

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

**OTIMIZAÇÃO ROBUSTA E PROGRAMAÇÃO
ESTOCÁSTICA PARA O PROBLEMA DE ROTEAMENTO
DE VEÍCULOS COM MÚLTIPLOS ENTREGADORES:
FORMULAÇÕES E MÉTODOS EXATOS**

JONATHAN JUSTEN DE LA VEGA MARTÍNEZ

ORIENTADOR: PROF. DR. REINALDO MORABITO

CO-ORIENTADOR: PROF. DR. PEDRO MUNARI

FINANCIAMENTO: FAPESP - PROCESSOS 2015/14582-7, 2017/06434-3, 2018/01523-0

São Carlos – SP

Abril, 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

**OTIMIZAÇÃO ROBUSTA E PROGRAMAÇÃO
ESTOCÁSTICA PARA O PROBLEMA DE ROTEAMENTO
DE VEÍCULOS COM MÚLTIPLOS ENTREGADORES:
FORMULAÇÕES E MÉTODOS EXATOS**

JONATHAN JUSTEN DE LA VEGA MARTÍNEZ

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção, área de concentração: Gestão de Operações.

Orientador: Prof. Dr. Reinaldo Morabito

São Carlos – SP

Abril, 2019



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Jonathan Justen de La Vega Martinez, realizada em 29/03/2019:

Prof. Dr. Reinaldo Morabito Neto
UFSCar

Prof. Dr. Pedro Augusto Munari Junior
UFSCar

Profa. Dra. Vitoria Maria Miranda Pureza
UFSCar

Prof. Dr. Fernando Ordóñez
UChile

Prof. Dr. Ricardo Saraiva de Camargo
UFMG

Prof. Dr. André Bergsten Mendes
USP

Certifico que a defesa realizou-se com a participação à distância do(s) membro(s) Pedro Augusto Munari Junior e, depois das arguições e deliberações realizadas, o(s) participante(s) à distância está(ao) de acordo com o conteúdo do parecer da banca examinadora redigido neste relatório de defesa.

Prof. Dr. Reinaldo Morabito Neto

Dedico este trabalho a Deus, a minha querida e amada esposa Samira Balouch, aos meus pais, Dimas De La Vega e Noris Martínez, e à minha família toda.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, pois devo a vida a ele e às inúmeras oportunidades que tem me oferecido durante minha estada neste país encantador, o Brasil. Pela chance de estar fazendo o que gosto e assim, materializar mais um sonho na minha vida pessoal e profissional.

À minha esposa Samira Balouch, por ter me apoiado emocionalmente em todo este processo, apesar da distância. À família que tenho, pois é composta de pessoas muito queridas, que sempre estiveram ao meu lado quando me sentia desanimado, quando acreditava que nada mais poderia dar certo, foram meus companheiros, sempre me incentivando e dizendo que devemos correr atrás de nossos sonhos, e aqui estou, com um deles se realizando.

A minha gratidão é muito grande à muitas pessoas. Se eu esquecer algum nome, com certeza você que está lendo minha tese compreenderá. Agradeço profundamente ao meu orientador professor Reinaldo Morabito e ao meu coorientador professor Pedro Munari, que sempre me deram apoio desde o começo, que conseguiram compreender minhas dificuldades e me mostraram o caminho a seguir, guiando meus passos em um território desconhecido até então para mim.

Um agradecimento especial aos professores Fernando Ordóñez da *Universidad de Chile*, e Michel Gendreau da *Polytechnique Montréal*, por terem colaborado com minha pesquisa em meus programas de doutorado sanduíche. Também, agradeço aos professores membros da minha banca do exame de qualificação pelos seus comentários e sugestões, os quais contribuíram para direcionar e enfatizar as atividades a serem realizadas desde a qualificação até o término da pesquisa.

Assim como ninguém consegue atingir seus objetivos sozinho, agradeço do fundo de meu coração a todos meus amigos, em especial à Maria Luísa Liesack de Carvalho Laiate, aos meus conterrâneos e a todos os parceiros que de maneira direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste projeto. Um agradecimento especial para meus amigos do GPO pelos momentos compartilhados durante esta jornada.

Quero agradecer ao povo brasileiro e especialmente à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) processos nº 2015/14582-7, 2017/06434-3 e 2018/01523-0 porque esta tese não seria possível sem o suporte financeiro recebido por todo este período do doutorado.

RESUMO

Nesta tese, estuda-se o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo e múltiplos entregadores com incerteza. Esse problema, além das decisões de roteamento e sequenciamento, também envolve decisões de alocação de entregadores a cada uma das rotas, visando reduzir os tempos de serviços e custos. Parâmetros como a demanda de clientes, tempos de viagens e tempos de serviços são aqui considerados incertos. Assim, nesta tese são propostos novos modelos de otimização robusta estática, que incorporam medidas para lidar efetivamente com o *trade-off* custo-risco, e novos modelos de programação estocástica de dois estágios com recurso, para abordar esse problema. Tipicamente, para tratar incertezas aplicando os conceitos das abordagens de otimização robusta e programação estocástica, os números de variáveis de decisão e de restrições do problema crescem significativamente em termos do tamanho da instância. Consequentemente, quanto maior for o tamanho da instância, maior é o esforço computacional requerido para resolver os modelos resultantes com *solvers* de propósito gerais. No entanto, o esforço computacional pode ser reduzido significativamente se métodos exatos apropriados forem desenvolvidos, de modo a aproveitarem bem a estrutura particular dos modelos robustos e estocásticos resultantes. Por essa razão, nesta tese, também desenvolvem-se métodos exatos customizados para esse problema, baseados em *branch-and-cut* e *branch-price-and-cut*, que são efetivos para resolver instâncias da literatura. Os experimentos numéricos baseados nestas instâncias e a análise de risco baseada na simulação de Monte-Carlo revelam o potencial da abordagem de otimização robusta estática para lidar com o compromisso existente entre custo e risco. Esses experimentos também revelam que essa abordagem oferece bons resultados, mesmo sem ter conhecimento exato de alguma medida probabilística dos parâmetros incertos. Em relação à programação estocástica, os resultados dos experimentos numéricos mostram que é possível poupar recursos importantes com a resolução do modelo de programação estocástica dois estágios com recurso, em vez de adotar estratégias mais simples baseadas no valor esperado. Até o presente momento, não se tem conhecimento de trabalhos na literatura que tenham abordado o problema objeto de estudo desta tese, com incertezas na demanda, bem como nos tempos de viagens e tempos de serviços. Acredita-se que desenvolver modelos e métodos de solução efetivos para tratar esse problema de roteamento de veículos com múltiplos entregadores sejam contribuições originais e relevantes para o estado da arte da literatura, abrindo novos campos para trabalhos futuros, não apenas para esse problema em estudo, mas também para outras variantes de problemas de roteamento de veículos.

Palavras-chave: Roteamento de Veículos, Múltiplos Entregadores, Otimização Robusta, Programação Estocástica, Métodos de Decomposição.

ABSTRACT

In this thesis, we study the vehicle routing problem with time windows and multiple deliverymen with uncertainty. In addition to routing and scheduling decisions, this problem involves deliverymen allocation decisions on each route to reduce costs and service times. Parameters such as customer demands, travel and service times are considered uncertain. Thus, we propose new models of static robust optimization, which incorporate measures to effectively deal with the cost-risk trade-off, and new models of two stage stochastic programming with recourse to address this problem. Usually, when applying the concepts of robust optimization and stochastic programming, the number of decision variables and constraints grow significantly in terms of instance size. Consequently, the larger the instances, the greater is the computational effort required to solve the resulting models with general purpose solvers. However, computational effort can be significantly reduced if appropriate exact methods are developed that take advantage of the resulting robust and stochastic models' structure. For this reason, we propose exact methods based on branch-and-cut and branch-price-and-cut, which are effective to solve literature instances. Numerical experiments based on these instances and risk analysis based on Monte Carlo simulation indicate the potential of static robust optimization to address the trade-off between cost and risk. These experiments also reveal that this approach provides good results, even without complete knowledge of some probabilistic measure of the uncertain parameters. Regarding stochastic programming, the numerical experiments show that it is possible to save important resources by solving the two stage stochastic programming model with recourse rather than adopting simpler strategies based on the expected value. To the best of our knowledge, there is no studies in the literature that have addressed the problem under study in this thesis, with uncertainty in demands, as well as in travel and service times. We believe that developing models and effective solution methods to address the vehicle routing problem with time windows and multiple deliverymen are original and relevant contributions to the state-of-the-art literature, opening up new fields for future research not only for the problem under study, but also for other variants of vehicle routing problem.

Keywords: Vehicle routing, Multiple Deliverymen, Robust Optimization, Stochastic Programming, Decomposition Methods.

LISTA DE SIGLAS

VRP	Vehicle Routing Problem
CVRP	Capacited VRP
VRPTW	VRP with Time Windows
VRPTWMD	VRPTW with Multiple Deliverymen
SVRPTWMD	Stochastic VRPTWMD
RVRPTWMD	Robust VRPTWMD
SP	Stochastic Programming
RO	Robust Optimization
MIP	Mixed-Integer Programming
LP	Linear Programming
BB	Branch-and-Bound
BC	Branch-and-Cut
BP	Branch-and-Price
BPC	Branch-price-and-cut
CG	Column Generation
SPF	Set Partitioning Formulation
MP	Master Problem
RMP	Restricted Master Problem
MTZ	Miller-Tucker-Zemlin
SR	Subset Row
LBF	Lower Bound Functional
RHI1	Robust Heuristic I1

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação gráfica de uma solução de uma instância do VRPTWMD.	21
Figura 2 – Impacto de Γ nas rotas ótimas obtidas para a instância R101 na classe R1.n25.Q50 com $\delta = 15\%$, $\mathcal{K} = 15$ e $\mathcal{D} = 20$	49
Figura 3 – <i>Trade-off</i> custo-risco de acordo com diferentes valores dos <i>budgets</i> de incertezas Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$, para $\Gamma^q = \Gamma^{(t,s)} = 0$ (configuração 1) e $\Gamma^q = \Gamma^{(t,s)} > 0$ (configurações 14-18) em todas as instâncias com 25 clientes de todas as classes resolvidas pelo algoritmo BPC	80
Figura 4 – Resultados para os problemas com 50 clientes, usando as abordagens de solução RHII e BPC	83
Figura 5 – Rota parcial seguindo a topologia α	97
Figura 6 – Perfil de desempenho sobre as 56 instâncias dos três algoritmos de solução em relação ao valor da função objetivo.	106

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Principais características dos trabalhos que abordam variantes do VRP em contextos incertos.	37
Tabela 2 – Valores dos parâmetros usados nos experimentos computacionais.	47
Tabela 3 – Resultados da simulação Monte-Carlo (instância C101 da classe C1.n25.Q200 com $ \mathcal{K} =15$ e $\mathcal{D}=20$).	51
Tabela 4 – Resultados da heurística I1 robusta e estratégia combinada para a classe C1.n25.Q80 com $\delta=20\%$, $\mathcal{K}=15$ e $\mathcal{D}=20$	52
Tabela 5 – Resultados da heurística I1 robusta e estratégia combinada para a classe R1.n25.Q50 com $\delta=20\%$, $\mathcal{K}=15$ e $\mathcal{D}=20$	52
Tabela 6 – Resultados para a classe C1.n25.Q80 com $\mathcal{K}=15$ e $\mathcal{D}=20$	54
Tabela 7 – Resultados para a classe R1.n25.Q50 com $\mathcal{K}=15$ e $\mathcal{D}=20$	54
Tabela 8 – Resultados para a classe C1.n25.Q80 com $\mathcal{K}=25$ e $\mathcal{D}=75$	55
Tabela 9 – Resultados para a classe R1.n25.Q50 com $\mathcal{K}=25$ e $\mathcal{D}=75$	55
Tabela 10 – Valores dos parâmetros usados na experimentação computacional	74
Tabela 11 – Resultados para as classes C1 e R1	75
Tabela 12 – Resultados para as classes RC1 e C2	76
Tabela 13 – Resultados para as classes C2 e RC2	77
Tabela 14 – Valores extremos dos perfis de desempenho para cada um dos algoritmos em base ao valor da função objetivo.	106
Tabela 15 – Comparação das soluções determinísticas e estocásticas para as instâncias modificadas das classes C1, R1 e RC1 das instâncias de Solomon	108
Tabela 16 – Comparação das soluções determinísticas e estocásticas para as instâncias modificadas das classes C2, R2 e RC2 das instâncias de Solomon	109

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	14
1.1 Motivação e justificativa	15
1.2 Objetivos	16
1.3 Metodologia	17
1.4 Organização do texto	17
CAPÍTULO 2 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E FORMULAÇÕES	19
2.1 Definição do VRPTWMD	19
2.2 Formulação de fluxo três-índices	22
2.3 Formulação de fluxo quatro-índices	23
2.4 Formulação de particionamento de conjuntos	24
2.5 Adequação das formulações determinísticas para tratar incertezas	25
CAPÍTULO 3 – REVISÃO DA LITERATURA DOS PROBLEMAS DETERMINÍSTICOS E ESTOCÁSTICOS	27
3.1 VRPTWMD determinístico	27
3.2 VRPTWMD sob incertezas	29
3.2.1 VRP robusto	29
3.2.2 VRP estocástico	32
3.3 Considerações finais	35
CAPÍTULO 4 – VRPTWMD ROBUSTO: FORMULAÇÃO DE DESIGNAÇÃO ROBUSTA	38
4.1 Formulação baseada em designação para o VRPTWMD	38
4.2 Formulação do RVRPTWMD com demanda incerta	41
4.2.1 Conjunto de incerteza e <i>counterpart</i> robusta das restrições de capacidade	41
4.2.2 Formulação robusta para o RVRPTWMD com demanda incerta	43
4.3 Abordagem de solução	44
4.3.1 Heurística I1 para o VRPTWMD	44
4.3.2 Heurística I1 robusta para o RVRPTWMD com demanda incerta	45
4.4 Resultados Computacionais	46
4.4.1 Descrição dos dados	46
4.4.2 Impacto do parâmetro Γ	47
4.4.3 Análise de risco via simulação Monte-Carlo	50
4.4.4 Desempenho da abordagem de solução	51
4.4.4.1 Caso limitado	51
4.4.4.2 Comparação dos casos limitado e ilimitado	54
4.5 Considerações finais	55
CAPÍTULO 5 – VRPTWMD ROBUSTO: FORMULAÇÃO DE FLUXO ROBUSTA E ALGORITMO <i>branch-price-and-cut</i>	57

5.1	Parâmetros incertos e conjuntos de incerteza	57
5.2	Avaliando a factibilidade robusta	58
5.3	Formulação de fluxo robusta	60
5.4	Heurística II robusta	61
5.5	Formulação de particionamento de conjuntos	62
5.6	Algoritmo <i>branch-price-and-cut</i> para o RVRPTWMD	63
5.6.1	Geração de colunas	63
5.6.2	Algoritmo <i>labeling</i> robusto	65
5.6.2.1	Representação do <i>label</i>	65
5.6.2.2	Funções de extensão	66
5.6.2.3	Regra de dominância robusta	66
5.6.2.4	Algoritmo <i>labeling</i> robusto bidirecional	67
5.6.3	Desigualdades válidas	69
5.6.4	Regras de ramificação	69
5.6.5	Heurística primal	71
5.7	Método de geração de colunas primal-dual	71
5.8	Resultados computacionais	72
5.8.1	Resultados para os problemas com 25 clientes	73
5.8.1.1	Impacto dos parâmetros Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$	73
5.8.1.2	Análise da heurística II robusta	79
5.8.1.3	Análise da formulação de fluxo robusta	79
5.8.1.4	Análise do algoritmo <i>branch-price-and-cut</i>	81
5.8.2	Resultados para os problemas com 50 clientes	82
5.9	Considerações finais	82

CAPÍTULO 6 – VRPTWMD ESTOCÁSTICO: FORMULAÇÃO DE FLUXO E ALGORITMO

	<i>L-shaped</i> INTEIRO	85
6.1	Definição e formulação do SVRPTWMD	85
6.2	Desigualdades <i>k-path</i>	88
6.2.1	Resolvendo exatamente o TSPTW	89
6.3	Cálculo do custo esperado de recurso	90
6.4	Um algoritmo <i>L-shaped</i> inteiro	93
6.4.1	Descrição do algoritmo <i>L-shaped</i> inteiro	93
6.4.2	Rotas parciais gerais	95
6.4.3	Limitante inferior para o custo esperado de recurso	98
6.5	Resultados computacionais	104
6.5.1	Impacto das desigualdades <i>k-path</i> e cortes LBFs	105
6.5.2	Comparação das soluções determinísticas e estocásticas	107
6.6	Considerações finais	110

CAPÍTULO 7 – CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS 112

7.1	Conclusões	112
7.2	Pesquisas futuras	113

7.2.1	Melhorias nas abordagens dos Capítulos 4 e 5	113
7.2.2	Experimentos computacionais adicionais com a abordagem do Capítulo 6	113
7.2.3	Formulação de fluxo dois-índices determinística	114
7.2.4	Extensões das abordagens para o VRPTWMD envolvendo decisões de <i>cluster</i>	116
7.2.5	Extensões das abordagens para outras variantes do VRPTWMD	116
7.2.6	Otimização robusta com o conjunto de incerteza <i>budgeted</i> variável	116
7.2.7	<i>Branch-price-and-cut</i> para o SVRPTWMD com demanda estocástica	116

REFERÊNCIAS 118

A–NOÇÕES BÁSICAS DE PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA E OTIMIZAÇÃO ROBUSTA 125

A.1	Programação estocástica	125
A.2	Otimização robusta	127

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, estuda-se o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo e múltiplos entregadores (abrev. em Inglês VRPTWMD - *Vehicle Routing Problem with Time Windows and Multiple Deliverymen*). Esse problema surge em diferentes aplicações envolvendo a coleta e distribuição de produtos em configurações logísticas em que os tempos de serviços no local dos clientes são longos, comparados com os tempos de viagens e dependem do número de entregadores no veículo. Essa variante é relevante, particularmente, nos casos em que os clientes devem ser servidos em áreas urbanas congestionadas num mesmo dia, e não servi-los dentro de suas janelas de tempo é altamente indesejável (PUREZA et al., 2012; SENARCLENS de GRANCY; REIMANN, 2016; ÁLVAREZ; MUNARI, 2017). Nesse contexto, o VRPTWMD, além das decisões típicas dos problemas de roteamento, também permite atribuir a cada rota um número de entregadores para reduzir os tempos de serviço e minimizar os custos.

Em ambientes práticos, um aspecto importante a ser considerado é a incerteza de alguns parâmetros do problema. Parâmetros como a demanda de clientes, tempos de viagens e serviços, entre outros, podem ser considerados incertos na prática. Em diversas situações reais, é razoável considerar a demanda de clientes incerta, pois esta pode ser unicamente conhecida quando o veículo chega ao local de entrega (LAPORTE et al., 2002; JABALI et al., 2014; GENDREAU et al., 2016). Também, o tempo de viagem pode ser considerado estocástico, pois este depende de diversos fatores, como condições do trânsito, condições climáticas e possíveis imprevistos e acidentes. Além disso, os tempos de serviço podem ser afetados pela tecnologia de distribuição, as habilidades do motorista, o número de entregadores, as condições de estacionamento, bem como as condições da área de carga (LI et al., 2010). Desconsiderar as incertezas pode fazer com que as variações nos parâmetros do problema inviabilizem sua solução determinística quando implementada, levando a tomar ações para recuperar a sua viabilidade, o que, por sua vez, resulta em custos adicionais e deterioração do nível de serviço. Nesse contexto, é importante recorrer ao uso de metodologias que forneçam soluções mais imunes ou insensíveis às variações dos parâmetros envolvidos no problema (BEN-TAL; NEMIROVSKI, 2000).

A programação estocástica (abrev. em Inglês SP - *Stochastic Programming*) e a otimização robusta (abrev. em Inglês RO - *Robust Optimization*) são os métodos mais utilizados na literatura de programação matemática para tratar parâmetros incertos em problemas de otimização. Na SP, duas abordagens são muitas vezes adotadas: SP com recurso e SP com restrições de *chance*. A ideia básica da SP com recurso é tomar algumas decisões na ausência de incertezas (decisões aqui-e- agora) e, quando estas forem reveladas, tomar decisões de recurso ou ações contingenciais (decisões de espere-e-veja), de modo a mitigar o impacto das incertezas nas decisões aqui-e- agora (SHAPIRO et al., 2009; BIRGE; LOUVEAUX, 2011).

Em SP com restrições de chance, as decisões de recurso são evitadas, isto é, apenas as decisões aqui-e- agora são definidas. As restrições que envolvem parâmetros incertos são expressas por meio de declarações probabilísticas em termos das decisões aqui-e- agora (PRÉKOPA, 1995; BIRGE; LOUVEAUX, 2011; SHAPIRO et al., 2014). Em ambas as abordagens de SP, é necessário ter conhecimento de alguma medida probabilística dos parâmetros aleatórios, por exemplo, a distribuição de probabilidade.

Por outro lado, RO é uma metodologia de programação matemática que visa definir decisões aqui-e- agora com custo mínimo, que preservem factibilidade para quaisquer das possíveis realizações dos parâmetros incertos contidas num conjunto de incerteza (BEN-TAL et al., 2009). O conjunto de incerteza pode ser uma caixa, um poliedro, um elipsoide ou intersecções destes conjuntos (SNIEDOVICH, 2012). Essa abordagem de RO é conhecida na literatura como RO estática, uma vez que não são permitidas as decisões de espere-e-veja (BEN-TAL et al., 2009; BERTSIMAS et al., 2015).

Tipicamente, ao formular o VRPTWMD sob incertezas aplicando os conceitos das abordagens de SP e RO, os números de variáveis de decisão e de restrições do problema crescem significativamente em termos do tamanho da instância, indicando que, para instâncias de grande porte, um maior esforço computacional para resolução do problema é requerido. No entanto, o esforço computacional pode ser reduzido significativamente se métodos exatos apropriados forem desenvolvidos, que aproveitam bem a estrutura particular dos modelos estocástico ou robusto resultantes. Dessa forma, nesta tese, estuda-se e estende-se o VRPTWMD para sua versão estocástica por meio do uso dos conceitos das abordagens de programação estocástica e otimização robusta quando parâmetros como a demanda e os tempos de viagem e serviço são incertos. Neste trabalho, os programas estocásticos e robustos propostos são resolvidos via métodos exatos aqui desenvolvidos, baseados em *branch-and-cut* (BC) e *branch-price-and-cut* (BP).

Após realizar uma ampla revisão da literatura, foi possível identificar a inexistência de trabalhos que abordem a variante do problema de roteamento de veículos a ser estudada nesta tese na sua versão estocástica e, por conseguinte, o uso de métodos exatos para resolver de forma mais efetiva esse problema. Então, este trabalho de doutorado contribui para preencher essa lacuna. Convém observar que as siglas SVRPTWMD (abrev. em Inglês - *Stochastic VRPTWMD*) e RVRPTWMD (abrev. em Inglês - *Robust VRPTWMD*), usadas ao longo do texto, são abreviaturas diferentes para referenciar o problema objeto de estudo desta tese, o VRPTWMD sob incertezas. Contudo, essas siglas são usadas para evidenciar que o problema objeto de estudo está sendo abordado por meio da aplicação dos conceitos das abordagens de SP e RO, respectivamente.

1.1 Motivação e justificativa

Os custos envolvidos na distribuição de mercadorias desde o centro de distribuição até os clientes podem representar mais de 20% do custo operacional total (REIMANN et al., 2004; TSIRIMPAS et al., 2008; TOTH; VIGO, 2014). Por essa razão, as empresas têm concentrado esforços visando reduzir tais custos. Esses esforços incluem o investimento em sistemas computacionais que apoiem o processo de tomada de decisão da definição do número de veículos a serem usados na distribuição e coleta de mercadorias, bem como nas rotas de custo mínimo por cada um destes veículos. No entanto, para que esses sistemas computacionais gerem planos eficientes e implementáveis na prática, diversos aspectos das redes logísticas reais devem ser considerados.

Em diversas aplicações reais, um consumo excessivo de tempo na prestação do serviço ao consumidor pode levar a obter planos de distribuição que não sejam viáveis na prática, pois os consumidores podem não ser atendidos durante os horários desejados e, possivelmente, a jornada de trabalho dos motoristas podem não ser respeitadas. Em ambientes práticos, especialmente em transportadoras rodoviárias no Brasil, uma estratégia para reduzir o tempo de serviço consiste em aumentar o número de entregadores na rota dos caminhões. Por essa razão, o problema de roteamento de veículos deve ser estendido a fim de considerar as decisões referentes ao tamanho da tripulação em cada veículo.

Outro aspecto importante das redes do mundo real, particularmente no Brasil, é a incerteza. Esta está presente nas redes logísticas reais pelos múltiplos fatores aleatórios que as tornam altamente variáveis. Assim, para determinar planos de distribuição robustos, isto é, planos pouco sensíveis às diferentes variações dos parâmetros do problema, é necessário contemplar as incertezas. O uso de metodologias de programação matemática que lidem explicitamente com as incertezas envolvidas no problema, como por exemplo, programação estocástica com recurso e otimização robusta, tornam-se importantes nestes contextos.

O problema a ser contemplado neste estudo é uma extensão do clássico problema de roteamento de veículos estocástico. Esse problema é NP-difícil, portanto, o problema abordado neste trabalho, VRPTWMD sob incertezas, também o é. Desta forma, propor métodos de solução efetivos para determinar soluções de qualidade para o problema em tempos computacionais plausíveis é um desafio requerido. Resolver o VRPTWMD sob incertezas por meio de métodos aproximados ou heurísticos leva a um menor esforço computacional para determinar uma solução factível, porém não se tem informação de quão distante o valor ótimo está do valor da solução heurística encontrada. Em redes de distribuição reais, esta diferença pode resultar em economias significativas, justificando-se assim o uso de métodos exatos, caso os tempos computacionais requeridos sejam aceitáveis na prática, o que nem sempre é possível.

Nesse contexto, deve-se ser cuidadoso na construção de modelos e no desenvolvimento desses métodos para resolvê-los, isto é, aproveitar as propriedades teóricas, tanto do modelo quanto dos métodos exatos, e usar técnicas computacionais apropriadas para melhorar a eficiência destes métodos. Por exemplo, o uso de técnicas de decomposição permite explorar estruturas especiais do modelo, de modo a reduzi-lo em modelos menores e que tem vantagens quanto à forma de resolução e limitantes oferecidos. Além disso, usar um método de pontos interiores ao invés do método *simplex* para resolver as relaxações lineares dos modelos inteiros, pode ser uma estratégia para melhorar a eficiência dessas técnicas. De fato, ao formular as versões estocásticas das variantes do problema, a matriz tecnológica da formulação resultante é esparsa e de grande porte, o que pode justificar o uso do método de pontos interiores para resolver as relaxações lineares. Além disso, esse método permite explorar o uso de soluções centrais que contribuem para melhorar o desempenho dos métodos de planos de corte e geração de colunas (GONDZIO et al., 2013; GONDZIO et al., 2015; MUNARI; GONDZIO, 2013).

1.2 Objetivos

O objetivo principal desta tese de doutorado é formular modelos matemáticos que representem apropriadamente o VRPTWMD sob as metodologias de programação estocástica com recurso e de otimização robusta estática, bem como propor métodos exatos baseados em técnicas de decomposição e planos de corte para resolver efetivamente instâncias práticas do VRPTWMD sob incertezas. Para atingir

esse objetivo geral, os seguintes objetivos específicos devem ser alcançados: 1) Estudar novas formulações matemáticas determinísticas para o VRPTWMD, possivelmente mais adequadas para o uso de abordagens sob incertezas; 2) Desenvolver formulações matemáticas com base nas formulações determinísticas sob o enfoque de programação estocástica com recurso e técnicas de otimização robusta correspondente à variante estudada; 3) Propor métodos exatos baseados em técnicas de decomposição e planos de corte para resolver exemplos práticos do problema estudado; e 4) Analisar e discutir os resultados computacionais usando uma vasta gama de exemplos simulados com base na literatura e em situações reais, de modo a obter recomendações úteis para a tomada de decisões neste problema.

1.3 Metodologia

Este trabalho utiliza o método de Pesquisa Axiomática Quantitativa Normativa, comum em investigações de Pesquisa Operacional. A pesquisa é denominada Axiomática Quantitativa porque é uma pesquisa quantitativa orientada a modelos de problemas idealizados e é Normativa porque é baseada em modelos que prescrevem uma decisão para o problema - nesse caso, modelos de roteamento de veículos formulados por meio de abordagens de programação estocástica com recurso e de otimização robusta (BERTRAND; FRANSOO, 2002; MORABITO; PUREZA, 2010). Neste trabalho, algumas etapas características nos estudos de Pesquisa Operacional são abordadas (MORABITO; PUREZA, 2010):

- *Definir o problema de interesse e coletar informações e dados.* O problema de interesse (objeto da pesquisa) é o VRPTWMD sob incertezas, e boa parte das informações e os dados que são aqui utilizados já estão disponíveis de outras pesquisas e visitas técnicas em empresas (PUREZA et al., 2012; FERREIRA; PUREZA, 2012).
- *Formular modelos matemáticos para representar apropriadamente o problema.* O ponto de partida de modelagem são os modelos determinísticos já desenvolvidos na literatura para o VRPTWMD (PUREZA et al., 2012; TOTH; VIGO, 2014), a partir dos quais aqui são propostas modificações, extensões, aprimoramentos e reformulações, para se obter novos modelos mais adequados para o tratamento das incertezas inerentes do problema.
- *Solução dos modelos matemáticos.* São aqui desenvolvidos métodos de solução específicos para as formulações propostas, baseados nos métodos do tipo BC e BP, os quais por sua vez são baseados em decomposições e planos de cortes. Como o tempo de resolução dos modelos com o uso destes métodos exatos pode ser demasiadamente alto para algumas instâncias estudadas, são também aqui desenvolvidas heurísticas baseadas em técnicas de decomposição, na tentativa de gerar soluções de qualidade em tempos computacionais plausíveis.
- *Análise e discussão dos resultados.* Essas discussões são realizadas resolvendo-se instâncias da literatura, visando obter *insights* úteis na prática da tomada de decisões deste problema e na teoria para estender para outras situações e problemas.

1.4 Organização do texto

O restante desse texto está organizado da seguinte forma:

Capítulo 2: Apresenta a definição do VRPTWMD, bem como as três principais formulações que têm sido usadas na literatura para representá-lo matematicamente. Também discute as vantagens e desvantagens dessas formulações quando comparadas entre si.

Capítulo 3: Apresenta de forma sucinta as principais características dos trabalhos mais relevantes na literatura que abordam o VRPTWMD nas suas versões determinística e estocástica. Ao final desse capítulo é mencionado o principal *gap* da literatura que este trabalho pretende contribuir para preencher.

Capítulo 4: Discute e apresenta uma nova formulação do VRPTWMD na sua versão determinística, a qual é usada como ponto de partida na determinação da formulação robusta. Também descreve a abordagem de solução proposta para resolver o programa robusto. Basicamente, a abordagem de solução corresponde a uma tentativa de melhorar a convergência do *solver* de otimização utilizado, com a inclusão de uma solução factível robusta inicial fornecida por uma adaptação da heurística II de Solomon.

Capítulo 5: Dedicar-se ao desenvolvimento de um algoritmo do tipo *branch-price-and-cut* (BPC) para resolver o RVRPTWMD. Também apresenta detalhadamente cada uma das principais componentes do algoritmo, como por exemplo, formulação de particionamento de conjuntos, algoritmo *labeling* robusto, regras de ramificação e desigualdades válidas. Uma formulação de fluxo robusta também é apresentada nesse capítulo.

Capítulo 6: Apresenta os detalhes no desenvolvimento do algoritmo *L-shaped* inteiro para resolver o modelo estocástico dois-estágios com recurso do SVRPTWMD proposto. Esse modelo envolve um problema de otimização associado ao primeiro estágio e uma equação que computa recursivamente o custo de recurso relacionado ao segundo estágio.

Capítulo 7: Apresenta as considerações finais e, também, as perspectivas de continuidade da presente pesquisa.

Capítulo 2

DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E FORMULAÇÕES

O presente capítulo define o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo e múltiplos entregadores sob o suposto de que os valores esperados ou nominais dos parâmetros do problema são conhecidos de antemão. Adicionalmente, apresenta três formulações matemáticas conhecidas da literatura que podem ser usadas para representar matematicamente o VRPTWMD. Elas são: 1) formulação de fluxo três-índices; 2) formulação de fluxo quatro-índices e 3) formulação de particionamento de conjuntos. Ao final do capítulo, discute-se as vantagens e desvantagens entre essas formulações.

2.1 Definição do VRPTWMD

O problema de roteamento de veículos tem sido amplamente estudado por sua grande relevância teórica e prática em contextos de transporte e logísticos (TOOTH; VIGO, 2014). As primeiras aplicações do problema de roteamento de veículos datam dos finais da década dos 1950 e dos princípios dos 1960 (DANTZIG; RAMSER, 1959; CLARKE; WRIGHT, 1964). A partir desses trabalhos, diferentes variações e extensões desse problema têm sido estudados, de modo a capturar diversos aspectos das redes logísticas reais. Para uma ampla revisão de trabalhos em roteamento de veículos, recomenda-se o trabalho de Braekers et al. (2016). Duas variantes bastante estudadas na literatura desse problema correspondem às versões capacitada e com janelas de tempo. Na primeira variante, a carga no veículo em qualquer instante não deve ultrapassar a capacidade do veículo. Por outro lado, a versão do problema com janelas de tempo é caracterizada quando alguns ou todos os clientes estabelecem intervalos de tempo, que definem os horários nos quais eles estão disponíveis para receber o serviço (TOOTH; VIGO, 2014). Outra variante que tem despertado interesse por suas diversas aplicações práticas e desafios teóricos corresponde à versão na qual o número de entregadores por rota é outra decisão a ser tomada (PUREZA et al., 2012; SENARCLENS de GRANCY; REIMANN, 2016). Essa variante é conhecida como problema de roteamento de veículos com janelas de tempo e múltiplos entregadores e corresponde ao objeto de pesquisa desta tese.

O VRPTWMD representa situações práticas em redes de distribuição ou coleta em que o tempo gasto para realizar o serviço em alguns ou todos os clientes é significativamente alto, o que poderia ocasionar o não atendimento durante os horários permitidos, ou a não respeitar a jornada de trabalho dos motoristas. Diante dessas situações, torna-se importante providenciar estratégias para diminuir o tempo da visita nos clientes. Uma estratégia para reduzir o tempo de serviço corresponde a aumentar o número de entregadores no veículo para realizar o serviço nos clientes. Isso leva a ter uma decisão adicional no

problema, correspondente ao número de entregadores usados na prestação do serviço de todos os clientes designados a uma dada rota. Diminuir a duração do serviço em todos os clientes de uma rota pode permitir que ela cubra mais clientes no dia, o que, por sua vez, pode levar a uma redução no tamanho da frota necessária para atender todos os clientes. Dessa forma, o VRPTWMD lida com o compromisso existente dos custos relacionados às decisões do número de rotas geradas e de entregadores usados (PUREZA et al., 2012).

O problema estudado nesta tese, VRPTWMD, foi originalmente definido envolvendo decisões associadas ao agrupamento de clientes em *clusters*, e à ordem de visita dos clientes em cada *cluster*. Uma representação gráfica de uma solução de uma instância desse problema pode ser vista na Figura 1. Nela, têm-se um conjunto de clientes e locais de estacionamento dispersos em uma área geográfica. Além disso, encontra-se um depósito comum a todos os clientes e aos locais de estacionamento, o qual contém uma frota limitada de veículos e um número disponível de entregadores. Para essa versão do problema, a ordem de visita de *clusters* e clientes em cada *cluster* são chamadas de rotas primária e secundária, respectivamente. As rotas primárias são percorridas pelos veículos, enquanto as rotas secundárias são percorridas pelos entregadores. Observe da Figura 1 que os pontos de parada nas rotas primárias correspondem aos locais de estacionamento, podendo coincidir com o local de um cliente. Quando o veículo chega a um local de parada das rotas primárias, as atividades de coleta/entrega a cada um dos clientes do *cluster* são realizadas pelos entregadores a pé, aumentando em demasia os tempos de visita. Dessa forma, o número de entregadores é aumentado com o intuito de reduzir os tempos de visita e custos. Neste estudo, assume-se que os *clusters* são conhecidos *a priori* e os tempos de serviço no *cluster* em função no número de entregadores também são conhecidos, isto é, são parâmetros de entrada do problema. Portanto, nesta tese, cada *cluster* é visto como um único cliente e o objetivo é desenhar rotas primárias para os veículos e alocar entregadores às rotas tal que os custos operacionais totais sejam mínimos (custos de veículos, entregadores e distância total percorrida).

Na ausência de incerteza, cada parâmetro de um problema de otimização é representado a partir de um único valor que, em geral, corresponde a seu valor nominal e/ou esperado (GENDREAU et al., 2016). Sob essa ideia, os modelos matemáticos a serem delineados nesta seção pressupõem que o valor nominal dos parâmetros envolvidos no problema ou são conhecidos *a priori*, ou podem ser bem estimados. Isso indica que os modelos correspondem à versão determinística do VRPTWMD. A seguir são apresentadas formulações matemáticas que podem ser usadas para representar o VRPTWMD na sua versão determinística. Antes de apresentar essas formulações, apresenta-se a seguir uma definição formal do VRPTWMD.

No VRPTWMD, assume-se que n clientes requerem serviço de entrega ou de coleta, mas não ambos os serviços ao mesmo tempo. O VRPTWMD pode ser definido por meio de um grafo $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{A})$, em que $\mathcal{V} = \{0, 1, \dots, n, n+1\}$ e $\mathcal{A} = \{(i, j) : i, j \in \mathcal{V}, i \neq j\}$ representam, respectivamente, os conjuntos de nós e arcos do grafo. Os nós 0 e $n+1$ do conjunto \mathcal{V} representam o depósito, e os nós restantes definem os clientes (*clusters*), sendo estes indexados por meio do conjunto $\mathcal{N} = \mathcal{V} \setminus \{0, n+1\}$. Adicionalmente, o escalar \mathcal{L} define o número máximo permitido de entregadores que podem ser atribuídos a um único veículo ($\ell = 1, \dots, \mathcal{L}$). Em ambientes práticos, em geral, \mathcal{L} é pequeno devido a limitações no tamanho da cabine do veículo. Se o número de entregadores atribuídos a um veículo for ℓ , diz-se que esse veículo opera no modo ℓ . Para cada cliente i , atribui-se uma demanda nominal não negativa \bar{q}_i e um tempo de serviço nominal não-negativo \bar{s}_i^ℓ dependendo do número de entregadores ou modo ℓ . A cada

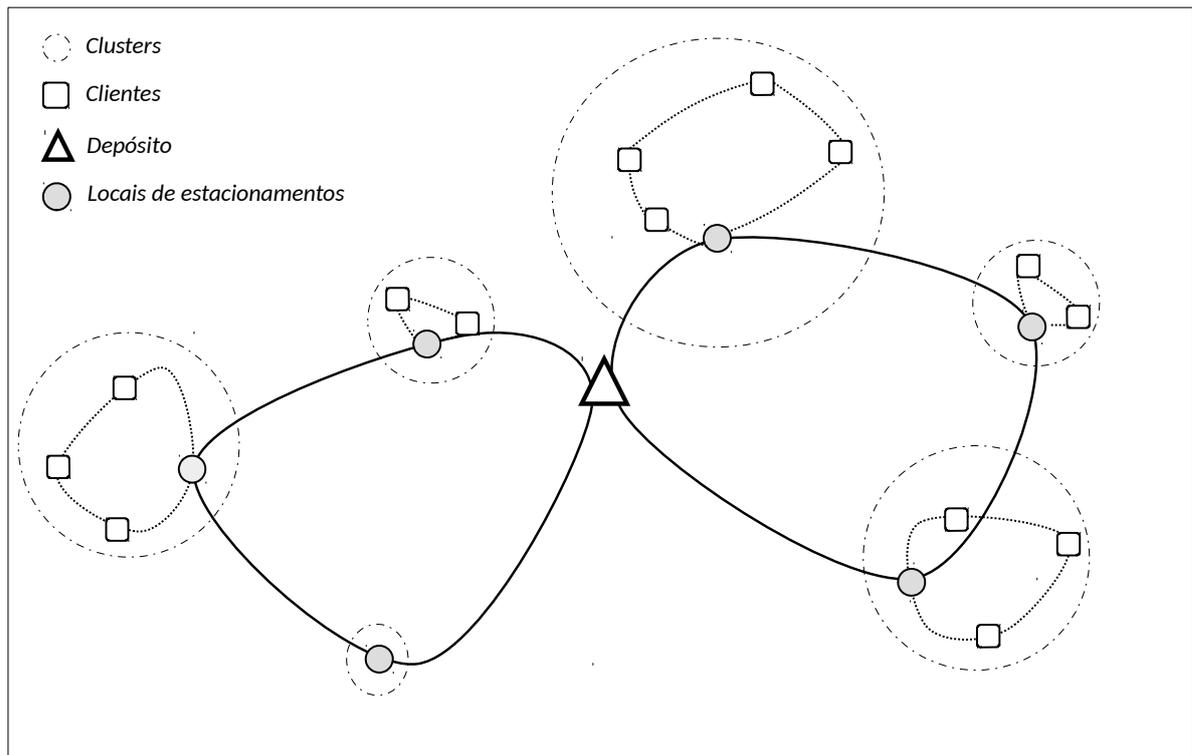


Figura 1 – Representação gráfica de uma solução de uma instância do VRPTWMD.

nó i é dada uma janela de tempo $[w_i^a, w_i^b]$ que descreve o intervalo de tempo em que o nó i se encontra disponível para receber o início do serviço. Também, associam-se para cada arco (i, j) uma distância d_{ij} e um tempo de viagem nominal \bar{t}_{ij} satisfazendo a desigualdade triangular. Uma frota de \mathcal{K} veículos idênticos encontra-se disponível no depósito, sendo estes indexados pelo conjunto \mathcal{K} , tal que $|\mathcal{K}| = \mathcal{K}$. Além dos \mathcal{K} veículos no depósito, também há disponível um número máximo de entregadores, denotado por \mathcal{D} . O VRPTWMD consiste em desenhar um conjunto $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{\mathcal{K}'}\}$, com $\mathcal{K}' \leq \mathcal{K}$, de rotas de custo mínimo com seu correspondente número de entregadores tal que: *i*) cada rota inicie e finalize no depósito; *ii*) cada cliente seja visitado uma única vez, e o início do serviço deve respeitar a sua janela de tempo; *iii*) o número de entregadores abordo de um veículo não deve exceder a quantidade máxima permitida; *iv*) a demanda total de uma rota seguida por um veículo não deve exceder a capacidade Q deste e *v*) o número total de veículos e entregadores usados não devem exceder as quantidades disponíveis no depósito. Os modelos matemáticos a serem apresentados neste capítulo são formulados sob a hipótese de que a frota de veículos no VRPTWMD é homogênea, isto é, os veículos são idênticos.

Note que o VRPTWMD estudado aqui é uma variante diferente do VRP com frota heterogênea. Diferentemente dessa variante, em que as rotas competem por recursos limitados de cada tipo de veículo, no problema aqui estudado, todas as rotas competem por um mesmo tipo de recurso também limitado, isto é, o número total de entregadores disponíveis no depósito \mathcal{D} .

2.2 Formulação de fluxo três-índices

A formulação matemática apresentada a seguir corresponde à formulação proposta em [Pureza et al. \(2012\)](#) e é referenciada ao longo desta tese como formulação de fluxo três-índices. Por ser a frota homogênea, essa formulação não explicita qual veículo será utilizado para executar uma dada rota, pois basta que a variável de decisão determine as rotas a serem usadas para atender a demanda de todos os clientes. Para apresentar a formulação, necessita-se definir as seguintes variáveis de decisão: *i*) x_{ij}^ℓ : variável binária que assume o valor 1 se e somente se existe uma rota operando no modo ℓ que visita o cliente j imediatamente após visitar o cliente i ; *ii*) u_i^ℓ : variável contínua exprimindo a carga no veículo operando no modo ℓ ao sair do cliente i e *iii*) w_i^ℓ : outra variável contínua denotando o instante de tempo em que o veículo operando no modo ℓ inicia o serviço no cliente i . A formulação matemática que determina as rotas de custo mínimo pode ser descrita como segue:

minimizar

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(0,j) \in \mathcal{A}} (p_1 + lp_2)x_{0j}^\ell + p_3 \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} d_{ij}x_{ij}^\ell. \quad (2.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij}^\ell = 1, \quad \forall j \in \mathcal{N}. \quad (2.2)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij}^\ell = 1, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (2.3)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij}^\ell = \sum_{(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji}^\ell, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (2.4)$$

$$u_j^\ell \geq u_i^\ell + \bar{q}_j x_{ij}^\ell - Q(1 - x_{ij}^\ell), \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (2.5)$$

$$\bar{q}_i \leq u_i^\ell \leq Q, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (2.6)$$

$$w_j^\ell \geq w_i^\ell + (\bar{t}_{ij} + \bar{s}_i^\ell)x_{ij}^\ell - \mathcal{M}_{ij}^\ell(1 - x_{ij}^\ell), \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (2.7)$$

$$w_i^a \leq w_i^\ell \leq w_i^b, \quad \forall i \in \mathcal{V}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (2.8)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{j \in \mathcal{N}} \ell x_{0j}^\ell \leq \mathcal{D}, \quad (2.9)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{0j}^\ell \leq \mathcal{K}, \quad (2.10)$$

$$x_{ij}^\ell \in \{0, 1\}, \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (2.11)$$

Na formulação acima, a função objetivo (2.1) consiste em minimizar os custos relacionados ao número de rotas geradas e de entregadores usados, mais os custos de transporte incorridos pela distância total percorrida. Os parâmetros p_1 , p_2 e p_3 definem, na mesma ordem, o custo unitário de rotas, entregadores e distância, ou uma priorização lexicográfica desses objetivos nos casos nos quais

esses custos são difíceis de serem estimados. As restrições (2.2) e (2.3) exprimem que cada cliente deve pertencer a uma única rota com ℓ entregadores. As restrições (2.4) definem as restrições de fluxo e elas garantem que uma rota no modo ℓ , chegando ao local do cliente i , deve, obrigatoriamente, sair deste cliente no mesmo modo, ou indo para outro cliente ou para o depósito. É fácil notar que, junto com as restrições (2.4), algumas das restrições (2.2) e (2.3) são redundantes. As restrições (2.5) expressam que no caso de existir um veículo visitando o cliente j imediatamente após visitar o cliente i , então a carga do veículo ao sair de j deve ser no mínimo a carga total coletada até o cliente i mais a carga adicional coletada no cliente j . Uma vez que os veículos possuem uma capacidade Q , as restrições (2.6) garantem que a carga total coletada quando o veículo sair de um cliente não deve ultrapassar a capacidade do veículo, e que a mínima carga no veículo em qualquer instante de seu percurso é a carga coletada (demanda) no último cliente visitado.

As restrições (2.7) garantem consistência temporal entre os clientes i e j se o veículo que os visita, operando no modo ℓ , sai do i e vai diretamente para o j , isto é, se $x_{ij}^\ell = 1$. Caso contrário, o parâmetro $\mathcal{M}_{ij}^\ell = \max \{w_i^b - w_j^a, 0\}$ torna essas restrições redundantes. Já as restrições (2.8) impõem o início de serviço dos clientes dentro suas janelas de tempo. As restrições (2.9) impõem que o número de entregadores usados não ultrapasse o número disponível \mathcal{D} . Similarmente, as restrições (2.10) informam que o número de veículos a serem usados deve ser menor à quantidade de veículos disponíveis no depósito \mathcal{K} . Finalmente, as restrições (2.11) indicam que as variáveis x_{ij}^ℓ somente podem assumir o valor 0 ou 1.

2.3 Formulação de fluxo quatro-índices

Uma formulação de fluxo quatro-índices também pode ser usada para representar o VRPTWMD. Essa formulação resulta ao se considerar que todas as variáveis de decisão do problema tenham o índice k referente às rotas. Por essa razão, a formulação de fluxo quatro-índices também é válida quando a frota de veículos for heterogênea, pois simplesmente bastaria alterar o significado de rotas do índice k por veículos. A variável de fluxo $x_{ij}^{k\ell}$ representa uma variável binária que assume o valor 1 se e somente se a rota k operando no modo ℓ visita o cliente i e em sequência ao cliente j . Também é necessário definir a variável contínua $w_i^{k\ell}$ indicando o instante de tempo em que o veículo destinado a percorrer a rota k no modo ℓ inicia o serviço no cliente i . Dessa forma, a formulação de fluxo quatro-índices, que determina um conjunto de rotas de custo mínimo, é uma simples extensão da formulação de fluxo três-índices e pode ser descrita como segue:

minimizar

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{(0,j) \in \mathcal{A}} (p_1 + \ell p_2) x_{0j}^{k\ell} + p_3 \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} d_{ij} x_{ij}^{k\ell}. \quad (2.12)$$

sujeito a:

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij}^{k\ell} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (2.13)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij}^{k\ell} = \sum_{(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji}^{k\ell}, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall k \in \mathcal{K}, \forall \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (2.14)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{0j}^{k\ell} \leq 1, \forall k \in \mathcal{K}. \quad (2.15)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{i \in \mathcal{N}} x_{i,n+1}^{k\ell} \leq 1, \forall k \in \mathcal{K}. \quad (2.16)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{N}} \ell x_{0j}^{k\ell} \leq \mathcal{D}. \quad (2.17)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{0j}^{k\ell} \leq \mathcal{K}. \quad (2.18)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \bar{q}_i \sum_{j \in \mathcal{V} \setminus \{0\}} x_{ij}^{k\ell} \leq Q, \forall k \in \mathcal{K}, \forall \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (2.19)$$

$$w_j^{k\ell} \geq w_i^{k\ell} + (\bar{t}_{ij} + \bar{s}_i^\ell) x_{ij}^{k\ell} - \mathcal{M}_{ij}^\ell (1 - x_{ij}^{k\ell}), \forall (i, j) \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (2.20)$$

$$w_i^a \leq w_i^{k\ell} \leq w_i^b, \forall i \in \mathcal{V}, \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (2.21)$$

$$x_{ij}^{k\ell} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{K}, \forall \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (2.22)$$

Como antes, a função objetivo (2.12) minimiza os custos relacionados ao número de veículos e entregadores usados junto com as despesas em transporte pela distância total percorrida. As restrições (2.13) exprimem que cada cliente i deve ser visitado. As restrições (2.14) definem as restrições de fluxo que garantem que a rota k no modo ℓ , chegando ao local do cliente i , deve, obrigatoriamente, sair deste cliente no mesmo modo. As restrições (2.15) e (2.16) garantem que cada rota deixe o depósito e volte a ele no máximo uma vez. As restrições (2.17) impõem que o número de entregadores usados não ultrapasse o número disponível. Similarmente, as restrições (2.18) impõem que o número de rotas deve ser menor à quantidade de veículos disponíveis no depósito. As restrições (2.19) garantem que a carga a ser coletada/entregada em uma dada rota k não exceda a capacidade do veículo destinado a percorrê-la. As restrições temporais são dadas pelas restrições (2.20)-(2.21). Elas cumprem a mesma função das restrições (2.7)-(2.8), com a diferença em que a variável contínua $w_i^{k\ell}$ ganha o índice k referente à rota. Finalmente, as restrições (2.22) impõem o requerimento binário das variáveis $x_{ij}^{k\ell}$.

2.4 Formulação de particionamento de conjuntos

Outra formulação para representar o VRPTWMD corresponde à formulação de particionamento de conjuntos, a qual já foi usada em Álvarez e Munari (2017), Munari e Morabito (2018). Nela, as variáveis de decisão correspondem a rotas, r , operando no modo ℓ . Então, a formulação determina a combinação de rotas, com seus respectivos modos, que leve ao atendimento de todos os clientes com custo mínimo. Dessa forma, a variável de decisão dessa formulação, λ_r^ℓ , pode ser definida como uma variável binária tomando o valor 1 se e somente se a rota r , operando no modo ℓ , for selecionada na solução que leva ao atendimento de todos os clientes com custo mínimo. O conjunto \mathcal{R}^ℓ , para $\ell = 1, \dots, \mathcal{L}$, contém todas as rotas factíveis que operam no modo ℓ . Entende-se por rotas factíveis aquelas rotas que visitam pelo menos um cliente, a demanda total da rota não ultrapasse a capacidade do veículo, e a sequência de visita dos clientes da rota seja consistente no tempo, isto é, o serviço nos clientes deve ser iniciado dentro

dos horários permitidos (janelas de tempo). Dada uma rota $r \in \mathcal{R}^\ell$, o parâmetro $a_{i_r}^\ell$ indica com um valor igual a 1 se o cliente i faz parte do roteiro da rota r operando no modo ℓ . Definindo c_r^ℓ como o custo da rota r operando no modo ℓ , a formulação de particionamento de conjunto pode ser descrita como segue:

minimizar

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{r \in \mathcal{R}^\ell} c_r^\ell \lambda_r^\ell \quad (2.23)$$

sujeito a:

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{r \in \mathcal{R}^\ell} a_{r_i}^\ell \lambda_r^\ell = 1, \quad i \in \mathcal{N}. \quad (2.24)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{r \in \mathcal{R}^\ell} \ell \lambda_r^\ell \leq \mathcal{D}, \quad (2.25)$$

$$\lambda_r^\ell \in \{0, 1\}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}, \quad r \in \mathcal{R}^\ell \quad (2.26)$$

Escrevendo a rota r operando no modo ℓ como $(v_0, v_1, \dots, v_\kappa, v_{\kappa+1})$, com v_0 descrevendo o depósito inicial 0, v_1, \dots, v_κ os clientes e $v_{\kappa+1}$ o depósito final $n + 1$, o parâmetro c_r^ℓ pode ser calculado como:

$$c_r^\ell = p_1 + p_2 \ell + p_3 \sum_{i=0}^{\kappa} d_{v_i, v_{i+1}} \quad (2.27)$$

Observe que o parâmetro c_r^ℓ envolve os custos do veículo a ser usado para percorrer a rota, o número de entregadores associados a essa rota e sua distância total percorrida. As restrições (2.24) asseguram o atendimento de cada cliente por apenas uma rota operando em único modo. A restrição (2.25) limita o número total de entregadores a quantidade disponível no depósito, \mathcal{D} . Finalmente, o tipo e o domínio das variáveis de decisão são dados nas restrições (2.26).

2.5 Adequação das formulações determinísticas para tratar incertezas

Nesta tese, estuda-se o VRPTWMD sob incertezas, em que parâmetros como a demanda de clientes, tempos de viagens e tempos de serviços já não são mais representados por um único valor, mas, sim, por um conjunto finito ou infinito de realizações. Isso revela que esses parâmetros são modelados como variáveis aleatórias. Duas abordagens de tratamento de incertezas são aqui usadas para lidar com a aleatoriedade desses parâmetros, a otimização robusta estática de [Bertsimas e Sim \(2004\)](#) e a programação estocástica dois estágios com recurso. Uma questão chave da primeira abordagem concerne à forma em que o *trade-off* custo-risco é direcionado. Lembrando que o custo é medido em termos do valor ótimo da função objetivo e o risco em relação à probabilidade de violação da solução encontrada. O *trade-off* custo-risco na abordagem de RO aqui usada é dado pelo tamanho do conjunto de incerteza *budgeted*, o qual contém todas as possíveis realizações dos parâmetros incertos. Quanto maior for o tamanho desse conjunto, menor é o risco (maior robustez) da solução encontrada, porém, possivelmente, maior é seu valor objetivo associado.

Em geral, para obter modelos robustos compactos seguindo os conceitos introduzidos em Bertsimas e Sim (2004) (veja Apêndice A.2), precisam-se que todos (ou pelo menos vários) parâmetros incertos estejam em um único conjunto de restrições do modelo determinístico. Desse modo, a técnica de dualidade pode ser aplicada para obter modelos robustos compactos que, além de poderem ser resolvidos por meio de métodos de propósito gerais, também permitem direcionar o *trade-off* custo-risco. Excetuando a demanda dos clientes nas restrições (2.19) da formulação de fluxo quatro-índices, os parâmetros incertos em ambas as formulações de fluxo três- e quatro-índices aparecem desagregados, isto é, um único parâmetro por restrição. Portanto, ambas as formulações não satisfazem o requerimento desejado. Nesse caso, usando a técnica de dualidade, a formulação robusta resultante seria equivalente a resolver uma instância da formulação de fluxo determinística correspondente, em que todos os parâmetros incertos assumem seus respectivos valores de pior caso, resultando em uma abordagem totalmente conservadora. Em relação à formulação de particionamento de conjuntos, note que para levar em conta a robustez, o significado do conjunto \mathcal{R}^ℓ deve ser modificado, que pode ser visto como um conjunto que armazena as rotas robustas operando no modo ℓ . Contudo, devem-se buscar procedimentos adequados para determinar as rotas robustas no conjunto \mathcal{R}^ℓ , com $\ell = 1, \dots, \mathcal{L}$, bem como estratégias para lidar efetivamente com o *trade-off* custo-risco.

Esta tese pretende responder às seguintes questões: Pode ser o VRPTWMD determinístico reformulado apropriadamente de modo a obter uma reformulação robusta que além de controlar o compromisso custo-risco, também possa ser resolvida via métodos de propósito gerais? Essa questão é tratada no Capítulo 4. Tomando como referência a formulação de fluxo três-índices, é possível obter uma reformulação robusta que lide, de maneira eficiente, com o *trade-off* custo-risco? Outra questão é: Há alguma forma de incorporar incertezas na formulação de particionamento de conjuntos usando a abordagem de otimização robusta estática? Essas duas questões relevantes são estudadas no Capítulo 5 desta tese. Além disso, a questão: É possível obter métodos de solução customizados que permitam tratar adequadamente o problema da dimensionalidade dos programas estocásticos? Essa questão é tratada no Capítulo 6.

Capítulo 3

REVISÃO DA LITERATURA DOS PROBLEMAS DETERMINÍSTICOS E ESTOCÁSTICOS

Neste capítulo, descreve-se as características mais relevantes dos principais trabalhos na literatura que estudam o VRPTWMD nas suas versões determinísticas e estocásticas. Primeiramente, revisam-se os trabalhos no qual o VRPTWMD é estudado deterministicamente. Depois, revisam-se trabalhos que tem estudado variantes clássicas do problema de roteamento de veículos em contextos incertos, pois não se têm conhecimento da existência de trabalhos na literatura que particularmente estudem o VRPTWMD sob incertezas. Finalmente, descreve-se as contribuições deste trabalho à literatura e o *gap* que ele pretende atender.

3.1 VRPTWMD determinístico

Conforme descrito anteriormente, o VRPTWMD determinístico é uma variante relativamente nova do clássico problema de roteamento de veículos, estudado sob o suposto de que todos os parâmetros envolvidos no problema são conhecidos de antemão. O VRPTWMD foi primeiro introduzido no trabalho [Pureza et al. \(2012\)](#), em que apresentou-se uma formulação de fluxo três-índices (formulação (2.1)-(2.11)) para representar o problema, que minimiza os custos associados ao número de rotas geradas (número de veículos usados), número de entregadores usados e distância total percorrida. A função objetivo é lexicograficamente definida tal que a prioridade dos custos é a minimização do número de veículos destinados às visitas dos clientes, seguido do número total de entregadores usados e, finalmente, da distância total percorrida. Resultados computacionais revelaram a dificuldade do método *branch-and-cut* do solver CPLEX 11.0 na sua configuração *default* para resolver instâncias com mais de 25 clientes. Por essa razão, os autores desenvolveram algoritmos meta-heurísticos, *Tabu Search* e *Simulated Annealing*, para determinar boas soluções factíveis do VRPTWMD em tempos computacionais razoáveis.

Além dos critérios otimizados em [Pureza et al. \(2012\)](#), [Ferreira e Pureza \(2012\)](#) também consideraram a minimização do número de clientes não atendidos em um dado dia de trabalho. Esse critério adicional levou ao aumento no número de variáveis binárias e de restrições da formulação matemática resultante em relação à formulação de fluxo três-índices. Então, as autoras simplesmente propuseram e desenvolveram abordagens heurísticas para a determinação de soluções factíveis do problema. A heurística *Savings* proposta em [Clarke e Wright \(1964\)](#) foi estendida e adaptada para o VRPTWMD com o intuito

de gerar soluções factíveis, para posteriormente usá-las como ponto de partida da abordagem heurística *Tabu Search*. Como era de se esperar, a meta-heurística *Tabu-Search* melhorou as soluções encontradas pela heurística *Savings* para todas as instâncias usadas na experimentação computacional.

Em [Senarclens de Grancy e Reimann \(2016\)](#), compararam-se duas abordagens heurísticas, *Ant Colony Optimization* (ACO) e *Greedy Randomized Adaptive Search Procedures* (GRASP), em termos da qualidade das soluções encontradas e do desempenho computacional (tempo de resolução) para resolver o VRPTWMD. Para tornar ambas as abordagens heurísticas comparáveis entre si, os autores usaram a mesma heurística de construção de rotas e o mesmo procedimento de busca local. Os resultados computacionais mostraram que ACO supera claramente ao GRASP e as melhores soluções encontradas superaram às já reportadas na literatura.

Outras abordagens heurísticas também foram usadas para resolver o VRPTWMD. Por exemplo, as abordagens heurísticas baseadas em *Iterated Local Search* e *Large Neighborhood Search* foram usadas em [Álvarez e Munari \(2016\)](#) como métodos para a obtenção de soluções factíveis para o problema. Essas abordagens de solução foram comparadas entre si na experimentação computacional, revelando que não existem evidências suficientes para notar uma clara dominância de uma abordagem para a outra. Ainda, ambas as abordagens heurísticas são capazes de produzir melhores soluções para as instâncias quando comparadas às outras abordagens da literatura.

O VRPTWMD também tem sido estendido e adaptado para considerar características particulares de situações logísticas reais. Por exemplo, [de Souza Neto e Pureza \(2016\)](#) estenderam a formulação de fluxo três-índices para levar em consideração a utilização ou não de frota própria ou fretada, junto a diversas restrições operacionais, como múltiplas viagens diárias, limitações de horários de circulação dos veículos, compatibilidade entre veículos e clientes, capacidade máxima de carga a ser transportada em cada veículo, tempo máximo em rota e carga mínima para a realização da segunda viagem. Apesar de as soluções de instâncias reais obtidas por meio de um *solver* de otimização tenham tido *gaps* pequenos, a resolução dessas instâncias requereu tempos computacionais muito superiores aos utilizados pelos roteirizadores da empresa. Portanto, a abordagem heurística GRASP foi usada para obter soluções factíveis iniciais em um *solver* comercial de otimização. Resultados computacionais revelaram o potencial da abordagem de solução combinada para fornecer soluções ao problema de boa qualidade.

Métodos exatos do tipo BPC também têm sido usados para resolver o VRPTWMD ([ÁLVAREZ; MUNARI, 2017](#); [MUNARI; MORABITO, 2018](#)). [Munari e Morabito \(2018\)](#) discutiram as desvantagens da formulação de fluxo três-índices. Em todas as instâncias usadas nos experimentos computacionais, apenas uma delas foi resolvida até a otimalidade por um *solver* de otimização dentro de um tempo limite de 1 hora. Então, os autores decidiram propor uma formulação baseada em particionamento de conjuntos para representar o problema (veja formulação (2.23)-(2.26)), pois, pelas evidências encontradas na literatura, esse tipo de formulação poderia conduzir a estratégias de solução com melhor desempenho, assim como para outras variantes do problema de roteamento de veículos. Para resolver a relaxação de programação linear da formulação de particionamento de conjunto, os autores recorreram à técnica de geração de colunas. Para a obtenção de soluções inteiras, a técnica de geração de colunas foi embutida dentro um procedimento *branch-and-bound* (BB), originando o algoritmo BP. Desigualdades válidas também foram usadas a partir da geração de planos de cortes na formulação de particionamento de conjunto, visando melhorar o limitante de programação linear, o que poderia acelerar a convergência

do método. A geração de planos de corte dentro do procedimento BP leva a obter o método exato BPC. Experimentos computacionais usando instâncias disponíveis na literatura indicaram que o método BPC proposto foi capaz de encontrar soluções com melhores valores do que as obtidas usando a formulação de fluxo três-índices (2.1)-(2.11) do VRPTWMD apresentada em [Pureza et al. \(2012\)](#) dentro de tempos limites. Contudo, parte das instâncias ainda é desafiante para o BPC, uma vez que não foram resolvidas até a otimalidade durante um tempo de execução de 1 hora.

[Álvarez e Munari \(2017\)](#) propuseram um método híbrido para o VRPTWMD, combinando o algoritmo BPC de [Munari e Morabito \(2018\)](#) com as duas abordagens heurísticas encontradas em [Álvarez e Munari \(2016\)](#). Para algumas classes de instâncias usadas na experimentação computacional, os resultados reportados mostraram que a abordagem híbrida supera tanto em qualidade da solução bem como em tempo de resolução ao algoritmo BPC usado em [Munari e Morabito \(2018\)](#). Esses resultados indicaram as vantagens de usar algoritmos específicos para gerar boas soluções factíveis dentro de um método exato.

Como mencionado antes, o VRPTWMD foi primeiramente proposto para envolver decisões associadas a agrupamentos de clientes em *clusters*. [Senarclens de Grancy e Reimann \(2015\)](#) desenvolveram um algoritmo heurístico baseado na meta-heurística ACO para abordar as decisões envolvidas no VRPTWMD estendido. Por outro lado, [Senarclens de Grancy \(2015\)](#) propôs uma abordagem de solução de dois estágios para o problema: no primeiro estágio, uma heurística de inserção é usada para determinar os *clusters*, enquanto que, no segundo, a heurística I1 de [Solomon](#) foi adaptada para determinar a ordem de visita dos *clusters*. Finalmente, [Poveda \(2017\)](#) apresentou um modelo de programação linear inteira-mista para representar o VRPTWMD estendido. Instâncias reais e simuladas do problema foram usadas para validar e avaliar o modelo na experimentação computacional. O *solver* comercial CPLEX 12.5 obteve um melhor desempenho nas instâncias reais do que nas simuladas, o que não era esperado pelos autores. Isso foi justificado porque as instâncias reais tinham claramente grupos de clientes bastante concentrados, facilitando a definição de *clusters* e, portanto, a resolução do problema.

3.2 VRPTWMD sob incertezas

Nessa seção, são revisados os principais trabalhos na literatura que estudam as variantes clássicas do problema de roteamento de veículos (abrev. em inglês VRP - *Vehicle Routing Problem*), capacitado e com janelas de tempo, sob incertezas. Convém salientar que não foram encontrados na literatura trabalhos estudando o VRPTWMD sob incertezas.

3.2.1 VRP robusto

Essa seção visa ressaltar as características mais importantes de alguns trabalhos da literatura do VRP robusto. Para uma revisão mais completa sobre o VRP em contextos incertos, por favor veja [Oyola et al. \(2016a\)](#), [Oyola et al. \(2016b\)](#). [Sungur et al. \(2008\)](#) foram os primeiros a introduzir o termo roteamento de veículo robusto. Nesse trabalho, foi usada a formulação de fluxo dois-índices com as restrições de eliminação de sub-rotas MTZ (Miller-Tucker-Zemlin) para modelar matematicamente o VRP capacitado (abrev. em inglês CVRP - *Capacited VRP*). A demanda foi considerada incerta e representada por um número finito de realizações, denominadas de cenários. Os cenários foram usados para construir diferentes conjuntos de incerteza: envoltório convexo, caixa e elipsoide. Usando esses conjuntos, três diferentes

formulações robustas foram obtidas, as quais resultaram ser idênticas a uma instância do problema na sua versão determinística, em que os valores da demanda dos clientes foram modificados por suas respectivas realizações de pior-caso dentro de cada conjunto. Dessa forma, as formulações robustas proporcionam soluções ao CVRP totalmente conservadoras. Contudo, essas formulações robustas foram mais tratáveis do ponto de vista computacional quando comparadas a formulações de SP com recurso com apenas poucos cenários. Por outro lado, [Ordóñez \(2010\)](#) discutiu diversas formulações matemáticas para o VRP com janelas de tempo (abrev. em inglês VRPTW - *VRP with Time Windows*), bem como seus conjuntos de incertezas mais apropriados no sentido de potencializar estratégias para lidar adequadamente com o *trade-off* custo-risco.

Em [Agra et al. \(2012\)](#) e [Agra et al. \(2013\)](#) foram estudados o VRP, sem restrições de capacidade, porém com janelas de tempo. Em ambos os trabalhos, o problema foi estendido à versão robusta onde as realizações dos tempos de viagens caem dentro do conjunto de incerteza *budgeted*. Em [Agra et al. \(2012\)](#) apresenta-se uma nova formulação do problema baseada no conceito de grafos em camadas. Isso porque a técnica de dualidade comumente usada na abordagem de RO pode ser usada diretamente. A nova formulação levou a um aumento significativo no número de variáveis discretas, bem como no número de restrições do problema. Por essa razão, apenas instâncias de pequeno porte (com 10 clientes) foram resolvidas até a otimalidade por meio do uso de *solvers* comerciais de otimização. Motivados pelos resultados reportados em [Agra et al. \(2012\)](#), em [Agra et al. \(2013\)](#) são propostas novas formulações do problema baseadas em duas abordagens de RO, estática e ajustável. Na abordagem estática, consideram-se apenas decisões do tipo aqui-e-agora. Por outro lado, na ajustável, além das decisões aqui-e-agora, consideram-se também decisões espere-e-veja (decisões de recurso) ([BEN-TAL et al., 2009](#)). Dependendo da abordagem robusta usada, métodos exatos específicos foram desenvolvidos, os quais resolveram com sucesso instâncias mais realistas (com 50 clientes) do problema de roteamento em navios em tempos de execução razoáveis.

Por outro lado, [Lee et al. \(2012\)](#) discutiram o VRP com prazos de entrega. Os autores consideraram a demanda de clientes incerta, bem como os tempos de viagens entre os nós. Novamente, o conjunto de incerteza *budgeted* foi usado para conter as possíveis realizações da demanda e dos tempos de viagens. Para representar matematicamente o problema, uma formulação baseada em fluxo foi proposta e estendida para uma versão robusta para incorporar explicitamente todas as combinações de realizações de pior-caso nas restrições do tipo MTZ para a carga e tempo. A formulação resultou em um programa discreto de grande porte, em que *solvers* comerciais de otimização, após 10 horas de execução, simplesmente resolveram até otimalidade instâncias com 10 clientes. Então, uma formulação baseada em particionamento de conjuntos também foi proposta e usou-se um algoritmo do tipo BP para resolvê-la. As fontes de incertezas foram encapsuladas no subproblema de caminho mínimo com restrições de recurso, o qual foi resolvido pelo algoritmo *labeling* bidirecional de programação dinâmica. Os resultados numéricos revelaram um certo benefício no uso da abordagem de RO estática. No entanto, o algoritmo BP não foi capaz de resolver até a otimalidade várias instâncias com 25 clientes dentro de um tempo limite de 1 hora. Os autores também ressaltaram que o algoritmo não podia ser aplicado diretamente ao VRPTW.

Contribuições na modelagem do CVRP robusto com demanda incerta também foram apresentadas em [Gounaris et al. \(2013\)](#), [Gounaris et al. \(2016\)](#). Em ambos os trabalhos, as demandas dos clientes foram consideradas aleatórias variando dentro conjuntos de incertezas genéricos, porém poliedrais. [Gounaris et al. \(2013\)](#) discutiram distintas formulações do problema e para cada uma delas, foram introduzidas

condições necessárias e suficientes para garantir a obtenção de soluções robustas. À luz dos experimentos computacionais, algumas formulações apresentaram uma clara vantagem em termos do tempo de execução. Seguindo os resultados teóricos do estudo prévio, o foco em Gounaris et al. (2016) foi o desenvolvimento de uma metodologia de solução baseada em uma meta-heurística *Adaptive Memory Programming* para resolver o CVRP robusto com demanda incerta e pertencente a um conjunto de incerteza poliedral.

O CVRP com prazos de entrega e tempos de viagem incertos foi estudado por Adulyasak e Jaillet (2016), que desenvolveram algoritmos de decomposição baseados em *Benders* e BC para as versões de programação estocástica e otimização robusta do problema. O modelo de programação estocástica foi baseado em uma distribuição de probabilidade conhecida *a priori* e seu principal foco foi minimizar o número esperado de violações nos prazos de entrega. Entretanto, o modelo de otimização robusta foi desenvolvido para proporcionar soluções factíveis robustas para uma família de distribuições de probabilidade de modo a minimizar o denominado índice de atraso. Dessa forma, o objetivo desse modelo foi determinar rotas factíveis robustas cujos tempos de chegadas correspondentes proporcionassem o atraso mínimo. Outras variantes do VRP sob incerteza também foram discutidas. O estudo computacional analisou instâncias de pequeno porte definidas apenas em um grafo direcionado. Os resultados revelaram que ambas as abordagens podem ser competitivas em termos do esforço computacional e qualidade das soluções sob condições comparáveis.

Jaillet et al. (2016) propuseram abordagens de *distributionally* RO para uma classe de problemas de roteamento com demanda e tempos de viagens incertos para incorporar alguma informação acerca das distribuições de probabilidade dos parâmetros aleatórios, reduzindo, assim, o conservadorismo das soluções robustas da abordagem tradicional, isto é, da abordagem estática. Diferentemente da abordagem estática e ajustável de RO, na abordagem distribucional, além de tratar os parâmetros do problema como dados incertos, suas correspondentes distribuições também são tratadas assim. Neste caso, existe uma família de distribuições de probabilidade dos parâmetros incertos encapsuladas dentro de um conjunto conhecido como conjunto de ambiguidade. O objetivo é minimizar os custos esperados do pior-caso em todas as distribuições no conjunto de ambiguidade (WIESEMANN et al., 2014).

Munari et al. (2018) discutiram e abordaram o VRPTW robusto. Os autores consideraram a demanda incerta, assim como os tempos de viagens, cujas realizações foram encapsuladas no politopo *budgeted*. Uma contribuição desse trabalho foi o uso de equações recursivas para levar em conta a robustez em uma formulação baseada em fluxo, sem a necessidade de recorrer a técnica de dualidade, prática comum na literatura de RO (AGRA et al., 2012; De La VEGA et al., 2017). Os autores também propuseram uma formulação de particionamento de conjuntos resolvida por um algoritmo do tipo *branch-price-and-cut* (BPC), em que o algoritmo *labeling* foi adaptado e estendido apropriadamente para introduzir os consumos robustos dos recursos carga e tempo. Experimentos numéricos mostraram que um solver comercial de otimização consegue resolver de forma efetiva a formulação de fluxo robusta com instâncias de 25 e 50 clientes, ao passo que o BPC resolve instâncias com até 100 clientes.

Recentemente, Lu e Gzara (2019) abordaram o VRPTW com incerteza apenas na demanda de clientes. Eles adotaram o conjunto de incerteza *budgeted* e apresentaram dois modelos robustos baseados em formulações determinísticas de fluxo e particionamento de conjuntos. Então, um método do tipo BPC foi desenvolvido para resolver a formulação de particionamento de conjuntos, em que o subproblema é um problema do caminho mínimo elementar robusto com restrições de recurso. Este subproblema

é equivalentemente substituído por uma série de problemas associados à sua respectiva *counterpart* determinística, que são então resolvidos pelo algoritmo de *labeling* padrão. Além disso, vários tipos de desigualdades válidas foram discutidos e estendidos ao caso robusto. Em particular, propuseram um novo procedimento de separação para as desigualdades de capacidade arredondadas. Experimentos numéricos mostraram que o algoritmo BPC foi bem sucedido na solução de instâncias com 25 e 50 clientes até a otimalidade em tempos razoáveis.

3.2.2 VRP estocástico

Outra importante abordagem para tratamento de incerteza corresponde à programação estocástica com recurso, particularmente a de dois-estágios. Tipicamente, em contextos de roteamento de veículos, as decisões de primeiro estágio envolvem o projeto de um conjunto de rotas e, quando as incertezas são reveladas, as decisões de segundo estágio correspondem a ações ou decisões de recursos que dependem da realização do parâmetro considerado aleatório (GENDREAU et al., 1995; LAPORTE et al., 2002). O objetivo é simplesmente minimizar os custos associados às decisões de primeiro estágio junto com o valor esperado dos custos incorridos com as ações de recursos.

Dependendo do parâmetro considerado incerto, diferentes ações de recursos podem ser consideradas. No VRP com demanda estocástica, para uma dada rota definida no primeiro estágio, pode ocorrer que um veículo chegue a um cliente sem mercadoria suficiente para atender a demanda deste (BERTSIMAS, 1992). Nesse caso, diz-se que a rota falhou e diferentes ações de recursos são possíveis: *i*) recarregar o veículo no depósito e retornar ao cliente; *ii*) designar um veículo diferente para visitar o cliente; *iii*) redesenhar as rotas e *iv*) pular o cliente, isto é, não atender sua demanda, incorrendo em um custo de penalidade. Tipicamente, no problema de roteamento de veículos com presença de clientes estocástica (isto é, o cliente está ou não está disponível para receber o serviço), a ação de recurso consiste simplesmente em pular o cliente (GENDREAU et al., 1995).

Na variante a ser estudada nesta tese, o serviço em cada cliente deve começar em uma faixa horária conhecida *a priori*, isto é, na sua janela de tempo. Caso os tempos de viagens e/ou de serviços sejam estocásticos, em geral, a ação de recurso consiste em modelar essas janelas como janelas de tempo flexíveis (ZHANG et al., 2013; TAŞ et al., 2014a). Nesse caso, um veículo pode chegar ao cliente antes da sua faixa horária, mas este pode esperar até iniciar o serviço, incorrendo ou não em custos adicionais proporcionais à espera. Adicionalmente à espera, os atrasos também podem ser considerados, mas são penalizados por meio de uma função de custo no objetivo do problema. Assim, a variante do problema com janelas de tempo flexíveis, além de minimizar o custo de transporte, também minimiza os custos acarretados por esperas e atrasos (TAŞ et al., 2014a; TAŞ et al., 2014b). Por outro lado, as janelas de tempo também podem ser modeladas como rígidas, isto é, o veículo pode chegar ao local do cliente antes da abertura da janela de tempo e esperar, mas fica proibido de chegar mais tarde do que o tempo de fechamento da janela (ERRICO et al., 2013; ERRICO et al., 2016).

A variante do VRP capacitado com demanda estocástica e presença de clientes estocástica foi estudada em Gendreau et al. (1995). Usando a abordagem de programação estocástica, o problema foi resolvido em dois estágios. No primeiro estágio, um conjunto de rotas é desenhado. E, no segundo estágio, quando a presença de clientes se torna conhecida, essas rotas são percorridas conforme planejadas, pulando os clientes ausentes. Quando a capacidade dos veículos for excedida, eles retornam ao depósito e

seguem seu caminho ao longo dos clientes das rotas planejadas. Os autores formularam o problema como um problema inteiro estocástico e o resolveram pela primeira vez usando o algoritmo *L-shaped* inteiro, resultante de aplicar a decomposição de *Benders* ao programa estocástico. Resultados computacionais revelaram que o algoritmo proposto provou otimalidade para instâncias de pequeno e médio porte.

Laporte et al. (2002) estudaram o CVRP estocástico em que a demanda foi modelada como uma variável aleatória. Os autores também abordaram o problema em dois estágios, usando a programação estocástica com recurso. As falhas nas rotas desenhadas no primeiro estágio foram direcionadas pelos retornos ao depósito. O algoritmo *L-shaped* inteiro foi proposto para resolver de forma exata o CVRP estocástico. Novos limitantes inferiores no custo esperado do recurso foram propostos pelos autores, bem como um novo corte de otimalidade para o problema, que também foi validado para soluções fracionárias. O estudo numérico revelou um bom desempenho computacional em termos dos tempos computacionais relativamente curtos para resolver instâncias do problema com até 100 clientes, mas com poucos veículos. Para melhorar mais ainda o algoritmo proposto num estudo prévio, Jabali et al. (2014) introduziram três diferentes funções para determinar limitantes inferiores no custo esperado do recurso, baseadas na geração de rotas parciais, também como um procedimento exato para a geração dos cortes de otimalidade violados. Os experimentos computacionais mostraram que a introdução dessas funções no algoritmo *L-shaped* inteiro ajudaram a superar o proposto em Laporte et al. (2002), já que os tempos de resolução foram mais curtos. Ainda, dentro de um conjunto de 270 instâncias, o número delas resolvidas até a otimalidade passou de 99 a 102.

O VRP com janelas de tempo rígidas e demanda estocástica foi estudado por Lei et al. (2011). Os autores modelaram o problema como um programa estocástico com recurso. O recurso usado para contornar as falhas correspondeu a retornos ao depósito. Esses retornos incorrem em tempos adicionais que podem inviabilizar o atendimento dos clientes dentro das suas janelas de tempo. Dessa forma, os autores usaram outro recurso para direcionar esse tipo de falhas, consistindo no uso de outro veículo para atender esses clientes. Para resolver o problema, a heurística *Adaptive Large Neighborhood Search* foi usada. Os resultados computacionais mostraram a superioridade da heurística proposta em comparação a outras abordagens de solução.

O primeiro algoritmo do tipo BP usado em roteamentos de veículos estocástico foi proposto em Christiansen e Lysgaard (2007). Os autores desse estudo propuseram uma formulação de particionamento de conjuntos para representar o problema e mostraram que o subproblema associado para a geração de colunas pode ser resolvido usando um esquema de programação dinâmica. O estudo computacional mostrou que o algoritmo BP resolveu até otimalidade instâncias do problema com até 60 clientes e 16 veículos. Motivado pelos resultados em Christiansen e Lysgaard (2007), Gauvin et al. (2014) também abordaram o CVRP com demanda estocástica, modelando-o como uma formulação de particionamento de conjuntos com restrições adicionais e resolvendo-o por meio de um algoritmo do tipo BPC. Os autores resolveram o subproblema *pricing* (subproblema gerador de colunas/rotas) usando o algoritmo *labeling* bidirecional, em que ele foi significativamente acelerado pela introdução de uma nova regra de dominância agregada. Os experimentos numéricos mostraram que o algoritmo foi altamente competitivo quando comparado com o algoritmo desenvolvido em Christiansen e Lysgaard (2007). O algoritmo BPC resolveu otimamente 20 instâncias adicionais das 40 consideradas na experimentação computacional em Christiansen e Lysgaard (2007), e melhorou consideravelmente o tempo de resolução para as instâncias já fechadas.

O VRPTW estocástico, mas dessa vez com tempos de serviço estocásticos e janelas de tempo rígidas, foi estudado por [Errico et al. \(2013\)](#), [Errico et al. \(2016\)](#). Ambos os trabalhos usaram um algoritmo baseado em BPC para resolver o problema. Em particular, dado um conjunto de rotas, alguns dos tempos de serviço podem inviabilizar o atendimento dos clientes dentro de suas janelas de tempo. [Errico et al. \(2013\)](#) propuseram uma nova formulação de particionamento de conjuntos que inclui uma restrição correspondente à probabilidade de sucesso mínima para um conjunto de rotas. Os autores adaptaram o algoritmo *labeling* para levar em conta o consumo do recurso probabilístico, estendendo a dimensão do *label*, e forneceram novas regras de dominância válidas para o problema. O estudo computacional revelou a efetividade do algoritmo BPC e que a versão estocástica possui vantagens sobre o modelo determinístico quando as qualidades das soluções são comparadas. No entanto, uma limitação que os autores ressaltam do algoritmo BPC proposto corresponde à alta dimensão do *label* no algoritmo de programação dinâmica, levando a resolver instâncias com até 25 clientes.

[Errico et al. \(2016\)](#) modelaram o problema como um programa estocástico de dois estágios e definiram duas políticas de recurso para recuperar a factibilidade das operações quando o plano do primeiro estágio se revelar infactível. Os autores formularam o problema como uma formulação de particionamento de conjuntos, resolvendo-o por meio de um algoritmo baseado em BPC. Em particular, os autores desenvolveram um algoritmo *labeling* efetivo por selecionar apropriadamente as componentes do *label* e pelo desenvolvimento de limitantes inferiores e superiores dos custos reduzidos parciais. Resultados numéricos revelaram que o algoritmo BPC foi capaz de provar otimalidade para instâncias com até 50 clientes para ambas políticas de recurso.

O CVRP com demanda estocástica foi o objeto de pesquisa em [Salavati-Khoshghalb et al. \(2017\)](#), [Salavati-Khoshghalb et al. \(2018\)](#), [Salavati-Khoshghalb et al. \(2019\)](#), em que os modelos de otimização correspondem a problemas de programação estocástica com paradigma de recurso. [Salavati-Khoshghalb et al. \(2017\)](#) introduziram um novo tipo de política de recurso baseada no uso de um conjunto de regras operacionais pré-fixadas, que especificam quando as viagens ao depósito devem ser realizadas. Dada uma rota, essas políticas são expressas por meio de um conjunto de valores de referência, associados com cada um dos clientes programados ao longo da rota. Os autores mostraram que o recurso pode ser eficientemente computado via uma função recursiva baseada em valores de referência pré-fixados. Para resolver o modelo estocástico resultante, um algoritmo *L-shaped* inteiro foi desenvolvido, mostrando-se bastante efetivo para resolver instâncias até a otimalidade com até 60 clientes e frotas não excedendo a quatro veículos.

[Salavati-Khoshghalb et al. \(2018\)](#) introduziram a primeira política híbrida que define quando as viagens ao depósito devem ser realizadas. A política híbrida não é mais do que uma combinação das políticas baseadas em regra introduzidas em [Salavati-Khoshghalb et al. \(2017\)](#) para distância e risco. Eles também derivaram uma equação recursiva para calcular diretamente o custo esperado de recurso para a política híbrida proposta e propuseram um algoritmo exato do tipo *L-shaped* inteiro para resolver eficientemente o problema estocástico. O algoritmo proposto usa os conceitos de rotas parciais introduzidos em [Jabali et al. \(2014\)](#), em que limitantes inferiores do custo esperado de recurso são computados para cada tipo de rota parcial, que, por sua vez, são usados nos denominados cortes LBFs (abrev. em inglês LBFs - *Lower Bound Functionals*). Experimentos numéricos mostraram que o algoritmo resolveu até a otimalidade um número considerável de instâncias, especialmente em instâncias com poucos veículos.

Recentemente, [Salavati-Khoshghalb et al. \(2019\)](#) incorporaram políticas de reabastecimento ótima. Diferentemente da política baseada em regras pré-fixadas, na política de reabastecimento ótima é aplicada uma regra de decisão sequencial que determina otimamente se o veículo, ao sair de um dado cliente com uma capacidade residual qualquer, segue diretamente ao próximo cliente, ou primeiro realiza uma viagem preventiva ao depósito. Eles desenvolveram um algoritmo *L-shaped* inteiro para resolver o CVRP com demanda estocástica e política de reabastecimento ótima. O algoritmo proposto pelos autores também usa limitantes inferiores na tentativa de melhorar seu desempenho global. Adicionalmente, eles derivaram um limitante inferior geral do custo esperado de recurso das soluções, ajudando a melhorar ainda mais o desempenho global do método exato desenvolvido para resolver o problema. Isso é evidenciado nos experimentos computacionais, pois o algoritmo *L-shaped* inteiro provou otimalidade para instâncias com até 60 clientes, porém com poucos veículos, no máximo quatro. Para uma revisão de trabalhos em roteamento de veículos estocástico, recomenda-se os trabalhos [Oyola et al. \(2016a\)](#), [Oyola et al. \(2016b\)](#), [Gendreau et al. \(2016\)](#).

3.3 Considerações finais

A Tabela 1 resume as características mais relevantes de alguns trabalhos na literatura que abordam variantes do VRP em contextos incertos. A tabela foi desenhada visando ressaltar os seguintes critérios: 1) abordagem usada para tratar as incertezas do problema (coluna 2); 2) os parâmetros envolvidos no problema considerados incertos (coluna 3); 3) descrição da incerteza (coluna 4); 4) função de recurso (coluna 5); 5) o tipo de restrição temporal (coluna 6) e 6) a abordagem de solução proposta para resolver a variante correspondente com parâmetros incertos (coluna 7).

A partir da Tabela 1, mostra-se a lacuna que a presente tese pretende preencher, pois o VRPTWMD ainda não foi estudado na literatura em contextos incertos. Observe também nessa tabela que a maioria dos trabalhos abordam a variante do VRP correspondente na versão robusta usando a abordagem de [Bertsimas e Sim \(2004\)](#). Isso porque os modelos robustos resultantes não perdem a linearidade da sua *counterpart* determinística. Essa tabela também revela futuros direcionamentos interessantes de pesquisa relacionados ao uso de outras abordagens de RO diferentes à de [Bertsimas e Sim \(2004\)](#) para tratar as incertezas em variantes do VRP. Além disso, são poucos os trabalhos que resolvem a versão robusta do problema correspondente via métodos exatos, em particular, métodos baseados em BPC. Adicionalmente, não existem trabalhos estudando variantes do VRP robusto considerando os tempos de serviço incertos e separados dos tempos de viagens incertos.

Em relação aos trabalhos usando a abordagem de programação estocástica com recurso, observe da Tabela 1 que a maioria dos trabalhos apenas consideram a demanda de clientes estocástica, sendo a variante CVRP com demanda estocástica a mais estudada. Para os métodos exatos baseados em *L-shaped* inteiro, a tendência é propor procedimentos para computar limitantes inferiores no custo esperado de recurso para, posteriormente, usá-los nos correspondentes cortes LBFs. Excetuando o trabalho de [Gendreau et al. \(1995\)](#), todos os trabalhos que desenvolveram algoritmos exatos baseados em *L-shaped* inteiro usaram o conceito de LBF, obtendo resultados satisfatórios para CVRP com demanda estocástica, especialmente para instâncias com poucos veículos. Todavia, não há trabalhos propondo esse método para resolver o VRPTW estocástico, pois existe um desafio em determinar procedimentos capazes de fornecer limitantes inferiores para o custo esperado de recurso. Por outro lado, também existem poucos

trabalhos explorando variantes do VRP estocástico via método BPC (CHRISTIANSEN; LYSGAARD, 2007; ERRICO et al., 2013; GAUVIN et al., 2014; ERRICO et al., 2016).

A principal contribuição da presente tese ao estado da arte da literatura é estender o VRPTWMD nas suas versões robusta e estocástica. Essa contribuição é dada ao longo dos Capítulos 4, 5 e 6. As contribuições do Capítulo 4 são: 1) a extensão da formulação matemática determinista do VRPTWMD e a apresentação de sua formulação robusta para o RVRPTWMD; 2) a extensão da heurística I1, originalmente apresentada por Solomon para o VRPTW, para encontrar uma solução factível robusta para o RVRPTWMD; e 3) a análise do potencial da abordagem de RO estática de (BERTSIMAS; SIM, 2004) para abordar o RVRPTWMD em termos do comportamento da função objetivo, as decisões de roteamento e o risco de infactibilidade da solução à medida que o nível de incerteza do problema aumenta.

No Capítulo 5, apresenta-se novas formulações de otimização robusta e métodos exatos customizados para tratar o VRPTWMD envolvendo parâmetros incertos. Não temos conhecimento de outros trabalhos explorando otimização robusta no VRPTWMD via método *branch-price-and-cut* (BPC), conforme mencionado antes. As principais contribuições do Capítulo 5 são: 1) Estende-se as equações dinâmicas recursivas em Agra et al. (2013), Munari et al. (2018) para levar em consideração as incertezas nos tempos de serviços; 2) Propõe-se também uma formulação robusta compacta do problema baseada na formulação de fluxo proposta em Pureza et al. (2012); 3) Apresenta-se uma formulação de particionamento de conjuntos robusta para o problema e 4) Desenvolve-se um algoritmo baseado em BPC para resolver efetivamente a formulação de particionamento de conjuntos robusta, em que as equações dinâmicas recursivas são usadas apropriadamente para atualizar o consumo dos recursos probabilísticos carga e tempo no algoritmo *labeling*, usado para resolver o problema do caminho mais curto com recurso robusto.

Além disso, nesta tese também é proposto um algoritmo *L-shaped* inteiro para resolver efetivamente o SVRPTWMD. Não temos conhecimento de outros trabalhos explorando programação estocástica no VRPTWMD via algoritmo *L-shaped* inteiro, conforme mencionado antes. Esse algoritmo usa as três topologias de rotas parciais introduzidas em Jabali et al. (2014) e um procedimento para determinar um limitante inferior do custo esperado de recurso para gerar os correspondentes cortes LBFs. Também, as desigualdades *k-path* são usadas para melhorar ainda mais o limitante inferior de programação linear do programa estocástico, visando melhorar o desempenho global do algoritmo *L-shaped* inteiro proposto. Essa contribuição da tese é apresentada no Capítulo 6.

Autor(es)	Técnica de modelagem	Parâmetros incertos	Descrição da incerteza	Função de recurso	Restrição de tempo	Abordagem de solução
Gendreau et al. (1995)	Estocástico	Demanda	Distribuição de probabilidade	Custo	n/a	<i>L-shaped</i>
Laporte et al. (2002)	Estocástico	Demanda	Distribuição de probabilidade	Custo	n/a	<i>L-shaped</i>
Christiansen e Lysgaard (2007)	Estocástico	demanda	Distribuição de probabilidade	Custo	n/a	BP
Lei et al. (2011)	Estocástico	Demanda	Distribuição de probabilidade	Custo	Janelas de tempo	Meta-heurística
Sungur et al. (2008)	Robusto	Demanda	Cenários	n/a	n/a	BC de <i>solvers</i>
Ordóñez (2010)	Robusto	Demanda e tempo de viagem	<i>Budget</i> de incerteza	n/a	Janelas de tempo	BC
Agra et al. (2012)	Robusto	Demanda	<i>Budget</i> de incerteza	n/a	n/a	BC
Lee et al. (2012)	Robusto	Demanda e tempo de viagem	<i>Budget</i> de incerteza	n/a	Prazo de entrega	BP
Agra et al. (2013)	Robusto	Tempo de viagem	<i>Budget</i> de incerteza	n/a	Janelas de tempo	BC
Gounaris et al. (2013)	Robusto	Demanda	Conjuntos genéricos	n/a	n/a	BC
Errico et al. (2013)	Estocástico	Tempo de serviço	Distribuição de probabilidade	Custo	Janelas de tempo	BPC
Gauvin et al. (2014)	Estocástico	Demanda	Distribuição de probabilidade	Custo	n/a	BPC
Gounaris et al. (2016)	Robusto	Demanda	Conjuntos genéricos	n/a	n/a	Meta-heurística
Errico et al. (2016)	Estocástico	Tempo de serviço	Distribuição de probabilidade	Custo	Janelas de tempo	BPC
Mumari et al. (2018)	Robusto	Demanda e tempo de viagem	<i>Budget</i> de incerteza	n/a	Janelas de tempo	BPC
Salavati-Khoshghalb et al. (2017)	Estocástico	Demanda	Distribuição de probabilidade	Custo	n/a	<i>L-shaped</i>
Salavati-Khoshghalb et al. (2018)	Estocástico	Demanda	Distribuição de probabilidade	Custo	n/a	<i>L-shaped</i>
Salavati-Khoshghalb et al. (2019)	Estocástico	Demanda	Distribuição de probabilidade	Custo	n/a	<i>L-shaped</i>
Lu e Gzara (2019)	Robusto	Demanda	<i>Budget</i> de incerteza	n/a	Janelas de tempo	BPC
Essa tese	Estocástico	Demanda	Distribuição de probabilidade	Custo	Janelas de tempo	<i>L-shaped</i>
	Robusto	Demanda, tempos de viagem e serviço	<i>Budget</i> de incerteza	n/a	Janelas de tempo	BPC

Tabela 1 – Principais características dos trabalhos que abordam variantes do VRP em contextos incertos.

Capítulo 4

VRPTWMD ROBUSTO: FORMULAÇÃO DE DESIGNAÇÃO ROBUSTA

Nesse capítulo, aborda-se o VRPTWMD robusto em que as demandas dos clientes são incertas e pertencem a um polítopo predeterminado. Uma nova formulação matemática é apresentada para a *counterpart* determinística, diferente das formulações revisadas no Capítulo 2, com base em variáveis auxiliares que definem a designação de clientes a rotas. A partir dessa formulação, aplica-se uma abordagem de otimização robusta estática para obter uma formulação da *counterpart* robusta que capture a natureza aleatória da demanda dos clientes. Devido à dificuldade do *solver* comercial CPLEX 12.6 em resolver essa formulação, propõe-se uma heurística construtiva para gerar uma solução factível robusta, a qual é usada como ponto de partida para resolver a formulação de *counterpart* robusta. A heurística é uma extensão da heurística II de Solomon. Os resultados computacionais que utilizam instâncias da literatura e análise de risco por meio da simulação Monte-Carlo indicam o potencial da otimização robusta estática para lidar com o *trade-off* entre custo e risco. Os resultados também revelam que a abordagem proposta fornece bons resultados mesmo sem o conhecimento exato de alguma medida probabilística da demanda dos clientes.

É importante ressaltar que os resultados do presente capítulo foram compilados e recentemente publicados em De La Vega et al. (2017).

4.1 Formulação baseada em designação para o VRPTWMD

Como mencionado anteriormente e discutido na Seção 2.5 do Capítulo 2, na RO estática, é conveniente ter todos os parâmetros incertos em uma única restrição, pois isso leva a uma reformulação que considera o *trade-off* entre desempenho e conservadorismo (robustez ou risco). O desempenho é medido em termos do valor ótimo da função objetivo e do nível de conservadorismo (robustez ou risco) na probabilidade de violação da solução. A formulação de fluxo três-índices (2.1)-(2.11) do Capítulo 2, proposta em Pureza et al. (2012) não é conveniente para uso da abordagem da RO estática, uma vez que sua *counterpart* robusta é equivalente a uma instância do problema determinístico em que todos os parâmetros incertos assumem seus respectivos valores de pior caso, resultando em uma solução totalmente conservadora (GOUNARIS et al., 2013). Por outro lado, a formulação de fluxo quatro-índices (2.12)-(2.22) do Capítulo 2 correspondente à alocação de rotas a veículos no vetor de fluxo x , embora conveniente para aplicação dos conceitos da abordagem da RO estática, possui um número considerável de variáveis

binárias. Além disso, pelo menos para as instâncias testadas neste capítulo, o limitante de programação linear (abrev. em Inglês LP - *Linear Programming*) em ambas as formulações de fluxo três- e quatro-índices são fracos, desestimulando o uso efetivo de métodos de solução de propósito geral encontrados em *solvers* comerciais de otimização, como BB e BC. Conseqüentemente, propõe-se uma nova formulação para o VRPTWMD, a qual é mais conveniente para a aplicação da abordagem da RO estática e com um limitante de LP mais apertado. A formulação proposta baseia-se na formulação de [Pureza et al. \(2012\)](#) e [Gounaris et al. \(2013\)](#), com a adição de variáveis que indicam a designação de clientes a rotas.

Para reformular a nova *counterpart* determinística do VRPTWMD, definem-se as seguintes variáveis adicionais: (1) $y^{k\ell}$: variável binária que assume valor 1 se e somente se a rota k for operada no modo ℓ e (2) $z_i^{k\ell}$: variável binária que assume valor 1 se e somente se o cliente i for designado à rota k operando no modo ℓ . Usa-se \mathbf{x} , \mathbf{z} e \mathbf{y} para denotar vetores com componentes correspondendo às variáveis de decisão x_{ij}^ℓ , $z_i^{k\ell}$ e $y^{k\ell}$, respectivamente. Então, a nova formulação matemática para o VRPTWMD pode ser descrita como segue:

minimizar

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k \in \mathcal{K}} (p_1 + \ell p_2) y^{k\ell} + p_3 \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} d_{ij} x_{ij}^\ell. \quad (4.1)$$

sujeito a:

$$\text{restrições: (2.2)-(2.4), (2.7)-(2.8) e (2.11)}. \quad (4.2)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k \in \mathcal{K}} y^{k\ell} \leq \mathcal{K}. \quad (4.3)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \ell y^{k\ell} \leq \mathcal{D}. \quad (4.4)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} x_{0j}^\ell = \sum_{k \in \mathcal{K}} y^{k\ell}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.5)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} y^{k\ell} \leq 1, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (4.6)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} z_i^{k\ell} \geq y^{k\ell}, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.7)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} z_i^{k\ell} \leq |\mathcal{N}| y^{k\ell}, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.8)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} z_i^{k\ell} \leq \sum_{j \in \mathcal{V} \setminus \{0\}} x_{ij}^\ell, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.9)$$

$$1 - x_{ij}^\ell - x_{ji}^\ell \geq z_i^{k\ell} - z_{jk}^\ell, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall j \in \mathcal{N}, i \neq j, \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.10)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} z_i^{k\ell} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (4.11)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \bar{q}_i z_i^{k\ell} \leq Q y^{k\ell}, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.12)$$

$$z_i^{k\ell} \in \{0, 1\}, \forall i \in \mathcal{N}, \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.13)$$

$$y^{k\ell} \in \{0, 1\}, \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.14)$$

A função objetivo (4.1) do modelo (4.1)-(4.14) também minimiza os custos associados com o número de rotas, número de entregadores e distância total percorrida. Note que, nesse caso, o número de rotas e de entregadores é calculado usando o vetor de variáveis \mathbf{y} . O conjunto de restrições (4.2) já foi explicado na Seção 2.2 do Capítulo 2. Uma vez que existem \mathcal{K} veículos e \mathcal{D} entregadores disponíveis no depósito, as restrições (4.3) e (4.4) expressam que essas disponibilidades devem ser respeitadas. As restrições (4.5) acoplam os vetores de variáveis de decisão \mathbf{x} e \mathbf{y} , indicando que todos os clientes visitados imediatamente após o veículo sair do depósito 0 no modo ℓ devem ser parte de rotas distintas, mas no mesmo modo. As restrições (4.6) garantem que uma rota k opere em um único modo ℓ . As restrições (4.7) e (4.8) garantem que, se existe uma rota k operando no modo ℓ , esta deve ter ao menos um cliente e no máximo os $n = |\mathcal{N}|$ clientes, respectivamente. Já as restrições (4.9) obrigam, no caso de existir um roteiro com ℓ entregadores passando pelo cliente i , que o cliente pertença a uma única rota k , e esta deva conter os mesmos ℓ entregadores do roteiro. As restrições (4.10) informam que se os clientes i e j pertencem ao mesmo roteiro no modo ℓ , então eles devem ser atribuídos à mesma rota. Essas restrições são as responsáveis por realizar a designação de clientes a rotas. As restrições (4.11) impõem que cada cliente i deve pertencer a uma única rota k em um único modo ℓ .

A carga máxima de cada rota é imposta pelas restrições (4.12). Finalmente, as restrições (4.13)-(4.14) indicam a natureza binária dos vetores de variáveis de decisão \mathbf{z} e \mathbf{y} . Em relação à formulação de fluxo três-índices (2.1)-(2.11), o número de variáveis binárias é aumentado por $|\mathcal{N}| \times |\mathcal{K}| \times \mathcal{L} + |\mathcal{K}| \times \mathcal{L}$. Contudo, o número de variáveis de decisão da formulação (4.1)-(4.14) pode ser reduzido por meio da fixação das variáveis de fluxo x_{ij}^ℓ em 0 se as desigualdades $w_i^a + \bar{s}_i^\ell + \bar{t}_{ij} > w_j^b$ e $\bar{q}_i + \bar{q}_j > Q$ se mantiverem. Adicionalmente, a Proposição 4.1.1 mostra que o requerimento binário do vetor de variáveis de decisão \mathbf{y} pode ser relaxado.

Proposição 4.1.1. Assuma que os vetores de variáveis de decisão \mathbf{x} e \mathbf{z} satisfazem as restrições (4.2),(4.10), (4.11) e (4.13). Então, as restrições (4.3)-(4.8) são satisfeitas pelo vetor de variáveis de decisão $\mathbf{y} \in \{0, 1\}^{|\mathcal{K}| \times \mathcal{L}}$ se e somente se elas são satisfeitas pelo vetor de variáveis de decisão $\mathbf{y} \in [0, 1]^{|\mathcal{K}| \times \mathcal{L}}$.

Demonstração. Seja $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ uma solução que satisfaz as restrições (4.2), (4.10), (4.11) e (4.13). Para cada ℓ em $\{1, \dots, \mathcal{L}\}$, seja \mathcal{K}^ℓ o conjunto de rotas operando no modo ℓ da solução, dado por todas as rotas k em \mathcal{K} tal que $z_i^{k\ell} = 1$ para um dado i em \mathcal{N} . Seja v_k o primeiro cliente visitado pela rota $k \in \mathcal{K}^\ell$. A partir das restrições (4.5), tem-se para algum ℓ em $\{1, \dots, \mathcal{L}\}$:

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^\ell} x_{0,v_k}^\ell = y_1^\ell + y_2^\ell + \dots + y_{|\mathcal{K}^\ell|}^\ell \quad (4.15)$$

Por hipótese, \mathbf{x} é um vetor binário, então a soma no lado esquerdo de (4.15) é igual $|\mathcal{K}^\ell|$. Seja $\tilde{\mathcal{K}}^\ell$ o conjunto de todos índices k em \mathcal{K} tal que $y^{k\ell} > 0$. Quando todas os componentes do vetor \mathbf{y} são binários, então $|\tilde{\mathcal{K}}^\ell| = |\mathcal{K}^\ell|$. Caso contrário, tem-se $|\tilde{\mathcal{K}}^\ell| > |\mathcal{K}^\ell|$. Suponha por contradição que exista um número positivo de índices em $\tilde{\mathcal{K}}^\ell$ para os quais as variáveis correspondentes $y^{k\ell}$ assumem valores fracionários. Dessa forma, é possível particionar o conjunto $\tilde{\mathcal{K}}^\ell$ como $\tilde{\mathcal{K}}_{frac}^\ell$ e $\tilde{\mathcal{K}}_{int}^\ell$ tal que $\tilde{\mathcal{K}}^\ell = \tilde{\mathcal{K}}_{frac}^\ell \cup \tilde{\mathcal{K}}_{int}^\ell$,

$\tilde{\mathcal{K}}_{frac}^l \cap \tilde{\mathcal{K}}_{int}^l = \emptyset$ e $|\tilde{\mathcal{K}}_{frac}^l| + |\tilde{\mathcal{K}}_{int}^l| > |\mathcal{K}^l|$. Assim, $\exists k' \in \tilde{\mathcal{K}}^l$ tal que $k' \notin \mathcal{K}^l$. Por hipótese, $\sum_{i \in \mathcal{N}} z_i^{k\ell} \geq 1$ para todo $k \in \mathcal{K}^l$ e $\sum_{i \in \mathcal{N}} z_i^{k\ell} = 0$ para todo $k \in \tilde{\mathcal{K}}^l \setminus \mathcal{K}^l$. No entanto, $\exists k' \in \tilde{\mathcal{K}}^l \setminus \mathcal{K}^l$ tal que $y_{k'}^\ell > 0$, o qual seria um absurdo, pois foi assumido que as restrições (4.7) são satisfeitas. Por outro lado, como $\mathbf{y} \in \{0, 1\}^{|\mathcal{K}| \times \mathcal{L}} \subseteq \mathbf{y} \in [0, 1]^{|\mathcal{K}| \times \mathcal{L}}$, então a outra direção da proposição é provada. Com isso, a prova é completada. \square

Conforme mostrado na Proposição 4.1.1, a integralidade do vetor de variáveis de decisão \mathbf{y} do modelo (4.1)-(4.14) pode ser relaxada, o que diminui o número de variáveis binárias do modelo. Além disso, o limitante de LP do modelo proposto é, em média, aproximadamente 271 e 6 vezes maior que o limitante de LP da formulação de fluxo três-índices para as classes C1 e R1 das instâncias de Solomon consideradas nos experimentos computacionais descritos na Seção 4.4, respectivamente. Portanto, considerou-se a formulação matemática proposta neste capítulo mais eficiente para aplicar a abordagem de RO estática ao VRPTWMD robusto (abrev. em Inglês RVRPTWMD - Robust VRPTWMD). Convém salientar que esse modelo proposto, após alguns pequenos ajustes menores, também é válido para a versão em que a frota de veículos é heterogênea, pois basta alterar o significado do índice k das rotas por veículos. Com isso, a formulação robusta a ser detalhada na próxima seção, também é válida para essa versão do problema.

4.2 Formulação do RVRPTWMD com demanda incerta

Esta seção apresenta um programa linear robusto estático que captura a natureza aleatória da demanda dos clientes no RVRPTWMD.

4.2.1 Conjunto de incerteza e counterpart robusta das restrições de capacidade

A demanda incerta \tilde{q}_i , para todo $i \in \mathcal{N}$, é modelada como uma variável aleatória independente, simétrica e limitada tomando valores no intervalo $[\bar{q}_i - \hat{q}_i, \bar{q}_i + \hat{q}_i]$, em que \bar{q}_i e \hat{q}_i definem o valor nominal (ou valor esperado) e o máximo desvio permitido para a variável aleatória \tilde{q}_i , respectivamente. Para cada variável aleatória \tilde{q}_i , associa-se outra variável aleatória ξ_i (tipicamente denominada de variável aleatória primitiva) que assume valores entre $[-1, 1]$ tal que $\tilde{q}_i = \bar{q}_i + \hat{q}_i \xi_i$, para todo $i \in \mathcal{N}$. Usa-se ξ para definir o vetor de incerteza primitiva. Formular o modelo de RO para o RVRPTWMD sob a abordagem estática usando essa representação do vetor de incerteza primitivo ξ pode levar à geração de soluções totalmente conservadoras. Isso porque a formulação robusta resultante é equivalente à counterpart determinística com a variável aleatória \tilde{q}_i assumindo seu respectivo valor de pior caso. Essa formulação é conhecida na literatura como método de Soyster (SOYSTER, 1973). Para evitar esse conservadorismo, nesta tese restringe-se o vetor de incerteza primitivo ξ ao seguinte conjunto de incerteza de cardinalidade restrita (BERTSIMAS; SIM, 2004):

$$\mathcal{U}^{k\ell}(\mathbf{z}, \Gamma) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}|} : -1 \leq \xi_i \leq 1, \forall i \in \mathcal{R}^{k\ell}(\mathbf{z}), \sum_{i \in \mathcal{R}^{k\ell}(\mathbf{z})} \xi_i \leq \Gamma^{k\ell} \right\}, \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.16)$$

Para um dado vetor \mathbf{z} de designação de clientes a rotas, $\mathcal{R}^{k\ell}(\mathbf{z})$ descreve o conjunto de todos os clientes que pertencem à rota k no modo ℓ . O parâmetro $\Gamma^{k\ell}$, denominado de *budget* de incerteza, define

o número de clientes pertencentes à rota k no modo ℓ cujas demandas podem desviar-se de seus valores nominais. Se $\Gamma^{k\ell} = |\mathcal{R}^{k\ell}(z)|$, então a demanda de todos os clientes na rota k assumirá o valor de pior caso (método de [Soyster](#)). Nessa situação, a formulação resultante é totalmente conservadora e define a máxima proteção contra as incertezas. Por outro lado, se $\Gamma^{k\ell} = 0$, o problema resultante é equivalente ao problema nominal e, portanto, as incertezas são completamente ignoradas. Selecionando um valor do parâmetro $\Gamma^{k\ell}$ entre 0 e $|R_k(x)|$, controla-se o *trade-off* entre o nível de robustez ou conservadorismo da solução e o desempenho da solução em termos da função objetivo.

O conjunto de incerteza definido depende do valor do *budget* de incerteza, das rotas selecionadas e dos clientes pertencentes a essas rotas. Esse é o motivo da indexação do conjunto com o vetor z . Usando o conjunto de incerteza (4.16), constrói-se a *counterpart* robusta do conjunto de restrições (4.12) da seguinte maneira:

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} (\bar{q}_i + \hat{q}_i \xi_i) z_i^{k\ell} \leq Qy^{k\ell}, \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}, \forall \xi \in \mathcal{U}^{k\ell}(z, \Gamma). \quad (4.17)$$

Um programa linear inteiro-misto com um número infinito de restrições é obtido se as restrições (4.12) forem substituídas pelas (4.17) no modelo (4.1)-(4.14), uma vez que as restrições (4.17) devem ser satisfeitas para todas as possíveis realizações do vetor de incerteza primitivo ξ dentro do conjunto $\mathcal{U}^{k\ell}(z, \Gamma)$. Nesse contexto, o programa linear inteiro-misto resultante não pode ser resolvido com um *solver* comercial de otimização. No entanto, a Proposição 4.2.1 mostra uma forma equivalente para representar as restrições (4.17) por meio de um número finito de restrições.

Proposição 4.2.1. As restrições (4.17) são equivalentes ao seguinte par de restrições

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \bar{q}_i z_i^{k\ell} + \sum_{i \in \mathcal{N}} \alpha_{ik}^\ell + \Gamma^{k\ell} \beta_k^\ell \leq Qy^{k\ell}, \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.18)$$

$$\alpha_{ik}^\ell + \beta_k^\ell \geq \hat{q}_i z_i^{k\ell}, \forall i \in \mathcal{N}, \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.19)$$

em que α e β correspondem aos vetores de variáveis de decisão duais das restrições do problema de otimização associado ao nível de proteção primal das restrições (4.17).

Demonstração. Sejam y^\star e z^\star dois vetores satisfazendo as restrições do modelo (4.1)-(4.14). Seguindo os conceitos dados de RO no Apêndice A.2, as restrições (4.17) são equivalentes à seguinte reformulação de pior caso:

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \bar{q}_i z_{i^\star}^{k\ell} + \max_{\xi \in \mathcal{U}^{k\ell}(z, \Gamma)} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{R}^{k\ell}(z)} \hat{q}_i z_{i^\star}^{k\ell} \xi_i \right\} \leq Qy_{i^\star}^{k\ell}, \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.20)$$

Ao substituir as restrições (4.12) por (4.20) no modelo (4.1)-(4.14), um modelo de programação não-linear é obtido, pois o vetor de incerteza primitivo ξ seria também um vetor de variáveis de decisão. A técnica de dualidade da função de proteção $\mathcal{B}^{k\ell}(z) = \max_{\xi \in \mathcal{U}^{k\ell}(z, \Gamma)} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{R}^{k\ell}(z)} \hat{q}_i z_{i^\star}^{k\ell} \xi_i \right\}$ é usada para linearizar as restrições (4.20). Essa função é equivalente ao seguinte problema de otimização:

$$\mathcal{B}^{k\ell}(z) = \max_{\xi \geq 0} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{R}^{k\ell}(z)} \hat{q}_i z_{i^\star}^{k\ell} \xi_i : \xi_i \leq 1, \forall i \in \mathcal{R}^{k\ell}(z), \sum_{i \in \mathcal{R}^{k\ell}(z)} \xi_i \leq \Gamma^{k\ell} \right\}. \quad (4.21)$$

No problema de otimização (4.21), o vetor de incerteza primitivo ξ é um vetor de variáveis de decisão contínuo, ao passo que z_\star é um vetor de parâmetros. Note que esse problema de otimização pode ser resolvido por inspeção, já que ele é maximizado quando Γ^{kl} componentes do vetor de incerteza primitivo ξ assumem o valor 1, dado por aquelas componentes relacionadas à demanda dos clientes pertencentes ao conjunto $\mathcal{R}^{kl}(z)$ com os Γ^{kl} maiores desvios. Portanto, o problema (4.21) é sempre factível e limitado para todo Γ^{kl} . Por dualidade forte, o dual associado de (4.21) é também factível e limitado, e os valores ótimos do par de problemas primal-dual coincidem. Sejam α e β os vetores de variáveis de decisão duais associados às restrições em (4.21). A dualização da função proteção $\mathcal{B}^{kl}(z)$ leva a:

$$\mathcal{B}^{kl}(z) = \min_{\alpha \geq 0, \beta \geq 0} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{R}^{kl}(z)} \alpha_i^{kl} + \Gamma^{kl} \beta^{kl} : \alpha_i^{kl} + \beta^{kl} \geq \hat{q}_i z_{i\star}^{kl}, \forall i \in \mathcal{R}^{kl}(z) \right\}. \quad (4.22)$$

Ao substituir nas restrições (4.20) a forma equivalente da função de proteção $\mathcal{B}^{kl}(z)$ dada na equação (4.22), tem-se:

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \bar{q}_i z_{i\star}^{kl} + \min_{\alpha \geq 0, \beta \geq 0} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{R}^{kl}(z)} \alpha_i^{kl} + \Gamma^{kl} \beta^{kl} : \alpha_i^{kl} + \beta^{kl} \geq \hat{q}_i z_{i\star}^{kl}, \forall i \in \mathcal{R}^{kl}(z) \right\} \leq Q y_\star^{kl}, \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.23)$$

O termo de minimização na equação (4.23) pode ser omitido, pois é suficiente que as restrições se mantenham para ao menos um valor dos vetores α e β . Uma vez que o vetor z corresponde a um vetor de variáveis de decisão do problema original, os clientes pertencentes ao conjunto $\mathcal{R}^{kl}(z)$ não podem ser conhecidos *a priori*. Portanto, assume-se que $\mathcal{R}^{kl}(z) = \mathcal{N}$. Como resultado disso, obtêm-se as restrições (4.18) e (4.19), completando, assim, a prova. \square

4.2.2 Formulação robusta para o RVRPTWMD com demanda incerta

O modelo matemático resultante ao substituir as restrições (4.12) pelas restrições (4.18) e (4.19) no modelo (4.1)-(4.14) representa a formulação robusta do RVRPTWMD com demanda incerta. Dessa forma, o modelo de RO para o RVRTWMD com demanda incerta pode ser escrito como segue:

minimizar

$$p_1 \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k \in \mathcal{K}} y^{k\ell} + p_2 \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \ell y^{k\ell} + p_3 \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} d_{ij} x_{ij}^\ell. \quad (4.24)$$

sujeito a:

$$\text{restrições: (4.2)-(4.11) e (4.13)-(4.14)}. \quad (4.25)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \bar{q}_i z_i^{kl} + \sum_{i \in \mathcal{N}} \alpha_i^{kl} + \Gamma^{kl} \beta^{kl} \leq Q y^{kl}, \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.26)$$

$$\alpha_i^{kl} + \beta^{kl} \geq \hat{q}_i z_i^{kl}, \forall i \in \mathcal{N}, \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.27)$$

$$\alpha_i^{kl} \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.28)$$

$$\beta^{kl} \geq 0, \forall k \in \mathcal{K}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4.29)$$

Os vetores de variáveis de decisão α e β no modelo (4.24)-(4.29) são usados para quantificar o nível de proteção contra as possíveis variações do vetor de parâmetros incertos \tilde{q} . A partir das restrições (4.26)-(4.27), pode-se inferir que o nível de proteção total é dado pela soma dos níveis de proteção individual e global. O vetor α define o nível de proteção individual da rota k no modo ℓ e quantifica a proteção marginal contra qualquer possível variação do vetor de desvio, \hat{q} , do vetor incerto, \tilde{q} . Por outro lado, o vetor de variáveis de decisão β define o nível de proteção global da rota k no modo ℓ e expressa a proteção marginal contra a suposição de que, no máximo Γ vezes a natureza se comportará de forma desfavorável.

Dado um vetor de *budget* de incerteza Γ , o modelo (4.24)-(4.29) fornece soluções que garantem 100% de factibilidade se ao menos Γ parâmetros aleatórios variarem (ALEM; MORABITO, 2012). Todavia, se mais de Γ parâmetros incertos variarem, então as soluções geradas se manterão factíveis com alta probabilidade (BERTSIMAS; SIM, 2004). Bertsimas e Sim (2004) apresentaram diferentes formas para determinar limitantes superiores associados com a probabilidade de violação das restrições do problema, sempre que as componentes do vetor de incerteza primitivo ξ sejam modeladas como variáveis aleatórias independentes, simétricas e limitadas. Uma das formas discutidas, requerendo pouco esforço computacional, é dada por:

$$Pr \left(\sum_{i \in \mathcal{N}} \tilde{q}_i z_{i_*}^{k\ell} > Q y_*^{k\ell} \right) \leq (1 - \psi) C(n, \lfloor \nu \rfloor) + \sum_{t=\lfloor \nu \rfloor+1}^n C(n, t) \quad (4.30)$$

em que $n = |\mathcal{N}|$, $\nu = (\Gamma^{k\ell} + n)/2$, $\psi = \nu - \lfloor \nu \rfloor$ e

$$C(n, t) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{se } t = 0 \text{ ou } t = n, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{(n-t)t}} \exp \left(n \log \left(\frac{n}{2(n-t)} \right) + t \log \left(\frac{n-t}{t} \right) \right), & \text{Caso contrário.} \end{cases}$$

4.3 Abordagem de solução

Embora ambos os modelos (4.1)-(4.14) e (4.24)-(4.29) tenham a mesma complexidade computacional em teoria, experimentos computacionais usando um *solver* comercial de otimização (IBM CPLEX v.12.6) revelaram que, em geral, resolver o modelo (4.24)-(4.29) requer um maior esforço computacional do que resolver o modelo (4.1)-(4.14). De fato, para algumas instâncias com $n = 25$ clientes do modelo (4.24)-(4.29), nenhuma solução factível foi encontrada em um tempo limite de resolução de 3600 segundos. Por essa razão, uma abordagem heurística foi proposta. A abordagem heurística consiste em adaptar a heurística I1 de Solomon para o RVRPTWMD visando determinar uma solução factível robusta e, em seguida, usá-la como ponto de partida para resolver o modelo (4.24)-(4.29) por meio de um *solver* de otimização.

4.3.1 Heurística I1 para o VRPTWMD

A heurística I1 proposta em Solomon (1987) constrói rotas, uma de cada vez. Para uma iteração particular dessa heurística, seja $\mathcal{R}^\ell = (i_0, i_1, i_2, \dots, i_m)$ uma rota parcial no modo ℓ , a qual foi inicializada seguindo o critério do cliente mais distante ou mais urgente. O critério do cliente mais urgente é baseado

em uma priorização no atendimento daqueles clientes em que os horários de fechamento de suas janelas de tempo correspondem às primeiras horas do dia. Cada cliente u não visitado deve ser testado em todas as posições factíveis da rota \mathcal{R}^ℓ . Em seguida, determina-se um indicador de quão bom é colocar o cliente u em cada uma das posições factíveis \mathcal{R}^ℓ . Esse indicador é determinado por meio da combinação linear convexa entre a variação da distância e do tempo decorrido ao testar o cliente u entre as posições i e j da rota \mathcal{R}^ℓ . Sejam ϕ_1 e ϕ_2 os parâmetros que definem os pesos da distância e do tempo, respectivamente. Se $\phi_1 = 1$, então, a prioridade na geração das rotas está na distância. Por outro lado, quando $\phi_2 = 1$, a duração total da rota é a prioridade. Seja w_{ju}^ℓ o tempo de início de serviço dado que o cliente u foi testado entre as posições i e j da rota parcial \mathcal{R}^ℓ e μ um parâmetro que define o nível de prioridade de que a rota visite o cliente j imediatamente após visitar i . O indicador de quão bom é inserir o cliente u entre as duas posições i e j da rota parcial \mathcal{R}^ℓ é dado por:

$$c_1(i, u, j) = \phi_1 c_{11}(i, u, j) + \phi_2 c_{12}(i, u, j), \phi_1 + \phi_2 = 1, \phi_1 \geq 0, \phi_2 \geq 0, \quad (4.31)$$

em que

$$c_{11}(i, u, j) = d_{iu} + d_{uj} - \mu d_{ij}, \mu \geq 0 \quad \text{e} \quad c_{12}(i, u, j) = w_{ju}^\ell - w_j^\ell.$$

A melhor posição factível do cliente u na rota parcial \mathcal{R}^ℓ é aquela em que $c_1(i, u, j)$, dada pela equação (4.31), for minimizado. O nó a ser inserido na rota parcial é aquele que maximize o benefício de atendê-lo na rota parcial em vez de atendê-lo diretamente, isto é, por meio de uma rota única que visita apenas esse cliente. Isto é representado por $c_2(i, u, j) = \lambda d_{0u} - c_1(i, u, j)$, $\lambda \geq 0$, em que o parâmetro λ representa o peso dado ao atendimento do cliente u por meio de uma rota exclusiva para ele.

Seja \mathcal{ND} o número de entregadores finais na rota. A rota \mathcal{R}^ℓ inicia com um único entregador, isto é, $\ell = 1$ e $\mathcal{ND} = 1$. Quando já não é mais possível fazer outra inserção factível com o modo ℓ , este é aumentado em uma unidade, isto é, $\ell = \ell + 1$. Se ao menos uma inserção factível for feita com o modo ℓ atualizado, atualiza-se também o número de entregadores da rota parcial \mathcal{R}^ℓ , isto é, $\mathcal{ND} = \ell$. Uma nova rota é iniciada quando não seja mais possível fazer outra inserção factível, ou quando o número máximo de entregadores permitidos por rota tenha sido atingido. A heurística pára quando todos os clientes tenham sido roteados. O número máximo de entregadores permitidos por rota é três, isto é, $\mathcal{L} = 3$.

4.3.2 Heurística II robusta para o RVRPTWMD com demanda incerta

A heurística II robusta foi adaptada para o RVRPTWMD com demanda incerta. Na versão robusta, cada cliente u não roteado deve ser testado em todas as posições factíveis robustas da rota parcial \mathcal{R}^ℓ . Usando o mesmo critério para inicializar uma rota, esta inicia com um único entregador, e inserções factíveis robustas são feitas até que não sejam mais possíveis, ou até que o número máximo de entregadores permitidos por rota for atingido. O conceito de uma rota factível robusta \mathcal{R}^ℓ é dado na Definição 4.3.1. O parâmetro \mathcal{S}^ℓ é um conjunto que armazena os índices dos clientes na rota parcial \mathcal{R}^ℓ que possuem os $|\mathcal{S}^\ell| \leq \Gamma_{\mathcal{R}^\ell}^\ell$ desvios de piores-casos. Cada vez que um cliente for inserido na rota parcial \mathcal{R}^ℓ , o conjunto \mathcal{S}^ℓ é atualizado, e a equação dada na Definição 4.3.1 é usada para verificar a factibilidade robusta da inserção. O pseudocódigo da heurística II robusta (abrev. em Inglês RHI1 - *Robust Heuristic II*) é mostrado no Algoritmo 1. Finalmente, a solução robusta factível encontrada pela RHI1 é usada como ponto inicial em um *solver* de otimização de modo a melhorar seu desempenho computacional.

Definição 4.3.1 (Rota factível robusta). Uma rota parcial \mathcal{R}^ℓ é factível robusta se, além de atender as restrições de janelas de tempo, a seguinte equação se mantém:

$$\sum_{i \in \mathcal{R}^\ell} \bar{q}_i + \max_{\{S^\ell | S^\ell \subseteq \mathcal{R}^\ell, |S^\ell| \leq \Gamma^{\mathcal{R}^\ell, \ell}\}} \left\{ \sum_{i \in S^\ell} \hat{q}_i \right\} \leq Q.$$

Algorithm 1: Heurística I1 robusta para o RVRPTWMD com demanda incerta

Entrada: Instância e parâmetros.

Saída: Solução.

- 1 Selecione algum critério para inicializar uma rota.
 - 2 $\ell = 1$.
 - 3 Para todo $u \in \mathcal{N}$, determine a melhor posição factível robusta desse cliente na rota parcial $\mathcal{R}^\ell = (i_0, i_1, i_2, \dots, i_m, i_{m+1})$, usando o seguinte critério.
 - (I) $c_1(i, u, j) = \min[c_1(i_{p-1}, u, i_p)]$, $p = 1, \dots, m$.
 - 4 Determine o melhor cliente u^* a ser inserido na rota parcial \mathcal{R}^ℓ conforme ao critério a seguir,
 - (II) $c_2(i, u^*, j) = \max[c_2(i, u, j)]$, em que u não foi inserido antes e a inserção é robusta factível (veja Definição 4.3.1).
 - 5 Se u^* existe, então $\mathcal{N} = \mathcal{N} \setminus u^*$, $\mathcal{N}^D = \ell$ e volte ao passo 3.
 - 6 Se $\mathcal{N} = \emptyset$, pare. Retorne solução.
 - 7 Se $\ell > \mathcal{L}$, então volte ao passo 1, caso contrário faça $\ell = \ell + 1$ e volte ao passo 3.
-

4.4 Resultados Computacionais

Nesta seção, apresentam-se os resultados dos experimentos computacionais realizados visando: 1) avaliar o impacto do vetor de *budget* de incerteza Γ nas decisões de roteamento e no desempenho da função objetivo; 2) determinar, por meio de uma simulação Monte-Carlo, o risco relacionado à probabilidade de violação da solução do modelo e sua respectiva comparação com o limitante teórico fornecido na literatura (determinado por meio da equação (4.30)); e 3) avaliar o desempenho da abordagem de solução proposta baseada na heurística RHI1 para resolver o RVRPTWMD com demanda incerta. O modelo matemático foi codificado na linguagem C++ e resolvido pelo *solver* de otimização CPLEX 12.6 usando a tecnologia ILOG do CONCERT. A RHI1 também foi implementada na linguagem C++. Um computador com um processador Intel(R) Core(TM) i7-2600 3.4 GHz e 16 GB de RAM sob a plataforma Linux foi usado para realizar os experimentos computacionais.

4.4.1 Descrição dos dados

Para a realização dos experimentos computacionais, usaram-se exemplares gerados das bem conhecidas instâncias de [Solomon](#) das classes C1 e R1. As instâncias na classe R1 possuem um horizonte de planejamento curto, o que permite apenas poucos clientes por rota. No entanto, as instâncias na classe C1 podem cobrir um número maior de clientes por rota, pois seus horizontes de planejamento são mais longos do que os das instâncias da classe R1. Os clientes das instâncias R1 estão espalhados aleatoriamente em uma área quadrática com dimensões 100×100 , enquanto os clientes das instâncias da classe C1 estão agrupados. Devido à dificuldade em resolver instâncias de grande porte para o RVRPTWMD com demanda incerta, reportam-se apenas os resultados para os primeiros $n = 25$ clientes (n representa o número de clientes). Ao resolver instâncias com $n = 50$ e $n = 100$, os tempos de execução requeridos

pelo solver CPLEX 12.6 para determinar soluções factíveis robustas do problema superaram os 36000 segundos. Para avaliar melhor o potencial da metodologia da RO estática, também reduziu-se a capacidade dos veículos para as instâncias das classes C1 e R1. Os valores da capacidade, Q , foram 80 para a classe C1 e 50 para a R1. Por isso, nesta tese, as classes usadas nos experimentos computacionais são referenciadas como C1.n25.Q80 e R1.n25.Q50. Os valores dos parâmetros $\bar{q}_i, \bar{t}_{ij}, d_{ij}, w_i^a$ e w_i^b correspondem aos n -primeiros dados das classes C1 e R1 das instâncias de Solomon, exceto para o tempo de serviço, o qual foi determinado como em Pureza et al. (2012):

$$\bar{s}_i^\ell = \frac{\min\{\bar{q}_i \vartheta, \mathcal{B} - \max\{w_i^a, \bar{t}_{0i}\} - \bar{t}_{i,n+1}\}}{\ell}$$

em que $\mathcal{B} = w_{n+1}^b$ e $\vartheta = 2$ representam a duração da rota e a taxa de serviço, respectivamente. Os custos unitários por rota gerada, por veículo usado e por distância percorrida foram de $p_1 = 1, p_2 = 0.1$ e $p_3 = 0.0001$, respectivamente, como em Pureza et al. (2012). Os números de veículos e entregadores disponíveis no depósito foram $|\mathcal{K}| = \mathcal{K} = 15$ e $\mathcal{D} = 20$, respectivamente. Reportam-se também experimentos com um número ilimitado de veículos e entregadores, por exemplo, com $|\mathcal{K}| = \mathcal{K} = 25$ (ao menos um veículo por cliente) e $\mathcal{D} = 75$ (três entregadores por veículo) de modo a comparar o desempenho da abordagem de solução proposta em ambos os casos limitado e ilimitado. Em relação aos dados do modelo robusto, o desvio \hat{q}_i , para todo $i \in \mathcal{N}$, corresponde a uma porcentagem δ (15%, 20% and 30%) da demanda nominal \bar{q}_i , isto é, $\hat{q}_i = \delta \bar{q}_i / 100$. Nesta tese, essa porcentagem δ é chamada de nível de incerteza da demanda. Por simplicidade, atribuiu-se o mesmo valor para todas as componentes do vetor de *budget* de incerteza Γ , isto é, $\Gamma^{1,1} = \Gamma^{2,1} = \dots = \Gamma^{\mathcal{K},1} = \dots = \Gamma^{1,\mathcal{L}} = \Gamma^{2,\mathcal{L}} = \dots = \Gamma^{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \Gamma$.

A Tabela 2 apresenta o número total de problemas e os valores dos parâmetros em cada classe usados para a realização dos experimentos computacionais. As colunas “# problemas”, “ Γ -valores” e “ δ -valores” representam o número de problemas por classe e os valores dos parâmetros Γ e δ usados para cada classe, respectivamente. Essa tabela também especifica os valores dos parâmetros \mathcal{K} e \mathcal{D} para ambos os casos limitado e ilimitado. Um total de 378 exemplares foram usados para a análise dos resultados computacionais obtidos a partir da combinação dos valores nas colunas “# problemas”, “ Γ -valores” e “ δ -valores” para ambos os casos limitado e ilimitado. A RHI1, descrita na Seção 4.3, foi inicializada seguindo o critério do cliente mais distante. De acordo com experimentos computacionais preliminares, esse critério obteve melhores resultados do que o critério do cliente mais urgente. Também, de acordo com experimentos computacionais preliminares, os melhores valores para os parâmetros da RHI1 foram $\phi_1 = 0, 6, \phi_2 = 0, 4, \mu = 1$ e $\lambda = 1$.

Tabela 2 – Valores dos parâmetros usados nos experimentos computacionais.

Classes	# problemas	n	Q	Γ -valores	δ -valores	Caso limitado		Caso ilimitado	
						\mathcal{K}	\mathcal{D}	\mathcal{K}	\mathcal{D}
R1	12	25	50	0, 2, 5	15, 20, 30	15	20	25	50
C1	9	25	80	0, 2, 5	15, 20, 30	15	20	25	50

4.4.2 Impacto do parâmetro Γ

O principal objetivo desta seção é avaliar o impacto do parâmetro Γ nas decisões de roteamento. Para esse fim, selecionou-se a instância R101.n25.Q50 com $\delta = 15\%$. No entanto, um comportamento

similar é observado nas outras instâncias, tanto nos casos limitado e ilimitado. Na maioria das instâncias usadas na realização da experimentação computacional com $\Gamma > 0$, o *solver* CPLEX não provou otimalidade dentro de um tempo de execução de 3600 segundos. Por essa razão, nos resultados computacionais reportados nessa subseção, permitiu-se que o *solver* CPLEX rodasse até um tempo máximo de 36000 segundos para resolver a instância sob análise com $\Gamma > 0$ usando o modelo (4.24)-(4.29).

A Figura 2 mostra a solução ótima obtida da instância R101.n25.Q50 para valores do parâmetro Γ iguais a 0, 1, 2 e 5 e para um nível de incerteza $\delta = 15\%$. Para cada valor de Γ , a figura mostra o valor da função objetivo (z^*), número de rotas geradas (NR), número total de entregadores usados (ND), distancia total percorrida ($dist$), ordem de visita dos clientes pertencentes em cada rota e o número de entregadores por rota. Note que para $\Gamma = 0$, existem 8 rotas distintas, as quais representam uma solução totalmente desprotegida contra as incertezas, pois esta corresponde à solução do problema nominal. O número total de entregadores usados foi de 15, e a distância total percorrida para essa solução foi de 653, 028. Quando $\Gamma = 1$, permite-se que a realização da demanda de um cliente pertencente à rota assuma seu respectivo valor de pior caso. Quando isso é incorporado na formulação (4.24)-(4.29), existe pelo menos uma rota entre as obtidas no problema nominal (problema com $\Gamma = 0$) em que a demanda total servida excede a capacidade do veículo. Isso leva o modelo a determinar novas rotas que garantam factibilidade na capacidade do veículo. Por essa razão, algumas rotas da solução com $\Gamma = 1$ variaram com respeito às rotas da solução determinística, aumentando a distância total percorrida para 661, 604, o que representa um aumento no valor ótimo da função objetivo de aproximadamente de 1, 3%. Note que o número de rotas geradas e de entregadores usados se manteve em relação à solução do problema nominal. Nesse caso, basta realocar os clientes que causam as infactibilidades entre algumas das rotas do problema nominal e, simplesmente, incorrer em custos relacionados à distância total percorrida, o que representa a alternativa mais barata. Por isso, obteve-se, neste problema, o menor aumento na função objetivo em comparação ao objetivo do problema nominal, aproximadamente 0, 009% (correspondente a um aumento de 0% no custo dos veículos, 0% no custo dos entregadores e 1,3% no custo da viagem).

Para $\Gamma = 2$, permite-se que a realização da demanda de dois clientes por rota assumam o valor de pior caso. Nesse caso, o número de rotas se mantém em relação à solução do problema com $\Gamma = 1$. No entanto, para garantir factibilidade na solução, é necessário usar um entregador adicional, passando de 15 a 16 entregadores. Isso porque não é possível determinar roteiros usando 15 entregadores no total, tal que o atendimento de todos os clientes for iniciado dentro das janelas de tempo. Então, nesta solução, além de incorrer em custos adicionais associados à distância total percorrida, também se incorre no custo relacionado ao entregador adicional usado. Isso acarreta um aumento no valor da função objetivo em aproximadamente 1, 1% (correspondente a um aumento de 0% no custo dos veículos, 6,7% no custo dos entregadores e 5,2% no custo da viagem) em relação ao problema nominal. Note que as rotas 0-5-18-6-26, 0-7-8-13-26, 0-11-19-10-26, 0-12-9-20-26 e 0-14-16-17-26 do problema nominal não variaram. Isso porque elas têm folga suficiente para absorver a carga adicional de até dois clientes com os piores desvios.

Finalmente, para $\Gamma = 5$, isto é, equivalente ao método de Soyster (as demandas de todos os clientes da rota assumem o valor de pior caso), pode ser visto que as rotas variaram, uma vez que ao menos uma rota das obtidas com $\Gamma = 2$ não pode absorver a carga adicional dos próximos três clientes, tendo os próximos três maiores desvios. Note na nova solução que houve um aumento no número de rotas geradas, passando de 8 a 9. Por essa razão, obteve-se, nesta solução, o maior aumento na função objetivo, em torno de 8, 5% (correspondente a aumentos de 12,5% no custo dos veículos e 6,7% no custo

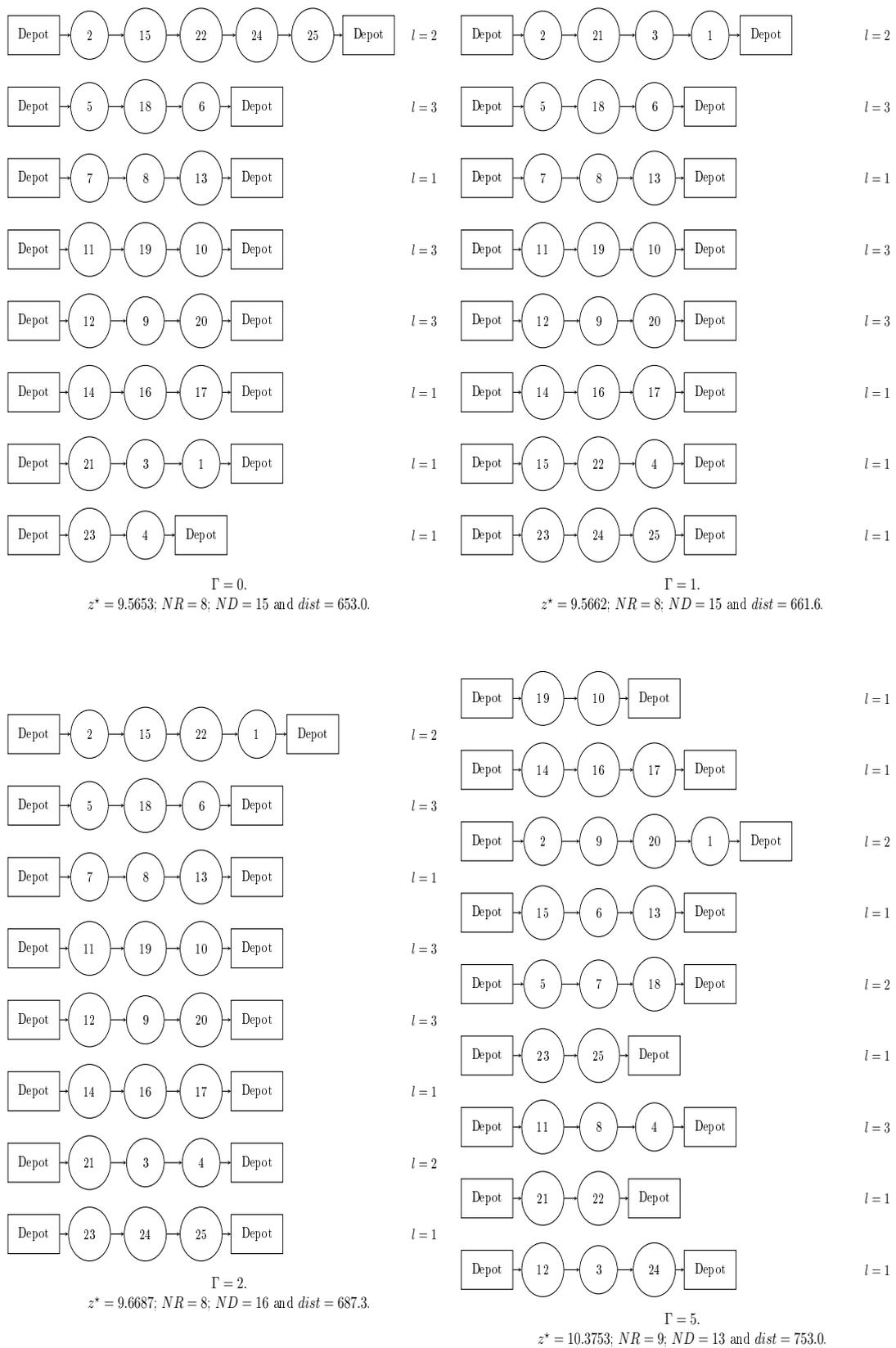


Figura 2 – Impacto de Γ nas rotas ótimas obtidas para a instância R101 na classe R1.n25.Q50 com $\delta = 15\%$, $\mathcal{K} = 15$ e $\mathcal{D} = 20$.

da viagem e uma redução de 13,3% no custo de entregadores), quando comparado à solução ótima do problema determinístico. Neste caso, realocando os clientes entre as rotas geradas em $\Gamma = 2$, nem mesmo atribuindo o número máximo de entregadores por rota, garante-se factibilidade nas restrições relacionadas ao atendimento dos clientes dentro das janelas de tempo. Por essa razão, uma rota adicional tem que ser gerada a fim de evitar infactibilidade. Portanto, pode-se observar como a metodologia de RO consegue redesenhar as decisões de roteamento conforme o grau de incerteza no problema aumenta.

4.4.3 Análise de risco via simulação Monte-Carlo

O risco é definido nesta tese como a probabilidade da solução encontrada pelo modelo robusto ser infactível na prática. Essa probabilidade foi estimada via simulação Monte-Carlo, bem como também usando o limitante teórico da teoria de RO em (4.30). Duas simulações foram realizadas; uma, no semi-intervalo $[\bar{q}_i, \bar{q}_i + \hat{q}_i]$; e outra, no intervalo $[\bar{q}_i - \hat{q}_i, \bar{q}_i + \hat{q}_i]$. Para realizar a simulação, 10000 amostras diferentes e uniformemente distribuídas foram geradas a partir do intervalo correspondente. Em seguida, verificou-se se ao menos uma realização da demanda de clientes de cada uma das 10000 amostras geradas violava as restrições de capacidade. Após inspecionar todas as amostras da simulação, contabilizou-se o número de amostras que violaram a capacidade dos veículos, o qual era dividido pelo o número de total de amostras, 10000, para obter a estimativa do risco.

A Tabela 3 ilustra, para diferentes valores do parâmetro Γ e do nível de incerteza da demanda $\delta\%$, o valor ótimo do objetivo (z^*), o preço da robustez ($PR\%$), a proporção de amostras geradas com respeito ao semi-intervalo (abrev. em Inglês HI - *Half-Interval*) e intervalo todo (abrev. em Inglês FI - *Full-Interval*), respectivamente, que violaram as restrições de capacidade dos veículos e o limitante teórico do risco dado em Bertsimas e Sim (2004) e calculado usando a equação (4.30), da instância C101 da classe C1.n25.Q200 com $\mathcal{K} = 15$ e $\mathcal{D} = 20$. O preço da robustez foi determinado como $PR\% = (z_{rob}^* - z_{det}^*)/z_{det}^* \times 100$, em que z_{rob}^* e z_{det}^* representam o valor ótimo robusto e nominal, respectivamente. O preço da robustez mede o aumento relativo do valor ótimo robusto em relação ao valor ótimo nominal ou determinístico. A capacidade do veículo para a instância selecionada para análise corresponde ao seu valor original proposto por Solomon (1987), isto é, $Q = 200$. Isso ocorre porque, dessa forma, o método de Soyster não é alcançado com um valor relativamente pequeno do *budget* de incerteza e, portanto, facilita a visualização do *trade-off* entre custo e risco. No entanto, um comportamento similar é observado nas instâncias restantes consideradas neste capítulo.

Como era de se esperar, independente do nível de incerteza da demanda, δ , os valores da probabilidade de violação são menores quando a simulação Monte-Carlo é realizada em todo o intervalo, do que apenas no semi-intervalo. Note que o limitante teórico satisfaz os valores das probabilidades obtidas na simulação realizada no intervalo, e que tal limitante não é suficientemente apertado. Ainda, é possível observar, para as duas simulações, a existência do *trade-off* entre o valor ótimo do custo e o risco, conforme o parâmetro Γ aumenta. Independente do nível de incerteza na demanda, δ , em $\Gamma = 0$, tem-se a solução do problema nominal, a qual representa uma solução totalmente desprotegida contra as incertezas para os valores reportados na simulação em HI. Isso pode ser visto uma vez que o risco alcança seu máximo valor. Por outro lado, quando $\Gamma = 10$, o risco da solução encontrada pela formulação (4.24)-(4.29) é zero. No entanto, o preço da robustez atinge seu máximo valor, 0, 132%, 0, 135% e 0, 237% para $\delta\%$ igual a 15, 20, e 30, respectivamente. A partir desses resultados, percebe-se que o parâmetro Γ define o

Tabela 3 – Resultados da simulação Monte-Carlo (instância C101 da classe C1.n25.Q200 com $|\mathcal{K}| = 15$ e $\mathcal{D} = 20$).

Γ	$\delta = 15\%$				$\delta = 20\%$				$\delta = 30\%$				
	z_*	$PR(\%)$	$HI(\%)$	$FI(\%)$	z_*	$PR\%$	$HI(\%)$	$FI(\%)$	z_*	$PR\%$	$HI(\%)$	$FI(\%)$	$TB(\%)$
0	3,3192	0,000	90,2	6,3	3,3192	0,000	100,0	0,2	3,3192	0,000	99,9	22,8	100,0
1	3,3192	0,000	91,0	6,1	3,3192	0,000	99,7	0,1	3,3227	0,106	93,0	4,8	66,4
2	3,3227	0,106	1,3	0,0	3,3227	0,106	69,0	0,0	3,3229	0,113	89,8	3,0	52,3
3	3,3227	0,106	1,2	0,0	3,3227	0,106	72,1	0,0	3,3235	0,132	22,9	0,4	38,1
4	3,3227	0,106	1,2	0,0	3,3229	0,113	3,8	0,0	3,3237	0,135	0,2	0,0	23,9
5	3,3228	0,109	1,2	0,0	3,3236	0,132	0,0	0,0	3,3239	0,138	0,1	0,0	15,3
6	3,3230	0,113	0,7	0,0	3,3236	0,132	0,0	0,0	3,3234	0,143	0,0	0,0	6,7
7	3,3234	0,127	0,5	0,0	3,3237	0,135	0,0	0,0	3,3234	0,143	0,0	0,0	0,8
8	3,3236	0,132	0,3	0,0	3,3237	0,135	0,0	0,0	3,3234	0,143	0,0	0,0	0,0
9	3,3236	0,132	0,0	0,0	3,3237	0,135	0,0	0,0	3,3271	0,237	0,0	0,0	0,0
10	3,3236	0,132	0,0	0,0	3,3237	0,135	0,0	0,0	3,3271	0,237	0,0	0,0	0,0

nível de aversão ao risco do decisor. Quando $\Gamma = 0$, diz-se que o decisor é neutro ou indiferente ao risco, ao passo que para $\Gamma > 1$, o decisor é avesso ao risco. Então, de acordo com a preferência do decisor, a metodologia de otimização robusta é capaz de proporcionar soluções que sejam piores em relação ao valor da função objetivo, porém que, em geral, se mantenham factíveis na prática. Observa-se também que não necessariamente deve-se atribuir um valor grande a Γ para ter uma solução com baixo nível de risco, basta atribuir um valor apropriado tal que a probabilidade de violação seja aceitável na prática.

4.4.4 Desempenho da abordagem de solução

Como mencionado anteriormente, o modelo robusto foi inicialmente testado para as classes C1.n25.Q80 e R1.n25.Q50 geradas a partir das instâncias de Solomon em ambos os casos, limitado ($\mathcal{K} = 15$ e $\mathcal{D} = 20$) e ilimitado ($\mathcal{K} = 25$ e $\mathcal{D} = 75$). Com um tempo limite de 3600 segundos, o solver CPLEX foi incapaz de resolver até a otimalidade o modelo robusto (4.24)-(4.29) para as instâncias consideradas nesse capítulo, exceto para poucas delas. Para algumas instâncias, nenhuma solução factível foi encontrada dentro desse tempo limite. Isso revela a dificuldade para resolver o problema robusto e justifica a proposição de novos métodos para resolvê-lo efetivamente. Nesse capítulo, propõe-se uma abordagem heurística para determinar soluções robustas factíveis de boa qualidade do modelo (4.24)-(4.29) (veja Seção 4.3) a serem usadas como ponto de partida no solver CPLEX.

4.4.4.1 Caso limitado

Apresenta-se aqui, em mais detalhes, o desempenho da abordagem de solução proposta quando comparada a RHI1. As Tabelas 4 e 5 apresentam os resultados para as instâncias das classes C1.n25.Q80 e R1.n25.Q50, respectivamente, no caso limitado em termos de: 1) valor da função objetivo (z), 2) número de rotas (NR), 3) número de entregadores (ND), 4) distância total percorrida ($dist$), e 5) gap com respeito à melhor solução estimada pelo solver CPLEX após 3600 segundos. Esses resultados correspondem a um nível de incerteza da demanda de $\delta = 20\%$. Note que essas tabelas apresentam os resultados pela abordagem heurística RHI1 (colunas referentes a RHI1) e pela combinação da RHI1 com o solver CPLEX (colunas referentes a RHI1 com CPLEX). A combinação da abordagem heurística com o solver CPLEX é aqui chamada de estratégia combinada.

Tabela 4 – Resultados da heurística I1 robusta e estratégia combinada para a classe C1.n25.Q80 com $\delta = 20\%$, $\mathcal{K} = 15$ e $\mathcal{D} = 20$.

Instância Γ	RHI1					RHI1 com CPLEX				
	z	NR	ND	$dist$	$GAP(\%)$	z	NR	ND	$dist$	$GAP(\%)$
C101	0 6,6465	6	6	465,2	0,17	6,6355	6	6	355,3	0,00
	2 7,7431	7	7	430,9	11,69	7,7419	7	7	419,1	11,67
	5 8,8520	8	8	520,4	23,04	8,8466	8	8	466,4	22,96
C102	0 6,6450	6	6	450,3	0,16	6,6355	6	6	354,6	0,01
	2 7,7485	7	7	485,3	14,30	7,7432	7	7	432,2	14,22
	5 8,8563	8	8	563,4	25,28	8,8469	8	8	468,9	25,14
C103	0 6,6440	6	6	439,9	0,25	6,6359	6	6	359,1	0,13
	2 7,7541	7	7	541,1	15,41	7,7472	7	7	471,6	15,31
	5 8,8565	8	8	564,9	25,23	8,8473	8	8	473,0	25,10
C104	0 6,6446	6	6	445,8	0,27	6,6353	6	6	353,4	0,13
	2 7,7476	7	7	475,5	15,21	7,7464	7	7	464,2	15,20
	5 8,8557	8	8	557,0	24,75	8,8469	8	8	469,1	24,62
C105	0 6,6467	6	6	467,1	0,17	6,6355	6	6	355,3	0,00
	2 7,7431	7	7	430,9	10,92	7,7411	7	7	411,1	10,89
	5 8,8520	8	8	520,4	24,37	8,8462	8	8	461,7	24,29
C106	0 6,6471	6	6	471,2	0,17	6,6355	6	6	355,3	0,00
	2 7,7431	7	7	430,9	10,89	7,7418	7	7	418,3	10,87
	5 8,8520	8	8	520,4	23,43	8,8466	8	8	465,5	23,35
C107	0 6,6456	6	6	455,5	0,15	6,6355	6	6	354,9	0,00
	2 7,7437	7	7	437,4	12,82	7,7416	7	7	415,8	12,79
	5 8,8527	8	8	527,2	24,25	8,8466	8	8	466,1	24,16
C108	0 6,6437	6	6	436,5	0,22	6,6355	6	6	354,9	0,10
	2 7,7431	7	7	430,9	13,49	7,7414	7	7	413,9	13,47
	5 8,8492	8	8	492,1	24,38	8,8459	8	8	459,1	24,33
C109	0 6,6425	6	6	425,2	0,24	6,6354	6	6	354,1	0,13
	2 7,7436	7	7	435,7	14,80	7,7413	7	7	413,0	14,76
	5 8,8492	8	8	492,1	23,92	8,8476	8	8	476,1	23,90
Média	7,7478				12,59	7,7417				12,50

Tabela 5 – Resultados da heurística I1 robusta e estratégia combinada para a classe R1.n25.Q50 com $\delta = 20\%$, $\mathcal{K} = 15$ e $\mathcal{D} = 20$.

Instância Γ	RHI1					RHI1 com CPLEX				
	z	NR	ND	$dist$	$GAP(\%)$	z	NR	ND	$dist$	$GAP(\%)$
R101	0 11,5761	10	15	761,2	21,02	9,5653	8	15	653,0	0,00
	2 11,3792	10	13	792,4	18,24	10,4750	9	14	750,1	8,84
	5 11,3793	10	13	793,4	17,76	10,5728	9	15	727,9	9,41
R102	0 9,27306	8	12	730,6	19,44	9,0637	8	10	636,7	16,75

	2	10,3748	9	13	748,0	33,21	9,9692	9	9	691,9	28,00
	5	10,1783	9	11	783,3	22,72	10,0697	9	10	697,3	21,41
	0	10,1753	9	11	753,3	31,18	7,7579	7	7	579,0	0,02
R103	2	10,1782	9	11	782,4	30,66	9,9639	9	9	638,7	27,91
	5	11,1785	10	11	785,2	36,68	9,9657	9	9	656,6	21,85
	0	7,97006	7	9	700,6	2,79	7,7534	7	7	534,2	0,00
R104	2	10,0783	9	10	783,0	30,04	9,9633	9	9	633,2	28,56
	5	10,0733	9	10	733,4	22,07	10,0730	9	10	730,5	22,07
	0	9,47793	8	14	779,3	18,74	8,0648	7	10	648,0	1,03
R105	2	10,3826	9	13	825,5	31,62	10,1791	9	11	791,5	29,04
	5	11,1859	10	11	859,5	32,54	10,0763	9	10	763,4	19,40
	0	9,07468	8	10	746,8	16,98	7,7590	7	7	590,2	0,02
R106	2	10,2824	9	12	824,5	32,57	9,9667	9	9	666,5	28,50
	5	11,2747	10	12	747,1	38,15	10,1659	9	11	658,6	24,56
	0	8,17159	7	11	715,9	5,41	7,7552	7	7	552,4	0,04
R107	2	11,0766	10	10	765,8	42,66	9,9650	9	9	650,1	28,34
	5	11,172	10	11	720,0	35,28	9,9654	9	9	653,7	20,67
	0	7,96911	7	9	691,1	2,79	7,7529	7	7	528,5	0,00
R108	2	10,0782	9	10	782,4	28,08	9,9675	9	9	675,2	26,68
	5	10,0749	9	10	748,5	20,05	10,0650	9	10	649,6	19,93
	0	9,17435	8	11	743,5	18,26	8,8595	8	8	594,7	14,20
R109	2	10,2792	9	12	791,8	29,75	9,9653	9	9	652,6	25,79
	5	10,385	9	13	850,3	25,93	9,9694	9	9	694,2	20,89
	0	8,37306	7	13	730,6	8,00	7,8608	7	8	607,7	1,39
R110	2	10,0772	9	10	772,0	26,68	9,9638	9	9	638,0	25,25
	5	11,1713	10	11	713,2	36,57	9,9650	9	9	650,2	21,82
	0	8,17177	7	11	717,7	5,39	7,7541	7	7	540,9	0,00
R111	2	11,076	10	10	760,3	38,04	9,9633	9	9	632,5	24,17
	5	10,1749	9	11	749,0	21,82	9,9638	9	9	637,8	19,30
	0	8,96295	8	9	629,5	15,65	7,7524	7	7	524,1	0,03
R112	2	10,0759	9	10	759,4	30,06	8,8683	8	8	682,9	14,47
	5	11,1723	10	11	723,4	35,31	9,9671	9	9	670,6	20,72
Média		10,0869			24,50		9,3813			15,86	

Na Tabela 4, pode-se observar que a estratégia combinada foi capaz de melhorar a solução das 27 instâncias na classe C1.n25.Q80. Note-se que essas melhorias estão associadas à diminuição da distância total percorrida, já que, em todas essas instâncias, o número de rotas e de entregadores não variaram. A média dos ganhos em relação à diferença dos *gaps* dados pelo estratégia combinada e a RHI1 foi aproximadamente 0,1%, o qual pode ser considerado pouco significativo, uma vez que a estratégia combinada foi rodada durante 3600 segundos e a RHI1 encontrou a solução em menos de 1 segundo,

em média. Em relação às instâncias da classe R1.n25.Q50, a estratégia combinada melhorou 100% das instâncias. Aqui, teve-se um ganho mais significativo pela estratégia combinada quando comparada à abordagem RHI1, pois a média dos ganhos em termos da diferença dos *gap* das instâncias onde houve melhoras foi de 8,6%. Percebe-se que nas instâncias aonde houve ganho, além de diminuir a distância total percorrida, em algumas instâncias também houve redução no número de rotas geradas e de entregadores usados. Devido à classificação lexicográfica dos custos na função objetivo do modelo, qualquer redução no número de rotas e entregadores pode reduzir significativamente o custo total.

4.4.4.2 Comparação dos casos limitado e ilimitado

As Tabelas 6, 7, 8 e 9 apresentam os resultados médios tanto para o caso limitado ($\mathcal{K} = 15$ e $\mathcal{D} = 20$) como para o ilimitado ($\mathcal{K} = 25$ e $\mathcal{D} = 75$), respectivamente. Para cada nível de incerteza da demanda δ e para cada estratégia de solução (CPLEX, RHI1, e RHI1 com CPLEX), as tabelas mostram o valor da função objetivo (z), o tempo de execução em segundos (t) e o *gap* de otimalidade estimado como a diferença relativa entre o valor da função objetivo e a melhor solução encontrada pelo CPLEX dentro de 3600 segundos. Os resultados nessas tabelas correspondem a valores do *budget* de incerteza Γ iguais a 0, 2 e 5. Esses resultados corroboram que, independente do valor de δ e para ambos os casos limitado e ilimitado, a estratégia combinada não consegue melhorar significativamente o valor da função objetivo nas soluções encontradas pela RHI1 nas instâncias da classe C1.n25.Q80. Para a maioria das instâncias, a abordagem heurística RHI1 consegue determinar o número de rotas ótimo. A capacidade das instâncias C1.n25.Q80 leva a cobrir poucos clientes por rota. Além disso, as instâncias desta classe apresentam um horizonte de planejamento longo, o que indica que as esperas contribuem significativamente para a duração total da rota. Nesses casos, para melhorar uma solução dada pela RHI1, basta que o CPLEX realoque clientes entre as rotas sem a necessidade de usar mais de um entregador para respeitar as janelas de tempo. Por essa razão, o ganho nas instâncias da classe C1.n25.Q80 é pouco significativo, pois apenas está diminuindo a distância total percorrida e pela classificação lexicográfica do objetivo, qualquer melhoria na distância não impacta significativamente no valor do objetivo.

Tabela 6 – Resultados para a classe C1.n25.Q80 com $\mathcal{K} = 15$ e $\mathcal{D} = 20$

Estratégia	$\delta = 15\%$			$\delta = 20\%$			$\delta = 30\%$		
	z	t (s)	<i>gap</i> (%)	z	t (s)	<i>gap</i> (%)	z	t (s)	<i>gap</i> (%)
CPLEX	7,7435	3112	12,65	7,7436	3221	12,53	8,1118	3113	13,22
RHI1	7,7478	< 1	12,25	7,7478	< 1	12,59	8,1168	< 1	13,30
RHI1 com CPLEX	7,7415	2944	12,21	7,7417	2930	12,50	8,1110	2950	13,20

Tabela 7 – Resultados para a classe R1.n25.Q50 com $\mathcal{K} = 15$ e $\mathcal{D} = 20$

Estratégia	$\delta = 15\%$			$\delta = 20\%$			$\delta = 30\%$		
	z	t (s)	<i>gap</i> (%)	z	t (s)	<i>gap</i> (%)	z	t (s)	<i>gap</i> (%)
CPLEX	9,5726	3246	20,05	9,6925	3311	19,75	10,2610	3376	22,63
RHI1	9,7632	< 1	22,14	10,0869	< 1	24,50	10,5970	< 1	26,57
RHI1 com CPLEX	9,1677	3084	14,85	9,3813	3110	15,86	10,0049	3313	19,58

Em relação à classe R1.n25.Q50, independente do nível de incerteza da demanda (δ) e para ambos os casos limitado e ilimitado, a abordagem RHI1 supera o *solver* CPLEX em tempo computacional. Contudo, com respeito à qualidade da solução, a abordagem RHI1 supera o *solver* CPLEX apenas nas instâncias com $\delta = 15\%$ do caso ilimitado. Embora o *solver* CPLEX tenha obtido melhores resultados em média do que a abordagem RHI1 para as instâncias com $\delta = 30\%$, $\mathcal{K} = 25$ e $\mathcal{D} = 75$, o *gap* médio da

Tabela 8 – Resultados para a classe C1.n25.Q80 com $\mathcal{K} = 25$ e $\mathcal{D} = 75$

Estratégia	$\delta = 15\%$			$\delta = 20\%$			$\delta = 30\%$		
	z	t (s)	gap (%)	z	t (s)	gap (%)	z	t (s)	gap (%)
CPLEX	7,7507	3503	14,80	7,7564	3396	14,96	8,1535	3502	19,19
RHI1	7,7479	< 1	14,72	7,7478	< 1	14,83	8,1167	< 1	18,67
RHI1 com CPLEX	7,7434	3600	14,62	7,7452	3440	14,78	8,1137	3603	18,63

Tabela 9 – Resultados para a classe R1.n25.Q50 com $\mathcal{K} = 25$ e $\mathcal{D} = 75$

Estratégia	$\delta = 15\%$			$\delta = 20\%$			$\delta = 30\%$		
	z	t (s)	gap (%)	z	t (s)	gap (%)	z	t (s)	gap (%)
CPLEX	9,7752	3499	36,22	9,9568	3502	25,82	10,4282	3496	33,45
RHI1	9,7632	< 1	24,09	10,0869	< 1	27,28	10,5970	< 1	31,80
RHI1 com CPLEX	9,4723	3506	20,61	9,6732	3503	22,17	10,2476	3504	27,58

abordagem RHI1 é menor. Isso porque o *solver* CPLEX foi incapaz de determinar, dentro de um limite de tempo de 3600 segundos, uma solução factível para algumas das instâncias. Para essas instâncias, atribuiu-se um *gap* de 100%, levando a um aumento no *gap* médio do *solver* CPLEX. Por outro lado, independente do valor de δ , ganhos mais significativos resultam para as instâncias dessa classe com a estratégia combinada, quando comparada à abordagem RHI1. Nessas instâncias, a abordagem RHI1 superestima o número de rotas e de entregadores na solução ótima. Assim, nas instâncias da classe R1.n25.Q50, o *solver* CPLEX diminuiu a distância total percorrida, bem como o número de rotas e entregadores, levando a um ganho mais significativo. Note que nas Tabelas 6, 7, 8 e 9, os *gaps* dos casos limitados são inferiores às dos casos ilimitados, indicando que o primeiro caso é mais fácil de resolver do que o segundo, conforme esperado, uma vez que o primeiro envolve um menor número de variáveis e restrições.

4.5 Considerações finais

Neste capítulo, estudou-se o VRPTWMD, uma variante do problema de roteamento de veículos que envolve a decisão adicional de designar entregadores às rotas. Incertezas na demanda de clientes foram incorporadas em um modelo de programação inteira-mista pela adoção de uma abordagem de RO estática. A formulação de programação inteira-mista é baseada na adição de variáveis de decisão que indicam a designação de clientes a rotas, além das variáveis de roteamento. À luz dos resultados obtidos, pode-se analisar como o parâmetro Γ , ao ser variado, impactou na geração das rotas, no custo e no risco. Assim, de acordo com a preferência do decisor, a abordagem de otimização robusta estática pode fornecer soluções que direcionem o *trade-off* entre custo e risco. Propôs-se uma abordagem heurística baseada na heurística I1 de Solomon para gerar soluções iniciais de boa qualidade para o *solver* CPLEX. Os resultados da estratégia combinada superou a qualidade das soluções encontradas pelo *solver* CPLEX, mas ainda ela não consegue provar a otimalidade das soluções para a maioria das instâncias consideradas neste capítulo. Por essa razão, um tópico interessante para pesquisa futura seria o desenvolvimento de métodos de solução exatos que explorem, de forma mais conveniente, a estrutura particular do RVRPTWMD, como por exemplo, um método baseado no algoritmo BPC, objeto do próximo capítulo.

O objetivo na abordagem da RO estática é determinar o melhor valor das variáveis de decisão do problema diante de todas as possíveis realizações dos parâmetros incertos pertencentes a um conjunto de incerteza. Por essa razão, muitos autores consideram essa abordagem demasiada conservadora (BEN-

TAL et al., 2004). Uma alternativa para evitar soluções muito conservadoras é aplicar as abordagens de otimização robusta e programação estocástica com paradigma de recurso (THIELE et al., 2009; BIRGE; LOUVEAUX, 2011; HANASUSANTO et al., 2015). Todavia, essas abordagens de tratamento de incertezas levam ao aumento da dimensionalidade do problema em termos do número variáveis e restrições. Portanto, métodos apropriados devem ser propostos e desenvolvidos, como por exemplo, BC, BPC, algoritmo de geração de restrições e colunas, entre outros (LAPORTE et al., 2002; ZENG; ZHAO, 2013; GAUVIN et al., 2014). Finalmente, outra importante perspectiva para pesquisa futura seria considerar também os tempos de viagem e serviço incertos no RVRPTWMD, o que também é objeto do próximo capítulo.

Capítulo 5

VRPTWMD ROBUSTO: FORMULAÇÃO DE FLUXO ROBUSTA E ALGORITMO *branch-price-and-cut*

O presente capítulo difere do imediatamente anterior pela consideração dos tempos de visita e viagens incertos, além da demanda dos clientes, e pelo uso da formulação de fluxo introduzida em [Pureza et al. \(2012\)](#) como ponto de partida para determinar uma formulação de fluxo robusta. Além disso, também explora uma formulação de particionamento de conjuntos para desenvolver um método exato BPC mais efetivo para resolver o RVRPTWMD do que os métodos BC dos *solvers* comerciais. O algoritmo BPC advém de: 1) usar a técnica de geração de colunas para resolver uma relaxação da formulação de particionamento de conjuntos (abrev. em Inglês SPF - *Set Partition Formulation*) para o RVRPTWMD; 2) aplicar um procedimento BB para atender o requerimento binário das variáveis de decisão da SPF e 3) adicionar desigualdades válidas ou planos de cortes para melhorar o limitante inferior de programação linear da SPF, para assim reduzir o número de nós da árvore de busca BB.

O material desse capítulo foi compilado num artigo científico e foi submetido para publicação numa revista especializada em pesquisa operacional.

5.1 Parâmetros incertos e conjuntos de incerteza

Neste estudo, além das incertezas da demanda dos clientes, as incertezas nos parâmetros relacionados aos tempos de viagem e serviço são também consideradas. Os parâmetros \tilde{q}_i , \tilde{t}_{ij} e \tilde{s}_i^ℓ são modelados como variáveis aleatórias limitadas e independentes cujos intervalos de variação correspondem a $[\bar{q}_i - \hat{q}_i, \bar{q}_i + \hat{q}_i]$, $[\bar{t}_{ij} - \hat{t}_{ij}, \bar{t}_{ij} + \hat{t}_{ij}]$ e $[\bar{s}_i^\ell - \hat{s}_i^\ell, \bar{s}_i^\ell + \hat{s}_i^\ell]$, respectivamente. Os parâmetros \hat{q}_i , \hat{t}_{ij} e \hat{s}_i^ℓ são os desvios máximos permitidos de seus correspondentes valores nominais. Associam-se a cada uma das variáveis aleatórias outras variáveis aleatórias ξ_i , ϕ_{ij} e ζ_i^ℓ (chamadas de variáveis aleatórias primitivas), assumindo valores entre -1 e 1. Por essa razão, as variáveis aleatórias originais podem ser escritas em termos das primitivas como: $\tilde{q}_i = \bar{q}_i + \hat{q}_i \xi_i$, $\tilde{t}_{ij} = \bar{t}_{ij} + \hat{t}_{ij} \phi_{ij}$ e $\tilde{s}_i^\ell = \bar{s}_i^\ell + \hat{s}_i^\ell \zeta_i^\ell$. Usa-se ξ , η e ζ para denotar vetores com componentes correspondendo às variáveis de incerteza primitivas ξ_i , η_{ij} e ζ_i , respectivamente.

Os conjuntos de incerteza correspondem aos conjuntos de incerteza *budgeted* ([BERTSIMAS; SIM, 2004](#); [BERTSIMAS et al., 2011](#)). Eles são construídos para as variáveis incertas primitivas e simplesmente restringem o número dessas variáveis que podem se desviar de seus valores nominais. Os conjuntos de incerteza *budgeted* para as variáveis incertas primitivas ξ_i , ϕ_{ij} e ζ_i^ℓ podem ser escritos da

seguinte forma:

$$\mathcal{U}^q = \left\{ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|} : 0 \leq \xi_i \leq 1, i \in \mathcal{V}; \sum_{i \in \mathcal{V}} \xi_i \leq \Gamma^q \right\}. \quad (5.1)$$

$$\mathcal{U}^{(t,s)} = \left\{ (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\zeta}) \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{A}|} \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|+\mathcal{L}} : 0 \leq \phi_{ij} \leq 1, \forall (i, j) \in \mathcal{A}; 0 \leq \zeta_i^\ell \leq 1, i \in \mathcal{V}, \right. \\ \left. \ell = 1, \dots, \mathcal{L}; \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \phi_{ij} + \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{i \in \mathcal{V}} \zeta_i^\ell \leq \Gamma^{(t,s)} \right\}. \quad (5.2)$$

Os conjuntos \mathcal{U}^q e $\mathcal{U}^{(t,s)}$ dependem, respectivamente, dos parâmetros Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$, que definem o *budget* de incerteza para os recursos de carga e tempo. Por simplicidade, considera-se que esses parâmetros são inteiros não-negativos. Quanto maior for o valor atribuído a Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$, maior é o número de parâmetros incertos representados nas componentes dos vetores $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\zeta}$ permitidos a variar e, portanto, maior é o conservadorismo da abordagem robusta. Dois casos precisam ser ressaltados aqui:

- 1): Quando os mínimos valores (iguais a 0) são atribuídos a ambos os parâmetros Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$: Nesse caso, obtém-se o problema nominal/determinístico em que as decisões são definidas otimamente sob a premissa de que a realização dos parâmetros incertos será exatamente seu valor nominal/esperado, levando a soluções com altos níveis de risco.
- 2): Quando os máximos valores são atribuídos a ambos os parâmetros Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$ (isto é, método de [Soyster](#)): Nesse caso, as decisões correspondem a resolver uma instância do problema na sua versão determinística, assumindo que os parâmetros incertos atingem seu valor de pior caso. Assim, obtém-se soluções totalmente conservadoras com níveis de risco nulos.

Note que, em ambos os casos, o RVRPTWMD resulta em uma instância desse mesmo problema, porém na sua versão determinística. No entanto, é pouco provável encontrar ambientes práticos onde esses dois casos mencionados ocorram. Por essa razão, deve-se atribuir valores adequados aos parâmetros Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$ de modo a obter soluções com custos piores do que o custo ótimo do problema nominal/determinístico, porém com níveis de risco mais aceitáveis. Uma vez que as variáveis aleatórias relacionadas aos tempos de viagem e serviço competem pelo mesmo recurso, tempo, optou-se por encapsular as realizações da suas correspondentes variáveis aleatórias primitivas em um único conjunto de incerteza *budgeted*, \mathcal{U}^t . Por essa razão, usa-se um único *budget* de incerteza ($\Gamma^{(t,s)}$) para controlar a robustez das rotas em relação ao consumo do recurso tempo.

5.2 Avaliando a factibilidade robusta

A seguir, analisam-se os conjuntos de incerteza (5.1) e (5.2). Seja \mathcal{R} o conjunto contendo as rotas, com seus respectivos modos de operação, em uma dada solução. Cada rota $r \in \mathcal{R}$, a qual visita $k + 1$ nós e opera no modo ℓ , é representada por meio do vetor $(v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1})$, com $v_1 = 0$ e $v_{k+1} = n + 1$. Os conjuntos (5.1) e (5.2) são usados para avaliar a factibilidade robusta das rotas em \mathcal{R} . Lembrando que uma rota r é robusta se todas as possíveis realizações das variáveis aleatórias primitivas ξ_i , ϕ_{ij} e ζ_i^ℓ nos conjuntos de incerteza (5.1) e (5.2) levam a realizações da demanda e dos tempos de

viagens e serviços que permaneçam factíveis em relação à capacidade dos veículos e às janelas de tempo dos clientes e do depósito. De acordo com os conceitos da abordagem de RO, robustez em relação às restrições de capacidade para uma dada rota r implica que a desigualdade (5.3) se mantenha. Usar (5.3) para avaliar a robustez das rotas em \mathcal{R} tem uma desvantagem, pois ela supõe uma inspeção para cada possível realização do vetor aleatório primitivo ξ dentro do conjunto (5.1), o que pode ser inviável devido ao número infinito de realizações que pode assumir esse vetor nesse conjunto.

$$\sum_{i=1}^{k+1} (\bar{q}_{v_i} + \hat{q}_{v_i} \xi_{v_i}) \leq Q, \forall \xi \in \mathcal{U}^q. \quad (5.3)$$

Uma forma alternativa para avaliar a robustez da rota r é determinando o cenário de pior-caso para o vetor aleatório ξ em \mathcal{U}^q , como pode ser visto na seguinte desigualdade:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \bar{q}_{v_i} + \max_{\xi \in \mathcal{U}^q} \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \hat{q}_{v_i} \xi_{v_i} \right\} \leq Q. \quad (5.4)$$

Para determinar os valores das variáveis aleatórias primitivas ξ_{v_i} , para $i = 1, \dots, k, k+1$, no pior-caso, é necessário resolver o problema de maximização interna em (5.4), o qual pode ser escrito como um problema de programação linear da seguinte maneira:

$$\max_{\xi \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \hat{q}_{v_i} \xi_{v_i} : \xi_{v_i} \leq 1, \forall i = 1, \dots, k, k+1; \sum_{i=1}^{k+1} \xi_{v_i} \leq \Gamma^q \right\}. \quad (5.5)$$

Para um dado valor do parâmetro Γ^q , por simplicidade inteiro, o problema de otimização (5.5) pode ser resolvido por inspeção, no qual $\min\{k+1, \Gamma^q\}$ variáveis ξ_{v_i} associadas aos $\min\{k+1, \Gamma^q\}$ maiores desvios \hat{q}_{v_i} assumem o valor 1 e as $\max\{0, (k+1) - \Gamma^q\}$ variáveis restantes assumem o valor 0. Dada a solução ξ^* do problema (5.5) e usando a equação $\tilde{q}_i = \bar{q}_i + \hat{q}_i \xi_i^*$, conclui-se que no cenário de pior-caso, os valores da demanda dos clientes na rota r ou assumem seu valor nominal ou seu valor de pior caso, isto é, o valor $\bar{q}_i + \hat{q}_i$. Essa estrutura particular do conjunto *budgeted* (5.1) pode ser bem aproveitada para avaliar a robustez da rota r de forma recursiva (LEE et al., 2012; AGRA et al., 2013; PESSOA et al., 2015; MUNARI et al., 2018). Definindo $u_{v_i \gamma}$ como a máxima carga no veículo saindo do cliente v_i , dado que a demanda de γ clientes, com $\gamma = 0, 1, \dots, \Gamma^q$, na rota parcial $r_{v_i} = (v_1, v_2, \dots, v_i)$ assumem o valor de pior-caso, as equações de recursividade para a carga podem ser escritas como:

$$u_{v_{i+1} \gamma} = \begin{cases} u_{v_i \gamma} + \bar{q}_{v_{i+1}}, & \text{Se } \gamma = 0. \\ \max\{u_{v_i \gamma} + \bar{q}_{v_{i+1}}, u_{v_i \gamma-1} + \bar{q}_{v_{i+1}} + \hat{q}_{v_{i+1}}\}, & \text{Caso contrário.} \end{cases} \quad (5.6)$$

em que $u_{v_1 \gamma} = 0$ para $\gamma = 0, 1, \dots, \Gamma^q$. Observe que para $\gamma = 0$, têm-se o consumo determinístico da carga do veículo saindo do cliente v_{i+1} . Caso contrário, a equação (5.6) avalia o valor que assume a demanda do cliente v_{i+1} no cenário de pior-caso.

Equações recursivas também podem ser construídas para quantificar o consumo do recurso tempo. No entanto, quatro casos devem ser considerados: 1) As esperas na locação v_{i+1} absorvem as duas possíveis realizações dos tempos de viagem e serviço; 2) Ambos os tempos de viagem e serviço assumem seus valores nominais; 3) Exatamente um dos dois parâmetros atinge seu valor de pior-caso; e 4) Ambos os tempos de viagem e serviço assumem seus respectivos valores de pior-caso. Do caso 1) se depreende

que não necessariamente os tempos de viagem e serviço com os maiores desvios aparecem no cenário de pior-caso, pois é possível que o tempo de espera os absorva (veja exemplo numérico em [Munari et al. \(2018\)](#)). Definindo $w_{v_i\gamma}$ como o máximo instante de tempo para iniciar o serviço na locação v_i por parte do veículo que o visita operando no modo ℓ , dado que os tempos de viagem ou serviço de γ arcos ou nós formados pela sequência de visitas dos clientes antes do cliente v_i atingem seus valores de pior-caso, as equações de recursividade para o tempo podem ser escritas como segue:

$$w_{v_{i+1}\gamma} = \begin{cases} \max\{w_{v_{i+1}}^a, w_{v_i\gamma} + \bar{s}_{v_i} + \bar{t}_{v_i v_{i+1}}\}, & \text{se } \gamma = 0. \\ \max \begin{cases} w_{v_{i+1}}^a, \\ w_{v_i\gamma} + \bar{s}_{v_i} + \bar{t}_{v_i v_{i+1}}, \\ w_{v_i\gamma-1} + \bar{s}_{v_i} + \hat{s}_{v_i} + \bar{t}_{v_i v_{i+1}}, \\ w_{v_i\gamma-1} + \bar{s}_{v_i} + \bar{t}_{v_i v_{i+1}} + \hat{t}_{v_i v_{i+1}} \end{cases} & \text{se } \gamma = 1. \\ \max \begin{cases} w_{v_{i+1}}^a, \\ w_{v_i\gamma} + \bar{s}_{v_i}^\ell + \bar{t}_{v_i v_{i+1}}, \\ w_{v_i\gamma-1} + \bar{s}_{v_i}^\ell + \hat{s}_{v_i}^\ell + \bar{t}_{v_i v_{i+1}}, \\ w_{v_i\gamma-1} + \bar{s}_{v_i}^\ell + \bar{t}_{v_i v_{i+1}} + \hat{t}_{v_i v_{i+1}}, \\ w_{v_i\gamma-2} + \bar{s}_{v_i}^\ell + \hat{s}_{v_i}^\ell + \bar{t}_{v_i v_{i+1}} + \hat{t}_{v_i v_{i+1}}, \end{cases} & \text{Caso contrário.} \end{cases} \quad (5.7)$$

em que $w_{v_1\gamma} = 0$ para $\gamma = 0, 1, \dots, \Gamma^{(t,s)}$. Novamente, para $\gamma = 0$, tem-se o consumo determinístico, porém dessa vez, do recurso tempo. Caso contrário, a expressão (5.7) avalia o valor que assume o tempo de serviço do cliente v_i e o tempo de viagem entre as locações dos clientes v_i e v_{i+1} no cenário de pior caso. Finalmente, para a rota r ser robusta, ela deve satisfazer $u_{v_{i+1}\gamma} \leq Q$ para todo $\gamma = 0, \dots, \Gamma^q$ e $i = 1, \dots, k$ e $w_{v_{i+1}\gamma} \leq w_{v_{i+1}}^b$ para todo $\gamma = 0, \dots, \Gamma^{(t,s)}$ e $i = 1, \dots, k + 1$. Note que a expressão (5.7) estende a expressão em [Munari et al. \(2018\)](#) para tempos incertos, por considerar os tempos de visita incertos de maneira separada dos tempos de viagens incertos. Essa consideração é importante para o RVRPTWMD, pois os tempos de visita são dependentes do modo das rotas, diferentemente do VRPTW robusto.

5.3 Formulação de fluxo robusta

Nesta subseção, incorpora-se a robustez na formulação de fluxo (2.1)-(2.11) sem precisar usar a técnica de dualidade bastante comum na literatura, e também utilizada no capítulo anterior. A formulação de fluxo robusta advêm de linearizar as equações de recursividade (5.6) e (5.7) para os recursos carga e tempo, respectivamente. Dessa forma, redefine-se apropriadamente as variáveis contínuas para a carga e tempo da formulação (2.1)-(2.11) como segue: *i*) $u_{i\gamma}^\ell$: variável contínua que define a carga máxima coletada/entregue pelo veículo que opera no modo ℓ ao sair do cliente i , dado que as demandas de γ clientes, incluindo a do cliente i , podem variar de seus valores nominais e *ii*) $w_{i\gamma}^\ell$: variável contínua que define o máximo tempo para iniciar o serviço no cliente i por parte do veículo que o visita operando no modo ℓ , dado que os tempos de viagem ou serviço de γ arcos ou nós formados pela sequência de visitas dos clientes antes do cliente i podem variar de seus valores nominais. Então, o modelo matemático que considera robustez na formulação de fluxo e que determina o conjunto de rotas de custo mínimo pode ser

escrito como segue:

minimizar

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(0,j) \in \mathcal{A}} (p_1 + \ell p_2) x_{0j}^{\ell} + p_3 \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} d_{ij} x_{ij}^{\ell}. \quad (5.8)$$

sujeito a:

$$\text{restrições: (2.2)-(2.4) e (2.9)-(2.11)}. \quad (5.9)$$

$$u_{j\gamma}^{\ell} \geq u_{i\gamma-1}^{\ell} + (\bar{q}_j + \hat{q}_j) x_{ij}^{\ell} - Q(1 - x_{ij}^{\ell}), \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}, \gamma = 1, \dots, \Gamma^q \quad (5.10)$$

$$u_{j\gamma}^{\ell} \geq u_{i\gamma}^{\ell} + \bar{q}_j x_{ij}^{\ell} - Q(1 - x_{ij}^{\ell}), \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}, \gamma = 0, \dots, \Gamma^q \quad (5.11)$$

$$\bar{q}_i \leq u_{i\gamma}^{\ell} \leq Q, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}, \gamma = 0, \dots, \Gamma^q \quad (5.12)$$

$$w_{j\gamma}^{\ell} \geq w_{i\gamma}^{\ell} + (\bar{s}_i + \bar{t}_{ij}) x_{ij}^{\ell} - \mathcal{M}_{ij}^{\ell} (1 - x_{ij}^{\ell}), \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}, \gamma = 0, \dots, \Gamma^{(t,s)} \quad (5.13)$$

$$w_{j\gamma}^{\ell} \geq w_{i\gamma-1}^{\ell} + (\bar{s}_i + \hat{s}_i + \bar{t}_{ij}) x_{ij}^{\ell} - \mathcal{M}_{ij}^{\ell} (1 - x_{ij}^{\ell}), \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}, \gamma = 1, \dots, \Gamma^{(t,s)} \quad (5.14)$$

$$w_{j\gamma}^{\ell} \geq w_{i\gamma-1}^{\ell} + (\bar{s}_i + \bar{t}_{ij} + \hat{t}_{ij}) x_{ij}^{\ell} - \mathcal{M}_{ij}^{\ell} (1 - x_{ij}^{\ell}), \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}, \gamma = 1, \dots, \Gamma^{(t,s)} \quad (5.15)$$

$$w_{j\gamma}^{\ell} \geq w_{i\gamma-2}^{\ell} + (\bar{s}_i + \hat{s}_i + \bar{t}_{ij} + \hat{t}_{ij}) x_{ij}^{\ell} - \mathcal{M}_{ij}^{\ell} (1 - x_{ij}^{\ell}), \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}, \ell = 1, \dots, \mathcal{L}, \gamma = 2, \dots, \Gamma^{(t,s)} \quad (5.16)$$

$$w_i^a \leq w_{i\gamma}^{\ell} \leq w_i^b, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \gamma = 0, \dots, \Gamma^{(t,s)}. \quad (5.17)$$

A função objetivo minimiza os custos envolvidos com o número de rotas geradas, número de entregadores usados e distância total percorrida, conforme antes. As restrições (5.9) correspondem à *counterpart* determinística da formulação de fluxo e foram explanadas na Seção 2.2 do Capítulo 2. O conjunto de restrições (5.10)-(5.12) contempla as incertezas na demanda dos clientes, ao passo que o conjunto (5.13)-(5.17) leva em conta as incertezas dos tempos de viagens e serviço. Observe que a formulação de fluxo robusta se reduz à formulação de fluxo determinística quando o valor 0 é atribuído a ambos os parâmetros Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$. Nesse caso, as restrições (5.10) e (5.14)-(5.16) são desconsideradas da formulação.

Diferentemente da formulação de designação robusta proposta no Capítulo 4, a formulação de fluxo robusta não envolve os vetores associados às variáveis de proteção dual (α e β), pois não foi necessário recorrer à técnica de dualidade para levar em conta a robustez. Por outro lado, em relação à formulação de fluxo determinística, não houve aumento no número de variáveis binárias, o que poderia levar a um melhor desempenho do *solver* CPLEX do que o reportado no Capítulo 4, quando o mesmo *solver* foi usado para resolver a formulação de designação robusta.

5.4 Heurística I1 robusta

Como no Capítulo 4, a heurística I1 (HI1) de Solomon foi adaptada e estendida para levar em conta a robustez em relação as restrições de capacidade dos veículos e janelas de tempo. A HI1 robusta

(abrev. em Inglês RHI1 - *Robust Heuristic II*) foi estendida visando encontrar soluções robustas factíveis de boa qualidade, as quais são usadas como soluções iniciais do *solver* CPLEX como uma tentativa de acelerar a sua convergência.

Na RHI1 as rotas são inicializadas conforme o critério do cliente mais distante e supõe-se que as rotas iniciam seu percurso com um único entregador. Para uma dada iteração da heurística, todo cliente u não roteado até esse momento é testado em todas as posições da rota parcial atual e insere-se em uma certa posição tal que a inserção resultante seja robusta factível e minimize um dado indicador que envolve o aumento da distância e duração da rota parcial gerada. Uma questão importante aqui concerne a forma em que a robustez da inserção é avaliada. Dada a rota parcial $r_{v_i} = (v_1, v_2, \dots, v_i)$, um cliente não roteado u e um valor do *budget* Γ^q , a robustez em relação às restrições da capacidade dos veículos é avaliada como $\mathcal{H}_{v_i}(u) \leq Q$, em que $\mathcal{H}_{v_i}(u)$ corresponde a soma dos $\min\{i + 1, \Gamma^q\}$ maiores desvios da demanda dos clientes na rota parcial r_{v_i} e do cliente u . Entretanto, para avaliar a robustez da inserção em relação às restrições de janelas tempo, basta aplicar a recursividade dada na expressão (5.7). Se inserções robustas não forem mais possíveis, o número de entregadores da rota parcial atual é aumentado em 1, mas somente é atualizado se pelo menos um cliente ainda não roteado for inserido. Esse procedimento é realizado até que o número máximo de entregadores permitidos por rota (\mathcal{L}) for atingido. Se, mesmo aumentando o número de entregadores na rota parcial, não forem mais possíveis inserções robustas factíveis, então uma nova rota é inicializada. Finalmente, a heurística pára quando todos os clientes tenham sido roteados.

O algoritmo 1 da Seção 4.3 do Capítulo 4 ainda é válido para gerar soluções factíveis robustas para o RVRPTWMD, em que, além da demanda incerta, os tempos de viagem e serviço são incertos. Contudo, a etapa da factibilidade robusta deve ser modificada de modo a considerar robustez nos tempos incertos via expressão (5.7).

5.5 Formulação de particionamento de conjuntos

A SPF para o RVRPTWMD envolve variáveis de decisão que descrevem rotas operando em algum modo ℓ . Assim, define-se a variável de decisão binária λ_r^ℓ tomando o valor 1 se e somente se a rota r operando no modo ℓ for selecionada para visitar pelo menos um cliente. De acordo com a definição da variável de decisão λ_r^ℓ , faz-se necessário conhecer todas as rotas factíveis robustas, r , que operam no modo ℓ , pois as incertezas nos parâmetros relacionados à demanda de clientes, tempos de viagem e serviço são contempladas. Por factibilidade robusta, entende-se por aquelas rotas que visitam pelo menos um cliente e satisfazem as janelas de tempo e a capacidade dos veículos para todas as possíveis realizações dos parâmetros relacionados à demanda, tempos de viagem e serviço contidas em um conjunto de incerteza. Seja \mathcal{R}^ℓ , para $\ell = 1, \dots, \mathcal{L}$, o conjunto que contém as rotas factíveis robustas operando no modo ℓ . Uma rota $r \in \mathcal{R}^\ell$ é representada como $r = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1})$, em que v_2, \dots, v_k definem os clientes, e $v_1 = 0$ e $v_{k+1} = n + 1$ representam os depósitos inicial e final, respectivamente. Dada uma rota $r \in \mathcal{R}^\ell$, o parâmetro a_{ir}^ℓ informa se o cliente i faz parte da rota r operando no modo ℓ . Então, a formulação matemática baseada na SPF que define as rotas factíveis robustas de custo mínimo para atender todos os clientes pode ser escrita como segue:

minimizar

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{r \in \mathcal{R}^{\ell}} c_r^{\ell} \lambda_r^{\ell} \quad (5.18)$$

sujeito a:

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{r \in \mathcal{R}^{\ell}} a_{ri}^{\ell} \lambda_r^{\ell} = 1, \quad i \in \mathcal{N}. \quad (5.19)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{r \in \mathcal{R}^{\ell}} \ell \lambda_r^{\ell} \leq \mathcal{D}, \quad (5.20)$$

$$\lambda_r^{\ell} \in \{0, 1\}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}, \quad r \in \mathcal{R}^{\ell}. \quad (5.21)$$

A função objetivo (5.18) minimiza os custos associados às rotas selecionadas. O parâmetro c_r^{ℓ} exprime o custo de usar a rota r operando no modo ℓ . Esse custo pode ser determinado como:

$$c_r^{\ell} = p_1 + p_2 \ell + p_3 \sum_{i=0}^k d_{v_i, v_{i+1}}, \quad (5.22)$$

em que p_1 descreve o custo de alocar um veículo para percorrer a rota, p_2 o custo de alocar um entregador no veículo e p_3 o custo unitário de transporte associados à distância percorrida. As restrições (5.19) expressam que, das rotas selecionadas, o cliente i deve fazer parte de apenas uma delas operando em um único modo. As restrições (5.20) garantem que o número total de entregadores usados não exceda a quantidade máxima disponível no depósito. Finalmente, as restrições (5.21) impõem que as variáveis de decisão da formulação são de natureza binária.

Uma desvantagem da formulação (5.18)-(5.21) reside no número exponencial de rotas em cada um dos conjuntos \mathcal{R}^{ℓ} , para cada $\ell = 1, \dots, \mathcal{L}$. Adicionalmente, as rotas em cada um desses conjuntos não são conhecidas *a priori* e qualquer estratégia para determiná-las pode ser tão difícil como resolver o problema de otimização. Por essa razão, recorre-se a um algoritmo do tipo BPC para resolver a formulação de particionamento de conjuntos (5.18)-(5.21).

5.6 Algoritmo *branch-price-and-cut* para o RVRPTWMD

Nesta seção, descrevem-se as principais componentes do algoritmo BPC proposto para resolver o RVRPTWMD. Entre as componentes, encontram-se a técnica de geração de colunas, algoritmo *labeling* robusto, estratégia de planos de corte e as regras de ramificação. A seguir, cada uma dessas componentes é detalhada.

5.6.1 Geração de colunas

A técnica de geração de colunas (abrev. em Inglês CG - *Column Generation*) trabalha sobre uma relaxação da SPF (5.18)-(5.21), denominada de problema mestre restrito (abrev. em Inglês RMP - *Restricted Master Problem*). O RMP considera o conjunto $\tilde{\mathcal{R}}^{\ell} \subset \mathcal{R}^{\ell}$ que contém umas poucas colunas

do conjunto \mathcal{R}^ℓ e desconsidera o requerimento de integralidade das variáveis de decisão λ_r^ℓ . Dados os conjuntos $\tilde{\mathcal{R}}^\ell$, para todo $\ell = 1, \dots, \mathcal{L}$, o RMP pode ser escrito como:

minimizar

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{r \in \tilde{\mathcal{R}}^\ell} c_r^\ell \lambda_r^\ell \quad (5.23)$$

sujeito a:

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{r \in \tilde{\mathcal{R}}^\ell} a_{ri}^\ell \lambda_r^\ell = 1, \quad i \in \mathcal{N}. \quad (5.24)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{r \in \tilde{\mathcal{R}}^\ell} \ell \lambda_r^\ell \leq \mathcal{D}, \quad (5.25)$$

$$\lambda_r^\ell \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}, \quad r \in \tilde{\mathcal{R}}^\ell \quad (5.26)$$

As rotas iniciais dos conjuntos $\tilde{\mathcal{R}}^\ell$ podem ser determinadas por meio de procedimentos heurísticos, ou considerando apenas rotas triviais, isto é, uma rota para cada cliente. A técnica de CG pode ser vista como uma extensão do método *simplex* para resolver problemas de otimização com apenas variáveis contínuas. Para uma dada iteração do algoritmo de CG, as variáveis de decisão do RMP que assumem valores estritamente positivos ($\lambda_r^\ell > 0$) formam uma base. A questão neste ponto é se a base atual é ótima. Para tanto, recorre-se ao subproblema *pricing*, o qual determina se existem variáveis ou rotas em $\mathcal{R}^\ell \setminus \tilde{\mathcal{R}}^\ell$, para cada $\ell = 1, \dots, \mathcal{L}$, com custos reduzidos negativos. Se o subproblema *pricing* retorna colunas ou rotas com essa característica, então as variáveis correspondentes devem entrar na base e, portanto, são adicionadas ao respectivo $\tilde{\mathcal{R}}^\ell$. Em seguida, o RMP resultante é resolvido e o processo descrito é repetido. Esse procedimento iterativo é realizado até que o subproblema *pricing* não proporcione colunas ou rotas com custos reduzidos negativos.

Similarmente ao método *simplex*, a etapa *pricing*, em uma dada iteração do algoritmo de CG, também requer a informação dual do RMP correspondente. Sejam $\bar{\pi} \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{v} \in \mathbb{R}^+$ as soluções duais associadas às restrições (5.24) e (5.25) do RMP, respectivamente, em que $n = |\mathcal{N}|$ corresponde ao número de clientes. Então, para uma dada iteração do algoritmo de CG, o subproblema *pricing* correspondente ao modo ℓ , pode ser escrito como:

$$z_{SP}^\ell(\bar{\pi}, \bar{v}) = \min \left\{ p_1 \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{r_0j}^\ell + (p_2 - \bar{v}) \ell \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{r_0j}^\ell + \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{N}} (p_3 c_{ij}^\ell - \bar{\pi}_i) x_{pij}^\ell \mid r \in \mathcal{R}^\ell \right\}. \quad (5.27)$$

No problema de otimização (5.27), $\mathbf{x}_r^\ell = \{x_{rij}^\ell\}_{i,j \in \mathcal{N}}$ corresponde a um vetor binário cujas componentes denotam a variável de fluxo binária do problema, assumindo o valor de 1 se e somente se o veículo destinado a percorrer a rota r no modo ℓ visita em sequência os clientes i e j .

O subproblema *pricing* (5.27) para cada modo ℓ corresponde ao problema do caminho mínimo robusto com restrições de recurso (abrev. em Inglês RSPPRC - *Robust Shortest Path Problems with Resource Constraints*), pois o conjunto \mathcal{R}^ℓ contém todas as rotas robustas operando no modo ℓ . O problema do caminho mínimo com restrições de recurso (abrev. em Inglês SPPRC - *Shortest Path*

Problems with Resource Constraints) já foi mostrado ser NP-difícil (DROR, 1994) e, portanto, a versão robusta, por ser uma extensão desse problema, também o é. Diferentes formulações e métodos de solução têm sido usados para resolver de forma exata o SPPRC (FEILLET et al., 2004; IRNICH; VILLENEUVE, 2006; DREXL; IRNICH, 2014; LOZANO et al., 2016). Contudo, um algoritmo bastante usado, que tem se mostrado efetivo, é o algoritmo de *labeling* baseado em programação dinâmica. O algoritmo de *labeling* usado aqui é referenciado como algoritmo de *labeling* robusto, pois a otimização robusta estática é usada como abordagem de tratamento da incerteza. Portanto, o algoritmo de *labeling* precisa ser estendido e adaptado para a versão robusta do SPPRC.

5.6.2 Algoritmo *labeling* robusto

O algoritmo *labeling* padrão é usado para resolver vários tipos de problemas do caminho mínimo (IRNICH; DESAULNIERS, 2005). Esse algoritmo representa os caminhos parciais provenientes do depósito inicial 0 em uma rede usando vetores chamados *labels*. Iniciando com o *label* inicial \mathcal{F}_0 no depósito inicial, o algoritmo enumera rotas parciais propagando *labels* através da rede \mathcal{G} usando funções de extensões. Os caminhos iniciando no depósito e finalizando no mesmo nó são comparados usando regras de dominância, de modo a eliminar caminhos para os quais pode ser comprovado que eles não podem produzir um caminho ou rota ótima iniciando no depósito inicial 0 e finalizando no depósito final $n + 1$. O algoritmo *labeling* robusto funciona de forma similar ao padrão, com a diferença que a robustez deve ser levada em consideração na propagação dos caminhos parciais.

5.6.2.1 Representação do *label*

Uma rota parcial $r_{v_i}^\ell$ finalizando no nó v_i e operando no modo ℓ é representada por um *label* com $1 + |\mathcal{N}| + (\Gamma^q + 1) + (\Gamma^{(t,s)} + 1)$ componentes, as quais são descritas a seguir:

- Uma componente para o custo reduzido $\tilde{C}_{v_i}^{\mathcal{F}}$;
- $n = |\mathcal{N}|$ componentes binárias $V_{v_i,1}^{\mathcal{F}}, \dots, V_{v_i,j}^{\mathcal{F}}, \dots, V_{v_i,n}^{\mathcal{F}}$ indicando com o valor 1 se o cliente $j \in \mathcal{N}$ faz parte da rota parcial $r_{v_i}^\ell$. A componente $V_{v_i,j}^{\mathcal{F}}$, para todo $j \in \mathcal{N}$, também pode assumir o valor 1 se o cliente j não é atingível, isto é, se uma extensão da rota parcial $r_{v_i}^\ell$ a esse cliente leva a uma infactibilidade de pelo menos um recurso.
- $\Gamma^q + 1$ componentes $R_{v_i,\gamma}^{\mathcal{F}}$, para $\gamma = 0, \dots, \Gamma^q$, exprimindo a carga do veículo ao sair do cliente v_i , dado que a demanda de γ clientes na rota parcial $r_{v_i}^\ell = (v_0, v_1, \dots, v_i)$ assumem seus respectivos valores de pior caso.
- $\Gamma^{(t,s)} + 1$ componentes $T_{v_i,\gamma}^{\mathcal{F}}$, para $\gamma = 0, \dots, \Gamma^{(t,s)}$, ilustrando o tempo mais cedo possível para iniciar o serviço no cliente v_i , dado que os tempos de viagem e serviço de γ arcos ou nós na rota parcial $r_{v_i}^\ell = (v_0, v_1, \dots, v_i)$ atingem suas realizações de pior caso.

As componentes $\tilde{C}_{v_i}^{\mathcal{F}}$ e $V_{v_i,1}^{\mathcal{F}}, \dots, V_{v_i,n}^{\mathcal{F}}$ correspondem às componentes determinísticas e elas são equivalentes às do algoritmo *labeling* padrão (IRNICH; DESAULNIERS, 2005). Por outro lado, as componentes $R_{v_i,\gamma}^{\mathcal{F}}$ e $T_{v_i,\gamma}^{\mathcal{F}}$ são definidas similarmente aos parâmetros usados para propagar as equações recursivas (5.6) e (5.7), respectivamente. Portanto, esses parâmetros são usados para levar em consideração a robustez nos recursos carga e tempo. Com os componentes $\tilde{C}_{v_i}^{\mathcal{F}}, V_{v_i,1}^{\mathcal{F}}, \dots, V_{v_i,n}^{\mathcal{F}}$,

$R_{v_i, \gamma}^{\mathcal{F}}$ e $T_{v_i, \gamma}^{\mathcal{F}}$, o *label* associado à rota parcial $r_{v_i}^{\ell}$ pode ser então representado como o vetor $\mathcal{F}_{v_i}^{\ell} = (\tilde{C}_{v_i}^{\mathcal{F}}, V_{v_i, 1}^{\mathcal{F}}, \dots, V_{v_i, j}^{\mathcal{F}}, \dots, V_{v_i, n}^{\mathcal{F}}, R_{v_i, 0}^{\mathcal{F}}, \dots, R_{v_i, \gamma}^{\mathcal{F}}, \dots, R_{v_i, \Gamma^q}^{\mathcal{F}}, T_{v_i, 0}^{\mathcal{F}}, \dots, T_{v_i, \gamma}^{\mathcal{F}}, \dots, T_{v_i, \Gamma^{(t, s)}}^{\mathcal{F}})$.

5.6.2.2 Funções de extensão

Dado um *label* $\mathcal{F}_{v_i}^{\ell}$ associado à rota parcial $r_{v_i}^{\ell}$ e um nó v_j , com $V_{v_i v_j}^{\mathcal{F}} = 0$, a função de extensão para as componentes $R_{v_i, \gamma}^{\mathcal{F}}$ e $T_{v_i, \gamma}^{\mathcal{F}}$ correspondem às Equações (5.6) e (5.7), respectivamente. A componente do custo reduzido $\tilde{C}_{v_i}^{\mathcal{F}}$ é estendida como $\tilde{C}_{v_j}^{\mathcal{F}} = \tilde{C}_{v_i}^{\mathcal{F}} + p_3 d_{v_i v_j} - \bar{\pi}_{v_i}$, em que $\bar{\pi}_{v_i}$ define o prêmio de visitar o nó v_i . Os prêmios coincidem com as soluções duais associadas às restrições (5.24) do RMP. Entretanto, as componentes $V_{v_i, k}^{\mathcal{F}}$, para todo $k \in \mathcal{N}$, são estendidas similarmente como no algoritmo *labeling* padrão. Finalmente, após a extensão, aceita-se o *label* resultante $\mathcal{F}_{v_j}^{\ell}$ como uma extensão factível robusta se $V_{v_i v_j}^{\mathcal{F}} = 0$; $R_{v_j, \gamma}^{\mathcal{F}} \leq Q$ para $\gamma = 0, \dots, \Gamma^q$ e $T_{v_j, \gamma}^{\mathcal{F}} \leq w_{v_j}^b$ para $\gamma = 0, \dots, \Gamma^{(t, s)}$.

5.6.2.3 Regra de dominância robusta

Certas regras são usadas para eliminar caminhos parciais que são conhecidas a não fazer parte do caminho ótimo buscado. A regra básica é a regra de dominância. O conceito de dominância pode ser visto na seguinte definição:

Definição 5.6.1. Considere duas rotas ou caminhos parciais robustos factíveis $r_{v_i}^{(\ell, h)}$, com $h = 1, 2$, ambas finalizando no cliente v_i e representadas pelos *labels* $\mathcal{F}_{v_i}^{(\ell, h)}$. Diz-se que $\mathcal{F}_{v_i}^{(\ell, 1)}$ domina a $\mathcal{F}_{v_i}^{(\ell, 2)}$ se as seguintes condições são verdadeiras:

- Condition 1) qualquer extensão factível robusta e de $\mathcal{F}_{v_i}^{(\ell, 2)}$ finalizando em um dado nó v_j é também factível robusta para $\mathcal{F}_{v_i}^{(\ell, 1)}$ e;
- Condition 2) para qualquer extensão e , a desigualdade $\tilde{C}_{v_j}^{1, \mathcal{F}} \leq \tilde{C}_{v_j}^{2, \mathcal{F}}$ se mantêm, no qual $\tilde{C}_{v_j}^{h, \mathcal{F}}$ define o custo reduzido obtido por estender a rota ou caminho parcial $r_{v_i}^{(\ell, h)}$, com $h = 1, 2$.

Como já foi dito, o algoritmo *labeling* descrito neste estudo corresponde a uma extensão do algoritmo de *labeling* padrão, pois resolve-se aqui o RSPPRC ao invés do SPPRC. Portanto, a regra de dominância tem que ser adaptada para levar em conta a robustez. A regra de dominância para o algoritmo *labeling* robusto pode ser visto na Proposição 5.6.1.

Proposição 5.6.1 (Regra de dominância robusta). Se os *labels* $\mathcal{F}_{v_i}^{(\ell, 1)}$ e $\mathcal{F}_{v_i}^{(\ell, 2)}$ associados aos caminhos parciais factíveis robustos $r_{v_i}^{(\ell, 1)}$ e $r_{v_i}^{(\ell, 2)}$, respectivamente, finalizando no cliente v_i são tais que

- i) $\tilde{C}_{v_i}^{1, \mathcal{F}} \leq \tilde{C}_{v_i}^{2, \mathcal{F}}$;
- ii) $V_{v_i, j}^{1, \mathcal{F}} \leq V_{v_i, j}^{2, \mathcal{F}}$, para todo $j \in \mathcal{N}$;
- iii) $R_{v_i, \gamma}^{1, \mathcal{F}} \leq R_{v_i, \gamma}^{2, \mathcal{F}}$, para todo $\gamma = 0, \dots, \Gamma^q$;
- iv) $T_{v_i, \gamma}^{1, \mathcal{F}} \leq T_{v_i, \gamma}^{2, \mathcal{F}}$, para todo $\gamma = 0, \dots, \Gamma^{(t, s)}$;

Então, o *label* $\mathcal{F}_{v_i}^1$ domina ao *label* $\mathcal{F}_{v_i}^2$ no sentido das condições 1) e 2).

Demonstração. Para provar a proposição, necessita-se mostrar que as condições 1) e 2) são satisfeitas sob as hipóteses *i-iv*). Considere-se uma extensão e finalizando no cliente v_j das rotas parciais $r_{v_i}^{(\ell,1)}$ e $r_{v_i}^{(\ell,2)}$, resultando em rotas parciais denotadas como $r_{v_i}^{(\ell,1)} \otimes e$ e $r_{v_i}^{(\ell,2)} \otimes e$, respectivamente. Sejam e_0, e_1, \dots, e_t os nós do caminho e , com $e_0 = v_i$ e $e_t = v_j$. Assuma que o caminho estendido $r_{v_i}^{(\ell,2)} \otimes e$ é factível robusto, isto é, para cada e_h , com $h = 1, \dots, t$, $V_{e_{h-1}, e_h}^{2, \mathcal{F}} = 0$; $R_{e_h, \gamma}^{2, \mathcal{F}} \leq Q$ para $\gamma = 0, \dots, \Gamma^q$ e $T_{e_h, \gamma}^{2, \mathcal{F}} \leq w_{e_h}^b$ para $\gamma = 0, \dots, \Gamma^{(t,s)}$. Pelas hipóteses *ii*), *iii*) para $\gamma = 0$ e *iv*) para $\gamma = 0$ e do fato que as funções de extensões para as componentes $V_{v_i, 1}^{\mathcal{F}}, \dots, V_{v_i, n}^{\mathcal{F}}, R_{v_i, 0}^{\mathcal{F}}$ e $T_{v_i, 0}^{\mathcal{F}}$ são não-decrescentes, então segue-se que o caminho estendido $r_{v_i}^{(\ell,1)} \otimes e$ é também factível determinístico e, assim, a condição 1) é parcialmente atendida. Por outro lado, pela suposição, têm-se que

$$\begin{aligned} Q &\geq R_{e_1, \gamma}^{2, \mathcal{F}}, \text{ para } \gamma = 1, \dots, \Gamma^q. \\ &= \max\{R_{v_i, \gamma}^{2, \mathcal{F}} + \bar{q}_{e_1}, R_{v_i, (\gamma-1)}^{2, \mathcal{F}} + \bar{q}_{e_1} + \hat{q}_{e_1}\}, \text{ para } \gamma = 1, \dots, \Gamma^q \implies \text{(pela expressão (5.6))} \\ &\geq \max\{R_{v_i, \gamma}^{1, \mathcal{F}} + \bar{q}_{e_1}, R_{v_i, (\gamma-1)}^{1, \mathcal{F}} + \bar{q}_{e_1} + \hat{q}_{e_1}\}, \text{ para } \gamma = 1, \dots, \Gamma^q \implies \text{(pela condição iii)} \\ &= R_{e_1, \gamma}^{1, \mathcal{F}}, \text{ para } \gamma = 0, \dots, \Gamma^q \implies \text{(pela expressão (5.6))} \end{aligned}$$

O raciocínio anterior pode ser aplicado sequencialmente para todo nó e_h , com $h = 2, \dots, t$, do caminho e , obtendo-se que $R_{e_h, \gamma}^{1, \mathcal{F}} \leq Q$ para todo $\gamma = 1, \dots, \Gamma^q$. Aplicando-se um raciocínio similar para a componente $T_{e_h, \gamma}^{1, \mathcal{F}}$ para $\gamma = 1, \dots, \Gamma^{(t,s)}$, obtêm-se que $T_{e_h, \gamma}^{1, \mathcal{F}} \leq w_{e_h}^b$ para todo $\gamma = 1, \dots, \Gamma^{(t,s)}$ e $h = 1, \dots, t$. Dessa forma, toda extensão robusta factível de $r_{v_i}^{(\ell,2)}$ é também robusta factível para $r_{v_i}^{(\ell,1)}$. Logo, a condição 1) é atendida na sua totalidade. Por outro lado, para o cliente e_1 de e , têm-se

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{e_1}^{1, \mathcal{F}} &= \tilde{C}_{v_i}^{1, \mathcal{F}} + p_3 d_{v_i, e_1} - \bar{\pi}_{e_1}, \text{ (pela definição da função de extensão para o custo reduzido)} \\ &\leq \tilde{C}_{v_i}^{2, \mathcal{F}} + p_3 d_{v_i, e_1} - \bar{\pi}_{e_1}, \text{ (pela hipótese i)} \\ &= \tilde{C}_{e_1}^{2, \mathcal{F}}, \text{ (por definição da função de extensão para o custo reduzido)} \end{aligned}$$

O procedimento anterior pode ser feito para $\tilde{C}_{e_h}^1$ para todo $h = 2, \dots, t$, levando sempre a que a desigualdade $\tilde{C}_{e_h}^1 \leq \tilde{C}_{e_h}^2$ se mantenha. Dessa forma, a condição 2) é satisfeita e a prova é concluída. \square

5.6.2.4 Algoritmo *labeling* robusto bidirecional

O algoritmo de *labeling* robusto aqui proposto corresponde ao algoritmo *labeling* robusto bidirecional. Nessa versão do algoritmo, há dois conjuntos de *labels* relacionados ao cliente v_i . O primeiro conjunto de *labels* contém os caminhos robustos factíveis que partem do depósito inicial 0 e finalizam no cliente v_i . O outro conjunto de *labels* armazenam as rotas ou caminhos robustos factíveis que partem do cliente v_i e finalizam no depósito final $n + 1$. Os caminhos no primeiro conjunto são chamados de rotas parciais *forward*, ao passo que os do segundo conjunto são denominados de rotas parciais *backward*. Usa-se o *label* $\mathcal{B}_{v_j}^\ell$ para representar a rota parcial *backward* $r_{v_j}^\ell = (v_j, v_{j+1}, \dots, v_{k+1})$, a qual opera no modo ℓ , inicia no cliente v_j e finaliza no depósito final $v_{k+1} = n + 1$. Os estados, seleção do *label*, funções de extensões e as regras de dominância das rotas parciais *backward* são simétricas às apresentadas para as rotas parciais *forward*. Portanto, usa-se o vetor $(\tilde{C}_{v_j}^{\mathcal{B}}, V_{v_j, 1}^{\mathcal{B}}, \dots, V_{v_j, i}^{\mathcal{B}}, \dots, V_{v_j, n}^{\mathcal{B}}, R_{v_j, 0}^{\mathcal{B}}, \dots, R_{v_j, \gamma}^{\mathcal{B}}, \dots, R_{v_j, \Gamma^q}^{\mathcal{B}}, T_{v_j, 0}^{\mathcal{B}}, \dots, T_{v_j, \gamma}^{\mathcal{B}}, \dots, T_{v_j, \Gamma^t}^{\mathcal{B}})$

para representar o *label* $\mathcal{B}_{v_j}^\ell$. Todavia, as componentes do recurso tempo, denotadas por $T_{v_j, \gamma}^\mathcal{B}$, com $\gamma = 0, \dots, \Gamma^{(t,s)}$, são agora definidas como:

- $T_{v_j, \gamma}^\mathcal{B}$, para $\gamma = 0, \dots, \Gamma^{(t,s)}$: Tempo mais tarde possível para iniciar o serviço no cliente v_j dado que os tempos de viagem e serviço de γ arcos ou nós no caminho *backward* parcial $(v_j, v_{j+1}, \dots, v_{k+1})$, com $v_{k+1} = n + 1$, são permitidos a variar em torno de seu valor nominal.

A equação (5.28) corresponde à função de extensão para determinar os valores das componentes $T_{v_i, \gamma}^\mathcal{B}$, para $\gamma = 0, \dots, \Gamma^{(t,s)}$, como resultado de estender o *label* $\mathcal{B}_{v_j}^\ell$ associado a uma dada rota *backward* parcial ao cliente v_i . Note que a função de extensão leva em consideração os quatro casos inspecionados na Seção 5.2 para determinar as equações recursivas (5.7). Ao estender o *label* $\mathcal{B}_{v_j}^\ell$ ao cliente v_i , aceita-se o *label* resultante $\mathcal{B}_{v_i}^\ell$ como uma extensão factível robusta se $V_{v_j, v_i}^\mathcal{B} = 0$; $R_{v_i, \gamma}^\mathcal{B} \leq Q$ para $\gamma = 0, \dots, \Gamma^q$ e $T_{v_i, \gamma}^\mathcal{B} \geq w_{v_i}^a$ para $\gamma = 0, \dots, \Gamma^{(t,s)}$.

$$T_{v_i, \gamma}^\mathcal{B} = \begin{cases} \min\{w_{v_i}^b, T_{v_j, \gamma}^\mathcal{B} - \bar{s}_{v_i} - \bar{t}_{v_i v_j}\}, & \text{se } \gamma = 0. \\ \min \begin{cases} w_{v_i}^b, \\ T_{v_j, \gamma}^\mathcal{B} - \bar{s}_{v_i} - \bar{t}_{v_i v_j}, \\ T_{v_j(\gamma-1)}^\mathcal{B} - \bar{s}_{v_i} - \hat{s}_{v_i} - \bar{t}_{v_i v_j}, \\ T_{v_j(\gamma-1)}^\mathcal{B} - \bar{s}_{v_i} - \bar{t}_{v_i v_j} - \hat{t}_{v_i v_j} \end{cases} & \text{se } \gamma = 1. \\ \min \begin{cases} w_{v_i}^b, \\ T_{v_j, \gamma}^\mathcal{B} - \bar{s}_{v_i} - \bar{t}_{v_i v_j}, \\ T_{v_j(\gamma-1)}^\mathcal{B} - \bar{s}_{v_i} - \hat{s}_{v_i} - \bar{t}_{v_i v_j}, \\ T_{v_j(\gamma-1)}^\mathcal{B} - \bar{s}_{v_i} - \bar{t}_{v_i v_j} - \hat{t}_{v_i v_j}, \\ T_{v_j(\gamma-2)}^\mathcal{B} - \bar{s}_{v_i} - \hat{s}_{v_i} - \bar{t}_{v_i v_j} - \hat{t}_{v_i v_j}, \end{cases} & \text{Caso contrário.} \end{cases} \quad (5.28)$$

Em geral, o algoritmo *labeling* bidirecional, mostrou-se mais efetivo do que a sua versão unidirecional para resolver o SPPRC (RIGHINI; SALANI, 2008; BALDACCI et al., 2010). Uma questão importante na versão bidirecional do algoritmo *labeling* reside na junção de *labels forward* e *backward*. Uma rota iniciando no depósito inicial 0 e finalizando no depósito final $n + 1$ é obtida cada vez que um *label forward*, $\mathcal{F}_{v_i}^\ell$, e outro *backward*, $\mathcal{B}_{v_i}^\ell$, são factivelmente juntados no nó v_i . Devido à consideração da robustez, a etapa de junção entre os *labels* $\mathcal{F}_{v_i}^\ell$ e $\mathcal{B}_{v_i}^\ell$ precisa ser apropriadamente modificada. Nesse contexto, as condições de factibilidade robusta para juntar o *label forward* com o *label backward* são:

- 1) $R_{v_i, \gamma}^\mathcal{F} + R_{v_{i+1}(\Gamma^q - \gamma)}^\mathcal{B} \leq Q$, para $\gamma = 0, \dots, \Gamma^q$;
- 2) $T_{v_i, \gamma}^\mathcal{F} \leq T_{v_i(\Gamma^{(t,s)} - \gamma)}^\mathcal{B}$, para $\gamma = 0, \dots, \Gamma^{(t,s)}$;
- 3) $V_{v_i, j}^\mathcal{F} + V_{v_i, j}^\mathcal{B} \leq 1$ para $j = 1, \dots, n$ e $j \neq v_i$.

A condição 1) leva em conta as cargas nos caminhos *forward* e *backward* considerando que a demanda de γ e $\Gamma^q - \gamma$ clientes atingem seu valor de pior caso, respectivamente. Entretanto, a condição 2) exprime simplesmente a junção de *labels forward* e *backward* que levem a uma rota consistente no tempo. Finalmente, a condição 3) garante que a junção gere unicamente rotas elementares.

5.6.3 Desigualdades válidas

Para melhorar o limitante de LP da formulação (5.23)-(5.26), desigualdades válidas são usadas. Em geral, isso reduz o número de nós da árvore BPC e, portanto, leva a melhorar o desempenho do algoritmo. Diferentes tipos de desigualdades válidas estão disponíveis para formulações de particionamento de conjuntos. A principal preocupação com essas desigualdades é o fato de que algumas delas podem exigir mudanças que comprometem o desempenho dos algoritmos usados para resolver os subproblemas (FUKASAWA et al., 2006). No entanto, em diversos casos, um desempenho pior na resolução dos subproblemas é justificado se a qualidade do limitante de LP resultante melhora significativamente, compensando o tempo de execução adicional. Uma das desigualdades válidas comumente usadas para formulações de particionamento de conjuntos corresponde às *Subset Row* (SR) (JEPSSEN et al., 2008). Tipicamente, essas desigualdades aumentam o limitante de LP dado pelo problema mestre. Por essa razão, elas são comumente usadas na maioria de implementações de algoritmos do tipo BPC (DESAULNIERS et al., 2014).

As desigualdades SR mais usadas são baseadas em subconjuntos com três clientes. Dado um conjunto $\mathcal{S} = \{i_1, i_2, i_3\} \subset \mathcal{N}$, a correspondente desigualdade SR deve garantir que o número de rotas/colunas robustas que visitam ao menos dois clientes do conjunto \mathcal{S} seja no máximo igual a 1. Uma vez que as rotas/colunas são indexadas com o modo ℓ em que operam, então a desigualdade SR pode ser escrita como:

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{r \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}} \lambda_r^{\ell} \leq 1, \quad (5.29)$$

em que $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \in \tilde{\mathcal{R}}^1 \cup \dots \cup \tilde{\mathcal{R}}^{\mathcal{L}}$ representa o conjunto de todas as colunas no RMP (5.23)-(5.26) associadas às rotas que visitam ao menos dois clientes em \mathcal{S} . A separação dessas desigualdades pode ser implementada como um algoritmo enumerativo direto que verifica todas as rotas/colunas no problema mestre para cada possível conjunto \mathcal{S} de três clientes. A adição de desigualdades SR ao RMP afeta negativamente o desempenho do algoritmo *labeling* usado para resolver os subproblemas (5.27), pois menos *labels* são dominados e, como resultado, mais extensões são requeridas. Diversas ideias têm sido propostas na literatura para reduzir esse impacto. Por exemplo, algumas implementações descartam desigualdades violadas por menos de um valor referência, outras impõem um parâmetro que define o número máximo de desigualdades SR a serem adicionadas por vez e usam relaxações no subproblema (DESAULNIERS et al., 2008; BALDACCI et al., 2012; MUNARI; GONDZIO, 2013; CONTARDO et al., 2015).

5.6.4 Regras de ramificação

Propõem-se diferentes regras de ramificação com base nos termos que definem os custos na função objetivo. Primeiramente, a ramificação é realizada no número de rotas ou de entregadores, sendo diretamente imposta ao problema mestre. Mais especificamente, dado um vetor solução, $\bar{\lambda}$, com componentes assumindo valores fracionários do problema mestre, o número de rotas (nR) e o número de entregadores (nD) na solução são respectivamente dados por:

$$nR = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{r \in \mathcal{R}^{\ell}} \bar{\lambda}_r^{\ell} \quad \text{e} \quad nD = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{r \in \mathcal{R}^{\ell}} \ell \bar{\lambda}_r^{\ell}.$$

Em qualquer solução ótima do problema, ambos os valores de nR e nD devem ser inteiros. Se o valor de nR for fracionário, então a ramificação é feita, criando-se dois nós filhos, nos quais se adiciona uma das seguintes restrições a seus problemas mestres:

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{r \in \mathcal{R}^{\ell}} \bar{\lambda}_r^{\ell} \leq \lfloor nR \rfloor \quad \text{e} \quad \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{r \in \mathcal{R}^{\ell}} \bar{\lambda}_r^{\ell} \geq \lceil nR \rceil. \quad (5.30)$$

Agora, se o valor de nR for inteiro, porém o de nD for fracionário, novamente, a ramificação é realizada, mas, dessa vez, com respeito ao número de entregadores. As restrições adicionadas a cada um dos dois nós filhos gerados são similares às da equação (5.30).

Por outro lado, em uma dada solução, pode acontecer que ambos os valores de nR e nD sejam inteiros, mas as variáveis do problema mestre assumam um valor fracionário. Nesse caso, recorre-se a uma regra de ramificação baseada nos arcos da rede. Dado um vetor solução, $\bar{\lambda}$, com componentes assumindo valores fracionários, a seguinte equação é usada a fim de obter a solução em termos dos arcos:

$$\bar{x}_{ij}^{\ell} = \sum_{r \in \mathcal{R}^{\ell}} \bar{x}_{rij}^{\ell} \bar{\lambda}_r^{\ell}, \quad \forall \ell = 1, \dots, \mathcal{L}; \quad i, j \in \mathcal{N}. \quad (5.31)$$

em que \bar{x}_r^{ℓ} corresponde ao vetor definido na Seção 5.6.1, com componentes $\bar{x}_{rij}^{\ell} = 1$ se a rota r visita o nó i e vai diretamente ao nó j no modo ℓ , caso contrário $\bar{x}_{rij}^{\ell} = 0$. Como resultado, \bar{x}_{ij}^{ℓ} proporciona o fluxo no arco (i, j) , o qual pode ser fracionário devido às componentes fracionárias do vetor $\bar{\lambda}$. Portanto, a regra de ramificação consiste em selecionar uma componente fracionária \bar{x}_{ij}^{ℓ} tal que dois nós filhos sejam criados pela imposição de $x_{ij}^{\ell} = 0$ em um nó e $x_{ij}^{\ell} = 1$ no outro nó, para um dado $\ell = 1, \dots, \mathcal{L}$ e $i, j \in \mathcal{N}$. A restrição $x_{ij}^{\ell} = 0$ é imposta unicamente para o subproblema associado a \mathcal{R}^{ℓ} , pela remoção do arco (i, j) . Entretanto, a restrição $x_{ij}^{\ell} = 1$ modifica todos os subproblemas como segue: *i*) nos subproblemas definidos para \mathcal{R}^{ℓ^*} tal que $\ell^* \neq \ell$, eliminam-se todos os arcos saindo de i ; e *ii*) no subproblema definido para \mathcal{R}^{ℓ} , apenas o arco (i, j) é mantido.

A ramificação em arcos também leva à modificação do problema mestre dos nós filhos, pois se deve garantir consistência às modificações nos subproblemas. Normalmente, no RMP associado a $\bar{x}_{ij}^{\ell} = 0$, removem-se todas as colunas associadas às rotas que visitam o nó i e vão diretamente ao nó j no modo ℓ , ao passo que, no RMP da outra ramificação, desconsideram-se todas as colunas associadas às rotas que visitam o nó i e vão diretamente ao nó j , exceto para aquelas no modo ℓ .

A regra de ramificação definida não evita completamente o não uso do arco (i, j) quando a restrição $\bar{x}_{ij}^{\ell} = 0$ for imposta, pois ainda é possível obter uma solução que percorra o arco (i, j) , porém em outro modo, isto é, $x_{ij}^{\ell^*} = 1$ em uma nova solução, com $\ell^* \neq \ell$. Adicionalmente, a árvore se torna desbalanceada, já que $x_{ij}^{\ell} = 1$ tem um impacto maior nos subproblemas do que a restrição $x_{ij}^{\ell} = 0$. Para superar essas desvantagens, propõe-se, nesta tese, impor uma das restrições em (5.32) a cada nó filho criado, ao invés da ramificação variável arco previamente definida:

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} x_{ij}^{\ell} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} x_{ij}^{\ell} = 1, \quad (5.32)$$

Para atender o primeiro requerimento em (5.32), remove-se o arco (i, j) de cada subproblema em (5.27), isto é, para cada $\ell = 1, \dots, \mathcal{L}$. Para o segundo, remove-se o arco (i, j) de cada subproblema em (5.27) definido por \mathcal{R}^{ℓ^*} tal que $\ell^* \neq \ell$, ao passo que, no subproblema definido por \mathcal{R}^{ℓ} , todos os arcos saindo do nó i são desconsiderados, excetuando aquele arco que vai diretamente para o nó j . O RMP associado também é modificado de forma similar como especificado acima.

5.6.5 Heurística primal

Diferentes tipos de heurísticas de propósito geral podem ser usados com sucesso dentre os métodos de geração de colunas e BP (JONCOUR et al., 2010). Particularmente para problemas de roteamento de veículos, a estrutura da formulação de particionamento de conjuntos é adequada para o uso de heurísticas baseadas em programação inteira mista (abrev. em Inglês MIP - *Mixed Integer Programming*). De fato, qualquer coluna em um determinado RMP corresponde a uma rota operando em certo modo e, portanto, pode-se tentar obter uma solução factível inteira de forma que todos os clientes sejam visitados exatamente uma vez. Assim, uma simples heurística primal baseada em MIP consiste em tomar um determinado RMP, impor o requerimento de integralidade das variáveis de decisão nele e resolvê-lo por um *solver* comercial de MIP. Essa ideia tem sido usada com sucesso em várias variantes do VRP (SUBRAMANIAN et al., 2013; ARCHETTI; SPERANZA, 2014).

Para garantir uma heurística MIP rápida, o tempo total de execução do *solver* deve ser limitado superiormente. Uma vez que nem todas as colunas podem estar disponíveis no RMP e, devido à possibilidade de atingir o limite de tempo, a solução obtida no final desse procedimento pode não corresponder a uma solução ótima do problema original. No entanto, resultados computacionais reportados na literatura tem mostrado que as soluções obtidas tipicamente fornecem limitantes superiores que são úteis para melhorar o desempenho do algoritmo BPC.

5.7 Método de geração de colunas primal-dual

A geração de colunas padrão baseada em soluções duais ótimas apresenta vários inconvenientes, especialmente quando o método *simplex* é utilizado para resolver o RMP (VANDERBECK, 2005; LÜBBECKE; DESROSIERS, 2005). São eles: 1) convergência lenta próximo à otimalidade (“*tailing off*”); 2) as primeiras iterações produzem colunas e valores duais irrelevantes, devido à informação pobre no começo (“*heading-in effect*”); 3) degeneração no primal e, por conseguinte, múltiplas soluções ótimas no dual causam o valor ótimo do problema mestre restrito constante por várias iterações (“*plateau effect*”); e 4) instabilidade nas soluções duais, que saltam de um valor extremo para outro (“*yo-yo effect*”). Assim, métodos de estabilização têm sido desenvolvidos para melhorar a efetividade do método de geração de colunas.

Um desses métodos é a geração de colunas primal-dual (abrev. em Inglês PDCGM - *Primal Dual Column Generation Method*), que tenta produzir soluções duais do RMP centradas para reduzir os efeitos negativos da CG, citados anteriormente. Dada uma solução factível primal-dual $(\bar{\pi}, \bar{v})$ do RMP, que pode não ser uma solução ótima, pode-se obter um limitante superior e inferior do valor ótimo do

RMP utilizando os valores primais e duais da função objetivo da seguinte forma:

$$Z_{UB}(\bar{\lambda}) := \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{r \in \tilde{\mathcal{R}}^\ell} c_r^\ell \bar{\lambda}_r^\ell$$

$$Z_{LB}(\bar{\pi}, \bar{v}) := \sum_{i \in \mathcal{N}} \bar{\pi}_i + \mathcal{D}\bar{v}$$

Assumindo que a solução não seja ótima, se tem $Z_{UB}(\bar{\lambda}) > Z_{LB}(\bar{\pi}, \bar{v})$. Esta solução é chamada de ϵ -ótima se satisfaz:

$$Z_{UB}(\bar{\lambda}) - Z_{LB}(\bar{\pi}, \bar{v}) \leq \epsilon(10^{-10} + |Z_{LB}(\bar{\lambda})|)$$

para alguma tolerância $\epsilon > 0$. O método primal-dual de pontos interiores proporciona soluções duais bem centradas, já que mantém os produtos complementares primal-dual próximos ao caminho central. O PDCGM propõe um ajuste dinâmico da tolerância utilizada para resolver o RMP. A tolerância é folgada no começo do algoritmo e apertada conforme a geração se aproxima da otimalidade. O Algoritmo 2 descreve o método PDCGM. Observe que o ajuste da tolerância ϵ é realizado na linha 7 desse algoritmo, em que o escalar ϵ_{max} impõe um limitante superior no valor da tolerância ϵ (por exemplo, $\epsilon_{max} = 1.0$) e $D > 1$ é o nível de otimalidade que controla a redução em ϵ em função do *gap* relativo.

Algorithm 2: Algoritmo de CG primal-dual de pontos interiores

Entrada: $\epsilon_{max} > 0$, $D > 1$ e $\delta > 0$.

$LB = -\infty$, $UB = \infty$, $gap = \infty$ e $\epsilon = 0, 5$.

Saída: Colunas a serem inseridas no RMP.

- 1 **Enquanto** $gap \geq \delta$ **faça**
 - 2 Encontre uma solução centrada ϵ -ótima $(\bar{\pi}, \bar{v})$ do RMP
 - 3 Calcule $UB = \min\{UB, Z_{UB}(\bar{\lambda})\}$
 - 4 Resolver o subproblema (5.27) com o vetor $(\bar{\pi}, \bar{v})$. Seja $Z_{sp}(\bar{\pi}, \bar{v}) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} Z_{sp}^\ell(\bar{\pi}, \bar{v})$ seu valor objetivo associado.
 - 5 Calcule $LB = \max\{LB, Z_{LB}(\bar{\pi}, \bar{v}) + Z_{sp}(\bar{\pi}, \bar{v})\}$
 - 6 Calcule $gap = (UB - LB)/(10^{-10} + |LB|)$
 - 7 Atualize a tolerância ϵ como $\epsilon = \min\{\epsilon_{max}, gap/D\}$
 - 8 **se** $Z_{sp}(\bar{\pi}, \bar{v}) < 0$ **então**
 - 9 Adicione as colunas ao RMP.
 - 10 **fim se**
 - 11 **fim enquanto**
-

5.8 Resultados computacionais

Os experimentos computacionais foram realizados visando atingir os seguintes objetivos: 1) Investigar o potencial da abordagem de RO para lidar com o *trade-off* custo-risco e 2) Analisar em termos da qualidade das soluções e da eficiência computacional os algoritmos propostos para resolver o RVRPTWMD. O algoritmo BPC foi implementado em C++ usando a biblioteca PDCGM em Gondzio et al. (2013), Gondzio et al. (2015), o qual oferece um método de geração de colunas de pontos interiores estabilizado. A árvore de busca do BPC é administrada usando o quadro de *branch-and-price* de pontos interiores descrito em Munari e Gondzio (2013). Adicionalmente, a heurística baseada em MIP usa o *solver* IBM CPLEX v.12.8 para resolver problemas de programação inteira-mista. Por outro lado, a

formulação de fluxo robusta (5.8)-(5.17) e a RHI1 foram também implementadas em C++. Em particular, a formulação de fluxo robusta foi resolvida por meio do solver IBM CPLEX v.12.8. Todos os experimentos foram rodados em um PC Linux com um processador Intel Core i7-4790 3.6 GHz e 16 GB of RAM.

As instâncias das classes C1, R1, RC1, C2, R2 and RC2 de Solomon adaptadas para o RVRPTWMD são usadas para a realização dos experimentos computacionais. A distribuição geográfica dos clientes é classificada de acordo: *i*) distribuição agrupadas (classe C1 e C2); *ii*) distribuição aleatória (classe R1 and R2) e *iii*) uma combinação de ambas as classes C1 e R1 (classes RC1 e RC2). Resultados computacionais preliminares evidenciaram a dificuldade de se resolver essas instâncias com 100 clientes, mesmo usando o algoritmo BPC. Por essa razão, os experimentos computacionais foram realizados usando instâncias com os primeiros 25 e 50 clientes, sendo que a formulação de fluxo robusta apenas foi resolvida com as instâncias de 25 clientes. Isso porque o *branch-and-cut* do solver CPLEX v.12.8, na sua configuração *default*, não provou otimalidade para a maioria das instâncias com 50 clientes dentro de um tempo limite de 3600 segundos. Também, precisou-se reduzir a capacidade dos veículos (Q) devido a que com o valor original da capacidade, o valor da função objetivo não se alterava conforme o aumento dos parâmetros Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$. Os valores de Q foram de 100 e 200 para as instâncias com 25 e 50 clientes, respectivamente.

Os valores dos parâmetros \bar{q}_i , w_i^a e w_i^b correspondem aos primeiros $n = 25, 50$ dados das instâncias nas classes C1, R1, RC1, C2, R2 and RC2. Os parâmetros \bar{t}_{ij} e d_{ij} correspondem à distância Euclideana entre as coordenadas dos primeiros $n = 25, 50$ clientes. Em particular, o valor nominal do tempo de serviço \bar{s}_i^l foi determinado similarmente como em (PUREZA et al., 2012). A RHI1 descrita na Subseção 5.3 foi inicializada seguindo o critério do cliente mais distante e os melhores valores para os parâmetros da RHI1 foram $\phi_1 = 0.6$, $\phi_2 = 0.4$, $\mu = 1$ e $\lambda = 1$. O significado desses parâmetros podem ser vistos em (SOLOMON, 1987; De La VEGA et al., 2017). Para as variáveis aleatórias demanda e tempos de viagem e serviço, seus correspondentes desvios foram determinados como uma percentagem com respeito a seus valores nominais, isto é, $\hat{q}_i = trunc(\% \delta^q \times \bar{q}_i / 100)$, $\hat{t}_{ij} = trunc(\% \delta^{(t,s)} \times \bar{t}_{ij} / 100)$ e $\hat{s}_i = trunc(\% \delta^{(t,s)} \times \bar{s}_i / 100)$, em que os parâmetros $\% \delta^q$ e $\% \delta^{(t,s)}$ correspondem aos níveis de incerteza da demanda e dos tempos de viagem e de serviço, respectivamente. Para evitar erros de arredondamentos, decidiu-se truncar os valores dos parâmetros \hat{q}_i , \hat{t}_{ij} e \hat{s}_i . A Tabela 10 resume os 2016 problemas que são usados no estudo computacional. Esse valor resulta ao combinar as 18 configurações dos parâmetros robustos com as 56 instâncias (coluna N.Inst.) modificadas de Solomon para cada valor de n ($n = 25$ e 50). Os valores dos parâmetros \mathcal{K} e \mathcal{D} também são apresentados nessa tabela.

5.8.1 Resultados para os problemas com 25 clientes

Apresentam-se a seguir os resultados computacionais obtidos após realizar os experimentos numéricos em base aos problemas com 25 clientes.

5.8.1.1 Impacto dos parâmetros Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$

A presente subseção têm como objetivo avaliar o impacto dos parâmetros Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$ nas decisões de roteamento, custo e risco a partir da visualização dos resultados obtidos com a resolução do RVRPTWMD com os algoritmos: heurística I1 robusta (RHI1), CPLEX v.12.8 tomando como ponto de partida a solução fornecida pela RHI1 (CPLEX com RHI1) e *branch-price-and-cut* (BPC). O Algoritmo CPLEX com RHI1, denominado aqui como estratégia combinada, é usado para resolver a formulação

Tabela 10 – Valores dos parâmetros usados na experimentação computacional

Configuração	Parâmetros robustos				$N.Inst.$	n	$n = 25$		$n = 50$	
	Γ^q	δ^q	$\Gamma^{(t,s)}$	$\delta^{(t,s)}$			\mathcal{K}	\mathcal{D}	\mathcal{K}	\mathcal{D}
1	0	0.3	0	0.0	56	25, 50	10	20	15	20
2	1	0.3	0	0.0	56	25, 50	10	20	15	20
3	3	0.3	0	0.0	56	25, 50	10	20	15	20
4	5	0.3	0	0.0	56	25, 50	10	20	15	20
5	8	0.3	0	0.0	56	25, 50	10	20	15	20
6	10	0.3	0	0.0	56	25, 50	10	20	15	20
7	0	0.0	0	0.3	56	25, 50	10	20	15	20
8	0	0.0	1	0.3	56	25, 50	10	20	15	20
9	0	0.0	3	0.3	56	25, 50	10	20	15	20
10	0	0.0	5	0.3	56	25, 50	10	20	15	20
11	0	0.0	8	0.3	56	25, 50	10	20	15	20
12	0	0.0	10	0.3	56	25, 50	10	20	15	20
13	0	0.3	0	0.3	56	25, 50	10	20	15	20
14	1	0.3	1	0.3	56	25, 50	10	20	15	20
15	3	0.3	3	0.3	56	25, 50	10	20	15	20
16	5	0.3	5	0.3	56	25, 50	10	20	15	20
17	8	0.3	8	0.3	56	25, 50	10	20	15	20
18	10	0.3	10	0.3	56	25, 50	10	20	15	20

de fluxo robusta (5.8)-(5.17). Estabeleceu-se um tempo de limite de 3600 segundos para os algoritmos BC do CPLEX v.12.8 e BPC para resolver as formulações de fluxo e particionamento de conjuntos, respectivamente.

As Tabelas 11, 12 e 13 apresentam, para cada configuração dos parâmetros robustos e para cada um dos algoritmos, os resultados médios em termos do valor do limitante superior da função objetivo (UB), número de rotas geradas (nR), número total de entregadores (nD) usados, distância total percorrida (Dist.), tempo de execução em segundos (Time), proporção de amostras que se mostraram ineficazes na simulação Monte-Carlo (%Prob.), preço da robustez (%PR), *gap* das soluções (%GAP) e o número de instâncias resolvidas até otimalidade (Nopt.) para as instâncias das classes C1-R1, RC1-C2 e R2-RC2, respectivamente. Em particular, uma coluna adicional é mostrada nos resultados do BPC relacionada ao limitante inferior do valor da função objetivo (LB). Optou-se por omitir a coluna Nopt. nos resultados da RHI1 devido a que ela não tem garantia de otimalidade. Por outro lado, a coluna %RG foi adicionada às informações da abordagem combinada com o intuito de mostrar o ganho adicional dela em relação as soluções da RHI1.

Há vários dados que precisam ser clarificados nessas tabelas. Por exemplo, os valores nas colunas %PR, referentes ao preço da robustez, foram determinados da seguinte maneira $\%PR = (z^{rob}/z^{det} - 1) \times 100$ em que z^{rob} corresponde ao valor da função objetivo quando é considerada robustez e z^{det} representa o valor da função objetivo do problema nominal ou determinístico. Dessa forma, %PR descreve o aumento relativo no valor da função objetivo dado pela preferência de ter uma solução avessa ao risco em detrimento à solução neutral ao risco. Por outro lado, o *gap* médio para cada um dos algoritmos foi determinado em base ao limitante inferior LB dado pelo algoritmo BPC como segue $(UB/LB - 1) \times 100$. Os valores da coluna %RG foram calculados como $(z^{RHI1}/z^{FFR} - 1) \times 100$, em que z^{RHI1} corresponde ao valor da função objetivo da solução dada pela RHI1 e z^{FFR} é o valor da função objetivo da solução encontrada pelo solver CPLEX v.12.8 após 3600 segundos de execução.

Em relação à coluna %Prob., seus valores, os quais representam o risco das soluções, foram

Config.	RHII-Classe C1				CPLEX e RHII-Classe C1				BPC-Classe C1																			
	UB	nV	nD	Dist	%Prob	%PR	%GAP	Time(s)	%Prob	%PR	%GAP	Time(s)	Dist	nV	nD	Dist	%Prob	%PR	%GAP	Nopt								
1	5.5375	5	5	374.7	100.0	0.0	0.1	5.5292	5	5	291.8	810.1	100.0	0.0	0.0	0.1	9	5.5292	5.5292	5	5	291.8	41.1	100.0	0.0	0.0	9	
2	6.6400	6	6	400.0	98.4	19.9	0.3	6.6356	6	6	355.7	3599.1	23.5	20.0	0.2	0.1	4	6.6351	6.6204	6	6	351.4	1739.9	68.3	20.0	0.2	7	
3	6.6467	6	6	467.4	1.3	20.0	0.1	6.6387	6	6	387.0	3599.1	2.4	20.1	0.0	0.1	3	6.6380	6.6380	6	6	380.0	33.6	2.5	20.1	0.0	9	
4	7.7451	7	7	451.2	0.0	39.9	0.1	7.7384	7	7	383.9	3598.6	0.0	40.0	0.0	0.1	8	7.7382	7.7382	7	7	381.9	61.5	0.0	40.0	0.0	9	
5	7.7451	7	7	451.0	0.0	39.9	0.1	7.7384	7	7	384.5	3598.1	0.0	40.0	0.0	0.1	7	7.7382	7.7382	7	7	381.9	12.4	0.0	40.0	0.0	9	
6	7.7451	7	7	451.0	0.0	39.9	0.1	7.7384	7	7	383.8	3597.5	0.0	40.0	0.0	0.1	7	7.7382	7.7382	7	7	381.9	12.3	0.0	40.0	0.0	9	
7	5.5375	5	5	374.7	16.6	0.0	0.1	5.5292	5	5	291.8	798.1	0.0	0.0	0.0	0.1	9	5.5292	5.5292	5	5	291.8	41.3	0.0	0.0	0.0	9	
8	5.5367	5	5	367.1	4.8	0.0	0.1	5.5292	5	5	291.9	904.1	0.0	0.0	0.0	0.1	9	5.5292	5.5292	5	5	291.8	53.2	0.0	0.0	0.0	9	
9	5.5824	5	5	379.2	0.0	0.8	1.0	5.5292	5	5	291.8	996.0	0.0	0.0	0.0	0.1	9	5.5292	5.5292	5	5	291.8	48.8	0.0	0.0	0.0	9	
10	5.5812	5	5	367.2	0.0	0.8	0.9	5.5292	5	5	291.9	1226.1	0.0	0.0	0.0	0.0	9	5.5292	5.5292	5	5	291.8	40.3	0.0	0.0	0.0	9	
11	5.5921	5	6	365.7	0.0	1.0	2.1	5.5292	5	5	291.8	1583.7	0.0	0.0	1.0	1.1	8	5.5292	5.4746	5	5	291.8	434.4	0.0	0.0	1.0	8	
12	5.5921	5	6	365.6	0.0	1.0	1.1	5.5292	5	5	291.8	1501.1	0.0	0.0	0.0	0.0	1.1	9	5.5292	5.5292	5	5	291.8	44.2	0.0	0.0	0.0	9
13	5.5375	5	5	374.7	100.0	0.0	0.0	5.5292	5	5	291.8	797.7	100.0	0.0	0.0	0.0	0.1	9	5.5292	5.5292	5	5	291.8	41.1	100.0	0.0	0.0	9
14	6.6428	6	6	427.8	97.7	20.0	0.4	6.6356	6	6	355.8	3598.6	60.1	20.0	0.3	0.1	4	6.6352	6.6131	6	6	352.2	1954.0	68.0	20.0	0.3	6	
15	6.6466	6	6	465.6	1.3	20.0	0.1	6.6389	6	6	389.4	3598.4	2.5	20.1	0.0	0.1	4	6.6382	6.6382	6	6	381.6	63.5	2.5	20.1	0.0	9	
16	7.7674	7	7	452.0	0.0	40.3	0.4	7.7384	7	7	383.6	3597.3	0.0	40.0	0.0	0.4	7	7.7382	7.7382	7	7	382.0	56.5	0.0	40.0	0.0	9	
17	7.7674	7	7	451.4	0.0	40.3	0.4	7.7389	7	7	389.0	3597.4	0.0	40.0	0.0	0.4	4	7.7382	7.7382	7	7	382.0	9.7	0.0	40.0	0.0	9	
18	7.7674	7	7	451.4	0.0	40.3	0.4	7.7385	7	7	385.4	3598.7	0.0	40.0	0.0	0.4	5	7.7382	7.7382	7	7	382.0	9.9	0.0	40.0	0.0	9	
Média	6.5339	6	6	413.2	23.3	18.0	0.5	6.5118	6	6	340.7	2477.8	16.0	17.8	0.1	0.4	7	6.5116	6.5065	6	6	338.4	261.0	19.0	17.8	0.1	8.7	

Config.	RHII-Classe R1				CPLEX e RHII-Classe R1				BPC-Classe R1																		
	UB	nV	nD	Dist	%Prob	%PR	%GAP	Time(s)	%Prob	%PR	%GAP	Time(s)	Dist	nV	nD	Dist	%Prob	%PR	%GAP	Nopt							
1	6.5415	5	12	581.4	84.0	0.0	15.6	6.0665	5	10	498.8	2999.7	65.5	0.0	7.2	7.8	4	5.6586	5.6586	5	9	503.0	25.9	66.8	0.0	0.0	12
2	6.5510	5	12	593.5	79.2	0.1	15.4	6.1519	5	10	518.9	2969.9	32.3	1.4	8.4	6.5	3	5.6744	5.6744	5	10	494.0	26.7	63.3	0.3	0.0	12
3	7.1196	6	12	612.3	2.2	8.8	23.4	6.5872	6	10	538.3	3001.5	1.6	8.6	14.2	8.1	3	5.7682	5.7682	5	10	515.0	38.0	7.9	1.9	0.0	12
4	7.1030	6	12	613.8	0.0	8.6	12.6	6.6038	6	10	538.0	2999.8	0.0	8.9	4.7	7.6	2	6.3103	6.3103	5	8	519.2	43.3	0.0	11.5	0.0	12
5	7.1708	6	12	624.9	0.0	9.6	13.6	6.6460	6	9	543.8	3001.8	0.0	9.6	5.3	7.9	3	6.3103	6.3103	5	8	519.2	47.3	0.0	11.5	0.0	12
6	7.1708	6	12	624.9	0.0	9.6	13.6	6.6713	6	10	546.1	3001.3	0.0	10.0	5.7	7.5	2	6.3103	6.3103	5	8	519.2	48.5	0.0	11.5	0.0	12
7	6.5415	5	12	581.4	100.0	0.0	15.6	6.0665	5	10	498.8	2999.7	65.5	0.0	7.2	7.8	3	5.6586	5.6586	5	9	503.0	26.7	100.0	0.0	0.0	12
8	6.9237	6	13	569.9	78.6	5.8	13.4	6.6466	6	10	549.5	2983.5	93.0	9.6	8.9	4.2	4	6.1037	6.1037	5	10	537.2	16.5	97.0	7.9	0.0	12
9	7.5659	6	14	575.3	20.5	15.7	15.9	7.0789	6	12	539.2	2853.1	27.3	16.7	8.4	6.9	4	6.5290	6.5290	5	11	539.9	9.2	38.5	15.4	0.0	12
10	7.7668	6	15	585.1	0.0	18.7	14.3	7.2872	6	12	538.7	2948.4	0.2	20.1	7.3	6.6	4	6.7939	6.7939	6	12	522.4	11.3	7.5	20.1	0.0	12
11	8.2107	7	16	607.4	0.0	25.5	19.1	7.6311	6	12	560.5	2999.2	0.0	25.8	10.7	7.6	3	6.8951	6.8951	6	12	534.3	12.1	0.0	21.9	0.0	12
12	8.2777	7	16	610.1	0.0	26.5	19.8	7.7800	6	13	549.7	2999.1	0.0	28.2	12.6	6.4	2	6.9118	6.9118	6	12	534.6	10.0	0.0	22.1	0.0	12
13	6.5415	5	12	581.4	100.0	0.0	15.6	6.0665	5	10	498.8	2999.7	65.5	0.0	7.2	7.8	2	5.6586	5.6586	5	9	503.0	25.7	100.0	0.0	0.0	12
14	6.8908	6	13	574.7	91.9	5.3	12.6	6.6705	6	10	538.7	2999.7	89.8	10.0	9.0	3.3	3	6.1202	6.1202	5	10	534.9	14.2	98.8	8.2	0.0	12
15	7.7338	6	14	587.8	13.1	18.2	14.4	7.1970	6	12	553.3	2846.1	22.0	18.6	6.4	7.5	4	6.7626	6.7626	6	11	543.0	17.0	37.6	19.5	0.0	12
16	7.9440	6	15	606.9	0.2	21.4	13.1	7.5168	6	13	584.0	2999.7	0.3	23.9	7.1	5.7	3	7.0211	7.0211	6	11	543.9	14.0	9.8	24.1	0.0	12
17	8.2203	7	15	619.4	0.0	25.7	16.5	7.8757	7	13	590.0	3000.3	0.0	29.8	11.6	4.4	2	7.0546	7.0546	6	12	546.0	17.0	0.0	24.7	0.0	12
18	8.2370	7	15	620.5	0.0	25.9	16.5	7.8257	6	14	590.2	3000.3	0.0	29.0	10.7	5.3	2	7.0713	7.0713	6	12	546.8	14.2	0.0	25.0	0.0	12
Média	7.3617	6	13	598.4	31.6	12.5	15.6	6.9094	6	11	543.1	2977.9	25.7	13.9	8.5	6.6	3	6.3674	6.3674	5	10	525.5	23.2	34.9	12.5	0.0	12

Tabela 11 – Resultados para as classes C1 e R1

Config.	RHII-Class RC1					CPLEX e RHII-Class RC1					BPC-Class RC1																
	UB	nV	nD	Dist	%Prob	%PR	%GAP	Time(s)	%Prob	%PR	%GAP	%RG	Nopt	UB	LB	nV	nD	Dist	Time(s)	%Prob	%PR	%GAP	Nopt				
1	7.2716	6	12	591.3	100.0	0.0	3.0	7.0944	6	10	569.2	3150.0	1000	0.0	0.5	2.5	4	7.0572	7.0572	6	10	571.8	115.6	100.0	0.0	0.0	8
2	8.7738	7	13	737.9	89.9	20.7	8.9	8.1277	7	11	651.9	3599.6	97.6	14.6	0.9	7.9	4	8.0547	8.0547	7	10	672.2	116.0	95.7	14.1	0.0	8
3	9.6224	8	15	848.7	1.3	32.3	6.5	9.1109	8	10	734.4	3599.8	0.5	28.4	0.8	5.6	1	9.0489	9.0374	8	10	739.2	971.7	0.5	28.2	0.1	7
4	10.4838	9	13	837.6	0.0	44.2	15.5	9.2745	8	11	745.0	3599.6	0.0	30.7	2.2	13.0	3	9.0868	9.0755	8	10	742.8	752.9	0.0	28.8	0.1	7
5	10.4838	9	13	837.6	0.0	44.2	15.5	9.3006	8	11	755.5	3599.1	0.0	31.1	2.5	12.7	1	9.0868	9.0755	8	10	742.8	764.6	0.0	28.8	0.1	7
6	10.4838	9	13	837.6	0.0	44.2	15.5	9.3251	8	11	750.9	3599.3	0.0	31.4	2.7	12.4	1	9.0868	9.0755	8	10	742.8	763.1	0.0	28.8	0.1	7
7	7.2716	6	12	591.3	100.0	0.0	3.0	7.0944	6	10	568.8	3150.0	1000	0.0	0.5	2.5	4	7.0572	7.0572	6	10	571.8	112.8	100.0	0.0	0.0	8
8	7.4831	6	14	580.9	81.4	2.9	3.3	7.2548	6	12	548.4	2721.3	85.7	2.3	0.2	3.1	5	7.2411	7.2411	6	12	536.2	18.2	85.8	2.6	0.0	8
9	7.8086	6	15	586.1	16.6	7.4	6.2	7.3666	6	13	541.2	3123.5	8.6	3.8	0.2	6.0	7	7.3540	7.3540	6	13	540.3	15.1	11.2	4.2	0.0	8
10	7.7692	6	16	574.5	0.0	6.9	5.5	7.4415	6	14	539.8	3149.9	0.1	4.9	1.0	4.4	5	7.3670	7.3670	6	13	545.4	11.0	0.1	4.4	0.0	8
11	7.7692	6	16	567.0	0.0	6.8	4.4	7.5287	6	15	536.7	3150.0	0.0	6.1	1.2	3.2	4	7.4414	7.4414	6	14	539.5	9.4	0.0	5.4	0.0	8
12	7.7944	6	16	568.5	0.0	7.2	4.6	7.6420	6	15	545.0	3150.1	0.0	7.7	2.5	2.0	3	7.4534	7.4534	6	14	534.3	9.6	0.0	5.6	0.0	8
13	7.2716	6	12	591.3	100.0	0.0	3.0	7.0946	6	10	570.9	3142.7	1000	0.0	0.5	2.5	3	7.0572	7.0572	6	10	571.8	115.0	100.0	0.0	0.0	8
14	9.3236	8	15	735.8	94.4	28.2	12.1	8.3648	7	13	647.7	3161.4	99.8	17.9	0.6	11.5	4	8.3151	8.3151	7	13	650.8	105.9	99.9	17.8	0.0	8
15	10.1545	8	17	794.5	4.9	39.6	6.6	9.6113	8	15	737.8	3152.8	1.4	35.5	0.9	5.7	0	9.5235	9.5235	8	15	734.9	243.2	5.8	34.9	0.0	8
16	10.7778	9	17	778.3	50.0	48.2	11.4	9.9376	8	16	750.8	3158.9	0.0	40.1	2.7	8.5	1	9.6747	9.6747	8	16	747.4	588.4	0.0	37.1	0.0	8
17	10.7774	9	17	773.5	25.1	48.2	11.5	10.0761	8	16	760.5	3176.7	0.0	42.0	4.3	7.0	2	9.6748	9.6627	8	16	748.2	738.0	0.0	37.1	0.1	7
18	10.7774	9	17	773.5	25.1	48.2	11.4	10.0635	8	16	760.0	3163.9	0.0	41.9	4.0	7.1	1	9.6871	9.6749	8	16	745.5	631.9	0.0	37.3	0.1	7
Média	9.0054	7	15	700.3	38.3	23.8	8.2	8.4283	7	13	650.8	3252.7	33.0	18.8	1.6	6.5	3	8.2927	8.2888	7	12	648.8	337.9	33.3	17.5	0.0	8

Config.	RHII-Class C2					CPLEX e RHII-Class C2					BPC-Class C2																
	UB	nV	nD	Dist	%Prob	%PR	%GAP	Time(s)	%Prob	%PR	%GAP	%RG	Nopt	UB	LB	nV	nD	Dist	Time(s)	%Prob	%PR	%GAP	Nopt				
1	5.5482	5	5	482.1	100.0	0.0	0.2	5.5361	5	5	360.8	1344.2	1000	0.0	0.0	0.2	8	5.5361	5.5361	5	5	360.8	18.1	100.0	0.0	0.0	8
2	6.6557	6	6	557.3	97.0	20.0	0.2	6.6413	6	6	413.3	3591.3	97.2	20.0	0.0	0.2	5	6.6411	6.6411	6	6	410.9	476.8	97.0	20.0	0.0	8
3	6.6586	6	6	586.0	1.4	20.0	0.2	6.6435	6	6	435.4	3559.6	2.3	20.0	0.0	0.2	6	6.6433	6.6433	6	6	433.2	11.3	2.2	20.0	0.0	8
4	7.7623	7	7	622.6	0.0	39.9	1.5	7.7468	7	7	468.2	3589.1	0.0	39.9	1.3	0.2	4	7.7466	7.6489	7	7	465.8	463.1	0.0	39.9	1.3	7
5	7.7624	7	7	624.2	0.0	39.9	0.2	7.7471	7	7	470.8	3589.1	0.0	39.9	0.0	0.2	2	7.7464	7.7464	7	7	464.5	7.4	0.0	39.9	0.0	8
6	7.7624	7	7	624.2	0.0	39.9	0.2	7.7471	7	7	471.4	3590.3	0.0	39.9	0.0	0.2	2	7.7464	7.7464	7	7	464.5	7.5	0.0	39.9	0.0	8
7	5.5482	5	5	482.1	0.0	0.0	0.2	5.5361	5	5	360.8	1349.8	12.3	0.0	0.0	0.2	8	5.5361	5.5361	5	5	360.8	18.4	12.3	0.0	0.0	8
8	5.5488	5	5	485.4	0.1	0.0	0.2	5.5361	5	5	360.9	1639.3	6.1	0.0	0.0	0.2	8	5.5361	5.5361	5	5	360.9	19.6	0.0	0.0	0.0	8
9	5.5488	5	5	487.7	0.0	0.0	0.2	5.5361	5	5	360.9	1782.1	0.0	0.0	0.0	0.2	8	5.5361	5.5361	5	5	360.9	21.3	0.0	0.0	0.0	8
10	5.5482	5	5	482.0	0.0	0.0	0.2	5.5361	5	5	360.9	1929.2	0.0	0.0	0.0	0.2	8	5.5361	5.5361	5	5	360.9	24.0	0.0	0.0	0.0	8
11	5.5482	5	5	482.0	0.0	0.0	0.2	5.5361	5	5	361.2	2193.4	0.0	0.0	0.0	0.2	8	5.5361	5.5361	5	5	360.9	20.2	0.0	0.0	0.0	8
12	5.5482	5	5	482.0	0.0	0.0	0.2	5.5361	5	5	361.1	2314.4	0.0	0.0	0.0	0.2	8	5.5361	5.5361	5	5	362.3	19.7	0.0	0.0	0.0	8
13	5.5482	5	5	482.1	100.0	0.0	0.2	5.5361	5	5	360.8	1348.6	100.0	0.0	0.0	0.2	8	5.5361	5.5361	5	5	360.8	18.6	100.0	0.0	0.0	8
14	6.6562	6	6	561.9	96.9	20.0	0.2	6.6414	6	6	413.7	3590.4	95.3	20.0	0.0	0.2	6	6.6412	6.6412	6	6	412.1	795.0	96.9	20.0	0.0	8
15	6.6590	6	6	589.9	1.5	20.0	0.2	6.6442	6	6	441.8	3589.0	2.6	20.0	0.0	0.2	4	6.6433	6.6433	6	6	433.2	10.8	2.3	20.0	0.0	8
16	7.7616	7	7	615.5	0.0	39.9	0.2	7.7471	7	7	471.0	3588.2	0.0	39.9	0.0	0.2	4	7.7464	7.7464	7	7	464.5	11.7	0.0	39.9	0.0	8
17	7.7612	7	7	611.7	0.0	39.9	0.2	7.7471	7	7	471.5	3588.9	0.0	39.9	0.0	0.2	3	7.7467	7.7467	7	7	466.6	5.8	0.0	39.9	0.0	8
18	7.7612	7	7	611.7	0.0	39.9	0.2	7.7473	7	7	472.5	3589.7	0.0	39.9	0.0	0.2	1	7.7464	7.7464	7	7	464.5	7.5	0.0	39.9	0.0	8
Média	6.5326	5.9	5.9	548.4	22.1	17.7	0.3	6.5190	6	6	412.1	2764.8	23.1	17.8	0.1	0.2	6	6.5187	6.5133	5.9	5.9	409.3	108.7	22.8	17.7	0.1	8

Tabela 12 – Resultados para as classes RC1 e C2

Config.	RHII-Class R2				CPLEX e RHII-Class R2				BPC-Class R2																						
	UB	nV	nD	Dist	%Prob	%PR	%GAP	%RG	Nopt	UB	LB	nV	nD	Dist	Time(s)	%Prob	%PR	%GAP	Nopt												
1	4.4667	4	4	667.1	100.0	0.0	0.6	4.4412	4	4	4	4	412.0	53.1	63.7	0.0	0.0	0.6	11	4.4412	4.4412	4	4	4	4	412.0	146.4	63.8	0.0	0.0	11
2	4.4683	4	4	683.2	99.8	0.0	0.6	4.4414	4	4	4	4	414.4	124.3	48.0	0.0	0.0	0.6	11	4.4414	4.4414	4	4	4	4	414.4	112.6	48.1	0.0	0.0	11
3	4.6687	4	4	687.2	16.5	4.5	5.1	4.4437	4	4	4	4	436.7	1981.0	9.3	0.1	0.0	5.1	8	4.4434	4.4434	4	4	4	4	434.2	371.4	5.5	0.0	0.0	11
4	5.5649	5	5	648.8	0.0	24.6	0.4	5.5455	5	5	5	5	455.2	3597.3	0.0	24.9	0.0	0.3	3	5.5446	5.5446	5	5	5	5	446.0	270.6	0.0	24.8	0.0	11
5	5.5670	5	5	670.2	0.0	24.6	0.4	5.5454	5	5	5	5	454.3	3597.9	0.0	24.9	0.0	0.4	4	5.5447	5.5447	5	5	5	5	446.8	122.7	0.0	24.8	0.0	11
6	5.5670	5	5	670.2	0.0	24.6	0.4	5.5450	5	5	5	5	449.7	3596.5	0.0	24.9	0.0	0.4	6	5.5447	5.5447	5	5	5	5	446.8	123.9	0.0	24.8	0.0	11
7	4.4667	4	4	667.1	45.4	0.0	0.6	4.4412	4	4	4	4	412.0	52.4	45.8	0.0	0.0	0.6	11	4.4412	4.4412	4	4	4	4	412.0	135.0	45.8	0.0	0.0	11
8	4.4781	4	4	690.4	15.5	0.3	2.5	4.4419	4	4	4	4	418.7	69.8	8.5	0.0	1.6	0.8	10	4.4425	4.3707	4	4	4	4	425.3	422.3	8.5	0.0	1.6	10
9	4.4956	4	4	682.8	0.0	0.6	1.2	4.4419	4	4	4	4	419.1	221.3	0.0	0.0	0.0	1.2	11	4.4425	4.4425	4	4	4	4	425.0	126.1	0.0	0.0	0.0	11
10	4.4932	4	4	659.5	0.0	0.6	1.2	4.4419	4	4	4	4	419.1	288.4	0.0	0.0	0.0	1.2	11	4.4425	4.4425	4	4	4	4	419.1	124.4	0.0	0.0	0.0	11
11	4.4749	4	4	657.8	0.0	0.2	2.4	4.4419	4	4	4	4	419.1	445.0	0.0	0.0	1.6	0.7	10	4.4427	4.3712	4	4	4	4	427.1	444.8	0.0	0.0	1.6	10
12	4.4749	4	4	658.5	0.0	0.2	0.7	4.4419	4	4	4	4	419.1	509.2	0.0	0.0	0.0	0.7	11	4.4419	4.4419	4	4	4	4	419.1	127.4	0.0	0.0	0.0	11
13	4.4667	4	4	667.1	100.0	0.0	0.6	4.4412	4	4	4	4	412.0	53.1	85.0	0.0	0.0	0.6	11	4.4412	4.4412	4	4	4	4	412.0	135.1	85.0	0.0	0.0	11
14	4.4699	4	4	699.2	99.7	0.1	1.8	4.4420	4	4	4	4	420.1	141.6	55.2	0.0	1.1	0.6	10	4.4425	4.3920	4	4	4	4	425.3	429.1	55.3	0.0	1.2	10
15	4.4706	4	4	705.7	15.2	0.1	0.6	4.4444	4	4	4	4	444.4	2110.9	7.9	0.1	0.0	0.6	8	4.4442	4.4442	4	4	4	4	442.1	563.0	5.6	0.1	0.0	11
16	5.5668	5	5	668.1	0.0	24.6	0.4	5.5459	5	5	5	5	459.0	3596.5	0.0	24.9	0.0	0.4	3	5.5458	5.5458	5	5	5	5	458.4	260.2	0.0	24.9	0.0	11
17	5.5674	5	5	674.0	0.0	24.6	0.4	5.5455	5	5	5	5	455.4	3596.8	0.0	24.9	0.0	0.4	4	5.5450	5.5450	5	5	5	5	450.3	162.3	0.0	24.9	0.0	11
18	5.5674	5	5	674.0	0.0	24.6	0.4	5.5459	5	5	5	5	458.8	3598.3	0.0	24.9	0.0	0.4	2	5.5450	5.5450	5	5	5	5	450.3	126.9	0.0	24.9	0.0	11
Média	4.8497	4	4	673.9	27.3	8.6	1.1	4.8099	4	4	4	4	432.2	1535.2	18.0	8.3	0.2	0.9	8	4.8098	4.7990	4	4	4	4	431.5	233.6	17.6	8.3	0.2	11

Config.	RHII-Class RC2				CPLEX e RHII-Class RC2				BPC-Class RC2																						
	UB	nV	nD	Dist	%Prob	%PR	%GAP	%RG	Nopt	UB	LB	nV	nD	Dist	Time(s)	%Prob	%PR	%GAP	Nopt												
1	6.6849	6	6	724.3	100.0	0.0	0.5	6.6519	6	6	6	6	518.6	24.4	100.0	0.0	0.0	0.5	8	6.6519	6.6519	6	6	6	6	518.6	28.2	100.0	0.0	0.0	8
2	7.7758	7	7	757.8	99.6	16.3	2.3	7.7623	7	7	7	7	623.5	3599.3	98.8	16.7	2.2	0.2	2	7.7624	7.5978	7	7	7	7	624.4	3448.7	98.9	16.7	2.2	2
3	8.8841	8	8	840.8	1.7	32.9	0.8	8.8691	8	8	8	8	691.4	3599.1	0.7	33.3	0.6	0.2	3	8.8690	8.8131	8	8	8	8	689.7	2847.1	0.8	33.3	0.6	3
4	9.3062	8	8	937.4	0.0	39.2	5.8	8.8723	8	8	8	8	722.8	3597.7	0.0	33.4	0.9	4.9	1	8.8720	8.7920	8	8	8	8	719.5	3267.7	0.0	33.4	0.9	1
5	9.3062	8	8	937.4	0.0	39.2	5.8	8.8724	8	8	8	8	724.1	3598.2	0.0	33.4	0.9	4.9	1	8.8718	8.7925	8	8	8	8	718.4	3257.7	0.0	33.4	0.9	1
6	9.3062	8	8	937.4	0.0	39.2	5.8	8.8726	8	8	8	8	726.5	3598.0	0.0	33.4	0.9	4.9	1	8.8720	8.7928	8	8	8	8	720.4	3164.2	0.0	33.4	0.9	1
7	6.6849	6	6	724.3	12.6	0.0	0.5	6.6519	6	6	6	6	518.6	25.1	25.1	0.0	0.0	0.5	8	6.6519	6.6519	6	6	6	6	518.6	29.0	32.9	0.0	0.0	8
8	6.6850	6	6	724.7	24.4	0.0	0.5	6.6520	6	6	6	6	519.9	31.9	0.4	0.0	0.0	0.5	8	6.6520	6.6520	6	6	6	6	519.9	26.6	0.5	0.0	0.0	8
9	6.7210	6	6	709.6	0.0	0.5	1.0	6.6520	6	6	6	6	520.1	60.0	0.0	0.0	0.0	1.0	8	6.6520	6.6520	6	6	6	6	520.1	41.2	0.0	0.0	0.0	8
10	6.7206	6	6	706.2	0.0	0.5	2.4	6.6520	6	6	6	6	520.1	111.7	0.0	0.0	1.4	1.0	7	6.6523	6.5623	6	6	6	6	523.2	38.2	0.0	0.0	1.4	7
11	6.7207	6	6	707.3	0.0	0.5	1.0	6.6520	6	6	6	6	520.1	160.4	0.0	0.0	0.0	1.0	8	6.6520	6.6520	6	6	6	6	520.1	33.7	0.0	0.0	0.0	8
12	6.7207	6	6	707.3	0.0	0.5	1.0	6.6520	6	6	6	6	520.1	169.0	0.0	0.0	0.0	1.0	8	6.6520	6.6520	6	6	6	6	520.1	30.5	0.0	0.0	0.0	8
13	6.6849	6	6	724.3	100.0	0.0	0.5	6.6519	6	6	6	6	518.6	24.9	100.0	0.0	0.0	0.5	8	6.6519	6.6519	6	6	6	6	518.6	29.3	100.0	0.0	0.0	8
14	7.7756	7	7	756.0	99.6	16.3	0.9	7.7625	7	7	7	7	624.7	3598.2	98.5	16.7	0.8	0.2	2	7.7624	7.7034	7	7	7	7	623.9	3362.1	98.5	16.7	0.8	2
15	8.8847	8	8	847.1	1.7	32.9	0.7	8.8693	8	8	8	8	693.2	3597.8	0.7	33.3	0.5	0.2	4	8.8693	8.8245	8	8	8	8	693.0	2894.5	0.8	33.3	0.5	4
16	9.1809	8	8	933.7	0.0	37.3	4.3	8.8728	8	8	8	8	727.8	3597.4	0.0	33.4	0.8	3.5	1	8.8722	8.8039	8	8	8	8	722.0	3251.6	0.0	33.4	0.8	2
17	9.1807	8	8	931.8	0.0	37.3	4.4	8.8729	8	8	8	8	728.6	3597.4	0.0	33.4	0.9	3.5	1	8.8719	8.7927	8	8	8	8	719.4	3268.6	0.0	33.4	0.9	1
18	9.1807	8	8	931.8	0.0	37.3	4.3	8.8728	8	8	8	8	727.9	3598.5	0.0	33.4	0.8	3.5	1	8.8723	8.8042	8	8	8	8	723.1	2828.1	0.0	33.4	0.8	2
Média	7.9113	7	7	807.7	24.4	18.3	2.4	7.7619	7	7	7	7	619.3	2032.7	23.6	16.7	0.6	1.8	4	7.7617	7.7135	7	7	7	7	617.4	1769.3	24.0	16.7	0.6	5

Tabela 13 – Resultados para as classes C2 e RC2

determinados por meio de uma simulação Monte-Carlo como segue: Geraram-se 10000 amostras aleatórias e independentes em que cada uma delas continham uma matriz de tempos de viagem e dois vetores relacionados ao tempo de serviço e demanda. O valor da componente (i, j) da matriz de tempos de viagem foi gerado uniformemente no intervalo $[\bar{t}_{ij} - \hat{t}_{ij}, \bar{t}_{ij} + \hat{t}_{ij}]$, o qual representa os valores extremos em que a variável aleatória \hat{t}_{ij} pode variar. Similarmente, os valores das componentes dos vetores tempos de serviço e demanda foram gerados uniformemente entre seus respectivos valores mínimos e máximos de variação, isto é, $\tilde{s}_i \in [\bar{s}_i - \hat{s}_i, \bar{s}_i + \hat{s}_i]$ e $\tilde{q}_i \in [\bar{q}_i - \hat{q}_i, \bar{q}_i + \hat{q}_i]$ para todo $i \in \mathcal{N}$. O risco de uma solução foi determinado por testar quantas das 10000 amostras geradas se tornaram infactíveis. A infactibilidade de uma amostra pode ser verificada facilmente por examinar as janelas de tempo dos clientes e do depósito e a capacidade dos veículos das rotas da solução usando a matriz de tempos de viagem e os vetores de tempo de serviço e demanda da amostra atual.

As Tabelas 11, 12 e 13 foram desenhadas de forma a avaliar três casos: 1): a demanda corresponde ao único parâmetro considerado incerto. Para esse caso, $\Gamma^{(t,s)} = 0$ e Γ^q é variado; 2): Os tempos de viagens e de serviço são considerados incertos, mas a demanda é representada por seu valor nominal. Então, nesse caso, $\Gamma^q = 0$ e $\Gamma^{(t,s)}$ varia; e 3) Os três parâmetros são considerados incertos. Portanto, ambos os parâmetros Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$ são variados. Independente da classe e do algoritmo usado para resolver o RVRPTWMD, os resultados nas tabelas mostram o seguinte:

Primeiro, os resultados da solução neutral ao risco ou problema nominal (solução com $\Gamma^q = \Gamma^{(t,s)} = 0$) tende a falhar com alta probabilidade, uma vez que nela o nível de risco atinge seu máximo valor e esse valor é alto em relação aos demais. Isso indica que quando for implementada essa solução, qualquer pequena variação nos parâmetros incertos do problema, poderia torná-la infactível.

Segundo, o risco da solução é significativamente melhorado pela abordagem robusta, isto é, quando $\Gamma^q > 0$ e $\Gamma^{(t,s)} > 0$, porém leva um aumento no valor da função objetivo, conforme pode ser visto pelos valores do %PR. Por essa razão, o preço da robustez %PR também pode ser visto como o menor custo relativo adicional que pode ser cobrado a um tomador de decisão por fornecer uma solução protegida contra as incertezas. Esses resultados evidenciam o potencial da abordagem RO estática para tratar com o *trade-off* custo-risco. Isso também é corroborado pelas curvas de *trade-off* ilustradas na Figura 3, para diferentes valores dos *budgets* de incertezas Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$, com $\Gamma^q = \Gamma^{(t,s)} = 0$ (configuração 1) e $\Gamma^q = \Gamma^{(t,s)} = 1, 3, 5, 8, 10$ (configurações 14-18). Essas curvas foram plotadas com os resultados do algoritmo BPC, contudo, a análise também é válida para os resultados dos algoritmos RHI1 e estratégia combinada. Dessas curvas é importante ressaltar as duas situações que resultam nos seus valores extremos; em $\Gamma^q = \Gamma^{(t,s)} = 0$, todos os parâmetros são representados pelo seu valor nominal/esperado, trazendo soluções totalmente desprotegidas contra as incertezas. Observe que nesse ponto, o risco em cada uma das curvas atinge seu valor máximo. No outro extremo, isto é, quando $\Gamma^q = \Gamma^{(t,s)} = 10$, todos os parâmetros são agora modificados também por um único valor correspondendo ao pior-caso, obtendo-se o método de Soyster cujas soluções estão totalmente protegidas contra as incertezas. Observe que nesse ponto o risco é 0, mas o preço da robustez, pelo contrário, alcança seu máximo valor. Dessa forma, as curvas da Figura 3 podem ser denominadas também de curvas de Pareto, uma vez que elas fornecem um conjunto de soluções ótimas, no qual a escolha de uma solução depende do quão averso ao risco é o decisor. Por exemplo, se o decisor é averso ao risco, então dela deve selecionar soluções localizadas à direita de cada curva, isto é, soluções nas quais os parâmetros Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$ assumem seus valores mais altos. Contrariamente, as soluções localizadas à esquerda de cada curva podem ser escolhidas pelo decisor que seja neutro ou

indiferente ao risco, pois nessas soluções os valores mais baixos são assumidos pelos parâmetros Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$.

Terceiro, nos problemas das classes C1, RC1, C2, R2 e RC2, o %PR atinge valores mais elevados quando o parâmetro Γ^q é variado, isto é, quando o caso 1) é considerado. Observe que o número de veículos é a parcela que mais contribui no aumento do %PR, pois, em geral, esse número aumenta quando comparado ao número de veículos da solução nominal. Por outro lado, fixando Γ^q em 0 e variando $\Gamma^{(t,s)}$, em geral, o número de veículos usados da solução determinística se mantêm. Porém, o número de entregadores ou a distância total percorrida aumenta. Como esses dois indicadores não representam um custo excessivo na função objetivo, então o aumento do %PR nesses casos não é o bastante para considerá-lo significativo. Em relação aos problemas da classe R1, sabe-se deles que tem um horizonte de planejamento curto, bem como janelas de tempo bastante apertadas. Então, ao perturbar o parâmetro $\Gamma^{(t,s)}$, existe uma chance muito alta de não atender os clientes seguindo a solução do problema nominal dentro as janelas de tempo. Por essa razão, a solução robusta aumenta ou o número de rotas ou o número de entregadores com o intuito de atender a todos os clientes dentro das janelas de tempo, trazendo um aumento significativo no %PR uma vez que essas duas alternativas são as mais caras. Daí, pode-se concluir que o %PR dos problemas dessa classe atinge valores mais altos quando o parâmetro $\Gamma^{(t,s)}$ varia.

5.8.1.2 Análise da heurística I1 robusta

Independente dos valores atribuídos aos parâmetros $[\Gamma^q, \Gamma^{(t,s)}]$, a RHI1 sempre determina uma solução factível robusta para o RVRPTWMD em um tempo de cômputo muito curto, menos de 1 segundo em média. Os *gap* da heurística foram determinados em relação ao limitante inferior LB dado pelo algoritmo BPC. Observe que a RHI1, em geral, não tem um bom comportamento quando os clientes estão aleatoriamente dispersos e, portanto, não existem rotas bem definidas. Isso pode ser visto pelos *gaps* médios relativamente altos nas instâncias das classes R1, RC1, R2 e RC2. Entretanto, para as instâncias das classes C1 e C2, a RHI1 consegue determinar soluções com o número de rotas geradas na solução ótima e simplesmente aumenta o número de entregadores ou a distância total percorrida e dado que isso representa as alternativas mais baratas na função objetivo do problema, o *gap* não é o bastante para considerá-lo significativo. Como mencionado antes, nas instâncias das classes C1 e C2, os clientes de cada rota estão bem definidos e, portanto, a RHI1 simplesmente define a sequência desses clientes, incorrendo apenas nas alternativas mais baratas na função objetivo, número de entregadores e distância total percorrida.

5.8.1.3 Análise da formulação de fluxo robusta

À luz dos resultados nas tabelas, pode-se observar que a estratégia combinada (CPLEX com RHI1 nas tabelas) foi capaz de melhorar significativamente as soluções fornecidas pela heurística I1 robusta nas instâncias das classes R1 e RC1. Em média, a estratégia combinada melhorou em 6.6% as soluções da RHI1. Esse ganho foi porque a abordagem de solução combinada, além de diminuir a distância, também reduz o número total de veículos e de entregadores usados. Devido à classificação lexicográfica dos custos na função objetivo do modelo, qualquer redução no número de rotas e entregadores pode reduzir significativamente o custo total. Já para as instâncias C1, C2, R2 e RC2, a abordagem combinada não foi capaz de melhorar significativamente as soluções da RHI1. A média dos ganhos foi menor a 1.0%, o que pode ser considerado pouco significativo dado que a abordagem combinada foi rodada durante

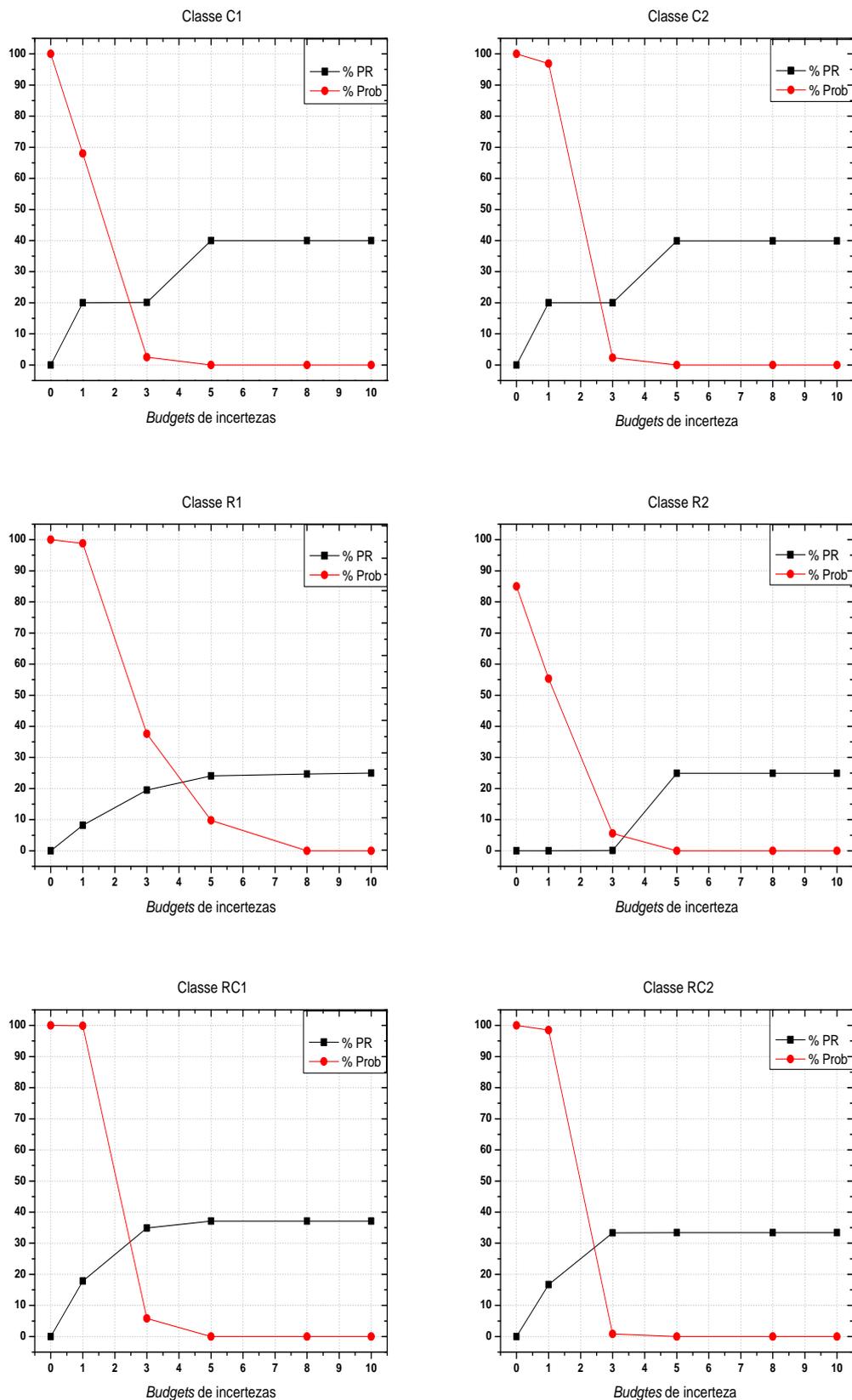


Figura 3 – Trade-off custo-risco de acordo com diferentes valores dos *budgets* de incertezas Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$, para $\Gamma^q = \Gamma^{(t,s)} = 0$ (configuração 1) e $\Gamma^q = \Gamma^{(t,s)} > 0$ (configurações 14-18) em todas as instâncias com 25 clientes de todas as classes resolvidas pelo algoritmo BPC

3600 segundos e a RHI1 encontrou a solução em menos de 1 segundo, em média. Para a maioria das instâncias, a abordagem heurística RHI1 consegue determinar o número de rotas ótima. A capacidade das instâncias C1, C2, R2 e RC2 levam a cobrir poucos clientes por rota. Além disso, as instâncias desta classe apresentam um horizonte de planejamento longo, o que indica que as esperas contribuem significativamente para a duração total da rota. Nesses casos, para melhorar uma solução dada pela RHI1, basta que o CPLEX realoque clientes entre as rotas sem a necessidade de usar mais de um entregador para respeitar as janelas de tempo. Por essa razão, o ganho nas instâncias dessas classes é pouco significativo, pois, apenas, está-se diminuindo a distância total percorrida e pela classificação lexicográfica do objetivo, qualquer melhoria na distância não impacta significativamente no valor do objetivo.

Em geral, a abordagem de solução combinada usada para resolver a formulação de fluxo robusta obteve um bom comportamento, apesar de ter levado um tempo médio excedendo os 2500 segundos para encontrar as soluções. Os *gaps* das soluções das instâncias da classe C1, C2, R2 e RC2 são insignificantes, dando um *gap* médio de aproximadamente 0.1%, 0.1%, 0.2% e 0.6%, respectivamente. Para as demais instâncias o *gap* médio foi de 5%. A estratégia combinada resolveu até otimalidade o 60% dos problemas usados para desenhar as Tabelas 11, 12 e 13. O 40% restantes dos problemas obtiveram um %GAP médio menor a 2%. A partir desse resultado, pode-se concluir que resolver a formulação compacta (5.8)-(5.17) por meio de um *solver* comercial de otimização resulta em uma alternativa atrativa e direta para gerar soluções robustas de qualidade do RVRPTWMD em instâncias de pequeno porte.

Experimentos computacionais adicionais foram realizados com o objetivo de também comparar o desempenho da estratégia combinada para resolver a formulação de fluxo robusta com o desempenho obtido pela mesma abordagem de solução na formulação de designação robusta do Capítulo 4. Para a realização desses experimentos numéricos foram usadas as mesmas instâncias do Capítulo 4. Convém lembrar que no Capítulo 4, apenas a demanda dos clientes foi considerada incerta. Portanto, os parâmetros $\Gamma^{(t,s)}$, δ^t e δ^s foram desconsiderados da formulação de fluxo robusta por simplesmente fazer $\Gamma^{(t,s)} = 0$ e $\delta^t = \delta^s = 0.0\%$. Em relação à formulação de designação robusta introduzida no Capítulo 4, a abordagem de solução combinada passou de fornecer um *gap* médio de 15.9% e 19.6% a 4.24% e 3.89% para a classe R1 com $\% \delta^q = 20$ e $\% \delta^q = 30$, respectivamente. Entretanto, os *gaps* médios na classe C1 passaram de 12.50% a 0.006% com $\% \delta^q = 20$ e de 13.20% a 0.007% com $\% \delta^q = 30$. Esses resultados revelam que a abordagem combinada referente a determinar uma solução robusta inicial para, então colocá-la como solução inicial no *solver* CPLEX v.12.8 obteve um melhor desempenho quando resolve a formulação de fluxo robusta do que a de designação robusta.

5.8.1.4 Análise do algoritmo *branch-price-and-cut*

Os resultados correspondentes ao algoritmo BPC das Tabelas 11, 12 e 13 ilustram que as instâncias da classe RC2 (com $\Gamma^q > 0$ e $\Gamma^{(t,s)} > 0$) representam as mais desafiantes para o algoritmo BPC. Em média, o algoritmo BPC tardou aproximadamente 3120 segundos para resolvê-las. De fato, há alguns problemas em que o algoritmo BPC não provou otimalidade (62 problemas de 144). Alguns clientes nas instâncias dessa classe estão dispersos e outros estão agrupados, levando a que existam muitas rotas com custos similares. Adicionalmente, as janelas de tempo dos clientes são bastante abertas nesta classe, o que também leva a que existam muitas rotas factíveis. Isso provoca o uso de mais *labels* no algoritmo *labeling* robusto e, portanto, bem mais comparações na regra de dominância robusta são feitas. Por outro lado, o algoritmo resolve otimamente todas as instâncias da classe R1 (216 problemas de 216) durante um tempo

médio de execução de apenas 23 segundos. O tempo médio de resolução para as instâncias da classe R1 exprime que elas são as mais fáceis para o algoritmo BPC. Contrariamente às instâncias das classes com clientes agrupados, os clientes das instâncias da classe sendo analisada estão distribuídos aleatoriamente, induzindo a ter poucas rotas com custo similar e dado que as janelas de tempo dos clientes são bastante apertadas, então há poucas rotas factíveis. Dessa forma, poucos *labels* são usados e menos comparações na regra de dominância robusta são realizadas.

Finalmente, o algoritmo BPC resolveu otimamente 930 problemas dos 1008 considerados com 25 clientes nos experimentos computacionais. Comparado aos 559 problemas resolvidos otimamente pela estratégia combinada, pode-se concluir que o algoritmo BPC foi o algoritmo que teve o melhor desempenho em termos da qualidade da solução, bem como em eficiência computacional. Em média, o algoritmo BPC foi 5 vezes mais rápido do que a estratégia combinada.

5.8.2 Resultados para os problemas com 50 clientes

A seguir, são apresentados os resultados numéricos relacionados aos problemas com 50 clientes. É importante salientar que esses experimentos foram apenas realizados para os algoritmos RHI1 e BPC. Aqui, omite-se a discussão que decorre ao impacto dos parâmetros Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$ nas decisões de roteamento, custo e risco, uma vez que os resultados apresentam um comportamento similar aos reportados na Subseção 5.8.1.1 associados aos problemas com 25 clientes. Por essa razão, optou-se por simplesmente discutir a qualidade das soluções obtidas por cada um dos algoritmos, bem como o tempo computacional requerido por eles para determinar as soluções. A Figura 4 mostra duas curvas, uma para a RHI1 e outra para o algoritmo BPC, relacionadas com os valores da função objetivo dos 1008 problemas considerados na realização dos experimentos numéricos. Observe dessas curvas que ainda o BPC é o algoritmo que determina soluções com o menor custo, porem requer, em media, um tempo muito maior (2237 segundos) para determiná-las. Entretanto, a RHI1 requer menos de 1 segundo, em média. Observe dessas curvas que apesar da RHI1 ser denominada pelo algoritmo BPC, ela fornece soluções tão boas como o algoritmo BPC para os problemas das classes C1, C2, R2 e RC2. Já para os problemas das classes R1 e RC1, o algoritmo BPC domina claramente a RHI1. Um total de 771 problemas de 1008 foram resolvidos otimamente pelo BPC, confirmando o bom desempenho computacional do algoritmo BPC para resolver de forma exata o problema.

5.9 Considerações finais

Nesse capítulo, abordou-se o RVRPTWMD com a demanda e os tempos de viagem e serviço incertos e pertencendo a um politopo de incerteza. As incertezas são levadas em conta usando uma abordagem de RO estática por meio do uso de uma estratégia combinada para resolver um programa inteiro-misto correspondente à formulação de fluxo robusta e um algoritmo BPC para resolver uma formulação baseada em particionamento de conjuntos. A abordagem combinada resulta de estender a heurística I1 de Solomon para o RVRPTWMD, de modo a gerar soluções robustas iniciais para o solver CPLEX v.12.8. À luz dos resultados, independente da abordagem usada para resolver o problema, a variação dos parâmetros Γ^q e $\Gamma^{(t,s)}$ impactam nas decisões de roteamento e sequenciamento, custo e risco. Esses resultados corroboram os obtidos em estudos prévios e, desse modo, conclui-se que a abordagem RO estática corresponde a uma ferramenta poderosa para considerar incertezas e bastante útil para lidar com

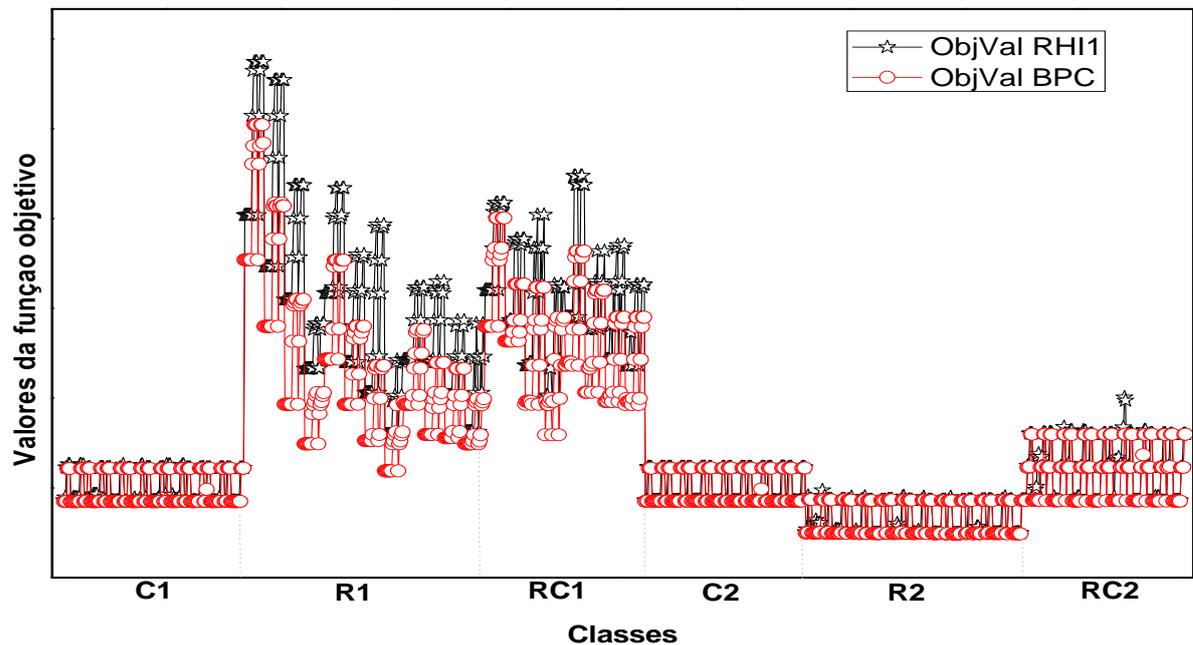


Figura 4 – Resultados para os problemas com 50 clientes, usando as abordagens de solução RHI1 e BPC

o compromisso existente entre custo e risco. Apesar dos altos tempos médios de resolução, as soluções obtidas pela estratégia combinada para resolver a formulação de fluxo robusta foram de boa qualidade, com *gaps* médios de 2%. Também, do estudo computacional, foi possível observar que essa abordagem combinada obteve melhores resultados quando usada para resolver a formulação de fluxo robusta, do que a formulação de designação robusta apresentada no Capítulo 4.

Por outro lado, o algoritmo BPC provou otimalidade para mais de 84% das instâncias consideradas na experimentação computacional e em tempos computacionais bem menores do que a estratégia combinada. Conclui-se que o algoritmo BPC resulta em uma estratégia efetiva para resolver de forma exata o RVRPTWMD em problemas com 25 e 50 clientes. Em ambientes práticos em que as decisões devem ser tomadas em tempo real, uma opção é a heurística RHI1, que determina soluções factíveis robustas ao problema em tempos de cálculos muito curtos. Uma perspectiva de pesquisa futura interessante é usar o conjunto de incerteza introduzido em Poss (2013), Poss (2014) para reduzir o grau de conservadorismo das soluções, conhecido como conjunto de incerteza *budgeted* variável. Outra pesquisa interessante corresponde ao uso de outras abordagens de tratamento de incertezas, como, por exemplo, programação estocástica dois estágios com recurso, bem como o desenvolvimento de métodos exatos baseados em decomposição de *Benders* e outros, o que é objeto do próximo capítulo.

Convém comentar que a extensão do presente método BPC para tratar o RVRPTWMD com frota heterogênea pode ser feito apenas com a inclusão de um índice do tipo veículo nas variáveis do modelo de particionamento de conjuntos, e a resolução do procedimento de programação dinâmica para cada tipo de veículo, além de para cada modo. Outra extensão interessante, porém, que envolve maiores mudanças

nas abordagens aqui propostas seria, considerar rotas de coleta e entrega de forma simultânea, que pode aparecer nas situações reais, como a distribuição de bebidas com embalagens retornáveis.

Capítulo 6

VRPTWMD ESTOCÁSTICO: FORMULAÇÃO DE FLUXO E ALGORITMO *L-shaped* INTEIRO

Este capítulo aborda o estudo do SVRPTWMD usando a abordagem de programação estocástica dois estágios com paradigma de recurso para tratar com a aleatoriedade da demanda dos clientes. Nessa abordagem de tratamento de incerteza, as decisões são tomadas em dois estágios de forma sequencial. As decisões de primeiro estágio correspondem à definição de um conjunto de rotas sob o suposto de que a realização da demanda aleatória dos clientes corresponde a uma estimativa representando o cenário de valor esperado. Após a demanda dos clientes tiver sido revelada, as decisões de recurso são tomadas no segundo estágio para direcionar as falhas nas rotas definidas previamente no primeiro estágio. Note que essa abordagem é diferente das abordagens de RO estática dos Capítulo 4 e 5, que não consideram decisões de recurso, e que também não consideram informação das distribuições de probabilidade das demandas dos clientes. Propõe-se um algoritmo *L-shaped* inteiro baseado em BB e decomposição de *Benders* para resolver o SVRPTWMD com demanda estocástica. Alguns experimentos computacionais são realizados usando as bem conhecidas instâncias de [Solomon](#), como nos capítulos anteriores, de modo a avaliar o desempenho computacional do algoritmo proposto.

6.1 Definição e formulação do SVRPTWMD

A demanda de cada cliente pode ser considerada incerta em configurações logísticas de coleta/entrega, em que ela é apenas conhecida quando o veículo chega no local do cliente ([BERTSIMAS, 1992](#); [LAPORTE et al., 2002](#)). Ignorar as incertezas na demanda dos clientes pode aumentar em demasia o custo operacional total, pois planos contingenciais, incorrendo em custos adicionais, precisam ser feitos de modo a recuperar a factibilidade das rotas ocasionadas pelas falhas que aparecem quando elas são percorridas ([GENDREAU et al., 2016](#)). As falhas são dadas quando, por exemplo, em uma rota de entrega, a carga de um veículo saindo do depósito não for suficiente para atender a demanda total da rota. Ou, similarmente, em uma situação de coleta, quando a capacidade do veículo não for suficiente para carregar todas as demandas dos clientes da rota. Nessas situações, decisões de recursos para direcionar as falhas são necessárias. Um dos recursos amplamente utilizados na literatura, e que também é usado nesta tese, corresponde a retornar ao depósito a partir do local do cliente onde ocorreu a falha, recarregar/descarregar o veículo e continuar a rota ([LAPORTE et al., 2002](#); [CHRISTIANSEN; LYSGAARD, 2007](#); [GAUVIN et al., 2014](#)).

Os tempos gastos pelos retornos ao depósito demandam tempos adicionais, alterando os horários de chegada aos clientes da rota ainda não visitados. Em consequência disso, é provável que alguns clientes da rota não possam ser mais atendidos dentro dos horários permitidos. Assim, usa-se um recurso adicional para direcionar essa situação, correspondendo à realização das atividades de coleta/entrega por viagens individuais separadas (realizadas por outros veículos contratados para isso), que geram um custo proporcional à distância total de uma viagem de ida e volta para o depósito. No que segue, usa-se ξ_i para denotar a demanda aleatória do cliente i com valor esperado $\mathbb{E}[\xi_i]$.

O custo incorrido nas ações contingenciais corresponde ao custo do recurso, determinado sob as seguintes suposições, como em [Lei et al. \(2011\)](#):

1. A demanda dos clientes são variáveis aleatórias independentes, cujas distribuições de probabilidade, sendo discretas, são conhecidas de ante-mão. Desse modo, para cada cliente i , a distribuição de probabilidade da demanda aleatória dele (ξ_i) é representada por meio de um número finito de realizações discretas g_i , como $\xi_i^1, \xi_i^2, \dots, \xi_i^{g_i}$, onde suas correspondentes probabilidades de ocorrência são expressadas como $p_i^1 = \mathbb{P}\{\xi_i = \xi_i^1\}, p_i^2 = \mathbb{P}\{\xi_i = \xi_i^2\}, \dots, p_i^{g_i} = \mathbb{P}\{\xi_i = \xi_i^{g_i}\}$.
2. As realizações da demanda dos clientes não excedem a capacidade Q dos veículos, isto é, $\mathbb{P}\{\xi_i \leq Q\} \cong 1$ para todo $i \in \mathcal{N}$.
3. Ao menos um retorno ao depósito pode ser realizado em qualquer rota. Isto indica que a probabilidade de incorrer em mais de uma falha é 0, ou, equivalentemente, $\mathbb{P}\{\sum_{i=1}^{n_r} \xi_i < 2Q\} \cong 1$, em que n_r indica o número de clientes em uma dada rota r .
4. Clientes cujas janelas de tempo forem violadas são servidos por viagens individuais separadas, que geram um custo proporcional à distância percorrida em uma viagem de ida e volta para o depósito.

Como mencionado antes, a programação estocástica dois estágios com recurso é a abordagem usada neste capítulo para lidar com a aleatoriedade da demanda dos clientes. Usando essa abordagem, as variáveis de decisão do problema são particionadas em decisões de primeiro e segundo estágio, conhecidas comumente na literatura como ações de recursos, decisões de recursos ou ações contingenciais (veja Apêndice A.1) ([KALL; WALLACE, 1994](#); [BIRGE; LOUVEAUX, 2011](#)). As variáveis de primeiro estágio ou cenário-independente são decisões que devem ser tomadas sem informação completa da demanda aleatória dos clientes. Entretanto, as decisões de segundo estágio ou cenário-dependente, são decisões corretivas que servem para ajustar as decisões de primeiro estágio para a demanda realizada em cada cenário. Seguindo a forma padrão da literatura, nesta tese, o conjunto de decisões de primeiro estágio corresponde à definição de um conjunto de rotas \mathcal{R} . As rotas no conjunto \mathcal{R} são definidas tais que o cenário de demanda esperada de cada rota não exceda a capacidade do veículo e o serviço em cada um dos clientes comece dentro os horários permitidos (janelas de tempo). O SVRPTWMD pode então ser formulado como um programa estocástico envolvendo as seguintes variáveis de decisão:

- x_{ij}^ℓ : variável binária que assume o valor 1 se e somente se existe uma rota operando no modo ℓ que visite o cliente j imediatamente após visitar o cliente i .
- w_i^ℓ : variável continua informando o instante exato em que o serviço inicia no cliente i por parte do veículo que o visita operando no modo ℓ .

Seja $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ o custo esperado do recurso. O modelo matemático, o qual usa a notação matemática definida em capítulos prévios, é dado por:

minimizar

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(0,j) \in \mathcal{A}} (p_1 + \ell p_2) x_{0j}^{\ell} + p_3 \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} d_{ij} x_{ij}^{\ell} + \mathcal{Q}(\mathbf{x}). \quad (6.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij}^{\ell} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{N}. \quad (6.2)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij}^{\ell} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (6.3)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij}^{\ell} = \sum_{(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji}^{\ell}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (6.4)$$

$$\left| \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}} \mathbb{E}[\xi_i]}{Q} \right| \leq \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{0j}^{\ell} \leq \mathcal{K}. \quad (6.5)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{j \in \mathcal{N}} \ell x_{0j}^{\ell} \leq \mathcal{D}. \quad (6.6)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(i,j) \in \delta(\mathcal{S})} x_{ij}^{\ell} \geq k(\mathcal{S}), \quad \mathcal{S} \subset \mathcal{N}, \quad 2 \leq |\mathcal{S}| \leq |\mathcal{N}| - 1. \quad (6.7)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[\xi_i] x_{ij}^{\ell} \leq Q \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{0j}^{\ell}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (6.8)$$

$$w_j^{\ell} \geq w_i^{\ell} + (s_i^{\ell} + t_{ij}) x_{ij}^{\ell} - \mathcal{M}_{ij}^{\ell} (1 - x_{ij}^{\ell}), \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (6.9)$$

$$w_i^a \leq w_i^{\ell} \leq w_i^b, \quad \forall i \in \mathcal{N} \cup \{n+1\}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (6.10)$$

$$x_{ij}^{\ell} \in \{0, 1\}, \quad (i,j) \in \mathcal{A}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (6.11)$$

O modelo (6.1)-(6.11) envolve todas as decisões de primeiro estágio que devem ser definidas otimamente para minimizar os custos associados com número de rotas (parcela 1), número de entregadores (parcela 2), custos de transporte incorridos pela distância total percorrida (parcela 3) e valor esperado dos custos acarretados pelas decisões de segundo estágio (parcela 4), definida na Seção 6.3. Na prática, os parâmetros p_1 , p_2 e p_3 são difíceis de serem estimados, portanto, é comum que eles definam uma priorização dos custos na função objetivo (PUREZA et al., 2012; De La VEGA et al., 2017). As restrições (6.2)-(6.4) definem as restrições de fluxo. Em particular, as restrições (6.2) e (6.3) indicam que todo cliente i deve ser visitado por um único veículo operando em único modo ℓ . Entretanto, as restrições (6.4) impõem ao veículo operando no modo ℓ sair do cliente i , seja indo para outro cliente ou para o depósito final $n+1$.

As restrições (6.5) impõem limitantes inferior e superior válidos no número de veículos na solução do SVRPTWMD. O limitante inferior corresponde ao limitante trivial do correspondente problema de

Bin-Packing, ao passo que o superior é simplesmente o número de veículos disponíveis no depósito. Observe que o limitante inferior é estimado em base a realização de valor esperado da demanda aleatória dos clientes. Já as restrições (6.6) garantem não usar mais entregadores dos disponíveis no depósito. As restrições (6.7) são discutidas adiantes. As restrições (6.8) são desigualdades específicas do VRPTWMD. Elas simplesmente agrupam os clientes das rotas da solução operando no modo ℓ e impõem que a soma das realizações de valor esperado das demandas não exceda a nova capacidade do veículo, determinada como o produto do número de rotas na solução operando no modo ℓ vezes a capacidade individual de veículo Q .

As restrições temporais são impostas em (6.9) e (6.10). Em particular, as restrições (6.10) garantem que as atividades de coleta/entrega iniciem dentro dos horários permitidos em cada um dos clientes, isto é, dentro das janelas de tempo. Essas restrições também são impostas para respeitar a jornada de trabalho dos operários (entregadores e motoristas), isto é, janela de tempo do depósito final $n + 1$. O parâmetro \mathcal{M}_{ij}^ℓ é um numero o suficientemente grande tal que a factibilidade seja garantida nas restrições (6.9). Neste estudo, determina-se esse parâmetro como $\max\{w_i^b - w_j^a, 0\}$.

As restrições (6.7) são conhecidas como desigualdades *k-path*, e foram primeiramente propostas em Kohl et al. (1999) para a variante do VRP com janelas de tempo. Depois elas foram generalizadas também para a mesma variante do VRP em Desaulniers et al. (2008). Dado um conjunto $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}$ de nós, o lado esquerdo corresponde ao fluxo, determinado em termos da variável x , entrando no conjunto \mathcal{S} , em que $\delta(\mathcal{S}) = \{(i, j) \in \mathcal{A} : i \in \bar{\mathcal{S}} \text{ e } j \in \mathcal{S}\}$. Essas desigualdades foram adaptadas e estendidas nesta tese para levar em consideração o modo de operação das rotas das soluções. Nelas, $k(\mathcal{S})$ corresponde a um parâmetro indicando o número mínimo de veículos necessários para atender todos os clientes em \mathcal{S} dentro das janelas de tempo e sem exceder a capacidade dos veículos. O procedimento de separação dessas desigualdades será explanado na seção imediatamente a seguir. Finalmente, a natureza binária das variáveis de fluxo x_{ij}^ℓ , para todo $(i, j) \in \mathcal{A}$ e $\ell = 1, \dots, \mathcal{L}$, é imposta nas restrições (6.11).

6.2 Desigualdades *k-path*

As desigualdades *k-path* são uma extensão das restrições de eliminação de sub-rotas para variantes do VRP definidos em grafos dirigidos. Para uma dada solução (\bar{x}, \bar{w}) do programa (6.1)-(6.11), seja $\bar{\mathcal{G}} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ o grafo induzido por \bar{x} , em que \mathcal{V} e $\mathcal{E} = \{(i, j) \in \mathcal{A} : \sum_{\ell} \bar{x}_{ij}^\ell > 0\}$ representam o conjunto de nós e arcos do grafo. Dado um subconjunto \mathcal{S} de \mathcal{N} , o fluxo entrando em \mathcal{S} é determinado como segue:

$$x(\mathcal{S}) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(i,j) \in \delta(\mathcal{S})} \bar{x}_{ij}^\ell, \quad (6.12)$$

em que $\delta(\mathcal{S})$ corresponde aos arcos em $\bar{\mathcal{G}}$ entrando no conjunto \mathcal{S} , como definido antes. Para um dado valor de $k(\mathcal{S})$, o procedimento de separação de (6.7) identifica todos os conjuntos \mathcal{S} tal que $x(\mathcal{S}) < k(\mathcal{S})$. Nesta tese, os valores atribuídos a $k(\mathcal{S})$ são 1 e 2. Quando $k(\mathcal{S})$ é igual a 1, a correspondente desigualdade *1-path* coincide com as restrições de eliminação de sub-rotas. No entanto, as desigualdades (6.7) também podem ser usadas para impor a capacidade dos veículos para todos os conjuntos \mathcal{S} de $\bar{\mathcal{G}}$ se $k(\mathcal{S})$ é determinado como $k(\mathcal{S}) = \left\lceil \frac{\sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbb{E}[\xi_i]}{Q} \right\rceil$. Adicionalmente, as desigualdades *k-path* também podem ser usadas para impor a suposição 3. da Seção 6.1, sendo que o parâmetro $k(\mathcal{S})$ é agora calculado como

$k(\mathcal{S}) = \left\lceil \frac{\sum_{i \in \mathcal{S}} \xi_i^{g_i}}{2Q} \right\rceil$. Observe que $\xi_i^{g_i}$, para todo $i \in \mathcal{S}$, corresponde ao valor máximo que pode assumir a demanda aleatória ξ_i .

Usa-se o valor ótimo do problema de corte mínimo (*min-cut*) para separar as desigualdades 1-*path*, originadas quando $k(\mathcal{S}) = 1$. O problema *min-cut* é resolvido usando o algoritmo de fluxo de *Push-Relabel* (GOLDBERG; TARJAN, 1988) disponível na biblioteca Concorde, que contém uma série de rotinas que trabalham dentro de um procedimento BC para resolver efetivamente o TSP. Para este caso, o valor ótimo do *min-cut* coincide com $x(\mathcal{S})$ e, se esse valor for estritamente menor do que o $\max \left\{ \left\lceil \frac{\sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbb{E}[\xi_i]}{Q} \right\rceil, \left\lceil \frac{\sum_{i \in \mathcal{S}} \xi_i^{g_i}}{2Q} \right\rceil \right\}$, então a desigualdade (6.7) é violada e, portanto, ela é imposta à formulação (6.1)-(6.11).

Para $k(\mathcal{S}) = 2$, obtêm-se as desigualdades 2-*path*. Os passos do procedimento de separação dessas desigualdades são listados a seguir:

- Passo 1. Determinação dos conjuntos \mathcal{S} : A heurística Greedy proposta em Kohl et al. (1999) é usada para gerar todos os conjuntos \mathcal{S} de $\bar{\mathcal{G}}$ tal que $x(\mathcal{S}) < 2$, no qual $x(\mathcal{S})$ representa o fluxo entrando no conjunto \mathcal{S} .
- Passo 2. Cálculo de $k(\mathcal{S})$ como o $\max \left\{ \left\lceil \frac{\sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbb{E}[\xi_i]}{Q} \right\rceil, \left\lceil \frac{\sum_{i \in \mathcal{S}} \xi_i^{g_i}}{2Q} \right\rceil \right\}$: Se $k(\mathcal{S}) \geq 2$, a desigualdade 2-*path* correspondente é violada e, portanto, procede-se a adicioná-la à formulação.
- Passo 3. Geração de uma solução factível para o TSPTW: Uma heurística construtiva é usada de modo a determinar uma solução factível ao TSP com janelas de tempo para os clientes em \mathcal{S} . A heurística aqui usada consiste simplesmente em ordenar os valores das variáveis \bar{w}_i^t na solução de menor a maior, para todo $i \in \mathcal{S}$. Em caso de sucesso por parte da heurística, isto é, é determinada uma solução factível ao TSPTW, conclui-se que a desigualdade 2-*path* correspondente não é violada. Caso contrário, isto é, se a heurística falhar na construção de uma solução factível para o TSPTW, o passo seguinte é resolver exatamente esse problema.
- Passo 4. Resolução exata do TSPTW: Este passo é explicado em uma subseção independente, apresentada a seguir.

6.2.1 Resolvendo exatamente o TSPTW

O algoritmo *labeling* bidirecional padrão baseado em programação dinâmica é usado para resolver exatamente o TSPTW. No Capítulo 5, apresentou-se em detalhes o algoritmo *labeling* robusto para resolver o problema do caminho mínimo robusto com restrições de recurso, subproblema *pricing* do algoritmo de geração de colunas. Para obter o algoritmo *labeling* padrão, basta desconsiderar as componentes do *label* associadas com os consumos probabilísticos carga e tempo. Adicionalmente, a robustez é também desconsiderada da regra de dominância e do estágio de junção dos *labels forward* e *backward*.

Para resolver o TSPTW com o algoritmo *labeling* padrão, os custos \tilde{c}_{ij} nos arcos $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \{(i, j) \in \mathcal{A} : i \in \mathcal{S} \cup \{0\}, j \in \mathcal{S} \cup \{n+1\} \text{ e } i \neq j\}$ são atribuídos de uma forma conveniente. Para cada arco $(i, j) \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, atribuiu-se o valor -1 ao custo \tilde{c}_{ij} e, então, resolve-se o problema do caminho mínimo com restrições de recurso entre os nós 0 e $n+1$. Seja z^* o valor ótimo do objetivo após resolver o RCESPP com o algoritmo *labeling* padrão. Se $z^* > -(|\mathcal{S}|+1)$, então o TSPTW é infactível e a desigualdade 2-*path* correspondente é violada. Assim, procede-se com a adição dessa desigualdade à formulação. Caso

contrário, a desigualdade *2-path* correspondente não é violada. Uma ideia similar foi usada em [Desaulniers et al. \(2008\)](#) para separar exatamente as desigualdades *2-path* generalizadas.

6.3 Cálculo do custo esperado de recurso

Nesta seção, apresenta-se o procedimento usado para determinar o custo de recurso esperado $Q(x)$ para uma dada solução x . Seja \mathcal{R} o conjunto de rotas associadas à solução de fluxo x . Uma rota r de \mathcal{R} operando no modo ℓ é representada por meio do vetor $(v_1 = 0, v_2, \dots, v_k, v_{k+1} = n + 1)$. Para um dado cliente v_i , para $i = 2, \dots, k$, seja q a capacidade residual do veículo ao chegar ao local dele ($\mathbb{E}[\xi_{v_{(i-1)}}] \leq q \leq Q$). Também, define-se \tilde{q} como a capacidade residual do veículo ao sair do cliente v_i . Diferentemente do q , \tilde{q} é uma variável aleatória, pois ela depende da variável aleatória ξ_{v_i} . Observe que $\tilde{q} = q - \xi_{v_i}$.

Quando o veículo chega ao local do cliente v_i com uma capacidade residual q , três casos mutuamente exclusivos podem ser observados.

Caso 1) A realização da demanda do cliente v_i é estritamente maior do que a capacidade residual q , isto é, $q - \xi_{v_i} < 0$. Neste caso, diz-se que uma falha do tipo 1 ocorreu e como recurso, deve-se realizar uma viagem de ida e volta ao depósito, voltando ao local do cliente v_i . O custo associado a esse recurso corresponde à distância total percorrida na viagem de ida e volta entre o local do cliente e o depósito, isto é, dos arcos $(v_i, n + 1)$ e $(0, v_i)$. Adicionalmente, atribui-se um custo adicional b a esse recurso uma vez que existe uma interrupção no serviço do cliente v_i ([YANG et al., 2000](#)).

Caso 2) A realização da demanda não excede a q , mas ela leva a que a capacidade residual caia no intervalo $0 \leq q - \xi_{v_i} < \mathbb{E}[\xi_{v_{(i+1)}}]$, em que $\mathbb{E}[\xi_{v_{(i+1)}}]$ representa a realização de valor esperado da demanda do cliente $v_{(i+1)}$. Esse tipo de falha é chamado de tipo 2 e a ação de recurso corresponde a uma viagem ao depósito saindo do cliente v_i , mas retornando ao cliente $v_{(i+1)}$ da rota. O custo associado a essa ação de recurso é também correspondente à distância total percorrida entre os arcos $(v_i, n + 1)$ e $(0, v_{(i+1)})$, desconsiderando o custo relacionado à distância do arco $(v_i, v_{(i+1)})$ que já não será mais percorrido. Dessa forma, o custo será $c_{v_i, n+1} + c_{0, v_{(i+1)}} - c_{v_i, v_{(i+1)}}$. Observe que neste caso a capacidade residual ao sair do cliente v_i pode assumir o valor 0 uma vez que está se assumindo que as realizações da demanda são discretas. Também, neste caso, apesar de não incorrer em falhas, isto é, quando $1 \leq q - \xi_{v_i} < \mathbb{E}[\xi_{v_{(i+1)}}]$, está-se fazendo uma viagem preventiva de ida e volta ao depósito. Isso poderia reduzir o custo esperado do recurso porque se está evitando as falhas do tipo 1, que são as mais caras.

Caso 3) A realização da demanda leva à capacidade residual do veículo ao sair do cliente v_i ser maior ou igual à demanda esperada do próximo cliente, isto é, $q - \xi_{v_i} \geq \mathbb{E}[\xi_{v_{(i+1)}}]$. Neste caso, não existe nenhum tipo de falha e, portanto, o veículo desloca-se diretamente ao local do cliente $v_{(i+1)}$.

Dependendo do tipo de falha no cliente v_i , a ação de recurso correspondente pode levar a que os clientes subsequentes da rota r não possam ser mais atendidos dentro dos horários permitidos, pois os tempos de chegada neles são agora alterados. Sejam $\mathcal{B}_{v_i}^1(q)$ e $\mathcal{B}_{v_i}^2(q)$ os conjuntos contendo os clientes cujas janelas de tempo foram violadas devido à uma falha dos tipos 1 e 2 por parte do veículo chegando com capacidade residual q no vértice v_i , respectivamente. A Proposição 6.3.1 mostra como são determinados os novos tempos de chegada nos clientes $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_{k+1})$ devido a uma falha do tipo 1 ou 2 no cliente v_i . Em seguida, a Proposição 6.3.2 é usada para determinar os conjuntos $\mathcal{B}_{v_i}^1(q)$ e

$\mathcal{B}_{v_i}^2(q)$. A provas dessas proposições seguem o mesmo raciocínio das apresentadas em [Lei et al. \(2011\)](#).

Proposição 6.3.1. Seja $w_{v_j}^\ell$ o tempo de chegada ao local do cliente v_j com janela de tempo $[w_{v_j}^a, w_{v_j}^b]$ da rota planejada r operando no modo ℓ . Seja $s_{v_j}^\ell$ o tempo de serviço no cliente v_j e $\tilde{w}_{v_j}(v_i)$ o novo tempo de chegada ao local do cliente v_j após aplicar a ação de recurso no cliente v_i . Então, o valor $\tilde{w}_{v_j}(v_i)$ pode ser encontrado como segue:

$$\tilde{w}_{v_j}(v_i) = \begin{cases} w_{v_j}^\ell, & \text{se } j = 1, \dots, i. \\ \zeta_{v_j}(v_i), & \text{se } j = i + 1. \\ \tau_{v_j}(v_i), & \text{se } j = i + 2, \dots, k + 1. \end{cases} \quad (6.13)$$

em que $\zeta_{v_j}(i)$ pode ser determinado como:

$$\zeta_{v_j}(v_i) = \begin{cases} \max \{w_{v_j}^a, \tilde{w}_{v_{(j-1)}}(v_i)\} + s_{v_{(j-1)}}^\ell + t_{v_{(j-1)}v_j} + 2t_{v_{(j-1)}(n+1)}, & \text{se } \tilde{w}_{v_{(j-1)}}(v_i) + 2t_{v_{(j-1)}(n+1)} \leq w_{v_{(j-1)}}^b, \\ \tilde{w}_{v_{(j-1)}}(v_i) + t_{v_{(j-1)}v_j} + 2t_{v_{(j-1)}(n+1)}, & \text{se } \tilde{w}_{v_{(j-1)}}(v_i) + 2t_{v_{(j-1)}(n+1)} > w_{v_{(j-1)}}^b, \end{cases} \quad (6.14)$$

se a falha é de tipo 1. E se a falha é do tipo 2, então $\zeta_{v_j}(i)$ é determinado como:

$$\zeta_{v_j}(v_i) = \tilde{w}_{v_{(j-1)}}(v_i) + s_{v_{(j-1)}}^\ell + t_{v_{(j-1)}(n+1)} + t_{0v_j}, \quad (6.15)$$

Finalmente,

$$\tau_{v_j}(v_i) = \begin{cases} \max \{w_{v_j}^a, \tilde{w}_{v_{(j-1)}}(v_i)\} + s_{v_{(j-1)}}^\ell + t_{v_{(j-1)}v_j}, & \text{se } \tilde{w}_{v_{(j-1)}}(v_i) \leq w_{v_{(j-1)}}^b, \\ \tilde{w}_{v_{(j-1)}}(v_i) + t_{v_{(j-1)}v_j}, & \text{Caso contrário,} \end{cases} \quad (6.16)$$

Demonstração. Para provar a proposição, consideram-se os seguintes três casos:

1. Até o local do cliente v_i da rota r (clientes $v_j, j = 1, \dots, i$), os tempos de chegada não são afetados pela falha no cliente v_i . Portanto, $\tilde{w}_{v_j}(v_i) = w_{v_j}^\ell$, para $j = 1, \dots, i$;
2. Em relação ao cliente $v_{(i+1)}$, se a falha é do tipo 1 e $\tilde{w}_{v_i}(v_i) + 2t_{v_i(n+1)} \leq w_{v_i}^b$, então o veículo não viola a janela de tempo do cliente v_i . Portanto, $\tilde{w}_{v_{(i+1)}}(v_i)$ é igual a $\max \{w_{v_{(i+1)}}^a, \tilde{w}_{v_i}(v_i)\}$, mais o tempo de serviço do cliente v_i no modo ℓ ($s_{v_i}^\ell$), o tempo de viagem entre os clientes v_i e $v_{(i+1)}$ ($t_{v_i v_{(i+1)}}$) e o tempo adicional incorrido pela viagem de ida e volta desde o cliente v_i e o depósito final $n + 1$ ($2t_{v_i(n+1)}$). Por outro lado, se $\tilde{w}_{v_i}(v_i) + 2t_{v_i(n+1)} > w_{v_i}^b$, com falha tipo 1, então o veículo não atenderá ao cliente v_i e procede diretamente ao cliente $v_{(i+1)}$. Logo, $\tilde{w}_{v_{(i+1)}}(v_i)$ é igual a $\tilde{w}_{v_i}(v_i)$, mais o tempo de viagem entre os clientes v_i e $v_{(i+1)}$ ($t_{v_i v_{(i+1)}}$) e o tempo adicional incorrido pela viagem de ida e volta desde o cliente v_i e o depósito final $n + 1$ ($2t_{v_i(n+1)}$).

Se a falha é do tipo 2, o veículo retornará ao depósito após visitar o cliente v_i e então procede diretamente ao cliente $v_{(i+1)}$. Então, $\tilde{w}_{v_{(i+1)}}(v_i)$ é igual a $\tilde{w}_{v_i}(v_i)$, mais o tempo de serviço do cliente v_i no modo ℓ ($s_{v_i}^\ell$), o tempo de viagem entre o cliente v_i e o depósito final $n + 1$ ($t_{v_i(n+1)}$) e o tempo de viagem partindo desde o depósito inicial 0 e o cliente $v_{(i+1)}$ ($t_{0v_{(i+1)}}$). Observe que o tempo de viagem $t_{v_i v_{(i+1)}}$ é desconsiderado na determinação do novo tempo de chegada do veículo no cliente $v_{(i+1)}$ quando a falha é do tipo 2, pois a viagem pré-planejada entre os clientes v_i e $v_{(i+1)}$ não é mais realizada.

3. Com respeito aos vértices após o vértice $v_{(i+1)}$ (clientes v_j , $j = 1, \dots, \kappa + 1$), se $\tilde{w}_{v_{(j-1)}}(v_i) \leq w_{v_{(j-1)}}^b$, para $j = i + 2, \dots, k, k + 1$, então o veículo pode visitar esses vértices dentro das suas janelas de tempo. Portanto, $\tilde{w}_{v_j}(v_i)$ é igual a $\max \left\{ w_{v_j}^a, \tilde{w}_{v_{(j-1)}}(v_i) \right\}$, mais o tempo de serviço do cliente $v_{(j-1)}$ no modo ℓ ($s_{v_{(j-1)}}^\ell$) e o tempo de viagem entre os vértices $v_{(j-1)}$ e v_j ($t_{v_{(j-1)}v_j}$). Caso contrário, o veículo não atenderá o vértice $v_{(j-1)}$ e, dessa forma, $\tilde{w}_{v_j}(v_i)$ é igual a $\tilde{w}_{v_{(j-1)}}(v_i)$ mais o tempo de viagem entre os vértices $v_{(j-1)}$ e v_j ($t_{v_{(j-1)}v_j}$).

□

Proposição 6.3.2. Sejam $\mathcal{B}_{v_i}^1(q)$ e $\mathcal{B}_{v_i}^2(q)$ os conjuntos como previamente definidos. Dependendo do tipo de falha e para um dado valor da capacidade residual q , com $\mathbb{E} \left[\xi_{v_{(i-1)}} \right] \leq q \leq Q$, esses conjuntos podem ser determinados como segue:

$$\mathcal{B}_{v_i}^1(q) = \left\{ v_j \mid \tilde{w}_{v_j}(v_i) > w_{v_j}^b \text{ e } q - \xi_{v_i} < 0, j = i, i + 1, \dots, k + 1. \right\} \quad (6.17)$$

$$\mathcal{B}_{v_i}^2(q) = \left\{ v_j \mid \tilde{w}_{v_j}(v_i) > w_{v_j}^b \text{ e } 0 \leq q - \xi_{v_i} < \mathbb{E} \left[\xi_{v_{(i+1)}} \right], j = i + 1, \dots, k + 1. \right\} \quad (6.18)$$

Demonstração. Para um dado valor de q e se $q - \xi_{v_i} < 0$, a falha é do tipo 1 e a Proposição 6.3.1 pode ser aplicada para determinar os novos tempos de chegada $\tilde{w}_{v_j}(v_i)$, para $j = 1, \dots, k + 1$. Conforme à Proposição 6.3.1, a ação de recurso apenas afeta o vértice v_i e os vértices após o vértice v_i . Portanto, o conjunto dos vértices da rota r cujas janelas de tempo foram violadas devido à falha tipo 1 pode ser construído pela fórmula (6.17). A derivação de (6.18) é similar, mas o recurso agora apenas afeta aos vértices após o vértice v_i ($j = i + 1, \dots, k, k + 1$), completando assim a prova. □

Observe que o conjunto $\mathcal{B}_{v_i}^1(q)$ pode obter o vértice onde a falha ocorreu, pois o retorno a ele pode ser dado fora do tempo de encerramento da sua janela de tempo. Da Proposição 6.3.1 se infere que os vértices subsequentes ao v_i não são atendidos pelo veículo que os visita se a chegada neles é dada fora dos tempos de encerramento das suas janelas de tempo. A suposição 4. da Seção 6.1 indica que eles são atendidos por uma viagem individual separada, gerando um custo Φ vezes a distância correspondente a uma viagem de ida e volta entre o depósito e eles.

Procede-se, agora, a determinar o custo esperado de recurso associado a uma falha no vértice v_i . Seja $F_{v_i}^r(q)$ o custo esperado de recurso de completar a rota r operando no modo ℓ iniciando no vértice v_i e finalizando no depósito final ($n + 1$), dado que o veículo chega nesse vértice com capacidade residual q . Então, $F_{v_i}^r(q)$ pode ser determinado como segue:

$$F_{v_i}^r(q) = \begin{cases} F_{v_{(i+1)}}^r(q), & \text{se } i = 1, \\ \mathbb{P} [q - \xi_{v_i} < 0] \left[b + 2c_{v_i(n+1)} + \Phi \sum_{v_j \in \mathcal{B}_{v_i}^1(q)} 2c_{0v_j} + F_{v_{(i+1)}}^r(Q - q - \xi_{v_i}) \right] + \\ \mathbb{P} [0 \leq q - \xi_{v_i} < \mathbb{E} [\xi_{v_{(i+1)}}]] \left[c_{v_i(n+1)} + c_{0v_{(i+1)}} - c_{v_i v_{(i+1)}} + \Phi \sum_{v_j \in \mathcal{B}_{v_i}^2(q)} 2c_{0v_j} + F_{v_{(i+1)}}^r(Q) \right] \\ + \mathbb{P} [q - \xi_{v_i} \geq \mathbb{E} [\xi_{v_{(i+1)}}]] \left[F_{v_{(i+1)}}^r(q - \xi_{v_i}) \right], & \text{se } i = 2, \dots, k. \\ 0, & \text{se } i = k + 1. \end{cases} \quad (6.19)$$

A expressão (6.19) leva em consideração os três casos mencionados e discutidos anteriormente, isto é, os casos em que há falhas do tipo 1, tipo 2 e onde não há nenhum tipo de falhas. Observe que $\mathbb{P}[q - \xi_{v_i} < 0]$, $\mathbb{P}[0 \leq q - \xi_{v_i} < \mathbb{E}[\xi_{v_{(i+1)}}]]$ e $\mathbb{P}[q - \xi_{v_i} \geq \mathbb{E}[\xi_{v_{(i+1)}}]]$ correspondem às probabilidades de ter falhas tipo 1, tipo 2 e não ter falhas, respectivamente. Uma vez que a variável aleatória ξ_{v_i} é representada com g_{v_i} realizações discretas $(\xi_{v_i}^1, \xi_{v_i}^2, \dots, \xi_{v_i}^{g_{v_i}})$, as probabilidades de falhas do tipo 1, 2 e de não ter nenhum tipo de falhas podem ser determinadas, respectivamente, como segue:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[q - \xi_{v_i} < 0] &= \sum_{\substack{\omega=1, \dots, g_{v_i} \\ q - \xi_{v_i}^\omega < 0}} p_{v_i}^\omega. \\ \mathbb{P}\left[0 \leq q - \xi_{v_i} < \mathbb{E}[\xi_{v_{(i+1)}}]\right] &= \sum_{\substack{\omega=1, \dots, g_{v_i} \\ 0 \leq q - \xi_{v_i}^\omega < \mathbb{E}[\xi_{v_{(i+1)}}]}} p_{v_i}^\omega. \\ \mathbb{P}\left[q - \xi_{v_i} \geq \mathbb{E}[\xi_{v_{(i+1)}}]\right] &= \sum_{\substack{\omega=1, \dots, g_{v_i} \\ q - \xi_{v_i}^\omega \geq \mathbb{E}[\xi_{v_{(i+1)}}]}} p_{v_i}^\omega. \end{aligned}$$

Os termos multiplicando essas probabilidades na expressão (6.19) correspondem aos custos associados às ações de recursos realizadas para direcionar as falhas. Observe que $F_{v_i}^r(q)$ acumula o valor do custo esperado de recurso no vértice $v_{(i+1)}$. O custo total esperado da rota r no modo ℓ corresponde a $F_{v_1}^r(Q)$, no qual o veículo inicia seu percurso desde o depósito inicial 0 cheio (com carga Q) e é calculado recursivamente. Finalmente, o custo total esperado de recurso da solução \mathcal{R} é determinado como $\mathcal{Q}(x) = \sum_{r=1}^{|\mathcal{R}|} F_{v_1}^r(Q)$ (parcela 4 da função objetivo (6.1)).

6.4 Um algoritmo *L-shaped* inteiro

Neste estudo, usa-se um algoritmo *L-shaped* inteiro para resolver o SVRPTWMD com demanda estocástica. Esse algoritmo é simplesmente uma decomposição de *Benders* aplicada à formulação estocástica (6.1)-(6.11). Na Subseção 6.4.1, apresenta-se, resumidamente, o funcionamento do algoritmo *L-shaped* inteiro proposto. Em seguida, na Subseção 6.4.2, descreve-se brevemente os limitantes inferiores funcionais (abrev. em Inglês LBFs - *Lower Bound Functionals*) baseados em rotas parciais gerais introduzidas em Jabali et al. (2014). Finalmente, na Subseção 6.4.3, desenvolve-se um procedimento para determinar limitantes inferiores do custo esperado de recurso específicos para a política de recurso considerada, posteriormente usado nos LBFs.

6.4.1 Descrição do algoritmo *L-shaped* inteiro

O algoritmo *L-shaped* inteiro baseado em decomposição de *Benders* aplica um procedimento BC à relaxação de programação linear (abrev. em Inglês LP - *Linear Programming*) da formulação (6.1)-(6.11), em que a função de valor esperado ou de recurso $\mathcal{Q}(x)$ é limitada inferiormente pela variável contínua Θ . As desigualdades *k-path* (6.7), que atuam como restrições de eliminação de sub-rotas e de capacidade dos

veículos, bem como do atendimento da Suposição 3. da Seção 6.1, são geradas dinamicamente conforme elas forem encontradas violadas e a integralidade é gradualmente coberta por ramificar as variáveis com valores fracionários. Também, cortes de factibilidade, dados pelos LBFs, e de otimalidade são gerados dinamicamente na árvore de busca BC. Na iteração 0 do algoritmo, o problema atual é como segue:

minimizar

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} (p_1 + \ell p_2) x_{0j}^{\ell} + p_3 \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} d_{ij} x_{ij}^{\ell} + \Theta. \quad (6.20)$$

sujeito a:

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij}^{\ell} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{N}. \quad (6.21)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij}^{\ell} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (6.22)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij}^{\ell} = \sum_{(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji}^{\ell}, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (6.23)$$

$$\left| \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}} \mathbb{E}[\xi_i]}{Q} \right| \leq \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{0j}^{\ell} \leq \mathcal{K}, \quad (6.24)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{j \in \mathcal{N}} \ell x_{0j}^{\ell} \leq \mathcal{D}, \quad (6.25)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[\xi_i] x_{ij}^{\ell} \leq Q \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{0j}^{\ell}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (6.26)$$

$$w_j^{\ell} \geq w_i^{\ell} + (s_i^{\ell} + t_{ij}) x_{ij}^{\ell} - \mathcal{M}_{ij}^{\ell} (1 - x_{ij}^{\ell}), \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (6.27)$$

$$w_i^a \leq w_i^{\ell} \leq w_i^b, \quad \forall i \in \mathcal{N} \cup \{n+1\}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (6.28)$$

$$\Theta \geq L. \quad (6.29)$$

$$x_{ij}^{\ell} \in [0, 1], \quad (i,j) \in \mathcal{A}, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (6.30)$$

em que L na restrição (6.29) corresponde a um limitante inferior geral válido do custo esperado do recurso $\mathcal{Q}(x)$, isto é, $L \leq \min_x \{ \mathcal{Q}(x) \}$. Observe que na iteração 0, o problema atual coincide com um LP, obtido ao relaxar as desigualdades k -path, a integralidade das variáveis de fluxo e a função de valor esperado $\mathcal{Q}(x)$ da formulação (6.1)-(6.11). O algoritmo procede por adicionar três tipos de cortes durante o procedimento de busca BC até que a otimalidade seja garantida ou até que algum critério de parada seja atingido, sendo eles desigualdades k -path, LBFs e cortes de otimalidade.

As desigualdades k -path são gradualmente adicionadas quando detectadas, usando o procedimento de separação descrito na Seção 6.2. Ressaltando que essas desigualdades podem ser usadas para evitar sub-rotas, atendimento da capacidade dos veículos e impor a Suposição 3. da Seção 6.1 (no máximo uma falha por rota). Tipicamente, as desigualdades 1-path podem ser adicionadas em todos os nós da

árvore BC. Contudo, optou-se por adicioná-las apenas, caso forem encontradas desigualdades desse tipo violadas, no nó raiz da árvore. Também, optou-se por apenas adicionar as desigualdades *2-path* no nó raiz, diferentemente das desigualdades *k-path* para impor a capacidade dos veículos e a Suposição 3. da Seção 6.1, adicionadas dinamicamente quando detetadas em todos os nós inteiros do procedimento BC.

As desigualdades válidas

$$L + (\hat{\Theta}_a - L)W_a^\ell(x) \leq \Theta, \forall a \in \{\alpha, \beta, \gamma\}, \quad (6.31)$$

as quais são elaboradas na Subseção 6.4.2, são adicionadas quando encontradas. Nelas, $\hat{\Theta}_a$ é um limitante inferior válido na variável Θ e $W_a^\ell(x)$ é o funcional em termos da variável de fluxo x em um dado modo ℓ . O sub-índice a indica topologias de rotas parciais encontradas na solução de fluxo x . E, finalmente, os cortes de otimalidade:

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{\substack{(i,j) \in \mathcal{A} \\ \bar{x}_{ij}^\ell = 1}} (1 - x_{ij}^\ell) + \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{\substack{(i,j) \in \mathcal{A} \\ \bar{x}_{ij}^\ell = 0}} x_{ij}^\ell \geq 1, \quad (6.32)$$

são adicionados quando soluções factíveis inteiras forem encontradas visando evitar revisitá-las. Finalmente, como mencionado antes, o requerimento da integralidade das variáveis de fluxo x_{ij}^ℓ é garantido via o processo de ramificação nelas quando assumirem valores fracionários. Os passos do algoritmo *L-shaped* inteiro são detalhados no Algoritmo 3.

O algoritmo *L-shaped* inteiro foi primeiramente introduzido em Gendreau et al. (1995) para resolver o VRP capacitado com presença de clientes estocástica e demanda estocástica. Nesse trabalho, cortes de factibilidade combinatórios são adicionados dinamicamente ao algoritmo quando encontrados. No entanto, esses cortes apenas cortam ou excluem uma única solução inteira, o que pode ser ineficiente quando o número de soluções inteiras a serem geradas durante o procedimento BC for demasiado elevado. Por essa razão, Hjorring e Holt (1999) introduziram o conceito de LBFs baseados em rotas parciais que trabalham em um espaço de soluções ao invés de uma única solução. Esse conceito de LBFs foi primeiramente usado para resolver o VRP com único veículo e demanda estocástica. Laporte et al. (2002) estenderam o conceito de LBFs para o VRP com múltiplos veículos e demanda estocástica. Em Jabali et al. (2014), estendeu-se a estrutura da rota parcial proposta em Laporte et al. (2002), originando três topologias diferentes de rotas parciais (α , β e γ), as quais, por sua vez, originaram diversas famílias de LBFs. Nesta tese, usa-se os LBFs introduzidos em Jabali et al. (2014), os quais são estendidos ao SVRPTWMD com demanda estocástica de modo a levar em consideração o modo de operação dos veículos. Adicionalmente, propõe-se um procedimento para determinar um limitante inferior no custo esperado de recurso específico para rotas parciais seguindo as topologias α , β e γ .

6.4.2 Rotas parciais gerais

Esta subseção está baseada em Jabali et al. (2014). Seja $\bar{\mathcal{G}}$ o grafo induzido pelas variáveis não nulas da solução fracionária \bar{x} . Uma rota parcial pode ser definida como uma sequência alternada de componentes sequenciadas e não-sequenciadas. Em particular, as componentes sequenciadas são denominadas de cadeias. Três topologias diferentes de rotas parciais foram introduzidas em Jabali et al. (2014) (α , β e γ). A topologia α é composta por duas cadeias e uma única componente não-sequenciada (veja Figura 5). Entretanto, a β apresenta uma estrutura em três cadeias e duas componentes

Algorithm 3: Algoritmo *L-shaped* inteiro**Entrada:** Instância do problema (6.20)-(6.30) e parâmetros.**Saída:** Solução.**1 Passo 0:**

Fixe o índice das iterações e o limitante superior inicial:

$$v \rightarrow 0$$

$$\bar{z} \rightarrow +\infty$$

2 Coloque o problema atual na lista de nós não explorados ($lista_{PN}$).**3 Passo 1:**

Verifique a lista de nós não explorados.

4 SE $lista_{PN}$ é vazia ENTÃO

PARE

5 FIM SE**6 Passo 2:**

Aumente o índice de iterações e resolva o problema atual (CP) otimamente.

$$v \rightarrow v + 1$$

7 Seja (x^v, Θ^v) a solução ótima do CP.**8 Passo 3:**SE o nó atual corresponde ao nó raiz e (x^v, Θ^v) é fracionária ENTÃO

Verifique qualquer violação de (6.7).

Se existirem, gere os cortes 1- e 2-*path* correspondentes e volte ao **Passo 2**.**9** FIM SE**10 Passo 4:**SE (x^v, Θ^v) é fracionário ENTÃO

Verifique qualquer violação dos cortes de factibilidade (6.31).

Se existirem, gere os cortes LBFs, agregue-os ao CP e volte ao **Passo 2**.

FIM SE

11 Passo 5:SE (x^v, Θ^v) é inteiro ENTÃO

Verifique qualquer violação das desigualdades (6.7) para impor a capacidade dos veículos e suposição 3.

Se existirem, gere os cortes *k-path* correspondentes, agregue-os ao CP e volte ao **Passo 2**.

FIM SE

12 Passo 6:Verifique qualquer violação no requerimento de integralidade da solução (x^v, Θ^v) .Se existirem, gere os subproblemas *branching*, adicione-os na lista de nós não explorados $lista_{PN}$ e volte ao **Passo 1**.**13 Passo 7:**

Verifique por uma nova solução inteira incumbente

Calcule $Q(x^v)$

$$z^v \rightarrow cx^v + Q(x^v)$$

SE $z^v < \bar{z}$ ENTÃO

$$\bar{z} \rightarrow z^v$$

FIM SE

14 Passo 8:

Verifique cortes de otimalidade

SE $\Theta^v \geq Q(x^v)$ ENTÃO

Elimine o nó atual

Volte ao **Passo 1**

SENÃO

Imponha o corte de otimalidade (6.32)

FIM SE

não-sequenciadas. Por sua parte, rotas parciais seguindo a topologia γ são generalizações das duas anteriores, com e cadeias e $e - 1$ componentes não-sequenciadas. Da Figura 5, pode-se observar que as cadeias correspondem a um grupo de nós com uma ordem pré-estabelecida, ao passo que a componente não-sequenciada é um conjunto de nós cuja ordem de visita pode ser dada por qualquer sequência ou permutação desses nós nessa componente.

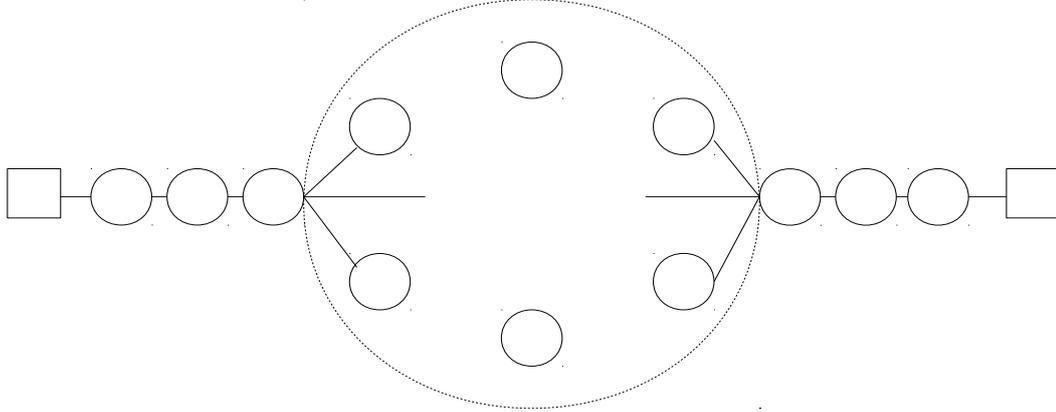


Figura 5 – Rota parcial seguindo a topologia α .

Por simplicidade, usa-se a rota parcial com estrutura α para o desenvolvimento do funcional $W_a^\ell(x)$, porque essa topologia é a usada na realização dos experimentos numéricos. Contudo, esse funcional é também válido para as demais topologias de rotas parciais. Seja h uma rota parcial operando no modo ℓ seguindo a topologia α . Um funcional $W_a^\ell(x)$ não é mais que uma expressão em termos das variáveis de fluxo x_{ij}^ℓ associadas aos arcos da rota parcial h . No que segue, desconsidera-se o índice a no funcional $W_a^\ell(x)$, pois sabe-se que $a = \alpha$. Contudo, o índice h é anexado a ele, simplesmente para evidenciar o índice da rota parcial h no funcional. Assim, o funcional é agora denotado como $W_h^\ell(x)$.

Sejam $\mathcal{S}_h = (s_1 = 0, s_2, \dots, s_{|\mathcal{S}_h|})$ e $\mathcal{T}_h = (t_1, t_2, \dots, t_{|\mathcal{T}_h|} = n + 1)$ os conjuntos definindo as cadeias da rota parcial h , e $\mathcal{U}_h = \{u_1, u_2, \dots, u_{|\mathcal{U}_h|}\}$ o conjunto de nós definindo a componente não-sequenciada de h . Em particular, os nós ou vértices $s_{|\mathcal{S}_h|}$ e t_1 são denominados de vértices de articulação, os quais conectam as cadeias com a componente não-sequenciada \mathcal{U}_h . Com os conjuntos \mathcal{S}_h , \mathcal{U}_h e \mathcal{T}_h , a rota parcial h pode ser ilustrada como $\mathcal{S}_h - \mathcal{U}_h - \mathcal{T}_h$. É importante ressaltar que s_1 em \mathcal{S}_h e $t_{|\mathcal{T}_h|}$ em \mathcal{T}_h representam os depósitos inicial e final, respectivamente. Para as cadeias \mathcal{S}_h e \mathcal{T}_h , as seguintes relações se mantêm:

$$\sum_{(s_i, s_j) \in \mathcal{S}_h} x_{ij}^\ell = |\mathcal{S}_h| - 1, \quad (6.33)$$

$$\sum_{(t_i, t_j) \in \mathcal{T}_h} x_{ij}^\ell = |\mathcal{T}_h| - 1, \quad (6.34)$$

Para a componente \mathcal{U}_h , a relação a seguir é verdadeira:

$$\sum_{u_i, u_j \in \mathcal{U}_h} x_{ij}^\ell = |\mathcal{U}_h| - 1, \quad (6.35)$$

E para os vértices de articulação $s_{|\mathcal{S}_h|}$ e t_1 , as relações a seguir são também verdadeiras:

$$\sum_{u_j \in \mathcal{U}_h} x_{s_{|\mathcal{S}_h|},j}^\ell = 1, \quad (6.36)$$

$$\sum_{u_i \in \mathcal{U}_h} x_{i,t_1}^\ell = 1, \quad (6.37)$$

Com as expressões (6.33)-(6.37) e dado que a rota parcial h opera no modo ℓ , o funcional introduzido em Jabali et al. (2014), denotado aqui como $W_h^\ell(x)$, pode ser escrito como segue:

$$\begin{aligned} W_h^\ell(x) = & \sum_{(s_1, s_j) \in \mathcal{S}_h} x_{0j}^\ell + \sum_{\substack{(s_i, s_j) \in \mathcal{S}_h \\ s_i \neq s_1}} 3x_{ij}^\ell + \sum_{u_j \in \mathcal{U}_h} 3x_{s_{|\mathcal{S}_h|},j}^\ell + \sum_{u_i, u_j \in \mathcal{U}_h} 3x_{ij}^\ell \\ & + \sum_{u_i \in \mathcal{U}_h} 3x_{it_1}^\ell + \sum_{\substack{(t_i, t_j) \in \mathcal{T}_h \\ t_j \neq t_{|\mathcal{T}_h|}}} 3x_{ij}^\ell + \sum_{(t_i, t_{|\mathcal{T}_h|}) \in \mathcal{T}_h} x_{i,n+1}^\ell - 3(|\mathcal{P}_h| - 5) \end{aligned} \quad (6.38)$$

em que $\mathcal{P}_h = \mathcal{S}_h \cup \mathcal{U}_h \cup \mathcal{T}_h$. Em Laporte et al. (2002) também foi proposto um funcional para rotas parciais seguindo a topologia α . Contudo, optou-se por usar o funcional (6.38) porque ele também pode ser usado para as demais topologias, diferentemente do funcional em Laporte et al. (2002), que apenas é válido para rotas parciais α . Com o funcional (6.38), a prova de que a desigualdade (6.31) é válida pode ser encontrada em Jabali et al. (2014).

Apesar de ter definido as três diferentes topologias de rotas parciais, os experimentos numéricos, apresentados na Seção 6.5, são realizados apenas com rotas parciais com estrutura α . Para encontrar rotas parciais seguindo essa topologia, a heurística *Greedy* proposta em Laporte et al. (2002) é usada. Contudo, na fase final dessa heurística, isto é, quando o conjunto \mathcal{P}_h for construído, usa-se o algoritmo *labeling* de programação dinâmica para resolver exatamente o TSPTW associado aos nós em \mathcal{P}_h (veja Subseção 6.2.1 para uma explanação do uso do algoritmo *labeling* para resolver exatamente o TSPTW). Se o correspondente TSPTW é factível, então a rota parcial α induzida pelos nós em \mathcal{P}_h é aceita para posteriormente gerar o corte LBF respectivo. Caso contrário, o conjunto \mathcal{P}_h é rejeitado e, portanto, desconsidera-se a rota parcial induzida pelos nós nele.

6.4.3 Limitante inferior para o custo esperado de recurso

A seguir, descreve-se um procedimento para determinar um limitante inferior no custo esperado de recurso $\mathcal{Q}(x)$ válido para qualquer topologia de rotas parciais definidas antes. Contudo, o procedimento é descrito para rotas parciais seguindo a topologia α . Seja h uma rota parcial operando no modo ℓ e seguindo a topologia α . Como mencionado antes, nessa topologia, existe apenas uma componente não-sequenciada, denotada por $\mathcal{U}_h = \{u_1, u_2, \dots, u_{|\mathcal{U}_h|}\}$, e duas cadeias $\mathcal{S}_h = (s_1 = 0, s_2, \dots, s_{|\mathcal{S}_h|})$ e $\mathcal{T}_h = (t_1, t_2, \dots, t_{|\mathcal{T}_h|} = n + 1)$. Portanto, a rota parcial h pode ser representada como $(s_1 = 0, s_2, \dots, s_{|\mathcal{S}_h|}, \mathcal{U}_h, t_1, t_2, \dots, t_{|\mathcal{T}_h|} = n + 1)$. Seja p o número de nós na componente não-sequenciada \mathcal{U}_h (isto é, $p = |\mathcal{U}_h|$). Assim, outra possível representação da rota parcial h é como segue:

$$h = (s_1 = 0, s_2, \dots, s_{(j-p)}, \{u_{(j-p+1)}, u_{(j-p+2)}, \dots, u_j\}, t_{(j+1)}, t_{(j+2)}, \dots, t_{(\kappa+1)} = n + 1). \quad (6.39)$$

em que $\kappa + 1 = |\mathcal{S}_h| + |\mathcal{U}_h| + |\mathcal{T}_h| = |\mathcal{P}_h|$ e os vértices de articulação $s_{|\mathcal{S}_h|}$ e t_1 são agora denotados por $s_{(j-p)}$ e $t_{(j+1)}$, respectivamente. Uma vez que as identidades dos clientes nas posições $j - p + 1, j - p + 2, \dots, j$ da rota parcial h são desconhecidas, ela pode ser redefinida como a rota parcial artificial \tilde{h} como segue:

$$\tilde{h} = \left(s_1 = 0, s_2, \dots, s_{(j-p)}, \square_{(j-p+1)}, \square_{(j-p+2)}, \square_{(j-p+3)}, \dots, \square_j, t_{(j+1)}, t_{(j+2)}, \dots, t_{(\kappa+1)} = n + 1 \right). \quad (6.40)$$

Observe que as posições $\square_{(j-p+1)}, \square_{(j-p+2)}, \square_{(j-p+3)}, \dots, \square_j$ da rota artificial \tilde{h} podem conter qualquer permutação factível em relação às janelas de tempo dos clientes em \mathcal{U}_h . No que segue, usa-se k para se referir à posição k da rota parcial artificial \tilde{h} . O procedimento para calcular um limitante inferior válido para $\mathcal{Q}(x)$ inicia pela estimação de limitantes inferiores válidos para cada uma das posições k de \tilde{h} para os tempos de chegada \hat{w}_k e tempos de serviço \hat{s}_k , bem como pelo cálculo das novas janelas de tempo $[\hat{w}_k^a, \hat{w}_k^b]$. Adicionalmente, também é necessário determinar limitantes inferiores para os tempos de viagens nos arcos da rota artificial \tilde{h} .

Para determinar um limitante inferior para o tempo de chegada para cada uma das posições não-sequenciadas $\square_{(j-p+1)}, \square_{(j-p+2)}, \square_{(j-p+3)}, \dots, \square_j$, basta ordenar os tempos de abertura das janelas de tempo dos clientes em \mathcal{U}_h tal que $w_1^a \leq w_2^a, \dots, \leq w_p^a$ e atribuir o valor w_2^a à $(j - p + 2)$ -ésima posição, w_3^a à $(j - p + 3)$ -ésima posição e, assim por diante, até atingir a última posição não-sequenciada j . Em particular, o limitante inferior para $\hat{w}_{(j-p+1)}$ é determinado como segue:

$$\hat{w}_{(j-p+1)} = \max \left\{ w_1^a, w_{s_{(j-p)}} + s_{s_{(j-p)}}^\ell + \hat{t}_{s_{(j-p)}(j-p+1)} \right\}, \quad (6.41)$$

em que $\hat{t}_{s_{(j-p)}(j-p+1)} = \min_{u_e \in \mathcal{U}_h} \{t_{s_{(j-p)}u_e}\}$, $w_{s_{(j-p)}}$ corresponde ao tempo de início de serviço do vértice de articulação $s_{(j-p)}$ na solução atual e $s_{s_{(j-p)}}^\ell$ seu tempo de serviço no modo ℓ . Por outro lado, o limitante inferior dos tempos de abertura das janelas de tempo das posições não-sequenciadas coincidem com o valor correspondente da estimativa do limitante inferior do tempo de chegada, isto é, $\hat{w}_k^a = \hat{w}_k$ para $k = j - p + 1, \dots, j$. Entretanto, superestima-se o tempo de encerramento das janelas de tempo para essas posições como $\hat{w}_{(j-p+1)}^b = \hat{w}_{(j-p+2)}^b = \dots = \hat{w}_j^b = \max_{u_e \in \mathcal{U}_h} \{w_{u_e}^b\}$. Por outro lado, um limitante inferior para o tempo de serviço para a $(j - p + k)$ -ésima posição, com $k = 1, \dots, p$, pode ser determinado como o k -ésimo menor valor do tempo de serviço dos clientes em \mathcal{U}_h , s_k^ℓ , em que ℓ define o modo de operação da rota parcial artificial \tilde{h} .

Devido às janelas de tempo, alguns clientes em \mathcal{U}_h não podem ser alocados em certas posições da porção não-sequenciada. Seja $\mathcal{C}_h(k)$, para $k = 1, \dots, \kappa + 1$, o conjunto contendo os índices dos clientes que podem ser alocados à posição k de \tilde{h} . Esses conjuntos, para cada posição k , podem ser encontrados como segue:

$$\mathcal{C}_h(k) = \begin{cases} \{s_k\}, & \text{se } k = 1, \dots, j - p. \\ \{u_e \in \mathcal{U}_h : w_{u_e}^b \geq \hat{w}_k^a\}, & \text{se } k = j - p + 1, \dots, j. \\ \{t_k\}, & \text{se } k = j + 1, \dots, \kappa + 1. \end{cases} \quad (6.42)$$

Observe da expressão (6.42) que o cliente $u_e \in \mathcal{U}_h$ pertence ao conjunto $\mathcal{C}_h(k)$, para $k = j - p + 1, \dots, j$, se e somente se a desigualdade $w_{u_e}^b \geq \hat{w}_k^a$ se mantêm. Nas outras posições, os conjuntos $\mathcal{C}_h(k)$ são de cardinalidade unitária, cujo único elemento está associado com o nó (cliente

ou depósito) alocado na posição correspondente. Usando os conjuntos $\mathcal{C}_h(k)$, pode-se agora estimar limitantes inferiores do tempo de viagem nos arcos da rota parcial artificial \tilde{h} como segue:

$$\hat{t}_{k,(k+1)} = \min_{\substack{u_e \in \mathcal{C}_h(k), u_f \in \mathcal{C}_h(k+1) \\ u_e \neq u_f}} \{t_{u_e u_f}\} \quad \text{para } k = 1, \dots, \kappa. \quad (6.43)$$

Note que a expressão (6.43) também estima os limitantes inferiores do tempo de viagem entre os arcos das porções sequenciadas de \tilde{h} , os quais coincidem com o tempo de viagem entre os clientes alocados entre duas posições consecutivas das porções sequenciadas. Para essas posições, os parâmetros \hat{w}_k correspondem ao valor dado no vetor de variável de decisão w , definindo o início do serviço, na solução atual e as novas janelas de tempo coincidem com as janelas de tempo dos nós designados a essas posições da rota artificial. O limitante inferior do tempo de serviço \hat{s}_k na k -ésima posição sequenciada é estimado com o tempo de serviço do cliente alocado nessa posição.

Dada uma falha na k -ésima posição, é necessário identificar as posições da porção $(k, k + 1, \dots, \kappa + 1)$ da rota parcial artificial \tilde{h} cujas janelas de tempo estimadas foram violadas. Seja $\hat{\mathcal{B}}_k^1(q)|_{k \rightarrow u_e}$ o conjunto com as posições cujas janelas de tempo estimadas foram violadas devido à uma falha tipo 1 por parte do veículo chegando com capacidade residual q no cliente específico u_e em $\mathcal{C}_h(k)$ alocado na k -ésima posição de \tilde{h} . Adicionalmente, seja $\hat{\mathcal{B}}_k^2(q)|_{k \rightarrow u_e}$ o conjunto com as posições cujas janelas de tempo estimadas foram violadas devido à uma falha tipo 2 por parte do veículo chegando com capacidade residual q no cliente específico u_e em $\mathcal{C}_h(k)$ alocado na k -ésima posição de \tilde{h} . Similarmente à Seção 6.3, usa-se duas proposições para construir esses conjuntos. A Proposição 6.4.1 mostra como os novos tempos de chegada são determinados. Imediatamente, a Proposição 6.4.2 apresenta a forma de construir esses conjuntos.

Proposição 6.4.1. Seja \hat{w}_m o limitante inferior para o tempo de chegada na m -ésima posição com janela de tempo estimada $[\hat{w}_m^a, \hat{w}_m^b]$ da rota artificial \tilde{h} . Seja \hat{s}_m o limitante inferior do tempo de serviço da m -ésima posição e $\tilde{w}_m(k \rightarrow u_e)$ o novo tempo de chegada após aplicar a ação de recurso devido à uma falha no cliente específico $u_e \in \mathcal{C}_h(k)$ alocado na posição k . Então, os valores $\tilde{w}_m(k \rightarrow u_e)$ podem ser obtidos como segue:

$$\tilde{w}_m(k \rightarrow u_e) = \begin{cases} \hat{w}_m, & \text{se } m = 1, \dots, k. \\ \hat{\zeta}_m(k), & \text{se } m = k + 1. \\ \hat{\tau}_m(k), & \text{se } m = k + 2, \dots, \kappa + 1. \end{cases} \quad (6.44)$$

em que $\hat{\zeta}_m(k)$ pode ser determinado como:

$$\hat{\zeta}_m(k) = \begin{cases} \max \{w_m^a, \tilde{w}_{(m-1)}(k \rightarrow u_e)\} + s_{u_e}^l + \tilde{t}_{u_e m} + 2t_{u_e(n+1)}, & \text{se } \tilde{w}_{(m-1)}(k \rightarrow u_e) + 2t_{u_e(n+1)} \leq w_{u_e}^b, \\ \tilde{w}_{(m-1)}(k \rightarrow u_e) + \tilde{t}_{u_e m} + 2t_{u_e(n+1)}, & \text{se } \tilde{w}_{(m-1)}(k \rightarrow u_e) + 2t_{u_e(n+1)} > w_{u_e}^b, \end{cases} \quad (6.45)$$

se a falha é do tipo 1, em que $\tilde{t}_{u_e m} = \min_{u_f \in \mathcal{C}_h(m)} \{t_{u_e u_f}\}$. E se a falha é do tipo 2, então $\hat{\zeta}_m(k)$ pode ser determinado como segue:

$$\hat{\zeta}_m(k) = \tilde{w}_{(m-1)}(k \rightarrow u_e) + s_{u_e}^l + t_{u_e(n+1)} + \tilde{t}_{0m}, \quad (6.46)$$

em que $\tilde{t}_{0m} = \min_{u_f \in \mathcal{C}_h(m)} \{t_{0u_f}\}$. Finalmente,

$$\hat{\tau}_m(k) = \begin{cases} \max \{ \hat{w}_m^a, \tilde{w}_{(m-1)}(k \rightarrow u_e) \} + \hat{s}_{m-1} + \hat{t}_{(m-1)m}, & \text{se } \tilde{w}_{(m-1)}(k \rightarrow u_e) \leq \hat{w}_{(m-1)}^b, \\ \tilde{w}_{(m-1)}(k \rightarrow u_e) + \hat{t}_{(m-1)m}, & \text{se } \tilde{w}_{(m-1)}(k \rightarrow u_e) > \hat{w}_{(m-1)}^b, \end{cases} \quad (6.47)$$

Demonstração. Para provar a proposição, consideram-se os seguintes três casos:

1. Até a posição k da rota artificial \tilde{h} , os tempos de chegada não são afetados pela falha no vértice u_e alocado na posição k . Logo $\tilde{w}_m(k \rightarrow u_e)$ coincide com o limitante inferior do tempo de chegada \hat{w}_m , para $m = 1, \dots, k$;
2. Em relação à posição $k + 1$, se a falha é do tipo 1 e $\tilde{w}_k(k \rightarrow u_e) + 2t_{u_e, n+1} \leq w_{u_e}^b$, então o veículo não viola a janela de tempo do vértice u_e na posição k . Portanto, $\tilde{w}_{(k+1)}(k \rightarrow u_e)$ é igual a $\max\{w_{u_e}^a, \tilde{w}_k(k \rightarrow u_e)\}$, mais o tempo de serviço no modo ℓ do vértice u_e alocado na k -ésima posição ($s_{u_e}^\ell$), o tempo de viagem entre o vértice u_e e o vértice alocado na posição $k + 1$ de \tilde{h} e o tempo adicional incorrido pela viagem de ida e volta desde o vértice u_e e o depósito final $n + 1$ ($2t_{u_e(n+1)}$). Como a identidade do vértice na posição $k + 1$ pode ser desconhecida, usa-se um limitante inferior do tempo de viagem no arco $(k, k + 1)$ de \tilde{h} , determinado como $\tilde{t}_{u_e(k+1)} = \min_{u_f \in \mathcal{C}_h(k+1)} \{t_{u_e u_f}\}$.

Por outro lado, se $\tilde{w}_k(k \rightarrow u_e) + 2t_{u_e, n+1} > w_{u_e}^b$, com falha tipo 1, o veículo não atenderá o vértice u_e alocado na posição k e, então, procede diretamente ao vértice designado à $(k + 1)$ -ésima posição. Então, $\tilde{w}_{(k+1)}(k \rightarrow u_e)$ é igual a $\tilde{w}_k(k \rightarrow u_e)$, mais o tempo de viagem entre o vértice u_e e o vértice alocado na posição $k + 1$ de \tilde{h} e o tempo adicional incorrido pela viagem de ida e volta desde o vértice u_e e o depósito final $n + 1$ ($2t_{u_e(n+1)}$). Como antes, o desconhecimento da identidade do vértice na posição $k + 1$ também leva a usar o limitante inferior do tempo de viagem $\tilde{t}_{u_e(k+1)}$ entre as posições k e $k + 1$.

Se a falha é do tipo 2, o veículo retornará ao depósito após visitar o vértice u_e alocado na posição k de \tilde{h} e então procede diretamente ao vértice alocado na posição $k + 1$. Então, $\tilde{w}_{(k+1)}(k \rightarrow u_e)$ é igual a $\tilde{w}_k(k \rightarrow u_e)$, mais o tempo de serviço no modo ℓ do vértice u_e ($s_{u_e}^\ell$), o tempo de viagem entre o vértice u_e alocado na posição k e o depósito final $n + 1$ ($t_{u_e(n+1)}$) e o tempo de viagem partindo desde o depósito inicial 0 e o vértice designado à posição $k + 1$ de \tilde{h} . Assim como antes, a identidade do vértice alocado na posição $k + 1$ pode ser desconhecida, portanto, um limitante inferior do tempo de viagem do depósito inicial 0 ao vértice desconhecido da posição $k + 1$ é usado, determinado como $\tilde{t}_{0(k+1)} = \min_{u_f \in \mathcal{C}_h(k+1)} \{t_{0u_f}\}$.

3. Com respeito às posições após a posição $k + 1$, se $\tilde{w}_{(m-1)}(k \rightarrow u_e) \leq \hat{w}_{(m-1)}^b$, para $m = k + 2, \dots, \kappa + 1$, então o veículo pode visitar essas posições dentro das suas janelas de tempo estimadas. Então, $\tilde{w}_{(m)}(k \rightarrow u_e)$ é igual a $\max\{w_m^a, \tilde{w}_{(m-1)}(k \rightarrow u_e)\}$, mais o tempo de serviço no modo ℓ do vértice alocado na posição $m - 1$ ($s_{v_{(m-1)}}^\ell$) e o tempo de viagem entre os vértices $v_{(m-1)}$ e v_m alocados nas posições $(m - 1)$ e m , respectivamente. Para este caso, as identidades dos vértices nas posições $m - 1$ e m da rota parcial artificial \tilde{h} também podem não ser conhecidas. Por essa razão, usam-se os limitantes inferiores previamente definidos do tempo de abertura da janela de

tempo na posição $m - 1$ ($\hat{w}_{(m-1)}^a$), do tempo de serviço na posição $m - 1$ ($\hat{s}_{(m-1)}$) e do tempo de viagem do arco associado às posições $m - 1$ e m de \tilde{h} ($\hat{t}_{(m-1)m}$). Se $\tilde{w}_{(m-1)}(k \rightarrow u_e) > \hat{w}_{(m-1)}^b$, para $m = k + 2, \dots, \kappa + 1$, o veículo não atenderá o vértice na posição $m - 1$ e, logo, $\tilde{w}_{(m)}(k \rightarrow u_e)$ é igual a $\tilde{w}_{(m-1)}(k \rightarrow u_e)$, mais o tempo de viagem entre os vértices $v_{(m-1)}$ e v_m alocados nas posições $(m - 1)$ e m de \tilde{h} , respectivamente. Novamente, usa-se o limitante inferior do tempo de viagem no arco $(m - 1, m)$, uma vez que é possível desconhecer os vértices designados a essas posições. Com isto, a prova é completada. \square

Proposição 6.4.2. Sejam $\hat{\mathcal{B}}_k^1(q)|_{k \rightarrow u_e}$ e $\hat{\mathcal{B}}_k^2(q)|_{k \rightarrow u_e}$ os conjuntos como previamente definidos. Dependendo do tipo de falha e para um dado valor da capacidade residual q , esses conjuntos podem ser construídos como segue:

$$\hat{\mathcal{B}}_k^1(q)|_{k \rightarrow u_e} = \{m | \tilde{w}_m(k \rightarrow u_e) > \hat{w}_m^b \text{ e } q - \xi_{u_e} < 0, m = k, k + 1, \dots, \kappa + 1.\}, \text{ para tipo 1.} \quad (6.48)$$

$$\hat{\mathcal{B}}_k^2(q)|_{k \rightarrow u_e} = \{m | \tilde{w}_m(k \rightarrow u_e) > \hat{w}_m^b \text{ e } 0 \leq q - \xi_{u_e} < \underline{\mathbb{E}}[\xi_{k+1}], m = k + 1, \dots, \kappa + 1.\}, \text{ para tipo 2.} \quad (6.49)$$

em que $\underline{\mathbb{E}}[\xi_{k+1}]$ representa o valor de demanda esperada mínimo dos nós em $\mathcal{C}_h(k + 1)$, isto é, $\underline{\mathbb{E}}[\xi_{k+1}] = \min_{u_f \in \mathcal{C}_h(k+1)} \{\mathbb{E}[\xi_{u_f}]\}$.

Demonstração. Para um dado valor de q e se $q - \xi_{u_e} < 0$, a falha é do tipo 1 e a Proposição 6.4.1 pode ser aplicada para determinar os novos tempos de chegada $\tilde{w}_m(k \rightarrow u_e)$, para $m = 1, \dots, \kappa + 1$. Conforme à Proposição 6.4.1, a ação de recurso apenas afeta o vértice u_e alocado na posição k e às posições após posição k . Portanto, o conjunto de posições da rota parcial artificial \tilde{h} cujas janelas de tempo estimadas foram violadas devido á falha tipo 1 pode ser construído pela fórmula 6.48. A derivação de 6.48 é similar, mas o recurso agora apenas afeta às posições após k -ésima posição ($m = k + 1, \dots, \kappa + 1$), completando assim a prova. \square

No que segue, adota-se a ideia do procedimento para determinar o limitante inferior do custo esperado de recurso para o VRP capacitado com demanda estocástica em [Salavati-Khoshghalb et al. \(2017\)](#). Seja q a capacidade residual do veículo ao chegar à posição k da rota parcial artificial \tilde{h} . Define-se $\tilde{F}_k(q)$ como um limitante inferior absoluto do custo esperado de recurso na k -ésima posição de \tilde{h} dado que o veículo chega a essa posição com capacidade residual q , com $\overline{\mathbb{E}}[\xi_{(k-1)}] \leq q \leq Q$, em que $\overline{\mathbb{E}}[\xi_{(k-1)}] = \max_{u_f \in \mathcal{C}_h(k-1)} \{\mathbb{E}[\xi_{u_f}]\}$. Também, define-se $\hat{F}_k(q)|_{k \rightarrow u_e}$ como o limitante inferior do custo esperado de recurso para o vértice específico u_e em $\mathcal{C}_h(k)$ alocado na k -ésima posição de \tilde{h} dado que o veículo chega a essa posição com capacidade residual q . $\hat{F}_k(q)|_{k \rightarrow u_e}$ é determinado em termos do

limitante inferior absoluto $\tilde{F}_k(q)$ como segue:

$$\hat{F}_k(q)|_{k \rightarrow u_e} = \begin{cases} \tilde{F}_{k+1}(q), & \text{se } k = 1, \\ \mathbb{P}[q - \xi_{u_e} < 0] \left[b + 2c_{u_e(n+1)} + \Phi \sum_{m \in \hat{\mathcal{B}}_k^1(q)|_{k \rightarrow u_e}} 2\tilde{d}_{0m} + \tilde{F}_{(k+1)}(Q - q - \xi_{u_e}) \right] + \\ \mathbb{P}[0 \leq q - \xi_{u_e} < \mathbb{E}[\xi_{k+1}]] \left[\tilde{c}_{u_e} + \Phi \sum_{m \in \hat{\mathcal{B}}_k^2(q)|_{k \rightarrow u_e}} 2\tilde{d}_{0m} + \tilde{F}_{(k+1)}(Q) \right] + \\ \mathbb{P}[q - \xi_{u_e} \geq \overline{\mathbb{E}}[\xi_{(k+1)}]] \left[\tilde{F}_{i(k+1)}(q - \xi_{u_e}) \right], & \text{se } k = 2, \dots, \kappa. \\ 0, & \text{se } k = \kappa + 1. \end{cases} \quad (6.50)$$

em que

$$\tilde{d}_{0m} = \min_{u_f \in \mathcal{C}_h(m)} \{c_{0u_f}\}, \quad \tilde{c}_{u_e} = \min_{u_f \in \mathcal{C}_h(k+1)} \{c_{u_e, (n+1)} + c_{0u_f} - c_{u_e u_f}\}$$

$$\mathbb{E}[\xi_{k+1}] = \min_{u_f \in \mathcal{C}_h(k+1)} \{\mathbb{E}[\xi_{u_f}]\}, \quad \text{e} \quad \overline{\mathbb{E}}[\xi_{(k+1)}] = \max_{u_f \in \mathcal{C}_h(k+1)} \{\mathbb{E}[\xi_{u_f}]\}.$$

Pela expressão (6.50), conclui-se que $\hat{F}_k(q)|_{k \rightarrow u_e} \leq F_{u_e}(q)$ para todo q , pois $\hat{F}_k(q)|_{k \rightarrow u_e}$ é determinado em termos do limitante inferior absoluto $\tilde{F}_k(q)$, em que $F_{u_e}(q)$ corresponde à função de recurso exato dada pela expressão (6.19). Agora, apresenta-se como determinar o limitante inferior absoluto $\tilde{F}_k(q)$ para cada uma das posições de \tilde{h} . Para a porção sequenciada de \tilde{h} dada pelos nós em \mathcal{T}_h , $\tilde{F}_k(q)$ coincide com a função de recurso exato (6.19), para $k = j + 1, j + 2, \dots, \kappa + 1$. Para as demais posições, primeiramente, determina-se $\tilde{F}_j(q)$ para a posição j . Depois, $\tilde{F}_k(q)$ é determinado para as posições restantes da rota parcial artificial \tilde{h} . A Proposição 6.4.3 mostra como é determinado $\tilde{F}_j(q)$ para a posição j de \tilde{h} .

Proposição 6.4.3. Um limitante inferior absoluto do custo esperado de recurso para a j -ésima posição na rota artificial pode ser definido como segue:

$$\tilde{F}_j(q) = \min_{u_e \in \mathcal{C}_h(j)} F_j(q)|_{j \rightarrow u_e} \quad \forall q \quad (6.51)$$

em que $F_j(q)|_{j \rightarrow u_e}$ é computado por alocar o cliente $u_e \in \mathcal{U}_h(j)$ na posição j e, em seguida, aplicar a função de recurso exato (6.19).

Demonstração. Uma vez que a j -ésima posição é não-sequenciada em \tilde{h} , e considerando que ela pode potencialmente assumir qualquer vértice u_e em $\mathcal{C}_h(j)$, um limitante inferior válido de custo esperado de recurso na j -ésima posição é obtido por minimizar o custo de recurso sobre $\mathcal{C}_h(j)$ para cada q . Então, $\tilde{F}_j(\cdot) \leq F_j(\cdot)|_{j \rightarrow u_e}$ é implicado por definição. \square

Agora, usando a definição de $\hat{F}_k(q)|_{k \rightarrow u_e}$ e substituindo-a na Proposição 6.4.3, pode ser derivado $\tilde{F}_k(q)$ para cada uma das posições restantes em \tilde{h} . Portanto, na k -ésima posição de \tilde{h} , a proposição 6.4.4 é usada para obter um limitante inferior absoluto no custo esperado de recurso da posição k . Esse processo é então sequencialmente repetido para limitar as posições restantes.

Proposição 6.4.4. Um limitante inferior absoluto para o custo esperado de recurso na k -ésima posição da rota parcial artificial \tilde{h} para $2 \leq k < j$ pode ser calculado como segue:

$$\tilde{F}_k(q) = \min_{u_e \in \mathcal{C}_h(k)} \hat{F}_k(q)|_{k \rightarrow u_e} \quad \forall q \quad (6.52)$$

em que $\hat{F}_k(q)|_{k \rightarrow u_e}$ é definido pela expressão (6.50).

Demonstração. Considere-se a posição $j - 1$ em que o limitante inferior absoluto $\tilde{F}_j(\cdot)$ é conhecido, considerando a Proposição 6.4.3. Seja $\hat{F}_{(j-1)}(\cdot)|_{(j-1) \rightarrow u_e}$ como definido na expressão 6.50. Ao definir $\tilde{F}_{(j-1)}(q) = \min_{u_e \in \mathcal{C}_h(k)} \hat{F}_{(j-1)}(q)|_{(j-1) \rightarrow u_e}$, o valor $\tilde{F}_{(j-1)}(q)$ claramente define um limitante inferior de $F_{(j-1)}(q)$. Esse resultado se mantém para todas as posições k , com $k = 2, \dots, j - 2$. \square

Observe que a Proposição 6.4.4 também inclui as posições sequenciadas referente aos vértices da cadeia \mathcal{S}_h . Isso é porque para a k -ésima posição de \tilde{h} (com $k = 2, \dots, j - p$), o custo relacionado às penalizações do atendimento fora das janelas de tempo devido a falhas no vértice s_k deve ser computado. E dado que existem posições não-sequenciadas com vértices desconhecidos, obrigatoriamente esse custo deve ser determinado de forma aproximada. Portanto, a aplicação da função para calcular o custo de recurso exato não é possível, pois ela supõe que as identidades dos vértices ao longo das posições da rota sejam conhecidos. Finalmente, $\tilde{\Theta}_h = \tilde{F}_1(Q)$ pode ser usado como um limitante inferior válido para o custo esperado de recurso da rota artificial \tilde{h} . Se H rotas parciais foram detetadas na solução atual, então $\hat{\Theta} = \sum_{h=1}^H \tilde{\Theta}_h = \tilde{F}_1(Q)$ corresponde a um limitante inferior de $\mathcal{Q}(x)$.

6.5 Resultados computacionais

Esta seção reporta os resultados de alguns experimentos numéricos, os quais foram realizados de modo a atingir os seguintes objetivos: 1) Analisar o impacto das desigualdades k -path no desempenho computacional do algoritmo *L-shaped* proposto; 2) Investigar o impacto da inclusão dos LBFs no desempenho computacional do algoritmo *L-shaped* proposto e 3) Quantificar as economias no custo operacional total trazidas pela consideração explícita da estocasticidade da demanda em relação à estratégia de valor esperado. Os experimentos numéricos foram realizados usando as instâncias das classes R1, C1, RC1, R2, C2 e RC2 das instâncias de [Solomon](#). Para a realização desses experimentos, apenas os primeiros 25 dados, correspondentes aos primeiros 25 clientes, de cada uma das instâncias, foram considerados. Contudo, as capacidades dos veículos foram modificadas de modo a aumentar o número de falhas nas rotas. Usaram-se os seguintes valores nas capacidades dos veículos: 80 para as instâncias das classes C1 e C2, 50 para os conjuntos de instâncias nas classes R1 e R2 e 100 para as instâncias correspondentes das classes RC1 e RC2. Esses valores já foram usados nos experimentos numéricos de [Lei et al. \(2011\)](#). Os parâmetros w_i^a e w_i^b correspondem aos primeiros 25 dados das instâncias de [Solomon](#). Entretanto, $c_{ij} = t_{ij} = d_{ij}$ correspondem à distância Euclideana entre as coordenadas dos primeiros 25 dados das instâncias consideradas. O tempo de serviço s_i^ℓ , dependente do modo ℓ , foi determinado como em [Pureza et al. \(2012\)](#).

O valor esperado da demanda para cada cliente i , $\mathbb{E}[\xi_i]$, corresponde ao valor nominal dado nas instâncias de [Solomon](#). Fixou-se o número de realizações para cada variável aleatória em 5, isto é, $g_i = 5$ para todo $i \in \mathcal{N}$. Essas 5 realizações, para cada cliente, correspondem a $\xi_i^1 = \mathbb{E}[\xi_i] - 2$, $\xi_i^2 = \mathbb{E}[\xi_i] - 1$,

$\xi_i^3 = \mathbb{E}[\xi_i]$, $\xi_i^4 = \mathbb{E}[\xi_i] + 1$ e $\xi_i^5 = \mathbb{E}[\xi_i] + 2$ com probabilidades de ocorrência 0.1, 0.2, 0.4, 0.2 e 0.1, respectivamente. Fixou-se o parâmetro de penalização para o serviço especial Ψ em 2. Por outro lado, o parâmetro que penaliza as interrupções no serviço dos clientes, b , devido a falhas do tipo 1, foi fixado a $\sum_{i \in \mathcal{N}} d_{0i}/n$, em que $n = |\mathcal{N}|$ é o número de clientes. Por outro lado, o limitante inferior global do custo esperado de recurso L foi atribuído o valor 0. Um total de 56 instâncias foram consideradas na experimentação computacional, distribuídas da seguinte maneira: 9 instâncias na classe C1, 12 na classe R1, 9 na classe RC1, 8 na classe C2, 11 na classe RC2 e 8 na classe RC2.

O algoritmo *L-shaped* inteiro foi codificado em C++ usando ILOG CPLEX 12.8. O procedimento de separação das desigualdades *k-path*, também foi codificado em C++, bem como o algoritmo de programação dinâmica para resolver exatamente o TSPTW. Os experimentos computacionais foram realizados em um PC com plataforma Linux e com processador intel Core i7-4790 3.6GHz e 16 GB de memória. O algoritmo *L-shaped* inteiro foi rodado em cada uma das instâncias até provar otimalidade, ou até atingir um tempo limite estabelecido em 3600 segundos.

6.5.1 Impacto das desigualdades *k-path* e cortes LBFs

Nesta subseção, analisa-se o impacto de incorporar as desigualdades *k-path* e LBFs no algoritmo *L-shaped* proposto. Para tanto, as instâncias consideradas foram resolvidas pelo algoritmo *L-shaped* tradicional com e sem desigualdades *k-path*, bem como pelo algoritmo aqui proposto (algoritmo *L-shaped* com desigualdades *k-path* e com LBFs). Convém salientar que o algoritmo *L-shaped* tradicional resulta quando apenas cortes de otimalidade da forma 6.32 são detetados e gerados dinamicamente no procedimento de busca *branch-and-cut*. A técnica de perfil de desempenho introduzida em Dolan e More (2002) foi usada para comparar as soluções dadas pelos algoritmos *L-shaped* tradicional (LS1), *L-shaped* tradicional com desigualdades *k-path* (LS2) e *L-shaped* com desigualdades *k-path* e LBFs (LS3). A grosso modo, um perfil de desempenho de um *solver* e/ou algoritmo pode ser definido como a função de distribuição acumulada para uma dada métrica de desempenho. O desempenho dos algoritmos LS1, LS2 e LS3 foram avaliados e comparados em base na métrica valor da função objetivo. O critério de parada para os algoritmos foi um tempo de execução de 3600 segundos. Se um dos algoritmos não encontrou uma solução para um determinado problema durante esse tempo, diz-se que o algoritmo falhou na resolução desse problema.

Na Figura 6, tem-se um gráfico do perfil de desempenho dos algoritmos LS1, LS2 e LS3 em relação à métrica valor da função objetivo, plotado usando a planilha “perfis.xls” desenvolvida em Munari (2009). Para a elaboração desse gráfico, 56 instâncias do problema em estudo foram resolvidas por cada um dos algoritmos, gerando 56 dados relacionados ao valor da função objetivo. Em seguida, esses dados foram usados para determinar as razões de desempenho e, então, os perfis de desempenho. Os valores extremos dos perfis de desempenho para cada um dos algoritmos LS1, LS2 e LS3 são apresentados na Tabela 14.

A partir da Figura 6, observa-se dela que a curva do perfil de desempenho do algoritmo LS3 obteve o melhor desempenho em relação aos demais algoritmos em $\approx 96\%$ dos problemas ($q = 0$) (veja Tabela 14 também). No entanto, esse algoritmo não conseguiu resolver todos os problemas, uma vez que sua curva de desempenho não atingiu o valor 1 para $q \in [0, r_M]$, em que r_M , determinado apropriadamente, é o valor extremo do eixo das abscissas da Figura 6 (veja Dolan e More (2002) para uma explanação

detalhada da técnica perfil de desempenho). De fato, nenhum dos algoritmos conseguiu resolver todos os problemas, pois nenhuma das curvas de desempenho atinge o valor 1 para $q \in [0, r_M]$. É importante ressaltar uma observação da Figura 6. Uma vez que a curva de desempenho associada ao algoritmo LS3 está acima das demais ao longo do intervalo $q \in [0, r_M]$, então ela domina às outras. Isto quer dizer que o algoritmo LS3 se destaca em relação aos algoritmos LS1 e LS2, no sentido que ele conseguiu resolver mais problemas dentro um fator q do desempenho de qualquer outro algoritmo. O comentário anterior também é válido quando comparadas apenas as curvas de desempenhos dos algoritmos LS1 e LS2, pois a curva do algoritmo LS2 está acima da outra curva de perfil de desempenho associada ao algoritmo LS1.

Por outro lado, se o interesse é selecionar o algoritmo com maior probabilidade de sucesso, isto é, com maior chance de resolver qualquer problema, dos 56 considerados, então deve-se escolher o algoritmo LS3 devido a ele ter obtido o maior valor do perfil de desempenho em $q \rightarrow r_M, \approx 96\%$, conforme pode ser visto na coluna relacionada a $q \rightarrow r_M$ da Tabela 14. Uma vez que os valores do perfil de desempenho do algoritmo LS3 coincidem em $q = 0$ e $q \rightarrow r_M$, pode-se concluir que ele, em todos os problemas, sempre determinou soluções com o menor valor da função objetivo quando comparados aos valores objetivos das soluções encontradas pelos outros algoritmos.

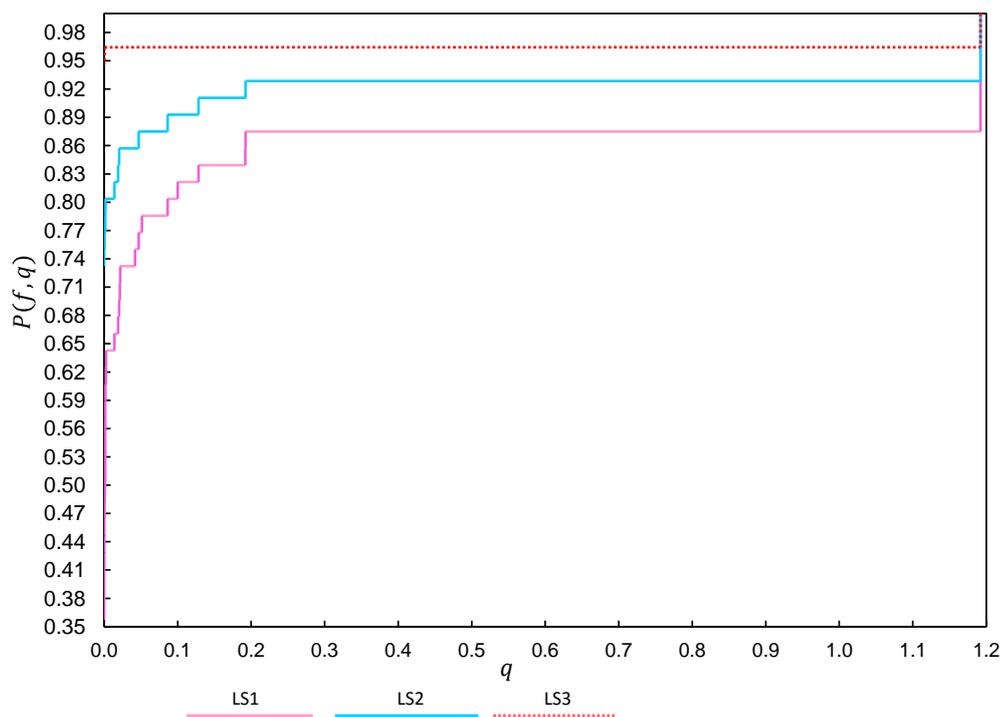


Figura 6 – Perfil de desempenho sobre as 56 instâncias dos três algoritmos de solução em relação ao valor da função objetivo.

Tabela 14 – Valores extremos dos perfis de desempenho para cada um dos algoritmos em base ao valor da função objetivo.

Algoritmo	$q = 0$	$q \rightarrow r_M$
LS1	0,41	0,87
LS2	0,75	0,92
LS3	0,96	0,96

Em relação aos tempos computacionais, o algoritmo LS3 foi 3,3 vezes mais rápido do que o LS1 e 2,2 vezes mais rápido do que o LS2. Por sua vez, este último foi 1,6 vezes mais rápido do que o LS1, correspondendo ao algoritmo *L-shaped* tradicional. Finalmente, é possível concluir que, para as instâncias consideradas, o algoritmo LS3 obteve o melhor desempenho tanto em qualidade da solução quanto em tempo computacional, evidenciando a importância de se incorporar as desigualdades *k-path* e LBFs no algoritmo *L-shaped* tradicional. Por outro lado, os resultados reportados aqui, também revelam o melhoramento do algoritmo *L-shaped* com desigualdades *k-path* quando comparadas a sua versão tradicional.

6.5.2 Comparação das soluções determinísticas e estocásticas

Nesta subseção são comparadas as soluções dos problemas determinístico e estocástico em termos do custo total esperado e dos tempos computacionais requeridos para obtê-las. As Tabelas 15 e 16 apresentam os valores da solução determinística e estocástica em termos do número de rotas geradas (nR), número de entregadores usados (nD), distância total percorrida (Dist.), custo associado às decisões de primeiro estágio (cx), custo esperado de recurso ($Q(x)$), custo total esperado ($z(x) = cx + Q(x)$), *gap* de otimalidade (GAP%) e o tempo computacional em segundos consumido pelo algoritmo correspondente para determinar a solução para cada uma das instâncias das classes C1-R1-RC1 e C2-R2-RC2, respectivamente. Além disso, essas tabelas exprimem o valor atribuído às capacidades dos veículos, bem como o valor da solução estocástica (abrev. em Inglês VSS - *Value of the Stochastic Solution*), determinado como $VSS = z^{det} - z^{est}$, em que o z^{det} e z^{est} representam, na mesma ordem, os custos totais esperados das soluções dos problemas determinístico e estocástico. Para determinar z^{det} , basta com resolver o problema determinístico e, em seguida à solução encontrada, aplicar a função de recurso recursiva dada pela expressão (6.19). O símbolo “-” nessas tabelas indicam que o algoritmo correspondente não encontrou solução factível após 3600 segundo de execução. Outro indicador importante para a análise das vantagens de se usar a abordagem estocástica em detrimento da estratégia de valor esperado corresponde ao valor esperado de informação perfeita (abrev. em Inglês EVPI - *Expected Value of Perfect Information*). Para calcular o EVPI, é necessário resolver para cada perfil de demanda seu problema de otimização com informação perfeita associado. No entanto, pela forma como as incertezas foram representadas neste capítulo, esses problemas não estão bem definidos, diferentemente das abordagens baseadas em cenários, em que cada cenário define em si um problema de otimização com informação perfeita.

O problema determinístico ou de valor esperado é resolvido usando o algoritmo LS0, obtido por desconsiderar os cortes LBFs (6.31) e os de otimalidade (6.32) no Algoritmo 3. Primeiramente, observe nessas tabelas que das 56 instâncias, o algoritmo LS0 resolveu 48 delas otimamente dentro de um tempo menor a 838 segundos, em média. E das 56 instâncias, em 4 delas (RC103, RC104, RC107 e RC108) o algoritmo LS0 falhou em determinar uma solução factível dentro o tempo limite de execução. Nesta tese, o problema de valor esperado também foi resolvido por meio do BC do solver CPLEX v.12.8 puro, isto é, sem considerar as desigualdades *k-path*. Comparando os resultados do algoritmo LS0 com o BC do CPLEX v.12.8, o algoritmo LS0 aumentou o número de instâncias resolvidas até otimalidade, passando de 30 a 48. Adicionalmente, o algoritmo LS0 foi ≈ 2 vezes mais rápido do que o BC do CPLEX v.12.8. Esses resultados revelam o melhoramento no desempenho da resolução do problema de valor esperado quando as desigualdades *k-path* são introduzidas quando detectadas à formulação (6.20)-(6.30).

Instância	Q	Determinístico						Estocástico						VSS				
		nV	nD	Dist.	cx	Q(x)	z(x)	GAP(%)	Time	nV	nD	Dist.	cx		Q(x)	z(x)	GAP(%)	Time
C101	75	7	7	384,58	773,85	0,4831	774,33	0,00	47,37	7	7	387,40	773,87	0,0076	773,88	0,00	622,94	0,45
C102	75	7	7	383,86	773,84	0,4828	774,32	0,00	250,48	7	7	386,37	773,86	0,0109	773,88	0,00	3598,59	0,45
C103	75	7	7	383,86	773,84	0,7678	774,61	0,00	360,70	7	7	385,80	773,86	0,0049	773,86	0,01	3598,31	0,74
C104	75	7	7	378,56	773,79	0,1498	773,94	0,00	136,35	7	7	378,56	773,79	0,0083	773,79	0,00	3125,13	0,14
C105	75	7	7	383,65	773,84	0,1501	773,99	0,00	75,12	7	7	383,65	773,84	0,0059	773,84	0,00	547,23	0,14
C106	75	7	7	384,58	773,85	0,4722	774,32	0,00	33,46	7	7	387,93	773,88	0,0031	773,88	0,00	211,81	0,44
C107	75	7	7	379,27	773,79	0,1501	773,94	0,00	339,86	7	7	383,19	773,83	0,0033	773,84	0,00	1952,46	0,11
C108	75	7	7	379,27	773,79	0,1049	773,90	0,00	225,04	7	7	380,32	773,80	0,0059	773,81	0,00	2579,43	0,09
C109	75	7	7	379,27	773,79	0,1501	773,94	0,00	187,27	7	7	379,27	773,79	0,0049	773,80	0,00	1132,62	0,14
Média C1				381,88	773,82	0,32	774,14	0,00	183,96			383,61	773,84	0,01	773,84	0,00	1929,84	0,30
R101	50	8	15	653,03	956,53	0,10	956,63	0,00	0,26	8	15	653,03	956,53	0,1027	956,63	0,00	0,73	0,00
R102	50	8	10	636,68	906,37	14,60	920,97	0,00	3598,20	8	10	644,31	906,44	0,0000	906,44	16,77	3591,87	14,53
R103	50	7	7	578,98	775,79	99,96	875,75	0,00	1529,04	7	8	594,91	785,95	0,1986	786,15	14,27	3580,69	89,60
R104	50	7	7	534,21	775,34	185,95	961,29	0,00	186,85	7	7	573,15	775,73	9,9453	785,68	1,32	3595,23	175,61
R105	50	7	10	647,99	806,48	10,16	816,64	0,00	578,54	7	10	648,09	806,48	10,1551	816,64	2,74	3545,64	0,00
R106	50	7	7	590,25	775,90	95,43	871,33	0,00	173,21	7	8	593,78	785,94	0,1986	786,14	14,22	3546,50	85,20
R107	50	7	7	552,36	775,52	83,79	859,31	0,00	185,04	7	9	615,48	796,16	13,9259	810,08	4,47	3590,33	49,23
R108	50	7	7	528,46	775,29	96,18	871,47	0,00	26,96	7	7	591,08	775,91	25,2714	801,18	3,34	3556,24	70,29
R109	50	7	7	623,15	776,23	11,37	787,60	0,00	1024,90	7	8	614,52	786,15	0,1986	786,34	14,24	3560,73	1,26
R110	50	7	7	600,30	776,00	60,76	836,76	0,00	3598,66	7	9	617,75	796,16	28,6929	824,87	6,37	3595,70	11,89
R111	50	7	7	540,94	775,41	102,20	877,61	0,00	18,80	7	7	586,80	775,87	63,3750	839,24	8,22	3585,18	38,36
R112	50	7	7	524,08	775,24	110,39	885,63	0,00	173,97	7	7	573,99	775,74	50,5949	826,34	6,61	3566,89	59,29
Média R1				584,20	804,18	72,57	876,75	0,00	924,54			608,91	810,26	16,89	827,14	7,72	3276,31	49,60
RC101	100	6	11	567,525	715,675	121,302	836,978	0	5,35	6	11	575,43	715,754	0,0000	715,754	0,00	81,27	121,22
RC102	100	6	10	573,816	705,738	239,101	944,84	0	3598,34	6	11	627,471	716,275	0,0039	716,279	5,14	3598,12	228,56
RC103	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RC104	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RC105	100	8	10	752,663	907,527	403,015	1310,54	0	3598,5	8	11	776,288	917,763	0,0000	917,763	16,97	3592,92	392,78
RC106	100	6	10	595,336	705,953	264,64	970,594	0	3598,81	6	12	535,803	725,358	0,0000	725,358	6,87	3597,48	245,24
RC107	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RC108	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Média RC1				622,34	758,72	257,01	1015,74	0,00	2700,25			628,75	768,79	0,00	768,79	7,24	2717,45	246,95
Média				529,472	778,906	109,970	888,876	0,000	1269,582			540,421	784,293	5,632	789,925	4,987	2641,198	98,951

Tabela 15 – Comparação das soluções determinísticas e estocásticas para as instâncias modificadas das classes C1, R1 e RC1 das instâncias de Solomon

Instância	Determinístico						Estocástico						VSS					
	Q	nV	nD	Dist.	$c(x)$	$Q(x)$	$z(x)$	GAP(%)	Time	nV	nD	Dist.		$c(x)$	$Q(x)$	$z(x)$	GAP(%)	Time
C201	75	7	7	464,474	774,645	0,024	774,669	0,00	171,890	7	7	464,717	774,647	0,004	774,651	0,00	1138,060	0,02
C202	75	7	7	464,474	774,645	0,257	774,902	0,00	2321,020	7	7	469,174	774,692	0,004	774,696	0,03	3598,030	0,21
C203	75	7	7	464,474	774,645	0,785	775,430	0,06	3596,500	7	7	482,133	774,821	0,006	774,827	0,07	3597,530	0,60
C204	75	7	7	465,520	774,655	0,990	775,645	0,10	3596,760	7	7	629,091	776,291	0,010	776,301	0,27	3597,600	-0,66
C205	75	7	7	464,474	774,645	0,149	774,794	0,00	841,490	7	7	464,474	774,645	0,004	774,649	0,00	3287,950	0,15
C206	75	7	7	464,474	774,645	0,310	774,955	0,00	2270,070	7	7	467,913	774,679	0,004	774,683	0,03	3546,210	0,27
C207	75	7	7	464,717	774,647	0,954	775,601	0,04	3588,500	7	7	483,847	774,838	0,010	774,848	0,08	3576,820	0,75
C208	75	7	7	465,458	774,655	0,005	774,660	0,03	3596,310	7	7	464,474	774,645	0,003	774,648	0,05	3591,440	0,01
Média C2				464,758	774,648	0,434	775,082	0,03	2497,818			490,728	774,907	0,006	774,913	0,07	3241,705	0,17
R201	50	7	7	567,236	775,672	0,161	775,833	0,00	4,51	7	7	567,236	775,672	0,161	775,834	0,00	599,690	0,00
R202	50	7	7	517,058	775,171	1,559	776,730	0,00	3,66	7	7	541,077	775,411	0,368	775,778	0,05	3562,340	0,95
R203	50	7	7	517,058	775,171	38,436	813,607	0,00	10,37	7	7	545,355	775,454	0,545	775,999	0,10	3571,460	37,61
R204	50	7	7	517,058	775,171	75,573	850,744	0,00	19,56	7	7	648,157	776,482	0,333	776,814	0,22	3566,940	73,93
R205	50	7	7	525,994	775,260	1,867	777,127	0,00	4,56	7	7	552,587	775,526	0,374	775,900	0,06	3578,130	1,23
R206	50	7	7	517,058	775,171	2,011	777,182	0,00	7,04	7	7	560,528	775,605	0,238	775,843	0,08	3579,970	1,34
R207	50	7	7	517,058	775,171	5,063	780,234	0,00	13,04	7	7	604,384	776,044	0,267	776,311	0,15	3575,540	3,92
R208	50	7	7	517,058	775,171	0,571	775,742	0,00	26,99	7	7	544,700	775,447	0,213	775,660	0,06	3572,200	0,08
R209	50	7	7	517,058	775,171	15,042	790,213	0,00	27,37	7	7	530,509	775,305	0,315	775,620	0,04	3591,860	14,59
R210	50	7	7	522,870	775,229	16,959	792,188	0,00	3,74	7	7	522,870	775,229	0,513	775,742	0,06	3582,590	16,45
R211	50	7	7	517,058	775,171	47,012	822,183	0,00	39,55	7	7	654,544	776,545	0,486	777,032	0,24	3590,750	45,15
Média R2				522,960	775,230	18,569	793,799	0,00	14,581			570,177	775,702	0,347	776,048	0,10	3306,497	17,75
RC201	100	6	6	538,920	665,389	54,575	719,964	0,00	0,07	6	6	550,736	665,507	0,000	665,507	0,00	9,570	54,46
RC202	100	6	6	528,524	665,285	172,374	837,659	0,00	0,62	6	6	544,296	665,443	0,000	665,443	0,00	48,190	172,22
RC203	100	6	6	513,732	665,137	0,578	665,715	0,00	0,60	6	6	527,623	665,276	0,000	665,276	0,00	327,590	0,44
RC204	100	6	6	507,662	665,077	0,529	665,606	0,00	0,70	6	6	513,730	665,137	0,000	665,137	0,00	14,710	0,47
RC205	100	6	6	530,194	665,302	12,010	677,312	0,00	0,42	6	6	540,517	665,405	0,000	665,405	0,00	228,910	11,91
RC206	100	6	6	516,584	665,166	0,240	665,406	0,00	0,20	6	6	518,692	665,187	0,059	665,246	0,00	5,740	0,16
RC207	100	6	6	506,554	665,066	0,586	665,652	0,00	0,44	6	6	518,025	665,180	0,000	665,180	0,00	96,460	0,47
RC208	100	6	6	506,554	665,066	0,526	665,592	0,00	0,48	6	6	509,638	665,096	0,000	665,096	0,00	103,400	0,50
Média RC2				518,591	665,186	30,177	695,363	0,00	0,441			527,907	665,28	0,007	665,29	0,00	104,321	30,08
Média				502,103	738,355	16,393	754,748	0,01	837,613			529,604	738,629	0,120	738,749	0,05	2217,508	16,00

Tabela 16 – Comparação das soluções determinísticas e estocásticas para as instâncias modificadas das classes C2, R2 e RC2 das instâncias de Solomon

Como era de se esperar, a dificuldade de se resolver o problema aumenta na versão estocástica. Apenas 21 problemas, dos 56 considerados, foram resolvidos otimamente dentro de um tempo médio de ≈ 959 segundos. O número de veículos e entregadores da solução do problema de valor esperado se mantêm na solução do problema estocástico para as instâncias das classes C1, C2, R2 e RC2 e, portanto, o aumento no custo total esperado da solução estocástica em relação à determinística é devido aos custos associados à distância total percorrida e ações de recursos. Já nas instâncias das classes R1 e RC1, o aumento do custo total esperado é também implicado pelo custo dos entregadores. Uma justificativa para isso é que as instâncias dessas classes tem janelas de tempo apertadas, então qualquer viagem ao depósito pode inviabilizar o atendimento dos próximos clientes da rota. Assim, é preferível aumentar os entregadores para reduzir os tempos de serviço, bem como as falhas associadas à violação das janelas de tempo cujo serviço especial, para recuperar a factibilidade da solução, pode aumentar em demasia o custo operacional total.

O custo médio do recurso é maior para os problemas da classe RC1, seguido da classe R1 e menor para os problemas das demais classes. Os clientes das instâncias dentro das classes C1, C2, R2 e RC2 apresentam janelas de tempo bastante abertas, implicando que, independente da realização da demanda em um cenário, seja bastante provável atender todos os clientes com o veículo destinado a percorrer a rota. Então, basicamente, o recurso para esses problemas é retornar ao depósito, o que representa a alternativa mais barata para mitigar o impacto das incertezas na demanda que aparecem a medida que a rota é percorrida.

Entretanto, os clientes dos problemas da classe R1 são restritas a cobrir poucos clientes por rota, uma vez que apresentam um horizonte de planejamento curto. Além disso, como mencionado antes, as janelas de tempo para estes problemas são bastante apertadas, trazendo com que qualquer retorno ao depósito, alguns clientes da rota não possam ser mais visitados dentro das suas janelas de tempo. Então, esses clientes são atendidos por meio do serviço especial, isto é, viagens individuais separadas, o que representa a alternativa mais cara no custo do recurso. Por outro lado, nos problemas da classe RC1, por possuírem características das classes C1 e R1, ambas as decisões de recurso relacionadas a retornos ao depósito e atender alguns clientes com outros veículos aparecem com maior frequência, levando a que o custo esperado, em média, seja maior do que das demais classes.

Finalmente, os valores do VSS nas Tabelas 15 e 16 sugerem que é possível ter um ganho adicional em resolver o problema considerando-se a aleatoriedade de forma explícita, em vez de adotar abordagens de valor esperado para abolir as incertezas. Observe que o VSS, em média, foi um pouco mais de 57%. Convém salientar que o valor negativo na coluna VSS relacionado ao problema C204 na Tabela 16 é porque as soluções dos problemas de valor esperado e estocástico não são ótimas. E, portanto, o custo total esperado em uma solução factível do problema de valor esperado pode ser menor do que o custo esperado de uma solução factível do problema estocástico.

6.6 Considerações finais

Neste capítulo, estudou-se o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo, múltiplos entregadores e demanda estocástica. A programação estocástica dois estágios com recurso foi usada como abordagem de tratamento de incerteza. No primeiro estágio, define-se as rotas que serão seguidas por veículos disponíveis no depósito. Essas rotas são desenhadas sob a premissa de que o valor esperado da

demanda aleatória dos clientes deve ser atendido e as visitas aos clientes de cada uma das rotas respeitem suas janelas de tempo. Um modelo baseado em fluxo foi desenvolvido para representar o problema, cuja resolução cai na aplicação de um procedimento BC baseado em decomposição de *Benders*, denominado aqui de algoritmo *L-shaped* inteiro. Esse algoritmo usa os conceitos de rotas parciais gerais para gerar os correspondentes cortes LBFs, além dos cortes de otimalidade, típicos em aplicações de algoritmos baseados em *Benders*. Adicionalmente, desigualdades *k-path* também foram incorporadas no algoritmo como uma tentativa de melhorar o limitante inferior de programação linear da formulação de fluxo estocástica e, portanto, melhorar o desempenho global do algoritmo.

À luz dos resultados, pode-se observar como a incorporação de LBFs e de desigualdades *k-path* melhora consideravelmente o desempenho computacional do algoritmo *L-shaped* aqui proposto para resolver exatamente o SVRPTWMD com demanda estocástica. Também, os resultados dos experimentos numéricos evidenciam que as desigualdades *k-path* contribuem no melhoramento do desempenho computacional do algoritmo *L-shaped* tradicional. Uma pesquisa futura interessante seria adaptar o procedimento de separação heurístico Greedy proposto em Laporte et al. (2002) para além de detectar rotas parciais com topologia α , também gerar rotas seguindo as demais topologias (β e γ). Outra pesquisa interessante seria avaliar o comportamento do algoritmo *L-shaped* inteiro para instâncias com 50 e 100 clientes. O material desse capítulo está sendo compilado em um *working paper* e deverá ser submetido para publicação de um periódico científico de pesquisa operacional em breve.

Os resultados do presente capítulo não são estritamente comparáveis aos resultados dos Capítulos 4 e 5 porque as abordagens envolvidas são baseadas em paradigmas diferentes de tratamento de incertezas. Em programação estocástica, assume-se que as distribuições de probabilidade dos parâmetros incertos envolvidos no problema são conhecidas, diferentemente da abordagem robusta, que simplesmente requer conhecimento dos intervalos de variação dos parâmetros incertos. Adicionalmente, na abordagem estocástica com recurso, tem-se decisões do tipo espere-e-veja, que atuam para corrigir as inconsistências e reagir às infactibilidades ocasionadas pelas incertezas nas decisões de primeiro estágio, isto é, decisões aqui-e-agora. Essa é uma diferença importante dessa abordagem para a abordagem robusta estática, em que apenas decisões aqui-e-agora são definidas.

Capítulo 7

CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS

7.1 Conclusões

Nesta tese, abordou-se o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo e múltiplos entregadores (VRPTWMD) em contextos incertos. Considerar incertezas no problema indica que parâmetros como a demanda, tempos de viagens e tempos de serviços são representados por um número infinito ou finito de realizações, diferentemente da versão determinística do problema, que os representa por um único valor, por exemplo, o valor esperado. Duas abordagens para tratar incertezas foram usadas, a otimização robusta estática e a programação estocástica com recurso. Considerando-se a revisão da literatura aqui realizada, conclui-se que apesar de existirem diversos trabalhos abordando outras variantes do VRP em contextos incertos, não existem trabalhos estudando o VRPTWMD com incertezas. Por essa razão, considerar a aleatoriedade da demanda, bem como dos tempos de viagem e dos tempos de serviço explicitamente neste problema, e desenvolver novos modelos e métodos de solução efetivos para tratar o RVRPTWMD e SVRPTWMD, são contribuições originais e relevantes para o estado da arte dessa literatura, abrindo novos campos para trabalhos futuros, não apenas para o VRPTWMD, mas também para outras variantes do problema de roteamento de veículos.

Os estudos realizados ao longo dos capítulos desta tese visaram responder as questões levantadas no Capítulo 2. No Capítulo 4 foi proposta uma nova formulação do VRPTWMD na sua versão determinística, a qual foi tomada como ponto de partida para a determinação da *counterpart* robusta para o RVRPTWMD. A formulação de designação robusta resultante, além de lidar apropriadamente com o *trade-off* custo-risco por meio do parâmetro Γ , também pode ser diretamente resolvida via *solver* de otimização de propósito geral. O *solver* de otimização usado nos experimentos numéricos do Capítulo 4 foi o CPLEX v.12.8. Para melhorar o desempenho do *solver* para resolver a formulação de designação robusta, propôs-se uma abordagem heurística baseada na heurística I1 de Solomon para gerar soluções iniciais de boa qualidade. Os resultados revelaram que essa estratégia (denominada aqui de estratégia combinada) superou a qualidade das soluções encontradas pelo *solver* CPLEX v.12.8 puro, mas ela ainda não conseguiu provar a otimalidade das soluções para a maioria das instâncias consideradas Capítulo 4.

Devido à dificuldade dessa estratégia combinada para resolver a formulação de designação robusta, no Capítulo 5 foi desenvolvida uma formulação de particionamento de conjuntos para o RVRPTWMD, cuja resolução é realizada por um método baseado em BPC. As incertezas do problema foram incorporadas no subproblema *pricing* da técnica de geração de colunas, por definir apropriadamente as componentes do *label* do algoritmo *labeling* de programação dinâmica. Também, no Capítulo 5, delineou-se uma nova

formulação robusta obtida pela aplicação dos conceitos da RO na formulação de fluxo determinística, sem fazer uso da técnica de dualidade comumente usada na literatura de otimização robusta estática. À luz dos resultados computacionais reportados neste capítulo, observou-se como a estratégia combinada obteve melhores resultados, quando usada para resolver a formulação de fluxo robusta, do que a formulação de designação robusta. Adicionalmente, os resultados também revelaram que o algoritmo BPC resulta em uma estratégia efetiva para resolver de forma exata o RVRPTWMD em problemas com 25 e 50 clientes.

Diante dos resultados obtidos dos Capítulos 4 e 5, pode-se analisar como o parâmetro Γ , ao ser variado, impactou na geração das rotas e na alocação de entregadores aas rotas, no custo e no risco. Desse modo, conclui-se que a abordagem RO estática corresponde a um ferramenta poderosa para considerar incertezas e bastante útil para lidar com o compromisso existente entre custo e risco. Em particular, percebe-se como o parâmetro Γ define o nível de aversão ao risco do decisor. Quando Γ é próximo do 0, diz-se que o decisor é neutro ou indiferente ao risco, ao passo que quando Γ é bem maior do que 0, o decisor é avesso ao risco. Então, de acordo com a preferência do decisor, a metodologia de otimização robusta é capaz de proporcionar soluções que sejam piores em relação ao valor da função objetivo, porém que, em geral, se mantenham factíveis na prática.

No Capítulo 6 foi explorada uma abordagem baseada em programação estocástica dois estágios com recurso para tratar o SVRPTWMD. Para resolver o modelo estocástico, foi proposto um algoritmo do tipo *L-shaped* inteiro. Com base em alguns resultados computacionais com diversas instâncias do problema, observou-se o bom desempenho do algoritmo *L-shaped* inteiro proposto para resolver exatamente o SVRPTWMD com demanda estocástica. Os valores relativamente altos do VSS revelaram que o problema é altamente influenciado pelas incertezas na demanda, bem como nos tempos de viagens e tempos de serviços. Dessa forma, pode-se concluir que abordagens que ignoram incertezas (por exemplo, estratégia de valor esperado) podem não ser adequadas para aproximar o problema estocástico.

7.2 Pesquisas futuras

Há diversas perspectivas de continuidade do presente estudo, algumas das mais promissoras são descritas a seguir.

7.2.1 Melhorias nas abordagens dos Capítulos 4 e 5

Algumas pesquisas futuras interessantes para melhorar o desempenho computacional das abordagens de solução desenvolvidas nos Capítulos 4 e 5 são: *i*) Usar as soluções geradas pela heurística RHI1 como ponto de partida para um procedimento de busca local, como tentativa de melhorar a qualidade delas; *ii*) Investigar o impacto de incorporar *local branching* dentro de procedimentos BC de *solvers* de otimização comerciais para resolver as versões estocástica e robusta do VRPTWMD; e *iii*) Realizar experimentos computacionais adicionais com o algoritmo BPC para resolver o RVRPTWMD considerando apenas demanda incerta.

7.2.2 Experimentos computacionais adicionais com a abordagem do Capítulo 6

Outra pesquisa futura importante seria a realização de experimentos computacionais adicionais de modo a avaliar o desempenho computacional do algoritmo *L-shaped* inteiro com instâncias maiores

(com 50 e 100 clientes). Adicionalmente, usar o procedimento de separação exato introduzido em [Jabali et al. \(2014\)](#) para determinar rotas parciais com topologias α , β e γ , ao invés de usar o procedimento de separação heurístico de [Laporte et al. \(2002\)](#), que apenas é válido para rotas parciais com topologia α . Também, seria interessante realizar experimentos computacionais para analisar o impacto no desempenho global do algoritmo proposto ao se variar os pesos p_1 , p_2 e p_3 dos custos da função objetivo.

7.2.3 Formulação de fluxo dois-índices determinística

Outro tópico de pesquisa futura interessante corresponde à exploração de uma nova formulação compacta do VRPTWMD determinístico. Basicamente, a nova formulação usaria variáveis de decisão adicionais para indicar o modo em que cada cliente seria atendido. Assim, seria possível desconsiderar o índice l das variáveis de fluxo x_{ij} , para todo $(i, j) \in \mathcal{A}$. Para a apresentação dessa nova formulação, as seguintes variáveis de decisão precisariam ser declaradas: 1) x_{ij} : uma variável binária que assume o valor 1 se e somente se houver uma rota que visita o cliente j imediatamente após visitar o cliente i ; 2) y_i^ℓ : uma variável binária tomando valor 1 quando o cliente j é o primeiro cliente de sua rota e a rota é servida no modo l (número de entregadores); 3) z_i^ℓ : uma variável binária que assume o valor 1 se somente se o cliente i for atendido no modo l ; 4) u_i : uma variável não negativa denotando a carga no veículo logo após sair do cliente i e 5) w_i : uma variável não negativa que define o momento exato em que o serviço no cliente i é iniciado. A nova formulação compacta seria referida como formulação de fluxo de dois índices, uma vez que o domínio para as variáveis de fluxo x_{ij} corresponde aos arcos do gráfico \mathcal{G} . Essa nova formulação matemática poderia ser escrita da seguinte forma:

minimizar

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{i \in \mathcal{N}} (p_1 + \ell p_2) y_i^\ell + p_3 \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} d_{ij} x_{ij}, \quad (7.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} = 1, \forall i \in \mathcal{N}, \quad (7.2)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} = 1, \forall j \in \mathcal{N}, \quad (7.3)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} y_i^\ell \geq \left\lceil \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}} q_i}{Q} \right\rceil, \quad (7.4)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} y_i^\ell \leq \mathcal{K}, \quad (7.5)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \ell y_i^\ell \leq \mathcal{D}, \quad (7.6)$$

$$u_j \geq u_i + q_j x_{ij} - Q(1 - x_{ij}), \forall (i, j) \in \mathcal{A}, \quad (7.7)$$

$$q_i \leq u_i \leq Q, \forall i \in \mathcal{N}, \quad (7.8)$$

$$w_j \geq w_i + \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} s_i^\ell z_i^\ell + t_{ij} x_{ij} - \mathcal{M}_{ij}(1 - x_{ij}), \forall (i, j) \in \mathcal{A}, \quad (7.9)$$

$$w_i^a \leq w_i \leq w_i^b, \forall i \in \mathcal{V}, \quad (7.10)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} z_i^\ell = 1, \forall i \in \mathcal{N}, \quad (7.11)$$

$$z_j^\ell \geq z_i^\ell - (1 - x_{ij}), \forall i, j \in \mathcal{N}, i \neq j, \quad (7.12)$$

$$z_j^\ell \leq z_i^\ell + (1 - x_{ij}), \forall i, j \in \mathcal{N}, i \neq j, \quad (7.13)$$

$$y_j^\ell \geq z_j^\ell - (1 - x_{0j}), \forall j \in \mathcal{N}, \forall \ell = 1, \dots, \mathcal{L}, \quad (7.14)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} y_j^\ell = x_{0j}, \forall j \in \mathcal{N}, \quad (7.15)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, y_i^\ell \in \{0, 1\}, z_i^\ell \in \{0, 1\}. \quad (7.16)$$

A função objetivo (7.1) do modelo (7.1)-(7.16) consiste em minimizar também os custos associados ao número de rotas, ao número de entregadores e à distância total percorrida. Note que, neste caso, o número de rotas e entregadores é determinado usando as variáveis y_i^ℓ . As restrições (7.2) e (7.3) garantem que todos os clientes sejam visitados. As restrições (7.4) e (7.5) são limitantes inferior e superior para o número total de veículos na solução, respectivamente. As restrições (7.6) impõem que a soma do número de entregadores utilizados em todas as rotas não exceda o número total disponível. As restrições (7.7) determinam a carga total coletada pelo veículo ao sair do cliente j . As restrições (7.8) garantem que a carga total coletada do veículo ao sair do cliente i não deve exceder a capacidade Q do veículo e que a carga mínima no veículo é a carga (demanda) coletada no cliente i .

As restrições (7.9) determinam o momento exato da chegada do veículo no local do cliente j , se ele for visitado logo após o cliente i , isto é, se $x_{ij} = 1$. Caso contrário, essas restrições são redundantes. As restrições (7.10) impõem o início do serviço aos clientes dentro de suas janelas de tempo. As restrições (7.11) garantem que o serviço em todos os clientes deve ser executado em um único modo. Portanto, se o cliente i for atendido no modo l , isto é, se $z_i^\ell = 1$, então o tempo de serviço s_i^ℓ será considerado nas restrições (7.9). As restrições (7.12) e (7.13) são as responsáveis pela propagação do modo em que os clientes em cada uma das rotas são servidos. Observe que, se os clientes i e j pertencem à mesma rota, isto é, se $x_{ij} = 1$, as restrições (7.12) e (7.13) são equivalentes a uma única restrição de igualdade. Caso contrário, essas restrições são redundantes. As restrições (7.14) determinam o modo no primeiro cliente de cada uma das rotas. As restrições (7.15) garantem que o cliente j indexado na variável y_j^ℓ pode ser servido em um único modo, se ele for o primeiro cliente da rota. Finalmente, as restrições (7.16) impõem o tipo e o domínio das variáveis de decisão do modelo.

O número de variáveis binárias das formulações de fluxo de dois- e três-índices pode ser reduzido através da fixação das variáveis de fluxo x_{ij} e x_{ij}^ℓ em 0 se as desigualdades $w_i^a + s_i^\ell + t_{ij} > w_j^b$ e $q_i + q_j > Q$ forem verdadeiras. Por outro lado, é fácil notar que as restrições (7.14) são satisfeitas para variáveis binárias y_i^ℓ se e somente se elas são satisfeitas para variáveis contínuas y_i^ℓ no intervalo $[0, 1]$. Desse modo, o número de variáveis binárias da formulação de fluxo de dois índices pode ser ainda mais reduzido. Outro direcionamento futuro seria estender esse modelo às versões robusta e estocástica, bem como propor métodos exatos baseados em decomposição para resolver os modelos robusto e estocástico resultantes.

7.2.4 Extensões das abordagens para o VRPTWMD envolvendo decisões de *cluster*

Nesta tese, assumiu-se que os *clusters* são dados de entrada do problema, portanto o objetivo foi apenas determinar rotas primárias de custo mínimo para os veículos. Assim, outra perspectiva interessante de pesquisa futura seria considerar também as decisões de *clusters*, bem como a determinação de rotas secundárias dos entregadores para visitar os clientes de cada *cluster*, a partir das rotas primárias dos veículos. Outra pesquisa futura importante seria explorar o VRPTWMD estendido considerando, além da incerteza na demanda e tempos de viagem e visita, também nos locais de estacionamento do *cluster* em regiões urbanas com dificuldades de estacionamento. Adicionalmente, propor abordagens de solução efetivas para tratar esse problema.

7.2.5 Extensões das abordagens para outras variantes do VRPTWMD

A extensão do presente método BPC para tratar o RVRPTWMD com frota heterogênea pode ser feito apenas com a inclusão de um índice do tipo de veículo nas variáveis do modelo de particionamento de conjuntos, e a resolução do procedimento de programação dinâmica para cada tipo de veículo, além de para cada modo. Outra extensão interessante, porém que envolve maiores mudanças nas abordagens aqui propostas, seria considerar rotas de coleta e entrega de forma simultânea. Isso pode aparecer em diversas situações reais, por exemplo, na distribuição de bebidas com embalagens retornáveis. Também, os algoritmos aqui apresentados poderiam ser estendidos para tratar outras variantes do VRPTWMD estocástico que incluam coleta e entrega, múltiplas rotas, múltiplos depósitos, entre outras características práticas.

7.2.6 Otimização robusta com o conjunto de incerteza *budgeted* variável

Um tópico bastante comentado na literatura de otimização robusta estática refere-se ao nível de conservadorismo dela. Estudar estratégias para reduzir esse conservadorismo da abordagem estática é uma perspectiva interessante de pesquisa futura. Em Poss (2013), Poss (2014), foi introduzido um novo conjunto de incerteza, denominado de conjunto de incerteza *budgeted* variável, para reduzir o conservadorismo. Seja r uma rota qualquer que visita n_r vértices. Nesse conjunto, o *budget* de incerteza $\Gamma(n_r)$ é agora uma variável de decisão do problema, dependente do número de parâmetros incertos de fato presentes na rota r , e não do número de parâmetros incertos n . Com isso, pode-se obter, para cada rota, um valor do parâmetro $\Gamma(n_r)$ menor do que o Γ , porém garantindo o mesmo nível de risco da solução. Dessa forma, com esse novo conjunto, pode ser possível reduzir o preço da robustez das soluções. Adicionalmente, o desenvolvimento de um método baseado em BPC para resolver exatamente o RVRPTWMD com o conjunto de incerteza *budgeted* variável torna-se em outro tópico relevante para ser direcionado em trabalhos futuros.

7.2.7 *Branch-price-and-cut* para o SVRPTWMD com demanda estocástica

Em geral, os métodos mais usados para resolver exatamente variantes do VRP estocástico caem em métodos baseados em *branch-and-cut* e decomposição de *Benders*. Tipicamente, esses métodos são denominados de algoritmos *L-shaped*. Entretanto, poucos são os métodos exatos baseados em BPC usados para resolver variantes do SVRP. O principal desafio no desenvolvimento de métodos baseados em BPC corresponde ao cálculo do custo associado às violações das janelas de tempo após aplicar a ação de

recurso em algum cliente do *label forward*, pois esse custo é determinado exatamente se as identidades de todos os vértices da rota forem conhecidos. Dessa forma, deve-se definir expressões adequadas para limitar esse custo, levando a também construir regras de dominância apropriadas.

REFERÊNCIAS

- ADULYASAK, Y.; JAILLET, P. Models and algorithms for stochastic and robust vehicle routing with deadlines. *Transportation Science*, v. 50, n. 2, p. 608–626, 2016. Citado na página 31.
- AGRA, A.; CHRISTIANSEN, M.; FIGUEIREDO, R.; HVATTUM, L. M.; POSS, M.; REQUEJO, C. Layered formulation for the robust vehicle routing problem with time windows. In: MAHJOUR, A. R.; MARKAKIS, V.; MILIS, I.; PASCHOS, V. T. (Ed.). *Combinatorial Optimization*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012. p. 249–260. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 37.
- AGRA, A.; CHRISTIANSEN, M.; FIGUEIREDO, R.; HVATTUM, L. M.; POSS, M.; REQUEJO, C. The robust vehicle routing problem with time windows. *Computers & Operations Research*, v. 40, n. 3, p. 856 – 866, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 30, 36, 37 e 59.
- ALEM, D. J.; MORABITO, R. Production planning in furniture settings via robust optimization. *Computers & Operations Research*, v. 39, n. 2, p. 139 – 150, 2012. Citado na página 44.
- ÁLVAREZ, A.; MUNARI, P. Metaheuristic approaches for the vehicle routing problem with time windows and multiple deliverymen. *Gestão & Produção*, v. 23, n. 2, p. 279–293, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- ÁLVAREZ, A.; MUNARI, P. An exact hybrid method for the vehicle routing problem with time windows and multiple deliverymen. *Computers & Operations Research*, v. 83, p. 1 – 12, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 14, 24, 28 e 29.
- ARCHETTI, C.; SPERANZA, M. G. A survey on matheuristics for routing problems. *EURO Journal on Computational Optimization*, v. 2, n. 4, p. 223–246, Nov 2014. Citado na página 71.
- BALDACCI, R.; BARTOLINI, E.; MINGOZZI, A.; ROBERTI, R. An exact solution framework for a broad class of vehicle routing problems. *Computational Management Science*, v. 7, n. 3, p. 229–268, Jul 2010. Citado na página 68.
- BALDACCI, R.; MINGOZZI, A.; ROBERTI, R. Recent exact algorithms for solving the vehicle routing problem under capacity and time window constraints. *European Journal of Operational Research*, v. 218, n. 1, p. 1 – 6, 2012. Citado na página 69.
- BEN-TAL, A.; GHAOUI, L. E.; NEMIROVSKI, A. *Robust Optimization*. [S.l.]: Princeton University Press, 2009. (Princeton Series in Applied Mathematics). Citado 4 vezes nas páginas 15, 30, 127 e 129.
- BEN-TAL, A.; GORYASHKO, A.; GUSLITZER, E.; NEMIROVSKI, A. Adjustable robust solutions of uncertain linear programs. *Mathematical Programming*, Springer-Verlag, v. 99, n. 2, p. 351–376, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 129.
- BEN-TAL, A.; HERTOOG, D. d.; VIAL, J.-P. *Deriving robust counterparts of nonlinear uncertain inequalities*. [S.l.]: Tilburg : Center for Economic Research, 2012. Citado na página 127.
- BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical Programming Series A*, Amsterdam, v. 88, p. 411–424, 2000. Citado na página 14.

- BERTRAND, J. W. M.; FRANSOO, J. C. Operations management research methodologies using quantitative modeling. *International Journal of Operations & Production Management*, v. 22, n. 2, p. 241–264, 2002. Citado na página 17.
- BERTSIMAS, D.; BROWN, D. B.; CARAMANIS, C. Theory and applications of robust optimization. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 53, n. 3, p. 446–501, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 127.
- BERTSIMAS, D.; GOYAL, V. On the power and limitations of affine policies in two-stage adaptive optimization. *Mathematical Programming*, Springer-Verlag, v. 134, n. 2, p. 491–531, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 127 e 129.
- BERTSIMAS, D.; GOYAL, V.; LU, B. A tight characterization of the performance of static solutions in two-stage adjustable robust linear optimization. *Mathematical Programming*, Springer Berlin Heidelberg, v. 150, n. 2, p. 281–319, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 127.
- BERTSIMAS, D.; SIM, M. Robust discrete optimization and network flows. *Mathematical Programming*, Springer-Verlag, v. 98, n. 1-3, p. 49–71, 2003. Citado na página 127.
- BERTSIMAS, D.; SIM, M. The price of robustness. *Operations Research*, INFORMS, v. 52, n. 1, p. 35–53, 2004. Citado 11 vezes nas páginas 25, 26, 35, 36, 41, 44, 50, 57, 125, 127 e 128.
- BERTSIMAS, D. J. A vehicle routing problem with stochastic demand. *Operations Research*, v. 40, n. 3, p. 574–585, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 85.
- BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. *Introduction to stochastic programming*. New York: Springer, 2011. 181-263 p. Citado 6 vezes nas páginas 14, 15, 56, 86, 127 e 129.
- BRAEKERS, K.; RAMAEKERS, K.; NIEUWENHUYSE, I. V. The vehicle routing problem: State of the art classification and review. *Computers & Industrial Engineering*, v. 99, p. 300 – 313, 2016. Citado na página 19.
- CHRISTIANSEN, C. H.; LYSGAARD, J. A branch-and-price algorithm for the capacited vehicle routing problem with stochastic demands. *Operations Research Letters*, v. 35, n. 6, p. 773–781, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 33, 36, 37 e 85.
- CLARKE, G.; WRIGHT, J. W. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. *Operations Research*, v. 12, n. 4, p. 568–581, 1964. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/opre.12.4.568>>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 27.
- CONTARDO, C.; DESAULNIERS, G.; LESSARD, F. Reaching the elementary lower bound in the vehicle routing problem with time windows. *Networks*, v. 65, n. 1, p. 88–99, 2015. Citado na página 69.
- DANTZIG, G.; RAMSER, J. The truck dispatching problem. *Management Science*, v. 6, n. 1, p. 80–91, 1959. Citado na página 19.
- De La VEGA, J.; MUNARI, P.; MORABITO, R. Robust optimization for the vehicle routing problem with multiple deliverymen. *Central European Journal of Operations Research*, Dec 2017. ISSN 1613-9178. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10100-017-0511-x>>. Citado 4 vezes nas páginas 31, 38, 73 e 87.
- de SOUZA NETO, J. F.; PUREZA, V. Modeling and solving a rich vehicle routing problem for the delivery of goods in urban areas. *Pesquisa Operacional*, scielo, v. 36, p. 421 – 446, 12 2016. Citado na página 28.
- DESAULNIERS, G.; LESSARD, F.; HADJAR, A. Tabu search, partial elementarity, and generalized k-path inequalities for the vehicle routing problem with time windows. *Transportation Science*, v. 42, n. 3, p. 387–404, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 69, 88 e 90.

- DESAULNIERS, G.; MADSEN, O. B.; ROPKE, S. Chapter 5: The vehicle routing problem with time windows. In: _____. 2. ed. [S.l.]: editors, 2014. (MOS-SIAM series on Optimization), cap. 5, p. 119–159. Citado na página 69.
- DOLAN, E. D.; MORE, J. J. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming Series A*, Amsterdam, v. 91, p. 201–213, 2002. Citado na página 105.
- DREXL, M.; IRNICH, S. Solving elementary shortest-path problems as mixed-integer programs. *OR Spectrum*, v. 36, n. 2, p. 281–296, Mar 2014. Citado na página 65.
- DROR, M. Note on the complexity of the shortest path models for column generation in vrptw. *Operations Research*, v. 42, n. 5, p. 977–978, 1994. Citado na página 65.
- ERRICO, F.; DESAULNIERS, G.; GENDREAU, M.; REI, W.; ROUSSEAU, L.-M. *The vehicle routing problem with hard time windows and stochastic service time*. [S.l.], 2013. Citado 4 vezes nas páginas 32, 34, 36 e 37.
- ERRICO, F.; DESAULNIERS, G.; GENDREAU, M.; REI, W.; ROUSSEAU, L.-M. A priori optimization with recourse for the vehicle routing problem with hard time windows and stochastic service times. *European Journal of Operational Research*, v. 249, n. 1, p. 55 – 66, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 32, 34, 36 e 37.
- FEILLET, D.; DEJAX, P.; GENDREAU, M.; GUEGUEN, C. An exact algorithm for the elementary shortest path problem with resource constraints: Application to some vehicle routing problems. *Networks*, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 44, n. 3, p. 216–229, 2004. ISSN 1097-0037. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/net.20033>>. Citado na página 65.
- FERREIRA, V.; PUREZA, V. Some experiments with a savings heuristic and a tabu search approach for the vehicle routing problem with multiple deliverymen. *Pesquisa Operacional*, scielo, v. 32, p. 443 – 463, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 27.
- FUKASAWA, R.; LONGO, H.; LYSGAARD, J.; ARAGÃO, M. P. d.; REIS, M.; UCHOA, E.; WERNECK, R. F. Robust branch-and-cut-and-price for the capacitated vehicle routing problem. *Mathematical Programming*, v. 106, n. 3, p. 491–511, May 2006. Citado na página 69.
- GAUVIN, C.; DESAULNIERS, G.; GENDREAU, M. A branch-cut-and-price algorithm for the vehicle routing problem with stochastic demands. *Computers & Operations Research*, v. 50, n. 0, p. 141 – 153, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 33, 36, 37, 56 e 85.
- GENDREAU, M.; JABALI, O.; REI, W. 50th anniversary invited article - future research directions in stochastic vehicle routing. *Transportation Science*, v. 50, n. 4, p. 1163–1173, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 14, 20, 35 e 85.
- GENDREAU, M.; LAPORTE, G.; SÉGUIN, R. An exact algorithm for the vehicle routing problem with stochastic demands and customers. *Transportation Science*, v. 29, n. 2, p. 143–155, 1995. Citado 4 vezes nas páginas 32, 35, 37 e 95.
- GOLDBERG, A. V.; TARJAN, R. E. A new approach to the maximum-flow problem. *J. ACM*, ACM, New York, NY, USA, v. 35, n. 4, p. 921–940, out. 1988. ISSN 0004-5411. Citado na página 89.
- GONDZIO, J.; GONZÁLEZ-BREVIS, P.; MUNARI, P. New developments in the primal-dual column generation technique. *European Journal of Operational Research*, v. 224, n. 1, p. 41 – 51, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 72.
- GONDZIO, J.; GONZÁLEZ-BREVIS, P.; MUNARI, P. Large-scale optimization with the primal-dual column generation method. *Mathematical Programming Computation*, v. 8, n. 1, p. 47–82, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 72.

- GOUNARIS, C. E.; REPOUSSIS, P. P.; TARANTILIS, C. D.; WIESEMANN, W.; FLOUDAS, C. A. An adaptive memory programming framework for the robust capacitated vehicle routing problem. *Transportation Science*, v. 50, n. 4, p. 1239–1260, 2016. Citado 3 vezes nas páginas [30](#), [31](#) e [37](#).
- GOUNARIS, C. E.; WIESEMANN, W.; FLOUDAS, C. A. The robust capacitated vehicle routing problem under demand uncertainty. *Operations Research*, v. 61, n. 3, p. 677–693, 2013. Citado 4 vezes nas páginas [30](#), [37](#), [38](#) e [39](#).
- HANASUSANTO, G. A.; KUHN, D.; WIESEMANN, W. K-adaptability in two-stage robust binary programming. *Operations Research*, v. 63, n. 4, p. 877–891, 2015. Citado na página [56](#).
- HJORRING, C.; HOLT, J. New optimality cuts for a single vehicle stochastic routing problem. *Annals of Operations Research*, v. 86, n. 0, p. 569–584, Jan 1999. Citado na página [95](#).
- IRNICH, S.; DESAULNIERS, G. Shortest path problems with resource constraints. In: _____. *Column Generation*. Boston, MA: Springer US, 2005. p. 33–65. Citado na página [65](#).
- IRNICH, S.; VILLENEUVE, D. The shortest-path problem with resource constraints and k-cycle elimination for. *INFORMS Journal on Computing*, v. 18, n. 3, p. 391–406, 2006. Citado na página [65](#).
- JABALI, O.; REI, W.; GENDREAU, M.; LAPORTE, G. Partial-route inequalities for the multi-vehicle routing problem with stochastic demands. *Discrete Applied Mathematics*, v. 177, n. 0, p. 121 – 136, 2014. Citado 8 vezes nas páginas [14](#), [33](#), [34](#), [36](#), [93](#), [95](#), [98](#) e [114](#).
- JAILLET, P.; QI, J.; SIM, M. Routing optimization under uncertainty. *Operations Research*, v. 64, n. 1, p. 186–200, 2016. Citado na página [31](#).
- JEPSEN, M.; PETERSEN, B.; SPOORENDONK, S.; PISINGER, D. Subset-row inequalities applied to the vehicle-routing problem with time windows. *Operations Research*, v. 56, n. 2, p. 497–511, 2008. Citado na página [69](#).
- JONCOUR, C.; MICHEL, S.; SADYKOV, R.; SVERDLOV, D.; VANDERBECK, F. Column generation based primal heuristics. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 36, p. 695 – 702, 2010. ISCO 2010 - International Symposium on Combinatorial Optimization. Citado na página [71](#).
- KALL, P.; WALLACE, S. *Stochastic Programming*. New York: Wiley, 1994. Citado 2 vezes nas páginas [86](#) e [127](#).
- KOHL, N.; DESROSIERS, J.; MADSEN, O. B. G.; SOLOMON, M. M.; SOUMIS, F. 2-path cuts for the vehicle routing problem with time windows. *Transportation Science*, v. 33, n. 1, p. 101–116, 1999. Citado 2 vezes nas páginas [88](#) e [89](#).
- LAPORTE, G.; LOUVEAUX, F.; HAMME, L. An integer l-shaped algorithm for the capacitated vehicle routing problem with stochastic demands. *Operations Research*, v. 50, n. 3, p. 415 – 423, 2002. Citado 10 vezes nas páginas [14](#), [32](#), [33](#), [37](#), [56](#), [85](#), [95](#), [98](#), [111](#) e [114](#).
- LEE, C.; LEE, K.; PARK, S. Robust vehicle routing problem with deadlines and travel time/demand uncertainty. *Journal of the operational research society*, v. 63, n. 9, p. 1294–1306, 2012. Citado 3 vezes nas páginas [30](#), [37](#) e [59](#).
- LEI, H.; LAPORTE, G.; GUO, B. The capacitated vehicle routing problem with stochastic demands and time windows. *Computers & Operations Research*, v. 38, n. 12, p. 1775–1783, 2011. Citado 5 vezes nas páginas [33](#), [37](#), [86](#), [91](#) e [104](#).
- LI, X.; TIAN, P.; LEUNG, S. C. H. Int. J. Production Economics Vehicle routing problems with time windows and stochastic travel and service times : Models and algorithm. *Intern. Journal of Production Economics*, v. 125, n. 1, p. 137–145, 2010. Citado na página [14](#).

- LOZANO, L.; DUQUE, D.; MEDAGLIA, A. L. An exact algorithm for the elementary shortest path problem with resource constraints. *Transportation Science*, v. 50, n. 1, p. 348–357, 2016. Citado na página 65.
- LU, D.; GZARA, F. The robust vehicle routing problem with time windows: Solution by branch and price and cut. *European Journal of Operational Research*, v. 275, n. 3, p. 925 – 938, 2019. ISSN 0377-2217. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 37.
- LÜBBECKE, M. E.; DESROSIERS, J. Selected topics in column generation. *Operations Research*, v. 53, n. 6, p. 1007–1023, 2005. Citado na página 71.
- MORABITO, R.; PUREZA, V. Modelagem e simulação. In: MIGUEL, P. A. C. (Ed.). *Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010. cap. 3, p. 165–194. Citado na página 17.
- MUNARI, P. Comparação de softwares científicos utilizando perfis de desempenho: automatização dos cálculos pela planilha perfis.xls. Working paper. 2009. Citado na página 105.
- MUNARI, P.; GONDZIO, J. Using the primal-dual interior point algorithm within the branch-price-and-cut method. *Computers & Operations Research*, v. 40, n. 8, p. 2026 – 2036, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 16, 69 e 72.
- MUNARI, P.; MORABITO, R. A branch-price-and-cut algorithm for the vehicle routing problem with time windows and multiple deliverymen. *TOP*, v. 26, n. 3, p. 437–464, Oct 2018. Citado 3 vezes nas páginas 24, 28 e 29.
- MUNARI, P.; MORENO, A.; De La VEGA, J.; ALEM, D.; GONDZIO, J.; MORABITO, R. The robust vehicle routing problem with time windows: compact formulation and branch-price-and-cut method. Working Paper (Accepted for publication in *Transportation Science*). 2018. Citado 5 vezes nas páginas 31, 36, 37, 59 e 60.
- ORDÓÑEZ, F. Robust vehicle routing. In: _____. *Risk and Optimization in an Uncertain World*. [S.l.]: INFORMS Tutorials in Operations Research, 2010. cap. 7, p. 153–178. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 37.
- OYOLA, J.; ARNTZEN, H.; WOODRUFF, D. L. The stochastic vehicle routing problem, a literature review, part i: models. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, p. 1–29, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 35.
- OYOLA, J.; ARNTZEN, H.; WOODRUFF, D. L. The stochastic vehicle routing problem, a literature review, part ii: solution methods. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, p. 1–40, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 35.
- PESSOA, A. A.; PUGLIESE, L. D. P.; GUERRIERO, F.; POSS, M. Robust constrained shortest path problems under budgeted uncertainty. *Networks*, v. 66, n. 2, p. 98–111, 2015. Citado na página 59.
- POSS, M. Robust combinatorial optimization with variable budgeted uncertainty. *4OR*, v. 11, n. 1, p. 75–92, Mar 2013. Citado 2 vezes nas páginas 83 e 116.
- POSS, M. Robust combinatorial optimization with variable cost uncertainty. *European Journal of Operational Research*, v. 237, n. 3, p. 836 – 845, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 83 e 116.
- POVEDA, J. S. *O problema de localização-roteamento em dois níveis com janelas de tempo e múltiplos entregadores*. 81 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, 2017. Citado na página 29.

- PRÉKOPA, A. *Stochastic Programming*. [S.l.]: Springer Netherlands, 1995. v. 324. 624 p. Citado na página 15.
- PUREZA, V.; MORABITO, R.; REIMANN, M. Vehicle routing with multiple deliverymen: Modeling and heuristic approaches for the VRPTW. *European Journal of Operational Research*, v. 218, n. 3, p. 636 – 647, 2012. Citado 15 vezes nas páginas 14, 17, 19, 20, 22, 27, 29, 36, 38, 39, 47, 57, 73, 87 e 104.
- REIMANN, M.; DOERNER, K.; HARTL, R. F. D-ants: Savings based ants divide and conquer the vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, v. 31, n. 4, p. 563 – 591, 2004. Citado na página 15.
- RIGHINI, G.; SALANI, M. New dynamic programming algorithms for the resource constrained elementary shortest path problem. *Networks*, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 51, n. 3, p. 155–170, 2008. Citado na página 68.
- SALAVATI-KHOSHGHALB, M.; GENDREAU, M.; JABALI, O.; REI, W. *A rule-based recourse for the vehicle routing problem with stochastic demands*. [S.l.], 2017. Working paper. Citado 3 vezes nas páginas 34, 37 e 102.
- SALAVATI-KHOSHGHALB, M.; GENDREAU, M.; JABALI, O.; REI, W. A hybrid recourse policy for the vehicle routing problem with stochastic demands. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, Jul 2018. ISSN 2192-4384. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 37.
- SALAVATI-KHOSHGHALB, M.; GENDREAU, M.; JABALI, O.; REI, W. An exact algorithm to solve the vehicle routing problem with stochastic demands under an optimal restocking policy. *European Journal of Operational Research*, v. 273, n. 1, p. 175 – 189, 2019. ISSN 0377-2217. Citado 3 vezes nas páginas 34, 35 e 37.
- SENARCLENS de GRANCY, G. An adaptive metaheuristic for vehicle routing problems with time windows and multiple service workers. *Journal of Universal Computer Science*, v. 21, n. 9, p. 1143–1167, 2015. Citado na página 29.
- SENARCLENS de GRANCY, G.; REIMANN, M. Evaluating two new heuristics for constructing customer clusters in a vrptw with multiple service workers. *Central European Journal of Operations Research*, v. 23, n. 2, p. 479–500, 2015. Citado na página 29.
- SENARCLENS de GRANCY, G.; REIMANN, M. Vehicle routing problems with time windows and multiple service workers: a systematic comparison between ACO and GRASP. *Central European Journal of Operations Research*, v. 24, n. 1, p. 29–48, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 14, 19 e 28.
- SHANG, C.; YOU, F. Distributionally robust optimization for planning and scheduling under uncertainty. *Computers & Chemical Engineering*, v. 110, p. 53 – 68, 2018. Citado na página 129.
- SHAPIRO, A.; DENTCHEVA, D.; RUSZCZYNSKI, A. *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009. (MOS-SIAM Series on Optimization). ISBN 9780898716870. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 127.
- SHAPIRO, A.; DENTCHEVA, D.; RUSZCZYNSKI, A. *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory, Second Edition*. SIAM, 2014. (MOS-SIAM Series on Optimization). ISBN 9781611973433. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=VL0ABAAQBAJ>>. Citado na página 15.
- SHAPIRO, A.; PHILPOTT, A. *A Tutorial on Stochastic Programming*. 2007. Citado na página 127.
- SNIEDOVICH, M. *Robust Optimization - the elephant in the robust-satisficing room*. [S.l.], 2012. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 127.
- SOLOMON, M. M. Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. *Operations Research*, v. 35, n. 2, p. 254–265, 1987. Citado 20 vezes nas páginas 10, 18, 29, 36, 38, 41, 44, 46, 47, 50, 51, 55, 61, 73, 82, 85, 104, 108, 109 e 112.

- SOYSTER, A. L. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operation Research*, v. 21, n. 5, p. 1154–1157, 1973. Citado 7 vezes nas páginas 41, 42, 48, 50, 58, 78 e 128.
- SUBRAMANIAN, A.; UCHOA, E.; OCHI, L. S. A hybrid algorithm for a class of vehicle routing problems. *Computers & Operations Research*, v. 40, n. 10, p. 2519 – 2531, 2013. Citado na página 71.
- SUNGUR, I.; ORDÓÑEZ, F.; DESSOUKY, M. A robust optimization approach for the capacited vehicle routing problem with demand uncertainty. *IIE Transactions*, v. 40, p. 509 – 523, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 37.
- TAŞ, D.; DELLAERT, N.; WOENSEL, T. van; KOK, T. de. The time-dependent vehicle routing problem with soft time windows and stochastic travel times. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, v. 48, p. 66 – 83, 2014. Citado na página 32.
- TAŞ, D.; GENDREAU, M.; DELLAERT, N.; WOENSEL, T. van; KOK, A. de. Vehicle routing with soft time windows and stochastic travel times: A column generation and branch-and-price solution approach. *European Journal of Operational Research*, v. 236, n. 3, p. 789 – 799, 2014. Vehicle Routing and Distribution Logistics. Citado na página 32.
- THIELE, A.; TERRY, T.; EPELMAN, M. Robust linear optimization with recourse. *Technical report*, p. 4–37, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 129.
- TOTH, P.; VIGO, D. *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications, Second Edition*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014. (MOS-SIAM Series on Optimization). ISBN 9781611973594. Citado 3 vezes nas páginas 15, 17 e 19.
- TSIRIMPAS, P.; TATARAKIS, A.; MINIS, I.; KYRIAKIDIS, E. Single vehicle routing with a predefined customer sequence and multiple depot returns. *European Journal of Operational Research*, v. 187, n. 2, p. 483 – 495, 2008. Citado na página 15.
- VANDERBECK, F. Implementing mixed integer column generation. In: _____. *Column Generation*. Boston, MA: Springer US, 2005. p. 331–358. Citado na página 71.
- WIESEMANN, W.; KUHN, D.; SIM, M. Distributionally robust convex optimization. *Operations Research*, v. 62, n. 6, p. 1358–1376, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 129.
- YANG, W.-H.; MATHUR, K.; BALLOU, R. H. Stochastic vehicle routing problem with restocking. *Transportation Science*, v. 34, n. 1, p. 99–112, 2000. Citado na página 90.
- ZENG, B.; ZHAO, L. Solving two-stage robust optimization problems using a column-and-constraint generation method. *Operations Research Letters*, v. 41, n. 5, p. 457 – 461, 2013. Citado na página 56.
- ZHANG, J.; LAM, W.; CHEN, B. A stochastic vehicle routing problem with travel time uncertainty: Trade-off between cost and customer service. *Networks and Spatial Economics*, Springer US, v. 13, n. 4, p. 471–496, 2013. Citado na página 32.

Apêndice A

NOÇÕES BÁSICAS DE PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA E OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

Neste capítulo é apresentado de forma sucinta o arcabouço teórico das duas metodologias usadas nesta tese para tratamento da incerteza. Primeiro, os principais conceitos da SP são dados e, finalmente, apresentam-se alguns conceitos importantes da teoria relacionada da RO estática preconizada em [Bertsimas e Sim \(2004\)](#).

A.1 Programação estocástica

Programação estocástica é um conjunto de técnicas de programação matemática para modelar e resolver problemas de otimização que envolvem incertezas. Considerar as incertezas no modelo de otimização significa que os parâmetros incertos são formulados como variáveis aleatórias em um espaço de probabilidade $(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, em que \mathcal{W} , \mathcal{A} e \mathbb{P} descrevem, na mesma ordem, o conjunto de todas as possíveis realizações das variáveis aleatórias, o conjunto dos possíveis eventos resultantes de combinar tais realizações e a função de probabilidade que associa a cada evento $A \in \mathcal{A}$ um valor escalar $0 \leq P(A) \leq 1$, que representa as chances desse evento realizar-se. Nesta tese, assume-se que as variáveis aleatórias possam ser representadas por um conjunto discreto e finito de estados da natureza ou cenários $\omega \in \mathcal{W}$.

Na SP dois estágios com recurso, tem-se um conjunto de variáveis de decisão de primeiro estágio que devem ser determinadas antes da realização das variáveis aleatórias. Por esse motivo, é comum atribuir a essas variáveis a denominação de decisões “aqui-e-agora” (*here-and-now*). Após a realização das variáveis aleatórias, determinam-se as variáveis de decisão de segundo estágio, que são ações corretivas tomadas para adaptar ou finalizar as decisões feitas no primeiro estágio, de acordo com a realização das variáveis aleatórias. As variáveis de decisão de segundo estágio são comumente chamadas de decisões “espere-e-veja” (*wait-and-see*), ou decisões de recurso. A política ótima dos problemas de programação estocástica de dois estágios consiste de uma única decisão de primeiro estágio e uma coleção de decisões de recurso, definindo as ações que deveriam ser tomadas como respostas a cada cenário. Seja $E_{\xi}(\cdot)$ uma função que define o valor esperado em termos da variável aleatória ξ . Então, um modelo geral de programação estocástica de dois estágios com recurso pode ser formulado como:

Minimizar

$$c^T x + E_{\xi}[\min q(\omega)^T y(\omega)]. \tag{A.1a}$$

Sujeito a:

$$Ax = b \quad (\text{A.1b})$$

$$T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega), \quad \forall \omega \in \mathcal{W} \quad (\text{A.1c})$$

$$x \geq 0, \quad y(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in \mathcal{W}. \quad (\text{A.1d})$$

No modelo (A.1a)–(A.1d), as decisões de primeiro estágio são representadas pelo vetor x . Os vetores c e b e a matriz tecnológica A descrevem os parâmetros determinísticos do problema. Para uma dada realização ω , o vetor aleatório $\xi^T(\omega) = [q(\omega), T(\omega), W(\omega), h(\omega)]$ torna-se conhecido e, então, as decisões de segundo estágio, $y(\omega)$, podem ser tomadas. Finalmente, a função objetivo é composta pelo custo de primeiro estágio $c^T x$ e pelo custo esperado de segundo estágio $E_\xi[q(\omega)^T y(\omega)]$ sobre todas as realizações ω da variável aleatória ξ .

De uma perspectiva computacional, pode ser bastante custoso obter o termo de segundo estágio na função objetivo (A.1a), uma vez que, para cada realização ω , a decisão de segundo estágio $y(\omega)$ é a solução de um problema de programação matemática. Para destacar isso, o modelo (A.1a)–(A.1d) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{s.a.:} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

em que $\mathcal{Q}(x) = E_\xi \mathcal{Q}[x, \xi(\omega)]$ e, para todo $\omega \in \mathcal{W}$,

$$\mathcal{Q}[x, \xi(\omega)] = \min_{y(\omega) \geq 0} \{q(\omega)^T y(\omega) \mid T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega)\}. \quad (\text{A.3})$$

O modelo (A.2) descreve o problema de primeiro estágio; e o modelo (A.3), o problema de segundo estágio. O problema de segundo estágio pode ser visto como um problema de otimização em que a sua solução é considerada como uma ação de recurso e, dessa forma, o termo $W(\omega)y(\omega)$ “compensa” as possíveis inconsistências do sistema $T(\omega)x = h(\omega)$ em que $q(\omega)^T y(\omega)$ é o custo dessa ação de recurso. Por sua vez, o intuito do problema de primeiro estágio é encontrar uma solução x que proporcione uma consistência no sistema $T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega)$ para todas as possíveis realizações ω da variável aleatória ξ , de modo a otimizar os custos de primeiro estágio e o valor esperado dos custos de segundo estágio.

A matriz $W(\omega)$ é denominada matriz de recurso, já que está associada às decisões de recurso $y(\omega)$. Um caso especial surge quando $W(\omega) = W$, isto é, a matriz associada às decisões de recurso $y(\omega)$ não depende de ω . Quando isso acontece, o modelo resultante é denominado modelo de programação estocástica com recurso fixo. Por sua vez, estes modelos podem ser classificados como modelos com recurso relativamente completo, completo ou simples. Seja $K_1 = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ o conjunto de decisões x que satisfaz as decisões de primeiro estágio e $K_2 = \{x \mid \mathcal{Q}(x) < \infty\}$ o conjunto de decisões x de primeiro estágio para as quais o valor esperado é finito, isto é, o problema de segundo estágio é factível. Diz-se que o modelo de recurso (A.1a)–(A.1d) tem recurso relativamente completo se toda escolha de x que satisfaz as restrições de primeiro estágio também satisfaz as restrições de segundo estágio. Em outras palavras, um modelo é dito possuir recurso relativamente completo, se e somente se, $K_1 \subseteq K_2$. Note que

é necessário ter um conhecimento prévio dos conjuntos K_1 e K_2 para identificar se um programa possui recurso relativamente completo.

Um problema de SP de dois estágios é dito ter recurso completo se o problema de segundo estágio for factível para qualquer escolha do valor das variáveis de primeiro estágio. Finalmente, outra situação especial é a de recurso simples. Ela ocorre quando a matriz W é da forma $[+I; -I]$, sendo I a matriz identidade, e o vetor $y(\omega)$ das decisões de segundo estágio é particionado em $[y(\omega)^+, y(\omega)^-]$, com o vetor $[q(\omega)^+, q(\omega)^-]$ sendo o custo associado a essas decisões, respectivamente. A partir da classificação anterior, é possível observar que recurso relativamente completo e simples são casos especiais de recurso completo. Para mais detalhes sobre programação estocástica de dois estágios com recurso, recomenda-se ao leitor ver [Birge e Louveaux \(2011\)](#), [Kall e Wallace \(1994\)](#), [Shapiro e Philpott \(2007\)](#), [Shapiro et al. \(2009\)](#), entre outros

A.2 Otimização robusta

RO é uma técnica de programação matemática para modelar problemas de otimização com incertezas, a qual surge como resposta a contornar as dificuldades envolvidas na SP ([BEN-TAL et al., 2012](#); [BERTSIMAS et al., 2011](#); [BERTSIMAS; GOYAL, 2012](#); [BERTSIMAS et al., 2015](#)). Na SP, basicamente, duas possíveis dificuldades podem ser notadas. A primeira dificuldade reside em que as distribuições de probabilidade dos dados incertos devem ser conhecidas *a priori*. Em muitos casos, pode ser muito difícil, ou mesmo impossível, estimar distribuições de probabilidade bastante precisas dos dados. E mesmo, tendo alguma informação sobre essa distribuição, a enumeração e a quantificação dos cenários para capturar essas distribuições, é, raramente, satisfeita na prática. A segunda dificuldade é que o tamanho do modelo matemático resultante cresce em função do número de cenários, tornando o problema resultante mais desafiante em termos computacionais [Ben-Tal et al. \(2009\)](#).

Na RO, a suposição do conhecimento das distribuições de probabilidade dos parâmetros aleatórios é relaxada. Basta que os parâmetros aleatórios sejam representados como variáveis aleatórias limitadas e simétricas, cujas possíveis realizações estão contidas em um conjunto que, em geral, é chamado de conjunto de incerteza ([BERTSIMAS; SIM, 2003](#); [SNIEDOVICH, 2012](#)). Nesse contexto, RO busca selecionar a melhor solução entre aquelas imunizadas contra os dados incertos, isto é, soluções candidatas que são factíveis para todas as possíveis realizações dos dados dentro do conjunto incerto. Para facilitar a explanação da RO estática de [Bertsimas e Sim \(2004\)](#), considere-se o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \\ &\quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned} \tag{A.4a}$$

$$\begin{aligned} &\text{Sujeito a:} \\ &\quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{aligned} \tag{A.4b}$$

$$\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \tag{A.4c}$$

em que \mathbf{c} , \mathbf{b} , \mathbf{l} e \mathbf{u} são vetores de dimensões $n \times 1$, $m \times 1$, $n \times 1$ e $n \times 1$, respectivamente. \mathbf{A} é uma matriz de dimensão $m \times n$ e \mathbf{x} é um vetor de variáveis de decisão de ordem $n \times 1$. Sem perda de generalidade, suponha que as incertezas unicamente afetam a matriz de coeficientes \mathbf{A} . Seja J_i o conjunto de coeficientes na linha i do problema nominal (A.4a)-(A.4c) que estão sujeito às incertezas. Na RO

estática, cada a_{ij} , $j \in J_i$, é modelada como uma variável aleatória limitada, simétrica e independente \tilde{a}_{ij} , $j \in J_i$, tomando valores de acordo com uma distribuição com média igual ao valor nominal a_{ij}^o no intervalo $[a_{ij}^o - \hat{a}_{ij}, a_{ij}^o + \hat{a}_{ij}]$, em que \hat{a}_{ij} é o desvio máximo permitido da variável aleatória.

Para cada linha i , o parâmetro Γ_i , denominado *budget* de incerteza, não necessariamente inteiro, assume valores no intervalo $[0, |J_i|]$. Por exemplo, $\Gamma_i = 0$ representa o caso determinístico, isto é, todos os parâmetros incertos do problema assumem o valor nominal e/ou esperado. Nessa situação, a solução fornecida pela metodologia de RO não é nada conservadora e, dessa forma, está totalmente desprotegida contra as incertezas que afetam o problema. Por outro lado, quando $\Gamma_i = |J_i|$, todos os parâmetros incertos do problema assumem seu respectivo valor de pior caso, isto é, o valor nominal adicionado ao desvio máximo permitido. Esse caso fornece a máxima proteção contra as incertezas, resultando em uma metodologia totalmente conservadora. Este último caso é conhecido na literatura como o método de [Soyster](#). Entre os extremos 0 e $|J_i|$, é possível escolher um *budget* adequado para evitar soluções totalmente conservadoras, porém com um nível razoável de proteção contra as incertezas.

Para determinar a reformulação robusta sob a metodologia preconizada em [Bertsimas e Sim \(2004\)](#) é necessário associar outra variável aleatória ξ_{ij} à variável aleatória \tilde{a}_{ij} , tal que $\xi_{ij} = (\tilde{a}_{ij} - a_{ij}^o)/\hat{a}_{ij}$. Note que ξ_{ij} assume valores no intervalo $[-1, 1]$. Com isso, a variável aleatória \tilde{a}_{ij} pode ser escrita em termos da variável aleatória ξ_{ij} por meio da equação $\tilde{a}_{ij} = a_{ij}^o + \hat{a}_{ij}\xi_{ij}$. Sem perda de generalidade, assume que o parâmetro Γ_i seja inteiro. A formulação robusta do modelo (A.4a)-(A.4c) proposta em [Bertsimas e Sim \(2004\)](#) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \\ &\quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned} \tag{A.5a}$$

Sujeito a:

$$\sum_j a_{ij}^o x_j + \max_{\{S_i | S_i \subseteq J_i, |S_i| = \Gamma_i\}} \left\{ \sum_{i \in S_i} \hat{a}_{ij} y_j \right\} \leq b_i, \forall i \tag{A.5b}$$

$$-y_j \leq x_j \leq y_j, \forall j \tag{A.5c}$$

$$\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \tag{A.5d}$$

$$\mathbf{y} \geq 0 \tag{A.5e}$$

O problema de maximização interna $\mathcal{B}(x, \Gamma_i) = \max_{\{S_i | S_i \subseteq J_i, |S_i| = \Gamma_i\}} \left\{ \sum_{i \in S_i} \hat{a}_{ij} y_j \right\}$ visa encontrar um conjunto S_i , de cardinalidade Γ_i , dos índices $j \in J_i$, que maximize a proteção contra as incertezas presentes na restrição i . Por essa razão, o problema de maximização interna $\mathbb{B}(x, \Gamma_i)$ é denominado de função proteção. O modelo (A.5a)-(A.5e) é um modelo de otimização não linear e para linearizá-lo, [Bertsimas e Sim \(2004\)](#) recorrem à dualidade. Para um dado vetor \mathbf{y}^* , a função proteção $\mathcal{B}(x, \Gamma_i)$ é equivalente ao problema de otimização linear (A.6). Sejam α_{ij} e β_i as variáveis duais das restrições do problema de otimização (A.6). Assim, ao dualizar o problema de otimização referente à função proteção $\mathcal{B}(x, \Gamma_i)$ em (A.6), obtém-se o problema de otimização (A.7).

$$\mathcal{B}(x, \Gamma_i) = \max_{\xi_{ij} \geq 0} \left\{ \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} y_j^* \xi_{ij} \mid \xi_{ij} \leq 1, \forall j \in J_i, \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \leq \Gamma_i \right\} \tag{A.6}$$

$$\mathcal{B}(x, \Gamma_i) = \min_{\alpha_{ij} \geq 0, \beta_i \geq 0} \left\{ \sum_{j \in J_i} \alpha_{ij} + \Gamma_i \beta_i \mid \alpha_{ij} + \beta_i \geq \hat{a}_{ij} y_i^*, j \in J_i \right\} \quad (\text{A.7})$$

Ao substituir o problema de otimização (A.7) no modelo (A.5a)-(A.5e), resulta a reformulação robusta (linear) do problema (A.4a)-(A.4c), a qual pode ser escrita como:

maximize

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (\text{A.8a})$$

Sujeito a:

$$\sum_j a_{ij}^o x_j + \sum_{j \in J_i} \alpha_{ij} + \Gamma_i \beta_i \leq b_i, \forall i \quad (\text{A.8b})$$

$$\alpha_{ij} + \beta_i \geq \hat{a}_{ij} y_i, j \in J_i \quad (\text{A.8c})$$

$$-y_j \leq x_j \leq y_j, \forall j \quad (\text{A.8d})$$

$$\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \quad (\text{A.8e})$$

$$\mathbf{y} \geq 0 \quad (\text{A.8f})$$

$$\alpha_{ij} \geq 0, \forall j \in J_i, \beta_i \geq 0, \forall i \quad (\text{A.8g})$$

A abordagem de RO descrita aqui é denominada na literatura como RO estática, pois ela simplesmente determina soluções “aqui-e-agora” de custo mínimo (BEN-TAL et al., 2009; BERTSIMAS; GOYAL, 2012). Em ambientes práticos, entretanto, é comum que algumas decisões do problema sejam tomadas sem conhecimento completo das incertezas (decisões “aqui-e-agora”) e, após as incertezas serem reveladas, outras decisões podem ser tomadas (decisões “espere-e-veja”) (BEN-TAL et al., 2004; BIRGE; LOUVEAUX, 2011). Essa abordagem é conhecida como otimização robusta ajustável ou com recurso e é considerada menos conservadora do que a abordagem de RO estática (BEN-TAL et al., 2004; BEN-TAL et al., 2009; THIELE et al., 2009). Por outro lado, a *distributionally* RO é uma abordagem emergente e efetiva para direcionar a inexactidão das distribuições de probabilidade dos parâmetros incertos na tomada de decisões sob incerteza (SHANG; YOU, 2018). Para maiores detalhes nessa abordagem de RO, recomenda-se o trabalho Wiesemann et al. (2014).