

Henrique Matheus Gauy

Curvas de Rotação Galácticas em Teorias Métricas da Gravitação

Brasil

21 de maio de 2019

Henrique Matheus Gauy

Curvas de Rotação Galácticas em Teorias Métricas da Gravitação

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos, para obtenção do título de mestre em Física.

Universidade Federal de São Carlos – UFSCar
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia – CCET
Programa de Pós-Graduação em Física – PPGF

Orientador: Javier Fernando Ramos Caro

Brasil
21 de maio de 2019

Henrique Matheus Gauy

Curvas de Rotação Galácticas em Teorias Métricas da Gravitação/ Henrique Matheus Gauy. – Brasil, 21 de maio de 2019 –

113 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Javier Fernando Ramos Caro

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos – UFSCar

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia – CCET

Programa de Pós-Graduação em Física – PPGF, 21 de maio de 2019.

1. Gravitação. 2. Relatividade Geral. 3. Teorias Métricas. 4. Galáxias. I. Javier Fernando Ramos Caro. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Programa de Pós-Graduação em Física. IV. Curvas de Rotação Galácticas em Teorias Métricas da Gravitação.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Henrique Matheus Gauy, realizada em 01/04/2019:

Prof. Dr. Javier Fernando Ramos Caro
UFSCar

Prof. Dr. Raphael Santarelli
UFSCar

Prof. Dr. Daniel Augusto Turolla Vanzela
USP

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha família pelo incentivo e apoio incondicional; ao meu orientador Javier Fernando Ramos Caro pela orientação, correções e incentivos; a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação. Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro (132389/2017-7).

Resumo

De um ponto de vista Pós-Newtoniano Parametrizado (PNP) tentamos responder parcialmente se os novos graus de liberdade, representados pelos potenciais da PNP, podem levar a modificações significantes na dinâmica de galáxias na direção de tornar desnecessário a suposição da existência de matéria escura. Na PNP, vários parâmetros classificam cada teoria e seus possíveis valores são fortemente limitados principalmente devido a experimentos no sistema solar [1, 2, 3]. Tais restrições tornam desvios dos efeitos gravitacionais, com relação a Relatividade Geral, insignificantes, portanto tentativas de formular teorias alternativas se tornam improdutivas. Recentemente um conjunto de teorias tem conquistado popularidade por serem caracterizados por mecanismo de "Screening" [4]. Estas tem a propriedade de permitir modificações em escalas maiores que o sistema solar, mas mantendo o sucesso da Relatividade Geral nas redondezas do sistema solar. Ou seja, este conjunto de teorias permite que modificações violem as restrições dos parâmetros Pós-Newtonianos. Com este novo paradigma consideramos dois tipos de soluções na PNP: (I) Quando não há matéria presente, ou em outras palavras no vácuo; (II) ou quando temos uma distribuição de matéria Politrópica. Em (I) encontramos que nenhuma das correções, devido aos potências Pós-Newtonianos, levam a modificações suficientes para emularmos matéria escura por meio de efeitos puramente gravitacionais. Em (II) para qualquer escolha dos parâmetros Pós-Newtonianos (quando mudamos γ , β , ξ , α_3 ou/e ζ_j , com $j = 1, 2$, de seus valores em Relatividade Geral) a necessidade de matéria escura é inevitável, para a existência de curvas de rotação planas. Apenas para teorias nas quais $\zeta_3 > 0$ que encontramos curvas que se assemelham a curvas planas. Sugerindo, pelo menos para os modelos em consideração, que apenas teorias com $\zeta_3 > 0$ tem a capacidade de explicar a dinâmica de galáxias sem a necessidade de supormos um conteúdo escuro.

Palavras-chave: Gravitação. Relatividade Geral. Teorias Métricas. Galáxias.

Abstract

From a Parametrized Post-Newtonian (PNP) perspective we attempt to partially answer the question, by studying some models, of whether or not the new degrees of freedom, represented by the PNP potentials, can lead to significant modifications in the dynamics of galaxies in the direction of rendering dark matter obsolete. In the PNP, several parameters classify each theory and their possible values are tightly constrained mainly due to solar system experiments [1, 2, 3]. Such restrictions renders the modifications of gravitational effects, with respect to General Relativity, to be insignificant, making attempts to find alternative metrical theories rather fruitless. In recent years a new kind of metric theories have arisen to popularity and are characterized by "Screening" mechanisms [4]. These lead to the possibility of modifications in larger scales than the solar system while retaining the success of GR in the latter, allowing for violations of the constraints of the Post-Newtonian parameters. With this new paradigm we consider two kinds of solutions: (i) When no matter field is present, or in other words, vacuum; (ii) or a Politropic distribution of matter. For (i) we find that the corrections don't lead to the needed modifications as required to be an alternative to dark matter. In (ii) for most choices of the parameters (when changing γ , β , ξ , α_3 , ζ_j , with $j = 1, 2$, from their values in GR) the need for dark matter is unavoidable, in order to find a flat rotation curve. It's only for theories in which $\zeta_3 > 0$ that some resemblance of flat rotation curves is found. The latter suggests, at least for the models considered, that these are the only theories capable of replacing dark matter as a possible explanation for the dynamics of galaxies.

Keywords: Gravitation. General Relativity. Metric Theories. Galaxies.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Curvas de rotação de algumas galáxias espirais. Não é observado a queda Kepleriano ($1/\sqrt{r}$) mesmo após alguns Kpc de distância (retirado de Rubin, Ford Jr. e Thonnard[11]).	18
Figura 2 – Apresentamos os campos \tilde{U} e $\tilde{\Psi}$ para um modelo politrópico com $n = 5$ para teorias conservativas ($\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = \alpha_3 = 0$). As figuras no topo são para β diferente de 1, as centrais para γ diferente de 1 e as mais embaixo são para ξ diferente de 0. A linha continua representa o campo \tilde{U} e a tracejada o campo $\tilde{\Psi}$	75
Figura 3 – Apresentamos os campos \tilde{U} e $\tilde{\Psi}$ para um modelo politrópico com $n = 5$ para teorias não-conservativas, aqui consideramos os parâmetros $\gamma = \beta = 1$ e $\xi = 0$. De cima para baixo, alternamos α_3 , ζ_1 , ζ_2 e ζ_3 diferentes de 0, respectivamente. A linha continua representa o campo \tilde{U} e a tracejada o campo $\tilde{\Psi}$	76
Figura 4 – Apresentamos a densidade efetiva $\tilde{\rho}^*$ para um modelo politrópico com $n = 5$ para teorias conservativas ($\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = \alpha_3 = 0$). As figuras no topo são para β diferente de 1, as centrais para γ diferente de 1 e as mais embaixo são para ξ diferente de 0. A linha continua representa a densidade Newtoniana e as representadas por pontos, traçado e traço-pontos são densidades efetivas da PNP com $\epsilon = 0.05$, $\epsilon = 0.1$ e $\epsilon = 0.15$, respectivamente.	77
Figura 5 – Apresentamos a densidade efetiva $\tilde{\rho}^*$ para um modelo politrópico com $n = 5$ para teorias não-conservativas, aqui consideramos os parâmetros $\gamma = \beta = 1$ e $\xi = 0$. De cima para baixo, alternamos α_3 , ζ_1 , ζ_2 e ζ_3 diferente de 0, respectivamente. A linha continua representa a densidade Newtoniana e as representadas por pontos, traçado e traço-pontos são densidades efetivas da PNP com $\epsilon = 0.05$, $\epsilon = 0.1$ e $\epsilon = 0.15$, respectivamente.	78
Figura 6 – Apresentamos as curvas de rotação ($\tilde{v}^\varphi = v^\varphi/\sqrt{U_0}$) para um modelo politrópico com $n = 5$ para teorias conservativas ($\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = \alpha_3 = 0$). As figuras no topo são para β diferente de 1, as centrais para γ diferente de 1 e as mais embaixo são para ξ diferente de 0. A linha continua representa a curva Newtoniana e as representadas por pontos, traçado e traço-pontos são curvas PNP com $\epsilon = 0.05$, $\epsilon = 0.1$ e $\epsilon = 0.15$, respectivamente.	79

Figura 7 – Apresentamos as curvas de rotação ($\tilde{v}^\varphi = v^\varphi/\sqrt{U_0}$) para um modelo politrópico com $n = 5$ para teorias não-conservativas, aqui consideramos os parâmetros $\gamma = \beta = 1$ e $\xi = 0$. De cima para baixo, alternamos α_3 , ζ_1 , ζ_2 e ζ_3 diferente de 0, respectivamente. A linha contínua representa a curva Newtoniana e as representadas por pontos, traçado e traço-pontos são curvas PNP com $\epsilon = 0.05$, $\epsilon = 0.1$ e $\epsilon = 0.15$, respectivamente. . . 80

Sumário

	Introdução	15
1	TEORIAS MÉTRICAS DA GRAVITAÇÃO	19
1.1	O Espaço-tempo	19
1.2	Relatividade Geral	20
1.2.1	A Aproximação Pós-Newtoniana: Relatividade Geral	23
1.2.2	O Teorema de Lovelock	24
1.3	Teorias de Brans-Dicke	25
1.3.1	A Aproximação Pós-Newtoniana: Brans-Dicke	29
1.3.2	Mecanismos de Screening	29
2	A APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA PARAMETRIZADA	35
2.1	As Equações de Campo	35
2.1.1	As Equações da Hidrodinâmica	38
2.1.2	Os Parâmetros Pós-Newtonianos	39
2.2	As Equações de Movimento na PNP	40
2.3	A Equação de Órbitas Circulares	42
2.3.1	Condições em Simetria Esférica para a Existência de Órbitas Circulares	43
2.3.2	Condições em Simetria Cilíndrica para a Existência de Órbitas Circulares	45
3	SOLUÇÕES EXTERIORES: O CASO ESFÉRICO E CILÍNDRICO	49
3.1	Soluções de Simetria Esférica	49
3.2	Modelos de Discos Finos de Simetria Axial	52
4	TEORIA CINÉTICA NA APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA PARAMETRIZADA	61
4.1	A Equação de Boltzmann Sem Colisões	61
4.2	Integrais de Movimento na PNP	66
4.3	A Velocidade de Escape	67
4.4	As Equações da Auto-gravitação	67
5	MODELOS DE SIMETRIA ESFÉRICA	69
5.1	Modelos Politrópicos	70
5.2	Soluções Aproximadas	72
5.3	Soluções Numéricas	74
5.4	As Curvas de Rotação para os Modelos Politrópicos	79

6	CONCLUSÃO	83
	REFERÊNCIAS	85
	APÊNDICES	91
	APÊNDICE A – ASPECTOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL . .	93
A.1	A Estrutura Diferencial	93
A.2	Campos Tensoriais	94
A.2.1	O Espaço Tangente	94
A.2.2	O Fibrado Tangente	96
A.3	As Conexões	98
A.4	Variedades Métricas (Espaços Riemannianos)	100
A.4.1	Integração em Variedades	102
A.4.2	Orientação Temporal	103
A.4.3	Mapas conformais	103
	APÊNDICE B – DERIVANDO AS FORMAS DIFERENCIAIS DAS EQUAÇÕES DE CAMPO	107
B.1	A expressão diferencial de ϕ_6	107
B.2	A expressão diferencial de ϕ_w	107
	APÊNDICE C – PROPRIEDADES DOS POLINÔMIOS DE LEGEN- DRE	111
C.1	Propriedade (3.15)	111
C.2	Propriedade (3.16)	111
C.3	Propriedade (3.17)	112
C.4	Propriedade (3.18)	112

Introdução

A teoria da Relatividade Geral (TRG) é um dos pilares da física moderna e não é apenas bem sucedida de uma perspectiva teórica, ela também apresenta uma das melhores comparações com experimentos da ciência moderna. No sistema solar, mediado pela Aproximação Pós-Newtoniana Parametrizada (PNP) (Cap. 2), ela concorda significativamente com experimentos [1, 2, 3, 5, 6, 7], e, mais recentemente, foi demonstrado que a TRG também está em concordância com experimentos de ondas gravitacionais, como medido pelo Ligo e outros [8]. Apesar do tremendo sucesso da teoria, questões a respeito desta interação fundamental na natureza ainda existem. A TRG é válida em escalas cosmológicas? Ou astrofísicas? De fato, problemas surgem quando estendemos sua validade a escalas maiores do que o sistema Solar, nestes regimes (astrofísicos, cosmológicos) temos algumas das piores previsões da ciência moderna. Vera Rubin et al. [9, 10, 11] mostrou, por meio das curvas de rotação, que galáxias necessitam de mais massa, do que sua massa visível, para explicar sua dinâmica. Uma curva de rotação é a representação gráfica das velocidades circulares de estrelas, em torno do centro de galáxias ou outros objetos astrofísicos, como função do raio, e uma curva de rotação plana é aquela que a partir de uma certa distância do centro as velocidades se tornam praticamente constantes com relação ao raio. A figura 1 apresenta as curvas de rotação medidas de algumas galáxias espirais. Estes resultados são a evidência central de que alguma forma de "matéria escura" existe em galáxias, ou seja, é adicionado uma suposição auxiliar para conciliar a teoria (TRG) com o comportamento destes objetos. Alguns autores [12, 13, 14, 15, 16] consideram tal suposição auxiliar como sendo anti-científica, ou ad-hoc, pois sua adição não aumenta a capacidade de sua falsificação, é apenas inserida de forma a explicar observações que falsificam a teoria padrão. Obviamente o paradigma atual da comunidade é da existência de matéria escura, já que observações de diversas áreas astronômicas, astrofísicas e cosmológicas indicam na sua existência [13, 17], por exemplo a estabilidade de galáxias, a dinâmica de aglomerados, a formação de estruturas na evolução do universo e a radiação cósmica de fundo [18, 19, 20, 21], mas nenhuma medição direta existe até o momento [22, 23, 24, 25]. Tal convergência justifica a hipótese.

Mas a inferência sobre a massa dinâmica das galáxias (matéria ordinária + matéria escura) usa a teoria Newtoniana como fundação, então modificações da teoria de gravitação podem tornar a ideia de matéria escura obsoleta. Na literatura existem várias propostas de modificação, quase todas com o propósito de explicar a fenomenologia de regimes cosmológicos, principalmente a expansão acelerada do universo (referimos ao leitor a vasta bibliografia de teorias alternativas, principalmente [3, 26]). Agora, no contexto astrofísico existem muitas teorias com algum sucesso como alternativas a matéria escura

em galáxias. A mais notória é provavelmente Mond (ou "Modified Newton dynamics") [27, 28, 29, 30, 31, 32], na qual a força gravitacional se comporta diferente quando abaixo de uma aceleração fundamental. Apesar do sucesso da teoria em explicar as curvas de rotação de várias galáxias e a relação de Tully-Fisher [33, 34, 35], desenvolvimentos recentes [36] demonstram que esta interessante possibilidade é improvável. Modificar uma teoria fundamental como a gravitação não é uma tarefa fácil, o vasto espaço de possíveis concorrentes torna tratar de caso a caso um empreendimento insustentável. Uma forma mais econômica é construir uma teoria, ou formalismo, que contenha, como casos particulares, uma grande quantidade de teorias. Baseado neste princípio muitos formalismos gerais já foram construídos. Dentre estes, o mais bem sucedido é a aproximação Pós-Newtoniana Parametrizada (PNP), devido a Will e Nordvedt [1, 2, 3, 5, 6, 7]. A PNP generaliza a aproximação Pós-Newtoniana para teorias métricas, adicionando dez parâmetros que diferenciam as concorrentes. A incrível precisão de experimentos no sistema solar tem conduzido para cada vez menor os possíveis valores dos parâmetros, alguns limitados por 10^{-20} ([1, 2, 3, 5, 6, 7], Cap. 2). Estas restrições implicam na falsificação da grande maioria das teorias alternativas.

Mas propostas recentes sugerem que este impasse pode ser superado por teorias métricas. A existência de mecanismo de "Screening" permitem que teorias concordem com os experimentos no sistema solar sem atrapalhar as modificações em escalas maiores [4, 37, 38]. Estas teorias, com algum mecanismo de "Screening", não podem ser expandidas perturbativamente do infinito até o raio de Schwarzschild [4], uma característica básica para a teoria de perturbação clássica, e portanto tem previsões diferentes, nas escalas do sistema solar, do que o formalismo da PNP. Mas as falhas da expansão só acontecem dentro de um raio característico (r_v) ([4] e Cap. 1). Fora deste último a teoria de perturbação clássica deve ser válida, e em concordância com [4] enquanto a análise se mantenha longe de r_v a teoria linear deve ser a PNP [4]. A grande maioria das propostas de mecanismos de "Screening" são construídas com o intuito de tratar modelos cosmológicos. Mesmo que isto seja verdade ainda permite levantarmos a questão: Existe algum mecanismo capaz de permitir modificações em escalas astrofísicas? Este questionamento já foi abordado por [39, 40]. Estes trabalhos demonstram que o mecanismo de "Screening" pode imitar os efeitos da matéria escura em aglomerados galácticos [40] e na própria Via Láctea [39].

Por esse motivo conjecturamos a existência de algum mecanismo de "Screening" capaz de esconder as modificações da teoria de gravitação em escalas do sistema solar, mas que mantenha as modificações nas escalas de galáxias ou aglomerados de galáxias. Em essência consideramos teorias que desacoplem os resultados no sistema solar daqueles em escalas astrofísicas. E por enquanto que a análise seja restrita para fora e longe do raio característico r_v a expansão perturbativa deve ser a PNP [4]. Portanto levantamos as questões: quais as correções às curvas de rotação devido aos potenciais da PNP? Serão essas correções suficientes para explicar a massa insuficiente de galáxias? Abordaremos

estas questões por meio de dois tipos de soluções: (I) No vácuo, no exterior de uma distribuição de matéria com simetria esférica e de um disco fino de simetria axial; (II) ou para uma distribuição de matéria Politrópica. Nossa escolha para as simetrias, tanto esférica quanto axial, é principalmente pela simplicidade das equações de campo e em segundo por representarem, sob boa aproximação, as simetrias de muitas galáxias. Quanto aos Polítropos, consideramos estes os modelos mais simples de simetria esférica que possuem alguma relevância em dinâmica de galáxias. Em (I) resolvemos as equações de campo para o caso esférico e demonstramos que as correções devido aos potenciais da PNP não são suficientes para a planificação das curvas de rotação, ou seja, não encontramos correções suficientes para explicarmos a dinâmica de galáxias sem a adição de matéria escura. Já para o caso de discos finos axiais tomamos a expansão de multipolos e demonstramos que até a ordem de quadrupolo as correções não são suficientes para encontrarmos curvas planas.

Em (II), para construirmos os modelos politrópicos no formalismo da PNP usaremos uma abordagem estatística, conhecida como " f to ρ " [41], ou seja, proporemos uma função de distribuição (DF) e dela construiremos os campos materiais que caracterizam os Polítropos. Agora, para teorias métricas, e portanto para a PNP, suporemos que a DF é conservada do ponto de vista de um dos componentes do sistema, ou seja, ela deve satisfazer a equação de Vlasov, uma versão relativística da equação de Boltzmann sem colisões. Esta suposição é válida sempre quando o sistema em análise é suficientemente suave e as colisões de seus componentes podem ser desconsideradas. Como primeiro passo determinaremos uma versão da equação de Boltzmann sem colisões no formalismo da PNP, seguiremos argumentos semelhantes aos desenvolvidos por [42] e os estenderemos a PNP. Os Polítropos serão construídos por meio da extensão da DF newtoniana para a PNP e assim determinaremos os campos materiais que constituem os modelos politrópicos. Demonstraremos que modificações significantes nas curvas de rotação surgem como consequência dos novos potenciais, mas estas não são suficientes para explicar as curvas de rotação de galáxias, o comportamento Kepleriano usual para raios grandes ainda é observado até mesmo para as teorias mais exóticas. Apenas para aquelas com $\zeta_3 > 0$ encontramos semelhanças a curvas planas. Ou seja, podemos concluir que a grande maioria das teorias métricas, pelo menos para os modelos que consideramos, são afligidas pela mesma necessidade, de um conteúdo escuro, da teoria Newtoniana.

O restante do trabalho é organizado como se segue. No Cap. 1 apresento as hipóteses fundamentais de teorias métricas e construo a TRG, a teoria de Brans-Dicke e um dos possíveis mecanismos de "Screening" já desenvolvidos na literatura. No Cap. 2 faço uma breve introdução ao formalismo da PNP e determino as velocidades circulares e algumas condições sobre as mesmas. No Cap. 3 finalmente nos especializamos em estudos no vácuo, resolvendo as equações de campo e encontrando as velocidades circulares para casos esféricos e discos finos axiais. No Cap. 4 construo a teoria cinética para o formalismo da

PNP como fundação para a construção dos Polítropos. No Cap. 5 calculamos os campos materiais dos modelos politrópicos e apresentamos suas curvas de rotação.

Sobre a notação, consideraremos que índices latinos são valorados de 1 a 3 e gregos de 0 a 3. Também usaremos, sempre que conveniente, a notação $\partial f/\partial x = f_{,x}$. Termos de diferentes ordens de c carregarão índices como abaixo,

$${}^n A \equiv {}^n A \sim c^{-n},$$

isso significa que ${}^n A$ é da ordem de c^{-n} .

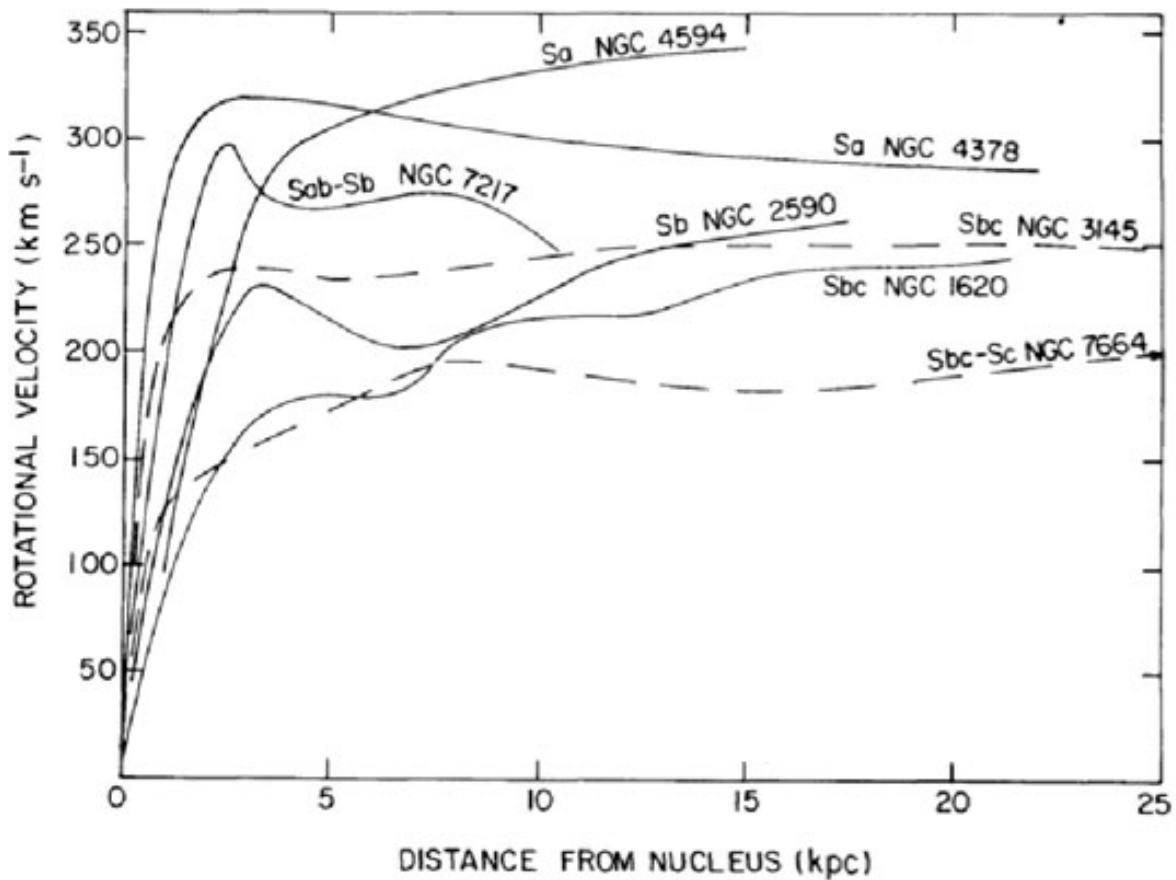


Figura 1 – Curvas de rotação de algumas galáxias espirais. Não é observado a queda Kepleriano ($1/\sqrt{r}$) mesmo após alguns Kpc de distância (retirado de [Rubin, Ford Jr. e Thonnard\[11\]](#)).

1 Teorias Métricas da Gravitação

Existem várias teorias de gravitação já estudadas na literatura, muitas das quais já caíram no esquecimento por não satisfazerem algum experimento no sistema solar, sendo a teoria da relatividade geral a única a sobreviver a todos os experimentos. Mas a diversidade de propostas impossibilita um formalismo geral que permita avaliarmos as previsões de diferentes teorias. Para tanto a comunidade construiu duas categorias, teorias métricas e não métricas. Trataremos neste trabalho de teorias métricas da gravitação, e apresentaremos o espaço-tempo, para teorias métricas, de forma rigorosa para entendermos todas as restrições desta classificação e quais suposições são feitas para construirmos a TRG e quais podem ser relaxadas de forma a estendermos a anterior. Portanto, começamos na seção seguinte definindo o espaço-tempo, comum a todas as teorias métricas.

1.1 O Espaço-tempo

O espaço-tempo é definido [43, 44, 45](ou postulado):

Definição 1 *O espaço-tempo é uma variedade topológica de quatro dimensões com um atlas de compatibilidade suave e orientável, carregando uma conexão sem torção compatível com uma métrica Lorentziana (é um espaço Pseudo-Riemanniano) e uma orientação temporal. Ou seja, é a sêxtupla $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{C^\infty}^\uparrow, \nabla_{\mathcal{T}=\nabla_{g=0}}, g, T)$.*

Os espaços definidos como acima são conhecidos como Pseudo-Riemannianos. A definição anterior foi construída de forma a garantir que este conjunto de teorias satisfaça o princípio de equivalência de Einstein, que possui sua própria comprovação experimental [1, 2, 3, 26], e de forma que o campo gravitacional possa ser interpretado apenas como a geometria do espaço-tempo. No apêndice A exploramos o significado de cada uma das estruturas que adicionamos ao espaço tempo, dando uma breve introdução aos aspectos de geometria diferencial necessários.

A razão de definirmos o espaço-tempo dessa forma é com o propósito de permitir os seguintes postulados físicos:

Postulado 1 *A linha de mundo de partículas, uma curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, é um extremo do funcional:*

$$L = \int_0^\lambda d\lambda \sqrt{-g_{\gamma(\lambda)}(v_{\gamma, \gamma(\lambda)}, v_{\gamma, \gamma(\lambda)})},$$

onde $v_{\gamma, \gamma(\lambda)} \in T_{\gamma(\lambda)}M$ é a velocidade da curva γ no ponto $\gamma(\lambda)$.

O postulado acima garante que partículas sempre se movem no espaço-tempo sobre as geodésicas do mesmo. Por outro lado, como a conexão do espaço-tempo é compatível com a métrica também poderíamos escrever o postulado 1 em termos de uma carta $(U, x) \in \mathcal{A}_{C^\infty}^\dagger$ (aqui usamos da notação $dx^\mu(v_{\gamma, \gamma(\lambda)}) = \dot{\gamma}^\mu(\lambda) = dx^\mu/d\tau$):

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (1.1)$$

onde,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\kappa\mu} (g_{\alpha\kappa, \beta} + g_{\beta\kappa, \alpha} - g_{\alpha\beta, \kappa}).$$

O seguinte postulado define partículas massivas, como se segue,

Postulado 2 *A linha de mundo de partículas massivas satisfaz:*

$$g_{\gamma(\lambda)}(v_{\gamma, \gamma(\lambda)}, v_{\gamma, \gamma(\lambda)}) < 0 \text{ e } g_{\gamma(\lambda)}(T, v_{\gamma, \gamma(\lambda)}) < 0 \quad \forall \lambda.$$

Poderíamos reescrever o postulado acima ao considerarmos uma carta $(U, x) \in \mathcal{A}_{C^\infty}^\dagger$ e para uma parametrização que simplifique as expressões (usaremos a expressão abaixo diversas vezes em seções posteriores):

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -c^2.$$

Com as definições e postulados acima a dinâmica de partículas sobre o espaço-tempo é completamente definida pela métrica g , nas seções seguintes demonstraremos, em detalhes, como podemos construir as equações que determinam a métrica a partir do conteúdo material, nesta parte encontraremos as diferenças entre as possíveis teorias métricas. Começamos apresentando a Relatividade Geral, ou seja, a partir da ação de Einstein-Hilbert determinamos as equações de campo de Einstein e apresento um resultado importante de teorias métricas conhecido como o teorema de Lovelock. Em seções seguintes apresentarei uma possível teoria métrica, conhecida como teoria de Brans-Dicke, e mostro que sua aproximação pós-newtoniana é falsificada por experimentos no sistema solar. Na última seção, mostro como por meio de mecanismo de "Screening" conseguiremos contornar os experimentos do sistema solar, dessa forma permitindo uma diversidade de teorias muito maior do que as restrições no sistema solar possibilitam.

1.2 Relatividade Geral

Com o espaço-tempo estabelecido, devemos determinar as equações de campo que estabelecem a métrica, para isso partimos da ação:

$$S_{\text{Total}} = S_\gamma[\gamma; g] + S_{\text{EH}}[g] + S_M[\Psi^A, g]$$

onde,

$$S_\gamma[\gamma; g] := \int_0^\lambda d\lambda \sqrt{-g_{\gamma(\lambda)}(v_{\gamma, \gamma(\lambda)}, v_{\gamma, \gamma(\lambda)})},$$

$$S_{\text{EH}} [g] := \frac{c^2}{16\pi G} \int_M R \Omega_M,$$

$$S_M [\Psi^A, g] := \int_M \mathcal{L}_M [\Psi^A, g].$$

O primeiro termo, $S_\gamma [\gamma; g]$ ¹, é simplesmente a ação que nos leva as equações de movimento (1.1) já exploradas anteriormente, aqui a adicionamos à ação total para garantir que a métrica que entra nas equações de movimento é a mesma calculada por meio das ações que variam com g . A ação S_M representa os campos materiais, sendo Ψ^A os campos materiais com um acoplamento mínimo com a métrica. A parte gravitacional na teoria de Einstein é completamente representada pela ação S_{EH} (ação de Einstein-Hilbert), onde $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci e o tensor de curvatura de Ricci é $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$. Variando a ação total com relação a métrica e considerando que temos um extremo do funcional S_{Total} , $\delta S_{\text{Total}} \equiv 0$, teremos a variação de S_{EH} dada por

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{EH}} &= \frac{c^2}{16\pi G} \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \delta (\sqrt{-g} R) d^4x \\ &= \frac{c^2}{16\pi G} \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \left[\delta (\sqrt{-g}) R + \sqrt{-g} \delta (g^{\alpha\beta}) R_{\alpha\beta} + \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta (R_{\alpha\beta}) \right] d^4x, \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} \delta (\sqrt{-g}) &= \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \delta (g) = \sqrt{-g} \frac{g^{\mu\nu} \delta (g_{\mu\nu})}{2}, \\ \delta (g^{\alpha\beta}) &= -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta (g_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

A variação de $R_{\alpha\beta}$ requiere um pouco mais de atenção:

$$\begin{aligned} \delta (R_{\alpha\beta}) &= \delta \left[\partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu - \Gamma_{\beta\nu}^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\nu \right] \\ &= \partial_\mu \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \partial_\alpha \delta \Gamma_{\mu\beta}^\mu + \delta \Gamma_{\mu\nu}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\mu \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\nu - \delta \Gamma_{\beta\nu}^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\nu - \Gamma_{\beta\nu}^\mu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\nu, \end{aligned}$$

como podemos definir

$$\delta \Gamma := \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes dx^\alpha \otimes dx^\beta,$$

e este se trata de um tensor, pois a diferença entre duas conexões se transforma como um tensor (mesmo que a conexão não o seja), então podemos tomar derivadas covariantes do mesmo:

$$\begin{aligned} (\nabla_\mu \delta \Gamma)_{\alpha\beta}^\mu &= \partial_\mu \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\mu \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\nu - \delta \Gamma_{\beta\nu}^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\nu - \Gamma_{\beta\nu}^\mu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\nu, \\ (\nabla_\alpha \delta \Gamma)_{\mu\beta}^\mu &= \partial_\alpha \delta \Gamma_{\mu\beta}^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \delta \Gamma_{\mu\nu}^\mu. \end{aligned}$$

Comparando estes dois resultados com a variação $\delta (R_{\alpha\beta})$ temos que:

$$\delta (R_{\alpha\beta}) = (\nabla_\mu \delta \Gamma)_{\alpha\beta}^\mu - (\nabla_\alpha \delta \Gamma)_{\mu\beta}^\mu = \delta \Gamma_{\alpha\beta;\mu}^\mu - \delta \Gamma_{\mu\beta;\alpha}^\mu$$

¹ $S[f; g]$ indica que S varia com f mas não com g , g é considerado fixo.

Unimos esta expressão aos outros termos que aparecem devido a variação e teremos:

$$\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta(R_{\alpha\beta}) = \sqrt{-g} \left[(g^{\alpha\beta} \delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu})_{;\mu} - (g^{\alpha\beta} \delta\Gamma_{\mu\beta}^{\mu})_{;\alpha} \right] = \sqrt{-g} [A^{\mu}_{;\mu} - B^{\alpha}_{;\alpha}],$$

mas sabemos que $(\sqrt{-g} A^{\mu})_{;\mu} = \sqrt{-g} A^{\mu}_{;\mu}$, portanto devemos ter:

$$\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta(R_{\alpha\beta}) = (\sqrt{-g} A^{\mu})_{;\mu} - (\sqrt{-g} B^{\alpha})_{;\alpha} = (\sqrt{-g} C^{\mu})_{;\mu},$$

onde $C^{\mu} = A^{\mu} - B^{\mu}$. Unindo todos os resultados anteriores devemos ter a variação de S_{EH} dada por:

$$\delta S_{\text{EH}} = \frac{c^2}{16\pi G} \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \delta(g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} \left[\frac{g^{\mu\nu}}{2} R - R^{\mu\nu} \right] d^4x + \frac{c^2}{16\pi G} \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i (\sqrt{-g} C^{\mu})_{;\mu} d^4x, \quad (1.2)$$

a última integral envolve termos da fronteira, basta vermos que

$$\begin{aligned} u &:= (\sqrt{-g} C^{\mu})_{;\mu} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= d(\sqrt{-g} C^0) \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - d(\sqrt{-g} C^1) \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0 \\ &\quad + d(\sqrt{-g} C^2) \wedge dx^3 \wedge dx^0 \wedge dx^1 - d(\sqrt{-g} C^3) \wedge dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} d(\sqrt{-g} C^{\mu}) \otimes dx^{\nu} \otimes dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} \\ &= (\sqrt{-g} C^{\mu} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta})_{;\kappa} dx^{\kappa} \otimes dx^{\nu} \otimes dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta}, \end{aligned}$$

ou seja, este termo é exatamente a derivada exterior de uma 3-forma dada por

$$w := \sqrt{-g} C^{\mu} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} dx^{\nu} \otimes dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} \implies dw = u,$$

e assim a integral que começamos é dada por

$$\sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i (\sqrt{-g} C^{\mu})_{;\mu} d^4x = \int_M dw = \int_{\partial M} w,$$

onde na última igualdade utilizamos o teorema de Stokes [46]. Dessa forma a última integral de (1.2) é apenas na fronteira de M e não devem contribuir as equações de movimento, pois podemos considerar que $\delta(g_{\mu\nu})|_{\partial M} = 0$. Assim teremos a variação da ação total S_{Total} ,

$$\delta S_{\text{Total}} = \frac{c^2}{16\pi G} \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \delta(g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} \left[\frac{g^{\mu\nu}}{2} R - R^{\mu\nu} + \frac{16\pi G}{c^2 \sqrt{-g}} \frac{\delta S_M[\Psi^A, g]}{\delta g_{\mu\nu}} \right] d^4x,$$

agora definimos os tensores

$$\begin{aligned} \delta g &:= \delta(g_{\mu\nu}) dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}, \\ \mathcal{G} &:= \left[\frac{8\pi G}{c^2} T^{\mu\nu} - G^{\mu\nu} \right] \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}, \\ G^{\mu\nu} &:= R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R, \end{aligned}$$

$$T^{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M [\Psi^A, \mathbf{g}]}{\delta g_{\mu\nu}},$$

dessa forma teremos,

$$\delta S_{\text{Total}} = \frac{c^2}{16\pi G} \int_M \mathcal{G} \cdot \delta g \Omega_M = 0 \implies \mathcal{G} = 0,$$

$$\therefore G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T^{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

A equação (1.3) é conhecida como a equação de campos de Einstein, dela podemos determinar, assim que fornecido um conteúdo material, a métrica g . Nas subseções que seguem apresento a aproximação linear da TRG e um teorema que demonstra esta como a única equação de campos possível para teorias métricas quando algumas suposições são impostas.

1.2.1 A Aproximação Pós-Newtoniana: Relatividade Geral

As equações de Einstein são não lineares para a métrica g implicando na impossibilidade de encontrarmos uma solução geral para as equações de campo, para resolvermos esta de forma geral alguma aproximação deve ser feita. A aproximação Pós-Newtoniana [47, 48, 49, 50] é uma destas aproximações, na qual consideramos que os campos e as velocidades características do sistema são proporcionais a um parâmetro ϵ como se segue,

$$\epsilon \sim v^2/c^2 \sim GM/rc^2 \sim p/\rho c^2.$$

O parâmetro ϵ estabelece o quão fraco são os campos e o quão lentas são as partículas, quando comparadas com a velocidade da luz (c), que constituem o sistema autogravitante. Supomos que a métrica é constituída apenas por campos da forma anterior e que possa ser expandida em diferentes ordens de ϵ . No caso da TRG o conjunto de suposições acima nos leva a uma linearização das equações de campo e, na formulação clássica da aproximação Pós-Newtoniana [2], temos a métrica dada de forma geral por

$$g_{00} = -1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{2(\Psi - U^2)}{c^4} + O(c^{-6}),$$

$$g_{0j} = -\frac{4U_j}{c^3} - \frac{X_{,tj}}{2c^3} + O(c^{-5}),$$

$$g_{jk} = \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \delta_{jk} + O(c^{-4}),$$

onde definimos,

$$\Psi = \frac{3}{2}\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 + 3\phi_4.$$

e U , ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 , X e U^j são determinados pelas equações de campo:

$$\nabla^2 \{U, \phi_1, \phi_2, \phi_3, U^j\} := -4\pi G\rho^* \{1, u^2, U, \Pi, u^j\}$$

$$\nabla^2 \phi_4 := -4\pi G p, \quad \nabla^2 X := 2U,$$

onde ρ^* é a densidade de massa de repouso conservada ($\rho^* = \sqrt{-g}\rho V^0/c$, sendo ρ densidade de massa de repouso), u é a velocidade do fluido perfeito, Π é a densidade de energia interna por unidade de massa (ε/ρ^*), p é a pressão vista localmente por um observador em queda livre momentaneamente em comovimento com o fluido.

A maioria dos sistemas astrofísicos apresentam campos fracos e componentes lentos o bastante para a aproximação acima funcionar quase que perfeitamente, por exemplo o sistema solar satisfaz as suposições da aproximação Pós-Newtoniana, e sua dinâmica é bem representada pela métrica acima. Inclusive, a comprovação experimental da TRG é praticamente totalmente baseada no regime linear do sistema solar. A grande maioria das teorias métricas são falsificadas pelas previsões do limite Pós-Newtoniano nas proximidades do sistema solar. No capítulo 2 apresento a versão parametrizada da aproximação e os valores dos parâmetros permitidos por experimentos no sistema solar, que, por consequência, implicam na falsificação da grande maioria de teorias métricas.

1.2.2 O Teorema de Lovelock

Um dos principais resultados de teorias métricas é devido a [Lovelock](#) [51], e é expresso pelo teorema logo abaixo.

Teorema 1 (Lovelock) *Se A é um tensor $(2,0)$ em um espaço Pseudo-Riemanniano de 4 dimensões e satisfaz:*

1. $A^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} [g_{\mu\nu}; g_{\mu\nu,\eta}; g_{\mu\nu,\eta\kappa}]$,
2. $(\nabla_\mu A)^{\mu\nu} = 0$.

Então $A^{\mu\nu} = aG^{\mu\nu} + bg^{\mu\nu}$, onde a, b são constantes e $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}R/2$.

Em outras palavras, se supormos que o único campo associado à gravidade é a métrica e que a equação de campo para a mesma é de segunda ordem e tem divergente zero, então, pelo teorema de Lovelock, a única possível equação de campo para teorias métricas em quatro dimensões é a equação de campos de Einstein (1.3). Ou seja, se queremos uma teoria métrica cujas equações de campo sejam diferentes da teoria da relatividade geral, precisamos [26]:

1. Considerar outros campos além da métrica.
2. Admitir teorias com termos de derivadas de ordem superior a dois nas equações de campo.
3. Trabalhar em um espaço de dimensão diferente de 4.

4. Desistir de equações tensoriais de rank $(0, 2)$, ou de simetria nos índices, ou de divergência nula.
5. Considerar teorias não-locais.

Neste trabalho não consideraremos modificações do tipo dos últimos três itens. Ou seja, consideraremos teorias métricas locais em um espaço de 4 dimensões cujas equações de campo são tensoriais de rank $(0, 2)$, simétricas e de divergência nula. Até mesmo com tais restrições o conjunto de todas as teorias possíveis é infinito e não enumerável, então para descartarmos possíveis teorias precisamos de experimentos, muitos dos quais são realizados no sistema solar, e portanto são restritos a um regime de gravitação fraca e melhor analisados no regime linear ou Pós-Newtoniano de teorias métricas, que introduzo no Cap. 2.

1.3 Teorias de Brans-Dicke

Como exemplo de uma teoria métrica apresentamos nessa seção a mais simples modificação das equações de campo para gravitação. Além da métrica adicionamos um novo campo escalar ϕ que acopla apenas com a métrica, o campo ϕ não interage (acopla) com a matéria. Com esta construção supomos a ação [26]:

$$S_{\text{Total}} = S_\gamma[\gamma; \mathbf{g}] + S_{\text{BD}}[\mathbf{g}, \phi] + S_M[\Psi^A, \mathbf{g}]$$

onde,

$$\begin{aligned} S_\gamma[\gamma; \mathbf{g}] &:= \int_0^\lambda d\lambda \sqrt{-\mathbf{g}_{\gamma(\lambda)}(v_{\gamma, \gamma(\lambda)}, v_{\gamma, \gamma(\lambda)})}, \\ S_{\text{BD}}[\mathbf{g}, \phi] &:= \frac{c^2}{16\pi G} \int_M \left[\phi R + \frac{W}{\phi} \mathbf{g}^{-1}(\nabla\phi, \nabla\phi) \right] \Omega_M, \\ S_M[\Psi^A, \mathbf{g}] &:= \int_M \mathcal{L}_M[\Psi^A, \mathbf{g}]. \end{aligned}$$

Note que em S_{Total} as ações para os campos materiais (S_M) e partículas (S_γ) não variam com o campo ϕ , não temos acoplamento, e dessa forma estas teorias não apresentam uma "quinta" força e por isso o princípio da Equivalência de Einstein é satisfeito (tanto o fraco como o forte) [26].

Com o intuito de calcularmos a variação de S_{Total} com relação a métrica (δg) , começamos com a variação de S_{BD} ,

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{BD}} &= \frac{c^2}{16\pi G} \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \sqrt{-g} \delta \left[\phi R + \frac{W}{\phi} \mathbf{g}^{-1}(\nabla\phi, \nabla\phi) \right] d^4x \\ &= \frac{c^2}{16\pi G} \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \phi \sqrt{-g} \left\{ \left[\frac{W}{\phi^2} \left(\frac{\mathbf{g}^{\mu\nu}}{2} \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} - \phi^{,\mu} \phi^{,\nu} \right) - G^{\mu\nu} \right] \delta(g_{\mu\nu}) + C^\mu{}_{;\mu} \right\} d^4x, \end{aligned}$$

dos termos na integrals apenas um deles requiere mais atenção, sendo ele,

$$\begin{aligned}\phi C^\mu{}_{;\mu} &= (\phi C^\mu)_{;\mu} - \phi_{;\mu} C^\mu, \\ \phi_{;\mu} C^\mu &= \phi_{;\mu} \left(g^{\alpha\beta} \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu - g^{\mu\beta} \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \right),\end{aligned}$$

calculando as variações das conexões,

$$\begin{aligned}g^{\alpha\beta} \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu &= \frac{g^{\alpha\beta}}{2} \delta g^{\mu\nu} [g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}] + \frac{g^{\alpha\beta}}{2} g^{\mu\nu} [\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}] \\ &= -\frac{g^{\alpha\beta}}{2} g^{\mu\kappa} g^{\nu\eta} \delta g_{\kappa\eta} [g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}] + \frac{g^{\alpha\beta}}{2} g^{\mu\nu} [2\delta g_{\nu\alpha,\beta} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}] \\ &= -g^{\alpha\beta} g^{\mu\kappa} \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \delta g_{\kappa\eta} + \frac{g^{\alpha\beta}}{2} g^{\mu\nu} [2\delta g_{\nu\alpha,\beta} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g^{\mu\beta} \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha &= -\frac{g^{\mu\beta}}{2} \delta g^{\alpha\nu} [g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}] + \frac{g^{\mu\beta}}{2} g^{\alpha\nu} [\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}] \\ &= -\frac{g^{\mu\beta}}{2} g^{\alpha\kappa} g^{\nu\eta} \delta g_{\kappa\eta} [g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}] + \frac{g^{\mu\beta}}{2} g^{\alpha\nu} \delta g_{\nu\alpha,\beta} \\ &= -g^{\mu\beta} g^{\alpha\kappa} \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \delta g_{\kappa\eta} + \frac{g^{\mu\beta}}{2} g^{\alpha\nu} \delta g_{\nu\alpha,\beta},\end{aligned}$$

dessa forma temos,

$$\begin{aligned}\phi_{;\mu} C^\mu &= \phi_{;\mu} \left[g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (\delta g_{\nu\alpha,\beta} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}) + (g^{\mu\beta} g^{\alpha\kappa} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\kappa}) \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \delta g_{\kappa\eta} \right] \\ &= \phi_{;\mu} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (\delta g_{\nu\alpha,\beta} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}) \\ &= (\phi^{;\nu} g^{\alpha\beta} \delta g_{\nu\alpha})_{;\beta} - (\phi^{;\nu} g^{\alpha\beta})_{;\beta} \delta g_{\nu\alpha} - (\phi^{;\nu} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta})_{;\nu} + (\phi^{;\nu} g^{\alpha\beta})_{;\nu} \delta g_{\alpha\beta} \\ &= D^\beta{}_{;\beta} + (\phi^{;\nu}{}_{;\nu} g^{\alpha\beta} - \phi^{;\beta\alpha}) \delta g_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

onde $D^\beta = \phi^{;\nu} g^{\alpha\beta} \delta g_{\nu\alpha} - \phi^{;\beta\alpha} g^{\alpha\nu} \delta g_{\nu\alpha}$.

Retornando o resultado anterior na variação da ação gravitacional teremos,

$$\begin{aligned}\delta S_{\text{BD}} &= \frac{c^2}{16\pi G} \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \phi \sqrt{-g} \left[\frac{W}{\phi^2} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{2} \phi^{;\alpha} \phi_{;\alpha} - \phi^{;\mu} \phi^{;\nu} \right) - G^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} d^4x \\ &\quad + \frac{c^2}{16\pi G} \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \sqrt{-g} \left[(\phi C^\mu - D^\mu)_{;\mu} + (\phi^{;\beta\alpha} - \phi^{;\nu}{}_{;\nu} g^{\alpha\beta}) \delta g_{\alpha\beta} \right] d^4x \\ &= \frac{c^2}{16\pi G} \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \phi \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \left[\frac{W}{\phi^2} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{2} \phi^{;\alpha} \phi_{;\alpha} - \phi^{;\mu} \phi^{;\nu} \right) - G^{\mu\nu} + \frac{\phi^{;\mu\nu}}{\phi} - \frac{\phi^{;\alpha}{}_{;\alpha} g^{\mu\nu}}{\phi} \right] d^4x \\ &\quad + \frac{c^2}{16\pi G} \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \sqrt{-g} (\phi C^\mu - D^\mu)_{;\mu} d^4x,\end{aligned}$$

por argumentos similares aos feitos anteriormente, a última integral, pelo teorema de Stokes, não influencia nas equações de movimento. Então concluímos as equações de movimento, já usando a definição do tensor de energia momento, para a métrica:

$$G^{\mu\nu} = \frac{W}{\phi^2} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{2} \phi^{;\alpha} \phi_{;\alpha} - \phi^{;\mu} \phi^{;\nu} \right) + \frac{\phi^{;\mu\nu}}{\phi} - \frac{\phi^{;\alpha}{}_{;\alpha} g^{\mu\nu}}{\phi} + \frac{8\pi G}{\phi c^2} T^{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

Se caso ϕ fosse considerado não dinâmico, ou seja, um campo pré-determinado, não teríamos que calcular a variação de S_{Total} com relação a ϕ e (1.4) seria a única equação de campo. Mas na teoria de Brans-Dicke ϕ é dinâmico e para isto precisamos determinar a equação de movimento relacionada ao mesmo, dessa forma tomamos a variação de S_{Total} com relação a ϕ e como S_M não varia com o anterior só precisamos determinar a variação de S_{BD} , que pode ser calculada como abaixo:

$$\begin{aligned}\delta S_{\text{BD}} &= \frac{c^2}{16\pi G} \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \sqrt{-g} \delta \left[\phi R + \frac{W}{\phi} g^{-1} (\nabla \phi, \nabla \phi) \right] d^4x \\ &= \frac{c^2}{16\pi G} \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \sqrt{-g} \left[\delta \phi \left(R + W \frac{\phi^{;\mu} \phi_{;\mu}}{\phi^2} - 2 \frac{W}{\phi} \phi^{;\mu}{}_{;\mu} \right) + E^\mu{}_{;\mu} \right] d^4x,\end{aligned}$$

onde $E^\mu = g^{\mu\nu} \phi_{;\nu} \delta \phi / \phi$. Novamente pelo teorema de Stokes o último termo da integral é apenas sobre a superfície e portanto não influencia nas equações de movimento. Dessa forma ϕ deve satisfazer a equação,

$$R + W \frac{\phi^{;\mu} \phi_{;\mu}}{\phi^2} - 2 \frac{W}{\phi} \phi^{;\mu}{}_{;\mu} = 0.$$

Tomando o traço da eq. (1.4) e substituindo na equação anterior teremos uma simplificação:

$$\phi^{;\mu}{}_{;\mu} = \frac{8\pi G}{(3 - 2W) c^2} T. \quad (1.5)$$

Vemos que as equações (1.4) e (1.5) tem como fonte o tensor de energia momento, poderíamos estranhar esse resultado dado que o campo ϕ é desacoplado dos campos materiais e portanto não esperaríamos em sua fonte o tensor de energia momento. Mas devido ao acoplamento entre ϕ e R nas equações de campo de certa forma ϕ é globalmente acoplado, mesmo que indiretamente, a toda física. Vemos também que quando W tende ao infinito, o acoplamento entre o campo escalar e T desaparece, muitos consideram este o limite que recuperamos a TRG. Trabalhos recentes contestam esta última afirmação, por exemplo [52, 53].

Podemos entender melhor o acoplamento ao mudarmos a perspectiva que tomamos na ação S_{Total} . Começamos no início desta seção considerando a perspectiva de Jordan ("Jordan's conformal frame"), onde o campo escalar não acopla com a matéria, mas poderíamos ter construído a mesma a partir da perspectiva de Einstein ("Einstein's conformal frame") onde o campo escalar é acoplado à matéria. Relacionamos as duas perspectivas por meio de um reescalamento de Weyl (uma transformação conformal local da métrica) e a escolha da perspectiva conformal é apenas vista como convenção. Existe certa discordância na literatura se perspectivas relacionadas por transformações conformais são fisicamente equivalentes. Mas pelo menos de um ponto de vista clássico, o que tomamos neste trabalho, as duas perspectivas são indistinguíveis matematicamente

apesar da interpretação física ser diferente [52]. Para determinarmos a teoria na perspectiva de Einstein começamos pela ação total e tomamos um reescalamto de Weyl da métrica g (perspectiva de Jordan) para \bar{g} (perspectiva de Einstein). Assim, usando os resultados do apêndice A.4.3 teremos a ação de Brans-Dicke:

$$\begin{aligned} S_{\text{BD}} [\phi^{-1}\bar{g}, \phi] &= \frac{c^2}{16\pi G} \int_M \left[\phi R + \frac{W}{\phi} g^{-1} (\nabla\phi, \nabla\phi) \right] \Omega_M \\ &= \frac{c^2}{16\pi G} \int_M \left\{ \phi e^{2\sigma} [\bar{R} - 6\bar{\square}\sigma - 6\bar{g}^{-1} (\bar{\nabla}\sigma, \bar{\nabla}\sigma)] + \frac{W e^{4\sigma}}{\phi} g^{-1} (\nabla\phi, \nabla\phi) \right\} \bar{\Omega}_M, \end{aligned}$$

então definimos $\phi = e^{-2\sigma}$, pois tal escolha remove o acoplamento do campo ϕ ao escalar de Ricci, tornando o campo ϕ apenas minimamente acoplado à métrica,

$$S_{\text{BD}} [\bar{g}, \sigma] = \frac{c^2}{16\pi G} \int_M [\bar{R} - 6\bar{\square}\sigma + (4W - 6)\bar{g}^{-1} (\bar{\nabla}\sigma, \bar{\nabla}\sigma)] \bar{\Omega}_M.$$

Finalmente voltando a ação total, teremos a mesma agora na perspectiva de Einstein

$$S_{\text{Total}} = S_\gamma [\gamma; e^{2\sigma}\bar{g}] + \frac{c^2}{16\pi G} \int_M [\bar{R} - 6\bar{\square}\sigma + (4W - 6)\bar{g}^{-1} (\bar{\nabla}\sigma, \bar{\nabla}\sigma)] \bar{\Omega}_M + S_M [\Psi^A, e^{2\sigma}\bar{g}].$$

Apesar de removermos o acoplamento entre ϕ e R adicionamos um acoplamento entre ϕ e os campos materiais. As linhas de mundo de partículas, nesta perspectiva conformal, não mais são as geodésicas da métrica, o campo ϕ passa a influenciar nas equações de movimento, dessa forma esta perspectiva conformal não é uma teoria métrica, pois falha o princípio de Equivalência de Einstein.

Tomando variações com relação a métrica e σ , notando que o termo $\bar{\square}\sigma$ é um termo de fronteira e definindo

$$\begin{aligned} \bar{T}^{\mu\nu} &:= \frac{2}{\sqrt{-\bar{g}}} \frac{\delta S_M}{\delta \bar{g}_{\mu\nu}} = \frac{2}{e^{4\sigma} \sqrt{-\bar{g}}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\alpha\beta}} \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta \bar{g}_{\mu\nu}} = \phi T^{\mu\nu}, \\ \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \frac{\delta S_M}{\delta \sigma} &= \frac{1}{e^{4\sigma} \sqrt{-\bar{g}}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \frac{\delta g_{\mu\nu}}{\delta \sigma} = \phi^2 T = \bar{T}, \end{aligned}$$

recuperamos a equação de Einstein, que tem como fonte o tensor de energia momento e o campo escalar, e uma nova equação para o campo escalar

$$\bar{G}^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} \bar{T}^{\mu\nu} + (2W - 3) (\bar{g}^{\mu\nu} \sigma^{;\alpha} \sigma_{;\alpha} - 2\sigma^{;\mu} \sigma^{;\nu}), \quad (1.6)$$

$$\sigma^{;\mu}{}_{;\mu} = \frac{4\pi G}{c^2 (3 - 2W)} \bar{T}. \quad (1.7)$$

Na equação (1.6) podemos considerar todos os termos ao lado direito como fontes do campo gravitacional, portanto recuperamos exatamente a equação de Einstein, dessa forma podemos dizer que a TRG está matematicamente relacionada a Brans-Dicke por uma

transformação conformal. Mas claramente a interpretação física de ambas é completamente diferente, na primeira temos as geodésicas da métrica como as linhas de mundo de partículas, enquanto na segunda temos a adição de uma nova força mediada por σ , desviando as órbitas de partículas das geodésicas.

1.3.1 A Aproximação Pós-Newtoniana: Brans-Dicke

Como fizemos para a TRG também podemos encontrar um regime linear para a Teoria de Brans-Dicke, pelas mesmas suposições podemos construir a aproximação Pós-Newtoniana para Brans-Dicke, concluindo numa métrica extremamente similar, quando comparada ao limite da TRG, distinta em apenas algumas constantes que aparecem em conjunto com os campos. A métrica para tal aproximação tem a forma em geral [1, 2],

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{2(\Psi - U^2)}{c^4} + O(c^{-6}), \\ g_{0j} &= -2(1 + \gamma) \frac{U_j}{c^3} - \frac{X_{,tj}}{2c^3} + O(c^{-5}), \\ g_{jk} &= \left(1 + \frac{2\gamma U}{c^2}\right) \delta_{jk} + O(c^{-4}), \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} \Psi &= \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \phi_1 - \phi_2 + \phi_3 + 3\gamma\phi_4, \\ \gamma &= \frac{1 + W}{2 + W}. \end{aligned}$$

Experimentos no sistema solar limitam os possíveis desvios da TRG [3]. O melhor limite para γ é dado por,

$$|\gamma - 1| < 2,3 \times 10^{-5} \implies W > 4 \times 10^4,$$

portanto mesmo com a adição de um novo grau de liberdade ϕ a teoria de Brans-Dicke deve ser indistinguível da TRG, pois as previsões das teorias são distintas apenas quando $W \sim 1$ e pela expressão acima temos que $W \gg 1$. Assim, modificar a teoria da forma como apresentamos acima é improdutivo, pois experimentos não permitem modificações significantes.

1.3.2 Mecanismos de Screening

O limite para γ citado anteriormente não é o único resultado de experimentos no sistema solar. Na verdade o regime linear da TRG é uma excelente aproximação para o sistema solar e os diversos experimentos limitam os possíveis desvios das previsões da TRG (veja 1, 2, 3 e Cap. 2), praticamente isolando a TRG como a única teoria métrica que satisfaça os experimentos. Mas estes experimentos são restritos as escalas do sistema solar.

Então existe a possibilidade dos novos graus de liberdade serem furtivos o bastante de tal forma que próximo a objetos massivos seus efeitos sejam escondidos por algum mecanismo. Este é o caso do mecanismo que tomamos como exemplo neste trabalho, conhecido como mecanismo de Vainshtein. Agora, não afirmamos que o mecanismo de Vainshtein possa ser utilizado para esconder todos os efeitos gravitacionais, devido a diferente tipos de campos (escalares, vetoriais,...). Apenas queremos exemplificar como é possível construir uma teoria capaz de modificações em escalas maiores, mas que matenha o sucesso da TRG no sistema solar.

O mecanismo de Vainshtein pode ser adicionado a uma teoria de Brans-Dicke simplesmente somando à ação total um termo conhecido como galileano cúbico. Suporemos para esta breve apresentação do mecanismo a perspectiva de Einstein. Então sabemos que não teremos acoplamentos do campo escalar com R . Dessa forma variações com relação a métrica implicarão na equação de Einstein com a fonte dependente do campo escalar e do tensor de energia momento. Nessa perspectiva só precisamos determinar a equação de campo para o escalar σ , onde a ação total [4] é dada por

$$S_{\text{Total}} = S_\gamma [\gamma; e^{2\sigma} \bar{g}] + S_{\text{EH}} [\bar{g}] + \frac{c^2}{16\pi G} \int_M [c_0 Y + \alpha Y \bar{\square} \sigma] \bar{\Omega}_M + S_M [\Psi^A, e^{2\sigma} \bar{g}],$$

onde $c_0 = 4W - 6$, $\bar{\square} \sigma := \text{tr}_{\bar{g}} [\bar{\nabla} (\bar{\nabla} \sigma)] = \bar{\nabla}^\mu \bar{\nabla}_\mu \sigma$, $Y = \bar{g}^{-1} (\bar{\nabla} \sigma, \bar{\nabla} \sigma)$ e S_γ , S_{EH} e S_M são exatamente como definidos anteriormente.

A variação da ação total já é praticamente conhecida, só precisamos determinar o novo termo que contém $Y \bar{\square} \sigma$. Ou seja, variando com relação a σ temos

$$\begin{aligned} \int_M \delta [Y \bar{\square} \sigma] \bar{\Omega}_M &= \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \sqrt{-\bar{g}} [2\sigma^{;\mu} (\delta\sigma)_{;\mu} \bar{\square} \sigma + Y \bar{\square} \delta\sigma] d^4x \\ &= \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \delta\sigma \sqrt{-\bar{g}} \{ \bar{\square} Y - 2\bar{\nabla}_\mu (\sigma^{;\mu} \bar{\square} \sigma) \} d^4x + \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \sqrt{-\bar{g}} H^\mu_{;\mu} d^4x, \end{aligned}$$

onde definimos

$$H^\mu = \sigma^{;\mu} \bar{\square} \sigma \delta\sigma + (Y \delta\sigma)^{;\mu} - 2Y^{;\mu} \delta\sigma.$$

Por argumentos similares aos apresentados anteriormente, a integral que envolve H^μ é na fronteira de M e portanto não influencia nas equações de movimento. Dessa forma usando os resultados de seções anteriores temos a equação de movimento para o campo escalar σ :

$$\bar{\square} \sigma + \frac{\alpha}{2c_0} [\bar{\square} Y - 2\bar{\nabla}_\mu (\sigma^{;\mu} \bar{\square} \sigma)] = -\frac{8\pi G}{c_0 c^2} \bar{T}. \quad (1.8)$$

Fazendo a variação do termo contendo $Y\Box\sigma$ com relação a métrica:

$$\begin{aligned} \int_M \delta [Y\Box\sigma \bar{\Omega}_M] &= \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \delta [\sqrt{-\bar{g}} Y\Box\sigma] d^4x \\ &= \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \sqrt{-\bar{g}} \delta \bar{g}_{\mu\nu} \left[Y^{;\mu} \sigma^{;\nu} - \sigma^{;\mu} \sigma^{;\nu} \Box\sigma - \frac{\bar{g}^{\mu\nu}}{2} Y^{;\alpha} \sigma_{;\alpha} \right] d^4x \\ &\quad + \sum_i \int_{x(U_i)} \rho_i \sqrt{-\bar{g}} I^\mu{}_{;\mu} d^4x, \end{aligned}$$

onde

$$I^\mu = Y \left(\frac{\sigma^{;\mu} \bar{g}^{\kappa\nu}}{2} \delta \bar{g}_{\kappa\nu} - \sigma^{;\kappa} \bar{g}^{\mu\nu} \delta \bar{g}_{\kappa\nu} \right).$$

A última integral não contribui às equações de movimento e recuperamos a equação de Einstein:

$$\bar{G}^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} \bar{T}^{\mu\nu} + \frac{c_0}{2} (\bar{g}^{\mu\nu} Y - 2\sigma^{;\mu} \sigma^{;\nu}) + \alpha \left(Y^{;\mu} \sigma^{;\nu} - \sigma^{;\mu} \sigma^{;\nu} \Box\sigma - \frac{\bar{g}^{\mu\nu}}{2} Y^{;\alpha} \sigma_{;\alpha} \right). \quad (1.9)$$

Para apresentar o efeito de "Screening", que o novo termo adiciona a teoria de Brans-Dicke, precisamos analisar as equações (1.8) e (1.9) de um ponto de vista perturbativo, no vácuo ($\bar{T}^{\mu\nu} = 0$) e com o sistema estático e de simetria esférica. Consideramos que os campos são fracos, ou seja, $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}$. Assim a equação (1.8) é simplificada,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\sigma}{dr} \right) + \frac{\alpha}{2c_0} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{d\sigma}{dr} \right)^2 \right] - \frac{2}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{d\sigma}{dr} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\sigma}{dr} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\sigma}{dr} \right) - \frac{2\alpha}{c_0 r^2} \frac{d}{dr} \left[r \left(\frac{d\sigma}{dr} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Essa última equação é integrável e podemos resolvê-la para a derivada de σ . Notando que a fonte da equação é $-8\pi GT/(c_0 c^2) \approx 8\pi G\rho/(c_0)$, na aproximação considerada, podemos por meio de condições de contorno concluir que a constante de integração é $2MG/c_0$. Assim temos uma equação de segundo grau para a derivada de σ :

$$r^2 \frac{d\sigma}{dr} - \frac{2\alpha}{c_0} r \left(\frac{d\sigma}{dr} \right)^2 = \frac{2MG}{c_0}.$$

Resolvendo para $d\sigma/dr$ temos

$$\frac{d\sigma}{dr} = \frac{rc_0}{4\alpha} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{16\alpha MG}{r^3 (c_0)^2}} \right]. \quad (1.10)$$

Para não termos descontinuidades quando $\alpha \rightarrow 0$, dado que devemos recuperar Brans-Dicke neste limite, temos que tomar apenas o sinal negativo a frente da raiz e $\alpha \leq 0$ (a escolha positiva leva a inconsistências). Mesmo assim integrar a expressão (1.10) não é fácil, mas podemos fazer isso em dois limites:

1. Quando

$$r \gg \left[-\frac{16\alpha MG}{(c_0)^2} \right]^{\frac{1}{3}} \implies \frac{d\sigma}{dr} = \frac{2MG}{r^2 c_0} + \frac{8\alpha (MG)^2}{r^5 (c_0)^3} + \dots$$

2. Quando

$$r \ll \left[-\frac{16\alpha MG}{(c_0)^2} \right]^{\frac{1}{3}} \implies \frac{d\sigma}{dr} = \sqrt{-\frac{MG}{\alpha r}}.$$

Aqui já é possível ver o efeito que o mecanismo tem sobre o campo escalar, mas ainda é necessário elaborar mais para vermos o efeito sobre a métrica. Resolvendo a equação nos dois limites temos que:

$$\sigma(r) = \begin{cases} -\frac{2MG}{rc_0} - \frac{2\alpha(MG)^2}{r^4(c_0)^3} + \dots, & \text{se } r \gg r_v, \\ 2\sqrt{-\frac{MGr}{\alpha}}, & \text{se } r \ll r_v, \end{cases}$$

onde $r_v = \left[-16\alpha MG / (c_0)^2 \right]^{\frac{1}{3}}$ e não precisamos das constantes de integração, pois supomos o espaço tempo assintoticamente plano e σ como sendo nulo para $r = 0$.

Agora pelas aproximações que tomamos para a métrica e por tratarmos σ como pequeno, a componente "00" da equação (1.9) é simplesmente:

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 \bar{h}_{00} = \frac{4\pi G}{c^2} \left(\bar{T}_{00} - \frac{1}{2}\bar{g}_{00}\bar{T} \right),$$

por se tratar do vácuo a equação acima tem como solução $\bar{h}_{00} = 2MG/r$. Dessa forma retornando para a perspectiva de Jordan temos a métrica dada por

$$g_{\mu\nu} = e^{2\sigma}\bar{g}_{\mu\nu} = \left(\eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} \right) (1 + 2\sigma) = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} + 2\sigma\eta_{\mu\nu},$$

ou seja, $h_{00} = \bar{h}_{00} - 2\sigma = 2MG/r - 2\sigma$.

Finalmente concluímos o efeito do mecanismo. Para $r \ll r_v$, pequenas distâncias da fonte, o campo gravitacional efetivo h_{00} , que representa a primeira correção pós-newtoniana, é

$$h_{00} = \frac{2MG}{r} - 4\sqrt{-\frac{MGr}{\alpha}}.$$

O segundo termo, que representa os efeitos do campo escalar, é muito pequeno quando comparado ao primeiro termo e assim neste regime devemos recuperar gravitação Newtoniana.

Para o outro regime o comportamento do campo escalar é completamente diferente. Novamente olhamos para o campo gravitacional efetivo h_{00} , mas agora para a região $r \gg r_v$ e temos

$$h_{00} = \frac{2MG}{r} + \frac{4MG}{rc_0} + \frac{4\alpha(MG)^2}{r^4(c_0)^3} + \dots.$$

Ou seja, aqui apesar do último termo não apresentar correções significantes o segundo termo, pelo menos enquanto c_0 for pequeno (que é permitido, pois devido ao efeito do

mecanismo os experimentos do sistema solar não devem limitar este parâmetro da teoria), terá a mesma ordem de grandeza que $2MG/r$ e assim as correções do campo escalar são significantes. Portanto teorias que possuam este mecanismo e raio r_v grande o bastante podem, em princípio, esconder os efeitos dos novos graus de liberdade, devidos ao campo escalar, nas escalas do sistema solar, mas permitir desvios, num regime linear, significantes em escalas galácticas e cosmológicas.

Para praticamente toda a extensão de uma galáxia o regime linear deve ser uma boa aproximação, dado que as interações gravitacionais são fracas (apenas para o núcleo galáctico os efeitos não lineares devem ser considerados). Galaxias são sistemas de n corpos, em geral de 10^{12} estrelas, mas as distâncias entre as estrelas é tão grande que podemos supor que cada estrela e seus planetas vizinhos se encontram na região $r \ll r_v$, num regime Newtoniano. Mas influenciam todas as outras estrelas vizinhas, que se encontram em $r \gg r_v$, por meio da nova (hipotética) interação gravitacional. O argumento anterior funciona particularmente bem para este trabalho, pois quando modelarmos galáxias consideraremos que não temos colisões (ou encontros) entre seus componentes, ou seja, em nenhum momento dois elementos do sistema estão próximos o bastante para a interação gravitacional ser a Newtoniana. O mesmo argumento pode ser feito para regimes cosmológicos. Sob este novo paradigma construiremos modelos para galáxias de forma a determinar os efeitos dos novos graus de liberdade na dinâmica da mesma, com o objetivo de verificar se as modificações induzidas pelos anteriores são suficientes para explicar as curvas de rotação de galáxias, e por consequência tornar a suposição de matéria escura obsoleta.

2 A Aproximação Pós-Newtoniana Parametrizada

A razão de nos limitarmos por este conjunto de teorias é devido a existência de um formalismo geral, ou seja, podem ser aproximadas por uma teoria mestre [1, 2, 3, 5, 6, 7] conhecida como "Aproximação Pós-Newtoniana Parametrizada" (que daqui para frente denotaremos por PNP). Neste formalismo aproximado existem 10 parâmetros e para diferentes valores destes temos diferentes teorias. Tal aproximação é feita analogamente à "Aproximação Pós-Newtoniana" [47, 48, 49, 50]. Consideramos os sistema autogravitantes como sendo constituídos por partículas lentas, quando comparadas com a velocidade da luz (c), e campos gravitacionais fracos (essa escolha é extremamente natural quando tratarmos de galáxias). O esquema de aproximação é válido se a média de observáveis do sistema possa ser caracterizada por um parâmetro $\epsilon \ll 1$, onde relacionamos

$$\epsilon \sim v^2/c^2 \sim GM/rc^2 \sim p/\rho c^2,$$

onde v , M , e r são respectivamente a velocidade, massa e comprimento (ou separação) característicos do sistema, p e ρ são a pressão e densidade característicos das estruturas, G é a constante gravitacional e c é a velocidade da luz. Supomos que o tensor métrico pode ser determinado ao perturbarmos a métrica de Minkowski, sendo a perturbação expandida em termos da ordem de ϵ^n . As equações de campo são então determinadas separando os termos de diferentes ordens, levando a uma linearização delas.

2.1 As Equações de Campo

A PNP é caracterizada pela métrica, dada no calibre padrão da Aproximação Pós-Newtoniana [1, 2, 3, 5, 6, 7], abaixo:

$$g_{00} = -1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{\mathcal{W}}{c^4} + O(c^{-6}), \quad (2.1)$$

$$g_{0j} = \frac{\mathcal{Q}_j}{c^3} + O(c^{-5}), \quad (2.2)$$

$$g_{jk} = \left(1 + \frac{2\gamma U}{c^2}\right) \delta_{jk} + O(c^{-4}), \quad (2.3)$$

onde¹,

$$\mathcal{W} = 2(\Psi - \beta U^2) + \Phi^{\text{PF}},$$

¹ Sobre a notação, denotaremos derivadas parciais $\partial f/\partial x := f_{,x}$.

$$\mathcal{Q}_j = - \left[2(1 + \gamma) + \frac{\alpha_1}{2} \right] U_j - \frac{1}{2} [1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi] X_{,tj} + \Phi_j^{\text{PF}},$$

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{1}{2} (2\gamma + 1 + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi) \phi_1 - (2\beta - 1 - \zeta_2 - \xi) \phi_2 \\ + (1 + \zeta_3) \phi_3 + (3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi) \phi_4 - \frac{1}{2} (\zeta_1 - 2\xi) \phi_6 - \xi \phi_w, \end{aligned}$$

onde U , ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 , ϕ_6 , X , U^j , ϕ_w , Φ^{PF} e Φ_j^{PF} são determinados pelas equações de campo:

$$\nabla^2 \{U, \phi_1, \phi_2, \phi_3, U^j\} := -4\pi G \rho^* \{1, u^2, U, \Pi, u^j\}, \quad (2.4)$$

$$\nabla^2 \phi_4 := -4\pi G p, \quad \nabla^2 X := 2U, \quad (2.5)$$

$$\nabla^4 (\phi_6 - 3\phi_1) = -2G (\rho^* u^i u^j)_{,ij}, \quad (2.6)$$

$$\nabla^2 (\phi_w + 2U^2 - 3\phi_2) = -2X_{,ij} U_{,ij}, \quad (2.7)$$

$$\Phi^{\text{PF}} := (\alpha_3 - \alpha_1) w^2 U + \alpha_2 w^j w^k X_{,kj} + (2\alpha_3 - \alpha_1) w^j U_j, \quad (2.8)$$

$$\Phi_j^{\text{PF}} := -\frac{1}{2} \alpha_1 w_j U + \alpha_2 w^k X_{,kj}, \quad (2.9)$$

onde ρ^* é a densidade de massa de repouso conservada ($\rho^* = \sqrt{-g} \rho V^0 / c$, sendo ρ densidade de massa de repouso), u é a velocidade do fluido perfeito, Π é a densidade de energia interna por unidade de massa (ε / ρ^*), p é a pressão vista localmente por um observador em queda livre momentaneamente em comovimento com o fluido, w é a velocidade do sistema de referência da PNP com relação a um referencial universal. Note que os campos são todos definidos em um espaço Euclidiano e as equações são formuladas em coordenadas Cartesianas (dizemos que a métrica é formulada em coordenadas quase-cartesianas globalmente [2]). Portanto o produto escalar entre qualquer vetor nesta formulação deve ser efetuado usando a métrica euclidiana $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$.

O leitor atento poderia ficar surpreso com a presença das velocidades w^j na métrica, já que, devido aos princípios da relatividade, efeitos físicos devem ser indistinguíveis para diferentes referenciais. Em primeira instância eles não violam os princípios de relatividade especial, pois são efeitos puramente gravitacionais, ou seja, se não tivermos massa gerando gravidade estes termos não aparecem. Por outro lado, sugerem que teorias métricas podem violar o princípio forte de equivalência, pois a velocidade de massas com relação ao referencial privilegiado afeta o campo gravitacional [2]. Mesmo assim tais teorias são covariantes já que estes termos surgem de transformações pós-Galileanas [2]. Então medidas físicas não podem depender da escolha de w^j . Elas só dependem da velocidade

w_0^j do centro de massa do objeto massivo com relação ao sistema privilegiado. Em geral, consideraremos que $w^j = w_0^j$, ou seja, tomaremos sempre sistema de referências que coincidam com o centro de massa, e não mais falaremos sobre w_0^j [1, 2, 3].

Uma inspeção um pouco mais atenta nos mostra que apesar de algumas das equações de campo serem invariantes em sistemas de coordenadas não-cartesianos (como esféricas e cilíndricas) as equações (2.6)-(2.9), que definem os potenciais de Whitehead (ϕ_w), ϕ_6 e os potenciais de referenciais privilegiados (Φ^{PF} e Φ_j^{PF}), respectivamente, não apresentam tal invariância. Para entendermos como resolver este impasse precisamos reinterpretar e redefinir o espaço e as coordenadas que usamos para a PNP. Como citado anteriormente, é feita uma escolha de referência, ou seja, tomamos um observador que se encontra em repouso com relação ao sistema em estudo. Dessa forma podemos tratar o espaço da PNP como $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, ou seja, separamos o tempo das variáveis espaciais e tratamos o tempo t (tempo próprio do observador) como absoluto. A separação nos permite definir o espaço da aproximação com precisão:

Definição 2 *O espaço da PNP é uma variedade topológica suave de 3-dimensões com um atlas de compatibilidade suave e orientável, carregando uma conexão sem torção compatível com uma métrica Euclidiana, um tempo t e os campos U , \mathcal{W} e $\vec{\mathcal{Q}}$. Ou seja, é a nômupla $(\mathbb{R}^3, \mathcal{O}_{st}, \mathcal{A}_{C^\infty}^\dagger, \nabla_{\mathcal{T}=\nabla\gamma=0}, t, \gamma, U, \mathcal{W}, \vec{\mathcal{Q}})$.*

A definição anterior se assemelha a um espaço Newtoniano (ou Galileano, com a diferença de possuir dois novos campos \mathcal{W} e $\vec{\mathcal{Q}}$) e é uma definição do espaço da PNP enquanto não envolvermos mudanças de referenciais, e será para essa interpretação do espaço que construiremos os modelos. Note que uma característica essencial da definição anterior, e talvez a maior diferença com relação a definição do espaço-tempo de teorias métricas, é da existência de uma escolha de carta, $(\mathbb{R}^3, x) \in \mathcal{A}_{C^\infty}^\dagger$, tal qual $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ (chamaremos tal carta como Cartesiana). Então já está claro como tratar a PNP em coordenadas não-cartesianas. Basta escolhermos uma carta não-cartesiana e tratarmos todas as derivadas que aparecem nas equações de campo como derivadas covariantes de um espaço Euclidiano e substituir todos os produtos internos de forma a envolver a métrica euclidiana. Ou seja, teremos as formas invariantes em coordenadas não-cartesianas para as equações de campo dos potenciais de Whitehead e de referenciais privilegiados:

$$\nabla^2 (\phi_w + 2U^2 - 3\phi_2) = -2\gamma^{ad}\gamma^{be} X_{;ab} U_{;de}, \quad (2.10)$$

$$\Phi^{\text{PF}} := (\alpha_3 - \alpha_1) w^2 U + \alpha_2 w^j w^k X_{;kj} + (2\alpha_3 - \alpha_1) w^j U_j, \quad (2.11)$$

$$\Phi_j^{\text{PF}} := -\frac{1}{2} \alpha_1 w_j U + \alpha_2 w^k X_{;kj}, \quad (2.12)$$

$$\nabla^4 (\phi_6 - 3\phi_1) = -\frac{2G}{\Upsilon} (\Upsilon \rho^* u^i u^j)_{,ij} - \frac{2G}{\Upsilon} (\Upsilon \{^j_{ik}\} \rho^* u^i u^k)_{,j}, \quad (2.13)$$

onde definimos $\Upsilon \equiv \sqrt{\det \gamma_{ij}}$ e

$$X_{;ab} \equiv X_{,ab} - \{^c_{ab}\} X_{,c}, \quad (2.14)$$

$$\{^c_{ab}\} \equiv \frac{1}{2} \gamma^{c\mu} (\gamma_{a\mu,b} + \gamma_{b\mu,a} - \gamma_{ab,\mu}). \quad (2.15)$$

Escolhemos a notação $\{^i_{jk}\}$ para não confundirmos com Γ^i_{jk} que é a conexão com relação a métrica da PNP. É óbvio dessa definição que, se estamos tratando de coordenadas cartesianas, as equações se reduzirão às que possuíamos antes, pois se $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ teremos $\{^c_{jk}\} = 0$. Definindo o espaço como tal podemos formular toda a física da gravitação sem tratarmos da métrica (2.1)-(2.3), pois as equações de movimento são estabelecidos apenas pelos campos definidos acima (veja Sec. 2.2).

2.1.1 As Equações da Hidrodinâmica

Em nenhum momento nas equações de campo para a PNP usamos o tensor de energia momento, usamos novos campos materiais, mas na definição de teorias métricas o tensor de energia momento sempre aparece e devemos conectar as variáveis materiais ρ^* , P , Π e u^i com o tensor de energia momento. Para a PNP a conexão é feita como se segue [2]. Supomos que estamos tratando de um fluido perfeito, ou seja, teremos o tensor de energia momento,

$$T^{\mu\nu} = (\rho + \epsilon/c^2 + p/c^2) V^\mu V^\nu + p g^{\mu\nu}.$$

Aplicando a condição de casca $g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = -c^2$ e definindo $\rho^* = \sqrt{-g} \rho V^0/c$, onde $V^\mu = V^0(1, u^i/c)$, teremos as componentes do tensor de energia momento, até a ordem desejada, dado por

$$c^{-2} T^{00} = \rho^* \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2} u^2 - (3\gamma - 2) U + \Pi \right] \right\}, \quad (2.16)$$

$$c^{-1} T^{0j} = \rho^* u^j \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2} u^2 - (3\gamma - 2) U + \Pi + \frac{p}{\rho^*} \right] \right\}, \quad (2.17)$$

$$T^{ij} = \rho^* u^i u^j \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2} u^2 - (3\gamma - 2) U + \Pi + \frac{p}{\rho^*} \right] \right\} + p \left(1 - \frac{2\gamma U}{c^2} \right) \delta^{ij}. \quad (2.18)$$

Posteriormente determinaremos primeiramente o tensor de energia momento e inverteremos as equações (2.16)-(2.18), que em princípio deve ser possível, para definirmos os campos ρ^* , P , Π e u^i .

2.1.2 Os Parâmetros Pós-Newtonianos

Os parâmetros deste formalismo são γ , β , ξ , α_i e ζ_j , onde $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4$. Diferentes teorias possuem diferentes valores para estes parâmetros e podemos de forma heurística definir o significado físico de cada um deles [1, 2, 3, 5, 6, 7]: γ representa o grau de curvatura do espaço-tempo por unidade de massa; β representa o grau de não linearidade das equações de campo da teoria gravitacional; ξ indica efeitos de posições privilegiadas; α_i possuem um duplo significado, representam a existência de referenciais privilegiados e se a teoria apresenta leis de conservação de momento; ζ_j indica na existência de uma teoria que apresenta leis de conservação de momento. De forma mais detalhada para as leis de conservação, se uma teoria apresenta $\alpha_3, \zeta_j \neq 0$, então não é possível encontrar para objetos isolados leis de conservação de momento. Se $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$, então não é possível encontrar leis de conservação de momento angular. Por este motivo, teorias que apresentam $\alpha_i, \zeta_j = 0$ são conhecidas como completamente conservativas, como é o caso da TRG. Teorias que apresentam $\alpha_3, \zeta_j = 0$, mas $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ são conhecidas como parcialmente conservativas. Resumimos os significados heurísticos dos parâmetros na tabela.

	Significado Heurístico	Teorias Conservativas	Teorias Semi-conservativas
γ	Curvatura do Espaço	γ	γ
β	Não-linearidade das equações	β	β
ξ	Efeitos de Posições Privilegiadas	ξ	ξ
α_1 α_2 α_3	Efeitos de Referências Privilegiadas	0	α_1 α_2 0
α_3 ζ_1, ζ_2 ζ_3, ζ_4	Leis de Conservação de Momento	0	0

A escolha dos parâmetros é feita de forma que para a teoria de Einstein eles apresentem valores simples. Para esta os parâmetros são $\gamma = 1$, $\beta = 1$, $\xi = 0$, $\alpha_i = 0$ e $\zeta_j = 0$. Diversos experimentos no sistema solar nos indicam os máximos (ou mínimos valores) que os parâmetros podem tomar [3], sendo eles: $\gamma = 1, 00000 \pm 0, 000023$, $\beta = 1, 00000 \pm 0, 00008$, $\xi = \pm 0, 000000004$, $\alpha_1 = \pm 0, 00004$, $\alpha_2 = \pm 0, 000000002$, $\alpha_3 = \pm 0, 000000000000000000004$, $\zeta_1 = \pm 0, 02$, $\zeta_2 = \pm 0, 00004$, $\zeta_3 = \pm 0, 00000001$ e ζ_4 é, em geral, considerado dependente dos demais parâmetros pela expressão $\zeta_4 = (3\alpha_3 + 2\zeta_1 - 3\zeta_3) / 6$. Resumimos as restrições na tabela que se segue.

Estes valores limites são extremamente pequenos e já esperamos que as correções, se limitarmos os parâmetros desta forma, devem ser insignificantes. Portanto é necessário

Parâmetro	Valor em Relatividade Geral	Desvio Permitido
γ	1	$\pm 2,3 \times 10^{-5}$
β	1	$\pm 8 \times 10^{-5}$
ξ	0	$\pm 4 \times 10^{-9}$
α_1	0	$\pm 4 \times 10^{-5}$
α_2	0	$\pm 2 \times 10^{-9}$
α_3	0	$\pm 4 \times 10^{-20}$
ζ_1	0	$\pm 2 \times 10^{-2}$
ζ_2	0	$\pm 4 \times 10^{-5}$
ζ_3	0	$\pm 10^{-8}$
ζ_4	$(3\alpha_3 + 2\zeta_1 - 3\zeta_3)/6$	-

considerarmos maiores desvios. Para este fim consideramos a possibilidade de mecanismos de "Screening". Conjecturamos a existência de teorias cujos limites pós-newtonianos nas escalas do sistema solar são exatamente equivalentes a relatividade geral, mas desviam o suficiente em escalas maiores. Tal conjectura é útil, pois todos os experimentos que inferem sobre os valores máximos dos parâmetros são efetuados em escalas do sistema solar. Apenas o parâmetro γ possui uma medição adequada em escalas galácticas [54], onde $\gamma = 0,98 \pm 0,07$.

2.2 As Equações de Movimento na PNP

Encontrar as equações de movimento não adiciona nenhuma dificuldade adicional ao nosso trabalho, já que as equações de movimento são as geodésicas do espaço-tempo e a determinação destas é extremamente simples se soubermos as conexões do espaço-tempo, e o formato de tais conexões é conhecido de forma geral para aproximações de teorias métricas. Expressamos a métrica em termos de diferentes ordens,

$$g_{00} = -1 + \overset{2}{g}_{00} + \overset{4}{g}_{00} + \dots,$$

$$g_{i0} = \overset{3}{g}_{i0} + \dots,$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \overset{2}{g}_{ij} + \dots$$

e dessa forma devemos, seguindo [55], ter sua inversa $g^{\mu\nu}$ dada por

$$g^{00} = -1 + \overset{2}{g}^{00} + \overset{4}{g}^{00} + \dots,$$

$$g^{i0} = \overset{3}{g}^{i0} + \dots,$$

$$g^{ij} = \delta^{ij} + \overset{2}{g}^{ij} + \dots,$$

onde teremos

$$\overset{2}{g}^{00} = -\overset{2}{g}_{00} \quad \overset{2}{g}^{ij} = -\overset{2}{g}_{ij} \quad \overset{3}{g}^{i0} = \overset{3}{g}_{i0}, \quad \dots$$

Lembremos agora as equações das geodésicas de teorias métricas,

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta.$$

Definindo

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{d(ct, x^i)}{d\tau} = \left(c, \frac{dx^i}{dt} \right) \frac{dt}{d\tau} = (ct, v^i t) \quad \text{e} \quad t = \frac{dt}{d\tau} = \frac{p^0}{c},$$

ou seja,

$$v^i = \frac{cp^i}{p^0}, \quad (2.19)$$

portanto podemos agora escrever

$$\begin{aligned} \frac{dp^0}{dt} &= -c \left[\Gamma_{00}^0 p^0 + 2\Gamma_{0i}^0 p^0 \frac{v^i}{c} + \Gamma_{ij}^0 \frac{v^i v^j}{c^2} p^0 \right], \\ \frac{dp^k}{dt} &= -c \left[\Gamma_{00}^k p^0 + 2\Gamma_{0i}^k p^0 \frac{v^i}{c} + \Gamma_{ij}^k \frac{v^i v^j}{c^2} p^0 \right]. \end{aligned}$$

Destas duas expressões podemos concluir a equação de movimento para as velocidades v^i , dadas por

$$\frac{dv^k}{dt} = - \left[\Gamma_{00}^k + 2\Gamma_{0i}^k \frac{v^i}{c} + \Gamma_{ij}^k \frac{v^i v^j}{c^2} \right] c^2 + \left[\Gamma_{00}^0 + 2\Gamma_{0i}^0 \frac{v^i}{c} + \Gamma_{ij}^0 \frac{v^i v^j}{c^2} \right] cv^k.$$

Já em mãos destes resultados vamos expressar as conexões desta métrica, que segundo [55] tomam a forma

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{g}_{00}^2}{\partial x^i} = -\frac{1}{c^2} U_{,i}, \quad (2.20)$$

$$\Gamma_{00}^4 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{g}_{00}^4}{\partial x^i} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{g}_{i0}^3}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathfrak{g}_{ij}^2 \frac{\partial \mathfrak{g}_{00}^2}{x^j} = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{W}_{,i}}{c^4} + \frac{\mathcal{Q}_{i,t}}{c^4} + \frac{2\gamma}{c^4} UU_{,i}, \quad (2.21)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathfrak{g}_{i0}^3}{\partial x^j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{g}_{ij}^2}{\partial t} - \frac{\partial \mathfrak{g}_{j0}^3}{\partial x^i} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\mathcal{Q}_{i,j}}{c^3} + \frac{2\gamma}{c^3} U_{,t} \delta_{ij} - \frac{\mathcal{Q}_{j,i}}{c^3} \right], \quad (2.22)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathfrak{g}_{ik}^2}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathfrak{g}_{ij}^2}{\partial x^k} - \frac{\partial \mathfrak{g}_{jk}^2}{\partial x^i} \right] = \frac{\gamma}{c^2} [U_{,j} \delta_{ik} + U_{,k} \delta_{ij} - U_{,i} \delta_{jk}], \quad (2.23)$$

$$\Gamma_{00}^3 = -\frac{1}{2c} \frac{\partial \mathfrak{g}_{00}^2}{\partial t} = \frac{-U_{,t}}{c^3}, \quad (2.24)$$

$$\Gamma_{0i}^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{g}_{00}^2}{\partial x^i} = \frac{-U_{,i}}{c^2}, \quad (2.25)$$

$$\Gamma_{ij}^1 = 0. \quad (2.26)$$

Portanto podemos concluir as equações de movimento:

$$\frac{dv^i}{dt} = U_{,i} + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{W}_{,i} - \mathcal{Q}_{i,t} - 2\gamma U U_{,i} - [\mathcal{Q}_{i,j} - \mathcal{Q}_{j,i}] v^j \right. \\ \left. - (2\gamma + 1) v^i U_{,t} - 2(\gamma + 1) U_{,j} v^j v^i + \gamma U_{,i} v^2 \right\}.$$

E estas equações de movimento se reduzem corretamente as esperadas para a PN. Devemos tomar cuidado com esta equação, ela não está em um formato invariante, ou seja, só é válida para sistemas coordenados cartesianos, por isso é necessário expressar esta equação de forma vetorial ou aplicar a mesma metodologia que anteriormente. É fácil ver que em forma vetorial ela tem a forma

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla U + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{2} \nabla \mathcal{W} - \frac{\partial \vec{\mathcal{Q}}}{\partial t} - 2\gamma U \nabla U + \vec{v} \times \nabla \times \vec{\mathcal{Q}} \right. \\ \left. - (2\gamma + 1) \vec{v} \frac{\partial U}{\partial t} - 2(\gamma + 1) \vec{v} \nabla U \cdot \vec{v} + \gamma v^2 \nabla U \right\}, \quad (2.27)$$

e em termos de coordenadas é expressa por

$$\frac{dv^i}{dt} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} v^j v^k = \gamma^{ik} \left\{ U_{,k} + \left[\frac{1}{2} \mathcal{W}_{,k} - \mathcal{Q}_{k,t} - 2\gamma U U_{,k} - (\mathcal{Q}_{k,j} - \mathcal{Q}_{j,k}) v^j \right. \right. \\ \left. \left. - (2\gamma + 1) v_k U_{,t} - 2(\gamma + 1) U_{,j} v^j v_k + \gamma U_{,k} v^2 \right] \frac{1}{c^2} \right\}. \quad (2.28)$$

Note que a base usada em (2.28) é a do espaço tangente, $\hat{\xi}_i = \partial/\partial\xi^i$. Dando continuação a uma interpretação sem citar a métrica da PNP, tratando o problema do ponto de vista do espaço definido por (2), devemos postular a expressão (2.27) ou (2.28), da mesma forma que fizemos para teorias métricas quando postulamos as geodésicas (postulado (1)). Assim podemos tratar dos efeitos gravitacionais sem precisar tratarmos da métrica da PNP, facilitando consideravelmente a interpretação e cálculos posteriores, pois estaremos analisando os modelos de um ponto de vista puramente Newtoniano.

E assim está estabelecido como tratar com aproximações Pós-Newtonianas. Primeiro começamos com a métrica e escolhemos um referencial reformulando o espaço, como fizemos na definição (2). Depois qualquer observável, como o movimento de partículas, deve ser calculado de forma a só depender de campos que pertencem a um espaço euclidiano, o que permite interpretá-lo de uma forma completamente Newtoniana. Quando tratarmos de teoria cinética, capítulo (4), faremos o mesmo processo.

2.3 A Equação de Órbitas Circulares

Curvas de rotação são observáveis importantes em dinâmica de galáxias, portanto para isto é necessário determinar as equações de movimento para órbitas circulares no

plano equatorial $z = 0$. De (2.28) devemos ter as equações de movimento nas coordenadas (R, φ, z) :

$$\ddot{R} - R(\dot{\varphi})^2 = U_{,R} + \left[\frac{1}{2} \mathcal{W}_{,R} - \mathcal{Q}_{R,t} - 2\gamma U U_{,R} - (\mathcal{Q}_{R,j} - \mathcal{Q}_{j,R}) v^j - (2\gamma + 1) \dot{R} U_{,t} - 2(\gamma + 1) U_{,j} v^j \dot{R} + \gamma U_{,R} v^2 \right] \frac{1}{c^2}, \quad (2.29)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{R}\dot{\varphi}}{R} = \frac{1}{R^2} \left\{ U_{,\varphi} + \left[\frac{1}{2} \mathcal{W}_{,\varphi} - \mathcal{Q}_{\varphi,t} - 2\gamma U U_{,\varphi} - (\mathcal{Q}_{\varphi,j} - \mathcal{Q}_{j,\varphi}) v^j - (2\gamma + 1) R^2 \dot{\varphi} U_{,t} - 2(\gamma + 1) U_{,j} v^j R^2 \dot{\varphi} + \gamma U_{,\varphi} v^2 \right] \frac{1}{c^2} \right\}, \quad (2.30)$$

$$\ddot{z} = U_{,z} + \left[\frac{1}{2} \mathcal{W}_{,z} - \mathcal{Q}_{z,t} - 2\gamma U U_{,z} - (\mathcal{Q}_{z,j} - \mathcal{Q}_{j,z}) v^j - (2\gamma + 1) v_z U_{,t} - 2(\gamma + 1) U_{,j} v^j v_z + \gamma U_{,z} v^2 \right] \frac{1}{c^2}. \quad (2.31)$$

Como queremos que a partícula teste se mantenha no plano equatorial devemos impor as condições $\ddot{R} = \ddot{z} = \dot{R} = v^R = \dot{z} = v^z = 0$. Tal imposição nos leva as equações de movimento no plano $z = 0$ (2.29), lembrando que $v^\varphi = R\dot{\varphi}$:

$$(v^\varphi|_{z=0})^2 = -R U_{,R}|_{z=0} - \frac{R}{c^2} \left\{ \frac{\mathcal{W}_{,R}}{2} - \mathcal{Q}_{R,t} - (\mathcal{Q}_{R,\varphi} - \mathcal{Q}_{\varphi,R}) \frac{v^\varphi}{R} + \gamma U_{,R} [(v^\varphi)^2 - 2U] \right\} \Big|_{z=0}.$$

Poderíamos organizar tal equação e depois resolve-la em favor de v^φ , mas trabalhar com tal solução é desnecessário. Para simplificar nosso trabalho percebemos que $v^\varphi = \overset{0}{v}^\varphi + \overset{2}{v}^\varphi$, assim podemos assumir que termos onde v^φ é multiplicado por c^{-2} podem ser tomados como:

$$(v^\varphi|_{z=0})^2 = -R U_{,R}|_{z=0},$$

tal escolha nos mantém até a ordem necessária na PNP, ou seja, teremos a solução

$$(v^\varphi|_{z=0})^2 = \left\{ \frac{R \mathcal{Q}_{R,t}}{c^2} - \frac{R \mathcal{W}_{,R}}{2c^2} + \frac{\sqrt{-R U_{,R}}}{c^2} (\mathcal{Q}_{R,\varphi} - \mathcal{Q}_{\varphi,R}) + \frac{\gamma R U_{,R}}{c^2} (R U_{,R} + 2U) - R U_{,R} \right\} \Big|_{z=0}.$$

Esta é a equação de órbitas circulares para a PNP, e até aqui não supomos nenhuma simetria, ou seja, esta equação é válida para qualquer modelo.

2.3.1 Condições em Simetria Esférica para a Existência de Órbitas Circulares

Não são para todas as escolhas dos parâmetros Pós-Newtonianos que encontramos órbitas circulares no plano equatorial. Se supormos que os potenciais Pós-Newtonianos U ,

$\phi_2, \phi_4, \phi_6, X$ e ϕ_w são estáticos e possuem simetria esférica e $U^j = \phi_1 = \phi_3 = 0$ (No Cap. 3 mostraremos com mais cuidado a razão da última expressão), as equações de movimento (2.29)-(2.31) para órbitas circulares no plano equatorial, em coordenadas esféricas, são simplesmente

$$(\dot{\varphi})^2 \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{r} \left[U_{,r} + \frac{\mathcal{W}_{,r}}{2c^2} - \frac{2\gamma U U_{,r}}{c^2} - \left(\Phi_{r,\varphi}^{\text{PF}} - \Phi_{\varphi,r}^{\text{PF}} \right) \frac{\sqrt{-rU_{,r}}}{rc^2} - \frac{\gamma r (U_{,r})^2}{c^2} \right] \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}, \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{c^2 r^2} \left[\frac{\mathcal{W}_{,\theta}}{2} - \left(\Phi_{\theta,\varphi}^{\text{PF}} - \Phi_{\varphi,\theta}^{\text{PF}} \right) \dot{\varphi} \right] \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad (2.33)$$

$$\ddot{\varphi} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\mathcal{W}_{,\varphi} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}}{2c^2 r^2}. \quad (2.34)$$

As equações (2.33) e (2.34) não são necessariamente satisfeitas para qualquer solução das equações de campo, portanto deve ser possível determinar condições para que tais sejam satisfeitas. Começamos avaliando os termos da equação (2.33):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{,\theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= 2\alpha_2 \left(X_{,rr} - \frac{X_{,r}}{r} \right) (w^r w^r_{,\theta}) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= -2\alpha_2 \left(X_{,rr} - \frac{X_{,r}}{r} \right) w^z w^r \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}, \end{aligned}$$

$$\Phi_{\theta,\varphi}^{\text{PF}} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left(\alpha_2 \frac{X_{,r}}{r} - \frac{\alpha_1}{2} U \right) w_{\theta,\varphi} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$\Phi_{\varphi,\theta}^{\text{PF}} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left(\alpha_2 \frac{X_{,r}}{r} - \frac{\alpha_1}{2} U \right) w_{\varphi,\theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Substituindo os resultados anteriores na equação (2.33) encontramos a condição

$$\frac{\alpha_2}{c^2 r^2} w^z w^r \Big|_{\theta=\pi/2} \left(\frac{X_{,r}}{r} - X_{,rr} \right) = 0. \quad (2.35)$$

Agora continuamos com a equação (2.34). Para isto compararemos a derivada de (2.32) com o lado direito de (2.34). Primeiro calculamos a derivada de (2.32):

$$\ddot{\varphi} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left[\left(\Phi_{r,\varphi\varphi}^{\text{PF}} - \Phi_{\varphi,r\varphi}^{\text{PF}} \right) \frac{\sqrt{-rU_{,r}}}{r^2 c^2} - \frac{\mathcal{W}_{,r\varphi}}{2rc^2} \right] \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}. \quad (2.36)$$

Os termos da equação (2.36) e do lado direito de (2.34) são expressos como se segue,

$$\begin{aligned} \Phi_{r,\varphi\varphi}^{\text{PF}} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= \left(\alpha_2 \frac{X_{,r}}{r} - \frac{\alpha_1}{2} U \right) w_{r,\varphi\varphi} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= - \left(\alpha_2 \frac{X_{,r}}{r} - \frac{\alpha_1}{2} U \right) w_r \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\varphi,r\varphi}^{\text{PF}}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= \left(\alpha_2 X_{,r} - \frac{\alpha_1}{2} r U\right)_{,r} \left(\frac{w_\varphi}{r}\right)_{,\varphi}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= -\left(\alpha_2 X_{,rr} - \frac{\alpha_1}{2} U - \frac{\alpha_1}{2} r U_{,r}\right) w_r\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{,\varphi}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= 2\alpha_2 \left(X_{,rr} - \frac{X_{,r}}{r}\right) (w^r w^r_{,\varphi})\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\alpha_2 \left(X_{,rr} - \frac{X_{,r}}{r}\right) \left(w_r \frac{w_\varphi}{r}\right)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}},\end{aligned}$$

$$\mathcal{W}_{,r\varphi}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2\alpha_2 \left(X_{,rrr} - \frac{X_{,rr}}{r} + \frac{X_{,r}}{r^2}\right) \left(w_r \frac{w_\varphi}{r}\right)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}.$$

Ao substituírmos estes resultados em (2.34) encontramos uma segunda condição

$$\begin{aligned}\left(\alpha_2 X_{,rr} - \alpha_2 \frac{X_{,r}}{r} - \frac{\alpha_1}{2} r U_{,r}\right) \sqrt{-r U_{,r}} w_r\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} - \alpha_2 r X_{,rrr} \left(w_r \frac{w_\varphi}{r}\right)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ = \alpha_2 \left(X_{,rr} - \frac{X_{,r}}{r}\right) \left(w_r \frac{w_\varphi}{r}\right)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Impondo que as condições (2.35) e (2.37) devem ser satisfeitas para qualquer solução das equações de campo e escolha do vetor \vec{w} e notando que $X_{,r}/r - X_{,rr} \neq 0$ para qualquer solução assintoticamente nula, então as condições (2.35) e (2.37) se reduzem a $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Ou seja, *concluimos o fato de que órbitas circulares no plano $z = 0$ só existem se e somente se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$* . Para fazermos sentido deste resultado referimos ao significado heurístico dos parâmetros α_1 e α_2 [2], conservação global de momento angular não deve existir em teorias nas quais estes são diferentes de zero. Obviamente, sem leis de conservação de momento angular não devem existir órbitas circulares, as condições (2.35) e (2.37) reafirmam matematicamente este resultado.

Assim a única forma para modelos estáticos de simetria esférica possuírem órbitas circulares no plano equatorial será para teorias nas quais $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, ou seja, $\Phi_j^{\text{PF}} = 0$. Dessa forma a equação para curvas de rotação para modelos estáticos de simetria esférica é simplificada:

$$v^\varphi\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-r U_{,r}} \left[1 + \frac{\alpha_3 w^2}{2c^2} + \frac{\Psi_{,r}}{c^2 U_{,r}} - \frac{\gamma r U_{,r}}{c^2} - \frac{2(\beta + \gamma) U}{c^2}\right]^{1/2}. \quad (2.38)$$

Será da equação (2.38) que determinaremos as curvas de rotação para modelos de simetria esférica.

2.3.2 Condições em Simetria Cilíndrica para a Existência de Órbitas Circulares

Na seção anterior conseguimos estabelecer condições suficientes e necessárias para a existência de órbitas circulares quando consideramos simetria esférica e seria interessante

conseguir fazer o mesmo para simetria cilíndrica. Para representar simetria cilíndrica considere coordenadas cilíndricas e suponha que os campos U , Φ , X e U_φ dependam apenas das variáveis R e z , possuem simetria reflexiva e $U_z = U_R = 0$. Por simetria reflexiva nos referimos a campos que satisfazem:

$$U(R, z) = U(R, -z) \text{ e } \left. \frac{\partial^n U}{\partial z^n} \right|_{z=0} = 0,$$

com n ímpar.

Supondo as simetrias acima as equações de movimento (2.29)-(2.31) são simplificadas e seguindo o mesmo procedimento que para o caso de simetria esférica temos duas condições para a validade das órbitas no plano equatorial, estas são expressas pelas equações:

$$\left[\frac{1}{2} \mathcal{W}_{,z} - (\mathcal{Q}_{z,\varphi} - \mathcal{Q}_{\varphi,z}) \sqrt{-RU_{,R}} \right] \Big|_{z=0} = 0, \quad (2.39)$$

$$\mathcal{W}_{,\varphi} \Big|_{z=0} = -\frac{R}{2} \mathcal{W}_{,R\varphi} \Big|_{z=0} + \left[\sqrt{-RU_{,R}} (\mathcal{Q}_{R,\varphi\varphi} - \mathcal{Q}_{\varphi,R\varphi}) \right] \Big|_{z=0}. \quad (2.40)$$

Começando pela expressão (2.39), calculando cada termo e usando as simetrias dos campos devemos ter

$$(\mathcal{Q}_{z,\varphi} - \mathcal{Q}_{\varphi,z}) \Big|_{z=0} = 0,$$

$$\mathcal{W}_{,z} \Big|_{z=0} = 2\alpha_2 w^R w^z X_{,zzR} \Big|_{z=0},$$

portanto da condição (2.39), e lembrando que esta deve ser satisfeita para qualquer solução das equações de campo e escolha de \vec{w} , temos

$$\alpha_2 w^R w^z X_{,zzR} \Big|_{z=0} = 0 \implies \alpha_2 = 0.$$

Focando agora na equação (2.40) cada um dos termos tem a forma, já usando o resultado anterior ($\alpha_2 = 0$),

$$\mathcal{W}_{,\varphi} \Big|_{z=0} = -(2\alpha_3 - \alpha_1) \frac{w^R}{R} U_\varphi \Big|_{z=0},$$

$$\mathcal{W}_{,R\varphi} \Big|_{z=0} = -\frac{(2\alpha_3 - \alpha_1) w^R}{R^2} (R U_{\varphi,R} \Big|_{z=0} - U_\varphi \Big|_{z=0}),$$

$$(\mathcal{Q}_{R,\varphi\varphi} - \mathcal{Q}_{\varphi,R\varphi}) \Big|_{z=0} = -\frac{1}{2} \alpha_1 w^R R U_{,R} \Big|_{z=0},$$

ou seja, substituindo em (2.40) e após um pouco de álgebra concluímos uma segunda condição,

$$(2\alpha_3 - \alpha_1) (U_\varphi \Big|_{z=0} + R U_{\varphi,R} \Big|_{z=0}) = -\alpha_1 R (-RU_{,R})^{3/2} \Big|_{z=0}.$$

Pelos mesmo argumentos que usamos anteriormente esta equação só é sempre satisfeita quando $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$. Portanto para termos órbitas circulares no plano equatorial devemos nos especializar em teorias nas quais $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, ou seja, não podemos considerar

nenhum efeito devido a referenciais privilegiados. Assim impondo tais condições a velocidade de órbitas circulares toma a forma:

$$v^\varphi|_{z=0} = \left\{ -RU_{,R} - \frac{R\Psi_{,R}}{c^2} + 2(1 + \gamma) \frac{U_{\varphi,R}}{c^2} \sqrt{-RU_{,R}} + \frac{RU_{,R}}{c^2} [\gamma RU_{,R} + 2(\gamma + \beta)U] \right\}^{1/2} \Big|_{z=0}. \quad (2.41)$$

Será da equação (2.41) que determinaremos as curvas de rotação para modelos de simetria cilíndrica.

3 Soluções Exteriores: O Caso Esférico e Cilíndrico

Determinamos no capítulo anterior as estruturas do espaço e a equação que determina como as órbitas de partículas se comportam sobre o mesmo. Agora para expressar as órbitas em termos de funções elementares devemos resolver as equações de campo (2.4)-(2.13). Para tal a escolha mais simples é sempre para fontes nulas, ou seja, quando temos soluções no vácuo. Mesmo no caso sem fontes as equações de campo não são de simples integração e para facilitar nosso trabalho a escolha de simetrias para os campos se torna essencial. Dessa forma nesta seção consideraremos soluções no vácuo exteriores a uma distribuição estática de matéria de simetria esférica ou cilíndrica. Com as soluções encontramos as expressões para as órbitas circulares e demonstramos que estas não apresentam o comportamento esperado para serem alternativas à matéria escura em galáxias, pois não encontramos curvas de rotação que se assemelhem a curvas planas.

3.1 Soluções de Simetria Esférica

Em primeira instância consideramos modelos estáticos de simetria esférica. Várias suposições são necessárias, começamos impondo que os campos materiais são estáticos, ou seja,

$$c^{-2}T^{00} = \rho^* \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} [\Pi - (3\gamma - 2)U] \right\}, \quad (3.1)$$

$$c^{-1}T^{0j} = 0, \quad (3.2)$$

$${}^2T^{ij} = P\delta^{ij}. \quad (3.3)$$

Agora supomos que as variáveis materiais ρ^* , P , Π e os potenciais U , ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 , ϕ_6 , X , U^j e ϕ_w são estáticos, possuem simetria esférica e são bem comportados sob todo o espaço. Como consequência do espaço-tempo ser assintoticamente plano a equação (2.4) para os campos U^j e ϕ_1 pode ser facilmente resolvida, resultando nas expressões

$$U^j = \frac{A^j}{r}, \quad \phi_1 = \frac{B}{r},$$

onde A^j e B são constantes. Note que as soluções para os campos U^j e ϕ_1 são válidas para todo o espaço, pois supomos que $u^i = 0 \forall r$. Então para evitarmos singularidades no centro de simetria impomos que $A^j = 0$ e $B = 0$, ou seja, $U^j = \phi_1 = 0$. Agora da equação

(2.13) temos $\phi_6 = 3\phi_1$, ou seja, $\phi_6 = 0$. Sob tais suposições temos as equações de campo:

$$\nabla^2 U = -4\pi G\rho^*, \quad (3.4)$$

$$\nabla^2 X = 2U, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi = & (2\beta - 1 - \zeta_2 + 2\xi) 4\pi G\rho^* U - (1 + \zeta_3) 4\pi G\rho^* \Pi \\ & - (3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi) 4\pi GP - \frac{16\xi\pi G\rho^*}{r} X_{,r} - 4\xi U_{,r} \left(\frac{3X_{,r}}{r^2} - \frac{2U}{r} - U_{,r} \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\phi_1 = U_j = \phi_6 = 0, \quad (3.7)$$

$$\Phi^{\text{PF}} = (\alpha_3 - \alpha_1) w^2 U + \alpha_2 (w^r)^2 X_{,rr} + 2\alpha_2 r X_{,r} \left[(w^\theta)^2 + (w^\varphi \sin^2 \theta)^2 \right], \quad (3.8)$$

$$\Phi_r^{\text{PF}} = -\frac{1}{2} \alpha_1 w_r U + \alpha_2 w^r X_{,rr}, \quad (3.9)$$

$$\Phi_\theta^{\text{PF}} = -\frac{1}{2} \alpha_1 w_\theta U + 2r\alpha_2 w^\theta X_{,r}, \quad (3.10)$$

$$\Phi_\varphi^{\text{PF}} = -\frac{1}{2} \alpha_1 w_\varphi U + 2\alpha_2 w^\varphi r \sin^2 \theta X_{,r}. \quad (3.11)$$

Como demonstramos no capítulo 2, para órbitas circulares existirem no plano equatorial devemos impor $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, portanto temos $\Phi_j^{\text{PF}} = 0$ e $\Phi^{\text{PF}} = \alpha_3 w^2 U$. Finalmente consideramos $\rho^* = P = \Pi = 0$ fora de uma distribuição de matéria de raio "a", ou seja, temos nesta região as equações de campo dadas por

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) &= 0, \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dX}{dr} \right) &= 2U, \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) &= -4\xi \frac{dU}{dr} \left(\frac{2U}{r} - \frac{3}{r^2} \frac{dX}{dr} - \frac{dU}{dr} \right), \end{aligned}$$

resolvendo este sistema de equações temos

$$U = \frac{C_1}{r}, \quad X = C_1 r + \frac{C_2}{r} + C_3, \quad \Psi = -\frac{C_4}{r} + \frac{\xi C_1 C_2}{r^4}.$$

Condições de contorno ainda são necessárias para determinarmos C_i , $i = 1, \dots, 4$, constantes (notamos que $C_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3$), mas já podemos determinar as características das órbitas circulares por meio da equação (2.38):

$$v^\varphi|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{C_1}{r}} \left[1 + \frac{\alpha_3 w^2}{2c^2} - \frac{C_4}{C_1 c^2} - (\gamma + 2\beta) \frac{C_1}{rc^2} + \frac{4\xi C_2}{r^3 c^2} \right]^{1/2}. \quad (3.12)$$

Soluções de simetria esférica, quando analisamos regiões muito distantes do centro de simetria, podem ser, sob boa aproximação, representadas por soluções no vácuo e portanto (3.12) deve ser um bom representativo das velocidade circulares que podemos esperar da PNP. Em uma primeira análise a expressão (3.12) se comporta, para valores elevados de r , proporcionalmente a $\sqrt{1/r}$, ou seja, a usual queda Kepleriana. Este resultado é para ser esperado já que é suposto um espaço assintoticamente plano.

Mas ainda é possível algum comportamento incomum existir para valores de r próximos a a , o limite da distribuição de matéria. Vamos mostrar que este comportamento não usual não ocorre para PNP. Para demonstrar o anterior basta percebermos que para encontrarmos comportamentos diferentes fora da matéria precisamos que para algum valor de $r \geq a$ a velocidade seja função crescente com o raio, e assim deve existir algum extremo local da função do lado direito de (3.12). Vamos mostrar que isto não ocorre, ou seja, não existe extremo local na região $r \geq a$. Para tal começamos tomando a derivada de (3.12),

$$v^{\varphi, r}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{C_1}{r^5 v^{\varphi}|_{\theta=\frac{\pi}{2}}} \left[\left(1 + \frac{\alpha_3 w^2}{2c^2} - \frac{C_4}{C_1 c^2} \right) r^3 - \frac{2(\gamma + 2\beta) C_1}{c^2} r^2 + \frac{16\xi C_2}{c^2} \right], \quad (3.13)$$

os extremos de (3.13) são as soluções da equação cúbica,

$$\left(1 + \frac{\alpha_3 w^2}{2c^2} - \frac{C_4}{C_1 c^2} \right) r^3 - \frac{2(\gamma + 2\beta) C_1}{c^2} r^2 + \frac{16\xi C_2}{c^2} = 0,$$

encontrar a única solução real da equação acima até a aproximação da PNP não é complicado, primeiro colocamos a expressão acima num formato mais simples ou reduzido. Primeiro dividimos tudo por $1 + \alpha_3 w^2/2c^2 - C_4/C_1 c^2$, desprezamos todos os termos de ordem superior a c^{-4} e tomando

$$r = t + \frac{2(\gamma + 2\beta) C_1}{3c^2},$$

concluimos uma equação mais fácil de resolver, ao desprezarmos termos de ordem superior,

$$t^3 + \frac{16\xi C_2}{c^2} = 0 \implies r = \sqrt[3]{-\frac{16\xi C_2}{c^2}} + \frac{2(\gamma + 2\beta) C_1}{3c^2}.$$

Agora as constantes C_1 e C_2 , por suposição da PNP, devem ser da ordem do parâmetro a como se segue:

$$C_1 \sim a\epsilon c^2 \text{ e } C_2 \sim \frac{a^3 \epsilon c^2}{2},$$

portanto o valor de r , que é o extremo local de (3.12), é proporcional a

$$r \sim \left[\sqrt[3]{-8\xi\epsilon} + \frac{2(\gamma + 2\beta)\epsilon}{3} \right] a \ll a,$$

ou seja, o extremo local não se encontra na região onde a solução exterior é válida. Dessa forma a curva se comporta, na região $r \geq a$, como $\sqrt{1/r}$ e assim não possui um

comportamento plano, como é requerido para que as modificações simulem os efeitos de matéria escura. Obviamente que este resultado está restrito as velocidades fora da distribuição de matéria. Ainda é possível que dentro da região onde temos campos materiais os efeitos da nova teoria gravitacional possam gerar modificações do comportamento das curvas que não é capturado pela equação (3.12), exploramos esta possibilidade em capítulos posteriores (Caps. 4 e 5).

3.2 Modelos de Discos Finos de Simetria Axial

Modelos de simetria esférica são boas primeiras tentativas em entender o comportamento de objetos astrofísicos graças a simplicidade da matemática envolvida. Mas não de fato representam a simetria de galáxias em geral, para isto devemos estudar modelos que apresentam simetria axial. E também dado que muitas galáxias podem ser muito bem aproximadas a um disco, nos focaremos nesta seção em soluções de discos finos de simetria axial. Configuraremos a distribuição da seguinte forma, consideraremos discos finos (infinitesimalmente pequenos), de forma que qualquer campo material possa ser escrito da forma $F = f\delta(z)$. Agora, supomos que para $R > a$ todos os campos materiais são nulos, ou de forma matemática, todos os campos materiais devem ser distribuições da forma:

$$F(R, z) = f(R)\delta(z) [\Theta(R) - \Theta(R - a)],$$

onde $\Theta(R)$ é a função de Heaviside.

Diferentemente do caso esférico não resolveremos as equações diferenciais. Tomaremos como ponto de partida as formas integrais das equações de campo da PNP e por meio da expansão de multipolos determinaremos os potenciais. As formas integrais das equações de campo são expressas por [2]:

$$\begin{aligned} U &:= G \int \frac{\rho^*}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \\ \phi_1 &:= G \int \frac{\rho^* u'^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \\ \phi_2 &:= G \int \frac{\rho^* U'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \\ \phi_3 &:= G \int \frac{\rho^* \Pi'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \\ \phi_4 &:= G \int \frac{P'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \\ \phi_6 &:= G \int \rho^* u'_j u'_k \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^j (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_w &:= G^2 \int \int \rho^{*'} \rho^{*''} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \left[\frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')^j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')^j}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} \right] d^3 r' d^3 r'' \\
&= -U^2 - \phi_2 - \nabla U \cdot \nabla X + G \nabla \cdot \int \frac{\rho^{*'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' X' d^3 r', \\
U^j &:= G \int \frac{\rho^{*'} u'^j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r', \\
X &:= G \int \rho^{*'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| d^3 r',
\end{aligned}$$

Vários dos campos tem o mesmo formato, cuja expansão em multipolos [56] é dada pela expressão abaixo

$$g = G \int \frac{F(R', z')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' = G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r'^{l+1}} \int F(R', z') r'^l \mathcal{P}_l(\hat{r}' \cdot \hat{r}) d^3 r',$$

que é sempre válido para todo o espaço fora da casca esférica $r > a$, onde a é raio que delimita todos os campos materiais.

Se considerarmos que estamos tratando de um disco fino sempre teremos o conteúdo material dado por funções da forma $F(R', z') = f(R') [\Theta(R') - \Theta(R' - a)] \delta(z')$, ou seja, sempre teremos que resolver integrais como abaixo:

$$\int f(R') [\Theta(R') - \Theta(R' - a)] \delta(z') r'^l \mathcal{P}_l(\hat{r}' \cdot \hat{r}) d^3 r'.$$

Para calcularmos esta integral supomos os eixos \hat{x}' , \hat{y}' e \hat{z}' de tal sorte que $\hat{R} = \hat{x}'$ e $\hat{z} = \hat{z}'$ (que sempre é válido para simetria axial). Ou seja, orientamos os eixos de tal forma que

$$\begin{aligned}
\hat{x}' &= \hat{R} \equiv \frac{\partial}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial R} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \\
\hat{y}' &= \hat{z}' \times \hat{x}' = \hat{z} \times \hat{x}' = \hat{z} \times \hat{x} \cos \varphi + \hat{z} \times \hat{y} \sin \varphi = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi, \\
\hat{\varphi} &\equiv \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi} = -R \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + R \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \equiv -R \sin \varphi \hat{x} + R \cos \varphi \hat{y}, \\
&\therefore \hat{y}' = \frac{\hat{\varphi}}{R}.^1
\end{aligned}$$

Dessa forma sempre teremos

$$\hat{r}' \cdot \hat{r} = \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r' r} = \frac{(R' \hat{R}' + z' \hat{z}) \cdot (R \hat{R} + z \hat{z})}{r' r} = \frac{R' R \hat{R}' \cdot \hat{R} + z' z}{r' r} = \frac{R' R \cos \varphi' + z' z}{r' r}.$$

Assim voltando a integral:

$$\int F(R', z') r'^l \mathcal{P}_l(\hat{r}' \cdot \hat{r}) d^3 r' = \int_0^a f(R') R'^{l+1} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l\left(\frac{R \cos \varphi'}{r}\right) d\varphi', \quad (3.14)$$

que será um resultado que sempre precisaremos.

¹ notamos aqui que $\hat{\varphi}$ não é um versor, usamos a notação " $\hat{\xi}$ " para representar vetores da base.

Vamos supor, por simplicidade, os campos materiais como $\rho^* = \Sigma(R) \delta(z)$, $\rho^* \Pi = \Sigma(R) \delta(z) \Pi(R)$, $P = \Xi(R) \delta(z)$ e $\mathbf{u} = (0, u^\varphi(R), 0)$ de forma a garantir simetria axial. Com essa escolha de campos materiais e usando (3.14) teremos:

$$\{U, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\} = G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int_0^a \Sigma' \{1, u'^2, U', \Pi', \Xi'/\Sigma'\} R'^{l+1} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l \left(\frac{R \cos \varphi'}{r} \right) d\varphi'.$$

Pela escolha que fizemos de \mathbf{u} , então o campo \mathbf{U} deve ter a forma:

$$\mathbf{U} = G \int \frac{\rho^{*\prime} u^{\varphi'}(R', z') \hat{\varphi}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 x' = G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int \rho^{*\prime} u^{\varphi'} \hat{\varphi}' r'^l \mathcal{P}_l(\hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) d^3 r'.$$

Usando (3.14) teremos:

$$\mathbf{U} = G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int_0^a \int_0^{2\pi} \Sigma' u^{\varphi'} (-R' \sin \varphi' \hat{x}' + R' \cos \varphi' \hat{y}') R'^{l+1} \mathcal{P}_l \left(\frac{R \cos \varphi'}{r} \right) d\varphi' dR',$$

usando o resultado

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l \left(\frac{R \cos \varphi'}{r} \right) \sin \varphi' d\varphi' = 0,$$

devemos ter

$$\mathbf{U} = G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int_0^a \Sigma' u^{\varphi'} R'^{l+2} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l \left(\frac{R \cos \varphi'}{r} \right) \cos \varphi' d\varphi' \hat{y}'.$$

Mas dado nossa escolha de orientação dos eixos \hat{x}' , \hat{y}' e \hat{z}' devemos ter que $\hat{y}' = \hat{\varphi}/R$, portanto

$$\mathbf{U} = G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int_0^a \Sigma' u^{\varphi'} R'^{l+2} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l \left(\frac{R \cos \varphi'}{r} \right) \cos \varphi' d\varphi' \frac{\hat{\varphi}}{R}.$$

Portanto teremos a única componente do vetor \vec{U} dada por

$$U^\varphi(R, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{G}{R r^{l+1}} \int_0^a \Sigma' u^{\varphi'} R'^{l+2} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l \left(\frac{R \cos \varphi'}{r} \right) \cos \varphi' d\varphi'.$$

Nosso interesse se dá nas equações de movimento, então não precisamos de fato determinar o campo X , mas apenas suas derivadas, ou seja, precisamos de ∇X , esse por sua vez pode ser expandido:

$$\begin{aligned} \nabla X &= G \int \rho^{*\prime} \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| d^3 r' = \mathbf{r} U - G \int \rho^{*\prime} \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \\ &= \mathbf{r} U - G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int_0^a \Sigma' R'^{l+2} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l \left(\frac{R \cos \varphi'}{r} \right) \hat{R}' d\varphi' \\ &= \mathbf{r} U - G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int_0^a \Sigma' R'^{l+2} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l \left(\frac{R \cos \varphi'}{r} \right) (\hat{x}' \cos \varphi' + \hat{y}' \sin \varphi') d\varphi' \\ &= \mathbf{r} U - G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\hat{R}}{r^{l+1}} \int_0^a \Sigma' R'^{l+2} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l \left(\frac{R \cos \varphi'}{r} \right) \cos \varphi' d\varphi', \end{aligned}$$

ou seja, temos

$$X_{,R} = RU - G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int_0^a \Sigma' R'^{l+2} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l \left(\frac{R \cos \varphi'}{r} \right) \cos \varphi' d\varphi',$$

$$X_{,z} = zU.$$

Tratamos agora do campo ϕ_6 , dado por:

$$\begin{aligned} \phi_6 &= -G \int \rho^* \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{u}' \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3 r' \\ &= -GR \int \rho^* (u^{\varphi'})^2 (\hat{\varphi}' \cdot \hat{R})^2 \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'. \end{aligned}$$

Para nossa escolha de orientação para os eixos de integração devemos ter:

$$\hat{\varphi}' \cdot \hat{R} = (-R' \sin \varphi' \hat{x}' + R' \cos \varphi' \hat{y}') \cdot \hat{R} = -R' \sin \varphi'.$$

Portanto devemos ter com as devidas simplificações:

$$\begin{aligned} \phi_6 &= -GR \int \rho^* (u^{\varphi'})^2 R'^2 \sin^2 \varphi' \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \\ &= -GR \int \rho^* u'^2 \sin^2 \varphi' \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'. \end{aligned}$$

Apenas nos falta calcular a derivada e expressá-la em termos de polinômios de Legendre:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{\partial}{\partial R} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} \mathcal{P}_l \left(\frac{R'R \cos \varphi' + z'z}{r'r} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} \left\{ \mathcal{P}'_l \left(\frac{R'R \cos \varphi' + z'z}{r'r} \right) \left[\frac{R'r r' \cos \varphi' - (R'R \cos \varphi' + z'z) \frac{Rr'}{r}}{(r r')^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - (l+1) \frac{R}{r^2} \mathcal{P}_l \left(\frac{R'R \cos \varphi' + z'z}{r'r} \right) \right\}, \end{aligned}$$

onde nesta expressão $\mathcal{P}'_l(x) = d\mathcal{P}_l(x)/dx$. Como esta é única parte da integral de ϕ_6 que apresenta a variável z' podemos, devido a $\rho^* = \Sigma(R') \delta(z')$, simplesmente expressá-la para quando $z' = 0$, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \stackrel{z'=0}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R'^l}{r^{l+2}} \left\{ - (l+1) \frac{R}{r} \mathcal{P}_l \left(\frac{R \cos \varphi'}{r} \right) + \mathcal{P}'_l \left(\frac{R \cos \varphi'}{r} \right) \cos \varphi' \left[1 - \frac{R^2}{r^2} \right] \right\},$$

Portanto o campo ϕ_6 em termos dos polinômios de Legendre é:

$$\begin{aligned} \phi_6 &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{G(l+1)R^2}{r^{l+3}} \int_0^a \Sigma' u'^2 R'^{l+1} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l \left(\frac{R \cos \varphi'}{r} \right) \sin^2 \varphi' d\varphi' \\ &\quad - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{GRz^2}{r^{l+4}} \int_0^a \Sigma' u'^2 R'^{l+1} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}'_l \left(\frac{R \cos \varphi'}{r} \right) \cos \varphi' \sin^2 \varphi' d\varphi'. \end{aligned}$$

Para determinarmos todos os campos apenas um último termo, este pertence a expressão de ϕ_w , é necessário:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \int \frac{\rho^*}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' X' d^3 r' &= \frac{\partial}{\partial R} \int \frac{\rho^* X'_{,R'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{R}' d^3 r' + \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{\rho^* X'_{,z'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{z}' d^3 r' \\ &= \frac{\partial}{\partial R} \int \frac{\rho^* X'_{,R'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cos \varphi' d^3 r' \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^2}{r^{l+4}} \int_0^a \Sigma' X'_{,R'} \Big|_{z'=0} R'^{l+1} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}'_l \left(\frac{R \cos \varphi'}{r} \right) \cos \varphi' d\varphi' \\ &\quad - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)R}{r^{l+3}} \int_0^a \Sigma' X'_{,R'} \Big|_{z'=0} R'^{l+1} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l \left(\frac{R \cos \varphi'}{r} \right) \cos \varphi' d\varphi'. \end{aligned}$$

Com os resultados acima já podemos determinar todos os campos que aparecem nas equações de movimento. A expressão para $\Psi(R, z)$ é longa e não adicionada nada ao trabalho, logo veremos que precisaremos da expressão de $\Psi_{,R}|_{z=0}$ para as equações de movimento. Por outro lado vemos que $\Psi_{,R}|_{z=0} = (\Psi|_{z=0})_{,R}$, e o mesmo vale para todos os outros campos, dessa forma expressamos todos os campos em $z = 0$:

$$U(R, 0) = G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^{l+1}} \int_0^a \Sigma' R'^{l+1} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') d\varphi',$$

$$X_{,R}(R, 0) = RU - G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^{l+1}} \int_0^a \Sigma' R'^{l+2} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \cos \varphi' d\varphi',$$

$$X_{,z}(R, 0) = 0,$$

$$U^\varphi(R, 0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{G}{R^{l+2}} \int_0^a \Sigma' u^{\varphi'} R'^{l+2} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \cos \varphi' d\varphi',$$

$$\begin{aligned} \Psi(R, 0) &= G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^{l+1}} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') d\varphi' \int_0^a dR' R'^{l+1} \times \\ &\times \left[(2\gamma + 1 + \zeta_1 - 2\xi) \frac{\Sigma' u'^2}{2} - (2\beta - 1 - \zeta_2 - 2\xi) \Sigma' U' + (1 + \zeta_3) \Sigma' \Pi' + (3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi) \Xi' \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} (\zeta_1 - 2\xi) G \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)}{R^{l+1}} \int_0^a \Sigma' u'^2 R'^{l+1} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \sin^2 \varphi' d\varphi' \right] \\ &\quad - \xi \left[-U^2 - U_{,R} X_{,R} - G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)}{R^{l+2}} \int_0^a \Sigma' X'_{,R'} \Big|_{z'=0} R'^{l+1} dR' \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \cos \varphi' d\varphi' \right]. \end{aligned}$$

Em algumas das integrais aparecem termos diferente envolvendo os polinômios de Legendre, no apêndice C mostramos algumas das propriedades destas integrais, sendo elas:

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \cos \varphi' d\varphi' = \begin{cases} \frac{l}{l+1} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{l-1}(\cos \varphi') d\varphi' & \text{se } l \geq 1, \\ 0 & \text{se } l < 1, \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \sin^2 \varphi' d\varphi' = \begin{cases} \frac{l+1}{l+2} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') d\varphi' - \frac{l-1}{l+2} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{l-2}(\cos \varphi') d\varphi' & \text{se } l \geq 2, \\ \frac{l+1}{l+2} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') d\varphi' & \text{se } l < 2, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') d\varphi' = \begin{cases} 2 \int_0^\pi \mathcal{P}_l(\cos \varphi') d\varphi' & \text{se } l \text{ é par,} \\ 0 & \text{se } l \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{2l}(\cos \varphi') d\varphi' \geq 0. \quad (3.18)$$

Com estes resultados podemos simplificar as expressões para os campos:

$$U(R, 0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{M^{(2l+1,1)}}{R^{2l+1}},$$

$$U_\varphi(R, 0) = \gamma_{\varphi\varphi} U^\varphi(R, 0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1) \mathcal{K}_\varphi^{(2l+3)}}{(2l+2) R^{2l+1}},$$

$$X_{,R}(R, 0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{M^{(2l+1,1)}}{R^{2l}} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{M^{(2l+3,3)}}{R^{2l+2}} \frac{(2l+1)}{(2l+2)},$$

$$X_{,z}(R, 0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \Psi(R, 0) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{O^{(2l+1)}}{R^{2l+1}} + \frac{(\zeta_1 - 2\xi)}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[(2l+2)^2 - 1]}{R^{2l+3} (2l+4)} \mathcal{K}^{(2l+3,3)} + \xi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{R^{2l+3}} \mathcal{X}^{(2l+2)} \\ &+ \xi \sum_{l,j=0}^{\infty} \frac{2l}{R^{2j+2l+2}} M^{(2l+1,1)} M^{(2j+1,1)} - \xi \sum_{l,j=0}^{\infty} \frac{(2l+1)(2j+1)}{(2j+2) R^{2j+2l+4}} M^{(2l+1,1)} M^{(2j+3,3)}, \end{aligned}$$

onde definimos as constantes

$$M^{(\mu,\nu)} := GP^{(\mu-\nu)} \int_0^a \Sigma' R'^\mu dR',$$

$$\mathcal{K}^{(\mu,\nu)} := GP^{(\mu-\nu)} \int_0^a \Sigma' u'^2 R'^\mu dR',$$

$$\mathcal{K}_\varphi^{(\mu)} := GP^{(\mu-3)} \int_0^a \Sigma' u'^\varphi R'^\mu dR',$$

$$\mathcal{X}^{(\mu)} := GP^{(\mu-2)} \int_0^a \Sigma' X'_{,R'} \Big|_{z'=0} R'^\mu dR',$$

$$\begin{aligned} O^{(\mu)} &:= \left[2\gamma + 1 + \left(1 - \frac{\mu^2}{\mu+1} \right) (\zeta_1 - 2\xi) \right] \frac{\mathcal{K}^{(\mu,1)}}{2} \\ &+ GP^{(\mu-1)} \int_0^a dR' R'^\mu [- (2\beta - 1 - \zeta_2 - 2\xi) \Sigma' U' + (1 + \zeta_3) \Sigma' \Pi' + (3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi) \Xi'], \end{aligned}$$

$$P^{(\mu)} := \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_\mu(\cos \varphi') d\varphi'.$$

Podemos truncar a soma até a ordem que desejarmos e, sob boa aproximação, o comportamento destes campos para $R > a$ é razoavelmente representado por tal aproximação. Para o nosso caso de interesse trataremos apenas até a ordem de quadrupolo, ou seja, não descartamos os termos com constantes $M^{(\mu,\nu)}$, $\mathcal{K}^{(\mu,\nu)}$, $\mathcal{K}_\varphi^{(\mu)}$, $\mathcal{X}^{(\mu)}$ e $O^{(\mu)}$ tais quais $0 \leq \mu \leq 3$, assim os campos são dados por:

$$\begin{aligned} U(R, 0) &= \frac{M^{(1,1)}}{R} + \frac{M^{(3,1)}}{R^3}, \\ U_\varphi(R, 0) &= \frac{\mathcal{K}_\varphi^{(3)}}{2R}, \\ X_{,R}(R, 0) &= M^{(1,1)} + \frac{M^{(3,1)}}{R^2} - \frac{M^{(3,3)}}{2R^2}, \\ \Psi(R, 0) &= \frac{O^{(1)}}{R} + \frac{O^{(3)}}{R^3} + \frac{3(\zeta_1 - 2\xi)\mathcal{K}^{(3,3)}}{8R^3} + \frac{\xi\mathcal{X}^{(2)}}{R^3} + \frac{\xi M^{(1,1)}}{2R^4} [4M^{(3,1)} - M^{(3,3)}] \\ &\quad + \frac{\xi M^{(3,1)}}{2R^6} [4M^{(3,1)} - 3M^{(3,3)}]. \end{aligned}$$

Dada nossa experiência com o caso esférico (monopolo) já é possível esperar um comportamento parecido com o da seção anterior, dado que todos os campos são decrescentes com o raio R , dessa forma não devem apresentar a forma plana das curvas de rotação que procuramos. A prova para o caso do quadrupolo é bem similar ao caso esférico. Pela equação (2.41) temos para o quadrupolo as velocidades circulares:

$$\begin{aligned} v^\varphi|_{z=0} &= \left\{ \frac{M^{(1,1)}}{R} + \frac{O^{(1)}}{Rc^2} - \left(\frac{M^{(1,1)}}{Rc} \right)^2 (\gamma + 2\beta) - \frac{(1 + \gamma)\mathcal{K}_\varphi^{(3)}\sqrt{M^{(1,1)}}}{c^2 R^{5/2}} + \frac{3M^{(3,1)}}{R^3} \right. \\ &\quad + \frac{3O^{(3)}}{R^3 c^2} + \frac{9(\zeta_1 - 2\xi)\mathcal{K}^{(3,3)}}{8R^3 c^2} + \frac{3\xi\mathcal{X}^{(2)}}{R^3 c^2} + \frac{2M^{(1,1)}}{R^4 c^2} [2M^{(3,1)}(2\xi - 3\beta) - \xi M^{(3,3)}] \\ &\quad \left. - \frac{3(1 + \gamma)\mathcal{K}_\varphi^{(3)}M^{(3,1)}}{2c^2 R^{9/2}\sqrt{M^{(1,1)}}} + \frac{M^{(3,1)}}{2R^6 c^2} [M^{(3,1)}(4\xi + 6\gamma - 12\beta) - 3\xi M^{(3,3)}] \right\}^{1/2}, \quad (3.19) \end{aligned}$$

assim como fizemos para o caso esférico tomamos a derivada da expressão para as velocidades circulares, neste caso usamos (3.19), e isolamos o polinômio que define os zeros da derivada, ou seja,

$$\begin{aligned} R^5 - 2(\gamma + 2\beta)\frac{M^{(1,1)}}{c^2}R^4 - \frac{5(1 + \gamma)\mathcal{K}_\varphi^{(3)}}{2c^2\sqrt{M^{(1,1)}}}R^{7/2} + \frac{9M^{(3,1)}}{M^{(1,1)}}R^3 - \frac{9M^{(3,1)}O^{(1)}}{c^2 M^{(1,1)}}R^3 \\ + \frac{9O^{(3)}}{c^2 M^{(1,1)}}R^3 + \frac{27(\zeta_1 - 2\xi)\mathcal{K}^{(3,3)}}{8c^2 M^{(1,1)}}R^3 + \frac{9\xi\mathcal{X}^{(2)}}{c^2 M^{(1,1)}}R^3 + \frac{8}{c^2} [2M^{(3,1)}(2\xi - 3\beta) - \xi M^{(3,3)}]R^2 \\ - \frac{27(1 + \gamma)\mathcal{K}_\varphi^{(3)}M^{(3,1)}}{4c^2 (M^{(1,1)})^{3/2}}R^{3/2} + \frac{3M^{(3,1)}}{c^2 M^{(1,1)}} [M^{(3,1)}(4\xi + 6\gamma - 12\beta) - 3\xi M^{(3,3)}] = 0, \quad (3.20) \end{aligned}$$

resolver a equação (3.20) não é uma tarefa fácil, mas a PNP nos permite considerar as contribuições dos termos separadamente, ou seja, podemos esperar que os zeros da

equação (3.20) são da forma $R = \overset{0}{R} + R_e$ onde $\overset{0}{R} \propto c^0$ e R_e é um termo de ordem inferior, proporcional a c^{-l} com $l > 0$. Ao substituir tal suposição na expressão (3.20), até a ordem de c^0 , temos,

$$\overset{0}{R}^5 + \frac{9M^{(3,1)}}{M^{(1,1)}} \overset{0}{R}^3 = 0 \implies \overset{0}{R} = 0 \text{ ou } \overset{0}{R} \in \mathbb{C}.$$

Para a próxima ordem de c muitos dos termos podem ser descartados, por serem de ordens superiores. Assim concluímos o valor de R_e , até sua ordem mais baixa de c ,

$$R_e = \left[\frac{M^{(3,1)}}{3c^2} (12\beta - 4\xi - 6\gamma) + \frac{\xi M^{(3,3)}}{c^2} \right]^{1/3} \sim a \left[\epsilon \left(\beta + \frac{2\xi}{3} - \frac{\gamma}{2} \right) \right]^{1/3} \ll a,$$

novamente o único zero real, até a ordem considerada, é encontrado dentro da região $R < a$. Assim como no caso do monopolo de simetria esférica o comportamento das velocidades circulares não é nada diferente da Kepleriana usual, ou seja, as correções devido aos potenciais pós-newtonianos não modificam o formato das curvas de rotação de forma significativa.

4 Teoria Cinética na Aproximação Pós-Newtoniana Parametrizada

O estudo de sistemas astrofísicos como aglomerados globulares, galáxias e aglomerados de galáxias é simplificado adotando uma descrição estatística e supondo algumas considerações [41, 42, 57, 58]: (i) todas as partículas do sistema possuem a mesma massa; (ii) as colisões (ou encontros) das partículas são raras o bastante para considerarmos como insignificantes; (iii) todos os campos (gravitacionais e materiais) são considerados contínuos e suaves por todo o espaço. Este conjunto de suposições nos permite tratar de objetos astrofísicos analogamente a fluídos. As três suposições nos permitem considerar que o sistema é completamente caracterizado por uma função de distribuição (DF). Em primeiro lugar devemos definir o que é uma DF [43]:

Definição 3 *Uma função de distribuição é um mapa $f : \mathcal{P}_M \rightarrow \mathbb{R}^+$, dada pela regra $p \rightarrow f(p)$, onde $p \in \mathcal{P}_x \subseteq T_x M$ e $x \in M$, $\mathcal{P}_M = \dot{\cup}_x \mathcal{P}_x$ é chamado o espaço de fase e a fibra $\mathcal{P}_x = \{p \in T_x M \mid g(p, p) = -c^2 \text{ e } g(T, p) < 0\}$.*

A interpretação física de f é que ela representa a densidade do número de partículas que se encontram no ponto $(x, p) \in \mathcal{P}_M$, e devido a orientação temporal podemos, quando em coordenadas locais, considerar $p^0 > 0$. Outras interpretações físicas podem ser associadas a f (veja 41). A partir da definição acima podemos definir os diversos momentos de f , aqui só nos importaremos com o segundo momento [43] de f cuja interpretação é o tensor de energia momento,

$$T^{\mu\nu} = \int_{\mathcal{P}_x} p^\mu p^\nu f \theta_p, \quad (4.1)$$

onde $\theta_p = \sqrt{-g} dp^0 \wedge dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3$, em coordenadas locais.

Geralmente consideramos que os componentes do sistema tem a mesma massa m , tal consideração nos leva a uma simplificação de (4.1) (veja 43, 58):

$$T^{\mu\nu} = \int_{\mathcal{P}_x} p^\mu p^\nu f \theta_{m,p}, \quad (4.2)$$

onde $\theta_{m,p} = \sqrt{-g}/(-p_0) dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3$, em coordenadas locais. Esta será a definição utilizada para determinarmos o tensor de energia momento daqui para frente.

4.1 A Equação de Boltzmann Sem Colisões

Pela suposição (ii) podemos considerar que do ponto de vista de um observador em comovimento com uma partícula do sistema a DF é uma quantidade invariante de forma a

garantir a conservação do número de partículas do sistema [43]. Seja γ uma curva sobre o espaço-tempo M , $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, que representa o movimento de uma das estrelas do sistema, ou seja, satisfaz $\dot{\gamma}^\mu = -\Gamma_{\nu\kappa}^\mu \dot{\gamma}^\nu \dot{\gamma}^\kappa$. A curva γ induz uma curva γ_* sobre o fibrado tangente, $\gamma_* : \mathbb{R} \rightarrow TM$, definida por $\gamma_*(\lambda) = v_{\gamma, \gamma(\lambda)}$ ou em coordenadas locais, (U, x) e (TU, ξ) ,

$$(\xi \circ \gamma_*)(\lambda) = \left((x^0 \circ \gamma), \dots, (x^3 \circ \gamma), (x^0 \circ \gamma)', \dots, (x^3 \circ \gamma)' \right).$$

A afirmação física de que a DF é invariante do ponto de vista de uma das partículas é matematicamente expressa por $v_{\gamma_*} f \equiv 0$, ou seja, em coordenadas locais

$$v_{\gamma_*, \gamma_*(\lambda)} f = (f \circ \gamma_*)'(\lambda) = (f \circ \xi^{-1} \circ \xi \circ \gamma_*)'(\lambda) = \partial_\alpha (f \circ \xi^{-1})(\xi \circ \gamma_*(\lambda)) (\xi^\alpha \circ \gamma)'(\lambda),$$

onde $\alpha = 0, 1, \dots, 7$, portanto devemos ter

$$0 \equiv v_{\gamma_*} f = \dot{\gamma}_*^\alpha \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} = \dot{\gamma}^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \dot{\gamma}^\mu \frac{\partial f}{\partial p^\mu} = p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\kappa}^\mu p^\nu p^\kappa \frac{\partial f}{\partial p^\mu},$$

onde definimos $p^\mu = \dot{\gamma}^\mu$. Por suposição $f : \mathcal{P}_M \rightarrow \mathbb{R}^+$, então podemos usar $g(p, p) = -c^2$, já que $\mathcal{P}_M \equiv \{p \in TM \mid g(p, p) = -c^2 \text{ e } g(T, p) < 0\}$, para isolar p^0 em termos das demais componentes, ou seja, podemos tratar f como função apenas de p^i e dessa forma temos

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\kappa}^i p^\nu p^\kappa \frac{\partial f}{\partial p^i} = 0.$$

Poderíamos ter encontrado esta expressão impondo que f é invariante sobre o fluxo geodésico gerado pelo campo vetorial $X = (p^\mu, -\Gamma_{\nu\kappa}^i p^\nu p^\kappa)$ [43], ou seja :

$$\mathcal{L}_X f(x^\mu, p^i) \equiv \left(p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\kappa}^i p^\nu p^\kappa \frac{\partial}{\partial p^i} \right) f(x^\mu, p^i) = 0, \quad (4.3)$$

onde \mathcal{L}_X é a derivada de Lie, as vezes chamado de operador de Liouville. A equação (4.3) é a equação de Vlasov para teorias métricas, outras vezes chamada de equação de Boltzmann sem colisões (EBC).

Como temos interesse em primeiras aproximações tomaremos a expansão desta equação até a ordem da PNP. Para atingir este objetivo fazemos a mudança de variáveis $(x^\mu, p^i) \rightarrow (x^\mu, v^i(x^\mu, p^i))$,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right)_{p^i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right)_{v^i} + \left(\frac{\partial f}{\partial v^i} \right)_{x^\mu} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^\mu} \right)_{p^i},$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p^j} \right)_{x^\mu} = \left(\frac{\partial f}{\partial v^i} \right)_{x^\mu} \left(\frac{\partial v^i}{\partial p^j} \right)_{x^\mu}.$$

Sabendo de nossa definição de v^i , equação (2.19), podemos calcular as derivadas de v^i

$$\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^\mu} \right)_{p^i} = c p^i \frac{-1}{(p^0)^2} \left(\frac{\partial p^0}{\partial x^\mu} \right)_{p^i},$$

$$\left(\frac{\partial v^i}{\partial p^j} \right)_{x^\mu} = \frac{c}{p^0} \left[\delta^i_j - \frac{p^j}{p^0} \left(\frac{\partial p^0}{\partial p^j} \right)_{x^\mu} \right].$$

E da condição de constituintes de massas iguais

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -c^2, \quad (4.4)$$

podemos inferir $p^0(x^\mu, v^i)$:

$$\begin{aligned} g_{00} (p^0)^2 + 2g_{0k} (p^0)^2 \frac{v^k}{c} + g_{ik} (p^0)^2 \frac{v^k v^i}{c^2} = -c^2 &\implies \\ \implies p^0 = \sqrt{\frac{-c^2}{g_{00} + 2g_{0k} \frac{v^k}{c} + g_{ik} \frac{v^k v^i}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Temos p^0 e p^i , até a ordem desejada e tomando a métrica da forma (2.1), (2.2) e (2.3) para simplificar as contas, dados por:

$$\begin{aligned} p^0 &= c \left\{ 1 + \frac{U}{c^2} + \frac{\mathcal{W}}{2c^4} + \frac{\mathcal{Q}_j v^j}{c^4} + \left[1 + \frac{(2\gamma + 3)U}{c^2} \right] \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \frac{3U^2}{2c^4} \right\}, \\ p^i &= v^i \left\{ 1 + \frac{U}{c^2} + \frac{\mathcal{W}}{2c^4} + \frac{\mathcal{Q}_j v^j}{c^4} + \left[1 + \frac{(2\gamma + 3)U}{c^2} \right] \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \frac{3U^2}{2c^4} \right\}, \end{aligned}$$

posteriormente não precisaremos nos preocupar com termos da ordem de c^{-4} , já que a expansão para a EBC é feita até a ordem de c^{-2} .

Pela (4.4) teremos que:

$$\begin{aligned} g_{00} (p^0)^2 + 2g_{0k} p^0 p^k + g_{ik} p^i p^k = -c^2 &\implies \\ \implies p^0 = \frac{-g_{0k} p^k + \sqrt{(g_{0k} p^k)^2 - g_{00} (g_{ik} p^i p^k + c^2)}}{g_{00}}, \end{aligned}$$

como $g_{00} < 0$ e queremos considerar os casos onde $p^0 \geq 0$, então devemos ter

$$p^0 = \frac{g_{0k} p^k + \sqrt{(g_{0k} p^k)^2 - g_{00} (g_{ik} p^i p^k + c^2)}}{-g_{00}}.$$

Como a EBC é expandida até c^{-2} expressaremos as derivadas de p^μ em termos das variáveis (x^μ, v^i) até a ordem de c^{-1} . Assim, após uma sequência longa de contas, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p^0}{\partial x^\mu} \right)_{p^i} &= \frac{U_{,\mu}}{c} + O(c^{-3}), \\ \left(\frac{\partial p^0}{\partial p^i} \right)_{x^\mu} &= \frac{p^j (v^l, x^\mu)}{c} \delta_{ij} + O(c^{-3}). \end{aligned}$$

Finalmente, retornando as expressões das derivadas de v^i , teremos:

$$\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^\mu} \right)_{p^k} = -v^i \frac{U_{,\mu}}{c^2},$$

$$\left(\frac{\partial v^i}{\partial p^j}\right)_{x^\mu} = \left(1 - \frac{U}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right) \delta_j^i - \frac{v^i v^j}{c^2}.$$

Cabe agora lembrar o que de fato queríamos determinar:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right)_{p^i} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right)_{v^i} + \left(\frac{\partial f}{\partial v^i}\right)_{x^\mu} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^\mu}\right)_{p^i}, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial p^j}\right)_{x^\mu} &= \left(\frac{\partial f}{\partial v^i}\right)_{x^\mu} \left(\frac{\partial v^i}{\partial p^j}\right)_{x^\mu}. \end{aligned}$$

Retornando à EBC teremos

$$\mathcal{L}_v f = \left[p^\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{\partial f}{\partial v^i} \frac{\partial v^i}{\partial x^\mu} \right) - \Gamma_{\mu\nu}^j p^\mu p^\nu \frac{\partial f}{\partial v^i} \frac{\partial v^i}{\partial p^j} \right].$$

Onde cada parte, até a ordem de c^{-2} , usando (2.20)-(2.26), é dada por

$$\begin{aligned} \frac{p^0}{c} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v^i} \frac{\partial v^i}{\partial t} \right) &= \left[1 + \frac{U}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2} \right] \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial v^i} v^i \frac{U_{,t}}{c^2}, \\ p^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial v^j} \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) &= v^i \left[1 + \frac{U}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2} \right] \frac{\partial f}{\partial x^i} - v^i \frac{\partial f}{\partial v^j} v^j \frac{U_{,i}}{c^2}, \\ \Gamma_{00}^j p^0 p^0 \frac{\partial f}{\partial v^i} \frac{\partial v^i}{\partial p^j} &= \frac{\partial f}{\partial v^i} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{W}_{,i}}{c^2} + \frac{\mathcal{Q}_{i,t}}{c^2} + \frac{2\gamma}{c^2} U U_{,i} - U_{,i} \left(1 + \frac{U}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2} \right) + U_{,j} \frac{v^i v^j}{c^2} \right\}, \\ \Gamma_{l0}^j p^l p^0 \frac{\partial f}{\partial v^i} \frac{\partial v^i}{\partial p^j} &= \frac{1}{2c^2} [\mathcal{Q}_{j,l} + 2\gamma U_{,t} \delta_{lj} - \mathcal{Q}_{l,j}] v^l \frac{\partial f}{\partial v^j}, \\ \Gamma_{lp}^j p^l p^p \frac{\partial f}{\partial v^i} \frac{\partial v^i}{\partial p^j} &= \gamma [U_{,l} \delta_{jp} + U_{,p} \delta_{jl} - U_{,j} \delta_{lp}] \frac{v^l v^p}{c^2} \frac{\partial f}{\partial v^j}. \end{aligned}$$

E assim teremos a EBC para a PNP, até a ordem de c^{-2} , dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v f &= \left[1 + \frac{U}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2} \right] \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) + U_{,i} \frac{\partial f}{\partial v^i} - \frac{\partial f}{\partial v^i} \frac{v^i}{c^2} U_{,t} (1 + 2\gamma) \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial v^i} \frac{v^i v^j}{c^2} U_{,j} (2 + 2\gamma) - \frac{\partial f}{\partial v^i} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{W}_{,i}}{c^2} + \frac{\mathcal{Q}_{i,t}}{c^2} + \frac{2\gamma - 1}{c^2} U U_{,i} \right\} \\ &\quad - [\mathcal{Q}_{j,l} - \mathcal{Q}_{l,j}] \frac{v^l}{c^2} \frac{\partial f}{\partial v^j} + \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) U_{,j} \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial f}{\partial v^j} = 0. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Desta podemos inferir as contribuições clássicas e pós-newtonianas parametrizadas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v &= \mathcal{L}_v^{\text{CL}} + \mathcal{L}_v^{\text{PNP}}, \\ \mathcal{L}_v^{\text{CL}} &= \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + U_{,i} \frac{\partial}{\partial v^i}, \\ \mathcal{L}_v^{\text{PNP}} &= \frac{1}{c^2} \left[U + \frac{v^2}{2} \right] \left(\frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) - \frac{v^i}{c^2} U_{,t} (1 + 2\gamma) \frac{\partial}{\partial v^i} \\ &\quad - 2 \frac{v^i v^j}{c^2} U_{,j} (1 + \gamma) \frac{\partial}{\partial v^i} + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\mathcal{W}_{,i}}{c^2} - \frac{\mathcal{Q}_{i,t}}{c^2} + \frac{1 - 2\gamma}{c^2} U U_{,i} \right\} \frac{\partial}{\partial v^i} \\ &\quad - [\mathcal{Q}_{j,l} - \mathcal{Q}_{l,j}] \frac{v^l}{c^2} \frac{\partial}{\partial v^j} + \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) U_{,j} \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial v^j}. \end{aligned}$$

Portanto assim concluímos a expressão para a EBC para a PNP. Também podemos reescrever esta equação em outros formatos, suponha que consideramos a DF até a ordem de c^{-2} , ou seja,

$$f = f^0 + f^2 + O(c^{-4}).$$

Assim a aplicação do operador de Liouville resulta em duas equações

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_v^{\text{CL}} f^0 &= 0, \\ \mathcal{L}_v^{\text{CL}} f^2 + \mathcal{L}_v^{\text{PNP}} f^0 &= 0.\end{aligned}$$

Da primeira podemos concluir que:

$$\frac{\partial f^0}{\partial t} + v^i \frac{\partial f^0}{\partial x^i} = -U_{,i} \frac{\partial f^0}{\partial v^i}.$$

Usando esta última e as equações de movimento (2.2) na parte pós-newtoniana de f^0 , teremos

$$\mathcal{L}_v^{\text{PNP}} f^0 = \left[\frac{dv^i}{dt} - U_{,i} \right] \frac{\partial f^0}{\partial v^i},$$

ou seja,

$$\left(\mathcal{L}_v^{\text{CL}} + \mathcal{L}_v^{\text{PNP}} \right) f^0 = \frac{\partial f^0}{\partial t} + v^i \frac{\partial f^0}{\partial x^i} + \frac{dv^i}{dt} \frac{\partial f^0}{\partial v^i}.$$

Vamos agora trabalhar a porção de f^2 , sabemos que:

$$\begin{aligned}-U_{,i} &= -\frac{dv^i}{dt} + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{W}_{,i} - \mathcal{Q}_{i,t} - 2\gamma U U_{,i} - [\mathcal{Q}_{i,j} - \mathcal{Q}_{j,i}] v^j \right. \\ &\quad \left. - (2\gamma + 1) v^i U_{,t} - 2(\gamma + 1) U_{,j} v^j v^i + \gamma U_{,i} v^2 \right\}.\end{aligned}$$

Ou seja, devemos ter

$$U_{,i} \frac{\partial f^2}{\partial v^i} = \frac{dv^i}{dt} \frac{\partial f^2}{\partial v^i} + O(c^{-4}).$$

Portanto

$$\mathcal{L}_v^{\text{CL}} f^2 = \frac{\partial f^2}{\partial t} + v^i \frac{\partial f^2}{\partial x^i} + U_{,i} \frac{\partial f^2}{\partial v^i} = \frac{\partial f^2}{\partial t} + v^i \frac{\partial f^2}{\partial x^i} + \frac{dv^i}{dt} \frac{\partial f^2}{\partial v^i}.$$

E concluímos finalmente

$$\mathcal{L}_v f = \mathcal{L}_v^{\text{CL}} f^2 + \left(\mathcal{L}_v^{\text{CL}} + \mathcal{L}_v^{\text{PNP}} \right) f^0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dv^i}{dt} \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \left(f^0 + f^2 \right) = \frac{df}{dt} = 0.$$

Ou seja, o teorema de Jeans é válido para a PNP [41]:

Teorema 2 *Se f não depende explicitamente do tempo, então f satisfaz a EBC se e somente se f é função apenas de integrais de movimento.*

Portanto quando considerarmos sistemas estáticos podemos supor que a DF dependa apenas das integrais de movimento, i.e. da energia e das componentes do momento angular.

4.2 Integrais de Movimento na PNP

Pelo teorema de Jeans (2) a configuração do sistema é completamente determinada por uma DF apenas das integrais de movimento. Podemos determinar as integrais de movimento para teorias métricas usando o postulado 1, ou seja, por meio de uma reparametrização podemos usar a Lagrangiana

$$2\mathcal{L} = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu, \quad (4.6)$$

e devido as equações de Euler-Lagrange, temos que

$$\text{se } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p^\mu} = p_\mu \text{ é integral de movimento.}$$

Agora, supondo que a métrica é estacionária ($g_{\mu\nu,0} = 0$), ou seja, $\partial \mathcal{L}/\partial x^0 = 0$ e portanto p_0 é conservado. Então definimos a integral de movimento do tipo energia:

$$E = - \left(c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p^0} + c^2 \right) = - (cp_0 + c^2), \quad (4.7)$$

esta definição para a energia se mostrará útil para a PNP. Então para determinarmos E até a ordem da PNP precisamos determinar p_0 ,

$$\begin{aligned} p_0 &= g_{00}p^0 + g_{0j}p^j = p^0 \left(g_{00} + g_{0j} \frac{p^j}{p^0} \right) = p^0 \left(-1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{\mathcal{W}}{c^4} + \frac{\mathcal{Q}_j v^j}{c^4} + O(c^{-6}) \right) \\ &= c \left\{ 1 + \frac{U}{c^2} + \frac{\mathcal{W}}{2c^4} + \frac{\mathcal{Q}_j v^j}{c^4} + \left[1 + \frac{(2\gamma + 3)U}{c^2} \right] \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \frac{3U^2}{2c^4} \right\} \times \\ &\quad \times \left(-1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{\mathcal{W}}{c^4} + \frac{\mathcal{Q}_j v^j}{c^4} \right) + O(c^{-5}) \\ &= c \left\{ -1 + \frac{U}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{[2\Psi + (1 - 2\beta)U^2]}{2c^4} + \frac{\Phi^{\text{PF}}}{2c^4} - \frac{(2\gamma + 1)Uv^2}{c^2} - \frac{3v^4}{8c^4} \right\} + O(c^{-5}). \end{aligned}$$

Apenas substituindo este resultado em (4.7) temos a energia até a ordem da PNP,

$$E = -U + \frac{v^2}{2} - \frac{1}{c^2} \left[\Psi + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) U^2 \right] - \frac{\Phi^{\text{PF}}}{2c^2} + \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \frac{Uv^2}{c^2} + \frac{3v^4}{8c^2}.$$

Como será útil posteriormente, podemos separar da última as contribuições clássicas e da PNP para a energia:

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{CL}} + E_{\text{PNP}}, \\ E_{\text{CL}} &= -U + \frac{v^2}{2}, \end{aligned}$$

$$E_{\text{PNP}} = -\frac{1}{c^2} \left[\Psi + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) U^2 \right] - \frac{\Phi^{\text{PF}}}{2c^2} + \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \frac{Uv^2}{c^2} + \frac{3v^4}{8c^2}. \quad (4.8)$$

No capítulo seguinte, quando construirmos modelos de simetria esférica, veremos que a energia apresentada anteriormente é a única integral de movimento que a DF pode ser função (Teorema 3).

4.3 A Velocidade de Escape

Um objeto astrofísico suave e sem colisões, em geral, é mais velho que o seu tempo de relaxação [41], ou seja, este é velho o bastante para as colisões serem raras e a distribuição de estrelas já ter se suavizado. Assim também podemos considerar que todos os componentes com energia (ou velocidade) suficiente para escapar do sistema já o fizeram. Dessa forma na equação (4.2) o conjunto sobre qual a integração é realizado é um subconjunto da fibra \mathcal{P}_x tal que $v \leq v_e$ (ou em termos das variáveis da fibra \mathcal{P}_x , $p_0 \geq -c$ (veja 59)), onde v_e é a velocidade de escape do sistema, que pode ser determinada pela expressão da energia. Para que uma partícula fique "presa" ao sistema a energia da mesma deve ser negativa e só escapará do sistema se possuir velocidade suficiente para superar os potenciais gravitacionais, dessa forma, a velocidade de escape é determinada fazendo $E = 0$ (toda partícula com $E > 0$ escapa do sistema), ou seja, teremos

$$-U + \frac{v^2}{2} - \frac{1}{c^2} \left[\Psi + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) U^2 \right] - \frac{\Phi^{\text{PF}}}{2c^2} + \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \frac{Uv^2}{c^2} + \frac{3v^4}{8c^2} = 0.$$

Vemos que $v = \overset{0}{v} + \overset{2}{v} + \dots$, portanto, seguindo o mesmo argumento que usamos para as órbitas circulares, podemos tomar que $v = \overset{0}{v}$ sempre que v estiver acompanhado de $1/c^2$, assim teremos:

$$v^2 = 2U + \frac{2}{c^2} \left[\Psi + \frac{\Phi^{\text{PF}}}{2} - \frac{3}{8} \left(\overset{0}{v} \right)^4 - \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \left(\overset{0}{v} \right)^2 U \right],$$

desta vemos que $\left(\overset{0}{v} \right)^2 = 2U$, ou seja, teremos

$$v^2 = 2U + \frac{2}{c^2} \left[\Psi + \frac{\Phi^{\text{PF}}}{2} - \left(2\gamma + \frac{5}{2} \right) U^2 \right],$$

tomando a raiz e já tomando até a ordem necessária devemos ter que:

$$v_e = \sqrt{2U} + \frac{1}{c^2 \sqrt{2U}} \left[\Psi + \frac{\Phi^{\text{PF}}}{2} - \left(2\gamma + \frac{5}{2} \right) U^2 \right].$$

Quando adicionarmos esta expressão como limitante para as integrais (4.2) não precisaremos até a ordem de c^{-2} , a velocidade de escape clássica ($v_e = \sqrt{2U}$) já será limite suficiente para o tensor de energia momento ter a ordem de c correta.

4.4 As Equações da Auto-gravitação

Da definição do tensor de energia momento, eq. (4.2), podemos determiná-lo até a ordem da PNP. Expressando (4.2) em uma forma mais fácil de trabalhar

$$T^{\mu\nu} = c \int \frac{p^\mu p^\nu}{-p_0} f \sqrt{-g} d^3p,$$

e fazendo a mudança de variáveis $\{p^i\} \rightarrow \{v^i\}$,

$$\frac{\partial p^i}{\partial v^j} = \delta_j^i \frac{p^0}{c} + \frac{\delta_{jk} v^i v^k}{c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^3 p = \frac{\partial(p^1, p^2, p^3)}{\partial(v^1, v^2, v^3)} d^3 v = \left(1 + \frac{3U}{c^2} + \frac{5v^2}{2c^2}\right) d^3 v.$$

Concluimos

$$c^{-2} T^{00} = \int f \left[1 + \frac{U}{c^2} (3\gamma + 5) + \frac{3v^2}{c^2}\right] d^3 v,$$

$$c^{-1} T^{0k} = \int v^k f \left[1 + \frac{U}{c^2} (3\gamma + 5) + \frac{3v^2}{c^2}\right] d^3 v,$$

$$T^{kj} = \int v^k v^j f \left[1 + \frac{U}{c^2} (3\gamma + 5) + \frac{3v^2}{c^2}\right] d^3 v.$$

Usando o fato de que $f = \overset{0}{f} + \overset{2}{f} + \dots$ [42] temos os campos materiais de forma mais explícita:

$$c^{-2} T^{00} = \int \overset{0}{f} \left[1 + \frac{U}{c^2} (3\gamma + 5) + \frac{3v^2}{c^2}\right] d^3 v + \int \overset{2}{f} d^3 v, \quad (4.9)$$

$$c^{-1} T^{0k} = \int v^k \overset{0}{f} \left[1 + \frac{U}{c^2} (3\gamma + 5) + \frac{3v^2}{c^2}\right] d^3 v + \int v^k \overset{2}{f} d^3 v, \quad (4.10)$$

$$T^{kj} = \int v^k v^j \overset{0}{f} \left[1 + \frac{U}{c^2} (3\gamma + 5) + \frac{3v^2}{c^2}\right] d^3 v + \int v^k v^j \overset{2}{f} d^3 v. \quad (4.11)$$

Ao compararmos (4.9)-(4.11) com (2.16)-(2.18) podemos, pelo menos em princípio e com a DF definida, determinar todos os campos materiais (ρ^* , $\rho^* \Pi$, P , $\rho^* u^2$, $\rho^* u^i$ e $\rho^* u^i u^j$) das equações (2.4)-(2.13).

5 Modelos de Simetria Esférica

Para construirmos modelos de simetria esférica usaremos das mesmas suposições da seção 3.1, ou seja, consideramos o tensor de energia momento como (3.1)-(3.3) e as equações de campo serão (3.4)-(3.11). Por imposição, para existência de órbitas circulares, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, dessa forma $\Phi_j^{\text{PF}} = 0$ e $\Phi^{\text{PF}} = \alpha_3 w^2 U$. Assim a métrica $g_{\mu\nu}$ deve possuir simetria esférica, e por impormos espaço-tempos assintoticamente planos temos exatamente as suposições para utilizar o teorema abaixo [59]:

Teorema 3 *Seja k uma constante positiva e f uma função de distribuição que satisfaz as equações de auto-gravitação para configurações assintoticamente planas, estáticas e de simetria esférica. Então $T^\theta_\theta = kT^r_r$ se e somente se $f(E, L) = \xi(E)L^{2(k-1)}$.*

Na formulação da PNP supomos a matéria como sendo um fluido perfeito, dessa forma $T^\theta_\theta = T^r_r$. Ou seja, usando o teorema 3 podemos concluir $T^\theta_\theta = T^r_r \iff f = f(E)$, para o formalismo da PNP estamos restritos em tratar de funções de distribuição ergódicas. Como $f(E) = f(E_{\text{CL}} + E_{\text{PNP}})$ cuja expansão é dada por:

$$f(E) = f(E_{\text{CL}}) + \frac{df}{dE}(E_{\text{CL}})E_{\text{PNP}} + O(c^{-3}),$$

ou seja,

$${}^0f = f(E_{\text{CL}}) \quad \text{e} \quad {}^2f = \frac{df}{dE}(E_{\text{CL}})E_{\text{PNP}}.$$

Dessa forma as eqs. (4.9)-(4.11) intersectadas as suposições acima nos permitem concluir que os campos materiais são expressos por

$$\rho^* = 4\pi \int_{-U}^0 f(E) [2(E+U)]^{1/2} dE, \quad (5.1)$$

$$P = \frac{4\pi}{3} \int_{-U}^0 f(E) [2(E+U)]^{3/2} dE, \quad (5.2)$$

$$\rho^* \Pi = 3(2\gamma + 1) \rho^* U + 9P + 4\pi c^2 \int_0^{v_e} \frac{df}{dE}(E_{\text{CL}}) E_{\text{PNP}} v^2 dv,$$

a última integral requiere um pouco mais de atenção, substituindo a expressão (4.8) na integral acima temos,

$$c^2 \int_0^{v_e} \frac{df}{dE}(E_{\text{CL}}) E_{\text{PNP}} v^2 dv = \int_0^{v_e} \frac{df}{dE}(E_{\text{CL}}) \left[-\frac{W}{2} - \frac{U^2}{2} + \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) Uv^2 + \frac{3v^4}{8} \right] v^2 dv,$$

cada uma das integrais tem a mesma forma

$$\begin{aligned} \int_0^{v_e} \frac{df}{dE}(E_{\text{CL}}) v^k dv &= \int_{-U}^0 \frac{df}{dE}(E) [2(E+U)]^{\frac{k-1}{2}} dE \\ &= \left\{ f(E) [2(E+U)]^{\frac{k-1}{2}} \right\}_{-U}^0 + (1-k) \int_{-U}^0 f(E) [2(E+U)]^{\frac{k-3}{2}} dE \\ &= f(0) (2U)^{\frac{k-1}{2}} + (1-k) \int_{-U}^0 f(E) [2(E+U)]^{\frac{k-3}{2}} dE, \end{aligned}$$

mas por suposição partículas com energia $E = 0$ escapam do sistema, portanto $f(0) = 0$ já que o número de partículas com energia $E = 0$ deve ser zero. Ou seja, temos

$$\int_0^{v_e} \frac{df}{dE}(E_{\text{CL}}) v^k dv = (1-k) \int_{-U}^0 f(E) [2(E+U)]^{\frac{k-3}{2}} dE.$$

Substituindo este resultado na expressão de $\rho^* \Pi$ temos,

$$\begin{aligned} \rho^* \Pi &= 3 \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \rho^* U + \frac{27P}{8} + 2\pi (\mathcal{W} + U^2) \int_{-U}^0 \frac{f(E)}{[2(E+U)]^{1/2}} dE \\ &= 3 \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \rho^* U + \frac{27P}{8} + (\mathcal{W} + U^2) \frac{\rho^* U}{2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ou seja, ao ser escolhida uma DF, apenas função da energia, podemos por meio de (5.1) e (5.2) determinar a densidade e pressão, respectivamente. E depois substituir os valores de ρ^* e P em (5.3) para determinarmos a densidade de energia. Notamos também que a condição $\alpha_2 = 0$ é necessária para modelos ergódicos possuírem simetria esférica (excluindo, obviamente, o vácuo ($f(E) = 0$)), pois caso $\alpha_2 \neq 0$ temos $\Phi^{\text{PF}} = \Phi^{\text{PF}}(r, \theta, \varphi)$, ou seja, $\rho^* \Pi$ não possui simetria esférica.

5.1 Modelos Politrópicos

Pelo ponto de vista da DF o conjunto de modelos mais simples que possuem importância para dinâmica de galáxias são conhecidos como modelos Politrópicos [41, 42]. Estes são casos especiais de modelos ergódicos e são definidos pela DF:

$$f(E) = \begin{cases} A_n (-E)^{n-3/2} & \text{se } E < 0, \\ 0 & \text{se } E \geq 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

onde A é constante e n caracteriza os diferentes modelos, e lembre-se que a energia é uma quantidade negativa para partículas "presas" ao sistema. Pela própria definição já excluimos da integração as partículas que escapam do sistema ($E \geq 0$). Para modelos ergódicos $\rho^* \Pi$ é completamente estabelecido assim que soubermos ρ^* e P , ou seja, só precisamos determinar ρ^* e P e depois substituir em (5.3). Estes últimos são dados pelas expressões (5.1) e (5.2), que para a DF (5.4) são dados por,

$$\rho^* = 4\pi A_n 2^{1/2} \int_{-U}^0 (-E)^{n-3/2} (E+U)^{1/2} dE,$$

$$P = \frac{4\pi A_n 2^{3/2}}{3} \int_{-U}^0 (-E)^{n-3/2} (E+U)^{3/2} dE,$$

ambas as integrais podem ser colocadas na forma de funções Beta [60], ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{-U}^0 (-E)^k (E+U)^w dE &= U^{w+k+1} \int_0^1 x^k (1-x)^w dx \\ &= U^{w+k+1} B(k+1, w+1) \\ &= U^{w+k+1} \frac{\Gamma(k+1) \Gamma(w+1)}{\Gamma(k+w+2)} \end{aligned}$$

Usando este resultado nas expressões de ρ^* e P , depois substituindo em (5.3), temos os campos materiais que caracterizam os Polítropos como funções de U :

$$\rho^* = A_n (2\pi)^{\frac{3}{2}} U^n \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n+1)},$$

$$P = A_n (2\pi)^{\frac{3}{2}} U^{n+1} \frac{\Gamma(n-1/2)}{(n+1) \Gamma(1+n)},$$

$$\begin{aligned} \rho^* \Pi &= A_n (2\pi)^{\frac{3}{2}} U^{n+1} \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(1+n)} \left[3\gamma + \frac{3}{2} + \frac{27}{8(n+1)} + n \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \right] \\ &\quad + A_n n (2\pi)^{\frac{3}{2}} \left(\Psi + \frac{\Phi^{\text{PF}}}{2} \right) U^{n-1} \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(1+n)}. \end{aligned}$$

Substituindo os campos materiais nas equações de campo (3.4)-(3.6) temos três equações diferenciais, a resolver, de segunda ordem, uma não linear homogênea e duas lineares não homogêneas, dadas por:

$$\frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{d}{d\tilde{r}} \left(\tilde{r}^2 \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{r}} \right) = -\tilde{U}^n, \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{d}{d\tilde{r}} \left(\tilde{r}^2 \frac{d\tilde{X}}{d\tilde{r}} \right) = 2\tilde{U}, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{d}{d\tilde{r}} \left(\tilde{r}^2 \frac{d\tilde{\Psi}}{d\tilde{r}} \right) &= b_n \frac{U_0^2}{\Psi_0} \tilde{U}^{n+1} - e_n \frac{U_0}{\Psi_0} \tilde{U}^n - d_n \tilde{\Psi} \tilde{U}^{n-1} \\ &\quad - 4 \frac{U_0^2}{\Psi_0} \xi \left[\frac{\tilde{U}^n}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{X}}{d\tilde{r}} + \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{r}} \left(\frac{3}{\tilde{r}^2} \frac{d\tilde{X}}{d\tilde{r}} - \frac{2\tilde{U}}{\tilde{r}} - \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{r}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde definimos, por questões de simplicidade,

$$U := U_0 \tilde{U}, \quad X := \frac{\tilde{X}}{C_n U_0^{n-2}}, \quad \Psi := \Psi_0 \tilde{\Psi}, \quad \tilde{r} := r \sqrt{C_n U_0^{n-1}},$$

e as constantes são

$$C_n := 4\pi G A_n (2\pi)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(1+n)},$$

$$b_n := (2\beta - 1 - \zeta_2 + 2\xi) - \frac{(3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi)}{(n+1)} - (1 + \zeta_3) \left[3\gamma + \frac{3}{2} + \frac{27}{8(n+1)} + n \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \right],$$

$$d_n := (1 + \zeta_3) n, \quad e_n := d_n \frac{\alpha_3 w^2}{2}.$$

É conhecido que soluções analíticas de (5.5) existem apenas para $n = 0, 1, 5$ [41, 42]. Para os outros valores de n as soluções não podem ser expressas em termos de funções elementares. Dessa forma para encontrarmos soluções das equações (5.5), (5.6) e (5.7) para qualquer valor de n devemos resolvê-las numericamente. E mesmo para o caso $n = 5$, onde (5.5) tem solução analítica, a equação (5.7) não é de fácil solução. Mas para este caso podemos resolvê-las aproximadamente para regiões próximas ou longe do centro de simetria. Para ambos tipos de soluções tomamos as simplificações $U_0 = w^2 = \epsilon c^2$ e $\Psi_0 = U_0^2$, onde ϵ é o parâmetro pós-newtoniano, e os valores iniciais:

$$\tilde{U}(0) = \tilde{X}(0) = \tilde{\Psi}(0) = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{U}'(0) = \tilde{X}'(0) = \tilde{\Psi}'(0) = 0.$$

Tomaremos apenas $0 \leq \epsilon \leq 0.15$, outros valores para ϵ provavelmente implicarão em propriedades fisicamente inaceitáveis, e portanto podem ser considerados como fora da região de validade da PNP. Também em nossa escolha de soluções possíveis, apenas aceitamos aquelas nas quais

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{00} = -1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} g_{ij} = 1,$$

descartamos qualquer solução que não satisfaça a condição anterior por não cumprir com as suposições básicas da PNP.

5.2 Soluções Aproximadas

Para aplicarmos uma aproximação primeiro precisamos da solução analítica de (5.5), já que (5.6) e (5.7) estão estabelecidas assim que U é expresso. Como sabemos, apenas para alguns valores de n podemos resolver (5.5) analiticamente, e destes o único realmente interessante é $n = 5$, conhecido como modelo de Plummer [41, 61, 62]. Para este valor de n a solução de (5.5) é

$$\tilde{U} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\tilde{r}^2}{3}}}. \quad (5.8)$$

Esta é solução analítica de (5.5), e pode ser aproximada quando $\tilde{r} \gg \sqrt{3}$ para simplesmente $\tilde{U} \approx \sqrt{3}/\tilde{r}$, que é exatamente a solução no vácuo para \tilde{U} . Substituindo este valor na equação (5.6) e resolvendo para $d\tilde{X}/d\tilde{r}$ temos de forma aproximada,

$$\frac{d\tilde{X}}{d\tilde{r}} \approx \sqrt{3}, \quad \text{para } \tilde{r} \gg \sqrt{3},$$

até aqui nada diferente do que as soluções no vácuo, mas veremos que o mesmo não ocorre para Ψ . Finalmente substituindo em (5.7) temos a equação,

$$\frac{d}{d\tilde{r}} \left(\tilde{r}^2 \frac{d\tilde{\Psi}}{d\tilde{r}} \right) + 9d_5 \frac{\tilde{\Psi}}{\tilde{r}^2} = \frac{27(b_5 - 4\xi)}{\tilde{r}^4} - \frac{9\sqrt{3}\alpha_3 d_5}{2\tilde{r}^3} + \frac{24\xi}{\tilde{r}^2}.$$

Note que apesar das aproximações para \tilde{U} e \tilde{X} serem praticamente as soluções no vácuo, quando substituídas na equação (5.7) esta não se reduz à aquela que encontramos para o vácuo. Por esta razão soluções com fontes, construídas por meio de fluídos auto-gravitantes, sempre serão, por mais distantes que estivermos do centro, diferentes de soluções no vácuo e portanto novos efeitos não capturados pelas soluções no vácuo podem surgir. Resolvendo a equação acima ($d_5 \neq 0$), temos

$$\tilde{\Psi}(\tilde{r}) = c_1 \cos\left(\frac{3\sqrt{d_5}}{\tilde{r}}\right) - c_2 \sin\left(\frac{3\sqrt{d_5}}{\tilde{r}}\right) - \frac{\sqrt{3}\alpha_3}{2\tilde{r}} + \frac{3(b_5 - 4\xi)}{d_5 \tilde{r}^2} - \frac{2(b_5 - 4\xi)}{3d_5^2} + \frac{8\xi}{3d_5}, \quad (5.9)$$

como impomos um espaço tempo assintoticamente plano devemos ter

$$\lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \tilde{\Psi}(\tilde{r}) = c_1 + \frac{8(d_5 + 1)\xi - 2b_5}{3d_5^2} = 0 \implies c_1 = \frac{2b_5 - 8(d_5 + 1)\xi}{3d_5^2},$$

notamos aqui que sempre $\lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \tilde{\Psi}^{*(n)}(\tilde{r}) = 0$, e nenhuma outra condição de contorno pode ser imposta até aqui, ou seja, c_2 é um parâmetro livre, enquanto não possuímos alguma condição de contorno para r finito. A equação (2.38) quando aplicada às simplificações implementadas anteriormente toma a forma,

$$v^\varphi|_{z=0} = \sqrt{-\tilde{r}\tilde{U}_{,\tilde{r}}} \left[1 + \epsilon \frac{\tilde{\Psi}_{,\tilde{r}}}{\tilde{U}_{,\tilde{r}}} - \gamma \tilde{r} \epsilon \tilde{U}_{,\tilde{r}} - 2(\gamma + \beta) \epsilon \tilde{U} + \frac{\alpha_3 \epsilon}{2} \right]^{1/2} c\sqrt{\epsilon}, \quad (5.10)$$

ou seja, por meio da solução aproximada para $r \gg \sqrt{3}$ e $n = 5$ podemos expressar, de forma geral, as velocidades circulares por meio de

$$v^\varphi|_{z=0} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\tilde{r}}} \left\{ 1 - \epsilon \sqrt{3d_5} \left[\left(\frac{2b_5 - 8(d_5 + 1)\xi}{3d_5^2} \right) \sin\left(\frac{3\sqrt{d_5}}{\tilde{r}}\right) + c_2 \cos\left(\frac{3\sqrt{d_5}}{\tilde{r}}\right) \right] + \epsilon \frac{\sqrt{3}}{\tilde{r}} \left[\frac{2(b_5 - 4\xi)}{d_5} - (\gamma + 2\beta) \right] \right\}^{1/2} c\sqrt{\epsilon}.$$

Apesar de não termos como determinar c_2 de forma analítica é possível extrair informações importantes da expressão anterior. Primeiro vemos que as contribuições do último termo são insignificantes (dado que tanto $\sqrt{3}/\tilde{r}$ e ϵ aparecem multiplicados, portanto estes termos são insignificantes). Assim são relevantes para o comportamento das curvas apenas o segundo termo do lado direito (os termos de $\sin(3\sqrt{d_5}/\tilde{r})$ e $\cos(3\sqrt{d_5}/\tilde{r})$) e deste vemos que o único dos parâmetros com real efeito é ζ_3 , dado que este é o único parâmetro livre em d_5 e valores altos deste último podem modificar razoavelmente o comportamento das curvas mesmo longe do centro. A solução (5.9) mostra um comportamento diferente

do previsto para o vácuo, ou seja, os novos termos podem levar a uma planificação das curvas e servem como motivação para encontrarmos as soluções para todo o espaço. É relevante observar que de todos os parâmetros, ζ_3 é o que pode levar às correções mais significantes, mas dado que os demais influenciam nas constantes que multiplicam os termos $\sin\left(3\sqrt{d_5}/\tilde{r}\right)$ e $\cos\left(3\sqrt{d_5}/\tilde{r}\right)$ pode ser que alguma escolha contribua significativamente. Para encontrar as soluções para o espaço todo é necessária uma abordagem numérica, dessa forma na seção seguinte determinamos as soluções de forma numérica.

5.3 Soluções Numéricas

Para encontrarmos a solução em todo o espaço precisamos utilizar técnicas numéricas. Dessa forma, para resolvermos as equações (5.5)-(5.7) utilizamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Apresentamos as soluções numéricas para os potenciais \tilde{U} , $\tilde{\Psi}$ e para uma densidade efetiva, definida por

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}^* &= \frac{-4\pi GT}{(U_0)^n C_n} = \frac{-4\pi GT^\mu{}_\mu}{(U_0)^n C_n} = \frac{4\pi G\rho^*}{(U_0)^n C_n} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} [\Pi - 3\gamma U] \right\} - \frac{12\pi GP}{(U_0)^n C_n} \\ &= \tilde{U}^n + \epsilon \tilde{U}^{n-1} \left\{ n\tilde{\Psi} + n\tilde{U} \frac{\alpha_3}{2} + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) n + \frac{3}{8(n+1)} + \frac{3}{2} \right] \tilde{U}^2 \right\},\end{aligned}$$

nas figuras (2)-(5), para $n = 5$ e diversos valores dos parâmetros Pós-Newtonianos. O comportamento para outros valores de n se mostrou semelhante.

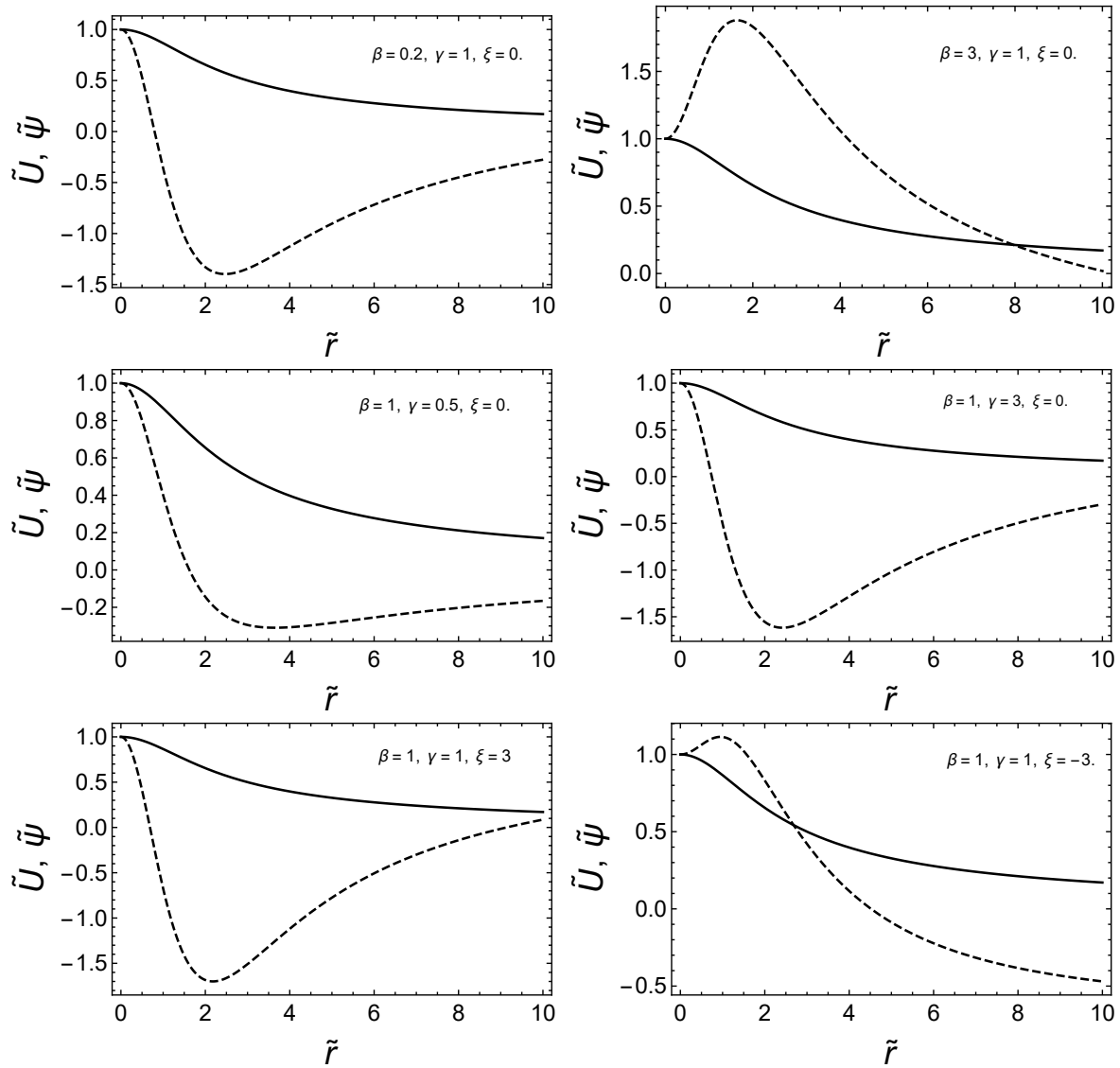


Figura 2 – Apresentamos os campos \tilde{U} e $\tilde{\Psi}$ para um modelo politrópico com $n = 5$ para teorias conservativas ($\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = \alpha_3 = 0$). As figuras no topo são para β diferente de 1, as centrais para γ diferente de 1 e as mais embaixo são para ξ diferente de 0. A linha contínua representa o campo \tilde{U} e a tracejada o campo $\tilde{\Psi}$.

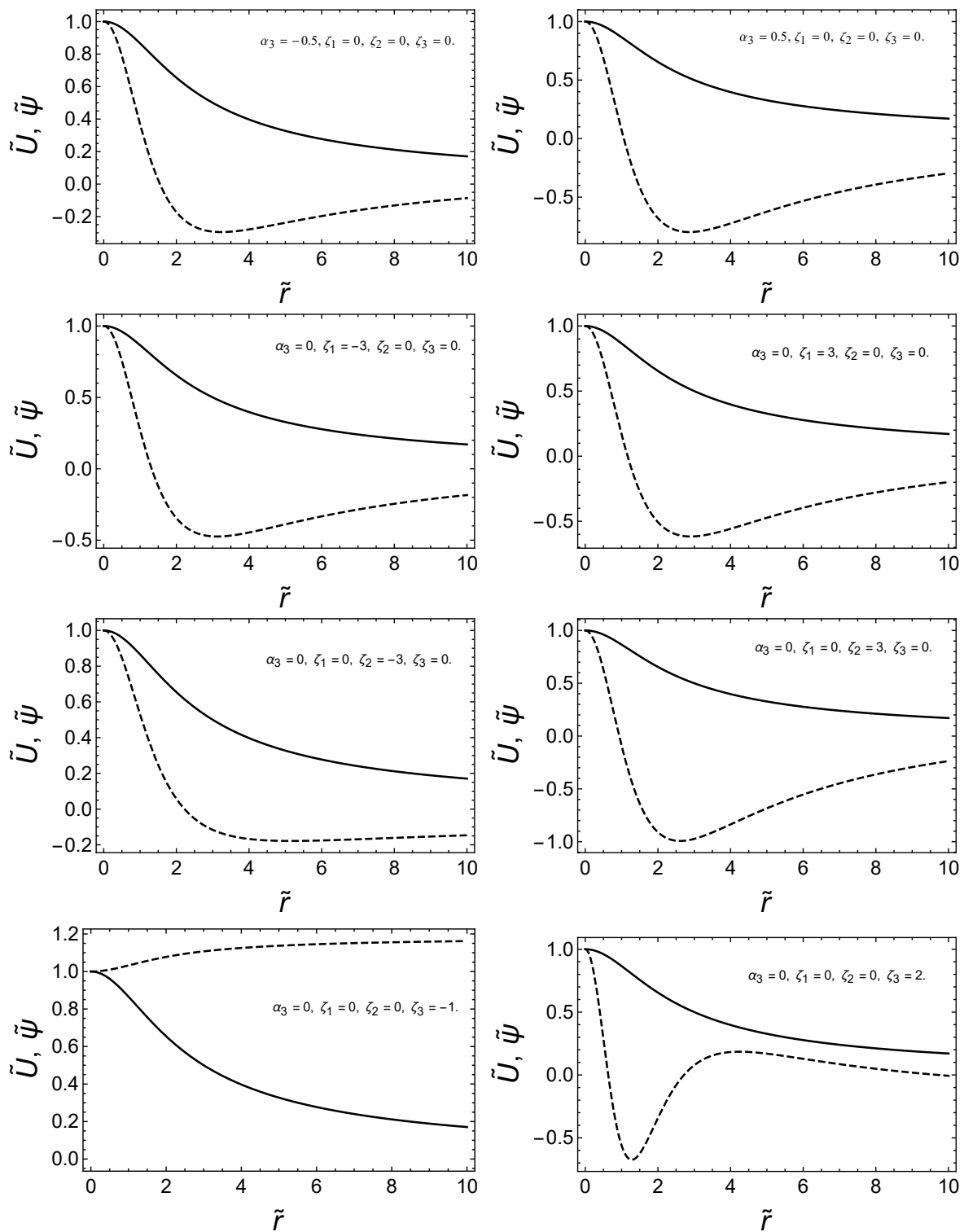


Figura 3 – Apresentamos os campos \tilde{U} e $\tilde{\Psi}$ para um modelo politrópico com $n = 5$ para teorias não-conservativas, aqui consideramos os parâmetros $\gamma = \beta = 1$ e $\xi = 0$. De cima para baixo, alternamos $\alpha_3, \zeta_1, \zeta_2$ e ζ_3 diferentes de 0, respectivamente. A linha contínua representa o campo \tilde{U} e a tracejada o campo $\tilde{\Psi}$.

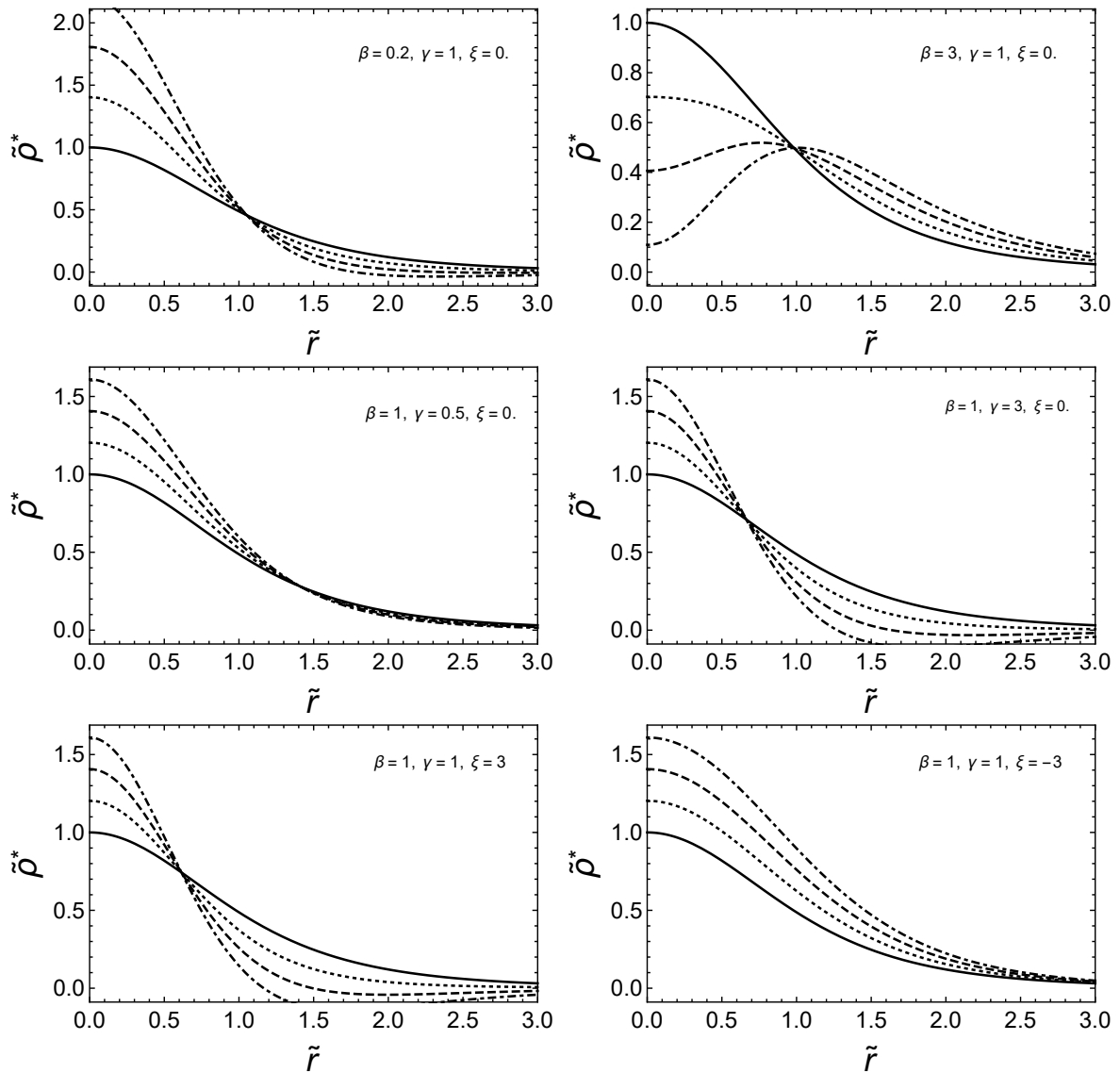


Figura 4 – Apresentamos a densidade efetiva $\tilde{\rho}^*$ para um modelo politrópico com $n = 5$ para teorias conservativas ($\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = \alpha_3 = 0$). As figuras no topo são para β diferente de 1, as centrais para γ diferente de 1 e as mais embaixo são para ξ diferente de 0. A linha contínua representa a densidade Newtoniana e as representadas por pontos, traçado e traço-pontos são densidades efetivas da PNP com $\epsilon = 0.05$, $\epsilon = 0.1$ e $\epsilon = 0.15$, respectivamente.

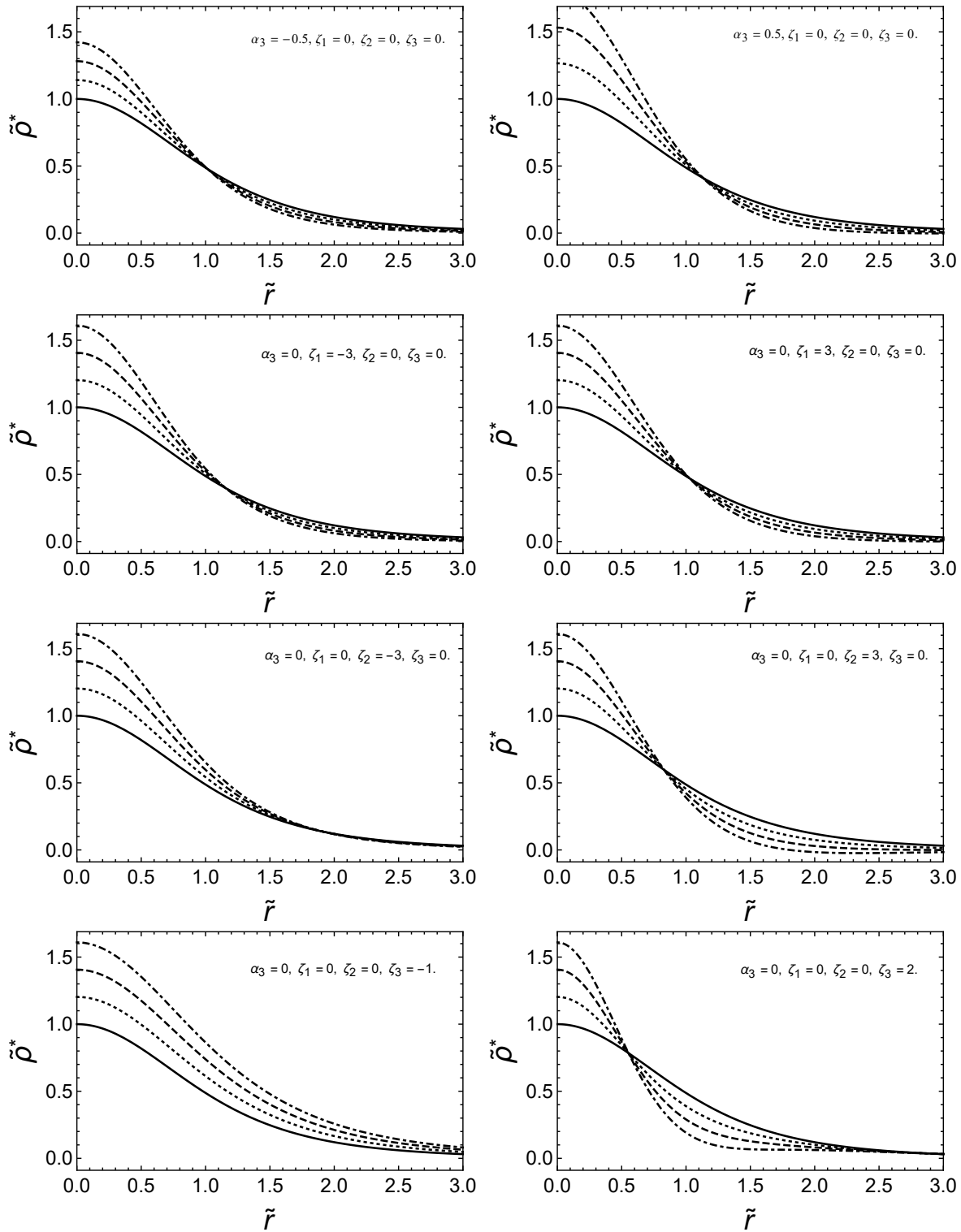


Figura 5 – Apresentamos a densidade efetiva $\tilde{\rho}^*$ para um modelo politrópico com $n = 5$ para teorias não-conservativas, aqui consideramos os parâmetros $\gamma = \beta = 1$ e $\xi = 0$. De cima para baixo, alternamos α_3 , ζ_1 , ζ_2 e ζ_3 diferente de 0, respectivamente. A linha contínua representa a densidade Newtoniana e as representadas por pontos, traçado e traço-pontos são densidades efetivas da PNP com $\epsilon = 0.05$, $\epsilon = 0.1$ e $\epsilon = 0.15$, respectivamente.

5.4 As Curvas de Rotação para os Modelos Politrópicos

Com as soluções numéricas em mãos, e por meio de (5.10), determinamos as curvas de rotação para os modelos politrópicos para diferentes teorias, como apresentadas nas figuras (6) e (7).

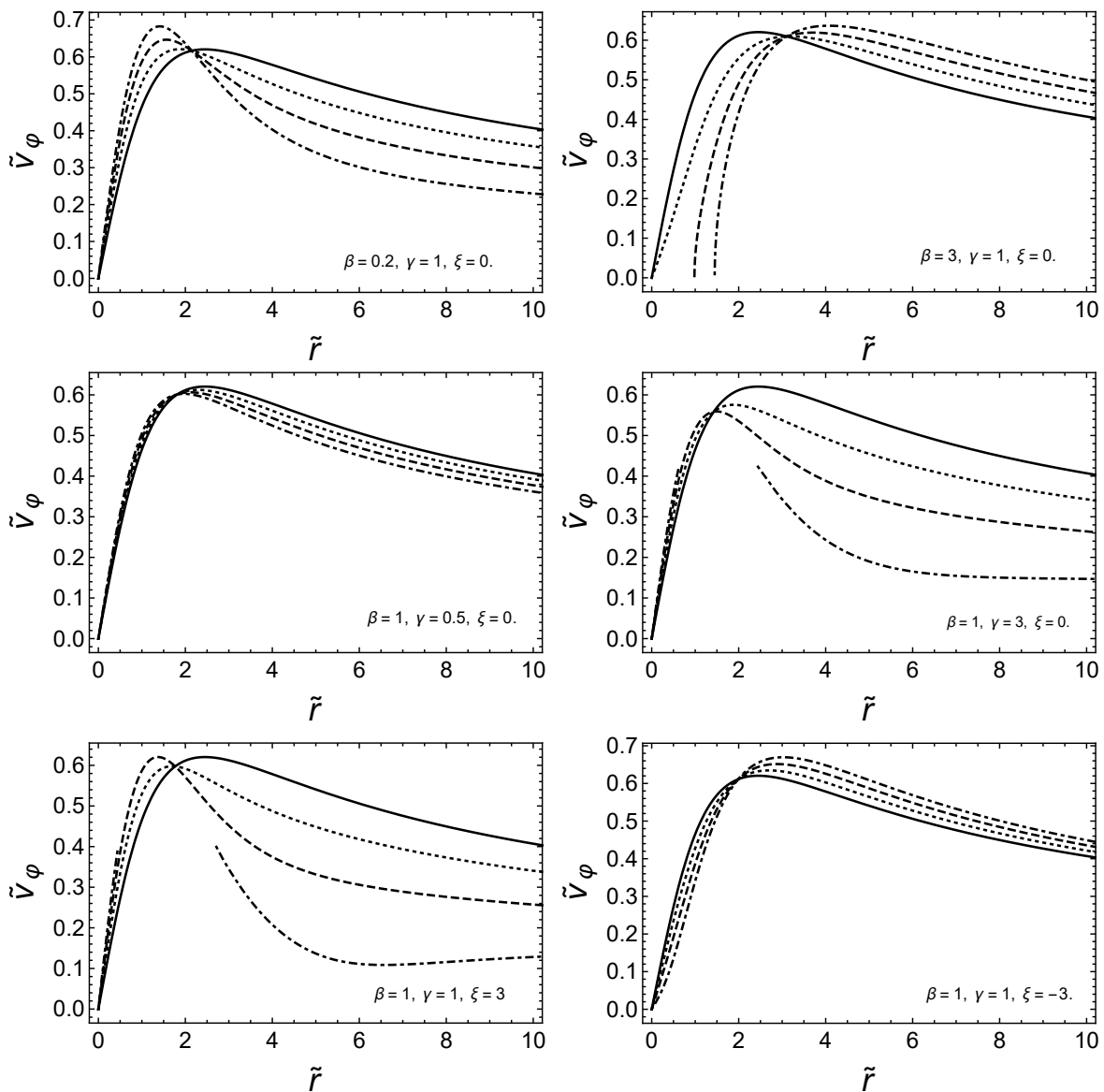


Figura 6 – Apresentamos as curvas de rotação ($\tilde{v}^\varphi = v^\varphi/\sqrt{U_0}$) para um modelo politrópico com $n = 5$ para teorias conservativas ($\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = \alpha_3 = 0$). As figuras no topo são para β diferente de 1, as centrais para γ diferente de 1 e as mais embaixo são para ξ diferente de 0. A linha contínua representa a curva Newtoniana e as representadas por pontos, traçado e traço-pontos são curvas PNP com $\epsilon = 0.05$, $\epsilon = 0.1$ e $\epsilon = 0.15$, respectivamente.

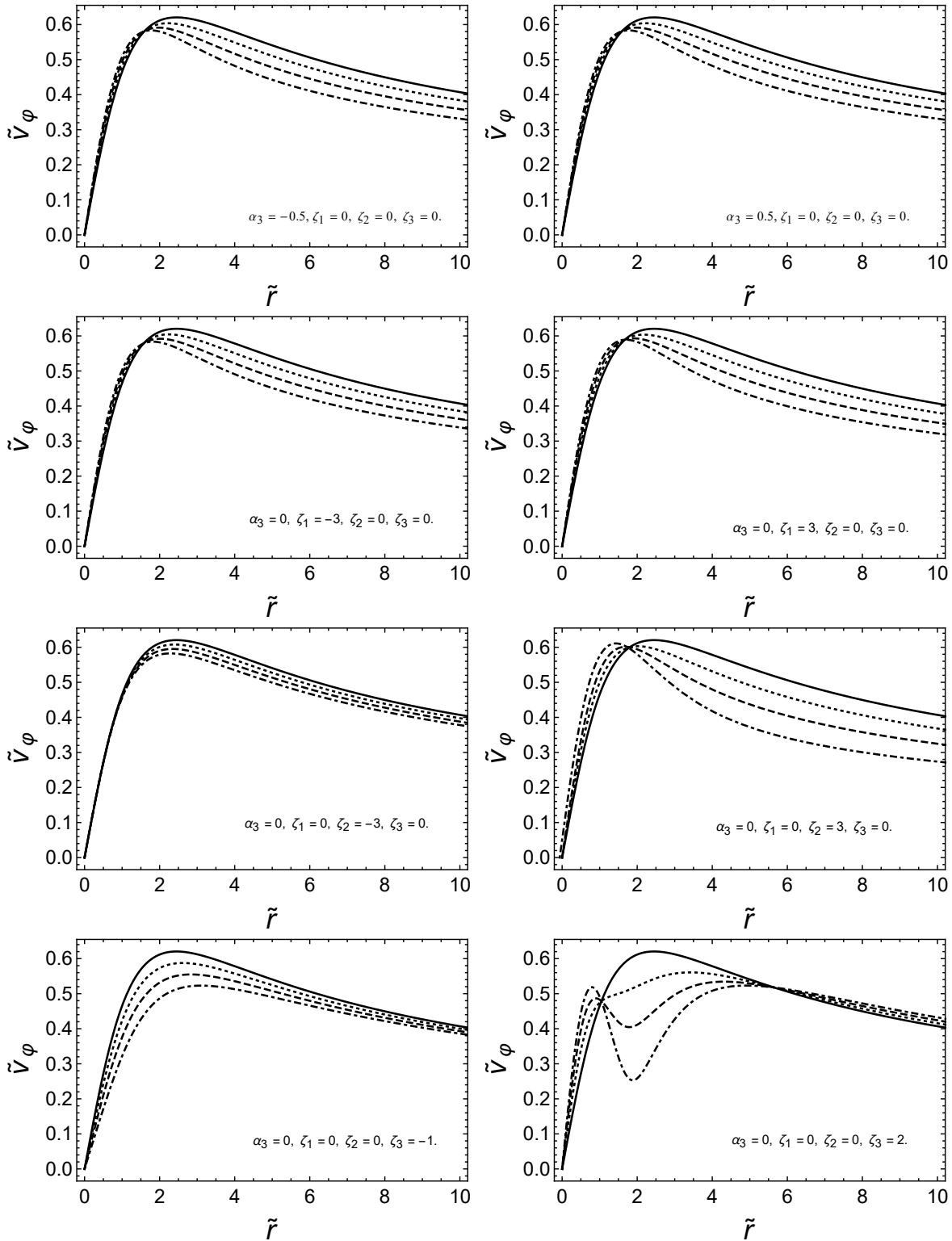


Figura 7 – Apresentamos as curvas de rotação ($\tilde{v}^\varphi = v^\varphi/\sqrt{U_0}$) para um modelo politrópico com $n = 5$ para teorias não-conservativas, aqui consideramos os parâmetros $\gamma = \beta = 1$ e $\xi = 0$. De cima para baixo, alternamos α_3 , ζ_1 , ζ_2 e ζ_3 diferente de 0, respectivamente. A linha contínua representa a curva Newtoniana e as representadas por pontos, traçado e traço-pontos são curvas PNP com $\epsilon = 0.05$, $\epsilon = 0.1$ e $\epsilon = 0.15$, respectivamente.

Nas figuras (6) e (7) apresentamos o comportamento das curvas de rotação para os modelos politrópicos. Apesar de não termos uma forma sistemática de avaliarmos todas as escolhas para os parâmetros, apresentamos as curvas para uma variedade de escolhas que deve representar de forma satisfatória todas as possíveis correções dos potenciais da PNP. Todas as demais escolhas apresentam comportamentos semelhantes. Apesar da falta de sistematização, é razoável concluir, das curvas apresentadas, que as correções devido aos parâmetros β , γ , ξ , α_3 , ζ_1 e ζ_2 não são significativas quanto a planificação das curvas. Algumas escolhas destes parâmetros implicam em grandes modificações, mas são, em geral, restritas as regiões mais centrais da configuração. Apenas quando $\zeta_3 > 0$ as curvas apresentam alguma semelhança com curvas planas, já esperávamos este resultado da aproximação (5.9). Este comportamento pode ser apenas devido a existência de mais massa na região plana, mas como vemos da figura (5), a densidade efetiva para este modelo é menor que a Newtoniana para a região plana. Portanto este de fato é um efeito puramente gravitacional e pode ser, com algumas ressalvas, uma alternativa a matéria escura em galáxias. As demais alternativas a Relatividade Geral (com $\zeta_3 = 0$ ou $\zeta_3 < 0$), que são englobadas pela PNP, parecem ter o mesmo comportamento Kepleriano, longe do centro, que é comum em modelos Newtonianos. Assim as correções não são suficientes para explicar a falta de massa em galáxias, e portanto não são alternativas à matéria escura.

6 Conclusão

Baseados na PNP apresentamos as correções nas curvas de rotação de galáxias devido a modificações da TRG. Para tal, começamos expondo as suposições mais básicas a respeito do espaço-tempo necessárias para construir teorias métricas, estas que satisfazem o princípio de equivalência de Einstein. Por meio de um princípio de mínima ação construímos a TRG e uma possível alternativa, conhecida como teoria de Branz-Dicke, que apresenta além da métrica um novo campo escalar. Experimentos no sistema solar não permitem valores da constante de acoplamento que permita desvios razoáveis das previsões da TRG, portanto apontando para a falsificação de teorias com modificações escalares. Mas como apresentamos, podemos adicionar um mecanismo capaz de esconder os novos graus de liberdade, de forma que próximos a matéria o regime linear é indistinguível da TRG, enquanto que para longe da matéria a nova interação gravitacional é relevante. Com este novo paradigma propomos responder parcialmente a seguinte questão: Serão as correções devido aos novos graus de liberdade suficientes para explicar a dinâmica de galáxias? Para responder esta pergunta partimos de um ponto de vista Pós-Newtoniano (mais precisamente utilizamos o formalismo da PNP). O primeiro tipo de solução que consideramos foram soluções no vácuo, e provamos, pelo menos para a aproximação da PNP, que as correções devido aos novos potenciais não são suficientes para planificar as curvas tanto para soluções de simetria esférica quanto para axiais. Mas, como percebemos ao longo do processo, a existência de campos materiais podem implicar em correções significantes, portanto o próximo passo que consideramos foi para soluções na região onde temos algum campo material.

O segundo tipo de solução que consideramos requeria algum campo material, e suposições podem ser feitas a respeito deste, dado que sabemos algumas das propriedades de galáxias. Sob as suposições apresentadas no Cap. 4 é razoável supor que os campos materiais podem ser construídos por meio de uma DF e que esta satisfaça a equação de Boltzmann sem colisões. E para obtermos conclusões em um regime linear construímos a anterior até a aproximação da PNP, nos levando a concluir que o teorema de Jeans (teorema 2) é satisfeito para DF's no formalismo da PNP. O teorema anterior intersectado com as suposições sobre o tensor de energia momento da PNP e com o teorema 3 nos permite concluir que a DF é apenas função da energia. Então pressupomos, para os campos materiais, o conjunto mais simples de DF's que satisfazem a restrição anterior e possuem simetria esférica, os Polítropos. Estendemos a DF newtoniana para a PNP e determinamos os campos materiais que representam os Polítropos. Para cada um dos constituintes dos Polítropos concluímos 3 equações diferenciais, a resolver. Para resolvê-las usamos duas técnicas, aproximações e métodos numéricos. Das soluções aproximadas

($n = 5$), já prevemos que o único parâmetro da PNP relevante, quanto a planificação das curvas de rotação, é ζ_3 . Mas para de fato resolver as equações em todo o espaço, e para qualquer valor de n , usamos métodos numéricos. Notamos, das figuras apresentadas, que qualquer escolha para os parâmetros γ , β , ξ , α_3 ou/e ζ_j , com $j = 1, 2$, não modificam o formato das curvas de forma a planificar a mesma, ou seja, ainda implicando na necessidade de algum conteúdo escuro. Apenas para teorias nas quais $\zeta_3 > 0$ concluimos curvas que apresentam similaridade a curvas planas. Estes resultados sugerem que as modificações da teoria padrão não são muito bem sucedidas em substituir matéria escura como explicação para a dinâmica de galáxias, já que apenas um dos parâmetros apresenta real relevância.

Referências

- 1 WILL, C. M. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 1993. Citado 9 vezes nas páginas 7, 9, 15, 16, 19, 29, 35, 37 e 39.
- 2 POISSON, E.; CLIFFORD, M. W. *Gravity Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. [S.l.]: Cambridge University Press, New York, 2014. Citado 15 vezes nas páginas 7, 9, 15, 16, 19, 23, 29, 35, 36, 37, 38, 39, 45, 52 e 107.
- 3 WILL, C. M. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Reviews in Relativity*, 2014. Citado 9 vezes nas páginas 7, 9, 15, 16, 19, 29, 35, 37 e 39.
- 4 AVILEZ-LOPEZ, A. et al. The parametrized post-newtonian-vainshteinian formalism. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2015, n. 06, p. 044, 2015. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1475-7516/2015/i=06/a=044>>. Citado 4 vezes nas páginas 7, 9, 16 e 30.
- 5 THORNE, K. S.; WILL, C. M. Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. i. foundations. *Astrophysical Journal*, v. 163, p. 595, 1971. Citado 4 vezes nas páginas 15, 16, 35 e 39.
- 6 WILL, C. M. Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. ii. parametrized post-newtonian hydrodynamics, and the nordtvedt effect. *The Astrophysical Journal*, v. 163, p. 611–628, 1971. Citado 4 vezes nas páginas 15, 16, 35 e 39.
- 7 WILL, C. M.; NORDTVEDT, J. K. L. Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity. i. preferred-frame theories and an extended ppn formalism. *The Astrophysical Journal*, v. 177, p. 757–774, 1972. Citado 4 vezes nas páginas 15, 16, 35 e 39.
- 8 ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 116, p. 061102, Feb 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>>. Citado na página 15.
- 9 RUBIN, V. C.; FORD, J. W. K.; THONNARD, N. Rotational properties of 21 sc galaxies with a large range of luminosities and radii, from ngc 4605 ($r = 4$ kpc) to ugc 2885 ($r = 122$ kpc). *The Astrophysical Journal*, v. 238, p. 471–487, 1980. Citado na página 15.
- 10 RUBIN, V. C. et al. Rotation velocities of 16 sa galaxies and a comparison of sa, sb, and sc rotation properties. *The Astrophysical Journal*, v. 289, p. 81–104, 1985. Citado na página 15.
- 11 RUBIN, V. C.; FORD JR., W. K.; THONNARD, N. Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. iv - systematic dynamical properties, sa through sc. *Astrophys. J. Lett.*, v. 225, p. L107–L111, nov. 1978. Citado 3 vezes nas páginas 11, 15 e 18.

- 12 MERRITT, D. Cosmology and convention. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, v. 57, p. 41–52, 2017. Citado na página 15.
- 13 SANDERS, R. H. *The Dark Matter Problem: A Historical Perspective*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado na página 15.
- 14 KROUPA, P. et al. The failures of the standard model of cosmology require a new paradigm. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 21, n. 1230003, 2012. Citado na página 15.
- 15 KROUPA, P. The dark matter crisis: Falsification of the current standard model of cosmology. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, v. 29(4), p. 395–433, 2012. Citado na página 15.
- 16 WU, X.; KROUPA, P. Galactic rotation curves, the baryon-to-dark-halo-mass relation and space–time scale invariance. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 446, n. 1, p. 330–344, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stu2099>>. Citado na página 15.
- 17 BERTONE, G.; HOOPER, D. A history of dark matter. *arXiv:1605.04909*, 2016. Citado na página 15.
- 18 MASSEY, R.; KITCHING, T.; RICHARD, J. The dark matter of gravitational lensing. *Reports on Progress in Physics*, v. 73, n. 8, p. 086901, 2010. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0034-4885/73/i=8/a=086901>>. Citado na página 15.
- 19 BAKER, T.; PSALTIS, D.; SKORDIS, C. Linking tests of gravity on all scales: from the strong-field regime to cosmology. *The Astrophysical Journal*, v. 802, n. 1, p. 63, 2015. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/802/i=1/a=63>>. Citado na página 15.
- 20 PSALTIS, D. Probes and tests of strong-field gravity with observations in the electromagnetic spectrum. *Living Reviews in Relativity*, v. 11, n. 1, p. 9, Nov 2008. ISSN 1433-8351. Disponível em: <<https://doi.org/10.12942/lrr-2008-9>>. Citado na página 15.
- 21 BULL, P. et al. Beyond λ cdm: Problems, solutions, and the road ahead. *Physics of the Dark Universe*, v. 12, p. 56 – 99, 2016. ISSN 2212-6864. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686416300097>>. Citado na página 15.
- 22 CUI, X. et al. Dark matter results from 54-ton-day exposure of pandax-ii experiment. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 119, p. 181302, Oct 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.181302>>. Citado na página 15.
- 23 AAD, G. et al. Search for dark matter in events with a z boson and missing transverse momentum in pp collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV with the atlas detector. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 90, p. 012004, Jul 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.012004>>. Citado na página 15.
- 24 AKERIB, D. S. et al. Results from a search for dark matter in the complete lux exposure. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 118, p. 021303, Jan 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.021303>>. Citado na página 15.

- 25 APRILE, E. et al. First dark matter search results from the xenon1t experiment. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 119, p. 181301, Oct 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.181301>>. Citado na página 15.
- 26 CLIFTON, T. et al. Modified gravity and cosmology. *Physics Reports*, v. 513, p. 1–189, 2012. Issues 1–3. Citado 4 vezes nas páginas 15, 19, 24 e 25.
- 27 MILGROM, M. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *Astrophysical Journal*, v. 270, p. 365–370, jul. 1983. Citado na página 16.
- 28 MILGROM, M. A modification of the Newtonian dynamics - Implications for galaxies. *Astrophysical Journal*, v. 270, p. 371–389, jul. 1983. Citado na página 16.
- 29 MILGROM, M. A Modification of the Newtonian Dynamics - Implications for Galaxy Systems. *Astrophysical Journal*, v. 270, p. 384, jul. 1983. Citado na página 16.
- 30 MILGROM, M. MOND laws of galactic dynamics. *MNRAS*, v. 437, p. 2531–2541, jan. 2014. Citado na página 16.
- 31 BEKENSTEIN, J.; MILGROM, M. Does the missing mass problem signal the breakdown of Newtonian gravity? *Astrophysical Journal*, v. 286, p. 7–14, nov. 1984. Citado na página 16.
- 32 BEKENSTEIN, J. D. Relativistic gravitation theory for the modified newtonian dynamics paradigm. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 70, p. 083509, Oct 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.083509>>. Citado na página 16.
- 33 MCGAUGH, S. S. The baryonic tully-fisher relation of gas-rich galaxies as a test of Λ cdm and mond. *The Astronomical Journal*, v. 143, n. 2, p. 40, 2012. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1538-3881/143/i=2/a=40>>. Citado na página 16.
- 34 SANDERS, R. H.; MCGAUGH, S. S. Modified newtonian dynamics as an alternative to dark matter. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, v. 40, n. 1, p. 263–317, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev.astro.40.060401.093923>>. Citado na página 16.
- 35 Famaey, B.; McGaugh, S. S. Modified Newtonian Dynamics (MOND): Observational Phenomenology and Relativistic Extensions. *Living Reviews in Relativity*, v. 15, p. 10, set. 2012. Citado na página 16.
- 36 RODRIGUES, D. et al. Absence of a fundamental acceleration scale in galaxies. *Nat. Astron.* 2, p. 668–672, 2018. ArXiv:1806.06803 [astro-ph.GA]. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/s41550-018-0498-9>>. Citado na página 16.
- 37 BABICHEV, E.; DEFFAYET, C. An introduction to the vainshtein mechanism. *Classical and Quantum Gravity*, v. 30, n. 184001, p. 18, 2013. Citado na página 16.
- 38 JIMÉNEZ, J. B.; FRÓES, A. L. D.; MOTA, D. F. Screening vector field modifications of general relativity. *Physics Letters B*, v. 725, p. 212–217, October 2013. Issues 4–5. Citado na página 16.

- 39 CHAN, M. H.; HUI, H. K. Testing the cubic galileon gravity model by the milky way rotation curve and sparc data. *The Astrophysical Journal*, v. 856, n. 2, p. 177, 2018. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/856/i=2/a=177>>. Citado na página 16.
- 40 SALZANO, V. et al. No need for dark matter in galaxy clusters within galileon theory. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2016, n. 10, p. 033, 2016. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1475-7516/2016/i=10/a=033>>. Citado na página 16.
- 41 Binney, J.; Tremaine, S. *Galactic Dynamics*. Second. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2008. Citado 6 vezes nas páginas 17, 61, 65, 67, 70 e 72.
- 42 AGÓN, C. A.; PEDRAZA, J. F.; RAMOS-CARO, J. Kinetic theory of collisionless self-gravitating gases: Post-newtonian polytropes. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 83, p. 123007, Jun 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.123007>>. Citado 5 vezes nas páginas 17, 61, 68, 70 e 72.
- 43 CHOQUET-BRUHAT, Y. *Introduction to General Relativity, Black Holes, and Cosmology*. [S.l.]: Oxford University Press, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 19, 61, 62 e 93.
- 44 Hawking, S. W.; Ellis, G. F. R. *The Large-Scale Structure of Space-Time*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2008. Citado na página 19.
- 45 SCHULLER, F. All spacetimes beyond einstein. 2011. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1111.4824>>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 93.
- 46 NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. [S.l.]: Institute of Physics Publishing, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 22, 93 e 104.
- 47 EINSTEIN, A.; INFELD, L.; HOFFMANN, B. The gravitational equations and the problem of motion. *Ann. Math.*, v. 39, p. 65, 1938. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 35.
- 48 EINSTEIN, A.; INFELD, L. The gravitational equations and the problem of motion. ii. *Ann. Math.*, v. 41, p. 455–464, 1940. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 35.
- 49 EINSTEIN, A.; INFELD, L. On the motion of particles in general relativity theory. *Canad. J. Math.*, v. 1, p. 209, 1949. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 35.
- 50 CHANDRASEKAR, S. The post-newtonian equations of hydrodynamics in general relativity. *Astrophysical Journal*, v. 142, p. 1488, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 35.
- 51 LOVELOCK, D. The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *Journal of Mathematical Physics*, v. 13, p. 874–876, June 1972. Citado na página 24.
- 52 FLANAGAN Éanna . The conformal frame freedom in theories of gravitation. *Classical and Quantum Gravity*, v. 21, n. 15, p. 3817, 2004. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0264-9381/21/i=15/a=N02>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- 53 FARAONI, V.; CÔTÉ, J. Two new approaches to the anomalous limit of brans-dicke to einstein gravity. 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1811.01728>>. Citado na página 27.

- 54 BOLTON, A. S.; RAPPAPORT, S.; BURLES, S. Constraint on the post-newtonian parameter γ on galactic size scales. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 74, p. 061501, Sep 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.061501>>. Citado na página 40.
- 55 WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*. [S.l.]: John Wiley and Sons., 1972. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- 56 JACKSON, J. D.; JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: Wiley New York etc., 1962. v. 3. Citado na página 53.
- 57 RAMOS-CARO, J.; AGÓN, C. A.; PEDRAZA, J. F. Kinetic theory of collisionless self-gravitating gases. ii. relativistic corrections in galactic dynamics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 86, p. 043008, Aug 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.043008>>. Citado na página 61.
- 58 ANDRÉASSON, H. The einstein-vlasov system/kinetic theory. *Living Reviews in Relativity*, v. 14, n. 1, p. 4, May 2011. ISSN 1433-8351. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.12942/lrr-2011-4>>. Citado na página 61.
- 59 GAUY, H. M.; RAMOS-CARO, J. Distribution functions for a family of general-relativistic hypervirial models in the collisionless regime. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 97, p. 064012, Mar 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.064012>>. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 69.
- 60 ARFKEN, G.; WEBER, H.; HARRIS, F. E. *Mathematical Methods for Physicists*. [S.l.]: Academic Press, 2012. Citado na página 71.
- 61 PLUMMER, H. C. On the problem of distribution in globular star clusters: (plate 8.). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 71, n. 5, p. 460–470, 1911. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/71.5.460>>. Citado na página 72.
- 62 DEJONGHE, H. A completely analytical family of anisotropic plummer models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 224, n. 1, p. 13–39, 1987. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/224.1.13>>. Citado na página 72.
- 63 CHOQUET-BRUHAT, Y.; DEWITT-MORETTE, C. *Analysis, Manifolds and Physics, Part I: Basics*. [S.l.]: ELSEVIER SCIENCE B.V., 1996. Citado na página 93.
- 64 LEE, J. M. *Introduction to smooth Manifolds*. [S.l.: s.n.], 2000. Citado na página 93.
- 65 FECKO, M. *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. Citado na página 93.

Apêndices

APÊNDICE A – Aspectos de Geometria Diferencial

Neste apêndice são apresentadas as definições necessárias para construir as teorias métricas, referências importantes para tal são [43, 46, 63, 64, 65, 45].

A.1 A Estrutura Diferencial

Começamos notando que um conjunto M qualquer não possui estrutura alguma e portanto não podemos falar sobre continuidade ou diferenciabilidade de mapas sobre M . Dessa forma, nesta seção apresento brevemente os conceitos de topologia (\mathcal{O}) e do atlas (\mathcal{A}), estruturas que adicionamos ao conjunto M de forma a podermos falar dos conceitos de continuidade e diferenciabilidade de mapas sobre M . Começamos pela topologia, definida por:

Definição 4 *Seja M um conjunto. Uma topologia \mathcal{O} é um subconjunto de $\mathcal{P}(M) = \{U/U \subset M\}$ ¹, se e somente se \mathcal{O} satisfaz as condições:*

1. $\emptyset \in \mathcal{O}$ e $M \in \mathcal{O}$,
2. Se os conjuntos $U \in \mathcal{O}$, $V \in \mathcal{O}$ então $U \cap V \in \mathcal{O}$,
3. Se $U_\alpha \in \mathcal{O}$, $\alpha \in A$, então $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{O}$.

Se $U \in \mathcal{O}$, então dizemos que U é um conjunto aberto, ou seja, o conjunto \mathcal{O} define quais são os subconjuntos de M abertos. O conjunto M com uma topologia \mathcal{O} é conhecido como um espaço topológico (M, \mathcal{O}) . Provavelmente a topologia mais usual é aquela que assumimos para análise real, ou seja, a topologia padrão \mathcal{O}_{st} , que só pode ser definida para o conjunto dos reais por:

Definição 5 *Seja $\mathbb{R}^d := \{(p_1, \dots, p_d) \mid p_i \in \mathbb{R}\}$, então*

$$\mathcal{O}_{st} := \left\{ B_r(p) \mid B_r(p) := \left\{ (q_1, \dots, q_d) \mid \sum_{i=1}^d (q_i - p_i)^2 < r^2 \text{ com } r \in \mathbb{R} \text{ e } p_i \in \mathbb{R} \right\} \right\},$$

é topologia padrão de \mathbb{R}^d .

Adicionamos a estrutura de uma topologia sobre um conjunto com o intuito de definir mapas contínuos sobre M , por definição:

¹ Se trata do conjunto de todos os subconjuntos de M .

Definição 6 *Seja (M, \mathcal{O}_M) e (N, \mathcal{O}_N) espaços topológicos. Então um mapa $f : M \rightarrow N$ é dito contínuo, se $\forall V \in \mathcal{O}_N : \text{preim}_f(V) \in \mathcal{O}_M$ ².*

A definição anterior estende a noção de continuidade de funções sobre o conjunto dos reais \mathbb{R} para qualquer conjunto M .

Para adicionarmos uma estrutura diferencial ao conjunto M adicionaremos um atlas \mathcal{A}_{C^∞} ao espaço topológico (M, \mathcal{O}) . Para isto definimos noção de uma variedade topológica:

Definição 7 *Um espaço topológico (M, \mathcal{O}) é dito uma variedade d -dimensional se $\forall p \in M : \exists U \in \mathcal{O}, p \in U$, e $\exists x : U \rightarrow V \in \mathbb{R}^d$, de forma que x é invertível e tanto x quanto sua inversa são contínuas.*

Dessa forma chamamos (U, x) de uma carta de (M, \mathcal{O}) , e definimos

$$\mathcal{A} := \{(U_\alpha, x_\alpha) / \alpha \in A, \text{ e } (U_\alpha, x_\alpha) \text{ é carta de } (M, \mathcal{O})\},$$

\mathcal{A} é dito atlas de (M, \mathcal{O}) se $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.

Definição 8 *Um atlas \mathcal{A} é dito C^∞ -compatível (escrevemos então \mathcal{A}_{C^∞}) se para quaisquer duas cartas $(U, x) \in \mathcal{A}$ e $(V, y) \in \mathcal{A}$ temos: $U \cap V = \emptyset$ ou $U \cap V \neq \emptyset$, mas $y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ e sua inversa $x \circ y^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ são ambos mapas C^∞ .*

Assim a tripla $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{C^\infty})$ é dita uma variedade d -dimensional suave. Será em variedades suaves que poderemos falar sobre diferenciabilidade de mapas em M .

A.2 Campos Tensoriais

Queremos introduzir campos tensoriais à variedade M , mas para isto precisamos definir várias noções essenciais, principalmente a noção de espaços tangentes e de fibrados.

A.2.1 O Espaço Tangente

A definição de vetores em variedades suaves passa pela noção de velocidade de curvas em M , seguindo a definição:

Definição 9 *Seja $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ uma variedade suave e uma curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ que seja pelo menos C^1 . Suponha que $\gamma(\lambda_0) = p$. A velocidade de γ em p é um mapa linear*

$$v_{\gamma,p} : C^\infty(M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \text{ pela regra } f \longrightarrow v_{\gamma,p}(f) = (f \circ \gamma)'(\lambda_0).$$

² $\text{preim}_f(V) := \{m \subseteq M / f(m) \in V\}$

Com esta noção definimos o espaço tangente para cada ponto de M , este será o espaço de vetores:

Definição 10 Para cada ponto $p \in M$ definimos o conjunto T_pM , o espaço tangente de M em p ; $T_pM = \{v_{\gamma,p} | \gamma \text{ é uma curva suave, ou seja, } x \circ \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^d)\}$.

A definição anterior é interessante por possibilitar uma soma \oplus ($\oplus : T_pM \times T_pM \xrightarrow{\sim} T_pM$) e um produto \odot ($\odot : \mathbb{R} \times T_pM \xrightarrow{\sim} T_pM$) que torna T_pM em um espaço vetorial ((T_pM, \oplus, \odot) é um espaço vetorial). Quando adicionamos a estrutura de um atlas para a variedade M as cartas induzem uma base ao espaço T_pM da forma que segue, para uma carta (U, x) :

$$v_{\gamma,p}(f) = (f \circ \gamma)'(\lambda_0) = ((f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \gamma))'(\lambda_0) = \partial_i (f \circ x^{-1})(x(p)) (x^i \circ \gamma)'(\lambda_0),$$

dessa forma definimos

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_x^i(\lambda_0) &= (x^i \circ \gamma)'(\lambda_0), \\ \partial_i (f \circ x^{-1})(x(p)) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p f, \end{aligned}$$

ou seja, podemos reescrever a ação de $v_{\gamma,p}$ sobre uma função f ,

$$v_{\gamma,p}(f) = \dot{\gamma}_x^i(\lambda_0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p f \implies v_{\gamma,p} = \dot{\gamma}_x^i(\lambda_0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p.$$

Assim a base induzida por (U, x) para T_pM é $(\partial/\partial x^i)_p$ e $\dot{\gamma}_x^i(\lambda_0)$ são as componentes do vetor $v_{\gamma,p}$ para esta base.

A partir da definição do espaço tangente podemos adicionar uma torre de estruturas, a primeira destas estruturas é a noção de um espaço cotangente, definido por:

Definição 11 O espaço cotangente de M no ponto p é o conjunto de todos os mapas lineares de T_pM para \mathbb{R} , ou seja, é definido por $T_p^*M := \{\varphi | \varphi : T_pM \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\}$. Geralmente usamos a notação $(df)_p$ para referir a elementos de T_p^*M , e definimos a ação destes sobre T_pM da forma abaixo,

$$(df)_p X := X(f), \text{ onde } X \in T_pM.$$

Para concluir podemos definir a base dual de T_p^*M :

Definição 12 $(d(x^1))_p, (d(x^2))_p, \dots, (d(x^d))_p$ é base de T_p^*M , na verdade é a base dual:

$$(d(x^i))_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right)_p = \delta_j^i.$$

Seguindo com as estruturas que podemos colocar sobre o espaço tangente, o espaço de tensores $\mathcal{T}_p^{(r,s)}M$ é definido por:

Definição 13 O espaço de tensores $\mathcal{T}_p^{(r,s)}M$ é o conjunto de todos os mapas multilineares de T_pM e T_p^*M para o \mathbb{R} , ou seja,

$$\mathcal{T}_p^{(r,s)}M = \left\{ T \mid T : \underbrace{T_p^*M \times \dots \times T_p^*M}_r \times \underbrace{T_pM \times \dots \times T_pM}_s \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \right\}.$$

Outro conceito importante é o de produto tensorial, definido por:

Definição 14 Seja $T \in \mathcal{T}_p^{(r,s)}M$ e $S \in \mathcal{T}_p^{(k,j)}M$ tensores sobre M , então o produto tensorial \otimes de S por T é um tensor $(r+k, s+j)$, tal qual satisfaz

$$(T \otimes S)(w_1, \dots, w_{r+k}, X_1, \dots, X_{s+j}) := T(w_1, \dots, w_r, X_1, \dots, X_s) \\ \times \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}}}{S}(w_{r+1}, \dots, w_{r+k}, X_{s+1}, \dots, X_{s+j}),$$

onde a multiplicação \times do lado direito indica a multiplicação dos reais \mathbb{R} .

A.2.2 O Fibrado Tangente

Introduzimos a noção de vetores para cada ponto da variedade M , porém, os conceitos introduzidos não são suficientes para falarmos sobre campos vetoriais suaves, para isto precisamos introduzir a noção do fibrado tangente. Começamos definindo um fibrado:

Definição 15 Um fibrado é uma tripla (E, M, π) , onde E e M são variedades suaves chamadas de espaço total e espaço base, respectivamente, e π é o mapa projetor, um mapa suave e sobrejetivo tal qual $\pi : E \rightarrow M$.

Também é interessante deixarmos claro a ideia de uma fibra, como definido:

Definição 16 Seja $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado e $p \in M$, então uma fibra f sobre p é o conjunto $f := \text{preim}_\pi(\{p\})$.

Um conceito central para definirmos campos vetoriais é de seções sobre o fibrado, e o definimos:

Definição 17 Seja $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado, então uma seção σ sobre a fibrado é um mapa $\sigma : M \rightarrow E$, que satisfaz $\pi \circ \sigma = I_dM$, onde I_dM é o mapa identidade em M ($I_dM(p) = p$).

Serão as seções que ocuparam a posição de campos vetoriais, assim que escolhermos o espaço total de forma específica. Definimos então o fibrado tangente:

Definição 18 Seja $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{C^\infty})$ uma variedade suave, então o conjunto TM é chamado de fibrado tangente se satisfaz:

1. $TM := \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p M$;
2. $\exists \pi : TM \rightarrow M$, tal que seja $X \in TM$, então $\pi(X) = p$, e $p \in M$ é único;
3. Induzimos uma topologia sobre TM a partir de π e da variedade M de forma que π seja pelo menos contínuo. Ou seja, concluímos o espaço topológico (TM, \mathcal{O}_{TM}) , onde $\mathcal{O}_{TM} := \{\text{preim}_\pi(U) \mid U \in \mathcal{O}\}$;
4. Induzimos um atlas $\mathcal{A}_{C^\infty}^{TM}$ sobre TM por meio de π e \mathcal{A}_{C^∞} da seguinte forma:

$$\mathcal{A}_{C^\infty}^{TM} := \{(TU, \xi_x) \mid TU = \text{preim}_\pi(U) \text{ e } (U, x) \in \mathcal{A}_{C^\infty}\},$$

onde $\xi_x : TU \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$, tal qual segue a regra

$$\xi_x : TU \ni X \rightarrow \left((x^1 \circ \pi)(X), \dots, (x^d \circ \pi)(X), (dx^1)_{\pi(X)}(X), \dots, (dx^d)_{\pi(X)}(X) \right).$$

Dessa forma a tripla (TM, M, π) , como definido acima, forma um fibrado, e partir desta definimos campos vetoriais suaves:

Definição 19 Um campo vetorial suave \mathcal{X} é uma seção de (TM, M, π) , $\mathcal{X} : M \rightarrow TM$. Ou seja, $\mathcal{X} : C^\infty \rightarrow C^\infty$. O conjunto de campos vetoriais

$$\Gamma(TM) := \{\mathcal{X} \mid \mathcal{X} \text{ é uma seção de } (TM, M, \pi)\}.$$

Assim como para $T_p M$ podemos fazer de $\Gamma(TM)$ um espaço vetorial, agora mais interessante do que ser um espaço vetorial podemos estabelecer a soma e multiplicação com relação ao anel C^∞ , este faz de $\Gamma(TM)$ um módulo- C^∞ .

Com a definição do espaço de vetores, agora com campos vetoriais, podemos determinar uma torre de estruturas sobre este espaço, e começamos com a definição de campos co-vetoriais:

Definição 20 O conjunto de todos os campos covetoriais é

$$\Gamma(T^*M) := \{df \mid df : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty\},$$

ou seja, $df(\mathcal{X}) := \mathcal{X}f \in C^\infty$.

E finalmente esta definição nos permite definir campos tensoriais:

Definição 21 Um campo tensorial (r, s) suave é um mapa multilinear:

$$T : \underbrace{\Gamma(T^*M) \times \dots \times \Gamma(T^*M)}_{r \text{ vezes}} \times \underbrace{\Gamma(TM) \times \dots \times \Gamma(TM)}_{s \text{ vezes}} \xrightarrow{\sim} C^\infty.$$

A.3 As Conexões

Em cálculo definimos derivadas a partir do transporte paralelo, aqui começamos primeiro pela definição de derivada direcional e a partir dela determinamos como deve ser o transporte paralelo. Começamos pela definição de derivadas direcionais, ou derivada covariante:

Definição 22 *Uma conexão linear ∇ (ou derivada covariante) em uma variedade suave $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{C^\infty})$ é uma mapa $\nabla : TM \times \Gamma(\mathcal{T}^{(r,s)}M) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T}^{(r,s)}M)$, ou seja, mapeia um vetor e um campo tensorial (r, s) em um campo tensorial (r, s) . Tal que ∇ satisfaz:*

1. $\nabla_X f = X(f) \forall f \in C^\infty$;
2. $\nabla_X (T + S) = \nabla_X T + \nabla_X S$;
- 3.

$$\begin{aligned} \nabla_X (T(w_1, \dots, w_r, Y_1, \dots, Y_s)) &= \nabla_X (T)(w_1, \dots, w_r, Y_1, \dots, Y_s) \\ &\quad + T(\nabla_X w_1, \dots, w_r, Y_1, \dots, Y_s) + \dots + T(w_1, \dots, \nabla_X w_r, Y_1, \dots, Y_s) \\ &\quad + T(w_1, \dots, w_r, \nabla_X Y_1, \dots, Y_s) + \dots + T(w_1, \dots, w_r, Y_1, \dots, \nabla_X Y_s); \end{aligned}$$

4. $\nabla_{fX+Z} T = \nabla_{fX} T + \nabla_Z T = f\nabla_X T + \nabla_Z T$.

Baseado nas condições acima, levantamos a questão: Uma variedade suave $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{C^\infty})$ tem estrutura suficiente para definir completamente o mapa ∇ ? A resposta é não, podemos ver isto calculando o resultado de $\nabla_X Y$ quando temos uma carta, ou seja,

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &\stackrel{(U,x)}{\cong} \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= X^i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \Gamma_{ji}^m \frac{\partial}{\partial x^m}, \end{aligned}$$

onde Γ_{ij}^m são d^3 funções C^∞ e não são especificadas pelas estruturas da variedade, dessa forma devem ser impostas a priori. A aplicação de ∇ em qualquer outro campo tensorial resulta nas mesmas d^3 funções C^∞ que temos para vetores, portanto basta fornecermos os Γ_{ij}^m e temos definido o mapa ∇ . A partir daqui tratamos de espaços com uma conexão, ou seja, do quarteto $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{C^\infty}, \nabla)$.

Com as conexões estabelecidas podemos falar sobre transporte paralelo, e do conceito mais importante de auto-paralelas.

Definição 23 *Seja $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_C^\infty, \nabla)$ uma variedade suave com uma conexão linear. Então um campo vetorial X é dito transportado paralelamente por uma curva γ em M , se $\nabla_{v_\gamma} X = 0$.*

Uma noção mais interessante surge de auto-paralelas, definiremos as curvas γ 's cujo o vetor velocidade é transportado paralelamente com relação a própria curva γ :

Definição 24 *Uma curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ é dita transportada auto-paralela se $\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = 0$.*

Quando aplicamos uma carta (U, x) temos que para auto-paralelas,

$$\begin{aligned} \nabla_{v_\gamma} v_\gamma &\stackrel{(U,x)}{\downarrow} \nabla_{\dot{\gamma}_x^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\dot{\gamma}_x^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \left(\ddot{\gamma}_x^i + \Gamma_{jm}^i \dot{\gamma}_x^j \dot{\gamma}_x^m \right) \frac{\partial}{\partial x^i} = 0 \implies \ddot{\gamma}_x^i + \Gamma_{jm}^i \dot{\gamma}_x^j \dot{\gamma}_x^m = 0, \end{aligned}$$

mais tarde veremos que ao adicionarmos uma estrutura métrica, e algumas suposições, que as auto-paralelas coincidem com as geodésicas.

Para finalizar a seção definimos dois conceitos importantes, o de torções e de curvatura:

Definição 25 *Uma torção de uma conexão é um campo tensorial $(1, 2)$, tal qual*

$$\mathcal{T}(w, X, Y) := w(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]),$$

onde definimos $[X, Y]f := X(Y(f)) - Y(X(f))$.

se uma carta (U, x) é escolhida, então as componentes de uma torção são $\mathcal{T}_{ab}^i = \Gamma_{ab}^i - \Gamma_{ba}^i$. A partir daqui só consideraremos variedades cuja conexão é sem torção, ou seja, aquelas para as quais $\mathcal{T} = 0$, ou $\Gamma_{ab}^i = \Gamma_{ba}^i$.

Definição 26 *O tensor de curvatura de Riemann de uma conexão é o campo tensorial $(1, 3)$ tal que*

$$\begin{aligned} \text{Riem}(w, Z, X, Y) &:= w(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) \\ &\stackrel{(U,x)}{\downarrow} w_i Z^j X^k Y^m \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{jm}^i - \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jm}^s \Gamma_{sk}^i - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{sm}^i \right). \end{aligned}$$

Definimos também o tensor de curvatura de Ricci, essencial para as equações de campo de Einstein:

Definição 27 O tensor de curvatura de Ricci é definido diretamente da tensor de Riemann, ou seja, é um campo tensorial $(0, 2)$, tal que

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) & \stackrel{(U,x)}{:=} Riem\left(dx^i, X, \frac{\partial}{\partial x^i}, Y\right) \\ & = X^j Y^m \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jm}^i - \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma_{ji}^i + \Gamma_{jm}^s \Gamma_{si}^i - \Gamma_{ji}^s \Gamma_{sm}^i \right). \end{aligned}$$

A.4 Variedades Métricas (Espaços Riemannianos)

Adicionamos agora a estrutura mais importante para construirmos teorias métricas, a métrica definida por:

Definição 28 Uma métrica g para uma variedade suave $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{C^\infty})$ é um campo tensorial $(0, 2)$ que satisfaz:

1. Simetria dos argumentos: $g(X, Y) = g(Y, X) \forall X, Y \in \Gamma(TM)$;
2. É não degenerada, ou, em outras palavras, existe um mapa invertível $\flat : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(T^*M)$ definido por $(\flat(X))(Y) := g(X, Y)$. Ou, se $g(X, Y) = 0$ para todo $X \in \Gamma(TM)$, então $Y = 0$.

Também podemos definir a inversa da métrica:

Definição 29 A inversa g^{-1} é um campo tensorial $(2, 0)$ tal qual $g^{-1}(w, \sigma) = w(\flat^{-1}(\sigma))$.

Quando aplicamos uma carta podemos expressar uma relação entre g e g^{-1} :

$$(g^{-1})^{ac} g_{cb} = \delta_b^a.$$

Como a métrica é não degenerada, então a métrica não pode ter zeros em sua assinatura, e definimos:

Definição 30 Uma métrica é chamada de Riemanniana se sua assinatura é $(++ \dots +)$ ou $(-- \dots -)$. É chamada de Pseudo-Riemanniana se sua assinatura é $(-++ \dots +)$ ou $(+- \dots -)$.

Para os espaços físicos requeremos que a métrica seja Pseudo-Riemanniana (ou Lorentziana). A razão de adicionarmos uma métrica ao espaço é devido a podermos definir o comprimento de uma curva γ , ou seja:

Definição 31 *Seja $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{C^\infty}, g)$ um espaço Pseudo-Riemanniano (uma variedade topológica suave de d dimensões com uma métrica Lorentziana) e $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva sobre M , então a rapidez da curva em $\gamma(\lambda)$ é o número:*

$$\left(\sqrt{g(v_\gamma, v_\gamma)} \right)_{\gamma(\lambda)} = S(\lambda).$$

Com tal definimos o comprimento de uma curva:

Definição 32 *Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva suave, então seu comprimento é o número:*

$$L[\gamma] := \int_{\mathbb{R}} d\lambda S(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} d\lambda \left(\sqrt{g(v_\gamma, v_\gamma)} \right)_{\gamma(\lambda)}.$$

Agora chegamos ao conceito de geodésicas, talvez um dos mais importantes. Como apresentamos no capítulo 1 as geodésicas descrevem o movimento de partículas teste no espaço. Por definição as geodésicas são as menores distâncias entre pontos de uma variedade, ou em termos matemáticos:

Definição 33 *Uma curva γ é chamada de geodésica de uma variedade $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{C^\infty}, g)$ se essa é um extremo do funcional*

$$L[\gamma] = \int_{\mathbb{R}} d\lambda \left(\sqrt{g(v_\gamma, v_\gamma)} \right)_{\gamma(\lambda)}.$$

Pode ser provado que os extremos do funcional anterior satisfazem a equação de Euler-Lagrange, ou seja, quando escolhemos uma carta (U, x) as geodésicas satisfazem a equação

$$\ddot{\gamma}_x^i + \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) \dot{\gamma}_x^j \dot{\gamma}_x^k = 0.$$

Esta equação nos permite colocar uma restrição sobre o espaço. Impomos que as auto-paralelas coincidem com as geodésica, ou em termos mais intuitivos que "reta"="menor distância". Para que isto aconteça concluímos que as conexões são determinadas pela métrica, seguindo a equação

$$\Gamma_{kj}^i := \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right).$$

Mas esta imposição requer a escolha de uma carta, e podemos reescrever a imposição de forma a não citar as cartas simplesmente, por meio de:

$$\mathcal{T} = 0 \text{ e } \nabla g = 0.$$

Então até aqui nosso espaço é descrito pelas estruturas $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{C^\infty}, \nabla_{\mathcal{T}=\nabla g=0}, g)$.

A.4.1 Integração em Variedades

Para construirmos a teoria por meio de um princípio de mínima ação precisamos definir como integrar funções sobre M , ou seja, como integrar $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sobre o seu domínio. Para tal começamos com a integração sobre uma carta (U_i, x) , e para isto devemos definir um elemento de volume. Elementos de volume apresentam as propriedades do que chamaremos de formas diferenciais, definidas por:

Definição 34 *Uma forma diferencial de ordem r ou uma r -forma é um campo tensorial $(0, r)$ totalmente anti-simétrico, normalmente expresso para uma carta utilizando o produto exterior \wedge ,*

$$w := dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} := \epsilon_{\mu_1, \dots, \mu_r} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_r},$$

onde $\epsilon_{\mu_1, \dots, \mu_r}$ é o símbolo de Levi-Civita.

Portanto definimos elementos de volume sobre M :

Definição 35 *Seja $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{C^\infty}, g)$ um variedade suave de d dimensões com uma métrica, então Ω_M é elemento de volume se satisfaz:*

1. Ω_M é não nulo $\forall p \in M$;
2. é uma d -forma, tal qual, dada uma carta (U_i, x) , esta satisfaz:

$$\Omega_M \stackrel{(U_i, x)}{:=} \sqrt{-g} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d},$$

onde $g = \det(g_{\mu\nu})$.

Para garantirmos que o elemento de volume Ω_M é o mesmo para qualquer escolha de carta devemos refinar o atlas \mathcal{A}_{C^∞} ainda mais. Quando mudamos para outra carta, suponha (V, y) , aparece no elemento de volume um termo da forma *sinal* $(\det \frac{\partial y}{\partial x})$, portanto para que Ω_M tenha o mesmo sinal devemos impor que o atlas \mathcal{A}_{C^∞} só tenha cartas tais quais os mapas de transição sempre satisfazem $\det \frac{\partial y}{\partial x} > 0$. Denotamos este novo sub-atlas de $\mathcal{A}_{C^\infty}^\uparrow$, e dizemos que a variedade é orientável. Portanto nosso espaço agora contém $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{C^\infty}^\uparrow, \nabla_{\mathcal{T}=\nabla g=0}, g)$.

Com a nova estrutura podemos definir integração sobre uma carta de M :

Definição 36 *A integral de uma função $f : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ é dada pela expressão:*

$$\int_{U_i} f := \int_{U_i} f \Omega_M \stackrel{(U_i, x)}{:=} \int_{x(U_i)} f \sqrt{-g} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d} := \int_{x(U_i)} f \sqrt{-g} d^d x.$$

A expressão mais a direita da definição anterior expressa a integral Riemanniana usual de cálculo sobre o domínio U_i . Para integrarmos sobre todo o M empregamos partições da unidade para as regiões de intersecção de duas cartas, definimos a partição da seguinte forma:

Definição 37 *Uma partição da unidade é um mapa $\rho_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$, tal qual:*

1. $0 \leq \rho_i \leq 1$;
2. $\rho_i(p) = 0$ se $p \notin U_i$;
3. $\sum_i \rho_i(p) = 1$.

A partição da unidade no permite escapar das inconsistências que teríamos com intersecção de cartas quando realizarmos integração sobre todo o M . Assim finalmente definimos a integração sobre todo o espaço de M :

Definição 38 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, então a integral de f sobre M é dada pela expressão:*

$$\int_M f := \sum_i \int_{U_i} f \rho_i := \sum_i \int_{x(U_i)} f \rho_i \sqrt{-g} dx.$$

A.4.2 Orientação Temporal

A estrutura causal do espaço tempo é definida pela métrica. Esta define os cones de luz, uma representação de quais eventos são passado ou futuro do ponto em análise. O cone de luz de um ponto p de M é definido pela equação $g(X, X) < 0$, $X \in T_p M$. Para distinguir entre passado e futuro adicionamos à variedade a última estrutura necessária, o de uma orientação temporal:

Definição 39 *Uma orientação temporal sobre um espaço Pseudo-Riemanniano é dado por um campo vetorial T tal qual satisfaz:*

1. \dot{E} não nulo em todo o espaço;
2. $E g(T, T) < 0$.

O vetor T define o cone futuro, para $X \in T_p M$ ser futuro este deve satisfazer $g(X, X) \geq 0$ e $g(X, T) < 0$.

A.4.3 Mapas conformais

Como precisaremos para construirmos as diferentes perspectivas físicas de teorias de gravitação introduzo nesta seção o conceito de transformações conformais (ou mapas conformais), definidas por:

Definição 40 Considere um espaço Pseudo-Riemanniano $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{C^\infty}, \nabla_{\mathcal{T}=\nabla_{g=0}}, g)$, então um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow M$ é chamado de conformal se existe um mapa suave $\Omega : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal qual

$$\bar{g} = \varphi^*g = \Omega^2 g \text{ ou } \bar{g}_{\varphi(p)} = (\varphi^*g)_{\varphi(p)} = \Omega^2(p)g_p.$$

Mas por se tratar de um difeomorfismo a ação deste sobre uma lagrangiana \mathcal{L} se resume a $\varphi^*\mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \varphi$, ou seja, o difeomorfismo não afeta a ação e não temos equações de campo diferentes.

Para construirmos as diferentes perspectivas conformais usamos uma noção similar [46], a de um reescalamto de Weyl, definida por:

Definição 41 Seja g e \bar{g} duas métricas sobre uma variedade $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{C^\infty}, \nabla)$, então dizemos que g é conformalmente relacionada a \bar{g} se

$$\bar{g}_p = \Omega^2(p)g_p,$$

a transformação anterior é um reescalamto de Weyl.

Um reescalamto de Weyl é uma transformação local da métrica (é diferente de um mapa conformal) e lagrangianas não são necessariamente invariantes por tal transformação. Quando aplicarmos uma carta $(U, x) \in \mathcal{A}_{C^\infty}^\dagger$ vemos que:

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \bar{g}_{\mu\nu} = e^{2\sigma} \bar{g}_{\mu\nu}.$$

Como apresentado anteriormente a métrica induz as conexões do espaço, dessa forma após uma reescalamto de Weyl devemos ter as conexões dadas por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \\ &= \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu + \sigma_{,\beta} \delta^\mu_\alpha + \sigma_{,\alpha} \delta^\mu_\beta - \sigma^{,\mu} \bar{g}_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

aqui e em expressões seguinte usamos que os índices são levantados pela métrica \bar{g} .

Como precisaremos, na seção 1.3, do escalar de Ricci quando aplicarmos um reescalamto de Weyl, com o resultado anterior podemos calcular o tensor de curvatura de Ricci e deste determinar o escalar de Ricci, sendo o primeiro dado por

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta,\mu}^\mu - \Gamma_{\mu\beta,\alpha}^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu - \Gamma_{\nu\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \\ &= \bar{R}_{\alpha\beta} - 2\sigma_{,\alpha\beta} - \sigma^{,\mu}{}_{,\mu} \bar{g}_{\alpha\beta} - \sigma^{,\mu} \bar{g}_{\alpha\beta,\mu} + 2\sigma_{,\beta} \sigma_{,\alpha} - 2\sigma_{,\mu} \sigma^{,\mu} \bar{g}_{\alpha\beta} \\ &\quad - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\mu \sigma^{,\nu} \bar{g}_{\alpha\beta} + 2\sigma_{,\mu} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu + \bar{\Gamma}_{\nu\beta}^\mu \sigma^{,\nu} \bar{g}_{\alpha\mu} + \bar{\Gamma}_{\nu\alpha}^\mu \sigma^{,\nu} \bar{g}_{\beta\mu} \\ &= \bar{R}_{\alpha\beta} - 2\bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta \sigma - \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{\square} \sigma + 2\bar{\nabla}_\alpha \sigma \bar{\nabla}_\beta \sigma - 2\bar{\nabla}^\mu \sigma \bar{\nabla}_\mu \sigma \bar{g}_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Assim temos o escalar de Ricci dado por

$$R = e^{-2\sigma} \left[\bar{R} - 6 \bar{\square} \sigma - 6 \bar{g}^{-1} (\bar{\nabla} \sigma, \bar{\nabla} \sigma) \right].$$

Outro resultado que precisamos é de como os elementos de volume invariantes se transformam sobre transformações conformais da métrica

$$\Omega_M = \sqrt{-g} d^4x = e^{4\sigma} \sqrt{-\bar{g}} d^4x = e^{4\sigma} \bar{\Omega}_M.$$

Com os resultados acima podemos determinar as teorias de Brans-Dicke expressa em diferentes perspectivas conformais (Seção 1.3).

APÊNDICE B – Derivando as formas diferenciais das equações de campo

B.1 A expressão diferencial de ϕ_6

Começamos expressando a equação de campo para ϕ_6 em sua forma integral [2]:

$$\begin{aligned}\phi_6 &= G \int \rho^* u'_j u'_k \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^j (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x' \\ &= -G \int \rho^* [\mathbf{u}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{u}' \cdot \nabla |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}] d^3 x' .\end{aligned}$$

O Laplaciano da última expressão é simplesmente

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi_6 &= -G \int \rho^* [3u^2 4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + 2(\mathbf{u}' \cdot \nabla)^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1} \\ &\quad - 4\pi (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] d^3 x' ,\end{aligned}$$

onde usamos a expressão

$$\begin{aligned}\nabla^2 [\mathbf{u}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{u}' \cdot \nabla |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}] &= 3u^2 4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + 2(\mathbf{u}' \cdot \nabla)^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1} \\ &\quad - 4\pi (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') .\end{aligned}$$

Organizando os termos e fazendo um pouco de álgebra teremos

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi_6 &= 3\nabla^2 \phi_1 - 2G \int \rho^* (\mathbf{u}' \cdot \nabla)^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3 x' \\ &= 3\nabla^2 \phi_1 - 2G \partial_{ij} \int \frac{\rho^* u'^i u'^j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' .\end{aligned}$$

Ao tomar o Laplaciano da expressão anterior concluímos (2.6).

B.2 A expressão diferencial de ϕ_w

A forma integral da equação de campo para ϕ_w pode ser expressa por:

$$\phi_w := G^2 \int \int \rho^* \rho^{*''} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \left[\frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')^j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}'')^j}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|} \right] d^3 x' d^3 x'' , \quad (\text{B.1})$$

notamos que

$$\nabla |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3},$$

na expressão (B.1) somamos zero nos dois termos dentro dos colchetes

$$\begin{aligned}
\phi_w &= G^2 \int \int \rho^{*'} \rho^{*''} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot \left[\frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{x}'')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \mathbf{x}' - \mathbf{x}'')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|} \right] d^3 x' d^3 x'' \\
&= G^2 \int \int \rho^{*'} \rho^{*''} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot \left[\frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} + \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}'')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|} - \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|} \right] d^3 x' d^3 x'' \\
&= G^2 \int \rho^{*'} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot \int \rho^{*''} \left[\nabla |\mathbf{x} - \mathbf{x}''| - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|} - \nabla' |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| \right] d^3 x'' d^3 x'.
\end{aligned}$$

Reorganizando a expressão anterior teremos

$$\begin{aligned}
\phi_w &= G^2 \int \rho^{*'} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot \left\{ \nabla \left[\int \rho^{*''} |\mathbf{x} - \mathbf{x}''| d^3 x'' \right] - (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \int \frac{\rho^{*''}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} d^3 x'' \right. \\
&\quad \left. - (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \int \frac{\rho^{*''}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|} d^3 x'' - \nabla' \left[\int \rho^{*''} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| d^3 x'' \right] \right\} d^3 x',
\end{aligned}$$

pela definição dos campos X e U ,

$$X = G \int \rho^{*'} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| d^3 x', \quad U = G \int \frac{\rho^{*'}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x',$$

podemos simplificar a expressão para ϕ_6

$$\begin{aligned}
\phi_w &= G \int \rho^{*'} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot [\nabla X - (\mathbf{x} - \mathbf{x}') U - (\mathbf{x} - \mathbf{x}') U' - \nabla' X'] d^3 x', \\
&= G \nabla X \cdot \int \rho^{*'} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x' - GU \int \rho^{*'} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 x' \\
&\quad - G \int \rho^{*'} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') U' d^3 x' - G \int \rho^{*'} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot \nabla' X' d^3 x' \\
&= -G \nabla X \cdot \int \rho^{*'} \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' - GU \int \frac{\rho^{*'}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \\
&\quad - G \int \frac{\rho^{*'} U'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' + G \int \rho^{*'} \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \nabla' X' d^3 x',
\end{aligned}$$

substituindo na expressão anterior as definições de U , X e ϕ_2 concluímos:

$$\phi_w = -U^2 - \phi_2 - \nabla U \cdot \nabla X + G \nabla \cdot \int \frac{\rho^{*'}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' X' d^3 x'.$$

Tomando o Laplaciano da expressão acima temos

$$\nabla^2 \phi_w = -\nabla^2 U^2 - \nabla^2 \phi_2 - \nabla^2 (\nabla U \cdot \nabla X) + G \nabla^2 \left(\nabla \cdot \int \frac{\rho^{*'}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' X' d^3 x' \right).$$

Agora usando os resultados,

$$\nabla^2 (\nabla U \cdot \nabla X) = 2U_{,ij} X_{,ij} + 2\nabla U \cdot \nabla U - 4\pi G \nabla X \cdot \nabla \rho^*,$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 U^2 &= 2\nabla^2 \phi_2 + 2\nabla U \cdot \nabla U, \\ G\nabla^2 \left(\nabla \cdot \int \frac{\rho^*}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' X' d^3 x' \right) &= 2\nabla^2 \phi_2 - 4\pi G \nabla X \cdot \nabla \rho^*,\end{aligned}$$

encontramos exatamente (2.7), ou seja,

$$\nabla^2 \phi_w = -2\nabla^2 U^2 + 3\nabla^2 \phi_2 - 2U_{,ij} X_{,ij}.$$

APÊNDICE C – Propriedades dos Polinômios de Legendre

Anteriormente utilizamos algumas propriedades quando integramos os polinômios de Legendre, então neste apêndice apresentamos demonstrações destas propriedades.

C.1 Propriedade (3.15)

Em algumas das integrais aparecem termos diferentes envolvendo os polinômios de Legendre, dessa forma podemos determinar

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \cos \varphi' d\varphi' &= [\mathcal{P}_l(\cos \varphi') \sin \varphi']_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{d\mathcal{P}_l(\cos \varphi')}{d(\cos \varphi')} \sin^2 \varphi' d\varphi' = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\mathcal{P}_l(\cos \varphi')}{d(\cos \varphi')} (1 - \cos^2 \varphi') d\varphi'. \end{aligned}$$

Usando a propriedade de polinômios de Legendre:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1}{n} \frac{d\mathcal{P}_n(x)}{dx} &= x\mathcal{P}_n(x) - \mathcal{P}_{n-1}(x) \implies \\ \implies \frac{d\mathcal{P}_l(\cos \varphi')}{d(\cos \varphi')} &= \frac{l \cos \varphi' \mathcal{P}_l(\cos \varphi') - l\mathcal{P}_{l-1}(\cos \varphi')}{\cos^2 \varphi' - 1}, \\ \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \cos \varphi' d\varphi' &= - \int_0^{2\pi} [l \cos \varphi' \mathcal{P}_l(\cos \varphi') - l\mathcal{P}_{l-1}(\cos \varphi')] d\varphi', \\ \therefore \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \cos \varphi' d\varphi' &= \begin{cases} \frac{l}{l+1} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{l-1}(\cos \varphi') d\varphi' & \text{se } l \geq 1, \\ 0 & \text{se } l < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

C.2 Propriedade (3.16)

Também devemos ter:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \sin^2 \varphi' d\varphi' &= \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') d\varphi' - \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \cos^2 \varphi' d\varphi', \\ \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \cos^2 \varphi' d\varphi' &= [\mathcal{P}_l(\cos \varphi') \cos \varphi' \sin \varphi']_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{d(\mathcal{P}_l(\cos \varphi') \cos \varphi')}{d\varphi'} \sin \varphi' d\varphi' = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d(\mathcal{P}_l(\cos \varphi') \cos \varphi')}{d \cos \varphi'} \sin^2 \varphi' d\varphi' = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \sin^2 \varphi' d\varphi' \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{d\mathcal{P}_l(\cos \varphi')}{d \cos \varphi'} \cos \varphi' \sin^2 \varphi' d\varphi', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\mathcal{P}_l(\cos \varphi')}{d \cos \varphi'} \cos \varphi' \sin^2 \varphi' d\varphi' &= l \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{l-1}(\cos \varphi') \cos \varphi' d\varphi' - l \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \cos^2 \varphi' d\varphi', \\ \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \cos^2 \varphi' d\varphi' &= \frac{l}{l+1} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{l-1}(\cos \varphi') \cos \varphi' d\varphi' + \frac{1}{l+1} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \sin^2 \varphi' d\varphi', \\ \frac{l+2}{l+1} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \sin^2 \varphi' d\varphi' &= \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') d\varphi' - \frac{l}{l+1} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{l-1}(\cos \varphi') \cos \varphi' d\varphi'. \end{aligned}$$

De acordo com resultados anteriores devemos ter:

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{l-1}(\cos \varphi') \cos \varphi' d\varphi' = \frac{l-1}{l} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{l-2}(\cos \varphi') d\varphi'.$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') \sin^2 \varphi' d\varphi' = \begin{cases} \frac{l+1}{l+2} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') d\varphi' - \frac{l-1}{l+2} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{l-2}(\cos \varphi') d\varphi' & \text{se } l \geq 2, \\ \frac{l+1}{l+2} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') d\varphi' & \text{se } l < 2. \end{cases}$$

C.3 Propriedade (3.17)

Também é válida, e de fácil demonstração, a igualdade:

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') d\varphi' = \begin{cases} 2 \int_0^{\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') d\varphi' & \text{se } l \text{ é par,} \\ 0 & \text{se } l \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Começamos pela expressão $\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \varphi') d\varphi'$, ao quebrarmos a integração nos dois conjuntos $(0, \pi)$ e $(\pi, 2\pi)$ e fazermos uma mudança de variáveis $\varphi' + \pi = \theta$, temos

$$\int_0^{\pi} [\mathcal{P}_l(\cos \varphi') + \mathcal{P}_l(-\cos \varphi')] d\varphi' = \int_0^{\pi} [1 + (-1)^l] \mathcal{P}_l(\cos \varphi') d\varphi',$$

esta última expressão é exatamente o que queríamos, ou seja, a propriedade (3.17).

C.4 Propriedade (3.18)

Provaremos a propriedade (3.18) por indução, veja que:

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_0(\cos x) dx = 2\pi.$$

Por meio da relação de recorrência:

$$(n+1)\mathcal{P}_{n+1}(x) = (2n+1)x\mathcal{P}_n(x) - n\mathcal{P}_{n-1}(x),$$

devemos ter

$$(n+1) \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{n+1}(\cos x) dx = (2n+1) \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_n(\cos x) \cos x dx - n \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{n-1}(\cos x) dx.$$

Usando o resultado (3.15) teremos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{n+1}(\cos x) dx &= \frac{(2n+1)}{(n+1)} \frac{n}{(n+1)} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{n-1}(\cos x) dx - \frac{n}{(n+1)} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{n-1}(\cos x) dx \\ &= \frac{n^2}{(n+1)^2} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{n-1}(\cos x) dx. \end{aligned}$$

Portanto devemos ter

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{2l}(\cos x) dx = \frac{(2l-1)^2}{(2l)^2} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{2l-2}(\cos x) dx.$$

Mas como sabemos que

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_0(\cos x) dx = 2\pi \geq 0,$$

então por indução teremos:

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{2l}(\cos x) dx \geq 0 \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$