

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA INTERINSTITUCIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA
UFSCar-USP

AMANDA BUOSI GAZON MILANI

**ANÁLISE BAYESIANA DE DADOS FUNCIONAIS COM O USO
DE PROCESSO GAUSSIANO E METANÁLISE: UMA
APLICAÇÃO PARA A MARCHA HUMANA**

Tese apresentada ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar e ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística UFSCar-USP.

Orientador: Prof. Dr. Luis Ernesto Bueno Salasar

**São Carlos
Maio de 2019**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA INTERINSTITUCIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA
UFSCar-USP

AMANDA BUOSI GAZON MILANI

**BAYESIAN FUNCTIONAL DATA ANALYSIS USING GAUSSIAN
PROCESS AND META-ANALYSIS: AN APPLICATION TO
HUMAN GAIT**

Doctoral dissertation submitted to the Department of Statistics – DEs-UFSCar and to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC- USP, in partial fulfillment of the requirements for the PhD degree - Interagency Program Graduate in Statistics UFSCar-USP.

Advisor: Prof. Dr. Luis Ernesto Bueno Salasar

**São Carlos
May 2019**

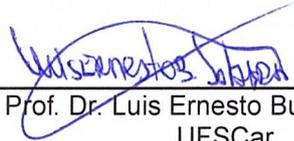


UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística

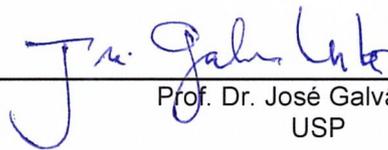
Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Amanda Buosi Gazon Milani, realizada em 02/05/2019:



Prof. Dr. Luis Ernesto Bueno Salazar
UFSCar

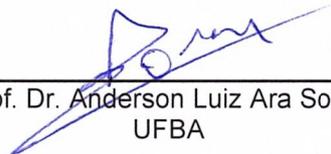
Prof. Dr. Adriano Polpo de Campos
UFSCar



Prof. Dr. José Galvão Leite
USP

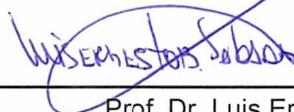


Profa. Dra. Cristiane Shinohara Moriguchi de Castro
UFSCar



Prof. Dr. Anderson Luiz Ara Souza
UFBA

Certifico que a defesa realizou-se com a participação à distância do(s) membro(s) Adriano Polpo de Campos e, depois das arguições e deliberações realizadas, o(s) participante(s) à distância está(ão) de acordo com o conteúdo do parecer da banca examinadora redigido neste relatório de defesa.



Prof. Dr. Luis Ernesto Bueno Salazar

*Dedico ao meu marido Eder,
companheiro e inspiração da minha vida.*

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho agradeço:

À Deus, por tudo. Sem Ele eu não existiria e sem minha fé nada disso seria possível.

Aos meus orientadores Prof. Dr. Luis Ernesto Bueno Salazar e Prof. Dr. Adriano Polpo de Campos, por toda dedicação dispensada durante minha orientação, pelos conhecimentos transmitidos, paciência e disponibilidade.

Ao Prof. Dr. Danilo Lourenço Lopes e à Profa. Dra. Cristiane Shinohara Moriguchi de Castro pelas sugestões dadas na apresentação da qualificação desta tese.

À banca avaliadora da defesa desta tese, pelas correções, sugestões e contribuições.

Aos professores do Departamento de Estatística da UFSCar e do Instituto de Ciências Matemáticas e Computação da USP que participaram da minha vida nestes anos de doutorado, uns pelo conhecimento transmitido e outros pela amizade e companhia.

À todos os educadores que já participaram da minha vida acadêmica.

Agradeço também aos meus pais, Ivo e Marinez, que sempre me apoiaram na realização deste sonho e sempre que precisei financiaram meus estudos.

À minha irmã Ana Carolina, pelo companheirismo e amizade, por me apoiar e incentivar, e por me substituir em casa nos momentos em que eu não podia estar presente.

Ao meu amor Eder, que durante o doutorado foi meu namorado, meu noivo e agora meu marido, por todo carinho, apoio, paciência e dedicação. Obrigada por acreditar em mim quando eu mesma já não acreditava. Por me motivar e ser meu porto seguro quando faltavam força e coragem para continuar. E por ser exemplo e inspiração como pessoa e como profissional.

À minha sobrinha e afilhada Isabella por, mesmo tão pequenina, compreender minha ausência, me recebendo de braços abertos em cada reencontro.

À toda minha família e à família do Eder, pelo estímulo, torcida e orações dispensados em todos os momentos.

Aos colegas da pós-graduação pela parceria nos estudos e momentos de descontração.

Aos amigos e colegas de trabalho de Goiânia, pelo incentivo, amizade e apoio.

À todos os meus amigos, que sempre torceram pelo meu sucesso. Em especial à Ana Paula, pela incentivo a nunca desistir e atingir meu objetivo.

Enfim, à todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para que esse sonho se tornasse realidade!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

MILANI, A. B. G. **Análise Bayesiana de dados funcionais com o uso de processo Gaussiano e metanálise: uma aplicação para a marcha humana.** 2019. 206p. Tese (Doutorado em Estatística) – Departamento de Estatística - Universidade Federal de São Carlos e Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

O termo “dados funcionais” surgiu para acomodar situações em que cada observação pode ser naturalmente interpretada como uma função. Estas situações têm se tornado cada vez mais comuns com o surgimento de instrumentos de medição que possuem capacidade de registrar grandes volumes de informações com alta frequência. Neste contexto, surgiu um ramo da estatística denominado análise de dados funcionais, em que métodos apropriados de análise foram desenvolvidos. Um exemplo de aplicação para a análise de dados funcionais é a marcha humana e seu estudo é fundamental para compreensão do movimento normal da marcha e na proposição e avaliação de programas preventivos ou de reabilitação. Neste trabalho, consideramos dados de rotação angular do joelho durante a marcha de uma população de indivíduos sem lesões prévias com o objetivo de caracterizar padrões individuais e populacionais. Para tanto, consideramos para os dados de cada indivíduo um modelo de regressão Bayesiano com processo Gaussiano, e as conclusões serão apresentadas a partir da proposição de diferentes métodos de construção de bandas preditivas funcionais. Para o agrupamento das conclusões entre os diferentes indivíduos da população, propomos a aplicação de uma metanálise Bayesiana.

Palavras-chave: Análise de dados funcionais, Inferência Bayesiana, Processo Gaussiano, Metanálise, Bandas preditivas, Marcha humana.

ABSTRACT

MILANI, A. B. G. **Bayesian functional data analysis using Gaussian process and meta-analysis: an application to human gait**. 2019. 206 p. Tese (Doutorado em Estatística) – Departamento de Estatística – Universidade Federal de São Carlos e Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

The term "functional data" arised to accommodate situations in which each observation can be naturally interpreted as a function. These situations have become increasingly common with the availability of measuring instruments capable of recording large volumes of information with high frequency. In this context, a branch of statistics denominated functional data analysis emerged, in which appropriate methods of analysis were developed. An example of application of these techniques is in the study of human gait. The analysis of human movement is fundamental for understanding the normal movement and for proposing and evaluating preventive or rehabilitation programs. In this work, we will consider angular rotation data of the knee during the gait for a population of individuals without previous lesions with the aim of characterizing individual and population patterns. For this, we consider for each individual a Bayesian regression model with Gaussian process, and the conclusions was illustrated by the proposition of different methods for construction of functional predictive bands. To summarize the conclusions across the different individuals of the population, we propose to apply a Bayesian meta-analysis.

Keywords: Functional data analysis, Bayesian inference, Gaussian process, Meta-analysis, Predictive bands, Human gait.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	A Análise de Dados Funcionais	19
1.2	Dados da Marcha Humana	20
1.2.1	Descrição dos dados	24
1.3	Objetivos e Estrutura do Texto	26
2	ANÁLISE DE DADOS FUNCIONAIS	29
2.1	Estatísticas Descritivas para Dados Funcionais	29
2.1.1	Média e variância funcionais	29
2.1.2	Funções de covariância e correlação	31
2.1.3	Análises gráficas	31
2.2	O Conceito de <i>Depth</i>	34
2.2.1	<i>Fraiman-Muniz (FM) depth</i>	34
2.2.2	<i>h-modal (Modal) depth</i>	35
2.2.3	<i>Band (BD) depth</i>	36
2.2.4	<i>Modified Band (MBD) depth</i>	37
2.2.5	Mediana funcional	38
2.2.6	<i>Boxplot</i> funcional e <i>outliers</i>	38
2.3	Suavização de Dados Funcionais	42
2.3.1	Método de funções base	42
2.3.2	Escolha da base	43
2.3.2.1	Séries de Fourier	43
2.3.3	Aproximação por funções base para os dados da marcha	45
2.4	Conclusões	45
3	MODELO DE REGRESSÃO BAYESIANO PARA A MARCHA HUMANA	47
3.1	Descrição do Modelo	47
3.1.1	Verossimilhança	49
3.1.2	Distribuições <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i>	49
3.1.3	Distribuição preditiva <i>a posteriori</i>	51
3.2	Análise dos Dados	52
3.2.1	Diagnóstico de convergência	53
3.2.2	Resultados	53
3.3	Conclusões	55

4	MODELO DE REGRESSÃO FUNCIONAL PROCESSO GAUSSI-ANO BAYESIANO PARA A MARCHA	57
4.1	Descrição do Modelo	57
4.1.1	Verossimilhança	60
4.1.2	Função de covariância adotada	60
4.1.3	Distribuições <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i>	62
4.2	Estudo de Simulação	63
4.2.1	A curva verdadeira para geração dos dados	63
4.2.2	Estrutura do estudo de simulação	67
4.2.3	Resultados do estudo de simulação	69
4.2.3.1	Resultados para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano	70
4.2.3.2	Resultados para o modelo de regressão Bayesiano - comparação de modelos	76
4.3	Análise dos Dados da Marcha Humana	81
4.3.1	Diagnóstico de convergência	82
4.3.2	Resultados	82
4.4	Comparação de Modelos	83
4.5	Diferenças Bilaterais	86
4.6	Conclusões	96
5	METANÁLISE E ANÁLISE POPULACIONAL	99
5.1	Metanálise	99
5.2	Metanálise, Modelos Hierárquicos e Análise Combinada para Dados Funcionais	101
5.2.1	Análise combinada	103
5.2.2	Modelo hierárquico	105
5.2.3	Metanálise	108
5.2.4	Comparando os resultados obtidos	110
5.3	Análise Populacional para o Modelo de Regressão Funcional Pro- cesso Gaussiano Bayesiano para a Marcha Humana	114
5.3.1	Resultados	114
5.4	Diferenças Bilaterais - Versão Populacional	116
5.5	Conclusões	118
6	BANDAS PREDITIVAS FUNCIONAIS	119
6.1	Métodos Propostos para Bandas Preditivas Funcionais	119
6.1.1	Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1	120
6.1.2	Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2	121
6.1.3	Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3	121
6.2	Estudo de Simulação	121
6.3	Aplicação ao Conjunto de Dados da Marcha	128

6.3.1	Método \mathcal{B}^1	128
6.3.2	Método \mathcal{B}^2	130
6.3.3	Método \mathcal{B}^3	131
6.3.4	Comparando as bandas - área e cobertura preditiva	133
6.4	Conclusões	135
7	CONCLUSÕES E PROPOSTAS FUTURAS	137
	REFERÊNCIAS	139
	APÊNDICE A – ANÁLISE FUNCIONAL, SÉRIES DE FOURIER E PROCESSO GAUSSIANO	145
A.1	Tópicos de Análise Funcional	145
A.2	Séries de Fourier	151
A.3	Processo Estocástico e Processo Gaussiano	153
	APÊNDICE B – SELEÇÃO DE MODELOS	155
B.1	DIC	155
B.1.1	Escolha do M - limite superior na soma de Fourier	155
B.2	Escolha dos Hiperparâmetros da Função Covariância	161
	APÊNDICE C – FIGURAS	163
C.1	Gráficos com os dados de cada indivíduo	164
C.2	Gráficos com as estimativas <i>a posteriori</i> das curvas médias do Ca- pítulo 3	169
C.3	Gráficos com as estimativas da média da distribuição preditiva <i>a</i> <i>posteriori</i> do Capítulo 3	174
C.4	Gráficos com as estimativas <i>a posteriori</i> das curvas médias do Ca- pítulo 4	179
C.5	Gráficos com as estimativas da média da distribuição preditiva <i>a</i> <i>posteriori</i> do Capítulo 4	185
C.6	Gráficos com as bandas preditivas da subseção 6.1.1 para o modelo descrito no Capítulo 4	190
C.7	Gráficos com as bandas preditivas da subseção 6.1.2 para o modelo descrito no Capítulo 4	195
C.8	Gráficos com as bandas preditivas da subseção 6.1.3 para o modelo descrito no Capítulo 4	201

1 INTRODUÇÃO

1.1 A Análise de Dados Funcionais

Dados funcionais consistem em uma amostra cuja i -ésima observação é uma função real, $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, $t \in I$, em que I é um intervalo real e cada $x_i(\cdot)$ é uma função em algum espaço de funções \mathcal{H} (RAMSAY; DALZELL, 1991). Em outras palavras, dados funcionais são aqueles oriundos de medições que teoricamente poderiam ser feitas continuamente, ou seja, ao invés de serem tratados como escalares ou vetores de dimensão finita, tem a possibilidade de serem tratados como funções (curvas).

As razões práticas para analisarmos os dados de um ponto de vista funcional são diversas. Entre elas podemos citar as seguintes (RAMSAY; DALZELL, 1991):

- As observações funcionais ocorrem cada vez mais frequentemente em contextos aplicados, à medida que aumenta a facilidade de coleta automatizada e quase-contínua de dados. Além disso, procedimentos de suavização e interpolação podem produzir representações funcionais de conjuntos finitos de observações.
- O processo de modelagem é mais realista em termos funcionais, embora somente um número finito de observações esteja disponível.
- Os objetivos de uma análise podem ser expressos mais facilmente em termos funcionais do que em termos de vetores finitos dos dados observados.
- Levar em consideração, por exemplo, a suavidade para dados multivariados ocasionados por processos funcionais, pode ter implicações importantes para as análises.

A Análise de Dados Funcionais (ADF) ainda é um tema recente, contudo está em crescente desenvolvimento visto que incitou grande interesse da comunidade estatística. A maioria das técnicas iniciais desenvolvidas para a ADF foi introduzida por Ramsay e Dalzell (1991) e Ramsay e Silverman (1997). Nesses estudos os autores adaptaram ferramentas e técnicas usualmente empregadas na estatística para o estudo de dados funcionais. Muitas destas adaptações incidem sobre técnicas de análise de dados multivariados.

O desenvolvimento teórico atual neste campo ainda é pequeno comparado com o número de potenciais aplicações de interesse para diversos profissionais. Como consequência, um esforço considerável está sendo feito, de modo a adaptar métodos estatísticos padrão para dados funcionais. Este é o caso, por exemplo: da análise de componentes principais (BOENTE; FRAIMAN, 2000; DAUXOIS; POUSSE; ROMAIN, 1982; LOCANTORE et al., 1999; PEZZULLI; SILVERMAN, 1993; SILVERMAN et al., 1996), análise discriminante (FERRATY; VIEU, 2003) e regressão (CARDOT; FERRATY; SARDA, 1999; CUEVAS;

FEBRERO; FRAIMAN, 2002; FERRATY; VIEU, 2002). Outras referências para a ADF são Bosq (1991), Brumback e Rice (1998) e Rice e Silverman (1991).

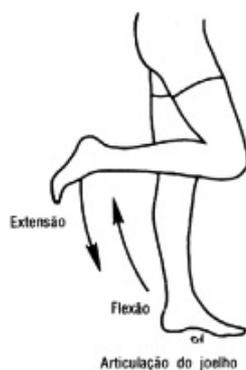
1.2 Dados da Marcha Humana

A marcha humana é uma tarefa motora que envolve um padrão complexo de contrações musculares em diversos segmentos do corpo. A análise da marcha consiste da mensuração, descrição e avaliação sistemática de dados que caracterizam a locomoção humana. Ela tem fundamental relevância na identificação e no tratamento de patologias que envolvem o aparelho locomotor (FALOPPA; ALBERTONI, 2008).

A análise da marcha humana tem grande importância na área da fisioterapia para avaliação da existência ou não de alteração dos movimentos de um paciente, acompanhamento da evolução de um tratamento, dentre outras aplicações.

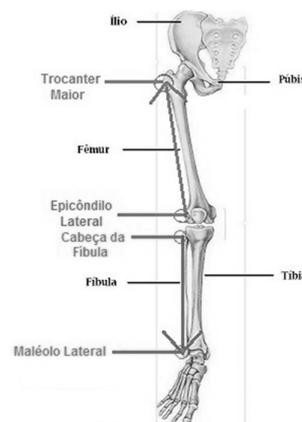
Diversos movimentos articulares formados durante a marcha podem ser avaliados. Neste trabalho consideramos apenas aspectos cinemáticos da articulação do joelho durante a marcha. Em particular, focamos no movimento de flexão-extensão do joelho, durante a marcha em esteira ergométrica. Temos uma ilustração deste movimento na Figura 1.

Figura 1: Ilustração do movimento de flexão-extensão do joelho



Fonte: Imagem extraída da internet (ISLAM, 2016) (adaptada)

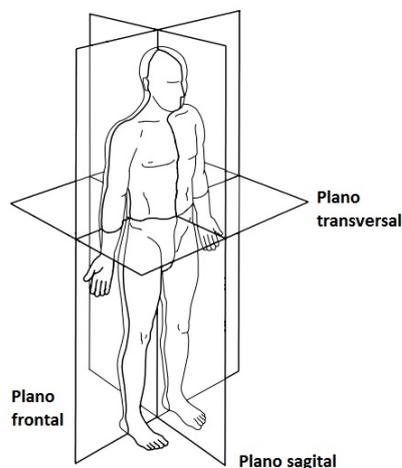
Figura 2: Vetores representativos do movimento de flexão-extensão do joelho



Fonte: Imagem extraída da internet (ANATOMIA..., 2014) (adaptada)

O movimento de flexão-extensão é caracterizado por 2 vetores: o primeiro formado pelos pontos epicôndilo lateral e trocanter maior do fêmur e o segundo pelos pontos maléolo lateral e cabeça da fíbula. A Figura 2 ilustra estes vetores. O ângulo do movimento flexão-extensão é a projeção desses dois vetores no plano sagital (ver Figura 3).

Figura 3: Planos de referência do corpo humano



Fonte: Adaptada de [Vaughan, Davis e O'Connor \(1999\)](#)

Para facilitar a compreensão do texto, alguns termos de biomecânica da marcha precisam ser definidos. São eles ([LIPPERT, 2013](#)):

- **Ciclo da marcha (ou passada):** é a atividade entre o momento em que o pé (calcanhar) toca o solo (contato inicial) e o momento em que esse mesmo pé toca o solo novamente (contato final).

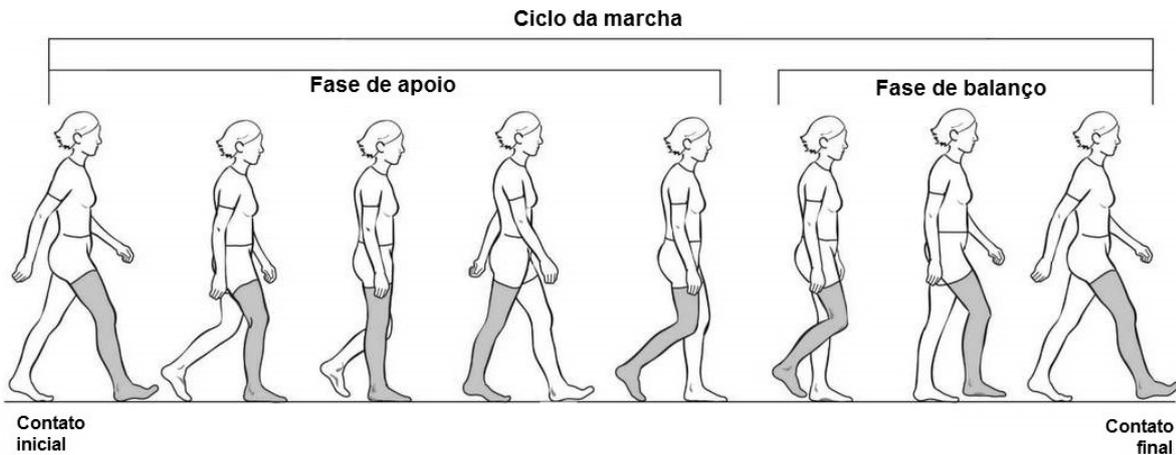
Durante um ciclo da marcha, o membro inferior do indivíduo realiza dois movimentos:

- **Flexão:** é o movimento que aproxima a face posterior da perna da face posterior da coxa.
- **Extensão:** é o movimento que afasta a face posterior da perna da face posterior da coxa. Corresponde ao retorno a partir de sua flexão.

Além disso, um ciclo da marcha é dividido em duas fases principais:

- **Fase de apoio:** é a atividade que ocorre quando o pé está em contato com o solo; começa quando o calcanhar de um pé toca o solo e termina quando esse pé sai (eleva-se) do solo. Essa fase constitui cerca de 60% do ciclo da marcha. Nesta fase, os ângulos de flexão/extensão do joelho apresentam um ponto de máximo, chamado de flexão máxima da fase de apoio, e um ponto de mínimo, chamado de extensão máxima da fase de apoio.
- **Fase de balanço:** ocorre quando o pé não está em contato com o solo. Começa assim que o pé sai do solo e termina quando o calcanhar do mesmo pé toca o solo novamente. Essa fase constitui cerca de 40% finais do ciclo da marcha. Nesta fase, os ângulos de flexão/extensão do joelho apresentam um ponto de máximo, chamado de flexão máxima da fase de balanço.

Figura 4: Fases da marcha humana



Fonte: Adaptada de [Lippert \(2013\)](#)

A [Figura 4](#) exemplifica as duas principais fases da marcha. O movimento realizado pelo joelho, pode ser descrito, de forma simplista, da seguinte forma: no contato inicial o joelho encontra-se a zero graus. Sequencialmente, o joelho começa a flexionar até aproximadamente 20° (flexão máxima da fase de apoio), este evento absorve o choque e recebe a carga do peso corporal que progressivamente é transferida para este membro. Após a flexão inicial, o joelho estende completamente durante o apoio (extensão máxima da fase de apoio), podendo variar entre pequenos graus de flexão até pequenos graus de hiperextensão. A segunda curva de flexão do joelho se inicia no final do apoio. A posição final de 65° (flexão máxima da fase de apoio) é a flexão máxima que o joelho alcança em todo o ciclo de marcha, é possível haver variações para mais ou para menos. Em seguida, o joelho começa a se estender até alcançar a extensão máxima ([LIPPERT, 2013](#)).

Um equipamento que pode ser utilizado para as medições dos ângulos formados pelo joelho durante a marcha é o eletrogoniômetro, o qual consiste em dois terminais conectados por um elemento flexível ([Figura 5](#)). A parte flexível acompanha a articulação, permitindo liberdade de movimentos. Este elemento flexível consiste em uma série de células de carga (strain gauges) dispostas em um fio. Conforme o ângulo entre os dois terminais é alterado, ocorre mudança na corrente elétrica que é medida e convertida em valores angulares ([Figura 6](#)). O ângulo registrado corresponde ao ângulo formado entre os dois eixos definidos pelas duas extremidades dos sensores que são fixos na coxa e perna ([Biometrics Ltd., 2007](#)).

Figura 5: Detalhe do Eletrogoniômetro no joelho



Fonte: [Biometrics Ltd. \(2007\)](#)

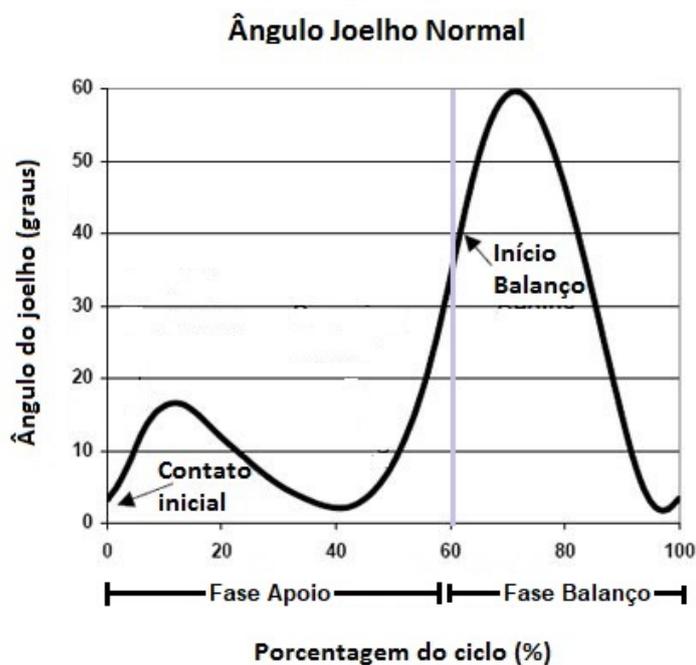
Figura 6: Funcionamento do Eletrogoniômetro no joelho



Fonte: [Biometrics Ltd. \(2007\)](#)

O registro do movimento é dividido em ciclos ou passadas, que, como vimos, são definidos como o movimento realizado entre dois toques consecutivos do mesmo calcanhar no solo. Uma vez que existe variabilidade na duração dos ciclos da marcha, uma prática comum em estudos biomecânicos é normalizar os dados de cada passada, substituindo o tempo pela correspondente porcentagem da duração total de cada ciclo (podendo ser adotada a escala $[0, 1]$). A curva típica formada pelos ângulos de rotação do movimento de flexão-extensão do joelho registrados durante a marcha pode ser visualizada na [Figura 7](#).

Figura 7: Registro dos ângulos formados pelo joelho no movimento de flexão-extensão durante uma passada (ciclo)



Fonte: Imagem extraída da internet ([DELUZIO, 2016](#)) (adaptada)

Além disso, os membros inferiores de um indivíduo são classificadas como dominante e não dominante. Peters (1988) definiu o membro inferior dominante como o usado para manipular um objeto ou liderar um movimento e, conseqüentemente, definiu o membro inferior não dominante como o membro que executa o papel estabilizador ou de suporte. Ou seja, uma forma de se determinar o membro inferior dominante do indivíduo é avaliar qual o seu pé preferido para chutar uma bola (TANAKA et al., 1996).

1.2.1 Descrição dos dados

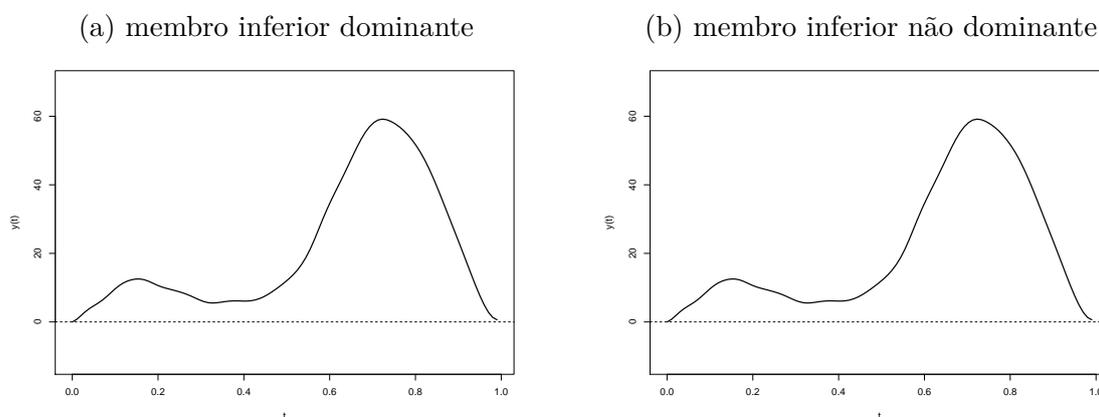
Os dados considerados foram coletados em uma amostra de estudantes da Universidade Federal de São Carlos. Os critérios de inclusão na amostra foram: indivíduos do sexo masculino; idade entre 18 e 40 anos; índice de massa corporal abaixo de 30 kg/m^2 ; altura variando entre $1,60 \text{ m}$ e $1,90 \text{ m}$. Os critérios de exclusão foram: dor recente na coluna vertebral, joelho, quadril ou tornozelo; histórico de lesão nos membros inferiores; cirurgia, lesões e doenças nos membros inferiores; presença de sintomas na coluna vertebral, quadril, joelho ou tornozelo com duração maior que três dias no ano precedente; distúrbios do equilíbrio; discrepância real ou aparente no comprimento dos membros inferiores; alterações posturais evidentes. Estes critérios foram estabelecidos para que a amostra fosse homogênea e aparentemente sadia.

Para realização das medições dos ângulos, o indivíduo caminhou em uma esteira, com o eletrogoniômetro fixado na face lateral do joelho. Após um período de familiarização de 90 segundos, à velocidade de $5,0 \text{ km/h}$, um disparador foi acionado, iniciando o registro do eletrogoniômetro. Terminado o registro, a velocidade da esteira foi progressivamente diminuída e desligada. Os dados foram transferidos a um computador para verificação imediata da qualidade do registro. Nos casos em que os registros não alcançaram a qualidade desejada, a coleta foi repetida após um período mínimo de 5 minutos de descanso para o participante.

A amostra consiste de 16 indivíduos, para os quais foram obtidas 49 passadas, sendo que para cada passada foram realizadas 101 medições dos ângulos dos joelhos dominante e não dominante do movimento de flexão-extensão, após a normalização do tempo em porcentagem do ciclo, ou seja, as observações estão apresentadas nos instantes de tempo igualmente espaçados $(t_1; t_2; t_3; \dots; t_{100}; t_{101}) = (0; 0,01; 0,02; \dots; 0,99; 1)$. A coleta dos dados de cada membro inferior, dominante e não dominante, foi feita de forma independente, ou seja, consecutivamente e não simultaneamente.

Na Figura 8 podemos observar as curvas formadas pela primeira passada dos membros inferiores dominante (8a) e não dominante (8b) do movimento de flexão-extensão do 1º indivíduo. Podemos notar que ambas as curvas são semelhantes à curva típica, apresentada na Figura 7.

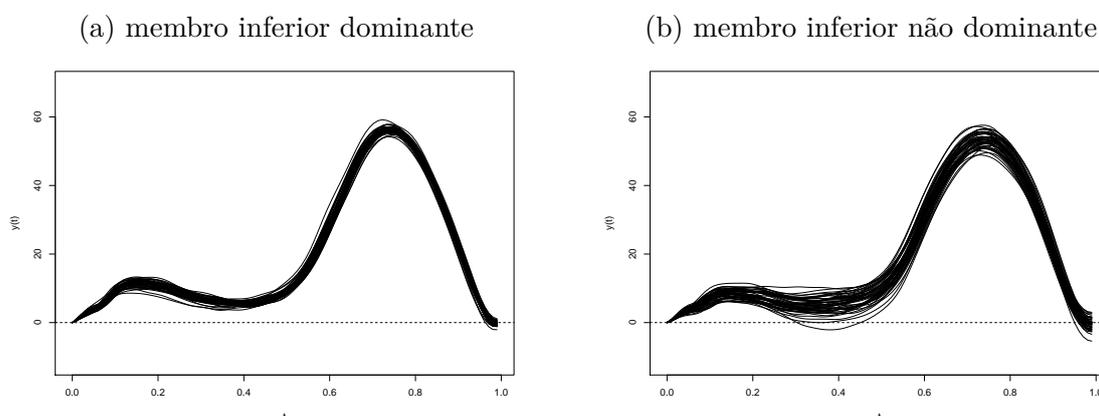
Figura 8: Gráficos com os dados da primeira passada de cada membro inferior do 1º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Na Figura 9 podemos observar gráficos com todas as passadas (curvas) do 1º indivíduo, as do membro inferior dominante em 9a e as do não dominante em 9b. Os gráficos com os dados dos demais indivíduos encontramos na Seção C.1 do Apêndice C. Podemos notar que as curvas observadas para cada membro inferior do indivíduo são bem semelhantes e, em geral, apresentam o formato típico de uma curva deste movimento.

Figura 9: Gráficos com os dados de todas as passadas do 1º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Como as observações são coletadas de forma quase que contínua, os dados da marcha podem ser considerados dados funcionais. Além disso, uma característica dos dados da marcha é a existência de réplicas dos dados, isto é, para cada indivíduo, várias curvas do movimento são observadas.

Um dos trabalhos pioneiros na modelagem estatística para análise do movimento humano é [Olshen et al. \(1989\)](#), no qual é proposto um modelo de regressão trigonométrica com coeficientes aleatórios para modelagem das curvas dos ângulos de rotação e obtenção

de bandas de predição para uma observação futura desta população através do método de reamostragem *bootstrap*. Na modelagem de [Olshen et al. \(1989\)](#) não foram consideradas as réplicas do movimento, apenas uma curva representativa por indivíduo foi escolhida e considerada nas análises, sob a justificativa de que não era simples a implementação de um método que abrangesse todas as curvas do indivíduo.

Outras referências que apresentam análises para o problema da marcha humana são [Ramsay e Silverman \(1997\)](#), utilizando técnicas de componentes principais, e [Rice e Silverman \(1991\)](#), sob uma abordagem não-paramétrica e utilizando validação cruzada.

1.3 Objetivos e Estrutura do Texto

O principal objetivo é utilizar ferramentas estatísticas para caracterizar o movimento de flexão-extensão do joelho humano durante a marcha, a fim de proporcionar contribuições na área da fisioterapia. A proposta é unir, a partir de uma abordagem Bayesiana, as ferramentas da análise de dados funcionais, processo Gaussiano e metanálise para modelar os dados da marcha.

Uma primeira etapa da análise é a exploração dos dados de cada indivíduo separadamente. O principal objetivo é modelar a marcha do indivíduo. Desejamos construir uma banda de credibilidade para uma nova observação. Além disso, um aspecto interessante a ser analisado, conforme instruído por especialistas na área da fisioterapia, é a existência ou não diferenças bilaterais (entre os membros inferiores dominante e não dominante), com o intuito de analisar a presença de padrões entre os membros inferiores do indivíduo.

Em seguida, o objetivo é prosseguir para uma análise populacional, em que todas as passadas dos indivíduos sejam consideradas, realizando uma metanálise para cumprir este objetivo. Também são foco de análise a proposição de métodos para obtenção de uma curva média para a população em questão, bem como bandas preditivas. Novamente, temos interesse em testar se há diferenças bilaterais, agora analisando a curva característica da população.

É importante destacar que durante todo o processo de modelagem, utilizaremos as réplicas do movimento existentes no conjunto de dados. É comum na literatura, o uso de apenas uma curva característica para os dados na modelagem, por exemplo, [Olshen et al. \(1989\)](#), [Ramsay e Dalzell \(1991\)](#) e [Ramsay e Silverman \(1997\)](#). Textos mais recentes utilizam as réplicas observadas, tais como [Rasmussen e Williams \(2006\)](#) e [Shi et al. \(2007\)](#). Além disso, desejamos comparar resultados obtidos utilizando apenas uma curva para obtenção das estimativas e utilizando réplicas, através de um estudo de simulação.

Outra característica importante é em relação às estimativas intervalares: as bandas de credibilidade para uma determinada curva. Na maior parte dos trabalhos usando dados funcionais, são construídas bandas ponto-a-ponto (como em [Olshen et al. \(1989\)](#)),

Ramsay e Silverman (1997), dentre outros), definidas para cada instante de tempo e não para a curva toda conjuntamente, ou seja, a característica funcional não é preservada nas estimativas intervalares. A obtenção de bandas funcionais, também conhecidas como bandas simultâneas, apresenta uma grande dificuldade técnica na sua formulação e também na garantia de suas propriedades teóricas (CAO; YANG; TODEM, 2012). Entretanto, considerando a importância na preservação da característica funcional dos dados, temos como objetivo a proposição de técnicas para construção de bandas de credibilidade funcionais, principalmente sob a perspectiva preditiva. Estudar a cobertura preditiva e comparar os métodos propostos também é desejado.

Além deste capítulo introdutório em que os objetivos e o conjunto de dados utilizado são descritos, o texto está organizado da seguinte forma: no [Capítulo 2](#) definimos técnicas de análise descritiva de dados funcionais, tais como média, variância, profundidade ou *depth* para dados funcionais, *boxplot* funcional e detecção de *outliers* e as aplicamos aos dados da marcha. Além disso, apresentamos o método de suavização por funções base para dados funcionais e séries de Fourier, que servirão de ferramenta e inspiração para o desenvolvimento do trabalho.

No [Capítulo 3](#), modelamos o movimento de flexão-extensão do joelho através de um modelo de regressão, utilizando uma aproximação por uma soma de Fourier para modelar a média, supondo independência entre as observações de uma mesma passada (curva) e entre passadas e, sob uma abordagem Bayesiana descrevemos a curva do indivíduo.

No [Capítulo 4](#), propomos um modelo de regressão processo Gaussiano Bayesiano para a marcha, que permitiu agregar a suposição de dependência entre as observações de uma mesma curva, utilizando para tal objetivo um processo Gaussiano para modelar a estrutura de covariância. Ainda neste capítulo apresentamos os resultados de um estudo de simulação através do qual avaliamos a qualidade do ajuste do modelo proposto e comparado ao modelo independente do capítulo anterior. Utilizamos o modelo proposto para ajustar o conjunto de dados da marcha e fazemos um estudo de diferenças bilaterais, isto é, diferenças entre os ângulos dos membros inferiores dominante e não dominante, de cada indivíduo.

No [Capítulo 5](#), apresentamos uma técnica Bayesiana de metanálise, fazemos um estudo comparativo entre a metanálise e outras técnicas convencionais de agrupamento de dados e a utilizamos para reunir as estimativas obtidas de cada indivíduo em uma estimativa populacional o que nos permitiu realizar um estudo a respeito das diferenças bilaterais desta população.

Três métodos de construção de bandas preditivas funcionais são definidas no [Capítulo 6](#), além de realizarmos um estudo de simulação para compará-las e aplicá-las às estimativas obtidas para o conjunto de dados da marcha.

Por fim, no [Capítulo 7](#) são descritas as conclusões do trabalho e as propostas futuras. No [Apêndice A](#) encontramos definições e resultados de análise funcional, séries de Fourier, processo estocástico e processo Gaussiano, necessários para os conceitos encontrados durante o texto, o [Apêndice B](#) contempla os resultados de procedimentos de seleção de modelos utilizados no decorrer do trabalho e o [Apêndice C](#) é destinado à inserção de figuras que não foram incluídas no texto para não deixá-lo muito extenso.

2 ANÁLISE DE DADOS FUNCIONAIS

Neste capítulo descrevemos as estatísticas descritivas para dados funcionais e fazemos uma análise descritiva do conjunto de dados da marcha descrito na [subseção 1.2.1](#) do capítulo anterior. Além disso, apresentamos o conceito de profundidade para dados funcionais, com o objetivo de ordenar as curvas de um conjunto de dados considerando as curvas “mais centrais” da amostra. Na sequência, apresentamos técnicas da Análise de Dados Funcionais, bem como o método de suavização por funções bases e a motivação da escolha das funções base de Fourier para modelar o ciclo da marcha.

2.1 Estatísticas Descritivas para Dados Funcionais

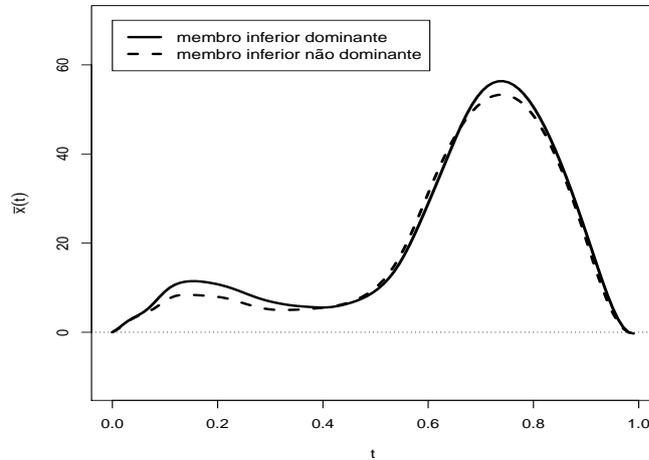
As estatísticas descritivas básicas que conhecemos para dados univariados são aplicadas igualmente para dados funcionais. Encontramos nesta seção os conceitos definidos em [Ramsay e Silverman \(1997\)](#). Na sequência, através do conceito de *depth* podemos ordenar dados funcionais no sentido de determinar quais curvas são mais centrais em um determinado conjunto de dados, podendo assim determinar estatísticas de ordem, medidas separatrizes e detectar *outliers*. No que segue, sem perda de generalidade, vamos considerar funções reais definidas no intervalo $[0, 1]$ e uma amostra de dados funcionais será representada por $x_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, n$.

2.1.1 Média e variância funcionais

A função média para uma amostra de n dados funcionais (ou seja, n funções) é dada por

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t), \quad t \in [0, 1].$$

Como exemplo, na [Figura 10](#) temos os gráficos da função média determinada pelas curvas dos membros inferiores dominante e não dominante do 1º indivíduo. Podemos observar que os comportamentos das curvas médias dos membros inferiores dominante e não dominante são parecidos, entretanto, a curva média do membro inferior não dominante apresenta amplitudes menores nos pontos de flexão máxima, tanto na fase de apoio quanto na fase de balanço.

Figura 10: Curva média dos dados do 1^o indivíduo

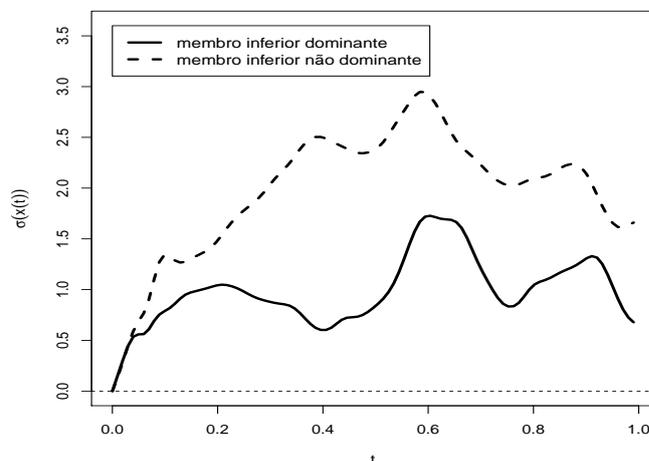
Fonte: Elaborado pela autora

Os gráficos dos demais indivíduos não são apresentados para que o texto não ficasse muito extenso, mas verificamos que os indivíduos 4 e 12 apresentam comportamento similar ao indivíduo 1, no sentido do membro inferior dominante apresentar maiores amplitudes nas flexões máximas. Já os indivíduos 6 e 8 se comportam de forma contrária, o membro inferior não dominante que apresenta as maiores amplitudes nas flexões máximas. Os indivíduos 9 e 16 apresentam médias iguais para as amplitudes nas flexões máximas. Os demais não apresentam um padrão deste tipo para a curva média.

Da mesma forma, a função variância é definida por

$$\text{Var}[x(t)] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t) - \bar{x}(t)]^2, \quad t \in [0, 1],$$

e a função desvio padrão $\sigma(x(t))$ é a raiz quadrada da função variância.

Figura 11: Função desvio padrão os dados do 1^o indivíduo

Fonte: Elaborado pela autora

Para exemplificar, na [Figura 11](#) ilustramos os gráficos da função desvio padrão dos dados dos membros inferiores dominante e não dominante do 1º indivíduo. Podemos observar que existe uma variabilidade maior para o membro inferior não dominante do que para a dominante. Além disso, essa variabilidade não é constante, variando para diferentes porcentagens do ciclo. Os gráficos dos demais indivíduos não são apresentados, mas verificamos que os dados dos indivíduos 11, 13 e 14 se comportam de maneira similar aos do indivíduo 1, ou seja, maior variabilidade nos dados do membro inferior não dominante. Já os indivíduos 2, 4, 5, 6, 12 e 15 apresentam maior variabilidade nos dados do membro inferior dominante. Para os indivíduos 3, 7, 8, 9, 10 e 16 não há um padrão, em algumas partes do ciclo os dados do membro inferior dominante apresentam maior variação e em outras, o membro inferior não dominante que o faz.

2.1.2 Funções de covariância e correlação

A função covariância resume a dependência das observações ao longo de valores de argumentos diferentes e é calculada para todo $t_1, t_2 \in [0, 1]$ através da fórmula

$$Cov_x(t_1, t_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t_1) - \bar{x}(t_1)][x_i(t_2) - \bar{x}(t_2)], \quad t_1, t_2 \in [0, 1].$$

A função correlação associada é dada por

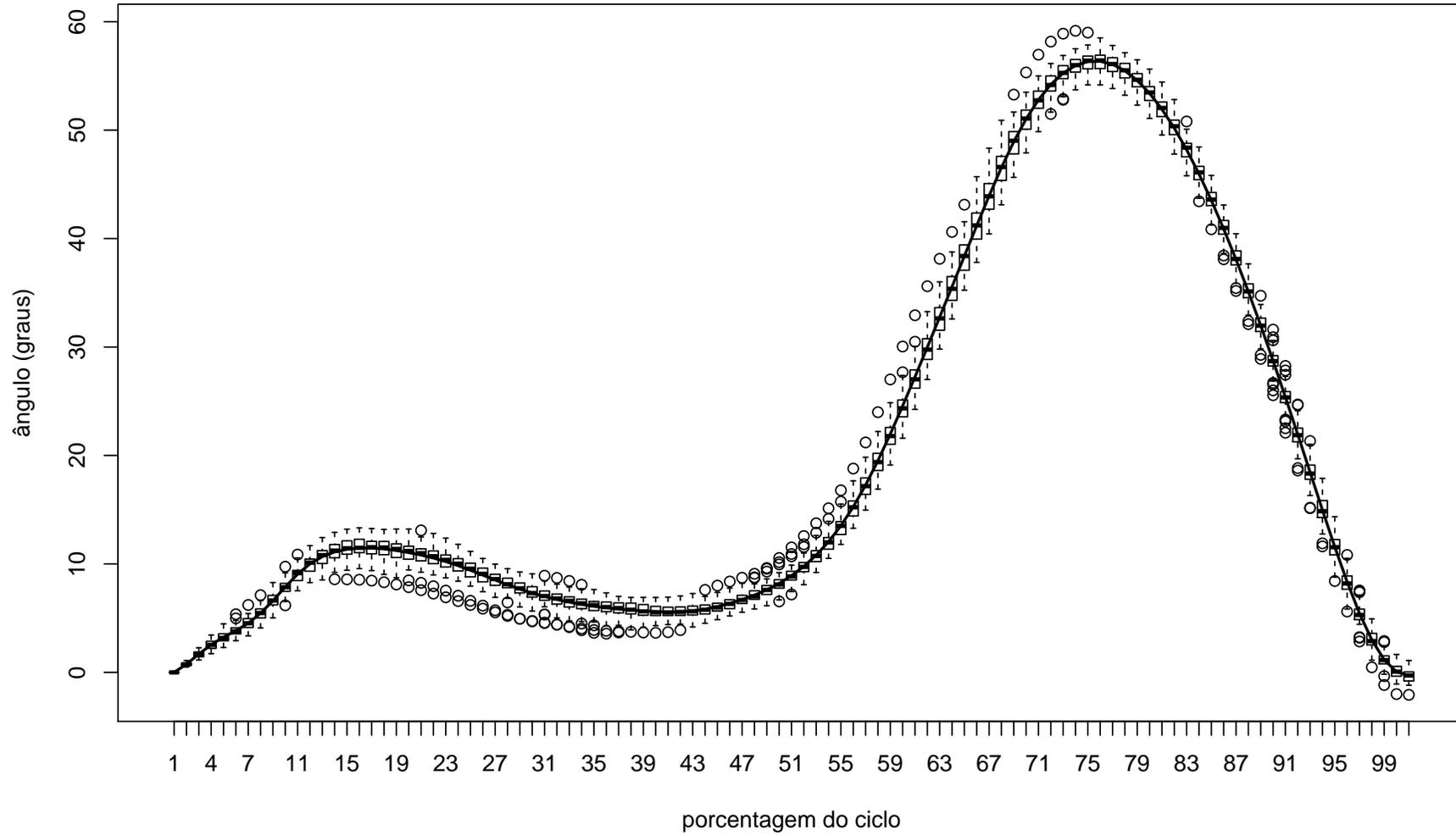
$$Corr_x(t_1, t_2) = \frac{Cov_x(t_1, t_2)}{\sqrt{Var[x(t_1)]Var[x(t_2)]}}, \quad t_1, t_2 \in [0, 1].$$

De forma análoga à análise multivariada, podem ser obtidas as matrizes de correlação e covariância, fixado um *grid* de valores para os tempos.

2.1.3 Análises gráficas

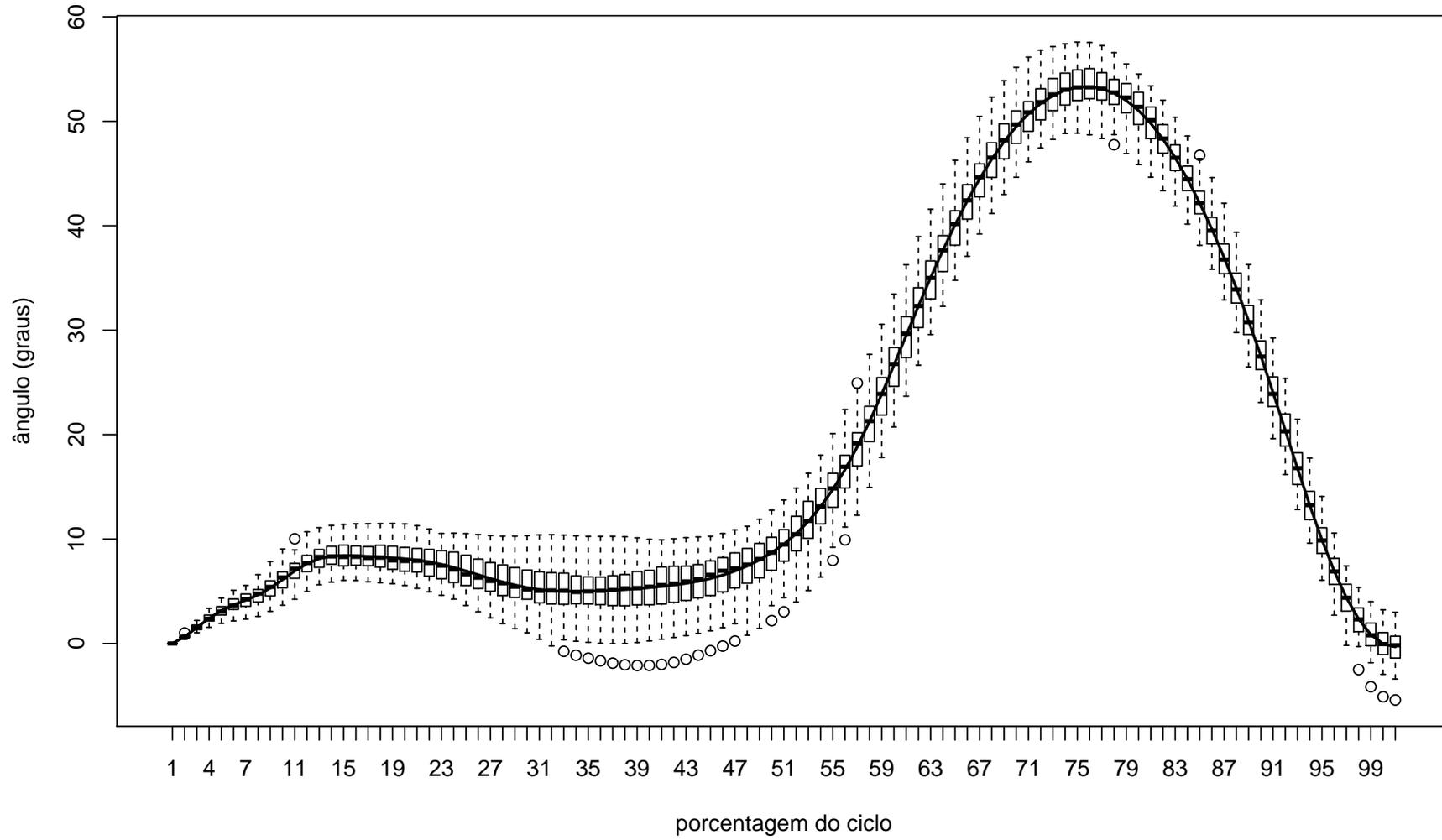
Utilizamos o gráfico *boxplot* para cada instante de tempo observado, para compreender características do conjunto de dados, tais como locação, dispersão, assimetria, comprimento da cauda e *outliers*. Não se trata de uma ferramenta da análise de dados funcionais, mas nos fornece uma ideia do comportamento dos dados de cada indivíduo.

Nas [Figuras 12 e 13](#) podemos ver gráficos com os *boxplots* de todos os instantes de tempo observados, juntamente com a curva média dos dados dos membros inferiores dominante e não dominante, respectivamente, do 1º indivíduo. A partir destes gráficos, podemos observar a maior variabilidade dos dados do membro inferior não dominante e a presença de alguns pontos *outliers*.

Figura 12: *Boxplot* ponto-a-ponto com a curva média para o membro inferior dominante do 1º indivíduo

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 13: *Boxplot* ponto-a-ponto com a curva média para o membro inferior não dominante do 1º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

2.2 O Conceito de *Depth*

Estatísticas de ordem são facilmente definidas para dados unidimensionais devido à inerente ordenação dos dados na reta real. Para dados multivariados e dados funcionais não existe uma maneira óbvia e simples de definir uma ordem ou profundidade das observações num conjunto de dados. Uma definição adequada de ordenação de dados tem uma utilidade para definir estimadores robustos como a mediana funcional, além de ser útil na detecção de *outliers* e em métodos de classificação, dentre outras aplicações. Para tal fim, surgiu a noção de profundidade (*depth*, em inglês), inicialmente para ordenação de dados multivariados. Em linhas gerais, uma medida *depth* é um valor real que representa o quão central é uma dada observação com respeito à amostra. A primeira definição foi introduzida por Mahalanobis (1936), mas foi a partir do artigo clássico de Tukey (1975), no qual a noção de “profundidade semi-espaço” (*half-space depth*) é introduzida, que a pesquisa sobre *depth* recebeu considerável atenção. Diversas definições foram propostas desde então, podemos citar, por exemplo, Barnett (1976), Brown (1983), Oja (1983), Liu (1988), Liu (1990), Singh (1991), Fraiman et al. (1999), Liu et al. (1999), Zuo e Serfling (2000), Zuo et al. (2003), dentre outros. Os trabalhos de Liu et al. (1999) e Zuo e Serfling (2000) inclusive fornecem uma perspectiva ampla, no caso finito-dimensional, de diferentes noções de *depth* para dados multivariados e suas aplicações.

No âmbito da análise de dados funcionais, o trabalho de Fraiman e Muniz (2001) traz uma versão de *depth* funcional, também conhecida como *depth* integrado, uma vez que define o *depth* univariado para cada ponto da curva e em seguida integra no intervalo em que a função é definida. Na sequência, temos as propostas de Cuevas, Febrero e Fraiman (2006) que avalia o quão densa é a curva em relação a uma vizinhança definida por uma determinada métrica e López-Pintado e Romo (2009), que introduziram um *depth* baseado no gráfico da curva. Outras referências são Cuevas, Febrero e Fraiman (2007), Sun e Genton (2011), Mosler e Polyakova (2012), Ieva e Paganoni (2013), Burr e Fabrizio (2017), entre outros.

Apresentamos a seguir algumas definições de *depth*, as quais foram adotadas neste trabalho. Para isso, consideremos $x_1(t), \dots, x_n(t)$ uma coleção de funções reais, definidas no intervalo $[0, 1]$ e pertencentes ao espaço $L^2[0, 1]$.

2.2.1 *Fraiman-Muniz (FM) depth*

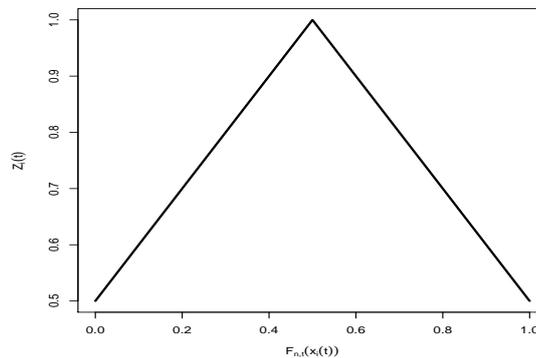
Apresentamos inicialmente um conceito *depth* definido em Fraiman e Muniz (2001), também conhecido como *depth* integrado. Para cada $t \in [0, 1]$ fixado, sejam $F_{n,t}$ a distribuição empírica da amostra $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Definimos o *depth* univariado do dado $x_i(t)$

por

$$Z_i(t) = 1 - \left| \frac{1}{2} - F_{n,t}(x_i(t)) \right| = \begin{cases} \frac{1}{2} + F_{n,t}(x_i(t)), & \text{se } 0 \leq F_{n,t}(x_i(t)) \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2} - F_{n,t}(x_i(t)), & \text{se } \frac{1}{2} < F_{n,t}(x_i(t)) \leq 1 \end{cases}.$$

Note que $Z_i(t)$ assume valores no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$, atingindo o valor máximo quando $F_{n,t}(x_i(t)) = \frac{1}{2}$ e valores pequenos quando $F_{n,t}(x_i(t))$ é próximo de 0 ou 1, como ilustrado na [Figura 14](#).

Figura 14: Ilustração do comportamento do *depth* univariado $Z_i(t)$



Fonte: Elaborado pela autora

Definimos então a profundidade (*depth*) da curva $x_i(t)$ por

$$I(x_i) = \int_0^1 Z_i(t) dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ou seja, este *depth* é obtido calculando o *depth* de cada ponto da curva e integrando no intervalo em que ela está definida.

2.2.2 *h*-modal (Modal) *depth*

Essa noção de *depth*, definida em [Cuevas, Febrero e Fraiman \(2006\)](#), avalia o quão cercada está uma curva em relação à amostra, considerando uma dada distância. Formalmente, o *h*-modal *depth* amostral de uma curva x de um conjunto de curvas x_1, x_2, \dots, x_n é dado pela função

$$D_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{k=1}^n K \left(\frac{\|x - x_k\|}{h} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n K_h(\|x - x_k\|),$$

em que $\|\cdot\|$ é a norma adotada (a norma L^2 , por exemplo) e K uma dada função kernel (por exemplo, o kernel Gaussiano $K(t) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-t^2/2)$), podendo ser reparametrizada por $K_h(t) = \frac{1}{h} K(\frac{t}{h})$ e h um parâmetro de largura de banda (*bandwidth parameter*) fixado, por exemplo, $h = 0, 2 \max\{\|x_i - x_k\| \mid i, k = 1, \dots, n\}$ ([CUEVAS; FEBRERO; FRAIMAN, 2006](#)). Observe que a largura de banda h não precisa fornecer um ajuste muito bom da

densidade porque o interesse está nos valores em torno do centro da distribuição, que não são muito sensíveis à escolha da largura de banda. Na verdade, uma ampla faixa de valores da largura de banda é apropriada com o único requisito de que a largura de banda não seja muito pequena. A função `depth.mode`, está implementada no pacote `fda.usc` (FEBRERO-BANDE; Oviedo de la Fuente, 2012) do *software R Core Team* (2018) e utiliza, caso não especificado pelo usuário um valor para a largura de banda, h igual ao 15º percentil da distribuição empírica de $\|x_i - x_k\|$, $i, k = 1, \dots, n$, considerando a norma L^2 .

A interpretação para este conceito de *depth* é que quanto menores as distâncias de uma dada curva em relação às demais na amostra, maiores serão os valores de K (ou de K_h) e, assim, maior será seu valor de *depth*. Portanto, as curvas em regiões mais densas apresentam os maiores valores de *depth*, enquanto as curvas mais afastadas, os menores valores.

2.2.3 Band (BD) depth

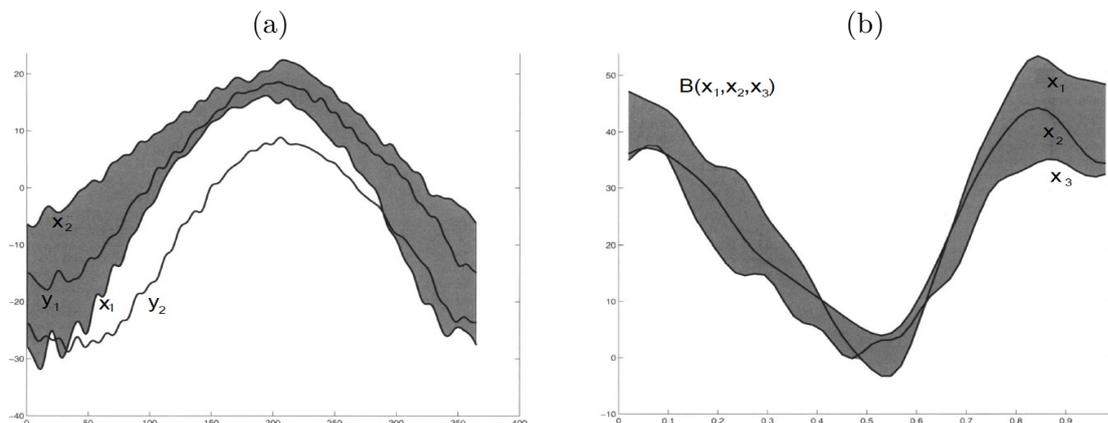
A presente definição de *depth*, apresentada em López-Pintado e Romo (2009), avalia a proporção de bandas que contém inteiramente o gráfico do dado funcional. O gráfico de uma função x é o subconjunto $G(x)$ do plano, dado por $G(x) = \{(t, x(t)) : t \in [0, 1]\}$.

A banda em \mathcal{R}^2 delimitada pelas curvas x_{i_1}, \dots, x_{i_k} é

$$B(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) = \left\{ (t, y) : t \in [0, 1], \min_{r=1, \dots, k} x_{i_r}(t) \leq y \leq \max_{r=1, \dots, k} x_{i_r}(t) \right\}.$$

Na Figura 15 ilustramos bandas definidas por curvas e também casos em que uma curva está contida na banda e outro em que a curva não está contida na banda.

Figura 15: Banda definida pelas curvas x_1 e x_2 em (a), na qual a curva y_1 está inteiramente contida na banda $B(x_1, x_2)$, enquanto y_2 não está inteiramente contida na banda. Banda $B(x_1, x_2, x_3)$ definida pelas curvas x_1 , x_2 e x_3 em (b).



Fonte: López-Pintado e Romo (2009)

Para qualquer função x em x_1, \dots, x_n e l fixado com $2 \leq l \leq n$, a quantidade

$$BD_n^{(l)}(x) = \binom{n}{l}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n} I \{G(x) \subseteq B(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l})\} \quad (2.1)$$

em que $I\{\}$ representa a função indicadora, expressa a proporção de bandas $B(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l})$ determinadas por l diferentes curvas $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}$ que contém inteiramente o gráfico de x .

Seja L um valor fixado com $2 \leq L \leq n$. Para funções x_1, \dots, x_n , a profundidade da banda (*band depth*) para uma curva x qualquer é

$$BD_{n,L}(x) = \sum_{l=2}^L BD_n^{(l)}(x). \quad (2.2)$$

Por simplicidade e quando não houver perigo de confusão a respeito da amostra com a qual estamos trabalhando, podemos denotar $BD_{n,L}$ por BD_L .

López-Pintado e Romo (2009) recomendam o uso de $L = 3$ pois, quando $L > 3$, BD_L pode ser muito custoso computacionalmente. Além disso, recomendam cautela com $L = 2$, pois quando duas curvas se cruzam, a banda é degenerada nesse ponto e dificilmente uma curva vai estar inteiramente contida na banda.

2.2.4 Modified Band (MBD) depth

Por último, apresentamos o conceito dado em López-Pintado e Romo (2009), que trata de uma versão um pouco mais flexível que a definição de *depth* anterior, pois, em vez de adotar a função indicadora, como na equação (2.1), avalia o conjunto de pontos da curva pertencentes à banda. Para qualquer função $x \in \{x_1, \dots, x_n\}$ e para $2 \leq l \leq n$, seja

$$A(x; x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}) = \left\{ t \in [0, 1] : \min_{r=i_1, \dots, i_l} x_r(t) \leq x(t) \leq \max_{r=i_1, \dots, i_l} x_r(t) \right\},$$

o conjunto de pontos do intervalo $[0, 1]$ em que a função está na banda definida pelas funções $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}$. Se λ representa a medida de Lebesgue em $[0, 1]$, $\lambda_r(A(x; x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l})) = \lambda(A(x; x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}))/\lambda([0, 1])$ nos fornece a “proporção de instantes” de x que estão contidos na banda. Assim,

$$MBD_n^{(l)}(x) = \binom{n}{l}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n} \lambda_r(A(x; x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l})), \quad 2 \leq l \leq n,$$

é mais flexível que $BD_n^{(l)}(x)$ e, se todos os pontos da curva estão na banda, $\lambda_r(A_l(x)) = 1$, coincidindo com o valor da definição anterior.

Podemos assim, definir uma nova versão de *depth*: seja L um valor fixado com $2 \leq L \leq n$. Para funções x_1, \dots, x_n , a profundidade da banda modificada (*modified band*

depth) para uma curva x qualquer é

$$MBD_{n,L}(x) = \sum_{l=2}^L MBD_n^{(l)}(x).$$

É comum adotar $L = 2$ (e denotar o *depth* simplesmente por *MBD*) pois este é computacionalmente rápido e fornece uma boa ordenação para uma amostra de curvas, uma vez que a possibilidade de bandas degeneradas não trazem grande influência no cálculo de *MBD*, diferentemente do que ocorre com BD_2 .

2.2.5 Mediana funcional

Seja D_n representando uma das medidas *depth* definidas. A **mediana amostral funcional** \hat{m}_n é uma curva da amostra com maior profundidade (maior valor de *depth*), ou seja,

$$\hat{m}_n = \arg \max_{x \in \{x_1, \dots, x_n\}} D_n(x). \quad (2.3)$$

Se não for única, a mediana será a média das curvas que maximizam a profundidade (*depth*). A mediana funcional para o conjunto de dados do 1º indivíduo pode ser visualizada na Figura 16, no gráfico *boxplot* funcional que será definido a seguir.

2.2.6 *Boxplot* funcional e *outliers*

Outliers em um conjunto de dados funcionais podem surgir por, pelo menos, dois motivos. Primeiro, os *outliers* podem ser curvas com erros grosseiros, como erros de medição, gravação e digitação. Esses erros devem ser identificados e corrigidos sempre que possível. Segundo, os *outliers* podem ser curvas de dados reais, no sentido de que não são erros grosseiros, mas são de alguma forma suspeitos ou surpreendentes, pois não seguem o mesmo padrão que o resto das curvas. Estamos interessados em detectar e examinar precisamente tais curvas surpreendentes, pois, primeiro, elas podem influenciar nossas estimativas funcionais e gostaríamos de evitar isso, e, segundo, elas podem permitir descobrir quais fontes produzem essas curvas periféricas.

Um conceito unânime de *outlier* em configurações funcionais ainda não foi definido. Em [Febrero, Galeano e González-Manteiga \(2008\)](#) uma curva é considerada um *outlier* se foi gerada aleatoriamente com uma distribuição diferente do restante das curvas, que são assumidas como sendo distribuídas identicamente. Portanto, assumimos que todo o conjunto de curvas foi selecionado segundo a mesma distribuição, e as curvas que não são compatíveis com essa suposição são *outliers*. Com essa definição, uma curva pode ser um *outlier* se estiver significativamente longe do processo estocástico esperado ou têm uma forma diferente do resto das curvas. Note também que esta definição inclui o caso de curvas que são diferentes do resto apenas durante alguns subintervalos de todo o período de observação.

Uma alternativa para identificação de *outliers* em conjuntos de dados funcionais, é a utilização de profundidades (ou *depth*) funcionais, ressaltando que se um *outlier* estiver no conjunto de dados, a curva correspondente terá uma profundidade significativamente baixa. Portanto, uma maneira de detectar a presença de *outliers* funcionais é procurar curvas com valores de profundidade muito baixos.

Considerando o *depth* MDB, definido na [subseção 2.2.4](#), a função `fbplot`, implementada no pacote [Ramsay et al. \(2018\)](#) do *software* [R Core Team \(2018\)](#), produz *boxplots* funcionais. Este *boxplot* funcional é construído da seguinte forma:

- A amostra é ordenada (digamos, em ordem crescente) de acordo com os respectivos valores de *depth*.
- A curva com maior valor de *depth*, ou seja, a mediana funcional, é ilustrada como uma linha sólida, na cor preta.
- As 50% curvas com maior valor de *depth* na amostra, delimitam uma faixa contendo as 50% curvas mais centrais no conjunto de dados. Esta região é ilustrada preenchida na cor rosa e pode ser interpretada como uma versão funcional para o “intervalo interquartilico” (IQR). Além disso, esta região não é afetada por valores discrepantes ou extremos, e fornece uma visualização não tendenciosa da distribuição das curvas.
- Os *outliers* podem ser detectados em um *boxplot* funcional por uma regra análoga à regra empírica de 1,5 IQR para *boxplots* clássicos: para cada instante de tempo observado t_i , $i = 1, \dots, n$, temos duas alturas $a_1(t_i)$ e $a_2(t_i)$, em que $a_1(t_i)$ é a distância entre a mediana funcional e o limite inferior da faixa 50% central, no instante t_i , e $a_2(t_i)$ é a distância entre o limite superior da faixa 50% central e a mediana funcional, no instante t_i . Em cada instante t_i subtrai-se $1,5 \times a_1(t_i)$ ao valor de $\hat{m}_n(t_i)$ e adiciona-se $1,5 \times a_2(t_i)$ ao valor de $\hat{m}_n(t_i)$ (valor da mediana funcional), ou seja, em cada instante de tempo consideramos o intervalo

$$\left[A_1(t_i), A_2(t_i) \right] = \left[\hat{m}_n(t_i) - 1,5 \times a_1(t_i), \hat{m}_n(t_i) + 1,5 \times a_2(t_i) \right], \quad i = 1, \dots, n.$$

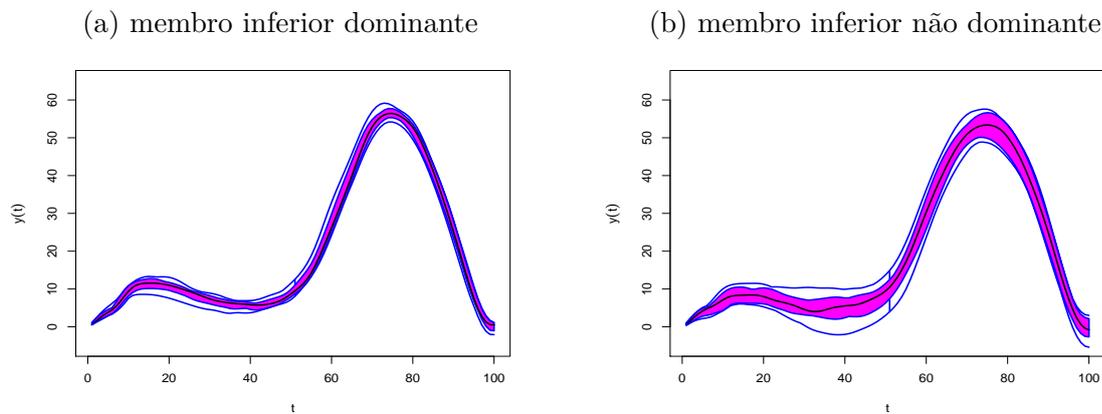
Avaliando todos os intervalos $[A_1(t_i), A_2(t_i)]$ conjuntamente, formamos uma região em torno da faixa das 50% curvas mais centrais. Quaisquer observações fora dessa região são sinalizadas como possíveis *outliers*. O envelope do *boxplot* é então determinado pela região delimitada por todas as observações da amostra que não são *outliers*. Esse envelope é ilustrado por linhas sólidas na cor azul.

- Caso existam *outliers*, estas são ilustradas por curvas tracejadas na cor vermelha.

Devemos observar que em vez das 50% curvas mais centrais, poderiam ser adotadas outras porcentagens como 25% ou 75% e, em vez do acréscimo e decréscimo de 1,5 vezes a largura

da faixa central, outra constante pode ser adotada. Essas escolhas podem ser feitas pelo pesquisador e influenciarão na classificação das curvas *outliers*. Mais detalhes a respeito de *boxplot* funcional podem ser encontrados em Sun e Genton (2011). Os gráficos para os dados do 1º indivíduo podem ser visualizados na Figura 16. Podemos ver que para este indivíduo não há *outliers* nos dados do membro inferior dominante, nem para o membro inferior não dominante.

Figura 16: *Boxplot* funcional de cada membro inferior do 1º indivíduo, no qual as curvas em azul representam o envelope, a região rosa mostra a faixa formada pelas 50% curvas mais centrais e a linha preta ilustra a mediana funcional



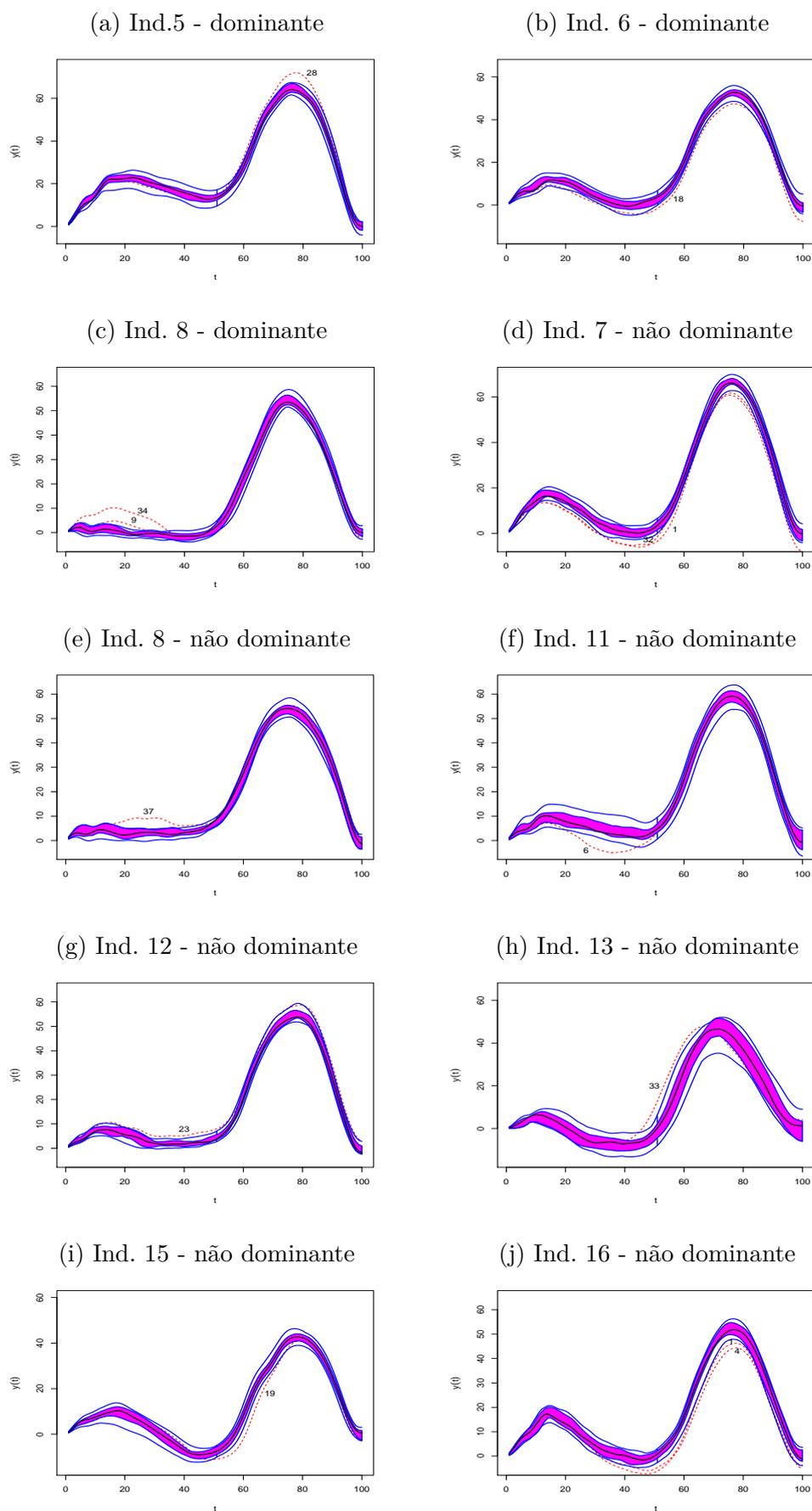
Fonte: Elaborado pela autora

Os mesmos gráficos foram feitos para os demais indivíduos e, apresentamos na Figura 17 somente aqueles que possuem *outliers*, inclusive indicando o número dessas curvas *outliers*. Os indivíduos que apresentaram *outliers* foram:

- membro inferior dominante: 5, 6 e 8;
- membro inferior não dominante: 7, 8, 11, 12, 13, 15 e 16.

Além disso, na maioria das vezes, estas curvas não ficam muito longes do envelope construído no *boxplot*.

Figura 17: *Boxplots* funcionais para os indivíduos que apresentaram curvas *outliers*, estas ilustrados por linhas tracejadas na cor vermelha, com o respectivo número indicado



Fonte: Elaborado pela autora

Apresentamos a seguir algumas noções iniciais para transformar dados funcionais observados de forma discretizada em funções e ferramentas que servirão de base para o modelo proposto neste trabalho.

2.3 Suavização de Dados Funcionais

A ideia básica da análise de dados funcionais é considerar os dados observados como entidades únicas, e não como uma sequência de observações individuais. Um registro de uma observação funcional f consiste de n pares (t_j, y_j) , onde $y_j = f(t_j)$ é uma observação de f no argumento t_j . Na grande maioria das vezes os dados funcionais são registrados ao longo do tempo, dessa forma o argumento é chamado de tempo t_j . Neste capítulo abordamos algumas técnicas que são utilizadas para converter dados funcionais (como são coletados) em sua verdadeira forma funcional.

2.3.1 Método de funções base

Assumimos, sem perda de generalidade que os tempos t pertencem ao intervalo $[0, 1]$ e que f satisfaz condições razoáveis de continuidade e suavidade em $[0, 1]$, a fim de garantir as hipóteses necessárias para a modelagem a seguir. A suavidade, no sentido de possuir um certo número de derivadas contínuas, é uma propriedade da função latente f , e pode não ser óbvia quando olhamos o vetor de dados observados $y = (y_1, \dots, y_n)$. Isso ocorre devido ao erro observacional ou ruído presente nos dados, causado por aspectos do processo de medição. Em termos de modelo, podemos escrever (RAMSAY; SILVERMAN, 1997)

$$y_j = y(t_j) = f(t_j) + \varepsilon(t_j),$$

onde o ruído ou erro $\varepsilon(t_j)$ tem média zero e contribui para a não suavidade dos dados.

Uma das tarefas em representar os dados como funções suaves é tentar filtrar esse ruído da forma mais eficiente possível. Como f é considerada suave, podemos obter uma expansão por funções base (ver Teorema A.1). Um método comum de suavização consiste em representar a função como uma combinação linear de M funções base conhecidas ϕ_m ,

$$f(t) = \sum_{m=1}^M c_m \phi_m(t). \quad (2.4)$$

sendo $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_M)'$ o vetor dos coeficientes e $\boldsymbol{\phi}(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_M(t))'$ o vetor cujos elementos são as funções base avaliadas em t . Podemos escrever a equação (2.4) como

$$f(t) = \mathbf{c}'\boldsymbol{\phi}(t).$$

Uma estimativa de f será dada por

$$\hat{f}(t) = \hat{\mathbf{c}}'\boldsymbol{\phi}(t).$$

em que $\hat{\mathbf{c}}$ é uma estimativa de \mathbf{c} . O grau de suavidade que será aplicado nos dados y_j será determinado pelo número de funções base M .

2.3.2 Escolha da base

É importante que as funções base apresentem características que se relacionem com aquelas encontradas nas funções que serão estimadas. Teoricamente, uma base deveria ser escolhida por produzir uma excelente aproximação usando um número M pequeno de funções base. Assim, existem bases que não são apropriadas para certas aplicações, mas não existe algo como uma base universal que seja boa para todos os casos. A escolha da base é muito importante também para a estimativa da derivada

$$D\hat{f}(t) = \sum_{m=1}^M \hat{c}_m D\phi_m(t).$$

Certas bases que funcionam bem para a estimação da função podem produzir estimativas de derivadas ruins. Isso ocorre porque uma representação exata das observações tende a forçar \hat{f} a ter pequenas oscilações com muita frequência, o que traz sérias consequências para as suas derivadas. Assim, um dos critérios para a escolha da base pode ser o bom comportamento da estimativa de uma ou mais derivadas.

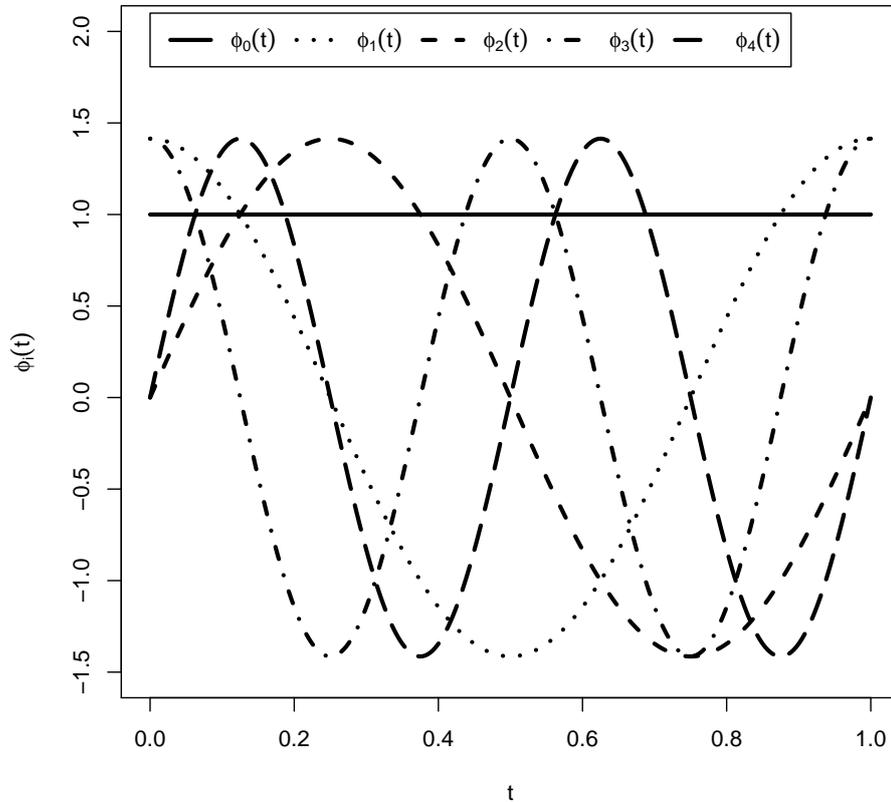
Além da escolha da base, um dos desafios na suavização é determinar o quanto de suavização deve-se fazer, ou seja, qual valor adotar para M . Para valores muito grandes de M , o viés é pequeno e a variância é grande, enquanto que para M muito pequeno, o contrário ocorre. Um equilíbrio entre viés e variância deve ser levado em consideração na escolha das funções base.

2.3.2.1 Séries de Fourier

Uma das bases mais conhecidas para expansão de uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^2[0, 1]$, é a base de Fourier, que é dada por

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= 1, \\ \phi_{2r-1}(t) &= \cos r\omega t, \\ \phi_{2r}(t) &= \sin r\omega t, \end{aligned}$$

para $r \geq 1$. Essa base é periódica e o parâmetro ω determina o período $2\pi/\omega$, que é igual ao tamanho do intervalo em que se está trabalhando (ou seja, no caso do intervalo $[0, 1]$, temos que o período é igual a 1 e, portanto, $\omega = 2\pi$). Apresentamos na [Figura 18](#) o comportamento das funções base $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ e ϕ_4 quando $\omega = 2\pi$.

Figura 18: Cinco primeiras funções base de Fourier no intervalo $[0, 1]$ 

Fonte: Elaborada pela autora

A expansão pela base de Fourier resulta em uma aproximação para a função, que é dada por

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \phi_j(t) = c_0 + c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + c_3 \cos 2\omega t + c_4 \sin 2\omega t + \dots$$

Uma vez que um número finito de observações está disponível, nem todos os coeficientes de Fourier poderão ser estimados. Portanto, podemos considerar as primeiras M funções base e, dessa forma, a estimativa suave para $f(t)$ é dada por

$$\hat{f}(t) = \sum_{j=0}^{M-1} \hat{c}_j \phi_j(t).$$

As séries de Fourier são especialmente utilizadas para funções extremamente estáveis e que apresentam alguma periodicidade. Elas geralmente produzem estimativas que são uniformemente suaves. Mas, podem ser inapropriadas para dados conhecidos ou suspeitos por refletir descontinuidades na função ou em suas primeiras derivadas. Por exemplo, quando a função não apresenta periodicidade é necessário um número grande de funções base para obter uma estimativa razoável.

2.3.3 Aproximação por funções base para os dados da marcha

Os dados da marcha humana apresentam comportamento aproximadamente periódico e portanto, utilizaremos a expansão por série de Fourier para aproximar suas curvas. O movimento de flexão-extensão do joelho é aproximadamente periódico no intervalo $[0, 1]$, ou seja, tem período 1 (pois $f(0) \simeq f(1)$). A utilização de uma soma de Fourier para modelar a marcha humana foi utilizada pioneiramente em [Olshen et al. \(1989\)](#).

Assim, se f denota a curva do movimento de flexão-extensão do joelho, uma aproximação por base de Fourier para f é dada por

$$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^M [a_m \cos(2\pi mt) + b_m \sin(2\pi mt)]$$

cujos coeficientes a_0 e $a_m, b_m, m = 1, \dots, M$ são dados por

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 f(t) dt \\ a_m &= 2 \int_0^1 f(t) \cos(2\pi mt) dt, \quad m = 1, \dots, M, \\ b_m &= 2 \int_0^1 f(t) \sin(2\pi mt) dt, \quad m = 1, \dots, M. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Detalhes da obtenção dos coeficientes dados na equação (2.5) podem ser encontrados na Definição A.19 do [Apêndice A](#).

2.4 Conclusões

Através das técnicas de análise descritiva para dados funcionais apresentadas neste capítulo, observamos que os comportamentos das curvas médias para os membros inferiores dominante e não dominante são parecidos, entretanto, para alguns indivíduos a curva média do membro inferior não dominante apresenta amplitudes menores nos pontos de flexão máxima, tanto na fase de apoio quanto na fase de balanço, para outros a curva média do membro inferior dominante que apresenta menores amplitudes e para alguns não há um padrão de destaque para nenhuma dos dois membros inferiores. Em relação à variabilidade dos dados, notamos que alguns indivíduos apresentam mais variação nos dados do membro inferior dominante, outros para os dados do membro inferior não dominante e para uns a variabilidade se apresenta aparentemente a mesma para ambas os membros inferiores. Além disso, em geral, essa variabilidade não é constante, variando para diferentes porcentagens do ciclo. Vimos que estas características, que são avaliadas para cada instante de tempo observado, podem ser resumidas num o gráfico *boxplot* para cada instante de tempo, formando o que denominamos por *boxplot* ponto-a-ponto.

Através da definição de *depht* funcional, pudemos determinar a mediana funcional e apresentar uma definição para o conceito de curva *outlier*. Alguns dos indivíduos (e

geralmente não para ambos os membros inferiores) apresentaram no máximo duas curvas *outliers* e os gráficos *boxplot* funcional destes indivíduos foram apresentados.

Depois de realizada a exploração e análise descritiva dos dados, o próximo passo é a modelagem das curvas e, para isto, noções introdutórias de técnicas utilizadas para modelagem de dados funcionais, mais especificamente o uso de funções base para descrever a curva média, foram apresentadas. Como descrito, funções base de Fourier serão utilizadas na modelagem que será proposta.

3 MODELO DE REGRESSÃO BAYESIANO PARA A MARCHA HUMANA

A marcha humana apresenta comportamento aproximadamente periódico, sendo os dados de rotação angular de baixa frequência. As séries de Fourier são comumente utilizadas para modelar funções com tais características. O ângulo de rotação para cada porcentagem do ciclo pode ser modelado segundo uma soma finita de Fourier, modelo cuja justificativa de uso foi descrita na [subseção 2.3.3](#), foi proposto pioneiramente em [Olshen et al. \(1989\)](#) para modelagem de dados de marcha.

Neste capítulo, apresentamos uma proposta de modelagem para a curva formada por ângulos nos movimentos da marcha de um indivíduo, utilizando uma soma de Fourier para a curva média do movimento e, sob uma abordagem Bayesiana, caracterizar o movimento do indivíduo.

3.1 Descrição do Modelo

Para cada paciente são observadas várias passadas (curvas). Podemos fazer uma análise por indivíduo. Os dados da marcha são capturados separadamente para cada membro inferior, individualmente identificadas como dominante e não dominante. O modelo descrito a seguir considera os dados de apenas um dos membros inferiores do indivíduo.

Suponhamos que foram observadas J passadas do indivíduo e lembremos que as observações dos ângulos de rotação do movimento durante a marcha são tomadas para tempos no intervalo $[0, 1]$. Denotamos por $Y_j(t)$ a função que descreve a j -ésima passada do indivíduo, para $j = 1, \dots, J$ e $0 \leq t \leq 1$. A j -ésima passada do indivíduo, para $j = 1, \dots, J$, pode ser modelada por

$$Y_j(t) = \mu(t) + \varepsilon_j(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.1)$$

em que $\mu(t)$ representa a curva média de rotação angular do indivíduo e $\varepsilon_j(t)$ são os erros aleatórios normalmente distribuídos com média zero e variância σ^2 . Os erros são supostos independentes e identicamente distribuídos para diferentes valores de $t \in [0, 1]$.

Do fato que cada passada é uma réplica do mesmo movimento, realizado pelo mesmo indivíduo, é natural admitir que todas essas passadas são provenientes de uma mesma distribuição. Assim, para a média assumimos uma estrutura comum para todas as passadas do indivíduo, além disso, supomos que a função média $\mu(t)$ pertence ao espaço $L^2[0, 1]$ e portanto admite uma expansão com relação à uma base de Fourier (ver [subseção 2.3.3](#)). Em particular, considerando M um dado nível de truncamento ($2M + 1$ é

o número de funções base), temos que $\mu(t)$ é dada pela soma finita

$$\mu(t) = \sum_{m=0}^{2M} \beta_m \phi_m(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.2)$$

em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_{2M})'$ é o vetor de coeficientes de Fourier e ϕ_m para $m = 0, \dots, 2M$ dadas por

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= 1, \\ \phi_{2r-1}(t) &= \cos(2\pi r t), \\ \phi_{2r}(t) &= \sin(2\pi r t), \end{aligned}$$

para $r = 1, \dots, M$, são as funções base de Fourier.

Assim, a estrutura da média pode ser escrita como

$$\mu(t) = \mathbf{X}(t)\boldsymbol{\beta}, \quad (3.3)$$

em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_{2M})'$ é o vetor de coeficientes de Fourier e $\mathbf{X}(t)$ é um vetor de comprimento $2M + 1$ cujas entradas são dadas pelas funções base de Fourier

$$\mathbf{X}(t) = (1, \cos(2\pi \cdot 1 \cdot t), \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t), \dots, \cos(2\pi \cdot M \cdot t), \sin(2\pi \cdot M \cdot t)).$$

Utilizando (3.3), a equação (3.1) pode ser reescrita então como

$$Y_j(t) = \mathbf{X}(t)\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_j(t), \quad j = 1, \dots, J, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.4)$$

Além disso, $\mu(t)$ e $\varepsilon_j(t)$ são considerados independentes. Supomos independência também entre as passadas $Y_j(t)$, para diferentes valores de j , $j = 1, \dots, J$.

Da equação (3.4) e demais suposições do modelo, concluímos que, para cada $t \in [0, 1]$ fixado,

$$Y_1(t), \dots, Y_J(t) \stackrel{i.i.d.}{\sim} N\left(\mathbf{X}(t)\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\right). \quad (3.5)$$

Suponhamos que todas as passadas do indivíduo possuem o mesmo número de observações K , ou seja, as observações foram tomadas no mesmo vetor de tempos $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_K)'$, $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_K \leq 1$. Representamos o k -ésimo ângulo da j -ésima passada do indivíduo por $Y_{jk} = Y_j(t_k)$, $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, J$ e a j -ésima passada do indivíduo representamos então por

$$\mathbf{Y}_j = Y_j(\mathbf{t}) = (Y_{j1}, Y_{j2}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{jK})'.$$

Da equação (3.5), segue então que

$$Y_1(\mathbf{t}), \dots, Y_J(\mathbf{t}) \stackrel{i.i.d.}{\sim} N_K\left(\mathbf{X}(\mathbf{t})\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_K\right), \quad (3.6)$$

em que

$$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\pi \cdot 1 \cdot t_1) & \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t_1) & \cdots & \cos(2\pi \cdot M \cdot t_1) & \sin(2\pi \cdot M \cdot t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(2\pi \cdot 1 \cdot t_k) & \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t_k) & \cdots & \cos(2\pi \cdot M \cdot t_k) & \sin(2\pi \cdot M \cdot t_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(2\pi \cdot 1 \cdot t_K) & \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t_K) & \cdots & \cos(2\pi \cdot M \cdot t_K) & \sin(2\pi \cdot M \cdot t_K) \end{bmatrix}_{K \times (2M+1)} .$$

Para simplificação de notação, quando estivermos nos referindo à matriz $\mathbf{X}(\mathbf{t})$, em que $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_K)'$, usaremos simplesmente a notação \mathbf{X} .

3.1.1 Verossimilhança

Considerando as suposições do modelo, a função de verossimilhança do indivíduo é dada por

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y}) &= \prod_{j=1}^J L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y}_j) \\ &\propto \prod_{j=1}^J (\sigma^2)^{-\frac{K}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right\} \\ &\propto (\sigma^2)^{-\frac{JK}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^J (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right\}, \end{aligned}$$

em que \mathbf{y} representa todas as passadas de um membro inferior do indivíduo e \mathbf{y}_j as observações da j -ésima passada do indivíduo, $j = 1, \dots, J$.

3.1.2 Distribuições *a priori* e *a posteriori*

Assumimos que os parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ e σ^2 são independentes *a priori*, para os quais adotamos as seguintes distribuições *a priori* conjugadas

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} &\sim N_{2M+1}(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0), \\ \sigma^2 &\sim \text{Gama} - \text{Inv}(u_0, v_0), \end{aligned}$$

em que os hiperparâmetros $\boldsymbol{\mu}_0$, $\boldsymbol{\Sigma}_0$, u_0 e v_0 são conhecidos, ou seja, as densidades *a priori* de $\boldsymbol{\beta}$ e σ^2 têm expressões dadas por

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\beta} | \boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{2M+1} |\boldsymbol{\Sigma}_0|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}_0) \right\}, \\ p(\sigma^2 | u_0, v_0) &= \frac{v_0^{u_0}}{\Gamma(u_0)} (\sigma^2)^{-u_0-1} \exp \left\{ -\frac{v_0}{\sigma^2} \right\}. \end{aligned}$$

A distribuição *a posteriori* conjunta do indivíduo é dada por

$$\begin{aligned}
p(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y}) &\propto L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y}) \times p(\boldsymbol{\beta}) \times p(\sigma^2) \\
&\propto (\sigma^2)^{-\frac{JK}{2}} (\sigma^2)^{-u_0-1} \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^J (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}_0) - \frac{v_0}{\sigma^2} \right\}. \\
&\propto (\sigma^2)^{-\frac{JK}{2}-u_0-1} \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}' \left(J(\sigma^2)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right) \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}' \left((\sigma^2)^{-1} \mathbf{X}' \left(\sum_{j=1}^J \mathbf{y}_j \right) + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\mu}_0 \right) \right. \\
&\quad \left. - \left((\sigma^2)^{-1} \left(\sum_{j=1}^J \mathbf{y}'_j \right) \mathbf{X} + \boldsymbol{\mu}'_0 \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right) \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{j=1}^J \mathbf{y}'_j \right) \left(\sum_{j=1}^J \mathbf{y}_j \right) + \frac{v_0}{\sigma^2} \right\} \\
&\propto (\sigma^2)^{-\frac{JK}{2}-u_0-1} \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{m})' \mathbf{C}^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{m}) - \frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{j=1}^J \mathbf{y}'_j \right) \left(\sum_{j=1}^J \mathbf{y}_j \right) - \frac{v_0}{\sigma^2} \right\}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

em que $\mathbf{C} = \left(J(\sigma^2)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right)^{-1}$ e $\mathbf{m} = \mathbf{C} \left((\sigma^2)^{-1} \mathbf{X}' \left(\sum_{j=1}^J \mathbf{y}_j \right) + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\mu}_0 \right)$.

Segue da equação (3.8) que a distribuição condicional completa *a posteriori* de $\boldsymbol{\beta}$ é dada por

$$p(\boldsymbol{\beta} | \mathbf{y}, \sigma^2) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{m})' \mathbf{C}^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{m}) \right\},$$

isto é,

$$\boldsymbol{\beta} | \mathbf{y}, \sigma^2 \sim N_{2M+1}(\mathbf{m}, \mathbf{C}).$$

Por fim, segue da equação (3.7) que a distribuição condicional completa *a posteriori* de σ^2 é dada por

$$p(\sigma^2 | \mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}) \propto (\sigma^2)^{-(u_0 + \frac{JK}{2})-1} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \left[v_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right] \right\},$$

portanto,

$$\sigma^2 | \mathbf{y}, \boldsymbol{\beta} \sim \text{Gama} - \text{Inv} \left(u_0 + \frac{JK}{2}, v_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right).$$

Uma estimativa para a curva média $\mu(t)$ do indivíduo é dada por

$$\hat{\mu}(t) = \mathbf{X}(t) \hat{\boldsymbol{\beta}},$$

com $\mathbf{X}(t) = (1, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \dots, \cos(2\pi Mt), \sin(2\pi Mt))$ e $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ a estimativa média da distribuição *a posteriori* de $\boldsymbol{\beta}$.

3.1.3 Distribuição preditiva *a posteriori*

Considere \mathbf{Y} a variável aleatória que representa uma passada do indivíduo. A distribuição preditiva *a posteriori* para uma passada \mathbf{Y}^* de \mathbf{Y} pode ser obtida por

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}^* | \mathbf{y}) &= \int_{\Theta} p(\mathbf{y}^* | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta} \\ &= \int_{\Theta} p(\mathbf{y}^* | \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (3.9)$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)'$ é o vetor de todos os parâmetros e \mathbf{y} representa todas as curvas observadas do indivíduo.

A integração na equação (3.9) pode não ter solução analítica, entretanto aproximações podem ser obtidas dado que tenhamos amostras da distribuição *a posteriori* de $\boldsymbol{\theta}$ dado \mathbf{y} (GAMERMAN; LOPES, 2006). Isto é, para uma amostra aleatória $\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_Q$ proveniente de $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$, uma aproximação para a distribuição preditiva é

$$p(\mathbf{y}^* | \mathbf{y}) \approx \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q p(\mathbf{y}^* | \boldsymbol{\theta}_q).$$

Assim, uma vez que amostras da distribuição *a posteriori* de $\boldsymbol{\theta}$ estão disponíveis, realizações da distribuição preditiva *a posteriori* podem ser obtidas por amostragem da distribuição de $\mathbf{y}^* | \boldsymbol{\theta}_s$, com $\boldsymbol{\theta}_s$ representando a s -ésima amostra *a posteriori* do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$. Ou seja, podemos obter realizações de $\mathbf{Y}^* | \mathbf{Y}$ utilizando o algoritmo a seguir.

Algoritmo 3.1 (Geração de uma amostra da distribuição preditiva *a posteriori*)

Uma amostra da distribuição a posteriori pode ser obtida seguindo os seguintes passos:

- (1) Inicialize $q = 1$.
- (2) Simule $\boldsymbol{\theta}_q$ de $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$.
- (3) Simule \mathbf{y}_q^* de $p(\mathbf{y}^* | \boldsymbol{\theta}_q)$.
- (4) Atualize $q = q + 1$.
- (5) Repita os passos (2) a (4) até obter uma amostra de tamanho Q : $\mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_Q^*$.

Assim, uma estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* é obtida por

$$\hat{E}[\mathbf{Y}^* | \mathbf{Y}] \approx \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q \mathbf{y}_q^*.$$

3.2 Análise dos Dados

O modelo proposto foi aplicado ao conjunto de dados descrito na [subseção 1.2.1](#). Ele possui observações do ângulo do movimento de flexão-extensão do joelho dos membros inferiores dominante e não dominante de 16 indivíduos. Para cada membro inferior do indivíduo foram coletadas 49 passadas e cada passada contém 101 observações igualmente espaçadas. Dividimos a amostra em duas partes: as primeiras 35 curvas ($\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{35}$) compõem a amostra de treinamento, a ser usada no ajuste do modelo, e as demais curvas ($\mathbf{Y}_{36}, \dots, \mathbf{Y}_{49}$), a amostra de teste, com o objetivo de obter curvas para avaliar a qualidade preditiva e realizar algumas comparações entre diferentes modelos que aparecerão no restante do texto. Assim, nas notações do modelo, temos $J = 35$ (amostra de treinamento) e $K = 101$, ou seja, $j = 1, \dots, 35$ e $k = 1, \dots, 101$.

Os seguintes valores foram atribuídos aos hiper-parâmetros das distribuições *a priori*: $\boldsymbol{\mu}_0 = (0, \dots, 0)'$, $\boldsymbol{\Sigma}_0 = 100I_{2M+1}$, $u_0 = 2$ e $v_0 = 0,25$ (a fim de especificar uma priori pouco informativa).

As estimativas *a posteriori* dos parâmetros para cada membro inferior foram obtidas utilizando o método de simulação MCMC, a partir das distribuições condicionais completas *a posteriori* $p(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y}, \sigma^2)$ e $p(\sigma^2|\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta})$, utilizando o método de amostragem Gibbs ([GEMAN; GEMAN, 1987](#)). Para gerar a amostra foram descartadas as 1000 primeiras observações (*burn-in*). Não foram necessários saltos para independência. A amostra final da distribuição *a posteriori* é de 1000 observações. A implementação do método foi realizada utilizando o software R ([R Core Team, 2018](#)).

Repetimos o processo de geração para diversos valores de M , limite superior na soma de Fourier e calculamos, para cada modelo, o valor de DIC ([SPIEGELHALTER et al., 2002](#)) (ver detalhes na [seção B.1](#) do [Apêndice B](#)). Na [Tabela 1](#) resumimos os valores de M selecionados pelo critério DIC para cada membro inferior de cada indivíduo, isto é, os valores de M que apresentaram menor valor DIC.

Estabelecemos $M = 13$, tanto para o membro inferior dominante, quanto para a não dominante, para todos os indivíduos, pois este foi o maior valor apresentado e o com maior ocorrência, uma vez que considerando objetivos futuros do trabalho tínhamos a restrição de escolher uma quantidade única de funções base para todos os indivíduos.

Tabela 1: Valor M escolhido para cada membro inferior de cada indivíduo através do DIC

Indivíduo	Dominante	Não Dominante
1	12	10
2	10	12
3	13	13
4	12	12
5	13	13
6	13	13
7	10	10
8	12	13
9	12	11
10	13	10
11	13	11
12	11	12
13	11	5
14	10	11
15	10	11
16	13	12

Fonte: Elaborada pela autora

3.2.1 Diagnóstico de convergência

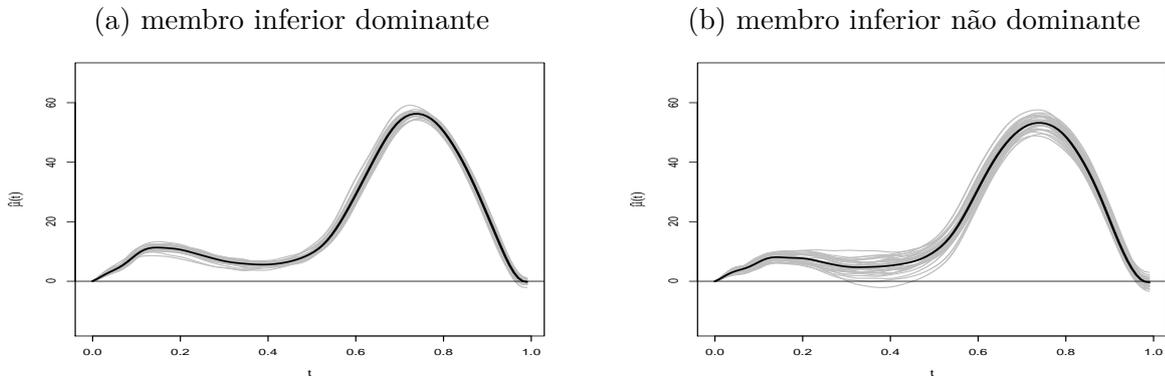
Para verificar independência na amostra *a posteriori* obtida, analisamos a função de autocorrelação e confirmamos que para todas as variáveis obtivemos amostras independentes.

A fim de verificar a convergência, realizamos análises gráficas (tais como gráficos das cadeias superpostas, médias ergódicas, densidades) e numérica, através do teste de Gelman e Rubin (1992). No teste Gelman e Rubin, a convergência é avaliada através de múltiplas cadeias e indicada por um valor escalar \hat{R} chamado “redução potencial da escala”. Para que ocorra convergência, este escalar deve ser próximo de 1. Para maiores detalhes, ver (GELMAN; RUBIN, 1992). Para cada indivíduo, o teste foi aplicado utilizando duas subcadeias extraídas da amostra *a posteriori*, uma composta pelas 500 primeiras amostras e outra pelas 500 últimas amostras. Para todas as variáveis de todos os indivíduos, $\hat{R} = 1$, o que indica convergência.

3.2.2 Resultados

Para apresentar os resultados obtidos, usamos como exemplo o 1º indivíduo. Na Figura 19 podemos observar a estimativa *a posteriori* da curva média de cada membro inferior do 1º indivíduo, juntamente com as curvas da amostra de treinamento. Os gráficos com as estimativas *a posteriori* das curvas médias para os demais indivíduos encontram-se na seção C.2 do Apêndice C.

Figura 19: Estimativa *a posteriori* da curva média (ilustrada em preto) do modelo de regressão Bayesiano, juntamente com as curvas da amostra de treinamento (em cinza), para o 1º indivíduo

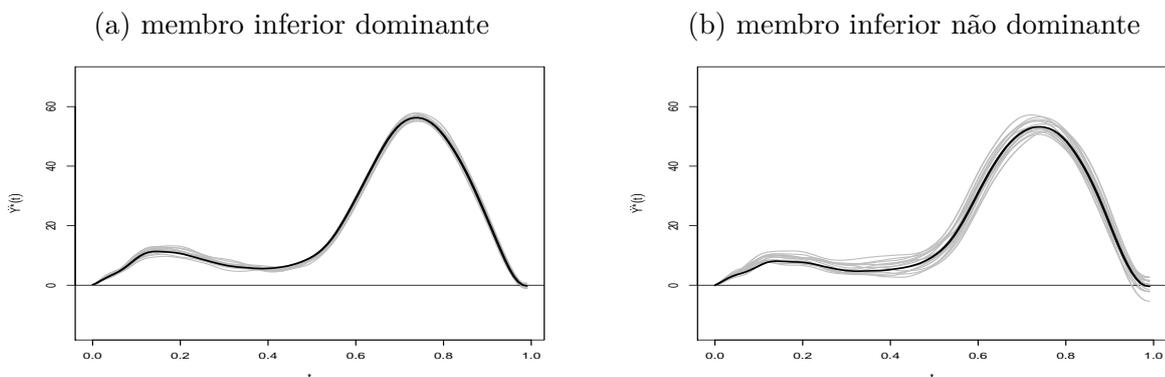


Fonte: Elaborado pela autora

Observando as Figuras 19 e 69 a 83, podemos notar que o modelo adotado para o ajuste conseguiu capturar o comportamento da marcha de cada indivíduo, inclusive dos indivíduos que apresentam uma certa discrepância em relação à curva típica do movimento de flexão-extensão do joelho (por exemplo os indivíduos 8 e 13).

A partir da amostra da distribuição *a posteriori* dos parâmetros do modelo, utilizando o procedimento descrito na [subseção 3.1.3](#), geramos uma amostra da distribuição preditiva *a posteriori* para cada membro inferior de cada indivíduo. Na Figura 20 podemos observar a estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* de cada membro inferior do 1º indivíduo, juntamente com a amostra de teste. Os gráficos com as estimativas da média da distribuição preditiva *a posteriori* para os demais indivíduos encontram-se na [seção C.3 do Apêndice C](#).

Figura 20: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* (ilustrada na cor preta) do modelo de regressão Bayesiano, juntamente com as curvas da amostra de teste (em cinza), para o 1º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Por meio das Figuras 20 e 84 a 98, notamos que as curvas de teste são semelhantes à estimativa preditiva obtida, isso para todos os indivíduos. Comparando a curva média que se espera para uma nova observação dos indivíduos, podemos notar algumas discrepâncias, como por exemplo, quando comparamos o indivíduo 8 com os demais.

3.3 Conclusões

Neste capítulo, utilizamos uma soma finita de Fourier para suavizar os dados da marcha. A análise foi feita para cada membro inferior de cada indivíduo, na qual modelamos, a partir de uma abordagem Bayesiana, a curva dos ângulos formados durante o movimento de flexão-extensão do joelho. A quantidade de funções base foi determinada por meio do critério de seleção DIC. Utilizando a estimativa da média da distribuição a posteriori de β calculamos uma estimativa para a curva média, a qual se apresentou bem semelhante às curvas da amostra de treinamento, que por sua vez são todas parecidas com a curva típica do movimento. A partir da amostra da distribuição *a posteriori* foi possível obter uma estimativa de uma observação futura de cada indivíduo, que se apresentou muito semelhante às respectivas curvas da amostra de teste. Ressaltamos que este modelo serviu como um primeiro passo na modelagem dos dados do ciclo da marcha do indivíduo, no sentido que mais suposições serão incluídas no modelo proposto a seguir. Além disso, estimativas intervalares funcionais serão definidas e calculadas posteriormente.

4 MODELO DE REGRESSÃO FUNCIONAL PROCESSO GAUSSIANO BAYESIANO PARA A MARCHA HUMANA

Dado um conjunto de J observações funcionais $y_j(t)$, $j = 1, \dots, J$ e $t \in [0, 1]$, vimos na [subseção 2.3.1](#) que um modelo de regressão linear funcional é dado por

$$y_j(t) = \mu_j(t) + \varepsilon_j(t), \quad j = 1, \dots, J, \quad (4.1)$$

em que $\mu_j(t)$ representa a curva média dos dados e $\varepsilon_j(t) \sim N(0, \sigma^2)$ são os erros supostos independentes para diferentes valores de j e instantes de tempo t . Para descrever μ é usual utilizar métodos de suavização por funções base. O modelo descrito no [Capítulo 3](#), utiliza um modelo como dado na equação (4.1) e funções base de Fourier para descrever os ângulos de rotação no movimento de flexão-extensão do joelho humano.

Se as observações de uma curva $y_i(t)$ são dependentes para diferentes instantes de tempos, o ideal é adicionar uma estrutura de covariância. [Rice e Silverman \(1991\)](#) definiram o seguinte modelo com processo estocástico que pode modelar conjuntamente as estruturas de média e covariância

$$y_j(t) = \mu_j(t) + \tau_j(t) + \varepsilon_j(t), \quad j = 1, \dots, J, \quad (4.2)$$

em que $\varepsilon_j(t) \sim N(0, \sigma^2)$ continuam supostos independentes, $\mu(t)$ representa a média de $y_j(t)$ e o termo $\tau_j(t)$ representa um processo estocástico com média zero e função de covariância $k_{\tau_j}(t, t') = Cov(\tau_j(t), \tau_j(t'))$, independente dos erros $\varepsilon_j(t)$.

[Rice e Silverman \(1991\)](#) estimaram a função média usando *splines* cúbicos e estimaram a estrutura de covariância através de estimativas não paramétricas. [Shi e Choi \(2011\)](#) trazem uma versão não paramétrica para modelar $\mu_j(t)$ além de considerarem $\tau_j(t)$ um processo Gaussiano.

Inspirados no modelo dado na equação (4.2) e considerando funções base de Fourier para modelar a média, propomos a seguir um modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano para modelar os ângulos de rotação durante a marcha humana.

4.1 Descrição do Modelo

Suponhamos que foram observadas J passadas do indivíduo e lembremos que as observações dos ângulos de rotação do movimento durante a marcha são tomadas para tempos no intervalo $[0, 1]$. Seja $Y_j(t)$ a função que representa a j -ésima passada de um indivíduo, para $j = 1, \dots, J$ e $t \in [0, 1]$. A j -ésima passada do indivíduo pode ser modelada por

$$Y_j(t) = \mu(t) + \tau_j(t) + \varepsilon_j(t), \quad j = 1, \dots, J, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (4.3)$$

em que $\mu(t)$ representa a curva média de rotação angular do indivíduo, $\tau_j(t)$ a estrutura de covariância entre as observações de uma mesma passada e $\varepsilon_j(t)$ são os erros aleatórios para os quais supomos um processo Gaussiano com média zero e função covariância k_ε com hiperparâmetro σ^2 dada por

$$k_\varepsilon(t_r, t_s | \sigma^2) = \sigma^2 \delta_{rs},$$

com δ_{rs} representando a função indicadora ($\delta_{rs} = 1$ se $r = s$ e $\delta_{rs} = 0$ se $r \neq s$). Note que os erros aleatórios são independentes e identicamente distribuídos, ou seja, para cada $t \in [0, 1]$ fixado

$$\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_J(t) | \sigma^2 \stackrel{i.i.d.}{\sim} GP[0, \sigma^2 \delta_{..} | \sigma^2]. \quad (4.4)$$

Para a estrutura de covariância supomos um processo Gaussiano com média zero e função covariância k_τ com vetor de hiperparâmetros $\boldsymbol{\theta}_0$

$$\tau_1(t), \dots, \tau_J(t) | \boldsymbol{\theta}_0 \stackrel{i.i.d.}{\sim} GP[0, k_\tau(\cdot, \cdot | \boldsymbol{\theta}_0)]. \quad (4.5)$$

para $t \in [0, 1]$ fixado. Note que para todas as passadas do indivíduo assumimos o mesmo processo Gaussiano, além disso, o vetor de hiperparâmetros $\boldsymbol{\theta}_0$ da função de covariância k_τ é considerado fixado.

Adotando a mesma abordagem para modelar a curva média do movimento do indivíduo descrita na [seção 3.1](#), a estrutura da média $\mu(t)$ pode ser escrita como

$$\mu(t) = \mathbf{X}(t)\boldsymbol{\beta}, \quad (4.6)$$

em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_{2M})'$ é o vetor de coeficientes de Fourier e $\mathbf{X}(t)$ é um vetor de comprimento $2M + 1$ cujas entradas são dadas pelas funções base de Fourier

$$\mathbf{X}(t) = (1, \cos(2\pi \cdot 1 \cdot t), \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t), \dots, \cos(2\pi \cdot M \cdot t), \sin(2\pi \cdot M \cdot t)).$$

Utilizando (4.6), a equação (4.3) pode ser reescrita então como

$$Y_j(t) = \mathbf{X}(t)\boldsymbol{\beta} + \tau_j(t) + \varepsilon_j(t), \quad j = 1, \dots, J, \quad 0 \leq t < 1. \quad (4.7)$$

Note que, condicionalmente a $\boldsymbol{\beta}$ e σ^2 , os processos $\tau_j(t)$ e $\varepsilon_j(t)$ são considerados independentes. Supomos independência também entre as passadas $Y_j(t)$, para diferentes valores de j , $j = 1, \dots, J$.

Das equações (4.4) a (4.7) e demais suposições do modelo, concluímos que $Y_j(t)$ segue um processo Gaussiano com média $\mathbf{X}(t)\boldsymbol{\beta}$ e função covariância ψ com vetor de hiperparâmetros $(\boldsymbol{\theta}_0, \sigma^2)'$

$$Y_1(t), \dots, Y_J(t) | \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \stackrel{i.i.d.}{\sim} GP[\mathbf{X}(t)\boldsymbol{\beta}, \psi(\cdot, \cdot | \boldsymbol{\theta}_0, \sigma^2)], \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (4.8)$$

em que a função de covariância $\psi(\cdot, \cdot | \boldsymbol{\theta}_0, \sigma^2)$ é dada por

$$\psi(t_r, t_s | \boldsymbol{\theta}_0, \sigma^2) = k_\tau(t_r, t_s | \boldsymbol{\theta}_0) + \sigma^2 \delta_{rs}.$$

Suponhamos que todas as passadas do indivíduo possuem o mesmo número de observações K , ou seja, as observações foram tomadas no vetor de tempos $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_K)'$, $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_K \leq 1$. Representamos o k -ésimo ângulo da j -ésima passada do indivíduo por $Y_{jk} = Y_j(t_k)$, $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, J$ e a j -ésima passada do indivíduo representamos então por

$$\mathbf{Y}_j = Y_j(\mathbf{t}) = (Y_{j1}, Y_{j2}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{jK})'.$$

Dessa forma, a curva média do movimento do indivíduo é dada por

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{t}) = \mathbf{X}(\mathbf{t})\boldsymbol{\beta},$$

no qual $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ é a matriz de dimensão $K \times K$ dada por

$$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\pi \cdot 1 \cdot t_1) & \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t_1) & \cdots & \cos(2\pi \cdot M \cdot t_1) & \sin(2\pi \cdot M \cdot t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(2\pi \cdot 1 \cdot t_k) & \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t_k) & \cdots & \cos(2\pi \cdot M \cdot t_k) & \sin(2\pi \cdot M \cdot t_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(2\pi \cdot 1 \cdot t_K) & \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t_K) & \cdots & \cos(2\pi \cdot M \cdot t_K) & \sin(2\pi \cdot M \cdot t_K) \end{bmatrix}_{K \times (2M+1)}.$$

Para os erros aleatórios temos então que eles seguem uma distribuição Gaussiana K -variada com vetor de médias zero e matriz de covariância $\sigma^2 \mathbf{I}_K$

$$\varepsilon_1(\mathbf{t}), \dots, \varepsilon_J(\mathbf{t}) \mid \sigma^2 \stackrel{i.i.d.}{\sim} N_K(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_K).$$

Denotando por \mathbf{K}_{cov} a matriz de dimensão $K \times K$ cujas entradas são

$$\mathbf{K}_{cov}[r, s] = k_\tau(t_r, t_s | \boldsymbol{\theta}_0), \quad r, s = 1, \dots, K, \quad (4.9)$$

temos que $\tau_j(\mathbf{t})$ segue uma distribuição Gaussiana K -variada com vetor de médias zero e matriz de covariância \mathbf{K}_{cov}

$$\tau_1(\mathbf{t}), \dots, \tau_J(\mathbf{t}) \stackrel{i.i.d.}{\sim} N_K(\mathbf{0}, \mathbf{K}_{cov}).$$

Além disso, denotando por $[\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]$ uma matriz de dimensão $K \times K$ cujos elementos são dados por

$$[\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)][r, s] = k_\tau(t_r, t_s | \boldsymbol{\theta}_0) + \sigma^2 \delta_{rs}, \quad (4.10)$$

ou seja, em termos matriciais,

$$[\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)] = \mathbf{K}_{cov} + \sigma^2 \mathbf{I}_K, \quad (4.11)$$

em que \mathbf{K}_{cov} é a matriz definida na equação (4.9), segue que

$$Y_1(\mathbf{t}), \dots, Y_J(\mathbf{t}) \mid \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \stackrel{i.i.d.}{\sim} N_K\left(\mathbf{X}(\mathbf{t})\boldsymbol{\beta}, [\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]\right).$$

Note que usamos a notação $[\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]$ para a matriz definida em (4.10) e (4.11), em vez de simplesmente $\boldsymbol{\Psi}$, para evidenciar que σ^2 é o parâmetro e está contido nos elementos de $\boldsymbol{\Psi}$.

Para simplificação de notação, quando estivermos nos referindo à matriz $\mathbf{X}(\mathbf{t})$, em que $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_K)'$, usaremos simplesmente a notação \mathbf{X} .

4.1.1 Verossimilhança

Considerando as suposições do modelo, a função de verossimilhança do indivíduo é dada por

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mid \mathbf{y}) &= \prod_{j=1}^J L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mid \mathbf{y}_j) \\ &\propto \prod_{j=1}^J \left([|\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)|]^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' [\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]^{-1} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right\} \right) \\ &\propto [|\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)|]^{-\frac{J}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^J (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' [\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]^{-1} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

em que \mathbf{y} representa todas as passadas de um membro inferior do indivíduo e \mathbf{y}_j as observações da j -ésima passada do indivíduo, $j = 1, \dots, J$.

4.1.2 Função de covariância adotada

Adotamos como função de covariância a exponencial quadrada, ou seja,

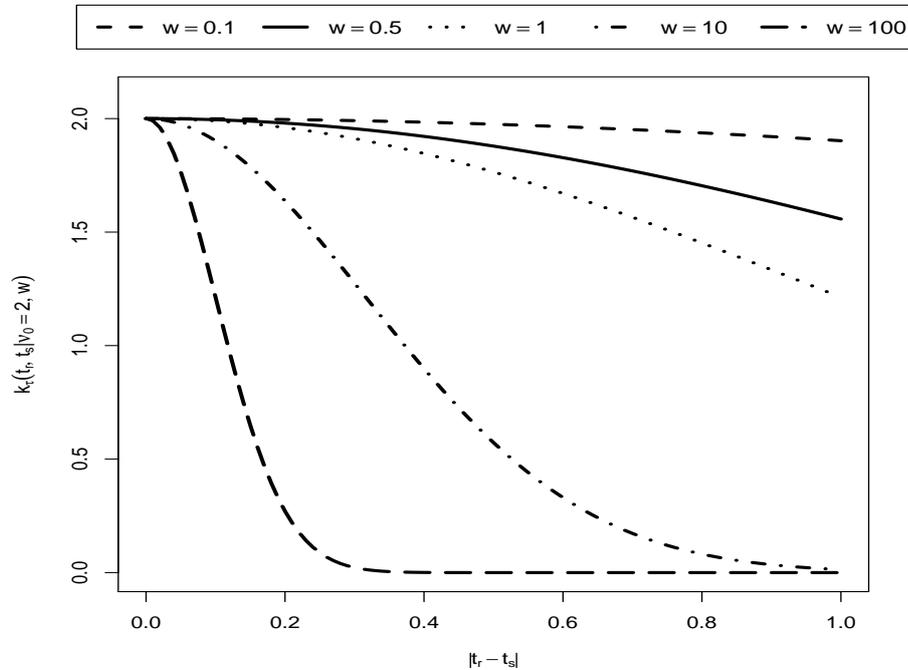
$$k_\tau(t_1, t_2 \mid \boldsymbol{\theta}_0) = \nu_0 \exp \left(-\frac{1}{2w^2} (t_1 - t_2)^2 \right) \quad (4.13)$$

em que $\boldsymbol{\theta}_0 = (\nu_0, w)'$ é o vetor de hiperparâmetros, com $\nu_0 > 0$ e $w > 0$.

A função de covariância expressa a ideia de que observações com tempos próximos são mais correlacionadas e esta em particular foi adotada devido à sua adequação a curvas suaves e à sua formulação (WILLIAMS; RASMUSSEN, 1996). O parâmetro $\nu_0 > 0$ é um fator de escala das correlações locais. Ele determina a variação dos valores da função em torno da média. Valor pequeno de ν_0 caracteriza funções que possuem os seus valores próximos do seu valor médio, enquanto valor grande, permite maior variação. O parâmetro $w > 0$ é uma escala de comprimento e descreve o quão suave a função é. Valor pequeno de w significa que a função k_τ muda seus valores rapidamente e valor grande significa que os valores da função k_τ mudam apenas lentamente (RASMUSSEN; WILLIAMS, 2006). Além disso, fixado os valores de ν_0 e w , a covariância depende apenas da distância entre os tempos t_r e t_s .

Podemos visualizar o comportamento da função de covariância adotada na Figura 21, para a qual atribuímos $\nu_0 = 2$ e os valores 0, 1; 0, 5; 1; 10; 100 para w .

Figura 21: Gráfico da função covariância $k_\tau(t_r, t_s | (\nu_0; w)')$ adotada para $\nu_0 = 2$ e diferentes valores de w



Fonte: Elaborado pela autora

Note que o valor de ν_0 representa o maior valor que a covariância pode assumir e apresenta seu valor máximo quando $t_r = t_s$, isto é, a variância. Quanto ao hiperparâmetro w , valores pequenos representam alta dependência entre os tempos, enquanto valores grande estão relacionados a baixa dependência quando os instantes de tempo não são muito próximos.

O vetor de hiperparâmetros $\theta_0 = (\nu_0, w)'$ foi considerado fixado no processo de inferência, uma vez que sua estimação pode ser muito custosa computacionalmente (RASMUSSEN; WILLIAMS, 2006). Os valores de ν_0 e w podem ser obtidos de forma empírica, por exemplo adotando o vetor de parâmetros que minimiza a log-verossimilhança marginal em θ_0 (Rasmussen e Williams (2006) e Shi e Choi (2011)). Podemos ver que θ_0 , conjuntamente com σ^2 determinam a matriz de covariância adotada para modelar a curva do movimento do indivíduo, assim, optamos por determinar os hiperparâmetros também de forma empírica, encontrando a matriz Ψ que possui menor distância (utilizando a distância de Frobenius) em relação à matriz de covariância amostral (ver detalhes na seção B.2 do Apêndice B). Sendo assim, o vetor θ_0 será considerado fixado no restante do texto.

4.1.3 Distribuições *a priori* e *a posteriori*

Assumimos que os parâmetros β e σ^2 são independentes *a priori* com

$$\begin{aligned}\beta &\sim N_{2M+1}(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0), \\ \sigma^2 &\sim \text{Gama} - \text{Inv}(u_0, v_0),\end{aligned}$$

em que os hiperparâmetros $\boldsymbol{\mu}_0$, $\boldsymbol{\Sigma}_0$, u_0 e v_0 são conhecidos. Isto é, as densidades *a priori* de β e σ^2 têm expressões dadas por

$$\begin{aligned}p(\beta \mid \boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{2M+1} |\boldsymbol{\Sigma}_0|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\beta - \boldsymbol{\mu}_0) \right\}, \\ p(\sigma^2 \mid u_0, v_0) &= \frac{v_0^{u_0}}{\Gamma(u_0)} (\sigma^2)^{-u_0-1} \exp \left\{ -\frac{v_0}{\sigma^2} \right\}.\end{aligned}$$

A distribuição *a posteriori* conjunta do indivíduo é dada por

$$\begin{aligned}p(\beta, \sigma^2 \mid \mathbf{y}) &\propto L(\beta, \sigma^2 \mid \mathbf{y}) \times p(\beta) \times p(\sigma^2) \\ &\propto |[\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]|^{-\frac{J}{2}} (\sigma^2)^{-u_0-1} \quad (4.14)\end{aligned}$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^J (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\beta)' [\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]^{-1} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\beta) - \frac{1}{2} (\beta - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\beta - \boldsymbol{\mu}_0) - \frac{v_0}{\sigma^2} \right\}.$$

$$\begin{aligned}&\propto |[\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]|^{-\frac{J}{2}} (\sigma^2)^{-u_0-1} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta' \left(J\mathbf{X}' [\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]^{-1} \mathbf{X} + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right) \beta - \beta' \left(\mathbf{X}' [\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]^{-1} \left(\sum_{j=1}^J \mathbf{y}_j \right) + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\mu}_0 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\left(\sum_{j=1}^J \mathbf{y}_j' \right) [\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]^{-1} \mathbf{X} + \boldsymbol{\mu}_0' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right) \beta + \left(\sum_{j=1}^J \mathbf{y}_j' \right) [\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]^{-1} \left(\sum_{j=1}^J \mathbf{y}_j \right) + \frac{v_0}{\sigma^2} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\propto |[\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]|^{-\frac{J}{2}} (\sigma^2)^{-u_0-1} \quad (4.15) \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta - \mathbf{m})' \mathbf{C}^{-1} (\beta - \mathbf{m}) + \left(\sum_{j=1}^J \mathbf{y}_j' \right) [\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]^{-1} \left(\sum_{j=1}^J \mathbf{y}_j \right) + \frac{v_0}{\sigma^2} \right\}\end{aligned}$$

em que $\mathbf{C} = \left(J\mathbf{X}' [\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]^{-1} \mathbf{X} + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right)^{-1}$ e $\mathbf{m} = \mathbf{C} \left(\mathbf{X}' [\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]^{-1} \left(\sum_{j=1}^J \mathbf{y}_j \right) + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\mu}_0 \right)$.

Segue da equação (4.15) que a distribuição condicional completa *a posteriori* de β é dada por

$$p(\beta \mid \mathbf{y}, \sigma^2) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta - \mathbf{m})' \mathbf{C}^{-1} (\beta - \mathbf{m}) \right\},$$

logo,

$$\beta \mid \mathbf{y}, \sigma^2 \sim N_{2M+1}(\mathbf{m}, \mathbf{C}).$$

Por fim, segue diretamente da equação (4.14) que a distribuição condicional completa *a posteriori* de σ^2 é dada por

$$p(\sigma^2 \mid \mathbf{y}, \beta) \propto |[\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]|^{-\frac{J}{2}} (\sigma^2)^{-u_0-1} \exp \left\{ -\frac{v_0}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\beta)' [\boldsymbol{\Psi}(\sigma^2)]^{-1} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\beta) \right\}.$$

Uma estimativa para a curva média $\mu(t)$ do indivíduo pode ser obtida por

$$\hat{\mu}(t) = \mathbf{X}(t)\hat{\boldsymbol{\beta}},$$

com $\mathbf{X}(t) = (1, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \dots, \cos(2\pi Mt), \sin(2\pi Mt))$ e $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ a estimativa média da distribuição *a posteriori* de $\boldsymbol{\beta}$.

A distribuição preditiva *a posteriori* pode ser obtida a partir do procedimento já descrito na [subseção 3.1.3](#). Uma vez que amostras da distribuição *a posteriori* de $\boldsymbol{\theta}$ estão disponíveis, realizações da distribuição preditiva *a posteriori* podem ser obtidas por amostragem da distribuição de $\mathbf{y}^* | \boldsymbol{\theta}_s$, com $\boldsymbol{\theta}_s$ representando a s -ésima amostra *a posteriori* do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, utilizando o Algoritmo [3.1](#).

4.2 Estudo de Simulação

A fim de verificar a qualidade de ajuste do modelo proposto, realizamos um estudo de simulação. Diversas medidas podem ser calculadas para avaliar o ajuste de modelos para dados funcionais. Por exemplo, [Shi et al. \(2007\)](#) faz um estudo de simulação para verificar a qualidade das predições e traz os valores de *rmse*: raiz do erro quadrático médio entre as predições e os valores reais de teste e *r*: coeficiente de correlação relacionado. [Yao, Müller e Wang \(2005\)](#) traz como medidas o erro quadrático médio (MSE) predito estimado e a média do erro quadrático (ASE), que será descrito na [subseção 4.2.2](#), para cada parâmetro estimado. [Fraiman e Muniz \(2001\)](#) faz um estudo de simulação para comparar o estimador média com a média aparada nas $(1 - \alpha)100\%$ curvas com maior valor de *depth* e traz como medidas a média e o desvio padrão do erro integrado, estimador que também aparece em [López-Pintado e Romo \(2009\)](#).

Como curva verdadeira para geração dos dados simulados, desejamos adotar uma curva parecida com as curvas do conjunto de dados e, para tanto, consideramos a curva média de todas as curvas do conjunto de dados, conforme descrito na seção a seguir.

4.2.1 A curva verdadeira para geração dos dados

Desejamos obter a lei $f(t)$ que descreve uma curva que tenha as características da curva formada pelos ângulos do joelho no movimento de flexão-extensão durante o ciclo da marcha. Consideramos a curva média de todas as curvas do conjunto de dados, ou seja, a média entre as 98 curvas (49 dominante e 49 não dominante) dos 16 indivíduos, e através desta, extraímos as informações contidas na [Tabela 2](#), que descreve valores atingidos em determinados instantes do ciclo e os pontos críticos para esta curva.

Tabela 2: Pontos característicos para uma curva verdadeira que descreve os ângulos formados durante o movimento flexão-extensão do joelho

t	Graus	Derivada
0	0°	0
0,05	3,75°	–
0,15	14°	0
0,42	0°	0
0,75	55°	0
0,95	5,75°	–
1	0°	0

Fonte: Elaborada pela autora

Temos 12 informações para traçar a curva verdadeira: os valores da curva nos pontos $t = 0; 0,05; 0,15; 0,42; 0,75; 0,95$ e 1, e os pontos t para os quais a derivada da curva é igual a zero, que são $t = 0; 0,15; 0,42; 0,75$ e 1. Uma forma simples de encontrar uma curva que englobe essas 12 informações é utilizar um polinômio de grau 11 (que possui 12 coeficientes e, assim, resolveremos um sistema de 12 linhas e 12 incógnitas) para descrever tal curva

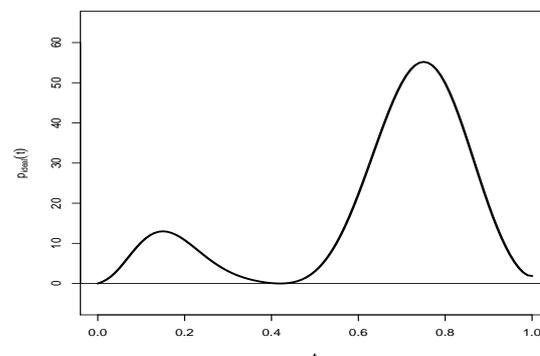
$$p(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + \dots + c_{10}t^{10} + c_{11}t^{11}.$$

O polinômio encontrado foi

$$p_{verd}(t) = 37,91413t + 33599,77t^3 - 483205,8t^4 + 2920872t^5 - 9794558t^6 + 19933330t^7 - 25185240t^8 + 19296500t^9 - 8209773t^{10} + 1488439t^{11},$$

e na [Figura 22](#) podemos observar o gráfico desta curva.

Figura 22: Polinômio obtido a partir das informações da [Tabela 2](#)



Fonte: Elaborado pela autora

No nosso trabalho, modelamos a curva do movimento de flexão-extensão do joelho durante o ciclo da marcha pela seguinte soma de Fourier

$$f(t) = \beta_0 + \sum_{m=1}^M [\beta_{2m-1} \cos(2\pi mt) + \beta_{2m} \sin(2\pi mt)], \quad 0 \leq t < 1.$$

Nosso objetivo é então determinar a função

$$f_{verd}(t) = \sum_{l=0}^{2M} \beta_l \phi_l(t), \quad (4.16)$$

em que

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= 1, \\ \phi_{2m-1}(t) &= \cos(2\pi mt), \quad m = 1, \dots, M, \\ \phi_{2m}(t) &= \sin(2\pi mt), \quad m = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Uma vez que conhecemos o polinômio $p_{verd}(t)$ que descreve a curva verdadeira, podemos utilizar a definição dada na [subseção 2.3.3](#) para calcular os coeficientes de Fourier de (4.16). Temos então

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \int_0^1 p(t) \phi_0(t) dt = \int_0^1 p_{verd}(t) dt, \\ \beta_{2m-1} &= 2 \int_0^1 p(t) \phi_{2m-1}(t) dt = 2 \int_0^1 p_{verd}(t) \cos(2\pi mt) dt, \quad m = 1, \dots, M, \\ \beta_{2m} &= 2 \int_0^1 p(t) \phi_{2m}(t) dt = 2 \int_0^1 p_{verd}(t) \sin(2\pi mt) dt, \quad m = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Consideramos como limite superior da soma de Fourier o valor determinado no capítulo anterior, isto é, $M = 13$. O vetor de coeficientes encontrado para a curva verdadeira está descrito na [Tabela 3](#).

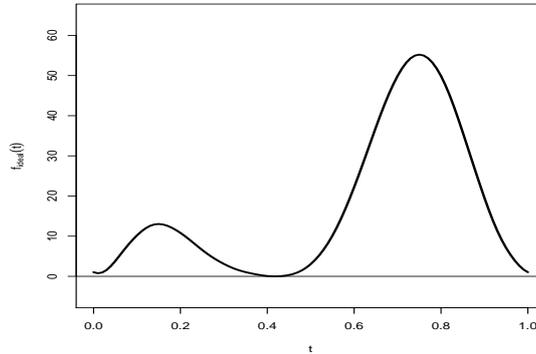
Tabela 3: Vetor de coeficientes da soma de Fourier para a curva verdadeira

Parâmetro	Valor
β_0	17,001469762
β_1	1,315093607
β_2	-20,050694592
β_3	-14,326543303
β_4	3,308053426
β_5	-2,054675402
β_6	4,044731947
β_7	-0,497123726
β_8	-0,140939425
β_9	-0,177816996
β_{10}	-0,278045670
β_{11}	-0,083454885
β_{12}	-0,167453699
β_{13}	-0,047185022
β_{14}	-0,098834742
β_{15}	-0,030285111
β_{16}	-0,064891618
β_{17}	-0,021204924
β_{18}	-0,048367971
β_{19}	-0,015779961
β_{20}	-0,040021106
β_{21}	-0,012269899
β_{22}	-0,035511419
β_{23}	-0,009856971
β_{24}	-0,032832014
β_{25}	-0,008118834
β_{26}	-0,031044349

Fonte: Elaborada pela autora

Chamaremos de β_{verd} o vetor de coeficientes de Fourier para a curva verdadeira, descrito na [Tabela 3](#). Podemos visualizar o gráfico da função f_{verd} utilizando o vetor β_{verd} na [Figura 23](#) e podemos notar que a curva é muito similar com a curva apresentada na [Figura 22](#). Devemos ressaltar que este vetor, apesar de chamarmos de “verdadeiro” (idem curva verdadeira), é obtido utilizando um conjunto de dados específico. Entretanto, o uso desta curva foi apenas para um estudo de simulação em que desejamos uma curva que se pareça com a curva formada pelos ângulos do movimento de flexão-extensão do joelho durante o ciclo da marcha e não teremos assim problemas ou implicações práticas em relação às afirmações feitas nesta abordagem.

Figura 23: Curva verdadeira para o movimento de flexão-extensão do joelho obtida utilizando aproximação por bases de Fourier a partir da Tabela 2



Fonte: Elaborado pela autora

4.2.2 Estrutura do estudo de simulação

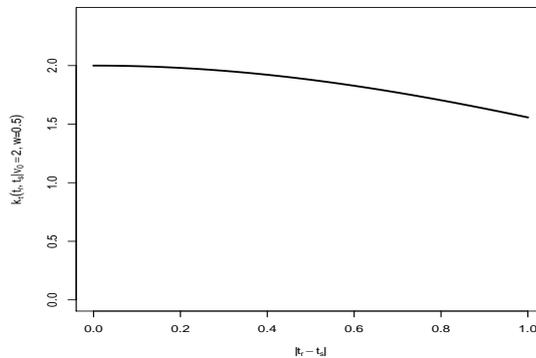
Os dados utilizados no estudo de simulação foram gerados a partir do modelo

$$Y_i(t) = \mu_i(t) + \tau_i(t) + \varepsilon_i(t), \quad 0 \leq t < 1, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.17)$$

em que a função média é dada nos três modelos por $\mu_i(t) = \mathbf{X}(t)\boldsymbol{\beta}_{verd}$, para $i = 1, 2, 3$, com $\boldsymbol{\beta}_{verd} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{26})$ o vetor determinado na seção anterior e $\mathbf{X}(t)$ o vetor de funções bases de Fourier $\mathbf{X}(t) = (1, \cos(2\pi \cdot 1 \cdot t), \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t), \dots, \cos(2\pi \cdot 13 \cdot t), \sin(2\pi \cdot 13 \cdot t))'$.

Para a estrutura de covariância $\tau_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, adotamos um processo Gaussiano com média zero e função covariância $k_\tau(t_r, t_s | \boldsymbol{\theta}_0) = \nu_0 \exp\left(-\frac{1}{2w^2}(t_r - t_s)^2\right)$ em que $\boldsymbol{\theta}_0 = (\nu_0; w)' = (2; 0, 5)'$. Podemos visualizar o comportamento da função de covariância adotada na Figura 24.

Figura 24: Gráfico da função covariância $k_\tau(t_r, t_s | (\nu_0; w)')$ adotada, para $(\nu_0; w)' = (2; 0, 5)'$



Fonte: Elaborado pela autora

Estes valores $(\nu_0; w)' = (2; 0, 5)'$ para os hiperparâmetros foram escolhidos baseados nos valores observados através da matriz de covariância amostral do conjunto de dados da

marcha (mais detalhes podem ser obtidos na [seção B.2](#) do [Apêndice B](#)), uma vez que o objetivo era simular dados com comportamento próximo ao apresentado pelo conjunto de dados reais. Podemos observar que com os hiperparâmetros adotados, os dados simulados apresentam alta covariância entre os diferentes tempos de uma mesma curva.

Por fim, para a estrutura dos erros aleatórios $\varepsilon_i(t)$ adotamos um processo Gaussiano com média zero e função covariância dada por $k_\varepsilon(t_r, t_s | \sigma_i^2) = \sigma_i^2 \delta_{rs}$, para $i = 1, 2, 3$ (δ_{rs} representando a função indicadora: $\delta_{rs} = 1$ se $r = s$ e $\delta_{rs} = 0$ se $r \neq s$). Ou seja, os três modelos diferenciam-se apenas pelo valor do parâmetro σ_i^2 , presente na estrutura de covariância dos erros aleatórios. Os valores adotados para σ_i^2 , $i = 1, 2, 3$ foram $\sigma_1^2 = 0,01$ (Modelo 1), $\sigma_2^2 = 0,1$ (Modelo 2) e $\sigma_3^2 = 1$ (Modelo 3).

Para cada modelo, foram geradas quatro diferentes quantidades J de curvas ($J=1, 20, 35$ e 50). Note que $J = 1$ representa uma situação em que apenas uma curva está disponível no ajuste, ou seja, ausência de réplicas na estimação. Para cada quantidade de curvas e cada modelo, temos uma configuração do estudo de simulação, totalizando assim, 12 cenários. Além disso, para cada modelo foram geradas 100 curvas de teste, que foram utilizadas tanto no estudo de simulação para verificar a qualidade do ajuste do modelo, quanto para analisar a qualidade preditiva de bandas que serão definidas na [seção 6.2](#) do [Capítulo 6](#). Todas as curvas foram geradas em 101 pontos, relacionados aos instantes de tempos igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{101})'$. O algoritmo foi implementado em R ([R Core Team, 2018](#)) e cada cenário foi simulado $N = 500$ vezes.

Cada um dos 12 cenários foi estimado duas vezes em cada iteração: uma utilizando o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano descrito neste capítulo e outra utilizando o modelo de regressão Bayesiano descrito no [Capítulo 3](#). Ou seja, uma estimação considerando o modelo dado por

$$Y(t) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \tau(t) + \varepsilon(t), \quad 0 \leq t < 1, \quad (4.18)$$

em que $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_{26})'$, a função de covariância k_τ é idêntica à utilizada na geração dos dados, ou seja, $k_\tau(t_r, t_s | (\nu_0, w)') = \nu_0 \exp\left(-\frac{1}{2w^2}(t_r - t_s)^2\right)$ em que $\boldsymbol{\theta}_0 = (\nu_0; w)' = (2; 0, 5)'$, considerando todas as demais suposições já descritas nas [seção 4.1](#), além de adotar os seguintes hiperparâmetros das distribuições *a priori*: $\boldsymbol{\mu}_0 = (0, \dots, 0)'$, $\boldsymbol{\Sigma}_0 = 100I_{2M+1}$, $u_0 = 2$ e $v_0 = 0, 25$.

A outra estimação utilizando o modelo dado por

$$Y(t) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon(t), \quad 0 \leq t < 1, \quad (4.19)$$

em que $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_{26})'$, considerando todas as demais suposições já descritas na [seção 3.1](#) do [Capítulo 3](#), além de adotar os seguintes hiperparâmetros das distribuições *a priori* também dados por: $\boldsymbol{\mu}_0 = (0, \dots, 0)'$, $\boldsymbol{\Sigma}_0 = 100I_{2M+1}$, $u_0 = 2$ e $v_0 = 0, 25$.

Em cada iteração, 11000 amostras via MCMC foram geradas e, após *burn-in* de tamanho 1000 e saltos de tamanho 10, foi obtido um total de 1000 amostras *a posteriori*. Para verificar independência na amostra *a posteriori* obtida, analisamos a função de autocorrelação e confirmamos que para todas as variáveis obtivemos amostras independentes. Verificamos também a convergência de todas as variáveis, utilizando para tal objetivo o teste de Gelman e Rubin, já descrito na [subseção 3.2.1](#).

4.2.3 Resultados do estudo de simulação

Para cada cenário do estudo de simulação, foram avaliadas as seguintes estatísticas:

- Estimativas *a posteriori* dos parâmetros $\hat{\beta}$ e $\hat{\sigma}_i^2$ (média *a posteriori* e desvio padrão), que estão apresentadas nas Tabelas 4, 5 e 6 para o modelo com processo Gaussiano e nas Tabelas 9, 10 e 11 para o modelo sem processo Gaussiano.
- A média do erro quadrático ASE (do inglês *average squared error* (YAO; MÜLLER; WANG, 2005)) dos parâmetros, dada para cada parâmetro por

$$ASE(\beta_l) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\hat{\beta}_{l,n} - \beta_l)^2, \quad l = 0, \dots, 26,$$

em que $\hat{\beta}_{l,n}$ e β_l são as l -ésimas coordenadas dos vetores $\hat{\beta}_k$ e β_{verd} respectivamente, e o índice n indica a n -ésima iteração da simulação, e

$$ASE(\sigma_i^2) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\hat{\sigma}_n^2 - \sigma_i^2)^2, \quad i = 1, 2, 3,$$

em que $\hat{\sigma}_n^2$ representa a estimativa (média *a posteriori*) de σ_i^2 na n -ésima iteração da simulação. Os valores obtidos são muito pequenos e, por esta razão, a raiz quadrada dos valores desta medida encontra-se na [Tabela 7](#) para o modelo com processo Gaussiano e na [Tabela 12](#) para o modelo sem processo Gaussiano.

- As distâncias L^1 , L^2 e L^∞ entre as curvas estimadas e a curva verdadeira, dadas respectivamente por (KREYSZIG, 1989)

$$L^1 : \quad \|\hat{f}(t) - f(t)\|_1 = \int_0^1 |\hat{f}(t) - f(t)| dt \quad (4.20)$$

$$L^2 : \quad \|\hat{f}(t) - f(t)\|_2 = \left(\int_0^1 (\hat{f}(t) - f(t))^2 dt \right)^{1/2} \quad (4.21)$$

$$L^\infty : \quad \|\hat{f}(t) - f(t)\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |\hat{f}(t) - f(t)|. \quad (4.22)$$

em que $\hat{f}(t) = \mathbf{X}(t)\hat{\beta}$ e $f(t) = \mathbf{X}(t)\beta_{verd}$, com $t \in [0, 1]$. Na prática, as integrais acima são calculadas por aproximações, as funções são avaliadas em 101 pontos igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{101})'$. Os valores de L^1 , L^2 e L^∞ médios são apresentados na [Tabela 8](#) para o modelo com processo Gaussiano, deste capítulo e na [Tabela 13](#) para o modelo sem processo Gaussiano, do [Capítulo 3](#).

- Para cada configuração de cada modelo foi construída uma banda ponto a ponto, adotando como limites superior e inferior de cada instante os quantis de 2,5% e 97,5% a fim de obter uma banda de 95% de credibilidade. A partir das 100 curvas de teste geradas, calculamos a proporção destas curvas que estavam inteiramente contidas na banda de credibilidade, para o qual adotamos 101 pontos igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$. Neste caso, para que a curva esteja contida na banda, todos os 101 pontos da curva avaliados devem cair dentro dos intervalos que definem a banda. A proporção média das $N=500$ iterações é apresentada na [Tabela 8](#) para o modelo com processo Gaussiano e na [Tabela 13](#) para o modelo sem processo Gaussiano.
- Por último, para flexibilizar a medida anterior, calculamos para cada uma das 100 curvas de teste a proporção de pontos que encontravam-se dentro da banda de credibilidade definida na medida anterior e passamos a analisar a média das proporções de pontos das curvas de teste contidos na banda. A média das $N=500$ proporções médias também é apresentada na [Tabela 8](#) para o modelo com processo Gaussiano e na [Tabela 13](#) para o modelo sem processo Gaussiano.

4.2.3.1 Resultados para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano

Apresentamos primeiramente as estimativas obtidas utilizando o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano, descrito neste capítulo. As Tabelas 4 a 6 trazem as estimativas dos parâmetros β e σ^2 para os Modelos 1 a 3, respectivamente.

Tabela 4: Estimativas dos parâmetros $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{26})'$ e σ^2 obtidas no estudo de simulação, considerando o modelo com processo Gaussiano, para o Modelo 1 ($\sigma_1^2 = 0,01$) adotando diferentes quantidades de curvas (J) no ajuste

Parâmetro	Verdadeiro	J=1		J=20		J=35		J=50	
		média	dp	média	dp	média	dp	média	dp
β_0	17,001	16,726	1,239	16,979	0,279	17,016	0,205	16,995	0,168
β_1	1,315	1,348	0,347	1,315	0,080	1,313	0,059	1,316	0,050
β_2	-20,051	-20,041	0,182	-20,045	0,043	-20,051	0,032	-20,052	0,027
β_3	-14,327	-14,318	0,064	-14,326	0,014	-14,327	0,011	-14,326	0,009
β_4	3,308	3,309	0,026	3,308	0,006	3,308	0,005	3,308	0,004
β_5	-2,055	-2,051	0,030	-2,055	0,007	-2,055	0,005	-2,055	0,004
β_6	4,045	4,044	0,019	4,045	0,004	4,045	0,003	4,045	0,003
β_7	-0,497	-0,495	0,020	-0,497	0,004	-0,497	0,003	-0,497	0,003
β_8	-0,141	-0,141	0,017	-0,141	0,004	-0,141	0,003	-0,141	0,003
β_9	-0,178	-0,175	0,017	-0,178	0,004	-0,178	0,003	-0,178	0,003
β_{10}	-0,278	-0,278	0,017	-0,278	0,004	-0,278	0,003	-0,278	0,002
β_{11}	-0,083	-0,082	0,015	-0,083	0,004	-0,083	0,003	-0,084	0,002
β_{12}	-0,167	-0,167	0,015	-0,168	0,003	-0,168	0,003	-0,168	0,002
β_{13}	-0,047	-0,045	0,015	-0,047	0,003	-0,047	0,002	-0,047	0,002
β_{14}	-0,099	-0,100	0,015	-0,099	0,003	-0,099	0,003	-0,099	0,002
β_{15}	-0,030	-0,029	0,014	-0,030	0,003	-0,030	0,002	-0,030	0,002
β_{16}	-0,065	-0,065	0,014	-0,065	0,003	-0,065	0,003	-0,065	0,002
β_{17}	-0,021	-0,021	0,014	-0,021	0,003	-0,021	0,002	-0,021	0,002
β_{18}	-0,048	-0,048	0,015	-0,048	0,003	-0,049	0,002	-0,048	0,002
β_{19}	-0,016	-0,016	0,015	-0,016	0,003	-0,016	0,002	-0,016	0,002
β_{20}	-0,040	-0,039	0,014	-0,040	0,003	-0,040	0,003	-0,040	0,002
β_{21}	-0,012	-0,012	0,015	-0,012	0,003	-0,012	0,002	-0,012	0,002
β_{22}	-0,036	-0,035	0,015	-0,035	0,003	-0,035	0,002	-0,036	0,002
β_{23}	-0,010	-0,009	0,013	-0,010	0,003	-0,010	0,002	-0,010	0,002
β_{24}	-0,033	-0,032	0,014	-0,033	0,003	-0,033	0,002	-0,033	0,002
β_{25}	-0,008	-0,008	0,014	-0,008	0,003	-0,008	0,002	-0,008	0,002
β_{26}	-0,031	-0,032	0,015	-0,031	0,003	-0,031	0,002	-0,031	0,002
σ^2	0,010	0,016	0,002	0,011	0,001	0,010	0,001	0,010	0,001

Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 5: Estimativas dos parâmetros $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{26})'$ e σ^2 obtidas no estudo de simulação, considerando o modelo com processo Gaussiano, para o Modelo 2 ($\sigma_2^2 = 0, 1$) adotando diferentes quantidades de curvas (J) no ajuste

Parâmetro	Verdadeiro	J=1		J=20		J=35		J=50	
		média	dp	média	dp	média	dp	média	dp
β_0	17,001	16,750	1,213	17,012	0,273	16,981	0,220	17,011	0,177
β_1	1,315	1,341	0,372	1,313	0,078	1,317	0,061	1,312	0,054
β_2	-20,051	-20,053	0,228	-20,051	0,054	-20,051	0,041	-20,052	0,034
β_3	-14,327	-14,323	0,082	-14,327	0,016	-14,326	0,013	-14,327	0,011
β_4	3,308	3,309	0,082	3,308	0,018	3,308	0,013	3,308	0,010
β_5	-2,055	-2,052	0,053	-2,055	0,011	-2,055	0,009	-2,055	0,008
β_6	4,045	4,044	0,059	4,045	0,014	4,044	0,010	4,044	0,008
β_7	-0,497	-0,494	0,049	-0,497	0,011	-0,497	0,008	-0,497	0,007
β_8	-0,141	-0,140	0,058	-0,141	0,012	-0,141	0,009	-0,141	0,007
β_9	-0,178	-0,177	0,047	-0,177	0,010	-0,178	0,008	-0,178	0,007
β_{10}	-0,278	-0,283	0,051	-0,279	0,011	-0,278	0,009	-0,278	0,007
β_{11}	-0,083	-0,082	0,046	-0,083	0,010	-0,084	0,008	-0,083	0,006
β_{12}	-0,167	-0,168	0,049	-0,168	0,010	-0,167	0,008	-0,168	0,007
β_{13}	-0,047	-0,046	0,044	-0,047	0,010	-0,047	0,007	-0,047	0,006
β_{14}	-0,099	-0,099	0,046	-0,098	0,011	-0,099	0,008	-0,099	0,007
β_{15}	-0,030	-0,029	0,046	-0,030	0,010	-0,031	0,007	-0,030	0,006
β_{16}	-0,065	-0,062	0,048	-0,065	0,011	-0,065	0,008	-0,065	0,007
β_{17}	-0,021	-0,017	0,045	-0,021	0,010	-0,021	0,008	-0,022	0,006
β_{18}	-0,048	-0,049	0,046	-0,048	0,011	-0,048	0,008	-0,049	0,006
β_{19}	-0,016	-0,016	0,046	-0,015	0,010	-0,016	0,007	-0,016	0,006
β_{20}	-0,040	-0,039	0,044	-0,040	0,011	-0,040	0,008	-0,040	0,007
β_{21}	-0,012	-0,014	0,043	-0,012	0,010	-0,012	0,008	-0,012	0,006
β_{22}	-0,036	-0,036	0,047	-0,035	0,010	-0,035	0,008	-0,035	0,007
β_{23}	-0,010	-0,010	0,044	-0,009	0,010	-0,010	0,007	-0,010	0,006
β_{24}	-0,033	-0,032	0,045	-0,033	0,011	-0,033	0,007	-0,033	0,007
β_{25}	-0,008	-0,010	0,045	-0,008	0,010	-0,008	0,007	-0,008	0,006
β_{26}	-0,031	-0,031	0,047	-0,03	0,010	-0,030	0,008	-0,032	0,006
σ^2	0,100	0,1004	0,017	0,100	0,003	0,100	0,002	0,100	0,002

Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 6: Estimativas dos parâmetros $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{26})'$ e σ^2 obtidas no estudo de simulação, considerando o modelo com processo Gaussiano, para o Modelo 3 ($\sigma_3^2 = 1$) adotando diferentes quantidades de curvas (J) no ajuste

Parâmetro	Verdadeiro	J=1		J=20		J=35		J=50	
		média	dp	média	dp	média	dp	média	dp
β_0	17,001	16,714	1,263	17,005	0,273	17,003	0,215	17,010	0,175
β_1	1,315	1,323	0,393	1,315	0,084	1,315	0,069	1,311	0,057
β_2	-20,051	-20,025	0,448	-20,047	0,102	-20,044	0,077	-20,052	0,064
β_3	-14,327	-14,331	0,164	-14,326	0,034	-14,327	0,027	-14,328	0,021
β_4	3,308	3,305	0,220	3,310	0,050	3,313	0,038	3,308	0,030
β_5	-2,055	-2,047	0,140	-2,056	0,031	-2,055	0,024	-2,053	0,021
β_6	4,045	4,042	0,177	4,045	0,040	4,047	0,030	4,045	0,025
β_7	-0,497	-0,496	0,143	-0,498	0,030	-0,496	0,023	-0,497	0,020
β_8	-0,141	-0,139	0,167	-0,141	0,036	-0,140	0,027	-0,141	0,021
β_9	-0,178	-0,187	0,144	-0,176	0,033	-0,178	0,025	-0,177	0,020
β_{10}	-0,278	-0,274	0,153	-0,280	0,035	-0,277	0,026	-0,279	0,023
β_{11}	-0,083	-0,087	0,137	-0,081	0,032	-0,085	0,023	-0,081	0,018
β_{12}	-0,167	-0,162	0,151	-0,166	0,034	-0,166	0,025	-0,167	0,021
β_{13}	-0,047	-0,061	0,137	-0,045	0,031	-0,048	0,023	-0,049	0,020
β_{14}	-0,099	-0,092	0,147	-0,098	0,032	-0,098	0,025	-0,099	0,021
β_{15}	-0,030	-0,033	0,138	-0,030	0,031	-0,031	0,023	-0,031	0,020
β_{16}	-0,065	-0,065	0,141	-0,064	0,033	-0,063	0,025	-0,066	0,021
β_{17}	-0,021	-0,020	0,137	-0,022	0,030	-0,022	0,025	-0,023	0,021
β_{18}	-0,048	-0,050	0,134	-0,048	0,030	-0,050	0,024	-0,048	0,019
β_{19}	-0,016	-0,013	0,146	-0,014	0,031	-0,015	0,023	-0,015	0,020
β_{20}	-0,040	-0,025	0,138	-0,040	0,033	-0,039	0,024	-0,038	0,021
β_{21}	-0,012	-0,012	0,137	-0,012	0,029	-0,012	0,024	-0,011	0,019
β_{22}	-0,036	-0,032	0,149	-0,037	0,033	-0,035	0,024	-0,035	0,020
β_{23}	-0,010	-0,003	0,146	-0,008	0,033	-0,009	0,024	-0,011	0,020
β_{24}	-0,033	-0,041	0,142	-0,032	0,033	-0,034	0,024	-0,032	0,020
β_{25}	-0,008	-0,012	0,138	-0,009	0,032	-0,007	0,023	-0,008	0,020
β_{26}	-0,031	-0,028	0,142	-0,030	0,032	-0,029	0,024	-0,032	0,020
σ^2	1,000	0,942	0,159	1,000	0,033	0,998	0,024	1,001	0,020

Fonte: Elaborada pela autora

Podemos notar que com o aumento das quantidades de curvas adotadas no ajuste do modelo, a média das estimativas dos parâmetros se aproximam do verdadeiro valor do parâmetro e o valor do desvio padrão decresce. Observamos também que quando adotamos apenas uma curva para o ajuste do modelo, o desvio padrão das estimativas é pelo menos 4 vezes o valor do desvio padrão de quando adotamos 20 curvas. Além disso, vale destacar que o aumento do valor do parâmetro σ^2 aparentemente não afetou as estimativas dos demais parâmetros.

A fim de completar a avaliação dos resultados das Tabelas 4 a 6, a medida ASE foi calculada e os valores obtidos foram pequenos. A raiz quadrada destes valores está

apresentada na [Tabela 7](#).

Tabela 7: Valor de \sqrt{ASE} para os parâmetros estimados no estudo de simulação, adotando o modelo com processo Gaussiano, considerando para cada modelo diferentes quantidades de curvas (J) no ajuste

	Modelo 1 ($\sigma_1^2 = 0,01$)				Modelo 2 ($\sigma_2^2 = 0,1$)				Modelo 3 ($\sigma_3^2 = 1$)			
	J=1	J=20	J=35	J=50	J=1	J=20	J=35	J=50	J=1	J=20	J=35	J=50
β_0	1,2679	0,2800	0,2057	0,1680	1,2371	0,2733	0,2093	0,1775	1,2943	0,2729	0,2143	0,1750
β_1	0,3482	0,0798	0,0591	0,0500	0,3728	0,0779	0,0628	0,0542	0,3928	0,0835	0,0689	0,0573
β_2	0,1816	0,0431	0,0323	0,0267	0,2273	0,0539	0,0403	0,0343	0,4485	0,1021	0,0769	0,0638
β_3	0,0648	0,0142	0,0108	0,0087	0,0819	0,0163	0,0133	0,0113	0,1640	0,0337	0,0273	0,0214
β_4	0,0261	0,0061	0,0045	0,0039	0,0818	0,0181	0,0128	0,0104	0,2201	0,0495	0,0383	0,0296
β_5	0,0307	0,0069	0,0051	0,0043	0,0525	0,0111	0,0088	0,0076	0,1396	0,0311	0,0238	0,0206
β_6	0,0189	0,0045	0,0031	0,0026	0,0590	0,0137	0,0102	0,0083	0,1766	0,0399	0,0298	0,0252
β_7	0,0199	0,0045	0,0034	0,0029	0,0488	0,0107	0,0077	0,0069	0,1432	0,0304	0,0228	0,0196
β_8	0,0167	0,0038	0,0029	0,0026	0,0575	0,0116	0,0087	0,0074	0,1667	0,0357	0,0268	0,0212
β_9	0,0172	0,0037	0,0028	0,0025	0,0468	0,0101	0,0080	0,0066	0,1442	0,0329	0,0245	0,0199
β_{10}	0,0165	0,0036	0,0027	0,0022	0,0508	0,0112	0,0083	0,0069	0,1530	0,0348	0,0257	0,0225
β_{11}	0,0154	0,0036	0,0027	0,0022	0,0464	0,0101	0,0078	0,0060	0,1372	0,0317	0,0229	0,0186
β_{12}	0,0149	0,0034	0,0026	0,0022	0,0494	0,0103	0,0080	0,0069	0,1514	0,0335	0,0249	0,0213
β_{13}	0,0154	0,0034	0,0025	0,0021	0,0435	0,0103	0,0075	0,0063	0,1376	0,0309	0,0232	0,0206
β_{14}	0,0154	0,0034	0,0026	0,0021	0,0462	0,0106	0,0082	0,0066	0,1471	0,0323	0,0247	0,0215
β_{15}	0,0138	0,0032	0,0024	0,0020	0,0459	0,0101	0,0077	0,0065	0,1380	0,0306	0,0231	0,0199
β_{16}	0,0142	0,0032	0,0025	0,0021	0,0482	0,0108	0,0079	0,0067	0,1409	0,0326	0,0247	0,0210
β_{17}	0,0142	0,0032	0,0024	0,0021	0,0447	0,0097	0,0080	0,0062	0,1371	0,0300	0,0249	0,0215
β_{18}	0,0154	0,0034	0,0024	0,0022	0,0455	0,0111	0,0080	0,0063	0,1338	0,0303	0,0239	0,0193
β_{19}	0,0151	0,0033	0,0024	0,0020	0,0457	0,0096	0,0072	0,0064	0,1455	0,0315	0,0234	0,0199
β_{20}	0,0141	0,0034	0,0026	0,0021	0,0439	0,0105	0,0078	0,0065	0,1386	0,0328	0,0236	0,0214
β_{21}	0,0148	0,0033	0,0024	0,0020	0,0428	0,0102	0,0077	0,0061	0,1367	0,0290	0,0239	0,0194
β_{22}	0,0149	0,0032	0,0023	0,0020	0,0466	0,0100	0,0080	0,0066	0,1488	0,0331	0,0241	0,0204
β_{23}	0,0133	0,0032	0,0024	0,0020	0,0436	0,0099	0,0073	0,0063	0,1458	0,0327	0,0243	0,0201
β_{24}	0,0136	0,0031	0,0025	0,0021	0,0452	0,0105	0,0079	0,0068	0,1417	0,0327	0,0244	0,0203
β_{25}	0,0139	0,0032	0,0024	0,0019	0,0447	0,0104	0,0075	0,0060	0,1382	0,0321	0,0234	0,0203
β_{26}	0,0147	0,0033	0,0024	0,0021	0,0469	0,0104	0,0074	0,0065	0,1416	0,0321	0,0237	0,0200
σ^2	0,0066	0,0005	0,0003	0,0003	0,0164	0,0033	0,0024	0,0020	0,1690	0,0330	0,0241	0,0196

Fonte: Elaborada pela autora

Podemos notar que a medida ASE diminui conforme aumenta a quantidade de curvas disponível na amostra, principalmente quando se compara o cenário em que apenas uma curva está disponível ($J=1$) com os demais cenários, o que indica que utilizar mais de uma curva para estimação traz benefícios nos resultados.

Observamos, de uma forma geral, que com o aumento do valor do parâmetro σ^2 , o valor de \sqrt{ASE} também sofre aumento para os demais parâmetros, ou seja, quanto maior a variabilidade nos dados observados, maior será o valor da \sqrt{ASE} para os coeficientes da soma de Fourier.

A avaliação das estimativas dos parâmetros também pode ser interpretada quando consideramos o aspecto funcional das estimativas, ou seja, reconstruímos as curvas obtidas com essas estimativas. E, para medir quantitativamente a qualidade do ajuste do modelo aos dados gerados (utilizando para tal finalidade a amostra de teste), podemos considerar os resultados apresentados na [Tabela 8](#), cujas medidas foram descritas no início da seção.

Tabela 8: Resultado do estudo de simulação para verificar qualidade do ajuste, adotando o modelo com processo Gaussiano, considerando diferentes quantidades de curvas (J) no ajuste, para cada um dos três modelos

Modelo 1 ($\sigma_1^2 = 0,01$)				
	J=1	J=20	J=35	J=50
L^1	1,021	0,226	0,168	0,137
L^2	1,061	0,235	0,175	0,143
L^∞	1,400	0,313	0,233	0,192
Prop. curvas inteiram. contidas	0,874	0,880	0,890	0,896
Prop. média de pontos contidos	0,928	0,939	0,949	0,948
Modelo 2 ($\sigma_2^2 = 0,1$)				
	J=1	J=20	J=35	J=50
L^1	1,027	0,229	0,173	0,148
L^2	1,083	0,241	0,183	0,156
L^∞	1,607	0,360	0,273	0,232
Prop. curvas inteiram. contidas	0,860	0,860	0,848	0,850
Prop. média de pontos contidos	0,949	0,957	0,947	0,947
Modelo 3 ($\sigma_3^2 = 1$)				
	J=1	J=20	J=35	J=50
L^1	1,170	0,249	0,192	0,158
L^2	1,303	0,278	0,215	0,178
L^∞	2,447	0,531	0,409	0,339
Prop. curvas inteiram. contidas	0,652	0,702	0,706	0,690
Prop. média de pontos contidos	0,941	0,955	0,940	0,947

Fonte: Elaborada pela autora

Em geral, para valores pequenos de σ_i^2 ($\sigma_1^2 = 0,01$ e $\sigma_2^2 = 0,1$), os ajustes foram melhores, o que é um resultado esperado, pois quanto menor a variabilidade existente entre as curvas utilizadas para ajustar o modelo, melhor devem ser as estimativas *a posteriori*. Além disso, podemos notar uma evidente melhora nos valores das métricas L^1 , L^2 e L^∞ quando se tem mais que uma curva para o ajuste, o que reforça o ganho que se tem ao analisarmos réplicas de curvas quando trabalhamos com dados funcionais. Para a proporção de curvas inteiramente contidas nas bandas preditivas ponto-a-ponto, os valores não foram muito altos, e piorando com o aumento da variabilidade dos dados, mas isso se deve à sensibilidade da medida, uma vez que basta um ponto não estar contido na banda para que a respectiva curva seja considerada como não contida na banda, fato que é confirmado pela proporção média de pontos contidos, cujos valores ficaram próximos da probabilidade nominal de 0,95, apresentando, assim, um resultado satisfatório.

4.2.3.2 Resultados para o modelo de regressão Bayesiano - comparação de modelos

Com o objetivo de comparar o modelo utilizado no [Capítulo 3](#) com o modelo utilizando processo Gaussiano proposto neste capítulo, repetimos o estudo de simulação, adotando os mesmos dados simulados, mesmos cenários, alterando somente o modelo utilizado para a estimação, ou seja, o modelo sem a estrutura adicional de covariância entre os tempos de uma curva. As estimativas dos parâmetros podem ser visualizadas nas Tabelas [9](#), [10](#) e [11](#).

Tabela 9: Estimativas dos parâmetros $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{26})'$ e σ^2 obtidas no estudo de simulação, considerando o modelo sem processo Gaussiano, para o Modelo 1 ($\sigma_1^2 = 0,01$) adotando diferentes quantidades de curvas (J) no ajuste

Parâmetro	Verdadeiro	J=1		J=20		J=35		J=50	
		média	dp	média	dp	média	dp	média	dp
β_0	17,001	16,939	1,296	17,008	0,264	17,014	0,209	17,000	0,167
β_1	1,315	1,324	0,370	1,319	0,081	1,310	0,063	1,316	0,048
β_2	-20,051	-20,051	0,770	-20,043	0,166	-20,044	0,126	-20,053	0,107
β_3	-14,327	-14,324	0,067	-14,326	0,015	-14,327	0,012	-14,327	0,009
β_4	3,308	3,314	0,323	3,310	0,068	3,311	0,051	3,307	0,044
β_5	-2,055	-2,054	0,030	-2,054	0,007	-2,055	0,006	-2,055	0,004
β_6	4,045	4,048	0,212	4,046	0,045	4,046	0,034	4,044	0,029
β_7	-0,497	-0,497	0,020	-0,497	0,005	-0,497	0,004	-0,497	0,003
β_8	-0,141	-0,139	0,157	-0,140	0,033	-0,140	0,025	-0,141	0,021
β_9	-0,178	-0,178	0,017	-0,178	0,004	-0,178	0,003	-0,178	0,003
β_{10}	-0,278	-0,275	0,125	-0,278	0,026	-0,277	0,020	-0,278	0,017
β_{11}	-0,083	-0,082	0,015	-0,083	0,004	-0,084	0,003	-0,083	0,002
β_{12}	-0,167	-0,165	0,104	-0,167	0,022	-0,166	0,016	-0,168	0,014
β_{13}	-0,047	-0,046	0,015	-0,047	0,004	-0,047	0,003	-0,047	0,002
β_{14}	-0,099	-0,096	0,089	-0,098	0,019	-0,098	0,014	-0,099	0,012
β_{15}	-0,030	-0,030	0,014	-0,030	0,003	-0,030	0,003	-0,030	0,002
β_{16}	-0,065	-0,063	0,077	-0,065	0,016	-0,064	0,012	-0,065	0,011
β_{17}	-0,021	-0,021	0,015	-0,021	0,004	-0,021	0,003	-0,021	0,002
β_{18}	-0,048	-0,049	0,070	-0,048	0,014	-0,048	0,011	-0,048	0,009
β_{19}	-0,016	-0,015	0,014	-0,015	0,003	-0,016	0,003	-0,016	0,002
β_{20}	-0,040	-0,039	0,063	-0,040	0,013	-0,040	0,010	-0,040	0,009
β_{21}	-0,012	-0,013	0,014	-0,013	0,003	-0,012	0,003	-0,012	0,002
β_{22}	-0,036	-0,035	0,056	-0,035	0,012	-0,035	0,009	-0,035	0,008
β_{23}	-0,010	-0,010	0,015	-0,010	0,003	-0,010	0,003	-0,010	0,002
β_{24}	-0,033	-0,031	0,051	-0,033	0,011	-0,032	0,008	-0,033	0,007
β_{25}	-0,008	-0,008	0,015	-0,008	0,003	-0,008	0,003	-0,008	0,002
β_{26}	-0,031	-0,031	0,048	-0,031	0,010	-0,031	0,008	-0,031	0,007
σ^2	0,010	0,050	0,048	1,926	0,473	1,985	0,363	1,959	0,295

Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 10: Estimativas dos parâmetros $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{26})'$ e σ^2 obtidas no estudo de simulação, considerando o modelo sem processo Gaussiano, para o Modelo 2 ($\sigma_2^2 = 0, 1$) adotando diferentes quantidades de curvas (J) no ajuste

Parâmetro	Verdadeiro	J=1		J=20		J=35		J=50	
		média	dp	média	dp	média	dp	média	dp
β_0	17,001	16,935	1,294	17,008	0,265	17,014	0,209	17,000	0,167
β_1	1,315	1,324	0,372	1,319	0,081	1,310	0,063	1,316	0,049
β_2	-20,051	-20,051	0,771	-20,043	0,166	-20,044	0,126	-20,053	0,107
β_3	-14,327	-14,323	0,079	-14,326	0,017	-14,327	0,014	-14,327	0,010
β_4	3,308	3,315	0,325	3,310	0,069	3,311	0,051	3,308	0,045
β_5	-2,055	-2,055	0,049	-2,054	0,012	-2,054	0,009	-2,055	0,007
β_6	4,045	4,048	0,217	4,047	0,046	4,046	0,035	4,045	0,029
β_7	-0,497	-0,496	0,044	-0,497	0,011	-0,497	0,008	-0,497	0,007
β_8	-0,141	-0,140	0,164	-0,140	0,035	-0,140	0,026	-0,141	0,022
β_9	-0,178	-0,179	0,046	-0,178	0,011	-0,177	0,008	-0,178	0,006
β_{10}	-0,278	-0,277	0,131	-0,278	0,028	-0,277	0,020	-0,278	0,018
β_{11}	-0,083	-0,084	0,046	-0,083	0,010	-0,084	0,008	-0,084	0,006
β_{12}	-0,167	-0,164	0,112	-0,167	0,025	-0,166	0,018	-0,168	0,016
β_{13}	-0,047	-0,049	0,044	-0,048	0,010	-0,048	0,007	-0,047	0,006
β_{14}	-0,099	-0,093	0,097	-0,099	0,021	-0,097	0,016	-0,099	0,014
β_{15}	-0,030	-0,025	0,046	-0,030	0,010	-0,030	0,008	-0,030	0,007
β_{16}	-0,065	-0,065	0,087	-0,064	0,019	-0,064	0,015	-0,065	0,012
β_{17}	-0,021	-0,019	0,046	-0,020	0,010	-0,022	0,008	-0,021	0,007
β_{18}	-0,048	-0,051	0,079	-0,048	0,018	-0,048	0,013	-0,049	0,011
β_{19}	-0,016	-0,017	0,044	-0,016	0,010	-0,015	0,008	-0,016	0,007
β_{20}	-0,040	-0,039	0,076	-0,040	0,016	-0,039	0,012	-0,040	0,010
β_{21}	-0,012	-0,012	0,046	-0,012	0,011	-0,012	0,008	-0,012	0,007
β_{22}	-0,036	-0,035	0,069	-0,036	0,015	-0,035	0,011	-0,036	0,010
β_{23}	-0,010	-0,008	0,044	-0,010	0,010	-0,010	0,007	-0,010	0,007
β_{24}	-0,033	-0,033	0,074	-0,032	0,015	-0,033	0,011	-0,033	0,009
β_{25}	-0,008	-0,008	0,045	-0,008	0,010	-0,008	0,008	-0,008	0,006
β_{26}	-0,031	-0,029	0,064	-0,031	0,013	-0,031	0,010	-0,031	0,009
σ^2	0,100	0,136	0,052	2,016	0,473	2,075	0,363	2,049	0,295

Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 11: Estimativas dos parâmetros $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{26})'$ e σ^2 obtidas no estudo de simulação, considerando o modelo sem processo Gaussiano, para o Modelo 3 ($\sigma_3^2 = 1$) adotando diferentes quantidades de curvas (J) no ajuste

Parâmetro	Verdadeiro	J=1		J=20		J=35		J=50	
		média	dp	média	dp	média	dp	média	dp
β_0	17,001	16,933	1,298	17,008	0,265	17,018	0,209	17,000	0,167
β_1	1,315	1,323	0,394	1,319	0,086	1,309	0,066	1,316	0,052
β_2	-20,051	-20,050	0,779	-20,043	0,169	-20,043	0,128	-20,053	0,109
β_3	-14,327	-14,318	0,153	-14,326	0,033	-14,328	0,026	-14,328	0,021
β_4	3,308	3,311	0,360	3,310	0,074	3,312	0,055	3,307	0,049
β_5	-2,055	-2,059	0,142	-2,052	0,032	-2,053	0,025	-2,054	0,021
β_6	4,045	4,049	0,262	4,048	0,056	4,046	0,042	4,045	0,034
β_7	-0,497	-0,498	0,133	-0,498	0,032	-0,498	0,024	-0,497	0,020
β_8	-0,141	-0,138	0,210	-0,142	0,047	-0,140	0,034	-0,141	0,029
β_9	-0,178	-0,176	0,140	-0,176	0,032	-0,176	0,024	-0,177	0,020
β_{10}	-0,278	-0,272	0,190	-0,279	0,041	-0,276	0,031	-0,279	0,027
β_{11}	-0,083	-0,089	0,140	-0,083	0,030	-0,083	0,024	-0,083	0,020
β_{12}	-0,167	-0,164	0,179	-0,169	0,038	-0,167	0,029	-0,167	0,025
β_{13}	-0,047	-0,034	0,147	-0,049	0,031	-0,047	0,023	-0,047	0,021
β_{14}	-0,099	-0,091	0,161	-0,100	0,036	-0,096	0,029	-0,099	0,024
β_{15}	-0,030	-0,029	0,140	-0,031	0,031	-0,030	0,024	-0,030	0,021
β_{16}	-0,065	-0,057	0,166	-0,064	0,036	-0,065	0,027	-0,064	0,022
β_{17}	-0,021	-0,023	0,145	-0,020	0,033	-0,024	0,024	-0,021	0,019
β_{18}	-0,048	-0,041	0,157	-0,050	0,035	-0,047	0,027	-0,049	0,021
β_{19}	-0,016	-0,010	0,134	-0,015	0,032	-0,017	0,023	-0,016	0,020
β_{20}	-0,040	-0,043	0,152	-0,043	0,033	-0,041	0,025	-0,042	0,022
β_{21}	-0,012	-0,015	0,138	-0,014	0,034	-0,012	0,023	-0,012	0,019
β_{22}	-0,036	-0,033	0,147	-0,033	0,034	-0,034	0,026	-0,035	0,020
β_{23}	-0,010	-0,001	0,146	-0,010	0,031	-0,010	0,024	-0,011	0,020
β_{24}	-0,033	-0,029	0,148	-0,033	0,032	-0,033	0,025	-0,033	0,022
β_{25}	-0,008	0,004	0,134	-0,008	0,032	-0,007	0,025	-0,008	0,021
β_{26}	-0,031	-0,029	0,145	-0,029	0,034	-0,030	0,024	-0,030	0,021
σ^2	1,000	0,999	0,169	2,914	0,475	2,971	0,366	2,949	0,296

Fonte: Elaborada pela autora

Observamos que com o aumento da quantidade de curvas adotadas no processo de estimação, a estimativa média dos parâmetros se aproxima do verdadeiro valor e o desvio padrão decresce. Podemos notar ainda que as estimativas de σ^2 não ficaram boas quando o verdadeiro valor era pequeno, ou seja, nos modelos 1 e 2. Para o modelo 3, no caso em que apenas uma curva estava disponível, o modelo apresentou boas estimativas, entretanto, quando mais curvas estavam disponíveis (J=20, 35, 50), novamente, as estimativas de σ^2 não foram boas. Este é um resultado esperado, pois toda variação dos dados teve que ser captada por σ^2 , uma vez que a estrutura de covariância adicional τ_j não está presente no modelo.

Comparando as Tabelas 4, 5 e 6 com as Tabelas 9, 23 e 24, observamos que as estimativas obtidas para os coeficientes de Fourier são próximas.

A fim de completar a avaliação dos resultados das Tabelas 9, 10 e 11, a medida ASE foi calculada e os valores obtidos foram pequenos. A raiz quadrada destes valores está apresentada na Tabela 12.

Tabela 12: Valor de \sqrt{ASE} para os parâmetros estimados no estudo de simulação, adotando o modelo sem processo Gaussiano, considerando para cada modelo diferentes quantidades de curvas (J) no ajuste

	Modelo 1 ($\sigma_1^2 = 0,01$)				Modelo 2 ($\sigma_2^2 = 0,1$)				Modelo 3 ($\sigma_3^2 = 1$)			
	J=1	J=20	J=35	J=50	J=1	J=20	J=35	J=50	J=1	J=20	J=35	J=50
β_0	1,2958	0,2643	0,2095	0,1666	1,2946	0,2643	0,2095	0,1668	1,2986	0,2651	0,2090	0,1673
β_1	0,3697	0,0808	0,0629	0,0481	0,3713	0,0812	0,0633	0,0485	0,3939	0,0862	0,0666	0,0517
β_2	0,7693	0,1660	0,1261	0,1074	0,7703	0,1663	0,1263	0,1073	0,7780	0,1688	0,1284	0,1087
β_3	0,0674	0,0146	0,0117	0,0086	0,0794	0,0170	0,0136	0,0103	0,1531	0,0331	0,0262	0,0211
β_4	0,3224	0,0682	0,0514	0,0443	0,3248	0,0685	0,0515	0,0448	0,3597	0,0743	0,0552	0,0493
β_5	0,0298	0,0071	0,0056	0,0042	0,0488	0,0119	0,0092	0,0074	0,1420	0,0318	0,0246	0,0206
β_6	0,2114	0,0445	0,0336	0,0288	0,2172	0,0458	0,0345	0,0291	0,2621	0,0557	0,0417	0,0340
β_7	0,0205	0,0048	0,0038	0,0030	0,0444	0,0105	0,0080	0,0066	0,1331	0,0316	0,0241	0,0195
β_8	0,1570	0,0331	0,0250	0,0214	0,1638	0,0346	0,0260	0,0222	0,2094	0,0471	0,0343	0,0292
β_9	0,0173	0,0041	0,0030	0,0026	0,0456	0,0107	0,0077	0,0064	0,1399	0,0316	0,0241	0,0197
β_{10}	0,1249	0,0262	0,0199	0,0171	0,1305	0,0278	0,0204	0,0184	0,1895	0,0413	0,0312	0,0267
β_{11}	0,0154	0,0039	0,0027	0,0025	0,0457	0,0099	0,0079	0,0065	0,1404	0,0301	0,0241	0,0201
β_{12}	0,1035	0,0221	0,0165	0,0144	0,1115	0,0247	0,0181	0,0157	0,1786	0,0384	0,0286	0,0253
β_{13}	0,0150	0,0036	0,0028	0,0023	0,0440	0,0097	0,0074	0,0065	0,1469	0,0312	0,0234	0,0206
β_{14}	0,0885	0,0188	0,0141	0,0122	0,0975	0,0207	0,0165	0,0136	0,1610	0,0357	0,0287	0,0235
β_{15}	0,0145	0,0035	0,0027	0,0022	0,0459	0,0101	0,0077	0,0065	0,1400	0,0306	0,0239	0,0210
β_{16}	0,0766	0,0164	0,0122	0,0106	0,0872	0,0190	0,0146	0,0124	0,1662	0,0356	0,0268	0,0219
β_{17}	0,0153	0,0036	0,0027	0,0023	0,0459	0,0101	0,0076	0,0066	0,1447	0,0327	0,0242	0,0194
β_{18}	0,0697	0,0144	0,0111	0,0095	0,0793	0,0175	0,0130	0,0114	0,1575	0,0346	0,0266	0,0213
β_{19}	0,0140	0,0034	0,0025	0,0022	0,0435	0,0098	0,0077	0,0065	0,1335	0,0323	0,0229	0,0201
β_{20}	0,0625	0,0131	0,0100	0,0085	0,0757	0,0159	0,0121	0,0104	0,1514	0,0330	0,0249	0,0217
β_{21}	0,0141	0,0034	0,0025	0,0022	0,0462	0,0105	0,0077	0,0065	0,1381	0,0336	0,0229	0,0194
β_{22}	0,0563	0,0120	0,0093	0,0077	0,0693	0,0147	0,0109	0,0097	0,1466	0,0344	0,0256	0,0204
β_{23}	0,0150	0,0032	0,0027	0,0023	0,0441	0,0098	0,0074	0,0065	0,1460	0,0312	0,0241	0,0204
β_{24}	0,0509	0,0111	0,0083	0,0071	0,0739	0,0148	0,0108	0,0093	0,1479	0,0319	0,0249	0,0221
β_{25}	0,0151	0,0033	0,0026	0,0023	0,0452	0,0097	0,0076	0,0062	0,1342	0,0318	0,0250	0,0209
β_{26}	0,0479	0,0104	0,0077	0,0067	0,0637	0,0133	0,0104	0,0093	0,1450	0,0336	0,0244	0,0208
σ^2	0,0620	1,9737	2,0084	1,9706	0,0633	1,9736	2,0083	1,9712	0,1688	1,9723	2,0050	1,9717

Fonte: Elaborada pela autora

Para a estimação de $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{26})'$, temos que as estimativas melhoram conforme aumentamos a quantidade de curvas disponíveis, ou seja, o fato de utilizarmos réplicas disponíveis na estimação nos fornece melhores resultados. Entretanto, isto não ocorre na estimação de σ^2 . Além disso, o valor de ASE para σ^2 é muito maior, considerando este modelo, do que ao utilizarmos o modelo com processo Gaussiano, como podemos ver comparando as Tabelas 7 e 12.

Novamente podemos avaliar as estimativas dos parâmetros considerando o aspecto funcional das estimativas, ou seja, reconstruindo as curvas obtidas com essas estimativas. E, para medir quantitativamente a qualidade do ajuste do modelo aos dados gerados

(utilizando para tal finalidade a amostra de teste), podemos considerar os resultados apresentados na [Tabela 13](#), cujas medidas foram descritas no início da seção.

Tabela 13: Resultado do estudo de simulação para verificar qualidade do ajuste, adotando o modelo sem processo Gaussiano, considerando diferentes quantidades de curvas (J) no ajuste, para cada um dos três modelos

Modelo 1 ($\sigma_1^2 = 0,01$)				
	J=1	J=20	J=35	J=50
L^1	1,161	0,238	0,189	0,153
L^2	1,275	0,262	0,207	0,168
L^∞	1,980	0,412	0,319	0,265
Prop. curvas inteiram. contidas	0,000	0,332	0,338	0,308
Prop. média de pontos contidos	0,108	0,708	0,686	0,702
Modelo 2 ($\sigma_2^2 = 0,1$)				
	J=1	J=20	J=35	J=50
L^1	1,166	0,239	0,190	0,154
L^2	1,286	0,265	0,209	0,170
L^∞	2,098	0,439	0,340	0,283
Prop. curvas inteiram. contidas	0,000	0,306	0,298	0,274
Prop. média de pontos contidos	0,195	0,716	0,693	0,710
Modelo 3 ($\sigma_3^2 = 1$)				
	J=1	J=20	J=35	J=50
L^1	1,231	0,255	0,200	0,163
L^2	1,398	0,292	0,228	0,187
L^∞	2,675	0,571	0,441	0,366
Prop. curvas inteiram. contidas	0,000	0,164	0,166	0,140
Prop. média de pontos contidos	0,472	0,767	0,753	0,768

Fonte: Elaborada pela autora

Em geral, as medidas L^1 , L^2 e L^∞ calculadas para o modelo sem processo Gaussiano apresentam valores maiores que os observados para o modelo com processo Gaussiano. A discrepância foi maior para a proporção de curvas inteiramente contidas nas bandas preditivas ponto-a-ponto, que apresentou valores muito baixos, inclusive a proporção média de pontos contidos, cujos valores não ficaram próximos de 0,95, como era esperado.

Podemos concluir através deste estudo de simulação que o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano apresentou um bom ajuste a um conjunto de dados simulados que continha dependência entre os tempos de uma curva. A estimação teve desempenho superior em relação ao modelo de regressão Bayesiano do [Capítulo 3](#).

4.3 Análise dos Dados da Marcha Humana

O modelo proposto também foi aplicado ao conjunto de dados descrito em [subseção 1.2.1](#), que possui observações do ângulo do movimento de flexão-extensão do joelho dos membros inferiores dominante e não dominante de 16 indivíduos. Relembrando, para cada membro inferior do indivíduo foram coletadas 49 passadas e cada passada contém 101 observações igualmente espaçadas. Dividimos a amostra em duas partes: as primeiras 35 curvas ($\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{35}$) compõem a amostra de treinamento e as demais curvas ($\mathbf{Y}_{36}, \dots, \mathbf{Y}_{49}$), a amostra de teste. Assim, nas notações do modelo, temos $I = 16$, $J = 35$ (amostra de treinamento) e $K = 101$, ou seja, $j = 1, \dots, 35$ e $k = 1, \dots, 101$.

As estimativas *a posteriori* dos parâmetros para cada membro inferior foram obtidas utilizando o método de simulação MCMC, a partir das distribuições condicionais completas *a posteriori* $p(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y}, \sigma^2)$ e $p(\sigma^2|\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta})$. Note que $p(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y}, \sigma^2)$ apresenta forma conhecida, logo podemos utilizar o método de amostragem Gibbs ([GEMAN; GEMAN, 1987](#)) e, para $p(\sigma^2|\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta})$, que não possui forma conhecida, utilizamos o algoritmo de Metropolis-Hastings ([HASTINGS, 1970](#)). Para gerar a amostra foram descartadas as 1000 primeiras observações (*burn-in*) e entre cada valor amostrado foram descartadas 10 observações (saltos). A amostra final da distribuição *a posteriori* é de 1000 observações. A implementação do método foi realizada utilizando o software R ([R Core Team, 2018](#)).

Os seguintes valores foram atribuídos aos hiperparâmetros das distribuições *a priori*: $\boldsymbol{\mu}_0 = (0, \dots, 0)'$, $\boldsymbol{\Sigma}_0 = 100I_{2M+1}$, $u_0 = 2$ e $v_0 = 0,25$ (a fim de especificar uma priori pouco informativa). O valor para o limite superior na soma de Fourier adotado foi $M = 13$. Este valor foi estabelecido na [seção 3.2](#) do [Capítulo 4](#) (ver detalhes na [subseção B.1.1](#) do [Apêndice B](#)). Optamos por utilizar o mesmo valor de M no modelo com processo Gaussiano, devido ao custo computacional de se reproduzir o procedimento feito no modelo anterior.

Além disso, para os hiperparâmetros na função covariância $\boldsymbol{\theta}_0 = (\nu_0, w)'$, foram adotados os valores obtidos ao determinarmos a matriz de covariância do modelo $\boldsymbol{\Psi}$ que tem menor distância da matriz de covariância amostral do membro inferior do indivíduo. O valor encontrado para o membro inferior dominante do 1º indivíduo foi $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_0, \sigma^2)' = (\nu_0, w, \sigma^2)' = (1.06486143, 0.1090434, 0.02398815)'$ e para o membro inferior não dominante, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_0, \sigma^2)' = (\nu_0, w, \sigma^2)' = (1.2281627, 0.9954185, 0.020731750)'$. (O valor de σ^2 obtido neste processo foi utilizado como valor inicial na geração da amostra *a posteriori* de $\sigma^2|\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}$). Detalhes e valores dos hiperparâmetros obtidos para os demais indivíduos encontram-se na [seção B.2](#) do [Apêndice B](#).

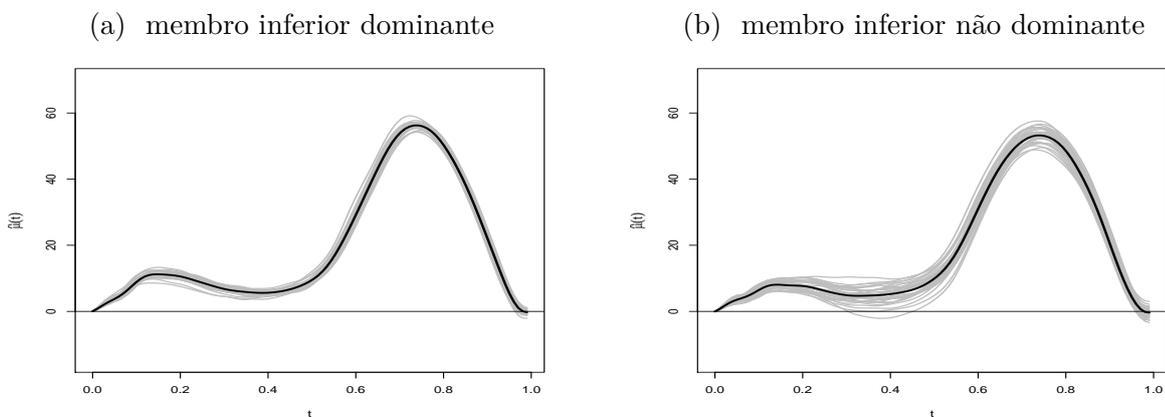
4.3.1 Diagnóstico de convergência

Para verificar independência na amostra *a posteriori* obtida, analisamos a função de autocorrelação e confirmamos que para todas as variáveis obtivemos amostras independentes. Para verificar a convergência, utilizamos análises gráficas e numérica, através do teste de Gelman e Rubin, já descrito na [subseção 3.2.1](#). Para todas as variáveis de todos os indivíduos, $\hat{R} = 1$, o que indica convergência.

4.3.2 Resultados

Para apresentar os resultados obtidos, usamos como exemplo o 1º indivíduo. Na [Figura 25](#) podemos observar a estimativa *a posteriori* da curva média de cada membro inferior do 1º indivíduo, juntamente com as curvas da amostra de treinamento. Os gráficos com as estimativas *a posteriori* das curvas médias para os demais indivíduos encontram-se na [seção C.4 do Apêndice C](#). Notamos que a estimativa *a posteriori* da curva média conseguiu capturar o comportamento da marcha, isso para todos os indivíduos do estudo.

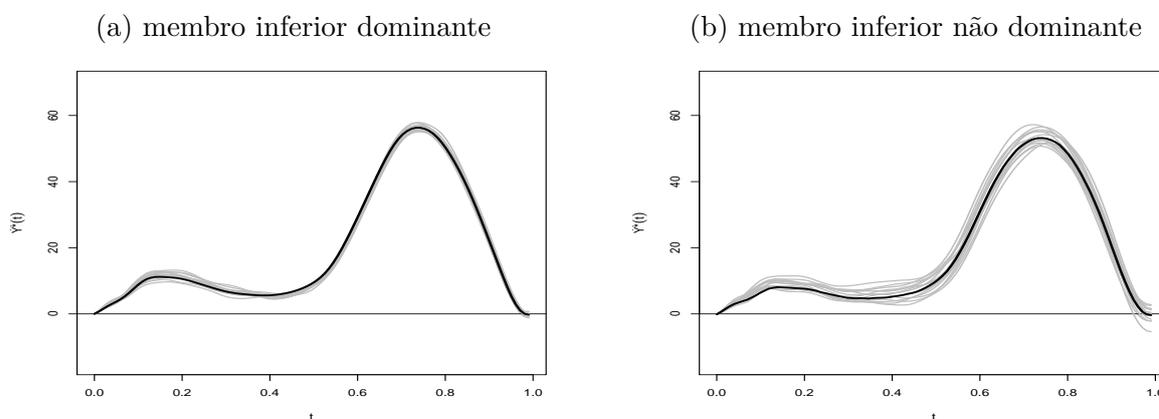
Figura 25: Estimativa *a posteriori* da curva média (em preto) do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano, juntamente com as curvas da amostra de treinamento (em cinza), para o 1º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

A partir da amostra da distribuição *a posteriori* dos parâmetros do modelo, geramos uma amostra da distribuição preditiva *a posteriori*. Na [Figura 26](#) podemos observar a estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* de cada membro inferior do 1º indivíduo, juntamente com as curvas da amostra de teste. Os gráficos com as estimativas da média da distribuição preditiva *a posteriori* para os demais indivíduos encontram-se na [seção C.5 do Apêndice C](#).

Figura 26: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* (em preto) do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano, juntamente com as curvas da amostra de teste (em cinza), para o 1^o indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Comparando o comportamento da estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* com as curvas da amostra de teste, notamos que as curvas do indivíduo 1 são mais semelhantes para o membro inferior dominante, resultado já esperado, pois as curvas do membro inferior não dominante deste indivíduo apresentam maior variabilidade, quando comparado ao membro inferior dominante, mas, em geral, a análise gráfica é um pouco subjetiva, por isso, mais à frente, apresentaremos métricas para comparações.

4.4 Comparação de Modelos

Nosso objetivo nesta seção é comparar o modelo adotado no [Capítulo 3](#) com o modelo descrito neste capítulo, a fim de verificar se de fato houve uma melhora no ajuste dos dados ao considerarmos um processo Gaussiano para modelar a dependência entre as observações de uma passada.

Para comparar os dois modelos, utilizamos o critério de seleção de modelos DIC (ver [seção B.1 do Apêndice B](#)). Na [Tabela 14](#) podemos ver os valores de DIC para os modelos sem e com processo Gaussiano, ou seja, os modelos dos [Capítulos 3 e 4](#), respectivamente, para cada membro inferior de cada indivíduo. Neste critério de seleção de modelos, menor valor de DIC, melhor ajuste ao conjunto de dados. Podemos notar que para ambos os membros inferiores de todos os indivíduos, o valor foi menor para o modelo com processo Gaussiano, o que demonstra uma melhora no ajuste do modelo proposto neste capítulo aos dados em relação ao modelo do capítulo anterior, que supunha independência entre as observações de uma passada.

Tabela 14: Valor de DIC para os modelos de regressão Bayesianos sem (Capítulo 3) e com (deste capítulo) processo Gaussiano, para os membros inferiores dominante e não dominante de cada indivíduo (a sigla PG representa “processo Gaussiano”)

DIC	Dominante		Não Dominante	
	Indivíduo	Sem PG	Com PG	Sem PG
1	10721,68	938,69	14969,025	10612,58
2	12354,77	1410,97	9652,886	7749,47
3	13173,61	738,48	12669,700	8923,39
4	12699,82	2826,35	11450,090	8602,00
5	13267,85	2529,68	13026,795	2715,43
6	13782,67	1261,09	12065,078	8996,35
7	13960,70	3650,90	15082,525	10593,10
8	13233,58	2266,20	12276,613	8973,13
9	13508,56	3430,13	13174,068	9878,92
10	13415,88	3452,25	13690,587	5040,93
11	13331,31	1508,91	15387,722	11600,34
12	12808,82	2644,89	12436,781	8878,34
13	15364,24	5206,36	18892,662	16553,44
14	15380,44	3714,67	15126,818	10734,74
15	15941,33	2746,52	13608,242	11548,36
16	14620,80	11331,75	15346,077	11796,27

Fonte: Elaborada pela autora

Para comparar a qualidade preditiva dos dois modelos, utilizamos a medida L^2 para calcular distância entre as curvas da amostra de teste e as curvas da amostra preditiva *a posteriori* obtida. Mais detalhadamente, foi realizado o seguinte procedimento:

- Para cada curva da amostra de teste $\mathbf{Y}_{36}, \dots, \mathbf{Y}_{49}$, conforme definido na análise dos dados da marcha, calculamos a distância L^2 com cada amostra da distribuição preditiva *a posteriori* disponível, $\mathbf{Y}_1^*, \dots, \mathbf{Y}_{1000}^*$.
- Em seguida, para cada curva da amostra de teste, calculamos o valor médio da distância L^2 .
- Por fim, calcula-se a média das 14 medidas L^2 médias obtidas.

Ou seja, calculamos

$$\widehat{L^2} = \frac{1}{14} \sum_{j=36}^{49} \left(\sum_{i=1}^{1000} \frac{\|\mathbf{Y}_i^* - \mathbf{Y}_j\|_2}{1000} \right).$$

Na prática, a medida acima é calculada por aproximações, uma vez que a amostra de preditivas e os dados da amostra de teste são avaliadas em 101 pontos igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{101})'$.

O procedimento foi feito para as curvas obtidas pelo modelo do [Capítulo 3](#), novamente referido como “Sem PG” (sem processo Gaussiano) e para as curvas do modelo descrito neste capítulo, referido como “Com PG” (com processo Gaussiano). Os valores da medida descrita estão apresentados na [Tabela 15](#).

Tabela 15: Valor médio da distância L^2 entre as curvas de teste e a amostra preditiva para os modelos sem ([Capítulo 3](#)) e com (deste capítulo) processo Gaussiano, para os membros inferiores dominante e não dominante de cada indivíduo

Indivíduo	Dominante		Não Dominante	
	Sem PG	Com PG	Sem PG	Com PG
1	1,417	1,364	2,936	2,543
2	2,237	2,226	1,769	1,731
3	2,082	1,673	2,080	1,897
4	1,890	1,542	1,741	1,669
5	2,405	2,035	1,990	1,599
6	2,333	2,052	1,808	1,693
7	2,744	2,310	2,485	1,965
8	2,126	1,725	2,127	1,950
9	2,251	2,249	2,156	1,918
10	2,255	1,851	2,613	2,234
11	2,275	1,856	3,195	2,754
12	2,086	1,756	1,821	1,652
13	2,915	2,411	4,557	4,081
14	2,836	2,103	3,648	3,268
15	3,395	2,779	2,306	2,155
16	2,723	2,512	2,789	2,336

Fonte: Elaborada pela autora

Podemos notar que para ambos os membros inferiores de todos os indivíduos, a distância L^2 média foi menor quando utilizamos o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano, descrito neste capítulo.

Com estes dois procedimentos, podemos dizer que as estimativas para a curva dos ângulos no movimento de flexão-extensão do joelho apresentaram melhores resultados quando utilizamos o modelo com a estrutura adicional de processo Gaussiano para modelar a dependência existente entre as observações de uma curva.

4.5 Diferenças Bilaterais

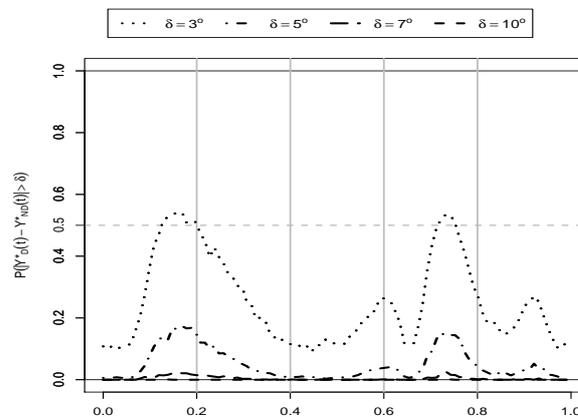
Um dos objetivos deste trabalho é estudar as diferenças bilaterais, ou seja, as diferenças entre os ângulos formados pelos membros inferiores dominante e não dominante do indivíduo, durante o movimento de flexão-extensão do joelho. Com o interesse em captar o padrão das diferenças bilaterais em cada instante do ciclo, podemos avaliar a probabilidade *a posteriori* das curvas do indivíduo diferirem bilateralmente uma certa quantidade, dada em graus. Para isto, calculamos para cada instante de tempo $t \in [0, 1]$

$$P(|Y_D^*(t) - Y_{ND}^*(t)| > \delta | \mathcal{D}), \quad t \in [0, 1], \quad (4.23)$$

em que δ é uma dada quantidade em graus fixada, \mathcal{D} representa o conjunto de dados e $Y_D^*(t)$ e $Y_{ND}^*(t)$ representam a distribuição preditiva *a posteriori* para os membros inferiores dominante e não dominante, respectivamente. Devemos observar que δ pode ser interpretado como uma quantidade “permissível” de diferença de graus entre os membros inferiores do indivíduo. Esta quantidade deve ser adotada pelo profissional da fisioterapia e pode variar dependendo da opinião do profissional consultado. Por esse motivo, faremos um estudo com alguns valores e as conclusões dependerão do valor de δ escolhido.

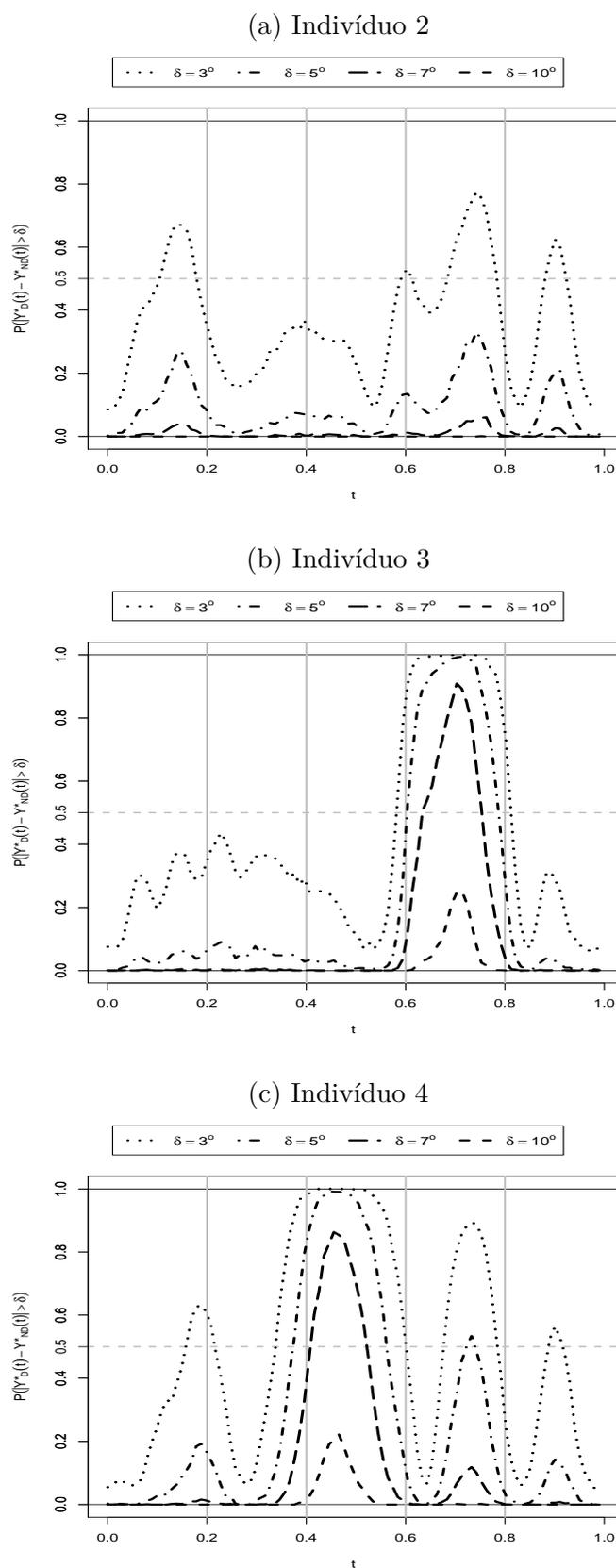
Uma aproximação para a probabilidade definida na [Equação 4.23](#) pode ser obtida considerando uma amostra da distribuição preditiva *a posteriori* do indivíduo, a partir da qual, para cada instante $t \in [0, 1]$, calculamos a proporção de distâncias absolutas (entre as respectivas curvas dos membros inferiores dominante e não dominante) maiores que δ fixado. As Figuras 27 a 32 trazem os gráficos destas probabilidades para cada um dos indivíduos, considerando alguns valores de δ .

Figura 27: Gráfico com $P(|Y_D^*(t) - Y_{ND}^*(t)| > \delta | \mathcal{D})$ para $\delta = 3^\circ, 5^\circ, 7^\circ, 10^\circ$, para o indivíduo 1



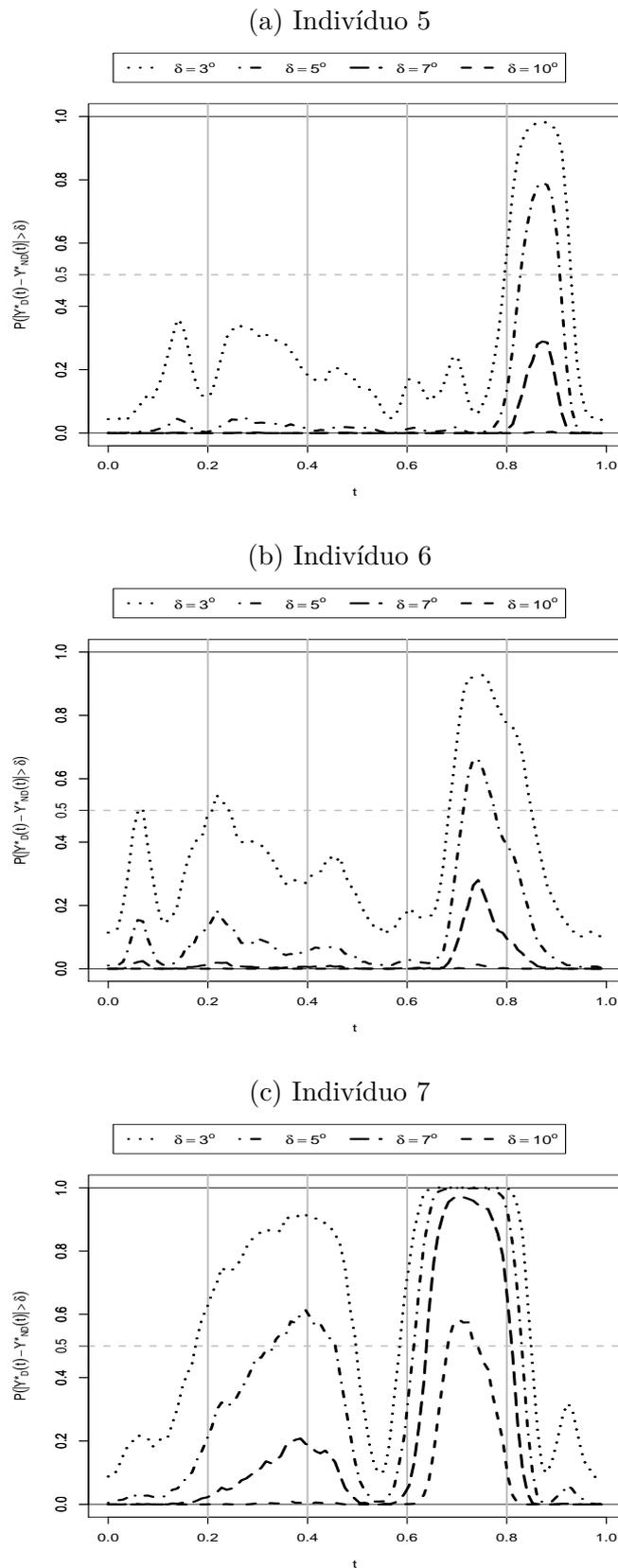
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 28: Gráficos com $P(|Y_D^*(t) - Y_{ND}^*(t)| > \delta | \mathcal{D})$ para $\delta = 3^\circ, 5^\circ, 7^\circ, 10^\circ$, para os indivíduos 2 a 4



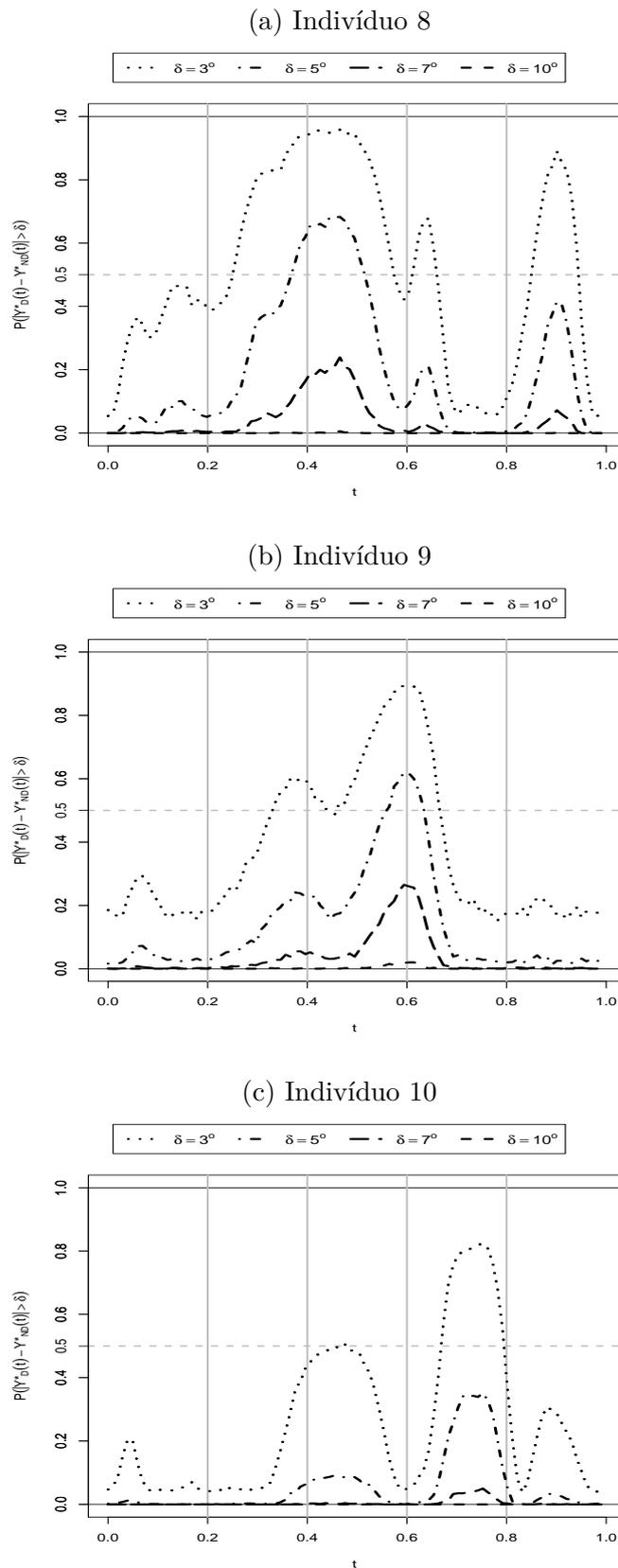
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 29: Gráficos com $P(|Y_D^*(t) - Y_{ND}^*(t)| > \delta | \mathcal{D})$ para $\delta = 3^\circ, 5^\circ, 7^\circ, 10^\circ$, para os indivíduos 5 a 7



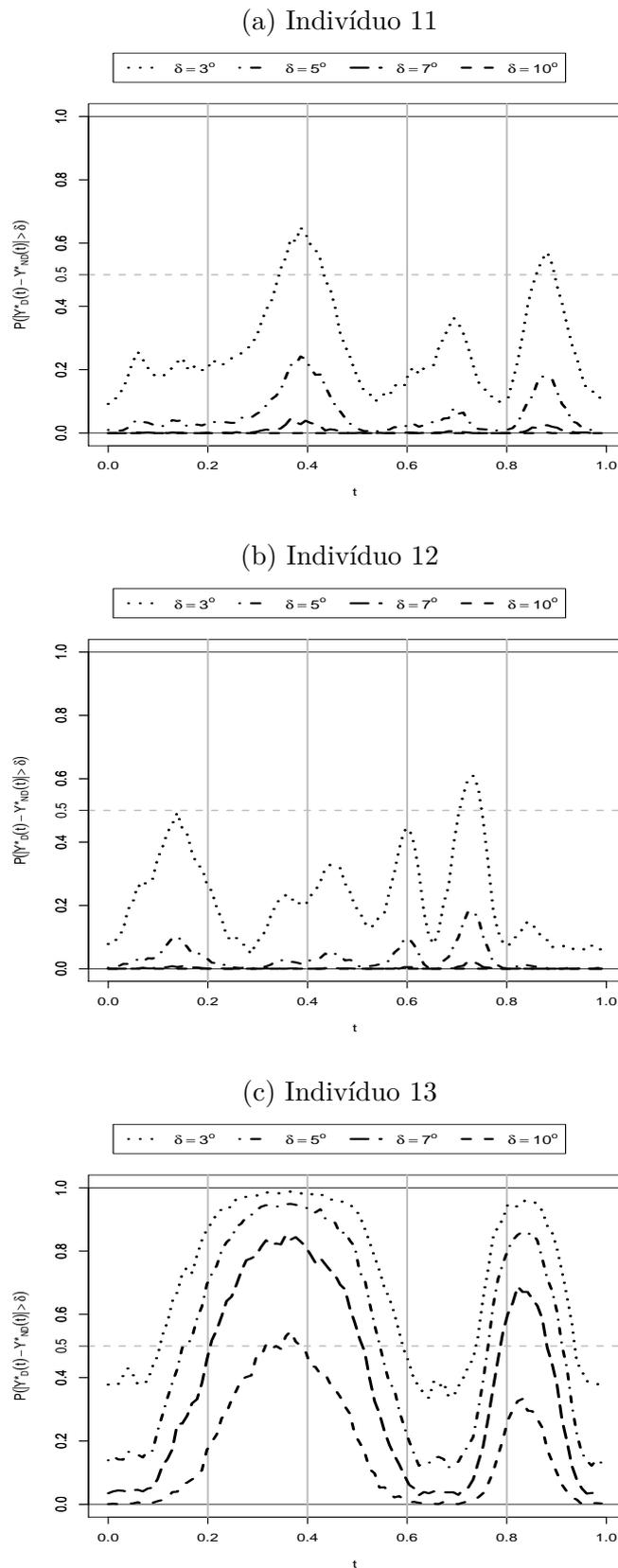
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 30: Gráficos com $P(|Y_D^*(t) - Y_{ND}^*(t)| > \delta | \mathcal{D})$ para $\delta = 3^\circ, 5^\circ, 7^\circ, 10^\circ$, para os indivíduos 8 a 10



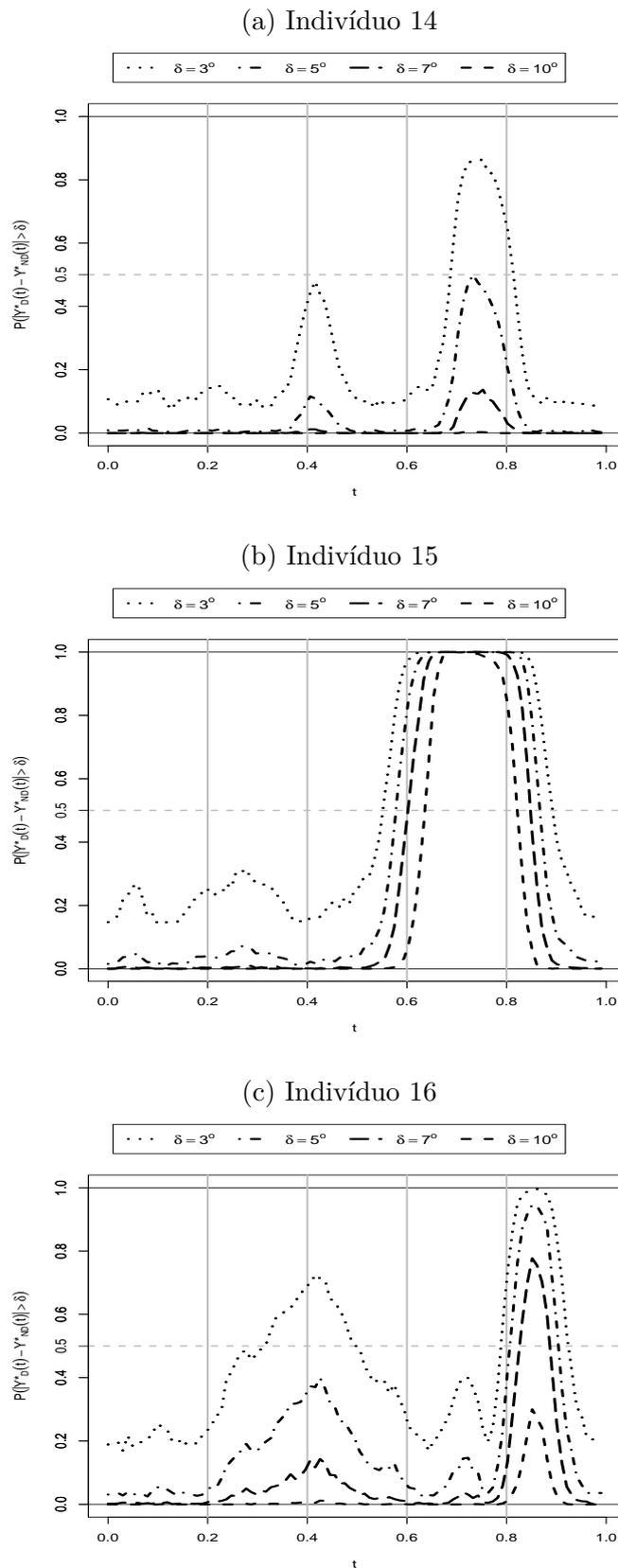
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 31: Gráficos com $P(|Y_D^*(t) - Y_{ND}^*(t)| > \delta | \mathcal{D})$ para $\delta = 3^\circ, 5^\circ, 7^\circ, 10^\circ$, para os indivíduos 11 a 13



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 32: Gráficos com $P(|Y_D^*(t) - Y_{ND}^*(t)| > \delta | \mathcal{D})$ para $\delta = 3^\circ, 5^\circ, 7^\circ, 10^\circ$, para os indivíduos 14 a 16



Observamos que não existe exatamente um padrão para as diferenças bilaterais dos indivíduos desta população em questão. Mas podemos notar que a maior parte dos indivíduos apresentou as maiores probabilidades nas porcentagens do ciclo em que ocorrem a primeira flexão máxima, a extensão máxima e a segunda flexão máxima (aproximadamente 15%, 40% e 75% do ciclo, respectivamente).

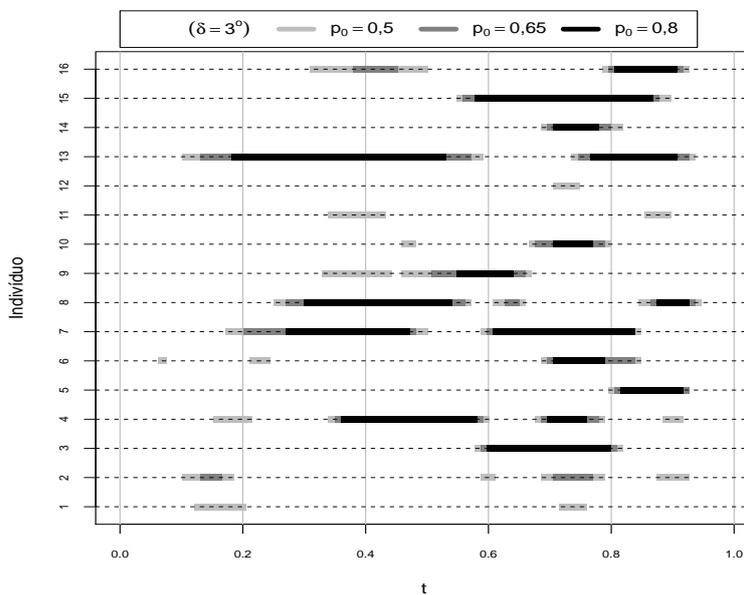
Um possível critério para classificar um tempo t com diferença bilateral considerável seria quando

$$P(|Y_D^*(t) - Y_{ND}^*(t)| > \delta | \mathcal{D}) \geq p_0,$$

para δ um quantidade em graus fixada e p_0 uma probabilidade também fixada. O valor de p_0 pode ser escolhido a critério do pesquisador, entretanto, o valor de p_0 deve ser maior que 0,5 no sentido de que os instantes de tempo que apresentam as diferenças com probabilidade maior do que 0,5 têm mais chance de ocorrer do que de não ocorrer a diferença bilateral.

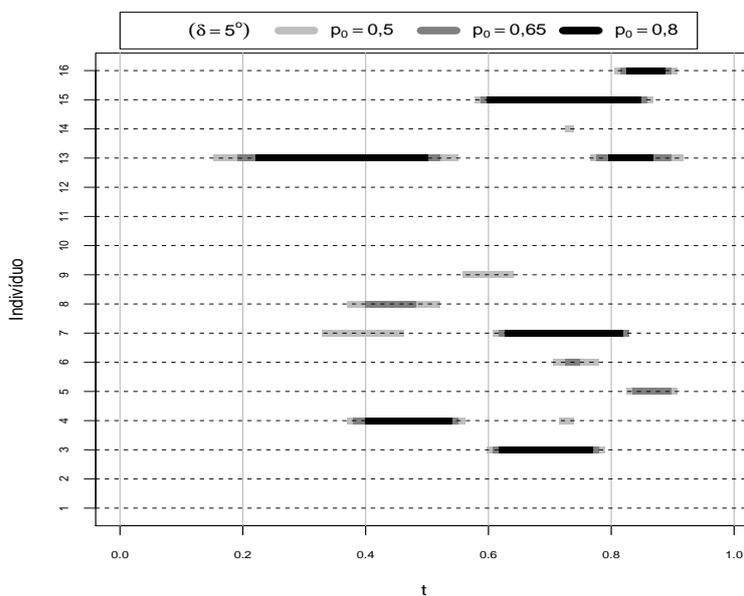
As Figuras 33 a 36 trazem ilustrações dos intervalos de tempo em que ocorrem as diferenças bilaterais consideráveis de cada indivíduo, considerando $\delta = 3^\circ, 5^\circ, 7^\circ$ e 10° , adotando para cada δ , $p_0 = 0,5; 0,65$ e $0,8$. Para $\delta = 3^\circ$, todos os indivíduos apresentam diferenças consideráveis em alguns subintervalos do ciclo para $p_0 = 0,5$, quase todos apresentam diferenças bilaterais consideráveis com $p_0 = 0,65$ e as diferenças bilaterais consideráveis também ocorrem para a grande maioria dos indivíduos considerando $p_0 = 0,8$. Ao considerarmos $\delta = 5^\circ$, alguns indivíduos já não apresentam diferenças bilaterais consideráveis e, os que apresentam, o fazem geralmente da extensão máxima para frente (ou seja, aproximadamente a partir de 40% do ciclo), isso para $p_0 = 0,5; 0,65$ ou $0,8$. Adotando $\delta = 7^\circ$, poucos indivíduos apresentam diferenças bilaterais e, quando ocorrem, estas geralmente são nas proximidades do instante de flexão máxima da fase de balanço (aproximadamente 75% do ciclo). Quando adotamos $\delta = 10^\circ$, praticamente não existem diferenças bilaterais nos indivíduos, inclusive, adotando $p_0 = 0,8$, somente o indivíduo 15 apresenta diferença bilateral considerável, a qual ocorre nas proximidades dos tempos da flexão máxima da fase de balanço.

Figura 33: Gráfico destacando os intervalos do domínio de cada indivíduo em que ocorreram diferenças bilaterais consideráveis para $\delta = 3^\circ$



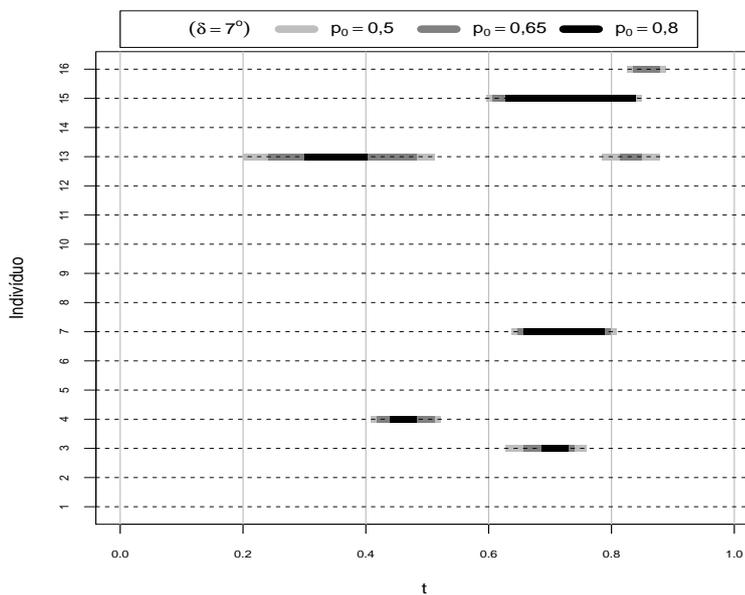
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 34: Gráfico destacando os intervalos do domínio de cada indivíduo em que ocorreram diferenças bilaterais consideráveis para $\delta = 5^\circ$



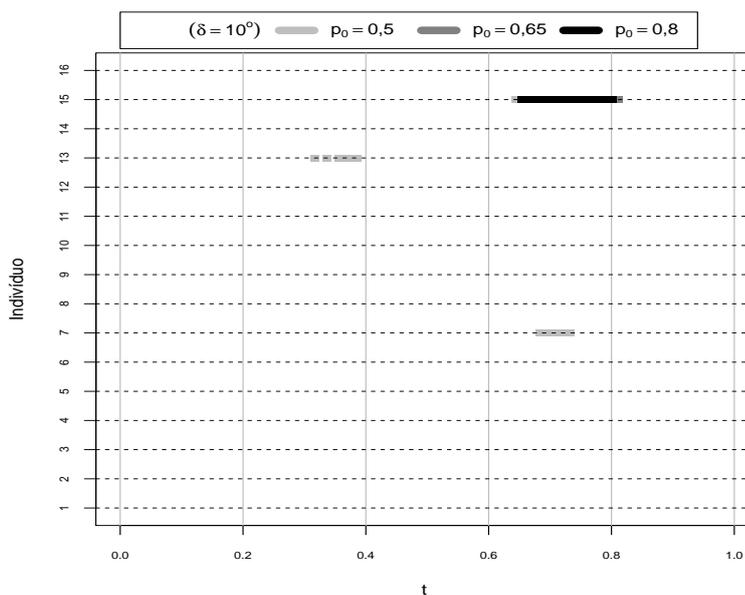
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 35: Gráfico destacando os intervalos do domínio de cada indivíduo em que ocorreram diferenças bilaterais consideráveis para $\delta = 7^\circ$



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 36: Gráfico destacando os intervalos do domínio de cada indivíduo em que ocorreram diferenças bilaterais consideráveis para $\delta = 10^\circ$



Fonte: Elaborado pela autora

Adicionalmente à análise realizada para cada instante $t \in [0, 1]$, podemos fazer um estudo avaliando globalmente as distâncias em todo o intervalo $[0, 1]$. Para isto, calculamos

$$P(d(Y_D^*, Y_{ND}^*) > \delta | \mathcal{D}),$$

em que δ é uma dada quantidade em graus fixada, \mathcal{D} representa o conjunto de dados e $Y_D^*(t)$ e $Y_{ND}^*(t)$ representam a distribuição preditiva *a posteriori* para os membros inferiores dominante e não dominante, respectivamente, e a distância $d(\cdot, \cdot)$ representa qualquer uma das medidas L^1 , L^2 ou L^∞ (vide equações (4.20) a (4.22)). As Tabelas 16 e 17 trazem estas probabilidades para cada indivíduo, considerando cada uma das três medidas citadas e diversos valores de δ .

Tabela 16: Valores de $P(d(Y_D^*, Y_{ND}^*) > \delta | \mathcal{D})$ para as distâncias L^1 , L^2 e L^∞ e $\delta = 3^\circ, 5^\circ, 7^\circ$

Ind.	$\delta = 3^\circ$			$\delta = 5^\circ$			$\delta = 7^\circ$		
	L^1	L^2	L^∞	L^1	L^2	L^∞	L^1	L^2	L^∞
1	0,075	0,183	1,000	0,000	0,003	0,757	0,000	0,000	0,153
2	0,189	0,455	1,000	0,000	0,001	0,899	0,000	0,000	0,291
3	0,548	0,991	1,000	0,001	0,020	1,000	0,000	0,000	0,980
4	0,931	1,000	1,000	0,000	0,066	1,000	0,000	0,000	0,992
5	0,061	0,336	0,999	0,000	0,000	0,902	0,000	0,000	0,382
6	0,264	0,498	1,000	0,009	0,023	0,899	0,000	0,001	0,494
7	1,000	1,000	1,000	0,099	0,752	1,000	0,000	0,001	1,000
8	0,602	0,810	1,000	0,021	0,066	0,976	0,000	0,000	0,611
9	0,305	0,591	0,998	0,007	0,034	0,926	0,000	0,000	0,540
10	0,008	0,169	0,998	0,000	0,000	0,690	0,000	0,000	0,123
11	0,071	0,208	1,000	0,000	0,000	0,867	0,000	0,000	0,236
12	0,009	0,083	0,999	0,000	0,000	0,713	0,000	0,000	0,091
13	1,000	1,000	1,000	0,717	0,936	1,000	0,202	0,469	1,000
14	0,020	0,162	1,000	0,000	0,000	0,928	0,000	0,000	0,387
15	1,000	1,000	1,000	0,393	0,996	1,000	0,003	0,473	1,000
16	0,450	0,892	1,000	0,044	0,108	1,000	0,000	0,003	0,989

Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 17: Valores de $P(d(Y_D^*, Y_{ND}^*) > \delta | \mathcal{D})$ para as distâncias L^1 , L^2 e L^∞ e $\delta = 10^\circ, 12^\circ, 15^\circ$

Ind.	$\delta = 10^\circ$			$\delta = 12^\circ$			$\delta = 15^\circ$		
	L^1	L^2	L^∞	L^1	L^2	L^∞	L^1	L^2	L^∞
1	0,000	0,000	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,000	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	0,444	0,000	0,000	0,071	0,000	0,000	0,000
4	0,000	0,000	0,410	0,000	0,000	0,044	0,000	0,000	0,000
5	0,000	0,000	0,009	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,000	0,000	0,027	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,000	0,000	0,896	0,000	0,000	0,450	0,000	0,000	0,018
8	0,000	0,000	0,020	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	0,000	0,000	0,069	0,000	0,000	0,005	0,000	0,000	0,001
10	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
11	0,000	0,000	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
13	0,003	0,024	0,986	0,000	0,000	0,881	0,000	0,000	0,462
14	0,000	0,000	0,018	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
15	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,917
16	0,000	0,000	0,567	0,000	0,000	0,198	0,000	0,000	0,009

Fonte: Elaborada pela autora

Novamente, podemos concluir que não há um padrão que possa ser captado ao analisarmos as diferenças bilaterais de cada indivíduo. A medida L^∞ fornece altas probabilidades, uma vez que sua formulação avalia as distâncias máximas no intervalo. Considerando as medidas L^1 e L^2 , podemos observar que a maior parte dos indivíduos apresentou baixas probabilidades *a posteriori* de ocorrer diferenças bilaterais globais maiores que 5° .

4.6 Conclusões

Neste capítulo, evoluímos o modelo proposto, adicionando na modelagem, uma estrutura para ajustar a dependência existente entre as observações de uma mesma curva. Para modelar a curva média do movimento, utilizamos novamente funções base de Fourier e para a estrutura de covariância e dos erros aleatórios, supomos processos Gaussianos e sob uma abordagem Bayesiana, obtivemos as estimativas desejadas.

Um estudo de simulação foi realizado considerando o modelo com processo Gaussiano, a partir de três modelos e para cada um deles quatro configurações diferentes foram adotadas, totalizando doze cenários. Tanto o ajuste quanto a qualidade preditiva do modelo foi avaliada e os resultados foram satisfatórios. Além disso, o procedimento de estimação utilizando os mesmos dados simulados foi repetido considerando o modelo

definido no capítulo anterior e observamos uma evidente melhora nas estimativas quando consideramos o modelo deste capítulo.

Considerando o conjunto de dados da marcha, a análise foi feita para cada membro inferior de cada indivíduo separadamente e os resultados obtidos foram apresentados. O modelo proposto ajustou-se bem ao dados, como pudemos ver na seção de qualidade do ajuste. Além disso, através do critério de seleção de modelos DIC, notamos uma evidente melhora no ajuste em relação ao modelo do capítulo anterior para ambos os membros inferiores de todos os indivíduos. A capacidade preditiva entre os dois modelos também foi comparada e, novamente, o modelo proposto neste capítulo obteve melhor desempenho.

Por fim, um estudo das diferenças bilaterais foi realizado, com o objetivo de verificar a existência de um padrão nas diferenças entre os valores dos ângulos dos membros inferiores dominante e não dominante, durante o movimento de flexão-extensão do joelho. Utilizando as amostras da distribuição preditiva *a posteriori*, foram calculadas probabilidades *a posteriori* de ocorrerem distâncias maiores que certas quantidades dadas em graus, tanto para cada instante do ciclo, quanto para o ciclo todo e, em ambos os casos, concluimos a inexistência de um padrão nas diferenças bilaterais, mas observamos a repetição de algumas diferenças consideráveis, como a ocorrência das diferenças nos instantes de tempo em que ocorrem as flexões e extensão máximas no ciclo.

5 METANÁLISE E ANÁLISE POPULACIONAL

Um dos objetivos deste trabalho é realizar uma análise populacional a fim de caracterizar um determinado grupo para proposição de tratamentos e interpretações na área da fisioterapia. No [Capítulo 4](#) modelamos a curva característica de cada indivíduo separadamente e, a fim de unir estas estimativas, propomos o uso da técnica chamada metanálise. A metanálise é uma ferramenta útil para analisar dados provenientes de réplicas de um mesmo estudo, tratamento ou experimento, pois com ela obtemos uma análise única levando em consideração a variabilidade existente entre os estudos. Neste capítulo apresentamos a técnica da metanálise e as vantagens da metanálise em relação a outras duas abordagens usuais para modelagem de dados que supõem-se provenientes de uma mesma população: a análise combinada de dados e o modelo hierárquico, utilizando para tal propósito, um exemplo com dados funcionais simulados. Por fim, trazemos as estimativas populacionais obtidas através da aplicação da metanálise para os dados da marcha.

5.1 Metanálise

A combinação estatística dos resultados de diversos estudos é denominada metanálise. A metanálise surgiu como uma ferramenta estatística com o objetivo de sumarizar estudos publicados sobre um problema específico. A metanálise foi definida, inicialmente, como uma análise das análises ([GLASS, 1976](#)), ou seja, uma análise estatística que visa combinar resultados já encontrados em análises anteriores de diferentes estudos de mesmo interesse. Uma metanálise bem planejada e executada, é uma poderosa ferramenta para síntese, pois é um método analítico no qual todos os estudos são integrados e os resultados agrupados em uma única conclusão.

O modo usual de se fazer metanálise é considerar apenas os resultados de cada estudo, e então, combiná-los por meio de algum método. Este tipo de metanálise, chamado de metanálise baseada na literatura, leva em consideração apenas os resultados obtidos nos estudos individuais. Ou seja, extrai de cada estudo uma medida-resumo para então combiná-las e encontrar uma única medida metanalítica. Esta medida nada mais é que uma média ponderada das medidas de efeito de cada estudo ([DERSIMONIAN; LAIRD, 1986](#)).

É importante ressaltar que metanálise não é o mesmo que análise combinada de dados, ou seja, considerar os indivíduos de todos os estudos, como se fossem parte de um grande estudo, pois assim podemos perder a variabilidade que possivelmente exista entre os estudos. Uma regra da metanálise é manter os indivíduos dentro de cada estudo. Deve-se fazer a comparação dentro de cada experimento e então combinar as conclusões.

Entretanto, podem existir algumas limitações no procedimento da metanálise baseada na literatura que, como comentado anteriormente, considera apenas as medidas-resumo de cada estudo e então, as combina utilizando a média ponderada desses efeitos. Por exemplo, estudos publicados podem utilizar métodos diferentes, criando dificuldades na combinação dos resultados ou, se apenas medidas-resumo estão apresentadas na literatura, pode ser impraticável a realização de certos tipos de análises que necessitam de todos os dados, dentre outras (Dutton (2011), Stewart e Tierney (2002)). Como uma alternativa, temos a metanálise caso a caso que considera os dados individuais de cada caso ou paciente.

Na metanálise caso a caso, ao invés de considerar apenas os resultados dos estudos publicados, os dados originais de cada participante de um estudo são solicitados diretamente aos pesquisadores responsáveis pelo estudo selecionado. Assim, estes dados podem ser reanalisados e, se apropriados, combinados utilizando a metanálise (HIGGINS; GREEN et al., 2008). Esta abordagem requer habilidades específicas de quem a executa e geralmente leva mais tempo que a metanálise convencional, entretanto oferece benefícios relacionados à qualidade dos dados e aos tipos de análises que podem ser realizadas e, por esta razão, é considerada o padrão ouro de metanálise (DUTTON, 2011). A metanálise caso a caso deveria ser utilizada em todas as situações, pois possibilita todos os tipos de análise dos dados, fornecendo resultados mais precisos. Entretanto, algumas circunstâncias por vezes impedem o acesso aos dados originais, tais como falta de colaboração ou perda de dados.

A medida metanalítica descrita a seguir, utiliza uma abordagem Bayesiana e foi proposta por Martins (2013) utilizando uma mistura de distribuições *a posteriori* do parâmetro de interesse, originando uma distribuição *a posteriori* combinada para o mesmo, chamada de distribuição *a posteriori* metanalítica.

Considere uma metanálise de I estudos que investigam certa característica de interesse θ pertencente a um espaço paramétrico $\Theta \subset \mathbb{R}^d, d \geq 1$. Para o i -ésimo estudo, $i = 1, \dots, I$, suponha que $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in_i})'$ denota um vetor de variáveis aleatórias de tamanho n_i , com função densidade de probabilidade $f(\mathbf{y}_i|\theta)$ no espaço de probabilidade $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Considerando $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in_i})'$ um vetor aleatório observado de \mathbf{Y}_i , temos que a função de verossimilhança para o i -ésimo estudo é dada por $L_i(\theta|\mathbf{y}_i) = \prod_{k=1}^{n_i} f(y_{ik}|\theta)$. A fim de realizar inferência sob a abordagem Bayesiana, consideremos a distribuição *a priori* de θ , $p(\theta)$ e a distribuição *a posteriori* de θ , $p_i(\theta|\mathbf{y}_i) = L_i(\theta|\mathbf{y}_i)p(\theta) / \int_{\Theta} L_i(\theta|\mathbf{y}_i)p(\theta)d\theta$. A distribuição *a priori* de θ é a mesma para todos os estudos, pois independe de onde o experimento foi conduzido.

A medida metanalítica é a mistura das I distribuições *a posteriori* de θ , produzindo uma única distribuição para θ , que é chamada de distribuição *a posteriori* metanalítica de θ . Assim, a distribuição *a posteriori* metanalítica de θ é dada por

$$p_M(\theta|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^I \omega_i p_i(\theta|\mathbf{y}_i), \quad (5.1)$$

em que \mathbf{y} representa os valores observados em todos os estudos e ω_i é o peso do i -ésimo estudo. Estes pesos são fixos e podem representar a importância dos estudos, o tamanho amostral, etc. Inicialmente, considere $\omega_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^I n_i}$.

Esta medida metanalítica é uma medida geral, isto é, qualquer distribuição *a priori* e qualquer função de verossimilhança podem ser utilizadas em (5.1). Além disso, este modelo sempre leva em consideração a variabilidade existente entre os estudos incluídos na metanálise, não sendo, portanto, necessária a discussão da homogeneidade ou heterogeneidade dos estudos (MARTINS, 2013).

5.2 Metanálise, Modelos Hierárquicos e Análise Combinada para Dados Funcionais

Quando o objetivo é agrupar dados que supostamente pertençam a uma mesma população ou que foram obtidos a partir de estudos semelhantes, abordagens usuais são modelos hierárquicos ou até mesmo uma análise combinada de dados, na qual se une todos os dados em um único conjunto de dados. No âmbito da análise de dados funcionais, modelos hierárquicos são comumente usados para modelar e agrupar coleções de funções. Podemos citar por exemplo Rice e Silverman (1991), Wu e Zhang (2002) e Morris e Carroll (2006) que modelaram a função de interesse como uma combinação linear de funções base e utilizaram os modelos hierárquicos para os coeficientes da base, a fim de acomodar diferentes tipos de dependência. Ao longo de linhas semelhantes, Ray e Mallick (2006) usaram os processos de Dirichlet como parte da especificação hierárquica do modelo, a fim de induzir o agrupamento através das curvas. Behseta, Kass e Wallstrom (2005) desenvolveram um modelo hierárquico que trata curvas individuais como realizações de um mesmo processo Gaussiano e Shi, Murray-Smith e Titterington (2005) utilizaram uma estrutura hierárquica para os hiperparâmetros da função covariância do processo Gaussiano.

O objetivo desta seção é fazer um paralelo entre três abordagens de modelagem: análise combinada de dados, modelos hierárquicos e metanálise, com o enfoque nos dados funcionais. Para tal propósito, utilizamos um conjunto de dados funcionais simulados, definido no exemplo a seguir.

Exemplo 5.1 *Consideremos dois conjuntos $\{\mathcal{Y}_1\}$ e $\{\mathcal{Y}_2\}$ de dados simulados, respectivamente, a partir dos verdadeiros modelos*

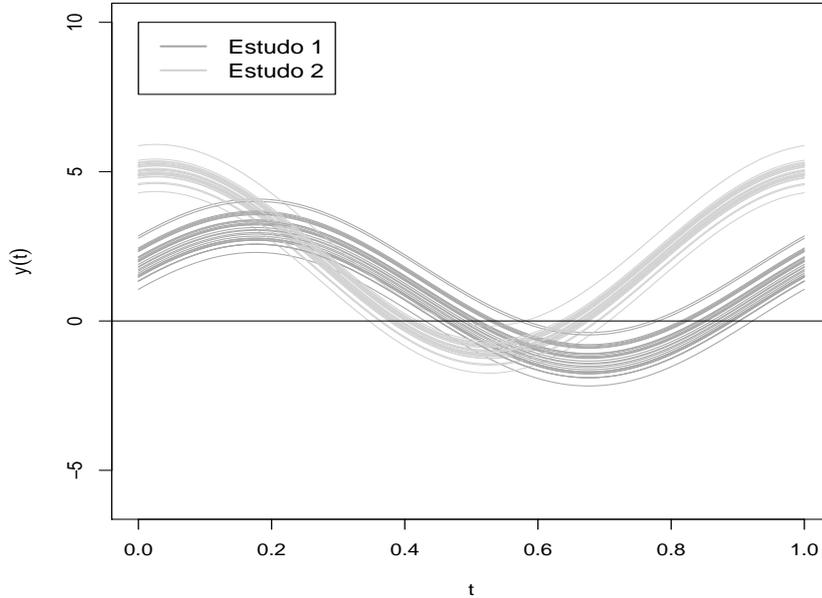
$$\mathcal{Y}_1 := 1 + \cos(2\pi t) + 2 \sin(2\pi t) + \varepsilon_1, \quad (5.2)$$

$$\mathcal{Y}_2 := 2 + 3 \cos(2\pi t) + 0,5 \sin(2\pi t) + \varepsilon_2, \quad (5.3)$$

com $t \in [0, 1]$, $\varepsilon_1 \sim N(0; 0, 5)$ e $\varepsilon_2 \sim N(0; 0, 3)$. As curvas foram geradas em 101 instantes de tempos igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$ e para cada modelo foram simuladas 30 curvas. Vamos nos referir às curvas geradas a partir dos modelos \mathcal{Y}_1 e \mathcal{Y}_2 por “Estudo 1”

e “Estudo 2”, respectivamente. Estes dados estão representados na Figura 37, em cinza escuro as curvas do Estudo 1 e em cinza claro, as do Estudo 2.

Figura 37: Dados dos Estudos 1 e 2, simulados a partir dos verdadeiros modelos \mathcal{Y}_1 e \mathcal{Y}_2 , respectivamente



Fonte: Elaborado pela autora

Suponhamos que os dois estudos são provenientes da mesma população, ou seja, as curvas ilustradas na Figura 37, têm como verdadeiro modelo

$$Y(t) = f(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2), \quad t \in [0, 1], \quad (5.4)$$

com

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 \cos(2\pi t) + \beta_2 \sin(2\pi t), \quad t \in [0, 1].$$

Denotando por $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)'$ e $\mathbf{X}(t) = (1, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, podemos reescrever a equação (5.4) por

$$Y(t) = \mathbf{X}(t)\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2), \quad t \in [0, 1].$$

As observações foram tomadas no vetor de tempos $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_{101})$, logo $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ é a seguinte matriz:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\pi t_1) & \sin(2\pi t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(2\pi t_{101}) & \sin(2\pi t_{101}) \end{bmatrix}$$

à qual denotaremos, por simplicidade, por \mathbf{X} , o que resume nosso modelo à equação

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N_{101}(\mathbf{0}, \sigma^2 I_{101}).$$

Para estimar β e σ^2 , vamos proceder de três formas: primeiramente realizar uma análise combinada, em seguida adotar um modelo hierárquico e por último, uma metanálise. Cada modelo será descrito a seguir e os resultados serão apresentados conjuntamente, para melhor visualização. Devemos ressaltar que a modelagem descrita acima terá seus devidos ajustes em cada subseção a seguir, adequando-a às particularidades de cada modelo.

5.2.1 Análise combinada

Consideremos que todas as curvas simuladas pertençam a um único conjunto de dados \mathbf{y} composto por 60 curvas, às quais podemos supor o modelo $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$, $\varepsilon \sim N_{101}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_{101})$. Ou seja,

$$\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{60} \stackrel{i.i.d.}{\sim} N_{101}(\mathbf{X}\beta, \sigma^2 \mathbf{I}_{101}).$$

A função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} L(\beta, \sigma^2 | \mathbf{y}) &= \prod_{j=1}^{60} L(\beta, \sigma^2 | \mathbf{y}_j) \\ &\propto \prod_{j=1}^{60} (\sigma^2)^{-\frac{101}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\beta)' (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\beta) \right\} \\ &\propto (\sigma^2)^{-\frac{60 \times 101}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{60} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\beta)' (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\beta) \right\}, \end{aligned}$$

em que \mathbf{y} representa todas as curvas do conjunto de dados e \mathbf{y}_j a j -ésima observação, $j = 1, \dots, 60$.

Assumimos que os parâmetros β e σ^2 são independentes com distribuições *a priori* $\beta \sim N_3(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$, $\sigma^2 \sim \text{Gama} - \text{Inv}(u_0, v_0)$, em que os hiperparâmetros $\boldsymbol{\mu}_0$, $\boldsymbol{\Sigma}_0$, u_0 e v_0 são conhecidos. Isto é, as densidades *a priori* de β e σ^2 têm expressões dadas por

$$\begin{aligned} p(\beta | \boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\beta - \boldsymbol{\mu}_0) \right\}, \\ p(\sigma^2 | u_0, v_0) &\propto (\sigma^2)^{-u_0-1} \exp \left\{ -\frac{v_0}{\sigma^2} \right\}. \end{aligned}$$

A distribuição *a posteriori* conjunta de β e σ^2 é dada por

$$\begin{aligned}
p(\beta, \sigma^2 | \mathbf{y}) &\propto L(\beta, \sigma^2 | \mathbf{y}) \times p(\beta) \times p(\sigma^2) \\
&\propto (\sigma^2)^{-\frac{60 \times 101}{2}} (\sigma^2)^{-u_0 - 1} \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{60} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\beta)' (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\beta) - \frac{1}{2} (\beta - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\beta - \boldsymbol{\mu}_0) - \frac{v_0}{\sigma^2} \right\}. \\
&\propto (\sigma^2)^{-\frac{60 \times 102}{2} - u_0 - 1} \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta' \left(60(\sigma^2)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right) \beta - \beta' \left((\sigma^2)^{-1} \mathbf{X}' \left(\sum_{j=1}^{60} \mathbf{y}_j \right) + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\mu}_0 \right) \right. \\
&\quad \left. - \left((\sigma^2)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{60} \mathbf{y}'_j \right) \mathbf{X} + \boldsymbol{\mu}'_0 \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right) \beta + \frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{j=1}^{60} \mathbf{y}'_j \right) \left(\sum_{j=1}^{60} \mathbf{y}_j \right) + \frac{v_0}{\sigma^2} \right\} \\
&\propto (\sigma^2)^{-\frac{60 \times 101}{2} - u_0 - 1} \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta - \mathbf{m})' \mathbf{C}^{-1} (\beta - \mathbf{m}) - \frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{j=1}^{60} \mathbf{y}'_j \right) \left(\sum_{j=1}^{60} \mathbf{y}_j \right) - \frac{v_0}{\sigma^2} \right\}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

em que $\mathbf{C} = \left(60(\sigma^2)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right)^{-1}$ e $\mathbf{m} = \mathbf{C} \left((\sigma^2)^{-1} \mathbf{X}' \left(\sum_{j=1}^{60} \mathbf{y}_j \right) + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\mu}_0 \right)$.

Segue da equação (5.6) que a distribuição condicional completa *a posteriori* de β é dada por

$$p(\beta | \mathbf{y}, \sigma^2) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta - \mathbf{m})' \mathbf{C}^{-1} (\beta - \mathbf{m}) \right\},$$

isto é,

$$\beta | \mathbf{y}, \sigma^2 \sim N_3(\mathbf{m}, \mathbf{C}).$$

Por fim, segue da equação (5.5) que a distribuição condicional completa *a posteriori* de σ^2 é dada por

$$p(\sigma^2 | \mathbf{y}, \beta) \propto (\sigma^2)^{-(u_0 + \frac{60 \times 101}{2}) - 1} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \left[v_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{60} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\beta)' (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\beta) \right] \right\},$$

portanto,

$$\sigma^2 | \mathbf{y}, \beta \sim \text{Gama-Inv} \left(u_0 + \frac{60 \times 101}{2}, v_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{60} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\beta)' (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}\beta) \right).$$

Amostras das distribuições *a posteriori* foram obtidas utilizando o método de simulação MCMC, a partir das distribuições condicionais completas *a posteriori*, adotando o método de amostragem Gibbs pois as distribuições apresentam forma conhecida. Para gerar a amostra foram descartadas as 1000 primeiras observações (*burn-in*) e o tamanho da amostra final da distribuição *a posteriori* é 1000. A implementação do método foi realizada utilizando o software R (R Core Team, 2018). Além disso, os seguintes valores

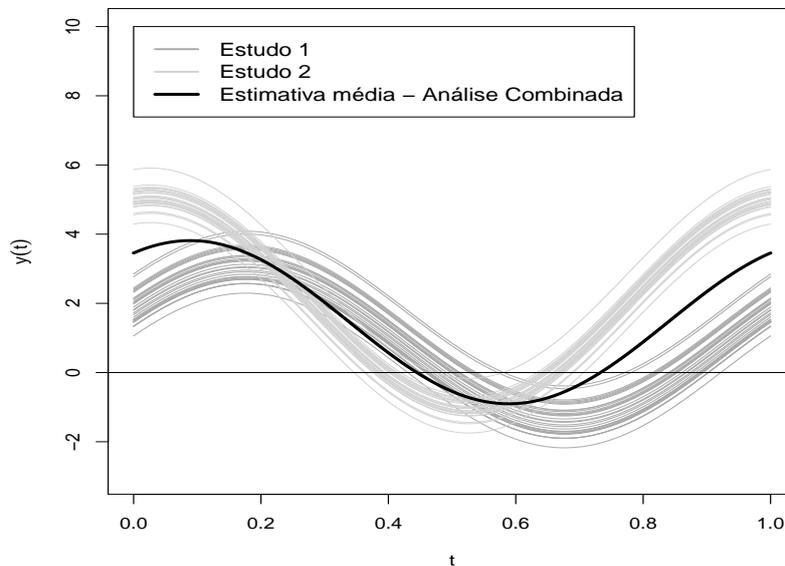
foram atribuídos aos hiperparâmetros das distribuições *a priori*: $\boldsymbol{\mu}_0 = (0, 0, 0)'$, $\boldsymbol{\Sigma}_0 = 100I_3$, $u_0 = 3$ e $v_0 = 10$ (a fim de especificar uma priori pouco informativa).

Uma estimativa *a posteriori* para a curva média é dada por

$$\hat{f}(t) = \mathbf{X}(t)\hat{\boldsymbol{\beta}},$$

com $\mathbf{X}(t) = (1, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ e $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ a estimativa média da distribuição *a posteriori* de $\boldsymbol{\beta}$. Na Figura 38 podemos visualizar $\hat{f}(t)$, juntamente com os dados dos dois estudos.

Figura 38: Estimativa *a posteriori* da curva média (ilustrada em preto) juntamente com os dados dos dois estudos (em tons de cinza) obtida a partir de uma análise combinada



Fonte: Elaborado pela autora

5.2.2 Modelo hierárquico

Agora, combinaremos os dois estudos utilizando uma estrutura hierárquica. Suponhamos inicialmente que as curvas do i -ésimo estudo, para $i = 1, 2$ seguem o modelo $\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_i + \varepsilon$, $\varepsilon \sim N_{101}(\mathbf{0}, \sigma_i^2 \mathbf{I}_{101})$. Ou seja,

$$\mathbf{Y}_{i1}, \dots, \mathbf{Y}_{i30} \stackrel{i.i.d.}{\sim} N_{101}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_i, \sigma_i^2 \mathbf{I}_{101}), \quad i = 1, 2.$$

A função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2 | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) &= \prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^{30} L(\boldsymbol{\beta}_i, \sigma_i^2 | \mathbf{y}_{ij}) \\ &\propto \prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^{30} (\sigma_i^2)^{-\frac{101}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_i^2} (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_i)' (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_i) \right\} \\ &\propto (\sigma_1^2)^{-\frac{30 \times 101}{2}} (\sigma_2^2)^{-\frac{30 \times 101}{2}} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{j=1}^{30} (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_i)' (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_i) \right] \right\}, \end{aligned}$$

em que \mathbf{y}_i representa todas as curvas do i -ésimo estudo, para $i = 1, 2$ e \mathbf{y}_{ij} , a j -ésima observação do i -ésimo estudo, para $j = 1, \dots, 30$.

Assumimos que os parâmetros $\beta_1, \beta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ são condicionalmente independentes com distribuições *a priori*

$$\begin{aligned}\beta_i | \beta, \sigma^2 &\stackrel{c.i.i.d.}{\sim} N_3(\beta, \sigma^2 \mathbf{I}_3), \quad i = 1, 2, \\ \sigma_i^2 | \delta, \gamma &\stackrel{c.i.i.d.}{\sim} \text{Gama} - \text{Inv}(\delta, \gamma), \quad i = 1, 2,\end{aligned}$$

e, em um segundo nível de hierarquia,

$$\begin{aligned}\beta &\sim N_3(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0), \\ \sigma^2 &\sim \text{Gama} - \text{Inv}(u_0, v_0), \\ \delta &\sim \text{Gama}(a, b), \\ \gamma &\sim \text{Gama}(c, d),\end{aligned}$$

em que os hiperparâmetros $\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0, u_0, v_0, a, b, c$ e d são conhecidos.

Da estrutura hierárquica e suposições de independência, segue que a distribuição *a priori* para $(\beta_1, \beta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \beta, \sigma^2, \delta, \gamma)$ é dada por

$$p(\beta_1, \beta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \beta, \sigma^2, \delta, \gamma) = p(\beta_1 | \beta, \sigma^2) p(\beta_2 | \beta, \sigma^2) p(\sigma_1^2 | \delta, \gamma) p(\sigma_2^2 | \delta, \gamma) p(\beta) p(\sigma^2) p(\delta) p(\gamma),$$

em que

$$\begin{aligned}p(\beta_i | \beta, \sigma^2) &\propto (\sigma^2)^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\beta_i - \beta)' (\beta_i - \beta) \right\}, \quad i = 1, 2, \\ p(\sigma_i^2 | \delta, \gamma) &\propto (\sigma_i^2)^{-\delta-1} \exp \left\{ -\frac{\gamma}{\sigma_i^2} \right\}, \quad i = 1, 2, \\ p(\beta) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\beta - \boldsymbol{\mu}_0) \right\}, \\ p(\sigma^2) &\propto (\sigma^2)^{-u_0-1} \exp \left\{ -\frac{v_0}{\sigma^2} \right\}, \\ p(\delta) &\propto (\delta)^{a-1} \exp \{-b\delta\}, \\ p(\gamma) &\propto (\gamma)^{c-1} \exp \{-d\gamma\}.\end{aligned}$$

Assim, distribuição *a posteriori* conjunta de $(\beta_1, \beta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \beta, \sigma^2)$ dados $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ é obtida por

$$\begin{aligned}p(\beta_1, \beta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \beta, \sigma^2, \delta, \gamma | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) &\propto L(\beta_1, \beta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2 | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \\ &\quad \times p(\beta_1, \beta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \beta, \sigma^2, \delta, \gamma).\end{aligned}$$

As distribuições condicionais completas *a posteriori* dos parâmetros são dadas a seguir, com \mathbf{y} representando as observações dos dois estudos:

- $\beta_i \mid \mathbf{y}, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \beta, \sigma^2, \delta, \gamma \sim N_3(\mathbf{m}_i, \mathbf{C}_i), \quad i = 1, 2,$

$$\text{em que } \mathbf{C}_i = \left(30(\sigma_i^2)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} + (\sigma^2)^{-1} \mathbf{I}_3\right)^{-1} \text{ e } \mathbf{m}_i = \mathbf{C}_i \left((\sigma_i^2)^{-1} \mathbf{X}' \left(\sum_{j=1}^{30} \mathbf{y}_{ij} \right) + (\sigma^2)^{-1} \beta \right).$$

- $\sigma_i^2 \mid \mathbf{y}, \beta_1, \beta_2, \beta, \sigma^2, \delta, \gamma \sim \text{Gama} - \text{Inv}(u, v), \quad i = 1, 2,$

$$\text{em que } u = \delta + \frac{30 \times 101}{2} \text{ e } v = \gamma + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{30} (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{X} \beta_i)' (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{X} \beta_i).$$

- $\beta \mid \mathbf{y}, \beta_1, \beta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma^2, \delta, \gamma \sim N_3(\mathbf{m}, \mathbf{C}),$

$$\text{em que } \mathbf{C} = \left(2(\sigma_i^2)^{-1} \mathbf{I}_3 + \Sigma_0^{-1}\right)^{-1} \text{ e } \mathbf{m} = \mathbf{C} \left((\sigma_i^2)^{-1} \left(\sum_{i=1}^2 \beta_j \right) + \Sigma_0^{-1} \boldsymbol{\mu}_0 \right).$$

- $\sigma^2 \mid \mathbf{y}, \beta_1, \beta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \beta, \delta, \gamma \sim \text{Gama} - \text{Inv} \left(u_0 + 3, v_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\beta_i - \beta)' (\beta_i - \beta) \right).$

- $\delta \mid \mathbf{y}, \beta_1, \beta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \beta, \sigma^2, \gamma \propto (\sigma_1^2)^{-\delta-1} (\sigma_2^2)^{-\delta-1} \delta^{a-1} \exp\{-b\delta\}.$

- $\gamma \mid \mathbf{y}, \beta_1, \beta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \beta, \sigma^2, \delta \sim \text{Gama} \left(c, d + \sum_{i=1}^2 (\sigma_i^2)^{-1} \right).$

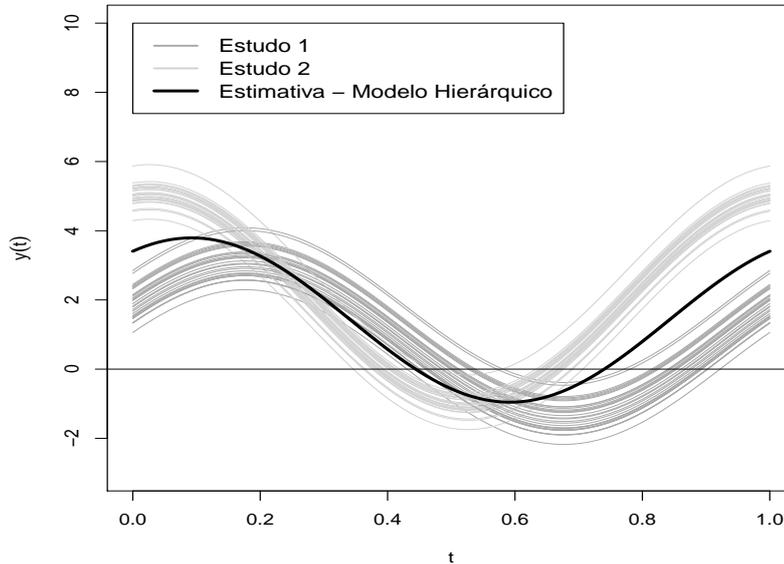
Amostras das distribuições *a posteriori* foram obtidas utilizando o método de simulação MCMC, a partir das distribuições condicionais completas *a posteriori*, adotando o método de amostragem Gibbs para as distribuições que apresentaram forma conhecida. Para gerar a amostra foram descartadas as 1000 primeiras observações (*burn-in*) e entre cada valor amostrado foram descartadas 10 observações (saltos). A amostra final da distribuição *a posteriori* é de 1000 observações. A implementação do método foi realizada utilizando o software R (R Core Team, 2018). Além disso, os seguintes valores foram atribuídos aos hiperparâmetros das distribuições *a priori*: $\boldsymbol{\mu}_0 = (0, 0, 0)'$, $\Sigma_0 = 100\mathbf{I}_3$, $u_0 = 3$ e $v_0 = 10$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ e $d = 2$ (a fim de especificar uma priori pouco informativa).

Temos então que uma estimativa *a posteriori* para a curva média é dada por

$$\hat{f}(t) = \mathbf{X}(t) \hat{\boldsymbol{\beta}},$$

com $\mathbf{X}(t) = (1, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ e $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ a estimativa média da distribuição *a posteriori* de $\boldsymbol{\beta}$, à qual podemos visualizar na Figura 39, juntamente com as observações dos dois estudos.

Figura 39: Estimativa *a posteriori* da curva média (ilustrada em preto), juntamente com os dados dos dois estudos (em tons de cinza), obtida a partir de um modelo hierárquico



Fonte: Elaborado pela autora

5.2.3 Metanálise

Agora, realizaremos uma metanálise para agrupar as curvas obtidas nos estudos 1 e 2. Suponhamos inicialmente que as curvas do i -ésimo estudo, para $i = 1, 2$ seguem o modelo $\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_{101}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_{101})$. Ou seja,

$$\mathbf{Y}_{i1}, \dots, \mathbf{Y}_{i30} \stackrel{i.i.d.}{\sim} N_{101}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_{101}), \quad i = 1, 2.$$

A função de verossimilhança para o i -ésimo modelo é dada por

$$\begin{aligned} L_i(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y}_i) &= \prod_{j=1}^{30} L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y}_{ij}) \\ &\propto \prod_{j=1}^{30} (\sigma^2)^{-\frac{101}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right\} \\ &\propto (\sigma^2)^{-\frac{30 \times 101}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{30} (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right\}, \end{aligned}$$

em que \mathbf{y}_i representa todas as curvas do i -ésimo estudo, para $i = 1, 2$ e \mathbf{y}_{ij} , a j -ésima observação do i -ésimo estudo, para $j = 1, \dots, 30$.

Assumimos que os parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ e σ^2 , do i -ésimo estudo, $i = 1, 2$, são independentes com distribuições *a priori* $\boldsymbol{\beta} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$, $\sigma^2 \sim \text{Gama} - \text{Inv}(u_0, v_0)$, em que os hiperparâmetros $\boldsymbol{\mu}_0$, $\boldsymbol{\Sigma}_0$, u_0 e v_0 são conhecidos. Isto é, as densidades *a priori* de $\boldsymbol{\beta}$ e σ^2 têm expressões dadas por

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\beta} | \boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}_0) \right\}, \\ p(\sigma^2 | u_0, v_0) &\propto (\sigma^2)^{-u_0-1} \exp \left\{ -\frac{v_0}{\sigma^2} \right\}. \end{aligned}$$

A distribuição *a posteriori* conjunta de β e σ^2 para o i -ésimo estudo, $i = 1, 2$, é dada por

$$p_i(\beta, \sigma^2 | \mathbf{y}_i) \propto L_i(\beta, \sigma^2 | \mathbf{y}_i) \times p(\beta) \times p(\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-\frac{30 \times 101}{2}} (\sigma^2)^{-u_0 - 1} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{30} (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{X}\beta)' (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{X}\beta) - \frac{1}{2} (\beta - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\beta - \boldsymbol{\mu}_0) - \frac{v_0}{\sigma^2} \right\}. \\ & \propto (\sigma^2)^{-\frac{30 \times 101}{2} - u_0 - 1} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta' \left(30(\sigma^2)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right) \beta - \beta' \left((\sigma^2)^{-1} \mathbf{X}' \left(\sum_{j=1}^{30} \mathbf{y}_{ij} \right) + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\mu}_0 \right) \right. \\ & \quad \left. - \left((\sigma^2)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{30} \mathbf{y}'_j \right) \mathbf{X} + \boldsymbol{\mu}'_0 \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right) \beta + \frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{j=1}^{30} \mathbf{y}'_j \right) \left(\sum_{j=1}^{30} \mathbf{y}_{ij} \right) + \frac{v_0}{\sigma^2} \right\} \\ & \propto (\sigma^2)^{-\frac{30 \times 101}{2} - u_0 - 1} \quad (5.8) \end{aligned}$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta - \mathbf{m})' \mathbf{C}^{-1} (\beta - \mathbf{m}) - \frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{j=1}^{30} \mathbf{y}'_{ij} \right) \left(\sum_{j=1}^{30} \mathbf{y}_{ij} \right) - \frac{v_0}{\sigma^2} \right\}$$

em que $\mathbf{C} = \left(30(\sigma^2)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right)^{-1}$ e $\mathbf{m} = \mathbf{C} \left((\sigma^2)^{-1} \mathbf{X}' \left(\sum_{j=1}^{30} \mathbf{y}_{ij} \right) + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\mu}_0 \right)$.

Segue da equação (5.8) que a distribuição condicional completa *a posteriori* de β para o i -ésimo estudo, $i = 1, 2$, é dada por

$$p_i(\beta | \mathbf{y}_i, \sigma^2) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta - \mathbf{m})' \mathbf{C}^{-1} (\beta - \mathbf{m}) \right\},$$

isto é,

$$\beta | \mathbf{y}_i, \sigma^2 \sim N_3(\mathbf{m}, \mathbf{C}), \quad i = 1, 2.$$

Por fim, segue da equação (5.7) que a distribuição condicional completa *a posteriori* de σ^2 para o i -ésimo estudo, $i = 1, 2$, é dada por

$$p_i(\sigma^2 | \mathbf{y}_i, \beta) \propto (\sigma^2)^{-(u_0 + \frac{30 \times 101}{2}) - 1} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \left[v_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{30} (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{X}\beta)' (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{X}\beta) \right] \right\},$$

portanto,

$$\sigma^2 | \mathbf{y}_i, \beta \sim \text{Gama} - \text{Inv} \left(u_0 + \frac{30 \times 101}{2}, v_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{30} (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{X}\beta)' (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{X}\beta) \right), \quad i = 1, 2.$$

Utilizando a medida metanalítica proposta em Martins (2013) e definida na equação (5.1), podemos agrupar as estimativas obtidas para cada um dos dois estudos. Lembrando que $p_i(\beta, \sigma^2 | \mathbf{y}_i)$ denota a distribuição *a posteriori* do i -ésimo estudo, $i = 1, 2$, e considerando pesos iguais para os estudos, $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$, a distribuição *a posteriori* metanalítica de (β, σ^2) é definida por

$$p_M(\beta, \sigma^2 | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} p_i(\beta, \sigma^2 | \mathbf{y}_i),$$

em que $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)'$ denota os dados dos dois estudos.

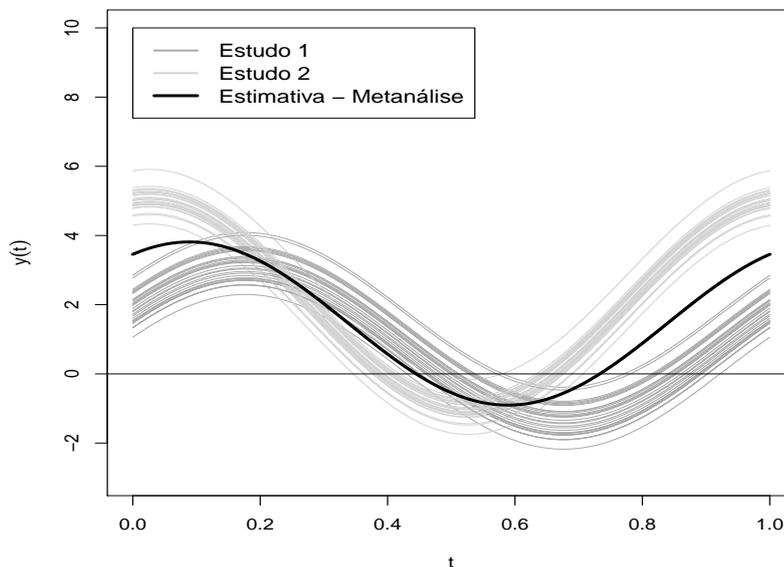
Amostras das distribuições *a posteriori* foram obtidas utilizando o método de simulação MCMC, a partir das distribuições condicionais completas *a posteriori*, adotando o método de amostragem Gibbs, pois as distribuições apresentam forma conhecida. Para gerar a amostra foram descartadas as 1000 primeiras observações (*burn-in*) e obtemos uma amostra final da distribuição *a posteriori* com 1000 observações. A implementação do método foi realizada utilizando o software R (R Core Team, 2018). Além disso, os seguintes valores foram atribuídos aos hiperparâmetros das distribuições *a priori*: $\boldsymbol{\mu}_0 = (0, 0, 0)'$, $\boldsymbol{\Sigma}_0 = 100I_3$, $u_0 = 3$ e $v_0 = 10$ (a fim de especificar uma priori pouco informativa).

Assim, uma estimativa metanalítica *a posteriori* para a curva média é dada por

$$\hat{f}(t) = \mathbf{X}(t)\hat{\boldsymbol{\beta}},$$

com $\mathbf{X}(t) = (1, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ e $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ a estimativa média da distribuição *a posteriori* metanalítica de $\boldsymbol{\beta}$. Podemos visualizar $\hat{f}(t)$ na Figura 40, juntamente com as observações dos dois estudos.

Figura 40: Estimativa *a posteriori* da curva média (ilustrada em preto), juntamente com os dados dos dois estudos(em tons de cinza), obtida a partir de uma metanálise caso-a-caso

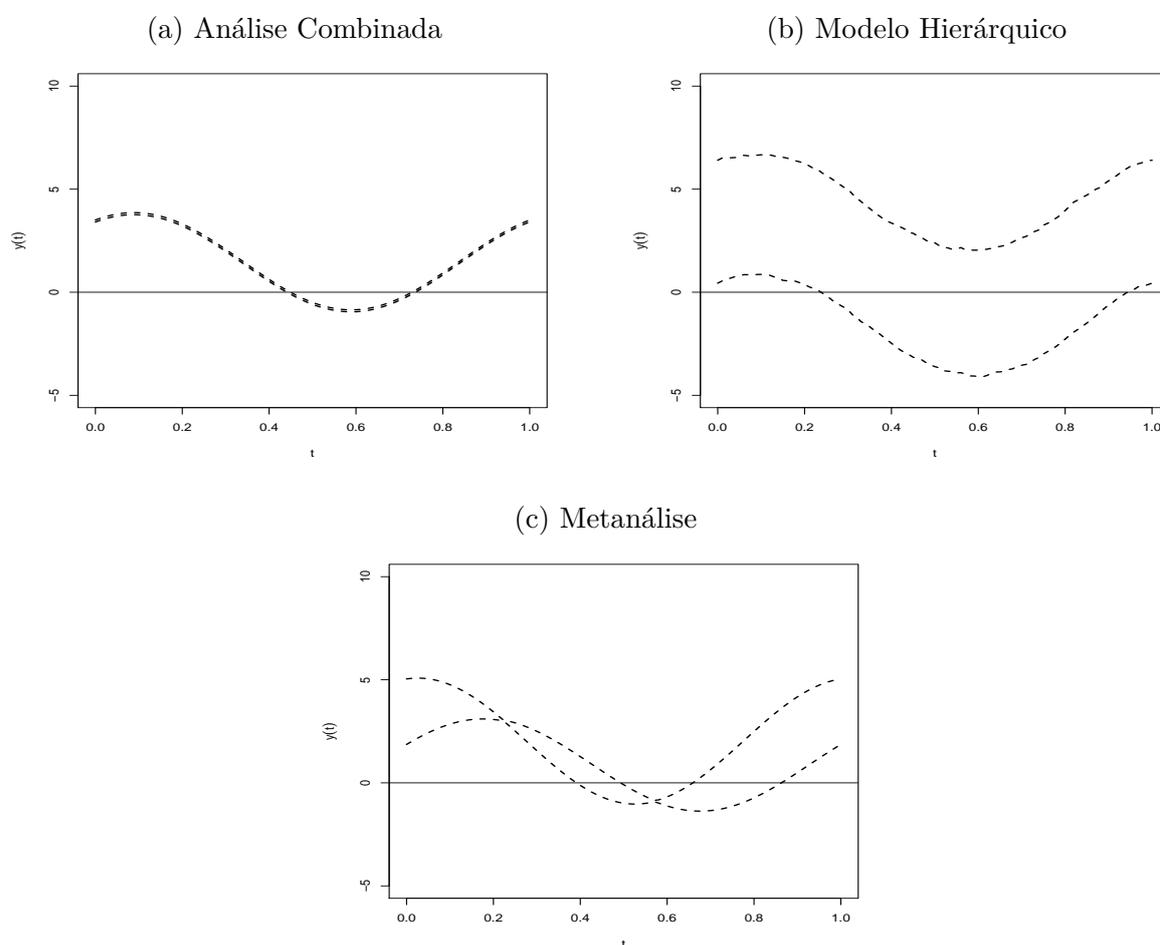


5.2.4 Comparando os resultados obtidos

Aos analisarmos as estimativas *a posteriori* para as curvas médias obtidas utilizando as três abordagens de modelagem, podemos pensar que os resultados foram iguais. De fato, as curvas obtidas em cada modelo apresentam-se tão parecidas, de forma que se construíssemos um gráfico contendo as três estimativas *a posteriori* para a curva média, não conseguiríamos diferenciá-las.

Entretanto, esta é apenas uma estimativa da média. Na Figura 41 apresentamos uma banda ponto-a-ponto com 95% de credibilidade (ou seja, banda formada pelos 0,025 e 0,975 quantis em cada instante de tempo) para a estimativa da curva média, para cada um dos três modelos. Agora fica claro que as estimativas *a posteriori* obtidas não são idênticas. A análise combinada de dados subestima a variância e o modelo hierárquico superestima a mesma, na tentativa de suportar a suposição de que os estudos são provenientes de uma mesma população. A metanálise apresenta um resultado bem distinto das demais abordagens, apresentando uma banda mais fidedigna ao conjunto de dados.

Figura 41: Banda ponto-a-ponto com 95% de credibilidade para as estimativas *a posteriori* para da média, para cada um dos modelos

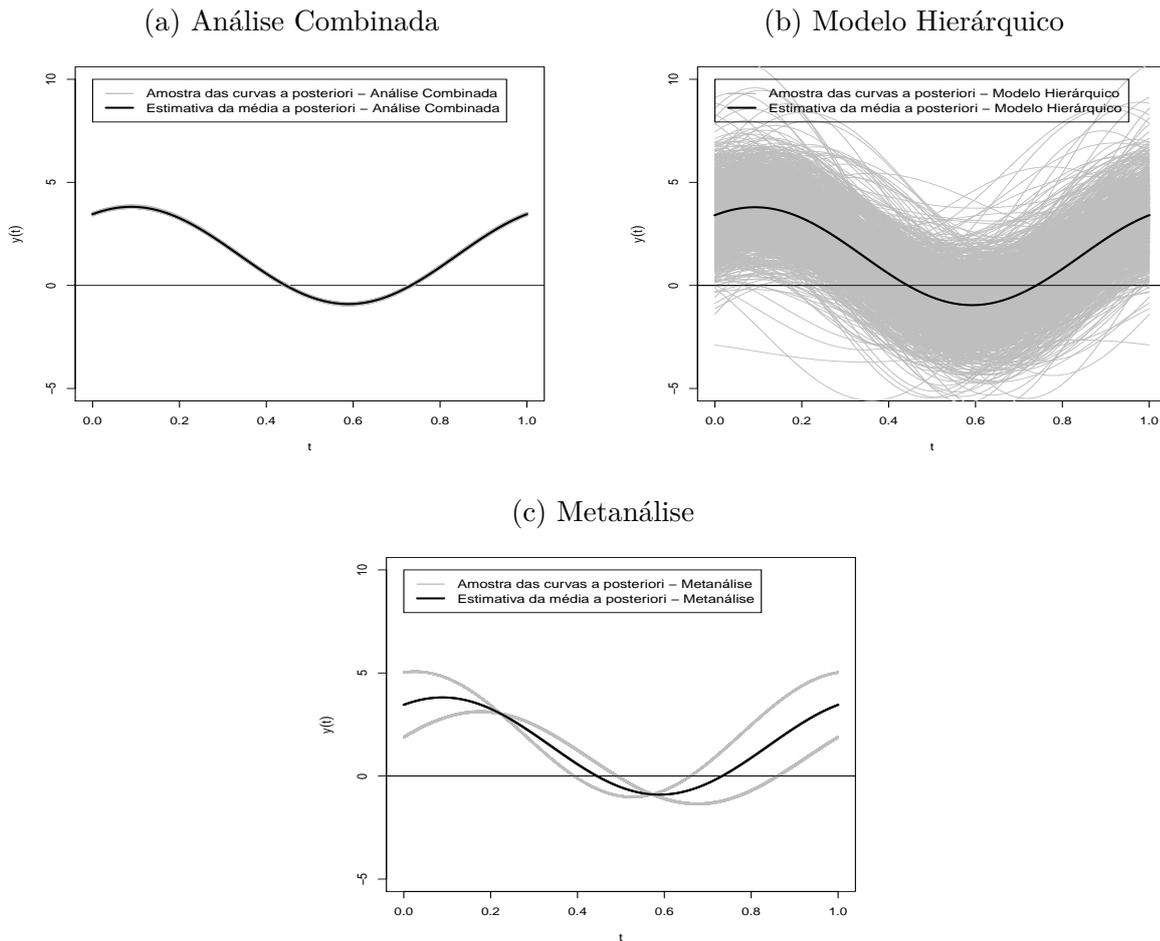


Fonte: Elaborado pela autora

Para explicitar o motivo das diferenças nas bandas obtidas para os três modelos, ilustramos na Figura 42 as curvas construídas a partir das amostras β_k , $k = 1, \dots, 1000$ da distribuição *a posteriori* obtido via MCMC e notamos uma grande discrepância nas amostras de curvas *a posteriori* dos três modelos. Podemos ver que a análise combinada de dados e o modelo hierárquico não captam exatamente o comportamento dos dados dos dois estudos e a diferença entre estas duas abordagens é que a análise combinada subestima a

variância e o modelo hierárquico superestima a variância e, conseqüentemente, isto ocorre com a amostra *a posteriori* de β , que pode ser visualizado nas curvas em cinza. Por outro lado, as curvas obtidas pela metanálise claramente representam uma boa estimativa ao conjunto de dados adotado.

Figura 42: Estimativas *a posteriori* para a curva média (em preto) juntamente com as curvas obtidas a partir das amostras *a posteriori* (em cinza), para cada um dos modelos



Fonte: Elaborado pela autora

As diferenças entre as estimativas dos parâmetros dos três modelos ficam mais claras quando analisamos a amostra *a posteriori* de β de cada modelo. Sabemos que os verdadeiros valores de $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)'$ são

$$\beta_1 = (1; 1; 2), \quad \text{para o modelo } \mathcal{Y}_1, \quad \text{e}$$

$$\beta_2 = (2; 3; 0, 5), \quad \text{para o modelo } \mathcal{Y}_2.$$

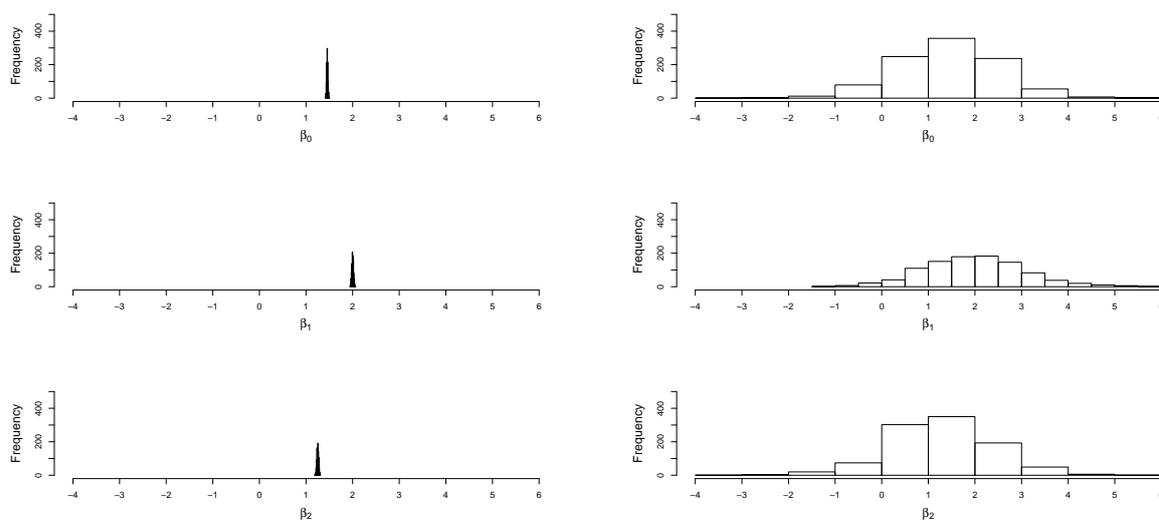
A Figura 43 ilustra os histogramas dos parâmetros β_0 , β_1 e β_2 , para cada um dos três modelos. As estimativas obtidas a partir da análise combinada e do modelo hierárquico são unimodais com $\hat{\beta} = (1, 5; 2, 1, 25)$, diferindo na variância da amostra obtida. Somente

o modelo metanalítico apresentou distribuições bimodais, com as modas exatamente nos valores dos verdadeiros parâmetros. A formulação da medida metanalítica utilizada tem esta principal característica de agrupar os dados de diferentes estudos respeitando a variabilidade existente entre eles, evidenciando inclusive em suas estimativas caso haja indícios de que os estudos não devam ser agrupados.

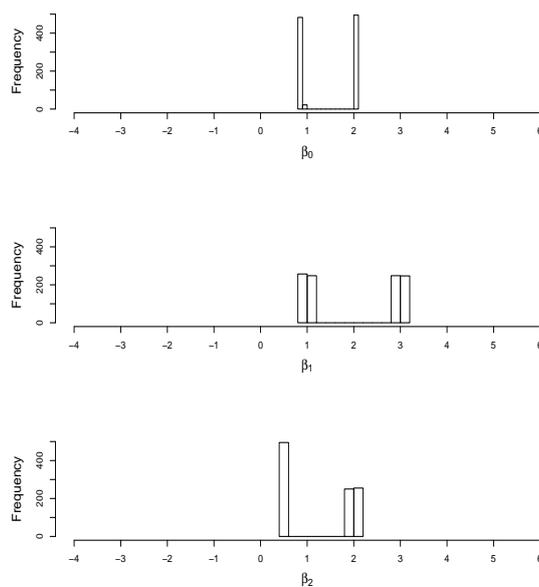
Figura 43: Histogramas de β_0 , β_1 e β_2 para cada um dos modelos

(a) Análise Combinada

(b) Modelo Hierárquico



(c) Metanálise



Fonte: Elaborado pela autora

5.3 Análise Populacional para o Modelo de Regressão Funcional Processo Gaussiano Bayesiano para a Marcha Humana

Os dados da marcha foram obtidos de uma amostra homogênea, logo estes indivíduos podem ser agrupados e analisados conjuntamente, formando um grupo de controle, por exemplo. O objetivo agora é fazer uma análise considerando todos os indivíduos conjuntamente, ou seja, fazer uma análise populacional. Quando dizemos todos os indivíduos, queremos dizer os membros inferiores dominantes de todos os indivíduos ou os membros inferiores não dominantes de todos os indivíduos.

Uma forma de estender a análise individual para a análise populacional é realizar uma metanálise. A metanálise permite produzir uma estimativa populacional, porém respeitando a variabilidade existente entre indivíduos, que pode ocorrer mesmo com todos eles sendo pertencentes a um grupo homogêneo da população. Todas as suposições e distribuições *a priori* estabelecidas para cada indivíduo continuam as mesmas. Denotando por $p_i(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y}_i)$ a distribuição *a posteriori* do i -ésimo indivíduo, $i = 1, \dots, I$, e considerando pesos iguais para todos os indivíduos, $\omega_1 = \dots = \omega_I = \frac{1}{I}$, a distribuição *a posteriori* metanalítica de $(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$ é definida por

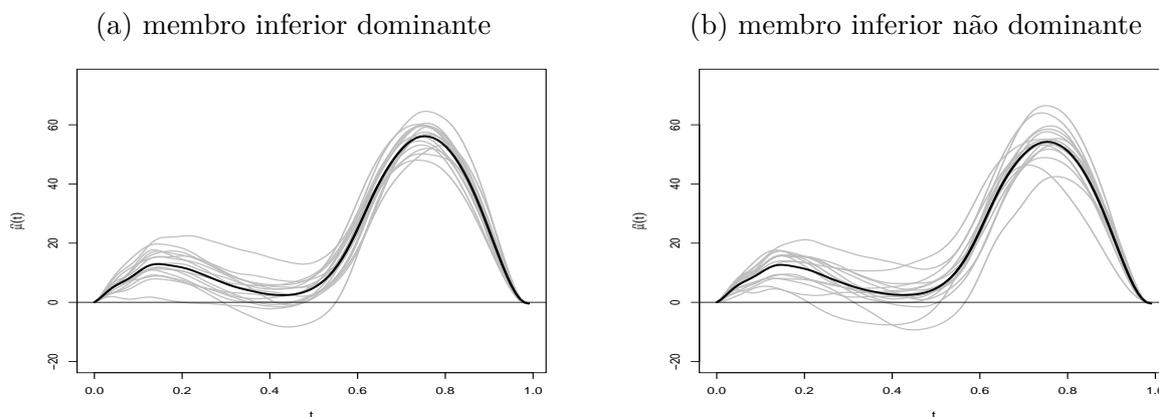
$$p_M(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^I \frac{1}{I} p_i(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y}_i),$$

em que $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_I)'$ denota os dados de todos os indivíduos.

5.3.1 Resultados

Realizamos uma metanálise para agrupar os 16 indivíduos do conjunto de dados. As estimativas da distribuição metanalítica populacional *a posteriori* para os membros inferiores dominante e não dominante, podem ser interpretadas analisando a Figura 44, na qual podemos visualizar a estimativa metanalítica *a posteriori* para a média populacional, juntamente com as estimativas *a posteriori* para média individual de todos os indivíduos, para os membros inferiores dominante em 44a e não dominante em 44b.

Figura 44: Estimativa metanalítica *a posteriori* da curva média populacional (em preto) para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4, juntamente com as estimativas *a posteriori* para média individual de todos os indivíduos (em cinza)

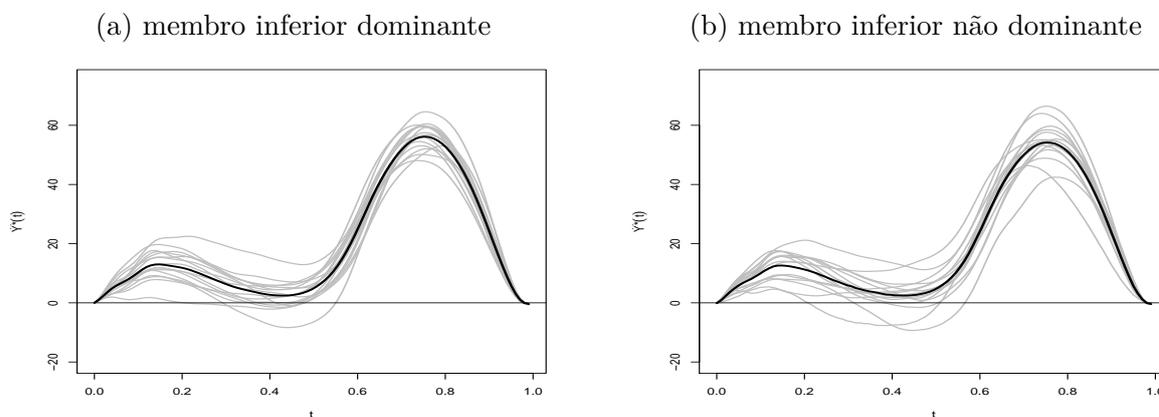


Fonte: Elaborado pela autora

Podemos notar que a curva média populacional obtida apresenta características semelhantes às apresentadas pelos indivíduos, descrevendo assim, o comportamento médio típico desta população.

A partir das amostras da distribuição metanalítica *a posteriori*, podemos obter uma amostra da distribuição preditiva populacional (ou metanalítica) *a posteriori*. Na Figura 45 encontramos a estimativa média da distribuição preditiva populacional *a posteriori*, juntamente com as estimativas das médias das distribuições preditivas *a posteriori* de todos os indivíduos, para os membros inferiores dominante em 45a e não dominante em 45b.

Figura 45: Estimativa da média da distribuição preditiva metanalítica *a posteriori* (em preto) para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4, juntamente com as estimativas das médias das distribuições preditivas *a posteriori* de todos os indivíduos (em cinza)



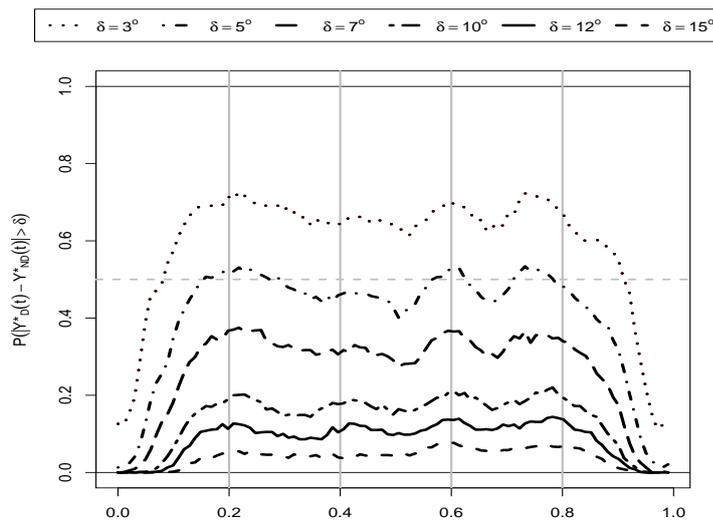
Fonte: Elaborado pela autora

Apenas a estimativa da média da distribuição preditiva populacional (ou metanalítica) *a posteriori* foi apresentada, mas estimativas intervalares serão definidas e apresentadas no próximo capítulo.

5.4 Diferenças Bilaterais - Versão Populacional

Desejamos avaliar as diferenças bilaterais da população que estamos estudando, ou seja, as diferenças entre os ângulos formados pelos membros inferiores dominante e não dominante no movimento de flexão-extensão do joelho durante a marcha. Utilizando agora a amostra da distribuição preditiva metanalítica *a posteriori* obtida a partir do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano, calculamos as probabilidades *a posteriori* definidas na seção 4.5. Na Figura 46, apresentamos os gráficos destas probabilidades para cada instante de tempo do intervalo $[0, 1]$, considerando alguns valores de δ fixados.

Figura 46: Gráfico com $P(|Y_D^*(t) - Y_{ND}^*(t)| > \delta | \mathcal{D})$ para $\delta = 3^\circ, 5^\circ, 7^\circ, 10^\circ, 12^\circ, 15^\circ$, para a amostra preditiva metanalítica *a posteriori*



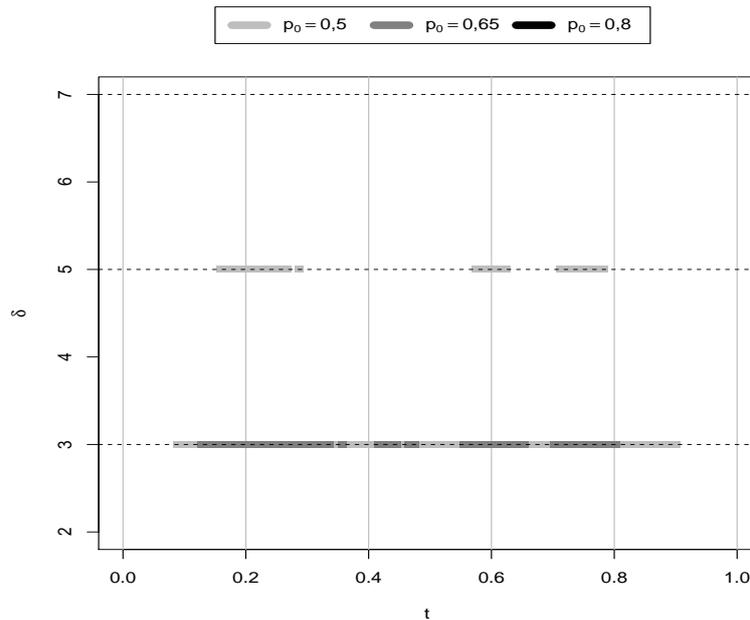
Fonte: Elaborado pela autora

Podemos notar que na maior parte do ciclo ocorrem diferenças bilaterais com alta probabilidade *a posteriori* quando $\delta = 3^\circ$. Estas probabilidades naturalmente vão diminuindo conforme aumentamos o valor de δ (graus) adotado. Além disso, estas probabilidades oscilam com baixa frequência (entre aproximadamente 5% e 95% do ciclo) para diferentes instantes do ciclo, com uma pequena evidência para os instantes próximos aos intervalos em que ocorrem os pontos de flexões e extensão máximas.

Considerando como diferenças possivelmente consideráveis as que apresentam $P(|Y_D^*(t) - Y_{ND}^*(t)| > \delta | \mathcal{D}) > p_0$, para δ e p_0 fixados, observamos que, para as probabilidades $p_0 = 0, 5; 0, 65; 0, 8$, elas ocorrem somente para 3° e 5° . Ilustramos na Figura 47 os intervalos de tempo em que ocorreram tais diferenças bilaterais. Para $\delta = 3^\circ$ e $p_0 = 0, 5$ elas ocorrem

na maior parte do ciclo, adotando $p_0 = 0,65$ percebemos que as diferenças bilaterais a $\delta = 3^\circ$ ocorrem nos principais instantes de tempo do ciclo da marcha (flexão máxima da fase de apoio, extensão máxima da fase de apoio, início da fase de balanço e flexão máxima na fase de balanço) e, adotando $p_0 = 0,8$ já não ocorrem diferenças bilaterais consideráveis. Para $\delta = 5^\circ$ somente ocorrem diferenças bilaterais a $p_0 = 0,5$ e localizam-se nos instantes de tempo nas proximidades dos pontos de flexões máximas.

Figura 47: Gráfico destacando os intervalos do domínio em que ocorreram diferenças bilaterais consideráveis (para $\delta = 3^\circ, 5^\circ$) para a amostra preditiva metanalítica *a posteriori*



Fonte: Elaborado pela autora

Além disso, procedemos com o estudo das diferenças bilaterais globais, assim como apresentado na [seção 4.5](#), considerando as medidas L^1 , L^2 e L^∞ , apresentou os resultados descritos na [Tabela 18](#).

Tabela 18: Valores de $P(d(Y_D^*, Y_{ND}^*) > \delta | \mathcal{D})$ para as distâncias L^1 , L^2 e L^∞ considerando a amostra preditiva metanalítica *a posteriori*, considerando diferentes valores de δ

δ	L^1	L^2	L^∞
2°	0,957	0,990	1,000
5°	0,432	0,604	0,980
7°	0,173	0,309	0,900
10°	0,052	0,094	0,662
12°	0,019	0,048	0,492
15°	0,005	0,012	0,281

Fonte: Elaborada pela autora

A medida L^∞ naturalmente apresenta as maiores probabilidades, pois sua formulação analisa as distâncias máximas. Entretanto, ao analisarmos as medidas L^1 e L^2 , podemos ver que a probabilidade de observarmos uma distância bilateral global maior do que 10° é pequena. Entretanto, não podemos concluir como um índice de classificação a distância de 10° , pois, ao analisarmos os resultados individuais, apresentados na [seção 4.5](#), estas baixas probabilidades são observadas para distâncias até mesmo menores que 10° .

5.5 Conclusões

Neste capítulo apresentamos a técnica metanálise, trazendo em especial uma definição de metanálise Bayesiana caso-a-caso. A fim de elucidar as vantagens da metanálise no agrupamento de dados de diferentes estudos, utilizamos um conjunto de dados funcionais simulado e o modelamos estatisticamente utilizando as abordagens de análise combinada de dados, modelo hierárquico e metanálise, através do qual pudemos notar o evidente destaque da abordagem metanalítica para o ajuste aos dados e conseqüentemente, em estimativas mais fidedignas aos verdadeiros valores dos parâmetros do modelo.

Uma vez que o conjunto de dados é constituído por indivíduos saudáveis, no sentido de não apresentarem dor, lesão ou cirurgia no joelho, estamos lidando com um grupo homogêneo e, através de uma análise populacional, desejamos obter uma caracterização da marcha na população não-lesionada. Apresentamos então as estimativas populacionais para o modelo proposto no [Capítulo 4](#) utilizando a metanálise para reunir as estimativas de todos os indivíduos em uma única estimativa.

Além disso, analisamos as diferenças entre os membros inferiores dominante e não dominante a fim de quantificar as diferenças com maiores probabilidades *a posteriori*. Utilizamos para tal propósito uma amostra da distribuição preditiva metanalítica *a posteriori* obtida a partir do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano e observamos que as diferenças bilaterais ocorrem mais consideravelmente nos pontos de flexões máximas do ciclo.

6 BANDAS PREDITIVAS FUNCIONAIS

Na análise de dados funcionais, as bandas de credibilidade funcionais, também chamadas de bandas simultâneas, fornecem ferramentas gráficas e analíticas para exploração de dados, especificação ou validação de modelo, avaliação da variabilidade na estimativa, predição e inferência (DEGRAS, 2011).

O fato de que bandas simultâneas não tenham sido amplamente utilizadas para análise de dados funcionais certamente não se deve à falta de aplicações interessantes, mas à maior dificuldade técnica de formular tais bandas para dados funcionais e estabelecer suas propriedades teóricas (CAO; YANG; TODEM, 2012).

Sob a abordagem frequentista, alguns autores apresentam diferentes definições de bandas de confiança simultâneas, podemos citar Degras (2011), Cao, Yang e Todem (2012), Ma, Yang e Carroll (2012) e Cardot et al. (2013).

Ainda não existem definições de bandas de credibilidade funcionais (ou simultâneas) na literatura e comumente encontramos bandas ponto-a-ponto sendo utilizadas para dados funcionais (por exemplo, Olshen et al. (1989) e Ramsay e Silverman (1997)). No entanto, esta abordagem não considera a natureza funcional dos dados, dificultando a interpretação dos resultados. Desta forma, propomos neste capítulo três métodos para a construção de bandas que respeitem esta característica funcional.

Neste capítulo, definimos três métodos para construção de credibilidade preditivas para dados funcionais, preservando a estrutura funcional dos dados, considerando métodos que incluem uma banda de menor área que cobre uma determinada porcentagem das curvas, uma banda formada pelas curvas com maior densidade preditiva e uma banda formada pelas curvas com maiores valores de *depth*.

6.1 Métodos Propostos para Bandas Preditivas Funcionais

Nesta seção, definimos os métodos para determinar bandas preditivas funcionais, isto é, condicionado aos dados observados, uma curva futura está inteiramente contida na banda com uma dada probabilidade pré-fixada. O primeiro método define uma banda com menor área possível. O segundo define uma banda que contenha as curvas mais plausíveis de acordo com a densidade preditiva. Finalmente, o terceiro método define uma banda que contém as curvas mais centrais de acordo com o seu valor de *depth*.

De forma geral, uma banda \mathcal{B} é um subconjunto do espaço $L^2[0, 1] = \{Y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \int_0^1 Y(t)^2 dt < \infty\}$ e no presente trabalho terá a forma

$$\mathcal{B} = \left\{ Y \in L^2[0, 1] : L_{\mathcal{B}}(t) \leq Y(t) \leq U_{\mathcal{B}}(t) \text{ para todo } t \in [0, 1] \right\},$$

em que $L_{\mathcal{B}}(t)$ e $U_{\mathcal{B}}(t)$ são os limitantes inferior e superior da banda \mathcal{B} . Diremos que \mathcal{B} é uma banda preditiva com $100(1 - \alpha)\%$ de credibilidade para uma observação futura Y^* , condicionado ao conjunto de observações \mathcal{D} , caso

$$P\{Y^* \in \mathcal{B} \mid \mathcal{D}\} = P\{L_{\mathcal{B}}(t) \leq Y^*(t) \leq U_{\mathcal{B}}(t), \forall t \in [0, 1] \mid \mathcal{D}\} \geq 1 - \alpha.$$

A seguir, discutiremos os três métodos de construção de bandas, denotados por \mathcal{B}^1 , \mathcal{B}^2 e \mathcal{B}^3 , que serão calculadas a partir de uma amostra $\{Y_q^* \in L^2[0, 1], q = 1, \dots, Q\}$ de curvas futuras simulada da distribuição preditiva *a posteriori* e considerando um *grid* fixado de valores de t dado por $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_K \leq 1$. Para facilitar a exposição do que segue, para cada subconjunto $C \subset \{1, 2, \dots, Q\}$ de curvas simuladas, definimos a banda

$$\mathcal{B}(C) = \left\{ Y \in L^2[0, 1] : \min_{q \in C} Y_q^*(t) \leq Y(t) \leq \max_{q \in C} Y_q^*(t) \text{ para todo } t \in [0, 1] \right\} \quad (6.1)$$

formada pela região de menor área de \mathbb{R}^2 que contém inteiramente todas as curvas com índices em C .

6.1.1 Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1

A ideia geral deste método é determinar a banda que contenha inteiramente $100(1 - \alpha)\%$ das Q curvas futuras $\{Y_q^*, q = 1, \dots, Q\}$ simuladas e que tenha menor área possível. Para tanto, vamos considerar um ponto fixado t_j , $j = 1, \dots, K$, no domínio $[0, 1]$ e determinar um intervalo central $I_j = [l_j, u_j]$ em que l_j é o quantil amostral $\alpha/2$ e u_j o quantil amostral $(1 - \alpha)/2$ dos valores $\{Y_i^*(t_j), i = 1, \dots, Q\}$ das curvas futuras avaliadas em t_j . Para cada intervalo I_j existe um conjunto de índices C_j associado as curvas futuras que, quando avaliadas no ponto t_j , assumem valores no intervalo I_j , isto é, $C_j = \{q : l_j \leq Y_q^*(t_j) \leq u_j\}$. Com isso, podemos definir

$$\mathcal{B}_j^1 = \mathcal{B}(C_j),$$

isto é, a banda \mathcal{B}_j^1 é aquela de menor área que contém inteiramente as curvas com índices em C_j . Observe que a proporção de curvas futuras Y_q^* que pertencem à banda \mathcal{B}_j^1 é exatamente $(1 - \alpha)$ já que todas as curvas com índices em C_j estão na banda e nenhuma outra está.

Com o procedimento acima, foi possível determinar K bandas $\mathcal{B}_1^1, \dots, \mathcal{B}_K^1$ que contém $100(1 - \alpha)\%$ das curvas futuras simuladas. A banda \mathcal{B}^1 será determinada pela banda com menor área dentre as bandas $\mathcal{B}_1^1, \dots, \mathcal{B}_K^1$.

6.1.2 Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2

O intuito do presente método é determinar uma banda que contenha as $100(1 - \alpha)\%$ das curvas futuras com maior plausibilidade de acordo com a densidade preditiva. Para tanto, suponha que $p(\cdot | \mathcal{D})$ seja a densidade preditiva de uma curva futura condicionada aos dados observados \mathcal{D} . Com isso, para cada curva futura Y_q^* podemos associar um valor $d_q = p(Y_q^* | \mathcal{D})$ para sua densidade preditiva, $q = 1, \dots, Q$. Denotando por d_α o quantil amostral α dos valores $\{d_1, d_2, \dots, d_Q\}$ podemos definir o conjunto $C^2 = \{q : d_q \geq d_\alpha\}$ dos índices associados às $100(1 - \alpha)\%$ curvas com mais alta densidade preditiva. Com isso, definimos a banda \mathcal{B}^2 é definida como

$$\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}(C^2).$$

6.1.3 Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3

A ideia deste método é construir uma banda que contenha $100(1 - \alpha)\%$ das curvas futuras mais centrais de acordo com alguma medida de *depth* amostral D . Similarmente ao método anterior, vamos denotar por D_α o quantil amostral α dos valores de *depth* $D(Y_1^*), \dots, D(Y_Q^*)$. Com isso, definimos o conjunto $C^3 = \{q : D(Y_q^*) \geq D_\alpha\}$ e consequentemente a banda é definida como

$$\mathcal{B}^3 = \mathcal{B}(C^3).$$

6.2 Estudo de Simulação

Com o objetivo de verificar a qualidade preditiva das bandas definidas na seção anterior, procedemos com um estudo de simulação. Este estudo foi realizado conjuntamente com o já definido na [seção 4.2](#), ou seja, em todos os modelos e respectivas configurações também foram avaliadas as bandas com 95% de credibilidade construídas com os métodos definidos neste capítulo. Devemos lembrar que as estimativas de cada cenário do estudo de simulação foram obtidas tanto utilizando o modelo com processo Gaussiano proposto no [Capítulo 4](#), quanto utilizando o modelo sem processo Gaussiano, definido no [Capítulo 3](#).

Como resultados, são apresentadas três medidas para cada configuração do estudo de simulação: a proporção de curvas de teste inteiramente contidas na banda, a proporção média de pontos contidos na banda e a área da banda. As duas primeiras medidas nos fornecem uma informação da qualidade preditiva da banda, o que diferencia as duas é o fato de que a primeira só considera a curva contida se todos os seus pontos estiverem dentro da banda, enquanto que a segunda verifica a proporção de pontos contidos na banda, o que acaba se tornando uma medida auxiliar para verificar se as curvas que não estão contidas na banda o fazem por poucos ou diversos pontos (instantes de tempos). Nas Tabelas [19](#), [20](#) e [21](#) são apresentados os resultados para o modelo com processo Gaussiano e nas Tabelas [22](#), [23](#) e [24](#) os resultados obtidos utilizando o modelo sem processo Gaussiano.

Cada trio de tabelas traz resultados das diferentes configurações do modelo gerado, uma vez que sempre o mesmo valor de β_{verd} é adotado, eles se diferenciam pelo valor de σ_{verd}^2 , a variância dos erros aleatórios adotada. Em todas as configurações do estudo de simulação, foram utilizadas $N = 100$ curvas para avaliar as proporções de coberturas e cada uma delas foi avaliada em um *grid* $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{101})$ de 101 instantes de tempo igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$.

Tabela 19: Resultados do estudo de simulação para verificar qualidade preditiva das bandas preditivas funcionais definidas, considerando diferentes quantidades de curvas (J) para o ajuste e diferentes métodos para construção de bandas ($\sigma_{verd}^2=0,01$) para o modelo com processo Gaussiano

Prop. curvas inteiram. contidas				
	J=1	J=20	J=35	J=50
Método \mathcal{B}^1	0,920	0,921	0,926	0,921
Método \mathcal{B}^2	0,986	0,986	0,987	0,986
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	0,948	0,959	0,962	0,960
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	0,918	0,920	0,923	0,920
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	0,928	0,938	0,939	0,938
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	0,945	0,955	0,957	0,956
Prop. média de pontos contidos				
	J=1	J=20	J=35	J=50
Método \mathcal{B}^1	0,977	0,981	0,982	0,981
Método \mathcal{B}^2	0,998	0,998	0,998	0,998
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	0,987	0,991	0,992	0,992
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	0,975	0,979	0,980	0,980
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	0,981	0,986	0,987	0,986
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	0,986	0,990	0,991	0,991
Área média				
	J=1	J=20	J=35	J=50
Método \mathcal{B}^1	9,072	7,149	7,111	7,082
Método \mathcal{B}^2	12,102	9,182	9,139	9,085
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	9,948	8,053	8,049	8,003
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	8,732	6,804	6,764	6,735
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	9,116	7,222	7,174	7,154
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	9,858	7,935	7,923	7,891

Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 20: Resultados do estudo de simulação para verificar qualidade preditiva das bandas preditivas funcionais definidas, considerando diferentes quantidades de curvas (J) para o ajuste e diferentes métodos para construção de bandas ($\sigma_{verd}^2=0,1$) para o modelo com processo Gaussiano

Prop. curvas inteiram. contidas				
	J=1	J=20	J=35	J=50
Método \mathcal{B}^1	0,905	0,900	0,897	0,899
Método \mathcal{B}^2	0,978	0,973	0,972	0,973
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	0,931	0,932	0,932	0,933
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	0,895	0,889	0,888	0,889
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	0,915	0,912	0,913	0,913
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	0,929	0,926	0,927	0,927
Prop. média de pontos contidos				
	J=1	J=20	J=35	J=50
Método \mathcal{B}^1	0,984	0,987	0,987	0,987
Método \mathcal{B}^2	0,998	0,998	0,997	0,998
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	0,989	0,992	0,992	0,993
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	0,981	0,985	0,984	0,985
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	0,986	0,990	0,989	0,990
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	0,989	0,991	0,991	0,992
Área média				
	J=1	J=20	J=35	J=50
Método \mathcal{B}^1	9,616	7,638	7,591	7,584
Método \mathcal{B}^2	12,327	9,396	9,354	9,330
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	10,252	8,271	8,201	8,233
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	9,239	7,282	7,230	7,216
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	9,665	7,710	7,672	7,656
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	10,169	8,149	8,082	8,106

Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 21: Resultados do estudo de simulação para verificar qualidade preditiva das bandas preditivas funcionais definidas, considerando diferentes quantidades de curvas (J) para o ajuste e diferentes métodos para construção de bandas ($\sigma_{verd}^2=1$) para o modelo com processo Gaussiano

Prop. curvas inteiram. contidas					
		J=1	J=20	J=35	J=50
	Método \mathcal{B}^1	0,835	0,845	0,838	0,840
	Método \mathcal{B}^2	0,917	0,911	0,906	0,907
	\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	0,839	0,842	0,836	0,841
	\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	0,812	0,821	0,816	0,820
	\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	0,834	0,839	0,833	0,837
	\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	0,909	0,918	0,914	0,915
Prop. média de pontos contidos					
		J=1	J=20	J=35	J=50
	Método \mathcal{B}^1	0,993	0,995	0,995	0,995
	Método \mathcal{B}^2	0,997	0,998	0,998	0,998
	\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	0,993	0,995	0,995	0,995
	\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	0,991	0,994	0,994	0,994
	\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	0,992	0,995	0,995	0,995
	\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	0,997	0,998	0,998	0,998
Área média					
		J=1	J=20	J=35	J=50
	Método \mathcal{B}^1	12,657	10,435	10,367	10,358
	Método \mathcal{B}^2	14,097	11,217	11,137	11,131
	\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	12,555	10,271	10,207	10,197
	\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	12,118	10,004	9,941	9,928
	\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	12,479	10,229	10,160	10,147
	\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	13,946	11,360	11,285	11,272

Fonte: Elaborada pela autora

Podemos observar que para o modelo com processo Gaussiano, a quantidade de curvas utilizadas no processo de estimação não influencia expressivamente na qualidade preditiva das bandas e que as bandas que possuem maior área possuem uma proporção de cobertura maior das curvas de teste. Além disso, comparando os três modelos, quanto menor o valor de σ_i^2 , melhores as coberturas, o que é natural de se esperar, pois dados com menor variabilidade proporcionam estimativas mais precisas.

Comparando as medidas *depth* utilizadas constatamos um comportamento semelhante em relação à proporção média de pontos contidos na banda, entretanto, ao compararmos a proporção de curvas inteiramente contidas na banda, para $\sigma_{verd}^2 = 0,01$ e

$\sigma_{verd}^2 = 0, 1$, os *depths* FM e MBD tiveram melhor desempenho, com uma leve vantagem para o *depth* FM. Entretanto, quando $V\sigma_{verd}^2 = 1$, o que poderia representar dados com maior variabilidade, a banda considerando a medida *depth* MBD teve uma expressiva vantagem em relação às demais (em compensação, a área da banda com esta medida é a maior dentre as quatro). Comparando os três métodos, podemos observar que \mathcal{B}^1 apresentou a menor cobertura preditiva e banda com menor área. A banda \mathcal{B}^2 apresentou em geral a maior cobertura e também a maior área, e \mathcal{B}^3 em geral apresentou valores intermediários, com destaque quando $\sigma_{verd}^2 = 0,01$ foi a que mais se aproximou da probabilidade nominal de 95% e quando $\sigma_{verd}^2 = 1$, exceto para o caso $J = 1$, o mesmo ocorreu.

Tabela 22: Resultados do estudo de simulação para verificar qualidade preditiva das bandas preditivas funcionais definidas, considerando diferentes quantidades de curvas (J) para o ajuste e diferentes métodos para construção de bandas ($\sigma_{verd}^2=0,01$) para o modelo sem processo Gaussiano

Prop. curvas inteiram. contidas				
	J=1	J=20	J=35	J=50
Método \mathcal{B}^1	0,000	0,914	0,927	0,928
Método \mathcal{B}^2	0,000	0,954	0,996	0,966
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	0,000	0,957	0,967	0,967
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	0,000	0,954	0,996	0,966
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	0,000	0,957	0,968	0,968
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	0,000	0,956	0,967	0,967
Prop. média de pontos contidos				
	J=1	J=20	J=35	J=50
Método \mathcal{B}^1	0,218	0,994	0,996	0,996
Método \mathcal{B}^2	0,218	0,994	0,996	0,966
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	0,219	0,995	0,997	0,997
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	0,217	0,994	0,996	0,966
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	0,221	0,995	0,997	0,997
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	0,219	0,995	0,997	0,997
Área média				
	J=1	J=20	J=35	J=50
Método \mathcal{B}^1	1,154	8,874	9,005	8,953
Método \mathcal{B}^2	1,151	8,845	8,981	8,929
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	1,156	8,941	9,076	9,023
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	1,147	8,843	8,977	8,927
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	1,170	8,962	9,093	9,042
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	1,157	8,936	9,071	9,018

Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 23: Resultados do estudo de simulação para verificar qualidade preditiva das bandas preditivas funcionais definidas, considerando diferentes quantidades de curvas (J) para o ajuste e diferentes métodos para construção de bandas ($\sigma_{verd}^2=0,1$) para o modelo sem processo Gaussiano

Prop. curvas inteiram. contidas				
	J=1	J=20	J=35	J=50
Método \mathcal{B}^1	0,001	0,907	0,920	0,922
Método \mathcal{B}^2	0,000	0,941	0,954	0,954
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	0,001	0,944	0,956	0,957
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	0,000	0,941	0,954	0,954
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	0,001	0,945	0,957	0,958
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	0,001	0,944	0,956	0,957
Prop. média de pontos contidos				
	J=1	J=20	J=35	J=50
Método \mathcal{B}^1	0,376	0,994	0,996	0,996
Método \mathcal{B}^2	0,375	0,995	0,996	0,997
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	0,376	0,995	0,997	0,997
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	0,374	0,995	0,996	0,997
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	0,380	0,995	0,997	0,997
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	0,376	0,995	0,997	0,997
Área média				
	J=1	J=20	J=35	J=50
Método \mathcal{B}^1	2,037	9,083	9,211	9,161
Método \mathcal{B}^2	2,032	9,056	9,183	9,135
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	2,040	9,154	9,282	9,234
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	2,025	9,054	9,180	9,133
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	2,065	9,175	9,299	9,252
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	2,042	9,149	9,277	9,228

Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 24: Resultados do estudo de simulação para verificar qualidade preditiva das bandas preditivas funcionais definidas, considerando diferentes quantidades de curvas (J) para o ajuste e diferentes métodos para construção de bandas ($\sigma_{verd}^2=1$) para o modelo sem processo Gaussiano

Prop. curvas inteiram. contidas				
	J=1	J=20	J=35	J=50
Método \mathcal{B}^1	0,007	0,849	0,864	0,865
Método \mathcal{B}^2	0,007	0,874	0,889	0,891
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	0,007	0,881	0,895	0,897
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	0,006	0,874	0,889	0,891
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	0,008	0,882	0,898	0,898
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	0,007	0,880	0,895	0,897
Prop. média de pontos contidos				
	J=1	J=20	J=35	J=50
Método \mathcal{B}^1	0,758	0,996	0,997	0,997
Método \mathcal{B}^2	0,757	0,996	0,997	0,997
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	0,758	0,996	0,997	0,997
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	0,755	0,996	0,997	0,997
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	0,763	0,997	0,997	0,997
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	0,759	0,996	0,997	0,997
Área média				
	J=1	J=20	J=35	J=50
Método \mathcal{B}^1	5,578	10,963	11,039	11,005
Método \mathcal{B}^2	5,562	10,927	11,009	10,975
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> FM	5,586	11,046	11,126	11,092
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> Modal	5,544	10,925	11,007	10,973
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> BD_2	5,654	11,071	11,147	11,114
\mathcal{B}^3 - <i>depth</i> MBD	5,592	11,041	11,119	11,086

Fonte: Elaborada pela autora

Podemos observar que para o modelo sem processo Gaussiano, a quantidade de curvas utilizadas no processo de estimação influencia na qualidade preditiva das bandas, uma vez que quando apenas uma curva está disponível (J=1), bandas muito estreitas (áreas muito pequenas) são construídas e, conseqüentemente, a cobertura para a amostra de teste é muito baixa. Além disso, as bandas que possuem maior área possuem uma proporção de cobertura maior das curvas de teste. Comparando os três modelos, quanto menor o valor de σ_i^2 , maiores foram as coberturas, o que é natural de se esperar, pois dados com menor variabilidade proporcionam estimativas mais precisas.

Analisando a banda \mathcal{B}^3 , as medidas *depth* utilizadas apresentaram um comportamento semelhante em relação à cobertura (tanto proporção média de pontos contidos na banda quanto proporção de curvas inteiramente contidas na banda). As áreas para todas as medidas também foram bem parecidas.

Comparando os três métodos, observamos que os desempenhos foram muito parecidos, com \mathcal{B}^1 apresentando coberturas preditivas levemente mais baixas e \mathcal{B}^3 levemente mais altas, o que só pode ser notado para $\sigma_{verd}^2 = 1$.

Comparando os modelos com processo Gaussiano e o modelo sem processo Gaussiano, podemos destacar que para o caso em que apenas uma curva foi usada na estimação ($J=1$), no qual as bandas obtidas para o modelo sem processo Gaussiano tiveram uma cobertura preditiva péssima, enquanto que o modelo com processo Gaussiano conseguiu boas estimativas. Em geral, as proporções de coberturas do modelo sem processo Gaussiano foram um pouco maiores, em contrapartida, as respectivas áreas das bandas também foram maiores.

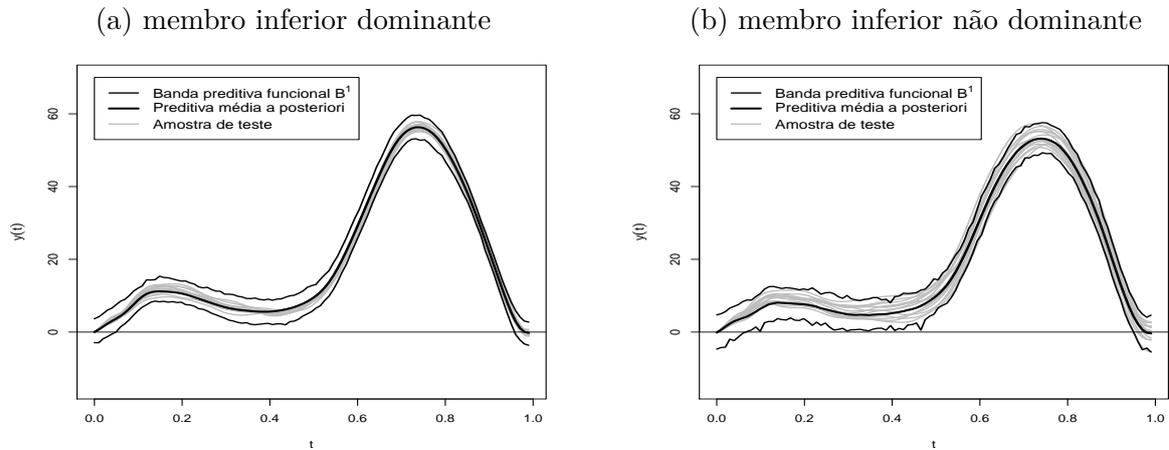
6.3 Aplicação ao Conjunto de Dados da Marcha

Utilizamos o conjunto de dados do movimento de flexão-extensão do joelho para construir as bandas preditivas. Adotando as técnicas descritas na seção anterior, determinamos as bandas para cada membro inferior de cada indivíduo e também as bandas populacionais para membro inferior dominante e membro inferior não dominante. Uma vez que o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano foi escolhido como melhor modelo (ver seção 4.4), as bandas foram construídas apenas utilizando a amostra preditiva *a posteriori* deste modelo.

6.3.1 Método \mathcal{B}^1

Na Figura 48 temos a banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 (ilustrada pelas linhas finas na cor preta), juntamente com a estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* (linha grossa, também em preto) e a amostra de teste para ambos os membros inferiores do 1º indivíduo (estas ilustradas na cor cinza). As bandas para os demais indivíduos estão na seção C.6 do Apêndice C.

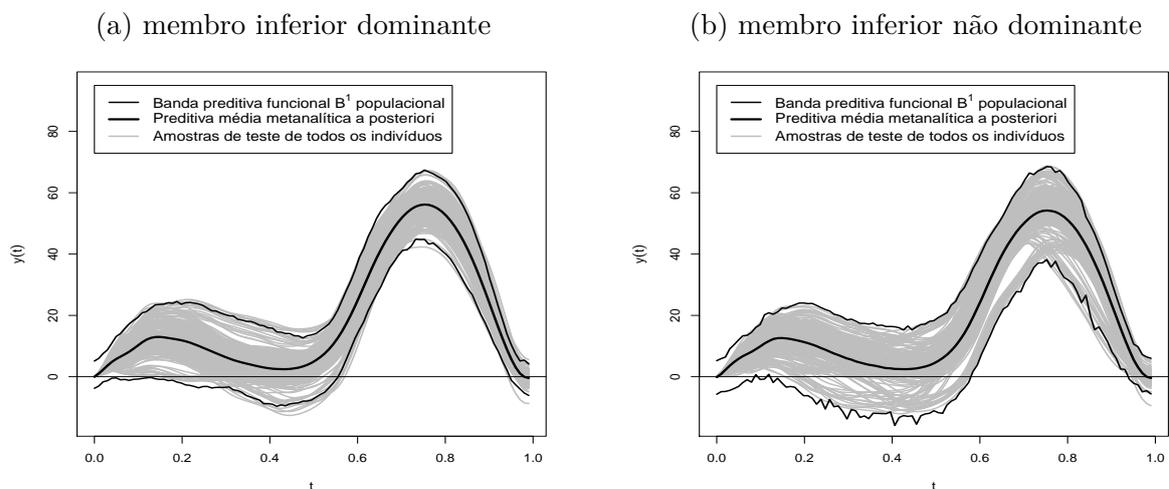
Figura 48: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 1º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Ao reproduzirmos o procedimento utilizando uma amostra da distribuição preditiva metanalítica *a posteriori*, obtida a partir de uma amostra da distribuição metanalítica *a posteriori*, construímos bandas populacionais. Na Figura 49 temos a banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 populacional com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 (linhas finas, em preto), juntamente com a estimativa média da distribuição preditiva metanalítica *a posteriori* (linha grossa, em preto) e a amostra de teste de todos os indivíduos para ambos os membros inferiores (em cinza).

Figura 49: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 populacional com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4

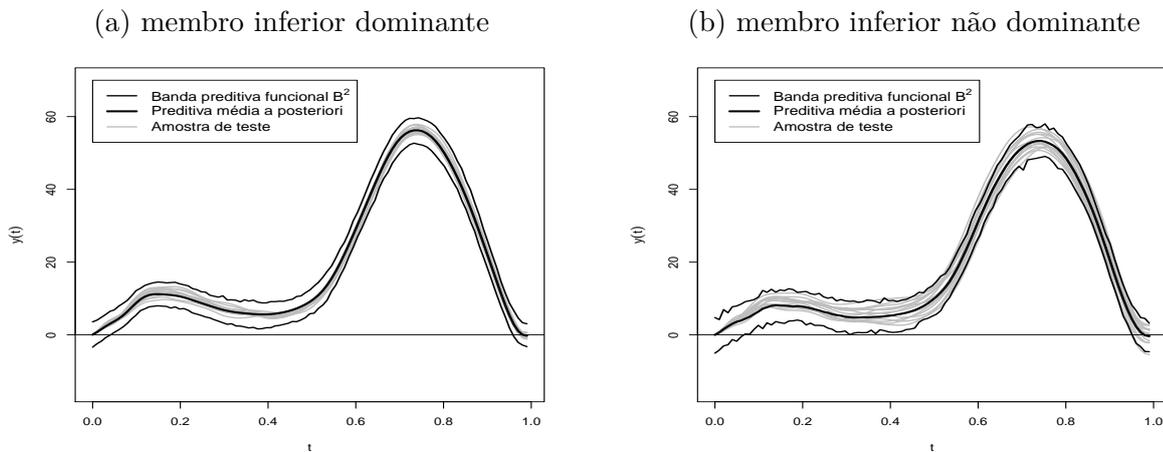


Fonte: Elaborado pela autora

6.3.2 Método \mathcal{B}^2

Na Figura 50 temos a banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 (linhas finas, em preto), juntamente com a estimativa média da distribuição preditiva *a posteriori* (linha grossa, em preto) e a amostra de teste (em cinza) para cada um dos membros inferiores do 1º indivíduo. As bandas para os demais indivíduos estão na seção C.7 do Apêndice C.

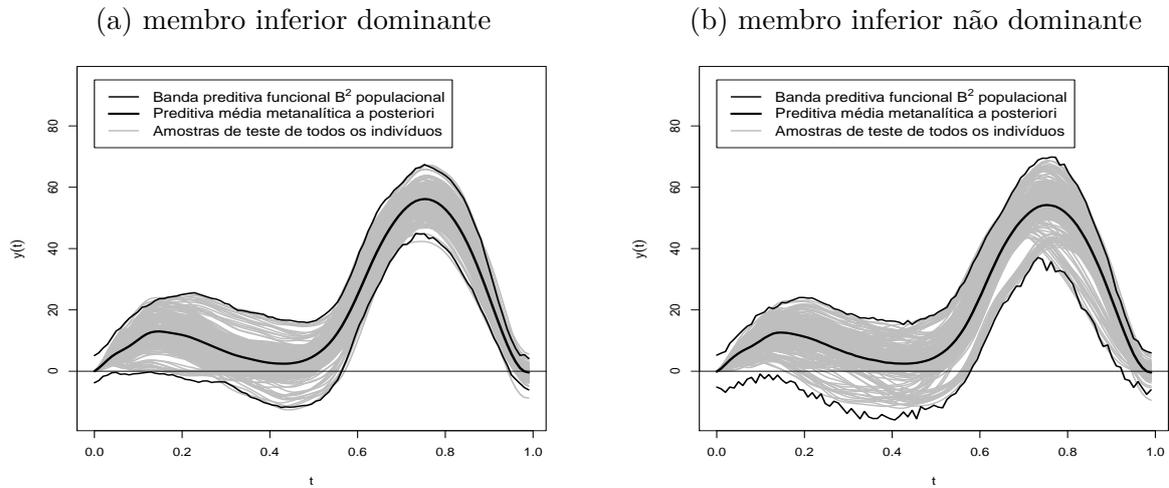
Figura 50: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 1º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Novamente reproduzimos o procedimento para utilizando as amostras das distribuições metanalíticas *a posteriori*, obtendo bandas populacionais. Na Figura 51 temos a banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 populacional com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 (linhas finas em preto), juntamente com a estimativa da média da distribuição preditiva metanalítica *a posteriori* (linha grossa em preto) e a amostra de teste de todos os indivíduos (em cinza) para os membros inferiores dominante e não dominante.

Figura 51: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 populacional com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#)

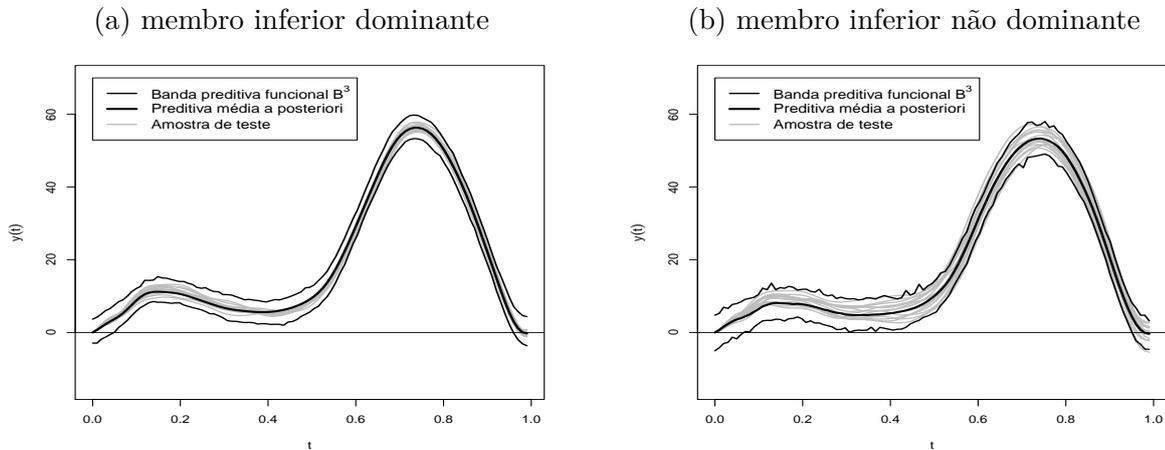


Fonte: Elaborado pela autora

6.3.3 Método \mathcal{B}^3

A classificação das curvas utilizando as medidas *depth* definidas nas subseções [2.2.1](#) a [2.2.4](#) são muito similares, quando não, exatamente iguais. Sendo assim, seria repetitivo apresentar as bandas utilizando cada uma das medidas. Além disso, pudemos constatar por meio do estudo de simulação que a banda MBD obteve melhor desempenho, portanto optamos pela medida *depth* MBD para \mathcal{B}^3 e apresentamos os seus resultados. Na [Figura 52](#) temos a banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) (linhas finas em preto), juntamente com a estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* (linha grossa, em preto) e a amostra de teste (em cinza) para ambos os membros inferiores do 1º indivíduo. As bandas para os demais indivíduos estão na [seção C.8](#) do [Apêndice C](#).

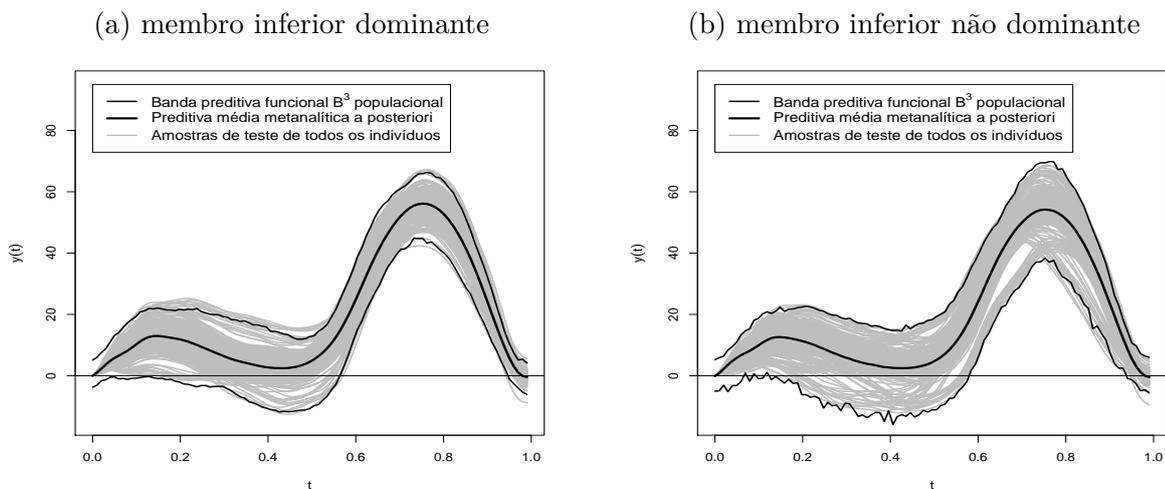
Figura 52: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 (*depth* MBD) com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 1º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Utilizamos mais uma vez as amostras das distribuições metanalíticas *a posteriori* para obter bandas populacionais. Na Figura 53 temos a banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 populacional com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 (linhas finas em preto), juntamente com a estimativa da média da distribuição preditiva metanalítica *a posteriori* e as amostras de teste de todos os indivíduos (em cinza) para ambos os membros inferiores.

Figura 53: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 (*depth* MBD) populacional com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4



Fonte: Elaborado pela autora

Podemos notar que, graficamente, as bandas preditivas funcionais, tanto individuais quanto populacionais, dos três métodos são muito similares e somente utilizando medidas

quantitativas talvez possamos analisar possíveis diferenças entre elas. Uma maior exploração das características das bandas é feita na seção a seguir.

6.3.4 Comparando as bandas - área e cobertura preditiva

Recordemos que, na análise dos dados do movimento de flexão-extensão do joelho, separamos o conjunto de dados em duas partes, amostra de treinamento, composta pelas 35 primeiras curvas (de um total de 49) de cada um dos 16 indivíduos e amostra de teste, composta pelas 14 demais curvas.

A fim de comparar a qualidade preditiva de cada banda proposta, tanto para o indivíduo, quanto populacional (considerando neste caso as amostras de teste de todos os indivíduos), calculamos a área da banda que cada método produziu, a proporção de curvas da amostra de teste que estão inteiramente contidas na banda preditiva e, como uma medida alternativa, avaliamos a proporção média de pontos das curvas de teste que estão contidos na banda. Lembremos que a medida *depth* considerada foi o *depth* MBD. Os resultados deste experimento encontram-se nas Tabelas 25, 26 para bandas individuais dos membros inferiores dominante e não dominante, respectivamente, e a Tabela 27 traz os resultados para as bandas populacionais.

Tabela 25: Comparação das áreas e coberturas preditivas considerando os três métodos de bandas funcionais para o membro inferior dominante dos indivíduos

Ind.	Área da Banda			Prop. de curvas contidas			Prop. de pontos contidos		
	\mathcal{B}^1	\mathcal{B}^2	\mathcal{B}^3	\mathcal{B}^1	\mathcal{B}^2	\mathcal{B}^3	\mathcal{B}^1	\mathcal{B}^2	\mathcal{B}^3
1	6,4943	7,0578	6,7692	0,9286	1,0000	1,0000	0,9993	1,0000	1,0000
2	9,0217	9,6935	9,3780	0,8571	0,8571	0,8571	0,9689	0,9689	0,9689
3	6,0620	6,4482	6,2104	0,4286	0,7143	0,6429	0,9279	0,9760	0,9703
4	6,3620	6,8353	6,5933	0,8571	0,8571	0,7857	0,9943	0,9950	0,9943
5	6,4172	6,7189	6,6353	0,5714	0,6429	0,6429	0,9243	0,9356	0,9371
6	8,5967	9,4087	9,1503	0,8571	0,8571	0,8571	0,9795	0,9958	0,9929
7	6,4719	6,7894	6,7115	0,1429	0,2143	0,2143	0,8699	0,8918	0,8904
8	6,1960	6,6068	6,4056	0,5714	0,6429	0,6429	0,9653	0,9696	0,9675
9	9,8474	10,9472	10,2312	0,8571	0,9286	0,9286	0,9774	0,9859	0,9823
10	6,3990	6,6794	6,5073	0,4286	0,5000	0,5000	0,9257	0,9364	0,9335
11	6,2042	6,4717	6,3952	0,5714	0,5714	0,5000	0,9257	0,9427	0,9434
12	6,2402	6,6890	6,4194	0,6429	0,6429	0,6429	0,9264	0,9427	0,9342
13	8,8833	9,7851	9,2518	0,7143	0,8571	0,8571	0,9661	0,9760	0,9703
14	6,4457	6,9892	6,6169	0,1429	0,2857	0,2857	0,9045	0,9356	0,9165
15	8,8152	9,3478	9,0282	0,2857	0,5000	0,3571	0,9017	0,9328	0,9208
16	10,4334	9,9989	10,0047	0,8571	0,7857	0,7857	0,9873	0,9866	0,9866

Tabela 26: Comparação das áreas e coberturas preditivas considerando os três métodos de bandas funcionais para o membro inferior não dominante dos indivíduos

Ind.	Área da Banda			Prop. de curvas contidas			Prop. de pontos contidos		
	\mathcal{B}^1	\mathcal{B}^2	\mathcal{B}^3	\mathcal{B}^1	\mathcal{B}^2	\mathcal{B}^3	\mathcal{B}^1	\mathcal{B}^2	\mathcal{B}^3
1	8,9193	8,6102	8,6371	0,5000	0,5000	0,5000	0,9562	0,9484	0,9484
2	5,7149	5,5103	5,5287	0,5000	0,5000	0,5000	0,9095	0,9017	0,8996
3	7,6882	7,3265	7,3269	0,7143	0,7857	0,7857	0,9837	0,9795	0,9795
4	7,0801	6,7483	6,7573	0,7143	0,7143	0,7143	0,9894	0,9873	0,9880
5	6,1919	6,7518	6,3374	0,7143	0,7857	0,6429	0,9816	0,9915	0,9851
6	7,5339	7,2782	7,2804	0,9286	0,9286	0,9286	0,9922	0,9929	0,9929
7	8,7355	8,4022	8,4723	0,9286	0,9286	0,9286	0,9993	0,9993	0,9993
8	7,0626	6,8244	6,8480	0,3571	0,4286	0,3571	0,9547	0,9540	0,9519
9	7,7368	7,4513	7,5042	0,8571	0,7857	0,7857	0,9760	0,9703	0,9710
10	6,5464	6,2595	6,6177	0,2143	0,2857	0,2857	0,8628	0,8571	0,8762
11	9,5229	9,2652	9,3075	0,5000	0,5000	0,5000	0,9385	0,9349	0,9356
12	7,3718	7,0889	7,1316	0,8571	0,8571	0,8571	0,9958	0,9929	0,9943
13	18,4086	17,9692	18,0805	0,7857	0,7857	0,7857	0,9866	0,9844	0,9859
14	8,8343	8,4641	8,5243	0,2143	0,2143	0,2143	0,8246	0,8041	0,8091
15	9,3726	9,1026	9,1522	0,8571	0,7857	0,7857	0,9809	0,9788	0,9795
16	9,5751	9,2854	9,3039	0,8571	0,7857	0,7857	0,9972	0,9958	0,9958

Podemos notar, analisando a [Tabela 25](#), para membro inferior dominante, em relação à proporção de curvas de teste inteiramente contidas na banda, as bandas \mathcal{B}^2 e \mathcal{B}^3 apresentaram um desempenho preditivo muito parecido, com uma leve vantagem para o método \mathcal{B}^2 e em terceira colocação fica a banda \mathcal{B}^1 . O mesmo comportamento foi observado para a proporção média de pontos contidos na banda. Em contrapartida, as áreas das bandas \mathcal{B}^2 são as maiores, seguidas pelas áreas da \mathcal{B}^3 e portanto, as bandas \mathcal{B}^1 apresentaram as menores áreas. Podemos concluir que quanto maior a área da banda, maior a cobertura, o que é um resultado natural. As bandas \mathcal{B}^2 e \mathcal{B}^3 apresentaram capacidade preditiva similar, entretanto a área da banda \mathcal{B}^3 foi menor.

Para o membro inferior não dominante, a partir da [Tabela 26](#), analisando a proporção de curvas de teste inteiramente contidas nas bandas, concluímos que os três métodos apresentaram resultados muito similares, com \mathcal{B}^1 se destacando em relação às demais para três indivíduos, \mathcal{B}^2 para dois indivíduos e \mathcal{B}^3 apresentando valor inferior em relação aos demais somente para um indivíduo. Em relação à proporção média de pontos contidos, \mathcal{B}^1 se destacou, apresentando os maiores valores, \mathcal{B}^2 e \mathcal{B}^3 apresentaram desempenho semelhante. Em relação às áreas, \mathcal{B}^1 apresentou as maiores áreas, seguido \mathcal{B}^3 e \mathcal{B}^2 apresentou as menores áreas.

Devemos observar que os valores obtidos para as proporções de curvas de teste inteiramente contidas nas bandas em geral não foram muito altos, mas isso se deve a dois motivos: em primeiro lugar a sensibilidade da medida, pois basta um ponto da curva cair

fora da banda para que a curva seja considerada não contida na banda e em segundo, a quantidade de curvas na amostra de teste, que consiste de apenas 14 curvas.

Tabela 27: Comparação das áreas e coberturas preditivas populacionais considerando os três métodos de bandas funcionais, para os membros inferiores dominante e não dominante

Área da Banda			
	Método 1	Método 2	Método Depth
Dominante	21,6464	22,5271	21,3815
Não dominante	26,7750	28,3286	26,0620
Prop. de curvas contidas			
	Método 1	Método 2	Método Depth
Dominante	0,8571	0,8750	0,8438
Não dominante	0,8482	0,9107	0,8393
Prop. de pontos contidos			
	Método 1	Método 2	Método Depth
Dominante	0,9834	0,9885	0,9761
Não dominante	0,9908	0,9953	0,9904

Para as bandas populacionais, a banda \mathcal{B}^3 apresentou menor cobertura preditiva, tanto para a proporção de curvas de teste inteiramente contidas quanto para a proporção média de pontos contidos na banda, e também a apresentou a menor área, isso para membro inferior dominante e não dominante. Em segundo lugar temos a banda \mathcal{B}^1 e por último e com maiores valores, a banda \mathcal{B}^2 . No caso populacional, a relação diretamente proporcional entre menor área e menor cobertura apresentou-se bem clara.

6.4 Conclusões

Neste capítulo, propusemos três métodos para construção de bandas preditivas funcionais, que têm como principal propriedade levar em consideração a característica funcional dos dados.

A fim de avaliar a capacidade preditiva dos métodos, um estudo de simulação foi realizado, considerando os modelos com e sem processo Gaussiano e as conclusões foram que a banda \mathcal{B}^1 apresentou menores área e cobertura preditiva, e \mathcal{B}^2 e \mathcal{B}^3 tiveram desempenho semelhante com um destaque para \mathcal{B}^3 que apresentou cobertura mais próxima da probabilidade nominal. Em relação à banda \mathcal{B}^3 , quatro diferentes medidas *depth* foram consideradas e a que teve melhor desempenho foi a *depth* MBD, a qual foi adotada na aplicação ao conjunto de dados.

Os métodos foram aplicados ao conjunto de dados da marcha e bandas para os indivíduos e populacionais foram apresentadas e observamos ainda que os três métodos apresentaram resultados bastante semelhantes. Com estas bandas, pudemos caracterizar o movimento de flexão-extensão do joelho esperado para uma nova observação do indivíduo e da população, utilizando a banda populacional para tal propósito.

7 CONCLUSÕES E PROPOSTAS FUTURAS

Este trabalho é baseado na análise estatística de um conjunto de dados reais do movimento de flexão-extensão do joelho. Uma vez que os dados da marcha são coletados de forma quase que contínua, eles podem ser considerados dados funcionais, ou seja, cada dado é proveniente de uma curva. Uma característica dos dados da marcha humana é a presença de réplicas dos dados, isto é, para um mesmo indivíduo, várias curvas do movimento são observadas. Na maior parte dos trabalhos na literatura, a análise de dados funcionais trata de dados sem réplicas.

Considerando nas análises as réplicas observadas, modelamos a curva característica do movimento do indivíduo. Foram consideradas duas propostas de modelagem: um modelo que considera independência entre os instantes de observações de uma curva e outro que adota um processo Gaussiano para modelar a dependência entre os instantes de tempo.

Realizamos um estudo de simulação, através do qual, avaliamos a qualidade do ajuste dos modelos adotados no trabalho e a cobertura das bandas preditivas propostas. Além disso, o estudo de simulação mostrou vantagens em utilizar as réplicas dos dados em vez de apenas uma curva representativa.

Comparações entre os modelos de regressão sem e com processo Gaussiano foram feitas e observamos um desempenho melhor deste último, tanto no estudo de simulação quanto na aplicação aos dados reais.

Apresentamos a técnica da metanálise e um estudo comparativo foi feito para elucidar as diferenças entre a abordagem metanalítica com outras duas abordagens convencionais para agrupamento de dados: a análise combinada e modelos hierárquicos. Pudemos observar algumas diferenças entre as abordagens e vantagens da metanálise em relação às outras duas técnicas.

Os indivíduos do conjunto de dados obedeciam a critérios de homogeneidade e o objetivo de agrupá-los sem perder a informação da variabilidade existente entre eles, foi atingido satisfatoriamente com a proposição de uma abordagem metanalítica Bayesiana na modelagem, uma vez que através desta abordagem, conseguimos reunir a informação dos diferentes indivíduos em uma estimativa única.

Além disso, definimos bandas funcionais e propusemos três métodos para construção de bandas preditivas funcionais. Vimos, no estudo de simulação que as bandas obtidas a partir dos três métodos não apresentaram cobertura preditiva nominal de 95%, entretanto isso se deve à sensibilidade desta medida ao considerar uma curva inteiramente contida na banda somente se todos os pontos estiverem contidos nela, fato confirmado pela métrica auxiliar “proporção média de pontos contidos na banda”, a qual mostrou que as curvas da

amostra de teste que não estavam inteiramente contidas da banda o faziam geralmente por causa de 1 ou 2 pontos em média (de um *grid* de 101 pontos). As bandas propostas apresentaram a seguinte característica geral no estudo de simulação: o método 1 apresentou menor cobertura e banda com menor área, o método 2, maior cobertura preditiva e maior área e o método 3 é o ponto médio nos dois quesitos, com desempenho bem próximo aos segundo método. Além disso, o método 3 apresentou cobertura mais próxima da probabilidade nominal, sendo assim, uma escolha razoável seria adotar as bandas definidas a partir de medidas *depth*.

Um dos objetivos da tese era estudar as diferenças bilaterais no movimento e, se possível, determinar medidas de avaliação e classificação do movimento do indivíduo, tais como indicadores de normalidade em todo o ciclo ou em partes dele, dentre outros. Conseguimos observar a maior ocorrência de diferenças bilaterais em alguns instantes importantes do ciclo, como os pontos de flexões e extensão máximas, mas o que pudemos observar em relação a este conjunto de dados foi que, apesar dos critérios adotados para selecionar uma amostra homogênea de indivíduos “saudáveis”, há uma grande variabilidade nas observações entre indivíduos, o que nos leva a duas principais possibilidades: embora cuidadosamente escolhidos, talvez não tenham sido suficientes os critérios de seleção adotados para garantir homogeneidade na amostra ou, talvez realmente haja uma grande variabilidade das curvas formadas pelos indivíduos durante o movimento.

Como possíveis propostas futuras, podemos listar:

- Estudar o efeito de outros métodos para estimação dos hiperparâmetros da função de covariância, tais como os propostos em [Sundararajan e Keerthi \(2000\)](#), [Shi et al. \(2007\)](#), [Rasmussen e Williams \(2006\)](#), [Rasmussen e Williams \(2006\)](#).
- Estudar o desempenho de outras parametrizações para a função de covariância, tais como as propostas em [Shi et al. \(2007\)](#) e [Rasmussen e Williams \(2006\)](#).
- Estudar métodos que sejam computacionalmente viáveis para acomodar o caso em que a amostra de dados funcionais são observadas em diferentes pontos discretos do domínio.
- Proposição de métodos Bayesianos aplicados a detecção de pontos do domínio da função para os quais podemos considerar as curvas médias de dois ou mais grupos distintas. Propostas para esta problemática são discutidas, por exemplo, em [Pini e Vantini \(2016\)](#) e [Pini e Vantini \(2017\)](#) sob o ponto de vista frequentista, mas não há até o momento nenhuma abordagem sob a perspectiva Bayesiana.

REFERÊNCIAS

- ANATOMIA dos membros inferiores. 2014. <http://anatounalunos.blogspot.com/2014/05/ossos-dos-membros-inferiores_14.html>. Acesso em: 30/01/2019.
- ANDERSON, T. W. **An introduction to multivariate statistical analysis**. [S.l.]: Wiley New York, 1958. v. 2.
- BARNETT, V. The ordering of multivariate data. **Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)**, JSTOR, p. 318–355, 1976.
- BEHSETA, S.; KASS, R. E.; WALLSTROM, G. L. Hierarchical models for assessing variability among functions. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 92, n. 2, p. 419–434, 2005.
- BILLINGSLEY, P. **Probability and Measure**. 3. ed. New York: Jonh Wiley & Sons, 1995.
- Biometrics Ltd. **Biometrics Ltd. Goniometer and torsionmeter operating manual**. Gwent, UK, 2007. Disponível em: <<http://www.biometricsltd.com/gonio.htm>>.
- BOENTE, G.; FRAIMAN, R. Kernel-based functional principal components. **Statistics & Probability Letters**, Elsevier, v. 48, n. 4, p. 335–345, 2000.
- BOSQ, D. Modelization, nonparametric estimation and prediction for continuous time processes. In: **Nonparametric functional estimation and related topics**. [S.l.]: Springer, 1991. p. 509–529.
- BROWN, B. Statistical uses of the spatial median. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, JSTOR, p. 25–30, 1983.
- BRUMBACK, B. A.; RICE, J. A. Smoothing spline models for the analysis of nested and crossed samples of curves. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis Group, v. 93, n. 443, p. 961–976, 1998.
- BURR, M. A.; FABRIZIO, R. J. Uniform convergence rates for halfspace depth. **Statistics & Probability Letters**, Elsevier, v. 124, p. 33–40, 2017.
- CAO, G.; YANG, L.; TODEM, D. Simultaneous inference for the mean function based on dense functional data. **Journal of nonparametric statistics**, Taylor & Francis, v. 24, n. 2, p. 359–377, 2012.
- CARDOT, H. et al. Confidence bands for horvitz–thompson estimators using sampled noisy functional data. **Bernoulli**, Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability, v. 19, n. 5A, p. 2067–2097, 2013.
- CARDOT, H.; FERRATY, F.; SARDA, P. Functional linear model. **Statistics & Probability Letters**, Elsevier, v. 45, n. 1, p. 11–22, 1999.
- CUEVAS, A.; FEBRERO, M.; FRAIMAN, R. Linear functional regression: the case of fixed design and functional response. **Canadian Journal of Statistics**, Wiley Online Library, v. 30, n. 2, p. 285–300, 2002.

- _____. On the use of the bootstrap for estimating functions with functional data. **Computational statistics & data analysis**, Elsevier, v. 51, n. 2, p. 1063–1074, 2006.
- _____. Robust estimation and classification for functional data via projection-based depth notions. **Computational Statistics**, Springer, v. 22, n. 3, p. 481–496, 2007.
- DAUXOIS, J.; POUSSE, A.; ROMAIN, Y. Asymptotic theory for the principal component analysis of a vector random function: some applications to statistical inference. **Journal of multivariate analysis**, Elsevier, v. 12, n. 1, p. 136–154, 1982.
- DEGRAS, D. A. Simultaneous confidence bands for nonparametric regression with functional data. **Statistica Sinica**, JSTOR, p. 1735–1765, 2011.
- DELUZIO, K. **Biomechanical Data Analysis Techniques**. 2016. <<https://me.queensu.ca/People/Deluzio/DataAnalysis.html>>. Acesso em: 30/01/2019.
- DERSIMONIAN, R.; LAIRD, N. Meta-analysis in clinical trials. **Controlled clinical trials**, Elsevier, v. 7, n. 3, p. 177–188, 1986.
- DUTTON, M. **Individual Patient-Level Data meta-analysis: A comparison of methods for the Diverse Populations Collaboration data set**. 2011. Tese (Doutorado) — The Florida State University, 2011.
- FALOPPA, F.; ALBERTONI, W. **Ortopedia e Traumatologia**. São Paulo: Manole, 2008.
- FEBRERO-BANDE, M.; Oviedo de la Fuente, M. Statistical computing in functional data analysis: The R package *fda.usc*. **Journal of Statistical Software**, v. 51, n. 4, p. 1–28, 2012. Disponível em: <<http://www.jstatsoft.org/v51/i04/>>.
- FEBRERO, M.; GALEANO, P.; GONZÁLEZ-MANTEIGA, W. Outlier detection in functional data by depth measures, with application to identify abnormal *nox* levels. **Environmetrics: The official journal of the International Environmetrics Society**, Wiley Online Library, v. 19, n. 4, p. 331–345, 2008.
- FERRATY, F.; VIEU, P. The functional nonparametric model and application to spectrometric data. **Computational Statistics**, Springer, v. 17, n. 4, p. 545–564, 2002.
- _____. Curves discrimination: a nonparametric functional approach. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 44, n. 1, p. 161–173, 2003.
- FRAIMAN, R. et al. Multivariate l-estimation. **Test**, Springer, v. 8, n. 2, p. 255–317, 1999.
- FRAIMAN, R.; MUNIZ, G. Trimmed means for functional data. **Test**, Springer, v. 10, n. 2, p. 419–440, 2001.
- GAMERMAN, D.; LOPES, H. F. **Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference**. Londres: Chapman & Hall/CRC, 2006.
- GELMAN, A.; RUBIN, D. B. Inference from iterative simulation using multiple sequences. **Statistical science**, JSTOR, v. 7, n. 4, p. 457–472, 1992.

- GEMAN, S.; GEMAN, D. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. In: **Readings in computer vision**. [S.l.]: Elsevier, 1987. p. 564–584.
- GLASS, G. V. Primary, secondary, and meta-analysis of research. **Educational researcher**, JSTOR, v. 5, n. 10, p. 3–8, 1976.
- HASTINGS, W. K. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. Oxford University Press, 1970.
- HIGGINS, J. P.; GREEN, S. et al. **Cochrane handbook for systematic reviews of interventions**. [S.l.]: Wiley Online Library, 2008. v. 5.
- HIGHAM, N. J. Computing the nearest correlation matrix - a problem from finance. **IMA journal of Numerical Analysis**, Oxford University Press, v. 22, n. 3, p. 329–343, 2002.
- IEVA, F.; PAGANONI, A. M. Depth measures for multivariate functional data. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 42, n. 7, p. 1265–1276, 2013.
- ISLAM, M. R. **Knee Joint : Anatomy, Movement and Muscle involvement**. 2016. <<https://www.howtorelief.com/knee-joint-anatomy-muscle-involvement/>>. Acesso em: 30/01/2019.
- KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. [S.l.]: Wiley New York, 1989. v. 81.
- LIPPERT, L. **Cinesiologia Clínica E Anatomia**. 5th ed. ed. Rio de Janeiro: Grupo Gen-Guanabara Koogan, 2013.
- LIU, R. Y. On a notion of simplicial depth. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 85, n. 6, p. 1732–1734, 1988.
- _____. On a notion of data depth based on random simplices. **The Annals of Statistics**, JSTOR, p. 405–414, 1990.
- LIU, R. Y. et al. Multivariate analysis by data depth: descriptive statistics, graphics and inference,(with discussion and a rejoinder by liu and singh). **The annals of statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 27, n. 3, p. 783–858, 1999.
- LOCANTORE, N. et al. Robust principal component analysis for functional data. **Test**, Springer, v. 8, n. 1, p. 1–73, 1999.
- LÓPEZ-PINTADO, S.; ROMO, J. On the concept of depth for functional data. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 104, n. 486, p. 718–734, 2009.
- MA, S.; YANG, L.; CARROLL, R. J. A simultaneous confidence band for sparse longitudinal regression. **Statistica Sinica**, NIH Public Access, v. 22, p. 95, 2012.
- MAHALANOBIS, P. C. On the generalized distance in statistics. **National Institute of Science of India**, n. 12, p. 49–55, 1936.

- MARTINS, C. B. **Metanálise caso a caso sob a perspectiva bayesiana**. 2013. Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: <<<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45133/tde-10122013-190238/>>>.
- MORRIS, J. S.; CARROLL, R. J. Wavelet-based functional mixed models. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)**, Wiley Online Library, v. 68, n. 2, p. 179–199, 2006.
- MOSLER, K.; POLYAKOVA, Y. General notions of depth for functional data. **arXiv preprint arXiv:1208.1981**, 2012.
- OJA, H. Descriptive statistics for multivariate distributions. **Statistics & Probability Letters**, Elsevier, v. 1, n. 6, p. 327–332, 1983.
- OLSHEN, R. A. et al. Gait analysis and the bootstrap. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 17, n. 4, p. 1419–1440, 1989.
- PETERS, M. Footedness: asymmetries in foot preference and skill and neuropsychological assessment of foot movement. **Psychological bulletin**, American Psychological Association, v. 103, n. 2, p. 179, 1988.
- PEZZULLI, S.; SILVERMAN, B. Some properties of smoothed principal components analysis for functional data. **Computational Statistics**, PHYSICA-VERLAG GMBH, v. 8, p. 1–16, 1993.
- PINI, A.; VANTINI, S. The interval testing procedure: a general framework for inference in functional data analysis. **Biometrics**, Wiley Online Library, v. 72, n. 3, p. 835–845, 2016.
- _____. Interval-wise testing for functional data. **Journal of Nonparametric Statistics**, Taylor & Francis, v. 29, n. 2, p. 407–424, 2017.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2018. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>.
- RAMSAY, J. O.; DALZELL, C. Some tools for functional data analysis. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B. Methodological**, Royal Statistical Society, v. 53, n. 3, p. 539–572, 1991.
- RAMSAY, J. O.; SILVERMAN, B. W. **Functional data analysis**. New York: Springer, 1997.
- RAMSAY, J. O. et al. **fda: Functional Data Analysis**. [S.l.], 2018. R package version 2.4.8. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=fda>>.
- RASMUSSEN, C. E.; WILLIAMS, C. K. **Gaussian process for machine learning**. Cambridge: MIT press, 2006.
- RAY, S.; MALLICK, B. Functional clustering by bayesian wavelet methods. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)**, Wiley Online Library, v. 68, n. 2, p. 305–332, 2006.

- RICE, J. A.; SILVERMAN, B. W. Estimating the mean and covariance structure nonparametrically when the data are curves. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, Royal Statistical Society, v. 53, n. 1, p. 233–243, 1991.
- SHI, J. et al. Gaussian process functional regression modeling for batch data. **Biometrics**, Wiley Online Library, v. 63, n. 3, p. 714–723, 2007.
- SHI, J. Q.; CHOI, T. **Gaussian process regression analysis for functional data**. New York: CRC Press, 2011.
- SHI, J. Q.; MURRAY-SMITH, R.; TITTERINGTON, D. Hierarchical gaussian process mixtures for regression. **Statistics and computing**, Springer, v. 15, n. 1, p. 31–41, 2005.
- SILVERMAN, B. W. et al. Smoothed functional principal components analysis by choice of norm. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 24, n. 1, p. 1–24, 1996.
- SINGH, K. A notion of majority depth. **Unpublished document**, 1991.
- SPIEGELHALTER, D. J. et al. Bayesian measures of model complexity and fit. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)**, Wiley Online Library, v. 64, n. 4, p. 583–639, 2002.
- STEWART, L. A.; TIERNEY, J. F. To ipd or not to ipd? advantages and disadvantages of systematic reviews using individual patient data. **Evaluation & the health professions**, Sage Publications, v. 25, n. 1, p. 76–97, 2002.
- SUN, Y.; GENTON, M. G. Functional boxplots. **Journal of Computational and Graphical Statistics**, Taylor & Francis, v. 20, n. 2, p. 316–334, 2011.
- SUNDARARAJAN, S.; KEERTHI, S. S. Predictive app roaches for choosing hyperparameters in gaussian processes. In: **Advances in neural information processing systems**. [S.l.: s.n.], 2000. p. 631–637.
- TANAKA, T. et al. Analysis of toe pressures under the foot while dynamic standing on one foot in healthy subjects. **Journal of Orthopaedic & Sports Physical Therapy**, JOSPT, v. 23, n. 3, p. 188–193, 1996.
- TOLSTOV, G. P. **Fourier series**. New York: Dover Publications, 1976.
- TUKEY, J. W. Mathematics and the picturing of data. In: **Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver, 1975**. [S.l.: s.n.], 1975. v. 2, p. 523–531.
- VAUGHAN, C. L.; DAVIS, B. L.; O'CONNOR, J. C. **Dynamics of Human Gait**. 2. ed. South Africa: Human Kinetics Publishers, 1999.
- WASSERMAN, L. **All of Nonparametric Statistics**. [S.l.]: Springer Texts in Statistics. New York: Springer-Verlag, 2006.
- WILLIAMS, C. K.; RASMUSSEN, C. E. Gaussian processes for regression. In: **Advances in neural information processing systems**. [S.l.: s.n.], 1996. p. 514–520.

- WU, H.; ZHANG, J.-T. Local polynomial mixed-effects models for longitudinal data. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 97, n. 459, p. 883–897, 2002.
- YAO, F.; MÜLLER, H.-G.; WANG, J.-L. Functional data analysis for sparse longitudinal data. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 100, n. 470, p. 577–590, 2005.
- ZUO, Y. et al. Projection-based depth functions and associated medians. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 31, n. 5, p. 1460–1490, 2003.
- ZUO, Y.; SERFLING, R. General notions of statistical depth function. **Annals of statistics**, JSTOR, p. 461–482, 2000.

APÊNDICE A – ANÁLISE FUNCIONAL, SÉRIES DE FOURIER E PROCESSO GAUSSIANO

Este apêndice é destinado à inserção de conceitos e definições necessários para o entendimento de termos que aparecem no texto da tese. A [seção A.1](#) traz conceitos de análise funcional, a [seção A.2](#) a definição e propriedades de séries de Fourier, enquanto a [seção A.3](#) define os conceitos de processo estocástico e processo Gaussiano.

A.1 Tópicos de Análise Funcional

As definições e resultados apresentados a seguir foram extraídos de [Kreyszig \(1989\)](#), [Wasserman \(2006\)](#) e [Tolstov \(1976\)](#).

Definição A.1 (Espaço métrico) Um *espaço métrico* é um par (X, d) em que X é um conjunto e d é uma *métrica* em X (ou função distância em X), isto é, uma função definida em $X \times X$ tal que para todo $x, y, z \in X$ temos

(P1) d assume valor real, finito e não negativo;

(P2) $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;

(P3) $d(x, y) = d(y, x)$;

(P4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Desigualdade Triangular)

Definição A.2 (Função contínua) Sejam $X = (X, d)$ e $Y = (Y, \tilde{d})$ espaços métricos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita *contínua no ponto* $x_0 \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\tilde{d}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ para todo } x \in X \text{ satisfazendo } d(x, x_0) < \delta.$$

A função f é dita *contínua* se é contínua em todo ponto de X .

Definição A.3 (Limite e convergência de uma sequência) Uma sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ em um espaço métrico $X = (X, d)$ é dita *convergente* se existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

x é chamado de *limite* da sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \text{ ou } x_n \rightarrow x.$$

Dizemos que $(x_n)_{n \geq 1}$ converge para x ou que tem limite x .

Definição A.4 (Sequência de Cauchy) Uma sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ em um espaço métrico $X = (X, d)$ é dita **sequência de Cauchy** se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon, \text{ para todo } n, m > N.$$

Definição A.5 (Espaço completo) O espaço X é dito **completo** se toda sequência de Cauchy de X converge em X (ou seja, tem um limite que é elemento de X).

Definição A.6 (Espaço vetorial) Um **espaço vetorial** sobre um corpo K (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) é um conjunto não vazio X de elementos x, y, \dots (chamados vetores) juntamente com duas operações algébricas: adição vetorial e multiplicação de vetor por escalar (isto é, elementos de K), que satisfazem:

- A adição de vetores associa para cada par de vetores (x, y) um vetor $x + y$ e valem as seguintes propriedades:

$$(A1) \quad x + y = y + x \quad (\text{adição comutativa});$$

$$(A2) \quad x + (y + z) = (x + y) + z \quad (\text{adição associativa});$$

$$(A3) \quad x + 0 = x \quad (\text{elemento neutro da adição});$$

$$(A4) \quad x + (-x) = 0 \quad (\text{elemento inverso da adição}).$$

- A multiplicação por escalar associa a cada vetor x e escalar α o vetor αx e valem:

$$(M1) \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad (\text{multiplicação associativa});$$

$$(M2) \quad 1x = x \quad (\text{elemento neutro da multiplicação}).$$

- E também são válidas as seguintes propriedades distributivas:

$$(D1) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y ;$$

$$(D2) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

para x, y, z vetores em X e α, β escalares em K .

Definição A.7 (Norma) Uma **norma** em um espaço vetorial X (real ou complexo) é uma função de X assumindo valores reais, cujo valor em um vetor $x \in X$ é denotado por

$$\|x\| \quad (\text{norma de } x)$$

e que tem as seguintes propriedades:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0;$$

(N2) $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

(N4) $\|x + y\| \leq \|x + z\| + \|z + y\|$, (*Desigualdade Triangular*)

em que x, y, z são vetores em X e α é um escalar.

Definição A.8 (Espaço Normado) Um **espaço normado** é um espaço vetorial munido de uma norma.

Definição A.9 (Métrica induzida pela norma) Uma norma em X induz uma métrica d em X que é dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \text{para todo } x, y \in X,$$

que é chamada **métrica induzida pela norma**

Definição A.10 (Espaço de Banach) Um **espaço de Banach** é um espaço normado completo (completo considerando a métrica definida pela norma).

Definição A.11 (Produto interno) Um **produto interno** em um espaço vetorial X é uma função de $X \times X$ assumindo valores em K (corpo escalar de X), isto é, para cada par de vetores x e y de X , é associado um escalar que é denotado por

$$\langle x, y \rangle$$

chamado de **produto interno** de x e y e são válidas as seguintes propriedades:

$$(PI1) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle;$$

$$(PI2) \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle;$$

$$(PI3) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle};$$

$$(PI4) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ e } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$$

Definição A.12 (Norma induzida pelo produto interno) Um produto interno em X define uma norma em X , dada por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in X,$$

chamada **norma induzida pelo produto interno** em X .

Definição A.13 (Métrica induzida pelo produto interno) *Um produto interno em X define uma métrica em X , dada por*

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}, \quad x, y \text{ vetores em } X,$$

*chamada **métrica induzida pelo produto interno** em X .*

Definição A.14 (Espaço de Hilbert) *Um **espaço de Hilbert** é espaço vetorial com produto interno e completo (em relação à métrica induzida pelo produto interno).*

Exemplo A.1 *Considere o espaço $L^2[a, b]$ que é um espaço vetorial com produto interno completo (e portanto, de Hilbert) contendo todas as funções contínuas definidas do intervalo $[a, b]$ na reta tais que $\int_a^b f^2(t)dt < \infty$. O produto interno em $L^2[a, b]$ é definido por*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt, \quad (\text{A.1})$$

para $f, g \in L^2[a, b]$. Consequentemente, a norma induzida pelo produto interno (A.1) em $L^2[a, b]$ é dada por

$$\|f\| = \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

Definição A.15 (Ortogonalidade) *Em um espaço vetorial com produto interno X , dizemos que um elemento $x \in X$ é **ortogonal** a $y \in X$ se*

$$\langle x, y \rangle = 0$$

e denotamos $x \perp y$.

Definição A.16 (Conjuntos e sequências ortogonais e ortonormais) *Um **conjunto ortogonal** M de um espaço vetorial com produto interno X é um subconjunto $M \subset X$ cujos elementos são dois a dois ortogonais. Um **conjunto ortonormal** $M \subset X$ é um conjunto ortogonal cujos elementos têm norma 1, isto é, para todo $x, y \in M$,*

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq y; \\ 1 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

*Se um conjunto ortogonal ou ortonormal M é enumerável, podemos arranjar seus elementos em uma sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ e teremos uma **sequência ortogonal** ou **ortonormal**, respectivamente.*

Exemplo A.2 *Consideremos as sequências $(u_j)_{j \geq 0}$ e $(v_j)_{j \geq 1}$ dadas por*

$$u_j(t) = \cos\left(\frac{j\pi t}{l}\right) \quad \text{e} \quad v_j(t) = \sin\left(\frac{j\pi t}{l}\right).$$

Temos:

- $\|(u_0)\|^2 = 2l$, $\|(u_j)\|^2 = l$ e $\|(v_j)\|^2 = l$, para $j = 1, 2, \dots$

De fato,

$$\|(u_0)\|^2 = \int_0^{2l} \cos^2\left(\frac{0\pi t}{l}\right) dt = \int_0^{2l} 1 dt = 2l,$$

$$\|(u_j)\|^2 = \int_0^{2l} \cos^2\left(\frac{j\pi t}{l}\right) dt = \int_0^{2l} \frac{1 + \cos\left(\frac{2j\pi t}{l}\right)}{2} dt = l, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\|(v_j)\|^2 = \int_0^{2l} \sin^2\left(\frac{j\pi t}{l}\right) dt = \int_0^{2l} \frac{1 - \cos\left(\frac{2j\pi t}{l}\right)}{2} dt = l, \quad j = 1, 2, \dots$$

- $(u_j)_{j \geq 0}$ e $(v_j)_{j \geq 1}$ são ortogonais.

De fato, usando o fato de que

$$\int_0^{2l} \cos\left(\frac{j\pi t}{l}\right) dt = \left[\frac{l}{j\pi} \sin\left(\frac{j\pi t}{l}\right) \right]_{t=0}^{t=2l} = 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots$$

e as seguintes fórmulas trigonométricas,

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \end{aligned}$$

temos,

$$\langle u_j, u_k \rangle = \int_0^{2l} \cos\left(\frac{j\pi t}{l}\right) \cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2l} \cos\left(\frac{(j+k)\pi t}{l}\right) + \cos\left(\frac{(j-k)\pi t}{l}\right) dt = 0,$$

$$\langle v_j, v_k \rangle = \int_0^{2l} \sin\left(\frac{j\pi t}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2l} \cos\left(\frac{(j-k)\pi t}{l}\right) - \cos\left(\frac{(j+k)\pi t}{l}\right) dt = 0,$$

para quaisquer j, k com $j \neq k$.

- $u_j \perp v_k$ para todo j, k .

De fato, usando o fato de que

$$\int_0^{2l} \sin\left(\frac{j\pi t}{l}\right) dt = \left[-\frac{l}{j\pi} \cos\left(\frac{j\pi t}{l}\right) \right]_{t=0}^{t=2l} = 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots$$

e a seguinte fórmula trigonométrica

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)],$$

temos

$$\langle u_j, v_k \rangle = \int_0^{2l} \cos\left(\frac{j\pi t}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2l} \sin\left(\frac{(j+k)\pi t}{l}\right) + \sin\left(\frac{(j-k)\pi t}{l}\right) dt = 0,$$

para quaisquer j, k .

Definição A.17 (Base) Um subconjunto S de um espaço vetorial X é **linearmente independente** se para qualquer subconjunto finito F de S temos $\sum_{v \in F} \lambda_v v = 0 \implies \lambda_v = 0, \forall v \in F$. Nessas condições, dizemos que os vetores de S são linearmente independentes.

Dizemos que um subconjunto $\{v_1, v_2, \dots\}$ de um espaço vetorial X **gera** o espaço X se todo elemento de $x \in X$ pode ser escrito como combinação linear finita dos elementos de $\{v_1, v_2, \dots\}$, $x = \sum_{k=1}^K \lambda_k v_k$, em que λ_k 's são escalares.

Uma **base** de um espaço vetorial é um conjunto de vetores linearmente independentes que geram esse espaço.

Proposição A.1 Se B é uma base para um espaço vetorial X , então todo elemento não nulo de X tem uma representação única como combinação linear finita de elementos não nulos de B .

Proposição A.2 Todo espaço vetorial não nulo tem uma base.

Teorema A.1 Se $f \in L^2[a, b]$ e $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ é uma base ortonormal de $L^2[a, b]$, então f pode ser expandida da seguinte forma

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \phi_k(t) \quad (\text{A.2})$$

em que

$$\theta_k = \int_a^b f(t) \phi_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{A.3})$$

Note que se $\{\psi_1, \psi_2, \dots\}$ for uma base ortogonal, mas não ortonormal, as igualdades (A.2) e (A.3) continuam válidas, com a seguinte adaptação:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \psi_k(t)$$

em que

$$\theta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|} \int_a^b f(t) \psi_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

A.2 Séries de Fourier

Definição A.18 (Função periódica) Uma função $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **periódica** se existe uma constante $T > 0$ para a qual

$$f(x + T) = f(x), \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}.,$$

A constante T é chamada de **período** da função f .

A **frequência** F da função f é definida como o inverso do período, isto é, $F = 1/T$.

Por definição, a *série de Fourier* de uma função periódica e contínua f de período $T = 2\pi$ é dada por

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)]$$

cujos coeficientes a_0 e $a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$ são dados pelas fórmulas de Euler

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k = 1, 2, \dots, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Estes coeficientes são chamados de *coeficientes de Fourier* de f .

Entretanto, podemos definir a série de Fourier para funções de período $T = 2l$ em vez de $T = 2\pi$. Temos então a seguinte definição:

Definição A.19 (Série de Fourier de uma função com período $T = 2l$) A **série de Fourier** de uma função periódica e contínua f de período $T = 2l$ é dada por

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right) \right] \quad (\text{A.4})$$

cujos coeficientes a_0 e $a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$ são dados por

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(t) dt \\ a_k &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right) dt, \quad k = 1, 2, \dots, \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right) dt, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Estes coeficientes são chamados de coeficientes de Fourier de f .

Para determinar os coeficientes dados em (A.5), consideremos as sequências $(u_j)_{j \geq 0}$ e $(v_j)_{j \geq 1}$ dadas por

$$u_j(t) = \cos\left(\frac{j\pi t}{l}\right) \quad \text{e} \quad v_j(t) = \sin\left(\frac{j\pi t}{l}\right).$$

Assim, a equação (A.4) pode ser escrita como

$$f(t) = a_0 u_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} [a_j u_j(t) + b_j v_j(t)]. \quad (\text{A.6})$$

Multipliquemos a equação (A.6) por um u_k fixado e integremos em t de 0 a 1. Isto significa tomar o produto interno por u_k . Assumindo que a integração termo a termo é possível e usando a ortogonalidade de $(u_j)_{j \geq 0}$ e $(v_j)_{j \geq 1}$, bem como o fato de que $u_j \perp v_k$, para todo j, k , temos:

$$\begin{aligned} \langle f, u_k \rangle &= a_0 \langle u_0, u_k \rangle + \sum_{j=1}^{\infty} [a_j \langle u_j, u_k \rangle + b_j \langle v_j, u_k \rangle] \\ &= a_k \langle u_k, u_k \rangle \\ &= a_k \|u_k\|^2, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Analogamente, se multiplicarmos (A.6) por v_k e procedermos como acima, teremos

$$\langle f, v_k \rangle = b_k \|v_k\|^2, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Resolvendo as equações acima para a_k e b_k , temos:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\|u_k\|^2} \langle f, u_k \rangle, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, \\ b_k &= \frac{1}{\|v_k\|^2} \langle f, v_k \rangle, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Lembrando que $\|u_0\|^2 = 2l$, $\|u_k\|^2 = l$, $k = 1, 2, \dots$ e $\|v_k\|^2 = l$, $k = 1, 2, \dots$, obtemos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2l} \langle f, u_0 \rangle = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(t) dt, \\ a_k &= \frac{1}{l} \langle f, u_k \rangle = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right) dt, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, \\ b_k &= \frac{1}{l} \langle f, v_k \rangle = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right) dt, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

A.3 Processo Estocástico e Processo Gaussiano

Um **processo estocástico** é uma coleção de variáveis aleatórias definidas sobre o mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Se denotarmos o índice da coleção por t e o conjunto de índices por T , o processo estocástico pode ser escrito como $\{Y_t(\omega) : t \in T\}$.

Um processo estocástico pode ser interpretado como uma função aleatória $f : T \rightarrow \mathbb{R}$. Neste caso, a função aleatória $t \rightarrow Y_t(\omega)$ é uma realização do processo estocástico em $t \in T$.

Em particular, um **processo Gaussiano** é um processo estocástico parametrizado por sua função média

$$\mu(\cdot) : T \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mu(\mathbf{x}) = E[Y(\mathbf{x})] \quad (\text{A.7})$$

e sua função covariância

$$k(\cdot, \cdot) : T \rightarrow \mathbb{R}, \quad k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \text{Cov}(Y(\mathbf{x}_1), Y(\mathbf{x}_2)), \quad (\text{A.8})$$

e denotamos por $GP(\mu, k)$.

De acordo com o Teorema de Existência de Kolmogorov (também conhecido como Teorema de Extensão de Kolmogorov) (BILLINGSLEY, 1995), um processo estocástico pode ser caracterizado por distribuições finito-dimensionais. Assim, dizer que

$$Y(\cdot) \sim GP(\mu(\cdot), k(\cdot, \cdot)) \quad (\text{A.9})$$

significa que para quaisquer n e $t_1, \dots, t_n \in T$, a distribuição conjunta de $\mathbf{Y}_n = (Y(t_1), \dots, Y(t_n))'$ é uma distribuição normal n -variada com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_n = (\mu(t_1), \dots, \mu(t_n))'$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Psi}$ cuja entrada (r, s) é $k(t_r, t_s)$, $r, s = 1, \dots, n$.

Podemos dizer que um processo estocástico é Gaussiano se todas as distribuições conjuntas finito-dimensionais são normais multivariadas e a função de covariância do processo Gaussiano é uma extensão das matrizes de covariâncias das variáveis aleatórias normais multivariadas. Processos Gaussianos são uma forma natural de definir distribuições *a priori* para espaços de funções, que são os espaços paramétricos para modelos de regressão linear Bayesiana.

APÊNDICE B – SELEÇÃO DE MODELOS

No decorrer deste trabalho necessitamos escolher a quantidade de funções base que seriam usadas na modelagem. Para tal objetivo, utilizamos o critério de seleção de modelos DIC, descrito na Seção B.1. Além disso, utilizamos um método empírico para escolha dos hiperparâmetros da função covariância descrita na Seção 4.1.2. O procedimento adotado, bem como os resultados obtidos para cada indivíduo estão apresentados na Seção B.2.

B.1 DIC

Os critérios de comparação de modelos, têm por objetivo averiguar se um conjunto de dados foi satisfatoriamente ajustado a um determinado modelo, além de servir como uma ferramenta para a escolha do melhor modelo dentre uma coleção de modelos. Objetivando resolver estes dilemas, a literatura apresenta diversas metodologias. Neste trabalho utilizamos o critério de seleção de modelos DIC (*Deviance Information Criterion*).

O critério DIC foi proposto por Spiegelhalter et al. (2002) e é baseado na média *a posteriori* da deviança, $E[D(\theta)]$, que é uma medida de ajuste e que pode ser aproximada por

$$\bar{D} = \frac{1}{V} \sum_{v=1}^V D(\theta_v),$$

sendo v o índice que indica a v -ésima realização de um total de V realizações (após o burn-in e saltos) e $D(\theta) = -2 \sum_i^n \log f(t_i|\theta)$, em que $f(\cdot)$ é a função densidade de probabilidade correspondente ao modelo.

Dessa forma, o critério DIC pode ser calculado por

$$\widehat{DIC} = \bar{D} - \hat{D}$$

em que $\hat{D} = D\left(\frac{1}{V} \sum_{v=1}^V \theta_v\right)$ é uma estimativa para $D\{E(\theta)\}$.

Tendo como base o valor obtido através do cálculo do DIC, temos que o modelo preferido, dentre uma coleção, é aquele com menor valor deste critério.

B.1.1 Escolha do M - limite superior na soma de Fourier

Na modelagem da marcha, utilizamos uma aproximação por soma de Fourier para descrever a curva média do movimento de flexão-extensão do joelho. O valor de M precisava, então, ser determinado. Utilizamos o critério de seleção de modelos DIC para tal propósito. A partir do modelo descrito na seção 3.1 do Capítulo 3, utilizamos diversos valores para M , mais precisamente, $M = 1, \dots, 49$ e calculamos o valor de DIC para

cada modelo, de cada indivíduo. Os valores obtidos encontram-se nas Tabelas 28 a 31. Os menores valores do DIC estão em negrito e significam que o correspondente valor de M é o melhor modelo para cada membro inferior do indivíduo. Podemos notar que os valores de M mudam entre os indivíduos. Entretanto, sabendo que um dos objetivos do trabalho é obter uma análise populacional e conseqüentemente temos a restrição de que precisamos utilizar um mesmo valor de M para todos os indivíduos, optamos por adotar o maior M escolhido pelo critério DIC dentre todos os indivíduos. Sendo assim, o valor de M é 13.

Tabela 28: Valores do DIC para o modelo de regressão Bayesiano, indivíduos 1 a 8, membro inferior dominante

<i>M</i>	Ind. 1	Ind. 2	Ind. 3	Ind. 4	Ind. 5	Ind. 6	Ind. 7	Ind. 8
1	26594,21	26531,42	27538,54	27875,11	28413,00	26891,96	27688,63	26113,88
2	18046,88	18322,92	19310,83	18260,11	20630,33	19105,05	21035,30	17866,89
3	12951,82	13732,03	14774,68	14878,02	16680,16	15843,58	17277,13	14798,75
4	11763,90	12734,27	14040,00	13305,67	15065,24	14961,10	15731,63	14161,88
5	11050,41	12521,72	13471,18	12793,05	13841,70	14025,10	14587,63	13677,16
6	10938,16	12484,26	13471,98	12782,30	13617,23	13956,14	14248,23	13487,95
7	10864,28	12397,43	13345,37	12717,50	13511,06	13876,44	14036,75	13333,01
8	10838,95	12366,01	13279,47	12715,41	13358,22	13812,89	14012,81	13320,00
9	10764,11	12355,64	13264,29	12708,89	13351,47	13814,30	13988,24	13248,22
10	10741,98	12349,25	13200,45	12703,42	13288,99	13786,10	13955,79	13236,56
11	10727,07	12350,30	13176,04	12700,81	13287,92	13782,62	13959,08	13231,68
12	10719,25	12351,40	13173,85	12698,57	13272,49	13781,00	13959,95	13230,92
13	10721,68	12354,77	13173,61	12699,82	13267,70	13782,67	13960,70	13233,58
14	10722,68	12358,52	13176,39	12702,94	13267,85	13787,20	13962,11	13235,69
15	10726,23	12362,98	13179,88	12707,48	13270,32	13791,36	13966,95	13238,95
16	10728,94	12365,76	13184,51	12710,82	13274,00	13795,91	13969,07	13244,42
17	10734,72	12370,25	13188,05	12716,54	13278,06	13798,72	13972,80	13247,92
18	10738,15	12372,95	13191,48	12719,13	13280,78	13802,97	13977,04	13251,14
19	10742,17	12377,11	13197,03	12722,19	13284,97	13807,53	13981,18	13256,23
20	10745,61	12382,23	13200,39	12727,68	13289,83	13810,85	13985,58	13260,18
21	10749,64	12386,91	13204,10	12731,29	13294,06	13815,31	13988,40	13263,92
22	10753,67	12391,10	13209,07	12734,68	13296,41	13819,37	13992,73	13267,36
23	10758,47	12395,40	13213,40	12740,09	13300,97	13823,01	13997,18	13271,38
24	10762,09	12399,05	13215,19	12742,95	13305,24	13827,93	14001,02	13275,68
25	10766,00	12402,76	13221,63	12746,62	13308,65	13830,60	14004,45	13280,75
26	10770,51	12405,27	13224,69	12751,30	13313,23	13836,10	14007,41	13283,76
27	10774,23	12409,91	13227,34	12754,58	13316,75	13839,03	14013,20	13287,73
28	10777,77	12414,08	13233,08	12759,62	13323,22	13844,69	14017,80	13292,06
29	10781,80	12418,80	13235,93	12762,95	13325,98	13848,26	14020,22	13294,76
30	10787,28	12421,14	13242,18	12767,69	13330,32	13851,91	14025,74	13297,95
31	10791,06	12426,49	13245,36	12771,00	13334,15	13855,82	14029,79	13303,77
32	10792,79	12430,36	13248,55	12776,45	13338,44	13859,91	14034,62	13307,70
33	10798,41	12434,42	13252,93	12780,27	13341,69	13863,97	14037,21	13311,43
34	10803,67	12438,70	13257,08	12784,24	13346,98	13867,44	14040,41	13316,20
35	10806,06	12442,42	13260,45	12788,05	13348,29	13870,92	14046,02	13320,00
36	10810,11	12445,54	13264,96	12790,10	13353,37	13873,84	14050,26	13322,95
37	10814,43	12452,85	13269,18	12795,39	13359,47	13878,88	14053,44	13328,31
38	10819,05	12455,11	13274,27	12797,97	13363,10	13882,71	14058,21	13331,88
39	10822,46	12459,48	13277,10	12803,32	13365,60	13887,91	14061,46	13333,97
40	10826,24	12462,43	13282,85	12807,53	13371,40	13892,37	14066,23	13340,49
41	10830,62	12467,48	13283,95	12811,64	13373,88	13895,74	14070,16	13344,41
42	10835,50	12473,18	13288,26	12815,85	13377,37	13898,13	14074,76	13347,74
43	10838,67	12474,87	13294,16	12820,45	13381,14	13905,26	14077,75	13351,10
44	10841,95	12479,58	13296,69	12824,47	13387,52	13906,19	14081,94	13357,49
45	10845,83	12482,57	13300,68	12827,85	13389,89	13912,54	14085,19	13361,06
46	10851,54	12489,13	13304,74	12830,50	13392,50	13914,89	14091,35	13366,02
47	10855,27	12492,36	13310,05	12836,21	13397,03	13920,01	14093,96	13367,53
48	10858,45	12494,65	13314,48	12840,16	13405,30	13924,70	14098,14	13372,84
49	10864,03	12499,56	13318,90	12842,73	13405,74	13927,91	14103,17	13376,17

Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 29: Valores do DIC para o modelo de regressão Bayesiano, indivíduos 9 a 16, membro inferior dominante

M	Ind. 9	Ind. 10	Ind. 11	Ind. 12	Ind. 13	Ind. 14	Ind. 15	Ind. 16
1	27702,78	26696,30	27472,25	27267,07	25749,18	28198,94	27879,27	27372,61
2	19799,08	19297,69	18723,44	20409,32	18124,29	20771,57	20200,65	21281,52
3	15739,96	16437,87	14631,27	15083,30	16631,12	16524,67	17087,92	17178,14
4	14455,22	15155,24	13975,33	14245,02	15513,85	16073,01	16722,51	15407,45
5	13866,80	13917,13	13493,13	13129,31	15424,79	15563,55	16161,78	14750,79
6	13822,75	13645,87	13411,73	12911,78	15420,79	15446,17	16112,25	14723,13
7	13741,05	13612,53	13399,27	12889,13	15384,78	15398,50	15987,58	14709,45
8	13581,87	13548,76	13367,45	12821,50	15385,22	15374,08	15963,63	14672,11
9	13545,03	13512,14	13355,54	12822,59	15364,48	15372,82	15939,80	14649,04
10	13515,60	13449,37	13338,93	12811,38	15359,79	15370,42	15934,10	14634,59
11	13509,35	13435,58	13335,39	12805,51	15359,69	15373,89	15935,57	14625,29
12	13508,19	13421,07	13331,99	12806,86	15359,86	15376,15	15937,83	14623,43
13	13508,56	13415,88	13331,31	12808,82	15364,24	15380,44	15941,33	14620,80
14	13511,19	13419,27	13333,59	12813,87	15367,33	15383,79	15945,91	14624,64
15	13515,60	13420,82	13335,51	12817,04	15370,99	15388,98	15949,14	14628,10
16	13519,57	13424,28	13338,55	12820,59	15374,88	15392,22	15952,96	14631,22
17	13523,60	13427,76	13342,99	12824,19	15379,73	15396,23	15957,26	14635,13
18	13525,58	13432,07	13346,70	12827,87	15382,39	15400,89	15961,07	14638,96
19	13531,12	13435,67	13351,44	12832,55	15386,87	15404,69	15964,88	14643,78
20	13534,58	13438,96	13355,45	12834,50	15391,24	15408,75	15970,30	14646,00
21	13538,36	13443,54	13358,81	12840,11	15394,83	15412,40	15973,74	14650,11
22	13542,17	13447,95	13361,89	12844,58	15399,20	15416,06	15976,91	14656,42
23	13547,28	13451,34	13368,41	12848,49	15402,69	15421,53	15982,25	14659,70
24	13549,41	13455,37	13371,22	12852,90	15406,85	15424,59	15984,99	14663,95
25	13554,86	13459,67	13375,53	12855,90	15411,44	15427,90	15988,02	14668,89
26	13559,84	13463,16	13379,19	12861,16	15415,51	15433,09	15993,86	14671,80
27	13563,69	13467,61	13383,51	12865,20	15419,42	15436,80	15997,96	14676,82
28	13567,43	13471,14	13386,48	12868,34	15422,42	15439,93	16001,34	14680,05
29	13571,43	13477,42	13391,84	12873,26	15427,94	15445,06	16005,44	14684,17
30	13575,40	13479,23	13396,15	12877,05	15432,55	15449,71	16010,58	14688,15
31	13578,91	13483,65	13399,05	12881,37	15434,82	15452,16	16013,16	14692,80
32	13583,96	13488,37	13403,44	12884,51	15439,76	15457,18	16016,71	14695,49
33	13586,63	13490,62	13408,07	12889,80	15443,84	15461,87	16022,27	14701,11
34	13591,92	13494,25	13409,95	12891,46	15448,60	15463,76	16024,89	14704,39
35	13594,95	13499,60	13415,41	12897,72	15450,79	15468,60	16029,53	14706,95
36	13598,10	13504,11	13419,25	12899,36	15455,68	15472,65	16033,73	14711,24
37	13604,63	13507,46	13423,49	12904,24	15458,18	15477,90	16037,31	14715,49
38	13606,04	13512,11	13428,45	12909,22	15463,91	15479,44	16041,28	14720,45
39	13610,80	13517,43	13431,36	12912,60	15467,47	15485,01	16045,88	14722,17
40	13615,42	13519,54	13436,12	12918,46	15472,05	15490,00	16049,60	14728,77
41	13618,56	13523,47	13439,10	12918,97	15475,53	15493,03	16054,57	14730,97
42	13623,74	13528,14	13444,90	12924,52	15479,00	15497,79	16058,96	14736,43
43	13628,41	13532,93	13447,30	12928,85	15485,10	15501,16	16061,48	14738,83
44	13631,50	13536,33	13452,09	12934,62	15488,55	15505,78	16065,50	14744,09
45	13635,07	13540,31	13457,43	12938,11	15492,09	15508,68	16069,19	14747,40
46	13639,51	13543,74	13459,98	12941,56	15496,14	15513,48	16073,86	14751,32
47	13643,54	13549,52	13463,90	12944,30	15499,30	15517,66	16077,20	14757,66
48	13647,02	13552,47	13467,44	12950,63	15505,74	15521,35	16082,79	14758,40
49	13652,50	13556,54	13471,37	12952,22	15509,02	15523,53	16085,08	14765,76

Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 30: Valores do DIC para o modelo de regressão Bayesiano, indivíduos 1 a 8, membro inferior não dominante

<i>M</i>	Ind. 1	Ind. 2	Ind. 3	Ind. 4	Ind. 5	Ind. 6	Ind. 7	Ind. 8
1	26023,13	26058,086	26882,26	26106,38	28265,60	27577,40	28700,60	25657,64
2	18465,67	19146,287	19861,04	18575,75	19687,05	19857,87	21238,83	18002,19
3	16109,83	14589,242	15584,75	15793,06	15344,19	14974,34	17056,13	15956,56
4	15388,96	11699,352	14199,22	13242,36	14241,10	14396,88	15946,04	14551,30
5	15037,74	10512,310	13233,81	11902,49	13430,84	12877,02	15237,24	13170,85
6	15013,11	10355,088	13132,95	11900,57	13253,45	12638,76	15136,76	13005,45
7	14980,86	10081,268	12941,78	11636,16	13138,26	12236,57	15097,47	12741,56
8	14969,96	9775,284	12819,08	11572,45	13089,63	12210,18	15090,09	12496,00
9	14963,88	9714,834	12805,25	11496,96	13072,36	12148,37	15081,94	12383,05
10	14963,33	9659,255	12729,76	11467,53	13048,34	12092,95	15072,90	12328,85
11	14964,11	9659,094	12675,84	11461,48	13042,03	12083,40	15076,83	12285,84
12	14965,70	9650,412	12672,41	11448,06	13031,14	12071,16	15079,31	12277,87
13	14969,03	9652,886	12669,70	11450,09	13026,79	12065,08	15082,53	12276,61
14	14972,33	9656,330	12671,91	11451,55	13027,17	12068,80	15086,02	12280,18
15	14976,75	9659,260	12674,38	11455,64	13030,77	12071,18	15089,01	12284,42
16	14980,12	9662,798	12679,55	11460,11	13032,94	12074,53	15093,73	12287,33
17	14984,44	9666,663	12682,56	11463,17	13037,25	12079,08	15097,32	12291,28
18	14988,52	9670,374	12687,97	11465,75	13040,87	12083,51	15100,50	12296,51
19	14991,74	9672,798	12690,71	11470,97	13043,08	12087,08	15105,72	12299,87
20	14995,90	9679,027	12693,39	11475,83	13048,63	12092,03	15109,81	12303,81
21	15000,18	9682,025	12699,10	11478,46	13052,72	12095,86	15114,15	12306,71
22	15003,83	9687,000	12702,84	11483,14	13057,34	12099,41	15116,70	12312,27
23	15007,97	9691,322	12705,93	11487,54	13060,49	12103,41	15120,94	12315,83
24	15011,79	9694,185	12709,86	11491,37	13065,48	12108,26	15124,93	12319,55
25	15017,33	9698,077	12715,35	11494,60	13068,94	12112,98	15129,24	12323,41
26	15019,92	9702,775	12719,23	11498,45	13072,08	12116,18	15133,99	12327,42
27	15024,72	9707,013	12721,15	11503,60	13077,81	12119,18	15137,08	12332,00
28	15029,61	9711,050	12727,25	11506,61	13080,91	12123,90	15141,54	12335,80
29	15032,66	9714,004	12731,77	11511,19	13085,99	12128,01	15145,54	12340,06
30	15036,53	9718,100	12734,10	11516,17	13089,93	12131,18	15148,93	12344,68
31	15040,19	9722,247	12738,12	11520,49	13092,69	12135,91	15152,92	12347,05
32	15046,30	9726,041	12741,97	11523,38	13096,78	12139,70	15157,02	12350,60
33	15047,54	9730,719	12748,59	11527,45	13099,14	12143,31	15162,31	12356,03
34	15052,23	9734,251	12751,19	11530,45	13105,74	12147,00	15165,54	12359,97
35	15057,48	9739,623	12754,97	11535,02	13109,89	12152,85	15169,62	12364,35
36	15061,32	9742,914	12758,65	11539,60	13114,36	12157,82	15172,43	12367,47
37	15064,00	9746,392	12762,82	11544,05	13116,04	12158,32	15177,76	12372,24
38	15067,57	9750,165	12767,30	11546,51	13120,80	12163,62	15181,15	12377,11
39	15071,94	9754,071	12770,75	11550,14	13126,23	12169,14	15184,86	12379,30
40	15078,91	9758,889	12775,83	11556,64	13129,24	12173,75	15189,39	12385,80
41	15081,06	9761,892	12779,18	11558,72	13133,85	12176,90	15195,39	12387,76
42	15083,89	9767,693	12781,85	11562,43	13137,16	12180,66	15197,81	12392,54
43	15088,91	9772,110	12787,83	11568,79	13140,79	12183,16	15203,92	12396,70
44	15093,10	9775,008	12792,18	11570,48	13145,75	12188,98	15206,58	12400,34
45	15097,29	9778,806	12794,88	11575,77	13149,72	12191,52	15210,62	12404,80
46	15101,64	9783,975	12799,37	11580,39	13153,48	12197,14	15215,12	12409,21
47	15104,12	9785,899	12803,91	11585,00	13157,80	12199,71	15217,85	12411,86
48	15109,08	9791,206	12807,55	11589,92	13161,42	12205,15	15221,89	12416,13
49	15114,02	9795,593	12812,83	11591,41	13166,42	12208,63	15226,08	12419,52

Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 31: Valores do DIC para o modelo de regressão Bayesiano, indivíduos 9 a 16, membro inferior não dominante

M	Ind. 9	Ind. 10	Ind. 11	Ind. 12	Ind. 13	Ind. 14	Ind. 15	Ind. 16
1	27871,40	27560,94	27358,43	26715,60	26196,06	27730,96	26398,79	27499,54
2	20411,44	19060,27	19835,17	19934,92	19977,91	20445,03	18215,34	20580,98
3	15228,63	15439,51	16748,04	15834,00	19215,52	16515,81	15699,94	16054,41
4	14520,85	14601,18	15960,77	14154,41	18885,90	15926,20	14696,80	15539,74
5	13572,82	13805,58	15512,86	12657,45	18865,37	15396,99	14036,37	15419,11
6	13491,18	13767,37	15450,08	12563,41	18868,60	15211,69	13990,35	15416,86
7	13379,25	13763,98	15438,05	12491,90	18870,34	15197,71	13703,50	15418,28
8	13242,92	13721,40	15402,84	12463,74	18874,05	15138,52	13625,65	15374,18
9	13190,18	13695,33	15399,00	12454,09	18877,34	15139,54	13620,14	15363,38
10	13174,05	13688,20	15386,84	12438,35	18881,57	15130,51	13602,49	15343,29
11	13171,28	13688,85	15384,43	12439,08	18884,84	15123,35	13601,13	15343,44
12	13172,03	13688,54	15385,45	12435,02	18888,12	15125,18	13604,95	15342,46
13	13174,07	13690,59	15387,72	12436,78	18892,66	15126,82	13608,24	15346,08
14	13177,33	13693,36	15391,70	12439,64	18897,22	15130,23	13610,38	15346,82
15	13181,20	13697,17	15395,47	12443,39	18901,16	15134,28	13614,84	15351,26
16	13185,09	13700,04	15397,49	12447,38	18903,99	15139,16	13618,99	15355,56
17	13188,27	13704,25	15400,59	12450,51	18909,44	15142,07	13621,83	15358,28
18	13191,70	13708,10	15405,74	12454,45	18912,10	15145,74	13626,53	15362,34
19	13196,61	13712,67	15409,88	12458,24	18916,74	15150,62	13630,03	15367,31
20	13200,11	13716,88	15414,61	12463,05	18920,77	15154,66	13635,32	15371,35
21	13203,63	13719,79	15418,51	12465,56	18925,93	15159,07	13638,19	15375,68
22	13209,27	13724,30	15420,58	12470,60	18929,33	15163,56	13641,39	15378,77
23	13211,52	13727,54	15425,87	12474,20	18933,63	15166,62	13646,45	15382,54
24	13217,05	13731,89	15429,75	12479,33	18936,09	15171,48	13651,51	15385,95
25	13219,64	13735,68	15433,29	12483,13	18941,48	15174,72	13653,74	15390,19
26	13224,65	13740,34	15438,40	12487,19	18944,83	15178,89	13658,19	15394,54
27	13228,43	13744,24	15442,64	12489,99	18949,40	15183,24	13662,74	15398,66
28	13232,63	13748,34	15445,02	12494,53	18953,71	15186,79	13666,41	15403,72
29	13237,09	13751,02	15450,04	12498,93	18956,55	15190,73	13670,60	15406,39
30	13241,48	13757,04	15454,74	12503,17	18960,54	15194,90	13675,92	15409,96
31	13245,52	13760,36	15458,10	12506,66	18963,68	15198,75	13679,53	15415,29
32	13248,73	13764,89	15462,06	12511,66	18968,64	15201,46	13681,10	15419,14
33	13253,03	13769,06	15466,21	12514,37	18972,90	15206,01	13688,19	15423,88
34	13257,25	13774,47	15471,52	12517,94	18977,64	15211,55	13692,12	15428,10
35	13260,66	13775,85	15474,80	12522,79	18981,82	15214,27	13695,18	15431,34
36	13266,32	13780,42	15479,05	12527,02	18985,65	15218,80	13698,48	15434,71
37	13269,95	13786,41	15482,28	12531,07	18988,12	15222,56	13701,79	15439,03
38	13272,27	13788,29	15484,57	12532,54	18993,37	15226,97	13706,02	15442,81
39	13277,93	13793,16	15491,12	12537,87	18996,19	15232,22	13711,28	15447,60
40	13279,85	13796,60	15494,30	12543,29	19002,58	15235,56	13716,76	15451,72
41	13284,53	13800,13	15498,20	12548,07	19005,81	15240,22	13719,47	15456,65
42	13290,31	13804,92	15501,54	12550,50	19009,87	15243,51	13722,98	15458,18
43	13292,93	13809,02	15506,83	12555,50	19014,58	15248,92	13726,79	15462,69
44	13297,56	13813,48	15511,39	12559,22	19017,30	15251,10	13733,17	15466,63
45	13300,10	13816,75	15515,06	12562,36	19022,12	15254,67	13735,40	15470,47
46	13302,77	13820,39	15518,06	12566,88	19026,26	15259,49	13738,61	15476,01
47	13308,72	13825,33	15523,92	12570,02	19027,33	15263,25	13743,34	15478,09
48	13314,33	13828,55	15526,05	12574,76	19033,88	15268,37	13747,98	15483,11
49	13318,28	13831,76	15531,24	12578,79	19038,64	15272,35	13751,82	15487,41

Fonte: Elaborada pela autora

B.2 Escolha dos Hiperparâmetros da Função Covariância

A matriz de covariância de um vetor aleatório muitas vezes não é conhecida e precisa ser estimada. A estimação pode ser feita utilizando uma amostra da variável aleatória multidimensional. A matriz de covariância amostral, dada por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})',$$

em que \mathbf{x}_i é a i -ésima observação de um vetor p -dimensional e

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i,$$

é um estimador não-viesado da matriz de covariância populacional Σ (ANDERSON, 1958).

Em algumas aplicações tem-se o objetivo de encontrar a matriz de covariância ou matriz de correlação “mais próxima” para uma dada matriz simétrica (por exemplo, da matriz de covariância amostral). Higham (2002) formalizou a noção de proximidade usando uma norma ponderada de Frobenius e forneceu um método para calcular a matriz de correlação mais próxima.

Dada uma matriz simétrica arbitrária $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, podemos calcular a distância

$$\gamma(A) = \min \|A - X\| : X \text{ é uma matriz de covariância.} \quad (\text{B.1})$$

O objetivo é encontrar a matriz $A = [a_{ij}]$ que atinge esta distância mínima, considerando a norma de Frobenius $\|A\|_F^2 = \sum_{ij} |a_{ij}|^2$.

Adaptando esta ideia para o nosso problema, precisamos encontrar a matriz de covariância $[\Psi(\sigma^2)]$ definida em (4.10) que seja a matriz “mais próxima” da matriz de covariância amostral. No nosso caso, a matriz $[\Psi(\sigma^2)]$ é dada por

$$[\Psi(\sigma^2)][r, s] = \nu_0 \exp\left(-\frac{1}{2w^2}(t_r - t_s)^2\right) + \sigma^2 \delta_{rs}, \quad (\text{B.2})$$

para $r, s = 1, \dots, K$. Assim, o problema reduz-se em encontrar os hiperparâmetros $(\boldsymbol{\theta}_0, \sigma^2)' = (\nu_0, w, \sigma^2)'$ que minimizam a distância entre a matriz $[\Psi(\sigma^2)]$ e a matriz de covariância empírica. O problema torna-se então um problema de otimização e foi resolvido utilizando uma função de otimização (optim) do software R Core Team (2018).

Os valores de $(\boldsymbol{\theta}_0, \sigma^2)' = (\nu_0, w, \sigma^2)'$ obtidos para cada membro inferior de cada indivíduo encontram-se nas Tabelas 32 e 33.

Tabela 32: Valores dos hiperparâmetros $\theta = (\theta_0, \sigma^2)' = (\nu_0, w, \sigma^2)'$ da matriz Ψ para o membro inferior dominante de cada indivíduo

Ind.	ν_0	w	σ^2
1	1,0648614	0,1090434	0,023988150
2	2,2720667	0,1000025	-0,009544393
3	0,9999890	0,1000000	-0,015356650
4	0,9999290	0,1000000	-0,014869060
5	0,9999624	0,1000000	-0,020151370
6	1,9999187	0,1118034	-0,018758600
7	0,9999847	0,1000000	0,022225670
8	0,9999519	0,1000000	-0,012512000
9	2,7524430	0,1414355	0,008621248
10	1,0000121	0,1000000	-0,015489880
11	0,9999548	0,1000000	-0,018104410
12	0,9999434	0,1000000	-0,015229610
13	1,9999835	0,1414214	0,021407160
14	1,0000405	0,1000000	0,023924410
15	1,9999491	0,1118034	0,026397390
16	1,7492597	0,9944418	-0,010352850

Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 33: Valores dos hiperparâmetros $\theta = (\theta_0, \sigma^2)' = (\nu_0, w, \sigma^2)'$ da matriz Ψ para o membro inferior não dominante de cada indivíduo

Ind.	ν_0	w	σ^2
1	1,2281627	0,9954185	0,020731750
2	0,3641473	0,9685395	-0,009741480
3	0,9997759	0,9999898	0,011962470
4	0,8164508	0,9819623	-0,005532269
5	0,9999273	0,1118034	-0,012999530
6	0,9303341	0,9895713	0,004286722
7	0,9999809	1,0000005	0,020102570
8	0,7774421	0,9873846	-0,012869620
9	0,7846309	0,9663766	0,013165450
10	1,0000263	0,1000000	-0,018212550
11	1,0131084	1,0002502	0,021415450
12	0,9263187	0,9939557	0,008149182
13	2,7913730	1,0056142	-0,028212610
14	1,0519842	1,0013769	0,027085870
15	0,9983628	0,9993969	-0,010049540
16	0,9998637	0,9999923	0,021566660

Fonte: Elaborada pela autora

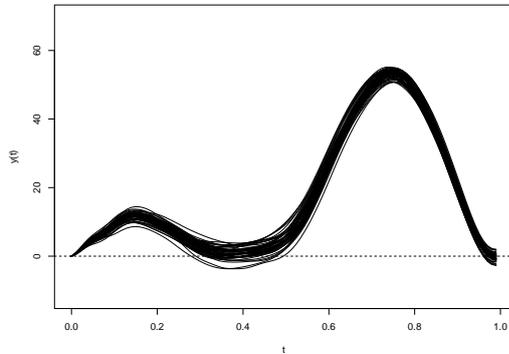
APÊNDICE C – FIGURAS

Este capítulo é destinado à inserção de gráficos que não foram incluídos no texto para que este não ficasse muito extenso. Em geral, apenas os gráficos correspondentes aos 1º indivíduo da amostra foi inserido no texto. Apresentamos nas seções a seguir, alguns desses gráficos para os demais indivíduos. Na [seção C.1](#) podemos conferir os gráficos com os dados dos indivíduos 2 a 16, objetos de estudo de todo o trabalho. A [seção C.2](#) contém os gráficos das estimativas *a posteriori* da curva média e a [seção C.3](#) os gráficos das estimativas da média da distribuição preditiva *a posteriori*, referentes ao modelo do [Capítulo 3](#). Na [seção C.4](#) encontramos os gráficos estimativas *a posteriori* da curva média e a [seção C.5](#) os gráficos das estimativas da média da distribuição preditiva *a posteriori*, referentes ao modelo do [Capítulo 4](#). As Seções [C.6](#), [C.7](#) e [C.8](#) trazem as ilustrações das bandas preditivas funcionais utilizando os métodos propostos nas Seções [6.1.1](#), [6.1.2](#) e [6.1.3](#), respectivamente, considerando as amostras da distribuição preditiva *a posteriori* obtidas a partir do modelo do [Capítulo 4](#).

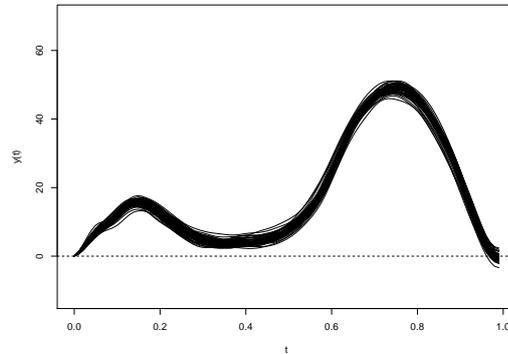
C.1 Gráficos com os dados de cada indivíduo

Figura 54: Gráficos com os dados de todas as passadas do 2º indivíduo

(a) membro inferior dominante



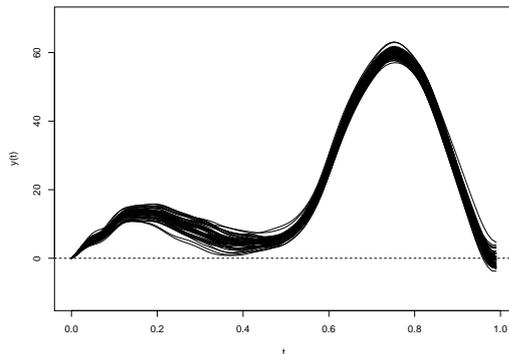
(b) membro inferior não dominante



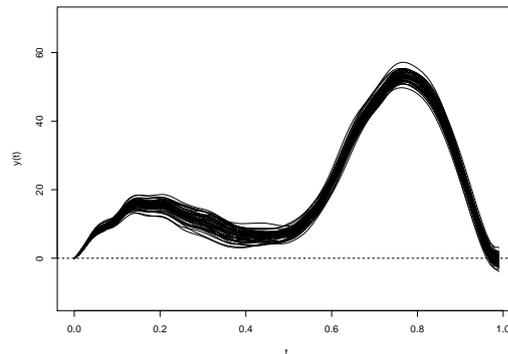
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 55: Gráficos com os dados de todas as passadas do 3º indivíduo

(a) membro inferior dominante



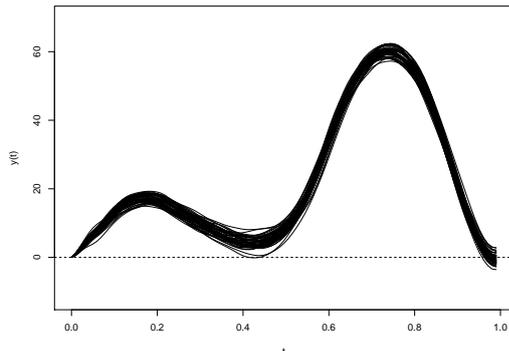
(b) membro inferior não dominante



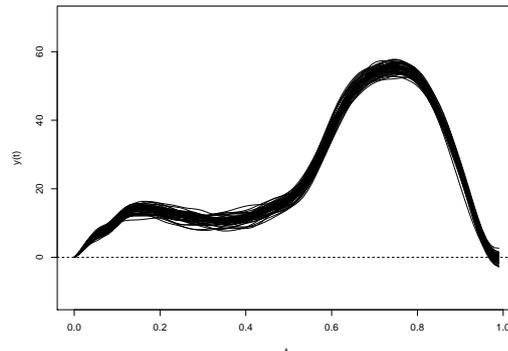
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 56: Gráficos com os dados de todas as passadas do 4º indivíduo

(a) membro inferior dominante



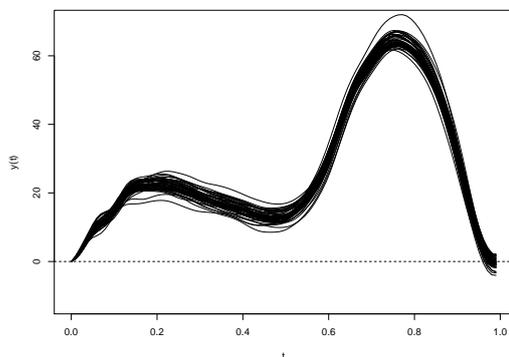
(b) membro inferior não dominante



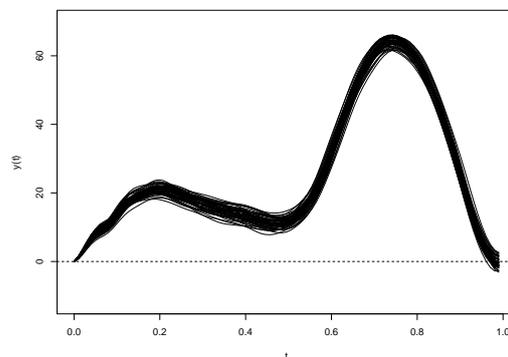
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 57: Gráficos com os dados de todas as passadas do 5º indivíduo

(a) membro inferior dominante



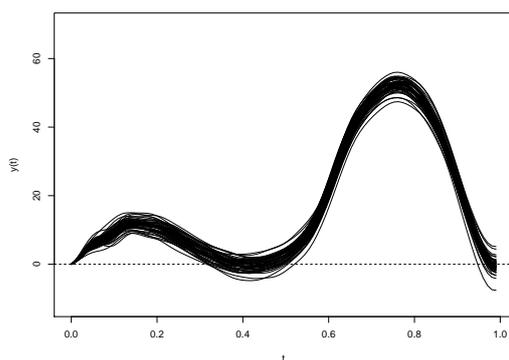
(b) membro inferior não dominante



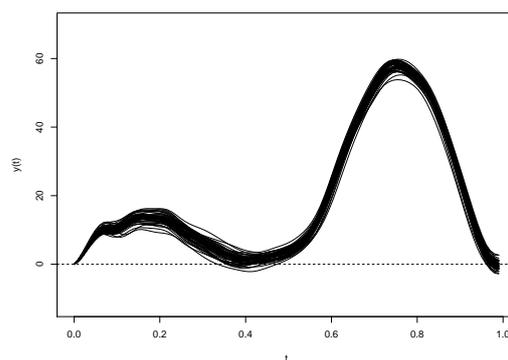
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 58: Gráficos com os dados de todas as passadas do 6º indivíduo

(a) membro inferior dominante



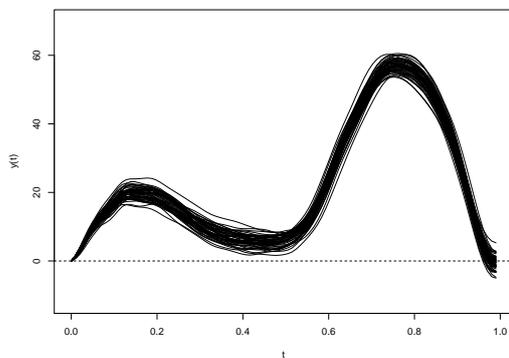
(b) membro inferior não dominante



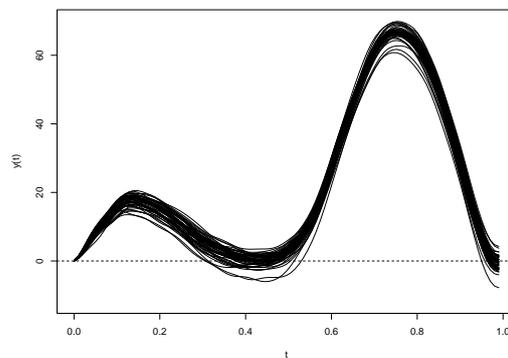
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 59: Gráficos com os dados de todas as passadas do 7º indivíduo

(a) membro inferior dominante



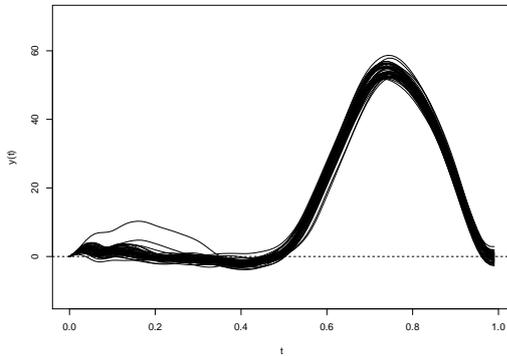
(b) membro inferior não dominante



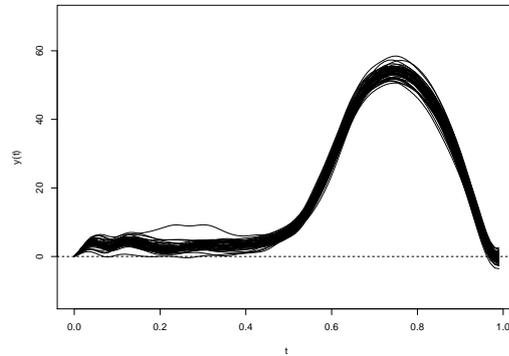
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 60: Gráficos com os dados de todas as passadas do 8º indivíduo

(a) membro inferior dominante



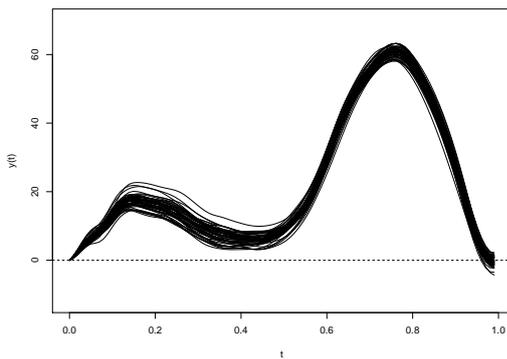
(b) membro inferior não dominante



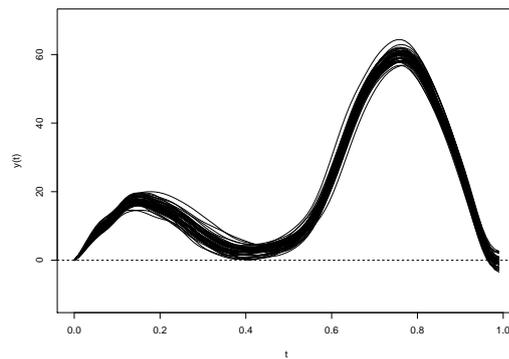
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 61: Gráficos com os dados de todas as passadas do 9º indivíduo

(a) membro inferior dominante



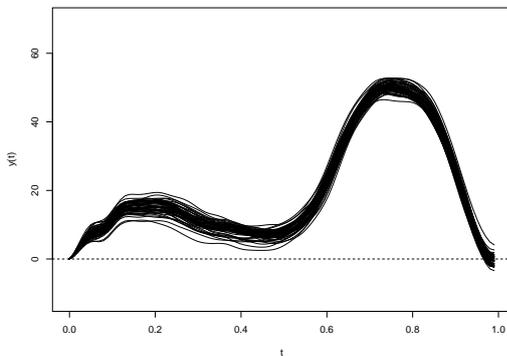
(b) membro inferior não dominante



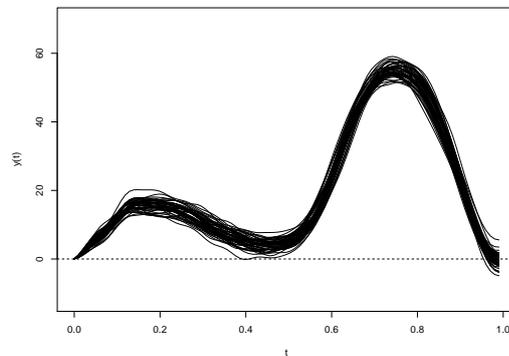
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 62: Gráficos com os dados de todas as passadas do 10º indivíduo

(a) membro inferior dominante



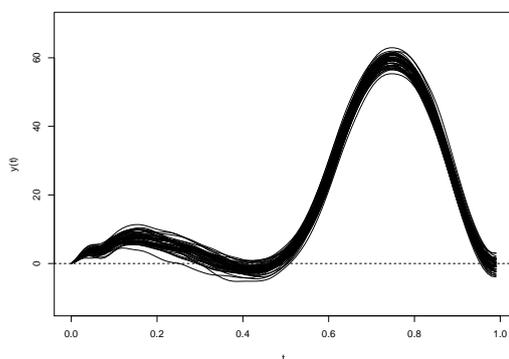
(b) membro inferior não dominante



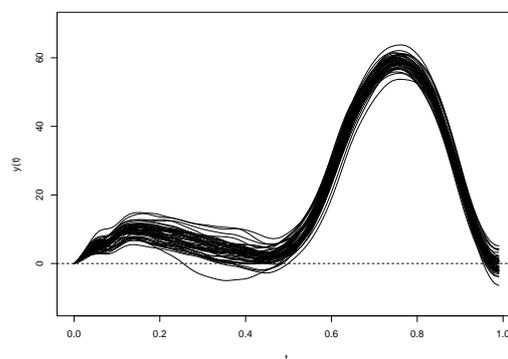
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 63: Gráficos com os dados de todas as passadas do 11^o indivíduo

(a) membro inferior dominante



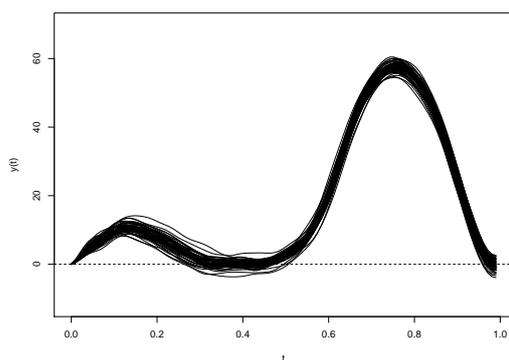
(b) membro inferior não dominante



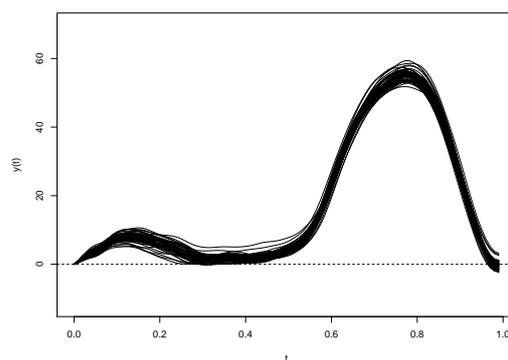
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 64: Gráficos com os dados de todas as passadas do 12^o indivíduo

(a) membro inferior dominante



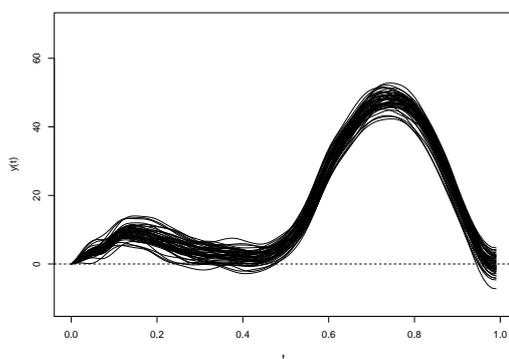
(b) membro inferior não dominante



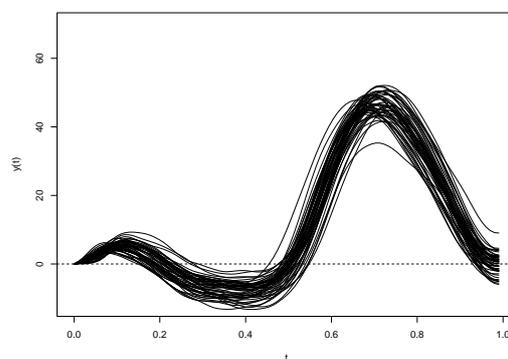
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 65: Gráficos com os dados de todas as passadas do 13^o indivíduo

(a) membro inferior dominante



(b) membro inferior não dominante

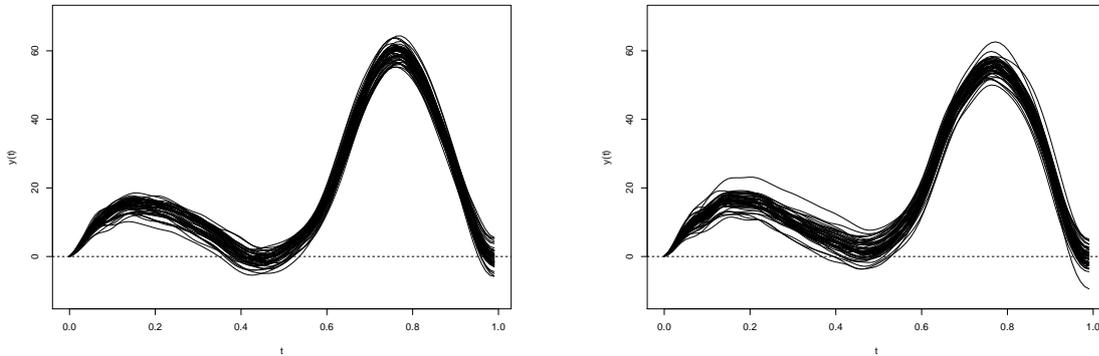


Fonte: Elaborado pela autora

Figura 66: Gráficos com os dados de todas as passadas do 14^o indivíduo

(a) membro inferior dominante

(b) membro inferior não dominante

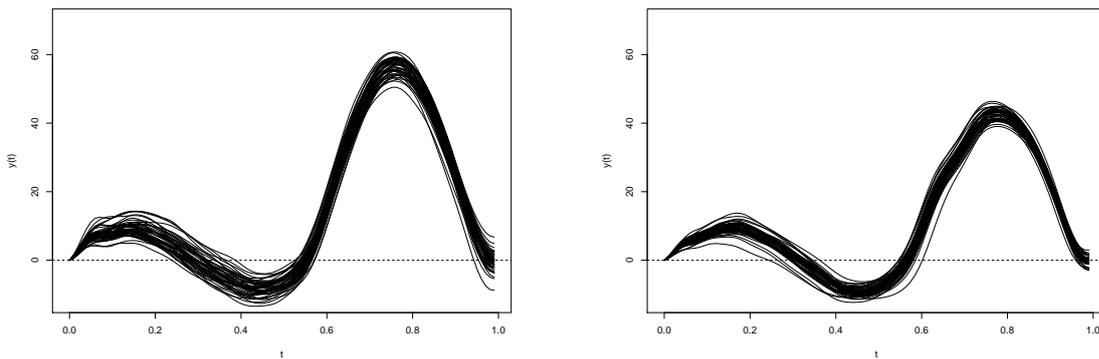


Fonte: Elaborado pela autora

Figura 67: Gráficos com os dados de todas as passadas do 15^o indivíduo

(a) membro inferior dominante

(b) membro inferior não dominante

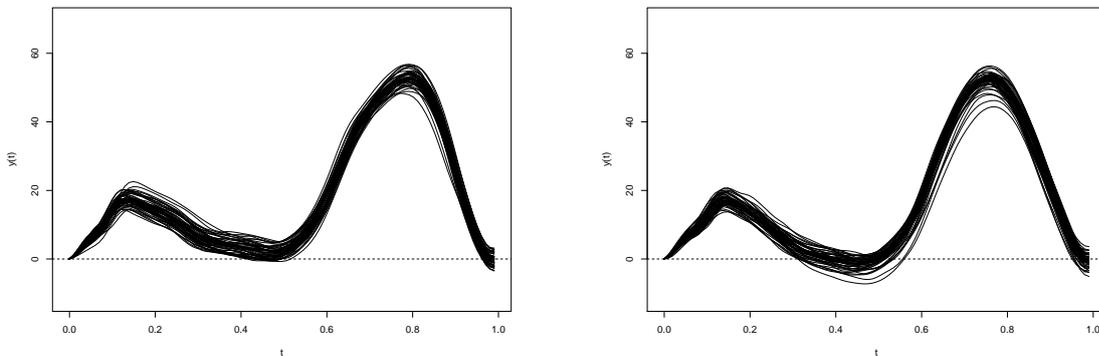


Fonte: Elaborado pela autora

Figura 68: Gráficos com os dados de todas as passadas do 16^o indivíduo

(a) membro inferior dominante

(b) membro inferior não dominante

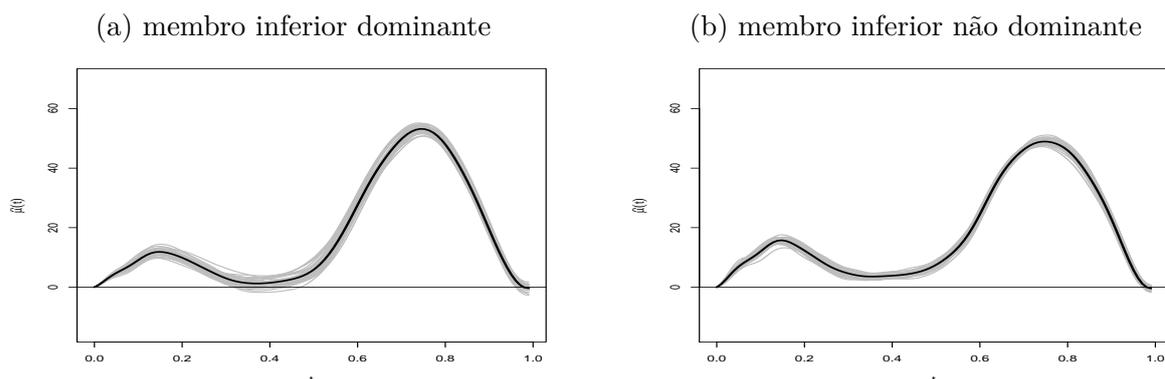


Fonte: Elaborado pela autora

C.2 Gráficos com as estimativas *a posteriori* das curvas médias do Capítulo 3

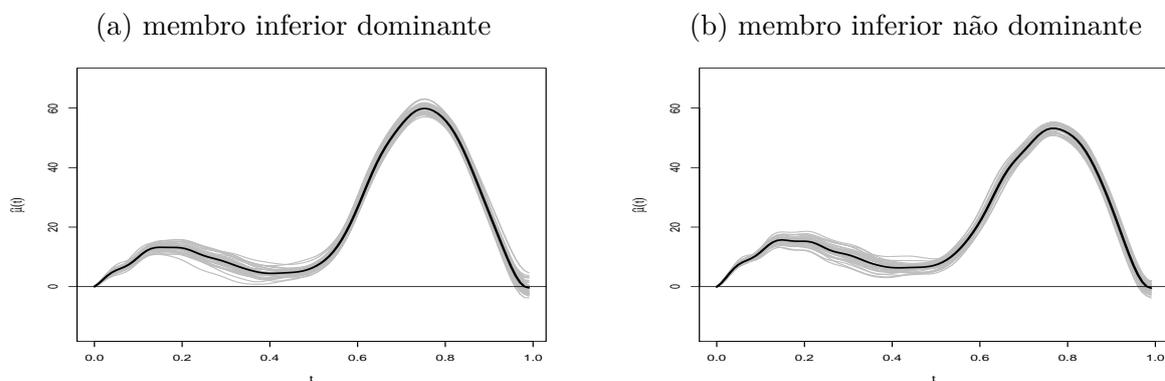
Nesta seção, podemos visualizar os gráficos com a estimativa *a posteriori* da curva média (ilustrada em preto) juntamente com a amostra de treinamento (em cinza) para os indivíduos 2 a 16 referentes à [subseção 3.2.2](#) da [página 53](#).

Figura 69: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 2º indivíduo



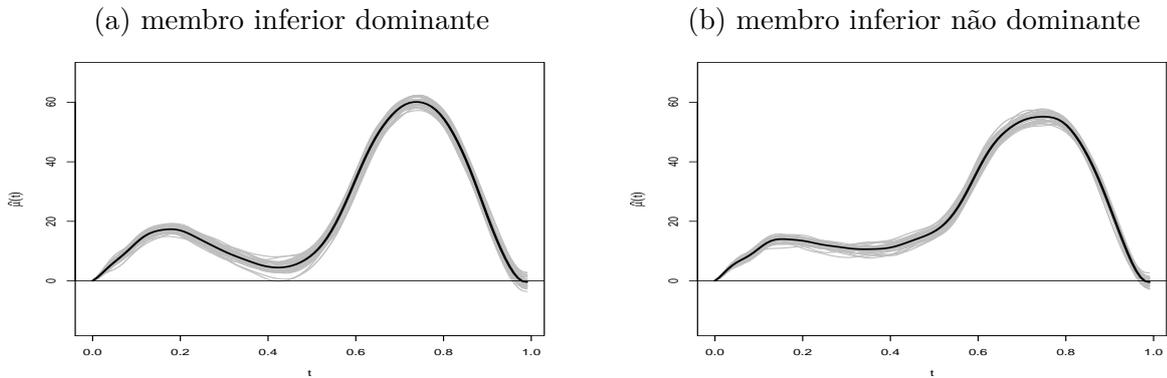
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 70: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 3º indivíduo



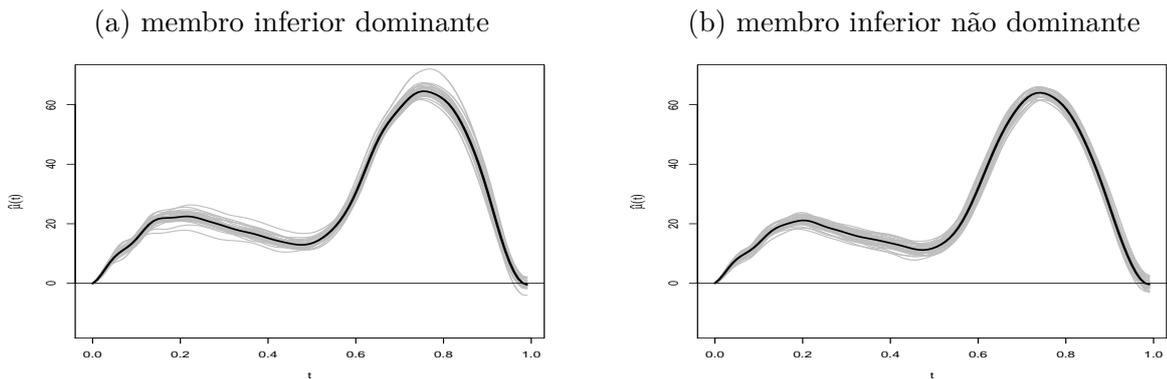
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 71: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 4º indivíduo



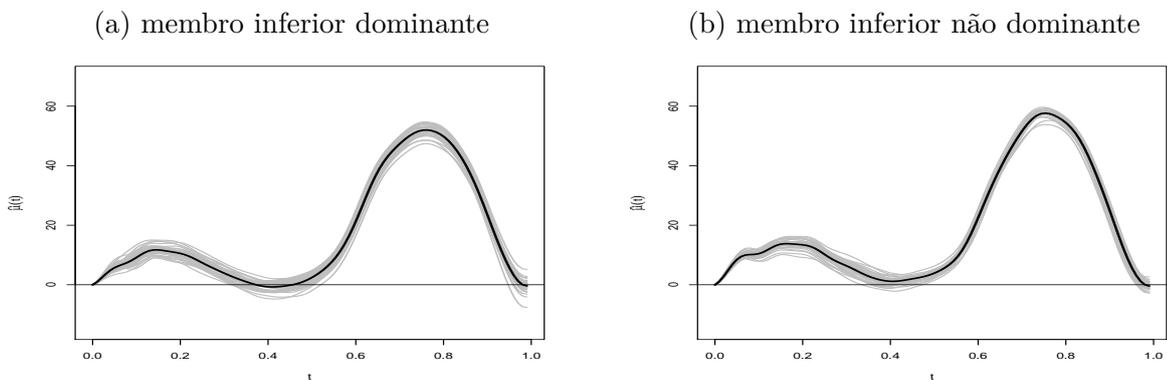
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 72: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 5º indivíduo

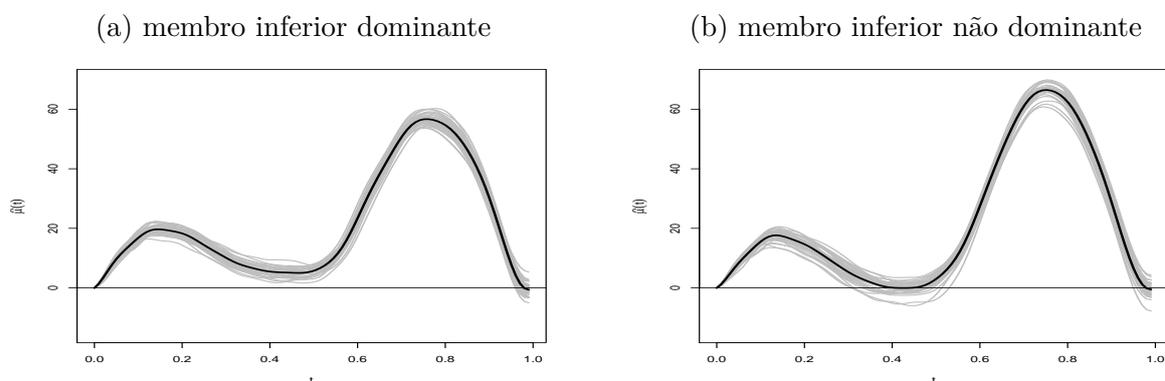


Fonte: Elaborado pela autora

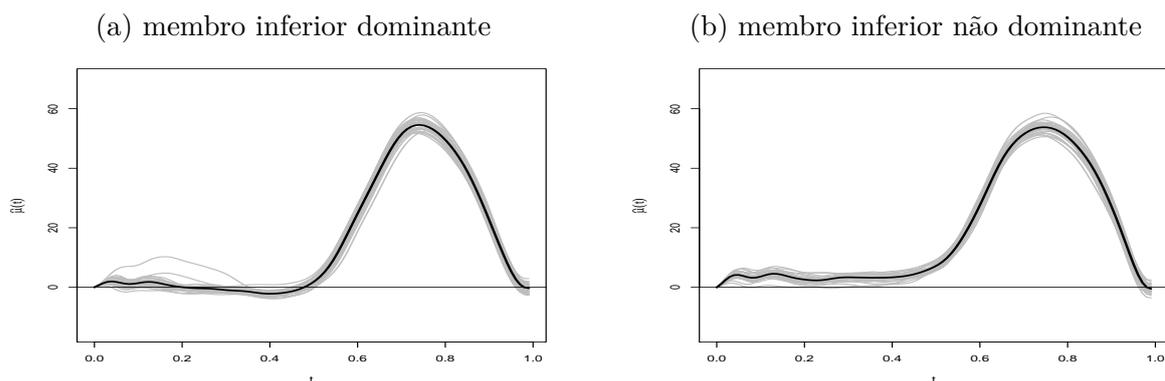
Figura 73: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 6º indivíduo



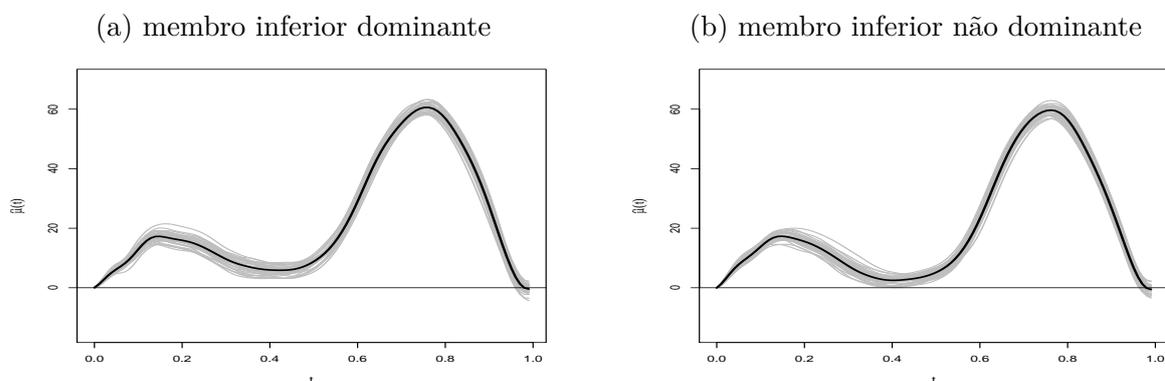
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 74: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 7º indivíduo

Fonte: Elaborado pela autora

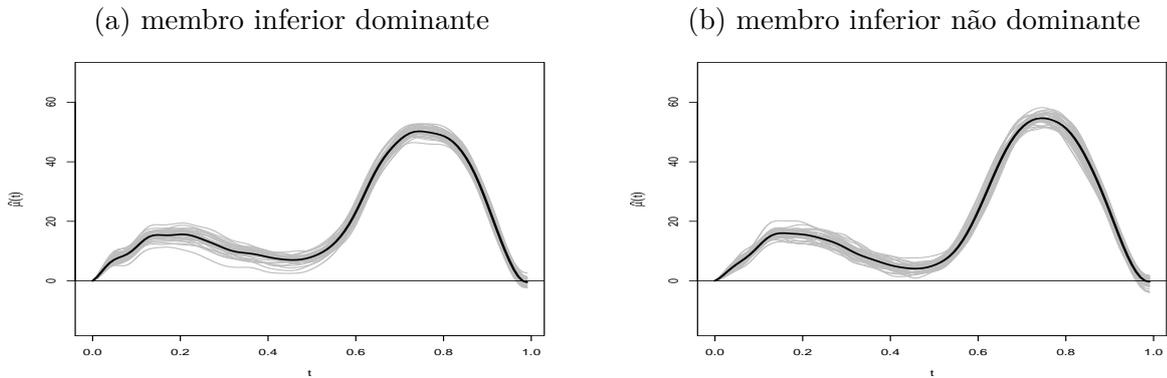
Figura 75: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 8º indivíduo

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 76: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 9º indivíduo

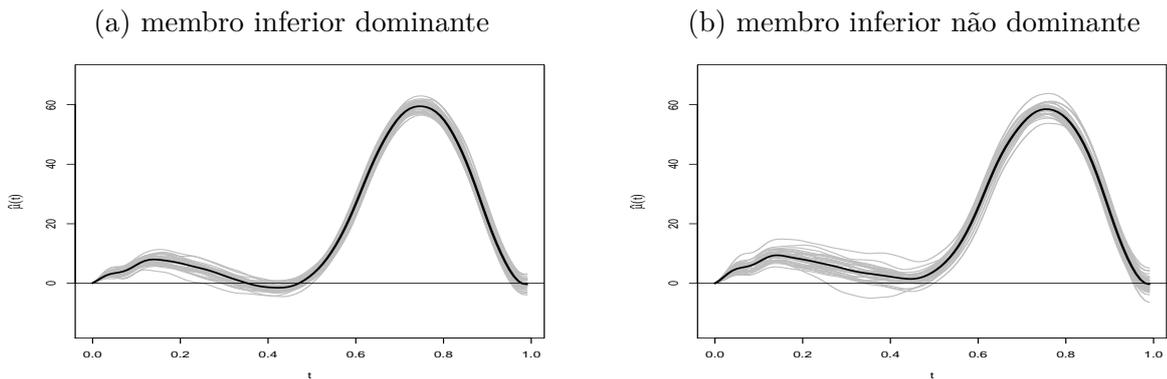
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 77: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 10º indivíduo



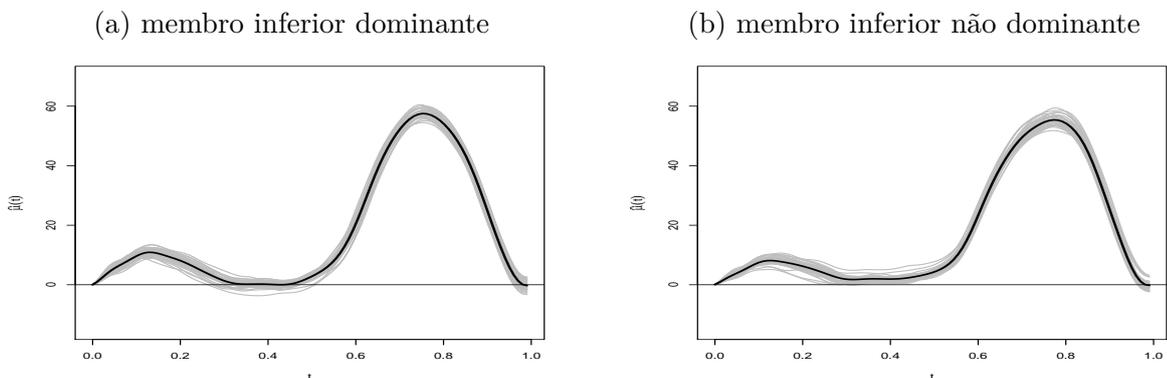
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 78: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 11º indivíduo

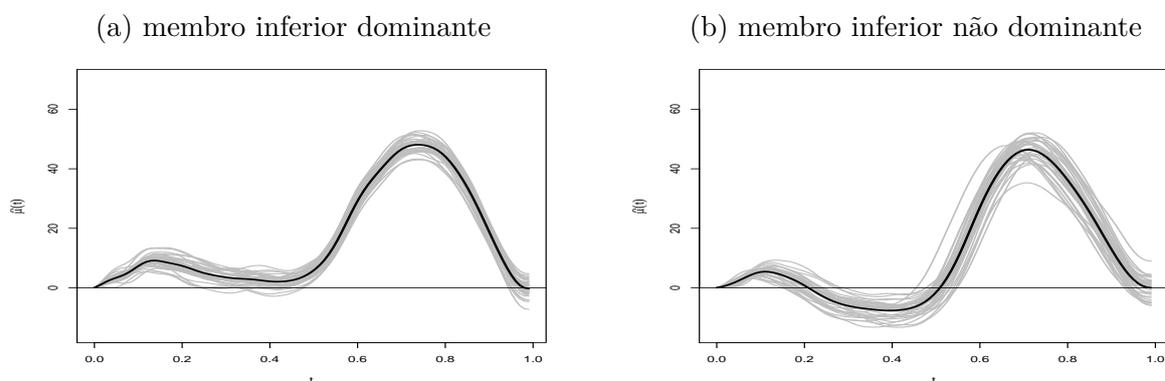


Fonte: Elaborado pela autora

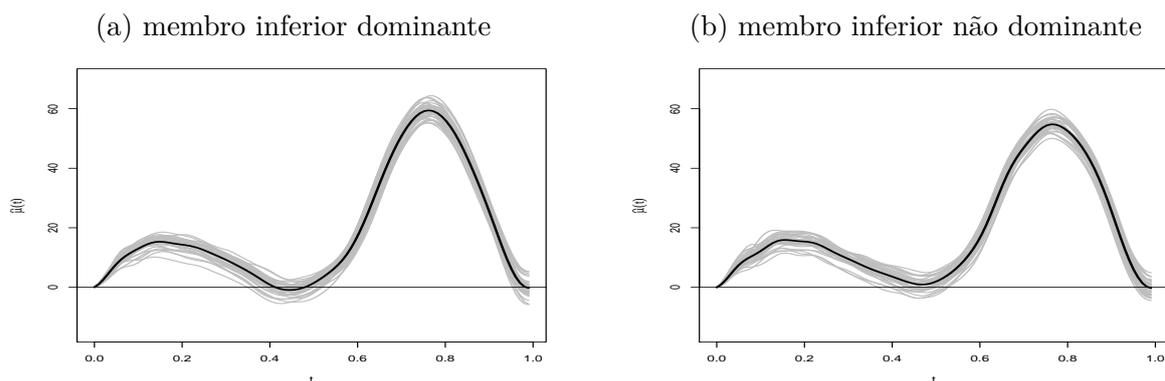
Figura 79: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 12º indivíduo



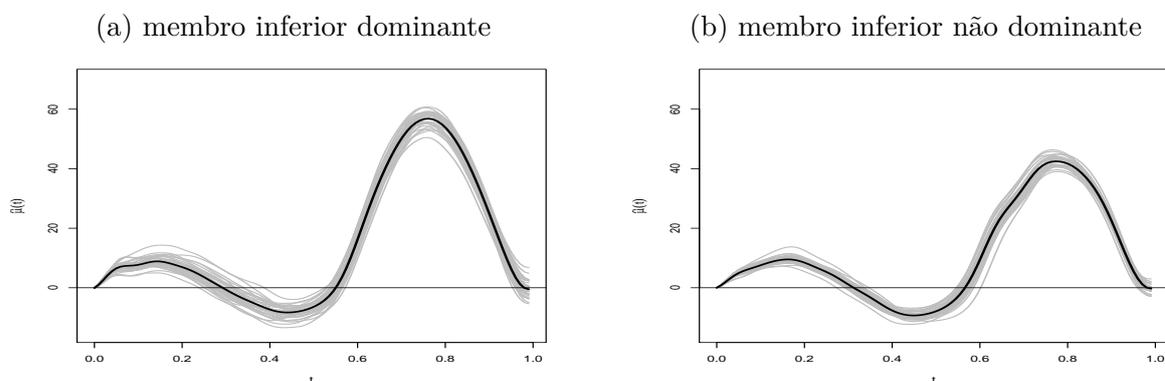
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 80: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 13º indivíduo

Fonte: Elaborado pela autora

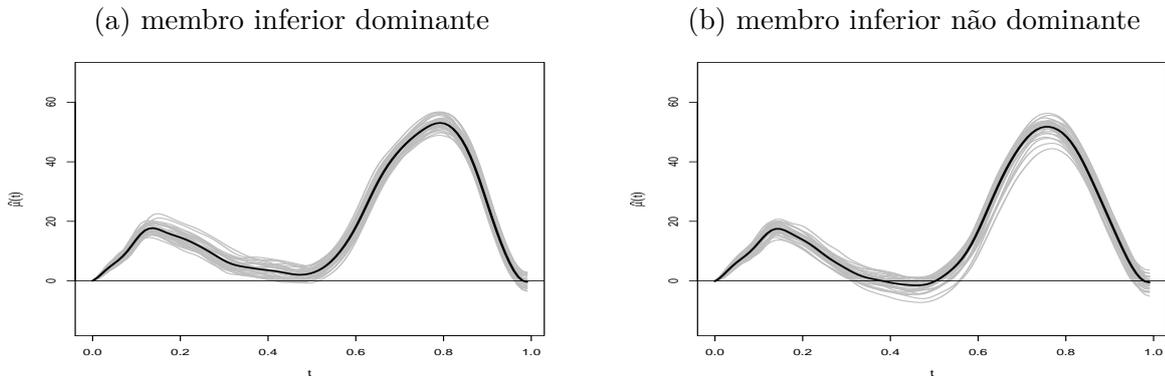
Figura 81: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 14º indivíduo

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 82: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 15º indivíduo

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 83: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 16º indivíduo

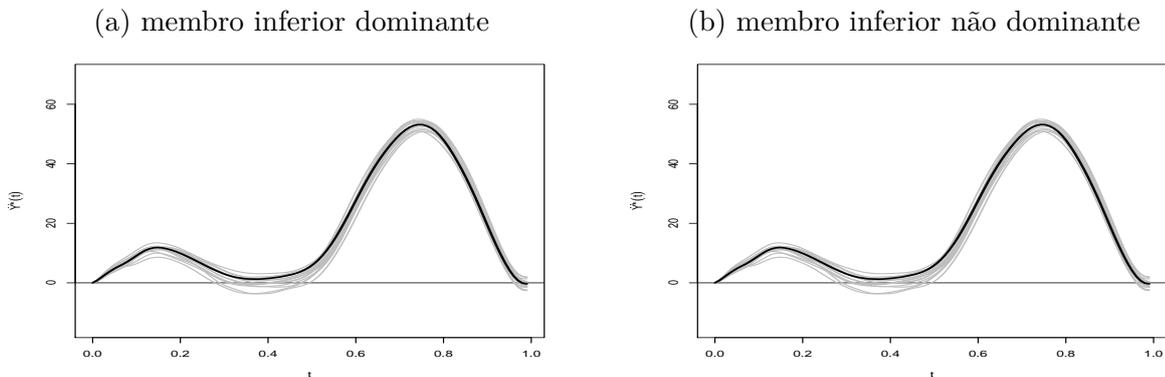


Fonte: Elaborado pela autora

C.3 Gráficos com as estimativas da média da distribuição preditiva *a posteriori* do Capítulo 3

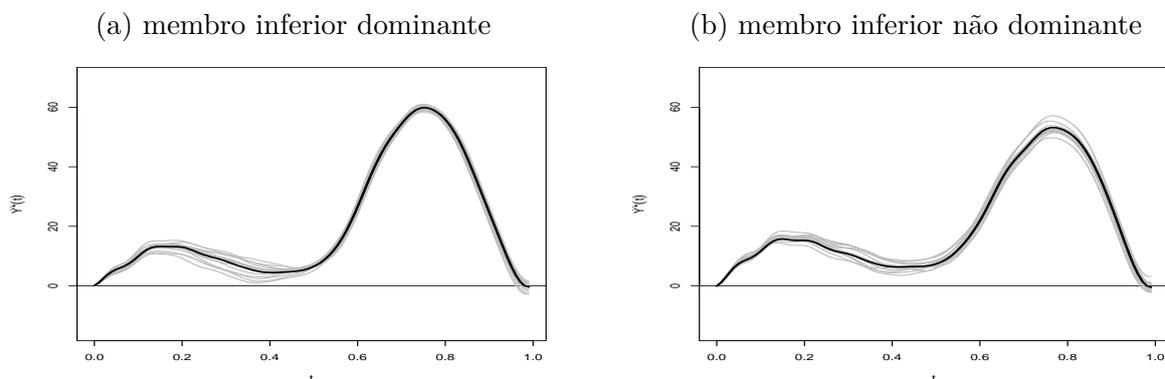
Nesta seção, temos os gráficos com as estimativas da média da distribuição preditiva *a posteriori* (ilustradas em preto) juntamente com a amostra de teste (em cinza) para os indivíduos 2 a 16 referentes à subseção 3.2.2 da página 53.

Figura 84: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 2º indivíduo



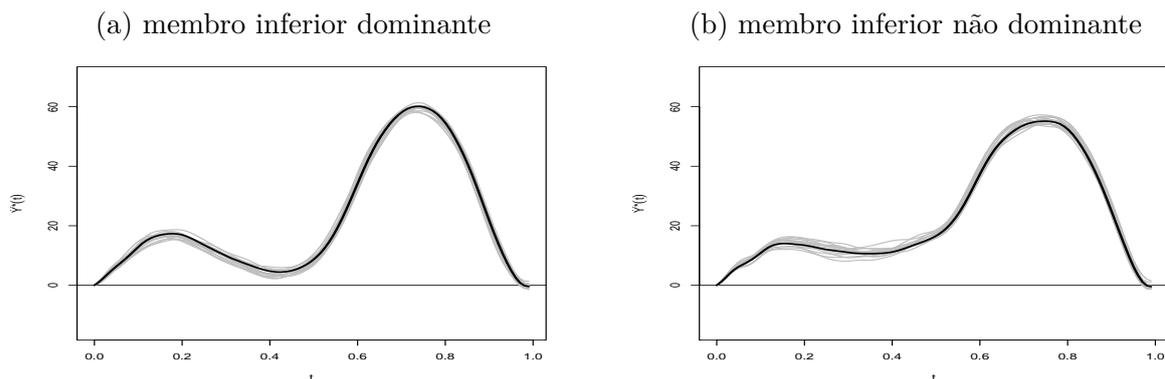
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 85: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão Bayesiano do [Capítulo 3](#) para o 3º indivíduo



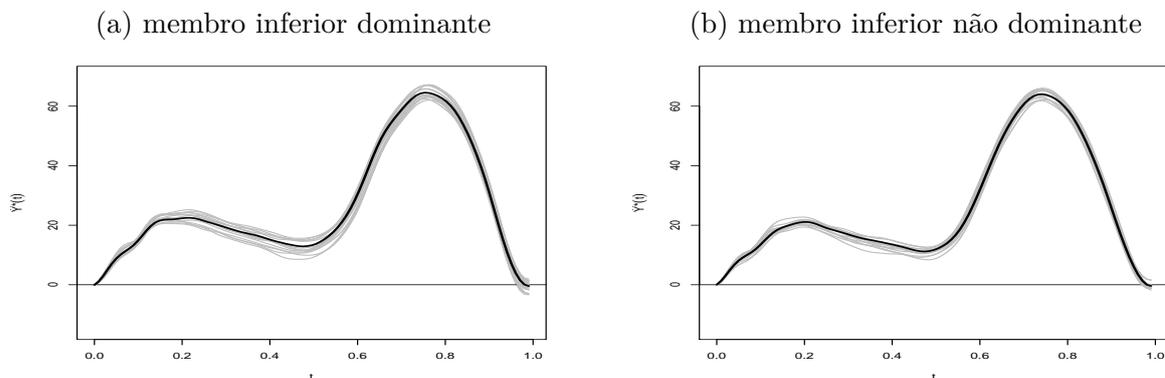
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 86: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão Bayesiano do [Capítulo 3](#) para o 4º indivíduo



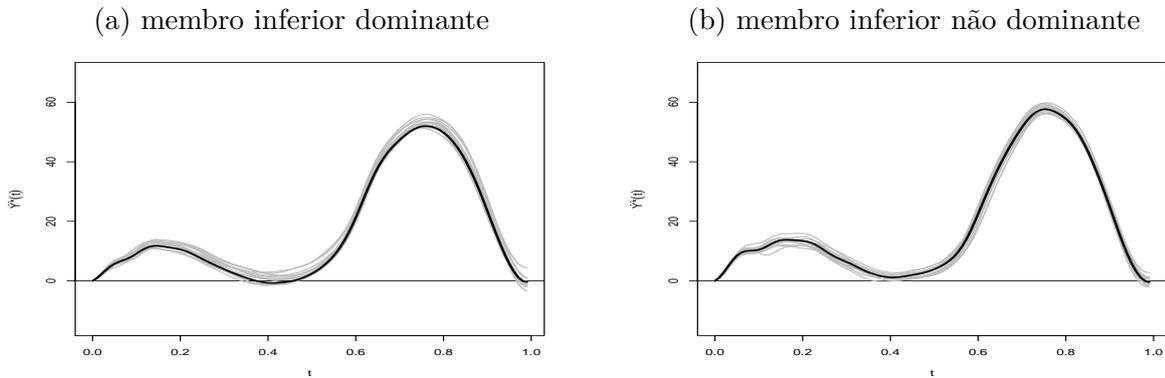
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 87: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão Bayesiano do [Capítulo 3](#) para o 5º indivíduo



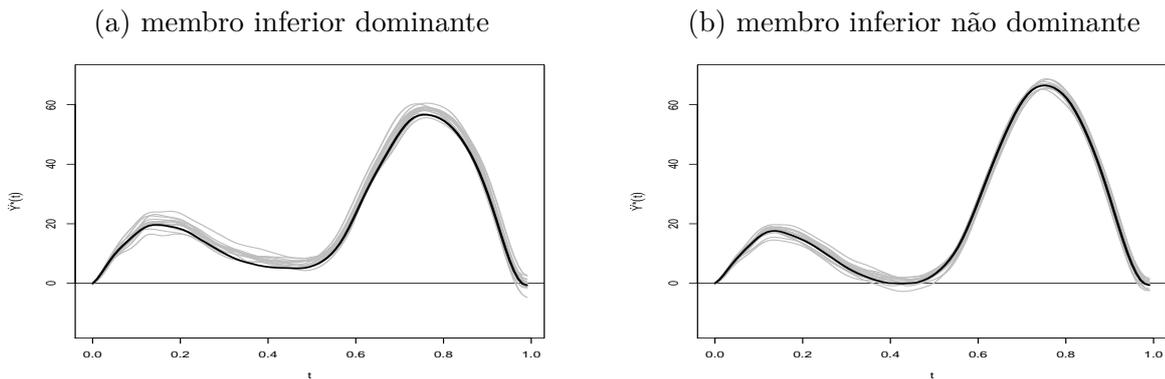
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 88: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 6º indivíduo



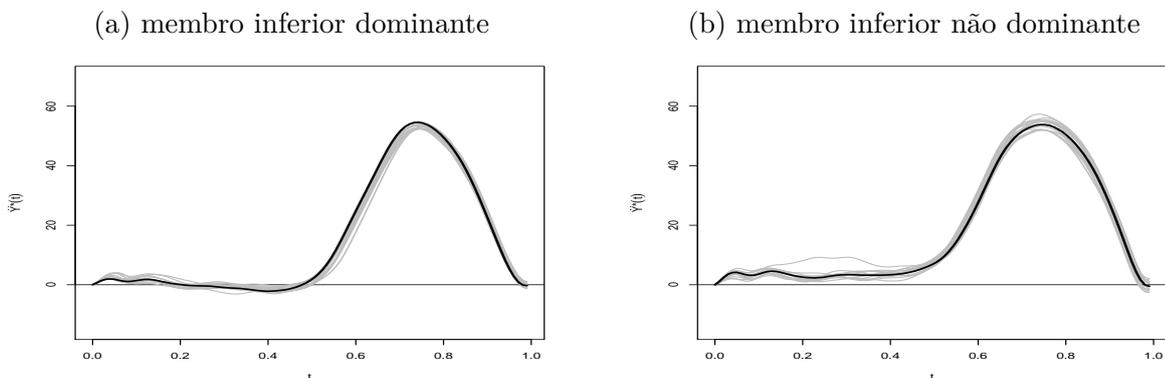
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 89: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 7º indivíduo



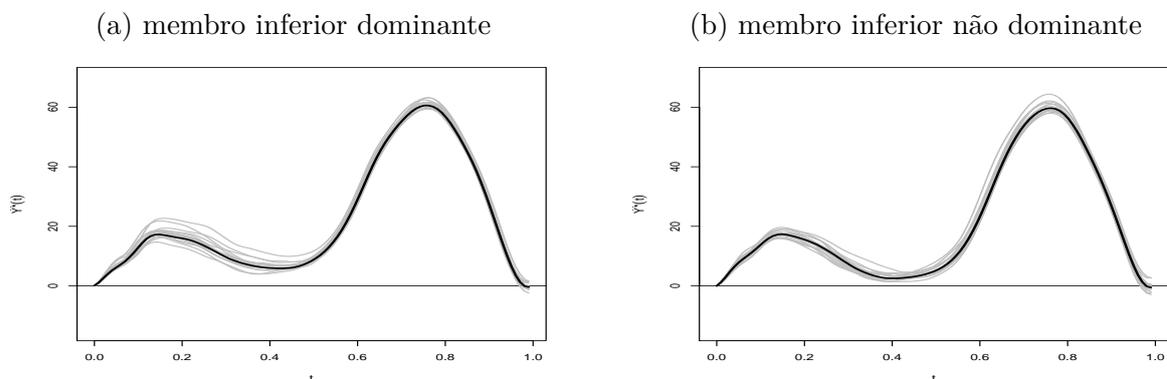
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 90: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 8º indivíduo



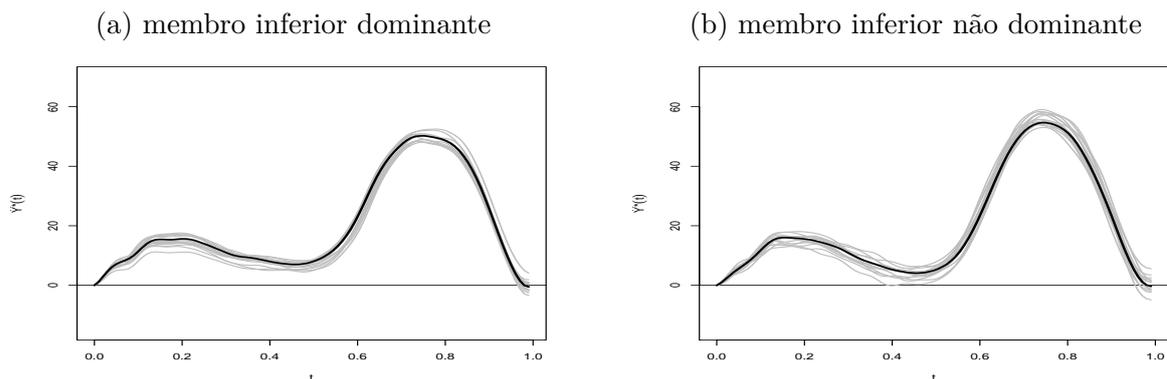
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 91: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão Bayesiano do [Capítulo 3](#) para o 9º indivíduo



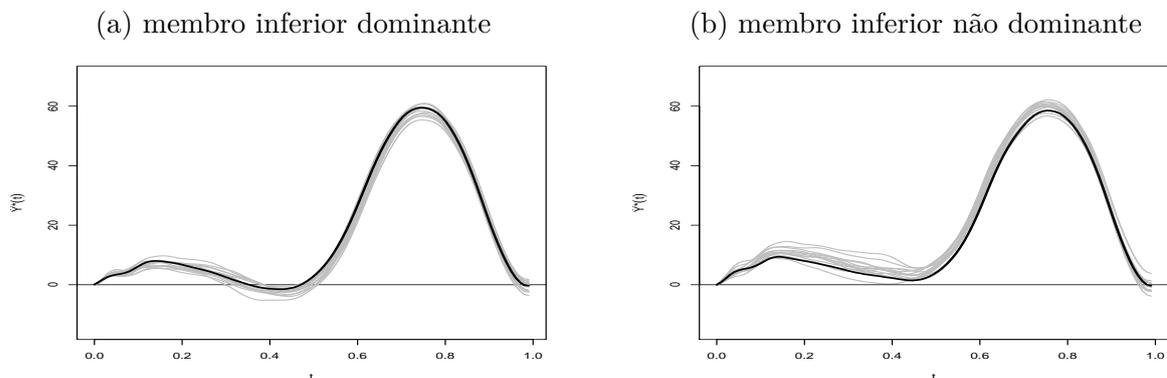
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 92: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão Bayesiano do [Capítulo 3](#) para o 10º indivíduo



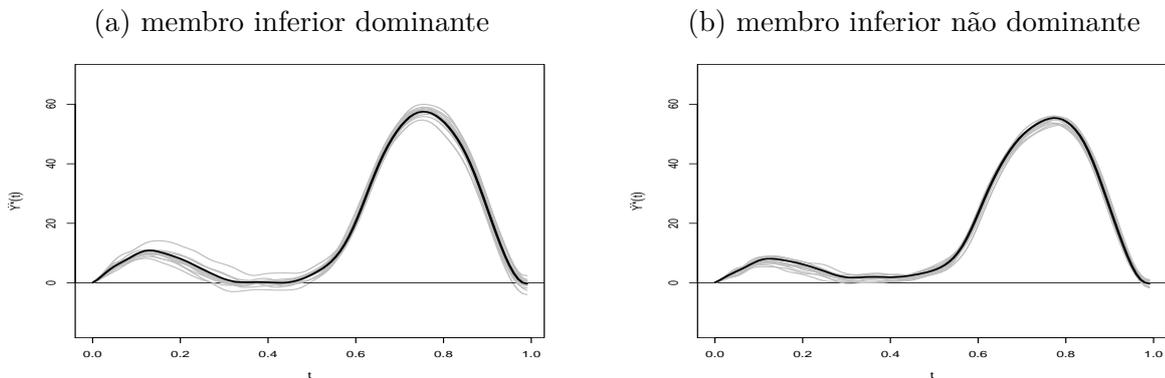
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 93: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão Bayesiano do [Capítulo 3](#) para o 11º indivíduo



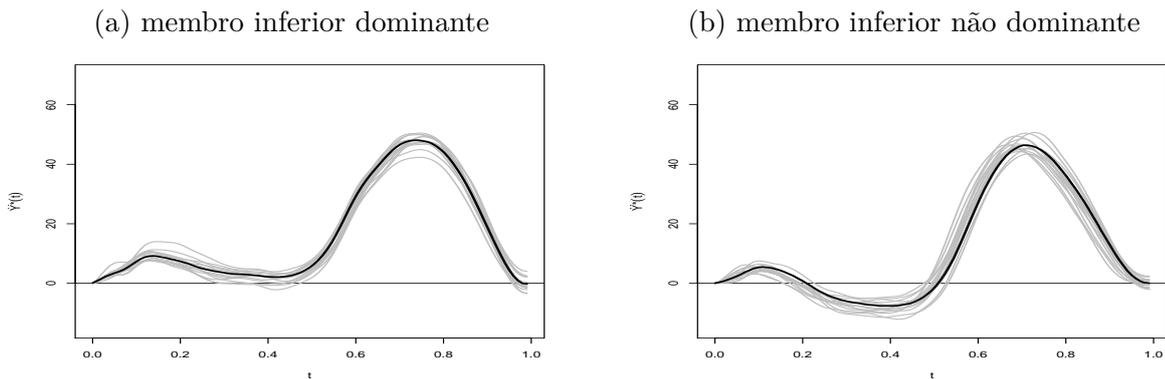
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 94: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 12º indivíduo



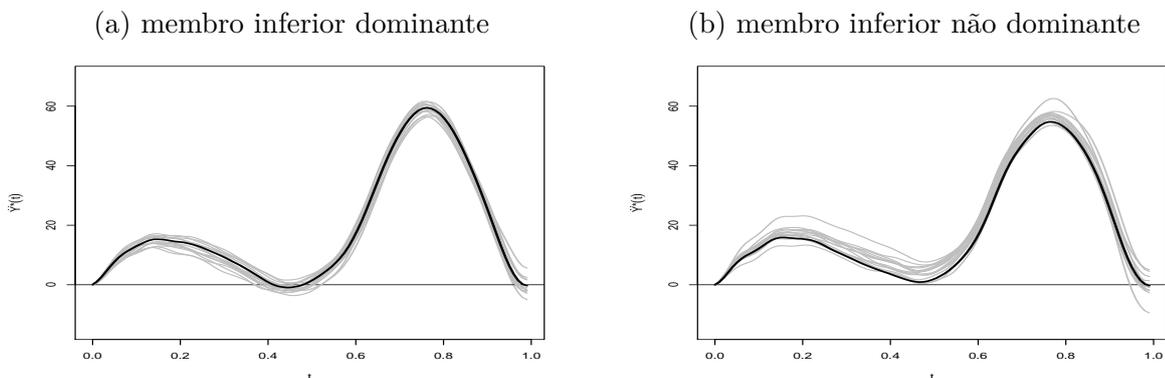
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 95: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 13º indivíduo



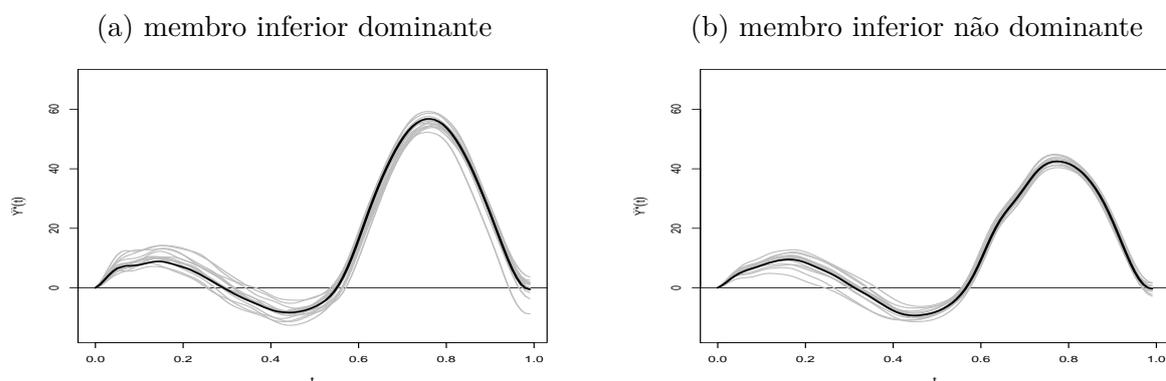
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 96: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 14º indivíduo



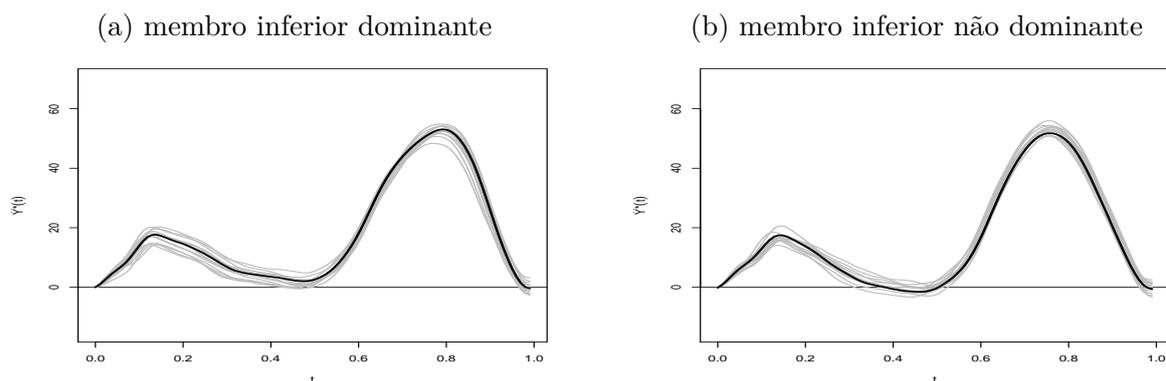
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 97: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 15º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 98: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão Bayesiano do Capítulo 3 para o 16º indivíduo

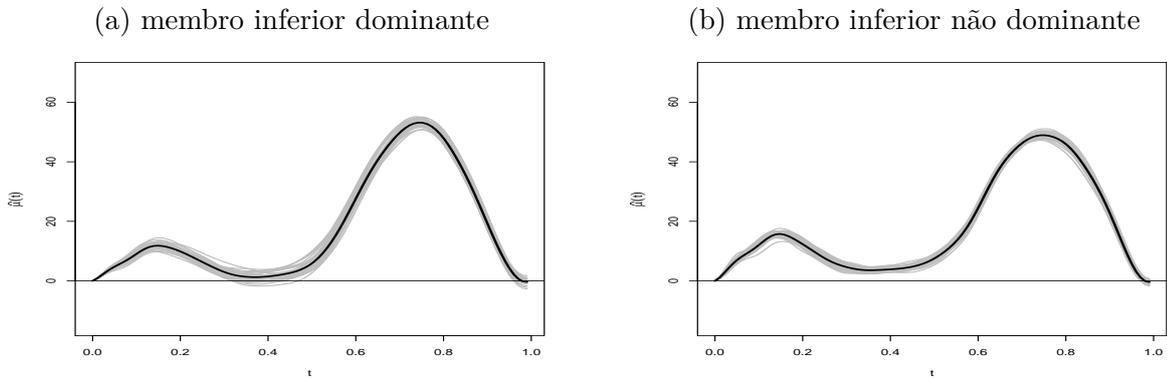


Fonte: Elaborado pela autora

C.4 Gráficos com as estimativas *a posteriori* das curvas médias do Capítulo 4

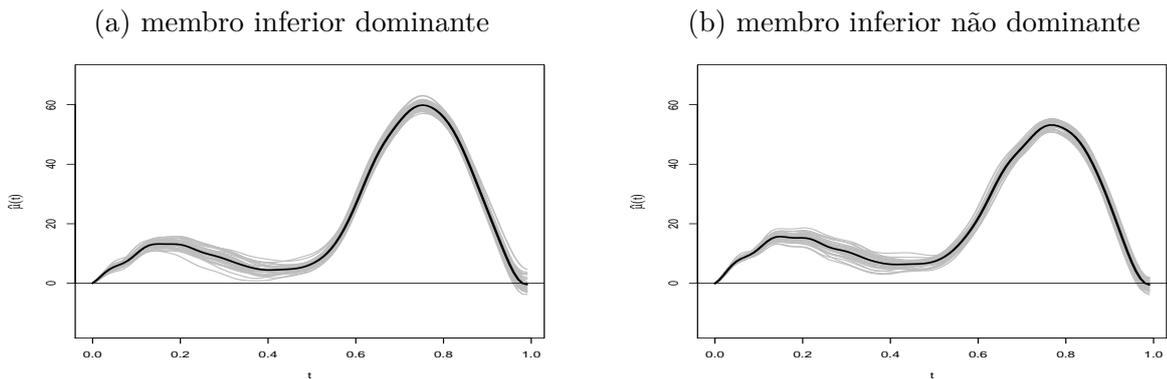
Nesta seção, podemos visualizar os gráficos com a estimativa *a posteriori* da curva média (ilustrada em preto) juntamente com a amostra de treinamento (em cinza) para os indivíduos 2 a 16 referentes à subseção 4.3.2 da página 82.

Figura 99: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 2º indivíduo



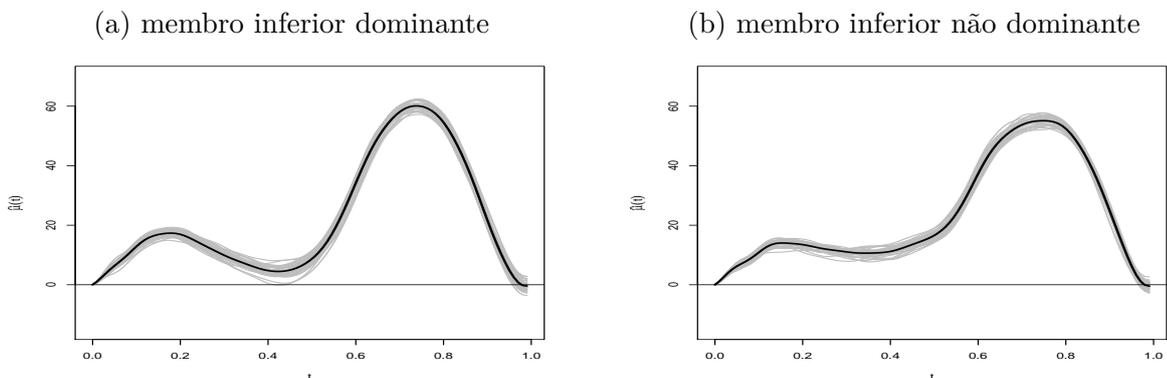
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 100: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 3º indivíduo



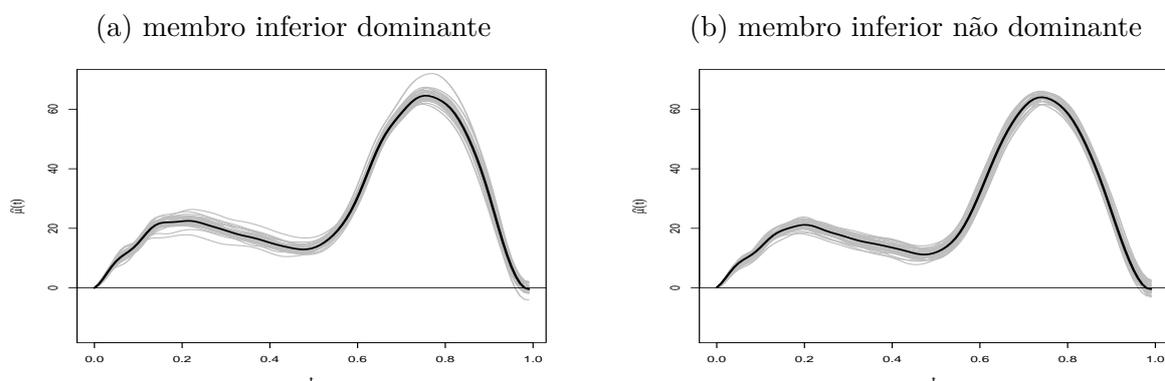
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 101: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 4º indivíduo



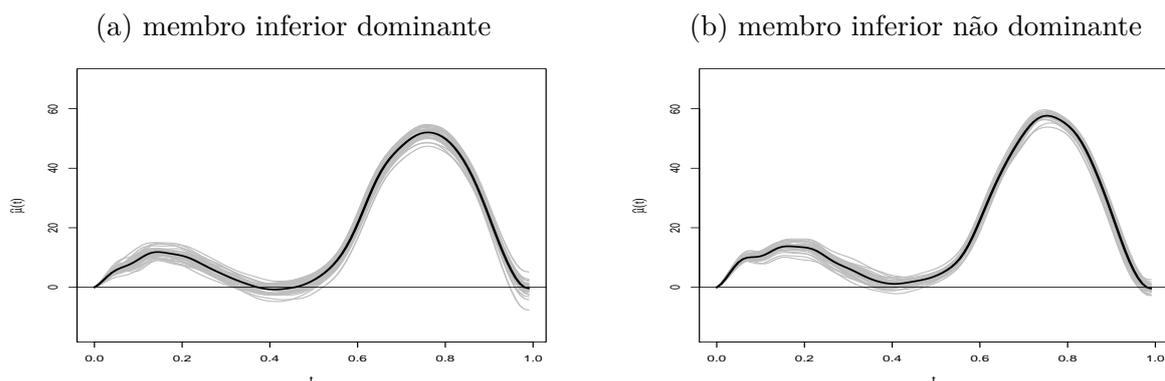
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 102: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 5º indivíduo



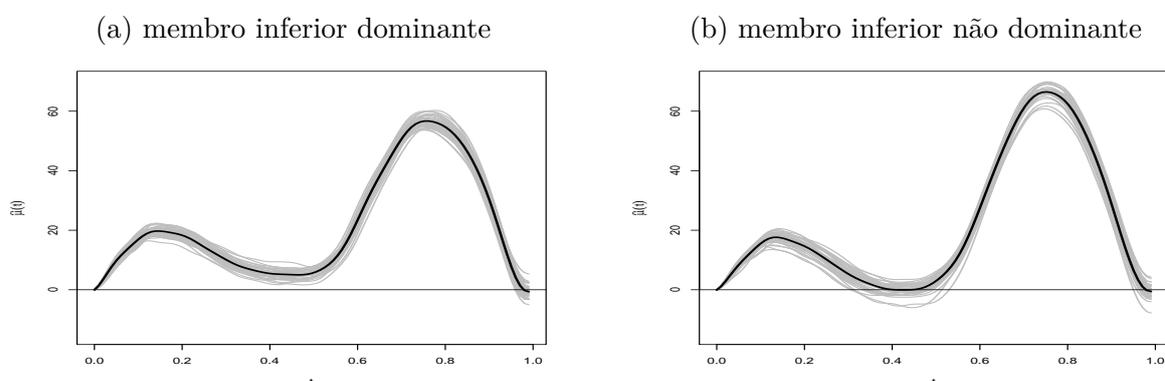
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 103: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 6º indivíduo



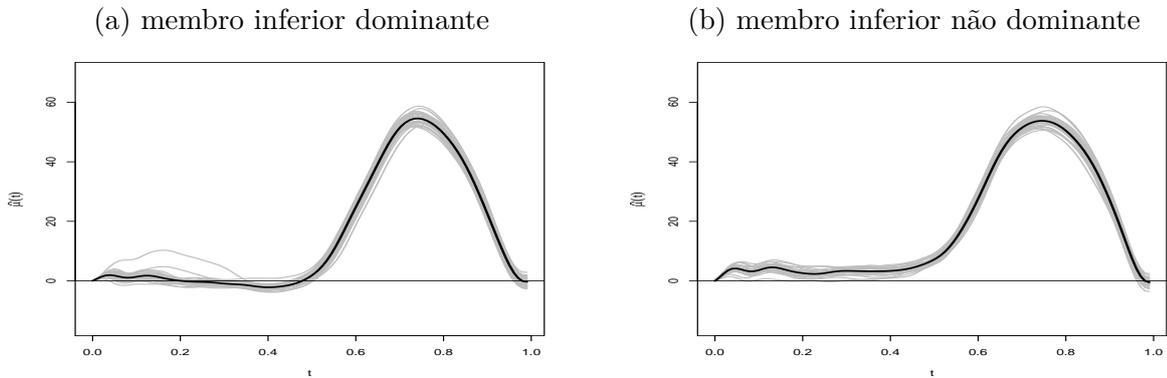
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 104: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 7º indivíduo



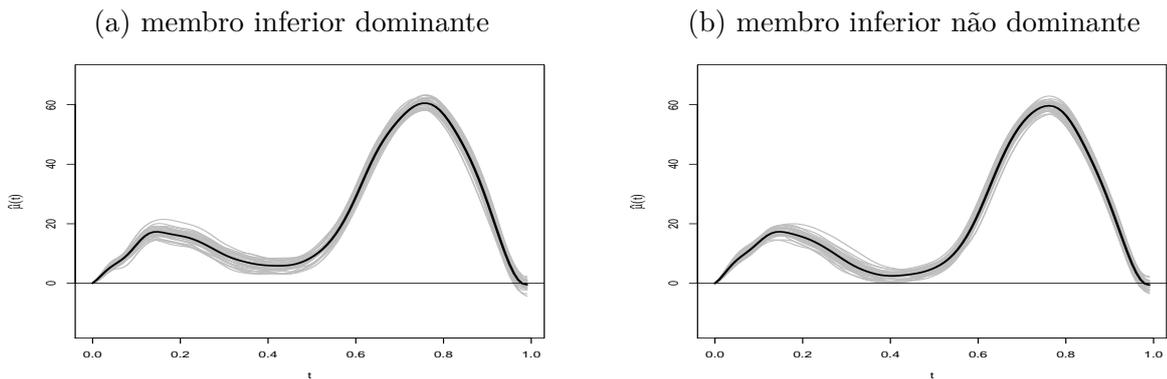
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 105: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 8º indivíduo



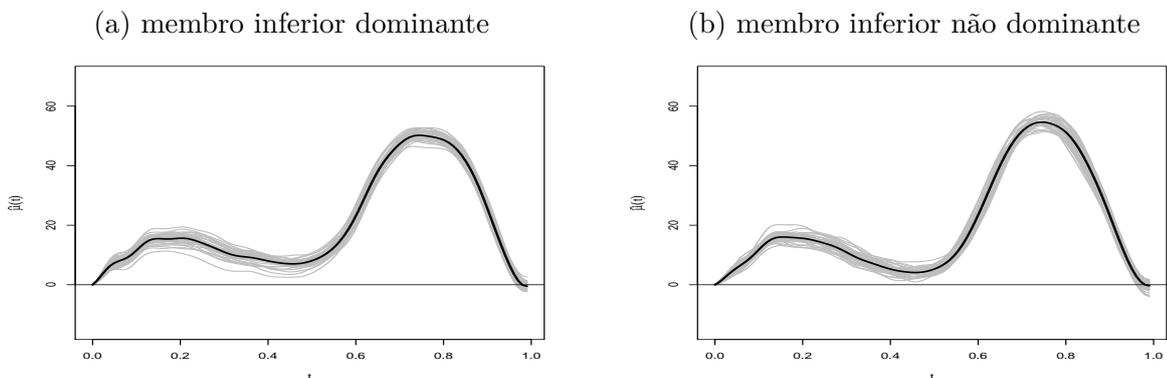
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 106: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 9º indivíduo



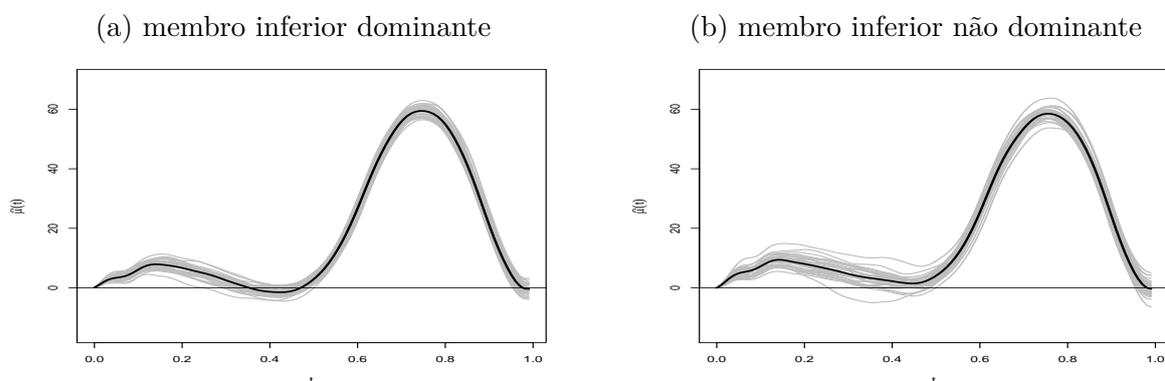
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 107: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 10º indivíduo



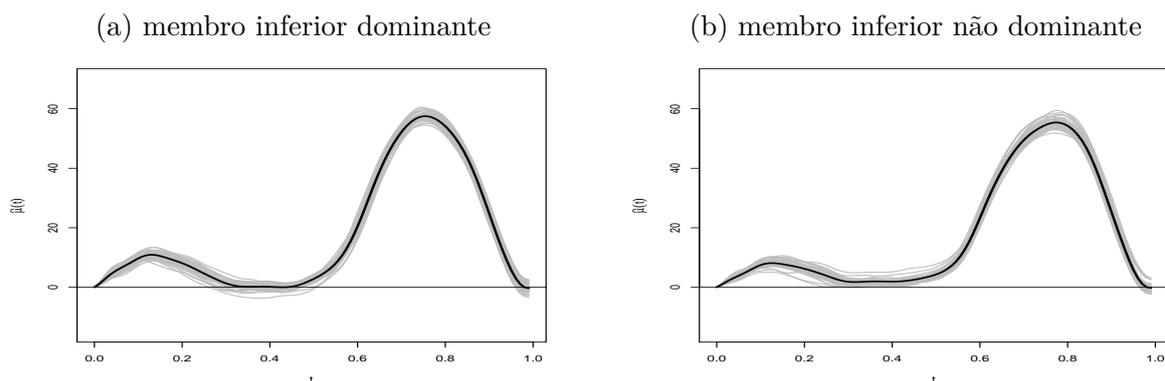
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 108: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 11º indivíduo



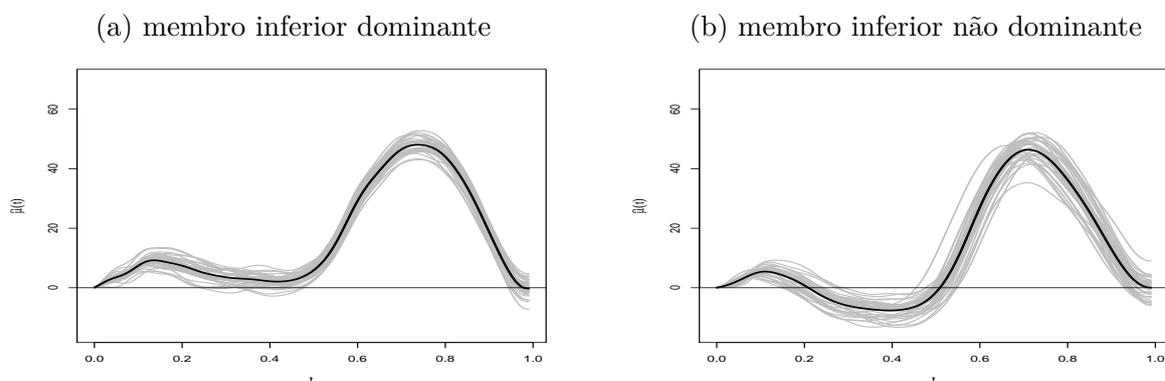
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 109: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 12º indivíduo



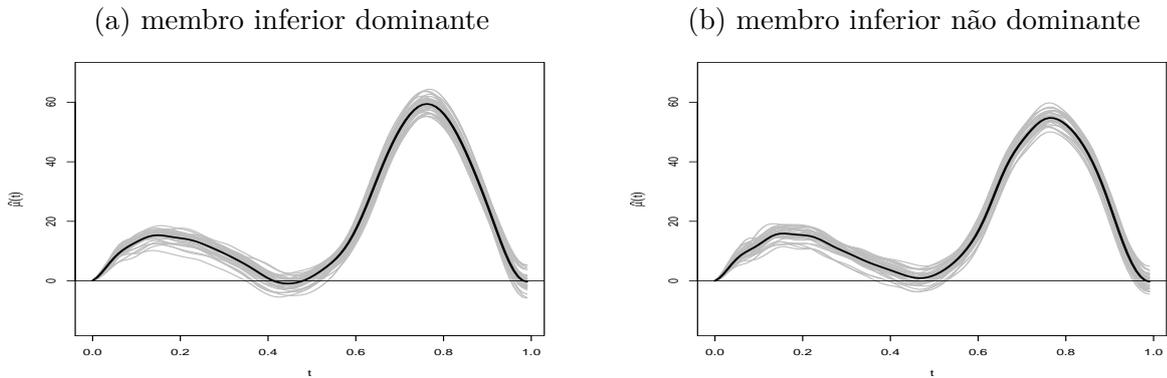
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 110: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 13º indivíduo



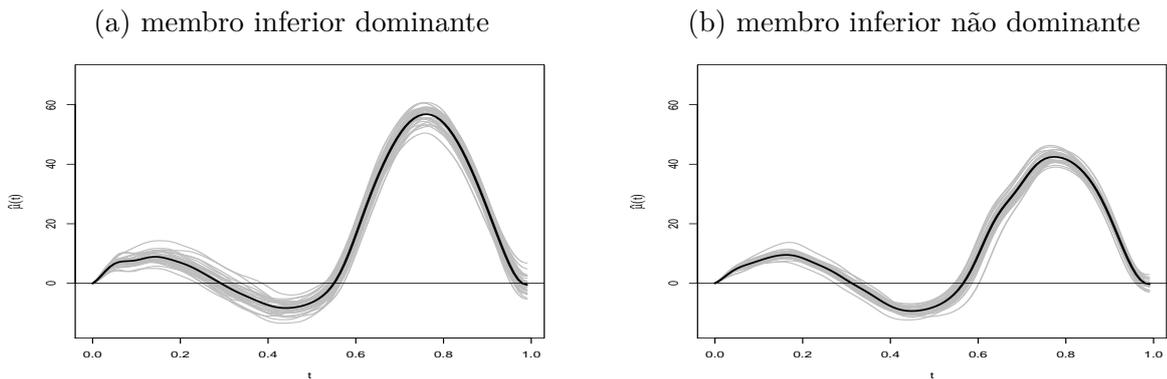
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 111: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 14º indivíduo



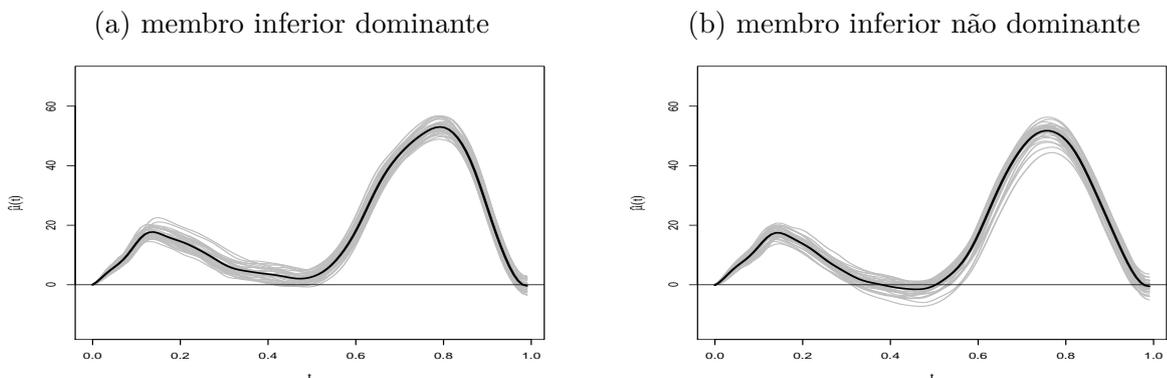
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 112: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 15º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 113: Estimativa *a posteriori* da curva média do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 16º indivíduo

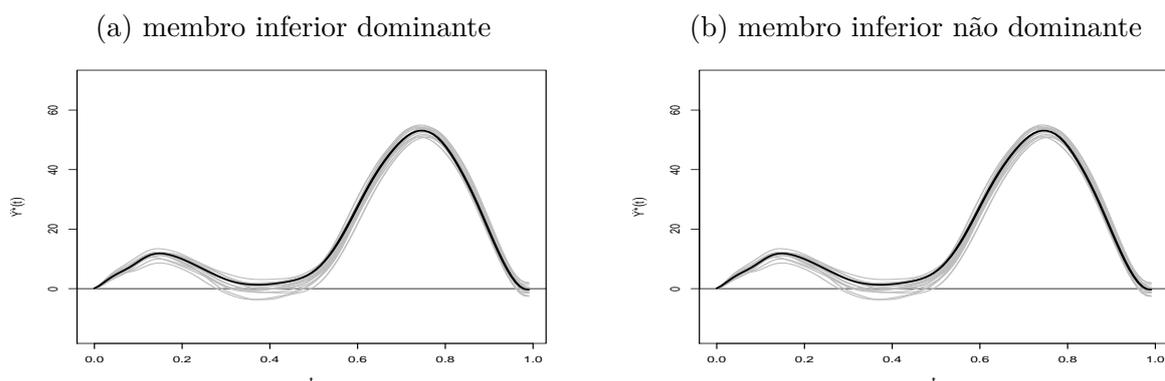


Fonte: Elaborado pela autora

C.5 Gráficos com as estimativas da média da distribuição preditiva a posteriori do [Capítulo 4](#)

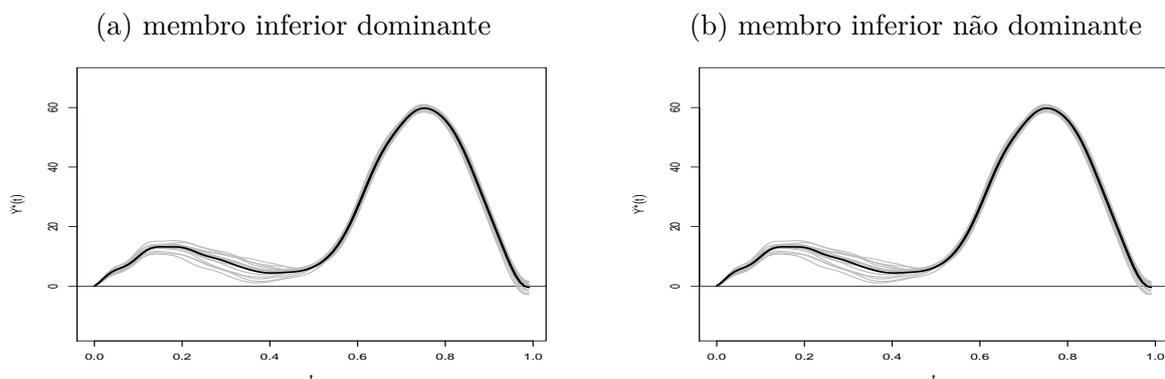
Nesta seção, temos os gráficos com a a estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* (ilustradas em preto) juntamente com a amostra de teste (em cinza) para os indivíduos 2 a 16 referentes à [subseção 4.3.2](#) da [página 82](#).

Figura 114: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 2º indivíduo



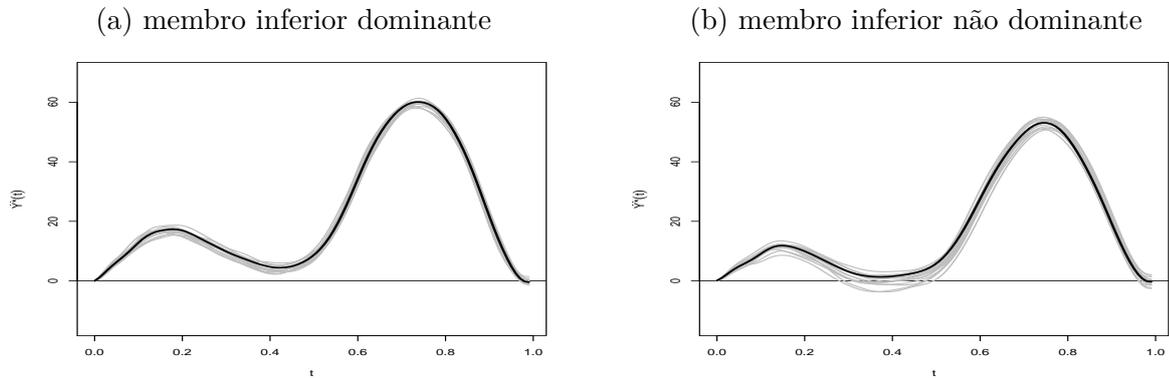
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 115: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 3º indivíduo



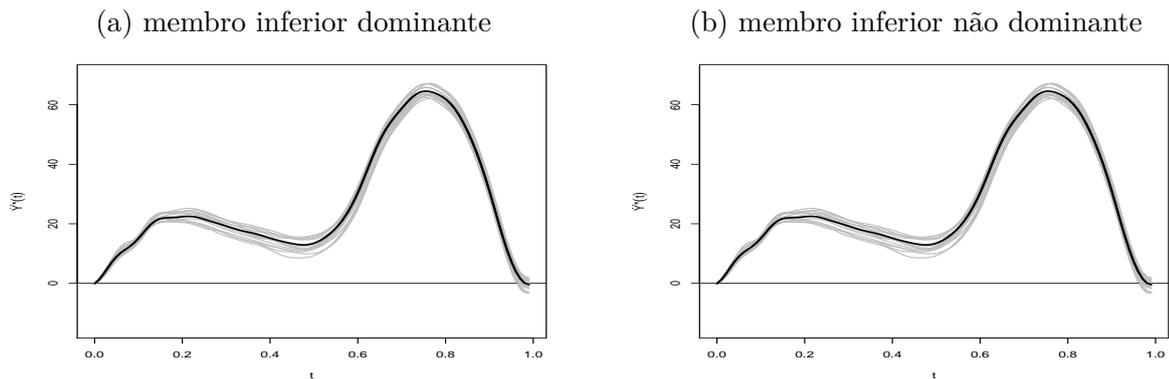
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 116: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 4º indivíduo



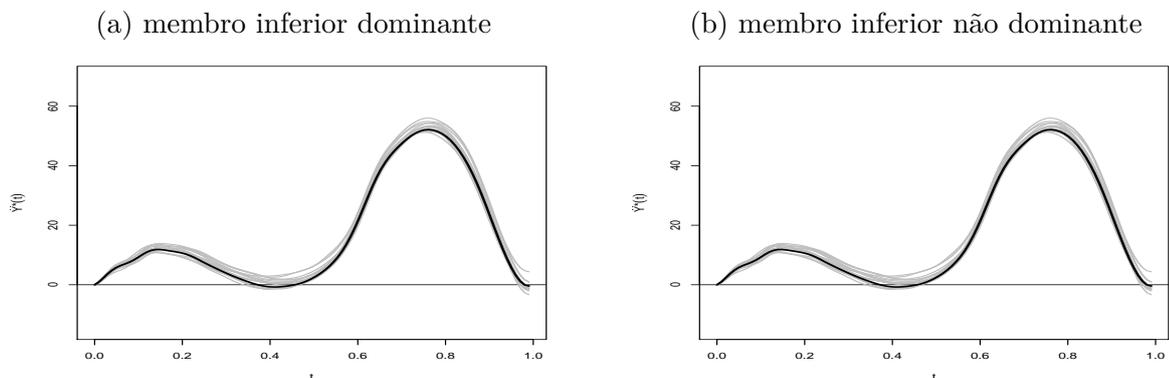
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 117: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 5º indivíduo



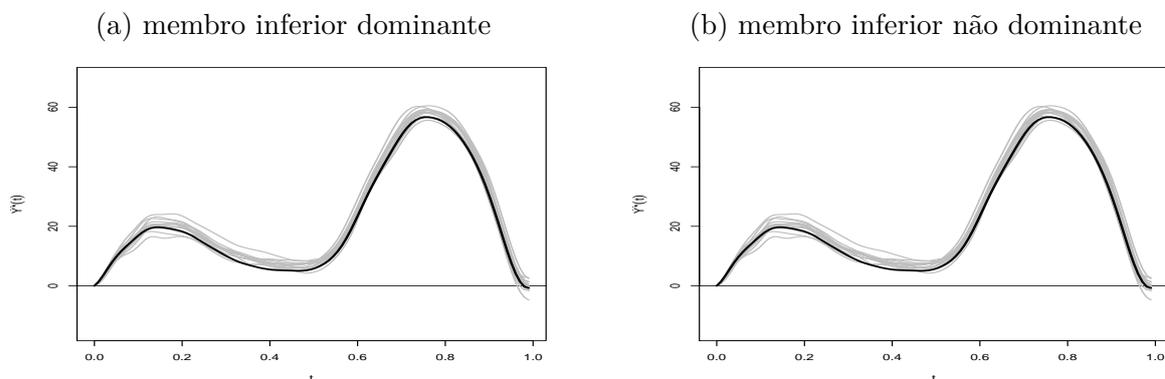
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 118: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 6º indivíduo



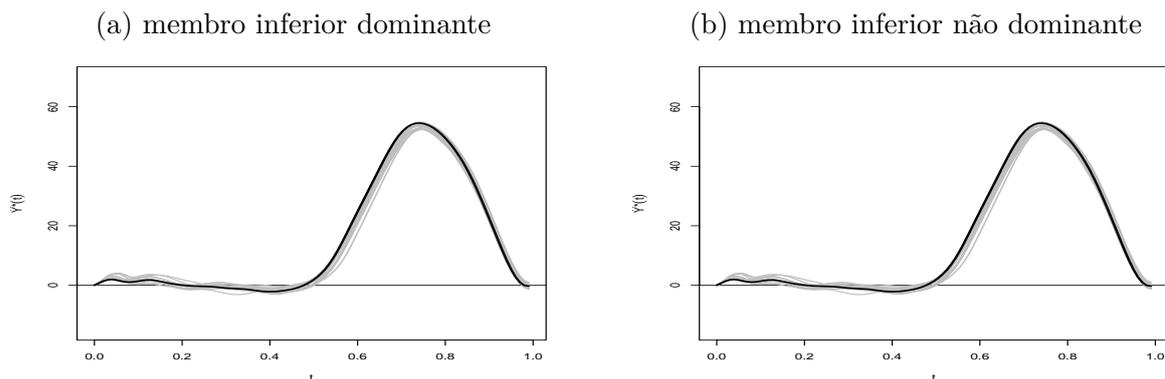
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 119: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 7º indivíduo



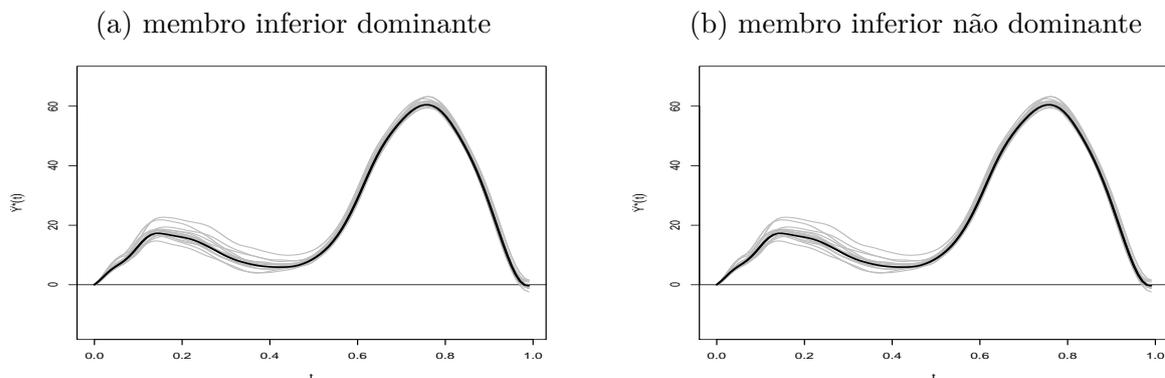
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 120: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 8º indivíduo



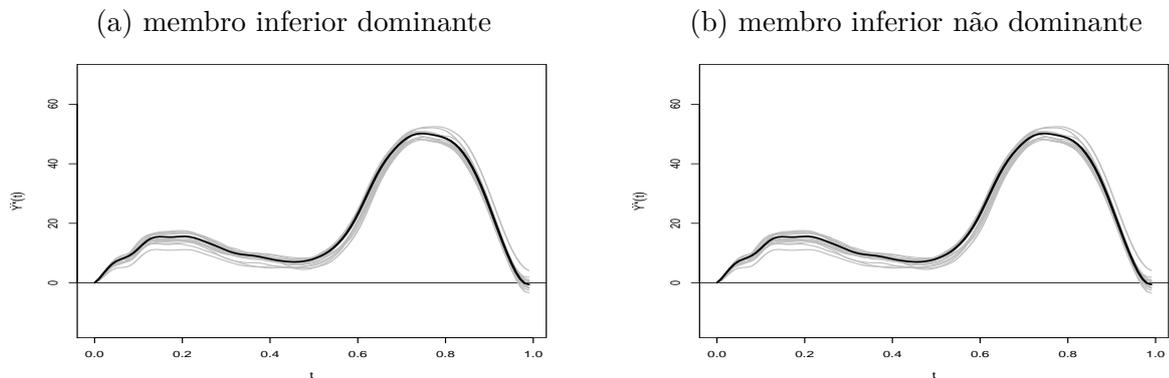
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 121: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 9º indivíduo



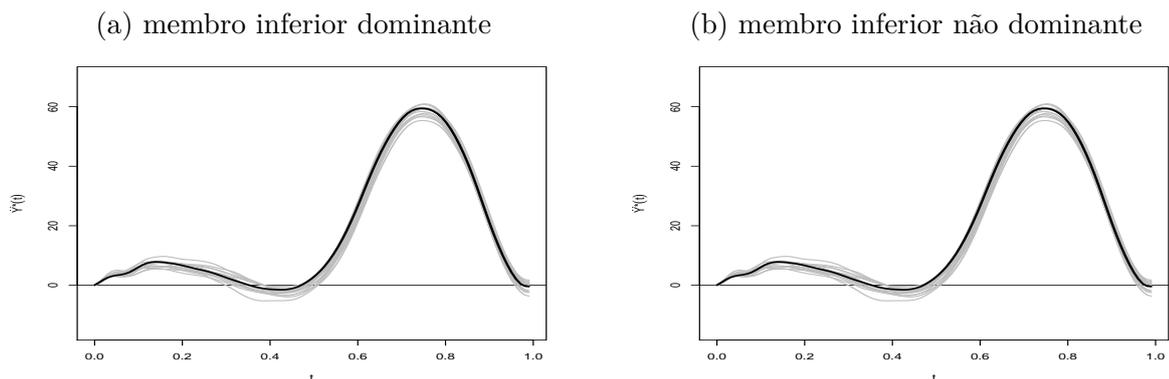
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 122: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 10º indivíduo



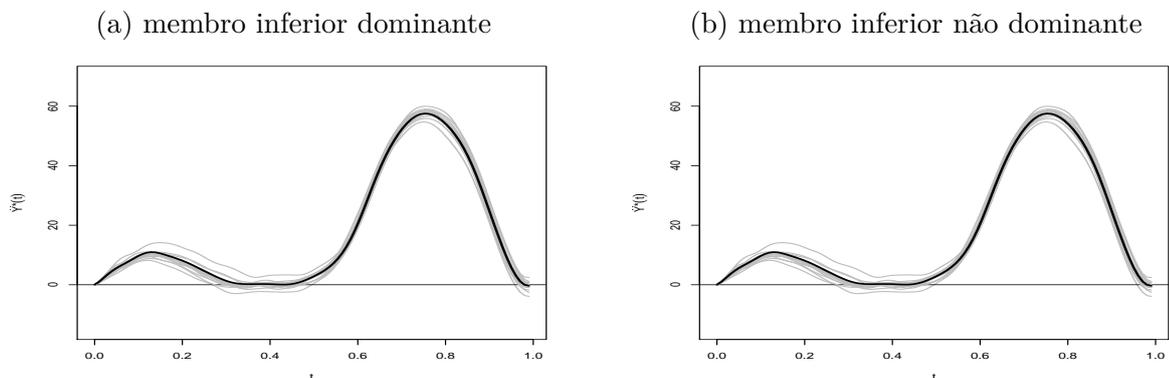
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 123: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 11º indivíduo



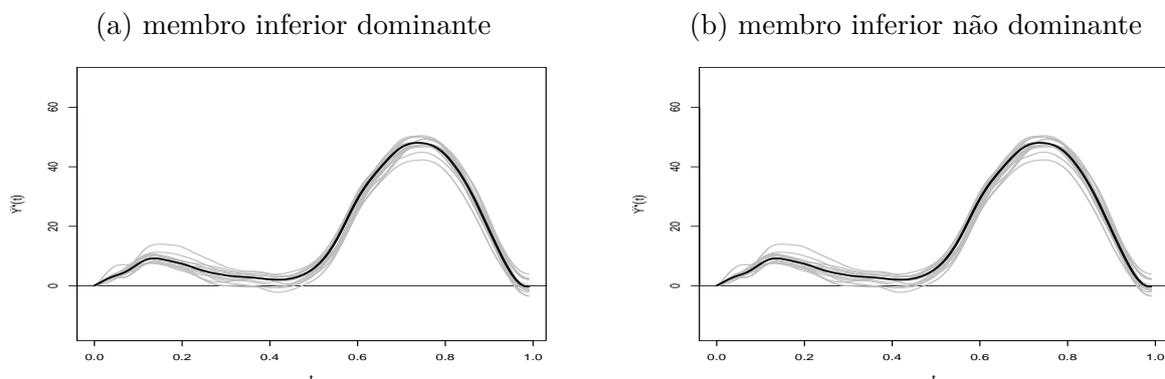
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 124: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 12º indivíduo



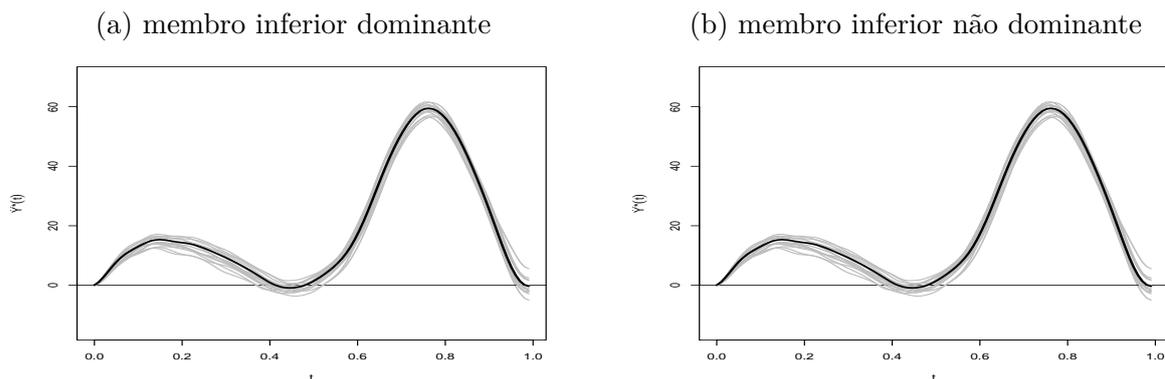
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 125: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 13^o indivíduo



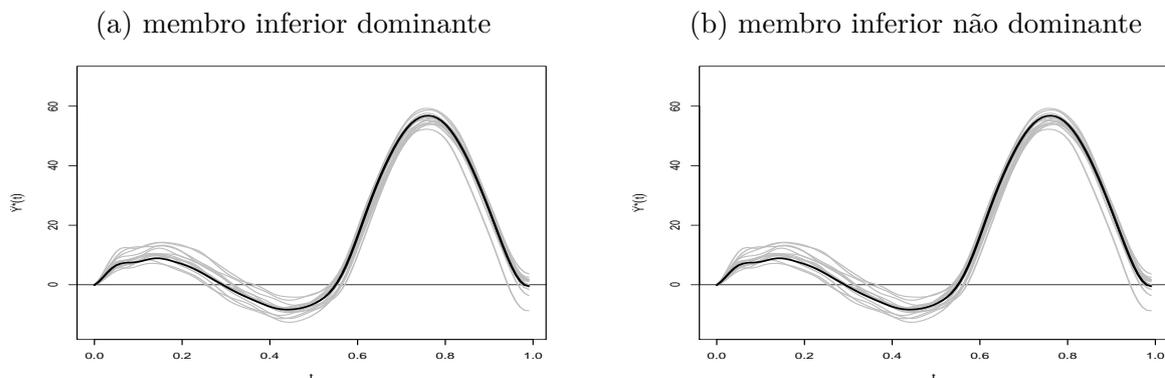
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 126: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 14^o indivíduo



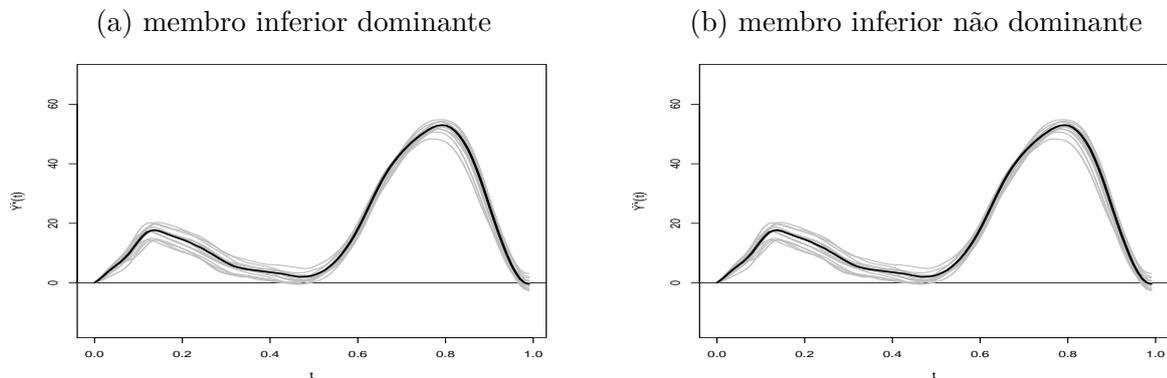
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 127: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 15^o indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 128: Estimativa da média da distribuição preditiva *a posteriori* do modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 16º indivíduo

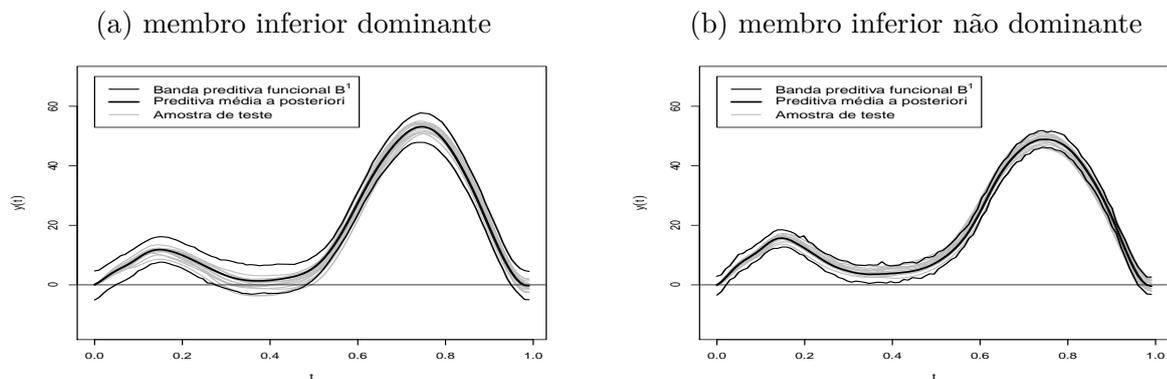


Fonte: Elaborado pela autora

C.6 Gráficos com as bandas preditivas da subseção 6.1.1 para o modelo descrito no Capítulo 4

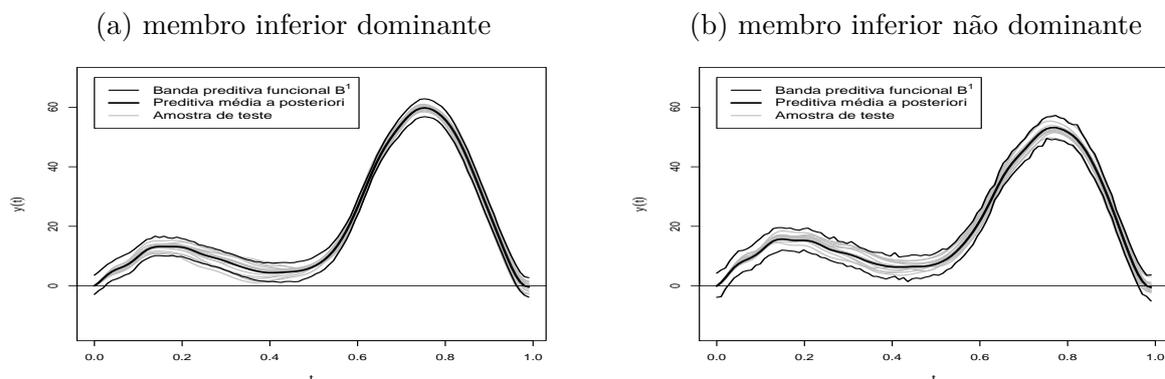
Nesta seção, temos os gráficos com a banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 , juntamente com a curva preditiva média *a posteriori* e a amostra de teste para os indivíduos 2 a 16 referentes à subseção 6.1.1 do Capítulo 6 para o modelo descrito no Capítulo 4.

Figura 129: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 2º indivíduo



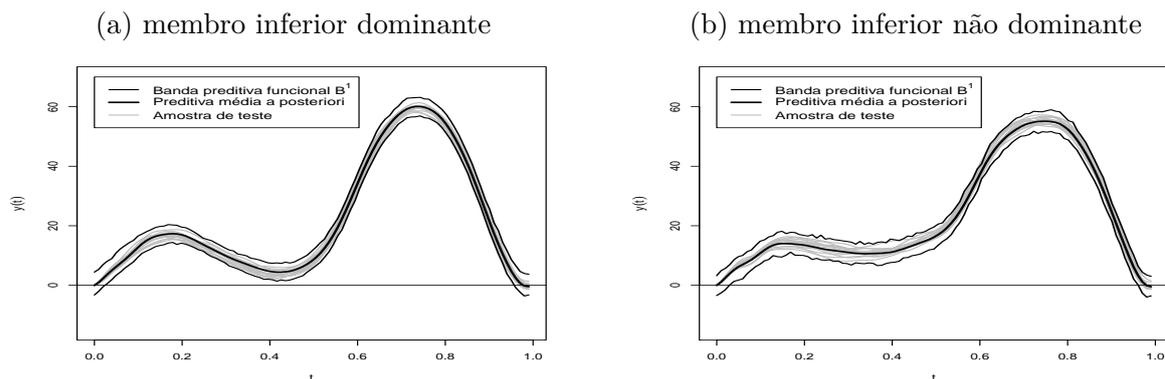
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 130: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 3º indivíduo



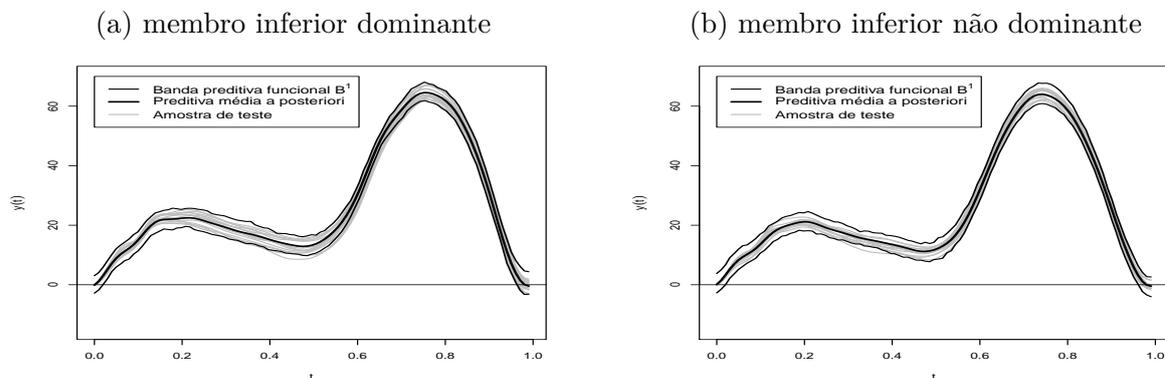
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 131: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 4º indivíduo



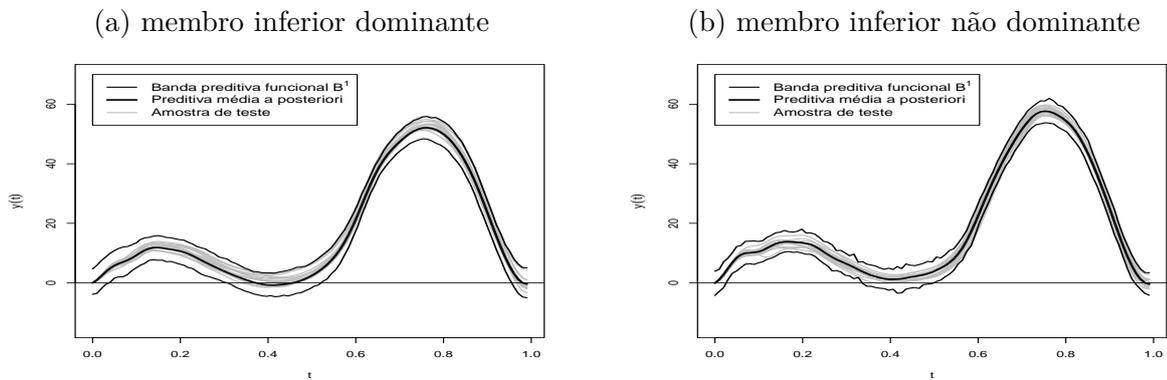
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 132: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 5º indivíduo



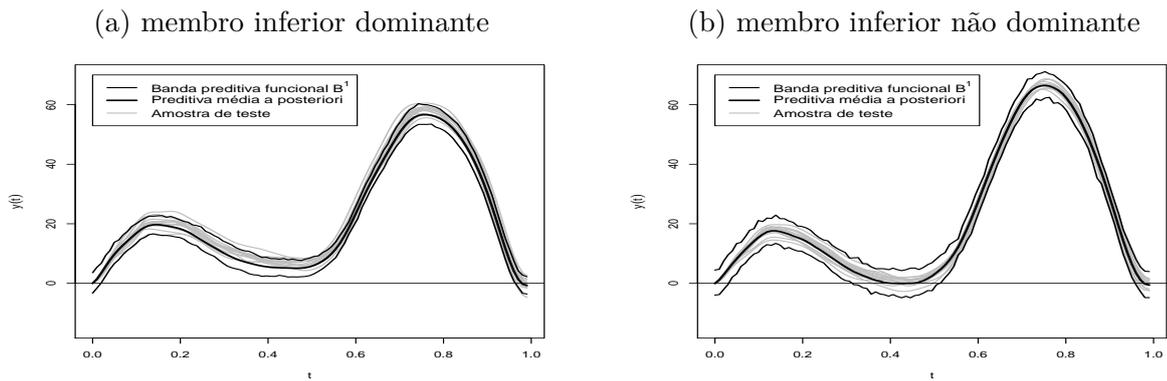
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 133: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 6º indivíduo



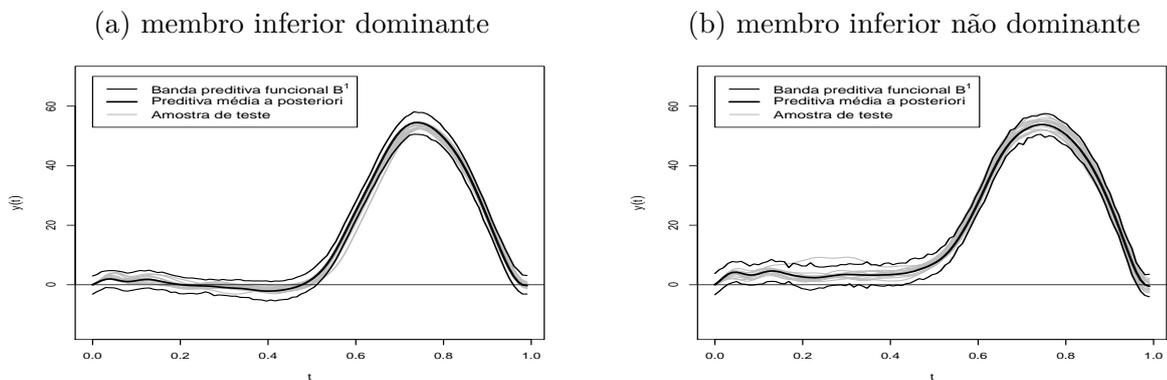
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 134: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 7º indivíduo



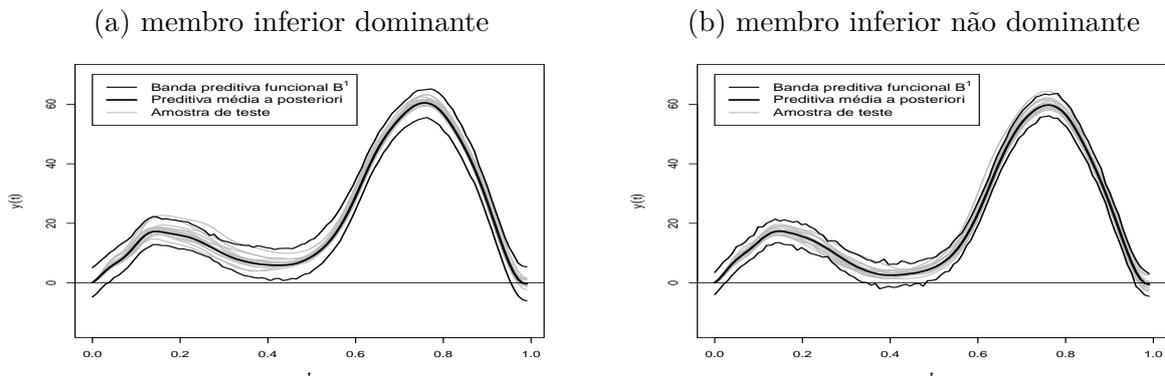
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 135: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 8º indivíduo



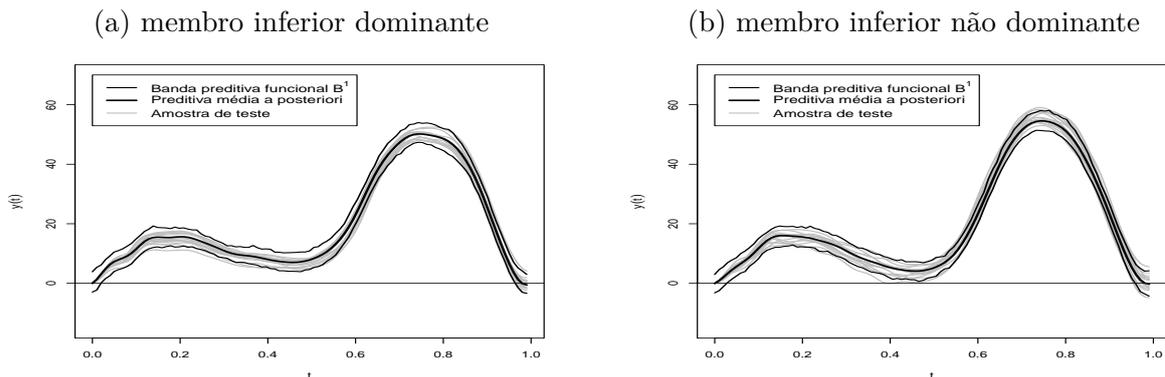
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 136: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 9º indivíduo



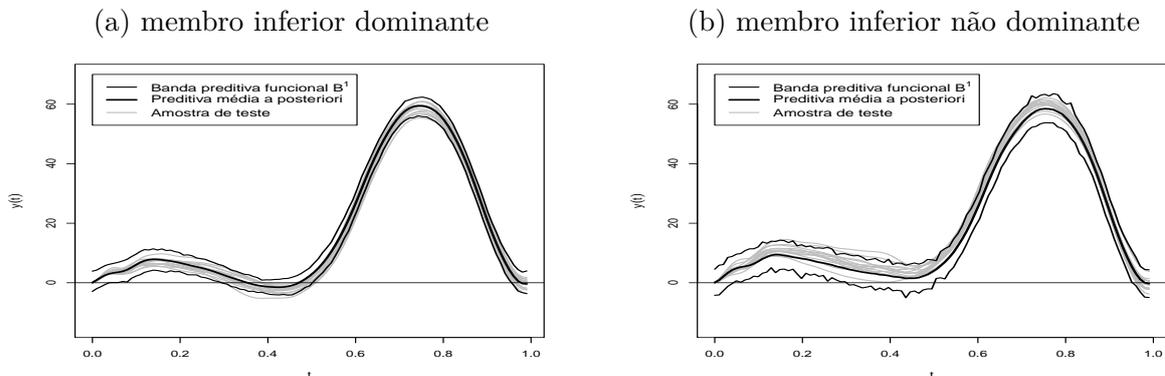
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 137: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 10º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 138: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 11º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 139: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 12º indivíduo

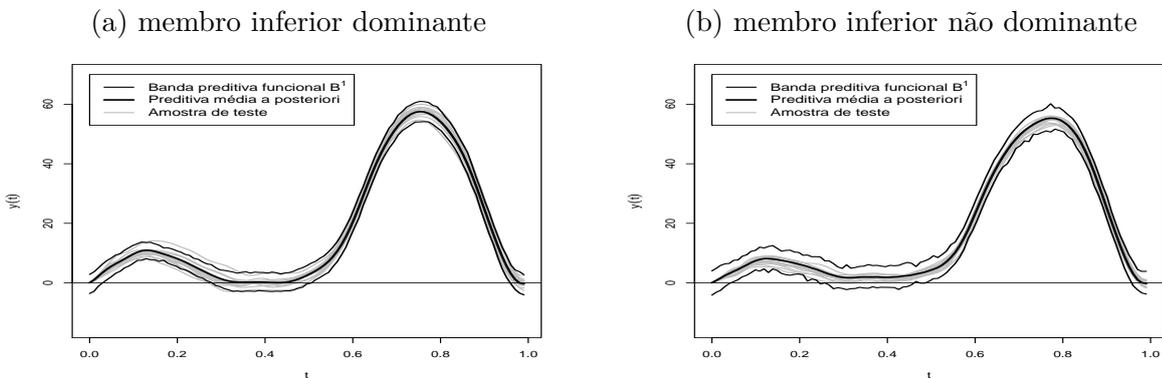


Figura 140: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 13º indivíduo

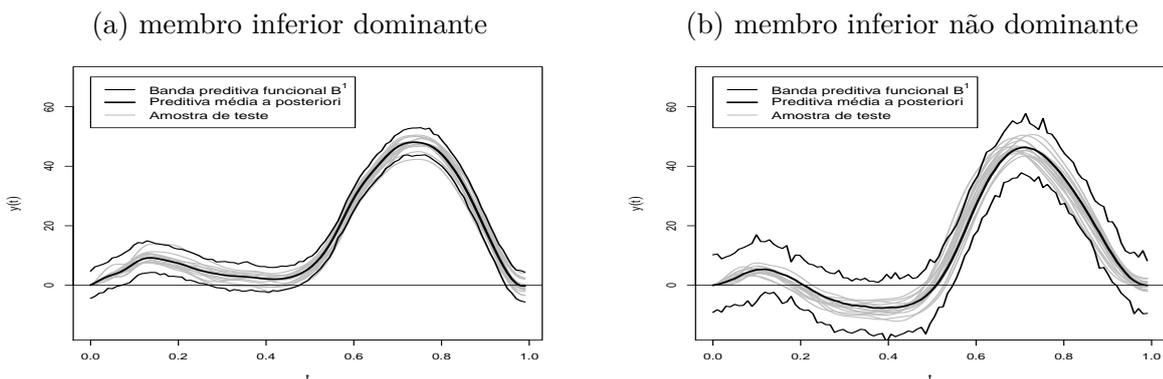


Figura 141: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 14º indivíduo

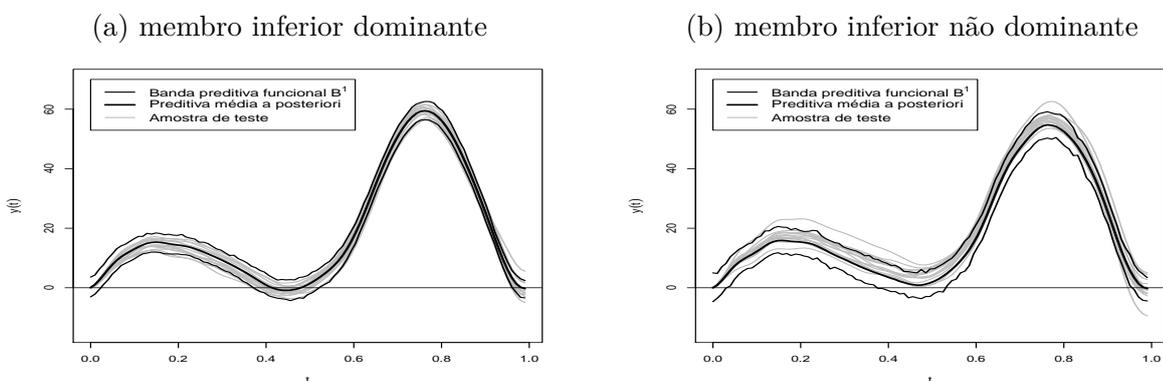
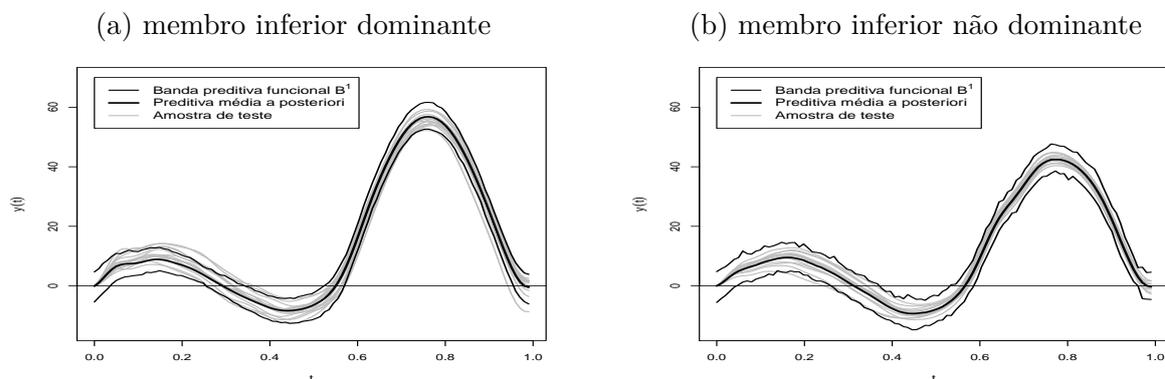
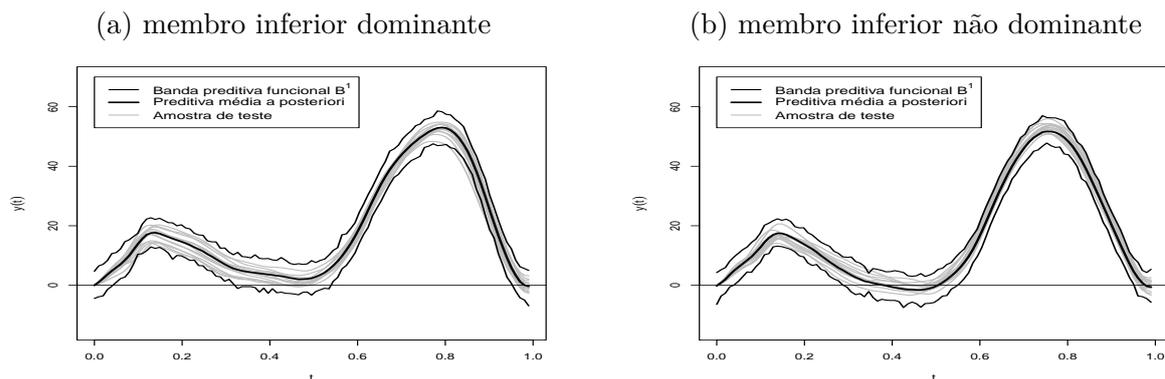


Figura 142: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 15^o indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 143: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^1 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 16^o indivíduo

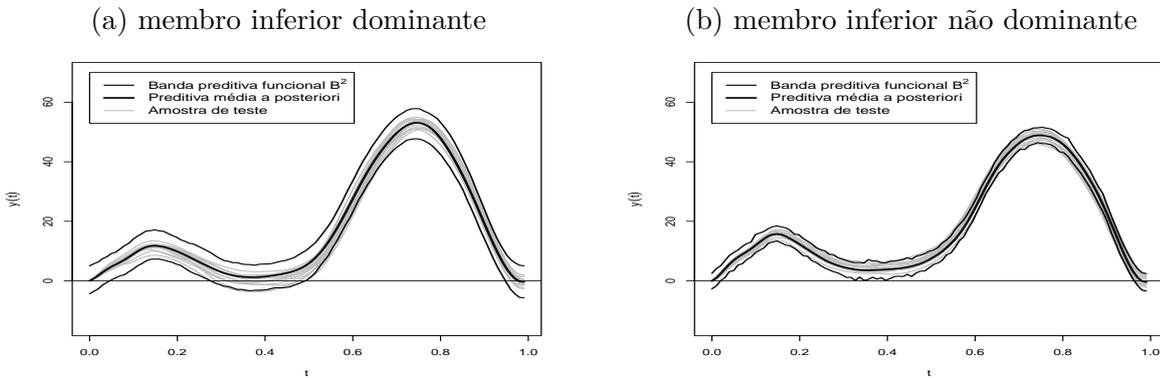


Fonte: Elaborado pela autora

C.7 Gráficos com as bandas preditivas da [subseção 6.1.2](#) para o modelo descrito no [Capítulo 4](#)

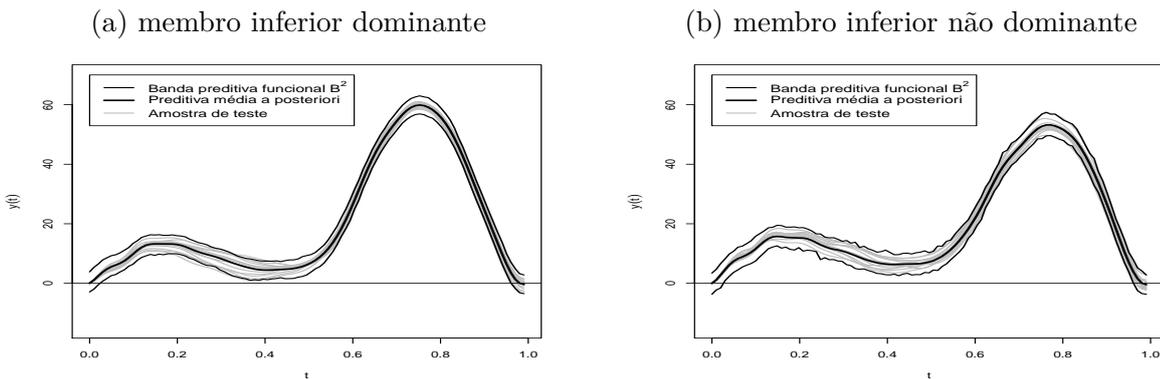
Nesta seção, apresentamos os gráficos com a banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 , juntamente com a curva preditiva média *a posteriori* e a amostra de teste para os indivíduos 2 a 16 referentes à [subseção 6.1.2](#) do [Capítulo 6](#) para o modelo descrito no [Capítulo 4](#).

Figura 144: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 2º indivíduo



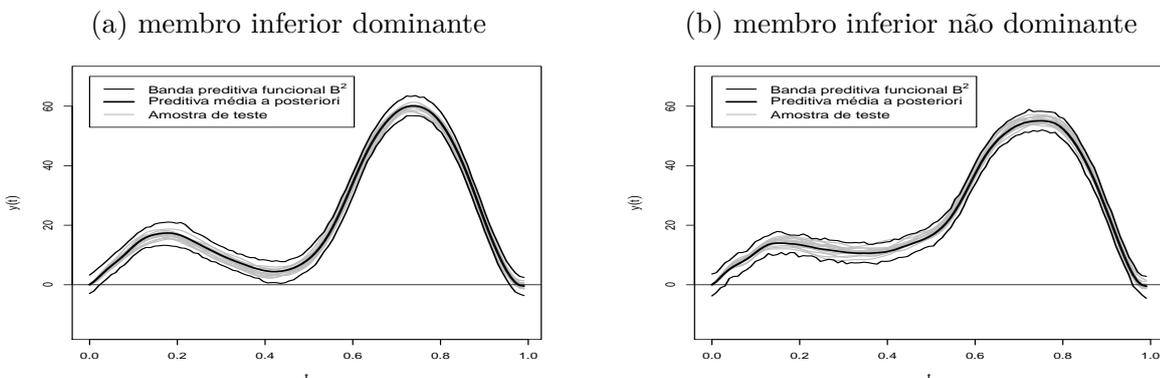
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 145: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 3º indivíduo



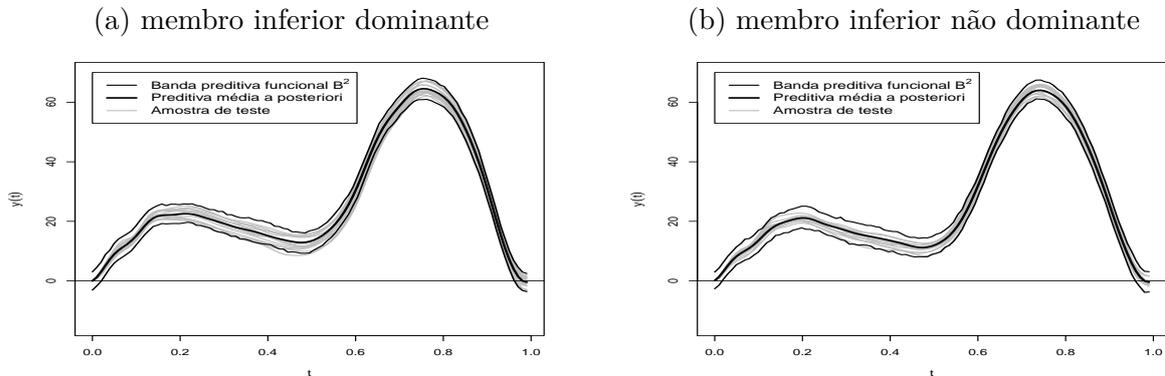
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 146: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 4º indivíduo



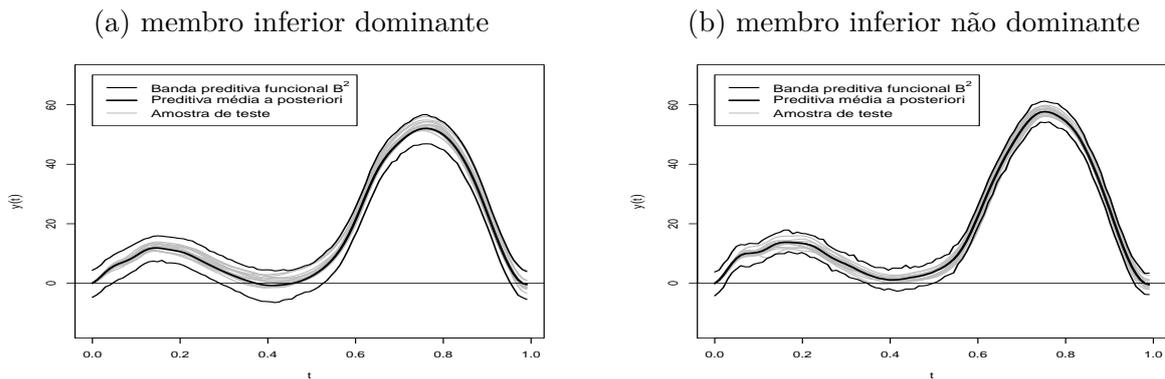
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 147: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 5º indivíduo



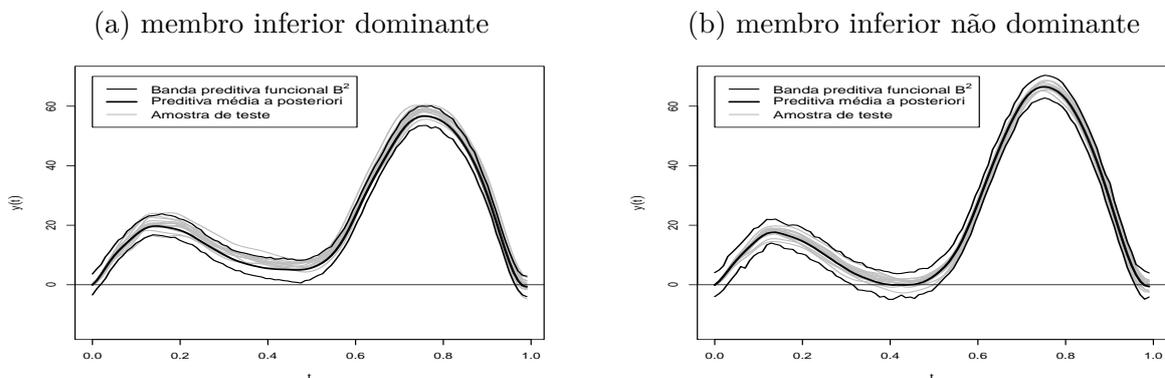
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 148: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 6º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 149: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 7º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 150: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 8º indivíduo

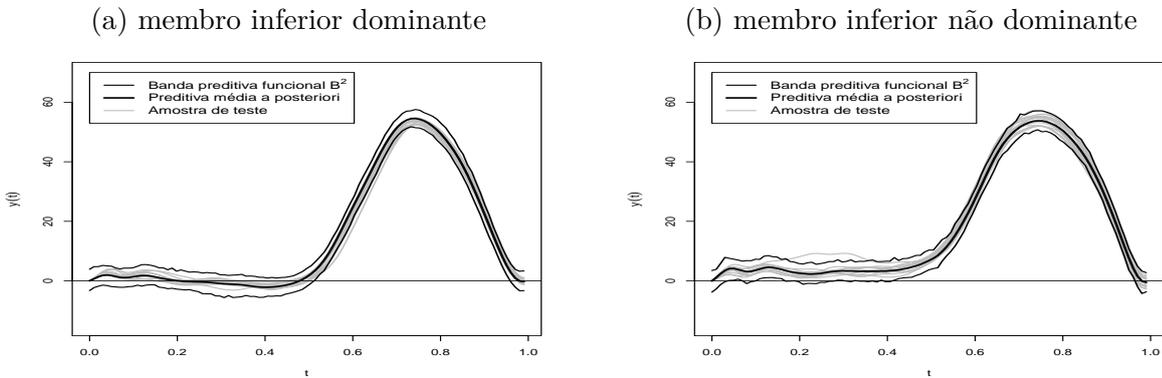


Figura 151: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 9º indivíduo

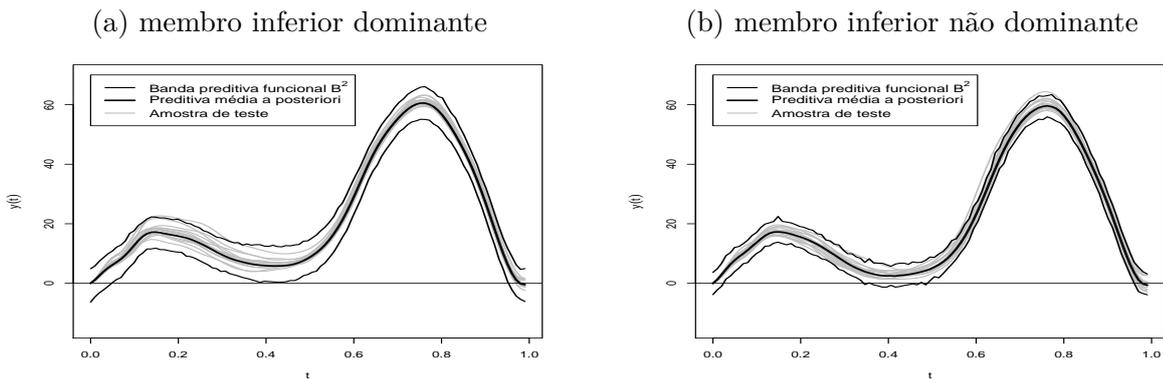


Figura 152: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 10º indivíduo

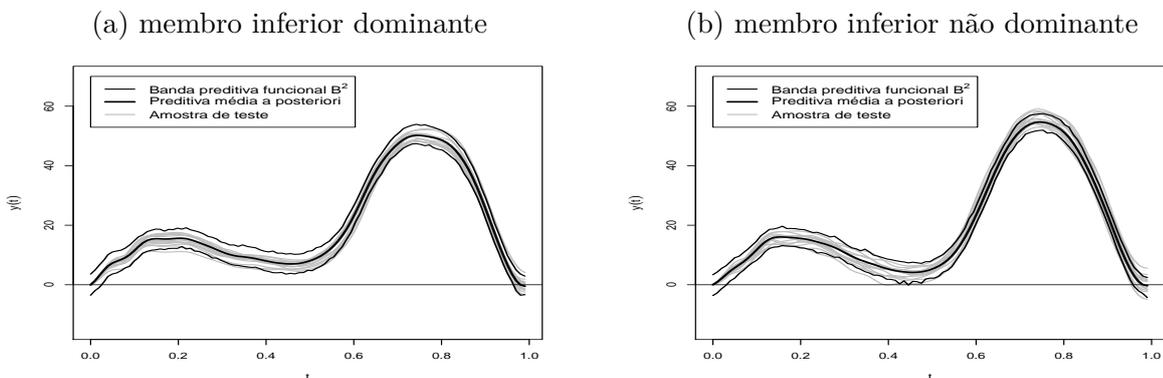
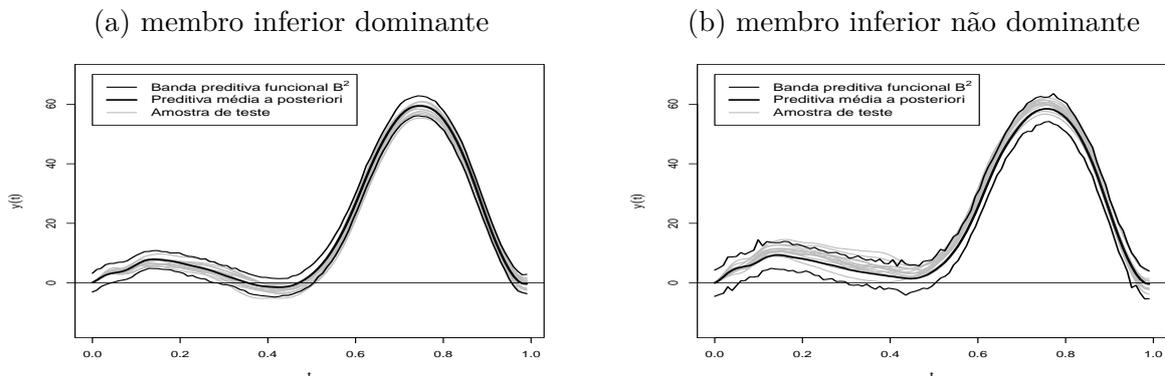
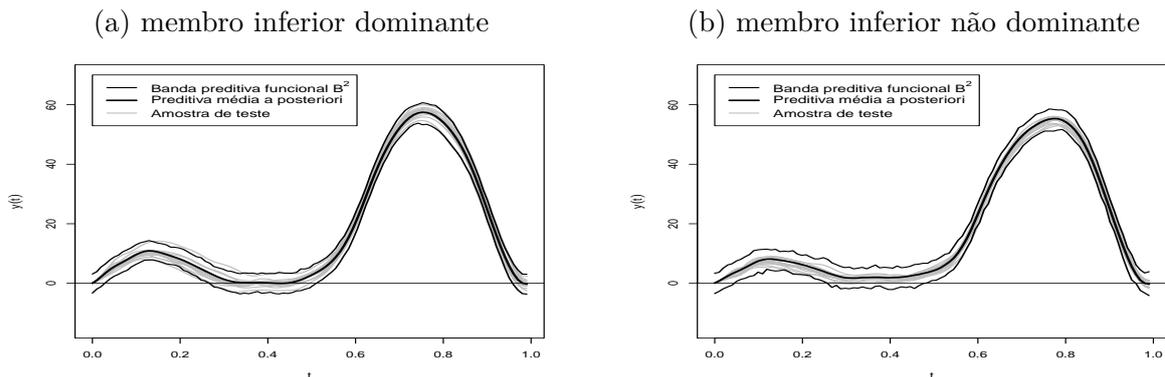


Figura 153: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 11^o indivíduo



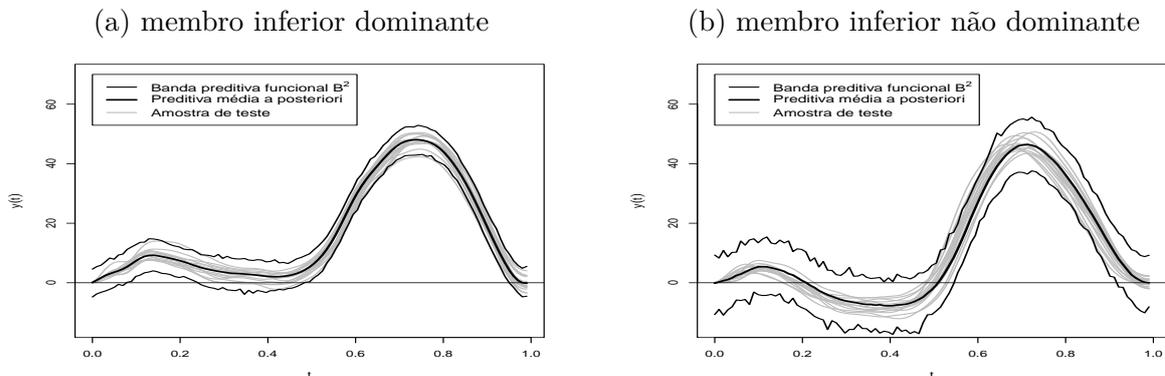
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 154: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 12^o indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 155: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 13^o indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 156: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 14º indivíduo

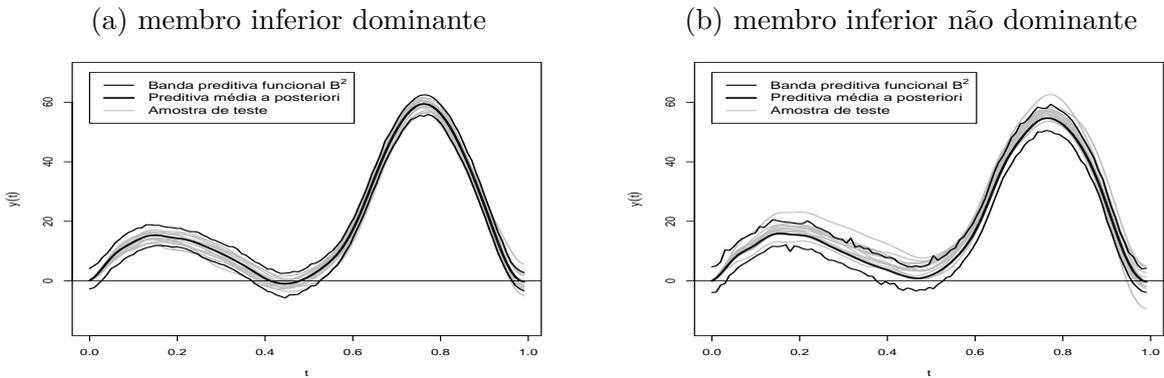


Figura 157: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 15º indivíduo

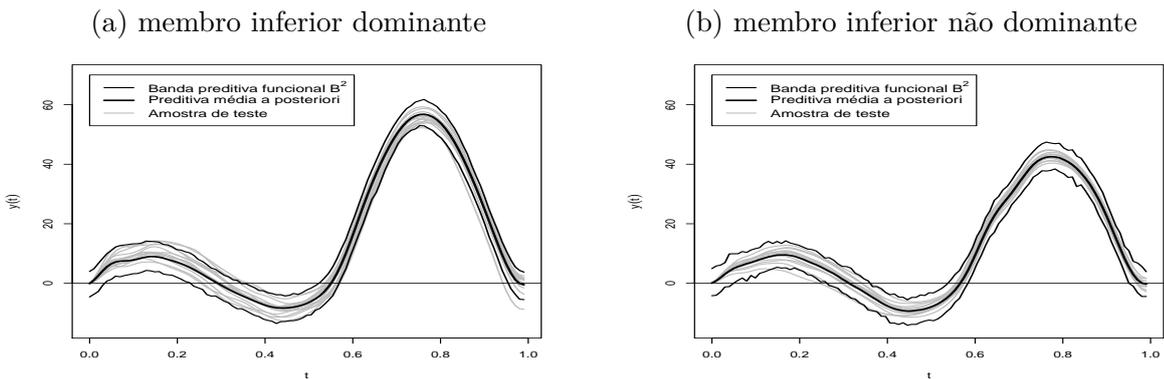
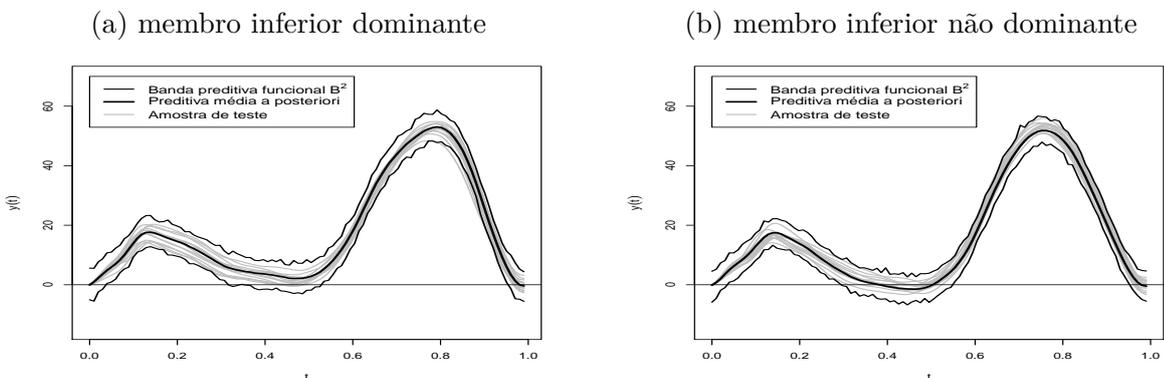


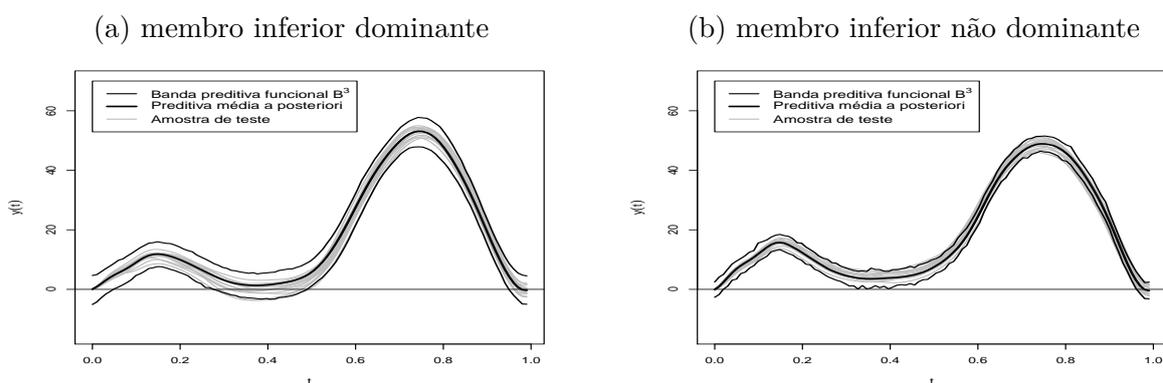
Figura 158: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^2 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 16º indivíduo



C.8 Gráficos com as bandas preditivas da subseção 6.1.3 para o modelo descrito no Capítulo 4

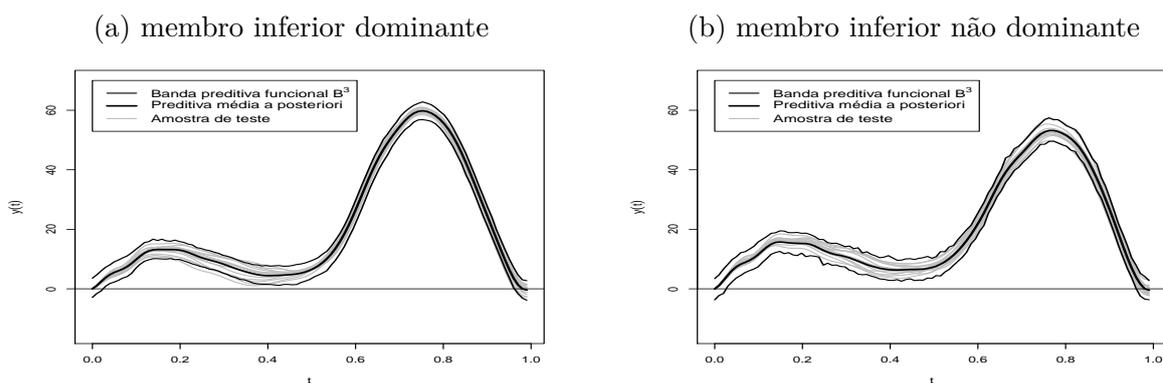
Nesta seção, apresentamos os gráficos com a banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 (*depth* MBD), juntamente com a curva preditiva média *a posteriori* e a amostra de teste para os indivíduos 2 a 16 referentes à subseção 6.1.3 do Capítulo 6 para o modelo descrito no Capítulo 4.

Figura 159: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 2º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 160: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 3º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 161: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 4º indivíduo

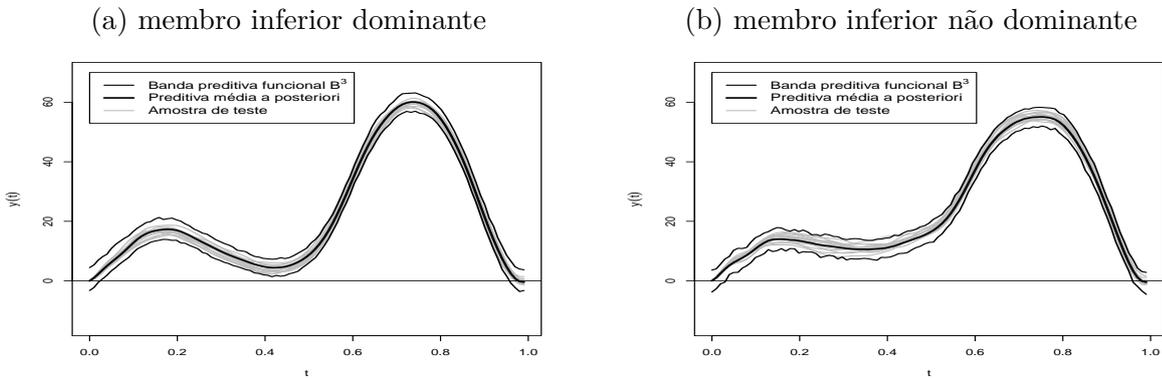


Figura 162: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 5º indivíduo

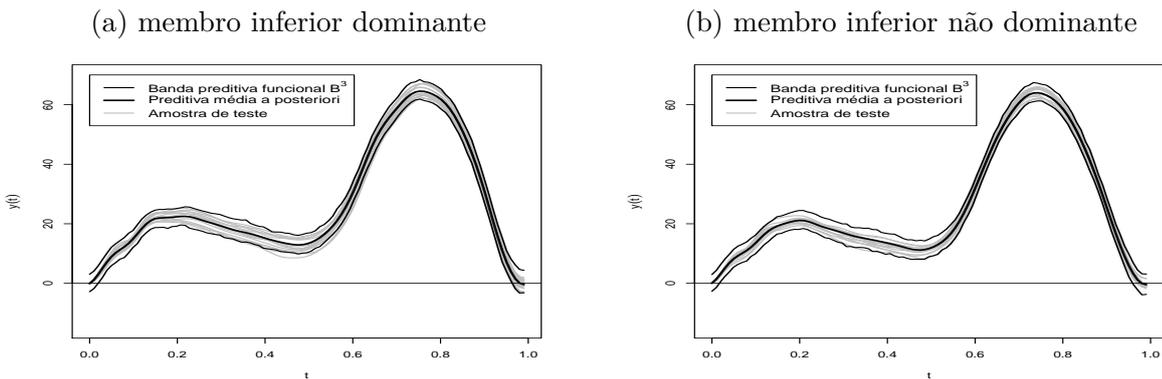


Figura 163: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 6º indivíduo

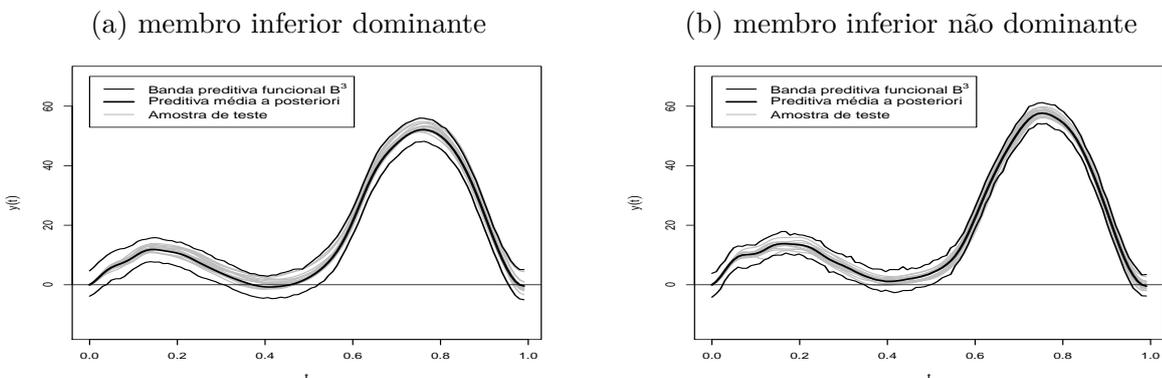
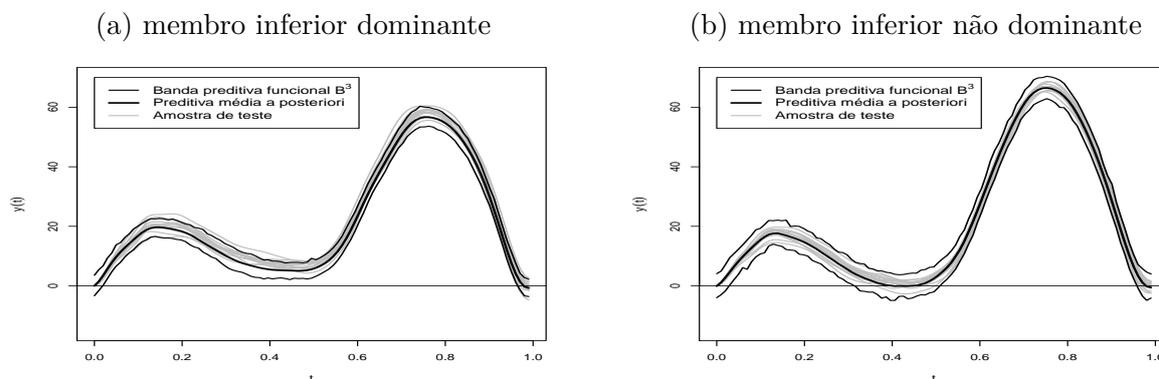
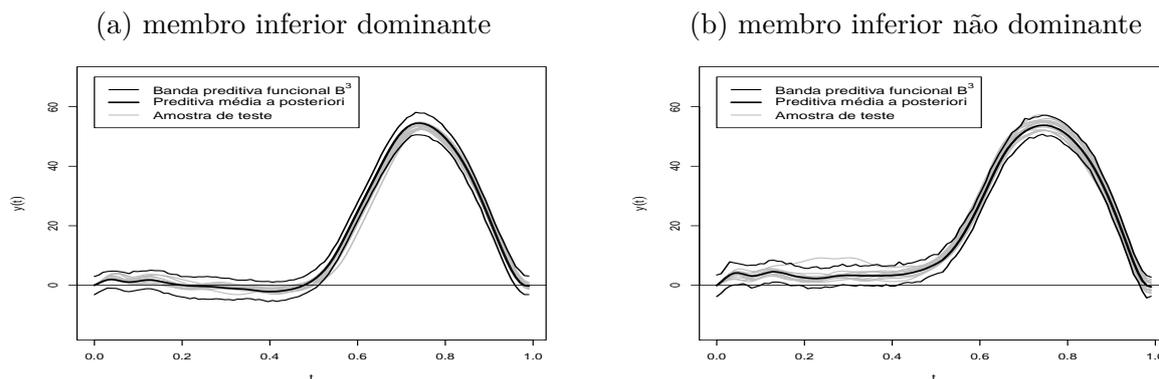


Figura 164: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 7º indivíduo



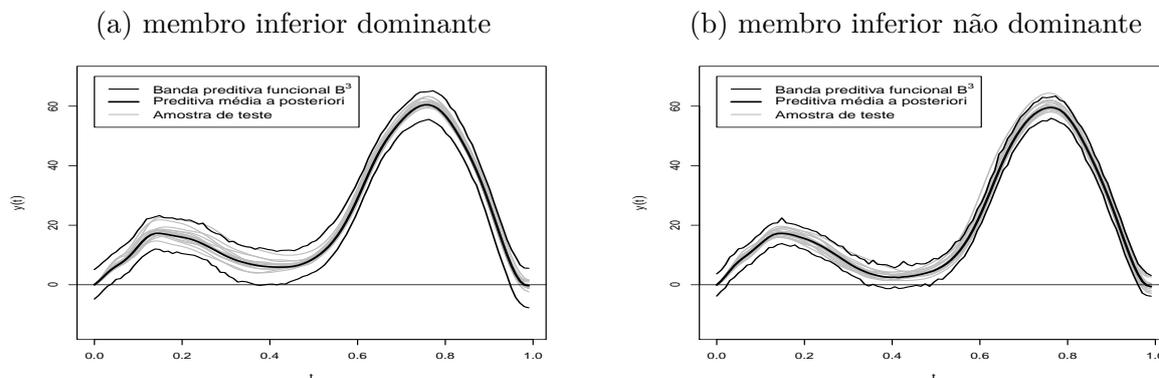
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 165: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 8º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 166: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 9º indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 167: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 10º indivíduo

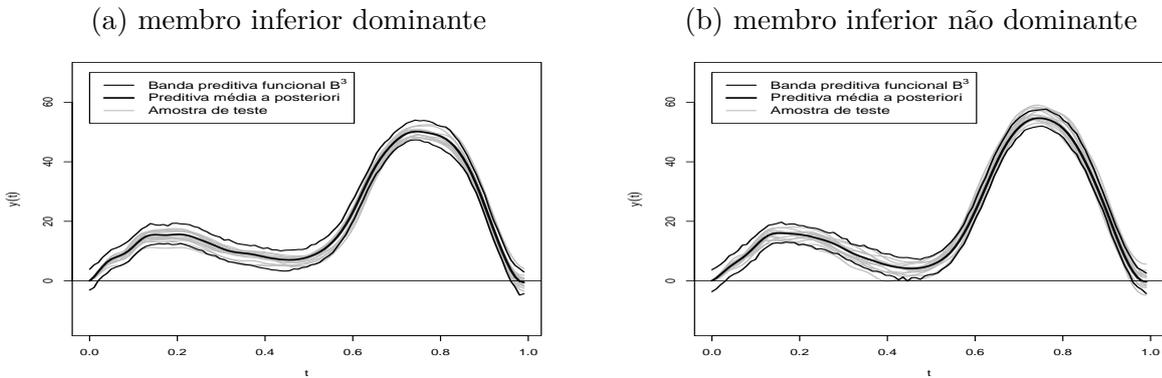


Figura 168: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 11º indivíduo

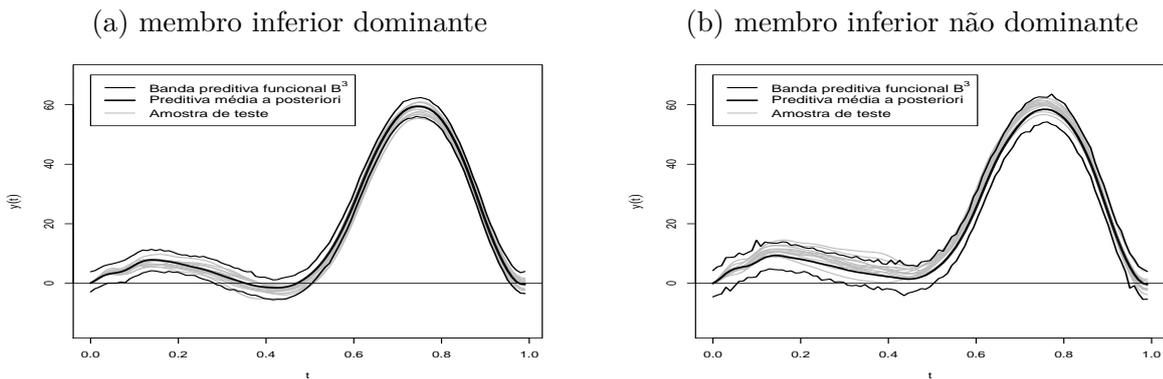


Figura 169: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 12º indivíduo

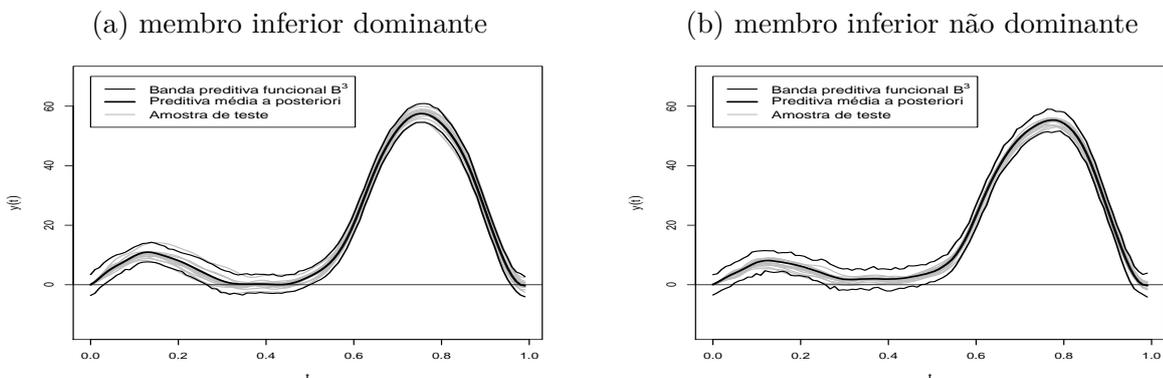
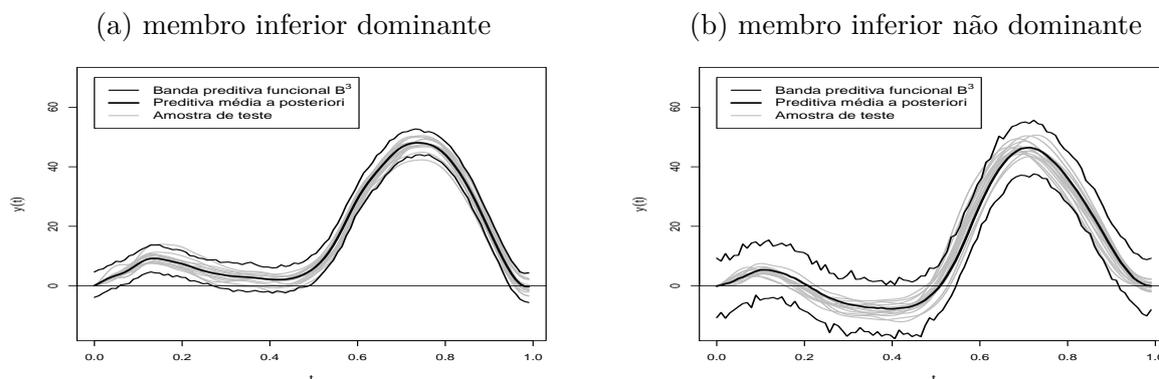
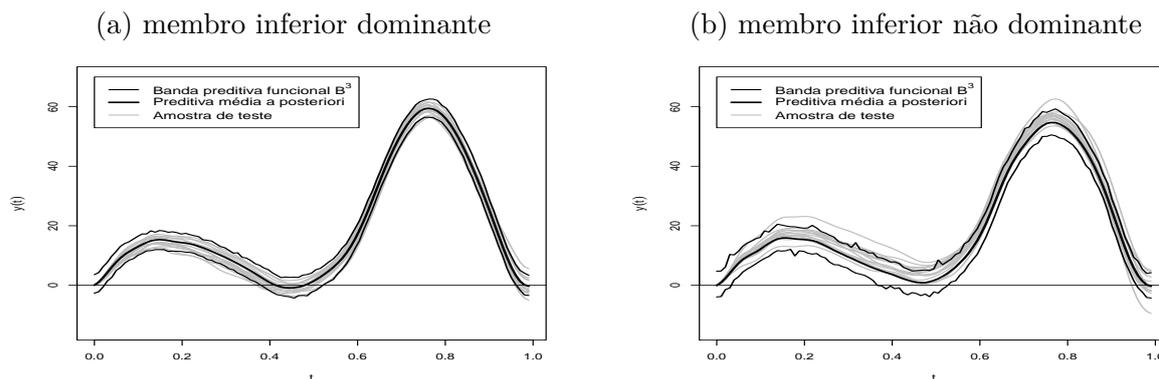


Figura 170: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 13^o indivíduo



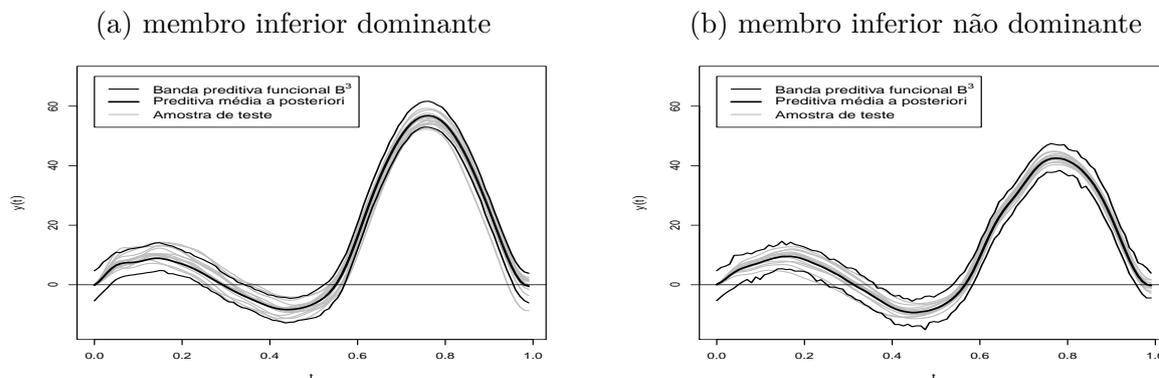
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 171: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 14^o indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 172: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do [Capítulo 4](#) para o 15^o indivíduo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 173: Banda preditiva funcional \mathcal{B}^3 com 95% de credibilidade para o modelo de regressão funcional processo Gaussiano Bayesiano do Capítulo 4 para o 16º indivíduo

