

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROFMAT - PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**Geometria Projetiva no ensino do espaço  
tridimensional e na estrutura de jogo de Dobble**

Maicon Donizetti Dias Pavaneli

São Carlos - SP  
2019



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROFMAT - PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**Geometria Projetiva no ensino do espaço  
tridimensional e na estrutura de jogo de Dobble**

Maicon Donizetti Dias Pavaneli

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato José de Moura

**São Carlos - SP  
Fevereiro de 2019**

Donizetti Dias Pavaneli, Maicon

Geometria Projetiva no ensino do espaço tridimensional e na estrutura de  
jogo de Dobble / Maicon Donizetti Dias Pavaneli. -- 2019.  
100 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São  
Carlos, São Carlos

Orientador: Prof. Dr. Renato José de Moura

Banca examinadora: Prof. Dr. Sergio Luiz Zani ,Prof. Dr. Wladimir Seixas

Bibliografia

1. Geometria Projetiva. I. Orientador. II. Universidade Federal de São  
Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

Bibliotecário(a) Responsável: Ronildo Santos Prado – CRB/8 7325



# UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

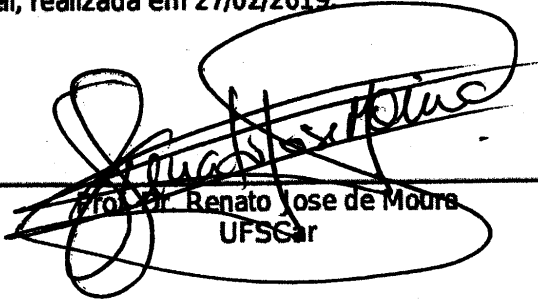
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

---

## Folha de Aprovação

---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Maicon Donizetti Dias Pavanell, realizada em 27/02/2019:



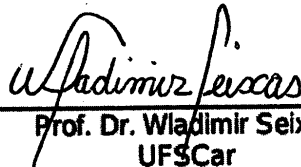
---

Prof. Dr. Renato Jose de Moura  
UFSCar



---

Prof. Dr. Sérgio Luís Zani  
USP



---

Prof. Dr. Wladimir Seixas  
UFSCar



# Agradecimentos

Dedico este trabalho às pessoas mais presentes em minha vida: Meu pai que veio a falecer. À minha mãe que é minha estrutura. Minhas queridas irmãs, Tais, Giseli e Camila e meus sobrinhos, Guilherme, João, Iara, Pietro e Luka. Aos meus queridos alunos que se dedicaram tanto por esse projeto, mesmo faltando alguma estrutura sempre apoiaram e tiveram paciência. À escola Estadual Professor Guido Segalho, à direção e coordenação pelo apoio. À equipe docente e coordenação do PROFMAT local por tornarem o programa realidade na UFSCar. Ao meu orientador Prof. Dr. Renato José de Moura. Meus amigos Murilo, Gabriela, Neto, Márcio, Flávia, Janaina, Jeferson e Fábio, que me ajuda em tudo inclusive nos desenhos, Silvio, Marcela em especial, Pablo meu melhor amigo, Professor Dr. Rondinelli Herculano que inspirou toda uma geração Tambauense. Aos colegas de mestrado, viagens, almoços e angústias.

Agradeço também a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), sem o qual este trabalho não seria possível.

“Somos simplesmente linhas paralelas, diz a geometria que no infinito elas se encontram”.





# Resumo

A geometria projetiva nos oferece os meios para demonstrar e descobrir as propriedades das figuras, possibilitando compreender matematicamente o estudo das propriedades descritivas das figuras geométricas. Poncelet ofereceu seus próprios meios para demonstrar e descobrir propriedades de figuras tendo assim o fim da “idade” intuitiva da Geometria Projetiva. Estudamos neste trabalho os fundamentos básicos da Geometria Projetiva, sua representação e manipulação. Utilizamos uma sequência didática baseada em Engenharia Didática, primeiro investigando e, finalmente, analisando a posteriori. São apresentadas atividades na qual os alunos aprenderam algumas técnicas para melhor representação espacial usando o Geogebra. No final é apresentado um jogo, chamado jogo de Dobble, no qual fizemos uma exposição de conceitos matemáticos que envolvem a estrutura do jogo.



# Abstract

Projective Geometry gives us the means to demonstrate and discover properties of figures, it is a possibility to understand mathematically the study of the descriptive properties of geometric figures. And after Poncelet offering his own means to demonstrate and discover properties of figures having thus the end of the intuitive “age” of Projective Geometry. We study in this work the basic fundamentals of the projective geometry, its representation and manipulation. We used a didactic sequence based on didactic engineering, first investigating and finally a posteriori analysis. Activities will be presented where students will learn some techniques for better spatial representation using Geogebra. In the end a game is presented, called Dobble’s game, in which we made an exposition of mathematical concepts that involve the structure of the game.



---

# Lista de Figuras

2.1	Metodologia da Engenharia Didática . . . . .	27
3.1	Estrada. . . . .	32
3.2	Perspectiva Isométrica . . . . .	33
3.3	Perspectiva Cavaleira . . . . .	33
3.4	Perspectiva Cônica . . . . .	34
3.5	Técnica de sobreposição . . . . .	35
3.6	Mudança de Dimensão . . . . .	35
3.7	Linha de Fuga . . . . .	36
3.8	Linha do Horizonte . . . . .	36
3.9	Ponto de Fuga (escolha) . . . . .	37
3.10	Retângulo qualquer . . . . .	37
3.11	Ponto no infinito . . . . .	38
3.12	Ponto de profundidade . . . . .	38
3.13	Paralela DF . . . . .	39
3.14	Paralelepípedo . . . . .	39
3.15	Dois Pontos de Fugas . . . . .	40
3.16	Segmento $CD$ . . . . .	40
3.17	Ligamentos dos vértices . . . . .	41
3.18	Segmentos Paralelos . . . . .	41
3.19	Desenho Final . . . . .	42
3.20	Automóvel . . . . .	42
3.21	Jogo Original Dobble . . . . .	44
3.22	Representação no Plano Cartesiano . . . . .	46

3.23 Retas no Plano . . . . .	46
3.24 Montagem das Peças . . . . .	47
3.25 Planetas . . . . .	48
3.26 Estrutura do Jogo . . . . .	49
3.27 Quantidade de cartões . . . . .	50
4.1 Escola Estadual Professor Guido Segalho. . . . .	54
4.2 Sala de informática da Escola Estadual Professor Guido Segalho. . . . .	54
4.3 Perspectiva Isométrica . . . . .	55
4.4 Perspectiva Cavaleira . . . . .	55
4.5 Reprodução da atividade . . . . .	56
4.6 Análise da Atividade 1 . . . . .	56
4.7 Vencedor da foto com efeito de Sobreposição . . . . .	57
4.8 Mudança de Dimensão . . . . .	57
4.9 Análise da atividade 2 . . . . .	58
4.10 Paralelepípedo . . . . .	59
4.11 Desenho Final . . . . .	60
4.12 Análise das atividades 3 e 4 . . . . .	60
4.13 Automóvel . . . . .	61
4.14 Carros feitos pelos alunos . . . . .	62
4.15 Carros feitos pelos alunos no Geogebra. . . . .	62
4.16 Análise da atividade 6 . . . . .	65
4.17 Ficha de Avaliação . . . . .	67
A.1 Hexágono Inscrito de Pascal. . . . .	72
A.2 Obra De Lineis Rectis. . . . .	73
A.3 Projeção Central . . . . .	74
A.4 Projeção Parelela. . . . .	74
A.5 Projeção Plana Central. . . . .	75
A.6 Projeção Plana Paralela. . . . .	75
A.7 Pontos Sob Restrição. . . . .	76

A.8 Buscando Projeção . . . . .	79
A.9 Quadrilátero Completo. . . . .	81
A.10 Seções Cônicas . . . . .	83
A.11 Seções Esferas de Dandelin. . . . .	84
A.12 Razões Anarmônicas em um círculo e em uma Elipse. . . . .	85
A.13 A Configuração de Desargues no Plano. . . . .	94
A.14 Papus. . . . .	95





# Lista de Tabelas

3.1	Tabela preenchida pelos alunos . . . . .	44
3.2	Tabela preenchida pelos alunos . . . . .	45
3.3	Tabela preenchida pelos alunos . . . . .	45
3.4	Tabela preenchida pelos alunos . . . . .	45
3.5	Expressões Algébricas Valor numérico . . . . .	51



---

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução, objetivos e justificativa</b>	<b>21</b>
<b>2</b>	<b>Metodologia de Pesquisa</b>	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>Planejamento das Atividades</b>	<b>29</b>
3.1	Análise Preliminares . . . . .	29
3.2	A Concepção e a Análise a Priori da sequência didática . . . . .	30
3.3	Sequência Didática . . . . .	31
3.3.1	Atividade 1 . . . . .	31
3.3.2	Atividade 2 . . . . .	34
3.3.3	Atividade 3 . . . . .	36
3.3.4	Atividade 4 . . . . .	39
3.3.5	Atividade 5 . . . . .	42
3.3.6	Atividade 6 . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Aplicação do Projeto e Análise dos Resultados</b>	<b>53</b>
4.1	Local da Aplicação . . . . .	53
4.2	Análise da Atividade 1 . . . . .	54
4.3	Análise da Atividade 2 . . . . .	57
4.4	Análise das Atividades 3 e 4 . . . . .	58
4.5	Análise da Atividade 5 . . . . .	60
4.6	Análise da Atividade 6 . . . . .	63
4.7	Avaliação Final . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>69</b>

<b>A Geometria Projetiva</b>	<b>71</b>
A.1 Contexto Histórico da Geometria Projetiva . . . . .	71
A.2 Elementos Euclidianos da Geometria Projetiva . . . . .	73
A.2.1 Projeções . . . . .	73
A.2.2 A razão cruzada (ou anarmônica, ou dupla) . . . . .	76
A.2.3 Aplicação ao quadrilátero completo . . . . .	80
A.2.4 Cônicas . . . . .	81
A.2.5 Propriedades Projetivas das Cônicas . . . . .	84
A.3 Considerações geométricas na Álgebra Linear . . . . .	85
A.4 O Plano Projetivo $\mathbb{R}\mathcal{P}^2$ . . . . .	91
A.5 Geometria em $\mathbb{R}\mathcal{P}^2$ e sua relevância para a Geometria em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	93
A.6 Considerações finais . . . . .	98
A.6.1 Dualidade . . . . .	98
A.6.2 Axiomas de extensão . . . . .	99
A.6.3 Princípio da Dualidade . . . . .	100
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>101</b>

---

# 1. Introdução, objetivos e justificativa

Uma das grandes importâncias da Geometria é sua representação seja no plano bidimensional, seja no espaço tridimensional. Neste sentido no currículo do Estado de São Paulo (2011) a Geometria diz respeito diretamente à percepção de formas e de relações entre elementos de figuras planas e espaciais, à construção e à representação de formas geométricas, existentes ou imaginadas, e à elaboração de concepções de espaço que sirvam de apoio para a compreensão do mundo físico que nos cerca. No Ensino Fundamental, a preocupação inicial é o reconhecimento, a representação e a classificação das formas planas e espaciais, preferencialmente trabalhadas em contextos concretos com os alunos de sexto e sétimo ano. Certa ênfase na construção de raciocínios lógicos, de deduções simples de resultados a partir de outros anteriormente conhecidos poderá ser a tônica dos trabalhos no oitavo e nono ano, ficando a espacial e analítica mais para o ensino Ensino Médio. E está é a tônica na maioria dos currículos, mas na contramão disso, o currículo do Estado de São paulo entende que a geometria deve ser tratada em todos os anos, os temas podem aparecer tanto nas séries do Ensino Fundamental quanto nas do Ensino Médio, sendo que a diferença será a escala de tratamento dada a cada tema.

Alguns novos conteúdos matemáticos foram formalmente incluídos nos currículos em alguns estados do Brasil. Neste estados há a orientação do conteúdo estruturante Geometrias Não-Euclidianas para o Ensino Fundamental e Médio nos seguintes desdobramentos: Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica; Noções Básicas de Geometrias Não-Euclidianas, sendo que nessa última incluem-se a Geometria Projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte), a Geometria Topológica e a noção de Geometria dos Fractais. O objetivo é criar no aluno a habilidade de representar objetos em três dimensões, fortalecer os conceitos de Geometria Euclidiana, entre outros.

Diversos autores apontam que a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática, como pode ser observado em (PAVANELLO, 1993) e pelos autores lá indicados, e muitas vezes se confunde seu ensino com o ensino sobre medidas. Entretanto sabe-se que seu papel é fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno, (PCN, 1997, p. 39), desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

Ainda de acordo com (PCN, 1997, p. 39), questões geométricas despertam o

interesse dos adolescentes de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece.

As vezes acreditamos que o conhecimento seja intuitivo e que certas informações façam parte do cotidiano dos estudantes. Porém não é bem isso que observamos pois muitos alunos não conseguem criar uma relação entre a geometria e o mundo ao seu entorno. Percebemos uma grande dificuldade na Geometria Espacial pelo fato deles não conseguirem representar figuras tridimensionais. De acordo com Wolchover (2012) “[...] parece que a habilidade de desenho real depende de três fatores: como uma pessoa percebe a realidade, quão bem ela se lembra da informação visual de um momento para o outro, e quais elementos de um objeto ele ou ela seleciona para realmente desenhar [...]” (em tradução livre), ou seja, é possível que os estudantes percebam de maneira equivocada aspectos como o tamanho ou a forma de certas figuras geométricas na seleção de elementos quando estão em trabalhos de desenhos geométricos.

Neste sentido, trazer os conceitos Geometria Projetiva para a sala de aula pode auxiliar nestas questões além de fugir de um currículo tradicional. Segundo (KLINE, 1976, p. 22–23) o currículo tradicional tornou-se demasiado tradicional, sofre do defeito mais grave que se pode lançar sobre qualquer currículo: falta de motivação.

Apresentaremos aqui uma proposta de algumas atividades sobre Geometria Projetiva e algumas discussões sobre as representações que podem ser utilizadas para uma melhor compreensão dos conceitos e propriedades matemáticas. Dentro desta proposta está presente a utilização de diversas ferramentas, como a utilização de tecnologias em sala de aula e o uso de jogos, visando enriquecer o aprendizado do conteúdo em questão.

Nosso objetivo principal é o de buscarmos contribuir com as relações de Geometria Projetiva, desenho em perspectiva entre outros, sendo que a partir destes conceitos apresentarmos uma sequência didática que introduz a Geometria Projetiva a alunos do nono ano, auxiliando no aprimoramento da visão espacial, além de agregar recursos computacionais em sala de aula. Tais habilidades em tecnologias, tão necessárias nos dias atuais, são utilizadas como facilitador no aprendizado da matemática, além do uso de jogos para motivação dos alunos.

Temos ainda como objetivo adicional despertar a curiosidade do aluno e instigar a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, descobrindo novos conceitos que servirão no futuro para o desenvolvimento do raciocínio lógico com estruturação do pensamento e a melhoria na qualidade de compreensão.

Para tanto é esperado que seja feito um reforço de conteúdos matemáticos já estudados durante o ensino fundamental, tais como, retas (paralelas, concorrentes, perpendiculares), ponto, plano cartesiano, equação da reta (função do primeiro grau) e expressões algébricas.

A metodologia a ser utilizada nesta proposta é conhecida como Engenharia Didática. Tal teoria baseada em quatro grandes eixos e proveniente de Michèle Artigue (ARTIGUE, 1996), busca relacionar a pesquisa com a ação no sistema de ensino, levando-se em consideração o lugar da aplicação das metodologias de ensino em questão, além de trazer discussões relevantes apresentadas pelo aplicador.

Nosso trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2 apresentamos a metodologia de pesquisa que pautou o desenvolvimento desse trabalho.

No Capítulo 3 apresentamos a uma proposta de aplicações em sala de aula de alguns conceitos envolvendo a Geometria Projetiva, utilizando-se de exemplos e ferramentas computacionais. Além de explorar um jogo denominado de Dobble.

No Capítulo 4 trazemos a análise e o local da aplicação da sequência proposta, bem como algumas discussões a respeito do trabalho.

No último Capítulo, apresentamos as nossas considerações finais sobre o projeto.

Finalmente no Apêndice A, estudamos diversos resultados matemáticos da Geometria Projetiva.





## 2. Metodologia de Pesquisa

Para ser um bom educador precisamos que nossos conhecimentos e estratégia de ensino estejam sempre atualizados. Um aspecto fundamental para o bom desenvolvimento da didática em sala de aula é saber aplicar e elaborar uma sequência de ensino, fazendo com que o aluno tenha uma maior interação da teoria com a prática para desenvolver determinadas competências e habilidades contidas no documento das Diretrizes Curriculares (PCN, 1997) .

Piaget e Vygotsky são os grandes colaboradores teóricos para a elaboração de situações de aprendizagem (LEMOS; GIORGI, 2010), entendem que o conhecimento é adaptação e uma construção individual, e que aprendizagem e o desenvolvimento são autorregulados. Enfatizamos que para Vygotsky, o conhecimento é construído do social para o individual e não o contrário, e que Piaget em suas pesquisas não enfatiza tal aspecto.

Com as contribuições de Piaget e Vygotsky, Guy Brousseau (BROUSSEAU, 2010) e Michele Artigue (ARTIGUE, 1996) investigaram as interações entre professores, alunos e o conhecimento, instigando os alunos na busca do saber, considerando o erro parte do processo de aprendizagem. Defendem que a idéia é garantir que todos possam aprender, apropriando-se de seus principais saberes e, sobretudo, da construção do raciocínio.

Em NovaEscola (2009) Guy Brousseau afirma que a base das situações didáticas é a garantia de condições para a construção do conhecimento matemático organizadas em função dos saberes próprios da disciplina, consistindo em três tipos de situação, “tomadas de decisões” que colocam os alunos em ação, “formulações de idéias” e as “discussões”, momento em que o grupo discute estratégias de resolução. Defende que os alunos sejam colocados diante de jogos e situações problemas, para criar estratégias usando os conhecimentos já adquiridos, capacitando-os na realização de operações de seleção, e sejam capazes de interpretar e organizar informações, obtendo assim várias formas de ação, criando o processo de construção do conhecimento matemático.

Delineada por Brousseau e estruturada por Michèle Artigue (ARTIGUE, 1996), uma metodologia chamada de “Engenharia Didática” foi idealizada com o intuito de colocar o ensino como um projeto social, valorizando o saber prático do professor, tendo em vista que

as teorias aprendidas fora do ambiente escolar são insuficientes para atrair a complexidade do sistema, e uma certa preocupação com o “achismo” presente no domínio educativo, que abre espaço para tipos de experiências em sala de aula, descolada da fundamentação científica.

Essa Engenharia Didática é composta das seguintes fases: análise a priori, a experimentação, a análise a posteriori e validação.

Inicialmente estudamos as hipóteses diagnosticadas, em que o ambiente será desenvolvido, quais são as variáveis escolhidas, onde se torna possível ter algum tipo de controle relacionando o conteúdo estudado com as atividades que os alunos possam desenvolver para aprender os conceitos em questão e entendimento sobre o público alvo.

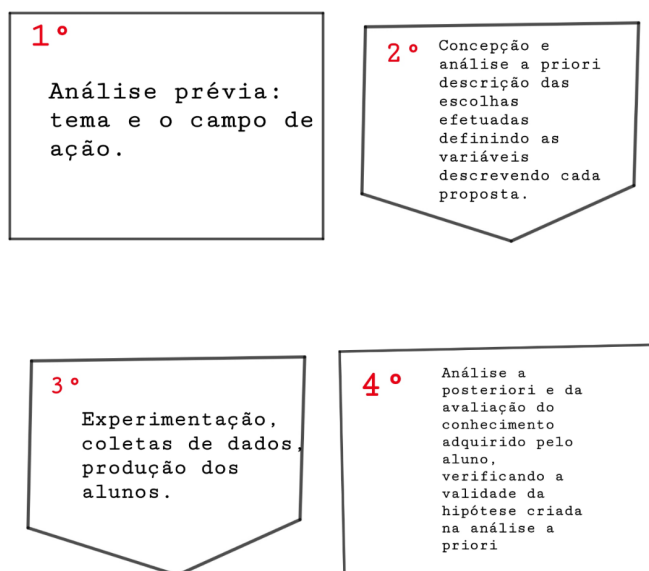
A experimentação é a fase de aplicação em sala de aula, é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática.

Por fim a análise a posteriori, refere-se ao conjunto de resultados obtidos por ocasião da aplicação da sequência didática, é a parte efetivamente experimental da pesquisa, na qual se verifica quanto o processo foi positivo e legitimá-lo ou não pelo processo de validação.

POMMER (2013 apud PAIS, 2002b, p. 26) destaca que a Engenharia Didática “é uma representação de uma maneira de compreensão entre teoria e prática, é uma metodologia que nos permite estabelecer vínculo com a questão da formação de conceitos matemáticos.”

Essa metodologia imprime uma rotina criativa e autônoma no aluno. O professor obtém um domínio da formulação das situações de aprendizagem, o que aprimora o conhecimento. Nos próximos capítulos ilustraremos os fundamentos da Engenharia Didática no ensino da Geometria Projetiva. Logo seguiremos a seguinte sequência.

Figura 2.1: Metodologia da Engenharia Didática



Fonte: do autor, 2018.



## 3. Planejamento das Atividades

Como já apresentado, este projeto visa explorar conceitos da Geometria Projetiva para uma melhor fixação de alguns conceitos de Álgebra, de Geometria Euclidiana e Analítica e obter uma melhor habilidade numa representação tridimensional. Tais conteúdos já foram abordados durante o ensino fundamental e temos como objetivo ajudá-los a terem uma melhor capacidade na representação tridimensional e também que revisem conteúdos, tendo assim um melhor aproveitamento no Ensino Médio.

A proposta consiste em aplicar um conjunto de seis atividades teóricas e práticas, como uma sequência didática. Dentre estas atividades se encontra um jogo pedagógico que acreditamos ser um agente facilitador da aprendizagem. O regaste de alguns conceitos serão feitos durante as atividades.

Para a aplicação da sequência didática serão necessários a utilização de um aplicativo de código livre, nesta proposta é sugerido o Geogebra, além do uso de réguas, esquadros, papéis entre outros, para serem confeccionados os trabalhos manuais. O uso deste aplicativo pode ser utilizado tanto em computadores quanto em aparelhos celulares, o que facilita a aplicação. Para a exposição dos conteúdos serão necessários ainda data-show, cartolinas, listas, entre outros, conforme o planejamento na atividades propostas.

Recomenda-se que os alunos tenham certa habilidade com o aplicativo Geogebra, pois pode ocorrer muito atraso nas aplicações das atividades. Neste caso, uma sugestão é que durante o ano letivo e dependendo da disponibilidade, sejam explorados os recursos computacionais do programa em questão como em resoluções de sistemas lineares (graficamente) entre outros conceitos.

Tomamos inicialmente, no Apêndice A, o cuidado de abordar conceitos, definições e algumas demonstrações de Geometria Projetiva. Brousseau (1986) tinha uma preocupação com as experiências em sala de aula que não tivesse fundamento científico.

### 3.1 Análise Preliminares

Uma das fases da metodologia da Engenharia didática é uma análise do que será abordado. Aplicaremos aqui uma sequência didática envolvendo o tema Geometria

Projetiva, um tema não pertencente ao currículo básico. Deixo destacado que não estamos a defender a inclusão do conteúdo de Geometria Projetiva como objeto de estudo em nível curricular, mas sim propormos a utilização de situações-problemas envolvendo contextos situados na Geometria Projetiva no ensino de Matemática do ciclo básico. Queremos aqui mostrar como técnicas da Geometria Projetiva podem ampliar nossa visão de espaço e resgatar ideias de temas já abordados propondo atividades diversas, alternando momentos individuais, em grupo, usando aulas expositivas e recurso de jogos, levando em conta a dificuldade e as contribuições que possam promover.

Decidimos no projeto apresentar conceitos da Geometria Projetiva em que baseado nela, ajudaremos a desenvolver as habilidades de espaço e forma de figuras bidimensionais e tridimensionais, e resgatar conceitos já estudados.

## 3.2 A Concepção e a Análise a Priori da sequência didática

Determinamos nessa fase as variáveis macrodidáticas que nos ajudarão na caracterização e na sequência didática envolvendo a Geometria Projetiva. A escolha de situações-problemas como recursos didáticos, contextualizadas em Perspectiva. A realização das atividades em grupos valorizando a comunicação, a utilização de jogos, todas essas escolhas foram analisadas segundo as concepções de (BROUSSEAU, 1996a; BROUSSEAU, 1996b).

A partir das variáveis macrodidáticas, foram realizadas algumas escolhas didáticas: o ano do ensino fundamental em que esse projeto poderia ser aplicado, dos sujeitos de pesquisa e dos meios que pudessem viabilizar a elaboração e aplicação da sequência didática. Desta maneira, providenciamos as autorizações necessárias para a aplicação da pesquisa, planejando o número de aulas, datas e horários de acordo com as necessidades. Essas escolhas visam utilizar e enfatizar conceitos da Geometria Analítica, conceitos algébricos e Euclidianos, abordados dentro de contexto da Geometria Projetiva que incentivará e estimulará os alunos. Esse projeto conta com seis atividades, envolvendo representação e construção de figuras tridimensionais com auxílio da Geometria Projetiva, e a partir desse conceitos construir a estruturação matemática do jogo de Dobble.

Na Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SECRETARIA DE EDUCAÇÃO, 2011), há alguns conjuntos de habilidades sugeridas no ensino de Geometria, entre elas estão

- i) Saber identificar e classificar formas planas e espaciais em contextos concretos e por meio de suas representações em desenhos e em malhas.

- ii) Compreender informações transmitidas em tabelas e gráficos.
- iii) Saber construir gráficos elementares (barras, linhas, pontos) utilizando escala adequada
- iv) Saber planificar e representar (em vistas) figuras espaciais.
- v) Saber traduzir problemas expressos na linguagem corrente em equações. Escrever equações e seus valores numéricos.
- vi) Compreender e usar o plano cartesiano para a representação de pares ordenados, bem como para a representação das soluções de um sistema de equações lineares.
- vii) Saber as construções de retas no plano cartesiano.

Com este projeto esperamos resgatar diversas destas habilidades, uma vez que muitos dos conceitos de Geometria já foram vistos em outros momentos.

### 3.3 Sequência Didática

De acordo com Pais (2002a, p. 102) a sequência didática é uma das etapas mais importantes “para garantir a proximidade dos resultados práticos com a análise teórica”. Ainda segundo Pais, “uma sequência didática é formada por um determinado número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática”.

Descrevemos a seguir a sequência didática proposta. Para desenvolver a atividade é necessário que os alunos tenham acesso ao Geogebra e o professor a um projetor.

#### 3.3.1 Atividade 1

Nessa primeira atividade usaremos a imagem de uma estrada projetada no quadro, mostrando a figura tridimensional quando representada no plano bidimensional, tendo como objetivo despertar a curiosidade do aluno e prepará-lo para a definição de perspectiva.

Figura 3.1: Estrada.



Ao apresentar essa figura é necessário um questionamento para que possamos abstrair as principais ideias para formularmos a definição de perspectiva.

- Questionar sobre o que sabem de retas paralelas e concorrentes.
- Se estão observando uma imagem tridimensional.
- Como uma imagem desenhada em uma folha(plano) pode ter uma profundidade.
- E a última é se as faixas brancas que limitam a estrada se encontram.

As respostas devem ser testadas dando assim ao aluno o papel de ator numa investigação, proporcionando uma melhor compreensão da situação espacial colocada, vislumbrando o seu encadeamento e fundamentação. Após ouvirmos cada resposta, apresentaremos no quadro a definição de algumas perspectivas, que pode ser definida como um recurso que utiliza o efeito visual de linhas convergentes (que se direciona para o mesmo ponto para criar a ilusão de tridimensionalidade do espaço e das formas quando estas são representadas sobre uma superfície plana como a do papel de desenho. Observamos que será muito importante o uso de outros desenhos e figuras para exemplificar esses conceitos.

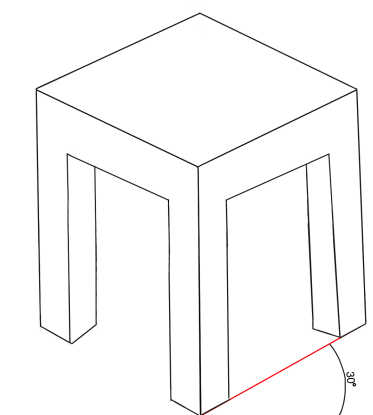
Dando sequência a atividade apresentaremos a eles três tipos de perspectivas. Esta etapa será importante porque iremos investigar qual a habilidade deles em representar uma figura tridimensional sem usar técnica, só pela observação. Usaremos para isso uma figura em Perspectiva Isométrica e uma em Perspectiva Cavaleira. Essas duas figuras propostas na atividade serão só compostas por retas(para facilitar a representação), e usaremos o Geogebra para representa-las. Ao final do encontro, iremos definir a Perspectiva Cônica, exemplificando-a com uma figura, mas não faremos nenhuma atividade sobre ela, pois isso só vai ocorrer na atividade 3, na qual será apresentada uma técnica para desenvolvê-las.

Assim, inicialmente será projetada no quadro a definição de Perspectiva Isométrica, em conjunto com uma figura exemplificando-a.



Lembramos que na Perspectiva Isométrica, mantêm-se as proporções do comprimento, da largura e da altura do objeto representado. Possui as três faces oblíquas ao plano de trabalho inclinadas a  $30^\circ$  da horizontal. Como sugestão adicional, poderemos explorar, mesmo que apenas citando, a importância desta teoria para o Desenho Técnico, o que ressaltamos não ser o foco deste projeto.

Figura 3.2: Perspectiva Isométrica

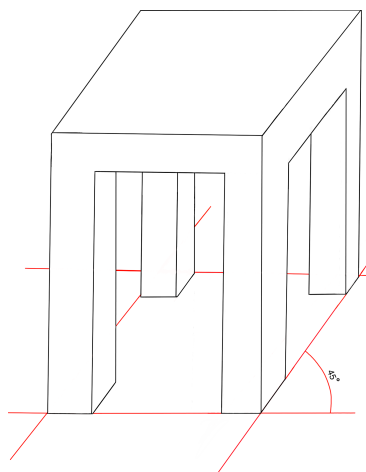


Fonte: elaborado pelo autor.

Após a apresentação da definição e da ilustração, será a vez dos estudantes, com o auxílio do aplicativo Geogebra, desenhar a mesma figura. Será importante perceber como os estudantes desenvolvem esta atividade, pois o recurso computacional será usado diversas vezes. É também necessário nesta etapa elaborar questões envolvendo conceitos como retas e segmentos paralelos, questões de medidas, e sua habilidade em desenhar uma figura tridimensional, entre outras.

Ao se perceber que os estudantes já desenvolveram certas habilidades, será projetado uma nova perspectiva, denominada Perspectiva Cavaleira, juntamente com a figura exemplificando-a.

Figura 3.3: Perspectiva Cavaleira



Fonte: elaborado pelo autor.

Na Perspectiva Cavaleira a face do sólido que observamos frontalmente aparece sem deformações; a face superior, possivelmente um retângulo, torna-se um paralelogramo, o que mostra a preservação do paralelismo; também se preservam pontos médios de segmentos. Tem-se a impressão de que o objeto retratado é visto de longe.

Após a apresentação da definição e da ilustração, será a vez dos estudantes, com o auxílio do aplicativo Geogebra, desenhar a mesma figura.

Conforme citamos acima terminaremos, a primeira atividade apresentando a Perspectiva Cônica e exemplificando-a.

Na Perspectiva Cônica chamamos *linha do horizonte* tudo que esta ao nível dos olhos de um observador, é onde se encontra o chamado *ponto de fuga*. Todas as linhas que se afastam da linha do horizonte e se encontram acima desse nível descem convergindo para num ponto de fuga, e todas as linhas que se encontram abaixo sobem para o mesmo ponto. Essa perspectiva pode existir um, dois ou três pontos de fuga.

Figura 3.4: Perspectiva Cônica



Fonte: elaborada pelo autor.

Na atividade 3 representaremos uma figura usando um ponto de fuga e outra figura com dois pontos de fuga.

A previsão para esta atividade é que sejam gastos duas aulas.

### 3.3.2 Atividade 2

Nesta atividade trataremos de três técnicas de perspectiva que são muito utilizadas: sobreposição, mudança de dimensão e linhas de fuga. Temos como finalidade exemplificar com figuras essas três técnicas. Queremos que o aluno conheça maneiras diferentes de representar figuras tridimensionais.

A primeira técnica a ser exemplificada é a de sobreposição. Como sugestão mostraremos no quadro a Figura 3.5. Na sequência faremos uma análise do desenho, no caso sobre a posição dos vasos, como aparenta estar maior ou menor, dependendo das escolhas.

Figura 3.5: Técnica de sobreposição

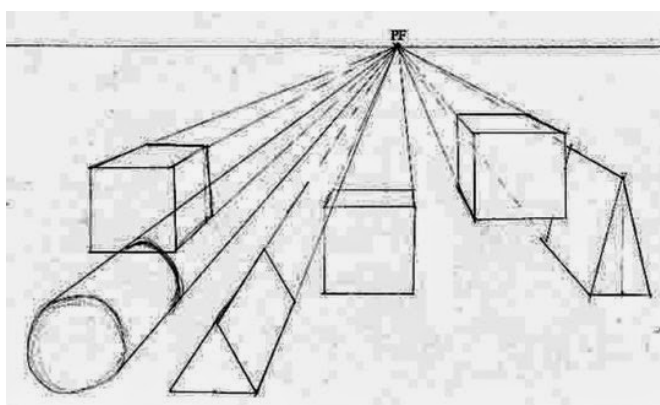


Fonte: Sobrearte (2018)

Para as atividades destinadas aos estudantes, iremos sugerir um concurso de fotografias em que os alunos irão explorar as técnicas de sobreposição apresentadas. Essas fotos serão entregues no próximo encontro.

Dando continuidade apresentaremos no quadro a técnica de mudança de dimensão. Também usaremos uma figura para exemplificá-la. Faremos uma análise da distância dos objetos, o quanto estão próximos ou distantes.

Figura 3.6: Mudança de Dimensão



Fonte: Sobrearte (2018)

E por fim trataremos agora da linha de fuga, sendo que essa linha baseia-se em um ponto de fuga, situado na linha do horizonte, para o qual convergem as retas paralelas que, ao serem transformadas em diagonais no quadro, provocam a sensação de profundidade. Usaremos essa técnica para desenvolver o desenho do paralelepípedo nas atividades 3 e 4.

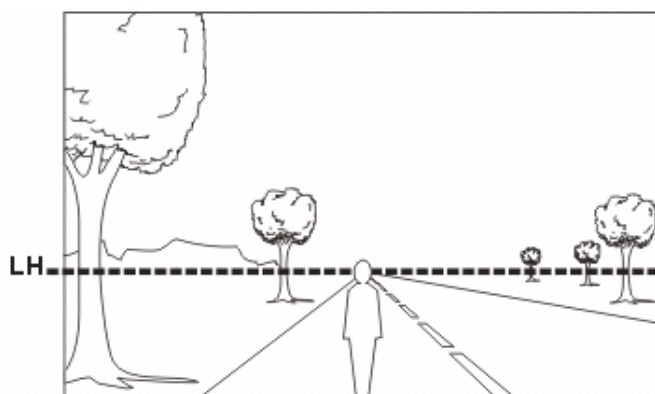
Figura 3.7: Linha de Fuga



Fonte: Sobrearte (2018)

É importante que o aluno saiba identificar a linha do horizonte. Neste caso recomendamos que seja trabalhado figuras para tal identificação.

Figura 3.8: Linha do Horizonte



Fonte: Sobrearte (2018)

Todos esses conceitos tem que ser explicados através de uma aula expositiva exemplificando com figuras para que possam em grupos identificarem o ponto de fuga, e a linha do horizonte.

A previsão para esta atividade é de uma aula.

### 3.3.3 Atividade 3

Nessa atividade, usaremos o Geogebra como auxílio para entendermos mais sobre a técnica de linha de fuga. Queremos aqui, mostrar aos alunos como desenvolver essa técnica. Numa perspectiva cônica são necessários um ou mais pontos de fuga. Nessa atividade usaremos um ponto de fuga. Iremos usar o que foi estudado anteriormente para fazer um paralelepípedo.

Usaremos essa sequência para esboçar a figura, é necessário que seja exposta no quadro para que sigam cada passo.

I) Desenhar a linha do horizonte.

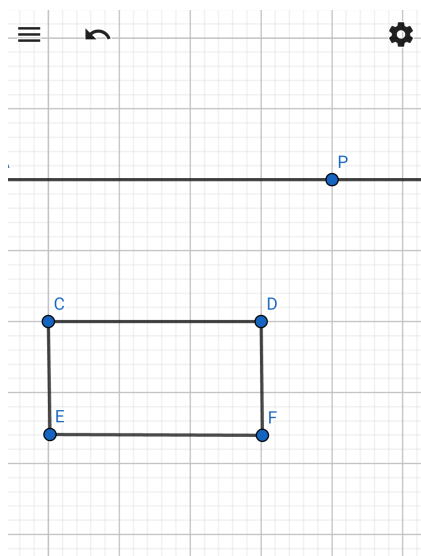
Figura 3.9: Ponto de Fuga (escolha)



Fonte: elaborado pelo autor.

II) Após escolhermos o ponto de fuga contido na linha do horizonte desenharemos um retângulo qualquer.

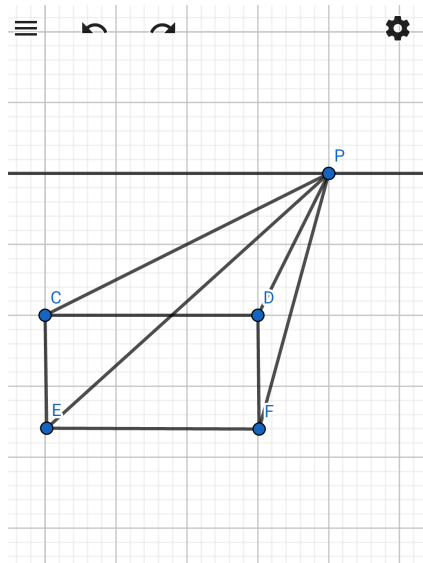
Figura 3.10: Retângulo qualquer



Fonte: elaborado pelo autor.

III) Pegaremos os vértices do retângulo e ligaremos ao ponto de fuga, que também podemos denominar como ponto no infinito.

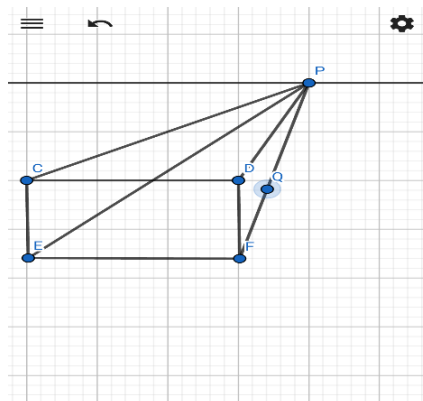
Figura 3.11: Ponto no infinito



Fonte: elaborado pelo autor.

IV) Agora iremos escolher um ponto de profundidade chamado de ponto  $Q$ )

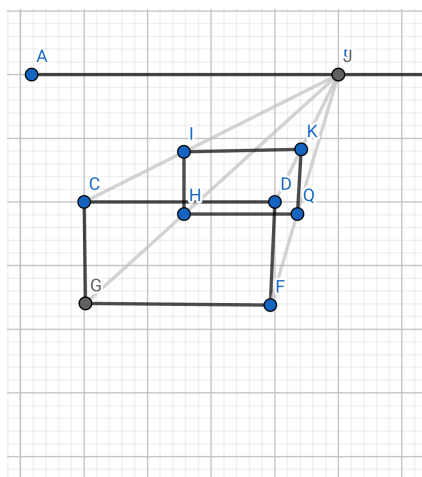
Figura 3.12: Ponto de profundidade



Fonte: elaborado pelo autor.

V) Usando o ponto  $Q$  construiremos uma paralela ao segmento de reta  $DF$

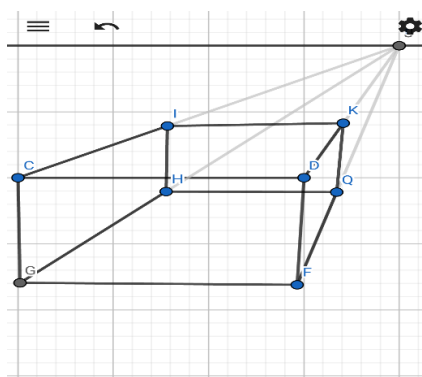
Figura 3.13: Paralela DF



Fonte: elaborado pelo autor.

VI) Concluimos assim o paralelepípedo

Figura 3.14: Paralelepípedo



Fonte: elaborado pelo autor.

Ao se perceber que o estudante adquire a habilidade de se criar esta figura, que ele possa, até o final do tempo da aula, explorar outras figuras geométricas, como por exemplo o desenho da peça representada em perspectiva isométrica.

Além de conhecer alguns conceitos da Geometria Projetiva essa atividade permite trabalhar o desenho tridimensional. Estimativa desta atividade é de uma aula.

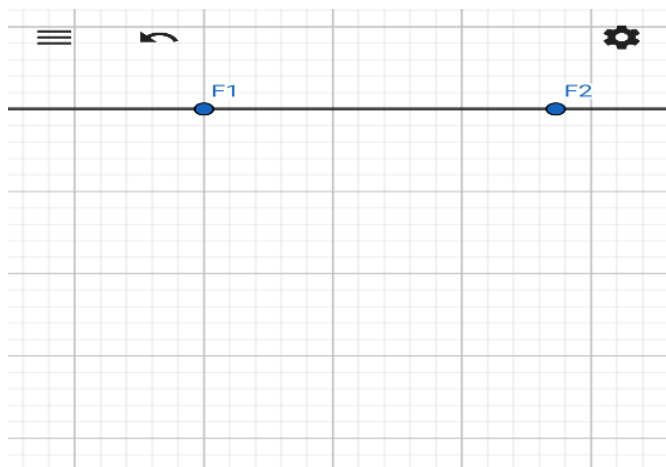
### 3.3.4 Atividade 4

O objetivo dessa atividade é desenvolver um pouco mais as habilidades do aluno em um desenho tridimensional. Para isso iniciaremos fazendo o mesmo desenho do paralelepípedo da atividade anterior, só que agora usando dois pontos de fuga. Façamos os mesmos procedimentos propostos anteriormente e seguimos a sequência abaixo.

I) Desenhemos a linha do horizonte e escolhamos dois pontos de fuga distintos ( $F1$  e  $F2$ )

contidos na linha do horizonte.

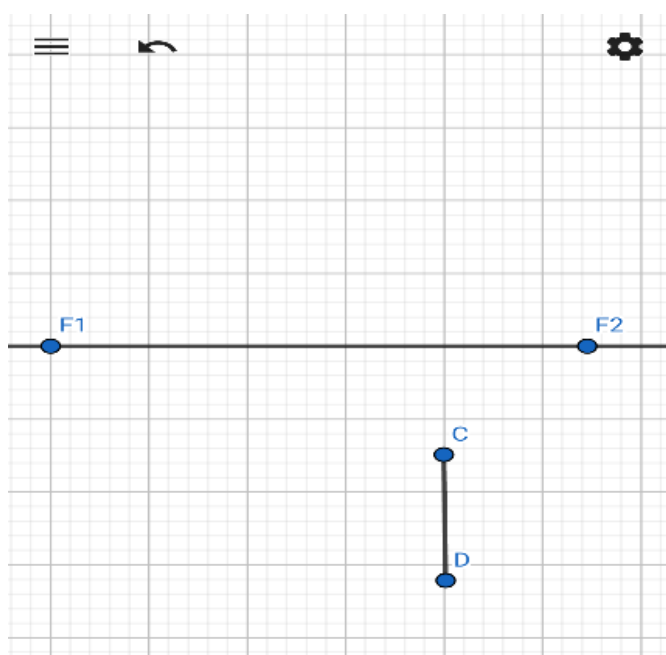
Figura 3.15: Dois Pontos de Fugas



Fonte: elaborado pelo autor.

II) Em seguida desenhamos um segmento vertical  $CD$ .

Figura 3.16: Segmento  $CD$

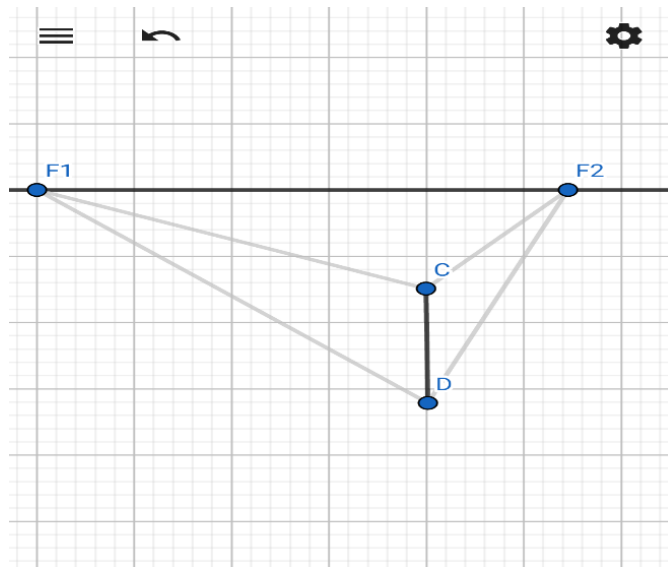


Fonte: elaborado pelo autor.

III) Ligaremos os vértices  $C$  e  $D$  nos pontos de fuga  $F1$  e  $F2$ .



Figura 3.17: Ligamentos dos vértices

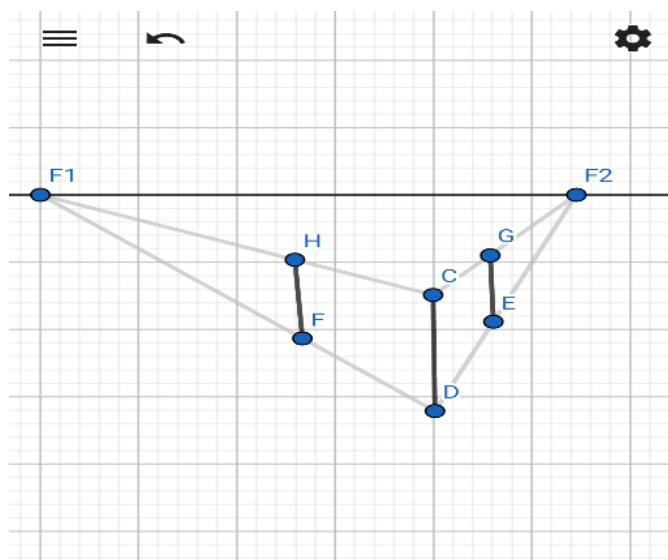


Fonte: elaborado pelo autor.

Neste momento poderemos questionar os estudantes para saber se eles já começam a perceber os possíveis padrões que poderão surgir.

IV) Seleccionamos agora dois pontos limites  $E$  e  $F$  e desenhamos dois segmentos paralelo a  $CD$ .

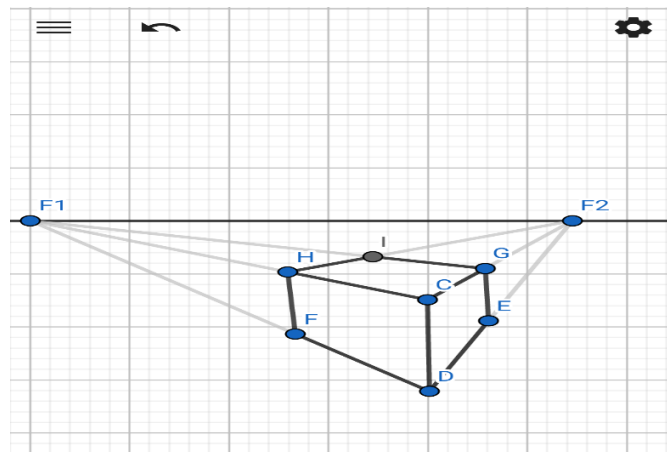
Figura 3.18: Segmentos Paralelos



Fonte: elaborado pelo autor.

VI) E assim terminaremos o desenho.

Figura 3.19: Desenho Final



Fonte: elaborado pelo autor.

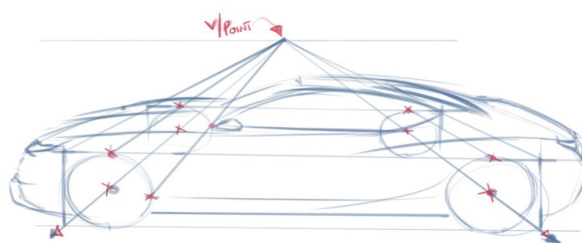
A estimativa dessa atividade é de uma aula.

### 3.3.5 Atividade 5

Essa atividade tem como objetivo explorar possíveis sugestões de aplicações. Escolhemos explorar o uso em design de um carro, mas poderíamos ter trabalhado em outra aplicações, no desenho de uma casa, por exemplo. Entendemos que a maior dificuldade que os alunos enfrentam é a percepção, mais especificamente de saber enxergar as dimensões que o desenho possui. Então para que se desenvolva essa habilidade propomos utilizar a técnica de ponto de fuga exercitando a “perspectiva”, criando uma ilusão de profundidade numa superfície plana.

A ideia nessa atividade é usar paralelepípedo criado na atividade 3 e a partir daí montar o automóvel.

Figura 3.20: Automóvel



Fonte: Christian (2018)

Para essa resolução dividimos em duas etapas:

A primeira etapa é treinar o desenho usando folha, lápis, borracha e régua. Faremos o paralelepípedo da atividade 3 usando um ponto de fuga, em seguida usaremos a

criatividade para desenvolver o carro.

Na segunda etapa usaremos o aplicativo Geogebra para fazer esse mesmo procedimento. Criando o paralelepípedo com um ponto de fuga, tendo assim a base do carro, em seguida colocar as rodas. Deixaremos para que os estudantes tomem a melhor estratégia para finalizar o desenho do carro. Sabemos que existem aplicativos para uma melhor representação tridimensional, mas o objetivo aqui é que o aluno adquira também uma certa habilidade no Geogebra usando retas, círculos, pontos, entre outros.

Ressaltamos que é importante chamar a atenção para o conceito de paralelismo entre as Geometrias, pois em cada uma delas a ilustração toma corpo diferente.

### 3.3.6 Atividade 6

Nessa última atividade vamos usar conceitos adquiridos nas atividades anteriores e montar a estruturação do jogo de Dobble. O objetivo em trabalhar esse jogo é reforçar o conceito de Geometria Projetiva e resgatar alguns assuntos já estudados durante o ensino fundamental, como construção de retas (resolução de sistemas lineares graficamente), paridade, conjunto numérico, expressões algébricas, números binários e valor numérico.

Apresentaremos inicialmente o jogo com suas respectivas regras:

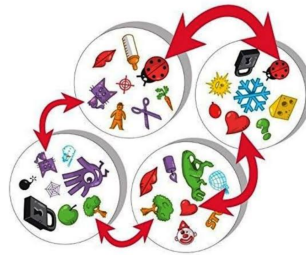
**Regra do Jogo Dobble:** Objetivo do jogo é ser o mais rápido dos jogadores a identificar os símbolos das cartas, pegá-las ou também descartá-las, além de falar o símbolo em voz alta. Neste jogo será usado o descarte: cada jogador vira sua carta inicial e procura um símbolo em comum entre sua carta e a carta da pilha. O jogador que primeiro falar o nome do símbolo em comum deve descartar a carta, revelando uma nova carta. Todos os jogadores jogam simultaneamente, descarta uma carta quem conseguir reconhecer um símbolo em comum com a sua carta assim que a carta da pilha ficar visível. Vencerá o jogador que conseguir descartar todas as cartas que possuir em sua mão.

Para que o jogo seja imparcial é necessário respeitar um princípio importante: "Quaisquer duas cartas no jogo sempre têm exatamente um símbolo em comum".

Tentaremos explicar como a matemática pode nos ajudar a construir essa versão do jogo.

Sabemos que por quaisquer dois pontos do plano sempre passa exatamente uma linha reta. A analogia entre o princípio do jogo de Dobble e essa definição geométrica é bastante clara. Os cartões do jogo serão os pontos e os símbolos nesses cartões serão as retas.

Figura 3.21: Jogo Original Dobble



Fonte: Peças do jogo de Dobble Original

Usando a ideia de coordenadas cartesianas, isto é, que possamos representar um ponto do plano por dois números, abscissa e a ordenada, assim como as retas do plano que podem ter como equações

- $y = ax + b$  se elas não forem verticais;
- $x = c$  se as retas são verticais (paralela ao eixo  $y$ );
- $y = c$  se as retas são horizontais (paralela ao eixo  $x$ ).

Podemos representar um ponto do plano ou uma reta do plano por números, para sabermos se esse ponto está na reta só há necessidade de adições e multiplicações. Usamos um outro sistema de números pois precisamos que essa contagem seja finita, para obtermos finitos cartões. Trabalhamos com o conjunto finito  $\mathbb{Z}_2$ . Por último usamos a geometria projetiva para terminar de refinar o jogo, acrescentando um ponto para cada feixe de retas paralelas. Chamamos este ponto de *ponto de fuga*, que se localiza na linha do horizonte.

Para a reprodução dessa estrutura seguimos os itens abaixo, sendo necessário imprimir tabelas e novamente usarmos o aplicativo Geogebra.

I) Faremos uma discussão sobre resultados de soma e multiplicação, o que acontece quando efetuamos tais operações. Trabalharemos aqui o conceito de paridade. Daremos a tabela abaixo para os alunos preencherem. Para essa resolução será necessário explorar exemplos no quadro.

Tabela 3.1: Tabela preenchida pelos alunos

x	Par	Impar
Par		
Impar		

Fonte: do autor.

Em seguida pediremos para que eles preencham outra tabela associando agora 0 para par e 1 para ímpar, temos aqui uma estrutura algébrica de  $\mathbb{Z}_2$ . Revise o conjunto

Tabela 3.2: Tabela preenchida pelos alunos

+	Par	Impar
Par		
Impar		

Fonte: elaborado pelo autor.

do inteiros  $\mathbb{Z} = \dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\dots$  e comente que esse conjunto  $\mathbb{Z}_2$ , é um conjunto especial formados só pelo 0, 1.

Tabela 3.3: Tabela preenchida pelos alunos

x	0	1
0		
1		

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 3.4: Tabela preenchida pelos alunos

+	0	1
0		
1		

Fonte: elaborado pelo autor.

II) Usando agora o Geogebra iremos montar o plano cartesiano abaixo. É necessário expor a figura no quadro e que os pontos tenham as cores estabelecidas no desenho.

O produto cartesiano  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  pode ser “colocado sobre”  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Figura 3.22: Representação no Plano Cartesiano



Fonte: elaborado pelo autor.

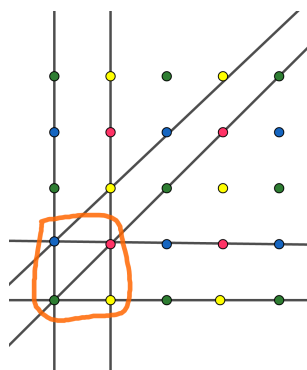
Comentamos que só há 4 pontos  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ . Pontos como  $(2,0)$ ,  $(4,0)$ ,  $(2,2)$ , etc., estão identificados com  $(0,0)$ , correspondendo a  $(\text{par}, \text{par})$  cor verde. Sendo assim, cada cor é, na realidade, um único ponto. Na parte seguinte na criação da estrutura do jogo trabalharemos também com Geogebra.

Terminada essa fase, partiremos para as construções de retas.

III) Listamos então no quadro as possíveis retas de  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ :

São retas do tipo  $y = ax + b$ , em que  $a$  e  $b$  assume valores 0 e 1. Logo temos as retas:  $y = x$ ,  $y = x + 1$ , e as retas verticais  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  e  $y = 1$ . Em seguida desenharemos no Geogebra.

Figura 3.23: Retas no Plano



Fonte: do autor.

Aplicando esses conceitos montaremos a estrutura da construção do Dobble.

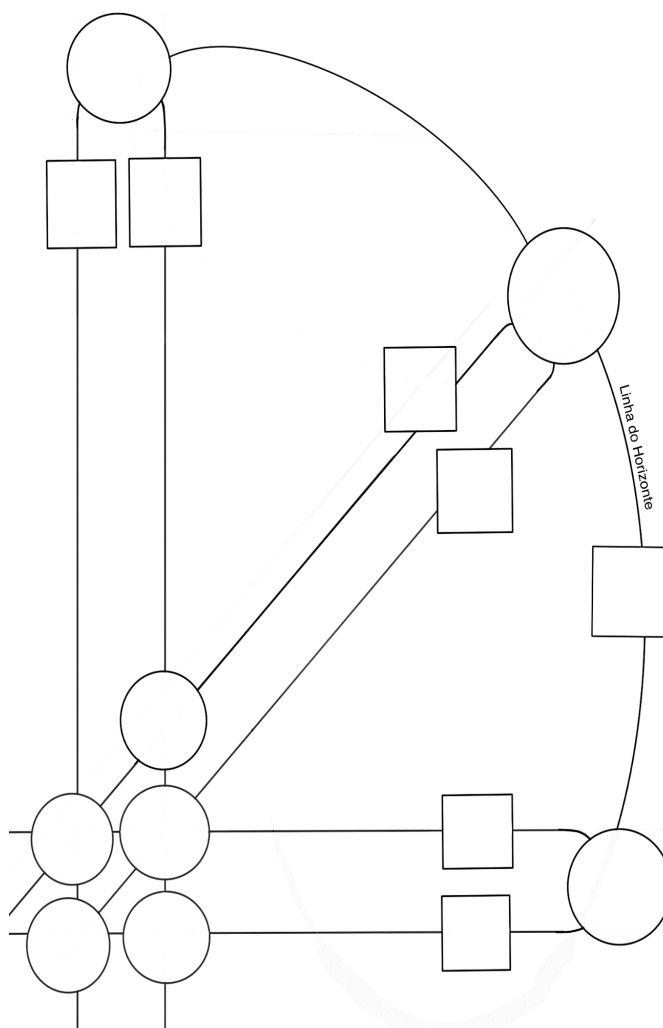
- i) Uma imagem a cada reta.
- ii) Os pontos serão os cartões.
- iii) A imagem comum a dois cartões será a imagem associada a reta por si definida.

IV) Faltava agora aplicar o conceito estudado na Geometria Projetiva. Adicionaremos um ponto infinito por cada feixe de retas, bem como a linha do horizonte. Consideramos o plano projetivo da geometria finita de  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

Após explicarmos esses conceitos analisando a figura feita no Geogebra, iremos entregar a folha com a estrutura do jogo para que eles possam fazer as peças. Usaremos a folha a seguir.

Neste momento poderemos perguntar se há alguma semelhança entre as duas figuras, a ser feita no Geogebra e a que entregaremos a eles.

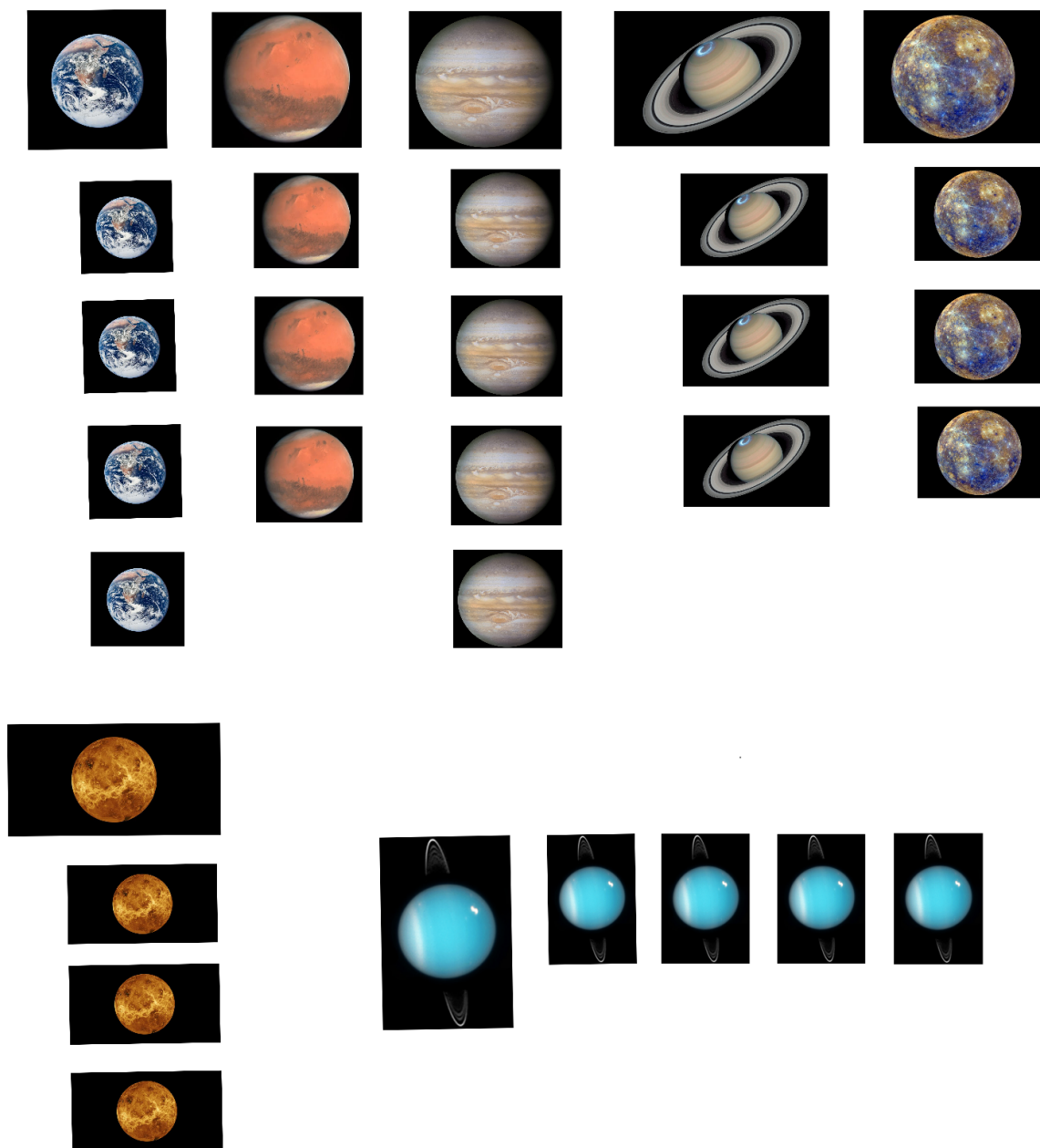
Figura 3.24: Montagem das Peças



Fonte: do autor.

Também daremos a cada grupo uma folha contendo figuras (veja Figura 3.25). Salientamos que nesta fase as figuras podem ser escolhidas de acordo com a preferência de quem for aplicar. Poderíamos ter escolhido por, exemplo, figuras geométricas, mas optamos por escolher fotos de planetas do nosso sistema Solar, para que possamos fazer um paralelo com a matéria de Ciências. E que também aumentassem a dificuldade do jogo pois terão que memorizar o nome de cada planeta. Por questão de praticidade iremos construir com os alunos um “mini-dobble”, correspondente a  $N = 2$ , e que consiste em adicionar um ponto infinito por cada feixe de retas paralelas, bem como a linha do horizonte.

Figura 3.25: Planetas

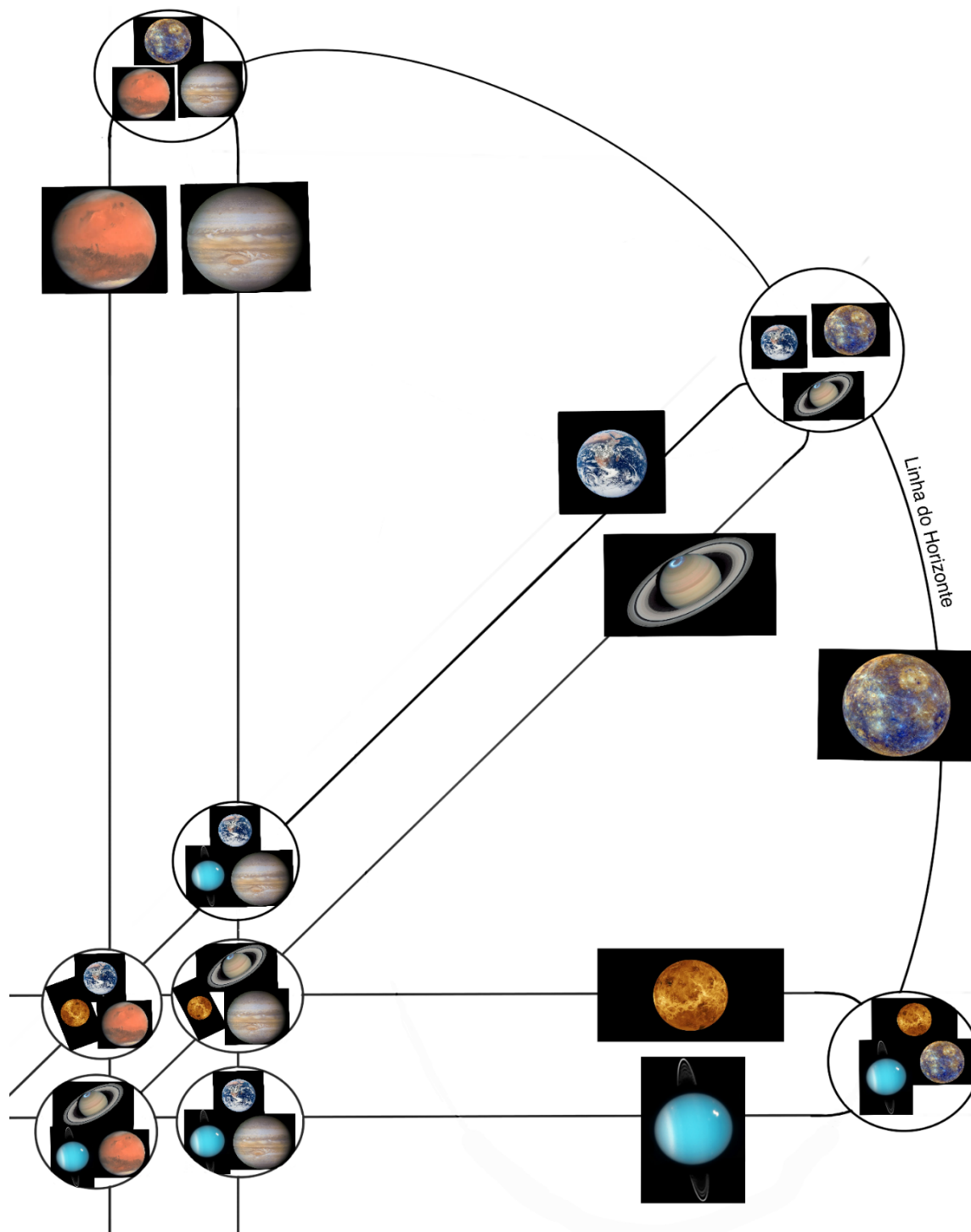


Fonte: do autor.



Para que todos os grupos tenham o mesmo padrão, Mercúrio ficará na linha do Horizonte.

Figura 3.26: Estrutura do Jogo



Fonte: elaborado pelo autor.


Após essa montagem pediremos para que os alunos recortem as peças produzidas. Essas peças circulares podem ser coladas em cartolinas para que elas tenham mais firmeza na hora do jogo.

V) Antes de começarmos o jogo ainda iremos analisar essas peças. Reparamos que para  $N = 2$  temos 7 retas (7 imagens) e 7 pontos (7 cartões).

Em  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  temos  $2 \times 2 = 4$  pontos no plano projetivo, e há mais um ponto infinito para cada feixe de retas paralelas. Formando assim 7 pontos.

Supondo agora em  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$  temos que, dado uma reta  $y = ax + b$ , ao substituirmos  $a$  por  $0, \dots, N - 1$ , temos  $N$  feixes de retas paralelas, que darão origem a  $N$  pontos infinitos. Há o feixe de retas verticais do tipo  $x = b$ , que dará origem a mais 1 ponto infinito. Portanto, neste caso teremos  $N^2 + N + 1$  pontos e  $N^2 + N + 1$  retas. Sabendo disso é possível colocar  $N + 1$  imagens distintas em cada um de  $N^2 + N + 1$  cartões, usando imagens, de tal forma que cada par de cartões só tem uma imagem em comum.

Figura 3.27: Quantidade de cartões



	Pontos projetivos	Feixes retas paralelas	Feixes de retas Verticais	Total
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$2 \times 2 = 4$	2	1	7
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	$3 \times 3 = 9$	3	1	13
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	$4 \times 4 = 16$	4	1	21
$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$	$n \times n = n^2$	n	1	$n^2 + n + 1$

Fonte: elaborado pelo autor.

Com isso poderemos também trabalhar com expressões algébricas ao preencher a Tabela 3.5 abaixo. Esta tabela servirá para revisar conceitos e expressões algébricas e valor numérico.

Tabela 3.5: Expressões Algébricas Valor numérico

<b>N</b>	<b>Imagens distintas em cada cartão</b>	<b>Nº de cartões</b>	<b>Total de imagens</b>
2	3	7	7
3	4	13	13
4	5	21	21
7	8	57	57

Fonte: elaborado pelo autor.

VI) Finalizaremos as atividades jogando o divertido jogo de Dobble.



## 4. Aplicação do Projeto e Análise dos Resultados

Apresentamos aqui o desenvolvimento de um trabalho que tem como objetivo melhorar o desempenho do aluno na representação tridimensional e no resgate de alguns conceitos estudados no Ensino Fundamental. Os resultados foram obtidos através da análise das soluções apresentadas por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental.

O projeto se iniciou numa terça-feira, temos 6 aulas semanais, essas aulas são consecutivas (duas aulas na terça, duas na quinta e duas aulas na sexta) o que ajuda no desenvolvimento das atividades. Os alunos estavam cientes na realização do projeto já que alguns comentários foram feitos durante o ano letivo. Já tínhamos terminado todo conteúdo pré estabelecido no currículo do Estado de São Paulo. Muitas perguntas foram feitas sobre a realização das atividades pois sempre há um medo na avaliação, mas foi explicado que era apenas um trabalho para acrescentar conhecimentos onde iria ajudá-los e nunca prejudicá-los. Inicialmente foi feita uma revisão de conceitos da Geometria Euclidiana, pontos, retas (paralelas, concorrentes, perpendiculares), plano. As perguntas eram feitas e os alunos respondiam na lousa e em seguida davam exemplos do nosso cotidiano. Feita toda essa revisão, começaram as atividades voltada a Geometria Projetiva.

### 4.1 Local da Aplicação

Tais atividades foram propostas, em caráter experimental, na turma do 9º ano do ensino fundamental da Guido Segalho está localizada em Avenida Pascoal Celestino Soares, SN, Vila Teixeira. CEP: 13032-580. Campinas - São Paulo. O telefone da escola é (19) 3243-7324 e o email é e018922a@see.sp.gov.br. A escola da rede estadual possui em média 450 alunos em Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Trabalhamos essa atividades com alunos com idades 13-16 anos.

Figura 4.1: Escola Estadual Professor Guido Segalho.



Fonte: Diretoria Campinas Leste.

Figura 4.2: Sala de informática da Escola Estadual Professor Guido Segalho.



Fonte: Diretoria Campinas Leste.

## 4.2 Análise da Atividade 1

Para conduzir os alunos na compreensão dos conceitos de Geometria Projetiva e investigar suas habilidades de representar formas tridimensionais deu-se início à atividade 1. Apresentamos através de uma projeção no quadro a figura de uma estrada. Em seguida foram realizados questionamentos.

- Os dois segmentos de retas que limitam a estrada são paralelos ou concorrentes?
- Vocês conseguem enxergar uma figura tridimensional?

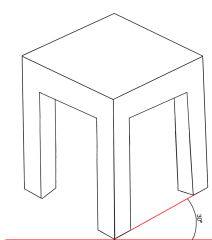
A exposição da figura com os questionamentos provocou discussão e despertou curiosidade nos alunos. Após ouvir suas respostas argumentei que na verdade as faixas brancas que limitam a estrada são paralelas e nunca irão se encontrar, as linhas brancas da estrada convergem para um ponto central para dar um impressão de distância, de profundidade, chamamos de perspectiva. Os alunos perceberam aí a existência de outra geometria, na qual as retas paralelas da estrada (objeto real), ao serem transportada para o plano, perdem o paralelismo e que através dessas imagens conseguem observar que nessa nova Geometria não existe retas paralelas.

Em seguida foi pedido para que abrissem o Geogebra, usamos esse aplicativo nessa atividade como recurso didático para a investigação do desenvolvimento de representação tridimensional.

No quadro foram apresentados três tipos de perspectiva propostas no projeto. Cada perspectiva era exemplificada com uma figura.

A primeira figura tratava-se da Perspectiva Isométrica, solicitei para que desenhassem a imagem no Geogebra. Deixei claro que nenhuma técnica seria explicada nesse momento, o desenho teria que ser feito só observando.

Figura 4.3: Perspectiva Isométrica

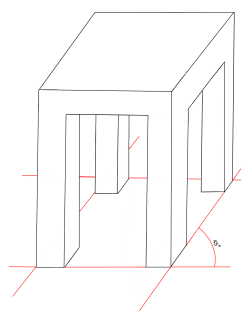


Fonte: elaborado pelo autor.

Durante a aplicação constatou-se que cada aluno tem seu ritmo de trabalho. Os alunos que apresentaram uma maior facilidade ajudaram os que tinham mais dificuldades. A utilização do Geogebra para a execução dessa atividade foi satisfatória. Em torno de 10% dos alunos não conseguiram concluir a atividade sozinhos.

Em seguida, foi representada através de uma imagem a Perspectiva Cavaleira, a mesma atividade que foi proposta anteriormente foi feita aqui.

Figura 4.4: Perspectiva Cavaleira

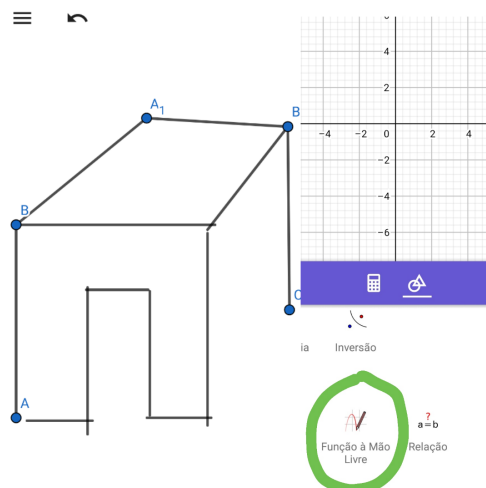


Fonte: elaborado pelo autor.

Essa atividade foi mais rápida que a anterior, devido a experiência que adquiriram na Perspectiva Isométrica. Duas aulas foram suficientes para que eles construíssem essas imagens. Perdemos um pouco de tempo, pois alguns computadores apresentaram problemas. Um ponto interessante foi os alunos que usaram o aplicativo do Geogebra no celular, pois existe uma função chamada “mãos livres” onde é usado Touch Screen para

fazer as retas, curvas. Na figura abaixo fica registrado uma imagem sendo reproduzida por um por um aluno usando o aplicativo no celular.

Figura 4.5: Reprodução da atividade



Fonte: elaborado pelo autor.

Após a observação do andamento da atividade concluímos que essa representação por observação foi eficaz para diagnosticar as habilidades dos alunos numa representação tridimensional.

Figura 4.6: Análise da Atividade 1

<b>Objetivo</b>	<b>O que foi atingido?</b>	<b>O que faltou ?</b>
<i>Compreensão dos Conceitos de Geometria Projetiva</i>	Satisfatório, a maioria dos alunos conseguiram sair da atividade com alguma noção dessa Geometria intuitiva.	Os alunos não estão preparados para lidar com um conceito tão abstrato quanto a infinidade. Poderia ser abordado mais conteúdos sobre o infinito. Afinal de contas, o que é o infinito?
<i>Resgate de conceitos de retas paralelas e concorrentes</i>	Satisfatório, a grande maioria já dominavam esses conceitos.	Poderia ter sido trabalhado resoluções de sistemas lineares com duas incógnitas e suas representações gráficas.
<i>Representação Tridimensional</i>	Regular, possuem muitas dificuldades em representar algo tridimensional.	Trabalhamos essa atividade direto no Geogebra, poderíamos ter trabalhado no papel primeiro.
<i>Aperfeiçoamento nas habilidades do uso das funções do Geogebra.</i>	Satisfatório, a maioria já conhecia esse aplicativo.	Planejamento para verificar se cada computador ou celular funcionava o aplicativo corretamente.
<i>Atividade 1</i>	Satisfatório, objetivo atingido	_____

Fonte: elaborado pelo autor.



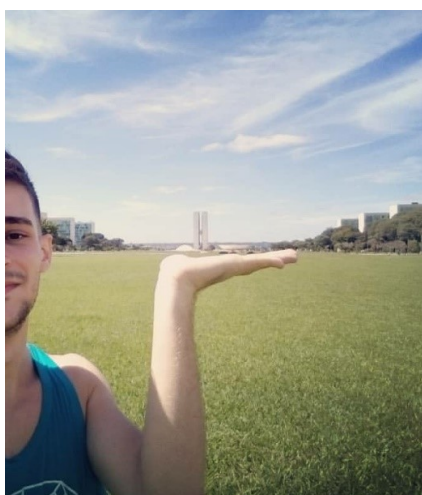
### 4.3 Análise da Atividade 2

O conhecimento sobre técnicas de perspectiva é indispensável para quem pretende desenhar corretamente a aparência de um objeto em três dimensões. Para adquirir tal conhecimento demos início a atividade 2.

Tratamos três técnicas de perspectiva, sobreposição, mudança de dimensão e linhas de fuga.

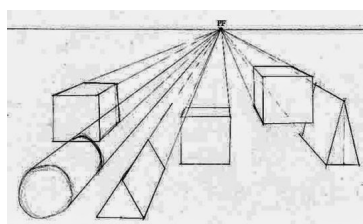
Exemplificamos com uma ilustração o que seria uma perspectiva de sobreposição. Observando que, quanto mais distante o objeto, menor ele parecerá. Destaquei que é muito comum vermos fotografias com esses efeitos, então foi proposto um concurso de fotografia usando essa técnica onde vencedor ganhou da escola um kit geométrico.

Figura 4.7: Vencedor da foto com efeito de Sobreposição



Na sequência apresentamos a técnica de mudança de dimensão com o seguinte questionamento. Por que temos a impressão de que alguns objetos estão mais próximos que os outros?

Figura 4.8: Mudança de Dimensão



Fonte: Sobrearte (2018)

A maioria das respostas citadas relacionava com o fato exposto no início, quando foi exibido o desenho da estrada. Concordei e pontuei que em seguida seria tratado mais sobre o que chamamos de perspectiva cônica. Algumas figuras foram apresentadas aos alunos,

colocando-os em situações para a compreensão e principalmente visualização, mostrando que esse tipo de perspectiva está situada em toda parte.

Posteriormente tratamos da linha de Fuga e a linha do horizonte. Ao decorrer dessa atividade, com o auxílio de figuras, desenvolvemos habilidades para a identificação de linha de fuga e linha do horizonte. Cada conceito foi explicado através de uma aula expositiva onde usamos o projetor na sala de informática. A figura era projetada e analisada. Essa análise era feita através de questionamentos.

- Onde se localiza a linha do horizonte?
- Para onde convergem as linhas de fuga?
- Onde está localizado o ponto de fuga?

Essa investigação ajudou a despertar nos alunos a curiosidade em aprender as técnicas para representar os desenhos. Percebemos uma melhora na percepção espacial que envolve a sensibilidade em fazer uma relação entre linhas, formas, estando diretamente relacionada a capacidade de visualizar e criar objetos. Como se tratava de uma aula expositiva, não tivemos dificuldades na aplicação, sendo uma aula o suficiente. Tal atividade ajudou a despertar nos alunos a curiosidade em aprender as técnicas para representar os desenhos. Logo, a atividade atingiu seu objetivo.

Figura 4.9: Análise da atividade 2

<b>Objetivo</b>	<b>O que foi atingido?</b>	<b>O que faltou ?</b>
<i>Compreensão dos Conceitos de Geometria Projetiva</i>	Satisfatório, atingiram a compreensão de conceitos de ponto de fuga, linha de fuga e linha do horizonte. Conheceram técnicas de perspectivas para depois aplica-las.	Faltou trabalhar com mais imagens para identificação do ponto de fuga, linha do horizonte e a linha de fuga. Uma sugestão é fazer uma parceria com o professor de artes.
<i>Desenvolver uma melhora na visão tridimensional.</i>	Satisfatório, pois com essas técnicas adquiriram uma ideia de como começar uma representação tridimensional. Quais pontos usar e por onde começar.	Planejamento para obter tempo para que se pudesse trabalhar esses desenhos na prática.

Fonte: elaborado pelo autor.

## 4.4 Análise das Atividades 3 e 4

É de extrema importância a percepção de um objeto usando a observação mas a colocação em prática do conceitos de perspectiva para o traçado de uma figura é essencial para a compreensão desses conceitos. Na atividade 3 e 4 aplicamos o conhecimento

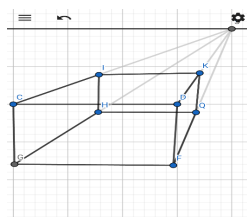
estudado até agora na construção de um paralelepípedo. Projetamos no quadro cada passo da atividade, identificando primeiro a linha do horizonte, pois a partir do momento que conseguimos identificar a linha do horizonte conseguimos determinar um ponto de acordo com o ângulo de visão que queremos. Foi destacado que a perspectiva usando um ponto de fuga geralmente é utilizada quando a frente do objeto está virada para observador.

As etapas de construção seguiram algumas orientações:

- Cuidado ao representar todas as linhas verticais e horizontais.
- Nas construções de semirretas no Geogebra não deixar exibido os pontos para que a figura não fique muito carregada.
- Deixar destacadas no final só as semirretas que pertencem ao paralelepípedo.

No final eles perceberam que quem escolheu o ponto de fuga mais a direita ficou como se objeto estivesse mais a esquerda.

Figura 4.10: Paralelepípedo



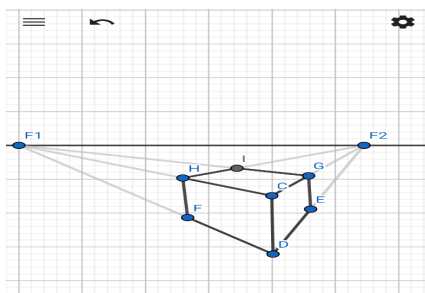
Fonte: do autor.

Baseando-se em dois elementos, linha do horizonte e ponto de fuga foi elaborado o paralelepípedo.

Seguindo os mesmos objetivos da atividade 3 foi proposto o desenho de um paralelepípedo só que agora usando dois pontos de fuga. Esse tipo de representação é usado quando os cantos do objeto estão virados para observador.

Quando usamos um ponto de fuga deformamos o objeto de uma lado só. Diferentemente do uso de dois pontos.

Figura 4.11: Desenho Final



Fonte: elaborado pelo autor.

Esta técnica é muito usada para objetos isométricos, por isso usamos a figura da atividade 1 (Perspectiva Isométrica) para que os alunos com mais habilidades reproduzissem ela aplicando essa técnica (dois pontos de fuga), esses alunos terminaram a atividade antes do previsto.

Diante das constatações feitas ao decorrer desse processo concluímos que as técnicas utilizadas na atividade 3 e 4 serviram para uma melhor compreensão e representação em figuras tridimensionais e também ajudaram a melhorar suas habilidades no Geogebra, como, apagar nomenclatura, mudança de cor de ponto e reta, construção de retas, semirretas, entre outras.. Com isso a atividade atingiu seu objetivo, sendo duas aulas o suficiente para a aplicação.

Figura 4.12: Análise das atividades 3 e 4

<b>Objetivo</b>	<b>O que foi atingido?</b>	<b>O que faltou ?</b>
<i>Aplicação dos Conceitos de Geometria Projetiva</i>	Satisfatório, conseguiram usar a técnica de perspectiva cônica, usando um e dois pontos de fuga. Construíram o paralelepípedo com auxílio do Geogebra e também usando folha e lápis.	Faltou trabalhar com algumas funções do aplicativo Geogebra. Colorir o paralelepípedo seria uma função interessante.
<i>Uso de conceitos estudados no ensino Fundamental</i>	Satisfatório, trabalharam o plano cartesiano, localização de pontos, construíram retas paralelas e perpendiculares.	Faltou trabalhar construção de retas paralelas usando compasso, lápis e papel. Levando para a sala de aula o esquecido "desenho Geométrico".

Fonte: elaborado pelo autor.

## 4.5 Análise da Atividade 5

Nessa etapa aplicamos os conhecimentos adquiridos na atividade 3 e 4. Foi proposto que usassem o paralelepípedo para a construção de um carro, com o objetivo de melhorar

a percepção espacial. No quadro foi exposto o modelo de um carro. Algumas observações foram feitas.

- Para desenhá-lo iremos construir o paralelepípedo usando um ponto de fuga.
- Aplicá-lo primeiro em uma folha e em seguida fazer o mesmo no Geogebra.
- Desenhar primeiro as rodas no paralelepípedo para facilitar a visualização.

Primeiro foi representado o desenho em uma folha em sala de aula.

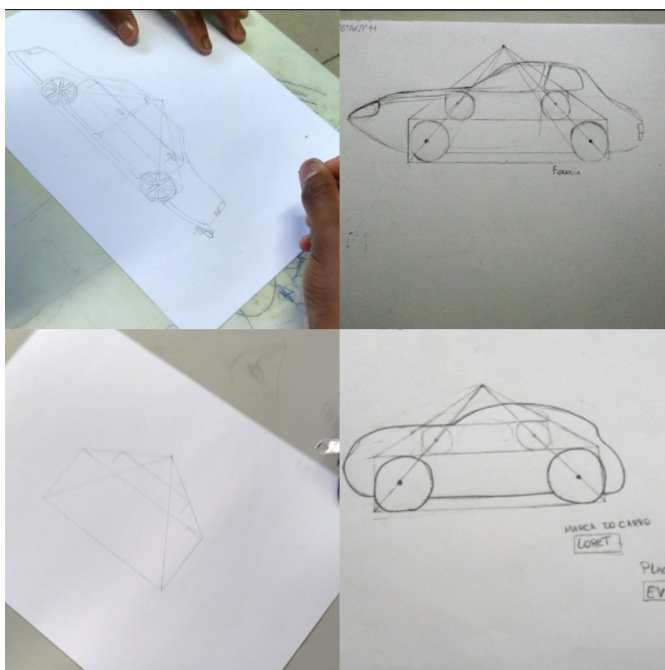
Figura 4.13: Automóvel



Fonte: Christian (2018)

Usando folha, régua e lápis obtemos o seguinte resultado.

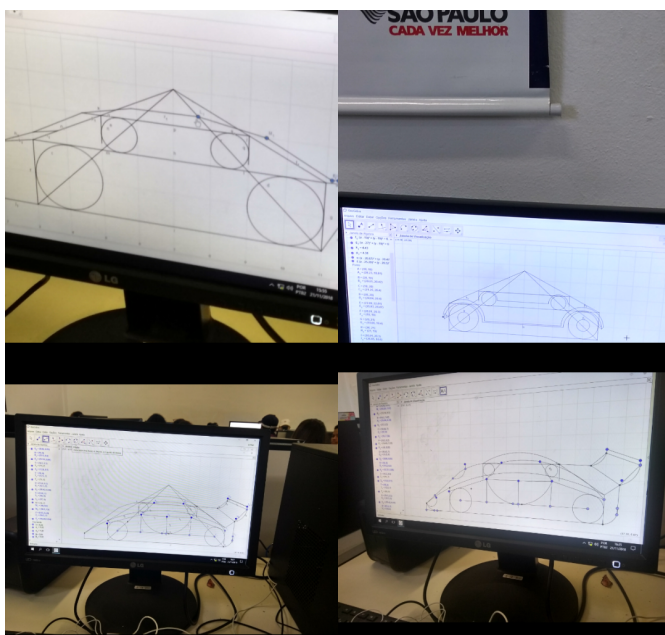
Figura 4.14: Carros feitos pelos alunos



Fonte: elaborado pelo autor.

Na aula seguinte, nos dirigimos até a sala de informática para treinar esse desenho no Geogebra. Foi de extrema importância esse trabalho, puderam aperfeiçoar suas habilidades em construir retas, círculos, pontos, além de representarem um desenho tridimensionalmente. Alguns resultados são apresentados abaixo.

Figura 4.15: Carros feitos pelos alunos no Geogebra.



Fonte: elaborado pelo autor.

Essa atividade não saiu como planejado e tivemos que pedir para o professor da aula seguinte que nos cedesse a sua aula para terminar a atividade, então gastamos duas

aulas de 50 minutos.

## 4.6 Análise da Atividade 6

Ultimo dia das atividades, trabalhamos a estrutura do Jogo de Dobble. O objetivo agora era usar a estrutura matemática contida no jogo para resgatar conceitos matemáticos abordados durante o ensino fundamental e na atividades que as antecederam.

Exercitamos os conceitos matemáticos contido no jogo. Primeiro revimos as operações com números pares e ímpares (paridade). Onde os alunos participaram e questionaram sobre os itens abaixo:

- Todo número natural ou é par ou é ímpar.
- Paridade da soma e do produto em  $\mathbb{N}$ .
- A soma de qualquer quantidade de números naturais pares é par.
- A soma de uma quantidade par de números naturais todos ímpares é par.
- A soma de uma quantidade ímpar de números naturais todos ímpares é um inteiro ímpar.
- A soma de uma mistura de números naturais pares e ímpares tem a mesma paridade que a quantidade de parcelas ímpares que foram somadas.

Seguindo a proposta para estruturação do jogo trabalhamos com os números binários. Após preencherem a tabela sugerida na aplicação da atividade 6 onde usaram 0 para representar um número par e 1 para ímpar, analisaram alguns questionamentos:

- Onde usamos os números binários no nosso dia a dia?
- Qual é a base do nosso sistema de numeração?

Toda essa discussão foi realizada para mostrar a importância de uma representação binária e o quanto ela é importante para o funcionamento de computadores por exemplo. Aproveitamos esse assunto para trabalhar mudança de base (da base decimal para base binária), destacamos que a base 12 também já foi muito utilizada (dúzia, divisão do relógio em horas...).

O próximo tema abordado na estruturação do Dobble foi a construção de retas no plano cartesiano. Primeiro estudamos o plano Cartesiano.

- Nomeando os eixos, abscissas e ordenadas.
- Localização de pontos.
- Divisão dos quadrantes (analisando os sinais da abcissa e da ordenada em cada quadrante)

Em seguida na construção de retas.

- Qual é a equação da reta?
- Qual a equação da reta para ela ser horizontal?
- Qual a equação da reta para ela ser vertical?

Essas formas, facilitam a identificação da equação da reta, ajudam também na identificação de alguns elementos específicos das retas, que serão visto no Ensino médio como a forma reduzida que deixa explícito o valor do coeficiente angular e linear.

Após usar os conceitos de Geometria Projetiva para a construção final do Dobble, abrimos discussões para analisarmos a quantidade de peças que conteria o jogo. Uma expressão algébrica foi utilizada para representar a situação. Através do conhecimento das operações básicas da matemática, bem como da interpretação dos dados contidos no problema, podemos organiza-lo, extrair suas informações principais, convertê-lo a um modelo matemático efetuando os cálculos para a sua resolução.

Finalizamos nossa análise concluindo que o jogo, quando bem planejado, além de proporcionar prazer e diversão, pode representar desafios e provoca pensamentos reflexivos fazendo com que eles aprendam a matemática de forma eficaz.

Observamos que a ideia de trabalhar planetas como figura do jogo acabou dificultando muito na associação dos nomes.



Figura 4.16: Análise da atividade 6

<b>Objetivo</b>	<b>O que foi atingido?</b>	<b>O que faltou ?</b>
<i>Resgatar conceitos de Paridade</i>	Satisfatório, compreenderam que a soma de qualquer quantidade de números naturais pares é par. A soma de uma quantidade par de números naturais todos ímpares é par. A soma de uma quantidade ímpar de números naturais todos ímpares é um inteiro ímpar. A soma de uma mistura de números naturais pares e ímpares tem a mesma paridade que a quantidade de parcelas ímpares que foram somadas. A soma de qualquer quantidade de números inteiros pares é par. A soma de uma quantidade par de números inteiros todos ímpares é par. A soma de uma quantidade ímpar de números inteiros todos ímpares é um inteiro ímpar. A soma de uma mistura de números inteiros pares e ímpares tem a mesma paridade que a quantidade de parcelas ímpares que foram somadas.	Demonstrar usando expressões algébricas essas afirmações. Além de ser simples ajuda o aluno fixar tais conceitos.
<i>Resgatar conceito de número binário</i>	Satisfatório, compreenderam o sistema binário trazendo consigo um contexto histórico, suas propriedades e aplicações que marcassem a atualidade	Faltou trabalhar mudança de base, para que o aluno tenha uma facilidade com logaritmo no Ensino Médio.
<i>Resgatar o plano Cartesiano</i>	Satisfatório, fixaram os conceitos de plano cartesiano tais como: localização de ponto(abcissa, ordenada)	Apresentar mais exemplos de pontos quando a abcissa é zero ou a ordenada é zero. Muitos alunos encontram dificuldade nessa localização.
<i>Resgatar conceitos de retas</i>	Satisfatório, lembraram construções de retas, classificaram em paralelas e concorrentes.	Trabalhar resoluções de sistemas lineares graficamente, para isso é preciso planejar mais tempo para a atividade.
<i>Geometria Projetiva</i>	Satisfatório, aplicaram conceitos de Geometria Projetiva na construção do jogo de Dobble, conceitos estudados nas atividades anteriores.	A linha do Horizonte na estrutura do jogo foi desenhada como uma curva, isso acabou confundindo os alunos. Fica como sugestão arrumar essa reta de forma linear.

Fonte: elaborado pelo autor.

## 4.7 Avaliação Final

As atividades propostas anteriormente são situações didáticas que possibilitam a construção do conhecimento por meio da reflexão, discussão, trocas de conhecimentos. Nelas, há limitações relacionados a forma de aplicação, nem toda escola tem um estrutura adequada para a aplicação do projeto. Limitações em relação ao material podem ser observadas na abordagem dos conteúdos relacionados ao uso do Geogebra, dado a diversidade de habilidades que os alunos precisam adquirir em relação a esses conteúdos. É preciso que o educador busque suprir as lacunas deixadas pelo material e adequar a atividade ao seu ambiente, buscando novas situações. Avaliamos além das provas e notas. No final, a maioria percebeu que o intuito das atividades, mais que aplicação de um conhecimento específico, era trazer a idéia de um conhecimento até então desconhecido por eles para aperfeiçoar suas habilidades em temas conhecidos. Na década de 1960 a avaliação foi instituída no Brasil com a Lei de Diretrizes e Bases 4024/61. Era chamada de exame e era a forma de verificar os conhecimentos e desempenho dos alunos, era maneira classificatória. Já na década de 70 houve uma redefinição através da Lei 75692/71 passando para aferição do aproveitamento escolar e, somente com a LDB 9394/96 é que o termo avaliação da aprendizagem passou a ser usado, surgiu assim um novo olhar para avaliação, apropriando-se do saber, onde avaliar se caracteriza pelo diagnóstico e inclusão, permitindo assim que o desenvolvimento da aprendizagem do aluno seja acompanhado e orientado pelo processo da avaliação (LUCKESI, 2005). Usamos a observação e o desempenho de cada atividade como instrumento de avaliação. Coletamos informações sem prejudicar o andamento da aula. Uma primeira avaliação foi feita na construção do carro, ali observamos se os alunos entenderam o conceito de paralelismo, ponto de fuga, feitos nas atividades anteriores e aplicado nessa etapa 5. Outra avaliação importante é na etapa 6, onde observamos suas habilidades em construções, pontos, retas, expressões algébricas.

Ao analisar o desempenho dos alunos, foi observado que o rendimento médio foi satisfatório. Foram avaliados, continuamente, através das suas produções e discussões. O resultado satisfatório dos alunos nas avaliações e as participações efetivas em todo o projeto serviram de base para uma aprendizagem significativa.

Figura 4.17: Ficha de Avaliação

**Ficha de Avaliação**

Nome: \_\_\_\_\_

Série: \_\_\_\_\_

ASPECTOS	NOTA
<u>Rendimento na atividade</u> : qualidade, rapidez, precisão com que executa as tarefas.	
<u>Facilidade de Compreensão</u> : rapidez e facilidade em interpretar, por em prática ou entender instruções e informações verbais e escritas.	
Conhecimento demonstrados no cumprimento das atividades, tendo em vista sua dificuldade observada em seu diagnóstico.	
<u>Organização no trabalho</u> : organização para o bom desenvolvimento do trabalho.	
Qualidade de esboçar desenho do carro entendendo assim conteúdo da Geometria projetiva. Observe se ele conseguiu fazer o paralelepípedo usando ponto de fuga.	

ASPECTOS	NOTA
<u>Assiduidade</u> : constância e pontualidade dos horários e dias de trabalho.	
<u>Disciplina</u> : facilidade em aceitar e Seguir instruções de superiores e acatar regulamentos e normas.	
<u>Avaliar na etapa 6 suas habilidades em construção retas, uso do Geogebra, habilidade com o plano cartesiano e aplicar o valor numérico corretamente.</u>	
<u>Cooperação</u> : atuação junto a outras pessoas no sentido de contribuir para o alcance de um objetivo comum, influência positiva no grupo.	
<u>Responsabilidade</u> :	

**FREQÜÊNCIA**

FREQÜÊNCIA	DURAÇÃO	NÚMERO DE HORAS
Comparecimento		
Faltas		

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_.

Orientador (Assinatura e Carimbo)

Fonte: elaborado pelo autor.

Dessa maneira, nos leva ao entendimento que a sequência proposta pôde ser implantada de forma bastante proveitosa.



## 5. Considerações Finais

A escolha desse tema foi devido a grande dificuldade que os alunos encontram para representar uma figura tridimensional. Foi de muito utilidade usar a Geometria Projetiva para ajudar na melhoria dessas habilidades e também servir de ferramenta para o resgate de outros conceitos. Ressaltamos que a elaboração da sequência e o acompanhamento de seu desenvolvimento pelos alunos não foram processos fáceis. O estudo comparativo entre os desenhos produzidos pelos alunos na atividade 1, e a atividade 5, mostrou o avanço da grande maioria deles, que passaram a estruturar previamente seus desenhos através das técnicas vistas. Também foi observado uma melhor fixação de conceitos matemáticos que para alguns já tinham se perdido. Usar recursos didáticos como jogos têm papel fundamental no processo de ensino aprendizagem.

Concluimos, então, que a aplicação dessa sequência foi de grande valia e contribuiu para reflexões acerca da importância dos conceitos de Geometria Projetiva. A forma como apresentamos nos revelou, com base em nossas análises, que os alunos se viram como construtores do processo de criação dos conceitos geométricos.



---

# A. Geometria Projetiva

## A.1 Contexto Histórico da Geometria Projetiva

Registros históricos afirmam que a Geometria Projetiva foi consolidada como uma ciência distinta de outras geometrias apenas no século XIX, devido a esforços de Jean Victor Poncelet(1788-1867) que publicou o trabalho “Ensaio sobre as projetivas das seções cônicas”. Poncelet observou que certas propriedades das figuras se mantêm constantes, quando as figuras sofrem deformações por projeções, e Christian von Staudt(1798-1867), publicando sua Geometria de Posição, considerando que a Geometria Projetiva deve ser fundamentada sobre bases puramente geométricas. Mais tarde, no século XX ela vem ganhar uma estruturação mais rigorosa.

Menelau(d.C. 70 — 130) é considerado o marco inicial da Geometria Projetiva, acabou desenvolvendo um teorema que seria mais tarde considerado como o marco do resultado projetivo. Depois de anos foi redescoberto por Giovanni Ceva(1647-1734), Pascal(1623-1662) e outros matemáticos.

A Geometria Projetiva vai aparecendo aos poucos, desapegados de uma sequência cronológica. Pappus(1865-1916) por exemplo postulou um teorema caído no esquecimento e somente mais tarde usado por Pascal. Pappus cria uma grande teoria do pensamento projetivo “invariância da razão cruzada”, nome dado séculos mais tarde por Desargues(1591-1661) e Cremona(1830-1903). Desargues, em seus estudos acaba produzindo teoremas e eixos conceituais que tornam o primeiro sistematizador do pensamento projetivo. Seus objetos criados têm alto grau de clareza, não semelhantes a objetos Euclidianos, podemos então dizer que esse arquiteto mesmo sem ter essa intenção é o primeiro geômetra projetivo.

Em 1939 Desargues publicou sua obra chamada Brouillon project d une atteinte. Na época não obteve muito reconhecimento. Podemos ver uma estrutura matemática projetiva se constituindo, concebendo objetos fundamentais, como razões de pontos ordenados sobre uma reta e o conceito de involução. Desargues produzia numa época em que cálculo e a análise caminham lentamente o que explica o ostracismo das idéias por ele produzidas.

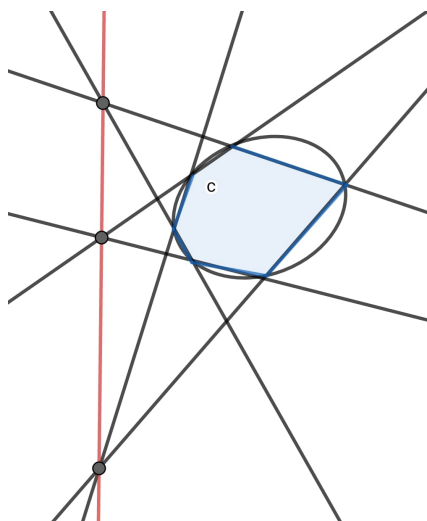
Em 1845 é descoberta cópia de trabalhos de Desargues feita por seus seguidores, e ele, finalmente, é reconhecido como o primeiro desenvolvedor da Geometria Projetiva.

Nicolau Copérnico surge com uma revolução ao idealizar modelo heliocentrista abrindo novas soluções geométricas, mesmo sem contar com tecnologias, ficando mais no plano teórico.

Quando Tycho Brahe e em sequência Kepler dispõem de aparelhos óticos para pesquisa em astronomia, as observações vão levando para o mundo das cônicas. Temos assim uma grande importância da projeção, o estudo das cônicas, muito além de suas propriedades métricas estudadas notadamente pelos gregos, tornando-se um horizonte de pesquisas.

Ainda no século XVII, Pascal começa a investigar as cônicas e suas propriedades projetivas. Em 1640 desenvolvem um importante teorema de estruturação projetiva denominado de Teorema hexágono inscrito de Pascal.

Figura A.1: Hexágono Inscrito de Pascal.



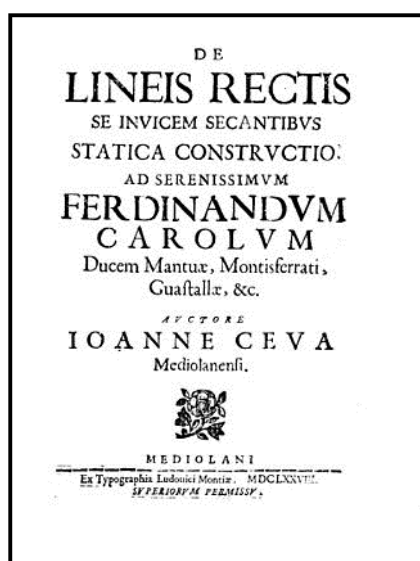
Fonte: do autor.

Esse teorema, trata se de uma colinearidade. Provavelmente Pascal usou o Teorema de Menelau, mas não há fontes provando isso.

Giovanni Ceva é mais um nome na história da Geometria Projetiva, quando, em 1678, em sua obra *De lineis rectis*, prova um teorema que, hoje, leva seu nome, Teorema de Ceva.



Figura A.2: Obra De Lineis Rectis.



Fonte: [www.researchgate.net](http://www.researchgate.net)

No século XVIII a análise e a álgebra se desenvolve de maneira rápida enquanto a geometria de maneira lenta. Isso também ocorreu com a Geometria Projetiva, sem muitos avanços.

Nos primórdios do século XIX surge Poncelet como um reiniciador de avanços da Geometria Projetiva. A Politécnica de Paris é um grande celeiro de geômetras, tendo como docente Gaspar Monge, que além de ajudar a desenvolver a Geometria Analítica, ele cria a Geometria Descritiva, uma geometria que se importa com a representação de objetos, não o desenvolvimento de relações geométricas intrínsecas novas. Poncelet é aluno de Monge, muitos consideram que essa união foi o marco para independência da Geometria Projetiva. Poncelet publica o Tratado das Propriedades Projetivas das Figuras no ano de 1822, que é considerada um marco para essa ciência. Poncelet introduz fundamentadamente a noção de elementos ideais, buscando dar sentido a interseções no infinito. A partir dos estudos de Poncelet, as pesquisas das invariâncias projetivas ganharam eixo de desenvolvimento, como em Von Staudt. Já no século XX, Hilbert busca um rigor lógico para a articulação dos objetos projetivos, escrevendo uma axiomática. É o fim daquela geometria intuitiva.

Na sequência passamos a explorar alguns resultados importantes da Geometria.

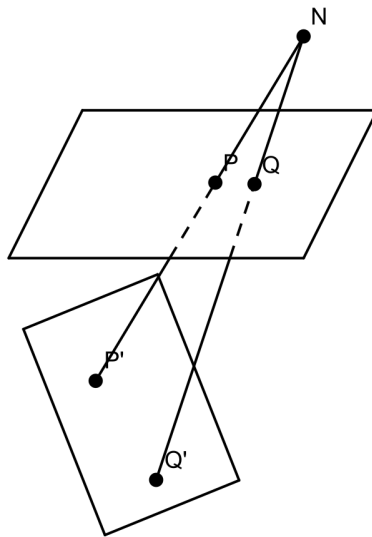
## A.2 Elementos Euclidianos da Geometria Projetiva

### A.2.1 Projeções

Definimos nessa seção projeção central e paralela e as propriedades nelas contidas. Restringimos também à geometria plana.

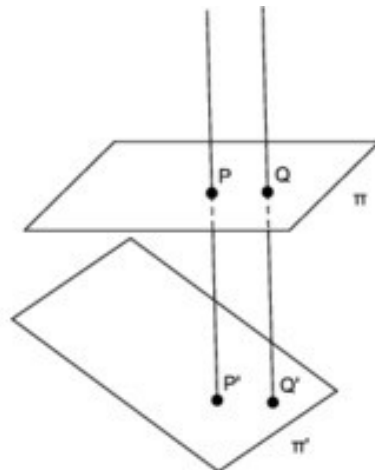
Sejam  $\pi$  e  $\pi'$  dois planos. Dado um ponto  $O$  não pertencente nem a  $\pi$  e nem a  $\pi'$ , podemos realizar a chamada projeção central de  $\pi$  em  $\pi'$ , de centro  $O$ , definindo a imagem de cada ponto  $P$  de  $\pi$  como sendo o ponto  $P'$  de  $\pi'$ , tal que  $P$ ,  $P'$  e  $O$  estejam contidos na mesma reta; esta é chamada uma reta de projeção. Também, se, em vez do centro, for dada uma reta não paralela a  $\pi$ , podemos realizar uma projeção de  $\pi$  em  $\pi'$ , dita paralela, definindo a imagem de  $P \in \pi$  como sendo  $P' \in \pi'$  tal que a reta determinada por  $P$  e  $P'$  seja paralela à reta dada.

Figura A.3: Projeção Central .



Fonte: do autor.

Figura A.4: Projeção Paralela.



Fonte: do autor.

Algumas propriedades sob essas projeções podem ser reconhecidas imediatamente.

Um ponto projeta-se em um ponto, pela boa definição; uma reta é projetada em uma outra reta. Este último ocorre porque, se a reta  $l$  em  $\pi$  for projetada no plano  $\pi'$ , a intersecção de  $\pi'$  com o plano determinado por  $O$  e  $l$  será a reta  $l'$ . Se um ponto  $A$  e uma

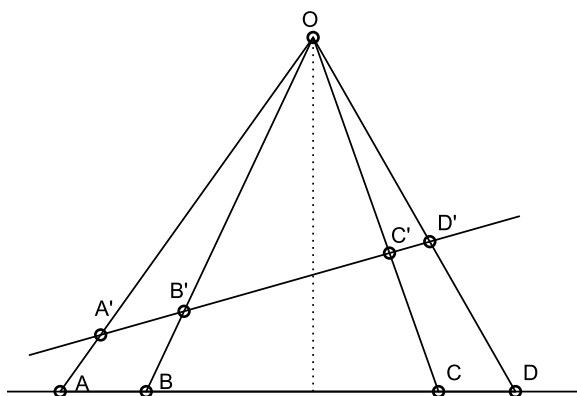
reta  $l$  forem incidentes então após qualquer projeção o ponto  $A'$  e a reta  $l'$  correspondentes serão novamente incidentes. Muitas consequências simples, porém importantes, decorrerão deste fato.

Se três, ou mais pontos, forem colineares, então suas imagens também são colineares. Do mesmo modo, se no plano  $\pi$  três ou mais retas forem concorrentes, então suas imagens também são retas concorrentes.

Embora estas propriedades simples (incidência, colinearidade, e concorrência) sejam invariantes sob projeções, medida de comprimento e de ângulo, bem como razões de tais grandezas são, geralmente, alteradas por projeção. Triângulos isósceles podem ser projetados em triângulos não isósceles e triângulos equiláteros podem ser projetados em triângulos não equiláteros.

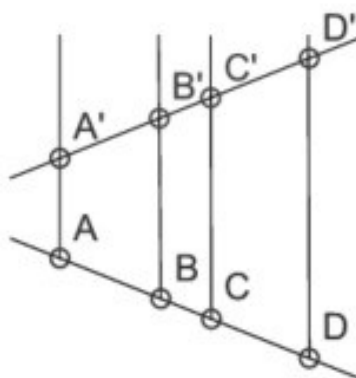
De modo análogo ao descrito acima, se quisermos nos restringir à Geometria plana, podemos definir projeções, central e paralela, de uma reta sobre outra.

Figura A.5: Projeção Plana Central.



Fonte: do autor.

Figura A.6: Projeção Plana Paralela.

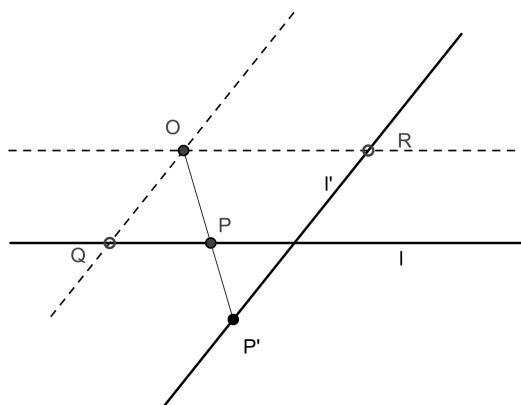


Fonte: do autor.

Já no caso de projeções entre planos, elas não estão definidas em todo o plano. No

caso de projeções entre retas isso é mais fácil ser visualizado. O “inconveniente” para uma projeção central é o ponto  $Q$  de intersecção da reta a ser projetada com a reta passando por  $O$  e paralela à reta em que se projeta. Justamente pela impossibilidade de projetar esse ponto, um ponto  $R$  da reta em que se projeta não tem sua pré imagem.

Figura A.7: Pontos Sob Restrição.



Fonte: do autor.

A Geometria Projetiva quer tratar das propriedades das figuras. Essas propriedades, bem como as figuras, podem ser tão numerosas e tão variadas, que algum princípio de classificação é necessário.

Exceto nas discussões que faremos sobre cônicas, ainda neste capítulo, tomamos como figuras apenas os subconjuntos de uma reta de um dado plano, e como propriedades tratamos apenas daquelas que permanecem inalteradas sob uma classe especial de transformações, classe essa que se situa entre a classe muito restrita dos movimentos rígidos e a classe muito geral das deformações arbitrárias. Consideramos a classe das transformações projetivas. Dizemos, então, que estamos tratando de Geometria Projetiva Plana, ou Geometria Projetiva, por brevidade. Em contraposição, devemos chamar de Geometria Métrica o conjunto das proposições que tratam das grandezas das figuras, invariantes apenas sob a classe dos movimentos rígidos.

**Definição A.1.** Uma transformação projetiva em um dado plano é qualquer sucessão finita de projeções, centrais e/ou paralelas, entre retas desse plano. Analogamente, uma transformação projetiva no espaço é qualquer sucessão finita de tais projeções entre planos (do espaço).

## A.2.2 A razão cruzada (ou anarmônica, ou dupla)

Falaremos agora de um conceito fundamental da Geometria Projetiva. Nenhuma quantidade que envolva somente três pontos sobre uma reta pode ser invariante sob projeção (ver Corolário A.1) abaixo. Porém - e esta é a descoberta decisiva da Geometria

Projetiva - se tivermos quatro pontos,  $A, B, C$  e  $D$ , sobre uma reta e se os projetarmos em  $A', B', C'$  e  $D'$ , respectivamente, sobre uma outra reta, então existirá uma certa quantidade, denominada razão cruzada dos quatro pontos, que retém seu valor sob a projeção. Aqui está uma propriedade de uma figura de quatro pontos sobre uma reta, que é preservada por projeção. Então  $\frac{CA}{CB} \setminus \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA}$  é, por definição, a razão cruzada dos quatro pontos  $A, B, C, D$ , tomados nessa ordem, sendo que  $AB$  denota o comprimento do seguimento orientado.

**Teorema A.1.** A razão cruzada de quatro pontos é invariante sob projeção, isto é, se  $A, B, C, D$  e  $A', B', C', D'$  são pontos correspondentes sobre duas retas relacionadas por uma projeção, então

$$\frac{CA}{CB} \setminus \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} \setminus \frac{D'A'}{D'B'}.$$

*Demonstração.* A demonstração segue usando o fato de que a área de um triângulo é igual a  $\frac{1}{2} \text{base} \times \text{altura}$  e é também dada pela metade do produto de quaisquer dois lados pelo seno do ângulo compreendido pelos lados.

$$S_{OCA} = \frac{1}{2} h \cdot \overline{CA} = \frac{1}{2} \overline{OC} \cdot \overline{OA} \text{sen}(C\hat{O}A);$$

$$S_{OCB} = \frac{1}{2} h \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{OC} \cdot \overline{OB} \text{sen}(A\hat{O}C);$$

$$S_{ODA} = \frac{1}{2} h \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \overline{OD} \cdot \overline{OA} \text{sen}(O\hat{D}A);$$

$$S_{ODB} = \frac{1}{2} h \cdot \overline{DB} = \frac{1}{2} \overline{OD} \cdot \overline{OB} \text{sen}(O\hat{D}B).$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{CA}{CB} \setminus \frac{DA}{DB} &= \frac{CA}{CB} \setminus \frac{DB}{DA} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OC} \text{sen}(C\hat{O}A)}{\overline{OB} \cdot \overline{OC} \text{sen}(C\hat{O}B)} \cdot \frac{\overline{OD} \cdot \overline{OB} \text{sen}(O\hat{D}B)}{\overline{OD} \cdot \overline{OA} \text{sen}(O\hat{D}A)} \\ &= \frac{\text{sen}(C\hat{O}A)}{\text{sen}(C\hat{O}B)} \cdot \frac{\text{sen}(O\hat{D}B)}{\text{sen}(O\hat{D}A)}. \end{aligned}$$

Portanto, a razão cruzada de  $A, B, C, D$  depende apenas dos ângulos subtendidos em  $O$  pelos segmentos unindo  $O$  a  $A, B, C, D$ . Uma vez que estes ângulos são os mesmos para quaisquer quatro pontos  $A', B', C', D'$  nos quais  $A, B, C, D$  podem ser projetadas a partir de  $O$ , segue-se que a razão cruzada permanece inalterada pela projeção. O fato de a razão cruzada permanecer inalterada sob uma projeção paralela decorre das propriedades elementares dos triângulos semelhantes.  $\square$

Até agora compreendemos a razão anarmônica de quatro pontos  $A, B, C, D$  sobre uma reta  $l$  como uma razão envolvendo comprimentos. Podemos modificar esta definição considerando  $l$  como um eixo coordenado. Nesse caso, se as coordenadas de  $A, B, C, D$  são, respectivamente,  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , temos

$$\begin{aligned} (ABCD) &= \frac{CA}{CB} \setminus \frac{DA}{DB} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \setminus \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} \\ &= \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1}, \end{aligned}$$

a qual também chamamos de razão cruzada e é a que consideraremos daqui em diante. Claro, é preciso que tenhamos o teorema anterior estendido.

**Teorema A.2.** A razão cruzada recém definida também é invariante sob projeções.

*Demonstração.* Primeiro, notemos a independência da razão com relação ao ponto escolhido como origem do sistema de coordenadas, pois nela só aparecem diferenças entre coordenadas. Uma vez que uma reversão da direção escolhida positiva sobre  $l$  mudará meramente o sinal de cada termo desta razão, o valor de  $(ABCD)$  também não depende da orientação escolhida. Constata-se facilmente que  $(ABCD)$  será negativo ou positivo conforme os pontos  $A$  e  $B$  estejam ou não separados pelo par  $C, D$ . Uma vez que esta propriedade de separação é invariante sob projeção, o sinal da razão anarmônica  $(ABCD)$  também é invariante.  $\square$

**Proposição A.1.** Sejam  $A, B, C$  pontos distintos sobre uma reta, com abscissas  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , respectivamente. Seja  $\lambda \neq 0$  um número real. Então existe um quarto ponto  $D$  tal que  $(ABCD) = \lambda$  se, e somente se,  $\lambda \neq \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}$ . Nesse caso  $D$  é único.

*Demonstração.* Suponhamos que exista um ponto  $D$  tal que  $(ABCD) = \lambda$ . Seja  $x$  sua abscissa. Então,

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x - x_2}{x - x_1} = \lambda.$$

Escrevendo  $\frac{1}{k} = (x_3 - x_1)/(x_3 - x_2)$ , a expressão acima torna-se  $(1 - k\lambda)x = x_2 - k\lambda x_1$ .

Se fosse  $1 - k\lambda = 0$ , ficaríamos com  $0x = x_2 - x_1$ , o que é impossível. Assim,  $\lambda \neq \frac{1}{k}$ .

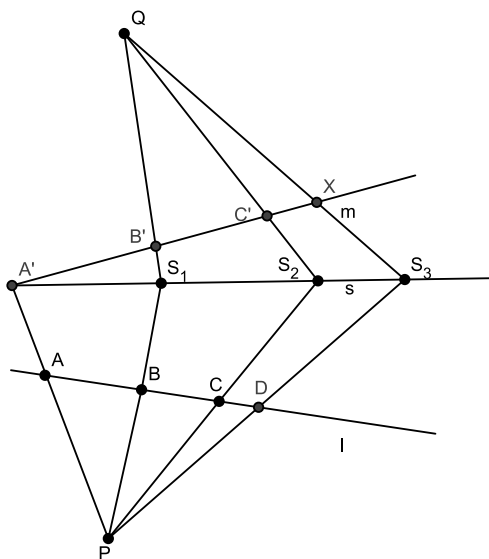
Reciprocamente, se essa desigualdade vale, vemos de imediato que  $x = \frac{x_2 - k\lambda x_1}{1 - k\lambda}$  é a abscissa do único  $D$  anunciado.  $\square$

**Teorema A.3.** A recíproca do teorema anterior é verdadeira. Isto é: se  $A, B, C, D$  e  $A', B', C', D'$  são duas quádruplas ordenadas de pontos, cada uma numa reta e tais que

$\frac{CA}{CB} \setminus \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} \setminus \frac{D'A'}{D'B'}$ , então existe uma transformação projetiva que as faz corresponder na ordem dada.

*Demonstração. (Primeira parte)* Sejam  $l, m$  as retas de  $\mathbb{R}^2$  tais que  $A, B, C, D \subset l$  e  $A', B', C', D' \subset m$ . Construimos uma transformação projetiva  $f : l \rightarrow m$  tal que  $f(A) = A', \dots, f(C) = C'$ . Note que nada dissemos sobre  $f(D)$ .

Figura A.8: Buscando Projeção



Fonte: do autor.

Escolhamos um ponto  $P$  e uma reta  $s$  em  $\mathbb{R}^2$  tais que  $s$  passe por  $A'$  e a reta que passa por  $P$  e é paralela a  $s$  não intercepte  $l$  nos pontos dados. Então projetamos  $A, B, C, D$  em  $A', S_2, S_3, S_4$  sobre  $s$ , a partir de  $P$ .

Se as retas  $S_2B'$  e  $S_3C'$  forem paralelas, tomamos a projeção paralela. Caso contrário, tomamos a projeção a partir do ponto de intersecção entre elas, digamos  $Q$ . A composição de uma dessas duas projeções com a projeção anterior, fornece uma transformação projetiva como desejada.

**(Segunda parte)** Agora observamos que as escolhas feitas acima têm suas **restrições**, mas o resultado ainda pode ser obtido impondo **mais uma restrição**. A saber, que a reta passando por  $Q$  e paralela à  $m$  não contenha  $S_4$ . Suponhamos, então,  $f$  como construída acima, mas com mais essa restrição. Assim podemos aplicar  $f$  também em  $D$ . Escrevamos  $f(D) = X$ .

Pela invariância da razão cruzada temos  $(ABCD) = (A'B'C'X)$ , e por hipótese temos  $(ABCD) = (A'B'C'D')$ . Portanto, obtemos  $(A'B'C'X) = (A'B'C'D')$ . Segue da Proposição 1.4, que  $X = D'$  conforme queríamos.  $\square$

**Corolário A.1.** Dados três pontos  $A, B, C$  sobre uma reta e  $A', B', C'$  sobre outra, existe uma transformação projetiva que aplica cada ponto em cada ponto daqueles dados.

*Demonstração.* É justamente o que foi mostrado na primeira parte da demonstração acima.  $\square$

*Observação A.1.* A ordem na qual  $A, B, C, D$  são tomados é parte essencial da definição da razão cruzada  $(ABCD)$ . Por exemplo, se  $(ABCD) = \lambda$ , então  $(BACD) = 1/\lambda$  e  $(ACBD) = 1 - \lambda$ , o que é verificado facilmente. Temos que quatro pontos podem ser ordenados de 24 maneiras diferentes, cada qual fornece um certo valor para razão anarmônica. Algumas permutações fornecerão o mesmo valor, como por exemplo  $(ABCD) = (BADC) = \lambda$ . No entanto, dada uma tal razão, apenas seis outras podem ser obtidas por reordenações dos pontos. A saber,  $\lambda, 1 - \lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda}{1 - \lambda}$ .

Estas seis quantidades são em geral distintas, mas duas delas podem coincidir, como no caso  $\lambda = -1$ .

*Observação A.2.* Podemos também definir a razão cruzada de quatro retas coplanares e concorrentes, como sendo a razão cruzada dos quatro pontos de interseção destas retas com uma outra reta. A posição desta quinta reta é imaterial, **desde que intercepte aquelas**, por causa da invariância da razão cruzada sob projeção. Assim,

$$(1234) = \frac{\text{sen}(1,3)}{\text{sen}(1,2)} \setminus \frac{\text{sen}(1,4)}{\text{sen}(2,4)}$$

tomada com um sinal de adição ou de subtração, conforme um par de retas não separe ou efetivamente separe a outra. Essa razão é interessante quando consideramos projeções entre planos no espaço, já que essas transformam retas de um plano em retas do outro.

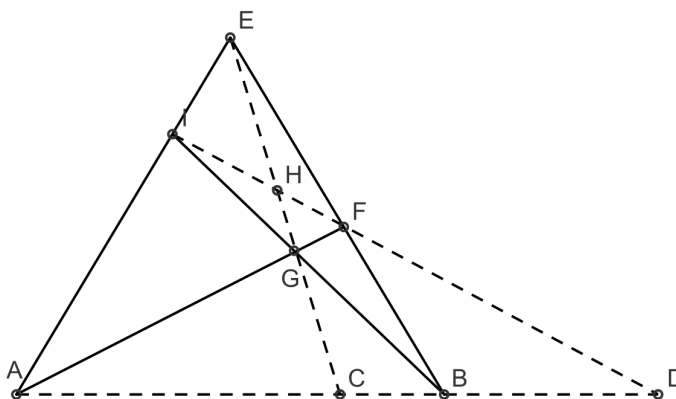
### A.2.3 Aplicação ao quadrilátero completo

Quando  $(ABCD) = -1$ , temos que  $C$  e  $D$  dividem o segmento  $AB$  internamente e externamente na mesma razão, e dizemos que  $C$  e  $D$  dividem o segmento  $AB$  harmonicamente.

Como uma aplicação interessante de invariância da razão cruzada, demonstraremos um teorema simples, porém interessante, da Geometria Projetiva. Ele diz respeito ao quadrilátero completo, sendo qualquer figura formada por quatro retas cortando-se em seis pontos. Na Figura A.9 abaixo, as quatro retas são  $AE, BE, BI, AF$ . As retas  $AB, EG$ , e  $IF$  são as diagonais do quadrilátero. Tomemos qualquer diagonal, digamos  $AB$ , e marquemos sobre ela os pontos  $C$  e  $D$  onde ela encontra as outras duas diagonais.



Figura A.9: Quadrilátero Completo.



Fonte: do autor.

Com isso temos o seguinte.

**Teorema A.4.** Nas condições acima temos que  $(ABCD) = -1$ . Ou seja: os pontos de intersecção de uma diagonal com as outras duas separam os vértices sobre aquela diagonal harmonicamente.

*Demonstração.* Primeiro, observamos que

$$x = (ABCD) = (IFHD)$$

por projeção de centro  $E$ , e

$$(IFHD) = (BACD)$$

por projeção de centro  $G$ .

Mas sabemos que  $(BACD) = 1/(ABCD)$ , de modo que  $x = 1/x$  e, portanto,  $x = \pm 1$ . Uma vez que  $C, D$  separam  $A$  e  $B$ , a razão cruzada  $x$  é negativa e deve, assim, ser  $-1$ . □

*Observação A.3.* Esta notável propriedade do quadrilátero completo mostra que é possível construir apenas com a régua o chamado conjugado harmônico com respeito a dois pontos  $A$  e  $B$ , de qualquer terceiro ponto colinear  $C$ . Basta tomar um ponto  $E$  fora da reta, traçar  $AG$  e  $BG$  cortando  $EB$  e  $EA$  em  $F$  e  $I$ , respectivamente, e traçar  $IF$ , que corta a reta de  $A, B, C$  no quarto ponto (harmônico),  $D$ , requerido.

### A.2.4 Cônicas

Nossa atenção até agora, tem se concentrado apenas em pontos, retas, planos e nas figuras formadas com um certo número destes. A Geometria Projetiva não está confinada ao estudo de figuras lineares, mas inclui também todo o campo das secções cônicas e suas generalizações em dimensões mais elevadas.

Iniciamos recordando as definições métricas das seções cônicas. As usuais referem-se aos focos.

**Definição A.2.** Uma *elipse* é definida como o lugar geométrico de todos os pontos  $P$  no plano cuja soma das distâncias,  $r_1$  e  $r_2$ , à pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$ , os focos, tem um valor constante (se os focos coincidirem, a figura será um círculo).

**Definição A.3.** Uma *hipérbole* é definida como o lugar de todos os pontos  $P$  no plano para os quais o valor absoluto da diferença  $r_1 - r_2$  é igual a uma constante fixa.

**Definição A.4.** A *parábola* é definida como o lugar geométrico de todos os pontos  $P$  que equidistam de um ponto e de uma reta dados.

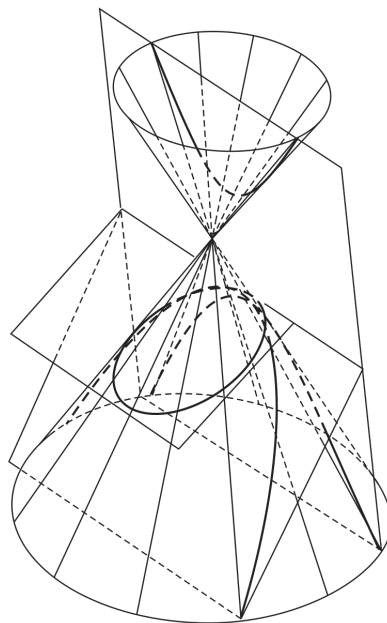
Todas essas curvas podem ser expressas por equações do segundo grau nas coordenadas cartesianas  $(x, y)$ . Não é difícil provar, inversamente, que qualquer curva definida analiticamente por uma equação do segundo grau

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + cy + f = 0$$

é uma das cônicas acima, uma reta, um par de retas, um ponto, ou uma curva no plano imaginário. Isto é normalmente provado pela criação de um sistema de coordenadas adequado, como se faz em qualquer curso de Geometria Analítica, o que não é o foco deste trabalho.

Essas definições das seções cônicas são essencialmente métricas, uma vez que utilizam o conceito de distância. No entanto, há uma outra definição que mostra que seções cônicas fazem parte da Geometria Projetiva: as seções cônicas são simplesmente as projeções de um círculo em um plano.

Figura A.10: Seções Cônicas



Fonte: do autor.

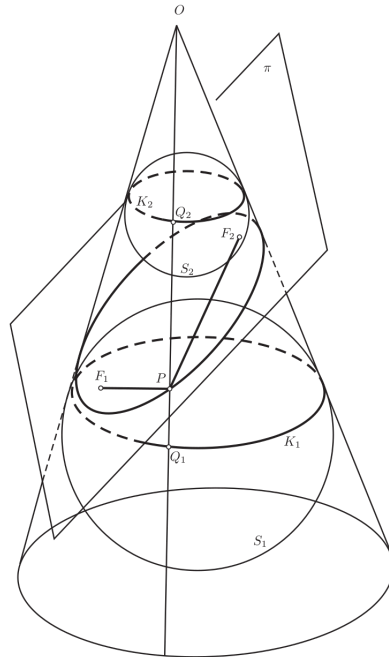
Se projetarmos um círculo  $C$  a partir de um ponto  $O$ , as retas de projeção formarão um cone duplo, e a interseção deste cone com um plano  $\pi$  será a projeção de  $C$  nesse plano. Esta interseção será uma elipse ou uma hipérbole conforme o plano corte uma ou ambas as porções do cone. O caso intermediário da parábola ocorrerá se  $\pi$  for paralelo a uma das retas que passam por  $O$ .

O cone de projeção não é necessariamente um cone circular reto com seu vértice perpendicularmente acima do centro do círculo  $C$ , ele também pode ser oblíquo. Em todos os casos, conforme aceitamos aqui sem prova, a interseção de um cone com um plano será uma curva cuja equação é do segundo grau.

Quando o plano corta apenas uma porção de um cone circular reto, afirmamos que a curva de interseção  $E$  é uma elipse. Podemos provar que  $E$  satisfaz a definição focal usual da elipse, conforme fornecida acima, por um simples e belo raciocínio.

A prova é baseada na inclusão das duas esferas  $S_1$  e  $S_2$  tangentes a  $\pi$  nos pontos  $F_1$  e  $F_2$  respectivamente, e que tangenciam o cone ao longo dos círculos paralelos, digamos  $K_1$  e  $K_2$ , respectivamente.

Figura A.11: Seções Esferas de Dandelin.



Fonte: do autor.

Unimos um ponto arbitrário  $P$  de  $E$  com  $F_1$  e  $F_2$  e traçamos a reta ligando  $P$  ao vértice  $O$  do cone. Esta reta está inteiramente contida na superfície do cone e corta os círculos  $K_1$  e  $K_2$  nos pontos  $Q_1$  e  $Q_2$  respectivamente. Ora,  $PF_1$  e  $PQ_1$  são duas tangentes a partir de  $P$  para  $S_1$ , de modo que  $PF_1 = PQ_1$  e, de modo semelhante,  $PF_2 = PQ_2$ .

Somando estas duas equações, obtemos

$$PF_1 + PF_2 = PQ_1 + PQ_2.$$

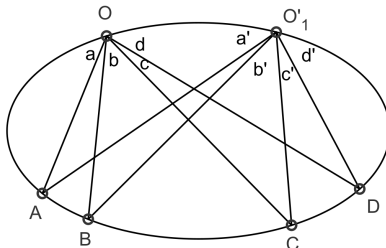
Por outro lado,  $PQ_1 + PQ_2 = Q_1Q_2$  é exatamente a distância ao longo da superfície do cone entre os círculos paralelos  $K_1$  e  $K_2$ , sendo, portanto, independente da escolha do ponto de  $P$  em  $E$ . Assim,  $PF_1 + PF_2$  é constante, como queríamos observar.

### A.2.5 Propriedades Projetivas das Cônicas

Adotemos a seguinte definição provisória: uma cônica é a projeção de um círculo em um plano. Queremos eliminar a objeção de que círculo seja um conceito da Geometria Métrica. Mais à frente chegaremos a uma definição puramente projetiva das cônicas.

Decorre imediatamente da definição provisória que qualquer propriedade do círculo que seja invariante sob projeção, também será uma propriedade das cônicas. Ora, um círculo tem a propriedade bem conhecida (métrica) de que um arco dado subtende o mesmo ângulo para todos os pontos  $O$  sobre o círculo.

Figura A.12: Razões Anarmônicas em um círculo e em uma Elipse.



Fonte: do autor.

Na figura, o ângulo  $AB$  subtendido pelo arco  $AB$  é independente da posição de  $O$ . Pode-se relacionar este fato ao conceito projetivo de razão cruzada considerando não dois pontos  $A, B$  mas quatro pontos  $A, B, C, D$  no círculo. As quatro retas  $a, b, c, d$  que os unem a um quinto ponto  $O$  sobre o círculo terão razão cruzada  $(a, b, c, d)$  que depende apenas do ângulos subtendidos pelos arcos  $CA, CB, DA, DB$ .

Se unirmos  $A, B, C, D$  a um outro ponto  $O'$  no círculo, obtemos quatro raios  $a', b', c', d'$ . A partir das propriedades do círculo, os dois quádruplos de raios serão “congruentes”. Portanto tem a mesma razão anarmônica  $(a'b'c'd') = (abcd)$ .

Se projetarmos agora o círculo obtendo qualquer cônica  $K$ , devemos obter em  $K$  quatro pontos, novamente chamados de  $A, B, C, D$ , dois outros pontos  $O, O'$ , e os dois quádruplos de retas  $a, b, c, d$  e  $a', b', c', d'$ . Estes quádruplos não serão congruentes, já que a igualdade de ângulos é em geral destruída pela projeção, mas a igualdade  $(a, b, c, d) = (a', b', c', d')$  continua válida. Assim, temos o seguinte

**Teorema A.5.** Se quatro pontos dados quaisquer  $A, B, C, D$  de uma cônica  $K$  são unidos a um quinto ponto  $O$  de  $K$  pelas retas  $a, b, c, d$  então o valor da razão cruzada  $(a, b, c, d)$  é independente da posição de  $O$  em  $K$ .

Não é difícil provar a recíproca deste resultado do seguinte modo: se há dois pontos  $O, O'$  sobre uma curva  $K$  tal que cada quádruplo de quatro pontos  $A, B, C, D$  sobre  $K$  aparece sob a mesma razão cruzada tanto a partir de  $O$  como de  $O'$ , então  $K$  é uma cônica ( e portanto  $A, B, C, D$  têm a mesma razão cruzada a partir de qualquer terceiro ponto  $O$  de  $K$ ).

### A.3 Considerações geométricas na Álgebra Linear

Assumiremos nesta seção alguns dos resultados envolvendo a Álgebra Linear, como as definições de *conjuntos linearmente independentes* e *bases de um subespaço* por exemplo. Estes resultados podem ser consultados, por exemplo em (BOLDRINI et al., 1980).

**Proposição A.2.** Se  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é linear e injetora, então  $T$  transforma retas em retas,

planos em planos e preserva paralelismo.

*Demonstração.* Temos que  $r$  é uma reta em  $\mathbb{R}^3$  se, e somente, existem  $p, v \in \mathbb{R}^3$ ,  $v \neq 0$ , tais que  $r = \{p + \lambda v; \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

Então, pela linearidade de  $T$  a imagem de todo ponto de  $r$  é da forma  $T(p) + \lambda T(v)$ . Sendo  $T$  injetora, tem-se que  $T(v) \neq 0$  e, portanto, a imagem de  $r$ , por  $T$ , está contida na reta  $\{T(p) + \lambda T(v); \lambda \in \mathbb{R}\}$ , isto é  $T(r) \subset \{T(p) + \lambda T(v); \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Por outro lado, pela linearidade de  $T$ , segue que se  $Y \in \{T(p) + \lambda T(v); \lambda \in \mathbb{R}\}$ , então  $Y = T(p) + \lambda T(v) = T(p + \lambda v)$  para algum  $\lambda$ . Logo  $T(r) = \{T(p) + \lambda T(v); \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

Que  $T$  transforma planos em planos segue analogamente, já que, sendo injetora, transforma conjuntos  $\{u, v\}$  linearmente independentes em conjuntos  $\{T(u), T(v)\}$  linearmente independentes.

Que  $T$  preserva paralelismo segue do fato de que se  $w = \lambda v$ , então  $T(w) = \lambda T(v)$ .  $\square$

**Proposição A.3.** Seja  $\{u, v, w\}$  uma base de  $\mathbb{R}^3$  e seja  $\{u', v', w'\} \subset \mathbb{R}^3$  qualquer. Existe uma única transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T(u) = u'$ ,  $T(v) = v'$  e  $T(w) = w'$ .

A demonstração pode ser vista em (BOLDRINI et al., 1980).

**Lema A.1.** Sejam  $r_1, \dots, r_4$  e  $s_1, \dots, s_4$  quádruplas de retas em  $\mathbb{R}^3$ , cada reta passando pela origem e, em cada quádrupla, três a três não coplanares. Então existe um operador linear invertível  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T(r_i) = s_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

*Demonstração.* Escrevamos  $r_1 = \{ta_1; t \in \mathbb{R}\}, \dots, r_4 = \{ta_4; t \in \mathbb{R}\}$  e  $s_1 = \{tv_1; t \in \mathbb{R}\}, \dots, s_4 = \{tv_4; t \in \mathbb{R}\}$ . É suficiente encontrar  $T$  tal que  $T(t_i a_i) = v_i$  para certos  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , e  $T(a_4) = v_4$ .

Como  $v_4 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$  para certos  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  (todos não nulos pela não coplanaridade), buscamos  $T$  tal que

$$v_4 = T(a_4) = T(\lambda_1 t_1 a_1 + \lambda_2 t_2 a_2 + \lambda_3 t_3 a_3)$$

e, portanto, tal que

$$T(a_4 - \lambda_1 t_1 a_1 - \lambda_2 t_2 a_2 - \lambda_3 t_3 a_3) = 0.$$

Como  $a_4 = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_3 a_3$  para certos  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ , devemos ter

$$(\delta_1 - \lambda_1 t_1) a_1 + (\delta_2 - \lambda_2 t_2) a_2 + (\delta_3 - \lambda_3 t_3) a_3 = 0.$$

A única possibilidade é  $(t_i = \frac{\delta_i}{\lambda_i})$ , para  $i = 1, 2, 3$ . É simples verificar que tomando tais  $i$ 's e estendendo  $T(t_i a_i) = v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , por linearidade, temos o operador desejado.  $\square$

Em seguida mostramos que o único automorfismo do corpo dos reais é a aplicação identidade. De posse disso, veremos como classificar todas as funções de  $\mathbb{R}^2$  em si próprio, as quais aplicam retas em retas.

**Proposição A.4.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação não identicamente nula tal que para quaisquer  $x$  e  $y$  reais valem as igualdades

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \text{e} \quad f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Então  $f(x) = x$ .

*Demonstração.* Observemos que:

(a)  $f(a) = 0$  se, e somente se,  $a = 0$ .

(b)  $f$  é uma função ímpar.

(c)  $f(1) = 1$ .

(d)  $f(x^2) = [f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ .

De fato, as igualdades  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$  implicam que  $f(0) = 0$ . Suponha, por absurdo, que exista um  $a \neq 0$  tal que  $f(a) = 0$ . Então

$$f(x) = f\left(a \frac{x}{a}\right) = f(a)f\left(\frac{x}{a}\right) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

Isto significa que  $f$  é identicamente nula, uma contradição. Isso conclui o item (a).

Para o item (b) temos que  $f$  é uma função ímpar, pois

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x).$$

Uma vez que para qualquer  $x$  real vale que  $f(x) = f(1x) = f(1)f(x)$ , segue que

$$f(x)(f(1) - 1) = 0.$$

Como  $f$  não é identicamente nula, existe  $x_0$  tal que  $f(x_0) \neq 0$ . Logo  $f(1) = 1$ , concluindo o item (c).

O item (d) segue diretamente da hipótese sobre  $f$ .

De posse destas observações temos as seguintes afirmações.

**Afirmção 1:**  $f(nx) = nf(x)$  para quaisquer inteiro  $n$  e qualquer  $x$  real.

Fixemos qualquer  $x$  real. Demonstremos por indução que a afirmação é verdadeira para qualquer  $n \geq 0$ . Para  $n = 0$  a afirmação é correta pelas observações iniciais. Vamos

supor que a afirmação seja verdadeira para  $n$ . Então,

$$f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx) = f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

Portanto, a afirmação é verdadeira para qualquer  $n \geq 0$ .

Para  $n < 0$  utilizamos o fato da função ser ímpar,  $f(nx) = f(-n)(-x) = (-n)f(-x) = (-n)(-f(x)) = nf(x)$ . Isto conclui a demonstração da afirmação 1.

**Afirmação 2:**  $f\left(\frac{1}{m}x\right) = \frac{1}{m}f(x)$  para qualquer racional  $\frac{1}{m}$  e qualquer  $x$  real.

De fato, sejam  $x \in \mathbb{R}$  e  $m \neq 0$  um número inteiro. Pela afirmação anterior podemos escrever.

$$f(x) = f\left(\frac{m}{m}x\right) = mf\left(\frac{1}{m}x\right).$$

Logo,

$$f\left(\frac{1}{m}x\right) = \frac{1}{m}f(x).$$

**Afirmação 3:**  $f\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n}{m}f(x)$  para qualquer racional  $\frac{n}{m}$  e qualquer  $x$  real. Em particular  $f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}f(1) = \frac{n}{m}$ .

É imediato pelas afirmações anteriores e pelo item (c) acima, pois

$$f\left(\frac{n}{m}x\right) = nf\left(\frac{1}{m}x\right) = \frac{n}{m}f(x).$$

**Afirmação 4:**  $f$  preserva a ordem, isto é, se  $x < y$  então  $f(x) < f(y)$ .

Seja  $x > 0$ . Como existe  $a > 0$  tal que  $a^2 = x$ , temos  $f(x) = f(a^2) = [f(a)]^2 > 0$ . Isto é suficiente para mostrar que  $f$  preserva a ordem. Vejamos. Se  $x < y$  então  $0 < y - x$ . Pelo visto,  $0 < f(y - x) = f(y) - f(x)$ , portanto  $f(x) < f(y)$ .

Para concluirmos a demonstração da proposição suponhamos por absurdo que exista  $x_0$  tal que  $f(x_0) \neq x_0$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $f(x_0) < x_0$ .

Como sabemos, dados dois números reais distintos, existe um racional entre eles. Escolha um racional  $a$  tal que  $f(x_0) < a < x_0$ . Como  $f$  preserva a ordem e  $a$  é racional, temos, pela afirmação 4, que  $a = f(a) < f(x_0)$ , que é uma contradição. Logo  $f(x) = x$  para qualquer  $x$  real.  $\square$

**Proposição A.5.** Seja  $B = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função biunívoca tal que  $B(0) = 0$ . Se  $B$  aplica retas em retas, então  $B$  é um operador linear invertível.

*Demonstração.* Sejam  $l_1$  e  $k$  retas tais que  $B(l_1) \subset k$ . Inicialmente mostremos que  $B(l_1) = k$  e  $l_1$  é a única reta cuja imagem está contida em  $k$ .

Vamos supor, por absurdo, que exista um ponto  $q \in k$  mas  $q \notin B(l_1)$ . Nesse caso,



como  $B$  é biunívoca existe um único ponto  $q_0$  tal que  $B(q_0) = q$ . É claro que  $q_0 \notin l_1$ . Seja  $l_2$  uma reta que contém  $q_0$  e é perpendicular a  $l_1$  em  $q_1 \in l_1$ . Como  $B$  aplica retas em retas e  $B(q_0), B(q_1) \in k$ , temos  $B(l_2) \subset k$ .

Agora, dado um ponto qualquer  $p$  de  $\mathbb{R}^2$ , ele pertence a uma reta  $l$  que intercepta  $l_1 \cup l_2$  em pelo menos dois pontos, digamos  $p_1$  e  $p_2$ . Novamente, como  $B(p_1), B(p_2) \in k$ , segue que  $B(l) \subset k$ . Isto mostra que  $B(\mathbb{R}^2) \subset k$ . Mas isso é uma contradição, pois estamos supondo que  $B$  é sobrejetiva.

Portanto, só existe a reta  $l_1$  tal que  $B(l_1) = k$ .

Mostremos agora que a imagem por  $B$  de quaisquer duas retas paralelas  $l_1$  e  $l_2$  são duas retas paralelas.

Pelo visto, as suas imagens  $B(l_1)$  e  $B(l_2)$  são retas distintas. Suponhamos por absurdo, que exista um ponto na interseção  $p \in B(l_1) \cap B(l_2)$ . Sendo assim, a pré-imagem  $B^{-1}(p)$  tem pelo menos dois pontos, um em cada reta paralela, contradizendo a hipótese de  $B$  ser biunívoca.

**Afirmção 1:** Se  $\{v, w\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^2$  então  $B(v + w) = B(v) + B(w)$ .

Sejam  $l_1$  e  $l_2$  as retas distintas que concorrem na origem e tais que  $v \in l_1$  e  $w \in l_2$ . Sendo assim,  $\{v + w\} = l'_1 \cap l'_2$ , em que  $l'_1$  é a reta que passa por  $w$  e é paralela a  $l_1$  enquanto  $l'_2$  é a reta que passa por  $v$  e é paralela a  $l_2$ . Examinemos as imagens por  $B$  das retas acima,

$$B(0), B(v) \in k_1 = B(l_1)$$

e

$$B(0), B(w) \in k_2 = B(l_2).$$

Como sabemos,  $k_1$  e  $k_2$  são retas distintas; logo,  $\beta = \{B(v), B(w)\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^2$  pois nenhum vetor é nulo e são não colineares.

Agora, as retas  $k'_1 = B(l'_1)$  e  $k'_2 = B(l'_2)$  são retas que passam, respectivamente, por  $B(w)$  e  $B(v)$  e são paralelas, respectivamente, a  $k_1$  e  $k_2$ . Não é difícil verificarmos que  $\{B(v) + B(w)\} = k'_1 \cap k'_2$ .

Por outro lado,  $\{B(v + w)\} = B(l'_1 \cap l'_2) = k'_1 \cap k'_2$ , portanto,  $B(v + w) = B(v) + B(w)$ .

**Afirmção 2:** Existe uma transformação linear invertível  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que a composta  $C = A^{-1} \circ B$  é expressa na forma  $C(x, y) = (f(x), g(y))$ , em que  $f$  e  $g$  são biunívocas,  $f(0) = g(0) = 0$  e  $f(1) = g(1) = 1$ . E mais,  $C$  satisfaz as hipóteses da proposição.

Como feito, na afirmação 1 acima, mostramos que o conjunto de dois vetores  $\beta = \{B(e_1), B(e_2)\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear tal que

$A(e_1) = B(e_1)$  e  $A(e_2) = B(e_2)$ . Mais precisamente, seja  $A(x, y) = xB(e_1) + yB(e_2)$ . Como  $\beta$  é uma base, então  $A$  é invertível.

Recordamos que  $A^{-1}$  também é uma transformação linear.

Sendo uma transformação linear também invertível,  $A^{-1}$  aplica retas em retas,  $A^{-1}(0) = 0$  e é sobrejetiva. Agora, é imediato concluir que  $C = A^{-1} \circ B$  também é uma aplicação biunívoca, aplica retas em retas e  $C(0) = 0$ .

Portanto,  $C$  satisfaz todas as hipóteses da proposição.

Por construção,  $C(0) = 0$ ,  $C(e_1) = e_1$  e  $C(e_2) = e_2$ . Isto implica que  $C$  preserva os eixos  $0x$  e  $0y$ . Logo  $C$  transforma retas horizontais em retas horizontais, enquanto retas verticais são transformadas em retas verticais. Isto é suficiente para mostrar que  $C(x, y) = (f(x), g(y))$ . A biunivocidade segue de imediato.

Sendo assim, resta-nos mostrar que  $C \equiv id$ . Disto segue que  $A \equiv B$  e, portanto,  $B$  é uma transformação linear.

**Afirmção 3:** As funções coordenadas de  $C(x, y) = (f(x), g(y))$  são aditivas, ou seja  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  e  $g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2)$ .

Examinemos apenas para a função  $f$ , o estudo de  $g$  é similar.

Sejam  $x_1$  e  $x_2$  números reais. Se  $x_1 \neq 0$ , considere a base  $\{v, w\}$  de  $\mathbb{R}^2$ , em que  $v = (x_1, 0)$  e  $w = (x_2, 1)$ . Pela afirmação 1 logo acima, vale a aditividade  $C(v + w) = C(v) + C(w)$ , implicando que  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ .

Se  $x_1 = 0$ . Como  $f(0) = 0$ , é imediato verificar que  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ .

Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Consideremos uma reta com inclinação  $\alpha$ , digamos  $l: y = \alpha x + b_0$ , e calculemos a inclinação  $i(\alpha)$  da reta imagem  $C(l)$ .

Para isto, sejam  $(0, b_0)$  e  $(x, \alpha x + b_0)$  dois pontos distintos de  $l$ . É claro que  $x \neq 0$ . A inclinação de  $C(l)$  é então dada por

$$i(\alpha) = \frac{g(\alpha x + b_0) - g(b_0)}{f(x) - f(0)} = \frac{g(\alpha x)}{f(x)}$$

A última igualdade segue do fato que  $g(\alpha x + b_0) = g(\alpha x) + g(b_0)$  e  $f(0) = 0$ .

Avaliando em  $x = 1$  obtemos  $i(\alpha) = g(\alpha)$ , pois  $f(1) = 1$ . Logo,  $g(\alpha x) = g(\alpha)f(x)$  para quaisquer  $x$  e  $\alpha$ . Avaliando em  $\alpha = 1$  concluímos que  $g \equiv f$  pois  $g(1) = 1$ . Portanto,  $f(\alpha x) = f(\alpha)f(x)$ . Isto encerra a demonstração da afirmação 3.

Pelo visto,  $f(x) = x = g(x)$ . Logo,  $C(x, y) = (f(x), g(y)) = (x, y)$ , encerrando a demonstração da proposição.  $\square$

## A.4 O Plano Projetivo $\mathbb{R}\mathcal{P}^2$

Em  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  consideramos a seguinte relação de equivalência: para  $x, y \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ ,  $x$  está relacionado com  $y$  se, e somente se, existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $x = ty$ . O conjunto quociente de  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  por essa relação de equivalência será denotado por  $\mathbb{R}\mathcal{P}^2$  e chamado plano projetivo real.

Um elemento de  $\mathbb{R}\mathcal{P}^2$  será anotado na forma  $[a]$ , em que  $a \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$  é um representante da classe de equivalência e será chamado um ponto. Chamemos de reta, todo subconjunto de  $\mathbb{R}\mathcal{P}^2$ , e somente eles, formado por todos os pontos  $P = [\lambda a + \mu b]$ , com  $\lambda$  e  $\mu$  reais e com  $\{a, b\}$  linearmente independentes. Noutras palavras, entendemos por ponto a imagem de cada reta pela origem de  $\mathbb{R}^3$ , menos a origem, sob a aplicação quociente; e entendemos por reta a imagem de cada plano de  $\mathbb{R}^3$ , menos a origem, sob a aplicação quociente.

Talvez fosse mais interessante utilizar ponto projetivo e reta projetiva, para efeito de maior contraste entre o que se tinha e o que justo se constrói. Preferimos não, para efeito de simplicidade; mas sugerimos que ora e outra se acrescente o projetivo na leitura.

Segue imediatamente da definição, que três pontos  $A = [a]$ ,  $B = [b]$ ,  $C = [c]$  são colineares se, e somente se, o produto misto  $\langle a, b \wedge c \rangle$  é nulo, como sabemos do curso de Geometria Analítica.

Igualmente segue que

- i) existe uma única reta que contém dois pontos dados,
- ii) existe um único ponto contido em duas retas dadas.

Dizemos, então, uma única reta incide em ambos dois pontos dados, e um único ponto incide em ambas duas retas dadas.

Os pontos  $X = [(1, 0, 0)]$ ,  $Y = [(0, 1, 0)]$  e  $Z = [(0, 0, 1)]$  constituem o assim chamado triângulo de referência; seus lados são as retas de equações  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , das quais a primeira é  $YZ$  e não passa por  $X$ ; analogamente para as outras.

Escrevendo  $R = [(x, y, z)]$ , os números  $x, y, z$  chamam-se as coordenadas homogêneas de  $R$ .

Por causa da simplicidade das coordenadas homogêneas de  $X, Y, Z$  e de alguns pontos relacionados, a álgebra de qualquer configuração que contenha esses pontos fica, adiantamos, simplificada. Por essa razão é útil poder trocar qualquer triângulo por  $XYZ$ , no sentido do seguinte teorema.

**Teorema A.6.** Seja  $W = [(1, 1, 1)]$  e sejam  $A_1, A_2, A_3, A_4$  quatro pontos quaisquer de  $\mathbb{R}\mathcal{P}^2$ , três a três não colineares. Então existe uma função  $f : \mathbb{R}\mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{P}^2$  que é uma bijeção,

que leva retas em retas, que preserva a incidência, e é tal que  $f(A_1) = X$ ,  $f(A_2) = Y$ ,  $f(A_3) = Z$ ,  $f(A_4) = W$  (preservar a incidência significa que se o ponto  $P$  está na reta  $l$ , então  $f(P)$  está em  $f(l)$ ).

*Demonstração.* Pelo Lema A.1, existe uma transformação linear invertível  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que leva as retas  $r_1 = \{ta_1; t \in \mathbb{R}\}, \dots, r_4 = \{ta_4; t \in \mathbb{R}\}$  sobre as retas  $s_1 = \{t(1, 0, 0); t \in \mathbb{R}\}, \dots, s_4 = \{t(1, 1, 1); t \in \mathbb{R}\}$ . Em que  $A_i = [T(a_i)]$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Defina  $f : \mathbb{R}\mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{P}^2$  por  $f([a_i]) = [T(a_i)]$ . Sendo  $T$  linear, temos que  $f$  está bem definida. Uma vez que todo ponto  $P$  de uma reta é da forma  $P = [\lambda u + \mu v]$ , temos  $f(P) = [T(\lambda u + \mu v)] = [\lambda Tu + \mu Tv]$ , donde, como  $T$  é invertível,  $f$  leva a reta que incide em  $[u]$  e  $[v]$  sobre toda a reta que incide em  $f([u])$  e  $f([v])$  e preserva incidência.  $\square$

**Definição A.5.** Uma função  $g : \mathbb{R}\mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{P}^2$  que (como  $f$  no teorema acima) é uma bijeção, preserva a incidência e leva retas sobre retas, chama-se uma colineação.

É natural dizermos que a colineação  $f$  do teorema acima é induzida em  $\mathbb{R}\mathcal{P}^2$  pelo operador  $T$  de  $\mathbb{R}^3$ . O teorema seguinte é de grande importância, pois nos mostra que conceitos da Álgebra Linear são excelentes para tratar não apenas Geometria Euclidiana, mas também Geometria Projetiva.

**Teorema A.7.** (Teorema Fundamental da Geometria Projetiva) Toda colineação  $\psi : \mathbb{R}\mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{P}^2$  é induzida por um operador linear invertível  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

*Demonstração.* Seja  $\varphi : \mathbb{R}\mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{P}^2$  uma colineação. Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $\varphi$  preserva a reta ideal  $I_\infty$  e fixa o ponto  $[(0, 0, 1)]$ . Chamaremos pontos ideais e reta ideal, os pontos e reta no infinito.

Caso isto não ocorra, consideramos os pontos projetivos não colineares três a três,  $\bar{a} = \varphi(1 : 0 : 0) \in \varphi(I_\infty)$ ,  $\bar{b} = \varphi(0 : 1 : 0) \in \varphi(I_\infty)$  e  $\bar{c} = \varphi(0 : 0 : 1)$  e construímos uma colineação  $\bar{D} : \mathbb{R}\mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{P}^2$  induzida por um operador linear de  $\mathbb{R}^3$  tal que

$$\bar{D}(\bar{a}) = (1 : 0 : 0), \bar{D}(\bar{b}) = (0 : 1 : 0) \text{ e } \bar{D}(\bar{c}) = (0 : 0 : 1).$$

Logo, a composta  $\bar{D} \circ \psi : \mathbb{R}\mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{P}^2$  é uma colineação que fixa o ponto  $(0 : 0 : 1)$  e preserva a reta ideal desde que fixa dois de seus pontos, quais sejam  $(1 : 0 : 0)$  e  $(0 : 1 : 0)$ .

Suponhamos que a colineação  $\varphi$  está sob as condições descritas acima. Sendo assim,  $\varphi$  aplica biunivocamente o plano afim no plano afim.

Isto permite definir uma aplicação  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  via identificação afim, estabelecendo que  $B(x, y)$  é tal que  $(B(x, y) : 1) = \varphi(x : y : 1)$ .

Como  $\varphi$  é uma aplicação biunívoca do plano afim que aplica retas afins em retas afins.

- a identificação afim aplica retas Euclidianas do  $\mathbb{R}^2$  em retas afins e
- como  $(B(0, 0) : 1) = \varphi(0 : 0 : 1) = (0 : 0 : 1)$ ,
- é imediato concluir que
- $B$  aplica retas Euclidianas em retas Euclidianas
- fixa a origem  $o \in \mathbb{R}^2$
- e  $B$  é biunívoca.

Portanto  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um operador linear invertível  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definido por  $A(x, y, z) = (B(x, y), z)$ .

Mostremos agora que  $\psi = \bar{A}$ .

Como, pela definição de  $B$  e de  $A$ , temos  $\bar{A}(x : y : 1) = [A(x, y, 1)] = [(B(x, y), 1)] = \psi(x : y : 1)$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ , falta verificar que  $\bar{A}(x : y : 0) = \psi(x : y : 0)$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Dados tais  $x, y$ , seja  $r = [\lambda(x, y, 0) + \mu(0, 0, 1)]$ ; isto é, a reta em  $\mathbb{R}P^2$  que passa por  $(x : y : 0)$  e  $(0 : 0 : 1)$ . Como  $\psi$  é uma colineação que fixa  $(0 : 0 : 1)$ , essa reta é transformada por  $\psi$  numa reta  $[\lambda(a, b, 0) + \mu(0, 0, 1)]$ . Mas  $r$  contém o ponto  $[(x, y, 1)]$  que, por  $\psi$ , é transformado em  $[(B(x, y), 1)]$ .

Segue-se que  $[\lambda(a, b, 0) + \mu(0, 0, 1)]$  contém  $[(B(x, y), 1)]$ .

Assim,  $(B(x, y), 1) = \lambda(a, b, 0) + \mu(0, 0, 1)$  para certos reais  $\lambda, \mu$  e, portanto, devemos ter  $\mu = 1$  e  $\lambda(a, b) = B(x, y)$ , donde  $[B(x, y), 0] = [(a, b), 0]$ .

Como  $\psi$  deixa invariante a reta ideal, e como  $(x : y : 0)$  pertence a essa reta, devemos ter  $\psi(x : y : 0) = (a : b : 0)$ . □

## A.5 Geometria em $\mathbb{R}P^2$ e sua relevância para a Geometria em $\mathbb{R}^2$

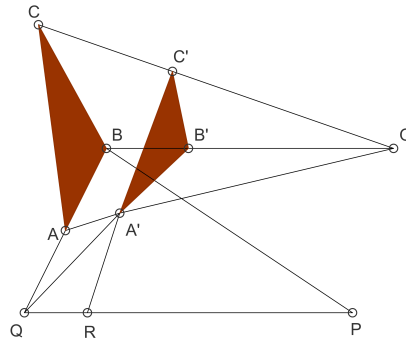
O conceito de projeção central de uma reta sobre outra, em  $\mathbb{R}^2$ , estende-se naturalmente para retas em  $\mathbb{R}P^2$ , já que, também aqui, dois pontos determinam uma única reta. Por outro lado, agora há apenas esse tipo de projeção, já que agora não existem retas paralelas. Não é uma perda, é uma unificação. De qualquer forma, na próxima seção aprenderemos a recuperar os dois tipos em  $R^2$  a partir do único tipo  $\mathbb{R}P^2$ . Além disso, é importante notar que uma projeção central de uma reta  $r$  sobre outra, em  $\mathbb{R}P^2$ , está definida em todos os pontos da primeira e é uma bijeção sobre todos os pontos da outra! Em conformidade com nossa escolha de não atribuir o adjetivo projetivo para pontos e retas em  $\mathbb{R}P^2$ , continuaremos chamando de transformação projetiva a toda sucessão finita de projeções.

De forma contrária à que procedemos desde o início até o parágrafo anterior, agora preferimos apresentar primeiro a versão projetiva de certos conceitos e um resultado subsequente.

**Definição A.6.** Dois triângulos,  $ABC$  e  $A'B'C'$ , em  $\mathbb{R}P^2$ , estão em perspectiva central se as retas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  concorrem num mesmo ponto. Eles estão em perspectiva axial se existe uma correspondência entre seus vértices, tal que as três intersecções dos lados correspondentes sejam colineares.

Na definição acima, claro, supomos  $A \neq A'$ , etc.

Figura A.13: A Configuração de Desargues no Plano.



Fonte: do autor.

**Teorema A.8.** (Teorema de Desargues em  $\mathbb{R}P^2$ ) Dois triângulos estão em perspectiva central se, e somente se, estão em perspectiva axial.

*Demonstração.* Perspectiva central  $\rightarrow$  perspectiva axial. Pois, suponhamos que  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  todas se encontram em  $O$ . Existe uma colinação  $f$  que aplica  $A, B, C, O$  respectivamente, sobre  $X, Y, Z, W$ . Seja  $f(A') = X'$ , etc. Então  $X'$  está em  $XW$  e, portanto,  $X'$  é da forma  $[(1+p, 1, 1)]$ ; analogamente,  $Y' = [(1, q+1, 1)]$ ,  $Z' = [(1, 1, 1+r)]$ . A equação de  $XY$  é  $z = 0$ , de modo que  $XY$  encontra  $X'Y'$  em  $R = [(p, -q, 0)]$ . Do mesmo modo,  $YZ$  encontra  $Y'Z'$  em  $P = [(0, q, -r)]$  e  $ZX$  encontra  $Z'X'$  em  $Q = [(-p, 0, r)]$ . Mas esses três pontos são colineares, contidos em, digamos,  $l$ . Agora apliquemos  $f^{-1}$ , então  $f^{-1}(P)$ ,  $f^{-1}(Q)$ ,  $f^{-1}(R)$  estão em  $f^{-1}l$ , pois  $f^{-1}$  preserva incidência. Mas  $f^{-1}(P)$  é a intersecção de  $f^{-1}(YZ)$  e  $f^{-1}(Y'Z')$ , isto é, de  $BC$  e  $B'C'$ ; e analogamente para  $f^{-1}(Q)$ ,  $f^{-1}(R)$ . Logo os triângulos  $ABC$ ,  $A'B'C'$ , estão em perspectiva axial.

Reciprocamente sejam  $ABC$ ,  $A'B'C'$  triângulos em  $\mathbb{R}^2$ , em perspectiva axial. O sistema  $K$  que consiste dos lados dos triângulos e suas várias intersecções, é então uma configuração em  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$  que é aplicada em  $\mathbb{R}P^2$  de modo a formar a configuração de Desargues, como na implicação anterior. Por tal implicação, então, os triângulos  $A_1B_1C_1$  e  $A'_1B'_1C'_1$ , onde  $A_1 = e_1(A_1)$ , etc, estão em perspectiva axial, portanto em perspectiva central. Assim,  $A_1A'_1, B_1B'_1, C_1C'_1$  encontram-se num ponto  $V \in \mathbb{R}P^2$  e, ou  $V \in l_\infty$

ou  $V = e_1(U)$  para algum  $U \in \mathbb{R}^2$ . Portanto, no primeiro caso  $AA', BB', CC'$  seriam paralelas; e no segundo caso se encontrariam em  $U$ . Desse modo, os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  estariam em perspectiva central em  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

Vamos analisar como  $\mathbb{R}^2$  aparece na Geometria Projetiva.

A cada  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  associamos o ponto  $e_1(u, v) = [(u, v, 1)] \in \mathbb{RP}^2$ .

E a cada reta  $l : ax + by + c = 0$  em  $\mathbb{R}^2$  associamos a reta  $e_2(l) : ax + by + cz = 0$  em  $\mathbb{RP}^2$ , de modo que as relações de incidência são preservadas. Além disso,  $e_1$  e  $e_2$  são ambas injetivas, de modo que dizemos que juntas formam uma imersão

$e : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  com suas geometrias, isto é, como conjuntos de pontos e com suas retas.

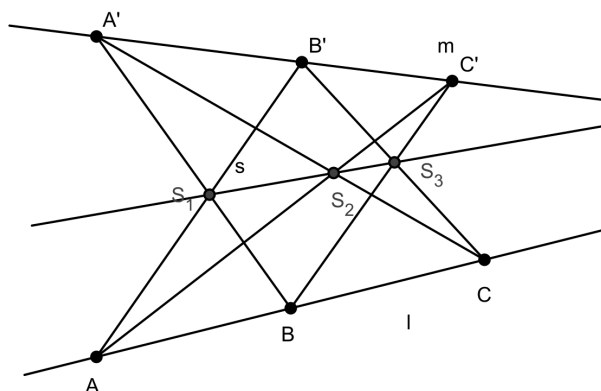
Observe-se que os únicos pontos de  $\mathbb{RP}^2$  que não estão na imagem  $e_1(\mathbb{R}^2)$  são os da forma  $[(x, y, 0)]$ , e esses formam a reta  $z = 0$ . Além disso, se  $m$  é uma reta em  $\mathbb{R}^2$  paralela a  $l$ , então  $m$  tem equação  $ax + by + c' = 0$  para algum  $c' \neq c$ , de modo que  $e^2(l), e^2(m)$  sem cortam em  $[bc' - bc, ca - ca', 0]$  que é  $[b, -a, 0]$ , e está em  $\mathbb{RP}^2$ , pois  $c \neq c'$ . Logo se  $l \parallel m$  em  $\mathbb{R}^2$ , então  $e^2(l)$  encontra  $e^2(m)$  em  $z = 0$ . Por essa razão  $z = 0$  é frequentemente chamada a reta no infinito, denotada por  $l_\infty$ ;

Além disso,  $l_\infty$  é a única reta que não está na imagem de  $e_2$ .

O objetivo agora é mostrar um dos mais antigos teoremas da Geometria Projetiva, o teorema de Pappus. Explicaremos o Teorema de Pappus no Plano Euclidiano.

Acompanhe o enunciado graficamente. Sejam  $l$  e  $m$  duas retas quaisquer no Plano Euclidiano. Escolhemos seis pontos distintos  $A, B, C$  sobre a reta  $l$  e existe  $A', B', C'$  sobre a reta  $m$ . Suponhamos que  $AB, A'B'; BC, B'C'; CA', C'A$  se encontram em  $S_1, S_2, S_3$  respectivamente. O teorema de Pappus afirma que  $S_1, S_2, S_3$  são colineares.

Figura A.14: Pappus.



Fonte: do autor.

Transportamos agora o Teorema de Pappus da Geometria Euclidiana para uma

linguagem projetiva utilizando identificação afim. Dados os pontos projetivos distintos  $[a]$  e  $[b]$  denotamos a reta projetiva que contém  $a, b$  por  $\bar{\eta}_{ab} = \overline{a \times b}$ .

**Teorema A.9.** Teorema de Pappus Sejam  $[a], [b], [c], [a'], [b'], [c']$  seis pontos projetivos distintos, dos quais os três primeiros estão sobre a reta  $r_{\bar{\eta}}$  e os três últimos fora desta reta e sobre uma outra reta  $r_{\bar{\nu}}$ . Então os pontos de interseção

$$[d] = r_{\bar{\eta}_{bc'}} \cap r_{\bar{\eta}_{b'c}},$$

$$[e] = r_{\bar{\eta}_{ac'}} \cap r_{\bar{\eta}_{a'c}},$$

$$[f] = r_{\bar{\eta}_{ab'}} \cap r_{\bar{\eta}_{a'b}}$$

são pontos colineares.

*Demonstração.* As hipóteses implicam que  $[a], [b'], [c]$  e  $e$  são colineares três a três. Sendo assim, a menos de uma colineação, podemos supor que

$$[a] = (1 : 0 : 0), [b'] = (0 : 1 : 0), [c] = (0 : 0 : 1) \text{ e } [e] = (1 : 1 : 1).$$

**Afirmção 1:** Sendo  $[b]$  colinear com  $[a]$  e  $[c]$ , podemos escolher  $(\beta, 0, 1)$  com  $\beta \neq 0$ .

Senão vejamos. Como  $a = (1, 0, 0)$  e  $c = (0, 0, 1)$  pertence ao plano  $\pi_{e2}$  e  $[b]$  é colinear com  $[a]$  e  $[c]$  e são distintos, então qualquer representante de  $[b]$  é da forma  $b = (s, 0, t)$ , com  $s \neq 0$  e  $t \neq 0$ . Logo, podemos tomar  $b = t(s/t, 0, 1)$ . O vetor  $(s/t, 0, 1)$  também será representante de  $[b]$ . Façamos  $\beta = \frac{s}{t}$ .

**Afirmção 2:** Sendo  $[a']$  colinear com  $[c]$  e  $[b]$ , podemos escolher

$$[a'] = (1, 1, \alpha') \text{ com } \alpha' \neq 0$$

Seja  $a' = (s, t, r)$  um representante de  $[a']$ . Pelo critério de colinearidade temos

$$t - s = |\langle c, e \wedge a' \rangle| = 0$$

Logo,  $s = t$ . Devemos ter  $s \neq 0$ , caso contrário  $[a'] = (0 : 0 : \alpha') = [c]$ . uma contradição pois os pontos considerados são distintos. Concluimos que  $a = (s, s, r) = s(1, 1, r/s)$ .

**Afirmção 3:** Sendo  $[c']$  colinear com  $[a]$  e  $[e]$ , podemos escolher  $[c'] = (\gamma', 1, 1)$  com  $\gamma' \neq 0$ .

A demonstração é semelhante à demonstração da afirmação anterior.

Continuamos. Os pontos  $[a'], [b'], [c']$  estão sobre a reta projetiva  $r_{\bar{\nu}}$ , portanto, pelo critério de colinearidade temos a seguinte relação entre os coeficientes  $\alpha'$  e  $\gamma'$ ,  $0 = |\langle a', b' \wedge c' \rangle| = 1 - \alpha'\gamma'$ .

Guardemos essa relação. Calculemos agora os pontos de interseção das retas



projetivas. Sabendo que  $[e] = (1 : 1 : 1)$ , precisamos calcular

$$[d] = \overline{\eta_{bc'}} \times \overline{\eta_{b'c}}$$

e

$$[f] = \overline{\eta_{ab'}} \times \overline{\eta_{a'b}}.$$

Levando em conta as representações obtemos

$$\eta_{bc'} = b \times c' = (-1, -\beta + \gamma', \beta), \quad \eta_{b'c} = b' \times c = (1, 0, 0), \quad \eta_{ab'} = a \times b' = (0, 0, 1), \\ \eta_{a'b} = a' \times b = (1, \alpha'\beta - 1, -\beta).$$

Finalmente, calculando os pontos de interseções  $[d] = (0, \beta, \beta - \gamma')$ ,  $[f] = (-\alpha'\beta + 1, 1, 0)$ , verificamos que os pontos são colineares pois

$$|\langle d, e \wedge f \rangle| = \beta - \alpha'\beta\gamma' = \beta(1 - \alpha'\gamma') = 0.$$

□

Queremos um análogo da razão cruzada, que não use o conceito de comprimento, usado na definição em  $\mathbb{R}^2$ , pois este conceito não está definido em  $\mathbb{R}^2\mathcal{P}^2$ . Quando, na razão cruzada já criada, tomamos os 4 pontos  $P_i$  da reta  $l$  escrita na forma vetorial  $\mathbf{p} + \lambda_i\mathbf{t}$ , obtemos

$$(P_1P_2P_3P_4) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_3) \setminus (\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3).$$

Uma vez que os pontos são supostos distintos, o denominador não é zero. Em que pese a interpretação métrica que possamos dar aos escalares  $\lambda_i$  quando se motiva as noções geométricas no espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ , para encontrar uma expressão candidata correspondente em  $\mathbb{R}^2\mathcal{P}^2$ , lembramos o seguinte. Dada uma reta  $l \in \mathbb{R}^2\mathcal{P}^2$ , todo ponto  $P_i$  de  $l$  é da forma  $P_i = [\lambda_i\mathbf{a} + \mu_i\mathbf{b}]$ , com  $[\mathbf{a}], [\mathbf{b}] \in l$ . Então olharíamos para

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{(\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2)(\lambda_4\mu_3 - \lambda_3\mu_4)}{(\lambda_4\mu_1 - \lambda_1\mu_4)(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)},$$

em que aparecem os produtos  $\lambda_i/\mu_j$  em vez das razões  $\lambda_i/\mu_i$ , para evitar denominadores nulos. O segundo membro é independente da escolha de  $\mathbf{a}$   $\mathbf{b}$  nas classes  $[\mathbf{a}]$ ,  $[\mathbf{b}]$  e também da escolha de  $[\mathbf{a}]$ ,  $[\mathbf{b}]$  em  $l$ . A próxima proposição mostra que essa candidata pode ser eleita a razão cruzada em  $\mathbb{R}^2\mathcal{P}^2$ .

**Proposição A.6.** Sejam  $U, V$  quádruplas ordenadas de pontos colineares em  $\mathbb{R}^2\mathcal{P}^2$ . Existe uma transformação projetiva em  $\mathbb{R}^2\mathcal{P}^2$  levando  $U$  sobre  $V$  se, e somente se, as quádruplas têm razões cruzadas iguais.

*Demonstração.* Seja  $P = [P] \in l$ , e seja  $m$  a reta  $m.r = 0$ . Então a reta  $NP$  tem equação  $(n \wedge p).r = 0$  e corta  $m$  em  $Q = f(P)$  onde  $f : l \rightarrow m$  é uma bijeção e  $Q = [m.(n \wedge p)]$ . Agora

$P = [\lambda a + \mu b]$  de modo que a linearidade dos produtos,  $Q = [\lambda a' + \mu b']$  onde  $a' = m.(n \wedge a)$  e  $b' = m.(n \wedge b)$ . Podemos exprimir isso resumidamente dizendo que “ $f$  os parâmetros  $(\lambda, \mu)$ ”, no sentido que se escolhermos essas triplas especiais  $a', b'$  para representar  $f(A), f(B)$  respectivamente então  $Q_i = f(P_i) = [\lambda_i a' + \mu_i b']$ . Portanto podemos usar o mesmo parâmetros  $(\lambda_i, \mu_i)$  para calcular  $(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4)$  de acordo com a razão dupla acima, e é igual a  $(P_1 P_2 P_3 P_4)$ . Logo, uma única projeção  $f$  preserva a razão dupla e, portanto, também uma composição delas (possivelmente de centros diferentes).  $\square$

## A.6 Considerações finais

Uma Geometria Projetiva Plana  $\mathcal{P}$  consiste de três conjuntos disjuntos  $P, L, I \subset P \times L$ . Um dos conjuntos  $P$  e  $L$ , digamos  $P$ , chamamos o conjunto de pontos, e outro,  $L$ , de conjuntos de reta.  $I$  é chamada a relação de incidência de  $\mathcal{P}$ . Se  $p \in P, l \in L$  e  $(p, l) \in I$  denotamos  $pIl$  ou  $lIp$ .

Há duas condições que devem ser satisfeitas:

I- Dados dois pontos  $p, q \in P$ , existe exatamente uma  $l \in L$  tal que  $pIl$  e  $qIl$ .

II- Dadas duas retas  $l, m \in L$ , existe exatamente um  $p \in P$  tal que  $lIp$  e  $mIp$ .

**Exemplo A.1.** O sistema formado pelos pontos e pelas retas de  $\mathbb{R}^2$ , com a relação  $pIl$  significando “ $p \in l$ ”, não é uma GPP. Ora, nem sempre duas retas se interceptam.

**Exemplo A.2.** Seja  $F$  um corpo qualquer e consideramos  $F^3 = F \times F \times F$ . Em  $F^3 - 0$  definimos a relação de equivalência  $R$  dada por:  $aRb$  se, e somente se, existe  $t \in F$  tal que  $a = tb$  (Diríamos:  $0, a, b$  são colineares). Procedendo analogamente ao que procedemos em  $\mathbb{R}\mathcal{P}^2$ , obtemos a GPP  $F\mathcal{P}^2$ .

**Exemplo A.3.** Dado um corpo  $F$  consideremos  $F^3$  como espaço vetorial sobre  $F$ . Seja  $X = (F^3) * -0$ , o conjunto dos funcionais lineares sobre  $F^3$ , não nulos. Em  $X$  definimos a relação de equivalência  $S$  por:

$fSg$  se, e somente se, existe  $t \in F$  tal que  $f = tg$ .

Definimos  $(P, L)$  como sendo as famílias  $(F^3/R, X/S)$  e definimos uma relação  $I$  pondo  $(aR)I(fS)$  sempre que  $f(a) = 0$ .

### A.6.1 Dualidade

Quando permutamos as palavras “reta” e “ponto” em I e II, obtemos II e I, respectivamente. Dizemos, então, que os enunciados são duais um do outro. Na Geometria Projetiva cada teorema ocorre com um dual; uma prova fornecerá dois teoremas, um dual do outro.

Formulamos o “dual” de uma GPP.

Seja  $\mathcal{P}$  como definido anteriormente, associamos a ele uma nova GPP denotada por  $\mathcal{P}^* = (P^*, L^*, I^*)$  onde  $P^* = L$ ,  $L^* = P$  e , para cada  $p \in P^*$ ,  $l \in L^*$ ,  $pI^*l$  significa  $lIp$  em  $\mathcal{P}$ . Temos então que  $\mathcal{P}^*$  é uma GPP pois dadas duas retas  $l, m \in L$  existe exatamente um  $p \in P$  tal que  $pIl$  e  $pIm$  e dados dois pontos  $P, Q \in P$ , existe exatamente um  $l \in L$  tal que  $lIp$  e  $lIq$ . Chama-se o dual de  $\mathcal{P}$ . Claramente temos que  $(\mathcal{P}^*)^* = \mathcal{P}$ . Para obter uma teoria mais interessante acrescentamos mais hipóteses.

### A.6.2 Axiomas de extensão

$\mathcal{C}_1$ - Existe pelo menos uma reta ( $L \neq \emptyset$ )

$\mathcal{C}_2$  - Para qualquer reta  $l$ , existe um ponto  $P$  que não está em  $l$ .

$\mathcal{C}_3$  - Para qualquer reta  $l$ , existem pelo menos 3 pontos em  $l$ .

Teorema 1: Se  $\mathcal{P}$  satisfaz  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  também  $\mathcal{P}^*$  satisfaz.

Temos que  $\mathcal{C}_1^*, \mathcal{C}_2^*, \mathcal{C}_3^*$  é o dual de  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  respectivamente, logo

$\mathcal{C}_1^*$  - Existe pelo menos um ponto de  $\mathcal{P}$ ,  $P \neq 0$

$\mathcal{C}_2^*$  - Para qualquer ponto  $P$ , existe uma reta  $l$ .

$\mathcal{C}_3^*$  - Para qualquer ponto  $P$ , existem pelo menos 3 retas em  $P$ .

Logo para provar o teorema temos que provar  $\mathcal{C}_1^*, \mathcal{C}_2^*, \mathcal{C}_3^*$  para o próprio  $\mathcal{P}$ .

Se  $\mathcal{P}$  satisfaz  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  então  $\mathcal{P}$  satisfaz  $\mathcal{C}_1^*, \mathcal{C}_2^*, \mathcal{C}_3^*$ .

Provamos  $\mathcal{C}_1^*$ : por  $\mathcal{C}_1$  existe pelo menos uma reta  $l$  (de  $\mathcal{P}$ ) e por  $\mathcal{C}_3$  ao menos três pontos de ( $l$ ). Logo existe pelo menos um ponto.

Agora  $\mathcal{C}_2^*$ : existe uma reta  $l$  por  $\mathcal{C}_1$ . Se não está em  $P$  então nem todas as retas estão em  $P$ . Portanto vale  $\mathcal{C}_2^*$ .

Se  $l$  está em  $P$ , então existe um  $Q \neq P$  em  $l$  por  $\mathcal{C}_3$  e  $R$  que não está em  $l$  por  $\mathcal{C}_2$ .

Por I existe uma única reta  $m$  tal que  $QIm$  e  $RIm$ .

E também  $l \neq m$  pois  $R$  está em  $m$  e não está em  $l$ . Assim o  $P$  não está em  $m$ , pois, se  $P$  estivesse em  $m$  então por I a reta determinada por  $P$  e  $Q$  é  $m$ , logo  $m = l$ . (contradição).

Existe uma reta  $m$  que não está em  $P$ , que é o  $\mathcal{C}_2^*$ .

Provemos agora  $\mathcal{C}_3^*$ : Seja  $P$  um ponto. Por  $\mathcal{C}_2^*$ , existe uma reta  $l$  que não está em  $l$  e por  $\mathcal{C}_3$  existem pelo menos três pontos  $A, B, C$  em  $l$ .

Por I existem retas  $PA, Pb, PC$  e estão em  $P$ .

Provemos que são distintas, se  $PA = PB = m$ , os pontos distintos  $A, B$  estão em  $l$  e em  $m$  o que implicaria  $m = l$ . Logo  $P$  estaria em  $l$  (contradição), então vale  $\mathcal{C}_3^*$ .

### A.6.3 Princípio da Dualidade

Se  $s(\mathcal{P})$  é uma proposição sobre  $\mathcal{P}$ , então sua dual  $s^*(\mathcal{P})$  é a mesma proposição  $s(\mathcal{P}^*)$  sobre  $\mathcal{P}^*$ , a proposição  $s$  vale para  $\mathcal{P}$  se, e somente se, a afirmação  $s^*$  vale para  $\mathcal{P}^*$ .

Para exemplificar, tomemos  $F = \mathbb{Z}_2$  no exemplo 2 acima, e tratemos de dizer, de dois modos, sobre o número de pontos, número de retas, número de pontos em cada reta e número de retas em cada ponto.

O conjunto  $P, L$  tem cada um sete elementos

$$\{[(0, 0, 1)], [(0, 1, 1)], [(1, 0, 1)], [(0, 1, 0)], [(1, 0, 0)], [(1, 1, 0)], [(1, 1, 1)]\}.$$

Pois  $(a, b, c)$  é equivalente a  $\lambda(a, b, c)$  e  $\lambda$  pode assumir  $p - 1$  valores (de 1 à  $p - 1$ ) vezes.

Logo  $P_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  tem  $\frac{p^3 - 1}{p - 1} = p^2 + p + 1$  pontos.

Pelo princípio da dualidade há também  $p^2 + p + 1$  retas.

Verifiquemos agora o número de pontos em cada reta.

Fixamos  $a, b, c$ , não todos nulos, queremos contar o número de soluções não equivalentes  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  da congruência

$$ax + by + cz = 0(\text{mod } p)$$

Suponhamos sem perda de generalidade que  $c \neq 0(\text{mod } p)$ . Temos então

$$ax + by + cz = 0(\text{mod } p) \leftrightarrow z = -ac^{-1}x - bc^{-1}y(\text{mod } p)$$

Podemos escolher  $x$  e  $y$  de  $p^2$  maneiras. Porém não podemos escolher  $x = y = 0$  pois implicaria  $z = 0$ . Logo, considerando que cada elemento  $P_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  tem  $p - 1$  equivalentes, temos que cada reta tem

$$\frac{p^2 - 1}{p - 1} = p + 1 \text{ pontos.}$$

Pelo princípio da dualidade, há  $p + 1$  retas que passam por um ponto dado.

---

## Referências Bibliográficas

- ARTIGUE, M. Engenharia didática. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, p. 193–217, 1996.
- AUFFINGER, A. C. T. d. C.; VALENTIM, F. J. d. S. Introdução à geometria projetiva. UFES, Vitória, 2003.
- BARROS, A.; ANDRADE, P. Introdução a geometria projetiva. [S.l.]: SBM, 2010.
- BELL, E. The Development of Mathematics. [S.l.]: Dover Publications, 1945.
- BELL, E. T. Men of Mathematics. [S.l.]: New York, Simon & Schuster, 1937.
- BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. [S.l.]: Harper & Row, 1980.
- BRASIL. SECRETARIA EDUCAÇÃO FUNDAMENAL. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasil, 1997. 142 p. p. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>.
- BROUSSEAU, G. Problèmes de didactique des décimaux. Recherches en didactique des mathématiques, v. 2, n. 1, p. 37–127, 1981.
- BROUSSEAU, G. Teoria das situações didáticas. 1986.
- BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In: BRUN, J. (Ed.). Didáctica das Matemáticas: Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. cap. 4, p. 35–113.
- BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: SAIZ, I. (Ed.). Didáctica da Matemáticas: Reflexões psicopedagógicas. tradução de: Juan acuna llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996. cap. 4, p. 48–72.
- BROUSSEAU, G. Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino. [S.l.]: Ática, 2010.
- CARVALHO, A.; SANTOS, C. P.; TEIXEIRA, R. E. C. Jogos matemáticos na educação pré-escolar: uma categorização e os princípios matemáticos do raaapido e do dobbble. Jornal das Primeiras Matemáticas, Associação Ludus/Associação para a Educação Matemática Elementar, n. 7, p. 77–104, 2016.
- CHRISTIAN, L. Fundamentos para desenho de automóveis com um ponto de fuga. 2018. Disponível em: <<https://clubedodesign.com/2018/fundamentos-para-desenho-de-automoveis-com-um-ponto-de-fuga/>>. Acesso em: 25 de setembro 2018.

COXETER, H. S. M. Projective Geometry. 2nd ed.. ed. [S.l.]: University of Toronto Press Toronto; Buffalo, 1974. xii, 162 p. : p.

DETONI, A. R.; VIEIRA, M. D.; FIGUEIREDO, M. C. Apontamentos para uma história da geometria projetiva. Disponível em: <<http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/APONTAMENTOS-PARA-UMA-HISTORIA-DA-GEOMETRIA-PROJETIVA.pdf>>.

HEFEZ, A. Introdução à geometria projetiva. [S.l.]: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, Instituto de . . . , 1990.

KLINE, M. Fracasso da Matemática Moderna. [S.l.]: IBRASA, 1976.

LEMONS, M. d. O.; GIORGI, H. d. O. P. As semelhanças, diferenças e contribuições de piaget e vygotsky para formação docente. 2010.

NOVAESCOLA. Guy Brousseau:: referência na didática da matemática. 2009. Disponível em: <<https://novaescola.org.br/conteudo/2664/guy-brousseau-referencia-na-didatica-da-matematica>>. Acesso em: 26 de setembro 2018.

PAIS, L. C. Didática da Matemática: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte Alegre: Autêntica, 2002. 162 p. p.

PAIS, L. C. Introdução. In: MACHADO, S. D. A. (Ed.). Educação Matemática: Uma Introdução. [S.l.]: EDUC, 2002. p. 09–12.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no brasil: causas e consequências. Zetetiké, v. 1, n. 1, 1993.

POMMER, W. M. A engenharia didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as equações diofantinas lineares. São Paulo:[sn], 2013.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias. São Paulo, 2011. 72 p. Disponível em: <<http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf>>.

SOBREARTE: Estudo de desenho: Perspectiva. 2018. <<http://www.sobrearte.com.br/desenho/perspectiva/index.php>>. Acesso em: 20 de setembro 2018.

WOLCHOVER, N. Live Science:: Why are some people better at drawing than others? 2012.