UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O Grau de Coincidência e aplicação às equações diferenciais ordinárias periódicas

Rafael Toledo Amorim

São Carlos
Abril de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O Grau de Coincidência e aplicação às equações diferenciais ordinárias periódicas

Rafael Toledo Amorim

Orientador: Prof° Dr Adilson Eduardo Presoto

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos
Abril de 2019

Amorim, Rafael Toledo

O Grau de Coincidência e aplicação às equações diferenciais ordinárias periódicas / Rafael Toledo Amorim. -- 2019.
46 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador: Adilson Eduardo Presoto
Banca examinadora: Adilson Eduardo Preseto, Francisco Odair Vieira de Paiva, Sérgio Henrique Monari Soares
Bibliografia

1. Grau de Coincidência . 2. Problema do tipo Ambrosetti-Prodi . 3. Problema Periódico. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).
DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

Bibliotecário(a) Responsável: Ronildo Santos Prado – CRB/8 7325

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Rafael Toledo Amorim, realizada em 15/04/2019:

Adilson Presoto

Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto
UFSCar

Francisco O.V. de Paiva

Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva
UFSCar

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares
USP

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pela vida, saúde, por me manter firme e me dar forças ao longo de toda essa jornada.

À minha mãe, Emilía Toledo de Amorim, e ao meu irmãos, Rodrigo e Rosinéia, por todo apoio, incentivo, educação, amor, carinho ao longo deste percurso. Ao meu pai, Rogério Soares de Amorim (*in memoriam*), porque sei que, onde quer que estejas, estará feliz e orgulhoso por eu ter realizado os teus sonhos e os meus.

Ao meu orientador, professor Adilson Eduardo Presoto, pela orientação ao longo deste trabalho.

A todos os professores dos Departamentos de Matemática da UFSCar e UFV que contribuíram de alguma forma para a minha formação acadêmica, especialmente aos professores Edson, Fernanda e Margareth.

À banca examinadora pela presença na defesa e pelas correções, críticas e inúmeras contribuições propostas.

A todos os meus amigos que fiz durante essa passagem por Viçosa e São Carlos, em especial aos amigos Carolinne, Claúdio, Dayana, Elen, Heber, Isadora, Izabella, Joel, José Guilherme, Maria Carolina e Ronaldo. E a todos amigos da Casa Amarela da UFV, principalmente às "mãezonas" Daniela e Denise, que amo muito. Cada um com seu jeito único, com seu modo de me fortalecer, de me aconselhar, de me aturar, de fazer graça diante de quase todos os tipos de situações, enfim a vocês o meu MUITO OBRIGADO! E que nossa amizade possa continuar crescendo.

Não posso deixar de agradecer ao meu amigo Samuel, que fez com que meu caminho fosse um pouquinho mais fácil. A importância de você durante este ano com seu apoio, incentivo, ajuda e as nossas conversas foram essencial.

E por fim, ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos a teoria do grau de coincidência para operadores de Fredholm de índice zero $-$ denotados por L e definidos em espaços de Banach $-$, o qual é uma ferramenta importante utilizada para mostrar a existência de soluções para a equação do tipo

$$Lx = Nx$$

em um certo conjunto aberto e limitado Ω e sendo N uma aplicação $L-$compacta. Através dessa teoria, investigaremos a existência de soluções de um problema periódico do tipo Ambrosetti-Prodi para equações diferenciais ordinárias não lineares. Para aplicarmos o grau topológico em tal problema, precisamos que o conjunto de suas soluções seja limitado, então a obtenção de estimativas a priori para essas possíveis soluções será de grande importância.

Palavras-chaves: Grau de Coincidência, problema do tipo Ambrosetti-Prodi, problema periódico, equação diferencial ordinária não linear.

ABSTRACT

In this work, we will present the coincident degree theory for Fredholm operators of index zero − denoted by L and defined on Banach spaces −, which is an important tool to obtain the existence of solutions for equations of the type

$$Lx = Nx$$

in an open bounded set Ω, N being a $L-$compact operator. Throughout this theory, we will investigate the existence of solutions of an Ambrosetti-Prodi periodic problem for nonlinear ordinary differential equations. In order to apply the topological degree in such problem, obtaining a priori estimates for possible solutions will be of great importance.

Keywords: Degree of Coincidence, Ambrosetti-Prodi-type problem, periodic problem, nonlinear ordinary differential equation.

Lista de Símbolos

Símbolo	Definição
$\mathrm{dist}(a,b)$	distância do ponto a ao ponto b com a métrica dist
$\mathrm{dist}(b,A)$	$\inf\{\mathrm{dist}(a,b); a \in A\}$
$\mathrm{dist}(A,B)$	$\inf\{\mathrm{dist}(a,b); a \in A \text{ e } b \in B\}$
$A \backslash B$	$\{x \in A;\ x \notin B\}$
$\overline{\Omega}$	$\{x \in A; V_x \cap \Omega \neq \emptyset,\ \text{para cada aberto } V_x \text{ em } A \text{ contendo } x\}$, onde $\Omega \subset A$
$\partial\Omega$	$\overline{\Omega} \cap \left(\overline{A \backslash \Omega}\right)$, onde $\Omega \subset A$
$\mathrm{supp}\, f$	$\overline{\{x \in A;\ f(x) \neq 0\}}$, onde $f : A \longrightarrow B$
$C(A,B)$	$\{f : A \longrightarrow B; f \text{ é contínua}\}$
$C^k(A,B)$	$\left\{f : A \longrightarrow B;\ f, f^{(j)} \in C(A,B),\ \text{para todo } j \leq k\right\}$, com $k \in \mathbb{N}$
$C(A)$	$C(A,\mathbb{R})$
$C^k(A)$	$C^k(A,\mathbb{R})$
$AC[a,b]$	$\{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ é absolutamente contínua}\}$, ver Definição B.1
$AC^1[a,b]$	$\{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R};\ f, f' \in AC[a,b]\}$
$f\|_D$	restrição da função $f : A \longrightarrow B$ ao subcojunto $D \subset A$
I	função identidade $I(x) = x$, para todo $x \in A$
sgn	função sinal $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \{-1,1\}$, dada por $\mathrm{sgn}\, y = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad y > 0 \\ 0, & \text{se} \quad y = 0, \\ -1, & \text{se} \quad y < 0. \end{cases}$
$\mathrm{codim}\, A$	$\dim B - \dim A$, onde A é um subespaço de B
$\mathrm{dom}\, T$	o subespaço de A onde o operador T está definido
$\mathrm{Ker}\, T$	$\{x \in \mathrm{dom}\, L;\ Tx = 0\}$
$\mathrm{Im}\, T$	$\{Tx;\ x \in \mathrm{dom}\, T\}$
$L^1(\Omega)$	$\left\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável}; \int_\Omega \|f(x)\|\, dx < \infty\right\}$, com a norma $\\|f\\|_1 = \\|f\\|_{L^1} = \int_\Omega \|f(x)\|\, dx$
$L^p(\Omega)$	$\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável}; \|f\|^p \in L^1(\Omega)\}$, com a norma $\\|f\\|_p = \\|f\\|_{L^p} = \left[\int_\Omega \|f(x)\|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}}$, com $1 < p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável}; \exists\, C > 0;\ \|f(x)\| \leq C,\ \text{qtp } x \in \Omega\}$, com a norma $\\|f\\|_\infty = \\|f\\|_{L^\infty} = \inf\{C > 0;\ \|f(x)\| \leq C,\ \text{qtp } x \in \Omega\}$.
$C_0^\infty(\Omega)$	$\{f \in C^\infty(\Omega);\ f(x) = 0, \forall x \in \Omega \backslash K,\ \text{para algum compacto } K\}$
$W^{2,p}(a,b)$	$\Big\{u \in L^p(a,b);\ \exists g_1, g_2 \in L^p(a,b); \int_a^b u\varphi' = -\int_a^b g_1\varphi \text{ e } \int_a^b u\varphi'' = \int_a^b g_2\varphi,$ $\forall \varphi \in C_0^\infty(a,b)\Big\}$, denota-se por $u' = g_1$ e $u'' = g_2$, com a norma $\\|u\\|_{2,p} = \\|u\\|_p + \\|u'\\|_p + \\|u''\\|_p$.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Teoria do Grau Topológico tem sido desenvolvida como método para determinar as soluções da equação do tipo

$$\varphi(x) = p, \tag{1.1}$$

$-$ sob as condições adequadas $-$ em um certo conjunto Ω, visando obter informações significativas quanto à existência e multiplicidade de tais soluções. A partir destes três elementos, isto é, a aplicação φ, o conjunto Ω e o ponto p no contradomínio de φ, podemos definir o grau topológico como uma função que associa cada terna (φ, Ω, p) a um número inteiro, em geral, denotada por $\deg$. Em espaços de dimensão finita, temos o chamado grau de Brouwer definido para aplicação contínua. Em espaços de Banach de dimensão infinita, recorrendo ao grau de Brouwer, temos o chamado grau de Leray-Schauder definido para pertubação compacta da identidade. Tal teoria tem grande uso no estudo de certas classes de Equações Diferenciais Ordinárias, Equações Diferenciais Parciais, Equações Diferenciais Funcionais e Equações Diferenciais Impulsivas.

Inspirando no problema (1.1), no presente trabalho, visamos obter algumas informações quanto à existência de soluções da equação do tipo

$$Lx = Nx, \tag{1.2}$$

onde L é um operador de Fredholm de índice zero e N um aplicação $L-$compacta, ambos definidos em subconjuntos de espaços de Banach. Para tal feito, recorremos a teoria do grau de Leray-Schauder e apresentaremos a construção do Grau de Coincidência para operadores de Fredholm de índice zero, o qual será uma ferramenta importante utilizada para estudar a existência de soluções para a equação (1.2).

Vamos apresentar uma série de propriedades do grau de coincidência, entre elas a propriedade de existência de solução, a qual nos diz que se o grau em um aberto e limitado Ω for diferente de zero, então a equação (1.2) possui solução em Ω, e a propriedade de invariância homotópica, que nos permite, através de uma deformação contínua, transferir informações de aplicações cujo grau é conhecido para aplicações cujo grau é desconhecido.

Neste trabalho, trateremos especialmente o caso em que a equação (1.2) é um problema periódico do tipo Ambrosetti-Prodi dado por

$$\begin{cases} u''(x) + f(x, u(x), u'(x)) = s\varphi(x), \ \text{para todo } x \in (a, b), \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b), \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $s \in \mathbb{R}$, $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua não nula e não negativa e $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo as condições adequadas. Com o auxílio da teoria do grau de coincidência e usando o método de supersolução e subsolução encontraremos algum parâmetro real s_1 tal que o problema (1.3) não tenha solução, tenha pelos menos uma ou pelo menos duas soluções de acordo com $s < s_1$, $s = s_1$ ou $s > s_1$. No decorrer do texto abordaremos hipóteses necessárias para desenvolvimento do resultado.

No trabalho [3], intitulado *"A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems"*, de Amamm e Hess, apresenta essa análise para o problema

$$\begin{cases} Au = f(x,u;s) & \text{em } \Omega, \\ Bu = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

$-$ onde A denota um operador diferencial elíptico linear de segunda ordem, B denota operador Dirichlet ou Neumann e Ω um aberto limitado em $\mathbb{R}^n$ $-$ sobre a hipótese de cruzamento dos autovalores, isto é, para $s \in \mathbb{R}$ fixo,

$$\lim_{y \to -\infty} \sup \frac{f(x,y;s)}{y} < \lambda_1 < \lim_{y \to +\infty} \inf \frac{f(x,y;s)}{y},$$

uniformemente em $\overline{\Omega}$ e λ_1 é o primeiro autovalor do operador A. O matemático estadunidense Hofer seguiu essa ideia em seu trabalho [13], intitulado *"Existence and multiplicity result for a class of second order elliptic equations"*, onde estendeu o resultado acima para o problema

$$\begin{cases} Au = f(x,u,\nabla u) + s\varphi & \text{em } \Omega, \\ Bu = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

agora sobre a hipótese que existe uma função contínua $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) \geq g(x,y)$, para todo $(x,y,z) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, e g satisfaz a condição de cruzamento dos autovalores.

Durante o desenvolvimento do trabalho [19], intitulado *"Ambrosetti-Prodi type results in nonlinear boundary value problems"*, de Mawhin, apresenta-se um estudo para o problema periódico do tipo Ambrosetti-Prodi

$$\begin{cases} u''(x) + f(x,u(x)) = s, & \text{para todo } x \in (a,b), \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b), \end{cases}$$

quando a função contínua f contínua satisfazendo

$$\lim_{|y| \to \infty} f(x,y) = +\infty,$$

uniformemente em $[a,b]$.

Motivado pelos problemas acima, faremos um resultado novo para o caso do problema periódico não linear (1.3), envolvendo a derivada, sobre a hipótese de que existe uma função contínua $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) \geq g(x,y)$, para todo $(x,y,z) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, e satisfazendo

$$\lim_{|y| \to \infty} g(x,y) = +\infty,$$

uniformemente em $\overline{\Omega}$. Um trabalho similar ao [25], intitulado *"A Neumann problem of Ambrosetti-Prodi type"*, de Paiva e Presoto, onde é apresentado para o problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, \nabla u) + s\varphi & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

No Capítulo 1, apresentaremos iniciaremos a construção do grau topológico em espaços de dimensão finita, também chamado de grau de Brouwer, e em seguinda estenderemos essa teoria para os espaços de infinita, também chamado de grau de Leray-Schauder.

No Capítulo 2, faremos a construção do grau de coincidência para operador de Fredholm de índice zero e apresentaremos algumas propriedades. Ainda, neste capítulo, faremos uma aplicação de tal teoria no problema periódico (1.3).

No Capítulo 3, apresentaremos detalhamente o problema periódico tipo Ambrosetti-Prodi feito no trabalho [19]. Sob as hipóteses acima, juntamente com alguns resultados de supersolução e subsolução do problema periódico em questão e a teoria do grau de coincidência, encontraremos um resultado do tipo Ambroseti-Prodi para o problema periódico (1.3), para o caso particular $\varphi = 1$. Para aplicarmos o grau topológico em tal problema, precisamos que o conjunto de suas soluções seja limitado, então a obtenção de estimativas a priori para essas possíveis soluções será de grande importância.

No Capítulo 4, seguindo a mesma analogia e adicionando hipóteses sobre a função f, conseguimos uma limitação a priori para as possíveis soluções do problema (1.3). Veremos que sempre obtemos uma subsolução que problema (1.3), no entanto, nem sempre conseguimos uma supersolução, para contornamos tal fato modificaremos a equação diferencial ordinária para aplicarmos o Teorema do Ponto Fixo de Leray-Schauder, obtendo um resultado do tipo Ambrosetti-Prodi para o problema periódico (1.3).

Capítulo 2

Grau Topológico

No presente capítulo faremos uma breve apresentação da definição e algumas propriedades do grau, visando abordar somente os conceitos e resultados preliminares da dissertação, com o objetivo de auxilar na construção do grau de coincidência para perturbações de operadores de Fredholm, que será apresentado no capítulo seguinte. Mostraremos também a prova de alguns resultados que ajudará posteriormente no estudo de um certo problema periódico.

Iniciaremos o capítulo apresentando o grau de Brouwer, que é válido para os espaços de dimensão finita, e, em seguida, o grau de Leray-Schauder, que se estende para os espaços de Banach.

Este capítulo teve como referência principal o Capítulo 3 do livro [4], intitulado *"Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems"*, de Ambrosetti e Malchiodi. O trabalho [1] também auxiliou na elaboração do mesmo. Como faremos apenas um síntese da Teoria do Grau, indicamos ao leitor ver todos os detalhes nas referências acima.

2.1 Grau de Brouwer

O grau de Brouwer é válido para espaços de dimensão finita. Por esse motivo, consideraremos, nesta seção, o espaço $\mathbb{R}^n$ munido da norma euclidiana $\|\cdot\|$. Porém, cabe lembrar que todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $p \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$. O **grau de f em Ω relativo a p** é um número inteiro denotado por $\deg(f, \Omega, p)$, que satisfaz as propriedades:

(P1) Normalização: Se $I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a identidade então

$$\deg(I, \Omega, p) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in \Omega, \\ 0, & \text{se } p \notin \Omega. \end{cases}$$

(P2) Propriedade de solução: Se $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$ então existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = p$.

(P3) Translação: $\deg(f, \Omega, p) = \deg(f - p, \Omega, 0)$.

(P4) Decomposição: Se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, com $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, e $p \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$ então

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p).$$

Para a enunciarmos a próxima, precisamos da definição:

Definição 2.1 *Uma* **homotopia admíssivel** *em* Ω *relativo a* p*, é uma aplicação contínua* $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que* $H(x,t) \neq p$*, para todo* $x \in \partial\Omega$ *e todo* $t \in [0,1]$*.*

(P5) Invariância Homotópica: Se $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma homotopia admíssivel em Ω relativo a p, então

$$\deg(H(\cdot,t),\Omega,p)$$

é constante em relação a $t \in [0,1]$. Em particular, se $f(x) = H(x,0)$ e $g(x) = H(x,1)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, então

$$\deg(f,\Omega,p) = \deg(g,\Omega,p).$$

Uma consequência imediata de **(P5)** é o teorema

Teorema 2.1 *Sejam* $f, g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *contínuas tais que* $f(x) = g(x)$*, para todo* $x \in \partial\Omega$*. Se* $p \notin f(\partial\Omega) = g(\partial\Omega)$ *então*

$$\deg(f,\Omega,p) = \deg(g,\Omega,p).$$

Demonstração: Basta considerar a homotopia dada por $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$, para $t \in [0,1]$ e $x \in \overline{\Omega}$. ■

Vamos listar abaixo outras propriedades adicionais do grau.

(P6) Excisão: Se Ω_0 é um aberto contido em Ω tal que $f(x) \neq p$, para todo $x \in \Omega\backslash\Omega_0$, então

$$\deg(f,\Omega,p) = \deg(f,\Omega_0,p).$$

(P7) Continuidade: Se $f_n \to f$ uniformemente em $\overline{\Omega}$, então

$$\deg(f_n,\Omega,p) \to \deg(f,\Omega,p).$$

Além disso, $\deg(f,\Omega,p)$ é contínua com respeito a p.

Agora, apresentaremos uma construção do grau para funções no espaço $C^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ e estenderemos para funcões em $C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$. Como o objetivo dessa seção é somente introduzir a teoria do grau de Brouwer para aplicar durante o desenvolvimento da dissertação, optamos em omitir os detalhes.

Seja $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$. Como $p \notin f(\partial\Omega)$, tome $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha < \inf_{x\in\partial\Omega} \|f(x) - p\|.$$

Considere $\varphi \in C([0,\infty);\mathbb{R})$ tal que

(i) $\operatorname{supp}\varphi \subset (0,\alpha)$,

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\|x\|)dx = 1$.

Podemos definir o grau de f por

Definição 2.2 *Seja $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$, defina o grau de f em Ω relativo a p por*

$$\deg(f,\Omega,p) = \int_\Omega \varphi(\|f(x)-p\|)J_f(x)dx,$$

onde $J_f(x)$ denota o jacobiano de f no ponto $x \in \Omega$.

O grau da f em Ω relativo a p está bem definido, pois pode-se verificar que a definição acima independe das escolhas de α e da função φ. O leitor pode encontrar todos os detalhes nas páginas 32 e 33 de [4].

Seja $J_f(x) \neq 0$, para todo $x \in f^{-1}(p) = \left\{y \in \overline{\Omega};\ f(y) = p\right\}$. Observe que

$$f^{-1}(p) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(p)} B_{r_x}(x),$$

onde $B_{r_x}(x)$ denota-se a bola aberta $\{y \in \mathbb{R}^n;\ \|y-x\| < r_x\}$ tal que $f|_{B_{r_x}(x)}$ é um difeomorfismo, esse $r_x > 0$ existe pelo Teorema da Aplicação Aberta. Como f é contínua e $\{p\} \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, segue que $f^{-1}(p)$ é um fechado contido no compacto $\overline{\Omega}$, então $f^{-1}(p)$ também é compacto. Pelo Teorema de Borel-Lebesgue podemos extrair uma subcobertura finita $\{B_{r_j}(x_j)\}_{j=1}^k$. Lembrando que as $f|_{B_{r_j}(x_j)}$ são bijeções, mostrarmos que $f^{-1}(p)$ é um conjunto finito. Assim, apresentamos o seguinte resultado.

Corolário 2.2 *Sejam $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ e $p \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ um valor regular de f, isto é, $J_f(x) \neq 0$ para todo $x \in f^{-1}(p)$, então*

$$\deg(f,\Omega,p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn}[J_f(x)].$$

A seguir definiremos o grau topológico quando a função f é contínua. Antes disso, precisamos do seguinte resultado:

Lema 2.1 *Sejam $f_1, f_2 \in C^2(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ tais que*

$$\|f_i(x) - p\| > \alpha,$$

para $i = 1, 2$ e para todo $x \in \partial\Omega$. Se $\varepsilon < \frac{\alpha}{6}$ e $\|f_1(x) - f_2(x)\| < \varepsilon$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, então

$$\deg(f_1,\Omega,p) = \deg(f_2,\Omega,p).$$

Demonstração: A prova pode ser encontrada em [4, Lema 3.14]. ■

Com esse Lema e pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, podemos definir:

Definição 2.3 *Seja $f \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$. O* **grau topológico de f em Ω relativo a** *p é definido por*

$$\deg(f,\Omega,p) = \lim_{n\to\infty} \deg(f_n,\Omega,p),$$

sendo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $C^2(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ convergindo uniformemente a f.

Agora, apresentaremos um resultado que será utilizado mais a frente. Para isso, precisamos das definições:

Definição 2.4 *Dizemos que um ponto $x_o \in \Omega$ é* **solução isolada** *de $f(x) = p$, se existe $r > 0$ tal que $f(x) \neq p$, para todo $x \in B_r(x_0)\backslash\{x_0\}$.*

Definição 2.5 *Seja x_0 um solução isolada de $f(x) = p$, definirmos o* **índice** *de f relativo a x_0 por*

$$i(f, x_0) = \lim_{r \to 0} \deg(f, B_r(x_0), p).$$

Lema 2.2 *Seja $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ e seja $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = p$ é um valor regular de f. Então*

$$i(f, x_0) = (-1)^\beta,$$

onde β é a soma das multiplicidades algébricas de todos os autovalores negativos de $f'(x_0)$.

Demonstração: Como p é um valor regular de f, pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe $r > 0$ tal que x_0 é solução isolada de $f(x_0) = p$ em $B_r(x_0)$. Sabemos que $i(f, x_0) = \deg(f, B_r(x_0), p) = \operatorname{sgn}[J_f(x_0)]$. Pela Forma Canônica de Jordan, segue que

$$J_f(x_0) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

onde os λ_j são os autovalores de $f'(x_0)$, repetindo de acordo com as suas multiplicidades algébricas. Observe que

(i) $\lambda_j \neq 0$, para cada $j = 1, \cdots, n$, pois p é valor regular de f,

(ii) se algum autovalor é complexo, isto é, da forma $a + bi$, então o seu conjudado $a - bi$ também é autovalor de $f'(x_0)$ e, portanto, o produto de ambos é $a^2 + b^2 > 0$.

Assim, o sinal do jacobiano de f no ponto x_0 depende da quantidade de autovalores negativos de $f'(x_0)$ e das suas respectivas multiplicidades algébricas. Portanto,

$$i(f, x_0) = \operatorname{sgn}[J_f(x_0)] = (-1)^\beta,$$

onde β é a soma das multiplicidades algébricas dos autovalores negativos de $f'(x_0)$. ■

2.2 Grau de Leray-Schauder

Nesta seção, apresentaremos a teoria do grau para perturbações compactas da identidade, o chamado grau de Leray-Schauder, para os espaços de Banach através da teoria do grau de Brouwer.

Denotaremos X um espaço de Banach munido de uma norma $\|\cdot\|$ e Ω um subconjunto aberto e limitado de X.

Definição 2.6 *Dizemos que uma aplicação $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ é* **compacta**, *se T é contínua e $T(\overline{\Omega})$ é relativamente compacto em X, ou seja, $\overline{T(\overline{\Omega})}$ é um compacto em X.*

Definição 2.7 *Sejam $I : X \longrightarrow X$ o operador identidade e $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ uma aplicação compacta, dizemos que a aplicação $S := I - T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ é uma* **perturbação compacta da identidade**.

Recorrendo a definição de grau de Brouwer, definirmos:

Definição 2.8 *Seja $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ uma aplicação compacta tal que $T(\overline{\Omega}) \subset E$, onde E é um subespaço de X com dimensão finita, e seja $p \notin (I-T)(\partial\Omega)$, então definirmos o grau de $S = I - T$ em Ω relativo a p por*

$$\deg(S, \Omega, p) := \deg(S|_{\Omega \cap E}, \Omega \cap E, p)$$

Para estendermos esta definição para qualquer aplicação compacta, precisamos do próximo resultado, que pode ser encontrado detalhadamente nas páginas 53 e 54 de [1].

Lema 2.3 *Se $S = I - T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ é uma perturbação compacta da identidade, $p \notin S(\partial\Omega)$ e $r = \operatorname{dist}(p, S(\partial\Omega)) > 0$, então existe uma aplicação compacta $T_r : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ tal que $T_r(\overline{\Omega})$ está contido em um subespaço de dimensão finita de X, $p \notin (I - T_r)(\partial\Omega)$ e*

$$\|T - T_r\|_{C(\overline{\Omega})} < \frac{r}{2},$$

onde $\|\phi\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\{\|\phi(x)\|; x \in \overline{\Omega}\}$.

Definição 2.9 *Seja $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ uma aplicação compacta e seja $p \notin (I - T)(\partial\Omega)$, definirmos o grau de $S = I - T$ em Ω com relação a p por*

$$\deg(I - T, \Omega, p) := \deg(I - T_r, \Omega, p),$$

onde T_r é dado pelo Lema 2.3.

Na seção 3.4 do livro [4] e na seção 1.2 do trabalho [1] o leitor encontrará a prova detalhada de que as Definições 2.8 e 2.9 são consistentes, isto é, independe da escolha do espaço E e da aplicação T_r, respectivamente.

Segue da definição do grau de Leray-Schauder através da teoria do grau de Brouwer que as propriedades **(P1)** - **(P7)** são satisfeitas. Além dessas, destacaremos

Lema 2.4 *O grau de Leray-Schauder é constante nas componentes conexas de $X \setminus S(\partial\Omega)$.*

Proposição 2.1 *Sejam $S : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ e $F : \overline{\Omega_1} \longrightarrow X$ perturbações compactas da identidade tal que $S(\overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega_1}$. Seja $b \in X \backslash (FS)(\partial\Omega)$. Se $K_i, i \in \mathbb{N}$, são componentes conexas limitadas de $\overline{\Omega_1} \setminus S(\partial\Omega)$, então*

$$\deg(FS, \Omega, b) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \deg(S, \Omega, b_i) \deg(F, K_i, b),$$

onde $b_i \in K_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.3 (Teorema do Ponto Fixo de Leray-Schauder) *Seja Ω um conjunto aberto, convexo e limitado do espaço de Banach X tal que $0 \in \Omega$ e seja $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ uma aplicação compacta tal que $T(\overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega}$. Então T tem um ponto fixo em $\overline{\Omega}$, isto é, existe $x \in \overline{\Omega}$ tal que $T(x) = x$.*

Para prosseguir, precisamos da seguinte definição:

Definição 2.10 *Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que o operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é* **compacto** *se T é um operador contínuo tal que $\overline{T(M)} \subset Y$ for compacto, para todo $M \subset X$ limitado.*

Definição 2.11 *Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto. Dizemos que $\mu \in \mathbb{R}$ é um* **valor característico** *de T se $\operatorname{Ker}(I - \mu T) \neq 0$, onde definamos a sua* **multiplicidade geométrica** *por*

$$\dim\left[\operatorname{Ker}(I - \mu T)\right]$$

e a sua **multiplicidade algébrica** *por*

$$\dim\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker}(I - \mu T)^n\right].$$

Observe que o valor característico é o inverso do autovalor não nulo do operador linear. Nas seções 8.3 e 8.4 do livro [17], intitulado *"Introductory Functional Analysis with Applications"*, de Kreyszig, onde prova o Teorema A.4, o leitor encontrará a prova da definição é consistente.

Proposição 2.2 *Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto tal que 1 não é valor característico de T. Então, para $r > 0$,*

$$\deg(I - T, B_r(0), 0) = (-1)^\beta,$$

onde β é a soma das multiplicidades algébricas dos valores característicos de T em $(0, 1)$.

Demonstração: Sejam $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ os valores característicos distintos de T em $(0, 1)$ − É uma quantidade finita pelo Teorema A.6−. Para cada valor característico μ_i, $1 \leq i \leq k$, defina

$$N_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker}(I - \mu_i T)^n.$$

Seja $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$, temos $T(N) \subset N$ e $\dim N = \dim N_1 + \cdots + \dim N_k = \beta$. Como N tem dimensão finita, existe um subespaço fechado W em X tal que $X = N \oplus W$. Sejam $P : X \longrightarrow X$ e $Q : X \longrightarrow X$ as projeções contínuas de X em N e W, respectivamente. Defina a homotopia $H : X \times [0, 1] \longrightarrow X$ por

$$H(x, t) = x - TPx - tTQx.$$

Observe que cada aplicação $H(\cdot, t) : X \longrightarrow X$ é uma perturbação compacta da identidade, uma vez que TP e TQ são operadores compactos, por Proposição A.2. Suponha que existem $t \in [0, 1]$ e $x \in X$, com $\|x\| = r$, tais que

$$x - TPx - tTQx = 0, \tag{2.1}$$

temos $Px - TPx = tTQx - Qx$. Lembrando que $T(N) \subset N$, segue que $Px - TPx \in N$. Se $TQx \in N$, aplicando Q na equação (2.1), obtemos $Qx = 0$ e, consequentemente, $x = Px$. Substituindo na equação (2.1), vemos que $x - Tx = 0$, porém 1 não é valor característico de T, donde segue que $x = 0$, contradição com $\|x\| = r$. Caso contrário, se $TQx \in W$, segue que $tTQx - Qx \in W$, como $N \cap W = \{0\}$, segue $Px - TPx = 0$ e $Qx - tTQx = 0$. Novamente, como 1 não é valor característico de T, segue que $Px = 0$ e, assim, $x = Qx \in W$. Portanto, $x - tTx = 0$, isto é, $x \in \text{Ker}(I - tT)$, ou seja, t coincide que algum valor característico μ_j de T em $(0, 1)$. Então $x \in N$. Assim, $x \in N \cap W$, porém $N \cap W = \{0\}$, logo $x = 0$, contradição com $\|x\| = r$. Logo $0 \notin H\left(\partial B_r(0), t\right)$, para todo $t \in [0, 1]$. Pela invariância do grau por uma homotopia admíssivel, temos

$$\deg(I - T, B_r(0), 0) = \deg(I - TP, B_r(0), 0).$$

Agora, pela definição do grau topológico, considerando o operador $I - T$ restrito ao espaço de dimensão finita N, temos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor desse operador quando $\text{Ker}[(I - T) - \lambda I] \neq \{0\}$, ou seja, quando $\lambda = 1 - \frac{1}{\mu}$, onde μ é algum valor característico de T. Observe que λ é negativo quando $\mu \in (0, 1)$, pelo Lema 2.2 e da igualdade acima, concluímos que

$$\deg(I - T, B_r(0), 0) = (-1)^{\beta},$$

onde β é a soma das multiplicidades algébricas dos valores característicos de T em $(0, 1)$.

■

Observação 1: O Teorema acima vale para qualquer conjunto aberto e limitado em X que contém o elemento 0.

Capítulo 3

Grau de coincidência

O objetivo fundamental do presente capítulo é definir o grau de coincidência para perturbações de operadores de Fredholm de índice zero e apresentar as suas propriedades, que auxilaram na obtenção de soluções para um problema periódico do tipo Ambrosetti-Prodi com equações diferenciais ordinárias de segunda ordem.

A principal referência utilizada para a construção do grau de coincidência foi o livro [11], intitulado *"Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations"*, de Gaines e Mawhin. O trabalho [29] também auxiliou na elaboração do mesmo. Já os trabalhos [26], intitulado *"An existence theorem of the Leray-Schauder type for four-point boundary value problems"*, e [27], intitulado *"Upper and lower solutions and topological degree"*, ambos de Rachunková, foram utilizados para o exemplo do grau de coindidência para o operador diferencial de segunda ordem.

3.1 Operadores de Fredholm

Nesta seção, apresentaremos conceitos e resultados introdutórios para a definição do grau de coincidência para perturbações de operadores de Fredholm.

Definição 3.1 *Sejam X e Z espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que um operador linear $L : \operatorname{dom} L \subset X \longrightarrow Z$, onde $\operatorname{dom} L$ é um subespaço de X, é um* **operador de Fredholm** *se as seguintes condições forem satisfeitas*

(i) $\operatorname{Ker} L$ *possui dimensão finita,*

(ii) $\operatorname{Im} L$ *é fechado em Z e possui codimesão finita.*

O **índice** *de L é dado por*

$$\operatorname{ind} L = \dim \operatorname{Ker} L - \operatorname{codim} \operatorname{Im} L.$$

Seja $\operatorname{Coker} L = Z/\operatorname{Im} L$, o espaço quociente de Z por $\operatorname{Im} L$ pela relação de equivalência

$$z \sim z' \quad \text{se, e somente se,} \quad z - z' \in \operatorname{Im} L.$$

No espaço $\operatorname{Coker} L = \{z + \operatorname{Im} L; z \in Z\}$, pode-se considerar a norma

$$\|z\|_{\operatorname{Coker} L} = \inf_{y \in \operatorname{Im} L} \|z + y\|_Z,$$

onde $\|\cdot\|_Z$ denota a norma em Z. Como $\operatorname{codim}\operatorname{Im} L = \dim \operatorname{Coker} L$, é equivalente dizer que o operador linear $L : \operatorname{dom} L \longrightarrow Z$ é um *operador de Fredholm*, se $\operatorname{Im} L$ for fechado e os subespaços $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Coker} L$ possuírem dimensões finitas.

No que segue, consideraremos X e Z espaços de Banach com as normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Z$, respectivamente.

Se $L : \operatorname{dom} L \subset X \longrightarrow Z$ é uma operador linear contínuo tal que $\operatorname{Im} L$ possui codimensão finita então $\operatorname{Im} L$ é fechado em Z [6, Exercício 2.27]. Portanto, para um o operador linear contínuo L ser um operador de Fredholm é suficiente que os subespaços $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Coker} L$ possuírem dimensões finitas.

O resultado a seguir mostra que, dado um operador de Fredholm, é possível obter projeções contínuas $P : X \longrightarrow X$ e $Q : Z \longrightarrow Z$ tais que

$$\operatorname{Ker} L = \operatorname{Im} P \quad e \quad \operatorname{Im} L = \operatorname{Ker} Q.$$

Proposição 3.1 *Se as condições (i) e (ii) forem satisfeitas, então existem projeções contínuas $P : X \longrightarrow X$ e $Q : Z \longrightarrow Z$ tais que* $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Im} P$ *e* $\operatorname{Im} L = \operatorname{Ker} Q$.

Demonstração: Seja $\{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base para $\operatorname{Ker} L$. Considere os funcionais lineares $\phi_i : \operatorname{Ker} L \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $\phi_i(v_j) = \delta_{ij}$, para $i, j = 1, \cdots, n$. Pelo Teorema de Hahn-Banach (ver Corolário A.3), existe um funcional linear contínuo $\Phi_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende ϕ_i, para cada $i = 1, \cdots, n$. Defina $P : X \longrightarrow X$, por

$$Px = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x) v_i.$$

Segue que o operador P é uma projeção contínua e $\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Ker} L$. Resta mostrar que $\operatorname{Ker} L \subset \operatorname{Im} P$. De fato, seja $x \in \operatorname{Ker} L$, existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$. Para cada $i = 1, \cdots, n$, temos

$$\Phi_i(x) = \Phi_i\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Phi_i(v_j) = \alpha_i.$$

Portanto, $x = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x) v_i \in \operatorname{Im} P$.

Agora, mostraremos que existe o operador Q tal que $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$. Como $\dim \operatorname{Coker} L$ é finita, pelo Lema A.1, existe W um subespaço vetorial Z com dimensão finita tal que $Z = \operatorname{Im} L \oplus W$. Seja $\{w_1, \cdots, w_m\}$ uma base de W e defina os funcionais $\psi_i : W \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $\psi_i(w_j) = \delta_{ij}$, para $i, j = 1, \cdots, m$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear contínuo $\Psi_i : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende ψ_i, para cada $i = 1, \cdots, m$. Defina $Q : Z \longrightarrow Z$ por

$$Qz = \sum_{i=1}^{m} \Psi_i(z) w_i.$$

Por argumento análago ao anterior, obtemos que Q é uma projeção contínua tal que $\operatorname{Im} Q = W$. Para completarmos a prova, resta mostrar que $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$. Como $Z = \operatorname{Im} L \oplus W$ e $\operatorname{Im} Q = W$, segue que $\operatorname{Im} L \subset \operatorname{Ker} Q$. Por outro lado, se $x \in \operatorname{Ker} Q$, existem $a \in \operatorname{Im} L$ e $b \in W$ tais que $x = a + b$, então $0 = Qx = Q(a + b) = Qa + b$. Por $\operatorname{Im} L \subset \operatorname{Ker} Q$, temos $b = 0$ e, consequentemente, $x = a \in \operatorname{Im} L$. Portanto, $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$.

■

Com a projeção contínua P definirmos o operador L_P como a restrição do operador L ao conjunto $\operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P$. A seguir mostraremos que esse operador é um isomorfismo sobre $\operatorname{Im} L$.

Proposição 3.2 *Se as condições (i) e (ii) forem satisfeitas, então o operador linear* $L_P : \operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P \longrightarrow \operatorname{Im} L$ *é um isomorfismo.*

Demonstração: Seja $x \in \operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P$ tal que $Lx = 0$, temos $x \in \operatorname{Ker} L = \operatorname{Im} P$, então $x \in \operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Im} P = \{0\}$, consequentemente, $x = 0$, onde segue que L_P é injetor. Resta mostrar que L_P é sobrejetor. Seja $y \in \operatorname{Im} L$, existe $x \in \operatorname{dom} L$ tal que $Lx = y$. Como $x \in \operatorname{dom} L \subset X = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$, existem $a \in \operatorname{Ker} P$ e $b \in \operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L$ tais que $x = a + b$. Logo $y = Lx = La$, mas $a = x - b \in \operatorname{dom} L$. Então $a \in \operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P$ e $L_P a = La = y$. Portanto, L_P é isomorfismo. ∎

Então, podemos definir o operador $K_P : \operatorname{Im} L \longrightarrow \operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P$ por

$$K_P = L_P^{-1}.$$

Proposição 3.3 *Se (i) e (ii) forem satisfeitas, então*

(a) $PK_P = 0$,

(b) $LK_P = I$,

(c) $K_P L = I - P$.

Demonstração: (a) Basta observar que $\operatorname{Im} K_P = \operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P \subset \operatorname{Ker} P$.
(b) Como $PK_P = 0$ e $(I - P)x \in \operatorname{Ker} P$, para todo $x \in X$, obtemos

$$LK_P = L(I - P)K_P = L_P(I - P)K_P = L_P K_P = I.$$

(c) Por $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L$ e $(I - P)x \in \operatorname{Ker} P$, para todo $x \in X$, temos

$$K_P L = K_P L(I - P) = K_P L_P(I - P) = I(I - P) = I - P.$$

∎

Proposição 3.4 *Se* $P' : X \longrightarrow X$ *outra projeção contínua tal que* $\operatorname{Im} P' = \operatorname{Ker} L$ *então*

$$K_{P'} = (I - P')K_P.$$

Demonstração: Pela Proposição 3.3, temos

$$L\left(K_P - K_{P'}\right) = LK_P - LK_{P'} = I - I = 0,$$

ou seja, $\operatorname{Im}\left(K_P - K_{P'}\right) \subset \operatorname{Ker} L = \operatorname{Im} P'$. Então

$$K_P - K_{P'} = P'\left(K_P - K_{P'}\right) = P'K_P - P'K_{P'} = P'K_P.$$

Portanto,

$$K_{P'} = (I - P')K_P.$$

∎

Considerando a topologia quociente em $\operatorname{Coker} L$, definirmos a aplicação contínua e sobrejetora $\pi : Z \longrightarrow \operatorname{Coker} L$ por $\pi z = z + \operatorname{Im} L$. A norma de π é dada por

$$\|\pi\| = \sup_{z \neq 0} \frac{\|\pi z\|_{\operatorname{Coker} L}}{\|z\|_Z}.$$

Proposição 3.5 *Se* (i) *e* (ii) *forem satisfeitas, então*

(a) $Qz = 0 \iff z \in \operatorname{Im} L \iff \pi z = 0,$

(b) $\pi = \pi Q,$

(c) $\pi_Q := \pi|_{\operatorname{Im} Q} : \operatorname{Im} Q \longrightarrow \operatorname{Coker} L$ *é um isomorfismo.*

Demonstração: (a) Segue da construção $\operatorname{Im} L = \operatorname{Ker} Q$.
(b) Como $(I - Q)z \in \operatorname{Ker} Q$, segue do item (a) que $\pi(I - Q)z = 0$, logo $\pi z = \pi Q z$, para todo $z \in Z$.
(c) Basta observar que $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$ e π é sobrejetora. ■

Definição 3.2 *Dado* Ω *um subconjunto aberto e limitado em* X. *Dizemos que uma aplicação* $N : \overline{\Omega} \longrightarrow Z$ *é* $L-$**compacta em** $\overline{\Omega}$ *se as seguintes condições são satisfeitas*

(iii) $\pi N : \overline{\Omega} \longrightarrow \operatorname{Coker} L$ *é uma aplicação contínua e* $\pi N(\overline{\Omega})$ *é limitado,*

(iv) $K_{P,Q}N : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ *é uma aplicação compacta, onde* $K_{P,Q} := K_P(I - Q)$.

Vejamos que a definição acima é consistente, isto é, verificaremos que ela independe da escolha das projeções P e Q.

Proposição 3.6 *Se as condições* $(i)-(iv)$ *forem satisfeitas para a tripla* (L, N, Ω), *então* $K_{P',Q'}N$ *é uma aplicação compacta para qualquer par de projeções contínuas* (P', Q') *tais que* $\operatorname{Im} P' = \operatorname{Ker} L$ *e* $\operatorname{Im} L = \operatorname{Ker} Q'$.

Demonstração: Considere os isomorfismos $\pi_Q : \operatorname{Im} Q \longrightarrow \operatorname{Coker} L$ e $\pi_{Q'} : \operatorname{Im} Q' \longrightarrow \operatorname{Coker} L$, como $\operatorname{Im}(I - Q) \subset \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$ e $\operatorname{Im}(I - Q') \subset \operatorname{Ker} Q' = \operatorname{Im} L$, temos $Q = \pi_Q^{-1}\pi Q = \pi_Q^{-1}\pi Q + \pi_Q^{-1}\pi(I - Q) = \pi_Q^{-1}\pi$ e $Q' = \pi_{Q'}^{-1}\pi$.
Afirmamos que K_P está definida em $\operatorname{Im}(Q - Q')$, isto é, $\operatorname{Im}(Q - Q') \subset \operatorname{Im} L$. De fato, dado $z \in Z$, temos

$$Q(Q - Q')z = Qz - QQ'z = Q(I - Q')z = 0,$$

pois $(I - Q')z \in \operatorname{Ker} Q' = \operatorname{Ker} Q$. Logo $(Q - Q')z \in \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$, provando a afirmação.
Pela Proposição 3.4, temos

$$\begin{aligned} K_{P',Q'}N &= K_{P'}(I - Q')N = K_{P'}(I - Q)N + K_{P'}(Q - Q')N \\ &= (I - P')K_P(I - Q)N + (I - P')K_P(Q - Q')N \\ &= (I - P')K_{P,Q}N + (I - P')K(\pi_Q^{-1} - \pi_{Q'}^{-1})\pi N, \end{aligned}$$

onde $K = K_P|_{\operatorname{Im}(Q - Q')}$. Como $\dim \operatorname{Coker} L$ é finita e π_Q e $\pi_{Q'}$ são isomorfismos, segue que $\dim \operatorname{Im}(Q - Q')$ também é finita. Assim, K é contínuo e, consequentemente, $K_{P',Q'}N$ é contínuo. Resta mostrar que $K_{P',Q'}N(\overline{\Omega})$ é relativamente compacto. De fato, como $\pi N(\overline{\Omega})$ é limitado e K, $I - P$, π_Q^{-1} e $\pi_{Q'}^{-1}$ são operadores lineares contínuos, o conjunto $(I - P')K(\pi_Q^{-1} - \pi_{Q'}^{-1})\pi N(\overline{\Omega})$ também será limitado. Observe que $(I - P')|_{\operatorname{Ker} P} = I|_{\operatorname{Ker} P}$, uma vez que $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P'$. Pelo Teorema A.1, $\dim \operatorname{Im} K \leq \dim \operatorname{Im}(Q - Q')$, então $(I - P')K(\pi_Q^{-1} - \pi_{Q'}^{-1})\pi N(\overline{\Omega})$ está contindo em num espaço de dimensão finita, concluindo a prova. ■

3.2 Grau de coincidência

No presente trabalho, estamos interessados em obter soluções para a equação do tipo

$$Lx = Nx, \tag{3.1}$$

num certo conjunto Ω aberto e limitado do espaço de Banach X, sendo $L : \operatorname{dom} L \longrightarrow Z$ um operador de Fredholm de índice zero, isto é,

(v) $\dim \operatorname{Ker} L = \dim \operatorname{Coker} L$,

e $N : \overline{\Omega} \longrightarrow Z$ uma aplicação $L-$compacta. Para isso, nesta seção introduziremos o conceito de grau de coincidência de L e N em Ω para auxiliar nesse estudo. Vejamos que:

Proposição 3.7 *Sob as condições acima, x é solucão de* (3.1) *se, e somente se, $(I - P)x = (\Lambda\pi + K_{P,Q})Nx$, onde $\Lambda : \operatorname{Coker} L \longrightarrow \operatorname{Ker} L$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Seja $x \in \operatorname{dom} L \cap \overline{\Omega}$ tal que $Nx = Lx$, então $\pi Nx = 0$ e $QNx = 0$, uma vez que $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$. Como Λ é um operador linear, $\Lambda\pi Nx = 0$. Das Proposições 3.2 e 3.3, obtemos que K_P é isomorfismo e $K_P L = I - P$. Então o resultado segue da cadeia de equivalências

$$\begin{aligned} Lx = Nx &\iff Lx = (I - Q)Nx \iff K_P Lx = K_P(I - Q)Nx \\ &\iff (I - P)x = K_{P,Q}Nx + \Lambda\pi Nx \end{aligned}$$

■

Defina a aplicação $M : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ dada por

$$M = P + (\Lambda\pi + K_{P,Q})N,$$

onde $\Lambda : \operatorname{Coker} L \longrightarrow \operatorname{Ker} L$ é um isomorfismo, uma vez que (v) é satisfeita. Observe que $\operatorname{Im} M \subset \operatorname{dom} L$ e com a Proposição 3.7, segue que o conjunto de soluções de (3.1) é igual ao conjunto de pontos fixos da aplicação M.

Proposição 3.8 *Se as condições $(i) - (v)$ forem satisfeitas para a tripla (L, N, Ω), então M é uma aplicação compacta em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração: Se N é uma aplicação $L-$compacta em $\overline{\Omega}$, temos que $\pi N(\overline{\Omega})$ é limitado, donde segue que $(P + \Lambda\pi N)(\overline{\Omega})$ é um conjunto limitado, uma vez que Ω também é limitado e P e Λ são operadores lineares contínuos. Observe que $\operatorname{Im}(P + \Lambda\pi N) \subset \operatorname{Ker} L$ e lembrando que $\operatorname{Ker} L$ possui dimensão finita, segue que $(P + \Lambda\pi N)(\overline{\Omega})$ é um conjunto limitado em um espaço de dimensão finita, logo $(P + \Lambda\pi N)(\overline{\Omega})$ é relativamente compacto. Novamente, por N ser $L-$compacta, $P + \Lambda\pi N$ é uma aplicação contínua, logo compacta. Além disso, $K_{P,Q}N$ também é uma aplicação compacta. Portanto, $M = P + (\Lambda\pi + K_{P,Q})N$ é uma aplicação compacta em $\overline{\Omega}$. ■

Sob as condições acima, se

(vi) $0 \notin (L - N)(\operatorname{dom} L \cap \partial\Omega)$

então o grau de Leray-Schauder $\deg(I - M, \Omega, 0)$ está bem definido. A seguir mostraremos que o número inteiro $\deg(I - M, \Omega, 0)$ independe das projeções P e Q tomadas e que $|\deg(I - M, \Omega, 0)|$ também independe do isomorfismo $\Lambda : \operatorname{Coker} L \longrightarrow \operatorname{Ker} L$ em questão.

Denotaremos por $\mathcal{I}_L$ o conjunto dos isomorfismos de $\operatorname{Coker} L$ sobre $\operatorname{Ker} L$.

Definição 3.3 *Sejam* Λ *e* Λ' *dois isomorfismos de* $\mathcal{I}_L$*. Dizemos que* Λ *e* Λ' *são* **homotópicos** *em* $\mathcal{I}_L$ *se existe uma aplicação contínua* $\Gamma : \operatorname{Coker} L \times [0,1] \longrightarrow \operatorname{Ker} L$ *tal que* $\Gamma(\cdot,0) = \Lambda$, $\Gamma(\cdot,1) = \Lambda'$ *e* $\Gamma(\cdot,t) \in \mathcal{I}_L$ *para qualquer* $t \in [0,1]$.

Proposição 3.9 *Os isomorfismos* Λ *e* Λ' *são homotópicos em* $\mathcal{I}_L$ *se, e somente se,* $\det[\Lambda'\Lambda^{-1}] > 0$.

Demonstração: Suponha que os isomorfismos Λ e Λ' são homotópicos, então existe uma aplicação contínua $\Gamma : \operatorname{Coker} L \times [0,1] \longrightarrow \operatorname{Ker} L$ tal que $\Gamma(\cdot,0) = \Lambda$, $\Gamma(\cdot,1) = \Lambda'$ e $\Gamma(\cdot,t) \in \mathcal{I}_L$ para qualquer $t \in [0,1]$. Sejam $\{v_1, \cdots, v_n\}$ e $\{w_1, \cdots, w_n\}$ bases dos subespaços $\operatorname{Coker} L$ e $\operatorname{Ker} L$, respectivamente. Representaremos as formas matriciais dos isomorfismos Λ e Λ' nas bases $\{v_1, \cdots, v_n\}$ e $\{w_1, \cdots, w_n\}$ pelos mesmos símbolos. Considere a aplicação contínua $\Delta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Delta(t) = \det(\Gamma(\cdot,t))$. Como $\Gamma(\cdot,t)$ é um isomorfismo, segue que $\Delta(t) \neq 0$, para todo $t \in [0,1]$. Logo, pela continuidade de Δ, temos Δ possui o mesmo sinal em $[0,1]$. Assim,

$$\det[\Lambda'\Lambda^{-1}] = \det\Lambda \det\Lambda^{-1} = \frac{\det\Lambda'}{\det\Lambda} = \frac{\Delta(1)}{\Delta(0)} > 0.$$

Reciprocamente, se $\det\Lambda$ e $\det\Lambda'$ possui o mesmo sinal, então Λ e Λ' estão na mesma componente conexa em $GL(n,\mathbb{R})$. Como cada componente conexa é conexa por caminho, existe uma aplicação contínua $A : [0,1] \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$ tal que $A(0) = \Lambda$ e $A(1) = \Lambda'$. Logo, defina $\Gamma : \operatorname{Coker} L \times [0,1] \longrightarrow \operatorname{Ker} L$ por $\Gamma(x,t) = A(t)x$, segue que Λ e Λ' são homotópicos em $\mathcal{I}_L$. ■

Segue da proposição acima,

Corolário 3.1 *O conjunto* $\mathcal{I}_L$ *é particionado em duas classes de homotopia, a saber, as que possui determinante positivo e negativo.*

Antes de prosseguimos, vejamos os seguintes resultados auxiliares

Proposição 3.10 *Se* Y *é um espaço vetorial e* $S, S' : Y \longrightarrow Y$ *são duas projecões tais que* $\operatorname{Im} S = \operatorname{Im} S' \neq \{0\}$*, então* $S'' := aS + bS'$*, com* $a, b \in \mathbb{R}$*, é uma projeção tal que* $\operatorname{Im} S'' = \operatorname{Im} S$ *se, e somente se,* $a + b = 1$.

Demonstração: Se $S'' = aS + bS'$ e $\operatorname{Im} S = \operatorname{Im} S'$, temos

$$\begin{aligned}
(S'')^2 &= (aS + bS')(aS + bS') \\
&= a^2S^2 + abSS' + baS'S + b^2(S')^2 \\
&= a^2S + abS' + abS + b^2S' \\
&= (a+b)S''.
\end{aligned}$$

Suponha que S'' é uma projeção tal que $\operatorname{Im} S'' = \operatorname{Im} S$, para $z \in \operatorname{Im} S''$ e $z \neq 0$, temos

$$z = S''z = (S'')^2z = (a+b)S''z = (a+b)z,$$

então $a + b = 1$. Reciprocamente, se $a + b = 1$, temos $(S'')^2 = (a+b)S'' = S''$. Além disso, para $z \in \operatorname{Im} S = \operatorname{Im} S'$, temos

$$S''z = (aS + bS')z = aSz + bS'z = (a+b)z = z,$$

logo $\operatorname{Im} S \subset \operatorname{Im} S''$. Para $z \in Y$, temos

$$SS''z = S(aSz + bS'z) = aS^2z + bSS'z = aSz + bS'z = S''z,$$

assim, $\operatorname{Im} S'' \subset \operatorname{Im} S$. Portanto, $\operatorname{Im} S'' = \operatorname{Im} S$. ∎

Para o próximo resultado, admitiremos L um operador de Fredholm.

Lema 3.1 *Sejam $P, P' : X \longrightarrow X$ projeções contínuas tais que $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} P' \neq \{0\}$ e $P'' = aP + bP'$, com $a + b = 1$, então*

$$K_{P''} = aK_P + bK_{P'}.$$

Demonstração: Pela Proposição 3.3 e Proposição 3.4, segue que

$$\begin{aligned} K_{P''} &= (I - P'')K_P = (I - aP - bP')K_P = K_P - aPK_P - bP'K_P \\ &= K_P - bP'K_P = (a+b)K_P - bP'K_P = aK_P + b(I - P')K_P \\ &= aK_P + bK_{P'}. \end{aligned}$$

∎

Proposição 3.11 *Sejam Y é um espaço vetorial e $Q, Q' : Y \longrightarrow Y$ duas projeções contínuas tais que $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} Q' \neq \{0\}$, então $Q'' := aQ + bQ'$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é uma projeção tal que $\operatorname{Ker} Q'' = \operatorname{Ker} Q$ se, e somente se, $a + b = 1$.*

Demonstração: Da continuidade das projeções Q e Q' segue que Q'' também é contínua. Como $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} Q'$, temos $Q'(z) - z \in \operatorname{Ker} Q$ e $Qz - z \in \operatorname{Ker} Q'$, para todo $z \in Y$. Consequentemente, $QQ' = Q$ e $Q'Q = Q'$. Daí,

$$\begin{aligned} (Q'')^2 &= (aQ + bQ')(aQ + bQ') \\ &= a^2Q^2 + abQQ' + baQ'Q + b^2(Q')^2 \\ &= a^2Q + abQ' + abQ + b^2Q' \\ &= (a+b)Q'' = Q''. \end{aligned}$$

Analogamente a prova da proposição anterior, se Q'' é uma projeção tal que $\operatorname{Ker} Q'' = \operatorname{Ker} Q$, segue que $a + b = 1$. Reciprocamente, se $a + b = 1$ então Q'' é uma projeção contínua. Resta verificar que $\operatorname{Ker} Q'' = \operatorname{Ker} Q$. Note que $\operatorname{Ker} Q \subset \operatorname{Ker} Q''$, uma vez que $\operatorname{Ker} Q' = \operatorname{Ker} Q$. Por outro lado, se $z \in \operatorname{Ker} Q''$, temos $z \in Y = \operatorname{Ker} Q \oplus \operatorname{Im} Q$, assim, existem $x \in \operatorname{Ker} Q$ e $y \in \operatorname{Im} Q$ tais que $z = x + y$. Então

$$0 = Q''z = Q''x + Q''y = 0 + (aQ + bQ')y = aQy + bQ'y = ay + bQ'y.$$

Aplicando Q' na expressão acima,

$$0 = aQ'y + bQ'y = (a+b)Q'y = Q'y,$$

donde segue que $y \in \operatorname{Ker} Q'$. Como $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} Q'$, segue que $y \in \operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Im} Q = \{0\}$, então $z = x \in \operatorname{Ker} Q$. Portanto, $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} Q''$. ∎

Proposição 3.12 *Se as condições $(i)-(vi)$ forem satisfeitas para a tripla (L, N, Ω) então $\deg(I - M, \Omega, 0)$ depende apenas de L, N, Ω e da classe de homotopia Λ em $\mathcal{I}_L$.*

Demonstração: Sejam $P, P' : X \longrightarrow X$ e $Q, Q' : Z \longrightarrow Z$ projeções contínuas tais que

$$\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L = \operatorname{Im} P' \qquad e \qquad \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L = \operatorname{Ker} Q'.$$

Sabemos que

$$\dim \operatorname{Im} P = \dim \operatorname{Ker} L = \dim \operatorname{Coker} L = \dim \operatorname{Im} Q.$$

Se $\operatorname{Im} P = \{0\}$ então $\operatorname{Im} P' = \operatorname{Im} Q = \operatorname{Im} Q' = \{0\}$ e $\operatorname{Ker} P = X = \operatorname{Ker} P'$. Desta forma, $M = P + (\Lambda\pi + K_{P,Q})N = K_P N$ e $L_P = L$, então $M = K_P N = L^{-1}N$. Assim, $\deg(I - M, \Omega, 0)$ não depende de P e Q. Quando $\operatorname{Im} P \neq \{0\}$, temos $\operatorname{Im} Q \neq \{0\}$. Sejam $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{I}_L$ na mesma classe de homotopia, então existe uma aplicação contínua $\Gamma : \operatorname{Coker} L \times [0,1] \longrightarrow \operatorname{Ker} L$ tal que $\Gamma(\cdot, 0) = \Lambda$, $\Gamma(\cdot, 1) = \Lambda'$ e $\Gamma(\cdot, t) \in \mathcal{I}_L$ para qualquer $t \in [0,1]$. Para cada $t \in [0,1]$, defina

- $P_t = (1-t)P + tP'$,
- $Q_t = (1-t)Q + tQ'$,
- $M_t = P_t + \Gamma(\pi N(\cdot), t) + K_{P_t,Q_t}N$.

Pela Proposição 3.10 e Proposição 3.11, segue que P_t e Q_t são pojeções contínas tais que

$$\operatorname{Im} P_t = \operatorname{Ker} L \qquad e \qquad \operatorname{Ker} Q_t = \operatorname{Im} L.$$

Pelo Lema 3.1,

$$K_{P_t} = (1-t)K_P + tK_{P'},$$

para $t \in [0,1]$. Se $0 \notin (N - L)(\operatorname{dom} L \cap \partial\Omega)$, pela Proposição 3.7,

$$M_t(z) \neq z,$$

para todo $z \in \operatorname{dom} L \cap \partial\Omega$ e para qualquer $t \in [0,1]$. Além disso, temos $M = M_0$ e $M' := M_1 = P' + (\Lambda'\pi + K_{P',Q'})N$. Mostremos que a aplicação $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow X$, dada por $H(x,t) = M_t(x)$, é compacta. Observe que a aplicação H é contínua, resta verificar que $H(\overline{\Omega}, t)$ é relativamente compacto em X para cada $t \in [0,1]$. Do Lema 3.1 e pela Proposição 3.3 e Proposição 3.4, segue que

$$\begin{aligned}
K_{P_t,Q_t}N &= K_{P_t}(I - Q_t)N = \left[(1-t)K_P + tK_{P'}\right]\left[I - (1-t)Q - tQ'\right]N \\
&= \big[(1-t)K_P - (1-t)^2 K_P Q - t(1-t)(I-P)K_{P'}Q' + \\
&\quad + tK_{P'} - t(1-t)(I-P')K_P Q - t^2 K_{P'}Q'\big]\, N \\
&= \left[(1-t)K_P(I-Q) + tK_{P'}(I-Q')\right] N \\
&= (1-t)K_{P,Q}N + tK_{P',Q'}N,
\end{aligned}$$

onde segue que $K_{P_t,Q_t}N$ é compacta. Como os conjuntos $P_t(\overline{\Omega})$ e $\Gamma(\pi N(\overline{\Omega}), t)$ são limitados contidos no espaço de dimensão finita $\operatorname{Ker} L$, concluímos que $H(\overline{\Omega}, t)$ é relativamente compacto para cada $t \in [0,1]$. Da invariância do grau de Leray-Schauder por homotopia compacta, temos

$$\deg(I - M, \Omega, 0) = \deg(I - M_0, \Omega, 0) = \deg(I - M_1, \Omega, 0) = \deg(I - M', \Omega, 0).$$

■

Deste resultado concluímos que o número $\deg(I - M, \Omega, 0)$ não depende das projeções P e Q escolhidas. Veremos adiante que o módulo desse independerá também da classe de homotopia do isomorfismo Λ adotada em $\mathcal{I}_L$. Para os próximos resultados, admitiremos que as condições $(i) - (vi)$ acima são satisfeitas para a tripla (L, N, Ω).

Lema 3.2 *Seja $G : \operatorname{Ker} L \longrightarrow \operatorname{Ker} L$ um isomorfismo e seja $M' = P + (G\Lambda\pi + K_{P,Q})N$ então*

$$I - M' = (I - P + GP)(I - M).$$

Demonstração: Lembrando que $M = P + (\Lambda\pi + K_{P.Q})N$, temos

$$\begin{aligned}(I - P + GP)(I - M) &= I - P - \Lambda\pi N - K_{P,Q}N + P\Lambda\pi N + \\ &\quad + PK_{P,Q}N - GP\Lambda\pi N - GPK_{P,Q}N.\end{aligned}$$

Sendo Λ um isomorfismo de $\operatorname{Coker} L$ sobre $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Im} P$, donde segue que $P\Lambda\pi N = \Lambda\pi N$. Do item (a) da Proposição 3.3, segue que $PK_{P,Q}N = 0$ e $GPK_{P,Q}N = 0$. Então obtemos o resultado

$$(I - P + GP)(I - M) = I - M'.$$

■

Proposição 3.13 *Sejam $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{I}_L$ e seja $M' = P + (\Lambda'\pi + K_{P,Q})N$ então*

$$\deg(I - M', \Omega, 0) = \operatorname{sgn}(\det \Lambda'\Lambda^{-1}) \deg(I - M, \Omega, 0).$$

Demonstração: Considerando $G = \Lambda'\Lambda^{-1}$ no Lema 3.2, temos

$$I - M' = (I - P + \Lambda'\Lambda^{-1}P)(I - M).$$

Da Proposição 2.1,

$$\deg(I - M', \Omega, 0) = \deg(I - P + \Lambda'\Lambda^{-1}P, B_1(0), 0) \deg(I - M, \Omega, 0).$$

Como $P - \Lambda'\Lambda^{-1}P : X \longrightarrow \operatorname{Ker} L$ é contínua e $\operatorname{Ker} L$ tem dimensão finita, então $I - (P - \Lambda'\Lambda^{-1}P)$ é uma pertubação compacta da identidade com a imagem contida em um subespaço de dimensão finita. Pela definição do grau de Leray-Schauder, segue

$$\begin{aligned}\deg(I - P + \Lambda'\Lambda^{-1}P, B_1(0), 0) &= \deg((I - P + \Lambda'\Lambda^{-1})|_{B_1(0)\cap \operatorname{Ker} L}, B_1(0) \cap \operatorname{Ker} L, 0) \\ &= \deg(\Lambda'\Lambda^{-1}, B_1(0) \cap \operatorname{Ker} L, 0) \\ &= \operatorname{sgn}(\det \Lambda'\Lambda^{-1}).\end{aligned}$$

Portanto, concluímos o desejado. ■

O próximo resulta segue imediatamente da Proposição 3.13.

Corolário 3.2 *Se as condições $(i) - (vi)$ forem satisfeitas para a tripla (L, N, Ω) então $|\deg(I - M, \Omega, 0)|$ dependerá apenas de L, N e Ω.*

Podemos agora introduzir o conceito de grau coincidente de L e N em Ω.

Definição 3.4 *Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado em X, L um operador de Fredholm de índice zero e N é uma aplicação $L-$compacta em $\overline{\Omega}$. Se $0 \notin (L - N)(\operatorname{dom} L \cap \partial\Omega)$, o* **grau de coincidência de** *L* **e** *N* **em** *Ω é o número inteiro $\deg((L, N), \Omega)$ dado por*

$$\deg((L, N), \Omega) := \deg(I - M, \Omega, 0),$$

onde $M : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ é a aplicação definida por $M = P + (\Lambda\pi + K_{P,Q})N$, com $\Lambda : \operatorname{Coker} L \longrightarrow \operatorname{Ker} L$ é um isomorfismo que preserva a orientação.

3.3 Propriedades

Aqui veremos as principais propriedades do grau de coincidência de L e N em Ω, que são consequências das propriedades do grau de Larey-Schauder. Nesta seção, admitiremos que as condições $(i)-(vi)$ acima são satisfeitas para a tripla (L, N, Ω).

Propriedade 3.1 (Existência) *Se* $\deg((L,N),\Omega) \neq 0$, *então* $0 \in (L-N)(\operatorname{dom} L \cap \Omega)$.

Propriedade 3.2 (Excisão) *Se* $\Omega_0 \subset \Omega$ *é um conjunto aberto tal que* $(L-N)^{-1}(0) \subset \Omega_0$, *então* $\deg((L,N),\Omega) = \deg((L,N),\Omega_0)$.

Propriedade 3.3 (Aditividade) *Se* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, *onde* Ω_1 *e* Ω_2 *são abertos disjuntos tais que* $0 \notin (L-N)(\operatorname{dom} L \cap \partial\Omega_1) \cup (L-N)(\operatorname{dom} L \cap \partial\Omega_2)$, *então* $\deg((L,N),\Omega) = \deg((L,N),\Omega_1) + \deg((L,N),\Omega_2)$.

Definição 3.5 *Sejam* $L : X \longrightarrow Z$ *um operador de Fredholm de índice zero e* Ω *um subconjunto aberto e limitado em* X. *Dizemos que* $\tilde{N} : \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow Z$ *é uma* **aplicação** $L-$**compacta em** $\overline{\Omega} \times [0,1]$ *se a aplicação* $\tilde{N}_t = \tilde{N}(\cdot, t)$ *for* $L-$*compacta em* $\overline{\Omega}$, *para cada* $t \in [0,1]$.

Teorema 3.3 (Invariância do grau por homotopia) *Se* L *é um operador de Fredholm de índice zero,* $\tilde{N} : \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow Z$ *é uma aplicação* $L-$*compacta em* $\overline{\Omega} \times [0,1]$ *e*

$$0 \notin (L - \tilde{N}(\cdot,t))(\operatorname{dom} L \cap \partial\Omega),$$

para cada $t \in [0,1]$, *então* $\deg((L,\tilde{N}(\cdot,t)),\Omega)$ *independe de* $t \in [0,1]$.

Corolário 3.4 *O número* $\deg((L,N),\Omega)$ *depende somente de* L, Ω *e da restrição de* N *em* $\partial\Omega$.

Demonstração: Sejam N e N' aplicações $L-$compactas em $\overline{\Omega}$ tais que $Nx = N'x$, para todo $x \in \partial\Omega$. Defina $\tilde{N} : \Omega \times [0,1] \longrightarrow Z$ por

$$\tilde{N}(x,t) = (1-t)Nx + tN'x.$$

Se $x \in \operatorname{dom} L \cap \partial\Omega$, temos $\tilde{N}(x,t) = Nx = N'x$, para todo $t \in [0,1]$. Onde segue que

$$0 \notin (L - \tilde{N}(\cdot,t))(\operatorname{dom} L \cap \partial\Omega),$$

para todo $t \in [0,1]$. Pelo Teorema 3.3,

$$\deg((L,N),\Omega) = \deg((L,\tilde{N}_0),\Omega) = \deg((L,\tilde{N}_1),\Omega) = \deg((L,N'),\Omega).$$

Portanto, segue o resultado. ■

Para provamos o próximo teorema, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.3 *Se as condições* $(i)-(vi)$ *forem satisfeitas para a tripla* (L,N,Ω) *e* $K_{P,Q}$ *for contínuo, então existe* $\mu > 0$ *tal que*

$$\inf_{x \in \operatorname{dom} L \cap \partial\Omega} \|Lx - Nx\|_Z \geq \mu.$$

Demonstração: Suponha que o resultado não seja verdadeiro. Então, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\operatorname{dom} L \cap \partial\Omega$ tal que

$$\|Lx_n - Nx_n\|_Z \leq \frac{1}{n}.$$

Como $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L = \operatorname{Ker} \pi$, temos $QL = 0$ e $\pi L = 0$. Pela Proposição 3.3, temos $K_P L = I - P$. Assim,

$$\begin{aligned}
(\Lambda\pi + K_{P,Q})(L - N) &= \Lambda\pi L - \Lambda\pi N + K_{P,Q}L - K_{P,Q}N \\
&= -\Lambda\pi N + K_P(I - Q)L - K_{P,Q}N \\
&= K_P L - (\Lambda\pi + K_{P,Q})N \\
&= I - P - (\Lambda\pi + K_{P,Q})N = I - M.
\end{aligned}$$

Tomado $k = \|\Lambda\pi + K_{P,Q}\|_X$, uma vez que $\Lambda\pi + K_{P,Q}$ é contínuo, obtemos

$$\|Ix_n - Mx_n\|_X \leq \|\Lambda\pi + K_{P,Q}\|_X \|Lx_n - Nx_n\|_Z \leq \frac{k}{n}. \tag{3.2}$$

Como $\overline{\Omega}$ é limitado, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também será. Lembrando que M é um operador compacto, pelo Lema A.2 segue que $(Mx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $(Mx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente em X. Seja y esse limite, segue da equação (3.2) que y também é limite da $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Consequentemente, $y \in \partial\Omega$, pois $\partial\Omega$ é fechado. Novamente por (3.2) obtemos $y - My = 0$. Logo, y é ponto fixo de M. Pela Proposição 3.7, $Ly = Ny$, contradição com a hipótese (vi). Portanto, o resultado é válido. ■

Teorema 3.5 (Teorema de Rouché) *Suponha que as condições $(i) - (vi)$ estejam satisfeitas para a tripla (L, N, Ω). Se o operador $K_{P,Q}$ é contínuo, para cada aplicação $L-$compacta N' em $\overline{\Omega}$ tal que*

$$\sup_{x\in\partial\Omega} \|Nx - N'x\|_Z < \mu,$$

onde μ é dado pelo Lema 3.3, *temos* $\deg((L, N), \Omega) = \deg((L, N'), \Omega)$.

Demonstração: Considere a homotopia $L-$compacta $\tilde{N} : \overline{\Omega} \times [0, 1] \longrightarrow Z$ dada por

$$\tilde{N}(x, t) = (1 - t)Nx + tN'x.$$

Pelo Lema 3.3, temos

$$\|Lx - \tilde{N}(x, t)\|_Z \geq \|Lx - Nx\|_Z - t\|Nx - N'x\|_Z > (1 - t)\mu \geq 0,$$

para $x \in \operatorname{dom} L \cap \partial\Omega$ e $t \in [0, 1]$. Logo, $0 \notin (L - \tilde{N}(\cdot, t))(\operatorname{dom} L \cap \partial\Omega)$, para todo $t \in [0, 1]$. Portanto, o resultado segue do Teorema 3.3. ■

3.4 Aplicação

Nesta seção, faremos uma aplicação do Grau de Coincidência no problema periódico $u''(x) = f(x, u(x), u'(x))$. Para a elaboração desta, foi-se motivado pelo trabalho [21], intitulado "*Points fixes, points critiques et problèmes aux limites*", de Mawhin, mas como este era inacessível, utilizarmos como referências os trabalhos [26] e [27], citados no início do capítulo. A seguir consideraremos os espaços de Banach $X = C^1[a,b]$, com a norma

$$\|u\|_{C^1} = \max_{x\in[a,b]} |u(x)| + \max_{x\in[a,b]} |u'(x)|,$$

e $Z = L^1[a,b]$, com a norma

$$\|u\|_1 = \int_a^b |u(x)|\, dx.$$

Esta seção será apresentada em duas subseções, onde na primeira mostraremos que o grau de coincidência é consistente para operador diferencial de segunda ordem e na segunda calcularemos o grau deste.

3.4.1 "Boa" Definição

No presente trabalho, estamos interessados em estudar o problema periódico com f uma aplicação contínua, mas como os resultados desta subseção são válidos para o caso mais geral, desenvolveremos-o considerando f uma aplicação Carathéodory. Considere o problema periódico

$$\left\{\begin{array}{rcl} -u''(x) &=& f(x,u(x),u'(x)), \text{ qtp } x \in (a,b), \\ u(a) &=& u(b), \\ u'(a) &=& u'(b), \end{array}\right. \tag{3.3}$$

onde $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição de localmente Carathéodory, isto é,

1) $f(\cdot,y,z) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é Lebesgue mensurável em $[a,b]$, para cada $y,z \in \mathbb{R}$,

2) $f(x,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, qtp $x \in [a,b]$, e

3) $\sup\{|f(x,y,z)|; |y| + |z| \leq \rho\} \in L^1(a,b)$, para cada $\rho \in (0,+\infty)$.

Seja $\operatorname{dom} L := \{u \in AC^1[a,b];\ u(a) = u(b) \text{ e } u'(a) = u'(b)\}$ um subespaço de $C^1[a,b]$, defina o operador $L : \operatorname{dom} L \longrightarrow L^1[a,b]$ por

$$Lu = u''.$$

Observe que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema B.5), $AC^1[a,b] = W^{2,1}[a,b] = \{u \in L^1[a,b]\,;\, u', u'' \in L^1[a,b]\}$.

Lema 3.4 $L : \operatorname{dom} L \subset C^1[a,b] \longrightarrow L^1[a,b]$ *é um operador de Fredholm de índice zero.*

Demonstração: Das propriedades de derivação, vemos que L é um operador linear. Seja $u \in \operatorname{dom} L$ tal que $Lu = 0$, assim,

$$\left\{\begin{array}{l} u''(x) = 0, \quad \text{qtp } x \in [a,b], \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b). \end{array}\right.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue que $u(x) = Ax + B$. Das condições periódicas, obtemos que $u(x) = B$, para todo $x \in [a,b]$. Então $\operatorname{Ker} L$ é composto pelas funções constantes, então esse subespaço é gerado pela função constante $v \equiv 1$. Logo, $\dim \operatorname{Ker} L = 1$. Seja $v \in \operatorname{Im} L$, então existe $u \in \operatorname{dom} L$ tal que

$$\begin{cases} u''(x) = v(x), \quad \text{qtp } x \in [a,b], \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b). \end{cases}$$

Novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$u(x) = A + Bx + \int_a^x \int_a^s v(t)dtds,$$

para $x \in [a,b]$. Da condição $u(a) = u(b)$, obtemos

$$B = -\frac{1}{b-a}\int_a^b \int_a^s v(t)dtds.$$

E da condição $u'(a) = u'(b)$,

$$\int_a^b v(s)ds = 0.$$

Logo,

$$\operatorname{Im} L = \left\{ v \in L^1[a,b]; \int_a^b v(s)ds = 0 \right\}.$$

Da relação de equivalência definida em $\operatorname{Coker} L$, segue que

$$\begin{aligned} v_1 \sim v_2 \Longleftrightarrow v_1 - v_2 \in \operatorname{Im} L \quad &\Longleftrightarrow \quad \int_a^b (v_1 - v_2)(s)ds = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \int_a^b v_1(s)ds = \int_a^b v_2(s)ds. \end{aligned}$$

Assim, o subespaço $\operatorname{Coker} L$ é gerado pela classe que equivalência $\overline{1} = \left\{ w \in L^1[a,b]; \frac{1}{b-a}\int_a^b w(s)ds = 1 \right\}$, então $\dim \operatorname{Coker} L = 1$. Mostremos que $\operatorname{Im} L$ é fechado em $L^1[a,b]$. Sejam $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\operatorname{Im} L$ e $v \in L^1[a,b]$ tais que $v_n \longrightarrow v$ em $L^1[a,b]$, isto é,

$$\lim_{n\to+\infty} \|v_n - v\|_1 = 0. \tag{3.4}$$

Como cada $v_n \in \operatorname{Im} L$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b v(s)ds \right| &= \left| \int_a^b (v - v_n)(s)ds + \int_a^b v_n(s)ds \right| = \left| \int_a^b (v_n - v)(s)ds \right| \\ &\leq \int_a^b |(v_n - v)(s)|\, ds = \|v_n - v\|_1. \end{aligned}$$

Da desigualdade acima e pela equação (3.4), segue que $v \in \operatorname{Im} L$. Logo, $\operatorname{Im} L$ é um subespaço fechado em $L^1[a,b]$. Portanto, L é um operador de Fredholm de índice zero. ■

Para determinamos o grau de coincidência do operador L precisamos de projeções contínuas $P : C^1[a,b] \longrightarrow C^1[a,b]$ e $Q : L^1[a,b] \longrightarrow L^1[a,b]$ tais que $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$. Lembrando que já mostramos que essas projeções sempre existem para um operador de Fredholm e que o grau independe dessa escolha. Considere P e Q dadas por

$$Pu = \psi_u \qquad \text{e} \qquad Qv = \phi_v,$$

onde $\psi_u(x) = u(a)$ e $\phi_v(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b v(s)ds$ são funções constantes em $[a,b]$.

Lema 3.5 *$P : C^1[a,b] \longrightarrow C^1[a,b]$ e $Q : L^1[a,b] \longrightarrow L^1[a,b]$ são projeções contínuas tais que* $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L$ *e* $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$.

Demonstração: Nas definições acima, vemos que P e Q são operadores lineares tais que $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$. Além disso, por composição de funções obtemos $P^2 = P$ e $Q^2 = Q$. Mostremos que P e Q são contínuas. Para $u \in C^1[a,b]$, temos

$$\|Pu\|_{C^1} = \|\psi_u\|_{C^1} = \max_{x\in[a,b]} |\psi_u(x)| + \max_{x\in[a,b]} |\psi_u'(x)| = |u(a)| \leq \max_{x\in[a,b]} |u(x)| \leq \|u\|_{C^1}.$$

Para $v \in L^1[a,b]$, temos

$$\begin{aligned} \|Qv\|_1 &= \|\phi_v\|_1 = \int_a^b |\phi_v(x)|dx = \int_a^b \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b v(s)ds\right| dx \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b |v(s)|\, ds\; dx = \|v\|_1. \end{aligned}$$

Portanto, P e Q são projeções contínuas tais que $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$. ■

Vejamos a seguinte definição.

Definição 3.6 *Seja $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Carathéodory. Dizemos que α, $\beta \in \operatorname{dom} L$ são* **subsolução** *e* **supersolução** *do problema* (3.3), *respectivamente, se satisfazerem*

$$\begin{aligned} -\alpha''(x) &\leq f(x, \alpha(x), \alpha'(x)), \\ -\beta''(x) &\geq f(x, \beta(x), \beta'(x)), \end{aligned} \tag{3.5}$$

qpt $x \in [a,b]$. Se as inequações (3.5) *são estritas então dizemos que α é* **subsolução estrita** *e β é* **supersolução estrita** *do problema* (3.3).

Suponha α uma subsolução estrita e β uma supersolução estrita do problema (3.3) com $\alpha < \beta$ em $[a,b]$, isto é, $\alpha(x) < \beta(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Adiante, considere $\Omega = \{u \in C^1[a,b];\ \alpha(x) < u(x) < \beta(x) \text{ e } |u'(x)| < C, \forall x \in [a,b]\}$, um conjunto aberto e limitado em $C^1[a,b]$, e defina a aplicação $N : \overline{\Omega} \longrightarrow L^1[a,b]$ por

$$N(u) = -f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)).$$

Lema 3.6 *$N : \overline{\Omega} \longrightarrow L^1[a,b]$ é uma aplicação contínua.*

Demonstração: Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em Ω que converge para $u_0 \in \overline{\Omega}$, isto é,

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u_0\|_{C^1} = 0.$$

Então $u_n(x) \longrightarrow u_0(x)$ uniformemente em $[a,b]$. Como $f(x,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em qtp $x \in [a,b]$, segue que $f(x, u_n(x), u_n'(x)) \longrightarrow f(x, u_0(x), u_0'(x))$ em qtp $x \in [a,b]$. Como f é localmente Carathéodory em $E = [a,b] \times \mathbb{R}^2$, tomando $\rho = \max\{|\alpha(x)|, |\beta(x)|; x \in [a,b]\} + C$, defina $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \sup\{|f(x,y,z)|; |y| + |z| \leq \rho\} \in L^1[a,b]. \tag{3.6}$$

Logo
$$|f(x,u_n(x),u_n'(x))| \leq h(x), \text{ qtp } x \in [a,b].$$
Pelo Teorema da Convergência Dominada (Teorema B.4),
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f(x,u_n(x),u_n'(x)) - f(x,u_0(x),u_0'(x))|dx = 0,$$
então
$$\lim_{n\to+\infty} \|N(u_n) - N(u_0)\|_1 = 0.$$
Portanto, N é contínua. ■

Agora, resta mostrar que a aplicação N é uma aplicação $L-$compacta em $\overline{\Omega}$. Precisamos verificar que as seguintes condições são satisfeitas

(i) $\pi N : \overline{\Omega} \longrightarrow \operatorname{Coker} L$ é uma aplicação contínua e $\pi N(\overline{\Omega})$ é limitado em $\operatorname{Coker} L$,

(ii) $K_{P,Q}N : \overline{\Omega} \longrightarrow C^1[a,b]$ é uma aplicação compacta.

Para isso, primeiramente devemos determinar o operador $K_{P,Q} = K_P(I-Q)$. O operador Q está definido acima, reduzindo este problema em encontrar o operador $K_P = L_P^{-1}$, lembrando que $L_P : \operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P \longrightarrow \operatorname{Im} L$ é o isomorfismo dado por $L_P = L|_{\operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P}$. Então dado $v \in \operatorname{Im} L$, existe $u \in \operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P$ tal que $L_P u = v$ em qtp $[a,b]$. Observe que $\operatorname{Ker} P = \{u \in C^1[a,b];\, u(a) = 0\}$, temos
$$\begin{cases} u''(x) = v(x), \text{ qtp } x \in [a,b], \\ u(b) = u(a) = 0, \\ u'(b) = u'(a). \end{cases}$$
Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,
$$u(x) = A + Bx + \int_a^x \int_a^s v(t)\,dt\,ds.$$
Da condição $u(b) = u(a) = 0$, segue que
$$A = \frac{a}{b-a}\int_a^b \int_a^s v(t)\,dt\,ds \qquad e \qquad B = -\frac{1}{b-a}\int_a^b \int_a^s v(t)\,dt\,ds.$$
Logo,
$$u(x) = \frac{a-x}{b-a}\int_a^b \int_a^s v(t)\,dt\,ds + \int_a^x \int_a^s v(t)\,dt\,ds.$$
Portanto,
$$K_P v(x) = \frac{a-x}{b-a}\int_a^b \int_a^s v(t)\,dt\,ds + \int_a^x \int_a^s v(t)\,dt\,ds.$$

Lema 3.7 $K_P : \operatorname{Im} L \longrightarrow \operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} L$ *é um operador linear contínuo.*

Demonstração: Pela lei de formação vemos que K_P é um operador linear, resta mostrar a continuidade. Para $v \in \operatorname{Im} L$, temos

$$|K_P v(x)| \leq \left|\frac{a-x}{b-a}\right| \int_a^b \int_a^s |v(t)|\, dt\, ds + \int_a^x \int_a^s |v(t)|\, dt\, ds \leq 2(b-a)\|v\|_1$$

e

$$\begin{aligned} |(K_P v)'(x)| &= \left| -\frac{1}{b-a} \int_a^b \int_a^s v(t)\, dt\, ds + \int_a^x v(t)\, dt \right| \\ &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_a^s |v(t)|\, dt\, ds + \int_a^x |v(t)|\, dt \\ &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_a^b |v(t)|\, dt\, ds + \int_a^b |v(t)|\, dt = 2\|v\|_1, \end{aligned}$$

para todo $x \in [a,b]$. Então

$$\|K_P v\|_{C^1} = \max_{x\in[a,b]} |K_P v(x)| + \max_{x\in[a,b]} |(K_P v)'(x)| \leq 2(b-a+1)\|v\|_1.$$

Portanto, K_P é um operador linear contínuo. ■

Lema 3.8 $N : \overline{\Omega} \longrightarrow L^1[a,b]$ *é uma aplicação* $L-$*compacta em* $\overline{\Omega}$.

Demonstração: Pelo Lema 3.6, N é uma aplicação contínua. Como o operador linear π é contínuo, pois

$$\|\pi v\|_{\operatorname{Coker} L} = \inf_{y\in \operatorname{Im} L} \|v-y\|_1 \leq \|v-0\|_1 = \|v\|_1, \tag{3.7}$$

segue que a composta πN também é uma aplicação contínua. Seja $u \in \overline{\Omega}$, pela equação (3.7),

$$\|\pi N(u)\|_{\operatorname{Coker} L} \leq \|N(u)\|_1 = \int_a^b |f(x,u(x),u'(x))| dx \leq \int_a^b h(x)\ dx < \infty,$$

sendo h dada pela equação (3.6). Logo o conjunto imagem $\pi N(\overline{\Omega})$ é limitado em $\operatorname{Coker} L$. Mostramos acima que as aplicações Q, N e K_P são contínuas, então a composta $K_{P,Q}N = K_P(I-Q)N : \overline{\Omega} \longrightarrow \operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P$ também é uma aplicação contínua. Mostremos que o conjunto imagem $K_{P,Q}N(\overline{\Omega})$ é relativamente compacto em $C^1[a,b]$. Seja $u \in \overline{\Omega}$, pela continuidade dos operadores K_P e Q, juntamente com a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} \|K_{P,Q}N(u)\|_{C^1} &= \|K_P(I-Q)N(u)\|_{C^1} \leq 2(b-a+1)\|N(u)-QN(u)\|_1 \\ &\leq 2(b-a+1)\left(\|N(u)\|_1 + \|QN(u)\|_1\right) \\ &\leq 4(b-a+1)\|N(u)\|_1 \\ &\leq 4(b-a+1)\|h\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Consequentemente, $K_{P,Q}N(\overline{\Omega})$ é equilimitado em $C^1[a,b]$. Sabendo que

$$\begin{aligned} K_{P,Q}N(u)(x) &= \frac{x-a}{b-a} \int_a^b \int_a^s \Big(f(t,u(t),u'(t)) - \hat{f}_u(t)\Big)\, dt\ ds - \\ &\quad - \int_a^x \int_a^s \Big(f(t,u(t),u'(t)) - \hat{f}_u(t)\Big)\, dt\ ds, \end{aligned}$$

onde $\hat{f}_u$ denota a funcão constante em $[a,b]$ dada por $\hat{f}_u(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(y,u(y),u'(y))\ dy$, para $x, y \in [a,b]$, com $x \leq y$, obtemos

$$\begin{aligned}
|K_{P,Q}N(u)(y) - K_{P,Q}N(u)(x)| &\leq \left|\frac{y-x}{b-a}\int_a^b\int_a^s \Big(f(t,u(t),u'(t)) - \hat{f}_u(t)\Big)\ dt\ ds\right| + \\
&+ \left|\int_x^y\int_a^s \Big(f(t,u(t),u'(t)) - \hat{f}_u(t)\Big)\ dt\ ds\right| \\
&\leq \frac{y-x}{b-a}\int_a^b\int_a^b \Big|f(t,u(t),u'(t)) - \hat{f}_u(t)\Big|\ dt\ ds \\
&+ \int_x^y\int_a^b \Big|f(t,u(t),u'(t)) - \hat{f}_u(t)\Big|\ dt\ ds \\
&\leq 2(y-x)\left[\int_a^b |f(t,u(t),u'(t))|dt + \int_a^b |\hat{f}_u(t)|dt\right] \\
&\leq 4(y-x)\int_a^b |f(t,u(t),u'(t))|dt \leq 4\|h\|_1(y-x),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left|[K_{P,Q}N(u)]'(y) - [K_{P,Q}N(u)]'(x)\right| &= \left|\int_x^y \Big(f(t,u(t),u'(t)) - \hat{f}_u(t)\Big)\ dt\right| \\
&\leq \int_x^y |f(t,u(t),u'(t))|\ dt + \frac{1}{b-a}\|h\|_1(y-x) \\
&\leq \int_x^y h(t)\ dt + \frac{1}{b-a}\|h\|_1(y-x).
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $h \in L^1(a,b)$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$x, y \in [a,b] \ \text{ e } \ |x-y| < \delta_1 \Longrightarrow \left|\int_x^y h(t)\ dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tome $\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{4\|h\|_1}, \frac{\varepsilon(b-a)}{2\|h\|_1}\right\}$. Se $x, y \in [a,b]$ tais que $|x-y| < \delta$, então

$$|K_{P,Q}N(u)(y) - K_{P,Q}N(u)(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \left|[K_{P,Q}N(u)]'(y) - [K_{P,Q}N(u)]'(x)\right| < \varepsilon,$$

para todo $u \in \overline{\Omega}$. Consequentemente, $K_{P,Q}N(\overline{\Omega})$ é equicontínuo em $C^1[a,b]$. Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli (Teorema B.1), concluímos que $K_{P,Q}N(\overline{\Omega})$ é relativamente compacto em $C^1[a,b]$. Terminando a prova. ■

A prova do próximo resultado é similar a demonstração acima com as devidas alterações para o espaço $C^1[a,b] \times [0,1]$ com a norma $\|(u,t)\| = \|u\|_{C^1} + |t|$.

Lema 3.9 *Seja $f^* : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^*(\cdot,\cdot,t) : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente Carathéodory em $[a,b] \times \mathbb{R}^2$, para cada $t \in [0,1]$ fixo. Então a aplicação $\tilde{N} : \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow L^1(a,b)$ dada por $\tilde{N}(u,t) = -f^*(\cdot,u(\cdot),u'(\cdot),t)$ é $L-$compacto em $\overline{\Omega} \times [0,1]$.*

Observação 2: Como comentado no início da subseção, todos os resultados acima são válidos para f uma função contínua com as devidas alterações, nesta caso, teremos $\operatorname{dom} L = \{u \in C^2[a,b];\ u(a) = u(b) \text{ e } u'(a) = u'(b)\}$ e $Z = C[a,b]$. A prova é similare.

Observação 3: Os resultados desta subseção também valem para qualquer conjunto Ω aberto e limitado em $C^1[a,b]$.

3.4.2 Cálculo do Grau

Relembrando o problema periódico

$$\begin{cases} -u''(x) &= f(x,u(x),u'(x)), \text{ para } x \in (a,b), \\ u(a) &= u(b), \\ u'(a) &= u'(b), \end{cases}$$

onde $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua ou satisfaz a condição de localmente Carathéodory. O nosso interesse é garantir a existência de solução para tal problema, mas como esta existência de solução depende da f, por exemplo, se $f(x,y,z) = e^x$ este problema periódico não tem solução. Com isso, nesta subseção faremos o cálculo do grau de coincidência crescentando a hipótese que f é uma função limitada, ou seja, nesta subseção consideraremos que existe $D > 0$ tal que

$$|f(x,y,z)| < D, \ \forall (x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2.$$

Pela Propriedade 3.1, se o grau de coincidência desse operador diferencial de segunda ordem for diferente de zero segue o resultado. O próximo resultado auxiliará nesse cálculo.

Lema 3.10 *Suponha que exista $r \in (0,+\infty)$ tal que $f(x,-r,0) > 0$ e $f(x,r,0) < 0$, para todo $x \in [a,b]$. Então*

$$|\deg((L,N),\Omega_1)| = 1,$$

onde $\Omega_1 = \{u \in C^1[a,b];\ |u(x)| < r \ \text{e}\ |u'(x)| < c, \forall x \in [a,b]\}$, sendo c qualquer constante tal que $c \geq (D+r)(b-a)$.

Demonstração: Defina $\tilde{N} : \overline{\Omega_1} \times [0,1] \longrightarrow C[a,b]$ dada por

$$\tilde{N}(u,t) = -tf(\cdot,u(\cdot),u'(\cdot)) + (1-t)u(\cdot).$$

Pelo Lema 3.9, $\tilde{N}$ é uma aplicação $L-$compacta em $\overline{\Omega_1} \times [0,1]$. Verificaremos que $0 \notin (L - \tilde{N}(\cdot,t))(\operatorname{dom} L \cap \partial\Omega_1)$, para todo $t \in [0,1]$. Suponha por contradição que existem $t_1 \in [0,1]$ e algum $u_1 \in \operatorname{dom} L \cap \partial\Omega_1$, tais que

$$u_1''(x) = -t_1 f(x,u_1(x),u_1'(x)) + (1-t_1)u_1(x).$$

Como $[a,b]$ é compacto e $u_1 \in C^1[a,b]$, existe $x_1 \in [a,b]$ tal que $u_1(x_1) = \max\{u_1(x);\, x \in [a,b]\}$. Se $x_1 \in (a,b)$ então $u_1'(x_1) = 0$. Caso contrário, se $x_1 = a$ e lembrando que $u_1(a) = u_1(b)$, segue que $u_1'(a) \leq 0$ e $u_1'(a) = u_1'(b) \geq 0$, então $u_1'(a) = 0$. E similarmente, se $x_1 = b$ então $u_1'(b) = 0$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$u_1'(x) = -t_1 \int_{x_1}^{x} f(s,u_1(s),u_1'(s))\, ds + (1-t_1) \int_{x_1}^{x} u_1(s)\, ds,$$

então

$$\begin{aligned} |u_1'(x)| &\leq t_1 \int_a^b |f(s,u_1(s),u_1'(s))|\, ds + (1-t_1) \int_a^b |u_1(s)|\, ds \\ &< (D+r)(b-a) \leq c, \end{aligned} \tag{3.8}$$

para todo $x \in [a,b]$. Além disso, se $u_1(x_1) = max\,\{u_1(x);\, x \in [a,b]\} = r$, obtemos

$$u_1''(x_1) = -t_1 f(x_1,u_1(x_1),u_1'(x_1)) + (1-t_1)u_1(x_1) = -t_1 f(x_1,r,0) + (1-t_1)r > 0.$$

Se $x_1 \in (a,b)$ então $u_1''(x_1) \leq 0$, contradição. Caso contrário, se $x_1 = a$ então $u_1''(a) > 0$. Pela Fórmula de Taylor,

$$u_1(a+x) = u_1(a) + u_1'(a)x + \frac{u_1''(a)}{2}x^2 + r(x),$$

onde $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{r(x)}{x^2} = 0$. Considerando $x > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que $\frac{u_1''(a)}{2} + \frac{r(x)}{x^2} > 0$, obtemos

$$u_1(a+x) - u_1(a) = x^2\left[\frac{u_1''(a)}{2} + \frac{r(x)}{x^2}\right] > 0,$$

contradição com $x_1 = a$ ser ponto de máximo em $[a,b]$. Similarmente, mostrar-se o caso quando $u_1(x_1) = \min\{u_1(x);\, x \in [a,b]\}$. Pelo Teorema 3.3,

$$\deg((L,N),\Omega_1) = \deg((L,\tilde{N}(\cdot,1)),\Omega_1) = \deg((L,\tilde{N}(\cdot,0)),\Omega_1) = \deg((L,I),\Omega).$$

Assim, basta calcular $\deg((L,I),\Omega)$. Seja $u \in \operatorname{dom} L$ tal que $(L-I)u = 0$, temos

$$\begin{cases} u''(x) = u(x), \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b). \end{cases}.$$

Resolvendo a edo acima, obtemos que $u(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$, para todo $x \in [a,b]$. Das condições periódicas, determinamos as constantes $c_1 = c_2 = 0$, logo $u(x) = 0$, para todo $x \in [a,b]$. Portanto, $\operatorname{Ker}(L-I) = \{0\}$. Da Proposição 3.7, segue que $\operatorname{Ker}(I-M) = \{0\}$, onde $M = P + (\Lambda\pi + K_{P,Q})I$, então, pela Proposição 2.2,

$$|\deg((L,N),\Omega_1)| = |\deg((L,I),\Omega_1)| = |\deg(I-M,\Omega_1,0)| = 1.$$

■

Teorema 3.6 *Sejam α uma subsolução estrita e β uma supersolução estrita do problema* (3.3) *com $\alpha(x) < \beta(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Então*

$$|\deg((L,N),\Omega)| = 1,$$

onde $\Omega = \{u \in C^1[a,b];\ \alpha(x) < u(x) < \beta(x)$ e $|u'(x)| < c, \forall x \in [a,b]\}$, sendo c qualquer constante tal que $c \geq (2D + r + 1)(b-a)$ e $r = \|\alpha\|_C + \|\beta\|_C$.

Demonstração: Para cada $(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2$, definamos

$$h(x,y,z) = \begin{cases} f(x,\beta(x),z), & \text{se} \quad y > \beta(x), \\ f(x,y,z), & \text{se} \quad \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), \\ f(x,\alpha(x),z), & \text{se} \quad y < \alpha(x), \end{cases}$$

e

$$f^*(x,y,z) = \begin{cases} h(x,y,z) - D, & \text{se} \quad y \geq r+1, \\ h(x,y,z) + (r-y)D, & \text{se} \quad r < y < r+1, \\ h(x,y,z), & \text{se} \quad -r \leq y \leq r, \\ h(x,y,z) - (r+y)D, & \text{se} \quad -r-1 < y < -r, \\ h(x,y,z) + D, & \text{se} \quad y \leq -r-1. \end{cases}$$

Definamos $\Omega_1^* = \{u \in C^1[a,b];\ |u(x)| < r+1 \text{ e } |u'(x)| < (2D+r+1)(b-a), \forall x \in [a,b]\}$. Aplicando o Lema 3.10 com $2D$ e $r+1$ no aberto Ω_1^*, temos

$$|\deg((L,N^*),\Omega_1^*)| = 1,$$

onde $N^* : C^1[a,b] \longrightarrow C[a,b]$ é dado por $N^*(u) = -f^*(\cdot,u(\cdot),u'(\cdot))$. Vamos mostrar que se $u \in \Omega_1^*$ é uma solução de $(L-N^*)u = 0$, então $u \in \Omega$. Suponha por contradição que existe $u \in \Omega_1^*$ é uma solução de $Lu = N^*u$ tal que $u(x) \geq \beta(x)$ ou $u(x) \leq \alpha(x)$, para algum $x \in [a,b]$. Se $u(x) \geq \beta(x)$, defina $v_1(x) = u(x) - \beta(x)$, para $x \in [a,b]$. Como $[a,b]$ é compacto e v_1 é uma função contínua, existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $v_1(x_0) = \max\{v_1(x);\ x \in [a,b]\} \geq 0$. Se $x_0 \in (a,b)$ então $v_1'(x_0) = 0$. Caso contrário, se $x_0 = a$ e lembrando que $v_1(a) = v_1(b)$, segue que $v_1'(a) \leq 0$ e $v_1'(a) = v_1'(b) \geq 0$, então $v_1'(a) = 0$. E similarmente, se $x_0 = b$ então $v_1'(b) = 0$. Logo $u'(x_0) = \beta'(x_0)$. Como β é supersolução estrita, temos

$$\begin{aligned}
-v_1''(x_0) &= \beta''(x_0) - u''(x_0) = \beta''(x_0) + f^*(x_0,u(x_0),u'(x_0)) \\
&\leq \beta''(x_0) + h(x_0,u(x_0),u'(x_0)) = \beta''(x_0) + f(x_0,\beta(x_0),u'(x_0)) \\
&= \beta''(x_0) + f(x_0,\beta(x_0),\beta'(x_0)) < 0.
\end{aligned}$$

Se $x_0 \in (a,b)$ então $v_1''(x_0) \leq 0$, contradição. Caso contrário, se $x_0 = a$ então $v_1''(a) > 0$. Pela Fórmula de Taylor,

$$v_1(a+x) = v_1(a) + v_1'(a)x + \frac{v_1''(a)}{2}x^2 + r(x),$$

onde $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{r(x)}{x^2} = 0$. Considerando $x > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que $\frac{v_1''(a)}{2} + \frac{r(x)}{x^2} > 0$, temos

$$v_1(a+x) - v_1(a) = x^2\left[\frac{v_1''(a)}{2} + \frac{r(x)}{x^2}\right] > 0,$$

contradição com $x_0 = a$ ser ponto de máximo de v_1 em $[a,b]$. Se $v_2(x) = \alpha(x) - u(x)$ é similar tomando $x_0 \in [a,b]$ tal que $v_2(x_0) = \min\{v_2(x);\ x \in [a,b]\}$. Note que se $u \in \Omega$ então $N^*(u) = -f^*(\cdot,u(\cdot),u'(\cdot)) = -h(\cdot,u(\cdot),u'(\cdot)) = -f(\cdot,u(\cdot),u'(\cdot))$. Pela Propriedade da Excisão, concluímos a prova

$$|\deg((L,N),\Omega)| = 1.$$

■

Quando a função f do problema (3.3) é uma aplicação contínua que independe da terceira variável, isto é, podemos reescrever $f(x,y,z) = f(x,y)$, para todo $x \in [a,b]$ e $y,z \in \mathbb{R}$, temos um caso mais simples onde não precisamos de limitar da terceira variável. Assim, vale todos os resultados acima com apenas a limitação em $C[a,b]$. Vejamos este caso, considere o problema

$$\left\{\begin{array}{rcl}
-u''(x) &=& f(x,u(x)),\ \text{para todo } x \in [a,b], \\
u(a) &=& u(b), \\
u'(a) &=& u'(b),
\end{array}\right. \tag{3.9}$$

onde $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Sejam α uma subsolução estrita e β uma supersolução estrita desse problema, com $\alpha(x) < \beta(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Tomando $A = \min\{\alpha(x);\, x \in [a,b]\}$ e $B = \max\{\beta(x);\, x \in [a,b]\}$, defina $g : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,B), & \text{se} \quad y > B, \\ f(x,y), & \text{se} \quad A \leq y \leq B, \\ f(x,A), & \text{se} \quad y < A. \end{cases}$$

Observe que existe $D_1 = \sup\{|g(x,y)|;\, x \in [a,b] \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$, pois f é contínua. Defina o conjunto $\Omega_2 = \{u \in C[a,b];\ \alpha(x) < u(x) < \beta(x), \forall x \in [a,b]\}$ e a aplicação $N_2 : \overline{\Omega_2} \longrightarrow C[a,b]$ dada por

$$N_2(u) = -g(\cdot, u(\cdot)).$$

Seguindo similiarmente as demonstrações do Lema 3.10 e do Teorema 3.6, exceto na nescessidade de limitar a derivada, obtemos

$$|\deg((L, N_2), \Omega_2)| = 1.$$

Como $f(\cdot, u(\cdot)) = g(\cdot, u(\cdot))$, para todo $u \in \Omega_2$, segue o resultado

Corolário 3.7 *Sejam α uma subsolução estrita e β uma supersolução estrita do problema* (3.9)*, com $\alpha(x) < \beta(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Então*

$$|\deg((L, N), \Omega_2)| = 1,$$

sendo $\Omega_2 = \{u \in C[a,b];\ \alpha(x) < u(x) < \beta(x), \forall x \in [a,b]\}$ e $N : \overline{\Omega_2} \longrightarrow C[a,b]$ a aplicação dada por $N(u) = -f(\cdot, u(\cdot))$.

Sob as hipóteses desse corolário acima, como o grau de coincidência é diferente de zero, pela Propriedade 3.1, o problema (3.9) tem uma solução $u \in C^2[a,b]$ tal que

$$\alpha(x) < u(x) < \beta(x),$$

para todo $x \in [a,b]$. Assim, apresentamos uma prova do Teorema do Tipo Bolzano que será enunciado no próximo capítulo. Neste caso em particular, a hipótese da função f ser limitada pode ser substituída por apenas f contínua. Em geral, precisaremos de hipóteses adicionais para contornamos isso, estas serão apresentadas durante o desenvolvimento dos próximos capítulos.

Capítulo 4

Um resultado do tipo Ambrosetti-Prodi

No presente capítulo, usaremos a teoria de grau de coincidência para operadores de Fredholm de índice zero $-$ neste caso será o operador diferencial de segunda ordem apresentado anteriormente na Seção 2.4 $-$ no estudo de resultados do tipo Ambrosetti-Prodi para o problema periódico com uma equação diferencial ordinária não linear de segunda ordem. E veremos que no caso do problema periódico com uma equação diferencial ordinária não linear de primeira ordem, não precisamos recorrer a essa teoria do grau. Neste capítulo, quando referimos aos resultados demonstrados na Subseção 2.4.1, já estaremos considerando para o caso que a função f é contínua.

A principal referência utilizada para a elaboração do capítulo foi o trabalho [19], intitulado *"Ambrosetti-Prodi type results in nonlinear boundary value problems"*, de Mawhin, e motivado pelo trabalho [25].

Facilmente conseguimos um resultado do tipo Ambrosetti-Prodi para a simples equação

$$f(y) = s, \tag{4.1}$$

com $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que

$$\lim_{|y| \to +\infty} f(y) = +\infty. \tag{4.2}$$

Pois, dado $M > 0$, existe $A > 0$ tal que $f(y) > M$, para todo $|y| \geq A$. E pelo Teorema de Weierstrass, f atinge o mínimo no intervalo compacto $[-A, A]$, então f atingi o mínimo em $\mathbb{R}$. Portanto, se $s_1 = \inf \{f(y); x \in \mathbb{R}\}$, existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(y_0) = s_1$. Note que (4.1) não tem solução se $s < s_1$ e tem pelo menos um solução se $s = s_1$. Se $s > s_1$, da condição (4.2) obtemos $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, com $y_1 < y_0 < y_2$, tais que $f(y_1) = s$ e $f(y_2) = s$, então (4.1) tem pelo menos duas soluções.

Assim, desenvolveremos um resultado do tipo Ambrosetti-Prodi para um problema periódico com a função f satisfazendo a mesma condição de crescimento. Diferente do caso abordado nos trabalhos [3] e [13], onde a função f satisfaz a condição de cruzamento do primeiro autovalor. Começaremos esse capítulo com uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e depois de segunda ordem.

4.1 EDO de primeira ordem

Consideraremos o problema periódico envolvendo um equação diferencial ordinária não linear de primeira ordem,

$$\begin{cases} u'(x) + f(x, u(x)) = s, \text{ para todo } x \in [a, b], \\ u(a) = u(b), \end{cases} \tag{4.3}$$

onde $s \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que

$$\lim_{|y| \to +\infty} f(x, y) = +\infty, \tag{4.4}$$

uniformemente em $[a, b]$.

Definição 4.1 *Dizemos $u \in C^1[a, b]$ é uma* **solução** *do problema* (4.3) *se satisfaz $u'(x) + f(x, u(x)) = s$, para todo $x \in [a, b]$, e $u(a) = u(b)$.*

Encontraremos algum parâmetro real s_1 tal que o problema (4.3) não tenha solução, tenha pelos menos uma ou pelo menos duas soluções de acordo com $s < s_1$, $s = s_1$ ou $s > s_1$.

No caso autonômo, temos

$$\begin{cases} u'(x) + f(u(x)) = s, \text{ para todo } x \in [a, b], \\ u(a) = u(b), \end{cases} \tag{4.5}$$

onde $s \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(y) \to +\infty$, quando $|y| \to +\infty$. Se u é uma solução deste problema, temos $u'(x) + f(u(x)) = s$, multiplicando ambos lado da equação por $u'(x)$, segue que $|u'(x)|^2 + f(u(x))u'(x) = su'(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Assim,

$$\int_a^b |u'(x)|^2 \, dx + \int_a^b (F(u(x)))' \, dx = \int_a^b su'(x) = s\,(u(b) - u(a)) = 0,$$

onde $F(y) = \displaystyle\int_a^y f(t)\, dt$. Como $u(a) = u(b)$, obtemos $\displaystyle\int_a^b (F(u(x)))' \, dt = 0$, onde segue que $\|u'\|_{L^2} = 0$. Logo, $u'(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$, então u é contante. Assim, como anteriormente, basta tomar $s_1 = \inf\{f(y);\, x \in \mathbb{R}\}$.

A seguir apresentaremos algumas definições e resultados que auxilaram no caso não autonômo.

Definição 4.2 *Seja $f : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que as funções $\alpha, \beta \in C^1[a, b]$ são* **subsolução** *e* **supersolução** *do problema* (4.3), *respectivamente, se satisfazem*

$$\begin{cases} \alpha'(x) + f(x, \alpha(x)) \geq s \\ \alpha(a) = \alpha(b) \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} \beta'(x) + f(x, \beta(x)) \leq s \\ \beta(a) = \beta(b) \end{cases}$$

para todo $x \in [a, b]$. No caso que as desigualdades forem estritas, dizemos que α é **subsolução estrita** *e β é uma* **supersolução estrita** *do problema* (4.3).

Teorema 4.1 (Teorema Tipo Bolzano) *Sejam $\alpha, \beta \in C^1[a,b]$ tais que α uma subsolução (resp. supersolução) e β uma supersolução (resp. subsolução) do problema* (4.3)*, com $\alpha(x) \leq \beta(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Então o problema* (4.3) *tem uma solução u tal que*

$$\alpha(x) \leq u(x) \leq \beta(x),$$

para todo $x \in [a,b]$. Além disso, se α e β são estritas, com $\alpha(x) < \beta(x)$, para todo $x \in [a,b]$, então

$$\alpha(x) < u(x) < \beta(x),$$

para todo $x \in [a,b]$.

Demonstração: A prova desse resultado é uma aplicação do Grau Topológico, que o leitor poderá encontrar no trabalho [22, Corolário 2.3]. ∎

Teorema 4.2 *Seja $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfaz* (4.4)*, então existe $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que o problema* (4.3) *não tem solução se $s < s_1$, tem pelo menos um solução se $s = s_1$ e tem pelo menos duas soluções se $s > s_1$.*

Demonstração: Defina $S_j = \{s \in \mathbb{R};$ (4.3) tem pelos menos j soluções$\}$, com $j \geq 1$.

(a) $S_1 \neq \emptyset$.

Tome $s^* > \max\{f(x,0); x \in [a,b]\}$. Pela condição (4.4), escolhemos $r_-^* < 0$ tal que $f(x, r_-^*) > s^*$, para todo $x \in [a,b]$. Logo, $\alpha(x) = r_-^*$ é uma subsolução estrita e $\beta(x) = 0$ é uma supersolução estrita do problema (4.3), quando $s = s^*$. Pelo Teorema 4.1, segue que $s^* \in S_1$.

(b) Se $\tilde{s} \in S_1$ e $t > \tilde{s}$ então $t \in S_2$.

Seja $\tilde{u}$ uma solução do problema (4.3), quando $s = \tilde{s}$, e seja $t > \tilde{s}$, então $\tilde{u}$ é uma supersolução estrita do problema (4.3), quando $s = t$. Pela condição (4.4), escolhendo as constantes $r_- < \min\{\tilde{u}(x); x \in [a,b]\}$ e $r_+ > \max\{\tilde{u}(x); x \in [a,b]\}$ tais que

$$f(x, r_-) > t \qquad \text{e} \qquad f(x, r_+) > t,$$

para todo $x \in [a,b]$, temos $\underline{u}(x) = r_-$ e $\overline{u}(x) = r_+$ são subsoluções de estritas do problema (4.3), quando $s = t$. Pelo Teorema 4.1, existe $u, v \in C^1[a,b]$ duas soluções do problema (4.3), quando $s = t$, tais que

$$r_- < u(x) < \tilde{u}(x) < v(x) < r_+,$$

para todo $x \in [a,b]$. Logo, $t \in S_2$.

(c) $s_1 = \inf S_1$ é finito e $(s_1, +\infty) \subset S_2$.

Como $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz a condição (4.4), tome $A = \inf\{f(x,y); (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}\}$. Se $u \in C^1[a,b]$ é uma solução do problema (4.3), temos

$$\begin{aligned}(b-a)A &\leq \int_a^b f(x,u(x))\,dx = \int_a^b f(x,u(x))\,dx + (u(b) - u(a)) \\ &= \int_a^b (f(x,u(x)) + u'(x))\,dx = \int_a^b s\,dx = s(b-a),\end{aligned}$$

donde segue que $A \leq s$. Então o problema (4.3) não tem solução quando $s < A$. Portanto, $s_1 = \inf S_1$ é finito e, pelo item (b), $(s_1, +\infty) \subset S_2$.

(d) Para cada $s_2 > s_1$, as possíveis soluções do problema (4.3), quando $s \leq s_2$, são limitado a priori em $C[a, b]$.

Seja $u \in C^1[a, b]$ uma possível solução do problema (4.3), para algum $s \leq s_2$, então existe um $x_0 \in [a, b]$ tal que $u(x_0) = \max\{u(x);\ x \in [a, b]\}$. Pela condição (4.4), escolha $r_2 > 0$ tal que $f(x, y) > s_2$, para todo $x \in [a, b]$ e todo $|y| \geq r_2$. Se $x_0 \in (a, b)$, temos

$$0 = u'(x_0) = s - f(x_0, u(x_0)) \leq s_2 - f(x_0, u(x_0)),$$

daí, $f(x_0, u(x_0)) \leq s_2$. Pela escolha de r_2, obtemos $u(x_0) \leq |u(x_0)| < r_2$. Se $x_0 = a$, como $u(a) = u(b)$, temos $u'(a) \leq 0$ e $u'(b) \geq 0$, assim,

$$0 \leq u'(b) = s - f(b, (b)) \leq s_2 - f(b, u(b)),$$

assim, $f(b, u(b)) \leq s_2$. Então $u(a) = u(b) \leq |u(b)| < r_2$. Para $x_0 = b$ o caso é análogo. E similarmente, concluímos para $\min\{u(x);\ x \in [a, b]\} > -r_2$. Portanto, $-r_2 < u(x) < r_2$, para todo $x \in [a, b]$. Consequentemente, $\|u\|_C < r_2$.

(e) $s_1 \in S_1$

Consideremos uma sequência decrescente $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $(s_1, +\infty)$ tal que $t_n \longrightarrow s_1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja u_n uma solução do problema (4.3), quando $s = t_n$. Pelo item (d), segue que $\|u_n\|_C < r_2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|u_n(y) - u_n(x)| = \left|\int_x^y u_n'(t)\ dt\right| = \left|\int_x^y (t_n - f(t, u_n(t)))\, dt\right| \leq (R + D)|y - x|,$$

para todo $x, y \in [a, b]$, onde $D = \max\{|f(x, y)|; (x, y) \in [a, b] \times [-r_2, r_2]\}$ e R é tal que $|t_n| < R$, para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que a sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que convergente uniformemente para algum $u \in C^1[a, b]$. Lembrando que

$$\begin{cases} u_{n_k}'(x) + f(x, u_{n_k}(x)) = t_{n_k}, \text{ para } x \in (a, b), \\ u_{n_k}(a) = u_{n_k}(b), \end{cases}$$

e f é uma função contínua, passando o limite segue que

$$\begin{cases} u'(x) + f(x, u(x)) = s_1, \text{ para } x \in (a, b), \\ u(a) = u(b). \end{cases}$$

Portanto, $s_1 \in S_1$. ■

Se substituímos a condição (4.4) do problema (4.3) por

$$\lim_{|y|\to+\infty} f(x, y) = -\infty,$$

uniformemente em $[a, b]$, também existe $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que o problema (4.3) não tem solução se $s > s_1$, tenha pelo menos um solução se $s = s_1$ e pelo menos duas soluções se $s < s_1$. A prova é análoga ao Teorema 4.2.

Observe também que o problema (4.3) pode admitir infinitas soluções, por exemplo,

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), \text{ para } x \in (-1, 1), \\ u(-1) = u(1), \end{cases}$$

onde $f : [-1, 1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} -1 - y, & \text{se } y < -1, \\ 0, & \text{se } |y| \leq 1, \\ y - 1, & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

Temos $u(x) = \text{cte}$, para $|x| \leq 1$, é uma solução.

4.2 EDO de segunda ordem

Nesta seção, veremos o problema periódico para uma equação diferencial de segunda ordem, onde começaremos com o caso mais simples, quando a equação diferencial ordinária independe da primeira derivada, e depois veremos o mais geral, com o envolvimento da primeira derivada. Considere o problema

$$\begin{cases} u''(x) + f(x, u(x)) = s, \text{ para todo } x \in (a, b), \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b), \end{cases} \tag{4.6}$$

onde $s \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua tal que

$$\lim_{|y| \to +\infty} f(x, y) = +\infty, \tag{4.7}$$

uniformemente em $[a, b]$.

Definição 4.3 *Dizemos $u \in C^2[a, b]$ é uma* **solução** *do problema* (4.6) *se satisfaz $u''(x) + f(x, u(x)) = s$, para todo $x \in (a, b)$, com $u(a) = u(b)$ e $u'(a) = u'(b)$.*

Vejamos que, se o problema (4.6) admite uma solução então esta é limitada a priori em $C^1[a, b]$.

Lema 4.1 *Seja $\tau \in \mathbb{R}$ qualquer, o conjunto de todas as possíveis soluções do problema* (4.6)*, quando $s < \tau$, é limitado a priori em $C^1[a, b]$.*

Demonstração: Seja u uma possível solução do problema (4.6), para algum $s \leq \tau$. Como $u'(b) = u'(a)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, u(x))\, dx &= \frac{1}{b-a} \left[(u'(b) - u'(a)) + \int_a^b f(x, u(x))\, dx \right] \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (u''(x) + f(x, u(x)))\, dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b s\, dx = s \leq \tau. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Como $f : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz a condição (4.7), tome $A = \inf \{ f(x, y);\ (x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \}$, então $A \leq \tau$. Defina v a função constante dada pela média da solução u, isto é,

$$v(y) = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(x)\ dx,$$

para todo $y \in [a, b]$. Considerando $w := v - u$, então

$$\int_a^b w(x)\ dx = 0.$$

Assim, usando integração por parte, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b (u'(x))^2 \, dx &= (u'(b)u(b) - u'(a)u(a)) - \int_a^b u(x)u''(x)\, dx \\
&= -\int_a^b u(x)s\, dx + \int_a^b u(x)f(x,u(x))\, dx \\
&= -s\int_a^b u(x)\, dx + \int_a^b v(x)f(x,u(x))\, dx + \int_a^b w(x)f(x,u(x))\, dx \\
&= \int_a^b u(x)\, dx \left[-s + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,u(x))\, dx\right] + \int_a^b w(x)f(x,u(x))\, dx \\
&= \int_a^b w(x)f(x,u(x))\, dx = \int_a^b w(x)f(x,u(x))\, dx - A\int_a^b w(x)\, dx \\
&= \int_a^b (f(x,u(x)) - A)\, w(x)\, dx \leq \max_{x\in[a,b]} |w(x)| \int_a^b (f(x,u(x)) - A)\ dx \\
&= (b-a)\max_{x\in[a,b]} |w(x)|\, (s-A) \leq (b-a)\max_{x\in[a,b]} |w(x)|\, (\tau - A)\,.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Holder,

$$\begin{aligned}
|w(x)| &= |u(x) - v(x)| = \left| u(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b u(y)\, dy \right| \\
&= \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b (u(x) - u(y))\, dy\right| = \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b \int_y^x u'(t)\, dt\, dy\right| \\
&\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \int_y^x |u'(t)|\ dt\, dy \leq \|u'\|_{L^2},
\end{aligned}$$

para todo $x \in [a,b]$. Logo, $\|u'\|_{L^2} \leq (b-a)(\tau - A) := r_1$. Além disso, da condição (4.7), escolha $r_2 > 0$ tal que $f(x,y) > \tau$, para todo $x \in [a,b]$ e todo $|y| \geq r_2$. Da desigualdade (4.8), existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $|u(x_0)| < r_2$. Portanto, usando a Desigualdade de Holder, temos

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \left| u(x_0) + \int_{x_0}^x u'(t)\, dt \right| \leq |u(x_0)| + \int_a^b |u'(t)|\, dt \\
&< r_2 + \|u'\|_{L^2}\sqrt{b-a} \leq r_2 + r_1\sqrt{b-a} := R(\tau).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Weierstrass e das condições periódicas, existe $x_1 \in [a,b]$ tal que $u'(x_1) = 0$. Assim, como u é solução do problema (4.6), temos

$$u'(x) = \int_{x_1}^x (s - f(t,u(t)))\, dt \leq \int_{x_1}^x (\tau - f(t,u(t)))\, dt.$$

Então, pela equação (4.8),

$$\begin{aligned}
|u'(x)| &\leq \int_a^b |\tau - f(x,u(x))|\, dx = \int_a^b |\tau - A + A - f(x,u(x))|\, dx \\
&\leq (\tau - A)(b-a) + \int_a^b (f(x,u(x)) - A)\, dx \\
&\leq 2(\tau - A)(b-a).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u\|_{C^1} < R(\tau) + 2(\tau - A)(b - a).$$

■

Estamos interessados em encontramos algum parâmetro real s_1 tal que o problema (4.6) não tenha solução, tenha pelos menos uma ou pelo menos duas soluções de acordo com $s < s_1$, $s = s_1$ ou $s > s_1$.

Vejamos a seguinte definição.

Definição 4.4 *Seja $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que as funções $\alpha, \beta \in C^2[a,b]$ são* **subsolução** *e* **supersolução** *do problema* (4.6)*, respectivamente, se satisfazem*

$$\begin{cases} \alpha''(x) + f(x, \alpha(x)) \geq s \\ \alpha(a) = \alpha(b), \\ \alpha'(a) = \alpha'(b), \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} \beta''(x) + f(x, \beta(x)) \leq s \\ \beta(a) = \beta(b), \\ \beta'(a) = \beta'(b), \end{cases}$$

para todo $x \in (a,b)$. No caso que as desigualdades acima forem estritas, dizemos que α é **subsolução estrita** *e β é uma* **supersolução estrita** *do problema* (4.6).

Vejamos o Teorema do Tipo Bolzano para o problema (4.6).

Teorema 4.3 (Teorema Tipo Bolzano) *Sejam $\alpha, \beta \in C^2[a,b]$ tais que α é uma subsolução e β é uma supersolução do problema* (4.6)*, com $\alpha(x) \leq \beta(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Então o problema* (4.6) *tem uma solução u tal que*

$$\alpha(x) \leq u(x) \leq \beta(x),$$

para todo $x \in [a,b]$. Além disso, α e β são estritas, com $\alpha(x) < \beta(x)$, para todo $x \in [a,b]$, então

$$\alpha(x) < u(x) < \beta(x),$$

para todo $x \in [a,b]$.

Demonstração: O leitor poderá encontra a prova desse resultado em [22, Cololário 3.1].

■

Lembrando que no final do Capítulo 2 também apresentamos uma prova desse resultado. O leitor também poderá encontrar a demonstração de tal resultado em [7, Teorema 2.1], neste livro se encontrar vários resultado e exemplo para problema periódico utilizado o método de supersolução e subsolução. Podemos observar que este teorema é diferente do Teorema 4.1, onde aqui temos a hipótese de ordenadação da subsolução ser menor que a supersolução, pois caso contrário não podemos garantir a existência de solução do problema (4.6) nessa ordenação.

Teorema 4.4 *Seja $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfaz (4.7), então existe $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que o problema (4.6) não tem solução se $s < s_1$, tem pelo menos um solução se $s = s_1$ e tem pelo menos duas soluções se $s > s_1$.*

Demonstração: Defina $S_j = \{s \in \mathbb{R};\ (4.6) \text{ tem pelos menos } j \text{ soluções}\}$, com $j \geq 1$.

(a) $S_1 \neq \emptyset$.

(b) Se $\tilde{s} \in S_1$ e $t > \tilde{s}$ então $t \in S_1$.

(c) $s_1 = \inf S_1$ é finito e $(s_1, +\infty) \subset S_1$.

(d) Para cada $s_2 > s_1$, o conjunto de todos as possíveis soluções de (4.6), com $s \leq s_2$ é limitado a priori em $C[a,b]$.

A prova dos itens (a) $-$ (c) são similares à demonstração do Teorema 4.2, exceto em uma parte do item (b), onde aplicaremos o Teorema 4.3 e garantimos a existência de apenas uma solução entre a subsolução estrita e supersolução estrita do problema (4.6), quando $s = t$. O item (d) segue do Lema 4.1, com $\tau = s_2$.

(e) Para cada $s \leq s_2$ e cada $R > R(s_2)$ temos $\deg((L, N_s), B(R)) = 0$, onde $R(s_2)$ foi definido na demonstração do Lema 4.1.

Considere $\operatorname{dom} L = \{u \in C^2[a,b] : u(a) = u(b) \text{ e } u'(a) = u'(b)\} \subset C^1[a,b]$ e o operador diferencial de segunda ordem $L : \operatorname{dom} L \longrightarrow C[a,b]$ dada por $Lu = u''$. Denotamos $B(R) := \{u \in C[a,b];\ \|u\|_C < R\}$. Para cada $s \in \mathbb{R}$, defina $N_s : B(R) \longrightarrow C[a,b]$ por $N_s(u) = s - f(\cdot, u(\cdot))$. Se $s_0 < s_1$, pela Propriedade 3.1 e pelo item (c), segue que $\deg((L, N_{s_0}), B(R)) = 0$. Seja $s_3 \in (s_1, s_2)$, pelo Lema 3.9, $\tilde{N} : \overline{B(R)} \times [0,1] \longrightarrow C[a,b]$ dado por $\tilde{N}(u,t) = ts_3 + (1-t)s_0 - f(\cdot, u(\cdot))$ é uma aplicação $L-$compacta em $\overline{B(R)} \times [0,1]$. Pelo Lema 4.1, $0 \notin (L - \tilde{N}(\cdot, t))(\operatorname{dom} L \cap \partial B(R))$, para todo $t \in [0,1]$, então segue do Teorema 3.3

$$\deg((L, N_{s_3}), B(R)) = \deg((L, N_{s_0}), B(R)) = 0.$$

Portanto,

$$\deg((L, N_s), B(R)) = 0,$$

para todo $s \leq s_2$.

(f) $(s_1, +\infty) \subset S_2$

Seja $t \in (s_1, +\infty)$. Sejam $s_2 \in (s_1, t)$ e u_2 uma solução do problema (4.6), quando $s = s_2$. Então u_2 é uma supersolução estrita do problema (4.6), quando $s = t$. Pela condição (4.7), escolhendo $r < \min\{u_2(x);\ x \in [a,b]\}$ tal que $f(x,r) > t$, para todo $x \in [a,b]$, segue que $v(x) = r$ é uma subsolução estrita do problema (4.6), quando $s = t$. Pelo Teorema 4.3, existe uma $u \in C^2[a,b]$ solução o problema (4.6), quando $s = t$, tal que $r < u(x) < u_2(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Consideramos $\Omega = \{u \in C^1[a,b];\ r < u(x) < u_2(x), \forall x \in [a,b]\}$, pelo Corolário 3.7,

$$|\deg((L, N_t), \Omega)| = 1.$$

Tomando $R > \max\{|r|, R(t), \|u_2\|_C\}$. Pela Propriedade 3.3,

$$\begin{aligned} \left|\deg\left((L, N_t), B(R)\backslash\overline{\Omega}\right)\right| &= \left|\deg\left((L, N_t), B(R)\right) - \deg\left((L, N_t), \overline{\Omega}\right)\right| \\ &= \left|\deg\left((L, N_t), \overline{\Omega}\right)\right| = 1. \end{aligned}$$

Pela Propriedade 3.1, o problema (4.6), quando $s = t$, tem uma segunda solução em $B(R)\backslash\overline{\Omega}$. Portanto, $t \in S_2$.

(g) $s_1 \in S_1$

Considere uma sequência decrescente $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $(s_1, +\infty)$ tal que $t_n \longrightarrow s_1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $u_n \in C^2[a,b]$ uma solução do problema (4.6), quando $s = t_n$. Pelo Lema 4.1, segue que $\|u_n\|_{C^1} < R(t_1) + 2(t_1 - A)(b - a)$. Observe que

$$|u_n(y) - u_n(x)| = \left|\int_x^y u_n'(t)\,dt\right| \leq \left|\int_x^y |u_n'(t)|\,dt\right| \leq 2(t_1 - A)(b - a)|x - y|,$$

e

$$|u_n'(y) - u_n'(x)| = \left|\int_x^y u_n''(t)\,dt\right| = \left|\int_x^y (t_n - f(x, u_n(x)))\,dt\right| \leq (R' + D)|x - y|,$$

onde R' é tal que $|t_n| < R'$, para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que a sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e D denota $\max\{|f(x,y)|; x \in [a,b] \text{ e } y \in [-R(t_1), R(t_1)]\}$. Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que convergente para algum u_0 em $C^1[a,b]$. Lembrando que

$$\begin{cases} u_{n_k}''(x) + f(x, u_{n_k}(x)) = t_{n_k}, \\ u_{n_k}(a) = u_{n_k}(b), \\ u_{n_k}'(a) = u_{n_k}'(b). \end{cases}$$

Pela Proposição 3.7,

$$u_{n_k} = M(t_{n_k}, u_{n_k}),$$

onde $M : \overline{\Omega} \longrightarrow C^2[a,b]$ é a aplicação definida por $M = P + (\Lambda\pi + K_{P,Q})N_s$, com $\Lambda : \operatorname{Coker} L \longrightarrow \operatorname{Ker} L$ é qualquer isomorfismo que preserva a orientação e as demais aplicações foram apresentadas na Seção 2.4. Fazendo $k \to \infty$, como M é uma aplicação contínua e da unicidade do limite, segue que $u_0 = M(s_1, u_0)$. Novamente pela Proposição 3.7, temos

$$\begin{cases} u_0''(x) + f(x, u_0(x)) = s_1, \\ u_0(a) = u_0(b), \\ u_0'(a) = u_0'(b). \end{cases}$$

Portanto, $s_1 \in S_1$. ■

Se a condição (4.7) do problema (4.6) for substituida por

$$\lim_{|y|\longrightarrow+\infty} f(x,y) = -\infty,$$

uniformemente em $[a,b]$. Analogamente a demonstração do Teorema 4.4, encontramos $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que o novo problema (4.6) não tem solução se $s > s_1$, tem pelo menos um solução se $s = s_1$ e tem pelo menos duas soluções se $s < s_1$.

Agora, veremos que no caso mais geral, quando a equação diferencial ordinária do problema também envolver a primeira derivada, precisaremos de hipóteses adicionais para encontramos um resultado do tipo Ambrosetti-Prodi para este problema periódico. Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} u''(x) + f(x,u(x),u'(x)) = s, \text{ para } x \in (a,b), \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b), \end{cases} \tag{4.9}$$

onde $s \in \mathbb{R}$ e $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável com respeito as segunda e terceira coordenadas. Suponha também que exista uma função crescente $c : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ tal que

$$|f(x,y,z)| \leq c\left(|y|\right)\left(1 + |z|^2\right), \tag{4.10}$$

para todo $x \in [a,b]$ e para todo $y, z \in \mathbb{R}$. Além disso, suponha que exista uma função contínua $g : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$f(x,y,z) \geq g(x,y), \tag{4.11}$$

para todo $x \in [a,b]$ e para todo $y, z \in \mathbb{R}$, e

$$\lim_{|y|\to\infty} g(x,y) = +\infty, \tag{4.12}$$

uniformemente em $[a,b]$.

Esta última hipótese é uma condição mais fraca do problema clássico do tipo Ambrosetti-Prodi, feito nos trabalhos [3] e [13] para os problemas de Dirichlet e Neumann, quando existe o cruzamento dos autovalores, isto é,

$$\lim_{y\to-\infty} \sup \frac{g(x,y)}{y} < \lambda_1 < \lim_{y\to+\infty} \inf \frac{g(x,y)}{y},$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador diferencial de segunda ordem $L : \operatorname{dom} L \subset C^1[a,b] \longrightarrow C[a,b]$ dada por

$$Lu = u''.$$

Definição 4.5 *Dizemos $u \in C^2[a,b]$ é uma* **solução** *do problema* (4.9) *se satisfaz $u''(x) + f(x,u(x),u'(x)) = s$, para todo $x \in (a,b)$, com $u(a) = u(b)$ e $u'(a) = u'(b)$.*

Vejamos que, se o problema (4.9) admite uma solução, então esta é limitada a priori em $C^1[a,b]$.

Lema 4.2 *Seja $\tau \in \mathbb{R}$ qualquer, todas as possíveis soluções do problema* (4.9), *quando $s \leq \tau$, é limitado a priori em $C^1[a,b]$.*

Demonstração: Seja u uma possível solução do problema (4.9), para algum $s \leq \tau$. Similar a prova do Lema 4.1, encontramos

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx = s \leq \tau. \tag{4.13}$$

Como $g : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz a condição (4.12), tome $A = \inf\{g(x,y);\ (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}\}$, e juntamente com a condição (4.11), temos $A \leq \tau$. Similiarmente a prova do Lema 4.1, também obtemos

$$\|u'\|_{L^2} \leq (b-a)(\tau - A) := r_1.$$

Além disso, da condição (4.12), escolhendo $r_2 > 0$ tal que $g(x,y) > \tau$, para todo $x \in [a,b]$ e todo $|y| \geq r_2$. Da condição (4.11), segue que $f(x,y,z) > \tau$, para todo $x \in [a,b]$, $z \in \mathbb{R}$ e $|y| \geq r_2$. Da desigualdade (4.13), existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $|u(x_0)| < r_2$. Portanto, usando a Desigualdade de Holder, temos

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| u(x_0) + \int_{x_0}^x u'(t)\,dt \right| \leq |u(x_0)| + \int_a^b |u'(t)|\,dt \\ &< r_2 + \|u'\|_{L^2}\sqrt{b-a} \leq r_2 + r_1\sqrt{b-a}, \end{aligned}$$

para todo $x \in [a,b]$. E similarmente a demonstração do Lema 4.1, temos

$$|u'(x)| \leq 2(\tau - A)(b-a),$$

para todo $x \in [a,b]$. Portanto,

$$\|u\|_{C^1} < r_2 + r_1\sqrt{b-a} + 2(\tau - A)(b-a) := R(\tau).$$

■

Como feito anteriormente, estamos interessados em encontramos algum parâmetro real s_1 tal que o problema (4.9) não tenha solução, tenha pelos menos uma ou pelo menos duas soluções de acordo com $s < s_1$, $s = s_1$ ou $s > s_1$.

Relembrando a seguinte definição.

Definição 4.6 *Seja $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que as funções $\alpha, \beta \in C^2[a,b]$ são* **subsolução** *e* **supersolução** *do problema* (4.9), *respectivamente, se satisfazem*

$$\begin{cases} \alpha''(x) + f(x,\alpha(x),\alpha'(x)) \geq s \\ \alpha(a) = \alpha(b), \\ \alpha'(a) = \alpha'(b), \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} \beta''(x) + f(x,\beta(x),\beta'(x)) \leq s \\ \beta(a) = \beta(b), \\ \beta'(a) = \beta'(b), \end{cases}$$

para todo $x \in (a,b)$. No caso que as desigualdades acima forem estritas, dizemos que α é **subsolução estrita** *e β é uma* **supersolução estrita** *do problema* (4.9).

O problema (4.9) também tem um resultado igual ao Teorema Tipo Bolzano, porém neste caso precisaremos das condições de diferenciabilidade da função f e de satisfazer (4.10).

Teorema 4.5 *Seja $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável com respeito à segunda e terceira coordenadas. Suponha que exista uma função crescente $c : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ tal que*

$$|f(x,y,z)| \leq c\left(|y|\right)\left(1+|z|^2\right),$$

para todo $x \in [a,b]$ e para todo $y,z \in \mathbb{R}$. Sejam $\alpha, \beta \in C^2[a,b]$ tais que α é uma subsolução e β é uma supersolução do problema (4.9), *com $\alpha(x) \leq \beta(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Então o problema* (4.9) *admite uma solução u tal que*

$$\alpha(x) \leq u(x) \leq \beta(x),$$

para todo $x \in [a,b]$. Além disso, α e β são estritas, com $\alpha(x) < \beta(x)$, para todo $x \in [a,b]$, então

$$\alpha(x) < u(x) < \beta(x),$$

para todo $x \in [a,b]$.

Demonstração: O leitor poderá encontrar esse resultado em [16, Lema 4]. ∎

O mesmo resultado acima é válido para os problemas de Dirichlet e Neumann, que se encontra em [2, Teorema 4].

Teorema 4.6 *Seja $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, diferenciável com respeito as segunda e terceira coordenadas e satisfaz as condições* (4.10) $-$ (4.12) *acima, então existe $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que o problema* (4.9) *não tem solução se $s < s_1$, tem pelo menos um solução se $s = s_1$ e pelo menos duas soluções se $s > s_1$.*

Demonstração: Defina $S_j = \{s \in \mathbb{R};\ (4.9) \text{ tem pelos menos } j \text{ soluções}\}$, com $j \geq 1$.

(a) $S_1 \neq \emptyset$.

Tome $s^* > \max\{f(x,0,0);\ x \in [a,b]\}$. Temos que $\beta(x) = 0$ é uma supersolução estrita do problema (4.9), quando $s = s^*$. Pela condição (4.12), escolhendo $r_-^* < 0$ tal que $g(x, r_-^*) > s^*$, para todo $x \in [a,b]$. Assim, pela condição (4.11), segue que $f(x, r_-^*, 0) \geq g(x, r_-^*) > s^*$, para todo $x \in [a,b]$. Logo, $\alpha(x) = r_-^*$ é uma subsolução estrita do problema (4.9), quando $s = s^*$. Pelo Teorema 4.5, segue que $s^* \in S_1$.

(b) Se $\tilde{s} \in S_1$ e $t > \tilde{s}$ então $t \in S_1$.

Seja $\tilde{u}$ uma solução do problema (4.9), quando $s = \tilde{s}$, e seja $t > \tilde{s}$, então $\tilde{u}$ é uma supersolução estrita do problema (4.9), quando $s = t$. Pela condição (4.12), escolhendo a constante $r_- < \min\{\tilde{u}(x);\ x \in [a,b]\}$ tal que

$$g(x, r_-) > t,$$

para todo $x \in [a,b]$. Assim, pela condição (4.11), segue que $f(x, r_-, 0) \geq g(x, r_-) > t$, para todo $x \in [a,b]$. Então $\alpha(x) = r_-$ é subsolução estrita do problema (4.9), quando $s = t$. Pelo Teorema 4.5, segue que $t \in S_1$.

(c) $s_1 = \inf S_1$ é finito e $(s_1, +\infty) \subset S_1$.

Como mostrado anteriormente, sabemos que $f(x, y, z) \geq A$, para todo $x \in [a, b]$ e para todo $x, y \in \mathbb{R}$, lembrando que $A = \inf\{g(x, y);\ (x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}\}$. Se $u \in C^2[a, b]$ é uma solução do problema (4.9), temos

$$(b - a)A \quad \leq \quad \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) = s(b - a),$$

donde segue que $A \leq s$. Então o problema (4.9) não tem solução quando $s < A$. Portanto, $s_1 = \inf S_1$ é finito e, pelo item (b), $(s_1, +\infty) \subset S_1$.

(d) Para cada $s_2 > s_1$, o conjunto de todos as possíveis soluções de (4.9), com $s \leq s_2$ é limitado a priori em $C^1[a, b]$.

(e) $s_1 \in S_1$.

(f) Para cada $s \leq s_2$ e cada $R > R(s_2)$ temos $\deg((L, N_s), B(R)) = 0$, onde $R(s_2)$ foi definido na demonstração do Lema 4.2, $B(R) := \{u \in C^1[a, b];\ \|u\|_{C^1} < R\}$ e $N_s : B(R) \longrightarrow C[a, b]$ é a aplicação dado por $N_s(u) = s - f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot))$.

O item (d) segue diretamente do Lema 4.2, tomado $\tau = s_2$. A prova dos itens (e) e (f) é análoga ao do Teorema 4.4.

(g) $(s_1, +\infty) \subset S_2$.

Seja $t \in (s_1, +\infty)$. Sejam $s_2 \in (s_1, t)$ e u_2 uma solução do problema (4.9), quando $s = s_2$. Então u_2 é uma supersolução estrita do problema (4.9), quando $s = t$. Pela condição (4.12), escolhendo $r < \min\{u_2(x);\ x \in [a, b]\}$ tal que $g(x, r) > t$, pela condição (4.11), temos $f(x, r, 0) \geq t$, para todo $x \in [a, b]$. Então $\alpha(x) = r$ é uma subsolução estrita do problema (4.9), quando $s = t$. Pelo Teorema 4.5, existe $v \in C^2[a, b]$ solução do problema (4.9), quando $s = t$, tal que $r < v(x) < u_2(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Consideramos

$$\Omega = \{u \in C^1[a, b];\ r < u(x) < u_2(x) \text{ e } |u'(x)| \leq C_t, \forall x \in [a, b]\},$$

onde $C_t = 2(t - A)(b - a)$. Para cada $(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2$, definamos

$$h(x, y, z) = \begin{cases} f(x, u_2(x), z), & \text{se} \quad y > u_2(x), \\ f(x, y, z), & \text{se} \quad r \leq y \leq u_2(x), \\ f(x, r, z), & \text{se} \quad y < r, \end{cases}$$

e

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} h(x, y, C_t), & \text{se} \quad z > C_t, \\ h(x, y, z), & \text{se} \quad |z| \leq C_t, \\ h(x, y, -C_t), & \text{se} \quad z < -C_t. \end{cases}$$

Observe que a função $f^* : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação limitada, assim, tomado $D = \max\{|f^*(x, y, z)|;\ x \in [a, b] \text{ e } y, z \in \mathbb{R}\}$, pelo Teorema 3.6,

$$|\deg((L, N_t^*), \Omega^*)| = 1,$$

onde $\Omega^* = \{u \in C^1[a, b]; r < u(x) < u_2(x) \text{ e } |u'(x)| < c, \forall x \in [a, b]\}$, com c é qualquer constante tal que $c \geq (2D + 2|t| + |r| + \|u_2\|_C + 1)(b - a)$, e a aplicação

$N_t^* : \overline{\Omega^*} \longrightarrow C[a,b]$ é dada por $N_t^*(u) = t - f^*(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot))$. Daí, juntamente com o Lema 4.2 e a Propriedade 3.2, segue que

$$|\deg((L, N_t), \Omega)| = 1.$$

Tomando $R > \max\{|r| + C_t, R(t), \|u_2\|_C + C_t\}$. Pela Propriedade 3.3,

$$\begin{aligned} \left|\deg\left((L, N_t), B(R)\backslash\overline{\Omega}\right)\right| &= \left|\deg\left((L, N_t), B(R)\right) - \deg\left((L, N_t), \overline{\Omega}\right)\right| \\ &= \left|\deg\left((L, N_t), \overline{\Omega}\right)\right| = 1. \end{aligned}$$

Pela Propriedade 3.1, existe $u \in B(R)\backslash\overline{\Omega}$ solução do problema (4.9), quando $s = t$. Portanto, $t \in S_2$. ■

Capítulo 5

Problema periódico com $\varphi \gneq 0$

No presente capítulo, motivado pelo trabalho [25], intitulado *"A Neumann problem of Ambrosetti-Prodi type"*, De Paiva e Presoto, analisaremos o problema periódico no caso mais geral, envolvendo qualquer função contínua não negativa e não nula φ multiplicando o parâmetro s. Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} u''(x) + f(x, u(x), u'(x)) = s\varphi(x), \text{ para todo } x \in [a, b], \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b), \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C[a, b]\backslash\{0\}$ tal que $\varphi(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, e $f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e continuamente diferenciável com respeito às variáveis y e z. Suponha que exista uma função crescente $c : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ satisfazendo

$$|f(x, y, z)| \leq c(|y|)\left(1 + z^2\right), \forall x \in [a, b], \forall y, z \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

$$|f_y(x, y, z)| \leq c(|y|)\left(1 + z^2\right), \forall x \in [a, b], \forall y, z \in \mathbb{R}, \tag{5.3}$$

onde f_y denota derivada da função f com respeito a y, e

$$|f(x, y, z)| \leq c(y^+)\left(1 + |y| + |z|\right), \forall x \in I^0, \forall y, z \in \mathbb{R}, \tag{5.4}$$

onde I^0 denota o conjunto $\{x \in [a, b]; \varphi(x) = 0\}$ e $y^+ = y$, se $y \geq 0$, e $y^+ = 0$, caso contrário. Além disso, suponha que exista uma função contínua $g : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$f(x, y, z) \geq g(x, y), \forall x \in [a, b], \forall y, z \in \mathbb{R} \tag{5.5}$$

e

$$\lim_{|y|\to\infty} g(x, y) = +\infty, \tag{5.6}$$

uniformemente em $[a, b]$.

Definição 5.1 *Dizemos* $u \in C^2[a, b]$ *é uma* **solução** *do problema* (5.1) *se satisfaz* $u''(x) + f(x, u(x), u'(x)) = s\varphi(x)$, *para todo* $x \in [a, b]$, *com* $u(a) = u(b)$ *e* $u'(a) = u'(b)$.

Como $g : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo a condição (5.6), tome $A = \inf\{g(x,y);\ x \in [a,b],\ y \in \mathbb{R}\}$. Juntamente com a condição (5.5), segue que

$$f(x,y,z) \geq A, \tag{5.7}$$

para todo $x \in [a,b]$ e todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Vejamos que, se o problema (5.1) admite uma solução, então esta tem uma limitação a priori em $C^1[a,b]$.

Lema 5.1 *Seja $\tau \in \mathbb{R}$ qualquer, o conjunto de todas as possíveis soluções do problema* (5.1), *quando $s \leq \tau$, é limitado a priori em $C^1[a,b]$.*

Demonstração: Seja u uma solução do problema (5.1), para algum $s \leq \tau$. Então

$$\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx = s\int_a^b \varphi(x)\,dx = s\|\varphi\|_1 \leq \tau\|\varphi\|_1. \tag{5.8}$$

Pela equação (5.7), segue que $A(b-a) \leq s\|\varphi\|_1 \leq \tau\|\varphi\|_1$. Das condições periódicas, sabemos que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $u'(x_0) = 0$. Então

$$u'(x) = \int_{x_0}^x \left[-f(t,u(t),u'(t)) + s\varphi(t)\right]\,dt.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
|u'(x)| &\leq \int_a^b |-f(t,u(t),u'(t)) + s\varphi(t)|\,dt \\
&= \int_a^b |A - f(t,u(t),u'(t)) + s\varphi(t) - A|\,dt \\
&\leq \int_a^b (f(t,u(t),u'(t)) - A)\,dt + \int_a^b |s\varphi(t) - A|\,dt \\
&= s\|\varphi\|_1 - A(b-a) + \int_a^b \left| s\varphi(t) - A(b-a)\frac{\varphi(t)}{\|\varphi\|_1} + A(b-a)\frac{\varphi(t)}{\|\varphi\|_1} - A\right| dt \\
&\leq s\|\varphi\|_1 - A(b-a) + \int_a^b (s\|\varphi\|_1 - A(b-a))\,\frac{\varphi(t)}{\|\varphi\|_1}\,dt + \\
&\quad + |A|\int_a^b \left((b-a)\frac{\varphi(t)}{\|\varphi\|_1} + 1\right)\,dt \\
&= 2\left(s\|\varphi\|_1 - A(b-a) + |A|(b-a)\right) \\
&\leq 2\left(\tau\|\varphi\|_1 + (|A| - A)(b-a)\right) := R_1(\tau),
\end{aligned}$$

para todo $x \in [a,b]$. Logo, $\max\{|u'(x)|;\ x \in [a,b]\} \leq R_1(\tau)$. Além disso, da condição (5.6), escolhendo $r_2 > 0$ tal que $g(x,y) > \tau\|\varphi\|_1$, para todo $x \in [a,b]$ e todo $|y| \geq r_2$. Da condição (5.5), segue que $f(x,y,z) > \tau\|\varphi\|_1$, para todo $x \in [a,b]$, $z \in \mathbb{R}$ e $|y| \geq r_2$. Da desigualdade (5.8), existe $x_1 \in [a,b]$ tal que $|u(x_1)| < r_2$. Logo,

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \left|u(x_1) + \int_{x_1}^x u'(t)\,dt\right| \leq |u(x_1)| + \int_a^b |u'(t)|\,dt \\
&< r_2 + R_1(\tau)(b-a)| := R_2(\tau),
\end{aligned}$$

para todo $x \in [a, b]$. Portanto

$$\|u\|_{C^1} \leq R_2(\tau) + R_1(\tau) := R(\tau).$$

$\blacksquare$

Relembremos a seguinte definição.

Definição 5.2 *Seja $f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que as funções $\alpha, \beta \in C^2[a, b]$ são* **subsolução** *e* **supersolução** *do problema* (5.1), *respectivamente, se satisfazem*

$$\begin{cases} \alpha''(x) + f(x, \alpha(x), \alpha'(x)) \geq s\varphi(x) \\ \alpha(a) = \alpha(b), \\ \alpha'(a) = \alpha'(b), \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} \beta''(x) + f(x, \beta(x), \beta'(x)) \leq s\varphi(x) \\ \beta(a) = \beta(b), \\ \beta'(a) = \beta'(b), \end{cases}$$

para todo $x \in [a, b]$. No caso que as desigualdades acima forem estritas, dizemos que α é **subsolução estrita** *e β é uma* **supersolução estrita** *do problema* (5.1).

Novamente, estamos interessados em encontrar um parâmetro real s_1 tal que o problema (5.1) não tenha solução, tenha pelos menos uma ou pelo menos duas soluções de acordo com $s < s_1$, $s = s_1$ ou $s > s_1$. Mas, diferente do problema (4.9), nem sempre conseguiremos encontrar uma supersolução para o problema (5.1). Contudo, só Teorema Tipo Bolzano não seria suficiente para este problema, os resultados a seguir ajudarão a contornar tal fato.

O próximo resultado é o Princípio do Máximo em $C^2[a, b]$ para o problema periódico apresentado no trabalho [7].

Lema 5.2 *Sejam $q_1, q_2 \in C[a, b]$, com $q_2(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$. Se $u \in C^2[a, b]$ satisfazendo*

$$\begin{cases} -u''(x) + q_1(x)u'(x) + q_2(x)u(x) \geq 0, \ \text{para todo } x \in [a, b], \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b), \end{cases} \tag{5.9}$$

então $u \geq 0$. Se $u \neq 0$ então $u(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração: Seja $u \in C^2[a, b]$ satisfazendo (5.10). Suponha por contradição que existe $x' \in [a, b]$ tal que $u(x') < 0$. Seja $x_0 \in [a, b]$ tal que $u(x_0) = \min\{u(x); x \in [a, b]\} < 0$. Se $x_0 \in (a, b)$, segue que $u'(x_0) = 0$ e $u''(x_0) \geq 0$. Por outro lado, segue da equação (5.10) que $u''(x_0) \leq q_2(x_0)u(x_0) < 0$, contradição. Caso $x_0 = a$ e como $u(a) = u(b)$, temos $u'(a) \geq 0$ e $u'(b) \leq 0$, pela condição $u'(a) = u'(b)$, segue que $u'(a) = 0$. Como u satisfaz (5.10), obtemos $u''(a) \leq q_2(a)u(a) < 0$. Pela Fórmula de Taylor,

$$u(a + x) = u(a) + u'(a)x + \frac{u''(a)}{2}x^2 + r(x),$$

onde $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{r(x)}{x^2} = 0$. Considerando $x > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que $\frac{u''(a)}{2} + \frac{r(x)}{x^2} < 0$, obtemos

$$u(a + x) - u(a) = x^2 \left[\frac{u''(a)}{2} + \frac{r(x)}{x^2} \right] < 0,$$

contradição com $x_0 = a$ ser ponto de mínimo em $[a, b]$. Similiarmente, mostrar-se para $x_0 = b$. ∎

No trabalho [30] apresenta este princípio em $W^{2,p}(a, b)$ quando as funções $q_1 = 0$ e $q_2 \in L^p(a, b)$, com $q_2(x) > 0$ qtp $x \in (a, b)$. O caso mais geral segue do Princípio do Máximo de Bony em $W^{2,p}(a, b)$ apresentado no trabalho [5, Teorema 2].

Lema 5.3 *Sejam $q_1, q_2 \in L^\infty(a, b)$, com $q_2(x) \geq C > 0$, qtp $x \in (a, b)$. Se $u \in W^{2,p}(a, b)$, com $p > 1$, satisfazendo*

$$\begin{cases} -u''(x) + q_1(x)u'(x) + q_2(x)u(x) \geq 0, & qtp\ x \in (a, b), \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b), \end{cases} \tag{5.10}$$

então $u \geq 0$. Se $u \neq 0$ então $u(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$.

Agora, analisaremos rapidamente um problema periódico que será abordado durante a demonstração dos próximos resultados

$$\begin{cases} -u''(x) + qu(x) = h(x), & \text{qtp } x \in (a, b) \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b), \end{cases} \tag{5.11}$$

onde $h \in L^p(a, b)$ é uma função fixada.

Definição 5.3 *Dizemos $u \in W^{2,p}(a, b)$ é uma solução do problema* (5.11) *se satisfaz $-u''(x) + qu(x) = h(x)$, qtp $x \in (a, b)$, $u(a) = u(b)$ e $u'(a) = u'(b)$.*

Como o espaço de Sobolev $W^{2,p}(a, b)$ está imenso compactamente no espaço $C^1[a, b]$, concluímos que se u é uma solução do problema (5.11), então $u \in C^1[a, b]$. Quando $p = 2$, segue que $W^{2,2}(a, b)$ é um espaço de Hilbert. Aplicando o Teorema de Lax-Milgram na forma bilinear $B(u, v) = \int_a^b u'(x)v'(x)\, dx + \int_a^b u(x)v(x)\, dx$ o livro [6, página 227] mostra que o problema (5.11) admite solução.

Definição 5.4 *Seja $h \in L^p(a, b)$ uma função contínua. Dizemos que as funções $\alpha, \beta \in W^{2,p}(a, b)$ são* **subsolução** *e* **supersolução** *do problema* (5.11), *respectivamente, se satisfazem*

$$\begin{cases} -\alpha''(x) + q\alpha(x) \leq h(x) \\ \alpha(a) = \alpha(b), \\ \alpha'(a) = \alpha'(b), \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} -\beta''(x) + q\beta(x) \geq h(x) \\ \beta(a) = \beta(b), \\ \beta'(a) = \beta'(b), \end{cases}$$

qtp $x \in (a, b)$. No caso que as desigualdades acima forem estritas, dizemos que α é **subsolução estrita** *e β é uma* **supersolução estrita** *do problema* (5.11).

Temos também o Teorema do Tipo Bolzano para o espaço $W^{2,p}(a, b)$, dado em [7, Teorema 2.2].

Teorema 5.1 *Seja $h \in L^p(a,b)$. Se $\alpha, \beta \in W^{2,p}(a,b)$ tais que α é uma subsolução e β é uma supersolução do problema* (5.11), *com $\alpha(x) \leq \beta(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Então o problema* (5.11) *tem uma solução u tal que*

$$\alpha(x) \leq u(x) \leq \beta(x),$$

para todo $x \in [a,b]$. Além disso, α e β são estritas, com $\alpha(x) < \beta(x)$, para todo $x \in [a,b]$, então

$$\alpha(x) < u(x) < \beta(x),$$

para todo $x \in [a,b]$.

Se $h \in L^\infty(a,b)$, existe $M > 0$ tal que $\|h\|_\infty < M$. Então $\underline{u}(x) = -M$ é uma subsolução estrita e $\overline{u}(x) = M$ é uma supersolução estrita do problema (5.11). Logo o problema (5.11) admite solução. Considerando $L^\infty(a,b)$ com a topologia induzida pela topologia em $L^p(a,b)$, mostraremos que o operador solução $K : L^\infty(a,b) \longrightarrow W^{2,p}(a,b)$ do problema (5.11) é contínuo.

Lema 5.4 *Seja $h \in L^p(a,b)$. Se $w \in W^{2,p}(a,b)$ é uma solução do problema* (5.11), *então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|w\|_{2,p} \leq C\left(\|h\|_p + \|w\|_p\right).$$

Demonstração: Seja $c_1 = \max\{1, q\}$, temos diretamente do problema

$$\|w''\|_p \leq \|h\|_p + q\|w\|_p \leq c_1\left(\|h\|_p + \|w\|_p\right). \tag{5.12}$$

Como $W^{2,p}(a,b)$ está imenso em $C^1[a,b]$ e w satisfaz $w(a) = w(b)$ e $w'(a) = w'(b)$, existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $w'(x_0) = 0$. Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e em seguida a desigualdade de Holder, obtemos

$$\begin{aligned} |w'(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} |w''(t)|\,dt \leq \int_a^b |w''(t)|\,dt \leq \int_a^b |h(t)|\,dt + q\int_a^b |w(t)|\,dt \\ &\leq (b-a)^{\frac{1}{p'}}\left(\|h\|_p + q\|w\|_p\right) \leq c_1(b-a)^{\frac{1}{p'}}\left(\|h\|_p + \|w\|_p\right), \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então

$$|w'(x)|^p \leq c_1^p(b-a)^{\frac{p}{p'}}\left(\|h\|_p + \|w\|_p\right)^p.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|w'\|_p &= \left[\int_a^x |w'(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[c_1^p(b-a)^{\frac{p}{p'}+1}\left(\|h\|_p + \|w\|_p\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= c_1(b-a)\left(\|h\|_p + \|w\|_p\right) \end{aligned} \tag{5.13}$$

Tomando $C = \max\{1, c_1, c_1(b-a)\}$, segue das equações (5.12) e (5.13) o resultado

$$\|w\|_{2,p} \leq C\left(\|h\|_p + \|w\|_p\right).$$

■

Proposição 5.1 *Seja $h \in L^p(a,b)$. Se $w \in W^{2,p}(a,b)$ é uma solução do problema* (5.11), *então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|w\|_{2,p} \leq C\| - w'' + qw\|_p = C\|h\|_p.$$

Em outras palavras, o operador solução do problema (5.11), *quando existe, é contínuo.*

Demonstração: Suponha por contradição que existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de soluções em $W^{2,p}(a,b)$ do problema (5.11) tal que

$$\|u_n\|_{2,p} > n\| - u_n'' + qu_n\|_p.$$

Pelo Lema 5.4, existe $c > 0$ tal que

$$c\left(\| - u_n'' + qu_n\|_p + \|u_n\|_p\right) \geq \|u_n\|_{2,p} > n\| - u_n'' + qu_n\|_p,$$

assim, para $n > c$,

$$\frac{1}{\|u_n\|_p}\| - u_n'' + qu_n\|_p \leq \frac{c}{n-c}.$$

Considerando a sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_p}$, vemos que

$$\|w_n\|_p = 1 \qquad \text{e} \qquad \| - w_n'' + qw_n\|_p \longrightarrow 0.$$

Como $W^{2,p}(a,b)$ está imenso compactamente em $C^1[a,b]$ e, pelo Lema 5.4, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitado em $W^{2,p}(a,b)$, existe uma subsequência $(w_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $w_{n_k} \longrightarrow w$ em $C^1[a,b]$. Então $w(a) = w(b)$ e $w'(a) = w'(b)$. Além disso, $\|w\| = 1$. Agora, para toda $\Phi \in C_0^\infty(a,b)$, pela desigualdade de Holder

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \left(-w_{n_k}''(x) + qw_{n_k}(x)\right)\Phi(x)\,dx\right| &\leq \int_a^b \left|-w_{n_k}''(x) + qw_{n_k}(x)\right| |\Phi(x)|\,dx \\ &\leq \| - w_{n_k}'' + qw_{n_k}\|_p \|\Phi\|_{p'}.\end{aligned}$$

Fazendo $k \longrightarrow +\infty$, encontramos

$$\int_a^b \left(-w''(x) + qw(x)\right)\varphi(x)\,dx,\ \forall \Phi \in C_0^\infty(a,b).$$

Então, temos o seguinte problema

$$\begin{cases} -w''(x) + qw(x) = 0, \text{ qtp } x \in (a,b), \\ w(a) = w(b), \\ w'(a) = w'(b). \end{cases}$$

Onde sabemos que $w = 0$ é a única solução, contradição com $\|w\|_p = 1$. ■

O próximo resultado é apresentado em [2, Lema 4] para os problemas de Dirichlet e Neumann. Mas similiarmente obtemos o mesmo para o problema periódico.

Lema 5.5 *Seja $q > 0$, para cada $d \in L^\infty(a,b)$, existe exatamente uma solução $u \in W^{2,p}(a,b)$ do problema*

$$\begin{cases} -u''(x) + qu(x) = d(x)\left(1 + |u'(x)|^2\right), \ qtp\ x \in (a,b), \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b). \end{cases} \tag{5.14}$$

Além disso, existe uma função crescente $\xi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ tal que

$$\|u\|_{2,p} \leq \xi\left(\|d\|_\infty\right),$$

a função ξ depende somente de q, a, b e p.

Demonstração: Sejam $\sigma_1, \sigma_2 \in [0,1]$ e $u_1, u_2 \in W^{2,p}(a,b)$ tais que

$$\begin{cases} -u_i''(x) + qu_i(x) = d(x)\left(\sigma_i + |u_i'(x)|^2\right), \ \text{qtp } x \in (a,b), \\ u_i(a) = u_i(b), \\ u_i'(a) = u_i'(b). \end{cases} \tag{5.15}$$

Defina $w = u_1 - u_2$ e $M = \frac{|\sigma_1-\sigma_2|\|d\|_\infty}{q}$. Tomando $\xi = M - w$ e substituindo no problema (5.14), obtemos

$$-\xi''(x) + q\xi(x) - d(x)\left(u_1'(x) + u_2'(x)\right)\xi'(x) = |\sigma_1 - \sigma_2|\|d\|_\infty - (\sigma_1 - \sigma_2)\, d(x) \geq 0,$$

para todo $x \in (a,b)$. Pelo Teorema B.6, sabemos que $W^{2,p}(a,b) \hookrightarrow C^1[a,b]$, para todo $1 < p \leq \infty$, e pelo Lema 5.3, $\xi(x) \leq 0$, ou seja, $w(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$. Similiarmente, mostrar-se que $w(x) > -M$. Então

$$\|w\|_\infty = \|u_1 - u_2\|_\infty \leq \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|\|d\|_\infty}{q}. \tag{5.16}$$

Assim, se $\sigma_1 = \sigma_2$ então $u_1 = u_2$. Logo, a solução do problema (5.15) é única. Observe que

$$\begin{aligned} -w''(x) + qw(x) &= -u_1''(x) + u_2''(x) + qu_1(x) - qu_2(x) \\ &= \left(-u_1''(x) + qu_1(x)\right) + \left(u_2''(x) - qu_2(x)\right) \\ &= d(x)\left(\sigma_1 + |u_1'(x)|^2\right) + d(x)\left(-\sigma_2 - |u_2'(x)|^2\right) \\ &= d(x)\left(\sigma_1 - \sigma_2\right) + d(x)\left(|u_1'(x)|^2 - |u_2'(x)|^2\right) \\ &= d(x)\left(\sigma_1 - \sigma_2\right) + d(x)\left(|u_1'(x)|^2 - |w'(x) - u_1'(x)|^2\right). \end{aligned}$$

Como $|w'(x) - u_1'(x)| \leq |w'(x)| + |u_1'(x)|$, obtemos

$$\begin{aligned} |w'(x) - u_1'(x)|^2 &\leq \left(|w'(x)| + |u_1'(x)|\right)^2 \\ &= |w'(x)|^2 + 2|w'(x)||u_1'(x)| + |u_1'(x)|^2 \\ &\leq 2|w'(x)|^2 + 2|u_1'(x)|^2. \end{aligned}$$

Por isso, e lembrando que $\sigma_1, \sigma_2 \in [0,1]$, segue que

$$\| - w'' + qw\|_p \leq \|d\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}} + \|d\|_\infty \left(2\left\|(w')^2\right\|_p + 3\left\|(u_1')^2\right\|_p\right) \tag{5.17}$$

Pela interpolação da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg [6, página 233], existe uma constante $\gamma_1 > 0$ tal que

$$\left\|(w')^2\right\|_p = \|w'\|_{2p}^2 \leq \left[\gamma_1^{\frac{1}{2}}\|w\|_\infty^{\frac{1}{2}}\|w\|_{2,p}^{\frac{1}{2}}\right]^2 = \gamma_1\|w\|_\infty\|w\|_{2,p}. \tag{5.18}$$

Considerando o $L^\infty(a,b)$ com a topologia induzida pela norma $\|\cdot\|_p$, sabemos o operador solução $K : L^\infty(a,b) \longrightarrow W^{2,p}(a,b)$ do problema

$$\begin{cases} -w''(x) + qw(x) = h(x), \ \text{qtp } x \in (a,b) \\ w(a) = w(b), \\ w'(a) = w'(b). \end{cases}$$

é contínuo, existe $\gamma_2 > 0$ tal que

$$\|w\|_{2,p} \leq \gamma_2\|h\|_p = \gamma_2\| - w'' + qw\|_p.$$

Daí, juntando as desigualdades (5.17) e (5.18), segue que

$$\begin{aligned} \|w\|_{2,p} &\leq \gamma_2\| - w'' + qw\|_p \leq \gamma_2\|d\|_\infty\left[(b-a)^{\frac{1}{p}} + 2\left\|(w')^2\right\|_p + 3\left\|(u_1')^2\right\|_p\right] \\ &\leq \gamma_2\|d\|_\infty\left[(b-a)^{\frac{1}{p}} + 2\gamma_1\|w\|_\infty\|w\|_{2,p} + 3\gamma_1\|u_1\|_\infty\|u_1\|_{2,p}\right] \end{aligned}$$

Da equação (5.16), segue que

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{2,p} \leq \gamma_2\|d\|_\infty(b-a)^{\frac{1}{p}} + 2\gamma_1\gamma_2\|d\|_\infty^2\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{q}\|u_1 - u_2\|_{2,p} + \\ +3\gamma_1\gamma_2\|d\|_\infty^2\frac{|\sigma_1|}{q}\|u_1\|_{2,p}. \end{aligned}$$

Escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $4\gamma_1\gamma_2\|d\|_\infty^2 < nq$. Tomando $\sigma_2 \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ e $\sigma_1 = 0$, pela unicidade da solução do problema (5.15), obtemos $u_1 = 0$ e, consequentemente,

$$\|u_2\|_{2,p} \leq 2\gamma_2\|d\|_\infty(b-a)^{\frac{1}{p}}$$

Agora, tomando $\sigma_2 \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ e $\sigma_1 = \frac{1}{n}$, temos

$$\|u_1 - u_2\|_{2,p} \leq \gamma_2\|d\|_\infty(b-a)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_{2,p} + \frac{3}{4}\|u_1\|_{2,p}.$$

Assim,

$$\|u_1 - u_2\|_{2,p} \leq 2\gamma_2\|d\|_\infty(b-a)^{\frac{1}{p}} + \frac{3}{2}\|u_1\|_{2,p}.$$

Como $\|u_1\|_{2,p} \leq 2\gamma_2\|d\|_\infty(b-a)^{\frac{1}{p}}$, segue que

$$\|u_1 - u_2\|_{2,p} \leq 5\gamma_2\|d\|_\infty(b-a)^{\frac{1}{p}}.$$

Então

$$\|u_2\|_{2,p} \leq \|u_1 - u_2\|_{2,p} + \|u_1\|_{2,p} \leq 7\gamma_2\|d\|_\infty(b-a)^{\frac{1}{p}}.$$

Sucessivamente, encontramos uma função crescente $\xi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ tal que

$$\|u\|_{p,2} \leq \xi\left(\|d\|_\infty\right),$$

onde $u \in W^{2,p}(a,b)$ é solução do problema (5.14). Todas as estimativas acima são válidas para o problema

$$\begin{cases} -u''(x) + qu(x) = \lambda d(x)\left(\frac{1}{n} + |u'(x)|^2\right), \text{ qtp } x \in (a,b), \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b), \end{cases}$$

para todo $\lambda \in [0,1]$. Defina $T' : [0,1] \times C^1[a,b] \longrightarrow W^{2,p}(a,b)$ o operador solução do problema

$$\begin{cases} -u''(x) + qu(x) = \lambda d(x)\left(\frac{1}{n} + |\Phi'(x)|^2\right), \text{ qtp } x \in (a,b), \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b). \end{cases}$$

Pelo Teorema B.6, obtemos que o operador solução $T : [0,1] \times C^1[a,b] \longrightarrow C^1[a,b]$ é compacto e contínuo. Além disso, as soluções $\Phi = T(\lambda,\Phi)$ são limitada pela estimativa acima. Então T é uma homotopia admissível. Observe que $T(0,\Phi) = 0$, para todo $\Phi \in C^1[a,b]$, então $\deg(I - T(0,\cdot)) \neq 0$, pela Propriedade 3.1. Portanto, pelo Teorema 3.3 e pela Proposição 3.1, segue que $T(1,\cdot)$ tem um ponto fixo e segue o resultado. ■

Definição 5.5 *Dizemos que uma aplicação $T : X \longrightarrow Y$ é* **fortemente crescente** *se dado $x_1, x_2 \in X$, com $x_1 \leq x_2$ então $T(x_1) \leq T(x_2)$, caso $x_1 < x_2$ então $T(x_1) - T(x_2) \in$ int $\{y \in Y;\ y \geq 0\}$.*

A seguir, denotaremos o conjunto $\{u \in C^1[a,b];\ u(a) = u(b) \text{ e } u'(a) = u'(b)\}$ por $C^1_P[a,b]$.

Proposição 5.2 *Seja $\gamma : C^1[a,b] \longrightarrow L^\infty(a,b)$ uma aplicação contínua que satisfaz $\gamma(0) = 0$. Suponha que exista uma função crescente $c : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ satisfazendo*

$$|\gamma(u)(x)| \leq c\left(|u(x)|\right)\left(1 + |u'(x)|^2\right),$$

para todo $u \in C^1[a,b]$. Além disso, dado $u, v \in C^1[a,b]$, suponha que existe $d_1 = d_1(u,v,u',v')$, $d_0 = d_0(u,v,u',v') \in L^\infty(a,b)$, com $d_0 \geq 0$, tais que

$$\gamma(u) - \gamma(v) = d_1(u' - v') + d_0(u - v). \tag{5.19}$$

Então

(a) Para cada $h \in L^\infty(a,b)$, o problema não linear

$$\begin{cases} -u''(x) + qu(x) + \gamma(u)(x) = h(x), \text{ qtp } x \in (a,b), \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b), \end{cases} \tag{5.20}$$

tem uma única solução $u \in C^1[a,b]$. Além disso, o operador solução $H : L^\infty(a,b) \longrightarrow C^1_P[a,b]$ é fortemente crescente e compacto. Se S é um conjunto limitado de $L^\infty(a,b)$, com a topologia induzida de $L^p(a,b)$, então $H_S := H|_S : S \longrightarrow C^1_P[a,b]$ é contínuo.

(*b*) *Seja* $\varphi \in C[a,b]\backslash\{0\}$ *tal que* $\varphi(x) \geq 0$, *para todo* $x \in [a,b]$, *e defina* $I^0 = \{x \in [a,b];\, \varphi(x) = 0\}$. *Se para cada* $v \in C[a,b]$, *existe uma constante* $M(v) \geq 0$ *tal que*

$$|\gamma(v+w)(x) - \gamma(v)(x)| \leq M(v)\left(|w(x)| + |w'(x)|\right),$$

para todo $x \in I^0$ *e todo* $w \leq 0$, *então, dado uma função* $\psi \in C[a,b]$ *e* $\phi \in C^1_P[a,b]$, *existe* $t^* = t^*(\psi, \phi, \varphi)$ *satisfazendo*

$$H(\psi + t\varphi) \leq \phi,$$

para todo $t \leq t^*$.

Demonstração: Como $h \in L^\infty(a,b)$ e $\operatorname{Im}\gamma \subset L^\infty(a,b)$, existem $M_1, M_2 > 0$ tais que $\underline{u}(x) = -M_1$ é uma subsolução estrita e $\overline{u}(x) = M_2$ é uma supersolução estrita do problema (5.20). Denotaremos V o intervalo ordenado $[\underline{u}, \overline{u}]$ em $C^1[a,b]$. Sejam $u, v \in W^{2,p}(a,b)$ satisfazendo

$$\begin{cases} -u''(x) + qu(x) + \gamma(u)(x) \geq -v''(x) + qv(x) + \gamma(v)(x), \text{ qtp } x \in (a,b), \\ u(b) - u(a) = v(b) - v(a) = 0 \text{ e } u'(b) - u'(a) = v'(b) - v'(a) = 0. \end{cases}$$

Então

$$-(u-v)''(x) + q(u-v)(x) + \gamma(u)(x) - \gamma(v)(x) \geq 0,$$

qtp $x \in (a,b)$. Pela condição (5.19),

$$-(u-v)''(x) + q(u-v)(x) + d_1(x)(u'-v')(x) + d_0(x)(u-v)(x) \geq 0.$$

Para cada $h \in L^\infty(a,b)$ dado, se u é uma solução do problema (5.20), pelo Lema 5.3, segue que u é única e que o operador solução, se existir, é fortemente crescente. Além disso, da unicidade de solução, segue que u pertence ao interior de V. Como u é solução do problema (5.20) então ele satisfaz

$$\begin{cases} -u''(x) + qu(x) = d(x)\left(1 + |u'(x)|^2\right), \text{ qtp } x \in (a,b), \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b), \end{cases}$$

onde $d(x) = \left(-\gamma(u)(x) + h(x)\right)\left(1 + |u'(x)|^2\right)^{-1}$. Note que

$$\begin{aligned} |d(x)| &= \frac{|-\gamma(u)(x) + h(x)|}{1 + |u'(x)|^2} \leq \frac{|\gamma(u)(x)|}{1 + |u'(x)|^2} + \frac{|h(x)|}{1 + |u'(x)|^2} \\ &\leq c\left(|u(x)|\right) + |h(x)| \leq c(D) + \|h\|_\infty, \end{aligned}$$

onde $D = \max\{-M_1, M_2\}$. Pelo Teorema B.6 e Lema 5.5, segue que

$$\|u\|_{C^1} \leq \xi(\|d\|_\infty) = \text{constante}.$$

Tomando $R > \xi(\|d\|_\infty)$, por argumentos similares aos anteriores e pelo Teorema 3.6, segue que

$$|\deg\left((L,N), B(R)\right)| = 1,$$

onde $B(R) = \{u \in C^1[a,b];\, \|u\|_{C^1} < R\}$ e $N : B(R) \longrightarrow C[a,b]$ é o operador $L-$compacto dado por $N(u) = qu + \gamma(u) - h$. Logo, pela Propriedade 3.1, segue que o problema (5.20) admite uma solução, ou seja, o operador solução existe. Sabemos que o operador solução $H_0 : L^\infty(a,b) \longrightarrow W_P^{2,p}(a,b)$ é fortemente crescente e, pelo Teorema B.6, segue que o operador solução $H : L^\infty(a,b) \longrightarrow C_P^1[a,b]$ é fortemente crescente e compacto, onde $H(z) = H_0(z)$, para todo $z \in L^\infty(a,b)$. Seja S um conjunto limitado de $L^\infty(a,b)$, com a topologia induzida de $L^p(a,b)$. Suponha que H_S não seja contínuo, então existem $\delta > 0$ e uma sequência $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em S que converge para $h \in S$ em $L^P(a,b)$ tal que

$$\|H(h_n) - H(h)\| \geq \delta > 0.$$

Como $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(a,b)$, uma vez que S é limitado em $L^\infty(a,b)$, pelo Lema A.2, existe uma subsequência $(h_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_k} := H(h_{n_k})$ converge para u em $C^1[a,b]$. Temos

$$\begin{cases} -u''_{n_k}(x) + qu_{n_k}(x) + \gamma(u_{n_k})(x) = h_n(x), \text{ para } x \in (a,b), \\ u_{n_k}(b) = u_{n_k}(a), \\ u'_{n_k}(b) = u'_{n_k}(a), \end{cases}$$

segue que

$$\int_a^b u'_{n_k}(x)v'(x)\,dx + \int_a^b qu_{n_k}(x)v(x)\,dx + \int_a^b \gamma(u_{n_k})(x)v(x)\,dx = \int_a^b h_{n_k}(x)v(x)\,dx,$$

para todo $v \in W^{-1,p'}(a,b)$ com $v(a) = v(b)$. Fazendo $n \longrightarrow +\infty$, obtemos

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\,dx + \int_a^b qu(x)v(x)\,dx + \int_a^b \gamma(u)(x)v(x)\,dx = \int_a^b h(x)v(x)\,dx,$$

para todo $v \in W^{-1,p'}(a,b)$ com $v(a) = v(b)$. Assim,

$$\begin{cases} -u''(x) + qu(x) + \gamma(u)(x) = h(x), \text{ qtp } x \in (a,b), \\ u(b) = u(a), \\ u'(b) = u'(a), \end{cases}$$

Da unicidade da solução, concluímos que $H(h) = u$, contradição.

Agora, provaremos o item (b). Seja $\psi \in C[a,b]$ e denote $H(\psi)$ por v, temos que $v \in C_P^1[a,b]$. Tomando $u = H(\psi + t\varphi)$ e $w = u - v$, temos

$$\begin{aligned} -w''(x) + qw(x) + \gamma(w+v)(x) - \gamma(v)(x) &= (-u''(x) + qu(x) + \gamma(u)(x)) \\ &\quad - (-v''(x) + qv(x) + \gamma(v)(x)) \\ &= (\psi + t\varphi) - \psi = t\varphi. \end{aligned}$$

Sejam $\overline{\gamma} : C^1[a,b] \longrightarrow L^\infty(a,b)$, dada por $\overline{\gamma}(w) = \gamma(w+v) - \gamma(v)$, e $\chi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função característica

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in I^0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Defina $\gamma^* : C^1[a,b] \longrightarrow L^\infty(a,b)$ por

$$\gamma^*(w)(x) = \chi(x)\overline{\gamma}(w)(x) + M(v)w(x) - M(v)|w'(x)|.$$

Observe que $\gamma^*(0) = 0$ e

$$\begin{aligned}
\gamma^*(w) - \gamma^*(u) &= \chi\left(\gamma(w+v) - \gamma(u+v)\right) + M(v)(w-u) - M(v)\left(|w'| - |u'|\right)\\
&= \chi\left(d_1(w'-u') + d_0(w-u)\right) + M(v)(w-u) - M(v)\rho(w',u')\,(w'-u')\\
&= \left(\chi d_1 - M(v)\rho(w',u')\right)(w'-u') + \left(\chi d_0 + M(v)\right)(w-u),
\end{aligned}$$

onde

$$\rho(y,z) = \begin{cases} \dfrac{|y|-|z|}{y-z}, & \text{se} \quad y \neq z,\\ 0, & \text{se} \quad y = z. \end{cases}$$

Note que $|\rho(y,z)| \leq 1$. Além disso,

$$\begin{aligned}
|\gamma^*(w)(x)| &\leq |\gamma(w+v)(x)| + |\gamma(v)(x)| + M(v)|w(x)| + M(v)|w'(x)|\\
&\leq c\left(|w(x)+v(x)|\right)\left(1 + |w'(x)+v'(x)|^2\right) + c\left(|v(x)|\right)\left(1+|v'(x)|^2\right) +\\
&\quad + M(v)|w(x)| + M(v)|w'(x)|\\
&\leq c\left(|w(x)| + \|v\|_\infty\right)\left(1 + 2\left(|w'(x)|^2 + \|v'\|_\infty^2\right)\right) + c\left(\|v\|_\infty\right)\left(1 + \|v'\|_\infty^2\right) +\\
&\quad + M(v)|w(x)|\left(1+|w'(x)|^2\right) + M(v)\left(1+|w'(x)|^2\right)\\
&= \tilde{c}(|w(x)|)\left(1+|w'(x)|^2\right)
\end{aligned}$$

onde $\tilde{c}(t) = \left[2(1+\|v\|_\infty^2)c\left(t+\|v\|_\infty\right) + M(v)t + \left(c\left(\|v\|_\infty\right)(1+\|v'\|_\infty^2) + M(v)\right)\right]$, para $t \geq 0$. Logo, γ^* satisfaz as hipóteses do item (a). Para $w \leq 0$, temos

$$\left(\overline{\gamma}(w) - \gamma^*(w)\right)(x) = \left(1 - \chi(x)\right)\overline{\gamma}(w)(x) - M(v)w(x) + M(v)|w'(x)|.$$

Se $x \in I^0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\gamma}(w) - \gamma^*(w)\right)(x) &= \overline{\gamma}(w)(x) - M(v)w(x) + M(v)|w'(x)|\\
&\geq M(v)\left(|w(x)| + |w'(x)|\right) - |\overline{\gamma}(w)(x)|\\
&= M(v)\left(|w(x)| + |w'(x)|\right) - |\gamma(w+v)(x) - \gamma(v)(x)|\\
&\geq M(v)\left(|w(x)| + |w'(x)|\right) - M(v)\left(|w(x)| + |w'(x)|\right) = 0
\end{aligned}$$

Caso contrário

$$\left(\overline{\gamma}(w) - \gamma^*(w)\right)(x) = -M(v)w(x) + M(v)|w'(x)| = M(v)\left(|w(x)| + |w'(x)|\right) > 0.$$

Logo, $\overline{\gamma}(w) \geq \gamma^*(w)$, para todo $w \in C^1[a,b]$ com $w \leq 0$. Denote por H^* o operador solução do problema

$$\begin{cases} w''(x) + qw(x) + \gamma^*(w)(x) = h(x), \ \text{qtp } x \in (a,b),\\ w(a) = w(b),\\ w'(a) = w'(b), \end{cases} \tag{5.21}$$

existe pelo item (a). Se $h = 0$, então $w = 0$ é uma solução deste problema, pela unicidade dada pelo item (a), segue $H^*(0) = 0$. Por H^* ser um operador fortemente crescente, obtemos $w_0 = H^*(-\varphi) \ll 0$ (isto é, $u \ll v$ se $v - u$ pertence ao interior do conjunto $\{u \in C_P^1[a,b];\ u \geq 0\}$ em $C^1[a,b]$). Como $\phi, v \in C^1[a,b]$, existe $t_0 < 0$ tal que

$$v - \phi \ll t_0 w_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
-(-t_0w_0)''(x)+q(-t_0w_0(x))+\gamma^*(-t_0w_0)(x) &= -t_0\left(-w_0''(x)+qw_0(x)\right)+\gamma^*(-t_0w_0)(x)\\
&= -t_0\left(-\varphi(x)-\gamma^*(w_0)(x)\right)+\gamma^*(-t_0w_0)(x)\\
&= t_0\varphi(x)+\left(t_0\gamma^*(w_0)(x)+\gamma^*(-t_0w_0)(x)\right)\\
&= t_0\varphi(x)+\chi(x)\left(t_0\overline{\gamma}(w_0)(x)+\overline{\gamma}(-t_0w_0)(x)\right).
\end{aligned}$$

Logo, $H^*(t_0\varphi+e)=-t_0w_0\ll\phi-v$, onde $e(x)=\chi(x)\left(t_0\overline{\gamma}(w_0)(x)+\overline{\gamma}(-t_0w_0)(x)\right)$. Para $t\leq t_0$,

$$t_0\varphi+e\geq t\varphi+e\geq 2t\varphi-(t\varphi-e)^+.$$

O conjunto $((t\varphi-e)^+)_{t\leq t_0}$ limitado em $L^\infty(a,b)$, pois

$$\begin{aligned}
\|(t\varphi-e)^+\|_\infty &\leq |t|\|\varphi\|_\infty+\|e\|_\infty\leq|t|\|\varphi\|_\infty+|t_0|\,\|\overline{\gamma}(w_0)\|_\infty+\|\overline{\gamma}(-t_0w_0)\|_\infty\\
&\leq |t|\|\varphi\|_\infty+2|t_0|M(v)\|w_0\|_{C^1}<\infty,
\end{aligned}$$

e converge para zero em $L^p(a,b)$, pois para $|t|$ suficientemente grande temos $t\varphi-e\leq0$, então $(t\varphi-e)^+=0$. Como H^* é contínuo, existe $\delta>0$ tal que, para todo $\rho\in L^\infty(a,b)$, com $\|\rho\|_\infty\leq\|e\|_\infty$ e $\|\rho\|_p\leq\delta$, temos

$$H^*(t_0+e+\rho)\ll\phi-v \text{ em } C_P^1[a,b].$$

Para $t\leq t_0$ suficientemente pequeno de tal modo que $\left\|(t\varphi-e)^+\right\|_p\leq\delta$, obtemos

$$\phi-v\;\gg\;H^*(t_0\varphi+e+(t\varphi-e)^+)\geq H^*(2t\varphi-(t\varphi-e)^++(t\varphi-e)^+)=H^*(2t\varphi).$$

Tomando $T=2t$ e denotando $H^*(T\varphi)$ por w^*. Segue que $w^*\leq0$, uma vez que $t\leq t_0<0$, $\varphi\geq0$ e H^* é fortemente crescente, e

$$\begin{aligned}
T\varphi &= -(w^*)''(x)+qw^*(x)+\gamma^*(w^*)(x)\leq-(w^*)''(x)+qw^*(x)+\overline{\gamma}(w^*)(x)\\
&= -(w^*+v)''(x)+q(w^*+v)(x)-(-v''(x)+qv(x))+\gamma(w^*+v)(x)-\gamma(v)(x)\\
&= [-(w^*+v)''(x)+q(w^*+v)(x)+\gamma(w^*+v)(x)]-[-v''(x)+qv(x)+\gamma(v)(x)]\\
&= [-(w^*+v)''(x)+q(w^*+v)(x)+\gamma(w^*+v)(x)]-\psi.
\end{aligned}$$

Logo,

$$-(w^*+v)''(x)+q(w^*+v)(x)+\gamma(w^*+v)(x)\geq\psi+T\varphi=-u''(x)+qu(x)+\gamma(u)(x).$$

Portanto

$$H(\psi+T\varphi)\leq w^*+v\ll(\phi-v)+v=\phi.$$

Completando a prova. ■

Defina a função $\tilde{\gamma}:[a,b]\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ por

$$\tilde{\gamma}(x,y,z)=\int_0^y\left[\operatorname{sgn}\left(f_y(x,u,z)-|f_y(x,u,z)|\right)f_y(x,u,z)\right]du+y.$$

Observe que as funções $y\longrightarrow\tilde{\gamma}(x,y,z)$ e $y\longrightarrow\tilde{\gamma}(x,y,z)+f(x,y,z)$ são estritamente crescente para cada $x\in[a,b]$ e $z\in\mathbb{R}$ fixado, basta olhar que a derivada de ambas as funções são estritamente positivas. Para $0 < q < 1$ fixo e dado $v \in C[a,b]$, considere o seguinte problema periódico (onde omitimos alguns x para simplicar a notação)

$$\begin{cases} -u'' + qu + \tilde{\gamma}(x,u,u') = f(x,v,u') + \tilde{\gamma}(x,v,u') + qu + s\varphi \text{ em } (a,b), \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b). \end{cases} \tag{5.22}$$

Se encontrarmos v tal que $u = v$ é solução deste problema, podemos ver que u também será solução do problema (5.1). Em vista disso, vamos analisar o problema (5.22).

Defina $\tilde{\gamma}_v : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{\gamma}_v(x,y,z) = \tilde{\gamma}(x,y,z) - f(x,v(x),z) - \tilde{\gamma}(x,v(x),z) - qy + f(x,v(x),0) + \tilde{\gamma}(x,v(x),0).$$

Como

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}(x,y,z)| &\le \int_0^{|y|} |f_y(x,u,z)|\,du + |y| \le \int_0^{|y|} c(u)\left(1+|z|^2\right)du + |y| + |y|z^2 \\ &= c_1(|y|)\left(1+z^2\right), \end{aligned}$$

onde $c_1 : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é uma função crescente dada por $c_1(t) = \int_0^t c(u)\,du + t$, então

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}_v(x,y,z)| &\le |\tilde{\gamma}(x,y,z)| + |f(x,v(x),z)| + |\tilde{\gamma}(x,v(x),z)| + q|y| + \\ &\quad +|f(x,v(x),0)| + |\tilde{\gamma}(x,v(x),0)| \\ &\le c_1(|y|)\left(1+z^2\right) + c(|v(x)|)\left(1+z^2\right) + c_1(|v(x)|)\left(1+z^2\right) + \\ &\quad +q|y|\left(1+z^2\right) + c(|v(x)|) + c_1(|v(x)|) \\ &\le (c_1(|y|) + q|y| + 2c(\|v\|_\infty) + 2c_1(\|v\|_\infty))\left(1+z^2\right) \\ &= c_v(|y|)\left(1+z^2\right), \end{aligned}$$

onde $c_v(t) = c_1(t) + qt + 2c(\|v\|_\infty) + 2c_1(\|v\|_\infty)$, para $t \ge 0$.

Observe que $\tilde{\gamma}_v$ é lipschitziana em compactos de $\mathbb{R}^2$ com relação y e z e uniformemente em $[a,b]$. Além disso, para cada $y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_v(x,y_2,z_2) - \tilde{\gamma}_v(x,y_1,z_1) &= \tilde{\gamma}_v(x,y_2,z_2) - \tilde{\gamma}_v(x,y_2,z_1) + \tilde{\gamma}_v(x,y_2,z_1) - \tilde{\gamma}_v(x,y_1,z_1) \\ &= d_1(x)(z_2 - z_1) + d_0(x)(y_2 - y_1), \end{aligned}$$

onde

$$d_1(x) = d_1(x,y_2,z_1,z_2) = \begin{cases} \dfrac{\tilde{\gamma}_v(x,y_2,z_2) - \tilde{\gamma}_v(x,y_2,z_1)}{z_2 - z_1}, & \text{se } \; z_2 \ne z_1, \\ \\ 0, & \text{se } \; z_2 = z_1, \end{cases}$$

e

$$d_0(x) = d_0(x,y_1,y_2,z_1) = \begin{cases} \dfrac{\tilde{\gamma}_v(x,y_2,z_1) - \tilde{\gamma}_v(x,y_1,z_1)}{y_2 - y_1}, & \text{se } \; y_2 \ne y_1, \\ \\ 0, & \text{se } \; y_2 = y_1. \end{cases}$$

Pela condição de Lipschitz mostrada acima, segue que $d_0, d_1 \in L^\infty(a,b)$. Como a função $y \longrightarrow \tilde{\gamma}(x,y,z) - qy$ é estritamente crescente, uma vez que $q < 1$, segue que

$y \longrightarrow \tilde{\gamma}_v(x,y,z)$ também é estritamente crescente, então $d_0(x) > 0$. Note que, para $x \in I^0$ e $y \leq \tau$, para algum $\tau > 0$, temos

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}_v(x,y,z)| &\leq c(y^+)\,(1+|y|+|z|)+(1-q)|y|+c((v(x))^+)\,(1+|v(x)|+|z|)+ \\ &\quad +c((v(x))^+)\,(1+|v(x)|+|z|)+|v(x)|+c((v(x))^+)\,(1+|v(x)|)+ \\ &\quad c((v(x))^+)\,(1+|v(x)|)+|v(x)| \\ &\leq c_2(\tau)\,(1+|y|+|z|)\,, \end{aligned}$$

onde $c_2(\tau) = c(\tau)+(1-q)+4(1+\|v\|_\infty)c(\|v\|_\infty)+2\|v\|_\infty$. Daí, dado $w \in C^1[a,b]$, existe uma constante $M(w) > 0$ tal que

$$|\tilde{\gamma}_v(x,y+w(x),z+w'(x)) - \tilde{\gamma}_v(x,w(x),w'(x))| \leq M(w)\,(|y|+|z|)\,,$$

para todo $(x,y,z) \in I^0 \times (-\infty,0] \times \mathbb{R}$. Pois no caso que $|y| \leq 1$ e $|y| \leq 1$ a desigualdade acima segue da condição de lipschitziana de $\tilde{\gamma}_v$. Vejamos o caso que $|z| > 1$, então $|y|+|z| > 1$. Sabemos que $\tilde{\gamma}_v(x,y+w(x),z+w'(x)) - \tilde{\gamma}_v(x,w(x),w'(x))$ é igual a

$$\begin{aligned} &\tilde{\gamma}(x,y+w(x),z+w'(x)) - \tilde{\gamma}(x,w(x),w'(x)) - f(x,v(x),z+w'(x)) + f(x,v(x),w'(x)) - \\ &\qquad - \tilde{\gamma}(x,v(x),z+w'(x)) - \tilde{\gamma}(x,v(x),w'(x)) - qy. \end{aligned}$$

Se $y+w(x) \leq 0$, temos $c\left((y+w(x))^+\right) = c(0)$. Se $y+w(x) > 0$, obtemos $0 \leq -y < w(x)$, uma vez que $y \leq 0$. Como c é uma função crescente, segue que $c\left((y+w(x))^+\right) = c\left(y+w(x)\right) \leq c\left(|y|+w(x)\right) \leq c(2w(x)) \leq c(2\|w\|_\infty)$. Assim, juntamente com a condição (5.4), segue o resultado desejado. No caso $y < -1$ é análogo.

Defina a aplicação $\gamma_v : C^1[a,b] \longrightarrow L^\infty(a,b)$ dada por $\gamma_v(u) = \tilde{\gamma}_v(\cdot,u(\cdot),u'(\cdot))$, obtemos o seguinte problema equivalente ao problema (5.22)

$$\begin{cases} -u''(x)+qu(x)+\gamma_v(u)(x) = f(x,v(x),0)+\tilde{\gamma}(x,v(x),0)+s\varphi(x), \text{ para todo } x \in (a,b), \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b). \end{cases}$$

Como γ_v satisfaz as hipótes da Proposição 5.2, temos o operador solução deste problema

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} \times C[a,b] &\longrightarrow C^1_P[a,b] \\ (s,v) &\longrightarrow u(s,v) \end{aligned}$$

com T fortemente crescente e compacto. Como comentado anteriormente, a solução do problema (5.1) são os pontos fixos do operador $T_s : C[a,b] \longrightarrow C^1_P[a,b]$, dado por $T_s(v) = T(s,v) = u(s,v)$.

Vejamos o seguinte resultado

Teorema 5.2 *Seja $f : [a,b]\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo* (5.2) − (5.6). *Então existe $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que o problema* (5.1) *não tem solução se $s < s_1$ e tem pelo menos uma solução se $s > s_1$.*

Demonstração: Defina $S = \{s \in \mathbb{R};\ (5.1) \text{ tem uma solução }\}$. Inicialmente, observe que o problema (5.1) sempre tem subsolução para todo $s \in \mathbb{R}$. De fato, da condição (5.6), existe uma constante $r > 0$ tal que

$$g(x,-r) > |s|\|\varphi\|_\infty,$$

para todo $x \in [a,b]$. Assim, $\underline{u}(x) = -r$ é um subsolução estrita do problema (5.1), pois

$$\underline{u}''(x) + f(x,\underline{u}(x),\underline{u}'(x)) = f(x,-r,0) \geq g(x,-r) > |s|\|\varphi\|_\infty \geq s\varphi(x),$$

para todo $x \in (a,b)$, e satisfaz as condições periódicas. Considerando $v = 0$, temos

$$\begin{cases} -u''(x) + qu(x) + \gamma_0(u)(x) = f(x,0,0) + s\varphi(x), \text{ para todo } x \in (a,b), \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b). \end{cases}$$

Para $\phi = 0$, pela Proposição 5.2, existe $t_1 < 0$ tal que $u(t_1, 0) = T_{t_1}(0) \leq 0$. Seja $\underline{u}(x) = -r$ uma subsolução estrita do problema (5.1), quando $s = t_1$, segue que

$$\begin{array}{rcl} -\underline{u}''(x) + q\underline{u}(x) + \gamma_{\underline{u}}(\underline{u})(x) & < & f(x,\underline{u}(x),0) + \tilde{\gamma}_{\underline{u}}(x,\underline{u}(x),0) + t_1\varphi(x) \\ & = & -(u(t_1,\underline{u}))''(x) + qu(t_1,\underline{u})(x) + \gamma_{\underline{u}}(u(t_1,\underline{u}))(x), \end{array}$$

para todo $x \in (a,b)$. Pelo Lema 5.3, $u(t_1,\underline{u})(x) \geq \underline{u}(x) = -r$, para todo $x \in [a,b]$. Como T_{t_1} é fortemente crescente, temos $T_{t_1}\left([-r,0]_{C[a,b]}\right) \subset [-r,0]_{C[a,b]}$. Pelo Teorema 2.3, existe $v \in [-r,0]_{C[a,b]}$ tal que $T_{t_1}(v) = v$, então v é uma solução do problema (5.1), quando $s = t_1$, ou seja, $t_1 \in S$. Logo $S \neq \emptyset$. Agora, seja u uma solução para o problema (5.1), então

$$u''(x) + f(x,u(x),u'(x)) = s\varphi(x),$$

integrando ambos lados e pelas condições periódicas, obtemos

$$\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx = s\int_a^b \varphi(x)\,dx = s\|\varphi\|_1.$$

Pela equação (5.7), obtemos

$$\frac{A(b-a)}{\|\varphi\|_1} \leq s,$$

lembrando que $A = \inf\{g(x,y); (x,y) \in [a,b]\times\mathbb{R}\}$. Assim, S é limitado inferiormente. Tomando

$$s_1 = \inf S,$$

vamos mostrar que se $\tilde{s} \in S$ e $t > \tilde{s}$ então $t \in S$. De fato, seja $\tilde{u}$ solução do problema (5.1), quando $s = \tilde{s}$, então $\tilde{u}$ é uma supersolução estrita do problema (5.1), quando $s = t$. Por outro lado, sabemos acima que o problema (5.1), quando $s = t$, tem subsolução estrita $\underline{u}$, com $\underline{u}(x) < \tilde{u}(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Analogamente, usando que T_t é fortemente crescente e compacto e pelo Teorema 2.3, segue que $t \in S$. Terminamos a prova. ∎

Com o Lema 5.1 e procedendo similiarmente a demonstração dos itens $(d)-(g)$ do Teorema 4.6, apresentamos o próximo resultado com a prova resumida

Teorema 5.3 *Seja $f : [a,b]\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo (5.2) − (5.6) acima. Então existe $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que o problema (5.1) não tem solução se $s < s_1$, tenha pelo menos uma solução se $s = s_1$ e pelo menos duas soluções se $s > s_1$.*

Demonstração: Pelo Teorema 5.2, existe $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que o problema (5.1) não tem solução se $s < s_1$ e tenha pelo menos uma solução se $s > s_1$. Do Lema 5.1 segue que, para cada $s_2 > s_1$, o conjunto de todos as possíveis soluções de (5.1), com $s \leq s_2$ é limitado a priori em $C^1[a,b]$. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de solução do problema (5.1), quando $s = t_n$, onde t_n é uma sequência decrescente tal que $t_n \longrightarrow s_1$. Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, existe uma subsequência tal que $u_{n_k} \longrightarrow u_0$ em $C^1[a,b]$, segue da continuidade do operador solução que u_0 será uma solução do problema (5.1), quando $s = s_1$. Para cada $s \leq s_2$ e cada $R > R(s_2)$ temos

$$\deg((L, N_s), B(R)) = 0,$$

onde $R(s_2)$ foi definido na demonstração do Lema 5.1, $B(R) := \{u \in C^1[a, b];\ \|u\|_{C^1} < R\}$ e $N_s : B(R) \longrightarrow C[a, b]$ é a aplicação dado por $N_s(u) = s\varphi(\cdot) - f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot))$. Além disso, pelo Teorema 3.6,

$$|\deg((L, N_s), \Omega)| = 1,$$

onde $s > s_1$ e $\Omega = \{u \in C^1[a, b];\ -r < u(x) < u_2(x) \text{ e } |u'(x)| \leq R_1(s), \forall x \in [a, b]\}$, sendo R_1 dado pelo Lema 5.1, $-r$ é uma subsolução estrita e u_2 uma supersolução estrita do problema (5.1). Tomando $R > \max\{|r| + R_1(s), R(s), \|u_2\|_C + R_1(s)\}$. Pela Propriedade 3.3,

$$\begin{aligned} \left|\deg\left((L, N_s), B(R)\backslash\overline{\Omega}\right)\right| &= \left|\deg\left((L, N_s), B(R)\right) - \deg\left((L, N_s), \overline{\Omega}\right)\right| \\ &= \left|\deg\left((L, N_s), \overline{\Omega}\right)\right| = 1. \end{aligned}$$

Pela Propriedade 3.1, existe $u \in B(R)\backslash\overline{\Omega}$ solução do problema (5.1), quando $s > s_1$. Completando a prova. ■

Apêndice A

Alguns conceitos e resultados de Álgebra Linear e Análise Funcional

Neste apêndice, faremos uma revisão concisa de certos tópicos de Álgebra Linear e Análise Funcional que envolvem espaços vetoriais normados e espaços de Banach. Visando abordar somente conceitos e resultados preliminares à dissertação, limitaremos nossa exposição aos espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais.

Definição A.1 *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma* **norma** *em X é uma função $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0,\infty)$ tal que*

1) $\|x\| = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$.

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, *para quaisquer* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $x \in X$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *para quaisquer* $x, y \in X$;

Um espaço vetorial X munido de uma norma $\|\cdot\|$ é dominado **espaço vetorial normado**.

Ao considerar a função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \|x - y\|$, para quaisquer $x, y \in X$, é possível mostrar que todo espaço vetorial normado é um espaço métrico.

Daqui em diante, ao mencionarmos os espaços X e Y, consideraremos espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{R}$, com suas respectivas normas, as quais denotaremos com o mesmo símbolo, $\|\cdot\|$, apenas por simplicidade de notação.

Definição A.2 *Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que X é um* **espaço de Banach** *se X for completo, ou seja, toda sequência de Cauchy em X converge.*

Lema A.1 *Sejam Y um espaço vetorial, M subespaço de Y e Y/M o espaço quociente de Y sob a relação de equivalência*

$$y \sim y' \quad \text{se, e somente se,} \quad y - y' \in M.$$

Se $\dim Y/M$ é finita, então existe um subespaço vetorial $N \subset Y$ de dimensão finita tal que $Y = M \oplus N$.

Demonstração: Suponha $\dim Y/M = n$. Seja $\{v_1, \cdots, v_n\}$ vetores de Y tais que $\{[v_1], \cdots, [v_n]\}$ é uma base de Y/M. Definamos N o subespaço gerado pelo conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$. Como N é um subespaço de dimensão finita, então N é fechado. Resta mostrar que $M \oplus N$. Seja $y \in M \cap N$, então $[y] = [0]$ e existem $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $y = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$, logo

$$[0] = [y] = \sum_{j=1}^{n} a_j [v_j].$$

Como $\{[v_1], \cdots, [v_n]\}$ é uma base de Y/M, segue que $a_1, \cdots, a_n = 0$ e, então, $y = 0$. Dado $y \in Y$, temos $[y] \in Y/M$ e, portanto, existe $b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$[y] = \sum_{j=1}^{n} b_j [v_j].$$

Daí, $y = \left(y - \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \right) + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \in M + N$. Portanto, concluímos a prova. ■

Definição A.3 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $T : X \longrightarrow Y$ é um* **operador linear** *ou uma* **transformação linear** *se, para quaisquer $x, z \in X$ e $a \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$T(x + z) = T(x) + T(z) \qquad e \qquad T(ax) = aT(x).$$

Denotaremos $T(x)$ por Tx, para $x \in X$, a menos que seja necessário fazer alguma distinção.

No caso $Y = \mathbb{R}$, dizemos que $T : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é um **funcional linear**.

Teorema A.1 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Se $\dim \operatorname{dom} T = n < \infty$ então $\dim \operatorname{Im} T \leq n$.*

Demonstração: Vamos mostrar que um conjunto arbitrário $\{v_1, \cdots, v_{n+1}\}$ de $\operatorname{Im} T$ é linearmente dependente e, assim, concluímos o resultado.

Como, para cada $j = 1, \cdots, n+1$, $v_j \in \operatorname{Im} T$, existe $x_j \in \operatorname{dom} L$ tal que $Tx_j = v_j$. Encontramos um conjunto $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\} \subset \operatorname{dom} L$ linearmente dependente, umas vez que $\dim \operatorname{dom} L \leq n$. Então, se $a_1 x_1 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1} = 0$, com algum $a_k \neq 0$. Assim,

$$0 = T(a_1 x_1 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1}) = a_1 v_1 + \cdots + a_{n+1} v_{n+1}.$$

Portanto $\{v_1, \cdots, v_{n+1}\}$ é linearmente dependente. ■

Definição A.4 *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear. Dizemos que T é uma* **projeção** *se $T^2 := T \circ T = T$.*

Definição A.5 *Seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Dizemos que T é* **contínuo** *se existir $c > 0$ tal que*

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \text{ para todo } x \in X.$$

Proposição A.1 *Seja X um espaço vetorial normado de dimensão finita. Todo operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é contínuo.*

Os próximos teoremas são resultados clássicos e bastante conhecidos da Análise Funcional. Não apresentaremos suas demonstrações aqui, porém elas podem ser encontradas na seção 1.1 da referência [6], por exemplo.

Teorema A.2 (Teorema de Hahn-Banach) *Sejam X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e seja $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que, para $x, y \in X$ e $\lambda > 0$, tem-se*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad e \qquad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

Seja G um subespaço vetorial de X e seja $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que

$$g(x) \leq p(x),\ \forall x \in G.$$

Então existe um funcional linear $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende g, isto é, $f(x) = g(x)$, para todo $x \in G$, e $f(x) \leq p(x)$, para todo $x \in X$.

Corolário A.3 *Seja X um subespaço vetorial normado e seja G um subespaço vetorial de X. Se $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, então existe $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que estende g.*

As definições e resultados sobre operadores compactos utilizados nessa dissertação serão descritas abaixo. O leitor poderá encontrar todos os detalhes nos livros [6] e [17].

Definição A.6 *Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que o operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é* **compacto** *se T é contínuo e $\overline{T(M)} \subset Y$ for compacto, para todo $M \subset X$ limitado.*

Lema A.2 *Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é um operador compacto se, e somente se, para qualquer sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, a sequência $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em Y.*

Proposição A.2 *Sejam X, Y, Z e W espaços vetoriais normados. Sejam $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear contínuo e $S : Z \longrightarrow W$ um operador linear compacto. Se $W = X$ então $T \circ S$ é um operador compacto. Se $Y = Z$ então $S \circ T$ é um operador compacto.*

Como dito antes, o leitor encontrarar a demonstração do próximo resultado com os detalhes nas seções 8.2 e 8.3 do livro [17].

Teorema A.4 *Sejam $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto e $\lambda \neq 0$ um autovalor de T, isto é, $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}$, então*

$$\dim\left(\mathrm{Ker}[(T - \lambda I)^n]\right) < \infty,$$

para $n \in \mathbb{N}$, e existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathrm{Ker}[(T - \lambda I)^r] = \mathrm{Ker}[(T - \lambda I)^{r+1}] = \mathrm{Ker}[(T - \lambda I)^{r+2}] = \cdots .$$

Teorema A.5 (Alternativa de Fredholm) *Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto, então*

(a) $\mathrm{Ker}(I - T)$ *tem dimensão finita,*

(b) $\mathrm{Im}(I - T)$ *é fechado,*

(c) $\mathrm{Ker}(I - T) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(I - T) = X$

Teorema A.6 *Sejam $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto e $\dim X = \infty$, então só ocorre um dos casos: o número de autovalores é finito ou é uma sequência de autovalores de autovalores convergindo para 0.*

Apêndice B

Alguns resultados clássicos

Neste apêndice, enunciaremos, sem prova, os resultados que utilizamos durante a elaboração da dissertação.

Os próximos resultado pode ser consultado no livro [18].

Teorema B.1 (Arzelá-Ascoli) *Seja $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma sequência de funções equicontínua e equilimitada então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência uniformemente convergente.*

Teorema B.2 (Teorema da Aplicação Inversa) *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k, com $k \geq 1$, no abero $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $a \in U$ é tal que $J_f(a) \neq 0$ então existe uma bola aberta $B := \{x \in \mathbb{R}^m; \|x-a\| < \delta\} \subset U$ tal que a restrição $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V(a)$ contendo $f(a)$, isto é, $f|_B$ é uma bijeção diferenciável cuja inversa também é diferenciável.*

Teorema B.3 (Teorema de Borel-Lebesgue) *Toda cobertura aberta $K \subset \cup A_\lambda$ de um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ admite uma subcobertura finita $K \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_k}$.*

O leitor poderá encontra os próximos resultados em [9].

Teorema B.4 (Teorema da Convergência Dominada) *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequências de funções em $L^1(\Omega)$ satisfazendo*

(a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, *qtp* $x \in \Omega$,

(b) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_n(x)| \leq g(x)$, *qtp* $x \in \Omega$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\displaystyle\int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$.

Definição B.1 *Uma função $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ é* **absolutamente contínua** *em $[a,b]$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que sempre que uma sequência finita de subintervalos disjuntos pareados (x_k, y_k) de $[a,b]$, com $x_k, y_k \in [a,b]$, satisfaz*

$$\sum_k (y_k - x_k) < \delta \Longrightarrow \sum_k |F(y_k) - F(x_k)| < \varepsilon.$$

Denotaremos a coleção de todas as funções absolutamente contínuas $[a,b]$ por $AC[a,b]$.

Teorema B.5 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Seja* $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, *onde* $-\infty < a < b < +\infty$, *as seguintes afirmações são equivalentes*

(a) F *é absolutamente contínua em* $[a,b]$.

(b) $F(x) - F(a) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, *para alguma* $f \in L^1[a,b]$.

(c) F *é diferenciável qtp em* $[a,b]$, $F' \in L^1[a,b]$, *e* $F(x) - F(a) = \displaystyle\int_a^x F'(t)\,dt$

O próximo resultado é uma propriedade importante do espaço de Sobolev $W^{2,p}(a,b)$, conhecidas como *imensões de Sobolev*, que pode ser encontradas detalhadamente em [6, Teorema 8.8].

Teorema B.6 *A imensão*

$$W^{2,p}(a,b) \hookrightarrow L^{\infty}(a,b)$$

é contínua, para todo $1 \leq p \leq \infty$. *Além disso, a imensão*

$$W^{2,p}(a,b) \hookrightarrow C^1[a,b]$$

é compacta, para todo $1 < p \leq \infty$.

O resultado a seguir é um teorema que se encontra no livro [8, página 295].

Teorema B.7 *Seja* $u \in W^{1,p}(a,b)$, *para* $1 < p \leq \infty$. *Então* u *é diferenciável qtp em* $[a,b]$ *e a derivada clássica coincide com a derivada fraca em qtp* $[a,b]$.

Referências Bibliográficas

[1] Almeida, O. B., *Teoria do Grau e Aplicações.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, 2006.

[2] Amann, H.; Crandall, M., *On some existence theorem for semilinear elliptic equations.* Indiana Univ. Math. J. **27**, 770−790, 1978.

[3] Amann, H.; Hess, P., *A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **84**, 145 − 151, 1979.

[4] Ambrosetti, A.; Malchiodi, A. *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge University Press, 2007.

[5] Bony, J. M., *Principe du maximum dans les espaces de Sobolev*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **265**, 333−336, 1967.

[6] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, 1^a ed. Universitex: Springer-Verlag New York, 2010.

[7] Coster, C. De; Habets, P., *Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems: classical and recent results*, F. Zanolin (Ed.), Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, CISM-ICMS, Vol. 371, Springer, New York, pp. 1−78, 1996.

[8] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, volume 19. American Mathematical Society, 1998.

[9] Folland, G. B., *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications*, 2^a edition, Wiley, 1999.

[10] Fabry, C.; Mawhin, J.; Nkashama, M. N., *A multiplicity result for periodic solutions of forced nonlinear second order ordinary differential equations*, Bull. London Math. Soc. **18**, 173−180, 1986.

[11] Gaines, R. E.; Mawhin, J. *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations*, 1^a ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1977.

[12] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Classics in Math., Springer, 1998.

[13] Hofer, H., *Existence and multiplicity result for a class of second order elliptic equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A **88**, no. 1−2, 83−92, 1981.

[14] Kazdan, J. L.; Warner, F. W., *Remarks on some quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure. Appl. Math, vol. 28, 567−597, 1975.

[15] Knobloch, H. W., *An existence theorem for periodic solutions of nonlinear ordinary differential equations*, Michigan Math. J. **9**(4), 303−309, 1962.

[16] ———, *Comparison theorem for nonlinear second order differential equations.* Journ. Diffential Equations **1**, 1−25, 1965.

[17] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1978.

[18] Lima, E. L., *Análise Real: Funções de n Variáveis*, vol. 2, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2013.

[19] Mawhin, J., *Ambrosetti-Prodi type results in nonlinear boundary value problems*, In: Differential Equations and Mathematical Physics (Birmingham, AL, 1986), Lecture Notes in Math. 1285, Springer, Berlin, 290−313 (1987)

[20] ———, *First order ordinary differential equations with several periodic solutions*, Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP), vol 38, 257−267, 1987.

[21] ———, *Points fixes, points critiques et problèmes aux limites*, Sém. Math. Sup, nº 92, Presses Univ. Montréal, 1985.

[22] ———, *Recent results on periodic solutions of differential equations* in "Intern. Conf. on Differential Equations", Academic Press, New York, 537−556, 1975.

[23] Mawhin, J.; Rebelo, C.; Zanolin, F., *Continuation theorems for Ambrosetti-Prodi type periodic problems*, Comum. Contemp. Math., **2**, 87−126, 2000.

[24] Mawhin, J.; Schmitt K., *Upper and lower solutions and semilinear second order elliptic equations with non-linear boundary conditions*, Proc. Royal Soc. Edimburgo, **97A**, 199−207, 1984.

[25] Paiva, F. O. De; Presoto, A. E., *A Neumann problem of Ambrosetti-Prodi type*, J. Fixed Point Theory Appl. **18**, 189−200, 2016.

[26] Rachunkorá, I., *An existence theorem of the Leray-Schauder type for four-point boundary value problems*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica **100** (1991), 49−59.

[27] ———, *Upper and lower solutions and topological degree*, Journal Math. Anal. Appl. **234** (1999), 311−327.

[28] Rudolf, B., *An existence and multiplicity result for a periodic boundary value problem*, Math. Bohemica, **133**(1), 41−61, 2008.

[29] Souza, C. S., *Existência de soluções periódicas e permanência de soluções de equações diferenciais funcionais com retardo.* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", 2018.

[30] Torres, P. J.; Zhang, M., *A monotone iterative scheme for a nonlinear second order equation based on a generalized anti-maximum principle*, Math. Nachr., **251**, 101−107, 2003.