D}_M\left(B_{\mathbb{C}}(0,\frac{c}{16}) \cap \mathcal{X}\right)$ tal que $0 \leqslant \chi \leqslant 1$ e $\chi \equiv 1$ em $B_{\mathbb{C}}(0,\frac{c}{32}) \cap \mathcal{X}$. Para $\sigma > 0$, a ser determinado depois, defina

$$\tilde{z}(z',s) = z' + is\chi(z')\frac{v_0}{|v_0|}, \quad z' \in B_{\mathbb{C}}(0,c/16) \cap \mathcal{X} \ \text{ e } \ 0 < s \leqslant \sigma.$$

Para σ e τ suficientemente pequenos podemos considerar

$$\tilde{z}(z',s) + i\tau\frac{v_0}{|v_0|} \in \mathcal{W}, \quad \forall\,(z',s) \in \{B_{\mathbb{C}}(0,c/16) \cap \mathcal{X}\} \times (0,\sigma].$$

Fixado $\tau > 0$ e $\sigma < c/4$ usaremos o teorema de Stokes para contornar o domínio de integração, definindo $D = \{z + is\chi(z)\frac{v_0}{|v_0|} : z \in B_{\mathbb{C}}(0,\frac{c}{16}) \cap \Omega \ \text{ e } \ 0 \leqslant s \leqslant \sigma\}$, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(gu)(z,\zeta) &= \int_{\mathcal{X}} g(z')f(z'+i\delta\frac{v_0}{|v_0|})e^{Q(z,z',\zeta)} \triangle (z-z',\zeta)dz' \\
&= \lim_{\tau\to 0}\left\{\sum_{j=1}^{m}\int_D \frac{\partial}{\partial\overline{w}_j}\left[g(w)f(w+i\tau\frac{v_0}{|v_0|})e^{Q(z,w,\zeta)} \triangle (z-z',\zeta)\right]d\overline{w}_j \wedge dw \right. \\
&\quad \left. + \int_{\tilde{V}} g(\tilde{z}(z',\sigma))f(\tilde{z}(z',\sigma)+i\tau\frac{v_0}{|v_0|})e^{Q(z,\tilde{z}(z',\sigma),\zeta)} \triangle (z-\tilde{z},\zeta)d\tilde{z}(z',\sigma)\right\},
\end{aligned}$$

em que $\tilde{V} = \{\tilde{z}(z',\sigma) : z' \in B_{\mathbb{C}}(0,\frac{c}{16}) \cap \Omega\}$; pois $g(w) = 0$ para $w \in C^m$ com $|w| = c/8$. Como $g \equiv 1$ em $B_{\mathbb{C}}(0,3c/32)$, $\frac{c}{16} < \frac{3c}{32}$ e

$$\frac{\partial}{\partial\overline{w}_j}\left[e^{Q(z,w,\zeta)} \triangle (z-z',\zeta)\right] = 0$$

temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(gu)(z,\zeta) &= \int_\Omega g(z')f(z'+i\delta\frac{v_0}{|v_0|})e^{Q(z,z',\zeta)}\bigtriangleup(z-z',\zeta)dz' \\
&= \lim_{\tau\to 0}\left\{\sum_{j=1}^{m}\int_D \frac{\partial}{\partial\overline{w}_j}\left[f(w+i\tau\frac{v_0}{|v_0|})\right]e^{Q(z,w,\zeta)}\bigtriangleup(z-z',\zeta)d\overline{w}_j\wedge dw\right. \\
&\left. + \int_{\tilde{V}} g(\tilde{z})f(\tilde{z}(z',\sigma)+i\tau\frac{v_0}{|v_0|})e^{Q(z,\tilde{z}(z',\sigma),\zeta)}\bigtriangleup(z-\tilde{z}(z',\sigma),\zeta)d\tilde{z}(z',\sigma)\right\}, \quad (3.15)
\end{aligned}$$

em que para σ fixado $d\tilde{z}(\sigma) = d\tilde{z}_1(z',\sigma)\wedge\cdots\wedge d\tilde{z}_m(z',\sigma)$.

Pelo bom posicionamento de Ω temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{R}Q(z,\tilde{z}(z',s),\xi_0)}{|\xi_0|} &= \mathcal{R}\left\{i\frac{\xi_0}{|\xi_0|}\left(z-z'-is\chi(z')\frac{v_0}{|v_0|}\right)-\left\langle z-z'-is\chi(z')\frac{v_0}{|v_0|}\right\rangle^2\right\} \\
&= \mathcal{R}\left\{i\frac{\xi_0}{|\xi_0|}(z-z')+i^2\langle z-z'\rangle^2\right\} \\
&\quad +\mathcal{R}\left\{-cs\chi(z')+2(z-z')s\chi(z')i\frac{v_0}{|v_0|}+s^2(\chi(z'))^2\right\} \\
&\leqslant -(1-\tau)|z-z'|^2 - s\chi(z')[c-(s\chi(z')+2|z-z'|)],
\end{aligned}$$

$z,z'\in\Omega$ e $\xi_0\in\mathbb{R}T_0^*\mathcal{X}=\mathbb{R}^m$, para algum $0<\tau<1$. A seguir dividiremos em dois casos,

1. Caso $|z'|<\frac{c}{32}$. Nesse caso temos $\chi(z')=1$ e assim, considerando $s\leqslant\sigma<\frac{3c}{32}$, temos

$$\frac{\mathcal{R}\{Q(z,\tilde{z}(z',s),\xi_0)\}}{|\xi_0|}\leqslant -s[c-(\sigma+2|z-z'|)]\leqslant -s\left[c-\left(\frac{3c}{32}+\frac{11c}{32}+\frac{c}{16}\right)\right] = -sc\frac{c}{2},$$

   para $|z|<\frac{11c}{64}$.

2. Caso $\frac{c}{32}\leqslant|z'|<\frac{c}{8}$. Considerando $s\leqslant\sigma<\frac{3c}{32}$ e $|z|<\frac{c}{64}$ temos $s\chi(z')+2|z-z'|<\frac{3c}{32}+\frac{c}{32}+\frac{c}{4}<c$. Deste modo,

$$\frac{\mathcal{R}\{Q(z,\tilde{z}(z',s),\xi_0)\}}{|\xi_0|}\leqslant -(1-\tau)|z-z'|^2\leqslant -(1-\tau)\left(\frac{c}{32}-\frac{c}{64}\right)^2 = -(1-\tau)\left(\frac{c}{64}\right)^2.$$

Como Q é continua, $\frac{\mathcal{R}\{Q(z,\tilde{z}(z',s),\xi)\}}{|\xi|} = Q\mathcal{R}\{Q(z,\tilde{z}(z',s),\xi/|\xi|)\}$, $0<\tau<1$ e $s<\sigma<1$ existe $c_4>0$ e uma vizinhnaça conica $\mathcal{C}$ de ξ_0 tal que,

$$\Re\{Q(z,\tilde{z}(s),\xi)\}\leqslant -c_4 s|\xi|, \quad (3.16)$$

para $z \in \mathcal{X}$, $|z| < \frac{c}{64}$ e $\xi \in \mathcal{C}$.

Assim, procedendo de modo análogo à (2.43) obtemos a seguinte estimativa para a segunda integral à direita em (3.15),

$$\sum_{j=1}^{m} \int_D \frac{\partial}{\partial \overline{w}_j} \left\{ f(w + i\delta \frac{v_0}{|v_0|}) g(w) \times \times e^{Q(z,w,\zeta)} \Delta(z-w,\zeta) \right\} d(\overline{w_j}, w) \leqslant Ce^{c_4|\xi|} \tag{3.17}$$

for some $c_4 > 0$ and $(z, \xi) \in \left[B_{\mathbb{C}}(0, \frac{c}{64}) \cap \mathcal{X}\right] \times \mathcal{C}$.

$$\mathcal{R}\{Q(z, \tilde{z}(z', s), \xi)\} \leqslant -c_3|\xi|, \quad \text{para todo } (z, x, \xi) \in V \times U \times \mathcal{C}. \tag{3.18}$$

Já que $u = bf$ em $\mathcal{D}_M{}'(\Omega)$, pela topologia estabelecida no espaço das $M-$ultradistribuições e pela Observação 1.1.7 podemos encontrar $\delta_0 > 0$ tal que para todo $0 < \delta < \delta_0$ e $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ em que

$$\left| \left\langle f\left(\tilde{z}(z', \sigma) + i\delta \frac{v_0}{|v_0|}\right), \phi(., z, \xi) \right\rangle \right| \leqslant C_\epsilon \sum_\beta \epsilon^{|\beta|} M_{|\beta|}^{-1} \parallel \partial_{z'}^\beta \phi(x, z, \xi) \parallel_{L_x^\infty}, \tag{3.19}$$

para todo $\phi(., z, \xi) \in D^M(\Omega)$ (em que z e ξ são encarados como parâmetros).

Feitas estas considerações, procedendo de modo análogo à demonstração de Teorema 2.3.5 (obtendo desigualdades análogas à (2.43) e (2.44), todavia esta conclusão é mais fácil pois não precisamos considerar dois casos distintos) podemos concluir a demonstração do caso mais simples. A demonstração do caso mais geral segue pela linearidade da transformada FBI. ∎

A seguir será apresentada a recíproca do Teorema 3.2.8.

Teorema 3.2.9. *Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^m$ uma $\mathcal{E}_M-$subvariedade maximal real, bem posicionada em 0 e $u \in \mathcal{E}'_M(\mathcal{X})$. Se existe uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{C}^m$, um cone aberto $\Gamma \subset \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ contendo $\xi_0 \in \mathbb{R}^m$, e constantes $\delta, C > 0$ tais que*

$$|\mathcal{F}(u)(z, \zeta)| \leqslant Ce^{-cM(\delta|\zeta|)}, \quad \forall (z, \zeta) \in V \times \Gamma, \tag{3.20}$$

então $\xi_0 \notin WF_M^{\mathcal{X}}(u)|_0$.

Antes de propriamente demonstrar o Teorema 3.2.9 faremos algumas considerações e Lemas auxiliares.

Assim como na demonstração do Teorema 3.2.8 assumiremos $\Omega \subset \mathcal{X}$ uma vizinhança aberta de 0 bem posicionada (para algum τ, $0 < \tau < 1$), suficientemente pequena. Pelo Teorema 3.1.7, diminuindo Ω se necessário, podemos considerar que Ω é a imagem de uma vizinhança aberta U de 0 em $\mathbb{R}^m$ por uma aplicação $x \to Z(x)$ definida por

$$Z(x) = x + i\Phi(x),$$

em que $\Phi : U \to \mathbb{R}^m$ é tal que $\Phi(0) = 0$, $\Phi_x(0) = 0$ e

$$|z - z'| < \frac{c}{16} \quad \forall z, z' \in \Omega, \ \text{ e } \ |\Phi_x(x)| < \frac{c}{4 + c} \quad \forall x \in U,$$

para uma certa constante $c > 0$ à ser escolhida. Assim como na demonstração do Teorema 2.3.6 consideraremos:

$$\mathbb{R}^m \backslash \Gamma = \bigcup_{j=1}^{K} \overline{C_j}, \tag{3.21}$$

de modo que cada C_j é um cone agudo aberto tal que:

1. $C_j \cap C_l = \varnothing$, para todo $j \neq l$; e

2. $\Gamma_j = \{v \in T_0X : \xi \cdot v > 0 \text{ para todo } \xi \in C_j \text{ e } \xi_0 \cdot v < 0\}$ é um cone agudo aberto e não vazio.

Diminuindo Γ_j, se necessário, podemos encontrar uma constante $0 < c \leqslant 1$ tal que

$$\xi \cdot v \geqslant c|\xi||v|, \quad (v, \xi) \in \Gamma_j \times C_j.$$

Para $j = 1, \ldots, K$ e $\delta > 0$ (à definir) definiremos:

$$\mathcal{W}_j \quad = \quad \{Z(x) + iv : \ x \in U, \ v \in (\Gamma_j)_\delta\} = \{x + i\Phi(x) + iv : \ x \in U, \ v \in (\Gamma_j)_\delta\},$$

observe que $\mathcal{W}_j$ é uma cunha em $\mathbb{C}^m$ com aresta $\mathcal{X}$ tal que $J\Gamma_j \subset \Gamma_0(\mathcal{W}_j)$. E, para $z = Z(x) + iv \in \mathcal{W}_j$, $\xi \in C_j$, $y \in U$ e $\zeta = \zeta(\xi) = {}^t Z_y(y)^{-1}\xi \in \mathbb{R}T'\mathcal{X}|_{Z(y)}$, defina

$$f_j(z) = (2\pi)^{-m} \int_\Omega u(z') \int_{\zeta \in K_j} e^{Q(z,z',\zeta)} \Delta(z - z', \zeta) d\zeta dz'$$

em que $Q(z, z', \zeta) = i\zeta \cdot (z - z') - \langle\zeta\rangle\langle z - z'\rangle^2$, $K_j = \zeta(C_j)$ e a primeira integral é entendida no sentido de dualidade (já que u é uma ultradistribuição). A seguir apresentaremos alguns resultados que garantem a existência de bf_j.

Lema 3.2.10. $f_j \in \mathcal{O}(\mathcal{W}_j)$.

Demonstração. Considerando $x, y \in U$, $\xi \in C_j$, $v \in \Gamma_\delta$ e $z = Z(x) + iv$ temos

$$
\begin{aligned}
Q(z, Z(y), \zeta) &= i\zeta \cdot (Z(x) + iv - Z(y)) - \langle\zeta\rangle\langle Z(x) + iv - Z(y)\rangle^2 \\
&= \{i\zeta \cdot (Z(x) - Z(y)) - \langle\zeta\rangle\langle Z(x) - Z(y)\rangle^2\} - \zeta \cdot v - \langle\zeta\rangle\{2iv \cdot (Z(x) - Z(y)) - |v|^2\}.
\end{aligned}
$$

Como $\mathcal{X}$ é bem posicionada na origem temos

$$
\mathcal{R}\{i\zeta(Z(x) - Z(y)) - \langle\zeta\rangle\langle Z(x) - Z(y)\rangle^2\} \leqslant -(1-\tau)|\zeta||Z(x) - Z(y)|^2 \leqslant 0, \tag{3.22}
$$

para todo $x, y \in U$ e $\xi \in C_j$. Lembrando de (3.6), observe que

$$
\begin{aligned}
-\zeta \cdot v &= -({}^t Z_y(y)^{-1}\xi) \cdot v \\
&= -\xi \cdot (Z_y(y)^{-1}v) \\
&= -\xi \cdot \left([I + i\Phi_y(y)]^{-1}v\right) \\
&= -\xi \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k(\Phi_y(y))^k v\right] \\
&= -\xi \cdot v - \xi \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty}(-i)^k(\Phi_y(y))^k v\right],
\end{aligned}
$$

em que I representa a matiz identidade. Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}\{-\zeta \cdot v\} &= -\xi \cdot v - \mathcal{R}\left\{\xi \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty}(-i)^k(\Phi_y(y))^k v\right]\right\} \\
&\leqslant -c|\xi||v| + \left|\xi \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty}(-i)^k(\Phi_y(y))^k v\right]\right| \\
&\leqslant -c|\xi||v| + |\xi||v| \sum_{k=1}^{\infty} |\Phi_y(y)|^k \\
&\leqslant -c|\xi||v| + |\xi||v| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{4+c}\right)^k \\
&= -\frac{3}{4}c|\xi||v|,
\end{aligned}
$$

$\xi \in C_j$ e $v \in \Gamma_j$. Portanto $\mathcal{R}\{-\zeta \cdot v\} \leqslant -\frac{3}{4}c|\xi||v|$, para todo $\xi \in C_j$ e $v \in \Gamma_j$.

Por outro lado podemos diminuir Ω de modo à obter $|\zeta| \leqslant 2|\xi|$, pois $|{}^tZ_y(0)| = I$. Como $|\langle\zeta\rangle| \leqslant |\zeta|$, sendo $(\Gamma_j)_\delta = \Gamma_j \cap B_\delta(0)$ e $\delta < \frac{c}{8}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\{-\langle\zeta\rangle(2iv\cdot(Z(x)-Z(y))-|v|^2)\} &\leqslant |\langle\zeta\rangle|(2|v||Z(x)-Z(y)|+|v|^2)\\
&\leqslant |\zeta||v|(2|Z(x)-Z(y)|+|v|)\\
&< 2|\zeta||v|\left(\frac{2c}{16}+\frac{c}{8}\right)\\
&= \frac{c}{2}|\xi||v|,
\end{aligned}$$

para todo $x, y \in U$, $\zeta \in C_j$ e $v \in (\Gamma_j)_\delta$. Assim, combinando as desigualdades anteriores temos:

$$\mathcal{R}\{Q(z,z',\zeta)\} \leqslant -\frac{1}{4}c|\xi||v|, \quad \text{para todo } x, y \in U,\ \xi \in C_j \text{ e } v \in (\Gamma_j)_\delta. \tag{3.23}$$

Como o fato de uma função ser holomorfa é uma propriedade local basta fixar um certo $z_0 = Z(x_0) + v_0 \in \mathcal{W}_j$ ($x_0 \in U$ e $v \in (\Gamma_j)_\delta$, para um certo δ) e mostrar que para uma vizinhança de z_0 temos f_j holomorfa. Observe que podemos encontrar $c_2 > 0$ tal que

$$\mathcal{R}\{Q(x,z',\zeta,v)\} \leqslant -c_2|\xi|,$$

para todo $v \in (\Gamma)_\delta$, $x, y \in U$, e $\xi \in C_j$. Pelo Teorema 1.1.6 temos que para $\epsilon > 0$ arbitrário, existem medidas borelianas u_α tais que $u = \sum_\alpha \partial_{z'}^\alpha u_\alpha$ e $\int_U |du_\alpha| < C_\epsilon \epsilon^{|\alpha|}(\alpha!)^{-s}$. Deste modo,

$$f_j(z) = (2\pi)^{-m}\sum_\alpha \int_U \partial_{z'}^\alpha \left[\int_{\xi\in C_j} e^{Q(z,z',\zeta)}\Delta(z-z',\zeta)d\zeta(\xi)\right] du_\alpha(z'). \tag{3.24}$$

De modo análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 2.3.6 (veja (2.53)) para todo $\eta > 0$ temos constantes θ_η, $C > 0$ tais que

$$|\partial_{z'}^\beta(e^{Q(z,z',\zeta)})| \leqslant e^{\eta M^*(|v|/\eta)}e^{H/\theta_\eta}e^{-M(\theta_\eta|\xi|)}C^{|\beta|+1}M_{|\beta|}, \tag{3.25}$$

para todo multi índice β, $z = Z(x) + iv$, $z = Z(y)$ e $(x, v, y, \xi) \in U \times \Gamma_j \times U \times C_j$. Logo, podemos derivar sob o sinal de integração e como o integrando a direita em (3.24) é uma função holomorfa segue que $f_j \in \mathcal{O}(\Omega + i(\Gamma_j)_\delta)$. Pela arbitrariedade de δ concluímos que $f_j \in \mathcal{O}(\Omega + i\Gamma_j$. ■

Lema 3.2.11. *Existem constantes $C, c > 0$ tais que $|f_j(z)| \leqslant Ce^{cM^*(|v|/\delta)}$, para todo $z = Z(x)+iv \in \mathcal{W}_j$.*

Demonstração. Análogo à demonstração da Afirmação (2.3) basta aplicar a desigualdade (3.25) em (3.24) ∎

As funções f_j e suas propriedades nos permitem demonstrar o Teorema 3.2.9:

Demonstração do Teorema 3.2.9. Sendo Ω como descrito acima, como antes é suficiente assumir $u \in \mathcal{E}'_M(\Omega)$ com suporte compacto suficientemente pequeno (para não carregar a notação, nessa demonstração omitiremos a função g usada na demonstração do Teorema 3.2.8). Pelo Teorema 3.2.7 temos

$$u = (2\pi)^{-m} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int e^{-\epsilon|\xi|^2} \mathcal{F}(u)(\cdot, \xi) d\xi,$$

em que o limite anterior é um limite ultradistribucional (na topologia de $\mathcal{E}'_M(\Omega)$). Considere

$$u = u_1 + u_2, \tag{3.26}$$

em que

$$u_1 = (2\pi)^{-m} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\Gamma e^{-\epsilon|\xi|^2} \mathcal{F}(u)(\cdot, \xi) d\xi$$

e

$$u_2 = (2\pi)^{-m} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^m \setminus \Gamma} e^{-\epsilon|\xi|^2} \mathcal{F}(u)(\cdot, \xi) d\xi.$$

Por (3.20) e pelo Teorema 3.2.6 temos que $u_1 \in \mathcal{E}(\Omega)$ (diminuindo Ω, se necessário). Além disso, por [3, Lemma 17] existe f extensão $M-$quase analítica de u_1. Pela construção feita em (3.21), considere

$$u_2 = u_{2,1} + \cdots + u_{2,K},$$

em que

$$u_{2,j} = (2\pi)^{-m} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\xi \in C_j} e^{-\epsilon|\xi|^2} \mathcal{F}(u)(\cdot, \xi) d\xi,$$

$j = 1, \ldots, K$.

Observe também que pelos Lemas 3.2.10, 3.2.11 e por [4, Theorem 3.1] segue que bf_j existe em $\mathcal{D}'_M(\Omega)$ (diminuindo Ω se necessário). Observe que para concluir a demonstração é suficiente mostrar que $bf_j = u_{2,j}$.

Sejam $Q = Q(z, Z(y), \xi)$ como definido no Lema 3.2.10, $\Delta = \Delta(Z(x) + iv - Z(y), \zeta)$ e consideraremos $\phi \in D^M(\Omega)$ (com $K = supp\, \phi$) arbitrária. Pelo teorema estrutural de $\mathcal{D}'_M$, pelo teorema de

Fubini e pelo teorema da convergência dominada temos

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^m\langle bf_j,\phi\rangle &= (2\pi)^m \lim_{\Gamma_j\ni v\to 0}\int_K f_j(Z(x)+iv)\phi(Z(x))dZ(x)\\
&= \lim_{\Gamma_j\ni v\to 0}\int_K\int_\Omega\int_{K_j} e^Q u(Z(y))\phi(Z(x))\Delta d\zeta dZ(y)dZ(x)\\
&= \lim_{\Gamma\ni v\to 0}\int_\Omega\int_{K_j}\int_K e^Q\phi(Z(x))\Delta dZ(x)u(Z(y))d\zeta dZ(y)\\
&= \lim_{\Gamma\ni v\to 0}\int_\Omega\int_{K_j}\left[\mathcal{F}(\phi)(Z(y)-iv,-\zeta)\right]u(Z(y))d\zeta dZ(y)\\
&= \int_\Omega\int_{K_j}\mathcal{F}(\phi)(Z(y),-\zeta)u(Z(y))d\zeta dZ(y).
\end{aligned}
$$

Observe também que

$$\langle u_{2,j},\phi\rangle = (2\pi)^{-m}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{C_j}\int_\Omega e^{-\epsilon|\xi|^2}\mathcal{F}(u)(Z(x),\xi)\phi(Z(x))dZ(x)d\xi.$$

E deformando o contorno na variável ξ, como feito no Teorema 3.2.8 obtemos

$$\langle u_{2,j},\phi\rangle = (2\pi)^{-m}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\Omega\int_{K_j}\int_K e^Q e^{-\epsilon\langle\zeta\rangle^2}u(Z(y))\Delta(z-Z(y),\zeta)\phi(z)dzd\zeta dZ(y).$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^m\langle u_{2,j},\phi\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\Omega\int_{K_j}\int_K e^Q e^{-\epsilon\langle\zeta\rangle^2}u(Z(y))\phi(z)\Delta(z-Z(y),\zeta)dzd\zeta dZ(y)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\Omega\int_{K_j}\int_K e^Q e^{-\epsilon\langle\zeta\rangle^2}\phi(z)\Delta(z-Z(y),\zeta)dze^{-\epsilon\langle\zeta\rangle^2}u(Z(y))d\zeta dZ(y)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\Omega\int_{K_j}\left[\mathcal{F}(\phi)(Z(y),-\zeta)\right]e^{-\epsilon\langle\zeta\rangle^2}u(Z(y))d\zeta dZ(y)\\
&= \int_\Omega\int_{K_j}\mathcal{F}(\phi)(Z(y),-\zeta)u(Z(y))d\zeta dZ(y).
\end{aligned}
$$

Assim, $u=\sum_j bf_j$ em $\mathcal{D}'_M(\Omega)$ e portanto temos que $\xi_0\notin WF_M^{\mathcal{X}}(u)|_0$. ∎

A seguir serão apresentadas algumas consequências dos Teoremas 3.2.8 e 3.2.9.

DEFINIÇÃO 3.2.12. *Sejam V um espaço vetorial e $\Gamma\subset V$ um cone. O polar Γ^0 é um cone agudo e fechado em $V^*\backslash 0$ definido por:*

$$\Gamma^0 = \{\xi\in V^*\backslash 0 : \xi(v)\geqslant 0,\ \ \textit{para todo}\ \ v\in\Gamma\}.$$

O próximo resultado é uma versão da Proposição II.5 de [32] para o caso $\mathcal{D}_M$.

COROLÁRIO 3.2.13. *Sejam $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N \subset T_p\mathcal{X}$ cones conexos abertos e não vazios e seja $u \in \mathcal{D}'_{(}\mathcal{X})$. Os seguintes ítens são equivalentes:*

1. $WF_M(u)_p \subset \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j^0$
2. *Sejam $\tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_N \subset T_p\mathcal{X}$ cones agudos, abertos, conexos e não vazios cujos fechos estão respectivamente contidos em $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ ($\overline{\tilde{\Gamma}}_j \subset \Gamma_j$, para $j = 1, \dots, N$). Dadas as cunhas $\mathcal{W}_j$ em $\mathbb{C}^m$ com aresta $\mathcal{X}$ tais que $J\tilde{\Gamma}_j \subset \Gamma_p(\mathcal{W}_j)$ e para todo $j = 1, \dots, N$ existem funções $M-$ quase analíticas f_j em $\mathcal{W}_j$, tais que $u = \sum_{j=1}^N bf_j$, em $\mathcal{D}'_M(\mathcal{X})$ em uma vizinhança de p em $\mathcal{X}$.*

DEMONSTRAÇÃO. (1) $\Longrightarrow$ (2) : A demonstração desse fato é muito parecida com a demonstração do Teorema 3.2.9 e por isso omitiremos alguns detalhes. Para qualquer $j \in \{1, \dots, N\}$ considere um cone $\tilde{\Gamma}_j$ como descrito no enunciado deste Corolário. Seja C_j um cone agudo em $T_0^*\mathcal{X}\backslash 0 \simeq \mathbb{R}^m\backslash 0$ tal que

$$\Gamma_j^0 \subset\subset \overline{C_j} \subset \operatorname{int}(\tilde{\Gamma}_j^0) \subset \tilde{\Gamma}_j^0.$$

Observe que é possível encontrar $c > 0$ tal que,

$$\xi \cdot v \geqslant c|\xi||v|, \text{ para todo } (v, \xi) \in \tilde{\Gamma}_j \times C_j.$$

Análogo à demonstração de Teorema 3.2.9, via fórmula de inversão da transformada FBI, podemos escrever

$$u = u_1 + \sum_{j=1}^N u_{2,j},$$

para

$$u_1 = (2\pi)^{-m} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^m \backslash \cup_{k=1}^N C_k} e^{-\epsilon|\xi|^2} \mathcal{F}(u)(., \xi) d\xi$$

e

$$u_{2,j} = (2\pi)^{-m} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{C_j \backslash \cup_{k=1}^{j-1} C_k} e^{-\epsilon|\xi|^2} \mathcal{F}(u)(., \xi) d\xi.$$

Como $WF_M(u)_p \subset \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j^0 \subset \bigcup_{j=1}^N C_j$, assim como na demonstração do Teorema 3.2.9, temos $u_1 \in \mathcal{E}_M$ e deste modo u_1 possui uma extensão $M-$quase analítica. Também análogo à demonstração do Teorema 3.2.9, para cada $j \in \{1, \dots, N\}$ existe uma cunha $\mathcal{W}_j \subset \mathbb{C}^m$ com aresta $\mathcal{X}$ de modo que

$J\tilde{\Gamma}_j \subset \Gamma_0(\mathcal{W}_j)$ e

$$u_j = bf_j \;\text{ em }\; \mathcal{D}'(\Omega),$$

concluindo a demonstração.

(2) $\Longrightarrow$ (1) : Seja $\xi \in (T_p^*\mathcal{X}\backslash 0)\backslash \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j^0$, então $\xi \notin \Gamma_j^0$, para cada $j = 1, \ldots, N$. Assim, $v_j \in \Gamma_j$ tal que $\xi \cdot v_j < 0$, para cada $j = 1, \ldots, N$. Logo, para cada v_j é possível encontrar uma vizinhança cônica $\tilde{\Gamma}_j \subset\subset \Gamma_j$ de v_j tal que

$$\xi \cdot \tilde{\Gamma}_j < 0, \;\text{ para cada }\; j = 1, \ldots N.$$

Por hipótese, para cada $j \in \{1, \ldots, N\}$ há uma cunha $\mathcal{W}_j \subset \mathbb{C}^m$ com aresta $\mathcal{X}$ tal que $J\tilde{\Gamma}_j \subset \Gamma_p(\mathcal{W}_j)$ e uma função f_j $M-$quase analítica em $\mathcal{W}_j$ de tal modo que $u = \sum_{j=1}^N bf_j$ em $\mathcal{D}'_M(\mathcal{X})$ em uma vizinhança U_p de $p \in \mathcal{X}$. Pela Definição 3.2.4 segue que $\xi \notin WF_M^{\mathcal{X}}(u)|_p$. Como ξ é um elemento arbitrário de $(T_p^*\mathcal{X}\backslash 0)\backslash \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j^0$ concluímos que $WF_M^{\mathcal{X}}(u)|_p \subset \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j^0$. ■

A seguir apresentamos o chamado Teorema da aresta da cunha para o caso DC.

Corolário 3.2.14. *Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^m$ uma subvariedade maximalmente real e $p \in \mathcal{X}$, considere também $\mathcal{W}^+$ e $\mathcal{W}^-$ cujas em $\mathbb{C}^m$ com aresta $\mathcal{X}$ cujas direções são opostas, $\Gamma_p(\mathcal{W}^+) = -\Gamma_p(\mathcal{W}^-)$. Se $u \in \mathcal{D}'_M(\mathcal{X})$ é o valor de fronteira de uma função ultradiferenciável $f^+ \in \mathcal{E}_M(\mathcal{W}^+)$ e também de uma função $f^- \in \mathcal{E}_M(\mathcal{W}^-)$, então $WF(u)|_p = \varnothing$.*

Demonstração. Seja $\Gamma \subset T_p\mathcal{X}$ um cone aberto agudo tal que $J\Gamma \subset \Gamma_p(\mathcal{W}^+)$. Então $J(-\Gamma) = -J\Gamma \subset -\Gamma_p(\mathcal{W}^+) = \Gamma_p(\mathcal{W}^-)$. Pelo Corolário 3.2.13 temos que $WF_M^{\mathcal{X}}(u)|_p \subset \Gamma^0$ e $WF_M^{\mathcal{X}}(u)|_p \subset (-\Gamma)^0$. Como $WF_M^{\mathcal{X}}(u)|_p \subset \Gamma^0$, dados $\xi \in WF_M^{\mathcal{X}}(u)_p$ e $v \in \Gamma$ não nulo, temos $\xi \cdot v \geqslant 0$ e assim $\xi \cdot (-v) \leqslant 0$. Por outro lado, como $WF_M^{\mathcal{X}}(u)|_p \subset (-\Gamma)^0$ temos $\xi \cdot (-v) \geqslant 0$. Concluindo assim que $\xi = 0$. Lembrando que $WF_M^{\mathcal{X}}(u)|_p \subset T_p^*\mathcal{X}\backslash 0$ concluímos que $WF_M^{\mathcal{X}}u|_p = \varnothing$. ■

3.3 Coposto $n = 1$

Nesta seção nos concentraremos no caso de estruturas de coposto um. Como nossos resultados são locais, podemos considerar $\mathcal{M} = U = V \times J$, em que V representa uma bola aberta centrada na origem de $\mathbb{R}^m$ e J um intervalo real. Pela Observação 3.1.8 podemos nos concentraremos nas subvariedades maximalmente reais $\{Z(x,t) : x \in V\}$ (para cada $t \in J$ fixado) de $\mathbb{C}^m$, com $\mathcal{V} = \{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m}, \frac{\partial}{\partial t}\}$. Seguindo [2] consideraremos que as soluções (integrais primeiras) para $\mathcal{V}$ sejam escritas como,

$$Z_j(x,t) = \begin{cases} x_j + \Psi_j(x,t) + i\Phi_j(x,t), & j = 1,\dots,r \\ x_j + i\Phi_j(x,t) & j = 1+r,\dots,m \end{cases} \tag{3.27}$$

com Φ_j e Ψ_j funções à valores reais tais que

$$\Phi_j(0,t) \equiv 0,\ j = 1,\dots,m,\ \ \Psi_j(x,t) = O(|x|^N),\ (x,t) \in V \times J,\ j = 1,\dots r \tag{3.28}$$

e

$$|\Phi''(x,t)| \leqslant B|x|^2,\ \ x \in V,\ \ t \in J. \tag{3.29}$$

A seguir apresentamos a transformadas FBI usada para caracterizar micro regularidade sobre estruturas de coposto um (veja [30, p. 317]).

Definição 3.3.1. *Seja h uma ultradistribuição solução em U' dependendo suavemente de t (veja [30, Definition IV.3.1]). A transformada FBI de u é definida por*

$$\mathcal{F}^\kappa(h)(t;z,\zeta) \quad = \quad \left\langle h_{z'}(t); e^{Q^\kappa(z,z',\zeta)} \triangle (z-z',\zeta) \right\rangle$$

em que

$$Q^\kappa(z,z',\zeta) = i\xi\cdot(z-z') - \kappa|\zeta|\langle z-z'\rangle^2, \tag{3.30}$$

$z \in \mathbb{C}^m$, $\zeta \in \{\zeta \in \mathbb{C}^m : |\Im\zeta| \leqslant |\mathcal{R}\zeta|\}$ *e* $t \in J$.

Seguindo os Teoremas 3.2.8 e 3.2.9 consideraremos a seguinte definição de micro regularidade DC em $\mathcal{X}$:

Definição 3.3.2. *Seja h uma ultradistribuição solução em U' dependendo suavemente de t, $h_0 = h(\cdot,0)$ e $\chi \in \mathcal{D}^M(U')$ tal que $\chi \equiv 1$ em uma vizinhança de 0. Dizemos que um vetor cotangente $\xi^0 \in T_0^*\mathcal{X}$ não pertence a $WF_M(h_0)|_0$, se e somente se existe uma vizinhança O da origem em $\mathcal{X}$, uma vizinhança cônica $\mathcal{C}$ de ξ^0 em $\mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ e constantes κ, C, c, $\delta > 0$ tais que*

$$|\mathcal{F}^\kappa(\chi h)(0;z,\zeta)| \leqslant Ce^{-cM(\delta|\zeta|)},\ \ \forall(z,\zeta) \in O \times \mathcal{C},\ \ \kappa \geqslant \kappa^*.$$

Lembre-se que pela Proposição 3.1.7 a equação $t = 0$ define $\mathcal{X}$ em uma vizinhança aberta da origem e considerando $t = t_0$ para algum $t_0 \in J$ fixado podemos definir as demais subvariedades maximais para estrutura (denotadas por $\mathcal{X}_{t_0}$, observe que $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$ [5]). Além disso de modo análogo à definição anterior podemos definir WF_M sobre as subvariedades $\mathcal{X}_{t_0}$, denotado $WF_M(h_{t_0})|_0$. A seguir mostraremos que a definição de WF_M apresentada acima independe da variedade maximalmente real.

Teorema 3.3.3. *Assumindo que as integrais primeiras Z_j satisfazem* (3.27), (3.28) *e* (3.29), *existem $r > 0$ (tal que $B_r(0) \subset B_{2r}(0) \subset V \times J$), uma vizinhança da origem O e constantes κ^*, $\delta > 0$ tais que: se $\chi \in \mathcal{D}^M(U')$ é tal que $\chi(z) = 1$, sempre que $z = Z(x,t)$ com $|x| < r$, então dada h uma ultradistribuição solução em U' dependendo suavemente de t existem constantes $A_1, A_2 > 0$ tais que*

$$|\mathcal{F}^\kappa(\chi h)(t; z, \xi) - \mathcal{F}^\kappa(\chi h)(0; z, \xi)| \leqslant A_1 e^{-A_1 M(A_2|\xi|)},$$

para

$$|t| \leqslant \delta, \quad z \in O, \quad \xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$$

e $\kappa \geqslant \kappa^*$.

Demonstração. Demonstraremos esse resultado seguindo a demonstração do Teorema 2.2 de [2]. Já que h é solução de $\mathcal{V}$, pelo teorema fundamental do cálculo, Definição 3.3.1 e pela definição de χ temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^\kappa(\chi h)(t; z, \xi) - \mathcal{F}^\kappa(\chi h)(0; z, \xi) &= \int_0^1 \frac{d[\mathcal{F}^\kappa(\chi h)(\tau t; z, \xi)]}{d\tau} d\tau \\
&= \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{F}^\kappa(\chi h)}{\partial t}(\tau t, z, \xi) t d\tau
\end{aligned} \tag{3.31}$$

sendo Q_κ como em (3.30). Por outro lado, pelo Lema A.1.4, existe $C > 0$ tal que

$$|\partial_{z'}^\beta e^{Q^\kappa(z,z',\xi)}| \quad \leqslant \quad C^{|\beta|+1} M_{|\beta|} e^{\mathcal{R} Q_\kappa(z,z',\xi)} e^{\frac{1}{2}M(|\zeta|)}.$$

Além disso, como $z' \in \mathcal{X}_{\tau t}$ existe $x \in V$ tal que $z' = Z(x, \tau t)$. Em [2, p. 1005] vemos que em (3.27) podemos considerar $\Psi(x,t) = O(|x|^2 + |t|^2)$ e $\Phi(x,t) = O(|x|^2 + |t|^2)$. Deste modo segue que:

$$\mathcal{R} Q^\kappa(0; z'; \xi) \quad \leqslant \quad \mathcal{R}\{\xi \cdot \Phi(x, \tau t)\} - \kappa|\xi| \left(|x + (\Psi(x, \tau t), 0)|^2 - |\Phi(x, \tau t)|^2\right)$$

[5] Para maiores detalhes desta caracterização das subvariedades maximalmente reais recomendamos a leitura de [30] e [57].

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{R}Q^{\kappa}(0;z';\xi) & \leqslant & |\xi||\Phi(x,\tau t)| - \kappa|\xi||x|^2 + \kappa|\xi||(\Psi(x,\tau t),0)|^2 + \kappa|\xi||\Phi(x,\tau t)|^2 \\ & \leqslant & C|\xi|(|\tau t|^2 + |x|^2) - \kappa|\xi||x|^2 + C\kappa|\xi|(|\tau t|^4 + |x|^4) \\ & \leqslant & C|\xi|(|t|^2 + \kappa|t|^4) + |\xi|(C\kappa|x|^2 - \kappa|x|^2 + C\kappa|x|^4),\end{array}$$

$0 \leqslant \tau \leqslant 1$ (sem perder generalidade podemos considerar $|x| \leqslant 1$). Deste modo, para $r \leqslant |x| \leqslant 2r$ e $|t| < 1$ temos

$$\mathcal{R}Q^{\kappa}(0,z',\xi) \leqslant C|\xi|(1+\kappa)|t|^2 + |\xi|[4C\kappa r^2 - \kappa r^2 + 16C\kappa r^4].$$

Considerando $r < \frac{1}{8\sqrt{C}}$ e $\kappa > 16C$ temos

$$\mathcal{R}Q^{\kappa}(0,z',\xi) \leqslant C|\xi|(1+\kappa)|t|^2 - \frac{1}{2}\kappa r^2|\xi|,$$

para $|t| < \delta$, $\xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $\kappa \geqslant \kappa^* = 8C$ e $r \leqslant |x| \leqslant 2r$. Podemos assumir δ suficientemente pequeno tal que:

$$\mathcal{R}Q_{\kappa}(0,z',\xi) \leqslant -\frac{1}{4}\kappa r^2|\xi|.$$

Pela continuidade de $Q_{\kappa}(z,z',\xi)$ na variável z existe uma vizinhança O da origem de $\mathbb{C}^m$ e uma constante $A > 0$ tais que

$$\mathcal{R}Q_{\kappa}(z,z',\xi) \leqslant -A|\xi|, \tag{3.32}$$

para $|t| < \delta$, $\xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $\kappa \geqslant \kappa^* = 8C$, $y \in O$ e $r \leqslant |x| \leqslant 2r$. Observe também que por [21, Corollary 10] existem funções $b_\alpha \in C^\infty(J)$ e $f \in C^\infty(U')$ tais que

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{F}^{\kappa}(\chi h)(t,z,\xi) & = & \left\langle h_{z'}(t)\chi; e^{Q_{\kappa}(z,z',\zeta)} \triangle (z-z',\zeta)\right\rangle \\ & = & \displaystyle\sum_{\alpha}(-1)^{|\alpha|}b_\alpha(t)\int_{U'} f(z,t)\partial^{\alpha}_{z'}\phi(z,z',\xi)dz \end{array} \tag{3.33}$$

e para todo $L > 0$ existe $C_L > 0$ tal que

$$|b_\alpha(t)| \leqslant \frac{C_L L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}}; \tag{3.34}$$

com $\phi(z,z',\xi) = e^{Q_{\kappa}(z,z',\zeta)}\chi(z') \triangle (z-z',\zeta)$

Pelo Lema A.1.4 temos

$$|\partial_x^\beta e^{Q^\kappa(z,Z(x,t),\xi)}| \leqslant C^{|\beta|+1}M_{|\beta|}e^{\mathcal{R}Q_\kappa(x,t,y,\xi)}e^{\frac{1}{2}M(A|\xi|)} \leqslant C^{|\beta|+1}M_{|\beta|}e^{-\frac{1}{2}M(A|\xi|)}.$$

para $|t| < \delta$, $\xi \in \mathbb{R}^m\backslash\{0\}$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $\kappa \geqslant \kappa^* = 8C$, $z \in O$ e $r \leqslant |x| \leqslant 2r$. Deste modo, como $\partial_t\{\chi(Z(x,t))\} = 0$, para $|x| < r$; por (3.32), (3.33) e (3.34) podemos derivar (∂_t) sobre o sinal de integração em (3.33). Portanto, voltando em (3.31), lembrando que h é solução e escolhendo L suficientemente pequeno temos:

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}^\kappa(\chi h)(t;z,\xi) - \mathcal{F}^\kappa(\chi h)(0;z,\xi)| &\leqslant \left|\int_0^1 \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|}\int_{U'} b_\alpha(t)f(z,t) \times \partial_t\partial_{z'}^\alpha\phi(z,z',\xi)dztd\tau\right| \\ &\leqslant C_\epsilon \sum_\beta \frac{(CL)^{|\beta|}}{M_{|\beta|}} \sum_{\gamma+\delta+\theta=\beta} C_{\gamma,\delta,\theta}M_\delta e^{-\frac{1}{2}M(A|\xi|)}M_\delta M_\theta \\ &\leqslant C_\epsilon \sum_\beta (CL)^{|\beta|}e^{-\frac{1}{2}M(A|\xi|)} \leqslant Ce^{-\frac{1}{2}M(A|\xi|)}, \end{aligned}$$

para todo $z \in O$ e $\xi \in \mathbb{R}^m$. ∎

Como consequência apresentamos o seguinte Corolário.

Corolário 3.3.4. *Seja h uma ultradistribuição solução em U' dependendo suavemente de t. Dados $t_0, t_1 \in J$ arbitrários temos*

$$\xi^0 \notin WF_M(h_{t_0})|_0 \Longrightarrow \xi^0 \notin WF_M(h_{t_1})|_0. \tag{3.35}$$

Demonstração. Observe que para demonstrar o resultado é suficiente mostrar que para todo subintervalo fechado K de J existe um real $\delta > 0$ tal que (3.35) é válida sempre que $t_0, t_1 \in K$ e $|t_0 - t_1| < \delta$. Defina

$$\tilde{h}(t) = h(t + t_0).$$

Então $\tilde{h}(0) = h(t_0)$, $\tilde{h}(t_1 - t_0) = h(x, t_1)$, $WF_M(h_{t_0}) = WF_M(\tilde{h}_0)$ e $WF_M(h_{t_1}) = WF_M(\tilde{h}_{t_1-t_0})$.

Deste modo, se $\xi^0 \notin WF_M(h_{t_0})|_0 = WF_M(\tilde{h}_0)$, pela Definição 3.3.2, segue que existe uma vizinhança $O \subset \mathbb{R}^m$ da origem, uma vizinhança cônica $\mathcal{C}$ de ξ^0 em $\mathbb{R}^m\backslash\{0\}$, constantes reais $c_1, c_2 > 0$ e $\kappa^* > 0$ tais que:

$$|\mathcal{F}^\kappa(\chi\tilde{h})(0;y,\xi)| \leqslant Ce^{-c_1 M(c_2|\xi|)}, \;\; \forall (y,\xi) \in O \times \mathcal{C},\; \kappa \geqslant \kappa^*.$$

Por outro lado, observe que escolhendo δ definido pelo Teorema 3.3.3; se $|t_0 - t_1| < \delta$, então existem constantes $C, A_1, A_2 > 0$ tais que

$$|\mathcal{F}^\kappa(\chi\tilde{h})(t_0 - t_1; y, \xi) - \mathcal{F}^\kappa(\chi\tilde{h})(0; y, \xi)| \leqslant Ce^{-A_1 M(C_2|\xi|)},$$

para $y \in B_{\frac{r}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^m$, $\xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, $\kappa \geqslant \kappa^*$. Portanto, diminuindo c_1 e c_2 (se necessário), temos

$$|\mathcal{F}^\kappa(\chi\tilde{h})(t_0 - t_1; y, \xi)| \leqslant Ce^{-c_1 M(c_2|\xi|)}.$$

Deste modo podemos concluir que $\xi^0 \notin WF^M(\tilde{h}_{t_0 - t_1}) = WF_M(h_{t_1})$. ∎

3.4 Coposto Arbitrário

Nesta seção iremos considerar o caso em que $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$ é uma estrutura hipo DC de posto m e coposto n (veja Definição 3.1.2). Dada uma subvariedade maximalmente real $\mathcal{X}$ de $\mathcal{M}$ e $p \in \mathcal{X}$, pelo Lema 3.1.7 podemos considerar uma vizinhança U de p em $\mathcal{M}$ com $U = V \times W$, em que V e W são abertos de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ respectivamente, ambos contendo a origem. E, podemos escrever $Z_j(x, y) = x_j + i\Phi_j(x, y)$ satisfazendo (3.3), (3.4) e (3.5). Seguindo [30] nossos resultados serão apresentados sobre a subvariedade $U' = \{(Z(x, t), t) : (x, t) \in U\}$ (com U suficientemente pequeno).

Ao longo desta seção identificaremos $T^*\mathcal{M}|_U$ com $U \times \mathbb{R}^{m+n}$ e as coordenadas de seus elementos serão representadas por $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, \xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_n$. Ainda pelo Lema 3.1.7 $\mathcal{X} \cap U$ é definida pela equação $y = 0$. Nesta seção usaremos a notação por $\mathcal{X}_{y_0} = \{Z(x, y_0) : x \in V\}$, com esta notação é importante notar que $\mathcal{X}_0 \cong \mathcal{X}$ (observe que, pelo teorema do posto, para cada y a aplicação $x \mapsto Z(x, y)$ define um mergulho e $\mathcal{X} = \{y = 0\}$). Iremos identificar o fibrado cotangente de cada $\mathcal{X}_{y_0}$ com $\mathcal{X}_{y_0} \times \mathbb{R}^m$.

Sendo $\nu + d = m$ iremos denotar $x' = (x_1, \ldots, x_\nu)$ e $x'' = (x_{\nu+1}, \ldots, x_m)$ (respectivamente $y' = (y_1, \ldots, y_\nu)$, $y'' = (y_{\nu+1}, \ldots, y_n)$, $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_\nu)$, $\xi'' = (\xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m)$, $\eta' = (\eta_1, \ldots, \eta_\nu)$ e $\eta'' = (\eta_{\nu+1}, \ldots, \eta_n)$). Podemos mostrar (veja [32]) que:

$$T_0^0 = \{(\xi, \eta) \in T_0^* M : \xi' = 0,\ \eta = 0\} \quad \text{e} \quad \pi_{\mathcal{X}}(T_0^0) = \{\xi \in T_0^* \mathcal{X} : \xi' = 0\}.$$

Observe que para T_0^0 não ser nulo devemos ter $\nu < m$. Deste modo sempre consideraremos o caso

$\nu < m$.

A seguir lembraremos lembraremos algumas mudanças de variáveis usadas em [7] e [2]

Proposição 3.4.1. *[7, Proposition 4.1]. Dada $\mathcal{Y}$ uma subvariedade maximalmente real de U arbitrária, contendo a origem, existem uma matriz S quadrada complexa, inversível e de ordem ν, e uma função $f_\sharp = (f_{1\sharp}, \ldots, f_{n\sharp})$ tais que $f_{j\sharp} \in C^\infty(V_\sharp)$ $(j = 1, \ldots, n)$ e $V_\sharp \subset V$ seja uma vizinhança aberta da origem de $\mathbb{R}^m$, com $f_\sharp(0) = 0$. Se fizermos a mudança de coordenadas*

$$x'_\sharp + iy'_\sharp = Sz',\ x''_\sharp = x'',\ y''_\sharp = y'', \tag{3.36}$$

então $\mathcal{Y}$ é definido em uma vizinhança aberta $U_\sharp \subset U$ da origem pela equação

$$y_\sharp = f_\sharp(x_\sharp). \tag{3.37}$$

Reciprocamente, o sistema de equações composto por (3.36) e (3.37) define uma subvariedade maximalmente real de classe $\mathcal{D}_M$ em alguma vizinhança aberta da origem, passando por este ponto.

Para o caso de coposto $n > 1$, seguindo [2] apresentaremos uma caracterização para integrais primeiras de uma estrutura hipo DC de coposto arbitrário que tornará a invariância do conjunto frente de onda DC por estruturas maximalmente reais uma consequência direta do caso de coposto um.

Para a matriz S dada pela Proposição 3.4.1, consideremos a potência S^t (seguindo a expansão em serie de potências de z^t, z complexo e t real) e a aplicação

$$\Lambda : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}^\nu \times \mathbb{R}^{(m-\nu)+(n-\nu)} \cong \mathbb{R}^{m+n}$$

definida por: $\Lambda(\tilde{x}, t) = (z' = S^{-t}\tilde{x}', x'' = \tilde{x}'', 0)$. Consideremos $\tilde{V}$ uma bola centrada em $0 \in \mathbb{R}^m$ com raio suficientemente pequeno, de modo que a imagem de $\tilde{V} \times (-2, 2)$ pela função Λ estará contida em U e definamos $\tilde{Z}_j$ como sendo o pull-back de Z_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ por Λ. Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_j(\tilde{x}, t) &= Z_j(\Lambda(\tilde{x}, t)) = Z_j(x' + iy' = S^{-t}\tilde{x}', \tilde{x}'', 0) \\ &= \begin{cases} (S^{-t}\tilde{x}')_j + i\Psi_j(\mathcal{R}(S^{-t}x'), \tilde{x}''), & j = 1, \ldots, r \\ \tilde{x}_j + \tilde{\Phi}_j(\tilde{x}, t), & j = r+1, \ldots, m; \end{cases} \end{aligned}$$

em que $\tilde{\Phi}_j(\tilde{x}, t) = \Phi_j(S^{-t}\tilde{x}', \tilde{x}'', 0)$. A seguir denotaremos $\tilde{\Phi}'' = (\tilde{\Phi}_{r+1}, \ldots, \tilde{\Phi}_m)$. Por (3.5) e pela definição de S^t, para cada N natural, que existe $B > 0$ tal que

$$|\tilde{\Phi}''(\tilde{x}, t)| \leqslant B|\tilde{x}|^N, \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{V}, \ \ t \in (-2, 2).$$

Observe que $\tilde{Z}_j$ define uma estrutura hipo DC sobre $\tilde{V} \times (-2, 2)$. Além disso, para qualquer t ($|t| < 2$) temos que $\tilde{X}_t = \tilde{V} \times \{t\}$ define uma subvariedade maximalmente real nesta estrutura e Λ induz um difeomorfismo de classe $\mathcal{E}_M$ de $\tilde{X}_t$ em uma vizinhança aberta da origem de uma subvariedade maximalmente real (contendo a origem) de U, $\mathcal{X}_t$,

$$\mathcal{X}_t = \{(x, y) \in U : \Im(S^t z') = 0, \ y'' = 0\}.$$

A seguir usaremos as coordenadas $x_\sharp, y_\sharp$ da Proposição 3.4.1 para definir outra aplicação de classe $\mathcal{E}_M$ de uma vizinhança aberta da origem de $\mathbb{R}^{m+1}$ em U. Considere que a vizinhança $V_\sharp$ da Proposição 3.4.1 e uma bola aberta $W_\sharp$ em $\mathbb{R}^n$ sejam suficientemente pequenas tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) $U_\sharp \doteq V_\sharp \times W_\sharp \subset U$;

(ii) para todo $t \in (-2, 2)$, $tf_\sharp(V_\sharp) \subset W_\sharp$

Defina $\Gamma : V_\sharp \times (-2, 2) \subset \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow U_\sharp \subset \mathbb{R}^{m+n}$, $\Gamma(x_\sharp, t) = (x_\sharp, tf_\sharp(x_\sharp))$, se nós definirmos

$$\begin{array}{rccl} F: & U & \longrightarrow & U_\sharp \\ & (x, y) & \longmapsto & F(x, y) = (Sz', x'', y''), \end{array}$$

então $\{Z_j \circ F^{-1}\}$ define uma estrutura localmente integrável em $U_\sharp$ isomorfa à uma estrutura localmente integrável definida por Z_j sobre U (no sentido que F leva soluções da estrutura (U, Z) em soluções de $(U_\sharp, Z \circ F^{-1})$ e vice versa). Observe ainda que

$$\begin{aligned} Z_j \circ F^{-1}(x_\sharp, y_\sharp) &= Z_j(S^{-1}z'_\sharp, x''_\sharp, y''_\sharp) \\ &= \begin{cases} (S^{-1}z'_\sharp)_j + i\Psi_j(\mathcal{R}(S^{-1}z'_\sharp), x''_\sharp), & j = 1, \ldots, r, \\ x_{\sharp j} + i\Phi_j(S^{-1}z'_\sharp, x''_\sharp, y''_\sharp), & j = 1, \ldots, m, \end{cases} \end{aligned}$$

e

$$|\Psi(\mathcal{R}(S^{-1}z'_\sharp), x''_\sharp, y''_\sharp)| = O(|(x_\sharp, y'_\sharp)|^N).$$

Trocando $Z_1 \circ F^{-1}, \dots, Z_r \circ F^{-1}$ por

$$Z^* = S \begin{pmatrix} Z_1 \circ F^{-1} \\ \vdots \\ Z_r \circ F^{-1} \end{pmatrix}$$

encontramos integrais primeiras equivalentes, dadas por

$$Z_j^*(x_\sharp, y_\sharp) \quad = \quad \begin{cases} z'_{\sharp j} + \Psi_j^*(\mathcal{R}(S^{-1}z'_\sharp), x''_\sharp), & j = 1, \dots, r \\ x_{\sharp j} + i\Phi_j(S^{-1}z'_\sharp, x''_\sharp, y''_\sharp), & j = 1 + r, \dots, m, \end{cases}$$

para

$$\Psi^*(x_\sharp, y_\sharp) = S \begin{pmatrix} \Psi_1(\mathcal{R}(S^{-1}z'_\sharp), x''_\sharp) \\ \vdots \\ \Psi_r(\mathcal{R}(S^{-1}z'_\sharp), x''_\sharp) \end{pmatrix}.$$

Então,

$$|\Psi^*(x_\sharp, y_\sharp)| = O(|(x_\sharp, y'_\sharp)|^N).$$

Definindo $Z_\sharp$ como sendo o pull-back de Z^* por Γ temos:

$$\begin{aligned} Z_\sharp(x_\sharp, t) \quad &= \quad Z_j^*(x_\sharp, tf_\sharp(x_\sharp)) \\ &= \begin{cases} x_{\sharp j} + itf_{\sharp j}(x_\sharp) + \Psi_{\sharp j}(x_\sharp, t), & j = 1, \dots, r \\ x_{\sharp j} + i\Phi_{\sharp j}(x_\sharp, t), & j = r + 1, \dots, m, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.38}$$

para

$$\Phi_\sharp(x_\sharp, t) = \Phi(S^{-1}(x'_\sharp + itf'_\sharp(x_\sharp)), x''_\sharp, tf''_\sharp(x_\sharp))$$

e

$$\Psi_\sharp(x_\sharp, t) = \Psi^*(x_\sharp, tf_\sharp(x_\sharp)).$$

Como $f(0) = 0$ é possível encontrar constantes $C, B > 0$ tais que

$$|\Phi_\sharp(x_\sharp, t)| \leqslant B|x_\sharp|^N \quad \text{e} \quad |\Psi_\sharp(x_\sharp, t)| \leqslant C|x_\sharp|^N, \quad x_\sharp \in V_\sharp, \quad |t| < 2. \tag{3.39}$$

As funções $Z_{\sharp j}$ definem uma estrutura localmente integrável sobre $V_\sharp \times (-2, 2)$. A imagem da subvariedade maximalmente real $Y_{\sharp t} = V_\sharp \times \{t\}$ por Γ é uma vizinhança da origem de uma subvariedade maximalmente real Y_t de $U_\sharp$ definida pela equação $y_\sharp = tf_\sharp(x_\sharp)$.

Observe que como S é uma matriz constante, (SZ', Z'') define sobre U a mesma estrutura hipo DC que Z. Assim, essas duas estruturas definidas sobre $\tilde{V} \times (-2, 2)$ e $V_\sharp \times (-2, 2)$ são o pull-back de uma mesma estrutura sobre U. Em particular o pull-back de qualquer solução ultradistribucional em U é uma solução ultradistribucional em cada uma das estruturas localmente integráveis assim definidas. Observe também que Λ e Γ preservam a variável x'' e portanto a forma $\xi'' dx''$ é preservada: o pull-back de $\xi'' dx''$ por Λ é $\xi'' d\tilde{x}''$ e via Γ é $\xi'' \in d\tilde{x}''_\sharp$. Assim, se $(0, \xi'', 0) \in T_0^* M$ é um ponto característico, o seu pull-back para subvariedade maximalmente real $\tilde{X}_\tau$ real via Λ e à $Y_{\sharp t}$ via Λ é representado por $(0, \xi'')$ em coordenadas $\tilde{x}$ e $\tilde{x}_\sharp$ respectivamente.

Feitas essas mudanças de variáveis podemos nos restringir, pelo Teorema 3.3.4, de modo análogo a demonstração de [2, Theorem 1.3] podemos demonstrar:

Teorema 3.4.2. *Seja h uma ultradistribuição solução em uma vizinhança aberta U de um ponto p_0, $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ duas subvariedades maximalmente reais de U' passando por p_0, e $h_\mathcal{X}$ e $h_\mathcal{Y}$ o traço (restrição) de h sobre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ respectivamente. Então $\pi_\mathcal{X}(\xi_0) \notin WF_M(h_\mathcal{X})$ se e somente se $\pi_\mathcal{Y}(\xi_0) \notin WF_M(h_\mathcal{Y})$*

A invariância do $M-$conjunto frente de onda por variedades maximalmente reais apresentada no Teorema 3.4.2 nos possibilita apresentar a definição de $M-$conjunto frente de onda (para uma ultradistribuição solução em U' dependendo suavemente de y).

Definição 3.4.3. *Dizemos que o par $(p, \xi) \in T^*\mathcal{M}$ pertence ao $M-$conjunto frente de onda de uma solução ultradistribuição solução em U' dependendo suavemente de y se sua projeção natural no fibrado tangente de alguma (equivalentemente de toda) subvariedade maximalmente real $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}$ passando por p pertence ao $M-$conjunto frente de onda do traço de h sobre $\mathcal{X}$.*

Capítulo

4

Conjunto frente de onda DC de soluções de equações não lineares do tipo Mizohata

Em 1980 F. Treves ([56]) e J. Sjöstrand ([53]) estudaram operadores

$$L = \partial_t - itg(x,t)\partial_x, \quad \mathcal{R}g(0,0) \neq 0;$$

os autores deram condições para que após uma mudança de variável o operador L possa ser reduzido a um operador

$$\tilde{L} = \partial_t + it(1 + \rho(x,t))\partial_x,$$

em que ρ se anula de ordem infinita em $t = 0$. Uma generalização destes resultados foi proposta por J. Kim e S.-O. Kim em [41], eles estudaram operadores diferenciais L do tipo Mizohata,

$$L = \partial_t - it^k g(x,t)\partial_x, \tag{4.1}$$

em que $\mathcal{R}g(0,0) \neq 0$, $k = 2^n - 1$ $(n \in \mathbb{N})$ e g possui a seguinte expansão de Taylor

$$g(x,t) \sim a_0(x) + a_{k+1}(x)t^{k+1} + a_{2(k+1)}(x)\, t^{2(k+1)} + \cdots.$$

Além disso, J. Kim e S.-O. Kim provaram que após uma mudança de variável os operadores do tipo Mizohata podem ser reduzidos à uma constante não nula multiplicada à

$$\tilde{L} = \partial_t - it^k(1 + \rho(x,t))\partial_x, \tag{4.2}$$

em que ρ se anula de ordem infinita para $t \leqslant 0$.

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ uma vizinhança aberta da origem e a equação não linear $u_t = f(x,t,u,u_x)$ com solução $u \in C^2(\Omega)$. Em [1], Z. Adwan e S. Berhanu estudaram a micro-regularidade (C^∞ e analítica) de $u(\cdot,0)$ sobre condições no operador linearizado.

Motivados pelos trabalhos [41], [53] e [56] neste capítulo introduziremos as DC-equações não lineares do tipo Mizohata e para essas equações apresentaremos uma versão DC para os principais resultados de [1].

4.1 O Linearizado e a parte principal do Hamiltoniano Holomorfo de uma equação não linear de primeira ordem

Nesta seção recordaremos as definições do linearizado e da parte principal do operador hamiltoniano holomorfo. Além disso apresentaremos, sem demonstração, alguns resultados técnicos que foram demonstrados em [1] e que serão importantes na próxima seção.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto, $T \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$, $f(x,t,\zeta_0,\zeta)$ de classe $C^\infty(\Omega \times [0,T) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N)$ e holomorfa em (ζ_0,ζ) e u solução da EDP não linear

$$u_t = f(x,t,u,u_x), \tag{4.3}$$

em que u_x representa o vetor gradiente de u. Considere

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N} f_{\zeta_j}(x,t,\zeta_0,\zeta)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Dada $\psi = \psi(x,t,\zeta_0,\zeta)$ uma função suave e u uma solução da equação (4.3) denotaremos $v = (u,u_x)$ e $\psi^v(x,t) = \psi(x,t,u,u_x)$. Com esta notação, o operador linearizado associado à (4.3) pode ser escrito como,

$$\mathcal{L}^v = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N} f^v_{\zeta_j}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Deste modo,

$$\mathcal{L}^v u = f^v(x,t) - \sum_{j=1}^{N} f^v_{\zeta_j}(x,t)u_{x_j}(x,t). \tag{4.4}$$

Seja $u \in C^k(\Omega \times [0,T])$ $(k \geqslant 2)$ uma solução para equação (4.3), pelo teorema de Schwarz e pela regra da cadeia temos

$$\mathcal{L}^v u_{x_k}(x,t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^v (x,t) + \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_0}\right)^v (x,t) u_{x_k}(x,t).$$

Se g é uma função tal que

$$g^v(x,t) = \mathcal{L}^v v, \qquad g = (g_0, g_1, ..., g_N). \tag{4.5}$$

então

$$\begin{aligned} g_0(x,t,\zeta_0,\zeta) &= f(x,t,\zeta_0,\zeta) - \sum_{j=1}^{N} \zeta_j f_{\zeta_j}(x,t,\zeta_0,\zeta), \\ g_l(x,t,\zeta_0,\zeta) &= f_{x_l}(x,t,\zeta_0,\zeta) + \zeta_l f_{\zeta_0}(x,t,\zeta_0,\zeta) \qquad (1 \leqslant l \leqslant N). \end{aligned}$$

A seguir definimos um operador auxiliar, chamado parte principal do operador hamiltoniano holomorfo de (4.5) [1], que desempenhará papel fundamental na próxima seção:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} + g_0 \partial_{\zeta_0} + \sum_{j=1}^{N} g_j \partial_{\zeta_j}. \tag{4.6}$$

Terminamos essa seção apresentando alguns resultados básicos cujas demonstrações podem ser encontradas em [1].

Lema 4.1.1. *Seja $\psi = \psi(x,t,\zeta_0,\zeta) \in C^\infty(\Omega \times [0,T) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N)$ holomorfa em (ζ_0,ζ). Então:*

(i) Para todo natural n, temos

$$(\mathcal{L}^v)^n \psi^v = (\mathcal{H}^n \psi)^v.$$

(ii) Para todo natural n, temos

$$(\mathcal{L}^v)^n \psi^v = \partial_t^n(\psi^v) - \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{l} \binom{l}{s} ((\mathcal{L}^v)^s (f_{\zeta_j})^v)((\mathcal{L}^v)^{l-s} \partial_{x_j} \partial_t^{n-1-l} \psi^v). \tag{4.7}$$

Corolário 4.1.2. *(i) $\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0,0) = 0$, para todo $0 \leqslant k \leqslant n-1$; se e somente se*

$$(\mathcal{L}^v)^k \Im(f_\zeta)^v(x_0,0) = 0, \ \text{para todo} \ 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

[1] Observe que operador $\mathcal{H}$ representa a parte principal do operador hamiltoniano holomorfo de $\eta - f(x,t,\zeta_0,\zeta)$, substituindo o coeficiente de ∂_η por zero.

(ii) Se $\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0, 0) = 0$*, para todo* $0 \leqslant k \leqslant n-1$*, então*

$$(\mathcal{L}^v)^n(\Im(f_{\zeta_j})^v)(x_0, 0) = \Im(\mathcal{H}^n f_{\zeta_j})^v(x_0, 0), \ \ j = 1, ..., N.$$

Lema 4.1.3. *Fixado* k *natural, se*

$$(\partial_t^l \Im f_{\zeta_j}^v)(x, 0) = 0, \ \ \forall x \in \Omega, \ \ 1 \leqslant j \leqslant N \ \ e \ \ 0 \leqslant l \leqslant k-1 \tag{4.8}$$

então

$$((\mathcal{L}^v)^k \Im f_{\zeta_i}^v)(x, 0) = \partial_t^k(\Im f_{\zeta_i}^v)(x, 0) \ \ \forall x \in \Omega, \ \ 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{4.9}$$

4.2 Conjunto frente de onda da solução de uma equação não linear do tipo Mizohata

A seguir consideraremos uma equação não linear cuja parte principal do operador Hamiltoniano holomorfo de (4.5) é do tipo Mizohata. Para ser mais exato consideraremos uma equação não linear

$$u_t = f(x, t, u, u_x) \tag{4.10}$$

de modo que $f(x, t, \zeta_0, \zeta) = t^k F(x, t, \zeta_0, \zeta)$, em que F possua a seguinte expansão de Taylor

$$F(x, t, \zeta_0, \zeta) \sim a_0(x, \zeta_0, \zeta) + a_{k+1}(x, \zeta_0, \zeta) t^{k+1} + a_{2(k+1)}(x, \zeta_0, \zeta)\, t^{2(k+1)} + \cdots . \tag{4.11}$$

Se F satisfizer (4.11) diremos que a equação (4.10) é uma equação diferencial não linear do tipo Mizohata.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{N}_1 \subset \mathbb{C}$ e $\mathcal{N}_2 \subset \mathbb{C}^m$ conjuntos abertos, $T > 0$ e $V = \Omega \times [0, T] \times \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$. Para estudar a micro regularidade DC de soluções para equações não lineares do tipo Mizohata se fará necessário o caso em que $F(x, t^{1/(k+1)}, \zeta_0, \zeta) \in \mathcal{E}_M(\Omega \times [0, T^{k+1}] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N)$, holomorfa nas variáveis (ζ_0, ζ).

Exemplo 4.2.1. *Seja* $\{b_j(x, \zeta_0, \zeta)\}_{n=0}^{\infty}$ *uma sequencia de funções de classe* $C^\infty(\Omega \times \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2)$ *de modo* *que para todo* $K \Subset \Omega \times \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$, *existe* $B > 0$ *tal que*

$$|\partial^{\alpha}_{(x,\zeta_0,\zeta)} b_n(x, \zeta_0, \zeta)| \leqslant B^{|\alpha|+n+1} M_{|\alpha|} M_n, \quad \forall x \in K, \ n \in \mathbb{N}, \ \alpha \in \mathbb{Z}^{3N+2}_{+}.$$

Por [3, Lemma 14], existe $G \in \mathcal{E}_M(V)$, *holomorfa nas variáveis* (ζ_0, ζ), *satisfazendo:*

$$\partial^n_t G(x, 0, \zeta_0, \zeta) = b_n(x, \zeta_0, \zeta).$$

Definindo $F(x, t, \zeta_0, \zeta) \doteq G(x, t^{k+1}, \zeta_0, \zeta)$ *e* $a_n(x, \zeta_0, \zeta) = \frac{a_n(x,\zeta_0,\zeta)}{n!}$, $j \in \mathbb{N}$, *pela fórmula de Taylor, segue que*

$$F(x, t^{1/(k+1)}, \zeta_0, \zeta) = G(x, t, \zeta_0, \zeta) \sim a_0(x, \zeta_0, \zeta) + a_1(x, \zeta_0, \zeta)t + a_2(x, \zeta_0, \zeta)t^2 + \cdots.$$

Logo,

$$F(x, t, \zeta_0, \zeta) = G(x, t^{k+1}, \zeta_0, \zeta) \sim a_0(x, \zeta_0, \zeta) + a_1(x, \zeta_0, \zeta)t^{k+1} + a_2(x, \zeta_0, \zeta)t^{2(k+1)} + \cdots.$$

Portanto a equação

$$u_t = t^{k+1} F(x, t, \zeta_0, \zeta)$$

é uma equação não linear do tipo Mizohata com $F(x, t^{1/(k+1)}, \zeta_0, \zeta) \in \mathcal{E}_M(\Omega \times [0, T^{k+1}] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N)$, *holomorfa nas variáveis* (ζ_0, ζ).

Observação 4.2.2. *Seja* $U \subset \mathbb{R}$ *aberto e* $f \in \mathcal{E}_M(U)$. *Observe que se* $b_n(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $n \in \mathbb{N}$, *então para todo compacto* $K \Subset U$ *existe* $C > 0$ *tal que*

$$\left|\frac{d^{\alpha} f_n(x)}{dx^{\alpha}}\right| = \left|\frac{d^{\alpha+n} f(x)}{dx^{\alpha+n}}\right| \leqslant C^{\alpha+n+1} M_{\alpha} M_n, \quad \forall x \in K, \ n \in \mathbb{N}, \ \alpha \in \mathbb{N}.$$

De modo análogo ao exemplo anterior podemos encontrar um intervalo contendo a origem I *e uma função* $F : U \times I$ *tal que*

$$F(x, t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \cdot \frac{t^{n(k+1)}}{n!}, \quad (x, t) \in U \times I$$

e $F(x, t^{1/(k+1)}) \in \mathcal{E}_M(V \times I)$,

Definição 4.2.3. *Seja $F \in C^\infty(V)$ uma função holomorfa em (ζ_0, ζ). Dizemos que a equação não linear*

$$u_t = t^k F(x, t, u, u_x) \tag{4.12}$$

é uma DC-equação não linear do tipo Mizohata se $F(x, t^{1/(k+1)}, \zeta_0, \zeta) \in \mathcal{E}_M(\Omega \times [0,T] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N)$, holomorfa nas variáveis (ζ_0, ζ).

A seguir apresentaremos condições para localizar o conjunto frente de onda DC do traço de soluções para DC-equações não lineares do tipo Mizohata.

Observação 4.2.4. *Seja $F \in C^\infty(V)$, holomorfa nas variáveis (ζ_0, ζ), e $f(x,t,\zeta_0,\zeta) = t^k F(x,t,\zeta_0,\zeta)$. Observe que a condição (4) (proposta por Z. Adwan e S. Berhanu em [1]) é equivalente a*

$$\Im\{F^v_\zeta(x_0, 0)\} \neq 0.$$

De fato, como $f_\zeta = t^k F_\zeta$, pelo Lema 4.1.1 temos

$$(\mathcal{H}^j f_\zeta)^v = [\mathcal{H}^j(t^k F_\zeta)]^v = \partial_t^j \left(t^k F^v_\zeta\right) - \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{s=0}^{l} \binom{l}{s} (\mathcal{L}^v)^s (t^k F_\zeta)^v \times (\mathcal{L}^v)^{l-s} \partial_{x_j} \partial_t^{j-1-l} [(t^k F_\zeta)^v].$$

Para $t = 0$, pela regra de Leibnz, temos

$$\left(\mathcal{H}^j f_\zeta\right)^v (x, 0) = 0,$$

para $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Além disso,

$$(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x,0) = k! \cdot F^v_\zeta(x,0)$$

e portanto $\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x,0) = k! \cdot \Im\left\{F^v_\zeta(x,0)\right\}$

O próximo resultado representa uma versão DC do Teorema 0.0.3 no caso de DC-equações não lineares do tipo Mizohata.

Teorema 4.2.5. *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e funções f e F como na Definição 4.12. Se a DC-equação não linear do tipo Mizohata (4.12) possui uma solução $u \in C^{k+1}$ e $\Im F^v_\zeta(x_0, 0) \neq 0$ então, para todo $\xi^0 \in S^{N-1}$ tal que $\Im\{F^v_\zeta(x_0,0)\} \cdot \xi^0 < 0$, temos que (x_0, ξ^0) não pertence ao conjunto frente de onda DC do traço $u(x,0) = u_0(x)$, isto é, $(x_0, \xi^0) \notin WF_M(u_0)$.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{H}$ os operadores linearizado e parte principal do Hamiltoniano holomorfo de (4.12) definidos em uma vizinhança $V = V_1 \times V_2 \times V_3 \times V_4 \subset \mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{C}_{\zeta_0} \times \mathbb{C}^N_\zeta$ do ponto $(x_0, 0, u(x_0, 0), u_x(x_0, 0))$, com

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < r_0\},\\
V_2 &= \{t \in \mathbb{R} : |t| < T\},\\
V_3 &= \{\zeta_0 \in \mathbb{C}^N : |\zeta_0 - u(x_0, 0)| < \rho_0\} \text{ e}\\
V_4 &= \{\zeta \in \mathbb{C}^N : |\zeta - u_x(x_0, 0)| < \rho\}
\end{aligned}
$$

para certas constantes r_0, T, ρ_0, $\rho > 0$. Observe que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N} t^k F_{\zeta_j}(x, t, \zeta_0, \zeta) \frac{\partial}{\partial x_j}\\
\mathcal{H} &= \mathcal{L} + g_0 \partial_{\zeta_0} + \sum_{j=1}^{N} g_j \frac{\partial}{\partial \zeta_j},
\end{aligned}
$$

com

$$
\begin{aligned}
g_0(x, t, \zeta_0, \zeta) &= f(x, t, \zeta_0, \zeta) - \sum_{j=1}^{N} \zeta_j t^k F_{\zeta_j}(x, t, \zeta_0, \zeta),\\
g_j(x, t, \zeta_0, \zeta) &= f_{x_j}(x, t, \zeta_0, \zeta) + \zeta_j f_{\zeta_0}(x, t, \zeta_0, \zeta) \qquad (1 \leqslant j \leqslant N).
\end{aligned}
$$

A seguir construiremos soluções aproximadas adequadas para os nossos propósitos, para isso consideraremos o operador auxiliar

$$
\tilde{\mathcal{H}} = \partial_t - \sum_{j=1}^{N} \frac{F_{\zeta_j}(x, t^{1/(k+1)}, \zeta_0, \zeta)}{(k+1)} \frac{\partial}{\partial x_j} + \tilde{g}_0(x, t, \zeta_0, \zeta)\partial_{\zeta_0} + \sum_{j=1}^{N} \tilde{g}_j(x, t, \zeta_0, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta_j},
$$

com

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}_0(x, t, \zeta_0, \zeta) &= \frac{F(x, t^{1/(k+1)}, \zeta_0, \zeta)}{k+1} - \sum_{j=1}^{N} \zeta_j \frac{F_{\zeta_j}(x, t^{1/(k+1)}, \zeta_0, \zeta)}{k+1},\\
\tilde{g}_j(x, t, \zeta_0, \zeta) &= \frac{F_{x_j}(x, t^{1/(k+1)}, \zeta_0, \zeta)}{k+1} + \zeta_j \frac{F_{\zeta_0}(x, t^{1/(k+1)}, \zeta_0, \zeta)}{k+1} \qquad (1 \leqslant j \leqslant N).
\end{aligned}
$$

Como $F(x, t^{1/(k+1)}, \zeta, \zeta_0)$ e as projeções $x \mapsto x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ e $\zeta \mapsto \zeta_j$ $(j = 0, 1, \ldots N)$ são de classe $\mathcal{E}_M$ e holomorfas nas variáveis (ζ_0, ζ), segue da demonstração de [3, Lemma 18] que existem funções $\tilde{Z}_j(x,t,\zeta_0,\zeta)$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ e $\tilde{\Xi}_l(x,t,\zeta_0,\zeta)$ $(l = 0, 1, \ldots, N)$ em $\mathcal{E}_M(V)$, holomorfa em (ζ_0, ζ), tais que

$$\begin{aligned} |(\tilde{\mathcal{H}}\tilde{Z}_j)(x,t,\zeta_0,\zeta)| &\leqslant \frac{C^{n+1}M_n}{n!}|t|^n, \;\; n = 0,1,2,\ldots \text{ e } \tilde{Z}_j(x,0,\zeta_0,\zeta) = x_j \;\; (j = 1,\ldots,N), \\ |(\tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Xi}_l)(x,t,\zeta_0,\zeta)| &\leqslant \frac{C^{n+1}M_n}{n!}|t|^n, \;\; n = 0,1,2,\ldots \text{ e } \tilde{\Xi}_l(x,0,\zeta_0,\zeta) = \zeta_l \;\; (l = 0,\ldots N); \end{aligned} \tag{4.13}$$

para alguma constante $C > 0$. Definindo $\tilde{Z} = (\tilde{Z}_1, \ldots, \tilde{Z}_N)$ e

$$Z(x,t,\zeta_0,\zeta) = (Z_1(x,t,\zeta_0,\zeta), \ldots Z_N(x,t,\zeta_0,\zeta)) = \tilde{Z}(x,t^{k+1},\zeta_0,\zeta)$$

observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}Z(x,t,\zeta_0,\zeta) &= (k+1)t^k\tilde{Z}_t(x,t^{k+1},\zeta_0,\zeta) - \sum_{j=1}^N t^k F_{\zeta_j}(x,t,\zeta_0,\zeta)\cdot\tilde{Z}_{x_j}(x,t^{k+1},\zeta_0,\zeta) \\ &\quad + g_0(x,t,\zeta_0,\zeta)\cdot\tilde{Z}_{\zeta_0}(x,t^{k+1},\zeta_0,\zeta) + \sum_{j=1}^N g_j(x,t,\zeta_0,\zeta)\cdot\tilde{Z}_{\zeta_j}(x,t^{k+1},\zeta_0,\zeta) \\ &= (k+1)t^k\Bigg[\tilde{Z}_t(x,t^{k+1},\zeta_0,\zeta) - \sum_{j=1}^N \frac{F_{\zeta_j}(x,(t^{k+1})^{1/(k+1)},\zeta_0,\zeta)}{k+1}\cdot\tilde{Z}_{x_j}(x,t^{k+1},\zeta_0,\zeta) \\ &\quad + \tilde{g}(x,t^{k+1},\zeta_0,\zeta)\cdot\tilde{Z}_{\zeta_0}(x,t^{k+1},\zeta_0,\zeta) + \sum_{j=1}^N \tilde{g}_j(x,t^{k+1},\zeta_0,\zeta)\cdot\tilde{Z}_{\zeta_j}(x,t^{k+1},\zeta_0,\zeta)\Bigg] \\ &= (k+1)t^k\cdot(\tilde{\mathcal{H}}\tilde{Z})(x,t^{k+1},\zeta_0,\zeta). \end{aligned}$$

Assim, para cada $j = 1, \ldots, m$ (aumentando $C > 0$, se necessário e considerando $T < 1$), segue que

$$|\mathcal{H}Z_j(x,t,\zeta_0,\zeta)| \leqslant \frac{C^{n+1}M_n}{n!}t^{n(k+1)}, \;\; n = 0,1,2,\ldots \;\; (x,t,\zeta_0,\zeta) \in \Omega\times[0,T]\times\mathcal{N} \tag{4.14}$$

e $Z_j(x,0,\zeta_0,\zeta) = x_j$, para $j = 1, \ldots, m$. De modo análogo, definindo $\Xi_j(x,t,\zeta_0,\zeta) = \tilde{\Xi}_j(x,t^{k+1},\zeta_0,\zeta)$, temos

$$|\mathcal{H}\Xi_j(x,t,\zeta_0,\zeta)| = |(k+1)t^k\cdot(\tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Xi}_j)(x,t^{k+1})| \leqslant \frac{C^{n+1}M_n}{n!}t^{n(k+1)} \tag{4.15}$$

e $\Xi_j(x,0,\zeta_0,\zeta) = \zeta_j$, para $j = 0, 1, \ldots, m$. Denotando $u = u_{x_0}$, pelo Lema 4.1.1, (4.14) e (4.15), segue que

$$|\mathcal{L}^v Z_j^v(x,t)| \leqslant \frac{C^{n+1}M_n}{n!}t^{n(k+1)}, \; n \in \mathbb{N}; \; Z_j^v(x,0) = x_j, \qquad \text{para } j = 0,1,\dots,N, \tag{4.16}$$

$$|\mathcal{L}^v \Xi_j^v(x,t)| \leqslant \frac{C^{n+1}M_n}{n!}t^{n(k+1)}, \; n \in \mathbb{N}; \; \Xi_j^v(x,0) = u_{x_j}(x,0), \; \text{para } j = 0,1,\dots,N, \tag{4.17}$$

para todo $(x,t) \in \Omega$. Como $u \in C^{k+1}(\Omega)$ temos $Z^v \in C^k(\Omega)$, assim podemos aplicar a fórmula de Taylor de ordem k na variável t em torno de 0 obtendo:

$$Z^v(x,t) \;=\; Z^v(x,0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial_t^j(Z^v)(x,0)}{j!}\, t^j + o(t^k) = x + \sum_{j=1}^{k} \frac{(\partial_t^j Z^v)(x,0)}{j!}\, t^j + o(t^k). \tag{4.18}$$

Defina $\psi = (\psi_1, \dots \psi_N)$ tal que

$$t\psi \doteq \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial_t^j Z^v(x,0)}{j!} t^j + o(t^k), \qquad \psi = (\psi_1, ..., \psi_N).$$

Escrevendo $\mathcal{R}\psi = \psi^1$ e $\Im\psi = \psi^2$ temos

$$Z^v(x,t) = Z^v(x,0) + t\psi(x,t) = Z^v(x,0) + t\psi^1(x,t) + it\psi^2(x,t). \tag{4.19}$$

Para cada $j = 1, \dots, N$, por (4.16), temos

$$\mathcal{L}^v Z_j^v(x,t) = t\partial_t\psi_j(x,t) + \psi_j(x,t) - \sum_{l=1}^{N} f_{\zeta_l}^v(x,t)(\delta_{lj} + t\partial_{x_l}\psi_j(x,t)) = O(t^n), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{4.20}$$

em que δ_{lj} representa o delta de Kronecker.

Afirmação 4.2.6.

$$\partial_t^p \psi^2(x,0) = 0, \;\; \textit{para} \;\; 0 \leqslant p \leqslant k-1 \tag{4.21}$$

e

$$(k+1)\partial_t{}^k\psi^2(x_0,0) = \partial_t^k \Im f_\zeta^v(x_0,0) = k!\Im F^v(x_0,0). \tag{4.22}$$

De fato, para $p = 0$, fazendo $t = 0$ em (4.20) segue que, $\psi_j(x,0) - f_{\zeta_j}^v(x,0) = 0$ e assim $\Im\psi_j(x,0) = 0$ (lembre-se que $f(x,t,\zeta_0,\zeta) = t^k F(x,t,\zeta_0,\zeta)$). Suponhamos que exista $p < k-1$ tal que $\partial_t^l \psi^2(x,0) =$

0, para $0 \leqslant l \leqslant p$. Ao derivarmos $(p+1)$ - vezes a função (4.20) em relação a variável t obtemos

$$\begin{aligned} O(t^n) &= \sum_{l=0}^{p+1} \binom{p+1}{l} \partial_t^l(t) \partial_t^{p+1-l+1} \psi_j + \partial_t^{p+1}\psi_j - \partial_t^{p+1} f_{\zeta_j}^v - \sum_{l=1}^{N}\sum_{q=0}^{p+1} \binom{p+1}{q} \partial_t^q f_{\zeta_j}^v \cdot \partial_t^{p-q+1}(t\partial_{x_l}\psi_j) \\ &= t\partial_t^{p+2}\psi_j + (p+1)\partial_t^{p+1}\psi_j + \partial_t^{p+1}\psi_j - \partial_t^{p+1} f_{\zeta_j}^v - \sum_{l=1}^{N} \partial_t^{p+1} f_{\zeta_j}^v \cdot t \cdot \partial_{x_l}\psi_j \\ &\quad - \sum_{l=1}^{N}\sum_{q=0}^{p} \binom{p+1}{q} \partial_t^q f_{\zeta_j}^v \cdot (t\partial_t^{p-q+1}\partial_{x_l}\psi_j + (p-q+1)\partial_t^{p-q}\partial_{x_l}\psi_j), \end{aligned}$$

para todo n natural. Fazendo $t = 0$, na expressão acima temos

$$(p+2)\partial_t^{p+1}\psi(x,0) = \partial_t^{p+1} f_{\zeta_j}^v(x,0) + \sum_{l=1}^{N}\sum_{q=0}^{p} \binom{p+1}{q} \partial_t^q f_{\zeta_j}^v(x,0) \cdot (p-q+1) \cdot \partial_{x_l}\partial_t^{p-q}\psi_j(x,0).$$

Pela hipótese de indução e $p+1 < k$ (lembrando que $f^v(x,t) = t^k \cdot F^v(x,t)$)

$$\begin{aligned} (p+2)\partial_t^{p+1}\Im(\psi_j)(x,0) &= \partial_t^{p+1}\Im f_{\zeta_j}^v(x,0) + \sum_{l=1}^{N}\sum_{q=0}^{p} \binom{p+1}{q} \partial_t^q \Im f_{\zeta_j}(x,0)((p-q+1)\partial_{x_l}\partial_t^{p-q}\Re\psi_j(x,0)) \\ &+ \sum_{l=1}^{N}\sum_{q=0}^{p} \binom{p+1}{q} \partial_t^l \Re f_{\zeta_j}(x,0)((p-q+1)\partial_{x_l}\partial_t^{p-q}\Im\psi_j(x,0)) = 0, \end{aligned} \tag{4.23}$$

em que o primeiro o segundo termo a direita pois $p+1 < k$ e o terceiro se anula pela hipótese de indução. Então, concluímos que para $p < k$, temos $\partial_t^p \psi_j^2(x,0) = \partial_t^p \Im\psi_j(x,0) = 0$. Se derivarmos (4.20) k - vezes, em t, encontramos (4.23), não nula e com $p+1 = k$. Assim, podemos concluir que

$$\partial_t^j \psi^2(x,0) = 0, \quad \text{para} \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1; \quad (k+1)\partial_t^k\psi^2(x_0,0) = \partial_t^k \Im f_\zeta^v(x_0,0) = k!\,\Im F_\zeta^v(x_0,0), \tag{4.24}$$

concluindo a demonstração da afirmação.

A seguir consideraremos os campos vetoriais $M_j = \sum_{l=1}^N b_{jl}(x,t)\partial_{x_l}$, definidos por $M_j Z_l^v = \delta_{jl}$, $\{\mathcal{L}^v, M_1, ..., M_N\}$ forma (localmente) uma base para os campos vetoriais em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ ($\mathfrak{X}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$). Logo, $\{dt, dZ_1^v, ..., dZ_N^v\}$ forma uma base para as 1-formas diferenciais. Dada uma função $\phi = \phi(x,t)$ de classe C^1 segue que existem funções $A, B_1, ..., B_N$ tais que $d\phi = Adt + \sum_{j=1}^{N} B_j dZ_j^v$. Por outro lado,

$$M_l(\phi) = d\phi(M_l) = Adt(M_l) + \sum_{j=1}^{N} B_j dZ_j^v(M_l) = B_l, \text{ para } l = 1, \ldots, N; \tag{4.25}$$

e

$$d\phi(\mathcal{L}^v) = Adt(\mathcal{L}^v) + \sum_{j=1}^{N} M_j(\phi) \cdot \mathcal{L}^v(Z_j^v).$$

Isto é,

$$A = \mathcal{L}^v(\phi) - \sum_{j=1}^{N} M_j(\phi)\mathcal{L}^v(Z_j^v). \tag{4.26}$$

Usando (4.25) e (4.26), podemos escrever $d\phi$ como combinação linear da base $\{dt, dZ_1^v, ..., dZ_N^v\}$,

$$d\phi = \left(\mathcal{L}^v\phi - \sum_{j=1}^{N} M_j(\phi)\mathcal{L}^v({Z_j}^v)\right) dt + \sum_{j=1}^{N} M_j(\phi) dZ_j^v.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(\phi dZ_1^v \wedge \cdots \wedge dZ_N^v) &= d\phi \wedge dZ_1^v \wedge \cdots \wedge dZ_N^v \\ &= \left(\mathcal{L}^v\phi - \sum_{j=1}^{N} M_j(\phi)\mathcal{L}^v({Z_j}^v)\right) dt \wedge dZ_1^v \wedge \cdots \wedge dZ_n^v. \end{aligned} \tag{4.27}$$

A seguir denotaremos $z^2 = z_1^2 + \cdots + z_n^2$, para $z = (z_1, ..., z_N) \in \mathbb{C}^N$. Usaremos o Teorema 2.3.6 (com polinômio $p(z) = \frac{1}{2}z^2$), para tanto considere

$$Q(x, t, y, \xi) = -i\xi Z^v(x, t) - \frac{1}{2}|\xi|(y - Z^v(x, t))^2,$$

para $(y, \xi) \in \mathbb{R}^N$. Seja $\eta \in \mathcal{D}_M(\mathbb{R}^N)$, de modo que $\eta(x) = 1$, para $|x - x_0| < r_0$, $\eta(x) = 0$, quando $|x - x_0| > 2r_0$ e $|\eta| \leqslant 1$; com r_0 e s' a serem escolhidos. Seja

$$g(x, t, y, \xi) = \eta(x)\Xi_0^v(x, t)e^{Q(x,t,y,\xi)},$$

em que y e ξ são parâmetros (observe que $g(x, 0, y, \xi)$ é o integrando da transformada FBI clássica de $\eta \cdot u_0$). Denotaremos $dZ_1^v \wedge \cdots \wedge dZ_N^v$ por dZ^v e usando (4.27) temos,

$$d(gdZ^v) = \left(\mathcal{L}^v(\eta\Xi_0^v) + \eta\Xi_0^v\mathcal{L}^v(Q) - \sum_{j=1}^{N} \left(M_j(\eta\Xi_0^v) + \eta\Xi_0^v M_j(Q)\right) \mathcal{L}^v Z_j\right) e^Q dt \wedge dZ^v.$$

Pelo Teorema de Stokes, com $T > 0$ pequeno, a ser escolhido, temos

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} d(gdZ^v) = -\int_{\mathbb{R}^N} g(x,0,y,\xi)dx + \int_{\mathbb{R}^N} g(x,T,y,\xi)dZ^v(x,T).$$

Assim,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} g(x,0,y,\xi)dx\right| \leqslant \left|\int_{\mathbb{R}^N} g(x,T,y,\xi)dZ^v(x,T)\right| + \left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} d(gdZ^v)\right|. \tag{4.28}$$

Como

$$\mathcal{F}_{\eta\omega}(y,\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,0,y,\xi)dx \tag{4.29}$$

e desejamos utilizar o Teorema 2.3.6, nosso problema se resume à estimar as duas integrais do lado direito da equação (4.28). Com esse propósito, iremos fazer algumas estimativas de $\mathcal{R}Q$, que podem ser encontradas em [1]. Como $Z^v(x,t) = x + t\psi^1(x,t) + it\psi^2(x,t)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}Q(x,t,y,\xi) &= \mathcal{R}\left\{i\xi(-x - t(\psi^1(x,t) + i\psi^2(x,t))) - \tfrac{1}{2}|\xi|(y - x - t(\psi^1(x,t) + i\psi^2(x,t)))^2\right\} \\ &= t\xi\psi^2(x,t) - \tfrac{1}{2}|\xi|(|y-x|^2 + t^2|\psi^1(x,t)|^2 - t^2|\psi^2(x,t)|^2 - 2t(y-x)\psi^1(x,t)). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Observe que pela fórmula de Taylor e por (4.24) temos

$$\begin{aligned} \psi^2(x,t) &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\partial_t^j \psi^2(x,0)}{j!} t^j + \frac{\partial_t^k \psi^2(x,0)}{k!} t^k + O(t^{k+1}) \\ &= \frac{\partial_t^k \psi^2(x,0)}{k!} t^k + O(t^{k+1}) \\ &= \frac{1}{k!}\left(\partial_t^k \psi^2(x_0,0) + O(|x-x_0|)\right) t^k + O(t^{k+1}) \\ &= \frac{\Im F_\zeta^v(x_0,0)}{k+1} t^k + O(|x-x_0|t^k) + O(t^{k+1}). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Considere r_0 e T de modo que existam constantes C, $D > 0$ tais que $O(|x-x_0|t^k) \leqslant C|x-x_0|t^k$ e $|O(t^{k+1})| \leqslant Dt^{k+1}$, quando $|x-x_0| \leqslant 2r_0$ e $|t| \leqslant T$. Com isso, para $|x-x_0| \leqslant 2r_0$ e $|t| \leqslant T$ temos

$$\begin{aligned} t\psi^2(x,t)\xi^0 &= \left(\frac{\Im F_\zeta^v(x_0,0)}{k+1} t^{k+1} + tO(|x-x_0|t^k) + tO(t^{k+1})\right) \cdot \xi^0 \\ &\leqslant \frac{\Im F_\zeta^v(x_0,0)\cdot\xi^0}{k+1} t^{k+1} + |O(|x-x_0|t^k)||t||\xi^0| + |t||O(t^{k+1})||\xi^0| \\ &\leqslant \left(\frac{\Im F_\zeta^v(x_0,0)\cdot\xi^0}{k+1} + 2Cr_0|\xi^0| + TD|\xi^0|\right)|t|^{k+1}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Como $\Im F_{\zeta}^{v}(x_0,0)\cdot\xi^0<0$, podemos diminuir r_0 e T de modo a obter $a>0$ tal que

$$\frac{\Im F_{\zeta}^{v}(x_0,0)\cdot\xi^0}{k+1}+2Cr_0T|\xi^0|+TD|\xi^0|<-2a.$$

Como $G(\xi)=\frac{\Im F_{\zeta}^{v}(x_0,0)\cdot\xi}{k+1}+2Cr_0T|\xi|+TD|\xi|$ é contínua existe $r>0$ tal que

$$\frac{\Im F_{\zeta}^{v}(x_0,0)\cdot\xi^0}{k+1}+2Cr_0T|\xi^0|+TD|\xi^0|\leqslant -2a<-a,$$

para todo $\xi\in S^{N-1}\cap B(\xi^0,r)$. Voltando para (4.32), definindo $\Gamma=\left\{\xi:\frac{\xi}{|\xi|}\in V_0\right\}$, temos

$$t\psi^2(x,t)\xi\leqslant -|\xi|at^{k+1}$$

quando $\xi\in\Gamma$, $|x-x_0|\leqslant 2r_0$ e $0\leqslant t\leqslant T$. Seja $|x-x_0|\leqslant 2r_0$ e $|t|\leqslant T$, por (4.31), temos

$$|\psi^2(x,t)|\leqslant\left|\frac{\Im F_{\zeta}^{v}(x_0,0)}{k+1}\right||t|^k+2Cr_0|t|^k+DT|t|^k,$$

o que mostra que $\psi_2(x,t)=O(|t|^k)$. Assim, existe constante $D_1>0$, tal que

$$\begin{aligned} t\psi^2(x,t)\xi+\frac{1}{2}|\xi|t^2|\psi^2(x,t)|^2 &\leqslant -a|\xi|t^{k+1}+|\xi|t^2D_1t^{2k}\\ &\leqslant (-a+T^{1+k}D_1)t^{k+1}|\xi|, \end{aligned}$$

$\xi\in\Gamma$, $|x-x_0|\leqslant 2r_0$ e $0\leqslant t\leqslant T$ (diminuindo r_0 e T, se necessário). Podemos diminuir T de modo a obter $-a+T^{1+k}D_1<0$. A partir de agora vamos denotar por $-a$ o que denotávamos por $-a+T^{1-k}D_1$, com esta notação temos

$$t\psi^2(x,t)\xi+\frac{1}{2}|\xi|t^2|\psi^2(x,t)|^2\leqslant -at^{k+1}|\xi|,\qquad |x-x_0|<2r_0,\qquad 0\leqslant t\leqslant T,\qquad \xi\in\Gamma. \tag{4.33}$$

Temos também que $2t(y-x)\psi^1(x,t)\leqslant |y-x|^2+t^2|\psi^1(x,t)|^2$. Logo, aplicando (4.33) em (4.30)

$$\mathcal{R}Q(x,t,y,\xi)\ \leqslant\ -a|\xi|t^{k+1}, \tag{4.34}$$

com $(x,\xi)\in B_{2r_0}(x_0)\times\Gamma$ e $0\leqslant t\leqslant T$.

Por outro lado, se tomarmos $|t|\leqslant T$, $r_0\leqslant |x-x_0|\leqslant 2r_0$ e $|y-x_0|\leqslant\frac{r_0}{2}$ existe $\delta>0$ tal que

$\mathcal{R}Q(x,t,y,\xi) \leqslant -\delta|\xi|$. De fato, se $r_0 \leqslant |x-x_0| \leqslant 2r_0$ e $|y-x_0| \leqslant \frac{r_0}{2}$ temos $|y-x| \geqslant \frac{r_0}{2} > 0$. Pela continuidade de ψ existe $A > 0$ tal que $|\psi(x,t)| \leqslant A$, quando $r_0 \leqslant |x-x_0| \leqslant 2r_0$ e $0 \leqslant t \leqslant T$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}Q(x,t,y,\xi) &= t\xi\psi^2(x,t) - \frac{1}{2}|\xi||y-x|^2 - \frac{1}{2}|\xi|t^2|\psi^1(x,t)|^2 + \frac{1}{2}t^2|\xi||\psi^2(x,t)|^2 + t|\xi|(y-x)\psi^1(x,t) \\
&\leqslant T|\xi||\psi^2(x,t)| - \frac{1}{2}|\xi|\frac{r_0^2}{4} + \frac{1}{2}T^2A^2|\xi| + T|\xi|(|y-x_0| + |x-x_0|)|\psi^1(x,t)| \\
&\leqslant |\xi|\left(AT - \frac{r_0^2}{8} + \frac{T^2A^2}{2} + \frac{5Tr_0A}{2}\right),
\end{aligned}$$

quando $r_0 \leqslant |x-x_0| \leqslant 2r_0$, $|y-x_0| \leqslant \frac{r_0}{2}$ e $0 \leqslant t \leqslant T$. Se $T \leqslant 1$ temos:

$$\mathcal{R}Q(x,t,y,\xi) \leqslant |\xi|\left(AT + \frac{TA^2}{2} + \frac{5Tr_0A}{2} - \frac{r_0^2}{8}\right),$$

$r_0 \leqslant |x-x_0| \leqslant 2r_0$, $|y-x_0| \leqslant \frac{r_0}{2}$ e $0 \leqslant t \leqslant T$. Assim existe $\delta > 0$ (diminuindo T, se necessário) tal que

$$\mathcal{R}Q(x,t,y,\xi) \leqslant -\delta|\xi|; \quad r_0 \leqslant |x-x_0| \leqslant 2r_0, \quad |y-x_0| \leqslant \frac{r_0}{2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{4.35}$$

Por (4.34) a primeira integral à direita em (4.28) pode ser estimada do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} g(x,T,y,\xi)dZ^v(x,T)\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |g(x,T,y,\xi)||\det\{Z_x^v(x,T)\}|dx \\
&= \int_{B(x_0,2r_0)} |\eta(x)\Xi_0^v(x,T)e^{Q(x,T,y,\xi)}||\det\{Z_x^v(x,T)\}|dx \\
&\leqslant c_1 e^{-a|\xi|T^{k+1}},
\end{aligned} \tag{4.36}$$

quando $|y-x_0| \leqslant \frac{r_0}{2}$, $\xi \in \Gamma$ e $0 \leqslant t \leqslant T$.

A seguir denotaremos $A_{(x_0,r_0,2r_0)} = B(x_0,2r_0)\backslash B(x_0,r_0)$. Para segunda integral a direita em (4.28) segue que

$$\left|\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^N} d(gdZ^v)\right| \leqslant \int_0^T \int_{B(x_0,r_0)} h(x,t,y,\xi)dxdt + \int_0^T \int_{A_{(x_0,r_0,2r_0)}} h(x,t,y,\xi)dxdt, \tag{4.37}$$

em que

$$h \doteq \left|\mathcal{L}^v(\eta\Xi_0^v) + (\eta\Xi_0^v)\mathcal{L}^v(Q) - \sum_{j=1}^N \left(M_j(\eta\Xi_0^v) + \eta\Xi_0^v M_j(Q)\right)\mathcal{L}^v Z_j^v\right| e^{\mathcal{R}Q}|Z_x^v|$$

e $|Z^v_x|$ denota o determinante da matriz jacobiana de $(Z^v_1, \dots, Z^v_N, t)$. Como $Z^v \in C^k$, usando (4.35), existe $C > 0$ tal que

$$h(x,t,y,\xi) \leqslant (C + C|\xi|)e^{-\delta|\xi|},$$

para todo $(x,t,y,\xi) \in A_{(x_0,r_0,2r_0)} \times [0,T] \times B(x_0, \frac{r_0}{2}) \times \mathbb{R}^m$. Deste modo obtemos a seguinte estimativa,

$$\int_0^T \int_{A_{(x_0,r_0,2r_0)}} h(x,t,y,\xi)dxdt \leqslant c_1 e^{-c_2|\xi|}, \tag{4.38}$$

para $(y,\xi) \in \times B(x_0, \frac{r_0}{2}) \times \mathbb{R}^m$ e certas constantes positivas c_1, c_2.

Agora estimaremos a primeira integral a direita em (4.37). Observe que pela definição de η temos,

$$h \equiv \left| \mathcal{L}^v(\Xi^v_0) + (\Xi^v_0)\mathcal{L}^v(Q) - \sum_{j=1}^N \left(M_j(\Xi^v_0) + \Xi^v_0 M_j(Q)\right) \mathcal{L}^v Z^v_j \right| e^{\mathcal{R}Q}|Z^v_x|, \tag{4.39}$$

em $B(x,r_0) \times [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Como $\mathcal{L}^v Z^v \in C^k$, de (4.16) segue que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}^v(Q(x,t,y,\xi))| &= \left| -i\sum_{j=1}^N \xi_j \mathcal{L}^v Z^v_j(x,t) - \frac{1}{2}|\xi| \sum_{j=1}^N 2(y_j - Z^v_j(x,t))\mathcal{L}^v Z^v_j(x,t) \right| \\ &\leqslant C|\xi| C^{n+1}\frac{M_n}{n!}t^{n(k+1)}; \end{aligned} \tag{4.40}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $(x,t) \in B(x_0,r_0) \times [0,T]$, $|y - x_0| < \frac{r_0}{2}$ e $\xi \in \mathbb{R}^m$. Além disso, pela continuidade de Ξ^v e Z^v, aplicando (4.16) segue que existe $C > 0$ tal que

$$\left| \sum_{j=1}^N \left(M_j(\Xi^v_0) + \eta\Xi^v_0 M_j(Q)\right) \mathcal{L}^v Z^v_j \right| \leqslant (1 + |\xi|)C^{n+1}\frac{M_n}{n!}t^{n(k+1)}, \tag{4.41}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $(x,t) \in B(x_0,r_0) \times [0,T]$, $|y - x_0| < \frac{r_0}{2}$ e $\xi \in \mathbb{R}^m$. Assim, por (4.17), (4.40), (4.41) e (4.34) obtemos a seguinte estimativa para primeira integral a direita em (4.37)

$$\int_0^T \int_{B(x_0,r_0)} h(x,t,y,\xi)dxdt \leqslant \int_0^T \int_{B(x_0,r_0)} C(1 + |\xi|)C^{n+1}\frac{M_n}{n!}t^{n(k+1)} \cdot \frac{n!}{a^n|\xi|^n t^{n(k+1)}} dxdt, \tag{4.42}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $|y - x_0| < \frac{r_0}{2}$ and $\xi \in \Gamma$. Pela arbitrariedade de n, definindo $c_2 = \frac{a}{C}$, obtemos

$$\int_0^T \int_{B(x_0,r_0)} h(x,t,y,\xi)dxdt \quad \leqslant \quad C(1 + |\xi|)\inf_n C^n \frac{M_n}{a^n|\xi|^n} \overset{(1.18)}{=} C(1 + |\xi|)e^{-M(c_2|\xi|)}$$

$$\int_0^T \int_{B(x_0,r_0)} h(x,t,y,\xi)dxdt \overset{(1.23)}{\leqslant} c_1 e^{-\frac{1}{2}M(c_2|\xi|)}, \quad |y-x_0| < \frac{r_0}{2} \text{ e } \xi \in \Gamma. \tag{4.43}$$

Aplicando (4.38) e (4.43) in (4.37) temos

$$\left| \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^N} d(gdZ^v) \right| \leqslant c_1 e^{-\frac{1}{2}M(c_2|\xi|)}, \quad \text{quando } |y-x_0| < \frac{r_0}{2} \text{ e } \xi \in \Gamma. \tag{4.44}$$

Portanto, de (4.28), (4.29) (4.36) e (4.44) segue que

$$|\mathcal{F}_{\eta\omega}(y,\xi)| \leqslant e^{-\frac{1}{2}M(c_2|\xi|)}, \quad \text{sempre que } |y-x_0| < \frac{r_0}{2} \text{ e } \xi \in \Gamma.$$

Pelo Teorema 2.3.5 concluímos a prova. ■

Teorema 4.2.7. *Seja V como antes e $f \in G^s(V)$, holomorfa nas variáveis (ζ_0, ζ). Se a equação diferencial não linear $\partial_t u = f(x,t,u,u_x)$ possui uma solução $u \in C^{k+1}$ e a condição (4) é satisfeita então, para todo $\xi^0 \in S^{N-1}$ tal que $\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0,0)\cdot\xi^0 < 0$, segue que $(x_0,\xi^0) \notin WF_{s(k+1)-k}(u_0)$.*

Observação 4.2.8. *Observe que nesse caso*

$$\tilde{\mathcal{H}} = \partial_t - \sum_{j=1}^N \frac{f_{\zeta_j}(x,t^{1/(k+1)},\zeta_0,\zeta)}{t^k(k+1)}\frac{\partial}{\partial x_j} + \tilde{g}_0(x,t,\zeta_0,\zeta)\partial_{\zeta_0} + \sum_{j=1}^N \tilde{g}_j(x,t,\zeta_0,\zeta)\frac{\partial}{\partial \zeta_j}, \tag{4.45}$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{g}_0(x,t,\zeta_0,\zeta) &= \frac{f(x,t^{1/(k+1)},\zeta_0,\zeta)}{t^k(k+1)} - \sum_{j=1}^N \zeta_j \frac{F_{\zeta_j}(x,t^{1/(k+1)},\zeta_0,\zeta)}{k+1}, \\ \tilde{g}_j(x,t,\zeta_0,\zeta) &= \frac{f_{x_j}(x,t^{1/(k+1)},\zeta_0,\zeta)}{t^k(k+1)} + \zeta_j \frac{f_{\zeta_0}(x,t^{1/(k+1)},\zeta_0,\zeta)}{t^k(k+1)} \qquad (1 \leqslant j \leqslant N). \end{aligned}$$

O principal motivo de no Teorema 4.2.5 consideramos DC-equações não lineares do tipo Mizohata é que nos casos de equações não lineares mais geral os coeficientes de $\tilde{H}$ não são necessariamente de classe $\mathcal{E}_M(V)$ (veja (4.45)) e deste modo o Lema 18 de [3] não garante a existência de soluções $M-$aproximadas para $\tilde{H}$.

Demonstração. (do Teorema 4.2.7). Por [3, Lema 18] podemos encontrar Z_j $(j=1,\dots,N)$ e Ξ_l $(l=0,1,\dots,N)$ $M-$soluções aproximadas para $\mathcal{H}$ tais que:

$$|(\mathcal{H}Z_j)(x,t,\zeta_0,\zeta)| \leqslant \frac{C^{n+1}n!^s}{n!}|t|^n, \quad n=0,1,2,\dots \text{ e } Z_j(x,0,\zeta_0,\zeta) = x_j \ \ (j=1,\dots,N),$$

$$|(\mathcal{H}\Xi_l)(x,t,\zeta_0,\zeta)| \leqslant \frac{C^{n+1}n!^s}{n!}|t|^n, \ \ n = 0,1,2,... \ \text{e} \ \Xi_l(x,0,\zeta_0,\zeta) = \zeta_l \ \ (l = 0,\dots N).$$

A demonstração segue de modo análogo a demonstração do Teorema 4.2.5. Todavia, no lugar de (4.42) obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_{B(x_0,r_0)} h(x,t,y,\xi)dxdt &\leqslant \int_0^T\int_{B(x_0,r_0)} C(1+|\xi|)C^{n+1}\frac{[n(k+1)]!^s}{[n(k+1)]!}t^{n(k+1)}\cdot\frac{n!}{a^n|\xi|^n t^{n(k+1)}}dxdt \\
&\leqslant (1+|\xi|)C^{n+1}\frac{n!^{s(k+1)-k}}{a^n|\xi|^n}
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $|y - x_0| < \frac{r_0}{2}$ and $\xi \in \Gamma$. Pela arbitrariedade de n e por (1.27) temos que existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$\int_0^T\int_{B(x_0,r_0)} h(x,t,y,\xi)dxdt \leqslant c_1 e^{-c_2 t^{1/[s(k+1)-k]}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $|y - x_0| < \frac{r_0}{2}$ and $\xi \in \Gamma$. ∎

Observação 4.2.9. *No caso em que $k = 2$ segue que $s(k+1) - k = 3s - 2$. Dados um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $a \in G^s(\Omega)$ e um operador de primeira ordem $P = \partial_t + a(x,t)\partial_x$, (uma função u é dita $s-$vetor Gevrey para P se em (1.1) substituirmos as derivadas parciais pelo operador Gevrey, para $M_j = j!^s$) sobre certas condições no operador P (veja [10, Remark 5.2]) temos que todo $s-$vetor Gevrey para P é uma função de classe $G^{3s-2}(\Omega)$ (deste modo a perda de regularidade do teorema anterior coincide com a obtida em [10]). Além disso, fixado $s > 1$, para todo $1 < s'' < s' = 3s - 2$ Baouendi e Métivier (em [10, Remark 5.2]) exibem um operador M e um $s-$vetor Gevrey u para M de modo que $u \notin G^{s''}(\Omega)$.*

Por fim gostaríamos de comentar que utilizando ferramentas análogas ao capítulo anterior e aos trabalhos [13], [14] e [32] obtemos uma versão do Teorema 4.2.5 para sistemas não lineares definidos em variedades suaves.

Apêndice

$\mathcal{A}$

Resultados técnicos

A.1 Resultados usados

Neste apêndice apresentaremos definições e resultados técnicos que foram utilizados ao longo do texto.

Definição A.1.1. *Sejam Ω_1 e Ω_2 conjuntos abertos de $\mathbb{R}^m$ e $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$. Suponha que $u \in \mathcal{E}'_M(\Omega_2)$ e $\phi \in \mathcal{E}_M(\Omega)$ ou que $u \in \mathcal{D}'_M(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{D}_M(\Omega_2)$ ou ainda que $u \in \mathcal{E}'_M(-\Omega_2)$ e $\phi \in \mathcal{D}_M(\Omega_1)$. Nós definimos a convolução $u * \phi$ por:*

$$u * \phi(x) = \int \phi(x-y)u(y)dy = \langle u(y), \phi(x-y)\rangle.$$

Tendo em vista o [42, Theorem 6.10 e 6.12], apresentamos o seguinte resultado cuja demonstração foi inspirada em [42, Theorem 7.1].

Teorema A.1.2. *Sejam Ω uma vizinhança aberta de $\mathbb{R}^m$, $\phi \in \mathcal{D}_M(\mathbb{R}^m)$ com $\int \phi = 1$ e $u \in \mathcal{E}'_M(\Omega)$. Se $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-m}\phi(\frac{x}{\epsilon})$ então $u * \phi_\epsilon \to u$ em $\mathcal{E}'_M(\Omega)$, quando $\epsilon \to 0$.*

Demonstração. Como queremos demonstrar uma convergência em $\mathcal{E}_M$, consideraremos uma função arbitrária $\psi \in \mathcal{E}_M(\Omega)$. Se V é conjunto um aberto e limitado que contem o suporte de u, segue do Teorema 1.1.6 que existem medidas borelianas u_α tais que

$$\langle u * \phi_\epsilon, \psi\rangle = \int \langle u_y, \phi_\epsilon(x-y)\rangle \psi(x)dx = \int \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \int_V \partial_y^\alpha \phi_\epsilon(x-y)du_\alpha(y)\psi(x)dx,$$

e para todo $L > 0$ existe $C_L > 0$ de modo que $u_\alpha(V) < C_L \frac{L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}}$. Pela definição de ϕ_ϵ segue que

$$\begin{aligned}\int \sum_\alpha \int_V |\partial_y^\alpha \phi_\epsilon(x-y)\psi(x)| du_\alpha(y) dx &= \int \sum_\alpha \int_V \left| \frac{1}{\epsilon^m} \partial_y^\alpha \left[\phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right] \psi(x) \right| du_\alpha(y) dx \\ &= \int \sum_\alpha \int_V \left| \frac{1}{\epsilon^{|\alpha|+m}} (\partial_y^\alpha \phi)\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \psi(x) \right| du_\alpha(y) dx. \quad \text{(A.1)}\end{aligned}$$

Por outro lado, como V e suppϕ são limitados existe $r > 0$ tal que V, supp$\phi \subset B(0,r)$. Logo, se $y \in V$ e $\frac{x-y}{\epsilon} \in$ suppϕ temos

$$|x| = \epsilon \frac{|x|}{\epsilon} \leqslant \epsilon \left| \frac{x-y}{\epsilon} \right| + |y| \leqslant r(\epsilon+1).$$

Deste modo, lembrando que $\phi \in \mathcal{D}_M(\mathbb{R}^m)$ existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int \sum_\alpha \int_V |\partial_y^\alpha \phi_\epsilon(x-y)\psi(x)| du_\alpha(y) dx &= \int_{B(0,r(\epsilon+1))} \sum_\alpha \int_V \left| \frac{1}{\epsilon^{|\alpha|+m}} (\partial_y^\alpha \phi)\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \psi(x) \right| du_\alpha(y) dx \\ &\leqslant \epsilon^{-m} \sum_\alpha \frac{C_L L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}} \frac{C^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|}}{\epsilon^{|\alpha|}} = \epsilon^{-m} C_L C \sum_\alpha \left(\frac{LC}{\epsilon}\right)^{|\alpha|} < +\infty\end{aligned}$$

para $L < \frac{\epsilon}{C}$. Assim, podemos aplicar o Teorema de Fubini e derivar sob o sinal de integração;

$$\begin{aligned}\langle u * \phi_\epsilon, \psi \rangle &= \sum_\alpha \int_V \int_{B(0,r(\epsilon+1))} \frac{1}{\epsilon^{|\alpha|+m}} (\partial_y^\alpha \phi)\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \psi(x) dx du_\alpha(y) \\ &= \sum_\alpha \int_V (-1)^{|\alpha|} \partial_y^\alpha \left[\int_{B(0,r(\epsilon+1))} \frac{1}{\epsilon^m} \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \psi(x) dx \right] du_\alpha(y) \\ &= \left\langle u_y ; \int \phi_\epsilon(x-y)\psi(x) dx \right\rangle = \left\langle u_y ; (-1)^m \int \phi_\epsilon(y-x) \check{\psi}(x) dx \right\rangle \\ &= \langle u_y ; (-1)^m \phi_\epsilon * \check{\psi}(y) \rangle\end{aligned}$$

em que $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$. Já que $\psi \in \mathcal{E}_M$ se e somente se $\check{\psi} \in \mathcal{E}_M$, para completar a prova é suficiente provar que para todo $\psi \in \mathcal{E}_M(\Omega)$ temos $\phi_\epsilon * \psi \to \psi$ em $\mathcal{E}_M(\Omega)$, quando $\epsilon \to 0$. Como $\int \phi = 1$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi_\epsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) dx = 1; \quad \text{(A.2)}$$

e pelo teorema da convergência dominada segue que

$$\int_{|x|\leqslant\lambda} \phi_\epsilon(x)dx = \int_{|x|\leqslant\lambda/\epsilon} \phi(x)dx \to 1, \quad \epsilon \to 0, \qquad \forall\lambda > 0.$$

Por (A.2) e propriedades básicas de convolução[1], para todo $K \Subset \Omega$ obtém-se

$$\begin{aligned} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha(\phi_\epsilon * \psi(x) - c\psi(x))| &= \sup_{x\in K} \left| \int \phi_\epsilon(y)\partial_x^\alpha(\psi(x-y) - \psi(x))dy \right|, \\ &\leqslant \sup_{x\in K} \int_{\sup\phi} |\phi(y)\cdot[\partial_x^\alpha\psi(x-\epsilon y) - \partial_x^\alpha\psi(x)]|dy, \end{aligned} \tag{A.3}$$

e ainda, pelo teorema da convergência dominada, o lado direito de (A.3) converge à zero, quando $\epsilon \to 0$. Como $\psi \in \mathcal{E}_M(\Omega)$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^m$ existem $C, h > 0$ (dependentes de K) tais que $\sup_{x\in K} |\partial^\alpha\psi(x)| \leqslant Ch^{|\alpha|}M_{|\alpha|}$. Além disso se $x \in K$ e $y \in \operatorname{supp}\phi$ (lembrando que $\phi \in \mathcal{D}_M(\mathbb{R}^m)$) temos $x - \epsilon y$ pertencente a um compacto (considerando $\epsilon < 1$)[2]. Assim, da desigualdade (A.3) existe $h', C' > 0$ independentes de ϵ tais que

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha(\phi_\epsilon * \psi(x) - \psi(x))| \leqslant C'h'^{|\alpha|}M_{|\alpha|}.$$

Por outro lado sabemos que para todo $\delta > 0$ existe $\alpha_0 > 0$ tal que $2^{-|\alpha|} < \delta C'^{-1}$, se $|\alpha| > \alpha_0$. Logo,

$$\sup_{x\in K} \frac{|\partial^\alpha(\phi_\epsilon * \psi(x) - \psi(x))|}{(2h)^{|\alpha|}M_{|\alpha|}} < \delta,$$

para todo $|\alpha| > \alpha_0$. Além disso, por (A.3), para $|\alpha| \leqslant \alpha_0$ temos $\sup_{x\in K;} \frac{|\partial^\alpha(\phi_\epsilon * \psi(x) - \psi(x))|}{(2h)^{|\alpha|}M_{|\alpha|}} \to 0$, quando $\epsilon \to 0$ independente de α (já que $|\alpha| < \alpha_0$). Portanto,

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^m} \sup_{x\in K} \frac{|\partial^\alpha(\phi_\epsilon * \psi(x) - \psi(x))|}{(2h)^{|\alpha|}M_{|\alpha|}} \to 0.$$

Concluindo que $\phi_\epsilon * \psi(x) \to \psi(x)$ em $\mathcal{E}_M$. ∎

A seguir apresentamos uma generalização da fórmula de Faa di Bruno cuja demonstração pode ser encontrada em [29].

Teorema A.1.3. *[29, Corollary 2.10] Seja γ um multi índice e $h(x_1, \ldots, x_d) = f(g(x_1, \ldots, x_d))$*

[1] $\partial_x(f * g)(x) = f * (\partial_x g)(x)$, sempre que $f \in C^\infty$ e $g \in C_0^\infty$.

[2] Se $r > 0$ é tal que $K, \operatorname{supp}\phi \subset B(0, r)$, então $|x - \epsilon y| \leqslant r + \epsilon r$.

com $g \in C^{\gamma}(U_{x_0})$ e $f \in C^{|\gamma|}(V_{y_0})$, em que $y_0 = g(x_0)$ e ainda $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^d$ e $V_{y_0} \subset \mathbb{R}$ são respectivamente vizinhanças abertas de x_0 e y_0. Então,

$$\partial^{\gamma} h = \sum_{r=1}^{|\gamma|} (\partial^r f) \sum_{\mathfrak{p}} (\gamma!) \prod_{j=1}^{|\gamma|} \frac{(\partial^{\alpha_j} g)^{k_j}}{(k_j!(\alpha_j!)^{k_j})}, \tag{A.4}$$

para

$$\mathfrak{p}(\gamma, r) = \Big\{(k_1, \ldots, k_{|\gamma|}; \alpha_1, \ldots, \alpha_{|\gamma|}) : \textit{ para algum } 1 \leqslant s \leqslant |\gamma|,\ k_i = 0, \textit{ e } \alpha_i = 0 \textit{ para}$$
$$1 \leqslant i \leqslant |\gamma| - s;\ k_i > 0 \textit{ para } n - s + 1 \leqslant i \leqslant m; \textit{ e } 0 \prec \alpha_{n-s+1} \prec \cdots \prec \alpha_n \textit{ tais que}$$
$$\textstyle\sum_{i=1}^{|\gamma|} k_i = r, \tag{A.5}$$
$$\textstyle\sum_{i=1}^{|\gamma|} k_i \alpha_i = \gamma \tag{A.6}$$
$$\Big\}.$$

A seguir estabeleceremos alguns conceitos que serão fundamentais para a demonstração do próximo lema. Dados $\nu = (\nu_1, \nu_d) \in \mathbb{N}^d$ e $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{N}^m$ definimos

$$s(\nu, \lambda) = \{(u_1^{(1)}, \ldots, u_{\lambda_1}^{(1)}; \ldots; u_1^{(m)}, \ldots, u_{\lambda_m}^{(m)}) : u_j^{(i)} \in \mathbb{N}^d \text{ e } \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\lambda_i} u_j^{(i)} = \nu\} \tag{A.7}$$

e

$$s^+(\nu, \lambda) = \{(u_1^{(1)}, \ldots, u_{\lambda_1}^{(1)}; \ldots; u_1^{(m)}, \ldots, u_{\lambda_m}^{(m)}) : u_j^{(i)} \neq 0\}. \tag{A.8}$$

Observe que no caso $m = 1$ temos $s^+(\nu, r) \subset s^+(\nu_1, r) \times \cdots \times s^+(\nu_d, r)$. Na página 515 de [29] vemos que

$$|s^+(\nu, \lambda)| = \lambda! \sum_{\mathfrak{p}(u,\lambda)} \prod_{j=1}^{|u|} \frac{1}{(k_j)!} \tag{A.9}$$

e no caso $m = d = 1$

$$|s^+(n, r)| = \binom{n-1}{r-1} \leqslant 2^{n-1}. \tag{A.10}$$

Lema A.1.4. *Sejam $V \subset \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ conjuntos limitadas, $\xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ arbitrário e uma* *sequência $M = (M_j)$ satisfazendo (1.2), (1.3), (1.5) e (1.10). Sendo $\psi \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^m)$ e $g(x,y)$, $f(x,y) \in \mathcal{E}_M(\Omega)$*

$$Q(t,x,y,\xi) = -i\xi \cdot g(x,y) - |\xi|^{\lambda}\psi(t - f(x,y))$$

então existe $C > 0$ (independente de t, x, y, ξ, θ e α) tal que para todo $\alpha \in \mathbb{N}^m$, $|\xi| > 1$ e $(t,x,y) \in V \times \Omega$ temos

$$\left|\partial_x^{\alpha}\left\{e^{Q(t,x,y,\xi)}\right\}\right| \leqslant e^{\mathcal{R}\{Q(t,x,y,\xi)\}}e^{\frac{1}{2}M(\theta|\xi|)}e^{(H/\theta)}C^{|\alpha|+1}M_{|\alpha|}, \tag{A.11}$$

para todo $\theta > 0$.

Demonstração. Pelo Teorema A.1.3, temos

$$\partial_x^{\alpha}\left\{e^{Q(t,x,y,\xi)}\right\} = \sum_{r=1}^{|\alpha|} e^{Q(t,x,y,\xi)} \sum_{\mathfrak{p}(\alpha,r)} \alpha! \prod_{j=1}^{|\alpha|} \frac{[\partial_x^{\alpha_j} Q(t,x,y,\xi)]^{k_j}}{k_j!(\alpha_j!)^{k_j}}$$

em que $\mathfrak{p}$ é como no Teorema A.1.3. Já que ψ e f são de classe $\mathcal{E}_M$ e a composição de funções de classe $\mathcal{E}_M$ também é de classe $\mathcal{E}_M$; existe $C > 1$ tal que, por (A.5),

$$\begin{aligned}\left|\partial_x^{\alpha}\left\{e^{Q(t,x,y,\xi)}\right\}\right| &\leqslant \sum_{r=1}^{|\alpha|} e^{\mathcal{R}\{Q(t,x,y,\xi)\}} \sum_{\mathfrak{p}(\alpha,r)} |\alpha|! \prod_{j=1}^{|\alpha|} \frac{\left[|\xi|\left|\partial_x^{\alpha_j}(-g(x,y))\right| + |\xi|^{\lambda}\left|\partial_x^{\alpha_j}\{\psi(t-f(x,y))\}\right|\right]^{k_j}}{k_j!(\alpha_j!)^{k_j}} \\ &\leqslant \sum_{r=1}^{|\alpha|} e^{\mathcal{R}\{Q(t,x,y,\xi)\}} \sum_{\mathfrak{p}(\alpha,r)} |\alpha|! \prod_{j=1}^{|\alpha|} \frac{|\xi|^{k_j}(C^{\alpha_j+1}M_{\alpha_j})^{k_j}}{k_j!(\alpha_j!)^{k_j}}\end{aligned}$$

para $|\xi| \geqslant 1$ e $\lambda < 1$. Por outro lado observe que por (1.8), (1.9) e da definição de $\mathfrak{p}(\alpha,r)$ temos $H > 0$ tal que

$$\prod_{j=1}^{\alpha} M_{|\alpha_j|}^{k_j} \overset{(1.9)}{\leqslant} \prod_{j=1}^{|\alpha|} H^{\alpha_j k_j} M_{|\alpha_j|k_j - k_j} \overset{(1.8),(A.6)}{\leqslant} H^{|\alpha|} M_{\sum_{j=1}^{|\alpha|}(|\alpha|!k_j - k_j)} \overset{(A.5),(A.6)}{\leqslant} H^{|\alpha|} M_{|\alpha|-r}. \tag{A.12}$$

e como $(a+b)! \leqslant 2^{a+b}a!b!$ para quaisquer a e b naturais temos

$$\prod_{j=1}^{|\alpha|} \alpha_j!^{k_j} \geqslant \prod_{j=1}^{|\alpha|} (2^{-|\alpha_j|}|\alpha_j|!)^{k_j} \overset{(A.6)}{\geqslant} 4^{-|\alpha|}|\alpha|!. \tag{A.13}$$

Assim, aplicando a definição de $\mathfrak{p}$, para todo $\theta > 0$ temos:

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^\alpha e^{Q(t,x,y,\xi)}\right| &\leqslant \sum_{r=1}^{|\alpha|} e^{\mathcal{R}\{Q(t,x,y,\xi)\}} \sum_{\mathfrak{p}(\alpha,r)} |\alpha|! \frac{|\xi|^r C^{2|\alpha|} H^\alpha M_{|\alpha|-r} 4^{|\alpha|}}{|\alpha|!} \prod_{j=1}^{|\alpha|} \frac{1}{k_j!} \\
&\overset{(1.23)}{\leqslant} \sum_{r=1}^{|\alpha|} e^{\mathcal{R}\{Q(t,x,y,\xi)\}} \sqrt{A} \frac{H^r}{\theta^r} \frac{1}{r!} e^{\frac{1}{2}M(\theta|\xi|)} M_{|\alpha|} C^{2|\alpha|} H^{|\alpha|} 4^{|\alpha|} r! \sum_{\mathfrak{p}(\alpha,r)} \prod_{j=1}^{|\alpha|} \frac{1}{k_j!} \\
&\overset{(A.9),(A.10)}{\leqslant} e^{\mathcal{R}\{Q(t,x,y,\xi)\}} e^{\frac{1}{2}M(\theta|\xi|)} e^{(H/\theta)} C^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|},
\end{aligned}$$

aumentando C, se necessário. ■

A seguir apresentaremos uma versão DC para o teorema de Paley-Wiener para o caso de funções em $D^{\{M\}}$

Lema A.1.5. *Dado $u \in \mathcal{D}_{\{M\}}(B(0,R))$ tal que existam contantes $C, c' > 0$ de modo que*

$$|\widehat{u}(\zeta)| \leqslant Ce^{-M(c'|\zeta|)} e^{R|\Im\zeta|}, \ \ \forall \zeta \in \mathbb{C}^m. \tag{A.14}$$

Demonstração. Dado $\zeta \in \mathbb{C}^m$, observe que para todo natural j temos

$$|\zeta|^j |\widehat{u}(\zeta)| \leqslant (\sqrt{m})^j \max_k |\zeta_k|^j |\widehat{u}(\zeta)| \leqslant (\sqrt{m})^j \sum_{|\alpha|=j} |\zeta^\alpha \widehat{u}(\zeta)|.$$

Lembrando que $|\zeta^\alpha \widehat{u}(\zeta)| = |\widehat{D^\alpha u}(\zeta)|$ segue que

$$\begin{aligned}
|\widehat{u}(\zeta)| &\leqslant \frac{(\sqrt{m})^j}{|\zeta|^j} \sum_{|\alpha|=j} |\widehat{D^\alpha u}(\zeta)| = \frac{(\sqrt{m})^j}{|\zeta|^j} \sum_{|\alpha|=j} \left| \int_{B(0,R)} e^{-i\zeta x} D_x^\alpha u(x) dx \right| \\
&\leqslant \frac{(\sqrt{m})^j}{|\zeta|^j} \sum_{|\alpha|=j} \int_{B(0,R)} e^{\Im\zeta\cdot x} C^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|} dx,
\end{aligned}$$

já que $u \in D^{\{M\}}(B(0,R))$. Da arbitrariedade de j segue que

$$|\widehat{u}(\zeta)| \leqslant C \sup_j \frac{C^j M_j}{|\zeta|^j} e^{R|\Im\zeta|} \leqslant Ce^{-M(c'|\zeta|)} e^{R|\Im\{\zeta\}|}. \tag{A.15}$$

■

Referências Bibliográficas

[1] Z. Adwan, S. Berhanu. *On microlocal analyticity and smoothness of solutions of first-order nonlinear PDE's.* Math. Ann. 352 (2012), n. 1, 239-258.

[2] Z. Adwan, G. Hoepfner. *On the C^∞ wave-front set of traces of CR functions on maximally real submanifolds.* Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), n. 3, 999-1008.

[3] Z. Adwan, G. Hoepfner. *Aproximate solutions and micro-regularity in the Denjoy-Carleman Classes.* J. Differential Equations 249 (2010), n. 9, 2269-2286.

[4] Z. Adwan, G. Hoepfner. *Denjoy-Carleman classes: boundary values, approximate solutions and applications.* J. Geom. Anal. 25 (2015), n. 3, 1720-1743.

[5] C. H. Asano. *On the C^∞ wave-front set of solutions of first-order nonlinear PDE's.* Proc. Amer. Math Soc. 123, n. 10, (1995), 3009-3019.

[6] T. Bang. *Om quasi-analytiske Funktioner.* Thesis, University of Copenhagen, 1946.

[7] M. S. Baouendi, C. H. Chang and F. Trèves. *Microlocal hypo-analyticity and extension of CR functions.* J. Diferential Geom. 18 (1983), n. 3, 331-391.

[8] M. S. Baouendi, P. Ebenfelt, L. P. Rothschild. *Real submanifolds in complex space and their mappings*, Princeton University Press (1999).

[9] M. S. Baouendi and F. Trèves. *A microlocal version of Bochner's tube theorem.* Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), n. 6, 885–895.

[10] M. S. Baouendi and G. Métivier, *Analytic vectors of hypoelliptic operators of principal type*, Amer. J. Math. 104 (1982), 287-319.

[11] R. F. Barostichi, G. Petronilho. *Gevrey micro-regularity for solutions to first order nonlinear PDE.* J. Differential Equations 247 (2009), n. 6, 1899-1914.

[12] R. F. Barostichi, G. Petronilho. *Existence of Gevrey approximate solutions for certain sytems of linear vector fields applied to involutive systems of first-order nonlinear pdes.* J. Math Anal. Appl. 382 (2011), n. 1, 248-260.

[13] S. Berhanu. *On microlocal analyticity of solutions of first-order nonlinear PDE.* Ann. Inst. Fourier 59 (2009), n. 4, 1267-1290.

[14] S. Berhanu. *On involutive systems of first-order nonlinear partial differential equations.* Complex analysis (2010), 25–50.

[15] S. Berhanu, P. Cordaro and J. Hounie. *An introduction to involutive structures.* New Mathematical Monographs, 6. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[16] S. Berhanu, J. Hounie. *A class of FBI transforms.* Comm. Partial Differential Equations 37 (2012), n. 1, 38-57.

[17] J. Bonet, R. Meise, S. N. Melikhov. *A comparison of two different ways to define classes of ultradifferentiable functions.* Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 14 (2007), no. 3, 425-444.

[18] J. M. Bony. *Equivalence des diverses notions de spectre sigulier analytique.* Séminaire Goulaouic-Schwartz, Équations aux dérivées partielles et analyse fonctionnelle, Exp. (1977), n. 3, 1976-1977.

[19] E. Borel. *Sur la généralisation du prolongement analytique.* C. R. Acad. Sci. Paris 130, 1115-1118 (1900).

[20] E. Borel. *Sur les séries de polynômes et de fractions rationnelles.* Acta Math 24 (1902), 309-387.

[21] R.W. Braun. *An extension of Komatsu's second structure theorem for ultradistributions.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 40 (1993), n. 2, 411–417.

[22] J. Bros and D. Iagolnitzer. *Causality and local analyticity: mathematical study.* Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A. (N.S.) 18 (1973), 147-184.

[23] J. Bros and D. Iagolnitzer. *Tuboïdes et structure analytiques des distribution. II. Support essentiel et structure analytique des distributions.* Sém. Goulaouic-Lions-Schwartz (1975) , Exposé no. 18 1974-1975.

[24] P. Caetano and P. Cordaro. *Gevrey solvability and Gevrey regularity in differential complexes associated to lacally integrable structures*, Trans. Amer. Math. Soc., 363 (2011), no. 1, 185-201.

[25] T. Carleman. *Les fonctions quasi-analytiques*, Gauthier-Villars (1926).

[26] J. Y. Chemin. *Calcul paradiffèrentiel prècisè et applications à des equations aux dèrivèes partielles non semilinèaires*. Duke Math. J. 56 (1988), 431-469.

[27] M. Christ. *Intermediate optimal Gevrey exponents occur.* Comm. Partial Differential Equations 22 (1997), n. 3-4, 359-379.

[28] S. Y. Chung, D. Kim. *A quasianalytic singular spectrum with respect to the Denjoy-Carleman class.* Nagoya Math. J. 148 (1997), 137-149.

[29] C. M. Constantine, and T. H. Savits. *A multivariate Faà di Bruno Formula with applications.* Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), n. 2, 503-520.

[30] P. Cordaro and F. Treves. *Hyperfunctions on hypo-analytic manifolds.* Annals of Mathematics Studies 136 (1994), Princeton University Press, Princeton, NJ.

[31] A. Denjoy *Sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle.* C.R. Acad. Sci. Paris 173 (1921), 1329-1331.

[32] M. G. Eastwood and C. R. Graham. *Edge of the wedge theory in hypo-analytic manifolds.* Commun. Partial Differ. Equations 28 (2003), 2003-2028.

[33] G. Folland. *Real analysis modern techniques and their applications.* Pure and Applied Mathematics (Second ed.), New York (1999).

[34] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations.* Yale Univ. Press, New Haven (1923).

[35] N. Hanges, F. Treves *On the analyticity of solutions of first-order nonlinear PDE.* Trans. Amer. Math. Soc. 331 (1992), 627-638.

[36] L. Hörmander. *Linear differential operators.* Actes Congr. Int. Math. Nice 1 (1970), 121–133.

[37] L. Hörmander. *Fourier integral operators I.* Acta Math. 127 (1971), 79-183.

[38] L. Hörmander. *Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear partial differential equations with analytic coefficients.* Comm. Pure Appl. Math 24 (1971), 671-704.

[39] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators I.* Springer-Verlag, Berlin-New York (1983).

[40] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators.* Berlin: Springer-Verlag, v.1 (1983).

[41] J. Kim, S.-O. Kim, *Note on Mizohata type operators.* J. Korean Math. Soc. 18 (1981/82), no. 2, 167–174.

[42] H. Komatsu. *Ultradistributions. I. Structure theorems and a characterization.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math 20 (1973), 25-105.

[43] N. Lerner, Y. Morimoto, C.-Y. Xu. *Instability of the Cauchy-Kovalewskaya solution for a class of non linear systems.* Amer. J. Math. 132 (2010), no. 1, 99-123.

[44] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes.* Vol.3 Dunod (Paris) (1970).

[45] S. Mandelbrojt. *Séries adhérentes, régularisation des Suites, aplications.* Gauthier-Villars, Paris (1952).

[46] W. Matsumoto. *Theory of Pseudo-Differential Operators of Ultra-Differentiable Class.* J. Math Kyoto Univ. 27 (1987), 453-500.

[47] R. Meise and B. A. Taylor. *Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type.* Ark. Mat. 26 (1988), no. 2, 265-287.

[48] H. J. Petzshe, D. Vogt. *Almost analytic extension of ultradifferentiable functions and the boundary values of holomorphic functions.* Math. Ann. 267 (1984), no. 1, 17-35.

[49] L. Rodino. *Linear Partial Differential Operators in Gevrey Spaces.* World Scientific (1993).

[50] J.P. Rolin, P. Speisseger, A.J. Wilkie. *Quasianalytic Denjoy–Carleman classes and o-minimality.* J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), 751–777.

[51] W. Rudin. *Division in Algebras of Infinitely Differentiable Functions.* J. Math. Mech 11 (1962), 797-809.

[52] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara. *Hyperfunctions and pseudo differential equations.* Springer Lecture Notes in Math. 287 (1973), 265-529.

[53] J. Sjöstrand. *Note on a paper of F. Trèves concerning Mizohata type operators.* Duke Math. J. 47 (1980), no. 3, 601–608.

[54] J. Sjöstrand. *Singularites analytiques microlocales.* Astérisque 95 (1982), Soc. Math. France, Paris.

[55] F. Treves. *Topological vector spaces, distributions and kernels.* Academic Press, New York, (1967).

[56] F. Treves. *Remarks about certain first-order linear PDE in two variables.* Comm. Partial Differential Equations 5 (1980).

[57] F. Treves *Hypo-analytic strutures: local theory.* Princenton University Press (1992).