

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Um teorema fundamental para
hipersuperfícies em produtos torcidos
semi-riemannianos**

Mynor Ademar Melara Estrada

São Carlos - SP
Março de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Um teorema fundamental para hipersuperfícies em produtos torcidos semi-riemannianos

Mynor Ademar Melara Estrada

Dissertação apresentada ao PPGM da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra

São Carlos - SP
2019

Melara Estrada , Mynor Ademar

Um teorema fundamental para hipersuperfícies em produtos torcidos
semi-riemannianos / Mynor Ademar Melara Estrada . -- 2019.
96 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São
Carlos, São Carlos

Orientador: Guillermo Antonio Lobos Villagra

Banca examinadora: Guillermo Antonio Lobos Villagra, Fernando
Manfio, José Nazareno Vieira Gomes

Bibliografia

1. Matemática. 2. Hipersuperfícies semi-riemannianas. 3. Teorema
fundamental . I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III.
Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

Bibliotecário(a) Responsável: Ronildo Santos Prado – CRB/8 7325



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Mynor Ademar Melara Estrada, realizada em 15/03/2019:

Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra
UFSCar

Prof. Dr. Fernando Mantio
USP

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes
UFAM

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha experiência ao longo deste mestrado.

Agradeço a minha família por me apoiar, principalmente a minha mãe por priorizar minha formação acadêmica, os meus irmãos e meu pai por ser meus exemplos e os meus sobrinhos por ser minha inspiração.

Agradeço todos os meus professores, em especial o Professor Guillermo Lobos, pela orientação neste trabalho.

Agradeço os meus amigos e colegas pela ajuda, as conversas e os momentos compartilhados.

Agradeço à UES e ao PJT, porque a minha experiência e as pessoas que conheci lá, foram importantes para eu chegar até aqui.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro e ao PAEC OEA-GCUB.

Resumo

O objetivo desta dissertação é exibir uma demonstração de um teorema fundamental de existência de imersões isométricas para hipersuperfícies num espaço produto torcido em que a base é um intervalo e a fibra é uma forma espacial, ambos com métricas semi-riemannianas, e além disso, apresentar uma aplicação deste teorema para horizontes num espaço-tempo de tipo Robertson-Walker de dimensão 4, ambas baseadas no trabalho de Marie Amélie Lawn e Miguel Ortega em [J. Geom. Phys. 90 (2015) 55-70]. Tal resultado, generaliza teoremas fundamentais para hipersuperfícies obtidos, por B. Daniel em 2009 para produtos Riemannianos em [Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009) 6255-6282], por Q. Chen e C.R. Xiang para produtos torcidos Riemannianos no caso que as fibras têm curvatura seccional zero em [Acta Math. Sinica. 26 (2010) 2269-2282]; e por J. Roht no caso de produtos Lorentzianos com fibras Riemannianas em [Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 8 (2011) 1269-1290]. Também, baseados na demonstração da parte da unicidade local do teorema fundamental de B. Daniel, provamos que a imersão isométrica obtida no teorema de Lawn e Ortega, é única a menos de uma isometria global.

Palavras-chave: hipersuperfície, produto torcido, teorema fundamental, espaço semi-riemanniano.

Abstract

The aim of this dissertation is to show a demonstration of a fundamental theorem for existence of isometric immersions for hypersurfaces in a warped product space where the base is a interval and the fiber is a spatial form, both with semi-Riemannian metrics, and in addition to that, present an application of this theorem for horizons in a Robertson-Walker space-time of dimension 4, both based on the work of Marie Amélie Lawn and Miguel Ortega in [J. Geom. Phys. 90 (2015) 55-70]. Such a result, generalizes fundamental theorems for hypersurfaces obtained, by B. Daniel for Riemannian products in [Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009) 6255-6282], by Q. Chen and C.R. Xiang for Riemannian warped products in the case of fibers with zero sectional curvature in [Acta Math. Sinica. 26 (2010) 2269-2282]; and by J. Roht, in the case of Lorentzian products with Riemannian fibers in [Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 8 (2011) 1269-1290]. Also, based on the demonstration of local uniqueness of B. Daniel's fundamental theorem, we prove that the isometric immersion obtained in Lawn and Ortega's theorem, is unique up to a global isometry.

Keywords: hypersurface, warped product, fundamental theorem, semi-Riemannian space.

Sumário

Introdução	ix
1 Preliminares	1
1.1 Hipersuperfícies	1
1.2 Variedades produto torcido	2
1.3 O espaço pseudo-euclidiano \mathbb{E}_k^{n+1}	10
1.4 Hiperquádricas em espaços pseudo-euclidianos	13
1.5 Curvatura do espaço $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$	14
1.6 Referencial móvel	17
1.7 Distribuições integráveis e o teorema de Frobenius	24
2 Teorema Fundamental	27
2.1 Hipersuperfícies não-degeneradas de $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$	27
2.2 Teorema fundamental para hipersuperfícies não-degeneradas de $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$	31
2.3 Demonstração do teorema fundamental	32
2.4 Unicidade local e imersão global	58
3 Uma aplicação a horizontes num espaço-tempo Robertson-Walker	61
3.1 Superfícies Marginally Outer Trapped	61
3.2 A condição $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = 0$	65
A Exemplos de hipersuperfícies em produtos torcidos de dimensão 3	69
A.1 Um gráfico em $-\mathbb{R}^+ \times_\rho \mathbb{S}^2(1)$	69
A.2 Uma superfície helicoidal em $\mathbb{R}^+ \times_\rho \mathbb{H}^2(-1)$	71
Referências bibliográficas	75

Introdução

Esta dissertação é baseada principalmente no trabalho de Marie Amélie Lawn e Miguel Ortega, em [13].

As equações de Gauss, Codazzi-Mainardi e Ricci desempenham um papel muito importante na teoria de subvariedades. No caso de superfícies em \mathbb{R}^3 , elas foram dadas em princípio por Gauss em 1827, embora não explicitamente. Podemos encontrar essas equações num trabalho de D. Codazzi de 1860 e em outro de 1868, mas elas já tinham sido publicadas por G. Mainardi em 1856. A importância dessas equações foi reconhecida por O. Bonnet em 1867 com a seguinte afirmação, escrita na linguagem atual: *se duas formas quadráticas definidas num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ satisfazem as equações de Gauss e Codazzi-Mainardi, então existe, a menos de isometrias, uma única imersão $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, cujas métrica induzida e segunda forma fundamental de f são as formas quadráticas dadas* (ver [3]).

As equações de Gauss e Codazzi-Mainardi para subvariedades em geral foram dadas por A. Voss em 1880 e a equação de Ricci foi obtida por G. Ricci em 1888 (podemos encontrar comentários históricos no trabalho de B.Y. Chen, *Riemannian submanifolds: A survey* que é um capítulo de [9], editado por F.J.E. Dillen e L.C.A. Verstraelen).

No problema de Bonnet é exibida uma questão fundamental da teoria de subvariedades:

Quando uma variedade (semi-)Riemanniana pode ser imersa isometricamente num espaço ambiente dado?

No caso particular, em que o espaço ambiente é uma forma espacial, as equações de Gauss, Codazzi-Mainardi e Ricci são condições necessárias e suficientes para a existência de tal imersão (quando a codimensão é 1 a equação de Ricci é trivial), esse resultado é conhecido como o *teorema fundamental das subvariedades*. De fato, a principal razão para esse resultado funcionar, é que as equações de Gauss, Codazzi-Mainardi e Ricci, têm sentido e podem ser definidas usando simplesmente a primeira e a segunda forma fundamental da imersão. Uma demonstração do teorema fundamental das subvariedades em formas espaciais é dada por M. Spivak em [20].

Em geral, as equações de Gauss e de Codazzi-Mainardi não são definidas intrinsecamente numa subvariedade qualquer, porque elas envolvem o tensor de curvatura do espaço ambiente. No entanto, em casos especiais é possível obter uma expressão útil para tais equações, por exemplo, quando o espaço ambiente é um produto Riemanniano de um espaço forma usual \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n ou \mathbb{H}^n , com um fator linear \mathbb{R} , as equações de Gauss e Codazzi-Mainardi para uma hipersuperfície, podem se expressar usando a primeira e a segunda forma fundamental, a projeção T no fibrado tangente da hipersuperfície, do campo unitário ∂_t tangente ao fator \mathbb{R} e a componente na direção normal à hipersuperfície de ∂_t , ou seja, $\vartheta = \langle \partial_t, \nu \rangle$, em que ν é um campo vetorial unitário normal à hipersuperfície. Em 2009, B. Daniel demonstrou que as equações de Gauss e de Codazzi-Mainardi, junto com outras duas equações, que envolvem o campo T e a componente normal ϑ de ∂_t , são condições necessárias e suficientes para que uma hipersuperfície de dimensão n possa ser imersa localmente e isometricamente num espaço produto Riemanniano $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ (ver [8]).

Um teorema fundamental para hipersuperfícies no caso que o espaço ambiente é o produto torcido $\mathbb{R}^n \times_\rho \mathbb{R}$ foi obtido por Q. Chen e C.R. Xiang, em 2010 (ver [6]). Em 2011, J. Roht obteve um resultado análogo ao trabalho de B. Daniel, só que para o caso de hipersuperfícies Riemannianas em produtos Lorentzianos $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}_1$ ou $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}_1$ (ver [19]). Um teorema fundamental para subvariedades no caso quando o espaço ambiente é um produto de formas espaciais, é dado no trabalho de J.H. Lira, R. Tojeiro e F. Vitorio em 2010 (ver [15]).

O principal objetivo neste trabalho é provar um teorema fundamental para hipersuperfícies não-degeneradas num produto torcido semi-riemanniano $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, em que $\varepsilon = \pm 1$, $\rho : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função de torsão e $\mathbb{Q}_k^n(c)$ é uma forma espacial semi-riemanniana de índice k , curvatura constante c e métrica g_0 , obtido por M.A. Lawn e M. Ortega em [13]. Os espaços $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$ são uma grande família de variedades, incluindo aos espaços formas usuais \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n , e aos espaços considerados por B. Daniel, por J. Roht e por Q. Chen e C.R. Xiang.

Assim, no Capítulo 1 dedicaremos aos pré-requisitos sobre produtos torcidos, a técnica do referencial móvel e sobre distribuições integráveis. Ademais, deduziremos uma expressão para o tensor curvatura do espaço $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$.

No Capítulo 2, consideramos uma variedade semi-riemanniana M com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, conexão de Levi-Civita ∇ e tensor de curvatura R e adaptamos as equações de Gauss e Codazzi-Mainardi para o espaço $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$. Logo, enunciaremos e provamos o teorema principal deste trabalho:

Teorema (Lawn-Ortega): *Seja (M, \langle, \rangle) uma variedade semi-riemanniana de dimensão n . Sejam $\rho : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $T_{n+1} : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $\hat{\pi} : M \rightarrow I$ funções diferenciáveis. Seja $T \in \mathfrak{X}(M)$ dado por $T = \varepsilon \text{grad}(\hat{\pi})$, e τ a 1-forma $\tau(X) = \langle X, T \rangle$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Seja A um tensor de tipo $(1,1)$ em M . Sejam $\varepsilon, \varepsilon_{n+1} \in \{-1, 1\}$ e $c \in \{-1, 0, 1\}$.*

Se (M, \langle, \rangle) satisfaz as seguintes condições de estrutura:

(A) *A é \langle, \rangle -autoadjunto;*

(B) $\varepsilon = \langle T, T \rangle + \varepsilon_{n+1} T_{n+1}^2$;

(C) $\nabla_X T = \frac{\rho' \circ \hat{\pi}}{\rho \circ \hat{\pi}} (X - \varepsilon \tau(X) T) + \varepsilon_{n+1} T_{n+1} A X$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$;

(D) $X(T_{n+1}) = -\langle AT, X \rangle - \varepsilon \frac{\rho' \circ \hat{\pi}}{\rho \circ \hat{\pi}} T_{n+1} \tau(X)$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$;

(E) *Para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*

$$(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X = T_{n+1} b(\tau(Y)X - \tau(X)Y),$$

$$\text{em que } b = \left(\frac{\rho'' \circ \hat{\pi}}{\rho \circ \hat{\pi}} - \frac{(\rho' \circ \hat{\pi})^2}{(\rho \circ \hat{\pi})^2} + \frac{\varepsilon c}{(\rho \circ \hat{\pi})^2} \right);$$

(F) *para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$*

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) = & \left(-\varepsilon \frac{(\rho' \circ \hat{\pi})^2}{(\rho \circ \hat{\pi})^2} + \frac{c}{(\rho \circ \hat{\pi})^2} \right) \langle (X \wedge Y)Z, W \rangle + b(\langle X, Z \rangle \tau(Y) \tau(W) \\ & - \langle Y, Z \rangle \tau(X) \tau(W) - \langle X, W \rangle \tau(Y) \tau(Z) + \langle Y, W \rangle \tau(X) \tau(Z)) \\ & + \varepsilon_{n+1} (\langle AY, Z \rangle \langle AX, W \rangle - \langle AX, Z \rangle \langle AY, W \rangle), \end{aligned}$$

$$\text{em que } (X \wedge Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y.$$

Então, para cada ponto $p \in M$, existem uma vizinhança aberta \mathcal{U} de p em M , uma imersão isométrica $f : \mathcal{U} \rightarrow (\widetilde{M} = \varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{Q}_k^n(c), \langle, \rangle_1 = \varepsilon dt^2 + \rho^2 g_0)$ e um campo vetorial normal unitário e_{n+1} ao longo de f tal que:

1. $\varepsilon_{n+1} = \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle_1$;
2. $\pi \circ f = \hat{\pi}$, em que $\pi : \varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{Q}_k^n(c) \rightarrow I$ é a projeção;
3. O operador de Weingarten na direção de e_{n+1} é $df \circ A \circ (df)^{-1}$;
4. (E) é a equação de Codazzi-Mainardi e (F) é a equação de Gauss de f ;
5. e ao longo de f , temos que $\partial_t = df(T) + \varepsilon_{n+1} T_{n+1} e_{n+1}$.

Na demonstração do Teorema (Lawn-Ortega), dada no Capítulo 2, consideramos $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$ mergulhado no espaço $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{E}^{n+1}$ em que \mathbb{E}^{n+1} é um espaço pseudo-euclidiano, e usamos a técnica do referencial móvel e distribuições integráveis, desenvolvida por E. Cartan, para construir uma aplicação que associe a cada ponto p da variedade M , um elemento do grupo de Lie de matrizes das isometrias do espaço \mathbb{E}^{n+2} , cujas colunas poderão ser interpretadas como um referencial adaptado a M em $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{E}^{n+1}$.

Depois, demonstramos que a imersão local f obtida no Teorema (Lawn-Ortega), é única a menos de isometrias e pode ser estendida a toda a variedade M , usando a hipótese adicional que a variedade M seja simplesmente conexa. Isso é demonstrado seguindo os mesmos passos que B. Daniel faz para provar a unicidade local e estender a imersão local na demonstração do teorema fundamental para o caso Riemanniano com $\rho = 1$ e $c = \pm 1$, dada em [8]. Assim, obtemos o seguinte resultado:

Teorema: *Seja (M, \langle, \rangle) uma variedade semi-riemanniana de dimensão n , simplesmente conexa, que satisfaz as condições de estrutura definidas no Teorema (Lawn-Ortega). Então, existe uma imersão isométrica $f : M \rightarrow (\widetilde{M} = \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c), \langle, \rangle_1 = \varepsilon dt^2 + \rho^2 g_0)$, e um campo vetorial normal unitário e_{n+1} ao longo de f , tais que:*

- 1) $\varepsilon_{n+1} = \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle_1$;
- 2) $\pi \circ f = \hat{\pi}$, em que $\pi : \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c) \rightarrow I$ é a projeção;
- 3) O operador de Weingarten na direção de e_{n+1} é $df \circ A \circ (df)^{-1}$;
- 4) (E) é a equação de Codazzi-Mainardi e (F) é a equação de Gauss de f ;
- 5) e ao longo de f , temos que $\partial_t = df(T) + \varepsilon_{n+1} T_{n+1} e_{n+1}$.

Alem disso, a imersão f é única a menos de uma isometria global de $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, preservando as orientações de $\mathbb{Q}_k^n(c)$ e de I .

Logo, no Capítulo 3 aplicaremos o resultado do Teorema (Lawn-Ortega) a hipersuperfícies não-degeneradas num espaço-tempo Robertson-Walker de dimensão 4. Se admitimos que um *horizonte* num espaço-tempo de dimensão 4 é uma hipersuperfície que é folheada por superfícies cujo vetor de curvatura média \vec{H} satisfaz a condição $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = 0$. Nesse sentido, estamos incluindo superfícies com vetor de curvatura média zero, superfícies Marginally Outer Trapped ou uma mistura desses casos. Então no corolário seguinte, demonstrado no Capítulo 3, descrevemos uma condição para obter um horizonte não-degenerado num espaço-tempo Robertson-Walker de dimensão 4.

Corolário: *As folhas de $\text{Ker}(\tau)$ satisfazem $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = 0$ em $-I \times_{\rho} \mathbb{Q}^3(c)$ se, e só se, a imersão $f : M \rightarrow -I \times_{\rho} \mathbb{Q}^3(c)$ satisfaz a igualdade seguinte:*

$$\text{Traço}(A) - \frac{\langle AT, T \rangle}{\langle T, T \rangle} = \frac{2\rho'T_4}{\rho} \pm 2 \left| \frac{\rho'}{\rho} \right| \sqrt{|\langle T, T \rangle|},$$

em que $\text{Ker}(\tau)$ é o núcleo da 1-forma τ .

Finalmente, no Apêndice A apresentamos dois exemplos para ilustrar os resultados teóricos e os objetos envolvidos no Teorema (Lawn-Ortega). O primeiro exemplo descreve uma superfície que é um gráfico num espaço $-I \times_{\rho} \mathbb{S}^2(1)$ e o segundo exemplo é uma superfície helicoidal num espaço $I \times_{\rho} \mathbb{H}^2(-1)$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo fixamos as notações básicas e adaptamos as fórmulas que envolvem conexões e curvaturas para o caso dos produtos torcidos, em particular para $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, além disso apresentamos os objetos envolvidos no método do referencial móvel e o teorema de Frobenius.

1.1 Hipersuperfícies

Dizemos que $f : \mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ é uma *hipersuperfície não-degenerada* de $\widetilde{\mathcal{M}}$, se f é uma imersão isométrica, em que \mathcal{M} e $\widetilde{\mathcal{M}}$ são variedades semi-riemannianas de dimensão n e $n + 1$, respectivamente.

Denotamos por $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, respectivamente, o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis tangentes a \mathcal{M} e o conjunto das funções reais diferenciáveis definidas em \mathcal{M} .

Sejam $\nabla^{\mathcal{M}}$ e $\widetilde{\nabla}^{\mathcal{M}}$, as conexões de Levi-Civita de \mathcal{M} e $\widetilde{\mathcal{M}}$, respectivamente. Dado um campo vetorial (local) unitário normal ν de \mathcal{M} em $\widetilde{\mathcal{M}}$, com $\delta = \langle \nu, \nu \rangle = \pm 1$, em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica em $\widetilde{\mathcal{M}}$, e seja \mathcal{A}_ν o *operador de Weingarten* na direção de ν , definido pela *fórmula de Weingarten*

$$\widetilde{\nabla}_X^{\mathcal{M}} \nu = -\mathcal{A}_\nu X, \text{ para qualquer } X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

Seja σ a *segunda forma fundamental* de \mathcal{M} em $\widetilde{\mathcal{M}}$, definida pela *fórmula de Gauss*

$$\widetilde{\nabla}_X^{\mathcal{M}} Y = \nabla_X^{\mathcal{M}} Y + \sigma(X, Y),$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Podemos obter a segunda forma fundamental σ , como

$$\sigma(X, Y) = \delta \langle \mathcal{A}_\nu X, Y \rangle \nu, \text{ para quaisquer } X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

O vetor de curvatura média de \mathcal{M} é definido por

$$\vec{H} = \frac{1}{\dim \mathcal{M}} \text{Traço}(\sigma).$$

Convencionemos que o operador curvatura \mathcal{R} de uma variedade semi-riemanniana com conexão de Levi-Civita \mathfrak{D} , é dado por

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \mathfrak{D}_X \mathfrak{D}_Y Z - \mathfrak{D}_Y \mathfrak{D}_X Z - \mathfrak{D}_{[X, Y]} Z.$$

Sejam $R_{\mathcal{M}}$ e $\tilde{R}_{\mathcal{M}}$, os tensores curvatura de \mathcal{M} e de $\tilde{\mathcal{M}}$, respectivamente. A *equação de Gauss* é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mathcal{M}}(X, Y, Z, W) &= R_{\mathcal{M}}(X, Y, Z, W) - \langle \sigma(X, W), \sigma(Y, Z) \rangle + \langle \sigma(X, Z), \sigma(Y, W) \rangle \\ &= R_{\mathcal{M}}(X, Y, Z, W) - \delta \langle \mathcal{A}_\nu Y, Z \rangle \langle \mathcal{A}_\nu X, W \rangle + \delta \langle \mathcal{A}_\nu X, Z \rangle \langle \mathcal{A}_\nu Y, W \rangle, \end{aligned} \quad (1.1)$$

para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

A *equação de Codazzi-Mainardi* é dada por

$$(\tilde{R}_{\mathcal{M}}(X, Y)Z)^\perp = (\tilde{\nabla}_X^{\mathcal{M}} \sigma)(Y, Z) - (\tilde{\nabla}_Y^{\mathcal{M}} \sigma)(X, Z),$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, ou equivalentemente,

$$\tilde{R}_{\mathcal{M}}(X, Y, Z, \nu) = \langle (\nabla_X^{\mathcal{M}} \mathcal{A}_\nu)Y - (\nabla_Y^{\mathcal{M}} \mathcal{A}_\nu)X, Z \rangle, \quad (1.2)$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, em que $\tilde{R}_{\mathcal{M}}(X, Y, Z, \nu) = \langle \tilde{R}_{\mathcal{M}}(X, Y)Z, \nu \rangle$.

Definição 1.1.1. Seja $f : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ uma hipersuperfície, diremos que:

- a) f é *totalmente geodésica* se a segunda forma fundamental σ é zero.
- b) f é *totalmente umbílica* se existir $\lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável, tal que $\mathcal{A}_\nu = \lambda I_d$, em que I_d é a identidade em $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Neste caso, $\sigma(X, Y) = \delta \lambda \langle X, Y \rangle \nu$, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

1.2 Variedades produto torcido

Sejam B e P duas variedades semi-riemannianas munidas com métricas g_B e g_P , respectivamente. Todas as variedades que consideraremos neste trabalho serão conexas

e de classe C^∞ , salvo que se especifique o contrário. Consideremos a variedade produto $B \times P$ com as naturais projeções $\pi : B \times P \rightarrow B$ e $\eta : B \times P \rightarrow P$. Uma grande família de métricas em $B \times P$ podem ser obtidas ao torcer homoteticamente a métrica produto usual $\pi^*(g_B) + \eta^*(g_P)$, em que π^* e η^* são o pull-back de π e η , em cada fibra $\{b\} \times P$, por uma função diferenciável $\rho : B \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Definição 1.2.1. O *produto torcido* $\tilde{P} = B \times_\rho P$ é a variedade $B \times P$ munida com a métrica semi-riemanniana

$$g_{B \times_\rho P} := \pi^*(g_B) + (\rho \circ \pi)^2 \eta^*(g_P).$$

Explicitamente, se x é tangente a $B \times_\rho P$ em (b, p) , então

$$\langle x, x \rangle = \langle d\pi(x), d\pi(x) \rangle_B + \rho^2(b) \langle d\eta(x), d\eta(x) \rangle_P.$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle = g_{B \times_\rho P}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_B = g_B$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_P = g_P$.

A função ρ é chamada de *função de torção* do produto torcido.

Exemplo 1.2.1. Uma *superfície de revolução* é um produto torcido. Explicitamente, se uma variedade \tilde{P} é obtida rotacionando uma curva plana $C : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ao redor de um eixo em \mathbb{R}^3 e $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ é dada pela distância do ponto $C(t)$ ao eixo de rotação, para todo $t \in I$, então, podemos definir \tilde{P} como o produto torcido $I \times_\rho \mathbb{S}^1(1)$. Ver Figura 1.1.

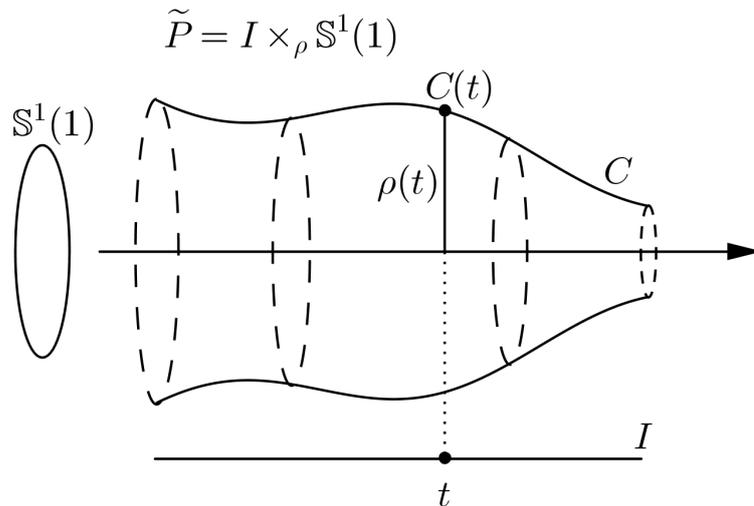


Figura 1.1: Variedade $\tilde{P} = I \times_\rho \mathbb{S}^1(1)$ obtida rotacionando a curva plana $C : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ao redor de um eixo em \mathbb{R}^3 , em que $\rho(t)$ é a distância do ponto $C(t)$ ao eixo de rotação, para todo $t \in I$.

Denotamos por $\mathfrak{X}(\tilde{P})$ e $\mathcal{D}(\tilde{P})$, respectivamente, o conjunto dos campos vetoriais tangentes a \tilde{P} e o conjunto das funções reais diferenciáveis definidas em \tilde{P} .

Para o produto torcido $B \times_{\rho} P$, B é chamado a *base* do produto torcido e P é a *fibra*. As *folhas* $B \times \{p\} = \eta^{-1}(p)$ e as *fibras* $\{b\} \times P = \pi^{-1}(b)$ são subvariedades semi-riemannianas de \tilde{P} e a métrica de \tilde{P} verifica:

1. Para cada $p \in P$, a função $\pi|_{B \times \{p\}}$ é uma isometria sobre B .
2. Para cada $b \in B$, a função $\eta|_{\{b\} \times P}$ é uma homotetia positiva sobre P , com fator $\frac{1}{\rho(b)}$.
3. Para cada $(b, p) \in \tilde{P}$, a folha $B \times \{p\}$ e a fibra $\{b\} \times P$ são ortogonais em (b, p) .

Vetores tangentes às folhas são chamados de *horizontais* e aqueles tangentes às fibras são chamados de *verticais*. Denotamos por \mathcal{H} a projeção ortogonal de $T_{(b,p)}\tilde{P}$ no subespaço horizontal $T_{(b,p)}(B \times \{p\})$ e por \mathcal{V} a projeção no subespaço vertical $T_{(b,p)}(\{b\} \times P)$. Escreveremos \tan para a projeção \mathcal{V} em $T_{(b,p)}(B \times \{p\})$ e nor para a projeção \mathcal{H} em $(T_{(b,p)}(\{b\} \times P))^{\perp} = T_{(b,p)}(B \times \{p\})$. Então, para campos vetoriais verticais V, W em \tilde{P} , obtemos que $\sigma(V, W) = \text{nor } \tilde{\nabla}_V W$ é o tensor segunda forma fundamental em cada fibra, em que $\tilde{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de \tilde{P} .

Se $x \in T_b B$, $b \in B$ e $p \in P$, então o *levantamento* \tilde{x} de x em (b, p) é o único vetor em $T_{(b,p)}(B \times \{p\})$ tal que $d\pi(\tilde{x}) = x$. Para um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(B)$, o *levantamento horizontal* de X em \tilde{P} é o campo vetorial \tilde{X} tal que em cada ponto (b, p) , $\tilde{X}_{(b,p)}$ é o levantamento de X_b ao ponto (b, p) . O conjunto de todos os levantamentos horizontais é denotado por $\mathcal{L}(B)$. Analogamente, denotemos por $\mathcal{L}(P)$ ao conjunto de todos os *levantamentos verticais* de campos vetoriais em P .

Proposição 1.2.2. Para $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(B)$ e $\tilde{V}, \tilde{W} \in \mathcal{L}(P)$, temos que

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y]^{\sim} \in \mathcal{L}(B), \quad (1.3)$$

$$[\tilde{V}, \tilde{W}] = [V, W]^{\sim} \in \mathcal{L}(P), \quad (1.4)$$

$$[\tilde{X}, \tilde{V}] = 0, \quad (1.5)$$

em que $[\cdot, \cdot]$ denota o corchete de Lie de campos vetoriais e $[X, Y]^{\sim}$ denota o levantamento de $[X, Y]$.

Demonstração. Chamamos dois campos vetoriais X, Y de ϕ -relacionados se $d\phi(X_q) = Y_{\phi(q)}$. As igualdades (1.3) e (1.4) seguem do fato que os campos \tilde{X}, \tilde{Y} são π -relacionados aos campos X, Y e que \tilde{V}, \tilde{W} são η -relacionados com V, W , respectivamente. A igualdade (1.5) é consequência da propriedade que o campo $[\tilde{X}, \tilde{V}]$ é π -relacionado com $[X, 0] = 0$ e é η -relacionado com $[0, V] = 0$, logo, como $T_{(b,p)}\tilde{P}$ é a soma direta dos subespaços $T_{(b,p)}(B \times \{p\})$ e $T_{(b,p)}(\{b\} \times P)$, obtemos $[\tilde{X}, \tilde{V}] = 0$. \square

Lema 1.2.3. *Se $\lambda \in \mathcal{D}(B)$, então o gradiente do levantamento $\lambda \circ \pi$ de λ em $\tilde{P} = B \times_\rho P$ é o levantamento à \tilde{P} do gradiente de λ em B .*

Demonstração. Mostremos que $\text{grad}(\lambda \circ \pi)$ é horizontal e π -relacionado com $\text{grad} \lambda$ em B . Se v é um vetor vertical tangente a \tilde{P} , então $\langle \text{grad} \lambda \circ \pi, v \rangle = v(\lambda \circ \pi) = d\pi(v)\lambda = 0$, pois $d\pi(v) = 0$. Assim, $\text{grad}(\lambda \circ \pi)$ é horizontal. Logo, se x é horizontal,

$$\begin{aligned} \langle d\pi(\text{grad}(\lambda \circ \pi)), d\pi(x) \rangle &= \langle \text{grad} \lambda \circ \pi, x \rangle \\ &= x(\lambda \circ \pi) \\ &= d\pi(x)\lambda \\ &= \langle \text{grad} \lambda, d\pi(x) \rangle. \end{aligned}$$

Então $d\pi(\text{grad}(\lambda \circ \pi)) = \text{grad} \lambda$. □

Pelo resultado no Lema 1.2.3, podemos escrever simplesmente λ ao em vez de $\lambda \circ \pi$ e $\text{grad} \lambda$ ao em vez de $\text{grad}(\lambda \circ \pi)$.

Consideremos agora, o caso particular quando a variedade B é um intervalo I da reta \mathbb{R} e seja $(P, \langle \cdot, \cdot \rangle_P)$ uma variedade semi-riemanniana de dimensão m . Seja $\rho : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável e $\varepsilon = \pm 1$, temos o produto torcido

$$\tilde{P} = \varepsilon I \times_\rho P, \text{ com a métrica } \langle \cdot, \cdot \rangle = \varepsilon dt^2 + \rho^2(t) \langle \cdot, \cdot \rangle_P.$$

Seja o campo vetorial unitário horizontal $\partial_t \in \mathfrak{X}(\varepsilon I \times_\rho P)$ o levantamento a $\varepsilon I \times_\rho P$ do campo vetorial $\frac{d}{dt}$ em εI , e para cada $p \in P$ parametrizamos $\varepsilon I \times \{p\}$ usando a curva γ_p definida por $\gamma_p(t) = (t, p)$, assim, $\partial_t(t, p) = \gamma'_p(t, p)$. Observemos que $\langle \partial_t, \partial_t \rangle = \langle \partial_t, \partial_t \rangle_{\varepsilon I} = \varepsilon$. Como é usual, o levantamento $\lambda(t, p) = \lambda(t)$ de uma função $\lambda \in \mathcal{D}(\varepsilon I)$ é denotado por λ e escrevemos λ' para $\partial_t \lambda = \frac{d\lambda}{dt}$.

A conexão Levi-Civita $\tilde{\nabla}^P$ de $\tilde{P} = \varepsilon I \times_\rho P$ está relacionada com a conexão Levi-Civita D^P de P como segue.

Lema 1.2.4. *Na variedade semi-riemanniana \tilde{P} , para quaisquer levantamentos V, W de campos vetoriais tangentes a P , temos que*

1. $\tilde{\nabla}_{\partial_t}^P \partial_t = 0$,
2. $\tilde{\nabla}_V^P \partial_t = \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P V = \frac{\rho'}{\rho} V$,
3. $\text{grad}(\rho) = \varepsilon \rho' \partial_t$,
4. $\tilde{\nabla}_V^P W = {}^*D_V^P W - \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \langle V, W \rangle \partial_t$, em que ${}^*D_V^P W$ é o levantamento a \tilde{P} de $D_V^P W$.

Demonstração. (1) Da fórmula de Koszul, obtemos

$$2\langle \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P \partial_t, V \rangle = \partial_t \langle \partial_t, V \rangle + \partial_t \langle V, \partial_t \rangle - V \langle \partial_t, \partial_t \rangle - \langle \partial_t, [\partial_t, V] \rangle + \langle \partial_t, [V, \partial_t] \rangle + \langle V, [\partial_t, \partial_t] \rangle.$$

Do fato que ∂_t é um campo vetorial horizontal e V é vertical, segue que $\langle \partial_t, V \rangle = 0$. Agora, pela Proposição 1.2.2, segue que $[\partial_t, V] = [V, \partial_t] = 0$ e $[\partial_t, \partial_t]$ é horizontal, logo $\langle V, [\partial_t, \partial_t] \rangle = 0$. Como ∂_t é um campo vetorial unitário, $\langle \partial_t, \partial_t \rangle$ é constante e $V \langle \partial_t, \partial_t \rangle = 0$. Então, cada sumando do lado direito da fórmula de Koszul é zero, assim $\langle \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P \partial_t, V \rangle = 0$ para todo $V \in \mathfrak{L}(P)$, mas $2\langle \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P \partial_t, \partial_t \rangle = \partial_t \langle \partial_t, \partial_t \rangle = 0$, portanto $\tilde{\nabla}_{\partial_t}^P \partial_t = 0$.

(2) Da propriedade de simetria da conexão de Levi-Civita, segue que $\tilde{\nabla}_{\partial_t}^P V - \tilde{\nabla}_V^P \partial_t = [\partial_t, V] = 0$, logo $\tilde{\nabla}_{\partial_t}^P V = \tilde{\nabla}_V^P \partial_t$. Já que, $\langle \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P V, \partial_t \rangle + \langle V, \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P \partial_t \rangle = \partial_t \langle V, \partial_t \rangle = 0$ e por (1), temos que $\langle \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P V, \partial_t \rangle = -\langle V, \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P \partial_t \rangle = 0$, assim $\tilde{\nabla}_{\partial_t}^P V = \tilde{\nabla}_V^P \partial_t$ é um campo vetorial vertical. Todos os sumandos na fórmula de Koszul de $2\langle \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P V, W \rangle$ são zero, exceto $\partial_t \langle V, W \rangle$. Por definição da métrica no espaço torcido, $\langle V, W \rangle(t, p) = \rho^2(t) \langle V_p, W_p \rangle_P$. Se escrevemos ρ ao en vez de $\rho \circ \pi$, temos que $\langle V, W \rangle = \rho^2(\langle V, W \rangle_P \circ \eta)$, em que a expressão dentro do parêntesis é constante nas folhas, às quais ∂_t é tangente, logo

$$\begin{aligned} \partial_t \langle V, W \rangle &= \partial_t [\rho^2(\langle V, W \rangle_P \circ \eta)] \\ &= [\partial_t(\rho^2)](\langle V, W \rangle_P \circ \eta) + \rho^2 \partial_t(\langle V, W \rangle_P \circ \eta) \\ &= [2\rho \partial_t \rho](\langle V, W \rangle_P \circ \eta) + 0 \\ &= \frac{2\partial_t \rho}{\rho} \langle V, W \rangle \\ &= 2 \left\langle \frac{\partial_t \rho}{\rho} V, W \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \frac{\rho'}{\rho} V, W \right\rangle. \end{aligned}$$

Assim obtemos (2).

(3) Pelo Lema 1.2.3, segue que $\text{grad } \rho$ em \tilde{P} é o levantamento de $\text{grad } \rho$ em εI . Assim, $\text{grad } \rho$ é horizontal e para todo $X \in T\tilde{P}$, temos

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } \rho, X \rangle &= \langle \text{grad } \rho, \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \partial_t \rangle \\ &= \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \langle \text{grad } \rho, \partial_t \rangle \\ &= \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \partial_t \rho \\ &= \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \rho' \\ &= \langle X, \varepsilon \rho' \partial_t \rangle. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon \rho' \partial_t$ é horizontal, temos que $\text{grad } \rho = \varepsilon \rho' \partial_t$.

(4) Como V e W são tangentes a todas as fibras, considerando cada fibra como subvariedade de \tilde{P} , pela fórmula de Gauss $\tilde{\nabla}_V^P W = \nabla_V^P W + \sigma(V, W)$, em que ∇^P é a conexão de Levi-Civita da fibra, temos que $\tan \tilde{\nabla}_V^P W = \nabla_V^P W$, em cada fibra. Então, $\tan \tilde{\nabla}_V^P W$ e $D_V^P W$ são η -relacionados, pois homotetias preservam a conexão Levi-Civita, segue que $\tan \tilde{\nabla}_V^P W$ é o levantamento $*D_V^P W$ de $D_V^P W$.

Por outro lado, $0 = V\langle W, \partial_t \rangle = \langle \tilde{\nabla}_V^P W, \partial_t \rangle + \langle W, \tilde{\nabla}_V^P \partial_t \rangle$. Logo, usando (1) obtemos

$$\langle \tilde{\nabla}_V^P W, \partial_t \rangle = -\langle W, \tilde{\nabla}_V^P \partial_t \rangle = -\langle W, \frac{\rho'}{\rho} V \rangle = -\frac{\rho'}{\rho} \langle V, W \rangle.$$

Como $\rho' = \langle \text{grad } \rho, \partial_t \rangle$ em \tilde{P} em εI ,

$$\langle \tilde{\nabla}_V^P W, \partial_t \rangle = -\frac{\langle \text{grad } \rho, \partial_t \rangle}{\rho} \langle V, W \rangle = \left\langle -\frac{\langle V, W \rangle}{\rho} \text{grad } \rho, \partial_t \right\rangle.$$

Daí,

$$\sigma(V, W) = \text{nor } \tilde{\nabla}_V^P W = -\frac{\langle V, W \rangle}{\rho} \text{grad } \rho = -\frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \langle V, W \rangle \partial_t.$$

Portanto, $\tilde{\nabla}_V^P W = *D_V^P W - \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \langle V, W \rangle \partial_t$.

□

Corolário 1.2.5. *As fibras $\{t\} \times P$ do produto torcido $\varepsilon I \times_\rho P$, são hipersuperfícies totalmente umbílicas.*

Demonstração. A afirmação é imediata por (4) da Proposição 1.2.4. □

Os operadores curvatura \tilde{R}_P e R_P de $\tilde{P} = \varepsilon I \times_\rho P$ e P , respectivamente, estão relacionados pelo seguinte resultado:

Lema 1.2.6. *Na variedade semi-riemanniana \tilde{P} , sejam V, W, U levantamentos de campos vetoriais tangentes a P , então*

1. $\tilde{R}_P(V, \partial_t) \partial_t = -\frac{\rho''}{\rho} V$,
2. $\tilde{R}_P(\partial_t, V) W = -\varepsilon \frac{\rho''}{\rho} \langle V, W \rangle \partial_t$,
3. $\tilde{R}_P(V, W) \partial_t = 0$,
4. $\tilde{R}_P(V, W) U = *R_P(V, W) U - \varepsilon \frac{(\rho')^2}{\rho^2} (V \wedge W) U$,

em que $(V \wedge W) U = \langle W, U \rangle V - \langle V, U \rangle W$ e $*R_P$ é o levantamento por η a \tilde{P} do operador curvatura R_P em P , ou seja, $*R_P(V_{(p,q)}, W_{(p,q)}) U_{(p,q)}$ é o vetor vertical em (p, q) que é projetado por η em $R_P(d\eta V_{(p,q)}, d\eta W_{(p,q)}) d\eta U_{(p,q)}$.

Demonstração. (1) Usando o Lema 1.2.4 e o fato que $[V, \partial_t] = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_P(V, \partial_t)\partial_t &= \tilde{\nabla}_V^P \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P \partial_t - \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P \tilde{\nabla}_V^P \partial_t - \tilde{\nabla}_{[V, \partial_t]}^P \partial_t \\
&= -\tilde{\nabla}_{\partial_t}^P \left(\frac{\rho'}{\rho} V \right) \\
&= -\partial_t \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) V - \frac{\rho'}{\rho} \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P V \\
&= - \left[(\partial_t \rho') \frac{1}{\rho} + \rho' \left(-\frac{\partial_t \rho}{\rho^2} \right) \right] V - \frac{\rho'}{\rho} \left(\frac{\rho'}{\rho} V \right) \\
&= -(\rho'') \frac{1}{\rho} V + \frac{(\rho')^2}{\rho^2} V - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} V \\
&= -\frac{\rho''}{\rho} V.
\end{aligned}$$

(2) Como $[\partial_t, V] = 0$, temos que $\tilde{R}_P(\partial_t, V)W = \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P \tilde{\nabla}_V^P W - \tilde{\nabla}_V^P \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P W$.

Usando o Lema 1.2.4 e o fato que $D_V^P W$ é o levantamento vertical de $D_V^P W$ em P , obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_P(\partial_t, V)W &= \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P \left(D_V^P W - \varepsilon \frac{\rho'}{\rho} \langle V, W \rangle \partial_t \right) - \tilde{\nabla}_V^P \left(\frac{\rho'}{\rho} W \right) \\
&= \frac{\rho'}{\rho} D_V^P W - \varepsilon \partial_t \left(\frac{\rho'}{\rho} \langle V, W \rangle \right) \partial_t - \varepsilon \frac{\rho'}{\rho} \langle V, W \rangle \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P \partial_t - V \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) - \frac{\rho'}{\rho} \tilde{\nabla}_V^P W \\
&= \frac{\rho'}{\rho} D_V^P W - \varepsilon \partial_t \left(\frac{\rho'}{\rho} \langle V, W \rangle \right) \partial_t - V \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) - \frac{\rho'}{\rho} \left(D_V^P W - \varepsilon \frac{\rho'}{\rho} \langle V, W \rangle \partial_t \right) \\
&= -\varepsilon \partial_t \left(\frac{\rho'}{\rho} \langle V, W \rangle \right) \partial_t - V \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) + \varepsilon \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \langle V, W \rangle \partial_t.
\end{aligned}$$

Como $\frac{\rho'}{\rho}$ é constante nas fibras, então $V \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) = 0$.

Também,

$$\begin{aligned}
\partial_t \left(\frac{\rho'}{\rho} \langle V, W \rangle \right) &= \partial_t \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) \langle V, W \rangle + \frac{\rho'}{\rho} \partial_t \langle V, W \rangle \\
&= \left[(\partial_t \rho') \frac{1}{\rho} + \rho' \left(-\frac{\partial_t \rho}{\rho^2} \right) \right] \langle V, W \rangle + \frac{\rho'}{\rho} \langle \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P V, W \rangle + \frac{\rho'}{\rho} \langle V, \tilde{\nabla}_{\partial_t}^P W \rangle \\
&= \left[\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \right] \langle V, W \rangle + \frac{\rho'}{\rho} \langle \frac{\rho'}{\rho} V, W \rangle + \frac{\rho'}{\rho} \langle V, \frac{\rho'}{\rho} W \rangle \\
&= \frac{\rho''}{\rho} \langle V, W \rangle + \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \langle V, W \rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\tilde{R}_P(\partial_t, V)W &= -\varepsilon\partial_t\left(\frac{\rho'}{\rho}\langle V, W\rangle\right)\partial_t - V\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) + \varepsilon\frac{(\rho')^2}{\rho^2}\langle V, W\rangle\partial_t \\ &= -\varepsilon\left(\frac{\rho''}{\rho}\langle V, W\rangle + \frac{(\rho')^2}{\rho^2}\langle V, W\rangle\right)\partial_t + \varepsilon\frac{(\rho')^2}{\rho^2}\langle V, W\rangle\partial_t \\ &= -\varepsilon\frac{\rho''}{\rho}\langle V, W\rangle\partial_t.\end{aligned}$$

$$(3) \text{ Para } \tilde{R}_P(V, W)\partial_t = \tilde{\nabla}_V^P\tilde{\nabla}_W^P\partial_t - \tilde{\nabla}_W^P\tilde{\nabla}_V^P\partial_t - \tilde{\nabla}_{[V, W]}^P\partial_t.$$

Como $[V, W]$ é vertical, temos que $\tilde{\nabla}_{[V, W]}^P\partial_t = \frac{\rho'}{\rho}[V, W]$.

Por outro lado,

$$\tilde{\nabla}_V^P\tilde{\nabla}_W^P\partial_t = \tilde{\nabla}_V^P\left(\frac{\rho'}{\rho}W\right) = V\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)W + \frac{\rho'}{\rho}\tilde{\nabla}_V^PW,$$

em que $\frac{\rho'}{\rho}$ é constante nas fibras, logo $V\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) = 0$. Assim,

$$\tilde{R}_P(V, W)\partial_t = \frac{\rho'}{\rho}(\tilde{\nabla}_V^PW - \tilde{\nabla}_W^PV) - \tilde{\nabla}_{[V, W]}^P\partial_t = \frac{\rho'}{\rho}[V, W] - \frac{\rho'}{\rho}[V, W] = 0.$$

(4) $\tilde{R}_P(V, W)U$ é vertical, pois usando (3), temos

$$\langle\tilde{R}_P(V, W)U, \partial_t\rangle = -\langle\tilde{R}_P(V, W)\partial_t, U\rangle = -\langle 0, U\rangle = 0.$$

Como a projeção η é uma homotetia nas fibras, $*R(V, W)U \in \mathcal{L}(P)$ é o resultado de aplicar a V, W, U o tensor curvatura de cada fibra. Assim, $*R_P(V, W)U$ e $\tilde{R}_P(V, W)U$ estão ligados pela equação de Gauss. Seja $U' \in \mathcal{L}(P)$, pela demonstração do Lema 1.2.4 o operador de Weingarten de cada fibra é dado por $\sigma(V, W) = -\varepsilon\frac{\rho'}{\rho}\langle V, W\rangle\partial_t$, assim

$$\begin{aligned}\langle\tilde{R}_P(V, W)U, U'\rangle &= \langle *R_P(V, W)U, U'\rangle - \langle\sigma(V, U'), \sigma(W, U)\rangle + \langle\sigma(V, U), \sigma(W, U')\rangle \\ &= \langle *R_P(V, W)U, U'\rangle - \varepsilon^2\frac{(\rho')^2}{\rho^2}\langle V, U'\rangle\langle W, U\rangle\langle\partial_t, \partial_t\rangle \\ &\quad + \varepsilon^2\frac{(\rho')^2}{\rho^2}\langle V, U\rangle\langle W, U'\rangle\langle\partial_t, \partial_t\rangle \\ &= \langle *R_P(V, W)U, U'\rangle - \varepsilon\frac{(\rho')^2}{\rho^2}(\langle V, U'\rangle\langle W, U\rangle + \langle V, U\rangle\langle W, U'\rangle) \\ &= \langle *R_P(V, W)U - \varepsilon\frac{(\rho')^2}{\rho^2}(\langle W, U\rangle V + \langle V, U\rangle W), U'\rangle.\end{aligned}$$

Como $\tilde{R}_P(V, W)U$ é vertical, obtemos

$$\tilde{R}_P(V, W)U = *R_P(V, W)U - \varepsilon\frac{(\rho')^2}{\rho^2}(\langle W, U\rangle V + \langle V, U\rangle W).$$

□

1.3 O espaço pseudo-euclidiano \mathbb{E}_k^{n+1}

Denotamos o espaço Euclidiano semi-riemanniano de dimensão $n + 1 \geq 3$ e índice k , por \mathbb{E}_k^{n+1} com a métrica semi-riemanniana

$$g_0 = \sum_{i=0}^{n-k} dx_i^2 - \sum_{i=n-k+1}^n dx_i^2.$$

Agora consideramos a variedade semi-riemanniana $\overline{M}^{n+2} = \varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{E}_k^{n+1}$. Seja \overline{R} o tensor curvatura de \overline{M}^{n+2} , temos o resultado seguinte

Proposição 1.3.1. *Sejam $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+2})$,*

$$\begin{aligned} \overline{R}(X, Y, Z, W) = & -\varepsilon \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \langle (X \wedge Y)Z, W \rangle + \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \right) (\langle X, Z \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \\ & - \langle Y, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle + \langle Y, W \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+2})$, é possível escrever $X = \tilde{X} + x\partial_t$, em que \tilde{X} é um campo vetorial tangente (vertical) a \widetilde{M}^{n+2} e $x = \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle$. Usaremos notações análogas para outros campos vetoriais.

Em particular, como $\langle \partial_t, \partial_t \rangle = \varepsilon$, observemos que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle &= \langle X - x\partial_t, Y - y\partial_t \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle - \langle X, y\partial_t \rangle - \langle x\partial_t, Y \rangle + \langle x\partial_t, y\partial_t \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle - \varepsilon \langle Y, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle - \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Y \rangle + \varepsilon^2 \langle X, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle \partial_t, \partial_t \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle - \varepsilon \langle Y, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle - \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Y \rangle + \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle - \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle. \end{aligned}$$

Agora, se $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+2})$

$$\overline{R}(X, Y, Z, W) = \overline{R}(\tilde{X} + x\partial_t, \tilde{Y} + y\partial_t, \tilde{Z} + z\partial_t, \tilde{W} + w\partial_t).$$

Usando as propriedades de simetria do tensor curvatura, temos

$$\begin{aligned} \overline{R}(x\partial_t, y\partial_t, Z, W) &= 0, & \overline{R}(x\partial_t, y\partial_t, z\partial_t, W) &= 0, \\ \overline{R}(x\partial_t, y\partial_t, Z, w\partial_t) &= 0, & \overline{R}(x\partial_t, y\partial_t, z\partial_t, w\partial_t) &= 0, \\ \overline{R}(X, Y, z\partial_t, w\partial_t) &= 0, & \overline{R}(X, y\partial_t, z\partial_t, w\partial_t) &= 0, \\ \overline{R}(x\partial_t, Y, z\partial_t, w\partial_t) &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y, Z, W) = & \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{W}) + \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}, w\partial_t) + \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y}, z\partial_t, \tilde{W}) + \bar{R}(\tilde{X}, y\partial_t, \tilde{Z}, \tilde{W}) \\ & + \bar{R}(\tilde{X}, y\partial_t, \tilde{Z}, w\partial_t) + \bar{R}(\tilde{X}, y\partial_t, z\partial_t, \tilde{W}) + \bar{R}(x\partial_t, \tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{W}) \\ & + \bar{R}(x\partial_t, \tilde{Y}, \tilde{Z}, w\partial_t) + \bar{R}(x\partial_t, \tilde{Y}, z\partial_t, \tilde{W}), \end{aligned}$$

e como $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{W}$ são verticais, então pelo Lema 1.2.4, temos

$$\begin{aligned} \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y}, z\partial_t, \tilde{W}) &= \langle \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})z\partial_t, \tilde{W} \rangle = 0, \\ \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}, w\partial_t) &= -\bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y}, w\partial_t, \tilde{Z}) = 0, \\ \bar{R}(x\partial_t, \tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{W}) &= \bar{R}(\tilde{Z}, \tilde{W}, x\partial_t, \tilde{Y}) = 0, \\ \bar{R}(\tilde{X}, y\partial_t, \tilde{Z}, \tilde{W}) &= -\bar{R}(\tilde{Z}, \tilde{W}, y\partial_t, \tilde{X}) = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, o tensor curvatura de \mathbb{E}_k^{n+1} é zero, usando o Lema 1.2.6, temos que

$$\bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = -\varepsilon \frac{(\rho')^2}{\rho^2} (\tilde{X} \wedge \tilde{Y})\tilde{Z}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{W}) &= \langle \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle \\ &= \langle -\varepsilon \frac{(\rho')^2}{\rho^2} (\tilde{X} \wedge \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle. \end{aligned}$$

Usando novamente o Lema 1.2.4, temos

$$\begin{aligned} \bar{R}(\tilde{X}, y\partial_t, \tilde{Z}, w\partial_t) &= -\bar{R}(y\partial_t, \tilde{X}, \tilde{Z}, w\partial_t) \\ &= -y \langle -\varepsilon \frac{\rho''}{\rho} \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \partial_t, w\partial_t \rangle \\ &= \varepsilon \frac{\rho''}{\rho} \langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \langle \partial_t, \partial_t \rangle \\ &= \frac{\rho''}{\rho} \langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \bar{R}(\tilde{X}, y\partial_t, z\partial_t, \tilde{W}) &= \frac{\rho''}{\rho} \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle, \\ \bar{R}(x\partial_t, \tilde{Y}, \tilde{Z}, w\partial_t) &= \frac{\rho''}{\rho} \langle X, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle, \\ \bar{R}(x\partial_t, \tilde{Y}, z\partial_t, \tilde{W}) &= \frac{\rho''}{\rho} \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y, Z, W) = & -\varepsilon \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \langle (\tilde{X} \wedge \tilde{Y}) \tilde{Z}, \tilde{W} \rangle + \frac{\rho''}{\rho} \left(\langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \right. \\ & - \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle - \langle X, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle \\ & \left. + \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \langle (\tilde{X} \wedge \tilde{Y}) \tilde{Z}, \tilde{W} \rangle = & \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle - \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle \\ = & (\langle Y, Z \rangle - \varepsilon \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle) (\langle X, W \rangle - \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle) \\ & - (\langle X, Z \rangle - \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle) (\langle Y, W \rangle - \varepsilon \langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle) \\ = & \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \varepsilon \langle Y, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle - \varepsilon \langle X, W \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \\ & + \langle X, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle + \varepsilon \langle X, Z \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \\ & + \varepsilon \langle Y, W \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle - \langle X, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \\ = & \langle (X \wedge Y) Z, W \rangle + \varepsilon (\langle X, Z \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \\ & - \langle X, W \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle + \langle Y, W \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Também,

$$\begin{aligned} \langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle = & \langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle (\langle X, Z \rangle - \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle) \\ = & \langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \langle X, Z \rangle - \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle = & \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle X, W \rangle - \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle, \\ \langle X, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle = & \langle X, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \langle Y, Z \rangle - \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle, \\ \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle = & \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle Y, W \rangle - \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle - \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle - \langle X, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle \\ & + \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle = \langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \langle X, Z \rangle - \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle X, W \rangle \\ & - \langle X, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \langle Y, Z \rangle + \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle Y, W \rangle. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Substituindo (1.8) e (1.9) em (1.7), obtemos (1.6). \square

1.4 Hiperquádricas em espaços pseudo-euclidianos

Seja $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, consideremos

$$\mathbb{E}^{n+1} = \begin{cases} \mathbb{R}_k^{n+1}, & \text{se } c > 0, \\ \mathbb{R}_{k+1}^{n+1}, & \text{se } c < 0, \end{cases}$$

com a métrica usual semi-riemanniana g_0 e conexão Levi-Civita ∇^0 . Consideremos a função $\phi : \mathbb{E}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(P) = g_0(P, P)$ e o subconjunto Q de \mathbb{E}^{n+1} definido como $Q = \phi^{-1}\left(\frac{c}{|c|^3}\right)$.

Seja $P = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^{n+1}$, $Y \in T_P\mathbb{E}^{n+1}$ e $\{E_0, \dots, E_n\}$ o referencial canônico de \mathbb{E}^{n+1} , escrevemos $Y = \sum_{i=0}^n y_i E_i$. Identificando $T_P\mathbb{E}^{n+1}$ com \mathbb{E}^{n+1} , podemos considerar o campo $I : \mathbb{E}^{n+1} \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ definido por $I_P = P = \sum_{j=0}^n x_j E_j$. Logo

$$\nabla_Y^0 P = \nabla_{\sum_{i=0}^n y_i E_i}^0 P = \sum_{i=0}^n y_i \nabla_{E_i}^0 \sum_{j=0}^n x_j E_j = \sum_{i=0}^n y_i \sum_{j=0}^n E_i(x_j) E_j = \sum_{i=0}^n y_i E_i = Y, \quad (1.10)$$

Logo, $g_0(\text{grad}(\phi), Y) = Y(\phi) = Y g_0(P, P) = 2g_0(\nabla_Y^0 P, P) = 2g_0(Y, P)$, para todo $Y \in T_P\mathbb{E}^{n+1}$, assim, $\text{grad}(\phi) = 2P$.

Em particular, para $P \in Q$, obtemos

$$g_0(\text{grad}(\phi), \text{grad}(\phi)) = g_0(2P, 2P) = 4g_0(P, P) = 4\phi(P) = \frac{4c}{|c|^3}.$$

Como $d\phi(\text{grad}(\phi)) = g_0(\text{grad}(\phi), \text{grad}(\phi)) = \frac{4c}{|c|^3} \neq 0$ significa que c é um valor regular de ϕ e portanto $Q = \phi^{-1}(c)$ é uma hipersuperfície semi-riemanniana de \mathbb{E}^{n+1} . Além disso, como $|\text{grad}(\phi)| = |(g_0(2P, 2P))|^{1/2} = \frac{2}{|c|}$, temos que $\xi_P = \frac{c \text{grad}(\phi)}{|c \text{grad}(\phi)|} = cP$ é um campo vetorial unitário normal a Q . De fato, para qualquer $Y \in T_P Q$, como ϕ é constante em Q , temos

$$g_0(\text{grad}(\phi), Y) = Y\phi = Y(\phi|_Q) = 0.$$

A hipersuperfície $\hat{\Xi} : Q \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ é chamada de *hiperquádrica* para $c \in \mathbb{R} - \{0\}$. O conjunto $\phi^{-1}(0)$ consiste da origem e o cone de luz que não é semi-riemanniano, pois o vetor posição P é tangente e também é normal ao cone. Em particular, consideremos \mathbb{S}_k^n como uma das componentes conexas de $\{p \in \mathbb{E}^{n+1} : g_0(p, p) = 1\}$ e \mathbb{H}_k^n como uma das componentes conexas de $\{p \in \mathbb{E}^{n+1} : g_0(p, p) = -1\}$. De fato, só no caso de \mathbb{H}_0^n e de \mathbb{S}_n^n temos mais de uma componente conexa. Então, denotamos

$$\mathbb{Q}_k^n(c) = \begin{cases} \mathbb{S}_k^n, & \text{se } c = 1, \\ \mathbb{H}_k^n, & \text{se } c = -1. \end{cases}$$

Proposição 1.4.1. $\Xi : \mathbb{Q}_k^n(c) \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica, com operador de Weingarten $A_\xi = -\frac{1}{c}I$, na direção do campo vetorial unitário normal $\xi_P = \frac{1}{c}P$, para todo $P \in \mathbb{Q}_k^n(c)$.

Demonstração. Seja $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{Q}_k^n(c))$. Então, usando (1.10), obtemos

$$A_\xi(Y) = -\nabla_Y^0(\xi_P) = -\nabla_Y^0\left(\frac{1}{c}P\right) = -\frac{1}{c}\nabla_Y^0P = -\frac{1}{c}Y.$$

□

Como consequência da Proposição 1.4.1 e da equação de Gauss, temos que $\mathbb{Q}_k^n(c)$ tem curvatura seccional constante c .

1.5 Curvatura do espaço $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$

Seja $\mathbb{Q}_k^n(c)$ o espaço forma semi-riemanniano de curvatura seccional constante $c \in \{0, 1, -1\}$ e índice k , com métrica g_0 . Consideramos o espaço $\widetilde{M} = \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e denotamos por \widetilde{R} o operador curvatura de \widetilde{M} .

Considerando primeiro o caso $c = \pm 1$, do mergulho inclusão usual $\Xi : \mathbb{Q}_k^n(c) \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$, construímos o mergulho isométrico:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Xi} : (\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c), \langle \cdot, \cdot \rangle_1) &\rightarrow (\varepsilon I \times_\rho \mathbb{E}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \\ (t, p) &\mapsto (t, \Xi(p)) = (t, p). \end{aligned}$$

No que segue, por simplicidade usaremos a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam $\overline{\nabla}$ e $\widetilde{\nabla}$ as conexões Levi-Civita em $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{E}^{n+1}$ e $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, respectivamente. Pela Proposição 1.4.1, temos que $\mathbb{Q}_k^n(c)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica de \mathbb{E}^{n+1} , e que $\xi = \frac{1}{c}\Xi$ é um campo vetorial unitário de $\mathbb{Q}_k^n(c)$ que satisfaz $\nabla_X^0 \xi = \frac{1}{c}X$ para todo $X \in T_p \mathbb{Q}_k^n(c)$. Assim, podemos considerar o campo vetorial normal de $\widetilde{\Xi} : \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c) \rightarrow \varepsilon I \times_\rho \mathbb{E}^{n+1}$ definido por $e_0(t, p) = \left(0, \frac{\xi(p)}{\rho(t)}\right) = \left(0, \frac{p}{c\rho(t)}\right)$, para qualquer $(t, p) \in \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$. De fato, se X é tangente a $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, então podemos escrever $X = \widetilde{X} + x\partial_t$, em que \widetilde{X} é o levantamento pela projeção η de um vetor tangente a $\mathbb{Q}_k^n(c)$, temos $\langle e_0, X \rangle = \rho^2 g_0\left(\frac{p}{c\rho}, d\eta(\widetilde{X})\right) = \rho g_0\left(\xi, d\eta(\widetilde{X})\right) = 0$.

Como $\mathbb{Q}_k^n(c)$ está mergulhado naturalmente em \mathbb{E}^{n+1} , o campo vetorial normal ξ satisfaz $g_0(\xi, \xi) = \frac{1}{c^2}g_0(p, p) = c$. Assim, o campo vetorial normal e_0 é unitário, pois $\langle e_0, e_0 \rangle = \langle (0, \frac{p}{\rho c}), (0, \frac{p}{\rho c}) \rangle = \rho^2 g_0 \left(\frac{\xi}{\rho}, \frac{\xi}{\rho} \right) = g_0(\xi, \xi) = c = \pm 1$. Definimos $\varepsilon_0 = \langle e_0, e_0 \rangle = \pm 1$.

Para determinar o tensor curvatura de $\widetilde{M} = \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$ como hipersuperfície de $\overline{M} = \varepsilon I \times_\rho \mathbb{E}^{n+1}$, usaremos a equação de Gauss, mas precisamos determinar primeiro a segunda forma fundamental de \widetilde{M} . Seja A_{e_0} o operador de Weingarten de \widetilde{M} na direção do campo vetorial normal e_0 . Para cada $Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ podemos escrever $Y = \widetilde{Y} + \varepsilon \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t$, com \widetilde{Y} o levantamento de um campo vetorial em $\mathbb{Q}_k^n(c) \subset \mathbb{E}^{n+1}$. Logo,

$$\begin{aligned} A_{e_0}Y &= -\overline{\nabla}_Y e_0 \\ &= -\overline{\nabla}_{\widetilde{Y} + \varepsilon \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t} e_0 \\ &= -\overline{\nabla}_{\widetilde{Y}} e_0 - \varepsilon \langle Y, \partial_t \rangle \overline{\nabla}_{\partial_t} e_0. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 1.2.4, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\partial_t} e_0 &= \overline{\nabla}_{\partial_t} \left(\frac{1}{\rho}(0, \xi) \right) \\ &= \frac{-\rho'}{\rho^2}(0, \xi) + \frac{1}{\rho} \overline{\nabla}_{\partial_t}(0, \xi) \\ &= \frac{-\rho'}{\rho^2}(0, \xi) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) (0, \xi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, notemos que \widetilde{Y} é um campo vetorial vertical e ortogonal a e_0 . Seja $\widetilde{Z} = (0, Z) \perp e_0$, como \widetilde{Z} é o levantamento vertical de Z e ρ é constante nas fibras, usando o Lema 1.2.4 obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\widetilde{Z}} e_0 &= \overline{\nabla}_{\widetilde{Z}} \left(\frac{1}{\rho}(0, \xi) \right) \\ &= \left[\widetilde{Z} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] (0, \xi) + \frac{1}{\rho} \overline{\nabla}_{\widetilde{Z}}(0, \xi) \\ &= \frac{1}{\rho} \overline{\nabla}_{\widetilde{Z}}(0, \xi) \\ &= \frac{1}{\rho} \left(* \nabla_Z^0 \xi - \frac{\langle \widetilde{Z}, (0, \xi) \rangle}{\rho} \text{grad } \rho \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left(* \nabla_Z^0 \xi - \langle \widetilde{Z}, e_0 \rangle \text{grad } \rho \right) \\ &= \frac{1}{\rho} * \nabla_Z^0 \xi. \end{aligned}$$

Como $\tilde{Z} = (0, Z) \perp e_0$, segue que $Z \perp \xi$, pois

$$0 = \langle \tilde{Z}, e_0 \rangle = \langle (0, Z), (0, \frac{\xi}{\rho}) \rangle = \rho^2 g_0(Z, \frac{\xi}{\rho}) = \rho g_0(Z, \xi),$$

ou seja, $Z \in \mathfrak{X}(Q_k^n(c))$. Logo, $\nabla_Z^0 \xi = \frac{1}{c} Z$ e

$$\bar{\nabla}_{\tilde{Z}} e_0 = \frac{1}{\rho} * \nabla_Z^0 \xi = \frac{1}{\rho c} \tilde{Z}.$$

Então, $A_{e_0} Y = -\bar{\nabla}_{\tilde{Y}} e_0 - \varepsilon \langle Y, \partial_t \rangle \bar{\nabla}_{\partial_t} e_0 = -\frac{1}{\rho c} \tilde{Y}$. Portanto,

$$A_{e_0} Y = -\frac{1}{\rho c} (Y - \varepsilon \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t), \text{ para qualquer } Y \in \mathfrak{X}(\tilde{M}).$$

No caso $c = 0$, seja $\{E_0, \dots, E_n\}$ o referencial canônico de $\mathbb{E}^{n+1} = \mathbb{E}_k^{n+1}$ com $g_0(E_0, E_0) = 1$ e consideremos o mergulho totalmente geodésico $\Xi : \mathbb{E}_k^n \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$, definido por $\Xi(p) = (0, p)$, com campo vetorial unitário normal $\xi = E_0$. Logo, fazemos o mergulho totalmente geodésico $\tilde{\Xi}$ como no caso $c = \pm 1$, com o campo vetorial normal unitário tipo-espaço $e_0 = \left(0, \frac{\xi}{\rho}\right)$. Assim, para todo $Y \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ temos que $A_{e_0} Y = -\bar{\nabla}_{\tilde{Y}} e_0 - \varepsilon \langle Y, \partial_t \rangle \bar{\nabla}_{\partial_t} e_0 = 0$, pois neste caso $\nabla_Z^0 \xi = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}_k^n)$. De maneira que, podemos fazer c tomar valores em $\{-1, 0, 1\}$, e escrever

$$A_{e_0} Y = -\frac{c}{\rho} (Y - \varepsilon \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t), \text{ para qualquer } Y \in \mathfrak{X}(\tilde{M}). \quad (1.11)$$

Proposição 1.5.1. *O tensor curvatura de $\tilde{M} = \varepsilon I \times_{\rho} Q_k^n(c)$ é*

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y, Z, W) &= \left(-\varepsilon \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{c}{\rho^2} \right) \langle (X \wedge Y)Z, W \rangle \\ &+ \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{\varepsilon c}{\rho^2} \right) (\langle X, Z \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \\ &- \langle Y, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle + \langle Y, W \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle), \end{aligned} \quad (1.12)$$

para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$.

Demonstração. Para $c \neq 0$, usando (1.1) e (1.11), temos

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y, Z, W) &= \bar{R}(X, Y, Z, W) + \varepsilon_0 \langle A_{e_0} Y, Z \rangle \langle A_{e_0} X, W \rangle - \varepsilon_0 \langle A_{e_0} X, Z \rangle \langle A_{e_0} Y, W \rangle \\ &= \bar{R}(X, Y, Z, W) + \varepsilon_0 \left(\frac{-c}{\rho} \right)^2 (\langle Y - \varepsilon \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t, Z \rangle \langle X - \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \partial_t, W \rangle \\ &- \langle X - \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \partial_t, Z \rangle \langle Y - \varepsilon \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t, W \rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{R}(X, Y, Z, W) + \frac{\varepsilon_0}{\rho^2} (\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \varepsilon \langle Y, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \\
&\quad - \varepsilon \langle X, W \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle + \langle X, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \\
&\quad - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle + \varepsilon \langle X, Z \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle + \varepsilon \langle Y, W \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \\
&\quad - \langle Y, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle) \\
&= \bar{R}(X, Y, Z, W) + \frac{\varepsilon_0}{\rho^2} \langle (X \wedge Y)Z, W \rangle + \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\rho^2} (\langle X, Z \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \\
&\quad - \langle Y, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle + \langle Y, W \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle).
\end{aligned}$$

Logo, usando a Proposição 1.3.1 e como $\varepsilon_0 = c$, temos o resultado. Para $c = 0$, $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_n^k(c)$ é totalmente geodésica em $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{E}_{n+1}$, ou seja, $\tilde{R}(X, Y, Z, W) = \bar{R}(X, Y, Z, W)$, para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$. Assim, vale (1.12). \square

1.6 Referencial móvel

A técnica do referencial móvel foi desenvolvida por Élie Cartan. Podemos encontrar definições, resultados básicos e outros detalhes em [11]. Usaremos a seguinte convenção para os índices, salvo que se especifique o contrário.

$$1 \leq i, j, k, l \leq n; \quad 1 \leq u, v, w, \dots \leq n+1; \quad 0 \leq \alpha, \beta, \gamma, \dots \leq n+1.$$

Seja $f : M \rightarrow \tilde{M} = \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_n^k(c)$ uma hipersuperfície. Como $\tilde{\Xi} : \tilde{M} \rightarrow \bar{M} = \varepsilon I \times_\rho \mathbb{E}^{n+1}$ é uma hipersuperfície, consideremos um referencial local ortonormal $\{e_0, e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ de campos vetoriais em \bar{M} , definido num subconjunto aberto e conexo \mathcal{U} de $(\tilde{\Xi} \circ f)(M)$, tal que e_1, \dots, e_n são tangentes a $(\tilde{\Xi} \circ f)(M)$ e e_{n+1} é normal a $(\tilde{\Xi} \circ f)(M)$, com $\varepsilon_\alpha = \langle e_\alpha, e_\alpha \rangle = \pm 1$. Definimos a matriz $G = (\varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta})$, em que δ é o delta de Kronecker. Sejam $\omega_0, \dots, \omega_{n+1}$ as 1-formas duais de $(e_0, e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$, ou seja, $\omega_\alpha(e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$. Em particular, $\omega_r|_{\mathfrak{X}(M)} = 0$, $r \in \{0, n+1\}$. Também, para $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que $\omega_\alpha(X) = \varepsilon_\alpha \langle e_\alpha, X \rangle$.

Seja $\{E_0, \dots, E_n\}$ o referencial ortonormal canônico de \mathbb{E}^{n+1} , definimos o referencial ortonormal $\{\bar{E}_0, \dots, \bar{E}_{n+1}\} = \left\{ \frac{E_0}{\rho}, \dots, \frac{E_n}{\rho}, \partial_t \right\}$ de $\bar{M} = \varepsilon I \times_\rho \mathbb{E}^{n+1}$. Se precisar, podemos reordenar o referencial $\{\bar{E}_0, \dots, \bar{E}_{n+1}\}$ para obter $\langle \bar{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha \rangle = \varepsilon_\alpha$ e sem perda de generalidade, consideremos o caso em que $\bar{E}_{n+1} = \partial_t$. Segue que $\varepsilon = \langle \partial_t, \partial_t \rangle = \varepsilon_{n+1}$.

Consideremos as funções $B_{\alpha\beta} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, em que $B_{\alpha\beta}(x)$ é dada por $\langle \bar{E}_\alpha, e_\beta \rangle$ em x , para cada ponto $x \in \mathcal{U}$. Seja $\mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ o espaço das matrizes de ordem $(n+2) \times (n+2)$ com entradas em \mathbb{R} , com a topologia que faz ele homeomorfo a $\mathbb{R}^{(n+2)^2}$, definamos a função

$B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$, tal que $B(x)$ é a matriz $(B_{\alpha\beta})$ em x . Por simplicidade, denotaremos também por B a matriz $B(x)$. Observemos que

$$\sum_{\mu} \varepsilon_{\mu} B_{\mu\alpha} B_{\mu\beta} = \sum_{\mu} \varepsilon_{\mu} \langle \bar{E}_{\mu}, e_{\alpha} \rangle \langle \bar{E}_{\mu}, e_{\beta} \rangle = \left\langle \sum_{\mu} \varepsilon_{\mu} \langle \bar{E}_{\mu}, e_{\alpha} \rangle \bar{E}_{\mu}, e_{\beta} \right\rangle = \langle e_{\alpha}, e_{\beta} \rangle = \varepsilon_{\alpha} \delta_{\alpha\beta},$$

ou equivalentemente $B^t G B = G$, em que B^t é a matriz transposta de B . Seja q o índice de \mathbb{E}^{n+2} , consideremos o conjunto $O(q, n+2-q) = \{Z \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R}) \mid Z^t G Z = G\}$.

De fato, $O(q, n+2-q)$ é o conjunto das matrizes Z em $\mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$, tais que preservam o produto interno g_0 de \mathbb{E}^{n+2} , ou seja, para quaisquer $u, v \in \mathbb{E}^{n+2}$, temos que

$$g_0(Zu, Zv) = \langle GZu, Zv \rangle_{\mathbb{R}} = \langle (Z^{-1})^t Gu, Zv \rangle_{\mathbb{R}} = \langle Gu, Z^{-1}Zv \rangle_{\mathbb{R}} = \langle Gu, v \rangle_{\mathbb{R}} = g_0(u, v),$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ é o produto interno usual de \mathbb{R}^{n+2} . Assim, $O(q, n+2-q)$ corresponde ao conjunto das isometrias lineares de \mathbb{E}^{n+2} . Observamos que \mathbb{E}^{n+2} é isomorfo ao espaço tangente em cada ponto de $\varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{E}^{n+1}$.

Proposição 1.6.1. $O(q, n+2-q) = \{Z \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R}) \mid Z^t G Z = G\}$ é um grupo de Lie. A álgebra de Lie associada com $O(q, n+2-q)$ é $\mathfrak{s} = \{H \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R}) \mid H^t G + G H = 0\}$.

Demonstração. Observemos, que se $Z \in O(q, n+2-q)$, então $\det(Z^t G Z) = \det(G) \Leftrightarrow \det(Z^t) \det(Z) = 1$, mas, $\det(Z^t) = \det(Z)$, logo $\det(Z) = \pm 1$. Portanto, $O(q, n+2-q)$ é um subconjunto de $GL_{n+2}(\mathbb{R})$, o conjunto de todas as matrizes invertíveis de ordem $(n+2) \times (n+2)$, que é um grupo de Lie.

Se $Z \in O(q, n+2-q)$, então $Z^t G Z = G \Leftrightarrow G = (Z^{-1})^t G Z^{-1}$, em que Z^{-1} é a matriz inversa de Z , segue que $Z^{-1} \in O(q, n+2-q)$. Também, se $A, C \in O(q, n+2-q)$ temos que $(AC)^t G (AC) = C^t A^t G A C = C^t G C = G$, logo $AC \in O(q, n+2-q)$, portanto $O(q, n+2-q)$ é um subgrupo de $GL_{n+2}(\mathbb{R})$.

Agora, provemos que $O(q, n+2-q)$ é uma variedade diferenciável. Consideremos $\mathcal{S} = \{Z \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R}) \mid Z^t = Z\}$, o conjunto das matrizes simétricas em $\mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$. Como $(A^t G A)^t = A^t G^t A = A^t G A$, podemos definir a função $g : \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{(n+2)^2} \rightarrow \mathcal{S}$, dada por $g(A) = A^t G A$. Observemos que $O(q, n+2-q) = g^{-1}(G)$.

Como o produto de matrizes é diferenciável (as componentes do produto são polinômios nas componentes das matrizes), segue que g é diferenciável. Calculemos a diferencial de g . Seja $A \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$, se identificamos o espaço tangente a $\mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ em A com $\mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$,

temos que

$$\begin{aligned}
 dg_A(C) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(A + hC)^t G(A + hC) - A^t G A}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A^t G A + A^t G h C + h C^t G A + h^2 C^t G C - A^t G A}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (A^t G C + C^t G A + h C^t G C) \\
 &= A^t G C + C^t G A.
 \end{aligned}$$

Observemos que dg_A é sobrejetora se $A \in O(q, n + 2 - q)$. Como o conjunto das matrizes simétricas \mathcal{S} é um espaço vetorial, podemos identificar $T_{g(A)}\mathcal{S}$ com \mathcal{S} . Seja $M \in T_{g(A)}\mathcal{S} = \mathcal{S}$, procuramos $C \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ tal que $A^t G C + C^t G A = M$. Como M é simétrica, podemos escrever $A^t G C + (A^t G C)^t = \frac{M + M^t}{2}$, e comparando os dois lados da igualdade, concluímos que $A^t G C = \frac{1}{2}M$. Como $A \in O(q, n + 2 - q)$, temos que A é invertível. Logo, $C = \frac{1}{2}G(A^t)^{-1}M$ e portanto, dg_A é sobrejetora se $A \in O(q, n + 2 - q)$.

Como $O(q, n + 2 - q) = g^{-1}(G)$, segue que G é um valor regular de g e $O(q, n + 2 - q)$ é variedade diferenciável. Portanto $O(q, n + 2 - q)$ é grupo de Lie, tal que

$$\dim O(q, n + 2 - q) = \dim \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R}) - \dim \mathcal{S} = (n + 2)^2 - \frac{(n + 2)(n + 3)}{2} = \frac{(n + 2)(n + 1)}{2}.$$

Como é usual, identificaremos a álgebra de Lie \mathfrak{s} de $O(q, n + 2 - q)$, com o espaço tangente a $O(q, n + 2 - q)$ na matriz identidade I_{n+2} . Portanto,

$$\mathfrak{s} = \{H \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R}) \mid H^t G + G H = 0\}.$$

□

Especificamente, se $q = 0$ ou $q = n + 2$, então $O(q, n + 2 - q)$ é simplesmente o conjunto de matrizes ortogonais e possui duas componentes conexas, mas no caso em que $0 < q < n + 2$, acontece que $O(q, n + 2 - q)$ tem quatro componentes conexas (ver [17, pag 237]). De fato, \mathbf{S} é o conjunto das matrizes em $O(q, n + 2 - q)$, tais que preservam a orientação dos vetores tipo-espaço e tipo-tempo.

Observação 1.6.2. Como \mathcal{U} é conexo e a matriz $B = \langle \bar{E}_\alpha, e_\beta \rangle$ satisfaz $B^t G B = G$, a imagem da função $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$, está contida numa componente conexa de $O(q, n + 2 - q)$.

Denotamos por \mathbf{S} a componente conexa de $O(q, n+2-q)$ contendo a matriz identidade,

$$I_{n+2} \in \mathbf{S} \subset \{Z \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R}) \mid Z^t G Z = G, \det Z = 1\} \subset O(q, n+2-q).$$

Além disso, $\mathfrak{s} = \{H \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R}) \mid H^t G + G H = 0\}$ é a álgebra de Lie associada com \mathbf{S} , pois \mathbf{S} é aberto em $O(q, n+2-q)$.

Consideremos agora, a aplicação inclusão $g : \mathbf{S} \rightarrow \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$, ou seja, $g(Z) = Z$ para todo $Z \in \mathbf{S}$. Logo, $dg_Z : T_Z \mathbf{S} \rightarrow T_Z \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ é dada por $dg_Z(V) = V$. Definimos a *forma de Maurer-Cartan* de \mathbf{S} como $\omega_Z = g(Z)^{-1} dg_Z$. Para $V \in T_Z \mathbf{S}$, temos que $\omega_Z(V) = g(Z)^{-1} dg_Z(V) = Z^{-1} V$ pertence a \mathfrak{s} . Por simplicidade, denotamos a forma de Maurer-Cartan por $\omega_Z = Z^{-1} dZ$, assim,

$$\omega_Z(V) = Z^{-1} dZ(V) = Z^{-1} V,$$

para todo $V \in T_Z \mathbf{S}$.

Podemos calcular a derivada exterior da forma de Maurer-Cartan ω_Z , como segue: Consideremos a matriz identidade I_{n+2} como uma aplicação constante de \mathbf{S} em $\mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$. Assim, usando que $g(Z)(g(Z))^{-1} = ZZ^{-1} = I_{n+2}$, para qualquer $Z \in \mathbf{S}$, temos que $0 = d(I_{n+2}) = d(gg^{-1}) = dg(g^{-1}) + gd(g^{-1})$, e então $d(g^{-1}) = -g^{-1}(dg)(g^{-1})$. Usando isso, calculamos

$$\begin{aligned} d\omega_Z &= d(g^{-1}) \wedge dg \\ &= -g^{-1}(dg)(g^{-1}) \wedge dg \\ &= -g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg \\ &= -\omega_Z \wedge \omega_Z, \end{aligned}$$

o qual denotamos por

$$d(Z^{-1} dZ) = -Z^{-1} dZ \wedge Z^{-1} dZ. \quad (1.13)$$

Dada uma variedade diferenciável \mathbf{M} de dimensão n , $\Lambda^1(\mathbf{M})$ é o conjunto de todas as 1-formas definidas em \mathbf{M} . Definimos o conjunto $\mathfrak{s}(\Lambda^1(\mathbf{M}))$ de todas as matrizes $\mathcal{Y} \in \mathfrak{s}$, cujas entradas são 1-formas definidas em \mathbf{M} . Logo, faz sentido calcular $Z\mathcal{Y}$, para $Z \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{Y} \in \mathfrak{s}(\Lambda^1(\mathbf{M}))$.

Definamos agora a 1-forma de conexão $\Omega = (\omega_{\alpha\beta})$, em que

$$\omega_{\alpha\beta}(X) = \varepsilon_\alpha \langle e_\alpha, \bar{\nabla}_X e_\beta \rangle, \text{ para qualquer } X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}). \quad (1.14)$$

Como $0 = X \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \langle \bar{\nabla}_X e_\alpha, e_\beta \rangle + \langle e_\alpha, \bar{\nabla}_X e_\beta \rangle$, temos que $\omega_{\beta\alpha}(X) = \varepsilon_\beta \langle e_\beta, \bar{\nabla}_X e_\alpha \rangle =$

$-\varepsilon_\beta(\varepsilon_\alpha)^2\langle e_\alpha, \bar{\nabla}_X e_\beta \rangle = -\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\omega_{\alpha\beta}(X)$, assim, a matriz Ω satisfaz $\omega_{\beta\alpha} = -\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\omega_{\alpha\beta}$, ou equivalentemente, $\Omega^t G + G\Omega = 0$, pois

$$\Omega^t G + G\Omega = (\omega_{\alpha\beta})^t(\varepsilon_\alpha\delta_{\alpha\beta}) + (\varepsilon_\alpha\delta_{\beta\alpha})(\omega_{\alpha\beta}) = (\varepsilon_\beta\omega_{\beta\alpha}) + (\varepsilon_\alpha\omega_{\alpha\beta}) = (-\varepsilon_\alpha\omega_{\alpha\beta}) + (\varepsilon_\alpha\omega_{\alpha\beta}) = 0,$$

isso significa que $\Omega \in \mathfrak{s}(A^1(\mathbf{M}))$. Em particular,

$$\nabla e_i = \sum_k \omega_{ki} e_k, \quad \tilde{\nabla} e_u = \sum_v \omega_{vu} e_v, \quad \bar{\nabla} e_\alpha = \sum_\gamma \omega_{\gamma\alpha} e_\gamma. \quad (1.15)$$

Seja T a projeção de ∂_t no fibrado tangente de $(\tilde{\Xi} \circ f)(M)$. Definimos a 1-forma $\tau(X) = \langle T, X \rangle$, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, e as funções $T_k = \langle e_k, T \rangle$, $T_{n+1} = \varepsilon_{n+1}\vartheta$ e $T_0 = 0$. Observemos que $\sum_k T_k \omega_k = \tau$. Além disso, podemos recuperar os vetores $e_\beta = \sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma\beta} \bar{E}_\gamma$. Consequentemente, usando (1.15),

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{e_\alpha} e_\beta &= \sum_\mu \omega_{\mu\beta}(e_\alpha) e_\mu \\ &= \sum_\mu \omega_{\mu\beta}(e_\alpha) \left(\sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma\mu} \bar{E}_\gamma \right) \\ &= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma \left(\sum_\mu \omega_{\mu\beta}(e_\alpha) B_{\gamma\mu} \right) \bar{E}_\gamma. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Também,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{e_\alpha} e_\beta &= \bar{\nabla}_{e_\alpha} \left(\sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma\beta} \bar{E}_\gamma \right) \\ &= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma e_\alpha(B_{\gamma\beta}) \bar{E}_\gamma + \sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma\beta} \bar{\nabla}_{e_\alpha} \bar{E}_\gamma \\ &= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma dB_{\gamma\beta}(e_\alpha) \bar{E}_\gamma + \sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma\beta} \bar{\nabla}_{\sum_\mu \varepsilon_\mu B_{\mu\alpha} \bar{E}_\mu} \bar{E}_\gamma \\ &= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma dB_{\gamma\beta}(e_\alpha) \bar{E}_\gamma + \sum_{\mu,\gamma} \varepsilon_\gamma \varepsilon_\mu B_{\mu\alpha} B_{\gamma\beta} \bar{\nabla}_{\bar{E}_\mu} \bar{E}_\gamma. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Por agora, nos concentremos no último sumando de (1.17). Como $\bar{E}_\mu = \frac{E_\mu}{\rho}$ e $\bar{E}_{n+1} = \partial_t$, usando o Lema (1.2.4), para $\gamma, \mu \neq n+1$, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\bar{E}_{n+1}} \bar{E}_{n+1} &= \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = 0, \\ \bar{\nabla}_{\bar{E}_\mu} \bar{E}_{n+1} &= \frac{1}{\rho} \bar{\nabla}_{E_\mu} \partial_t = \frac{\rho'}{\rho^2} E_\mu = \frac{\rho'}{\rho} \bar{E}_\mu, \\ \bar{\nabla}_{\bar{E}_{n+1}} \bar{E}_\gamma &= -\frac{\rho'}{\rho^2} E_\gamma + \frac{1}{\rho} \bar{\nabla}_{\partial_t} E_\gamma = -\frac{\rho'}{\rho^2} E_\gamma + \frac{\rho'}{\rho^2} E_\gamma = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\bar{E}_\mu} \bar{E}_\gamma &= \frac{1}{\rho} E_\mu \left(\frac{1}{\rho} \right) E_\gamma + \frac{1}{\rho^2} \bar{\nabla}_{E_\mu} e_\gamma = \frac{1}{\rho^2} \bar{\nabla}_{E_\mu} e_\gamma \\ &= \frac{1}{\rho^2} * \nabla_{E_\mu}^0 E_\gamma - \frac{\varepsilon \rho' \langle \bar{E}_\mu, \bar{E}_\gamma \rangle}{\rho} \partial_t = -\frac{\varepsilon_\mu \delta_{\mu\gamma} \varepsilon \rho'}{\rho} \partial_t,\end{aligned}$$

pois $\nabla_{E_\mu}^0 E_\gamma = 0$ em \mathbb{E}^{n+1} . Consequentemente, pelo fato que todos os sumandos em (1.17), para $\mu = n + 1$ são zero, obtemos, com $0 \leq \gamma, \mu \leq n + 1$,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{e_\alpha} e_\beta - \sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma dB_{\gamma\beta}(e_\alpha) \bar{E}_\gamma &= \sum_{\mu, \gamma} \varepsilon_\gamma \varepsilon_\mu B_{\mu\alpha} B_{\gamma\beta} \bar{\nabla}_{\bar{E}_\mu} \bar{E}_\gamma \\ &= \sum_{\mu, \gamma < n+1} \varepsilon_\gamma \varepsilon_\mu B_{\mu\alpha} B_{\gamma\beta} \bar{\nabla}_{\bar{E}_\mu} \bar{E}_\gamma + \sum_{\mu < n+1} \varepsilon_{n+1} \varepsilon_\mu B_{\mu\alpha} B_{n+1\beta} \bar{\nabla}_{\bar{E}_\mu} \bar{E}_{n+1} \\ &= -\frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \sum_{\gamma < n+1} \varepsilon_\gamma B_{\gamma\beta} \left(\sum_{\mu} B_{\mu\alpha} \delta_{\mu\gamma} \right) \partial_t + \frac{\varepsilon_{n+1} \rho'}{\rho} \sum_{\mu < n+1} \varepsilon_\mu B_{\mu\alpha} B_{n+1\beta} \bar{E}_\mu \\ &= -\frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \sum_{\gamma < n+1} \varepsilon_\gamma B_{\gamma\alpha} B_{\gamma\beta} \partial_t + \frac{\varepsilon_{n+1} \rho'}{\rho} \sum_{\mu < n+1} \varepsilon_\mu B_{\mu\alpha} B_{n+1\beta} \bar{E}_\mu.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Logo, comparando coordenadas em (1.16) e (1.18), para $\bar{E}_{n+1} = \partial_t$, obtemos

$$\sum_{\mu} \omega_{\mu\beta}(e_\alpha) B_{n+1\mu} = dB_{n+1\beta}(e_\alpha) - \frac{\rho'}{\rho} \sum_{\gamma < n+1} \varepsilon_\gamma B_{\gamma\alpha} B_{\gamma\beta}\tag{1.19}$$

e para \bar{E}_γ , $\gamma = 0, \dots, n$, obtemos

$$\sum_{\mu} \omega_{\mu\beta}(e_\alpha) B_{\gamma\mu} = dB_{\gamma\beta}(e_\alpha) + \frac{\varepsilon_{n+1} \rho'}{\rho} B_{\gamma\alpha} B_{n+1\beta}.\tag{1.20}$$

Como $B_{\mu\alpha} = \langle \bar{E}_\mu, \sum_{\gamma} \omega_\gamma(e_\alpha) e_\gamma \rangle = \sum_{\gamma} B_{\mu\gamma} \omega_\gamma(e_\alpha)$, pela equação (1.19), temos que

$$\begin{aligned}\sum_{\mu} B_{n+1\mu} \omega_{\mu\beta} - dB_{n+1\beta} &= -\frac{\rho'}{\rho} \sum_{\gamma} \sum_{\mu < n+1} \varepsilon_\mu B_{\mu\beta} B_{\mu\gamma} \omega_\gamma \\ &= -\frac{\rho'}{\rho} \sum_{\gamma, \mu} \varepsilon_\mu B_{\mu\beta} B_{\mu\gamma} \omega_\gamma + \frac{\rho'}{\rho} \sum_{\gamma} \varepsilon_{n+1} B_{n+1\beta} B_{n+1\gamma} \omega_\gamma \\ &= -\frac{\rho'}{\rho} \sum_{\gamma} \varepsilon_\beta \delta_{\beta\gamma} \omega_\gamma + \frac{\varepsilon_{n+1} \rho'}{\rho} B_{n+1\beta} \sum_{\gamma} B_{n+1\gamma} \omega_\gamma \\ &= -\frac{\rho'}{\rho} \varepsilon_\beta \omega_\beta + \frac{\varepsilon_{n+1} \rho'}{\rho} B_{n+1\beta} \sum_{\kappa} B_{n+1\kappa} \omega_\kappa,\end{aligned}$$

e pela equação (1.20), temos que $\sum_{\mu} B_{\gamma\mu} \omega_{\mu\beta} = dB_{\gamma\beta} + \frac{\varepsilon_{n+1} \rho'}{\rho} B_{n+1\beta} \sum_{\kappa} B_{\gamma\kappa} \omega_\kappa$, para

qualquer $\gamma = 0, \dots, n$. Em resumo podemos escrever, fazendo $\gamma = \alpha$,

$$\sum_{\mu} B_{\alpha\mu}\omega_{\mu\beta} = dB_{\alpha\beta} + \frac{\varepsilon_{n+1}\rho'}{\rho} B_{n+1\beta} \sum_{\kappa} B_{\alpha\kappa}\omega_{\kappa} - \frac{\rho'}{\rho} \varepsilon_{\beta}\delta_{\alpha n+1}\omega_{\beta}.$$

Como $B^tGB = G$ implica $B^{-1} = GB^tG$, em que $B^{-1} = (B^{\alpha\beta})$, segue que $B^{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha}B_{\beta\alpha}\varepsilon_{\beta}$. Logo,

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma} B^{\alpha\gamma} \sum_{\mu} B_{\gamma\mu}\omega_{\mu\beta} \\ &= \sum_{\gamma} B^{\alpha\gamma} dB_{\gamma\beta} + \frac{\varepsilon_{n+1}\rho'}{\rho} B_{n+1\beta} \sum_{\gamma} B^{\alpha\gamma} \sum_{\kappa} B_{\gamma\kappa}\omega_{\kappa} \\ & \quad - \frac{\rho'}{\rho} \varepsilon_{\beta}\omega_{\beta} \sum_{\gamma} B^{\alpha\gamma}\delta_{\gamma n+1} \\ &= \sum_{\gamma} B^{\alpha\gamma} dB_{\gamma\beta} + \frac{\varepsilon_{n+1}\rho'}{\rho} B_{n+1\beta} \sum_{\kappa} \left(\sum_{\gamma} B^{\alpha\gamma} B_{\gamma\kappa} \right) \omega_{\kappa} \\ & \quad - \frac{\rho'}{\rho} \varepsilon_{\beta}\omega_{\beta} B^{\alpha n+1} \\ &= \sum_{\gamma} B^{\alpha\gamma} dB_{\gamma\beta} + \frac{\varepsilon_{n+1}\rho'}{\rho} B_{n+1\beta} \sum_{\kappa} \delta_{\alpha\kappa}\omega_{\kappa} - \frac{\rho'}{\rho} \varepsilon_{\beta}\omega_{\beta}\varepsilon_{\alpha}\varepsilon_{n+1}B_{n+1\alpha} \\ &= \sum_{\gamma} B^{\alpha\gamma} dB_{\gamma\beta} + \frac{\varepsilon_{n+1}\rho'}{\rho} B_{n+1\beta}\omega_{\alpha} - \frac{\varepsilon_{n+1}\rho'}{\rho} \varepsilon_{\beta}\varepsilon_{\alpha}B_{n+1\alpha}\omega_{\beta}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Como o lado esquerdo de (1.21) é

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma} B^{\alpha\gamma} \sum_{\mu} B_{\gamma\mu}\omega_{\mu\beta} &= \sum_{\mu} \left(\sum_{\gamma} B_{\alpha\gamma} B_{\gamma\mu} \right) \omega_{\mu\beta} \\ &= \sum_{\mu} \delta_{\alpha\mu}\omega_{\mu\beta} \\ &= \omega_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

substituindo em (1.21), obtemos finalmente que

$$\omega_{\alpha\beta} = \sum_{\mu} B^{\alpha\mu} dB_{\mu\beta} + \frac{\varepsilon_{n+1}\rho'}{\rho} (B_{n+1\beta}\omega_{\alpha} - \varepsilon_{\beta}\varepsilon_{\alpha}B_{n+1\alpha}\omega_{\beta}),$$

ou equivalentemente,

$$\Omega - \mathbf{X} = B^{-1}dB, \text{ em que } \mathbf{X}_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon_{n+1}\rho'}{\rho} (B_{n+1\beta}\omega_{\alpha} - \varepsilon_{\beta}\varepsilon_{\alpha}B_{n+1\alpha}\omega_{\beta}). \tag{1.22}$$

Notemos que $\mathbf{X} \in \mathfrak{s}(\Lambda^1(\mathbf{M}))$ e assim $B^{-1}dB \in \mathfrak{s}(\Lambda^1(\mathbf{M}))$ (ver exemplos no Apêndice A).

1.7 Distribuições integráveis e o teorema de Frobenius

Seja N uma variedade de dimensão $n + k$, suponhamos que em cada ponto $p \in N$ é dado um subespaço Δ_p de $T_p N$, de dimensão n . Suponhamos que numa vizinhança U_p de cada $p \in N$ existem n campos vetoriais diferenciáveis linearmente independentes X_1, \dots, X_n , que formam uma base para Δ_q , para todo $q \in U_p$.

Definição 1.7.1. Seja $\Delta = \cup_{p \in N} \Delta_p$. Dizemos que Δ é uma *distribuição* diferenciável de dimensão n em N e que $\{X_1, \dots, X_n\}$ é um referencial local de Δ .

Agora definimos um tipo de distribuição importante:

Definição 1.7.2. Uma distribuição Δ numa variedade N é *involutiva*, se existe um referencial local X_1, \dots, X_n numa vizinhança de cada ponto, tal que

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k,$$

em que $1 \leq i, j \leq n$ e as c_{ij}^k são funções diferenciáveis na vizinhança do ponto.

Para um exemplo de uma distribuição involutiva, consideremos $N = \mathbb{R}^{n+k}$ e seja Δ gerada por $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \dots, n$. Então, a distribuição é o subespaço de dimensão n , formado por todos os vetores paralelos a \mathbb{R}^n em cada ponto q de $N = \mathbb{R}^{n+k}$.

Definição 1.7.3. Seja Δ uma distribuição diferenciável numa variedade N de dimensão $n + k$, seja n a dimensão de Δ . Dizemos que Δ é *completamente integrável*, se cada ponto $p \in N$ tem uma vizinhança coordenada (U_p, φ) tal que, se x_1, \dots, x_{n+k} denotam as coordenadas locais, então os n vetores $E_i = \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})$, $i = 1, \dots, n$, são um referencial local em U_p para Δ .

Observemos que se Δ é uma distribuição completamente integrável em N , então, para cada ponto $q \in U_p$ existe uma variedade \bar{N} de dimensão n passando por q , tal que $T_q \bar{N} = \Delta_q$. Assim, $\dim \bar{N} = n$. De fato, se (a_1, \dots, a_{n+k}) denota às coordenadas de q , então uma variedade \bar{N} passando por q é a n -fatia definida por $x_{n+1} = a_{n+1}, \dots, x_{n+k} = a_{n+k}$, ou seja, $\bar{N} = \varphi^{-1}\{x \in \varphi(U_p) \mid x_j = a_j, j = n+1, \dots, n+k\}$, que é uma fatia de U_p . Neste caso, a distribuição é involutiva, pois

$$[E_i, E_j] = \varphi_*^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Assim, se uma distribuição é completamente integrável, isso implica que é involutiva. O teorema seguinte afirma que a recíproca vale.

Teorema 1.7.1. (*Frobenius*) *Uma distribuição Δ numa variedade M é completamente integrável se, e só se, é involutiva.*

Uma demonstração deste resultado está em [4].

Capítulo 2

Teorema Fundamental

Neste capítulo adaptamos as equações de Gauss e de Codazzi-Mainardi para o caso de uma hipersuperfície M do produto torcido $\widetilde{M} = \varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{Q}_k^n(c)$ e deduzimos mais duas equações, que têm a ver com as componentes tangente e normal a M de ∂_t . Logo, enunciaremos e provamos o resultado principal que é um teorema fundamental para hipersuperfícies não-degeneradas do espaço \widetilde{M} .

2.1 Hipersuperfícies não-degeneradas de $\varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{Q}_k^n(c)$

Seja $f : M^n \rightarrow \widetilde{M} = \varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{Q}_k^n(c)$, em que $n \geq 2$, uma hipersuperfície não-degenerada. Seja ∇ a conexão de Levi-Civita em M . Seja e_{n+1} um (localmente definido) campo vetorial unitário normal a M , com $\varepsilon_{n+1} = \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle = \pm 1$. Ao longo de M , podemos decompor o campo vetorial ∂_t nas partes normal e tangente a M :

$$\partial_t = T + \vartheta e_{n+1},$$

em que T é tangente a M e $\vartheta = \varepsilon_{n+1} \langle \partial_t, e_{n+1} \rangle$. Definimos a 1-forma em M dada por $\tau(X) = \langle X, T \rangle$, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Também, dado um vetor X tangente a M , podemos decompor X na parte tangente a $\{t\} \times \mathbb{Q}_k^n(c)$ e a componente na direção de ∂_t , assim $X = \widetilde{X} + x\partial_t$, com $x = \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle$. Analogamente, $e_{n+1} = \widetilde{e}_{n+1} + h\partial_t$, com $h = \varepsilon \langle e_{n+1}, \partial_t \rangle$.

Lema 2.1.1. *Com as condições prévias,*

1. $\varepsilon h = \langle e_{n+1}, \partial_t \rangle = \varepsilon_{n+1} \vartheta$,
2. $\varepsilon x = \langle X, \partial_t \rangle = \langle X, T \rangle$,
3. $\langle \widetilde{X}, \widetilde{e}_{n+1} \rangle = -\varepsilon \varepsilon_{n+1} \vartheta \langle X, T \rangle$.

Demonstração. Como $h = \varepsilon \langle e_{n+1}, \partial_t \rangle$ e $\vartheta = \varepsilon_{n+1} \langle \partial_t, e_{n+1} \rangle$, segue que

$$\varepsilon h = \langle e_{n+1}, \partial_t \rangle = \varepsilon_{n+1} \vartheta.$$

Também,

$$\langle X, \partial_t \rangle = \langle X, T + \vartheta e_{n+1} \rangle = \langle X, T \rangle + \vartheta \langle X, e_{n+1} \rangle = \langle X, T \rangle,$$

e por outro lado,

$$\langle X, \partial_t \rangle = \langle \tilde{X} + x \partial_t, \partial_t \rangle = \langle \tilde{X}, \partial_t \rangle + x \langle \partial_t, \partial_t \rangle = \varepsilon x.$$

Portanto, $\varepsilon x = \langle X, \partial_t \rangle = \langle X, T \rangle$.

Finalmente, usando (1) e (2), temos que

$$0 = \langle X, e_{n+1} \rangle = \langle \tilde{X}, \tilde{e}_{n+1} \rangle + \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \langle e_{n+1}, \partial_t \rangle = \langle \tilde{X}, \tilde{e}_{n+1} \rangle + \varepsilon \varepsilon_{n+1} \vartheta \langle X, T \rangle.$$

Assim, $\langle \tilde{X}, \tilde{e}_{n+1} \rangle = -\varepsilon \varepsilon_{n+1} \vartheta \langle X, T \rangle$. □

Observemos que, se $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} \langle \text{grad}(\pi), X \rangle &= d\pi(X) \\ &= d\pi(\tilde{X} + x \partial_t) \\ &= x \\ &= \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \\ &= \varepsilon \langle X, T + \vartheta e_{n+1} \rangle \\ &= \varepsilon \langle X, T \rangle, \end{aligned}$$

assim, $T = \varepsilon \text{grad}(\pi)$.

Seja $A_{e_{n+1}}$ o operador de Weingarten de M na direção de e_{n+1} , temos que

Proposição 2.1.2. *O tensor curvatura R de M em $\tilde{M} = \varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{Q}_k^n(c)$, é dado por*

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= \left(-\varepsilon \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{c}{\rho^2} \right) \langle (X \wedge Y)Z, W \rangle \\ &\quad + \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{\varepsilon c}{\rho^2} \right) (\langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle \langle W, T \rangle \\ &\quad - \langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle \langle W, T \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle + \langle Y, W \rangle \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle) \\ &\quad + \varepsilon_{n+1} (\langle A_{e_{n+1}} Y, Z \rangle \langle A_{e_{n+1}} X, W \rangle - \langle A_{e_{n+1}} X, Z \rangle \langle A_{e_{n+1}} Y, W \rangle), \end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, usando (1.1) e a Proposição 1.5.1, obtemos

$$\begin{aligned}
R(X, Y, Z, W) &= \widetilde{R}(X, Y, Z, W) + \varepsilon_{n+1} \langle A_{e_{n+1}} Y, Z \rangle \langle A_{e_{n+1}} X, W \rangle - \varepsilon_{n+1} \langle A_{e_{n+1}} X, Z \rangle \langle A_{e_{n+1}} Y, W \rangle \\
&= \left(-\varepsilon \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{c}{\rho^2} \right) \langle (X \wedge Y) Z, W \rangle \\
&\quad + \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{\varepsilon c}{\rho^2} \right) (\langle X, Z \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \\
&\quad - \langle Y, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle + \langle Y, W \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle) \\
&\quad + \varepsilon_{n+1} (\langle A_{e_{n+1}} Y, Z \rangle \langle A_{e_{n+1}} X, W \rangle - \langle A_{e_{n+1}} X, Z \rangle \langle A_{e_{n+1}} Y, W \rangle).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Pelo Lema 2.1.1, temos $\langle X, \partial_t \rangle = \langle X, T \rangle$, $\langle Y, \partial_t \rangle = \langle Y, T \rangle$, $\langle Z, \partial_t \rangle = \langle Z, T \rangle$ e $\langle W, \partial_t \rangle = \langle W, T \rangle$. Substituindo em (2.1), obtemos o resultado. \square

Proposição 2.1.3. *A equação de Codazzi-Mainardi de M em $\widetilde{M} = \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, é dada por*

$$(\nabla_X A_{e_{n+1}})Y - (\nabla_Y A_{e_{n+1}})X = \varepsilon_{n+1} \vartheta \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{\varepsilon c}{\rho^2} \right) (X \wedge Y)T, \tag{2.2}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Por (1.2), precisamos calcular $\widetilde{R}(X, Y, Z, e_{n+1})$, para quaisquer campos vetoriais $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Pela Proposição 1.5.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X, Y, Z, e_{n+1}) &= \left(-\varepsilon \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{c}{\rho^2} \right) \langle (X \wedge Y) Z, e_{n+1} \rangle \\
&\quad + \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{\varepsilon c}{\rho^2} \right) (\langle X, Z \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle e_{n+1}, \partial_t \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle e_{n+1}, \partial_t \rangle \\
&\quad - \langle X, e_{n+1} \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle + \langle Y, e_{n+1} \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle).
\end{aligned}$$

Como $\langle X, e_{n+1} \rangle = \langle Y, e_{n+1} \rangle = 0$ e $\langle (X \wedge Y) Z, e_{n+1} \rangle = \langle X, Z \rangle \langle Y, e_{n+1} \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, e_{n+1} \rangle$, segue que

$$\widetilde{R}(X, Y, Z, e_{n+1}) = \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{\varepsilon c}{\rho^2} \right) (\langle X, Z \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle e_{n+1}, \partial_t \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle e_{n+1}, \partial_t \rangle).$$

Pelo Lema 2.1.1, $\langle e_{n+1}, \partial_t \rangle = \varepsilon_{n+1} \vartheta$, $\langle X, \partial_t \rangle = \langle X, T \rangle$ e $\langle Y, \partial_t \rangle = \langle Y, T \rangle$, então

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y, Z, e_{n+1}) &= \varepsilon_{n+1} \vartheta \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{\varepsilon c}{\rho^2} \right) (\langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle) \\ &= \varepsilon_{n+1} \vartheta \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{\varepsilon c}{\rho^2} \right) \langle \langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y, Z \rangle \\ &= \varepsilon_{n+1} \vartheta \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{\varepsilon c}{\rho^2} \right) \langle (X \wedge Y) T, Z \rangle. \end{aligned}$$

Por (1.2), obtemos (2.2). □

Lema 2.1.4. *As seguintes equações são válidas para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

1. $\tilde{\nabla}_X \partial_t = \frac{\rho'}{\rho} (X - \varepsilon \langle X, T \rangle \partial_t)$,
2. $\nabla_X T = \frac{\rho'}{\rho} (X - \varepsilon \langle X, T \rangle T) + \vartheta A_{e_{n+1}} X$,
3. $X(\vartheta) = -\varepsilon_{n+1} \langle A_{e_{n+1}} T, X \rangle - \frac{\rho'}{\rho} \varepsilon \vartheta \langle X, T \rangle$.

Demonstração. Primeiro, lembremos que $X = \tilde{X} + \varepsilon \langle X, \partial_t \rangle \partial_t = \tilde{X} + \varepsilon \langle X, T \rangle \partial_t$. Então,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \partial_t &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \partial_t + \varepsilon \langle X, T \rangle \tilde{\nabla}_{\partial_t} \partial_t \\ &= \frac{\rho'}{\rho} \tilde{X} \\ &= \frac{\rho'}{\rho} (X - \varepsilon \langle X, T \rangle \partial_t). \end{aligned}$$

Logo, calculamos

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X T &= \tilde{\nabla}_X (\partial_t - \vartheta e_{n+1}) \\ &= \tilde{\nabla}_X \partial_t - X(\vartheta) e_{n+1} - \vartheta \tilde{\nabla}_X e_{n+1} \\ &= \frac{\rho'}{\rho} (X - \varepsilon \langle X, T \rangle \partial_t) - X(\vartheta) e_{n+1} + \vartheta A_{e_{n+1}} X \\ &= \frac{\rho'}{\rho} (X - \varepsilon \langle X, T \rangle (T + \vartheta e_{n+1})) - X(\vartheta) e_{n+1} + \vartheta A_{e_{n+1}} X \\ &= \frac{\rho'}{\rho} (X - \varepsilon \langle X, T \rangle T) + \vartheta A_{e_{n+1}} X - \frac{\rho'}{\rho} \varepsilon \vartheta \langle X, T \rangle e_{n+1} - X(\vartheta) e_{n+1}. \end{aligned}$$

Pela fórmula de Gauss $\tilde{\nabla}_X T = \nabla_X T + \varepsilon_{n+1} \langle A_{e_{n+1}} X, T \rangle e_{n+1}$. Logo, comparando a parte tangente e a parte normal de $\tilde{\nabla}_X T$, obtemos as equações

$$\begin{aligned} \nabla_X T &= \frac{\rho'}{\rho} (X - \varepsilon \langle X, T \rangle T) + \vartheta A_{e_{n+1}} X. \\ \varepsilon_{n+1} \langle A_{e_{n+1}} X, T \rangle e_{n+1} &= -\frac{\rho'}{\rho} \varepsilon \vartheta \langle X, T \rangle e_{n+1} - X(\vartheta) e_{n+1}. \end{aligned}$$

Tomando só os coeficientes na última equação e como $A_{e_{n+1}}$ é autoadjunto, resulta

$$\varepsilon_{n+1} \langle X, A_{e_{n+1}} T \rangle = -\frac{\rho'}{\rho} \varepsilon \vartheta \langle X, T \rangle - X(\vartheta).$$

□

Finalmente, observemos que é possível escrever o operador de Weingarten A_{e_0} de \widetilde{M} em $\overline{M} = \varepsilon I \times_\rho \mathbb{E}^{n+1}$, dado na equação (1.11), como

$$\begin{aligned} A_{e_0} Y &= -\frac{c}{\rho} (Y - \varepsilon \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t) \\ &= -\frac{c}{\rho} (Y - \varepsilon \langle Y, T \rangle (T + \varepsilon_{n+1} \langle \partial_t, e_{n+1} \rangle e_{n+1})) \\ &= -\frac{c}{\rho} (Y - \varepsilon \tau(Y) T) + \frac{c}{\rho} \varepsilon \varepsilon_{n+1} \tau(Y) \langle \partial_t, e_{n+1} \rangle e_{n+1}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

para qualquer $Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$.

2.2 Teorema fundamental para hipersuperfícies não-degeneradas de $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$

Seja (M, \langle, \rangle) uma variedade semi-riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇ e tensor de curvatura R . Sejam $\varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_{n+1} \in \{-1, 1\}$ e $c \in \{-1, 0, 1\}$ tais que, ou $c = \varepsilon_0$ ou $c = 0$ e $\varepsilon_0 = 1$. Sejam $\rho : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $T_{n+1} : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $\hat{\pi} : M \rightarrow I$, funções diferenciáveis. Definimos o campo vetorial $T \in \mathfrak{X}(M)$ por $T = \varepsilon \operatorname{grad}(\hat{\pi})$, e a 1-forma $\tau(X) = \langle X, T \rangle$. Seja A um tensor de tipo (1,1) em M .

Definição 2.2.1. Dizemos que M satisfaz as **condições de estrutura**, se verifica as seguintes condições:

- (A) A é \langle, \rangle -autoadjunto;
- (B) $\varepsilon = \langle T, T \rangle + \varepsilon_{n+1} T_{n+1}^2$;
- (C) $\nabla_X T = \frac{\rho' \circ \hat{\pi}}{\rho \circ \hat{\pi}} (X - \varepsilon \tau(X) T) + \varepsilon_{n+1} T_{n+1} A X$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$;
- (D) $X(T_{n+1}) = -\langle AT, X \rangle - \varepsilon \frac{\rho' \circ \hat{\pi}}{\rho \circ \hat{\pi}} T_{n+1} \tau(X)$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$;
- (E) Equação de Codazzi-Mainardi:

$$(\nabla_X A) Y - (\nabla_Y A) X = T_{n+1} b(\tau(Y) X - \tau(X) Y),$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, em que $b = \left(\frac{\rho'' \circ \hat{\pi}}{\rho \circ \hat{\pi}} - \frac{(\rho' \circ \hat{\pi})^2}{(\rho \circ \hat{\pi})^2} + \frac{\varepsilon c}{(\rho \circ \hat{\pi})^2} \right)$;

(F) Equação de Gauss:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) = & \left(-\varepsilon \frac{(\rho' \circ \hat{\pi})^2}{(\rho \circ \hat{\pi})^2} + \frac{c}{(\rho \circ \hat{\pi})^2} \right) \langle (X \wedge Y)Z, W \rangle + b(\langle X, Z \rangle \tau(Y) \tau(W) \\ & - \langle Y, Z \rangle \tau(X) \tau(W) - \langle X, W \rangle \tau(Y) \tau(Z) + \langle Y, W \rangle \tau(X) \tau(Z)) \\ & + \varepsilon_{n+1} (\langle AY, Z \rangle \langle AX, W \rangle - \langle AX, Z \rangle \langle AY, W \rangle), \end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, em que $(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y$.

Seja $\widetilde{M} = \varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{Q}_k^n(c)$ com métrica $\langle, \rangle_1 = \varepsilon dt^2 + \rho^2 g_0$, em que g_0 é a métrica em $\mathbb{Q}_k^n(c)$, enunciamos agora o resultado principal deste trabalho.

Teorema 2.2.1. *Seja (M, \langle, \rangle) uma variedade semi-riemanniana de dimensão n , que satisfaz as condições de estrutura. Então, para cada ponto $p \in M$, existem uma vizinhança aberta \mathcal{U} de p em M , uma imersão isométrica $f : \mathcal{U} \rightarrow (\widetilde{M}, \langle, \rangle_1)$ e um campo vetorial normal unitário e_{n+1} ao longo de f , tais que:*

- 1) $\varepsilon_{n+1} = \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle_1$;
- 2) $\pi \circ f = \hat{\pi}$, em que $\pi : \varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{Q}_k^n(c) \rightarrow I$ é a projeção;
- 3) O operador de Weingarten na direção de e_{n+1} é $df \circ A \circ (df)^{-1}$;
- 4) (E) é a equação de Codazzi-Mainardi e (F) é a equação de Gauss de f ;
- 5) e ao longo de f , temos que $\partial_t = df(T) + \varepsilon_{n+1} T_{n+1} e_{n+1}$.

2.3 Demonstração do teorema fundamental

Sem perda de generalidade, trabalhamos o caso $\varepsilon = \varepsilon_{n+1}$. Primeiro, definamos alguns objetos. Dado um ponto $x \in M$, consideremos um referencial local ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ numa vizinhança conexa \mathcal{U} de x em M , com $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$, e a correspondente base dual de 1-formas $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Observemos que $\omega_i(X) = \varepsilon_i \langle e_i, X \rangle$, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$. Também, precisamos definir em M , as 1-formas $\omega_{n+1} = \omega_0 = 0$. Considerando a equação (2.3), definimos o tensor

$$SY = -\frac{c}{\rho \circ \hat{\pi}} (Y - \varepsilon \tau(Y)T),$$

para qualquer $Y \in \mathfrak{X}(M)$, e usando (1.14), definimos as 1-formas de conexão:

$$\begin{aligned} \omega_{ij}(X) &= \varepsilon_i \langle e_i, \nabla_X e_j \rangle, & \omega_{in+1}(X) &= -\varepsilon_i \langle e_i, AX \rangle, \\ \omega_{i0}(X) &= -\varepsilon_i \langle e_i, SX \rangle, & \omega_{n+1,0}(X) &= -\frac{\varepsilon \varepsilon_{n+1} c}{\rho \circ \hat{\pi}} T_{n+1} \tau(X), & \omega_{\alpha\beta} &= -\varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} \omega_{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$, e definimos a matriz $\Omega = (\omega_{\alpha\beta}) \in \mathfrak{s}(A^1(M))$. Como uma consequência, temos que $\nabla_X e_i = \sum_k \omega_{ki}(X)e_k$. Agora, definimos as funções $T_0 = 0$, $T_i = \tau(e_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Pela condição (B) da Definição 2.2.1, temos que

$$\varepsilon = \langle T, T \rangle + \varepsilon_{n+1} T_{n+1}^2 = \left\langle \sum_i \varepsilon_i \langle e_i, T \rangle e_i, T \right\rangle + \varepsilon_{n+1} T_{n+1}^2 = \sum_i \varepsilon_i T_i^2 + \varepsilon_{n+1} T_{n+1}^2 = \sum_\gamma \varepsilon_\gamma T_\gamma^2.$$

Logo, definimos as matrizes $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_{\alpha\beta})$ e \mathcal{Y} , por

$$\mathbf{X}_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} (T_\beta \omega_\alpha - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta T_\alpha \omega_\beta), \quad \mathcal{Y} = \Omega - \mathbf{X}. \quad (2.5)$$

Temos que

$$d\mathcal{Y} + \mathcal{Y} \wedge \mathcal{Y} = d(\Omega - \mathbf{X}) + (\Omega - \mathbf{X}) \wedge (\Omega - \mathbf{X}) = d\Omega - d\mathbf{X} + \Omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \mathbf{X} - \mathbf{X} \wedge \Omega + \mathbf{X} \wedge \mathbf{X}.$$

Para demonstrar o Teorema 2.2.1, dividiremos o trabalho em quatro partes.

Parte 1: Provar que $d\mathcal{Y} + \mathcal{Y} \wedge \mathcal{Y} = 0$. Equivalentemente, provaremos que $d\Omega - d\mathbf{X} + \Omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \mathbf{X} - \mathbf{X} \wedge \Omega + \mathbf{X} \wedge \mathbf{X}$ é zero, usando as condições (C), (D), (E) e (F) da Definição 2.2.1. Para isso, dividimos a prova nos Lemas 2.3.1 a 2.3.6.

Parte 2: Construir a função B . Usando que $d\mathcal{Y} + \mathcal{Y} \wedge \mathcal{Y} = 0$, no Lema 2.3.8, provaremos que para cada ponto de M , existem uma vizinhança \mathcal{U} do ponto e uma aplicação $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{S}$, tal que B satisfaz $B^{-1}dB = \Omega - \mathbf{X}$ e $B(x) \in \mathcal{Z}(x)$ para todo $x \in \mathcal{U}$, em que $\mathcal{Z}(x) = \{Z \in \mathbf{S} \mid Z_{n+1\beta} = T_\beta(x)\}$. Na demonstração do Lema 2.3.8, será importante considerar o conjunto $\mathcal{F} = \{(x, Z) \in \mathcal{U} \times \mathbf{S} \mid Z \in \mathcal{Z}(x)\}$, por isso previamente, provaremos no Lema 2.3.7, que \mathcal{F} é uma variedade diferenciável.

Parte 3: Definir a função f . Usando a aplicação B obtida no Lema 2.3.8, definiremos uma função $f : \mathcal{U} \rightarrow \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, isso será feito no Lema 2.3.9 para o caso $c = \pm 1$ e no Lema 2.3.10 para o caso $c = 0$.

Parte 4: Verificar que f é a função do Teorema 2.2.1. Concluiremos a demonstração verificando que a função f definida nos Lemas 2.3.10 e 2.3.9, é uma imersão isométrica que satisfaz as condições do Teorema 2.2.1.

Começemos com a **Parte 1**.

Lema 2.3.1. $d\tau = 0$.

Demonstração. Como $T = \varepsilon \operatorname{grad}(\hat{\pi})$, temos que

$$\tau(X) = \langle T, X \rangle = \varepsilon \langle \operatorname{grad}(\hat{\pi}), X \rangle = \varepsilon d\hat{\pi}(X),$$

para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$, ou seja, $\tau = \varepsilon d\hat{\pi}$. Logo $d\tau = \varepsilon d^2(\hat{\pi}) = 0$. \square

Agora definimos as matrizes $\varpi = (\omega_\alpha)$ e $\Gamma = (\Gamma_{\alpha\beta}) = d\Omega + \Omega \wedge \Omega$.

Lema 2.3.2. $d\varpi = -\Omega \wedge \varpi$, $\Gamma_{\alpha\beta} = -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \Gamma_{\beta\alpha}$,

$$\Gamma_{ij} = \varepsilon \varepsilon_j \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \omega_j \wedge \omega_i - \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \right) (T_j \omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_j T_i \omega_j) \wedge \tau,$$

$$\Gamma_{in+1} = T_{n+1} \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \right) \tau \wedge \omega_i, \quad \Gamma_{u0} = 0.$$

Demonstração. Dado $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, como $\omega_{n+1} = \omega_0 = 0$, temos que

$$\begin{aligned} d\omega_i(X, Y) &= X(\omega_i(Y)) - Y(\omega_i(X)) - \omega_i([X, Y]) \\ &= X(\varepsilon_i \langle e_i, Y \rangle) - Y(\varepsilon_i \langle e_i, X \rangle) - \varepsilon_i \langle e_i, [X, Y] \rangle \\ &= \varepsilon_i \langle \nabla_X e_i, Y \rangle + \varepsilon_i \langle e_i, \nabla_X Y \rangle - \varepsilon_i \langle \nabla_Y e_i, X \rangle - \varepsilon_i \langle e_i, \nabla_Y X \rangle \\ &\quad - \varepsilon_i \langle e_i, \nabla_X Y - \nabla_Y X \rangle \\ &= \varepsilon_i \left\langle \sum_k \omega_{ki}(X) e_k, Y \right\rangle - \varepsilon_i \left\langle \sum_k \omega_{ki}(Y), X \right\rangle \\ &= \varepsilon_i \sum_k \omega_{ki}(X) \langle e_k, Y \rangle - \varepsilon_i \sum_k \omega_{ki}(Y) \langle e_k, X \rangle \\ &= \sum_k \varepsilon_k \varepsilon_i \omega_{ki}(X) \varepsilon_k \langle e_k, Y \rangle - \sum_k \varepsilon_k \varepsilon_i \omega_{ki}(Y) \varepsilon_k \langle e_k, X \rangle \\ &= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma \varepsilon_i \omega_{\gamma i} \wedge \omega_\gamma(X, Y) \\ &= - \sum_\gamma \omega_{i\gamma} \wedge \omega_\gamma(X, Y). \end{aligned}$$

Também, $\omega_{n+1} = 0$, segue que $-d\omega_{n+1}(X, Y) = 0$. Por outro lado, usando (2.4) e como A é autoadjunto, temos que

$$\begin{aligned} \sum_\gamma \omega_{n+1\gamma} \wedge \omega_\gamma(X, Y) &= \sum_k \omega_{n+1k} \wedge \omega_k(X, Y) \\ &= \sum_k (\varepsilon_{n+1} \langle e_k, AX \rangle \varepsilon_k \langle e_k, Y \rangle - \varepsilon_{n+1} \langle e_k, AY \rangle \varepsilon_k \langle e_k, X \rangle) \\ &= \varepsilon_{n+1} (\langle \varepsilon_k \langle e_k, Y \rangle e_k, AX \rangle - \langle \varepsilon_k \langle e_k, X \rangle e_k, AY \rangle) \\ &= \varepsilon_{n+1} (\langle Y, AX \rangle - \langle X, AY \rangle) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $c \neq 0$, temos $c = \varepsilon_0$, logo

$$\begin{aligned}
& \sum_{\gamma} \omega_{0\gamma} \wedge \omega_{\gamma}(X, Y) \\
&= \sum_k \omega_{0k} \wedge \omega_k(X, Y) \\
&= \sum_k (\varepsilon_0 \langle e_k, SX \rangle w_k(Y) - \varepsilon_0 \langle e_k, SY \rangle w_k(X)) \\
&= \varepsilon_0 \sum_k \left(\langle e_k, -\frac{c}{a}(X - \varepsilon\tau(X)T) \rangle \varepsilon_k \langle e_k, Y \rangle - \langle e_k, -\frac{c}{a}(Y - \varepsilon\tau(Y)T) \rangle \varepsilon_k \langle e_k, X \rangle \right) \\
&= -\frac{c\varepsilon_0}{a} \sum_k (\langle e_k, X \rangle - \varepsilon\tau(X) \langle e_k, T \rangle) \varepsilon_k \langle e_k, Y \rangle - (\langle e_k, Y \rangle - \varepsilon\tau(Y) \langle e_k, T \rangle) \varepsilon_k \langle e_k, X \rangle) \\
&= \frac{c\varepsilon_0}{a} \sum_k (\varepsilon\tau(X) \langle e_k, T \rangle \varepsilon_k \langle e_k, Y \rangle - \varepsilon\tau(Y) \langle e_k, T \rangle \varepsilon_k \langle e_k, X \rangle) \\
&= -\frac{c\varepsilon_0}{a} \left(\varepsilon\tau(X) \langle \sum_k \varepsilon_k \langle e_k, Y \rangle e_k, T \rangle - \varepsilon\tau(Y) \langle \sum_k \varepsilon_k \langle e_k, X \rangle e_k, T \rangle \right) \\
&= \frac{c\varepsilon_0}{a} (\varepsilon\tau(X) \langle Y, T \rangle - \varepsilon\tau(Y) \langle X, T \rangle) \\
&= \frac{c\varepsilon_0}{a} (\varepsilon\tau(X)\tau(Y) - \varepsilon\tau(Y)\tau(X)) \\
&= 0 \\
&= -d\omega_0(X, Y).
\end{aligned}$$

Assim, $d\varpi = -\Omega \wedge \varpi$.

Também,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\beta\alpha} &= d\omega_{\beta\alpha} + \sum_{\gamma} \omega_{\beta\gamma} \wedge \omega_{\gamma\alpha} \\
&= -\varepsilon_{\beta}\varepsilon_{\alpha}d\omega_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\beta}\varepsilon_{\alpha} \sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} \\
&= -\varepsilon_{\alpha}\varepsilon_{\beta}\Gamma_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Logo, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
d\omega_{ij}(X, Y) &= X(\omega_{ij}(Y)) - Y(\omega_{ij}(X)) - \omega_{ij}([X, Y]) \\
&= X(\varepsilon_i \langle e_i, \nabla_Y e_j \rangle) - Y(\varepsilon_i \langle e_i, \nabla_X e_j \rangle) - \varepsilon_i \langle e_i, \nabla_{[X, Y]} e_j \rangle \\
&= \varepsilon_i \langle \nabla_X e_i, \nabla_Y e_j \rangle + \varepsilon_i \langle e_i, \nabla_X \nabla_Y e_j \rangle - \varepsilon_i \langle \nabla_Y e_i, \nabla_X e_j \rangle - \varepsilon_i \langle e_i, \nabla_Y \nabla_X e_j \rangle \\
&\quad - \varepsilon_i \langle e_i, \nabla_{[X, Y]} e_j \rangle \\
&= \varepsilon_i \langle \nabla_X e_i, \nabla_Y e_j \rangle - \varepsilon_i \langle \nabla_Y e_i, \nabla_X e_j \rangle + \varepsilon_i R(X, Y, e_j, e_i),
\end{aligned}$$

mas, pela equação (1.15), segue que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X e_i, \nabla_Y e_j \rangle &= \left\langle \sum_k \omega_{ki}(X) e_k, \sum_k \omega_{kj}(Y) e_k \right\rangle \\
&= \sum_k \varepsilon_k \omega_{ki}(X) \omega_{kj}(Y) \\
&= -\varepsilon_i \sum_k \omega_{ik}(X) \omega_{kj}(Y).
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned}
d\omega_{ij}(X, Y) &= \varepsilon_i \langle \nabla_X e_i, \nabla_Y e_j \rangle - \varepsilon_i \langle \nabla_Y e_i, \nabla_X e_j \rangle + \varepsilon_i R(X, Y, e_j, e_i) \\
&= -\sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}(X, Y) + \varepsilon_i R(X, Y, e_j, e_i),
\end{aligned}$$

o qual, usando (F) da Definição 2.2.1, implica

$$\begin{aligned}
&d\omega_{ij}(X, Y) + \sum_{\gamma} \omega_{i\gamma} \wedge \omega_{\gamma j}(X, Y) \\
&= \omega_{i0} \wedge \omega_{0j}(X, Y) + \omega_{in+1} \wedge \omega_{n+1j}(X, Y) + \varepsilon_i R(X, Y, e_j, e_i) \\
&= -\varepsilon_i \varepsilon_0 \langle e_i, SX \rangle \langle e_j, SY \rangle + \varepsilon_i \varepsilon_0 \langle e_i, SY \rangle \langle e_j, SX \rangle - \varepsilon_i \varepsilon_{n+1} \langle e_i, AX \rangle \langle e_j, AY \rangle \\
&\quad + \varepsilon_i \varepsilon_{n+1} \langle e_i, AY \rangle \langle e_j, AX \rangle + \varepsilon_i \left(-\varepsilon \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{c}{\rho^2} \right) \langle (X \wedge Y) e_j, e_i \rangle \\
&\quad + \varepsilon_i \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{\varepsilon c}{\rho^2} \right) (\langle X, e_j \rangle \tau(Y) \tau(e_i) - \langle Y, e_j \rangle \tau(X) \tau(e_i) - \langle X, e_i \rangle \tau(Y) \tau(e_j) \\
&\quad + \langle Y, e_i \rangle \tau(X) \tau(e_j)) + \varepsilon_i \varepsilon_{n+1} (\langle AY, e_j \rangle \langle AX, e_i \rangle - \langle AX, e_j \rangle \langle AY, e_i \rangle),
\end{aligned}$$

em que,

$$\begin{aligned}
\langle e_i, SX \rangle \langle e_j, SY \rangle &= \frac{c^2}{\rho^2} \langle e_i, X - \varepsilon \tau(X) T \rangle \langle e_j, Y - \varepsilon \tau(Y) T \rangle \\
&= \frac{1}{\rho^2} (\langle e_i, X \rangle \langle e_j, Y \rangle - \varepsilon \tau(Y) \langle e_i, X \rangle \tau(e_j) - \varepsilon \tau(X) \tau(e_i) \langle e_j, Y \rangle \\
&\quad + \tau(X) \tau(Y) \langle T, T \rangle),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle e_i, SY \rangle \langle e_j, SX \rangle &= \frac{1}{\rho^2} (\langle e_i, Y \rangle \langle e_j, X \rangle - \varepsilon \tau(X) \langle e_i, Y \rangle \tau(e_j) - \varepsilon \tau(Y) \tau(e_i) \langle e_j, X \rangle \\
&\quad + \tau(Y) \tau(X) \langle T, T \rangle).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& d\omega_{ij}(X, Y) + \sum_{\gamma} \omega_{i\gamma} \wedge \omega_{\gamma j}(X, Y) \\
&= -\varepsilon_i \varepsilon \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \langle (X \wedge Y)e_j, e_i \rangle + \varepsilon_i \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \right) (\langle X, e_j \rangle \tau(Y) \tau(e_i) \\
&\quad - \langle Y, e_j \rangle \tau(X) \tau(e_i) - \langle X, e_i \rangle \tau(Y) \tau(e_j) + \langle Y, e_i \rangle \tau(X) \tau(e_j)) \\
&= \varepsilon \varepsilon_j \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \omega_j \wedge \omega_i(X, Y) - \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \right) (T_j \omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_j T_i \omega_j) \wedge \tau(X, Y).
\end{aligned}$$

Logo, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, usando (E) da Definição 2.2.1, calculamos

$$\begin{aligned}
d\omega_{in+1}(X, Y) &= X(\omega_{in+1}(Y)) - Y(\omega_{in+1}(X)) - \omega_{in+1}([X, Y]) \\
&= -\varepsilon_i X \langle e_i, AY \rangle - \varepsilon_i Y \langle e_i, AX \rangle + \varepsilon_i \langle e_i, A[X, Y] \rangle \\
&= -\varepsilon_i \langle \nabla_X e_i, AY \rangle - \varepsilon_i \langle e_i, \nabla_X AY \rangle + \varepsilon_i \langle \nabla_Y e_i, AX \rangle + \varepsilon_i \langle e_i, \nabla_Y AX \rangle \\
&\quad + \varepsilon_i \langle e_i, A(\nabla_X Y) - A(\nabla_Y X) \rangle \\
&= -\varepsilon_i \langle \nabla_X e_i, AY \rangle + \varepsilon_i \langle \nabla_Y e_i, AX \rangle - \varepsilon_i \langle e_i, (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X \rangle \\
&= -\varepsilon_i \sum_k \omega_{ki}(X) \langle e_k, AY \rangle + \varepsilon_i \sum_k \omega_{ki}(Y) \langle e_k, AX \rangle \\
&\quad - \varepsilon_i T_{n+1} \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{\varepsilon c}{\rho^2} \right) (\tau(Y) \langle e_i, X \rangle - \tau(X) \langle e_i, Y \rangle) \\
&= \sum_{\gamma} \varepsilon_i \varepsilon_{\gamma} \omega_{\gamma i} \wedge \omega_{\gamma n+1}(X, Y) - \varepsilon_i \varepsilon_0 \omega_{0i} \wedge \omega_{0n+1}(X, Y) \\
&\quad - \varepsilon_i T_{n+1} \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{\varepsilon c}{\rho^2} \right) (\tau(Y) \langle e_i, X \rangle - \tau(X) \langle e_i, Y \rangle).
\end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned}
\omega_{0i} \wedge \omega_{0n+1}(X, Y) &= \frac{\varepsilon c}{\rho} \langle e_i, SX \rangle T_{n+1} \tau(Y) - \frac{\varepsilon c}{\rho} \langle e_i, SY \rangle T_{n+1} \tau(X) \\
&= -\frac{\varepsilon c^2}{\rho^2} \langle e_i, X - \varepsilon \tau(X) T \rangle T_{n+1} \tau(Y) + \frac{\varepsilon c^2}{\rho^2} \langle e_i, Y - \varepsilon \tau(Y) T \rangle T_{n+1} \tau(X) \\
&= -T_{n+1} \frac{\varepsilon}{\rho^2} (\langle e_i, X \rangle \tau(Y) - \varepsilon \tau(X) \langle e_i, T \rangle \tau(Y) - \langle e_i, Y \rangle \tau(X) \\
&\quad + \varepsilon \tau(Y) \langle e_i, T \rangle \tau(X)) \\
&= -T_{n+1} \frac{\varepsilon}{\rho^2} (\langle e_i, X \rangle \tau(Y) - \langle e_i, Y \rangle \tau(X)),
\end{aligned}$$

temos que,

$$d\omega_{in+1}(X, Y) = - \sum_{\gamma} \omega_{i\gamma} \wedge \omega_{\gamma n+1}(X, Y) - T_{n+1} \left(\frac{\rho''}{\rho} + \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \right) \tau \wedge \omega_i(X, Y).$$

Também, calculamos

$$\begin{aligned}
d\omega_{i0}(X, Y) &= X(\omega_{i0}(Y)) - Y(\omega_{i0}(X)) - \omega_{i0}([X, Y]) \\
&= -\varepsilon_i X \langle e_i, SY \rangle + \varepsilon_i Y \langle e_i, SX \rangle + \varepsilon_i \langle e_i, S[X, Y] \rangle \\
&= -\varepsilon_i \langle \nabla_X e_i, SY \rangle + \varepsilon_i \langle \nabla_Y e_i, SX \rangle - \varepsilon_i \langle e_i, (\nabla_X S)Y - (\nabla_Y S)X \rangle.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Por outro lado, para qualquer $U \in \mathfrak{X}(M)$, se verifica que

$$\begin{aligned}
\nabla_X \left(-\frac{1}{\rho \circ \hat{\pi}} U \right) &= X \left(\frac{-1}{\rho \circ \hat{\pi}} U \right) - \frac{1}{\rho \circ \hat{\pi}} \nabla_X U \\
&= \left[d \left(\frac{-1}{\rho \circ \hat{\pi}} \right) X \right] U - \frac{1}{\rho \circ \hat{\pi}} \nabla_X U \\
&= \left(\frac{\rho' \circ \hat{\pi}}{(\rho \circ \hat{\pi})^2} \right) \langle \text{grad}(\hat{\pi}), X \rangle U - \frac{1}{\rho \circ \hat{\pi}} \nabla_X U \\
&= \left(\frac{\rho' \circ \hat{\pi}}{(\rho \circ \hat{\pi})^2} \right) \langle \varepsilon T, X \rangle U - \frac{1}{\rho \circ \hat{\pi}} \nabla_X U \\
&= \left(\frac{\varepsilon \rho' \circ \hat{\pi}}{(\rho \circ \hat{\pi})^2} \right) \tau(X) U - \frac{1}{\rho \circ \hat{\pi}} \nabla_X U.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X S)Y - (\nabla_Y S)X \\
&= \nabla_X SY - S \nabla_X Y - \nabla_Y SX + S \nabla_Y X \\
&= \nabla_X \left(-\frac{c}{\rho} (Y - \varepsilon \tau(Y)T) \right) + \frac{c}{\rho} (\nabla_X Y - \varepsilon \tau(\nabla_X Y)T) - \nabla_Y \left(-\frac{c}{\rho} (X - \varepsilon \tau(X)T) \right) \\
&\quad - \frac{c}{\rho} (\nabla_Y X - \varepsilon \tau(\nabla_Y X)T) \\
&= \frac{\varepsilon c \rho'}{\rho^2} \tau(X)Y - \frac{c}{\rho} \nabla_X Y + \frac{\varepsilon c}{\rho} X \langle Y, T \rangle T - \frac{c \rho'}{\rho^2} \tau(X) \tau(Y)T + \frac{\varepsilon c}{\rho} \tau(Y) \nabla_X T \\
&\quad - \frac{\varepsilon c \rho'}{\rho^2} \tau(Y)X + \frac{c}{\rho} \nabla_Y X - \frac{\varepsilon c}{\rho} Y \langle X, T \rangle T + \frac{c \rho'}{\rho^2} \tau(Y) \tau(X)T - \frac{\varepsilon c}{\rho} \tau(X) \nabla_Y T \\
&\quad + \frac{c}{\rho} (\nabla_X Y - \varepsilon \langle \nabla_X Y, T \rangle T) - \frac{c}{\rho} (\nabla_Y X - \varepsilon \langle \nabla_Y X, T \rangle T),
\end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X S)Y - (\nabla_Y S)X &= \frac{\varepsilon c \rho'}{\rho^2} (\tau(X)Y - \tau(Y)X) - \frac{\varepsilon c}{\rho} (\tau(X) \nabla_Y T - \tau(Y) \nabla_X T) \\
&\quad + \frac{\varepsilon c}{\rho} (\langle Y, \nabla_X T \rangle - \langle X, \nabla_Y T \rangle) T.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Por (C) da definição 2.2.1, temos

$$\begin{aligned}\nabla_X T &= \frac{\rho'}{\rho}(X - \varepsilon\tau(X)T) + \varepsilon_{n+1}T_{n+1}AX, \\ \nabla_Y T &= \frac{\rho'}{\rho}(Y - \varepsilon\tau(Y)T) + \varepsilon_{n+1}T_{n+1}AY,\end{aligned}$$

segue que,

$$\begin{aligned}&\langle Y, \nabla_X T \rangle - \langle X, \nabla_Y T \rangle \\ &= \langle Y, \frac{\rho'}{\rho}(X - \varepsilon\tau(X)T) + \varepsilon_{n+1}T_{n+1}AX \rangle - \langle X, \frac{\rho'}{\rho}(Y - \varepsilon\tau(Y)T) + \varepsilon_{n+1}T_{n+1}AY \rangle \\ &= \frac{\rho'}{\rho}\langle Y, X \rangle - \frac{\varepsilon\rho'}{\rho}\tau(X)\langle Y, T \rangle + \varepsilon_{n+1}T_{n+1}\langle Y, AX \rangle - \frac{\rho'}{\rho}\langle X, Y \rangle + \frac{\varepsilon\rho'}{\rho}\tau(Y)\langle X, T \rangle \\ &\quad - \varepsilon_{n+1}T_{n+1}\langle X, AY \rangle \\ &= 0,\end{aligned}\tag{2.8}$$

e também,

$$\begin{aligned}\tau(X)\nabla_Y T - \tau(Y)\nabla_X T &= \frac{\rho'}{\rho}(\tau(X)Y - \tau(Y)X) \\ &\quad + \varepsilon_{n+1}T_{n+1}(\tau(X)AY - \tau(Y)AX).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Então, substituindo (2.8) e (2.9) em (2.7), temos que

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)Y - (\nabla_Y S)X &= \frac{\varepsilon c\rho'}{\rho^2}(\tau(X)Y - \tau(Y)X) - \frac{\varepsilon c}{\rho}(\tau(X)\nabla_Y T - \tau(Y)\nabla_X T) \\ &= -\frac{\varepsilon\varepsilon_{n+1}cT_{n+1}}{\rho}(\tau(X)AY - \tau(Y)AX).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Substituindo (2.10) em (2.6), obtemos

$$\begin{aligned}&\varepsilon_i d\omega_{i0}(X, Y) \\ &= -\langle \nabla_X e_i, SY \rangle + \langle \nabla_Y e_i, SX \rangle + \frac{\varepsilon\varepsilon_{n+1}cT_{n+1}}{\rho}\langle e_i, (\tau(X)AY - \tau(Y)AX) \rangle \\ &= -\sum_k (\omega_{ki}(X)\langle e_k, SY \rangle - \omega_{ki}(Y)\langle e_k, SX \rangle) + \frac{\varepsilon\varepsilon_{n+1}cT_{n+1}}{\rho}\langle e_i, (\tau(X)AY - \tau(Y)AX) \rangle \\ &= -\varepsilon_i \sum_\gamma \omega_{i\gamma} \wedge \omega_{\gamma 0}(X, Y) + \varepsilon_i \omega_{in+1} \wedge \omega_{n+1,0}(X, Y) - \frac{\varepsilon_i \varepsilon \varepsilon_{n+1} c T_{n+1}}{\rho} \tau \wedge \omega_{in+1}(X, Y) \\ &= -\varepsilon_i \sum_\gamma \omega_{i\gamma} \wedge \omega_{\gamma 0}(X, Y) + \varepsilon_i \omega_{in+1} \wedge \omega_{n+1,0}(X, Y) + \varepsilon_i \omega_{n+1,0} \wedge \omega_{in+1}(X, Y) \\ &= -\varepsilon_i \sum_\gamma \omega_{i\gamma} \wedge \omega_{\gamma 0}(X, Y).\end{aligned}$$

Temos que $d\omega_{n+1,0} = -\frac{\varepsilon\varepsilon_{n+1}c}{\rho}dT_{n+1} \wedge \tau$. Logo, usando (D) da Definição 2.2.1, obtemos

$$\begin{aligned}
d\omega_{n+1,0}(X, Y) &= -\frac{\varepsilon\varepsilon_{n+1}c}{\rho}dT_{n+1} \wedge \tau(X, Y) \\
&= -\frac{\varepsilon\varepsilon_{n+1}c}{\rho} (X(T_{n+1})\tau(Y) - Y(T_{n+1})\tau(X)) \\
&= -\frac{\varepsilon\varepsilon_{n+1}c}{\rho} \left((-\langle T, AX \rangle - \frac{\varepsilon\rho'}{\rho}T_{n+1}\tau(X))\tau(Y) + (\langle T, AY \rangle + \frac{\varepsilon\rho'}{\rho}T_{n+1}\tau(Y))\tau(X) \right) \\
&= -\frac{\varepsilon\varepsilon_{n+1}c}{\rho} (-\langle T, AX \rangle\tau(Y) + \langle T, AY \rangle\tau(X)) \\
&= \varepsilon_{n+1} \left(\langle \frac{c\varepsilon}{\rho}\tau(Y)T, AX \rangle - \langle \frac{c\varepsilon}{\rho}\tau(X)T, AY \rangle \right) \\
&= \varepsilon_{n+1} \left(\langle SY + \frac{c}{\rho}Y, AX \rangle - \langle SX + \frac{c}{\rho}X, AY \rangle \right) \\
&= \varepsilon_{n+1} \left(\langle SY, AX \rangle - \langle SX, AY \rangle + \frac{c}{\rho}\langle Y, AX \rangle - \frac{c}{\rho}\langle X, AY \rangle \right) \\
&= \varepsilon_{n+1} \left(\langle \sum_k \varepsilon_k \langle e_k, SY \rangle e_k, \sum_k \varepsilon_k \langle e_k, AX \rangle e_k \rangle - \langle \sum_k \varepsilon_k \langle e_k, SX \rangle e_k, \sum_k \varepsilon_k \langle e_k, AY \rangle e_k \rangle \right) \\
&= \varepsilon_{n+1} \sum_k \varepsilon_k (\langle e_k, AX \rangle \langle e_k, SY \rangle - \langle e_k, AX \rangle \langle e_k, SY \rangle) \\
&= \varepsilon_{n+1} \sum_k \varepsilon_k \omega_{kn+1} \wedge \omega_{k0}(X, Y) \\
&= -\sum_{\gamma} \omega_{n+1\gamma} \wedge \omega_{\gamma 0}(X, Y).
\end{aligned}$$

□

Lema 2.3.3. $d\mathbf{X}_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha}\varepsilon_{\beta}d\mathbf{X}_{\beta\alpha}$, $d\mathbf{X}_{u0} = 0$,

$$\begin{aligned}
d\mathbf{X}_{i,j} &= \frac{\rho''\rho - 2(\rho')^2}{\rho^2} \tau \wedge (T_j\omega_i - \varepsilon_i\varepsilon_j T_i\omega_j) + \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} (T_j d\omega_i - \varepsilon_i\varepsilon_j T_i d\omega_j) \\
&\quad + 2\varepsilon\varepsilon_j \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 \omega_j \wedge \omega_i + \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} \sum_u T_u (\omega_{uj} \wedge \omega_i - \varepsilon_i\varepsilon_j \omega_{ui} \wedge \omega_j), \\
d\mathbf{X}_{in+1} &= \frac{\rho''\rho - 2(\rho')^2}{\rho^2} T_{n+1}\tau \wedge \omega_i + \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} \left(\sum_k T_k \omega_{kn+1} \wedge \omega_i + T_{n+1} d\omega_i \right).
\end{aligned}$$

Demonstração. Como $\mathbf{X}_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha}\varepsilon_{\beta}\mathbf{X}_{\beta\alpha}$, obtemos que $d\mathbf{X}_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha}\varepsilon_{\beta}d\mathbf{X}_{\beta\alpha}$. Também, $d\left(\frac{\varepsilon\rho'}{\rho}\right)X = X\left(\frac{\varepsilon\rho'}{\rho}\right) = \sum_k \omega_k(X)e_k\left(\frac{\varepsilon\rho'}{\rho}\right)$, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$d\mathbf{X}_{\alpha\beta} = d\left(\frac{\varepsilon\rho'}{\rho}(T_{\beta}\omega_{\alpha} - \varepsilon_{\alpha}\varepsilon_{\beta}T_{\alpha}\omega_{\beta})\right)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
d\mathbf{X}_{\alpha\beta} &= \sum_k e_k \left(\frac{\varepsilon\rho'}{\rho} \right) \omega_k \wedge (T_\beta\omega_\alpha - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta T_\alpha\omega_\beta) + \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} (dT_\beta \wedge \omega_\alpha + T_\beta d\omega_\alpha \\
&\quad - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta dT_\alpha \wedge \omega_\beta - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta T_\alpha d\omega_\beta) \\
&= \varepsilon \frac{\rho''\rho - (\rho')^2}{\rho^2} \varepsilon\tau(e_k)\omega_k \wedge (T_\beta\omega_\alpha - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta T_\alpha\omega_\beta) \\
&\quad + \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} (dT_\beta \wedge \omega_\alpha + T_\beta d\omega_\alpha - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta dT_\alpha \wedge \omega_\beta - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta T_\alpha d\omega_\beta) \\
&= \frac{\rho''\rho - (\rho')^2}{\rho^2} \tau \wedge (T_\beta\omega_\alpha - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta T_\alpha\omega_\beta) + \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} (dT_\beta \wedge \omega_\alpha + T_\beta d\omega_\alpha \\
&\quad - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta dT_\alpha \wedge \omega_\beta - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta T_\alpha d\omega_\beta).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Para $\beta = 0$ e $u > 0$, como $T_0 = 0$ e $\omega_0 = 0$, segue que $d\mathbf{X}_{u,0} = 0$. Para $\beta = n + 1$ e $i < n + 1$, como $\omega_{n+1} = 0$, temos

$$d\mathbf{X}_{in+1} = \frac{\rho''\rho - (\rho')^2}{\rho^2} T_{n+1}\tau \wedge \omega_i + \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} (dT_{n+1} \wedge \omega_i + T_{n+1}d\omega_i). \tag{2.12}$$

Pela condição (C), e como $T = \sum_k \varepsilon_k T_k e_k$, segue que

$$dT_{n+1}(X) = -\langle AT, X \rangle - \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} T_{n+1}\tau(X) = \sum_k \varepsilon_k T_k \langle e_k, AX \rangle - \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} T_{n+1}\tau(X),$$

e então,

$$dT_{n+1}(X) = \sum_k T_k \omega_{kn+1}(X) - \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} T_{n+1}\tau(X). \tag{2.13}$$

Substituindo (2.13) em (2.12), obtemos

$$\begin{aligned}
d\mathbf{X}_{in+1} &= \frac{\rho''\rho - (\rho')^2}{\rho^2} T_{n+1}\tau \wedge \omega_i + \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} \left(\sum_k T_k \omega_{kn+1} \wedge \omega_i - \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} T_{n+1}\tau \wedge \omega_i + T_{n+1}d\omega_i \right) \\
&= \frac{\rho''\rho - 2(\rho')^2}{\rho^2} T_{n+1}\tau \wedge \omega_i + \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} \left(\sum_k T_k \omega_{kn+1} \wedge \omega_i + T_{n+1}d\omega_i \right).
\end{aligned}$$

Logo, se $\alpha = i$ e $\beta = j$ em (2.11), temos

$$\begin{aligned}
d\mathbf{X}_{ij} &= \frac{\rho''\rho - (\rho')^2}{\rho^2} \tau \wedge (T_j\omega_i - \varepsilon_i\varepsilon_j T_i\omega_j) \\
&\quad + \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} (dT_j \wedge \omega_i + T_j d\omega_i - \varepsilon_i\varepsilon_j dT_i \wedge \omega_j - \varepsilon_i\varepsilon_j T_i d\omega_j).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Usando que $\sum_l \omega_l(X) e_l = X$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned}
dT_k &= \sum_l e_l(\langle T, e_k \rangle) \omega_l \\
&= \sum_l (\langle \nabla_{e_l} T, e_k \rangle + \langle T, \nabla_{e_l} e_k \rangle) \omega_l \\
&= \sum_l \left(\left\langle \frac{\rho'}{\rho} (e_l - \varepsilon T_l T) + \varepsilon_{n+1} T_{n+1} A e_l, e_k \right\rangle + \sum_j \omega_{jk}(e_l) T_j \right) \omega_l \\
&= \frac{\rho'}{\rho} \sum_l \langle e_l, e_k \rangle \omega_l - \varepsilon \frac{\rho'}{\rho} \sum_l T_l \langle T, e_k \rangle \omega_l + T_{n+1} \varepsilon_{n+1} \sum_l \langle A e_l, e_k \rangle \omega_l \\
&\quad + \sum_j T_j \sum_l \omega_{jk}(e_l) \omega_l \\
&= \frac{\rho'}{\rho} \langle e_k, e_k \rangle \omega_k - \varepsilon \frac{\rho'}{\rho} \langle \sum_l \omega_l e_l, T \rangle T_k + T_{n+1} \varepsilon_{n+1} \langle A(\sum_l \omega_l e_l), e_k \rangle \\
&\quad + \sum_j T_j \sum_l \varepsilon_j \langle e_j, \nabla_{e_l} e_k \rangle \omega_l \\
&= \frac{\rho'}{\rho} \langle e_k, e_k \rangle \omega_k - \varepsilon \frac{\rho'}{\rho} T_k \tau + T_{n+1} \omega_{n+1k} + \sum_j T_j \varepsilon_j \langle e_j, \nabla_{\sum_l \omega_l e_l} e_k \rangle \\
&= \frac{\rho'}{\rho} \langle e_k, e_k \rangle \omega_k - \varepsilon \frac{\rho'}{\rho} T_k \tau + T_{n+1} \omega_{n+1k} + \sum_j T_j \omega_{jk}.
\end{aligned}$$

Então,

$$dT_k = \frac{\rho'}{\rho} \varepsilon_k \omega_k - \varepsilon \frac{\rho'}{\rho} T_k \tau + \sum_u T_u \omega_{uk}. \quad (2.15)$$

Finalmente, usando (2.15) em (2.14), obtemos

$$\begin{aligned}
d\mathbf{X}_{i,j} &= \frac{\rho'' \rho - (\rho')^2}{\rho^2} \tau \wedge (T_j \omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_j T_i \omega_j) + \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} (T_j d\omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_j T_i d\omega_j) + \varepsilon \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 \varepsilon_j \omega_j \wedge \omega_i \\
&\quad - \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 T_j \tau \wedge \omega_i + \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \sum_u T_u \omega_{uj} \wedge \omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 \varepsilon_i \omega_i \wedge \omega_j \\
&\quad + \varepsilon_i \varepsilon_j \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 T_i \tau \wedge \omega_j - \varepsilon_i \varepsilon_j \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \sum_u T_u \omega_{ui} \wedge \omega_j \\
&= \frac{\rho'' \rho - 2(\rho')^2}{\rho^2} \tau \wedge (T_j \omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_j T_i \omega_j) + \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} (T_j d\omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_j T_i d\omega_j) \\
&\quad + 2\varepsilon \varepsilon_j \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 \omega_j \wedge \omega_i + \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \sum_u T_u (\omega_{uj} \wedge \omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_j \omega_{ui} \wedge \omega_j).
\end{aligned}$$

□

Lema 2.3.4. $(\mathbf{X} \wedge \mathbf{X})_{\alpha\beta} = \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 ((T_\beta \omega_\alpha - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta T_\alpha \omega_\beta) \wedge \tau - \varepsilon \varepsilon_\beta \omega_\alpha \wedge \omega_\beta)$.

Demonstração. Pela condição (B) da definição 2.2.1, temos $\sum_\gamma \varepsilon_\gamma T_\gamma^2$, e usando também

que $\sum_{\gamma} T_{\gamma} \omega_{\gamma}(X) = \sum_k T_k \omega_k(X) = \tau(X)$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{X} \wedge \mathbf{X})_{\alpha\beta} \\
&= \sum_{\gamma} \left(\frac{\varepsilon \rho'}{\rho} (T_{\gamma} \omega_{\alpha} - \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\gamma} T_{\alpha} \omega_{\gamma}) \wedge \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} (T_{\beta} \omega_{\gamma} - \varepsilon_{\gamma} \varepsilon_{\beta} T_{\gamma} \omega_{\beta}) \right) \\
&= \left(\frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \right)^2 \sum_{\gamma} (T_{\gamma} T_{\beta} \omega_{\alpha} \wedge \omega_{\gamma} - \varepsilon_{\beta} \varepsilon_{\gamma} T_{\gamma}^2 \omega_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} - \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\gamma} T_{\alpha} T_{\beta} \omega_{\gamma} \wedge \omega_{\gamma} \\
&\quad + \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} T_{\alpha} T_{\gamma} \omega_{\gamma} \wedge \omega_{\beta}) \\
&= \left(\frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \right)^2 \left(T_{\beta} \omega_{\alpha} \wedge \sum_{\gamma} T_{\gamma} \omega_{\gamma} - \varepsilon_{\beta} \left(\sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} T_{\gamma}^2 \right) \omega_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} + \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} T_{\alpha} \sum_{\gamma} T_{\gamma} \omega_{\gamma} \wedge \omega_{\beta} \right) \\
&= \left(\frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \right)^2 (T_{\beta} \omega_{\alpha} \wedge \tau - \varepsilon_{\beta} \varepsilon \omega_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} + \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} T_{\alpha} \tau \wedge \omega_{\beta}) \\
&= \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 ((T_{\beta} \omega_{\alpha} - \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} T_{\alpha} \omega_{\beta}) \wedge \tau - \varepsilon \varepsilon_{\beta} \omega_{\alpha} \wedge \omega_{\beta}).
\end{aligned}$$

□

Agora, fazemos $\Phi = \Omega \wedge \mathbf{X} + \mathbf{X} \wedge \Omega$.

Lema 2.3.5. $\Phi_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} \Phi_{\beta\alpha}$, $\Phi_{u0} = 0$,

$$\Phi_{in+1} = \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \left(-T_{n+1} d\omega_i + \sum_k T_k \omega_i \wedge \omega_{kn+1} \right), \quad (2.16)$$

$$\Phi_{ij} = \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \left(\varepsilon_i \varepsilon_j T_i d\omega_j - T_j d\omega_i + \sum_u T_u (\omega_i \wedge \omega_{uj} - \varepsilon_j \varepsilon_u \omega_{iu} \wedge \omega_j) \right). \quad (2.17)$$

Demonstração. Por definição, $\mathbf{X}_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} \mathbf{X}_{\beta\alpha}$, isso prova que $\Phi_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} \Phi_{\beta\alpha}$. Em geral, temos

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha\beta} &= \sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} (T_{\beta} \omega_{\gamma} - \varepsilon_{\beta} \varepsilon_{\gamma} T_{\gamma} \omega_{\beta}) + \sum_{\gamma} \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} (T_{\gamma} \omega_{\alpha} - \varepsilon_{\gamma} \varepsilon_{\alpha} T_{\alpha} \omega_{\gamma}) \wedge \omega_{\gamma\beta} \\
&= \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \sum_{\gamma} (T_{\beta} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma} - \varepsilon_{\beta} \varepsilon_{\gamma} T_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\beta} + T_{\gamma} \omega_{\alpha} \wedge \omega_{\gamma\beta} - \varepsilon_{\gamma} \varepsilon_{\alpha} T_{\alpha} \omega_{\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta}) \\
&= \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \left(T_{\beta} \sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma} - \varepsilon_{\beta} \varepsilon_{\gamma} T_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\beta} + T_{\gamma} \omega_{\alpha} \wedge \omega_{\gamma\beta} - \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} T_{\alpha} \sum_{\gamma} \omega_{\gamma} \wedge \omega_{\beta\gamma} \right).
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.3.2, $d\varpi = -\Omega \wedge \varpi$, logo

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \left(\varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} T_{\alpha} d\omega_{\beta} - T_{\beta} d\omega_{\alpha} + \sum_{\gamma} (T_{\gamma} \omega_{\alpha} \wedge \omega_{\gamma\beta} - \varepsilon_{\beta} \varepsilon_{\gamma} T_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\beta}) \right).$$

Para o caso $\alpha = i$, $\beta = n+1$, o resultado é imediato, pois $\omega_{n+1} = 0$, e o caso $\alpha = i$, $\beta = j$,

segue do fato que $T_0 = 0$. Para o caso $\alpha = i$, $\beta = 0$, como $\omega_0 = 0$ e $T_0 = 0$, temos que

$$\Phi_{i0} = \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \omega_i \wedge \sum_{\gamma} T_{\gamma} \omega_{\gamma 0}. \quad (2.18)$$

Porem, pela condição (B) da definição 2.2.1, temos

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma} T_{\gamma} \omega_{\gamma 0}(X) &= \sum_i T_i \omega_{i0}(X) + T_{n+1} \omega_{n+1,0}(X) \\ &= - \sum_i T_i \varepsilon_i \langle e_i, SX \rangle - \frac{\varepsilon \varepsilon_{n+1} c}{\rho} T_{n+1}^2 \tau(X) \\ &= \sum_i \frac{c}{\rho} T_i (\varepsilon_i \langle e_i, X \rangle - \varepsilon \varepsilon_i \langle e_i, T \rangle \tau(X)) - \frac{\varepsilon \varepsilon_{n+1} c}{\rho} T_{n+1}^2 \tau(X) \\ &= \frac{c}{\rho} \left(\left\langle \sum_i \varepsilon_i \langle e_i, X \rangle e_i, T \right\rangle - \varepsilon \left(\sum_i \varepsilon_i T_i^2 \right) \tau(X) - \varepsilon \varepsilon_{n+1} T_{n+1}^2 \tau(X) \right) \\ &= \frac{c}{\rho} \left(\langle X, T \rangle - \varepsilon \left(\sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} T_{\gamma}^2 \right) \tau(X) \right) \\ &= \frac{c}{\rho} (\tau - \varepsilon^2 \tau), \end{aligned}$$

então,

$$\sum_{\gamma} T_{\gamma} \omega_{\gamma 0}(X) = 0. \quad (2.19)$$

Assim, substituindo (2.19) em (2.18), obtemos $\Phi_{i0} = 0$.

No caso $\alpha = n + 1$ e $\beta = 0$, $\Phi_{n+1,0}$ é zero trivialmente, pois $\omega_{n+1} = \omega_0 = 0$. \square

Lema 2.3.6. $d\Upsilon + \Upsilon \wedge \Upsilon = 0$.

Demonstração. Isso equivale a provar que $d\Omega + \Omega \wedge \Omega - d\mathbf{X} + \mathbf{X} \wedge \mathbf{X} - \mathbf{X} \wedge \Omega - \Omega \wedge \mathbf{X} = 0$.

Para o caso $\alpha = u$, $\beta = 0$, usando os Lemas 2.3.2, 2.3.3 e 2.3.5, obtemos que $(d\Omega + \Omega \wedge \Omega)_{u0} = 0$, $d\mathbf{X}_{u0} = 0$ e $(\Omega \wedge \mathbf{X} + \mathbf{X} \wedge \Omega)_{u0} = 0$. Também, pelo Lema 2.3.4, temos que $(\mathbf{X} \wedge \mathbf{X})_{u0} = \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 ((T_0 \omega_u - \varepsilon_u \varepsilon_0 T_u \omega_0) \wedge \tau - \varepsilon \varepsilon_0 \omega_u \wedge \omega_0)$, mas $T_0 = 0$ e $\omega_0 = 0$, segue que $(\mathbf{X} \wedge \mathbf{X})_{u0} = 0$, assim

$$(d\Omega + \Omega \wedge \Omega - d\mathbf{X} + \mathbf{X} \wedge \mathbf{X} - \mathbf{X} \wedge \Omega - \Omega \wedge \mathbf{X})_{u0} = 0.$$

Para $\alpha = i$, $\beta = n + 1$, usando os Lemas 2.3.2 a 2.3.5, e como $\omega_{n+1} = 0$, segue que

$$\begin{aligned}
& (d\Omega + \Omega \wedge \Omega - d\mathbf{X} + \mathbf{X} \wedge \mathbf{X} - \mathbf{X} \wedge \Omega - \Omega \wedge \mathbf{X})_{in+1} \\
&= T_{n+1} \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \right) \tau \wedge \omega_i - \frac{\rho''\rho - 2(\rho')^2}{\rho^2} T_{n+1} \tau \wedge \omega_i \\
&\quad - \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} \left(\sum_k T_k \omega_{kn+1} \wedge \omega_i + T_{n+1} d\omega_i \right) \\
&\quad + \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 \left((T_{n+1} \omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_{n+1} T_i \omega_{n+1}) \wedge \tau - \varepsilon \varepsilon_{n+1} \omega_i \wedge \omega_{n+1} \right) \\
&\quad - \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} \left(-T_{n+1} d\omega_i + \sum_k T_k \omega_i \wedge \omega_{kn+1} \right) \\
&= \frac{\rho''\rho - (\rho')^2}{\rho^2} T_{n+1} \tau \wedge \omega_i - \frac{\rho''\rho - 2(\rho')^2}{\rho^2} T_{n+1} \tau \wedge \omega_i - \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 T_{n+1} \tau \wedge \omega_i \\
&\quad - \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} \left(\sum_k T_k \omega_{kn+1} \wedge \omega_i + T_{n+1} d\omega_i \right) - \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} \left(-T_{n+1} d\omega_i - \sum_k T_k \omega_{kn+1} \wedge \omega_i \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, para $\alpha = i$, $\beta = j$, usando os Lemas 2.3.2 a 2.3.5, obtemos

$$\begin{aligned}
& (d\Omega + \Omega \wedge \Omega - d\mathbf{X} + \mathbf{X} \wedge \mathbf{X} - \mathbf{X} \wedge \Omega - \Omega \wedge \mathbf{X})_{ij} \\
&= \varepsilon \varepsilon_j \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \omega_j \wedge \omega_i - \left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \right) (T_j \omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_j T_i \omega_j) \wedge \tau \\
&\quad - \frac{\rho''\rho - 2(\rho')^2}{\rho^2} \tau \wedge (T_j \omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_j T_i \omega_j) - \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} (T_j d\omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_j T_i d\omega_j) - 2\varepsilon \varepsilon_j \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 \omega_j \wedge \omega_i \\
&\quad - \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} \sum_u T_u (\omega_{uj} \wedge \omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_j \omega_{ui} \wedge \omega_j) + \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 \left((T_j \omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_j T_i \omega_j) \wedge \tau - \varepsilon \varepsilon_j \omega_i \wedge \omega_j \right) \\
&\quad - \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} (\varepsilon_i \varepsilon_j T_i d\omega_j - T_j d\omega_i) - \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} \sum_u T_u (\omega_i \wedge \omega_{uj} - \varepsilon_j \varepsilon_u \omega_{iu} \wedge \omega_j) \\
&= \varepsilon \varepsilon_j \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \omega_j \wedge \omega_i - \frac{\rho''\rho - (\rho')^2}{\rho^2} (T_j \omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_j T_i \omega_j) \wedge \tau + \frac{\rho''\rho - 2(\rho')^2}{\rho^2} (T_j \omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_j T_i \omega_j) \wedge \tau \\
&\quad - 2\varepsilon \varepsilon_j \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 \omega_j \wedge \omega_i + \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 (T_j \omega_i - \varepsilon_i \varepsilon_j T_i \omega_j) \wedge \tau + \varepsilon \varepsilon_j \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 \omega_j \wedge \omega_i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Parte 2: Primeiro provamos que uma função $s : \mathbf{S} \rightarrow \{X \in \mathbb{E}^{n+2} | g_0(X, X) = \varepsilon_{n+1}\}$ é uma submersão e que um subconjunto \mathcal{F} de $\mathcal{U} \times \mathbf{S}$ é uma variedade diferenciável, logo, construímos uma função $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{S}$, sendo um gráfico contido em \mathcal{F} .

Consideremos a função $g : M_{n+2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{E}^{n+2}$, que leva a matriz $Z = (Z_{\alpha\beta})$ ao ponto $(Z_{n+1,0}, \dots, Z_{n+1,n+1})$. Lembremos que se $Z \in \mathbf{S} \subset M_{n+2}(\mathbb{R})$, então $ZGZ^t = G$, ou equivalentemente, $\sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} Z_{\alpha\gamma} Z_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha} \delta_{\alpha\beta}$. Fazendo $\alpha = \beta = n+1$ temos que $g_0(g(Z), g(Z)) = \sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} Z_{n+1\gamma} Z_{n+1\gamma} = \varepsilon_{n+1}$, em que g_0 é a métrica semi-riemanniana usual de \mathbb{E}^{n+2} , portanto, podemos definir a aplicação $s : \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2}) = \{X \in \mathbb{E}^{n+2} | g_0(X, X) = \varepsilon_{n+1}\}$, dada por $s = g|_{\mathbf{S}} = g \circ i$, em que $i : \mathbf{S} \rightarrow M_{n+2}(\mathbb{R})$ é a aplicação inclusão.

A aplicação s é uma submersão. De fato, como g é uma aplicação lineal, identificando cada espaço vetorial $M_{n+2}(\mathbb{R})$ e \mathbb{E}^{n+2} , com o respectivo espaço tangente, temos que $dg = g$, logo

$$ds = d(g \circ i) = dg \circ di = g \circ i = s.$$

Assim, $(ds)_Z : T_Z \mathbf{S} \rightarrow T_{s(Z)} \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})$ fica definida por

$$(ds)_Z(V) = (V_{n+1,0}, \dots, V_{n+1,n+1}).$$

Lembremos que o espaço tangente a \mathbf{S} na matriz identidade I_{n+2} , coincide com a álgebra de Lie $\mathfrak{s} = \{H \in M_{n+2}(\mathbb{R}) | H^t G + GH = 0\}$, ou seja, as matrizes H em $M_{n+2}(\mathbb{R})$, tais que $H_{\beta\alpha} = -\varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} H_{\alpha\beta}$. Por outro lado, o espaço tangente a $\mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})$ num ponto X , é o espaço formado por todos os vetores ortogonais a X , ou seja,

$$T_X \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2}) = \{Y \in \mathbb{E}^{n+2} | g_0(X, Y) = 0\}.$$

Se $X = I_{n+2}$, temos que $s(I_{n+2}) = (0, \dots, 0, 1)$. Logo, para $Y = (Y_0, \dots, Y_{n+1}) \in T_{s(I_{n+2})} \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})$, segue que $g_0(s(I_{n+2}), Y) = 0$ se e só se, $Y_{n+1} = 0$, assim $T_{s(I_{n+2})} \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2}) = \{Y \in \mathbb{E}^{n+2} | Y_{n+1} = 0\}$. Então, para $Y \in T_{s(I_{n+2})} \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})$, definimos a matriz $H = (H_{\alpha\beta})$ com $H_{\alpha\beta} = 0$ se $\alpha, \beta < n+1$, $H_{n+1\beta} = Y_{\beta}$ e $H_{\beta n+1} = -\varepsilon_{\beta} \varepsilon_{n+1} H_{n+1\beta}$, segue que $H \in \mathfrak{s}$ e que $(ds)_{I_{n+2}}(H) = Y$, assim, $(ds)_{I_{n+2}} : \mathfrak{s} \rightarrow T_{s(I_{n+2})} \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})$ é sobrejetora.

Por outro lado, como \mathbf{S} é um grupo de Lie, o espaço tangente em $Z \in \mathbf{S}$, está formado pelas matrizes HZ , em que $H \in \mathfrak{s}$. Se $Y \in T_{s(Z)} \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})$, segue que $g_0(s(Z), Y) = \sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} Z_{n+1\gamma} Y_{\gamma} = 0$. Como $Z \in \mathbf{S}$, temos $(Z^{\alpha\beta}) = Z^{-1} = GZ^t G$, ou seja, $Z^{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} Z_{\beta\alpha}$. Calculando $(YZ^{-1})_{\beta} = \sum_{\gamma} Y_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} \varepsilon_{\beta} Z_{\beta\gamma}$, observamos que $(YZ^{-1})_{n+1} = g_0(s(Z), Y) = 0$, assim, $YZ^{-1} \in T_{s(I_{n+2})} \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})$, então, definimos $H \in \mathfrak{s}$ para YZ^{-1} , por $H = (H_{\alpha\beta})$ com $H_{\alpha\beta} = 0$ se $\alpha, \beta < n+1$, $H_{n+1\beta} = (YZ^{-1})_{\beta}$ e $H_{\beta n+1} = -\varepsilon_{\beta} \varepsilon_{n+1} H_{n+1\beta}$, logo, $(HZ)_{n+1\beta} = \sum_{\mu} H_{n+1\mu} Z_{\mu\beta} = \sum_{\mu} (YZ^{-1})_{\mu} Z_{\mu\beta} = \sum_{\mu} \sum_{\gamma} Y_{\gamma} Z^{\gamma\mu} Z_{\mu\beta} = \sum_{\gamma} Y_{\gamma} \sum_{\mu} Z^{\gamma\mu} Z_{\mu\beta} = \sum_{\gamma} Y_{\gamma} \delta_{\gamma\beta} = Y_{\beta}$, ou seja, $(ds)_Z(HZ^{-1}) = Y$, e assim, $(ds)_Z$ é sobrejetora. Portanto s é uma submersão.

Agora, dado um ponto $x \in M$, definimos o conjunto

$$\mathcal{Z}(x) = \{Z \in \mathbf{S} | Z_{n+1\beta} = T_{\beta}(x)\}.$$

Como $\sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} T_{\gamma}^2(x) = \varepsilon = \varepsilon_{n+1}$, para todo $x \in M$, então $\mathcal{Z}(x) = s^{-1}(T_0(x), \dots, T_{n+1}(x))$.

Lema 2.3.7. *Seja \mathcal{U} uma vizinhança aberta de $x_0 \in M$, então o conjunto $\mathcal{F} = \{(x, Z) \in \mathcal{U} \times \mathbf{S} \mid Z \in \mathcal{Z}(x)\}$ é uma subvariedade de $\mathcal{U} \times \mathbf{S}$, tal que*

$$T_{(x,Z)}\mathcal{F} = \{(U, V) \in T_x\mathcal{U} \oplus T_Z\mathbf{S} \mid (dT_{\beta})_x U = V_{n+1\beta}, \beta = 0, \dots, n+1\}.$$

Demonstração. Consideremos a função $\varphi : \mathcal{U} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2}) \times \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})$, definida por

$$\varphi(x, Z) = (h(x), s(Z)), \text{ em que } h(x) = (T_0(x), \dots, T_{n+1}(x)).$$

Observemos que $\mathcal{F} = \varphi^{-1}(\mathcal{G})$, em que $\mathcal{G} = \{(P, P) \in \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2}) \times \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})\}$, é a diagonal do espaço produto $\mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2}) \times \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})$.

Como s, T_0, \dots, T_{n+1} são diferenciáveis, segue que φ é diferenciável e que

$$d\varphi_{(x,Z)}(U, V) = ((dh)_x U, (ds)_Z V) = ((dT_0)_x U, \dots, (dT_{n+1})_x U, (ds)_Z V).$$

O espaço tangente a $\mathcal{G} \subset \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2}) \times \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})$ num ponto (P, P) é $\mathcal{C}_1 = \{(X, X) \mid X \in T_q\mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})\}$ e como s é uma submersão, temos que para todo elemento do conjunto $\mathcal{C}_2 = \{(0, Y) \in T_{(h(x), s(Z))}\mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2}) \times \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})\}$ existe $(0, V) \in T_{(x,Z)}\mathcal{U} \times \mathbf{S}$ tal que $(d\varphi)_{(x,Z)}(0, V) = (0, Y)$, significa que

$$(d\varphi)_{(x,Z)}(T_{(x,Z)}\mathcal{U} \times \mathbf{S}) \oplus T_{(h(x), s(Z))}\mathcal{G} = T_{(h(x), s(Z))}\mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2}) \times \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2}),$$

para todo $(x, Z) \in \varphi^{-1}(\mathcal{G})$, ou seja, φ é transversal a \mathcal{G} (ver [14, pag. 144]), portanto $\mathcal{F} = \varphi^{-1}(\mathcal{G})$ é uma subvariedade de $\mathcal{U} \times \mathbf{S}$, com

$$\dim(\mathcal{U} \times \mathbf{S}) - \dim \mathcal{F} = \dim(\mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2}) \times \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})) - \dim \mathcal{G},$$

logo,

$$\dim \mathcal{F} = n + \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (n+1) = n + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Além disso, dado $(x, Z) \in \mathcal{F}$, obtemos

$$\begin{aligned} T_{(x,Z)}\mathcal{F} &= (d\varphi)_{(x,Z)}^{-1}(T_{(h(x), s(Z))}\mathcal{G}) \\ &= \{(U, V) \in T_{(x,Z)}\mathcal{U} \times \mathbf{S} \mid (dh)_x U = (ds)_Z V\} \\ &= \{(U, V) \in T_x\mathcal{U} \oplus T_Z\mathbf{S} \mid (dT_{\beta})_x U = V_{n+1\beta}, \beta = 0, \dots, n+1\}. \end{aligned}$$

□

Agora, construiremos a aplicação B .

Lema 2.3.8. *Seja (M, \langle, \rangle) uma variedade semi-riemanniana que satisfaz as condições de estrutura. Para cada $x_0 \in M$ e $B_0 \in \mathcal{Z}(x_0)$, existe uma vizinhança \mathcal{U} de x_0 em M e uma única aplicação $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{S}$, tal que $B^{-1}dB = \Omega - \mathbf{X}$, $B_0 = B(x_0)$ e $B(x) \in \mathcal{Z}(x)$ para todo $x \in \mathcal{U}$. No caso $c = 0$, podemos supor $B_{0\alpha} = \delta_{0\alpha}$.*

Demonstração. Consideremos o conjunto \mathcal{F} do Lema 2.3.7, e definamos em \mathcal{F} a 1-forma Θ dada por $\Theta(U, V) = \Upsilon(U) - Z^{-1}dZ(V) = \Omega U - \mathbf{X}U - Z^{-1}V$, para qualquer $(U, V) \in T_{(x,Z)}\mathcal{F} \subset T_{(x,Z)}\mathcal{U} \times \mathbf{S}$.

Então, para obter a aplicação B do Lema 2.3.8, primeiro provaremos que a distribuição $\Delta = \ker \Theta$ verifica:

Afirmção 1: $\Delta = \text{Ker } \Theta$ é de dimensão n .

Afirmção 2: $\Delta = \text{Ker } \Theta$ é completamente integrável.

Isso significa que existe uma subvariedade $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ de dimensão n , passando por (x_0, B_0) , tal que o espaço tangente a \mathcal{L} é dado por $\text{Ker } \Theta$. Logo, provaremos que localmente \mathcal{L} é o gráfico de uma função $B : \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{S}$, que satisfaz as condições do Lema 2.3.8.

Provemos a **Afirmção 1** usando o Teorema da dimensão, para isso precisamos calcular a dimensão de $\text{Im}(\Theta)$. Como $\Omega, \mathbf{X} \in \mathfrak{s}(A^1(\mathcal{U}))$ e $Z^{-1}V \in \mathfrak{s}$, se $Z \in \mathbf{S}$ e $V \in T_Z\mathbf{S}$, temos que $\Theta(U, V) \in \mathfrak{s}$, para $(U, V) \in T_{(x,Z)}\mathcal{F}$.

Agora, lembremos que $T_Z\mathbf{S} = \{ZH | H \in \mathfrak{s}\}$, para $Z \in \mathbf{S}$, e dado $(x, Z) \in \mathcal{F}$, consideremos o espaço $\mathcal{H} = \{H \in \mathfrak{s} | (ZH)_{n+1\beta} = 0, \beta = 0, \dots, n+1\}$, ou seja,

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathfrak{s} | ZH \in \ker(ds)_Z\},$$

tal que $\dim(\mathcal{H}) = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\mathcal{H} = \text{Im}(\Theta)$. De fato, como s é uma submersão, temos

$$\begin{aligned} \dim(\ker(ds)_Z) &= \dim \mathbf{S} - \dim(\text{Im } s) \\ &= \dim \mathbf{S} - \dim(\mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Por ser \mathbf{S} um grupo de Lie, segue que $ZH = (dL_Z)_{I_{n+2}}(H)$, em que L_Z é a traslação à esquerda por Z em \mathbf{S} . Como L_Z é um isomorfismo entre $T_{I_{n+2}}\mathbf{S}$ e $T_Z\mathbf{S}$, temos que $\mathcal{H} = (dL_Z)_{I_{n+2}}^{-1}(\ker(ds)_Z)$, e portanto, $\dim(\mathcal{H}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Agora provemos que $\mathcal{H} = \text{Im}(\Theta)$. Seja $(U, V) \in T_{(x,Z)}\mathcal{F}$, temos que $(ds)_Z(Z\Theta(U, V)) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}(Z\Theta)_{n+1\beta}(U, V) &= (Z\Omega)_{n+1\beta}(U) - (Z\mathbf{X})_{n+1\beta}(U) - (dZ)_{n+1\beta}(V) \\ &= (Z\Omega)_{n+1\beta}(U) - (Z\mathbf{X})_{n+1\beta}(U) - (V)_{n+1\beta} \\ &= (Z\Omega)_{n+1\beta}(U) - (Z\mathbf{X})_{n+1\beta}(U) - (dT_\beta)_x(U).\end{aligned}$$

Logo, pela equação (2.15), e usando que $T_0 = 0$, $\sum_\gamma T_\gamma \omega_\gamma = \tau$ e $Z \in \mathcal{Z}(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}(Z\Theta)_{n+1k} &= \sum_\gamma Z_{n+1\gamma} \omega_{\gamma k} - \sum_\gamma Z_{n+1\gamma} \mathbf{X}_{\gamma k} - \frac{\rho'}{\rho} \varepsilon_k \omega_k - \varepsilon \frac{\rho'}{\rho} T_k \tau - \sum_u T_u \omega_{uk} \\ &= \sum_\gamma T_\gamma \omega_{\gamma k} - \sum_\gamma T_\gamma \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} (T_k \omega_\gamma - \varepsilon_\gamma \varepsilon_k T_\gamma \omega_k) - \frac{\rho'}{\rho} \varepsilon_k \omega_k - \varepsilon \frac{\rho'}{\rho} T_k \tau - \sum_u T_u \omega_{uk} \\ &= T_0 \omega_{0k} - \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \left(T_k \tau - \sum_\gamma \varepsilon_\gamma \varepsilon_k T_\gamma T_\gamma \omega_k \right) - \frac{\rho'}{\rho} \varepsilon_k \omega_k - \varepsilon \frac{\rho'}{\rho} T_k \tau \\ &= \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} \varepsilon_k \omega_k \sum_\gamma \varepsilon_\gamma T_\gamma^2 - \frac{\rho'}{\rho} \varepsilon_k \omega_k \\ &= 0,\end{aligned}$$

pois $\varepsilon = \sum_\gamma \varepsilon_\gamma T_\gamma^2$. Analogamente, como $\omega_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned}(Z\Theta)_{n+1n+1} &= \sum_\gamma T_\gamma \omega_{\gamma n+1} - \sum_\gamma T_\gamma \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} (T_{n+1} \omega_\gamma - \varepsilon_\gamma \varepsilon_{n+1} T_\gamma \omega_{n+1}) - \frac{\rho'}{\rho} \varepsilon_{n+1} \omega_{n+1} \\ &\quad - \varepsilon \frac{\rho'}{\rho} T_{n+1} \tau - \sum_u T_u \omega_{un+1} \\ &= \sum_\gamma T_\gamma \omega_{\gamma n+1} - \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} T_{n+1} \tau + \varepsilon \frac{\rho'}{\rho} T_{n+1} \tau - \sum_u T_u \omega_{un+1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Também, como $T_0 = 0$ e $\omega_0 = 0$

$$\begin{aligned}(Z\Theta)_{n+1,0} &= \sum_\gamma T_\gamma \omega_{\gamma 0} - \sum_\gamma T_\gamma \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} (T_0 \omega_\gamma - \varepsilon_\gamma \varepsilon_0 T_\gamma \omega_0) - dT_0 \\ &= \sum_\gamma T_\gamma \omega_{\gamma 0} - \frac{\rho'}{\rho} \varepsilon_0 \omega_0 - \varepsilon \frac{\rho'}{\rho} T_0 \tau - \sum_u T_u \omega_{u0} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Então, $Z\Theta(U, V) \in \ker(ds)_Z$, ou seja, $\text{Im}(\Theta) \subset \mathcal{H}$.

Por outro lado, se $(x, Z) \in \mathcal{F}$ e $H \in \mathcal{H} \subset \mathfrak{s}$, temos que $(0, ZH) \in T_{(x,Z)}\mathcal{F}$, pois $(ZH)_{n+1\beta} = 0 = (dT_\beta)_x 0$, para todo $\beta = 0, \dots, n+1$. Logo, $\Theta(0, ZH) = \Omega(0) - \mathbf{X}(0) - Z^{-1}(ZH) = -H$, e assim, $\mathcal{H} \subset \text{Im}(\Theta)$. Portanto, $\text{Im}(\Theta) = \mathcal{H}$.

Assim, concluimos que

$$\begin{aligned} \dim \Delta(x, Z) &= \dim (\ker \Theta_{(x,Z)}) \\ &= \dim T_{(x,Z)}\mathcal{F} - \dim \mathcal{H} \\ &= \left(n + \frac{n(n+1)}{2} \right) - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n. \end{aligned}$$

Agora, provemos a **Afirmção 2**. Pelo teorema de Frobenius, é equivalente provar que Δ é involutiva.

Como $\Theta = \Upsilon - (Z^{-1}) \wedge dZ$, usando a equação (1.13), segue que

$$d\Theta = d\Upsilon + Z^{-1}dZ \wedge Z^{-1}dZ = d\Upsilon + (\Upsilon - \Theta) \wedge (\Upsilon - \Theta),$$

e usando o Lema 2.3.6, obtemos

$$d\Theta = -\Upsilon \wedge \Theta - \Theta \wedge \Upsilon + \Theta \wedge \Theta.$$

Logo, se $(U_1, V_1), (U_2, V_2) \in \Delta = \ker \Theta$, temos que

$$\begin{aligned} d\Theta((U_1, V_1), (U_2, V_2)) &= (U_1, V_1)(\Theta(U_2, V_2)) - (U_2, V_2)(\Theta(U_1, V_1)) - \Theta([(U_1, V_1), (U_2, V_2)]) \\ &= -\Theta([(U_1, V_1), (U_2, V_2)]), \end{aligned}$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned} d\Theta((U_1, V_1), (U_2, V_2)) &= (-\Upsilon \wedge \Theta - \Theta \wedge \Upsilon + \Theta \wedge \Theta)((U_1, V_1), (U_2, V_2)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

portanto, $[(U_1, V_1), (U_2, V_2)] \in \ker \Theta = \Delta$, ou seja, Δ é uma distribuição involutiva, e obtemos a **Afirmção 2**.

Usando as Afirmções (1) e (2), concluimos que existe uma variedade $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ de dimensão n , passando por (x_0, B_0) , tal que o espaço tangente a \mathcal{L} é dado por $\ker \Theta$.

Logo, para cada $(0, V) \in \Delta_{(x_0, B_0)} = T_{(x_0, B_0)}\mathcal{L}$, temos que $0 = \Theta_{(x_0, B_0)}(0, V) = B_0^{-1}V$, multiplicando por B_0 obtemos $V = 0$. Isso implica que $\Delta_{(x_0, B_0)} \cap (\{0\} \times T_{B_0}\mathbf{S}) = \{0\}$,

ou seja, \mathcal{L} intercepta transversalmente $\{x_0\} \times \mathbf{S}$ em (x_0, B_0) . Portanto, usando a caracterização local de gráficos (ver [14, pag. 145]), concluímos que existe uma vizinhança $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ de x_0 , tal que, perto de x_0 , \mathcal{L} é o gráfico de uma única aplicação $B : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{Z}(x) \subset \mathbf{S}$. Então, perto de (x_0, B_0) podemos escrever $\mathcal{L} = \{(x, B(x)) \in \mathcal{U}_1 \times \mathbf{S}\}$ e $T_{(x, B(x))}\mathcal{L} = \{(U, (dB)_x U) | U \in T_x \mathcal{U}_1\} \subset T_{(x, B(x))}\mathcal{F}$. Notemos que $B(x_0) = B_0$, pois $(x_0, B_0) \in \mathcal{L}$, e como $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$, segue que $B(x) \in \mathcal{Z}(x)$, para cada $x \in \mathcal{U}_1$. Como $\Theta \equiv 0$ em \mathcal{L} , para $U \in T_x \mathcal{U}_1$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \Theta_{(x, B(x))}(U, (dB)_x U) = (\Upsilon_x)(U) - [(B(x))^{-1}d(B(x))](dB)_x U \\ &= (\Upsilon_x)(U) - (B(x))^{-1}(dB)_x U, \end{aligned}$$

pois $d(B(x)) : T_{B(x)}\mathbf{S} \rightarrow T_{B(x)}\mathbf{S}$ é a identidade. Então, a função B satisfaz

$$(B(x))^{-1}(dB)_x = \Omega_x - \mathbf{X}_x, \quad (2.20)$$

em que $(dB)_x : T_x \mathcal{U}_1 \rightarrow T_{B(x)}\mathbf{S}$. Denotando \mathcal{U}_1 por \mathcal{U} , obtemos o resultado do Lema 2.3.8.

Para $c = 0$, temos que $\omega_{\alpha 0} = \mathbf{X}_{\alpha 0} = 0$ e da igualdade $(dB)_x = B(x)(\Omega_x - \mathbf{X}_x)$ obtemos $((dB)_x)_{\alpha 0} = 0$. Então, escolhendo B_0 com $(B_0)_{\alpha 0} = \delta_{0\alpha}$ podemos assumir $B(x)_{\alpha 0} = \delta_{0\alpha}$ e como $B(x) \in \mathbf{S}$, as colunas de $B(x)$ são ortogonais, logo, para $\beta \neq 0$, segue que $0 = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} B(x)_{\alpha 0} B(x)_{\alpha \beta} = \sum_{\alpha} \delta_{0\alpha} B(x)_{\alpha \beta} = B(x)_{0\beta}$. Assim, $B(x)_{0\alpha} = \delta_{0\alpha}$. \square

No que segue, usaremos a notação $B^{-1}dB = \Omega - \mathbf{X}$ para (2.20).

Até agora, para cada ponto $x \in \mathcal{U}$ conseguimos associar uma matriz $B(x)$ em $\mathcal{Z}(x) \subset \mathbf{S}$ de forma única.

Parte 4: Definiremos uma função $f : \mathcal{U} \rightarrow \varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{Q}_k^n(c)$.

Agora, pensemos na matriz $B(x)$ como a matriz de mudança de uma base ortonormal $\{e_0(x), v_1(x), \dots, v_n(x), e_{n+1}(x)\}$ para a base $\{\bar{E}_0(f(x)), \dots, \bar{E}_n(f(x)), \partial_t(f(x))\}$, no espaço tangente num ponto $f(x)$ de $\varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{E}^{n+1}$, em que o conjunto de campos vetoriais $\{e_0, v_1, \dots, v_n, e_{n+1}\}$ assim definido, é um referencial adaptado a $f(\mathcal{U})$, para uma função $f : M \rightarrow \varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{E}^{n+1}$.

No caso que $c = \pm 1$, com $e_0(x)$ ortogonal a $\varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{Q}_k^n(c)$ em $f(x) = (t(x), p(x))$, em que $e_0(x) = (0, \frac{\xi}{\rho}(x))$ e $g_0(\xi(x), \xi(x)) = \langle e_0(x), e_0(x) \rangle = \varepsilon_0 = c$, logo, $(t(x), c\xi(x)) \in \{t(x)\} \times \mathbb{Q}_k^n(c)$ e podemos fazer $p(x) = \xi(x)$. Também, para que a f verifique $\pi \circ f = \hat{\pi}$, deveríamos fazer $t(x) = \hat{\pi}(x)$. Com essa ideia, procedemos como segue:

Definamos a função $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, dada por

$$f_0(x) = c\varepsilon_0 B(x)_{00}, \quad f_i(x) = c\varepsilon_i B(x)_{i0}, \quad f_{n+1}(x) = \hat{\pi}(x).$$

Como $B(x) \in \mathcal{Z}(x) \subset \mathbf{S}$, segue que $B(x)_{n+1,0} = T_0(x) = 0$, logo $\varepsilon_0 f_0^2 + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i^2 = \sum_{\alpha=0}^{n+1} \varepsilon_\alpha B_{\alpha 0}^2 = \varepsilon_0 = c$, e obtemos $f(x) \in \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, para todo $x \in \mathcal{U}$. Também, pela definição da f , temos $(\pi \circ f)(x) = f_{n+1}(x) = \hat{\pi}(x)$, para todo $x \in \mathcal{U}$.

Agora, lembremos que $\{e_1(x), \dots, e_n(x)\}$ é uma base de $T_x \mathcal{U}$, então calculemos a imagen dos e_i pela diferencial da $f = (f_0, \dots, f_{n+1})$, para isso, calculemos a diferencial das funções coordenadas de f na base canônica de \mathbb{R}^{n+2} . Usando que $dB = B\Omega - B\mathbf{X}$, temos

$$\begin{aligned} df_i(e_k) &= c\varepsilon_i dB_{i0}(e_k) \\ &= \sum_{\alpha} c\varepsilon_i (B_{i\alpha} \omega_{\alpha 0}(e_k) - B_{i\alpha} \mathbf{X}_{\alpha 0}(e_k)) \\ &= c\varepsilon_i \sum_{\alpha} B_{i\alpha} \omega_{\alpha 0}(e_k) - c\varepsilon_i \sum_{\alpha} B_{i\alpha} \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} (T_0 \omega_{\alpha}(e_k) - \varepsilon_0 \varepsilon_{\alpha} T_{\alpha} \omega_0(e_k)) \\ &= c\varepsilon_i \sum_{j=1}^n B_{ij} \omega_{j0}(e_k) - c\varepsilon_i B_{in+1} \omega_{n+1,0}(e_k) \\ &= c\varepsilon_i \sum_{j=1}^n B_{ij} \varepsilon_j \frac{c}{\rho} \langle e_j, e_k - \varepsilon \tau(e_k) T \rangle - c\varepsilon_i B_{in+1} \frac{\varepsilon \varepsilon_{n+1} c}{\rho} T_{n+1} \tau(e_k) \\ &= \frac{\varepsilon_i}{\rho} \sum_{j=1}^n B_{ij} \varepsilon_j \langle e_j, e_k \rangle - \frac{\varepsilon \varepsilon_i \tau(e_k)}{\rho} \sum_{j=1}^n B_{ij} \varepsilon_j T_j - \frac{\varepsilon \varepsilon_i \tau(e_k)}{\rho} B_{in+1} \varepsilon_{n+1} T_{n+1} \\ &= \frac{\varepsilon_i}{\rho} B_{ik} - \frac{\varepsilon \varepsilon_i \tau(e_k)}{\rho} \sum_{\alpha} B_{i\alpha} \varepsilon_{\alpha} B_{n+1\alpha} \\ &= \frac{\varepsilon_i}{\rho} B_{ik} - \frac{\varepsilon \varepsilon_i \tau(e_k)}{\rho} (BGB^t)_{in+1} \\ &= \frac{\varepsilon_i}{\rho} B_{ik} - \frac{\varepsilon \varepsilon_i \tau(e_k)}{\rho} G_{in+1} \\ &= \frac{\varepsilon_i}{\rho} B_{ik}. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $df_0(e_k) = \frac{\varepsilon_0}{\rho} B_{0,k}$ e como $\text{grad } \hat{\pi} = \varepsilon T$, segue que

$$df_{n+1}(e_k) = d\hat{\pi}(e_k) = \langle \varepsilon T, e_k \rangle = \varepsilon T_k = \varepsilon B_{n+1,k}.$$

Então, se consideramos a matriz diagonal $C = \text{Diag} \left(\frac{\varepsilon_0}{\rho \circ \hat{\pi}}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\rho \circ \hat{\pi}}, \varepsilon \right)$, observemos que ela permite mudar as coordenadas de um campo vetorial no referencial $\{\bar{E}_{\alpha}\}$ de $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{E}^{n+1}$

para o referencial $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right\}$ de \mathbb{R}^{n+2} em que o produto interno é o usual. Então, se verifica que $(df(e_k))_\alpha = (CB)_{\alpha k} = (CB\varpi(e_k))_\alpha$, com $\varpi = (0, \omega_1, \dots, \omega_n, 0)^t$, ou equivalentemente, $df = CB\varpi$, em que C é a matriz de mudança de uma base em $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{E}^{n+1}$ para a base em \mathbb{R}^{n+2} . Isto prova o resultado seguinte:

Lema 2.3.9. *Para $c = \pm 1$, dado um ponto $x \in \mathcal{U}$ e seja C a matriz*

$$C = \text{Diag} \left(\frac{\varepsilon_0}{\rho \circ \hat{\pi}}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\rho \circ \hat{\pi}}, \varepsilon \right),$$

existe uma função $f : \mathcal{U} \rightarrow \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, tal que $df = CB\varpi$, $\pi \circ f = \hat{\pi}$.

Agora, no caso $c = 0$, o vetor $e_0 = \sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma 0} \bar{E}_\gamma$ não determina um ponto de $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{E}^n$ como no caso $c = \pm 1$, pois $e_0 = (0, \frac{\xi}{\rho})$, em que ξ é um campo unitário normal a \mathbb{E}^n em \mathbb{E}^{n+1} e portanto $\xi \notin \mathbb{E}^n$. Então construiremos a função f de maneira diferente ao caso $c = \pm 1$.

Lema 2.3.10. *Para $c = 0$, dados $x_0 \in \mathcal{U}$, $p \in \mathbb{E}_k^n$ e a matriz*

$$C = \text{Diag} \left(\frac{\varepsilon_0}{\rho \circ \hat{\pi}}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\rho \circ \hat{\pi}}, \varepsilon \right),$$

existe uma única função $f : \mathcal{U} \rightarrow \varepsilon I \times_\rho \mathbb{E}^{n+1}$, tal que $df = CB\varpi$, $f_0 = 0$, $f_{n+1} = \hat{\pi}$ e $f(x_0) = (\hat{\pi}(x_0), 0, p)$.

Demonstração. Dado um ponto $((x, (t, p)) \in \mathcal{U} \times (I \times \mathbb{E}^n)$, consideremos o mergulho $\tilde{\Xi} : I \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, dado por $\tilde{\Xi}(t, p) = (t, 0, p)$, e definimos a aplicação

$$\Psi_{(x, (t, p))} : T_x \mathcal{U} \oplus T_{(t, p)}(I \times \mathbb{E}^n) \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$$

$$\Psi_{(x, (t, p))}(Y, W) = C_x B_x \varpi_x(Y) - d\tilde{\Xi}_{(t, p)}(W).$$

Ou seja, temos a 1-forma $\Psi = CB\varpi - d\tilde{\Xi} \in \Lambda^1(\mathcal{U} \times (I \times \mathbb{E}^n), \mathbb{R}^{n+2})$.

Para construir a função f , faremos um processo análogo à demonstração do Lema 2.3.8. Provaremos que $\hat{\Delta} = \ker \Psi$ é uma distribuição completamente integrável de dimensão n , que determina localmente o gráfico de uma função $f : \mathcal{U} \rightarrow \varepsilon I \times_\rho \mathbb{E}_k^n$, numa vizinhança \mathcal{U} do ponto x_0 . Para isso, dividimos a prova em quatro partes:

i) $\hat{\Delta} = \ker \Psi$ é de dimensão n . De fato, observemos que $(CB\varpi)_\alpha = \sum_{\gamma\beta} C_{\alpha\gamma} B_{\gamma\beta} \omega_\beta$, logo, $(CB\varpi)_0 = \frac{\varepsilon_0}{\rho} \sum_\beta B_{0\beta} \omega_\beta = 0$, pois $\omega_0 = 0$ e pelo Lema 2.3.8, no caso $c = 0$ temos $B_{0\beta} = \delta_{0\beta}$. Como também $(d\tilde{\Xi})_{0\beta} = 0$, segue que $\text{Im } \Psi \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n+1}$. Mas ainda, seja

$X = (0, X_1, \dots, X_{n+1}) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n+1}$, para $Y = 0$ e $W = (X_1, \dots, X_{n+1})$, temos que $\Psi(0, W) = -d\tilde{\Xi}(W) = -(0, W) = -X$, logo, $\text{Im } \Psi = \{0\} \times \mathbb{R}^{n+1}$. Assim,

$$\dim(\ker \Psi) = \dim(T_x \mathcal{M} \oplus T_{(t,p)}(I \times \mathbb{E}^n)) - \dim \mathbb{R}^{n+1} = (n + n + 1) - (n + 1) = n.$$

ii) Logo, provemos que $d\Psi = 0$. Usando que $dB = B\Omega - B\mathbf{X}$ e o Lema 2.3.2, obtemos

$$d\Psi = dC \wedge B\varpi + CdB \wedge \varpi + CBd\varpi = dC \wedge B\varpi - CB\mathbf{X} \wedge \varpi.$$

Como

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{\rho \circ \hat{\pi}}\right)_x V &= d\left[\left(\frac{1}{\rho}\right) \circ \hat{\pi}\right]_x V \\ &= -\frac{\rho'(\hat{\pi}(x))}{(\rho(\hat{\pi}(x)))^2} \circ d(\hat{\pi})_x V \\ &= -\frac{\rho'(\hat{\pi}(x))}{(\rho(\hat{\pi}(x)))^2} \langle \text{grad } (\hat{\pi}), V \rangle \\ &= -\frac{\rho'(\hat{\pi}(x))}{(\rho(\hat{\pi}(x)))^2} \langle \varepsilon T, V \rangle \\ &= -\frac{\varepsilon \rho'(\hat{\pi}(x))}{(\rho(\hat{\pi}(x)))^2} \tau(V), \end{aligned}$$

segue que, $dC = -\frac{\varepsilon \rho'}{\rho^2} \text{Diag}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n, 0)\tau$.

Para $i \in \{1, \dots, n\}$, usando que $C_{i0} = C_{in+1} = 0$, calculamos

$$\begin{aligned} (d\Psi)_i &= (dC \wedge B\varphi - CB\mathbf{X} \wedge \varphi)_i = \sum_{\alpha\beta} dC_{i\alpha} \wedge B_{\alpha\beta}\omega_\beta - \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C_{i\gamma} B_{\gamma\alpha} \mathbf{X}_{\alpha\beta} \wedge \omega_\beta \\ &= \sum_{j\beta} \frac{-\varepsilon\varepsilon_i \rho'}{\rho^2} \delta_{ij} \tau \wedge B_{j\beta}\omega_\beta - \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\varepsilon_i}{\rho} \delta_{ij} B_{j\alpha} \mathbf{X}_{\alpha\beta} \wedge \omega_\beta \\ &= -\frac{\varepsilon\varepsilon_i \rho'}{\rho^2} \sum_{\beta} \tau \wedge B_{i\beta}\omega_\beta - \frac{\varepsilon_i}{\rho} \sum_{\alpha\beta} B_{i\alpha} \frac{\varepsilon \rho'}{\rho} (T_\beta \omega_\alpha - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta T_\alpha \omega_\beta) \wedge \omega_\beta \\ &= -\frac{\varepsilon\varepsilon_i \rho'}{\rho^2} \sum_{\beta} \tau \wedge B_{i\beta}\omega_\beta - \frac{\varepsilon\varepsilon_i \rho'}{\rho^2} \sum_{\alpha\beta} B_{i\alpha} T_\beta \omega_\alpha \wedge \omega_\beta \\ &= -\frac{\varepsilon\varepsilon_i \rho'}{\rho^2} \left(\sum_{\beta} \tau \wedge B_{i\beta}\omega_\beta + \sum_{\alpha} B_{i\alpha} \omega_\alpha \wedge \sum_{\beta} T_\beta \omega_\beta \right) \\ &= -\frac{\varepsilon\varepsilon_i \rho'}{\rho^2} \left(-\sum_{\beta} B_{i\beta}\omega_\beta \wedge \tau + \sum_{\alpha} B_{i\alpha} \omega_\alpha \wedge \tau \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon_0 = 1$, pois $c = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
(d\Psi)_0 &= (dC \wedge B\varphi - CB\mathbf{X} \wedge \varphi)_0 \\
&= \sum_{\alpha\beta} dC_{0\alpha} \wedge B_{\alpha\beta}\omega_\beta - \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C_{0\gamma} B_{\gamma\alpha} \mathbf{X}_{\alpha\beta} \wedge \omega_\beta \\
&= -\frac{\varepsilon\rho'}{\rho^2} \sum_{\beta} \tau \wedge B_{0\beta}\omega_\beta - \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha\beta} B_{0\alpha} \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} (T_\beta\omega_\alpha - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta T_\alpha\omega_\beta) \wedge \omega_\beta \\
&= -\frac{\varepsilon\rho'}{\rho^2} \sum_{\beta} \tau \wedge B_{0\beta}\omega_\beta - \frac{\varepsilon\rho'}{\rho^2} \sum_{\alpha\beta} B_{0\alpha} T_\beta\omega_\alpha \wedge \omega_\beta \\
&= -\frac{\varepsilon\rho'}{\rho^2} \left(\sum_{\beta} \tau \wedge B_{0\beta}\omega_\beta + \sum_{\alpha} B_{0\alpha}\omega_\alpha \wedge \sum_{\beta} T_\beta\omega_\beta \right) \\
&= -\frac{\varepsilon\rho'}{\rho^2} \left(-\sum_{\beta} B_{0\beta}\omega_\beta \wedge \tau + \sum_{\alpha} B_{0\alpha}\omega_\alpha \wedge \tau \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $dC_{n+1\alpha} = 0$ e $B_{n+1\alpha} = T_\alpha$, segue que

$$\begin{aligned}
(d\Psi)_{n+1} &= (dC \wedge B\varphi - CB\mathbf{X} \wedge \varphi)_{n+1} \\
&= \sum_{\alpha\beta} dC_{n+1\alpha} \wedge B_{\alpha\beta}\omega_\beta - \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C_{n+1\gamma} B_{\gamma\alpha} \mathbf{X}_{\alpha\beta} \wedge \omega_\beta \\
&= -\frac{1}{\rho} \sum_{\alpha\beta} B_{n+1\alpha} \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} (T_\beta\omega_\alpha - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta T_\alpha\omega_\beta) \wedge \omega_\beta \\
&= -\frac{\varepsilon\rho'}{\rho^2} \sum_{\alpha\beta} T_\alpha T_\beta\omega_\alpha \wedge \omega_\beta \\
&= -\frac{\varepsilon\rho'}{\rho^2} \sum_{\alpha} T_\alpha\omega_\alpha \wedge \sum_{\beta} T_\beta\omega_\beta \\
&= -\frac{\varepsilon\rho'}{\rho^2} \tau \wedge \tau \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, $d\Psi(Y, W) = 0$.

iii) Agora, provemos que a distribuição $\hat{\Delta} = \ker \Psi$ é completamente integrável. Dados $(Y_1, W_1), (Y_2, W_2) \in \ker \Psi$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= d\Psi((Y_1, W_1), (Y_2, W_2)) \\
&= (Y_1, W_1)(\Psi((Y_2, W_2))) - (Y_2, W_2)(\Psi((Y_1, W_1))) - \Psi([(Y_1, W_1), (Y_2, W_2)]) \\
&= -\Psi([(Y_1, W_1), (Y_2, W_2)]),
\end{aligned}$$

então Ψ é involutiva e portanto completamente integrável.

iv) Consideremos o ponto $(x_0, (\hat{\pi}(x_0), p)) \in \mathcal{U} \times (I \times_{\rho} \mathbb{E}^n)$. Para $(0, W) \in \hat{\Delta}_{(x_0, (\hat{\pi}(x_0), p))} = T_{(x_0, (\hat{\pi}(x_0), p))}(\varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{E}^n) \cap \ker \Psi$, temos que $0 = \Psi(0, W) = -d\tilde{\Xi}_{(t,p)}(W)$, logo $W = 0$, ou seja, $\hat{\Delta}_{(x_0, (\hat{\pi}(x_0), p))} \cap (\{0\} \times T_p \mathbb{E}^n) = \{0\}$. Assim, podemos repetir a última parte da demonstração do Lema 2.3.8, para obter uma vizinhança de x_0 , que denotamos também por \mathcal{U} , e uma única função $\tilde{f} : \mathcal{U} \rightarrow \varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{E}^n$, com $\tilde{f}(x_0) = (\hat{\pi}(x_0), p)$, tal que $T_{(x, \tilde{f}(x))} \text{Graf}(\tilde{f}) = \{(Y, (d\tilde{f})_x Y) | Y \in T_x M\} \subset \ker \Psi$. Portanto, $d\tilde{\Xi}_{(\hat{\pi}(x_0), p)}((d\tilde{f})_x(Y)) = C_x B_x \varpi_x(Y)$, para todo $x \in \mathcal{U}$.

Então, definamos $f = \tilde{\Xi} \circ \tilde{f}$, assim, $f_0 = 0$ e $f(x_0) = (\hat{\pi}(x_0), 0, p)$. Observemos que $df_{n+1} = (CB\varpi)_{n+1} = \varepsilon \sum_{\beta} B_{n+1\beta} \omega_{\beta} = \varepsilon \sum_{\beta} T_{\beta} \omega_{\beta} = \varepsilon \tau$. Como $\varepsilon \tau = d\hat{\pi}$, e de $f(x_0) = (\hat{\pi}(x_0), p)$ temos $f_{n+1}(x_0) = \hat{\pi}(x_0)$, concluímos que $f_{n+1}(x) = \hat{\pi}(x)$ para todo $x \in \mathcal{U}$. \square

Parte 5: Completeemos a demonstração do Teorema 2.2.1 verificando que a função f satisfaz as condições do Teorema 2.2.1.

Dos Lemas 2.3.9 e 2.3.10, temos que $(df(e_k))_{\alpha} = (CB)_{\alpha k}$, significa que no referencial $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \right\}$, o vetor $df(e_k)$ é dado pela k -ésima coluna da matriz CB e no referencial $\{\bar{E}_{\alpha}\}$ é dado pela k -ésima coluna da matriz B , ou seja, $df(e_k) = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} B_{\alpha k} \bar{E}_{\alpha}$. Como C e B são invertíveis, df tem posto máximo n e assim, f é uma imersão. Além disso, para i, j quaisquer, como $B \in \mathbf{S}$, temos

$$\langle df(e_i), df(e_j) \rangle = \left\langle \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} B_{\alpha i} \bar{E}_{\alpha}, \sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} B_{\gamma j} \bar{E}_{\gamma} \right\rangle = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} B_{\alpha i} B_{\alpha j} = \varepsilon_i \delta_{ij}.$$

Portanto, f é uma isometria.

Se definimos $e_0 = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} B_{\alpha 0} \bar{E}_{\alpha}$, observemos que $\langle e_0, \partial_t \rangle = 0$, pois $B_{n+1,0} = T_0 = 0$, e no caso $c = \pm 1$, temos que $(\varepsilon_0 B_{00}, \dots, \varepsilon_n B_{n0}) \in \mathbb{Q}_k^n(c)$, pois $\langle e_0, e_0 \rangle = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} B_{\alpha 0}^2 = \varepsilon_0 = c$, assim e_0 é ortogonal a $\varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{Q}_k^n(c)$. Por outro lado, no caso $c = 0$, como $B_{\alpha 0} = \delta_{\alpha 0}$ temos que $e_0 = \bar{E}_0$ é ortogonal a $\varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{E}^n$. Também definimos $e_{n+1} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} B_{\alpha n+1} \bar{E}_{\alpha}$. Logo, $\{e_0, df(e_1), \dots, df(e_n), e_{n+1}\}$ é um referencial adaptado a $\varepsilon I \times_{\rho} \mathbb{Q}_k^n(c)$, em que $\{df(e_1), \dots, df(e_n)\}$ gera $Tf(\mathcal{U})$ e portanto, e_{n+1} é normal a $f(\mathcal{U})$, pois as colunas de B são ortogonais.

Agora, provemos que o operador forma da imersão f é exatamente $df \circ A \circ (df)^{-1}$. De fato,

$$\begin{aligned}
& \langle \sigma(df(e_i), df(e_j)), e_{n+1} \rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_{df(e_i)} df(e_j), e_{n+1} \rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_{df(e_i)} \sum_{\beta} \varepsilon_{\beta} B_{\beta j} \bar{E}_{\beta}, e_{n+1} \rangle \\
&= \sum_{\beta} \varepsilon_{\beta} dB_{\beta j}(e_i) B_{\beta n+1} + \sum_{\beta} \varepsilon_{\beta} B_{\beta j} \langle \tilde{\nabla}_{\sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} B_{\alpha i} \bar{E}_{\alpha}} \bar{E}_{\beta}, e_{n+1} \rangle \\
&= \sum_{\beta} \varepsilon_{\beta} dB_{\beta j}(e_i) B_{\beta n+1} + \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} B_{\alpha i} B_{\beta j} \langle \tilde{\nabla}_{\bar{E}_{\alpha}} \bar{E}_{\beta}, \sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} B_{\gamma n+1} \bar{E}_{\gamma} \rangle \\
&= \sum_{\beta} \varepsilon_{\beta} dB_{\beta j}(e_i) B_{\beta n+1} + \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \left[\varepsilon_u \varepsilon_v \varepsilon_{\gamma} B_{ui} B_{vj} B_{\gamma n+1} \langle -\frac{\varepsilon_u \delta_{uv} \varepsilon_{\rho'}}{\rho} \partial_t, \bar{E}_{\gamma} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon_u \varepsilon_{n+1} \varepsilon_{\gamma} B_{ui} B_{n+1j} B_{\gamma n+1} \langle \frac{\rho'}{\rho} \bar{E}_u, \bar{E}_{\gamma} \rangle \right] \\
&= \varepsilon_{n+1} \sum_{\beta} \varepsilon_{n+1} \varepsilon_{\beta} B_{n+1\beta} dB_{\beta j}(e_i) - \frac{\varepsilon_{n+1} \rho'}{\rho} B_{n+1n+1} \sum_u \varepsilon_u B_{ui} B_{uj} \\
&\quad + \frac{\varepsilon_{n+1} \rho'}{\rho} B_{n+1j} \sum_u \varepsilon_u B_{ui} B_{un+1} \\
&= \varepsilon_{n+1} (B^{-1} dB)_{n+1j}(e_i) - \frac{\varepsilon_{n+1} \rho'}{\rho} B_{n+1n+1} \varepsilon_j \delta_{ij} + \frac{\varepsilon_{n+1} \rho'}{\rho} B_{n+1j} \varepsilon_{n+1} \delta_{in+1} \\
&= \varepsilon_{n+1} \left[(B^{-1} dB)_{n+1j}(e_i) - \frac{\varepsilon_{n+1} \rho'}{\rho} (\varepsilon_{n+1} \varepsilon_j T_{n+1} \omega_j(e_i) - T_j \omega_{n+1}(e_i)) \right] \\
&= \varepsilon_{n+1} [(B^{-1} dB)_{n+1j}(e_i) + \mathbf{X}_{n+1j}(e_i)] \\
&= \varepsilon_{n+1} \omega_{n+1j}(e_i) \\
&= \langle e_j, A e_i \rangle \\
&= \langle df(e_j), (df \circ A \circ (df)^{-1}) df(e_i) \rangle.
\end{aligned}$$

Também, ao longo de $f(\mathcal{U})$, como $B \in \mathcal{Z}(x)$ e $\bar{E}_{n+1} = \partial_t$, temos

$$\begin{aligned}
\partial_t &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i B_{n+1i} df(e_i) + \varepsilon_{n+1} B_{n+1n+1} e_{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i T_i df(e_i) + \varepsilon_{n+1} T_{n+1} e_{n+1} \\
&= df\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i T_i e_i\right) + \varepsilon_{n+1} T_{n+1} e_{n+1} \\
&= df(T) + \varepsilon_{n+1} T_{n+1} e_{n+1}.
\end{aligned}$$

Logo, $\tau(X) = \langle X, \partial_t \rangle$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, e $\varepsilon_{n+1} \vartheta = \langle e_{n+1}, \partial_t \rangle = T_{n+1}$, portanto (E) e (F) são a equação de Codazzi e de Gauss de f . Isso completa a demonstração do Teorema 2.2.1.

2.4 Unicidade local e imersão global

Na demonstração do teorema fundamental para hipersuperfícies em $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}^n(c)$, com $c = \pm 1$, feita por B. Daniel em [8], a unicidade local da imersão isométrica, a menos de isometrias de $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}^n(c)$, obtida nesse teorema, é consequência da Proposição 3.7 em [8]. Nas demonstrações dos teoremas fundamentais obtidos por Q. Chen e C.R. Xiang em [6] e por J. Roht em [19], podemos encontrar resultados análogos à Proposição 3.7 de B. Daniel, especificamente, a Proposição 4.1 em [6] e a Proposição 3.5 em [19], e as demonstrações da parte da unicidade local no teorema de Q. Chen e C.R. Xiang e no teorema de J. Roht, são feitas replicando a demonstração de B. Daniel. Agora, observemos que o Lema 2.3.8 é também análogo à Proposição 3.7 de B. Daniel, logo, podemos pensar em obter um resultado de unicidade para a imersão local f definida no Teorema 2.2.1, no caso de hipersuperfícies em $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, repetindo os passos na demonstração de B. Daniel. De fato, tudo funciona corretamente. Assim, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.4.1. *Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade semi-riemanniana de dimensão n , simplesmente conexa. A imersão $f : \mathcal{U} \subset M \rightarrow \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, obtida no Teorema 2.2.1, é única a menos de uma isometria global de $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, a qual preserva a orientação de I e de $\mathbb{Q}_k^n(c)$*

Demonstração. Seja $\hat{f} : \mathcal{U} \rightarrow \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$ outra imersão que satisfaz as conclusões do Teorema 2.2.1, em que \mathcal{U} é uma vizinhança simplesmente conexa de $p \in M$. Seja $\{\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_{n+1}\}$ o referencial associado a \hat{f} , ou seja, $\hat{e}_i = d\hat{f}(e_i)$, \hat{e}_{n+1} é o campo vetorial unitário normal a $\hat{f}(\mathcal{U})$ em $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$ e \hat{e}_0 é o campo vetorial unitário normal a $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$ em $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{E}^{n+1}$. Seja \hat{B} a matriz de coordenadas do referencial $\{\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_{n+1}\}$ no referencial $\{\bar{E}_0, \dots, \bar{E}_{n+1}\}$. Por 2 do Teorema 2.2.1, temos que $\hat{f}_{n+1}(p) = \hat{\pi}(p) = f_{n+1}(p)$, logo, a menos de uma isometria de $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, podemos assumir que $f(p) = \hat{f}(p)$ e que os referenciais $\{\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_{n+1}\}$ e $\{e_0, df(e_1), \dots, df(e_n), e_{n+1}\}$ coincidem em p , ou seja, $B(p) = \hat{B}(p)$. Notemos que esta isometria deixa ∂_t invariante, pois os T_α coincidem para f e \hat{f} .

Provemos que $\hat{B}(x) \in \mathcal{Z}(x)$ para todo $x \in \mathcal{U}$. De fato, se $x \in \mathcal{U}$, temos que

$$T(x) = \sum_i \varepsilon_i \langle T(x), e_i(x) \rangle e_i(x) = \sum_i \varepsilon_i T_i(x) e_i(x),$$

assim,

$$d\hat{f}_x(T(x)) = \sum_i \varepsilon_i T_i(x) d\hat{f}_x(e_i(x)) = \sum_i \varepsilon_i T_i(x) \hat{e}_i(x).$$

Logo, $T_i(x) = \langle d\hat{f}_x(T(x)), \hat{e}_i(x) \rangle = \langle d\hat{f}_x(T(x)) + \varepsilon_{n+1} T_{n+1}(x) \hat{e}_{n+1}(x), \hat{e}_i(x) \rangle$, e usando (5)

do Teorema 2.2.1, segue que

$$\begin{aligned} T_i(x) &= \langle \partial_t(\hat{f}(x)), \hat{e}_i(x) \rangle \\ &= \langle \overline{E}_{n+1}(\hat{f}(x)), \hat{e}_i(x) \rangle \\ &= \hat{B}_{n+1i}(x). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\hat{B}_{n+1n+1}(x) = \langle \partial_t(\hat{f}(x)), \hat{e}_{n+1}(x) \rangle = \langle d\hat{f}_x(T(x)) + \varepsilon_{n+1}T_{n+1}(x)\hat{e}_{n+1}(x), \hat{e}_{n+1}(x) \rangle = T_{n+1}(x),$$

$$\hat{B}_{n+10}(x) = \langle \partial_t(\hat{f}(x)), \hat{e}_0(x) \rangle = \langle d\hat{f}_x(T(x)) + \varepsilon_{n+1}T_{n+1}(x)\hat{e}_{n+1}(x), \hat{e}_0(x) \rangle = 0 = T_0(x),$$

Portanto, $\hat{B}(x) \in \mathcal{Z}(x)$ para todo $x \in \mathcal{U}$.

Assim, as matrizes B e \hat{B} satisfazem $B^{-1}dB = \Omega - \mathbf{X}$ e $\hat{B}^{-1}d\hat{B} = \Omega - \mathbf{X}$, com $B(p) = \hat{B}(p)$ e $B(x), \hat{B}(x) \in \mathcal{Z}(x)$, para qualquer $x \in \mathcal{U}$, logo, considerando a unicidade da aplicação B no Lema 2.3.8, temos que $B(x) = \hat{B}(x)$, para todo $x \in \mathcal{U}$.

Então, no caso $c = \pm 1$, considerando a primeira coluna dessas matrizes, temos que $f_0 = \hat{f}_0$ e que $f_i = \hat{f}_i$, além disso, por 2 do Teorema 2.2.1, temos que $f_{n+1} = \hat{\pi} = \hat{f}_{n+1}$, portanto, $f = \hat{f}$ em \mathcal{U} . No caso $c = 0$, a imersão local f construída no Lema 2.3.10 coincide com \hat{f} , pois $f(p) = \hat{f}(p)$, $df = CB\varpi = C\hat{B}\varpi = d\hat{f}$, $f_0 = 0 = \hat{f}_0$ e $f_{n+1} = \hat{\pi} = \hat{f}_{n+1}$. \square

Agora, estenderemos a imersão $f : \mathcal{U} \rightarrow \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, para obter uma imersão isométrica global de M .

Teorema 2.4.2. *Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade semi-riemanniana de dimensão n , simplesmente conexa, que satisfaz as condições de estrutura da Definição 2.2.1. Então, existe uma imersão isométrica $f : M \rightarrow (\widetilde{M} = \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c), \langle \cdot, \cdot \rangle_1 = \varepsilon dt^2 + \rho^2 g_0)$, e um campo vetorial normal unitário e_{n+1} ao longo de f , tais que:*

- 1) $\varepsilon_{n+1} = \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle_1$;
- 2) $\pi \circ f = \hat{\pi}$, em que $\pi : \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c) \rightarrow I$ é a projeção;
- 3) O operador de Weingarten na direção de e_{n+1} é $df \circ A \circ (df)^{-1}$;
- 4) (E) é a equação de Codazzi-Mainardi e (F) é a equação de Gauss de f ;
- 5) e ao longo de f , temos que $\partial_t = df(T) + \varepsilon_{n+1}T_{n+1}e_{n+1}$.

Além disso, a imersão f é única a menos de uma isometria global de $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, preservando as orientações de $\mathbb{Q}_k^n(c)$ e de I .

Demonstração. Sejam p , \mathcal{U} e f como no Teorema 2.2.1. Se $x_1 \in M$, existe um caminho $h : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $h(0) = p$ e $h(1) = x_1$. Pelos teoremas 2.2.1 e 2.4.1, para cada ponto $h(s)$, com $s \in [0, 1]$, existem uma vizinhança \mathcal{U}_s de $h(s)$, e uma única imersão isométrica $f_s : \mathcal{U}_s \rightarrow \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$, a menos de uma isometria de $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$ preservando a orientação de I e de $\mathbb{Q}_k^n(c)$, satisfazendo as propriedades do Teorema 2.2.1. Assim, as vizinhanças \mathcal{U}_s formam uma cobertura \mathcal{A} do gráfico de h , o qual é compacto, e portanto, podemos escolher uma família finita $\{W_1, \dots, W_r\} \subset \mathcal{A}$ cubrindo o gráfico de h , com $W_1 = \mathcal{U}$. Então, pela unicidade local, podemos estender sucessivamente a imersão f aos W_k de forma única. Em particular, $f(x_1)$ fica definido, e como M é simplesmente conexa, segue que $f(x_1)$ não depende da escolha da curva h que liga p com x_1 . \square

Agora, como consequência do Teorema 2.4.2, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.4.3. *Nas condições do Teorema 2.4.2,*

1. *Se a hipersuperfície $f : M \rightarrow \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$ satisfaz $\tau = 0$ em todo ponto, então $f(M)$ está sobre uma fibra de $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$.*
2. *Se $\tau \neq 0$ em todo ponto, então a hipersuperfície $f : M \rightarrow \varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$ admite uma folhação de codimensão 1, e cada folha de $f(M)$ está sobre uma fibra $\pi^{-1}(t)$ com $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. (1) Pelo item (5) do Teorema 2.4.2, temos que $\partial_t = df(T) + \varepsilon_{n+1}T_{n+1}e_{n+1}$ ao longo de f . Logo, se $\tau = 0$ então $\langle X, \partial_t \rangle = 0$, para todo $X \in Tf(M)$. Portanto, $f(M)$ está sobre uma fibra de $\varepsilon I \times_\rho \mathbb{Q}_k^n(c)$.

(2) Pelo Lema 2.3.1 sabemos que $d\tau = 0$, isso implica que $\text{Ker } \tau$ é completamente integrável. De fato, sejam $X, Y \in \text{Ker } \tau$, temos que $0 = d\tau(X, Y) = X(\tau(Y)) - Y(\tau(X)) - \tau([X, Y]) = -\tau([X, Y])$, assim $[X, Y] \in \text{Ker } \tau$. Por outro lado, $\dim(\text{Im } \tau)$ só pode ser 0 ou 1, pois $\text{Im } \tau \subset \mathbb{R}$. Como $\tau \neq 0$ em todo ponto, segue que $\dim(\text{Ker } \tau) = n - 1$, ou seja, M admite uma folhação de codimensão 1, em que o espaço tangente às folhas de M é dado por $\text{Ker } \tau$, assim, T é um campo vetorial normal as folhas de M e pelo item (5) do Teorema 2.4.2, também ∂_t é normal às folhas de $f(M)$, ou seja, cada folha de $f(M)$ está sobre uma fibra $\pi^{-1}(t)$ com $t \in I$. \square

Capítulo 3

Uma aplicação a horizontes num espaço-tempo Robertson-Walker

Neste capítulo, definimos as superfícies Marginally Outer Trapped, as quais satisfazem a propriedade mais geral, que seu vetor de curvatura média é tipo-luz. Então, aplicamos o Teorema 2.2.1 e o Corolário 2.4.3, demonstrados no Capítulo 2, e obtemos condições para que uma hipersuperfície num espaço-tempo Robertson-Walker de dimensão 4, seja folheada por superfícies com a propriedade que seu vetor de curvatura média é tipo-luz ou zero. Nesse sentido, estamos incluindo superfícies que podem ser Marginally Outer Trapped, ter vetor de curvatura média zero ou uma mistura desses casos. Chamamos uma tal hipersuperfície de *horizonte*.

3.1 Superfícies Marginally Outer Trapped

A gravidade é uma das quatro interações fundamentais, junto ao electromagnetismo e as interações nucleares forte e fraca. A gravidade desempenha um papel fundamental dando forma ao universo em grande escala, isso porque ela é sempre atraente, assim, os campos gravitacionais de todas as partículas de um corpo se somam para produzir, se o corpo é suficientemente grande, um campo gravitacional que domina sobre todas as outras forças.

A gravidade afeta da mesma maneira todas as partículas, por isso quaisquer dois corpos caem com a mesma velocidade. Ademais, tem sido observado que a luz é curvada por efeito dos campos gravitacionais. De fato, se uma quantidade muito grande de matéria for concentrada numa região, a gravidade poderia dobrar a luz que está saindo da região, de tal forma que, a luz seria atraída de novo para dentro. Esse fato pode ser expressado mais precisamente, usando o conceito introduzido por R. Penrose em 1965, de uma superfície Trapped fechada (ver [18]).

Por exemplo, consideremos uma esfera N . Se em algum instante essa esfera N emite uma luz, depois de um certo tempo t , as ondas de luz ao entrar e ao sair da esfera N formarão duas esferas N_1 e N_2 , respectivamente. Numa situação normal, o raio da esfera N_2 seria maior do que o raio da esfera N , pois representa raios de luz saindo da esfera, ver Figura 3.1. No entanto, se uma quantidade de matéria consideravelmente grande está dentro da esfera N , o raio de N_2 também seria menor que o raio de N , devido que a luz teria sido atraída pela gravidade. Nesse caso, a esfera N seria um exemplo de uma superfície Trapped fechada num espaço-tempo (ver [10]).

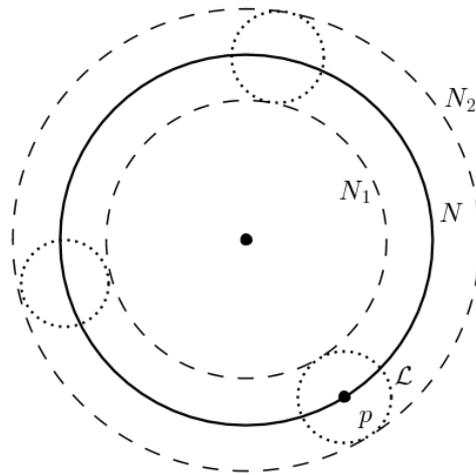


Figura 3.1: Os raios de luz saindo de um ponto p da esfera N num tempo t , geram uma esfera \mathcal{L} ao redor de p e as ondas de luz entrando e saindo de N formam as esferas N_1 e N_2 .

Definição 3.1.1. Um *espaço-tempo* \widetilde{M} é uma variedade semi-riemanniana de dimensão 4 e tempo-orientada, de índice 1, ou seja, com uma métrica Lorentziana.

Uma curva em \widetilde{M} é *tipo-espaço*, *tipo-luz* ou *tipo-tempo*, se todos os vetores de velocidade da curva são tipo-espaço, tipo-luz ou tipo-tempo, respectivamente.

Continuando com o exemplo da esfera N , como a matéria não pode viajar mais rápido que a luz, então fica presa dentro de uma região cuja fronteira vai para zero num tempo finito, isso sugere que deve aparecer uma singularidade no espaço-tempo. De fato, pelos teoremas de singularidades de S. Hawking e R. Penrose, se um espaço-tempo satisfaz condições adequadas de energia e causalidade, e também contém uma superfície Trapped fechada, então deve conter um buraco negro (ver [10]). A fronteira de um buraco negro é conhecida como o *evento horizonte*, e é uma hipersuperfície do espaço-tempo, tal que os eventos num lado dela não podem afetar a um observador que está no outro lado.

Como em grande escala a distribuição das galáxias não mostra muita assimetria, o universo visto desde nossa galáxia parece ser quase igual em todas as direções. Baseados nessa observação, resulta válido construir modelos cosmológicos cujas propriedades têm

possibilidades de ser fisicamente realistas. Uns desses modelos são os espaços-tempo de tipo Robertson-Walker.

Definição 3.1.2. Seja $\mathbb{Q}^3(c)$ uma variedade Riemanniana conexa de dimensão 3, de curvatura constante $c \in \{-1, 0, 1\}$ e métrica g_0 . Seja $\rho : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, então o produto torcido $(\widetilde{M}^4 = I \times \mathbb{Q}^3(c), \langle \cdot, \cdot \rangle = -dt^2 + \rho^2 g_0)$ é chamado de *espaço-tempo Robertson-Walker*.

Observemos que \widetilde{M} é tempo-orientado se pedimos que o campo vetorial unitário ∂_t , tangente ao fator I , aponte para o futuro.

Seja N^2 uma superfície orientada tipo-espaço e de dimensão 2 num espaço-tempo Robertson-Walker. O espaço normal num ponto p de N^2 é tipo-tempo e de dimensão 2. Logo, N^2 admite duas direções normais tipo-luz em p (ver Figura 3.3). Escolhemos uma dessas direções e dizemos que ela aponta para o interior e a outra para o exterior de N^2 . Então, com condições adequadas de orientabilidade, por exemplo, se o fibrado normal é trivial, é possível definir em N^2 um referencial normal $\{\mathcal{N}_-, \mathcal{N}_+\}$, apontando para o futuro, satisfazendo $\langle \mathcal{N}_-, \mathcal{N}_+ \rangle = -1$, em que \mathcal{N}_- é a direção interior e \mathcal{N}_+ é a direção exterior.

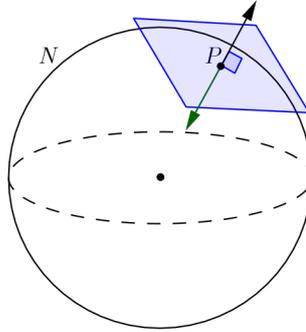


Figura 3.2: Vetores ortogonais a uma esfera N em \mathbb{R}^3 .

Agora, podemos decompor a segunda forma fundamental σ da superfície N^2 , usando o referencial $\{\mathcal{N}_-, \mathcal{N}_+\}$. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$, podemos escrever $\sigma(X, Y) = (\nabla_X Y)^\perp = \alpha \mathcal{N}_- + \beta \mathcal{N}_+$. Como \mathcal{N}_- é tipo-luz e $\langle \mathcal{N}_+, \mathcal{N}_- \rangle = -1$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \sigma(X, Y), \mathcal{N}_- \rangle &= \langle \alpha \mathcal{N}_- + \beta \mathcal{N}_+, \mathcal{N}_- \rangle \\ &= \langle \alpha \mathcal{N}_-, \mathcal{N}_- \rangle + \langle \beta \mathcal{N}_+, \mathcal{N}_- \rangle \\ &= \langle \beta \mathcal{N}_+, \mathcal{N}_- \rangle \\ &= -\beta. \end{aligned}$$

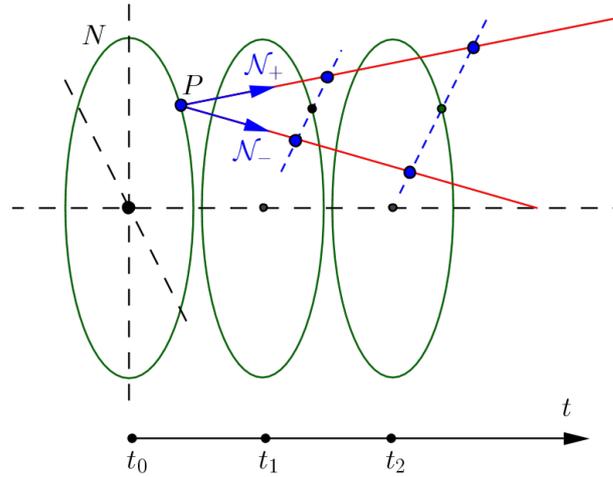


Figura 3.3: Vetores \mathcal{N}_- e \mathcal{N}_+ , tangentes às duas geodésicas tipo-luz ortogonais, no ponto P , a uma esfera N tipo-espaço de dimensão 2 em $-I \times_{\rho} \mathbb{R}^3$. As duas partículas de luz emitidas pelo ponto P nas direções ortogonais à esfera N da Figura 3.2, propagam-se nessas duas geodésicas tipo-luz em $-I \times_{\rho} \mathbb{R}^3$.

Analogamente, $\alpha = -\langle \sigma(X, Y), \mathcal{N}_+ \rangle$. Portanto,

$$\sigma(X, Y) = -\langle \nabla_X Y, \mathcal{N}_+ \rangle \mathcal{N}_- - \langle \nabla_X Y, \mathcal{N}_- \rangle \mathcal{N}_+.$$

Logo, consideremos um referencial $\{e_1, e_2\}$ de $\mathfrak{X}(N^2)$. Seja \vec{H} o vetor de curvatura média de N^2 e sejam \mathcal{A}_- e \mathcal{A}_+ os operadores de Weingarten de N^2 na direção de \mathcal{N}_- e de \mathcal{N}_+ , respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{2} \text{Traço}(\sigma) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sigma(e_i, e_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (-\langle \nabla_{e_i} e_i, \mathcal{N}_+ \rangle \mathcal{N}_- - \langle \nabla_{e_i} e_i, \mathcal{N}_- \rangle \mathcal{N}_+) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (-\langle \mathcal{A}_+ e_i, e_i \rangle \mathcal{N}_- - \langle \mathcal{A}_- e_i, e_i \rangle \mathcal{N}_+) \\ &= \frac{1}{2} (-\text{Traço}(\mathcal{A}_+) \mathcal{N}_- - \text{Traço}(\mathcal{A}_-) \mathcal{N}_+). \end{aligned}$$

Fazendo $\theta_- = \frac{1}{2} \text{Traço}(\mathcal{A}_-)$ e $\theta_+ = \frac{1}{2} \text{Traço}(\mathcal{A}_+)$, podemos escrever

$$\vec{H} = -\theta_+ \mathcal{N}_- - \theta_- \mathcal{N}_+.$$

Os traços θ_- e θ_+ dos operadores forma \mathcal{A}_- e \mathcal{A}_+ , são chamados de *expansão interior* e *expansão exterior* de N^2 , respectivamente. Agora, podemos definir as superfícies Trapped

usando θ_- e θ_+ (ver [10]).

Definição 3.1.3. Uma superfície N^2 tipo-espaço de dimensão 2, num espaço-tempo de dimensão 4, é uma *superfície Trapped* se os dois sistemas de geodésicas tipo-luz que passam por N^2 ortogonalmente, convergem localmente em direções futuras em N^2 , ou seja, se a expansão interior θ_- e a expansão exterior θ_+ são negativas, segue que \vec{H} é tipo-tempo e futuro-dirigido, pois $\langle \mathcal{N}_-, \mathcal{N}_+ \rangle = -1$.

Se N^2 é fechada (i.e. compacta e sem bordo), dizemos que N^2 é uma *superfície Trapped fechada*.

A Definição 3.1.3 foi dada por R. Penrose em [18] e podemos encontrar maiores detalhes em [10].

Num momento específico de tempo, a fronteira da região do espaço-tempo, contendo superfícies Trapped, é conhecida como uma superfície *Marginally Trapped*. Nesse caso, uma das expansões é zero, a qual usualmente é escolhida para ser a expansão exterior e então se fala de uma *superfície Marginally Outer Trapped*, que às vezes é chamada de *horizonte aparente*, então consideramos a seguinte definição:

Definição 3.1.4. Dizemos que a superfície tipo-espaço N^2 é uma *superfície Marginally Outer Trapped*, se a expansão exterior θ_+ é idênticamente zero e a expansão interior θ_- é menor a zero.

Nesse caso, o vetor de curvatura média \vec{H} de N^2 no espaço-tempo de dimensão 4, satisfaz a condição $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = 0$, com $\vec{H} \neq 0$.

3.2 A condição $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = 0$

Consideremos o espaço-tempo Robertson-Walker $\widetilde{M}^4 = I \times_{\rho} \mathbb{Q}^3(c)$, com a métrica $\langle, \rangle = -dt^2 + \rho^2 g_0$. Usando o Teorema 2.2.1 e a parte (2) do Corolário 2.4.3, obtemos imediatamente o seguinte resultado.

Corolário 3.2.1. *Seja (M, \langle, \rangle) uma variedade semi-riemanniana de dimensão 3. Sejam $\varepsilon_4 = \pm 1$, $\varepsilon = -1$ e seja $\varepsilon_0 = c = \pm 1$ ou $\varepsilon_0 = 1$ e $c = 0$. Também, consideremos funções diferenciáveis $\rho : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $T_4 : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $\hat{\pi} : M \rightarrow I$. Definimos o campo vetorial $T \in \mathfrak{X}(M)$ como $T = -\text{grad}(\hat{\pi})$, e a 1-forma $\tau(X) = \langle X, T \rangle$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Seja A um tensor de tipo $(1, 1)$ em M .*

Se M satisfaz as condições de estrutura da Definição 2.2.1, então, para cada ponto $p \in M$, existem uma vizinhança \mathcal{U} de p em M , uma imersão isométrica $f : (\mathcal{U}, \langle, \rangle) \rightarrow (\widetilde{M}^4, \langle, \rangle)$ e um campo vetorial normal unitário e_4 ao longo de f , tal que $\varepsilon_4 = \langle e_4, e_4 \rangle$, A é o operador de Weingarten da imersão f na direção de e_4 , T é a projeção de ∂_t em TM e $\pi \circ f = \hat{\pi}$,

em que $\pi : I \times \mathbb{Q}^3(c) \rightarrow I$ é a projeção.

Se $\tau \neq 0$ em todo ponto, a família $\{f(\mathcal{U}) \cap \pi^{-1}\{t\} : t \in \mathbb{R}\}$ fornece uma folhação de $f(\mathcal{U})$ por superfícies tipo-espaço de dimensão 2.

Logo, seja N uma das folhas de \mathcal{U} . Seja σ a segunda forma fundamental de N em \widetilde{M}^4 . Como e_4 é ortogonal a $f(M)$, então é ortogonal a \mathbf{T} e às folhas de \mathcal{U} . Também, temos que \mathbf{T} é ortogonal às folhas de \mathcal{U} , logo $T^\perp N = \text{Span}\{\mathbf{T}, e_4\}$, em que $\mathbf{T} = \frac{T}{\sqrt{|\langle T, T \rangle|}}$. Tomamos $\varepsilon_T = \text{sign}(\langle T, T \rangle)$. Como \widetilde{M}^4 tem índice 1 e as folhas de \mathcal{U} são tipo-espaço, só um de ε_4 ou ε_T pode ser -1 , logo, como $\langle e_4, e_4 \rangle = \varepsilon_4 = \pm 1$ é constante, $\varepsilon_T = \pm 1$ também é constante, com $\varepsilon_4 \varepsilon_T = -1$. Para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$, temos que $\langle \widetilde{\nabla}_X Y, T \rangle = -\langle Y, \widetilde{\nabla}_X T \rangle$, pois $X\langle Y, T \rangle = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \sigma(X, Y) &= \varepsilon_T \langle \widetilde{\nabla}_X Y, \mathbf{T} \rangle \mathbf{T} + \varepsilon_4 \langle \widetilde{\nabla}_X Y, e_4 \rangle e_4 \\ &= \frac{\varepsilon_T}{|\langle T, T \rangle|} \langle \widetilde{\nabla}_X Y, T \rangle T + \varepsilon_4 \langle Y, AX \rangle e_4 \\ &= -\frac{\varepsilon_T}{|\langle T, T \rangle|} \langle Y, \widetilde{\nabla}_X T \rangle T + \varepsilon_4 \langle Y, AX \rangle e_4 \\ &= \frac{-1}{\langle T, T \rangle} \langle Y, \widetilde{\nabla}_X T \rangle T + \varepsilon_4 \langle Y, AX \rangle e_4. \end{aligned}$$

Seja $\{u_1, u_2\}$ um referencial local ortonormal de N , temos que $\langle u_i, u_i \rangle = 1$, pois N é tipo-espaço. Seja \vec{H} o vetor de curvatura média de N . Usando (C) da definição 2.2.1 e como $\tau(u_i) = 0$, temos

$$\begin{aligned} 2\vec{H} &= \sum_i \sigma(u_i, u_i) \\ &= \sum_i \left(\frac{-1}{\langle T, T \rangle} \langle u_i, \widetilde{\nabla}_{u_i} T \rangle T + \varepsilon_4 \langle u_i, Au_i \rangle e_4 \right) \\ &= \frac{-1}{\langle T, T \rangle} \sum_i \langle u_i, \frac{\rho'}{\rho} (u_i - \varepsilon_T \tau(u_i) T) + \varepsilon_4 T_4 Au_i \rangle T + \sum_i \varepsilon_4 \langle u_i, Au_i \rangle e_4 \\ &= \frac{-1}{\langle T, T \rangle} \sum_i \langle u_i, \frac{\rho'}{\rho} u_i + \varepsilon_4 T_4 Au_i \rangle T + \varepsilon_4 \left(\text{Traço}(A) - \frac{\langle AT, T \rangle}{\langle T, T \rangle} \right) e_4 \\ &= \frac{-1}{\langle T, T \rangle} \left(2\frac{\rho'}{\rho} + \varepsilon_4 T_4 \left(\text{Traço}(A) - \frac{\langle AT, T \rangle}{\langle T, T \rangle} \right) \right) T + \varepsilon_4 \left(\text{Traço}(A) - \frac{\langle AT, T \rangle}{\langle T, T \rangle} \right) e_4. \end{aligned}$$

Fazemos $h = \text{Traço}(A) - \frac{\langle AT, T \rangle}{\langle T, T \rangle}$. Como resultado, obtemos

$$4\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = \frac{\left(2\frac{\rho'}{\rho} + \varepsilon_4 T_4 h \right)^2}{\langle T, T \rangle} + \varepsilon_4 h^2.$$

Então, $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = 0$ se, e só se,

$$-\varepsilon_4 \langle T, T \rangle h^2 = \left(2\frac{\rho'}{\rho} + \varepsilon_4 T_4 h \right)^2 = 4\frac{(\rho')^2}{\rho^2} + T_4^2 h^2 + 4\varepsilon_4 T_4 h \frac{\rho'}{\rho}.$$

Usando que $\langle T, T \rangle + \varepsilon_4 T_4^2 = \varepsilon = -1$, obtemos a igualdade equivalente

$$h^2 - 4T_4 \frac{\rho'}{\rho} h - 4\varepsilon_4 \frac{(\rho')^2}{\rho^2} = 0. \quad (3.1)$$

Notemos que a igualdade (3.1) é uma equação do segundo grau em h e calculemos o discriminante.

$$\begin{aligned} \Delta_h &= \left(-4T_4 \frac{\rho'}{\rho} \right)^2 - 4 \left(-4\varepsilon_4 \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \right) = 16T_4^2 \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + 16\varepsilon_4 \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \\ &= 16 \frac{(\rho')^2}{\rho^2} (T_4^2 + \varepsilon_4) \\ &= 16 \frac{(\rho')^2}{\rho^2} (-\varepsilon_4) \langle T, T \rangle. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon_T \varepsilon_4 = -1$, temos que $16 \frac{(\rho')^2}{\rho^2} (-\varepsilon_4) \langle T, T \rangle = 16 \frac{(\rho')^2}{\rho^2} \varepsilon_T \langle T, T \rangle$ com $\varepsilon_T \langle T, T \rangle = |\langle T, T \rangle| > 0$, e assim, $\Delta_h > 0$. Resolvendo a equação (3.1) para h , obtemos o resultado seguinte:

Corolário 3.2.2. *As folhas de $\text{Ker } \tau$ satisfazem $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = 0$ em $-I \times_\rho \mathbb{Q}^3(c)$ se, e só se, a imersão $f : M \rightarrow -I \times_\rho \mathbb{Q}^3(c)$ satisfaz a igualdade seguinte:*

$$\text{Traço}(A) - \frac{\langle AT, T \rangle}{\langle T, T \rangle} = \frac{2\rho' T_4}{\rho} \pm 2 \left| \frac{\rho'}{\rho} \right| \sqrt{|\langle T, T \rangle|}. \quad (3.2)$$

Portanto, se f satisfaz a igualdade (3.2), $f(\mathcal{U})$ seria um horizonte em $-I \times_\rho \mathbb{Q}^3(c)$, ou seja, uma hipersuperfície folhada por superfícies que satisfazem $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = 0$.

Apêndice A

Exemplos de hipersuperfícies em produtos torcidos de dimensão 3

Apresentamos dois exemplos que ilustram os resultados teóricos e os objetos envolvidos no Teorema 2.2.1 e que aparecem num preprint do artigo de M.A. Lawn e M. Ortega. O primeiro exemplo descreve uma superfície que é um gráfico no espaço $-I \times_{\rho} \mathbb{S}^2(1)$ e o segundo exemplo é uma superfície helicoidal num espaço $I \times_{\rho} \mathbb{H}^2$.

A.1 Um gráfico em $-\mathbb{R}^+ \times_{\rho} \mathbb{S}^2(1)$

Consideremos a função de torção $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $\rho(t) = t$, e o produto torcido $-\mathbb{R}^+ \times_{\rho} \mathbb{S}^2(1) \subset -\mathbb{R}^+ \times_{\rho} \mathbb{R}^3$, com métrica \langle, \rangle . Dada $h : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^+$, uma função diferenciável tal que $h(u) > |h'(u)|$ para qualquer $u \in \mathbb{R}^+$, definamos a função

$$f : M = (0, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow -\mathbb{R}^+ \times_{\rho} \mathbb{S}^2(1),$$
$$f(u, v) = (h(u), \cos(u), \sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v)),$$

Notemos que podemos definir $\hat{\pi}(u, v) = h(u)$. Consideremos o seguinte referencial ao longo de f , com algumas identificações naturais:

$$e_0 = \frac{1}{h(u)} (\cos(u), \cos(v) \sin(u), \sin(u) \sin(v), 0),$$
$$e_1 \equiv df(e_1) = \frac{1}{r} (-\sin(u), \cos(u) \cos(v), \cos(u) \sin(v), h'(u)),$$
$$e_2 \equiv df(e_2) = \frac{1}{h(u)} (0, -\sin(v), \cos(v), 0),$$
$$e_3 = \frac{1}{h(u)r} (-\sin(u)h'(u), \cos(u) \cos(v)h'(u), \cos(u) \sin(v)h'(u), h(u)^2),$$

em que e_1, e_2 são as normalizações de $df(\partial_u)$ e $df(\partial_v)$, respectivamente, e_3 é um campo vetorial unitário ao longo de f em $-\mathbb{R}^+ \times_{\rho} \mathbb{S}^2(1)$ e $r = \sqrt{h(u)^2 - (h'(u))^2}$. Temos a matriz

$G = (\langle e_\alpha, e_\beta \rangle) = \text{Diag}(1, 1, 1, -1)$. As 1-formas duais são

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = rdu, \quad \omega_2 = h(u) \sin(u)dv, \quad \omega_3 = 0.$$

Como $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$, consideremos o referencial ortonormal

$$\bar{E}_0 = \frac{1}{h(u)}(1, 0, 0, 0), \quad \bar{E}_1 = \frac{1}{h(u)}(0, 1, 0, 0), \quad \bar{E}_2 = \frac{1}{h(u)}(0, 0, 1, 0), \quad \bar{E}_3 = \partial_t.$$

Agora, calculemos a função $B : M \rightarrow S$, $B = (\langle \bar{E}_\alpha, e_\beta \rangle)$,

$$B = \begin{bmatrix} \cos(u) & -\frac{1}{r}h(u) \sin(u) & 0 & -\frac{1}{r}\sin(u)h'(u) \\ \cos(v) \sin(u) & \frac{1}{r}\cos(u) \cos(v)h(u) & -\sin(v) & \frac{1}{r}\cos(u) \cos(v)h'(u) \\ \sin(u) \sin(v) & \frac{1}{r}\cos(u) \sin(v)h(u) & \cos(v) & \frac{1}{r}\cos(u) \sin(v)h'(u) \\ 0 & -\frac{1}{r}h'(u) & 0 & -\frac{1}{r}h(u) \end{bmatrix}$$

Daí, calculamos a 1-forma $\Upsilon = B^{-1}dB = (\Upsilon_{\alpha\beta})$, com imagem em \mathfrak{s} , e temos que

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\alpha\alpha} &= 0, \\ \Upsilon_{01} &= -\Upsilon_{10} = -\frac{1}{r}h(u)du, \\ \Upsilon_{02} &= -\Upsilon_{20} = -\sin(u)dv, \\ \Upsilon_{03} &= \Upsilon_{30} = -\frac{1}{r}h'(u)du, \\ \Upsilon_{12} &= -\Upsilon_{21} = \frac{1}{r}h(u) \cos(u)dv, \\ \Upsilon_{13} &= \Upsilon_{31} = \frac{1}{r^2} (h(u)h''(u) - (h'(u))^2) du, \\ \Upsilon_{23} &= \Upsilon_{32} = \frac{1}{r}h'(u) \cos(u)dv, \end{aligned}$$

em que Υ verifica $d\Upsilon + \Upsilon \wedge \Upsilon = 0$. Logo, o campo vetorial tangente T é

$$\begin{aligned} T &\equiv df(T) = \langle \partial_t, e_1 \rangle e_1 + \langle \partial_t, e_2 \rangle e_2 \\ &= -\frac{1}{r}h'(u)e_1 \end{aligned}$$

Assim, a 1-forma dual τ e as funções T_α são

$$\tau = -h'(u)du, \quad T_0 = 0, \quad T_1 = -\frac{1}{r}h'(u), \quad T_2 = 0, \quad T_3 = -\frac{1}{r}h(u).$$

Segue que $d\tau = 0$. Também, notemos que $T_\alpha = B_{3\alpha}$. Lembremos que $\Omega = (\omega_{\alpha\beta}) = B^{-1}dB + \mathbf{X}$, em que $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_{\alpha\beta})$, com $\mathbf{X}_{\alpha\beta} = \varepsilon \frac{\rho' \circ \hat{\pi}}{\rho \circ \hat{\pi}} (B_{n+1\beta}\omega_\alpha - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta B_{n+1\alpha}\omega_\alpha)$, assim

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\alpha\alpha} &= \mathbf{X}_{\alpha 0} = \mathbf{X}_{0\alpha} = 0, \\ \mathbf{X}_{13} &= \mathbf{X}_{31} = du, \\ \mathbf{X}_{12} &= -\mathbf{X}_{21} = -\frac{1}{r} \sin(u) h'(u) dv, \\ \mathbf{X}_{23} &= \mathbf{X}_{32} = \frac{1}{r} \sin(u) h(u) dv. \end{aligned}$$

Logo, para $\Omega = (\omega_{\alpha\beta}) = B^{-1}dB + \mathbf{X}$ temos que

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\alpha} &= 0, \\ \omega_{01} &= -\omega_{10} = -\frac{1}{r} h(u) du, \\ \omega_{02} &= -\omega_{20} = -\sin(u) dv, \\ \omega_{03} &= \omega_{30} = -\frac{1}{r} h'(u) du, \\ \omega_{12} &= -\omega_{21} = -\frac{1}{r} (\cos(u) h(u) + \sin(u) h'(u)) dv, \\ \omega_{13} &= \omega_{31} = \frac{1}{r^2} (h(u)^2 - 2(h'(u))^2 + h(u) h''(u)) du, \\ \omega_{23} &= \omega_{32} = \frac{1}{r} (\cos(u) h'(u) + \sin(u) h''(u)) dv. \end{aligned}$$

Agora, calculemos o operador forma A . Como $\omega_{i3}(X) = -\varepsilon_i \langle e_i, AX \rangle = -\omega_i(AX)$, então

$$\begin{aligned} AX &= \sum_i \omega_i(AX) e_i \\ &= -\sum_i \omega_{i3}(X) e_i \\ &= \frac{h(u)^2 - 2(h'(u))^2 + h(u) h''(u)}{r^2} du(X) e_1 + \frac{\cos(u) h'(u) + \sin(u) h''(u)}{r} dv(X) e_2. \end{aligned}$$

A.2 Uma superfície helicoidal em $\mathbb{R}^+ \times_\rho \mathbb{H}^2(-1)$

Consideremos $\mathbb{H}^2(-1)$ como a superfície $\mathbb{H}^2(-1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$, em que \mathbb{L}^3 é o espaço de Lorentz-Minkowski com a métrica $g_0 = dx^2 + dy^2 - dz^2$. Dada uma constante $a \in \mathbb{R}$ e uma função diferenciável $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $h' > 0$, definimos

$$f : M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times_\rho \mathbb{H}^2, \quad f(u, v) = (h(v), u \cos(av), u \sin(av), \sqrt{1 + u^2}).$$

Observemos que podemos definir $\hat{\pi}(u, v) = h(v)$. Consideremos o seguinte referencial ao longo de f , com algumas identificações naturais:

$$\begin{aligned}
e_0 &= \frac{1}{\rho(h(v))} (u \cos(av), u \sin(av), \sqrt{1+u^2}, 0), \\
e_1 &\equiv df(e_1) = \frac{1}{\rho(h(v))} (\cos(av)\sqrt{1+u^2}, \sin(av)\sqrt{1+u^2}, u, 0), \\
e_2 &\equiv df(e_2) = \frac{1}{r} (-au \sin(av), au \cos(av), 0, h'(v)), \\
e_3 &= \frac{1}{\rho(h(v))r} (\sin(av)h'(v), -\cos(av)h'(v), 0, au\rho(h(v))^2),
\end{aligned}$$

em que e_1, e_2 são as normalizações de $df(\partial_u)$ e $df(\partial_v)$, respectivamente, com $\partial_u = (1, 0)$, $\partial_v = (0, 1)$, e_3 é um campo vetorial unitário normal ao longo de f em $\mathbb{R}^+ \times_\rho \mathbb{H}^2(-1)$ e $r = \sqrt{a^2u^2\rho(h(v))^2 - h'(v)^2}$. As 1-formas duais em M são

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = \frac{\rho(h(v))}{\sqrt{1+u^2}} du, \quad \omega_2 = r dv, \quad \omega_3 = 0.$$

Consideramos o referencial ortonormal

$$\bar{E}_0 = \frac{1}{\rho(h(v))} (0, 0, 1, 0), \quad \bar{E}_1 = \frac{1}{\rho(h(v))} (0, 1, 0, 0), \quad \bar{E}_2 = \frac{1}{\rho(h(v))} (1, 0, 0, 0), \quad \bar{E}_3 = \partial_t.$$

Agora, calculamos a função $B : M \rightarrow \mathbf{S}$, $B = (\langle \bar{E}_\alpha, e_\beta \rangle)$, com $\det B = 1$,

$$B = \begin{bmatrix}
-\sqrt{1+u^2} & -u & 0 & 0 \\
u \sin(av) & \sqrt{1+u^2} \sin(av) & \frac{au\rho(h(v)) \cos(av)}{r} & -\frac{\cos(av)h'(v)}{r} \\
u \cos(av) & \sqrt{1+u^2} \cos(av) & -\frac{au\rho(h(v)) \sin(av)}{r} & \frac{\sin(av)h'(v)}{r} \\
0 & 0 & \frac{h'(v)}{r} & \frac{au\rho(h(v))}{r}
\end{bmatrix}$$

Agora calculamos a 1-forma $\Upsilon = B^{-1}dB = (\Upsilon_{\alpha\beta})$, com imagem em \mathfrak{s} . Temos que

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{\alpha\alpha} &= 0, \\
\Upsilon_{01} &= \Upsilon_{10} = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}, \\
\Upsilon_{02} &= \Upsilon_{20} = \frac{1}{r} a^2 u^2 \rho(h(v)) dv, \\
\Upsilon_{03} &= \Upsilon_{30} = \frac{1}{r} au h'(v) du,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{12} &= -\Upsilon_{21} = -\frac{1}{r}a^2u\sqrt{1+u^2}\rho(h(v))dv \\ \Upsilon_{13} &= -\Upsilon_{31} = \frac{1}{r}a\sqrt{1+u^2}h'(v)dv, \\ \Upsilon_{23} &= -\Upsilon_{32} = -a\frac{1}{r^2}[\rho(h(v))h'(v)du + u(\rho'(h(v))h'(v)^2 - \rho(h(v))h''(v))dv].\end{aligned}$$

Υ verifica que $d\Upsilon + \Upsilon \wedge \Upsilon = 0$. Logo, o campo vetorial tangente T é

$$T \equiv df(T) = \langle \partial_t, e_1 \rangle e_1 + \langle \partial_t, e_2 \rangle e_2 = \frac{1}{r}h'(v)e_2.$$

A 1-forma dual τ e as funções T_α são

$$\tau = h'(v)dv, \quad T_0 = T_1 = 0, \quad T_2 = \frac{1}{r}h'(v), \quad T_3 = \frac{1}{r}aup\rho(h(v)).$$

Segue que $d\tau = 0$. Também, notemos que $T_\alpha = B_{3\alpha}$. Lembremos que $\Omega = (\omega_{\alpha\beta}) = B^{-1}dB + \mathbf{X}$, em que $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_{\alpha\beta})$, com $\mathbf{X}_{\alpha\beta} = \varepsilon \frac{\rho' \circ \hat{\pi}}{\rho \circ \hat{\pi}} (B_{n+1\beta}\omega_\alpha - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta B_{n+1\alpha}\omega_\alpha)$,

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{\alpha\alpha} &= \mathbf{X}_{\alpha 0} = \mathbf{X}_{0\alpha} = 0, \\ \mathbf{X}_{13} &= -\mathbf{X}_{31} = \frac{aup\rho(h(v))\rho'(h(v))du}{r\sqrt{1+u^2}}, \\ \mathbf{X}_{12} &= -\mathbf{X}_{21} = \frac{\rho'(h(v))h'(v)du}{r\sqrt{1+u^2}}, \\ \mathbf{X}_{23} &= -\mathbf{X}_{32} = aup\rho'(h(v))dv.\end{aligned}$$

Logo, para $\Omega = (\omega_{\alpha\beta})$ temos que

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha\alpha} &= 0, \\ \omega_{01} &= \omega_{10} = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}, \\ \omega_{02} &= \omega_{20} = \frac{1}{r}a^2u^3\rho(h(v))dv, \\ \omega_{03} &= \omega_{30} = -\frac{1}{r}auh'(v)dv, \\ \omega_{12} &= -\omega_{21} = \frac{\rho'(h(v))h'(v)du - a^2(u+u^3)\rho(h(v))dv}{r\sqrt{1+u^2}}, \\ \omega_{13} &= -\omega_{31} = a\frac{up\rho(h(v))\rho'(h(v))du + (1+u^2)h'(v)dv}{r\sqrt{1+u^2}}, \\ \omega_{23} &= -\omega_{32} = \frac{1}{r^2}[a\rho(h(v))h'(v)du + au[\rho'(h(v))(r^2+h'(v)^2) - \rho(h(v))h''(v)]dv].\end{aligned}$$

Agora, calculemos o operador forma A . Como $\omega_{i3}(X) = -\varepsilon_i \langle e_i, AX \rangle = -\omega_i(AX)$,

então

$$\begin{aligned}
 AX &= \sum_i \omega_i(AX)e_i \\
 &= - \sum_i \omega_{i3}(X)e_i \\
 &= -a \frac{u\rho(h(v))\rho'(h(v))du(X) + (1+u^2)h'(v)dv(X)}{r\sqrt{1+u^2}} e_1 \\
 &\quad - \frac{a\rho(h(v))h'(v)du(X) + au[\rho'(h(v))(r^2+h'(v)^2) - \rho(h(v))h''(v)]dv(X)}{r^2} e_2.
 \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] J. Alías; L. Cánovas, *Trapped submanifolds contained into a null hypersurface of de Sitter spacetime*, Commun. Contemp. Math. (2017), 1750059.
- [2] L. Andersson; M. Mars; W. Simon, *Stability of marginally outer trapped surfaces and existence of marginally outer trapped tubes*, Adv. Theor. Math. Phys. **12** (2008), 853-888.
- [3] O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. Deuxième partie*. Gauthier-Villars. **1** (1867)
- [4] W.M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 2003.
- [5] B.Y. Chen, *Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2017.
- [6] Q. Chen; C.R. Xiang, *Isometric immersions into Warped products spaces*, Acta Math. Sinica. **26** (2010), 2269-2282.
- [7] M. Dajczer, *Submanifolds and Isometric immersions*, Mathematics Lecture Series, vol. 13, Publish or Perish, Houston, Texas, 1990.
- [8] B. Daniel, *Isometric immersions into $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 6255-6282.
- [9] F.J.E. Dillen; L.C.A. Verstraelen (eds.), *Handbook of Differential Geometry, Vol. I*, North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [10] S. W. Hawking; G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time*, Cambridge Univ. Lett. Press, Cambridge, 1973.
- [11] T.A. Ivey; J.M. Landsberg, *Cartan for beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems*, in: Graduate Studies in Mathematics, vol. 61, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [12] M. Kimura; K. Suizu, *Fundamental Theorems of Lagrangian surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$* , Osaka J. Math. **44** (2007), 829-850.

- [13] M.A. Lawn; M. Ortega, *A fundamental theorem for hypersurfaces in semi-riemannian warped products*, J. Geom. and Phys. **90** (2015), 55-70.
- [14] J.M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2013.
- [15] J.H Lira; R. Tojeiro; F. Vitório, *A Bonnet theorem for isometric immersions into products of space forms*, Arch. Math. **95** (2010), 469-479.
- [16] O. Müller; M. Sánchez, *Lorentzian manifolds isometrically embeddable in \mathbb{L}^N* , Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 5367-5379.
- [17] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, in: Pure and Applied Mathematics, vol. 103, Academic Press, New York (1983).
- [18] R. Penrose, *Gravitational collapse and space-time singularities*, Phys. Rev. Lett. **14** (1965), 57.
- [19] J. Roht, *Isometric immersions into Lorentzian products*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **8** (2011), 1269-1290.
- [20] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. IV, Publish or Perish, Inc., Providence, Wilmington, Del., 1979.
- [21] F.W. Warner, *Foundations on Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, New York, 1983.