



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Superfícies de Curvatura Média Constante no Espaço Euclidiano

José Ramos Araujo dos Santos

orientador: *Alexandre Paiva Barreto*

São Carlos
Março de 2019

Superfícies de Curvatura Média Constante no Espaço Euclidiano

José Ramos Araujo dos Santos

orientador: *Alexandre Paiva Barreto*

Dissertação apresentada ao PPGM da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos
Março de 2019



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato José Ramos Araujo dos Santos, realizada em 19/03/2019:

Prof. Dr. Alexandre Paiva Barreto
UFSCar

Prof. Dr. Rafael Augusto dos Santos Kapp
UFSCar

Prof. Dr. Carlos Henrique Grossi Ferreira
USP

A minha vó Dona Tita e ao meu avô Zé de Alcides (in memoriam).

Agradecimentos

Fazer um agradecimento é, sempre, uma coisa complicada. Primeiro, porque é difícil de expressá-lo em palavras, e, segundo, porque existem muitas pessoas que participaram desse processo, além das que estiveram comigo nesse período de mestrado, sendo impossível citá-las todas aqui. Porém tentarei lembrar daquelas que estiveram mais próximas para a concretização deste sonho de um humilde moleque.

Agradeço primeiramente a Deus pela vida e oportunidade me dada por estar concluindo esta etapa importante da minha vida

Agradeço aos meus pais, Nalva e Bibina, pelo apoio, paciência, companheirismo e carinho demonstrados ao longo desses anos. Só eles sabem o quanto foi sofrido encarar essa distância da Bahia, ao longo desses seis anos de graduação e mestrado. Agradeço a minha vó, Dona Tita, mulher guerreira, carismática, desembaraçada (apesar de não ter estudado), o meu exemplo de simpatia e perseverança que carregarei para o resto de minha vida. Agradeço ao meu avô, Zé de Alcides (*in memoriam*) pelo imenso carinho por mim, pelas nossas longas conversas do fim de tarde até meia noite no Alto e na AABB, contando casos, nossas partidas de dominó superdivertidas e, sua alegria e sorriso de sempre ao me ver, de que agora só restam saudades eternas.

Agradeço ao meu orientador, Professor Alexandre Paiva Barreto, que desde 2013 me acompanhou, orientando e apontando caminhos a serem seguidos. Na verdade, tive mais que um orientador, tive um amigo que soube lidar muito bem com o papel de ser orientador sem criar aquela distância standard de seus alunos. Agradeço pelos atendimentos fazendo papel de psicólogo nas horas mais difíceis, e pela infinita disposição e paciência para a realização desse trabalho.

Agradeço ao meu amigo de infância, irmão, camarada, conterrâneo, Daniel dos Anjos Silva, pelo exemplo de amizade demonstrado ao longo desses anos. Pelas infinitas conversas de apoio e incentivo, e por ter sempre acreditado em mim desde 2008, de que um humilde garoto de uma cidadezinha do interior da Bahia chamada Inhambupe, tinha potencial de ir um pouco mais longe. Valeu de coração, cara.

Agradeço aos meus amigos Anderson e Lino por terem me recebido e me acolhido muito bem em São Carlos. Agradeço pelas nossas longas e árduas jornadas de estudo durante a graduação e mestrado misturadas com “zueras” e gargalhadas. Tenho certeza de que se não tivéssemos nos unido, a jornada teria sido muito mais difícil.

Agradeço aos meus amigos da Unicamp, César, Fabinho, Mano, Jhow, Isabella Freitas, Fran, Matheus, Josenilton (UFGO), pelo mesmo carinho de sempre, parceria sempre pronta para abrir os trabalhos em Campinas.

Agradeço a Paula, ao Hermano, a galera da casa do Hermano, amigos da UFSCar e Inhambupe como Dayana, Mateus, Mynor, Leon, Rafael Silva, Marcia, Vitor Pereira, Tata, Rafaella Zambetta, Mannain, Izabella, Japa, André e Chapadão.

Agradeço a coordenação do PPGM, aos professores Humberto Talpo e Luiz Hartmann pelo apoio, conversas e orientações ao longo de todo esse processo.

Agradeço a todas as pessoas que aqui não foram citadas, mas que participaram direta e indiretamente desta etapa.

Agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro durante todo o mestrado.

Abstract

This paper deals with the surfaces of constant mean curvature in the Euclidean space. The first part of the text is devoted to minimal surfaces. We begin our studies with the Enneper-Weirstrass Representation Theorem and discuss some of its most important applications such as Jorge-Xavier, Rosenberg-Toubiana, and Osserman Theorems. Next, we present the Principle of Tangency of Fontenele-Silva and use it to demonstrate the classical half-space Theorem. We close this part by discussing the topological constraints imposed by the hypothesis of finite total curvature. In the second part of the manuscript we studied the surfaces of constant mean curvature, possibly non-zero. We start with Heinz's Theorem and its applications, we present the classification theorem of the surfaces of rotation with constant mean curvature made by Delaunay, and we conclude with the concept of stability where we demonstrate the classical Sphere Stability Theorem. We close the text with a succinct presentation of recent results on the surfaces of Weingarten in the Euclidean space.

Keywords: Minimal surfaces, surfaces of constant mean curvature, Enneper-Weirstrass Representation Theorem, Jorge-Xavier's Theorem, Rosenberg-Toubiana Theorem, Osserman's Theorem, Semi-space Theorem, Finite Total Curvature, Heinz's Theorem, Delaunay's Theorem, Sphere Stability Theorem, Weingarten Surfaces.

Resumo

Este trabalho versa sobre as superfícies de curvatura média constante no espaço Euclidiano. A primeira parte do texto é devotada às superfícies mínimas. Iniciamos nossos estudos com o Teorema de Representação de Enneper-Weirstrass e discutimos algumas de suas aplicações mais importantes como os Teoremas de Jorge-Xavier, Rosenberg-Toubiana e Osserman. Em seguida apresentamos o Princípio de Tangência de Fontenele-Silva e o utilizamos para demonstrar o clássico Teorema do Semi-espaço. Fechamos esta parte discutindo as restrições topológicas impostas pela hipótese de curvatura total finita. Na segunda parte da dissertação estudamos as superfícies de curvatura média constante possivelmente não nula. Iniciamos com o Teorema de Heinz e suas aplicações, apresentamos o teorema de classificação das superfícies de revolução com curvatura média constante feito por Delaunay e finalizamos com o conceito de estabilidade, onde demonstramos o clássico Teorema de Estabilidade da Esfera. Fechamos o texto com uma apresentação sucinta de resultados recentes sobre as superfícies de Weingarten no espaço Euclidiano.

Palavras-chaves: Superfícies mínimas, superfícies de curvatura média constante, Teorema de Representação de Enneper-Weirstrass, Teorema de Jorge-Xavier, Teorema Rosenberg-Toubiana, Teorema de Osserman, Teorema do Semi-espaço, Curvatura Total Finita, Teorema de Heinz, Teorema de Delaunay, Teorema de Estabilidade da Esfera, Superfícies de Weingarten.

Sumário

Lista de Figuras	XIII
1 Introdução.....	1
2 Preliminares.....	4
2.1 Superfícies Parametrizadas.....	4
2.2 Superfícies Abstratas	23
2.3 Princípio do Máximo.....	27
3 Representação de Enneper-Weierstrass	33
3.1 Preliminares.....	33
3.2 O Teorema de Osserman	49
3.3 Curvatura Gaussiana e a Representação de Enneper-Weierstrass	57
3.4 Superfícies Mínimas Conjugadas.....	66
3.5 Superfícies Mínimas Associadas	72
4 Teoremas de Posição	80
4.1 Teorema de Jorge-Xavier.....	80
4.2 Teorema de Rosenberg-Toubiana.....	88
4.3 Teorema do Semi-espaço	99
5 Curvatura Total e Curvatura Total Finita	108
5.1 Curvatura Total e a R.E.W	108
5.2 Extensões da f e g da R.E.W e Aplicações.....	109
6 Superfícies de Curvatura Média Constante	119
6.1 Teorema de Heinz.....	119
6.2 Superfícies de Revolução	121
6.3 Superfícies Helicoidais	127
6.4 Estabilidade	128
7 Superfícies de Weingarten	146
7.1 Superfícies de Revolução.....	147
7.2 Superfícies Cíclicas	148
7.3 Superfícies de Translação e Homotéticas	150
Apêndice A – Análise Real e Complexa	154
Referências	161

Lista de Figuras

1	Superfície Parametrizada.	5
2	O catenóide de raio $a > 0$. Fonte: [16]. Adaptado.	7
3	Superfície de Enneper. Fonte [71].	10
4	Helicoide. Fonte [72].	19
5	Superfície de Scherk. Fonte [73].	23
6	H_w	54
7	$\mathcal{H} = H_{R+\epsilon}$	56
8	Os conjuntos K_n e D_n	85
9	Os conjuntos K_n e Y_n	95
10	$S_2 \geq S_1$ em p . Fonte: [17]. Adaptado.	101
11	$C_{p,c}^-$: metade do catenóide $C_{p,c}$	102
12	O cilindro Γ e o raio R_{p,c_0}	104
13	Os conjuntos K_c	105
14	O conjunto $K_{\tilde{c}}$	107
15	Unduloide. Fonte [74].	127
16	Nodoide. Fonte [75].	128

Capítulo I

INTRODUÇÃO

Uma pergunta natural na Geometria Diferencial é saber quais são as superfícies regulares (mergulhadas ou imersas) que verificam uma determinada condição de curvatura. O mais clássico desse problema, talvez tenha sido a classificação das superfícies de curvatura Gaussiana constante.

Em 1823, Carl F. Gauss provou o Teorema Egregium ([9] Capítulo 4), dizendo que a curvatura Gaussiana é uma característica intrínseca da superfície, i.e., algo que pode ser mensurada por um "habitante" da superfície.

No ano de 1868, Beltrami ([66]) apresentou a **pseudo-esfera**, superfície não completa cuja curvatura Gaussiana é igual a -1 , servindo de modelo local para a geometria não Euclidiana apresentada por Lobatchewski ([64] em 1829) e Bolyai ([65] em 1832).

Já em 1899, H. Liebmann demonstrou que as únicas superfícies completas de curvatura Gaussiana constante positiva são as esferas (para uma prova vide [9] Capítulo 5). Dois anos depois, em 1901, D. Hilbert provou que não existe uma superfície imersa completa no \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana constante negativa (para uma prova vide [9] Capítulo 5), em contrapartida, não completa existe, e é a pseudo-esfera apresentada por Beltrami.

Um fato curioso na história da Geometria Diferencial é que o caso da curvatura Gaussiana nula foi provado quase cinquenta anos depois, em 1956. O resultado diz que as únicas superfícies completas de curvatura Gaussiana nula são as superfícies cilíndricas, i.e., superfícies obtidas pela translação de uma curva plana ao longo de uma direção. Esse teorema foi enunciado por A. V. Pogorelov ([61]) em 1956 sem provas e sob hipóteses bastantes gerais. A primeira prova surgiu em 1959 como corolário de um teorema de P. Hartmann e L. Nirenberg ([62]), que trata de uma situação muito mais geral. Em 1961, Massey, W. S. obteve uma prova elementar e direta desse teorema que pode ser consultada em ([63]), e para uma prova mais recente, vide [9] Capítulo 5.

O segundo problema mais clássico, foi se perguntar quem são as superfícies de curvatura média constante, e esse é o objetivo central dessa dissertação.

A curvatura média é uma característica extrínseca da superfície, e intuitivamente ela nos diz de que "forma" a superfície está imersa no espaço, em outras palavras, ela pode ser pensada como algo que o habitante da superfície não é capaz de mensurar.

As superfícies de curvatura média nula são chamadas *superfícies mínimas*, cujo os estudos começaram com os trabalhos de Lagrange, Meusnier, Legendre e Monge na segunda metade do século XVIII. Desde então estas superfícies foram objeto de estudo por inúmeros pesquisadores e uma vasta coleção de resultados sobre as mesmas foi contruída. Para demonstrar o quão rico e importante é esse tema para a Matemática, podemos destacar as áreas com as quais ela se relaciona: Análise Real e Complexa, Cálculo Variacional, Física Matemática, Teoria do Potencial, e sobretudo, Geometria Diferencial.

As *superfícies de curvatura média constante (não nula)* possuem propriedades interessantes, mas são menos restritivas do que as superfícies mínimas. No entanto, tais superfícies desempenham um papel importante na Geometria Diferencial, como por exemplo na resolução do problema isoperimétrico, i.e., um problema clássico que consiste em encontrar as superfícies de menor área envolvendo um volume pré-fixado. Tais superfícies possuem aplicações interessantes não só na Matemática, mas também na Física e Engenharia, uma vez que fornecem modelos matemáticos em contextos onde um sistema físico procura um estado de menor energia.

A dissertação está dividida em quatro partes. Na primeira parte (Capítulo 2) apresentamos definições e resultados básicos de superfícies e o Princípio do Máximo.

A segunda parte é devotada ao estudo das superfícies mínimas onde no Capítulo 3 estudamos a Representação de Enneper-Weierstras (R.E.W) e provamos o Teorema de Osserman. No Capítulo 4 apresentamos os Teoremas de Jorge-Xavier, Rosenberg-Toubiana e do Semi-espaço, resultados que dizem respeito existência de superfícies mínimas numa determinada posição do espaço. Depois no Capítulo 5 relacionamos a R.E.W com os conceitos de curvatura total e curvatura total finita.

A terceira parte (Capítulo 6) estudamos as superfícies de curvatura média constante de revolução, o Teorema de Delaunay, as superfícies helicoidais e fechamos o Capítulo com o conceito de estabilidade e o Teorema de Estabilidade da Esfera.

Na quarta parte (Capítulo 7) finalizamos com um estudo breve das *superfícies de Weingarten* que são superfícies onde existe uma relação pré-fixada entre as curvaturas Gaussiana e a curvatura média ou as entre as curvaturas principais da superfície.

O texto ainda contém um apêndice (Apêndice A) onde apresentamos resultados de Análise Real e Complexa.

Capítulo II

PRELIMINARES

Na primeira seção deste Capítulo, apresentamos o conceito de superfícies parametrizadas, bem como uma breve exposição de notações, definições e resultados básicos que serão utilizados ao longo de todo o texto. Na segunda seção estudamos o conceito de superfícies abstratas e regulares, e na última seção finalizamos com o Princípio do Máximo.

2.1 Superfícies Parametrizadas

Chamaremos um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de *domínio* quando ele for aberto e conexo.

Definição 1 Uma *superfície parametrizada* é uma aplicação diferenciável $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde Ω é um domínio de \mathbb{R}^2 , cuja diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora em cada ponto $q \in \Omega$, ou equivalentemente, cujos vetores

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u} \quad e \quad X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$$

são linearmente independentes (vide figura 1).

O *espaço tangente* à X no ponto $q \in \Omega$ é o espaço vetorial $T_q X$ gerado pelos vetores X_u e X_v , e seu *espaço ortogonal* no ponto $q \in \Omega$, é definido por

$$T_q X^\perp := \langle N \rangle = \{v \in \mathbb{R}^3; \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in T_q X\}$$

onde $N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$.

Ao longo do texto, quando não for mencionado o contrário, uma aplicação diferenciável será sempre uma aplicação infinitamente diferenciável.

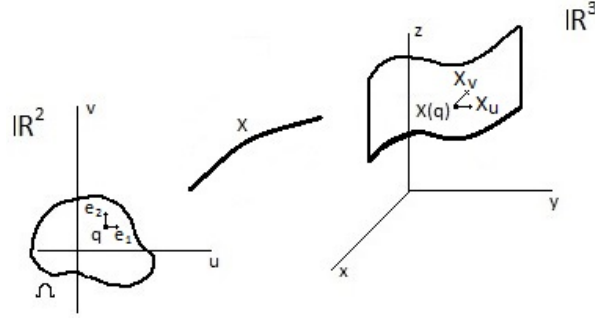


Figura 1: Superfície Parametrizada.

Exemplo 2 (Gráfico de uma função diferenciável) Considere uma aplicação diferenciável $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um domínio do \mathbb{R}^2 . O gráfico de f é a imagem da superfície parametrizada $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$X : (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3.$$

Observe que os vetores

$$X_u = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right) \quad e \quad X_v = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

são linearmente independentes.

◇

Exemplo 3 (Superfície de Revolução) Considere uma curva regular plana $C : t \in (a, b) \mapsto (0, x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3$ (i.e., C diferenciável e $C'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in (a, b)$), verificando $x_2(t) > 0$, para todo $t \in (a, b)$.

A superfície de revolução de geratriz C e eixo de rotação $OZ := \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R}\}$, é a superfície parametrizada

$$X : (\theta, t) \in (a, b) \times \mathbb{R} \mapsto (x_2(t) \cos \theta, x_2(t) \sin \theta, x_3(t)) \in \mathbb{R}^3. \quad (1)$$

Temos

$$X_\theta = (-x_2(t) \sin \theta, x_2(t) \cos \theta, 0) \quad e \quad X_t = (x_2'(t) \cos \theta, x_2'(t) \sin \theta, x_3'(t)).$$

Analisemos dois casos.

Se $x'_3(t) > 0$, para todo $t \in (a, b)$, então X_θ e X_t são linearmente independentes.

Se $x'_3(t) = 0$, para algum $t \in (a, b)$, então

$$\det \begin{pmatrix} -x_2(t) \operatorname{sen} \theta & x'_2(t) \operatorname{sen} \theta \\ x_2(t) \operatorname{cos} \theta & x'_2(t) \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix} = -x_2(t) x'_2(t) \operatorname{sen}^2 \theta - x_2(t) x'_2(t) \operatorname{cos}^2 \theta = x_2(t) x'_2(t) \neq 0$$

pois $C'(t) \neq \vec{0}$ e $x_2(t) > 0$.

Logo, X_θ e X_t são linearmente independentes.

Portanto, em qualquer caso, os vetores X_θ e X_t são linearmente independentes ou seja, X é uma superfície parametrizada.

◇

Exemplo 4 Um caso particular do Exemplo 3 importante nesse trabalho, é o catenóide de raio $a > 0$, uma superfície de revolução cuja geratriz é a curva regular

$$C : t \in \mathbb{R} \mapsto \left(0, a \cosh \left(\frac{t}{a} \right), t \right) \in \mathbb{R}^3$$

denominada catenária.

Por (1), a parametrização do catenóide é dada por

$$X(\theta, t) = \left(a \cosh \left(\frac{t}{a} \right) \operatorname{cos} \theta, a \cosh \left(\frac{t}{a} \right) \operatorname{sen} \theta, t \right), \quad \forall (\theta, t) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

e como C é uma curva regular, segue do Exemplo 3 que X é uma superfície parametrizada.

A saber, suas derivadas parciais com respeito a θ e a t são

$$\begin{aligned} X_\theta &= \left(-a \cosh \left(\frac{t}{a} \right) \operatorname{sen} \theta, a \cosh \left(\frac{t}{a} \right) \operatorname{cos} \theta, 0 \right) \\ X_t &= \left(\operatorname{senh} \left(\frac{t}{a} \right) \operatorname{cos} \theta, \operatorname{senh} \left(\frac{t}{a} \right) \operatorname{sen} \theta, 1 \right) \end{aligned} \tag{2}$$

donde, os vetores X_θ e X_t são linearmente independentes.

◇

Definimos agora o conceito de completude para superfícies parametrizadas.

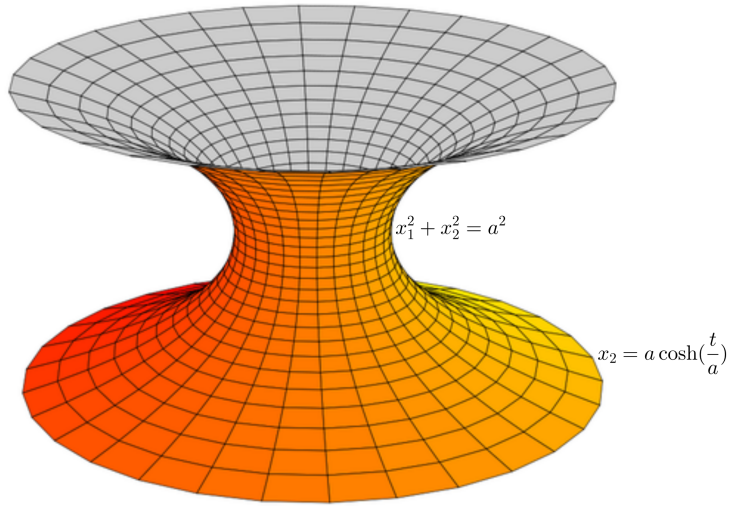


Figura 2: O catenóide de raio $a > 0$. Fonte: [16]. Adaptado.

Definição 5 A métrica induzida em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ por uma superfície parametrizada $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é definida por

$$d_X(p, q) = \inf \left\{ \mathcal{L}(\alpha) = \int_0^1 \|(X \circ \alpha)'(u)\| du ; \alpha \text{ regular ligando } p \text{ à } q \right\}, \quad \forall p, q \in \Omega.$$

Dizemos que X é **completa** quando (Ω, d_X) for um espaço métrico completo.

A seguir, apresentamos uma alternativa de verificar quando uma superfície parametrizada é completa, mas antes considere a definição.

Definição 6 Uma curva parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano $\beta : [0, b) \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$ é chamada **curva divergente**, quando para cada compacto $K \subset \Omega$, existe $t_0 \in [0, b)$, tal que $\beta(t) \notin K$, para todo $t > t_0$.

Proposição 7 Seja $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada. Então toda curva $\beta : [0, b) \rightarrow \Omega$ divergente tem comprimento infinito, isto é,

$$\mathcal{L}(\beta) = \int_0^b \|(X \circ \beta)'(t)\| dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_0^x \|(X \circ \beta)'(t)\| dt = +\infty$$

se e somente se, X é completa.

A prova da Proposição 7, pode ser encontrada em [10], página 170.

Definição 8 (Sup. Parametrizada Própria) Dizemos que uma superfície parametrizada $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é **própria** quando $X^{-1}(K)$ é compacto em Ω para todo compacto K em \mathbb{R}^3 .

Nesse texto, dizemos que uma sequência $(p_n)_n$ em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *diverge (ou diverge ao infinito)* se para todo compacto $K \subset \Omega$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $p_n \notin K$, para todo $n > n_0$.

Dito isto, uma outra definição equivalente de superfície parametrizada própria $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é quando para toda sequência $(p_n)_n$ divergente em Ω , então $(X(p_n))_n$ é uma sequência divergente em \mathbb{R}^3 .

Proposição 9 Se $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada própria, então X é completa.

Demonstração: Suponha por absurdo que X não é completa. Então, pela Proposição 7, existe uma curva

$$\beta : [0, b) \rightarrow \Omega$$

divergente com comprimento finito $r > 0$.

Considere a curva

$$\alpha = X \circ \beta : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Como a métrica em Ω é a induzida por X , então o comprimento de α também é r . Logo

$$\alpha(t) \in \overline{B}_r(\alpha(0, 0))$$

para todo $t \in [0, b)$.

Seja $(t_n)_n \subset [0, b)$ uma sequência estritamente crescente. Então

$$\alpha(t_n) \in \overline{B}_r(\alpha(0, 0))$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

A menos de passarmos a uma subsequência,

$$\alpha(t_n) \rightarrow p \in \mathbb{R}^3.$$

Como $K = \{\alpha(t_n); n \in \mathbb{N}\} \cup \{p\}$ é compacto e X é própria, então

$$X^{-1}(K) \text{ é compacto.}$$

Mas

$$\{\beta(t_n); n \in \mathbb{N}\} \subset X^{-1}(K). \quad (3)$$

Como β é divergente e $X^{-1}(K)$ é compacto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\beta(t_n) \notin X^{-1}(K)$$

para todo $n > n_0$, o que é uma contradição com (3).

Portanto, X é completa. □

Proposição 10 *Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^∞ e $X : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ superfície parametrizada. Então X é própria e, portanto, completa.*

Demonstração: Seja $((u_n, v_n))_n \subset \mathbb{R}^2$ uma sequência divergente. Então

$$r_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = +\infty$$

donde

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|X(u_n, v_n)\| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(u_n, v_n, f(u_n, v_n))\| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n^2 + v_n^2 + f(u_n, v_n)^2} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = +\infty. \end{aligned}$$

Portanto $(X(u_n, v_n))_n$ é uma sequência divergente em \mathbb{R}^3 , e por definição, X é própria.

Pela Proposição 9, X é completa. □

Exemplo 11 (*A Superfície de Enneper é completa*)

A superfície de Enneper é dada por

$$X : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(u - \frac{u^2}{3} + uv^2, -v - u^2v + \frac{v^2}{3}, u^2 - v^2 \right) \in \mathbb{R}^3.$$

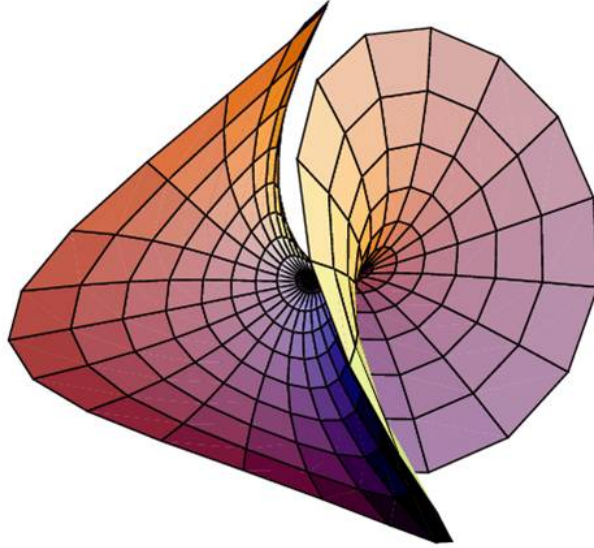


Figura 3: Superfície de Enneper. Fonte [71].

Suponhamos por absurdo que X não é própria.

Então existe sequência divergente $z_n = (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$, tal que $(X(z_n))_n$ não é divergente, ou seja, existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^3$ e uma subsequência $X(z_{n_k})$, tal que $X(z_{n_k}) \in K$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Portanto, podemos assumir que $X(z_n) \in K$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e conseqüentemente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X(z_n) = p \in K.$$

Passando a uma subsequência se necessário, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n| = +\infty.$$

Pois, se uma das coordenadas de z_n for limitada, então pela expressão de X teríamos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x(z_n)| = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |y(z_n)| = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |z(z_n)| = +\infty$$

donde $(X(z_n))_n$ seria divergente. O que é uma contradição, pois $X(z_n)$ é convergente.

Como toda sequência convergente é limitada e $\lim_{n \rightarrow +\infty} X(z_n) = p \in K$, então existe $r > 0$, tal que

$$\begin{aligned} x(z_n) = u_n \left[1 - \frac{u_n^2}{3} + v_n^2 \right] < r, \quad y(z_n) = v_n \left[-1 - u_n^2 + \frac{v_n^2}{3} \right] < r \\ z(z_n) = u_n^2 - v_n^2 < r. \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$. Então, da inequação de $x(z_n)$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| 1 - \frac{u_n^2}{3} + v_n^2 \right| = 0 \quad \therefore \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(v_n^2 - \frac{u_n^2}{3} \right) = -1. \quad (4)$$

Analogamente, como $\lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n| = +\infty$, da inequação de $y(z_n)$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| -1 - \frac{v_n^2}{3} + u_n^2 \right| = 0 \quad \therefore \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n^2 - 3u_n^2) \rightarrow -3$$

Usando (4) temos

$$\begin{aligned} 0 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8u_n^2}{3} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(v_n - \frac{u_n^2}{3} \right) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8u_n^2}{3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(v_n - \frac{u_n^2}{3} - \frac{8u_n^2}{3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(v_n - \frac{9u_n^2}{3} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - 3u_n^2) = -3 \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8u_n^2}{3} = 3 \quad \therefore \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = \frac{3}{4}$$

o que é uma contradição, pois $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$.

Portanto, X é própria, e pela Proposição 10, X é completa. ◇

Definição 12 (Curvaturas) Considere a superfície parametrizada $X : (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ e defina as funções

$$E := \langle X_u, X_u \rangle, \quad F := \langle X_u, X_v \rangle, \quad G := \langle X_v, X_v \rangle$$

chamados **coeficientes da primeira forma fundamental** e

$$e := \langle X_{uu}, N \rangle, \quad f := \langle X_{uv}, N \rangle, \quad g := \langle X_{vv}, N \rangle$$

chamados **coeficientes da segunda forma fundamental**.

A *curvatura média*, a *curvatura gaussiana* e *vetor curvatura média* de X são definidos, respectivamente, por

$$H := \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2Ff}{EG - F^2}, \quad K := \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad \vec{H} := HN.$$

Observação 13 *É de simples verificação que*

$$EG - F^2 = \|X_u \wedge X_v\|^2$$

$$e = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad f = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad g = \frac{\det(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

A seguir, apresentamos uma outra maneira de definir a curvatura média e a curvatura gaussiana através das curvaturas principais.

Mas antes, sejam $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada, $p \in \Omega$ e $v \in T_p X$ unitário. Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Omega$ uma curva diferenciável ppca, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. A *curvatura normal* no ponto $p \in \Omega$ na direção v é o produto interno canônico de $\alpha''(0)$ com N , ou seja,

$$k_N(v) = \langle \alpha''(0), N \rangle.$$

Como padrão, usando o fato de dX ser injetora em cada ponto, pode-se mostrar que k_n está bem definida.

Definição 14 (Curvaturas Principais) *Sejam $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada e $p \in \Omega$. Os valores*

$$\kappa_1 = \min_v k_N(v) \quad e \quad \kappa_2 = \max_v k_N(v)$$

*são chamados **curvaturas principais** de X no ponto p .*

A curvatura média e a curvatura gaussiana, também podem ser definidas, respectivamente, como

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \quad e \quad K = \kappa_1 \kappa_2.$$

A seguir, enunciamos um Teorema clássico da geometria.

Teorema 15 (Teorema Egregium de Gauss) *A curvatura gaussiana K é uma característica intrínseca da superfície.*

Uma prova para o Teorema acima, pode ser encontrada em [9], Capítulo 4.

Estamos agora prontos para definir quando uma superfície parametrizada é de curvatura média constante nula e não nula, objetos de estudo importantes nesse trabalho.

Definição 16 Dizemos que uma superfície parametrizada $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é **mínima** quando sua curvatura média é identicamente nula, ou seja,

$$H(u, v) = 0, \text{ para todo } (u, v) \in \Omega.$$

Quando H é constante (não nula) dizemos que X é de **curvatura média constante**.

A seguir damos o nosso primeiro exemplo de uma superfície mínima, o plano.

Exemplo 17 (Plano) O plano pode ser dado pela superfície parametrizada $X : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3$, onde $f : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto au + bv + c \in \mathbb{R}$ é uma função diferenciável com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$. Temos

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = \langle N, (0, 0, 0) \rangle = 0, \quad f = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, (0, 0, 0) \rangle = 0$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle = \langle N, (0, 0, 0) \rangle = 0.$$

Logo

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2Ff}{EG - F^2} = 0.$$

Portanto, o plano é uma superfície mínima.

◇

O próximo resultado nos diz que o plano é a única superfície mínima que é gráfico de uma função definida em todo o plano.

Teorema 18 (Bernstein) Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ e $X : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima, então X é um plano.

Esse resultado é provado no Corolário 64, e uma outra demonstração é dada no Corolário 72.

Exemplo 19 *O catenóide visto no Exemplo 4 é uma superfície parametrizada mínima, como verificamos abaixo.*

Segue de (2)

$$E = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = a^2 \cosh^2 \left(\frac{t}{a} \right) \sen^2 \theta + a^2 \cosh^2 \left(\frac{t}{a} \right) \cos^2 \theta = a^2 \cosh^2 \left(\frac{t}{a} \right)$$

$$F = \langle X_\theta, X_t \rangle = -a^2 \cosh s \sinh s \sen \theta \cos \theta + a^2 \cosh s \sinh s \cos \theta \sen \theta = 0$$

$$G = \langle X_t, X_t \rangle = a^2 \sinh^2 \left(\frac{t}{a} \right) \cos^2 \theta + a^2 \sinh^2 \left(\frac{t}{a} \right) \sen^2 \theta + 1 = a^2 \sinh^2 \left(\frac{t}{a} \right) + 1 = a^2 \cosh^2 \left(\frac{t}{a} \right).$$

As derivadas parciais de segunda ordem de X são dadas por

$$X_{\theta\theta} = \left(-a \cosh \left(\frac{t}{a} \right) \cos \theta, -a \cosh \left(\frac{t}{a} \right) \sen \theta, 0 \right)$$

$$X_{tt} = \left(\cosh \left(\frac{t}{a} \right) \cos \theta, \cosh \left(\frac{t}{a} \right) \sen \theta, 0 \right)$$

$$X_{\theta t} = \left(-\sinh \left(\frac{t}{a} \right) \sen \theta, \sinh \left(\frac{t}{a} \right) \cos \theta, 0 \right).$$

Além disso,

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{a^2 \cosh^2 \left(\frac{t}{a} \right) a^2 \cosh^2 \left(\frac{t}{a} \right)} = a^2 \cosh^2 \left(\frac{t}{a} \right)$$

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{a^2 \cosh^2 \left(\frac{t}{a} \right)} \det \begin{pmatrix} -a \cosh \left(\frac{t}{a} \right) \sen \theta & a \cosh \left(\frac{t}{a} \right) \cos \theta & 0 \\ \sinh \left(\frac{t}{a} \right) \cos \theta & \sinh \left(\frac{t}{a} \right) \sen \theta & 1 \\ -a \cosh \left(\frac{t}{a} \right) \cos \theta & -a \cosh \left(\frac{t}{a} \right) \sen \theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 \cosh^2 \left(\frac{t}{a} \right)} \left(-a^2 \cosh^2 \left(\frac{t}{a} \right) \cos^2 \theta - a^2 \cosh^2 \left(\frac{t}{a} \right) \sen^2 \theta \right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Como $X_{\theta\theta} = -X_{tt}$, então $g = 1$.

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{a^2 \cosh^2 \left(\frac{t}{a} \right)} \det \begin{pmatrix} -a \cosh \left(\frac{t}{a} \right) \sen \theta & a \cosh \left(\frac{t}{a} \right) \cos \theta & 0 \\ a \sinh \left(\frac{t}{a} \right) \cos \theta & a \sinh \left(\frac{t}{a} \right) \sen \theta & 1 \\ -a \sinh \left(\frac{t}{a} \right) \sen \theta & a \sinh \left(\frac{t}{a} \right) \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 \cosh^2 \left(\frac{t}{a} \right)} 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2Ff}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{(-1)a^2 \cosh^2\left(\frac{t}{a}\right) + (1)a^2 \cosh^2\left(\frac{t}{a}\right)}{a^4 \cosh^4\left(\frac{t}{a}\right)} = 0.$$

◇

A Proposição abaixo, devido a Euler provado no século XVIII, nos diz que uma superfície de revolução mínima é um pedaço de plano ou um pedaço de catenóide.

Proposição 20 *Se $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima de revolução não plana no \mathbb{R}^3 , então X é um catenóide ou um pedaço dele.*

Demonstração: Vamos apresentar a prova no caso em que a geratriz é um gráfico de uma função real. O caso geral segue deste.

Neste caso, X é da forma

$$X(\theta, t) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, t)$$

para todo $(\theta, t) \in \Omega$, onde $C : t \in (a, b) \in \mathbb{R} \rightarrow (0, f(t), t)$ é a curva regular que estamos girando em torno do eixo OZ . Então

$$X_\theta = (-f(t) \sin \theta, f(t) \cos \theta, 0) \quad e \quad X_t = (f'(t) \cos \theta, f'(t) \sin \theta, 1)$$

$$E = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = f(t)^2 \sin^2 \theta + f(t)^2 \cos^2 \theta = f(t)^2$$

$$F = \langle X_\theta, X_t \rangle = -f(t) \sin \theta f'(t) \cos \theta + f(t) \cos \theta f'(t) \sin \theta = 0$$

$$G = \langle X_t, X_t \rangle = f'(t)^2 \cos^2 \theta + f'(t)^2 \sin^2 \theta + 1 = 1 + f'(t)^2$$

$$\sqrt{EG - F^2} = f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

$$X_{\theta\theta} = (-f(t) \cos \theta, -f(t) \sin \theta, 0)$$

$$X_{tt} = (f''(t) \cos \theta, f''(t) \sin \theta, 0)$$

$$X_{\theta t} = (-f'(t) \sin \theta, f'(t) \cos \theta, 0)$$

Então

$$\begin{aligned}
e &= \frac{1}{f(t) \sqrt{(1+f(t)^2)}} \det \begin{pmatrix} -f(t) \operatorname{sen} \theta & f(t) \operatorname{cos} \theta & 0 \\ f'(t) \operatorname{cos} \theta & f'(t) \operatorname{sen} \theta & 1 \\ -f(t) \operatorname{cos} \theta & -f(t) \operatorname{sen} \theta & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-\left(f(t)^2 \operatorname{sen}^2 \theta + f(t)^2 \operatorname{cos}^2 \theta\right)}{f(t) \sqrt{(1+f(t)^2)}} \\
&= -\frac{f(t)^2}{f(t) \sqrt{(1+f(t)^2)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g &= \frac{1}{f(t) \sqrt{(1+f(t)^2)}} \det \begin{pmatrix} -f(t) \operatorname{sen} \theta & f(t) \operatorname{cos} \theta & 0 \\ f'(t) \operatorname{cos} \theta & f'(t) \operatorname{sen} \theta & 1 \\ f''(t) \operatorname{cos} \theta & f''(t) \operatorname{sen} \theta & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-\left(-f(t) f''(t) \operatorname{sen}^2 \theta - f(t) f''(t) \operatorname{cos}^2 \theta\right)}{f(t) \sqrt{(1+f(t)^2)}} \\
&= \frac{f(t) f''(t)}{f(t) \sqrt{(1+f(t)^2)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{f(t) \sqrt{(1+f(t)^2)}} \det \begin{pmatrix} -f(t) \operatorname{sen} \theta & f(t) \operatorname{cos} \theta & 0 \\ f'(t) \operatorname{cos} \theta & f'(t) \operatorname{sen} \theta & 1 \\ -f'(t) \operatorname{sen} \theta & f'(t) \operatorname{cos} \theta & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-\left(-f(t) f''(t) \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \theta + f(t) f''(t) \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \theta\right)}{f(t) \sqrt{(1+f(t)^2)}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Como a superfície é mínima, então

$$\left(1 + f'(t)^2\right) \frac{-f(t)^2}{f(t) \sqrt{(1+f(t)^2)}} + f(t)^2 \frac{f(t) f''(t)}{f(t) \sqrt{(1+f(t)^2)}} = 0 \quad (5)$$

logo

$$\frac{f(t)^2}{f(t) \sqrt{(1+f(t)^2)}} \left(-1 - f'(t)^2 + f(t) f''(t)\right) = 0.$$

Como $f(t) > 0$, então

$$-1 - f'(t)^2 + f(t) f''(t) = 0 \quad , \quad \text{donde} \quad f(t) f''(t) = 1 + f'(t)^2 > 0. \quad (6)$$

Isto implica que $f(t)$ e $f''(t)$ nunca se anulam, então podemos reescrever a equação (6) como

$$\frac{f''(t)}{1 + f'(t)^2} = \frac{1}{f(t)} \quad (7)$$

Multiplicando (7) por $f'(t)$, que se anula no máximo uma vez, pois é estritamente crescente já que $f''(t)$ não se anula, obtemos,

$$\frac{f'(t) f''(t)}{1 + f'(t)^2} = \frac{f'(t)}{f(t)} \quad (8)$$

ou, equivalente,

$$\frac{d\left(f'(t)^2 + 1\right)}{1 + f'(t)^2} = \frac{2d(f'(t))}{f(t)}$$

Integrando em ambos lados obtemos,

$$\ln\left(1 + f'(t)^2\right) = \ln\left(k^2 f(t)^2\right) \quad \therefore \quad 1 + f'(t)^2 = k^2 f(t)^2$$

para alguma constante $k \in \mathbb{R}$.

Escolhamos k , tal que $k^2 f(t)^2 > 1$, então

$$f'(t) = \sqrt{k^2 f(t)^2 - 1}. \quad (9)$$

donde

$$k f'(t) = k \sqrt{k^2 f(t)^2 - 1} \quad \therefore \quad \frac{k f'(t)}{\sqrt{k^2 f(t)^2 - 1}} = k$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{(k f(t))'}{\sqrt{k^2 f(t)^2 - 1}} = k,$$

Integrando novamente em ambos lados, obtemos

$$\cosh^{-1}(k f(t)) = kt + c,$$

ou seja,

$$f(t) = \frac{1}{k} \cosh(kt + c)$$

que é uma catenária como vimos no Exemplo (4).

Portanto, as soluções de (5) é uma família de catenárias. \square

O Teorema a seguir apresenta uma definição alternativa de uma superfície mínima para o caso em que a imagem de X é um gráfico de função diferenciável.

Teorema 21 (EDP das Superfícies Mínimas) *Seja $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação cuja imagem é o gráfico de uma função diferenciável $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então X é mínima, se e somente se*

$$(1 + f_v^2) f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2) f_{vv} \equiv 0. \quad (10)$$

Demonstração: Cálculos simples nos dão

$$\begin{aligned} E &= 1 + f_u^2 & e &= f_{uu} \\ F &= f_u f_v & f &= f_{uv} \\ G &= 1 + f_v^2 & g &= f_{vv} \end{aligned}$$

Agora,

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2Ff}{EG - F^2} = 0 \quad \therefore \quad eG + gE - 2Ff = 0.$$

donde

$$H = 0 \quad \therefore \quad (1 + f_v^2) f_{uu} + (1 + f_u^2) f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv} = 0.$$

\square

A seguir, apresentamos mais exemplos de superfícies mínimas.

Exemplo 22 (Helicóide)

O helicóide é dado por

$$X : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (cu \cos v, c \operatorname{sen} v, cv) \in \mathbb{R}^3$$

onde c é uma constante que indica o quanto o helicóide sobe entre duas folhas.

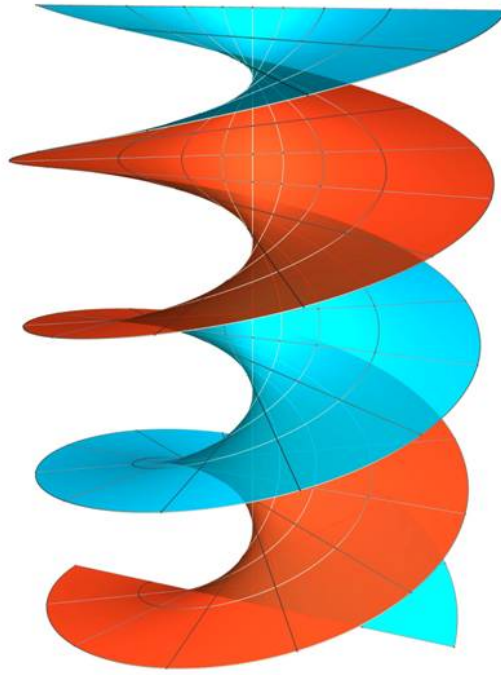


Figura 4: Helicoide. Fonte [72].

É de simples verificação que o helicóide é invariante pelo grupo das translações Γ gerado pelo vetor $(0, 0, 2\pi)$, e portanto, é suficiente estudar a restrição

$$X|_{\mathbb{R} \times [\lambda, \lambda + 2\pi]}$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supondo que $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $v \neq 0$, temos

$$\frac{x_2(u, v)}{x_3(u, v)} = \tan u$$

donde

$$x_3 = \arctan \frac{x_2}{x_1}$$

e, portanto, o helicóide é gráfico da função (no plano YZ)

$$f(u, v) = c \arctan \frac{v}{u}$$

para todo $(u, v) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}^$.*

Podemos ver que a função f acima é solução da EDP (10)

$$\begin{aligned} f_u &= \frac{-cv}{u^2+v^2} & f_{uu} &= \frac{2cuv}{(u^2+v^2)^2} \\ f_v &= \frac{cu}{u^2+v^2} & f_{uv} &= \frac{c(v^2-u^2)}{(u^2+v^2)^2} \\ & & f_{vv} &= \frac{-2cuv}{(u^2+v^2)^2} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} & (1 + f_v^2) f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2) f_{vv} \\ = & \left(1 + \left(\frac{cu}{u^2+v^2} \right)^2 \right) \frac{2cuv}{(u^2+v^2)^2} - 2 \frac{-cv}{u^2+v^2} \frac{cu}{u^2+v^2} \frac{c(v^2-u^2)}{(u^2+v^2)^2} \\ & + \left(1 + \left(\frac{-cv}{u^2+v^2} \right)^2 \right) \frac{-2cuv}{(u^2+v^2)^2} \\ = & \frac{2cuv}{(u^2+v^2)^2} \left(\frac{(cu)^2 + (u^2+v^2)^2 - (cv)^2 - (u^2+v^2)^2}{(u^2+v^2)^2} \right) - 2 \frac{-cv}{u^2+v^2} \frac{cu}{u^2+v^2} \frac{c(v^2-u^2)}{(u^2+v^2)^2} \\ = & \frac{2cuv}{(u^2+v^2)^2} \left(\frac{(cu)^2 - (cv)^2}{(u^2+v^2)^2} \right) + \frac{2c^2uv(v^2-u^2)}{(u^2+v^2)^4} \\ = & -\frac{2c^3uv(v^2-u^2)}{(u^2+v^2)^4} + \frac{2c^2uv(v^2-u^2)}{(u^2+v^2)^4} = 0 \end{aligned}$$

donde o helicóide é uma superfície mínima.

◇

Antes de continuarmos, lembremos a definição de superfície regrada. Uma família (diferenciável) a um parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$ é uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um ponto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ e um vetor $w(t) \in \mathbb{R}^3$, $w(t) \neq 0$, tais que ambos $\alpha(t)$ e $w(t)$ sejam diferenciáveis em $t \in I$. Para cada $t \in I$, a reta L_t passando por $\alpha(t)$ e que é gerada por $w(t)$ é chamada a reta da família em t . Assim, dada uma família um parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$, a superfície parametrizada

$$X : (t, v) \in I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \alpha(t) + vw(t) \in \mathbb{R}^3$$

é chamada *superfície regrada* gerada pela família $\{\alpha(t), w(t)\}$.

O próximo resultado nos diz que o helicóide é a única superfície mínima regrada não plana.

Proposição 23 *As únicas superfícies mínimas regradas são o plano (ou pedaço) e o helicóide (ou pedaço).*

A prova para essa Proposição acima pode ser feita usando a mesma ideia para demonstrar a Proposição 20.

Exemplo 24 (Superfície de Scherk)

Sejam $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais de classe C^∞ , e tome a superfície parametrizada $X : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3$, onde $f : (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto g(u) + h(v) \in \mathbb{R}$.

Note que

$$f_u = g', \quad f_v = h', \quad f_{uu} = g'', \quad f_{vv} = h'', \quad f_{uv} = 0.$$

Supondo que X é mínima, temos que f verifica a EDP (10)

$$\left(1 + (h'_v)^2\right) g'' + \left(1 + (g'_u)^2\right) h'' \equiv 0. \quad (11)$$

Se $h'' \equiv 0$ e $g'' \equiv 0$, então f é da forma

$$f(u, v) = au + bv + c$$

ou seja, X é um plano.

Suponha que $h'' \neq 0$ ou $g'' \neq 0$. Podemos escrever (11) na forma

$$\frac{g''(u)}{\left(1 + (g'_u(u))^2\right)} = -\frac{h''(v)}{\left(1 + (h'_v(v))^2\right)}.$$

Como o lado esquerdo só depende de u e o lado direito só depende de v , então ambos os lados devem ser iguais a uma constante k , ou seja,

$$\frac{g''(u)}{\left(1 + (g'_u(u))^2\right)} = k \quad (12)$$

$$-\frac{h''(v)}{\left(1 + (h'_v(v))^2\right)} = k. \quad (13)$$

Integrando (12), obtemos

$$\arctan g' = au + c$$

donde

$$g' = \tan (au + c) \quad (14)$$

onde $-\frac{\pi}{2} < au + b < \frac{\pi}{2}$.

Integrando (14), temos

$$g = -\log (\cos (au + c)) + C$$

onde $-\frac{\pi}{2} \frac{1}{a} - \frac{c}{a} < u < \frac{\pi}{2} \frac{1}{a} - \frac{c}{a}$, com C constante. Analogamente, obtemos a solução de (13)

$$h = \log (\cos (av + d)) + D$$

onde $-\frac{\pi}{2} \frac{1}{a} - \frac{d}{a} < v < \frac{\pi}{2} \frac{1}{a} - \frac{d}{a}$, com D constante.

Assim, temos

$$f(u, v) = \log \frac{\cos (av + d)}{\cos (au + c)} + E$$

onde E é uma constante e $(u, v) \in \left(-\frac{\pi}{2} \frac{1}{a} - \frac{c}{a}, \frac{\pi}{2} \frac{1}{a} - \frac{c}{a}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2} \frac{1}{a} - \frac{d}{a}, \frac{\pi}{2} \frac{1}{a} - \frac{d}{a}\right)$.

Se $a = 0$, temos $g'' = h''$. Suponhamos então que $a \neq 0$. Note que $-\frac{b}{a}$ e $-\frac{c}{a}$ são translações horizontais e verticais, respectivamente, o valor $\frac{1}{a}$ corresponde à largura dos quadrados e a constante E é a altura desta superfície no centro dos quadrados. Vamos supor que $a = 1$ e $c = d = E = 0$. Assim, obtemos

$$f(u, v) = \log \frac{\cos v}{\cos u} \quad (15)$$

onde $-\frac{\pi}{2} < u, v < \frac{\pi}{2}$.

Para analisar o comportamento de f neste quadrado é fácil ver que

$$\lim_{u \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(u, v) = \lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(u, v) = -\infty$$

$$\lim_{v \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(u, v) = \lim_{v \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(u, v) = +\infty.$$

Vemos que a Superfície de Scherk globalmente não é um gráfico de função. Mas se $-\frac{\pi}{2} < u, v < \frac{3\pi}{2}$, então $\frac{\cos v}{\cos u} > 0$ e, portanto, a função f definida em (15) fica bem definida neste quadrado também, e de forma geral, nos quadrados

$$\Omega_{k,l} := \left\{ (u, v); |u - k\pi| < \frac{\pi}{2}, |v - l\pi| < \frac{\pi}{2}, k + l \text{ é par} \right\}.$$

Assim, temos a função f definida sobre

$$\bigcup_{k,l \in \mathbb{Z}} \Omega_{k,l}.$$

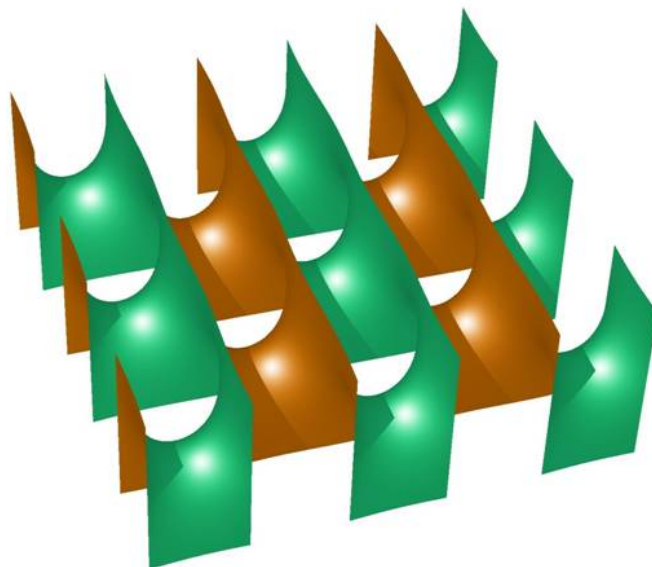


Figura 5: Superfície de Scherk. Fonte [73].

◇

Pelo Exemplo anterior, temos o seguinte resultado.

Proposição 25 *Sejam $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais de classe C^∞ . Qualquer superfície mínima na forma $X : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u, v, g(u) + h(v)) \in \mathbb{R}^3$ é um plano ou a superfície de Scherk.*

Exemplo 26 *A superfície de Enneper vista no Exemplo 11 é uma superfície mínima*

$$X : (u, v) \in \mathbb{C} \mapsto \left(u - \frac{u^2}{3} + uv^2, -v - u^2v + \frac{v^2}{3}, u^2 - v^2 \right) \in \mathbb{R}^3.$$

De fato,

$$\frac{\partial X}{\partial u} = (1 - u^2 + v^2, -2uv, 2u) \quad e \quad \frac{\partial X}{\partial v} = (2uv, -1 - u^2 + v^2, -2v).$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \left(2u(u^2 + v^2 + 1), 2v(u^2 + v^2 + 1), (u^2 + v^2)^2 - 1 \right) \\ &= \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = (-2u, -2v, 2), \quad \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = (2u, 2v, -2)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = (2v, -2u, 0)$$

Por uma simples verificação, temos

$$E = (u^2 + v^2 + 1)^2, \quad G = (u^2 + v^2 + 1)^2, \quad F = 0$$

$$e = -2, \quad g = 2 \quad e \quad f = 0$$

logo

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2Ff}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{-2(u^2 + v^2 + 1)^2 + 2(u^2 + v^2 + 1)^2 - 0}{(u^2 + v^2 + 1)^2 (u^2 + v^2 + 1)^2 - 0} = 0$$

donde a Superfície de Enneper é mínima.

2.2 Superfícies Abstratas

Na última seção vimos o conceito de superfícies parametrizadas, onde o domínio da aplicação era um aberto Ω do \mathbb{R}^2 . A seguir generalizamos o domínio Ω para uma superfície abstrata.

Definição 27 Uma **superfície abstrata** de dimensão 2 é um conjunto S e uma família de aplicações bijetoras $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de abertos U_α de \mathbb{R}^2 em S , tais que:

1. $\cup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha) = S$.
2. Para todo par (α, β) , com $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\varphi_\alpha^{-1}(W)$ e $\varphi_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^2 e as aplicações $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ são diferenciáveis.
3. A família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).

Pode-se provar que uma estrutura diferenciável em um conjunto S induz de uma maneira natural uma topologia em S . Basta definir que $A \subset S$ é um aberto de S se $\varphi_\alpha^{-1}(A \cap \varphi_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto de \mathbb{R}^2 para todo α . O par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ com $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ é chamado *carta* de S em p . Uma família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ satisfazendo (1) e (2) é chamada *estrutura diferenciável* em S . Em relação à condição (3), dada uma estrutura diferenciável em S , podemos completá-la em uma máxima, agregando a ela todas as cartas que junto com alguma carta da estrutura satisfazem a condição (2).

Quando não for mencionado o contrário, a superfície abstrata S será sempre conexa.

Definição 28 *Seja S uma superfície abstrata. Dizemos que uma aplicação $X : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em um ponto $p \in S$ quando*

$$X \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável, para alguma carta (U, φ) de S com $p \in U$.

Decorre da condição (2) da Definição 27 que a definição acima é independente da escolha de cartas.

Definição 29 *Seja S uma superfície abstrata. Dizemos que uma aplicação diferenciável $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma **imersão** (de S em \mathbb{R}^3) quando*

$$X \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

é uma superfície parametrizada, para toda carta (U, φ) de S .

Uma **superfície imersa** é um par (S, X) , onde S é uma superfície abstrata e $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão.

Dizemos que X é **própria** quando $X^{-1}(K)$ é compacto em S para todo compacto K em \mathbb{R}^3 .

A seguir apresentamos a noção de espaço tangente a uma superfície abstrata.

Definição 30 (Plano Tangente) *Considere S uma variedade abstrata, $p \in S$ e $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$. Seja \mathcal{D} o conjunto das funções de S diferenciáveis em p . Um **vetor tangente** em p é definido pela função*

$$\alpha'(0) : f \in \mathcal{D} \mapsto \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \in \mathbb{R}.$$

O conjunto de todos os vetores tangentes a S em p será denotado por $T_p S$.

Observação 31 *Quando não houver risco de confusão escreveremos apenas S ao invés de (S, X) . Além disso, usaremos a identificação usual $T_p S \approx dX_p(T_p S)$ (isomorfismo).*

Definimos agora o conceito de completude para superfícies.

Definição 32 A métrica induzida por uma imersão $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ em S é definida por

$$d_X(p, q) = \inf \left\{ \mathcal{L}(\alpha) = \int_0^1 \|(X \circ \alpha)'(u)\| du ; \alpha \text{ regular ligando } p \text{ à } q \right\}, \quad \forall p, q \in S.$$

Dizemos que X é **completa** quando (S, d_X) for um espaço métrico completo.

Todas as superfícies parametrizadas que vimos na seção anterior, são exemplos de superfícies imersas completas.

Utilizando a curvatura média e a curvatura gaussiana de uma superfície parametrizada, definimos tais curvaturas para uma superfície imersa.

Definição 33 Considere uma superfície imersa (S, X) e um ponto $p \in S$. A **curvatura média** e a **curvatura gaussiana** de X em p é, respectivamente, a curvatura média e a curvatura gaussiana da superfície parametrizada

$$X \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

no ponto $\varphi^{-1}(p)$, onde (U, φ) é uma carta de S em p .

Dizemos que uma superfície imersa (S, X) é **mínima** quando $H \equiv 0$.

Como de costume, pode-se provar que a definição acima é independente da escolha de cartas.

Definição 34 (Superfície Regular) Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é chamado **superfície regular**, quando para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, tal que

1. X é diferenciável.
2. X é um homeomorfismo.
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora.

Lembremos que se $p \in S$ é tal que $\kappa_1 = \kappa_2$, então p é chamado ponto *umbílico*.

Proposição 35 Se todos os pontos de uma superfície conexa S são umbílicos, então S está contida em um plano ou em uma esfera.

Para uma prova, vide [9], Capítulo 3.

A seguir, apresentamos o conceito de Superfície de Riemann.

Definição 36 *Seja S uma superfície abstrata conexa. Uma carta complexa sobre S é um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ de subconjuntos abertos $U, V \subset \mathbb{C}$. Duas cartas $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ complexa são ditas **holomorficamente compatíveis** quando*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

é um biholomorfismo.

Um atlas complexo de S é um sistema $\mathcal{U} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i, i \in I\}$ de cartas que são holomorficamente compatíveis e que cobrem S , i.e., $\bigcup U_i = S$. Dois atlas $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ são chamados **analiticamente equivalentes** se toda carta de \mathcal{U} é holomorficamente compatível com cada carta de \mathcal{U}' . Uma **estrutura complexa** sobre S é uma classe da família de todos os atlas analiticamente equivalentes.

Definição 37 (Superfície de Riemann) *Uma superfície de Riemann é um par (S, Σ) onde S é uma superfície abstrata conexa e Σ é uma estrutura complexa.*

2.3 Princípio do Máximo

Descobrir informações globais de uma superfície a partir de uma informação local é um dos objetivos centrais dessa seção e, para isso começamos com a seguinte definição.

Definição 38 (Operador Linear Elíptico de Segunda Ordem) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio. Considere a aplicação $L : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ dada por*

$$Lu(x) := \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) u_{ij}(x) + \sum_{i,j=1}^2 b_i(x) u_i(x) + c(x) u(x) \quad (16)$$

com coeficientes $a_{ij} = a_{ji}, b_i, c \in C^0(\Omega)$ e termo linear $c \in C^0(\Omega)$. Dizemos que L é um **operador linear elíptico de segunda ordem** em Ω quando a matriz $(a_{ij}(x))_{i,j=1,2}$ é positiva definida para todo $x \in \Omega$, isto é, se $\lambda(x)$ é seu o autovalor mínimo e $\Lambda(x)$ seu autovalor máximo, então

$$0 < \lambda(x) \|p\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) p_i p_j \leq \Lambda(x) \|p\|^2$$

para todo $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e $x \in \Omega$.

Outra forma equivalente de dizer que $(a_{ij}(x))_{i,j=1,2}$ é positiva definida, é quando seus autovalores são estritamente positivos.

Para demonstrar o Teorema do Máximo Interior, que diz respeito a unicidade de soluções de uma EDP (10), faremos agora o seguinte Lema técnico.

Lema 39 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domínio. Dadas $u, v \in C^2(\Omega)$ duas soluções da EDP (10), existe L operador linear elíptico de segunda ordem com coeficientes localmente limitados em Ω e sem termo linear, tal que a função diferença*

$$w := u - v$$

satisfaz

$$Lw \equiv 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Demonstração: Considere a aplicação $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(a, b, c, d, e) = (1 + b^2)c - 2abd + (1 + a^2)e.$$

Dizemos que uma função $f \in C^2(\Omega)$ é *solução* de F em Ω , quando

$$F(f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0), f_{11}(x_0, y_0), f_{12}(x_0, y_0), f_{22}(x_0, y_0)) = 0, \quad \forall (x_0, y_0) \in \Omega.$$

onde a notação de sub-índice indica derivadas parciais.

Como $u, v \in C^2(\Omega)$ são soluções da EDP (10) (Teorema **21**), então u e v também são soluções de F em Ω , donde

$$\begin{aligned} & F(u_1(x_0, y_0), u_2(x_0, y_0), u_{11}(x_0, y_0), u_{12}(x_0, y_0), u_{22}(x_0, y_0)) \\ & - F(v_1(x_0, y_0), v_2(x_0, y_0), v_{11}(x_0, y_0), v_{12}(x_0, y_0), v_{22}(x_0, y_0)) = 0 - 0 = 0, \quad \forall (x_0, y_0) \in \Omega. \end{aligned}$$

Considere os pontos

$$p := (u_1(x_0, y_0), u_2(x_0, y_0), u_{11}(x_0, y_0), u_{12}(x_0, y_0), u_{22}(x_0, y_0))$$

$$q := (v_1(x_0, y_0), v_2(x_0, y_0), v_{11}(x_0, y_0), v_{12}(x_0, y_0), v_{22}(x_0, y_0)).$$

Pelo Teorema do Valor Médio para várias variáveis nos pontos p e q , existe $\tau \in [0, 1]$, tal que

$$0 = \langle \nabla F((1 - \tau)p + \tau q), q - p \rangle$$

Usando a linearidade da derivada, temos

$$\begin{aligned} & \langle \nabla F((1 - \tau)p + \tau q), q - p \rangle \\ &= [1 + b^2(\alpha)] w_{11}(x_0, y_0) + [-2a(\alpha)b(\alpha)] w_{12}(x_0, y_0) + [1 + a^2(\alpha)] w_{22} \\ & \quad + [2a(\alpha)e(\alpha) - 2b(\alpha)d(\alpha)] w_1(x_0, y_0) + [2b(\alpha)c(\alpha) - 2a(\alpha)d(\alpha)] w_2(x_0, y_0) \end{aligned}$$

onde $\alpha := ((1 - \tau)p + \tau q)$.

Defina $L : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ por

$$\begin{aligned} L\tilde{w}(x_0, y_0) &= [1 + b^2(\alpha)] \tilde{w}_{11}(x_0, y_0) + [-2a(\alpha)b(\alpha)] \tilde{w}_{12}(x_0, y_0) + [1 + a^2(\alpha)] \tilde{w}_{22} \\ & \quad + [2a(\alpha)e(\alpha) - 2b(\alpha)d(\alpha)] \tilde{w}_1(x_0, y_0) + [2b(\alpha)c(\alpha) - 2a(\alpha)d(\alpha)] \tilde{w}_2(x_0, y_0) \end{aligned}$$

para todo $\tilde{w} \in C^2(\Omega)$ e $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Note que τ e α dependem de (x_0, y_0) , pois p e q dependem do ponto (x_0, y_0) , donde L está bem definido. Em particular, quando $\tilde{w} = w$, $Lw \equiv 0$ em Ω .

Observemos agora que a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 + b^2(\alpha) & -a(\alpha)b(\alpha) \\ -a(\alpha)b(\alpha) & 1 + a^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

tem autovalores estritamente positivos, a saber, $\lambda = 1$ e $\Lambda = 1 + a^2(\alpha) + b^2(\alpha)$, donde ela é positiva definida. E da expressão dos coeficientes de L , segue que $\frac{|b_i|}{\lambda}, \frac{\Lambda}{\lambda}$ são localmente limitados em $\Omega, i = 1, 2$. Portanto, existe um operador linear elíptico L nas condições do enunciado, tal que $Lw(x_0, y_0) \equiv 0$, para todo $(x_0, y_0) \in \Omega$. \square

A seguir, enunciamos o Teorema do Máximo Interior de Hopf que dá condições para que uma função $u \in C^2(\Omega)$ seja constante.

Teorema 40 (Princípio do Máximo Interior de Hopf) Seja L dada por (16) sem termo linear ($c = 0$) e suponha que $\frac{|b_i|}{\lambda}, \frac{\Lambda}{\lambda}$ são localmente limitados em $\Omega, i = 1, 2$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ é tal que $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge um máximo em um ponto interior de Ω , então u é constante.

Teorema 41 (Princípio do Máximo do Bordo de Hopf) Considere $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio limitado, $u : \bar{\Omega} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ função não constante de classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e L um operador linear elíptico de segunda ordem e Ω verificando

$$Lu \equiv 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Suponha que os coeficientes de L satisfazem $c = 0$ e $\frac{|b_i|}{\lambda}, \frac{\Lambda}{\lambda}$ são localmente limitados em $\Omega, i = 1, 2$, e seja $p \in \partial\Omega$ um ponto que também está no bordo de uma bola aberta $B \subset \Omega$.

Se a derivada $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ existe em p (onde \vec{n} é o vetor normal unitário a B em p) e $u(p)$ é valor de máximo, então

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} > 0.$$

Para uma demonstração dos dois últimos Teoremas, vide [7], Capítulo 3.

Finalmente o Teorema do Máximo Interior.

Teorema 42 (Princípio do Máximo Interior) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domínio e $u, v \in C^2(\Omega)$ duas soluções da EDP (10). Se $v \geq u$ em Ω e $u(p) = v(p)$ em um ponto $p \in \Omega$, então $u \equiv v$.

Demonstração: Definindo a função diferença

$$w := v - u \text{ em } \Omega$$

segue do Lema (39) que existe L operador linear elíptico de segunda ordem, tal que

$$Lw \equiv 0 \text{ em } \Omega.$$

Observe que w atinge um máximo no ponto $p \in \Omega$, pois $w \leq 0$ e $w(p) = 0$. Pelo Princípio do Máximo Interior de Hopf (Teorema (40)),

$$w \text{ é constante}$$

donde

$$u \equiv v.$$

□

Teorema 43 *Considere $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio limitado cujo bordo é uma curva de classe C^1 , funções $u, w : \bar{\Omega} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e $X_1, X_2 : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ duas superfícies mínimas gráficos das funções u, w , respectivamente. Seja $p \in \partial\Omega$ e suponha que os espaços tangentes de X_1 e X_2 em p estejam bem definidos e verifiquem $T_p X_1 = T_p X_2$ e $T_p \partial X_1 = T_p \partial X_2$. Se $u(p) = w(p)$ e $u \geq w$ em Ω , então $u \equiv w$ em $\bar{\Omega}$ e $X_1(\bar{\Omega}) \equiv X_2(\bar{\Omega})$.*

Demonstração: Defina $v := w - u$ em $\bar{\Omega}$. Sabemos que $v \leq 0$ em $\bar{\Omega}$ e que $v(p) = 0$ é ponto de máximo no bordo. Seja \vec{n} a normal unitária a Ω em p que aponta para fora de Ω . Como $T_p X_1 = T_p X_2$ e $T_p \partial X_1 = T_p \partial X_2$, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \quad \therefore \quad \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = 0.$$

Pelo Lema (39), podemos aplicar o Princípio do Máximo do Bordo de Hopf (Teorema 41), donde $v \equiv 0$ em $\bar{\Omega}$, i.e., $u \equiv w$ e, portanto, $X_1(\bar{\Omega}) \equiv X_2(\bar{\Omega})$. □

Teorema 44 (Unicidade do Problema de Dirichlet) *Considere $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio limitado, $u, w : \bar{\Omega} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ duas soluções da EDP (10), ambas de classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Se $u|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega}$, então*

$$u \equiv w \quad \text{em } \bar{\Omega}.$$

Demonstração: Para $t \in \mathbb{R}$, seja $v_t : \bar{\Omega} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por

$$v_t(x, y) = u(x, y) - w(x, y) + t$$

onde $(x, y) \in \bar{\Omega}$.

Logo, v_t é de classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Como $\bar{\Omega}$ é compacto, as funções u, w e v_t atingem seus máximos e mínimos. Seja $p \in \bar{\Omega}$ um ponto de mínimo da função

$$v_0 = u - w.$$

Para $t_0 = -v_0(p)$ temos

$$v_{t_0}(x, y) \geq v_{t_0}(p) = 0$$

para todo $(x, y) \in \bar{\Omega}$.

Vamos analisar os casos $p \in \Omega$ e $p \in \partial\Omega$ separadamente.

Seja $p \in \Omega$, então

$$v_{t_0} \geq 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad v_{t_0}(p) = 0.$$

Pelo Lema (39), podemos aplicar o Princípio do Máximo do Bordo de Hopf (Teorema 41) em v_{t_0} e obter

$$v_{t_0} \equiv 0 \quad \text{em } \bar{\Omega}.$$

Como $u|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega}$, segue

$$v_{t_0}|_{\partial\Omega} \equiv t_0$$

donde,

$$t_0 = 0 \quad \text{e} \quad u \equiv w \quad \text{em } \bar{\Omega}.$$

Suponhamo agora que $p \in \partial\Omega$. Como $u|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega}$, então $t_0 = 0$. Usando que

$$v_{t_0}(x, y) \geq 0$$

para todo $(x, y) \in \bar{\Omega}$, segue

$$u \geq w \quad \text{em } \bar{\Omega}.$$

Repetindo o mesmo argumento trocando u e w entre si, consegeguimos $w \geq u$ em $\bar{\Omega}$, donde

$$u \equiv w \quad \text{em } \bar{\Omega}.$$

□

Capítulo III

REPRESENTAÇÃO DE ENNEPER-WEIERSTRASS

Na primeira seção deste Capítulo, apresentamos o conceito de aplicações conforme e em seguida mostrarmos que, sob certas condições, toda superfície mínima conforme pode ser representada por uma função holomorfa e uma função meromorfa, resultado conhecido como Teorema da Representação de Enneper-Weierstrass. Na segunda seção mostramos que qualquer superfície mínima completa é um plano ou a imagem da aplicação de Gauss N é densa em \mathbb{S}^2 , resultado conhecido como Teorema de Osserman. Na terceira seção expressamos a curvatura Gaussiana de uma superfície em termos das funções da Representação de Enneper-Weierstrass. Fechamos o Capítulo (seções 4 e 5) com as superfícies mínimas conjugadas e associadas.

3.1 Preliminares

Um dos conceitos importantes do nosso trabalho é o de superfícies conforme e que definimos agora.

Definição 45 Dizemos que uma superfície parametrizada $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é **conforme** ou **isotérmica** quando existe uma função diferenciável $\lambda : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que

$$E = G = \lambda^2 \quad e \quad F = 0.$$

Neste caso, dizemos que X é λ -conforme.

O significado geométrico da Definição 45 é que ângulos (mas não necessariamente comprimentos) são preservados por aplicações conformes. Ao longo do texto, veremos que os cálculos são bastante simplificados quando X é uma superfície parametrizada conforme.

Observação 46 Observe que se X é conforme, então a curvatura média é dada por

$$H = \frac{e + g}{2\lambda^2}. \quad (17)$$

Nesse texto, o *laplaciano* de uma superfície parametrizada $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é definido por

$$\Delta X := X_{uu} + X_{vv} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3). \quad (18)$$

Dizemos que X é *harmônica* quando

$$\Delta X = (0, 0, 0)$$

ou seja, quando cada uma de suas funções coordenadas $x_k : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ forem harmônicas, $k = 1, 2, 3$. Assim, temos a seguinte Proposição.

Proposição 47 Se $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada λ -conforme, então

$$\Delta X = 2\lambda^2 \vec{H}$$

onde $\vec{H} = HN$ é o vetor curvatura média de X .

Demonstração: Usando (17) e o fato de que N é a normal unitária de X , então

$$\langle \Delta X, N \rangle = \langle X_{uu} + X_{vv}, N \rangle = e + g = 2\lambda^2 H. \quad (19)$$

Como X é conforme, então

$$\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle \quad e \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0. \quad (20)$$

Derivando a primeira equação de (20) em relação a u e a segunda em relação a v temos, respectivamente

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle X_{12}, X_2 \rangle \quad e \quad \langle X_{vu}, X_v \rangle = -\langle X_u, X_{vv} \rangle$$

donde

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = -\langle X_u, X_{vv} \rangle. \quad (21)$$

Usando a equação (21) e (18), obtemos

$$\langle \Delta X, X_u \rangle = \langle X_{uu} + X_{vv}, X_u \rangle = 0.$$

Analogamente, mostramos que

$$\langle \Delta X, X_v \rangle = 0.$$

Portanto, $\Delta X_q \in T_q X^\perp$ para todo $q \in \Omega$.

Usando (19) e o fato de que ΔX só tem componente normal à X , então

$$\Delta X = 2\lambda^2 H N = 2\lambda^2 \vec{H}.$$

□

Como o vetor curvatura $\vec{H} = H N$ é identicamente nulo se, e somente se, $H \equiv 0$, segue o Corolário.

Corolário 48 *Uma superfície parametrizada λ -conforme $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é mínima se, e somente se, X é harmônica.*

Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio. Usando a regularidade de funções harmônicas, obtemos o Corolário.

Corolário 49 *Se $X, Y : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ são superfícies mínimas conformes e existe um domínio $U \subset \Omega$, tal que $X|_U = Y|_U$, então $X = Y$.*

A seguir enunciamos o Teorema de Chern, que garante a existência local de uma parametrização conforme em uma superfície de Riemann.

Teorema 50 *Seja $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima. Então cada ponto de Ω possui uma vizinhança que admite uma reparametização em parâmetros conformes.*

Para uma demonstração do Teorema acima vide [70].

Quando o domínio da parametrização Ω for simplesmente conexo, podemos assumir que a parametrização é conforme. Para mais detalhes, vide [12].

Para demonstrar o Teorema de Representação de Enneper-Weierstrass, precisaremos de uma sequência de Lemas técnicos que virão a seguir.

Lema 51 Seja $X : (u, v) \in \Omega \mapsto (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada. As funções $\phi_k : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$\phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (22)$$

satisfazem as seguintes propriedades:

1. ϕ_k é holomorfa se, e somente se, x_k é harmônica;
2. X é parametrização conforme se, e somente se, $\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 = 0$;
3. Se X é conforme, então $\sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 \neq 0$.

Demonstração: (1) Segue das relações de Cauchy-Riemann que ϕ_k é holomorfa se, e somente se,

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(-\frac{\partial x_k}{\partial v} \right) = -\frac{\partial^2 x_k}{\partial v^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x_k}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 x_k}{\partial u \partial v}$$

Portanto, ϕ_k é holomorfa se, e somente se, x_k é harmônica.

(2) O resultado segue direto da seguinte conta

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \phi_k^2 &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v} \right)^2 = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial x_k^2}{\partial u^2} - 2i \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} - \frac{\partial x_k^2}{\partial v^2} \right] \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k^2}{\partial u^2} - \sum_{k=1}^3 2i \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k^2}{\partial v^2} \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right), \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right) \right\rangle \\ &\quad - 2i \left\langle \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right), \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \right), \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \right\rangle \\ &= E - 2iF - G = (E - G) + i(2F). \end{aligned}$$

(3) Se X é λ -conforme, então

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u}^2 + \frac{\partial x_k}{\partial v}^2 \right) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial u}^2 + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial v}^2 = E + G = 2\lambda^2 > 0.$$

□

A partir de agora quando fizermos menção a integral complexa, estaremos usando a seguinte definição. Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ um caminho diferenciável com $z_0 := \gamma(a)$ e $z := \gamma(b)$. A *integral complexa* de f ao longo do caminho γ é definida por

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

No caso em que $\Omega \subset \mathbb{C}$ for um aberto simplesmente conexo e f for holomorfa, a integral

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta := \int_{\gamma} f(z) dz$$

está bem definida para todo caminho diferenciável γ com $z_0 := \gamma(a)$ e $z := \gamma(b)$.

Dito isso, temos o Teorema de Cauchy que diz que a função

$$F : z \in \Omega \mapsto \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \in \mathbb{C} \quad (23)$$

é uma primitiva de f em Ω .

Para uma demonstração do Teorema de Cauchy, vide [11].

Lema 52 *Dada uma superfície parametrizada mínima conforme $X : (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \in \mathbb{R}^3$, as funções $\phi_k : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, k = 1, 2, 3$ (definidas no Lema 51) são holomorfas e satisfazem*

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 = 0 \quad e \quad \sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 \neq 0. \quad (24)$$

Reciprocamente, dados um domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ e funções holomorfas $\phi_k : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, k = 1, 2, 3$ satisfazendo as equações em (24), existe uma superfície parametrizada mínima conforme $X : (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \in \mathbb{R}^3$, tal que

$$\phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v}.$$

Demonstração: Sendo X mínima conforme, então pelo Corolário 48, suas coordenadas $x_k : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, k = 1, 2, 3$ são harmônicas. Portanto, as funções $\phi_k : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, k = 1, 2, 3$ são holomorfas (Item 1 do Lema 51).

Usando que X é conforme, então

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k(z)^2 = 0 \quad e \quad \sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 \neq 0$$

(Item 2 e 3 do Lema 51).

Reciprocamente, sejam $\phi_k : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, k = 1, 2, 3$ funções holomorfas definidas sobre um domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ satisfazendo as equações em (24). Defina as funções $x_k : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$x_k(z) = \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta \right)$$

onde $z, z_0 \in \Omega, k = 1, 2, 3$.

Por (23), x_k está bem definida, $k = 1, 2, 3$.

Como $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um aberto simplesmente conexo e $\phi_k : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa, então ϕ_k admite uma primitiva em $\Omega, k = 1, 2, 3$, donde x_k está bem definida (pois a integral independe do caminho), $k = 1, 2, 3$.

Defina a aplicação $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned} \phi_k(z) &= \left[\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta \right) + i \operatorname{Im} \left(\int_{z_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta \right) \right]' \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta \right) + i \frac{\partial}{\partial u} \operatorname{Im} \left(\int_{z_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta \right) \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial u} \operatorname{Im} \left(\int_{z_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta \right) \quad (\text{definição de } x_k) \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial u}(z) - i \frac{\partial x_k}{\partial v}(z), \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Na última igualdade usamos: como ϕ_k é holomorfa, então vale Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial u} \operatorname{Im} \left(\int_{z_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta \right) = -\frac{\partial}{\partial v} \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta \right) = -\frac{\partial x_k}{\partial v}(z).$$

Como ϕ_k é holomorfa, então x_k é harmônica, $k = 1, 2, 3$ (Item 1 do Lema 51).

Como $\sum_{k=1}^3 \phi_k(z)^2 = 0$, então pelo Item 2 do Lema 51, X é conforme. Pelo Corolário 48, segue que X é mínima. \square

Dada uma função meromorfa $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, o conjunto dos zeros e dos pólos de f serão denotados, respectivamente, por $\operatorname{Zeros}(f)$ e $\operatorname{Polos}(f)$. A ordem de um zero x de f será denotada por $\operatorname{Ord}_f^Z(x)$, e a ordem de um pólo x por $\operatorname{Ord}_f^P(x)$.

Definição 53 *Sejam $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfa e meromorfa, respectivamente. Dizemos que f e g satisfazem a **propriedade dos zeros e pólos (p.z.p)** quando*

$$\operatorname{Zeros}(f) = \operatorname{Polos}(g) \quad e \quad \operatorname{Ord}_f^Z(x) = 2 \operatorname{Ord}_g^P(x).$$

Lema 54 *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio e $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfa e meromorfa, respectivamente, satisfazendo a **p.z.p**. Então as funções $\phi_k : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, k = 1, 2, 3$ definidas por*

$$\phi_1 := \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi_2 := \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \phi_3 := fg, \quad (25)$$

são holomorfas sobre Ω e satisfazem

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 = 0 \quad (26)$$

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 \neq 0. \quad (27)$$

*Reciprocamente, dadas três funções holomorfas $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo as equações (26) e (27), se $\phi_1 \neq i\phi_2$ então existem $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfa e meromorfa, respectivamente, satisfazendo a **p.z.p**, tais que ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 podem ser representadas na forma (25).*

Demonstração: Das expressões de ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 temos

$$\begin{aligned}\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 &= \frac{1}{4}f^2(1-g^2)^2 - \frac{1}{4}f^2(1+g^2)^2 + (fg)^2 \\ &= \frac{f^2(1-2g+g^2) - f^2(1+2g+g^2) + 4(fg)^2}{4} = 0.\end{aligned}$$

Seja $q \in \Omega$ qualquer. Se $\phi_3(q) \neq 0$, o resultado segue. Suponha agora que $\phi_3(q) = 0$, então $f(q) = 0$ ou $g(q) = 0$. Analisemos os dois casos separadamente.

Caso 1: $f(q) = 0$.

Então q é um zero de f de ordem $2m$ e pólo de g de ordem m , donde

$$f(q)g(q)^2 \neq 0.$$

Logo

$$\phi_1(q) = -\frac{f(q)g(q)^2}{2} \neq 0 \quad e \quad \phi_2(q) = \frac{f(q)g(q)^2}{2} \neq 0.$$

Caso 2: $g(q) = 0$.

Então $f(q) \neq 0$ pela **p.z.p**, donde

$$\phi_1(q) = \frac{f(q)}{2} \neq 0 \quad e \quad \phi_2(q) = \frac{f(q)}{2} \neq 0.$$

Reciprocamente, suponha que $\phi_1 - i\phi_2$ não é identicamente nula e defina as funções $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$f := \phi_1 - i\phi_2 \tag{28}$$

$$g := \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}. \tag{29}$$

Multiplicando as equações (28) e (29), obtemos

$$\phi_3 = fg.$$

Da equação (29), temos

$$\begin{aligned}1 + g^2 &= 1 + \frac{\phi_3^2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} = \frac{\phi_1^2 - 2i\phi_1\phi_2 - \phi_2^2 + \phi_3^2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} \\ &= \frac{-2\phi_2^2 - 2i\phi_1\phi_2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} = \frac{-2i\phi_2(\phi_1 - i\phi_2)}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} = \frac{-2i\phi_2}{\phi_1 - i\phi_2}\end{aligned}$$

logo

$$\phi_2 = \frac{i}{2}f(1+g^2).$$

Novamente usando a equação (29), obtemos

$$\begin{aligned} 1-g^2 &= 1 - \frac{\phi_3^2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} = \frac{\phi_1^2 - 2i\phi_1\phi_2 - \phi_2^2 - \phi_3^2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} \\ &= \frac{2\phi_1^2 - 2i\phi_1\phi_2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} = \frac{2\phi_1(\phi_1 - i\phi_2)}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} = \frac{2\phi_1}{(\phi_1 - i\phi_2)} \end{aligned}$$

donde

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1-g^2).$$

A equação (26) pode ser escrita na forma

$$(\phi_1 + i\phi_2)(\phi_1 - i\phi_2) = -\phi_3^2$$

logo

$$(\phi_1 + i\phi_2) = -(\phi_1 - i\phi_2) \frac{\phi_3^2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} = -fg^2.$$

Segue de (28) e (29) que Zeros (f) = Polos (g).

Como $(\phi_1 + i\phi_2)$ é soma de holomorfas, então $(\phi_1 + i\phi_2) = -fg^2$ é holomorfa. Portanto, $2\text{Ord}_g^P(x) \leq \text{Ord}_f^Z(x)$. Se q for um pólo de g de ordem m e zero de ordem estritamente maior que $2m$ de f , então

$$\phi_1(q) + i\phi_2(q) = -(fg^2)(q) = 0 \quad e \quad \phi_1(q) - i\phi_2(q) = f(q) = 0.$$

Logo $\phi_1(q) = 0 = \phi_2(q)$, e por (26), temos que $\phi_3(q) = 0$, o que é uma contradição por (93).

Portanto, $\text{Ord}_g^P(x) = 2\text{Ord}_f^Z(x)$, donde f e g satisfazem a **p.z.p.** □

Finalmente, estamos prontos para demonstrar o Teorema da Representação de Enneper-Weierstrass que vem a seguir.

Teorema 55 (Representação de Enneper-Weierstrass (R.E.W)) Qualquer superfície mínima λ -conforme $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ não plana sobre um domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, pode ser representada na forma

$$X(z) = \left(\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} f(\xi) (1 - g^2(\xi)) d\xi, \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{i}{2} f(\xi) (1 + g^2(\xi)) d\xi, \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(\xi) g(\xi) d\xi \right) \quad (30)$$

onde as funções f e g são holomorfa e meromorfa, respectivamente, sobre Ω , e satisfazem a **p.z.p.**

Reciprocamente, dadas duas funções f e g holomorfa e meromorfa, respectivamente, sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplesmente conexo, satisfazendo a **p.z.p.**, existe uma superfície mínima λ -conforme não plana em \mathbb{R}^3 na forma (30).

Demonstração: Seja $X : (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada mínima conforme não plana. Defina as funções $\phi_k : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u}(z) - i \frac{\partial x_k}{\partial v}(z).$$

para todo $z \in \Omega, k = 1, 2, 3$.

Como X é mínima e conforme, então pelo Corolário 48 suas funções coordenadas $x_k : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, k = 1, 2, 3$ são harmônicas. Donde as funções ϕ_k são holomorfas (Item 1 do Lema 51), $k = 1, 2, 3$.

Sendo X conforme, então

$$\sum_{k=1}^3 (\phi_k(z))^2 = 0 \quad e \quad \sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 \neq 0$$

para todo $z \in \Omega$ (Item 2 e 3 do Lema 51).

Observe que se $\phi_1 \equiv i\phi_2$, dado que vale $(\phi_1 + i\phi_2)(\phi_1 - i\phi_2) = -\phi_3^2$, teríamos $\phi_3 \equiv 0$, donde a terceira coordenada x_3 seria constante. Logo, X estaria contido num plano, que não é o caso.

Portanto, podemos usar o Lema 54 para garantir a existência de funções $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e meromorfa, respectivamente, satisfazendo a **p.z.p.**, tais que

$$\phi_1 = \frac{1}{2} f (1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2} f (1 + g^2), \quad \phi_3 = fg.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo versão complexo e o fato de Ω ser simplesmente conexo, temos

$$\begin{aligned}x_1(z) - x_1(z_0) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \right) d\xi = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_1 d\xi = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} f(\xi) (1 - g^2(\xi)) d\xi \\x_2(z) - x_2(z_0) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \right) d\xi = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_2 d\xi = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} f(\xi) (1 + g^2(\xi)) d\xi \\x_3(z) - x_3(z_0) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \right) d\xi = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_3 d\xi = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(\xi) g(\xi) d\xi\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}x_1(z) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} f(\xi) (1 - g^2(\xi)) d\xi + x_1(z_0) \\x_2(z) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} f(\xi) (1 + g^2(\xi)) d\xi + x_2(z_0) \\x_3(z) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(\xi) g(\xi) d\xi + x_3(z_0).\end{aligned}$$

Reciprocamente, se existem $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ função holomorfa e meromorfa, respectivamente sobre um domínio simplesmente conexo Ω , satisfazendo a **p.z.p.**, então pelo Lema 54 as funções $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$\phi_1 = \frac{1}{2} f (1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2} f (1 + g^2), \quad \phi_3 = fg,$$

são holomorfas e satisfazem

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^3 (\phi_k(z))^2 &= 0 \\ \sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 &\neq 0\end{aligned}$$

para todo $z \in \Omega$.

Então pelo Lema 52 existe uma superfície parametrizada mínima conforme $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que

$$\phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v}$$

onde $x_k : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções coordenadas de $X, k = 1, 2, 3$.

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo versão complexo e o fato de $\Omega \subset \mathbb{C}$ ser simplesmente conexo, temos

$$x_1(z) - x_1(z_0) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \right) d\xi = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_1 d\xi = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} f(\xi) (1 - g^2(\xi)) d\xi$$

$$x_2(z) - x_2(z_0) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \right) d\xi = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_2 d\xi = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} f(\xi) (1 + g^2(\xi)) d\xi$$

$$x_3(z) - x_3(z_0) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \right) d\xi = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_3 d\xi = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(\xi) g(\xi) d\xi$$

donde

$$x_1(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} f(\xi) (1 - g^2(\xi)) d\xi + x_1(z_0)$$

$$x_2(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} f(\xi) (1 + g^2(\xi)) d\xi + x_2(z_0)$$

$$x_3(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(\xi) g(\xi) d\xi + x_3(z_0).$$

□

Chamaremos

$$(X, f, g)$$

de *tripla* da **R.E.W** de X , onde X é a aplicação mínima conforme do Teorema da **R.E.W** cujas funções holomorfa e meromorfa são f e g , respectivamente.

Sejam $\phi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa e $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ uma curva diferenciável fechada (i.e., $\gamma(a) = \gamma(b)$). Entenderemos por *período* da função ϕ , como sendo o valor da integral

$$\int_{\gamma} \phi(\zeta) d\zeta.$$

Observação 56 Dada a definição no parágrafo acima, observemos que para as funções $x_k : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ estarem bem definidas, a hipótese de que Ω seja simplesmente conexo não é necessária, basta que o período das funções ϕ_k sejam imaginários puros.

De fato, suponha que o período das funções ϕ_k sejam imaginários puros. Considere $z, z_0 \in \Omega$ e $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \Omega$ curvas diferenciáveis, ligando z_0 a z . Mostremos que a função

$$x_k : z \in \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta \in \mathbb{C}$$

está bem definida, ou seja,

$$\operatorname{Re} \int_{\alpha} \phi(\zeta) d\zeta = \operatorname{Re} \int_{\beta} \phi(\zeta) d\zeta$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{Re} \int_{\alpha} \phi(\zeta) d\zeta - \operatorname{Re} \int_{\beta} \phi(\zeta) d\zeta \\
&= \operatorname{Re} \left(\int_{\alpha} \phi(\zeta) d\zeta - \int_{\beta} \phi(\zeta) d\zeta \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\int_{\alpha} \phi(\zeta) d\zeta + \int_{-\beta} \phi(\zeta) d\zeta \right) \\
&= \operatorname{Re} \int_{\alpha \cup \{-\beta\}} \phi(\zeta) d\zeta.
\end{aligned}$$

Como o período de ϕ_k é imaginário puro e $\alpha \cup \{-\beta\} : [a, b] \rightarrow \Omega$ é uma curva fechada ligando z_0 a z , segue que o valor da integral

$$\int_{\alpha \cup \{-\beta\}} \phi(\zeta) d\zeta$$

é imaginário puro.

Logo

$$\operatorname{Re} \int_{\alpha \cup \{-\beta\}} \phi(\zeta) d\zeta = 0.$$

Portanto, as funções $x_k : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ estão bem definidas,

Observação 57 Dadas f e g nas condições do Teorema da **R.E.W**, existe X λ -conforme, e neste caso

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 &= \frac{1}{2} \left(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(|f|^2 \frac{|(1-g^2)|^2}{4} + |f|^2 \frac{|(1+g^2)|^2}{4} + |fg|^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} |f|^2 \left(\frac{|(1-g^2)|^2}{4} + \frac{|(1+g^2)|^2}{4} + |g|^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} |f|^2 \left(\frac{|(1-g^2)|^2 + |(1+g^2)|^2 + 4|g|^2}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2} |f|^2 \left(\frac{2 + 2|g^2|^2 + 4|g|^2}{4} \right) = \frac{1}{2} |f|^2 \left(\frac{1 + |g^2|^2 + 2|g|^2}{2} \right) \\
&= \frac{1}{4} |f|^2 \frac{(1 + |g|^2)^2}{2}
\end{aligned}$$

donde

$$\lambda^2 = \|X_1\|^2 = \|X_2\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 = \left[|f| \frac{(1 + |g|^2)}{2} \right]^2. \quad (31)$$

Exemplo 58 (R.E.W do catenóide)

Sejam $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = (u, v)$ e considere as funções holomorfas $\phi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3$ dadas por

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &:= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \\ \phi_2(z) &:= \frac{i}{2} \left(-1 - \frac{1}{z^2} \right) \\ \phi_3(z) &:= \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\sum_{k=1}^3 (\phi_k(z))^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^4} \right) - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^4} \right) + \frac{1}{z^2} = 0.$$

Além disso, como ϕ_3 nunca se anula, segue que as funções ϕ_k satisfazem as equações em (24). Resta verificar que as integrais das ϕ_k ao longo de qualquer caminho fechado em Ω são imaginários puros. Como quaisquer curvas fechada ao redor da origem são homotópicas, basta verificarmos para o círculo unitário $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Então

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \phi_1(\xi) d\xi &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^{2it}} \right) i e^{it} dt = \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} e^{it} dt - \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} e^{-it} dt = 0 \\ \int_{|z|=1} \phi_2(\xi) d\xi &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e^{2it}} \right) e^{it} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{it} dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-it} dt = 0 \\ \int_{|z|=1} \phi_3(\xi) d\xi &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 52, existe uma superfície parametrizada mínima conforme $X : (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \in \mathbb{R}^3$, tal que

$$\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u}(z) - i \frac{\partial x_k}{\partial v}(z)$$

para todo $z \in \Omega$.

Então

$$\begin{aligned}
x_1(z) - x_1(1) &= \operatorname{Re} \int_1^z \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) d\xi = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_1^z d\xi - \int_1^z \frac{1}{\xi^2} d\xi \right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_1^z d\xi - \int_1^z \frac{1}{\xi^2} d\xi \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(z + \frac{1}{z} - 2 \right) \\
x_2(z) - x_2(1) &= \operatorname{Re} \int_1^z \frac{i}{2} \left(-1 - \frac{1}{\xi^2}\right) d\xi = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\int_1^z d\xi + \int_1^z \frac{1}{\xi^2} d\xi \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(z - \frac{1}{z} \right) \\
x_3(z) - x_3(1) &= \operatorname{Re} \int_1^z \frac{1}{\xi} d\xi = \operatorname{Re} (\log |z| + i \arg(z))
\end{aligned}$$

logo, a menos de uma translação temos

$$\begin{aligned}
x_1(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{u}{u^2 + v^2} + u \right) \\
x_2(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{v}{u^2 + v^2} + v \right) \\
x_3(z) &= \frac{1}{2} (u^2 + v^2).
\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, $r > 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, obtemos

$$\begin{aligned}
x_1(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{r} + r \cos \theta \right) = \frac{r^2 + 1}{2r} \cos \theta \\
x_2(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{r} + r \operatorname{sen} \theta \right) = \frac{r^2 + 1}{2r} \operatorname{sen} \theta \\
x_3(z) &= \frac{1}{2} \log r^2 = \log r.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança $t = \log r$ (podemos, pois $r > 0$), temos que $r = e^t$ e, portanto,

$$\frac{r^2 + 1}{2r} = \frac{e^{2t} + 1}{2e^t} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t$$

donde obtemos a superfície parametrizada

$$X(\theta, t) = (\cosh t \cos \theta, \cosh t \operatorname{sen} \theta, t)$$

que é o catenóide como vimos no Exemplo 4.

Além disso, como $\phi_1(z) = \frac{1}{z} \neq -\frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{z^2}\right) = i\phi_2(z)$, então pelo Lema 54 conhecemos as funções f e g , e são dadas por

$$f := \phi_1 - i\phi_2 \quad e \quad g := \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}.$$

pelas definições em (28) e (29), respectivamente, na demonstração do Lema 54.

Portanto,

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) + \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{z^2} \right) = -\frac{1}{z^2}$$

$$g(z) = \frac{\frac{1}{z}}{-\frac{1}{z^2}} = -z$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

◇

Exemplo 59 (R.E.W da Superfície de Enneper) Considere as seguintes funções

$$f \equiv 1 \quad e \quad g(z) = z$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Mostremos que f e g são as funções da **R.E.W** para a superfície de Enneper. Primeiro, note que f e g satisfazem a **p.z.p.** Logo, a superfície obtida pela **R.E.W** a partir delas será uma superfície mínima. Vamos encontrá-la.

A coordenada x está dada por

$$\begin{aligned} x(z) &= \operatorname{Re} \int_0^z \frac{1}{2} (1 - \zeta^2) d\zeta = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(z - \frac{z^3}{3} \right) \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{Re} ((u + iv) (3 - u^2 - 2iuv + v^2)) \end{aligned}$$

donde

$$x(u, v) = \frac{u}{2} - \frac{uv^2}{2} - \frac{u^3}{6}. \quad (32)$$

A coordenada y é dada por

$$\begin{aligned} y(z) &= \operatorname{Re} \int_0^z \frac{i}{2} (1 + \zeta^2) d\zeta = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(z + \frac{z^3}{3} \right) \\ &= -\frac{1}{6} \operatorname{Im} ((u + iv) (3 + u^2 + 2iuv - v^2)) \end{aligned}$$

donde

$$y(u, v) = -\frac{v}{2} - \frac{u^2v}{2} + \frac{v^3}{6}. \quad (33)$$

Finalmente, a coordenada z é dada por

$$\begin{aligned} z(z) &= \operatorname{Re} \int_0^z \zeta d\zeta = -\frac{1}{2} \frac{z^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (u^2 + 2iuv - v^2) \end{aligned}$$

donde

$$z(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 - v^2). \quad (34)$$

Assim, a superfície cujas componentes são (32), (33) e (34), a menos de uma dilatação, é a superfície de Enneper, vista no Exemplo 11, i.e.,

$$X : (u, v) \in \mathbb{C} \mapsto \left(u - \frac{u^2}{3} + uv^2, -v - u^2v + \frac{v^2}{3}, u^2 - v^2 \right) \in \mathbb{R}^3.$$

◇

3.2 O Teorema de Osserman

Considere $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Lema 60 *Seja $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima, conforme, não plana sobre um domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Seja $g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ a função dada pelo Teorema da R.E.W. Então a aplicação normal de Gauss $N : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por*

$$N = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right\|} = \left(\frac{2 \operatorname{Re} g}{|g|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} g}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right). \quad (35)$$

Demonstração: Sabemos que o plano tangente de uma superfície parametrizada $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é gerado pelos vetores

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u} \quad e \quad X_v = \frac{\partial X}{\partial v}.$$

Como $\frac{\partial X}{\partial u} - i \frac{\partial X}{\partial v} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, então

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \operatorname{Re}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \quad e \quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\operatorname{Im}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \operatorname{Im}(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3).$$

Para encontrar o normal unitário, primeiro calculamos o produto vetorial

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\phi_2) \operatorname{Im}(\bar{\phi}_3) + \operatorname{Re}(\phi_3) \operatorname{Im}(\phi_2) \\ \operatorname{Re}(\phi_3) \operatorname{Im}(\bar{\phi}_1) + \operatorname{Re}(\phi_1) \operatorname{Im}(\phi_3) \\ \operatorname{Re}(\phi_1) \operatorname{Im}(\bar{\phi}_2) + \operatorname{Re}(\phi_2) \operatorname{Im}(\phi_1) \end{pmatrix} = \operatorname{Im}(\phi_2 \bar{\phi}_3, \phi_3 \bar{\phi}_1, \phi_1 \bar{\phi}_2) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{i|f|^2(\bar{g} + |g|^2 g)}{2}, \frac{|f|^2(g - |g|^2 \bar{g})}{2}, \frac{-i(1 - 2i \operatorname{Im}(g^2) - |g|^4)}{4} \right) \\ &= \frac{|f|^2(1 + |g|^2)}{4} (2 \operatorname{Re}(g), 2 \operatorname{Im}(g), |g|^2 - 1). \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right\| = \sqrt{EG - F^2} = \lambda^2 = \left[\frac{|f| (1 + |g|^2)}{2} \right]^2$$

donde a normal unitária é dada por

$$N = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right\|} = \left(\frac{2 \operatorname{Re} g}{|g|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} g}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right).$$

□

Lembremos que a *projeção estereográfica* (através do pólo norte) é a aplicação bijetora anti-conforme $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ dada por

$$\pi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x+iy}{1-z}, & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 1) \\ \infty, & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

e sua inversa $\pi^{-1} : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$ é

$$\pi^{-1}(z) = \begin{cases} \left(\frac{2 \operatorname{Re} z}{1+|z|^2}, \frac{2 \operatorname{Im} z}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right), & \text{se } z \neq \infty \\ (0, 0, 1), & \text{se } z = \infty \end{cases}. \quad (36)$$

A seguir damos uma interpretação geométrica para a função g .

Teorema 61 *Seja $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície mínima conforme e $g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ a função meromorfa de X dada pelo Teorema da **R.E.W.** Seja $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ a projeção estereográfica através do polo norte. Então*

$$\pi \circ N = g.$$

Demonstração: Por (35), temos

$$N = \left(\frac{2 \operatorname{Re} g}{|g|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} g}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right).$$

Como a inversa da projeção estereográfica é dada por (36), então dado $w \in \overline{\mathbb{C}}$, temos

$$\pi^{-1}(w) = \left(\frac{2 \operatorname{Re} w}{|w|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} w}{|w|^2 + 1}, \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right),$$

donde

$$N = \pi^{-1} \circ g.$$

Sendo π bijeção, temos

$$\pi \circ N = g.$$

□

Como consequência do Teorema acima, obtemos uma maneira de verificar quando uma superfície é mínima através da função meromorfa g .

Corolário 62 *Seja $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada conforme. Então X é mínima, se e somente se, a função $\pi \circ N : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é meromorfa.*

Demonstração: Se X é mínima, então g é meromorfa pelo Teorema da **R.E.W.** Mas Pelo Teorema 61,

$$g = \pi \circ N.$$

Reciprocamente, defina

$$g := \pi \circ N : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

é meromorfa.

Então g é aplicação conforme. Como π é anticonforme, π^{-1} também o é. Logo, a composição

$$N = \pi^{-1} \circ g$$

é uma aplicação anticonforme.

Portanto, sua derivada tem autovalores κ_1 e κ_2 (que são as curvaturas principais) de mesmo módulo e sinais opostos, donde $H \equiv 0$. □

Finalmente apresentamos o Teorema de Osserman.

Teorema 63 (Osserman) *Se uma superfície mínima completa $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ não é um plano, então imagem de sua aplicação de Gauss N é densa em \mathbb{S}^2 .*

Demonstração: Pelo Teorema 50, em cada ponto de Ω , existe uma reparametrização local de X em parâmetros conformes. Como estamos interessados em estudar a aplicação normal de Gauss, segue que podemos assumir que X é conforme.

Pelo Teorema da Uniformização de Riemann podemos supor que $\Omega = \mathbb{C}$ ou $\Omega = \mathbb{D}$.

CASO 1: $\Omega \approx \mathbb{C}$.

Como $\tilde{X} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é mínima conforme, então pelo Teorema da **R.E.W**, $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é meromorfa. Pelo Pequeno Teorema de Picard (Teorema 168) g é constante ou g omite no máximo três valores de \mathbb{S}^2 . Se g é constante, então pelo Teorema 61, N seria constante, donde \tilde{X} seria um plano, o que não pode acontecer.

Portanto, g omite no máximo três valores de \mathbb{S}^2 . Como a projeção estereográfica π é bijetora, segue que N omite no máximo três valores de \mathbb{S}^2 , donde N é densa em \mathbb{S}^2 .

CASO 2: $\Omega \approx \mathbb{D}$.

Seja (\tilde{X}, f, g) tripla da **R.E.W**, e suponhamos por absurdo que N não seja densa em \mathbb{S}^2 .

Então, existe aberto de \mathbb{S}^2 que não é intersectado pela imagem de N . Fazendo uma rotação do \mathbb{R}^3 se necessário, podemos supor que o pólo norte $(0, 0, 1)$ está contido neste aberto.

Portanto, existe $\eta \in \mathbb{R}_+$, tal que a terceira coordenada de N satisfaz

$$\frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \stackrel{(35)}{=} N_3 \leq \eta < 1$$

donde

$$|g|^2 - 1 \leq (|g|^2 + 1)\eta \quad \therefore \quad |g|^2(1 - \eta) \leq \eta + 1$$

assim,

$$|g| \leq \sqrt{\frac{\eta + 1}{1 - \eta}} := M < +\infty.$$

Então, g não possui pólos, e portanto, f não se anula.

Observemos que

$$\left[\frac{|f|(1 + |g|^2)}{2} \right]^2 \leq |f|^2 \left(\frac{1 + M^2}{2} \right)^2. \quad (37)$$

Para finalizar a prova do Teorema, provemos a seguinte afirmação.

AFIRMAÇÃO 1: X não é completa.

Pela Proposição (7), precisamos mostrar que existe uma curva divergente $\beta : [0, b) \rightarrow \mathbb{D}$, tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\beta) &= \int_0^b \|(X \circ \beta)'(t)\| dt = \frac{1}{2} \int_0^b |f(\beta(t))| \left(1 + |g(\beta(t))|^2\right) |\beta'(t)| dt \\ &\stackrel{(37)}{\leq} \frac{1 + M^2}{2} \int_0^b |f(\beta(t))| |\beta'(t)| dt < +\infty \end{aligned}$$

Defina a função holomorfa $G : \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$G(z) = \int_0^z f(\zeta) d\zeta \quad (38)$$

que está bem definida, pois \mathbb{D} é simplesmente conexo.

Seja $z_0 \in \mathbb{D}$. Como G é holomorfa e $G'(z_0) = f(z_0) \neq 0$, segue do Teorema da Função Inversa (Teorema 162) que existe uma vizinhança aberta V de z_0 e uma bola aberta $B_{r_0}(w_0)$ contendo $w_0 = G(z_0)$, tal que $H_{r_0} : B_{r_0}(w_0) \rightarrow \mathbb{D}$ é uma inversa à direita holomorfa de G .

Considere o raio

$$R = \sup \{r \geq r_0 ; \exists H_r : B_r(w_0) \rightarrow \mathbb{D} \text{ extensão de } H_{r_0} \text{ e inversa à direita holomorfa de } G\}.$$

Assumindo que o supremo pode ser infinito, segue que o supremo do conjunto

$$\{r \geq r_0 ; \exists H_r : B_r(w_0) \rightarrow \mathbb{D} \text{ extensão de } H_{r_0} \text{ e inversa à direita holomorfa de } G\}$$

existe.

Defina a função $H_R : B_R(w_0) \rightarrow \mathbb{D}$ por

$$H_R(z) = H_r(z)$$

para algum $r \in (0, R]$ com $z \in B_r(w_0)$.

Observe que H_R está bem definida, pois sejam

$$r_1, r_2 \in \{r \geq r_0 ; \exists H_r : B_r(w_0) \rightarrow \mathbb{D} \text{ extensão de } H_{r_0} \text{ e inversa à direita holomorfa de } G\}$$

com $r_1 \leq r_2$.

Como

$$H_{r_1} \equiv H_{r_2} \quad \text{em } B_{r_0}(w_0)$$

segue do Princípio da Extensão Analítica (Teorema 161) que

$$H_{r_1} \equiv H_{r_2} \quad \text{em } B_{r_1}(w_0)$$

i.e., H_{r_2} é uma extensão da H_{r_1} , donde H_R está bem definida.

Note que se $R = \infty$, segue do Teorema de Liouville (Teorema 157) que H_R é constante, o que é uma contradição pois H é localmente um biholomorfismo. Portanto, $R < \infty$.

Seja $w \in S_R(w_0)$ e considere a curva $\alpha_w : [0, 1) \rightarrow B_R(w_0)$ dada por

$$\alpha_w(t) = w_0 + t(w - w_0), \quad \forall t \in [0, 1).$$

AFIRMAÇÃO 2: Existe $\beta_w = H_R \circ \alpha_w : [0, 1) \rightarrow \mathbb{D}$ curva divergente, para algum $w \in S_R(w_0)$.

Suponha por absurdo que β_w não é curva divergente para todo $w \in S_R(w_0)$. Então, existe um compacto $K \subset \mathbb{D}$ e uma sequência estritamente crescente $(t_n)_n \subset [0, 1)$, com $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 1$, tal que

$$\beta_w(t_n) \in K, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Passando a uma subsequência se necessário, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_w(t_n) = z_1 \in K.$$

Como G é contínua e H_R é inversa à direita de G , segue

$$w = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_w(t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G(\beta_w(t_n)) = G(z_1).$$

Pelo Teorema da Função Inversa (Teorema 162), existe uma vizinhança aberta A de z_1 e uma bola aberta $B_{r_w}(w)$ contendo $w = G(z_1)$, tal que $H_w : B_{r_w}(w) \rightarrow A$ é uma inversa à direita holomorfa de G (vide figura 6).

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_w(t_n) = z_1 \in A$ e A é aberto, segue que existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que $\beta_w(t_{n_1}) \in A$. Por outro lado, como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_w(t_n) = w \in B_{r_w}(w)$ e $B_{r_w}(w)$ é aberto, segue que existe $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que $\alpha_w(t_{n_2}) \in B_{r_w}(w)$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos

$$\beta_w(t_{n_0}) \in A \quad e \quad \alpha_w(t_{n_0}) \in B_{r_w}(w).$$

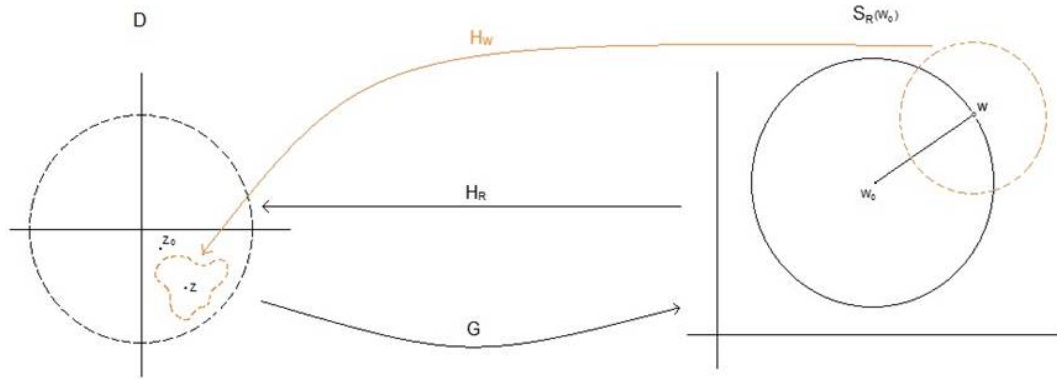


Figura 6: H_w .

Considere o aberto $\Delta = H_R^{-1}(A)$ e note que $q = \alpha_w(t_{n_0}) \in \Delta$, pois $H_R(q) = \beta_w(t_{n_0}) \in A$. Seja $B_\epsilon(q) \subset \Delta \cap B_R(w_0) \cap B_{r_w}(w)$ e tome $z \in B_\epsilon(q)$ arbitrário.

Note que $H_R(z) \in A$, por definição de imagem inversa (pois $z \in B_\epsilon(q) \subset \Delta$). E $H_w(z) \in A$, pois $z \in B_\epsilon(q) \subset B_{r_w}(w)$. Como H_R e H_w ambas são inversas à direita de G , segue, respectivamente, que

$$G(H_R(z)) = z \quad e \quad G(H_w(z)) = z.$$

Mas A foi escolhido de modo a G ser um biholomorfismo em A , donde G é injetora em A . Então

$$H_R(z) = H_w(z)$$

para todo $z \in B_\epsilon(q)$.

Pelo Princípio da Extensão Analítica (Teorema 161) segue que

$$H_R \equiv H_w \quad \text{em} \quad B_R(w_0) \cap B_{r_w}(w)$$

para todo $w \in S_R(w_0)$.

Como $S_R(w_0)$ é compacto e $\bigcup_{w \in S_R(w_0)} B_{r_w}(w)$ é uma cobertura aberta de $S_R(w_0)$, segue que $S_R(w_0) \subset \bigcup_{i=1}^k B_{r_{w_i}}(w)$.

Seja $\epsilon > 0$, tal que $B_{R+\epsilon}(w_0) \subset B_R(w_0) \cup \bigcup_{i=1}^k B_{r_{w_i}}(w)$ e defina a função holomorfa $H_{R+\epsilon} : B_{R+\epsilon}(w_0) \rightarrow \mathbb{D}$ por

$$H_{R+\epsilon}(z) = \begin{cases} H_R(z), & \text{se } z \in B_R(w_0) \\ H_{r_{w_i}}(z), & \text{se } z \in B_{r_{w_i}}(w) \end{cases}$$

Para mostrar que $H_{R+\epsilon}$ está bem definida, basta verificar que se $z \in B_{r_{w_i}}(w) \cap B_{r_{w_j}}(w)$, então $H_{r_{w_i}}(z) = H_{r_{w_j}}(z)$. De fato, como

$$H_{r_{w_i}} \equiv H_R \equiv H_{r_{w_j}} \quad \text{em } B_R(w_0) \cap B_{r_{w_i}}(w) \cap B_{r_{w_j}}(w)$$

segue do Princípio da Extensão Analítica (Teorema 161) que

$$H_{r_{w_i}} \equiv H_{r_{w_j}} \quad \text{em } B_{r_{w_i}}(w) \cap B_{r_{w_j}}(w).$$

Portanto, $H_{R+\epsilon}$ está bem definida e é uma extensão de H_R inversa à direita holomorfa de G em $B_{R+\epsilon}(w_0)$. Mas isso contradiz o fato de R ser o supremo para o qual H_R possui essa propriedade (vide figura 7).

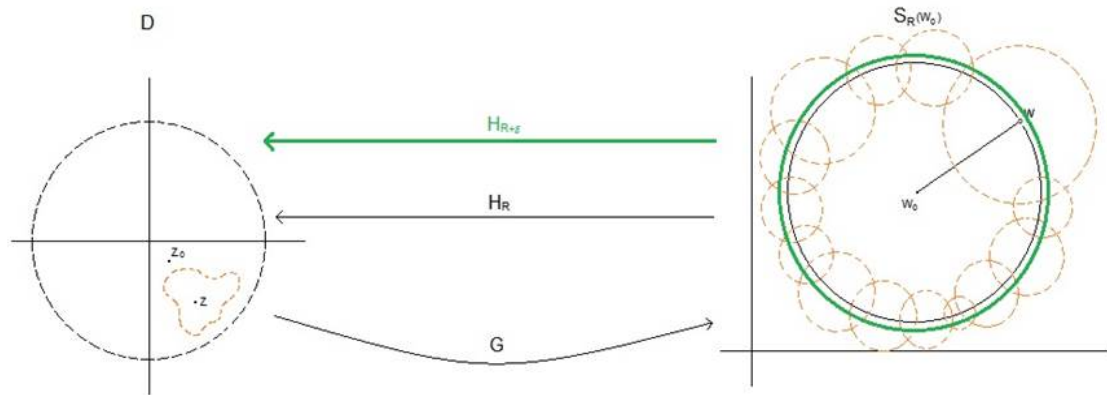


Figura 7: $H_{R+\epsilon}$.

Portanto, existe uma curva divergente $\beta_w : [0, 1) \rightarrow \mathbb{D}$.

Mas

$$\frac{1 + M^2}{2} \int_0^1 |f(\beta(t))| |\beta'(t)| dt = \int_0^1 |G'(\beta(t))| |\beta'(t)| dt$$

$$= \int_0^1 |(G \circ \beta)'(t)| dt = \int_0^1 |\alpha'(t)| dt = \int_0^1 |w_0| dt = \int_0^1 R dt = R < +\infty$$

o que é uma contradição com a hipótese de \mathbb{D} ser completo com a métrica. Portanto, N é densa em \mathbb{S}^2 . \square

Finalmente apresentamos uma primeira demonstração para o Teorema de Bernstein, como consequência do Teorema de Osserman.

Corolário 64 (Teorema de Bernstein) *Se $X : (u, v) \in \mathbb{C} \mapsto (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima, então X é um plano.*

Demonstração: Como X é gráfico da função f sobre \mathbb{C} , segue da Proposição 10 que X é completa. Novamente usando que X é gráfico de função, temos que imagem da aplicação de Gauss está contida em um dos hemisférios de \mathbb{S}^2 (dependendo do sentido de N). Logo, N não é densa na esfera \mathbb{S}^2 . Como X é superfície mínima, segue do Teorema de Osserman (Teorema 63) que X é um plano. \square

3.3 Curvatura Gaussiana e a Representação de Enneper-Weierstrass

Expressaremos agora a curvatura Gaussiana de uma superfície usando as funções f e g fornecidas pelo Teorema da **R.E.W.**

Teorema 65 *Seja (X, f, g) uma tripla da **R.E.W.** Se f nunca se anula, então a curvatura Gaussiana de X é dada por*

$$K = - \left[\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} \right]^2. \quad (39)$$

Consequentemente, as curvaturas principais são dadas por

$$\kappa_1 = - \frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} \quad e \quad \kappa_2 = \frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}$$

Demonstração: Por uma simples conta, podemos mostrar que

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}.$$

Usando esse fato, temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} &= -\frac{1}{2\lambda^2} \left\{ \left(\frac{2\lambda\lambda_v}{\lambda^2} \right)_v + \left(\frac{2\lambda\lambda_u}{\lambda^2} \right)_u \right\} \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \left\{ \left(\frac{\lambda_v}{\lambda} \right)_v + \left(\frac{\lambda_u}{\lambda} \right)_u \right\} = -\frac{1}{\lambda^2} \left\{ \left(\frac{\partial \log \lambda}{\partial v} \right)_v + \left(\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} \right)_u \right\} \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} \right) = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta(\log \lambda) \end{aligned}$$

donde

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta(\log \lambda). \quad (40)$$

Iremos calcular a curvatura gaussiana de X através da equação (40), usando f e g .

Note que

$$\begin{aligned} 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= 4 \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) \right] = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + 2i \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= 2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) - i \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right) + 2i \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) - i \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} = \Delta. \end{aligned} \quad (41)$$

Pela Observação (57), temos

$$\lambda^2 = \left[\frac{|f| (1 + |g|^2)}{2} \right]^2. \quad (42)$$

Como f é holomorfa e g é meromorfa, então pela Proposição (154) temos

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0 \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} = 0. \quad (43)$$

Assim

$$K = -\frac{\Delta(\log \lambda)}{\lambda^2} \stackrel{(41)}{=} -\frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log \lambda)$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(42)}{=} -\frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\log \left(\frac{\sqrt{f\bar{f}}(1+g\bar{g})}{2} \right) \right] = -\frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{f\bar{f}}{2} \right) + \log(1+g\bar{g}) \right] \\
&= -\frac{4}{\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\log \left(\frac{f\bar{f}}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\log(1+g\bar{g})] \right\} \\
&= -\frac{4}{\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{2}{f\bar{f}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{f\bar{f}}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{1+g\bar{g}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (1+g\bar{g}) \right] \right\} \\
&= -\frac{4}{\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{2}{f\bar{f}} \right) \frac{1}{2} \left(f \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} + \bar{f} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{1+g\bar{g}} \left(g \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} + \bar{g} \frac{\partial g}{\partial z} \right) \right] \right\} \\
&\stackrel{(43)}{=} -\frac{4}{\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{1}{f\bar{f}} \right) \left(f \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} + \bar{f} 0 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{1+g\bar{g}} \left(g \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} + \bar{g} 0 \right) \right] \right\} \\
&= -\frac{4}{\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{1}{\bar{f}} \right) \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{g}{1+g\bar{g}} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \right] \right\} \\
&= -\frac{4}{\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\bar{f}} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\bar{f}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{g}{1+g\bar{g}} \right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} + \frac{g}{1+g\bar{g}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \right) \right\} \\
&= -\frac{4}{\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\bar{f}} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\bar{f}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right) \right] + \left(\frac{(1+g\bar{g}) \frac{\partial g}{\partial z} - g \frac{\partial}{\partial z} (1+g\bar{g})}{(1+g\bar{g})^2} \right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} + \frac{g}{1+g\bar{g}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \right) \right\} \\
&\stackrel{(43)}{=} -\frac{4}{\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{-\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \partial \bar{f}}{\bar{f}^2} + \frac{1}{\bar{f}} \frac{\partial}{\partial z} (0) \right] + \left(\frac{(1+g\bar{g}) \frac{\partial g}{\partial z} - g \left(\bar{g} \frac{\partial g}{\partial z} + g \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} \right)}{(1+g\bar{g})^2} \right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} + \frac{g}{1+g\bar{g}} \frac{\partial}{\partial z} (0) \right\} \\
&\stackrel{(43)}{=} -\frac{4}{\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{0 \partial \bar{f}}{\bar{f}^2 \partial \bar{z}} \right] + \left(\frac{(1+g\bar{g}) \frac{\partial g}{\partial z} - g \left(\bar{g} \frac{\partial g}{\partial z} + g 0 \right)}{(1+g\bar{g})^2} \right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \right\} \\
&= -\frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial z}}{(1+g\bar{g})^2} \right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} = -\frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{g'}{(1+g\bar{g})^2} \right) \bar{g}' = -\frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{g'\bar{g}'}{(1+g\bar{g})^2} \right) \\
&\stackrel{(42)}{=} -\frac{4}{\left[\frac{|f|(1+|g|^2)}{2} \right]^2} \frac{|g'|^2}{(1+g\bar{g})^2} = -\frac{16}{|f|^2 (1+|g|^2)^2} \frac{|g'|^2}{(1+g\bar{g})^2} \\
&= -\frac{16 |g'|^2}{|f|^2 (1+|g|^2)^4} = -\left[\frac{4 |g'|}{|f| (1+|g|^2)^2} \right]^2
\end{aligned}$$

Como $H \equiv 0$, as curvaturas principais satisfazem $\kappa_1 = -\kappa_2$, e isso demonstra o Teorema.

□

Corolário 66 *Seja (X, f, g) uma tripla da **R.E.W**. Se f nunca se anula, então a curvatura Gaussiana de X é identicamente nula (i.e., a superfície é um plano) ou seus zeros são isolados.*

Demonstração: Pelo Teorema 65, temos

$$K = - \left[\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} \right]^2.$$

Como g' é meromorfa, então pela Proposição 156, g' é constante (identicamente nula) ou seus zeros são isolados. Logo, K é identicamente nula ou seus zeros são isolados.

Se $K \equiv 0$, então X é totalmente umbílica, donde X é um plano ou uma esfera. Como X é mínima, então X é um plano. \square

Exemplo 67 (Catenóide) *Vimos no Exemplo 58 que a R.E.W do catenóide é dada por*

$$f(z) = -\frac{c}{z^2} \quad e \quad g(z) = -z$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, com $c \in \mathbb{C}$ constante.

Por (39), temos

$$K = - \left[\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} \right]^2 = - \left[\frac{4|z|^2}{|c|(1+|z|^2)^2} \right]^2 = \frac{-16|z|^4}{c^2(1+|z|^2)^4} \neq 0.$$

pois $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

\diamond

Exemplo 68 (Helicóide) *Pode ser mostrado que a R.E.W do helicóide é dada por*

$$f(z) = ice^{-z} \quad e \quad g(z) = -e^z$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ constante.

Por (39), temos

$$K = - \left[\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} \right]^2 = - \left[\frac{4e^u}{|c|e^{-u}(1+e^{2u})^2} \right]^2 = \frac{-16e^{4u}}{c^2(1+e^{2u})^2}.$$

\diamond

Exemplo 69 (Superfície de Scherk) Pode ser mostrado que a **R.E.W** da Superfície de Scherk é dada por

$$f(z) = \frac{-4i}{z^4 - 1} \quad e \quad g(z) = iz$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Por (39), temos

$$K = - \left[\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} \right]^2 = - \left[\frac{4}{\frac{4(1+|z|^2)^2}{|z^4-1|}} \right]^2 = - \frac{|z^4-1|^2}{(1+|z|^2)^4}.$$

◇

Exemplo 70 (Superfície de Enneper) Vimos no Exemplo 59 que a **R.E.W** da Superfície de Enneper é dada por

$$f(z) = 1 \quad e \quad g(z) = z$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Logo, por (39), a sua curvatura gaussiana é

$$K = - \left[\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} \right]^2 = - \left[\frac{4}{1(1+|z|^2)^2} \right]^2 = - \frac{16}{(1+|z|^2)^4}.$$

◇

A seguir damos uma estimativa para o módulo da curvatura gaussiana. Considere $B_R(0) \subset \mathbb{C}$ a bola aberta centrada na origem de raio $R > 0$ no plano complexo.

Teorema 71 *Sejam $h : B_R(0) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^∞ , $X : (u, v) \in B_R(0) \mapsto (u, v, h(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ superfície mínima conforme. Então*

$$|K(0)| \leq \frac{16}{R^2}.$$

Demonstração: Temos

$$X_u \times X_v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{pmatrix} = (0 \cdot f_v - f_u \cdot 1, f_u \cdot 0 - 1 \cdot f_v, 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (-f_u, -f_v, 1)$$

donde

$$EG - F^2 = \|X_u \times X_v\|^2 = f_u^2 + f_v^2 + 1 \geq 1 \quad (44)$$

e

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (f_u, f_v, -1).$$

Pela equação (35),

$$\left(\frac{2 \operatorname{Re} g}{|g|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} g}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right) = N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (f_u, f_v, -1).$$

Igualando a terceira coordenada, temos

$$\frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} = -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}$$

donde

$$\left(|g|^2 - 1 \right) \sqrt{EG - F^2} = - \left(|g|^2 + 1 \right) \quad \therefore \quad |g|^2 \left(\sqrt{EG - F^2} + 1 \right) = -1 + \sqrt{EG - F^2}$$

ou seja,

$$|g|^2 = \frac{-1 + \sqrt{EG - F^2}}{1 + \sqrt{EG - F^2}} < 1. \quad (45)$$

Portanto, $g(B_R(0)) \subset B_1(0)$.

Além disso,

$$1 - |g|^2 = 1 - \frac{-1 + \sqrt{EG - F^2}}{1 + \sqrt{EG - F^2}} = \frac{1 + \sqrt{EG - F^2} + 1 - \sqrt{EG - F^2}}{1 + \sqrt{EG - F^2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{EG - F^2}} \quad (46)$$

e

$$1 + |g|^2 = 1 + \frac{-1 + \sqrt{EG - F^2}}{1 + \sqrt{EG - F^2}} = \frac{1 + \sqrt{EG - F^2} - 1 + \sqrt{EG - F^2}}{1 + \sqrt{EG - F^2}} = \frac{2\sqrt{EG - F^2}}{1 + \sqrt{EG - F^2}}. \quad (47)$$

Para qualquer curva divergente $\tilde{\beta} : [0, b) \rightarrow B_R(0)$ com $\tilde{\beta}(0) = (0, 0)$, vale

$$d := \inf_{\{\beta; \beta(0) = (0, 0)\}} \mathcal{L}(\beta) \leq \mathcal{L}(\tilde{\beta}) \quad (48)$$

Considere a função $G : B_R(0) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$G(z) = \int_0^z f(\zeta) d\zeta$$

que está bem definida, pois $B_R(0)$ é simplesmente conexo.

Por (45), temos que $|g|^2 < 1$. Então g não possui pólos, e, portanto f não possui zeros.

Como G é holomorfa e $G'(z) = f(z) \neq 0$, para todo $z \in B_R(0)$, então pelo Teorema da Função Inversa (Teorema 162), existe uma vizinhança aberta V de z , com $V \subset B_R(0)$, tal que $f(V) = B_r(0)$ é aberto e $G|_V : V \rightarrow B_r(0)$ possui uma inversa $(G|_V)^{-1} : B_r(0) \rightarrow V$, a qual é holomorfa.

A bola aberta $B_r(0) \subset \mathbb{C}$ é tal que existe $w_0 \in \mathbb{C}$ com $|w_0| = r$, de modo que $(G|_V)^{-1}$ não pode ser estendida em w_0 .

Note que se $r = \infty$, então pelo Teorema de Liouville (Teorema 157) $(G|_V)^{-1}$ seria constante, donde $G|_V$ também seria constante. Então

$$0 = (G|_V)'(z) = G'(z) = f'(z), \text{ para todo } z \in V$$

onde f teria zeros, o que é uma contradição.

Portanto, $r < \infty$.

Considere a curva $\alpha : [0, 1) \rightarrow B_r(0)$ dada por

$$\alpha(t) = tw_0, \quad \forall t \in [0, 1).$$

AFIRMAÇÃO: $(G|_V)^{-1} \circ \alpha : [0, 1) \rightarrow V \subset B_R(0)$ é um caminho divergente.

Suponha por absurdo que $(G|_V)^{-1} \circ \alpha$ não é um caminho divergente. Então, existe um compacto $K \subset V$ e uma sequência estritamente crescente $(t_n)_n \subset [0, 1)$, com $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 1$, tal que

$$\left[(G|_V)^{-1} \circ \alpha \right] (t_n) \in K, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como K é compacto, a menos de passarmos a uma subsequência, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(G|_V)^{-1} \circ \alpha \right] (t_n) = z_0 \in K.$$

Como $G|_V$ é contínua, então

$$G|_V \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(G|_V)^{-1} \circ \alpha \right] (t_n) \right) = G|_V(z_0) \in B_r(0)$$

donde

$$\begin{aligned} w_0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n w_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha(t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G|_V \left(\left[(G|_V)^{-1} \circ \alpha \right] (t_n) \right) \\ &= G|_V \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(G|_V)^{-1} \circ \alpha \right] (t_n) \right) = G|_V(z_0) \in B_r(0) \end{aligned}$$

logo, $w_0 \in B_r(0)$, e portanto, como $B_r(0)$ é aberto, $(G|_V)^{-1}$ pode ser estendida em w_0 , o que é uma contradição.

Portanto, $\tilde{\beta} := (G|_V)^{-1} \circ \alpha : [0, 1) \rightarrow V \subset B_R(0)$ é um caminho divergente.

Mas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{\beta}) &= \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \left\| (X \circ \tilde{\beta})'(t) \right\| dt \stackrel{Obs(88)}{=} \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \lambda(\beta(t)) \left| \tilde{\beta}'(t) \right| dt \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \left| f(\tilde{\beta}(t)) \right| \left| \tilde{\beta}'(t) \right| dt = \lim_{t \rightarrow b} \int_0^t \left| G'(\tilde{\beta}(t)) \tilde{\beta}'(t) \right| dt \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \left| dG(\tilde{\beta}(t)) \tilde{\beta}'(t) \right| dt = \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \left| (G \circ \tilde{\beta})'(t) \right| dt \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \left| (G|_V \circ \tilde{\beta})'(t) \right| dt = \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \left| (G|_V \circ (G|_V)^{-1} \circ \alpha)'(t) \right| dt \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t |\omega_0| dt = \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t r dt = r < \infty \end{aligned}$$

ou seja,

$$d \stackrel{(48)}{\leq} \mathcal{L}(\tilde{\beta}) \leq r.$$

Aplicando o Lema de Schwarz (Lema 158) à função $(G|_V)^{-1} : B_r(0) \rightarrow V \subset B_R(0)$, obtemos

$$\left| \left[(G|_V)^{-1} \right]'(0) \right| \leq \frac{R}{r}$$

donde

$$|f(0)| = |(G|_V)'(0)| = \frac{1}{\left| \left[(G|_V)^{-1} \right]'(0) \right|} \geq \frac{r}{R} \geq \frac{d}{R}. \quad (49)$$

Aplicando o Teorema de Schwarz-Pick (Teorema 159) à função $g : B_R(0) \rightarrow B_1(0)$ em $z = 0$, obtemos

$$\frac{|g'(0)|}{1 - |g(0)|^2} \leq \frac{R}{1} \frac{1}{R^2}$$

ou seja,

$$R |g'(0)| \leq 1 - |g(0)|^2 \quad (50)$$

Pela equação (39), temos

$$K(0) = - \left[\frac{4 |g'(0)|}{|f(0)| (1 + |g(0)|^2)^2} \right]^2$$

donde

$$\begin{aligned} |K(0)| &= \left[\frac{4 |g'(0)|}{|f(0)| (1 + |g(0)|^2)^2} \right]^2 \quad \therefore \quad d\sqrt{|K(0)|} = \frac{4d |g'(0)|}{|f(0)| (1 + |g(0)|^2)^2} \\ &\stackrel{(49)}{\leq} \frac{4R |g'(0)|}{(1 + |g(0)|^2)^2} \stackrel{(50)}{\leq} \frac{4(1 - |g(0)|^2)}{(1 + |g(0)|^2)^2} \\ &\stackrel{(46) \text{ e } (47)}{=} \frac{4 \left(\frac{2}{\sqrt{EG - F^2 + 1}} \right)}{\left(\frac{2\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG - F^2 + 1}} \right)^2} = 4 \frac{2}{\sqrt{EG - F^2 + 1}} \frac{(\sqrt{EG - F^2} + 1)^2}{4(EG - F^2)} \\ &= \frac{2(\sqrt{EG - F^2} + 1)}{EG - F^2} = \frac{2}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{(\sqrt{EG - F^2} + 1)}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{EG - F^2}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \\ &\stackrel{(44)}{\leq} \frac{2}{\sqrt{EG - F^2}} (1 + 1) = \frac{4}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned}$$

ou seja,

$$d\sqrt{|K(0)|} \leq \frac{4}{\sqrt{EG - F^2}}$$

donde

$$|K(0)| \leq \frac{16}{d^2 (EG - F^2)}.$$

Como $R \leq d$ e $1 \leq EG - F^2$, então

$$|K(0)| \leq \frac{16}{R^2}.$$

□

Apresentamos agora mais uma demonstração do Teorema de Bernstein (Corolário 64) visto no Capítulo 3.

Corolário 72 (Teorema de Bernstein) Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ e $X : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima, então X é um plano.

Demonstração: Seja $p = (u, v)$ um ponto qualquer de \mathbb{C} . A menos de um movimento rígido, podemos supor que

$$p = (0, 0).$$

Como X está definida em todo \mathbb{C} , então podemos tomar qualquer $R \in \mathbb{R}_+$, de modo a trabalhar numa bola aberta $B_R(0)$ centrada na origem de raio $R \in \mathbb{R}_+$, e desta forma estudar apenas um pedaço da superfície. Pelo Teorema 71 temos

$$|K(p)| \leq \frac{c}{R^2}.$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$, obtemos

$$K(p) = 0.$$

Como o argumento vale para qualquer $p \in \mathbb{C}$, então

$$K \equiv 0$$

donde pelo Corolário 66, X é um plano. □

3.4 Superfícies Mínimas Conjugadas

Para motivar o conceito de superfícies conjugadas, precisamos da seguinte Proposição.

Proposição 73 Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplesmente conexo e $X : z \in \Omega \mapsto (x_1(z), x_2(z), x_3(z)) \in \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima conforme não plana. Então existe uma superfície mínima conforme $X^* : z \in \Omega \mapsto (x_1^*(z), x_2^*(z), x_3^*(z)) \in \mathbb{R}^3$, tal que X^* é solução das Equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial X^*}{\partial v} \quad e \quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{\partial X^*}{\partial u}. \quad (51)$$

Além disso, X^* é única a menos de adição a um vetor constante $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^3$.

Demonstração: Pelo Teorema da Representação de Enneper-Weierstrass (Teorema (55)), existem funções $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ com f holomorfa e g meromorfa, tais que

$$\begin{aligned} x_1(z) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} f(\xi) (1 - g^2(\xi)) d\xi + x_1(z_0) \\ x_2(z) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} f(\xi) (1 + g^2(\xi)) d\xi + x_2(z_0) \\ x_3(z) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(\xi) g(\xi) d\xi + x_3(z_0). \end{aligned}$$

Como X é mínima, então pelo Corolário (48) as funções $x_k : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ são harmônicas, $k = 1, 2, 3$. Então existem funções $x_k^* : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$ conjugadas harmônicas de x_k , e essas conjugadas são únicas a menos da adição a um número complexo constante $w_k \in \mathbb{C}$. Então as funções

$$x_k + ix_k^* : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

são holomorfas, e portanto, satisfazem as Equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial x_k}{\partial u} = \frac{\partial x_k^*}{\partial v} \quad e \quad \frac{\partial x_k}{\partial v} = -\frac{\partial x_k^*}{\partial u}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Portanto, a aplicação $X^* : z \in \Omega \mapsto (x_1^*(z), x_2^*(z), x_3^*(z)) \in \mathbb{R}^3$ assim definida, verifica as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial X^*}{\partial v} \quad e \quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{\partial X^*}{\partial u}.$$

Além disso, como X é mínima e conforme, temos

$$\Delta X = 0, \quad \|X_u\|^2 = \|X_v\|^2 = \lambda \quad e \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0. \quad (52)$$

Pelas Equações de Cauchy-Riemann em (51), segue

$$\Delta X^* = 0, \quad \|X_u^*\|^2 = \|X_v^*\|^2 = \lambda \quad e \quad \langle X_u^*, X_v^* \rangle = 0. \quad (53)$$

Ou seja, a superfície conjugada X^* de uma superfície mínima conforme X , também é uma superfície mínima conforme.

Como as funções $x_k^* : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$ são únicas a menos da adição a um número complexo constante $w_k \in \mathbb{C}$, segue que X^* é única a menos da adição a um vetor constante $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$. □

A menos de mencionado o contrário, sempre tomaremos o vetor constante somado a X^* como sendo o nulo, i.e., $\mathbf{w} = (0, 0, 0) \in \mathbb{C}^3$.

Assim, o Teorema anterior, motiva a seguinte definição.

Definição 74 (*Superfície Mínima Conjugada*) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplesmente conexo e $X : z \in \Omega \mapsto (x_1(z), x_2(z), x_3(z)) \in \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima conforme não plana. A superfície mínima conjugada de X é a superfície mínima conforme $X^* : z \in \Omega \mapsto (x_1^*(z), x_2^*(z), x_3^*(z)) \in \mathbb{R}^3$, tal que X^* é solução das Equações de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial X^*}{\partial v} \quad e \quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{\partial X^*}{\partial u} \quad (54)$$

Para o próximo Teorema, precisaremos da seguinte definição. Sejam $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície mínima conforme e $X^* : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sua conjugada. A aplicação $\Lambda : z \in \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto (\lambda_1(z), \lambda_2(z), \lambda_3(z)) := X(z) + iX^*(z) \in \mathbb{C}^3$ holomorfa (coordenada a coordenada) é chamada *curva isotrópica* quando

$$\langle \Lambda', \Lambda' \rangle = 0$$

onde a derivada complexa de $\Lambda : z \in \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto X(z) + iX^*(z) \in \mathbb{C}^3$ é dada por

$$\Lambda' = X_u + iX_u^* = X_u - iX_v.$$

Teorema 75 *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplesmente conexo. Se $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é superfície mínima conforme, então a aplicação $\Lambda : z \in \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto X(z) + iX^*(z) \in \mathbb{C}^3$ é uma curva isotrópica.*

Reciprocamente, se $\Lambda : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ é curva isotrópica não-constante, então

$$X = \operatorname{Re} \Lambda \quad e \quad X^* = \operatorname{Im} \Lambda$$

definem duas superfícies mínimas conformes $X, X^ : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$, tais que X^* é a conjugada de X (neste caso, Ω não precisa ser simplesmente conexo).*

Demonstração: Considere $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície mínima conforme e seja $X^* : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sua conjugada. Então a aplicação $\Lambda : (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto (\lambda_1(z), \lambda_2(z), \lambda_3(z)) := X(z) + iX^*(z) \in \mathbb{C}^3$ é holomorfa cujas componentes são

$$\lambda_k = x_k + ix_k^*, \quad k = 1, 2, 3.$$

A derivada complexa de Λ é dada por

$$X_v^* + iX_u^* = \Lambda' = X_u + iX_u^* = X_u - iX_v$$

donde

$$\langle \Lambda', \Lambda' \rangle = \langle X_u - iX_v, X_u - iX_v \rangle = \|X_u\|^2 - \|X_v\|^2 - 2i \langle X_u, X_v \rangle.$$

Como X é conforme, então

$$\langle \Lambda', \Lambda' \rangle = 0$$

ou seja, Λ é curva isotrópica.

Reciprocamente, se Λ é curva isotrópica, então

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Lambda', \Lambda' \rangle = \langle X_u - iX_v, X_u - iX_v \rangle = \|X_u\|^2 - \|X_v\|^2 - 2i \langle X_u, X_v \rangle \\ \Rightarrow &\quad \|X_u\|^2 = \|X_v\|^2 \quad e \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\ &e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Lambda', \Lambda' \rangle = \langle X_v^* + iX_u^*, X_v^* + iX_u^* \rangle = \|X_v^*\|^2 - \|X_u^*\|^2 + 2i \langle X_u^*, X_v^* \rangle \\ \Rightarrow &\quad \|X_u^*\|^2 = \|X_v^*\|^2 \quad e \quad \langle X_u^*, X_v^* \rangle = 0 \end{aligned}$$

donde $X, X^* : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ são conformes.

Temos também

$$\langle \Lambda', \Lambda' \rangle = \langle (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3), (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3) \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3) = (0, 0, 0)$$

donde

$$x_k + ix_k^* = \lambda_k \text{ é constante, } k = 1, 2, 3$$

e portanto, suas coordenadas x_k e x_k^* também o são, logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_k}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x_k}{\partial v^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 x_k^*}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x_k^*}{\partial v^2} &= 0 \end{aligned}$$

ou seja, as funções $x_k, x_k^* : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ são harmônicas. Então, pelo Corolário (48)

$X, X^* : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ são superfícies mínimas.

A condição das Equações de Cauchy-Riemann em (54) é imediata do fato de $x_k, x_k^* : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ serem constantes. Portanto, X^* é a conjugada de X . \square

A partir daqui diremos que X^* é um superfície conjugada de alguma superfície mínima X , quando existir uma curva isotrópica $\Lambda : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$, tal que

$$X = \operatorname{Re} \Lambda \quad e \quad X^* = \operatorname{Im} \Lambda.$$

Proposição 76 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplesmente conexo e $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima conforme. Se $X^* : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a superfície mínima conjugada de X , então*

$$X^{**} = -X,$$

ou seja, $-X$ é a conjugada de X^* .

Demonstração: Seja $\Lambda : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ curva isotrópica, tal que

$$X = \operatorname{Re} \Lambda \quad e \quad X^* = \operatorname{Im} \Lambda.$$

Definida a aplicação $\Gamma := -i\Lambda : z \in \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow (x_1^* - ix_1, x_1^* - ix_1, x_1^* - ix_1)(z) \in \mathbb{C}^3$, que é holomorfa, temos

$$\langle \Gamma', \Gamma' \rangle = \langle -i\Lambda', -i\Lambda' \rangle = (-i)i \langle \Lambda', \Lambda' \rangle = 0,$$

ou seja, Γ é uma curva isotrópica.

Além disso, vale

$$\Gamma = -i(X + iX^*) = X^* + i(-X),$$

e, portanto $-X$ é conjugada de X^* . \square

Lema 77 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplesmente conexo, $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície mínima conforme não plana e $X^* : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ a superfície conjugada de X . Então*

$$\phi_k^* = -i\phi_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Demonstração: Por (22) do Lema 51, temos

$$\phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v}$$

donde

$$-i\phi_k = -i \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v} \right) \stackrel{(C-R)}{=} -\frac{\partial x_k}{\partial v} - i \frac{\partial x_k}{\partial u} = \frac{\partial x_k^*}{\partial u} - i \frac{\partial x_k^*}{\partial v} = \phi_k^*$$

logo, segue o item 1. □

Proposição 78 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplesmente conexo, $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície mínima conforme não plana e $X^* : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ a superfície conjugada de X . Então*

1. $E^* = E \quad F^* = F \quad G^* = G;$
2. $K = K^*;$
3. $e^* = -f, \quad f^* = e, \quad g^* = f.$

Demonstração: 1- Por (52) e (53) temos

$$E^* = E \quad F^* = F \quad G^* = G.$$

2- Como vale o Item 1, i.e., a métrica é preservada, então pelo Teorema Egregium de Gauss (Teorema 15),

$$K^* = K.$$

3- Antes de demmonstrar o Item 3, lembremos rapidamente as seguintes igualdades

$$\frac{\partial^2 X^*}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial X^*}{\partial u} \right) \stackrel{(54)}{=} \frac{\partial}{\partial u} \left(-\frac{\partial X}{\partial v} \right) = -\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \quad (55)$$

$$\frac{\partial^2 X^*}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial X^*}{\partial u \partial v} \right) \stackrel{(54)}{=} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \quad (56)$$

$$\frac{\partial^2 X^*}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial X^*}{\partial v} \right) \stackrel{(54)}{=} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} \quad (57)$$

No Item 2 vimos que $N^* = N$. Usando as Equações de Cauchy-Riemann em (54), temos

$$e^* = \left\langle N^*, \frac{\partial^2 X^*}{\partial u^2} \right\rangle \stackrel{(55)}{=} \left\langle N, -\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \right\rangle = -f$$

$$f^* = \left\langle N^*, \frac{\partial^2 X^*}{\partial u \partial v} \right\rangle \stackrel{(56)}{=} \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \right\rangle = e$$

$$g^* = \left\langle N^*, \frac{\partial^2 X^*}{\partial v^2} \right\rangle \stackrel{(57)}{=} \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} \right\rangle = f.$$

□

A seguir, apresentamos resultado que relaciona as triplas (X, f, g) e (X^*, f^*, g^*) da **R.E.W** de X e X^* , respectivamente.

Proposição 79 *Sejam (X, f, g) uma tripla da **R.E.W** e $X^* : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ a superfície conjugada de X . Então*

$$f^* = -if \quad g = g^* \quad N = N^* \quad T_p X = T_p X^*.$$

Demonstração: Por (28) e (29) do Lema 54, respectivamente, temos

$$f^* = \phi_1^* - i\phi_2^* \stackrel{(Lema 77)}{=} -i\phi_1 - i(-i\phi_2) = -\phi_2 - i\phi_1 = -i(\phi_1 - i\phi_2) = -if$$

e

$$g^* = \frac{\phi_3^*}{\phi_1^* - i\phi_2^*} \stackrel{(Lema 77)}{=} \frac{-i\phi_3}{-i\phi_1 - i(-i\phi_2)} = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} = g.$$

Segue do Teorema (61) que

$$N = N^*.$$

Como estamos trabalhando com superfícies em \mathbb{R}^3 , segue

$$T_p X = T_p X^*, \forall p \in \Omega.$$

□

3.5 Superfícies Mínimas Associadas

A seguir apresentamos os conceitos de linhas de curvatura e de linhas assintóticas.

Definição 80 *Seja $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície mínima conforme. Dizemos que uma curva $\alpha : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto u(t) + iv(t) \in \mathbb{C}$ de classe C^1 é*

1- uma **linha de curvatura** de X quando

$$(fE - eF) \dot{u}^2 + (gE - eG) \dot{u}\dot{v} + (gF - fG) \dot{v}^2 = 0$$

2- uma **linha assintótica** de X quando

$$e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2 = 0.$$

A Proposição a seguir dá uma caracterização para as linhas de curvatura e linhas assintóticas de uma superfície X .

Proposição 81 *Considere $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície mínima conforme, $p \in \Omega$, $\alpha : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto u(t) + iv(t) \in \mathbb{C}$ uma curva de classe C^1 em Ω com $\alpha(t_0) = p$, $t_0 \in I$. Então*

1. α é linha assintótica de X , se e somente se, $\operatorname{Re} l(\alpha) = 0$;

2. α é linha de curvatura de X , se e somente se, $\operatorname{Im} l(\alpha) = 0$, onde $l : z \in \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto (e - if)(z) \in \mathbb{C}$.

Demonstração: Pela Definição (80), α é linha de curvatura e linha assintótica, respectivamente, quando

$$(fE - eF) \dot{u}^2 + (gE - eG) \dot{u}\dot{v} + (gF - fG) \dot{v}^2 = 0 \quad e \quad e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2 = 0.$$

Como $e = -g$ e X é conforme ($E = G$, $F = 0$), então

$$\alpha \text{ é linha de curvatura, se e somente se, } f(\dot{u}^2 - \dot{v}^2) - 2e\dot{u}\dot{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} l(\alpha) = 0$$

e

$$\alpha \text{ é linha assintótica, se e somente se, } e(\dot{u}^2 - \dot{v}^2) + 2f\dot{u}\dot{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} l(\alpha) = 0.$$

□

Antes de enunciarmos o próximo Teorema, façamos uma rápida observação. Considere $\Lambda : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ uma curva isotrópica e $\theta \in \mathbb{R}$. Então

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{-i\theta} \Lambda(z) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\theta} (\operatorname{Re} \Lambda(z) + i \operatorname{Im} \Lambda(z)) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \{(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)) (\operatorname{Re} \Lambda(z) + i \operatorname{Im} \Lambda(z))\} \\
&= \operatorname{Re} \{(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) (\operatorname{Re} \Lambda(z) + i \operatorname{Im} \Lambda(z))\} \\
&= \operatorname{Re} \{(\cos \theta \operatorname{Re} \Lambda(z) + \operatorname{sen} \theta \operatorname{Im} \Lambda(z)) + i (\cos \theta \operatorname{Im} \Lambda(z) - \operatorname{sen} \theta \operatorname{Re} \Lambda(z))\} \\
&\stackrel{\text{Proposição 75}}{=} X(z) \cos \theta + X^*(z) \operatorname{sen} \theta. \tag{58}
\end{aligned}$$

Teorema 82 *Sejam $\Lambda : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ uma curva isotrópica. Então para cada $\theta \in \mathbb{R}$, a aplicação*

$$\Gamma_\theta : z \in \Omega \mapsto e^{-i\theta} \Lambda(z) \in \mathbb{C}^3$$

é uma curva isotrópica e

$$\mathcal{Z}_\theta : z \in \Omega \mapsto \operatorname{Re} \Gamma_\theta(z) \in \mathbb{R}^3$$

é uma superfície mínima conforme com a propriedade

$$\mathcal{Z}_0 = X \quad e \quad \mathcal{Z}_{\frac{\pi}{2}} = X^*.$$

Demonstração: Como $\Gamma_\theta = e^{-i\theta} \Lambda$ é produto de holomorfas, então Γ_θ é holomorfa, para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Agora

$$\langle \Gamma'_\theta, \Gamma'_\theta \rangle = \langle e^{-i\theta} \Lambda'(z), e^{-i\theta} \Lambda'(z) \rangle = e^{-2i\theta} \langle \Lambda'(z), \Lambda'(z) \rangle = e^{-i\theta} \cdot 0 = 0$$

donde Γ_θ é uma curva isotrópica, para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Para as superfícies \mathcal{Z}_θ , temos

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{Z}_\theta &= (\mathcal{Z}_\theta)_{uu} + (\mathcal{Z}_\theta)_{vv} = (\operatorname{Re} \Gamma_z(\theta))_{uu} + (\operatorname{Re} \Gamma_z(\theta))_{vv} \\
&\stackrel{(58)}{=} (X \cos \theta + X^* \operatorname{sen} \theta)_{uu} + (X \cos \theta + X^* \operatorname{sen} \theta)_{vv} \\
&= X_{uu} \cos \theta + X_{uu}^* \operatorname{sen} \theta + X_{vv} \cos \theta + X_{vv}^* \operatorname{sen} \theta \\
&= (X_{uu} + X_{vv}) \cos \theta + (X_{uu}^* + X_{vv}^*) \operatorname{sen} \theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

pois X e X^* são mínimas, logo \mathcal{Z}_θ é superfície mínima, para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{Z}_\theta)_u\|^2 &= \|(\operatorname{Re} \Gamma_z(\theta))_u\|^2 = \|(X \cos \theta + X^* \operatorname{sen} \theta)_u\|^2 \\
&= \|X_u \cos \theta + X_u^* \operatorname{sen} \theta\|^2 = \|X_u \cos \theta - X_v \operatorname{sen} \theta\|^2 \\
&= \langle X_u \cos \theta - X_v \operatorname{sen} \theta, X_u \cos \theta - X_v \operatorname{sen} \theta \rangle \\
&= \|X_u\|^2 \cos^2 \theta + \langle X_u, X_v \rangle \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \langle X_v, X_u \rangle \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \|X_v\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\
&= \|X_u\|^2 \cos^2 \theta + \|X_v\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\
&= \|X_u\|^2 \cos^2 \theta + \|X_u\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta = \|X_u\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{Z}_\theta)_v\|^2 &= \|(\operatorname{Re} \Gamma_z(\theta))_v\|^2 = \|(X \cos \theta + X^* \operatorname{sen} \theta)_v\|^2 \\
&= \|X_v \cos \theta + X_v^* \operatorname{sen} \theta\|^2 = \|X_v \cos \theta + X_u \operatorname{sen} \theta\|^2 \\
&= \langle X_v \cos \theta + X_u \operatorname{sen} \theta, X_v \cos \theta + X_u \operatorname{sen} \theta \rangle \\
&= \|X_v\|^2 \cos^2 \theta + \langle X_v, X_u \rangle \cos \theta \operatorname{sen} \theta + \langle X_u, X_v \rangle \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \|X_u\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\
&= \|X_v\|^2 \cos^2 \theta + \|X_u\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\
&= \|X_u\|^2 \cos^2 \theta + \|X_u\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta = \|X_u\|^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle (\mathcal{Z}_\theta)_u, (\mathcal{Z}_\theta)_v \rangle &= \langle (\operatorname{Re} \Gamma_z(\theta))_u, (\operatorname{Re} \Gamma_z(\theta))_v \rangle \\
&= \langle (X \cos \theta + X^* \operatorname{sen} \theta)_u, (X \cos \theta + X^* \operatorname{sen} \theta)_v \rangle \\
&= \langle X_u \cos \theta + X_u^* \operatorname{sen} \theta, X_v \cos \theta + X_v^* \operatorname{sen} \theta \rangle \\
&= \langle X_u \cos \theta - X_v \operatorname{sen} \theta, X_v \cos \theta + X_u \operatorname{sen} \theta \rangle \\
&= \langle X_u, X_v \rangle \cos^2 \theta + \|X_u\|^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \|X_v\|^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \langle X_v, X_u \rangle \operatorname{sen}^2 \theta \\
&= 0 + \|X_u\|^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \|X_u\|^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - 0 = 0 \\
\|(\mathcal{Z}_\theta)_u\|^2 &= \|X_u\|^2 = \|(\mathcal{Z}_\theta)_v\|^2 \quad e \quad \langle (\mathcal{Z}_\theta)_u, (\mathcal{Z}_\theta)_v \rangle = 0 \tag{59}
\end{aligned}$$

ou seja, \mathcal{Z}_θ é conforme, para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Por fim,

$$\mathcal{Z}_0 = \operatorname{Re} \Gamma_z(0) = X \cos 0 + X^* \operatorname{sen} 0 = X$$

e

$$\mathcal{Z}_{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{Re} \Gamma_z\left(\frac{\pi}{2}\right) = X \cos \frac{\pi}{2} + X^* \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = X^*.$$

□

O Teorema anterior, motiva a seguinte definição.

Definição 83 (Superfície Associada) *Sejam $\Lambda : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ uma curva isotrópica e as aplicações $\Gamma_\theta : z \in \Omega \mapsto e^{-i\theta} \Lambda(z) \in \mathbb{C}^3$ e $\mathcal{Z}_\theta : z \in \Omega \mapsto \operatorname{Re} \Gamma_z(\theta) \in \mathbb{R}^3$ como no Teorema 82. A família de superfícies $\{\mathcal{Z}_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ é chamada **família de superfícies associadas** à superfície $X = \operatorname{Re} \Lambda$.*

O Teorema a seguir mostra a relação entre as superfícies dentro de uma família de superfícies associadas.

Lema 84 *Seja $\{\mathcal{Z}_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ uma família de superfícies associadas a uma superfície $X = \operatorname{Re} \Lambda$.*

Então

$$\phi_{k\theta} = e^{-i\theta} \phi_k.$$

Demonstração: Temos $\mathcal{Z}_\theta(z) = X(z) \cos \theta + X^*(z) \operatorname{sen} \theta = (x_1(z), x_2(z), x_3(z)) \cos \theta + (x_1^*(z), x_2^*(z), x_3^*(z)) \operatorname{sen} \theta$, donde

$$x_{k\theta}(z) = x_k(z) \cos \theta + x_k^*(z) \operatorname{sen} \theta$$

assim,

$$\begin{aligned} \phi_{k\theta} &= \frac{\partial x_{k\theta}}{\partial u} - i \frac{\partial x_{k\theta}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} \cos \theta + \frac{\partial x_k^*}{\partial u} \operatorname{sen} \theta \right) - i \left(\frac{\partial x_k}{\partial v} \cos \theta + \frac{\partial x_k^*}{\partial v} \operatorname{sen} \theta \right) \\ &\stackrel{(C-R)}{=} \frac{\partial x_k}{\partial u} \cos \theta - \frac{\partial x_k}{\partial v} \operatorname{sen} \theta - i \left(\frac{\partial x_k}{\partial v} \cos \theta + \frac{\partial x_k}{\partial u} \operatorname{sen} \theta \right) \\ &= (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v} \right) \\ &= (\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)) \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v} \right) \\ &= e^{-i\theta} \phi_k. \end{aligned}$$

□

A seguir, apresentamos resultado que relaciona as triplas (X, f, g) e $(Z_\theta, f_\theta, g_\theta)$ da **R.E.W** de X e Z_θ , respectivamente.

Proposição 85 *Seja $\{Z_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ uma família de superfícies associadas a uma superfície $X = \text{Re } \Lambda$. Então*

1. $T_p Z(\cdot, \theta) = T_p X, \quad N_\theta = N, \quad g_\theta = g;$
2. *Se as superfícies Z_θ forem não planas, então $f_\theta = e^{-i\theta} f$.*

Demonstração: 1- Como $Z_\theta(z) = X(z) \cos \theta + X^*(z) \sin \theta$, então

$$\frac{\partial Z_\theta}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} \cos \theta + \frac{\partial X^*}{\partial u} \sin \theta \quad e \quad \frac{\partial Z_\theta}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} \cos \theta + \frac{\partial X^*}{\partial v} \sin \theta$$

donde pelas Equações de Cauchy-Riemann em (54), obtemos

$$\frac{\partial Z_\theta}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} \cos \theta - \frac{\partial X}{\partial v} \sin \theta \quad e \quad \frac{\partial Z_\theta}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} \cos \theta - \frac{\partial X}{\partial u} \sin \theta. \quad (60)$$

Então $\frac{\partial Z_\theta}{\partial u}$ e $\frac{\partial Z_\theta}{\partial v}$ são combinações lineares dos vetores $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$, donde

$$T_p Z(\cdot, \theta) = T_p X.$$

Como estamos lidando com superfícies em \mathbb{R}^3 , temos

$$N_\theta = N.$$

Pelo Teorema (61),

$$g_\theta = g.$$

2- Temos

$$f_\theta = \phi_{1\theta} - i\phi_{2\theta} \stackrel{\text{(Item 1)}}{=} e^{-i\theta} \phi_1 - i \left(e^{-i\theta} \phi_2 \right) = e^{-i\theta} (\phi_1 - i\phi_2) = e^{-i\theta} f.$$

□

Proposição 86 *Seja $\{Z_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ uma família de superfícies associadas a uma superfície $X = \text{Re } \Lambda$. Então*

1. $E_\theta = E, \quad F_\theta = F, \quad G_\theta = G;$
2. $K_\theta = K;$
3. $e_\theta = e \cos \theta - f \sin \theta, \quad f_\theta = f \cos \theta + e \sin \theta, \quad g_\theta = g \cos \theta + f \sin \theta;$
4. Além disso, $l(z, \theta) = e^{-i\theta} l(z),$ para todo $\theta \in \mathbb{R}.$

Em particular, se

$$\theta - \tilde{\theta} = \frac{\pi}{2}$$

então, as linhas assintóticas de $\mathcal{Z}(\cdot, \tilde{\theta})$ são as linhas de curvatura de $\mathcal{Z}(\cdot, \theta)$ e vice-versa.

Demonstração: 1- Por (59) da Proposição 82, temos

$$\|(\mathcal{Z}_\theta)_u\|^2 = \|X_u\|^2 = \|(\mathcal{Z}_\theta)_v\|^2 \quad e \quad \langle (\mathcal{Z}_\theta)_u, (\mathcal{Z}_\theta)_v \rangle = 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

donde

$$E_\theta = E, \quad F_\theta = F, \quad G_\theta = G.$$

2- Usando o Teorema Egregium de Gauss (Teorema 15),

$$K_\theta = K, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

3- Lembremos antes que

$$\frac{\partial^2 X^*}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial X^*}{\partial u} \right) \stackrel{(54)}{=} \frac{\partial}{\partial u} \left(-\frac{\partial X}{\partial v} \right) = -\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \quad (61)$$

$$\frac{\partial^2 X^*}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial X^*}{\partial u \partial v} \right) \stackrel{(54)}{=} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \quad (62)$$

$$\frac{\partial^2 X^*}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial X^*}{\partial v} \right) \stackrel{(54)}{=} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}. \quad (63)$$

Como $N_\theta = N$, temos

$$\begin{aligned} e_\theta &= \langle N_\theta, (\mathcal{Z}_\theta)_{uu} \rangle = \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \cos \theta + \frac{\partial^2 X^*}{\partial u^2} \sin \theta \right\rangle \stackrel{(61)}{=} \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \right\rangle \cos \theta - \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \right\rangle \sin \theta \\ &= e \cos \theta - f \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_\theta &= \langle N_\theta, (\mathcal{Z}_\theta)_{uv} \rangle = \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \cos \theta + \frac{\partial^2 X^*}{\partial u \partial v} \sin \theta \right\rangle \stackrel{(62)}{=} \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \right\rangle \cos \theta + \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \right\rangle \sin \theta \\
&= f \cos \theta + e \sin \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_\theta &= \langle N_\theta, (\mathcal{Z}_\theta)_{vv} \rangle = \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \cos \theta + \frac{\partial^2 X^*}{\partial v^2} \sin \theta \right\rangle \stackrel{63}{=} \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right\rangle \cos \theta + \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} \right\rangle \sin \theta \\
&= g \cos \theta + f \sin \theta.
\end{aligned}$$

4- Pela Proposição 81 a seguinte igualdade caracteriza as linhas assintóticas e de curvatura

$$l_\theta(z) = e_\theta - if_\theta, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
l_\theta(z) &\stackrel{(Item\ 3)}{=} (e \cos \theta - f \sin \theta) - i(f \cos \theta + e \sin \theta) \\
&= e(\cos \theta - i \sin \theta) - f(\sin \theta + i \cos \theta) \\
&= e(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) - if(\cos \theta - i \sin \theta) \\
&= e(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) - if(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \\
&= ee^{-i\theta} - ife^{-i\theta} \\
&= e^{-i\theta}(e - if) \\
&= e^{-i\theta}l(z).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
l_{\frac{\pi}{2}}(z) &= e^{-i\frac{\pi}{2}}l(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}}(e - if) = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)(e - if) \\
&= (0 + i(-1))(e - if) = -f - ie.
\end{aligned}$$

Denote

$$\eta_1 := e(u^2 - v^2) + 2fuv \quad e \quad \eta_2 := -f(u^2 - v^2) + 2eiv.$$

Portanto,

$$l_0(z) = \eta_1 + i\eta_2 \quad e \quad l_{\frac{\pi}{2}}(z) = \eta_2 - i\eta_1$$

Considerando Proposição 81 deduzimos que

$$\operatorname{Re} l_0(z) = \eta_2 = 0 \text{ nos dá as linhas assintóticas de } X \text{ e}$$

$\text{Im } l_0(z) = -\eta_2 = 0$ nos dá as linhas de curvatura de X .

Analogamente,

$\text{Re } l_{\frac{\pi}{2}}(z) = \eta_1 = 0$ nos dá as linhas assintóticas de X^* e

$\text{Im } l_{\frac{\pi}{2}}(z) = -\eta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0$ nos dá as linhas de curvatura de X^* .

Em outras palavras deduzimos que as linhas assintóticas de X são as linhas de curvatura de X^* , e as linhas de curvatura de X são as linhas assintóticas de X^* . □

Capítulo IV

TEOREMAS DE POSIÇÃO

Nesta capítulo, apresentamos os Teoremas de Jorge-Xavier, Rosenberg-Toubiana e do Semi-espaço. Os dois primeiros garantem a existência de uma superfície mínima entre dois planos paralelos no espaço euclidiano. O terceiro garante, sob certas condições, que as únicas superfícies mínimas, completas, contidas num semi-espaço são planos.

4.1 Teorema de Jorge-Xavier

Começamos com a definição de completude, e logo em seguida apresentamos um Lema decorrente do Teorema de Runge, ambos importantes para a demonstração dos Teoremas de Jorge-Xavier e Rosenberg-Toubiana.

Definição 87 *Seja $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada. A métrica induzida por X em Ω é definida por*

$$d_X(p, q) = \inf \left\{ \mathcal{L}(\alpha) = \int_0^1 \|(X \circ \alpha)'(u)\| du ; \alpha : [0, 1] \rightarrow \Omega \text{ regular ligando } p \text{ a } q \right\} \quad (64)$$

para todo $p, q \in \Omega$.

Dizemos que X é **completa** quando (Ω, d_X) for um espaço métrico completo.

Observação 88 *Pelo Teorema da Representação de Enneper-Weierstrass (Teorema (55)), sabemos que existe uma superfície parametrizada mínima λ -conforme $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, se f e g são dadas nas condições do Teorema. Neste caso, dada uma curva divergente β , então*

$$\begin{aligned}
\|(X \circ \beta)'\|^2 &= \|d(X \circ \beta)_t\|^2 = \|dX_{\beta(t)}(x'(t), y'(t))\|^2 \\
&= \|x'(t) dX_{\beta(t)}.e_1 + y'(t) dX_{\beta(t)}.e_2\|^2 \\
&= \|x'(t) X_u(\beta(t)) + y'(t) X_v(\beta(t))\|^2 \\
&= \langle x'(t) X_u(\beta(t)) + y'(t) X_v(\beta(t)), x'(t) X_u(\beta(t)) + y'(t) X_v(\beta(t)) \rangle \\
&= [x'(t)]^2 X_u(\beta(t)) + 2x'(t) y'(t) X_{uv}(\beta(t)) + [y'(t)]^2 X_v(\beta(t)) \\
&= [x'(t)]^2 E(\beta(t)) + 2x'(t) y'(t) F(\beta(t)) + [y'(t)]^2 G(\beta(t)) \\
&= \left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \right) \lambda^2(\beta(t)) \quad (X \text{ é } \lambda\text{-conforme}) \\
&= \lambda^2(\beta(t)) |\beta'(t)|^2 \\
&= \lambda^2(\beta(t)) \quad (\beta \text{ é } ppca) \\
&= \left[\frac{|f(\beta(t))| (1 + |g(\beta(t))|^2)}{2} \right]^2 \quad (\text{pela Observação (57)})
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}(\beta) = \int_0^b \|(X \circ \beta)'(t)\| dt = \frac{1}{2} \int_0^b |f(\beta(t))| (1 + |g(\beta(t))|^2) dt. \quad (65)$$

O Teorema a seguir, garante que toda função holomorfa numa vizinhança de um compacto K , pode ser aproximada por funções racionais cujos pólos estão fora do conjunto K . Além disso, quando $\mathbb{C} \setminus K$ for conexo, esta aproximação é dada por polinômios. Tal resultado é conhecido como Teorema de Runge.

Teorema 89 (Runge) *Sejam K um subconjunto compacto do plano complexo contido num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$, e $F : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se $\text{Polos}(F) \subset \mathbb{C} \setminus K$, então F pode ser aproximada uniformemente em Ω por funções racionais. Além disso, se $\mathbb{C} \setminus K$ for conexo, a aproximação é dada por polinômios.*

Para uma demonstração do Teorema acima, vide [15].

Temos a seguinte consequência do Teorema de Runge (Teorema 89).

Mas antes, lembremos que o *disco unitário* e o *disco de raio $c > 0$* no plano complexo são definidos, respectivamente, por

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; \|z\| < 1\} \quad e \quad \mathbb{D}_c = \{z \in \mathbb{C}; \|z\| < c\}. \quad (66)$$

Lema 90 *Seja \mathbb{D}_c o disco de raio $c > 0$ centrado na origem. Considere $\{D_n\}_n$ uma sequência de discos fechados centrados na origem e $\{K_n\}_n$ uma sequência de compactos no plano complexo satisfazendo:*

1. $D_n \subset \text{Int}(D_{n+1}) \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \mathbb{D}_c$;
3. $K_n \subset D_n \forall n \in \mathbb{N}^*$;
4. $K_{n+1} \cap D_n = \emptyset \forall n \in \mathbb{N}^*$;
5. $\mathbb{C} \setminus K_n$ é conexo $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Então, dadas uma função holomorfa F definida num aberto contendo $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$ e $\epsilon > 0$, existe uma função holomorfa $h : \mathbb{D}_c \rightarrow \mathbb{C}$, tal que

$$|h(z) - F(z)| < 1, \quad \forall z \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n.$$

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Considere a sequência de polinômios definida pelo seguinte processo. Como K_1 é compacto e $\mathbb{C} \setminus K_1$ é conexo, então pelo Teorema de Runge (Teorema (89)), existe um polinômio p_1 verificando

$$|p_1(z) - F(z)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall z \in K_1.$$

Como $K_2 \cap D_1 = \emptyset$, então existem U_1 e V_2 vizinhanças de D_1 e K_2 , respectivamente, tais que $U_1 \cap V_2 = \emptyset$. Seja $F_2 : U_1 \cup V_2 \rightarrow \mathbb{C}$ função definida por

$$F_2(z) = \begin{cases} F(z), & \text{se } z \in V_2 \\ p_1(z), & \text{se } z \in U_1. \end{cases}$$

Logo, F_2 é uma função holomorfa em $U_1 \cup V_2$, por ser holomorfa em cada componente conexa. Como $D_1 \cup K_1$ é compacto e $\mathbb{C} \setminus (D_1 \cup K_2)$ é conexo, então novamente pelo Teorema de Runge (89), existe um polinômio p_2 tal que

$$|F_2(z) - p_2(z)| < \frac{\epsilon}{4}$$

para todo $z \in D_1 \cup K_2$, que implica

$$|p_2(z) - F(z)| < \frac{\epsilon}{4} \text{ para todo } z \in K_2.$$

$$|p_2(z) - p_1(z)| < \frac{\epsilon}{4} \text{ para todo } z \in D_1.$$

Aplicando sucessivamente o Teorema de Runge (89), vemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um polinômio verificando

$$|p_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2^n} \text{ para todo } z \in K_n \quad (67)$$

$$|p_n(z) - p_{n-1}(z)| < \frac{\epsilon}{2^n} \text{ para todo } z \in D_{n-1}. \quad (68)$$

Vamos provar agora que a sequência $\{p_n\}$ é uniformemente de Cauchy sobre os compactos de \mathbb{D}_c . Sejam $K \subset \mathbb{D}_c$ um compacto, e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset D_{n_0}$, $n_0 > 1$. Então $K \subset D_n$ para todo $n \geq n_0$. Sejam $m \geq n \geq n_0$ e $z \in K$, então

$$\begin{aligned} |p_m(z) - p_n(z)| &\leq |p_m(z) - p_{m-1}(z)| + \dots + |p_{n+1}(z) - p_n(z)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2^m} + \frac{\epsilon}{2^{m-1}} + \dots + \frac{\epsilon}{2^n} \text{ por (68)} \\ &= \epsilon \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} + \dots + \frac{1}{2^n} \right). \end{aligned}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ é de Cauchy, a sequência p_n é uniformemente de Cauchy sobre os compactos de \mathbb{D}_c e, portanto, converge uniformemente a uma função h holomorfa em \mathbb{D}_c em cada subconjunto compacto. Daí, para o dado ϵ para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{D}_c$, existe um $n_K \in \mathbb{N}$, tal que

$$|p_n(z) - h(z)| \leq \frac{\epsilon}{2}, \forall n \geq n_K, \forall z \in K. \quad (69)$$

Finalmente, seja $z \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $z \in K_{n_0}$. Se $n > n_{K_{n_0}}$, então, usando (67) e (69), obtemos

$$|f(z) - h(z)| \leq |f(z) - p_n(z)| + |p_n(z) - h(z)| < \epsilon$$

portanto,

$$|f(z) - h(z)| < \epsilon \quad \forall z \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n.$$

□

Finalmente, apresentamos o Teorema de Jorge-Xavier como segue.

Teorema 91 (Jorge-Xavier) *Existe uma superfície mínima $X : \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ conforme, completa, não plana cuja imagem está contida entre dois planos paralelos.*

Demonstração: Seja $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de discos fechados centrados na origem de raio $R_n > 0$, satisfazendo

$$D_n \subset \text{Int}(D_{n+1}) \quad e \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \mathbb{D}. \quad (70)$$

Considere as sequências de números reais positivos $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfazendo

$$R_{n-1} < a_n < b_n < R_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Considere o anel

$$A_n := \{z \in \mathbb{C}; a_n \leq \|z\| \leq b_n\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja K_n o compacto obtido por tirar um pequeno pedaço de A_n , interceptando o eixo real negativo se n for ímpar, e interceptando o eixo real positivo se n for par (vide figura 8).

Note que os conjuntos K_n satisfazem

1. $K_n \subset D_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*;$
2. $K_n \cap D_{n-1} = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*;$
3. $\mathbb{C} \setminus K_n$ é conexo $\forall n \in \mathbb{N}^*;$
4. $K_n \subset U_n := \text{Int}(D_n) \setminus D_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*;$
5. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} K_n = \emptyset.$

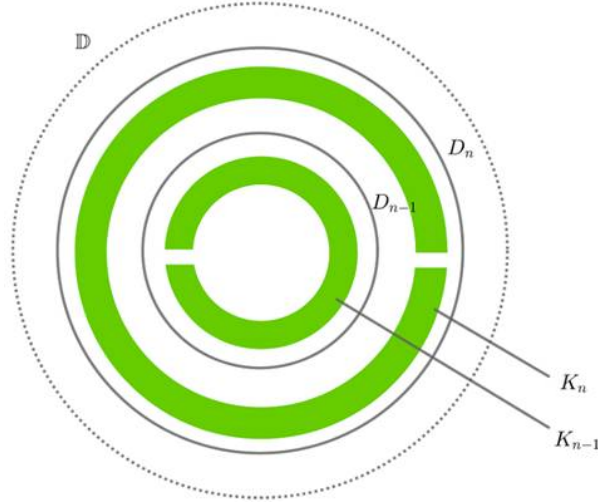


Figura 8: Os conjuntos K_n e D_n .

Considere as seqüências

$$d_n := b_n - a_n > 0 \quad (71)$$

e

$$s_n = -\ln d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (72)$$

Defina a função

$$F : z \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} U_n \mapsto \sum s_n \chi_{U_n}(z) \in \mathbb{C}.$$

Como a seqüência de abertos U_n são disjuntos, então F está bem definida e é holomorfa.

Pelo Lema (90), existe uma função holomorfa $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que

$$|h(z) - s_n| = |h(z) - F(z)| < 1, \quad \forall z \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n. \quad (73)$$

Considere agora as funções

$$f : z \in \mathbb{D} \mapsto e^{h(z)} \in \mathbb{C} \quad (74)$$

$$g : z \in \mathbb{D} \mapsto e^{-h(z)} \in \mathbb{C}$$

que são holomorfas, e por não possuírem zeros e pólos, satisfazem a **p.z.p.**

Pelo Teorema da Representação de Enneper-Weierstrass (vide Teorema 55), existe uma superfície mínima, λ -conforme, não plana $X : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(z) = \left(\operatorname{Re} \int_0^z \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g(\xi)} - g(\xi) \right) d\xi, \operatorname{Re} \int_0^z \frac{i}{2} \left(\frac{1}{g(\xi)} + g(\xi) \right) d\xi, \operatorname{Re} \int_0^z d\xi \right)$$

Note que a terceira coordenada de X verifica

$$\left| \operatorname{Re} \int_0^z d\xi \right| \leq \left| \int_0^z d\xi \right| = \left| \int_0^1 z d\xi \right| = |z| < 1$$

donde a imagem de X está contida entre os planos paralelos

$$\Pi_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 1\} \quad e \quad \Pi_{-1} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = -1\}.$$

Nos resta demonstrar que X é completa. Pela Proposição (7), basta mostrar que $\mathcal{L}(\beta) = +\infty$, para toda curva divergente em \mathbb{D} .

Seja $\beta : t \in [0, b) \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{D}$ uma curva divergente.

Em (65) na Observação (88), mostramos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\beta) &= \int_0^b \|(X \circ \beta)'(t)\|_{\mathbb{R}^3} dt = \frac{1}{2} \int_0^b |f(\beta(t))| \left(1 + |g(\beta(t))|^2\right) dt. \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{1}{|f(\beta(t))|} + |f(\beta(t))| \right) dt. \end{aligned}$$

AFIRMAÇÃO: $\int_0^b \left(\frac{1}{|f(\beta(t))|} + |f(\beta(t))| \right) dt = +\infty.$

Iremos dividir a prova em dois casos. Suponha primeiro que $b = +\infty$.

Como

$$\frac{1}{|f(z)|} + |f(z)| \geq 1, \quad \forall z \in \mathbb{D} \tag{75}$$

então

$$\int_0^b \left(\frac{1}{|f(\beta(t))|} + |f(\beta(t))| \right) dt \geq \int_0^b dt = +\infty.$$

Suponha agora que $b < +\infty$.

Dizemos que uma curva β atravessa um conjunto K_n se existe $I_n = (\lambda_n, \Lambda_n) \subset [0, b)$, tais que

$$\beta(I_n) \in \text{Int}(K_n), \quad \beta(\lambda_n) \in S_{a_n}(0) \quad e \quad \beta(\Lambda_n) \in S_{b_n}(0)$$

onde $S_{c_n}(0) := \{z \in \mathbb{C}; \|z\| = c_n\}$ e $S_{d_n}(0) := \{z \in \mathbb{C}; \|z\| = d_n\}$.

Suponhamos que $\mathcal{L}(\beta) < +\infty$, então:

(a) Existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tal que β atravessa K_{2n} , para todo $n \geq n_0$ ou

(b) Existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tal que β atravessa K_{2n-1} , para todo $n \geq n_0$.

Caso contrário, para todo $n_0 \in \mathbb{N}^*$, existiria um $\tilde{n}_0 \geq n_0$, tal que β não atravessa $K_{2\tilde{n}_0}$ e um $\tilde{n}_0' \geq n_0$, tal que β não atravessa $K_{2\tilde{n}_0'+1}$. Mas nesse caso, teríamos uma subdivisão do disco unitário na qual o comprimento da curva β vai aumentando infinitamente, mas assim β teria comprimento infinito, o que é uma contradição.

Sem perda de generalidade, iremos supor que β satisfaz o caso (a).

Observe que

$$f(z) = e^{s_{2n}} e^{h(z) - s_{2n}}$$

donde

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| e^{s_{2n}} e^{h(z) - s_{2n}} \right| = e^{s_{2n}} \left| e^{h(z) - s_{2n}} \right| = e^{s_{2n}} \left| e^{\text{Re}(h(z) - s_{2n})} e^{i \text{Im}(h(z) - s_{2n})} \right| \\ &= e^{s_{2n}} e^{\text{Re}(h(z) - s_{2n})} = e^{s_{2n}} e^{\text{Re} h(z) - s_{2n}}. \end{aligned}$$

Além disso, por (73), temos

$$|(\text{Re} h(z) - s_{2n}) + i \text{Im} h(z)| = |\text{Re} h(z) + i \text{Im} h(z) - s_{2n}| = |h(z) - s_{2n}| < 1, \quad \forall z \in K_{2n}$$

logo,

$$(\text{Re} h(z) - s_{2n})^2 + (\text{Im} h(z))^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad (\text{Re} h(z) - s_{2n})^2 < 1$$

o que implica

$$\text{Re} h(z) - s_{2n} > -1 \quad \forall z \in K_{2n}.$$

Portanto,

$$|f(z)| > e^{s_{2n}-1} \quad \forall z \in K_{2n}. \quad (76)$$

Seja $n_0 \in \mathbb{N}^*$ o número natural, tal que β atravessa K_{2n} , para todo $n \geq n_0$. Então

$$\begin{aligned}
\int_0^b \left(\frac{1}{|f(\beta(t))|} + |f(\beta(t))| \right) dt &= \int_0^b \frac{1}{|f(\beta(t))|} dt + \int_0^b |f(\beta(t))| dt \\
&\stackrel{(75)}{\geq} \int_0^b |f(\beta(t))| dt \\
&\geq \sum_{n \geq n_0} \int_{\lambda_{2n}}^{\Lambda_{2n}} |f(\beta(t))| dt \\
&\stackrel{(76)}{\geq} \sum_{n \geq n_0} \int_{\lambda_{2n}}^{\Lambda_{2n}} e^{s_{2n}-1} dt \\
&= \sum_{n \geq n_0} e^{s_{2n}-1} l \left(\beta|_{(\lambda_n, \Lambda_n)} \right) \\
&\geq \sum_{n \geq n_0} e^{s_{2n}-1} d_{2n} \\
&\stackrel{(72)}{\geq} \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{e} = +\infty
\end{aligned}$$

e isso prova a afirmação. □

4.2 Teorema de Rosenberg-Toubiana

Lembremos que o disco unitário e o disco de raio $c > 0$ foram definidos em (66). A seguir definimos o *anel de raio* $c > 0$ no plano complexo

$$A\left(\frac{1}{c}, c\right) = \left\{ z \in \mathbb{C}; \frac{1}{c} < \|z\| < c \right\}.$$

Lema 92 *Sejam $c > 1$ e $g_0 : A\left(\frac{1}{c}, c\right) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então as funções*

$$g : z \in A\left(\frac{1}{c}, c\right) \mapsto ze^{2\left(g_0(z) - \overline{g_0\left(-\frac{1}{z}\right)}\right)} \in \mathbb{C}$$

e

$$f : z \in A\left(\frac{1}{c}, c\right) \mapsto \frac{1}{z} e^{-2\left(g_0(z) - \overline{g_0\left(-\frac{1}{z}\right)}\right)} \in \mathbb{C}$$

são holomorfas, e g verifica

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} d\zeta = \overline{\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta}$$

para toda curva diferenciável fechada $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow A\left(\frac{1}{c}, c\right)$.

Além disso, o período das funções $\phi_k : A\left(\frac{1}{c}, c\right) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \phi_3 = fg$$

são imaginários puros.

Demonstração: Note que as funções

$$\overline{g_0} : z \in A\left(\frac{1}{c}, c\right) \mapsto \overline{g_0(z)} \in \mathbb{C} \quad e \quad h : z \in A\left(\frac{1}{c}, c\right) \mapsto -\frac{1}{\bar{z}} \in \mathbb{C}$$

são anti-holomorfas.

Como composição de duas funções anti-holomorfas é holomorfa, então a função

$$z \in A\left(\frac{1}{c}, c\right) \mapsto \overline{g_0\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)} \in \mathbb{C}$$

é holomorfa.

Dito isto, temos que g é produto, composição e diferença de holomorfas, donde g é holomorfa. Analogamente, f também é holomorfa.

Antes de provarmos a próxima afirmação, observemos que

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) &= -\frac{1}{\bar{z}} e^{2(g_0(-\frac{1}{\bar{z}}) - \overline{g_0(z)})} = -\frac{1}{\bar{z}} e^{2(g_0(-\frac{1}{\bar{z}}) - \overline{g_0(z)})} \frac{e^{-2(g_0(-\frac{1}{\bar{z}}) - \overline{g_0(z)})}}{e^{-2(g_0(-\frac{1}{\bar{z}}) - \overline{g_0(z)})}} \\ &= -\frac{1}{\bar{z}} \frac{1}{e^{-2(g_0(-\frac{1}{\bar{z}}) - \overline{g_0(z)})}} = -\frac{1}{\bar{z}} \frac{1}{e^{2(-g_0(-\frac{1}{\bar{z}}) + g_0(z))}} = -\frac{1}{\bar{z}} \frac{1}{e^{2(-g_0(-\frac{1}{\bar{z}}) + g_0(z))}} \\ &= -\frac{1}{\bar{z}} \frac{1}{e^{2(-g_0(-\frac{1}{\bar{z}}) + g_0(z))}} = -\frac{1}{\bar{z}} \frac{1}{ze^{2(-g_0(-\frac{1}{\bar{z}}) + g_0(z))}} = -\frac{1}{\bar{z}} \frac{1}{ze^{2(g_0(z) - g_0(-\frac{1}{\bar{z}}))}} = -\frac{1}{g(z)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{g(z)} = \overline{-g\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad \forall z \in A\left(\frac{1}{c}, c\right). \quad (77)$$

Seja $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow A\left(\frac{1}{c}, c\right)$ uma curva diferenciável fechada. Então γ é homotópica a uma constante ou γ é homotópica uma parametrização de \mathbb{S}^1 , digamos, $\alpha : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it} \in \mathbb{S}^1$.

Se γ é homotópica a uma constante r , então é imediato

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} d\zeta = \int_{\{r\}} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{kg(k)} 0 dt = 0 = \overline{\int_0^{2\pi} \frac{g(k)}{k} 0 d\zeta} = \overline{\int_{\{r\}} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta} = \overline{\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta}$$

Suponhamos agora que γ é homotópica a $\alpha : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it} \in \mathbb{S}^1$.

Façamos rapidamente algumas conclusões. Como $\alpha(t) \in \mathbb{S}^1$, para todo $t \in [0, 2\pi]$, temos

$$\alpha(t) \overline{\alpha(t)} = |\alpha(t)|^2 = 1 \quad (78)$$

donde

$$-\alpha(t) = -\frac{1}{\overline{\alpha(t)}}. \quad (79)$$

Diferenciando (78) em relação a t obtemos

$$\alpha'(t) \overline{\alpha(t)} + \alpha(t) \overline{\alpha'(t)} = 0$$

donde

$$\alpha'(t) = -\alpha(t) \frac{\overline{\alpha'(t)}}{\overline{\alpha(t)}} \stackrel{(79)}{=} -\left(-\frac{1}{\alpha(t)}\right) \frac{\overline{\alpha'(t)}}{\alpha(t)} = \frac{\overline{\alpha'(t)}}{\alpha(t)^2} \quad (80)$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$.

AFIRMAÇÃO: $\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} d\zeta = \overline{\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta}$.

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} d\zeta &= \int_{\alpha} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} d\zeta \stackrel{(77)}{=} \int_{\alpha} \frac{1}{\zeta} \left(-g\left(-\frac{1}{\zeta}\right) \right) d\zeta = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{\alpha(t)} g\left(-\frac{1}{\alpha(t)}\right) \alpha'(t) dt \\ &\stackrel{(79)}{=} \int_0^{2\pi} -\overline{\alpha(t) g(-\alpha(t))} \alpha'(t) dt \stackrel{(80)}{=} \int_0^{2\pi} -\overline{\alpha(t) g(-\alpha(t))} \left(-\frac{\overline{\alpha'(t)}}{\alpha(t)^2} \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\overline{\alpha(t) g(-\alpha(t))} \overline{\alpha'(t)}}{\alpha(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \frac{\overline{\alpha'(t)}}{g(-\alpha(t)) \alpha(t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{g(-\alpha(t))}{\overline{\alpha(t)}} \overline{\alpha'(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{g(-\alpha(t))}{\alpha(t)} \alpha'(t) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{g(-\alpha(t))}{\alpha(t)} \alpha'(t) \right) dt = \int_{\alpha} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \overline{\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta g(\zeta)} = \overline{\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta}. \quad (81)$$

Mostremos agora que o período das funções $\phi_k : A\left(\frac{1}{c}, c\right) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ são imaginários puros.

Seja $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow A(\frac{1}{c}, c)$ uma curva fechada.

Então γ é homotópica a uma constante ou γ é homotópica a parametrização de \mathbb{S}^1 , digamos, a $\alpha : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it} \in \mathbb{S}^1$.

Se γ é homotópica a uma constante r , então é imediato

$$\int_{\gamma} \phi_k(\zeta) d\zeta = \int_0^{2\pi} \phi_k(r) 0 dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0$$

para $k = 1, 2, 3$.

Suponhamos agora que γ é homotópica a $\alpha : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it} \in \mathbb{S}^1$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma} \phi_1(\zeta) d\zeta \right) &= \operatorname{Re} \left(\int_{\alpha} \phi_1(\zeta) d\zeta \right) = \operatorname{Re} \left(\int_{\alpha} \frac{1}{2} f(\zeta) (1 - g(\zeta)^2) d\zeta \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \int_{\alpha} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} - \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \int_{\alpha} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} - \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \overline{\left(\frac{1}{2} \int_{\alpha} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} - \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right)} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} d\zeta - \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \overline{\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} d\zeta} - \overline{\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta} \right) \stackrel{(81)}{=} 0 \end{aligned}$$

donde o período de ϕ_1 é imaginário puro.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma} \phi_2(\zeta) d\zeta \right) &= \operatorname{Re} \left(\int_{\alpha} \phi_2(\zeta) d\zeta \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{i}{2} \int_{\alpha} f(\zeta) (1 + g(\zeta)^2) d\zeta \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{i}{2} \int_{\alpha} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} + \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right) = \operatorname{Im} i \left(\frac{i}{2} \int_{\alpha} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} + \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right) \\ &= -\operatorname{Im} \left(\frac{1}{2} \int_{\alpha} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} + \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right) = -\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{2} \int_{\alpha} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} + \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta - \overline{\frac{1}{2} \int_{\alpha} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} + \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta} \right) \\ &= -\frac{1}{4i} \left(\int_{\alpha} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} + \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta - \overline{\int_{\alpha} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} + \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta} \right) \\ &= -\frac{1}{4i} \left(\int_{\alpha} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} d\zeta + \int_{\alpha} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta - \overline{\int_{\alpha} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} d\zeta} - \overline{\int_{\alpha} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta} \right) \stackrel{(81)}{=} 0 \end{aligned}$$

donde o período de ϕ_2 é imaginário puro.

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \operatorname{Re} \int_{\alpha} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha(t)} \alpha'(t) dt = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} i dt = \operatorname{Re} 2\pi i = 0$$

donde o período de ϕ_3 é imaginário puro. □

Lema 93 Sejam $g : z \in A\left(\frac{1}{c}, c\right) \mapsto ze^{2\left(g_0(z) - \overline{g_0\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right)} \in \mathbb{C}$ a função holomorfa dada no Lema 92 e $(c_n)_n \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência, tal que

$$|g_0(z) - c_n| < 1 \quad (82)$$

para todo $z \in A\left(\frac{1}{c}, c\right)$.

Considere $\{K_n\}_n$ uma sequência de compactos, tal que $K_n \subset \mathbb{D}_c \setminus \mathbb{D}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e defina a sequência de compactos $\{Y_n\}_n$ por $Y_n = \left\{-\frac{1}{\bar{z}} \in \mathbb{C}; z \in K_n\right\}$. Então

$$1- |g(z)| \geq \eta_1 e^{2c_n}, \text{ para todo } z \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n;$$

$$2- \left|\frac{1}{g}(z)\right| \geq \eta_2 e^{2c_n}, \text{ para todo } z \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n.$$

onde $\eta_i \in \mathbb{C}$ é uma constante complexa.

Demonstração: 1- Seja $z \in \bigcup_n K_n$. Por(82), temos

$$|(\operatorname{Re} g_0(z) - c_n) + i \operatorname{Im} g_0(z)| = |\operatorname{Re} g_0(z) + i \operatorname{Im} g_0(z) - c_n| = |g_0(z) - c_n| < 1, \quad \forall z \in K_n$$

logo

$$(\operatorname{Re} g_0(z) - c_n)^2 \leq (\operatorname{Re} g_0(z) - c_n)^2 + (\operatorname{Im} g_0(z))^2 < 1$$

donde

$$\operatorname{Re}(g_0(z)) > c_n - 1 \quad \therefore \quad 2 \operatorname{Re}(g_0(z)) > 2c_n - 2, \quad \forall z \in K_n.$$

Portanto

$$\left|e^{2g_0(z)}\right| = e^{2\operatorname{Re}(g_0(z))} > e^{2c_n - 2}, \quad \forall z \in K_n. \quad (83)$$

Como $g_0 : \mathbb{D}_c \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa (em particular, contínua) e $\overline{B}_1(0) \subset \mathbb{D}_c$ é compacto, então

$$m \leq \operatorname{Re} g_0(w) \leq M, \quad \forall w \in \overline{B}_1(0),$$

onde $m, M \in \mathbb{R}_+$.

Em particular, como $-\frac{1}{\bar{z}} \in \overline{B}_1(0)$,

$$m \leq \operatorname{Re} g_0\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) \leq M, \quad \forall z \in K_n$$

donde

$$e^m \leq e^{\operatorname{Re} g_0\left(-\frac{1}{z}\right)} \quad \therefore \quad e^{2m} \leq e^{2\operatorname{Re} g_0\left(-\frac{1}{z}\right)}, \quad \forall z \in K_n. \quad (84)$$

Portanto

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |z| \left| e^{2g_0(z)} \right| \left| e^{-2\overline{g_0\left(-\frac{1}{z}\right)}} \right| = |z| e^{2\operatorname{Re} g_0(z)} e^{-\operatorname{Re} 2\overline{g_0\left(-\frac{1}{z}\right)}} \\ &\stackrel{(83) \text{ e } (84)}{\geq} 1 \cdot e^{2m} \cdot e^{2c_n-2} := \eta_1 e^{2c_n} \end{aligned}$$

para todo $z \in K_n$, onde $\eta_1 = e^{2m} e^{-2}$.

2- Seja $z \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n$, então $-\frac{1}{z} \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$. Por(82), temos

$$\left| \left(\operatorname{Re} g_0\left(-\frac{1}{z}\right) - c_n \right) + i \operatorname{Im} g_0\left(-\frac{1}{z}\right) \right| = \left| \operatorname{Re} g_0\left(-\frac{1}{z}\right) + i \operatorname{Im} g_0\left(-\frac{1}{z}\right) - c_n \right| = \left| g_0\left(-\frac{1}{z}\right) - c_n \right| < 1$$

para todo $z \in Y_n$, logo

$$\left(\operatorname{Re} g_0\left(-\frac{1}{z}\right) - c_n \right)^2 \leq \left(\operatorname{Re} g_0\left(-\frac{1}{z}\right) - c_n \right)^2 + \left(\operatorname{Im} g_0\left(-\frac{1}{z}\right) \right)^2 < 1$$

donde

$$\operatorname{Re} g_0\left(-\frac{1}{z}\right) - c_n > -1 \quad \therefore \quad 2 \operatorname{Re} \left(\overline{g_0\left(-\frac{1}{z}\right)} \right) = 2 \operatorname{Re} \left(g_0\left(-\frac{1}{z}\right) \right) > 2c_n - 2, \quad \forall z \in Y_n$$

portanto

$$e^{2\operatorname{Re} \left(\overline{g_0\left(-\frac{1}{z}\right)} \right)} > e^{2c_n-2}, \quad \forall z \in Y_n. \quad (85)$$

Como $g_0 : \mathbb{D}_c \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa (em particular, contínua) e $\overline{B_1}(0) \subset \mathbb{D}_c$ é compacto, então

$$m \leq \operatorname{Re} g_0(w) \leq M, \quad \forall w \in \overline{B_1}(0),$$

onde $m, M \in \mathbb{R}_+$.

Em particular, como $z \in \overline{B_1}(0)$,

$$m \leq \operatorname{Re} g_0(z) \leq M, \quad \forall z \in Y_n$$

donde

$$e^m \leq e^{\operatorname{Re} g_0(z)} \quad \therefore \quad e^{-2m} \leq e^{-2\operatorname{Re} g_0(z)}, \quad \forall z \in Y_n. \quad (86)$$

Portanto,

$$\left| \frac{1}{g(z)} \right| = \left| \frac{1}{z} \right| \left| e^{-2g_0(z)} \right| \left| e^{2g_0\left(-\frac{1}{z}\right)} \right| = \left| \frac{1}{z} \right| e^{-2\operatorname{Re} g_0(z)} e^{2\operatorname{Re} g_0\left(-\frac{1}{z}\right)} \stackrel{(85)}{\geq} \stackrel{(86)}{\geq} e^{-2m} e^{2c_n - 2} = \eta_2 e^{2c_n}$$

para todo $z \in Y_n$, onde $\eta_2 = e^{-2m} e^{-2}$. \square

Finalmente apresentamos o Teorema de Rosenberg-Toubiana.

Teorema 94 (Rosenberg-Toubiana) *Para todo $c > 1$ existe uma superfície mínima conforme $X : A\left(\frac{1}{c}, c\right) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ completa, cuja imagem está contida entre dois planos paralelos e é topologicamente um cilindro.*

Demonstração: Provaremos apenas a parte da existência de uma superfície entre dois planos paralelos, e daremos uma ideia de como mostrar que a superfície é topologicamente um cilindro.

Considere $\{D_n\}_n$ uma sequência de discos fechados centrados na origem de raio $R_n > 0$ satisfazendo

- 1- $D_n \subset \operatorname{Int}(D_{n+1})$;
- 2- $\bigcup_n D_n = \mathbb{D}_c$;
- 3- $\mathbb{D} \subset D_1$.

Dadas sequências de números reais positivos $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfazendo

$$1 < R_{n-1} < a_n < b_n < R_n < c$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$, defina

$$r_n = b_n - a_n$$

$$c_n = \frac{1}{2} \log r_n^{-1}$$

$$U_n = \operatorname{Int}(D_n) \setminus D_{n-1} = \{z \in \mathbb{C}; R_{n-1} < |z| < R_n\}$$

$$A_n = \{z \in \mathbb{C}; a_n \leq \|z\| \leq b_n\},$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja K_n um compacto obtido tirando-se um pequeno pedaço de A_n , interceptando o eixo real negativo se n for ímpar, e interceptando o eixo real positivo se n for par, e defina a sequência $\{Y_n\}_n$ por

$$Y_n = \left\{ -\frac{1}{\bar{z}}; z \in K_n \right\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$ (vide figura 9).

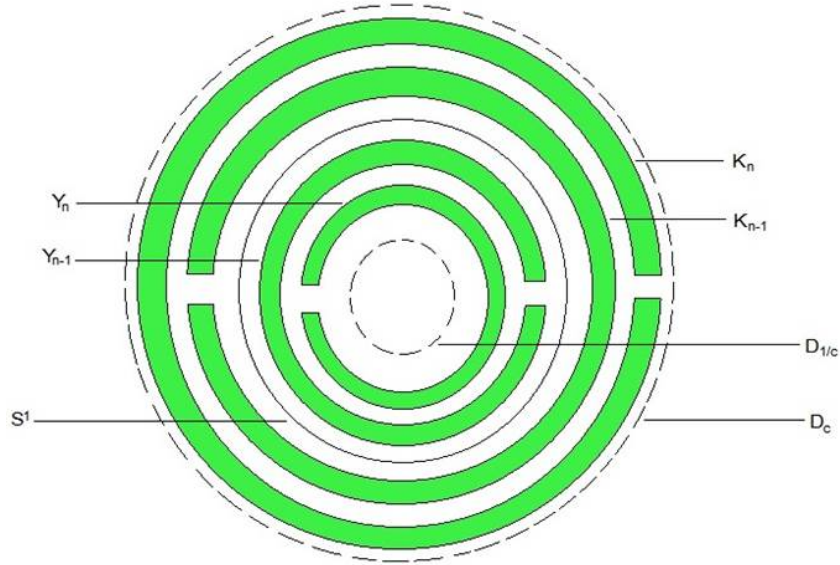


Figura 9: Os conjuntos K_n e Y_n .

Note que a sequência $\{K_n\}_n$ satisfaz as seguintes propriedades:

- 1- $K_n \subset D_n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$;
- 2- $K_n \cap D_{n-1} = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$;
- 3- $\mathbb{C} \setminus K_n$ é conexo, para todo $n \in \mathbb{N}^*$;
- 4- $K_n \subset U_n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$;
- 5- $K_n \cap K_m = \emptyset$, para todo $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Defina a função

$$F : z \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} U_n \mapsto \sum c_n \chi_{U_n}(z) \in \mathbb{C}.$$

Como a sequência de abertos U_n são dois a dois disjuntos, então F está bem definida e é holomorfa. Pelo Lema 90, existe uma função holomorfa $g_0 : \mathbb{D}_c \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que

$$|g_0(z) - c_n| = |g_0(z) - F(z)| < 1, \quad \forall z \in K_n. \quad (87)$$

Defina agora as funções

$$g : z \in A\left(\frac{1}{c}, c\right) \mapsto ze^{2\left(g_0(z) - \overline{g_0\left(-\frac{1}{z}\right)}\right)} \in \mathbb{C}$$

$$f : z \in A\left(\frac{1}{c}, c\right) \mapsto \frac{1}{z}e^{-2\left(g_0(z) - \overline{g_0\left(-\frac{1}{z}\right)}\right)} \in \mathbb{C}.$$

Pelo Lema 92, as funções f e g são holomorfas. Além disso, f e g satisfazem a **p.z.p**, pois ambas não possuem zeros e pólos.

Como $A\left(\frac{1}{c}, c\right)$ não é simplesmente conexo, não podemos aplicar o Teorema da **R.E.W**. Mas, pela Observação 56, podemos aplicar o Teorema da **R.E.W**, desde que o período das funções $\phi_k : A\left(\frac{1}{c}, c\right) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3$ dadas por

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \phi_3 = fg$$

sejam imaginários puros.

Pelo Lema 92, segue que o período das funções $\phi_k : A\left(\frac{1}{c}, c\right) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ são imaginários puros, donde as funções $x_k : A\left(\frac{1}{c}, c\right) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ estão bem definidas pela Observação 56.

Portanto, pelo Teorema da **R.E.W** (substituída a hipótese de que Ω é simplesmente conexo) temos que a aplicação $X : A\left(\frac{1}{c}, c\right) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(z) = \left(\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \frac{1}{\zeta g(\zeta)} - \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right), \operatorname{Re} \left(i \int_{z_0}^z \frac{1}{\zeta g(\zeta)} + \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right), \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \frac{1}{\zeta} d\zeta \right) \right)$$

é uma imersão mínima conforme

Observemos que a terceira coordenada de X verifica

$$x_3(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{\zeta} d\zeta = \log |z|, \quad \forall z \in A\left(\frac{1}{c}, c\right).$$

Como $z \in A\left(\frac{1}{c}, c\right)$, então a coordenada x_3 está limitada, donde X está entre dois planos paralelos.

Além disso, observe que X manda círculos $\alpha : t \in [0, 2\pi] \mapsto ke^{it} \in \mathbb{C}$, com $k > 0$, num plano horizontal. E isto é o que entendemos por X ser topologicamente um cilindro.

Resta mostrarmos que X é completa. Pela Proposição 7, basta verificarmos que $\mathcal{L}(\beta) = +\infty$, para toda curva divergente em $A\left(\frac{1}{c}, c\right)$.

Seja

$$\beta : [0, b) \rightarrow A\left(\frac{1}{c}, c\right)$$

uma curva divergente.

Por (65) na Observação 88, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\beta) &= \int_0^b \|(X \circ \beta)'(t)\|_{\mathbb{R}^3} dt = \frac{1}{2} \int_0^b |f(\beta(t))| \left(1 + |g(\beta(t))|^2\right) dt. \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \frac{1}{|\beta(t)|} \left(\frac{1}{|g(\beta(t))|} + |g(\beta(t))|\right) dt. \end{aligned}$$

AFIRMAÇÃO: $\int_0^b \frac{1}{|\beta(t)|} \left(\frac{1}{|g(\beta(t))|} + |g(\beta(t))|\right) dt = +\infty$.

Iremos dividir a prova em dois casos.

CASO 1: $b = +\infty$.

Como

$$\frac{1}{|z|} \geq \frac{1}{c} \quad e \quad \frac{1}{|g(z)|} + |g(z)| \geq 1$$

para todo $z \in A\left(\frac{1}{c}, c\right)$, então

$$\frac{1}{|z|} \left(\frac{1}{|g(z)|} + |g(z)|\right) \geq \frac{1}{c}$$

e, portanto,

$$\int_0^\infty \frac{1}{|\beta(t)|} \left(\frac{1}{|g(\beta(t))|} + |g(\beta(t))|\right) dt \geq \frac{1}{c} \int_0^\infty dt = +\infty.$$

Antes de analisarmos o CASO 2, seja $S_k(0) := \{z \in \mathbb{C}; \|z\| = k\}$, $k \in \mathbb{R}_+$, e considere as seguintes definições.

Dizemos que uma curva β *atravessa um conjunto* K_n se existe um intervalo $I_n = (\lambda_n, \Lambda_n) \subset [0, b)$, tal que

$$\beta(I_n) \in \text{Int}(K_n), \quad \beta(\lambda_n) \in S_{a_n}(0) \quad e \quad \beta(\Lambda_n) \in S_{b_n}(0)$$

Dizemos que uma curva β *atravessa um conjunto* Y_n se existe um intervalo $I'_n = (\lambda'_n, \Lambda'_n) \subset [0, b)$, tal que

$$\beta(I'_n) \in \text{Int}(Y_n), \quad \beta(\lambda'_n) \in S_{\frac{1}{a_n}}(0) \quad e \quad \beta(\Lambda'_n) \in S_{\frac{1}{b_n}}(0).$$

CASO 2: $b < +\infty$.

Suponhamos por absurdo que $\mathcal{L}(\beta) < +\infty$, e analisemos os seguintes subcasos.

(i) β diverge para $\partial\mathbb{D}_c$.

Como $\mathcal{L}(\beta) < +\infty$, então

(a) Existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tal que β atravessa K_{2n} , para todo $n \geq n_0$ ou

(b) Existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tal que β atravessa K_{2n-1} , para todo $n \geq n_0$.

Caso contrário, para todo $n_0 \in \mathbb{N}^*$, existiria um $\tilde{n}_0 \geq n_0$, tal que β não atravessa $K_{2\tilde{n}_0}$ e um $\tilde{n}'_0 \geq n_0$, tal que β não atravessa $K_{2\tilde{n}'_0+1}$. Mas nesse caso, teríamos uma subdivisão do disco unitário na qual o comprimento da curva β vai aumentando infinitamente, mas assim β teria comprimento infinito, o que é uma contradição.

Sem perda de generalidade, iremos supor que β satisfaz o caso (a).

Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int_0^b |g(\beta(t))| dt &\geq \frac{1}{c} \sum_{n \geq n_0} \int_{\lambda_n}^{\Lambda_n} |g(\beta(t))| dt \\ &\stackrel{\text{Lema (93)}}{\geq} \frac{1}{c} \sum_{n \geq n_0} \int_{\lambda_n}^{\Lambda_n} \eta_1 e^{2c_n} dt = \frac{1}{c} \sum_{n \geq n_0} \eta_1 e^{2c_n} \int_{\lambda_n}^{\Lambda_n} 1 dt \\ &= \frac{\eta_1}{c} \sum_{n \geq n_0} e^{2c_n} l(\beta|_{[\lambda_n, \Lambda_n]}) \geq \frac{\eta_1}{c} \sum_{n \geq n_0} e^{2c_n} r_n = \frac{\eta_1}{c} \sum_{n \geq n_0} e^{2\frac{1}{2} \log r_n^{-1}} r_n \\ &= \frac{\eta_1}{c} \sum_{n \geq n_0} r_n^{-1} r_n = \frac{\eta_1}{c} \sum_{n \geq n_0} 1 = +\infty \end{aligned}$$

donde

$$\int_0^b \frac{1}{|\beta(t)|} \left(\frac{1}{|g(\beta(t))|} + |g(\beta(t))| \right) dt \geq \frac{1}{c} \int_0^b |g(\beta(t))| dt \geq +\infty$$

o que é uma contradição. Portanto, $\mathcal{L}(\beta) = +\infty$.

(ii) β diverge para $\partial\mathbb{D}_{\frac{1}{c}}$.

Primeiro fazemos rapidamente uma majoração inferior para $l\left(\beta|_{[\lambda'_n, \Lambda'_n]}\right)$.

Temos

$$l\left(\beta|_{[\lambda'_n, \Lambda'_n]}\right) \geq \frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n} = \frac{b_n - a_n}{a_n b_n} = \frac{r_n}{a_n b_n}.$$

Como

$$1 < a_n < c \quad e \quad 1 < b_n < c$$

então

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{c} \quad e \quad \frac{1}{b_n} > \frac{1}{c}$$

donde

$$l\left(\beta|_{[\lambda'_n, \Lambda'_n]}\right) > \frac{r_n}{c^2}. \quad (88)$$

Voltemos ao estudo do subcaso (ii). Como $\mathcal{L}(\beta) < +\infty$, então

(a)' Existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tal que β atravessa Y_{2n} , para todo $n \geq n_0$ ou

(b)' Existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tal que β atravessa Y_{2n-1} , para todo $n \geq n_0$.

Caso contrário, para todo $n_0 \in \mathbb{N}^*$, existiria um $\tilde{n}_0 \geq n_0$, tal que β não atravessa $Y_{2\tilde{n}_0}$ e um $\tilde{n}'_0 \geq n_0$, tal que β não atravessa $Y_{2\tilde{n}'_0+1}$. Mas nesse caso, teríamos uma subdivisão do disco unitário na qual o comprimento da curva β vai aumentando infinitamente, mas assim β teria comprimento infinito, o que é uma contradição.

Sem perda de generalidade, iremos supor que β satisfaz o caso (a).

Então

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \int_0^b \frac{1}{|g(\beta(t))|} dt \geq \frac{1}{c} \sum_{n \geq n_0} \int_{\lambda'_n}^{\Lambda'_n} \frac{1}{|g(\beta(t))|} dt \\ & \stackrel{\text{Lema (93)}}{\geq} \frac{1}{c} \sum_{n \geq n_0} \int_{\lambda'_n}^{\Lambda'_n} \eta_2 e^{2c_n} dt = \frac{1}{c} \sum_{n \geq n_0} \eta_2 e^{2c_n} \int_{\lambda'_n}^{\Lambda'_n} 1 dt \\ & = \frac{\eta_2}{c} \sum_{n \geq n_0} e^{2c_n} l\left(\beta|_{[\lambda'_n, \Lambda'_n]}\right) \stackrel{(88)}{>} \frac{\eta_2}{c} \sum_{n \geq n_0} e^{2\frac{1}{2} \log r_n^{-1}} \frac{r_n}{c^2} = \frac{\eta_2}{c^3} \sum_{n \geq n_0} r_n^{-1} r_n \\ & = \frac{\eta_2}{c^3} \sum_{n \geq n_0} 1 = +\infty \end{aligned}$$

donde

$$\int_0^b \frac{1}{|\beta(t)|} \left(\frac{1}{|g(\beta(t))|} + |g(\beta(t))| \right) dt \geq \frac{1}{c} \int_0^b \frac{1}{|g(\beta(t))|} dt > +\infty$$

o que é uma contradição. Portanto, $\mathcal{L}(\beta) = +\infty$.

Portanto, em qualquer um dos casos, X é completa. □

Por curiosidade, enunciamos a seguir o Teorema de Nadirashvili, que garante a existência de uma superfície mínima cuja imagem está contida numa bola.

Teorema 95 (Nadirashvili). *Existe uma superfície mínima $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ conforme, completa com curvatura gaussiana estritamente negativa, cuja imagem está contida numa bola.*

Para uma demonstração do Teorema acima, vide [19].

4.3 Teorema do Semi-espço

A seguir, apresentamos a noção de tangência entre duas superfícies, que será importante para o Teorema do Semi-espço.

Definição 96 *Dizemos que duas superfícies imersas (S, X) , (S', X') são **tangentes** em $q \in \mathbb{R}^3$ com a mesma orientação normal se existem $p \in S$ e $p' \in S'$, tais que*

$$X(p) = X'(p') = q, \quad T_p S = T_{p'} S' \quad e \quad N(p) = N'(p')$$

Lembremos que toda superfície imersa pode ser parametrizada numa vizinhança de cada ponto como gráfico de uma função. Usando esse fato, temos a seguinte definição.

Definição 97 *Sejam S_1, S_2 superfícies imersas tangentes em $q \in \mathbb{R}^3$ com a mesma orientação normal. Dizemos que $S_2 \geq S_1$ em q quando expressamos S_1 e S_2 em q como gráficos de funções f_1 e f_2 e obtemos $f_2 \geq f_1$. (vide figura 10)*

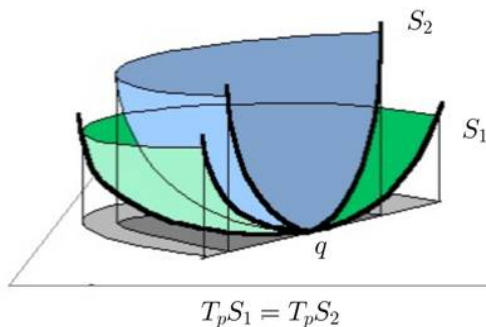


Figura 10: $S_2 \geq S_1$ em p . Fonte: [17]. Adaptado.

A seguir, apresentamos uma versão do Princípio de Tangência (vide FONTENELE NETO, F. X. e SILVA, S. L [69].), resultado que nos fornece uma conclusão global a partir de uma informação local.

Teorema 98 (Princípio de Tangência) *Sejam S_1, S_2 superfícies imersas tangentes em $q \in \mathbb{R}^3$. Se $S_2 \geq S_1$ em q , então $S_1 \approx S_2$.*

A seguir, estabelecemos uma notação que será utilizada no Teorema do Semi-espço.

Dados $p > 0$, denote por $C_{p,c}$ o catenóide de eixo $OZ = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R}\}$, centro $(0, 0, p)$ e círculo central de raio c . Defina

$$C_{p,c}^- = \{(x, y, z) \in C_{p,c}; z \leq p\}$$

e

$$R_{p,c} = \text{Raio de } C_{p,c}^- \cap XY \text{ (vide figura 11)}$$

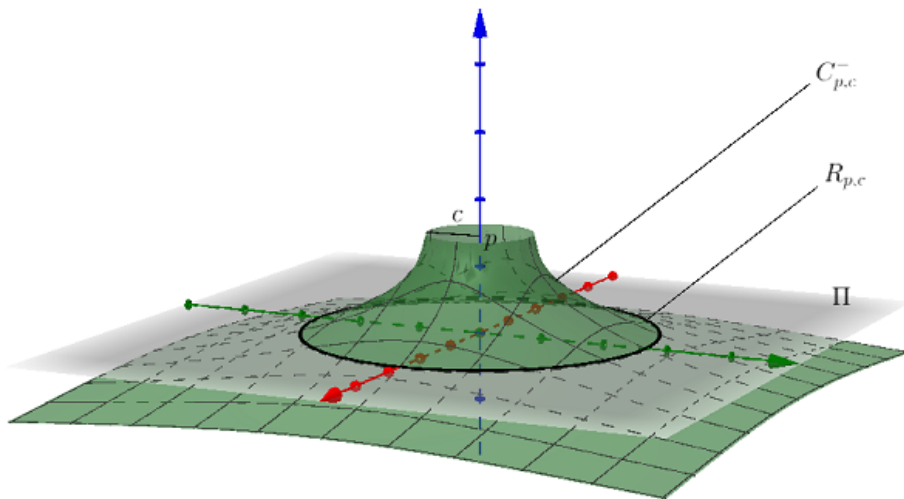


Figura 11: $C_{p,c}^-$: metade do catenóide $C_{p,c}$.

Por simplicidade, iremos dizer que p é o centro de $C_{p,c}^-$ ao invés de $(0, 0, p)$. Quando não houver risco de confusão, denotaremos $C_{p,c}^-$ e $R_{p,c}$ simplesmente por C_c^- e R_c , respectivamente.

Fixados $p > 0$ e $c \in (0, c_0]$, considere a função

$$F_{p,c} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus B_c(0, 0) \mapsto p - c \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - c^2}}{c} \right) \in \mathbb{R} \quad (89)$$

onde $\bar{B}_c(0, 0) := \{p \in \mathbb{R}^2; \|p\| \leq c\}$. Usando a fórmula da catenária (vista no Exemplo 4), pode-se mostrar que $C_{p,c}^-$ é o gráfico da função $F_{p,c}$ acima.

Além disso, é contínua a função

$$F_p : (c, x, y) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^2 \setminus B_1(0, 0) \mapsto F_{p,c}(x, y) \in \mathbb{R}. \quad (90)$$

A seguir, apresentamos uma propriedade do catenóide que será utilizada na demonstração do Teorema do Semi-espaço.

Lema 99 *Dados $h > 0$, existem $p \in (0, h)$ e $c_0 \in (0, 1)$, tais que $R_{p,c_0} = 1$ e a função dada por*

$$c \in (0, c_0] \mapsto R_{p,c} \in \mathbb{R}_+$$

é estritamente decrescente.

Além disso, para todo $\varepsilon > 0$ e para todo ponto $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ verificando

$$\sqrt{x^2 + y^2} > 1 \quad e \quad z \in (0, p),$$

existe $\bar{c} \in (0, c_0)$, tal que

$$z < F_{p,\bar{c}}(x, y) < z + \varepsilon.$$

Finalmente, estamos prontos para apresentar o Teorema do Semi-espaço como segue.

Teorema 100 (*Semi-espaço*) *Os planos são as únicas superfícies mínimas completas, conexas, propriamente imersas, contidas em um semi-espaço.*

Demonstração: Seja S uma superfície mínima nas condições do enunciado. A menos de um movimento rígido, podemos supor que:

1. S está contida no semi-espaço $\Pi^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \geq 0\}$;
2. $\inf \{z \in \mathbb{R}; (x, y, z) \in S\} = 0$;
3. $S \cap OZ \neq \emptyset$, onde $OZ := \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R}\}$.

Analisemos dois casos para a superfície S e o plano

$$\Pi := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}.$$

Primeiro suponha que existe um ponto de contato w entre S e Π , isto é,

$$T_w S = T_w \Pi$$

Ajustemos o vetor normal de Π se necessário, e expressemos S e Π localmente como gráfico de funções f_1, f_2 , respectivamente, em w . Pelo item (1), obtemos

$$f_1 \geq f_2.$$

Logo $S \geq \Pi$ em w e pelo Princípio do Máximo para Superfícies Mínimas (Teorema 98), temos $S = \Pi$.

Suponha agora que não existe ponto de contato entre S e Π , isto é, $S \cap \Pi = \emptyset$.

Considere o cilindro sólido

$$\Gamma := \overline{B}_1(0, 0) \times \mathbb{R}$$

onde $\overline{B}_1(0, 0) := \{p \in \mathbb{R}^2; \|p\| \leq 1\}$.

Do item (3), segue que

$$\Gamma \cap S \neq \emptyset.$$

Defina

$$h := d(\Gamma \cap S, \overline{B}_1(0, 0) \times \{0\}) = \inf \{d(a, b); a \in \Gamma \cap S \text{ e } b \in \overline{B}_1(0, 0) \times \{0\}\}.$$

Note que $\Gamma \cap S$ e $\overline{B}_1(0,0) \times \{0\}$ são disjuntos. Além disso, como $\Gamma \cap S$ é fechado e $\overline{B}_1(0,0) \times \{0\}$ é compacto, então

$$h > 0.$$

Pelo Lema (99), existem $p \in (0, h)$ e $c_0 \in (0, 1)$, tais que $R_{p,c_0} = 1$ e

$$c \in (0, c_0] \mapsto R_{p,c} \in \mathbb{R}_+$$

é estritamente decrescente. (vide figura 12)

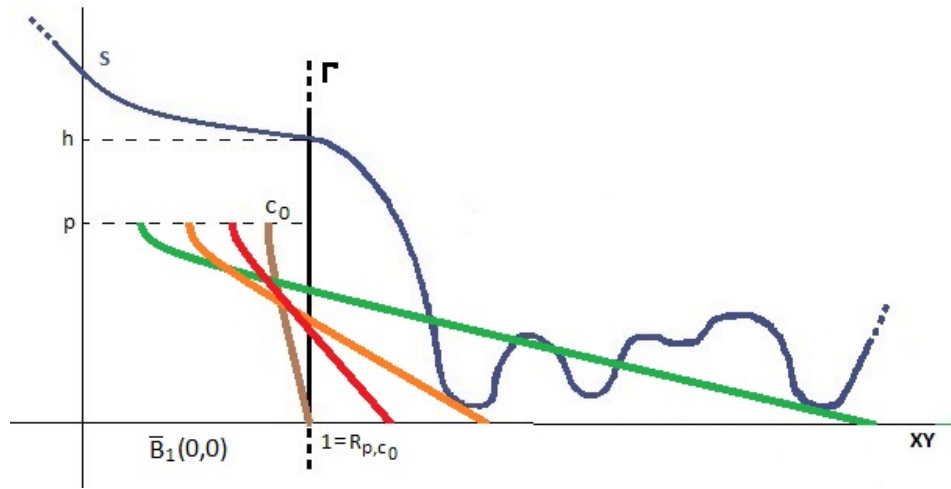


Figura 12: O cilindro Γ e o raio R_{p,c_0} .

Para cada $c \in (0, c_0]$, considere o conjunto

$$K_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \text{existem } (x, y, \tilde{z}) \in C_c^- \text{ e } (x, y, z) \in S \text{ com } z \leq \tilde{z}\}$$

(vide figura 13) e defina

$$K := \{c \in (0, c_0]; K_c \neq \emptyset\}.$$

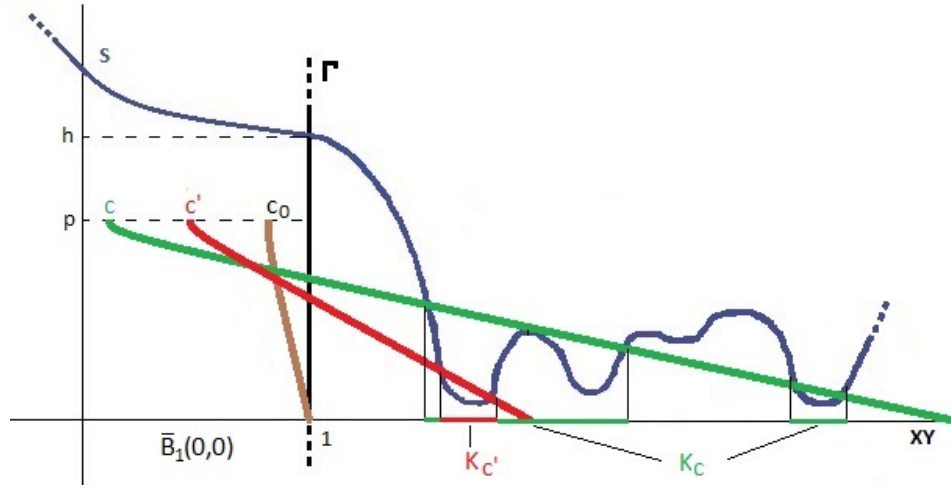


Figura 13: Os conjuntos K_c .

Vejamos agora que K é não vazio.

Pelo item (2), existe $(x, y, z) \in S$ com $z \in (0, d)$. Então, pelo Lema (99), existe $\bar{c} \in (0, c_0)$ suficientemente pequeno, tal que

$$F_{\bar{c}}(x, y) > q_3.$$

Portanto, $K_{\bar{c}} \neq \emptyset$, e existe $\tilde{c} := \sup K$.

AFIRMAÇÃO: $K_{\tilde{c}} \neq \emptyset$.

Seja $(r_n)_n$ uma seqüência estritamente crescente em K , tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \tilde{c}. \quad (91)$$

Como $K_{r_n} \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, tome

$$(x_n, y_n) \in K_{r_n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}^*$.

Por definição de K , existem $(x_n, y_n, \tilde{z}_n) \in C_{r_n}^-$ e $(x_n, y_n, z_n) \in S$, tais que

$$0 \leq z_n \leq \tilde{z}_n \leq p \quad (92)$$

ou seja, $z_n, \tilde{z}_n \in [0, p]$, donde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{z}_n = \tilde{z}_0 \quad (93)$$

(a menos de passarmos a uma subsequência).

Consequentemente,

$$z_0 \leq \tilde{z}_0.$$

Além disso,

$$(x_n, y_n) \in B_{R_{r_n}} \subset B_{R_{r_1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

logo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0) \quad (94)$$

(a menos de passarmos a uma subsequência).

Note que $(x_n, y_n, z_n) \in S$. Além disso, como S é fechada e as três coordenadas convergem (por (93) e (94)), então

$$(x_0, y_0, z_0) \in S.$$

Usando agora que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n, x_n, y_n) = (\tilde{c}, x_0, y_0)$ e o fato de F_p ser contínua (90), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{r_n}(x_n, y_n) = F_{\tilde{c}}(x_0, y_0)$$

(onde $F_{r_n}(x_n, y_n) = \tilde{z}_n$).

Por unicidade do limite, temos

$$\tilde{z} = F_{\tilde{c}}(x_0, y_0)$$

ou seja,

$$(x_0, y_0, \tilde{z}) \in C_{\tilde{c}}^-$$

Portanto, $K_{\tilde{c}} \neq \emptyset$ e isso demonstra a afirmação.

Então existe $(x_0, y_0) \in K_{\tilde{c}}$, tal que $(x_0, y_0, \tilde{z}) \in C_{\tilde{c}}^-$ e $(x_0, y_0, z) \in S$ com $z \leq \tilde{z}$.

Observemos agora que numa vizinhança V de $w = (x_0, y_0, \tilde{z})$, devemos ter

$$\tilde{z} \leq z, \quad \forall (x, y, \tilde{z}) \in C_{\tilde{c}}^- \quad e \quad \forall (x, y, z) \in S \quad (95)$$

caso contrário, usando a continuidade de F em c (vide (90)), podemos encontrar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno satisfazendo

$$K_{\tilde{c}+\epsilon} \neq \emptyset,$$

o que é uma contradição, pois \tilde{c} é o sup de K .

Logo, $z = \tilde{z}$ e, portanto, $w = (x_0, y_0, \tilde{z}) \in C_{\tilde{z}}^- \cap S$ é um ponto de contato entre $C_{\tilde{z}}^-$ e S , isto é,

$$T_w C_{\tilde{z}}^- = T_w S,$$

em particular, um ponto de contato entre $C_{\tilde{z}}$ e S (vide figura 14)

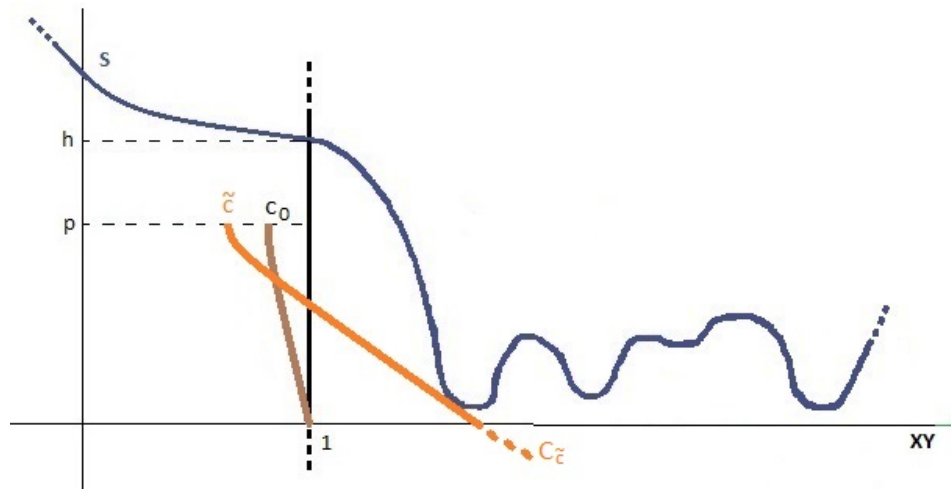


Figura 14: O conjunto $K_{\tilde{z}}$.

Ajustando o vetor normal de $C_{\tilde{z}}$ se necessário, expressando S e $C_{\tilde{z}}$ localmente como gráfico de funções f_1, f_2 , respectivamente, em w , e usando (95), obtemos

$$f_1 \geq f_2.$$

Portanto, $S \geq C_{\tilde{z}}$ em w , e pelo Princípio do Máximo para Superfícies Mínimas (Teorema 98), temos $S = C_{\tilde{z}}$. Logo

$$C_{\tilde{z}}^- \subset C_{\tilde{z}} = S \subset \Pi^+$$

o que é uma contradição, pois $C_{\tilde{c}}^-$ não está contido em Π^+ . E a contradição veio do fato de supormos que não existe ponto de contato entre S e Π .

Portanto, a única possibilidade é existir um ponto de contato entre S e Π , donde S é um plano. □

Observação 101 *Obeservamos que no Teorema de Jorge-Xavier (Teorema 91), a superfície parametrizada não é propriamente imersa, caso contrário este resultado seria falso pelo Teorema do Semi-espaço (Teorema 100).*

Capítulo V

CURVATURA TOTAL E CURVATURA TOTAL FINITA

Neste Capítulo expressamos a curvatura total em função das funções f e g dadas pelo Teorema da **R.E.W**, e extendemos tais funções a uma superfície de Riemann compacta. Para finalizar, classificamos as superfícies mínimas de curvatura total finita igual a -4π .

5.1 Curvatura Total e a R.E.W

A seguir apresentamos o conceito de curvatura total.

Definição 102 A *curvatura total* de uma superfície parametrizada $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é definida por

$$C(X) = \int \int_{\Omega} K dA$$

onde $dA = \sqrt{EG - F^2} dudv$ é o elemento de área calculado em Ω e K a curvatura gaussiana de X .

Seja $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada. No caso em que X é mínima conforme, a curvatura total de X é dada por

$$\begin{aligned} C(X) &= \int \int_{\Omega} K dA = \int \int_{\Omega} K \lambda^2 dudv \stackrel{(39) \text{ e } (31)}{=} - \int \int_{\Omega} \frac{16 |g'|^2}{|f|^2 (1 + |g|^2)^4} \frac{|f|^2 (1 + |g|^2)^2}{4} dudv \\ &= - \int \int_{\Omega} \frac{4 |g'|^2}{(1 + |g|^2)^2} dudv = - \int \int_{\Omega} \left[\frac{2 |g'|}{(1 + |g|^2)} \right]^2 dudv. \end{aligned}$$

Lembremos a seguinte definição da teoria de graus. O *grau* de uma função holomorfa $F : X \rightarrow Y$ não constante entre superfícies compactas de Riemann é definido por

$$\deg(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}(F)_p \tag{96}$$

para qualquer $y \in Y$, onde $\text{mult}(F)_p$ é a multiplicidade de F em p . Para mais detalhes da teoria vide [27].

Dito isto, usando o Teorema de Mudança de Variável na aplicação normal de Gauss $N : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, podemos dar uma outra definição equivalente para curvatura total de X usando a área da imagem de N (que é $\leq \text{Area}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$), como segue

$$C(X) = -4\pi \deg(N) \quad (97)$$

onde $\deg(N)$ é o grau da aplicação N .

Exemplo 103 (*Catenóide e a Superfície de Enneper*) Pelos Exemplos 58 e 59, a função g da **R.E.W** do catenóide e da Superfície de Enneper são iguais é dada por $g(z) = z$. Como $N = \pi^{-1} \circ g$ (Teorema 61) e $\deg(g) = 1$, então as curvaturas totais do catenóide e da Superfície de Enneper são iguais a -4π .

◇

Exemplo 104 (*Helicóide*)

Pode ser mostrado que a função g da **R.E.W** do helicóide é dada por $g(z) = e^z$. Como g tem uma singularidade essencial em ∞ , então o helicóide tem curvatura total igual a $-\infty$.

◇

5.2 Extensões de f e g da **R.E.W** e Aplicações

Usaremos aqui um resultado que diz: Se $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima conforme, completa de curvatura total finita, então existe superfície de Riemann compacta M e um número finito de pontos $\{p_1, \dots, p_k\} \subset M$, tal que Ω é conformemente equivalente a $M \setminus \{p_1, \dots, p_k\} =: (M, X)$. Para uma demonstração desse Teorema, vide [22].

Apresentamos agora o resultado que estende a f e a g .

Teorema 105 Considere $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima conforme, completa de curvatura total finita e (X, f, g) a tripla de **R.E.W**. Então $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se estendem meromorficamente a (M, X) .

Demonstração:

Extensão da g .

Sabemos que Ω é conformemente equivalente a (M, X) , i.e, existe uma função biholomorfa

$$\varphi : (M, X) \rightarrow \Omega.$$

Mostremos que a função

$$\tilde{g} := g \circ \varphi : (M, X) \rightarrow \mathbb{C}$$

se estende a cada um dos pontos removidos p_i , $i = 1, \dots, k$.

Suponha por absurdo que ao menos um dos pontos p_i seja uma singularidade essencial de \tilde{g} . Seja $\psi : B_r(0) \subset \mathbb{C} \rightarrow V$ uma carta de M com $\psi(0) = p_i$ e tome

$$\eta := \tilde{g} \circ \psi : B_r(0) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Então 0 é uma singularidade essencial de η . Pelo Grande Teorema de Picard (Teorema 169), η assume todos os valores de \mathbb{S}^2 uma infinidade de vezes com, no máximo, duas exceções. Mas isto implica que a área esférica de g é infinita, ou equivalentemente (Teorema 61) que a área da imagem da aplicação normal de Gauss $N = \pi^{-1} \circ g$ de X é infinita, o que é uma contradição.

Extensão da f .

Aqui usaremos o Lema 106, que deixamos após o Teorema.

Seja V uma vizinhança de um dos pontos removidos p_i , $i = 1, \dots, k$ e suponha que V não contém nenhum outro ponto removido p_j , $j \neq i$. Vamos estender f meromorficamente a p_i . Suponha que f não é identicamente nula em V , caso contrário, estenda f tomando $f(p_i) = 0$.

Pelo caso anterior, já sabemos que g é meromorfa em M . Como $g = \pi \circ N$ (Teorema 61), então a menos de um movimento rígido do \mathbb{R}^3 , podemos supor que $g(V)$ é limitado. Portanto, pela **p.z.p** f não tem zeros em V .

Pode ser mostrado que existe um difeomorfismo entre V e $A = \{0 < r < |z| < +\infty\}$, para algum $r \in \mathbb{R}_+^*$, tal que p_i é levado no ∞ . Então g é limitada em A , i.e, existe $L \in \mathbb{R}_+$, tal que $|g(z)| < L$, para todo $z \in A$. Estudemos agora o comportamento de f em A quando $|z| \rightarrow +\infty$.

Seja β um caminho divergente em A . Como X é completa então

$$+\infty = \int_{\beta} \lambda dz \stackrel{(31)}{=} \frac{1}{2} \int_{\beta} |f| (1 + |g|^2) dz < \left(\frac{1+L^2}{2}\right) \int_{\beta} |f| dz.$$

Ou seja,

$$\int_{\beta} |f| dz = +\infty$$

para qualquer caminho β divergente em A .

Como f não tem zeros em A , podemos aplicar o Lema 106, donde f tem, no máximo, um pólo. Portanto, f se estende meromorficamente a A , e portanto, a V .

Repetindo o argumento para todos os pontos p_i obtemos a extensão meromorfa de f a M . □

O Lema a seguir é usado no Teorema anterior para a extensão da f .

Lema 106 *Considere $r > 0$ e $f : \mathbb{C} \setminus B_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa sem zeros. Se para qualquer curva divergente $\beta : [0, b) \rightarrow \mathbb{C} \setminus B_r(0)$ tivermos*

$$\int_{\beta} |f(z)| dz = +\infty$$

então f tem no máximo um pólo.

Demonstração: Como $f(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus B_r(0)$, então a função

$$\log |f| = \operatorname{Re}(\log f) : z \in \mathbb{C} \setminus B_r(0) \rightarrow \operatorname{Re}(\log f(z)) \in \mathbb{R}$$

é harmônica.

Pode ser mostrado que a expansão de Laurent de $\log |f|$ numa vizinhança $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$ do infinito é dada por

$$\log |f(z)| = \alpha \log |z| + h(z) + H(z)$$

onde $h : \mathbb{C} \setminus B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica e limitada ($h(z) < m$) e $H : \mathbb{C} \setminus B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ é função harmônica, para algum $R > r$.

Considere $\alpha \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}^*$, tal que $N > \alpha$. Então, para $z \in \mathbb{C} \setminus B_R(0)$, temos

$$|f(z)| = |z|^\alpha e^{h(z)} e^{H(z)} \leq M |z|^N e^{H(z)} = M \left| z^N e^{G(z)} \right|$$

onde $M = e^m$ e $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é função inteira, tal que $\operatorname{Re} G = H$ (G existe, pois \mathbb{C} é simplesmente conexo).

Defina a função holomorfa

$$F : z \in \mathbb{C} \mapsto \int_0^z w^N e^{G(w)} dw \in \mathbb{C}$$

e observemos que pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$F'(z) = z^N e^{G(z)} \neq 0$$

para todo $z \neq 0$. Seja ζ um ramo da $(N+1)$ -ésima raiz de F numa vizinhança V de $z = 0$ dada por

$$\zeta : z \in \mathbb{C} \mapsto |F(z)|^{\frac{1}{N+1}} \in \mathbb{R}$$

que verifica

$$\zeta(0) = 0 \quad e \quad \zeta'(0) \neq 0. \quad (98)$$

O ramo ζ existe pois, como $e^G : z \in \mathbb{C} \mapsto e^{g(z)} \in \mathbb{C}$ é função inteira que não possui zeros, pelo Teorema Fundamental do Cálculo obtemos

$$F'(z) = z^N \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right)$$

com $a_0 \neq 0$.

Portanto,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{F'(z)}{z^N} = a_0 \neq 0.$$

Logo, F tem um zero de ordem $(N+1)$ em $z = 0$, donde podemos escolher um ramo ζ verificando (98).

Como $\zeta'(0) \neq 0$, temos um ramo da inversa $z(\zeta)$ numa vizinhança de $\zeta = 0$, donde existem duas possibilidades para $z(\zeta)$: $z(\zeta)$ se estende holomorficamente a todo o plano- ζ

ou existe uma bola máxima $B_R(0)$ no plano- ζ onde ela pode ser estendida. Vejamos que o segundo caso não ocorre.

Suponha por absurdo que exista $B_{r_0}(0)$ bola máxima e ζ_0 com $|\zeta_0| = r_0$ na qual a inversa $z(\zeta)$ não pode ser estendida. Considere a curva

$$\alpha : t \in [0, 1) \mapsto t\zeta_0 \in \mathbb{C}$$

ligando a origem a ζ_0 . A sua imagem inversa no plano- z será uma curva $\beta := z(\alpha)$.

Se β é divergente, a partir de um certo ponto ela estaria na região $|z| > R$. Denotemos por $\tilde{\beta}$ o pedaço divergente da curva β que está sempre na região $|z| > R$, ou seja,

$$\tilde{\beta} := \{z(t\zeta_0); |z(t\zeta_0)| > R, \quad \forall t \in (\tilde{t}, 1)\}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\beta}} |f(z)| dz &\leq L + M \int_{\tilde{\beta}} |z^N e^{G(z)}| dz = L + M \int_{\tilde{\beta}} |F'(z)| dz \\ &= L + M \int_{\tilde{\beta}} |dF| dz = L + M \int_{\tilde{t}}^1 (N+1) t^N |\zeta_0|^N |\zeta_0| dt \\ &= L + MR^{N+1} \int_{\tilde{t}}^1 (N+1) t^N dt < L + MR^{N+1} < +\infty \end{aligned}$$

onde L é o valor da integral até \tilde{t} . Mas isto contradiz a hipótese de que β é divergente.

Portanto, β não pode ser divergente, ou seja, existe sequência $(t_n)_n \subset [0, 1)$ estritamente crescente, com $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 1$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = z_0 \in \bar{V} \subset \mathbb{C}$$

onde $z_n := z(t_n \zeta_0) \in V$ (V é a vizinhança onde ζ está definida). Como $F'(z_0) \neq 0$, tomando um ramo compatível com a definição de ζ , podemos estender ζ holomorficamente a uma vizinhança de z_0 , donde obtemos

$$|F(z_0)| = |\zeta_0|^{N+1} \neq 0.$$

Logo

$$\zeta'(z_0) = \frac{1}{N+1} [F(z_0)]^{\frac{N}{N+1}} F'(z_0) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Inversa 162, podemos estender a inversa $z(\zeta)$ holomorficamente ao ponto ζ_0 . Mas então a bola $B_{r_0}(0)$ não era máxima, o que é uma contradição.

Então, a inversa $z(\zeta)$ é função inteira, ou seja, holomorfa em todo o plano- ζ .

Note que se

$$z(\zeta_1) = z(\zeta_2)$$

então

$$F(z(\zeta_1)) = F(z(\zeta_2)) \quad \therefore \quad \zeta_1^{N+1} = \zeta_2^{N+1}.$$

Logo, cada valor z é assumido, no máximo, $(N+1)$ vezes.

Pelo Corolário 170, $z(\zeta)$ é um polinômio. Além disso, segue também que $z(\zeta) = 0$, donde $\zeta = 0$. Como $\zeta = 0$ é o único zero do polinômio z , temos

$$z(\zeta) = A\zeta^k$$

onde $k \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbb{C}$.

Como

$$z'(\zeta) = Ak\zeta^{k-1} \quad e \quad z'(0) = \frac{1}{\zeta'(0)} \neq 0$$

segue que $k = 1$, $A \neq 0$.

Logo

$$F(z) = \left(\frac{z}{A}\right)^{N+1}$$

e assim, G deve ser constante, donde H também o é.

Portanto

$$|f(z)| \leq M_1 |z|^N$$

perto do infinito, donde f tem no máximo um pólo no infinito. □

Caminharemos agora na direção de classificar as superfícies mínimas de curvatura total finita igual a -4π .

Teorema 107 *Se $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão mínima completa, então*

$$C(X) = -\infty \quad \text{ou} \quad C(X) = -4\pi m \tag{99}$$

onde $m \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração: Mostraremos o resultado no caso em que X é conforme. Como $K \leq 0$, então temos duas possibilidades para a integral

$$C(X) = \int_{\Omega} \int K dA = \int_M \int K dA :$$

$$C(X) = -\infty \quad \text{ou} \quad C(X) \text{ é finita.}$$

No caso em que $C(X)$ é finita, pelo Teorema 105, g se estende meromorficamente a M . Como M é uma superfície Riemann compacta, então pelo Teorema 171 g é constante (e neste caso $K \equiv 0$) ou g cobre a esfera \mathbb{S}^2 $m = \deg(g)$ vezes. Logo por (97)

$$C(X) = -4\pi m.$$

□

Lembremos agora a definição de fim de uma superfície. Sejam $\{p_1, \dots, p_k\} \subset \Omega \subset \mathbb{C}$, $X : \Omega \setminus \{p_1, \dots, p_k\} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima completa e $V \subset \Omega$ uma vizinhança de p_i que não contém nenhum dos outros pontos p_j . Dizemos que a imagem $X(V \setminus \{p_i\})$ é um *fim* de $X(\Omega \setminus \{p_1, \dots, p_k\})$, denotado por F_i . Se $X|_{V \setminus \{p_i\}}$ é mergulho, dizemos que F_i é um *fim mergulhado*.

Um resultado que relaciona a curvatura total e a topologia de uma superfície é a Fórmula de Jorge-Meeks, que diz: Se $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão mínima completa, então

$$C(X) = \int \int_{\Omega} K dA \leq 2\pi (\chi(\Omega) - k) \tag{100}$$

onde

$$\chi(\Omega) = 2 - 2G - k. \tag{101}$$

é a característica de Euler de Ω , G é o gênero e k é o número de fins da superfície (ou seja, o número de pontos excluídos de M). Além disso, vale a igualdade, se e somente se, todo fim é mergulhado. Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em vide [23].

A seguir, classificamos as superfícies mínimas completas de curvatura total igual a -4π .

Teorema 108 *Se $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima completa com $C(X) = -4\pi$, então X é um catenóide ou a superfície de Enneper.*

Demonstração: Mostraremos o resultado no caso em que X é conforme. Pelo Teorema 107,

$$-4\pi^2 \deg(g) = C(X) = -4\pi$$

donde $\deg(g) = 1$.

Como g se estende a superfície de Riemann compacta M (Teorema 105) e $\deg(g) = 1$, então g é um biholomorfismo entre M e \mathbb{S}^2 (Teorema 181). Além disso, como \mathbb{S}^2 tem gênero $G = 0$, então M também tem gênero $G = 0$, donde por (101)

$$\chi(\Omega) = 2 - k.$$

Então por (100) temos

$$-4\pi = \int \int_{\Omega} K dA \leq 2\pi(2 - k - k) = 4\pi - 4k\pi \quad \therefore \quad k \leq 2.$$

Observemos que se $k = 0$, então $\Omega \approx M$. Como M é compacta, segue que Ω também é compacta, o que é uma contradição pelo Teorema 182, pois X é mínima. Vamos analisar separadamente os casos $k = 1$ e $k = 2$.

CASO 1: $k = 1$.

Neste caso, $\Omega \approx \mathbb{C}$ e, como g é bijetora, então pelo Corolário 165 podemos tomar $g(z) = z$. Como $g(z) = z$ não tem pólos, então a função f não tem zeros. Já que f tem no máximo, um pólo, segue pelo Corolário 170 que f é um polinômio. Sendo f um polinômio que não possui zeros, então f é constante.

Portanto,

$$\Omega \approx \mathbb{C}, \quad f(z) = c \quad e \quad g(z) = z.$$

Pelos Exemplo 59, visto no Capítulo 3, temos que X é a Superfície de Enneper.

CASO 2: $k = 2$.

Podemos tomar $\Omega \approx \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Como g é injetora, então pelo Corolário 165 podemos tomar $g(z) = -z$. Como o único pólo de g em $\overline{\mathbb{C}}$ é $z = \infty$, então pela **p.z.p**, o único zero

de f em $\bar{\mathbb{C}}$ é $z = \infty$, e este possui ordem 2, pois g só tem um pólo de ordem 1. Assim, o único pólo (possível) de f é

$$z = 0.$$

Denote por m_0 a ordem deste pólo.

Considere o produto $z^{m_0} f(z)$ que é função holomorfa de $\bar{\mathbb{C}}$ em $\bar{\mathbb{C}}$. Portanto, $(z^{m_0} f(z))^{-1}$ é função holomorfa de $\bar{\mathbb{C}}$ e \mathbb{C} . Como $\bar{\mathbb{C}}$ é superfície de Riemann compacta, então pelo Princípio do Máximo (Teorema 172), $(z^{m_0} f(z))^{-1}$ é função constante, donde

$$f(z) = \frac{1}{cz^{m_0}}$$

para $c \in \mathbb{C}$ constante. Mas como $z = \infty$ é um pólo de ordem 2 de f , devemos ter $m_0 = 2$.

Portanto,

$$M \approx \bar{\mathbb{C}}, \quad f(z) = \frac{1}{cz^2} \quad e \quad g(z) = -z.$$

Pelo Exemplo 58 do Capítulo 3, segue que superfície é um catenóide. \square

Classificamos agora as superfícies mínimas completas cuja aplicação normal de Gauss é injetora, e finalizamos mostrando que o único anel mergulhado de curvatura total finita é o catenóide.

Teorema 109 *Seja $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima completa. Se a aplicação normal de Gauss N é injetora, então X é um catenóide ou a superfície de Enneper.*

Demonstração: Mostraremos o resultado no caso em que X é conforme. Usando que a curvatura total de X é o negativo da área de N e que N é injetora, temos

$$-4\pi \leq C(X) \stackrel{(99)}{<} 0$$

Pelo Teorema (107) devemos ter

$$C(X) = -4\pi$$

donde o resultado segue do Teorema 108. \square

Teorema 110 *O único anel S mínimo, completo, mergulhado com curvatura total finita é o catenóide.*

Demonstração: A característica de Euler $\chi(S) = 2 - 2G - k$ de um anel S verifica

$$G = 0 \quad e \quad k = 2$$

donde

$$\chi(S) = 0.$$

Como os fins estão mergulhados, vale a igualdade em (100), i.e,

$$C(S) = 2\pi(\chi(S) - k) = 2\pi(0 - 2) = -4\pi.$$

Pelo Teorema 108, S é o catenóide ou a Superfície de Enneper. Como a Superfície de Enneper possui apenas um fim ($k = 1$), então S deve ser o catenóide. \square

Capítulo VI

SUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE

Neste Capítulo, apresentamos o Teorema de Delaunay, as superfícies helicoidais, e finalizamos com o conceito de estabilidade e o Teorema de Estabilidade da Esfera.

6.1 Teorema de Heinz

Em cada ponto de uma superfície existem duas direções nas quais a superfície se curva mais e se curva menos. Estas direções são as direções principais, e as curvaturas nessas direções são denominadas curvaturas principais. A curvatura média é a média aritmética dessas curvaturas e pode ser vista como a superfície se curva quando vemos a superfície de fora dela.

A curvatura média H de uma esfera de raio r é constante e igual $\frac{1}{r}$. Se o valor de H cresce, então r vai diminuindo, e portanto, a esfera fica menor. Analogamente para superfícies gerais, se a curvatura média cresce, então a superfície fica menor num certo sentido, como mostra o próximo resultado.

Teorema 111 (Heinz) *Seja $f : B_R(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe- C^∞ . Se a curvatura média do gráfico de f satisfaz a desigualdade*

$$|H(p)| \geq \alpha > 0$$

para todo $p \in B_R(0)$. então

$$R \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Demonstração: Pode ser mostrado que a curvatura média do gráfico de f é dada por

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{f_u}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{f_v}{W} \right) \right) \quad (102)$$

onde $W = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$.

Seja $R_1 \in \mathbb{R}$, tal que $0 < R_1 < R$.

Aplicando o Teorema de Green (Teorema 176) em (102), obtemos

$$\int \int_{\overline{B_{R_1}(0)}} 2H dudv = \oint_{u^2+v^2=R_1^2} \left(-\frac{f_v}{W} du + \frac{f_u}{W} dv \right).$$

Invertendo o normal se necessário, podemos assumir que $H \geq \alpha > 0$. O lado esquerdo da expressão acima fica

$$\int \int_{\overline{B_{R_1}(0)}} 2H dudv \geq \int \int_{\overline{B_{R_1}(0)}} 2\alpha dudv = 2\alpha \int \int_{\overline{B_{R_1}(0)}} dudv = 2\alpha\pi R_1^2$$

e o lado direito fica

$$\begin{aligned} \oint_{u^2+v^2=R_1^2} \left(-\frac{f_v}{W} du + \frac{f_u}{W} dv \right) &= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(-\frac{f_v}{W} \circ \alpha(t), \frac{f_u}{W} \circ \alpha(t) \right), \alpha'(t) \right\rangle dt \\ &\stackrel{C-S}{\leq} \int_0^{2\pi} \left\| \left(-\frac{f_v}{W} \circ \alpha(t), \frac{f_u}{W} \circ \alpha(t) \right) \right\| \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \left\| \left(-\frac{f_v}{W} \circ \alpha(t), \frac{f_u}{W} \circ \alpha(t) \right) \right\| R_1 dt \\ &= R_1 \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{f_v}{W} \circ \alpha(t) \right)^2 + \left(\frac{f_u}{W} \circ \alpha(t) \right)^2} dt = R_1 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{f_v^2 + f_u^2}{1 + f_v^2 + f_u^2}} dt \\ &< R_1 \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi R_1 \end{aligned}$$

onde $\alpha(t) = (R_1 \cos t, R_1 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Portanto,

$$2\alpha\pi R_1^2 < 2\pi R_1 \quad \therefore \quad R_1 < \frac{1}{\alpha}$$

donde obtemos o resultado fazendo $R_1 \rightarrow R$. □

A seguir, temos um resultado mais geral que o Teorema de Bernstein (Teorema 64)

Corolário 112 *Se o gráfico de uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tem curvatura média constante, então o gráfico de f é um plano.*

Demonstração: Fazendo $R \rightarrow +\infty$ no Teorema de Heinz, obtemos

$$H \equiv 0$$

Pelo Teorema de Bernstein (Teorema 64), temos que o gráfico de f é um plano. □

Observação 113 Como o gráfico da função $f : (u,v) \in B_R(0) \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \in \mathbb{R}$ possui curvatura média $H = \frac{1}{R}$, segue que a estimativa obtida no Teorema de Heinz não pode ser melhorada.

6.2 Superfícies de Revolução

Podemos construir exemplos de superfícies de curvatura média constante cujas curvaturas principais mudam mas sua soma é constante, essas superfícies são as superfícies de revolução. Em 1841, C. Delaunay determinou essas superfícies de revolução, e exibiu um método para contruí-las geometricamente.

Teorema 114 Dada uma geratriz, i.e, uma curva regular plana $\alpha : I \rightarrow (0, y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^2$, então a curvatura média da superfície de geratriz α é dada por

$$H = \frac{1}{2} \frac{y' + y''zz' - y'zz''}{z}$$

Reciprocamente, dada uma função contínua $H : I \rightarrow \mathbb{R}$, então a geratriz da superfície de revolução de curvatura média H , é dada por

$$\alpha(s) = \left(\int_0^s \frac{(G(t) + c_2)F'(t) - (F(t) - c_1)G'(t)}{\sqrt{(F(t) - c_1)^2 + (G(t) + c_2)^2}} dt + c_3, \sqrt{(F(t) - c_1)^2 + (G(t) + c_2)^2} \right)$$

onde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ e $F, G : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais.

Demonstração: A ida do Teorema segue direto da definição de curvatura média

$$H := \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2Ff}{EG - F^2}.$$

Reciprocamente, seja $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} 2Hz - y' - y''zz' + y'zz'' = 0 \\ y'^2 + z'^2 = 1 \end{cases} . \quad (103)$$

Se introduzimos a função complexa

$$Z : s \in I \mapsto z(s)z'(s) + iz(s)y'(s) \in \mathbb{C}$$

então (103) implica que a função Z satisfaz a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$Z' - 2iHZ - 1 = 0. \quad (104)$$

Se definimos as duas funções

$$F : s \in I \mapsto \int_0^s \operatorname{sen} \left(2 \int_0^u H(t) dt \right) du$$

$$G : s \in I \mapsto \int_0^s \operatorname{cos} \left(2 \int_0^u H(t) dt \right) du$$

a solução geral de (104) é dada por

$$Z(s) = \{(F(s) - c_1) + i(G(s) + c_2)\} (F'(s) - iG'(s))$$

onde $c = i(c_1 - ic_2)$ é uma constante complexa arbitrária. A função Z está definida em termos de y e z , e suas derivadas. Reciprocamente, podemos obter y e z de Z . De fato, como $|Z(s)|^2 = y(s)^2$, temos

$$z = \sqrt{(F(s) - c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2}, \quad s \in I$$

e como $Z(s) - \overline{Z(s)} = 2izy'(s)$, temos

$$y' = \frac{(G(s) + c_2)F'(s) - (F(s) - c_1)G'(s)}{\sqrt{(F(s) - c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2}}.$$

□

Observação 115 *Fazendo uma transformação paralela do eixo- x , podemos assumir que $c_3 = 0$. O Teorema 114 assegura que todas as superfícies de revolução com a mesma função curvatura média H são caracterizadas por dois números reais c_1 e c_2 . Além disso, note que essas superfícies não são isométricas em geral.*

Agora, caminharemos na direção de determinar todas as superfícies de revolução de curvatura média constante.

Já sabemos pela Proposição 20 que uma superfície de revolução mínima é um pedaço de plano ou um pedaço de catenóide. A seguir, apresentamos uma outra prova usando o Teorema 114.

CASO 1: $H \equiv 0$.

Como $F \equiv 0$ e $G(s) = s$, temos

$$X(s; 0, c_1, c_2, c_3) = \left(\int_0^s \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + (t + c_2)^2}} dt + c_3, \sqrt{c_1^2 + (s + c_2)^2} \right)$$

pelo Teorema 114.

- (i) Quando $c_1 = 0$, $X(s; 0, c_2, c_3)$ é parte da reta $x_3 = c_3$.
- (ii) Analisaremos o caso em que $c_1 \neq 0$ com mais detalhes na Proposição abaixo.

Proposição 116 *Suponhamos $c_1 \neq 0$. Então, a menos de uma reparametrização por comprimento de arco e uma homotetia nas coordenadas (x, y) , a curva $X(s; 0, c_1, c_2, c_3)$, $(s \in \mathbb{R})$ é uma catenária, e portanto, a superfície de revolução correspondente é o catenóide.*

Demonstração: Por uma transformação paralela do comprimento de arco, $\bar{s} = s + c_2$, e uma mudança de variável na integração, $\bar{t} = t + c_2$, $X(s; 0, c_1, c_2, c_3)$ pode ser transformada em

$$\left(\int_{c_2}^{\bar{s}} \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + \bar{t}^2}} d\bar{t} + c_3, \sqrt{c_1^2 + \bar{s}^2} \right).$$

Por uma transformação paralela no eixo- x , tome

$$c_3 = \int_0^{c_2} \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + \bar{t}^2}} d\bar{t} \quad (\text{no caso onde } c_2 > 0)$$

$$c_3 = - \int_{c_2}^0 \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + \bar{t}^2}} d\bar{t} \quad (\text{no caso onde } c_2 < 0).$$

Conseqüentemente, a curva acima se torna

$$\left(\int_0^s \frac{c}{\sqrt{c^2 + t^2}} dt, \sqrt{c^2 + s^2} \right) \quad (s \in \mathbb{R})$$

onde podemos assumir que $c > 0$.

Calculando a integral da expressão acima, obtemos

$$x = \int_0^s \frac{c}{\sqrt{c^2 + t^2}} dt = c \ln \left(\frac{s + \sqrt{c^2 + s^2}}{c} \right) \quad (s > 0).$$

Como $y = \sqrt{c^2 + s^2}$, eliminando s das suas expressões obtemos

$$\frac{y}{c} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right).$$

Fazendo uma homotetia com raio $\frac{1}{c}$ no sistema de coordenadas (x, y) , a expressão acima se torna $y = \cosh x$, para um novo sistema de coordenadas, que é a catenária. Portanto, uma superfície de revolução que não é plana é essencialmente o catenóide, a superfície de revolução da catenária. \square

CASO 2: $H = \text{constante} \neq 0$.

Seja $H = \text{constante} \neq 0$. Por uma transformação paralela do eixo- x e uma mudança do comprimento de arco, podemos escrever

$$X(s, H, B) = \left(\int_0^s \frac{1 + B \operatorname{sen} 2Ht}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \operatorname{sen} 2Ht}} dt, \frac{1}{2|H|} \sqrt{1 + B^2 + 2B \operatorname{sen} 2Hs} \right) \quad (105)$$

pelo Teorema 114, onde B é um número real arbitrário.

Como

$$X(s; -H, B) = X(s; H, -B)$$

$$X(s; H, -B) = X\left(s - \frac{\pi}{2H}; H, B\right) + \text{vetor constante}$$

$$X(s; \lambda H, B) = \frac{1}{\lambda} X(\lambda s; H, B), \quad \lambda > 0 \quad (s \in \mathbb{R})$$

podemos assumir que $B \geq 0$ e $H > 0$.

Reciprocamente, para números reais B e H , quando denotamos uma curva plana definida em (105) por $X(s, H, B)$ e consideramos a superfície de revolução $S = S(H, B)$ cuja geratriz é $X(s; H, B)$, podemos mostrar que a curvatura média de S é constante e igual a H . Portanto, a família a um parâmetro $S(H, B)$ ($B \geq 0$) de superfícies de revolução de curvatura média constante com a mesma curvatura H é obtida.

A curva geratriz $X(s; H, B)$ é uma curva plana interessante. De fato,

(i) no caso onde $B = 0$, como $X(s; H, 0)$ é a reta passando no eixo- x , a superfície de revolução correspondente é um cilindro;

(ii) no caso onde $B = 1$, podemos mostrar que $X(s, H, 1)$ é uma sequência de semicírculos de mesmo raio com centros no eixo- x .

Proposição 117 *Suponhamos $B = 1$. Então, a curva $X(s; H, 1)$ ($s \in \mathbb{R}$) é uma sequência de semi-círculos de mesmo raio com centros no eixo- x , donde a superfície de revolução correspondente $S(H, 1)$ é uma sequência de esferas com o mesmo raio.*

Demonstração: Tome $B = 1$ em (105) e calculemos as integrais aqui. Pela igualdade

$$\cos Ht + \operatorname{sen} Ht = \sqrt{1 + \operatorname{sen} 2Ht}$$

obtemos

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^s \sqrt{1 + \operatorname{sen} 2Ht} dt = \frac{1}{\sqrt{2}H} (\operatorname{sen} Hs - \cos Hs + 1), \\ y(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}H} (\operatorname{sen} Hs + \cos Hs), \quad \left(s \in \left(-\frac{\pi}{4H}, \frac{3\pi}{4H} \right) \right). \end{aligned}$$

Como a curva $(x(s), y(s))$ verifica

$$\left(x(s) - \frac{1}{\sqrt{2}H} \right)^2 + y(s)^2 = \frac{1}{H^2}, \quad \left(s \in \left(-\frac{\pi}{4H}, \frac{3\pi}{4H} \right) \right),$$

podemos ver que, no intervalo aberto $\left(-\frac{\pi}{4H}, \frac{3\pi}{4H} \right)$, $X(s; H, 1)$ é a parte superior do círculo com centro sobre o eixo- x e raio $\frac{1}{H}$. Além disso, existem os limites de $x(s)$ e $y(s)$ em ambos extremos $-\frac{\pi}{4H}$ e $\frac{3\pi}{4H}$ do intervalo.

Para um s , tal que $s \in \mathbb{R}$, pode-se mostrar que $X(s; H, 1)$ é uma transformação paralela de um semi-círculo. □

No caso onde $0 < B < 1$ e $B > 1$, a superfície $X(s; H, B)$ tem uma forma interessante.

(iii) No caso onde $0 < B < 1$, $x(s)$ é monótona crescente quando $s \rightarrow +\infty$. A curva $X(s; H, B)$ é chamada *ondulatória* e é obtida como o locus do foco de um elipsoide rolando sobre o eixo- x sem deslizar.

(iv) No caso onde $B > 1$, x não é monótona. Além disso, $x(s) \rightarrow \infty$ ($s \rightarrow \infty$). De fato a superfície de revolução correspondente a essa curva é chamada *unduloide* (figura 15).

$$X\left(s + \frac{\pi}{H}; H, B\right) = X(s; H, B) + \left(\frac{1}{2H} \int_0^{2\pi} g(t) dt, 0 \right),$$

onde

$$g(t) = \frac{1 - B \operatorname{sen} t}{\sqrt{1 + B^2 - 2B \operatorname{sen} t}} + \frac{1 + B \operatorname{sen} t}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \operatorname{sen} t}} \quad (t \in [0, \pi]).$$

Então pode se mostrar que

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt > 0$$

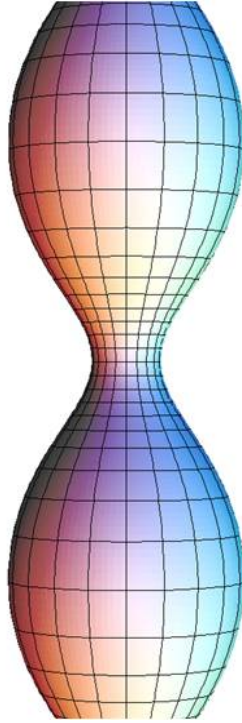


Figura 15: Unduloide. Fonte [74].

onde $B > 0$.

A curva $X(s; H, B)$ nesse caso é chamada *nodária* e é obtida como o locus de um foco da hipérbole rolando no eixo- x sem deslizar.

A superfície de revolução correspondente a essa curva é chamada *nodoide* (figura 16).

Combinando os cálculos acima de (i) a (iv), o seguinte resultado é obtido.

Teorema 118 (Delaunay) *Uma superfície de revolução com curvatura média constante é localmente congruente a um plano, a um cilindro circular, a uma esfera, a um catenóide, a um undoloide ou a um nodoide.*

Em adição, fixando H e variando o parâmetro $B (\geq 0)$, temos uma deformação contínua de superfícies $S(H, B)$ do cilindro circular ao nodoide passando ao undoloide e uma série de esferas ($B = 1$) preservando a curvatura média. Além disso, elas não são isométricas.

No caso geral de superfícies de revolução, pelo Teorema 114 podemos obter superfícies de revolução cuja curvatura média é uma dada função contínua arbitrária.

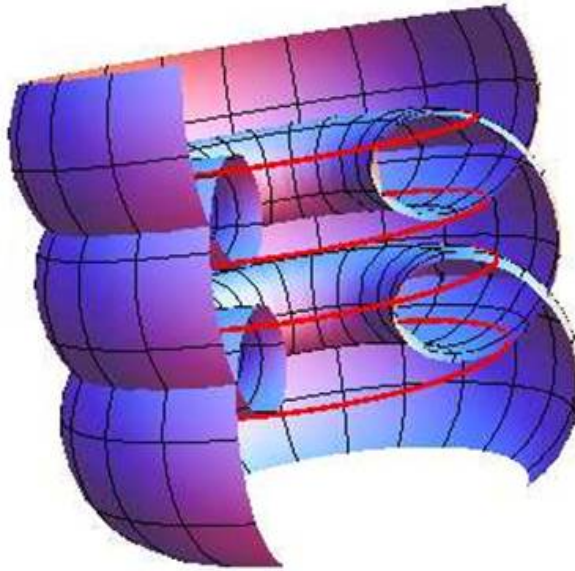


Figura 16: Nodoide. Fonte [75].

Quando tomamos qualquer curva fechada que não intersecta o eixo- x e giramos ela em torno do eixo- x , obtemos uma superfície de revolução fechada, e sua curvatura média é, claramente, uma função periódica.

6.3 *Superfícies Helicoidais*

Nesta seção, faremos uma breve exposição do conceito e resultados de superfícies helicoidais de curvatura média constante não nula, sem preocupações com a técnica dos resultados. Primeiro, definimos movimento helicoidal e descrevemos a expressão geral de uma superfície helicoidal. Depois veremos que as superfícies helicoidais de curvatura média constante são determinadas essencialmente por dois números.

Fixado um número positivo h , considere aplicação

$$g_t(x, y, z) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z + ht)$$

do \mathbb{R}^3 para qualquer número real t . O conjunto dessas aplicações $\{g_t; -\infty < t < \infty\}$ do \mathbb{R}^3 forma um subgrupo a um parâmetro de transformações isométricas. Um elemento desse grupo é chamado *movimento helicoidal* de *passo* h e eixo OZ .

Uma superfície é denominada *helicoidal* quando ela é invariante por todos os movimentos

helicoidais.

Uma superfície helicoidal de passo h_0 pode ser expressada localmente como

$$X : (r, \theta) \in I \times [0, 2\pi) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, \lambda(r) + h_0 \theta) \in \mathbb{R}^3. \quad (106)$$

Note que quando $h_0 = 0$, a superfície helicoidal é de revolução.

No Lema, a seguir, investigaremos as métricas Riemannianas das superfícies helicoidais.

Lema 119 *Existe uma família a dois parâmetros de superfícies helicoidais isométrica a uma superfície helicoidal dada por (106).*

Seja $U(s)^2 = r(s)^2 + h_0^2$ e $m \in \mathbb{R}^*$, tal que $\frac{U(s)}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{1}{m}$. Quando $m = 1$ e $h = h_0$, a superfície é a superfície helicoidal original e, quando $m = 1$ e $h = 0$, a superfície é uma superfície de revolução isométrica a uma superfície helicoidal. Portanto, se variarmos a constante h de $h = 0$ para $h = h_0$, obtemos uma deformação isométrica de superfícies de uma superfície de revolução para a dada superfície helicoidal.

Lema 120 *Uma superfície helicoidal $[U, m, h]$ é de curvatura média constante h , se e somente se, U satisfaz a equação diferencial*

$$m^2 U(s) \frac{d^2 U}{ds^2} + m^2 \left(\frac{dU}{ds} \right)^2 - 1 = -2H \sqrt{m^2 U(s)^2 \left(1 - m^2 \left(\frac{dU}{ds} \right)^2 \right) - h^2}. \quad (107)$$

Com esses dois Lemas, pode ser demonstrado o Teorema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [1], Capítulo 4.

Teorema 121 (Dajczer e Do Carmo) *Superfícies helicoidais de curvatura média constante H da forma (106) forma uma família de superfícies a dois parâmetros.*

6.4 Estabilidade

Apresentamos a seguir a noção de variação de uma imersão. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto relativamente compacto com $\partial\Omega$ diferenciável e $X : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. A área de $\bar{\Omega}$ (quando munido da métrica induzida por X) é dada por

$$A = \int_{\Omega} dA$$

onde $dA = \sqrt{EG - F^2} dudv$.

Definição 122 (Variação e Campo Variacional) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ relativamente compacto com $\partial\Omega$ diferenciável e $X : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. Uma **variação** de X é uma família a um parâmetro $\{\chi_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$ onde cada $\chi_t : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão, $\chi_0 = X$ e a aplicação $\chi : (p, t) \in \bar{\Omega} \times (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \chi_t(p) \in \mathbb{R}^3$ é diferenciável.

A aplicação $\xi : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\xi(p) = \left. \frac{\partial \chi(p, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = d\chi_{(p,0)}(0, 1)$$

é chamada **campo variacional** de X .

Dizemos que variação $\{\chi_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$ é *normal* quando

$$\xi = fN$$

para alguma função $f : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, onde N denota o vetor normal de $\chi_0 = X$. Dizemos que $\{\chi_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$ *fixa o bordo* quando

$$\chi_t(p) = X(p)$$

para todo $p \in \partial\Omega$ e $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Em particular, $\xi = 0$ em $\partial\Omega$.

Definição 123 Sejam $X : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão e $\chi_t : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma variação de X . O **funcional área** $A : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ e o **funcional volume** $V : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ de X são definidos, respectivamente, por

$$A(t) = \int_{\Omega} dA_t \quad e \quad V(t) = -\frac{1}{3} \int_{\Omega} \langle \chi_t, N_t \rangle dA_t$$

onde dA_t é o elemento de área de χ_t .

Dizemos que uma variação χ_t *preserva o volume* quando

$$V(t) = V(0)$$

para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

A próxima Proposição nos dá a derivada de primeira ordem do funcional área.

Proposição 124 (Primeira Variação da Área) Seja $X : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. Se $\chi : \bar{\Omega} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma variação de X que fixa o bordo, então o funcional área $A : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $t = 0$ e

$$A'(0) = -2 \int_{\Omega} H \langle N, \xi \rangle dA - \int_{\partial\Omega} \langle \nu, \xi \rangle dA \quad (108)$$

onde H é a curvatura média de X e ν é um vetor conormal de Ω ao longo de $\partial\Omega$.

Demonstração: Provaremos a Proposição no caso em que a variação é da forma

$$\chi(p, t) = X(p) + tf(p)N(p)$$

para todo $(p, t) \in \Omega \times (-\epsilon, \epsilon)$, onde $f : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e N é o campo normal de $\chi_0 = X$ em p .

O caso mais geral pode ser encontrado em [2].

Neste caso, o último termo de (108) vale

$$\int_{\partial\Omega} \langle \nu, \xi \rangle dA = \int_{\partial\Omega} \langle \nu, fN \rangle dA = \int_{\partial\Omega} f \langle \nu, N \rangle dA = 0$$

pois ν é um campo conormal de Ω ao longo de $\partial\Omega$.

Temos

$$d(\chi_t)_p(v) = v + tf(p)dN_p(v) + tdf_p(v)N(p),$$

para todo $v \in T_p\chi_t$, onde estamos usando a identificação usual $v \approx dX_p v$, i.e., $T_p\chi_t \approx \mathbb{R}^2$.

Pela compacidade de $\bar{\Omega}$, podemos escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que χ_t é uma imersão $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Denotando por e_i , $i = 1, 2$ as direções principais de X em $p \in \bar{\Omega}$, temos

$$\begin{aligned} d(\chi_t)_p(e_i) &= e_i + tf(p)dN_p(e_i) + tdf_p(e_i)N(p) \\ &= e_i - tf(p)\kappa_i e_i + tdf_p(e_i)N(p) \\ &= (1 - tf(p)\kappa_i)e_i + tdf_p(e_i)N(p) \end{aligned}$$

onde κ_i , $i = 1, 2$ são as curvaturas principais de X .

O jacobiano de χ_t é dado por

$$\text{Jac}(\chi_t)(p) = |(d\chi_t)_p(e_1) \times (d\chi_t)_p(e_2)|$$

$$\begin{aligned}
& |[(1 - tf(p)\kappa_1) e_1 + tdf_p(e_1)N(p)] \times [(1 - tf(p)\kappa_2) e_2 + tdf_p(e_2)N(p)]| \\
& |(1 - tf(p)\kappa_1) (1 - tf(p)\kappa_2) e_1 \times e_2 + (1 - tf(p)\kappa_1) tdf_p(e_2)e_1 \times N(p) \\
& + tdf_p(e_1) (1 - tf(p)\kappa_2) N(p) \times e_2 + tdf_p(e_1)tdf_p(e_2)N(p) \times N(p)| \\
& = |(1 - tf(p)\kappa_1) (1 - tf(p)\kappa_2) N(p) - (1 - tf(p)\kappa_1) tdf_p(e_2)e_2 \\
& \quad - tdf_p(e_1) (1 - tf(p)\kappa_2) e_1 + 0| \\
& = |(1 - tf(p)\kappa_2 - tf(p)\kappa_1 + t^2 f(p)^2 \kappa_1 \kappa_2) N(p) - (1 - tf(p)\kappa_1) tdf_p(e_2)e_2 - tdf_p(e_1) (1 - tf(p)\kappa_2) e_1| \\
& = \left| \left(1 - 2tf(p) \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{2} + t^2 f(p)^2 \kappa_1 \kappa_2 \right) N(p) - (1 - tf(p)\kappa_1) tdf_p(e_2)e_2 - tdf_p(e_1) (1 - tf(p)\kappa_2) e_1 \right| \\
& = |(1 - 2tf(p)H(p) + t^2 f(p)^2 K(p)) N(p) - (1 - tf(p)\kappa_1) tdf_p(e_2)e_2 - tdf_p(e_1) (1 - tf(p)\kappa_2) e_1|
\end{aligned}$$

donde

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Jac}(\chi_t)(p) = -2H(p) f(p) \quad (109)$$

Portanto, usando a equação (109) e o Teorema de Mudança de Variáveis, obtemos

$$A'(0) = \int_{\Omega} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Jac}(\chi_t)(p) dA = -2 \int_{\Omega} H f dA = -2 \int_{\Omega} H \langle \xi, N \rangle dA.$$

□

Apresentamos a segunda derivada do funcional área, como segue.

Proposição 125 (*Segunda Variação da Área*) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio relativamente compacto e $X : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão com curvatura média constante H . Se $\chi_t : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma variação de X que fixa o bordo e preserva o volume, com $f = \langle N, \xi \rangle$, então*

$$A''(0) = - \int_{\Omega} f (\Delta f + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) f) dA \quad (110)$$

onde κ_1 e κ_2 são as curvaturas principais de X .

Para uma prova da Proposição acima, vide [2].

A seguir, temos mais uma definição para superfícies mínimas.

Teorema 126 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ relativamente compacto e $X : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. Então X é mínima, se e somente se, $A'(0) = 0$, para toda variação de X que fixa o bordo.*

Demonstração: Pela Primeira Variação da Área, temos

$$A'(0) = -2 \int_{\Omega} H \langle N, \xi \rangle dA.$$

Como $H \equiv 0$ é imediato

$$A'(0) = 0$$

para toda variação de X que fixa o bordo.

Reciprocamente, seja $f : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que

$$f|_{\text{Int } \Omega} > 0 \quad e \quad f|_{\partial\Omega} = 0.$$

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, defina a variação $\{\chi_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$ por

$$\chi_t : p \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \mapsto X(p) + tf(p)H(p)N(p) \in \mathbb{R}^3$$

que fixa o bordo e $\xi = fHN$.

Então por hipótese

$$0 = A'(0) = -2 \int_{\Omega} H \langle \xi, N \rangle dA = -2 \int_{\Omega} fH^2 dA.$$

Como $f|_{\text{Int } \Omega} > 0$, então $H \equiv 0$. □

Proposição 127 (Primeira Variação do Volume) *Seja $X : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. Se $\chi : \bar{\Omega} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma variação de X que fixa o bordo, então o funcional volume $V : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $t = 0$ e*

$$V'(0) = - \int_{\Omega} \langle \xi, N \rangle dA.$$

Para uma demonstração da Proposição acima, vide [2].

Iremos agora caracterizar as superfícies de curvatura média constante, mas para isso precisamos do seguinte Lema técnico.

Lema 128 *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ relativamente compacto com $\partial\Omega$ diferenciável, $X : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão e $\eta : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ função diferenciável satisfazendo $\int_{\Omega} \eta dA = 0$. Então existe uma variação χ_t de X que preserva o volume, tal que*

$$\xi = \eta N.$$

Além disso, se $\eta|_{\partial\Omega} \equiv 0$, então χ_t pode ser tomada como uma variação fixa o bordo.

Demonstração: Usando resultados de funções bump's, seja $g : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que

$$g|_{\partial\Omega} = 0 \quad e \quad \int_{\Omega} g dA \neq 0.$$

Seja $\epsilon > 0$ e defina a aplicação $\tilde{\chi} : \bar{\Omega} \times I \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\tilde{X}(p, t, s) = X(p) + (t\eta(p) + sg(p))N(p)$$

para todo $(p, t, s) \in \bar{\Omega} \times I \times I$.

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a aplicação $\tilde{\chi}$ pode ser vista como uma variação de X , fixado t ou s com

$$\tilde{\chi}(p, 0, 0) = X(p).$$

Seja $V(t, s)$ o volume da superfície $\tilde{\chi}(\cdot, t, s) : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Pela Proposição 127, temos

$$V'(0, 0) = \int_{\Omega} g dA \neq 0.$$

O Teorema da Função Implícita garante a existência de um difeomorfismo $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$, onde $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ são intervalos abertos centrados em 0, tais que $\varphi(0) = 0$ e

$$V(t, \varphi(t)) = c$$

para todo $t \in I_1$.

Isso nos permite considerar a variação $\chi : \bar{\Omega} \times I_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de X que preserva volume dada por

$$\chi_t(p) = \tilde{\chi}(p, t, \varphi(t)).$$

Resta mostrarmos que $\xi = \eta N$.

Derivando $V(t, s)$ em $t = 0$, obtemos

$$0 = \left. \frac{d}{dt} V \right|_{(0,s)} + \varphi'(0) \frac{dV}{ds} = \int_{\Omega} (\eta + \varphi'(0)g) dA = \varphi'(0) \int_{\Omega} g dA$$

logo

$$\varphi'(0) = 0.$$

Portanto

$$\xi(p) = \left. \frac{d}{dt} \chi \right|_{t=0} = (\eta(p) + \varphi'(0)g(p))N(p) = \eta(p)N(p).$$

No caso particular em que $\eta = 0$ em $\partial\Omega$, como $g|_{\partial\Omega} \equiv 0$, temos

$$\chi_t = X$$

ao longo de $\partial\Omega$, e portanto, a variação χ_t fixa o bordo. \square

Considere $X : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão, $\chi_t : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma variação de X que fixa o bordo (que não preserva o volume necessariamente), $\lambda \in \mathbb{R}$ e defina o funcional

$$J_\lambda : t \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto A(t) - 2\lambda V(t) \in \mathbb{R}$$

onde $A, V : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ são o funcional área e funcional volume de X , respectivamente.

Pela Primeira Variação da Área e Primeira Variação do Volume, temos

$$\begin{aligned} J'_\lambda(0) &= A'(0) - 2\lambda V'(0) = -2 \int_{\Omega} H \langle N, \xi \rangle dA + 2\lambda \int_{\Omega} \langle \xi, N \rangle dA \\ &= -2 \int_{\Omega} (H - \lambda) \langle N, \xi \rangle dA. \end{aligned}$$

Mais ainda, no caso em que $\lambda = H$ a segunda derivada do funcional J_H em $t = 0$ coincide com (110), i.e,

$$J''_H(0) = - \int_{\Omega} f (\Delta f + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) f) dA \quad (111)$$

para toda variação que fixa o bordo, onde κ_1 e κ_2 são as curvaturas principais de X . Aqui a função diferenciável $f : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ verifica apenas a condição $f|_{\partial\Omega} \equiv 0$, ao invés de $f = \langle N, \xi \rangle$ na Segunda Variação da Área.

Teorema 129 (*Sup. Curvatura Média Constante*) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ relativamente compacto com $\partial\Omega$ diferenciável e $X : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. São equivalentes:*

1. *A curvatura média H de X é constante e $H = H_0 := \frac{1}{A} \int_{\Omega} H dA$.*
2. *$A'(0) = 0$, para toda variação χ_t de X que preserva o volume e fixa o bordo.*
3. *Existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $J'_\lambda(0) = 0$, para toda variação χ_t de X que fixa o bordo.*

Demonstração: (1) \Rightarrow (3)

Temos

$$J_{2H_0}(t) = A(t) - 2H_0V(t)$$

donde

$$\begin{aligned} J'_{2H_0}(0) &= A'(0) - 2H_0V'(0) \\ &= -2 \int_{\Omega} H \langle N, \xi \rangle dA + 2H_0 \int_{\Omega} \langle \xi, N \rangle dA \\ &= 0 \end{aligned}$$

(3) \Rightarrow (2)

Seja uma variação χ_t de X que preserva o volume e fixa o bordo

Como a variação preserva o volume, então

$$V'(t) = 0$$

para todo $t \in I$.

Por outro lado, como a variação fixa o bordo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $J'_{\lambda}(0) = 0$.

Mas

$$0 = J'_{\lambda}(0) = A'(0) + \lambda V'(0) = A'(0)$$

e isso prova a implicação.

(2) \Rightarrow (1)

Considere a função

$$f : p \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto (H - H_0)(p) \in \mathbb{R}$$

e suponhamos por absurdo que existe um ponto $p \in \Omega$, tal que

$$f(p) \neq 0.$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f dA &= \int_{\Omega} H - H_0 dA = \int_{\Omega} H dA - \int_{\Omega} H_0 dA \\ &= \int_{\Omega} H dA - H_0 A = \int_{\Omega} H dA - \left(\frac{1}{A} \int_{\Omega} H dA \right) A \\ &= \int_{\Omega} H dA - \int_{\Omega} H dA = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$f(p) \neq 0 \quad e \quad \int_{\Omega} f dA = 0,$$

donde f deve assumir um valor oposto ao de $f(p)$ em Ω .

Assim, os conjuntos

$$\Omega^+ = \{p^+ \in \Omega; f(p^+) > 0\} \quad e \quad \Omega^- = \{p^- \in \Omega; f(p^-) < 0\}$$

são não vazios.

Fixe $p^+ \in \Omega^+$ e $p^- \in \Omega^-$.

Usando resultados das funções bump's, podemos construir funções $\varphi^+, \varphi^- : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis, tais que

$$\begin{array}{ccc} \varphi^+ = 1 \text{ em um vizinhança } U^+ \text{ de } p^+ & e & \varphi^- = 1 \text{ em um vizinhança } U^- \text{ de } p^- \\ \text{Supp } \varphi^+ \subset \Omega^+ & & \text{Supp } \varphi^- \subset \Omega^- \end{array}$$

Como $f|_{\Omega^+} > 0$ e $f\varphi^+|_{\Omega^+} > 0$ então

$$\alpha^+ := \int_{\Omega^+} f\varphi^+ dA > 0$$

Analogamente

$$\alpha^- := \int_{\Omega} f\varphi^- dA < 0.$$

Seja $\lambda \in \mathbb{R}_+$, tal que

$$\alpha^+ + \lambda\alpha^- = 0$$

e definamos a função

$$\varphi : p \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \mapsto (\varphi^+ + \lambda\varphi^-)(p) \in \mathbb{R}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f\varphi dA &= \int_{\Omega} f(\varphi^+ + \lambda\varphi^-) dA \\ &= \int_{\Omega} f\varphi^+ dA + \lambda \int_{\Omega} f\varphi^- dA \\ &= \int_{\Omega^+} f\varphi^+ dA + \lambda \int_{\Omega^-} f\varphi^- dA \\ &= \alpha^+ + \lambda\alpha^- = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a função

$$\eta := f\varphi : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

é diferenciável (pois produto de diferenciáveis é diferenciável), e

$$\eta|_{\partial\Omega} = 0 \quad e \quad \int_{\Omega} \eta dA = 0.$$

Pelo Lema 128, existe uma variação $\{\chi_t\}_t$ de X que preserva o volume e fixa o bordo, tal que

$$\xi = \eta N.$$

Por hipótese

$$0 = A'(0) = -2 \int_{\Omega} H \langle \xi, N \rangle dA$$

donde

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} H \langle \xi, N \rangle dA = \int_{\Omega} H \langle \eta N, N \rangle dA \\ &= \int_{\Omega} H \eta dA = \int_{\Omega} H \eta dA - H_0 \int_{\Omega} \eta dA \\ &= \int_{\Omega} (H - H_0) \eta dA = \int_{\Omega} f \eta dA \end{aligned}$$

logo

$$f^2 \varphi = f \eta \equiv 0.$$

Mas

$$f(p^+)^2 \varphi(p^+) = f^2(p^+) \cdot 1 > 0$$

o que é uma contradição.

Portanto,

$$f = H - H_0 \equiv 0,$$

ou seja, a curvatura média de X é $H = H_0 = \frac{1}{A} \int_{\Omega} H dA$. □

A seguir, introduzimos a noção de estabilidade.

Definição 130 *Sejam S uma superfície abstrata e $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão com curvatura média constante H . Dizemos que X é **estável** quando $A''_D(0) \geq 0$, para toda variação que fixa bordo e que preserva volume e para todo $D \subset S$ domínio relativamente compacto.*

(Quando o bordo de D é vazio, não há suposição sobre a variação "fixar bordo".)

Considere o seguinte conjunto

$$\mathcal{F}_\Omega = \left\{ f : S \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^\infty; f|_{\partial S} \equiv 0 \quad e \quad \int_S f dA = 0 \right\}.$$

Teorema 131 *Uma imersão $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é estável, se e somente se, $-\int_\Omega f (\Delta f + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) f) dA \geq 0$, para toda função $f \in \mathcal{F}_\Omega$, onde κ_1 e κ_2 são as curvaturas principais de X .*

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{F}_\Omega$ arbitrária. Pelo Lema 128 existe uma variação normal $\chi_t : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de X que preserva o volume, donde $V''(0) = 0$. Então

$$J''_H(0) = A''(0) - 2HV''(0) = A''(0) \geq 0.$$

Reciprocamente, considere $\chi_t : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma variação de X que fixa o bordo e preserva o volume, e fN a componente normal ($\xi = (fN)^\perp + fN$) do campo variacional de X .

Então, $f|_{\partial\Omega} \equiv 0$.

Como a variação χ_t preserva o volume, então $V'(0) = 0$. Pela Primeira Variação do Volume (Proposição 127), temos

$$0 = V'(0) = - \int_\Omega \langle \xi, N \rangle dA = - \int_\Omega \langle (fN)^\perp + fN, N \rangle dA = - \int_\Omega f dA$$

donde

$$\int_\Omega f dA = 0.$$

Portanto, $f \in \mathcal{F}_\Omega$, donde $J''_H(0) \geq 0$. Como χ_t preserva o volume, então

$$A''(0) = A''(0) - 2HV''(0) = J''_H(0) \geq 0.$$

□

A partir de agora, faremos um estudo breve sobre o espectro do Laplaciano para apresentar uma estimativa do primeiro autovalor do operador Laplaciano da esfera.

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta e considere

$$\Delta : f \in C^\infty(S) \longmapsto \Delta f \in C^\infty(S)$$

seu operador Laplaciano. Pode ser mostrado através do Teorema da Divergência que o operador Δ é autoadjunto com respeito ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_S f(p) g(p) dp.$$

Definição 132 (Autovalor) Dizemos $\lambda \in \mathbb{R}$ é um **autovalor** do operador Laplaciano $\Delta : f \in C^\infty(S) \longmapsto \Delta f \in C^\infty(S)$, quando existe uma função $f \in C^\infty(S)$ não nula, tal que

$$\Delta f + \lambda f = 0. \tag{112}$$

Pela linearidade de Δ , temos que o conjunto V_λ das soluções da equação (112) (incluindo a função nula $f \equiv 0$) é um subespaço vetorial de $C^\infty(S)$. Neste caso, dizemos que f é uma *autofunção* associada ao autovalor λ quando $f \in V_\lambda$.

Note que $\lambda = 0$ é sempre um autovalor do Laplaciano de qualquer superfície regular compacta S , e que toda função constante é uma autofunção de $\lambda = 0$. O próximo resultado nos diz que as funções constantes são as únicas autofunções associadas ao autovalor $\lambda = 0$.

Proposição 133 (E. Hopf) Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta, e $f \in C^\infty(S)$. Se

$$\Delta f(p) \geq 0$$

para todo $p \in S$, então f é constante.

Demonstração: Como $\Delta f(p) \geq 0$, para todo $p \in S$, então pelo Corolário 175 do Teorema da Divergência, temos

$$\int_S \Delta f(p) dp = 0$$

donde

$$\Delta f \equiv 0.$$

Mas pelas propriedades da divergência,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f\nabla f) &= \nabla f(f) + f \operatorname{div} \nabla f \\ &= \langle \nabla f, \nabla f \rangle + f \Delta f = \|\nabla f\|^2 + f \Delta f = \|\nabla f\|^2\end{aligned}$$

donde pelo Corolário 175

$$0 = \int_S \operatorname{div}(f\nabla f) dp = \int_S \|\nabla f\|^2 dp.$$

Portanto $\|\nabla f\|^2 \equiv 0$, e conseqüentemente, f é constante. \square

Note que se λ é um autovalor não nulo, então ele deve ser necessariamente positivo. De fato, se f é uma função associada a $\lambda \neq 0$, então pela Proposição de E. Hopf, f é não constante. Pelas propriedades do Laplaciano e da definição de autovalor de Δ , temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta f^2 &= \frac{1}{2}(f\Delta f + f\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla f \rangle) \\ &= f\Delta f + \|\nabla f\|^2.\end{aligned}$$

Integrando essa igualdade sobre $S \subset \mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned}0 &= \int_S \frac{1}{2}\Delta f^2 dp = \int_S f\Delta f dp + \int_S \|\nabla f\|^2 dp = -\lambda \int_S f^2 dp + \int_S \|\nabla f\|^2 dp \\ \therefore \quad \lambda &= \frac{\int_S \|\nabla f\|^2 dp}{\int_S f^2 dp} > 0\end{aligned}$$

onde na primeira igualdade usamos o Corolário 175, e na desigualdade usamos que f é não constante.

Nesse sentido, pode-se mostrar que uma das propriedades básicas do operador Laplaciano Δ é que o conjunto dos seus autovalores forma uma seqüência monótona crescente, i.e.,

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k < \dots$$

com

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = +\infty.$$

Além disso, o primeiro autovalor λ_1 admite a seguinte caracterização

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_S \|\nabla f\|^2 dA}{\int_S f^2 dA} \quad (113)$$

para toda função $f \in C^\infty(S)$ que verifica a condição

$$\int_S f(p) dA = 0.$$

Enunciaremos agora um resultado que nos diz que o primeiro autovalor λ_1 da esfera \mathbb{S}^2 é igual a 2.

Teorema 134 *O primeiro autovalor λ_1 da esfera \mathbb{S}^2 é igual a 2.*

Para uma demonstração do Teorema acima, vide [26].

Exemplo 135 *Se $i : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a inclusão, então i é estável.*

Considere $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ um domínio relativamente compacto qualquer em \mathbb{S}^2 e $\eta \in \mathcal{F}_\Omega$ arbitrária, i.e., uma função $\eta : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , tal que

$$\eta|_{\partial\Omega} \equiv 0 \quad e \quad \int_\Omega \eta dA = 0$$

Usando resultados de funções bump's, podemos estender η a uma função diferenciável por partes $\bar{\eta} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\bar{\eta}|_{\mathbb{S}^2 \setminus \Omega} \equiv 0.$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} \bar{\eta} dA &= \int_{(\mathbb{S}^2 \setminus \Omega) \cup \Omega} \bar{\eta} dA = \int_{\mathbb{S}^2 \setminus \Omega} \bar{\eta} dA + \int_\Omega \bar{\eta} dA \\ &= \int_{\mathbb{S}^2 \setminus \Omega} 0 dA + \int_\Omega \eta dA = 0. \end{aligned}$$

$$\int_\Omega \|\nabla \eta\|^2 - 2\eta^2 dA = \int_\Omega \|\nabla \bar{\eta}\|^2 - 2\bar{\eta}^2 dA = \int_{\mathbb{S}^2} \|\nabla \bar{\eta}\|^2 - 2\bar{\eta}^2 dA. \quad (114)$$

Como $\int_{\mathbb{S}^2} \bar{\eta} dA = 0$, segue de (113)

$$2 = \lambda_1(\mathbb{S}^2) \leq \frac{\int_{\mathbb{S}^2} \|\nabla \bar{\eta}\|^2 dA}{\int_{\mathbb{S}^2} \bar{\eta}^2 dA} \quad \therefore \quad \int_{\mathbb{S}^2} \|\nabla \bar{\eta}\|^2 dA \geq 2 \int_{\mathbb{S}^2} \bar{\eta}^2 dA. \quad (115)$$

Pelas propriedades do divergente temos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\eta \nabla \eta) &= \nabla \eta(\eta) + \eta \operatorname{div} \nabla \eta = \langle \nabla \eta, \nabla \eta \rangle + \eta \Delta \eta = \|\nabla \eta\|^2 + \eta \Delta \eta \\ \therefore \quad \|\nabla \eta\|^2 - \operatorname{div}(\eta \nabla \eta) &= -\eta \Delta \eta.\end{aligned}\tag{116}$$

Pelo Teorema da Divergência

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\eta \nabla \eta) dA = \int_{\partial \Omega} \langle \eta \nabla \eta, \nu \rangle dt = 0.\tag{117}$$

Usando que $(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) = 2$, temos

$$\begin{aligned}- \int_{\Omega} \eta (\Delta \eta + 2\eta) dA &= - \int_{\Omega} \eta \Delta \eta + 2\eta^2 dA \\ &\stackrel{(116)}{=} \int_{\Omega} \|\nabla \eta\|^2 - \operatorname{div}(\eta \nabla \eta) - 2\eta^2 dA \\ &\stackrel{(117)}{=} \int_{\Omega} \|\nabla \eta\|^2 - 2\eta^2 dA \\ &\stackrel{(114)}{=} \int_{\mathbb{S}^2} \|\nabla \bar{\eta}\|^2 - 2\bar{\eta}^2 dA \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} \|\nabla \bar{\eta}\|^2 dA - 2 \int_{\mathbb{S}^2} \bar{\eta}^2 dA \\ &\stackrel{(115)}{\geq} 2 \int_{\mathbb{S}^2} \bar{\eta}^2 dA - 2 \int_{\mathbb{S}^2} \eta^2 dA \\ &= 2 \int_{\Omega} \eta^2 dA - 2 \int_{\Omega} \eta^2 dA = 0\end{aligned}$$

ou seja,

$$- \int_{\Omega} \eta (\Delta \eta + 2\eta) dA \geq 0$$

para todo $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ relativamente compacto e para toda $\eta \in \mathcal{F}_{\Omega}$, donde i é estável pelo Teorema 131.

A seguir considere os seguintes Lemas para a demonstração do Teorema de Estabilidade da Esfera.

Lema 136 *Considere S uma superfície abstrata compacta, orientável, sem bordo e $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. Então*

1. Se a curvatura média de X for constante, então $\Delta\varphi = -2H - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)\varphi$, onde $\varphi = \langle X, N \rangle$, chamada função suporte de X .

2. $\int_{\Omega} \varphi H dA = - \int_{\Omega} dA$.

Para uma demonstração do Lema acima, vide [1].

Finalmente apresentamos o Teorema de Estabilidade da Esfera.

Teorema 137 (Estabilidade da Esfera) *Considere S uma superfície abstrata compacta, orientável, sem bordo e uma imersão $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de curvatura média constante $H > 0$. Então X é estável se e somente se $X(S)$ é uma esfera do \mathbb{R}^3 .*

Demonstração: Faremos a demonstração da volta no caso em que $S = \Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio e X é injetora. Suponha que $\Sigma = X(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{S}^2$ ($\because \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 2$) e tome $\eta \in \mathcal{F}_{\Omega}$. Como X é injetora, existe uma única aplicação diferenciável $\Phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi|_{\mathbb{S}^2 \setminus \Sigma} \equiv 0 \quad e \quad \Phi \circ X = \eta \quad e \quad \int_{\mathbb{S}^2} \Phi dA = \int_{\Sigma} \Phi dA = \int_{\Omega} \eta dA = 0. \quad (118)$$

Como $\int_{\mathbb{S}^2} \Phi dA = 0$, segue de (113)

$$2 = \lambda_1(\mathbb{S}^2) \leq \frac{\int_{\mathbb{S}^2} \|\nabla\Phi\|^2 dA}{\int_{\mathbb{S}^2} \Phi^2 dA} \quad \therefore \quad \int_{\mathbb{S}^2} \|\nabla\Phi\|^2 dA \geq 2 \int_{\mathbb{S}^2} \Phi^2 dA = 2 \int_{\Omega} \eta^2 dA. \quad (119)$$

Pelas propriedades do divergente temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\eta\nabla\eta) &= \nabla\eta(\eta) + \eta \operatorname{div} \nabla\eta = \langle \nabla\eta, \nabla\eta \rangle + \eta\Delta\eta = \|\nabla\eta\|^2 + \eta\Delta\eta \\ \therefore \quad \|\nabla\eta\|^2 - \operatorname{div}(\eta\nabla\eta) &= -\eta\Delta\eta. \end{aligned} \quad (120)$$

Pelo Teorema da Divergência

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\eta\nabla\eta) dA = \int_{\partial\Omega} \langle \eta\nabla\eta, \nu \rangle dt = 0. \quad (121)$$

Usando que $(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) = 2$, temos

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \eta(\Delta\eta + 2\eta) dA &= - \int_{\Omega} \eta\Delta\eta + 2\eta^2 dA \\ &\stackrel{(120)}{=} \int_{\Omega} \|\nabla\eta\|^2 - \operatorname{div}(\eta\nabla\eta) - 2\eta^2 dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(121)}{=} \int_{\Omega} \|\nabla\eta\|^2 - 2\eta^2 dA \\
& = \int_{\Omega} \|\nabla\eta\|^2 dA - 2 \int_{\Omega} \eta^2 dA \\
& \stackrel{(118)}{=} \int_{\mathbb{S}^2} \|\nabla\Phi\|^2 dA - 2 \int_{\Omega} \eta^2 dA \\
& = \int_{\mathbb{S}^2} \|\nabla\Phi\|^2 dA - 2 \int_{\Omega} \eta^2 dA \\
& \stackrel{(119)}{\geq} 2 \int_{\Omega} \eta^2 dA - 2 \int_{\Omega} \eta^2 dA = 0 \\
& = 2 \int_{\Omega} \eta^2 dA - 2 \int_{\Omega} \eta^2 dA = 0
\end{aligned}$$

ou seja,

$$- \int_{\Omega} \eta (\Delta\eta + 2\eta) dA \geq 0$$

para todo $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ relativamente compacto e para toda $\eta \in \mathcal{F}_{\Omega}$, donde X é estável pelo Teorema 131.

Reciprocamente, defina $\varphi = \langle X, N \rangle$ e $\eta = \varphi H + 1$. Pelo Lema 136.2, temos

$$\int_S \eta dA = \int_S \varphi H dA - \int_S dA = 0.$$

Considere a variação normal dada pelo Lema 128 para η .

Segue do Lema 136.1 que

$$\begin{aligned}
& -\eta (\Delta\eta + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \eta) = -\eta (\Delta(\varphi H + 1) + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \eta) \\
& \quad = -\eta H \Delta\varphi - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \eta^2 \\
& = -\eta H (-2H - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \varphi) - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \eta^2 \quad (\text{Lema 136.1}) \\
& \quad = 2H^2\eta + \eta\varphi H (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \eta^2 \\
& \quad = 2H^2\eta + \eta (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) (H\varphi - \eta) \\
& \quad = 2H^2\eta + \eta (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)
\end{aligned} \tag{122}$$

Sendo X estável e $\int_S \eta dA = 0$ temos

$$\begin{aligned}
0 & \leq - \int_S \eta (\Delta\eta + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \eta) dA \stackrel{(122)}{=} \int_S 2H^2\eta - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \eta dA \\
& = \int_S 2H^2\eta dA - \int_S (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \eta dA = 0 - \int_S (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \eta dA \\
& = - \int_S (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \varphi H dA - \int_S (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) dA
\end{aligned}$$

donde

$$-\int_S (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) dA \geq \int_S (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \varphi H dA. \quad (123)$$

Note que

$$2H^2 = 2 \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right)^2 = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1\kappa_2}{2} \leq \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2} = \kappa_1^2 + \kappa_2^2. \quad (124)$$

Aplicando o Teorema de Stokes no Lema 136.1 temos

$$\int_S 2H^2 dA = - \int_S (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \varphi H dA \quad (125)$$

Assim,

$$\int_S 2H^2 dA \stackrel{(125)}{=} - \int_S (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \varphi H dA \stackrel{(123)}{\geq} \int_S (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) dA \stackrel{(124)}{\geq} \int_S 2H^2 dA$$

donde

$$\int_S (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) - 2H^2 dA = 0. \quad (126)$$

Portanto, obtemos ((124) e (126))

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 2H^2 \geq 0 \quad e \quad \int_S (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) - 2H^2 dA = 0$$

$$\therefore \quad \kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 2H^2 = 0$$

Mas isto significa que

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 2H^2 = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1\kappa_2}{2}$$

$$2\kappa_1^2 + 2\kappa_2^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1\kappa_2$$

$$(\kappa_1 - \kappa_2)^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 2\kappa_1\kappa_2 = 0 \quad \therefore \quad \kappa_1 = \kappa_2$$

ou seja, X é umbílica. Usando a Proposição 35 e o fato de que $H > 0$, segue que $X(S)$ está contido em uma esfera. Como S é compacta e sem bordo, então $X(S)$ é uma esfera do \mathbb{R}^3 .

□

Capítulo VII

SUPERFÍCIES DE WEINGARTEN

Uma superfície no espaço Euclidiano é chamada *Superfície de Weingarten* (ou *W-superfície*) quando existe uma relação entre suas curvaturas principais κ_1 e κ_2 ou entre suas curvaturas média e Gaussiana, isto é, quando elas verificam uma das relações do tipo

$$W(\kappa_1, \kappa_2) = 0 \quad \text{ou} \quad W(H, K) = 0. \quad (127)$$

Note que a definição acima inclui as superfícies de curvatura Gaussiana constante e as de curvatura média constante.

As superfícies de Weingarten foram introduzidas por J. Weingarten em 1861 (vide [30] e [31]) no contexto de resolver o problema de encontrar todas as superfícies isométricas a uma dada superfície de revolução.

Nas décadas de 40 e 50, as superfícies de Weingarten despertaram o interesse de vários geométricos, como S. S. Chern ([32]), P. Hartman e W. Winter ([33]) e H. Hopf ([34]). Recetemente, matemáticos como Bueno, A. e López, R. ([41]), J. A. Gálvez ([36]), W. Kühnel and M. Steller ([37]), H. Rosenberg and R. Sa Earp ([38]), Barreto, A. P. Fontenele, F. e Hartmann, L ([42]), tem trabalhado com tais superfícies e feito progressos na área.

Por exemplo, podemos citar um resultado de Hopf ([9] Capítulo 5) de 1955 que diz

Teorema 138 *Seja S uma superfície regular compacta e conexa com curvatura Gaussiana positiva. Se existe uma relação $\kappa_2 = f(\kappa_1)$ em S , onde f é uma função decrescente de κ_1 , $\kappa_1 \geq \kappa_2$, então S é uma esfera.*

Uma classe muito estudada das superfícies de Weingarten são as *superfícies de Weingarten Lineares* (*LW-superfícies*), i.e., são superfícies que verificam uma das relações

$$a\kappa_1 + b\kappa_2 = c \quad \text{ou} \quad aH + bK = c. \quad (128)$$

As superfícies de Weingarten que não verificam nenhuma das equações em (128), são chamadas *superfícies de Weingarten não lineares (NLW-superfícies)*.

Problemas de classificação das superfícies de Weingarten ainda continuam em aberto e longe de serem resolvidos, mesmo na classe das lineares.

A maior parte dos trabalhos foram feitos para famílias específicas de superfícies como: Superfícies de Revolução, Superfícies Cíclicas, Superfícies de Translação e as Superfícies Homotéticas, apotando o que se tem feito sobre cada uma.

Vamos apresentar nesse Capítulo um estudo introdutório sobre essas famílias.

7.1 *Superfícies de Revolução*

No Capítulo 2, definimos superfícies de revolução, e mostramos que a única superfície mínima de revolução é o catenóide (Proposição 20), resultado devido a Euler provado no século XVIII. No Capítulo 6, classificamos todas as superfícies de revolução de curvatura média constante (Teorema 118), provado por Delaunay em 1841. A classificação de superfícies de revolução de curvatura Gaussiana constante pode ser encontrada em livros básicos de geometria diferencial, como [9] e [43].

O problema das LW-superfícies ainda se encontra em aberto e da literatura sabemos que Hopf ([34]) em 1951 classificou todas as superfícies de revolução fechadas e convexas verificando a relação

$$\kappa_1 = c\kappa_2 + d.$$

H. Rosenberg and R. Sa Earp ([38]) em 1994 estudaram as LW-superfícies de revolução verificando a relação

$$aH + K = c$$

com $a, c > 0$. Nesse mesmo trabalho, eles estudaram também as NLW-superfícies de revolução verificando relações do tipo

$$H = f(H^2 - K)$$

onde f é uma função elíptica.

Kühnel and M. Steller ([37]) em 2005 se preocuparam com NLW-superfícies de revolução fechadas verificando

$$\kappa_1 = c(\lambda_2 - \mu)^2 + \lambda_2 - a \quad e \quad \kappa_1 = c\kappa_2^\alpha.$$

López ([44]) em 2008, estudou as LW-superfícies de revolução que verifica

$$aH + bK = c$$

com $a, c > 0$ e satisfazendo $\Delta = a^2 - bc < 0$ (*condição hiperbólica*), e obteve uma família de LW-superfícies de revolução hiperbólicas em \mathbb{R}^3 que consiste de superfícies com auto-interseções cujas geratrizes são curvas periódicas.

Barreto, A. P. Fontenele, F. e Hartmann, L ([42]) em 2018 estudaram as NLW-superfícies de revolução e mostrou que existem duas famílias \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 de superfícies de revolução completas não mergulhadas em \mathbb{R}^3 com $|A| = 1$. A família \mathcal{F}_1 é a um parâmetro e seus membros são superfícies C^1 periódicas, enquanto os membros de \mathcal{F}_2 são superfícies C^3 . Além disso, qualquer superfícies de revolução C^2 com $|A| = 1$ é uma esfera de raio $\sqrt{2}$, um cilindro circular de raio 1 ou, a menos de um movimento rígido do \mathbb{R}^3 , um membro de uma das duas famílias. Como corolário, as únicas NLW-superfícies de revolução, completa, mergulhada de classe C^2 em \mathbb{R}^3 , verificando

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = c$$

com c constante, é uma esfera ou um cilindro.

7.2 Superfícies Cíclicas

Dizemos que uma superfície S em \mathbb{R}^3 é *cíclica* quando admite uma parametrização na forma

$$X : (t, s) \in (a, b) \times \mathbb{R} \longmapsto \alpha(t) + \lambda(t) \cdot [e_1(t) \cos s + e_2(t) \sin s] \in \mathbb{R}^3$$

onde α é uma curva ppca, $\lambda : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável estritamente positiva e e_1 e e_2 campos diferenciáveis ortonormais ao longo de α .

Diremos que a superfície cíclica S é *folhada*, quando os círculos

$$C_t = X_t(\mathbb{R}) = \{X(t, s); s \in \mathbb{R}\}, \quad t \in (a, b)$$

são todos disjuntos. Observemos que, para cada $t \in (a, b)$, temos

$$C_t \subset \Pi_t = \{\alpha(t) + \mu \cdot e_1(t) + \eta \cdot e_2(t); \mu, \eta \in \mathbb{R}\}.$$

Dizemos que uma superfície cíclica S é de *Riemann*, quando os planos Π_t forem todos paralelos.

Exemplos naturais de superfícies cíclicas são as superfícies de revolução, que são superfícies, folheadas de Riemann cujos centros dos círculos da folheação são colineares. Os cilindros elípticos, são exemplos de superfícies cíclicas que não são de revolução, folheadas e de Riemann.

Em 1868, Riemann ([45]) encontrou uma família de superfícies mínimas mergulhadas folheadas por círculos em planos paralelos, hoje denominadas *exemplos de Riemann*. Concomitantemente, Enneper ([46] e [47]) demonstrou que em uma superfície cíclica minimal, os planos das folheações devem ser todos paralelos. Juntando os resultados de Euler (já mencionado, Proposição 20) de Riemann e Enneper, temos

Teorema 139 *As únicas superfícies cíclicas mínimas são o catenóide (revolução) e os exemplos de Riemann (não de revolução).*

Um século depois, em 1989, Nitsche ([48]) estudou as superfícies cíclicas de curvatura média constante, e demonstrou o seguinte

Teorema 140 *As únicas superfícies cíclicas de revolução de curvatura média constante são as encontradas por Delaunay (Teorema 118).*

A seguir, mostramos os resultados obtidos por López, R. ([29]) em 2001, no caso que as superfícies cíclicas possuem curvatura Gaussiana constante. Ele provou que, exceto o caso quando a curvatura Gaussiana é identicamente nula, as únicas superfícies cíclicas de revolução com curvatura Gaussiana constante são as de revolução. Quando a curvatura Gaussiana é identicamente nula, a superfície não é necessariamente de revolução, porém sabemos quem são.

Teorema 141 *Seja M uma superfície completa em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana constante e folheada. Então M é uma esfera ou os planos contendo os círculos das folheações são paralelos. Além disso*

1. *Se $K \neq 0$, então M é uma superfície de revolução.*
2. *Se $K \equiv 0$, então M pode ser parametrizada, a menos de um movimento rígido do \mathbb{R}^3 , por*

$$X(u, v) = (a_1u + a_0, b_1u + b_0, u) + (r_1u + r_0)(\cos v, \sin v, 0)$$

onde $a_0, a_1, b_0, b_1, r_0, r_1 \in \mathbb{R}$.

Como corolário temos que em particular, todas as superfícies cíclicas em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana constante não nula são as superfícies de revolução.

Lembremos que uma superfície cíclica S é chamada *cone generalizado* quando admite uma parametrização na forma

$$X : (t, s) \in (a, b) \times \mathbb{R} \longmapsto (p, q, 0) + t(m, n, 1) + (lt + k) \cdot (e_1(t) \cos s + e_2(t) \sin s) \in \mathbb{R}^3$$

onde p, q, m, n, l, k são constantes reais.

Dito isto, López, R. ([50],[51] e [52]) obteve o seguinte resultado para as LW-superfícies cíclicas em 2008 .

Teorema 142 *Seja S uma superfície cíclica.*

1. *Se S é uma LW-superfície na forma (128), então S é uma superfície de revolução ou os exemplos de Riemann;*
2. *Se S é uma LW-superfície na forma $aH + bK = c$, então S é uma superfície de revolução, um dos exemplos de Riemann ou um cone generalizado.*

7.3 Superfícies de Translação e Homotéticas

Uma superfície no \mathbb{R}^3 é chamada de *superfícies de translação* quando pode ser localmente parametrizada por

$$X : (t, s) \in I \times J \longmapsto (t, s, f(t) + g(s)) \in \mathbb{R}^3 \tag{129}$$

onde $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis.

Se as curvas

$$t \in I \mapsto (t, 0, f(t)) \in \mathbb{R}^3$$

$$s \in J \mapsto (0, s, g(s)) \in \mathbb{R}^3$$

forem planares e estiverem contidas em planos ortogonais diremos que a superfície de translação é *ortogonal*.

Segundo Munteanu, M. I. e Nistor ([54]), essas superfícies são importantes por dois motivos: interessantes por si só e por fornecerem contra-exemplos para alguns problemas envolvendo a segunda curvatura Gaussiana (para mais detalhes, vide [55]). Uma superfície de Weingarten de translação é chamada *polinomial (WPT-superfície)* quando f e g são polinômios.

Em 1835, Scherk ([56]) mostrou o seguinte resultado (mais geral que o visto na Proposição 25) para as superfícies mínimas de translação.

Teorema 143 *Seja S uma superfície mínima de translação no \mathbb{R}^3 . Então S é um aberto do \mathbb{R}^3 ou é congruente a uma parametrização da forma*

$$X_a : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(x, y, \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\cos(ax)}{\cos(ay)} \right| \right) \in \mathbb{R}^3$$

onde $a \in \mathbb{R}^*$.

Lui, H. ([57]) em 1999, mostrou

Teorema 144 *Se S é uma superfície de translação no \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana K constante, então S é uma superfície cilíndrica.*

Teorema 145 *Se S é uma superfície de translação no \mathbb{R}^3 com curvatura média constante $H \neq 0$, então S admite a seguinte parametrização*

$$X_a : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(x, y, \frac{\sqrt{1+a^2}}{2H} \sqrt{1-4H^2x^2+ay} \right)$$

onde $a \in \mathbb{R}$.

Munteanu, M. I. e Nistor ([54]) em 2008 mostraram que:

Teorema 146 *Seja S uma WPT-superfície no \mathbb{R}^3 . Então*

1. *S é um cilindro, e neste caso $K \equiv 0$;*
2. *S é um parabolóide de revolução, e neste caso a curvatura média H e a curvatura Gaussiana são positivas e verificam*

$$8aH^2 = \sqrt{K} \left(2a + \sqrt{K}\right)^2$$

onde a é uma constante positiva.

López, R. e Moruz, M ([58]) em 2015 provaram:

Teorema 147 *As únicas superfícies de translação com curvatura Gaussiana identicamente nula são as superfícies cilíndricas.*

Teorema 148 *Seja S é uma superfície de translação dada pelas funções f e g em (129). Se S possui curvatura Gaussiana constante não nula, então as curvas*

$$t \in I \longmapsto (t, 0, f(t)) \in \mathbb{R}^3$$

$$s \in J \longmapsto (0, s, g(s)) \in \mathbb{R}^3$$

não são planares.

Juntando os resultados obtidos por Dillen, F. ([59]) em 2008 com os de Bueno, A. e López ([60]) em 2014, temos o seguinte.

Teorema 149 *As únicas W -superfícies de translação ortogonais são os planos, os cilindros generalizados, as superfícies de Scherk e os parabolóides elípticos.*

Corolário 150 *As únicas superfícies de translação ortogonais de Weingarten Lineares são os planos, os cilindros generalizados e as superfícies de Scherk. Em particular, não existem LW -superfícies de translação ortogonais além das de curvatura média constante ou curvatura Gaussiana constante.*

Dizemos que uma superfície S no \mathbb{R}^3 é *homotética*, quando admite localmente uma parametrização da forma

$$X : (t, s) \in I \times J \mapsto (t, s, f(t) \cdot g(s)) \in \mathbb{R}^3$$

onde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis.

Sobre estas superfícies R.López e M.Moruz ([28]) demonstraram os seguintes resultados em 2015.

Teorema 151 *Planos e helicóides são as únicas superfícies homotéticas mínimas no espaço Euclidiano.*

Teorema 152 *As únicas superfícies homotéticas com curvatura Gaussiana constante são os planos, as superfícies cilíndricas e as superfícies que admitem parametrizações das formas*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, y, ae^{\alpha x + \beta y}) \in \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(x, y, \left(\frac{bx}{m} + d \right)^m \left(\frac{cy}{m-1} + e \right)^{1-m} \right) \in \mathbb{R}^3$$

onde $a, \alpha, \beta > 0$ e $b, c, d, e \in \mathbb{R}$ com $b, c \neq 0$ e $m \neq 0, 1$.

Corolário 153 *Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície homotética com curvatura Gaussiana K constante, então $K \equiv 0$.*

Apêndice A

ANÁLISE REAL E COMPLEXA

Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de classe C^1 , $z \in \Omega$ e escreva $z = u + iv$ e $\bar{z} = u - iv$.

Então

$$u = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad e \quad v = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}).$$

Lembremos os seguintes operadores complexo

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right) \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + i \frac{\partial f}{\partial v} \right). \quad (130)$$

Proposição 154 *Seja $f : z \in \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto (\alpha(z), \beta(z)) \in \mathbb{C}$ uma função de classe C^1 e denotemos por \bar{f} a função conjugada de f , ou seja, $\bar{f}(z) = (\alpha(z), -\beta(z))$. Então*

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}. \quad (131)$$

Além disso, f é holomorfa, se e somente se,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}} \quad \text{em } \Omega.$$

Demonstração:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + i \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial u} + i \frac{\partial \beta}{\partial u} + i \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} + i \frac{\partial \beta}{\partial v} \right) \right] \quad (132)$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial u} - \frac{\partial \beta}{\partial v} + i \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} - \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right) \right]. \quad (133)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} - i \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial u} - i \frac{\partial \beta}{\partial u} - i \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} - i \frac{\partial \beta}{\partial v} \right) \right] \quad (134)$$

logo,

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial u} - \frac{\partial \beta}{\partial v} - i \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right) \right]. \quad (135)$$

Usando (133) e (135), obtemos o resultado.

Se f é holomorfa, então pelas Equações de Cauchy-Riemann, (133) e (135) temos

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0.$$

Reciprocamente, se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$, então por (133) ou (135) vale as Equações de Cauchy-Riemann, donde f é holomorfa. \square

Note que as derivadas parciais de α e β com respeito a u e v podem ser escritas em função de z e \bar{z} . De fato,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 1 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial u} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial v} = i = \frac{\partial \bar{z}}{\partial v},$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial v} = i \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right). \quad (136)$$

Proposição 155 *Sejam $f : z \in \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow (\alpha(z), \beta(z)) \in \mathbb{C}$ uma função de classe C^2 e Δ o Laplaciano complexo, i.e., $\Delta f = \Delta\alpha + i\Delta\beta = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$, então*

$$\Delta f = 4 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right).$$

Demonstração: Diferenciando a primeira equação de (136) com respeito a u , obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}},$$

e diferenciando a segunda equação de (136) com relação a v , obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = i \frac{\partial}{\partial z} \left(i \frac{\partial f}{\partial z} - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) - i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(i \frac{\partial f}{\partial z} - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Somando as duas últimas equações, obtemos o resultado. \square

Proposição 156 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio e $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ função meromorfa não constante. Então os pólos e zeros de f são pontos isolados.*

Teorema 157 (Liouville) *Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função inteira limitada, então f é constante.*

Lema 158 (Schwarz) Seja $f : B_{R_1}(0) \subset \mathbb{C} \rightarrow B_{R_2}(0) \subset \mathbb{C}$ função holomorfa com $f(0) = 0$. Então

$$\frac{|f(z)|}{R_2} \leq \frac{|z|}{R_1}, \quad \forall z \in B_{R_1}(0) \quad e \quad |f'(0)| \leq \frac{R_2}{R_1}.$$

Além disso, se temos a igualdade em algumas das inequações acima para algum $z \neq 0$, então

$$\frac{f(z)}{R_2} = \frac{az}{R_1}.$$

Teorema 159 (Schwarz-Pick) Seja $f : B_{R_1}(0) \subset \mathbb{C} \rightarrow B_{R_2}(0) \subset \mathbb{C}$ função holomorfa.

Então, para todo $z, w \in B_{R_1}(0)$ temos

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{R_2^2 - \overline{f(z)}f(w)} \right| \leq \frac{R_1}{R_2} \left| \frac{z - w}{R_1^2 - \bar{z}w} \right|.$$

Além disso, para todo $z \in B_{R_1}(0)$, temos

$$\frac{|f'(z)|}{R_2^2 - |f(z)|^2} \leq \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{R_1^2 - |z|^2}.$$

Teorema 160 Sejam $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ funções analíticas em U , onde U é um aberto conexo. Se f e g coincidem num subconjunto A de U com ponto de acumulação em U , então $f \equiv g$ em U .

Teorema 161 (Princípio da Extensão Analítica) Sejam $f, g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funções analíticas, onde U é um aberto conexo. Então $f \equiv g$ em U se e somente se existe um aberto não vazio $V \subset U$ tal que $f \equiv g$ em V .

Para uma demonstração dos dois últimos resultados, vide [67], Capítulo 2.

Teorema 162 (Teorema da Função Inversa) Seja $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ função holomorfa. Suponha que $f'(z_0) \neq 0$, onde $z_0 \in U$. Então existe uma vizinhança aberta V de z_0 , com $V \subset U$, tal que $f(V) = W$ é aberto e $f|_V : V \rightarrow W$ possui uma inversa $(f|_V)^{-1} : W \rightarrow V$, a qual é holomorfa.

Teorema 163 (Aplicação Aberta) Seja $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa não constante, onde $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto conexo. Então, f é aberta, ou seja, para todo aberto $W \subset U$, $f(W)$ é aberto.

Para uma demonstração dos dois últimos resultados, vide [67], Capítulo 4.

Teorema 164 *Seja $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ função holomorfa. Valem as seguintes propriedades:*

- 1- *Se $f(\mathbb{C}^*) \neq \mathbb{C}^*$ então f é constante.*
- 2- *Se f não é constante, então $f|_{\mathbb{C}}$ é uma função racional.*

Corolário 165 *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ função holomorfa. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$f(z) = az + b$ onde $a \neq 0$;*
2. *f é um difeomorfismo;*
3. *f é bijeção.*

Para uma demonstração do resultado acima, vide [67], Capítulo 4.

Definição 166 (Conformemente Equivalente) *Dizemos que duas superfícies de Riemann S e S' são conformemente equivalentes quando existe uma função holomorfa bijetora $h : S \rightarrow S'$, tal que $h^{-1} : S' \rightarrow S$ também seja holomorfa.*

Teorema 167 (Uniformização de Riemann) *Toda superfície de Riemann simplesmente conexa é conformemente equivalente a esfera de Riemann ou ao plano complexo ou ao interior do disco unitário.*

Para uma demonstração vide [67], Capítulo 6.

Teorema 168 (Pequeno Teorema de Picard) *Se f é uma função meromorfa não constante sobre o plano complexo, então f omite no máximo três valores de \mathbb{S}^2 .*

Para uma demonstração vide [68], Capítulo 17.

Teorema 169 (Grande Teorema de Picard) *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função meromorfa com uma singularidade essencial $p \in \Omega$. Então numa vizinhança de p , a função f assume todos os valores de \mathbb{C} um número infinito de vezes com, no máximo, uma exceção.*

Corolário 170 *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ função inteira. Se f não é um polinômio, então f assume todos os valores de \mathbb{C} um número infinito de vezes com, no máximo, uma exceção.*

Teorema 171 *Se M é uma superfície de Riemann compacta e $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ uma função meromorfa. Então f é constante ou a aplicação normal de Gauss N assume cada valor de \mathbb{S}^2 um número finito de vezes.*

Teorema 172 (Princípio do Máximo para Funções Holomorfas) *Se M é uma superfície de Riemann compacta e $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa, então f é constante.*

Teorema 173 (Princípio do Máximo para Funções Harmônicas) *Seja $u : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ função harmônica não constante com $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio limitado. Então u não assume nem máximo e nem mínimo em Ω .*

Teorema 174 (Divergência) *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta orientada com bordo, com normal unitário ξ ao longo de ∂S . Dado um campo vetorial X em S , então*

$$\int_S \operatorname{div} X dx dy dz = \int_{\partial S} \langle X, \xi \rangle dS.$$

Para uma demonstração do Teorema acima, vide [25, 25], Capítulo 7.

Corolário 175 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta orientada sem bordo, com normal unitário ξ ao longo de ∂S . Dado um campo vetorial X em S , então*

$$\int_S \operatorname{div} X dx dy dz = 0, \tag{137}$$

em particular

$$\int_S \Delta f dx dy dz = 0$$

para toda função $f \in C^\infty(S)$.

Teorema 176 (Teorema de Green) *Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ compacto, com $\operatorname{Int} K \neq \emptyset$, tal que ∂K é imagem de uma curva fechada $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, simples, C^1 por partes e orientada no sentido anti-horário. Sejam P e Q de classe C^1 num aberto contendo K . Nestas condições,*

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \int \int_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy.$$

Para uma demonstração do Teorema acima, vide [24], Capítulo 8.

A seguir apresentamos brevemente a noção de recobrimento entre duas variedades, para darmos uma noção de equivalência para superfícies mínimas.

Definição 177 (Recobrimento) Dizemos que uma aplicação $p : \tilde{S} \rightarrow S$ entre duas variedades de mesma dimensão é um **recobrimento** quando

$$\forall y \in S, \text{ existe vizinhança } U \text{ de } y, \text{ tal que } p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \quad \text{e} \quad p|_{V_\lambda} : V_\lambda \rightarrow U \text{ é difeomorfismo.}$$

Definição 178 (Recobrimento Universal) Dizemos que um recobrimento $p : \tilde{S} \rightarrow S$ é **recobrimento universal** de S quando

$$\forall q : Z \rightarrow S \text{ recobrimento, com } Z \text{ conexo, e } \forall x_0 \in \tilde{S}, z_0 \in Z \text{ com } p(x_0) = q(z_0),$$

existe uma única função contínua $f : \tilde{S} \rightarrow Z$ que preserva fibra (i.e., $f(p^{-1}(b)) \subset q^{-1}(b)$, $\forall b \in S$), tal que $f(y_0) = z_0$.

O próximo resultado dá condições para a existência de um recobrimento universal, tal que \tilde{S} é simplesmente conexo.

Teorema 179 Seja S uma variedade conexa. Então existe um recobrimento universal $p : \tilde{S} \rightarrow S$, tal que \tilde{S} é uma variedade conexa e simplesmente conexa.

Para uma demonstração desse Teorema acima, vide [21], Capítulo 1.

Sejam S superfície conexa, $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão e $p : \tilde{S} \rightarrow S$ recobrimento universal. Como p é difeomorfismo local e X é uma imersão, então $X \circ p$ é uma imersão. Além disso, como $\text{Im } X = \text{Im}(X \circ p)$, temos que a curvatura média de X e $X \circ p$ são iguais. Assim, temos o seguinte resultado abaixo, que nos dá mais uma equivalência para superfícies mínimas.

Teorema 180 Sejam S superfície conexa, $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão e $p : \tilde{S} \rightarrow S$ recobrimento universal de S . Então $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é superfície mínima, se e somente se, $X \circ p : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é superfície mínima.

Teorema 181 Uma função holomorfa $F : X \rightarrow Y$ entre superfícies de Riemann compactas é um biholomorfismo, se e somente se, $\deg(F) = 1$.

Teorema 182 *Não existe superfície mínima fechada (compacta) em \mathbb{R}^3 .*

REFERÊNCIAS

- [1] KENMOTSU, Katsuei. *Surfaces With Constant Mean Curvature*. Rhode Island: Translations Of Mathematical Monographs, 2003. v. 221.
- [2] LOPÉZ, Rafael; *Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2013.
- [3] MELLO PEREIRA, Felipe de Albuquerque. *Superfícies Mínimas em \mathbb{R}^3* . 2013. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio)- Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.
- [4] ALVAREZ, Yunelsy Nápoles. *Superfícies Mínimas Completas e Limitadas em \mathbb{R}^3* . 2015. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio)- Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.
- [5] JENSEN, Gary R.; MUSSO, Emilio; NICOLODI, Lorenzo. *Surfaces in Classical Geometries: A Treatment by Moving Frames*. Switzerland: Springer, 2016.
- [6] LEE, John M.; *Introduction to Smooth Manifolds*, 2 ed. Graduate Texts in Mathematics 218. New York: Springer, 2012.
- [7] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S.. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 2001.
- [8] COLDING, T. H.; MINICOZZI II, W. P.. *A Course in Minimal Surfaces*. American Mathematical Society, 2011.
- [9] DO CARMO, M. P.. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. SBM, 2010.
- [10] DO CARMO, M. P.. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, 2008.
- [11] CONWAY, J. B.. *Functions of One Complex Variable*. 1978
- [12] OSSERMAN, R.. *A Survey of Minimal Surfaces*. Van Nostrand, 1969.
- [13] HOFFMAN, D.; MEEKS, III, W. H.. *The strong halfspace theorem for minimal surfaces*. Inventiones Mathematicae, 1990.
- [14] EVANS, L.. *Partial Differential Equations*. AMS, 2010
- [15] STEIN, E. M. e SHAKARHI, R. , *Complex analysis*, v.2. Princeton lectures in analysis, Princeton University Press, 2003.
- [16] DASS KATENOID. *Geometrie*, 2018. Disponível em: <<https://www.geometrie-und-logik.de/galerie/minimalflaechen/katenoidmf/>>. Acesso em: 03 de dezembro de 2018.
- [17] LÓPEZ, Francisco J. *Superfícies minimales y de curvatura media constante en \mathbb{R}^3* . 2006.

- [18] ROSENBERG, H. e TOUBIANA, E., *A cylindrical type complete minimal surface in a slab of \mathbb{R}^3* , Bulletin des Sciences Mathématiques 3 (1987), 241–245.
- [19] NADIRASHVILI, N., *Hadamard’s and Calabi-Yau’s conjectures on negatively curved and minimal surfaces*, Inventiones mathematicae 126 (1996), 457–465.
- [20] JORGE, L., XAVIER, F.: *A complete minimal surface in \mathbb{R}^3 between two parallel planes*. Ann. Math. 112, 203-206 (1980).
- [21] FORSTER, Otto. *Lectures on Riemann Surfaces*. 1937.
- [22] HUBER, A.. *On subharmonic functions and differential geometry in the large*. Commentarii Mathematici Helvetici, 32:13-72, 1958.
- [23] BARBOSA, J. L. M.; COLARES, A. G.. *Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3* . Monografias de Matemática número 40, IMPA, 1986.
- [24] GUIDORIZZI, H. L.. *Um curso de cálculo*, vol. 3. 5-ed., [Reimpr]. - Rio de Janeiro: LTC, 2013. 380p.
- [25] LIMA, E. L.. *Um curso de cálculo*, vol. 2. 11.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [26] CHAVEL, I..*Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Flórida, 1984.
- [27] FULTON, W.. *Algebraic Topology*. New York,1939.
- [28] LÓPEZ, R., MORUZ, M..*Translation and Homothetical Surfaces in Euclidean Space with Constant Curvature*, Journal of the Korean Mathematical Society, 52, No. 3, (2015), 523-535.
- [29] LÓPEZ, R., *Cyclic surfaces of constant Gauss curvature*, Houston Mathematical Journal, 27 (2001), no. 4, 799-805.
- [30] WEINGARTEN, J.. *Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen*, J. ReineAngew. Math. 59 (1861) 382–393.
- [31] WEINGARTEN, J.. *Ueber die Flächen, derer Normalen eine gegebene Fläche berühren*,J. Reine Angew. Math. 62 (1863) 61–63.
- [32] CHERN, S. S.. *Some new characterizations of the Euclidean sphere*, Duke Math. J. 12 (1945) 279–290.
- [33] HARTMAN, P. and WINTER, W., *Umbilical points and W-surfaces*, Amer. J. Math. 76 (1954) 502–508.
- [34] HOPF, H.. *Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen*, Math. Nachr. 4 (1951) 232–249.
- [35] VOSS, K.. *Über geschlossene Weingartensche Flächen*, Math. Ann. 138 (1959) 42–54.
- [36] GÁLVEZ, J. A. , MARTÍNES, A.. and MILÁN, F. , *Linear Weingarten surfaces in \mathbb{R}^3* , Monatsh.Math. 138 (2003) 133–144.
- [37] KÜHNEL, W. and STELLER, M.. *On closed Weingarten surfaces*, Monatsh. Math. 146 (2005), 113–126.

- [38] ROSENBERG, H. and SA EARP, R.. *The geometry of properly embedded special surfaces in \mathbb{R}^3 ; e.g., surfaces satisfying $aH + bK = 1$, where a and b are positive*, Duke Math.J. 73 (1994) 291–306.
- [39] HOPF, H.. *Lectures on Differential Geometry in the Large*. Stanford University, 1955.
- [40] LÓPEZ, R.. *On linear Weingarten surfaces*, International Journal of Mathematics, 19 (2008), no. 4, 439 - 448.
- [41] BUENO, A., LÓPEZ, R.. *Translation surfaces of linear Weingarten type*, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.).64 (2018), 151-160.
- [42] BARRETO, A. P.; FONTENELE, F. ; HARTMANN, L.. *Rotational Surfaces with Second Fundamental Form of Constant Length*. 2018
- [43] GRAY, A.. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*, second ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 1998.
- [44] LÓPEZ, R.. *Rotational Linear Weigarten Surfaces of Hyperbolic type*, Israel J. of Math 167, 283-301, 2008.
- [45] RIEMANN, B.. *Über die Flächen vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung*, Abh. Königl. Ges. d. Wissensch. Göttingen, Mathema. Cl. 13 (1868) 329–333.
- [46] ENNEPER, A.. *Ueber die cyclischen Flächen*, Nach. Königl. Ges. d. Wissensch. Göttingen, Math. Phys. Kl., (1866) 243–249.
- [47] ENNEPER, A.. *Die cyklischen Flächen*, Z. Math. Phys., 14 (1869) 393–421.
- [48] NITSCHE, J.C.C.. *Cyclic surfaces of constant mean curvature*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys, II 1 (1989) 1–5.
- [49] DELAUNAY, C.. *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. Pure Appl. 6 (1841) 309–320.
- [50] LÓPEZ, R.. *Rotational Linear Weigarten Surfaces of Hyperbolic type*, Israel J. of Math 167, 283-301, 2008.
- [51] LÓPEZ, R.. *On linear Weingarten surfaces*. International Journal of Mathematics 19 no. 4, 439 - 448, 2008.
- [52] LÓPEZ, R.. *Special Weingarten surfaces foliated by circles*, Monatshefte für Mathematik 154 no. 4, 289-302, 2008.
- [53] YOON, D. W.: *Some properties of the helicoid as ruled surfaces*. JP Jour. Geom. Topology 2, 141-147 (2002).
- [54] MUNTEANU, M. I. and Nistor, A. I.: *Polynomial translation Weingarten surfaces in 3-dimensional Euclidean space*. arXiv:0809.4745v1 [math.DG] 27 Sep 2008.
- [55] BLAIR, D.E.. Th. Koufogiorgos, *Ruled Surfaces with Vanishing Second Gaussian Curvature*, Monat. Math. 113 (1992) 177–181.
- [56] SCHERK, H.F.. *Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen*, J.Reine Angew. Math. 13, 185-208, 1835.

- [57] LIU, H.. *Translation Surfaces with Constant Mean Curvature in 3-dimensional Spaces*, J. Geom. 64 (1999) 141–149.
- [58] LÓPEZ, R., MORUZ, M.. *Translation and homothetical surfaces in Euclidean space with constant curvature*, Journal of the Korean Mathematical Society 52 No.3, 523-535, 2015.
- [59] DILLEN, F., GOEMANS, W.,WOESTYNE, I.V.de . *Translation surfaces of Weingarten type in 3-space*, Bull. Transilvania Univ. Brasov (Ser. III) 50, 109-122, 2008.
- [60] BUENO, A., LÓPEZ, R..*Translation surfaces of linear Weingarten type*, accepted in An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.), 2014.
- [61] POGORELOV, A. V.. *Extensions of the theorem of Gauss on spherical representation to the case of surfaces of bounded extrinsic curvature*, Dokl, Akad, Nauk, SSSR(N.S), 111(1956), 945-947 (Russian).
- [62] HARTMAN and L. NIRENBERG, *On spherical image maps whose Jacobians do not change signs*. Amer. Jour. Math., 81(1959), 901-920.
- [63] MASSEY, William S. *Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean 3-space*. Tohoku Math. J. (2) 14 (1962), no. 1, 73–79.
- [64] LOBACHEVSKY, N. I.. *On the Elements of geometry*. Kazansky Vestnik, Issue 25: Feb. and Mar., 1829, p. 178–187; Apr., 1829 p. 228–241. Issue 27: Nov. and Dec., 1829, p. 227–243. Issue 28: Mar. and Apr., 1830, p. 251–283; Jul. and Aug., 1830, p. 571-683. Reproduced in Lobachevsky’s *Collected Geometric Works*, Edited by the Imperial University of Kazan, 1883. Vol. I, p. 1-67 and in his *Complete Works*, Moscow and Leningrad 1946–1951. Vol. I, p. 185-261.
- [65] BOLYAI, Farkas.. *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi :cum appendice triplici*. 1832.
- [66] BELTRAMI, E. *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, Gior. Mat. 6, 248-312 (Also Op. Mat. 1, 374-405; Ann. École Norm. Sup. 6 (1869), 251-288). , *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*, Annali di mat. ser. II 2, 232-255 (Op. Mat. 1, 406-429; Ann. École Norm. Sup. 6 (1869), 345-375).
- [67] LINSS, N. A..*Funções de Uma Variável Complexa*. Rio de Janeiro: IMPA.2012.
- [68] RUBEL, L.A.. *Entire and Meromorphic Functions*. New York. 1996.
- [69] FONTENELE NETO, F. X.; SILVA, S. L. . *A Tangency Principle and Applications*. Illinois Journal of Mathematics, University of Illinois, v. 45, n.1, p. 213-228, 2001.
- [70] BERS, L.. *Riemann surfaces*, New York University, Institute of Mathematical Sciences, 1958.
- [71] BIMINIMAL IMMERSIONS. *Researchgate*, 2018. Disponível em: <https://www.researchgate.net/figure/The-radial-curves-from-the-origin-of-the-Enneper-surface-are-biharmonic_fig2_2112709>. Acesso em: 20 de Janeiro de 2019.

- [72] THE HELICOID. *Minimal Surfaces*, 2018. Disponível em: <<https://minimalsurfaces.blog/home/repository/singly-periodic/the-helicoid/>>. Acesso em: 20 de Janeiro de 2019.
- [73] DOUBLY PERIODIC SCHERK'S SURFACE. *Francisco Martin*, 2015. Disponível em: <<http://www.ugr.es/~fmartin/gallery/doubly-periodic-scherks.html>>. Acesso em: 20 de Janeiro de 2019.
- [74] UNDULOID. *Xahlee*, 2019. Disponível em: <<http://xahlee.info/surface/unduloid/unduloid.html>>. Acesso em: 20 de Janeiro de 2019.
- [75] SUBVARIÉDADES BI-HARMÔNICAS DE VARIÉDADES HOMOGÊNEAS TRIDIMENSIONAIS. *Researchgate*, 2011. Disponível em: <https://www.researchgate.net/figure/Figura-33-Paralelos-bi-harmonicos-no-onduloide-e-no-nodoide-respectivamente_fig4_271586757>. Acesso em: 20 de Janeiro de 2019.