

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA INTERINSTITUCIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA  
UFSCar-USP

KARINA BINDANDI EMBOABA DE OLIVEIRA

## **MODELOS DE DIFUSÃO DE INOVAÇÃO EM GRAFOS**

Tese apresentada ao Departamento de Estatística – DEs/UFSCar e ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título Doutora em Estatística - Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística UFSCar-USP.

Orientador: Prof. Dr. Pablo Martin Rodriguez

**São Carlos  
Maio de 2019**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA INTERINSTITUCIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA  
UFSCar-USP

KARINA BINDANDI EMBOABA DE OLIVEIRA

**INNOVATION DIFFUSION GRAPH MODELS**

Doctoral dissertation submitted to the Department of Statistics – DEs/UFSCar and to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC/USP, in partial fulfillment of the requirements for the PhD degree Statistics – Interagency Program Graduate in Statistics UFSCar-USP.

Advisor: Prof. Dr. Pablo Martin Rodriguez

**São Carlos**  
**May 2019**





## UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

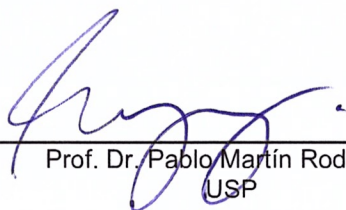
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística

---

### Folha de Aprovação

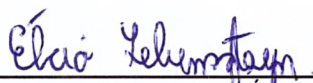
---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Karina Bindandi Emboaba de Oliveira, realizada em 12/04/2019:



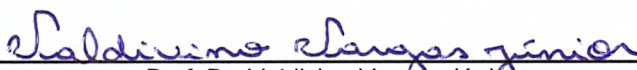
---

Prof. Dr. Pablo Martín Rodríguez  
USP



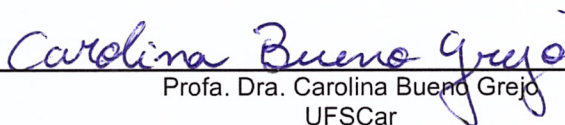
---

Prof. Dr. Elcio Lebensztayn  
UNICAMP



---

Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior  
UFG



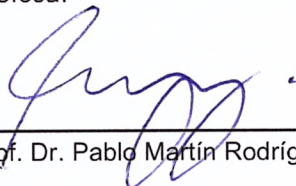
---

Profa. Dra. Carolina Bueno Grejo  
UFSCar

---

Prof. Dr. Fábio Prates Machado  
IME-USP

Certifico que a defesa realizou-se com a participação à distância do(s) membro(s) Fábio Prates Machado e, depois das arguições e deliberações realizadas, o(s) participante(s) à distância está(ao) de acordo com o conteúdo do parecer da banca examinadora redigido neste relatório de defesa.



---

Prof. Dr. Pablo Martín Rodríguez

*Dedico este trabalho ao meu marido Felipe,  
meu pai Edson e minha mãe Bete (in memoriam),  
meu irmão Junim e minha cunhada Thais.*



# AGRADECIMENTOS

---

---

A Deus por ter me dado saúde, força, persistência e sabedoria para poder chegar até aqui.

Ao meu orientador Pablo Martin Rodríguez pela oportunidade de realizar esse trabalho, pela confiança depositada em mim e por todo apoio durante esses quatro anos.

Ao meu marido Felipe pelo incansável apoio durante o desenvolvimento deste trabalho, por sua paciência, compreensão e carinho que foram fundamentais nesta trajetória.

Ao meu pai e a minha mãe (in memoriam) pela educação que eles me proporcionaram e por serem exemplos de amor, batalha, superação e inspiração na minha vida. Ao meu irmão Juninho e minha cunhada Thais pela amizade e confiança.

Aos professores Carolina Bueno, Élcio Lebensztayn, Fábio Machado e Valdivino Vargas, integrantes da banca examinadora, obrigada pela leitura cuidadosa do trabalho e pelas sugestões adicionais.

A todos os colegas e amigos que de certa forma contribuíram para realização desse trabalho. Em especial aos meus grandes e velhos amigos de São Carlos Feu, Carol, Tácito, Pati e os novos que fiz quando ingressei no Itaú (André, Dieguito, Bruno, Bezerra, Vitor, Diego, Marco, Diandra, e tantos outros). Agradeço também a minha nova equipe de produtos, os quais estão me apoiando nessa etapa final.

À FAPESP (Processo 2014/23810-0) e à CAPES pelo aporte financeiro. As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade do(s) autor(es) e não necessariamente refletem a visão da FAPESP e da CAPES.





*“No meio da dificuldade encontra-se a oportunidade.”*  
*(Albert Einstein)*



# RESUMO

OLIVEIRA, KARINA B. E. **Modelos de difusão de inovação em grafos**. 2019. 65 p. Tese (Doutorado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Áreas como política, economia e marketing sofrem grandes influências no que diz respeito à difusão de informação. Por este motivo, diversos ramos da ciência tem estudado tais fenômenos a fim de simulá-los e compreendê-los por meio de modelos matemáticos e/ou estocásticos. Em virtude disto, este trabalho de doutorado tem como objetivo generalizar modelos de difusão de inovação já existentes na literatura.

O primeiro modelo utiliza o mecanismo de “*social reinforcement*” para difusão de inovação e o qual foi construído para o grafo completo. Neste caso, consideramos uma população finita, fechada, totalmente misturada e subdividida em quatro classes de indivíduos denominados ignorantes, conscientes, adotadores e abandonadores da inovação. Assim, será apresentado uma Lei Fraca dos Grandes Números e um Teorema Central do Limite para a proporção final da população que nunca escutou sobre a inovação e aqueles que já conhecem sobre ela mas ainda não adotaram. Ademais, também será apresentado um resultado de convergência para o máximo de adotadores em um intervalo estocástico, assim como o instante de tempo em que o processo atinge esse estado. Para esse estudo, foram utilizados resultados da teoria de cadeias de Markov dependentes da densidade.

Ademais, formulamos um modelo estocástico com estrutura de estágios para descrever o fenômeno da difusão de inovação em uma população estruturada. Mais precisamente, propomos uma cadeia de Markov a tempo contínuo definida na rede hipercúbica  $d$ -dimensional. Cada indivíduo da população deve estar em algum dos  $M + 1$  estados pertencentes ao conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, M\}$ . Nesse sentido, 0 representa um ignorante,  $i$  para  $i \in \{1, \dots, M - 1\}$  um consciente no estágio  $i$  e  $M$  um adotador. Dessa forma, são estudados argumentos que permitem encontrar condições suficientes nas quais a inovação se espalha ou não com probabilidade positiva.

**Palavras-chave:** difusão de inovação, cadeias de Markov dependentes da densidade, processo de contato, teoremas limites, modelos com *social reinforcement*.



# ABSTRACT

OLIVEIRA, KARINA B. E. **Innovation diffusion graph models**. 2019. 65 p. Tese (Doutorado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Areas such as politics, economics and marketing are heavily influential in terms of information diffusion. For this reason, several branches of science have studied such phenomena in order to simulate and understand them by mathematical and/or stochastic models. In this context, this phd project aims to generalize innovation diffusion models that there is in the literature.

The first model uses the social reinforcement mechanism for diffusion of innovation and which was built for the complete graph. In this case, we consider a finite population, closed, totally mixed and subdivided into four classes of individuals called ignorants, aware, adopters and abandoner of innovation. We prove a Law of Large Numbers and a Central Limit Theorem for the proportion of the population who have never heard about the innovation and those who know about it but they have not adopted it yet. In addition, we also obtain result for the convergence of the maximum of adopter in a stochastic interval, as well as the instant of time that the process reaches that state. For this study, we used results of the theory of density dependent Markov chains.

Furthermore, we formulated a stochastic model with structure stages to describe the phenomenon of innovation diffusion in a structured population. More precisely, we proposed a continuous time Markov chain defined in a population represented by the  $d$ -dimensional integer lattice. Each individual of the population must be in some of the  $M + 1$  states belonging to the set  $\{0, 1, 2, \dots, M\}$ . In this sense, 0 stands for ignorant,  $i$  for  $i \in \{1, \dots, M - 1\}$  for aware in stage  $i$  and  $M$  for adopter. The arguments, that allow to obtain sufficient conditions under which the innovation either becomes extinct or survives with positive probability, are studied.

**Keywords:** innovation diffusion, density dependent Markov chains, contact process, limit theorems, social reinforcement models.



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

---

Figura 1 – Comportamento de $f$ - Os quatro possíveis casos em termos de $x_0$ e $z_0$ . . .	22
Figura 2 – Comportamento de $x_\infty$ e $y_\infty$ com relação a $\lambda$ . . . . .	23
Figura 3 – Comportamento de $y_\infty$ com relação a $\lambda$ considerando diferentes condições iniciais . . . . .	29
Figura 4 – Representação gráfica do modelo de difusão de inovação com 3 etapas na reta $\mathbb{Z}$	39





# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	15
2	MODELO DE ADOÇÃO E ABANDONO DA INOVAÇÃO EM UM GRAFO COMPLETO . . . . .	19
2.1	O modelo . . . . .	19
2.2	Principais Resultados . . . . .	21
2.3	Provas . . . . .	24
2.3.1	<i>Mudança do tempo</i> . . . . .	24
2.3.2	<i>Limite determinístico para o processo acelerado</i> . . . . .	25
2.3.3	<i>Prova dos resultados</i> . . . . .	26
3	MODELO DE DIFUSÃO DE INOVAÇÃO COM $M$ ETAPAS EM $\mathbb{Z}^d$ . . . . .	35
3.1	Modelo de difusão de inovação em 2 etapas . . . . .	35
3.2	Modelo de difusão de inovação em 3 etapas . . . . .	37
3.2.1	<i>Construção gráfica de Harris para o modelo 3 etapas</i> . . . . .	38
3.2.2	<i>Principais definições e resultados para o modelo 3 etapas</i> . . . . .	39
3.3	Modelo de difusão de inovação em $M$ etapas . . . . .	43
3.3.1	<i>Construção gráfica de Harris para o modelo <math>M</math> etapas</i> . . . . .	44
3.3.2	<i>Principais definições e resultados para o modelo <math>M</math> etapas</i> . . . . .	45
	REFERÊNCIAS . . . . .	49
	APÊNDICE A CADEIA DE MARKOV DEPENDENTE DA DENSIDADE . . . . .	51
A.1	Definição e caracterização do processo . . . . .	51
A.2	Lei dos Grandes Números . . . . .	52
A.3	Teorema Central do Limite . . . . .	53
	APÊNDICE B RESULTADOS AUXILIARES . . . . .	55
B.1	Matriz de Covariância do Teorema 2 . . . . .	55
B.2	Convergência do máximo de uma função . . . . .	56
	APÊNDICE C CÓDIGOS FONTE . . . . .	59
C.1	Simulação do modelo de difusão de inovação . . . . .	59

<b>C.2</b>	<b>Construção da Figura 1 . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>C.3</b>	<b>Construção da Figura 2 . . . . .</b>	<b>64</b>

---

## INTRODUÇÃO

---

O estudo da propagação de informação (notícias, inovações, rumores) é importante e se tornou o foco de muitos pesquisadores nos dias atuais (LEBENSZTAYN; MACHADO; RODRÍGUEZ, 2011b; LEBENSZTAYN; MACHADO; RODRÍGUEZ, 2011a; COLETTI; RODRÍGUEZ; SCHINAZI, 2012; ARRUDA *et al.*, 2015; COLETTI; OLIVEIRA; RODRIGUEZ, 2016). Em geral, os modelos considerados são adaptações dos modelos epidêmicos suscetível-infectado (SI), suscetível-infectado-suscetível (SIS) ou suscetível-infectado-removido (SIR), bem conhecidos na literatura de modelagem matemática, ou do chamado processo de contato da área de probabilidade (GRIMMETT, 2009, Cap. 6).

Um dos primeiros modelos matemáticos para descrever a difusão de novos produtos e tecnologias foi introduzido por Bass (1969), o qual assume que a venda de um novo produto é estimulada essencialmente pelo “boca a boca” de clientes satisfeitos. O modelo de Bass assume que adotadores de uma inovação são subdivididos em dois grupos: inovadores e imitadores. A decisão dos inovadores é influenciada somente pelos meios de comunicação ou outras influências externas. Tais indivíduos decidem adotar uma inovação independentemente da decisão de outros do meio social. Por outro lado, a decisão dos imitadores é influenciada pelo “boca a boca” ou outra influência daqueles que já usaram o produto. Mais precisamente, se  $n$  é o número total de indivíduos que possivelmente usarão o produto e  $A(t)$  é o número de adotadores no tempo  $t$ , o modelo de Bass pode ser definido pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \left( p + \frac{q}{n}A(t) \right) (n - A(t)),$$

em que o parâmetro  $p$  é o coeficiente de inovação e  $q$  é o coeficiente de imitação. Desde então, o modelo de Bass se tornou um dos mais importantes e utilizados no contexto de estratégia de marketing para promover a adoção de um novo produto e sua penetração no mercado.

Uma tentativa para generalização da dinâmica desse processo surge com Wang *et al.* (2006), o qual propôs um modelo matemático com estrutura de estágios como sugerido por Rogers (2003). Neste contexto, Wang *et al.* (2006) estendeu o modelo de Bass introduzindo uma

estrutura de dois estágios: o estágio da consciência da informação e o da tomada de decisão. No entanto, esse modelo ainda assume a premissa de que a população é representada por um grafo completo, ou em outras palavras, é homogeneamente misturada. Nesse sentido, considera-se um sistema de equações diferenciais através do qual é possível obter condições suficientes para o sucesso da difusão da inovação.

Krapivsky, Redner e Volovik (2011) estudaram como o mecanismo de “*social reinforcement*” direciona a propagação de inovações permanentes e modas passageiras. Neste modelo, ou a inovação pode ser adotada permanentemente ou os adotadores podem abandoná-la a uma taxa  $\lambda > 0$ . Neste, a inovação pode se espalhar até um certo momento antes de ser abandonada e desaparecer. Além disso, o termo “*social reinforcement*” trata de uma situação em que o indivíduo solicita várias constatações de conhecidos antes de adotar a inovação de fato. Outro ponto a considerar é que o termo “*social reinforcement*” aparece como contraste aos modelos clássicos de epidemia, na qual um indivíduo suscetível pode tornar-se infectado pela simples exposição à infecção. Quando há o abandono da inovação e não há o efeito do *social reinforcement* o modelo se assemelha ao modelo epidêmico SIR. Nesse cenário, é possível identificar os adotadores como os infectados, os abandonadores como os recuperados e os suscetíveis são os mesmo em ambos os modelos.

Ademais, com o intuito de descrever de forma mais adequada processos da vida real, alguns modelos modificam essas e outras dinâmicas simples. Diante disso, foi desenvolvido um modelo estocástico espacial para a difusão de inovação em dois estágios cuja proposta é analisar a influência dos parâmetros no comportamento qualitativo da dinâmica (COLETTI; OLIVEIRA; RODRIGUEZ, 2016). Esta, sob algumas condições, pode ser considerada como uma versão espacial do modelo de Bass. Os argumentos para o estudo são baseados em comparações do processo original com modelos de percolação orientada convenientemente definidos e com a evolução do processo de contato em caixas de volume finito.

Neste contexto, o objetivo desta tese é introduzir resultados que generalizem aqueles do trabalho proposto por Krapivsky, Redner e Volovik (2011). Para isto, introduzimos um tratamento analítico baseado na teoria de convergência de cadeias de Markov dependentes da densidade (LEBENSZTAYN; MACHADO; RODRÍGUEZ, 2011a; LEBENSZTAYN; MACHADO; RODRÍGUEZ, 2011b) para analisar como a proporção final de ignorantes e conscientes se comportam assintoticamente em uma população homogeneamente misturada e finita. Para obter esse valor limite e também a informação sobre o comportamento das flutuações aleatórias entre a proporção final e assintótica para os ignorantes e conscientes da população, serão apresentados uma Lei Fraca dos Grandes Números e um Teorema Central do Limite.

Outra contribuição da tese diz respeito a um resultado sobre a convergência do número máximo de adotadores em um intervalo estocástico, assim como também para o instante de tempo na qual o processo atinge esse estado (tempo de emergência). Durante todo o desenvolvimento dos estudos e da revisão bibliográfica, não encontramos resultados análogos na literatura de

modelos epidêmicos que tratassem sobre o tempo de emergência. Para finalizar, uma outra consideração a ser feita desse trabalho é a obtenção de um teorema que generaliza o trabalho introduzido por [Coletti, Oliveira e Rodriguez \(2016\)](#) para um modelo com  $M$  etapas.

Esse documento está organizado da seguinte forma:

- No Capítulo 2 introduziremos uma generalização para o modelo de adoção e abandono da inovação proposto por [Krapivsky, Redner e Volovik \(2011\)](#). Além disso, serão apresentados alguns resultados assintóticos como uma Lei Fraca dos Grandes Números, um Teorema Central do Limite e a convergência do número máximo de adotadores no sistema.
- No Capítulo 3 serão apresentados modelos de difusão de inovação em 2 e 3 etapas e introduziremos a generalização do modelo para  $M$  etapas considerando os principais resultados e as provas dos teoremas.



---

# MODELO DE ADOÇÃO E ABANDONO DA INOVAÇÃO EM UM GRAFO COMPLETO

---

Uma motivação inicial para esse capítulo foi inspirado em [Krapivsky, Redner e Volovik \(2011\)](#), no qual o termo *social reinforcement* aparece em contraste aos modelos clássicos de epidemia. Neste último, um indivíduo suscetível pode tornar-se infectado pela simples exposição à infecção, ao passo que o primeiro, um indivíduo exige várias solicitações de conhecidos antes de adotar uma inovação. Nesse modelo, uma inovação é adotada permanentemente, ou adotadores podem abandoná-la a uma certa taxa  $\lambda > 0$ . No segundo caso, a inovação se espalha até um certo momento antes de ser abandonada e desaparecer.

Neste capítulo propomos uma generalização para o modelo descrito acima, assim como apresentaremos resultados assintóticos para a proporção final do número de ignorantes e conscientes do processo. Além disso, obtemos resultados sobre a convergência do número máximo de adotadores e também o instante de tempo no qual o sistema atinge esse estado.

## 2.1 O modelo

Para definir o modelo estocástico, considere uma população fechada e homogeneamente misturada de tamanho  $N$ . Denotamos por  $X^{(N)}(t)$ ,  $Y^{(N)}(t)$ ,  $Z^{(N)}(t)$  e  $W^{(N)}(t)$ , o número de ignorantes, conscientes, adotadores e abandonadores, respectivamente, no tempo  $t$ , para  $t \geq 0$ . Além disso, note que:

$$X^{(N)}(t) + Y^{(N)}(t) + Z^{(N)}(t) + W^{(N)}(t) = N \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Considere a cadeia de Markov a tempo contínuo  $\{(X^{(N)}(t), Y^{(N)}(t), Z^{(N)}(t))\}_{t \geq 0}$  com



transições e taxas correspondentes dadas por:

$$\begin{array}{ll}
 \text{transição} & \text{taxa} \\
 (-1, 1, 0) & X \cdot Z, \\
 (0, -1, 1) & Y \cdot Z, \\
 (0, 0, -1) & \lambda \cdot Z,
 \end{array} \tag{2.1}$$

e denomina-se esta cadeia como o processo de adoção e abandono da inovação.

Em palavras, o primeiro caso indica a transição do processo no qual um ignorante interage com um adotador e o ignorante transforma-se em um consciente imediatamente. O segundo caso indica a transição na qual o consciente interage com um adotador e ele se transforma em adotador. Por fim, a última transição representa a situação na qual um adotador pode abandonar a inovação a uma taxa constante e igual a  $\lambda$ .

Além disso, assumimos que o processo começa com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned}
 x_0^{(N)} &:= \frac{X^{(N)}(0)}{N}, \\
 y_0^{(N)} &:= \frac{Y^{(N)}(0)}{N}, \\
 z_0^{(N)} &:= \frac{Z^{(N)}(0)}{N}, \\
 w_0^{(N)} &:= \frac{W^{(N)}(0)}{N}.
 \end{aligned}$$

Isto é,  $x_0^{(N)}, y_0^{(N)}, z_0^{(N)}, w_0^{(N)} \in [0, 1]$  são as proporções iniciais de ignorantes, conscientes, adotadores e abandonadores da população, respectivamente, definidas de maneira que

$$x_0^{(N)} + y_0^{(N)} + z_0^{(N)} + w_0^{(N)} = 1.$$

Por fim, também consideramos que os seguintes limites existam:

$$\begin{aligned}
 x_0 &:= \lim_{N \rightarrow \infty} x_0^{(N)} > 0, \\
 y_0 &:= \lim_{N \rightarrow \infty} y_0^{(N)}, \\
 z_0 &:= \lim_{N \rightarrow \infty} z_0^{(N)}, \\
 w_0 &:= \lim_{N \rightarrow \infty} w_0^{(N)}.
 \end{aligned}$$

Uma quantidade de interesse a ser analisada é a proporção de ignorantes no final do processo, isto é, no momento no qual não há mais adotadores na população. Assim, como o processo eventualmente finaliza, definimos  $\tau^{(N)} := \inf \{t \geq 0 : Z^{(N)}(t) = 0\}$  como o tempo de absorção do processo. Mais especificamente,  $\tau^{(N)}$  é o primeiro instante de tempo no qual o número de adotadores na população é zero.

Nosso principal objetivo é estudar o comportamento das variáveis aleatórias  $X^{(N)}(\tau^{(N)})/N$  e  $Y^{(N)}(\tau^{(N)})/N$ , para  $N$  suficientemente grande, enunciando uma Lei Fraca dos Grandes Números e um Teorema Central do Limite.

A abordagem que foi utilizada para provar os teoremas é baseada na teoria de cadeias de Markov dependentes da densidade, introduzida por [Ethier e Kurtz \(1986\)](#).

## 2.2 Principais Resultados

**Definição 1.** Seja  $\lambda > 0$  e considere a função  $f : (0, x_0] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(x) = 1 - w_0 - x \left( 1 + \frac{y_0}{x_0} \right) + (x + \lambda) \ln \frac{x}{x_0} \quad (2.2)$$

em que  $w_0, y_0 \in [0, 1]$ , e  $x_0 \in (0, 1]$ . Definimos  $x_\infty := x_\infty(\lambda, x_0, y_0, w_0)$  como sendo a única raiz  $x$  da função  $f$  no intervalo  $(0, x_0]$  satisfazendo  $f'(x) \geq 0$ .

Note que  $x_\infty$  é a única raiz de  $f$  no intervalo  $(0, x_0]$  exceto no caso em que  $x_0 < \lambda$  e  $z_0 = 0$ . Ver Figura 1.

**Observação 1.** Para provar a existência de pelo menos uma raiz no intervalo  $(0, x_0]$ , basta notar que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  e também,  $f(x_0) = z_0 \geq 0$ , e consequentemente segue pelo Teorema do Valor Intermediário que existe uma raiz no intervalo  $(0, x_0]$ . Com relação à unicidade, estudou-se o comportamento local no intervalo  $(0, x_0]$  para a função  $f(x)$  avaliando os 4 possíveis casos como descritos na Figura 1.

No que segue, será apresentado uma Lei Fraca dos Grandes Números para a proporção da população que nunca escutou sobre a inovação (ignorantes) e aquela que já conhece mas ainda não adotou (conscientes).

**Teorema 1.** Considere o processo de adoção e abandono da inovação e  $\lambda > 0$ , então:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{X^{(N)}(\tau^{(N)})}{N} = x_\infty \quad \text{e} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{Y^{(N)}(\tau^{(N)})}{N} = y_\infty \quad \text{em probabilidade,}$$

em que  $y_\infty := x_\infty \left[ \frac{y_0}{x_0} - \ln \left( \frac{x_\infty}{x_0} \right) \right]$ .

**Observação 2.** Da mesma forma, a convergência em probabilidade também vale para  $W^{(N)}(\tau^{(N)})/N$ , isto é,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{W^{(N)}(\tau^{(N)})}{N} = w_\infty,$$

em que  $w_\infty := 1 - x_\infty - y_\infty$ .

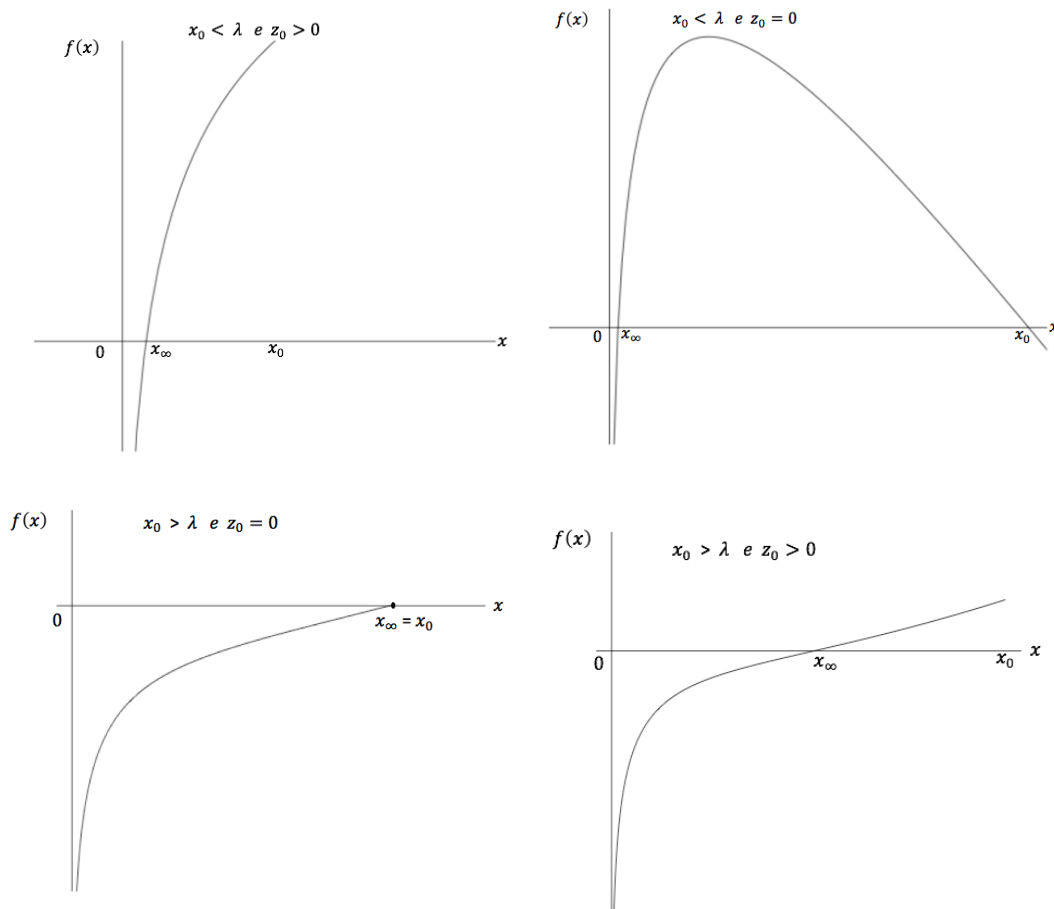


Figura 1 – Comportamento de  $f$  - Os quatro possíveis casos em termos de  $x_0$  e  $z_0$

Fonte: Elaborada pela autora.

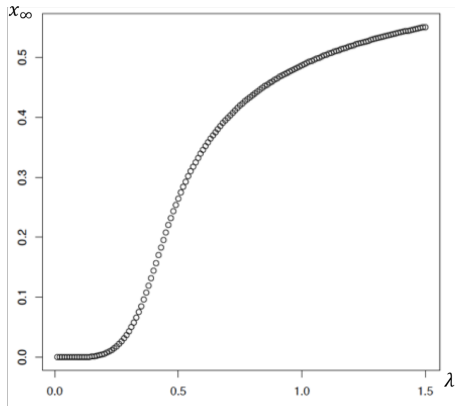
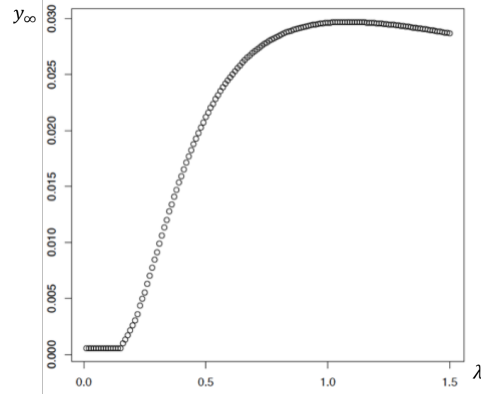
**Observação 3.** O Teorema 1 indica que para  $N$  suficientemente grande, o processo acaba, restando aproximadamente uma proporção  $x_\infty$  de ignorantes e  $y_\infty$  de conscientes na população. Ademais, também é possível simular qual é o comportamento das proporções assintóticas  $x_\infty$  e  $y_\infty$  com relação a variação de  $\lambda$  (vide Figura 2).

Adicionando ao que já foi abordado no Teorema 1, também é possível obter um Teorema Central do Limite que fornece a informação sobre o comportamento das flutuações aleatórias entre a proporção final e proporção assintótica para os ignorantes e conscientes da população.

**Teorema 2.** Seja  $y_0 = 0$ ,  $\lambda > x_0$  e  $z_0 = 0$ , ou  $y_0 = 0$ ,  $z_0 > 0$  e  $\lambda > z_0$ , então:

$$\sqrt{N} \left( \frac{X^{(N)}(\tau^{(N)})}{N} - x_\infty, \frac{Y^{(N)}(\tau^{(N)})}{N} - y_\infty \right) \implies N_2(0, \Sigma) \quad \text{quando } N \rightarrow \infty,$$

em que  $\implies$  denota a convergência em distribuição e  $N_2(0, \Sigma)$  é a distribuição normal bivariada com média zero e matriz de covariância  $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$ , cujos elementos  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{22}$  e  $\Sigma_{12}$  podem ser escritos como funções dos parâmetros (ver Apêndice B.1 para detalhes).

Figura 2 – Comportamento de  $x_\infty$  e  $y_\infty$  com relação a  $\lambda$ .(a)  $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0.67, 0.01, 0.31, 0.01)$ (b)  $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0.07, 0.01, 0.91, 0.01)$ 

Fonte: Elaborada pela autora.

**Observação 4.** Note que nossos resultados são obtidos como uma generalização das condições iniciais como apresentadas em [Krapivsky, Redner e Volovik \(2011\)](#). Assim, considere a função  $f(x) = 1 - w_0 - x[1 + y_0/x_0] + \ln x/x_0[x + \lambda]$  e  $x_\infty$  como sendo a única raiz  $x$  da função  $f$  no intervalo  $(0, x_0]$  satisfazendo  $f'(x) \geq 0$ . Ao fixar as seguintes condições iniciais

$$X^{(N)}(0) = (1 - \rho)N, \quad Y^{(N)}(0) = 0, \quad Z^{(N)}(0) = \rho N, \quad W^{(N)}(0) = 0$$

e fazer  $N \rightarrow \infty$ , obtemos  $x_0 = 1 - \rho$ ,  $z_0 = \rho$  e  $w_0 = y_0 = 0$ . Dessa forma, é possível recuperar a mesma expressão para  $x_\infty$  como definido no artigo de [Krapivsky, Redner e Volovik \(2011\)](#). Em outras palavras, basta lembrar que  $f(x_\infty) = 0$ , e substituir  $x_0, y_0, z_0, w_0$  em  $f(x)$  para resultar em

$$1 - x_\infty + (x_\infty + \lambda) \ln \frac{x_\infty}{1 - \rho} = 0.$$

Dividindo ambos os lados por  $x_\infty + \lambda$ , e aplicando a função exponencial, obtemos que  $x_\infty = (1 - \rho)e^{\tau_\infty}$ , coincidindo com a expressão no artigo, a qual era denotada por  $c_\infty$ .

Além dos dois resultados assintóticos para a proporção final do número de ignorantes e conscientes, também é possível obter um resultado de convergência do máximo de adotadores em um intervalo estocástico e para o instante de tempo em que isso ocorre.

**Teorema 3.** Considere o processo de adoção e abandono da inovação com transições e taxas como definidas em (2.1). Nessas condições, temos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 < t < \tau^{(N)}} \frac{Z^{(N)}(t)}{N} = \frac{-\lambda}{W_0 \left( \frac{-\lambda e^{-\frac{y_0}{x_0}}}{x_0} \right)} \quad \text{quase certamente} \quad (2.3)$$

em que  $W_0$  corresponde ao ramo principal da função de Lambert, a qual é a inversa da função  $x \rightarrow xe^x$ , isto é, ela satisfaz  $W_0(x)e^{W_0(x)} = x$ .

**Observação 5.** A função de Lambert é definida como sendo a inversa da função  $x \rightarrow xe^x$ , isto é, a função que satisfaz

$$W(x)e^{W(x)} = x.$$

Se  $-1/e \leq x < 0$  temos dois possíveis valores reais de  $W(x)$ . Denotamos por  $W_0(x)$  ao ramo de  $W$  tal que  $-1 \leq W(x)$  e por  $W_{-1}(x)$  aquele tal que  $W(x) \leq -1$ . Os principais resultados e aplicações dessa função se encontram reunidos em [Corless et al. \(1996\)](#).

No que segue, será enunciado um resultado de convergência para o tempo de emergência, o qual corresponde ao primeiro instante de tempo no qual o processo atinge o máximo de adotadores.

**Proposição 1.** Considere o processo de adoção e abandono da inovação com transições e taxas como definidas em (2.1). Seja o tempo de emergência definido como:

$$\tau_e^{(N)} := \inf \left\{ t > 0 : Z^{(N)}(t) = \max_{0 < s < \tau^{(N)}} Z^{(N)}(s) \right\}.$$

Então, vale a seguinte convergência:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\tau_e^{(N)} - \xi^{(N)}| = 0 \quad \text{quase certamente,} \quad (2.4)$$

em que

$$\xi^{(N)} := \inf \left\{ t > 0 : \int_0^t Z^{(N)}(s) ds > \ln \left( \frac{\lambda}{x_0 W_0 \left( \frac{-\lambda e^{-\frac{y_0}{x_0}}}{x_0} \right)} \right) \right\}.$$

## 2.3 Provas

Nessa seção serão enunciadas as principais ideias para provar os Teoremas 1, 2 e 3 e a Proposição 1. Para simplificar a notação denotamos  $V^{(N)}(t) := (X^{(N)}(t), Y^{(N)}(t), Z^{(N)}(t))$ ,  $t \geq 0$ . Primeiro, por meio de uma conveniente mudança do tempo do processo, definimos um novo processo  $\{\tilde{V}^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$  com as mesmas transições que  $\{V^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$  de tal maneira que eles finalizam no mesmo ponto do espaço de estados. A transformação é feita de modo que  $\{\tilde{V}^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$  é uma cadeia de Markov dependente da densidade para a qual pode-se aplicar resultados de convergência já conhecidos na literatura e os quais se encontram enunciados no Apêndice A.

### 2.3.1 Mudança do tempo

Definimos

$$\Theta^{(N)}(t) := \int_0^t Z^{(N)}(s) ds; \quad 0 \leq t \leq \tau^{(N)}$$

$$\gamma^{(N)}(s) := \inf\{t : \Theta^{(N)}(t) > s\}; \quad 0 \leq s \leq \int_0^\infty Z^{(N)}(u) du$$

e seja  $\tilde{V}^{(N)}(t) := V^{(N)}(\gamma^{(N)}(t))$ . O processo com a mudança do tempo  $\{\tilde{V}^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$  tem as mesmas transições que  $\{V^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$ . Então, se definirmos

$$\tilde{\tau}^{(N)} := \inf\{t \geq 0; \tilde{Z}^{(N)}(t) = 0\},$$

temos que  $V^{(N)}(\tau^{(N)}) = \tilde{V}^{(N)}(\tilde{\tau}^{(N)})$ . Além disso,  $\{\tilde{V}^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$  é uma cadeia de Markov a tempo contínuo com estado inicial  $(Nx_0^{(N)}, Ny_0^{(N)}, Nz_0^{(N)})$  e transições e taxas dadas por:

transição	taxa	
$l_0 := (-1, 1, 0)$	$\tilde{X}$ ,	(2.5)
$l_1 := (0, -1, 1)$	$\tilde{Y}$ ,	
$l_2 := (0, 0, -1)$	$\lambda$ .	

### 2.3.2 Limite determinístico para o processo acelerado

Definimos para  $t \geq 0$ ,

$$\tilde{v}^{(N)}(t) = (\tilde{x}^{(N)}(t), \tilde{y}^{(N)}(t), \tilde{z}^{(N)}(t)) := \frac{\tilde{V}^{(N)}(t)}{N}$$

e consideramos as funções:

$$\begin{aligned} \beta_{l_0}(x, y, z) &= x, \\ \beta_{l_1}(x, y, z) &= y, \\ \beta_{l_2}(x, y, z) &= \lambda. \end{aligned}$$

Note que as taxas em (2.5) podem ser escritas como:

$$N \left[ \beta_{l_i} \left( \frac{\tilde{X}}{N}, \frac{\tilde{Y}}{N}, \frac{\tilde{Z}}{N} \right) \right].$$

Então,  $\{\tilde{v}^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$  é uma cadeia de Markov dependente da densidade com possíveis transições no conjunto  $(1/N)\{l_0, l_1, l_2\}$ .

Diante disso, utilizando o Teorema 10 do Apêndice A é possível concluir que o processo  $\{\tilde{v}^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$  converge quase certamente quando  $N \rightarrow \infty$  para um limite determinístico (sistema de equações diferenciais). A função drift neste caso é dada por:

$$F(x, y, z) = \sum_{i=0}^2 l_i \beta_{l_i}(x, y, z) = (-x, x - y, y - \lambda).$$

Portanto, o sistema determinístico limite é regido pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \\ z'(t) = y(t) - \lambda \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \text{ e } z(0) = z_0. \end{cases}$$

A solução desse sistema é dada por  $v(t) := (x(t), y(t), z(t))$ , em que

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t} \\ y(t) = (y_0 + x_0 t) e^{-t} \\ z(t) = -x(t) - [y_0 e^{-t} + t x(t)] + (x_0 + y_0 + z_0) - \lambda t = f(x(t)) \end{cases} \quad (2.6)$$

e na qual  $f$  é a função definida em (2.2).

De acordo com o Teorema 10 do Apêndice A temos que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{v}^{(N)}(t) = v(t) \quad q.c.$$

uniformemente em intervalos de tempo limitados. Em particular, vamos provar para  $\tilde{x}^{(N)}$  e  $\tilde{y}^{(N)}$  que a convergência é uniforme em toda a reta.

**Lema 1.** Vale que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{x}^{(N)}(t) = x(t) \quad q.c. \quad (2.7)$$

uniformemente em  $\mathbb{R}$ .

*Demonstração.* De fato, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $t_0 = t_0(\varepsilon)$  tal que  $x(t) \leq \varepsilon/2$ , para todo  $t \geq t_0$ . Pela convergência uniforme no intervalo  $[0, t_0]$  (citado anteriormente), existe  $N_0 = N_0(\varepsilon)$  tal que

$$|\tilde{x}^{(N)}(t) - x(t)| \leq \varepsilon/2 \quad \text{para todo } N \geq N_0 \text{ e } t \in [0, t_0].$$

Logo, para todo  $N \geq N_0$  e  $t \geq t_0$ ,

$$\tilde{x}^{(N)}(t) \leq \tilde{x}^{(N)}(t_0) \leq x(t_0) + \varepsilon/2 \leq \varepsilon,$$

quando  $|\tilde{x}^{(N)}(t) - x(t)| \leq \varepsilon$ . □

De maneira análoga, também é possível provar o seguinte resultado.

**Lema 2.** Vale que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{y}^{(N)}(t) = y(t) \quad q.c. \quad (2.8)$$

uniformemente em  $\mathbb{R}$ .

### 2.3.3 Prova dos resultados

Para provar os Teoremas 1 e 2 será utilizado o Teorema 12 do Apêndice A como apoio, assim como toda a notação presente no apêndice. Neste caso, denote  $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_y, \mathcal{V}_z)$  como um processo vetorial gaussiano com matriz de covariância como definida em (A.10),  $\varphi(x, y, z) = z$  e

$$\tau_\infty = \inf\{t : z(t) \leq 0\} = \frac{x_0(1 - x_\infty - w_0) - y_0 x_\infty}{x_0(x_\infty + \lambda)}$$

Logo,

$$\nabla \varphi(v(\tau_\infty)) \cdot F(v(\tau_\infty)) = z'(\tau_\infty) = y_\infty - \lambda < 0, \quad (2.9)$$

em que  $y_\infty = x_\infty \left[ \frac{y_0}{x_0} - \log \left( \frac{x_\infty}{x_0} \right) \right]$ .

**Observação 6.** Note que a expressão obtida para  $y_\infty$  é derivada das seguintes manipulações algébricas. Como  $y(t) = y_0e^{-t} + x_0te^{-t}$  (de (2.6)) e  $x(t) = x_0e^{-t}$ , segue que é possível obter que  $y(t) = x(t)[y_0/x_0 + t]$ . Considere  $y(\tau_\infty) := y_\infty = x_\infty[y_0/x_0 + \tau_\infty]$  e além disso,  $\tau_\infty = -\ln(x_\infty/x_0)$ . Consequentemente, segue que  $y_\infty = x_\infty[y_0/x_0 - \ln(x_\infty/x_0)]$ .

Uma prova rigorosa para a expressão (2.9) pode ser obtida como segue. Existem três situações possíveis para o parâmetro  $\lambda$  e as condições iniciais  $x_0, y_0, z_0$ . Ao considerarmos o caso particular fixando  $y_0 = 0$  é possível obter uma prova rigorosa para a expressão (2.9). No que segue, serão exemplificados alguns casos mais em detalhe observando diferentes condições iniciais para os parâmetros  $\lambda, x_0$  e  $z_0$ . Note que existem três situações possíveis para o parâmetro  $\lambda$  e as condições iniciais  $x_0$  e  $z_0$ .

- (1)  $\lambda > x_0, z_0 = 0$  e  $y_0 = 0$ ;
- (2)  $\lambda > x_0, z_0 > 0$  e  $y_0 = 0$ ;
- (3)  $\lambda < x_0, z_0 > 0$  e  $y_0 = 0$ .

**Demonstração de (1).** Considere

$$y_\infty = 1 - x_\infty - w_\infty \leq 1 - w_\infty \stackrel{(I)}{\leq} 1 - w_0 \stackrel{(II)}{<} \lambda$$

(I) pode ser justificado pois  $w_\infty \geq w_0$ ,

(II) pode ser justificado pois

$$x_0 = 1 - w_0 - z_0 = 1 - w_0$$

e, além disso, a hipótese de que  $\lambda > x_0$ .

**Demonstração de (2) e (3).** Provar que a expressão (2.9) vale nessas condições, basta garantirmos que  $f(1 - \lambda - w_\infty) < 0$ , pois:

$$1 - x_\infty - w_\infty < \lambda \iff 1 - \lambda - w_\infty < x_\infty \iff f(1 - \lambda - w_\infty) < f(x_\infty) = 0.$$

Note que é possível desenvolver a seguinte expressão para  $f(1 - \lambda - w_\infty)$ :

$$\begin{aligned} f(1 - \lambda - w_\infty) &= 1 - w_0 - (1 - \lambda - w_\infty) + \ln\left(\frac{1 - \lambda - w_\infty}{x_0}\right) (1 - \lambda - w_\infty + \lambda) \\ &= \lambda + w_\infty - w_0 + \ln\left(\frac{1 - \lambda - w_\infty}{x_0}\right) (1 - w_\infty) \\ &< \lambda + w_\infty + \ln\left(\frac{1 - \lambda - w_\infty}{x_0}\right) (1 - w_\infty). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Para concluir a demonstração dos itens (2) e (3) basta provar que de fato a expressão  $\lambda + w_\infty + \ln\left(\frac{1 - \lambda - w_\infty}{x_0}\right) (1 - w_\infty)$  é menor do que 0. Isso ocorre somente quando:



$$(a) \log\left(\frac{1-\lambda-w_{\text{inf}}}{x_0}\right) < 0,$$

$$(b) (1-w_\infty) \left| \log\left(\frac{1-\lambda-w_\infty}{x_0}\right) \right| > \lambda + w_\infty.$$

Para o item (a), basta provar que  $1 - \lambda w_\infty < x_0$ . Considerando as seguintes condições iniciais  $z_0 > 0$ ,  $y_0 = 0$  e  $\lambda > z_0$ , obtemos:

$$1 - \lambda - w_\infty \stackrel{(I)}{\leq} 1 - \lambda - w_0 \stackrel{(II)}{<} 1 - z_0 - w_0 = x_0$$

(I) é justificado por  $w_\infty \geq w_0$ ,

(II) é justificado por  $\lambda > z_0$ .

Considerando as mesmas condições iniciais anteriores, para o item (b) basta mostrar que:

$$(b1) \log\left(\frac{1-\lambda-w_\infty}{x_0}\right) > \frac{\lambda+w_\infty}{1-w_\infty},$$

$$(b2) \log\left(\frac{1-\lambda-w_\infty}{x_0}\right) < -\left(\frac{\lambda+w_\infty}{1-w_\infty}\right).$$

Note que (b1) não faz sentido, pois no item (a) já foi provado que  $\log\left(\frac{1-\lambda-w_\infty}{x_0}\right) < 0$  e  $\left(\frac{\lambda+w_\infty}{1-w_\infty}\right) > 0$ . Para provar o item (b2), basta aplicarmos a função exponencial, e assim obtemos que:  $x_0 > (1 - \lambda w_\infty)e^{\left(\frac{\lambda+w_\infty}{1-w_\infty}\right)}$ . Note que se  $(1 - \lambda w_\infty) < 0$ , então:

$$x_0 > \underbrace{(1 - \lambda - w_\infty)}_{(1)} e^{\left(\frac{\lambda+w_\infty}{1-w_\infty}\right)} < \underbrace{(1 - \lambda - w_\infty)}_{(2)}.$$

Como  $x_0 > (1)$  e  $(2) < 1$ , conseqüentemente  $x_0 > (2)$ . Por outro lado, se  $(1 - \lambda - w_\infty) > 0$ , então:

$$x_0 > (1 - \lambda - w_\infty)e^{\left(\frac{\lambda+w_\infty}{1-w_\infty}\right)} > (1 - \lambda - w_\infty),$$

e já provamos que vale essa igualdade em (a).

**Observação 7.** Embora não obtivemos uma prova analítica para as condições iniciais  $y_0 = 0$ ,  $z_0 > 0$  e  $\lambda < z_0$ , foram desenvolvidas algumas simulações para observar numericamente que a desigualdade em (2.9) vale de maneira geral, independente da condição inicial fixada, como pode ser visto na Figura 3.

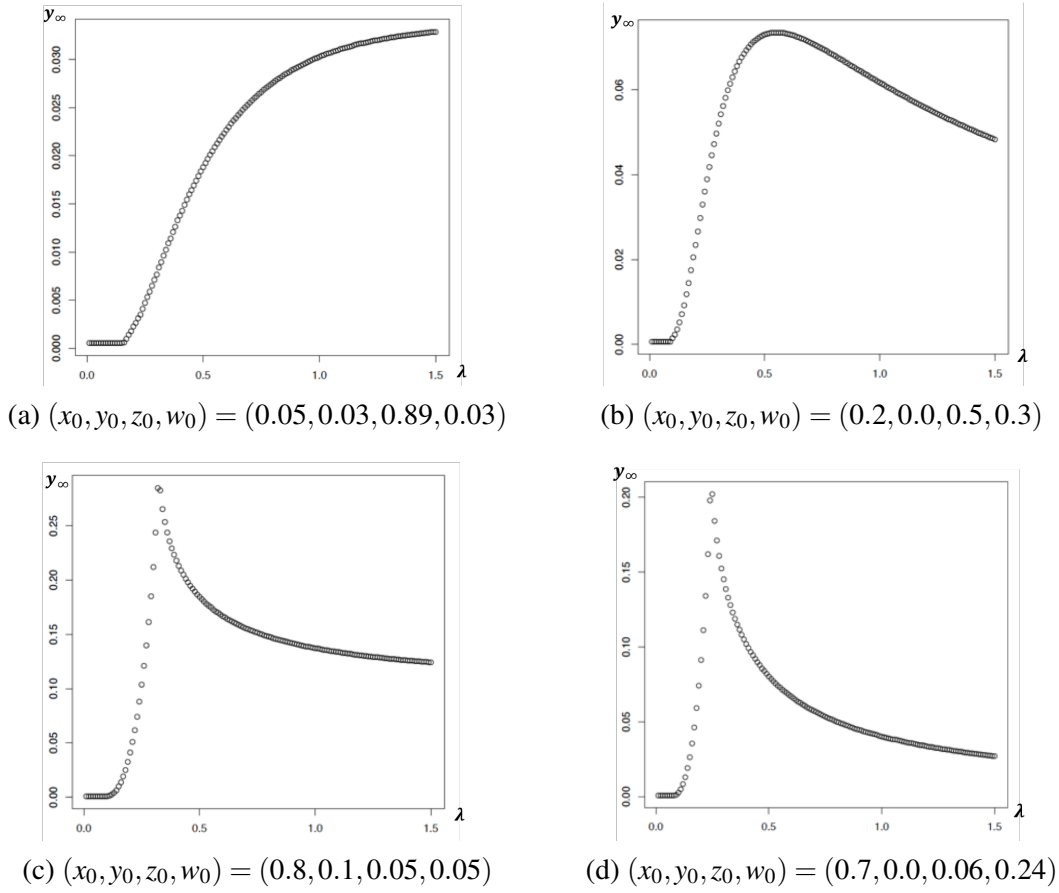


Figura 3 – Comportamento de  $y_\infty$  com relação a  $\lambda$  considerando diferentes condições iniciais

Fonte: Elaborada pela autora.

**Demonstração do Teorema 1.** Note que  $z_0 > 0$  e (2.9) implicam que  $z(\tau_\infty - \varepsilon) > 0$  e  $z(\tau_\infty + \varepsilon) < 0$  para  $0 < \varepsilon < \tau_\infty$ . Então, a convergência quase certa de  $\tilde{z}^{(N)}$  para  $z$  uniformemente em intervalos limitados implica que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\tau}^{(N)} = \tau_\infty \quad q.c. \quad (2.11)$$

Portanto, como  $X^{(N)}(\tau^{(N)}) = \tilde{X}^{(N)}(\tilde{\tau}^{(N)})$  e  $Y^{(N)}(\tau^{(N)}) = \tilde{Y}^{(N)}(\tilde{\tau}^{(N)})$ , obtemos o Teorema 1 de (2.7), (2.8) e (2.11).

**Demonstração do Teorema 2.** Do Teorema 12 do Apêndice A, temos que

$$\sqrt{N} \left( \tilde{x}^{(N)}(\tilde{\tau}^{(N)}) - x_\infty, \tilde{y}^{(N)}(\tilde{\tau}^{(N)}) - y_\infty \right)$$

converge em distribuição quando  $N \rightarrow \infty$  para

$$\left( \mathcal{V}_x(\tau_\infty) + \frac{x_\infty \mathcal{V}_z(\tau_\infty)}{y_\infty - \lambda}, \mathcal{V}_y(\tau_\infty) + \frac{\mathcal{V}_z(\tau_\infty)(y_\infty - x_\infty)}{y_\infty - \lambda} \right). \quad (2.12)$$

A distribuição assintótica é uma distribuição normal bivariada com média zero, e assim resta mostrar como são obtidos  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{22}$  e  $\Sigma_{12}$  para a matriz de covariâncias  $\Sigma$ .

Para isto, no que segue, serão enumerados os passos para calcular  $\Lambda = Cov(\mathcal{Y}(\tau_\infty), \mathcal{Y}(\tau_\infty))$ . Primeiramente, é preciso calcular a matriz das derivadas parciais da função drift  $F$  e a matriz  $G$ , como definidas no Apêndice A.3. Nesse caso, tais matrizes podem ser representadas da seguinte forma

$$\partial F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$G(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & -x & 0 \\ -x & x+y & -y \\ 0 & -y & \lambda+y \end{pmatrix}.$$

Logo, basta encontrarmos a solução  $\Phi$  da seguinte equação matricial

$$\frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t} = \partial F(x(t), y(t), z(t))\Phi(t, s), \quad \Phi(s, s) = \mathbb{I}_3,$$

em que  $\mathbb{I}_3$  é a matriz identidade  $3 \times 3$ . Note que a matriz resultante para  $\Phi(t, s)$  é dada por

$$\Phi(t, s) = \begin{pmatrix} A & & 0 & 0 \\ tA - s & & A & 0 \\ -A[1+t] + B & 1 - A & & 1 \end{pmatrix}$$

na qual  $A = A(t, s) := e^{-(t-s)}$  e  $B = B(t, s) := -st + 1 + s + s^2$ .

Em vista disso, a matriz de covariância do processo Gaussiano  $\mathcal{Y}$  no instante  $t$  é obtido pela fórmula:

$$Cov(\mathcal{Y}(t), \mathcal{Y}(t)) = \int_0^t \Phi(t, s)G(x(s), y(s), z(s))[\Phi(t, s)]^T ds. \quad (2.13)$$

Como passo final para calcular  $Cov(\mathcal{Y}(\tau_\infty), \mathcal{Y}(\tau_\infty))$ , temos que substituir  $e^{-t}$  e  $t$  na fórmula obtida em (2.13) por  $x_\infty/x_0$  e  $\tau_\infty$ , respectivamente. As fórmulas resultantes são

$$Var(\mathcal{Y}_x(\tau_\infty)) = x_\infty \left( \frac{x_0 - x_\infty}{x_0} \right),$$

$$Cov(\mathcal{Y}_x(\tau_\infty), \mathcal{Y}_y(\tau_\infty)) = x_\infty \left( \frac{x_\infty}{x_0} - 1 - \tau_\infty \left( \frac{x_\infty}{x_0} - \tau_\infty^2 \right) + \left( \frac{x_0 - x_\infty}{x_0} \right) \left( \frac{2x_0^2 + y_0 x_\infty}{x_0} \right) \right),$$

$$Var(\mathcal{Y}_y(\tau_\infty)) = x_\infty \tau_\infty \left( \tau_\infty \left( \frac{x_0 - x_\infty}{x_0} \right) - \left( \frac{3x_0 - 2x_\infty}{x_0} \right) \right),$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathcal{V}_z(\tau_\infty)) &= \tau_\infty \left( (\lambda - 16x_0 - 33x_\infty) + \frac{x_\infty^2}{x_0} \left( -x_\infty - \frac{x_\infty^2}{x_0^2} \right) \right) + \tau_\infty^2 \left( -10x_\infty - \frac{x_\infty^2}{x_0} \right) - \tau_\infty^3 \frac{7x_\infty}{2} \\ &+ \tau_\infty^4 \frac{x_\infty}{3} - 50x_\infty + 52x_0 + y_0 \frac{x_\infty^2}{x_0^2} (x_\infty - 1) + \frac{x_\infty^2}{x_0^2} \left( 1 - \frac{x_\infty}{x_0} \right), \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(\mathcal{V}_x(\tau_\infty), \mathcal{V}_z(\tau_\infty)) = x_\infty \tau_\infty \left( \tau_\infty (1 - \tau_\infty) - \frac{x_\infty}{x_0} \left( \frac{x_\infty - x_0}{x_0} \right) \right),$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathcal{V}_y(\tau_\infty), \mathcal{V}_z(\tau_\infty)) &= x_\infty \tau_\infty^2 \left( \frac{1}{x_0} + \frac{2\tau_\infty}{3} \left( \frac{1}{2} - \frac{\tau_\infty^2}{6} \right) \right) + \tau_\infty \left( 8x_0 - \frac{x_\infty^2}{x_0} \right) \\ &+ x_\infty \left( 9 - \frac{x_\infty^2}{x_0} \frac{y_0 x_\infty}{x_0^2} - \frac{y_0}{x_0} \right) - 8x_0. \end{aligned}$$

Usando que  $\tau_\infty = x_0(1 - x_\infty - \omega_0) - y_0 x_\infty / x_0(x_\infty + \lambda)$  e propriedades bem conhecidas da variância e da covariância, obtemos as fórmulas para  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{22}$  e  $\Sigma_{12}$  como apresentadas no Teorema 2, as quais se encontram no Apêndice B.1.

**Demonstração do Teorema 3.** Considere  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  o espaço de probabilidade e suponha que o processo acelerado  $(\tilde{Z}^{(N)}(t))_{t \geq 0}$  esteja definido nesse espaço, e, além disso, seja  $(z(t))_{t \geq 0}$  dado pelo sistema de equações diferenciais (2.6). Quando for necessário explicitar a dependência de  $\omega \in \Omega$ , vamos escrever  $\tilde{Z}^{(N)}(t, \omega)$  ao invés de  $\tilde{Z}^{(N)}(t)$  e  $\tilde{\tau}^{(N)}(\omega)$  ao invés de  $\tilde{\tau}^{(N)}$ . Para cada  $\omega \in \Omega$ , a função:

$$t \mapsto \max_{0 \leq s \leq t} \tilde{Z}^{(N)}(s, \omega)$$

é não decrescente. Ademais,

$$\tilde{Z}^{(N)}(t) = \tilde{Z}^{(N)}(\tilde{\tau}^{(N)}), \text{ para todo } t \geq \tilde{\tau}^{(N)}. \quad (2.14)$$

Defina os eventos:

$$\begin{aligned} E_k &:= \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq s \leq k} \frac{\tilde{Z}^{(N)}(s, \omega)}{N} = \max_{0 \leq s \leq k} z(s) \right\}, \quad k \in \mathbb{Q}_+, \\ E &:= \{ \omega \in \Omega : \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\tau}^{(N)}(\omega) = \tau_\infty \}, \end{aligned}$$

em que  $\tau_\infty$  é dado pelo limite em (2.11).

Consequentemente, segue que  $\mathbb{P}(E_k) = 1$  para todo  $k$  (detalhes da prova se encontram em B.2) e  $\mathbb{P}(E) = 1$  (vide equação (2.11)). Então, obtemos que  $\mathbb{P} \left( E \cap \left( \bigcap_{k \in \mathbb{Q}_+} E_k \right) \right) = 1$ .

Agora, resta mostrar que

$$\omega \in E \cap \left( \bigcap_{k \in \mathbb{Q}_+} E_k \right) \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq s \leq \tilde{\tau}^{(N)}(\omega)} \frac{\tilde{Z}^{(N)}(s, \omega)}{N} = \max_{0 \leq s \leq \tau_\infty} z(s).$$

Fixe  $\omega \in E \cap \left( \bigcap_{k \in \mathbb{Q}_+} E_k \right)$  e escolha  $k \in \mathbb{Q}_+$  tal que  $k > \tau_\infty$ . Uma vez que  $\omega \in E$ , temos  $\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\tau}^{(N)}(\omega) = \tau_\infty$ , então existe  $N_0$  tal que se  $N \geq N_0$ , então  $k > \tilde{\tau}^{(N)}(\omega)$ .

Portanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq s \leq \tilde{\tau}^{(N)}(\omega)} \frac{\tilde{Z}^{(N)}(s, \omega)}{N} \stackrel{(2.14)}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq s \leq k} \frac{\tilde{Z}^{(N)}(s, \omega)}{N} \stackrel{(*)}{=} \max_{0 \leq s \leq k} z(s),$$

em que a igualdade (\*) decorre do fato de  $\omega \in E_k$ . Ademais, considere uma subsequência  $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $k_i \searrow \tau_\infty$  quando  $i \rightarrow \infty$ . Logo,  $\forall i \geq 1$ , temos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq s \leq \tilde{\tau}^{(N)}(\omega)} \frac{\tilde{Z}^{(N)}(s, \omega)}{N} = \max_{0 \leq s \leq k_i} z(s).$$

Em particular, temos que vale a seguinte igualdade:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq s \leq \tilde{\tau}^{(N)}(\omega)} \frac{\tilde{Z}^{(N)}(s, \omega)}{N} = \lim_{i \rightarrow \infty} \max_{0 \leq s \leq k_i} z(s) = \max_{0 \leq s \leq \tau_\infty} z(s).$$

Note que para a construção da prova foi utilizado o processo acelerado. No entanto, como vale a seguinte igualdade

$$\max_{0 \leq t \leq \tilde{\tau}^{(N)}} \tilde{Z}^{(N)}(t) = \max_{0 \leq t \leq \tau^{(N)}} Z^{(N)}(t),$$

é possível concluir para o processo original. Além disso, note que  $\max_{0 \leq s \leq \tau_\infty} z(s) = \frac{-\lambda}{W_0 \left( \frac{-\lambda y_0}{x_0} \right)}$ .

**Demonstração da Proposição 1.** Vamos separar a prova desse resultado em 4 etapas.

1. Considere  $\{V^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$  o processo de adoção e abandono e  $\{\tilde{V}^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$  o processo acelerado. Vamos definir os tempos de emergência desses processos da seguinte forma:

$$\tau_e^{(N)} := \inf \left\{ t > 0 : Z^{(N)}(t) = \max_{0 < s < \tau^{(N)}} Z^{(N)}(s) \right\} \quad (2.15)$$

$$\tilde{\tau}_e^{(N)} := \inf \left\{ t > 0 : \tilde{Z}^{(N)}(t) = \max_{0 < s < \tilde{\tau}^{(N)}} \tilde{Z}^{(N)}(s) \right\}. \quad (2.16)$$

Assim, como já foi definido para o tempo de absorção, pode-se considerar que vale para o tempo de emergência a seguinte igualdade:

$$\tilde{V}^{(N)}(\tilde{\tau}_e^{(N)}) = V^{(N)}(\tau_e^{(N)}).$$

2. Da definição já vista para o tempo de absorção e para o processo acelerado como apresentado na Seção 2.3.1, segue que:

$$\tilde{V}^{(N)}(t) = V^{(N)}(\gamma^{(N)}(t)) \Rightarrow \tilde{V}^{(N)}(\tilde{\tau}_e^{(N)}) = V^{(N)}(\gamma^{(N)}(\tilde{\tau}_e^{(N)})) \Rightarrow \tau_e^{(N)} \stackrel{(*)}{=} \gamma^{(N)}(\tilde{\tau}_e^{(N)}).$$

Além disso, a identidade (\*) segue da Proposição 3 no qual temos que no limite, o número de adotadores atinge um único máximo, cuja expressão é dada pela convergência que aparece na equação (2.3).

3. Da convergência quase certa do  $\max_{0 < t < \tilde{\tau}^{(N)}} \tilde{Z}^{(N)}(t)/N$  para a constante  $-\lambda W\left(-\lambda e^{-\frac{y_0}{x_0}}/x_0\right)^{-1}$  segue que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\tau}_e^{(N)} = \tilde{\tau}_e \quad \text{quase certamente,}$$

em que  $\tilde{\tau}_e = \inf \left\{ t > 0 : z(t) = \max_{0 < s < \tau_\infty} z(s) \right\}$ . No que segue, o objetivo é obtermos uma expressão analítica para  $\tilde{\tau}_e$ .

Ao utilizar o fato de que  $z(t) = f(x(t))$  e aplicando a regra da cadeia para a primeira derivada, obtemos que:

$$z'(t) = f'(x(t))x'(t),$$

na qual  $x'(t) = -x(t) = -x_0 e^{-t}$ . Como valem as condições  $x_0 > 0$  e  $-x_0 e^{-t} \neq 0$ , segue que:

$$z'(t) = 0 \iff f'(x(t)) = 0,$$

isto é,

$$f'(x(t)) = 0 \iff x(t) = \frac{-\lambda}{W\left(\frac{-\lambda e^{-\frac{y_0}{x_0}}}{x_0}\right)},$$

em que  $x(t) = x_0 e^{-t}$ . Por fim, apenas isolando o  $t$  da expressão acima, é possível encontrar o tempo de emergência limite  $\tilde{\tau}_e$  o qual é obtido por meio das equações diferenciais e é dado por:

$$\tilde{\tau}_e = \ln \left( \frac{\lambda}{x_0 W\left(\frac{-\lambda e^{-\frac{y_0}{x_0}}}{x_0}\right)} \right).$$

4. A partir de (1), (2) e (3) vamos concluir que vale a seguinte convergência:

$$|\gamma^{(N)}(\tilde{\tau}_e^{(N)}) - \gamma^{(N)}(\tilde{\tau}_e)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{quase certamente.} \quad (2.17)$$

Lembrar que:  $\tau_e^{(N)} := \gamma^{(N)}(\tilde{\tau}_e^{(N)})$  e  $t_e := \gamma^{(N)}(\tilde{\tau}_e)$  o que implica em  $\tilde{V}^{(N)}(t) = V^{(N)}(\gamma^{(N)}(t))$ .

Considere  $Z^{(N)}(\cdot, \omega)$  e defina os seguintes conjuntos:

$$K(N) := \{t \geq 0 : \int_0^t Z^{(N)}(s, \omega) ds > \tilde{\tau}_e^{(N)}(\omega)\}$$

$$J(N) := \{t \geq 0 : \int_0^t Z^{(N)}(s, \omega) ds > \tilde{\tau}_e\}.$$

Se  $B(N) = \inf_{N \geq 1} K(N)$ , então  $B(N) > 0$  e  $\int_0^{B(N)} Z^{(N)}(s, \omega) ds = \tilde{\tau}_e^{(N)}(\omega)$ .

De fato, da continuidade da integral (pois  $Z^{(N)}(t)$  é uma função contínua por partes) e da definição de  $B(N)$ , sabemos que:

$$\int_0^{B(N)} Z^{(N)}(s, \omega) ds \geq \tilde{\tau}_e^{(N)}(\omega).$$

Suponha que  $\int_0^{B(N)} Z^{(N)}(s, \omega) ds > \tilde{\tau}_e^{(N)}(\omega)$ . Da continuidade da integral, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\int_0^{B(N)-\delta} Z^{(N)}(s, \omega) ds > \tilde{\tau}_e^{(N)}(\omega),$$

o que contradiz a definição de  $B(N)$ , e prova a afirmação.

Analogamente, se  $C(N) = \inf_{N \geq 1} J(N)$  então  $C(N) > 0$  e segue que:

$$\int_0^{C(N)} Z^{(N)}(s, \omega) ds = \tilde{\tau}_e.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C(N)}^{B(N)} Z^{(N)}(s, \omega) ds \right| &= \left| \int_0^{B(N)} Z^{(N)}(s, \omega) ds - \int_0^{C(N)} Z^{(N)}(s, \omega) ds \right| \\ &= \left| \tilde{\tau}_e^{(N)}(\omega) - \tilde{\tau}_e \right| \rightarrow 0, \quad \text{se } N \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Suponha então que  $|B(N) - C(N)| \not\rightarrow 0$  quando  $N \rightarrow \infty$ . Assim, existem  $\varepsilon_0 > 0$  e  $\{N_k\}_{k \geq 1}$  com  $N_k \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ , tal que

$$|B_{N_k} - C_{N_k}| \geq \varepsilon_0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Equivalentemente o intervalo  $(C_{N_k}, B_{N_k})$  ou  $(B_{N_k}, C_{N_k})$  (depende de quem for maior para cada  $k$ ) tem tamanho pelo menos  $\varepsilon_0$ . Assim, se  $m_0 := \inf_{s \geq 0, k \in \mathbb{N}} Z^{(N_k)}(s, \omega) > 0$  temos:

$$\varepsilon_0 m_0 \leq \left| \int_{C_{N_k}}^{B_{N_k}} Z^{(N_k)}(s, \omega) ds \right| \rightarrow 0, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty$$

o que contradiz (2.18). Logo,  $|B(N) - C(N)| \rightarrow 0$ , quando  $N \rightarrow \infty$ .

# MODELO DE DIFUSÃO DE INOVAÇÃO COM $M$ ETAPAS EM $\mathbb{Z}^d$

---

O trabalho proposto por [Coletti, Oliveira e Rodriguez \(2016\)](#) apresenta uma primeira versão de um modelo estocástico espacial para a difusão de inovação em dois estágios. Sua população é representada por meio da rede hipercúbica  $d$ -dimensional, na qual os vértices são divididos em três classes chamadas de ignorantes, conscientes e adotadores. Ainda, este analisa a influência dos parâmetros no comportamento do processo, e a obtenção de condições suficientes sob as quais a difusão de inovação se extingue ou propaga-se com probabilidade positiva.

Neste contexto, a Seção 3.1 apresenta este trabalho detalhando suas particularidades bem como o contexto no qual este trabalho está inserido. Inspirado neste, a Seção 3.2 apresenta um novo modelo de difusão de inovação com 3 etapas. Por fim, a Seção 3.3 generaliza todo o processo para  $M$  etapas, sendo que um indivíduo no estado 0 é um ignorante, e  $\{1, 2, \dots, M - 1\}$  são  $M - 1$  estágios de consciência, antes dele adotar a inovação atingindo o estado  $M$ .

## 3.1 Modelo de difusão de inovação em 2 etapas

Nesta seção será descrito um modelo de difusão de inovação em 2 etapas, o qual representa um trabalho publicado por [Coletti, Oliveira e Rodriguez \(2016\)](#).

Considera-se uma cadeia de Markov a tempo contínuo  $(\eta_t)_{t \geq 0}$  com espaço de estados  $\Sigma = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}^d}$ , isto é, no tempo  $t$  o estado do processo é alguma função  $\eta_t : \mathbb{Z}^d \rightarrow \{0, 1, 2\}$ . Assume-se que cada sítio  $x$  pode ser identificado como um indivíduo da população, o qual é dito ser ignorante se  $\eta(x) = 0$ , consciente se  $\eta(x) = 1$  e adotador se  $\eta(x) = 2$ . Ignorantes são aqueles que não sabem sobre a inovação, conscientes são aqueles que conhecem a inovação, entretanto não adquiriram. Finalmente, adotadores são aqueles que já adotaram a inovação. Neste caso, supondo que o sistema está na configuração  $\eta \in \Sigma$ , então o estado de um vértice  $x$  evolui de



acordo às seguintes taxas e transições:

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow 1 & \quad \lambda n_1(x, \eta) + \lambda n_2(x, \eta), \\
 1 \rightarrow 2 & \quad \alpha n_2(x, \eta), \\
 1 \rightarrow 0 & \quad 1, \\
 2 \rightarrow 0 & \quad 1,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

na qual  $n_i(x, \eta) = \sum_{\|x-y\|=1} 1_{\{\eta(y)=i\}}$  corresponde ao número de vizinhos mais próximos do vértice  $x$  no estado  $i$  para a configuração  $\eta$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Denomina-se a cadeia de Markov  $(\eta_t)_{t \geq 0}$  dessa forma obtida como processo de inovação em  $\mathbb{Z}^d$  com taxas  $\lambda > 0$  e  $\alpha > 0$ .

**Observação 8.** As transições do processo têm a seguinte interpretação. A uma taxa  $\lambda$ , ignorantes podem ter conhecimento de uma inovação tanto por conscientes que sabem da existência da inovação mas não a adotaram, quanto por adotadores que já têm adotado a inovação. Adicionalmente, é suposto que adotadores podem persuadir conscientes para adquirir a inovação e portanto virar adotadores. Supomos que tanto conscientes quanto adotadores podem perder o interesse e “esquecer” a informação a uma taxa constante e igual a 1.

### Definição 2. Extinção da consciência da inovação

Se a configuração inicial tem um número finito de conscientes e adotadores, dizemos que a consciência da inovação se extingue se existe, quase certamente, um tempo aleatório finito depois do qual todos os sítios em  $\mathbb{Z}^d$  são ignorantes (i.e., no estado 0). Por outro lado, se o processo começa com um número infinito de conscientes e adotadores, dizemos que a consciência da inovação se extingue se para cada vértice fixado existe, quase certamente, um tempo aleatório finito depois do qual o vértice ficará em estado 0 para sempre. Se a consciência da inovação não se extingue, então dizemos que sobrevive.

O primeiro resultado obtido afirma que a extinção ou não da consciência da inovação, nos dois sentidos definidos acima, depende apenas do valor de  $\lambda$ . Seja  $\lambda_c(d)$  o parâmetro crítico do processo de contato  $d$ -dimensional (GRIMMETT, 2009, Cap. 6).

**Teorema 4.** (Coletti, Oliveira e Rodriguez (2016)) Para  $d \geq 1$ , a consciência da inovação se extingue se, e somente se,  $\lambda < \lambda_c(d)$ .

O Teorema acima afirma que o processo de inovação exibe uma transição de fase em  $\lambda$  considerando a extinção ou sobrevivência da consciência da inovação, e que o parâmetro crítico coincide com o valor crítico para a sobrevivência do processo de contato, para qualquer configuração inicial. Na sequência, será tratado a extinção da adoção da inovação.

### Definição 3. Extinção da adoção da inovação.

Se a configuração inicial tem um número finito de adotadores, dizemos que a adoção da inovação se extingue se existe, quase certamente, um tempo aleatório finito depois do qual

todos os sítios em  $\mathbb{Z}^d$  são ignorantes ou conscientes (i.e., no estado 0 ou 1). Por outro lado, se o processo começa com um número infinito de adotadores, dizemos que a adoção da inovação se extingue se para cada vértice fixado existe, quase certamente, um tempo aleatório finito depois do qual o vértice ficará no estado 0 ou 1 para sempre. Se a adoção da inovação não se extingue, então dizemos que sobrevive.

Pelo Teorema 4 segue que a consciência da inovação sobrevive desde que a taxa  $\lambda$  seja maior que o valor crítico do processo de contato  $d$ -dimensional. No entanto, isso não é suficiente para garantir a sobrevivência da adoção da inovação. No próximo resultado será mostrado que uma transição de fase diferente aparece quando é analisada a extinção da adoção da inovação, desde que  $\lambda > \lambda_c(d)$ .

**Teorema 5.** (Coletti, Oliveira e Rodriguez (2016)) Para  $d \geq 1$  e  $\lambda > \lambda_c(d)$ , existe um valor crítico do parâmetro  $\alpha$ , denotado por  $\alpha_c$ ,  $\alpha_c \in (0, \infty)$ , tal que para qualquer configuração inicial com um número finito de adotadores

- (i) a adoção da inovação se extingue, se  $\alpha < \alpha_c$ ;
- (ii) a adoção da inovação sobrevive, se  $\alpha > \alpha_c$ .

O mesmo resultado vale para qualquer configuração inicial com um número infinito de adotadores para um valor crítico  $\alpha_c$  possivelmente diferente.

**Observação 9.** As provas dos teoremas anteriores são construtivas e se apoiam da construção gráfica do processo de inovação. O Teorema 4 resulta do acoplamento direto, via construção gráfica, do processo original com o processo de contato de parâmetro  $\lambda$ . O Teorema 5 é mais elaborado e inclui argumentos de caixas e comparação com modelos de percolação orientada convenientemente definidos. As caixas representam vértices no modelo de percolação orientada e são declaradas abertas ou não de acordo com eventos de interesse. Limitantes para as probabilidades desses eventos são calculadas via comparação do processo original com o processo de contato restrito à caixa. Para mais detalhes ver Coletti, Oliveira e Rodriguez (2016).

## 3.2 Modelo de difusão de inovação em 3 etapas

Nesta seção será apresentado uma generalização para o modelo de difusão em duas etapas, assim como enunciados teoremas gerais que analisam a influência dos parâmetros no comportamento assintótico das dinâmicas consideradas.

Considere uma cadeia de Markov a tempo contínuo  $(\eta_t)_{t \geq 0}$  com espaço de estados  $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}^d}$ , isto é, no tempo  $t$  o estado do processo é alguma função  $\eta_t : \mathbb{Z}^d \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ . Considere que cada sítio  $x \in \mathbb{Z}^d$  representa um indivíduo, o qual é dito ser um ignorante se  $\eta(x) = 0$ , um consciente no estágio  $i$  se  $\eta(x) = i$  para  $i \in \{1, 2\}$  e um adotador se  $\eta(x) = 3$ .

Então se o sistema está na configuração  $\eta \in \Sigma$ , o estado de  $x$  evolui de acordo às seguintes transições e taxas:

$$\begin{aligned}
 0 &\rightarrow 1, & \lambda_1 (n_1(x, \eta) + n_2(x, \eta) + n_3(x, \eta)), \\
 1 &\rightarrow 2, & \lambda_2 (n_2(x, \eta) + n_3(x, \eta)), \\
 2 &\rightarrow 3, & \lambda_3 n_3(x, \eta), \\
 1 &\rightarrow 0, & 1, \\
 2 &\rightarrow 0, & 1, \\
 3 &\rightarrow 0, & 1,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

em que  $n_i(x, \eta) = \sum_{\|x-y\|=1} 1_{\{\eta(y)=i\}}$  corresponde ao número de vizinhos do sítio  $x$  no estado  $i$  para a configuração  $\eta$ , para  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Denomina-se a cadeia de Markov  $(\eta_t)_{t \geq 0}$  dessa forma obtida como processo de difusão de inovação com 3 etapas em  $\mathbb{Z}^d$  com taxas  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ ,  $\lambda_i > 0$ ,  $\forall i$ .

### 3.2.1 Construção gráfica de Harris para o modelo 3 etapas

Uma maneira de construir uma versão do processo descrito acima é utilizar a construção gráfica de Harris, a qual representa uma ferramenta poderosa para lidar com sistema de partículas interagentes. A principal ideia consiste na construção do processo estocástico espacial por meio de uma coleção de processos de Poisson independentes. Essa técnica permite obter resultados interessantes pela comparação (acoplamento) com outros processos tais como processo de contato e modelos de percolação orientada. Para isto, considera-se uma coleção de processos de Poisson independentes denotados por  $\{N_{\lambda_1}^{x,y}, N_{\lambda_2}^{x,y}, N_{\lambda_3}^{x,y}, D^x : x, y \in \mathbb{Z}^d, \|x-y\|=1\}$ . Assume-se que os processos de Poisson  $N_{\lambda_1}^{x,y}$ ,  $N_{\lambda_2}^{x,y}$ ,  $N_{\lambda_3}^{x,y}$  e  $D^x$  têm intensidades  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  e 1, respectivamente.

- (1) Em cada tempo de chegada do processo  $N_{\lambda_1}^{x,y}$  se  $x$  e  $y$  estão nos estados 1, 2 ou 3 e 0, respectivamente, então o estado do sítio  $y$  muda para 1.
- (2) Em cada tempo de chegada do processo  $N_{\lambda_2}^{x,y}$  se  $x$  e  $y$  estão nos estados 2 ou 3 e 1, respectivamente, então o estado do sítio  $y$  muda para 2.
- (3) Em cada tempo de chegada do processo  $N_{\lambda_3}^{x,y}$  se  $x$  e  $y$  estão nos estados 3 e 2, respectivamente, então o estado do sítio  $y$  muda para 3.
- (4) A última transição é obtida quando em cada tempo de chegada do processo  $D^x$ , o estado do sítio  $x$  muda para 0, desde que ele esteja no estado 1, 2 ou 3.

No que segue, o principal foco é estudar a influência dos parâmetros no comportamento qualitativo do processo. A princípio, deseja-se obter condições suficientes sob as quais a consciência da inovação com 3 estágios se extingue ou sobrevive com probabilidade positiva. Assim, de maneira análoga ao que já foi apresentado para o modelo da Seção 3.1, no que segue serão

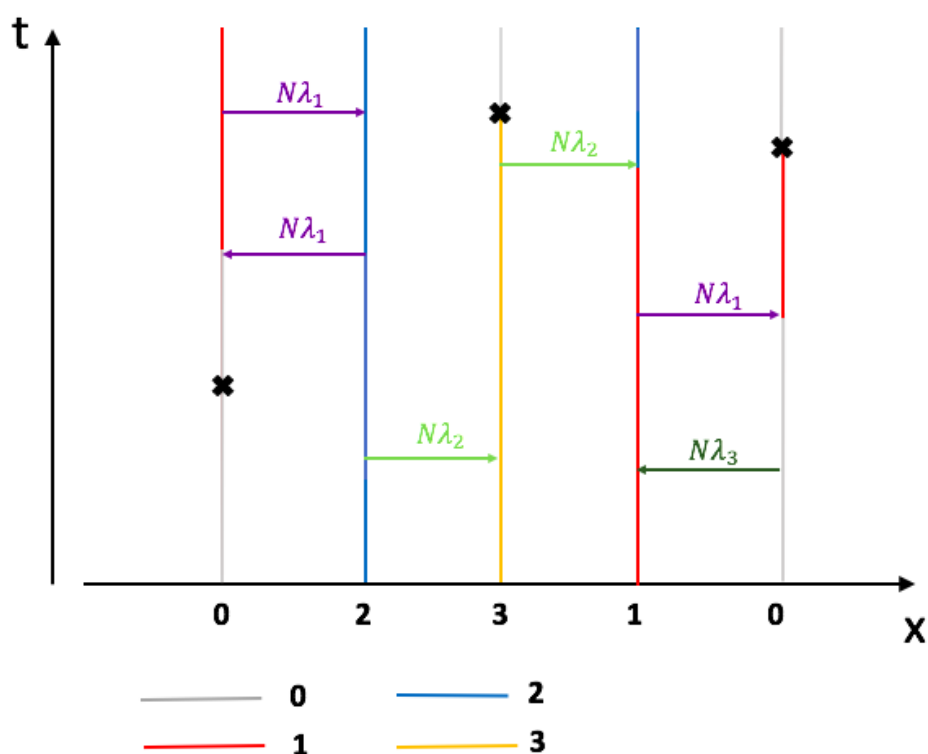


Figura 4 – Uma possível realização da representação gráfica do modelo de difusão de inovação com 3 etapas na reta  $\mathbb{Z}$ . O eixo horizontal representa o espaço, e a reta vertical sobre um ponto  $x$  é a linha do tempo em  $x$ . As retas verticais cinzas indicam a fração do espaço-tempo que o ponto  $x$  está no estado 0, as retas vermelhas no estado 1, as retas azuis no estado 2 e as retas amarelas no estado 3.

Fonte: Elaborada pela autora.

enunciados os principais resultados, e demonstrações para o modelo de difusão de inovação com 3 etapas.

### 3.2.2 Principais definições e resultados para o modelo 3 etapas

#### Definição 4. Extinção da difusão da inovação com 3 etapas

Se a configuração inicial tem um número finito de adotadores e conscientes no estágio  $i$ , para  $i \in \{1, 2\}$ , então dizemos que a difusão da inovação se extingue, se existe, quase certamente, um tempo aleatório finito depois do qual todos os sítios em  $\mathbb{Z}^d$  são ignorantes (i.e., no estado 0). Por outro lado, se o processo começa com um número infinito de adotadores e conscientes no estágio  $i$  para  $i \in \{1, 2\}$ , dizemos que a difusão da inovação se extingue se para cada vértice fixado existe, quase certamente, um tempo aleatório finito depois do qual o vértice ficará em estado 0 para sempre. Se a difusão da inovação não se extingue, dizemos que sobrevive.

O primeiro resultado obtido afirma que a extinção ou não da difusão da inovação com 3

etapas, nos dois sentidos definidos acima, depende apenas do valor de  $\lambda_1$ .

**Teorema 6.** Para  $d \geq 1$ , a difusão da inovação com 3 etapas se extingue se, e somente se,  $\lambda_1 \leq \lambda_c^{(1)}(d)$ , em que  $\lambda_c^{(1)}(d)$  é o parâmetro crítico do processo de contato  $d$ -dimensional.

O Teorema 6 afirma que o processo de difusão de inovação exibe uma transição de fase em  $\lambda_1$  considerando a extinção ou sobrevivência dela, e que o parâmetro crítico coincide com o valor crítico para a sobrevivência do processo de contato, para qualquer configuração inicial.

*Demonstração.* Considere um acoplamento entre o processo de difusão de inovação com 3 etapas e o processo de contato  $d$ -dimensional  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  com taxa de infecção  $\lambda_1$  e taxa de recuperação 1. Isto é, se o processo  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  está na configuração  $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ , o estado do sítio  $x$  evolui de acordo às seguintes taxas e transições:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 1 & \lambda_1 n_1(x, \xi) \\ 1 &\rightarrow 0 & 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dessa forma, o processo de contato é construído, a partir do processo de difusão de inovação, como um novo processo que não diferencia os estados 1, 2 e 3. No tempo 0, define-se  $\xi_0(x) = 1$  se  $\eta_0(x) \neq 0$  e  $\xi_0(x) = 0$  se  $\eta_0(x) = 0$ . Em outras palavras, usa-se como configuração inicial para o processo de contato a configuração inicial do processo de difusão de inovação substituindo todos os 2's e 3's por 1's. Assim, é obtida uma versão do processo de contato com taxas dadas por (3.3) usando os mesmos processos de Poisson  $N_{\lambda_1}^{x,y}$  e  $D^x$  considerados na construção gráfica do processo de difusão de inovação, e ignorando as marcas dos processos de Poisson  $N_{\lambda_2}^{x,y}$  e  $N_{\lambda_3}^{x,y}$ . A partir desse acoplamento obtido, pode-se afirmar que um sítio está infectado no processo de contato se, e somente se, existe um consciente no estágio  $i$  para  $i \in \{1, 2\}$  ou um adotador no mesmo sítio para o processo de difusão de inovação.

Diante disso, utilizaremos resultados do processo de contato para garantir a sobrevivência ou a extinção da inovação. Logo, quando  $\lambda \leq \lambda_c(d)$  o processo de contato se extingue para qualquer configuração inicial (finita ou infinita). Isso significa que conscientes no estágio  $i$  (para  $i \in \{1, 2\}$ ) e adotadores no processo de difusão de inovação desaparecem, o que leva a sua extinção. Em contrapartida, se  $\lambda > \lambda_c(d)$ , existe uma probabilidade positiva de que sempre existirão 1's, 2's ou 3's no processo de difusão de inovação, se inicialmente tivermos pelo menos um consciente no estágio  $i$  (para  $i \in \{1, 2\}$ ) ou um adotador.

Portanto, a prova desse teorema é uma consequência direta do acoplamento entre os dois modelos, da definição do valor crítico  $\lambda_c(d)$ , e o fato de que o processo de contato crítico se extingue.  $\square$

### **Definição 5. Extinção a partir do segundo estágio da consciência da inovação**

Se a configuração inicial tem um número finito de conscientes no estágio 2 e adotadores, dizemos que a inovação se extingue a partir do segundo estágio da consciência se existe, quase

certamente, um tempo aleatório finito depois do qual todos os sítios em  $\mathbb{Z}^d$  são ignorantes ou conscientes no estágio 1. Por outro lado, se o processo começa com um número infinito de conscientes no estágio 2 e adotadores, dizemos que a inovação se extingue a partir do segundo estágio da consciência da inovação se para cada vértice fixado existe, quase certamente, um tempo aleatório finito depois do qual o vértice ficará no estado 0 ou 1 para sempre. Se a inovação não se extingue a partir do segundo estágio da consciência, então dizemos que sobrevive.

**Observação 10.** Note que o estágio  $i$  da consciência da inovação, para  $i = 3$ , é compreendido pelos adotadores do modelo.

**Teorema 7.** Para  $d \geq 1$ ,  $\lambda_1 > \lambda_c^{(1)}(d)$ , existe um valor crítico do parâmetro  $\lambda_2$ , denotado por  $\lambda_c^{(2)}(d)$ ,  $\lambda_c^{(2)}(d) \in (0, \infty)$ , tal que para qualquer configuração inicial com um número finito de conscientes no estágio 2 e adotadores:

- (i) ocorre extinção a partir do segundo estágio da consciência da inovação, se  $\lambda_2 < \lambda_c^{(2)}(d)$ ;
- (ii) não ocorre extinção a partir do segundo estágio da consciência da inovação, se  $\lambda_2 > \lambda_c^{(2)}(d)$ .

*Demonstração.* Considere um acoplamento entre o processo de difusão de inovação com 3 etapas em  $\mathbb{Z}^d$ , com taxas  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  e 1, e o processo de difusão de inovação com 2 etapas (Seção 3.1),  $(\xi_t)_{t \geq 0}$ , com taxas  $\lambda$ ,  $\alpha$  e 1. Isto é, se o processo  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  está na configuração  $\xi \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}^d}$ , o estado do sítio  $x$  evolui de acordo às seguintes taxas e transições:

$$\begin{array}{ll}
 0 \rightarrow 1 & \lambda n_1(x, \xi) + \lambda n_2(x, \xi), \\
 1 \rightarrow 2 & \alpha n_2(x, \xi), \\
 1 \rightarrow 0 & 1, \\
 2 \rightarrow 0 & 1.
 \end{array} \tag{3.4}$$

Dessa forma, o processo de difusão de inovação em 2 etapas é construído, a partir do processo de difusão de inovação em 3 etapas, como um novo processo que não diferencia os estados 2 e 3. No tempo 0, definimos:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \xi_0(x) = 0 & \text{se } \eta_0(x) = 0 \\
 \xi_0(x) = 1 & \text{se } \eta_0(x) = 1 \\
 \xi_0(x) = 2 & \text{se } \eta_0(x) = 2, 3
 \end{array} \right. \tag{3.5}$$

Em outras palavras, usamos como configuração inicial para o processo de difusão de inovação em 2 etapas (3.1), a configuração inicial do processo de difusão de inovação em 3 etapas, substituindo todos os 3's por 2's. Assim, obtemos uma versão do processo de inovação com taxas dadas por (3.2), usando os mesmos processos de Poisson  $N_{\lambda_1}^{x,y}$ ,  $N_{\lambda_2}^{x,y}$  e  $D^x$  considerados na construção gráfica do processo de difusão de inovação em 3 etapas, e ignorando as marcas dos processos  $N_{\lambda_3}^{x,y}$ . A partir desse acoplamento obtido, pode-se afirmar que um sítio está no estado 2 no processo de difusão de inovação em 2 etapas se, e somente se, existe um consciente no estágio  $i = 2$  ou um adotador no mesmo sítio para o processo de difusão de inovação em 3 etapas.

Diante disso, utilizaremos o Teorema 5 apresentado na Seção 3.1, para garantir a sobrevivência ou extinção a partir do segundo estágio consciência da inovação. Logo, quando  $\alpha < \alpha_c(d)$  a adoção da inovação se extingue para qualquer configuração inicial (finita ou infinita). Isso significa que conscientes no estágio 2 e adotadores no processo de difusão de inovação em 3 etapas desaparecem, o que leva a sua extinção. Em contrapartida, se  $\alpha > \alpha_c(d)$ , existe uma probabilidade positiva de que sempre existirão 2's ou 3's no processo com 3 etapas, se inicialmente tivermos pelo menos um consciente no estágio 2 ou um adotador. Portanto, a demonstração do Teorema é uma consequência dessa comparação, do Teorema 5 para obter que a adoção da inovação sobrevive se  $\alpha > \alpha_c$  e considerando que  $\lambda_c^{(2)} = \alpha_c$ .  $\square$

**Definição 6. Extinção da adoção da inovação com 3 etapas.**

Se a configuração inicial tem um número finito de adotadores, dizemos que a adoção da inovação se extingue se existe, quase certamente, um tempo aleatório finito depois do qual todos os sítios em  $\mathbb{Z}^d$  são ignorantes ou conscientes no estágio  $i$ , para  $i \in \{1, 2\}$  (i.e., no estado 0, 1 ou 2). Por outro lado, se o processo começa com um número infinito de adotadores, dizemos que a adoção da inovação se extingue se para cada vértice fixado existe, quase certamente, um tempo aleatório finito depois do qual o vértice ficará no estado 0, 1 ou 2 para sempre. Se a adoção da inovação não se extingue, então dizemos que sobrevive.

**Teorema 8.** Para  $d \geq 1$ ,  $\lambda_1 > \lambda_c^{(1)}(d)$  e  $\lambda_2 > \lambda_c^{(2)}(d)$ , existe um valor crítico do parâmetro  $\lambda_3$ , denotado por  $\lambda_c^{(3)}(d)$ ,  $\lambda_c^{(3)}(d) \in (0, \infty)$ , tal que para qualquer configuração inicial com um número finito de adotadores:

- (i) a adoção da inovação se extingue, se  $\lambda_3 < \lambda_c^{(3)}(d)$ ;
- (ii) a adoção da inovação sobrevive, se  $\lambda_3 > \lambda_c^{(3)}(d)$ .

*Demonstração.* Considere um acoplamento entre o processo de difusão de inovação com 3 etapas em  $\mathbb{Z}^d$ , com taxas  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  e 1, e o processo de difusão de inovação com 2 etapas  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  com taxas  $\lambda, \alpha$  e 1. Isto é, se o processo  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  está na configuração  $\xi \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}^d}$ , o estado do sítio  $x$  evolui de acordo às seguintes taxas e transições:

$$\begin{aligned}
 0 &\rightarrow 1 && \lambda n_1(x, \xi) + \lambda n_2(x, \xi), \\
 1 &\rightarrow 2 && \alpha n_2(x, \xi), \\
 1 &\rightarrow 0 && 1, \\
 2 &\rightarrow 0 && 1.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dessa forma, o processo de difusão de inovação em 2 etapas é construído, a partir do processo de difusão de inovação em 3 etapas, como um novo processo que não diferencia os estados 1 e 2. No tempo 0, definimos:

$$\begin{cases} \xi_0(x) = 0 & \text{se } \eta_0(x) = 0 \\ \xi_0(x) = 1 & \text{se } \eta_0(x) = 1, 2 \\ \xi_0(x) = 2 & \text{se } \eta_0(x) = 3 \end{cases} \tag{3.7}$$

Em outras palavras, usamos como configuração inicial para o processo de difusão de inovação em 2 etapas (3.1), a configuração inicial do processo de difusão de inovação em 3 etapas, substituindo todos os 2's por 1's.

Assim, obtemos uma versão do processo de inovação com taxas dadas por (3.1), usando os mesmos processos de Poisson  $N_{\lambda_1}^{x,y}$ ,  $N_{\lambda_3}^{x,y}$  e  $D^x$  considerados na construção gráfica do processo de difusão de inovação em 3 etapas, e ignorando as marcas dos processos  $N_{\lambda_2}^{x,y}$ . A partir desse acoplamento obtido, pode-se afirmar que um sítio está no estado 2 no processo de difusão de inovação em 2 etapas se, e somente se, existe um adotador no mesmo sítio para o processo de difusão de inovação em 3 etapas. Dessa forma, utilizaremos novamente o Teorema 5 apresentado na Seção 3.1, para garantir a sobrevivência ou extinção da adoção da inovação. Logo, quando  $\alpha < \alpha_c(d)$  a adoção da inovação se extingue para qualquer configuração inicial (finita ou infinita). Isso significa que adotadores no processo de difusão de inovação em 3 etapas desaparecem, implicando na sua extinção. Em contrapartida, se  $\alpha > \alpha_c(d)$ , existe uma probabilidade positiva de que sempre existirão 3's no processo com 3 etapas, se inicialmente tivermos pelo menos um adotador. Portanto, a demonstração do Teorema é uma consequência dessa comparação, do Teorema 5 para obter que a adoção da inovação sobrevive se  $\alpha > \alpha_c$  e considerando que  $\lambda_c^{(3)} = \alpha_c$ .  $\square$

**Observação 11.** As demonstrações do Teorema 7 e do Teorema 8 foram desenvolvidas de maneira análoga por meio de um acoplamento entre o o modelo de difusão de inovação com 2 etapas e o compreendido por 3 etapas. No entanto, a principal diferença consiste na identificação dos estados do processo. Em outras palavras, no Teorema 7 substituímos todos os 3 por 2, ignorando as marcas do processo de Poisson  $N_{\lambda_3}^{x,y}$ . Em contrapartida, a demonstração do Teorema 8 é baseada na identificação dos estados 1 e 2 como sendo 1 e ignorando as marcas do processo de Poisson  $N_{\lambda_2}^{x,y}$ .

### 3.3 Modelo de difusão de inovação em $M$ etapas

Nessa seção será apresentada uma generalização para o modelo de difusão de duas etapas, sendo que podem ser obtidos resultados análogos aos anteriores.

Considere uma cadeia de Markov a tempo contínuo  $(\eta_t)_{t \geq 0}$  com espaço de estados  $\Sigma = \{0, 1, 2, \dots, M\}^{\mathbb{Z}^d}$ , isto é, no tempo  $t$  o estado do processo é alguma função  $\eta_t : \mathbb{Z}^d \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, M\}$ .

Assumimos que cada sítio  $x \in \mathbb{Z}^d$  representa um indivíduo, o qual é dito ser um ignorante se  $\eta(x) = 0$ , um consciente no estágio  $i$  se  $\eta(x) = i$ , para  $i \in \{1, \dots, M-1\}$  e um adotador se  $\eta(x) = M$ . Então, se o sistema está na configuração  $\eta \in \Sigma$ , o estado de  $x$  evolui de acordo às



seguintes transições e taxas:

$$\begin{array}{ll}
0 \rightarrow 1, & \lambda_1 [n_1(x, \eta) + n_2(x, \eta) + n_3(x, \eta) + \dots + n_M(x, \eta)], \\
1 \rightarrow 2, & \lambda_2 [(n_2(x, \eta) + n_3(x, \eta) + \dots + n_M(x, \eta))], \\
2 \rightarrow 3, & \lambda_3 [n_3(x, \eta) + \dots + n_M(x, \eta)], \\
\vdots & \\
M-1 \rightarrow M, & \lambda_M n_M(x, \eta) \\
1 \rightarrow 0, & 1, \\
2 \rightarrow 0, & 1, \\
3 \rightarrow 0, & 1, \\
\vdots & \\
M \rightarrow 0, & 1.
\end{array} \tag{3.8}$$

em que  $n_i(x, \eta) = \sum_{\|x-y\|=1} 1_{\{\eta(y)=i\}}$  corresponde ao número de vizinhos do sítio  $x$  no estado  $i$  para a configuração  $\eta$ , para  $i \in \{1, 2, 3, \dots, M\}$ . Formalmente, (3.8) significa se  $x$  estiver no estado 0 no tempo  $t$ , então a probabilidade de que ele estará no estado 1 no tempo  $t+h$ , para  $h$  pequeno, é  $(\lambda_1 [n_1(x, \eta) + n_2(x, \eta) + \dots + n_M(x, \eta)])h + o(h)$ .

Denomina-se a cadeia de Markov  $(\eta_t)_{t \geq 0}$  obtida como o processo de difusão de inovação com  $M$  etapas em  $\mathbb{Z}^d$  com taxas  $\lambda_1, \dots, \lambda_M, \lambda_i > 0, \forall i$ .

No contexto de um cenário de difusão de inovação, (3.8) representa as diferentes transições assumidas no modelo. A primeira está relacionada ao contato entre um ignorante e um consciente no estágio  $i$  (para  $i \in \{1, 2, \dots, M-1\}$ ) ou um adotador, o que implica que um ignorante se torna um indivíduo consciente no estágio 1. A segunda transição representa o resultado de uma interação entre um consciente no estágio 1 e um consciente no estágio  $i$  (para  $i = 2, \dots, M-1$ ) ou um adotador, o que leva o consciente no estágio 1 se tornar um indivíduo consciente no estágio 2. Na  $M$ -ésima transição, assumimos que o adotador persuade o consciente no estágio  $M-1$  sobre a aquisição da inovação e portanto ele se torna um adotador. Finalmente, podemos assumir que indivíduos que tem o conhecimento da inovação podem esquecê-la a uma taxa 1. Assim, da maneira que o modelo foi definido, ele pode ser usado como uma base para modelos teóricos que generalizam aquele introduzido por [Coletti, Oliveira e Rodriguez \(2016\)](#). Dessa forma, o modelo pode ser considerado como uma versão a tempo contínuo daquele introduzido por [Garber et al. \(2004\)](#), o qual assume estrutura de estágios como aquele proposto por [Wang et al. \(2006\)](#).

### 3.3.1 Construção gráfica de Harris para o modelo $M$ etapas

A construção gráfica de Harris ([HARRIS, 1972](#)) é uma ferramenta útil para trabalhar com sistemas de partículas interagentes. A principal ideia consiste na construção do processo estocástico espacial por meio de uma coleção de processos de Poisson independentes. Essa técnica permite obter resultados interessantes por meio da comparação (acoplamento) com outros

processos já conhecidos da literatura como o processo de contato e modelos de percolação orientada. Para isto, considera-se uma coleção de processos de Poisson independentes denotados por  $\{N_{\lambda_1}^{x,y}, N_{\lambda_2}^{x,y}, \dots, N_{\lambda_M}^{x,y}, D^x : x, y \in \mathbb{Z}^d, \|x - y\| = 1\}$ . Assume-se que os processos de Poisson  $N_{\lambda_1}^{x,y}, N_{\lambda_2}^{x,y}, \dots, N_{\lambda_M}^{x,y}$  e  $D^x$  têm intensidades  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$  e 1, respectivamente.

Para cada tempo de chegada do processo  $N_{\lambda_1}^{x,y}$ , se  $x$  estiver em algum dos estados  $1, 2, \dots, M$  e  $y$  estiver no estado 0, então o estado do sítio  $y$  muda para 1. Por outro lado, para cada tempo de chegada do processo  $N_{\lambda_2}^{x,y}$ , se  $x$  estiver em algum dos estados  $2, \dots, M$  e  $y$  no estado 1, então o estado de  $y$  muda para 2. Seguindo essa lógica, é possível definir este processo para cada tempo de chegada  $N_{\lambda_3}^{x,y}, \dots, N_{\lambda_M}^{x,y}$ . A última transição é obtida quando em cada tempo de chegada do processo  $D^x$ , o estado do sítio  $x$  se torna 0, desde que ele esteja em algum dos estados  $1, 2, \dots, M$ .

Dessa maneira, obtemos uma versão estocástica espacial do processo de difusão de inovação com taxas dadas por (3.8).

### 3.3.2 Principais definições e resultados para o modelo $M$ etapas

Considere o processo de difusão de inovação em  $\mathbb{Z}^d$  com taxas  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ . A princípio, deseja-se estudar a influência dos parâmetros no comportamento qualitativo do processo. Ademais, a extinção tem dois diferentes significados dependendo se a configuração inicial tem um número finito ou infinito de conscientes no estágio  $i$  (para  $i \in \{1, \dots, M - 1\}$ ) e adotadores.

De maneira similar ao que já foi apresentado na Seção 3.2, no que segue serão enunciados as principais definições para extinção ou sobrevivência do processo, identificando transições de fase com relação aos diferentes parâmetros do modelo com  $M$  etapas.

#### Definição 7. Extinção da difusão da inovação

Se a configuração inicial tem um número finito de adotadores e conscientes no estágio  $i$  (para  $i \in \{1, \dots, M - 1\}$ ), então temos que a difusão da inovação se extingue se existe, quase certamente, um tempo aleatório finito depois do qual todos os sítios em  $\mathbb{Z}^d$  são ignorantes (i.e., no estado 0). Por outro lado, se o processo começa com um número infinito de adotadores e conscientes no estágio  $i$ , (para  $i \in \{1, 2, \dots, M - 1\}$ ), então a difusão de inovação se extingue se existe, quase certamente, um tempo aleatório finito depois do qual o vértice ficará em estado 0 para sempre. Se a difusão da inovação não se extingue, dizemos que sobrevive.

#### Definição 8. Extinção a partir do $i$ -ésimo estágio da consciência da inovação

Para  $i$  fixado, em que  $i \in \{2, \dots, M - 1\}$ , vamos definir a extinção a partir do  $i$ -ésimo estágio da consciência da inovação da seguinte forma.

Se a configuração inicial tem um número finito de adotadores e conscientes no estágio  $i$ , dizemos que a inovação se extingue a partir do  $i$ -ésimo estágio da consciência da inovação se existe, quase certamente, um tempo aleatório finito depois do qual todos os sítios em  $\mathbb{Z}^d$  se

encontram em algum estágio no máximo  $i - 1$ . Por outro lado, se o processo começa com um número infinito de adotadores e conscientes no estágio  $i$ , dizemos que a inovação se extingue a partir do  $i$ -ésimo estágio da consciência da inovação se para cada vértice fixado existe, quase certamente, um tempo aleatório finito depois do qual o vértice ficará em algum estado no máximo  $i - 1$  para sempre. Se a inovação não se extingue a partir do  $i$ -ésimo estágio da consciência da inovação, então dizemos que sobrevive.

**Observação 12.** Note que o estágio  $i$  da consciência da inovação, para  $i = M$ , corresponde aos adotadores do modelo.

**Definição 9. Extinção da adoção da inovação com  $M$  etapas**

Se a configuração inicial tem um número finito de adotadores dizemos que a adoção da inovação se extingue se existe, quase certamente, um tempo aleatório finito depois do qual todos os sítios em  $\mathbb{Z}^d$  são ignorantes ou conscientes no estágio  $i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, M - 1\}$ ). Por outro lado, se o processo começa com um número infinito de adotadores, dizemos que a adoção da inovação se extingue se para cada vértice fixado existe, quase certamente, um tempo aleatório finito depois do qual o vértice ficará em algum estado no máximo  $i - 1$  ( $i \in \{1, \dots, M\}$ ) para sempre. Se a adoção da inovação não se extingue, então dizemos que sobrevive.

Ao passo que já foi introduzido as definições de extinção e sobrevivência para o modelo de difusão de inovação com  $M$  etapas, no que segue será apresentado o Teorema que sumariza e generaliza os principais resultados de transição de fase para a dinâmica considerada e com relação aos parâmetros  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ .

**Teorema 9.** Considere o modelo de difusão de inovação com  $M$  estágios,  $M \geq 2$ . Então existem constantes  $\lambda_c^{(1)}, \lambda_c^{(2)}, \dots, \lambda_c^{(M)}$  tais que  $\lambda_c^{(i)} \in (0, \infty)$  e :

- (a) A difusão da inovação se extingue se, e somente se,  $\lambda_1 \leq \lambda_c^{(1)}$ , em que  $\lambda_c^{(1)}$  é o parâmetro crítico do processo de contato  $d$ -dimensional.
- (b) Para  $i \in \{2, \dots, M - 1\}$ , se  $\lambda_j > \lambda_c^{(j)}$ , para todo  $j \in \{1, \dots, i - 1\}$ , então:
  - (b.1) o  $i$ -ésimo estágio da consciência da inovação se extingue se  $\lambda_i < \lambda_c^{(i)}$ ;
  - (b.2) o  $i$ -ésimo estágio da consciência da inovação sobrevive se  $\lambda_i > \lambda_c^{(i)}$ .
- (c) Se  $\lambda_j > \lambda_c^{(j)}$  para todo  $j \in \{1, \dots, M - 1\}$ , então :
  - (c.1) a adoção da inovação se extingue se  $\lambda_M < \lambda_c^{(M)}$  ;
  - (c.2) a adoção da inovação sobrevive se  $\lambda_M > \lambda_c^{(M)}$ .

*Demonstração.* item (a)

A prova segue a mesma ideia daquela já apresentada para o Teorema 6, isto é, fazendo uma comparação com o processo de contato. No entanto, para esse caso, identificaremos todos os sítios nos estados  $2, \dots, M$  como sendo 1.  $\square$

*Demonstração.* item (b)

Suponha que o teorema vale para um modelo de difusão de inovação com  $M - 1$  etapas. Isto é, existe  $\lambda_c^{(M-2)}$  tal que se  $\lambda_{M-2} > \lambda_c^{(M-2)}$  o  $i$ -ésimo estágio da consciência da inovação sobrevive com probabilidade positiva, ou se extingue, quase certamente, caso  $\lambda_{M-2} < \lambda_c^{(M-2)}$ . Além disso, considere a hipótese de que  $\lambda_1 > \lambda_c^{(1)}(d), \dots, \lambda_{M-2} > \lambda_c^{(M-2)}(d)$ . Dessa forma, basta provar por indução que o resultado vale para um modelo com  $M$  etapas, sendo  $M \in \mathbb{N}$ .

Note que [Coletti, Oliveira e Rodriguez \(2016\)](#) já provou para  $M = 2$ . Ademais, para  $M = 3$  já foi provado no Teorema 7 por meio de um acoplamento com o modelo de difusão de inovação em 2 etapas (3.1), identificando os sítios no estado 3 como sendo 2.

De fato, para provar que o resultado vale para  $M \in \mathbb{N}$ , basta considerarmos um acoplamento entre o processo de difusão de inovação com  $M$  etapas em  $\mathbb{Z}^d$ , com taxas  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$  e 1, e o processo de difusão de inovação com  $M - 1$  etapas,  $(\xi_t)_{t \geq 0}$ , com taxas  $\lambda_1, \dots, \lambda_{M-1}$  e 1. Isto é, se o processo  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  está na configuração  $\xi \in \{0, 1, 2, \dots, M - 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ , o estado do sítio  $x$  evolui de acordo às seguintes taxas e transições:

$$\begin{array}{ll}
 0 \rightarrow 1, & \lambda_1 [n_1(x, \xi) + n_2(x, \xi) + n_3(x, \xi) + \dots + n_{M-1}(x, \xi)], \\
 1 \rightarrow 2, & \lambda_2 [(n_2(x, \xi) + n_3(x, \xi) + \dots + n_{M-1}(x, \xi))], \\
 2 \rightarrow 3, & \lambda_3 [n_3(x, \xi) + \dots + n_{M-1}(x, \xi)], \\
 \vdots & \\
 M-2 \rightarrow M-1, & \lambda_{M-1} [n_{M-1}(x, \xi)] \\
 i \rightarrow 0, & 1, \quad \text{para } i = 1, \dots, M-1.
 \end{array} \tag{3.9}$$

Dessa forma, o processo de difusão de inovação em  $M - 1$  etapas é construído, a partir do processo de difusão de inovação em  $M$  etapas, como um novo processo que não diferencia os estados  $M - 1$  e  $M$ . No tempo 0, definimos:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \xi_0(x) = 0 & \text{se } \eta_0(x) = 0 \\
 \xi_0(x) = i & \text{se } \eta_0(x) = i, \quad i = 1, \dots, M-2 \\
 \xi_0(x) = M-1 & \text{se } \eta_0(x) = M-1, M
 \end{array} \right. \tag{3.10}$$

Em outras palavras, usamos como configuração inicial para o processo de difusão de inovação em  $M - 1$  etapas, a configuração inicial do processo de difusão de inovação em  $M$  etapas, substituindo todos os  $M$ 's por  $M - 1$ 's.

Assim, obtemos uma versão do processo de inovação com taxas dadas por (3.9), usando os mesmos processos de Poisson  $N_{\lambda_1}^{x,y}, \dots, N_{\lambda_{M-1}}^{x,y}$  e  $D^x$  na construção gráfica do processo de difusão de inovação em  $M$  etapas, e ignorando as marcas dos processos  $N_{\lambda_M}^{x,y}$ .

Dessa forma definido, é possível ver que o evento de sobrevivência do  $i$ -ésimo estágio da consciência da inovação no processo de difusão de inovação em  $M - 1$  etapas ( $i \in \{2, \dots, M - 1\}$ ), é equivalente à sobrevivência do  $i$ -ésimo estágio da consciência da inovação no processo de difusão de inovação em  $M$  etapas ( $i \in \{1, \dots, M\}$ ).

Portanto, o Teorema é uma consequência direta dessa comparação e da hipótese de indução.  $\square$

*Demonstração.* item (c) A prova segue a mesma ideia daquela apresentada no Teorema 8, isto é, por meio de um acoplamento entre o modelo de difusão de inovação em  $M$  etapas e o modelo de difusão de 2 etapas descrito na 3.1. Nesse caso, para fazer essa comparação, é preciso identificar todos os sítios nos estados  $2, \dots, M - 1$  como sendo 1 e o sítio no estado  $M$  como sendo 2.  $\square$

**Observação 13.** O item (a) pode ser obtido para outros tipos de grafos usando os mesmos argumentos da prova do Teorema 9, desde que o parâmetro crítico do processo de contato para o grafo considerado seja não trivial. Por outro lado, as técnicas para a prova dos itens (b) e (c) dependerão da estrutura do grafo considerado, isto requer desenvolver novos argumentos e ficará como trabalhos futuros.

## REFERÊNCIAS

---

---

ANDERSSON, H.; BRITTON, T. **Stochastic Epidemic Models and Their Statistical Analysis**. Springer New York, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1158-7>>. Citado na página 51.

ARRUDA, G. F. de; LEBENSZTAYN, E.; RODRIGUES, F. A.; RODRÍGUEZ, P. M. A process of rumour scotching on finite populations. **Royal Society Open Science**, The Royal Society, v. 2, n. 9, p. 150240, sep 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rsos.150240>>. Citado na página 15.

BASS, F. M. A new product growth for model consumer durables. **Management Science**, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 15, n. 5, p. 215–227, jan 1969. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/mnsc.15.5.215>>. Citado na página 15.

COLETTI, C. F.; OLIVEIRA, K. B. E. de; RODRIGUEZ, P. M. A stochastic two-stage innovation diffusion model on a lattice. **Journal of Applied Probability**, Cambridge University Press (CUP), v. 53, n. 04, p. 1019–1030, dec 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/jpr.2016.61>>. Citado nas páginas 15, 16, 17, 35, 36, 37, 44 e 47.

COLETTI, C. F.; RODRÍGUEZ, P. M.; SCHINAZI, R. B. A spatial stochastic model for rumor transmission. **Journal of Statistical Physics**, Springer Nature, v. 147, n. 2, p. 375–381, mar 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10955-012-0469-y>>. Citado na página 15.

CORLESS, R. M.; GONNET, G. H.; HARE, D. E. G.; JEFFREY, D. J.; KNUTH, D. E. On the LambertW function. **Advances in Computational Mathematics**, Springer Nature, v. 5, n. 1, p. 329–359, dec 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/bf02124750>>. Citado na página 24.

ETHIER, S. N.; KURTZ, T. G. **Markov Processes: Characterization and Convergence**. John Wiley & Sons, Inc., 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/9780470316658>>. Citado nas páginas 21, 51, 52 e 54.

GARBER, T.; GOLDENBERG, J.; LIBAI, B.; MULLER, E. From density to destiny: Using spatial dimension of sales data for early prediction of new product success. **Marketing Science**, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 23, n. 3, p. 419–428, aug 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/mksc.1040.0051>>. Citado na página 44.

GRIMMETT, G. **Probability on Graphs**. Cambridge University Press, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/cbo9780511762550>>. Citado nas páginas 15 e 36.

HARRIS, T. Nearest-neighbor markov interaction processes on multidimensional lattices. **Advances in Mathematics**, Elsevier BV, v. 9, n. 1, p. 66–89, aug 1972. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0001-8708\(72\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0001-8708(72)90030-8)>. Citado na página 44.

KRAPIVSKY, P. L.; REDNER, S.; VOLOVIK, D. Reinforcement-driven spread of innovations and fads. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, IOP Publishing, v. 2011, n. 12, p. P12003, dec 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1742-5468/2011/12/p12003>>. Citado nas páginas 16, 17, 19 e 23.

LEBENSZTAYN, E.; MACHADO, F.; RODRÍGUEZ, P. On the behaviour of a rumour process with random stifling. **Environmental Modelling & Software**, Elsevier BV, v. 26, n. 4, p. 517–522, apr 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2010.10.015>>. Citado nas páginas 15 e 16.

LEBENSZTAYN, E.; MACHADO, F. P.; RODRÍGUEZ, P. M. Limit theorems for a general stochastic rumour model. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 71, n. 4, p. 1476–1486, jan 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/100819588>>. Citado nas páginas 15 e 16.

ROGERS, E. **Diffusion of Innovations, 5th Edition**. Free Press, 2003. ISBN 9780743258234. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=9U1K5LjUOwEC>>. Citado na página 15.

WANG, W.; FERGOLA, P.; LOMBARDO, S.; MULONE, G. Mathematical models of innovation diffusion with stage structure. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier BV, v. 30, n. 1, p. 129–146, jan 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.03.011>>. Citado nas páginas 15 e 44.

# CADEIA DE MARKOV DEPENDENTE DA DENSIDADE

Nesse apêndice, serão enunciados os principais conceitos e teoremas de convergência que foram aplicados no Capítulo 2, e se referem à teoria das Cadeias de Markov dependentes da densidade. Para maiores detalhes, o leitor pode consultar o livro de [Ethier e Kurtz \(1986\)](#) (Capítulo 11) ou [Andersson e Britton \(2000\)](#).

## A.1 Definição e caracterização do processo

Para cada  $n \geq 1$ , seja  $Z_n = (Z_n(t))_{t \geq 0}$  uma cadeia de Markov a tempo contínuo no espaço de estados  $d$ -dimensional  $\mathbb{Z}^d$  governada pelas seguintes taxas de transição:

$$q_{z, z+l}^{(n)} = n\beta_l\left(\frac{z}{n}\right), \quad z, l \in \mathbb{Z}^d.$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n(t+h) = z+l | Z_n(t) = z) &= hn\beta_l\left(\frac{z}{n}\right) + o(h) \quad l \neq 0, \\ \mathbb{P}(Z_n(t+h) = z | Z_n(t) = z) &= 1 - hn \sum_l \beta_l\left(\frac{z}{n}\right) + o(h). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Note que o processo definido acima é denominado “dependente da densidade”, uma vez que as taxas dependem da densidade do processo (isto é, normalizado por  $n$ ).

Supomos que o processo tem no máximo um número enumerável de possíveis transições e que as funções  $\beta_l(x)$  são contínuas. Ademais, supomos que o estado inicial do processo  $Z_n(0)$  é não aleatório.

Uma maneira de caracterizar o processo  $Z_n$  é por meio de processos de Poisson. Com efeito, se considerarmos processos de Poisson independentes de taxa 1,  $Y_l = (Y_l(t))_{t \geq 0}$ , definidos



para cada uma das possíveis transições  $l$ , podemos escrever:

$$Z_n(t) = Z_n(0) + \sum_l l Y_l \left( n \int_0^t \beta_l \left( \frac{Z_n(s)}{n} \right) ds \right). \quad (\text{A.2})$$

Para verificar que (A.2) satisfaz (A.1) note que dado  $Z_n(t) = z$ , a probabilidade que haverá uma transição em  $Y_l \left( n \int_0^t \beta_l \left( \frac{Z_n(s)}{n} \right) ds \right)$  durante  $(t, t+h)$  é  $hn\beta_l \left( \frac{z}{n} \right) + o(h)$ , uma vez que o integrando é igual a  $n\beta_l \left( \frac{z}{n} \right)$  até o primeiro salto depois de  $t$ . Além disso, observe que os processos são definidos no mesmo espaço de probabilidade para diferentes valores de  $n$ , pois na construção usamos os mesmo processos de Poisson. No que segue serão apresentados os teoremas limites para os processos  $\{Z_n\}$ .

## A.2 Lei dos Grandes Números

Para apresentar uma Lei dos Grandes Números, definimos a função drift por

$$F(x) = \sum_l l \beta_l(x), \quad x \in \mathbb{Z}^d \quad (\text{A.3})$$

e consideramos o processo  $\bar{Z}_n(t) = n^{-1}Z_n(t)$ . Deste modo, a equação (A.2) é equivalente a

$$\bar{Z}_n(t) = \bar{Z}_n(0) + \sum_l l n^{-1} \hat{Y}_l \left( n \int_0^t \beta_l(\bar{Z}_n(s)) ds \right) + \int_0^t F(\bar{Z}_n(s)) \quad (\text{A.4})$$

em que  $\hat{Y} = Y_l(t) - t$  é o processo de Poisson centrado na sua média. Supondo que o número de possíveis transições do processo é finito e observando que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq t} \left| \frac{\hat{Y}_l(ns)}{n} \right| = 0 \quad q.c., \quad t \geq 0$$

é possível ver que o segundo termo do lado direito de (A.4) será pequeno para  $n$  suficientemente grande. Isto sugere que  $\bar{Z}_n(t)$  se assemelha à função vetorial determinística  $z(t)$  definida como a solução da equação integral

$$z(t) = z(0) + \int_0^t F(z(s)) ds. \quad (\text{A.5})$$

No que segue, será enunciado o teorema que formaliza a ideia acima.

**Teorema 10.** Suponha que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Z}_n(0) = z_0$  e que para cada compacto  $K \subset \mathbb{R}^d$ ,

$$\sum_l |l| \sup_{x \in K} \beta_l(x) < \infty \quad (\text{A.6})$$

e que existe uma constante  $M_K > 0$  tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq M_K |x - y|, \quad \text{para todo } x, y \in K.$$

Então, para todo  $t \geq 0$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq t} |\bar{Z}_n(s) - z(s)| = 0, \quad q.c.$$

*Demonstração.* Ver Teorema 11.2.1 de [Ethier e Kurtz \(1986\)](#).

## A.3 Teorema Central do Limite

Se definimos

$$W_l^n(t) = \sqrt{n}(n^{-1}Y_l(nt) - t) = n^{-1/2}\hat{Y}_l(nt)$$

sabemos que  $W_l^{(n)}$  converge para o movimento Browniano padrão  $W_l$ . Então,

$$\begin{aligned} v_n(t) &:= \sqrt{n}(\bar{Z}_n(t) - z(t)) \\ &= v_n(0) + \sum_l l W_l^{(n)} \left( \int_0^t \beta_l(\bar{Z}_n(s)) ds \right) + \int_0^t \sqrt{n}(F(\bar{Z}_n(s)) - F(z(s))) ds. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Notemos que  $v_n(0) = \sqrt{n}(\bar{Z}_n(0) - z(0))$  em (A.7) é por hipótese não aleatório. A segunda igualdade é consequência direta da definição de  $W_l^{(n)}$ ,  $\bar{Z}_n$  e  $z$ . Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(F(\bar{Z}_n(s)) - F(z(s))) &= \sqrt{n} \partial F(z(s)) (\bar{Z}_n(s) - z(s)) + o(\sqrt{n} |\bar{Z}_n(s) - z(s)|^2) \\ &= \partial F(z(s)) v_n(s) + o(|\bar{Z}_n(s) - z(s)|) v_n(s), \end{aligned}$$

em que  $\partial F = (\partial_j F_i)$  é a função matricial das derivadas parciais. Do Teorema 10 sabemos que  $\bar{Z}_n$  converge para  $z$ , e que  $W_l^{(n)}$  converge para  $W_l$ , um movimento Browniano padrão. Isso sugere que  $v_n$  converge para um processo  $v$  definido pela equação integral

$$v(t) = v(0) + \sum_l l W_l \left( \int_0^t \beta_l(z(s)) ds \right) + \int_0^t \partial F(z(s)) v(s) ds. \quad (\text{A.8})$$

Isso será formalizado no próximo Teorema seguinte, e utiliza-se a notação  $G(x) = \sum_l l l^T \beta_l(x)$ .

**Teorema 11.** Suponha que para cada compacto  $K \subset \mathbb{R}^d$ ,

$$\sum_l |l|^2 \sup_{x \in K} \beta_l(x) < \infty, \quad (\text{A.9})$$

e que  $\partial F$  é contínua. Suponha que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(0) = v(0) \quad (\text{constante}).$$

Então

$$v_n \Rightarrow v,$$

onde  $\Rightarrow$  denota a convergência em distribuição e  $v$  é o processo definido na equação (A.8). Esse processo  $v$  é um processo vetorial gaussiano com matriz de covariância

$$\text{Cov}(v(t), v(r)) = \int_0^{r \wedge t} \Phi(t, s) G(z(s)) [\Phi(r, s)]^T ds, \quad (\text{A.10})$$

em que  $\Phi$  é a função matricial definida como a solução de

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, s) = \partial F(z(t)) \Phi(t, s), \quad \Phi(s, s) = \mathbb{I}. \quad (\text{A.11})$$

*Demonstração.* Ver Teorema 11.2.3 de [Ethier e Kurtz \(1986\)](#).

Ademais, será apresentado um Teorema o qual foi utilizado no Capítulo 2.

**Teorema 12.** Seja  $\varphi$  continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}^d$ . Sejam  $\bar{Z}_n$  e  $z$  definidos como antes, com  $\varphi(z(0)) > 0$ , e supomos que as condições do Teorema 11 são satisfeitas. Seja,

$$\tau_n = \inf\{t : \varphi(\bar{Z}_n(t)) \leq 0\} \quad (\text{A.12})$$

e

$$\tau = \inf\{t : \varphi(z(t)) \leq 0\}. \quad (\text{A.13})$$

Suponha que  $\tau < \infty$  e

$$\nabla\varphi(z(\tau)) \cdot F(z(\tau)) < 0. \quad (\text{A.14})$$

Então,

$$\sqrt{n}(\tau_n - \tau) \Rightarrow -\frac{\nabla\varphi(z(\tau)) \cdot \nu(\tau)}{\nabla\varphi(z(\tau)) \cdot F(z(\tau))} \quad (\text{A.15})$$

e

$$\sqrt{n}(\bar{Z}_n(\tau_n) - z(\tau)) \Rightarrow \nu(\tau) - \frac{\nabla\varphi(z(\tau)) \cdot \nu(\tau)}{\nabla\varphi(z(\tau)) \cdot F(z(\tau))} F(z(\tau)). \quad (\text{A.16})$$

*Demonstração.* Ver Teorema 11.4.1 de [Ethier e Kurtz \(1986\)](#).

## RESULTADOS AUXILIARES

### B.1 Matriz de Covariância do Teorema 2

Nessa seção detalharemos os elementos que compõem a matriz de covariância  $\Sigma$ , com

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

e os quais foram omitidos no enunciado do Teorema 2. Como não foi possível obter expressões mais simples para  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{22}$  e  $\Sigma_{12}$  deixamos no apêndice a forma íntegra de cada uma.

Ademais, a metodologia utilizada para obtenção de  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{22}$  e  $\Sigma_{12}$  se encontra descrita na Seção 2.3.3 e no que segue serão detalhados tais expressões.

$$\Sigma_{11} = A + \frac{2x_{\infty}^2 B}{y_{\infty} - \lambda} \left( \frac{B}{2} - \frac{B^2}{6} - \frac{A}{x_0} \right) + \left( \frac{x_{\infty}}{y_{\infty} - \lambda} \right)^2 BC + B^2 D - \frac{7x_{\infty} B^3}{2} + \frac{x_{\infty} B^4}{3} + E$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{22} &= (AB^2 - HBx_{\infty} - B^3 x_{\infty}) + \frac{AI}{x_{\infty}} + J \left( \frac{x_{\infty} B^2}{x_0} + \frac{2x_{\infty} B^3}{3} + \frac{x_{\infty} B^2}{2} - \frac{x_{\infty} B^4}{6} \right) + BF \\ &+ x_{\infty} G - 8x_0 + J^2 K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{12} &= x_{\infty} L(1 - B) - x_{\infty} + x_{\infty} J \left( \frac{B^2}{2} - \frac{B^3}{6} - \frac{AB}{x_0} \right) + \frac{x_{\infty} M}{y_{\infty} - \lambda} + \left( \frac{x_{\infty} J}{y_{\infty} - \lambda} \right) (BC + BD^2) \\ &+ \frac{x_{\infty} J}{y_{\infty} - \lambda} \left( E + \frac{x_{\infty} B^4}{3} - \frac{7x_{\infty} B^3}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{em que } A &= x_{\infty} \left( \frac{x_0 - x_{\infty}}{x_0} \right), B = \frac{x_0(1 - x_{\infty} - w_0) - y_0 x_{\infty}}{x_0(x_{\infty} + \lambda)}, C = \lambda - 16x_0 - 33x_{\infty} + \frac{x_{\infty}^2}{x_0} \left( -x_{\infty} - \frac{x_{\infty}^2}{x_0} \right), \\ D &= -10x_{\infty} - \frac{x_{\infty}^2}{x_0}, E = -50x_{\infty} + 52x_0 + \frac{x_{\infty}^2 y_0}{x_0^2} (x_{\infty} - 1), F = 8x_0 - \frac{x_{\infty}^2}{x_0}, \end{aligned}$$

$$G = 9 - \frac{x_\infty^2}{x_0} + \frac{x_\infty y_0}{x_0^2} - \frac{y_0}{x_0}, H = \frac{3x_0 - 2x_\infty}{x_0}, I = \frac{2x_0^2 + x_\infty y_0}{x_0}, J = \frac{y_\infty - x_\infty}{y_\infty - \lambda},$$

$$K = BC + B^2 D - \frac{7x_\infty B^3}{2} + \frac{x_\infty B^4}{3} + E, L = \frac{x_\infty}{x_0} e$$

$$M = \frac{x_\infty B^2}{x_0} + \frac{2x_\infty B^3}{3} + \frac{x_\infty B^2}{2} + \frac{x_\infty B^4}{6} + BF + x_\infty G - 8x_0.$$

## B.2 Convergência do máximo de uma função

Nessa seção apresentaremos uma prova rigorosa para a convergência do máximo de uma sequência de funções que converge uniformemente em intervalos fechados.

Em vista disso, considere  $z^{(n)}(t) := Z^{(n)}/n$  para  $\forall t \in [0, s]$ , na qual  $n$  é o tamanho da população e  $Z^{(N)}(t)$  corresponde ao número de adotadores no tempo  $t$ . Além disso, defina  $v^{(n)}(t) = (x^{(n)}(t), y^{(n)}(t), z^{(n)}(t)) := V^{(n)}(t)/n$ , como já definido no Capítulo 2.

No que segue, a ideia é demonstrar que o seguinte resultado vale.

**Lema 3.** Para todo  $s \geq 0$ , vale que:

$$\max_{0 \leq t \leq s} (z^{(n)}(t)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq s} (z(t)).$$

Para construirmos a prova do Lema 3 é necessário utilizar o Teorema 10 do Apêndice A o qual enuncia que para todo intervalo de tempo limitado, a trajetória da Cadeia de Markov converge para uma sistema de equações diferenciais.

Além desse resultado, será utilizado um outro de análise real que aborda sobre a convergência do máximo de uma sequência de funções que converge uniformemente em intervalos fechados e limitados.

**Lema 4.** Seja  $f_n$  uma sequência de funções contínuas em um intervalo fechado  $I$  convergindo uniformemente para  $f$ . Então

$$\max\{f_n(x) : x \in I\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \max\{f(x) : x \in I\}. \quad (\text{B.1})$$

*Demonstração.* Seja  $I$  fechado e limitado, então  $f_n$  é limitada. A convergência uniforme implica que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $x \in I$  e  $n \geq N$ :

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon. \quad (\text{B.2})$$

Portanto, para todo  $\varepsilon > 0$  (de (B.2)):

$$f_n(x) < \max_I(f) + \varepsilon,$$

$$f(x) - \varepsilon < \max_I(f_n).$$

Além disso, segue que:

$$\begin{aligned}\max_I(f_n) &\leq \max_I(f) + \varepsilon, \\ \max_I(f) - \varepsilon &\leq \max_I(f_n).\end{aligned}$$

Portanto, para todo  $n \geq N$ , obtemos que

$$|\max_I(f_n) - \max_I(f)| \leq \varepsilon.$$

□

Para provarmos o Lema 3 vamos utilizar o resultado apresentado no Lema 4.

**Demonstração do Lema 3.** Por hipótese, considere  $z^{(n)}$  uma sequência de funções contínuas em um intervalo  $I = [0, s]$  convergindo uniformemente a  $z$ . Como  $I$  é fechado e limitado, segue que  $z^{(n)}$  é limitada.

Assim, como no resultado do Lema 4 a convergência uniforme implica que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $x \in I$  e  $n \geq N$ :

$$z(t) - \varepsilon < z^{(n)}(t) < z(t) + \varepsilon. \tag{B.3}$$

Portanto, para todo  $\varepsilon > 0$  (de (B.3)) temos:

$$\begin{aligned}z^{(n)}(s) &< \max(z) + \varepsilon, \\ z(s) - \varepsilon &< \max(z^{(n)}).\end{aligned}$$

Consequentemente, segue que

$$\begin{aligned}\max(z^{(n)}) &\leq \max(z) + \varepsilon, \\ \max(z) - \varepsilon &\leq \max(z^{(n)}).\end{aligned}$$

Dessa forma, é possível obter que para todo  $n \geq N$ :

$$|\max(z^{(n)}) - \max(z)| \leq \varepsilon.$$



---

## CÓDIGOS FONTE

---

### C.1 Simulação do modelo de difusão de inovação

---

```
1 #Definir o número de realizações do processo
2 nsim = 25000
3
4 #Inicializa o vetor que armazenará a proporção final de
   ignorantes de cada realização
5 i_final = c()
6 for(i in 1:nsim){
7 #Definir o tamanho da população finita
8 n = 500
9 #Definir o número de iterações consideradas até a convergência
10 niter = 5000
11 #Definir a combinação de parâmetros avaliados na simulação
12 gs_opt = expand.grid(
13     l=1,
14     i= 0.75 ,
15     j= 0.005 ,
16     k= 0.245
17 )
18 #Inicialização dos vetores
19 inter = numeric(niter) # tempo da exponencial
20 i_p = numeric(niter) # numero de ignorantes
21 j_p = numeric(niter) # numero de conscientes
22 k_p = numeric(niter) # numero de adotadores
23 a_p = numeric(niter) # numero de abandonadores
```



```

24  gs = gs_opt
25
26 #Definir os valores iniciais , note que estamos com uma população
   o fechada e finita ,  $i + j + k + a = n$ 
27  l = gs$l
28  init_i = i = floor(gs$i * n)    #x
29  init_j = j = floor(gs$j * n)    #y
30  init_k = k = floor(gs$k * n)    #z
31  init_a = a = (n - (i + j + k))  #w
32
33  for(t in 1:niter) {
34    b1 = (i*k)/n #Para simplificar foram retirados um dos n
   multiplicando e dividindo (density dependent)
35    b2 = (j*k)/n
36    b3 = l*k
37
38    if(k <= 0) break
39
40    t1 = rexp(i, rate=b1) # Tempos onde ocorrem os eventos i-1,
   j+1, ignorante vira consciente
41    t2 = rexp(j, rate=b2) # Tempos onde ocorrem os eventos j-1,
   k+1, consciente vira adotador
42    t3 = rexp(k, rate=b3) # Tempos onde ocorrem os eventos k-1,
   adotador vira abandonador
43
44    t1min = min(t1)
45    t2min = min(t2)
46    t3min = min(t3)
47
48    tmin = min(t1min, t2min, t3min)
49    if (tmin == t1min) {
50      i = i - 1
51      j = j + 1
52      inter[t] = t1min
53    } else if (tmin == t2min) {
54      j = j - 1
55      k = k + 1
56      inter[t] = t2min
57    } else {

```

```

58     k = k - 1
59     inter[t] = t3min
60   }
61
62   a = (n - (i + j + k))
63   i_p[t] = i
64   j_p[t] = j
65   k_p[t] = k
66   a_p[t] = a
67 }
68   i_final = c(i_final, i_p[which(k_p == 0)[1]])
69 }
70 fx = function(x){1 - x*(1 + (gs$j/gs$i)) + log(x/gs$i)*(x +
    gs$l)}
71 a = uniroot.all(fx, c(0,1))
72 i_final_2 = sqrt(n)*((i_final/n) - a)
73 hist(i_final_2, breaks = 100)

```

---

## C.2 Construção da Figura 1

---

```

1 #Função que retorna os parâmetros e plota o gráfico gerado
2 plot_i <- function(idx, gs, result){
3   cat(paste('x0: ', gs[idx,1], '\tw: ', gs[idx,2], '\ty: ', gs[idx
    ,3], '\tl: ', gs[idx,4], '\n'))
4   plot(x, result[idx,], type="l")
5   abline(h=0, col=2)
6   abline(v=gs[idx,1], col=2)
7 }
8
9 #Função que plota todos os gráficos que são gerados a partir de
    todas as combinações dos parâmetros
10 plotAll <- function(idx_cenario, gs, result){
11   for(i in 1:length(idx_cenario)){
12     idx = idx_cenario[i]
13     cat('x0: ', gs[idx,1], '\tw: ', gs[idx,2], '\ty: ', gs[idx,3],
    '\tl: ', gs[idx,4], '\n')
14     plot(x, result[idx,], type="l", xlim=c(0, 1), ylim=c(-2, 2)
    )
15     abline(h=0, col=2)

```

```

16   abline(v=gs[idx,1], col=2)
17   par(ask=TRUE)
18 }
19 }
20
21 #Função que retorna a quantidade de raízes dado um conjunto de
   parâmetros e certas condições sobre eles
22 howManyRoot <- function(idx_cenario, gs, result, x, x0){
23   root_cenario = c()
24   for(idx in idx_cenario){
25     x0 = gs[idx,1]
26     count = 0
27
28     for(i in 2:length(x)){
29       if(x[i] <= x0){
30         if( (result[idx, i] * result[idx, i-1]) <= 0){
31           count = count + 1
32         }
33       }
34     }
35     if(abs(result[idx, 1]) < 10-12) count = count + 1
36     if(abs(result[idx, length(x)]) < 10-12) count = count + 1
37     root_cenario = c(root_cenario, count)
38   }
39   return(root_cenario)
40 }
41 f <- function(x, x0, w, y, l){
42   return(1 - w - x*(1 + y/x0) + (x + 1)*log(x/x0))
43 }
44
45 #Função cria uma lista de combinação dos 4 parâmetros do modelo
46 gs = expand.grid(
47   list(x0 = seq(0.1, 1.0, by=0.1),
48     w = seq(0.0, 1.0, by=0.1),
49     y = seq(0.1, 1.0, by=0.1),
50     l = seq(0.1, 1.0, by=0.1))
51 )
52 x = seq(0.001, 1, by = 0.001)
53 result = t(apply(gs, 1, function(par){

```

```
54 f(x, par[1], par[2], par[3], par[4])
55 )))
56
57 #Calcula todas as raízes e plota os gráficos para as combinaçõ
   es de parâmetros no Cenário 1
58 idx_cenario_1 = which( (1 - (gs$x0 + gs$w + gs$y)) > 0 & gs$l >
   gs$x0)
59 hmr1 = howManyRoot(idx_cenario_1, gs, result, x, x0)
60 hist(hmr1)
61 plotAll(idx_cenario_1, gs, result)
62
63 #Calcula todas as raízes e plota os gráficos para as combinaçõ
   es de parâmetros no Cenário 2
64 idx_cenario_2 = which( (1 - (gs$x0 + gs$w + gs$y)) == 0 & gs$l
   > gs$x0)
65 hmr2 = howManyRoot(idx_cenario_2, gs, result, x, x0)
66 hist(hmr2)
67 plotAll(idx_cenario_2, gs, result)
68
69 #Calcula todas as raízes e plota os gráficos para as combinaçõ
   es de dos parâmetros no Cenário 3
70 idx_cenario_2 = which( (1 - (gs$x0 + gs$w + gs$y)) == 0 & gs$l
   < gs$x0)
71 hmr2 = howManyRoot(idx_cenario_2, gs, result, x, x0)
72 hist(hmr2)
73 plotAll(idx_cenario_2, gs, result)
74
75 #Calcula todas as raízes e plota os gráficos para as combinaçõ
   es de parâmetros no Cenário 4
76 idx_cenario_4 = which( (1 - (gs$x0 + gs$w + gs$y)) > 0 & gs$l <
   gs$x0)
77 hmr4 = howManyRoot(idx_cenario_4, gs, result, x, x0)
78 hist(hmr4)
79 plotAll(idx_cenario_4, gs, result)
80
81 #Calcular a função f(x) e estudar as raízes
82 f <- function(x, x0, w, y, l){
83   return(1 - w - x*(1 + y/x0) + (x + l)*log(x/x0))
84 }
```

```

85 x = seq(0.001, 1, by = 0.001)
86
87 #Plotar os gráficos a partir dos parâmetros de f(x)
88 plota <- function(x,g,x0){
89     plot(x, g, ylim = c(-1,1), axes = FALSE,type = "l")
90     abline(h=0, col=1)
91     abline(v=0, col=1)
92
93 }
94 g <- f(x,0.1,0.3,0.1,0.2)
95 plota(x, g, 0.1)

```

---

### C.3 Construção da Figura 2

---

```

1 # Caminho onde ficarão armazenados os gráficos gerados
2 folder = 'caminho'
3
4 # Pacote utilizado para resolver equações não lineares
5 # Método Newton Raphson
6 install.packages("rootSolve")
7 library(rootSolve)
8 # Definição do intervalo dos possíveis valores de lambda
9 lambda = seq(0.01,1.5,by = 0.01)
10 # Definição do intervalo dos possíveis valores para
    ignorantes e abandonadores
11 c_inicial = expand.grid(
12     ign = seq(0.01, 1, by = 0.01),
13     consc = seq(0.01,1,by = 0.01),
14     w = seq(0.01, 1, by = 0.01)
15 )
16
17 # Condição necessária para garantir que o número de adotadores
    seja diferente de zero
18 c_inicial = c_inicial[which((c_inicial$ign + c_inicial$consc
    + c_inicial$w) < 1),]
19
20 # Inicializar os vetores que armazenaremos para plotar o gráfico
21 for (i in 1:nrow(c_inicial)){

```

```
22     raiz = c()
23     y_inf = c()
24     lambda_final = c()
25     for(j in 1:length(lambda)){
26         fx = function(x){1 - c_inicial[i,]$w - x*(1 + c_
inicial[i,]$consc/c_inicial[i,]$ign) + (x + lambda[j])*log(x
/c_inicial[i,]$ign)}
27         raiz = c(raiz, uniroot.all(fx, c(0,1)))
28         lambda_final = c(lambda_final, lambda[j])
29         y_inf = c(y_inf, (uniroot.all(fx, c(0,1)))*(c_
inicial[i,]$consc/c_inicial[i,]$ign - log(uniroot.all(fx, c
(0,1))/c_inicial[i,]$ign)))
30     }
31     pdf(sprintf('%s_sim_%.2f_%.2f_%.2f.pdf', folder, c_inicial[
i,]$ign, c_inicial[i,]$consc, c_inicial[i,]$consc))
32     plot(lambda_final, y_inf)
33     title(main = "Relacao entre lambda e y_inf",
34           xlab = "lambda_final", ylab = "y_inf",
35           cex.main = 1.5, font.main = 4, col.main = "black",
36           col.lab = "darkblue")
37     dev.off()
38 }
```

---

