

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA INTERINSTITUCIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA UFSCar-USP

Aimée Shirozono

**Modelos Série de Potência Zero-Modificado para Séries Temporais com Dados de Contagem**

Tese apresentada ao Departamento de Estatística – Des/UFSCar e ao Instituto de Ciência Matemática e de Computação – ICMC – USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística - Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística UFSCar-USP.

Orientador: Prof. Dr. Marinho Gomes de Andrade Filho

Co-orientadora: Profa. Dra. Katiane Silva Conceição

**São Carlos**  
**Junho de 2019**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA INTERINSTITUCIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA UFSCar-USP

Aimée Shirozono

**Zero-modified power series models for time series with counting data**

Master dissertation submitted to the Department of Statistics - Des-UFSCar and to the institute of Mathematics and Computer Sciences - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Interagency Program Graduate in Statistics, UFSCar-USP.

Advisor: Prof. Dr. Marinho Gomes de Andrade Filho

Co-advisor: Profa. Dra. Katiane Silva Conceição

**São Carlos**

**June 2019**



# UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística

---

## Folha de Aprovação

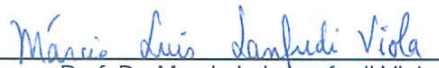
---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Aimée Shirozono, realizada em 10/05/2019:



---

Prof. Dr. Marinho Gomes de Andrade Filho  
USP



---

Prof. Dr. Marcio Luis Lanfredi Viola  
UFSCar



---

Profa. Dra. Sandra Cristina de Oliveira  
UNESP



# RESUMO

SHIROZONO, A. **Modelos série de potência zero-modificado para séries temporais com dados de contagem**. 2019. 83 p. Dissertação (Mestrado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

O objetivo deste trabalho é propor os modelos Zero Modificados com distribuição na família Série de Potência (ZMPS) para séries temporais com dados de contagem. O modelo ZMPS possui um amplo portfólio de distribuições para dados de contagem em que, com uma função de ligação apropriada, podemos escrever os modelos de regressão usando as distribuições ZMPS de forma semelhante ao que é feito com os modelos lineares generalizados. Em seguida, utilizamos a ideia dos modelos Generalizados Autorregressivos e de Médias Móveis (GARMA) para finalmente propor os modelos Série de Potência Zero-Modificado para Séries Temporais com dados de contagem.

**Palavras-chave:** Dados de contagem, Distribuição série de potência, Zero-inflação, Zero-deflação, Modelos generalizados ARMA.



# ABSTRACT

SHIROZONO, A. **Zero-modified power series models for time series with counting data.** 2019. 83 p. Dissertação (Mestrado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

The goal of this work is to propose the Zero-Modified models with Power Series distribution (ZMPS) for time series with counting data. The ZMPS model have a huge portfolio of count data distributions wherein, with an appropriate link function, we can write the regression models using the ZMPS distributions similar to what is done with generalized linear models. Then, we can use the idea of the Generalized Autoregressive and Moving Average (GARMA) models to propose the Zero-Modified Power Series models for Time Series with counting data.

**Keywords:** Count data, Power series distribution, Zero inflation, Zero deflation, Generalized ARMA model.





# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

---

Figura 1 – Número de altas do dólar norte americano até a queda . . . . .	58
Figura 2 – Parâmetro estimado da probabilidade zero-modificado - ZMG-GARMA Clássico . . . . .	59
Figura 3 – Autocorrelação e Autocorrelação parcial dos resíduos - ZMG-GARMA Clássico	60
Figura 4 – Previsão 1 passo a frente - ZMG-GARMA Clássico . . . . .	61
Figura 5 – Parâmetro estimado da probabilidade zero-modificado - ZMG-GARMA Bayesiano . . . . .	62
Figura 6 – Autocorrelação e Autocorrelação parcial dos resíduos - ZMG-GARMA Bayesiano . . . . .	62
Figura 7 – Previsão 1 passo a frente - ZMG-GARMA Bayesiano . . . . .	63
Figura 8 – Número de crimes com armas de fogo na cidade de São Francisco . . . . .	64
Figura 9 – Autocorrelação e Autocorrelação parcial - ZMP-GARMA Clássico . . . . .	65
Figura 10 – Previsão e Parâmetro estimado da probabilidade zero-modificado - ZMP-GARMA Clássico . . . . .	65
Figura 11 – Autocorrelação e Autocorrelação parcial - ZMP-GARMA Bayesiano . . . . .	66
Figura 12 – Parâmetro estimado da probabilidade zero-modificado - ZMP-GARMA Bayesiano . . . . .	67



---

# LISTA DE ALGORITMOS

---

---

Algoritmo 1 – Algoritmo BFGS . . . . .	41
Algoritmo 2 – Algoritmo MH . . . . .	43
Algoritmo 3 – Algoritmo HPD . . . . .	44
Algoritmo 4 – Algoritmo gerador de números aleatórios - ZMPS-GARMA . . . . .	50
Algoritmo 5 – Algoritmo gerador de números aleatórios - ZMPS . . . . .	83



# LISTA DE TABELAS

---

---

Tabela 1 – Algumas das Distribuições da Família Exponencial . . . . .	25
Tabela 2 – Algumas das Distribuições da Família Série de Potência . . . . .	26
Tabela 3 – Valores selecionados para os parâmetros do modelo Clássico . . . . .	51
Tabela 4 – Resultados da simulação - ZMG-GARMA Clássico . . . . .	52
Tabela 5 – Resultados da simulação - ZMP-GARMA Clássico . . . . .	53
Tabela 6 – Valores selecionados para os parâmetros do modelo Bayesiano . . . . .	54
Tabela 7 – Resultados da simulação - ZMG-GARMA Bayesiano . . . . .	54
Tabela 8 – Resultados da simulação - ZMP-GARMA Bayesiano . . . . .	55
Tabela 9 – Modelo Clássico Final ZMG-GARMA(0,1)(1) . . . . .	59
Tabela 10 – Modelo Bayesiano Final ZMG-GARMA(1,0)(1) . . . . .	61
Tabela 11 – Modelo Clássico Final ZMP-GARMA(1,1)(0) . . . . .	64
Tabela 12 – Modelo Bayesiano Final ZMP-GARMA(2,1)(1) . . . . .	66



# LISTA DE SÍMBOLOS

---

---

$Y$  — Variável aleatória

$\mu$  — Parâmetro da média

$\alpha$  — Parâmetro de dispersão

$\mathcal{A}_s$  — Suporte da distribuição dos modelo, composto pelo subconjuntos dos inteiros positivos e do zero

$\sigma^2$  — Parâmetro da variância

$p$  — Parâmetro de modificação

$m$  — Maior valor da defasagem das funções de ligação





# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO	19
2	MODELOS SÉRIE DE POTÊNCIA ZERO-MODIFICADOS GARMA	23
2.1	Modelo Autoregressivo e de Médias Móveis (ARMA)	23
2.2	Modelo Autoregressivo e de Médias Móveis Generalizados (GARMA)	24
2.3	Distribuição Série de Potência	26
2.4	Distribuição Série de Potência Zero-Modificado	26
2.4.1	<i>Composições da distribuição ZMPS</i>	27
2.5	Modelo ZMPS com Abordagem em Séries Temporais	28
2.5.1	<i>Modelo ZMPS-GARMA reparametrizado</i>	29
2.5.2	<i>Distribuição ZM-Binomial-GARMA (ZMB-GARMA)</i>	30
2.5.3	<i>Distribuição ZM-Binomial Negativa-GARMA (ZMBN-GARMA)</i>	31
2.5.4	<i>Distribuição ZM-Geométrica-GARMA (ZMG-GARMA)</i>	32
2.5.5	<i>Distribuição ZM-Poisson-GARMA (ZMP-GARMA)</i>	33
2.5.6	<i>Distribuição ZM-Poisson Generalizada-GARMA (ZMPG-GARMA)</i>	34
3	PROCESSO INFERENCIAL	35
3.1	Inferência Clássica	35
3.1.1	<i>ZMPS-GARMA(<math>\mu_t, \alpha, p_t</math>)</i>	36
3.1.2	<i>ZMPS-GARMA(<math>\mu_t, \alpha, w_t</math>)</i>	36
3.1.3	<i>Método BFGS para Estimação</i>	41
3.2	Inferência Bayesiana	42
3.2.1	<i>Método MCMC</i>	43
3.3	Previsão	43
3.3.1	<i>Intervalo de previsão - HPD</i>	44
3.4	Seleção de Modelos	44
3.4.1	<i>AIC</i>	45
3.4.2	<i>BIC</i>	45
3.4.3	<i>EBIC</i>	45
3.4.4	<i>DIC</i>	45
3.4.5	<i>CPO</i>	46
4	ESTUDO DE SIMULAÇÃO	49
4.1	Função Geradora de Números Aleatórios	49

4.2	Estudo de Simulação - Clássico . . . . .	51
4.2.1	ZMG-GARMA . . . . .	51
4.2.2	ZMP-GARMA . . . . .	52
4.3	Estudo de Simulação - Bayesiano . . . . .	53
4.3.1	ZMG-GARMA . . . . .	54
4.3.2	ZMP-GARMA . . . . .	55
5	ESTUDO DE CASO . . . . .	57
5.1	ZMG-GARMA - Número de altas do dólar até a queda . . . . .	57
5.1.1	ZMG-GARMA Clássico . . . . .	58
5.1.2	ZMG-GARMA Bayesiano . . . . .	61
5.2	ZMP-GARMA - Número de crimes com armas de fogo . . . . .	63
5.2.1	ZMP-GARMA Clássico . . . . .	64
5.2.2	ZMP-GARMA Bayesiano . . . . .	65
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	69
	REFERÊNCIAS . . . . .	71
APÊNDICE A	ESTACIONARIEDADE NOS MODELOS GARMA . . . . .	75
APÊNDICE B	FUNÇÃO GERADORA DE NÚMEROS ALEATÓRIOS . . . . .	81

---

## INTRODUÇÃO

---

Dados correlacionados no tempo podem ser encontrados em diversas situações, por exemplo, com o objetivo de determinar o efeito de uma droga, é verificado as adversidades apresentadas durante um certo período de tempo, que pode ser finalizado naturalmente ou, se for o caso, através de censura. Outro exemplo a ser considerado, é a aplicação de técnicas estocásticas para inferir resultados e possíveis tomadas de decisão sobre dados longitudinais caracterizados por apresentar uma decorrência no tempo. Uma das aplicações em dados com esta estrutura de correlação mais comumente encontrada na literatura acadêmica é na área financeira, como por exemplo, em risco de mercado, precificação, índice de bolsas de valores, modelos de *stress test*, volatilidade do mercado, etc.

Uma das técnicas mais conhecidas e importantes para a construção de modelos com dados correlacionadas no tempo (chamados também de séries temporais) são os modelos Autor-regressivo e de Médias Móveis (ARMA), propostos por [Box et al. \(2016\)](#). Diversas metodologias derivadas desta técnica foram construídas dado suas restrições bem definidas, facilidade na interpretação de resultados, casos de aplicação em dados reais com resultados e valores previstos satisfatórios.

A aplicação deste tipo de modelo pode ser feito considerando tanto as distribuições contínuas como as discretas. O conjunto de dados da distribuição discreta é formado pelos números naturais ( $\mathbb{N}$ ), ou aqui referenciados como dados de contagem. Na literatura podemos encontrar diversas maneiras de visualizar as distribuições para dados de contagem, uma das mais conhecidas é a forma da família exponencial ([NELDER; WEDDERBURN, 1972](#)), amplamente estudada no meio acadêmico dado a sua facilidade de interpretação e modelagem.

Há também algumas distribuições para dados de contagem que podem ser reescritas da sua forma original para a família série de potência. [Patil \(1962\)](#) demonstrou em seu artigo algumas das propriedades destas distribuições. É possível encontrar distribuições que são flexíveis a ambas as formas da família exponencial e série de potência, como a Poisson, Geométrica e a

Binomial.

Posteriormente, [Gupta \(1974\)](#) construiu um modelo mais generalizado, o qual ele chama de distribuição série de potência modificado. [Cordeiro, Andrade e Castro \(2009\)](#) usaram este último formato para construir uma extensão do modelo clássico usando outras distribuições (Borel-Tanner, Delta Binomial, Geeta, etc.) e inclui a função de ligação para escrever modelos de regressão para a média.

Diversos estudos foram realizados sobre as características do grupo das distribuições discretas que compõe a família série de potência. Outro atributo que pode ser encontrado, são as distribuições que contêm a inflação e deflação de zeros. [Dietz e Böhning \(2000\)](#) demonstraram que o modelo de Poisson zero-modificado permite a captura da distribuição de Poisson usual, inflação e deflação de zeros e a Poisson truncada, dependendo do valor do parâmetro de modificação. Uma forma mais geral, que inclui toda a família série de potência no modelo com modificação no zero, e sua caracterização como distribuição, foi proposta por [Conceição \*et al.\* \(2017\)](#).

Este modelo pode ser referido como Série de Potência Zero-Modificado (ZMPS). Inicialmente a abordagem clássica foi proposta em [Conceição \(2013\)](#), entretanto diversas aplicações dos modelos zero-inflacionados utilizando a abordagem Bayesiana são propostas. [Angers e Biswas \(2002\)](#) apresentaram o modelo zero-inflacionado para a distribuição de Poisson Generalizada, utilizando prioris não informativas e [Ghosh, Mukhopadhyay e Lu \(2004\)](#) generalizaram a aplicação para todas as distribuições zero-inflacionadas. Para os modelos ZMPS, não foi diferente, a abordagem Bayesiana pode ser encontrada em [Conceição, Marinho e Louzada \(2014\)](#).

[Conceição \*et al.\* \(2017\)](#) demonstraram que é possível obter uma reparametrização das distribuições ZMPS na forma do modelo Hurdle. [Mullay \(1986\)](#) e [Gurmu \(1998\)](#) explicitaram a capacidade de modelagem do modelo Hurdle, em seus respectivos artigos, e enfatizaram que o modelo é capaz de capturar dados subdispersos e sobredispersos. Os modelos ZMPS e Hurdle têm uma importante relação em que será possível retirar vantagens de cálculo computacional.

Neste trabalho apresentamos o modelo ZMPS aplicado a séries temporais e, como exemplo, utilizamos as distribuições Binomial, Binomial Negativa, Geométrica, Poisson e Poisson Generalizada. Para aplicação utilizamos as distribuições Geométrica e de Poisson. Conectando dados de contagem correlacionados no tempo com um preditor linear, chegamos a um modelo generalizado Autorregressivo e de Médias Móveis (ARMA) semelhante aos modelos propostos para a família exponencial por [Benjamin, Rigby e Stasinopoulos \(1998\)](#), assim como fizeram [Andrade, Andrade e Ehlers \(2015\)](#) para o caso Bayesiano. Finalmente, temos os modelos Série de Potência Zero-Modificados Autorregressivos e de Médias Móveis Generalizados (ZMPS-GARMA), proposta desta dissertação.

No Capítulo 2 apresentamos o formato do modelo ZMPS-GARMA, desde a forma de origem dos modelos ARMA Generalizados e as distribuições utilizadas da família Série de Potência, até a aplicação do modelo ZMPS com abordagem em séries temporais. No Capítulo 3

foi discutido o método inferencial clássico de máxima verossimilhança, na forma reparametrizada do modelo, além da Inferência Bayesiana. Para ambos os processos inferenciais apresentamos métodos iterativos para a estimação dos parâmetros do modelo. Técnicas de previsão e critérios para seleção de modelos foram considerados para a metodologia Clássica e Bayesiana. No Capítulo 4, um estudo de simulação foi feito com o objetivo de verificar os pressupostos dos parâmetros e a performance do processo de estimação. No quinto capítulo, temos duas aplicações em um problema real a fim de verificar a adequabilidade do modelo e testar sua capacidade de previsão. Por fim, no sexto e último capítulo, apresentamos as principais conclusões retidas do modelo e propostas futuras.



# MODELOS SÉRIE DE POTÊNCIA ZERO-MODIFICADOS GARMA

O modelo série de potência zero-modificado autorregressivo e de médias móveis generalizado será apresentado neste capítulo. Suas derivações e o fluxo de construção serão detalhados de maneira a tornar claro os componentes originários deste modelo. Adicionalmente, algumas das principais distribuições para dados de contagem serão abordadas.

## 2.1 Modelo Autoregressivo e de Médias Móveis (ARMA)

Dados correlacionados no tempo, ou as chamadas séries temporais podem ser caracterizadas por uma realização de um processo estocástico, de forma simplificada, uma variável aleatória indexada no tempo. Quando pensamos em modelagem de uma série temporal, logo fazemos a ligação nos modelos clássicos ARMA propostos por [Box et al. \(2016\)](#). A teoria destes modelos demonstra-se de grande importância devido as especificidades que eles carregam e o poder de ser aplicável em diversas situações na prática e em muitos dos casos, sendo um bom modelo de predição.

Os modelos ARMA podem ser representados como um sistema linear dinâmico, em que  $\Theta(B)$  é chamado de função de transferência. Neste sistema, os valores passados da série mais o ruído branco são utilizados para representar o valor da variável aleatória no tempo  $t$ :

$$\Phi(B)y_t = \Theta(B)a_t \quad (2.1)$$

em que  $B$  é o operador de defasagem, ou operador complexo, tal que  $B^l a_t = a_{t-l}$ . A variável  $a_t$  é o ruído branco com média 0,  $Var(a_t) = \sigma_a^2$  e  $E(a_t a_{t+k}) = 0, \forall k \neq 0, k \in \mathbb{N}, t \geq 0$ .

Uma propriedade dos processos estocásticos que é de suma importância para o processo de modelagem, é a verificação da estacionariedade da série  $\{Y_t, t \in \mathbb{N}\}$ . Resumidamente, um

processo estocástico é fortemente estacionário se a probabilidade conjunta é invariante no tempo, ou seja, quaisquer  $t_1, \dots, t_n \in T \subset \mathbb{R}$ ,  $\tau \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $f_{y_{t_1}, \dots, y_{t_n}}(y_1, \dots, y_n) = f_{y_{t_1+\tau}, \dots, y_{t_n+\tau}}(y_1, \dots, y_n)$ . Outro conceito importante é o de estacionariedade fraca, que supõe que os seguintes resultados são válidos:

- $E(Y_t) = \mu$ , constante  $\forall t$
- $Var(Y_t) = \sigma^2$ , constante  $\forall t$
- $Corr(Y_t, Y_{t+\tau}) = \zeta(\tau)$ , função somente de  $\tau$

Para os modelos ARMA, o processo é estacionário se  $|\Phi(B)|^{-1} < \infty$  para  $|B| < 1$ . O detalhamento de cada resultado apresentado nesta seção pode ser encontrado em [Box et al. \(2016\)](#).

Diversas derivações dos modelos ARMA podem ser encontrados na literatura, como os modelos SARIMA, ARIMA, ou até mesmo inspirações para outros tipos de problemas como a modelagem de volatilidades com os modelos ARCH, GARCH, NGARCH, entre outros. Entretanto o nosso objetivo será em utilizar a conexão feita por [Benjamin, Rigby e Stasinopoulos \(2003\)](#), para a utilização dos resultados dos modelos ARMA com as distribuições da família exponencial, utilizando a técnica de modelagem dos modelos de regressão linear generalizados.

## 2.2 Modelo Autoregressivo e de Médias Móveis Generalizados (GARMA)

Os Modelos Autoregressivos e de Médias Móveis Generalizados foram propostos por [Benjamin, Rigby e Stasinopoulos \(1998\)](#). A inspiração para criar o delineamento desse modelo foi o MLG (modelos lineares generalizados), proposto por [Nelder e Wedderburn \(1972\)](#). A partir das formas das distribuições da família exponencial, o autor se apropria da função de ligação para transferir a parte explicativa do modelo, a fim de estimar o vetor de parâmetros, com dados de contagem em séries temporais. A seguir iremos apresentar os principais resultados dos modelos GARMA, iniciando com a parte teórica da família exponencial.

Seja  $\mathbf{Y}$  uma variável aleatória discreta, com sua função de distribuição dependendo do parâmetro  $\theta$ . A sua função massa de probabilidade escrita na forma da família exponencial de  $\mathbf{Y}$  tem como característica ser composta pela seguinte forma, com parâmetro  $\mu$  de média e  $\alpha > 0$  de dispersão:

$$\pi_{Exp}(y; \theta, \alpha) = \exp(\phi(y\theta - b(\theta))) + c(y, \phi) \quad (2.2)$$



A partir destas informações, é possível obter o cálculo da média e variância de  $\mathbf{Y}$  (NELDER; WEDDERBURN, 1972):

$$E(\mathbf{Y}) = \mu_{Exp} = b'(\theta) \quad \text{e} \quad Var(\mathbf{Y}) = \sigma_{Exp}^2 = \phi^{-1}V(\mu)$$

em que  $V(\mu) = \frac{\partial \mu}{\partial \theta}$  é a função de variância e  $b'(b(\theta)) = \frac{\partial(\theta)}{\partial \theta}$  é a derivada da função  $b(\theta)$ . A Tabela 1 apresenta as funções que compõem cada distribuição da família exponencial selecionada para ser trabalhada:

Tabela 1 – Algumas das Distribuições da Família Exponencial

Distribuição	$b(\theta)$	$\theta$	$\phi$	$V(\mu)$	( $\mathbb{A}$ )	$Var(\mathbf{Y})$
Binomial( $\theta, k$ )	$k \log(1 + e^\theta)$	$\log(\frac{\mu}{k-\mu})$	1	$\frac{\mu(k-\mu)}{k}$	$0, 1, 2, \dots, k$	$\frac{\mu(k-\mu)}{k}$
Binomial Negativa( $\theta, \alpha$ )	$\alpha \log(1 - e^\theta)$	$\log(\frac{\mu}{\mu+\alpha})$	1	$\frac{\mu(\mu+\alpha)}{\alpha}$	$0, 1, 2, \dots$	$\frac{\mu(\mu+\alpha)}{\alpha}$
Geométrica( $\theta$ )	$\log(\frac{1}{1-e^\theta})$	$\log(\frac{\mu}{1+\mu})$	1	$\mu(1 + \mu)$	$0, 1, 2, \dots$	$\mu(1 + \mu)$
Poisson( $\theta$ )	$e^\theta$	$\log(\mu)$	1	$\mu$	$0, 1, 2, \dots$	$\mu$

O próximo passo é transferir a visão do MLG para dados correlacionados no tempo, que abrangem os dados de contagem da família exponencial. Os modelos GARMA são uma extensão dos modelos ARMA para dados de séries temporais não-gaussianos utilizando as propriedades de Modelos Lineares Generalizados. Sua função densidade de probabilidade condicional é dada por:

$$f(y_t | \alpha, \theta_t, \mathcal{F}_t) = \exp(\alpha(y_t \theta_t - b(\theta_t))) + c(y_t, \alpha) \quad (2.3)$$

em que  $\mathcal{F}_t = (y_{t-1}, \dots, y_1, \theta_{t-1}, \dots, \theta_1)$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$  e a função de ligação  $g(\mu_t)$  é da forma:

$$g(\mu_t) = \eta_t = x_t' \beta + \sum_{j=1}^p \phi_j \{g(y_{t-j}) - x_{t-j}' \beta\} + \sum_{j=1}^q \vartheta_j \{g(y_{t-j}) - \eta_{t-j}\} \quad (2.4)$$

Para que o modelo seja estacionário, alguma restrições são impostas; o detalhamento destes limitadores podem ser vistos no Apêndice A. Os parâmetros dos modelos GARMA apresentados por Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (1998), são estimados através da função de máxima verossimilhança parcial. Entretanto, a utilização de inferência Bayesiana também pode ser encontrada no artigo de Andrade, Andrade e Ehlers (2015).

Com a obtenção destes resultados, iremos analisar outra forma da família de distribuições apresentadas para aplicação desta técnica de modelagem. Será utilizado a família série de potência, além de incluir a distribuição da Poisson Generalizada nos resultados obtidos.

## 2.3 Distribuição Série de Potência

Seja  $\mathbf{Y}$  uma variável aleatória discreta tendo distribuição série de potência. A função massa de probabilidade de  $\mathbf{Y}$ , composta por funções que dependem dos parâmetros de média  $\mu$  e de dispersão  $\alpha$ , é dada por:

$$\pi_{PS}(y; \mu, \alpha) = \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)^y}{f(\mu, \alpha)}, \quad y \in \mathbb{A}_s \quad (2.5)$$

em que  $\mathbb{A}_s$  é o suporte da distribuição dos modelo, composto pelo subconjunto dos inteiros  $s, s+1, s+2, \dots$  com  $s \geq 0$ ,  $a(y, \alpha)$  é uma função definida positiva;  $f(\mu, \alpha)$  e  $g(\mu, \alpha)$  são funções positivas, finitas e duas vezes diferenciáveis, sendo  $f(\mu, \alpha) = \sum_{y \in \mathbb{A}_s} a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)^y$ .

A partir destas informações é possível calcular a média e variância de  $\mathbf{Y}$  (GUPTA, 1974), dadas, respectivamente, por:

$$E(\mathbf{Y}) = \mu_{PS} = \frac{f'(\mu, \alpha)g(\mu, \alpha)}{f(\mu, \alpha)g'(\mu, \alpha)} \quad \text{e} \quad \text{Var}(\mathbf{Y}) = \sigma_{PS}^2 = \frac{g(\mu, \alpha)}{g'(\mu, \alpha)}$$

em que  $f'(\mu, \alpha)$  e  $g'(\mu, \alpha)$  são as derivadas das funções  $f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$ , respectivamente. A Tabela 2 apresenta as funções que compõem cada distribuição série de potência selecionada para ser trabalhada:

Tabela 2 – Algumas das Distribuições da Família Série de Potência

Distribuição	$f(\mu, \alpha)$	$g(\mu, \alpha)$	$a(y, \alpha)$	$\mathbb{A}_s$	$\text{Var}(\mathbf{Y})$
Binomial	$\binom{k}{k-\mu}^k$	$\frac{\mu}{k-\mu}$	$\binom{k}{y}$	$0, 1, 2, \dots, k$	$\frac{\mu(k-\mu)}{k}$
Binomial Negativa	$\left(\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\right)^{-\alpha}$	$\frac{\mu}{\mu+\alpha}$	$\frac{\Gamma(\alpha+y)}{y!\Gamma(\alpha)}$	$0, 1, 2, \dots$	$\frac{\mu(\mu+\alpha)}{\alpha}$
Geométrica	$1 + \mu$	$\frac{\mu}{1+\mu}$	$1$	$0, 1, 2, \dots$	$\mu(1 + \mu)$
Poisson	$e^\mu$	$\mu$	$\frac{1}{y!}$	$0, 1, 2, \dots$	$\mu$
Poisson Generalizada	$e^{\mu(1+\mu\alpha)^{-1}}$	$\frac{\mu e^{-\mu\alpha(1+\mu\alpha)^{-1}}}{1+\mu\alpha}$	$\frac{(1+\alpha y)^{y-1}}{y!}$	$0, 1, 2, \dots$	$\mu(1 + \mu\alpha)^2$

Adicionando um parâmetro de proporção, é possível obter modificações nas características da distribuição em um ponto específico de seu suporte. Neste caso, o ponto selecionado é o zero. A seguir apresentaremos a distribuição série de potência zero-modificado.

## 2.4 Distribuição Série de Potência Zero-Modificado

A partir do conhecimento da função massa de probabilidade da família série de potência, com a adição de um parâmetro de modificação  $p$ , é possível visualizar a forma da distribuição

série de potência zero-modificado, cuja função massa de probabilidade é dada da seguinte maneira:

$$\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p) = (1 - p)I(y) + p\pi_{PS}(y; \mu, \alpha) \quad (2.6)$$

em que  $I(y) = 1$  se  $y = 0$  e  $I(y) = 0$  se  $y > 0$ . Neste modelo, o parâmetro  $p$  possui restrições, neste caso,

$$0 \leq p \leq \frac{1}{1 - \pi_{PS}(0; \mu, \alpha)}$$

Utilizando a função geradora de momentos da distribuição série de potência zero-modificado encontramos a média, variância e as demais características deste modelo como podem ser vistos em [Conceição \(2013\)](#). A média e a variância são, respectivamente:

$$E(\mathbf{Y}) = \mu_{ZMPS} = p\mu_{PS} \quad e \quad Var(\mathbf{Y}) = \sigma_{ZMPS}^2 = p(\sigma_{PS}^2 + (1 - p)\mu_{PS}^2)$$

### 2.4.1 Composições da distribuição ZMPS

Como dito anteriormente, a distribuição ZMPS pode ser descrita como uma composição de distribuições restritivas. Ajustando o nível do parâmetro  $p$ , é possível encontrar as características que a fazem pertencer a um grupo restrito.

**Corolário 1.** Se  $p = 0$ , então  $\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p)$  é a distribuição degenerada no zero.

*Demonstração.* Temos que  $\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p) = (1 - p)I(y) + p\pi_{PS}(y; \mu, \alpha)$ . Substituindo  $p = 0$ , então  $\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, 0) = 1I(y) + 0\pi_{PS}(y; \mu, \alpha) = I(y)$ . Se  $y > 0$ ,  $\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, 0) = 0$ ; se  $y = 0$ ,  $\pi_{ZMPS}(0; \mu, \alpha, 0) = 1$ , ou seja, é a distribuição com toda massa de probabilidade no ponto zero.  $\square$

**Corolário 2.** Se  $0 < p < 1$ , então  $\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p)$  é a distribuição Série de Potência Zero-Inflacionada (ZIPS).

*Demonstração.* Seja  $\pi_{ZMPS}(0; \mu, \alpha, p) - \pi_{PS}(0; \mu, \alpha) = (1 - p + p\pi_{PS}(0; \mu, \alpha)) - \pi_{PS}(0; \mu, \alpha) = (1 - p)(1 - \pi_{PS}(0; \mu, \alpha))$ . Se  $0 < p < 1$ ,  $(1 - p)(1 - \pi_{PS}(0; \mu, \alpha)) > 0$ . Logo,  $\pi_{ZMPS}(0; \mu, \alpha, p) - \pi_{PS}(0; \mu, \alpha) > 0$  o que nos leva a  $\pi_{ZMPS}(0; \mu, \alpha, p) > \pi_{PS}(0; \mu, \alpha)$ , ou seja, uma proporção de zeros maior do que a da distribuição série de potência zero-inflacionada.  $\square$

**Corolário 3.** Se  $p = 1$ , então  $\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p)$  é a distribuição Série de Potência (PS).

*Demonstração.* Temos que  $\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p) = (1 - p)I(y) + p\pi_{PS}(y; \mu, \alpha)$ . Substituindo  $p = 1$ , então  $\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, 1) = 0I(y) + 1\pi_{PS}(y; \mu, \alpha) = \pi_{PS}(y; \mu, \alpha)$ , ou seja, é a distribuição série de potência.  $\square$

**Corolário 4.** Se  $1 < p < \frac{1}{1 - \pi_{PS}(0; \mu, \alpha)}$ , então  $\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p)$  é a distribuição Série de Potência Zero-Deflacionada (ZDPS).

*Demonstração.* Seja  $\pi_{ZMPS}(0; \mu, \alpha, p) - \pi_{PS}(0; \mu, \alpha) = (1 - p)(1 - \pi_{PS}(0; \mu, \alpha))$ . Se  $1 < p < \frac{1}{1 - \pi_{PS}(0; \mu, \alpha)}$ , então  $(1 - p)(1 - \pi_{PS}(0; \mu, \alpha)) < 0$ . Logo,  $\pi_{ZMPS}(0; \mu, \alpha, p) - \pi_{PS}(0; \mu, \alpha) < 0$  que implica em  $\pi_{ZMPS}(0; \mu, \alpha, p) < \pi_{PS}(0; \mu, \alpha)$ , ou seja, uma proporção de zeros menor do que a da distribuição série de potência zero-deflacionada.  $\square$

**Corolário 5.** Se  $p = \frac{1}{1 - \pi_{PS}(0; \mu, \alpha)}$ , então  $\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p)$  é a distribuição Série de Potência Zero Truncada (ZTPS).

*Demonstração.* Se  $p = \frac{1}{1 - \pi_{PS}(0; \mu, \alpha)}$ , então  $\pi_{ZMPS}(0; \mu, \alpha, p) - \pi_{PS}(0; \mu, \alpha) = -\pi_{PS}(0; \mu, \alpha)$ , o que nos leva a  $\pi_{ZMPS}(0; \mu, \alpha, p) = 0$ , ou seja, uma distribuição truncada no zero.  $\square$

Algumas destas distribuições da família série de potência podem ser colocadas na forma da família exponencial. A vantagem desta estrutura é utilizar de um importante resultado de regressão, que são os Modelos Lineares Generalizados (MLG) propostos por [Nelder e Wedderburn \(1972\)](#). Na próxima subseção iremos apresentar estes resultados.

## 2.5 Modelo ZMPS com Abordagem em Séries Temporais

Seja  $\{Y_t, t > 0\}$  uma série temporal assumindo valores em  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , o modelo ZMPS-GARMA proposto é dado por:

$$\pi_{ZMPS}(y_t | \mu_t, \alpha, p_t, \mathcal{F}_t) = (1 - p_t)I(y_t) + p_t \pi_{PS}(y_t | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t) \quad (2.7)$$

em que  $\mathcal{F}_t = (y_{t-1}, \dots, y_1, \mu_{t-1}, \dots, \mu_1, p_{t-1}, \dots, p_1)$  são todas as informações disponíveis até o tempo  $t$  e  $\pi_{PS}(y_t | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)$  é a função massa de probabilidade condicional da família série de potência. Também temos que:

$$0 \leq p_t \leq \frac{1}{1 - \pi_{PS}(0 | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)} \quad (2.8)$$

$$I(y_t) = \begin{cases} 1, & \text{se } y_t = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (2.9)$$

**Observação 1.** Neste trabalho, o parâmetro  $\alpha$  é considerado invariante no tempo.

O cálculo da média e variância condicionais são extraídos diretamente dos resultados da Seção 2.4:

$$E(Y_t | \mathcal{F}_t) = \mu_{ZMPS-GARMA} = p_t \mu_t \quad (2.10)$$

$$\text{Var}(Y_t|\mathcal{F}_t) = \sigma_{ZMPS-GARMA}^2 = p_t(\sigma_t^2 + (1-p_t)\mu_t^2) \quad (2.11)$$

em que  $\mu_t = E(Y_t|\mathcal{F}_t)$  é a esperança condicional e  $\sigma_t^2 = \text{Var}(Y_t|\mathcal{F}_t)$  é a variância condicional, das distribuições na família série de potência.

Assim como o modelo ZMPS original, há a possibilidade de utiliza-lô na forma reparametrizada, chamado de modelo Hurdle (CONCEIÇÃO *et al.*, 2017). Esta técnica é utilizada de maneira a facilitar o cálculo computacional.

### 2.5.1 Modelo ZMPS-GARMA reparametrizado

**Teorema 1.** O modelo ZMPS-GARMA pode ser reparametrizado na forma do modelo Hurdle sem perda de generalidade, sendo assim, a forma da distribuição se transforma em:

$$\pi_{ZMPS}(y_t|\mu_t, \alpha, w_t, \mathcal{F}_t) = (1-w_t)I(y_t) + w_t \frac{\pi_{PS}(y_t|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)}{1-\pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)}(1-I(y_t)) \quad (2.12)$$

em que  $0 \leq w_t \leq 1$ ,  $I(y_t) = 1$  se  $y_t = 0$  e  $I(y_t) = 0$  se  $y_t > 0$ .

*Demonstração.* A função massa de probabilidade da ZMPS-GARMA usual pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \pi_{ZMPS}(y_t|\mu_t, \alpha, p_t, \mathcal{F}_t) &= \pi_{ZMPS}(0|\mu_t, \alpha, p_t, \mathcal{F}_t)I(y_t) + \pi_{ZMPS}(y_t|\mu_t, \alpha, p_t, \mathcal{F}_t)(1-I(y_t)) \\ &= \{(1-p_t) + p_t\pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)\}I(y_t) + \{p_t\pi_{PS}(y_t|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)\}(1-I(y_t)) \\ &= \{1-p_t(1-\pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t))\}I(y_t) \\ &\quad + p_t(1-\pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)) \frac{\pi_{PS}(y_t|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)}{(1-\pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t))}(1-I(y_t)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

No modelo ZMPS-GARMA usual temos que  $0 \leq p_t \leq \frac{1}{1-\pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)}$  que pode ser reescrito como  $0 \leq p_t(1-\pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)) \leq 1$ . Fazendo  $w_t = p_t(1-\pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t))$ , temos a seguinte restrição:  $0 \leq w_t \leq 1$ . Substituindo  $w_t$  em (2.13),

$$\pi_{ZMPS}(y_t|\mu_t, \alpha, p_t, \mathcal{F}_t) = (1-w_t)I(y_t) + w_t \frac{\pi_{PS}(y_t|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)}{(1-\pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t))}(1-I(y_t))$$

Como queríamos demonstrar. □

**Corolário 6.** Seja  $Y_t$  uma série temporal com distribuição ZMPS-GARMA, sua média e variância são dadas, respectivamente, por:

$$E(Y_t|\mathcal{F}_t) = \mu_{ZMPS-GARMA} = \frac{w_t\mu_t}{1-\pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)} \quad (2.14)$$

$$\text{Var}(Y_t|\mathcal{F}_t) = \sigma_{ZMPS-GARMA}^2 = \frac{w_t(\sigma_t^2 + \mu_t^2)}{1 - \pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)} - \left( \frac{w_t\mu_t}{1 - \pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)} \right)^2 \quad (2.15)$$

*Demonstração.* A partir dos resultados obtidos das equações (2.10) e (2.11), substituindo  $p_t$  pelo novo parâmetro de proporção  $w_t$ ,

$$E(Y_t|\mathcal{F}_t) = p_t\mu_t = \frac{w_t}{1 - \pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)}\mu_t$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_t|\mathcal{F}_t) &= p_t(\sigma_t^2 + (1 - p_t)\mu_t^2) \\ &= \frac{w_t}{1 - \pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)} \left( \sigma_t^2 + \left( 1 - \frac{w_t}{1 - \pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)} \right) \mu_t^2 \right) \\ &= \frac{w_t}{1 - \pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)} \left( \sigma_t^2 + \mu_t^2 - \frac{w_t\mu_t^2}{1 - \pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)} \right) \\ &= \frac{w_t(\sigma_t^2 + \mu_t^2)}{1 - \pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)} - \left( \frac{\mu_t}{1 - \pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)} \right)^2 \end{aligned}$$

□

Para associar  $\mu_t$  a um preditor linear ARMA e  $w_t$  a uma função de ligação apropriada, fazemos as seguintes considerações:

$$\eta_t = \psi(\mu_t) = x_t'\beta + \sum_{i=1}^p \phi_i(\psi(y_{t-i}) - x_{t-i}'\beta) + \sum_{j=1}^q \theta_j(\psi(y_{t-j}) - \eta_{t-j}) \quad (2.16)$$

$$h(w_t) = w_t = \left( \frac{\exp(x_t'\gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i y_{t-i})}{1 + \exp(x_t'\gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i y_{t-i})} \right) \quad (2.17)$$

No caso dos modelos lineares generalizados,  $\psi(\mu_t)$  é a função de ligação duas vezes diferenciável e monotônica. Para algumas funções de  $\psi(\mu_t)$ , a fim de evitar indefinição matemática, fazemos  $y_t = \max(y_t, c)$ , em que  $c$  é definido como uma constante entre 0 e 1. As características para cada distribuição e as propriedades do modelo ZMPS-GARMA serão apresentadas nas próximas subseções.

### 2.5.2 Distribuição ZM-Binomial-GARMA (ZMB-GARMA)

Seja  $\{Y_t, t > 0\}$  uma série temporal assumindo valores em  $\{0, 1, 2, \dots, k\}$ , o modelo ZM-GARMA com distribuição Binomial é dado por:

$$\pi_{ZMB}(y_t|\mu_t, \alpha, p_t, \mathcal{F}_t) = (1 - p_t)I(y_t) + p_t \frac{\binom{k}{y_t} \left(\frac{\mu_t}{k - \mu_t}\right)^{y_t}}{\left(\frac{k}{k - \mu_t}\right)^k} \quad (2.18)$$

em que  $\mathcal{F}_t = (y_{t-1}, \dots, y_1, \mu_{t-1}, \dots, \mu_1, p_{t-1}, \dots, p_1)$  são todas as informações observadas até o tempo  $t$ . Deste modelo podemos retirar as seguintes propriedades:

- $E(Y_t | \mathcal{F}_t) = p_t \mu_t$
- $Var(Y_t | \mathcal{F}_t) = p_t(\sigma_t^2 + (1 - p_t)\mu_t^2)$

Do modelo reparametrizado,

$$\pi_{ZMB}(y_t | \mu_t, \alpha, w_t, \mathcal{F}_t) = (1 - w_t)I(y_t) + w_t \frac{\binom{k}{y_t} \left(\frac{\mu_t}{k - \mu_t}\right)^{y_t} \left(\frac{k}{k - \mu_t}\right)^{-k}}{1 - \left(\frac{k}{k - \mu_t}\right)^{-k}} (1 - I(y_t))$$

- $E(Y_t | \mathcal{F}_t) = \frac{w_t \mu_t k^k}{k^k - (k - \mu_t)^k}$
- $Var(Y_t | \mathcal{F}_t) = \frac{w_t(\sigma_t^2 + \mu_t^2)k^k}{k^k - (k - \mu_t)^k} - E(y_t | \mathcal{F}_t)^2$

e seu preditor linear ARMA para  $\mu_t$  e a função de ligação de  $w_t$  podem ser dadas por:

$$\eta_t = \log\left(\frac{\mu_t}{k - \mu_t}\right) = x_t' \beta + \sum_{j=1}^p \phi_j \log(y_{t-j}^*) + \sum_{j=1}^q \theta_j (\log(y_{t-j}^*) - \eta_{t-j})$$

$$h(w_t) = w_t = \left( \frac{\exp(x_t' \gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i y_{t-i})}{1 + \exp(x_t' \gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i y_{t-i})} \right)$$

em que  $y_{t-j}^* = \max(y_{t-j}, c)$  e  $0 < c < 1$ .

### 2.5.3 Distribuição ZM-Binomial Negativa-GARMA (ZMBN-GARMA)

Seja  $\{Y_t, t > 0\}$  uma série temporal assumindo valores em  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , o modelo ZM-GARMA com distribuição Binomial Negativa é dado por:

$$\pi_{ZMB}(y_t | \mu_t, \alpha, p_t, \mathcal{F}_t) = (1 - p_t)I(y_t) + p_t \frac{\frac{\mu_t}{\mu_t + \alpha} \left(\frac{\Gamma(\alpha + y_t)}{y_t! \Gamma(\alpha)}\right)^{y_t}}{\frac{\alpha}{\mu_t + \alpha} - \alpha} \quad (2.19)$$

em que  $\mathcal{F}_t = (y_{t-1}, \dots, y_1, \mu_{t-1}, \dots, \mu_1, p_{t-1}, \dots, p_1)$  são todas as informações observadas até o tempo  $t$ . Deste modelo podemos retirar as seguintes propriedades:

- $E(Y_t | \mathcal{F}_t) = p_t \mu_t$
- $Var(Y_t | \mathcal{F}_t) = p_t(\sigma_t^2 + (1 - p_t)\mu_t^2)$

Do modelo reparametrizado,

$$\pi_{ZMB}(y_t | \mu_t, \alpha, w_t, \mathcal{F}_t) = (1 - w_t)I(y_t) + w_t \frac{\frac{\mu_t}{\mu_t + \alpha} \left(\frac{\Gamma(\alpha + y_t)}{y_t! \Gamma(\alpha)}\right)^{y_t}}{\frac{\alpha}{\mu_t + \alpha} - \alpha - \frac{\mu_t}{\mu_t + \alpha}} (1 - I(y_t))$$

- $E(Y_t|\mathcal{F}_t) = \frac{w_t \mu_t}{\frac{\alpha}{\mu_t + \alpha} - \frac{\mu_t}{\mu_t + \alpha}}$
- $Var(Y_t|\mathcal{F}_t) = \frac{w_t(\sigma_t^2 + \mu_t^2)}{\frac{\alpha}{\mu_t + \alpha} - \frac{\mu_t}{\mu_t + \alpha}} - E(y_t|\mathcal{F}_t)^2$

e seu preditor linear ARMA para  $\mu_t$  e a função de ligação de  $w_t$  podem ser dadas por:

$$\eta_t = \log\left(\frac{\mu_t}{\mu_t + \alpha}\right) = x_t' \beta + \sum_{j=1}^p \phi_j \log(y_{t-j}^*) + \sum_{j=1}^q \theta_j (\log(y_{t-j}^*) - \eta_{t-j})$$

$$h(w_t) = w_t = \left( \frac{\exp(x_t' \gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i y_{t-i})}{1 + \exp(x_t' \gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i y_{t-i})} \right)$$

em que  $y_{t-j}^* = \max(y_{t-j}, c)$  e  $0 < c < 1$ .

#### 2.5.4 Distribuição ZM-Geométrica-GARMA (ZMG-GARMA)

Seja  $\{Y_t, t > 0\}$  uma série temporal assumindo valores em  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , o modelo ZM-GARMA com distribuição Geométrica é dado por:

$$\pi_{ZMG}(y_t | \mu_t, \alpha, p_t, \mathcal{F}_t) = (1 - p_t) I(y_t) + p_t \frac{\left(\frac{\mu_t}{1 + \mu_t}\right)^{y_t}}{1 + \mu_t} \quad (2.20)$$

em que  $\mathcal{F}_t = (y_{t-1}, \dots, y_1, \mu_{t-1}, \dots, \mu_1, p_{t-1}, \dots, p_1)$  são todas as informações observadas até o tempo  $t$ . Deste modelo podemos retirar as seguintes propriedades:

- $E(Y_t | \mathcal{F}_t) = p_t \mu_t$
- $Var(Y_t | \mathcal{F}_t) = p_t (\sigma_t^2 + (1 - p_t) \mu_t^2)$

Do modelo reparametrizado,

$$\pi_{ZMG}(y_t | \mu_t, \alpha, w_t, \mathcal{F}_t) = (1 - w_t) I(y_t) + w_t \frac{\left(\frac{\mu_t}{1 + \mu_t}\right)^{y_t} (1 + \mu_t)^{-1}}{1 - (1 + \mu_t)^{-1}} (1 - I(y_t))$$

- $E(Y_t | \mathcal{F}_t) = w_t (1 + \mu_t)$
- $Var(Y_t | \mathcal{F}_t) = \frac{w_t (\sigma_t^2 + \mu_t^2) (1 + \mu_t)}{\mu_t} - E(y_t | \mathcal{F}_t)^2$

e seu preditor linear ARMA para  $\mu_t$  e a função de ligação de  $w_t$  podem ser dadas por:

$$\eta_t = \log\left(\frac{\mu_t}{1 + \mu_t}\right) = x_t' \beta + \sum_{j=1}^p \phi_j \log(y_{t-j}^*) + \sum_{j=1}^q \theta_j (\log(y_{t-j}^*) - \eta_{t-j})$$



$$h(w_t) = w_t = \left( \frac{\exp(x_t' \gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i y_{t-i})}{1 + \exp(x_t' \gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i y_{t-i})} \right)$$

em que  $y_{t-j}^* = \max(y_{t-j}, c)$  e  $0 < c < 1$ .

### 2.5.5 Distribuição ZM-Poisson-GARMA (ZMP-GARMA)

Seja  $\{Y_t, t > 0\}$  uma série temporal assumindo valores em  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , o modelo ZM-GARMA com distribuição de Poisson é dado por:

$$\pi_{ZMP}(y_t | \mu_t, \alpha, p_t, \mathcal{F}_t) = (1 - p_t)I(y_t) + p_t \frac{\left(\frac{1}{y_t!}\right) \mu_t^{y_t}}{e^{\mu_t}} \quad (2.21)$$

em que  $\mathcal{F}_t = (y_{t-1}, \dots, y_1, \mu_{t-1}, \dots, \mu_1, p_{t-1}, \dots, p_1)$  são todas as informações observadas até o tempo  $t$ . Deste modelo retiramos as seguintes propriedades:

- $E(Y_t | \mathcal{F}_t) = p_t \mu_t$
- $Var(Y_t | \mathcal{F}_t) = p_t (\sigma_t^2 + (1 - p_t) \mu_t^2)$

Do modelo reparametrizado,

$$\pi_{ZMP}(y_t | \mu_t, \alpha, w_t, \mathcal{F}_t) = (1 - w_t)I(y_t) + w_t \frac{\left(\frac{1}{y_t!}\right) \mu_t^{y_t} e^{-\mu_t}}{1 - e^{-\mu_t}} (1 - I(y_t))$$

- $E(Y_t | \mathcal{F}_t) = \frac{w_t \mu_t e^{\mu_t}}{e^{\mu_t} - 1}$
- $Var(Y_t | \mathcal{F}_t) = \frac{w_t (\sigma_t^2 + \mu_t^2) e^{\mu_t}}{e^{\mu_t} - 1} - E(y_t | \mathcal{F}_t)^2$

e seu preditor linear ARMA para  $\mu_t$  e a função de ligação de  $w_t$  podem ser dadas por:

$$\eta_t = \log(\mu_t) = x_t' \beta + \sum_{j=1}^p \phi_j \log(y_{t-j}^*) + \sum_{j=1}^q \theta_j (\log(y_{t-j}^*) - \eta_{t-j})$$

$$h(w_t) = w_t = \left( \frac{\exp(x_t' \gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i y_{t-i})}{1 + \exp(x_t' \gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i y_{t-i})} \right)$$

em que  $y_{t-j}^* = \max(y_{t-j}, c)$  e  $0 < c < 1$ .

### 2.5.6 Distribuição ZM-Poisson Generalizada-GARMA (ZMPG-GARMA)

Seja  $\{Y_t, t > 0\}$  uma série temporal assumindo valores em  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , o modelo ZM-GARMA com distribuição de Poisson Generalizada é dado por:

$$\pi_{ZMP}(y_t | \mu_t, \alpha, p_t, \mathcal{F}_t) = (1 - p_t)I(y_t) + p_t \frac{\frac{(1 + \alpha y_t)^{y_t - 1} \left( \frac{\mu_t e^{-\mu_t \alpha (1 + \mu_t \alpha)^{-1}}}{1 + \mu_t \alpha} \right)^{y_t}}{y_t!}}{e^{\mu_t (1 + \mu_t \alpha)^{-1}}} \quad (2.22)$$

em que  $\mathcal{F}_t = (y_{t-1}, \dots, y_1, \mu_{t-1}, \dots, \mu_1, p_{t-1}, \dots, p_1)$  são todas as informações observadas até o tempo  $t$ . Deste modelo retiramos as seguintes propriedades:

- $E(Y_t | \mathcal{F}_t) = p_t \mu_t$
- $Var(Y_t | \mathcal{F}_t) = p_t (\sigma_t^2 + (1 - p_t) \mu_t^2)$

Do modelo reparametrizado,

$$\pi_{ZMP}(y_t | \mu_t, \alpha, w_t, \mathcal{F}_t) = (1 - w_t)I(y_t) + w_t \frac{(1 + \alpha y_t)^{y_t - 1} \left( \frac{\mu_t e^{-\mu_t \alpha (1 + \mu_t \alpha)^{-1}}}{1 + \mu_t \alpha} \right)^{y_t}}{y_t!} (1 - I(y_t))$$

- $E(Y_t | \mathcal{F}_t) = \frac{w_t \mu_t}{1 - e^{\mu_t (1 + \mu_t \alpha)^{-1}}}$
- $Var(Y_t | \mathcal{F}_t) = \frac{w_t (\sigma_t^2 + \mu_t^2)}{1 - e^{\mu_t (1 + \mu_t \alpha)^{-1}}} - E(y_t | \mathcal{F}_t)^2$

e seu preditor linear ARMA para  $\mu_t$  e a função de ligação de  $w_t$  podem ser dadas por:

$$\eta_t = \log \left( \frac{\mu_t}{1 - \mu_t} \right) = x_t' \beta + \sum_{j=1}^p \phi_j \log(y_{t-j}^*) + \sum_{j=1}^q \theta_j (\log(y_{t-j}^*) - \eta_{t-j})$$

$$h(w_t) = w_t = \left( \frac{\exp(x_t' \gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i y_{t-i})}{1 + \exp(x_t' \gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i y_{t-i})} \right)$$

em que  $y_{t-j}^* = \max(y_{t-j}, c)$  e  $0 < c < 1$ .

## PROCESSO INFERENCIAL

Neste capítulo abordaremos o processo inferencial do modelo ZMPS-GARMA. Discutiremos o uso da reparametrização em  $(\mu_t, \alpha, p_t)$ , discretizando a rotina do processo de otimização BFGS, para a realização da estimação por máxima verossimilhança, além da aplicação Bayesiana com o algoritmo MCMC. Critérios de seleção de modelos, clássicos ou Bayesianos, serão apresentados, além da demonstração do passo a passo para realizar a projeção.

### 3.1 Inferência Clássica

O processo de estimação dos parâmetros eleito foi o método de máxima verossimilhança parcial, em que queremos encontrar as estimativas de  $\xi = (\gamma, \lambda, \beta, \Phi, \Theta)$  (parâmetros<sup>1</sup>), das equações (2.17) e (2.16), através da otimização da função de log-verossimilhança. Para isto, basta fazer o produto da função massa de probabilidade para o tempo  $t = \max(p, q, h)^2 + 1, \dots, n$ :

$$L(\mu_t, \alpha, p_t | y_t, \mathcal{F}_t) = \prod_{t=m+1}^n (1 - p_t)I(y_t) + p_t \pi_{PS}(y_t | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t) \quad (3.1)$$

Neste caso, apenas incluindo a função indicadora como modificadora no ponto zero, podemos reescrever (3.1) como:

$$L(\mu_t, \alpha, p_t | y_t, \mathcal{F}_t) = \prod_{t=m+1}^n (1 - p_t)^{I(y_t)} (p_t \pi_{PS}(y_t | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t))^{1-I(y_t)} \quad (3.2)$$

Em 3.2, empregando a função logarítmica, é possível obter a log-verossimilhança parcial para as duas parametrizações que serão apresentadas em [Subseção 3.1.1](#) e [Subseção 3.1.2](#).

<sup>1</sup> Considere  $\alpha$  um valor fixo

<sup>2</sup> Considere  $m = \max(p, q, h)$ , em que  $(p, q, h)$  são as defasagens das equações (2.17) e (2.16).

### 3.1.1 ZMPS-GARMA( $\mu_t, \alpha, p_t$ )

A partir dos resultados expressos anteriormente, é possível encontrar a log-verossimilhança que é escrita por funções que envolvem os parâmetros  $p_t$  e  $\mu_t$ :

$$\begin{aligned} l(\mu, \alpha, p_t | y_t, \mathcal{F}_t) &= \sum_{t=m+1}^n [I(y_t) \log(1 - p_t) + (1 - I(y_t)) \log(p_t \pi_{PS}(y_t | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t))] \\ &= \sum_{t=m+1}^n [I(y_t) \log(1 - p_t) + (1 - I(y_t)) \log(p_t) + (1 - I(y_t)) \log(\pi_{PS}(y_t | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t))] \\ &= l_1(p_t | y_t, \mathcal{F}_t) + l_2(\mu_t, \alpha | y_t, \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

em que,

$$\begin{aligned} l_1(p_t | y_t, \mathcal{F}_t) &= \sum_{t=m+1}^n [I(y_t) \log(1 - p_t) + (1 - I(y_t)) \log(p_t)] \\ l_2(\mu_t, \alpha | y_t, \mathcal{F}_t) &= \sum_{t=m+1}^n [(1 - I(y_t)) \log(\pi_{PS}(y_t | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t))] \end{aligned}$$

Para facilitar os cálculos do processo inferencial, a partir deste passo, utilizaremos a reparametrização proposta em [Conceição \*et al.\* \(2017\)](#). Além de usufruir desta técnica, será utilizado a função de ligação proposta na [Subseção 2.5.1](#).

### 3.1.2 ZMPS-GARMA( $\mu_t, \alpha, w_t$ )

A forma da função de verossimilhança parametrizada em  $(\mu_t, \alpha, w_t)$  é dada por:

$$L(\mu_t, \alpha, w_t | y_t, \mathcal{F}_t) = \prod_{t=m+1}^n (1 - w_t)^{I(y_t)} \left( w_t \frac{\pi_{PS}(y_t | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)}{1 - \pi_{PS}(0 | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)} \right)^{1 - I(y_t)}$$

e a função de log-verossimilhança:

$$\begin{aligned} l(\mu_t, \alpha, w_t | y_t, \mathcal{F}_t) &= \sum_{t=m+1}^n \log(1 - w_t)^{I(y_t)} \log \left( w_t \frac{\pi_{PS}(y_t | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)}{1 - \pi_{PS}(0 | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)} \right)^{1 - I(y_t)} \\ &= \sum_{t=m+1}^n \left[ I(y_t) \log(1 - w_t) + (1 - I(y_t)) \log \left( w_t \frac{\pi_{PS}(y_t | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)}{1 - \pi_{PS}(0 | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)} \right) \right] \\ &= \sum_{t=m+1}^n [I(y_t) \log(1 - w_t) + (1 - I(y_t)) \log(w_t) \\ &\quad + (1 - I(y_t)) [\log(\pi_{PS}(y_t | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)) - \log(1 - \pi_{PS}(0 | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t))] \\ &= l_1(w_t | y_t, \mathcal{F}_t) + l_2(\mu_t, \alpha | y_t, \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

em que,

$$l_1(w_t|y_t, \mathcal{F}_t) = \sum_{t=m+1}^n [I(y_t)\log(1-w_t) + (1-I(y_t))\log(w_t)]$$

e

$$l_2(\mu_t, \alpha|y_t, \mathcal{F}_t) = \sum_{t=m+1}^n [(1-I(y_t))[\log(\pi_{PS}(y_t|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)) - \log(1 - \pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t))]]$$

Além disso,

$$\eta_t = \psi(\mu_t) = x'_t\beta + \sum_{i=1}^p \phi_i(\psi(y_{t-i}) - x'_{t-i}\beta) + \sum_{j=1}^q \theta_j(\psi(y_{t-j}) - \eta_{t-j})$$

$$h(w_t) = w_t = \left( \frac{\exp(x'_t\gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i y_{t-i})}{1 + \exp(x'_t\gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i y_{t-i})} \right)$$

Após a obtenção da função de log-verossimilhança, temos  $w_t$  e  $\mu_t$  ortogonais, portanto podemos separar as funções em dois vetores gradientes, não dependentes,  $G_1^T = \left( \frac{\partial l_1(\cdot)}{\partial \gamma}, \frac{\partial l_1(\cdot)}{\partial \lambda} \right)$  e  $G_2^T = \left( \frac{\partial l_2(\cdot)}{\partial \beta}, \frac{\partial l_2(\cdot)}{\partial \Phi}, \frac{\partial l_2(\cdot)}{\partial \Theta} \right)$ . Dado que para cada distribuição este vetor será diferente, dependendo da sua função de ligação, só apresentaremos o resultado final.

Os dois próximos resultados estão relacionados ao cálculo do processo inferencial dos parâmetros que compõem a parte de modificação no zero ( $w_t$ ) do modelo:

$$\frac{\partial l_1(w_t|y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \gamma_s} = \sum_{t=m+1}^n [(1-I(y_t))x_{(t,s)} - w_t x_{(t,s)}]; \quad s = 1, \dots, k$$

$$\frac{\partial l_1(w_t|y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \lambda_s} = \sum_{t=m+1}^n [(1-I(y_t))y_{t-s} - w_t y_{t-s}]; \quad s = 1, \dots, h$$

A seguir apresentaremos, para cada distribuição selecionada, seu respectivo gradiente com relação aos parâmetros que fazem parte da distribuição série de potência. Considere a seguinte equação geral para realizar o cálculo do gradiente para um dado parâmetro genérico B:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_2(\mu_t|y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial B} &= \frac{\partial}{\partial B} \sum_{t=m+1}^n (1-I(y_t))[\log(\pi_{PS}(y_t|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)) - \log(1 - \pi_{PS}(0|\mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t))] \\ &= \frac{\partial}{\partial B} \sum_{t=m+1}^n (1-I(y_t)) \left[ \log \left( \frac{a(y_t, \alpha)g(\mu_t, \alpha)^{y_t}}{f(\mu_t, \alpha)} \right) - \log \left( 1 - \frac{a(0, \alpha)}{f(\mu_t, \alpha)} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial B} \sum_{t=m+1}^n (1-I(y_t))[\log(a(y_t, \alpha)) + y_t \log(g(\mu_t, \alpha)) - \log(f(\mu_t, \alpha) - a(0, \alpha))] \end{aligned}$$

Definimos como função auxiliar,

$$aux = x'_t \beta + \sum_{j=1}^p \phi_j \log(y_{t-j}^*) + \sum_{j=1}^q \theta_j (\log(y_{t-j}^*) - \eta_{t-j})$$

- Binomial

$$l_2(\mu_t | y_t, \mathcal{F}_t) = \sum_{t=m+1}^n (1 - I(y_t)) \left[ \log \binom{k}{y_t} + y_t \log(\mu_t) + (k - y_t) \log(k - \mu_t) - \log(k^k - (k - \mu_t)^k) \right]$$

$$\frac{\partial l_2(\mu_t | y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \beta_s} = \sum_{t=m+1}^n (1 - I(y_t)) \left[ y_t x_{(t,s)} - \frac{x_{(t,s)} k^{k+1} e^{aux}}{(e^{aux} + 1) \left( k^k - \left( \frac{k}{e^{aux} + 1} \right)^k \right)} \right];$$

$$s = 1, \dots, r$$

$$\frac{\partial l_2(\mu_t | y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \phi_s} = \sum_{t=m+1}^n (1 - I(y_t)) \left[ y_t \log(y_{t-s}) - \frac{\log(y_{t-s}) k^{k+1} e^{aux}}{(e^{aux} + 1) \left( k^k - \left( \frac{k}{e^{aux} + 1} \right)^k \right)} \right];$$

$$s = 1, \dots, p$$

$$\frac{\partial l_2(\mu_t | y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \theta_s} = \sum_{t=m+1}^n (1 - I(y_t)) \left[ y_t (\log(y_{t-s}) - \eta_{t-s}) - \frac{(\log(y_{t-s}) - \eta_{t-s}) k^{k+1} e^{aux}}{(e^{aux} + 1) \left( k^k - \left( \frac{k}{e^{aux} + 1} \right)^k \right)} \right];$$

$$s = 1, \dots, q$$

- Binomial Negativa

$$l_2(\mu_t | y_t, \mathcal{F}_t) = \sum_{t=m+1}^n (1 - I(y_t)) \left[ \log \left( \frac{\Gamma(\alpha + y_t)}{y_t! \Gamma(\alpha)} \right) + y_t \log \left( \frac{\mu_t}{\mu_t + \alpha} \right) - \log \left( \left( \frac{\alpha}{\mu_t + \alpha} \right)^{-\alpha} - 1 \right) \right]$$

$$\frac{\partial l_2(\mu_t | y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \beta_s} = \sum_{t=m+1}^n (1 - I(y_t)) \left[ y_t x_{(t,s)} - \frac{\alpha x_{(t,s)} e^{aux}}{(e^{aux} - 1) [(\alpha - \alpha e^{aux}) \alpha - 1]} \right];$$

$$s = 1, \dots, r$$

$$\frac{\partial l_2(\mu_t | y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \phi_s} = \sum_{t=m+1}^n (1 - I(y_t)) \left[ y_t \log(y_{t-s}) - \frac{\alpha \log(y_{t-s}) e^{aux}}{(e^{aux} - 1)[(\alpha - \alpha e^{aux})\alpha - 1]} \right];$$

$$s = 1, \dots, p$$

$$\frac{\partial l_2(\mu_t | y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \theta_s} = \sum_{t=m+1}^n (1 - I(y_t)) \left[ y_t (\log(y_{t-s}) - \eta_{t-s}) - \frac{\alpha (\log(y_{t-s}) - \eta_{t-s}) e^{aux}}{(e^{aux} - 1)[(\alpha - \alpha e^{aux})\alpha - 1]} \right];$$

$$s = 1, \dots, q$$

- Geométrica

$$l_2(\mu_t | y_t, \mathcal{F}_t) = \sum_{t=m+1}^n (1 - I(y_t)) [(y_t - 1) \log(\mu_t) - y_t \log(1 + \mu_t)]$$

$$\frac{\partial l_2(\mu_t | y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \beta_s} = \sum_{t=m+1}^n (1 - I(y_t)) \left[ (y_t - 1) x_{(t,s)} - \frac{e^{aux} x_{(t,s)}}{1 - e^{aux}} \right];$$

$$s = 1, \dots, r$$

$$\frac{\partial l_2(\mu_t | y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \phi_s} = \sum_{t=m+1}^n (1 - I(y_t)) \left[ (y_t - 1) \log(y_{t-s}) - \frac{e^{aux} \log(y_{t-s})}{1 - e^{aux}} \right];$$

$$s = 1, \dots, p$$

$$\frac{\partial l_2(\mu_t | y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \theta_s} = \sum_{t=m+1}^n (1 - I(y_t)) \left[ (y_t - 1) (\log(y_{t-s}) - \eta_{t-s}) - \frac{e^{aux} (\log(y_{t-s}) - \eta_{t-s})}{1 - e^{aux}} \right];$$

$$s = 1, \dots, q$$

- Poisson

$$l_2(\mu_t | y_t, \mathcal{F}_t) = \sum_{t=m+1}^n (1 - I(y_t)) \left[ \log\left(\frac{1}{y_t!}\right) + y_t \log(\mu_t) - \log(e^{\mu_t} - 1) \right]$$

$$\frac{\partial l_2(\mu_t|y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \beta_s} = \sum_{t=m+1}^n (1-I(y_t)) \left[ y_t x_{(t,s)} - \frac{e^{(e^{aux}+aux)} x_{(t,s)}}{e^{e^{aux}} - 1} \right];$$

$$s = 1, \dots, r$$

$$\frac{\partial l_2(\mu_t|y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \phi_s} = \sum_{t=m+1}^n (1-I(y_t)) \left[ y_t \log(y_{t-s}) - \frac{e^{(e^{aux}+aux)} \log(y_{t-s})}{e^{e^{aux}} - 1} \right];$$

$$s = 1, \dots, p$$

$$\frac{\partial l_2(\mu_t|y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \theta_s} = \sum_{t=m+1}^n (1-I(y_t)) \left[ y_t (\log(y_{t-s}) - \eta_{t-s}) - \frac{e^{(e^{aux}+aux)} (\log(y_{t-s}) - \eta_{t-s})}{e^{e^{aux}} - 1} \right];$$

$$s = 1, \dots, q$$

- Poisson Generalizada

$$l_2(\mu_t|y_t, \mathcal{F}_t) = \sum_{t=m+1}^n (1-I(y_t)) \left[ \log \left( \frac{(1 + \alpha y_t)^{y_t-1}}{y_t!} \left( \frac{\mu_t e^{-\mu_t \alpha (1 + \mu_t \alpha)^{-1}}}{1 + \mu_t \alpha} \right)^{y_t} \right) - \log(e^{\mu_t (1 + \mu_t \alpha)^{-1}} - 1) \right]$$

$$\frac{\partial l_2(\mu_t|y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \beta_s} = \sum_{t=m+1}^n (1-I(y_t)) \left[ y_t (x_{(t,s)} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i,s)}) - \frac{e^{(e^{aux}+aux)} (x_{(t,s)} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i,s)})}{e^{e^{aux}} - 1} \right];$$

$$s = 1, \dots, r$$

$$\frac{\partial l_2(\mu_t|y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \beta_s} = \sum_{t=m+1}^n (1-I(y_t)) \left[ \log(y_{t-s}) - x'_{t-s} \beta - \frac{e^{(e^{aux}+aux)} (\log(y_{t-s}) - x'_{t-s} \beta)}{e^{e^{aux}} - 1} \right];$$

$$s = 1, \dots, p$$

$$\frac{\partial l_2(\mu_t|y_t, \mathcal{F}_t)}{\partial \beta_s} = \sum_{t=m+1}^n (1-I(y_t)) \left[ \log(y_{t-s}) - \eta_{t-s} - \frac{e^{(e^{aux}+aux)} (\log(y_{t-s}) - \eta_{t-s})}{e^{e^{aux}} - 1} \right];$$

$$s = 1, \dots, q$$





**Observação 2.**  $d_1$  tem que ser positiva definida; caso não seja, existe a possibilidade de  $B$  não ser uma matriz positiva definida. Caso ocorra,  $B$  é redefinida para a matriz identidade e o algoritmo continua a operar.

## 3.2 Inferência Bayesiana

Além da metodologia de inferência clássica apresentada na [Subseção 3.1.3](#), que utiliza o método de máxima verossimilhança, outra técnica para estimar os coeficientes de um modelo de regressão é a utilização da inferência Bayesiana.

Para encontrar as estimativas dos parâmetros,  $\xi = (\gamma, \lambda, \beta, \Phi, \Theta)$ , utilizamos a função log-verossimilhança:

$$\begin{aligned} l(\mu_t, \alpha, w_t | y_t, \mathcal{F}_t) &= \sum_{t=m+1}^n I(y_t) \log(1 - w_t) + (1 - I(y_t)) \log(w_t) \\ &\quad + (1 - I(y_t)) [\log(\pi_{PS}(y_t | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)) - \log(1 - \pi_{PS}(0 | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t))] \\ &= l_1(w_t | y_t, \mathcal{F}_t) + l_2(\mu_t, \alpha | y_t, \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

em que

$$l_1(w_t | y_t, \mathcal{F}_t) = \sum_{t=m_1+1}^n I(y_t) \log(1 - w_t) + (1 - I(y_t)) \log(w_t)$$

e

$$l_2(\mu_t | y_t, \mathcal{F}_t) = \sum_{t=m_2+1}^n (1 - I(y_t)) [\log(\pi_{PS}(y_t | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t)) - \log(1 - \pi_{PS}(0 | \mu_t, \alpha, \mathcal{F}_t))]$$

sendo  $m_1 = h$  e  $m_2 = \max(p, q)$ . A próxima etapa refere-se à especificação das distribuições das priors:

$$\gamma \sim N(\mu_{k \times 1}, \sigma_2^2 I_{k \times k}) \quad \lambda \sim N(\mu_{h \times 1}, \sigma_1^2 I_{h \times h})$$

$$\beta \sim N(\mu_{r \times 1}, \sigma_5^2 I_{r \times r}) \quad \Phi \sim N(\mu_{p \times 1}, \sigma_4^2 I_{p \times p}) \quad \Theta \sim N(\mu_{q \times 1}, \sigma_3^2 I_{q \times q})$$

Então, temos a distribuição a posteriori como:

$$\pi(\gamma, \lambda, \beta, \Phi, \Theta | Y) \propto \exp(l_1(w_t | y_t, \mathcal{F}_t) + l_2(\mu_t | y_t, \mathcal{F}_t)) \pi_1(\gamma, \lambda) \pi_2(\beta, \Phi, \Theta)$$

Dentre as metodologias que estão disponíveis, utilizaremos o algoritmo MCMC (Monte Carlo Markov Chain), inicialmente proposto por [Metropolis et al. \(1953\)](#).

### 3.2.1 Método MCMC

A fim de selecionar um método para obtenção das estimativas dos parâmetros do modelo, o algoritmo de Metropolis-Hastings (HASTINGS, 1970) foi escolhido. A construção de seu algoritmo é apresentado nesta subseção.

---

#### Algoritmo 2 – Algoritmo MH

---

- 1: **procedimento** MH(  $t = 0, i$  tal que  $P(i) > 0$ ) ▷ Valores iniciais
  - 2:     **enquanto** Convergência/Número de valores desejados,  $t = 1, \dots, M$  **faça**
  - 3:         Gera  $j$  (candidato à transição) a partir de  $Q = q_{ij}$
  - 4:         Calcula  $\alpha_{ij} = \min(1, \frac{\pi(j)q_{ji}}{\pi(i)q_{ij}})$
  - 5:         Gera  $u \approx U(0, 1)$
  - 6:         **se**  $u \leq \alpha_{ij}$  **então**
  - 7:             Aceita  $j$
  - 8:         **senão**
  - 9:             Faça  $i = j, X_t = i$
  - 10:         **fim se**
  - 11:     **fim enquanto**
  - 12:     **retorna**  $X_t$  ▷ Vetor de valores aleatórios para a distribuição desejada
  - 13: **fim procedimento**
- 

Como auxiliar na aplicação deste método para a simulação e o estudo de caso que serão apresentados nos próximos capítulos, foi utilizado o software OpenBUGS na versão 3.2.3 (LUNN *et al.*, 2009), que possui como referência na construção do projeto Bugs o artigo de Gelfand e Smith (1990).

## 3.3 Previsão

Nesta seção abordaremos a metodologia de previsão do modelo ZMPS-GARMA. Um passo importante no processo de modelagem, principalmente no contexto de séries temporais, é obter êxito em utilizar a estrutura do modelo de maneira que se possa realizar previsões. O nosso objetivo é prever  $k \geq 1$  passos à frente dado as observações passadas. Para isto, precisamos do valor esperado de  $y_{t+h}$ , ou seja,  $E(Y_{t+h} | \mathcal{F}_t)$ :

$$\hat{y}_t(k) = E(y_{t+k} | \mathcal{F}_t) = (1 + \hat{\mu}_{t+k}) \hat{w}_{t+k} \quad (3.3)$$

em que,

$$\psi(\hat{\mu}_{t+k}) = x'_{t+k} \hat{\beta} + \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j (\psi(\hat{y}_{t+k-j}) - x'_{t+k-j} \hat{\beta}) + \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j (\psi(\hat{y}_{t+k-j}) - \hat{\eta}_{t+k-j})$$

e

$$\hat{w}_{t+k} = \left( \frac{\exp(x'_{t+k} \hat{\gamma} + \sum_{j=1}^h \hat{\lambda}_j \hat{y}_{t+k-j})}{1 + \exp(x'_{t+k} \hat{\gamma} + \sum_{j=1}^h \hat{\lambda}_j \hat{y}_{t+k-j})} \right)$$

Lembrando que  $\hat{\mu}_{t+k}$  depende do formato apropriado da função de ligação  $\psi(\cdot)$ , específica para cada distribuição,  $y_t = \max(y_t, c)$ ,  $0 < c < 1$  quando for necessário para evitar indefinições matemáticas. Também,  $\hat{y}_{t+k-j}$  é o valor real da série quando  $j \geq k$ .

### 3.3.1 Intervalo de previsão - HPD

Uma maneira de avaliação da qualidade dos valores obtidos da previsão do modelo ZMPS-GARMA, quando as estimativas dos parâmetros são obtidos a partir do método de inferência Bayesiana, é o algoritmo HPD (*Highest Posterior Density*) (CHEN; SHAO, 1998). A seguir é descrito o passo a passo para construção do intervalo de previsão:

---

#### Algoritmo 3 – Algoritmo HPD

---

- 1: **procedimento** HPD( Seja  $\hat{y}_{t+h}$  para  $h = 1, \dots, H$ ) ▷ Sequência de valores previstos
  - 2:  $h = 1, k = 0, y_{t+h}^{(0)} = 0, S_{t+h}^{(0)} = 0$  e inicie  $LB = 0, UB = 0$
  - 3: **enquanto**  $LB = 1$  e  $UB = 1$  **faça**
  - 4:  $f() =$
  - 5:  $\hat{p}(y_{t+h}^{(k)} | \hat{F}_{t+h}) = \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^Q f(y_{t+h}^{(k)} | \beta^{(j)}, \Phi^{(j)}, \Theta^{(j)}, \Lambda^{(j)}, \Gamma^{(j)}, \hat{F}_{t+h})$
  - 6:
  - 7: **se**  $LB = 0$  e  $S_{t+h}^{(k=1)} \geq \delta$  **então**
  - 8:  $y_{t+h, \delta} = y_{t+h}^{(k)}$  e  $LB = 1$
  - 9: **fim se**
  - 10: **se**  $UB = 0$  e  $S_{t+h}^{(k=1)} \leq (1 - \delta)$  **então**
  - 11:  $y_{t+h, (1-\delta)} = y_{t+h}^{(k)}$  e  $UB = 1$
  - 12: **fim se**
  - 13: **se**  $LB = 0$  e  $UB = 0$  **então**
  - 14:  $k = k + 1$  e  $y_{t+h}^{(k)} = y_{t+h}^{(k-1)} + 1$
  - 15: **fim se**
  - 16: **fim enquanto**
  - 17: **retorna**  $\xi^{(k)}$  e  $B^{(k)}$  ▷ Parâmetros estimados e Matriz Hessiana aproximada
  - 18: **fim procedimento**
- 

## 3.4 Seleção de Modelos

Nesta seção iremos abordar os critérios de seleção de modelos para a inferência clássica, que são o *Akaike's Information Criterion* (AIC) e o *Bayesian Information Criterion* (BIC), além dos critérios de seleção. No caso Bayesiano, o *Expected Bayesian Information Criterion* (EBIC) e o *Deviance Information Criterion* (DIC). Adicionaremos ao estudo um critério a mais no caso Bayesiano que será o *Conditional Predictive Ordinate* (CPO).

### 3.4.1 AIC

O método AIC foi proposto por Akaike (1974) para seleção de modelos com a metodologia inferencial de máxima verossimilhança, e é dado por:

$$AIC = -2\log(MV) + 2p \quad (3.4)$$

em que  $MV$  é a máxima verossimilhança e  $p$  é o número de parâmetros ajustados independentes dentro do modelo. O critério de seleção neste caso será o modelo com menor AIC.

### 3.4.2 BIC

Schwarz (1978) propôs o método BIC de seleção de modelos usando o contexto Bayesiano, com o intuito de ser utilizado para modelos que possuem uma amostra grande:

$$BIC = \log(MV) - \frac{1}{2}p\log(n)$$

em que  $MV$  é a máxima verossimilhança,  $n$  é o tamanho amostral e  $p$  a dimensão do modelo (número de parâmetros). Neste caso, o critério será o maior BIC. Outra maneira de escrever esta função, mais comumente usada para alinhar-se à mesma interpretação do AIC:

$$BIC = -2\log(MV) - p\log(n) \quad (3.5)$$

ou seja, quanto menor o BIC, melhor será o modelo.

### 3.4.3 EBIC

O critério de seleção de modelos EBIC, como o próprio nome diz (*Expected Bayesian Information Criterion*), é a esperança do critério BIC. Ele foi proposto por Carlin e Louis (2000) e é dado por:

$$EBIC = -2E[\log(Mv)] + p\log(n)$$

Os melhores modelos são indicados quanto menor for o EBIC.

### 3.4.4 DIC

Em seu artigo, Spiegelhalter *et al.* (2002) propuseram um novo critério de seleção para modelos Bayesianos, com o objetivo de identificar o melhor modelo que explica os dados

observados. Considerando  $p_D$  a aproximação do número efetivo de parâmetros com relação ao modelo, temos que a forma funcional da função é:

$$\begin{aligned} p_D(y, \tilde{\xi}(y)) &= E_{\xi|y}[d_{\xi}(y, \tilde{\xi}(y))] \\ &= E_{\xi|y}[-2\log(p(y|\xi)) + 2\log(p(y|\tilde{\xi}(y)))] \end{aligned}$$

A demonstração da aproximação do valor exato de  $p_D$  é encontrado em [Efron \(1986\)](#), lembrando que  $\xi$  é o vetor de parâmetros. A seguir apresentaremos outra medida usada na composição do DIC, chamado de desvio Bayesiano:

$$D(\xi) = -2\log(p(y|\xi)) + 2\log(f(y)) = -2\log(p(y|\xi)) + Constante$$

Dos resultados anteriores, temos que o DIC é dado por:

$$\begin{aligned} DIC &= D(\bar{\xi}) + p_D = -2\log(p(y|\bar{\xi})) + p_D = -2 \sum_{q=1}^Q \log(p(y|\xi_q)) + p_D \\ &= -2 \sum_{q=1}^Q \log(L(y|\xi_q)) + p_D = -2 \sum_{q=1}^Q l(y|\xi_q) + p_D \end{aligned}$$

Ao final, o melhor modelo a ser selecionado é o que apresenta o menor DIC.

**Observação 3.** O desenvolvimento deste critério de seleção de modelos baseia-se em aproximações da distribuição normal, portanto o autor encoraja o uso deste critério em parametrizações que a probabilidade de normalidade seja mais plausível.

### 3.4.5 CPO

[Gelfand, Dey e Chang \(1992\)](#) demonstraram em seu artigo uma metodologia para determinar a escolha do modelo mais adequado a partir de modelos aninhados, utilizando a metodologia de validação cruzada. Este método, o *Conditional Predictive Ordinate*, é baseado nos resultados da aplicação de inferência Bayesiana, em que são utilizadas amostras dos estimadores dos parâmetros para obter a máxima verossimilhança e, a partir deste resultado, aplicar o critério de seleção. Uma demonstração mais resumida deste método pode ser encontrado em [Louzada, Suzuki e Cancho \(2013\)](#),

$$C\hat{P}O_i = \left( \frac{1}{q} \sum_{q=1}^Q \frac{1}{L(y_i^{(i)} | \gamma^{(q)}, \lambda^{(q)}, \beta^{(q)}, \Phi^{(q)}, \Theta^{(q)})} \right)^{-1} \quad (3.6)$$

$$B = \sum_{i=1}^n \log(C\hat{P}O_i) \quad (3.7)$$

Na aplicação deste método em séries temporais, é recomendado retirar a cadeia inteira da série e não somente um ponto, dado que esta estrutura possui uma ligação entre as observações, que não pode ser desfeita.

**Observação 4.** Este critério de seleção acomoda tanto prioris próprias como impróprias e empregam somente distribuições univariadas. Entretanto, prioris impróprias ocasiona posteriores não próprias.

A partir das informações retiradas deste capítulo, uma das possibilidades de estudar a qualidade da metodologia inferencial, é realizar um estudo de simulação para extrair algumas informações sobre este processo.





## ESTUDO DE SIMULAÇÃO

Neste capítulo apresentaremos um estudo de simulação que será feito com o objetivo de verificar a performance da estimação do modelo. Para isto, é necessário um gerador de números aleatórios da série temporal com as características postuladas previamente. Após obter essa série, os resultados da simulação serão apresentados para efeito de comparação, tanto no processo inferencial clássico como Bayesiano.

### 4.1 Função Geradora de Números Aleatórios

Funções geradoras de números aleatórios são, comumente, construídas com o objetivo de capturar as características da distribuição selecionada para diversas aplicações. Um algoritmo gerador de números aleatórios, para séries temporais, será construído para auxiliar o cálculo das medidas de performance da estimação do modelo a partir da simulação.

Algumas definições são necessárias para entendimento do algoritmo, seja  $\xi$  o vetor de parâmetros  $(\gamma, \lambda, \beta, \Phi, \Theta)$  do modelo,  $\pi_{ZMPS}(y_t | \mu_t, \alpha, w_t, \mathcal{F}_t)$  a função massa de probabilidade (f.m.p.),  $F_Y$  a função distribuição acumulada (f.d.a.),  $U$  variável aleatória com distribuição Uniforme(0,1) e  $\psi(\cdot)^{-1}$  a inversa da função de ligação. A seguinte fórmula é utilizada de forma recursiva para a construção da série aleatória quando  $y_t > 1$ , mais detalhes podem ser vistos em [Consul e Famoye \(2006\)](#):

$$\pi_{ZMPS}(y | \mu_t, \alpha, p_t, \mathcal{F}_t) = \frac{a(y, \alpha)g(\mu_t, \alpha)}{a(y-1, \alpha)} \pi_{ZMPS}(y-1 | \mu_t, \alpha, p_t, \mathcal{F}_t) \quad (4.1)$$

As funções  $a(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  e  $f(\cdot)$  são dadas de acordo com a distribuição selecionada dada na Tabela 2. Apresentaremos a seguir o algoritmo gerador de números aleatórios de acordo com a distribuição e valor dos parâmetros selecionados:

**Algoritmo 4** – Algoritmo gerador de números aleatórios - ZMPS-GARMA

---

```

procedimento RNDZMPS( $\xi$ )                                ▷ Gerador de números aleatórios  $(p, q)(h)$ 
2:    $B[1 : \max(p, q, h)] \leftarrow [0, \dots, 0]$           ▷ Vetor os valores iniciais para série aleatória
    $a \leftarrow a(y)$ 
4:    $f \leftarrow f(\mu)$ 
    $g \leftarrow g(\mu)$ 
6:    $\mu_0 \leftarrow \psi(x'_t \beta + \sum_{i=1}^p \phi_i \psi(y_{t-i}^*) + \sum_{j=1}^q \theta_j (\psi(y_{t-j}^*) - \eta_{t-j}))^{-1}$ 
    $w_0 \leftarrow \exp(x'_t \gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i h(y_{t-1})) / 1 + \exp(x'_t \gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i h(y_{t-1}))$ 
8:    $p_{\max(p, q, h)-1} \leftarrow w_0(1 + \mu_0) / \mu_0$ 
   para  $t$  faça  $\max(p, q, h)(n + \max(p, q, h) - 1)$ 
10:   $p_0 \leftarrow (1 - p_{t-1}) + p_{t-1}(1/f(\mu_t))$ 
    $p_{\max} \leftarrow 1/(1 - 1/f(\mu_t))$ 
12:  se  $1 - w_t < 0$  então                                ▷ Checando as suposições
   fim de procedimento: erro  $p_t \leq p_{\max}$ 
14:  fim se
    $u \leftarrow U(0, 1)$                                     ▷ Gera valor aleatório da Uniforme(0,1)
16:   $y = 0$ 
   se  $u \leq p_0$  então
18:     $B[t] = y$ 
   senão
20:     $F_y = p_0$ 
   enquanto  $u > F_y$  faça
22:     $y = y + 1$ 
   se  $y = 1$  então
24:     $p_y = p_{t-1} a(y) g(\mu_t)^y / f(\mu_t)$ 
   senão
26:     $p_y = p_y a(y) g(\mu_t) / a(y - 1)$ 
   fim se
28:     $F_y = F_y + p_y$ 
   fim enquanto
30:     $B[t] = y$ 
   fim se
32:   $\mu_t \leftarrow \psi(x'_t \beta + \sum_{i=1}^p \phi_i \psi(y_{t-i}^*) + \sum_{j=1}^q \theta_j (\psi(y_{t-j}^*) - \eta_{t-j}))^{-1}$ 
    $w_t \leftarrow \exp(x'_t \gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i h(y_{t-1})) / 1 + \exp(x'_t \gamma + \sum_{i=1}^h \lambda_i h(y_{t-1}))$ 
34:   $p_t \leftarrow w_t(1 + \mu_t) / \mu_t$ 
    $\mu_{t+1} \leftarrow \mu_t$ 
36:  fim para
   retorna  $B[-\max(p, q, h)]$                             ▷ Vetor aleatório retirando os chutes iniciais
38: fim procedimento

```

---

Mais detalhes sobre a construção deste algoritmo pode ser encontrado no Apêndice B, derivada da construção lógica feita por Conceição (2013). Após gerada a série temporal, através da função geradora de números aleatórios, é possível analisar o processo inferencial para verificar se os parâmetros fixados são os mesmos dos estimados pelo método de máxima verossimilhança ou Bayesiano. Nas próximas seções serão apresentados os resultados para as distribuições Geométrica e Poisson, tanto no contexto Bayesiano como clássico.

## 4.2 Estudo de Simulação - Clássico

Como exemplo, utilizaremos a distribuição Geométrica para verificar os pressupostos estabelecidos para o modelo ZMG-GARMA. Através do algoritmo gerador de números aleatórios criamos 1.000 séries com 500 observações cada. Logo após, utilizaremos o método BFGS, descrito no capítulo sobre inferência clássica, e algumas medidas de conformidade para avaliar o processo inferencial. Neste sentido, foram considerados as seguintes medidas, Erro Quadrático Médio (EQM), Erro Percentual Absoluto da Média (MAPE) e Probabilidade de Aceitação (AP):

$$EQM = \frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} (\hat{\xi}^{(k)} - \xi)^2 \quad (4.2)$$

$$MAPE = 100 \times \frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} \frac{|\hat{\xi}^{(k)} - \xi|}{\xi} \% \quad (4.3)$$

$$IC(\xi, 1 - \alpha) = \left[ \hat{\xi}^{(k)} - z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \sqrt{I^{-1}} \quad ; \quad \hat{\xi}^{(k)} + z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \sqrt{I^{-1}} \right] \quad (4.4)$$

$$AP = \frac{\text{Números de } \xi \in IC \text{ para cada } k}{1000} \quad (4.5)$$

Para o estudo de simulação não consideramos variáveis explicativas, somente a inclusão do intercepto  $\beta$  e  $\lambda$ . Aditivamente, considera-se o grau de defasagem  $h$  como único. Os valores fixos selecionados dos parâmetros para este estudo são expressos a seguir:

Tabela 3 – Valores selecionados para os parâmetros do modelo Clássico

Ordem ZMG-GARMA( $p, q$ )( $h$ )	$\beta$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\gamma$	$\lambda_1$
(1,1)(1)	0.8	0.5	-	0.3	-	1.0	0.2
(1,2)(1)	0.8	0.2	-	0.3	0.2	0.7	0.3
(2,1)(1)	0.5	0.3	0.4	0.2	-	0.8	0.2
(2,2)(1)	0.6	0.5	0.3	0.2	0.2	0.8	0.2
Ordem ZMP-GARMA( $p, q$ )( $h$ )	$\beta$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\gamma$	$\lambda_1$
(1,1)(1)	0.8	0.5	-	0.3	-	0.2	0.15
(1,2)(1)	0.8	0.2	-	0.3	0.4	0.4	0.2
(2,1)(1)	0.1	0.2	0.4	0.1	-	0.3	0.1
(2,2)(1)	0.6	0.4	0.3	0.1	0.1	0.2	0.1

Fonte – Dados da pesquisa

### 4.2.1 ZMG-GARMA

Os resultados da simulação são apresentados na Tabela 4. Como podemos ver, as estimativas são próximas dos valores reais dos parâmetros, com exceção dos que compõe a parte de proporcional  $w_t$  do modelo ZMG-GARMA(2,2)(1), que foram superestimados e subestimados de

$\gamma$  e  $\lambda_1$ , respectivamente. Entretanto suas medidas de conformidade obtiveram uma performance boa.

Em geral, os valores do EQM são pequenos o suficiente para considerar que as estimativas são próximas dos valores reais e os resultados do MAPE estão ao redor ou são menores que 100, o que é requerido para valores pequenos dos parâmetros reais. De acordo com a probabilidade de aceitação, de maneira geral, as estimativas se ajustam bem ao intervalo de confiança aproximado.

Tabela 4 – Resultados da simulação - ZMG-GARMA Clássico

Parâmetros	(1,1)(1)				(1,2)(1)			
	Média	EQM	MAPE(%)	AP	Média	EQM	MAPE(%)	AP
$\beta$	0.8012	0.0146	12.1093	0.99	0.8002	0.0618	24.7474	0.95
$\phi_1$	0.4941	0.0060	12.4032	0.99	0.1823	0.0670	102.5479	0.22
$\phi_2$	-	-	-	-	-	-	-	-
$\theta_1$	0.3045	0.0052	19.5162	0.97	0.3152	0.0633	65.9001	0.29
$\theta_2$	-	-	-	-	0.2057	0.0134	46.5645	0.46
$\gamma$	1.0065	0.0281	13.3237	0.99	0.7058	0.0241	17.5486	0.99
$\lambda_1$	0.2042	0.0026	19.9668	0.99	0.3031	0.0045	17.6574	0.99
Parâmetros	(2,1)(1)				(2,2)(1)			
	Média	EQM	MAPE(%)	AP	Média	EQM	MAPE(%)	AP
$\beta$	0.5108	0.0258	25.3483	0.97	0.5946	0.0235	19.4005	0.99
$\phi_1$	0.2736	0.0517	60.1635	0.25	0.5234	0.0547	35.2813	0.71
$\phi_2$	0.4055	0.0216	28.0877	0.78	0.2636	0.0487	55.7332	0.35
$\theta_1$	0.2236	0.0566	93.7477	0.23	0.1749	0.0548	86.9152	0.22
$\theta_2$	-	-	-	-	0.2121	0.0069	32.9439	0.73
$\gamma$	0.7988	0.0207	14.5010	0.99	0.9755	0.0792	27.1637	0.99
$\lambda_1$	0.2045	0.0025	19.5028	0.99	0.1441	0.0068	33.8743	0.99

Fonte – Dados da pesquisa

## 4.2.2 ZMP-GARMA

Os resultados da simulação são apresentados na Tabela 5. Como podemos ver, as estimativas são próximas dos valores reais dos parâmetros, com exceção dos que compõem a parte de proporcional  $w_t$  do modelo. Entretanto suas medidas de conformidade obtiveram uma performance boa.

Alguns desvios com uma amplitude maior podem ser observados através dos valores do EQM, assim como os MAPE observados. Como nos resultados obtidos da simulação do modelo ZMG-GARMA, de maneira geral, as estimativas se ajustam bem ao intervalo de confiança aproximado.

Tabela 5 – Resultados da simulação - ZMP-GARMA Clássico

Parâmetros	(1,1)(1)				(1,2)(1)			
	Média	EQM	MAPE(%)	AP	Média	EQM	MAPE(%)	AP
$\beta$	0.3403	0.2126	57.4539	0.99	0.7762	0.0199	13.8942	0.99
$\phi_1$	0.5442	0.0072	12.4139	0.99	0.2243	0.0154	49.3025	0.60
$\phi_2$	-	-	-	-	-	-	-	-
$\theta_1$	0.5763	0.0785	92.1164	0.99	0.2805	0.0107	26.9007	0.82
$\theta_2$	-	-	-	-	0.3868	0.0037	11.8776	0.99
$\gamma$	0.8772	0.4598	403.2781	0.99	1.0713	0.4995	167.8377	0.99
$\lambda_1$	0.1950	0.0043	35.2087	0.99	0.5414	0.1292	170.7514	0.99
Parâmetros	(2,1)(1)				(2,2)(1)			
	Média	EQM	MAPE(%)	AP	Média	EQM	MAPE(%)	AP
$\beta$	0.0974	0.0066	63.9024	0.21	0.6060	0.0145	13.7879	0.99
$\phi_1$	0.1911	0.0465	84.3304	0.13	0.4062	0.0403	38.2839	0.71
$\phi_2$	0.3920	0.0116	20.1825	0.89	0.2829	0.0292	44.4587	0.51
$\theta_1$	0.1031	0.0472	171.9852	0.09	0.0971	0.0447	156.8927	0.14
$\theta_2$	-	-	-	-	0.1177	0.0079	71.3554	0.34
$\gamma$	0.9508	0.4517	216.9422	0.99	0.9349	0.5635	367.4676	0.99
$\lambda_1$	0.2238	0.0255	132.3021	0.61	0.0881	0.0018	34.0243	0.60

Fonte – Dados da pesquisa

### 4.3 Estudo de Simulação - Bayesiano

Para obter as estimativas dos parâmetros, usamos uma aproximação numérica amplamente disseminada na área Bayesiana que é o método de Monte Carlo Markov Chain (MCMC). Utilizando métricas e ferramentas gráficas para verificar os pressupostos dos estimadores, será utilizado uma atualização conjunta de  $\xi$ , como descrito na Seção 3.2, para cada interação.

Para verificar a viabilidade do processo de estimação, usamos 1.000 séries temporais simuladas com 500 observações cada. O processo de inferência foi feita utilizando o algoritmo de Metropolis-Hastings. No total, 5.000 simulações foram performadas, do qual as primeiras 1.000 são descartadas em uma amostra *burn-in*, das 15.000 séries resultantes, o terceiro valor é sempre selecionado.

As medidas utilizadas para verificar o desempenho do procedimento de estimativa foram o *Corrected Bias* (CB) e o *Corrected Error* (CE) e *Aceptance Rate* (AR) descritos a seguir:

$$CB = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left| \frac{\xi - \hat{\xi}^{(k)}}{\xi} \right|; \quad CE^2 = \frac{1}{Var} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (\hat{\xi}^{(k)} - \xi)^2$$

$$AR = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \hat{r}^{(i)}$$

Para o estudo de simulação não consideramos variáveis explicativas, somente a inclusão do intercepto  $\beta$  e  $\lambda$ . Aditivamente, considera-se o grau de defasagem  $h$  como único. Os valores fixos selecionados dos parâmetros para este estudo são expressos a seguir:

Tabela 6 – Valores selecionados para os parâmetros do modelo Bayesiano

Ordem ZMG-GARMA( $p, q$ )( $h$ )	$\beta$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\gamma$	$\lambda_1$
(1,1)(1)	0.8	0.5	-	0.3	-	1.0	0.2
(1,2)(1)	0.8	0.2	-	0.3	0.2	0.7	0.3
(2,1)(1)	0.5	0.3	0.4	0.2	-	0.8	0.2
(2,2)(1)	0.6	0.5	0.3	0.2	0.2	0.8	0.2
Ordem ZMP-GARMA( $p, q$ )( $h$ )	$\beta$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\gamma$	$\lambda_1$
(1,1)(1)	0.8	0.5	-	0.3	-	0.2	0.15
(1,2)(1)	0.8	0.2	-	0.3	0.4	0.4	0.2
(2,1)(1)	0.1	0.2	0.4	0.1	-	0.3	0.1
(2,2)(1)	0.6	0.4	0.3	0.1	0.1	0.2	0.1

Fonte – Dados da pesquisa

### 4.3.1 ZMG-GARMA

Na Tabela 7 estão as medidas de qualidade do ajuste do modelo ZMG-GARMA, nela podemos observar que as estimativas dos parâmetros estão bem próximas dos valores simulados, presentes na Tabela 3. Os indicadores CB e CE apresentam valores pequenos, ou seja, bons ajustes.

Tabela 7 – Resultados da simulação - ZMG-GARMA Bayesiano

Parâmetros	(1,1)(1)				(1,2)(1)			
	Média	CB	CE ( $\times 10^{-7}$ )	AR	Média	CB	CE ( $\times 10^{-7}$ )	AR
$\beta$	0.80	0.001	0.409		0.80	0.001	0.006	
$\phi_1$	0.49	0.011	7.083		0.18	0.088	0.006	
$\phi_2$	-	-	-		-	-	-	
$\theta_1$	0.30	0.015	7.191	0.94	0.31	0.051	0.006	0.79
$\theta_2$	-	-	-		0.20	0.028	0.039	
$\gamma$	1.00	0.006	0.002		0.70	0.008	0.001	
$\lambda_1$	0.20	0.021	1.416		0.30	0.010	4.069	
Parâmetros	(2,1)(1)				(2,2)(1)			
	Média	CB	CE ( $\times 10^{-7}$ )	AR	Média	CB	CE ( $\times 10^{-8}$ )	AR
$\beta$	0.51	0.021	0.001		0.59	0.008	0.001	
$\phi_1$	0.27	0.086	0.003		0.52	0.047	0.003	
$\phi_2$	0.40	0.013	0.823		0.26	0.120	0.003	
$\theta_1$	0.22	0.118	0.004	0.76	0.17	0.124	0.079	0.64
$\theta_2$	-	-	-		0.21	0.060	0.033	
$\gamma$	0.79	0.001	0.973		0.97	0.218	0.025	
$\lambda_1$	0.20	0.022	1.369		0.14	0.276	1.399	

Fonte – Dados da pesquisa

### 4.3.2 ZMP-GARMA

Apresentaremos os indicadores de performance do ajuste do modelo através do método de inferência Bayesiana. Os resultados apresentam alguns valores estimados distantes do valor real, entretanto o valor do CB parece razoável além de possuir valores pequenos para o CE.

Tabela 8 – Resultados da simulação - ZMP-GARMA Bayesiano

Parâmetros	(1,1)(1)				(1,2)(1)			
	Média	CB	CE ( $\times 10^{-7}$ )	AR	Média	CB	CE ( $\times 10^{-7}$ )	AR
$\beta$	0.58	0.276	5.839		0.78	0.017	0.771	
$\phi_1$	0.67	0.340	1.243		0.20	0.002	0.450	
$\phi_2$	-	-	-		-	-	-	
$\theta_1$	0.15	0.509	3.132	0.37	0.29	0.005	0.238	0.15
$\theta_2$	-	-	-		0.39	0.006	4.029	
$\gamma$	0.20	0.019	2.752		0.40	0.010	1.189	
$\lambda_1$	0.15	0.007	0.037		0.20	0.004	5.889	
Parâmetros	(2,1)(1)				(2,2)(1)			
	Média	CB	CE ( $\times 10^{-5}$ )	AR	Média	CB	CE ( $\times 10^{-5}$ )	AR
$\beta$	0.79	0.017	7.717		0.21	0.654	8.215	
$\phi_1$	0.20	0.002	4.504		0.46	0.164	94.32	
$\phi_2$	-	-	-		0.51	0.693	3.242	
$\theta_1$	0.30	0.006	2.381	0.82	0.09	0.224	36.11	0.23
$\theta_2$	0.40	0.007	40.29		0.01	0.850	33.06	
$\gamma$	0.40	0.010	17.89		0.21	0.062	627.8	
$\lambda_1$	0.20	0.005	58.89		0.09	0.071	38.37	

Fonte – Dados da pesquisa

Para maiores detalhes sobre o processo inferencial e seu desempenho, no próximo capítulo iremos apresentar os resultados em duas aplicações em dados reais do modelo ZMG-GARMA e ZMP-GARMA.





---

## ESTUDO DE CASO

---

Neste capítulo iremos apresentar dois exemplos de aplicação das técnicas apresentadas. O primeiro estudo de caso refere-se ao número de altas do dólar norte americano até a queda, para isto, utilizaremos o modelo Geométrico (ZMG-GARMA); no segundo exemplo, apresentaremos a aplicação sobre a incidência de crimes com armas de fogo na cidade de São Francisco (CA - EUA), para tanto o modelo de Poisson foi selecionado (ZMP-GARMA). Para todos os exemplos mencionados, iremos apresentar os resultados tanto na aplicação da inferência clássica quanto na Bayesiana, os resultados serão comparados por método.

### 5.1 ZMG-GARMA - Número de altas do dólar até a queda

A história do câmbio é fortemente relacionada com o ouro e a moeda norte americana, com a necessidade de construir um sistema que tenha uma ordem econômica internacional capaz de encorajar o desenvolvimento, de acordo com [Belluzo \(1995\)](#). Este sistema tem sido construído em diferentes maneiras para cada país de acordo com os planos econômicos e políticos. [Edwards \(2006\)](#) apresentou, em seu artigo do Banco Central do Chile, a relação entre taxa de câmbio e meta de inflação. Como esperado, os resultados mostram que esta meta tem a tendência de reduzir a variabilidade da taxa de câmbio do Brasil frente ao dólar norte americano.

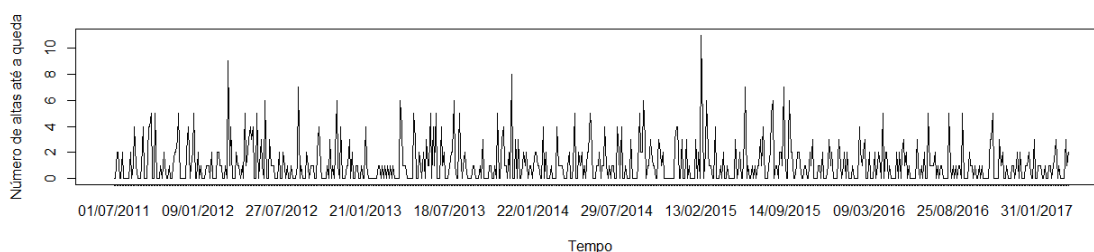
O Banco Central do Brasil é responsável pela divulgação dos dados sobre taxa de câmbio entre o Real e as demais moedas; o cálculo é composto pela média aritmética da taxa de compra e venda em boletins diários (calendário econômico). Neste cálculo considera-se a média das 4 consultas de cada *dealer*, retirando-se os dois maiores e dois menores do conjunto de valores de todos os *dealers*. Por dia são realizados 4 consultas, com 2 minutos de duração, com a escolha aleatória do início da consulta em 4 períodos. Os períodos têm início às 10:00, 11:00, 12:00 e às 13:00 horas com 10 minutos de intervalo para realizar o início e fim da consulta.

Os *dealers* devem fornecer, em cada consulta, cotação de compra e venda que representem com acuidade as condições do mercado interbancário de câmbio no início da consulta. O mercado interbancário nada mais é do que os negócios realizados entre bancos, ou seja, não há fluxo de entrada ou saída de moeda estrangeira do país, o que é denominado como mercado secundário. O portfólio dos *dealers* pode variar, mas como exemplo podemos citar o Banco do Brasil, Citi Bank, J.P. Morgan, BTG Pactual, Banco Santander, Safra, etc. Vale ressaltar que os valores obtidos no final do dia são validados com os parâmetros objetivos do mercado.

Nosso objetivo é modelar o número de altas do dólar norte americano até a queda e, logo após, obter a previsão desta série para análises de comportamento e possíveis tomadas de decisões, para isto, usaremos o modelo ZMG-GARMA.

A série histórica abrange desde 02 de agosto de 2011 até 31 de março de 2017. Não é possível a utilização de informações anteriores devido a mudanças no cálculo, que foram feitas em 23/09/2010 pela circular 3.506 e em 25/05/2011 pela circular 3.537 (BCB, 2017).

Figura 1 – Número de altas do dólar norte americano até a queda



Fonte – Banco Central do Brasil.

### 5.1.1 ZMG-GARMA Clássico

Para seleção do melhor modelo Geométrico ZM-GARMA, utilizamos os critérios AIC (AKAIKE, 1974) e BIC (SCHWARZ, 1978), amplamente disseminados na área de modelagem. Neste passo foi realizado todas as combinações ARMA até duas defasagens da parte autorregressiva e de médias móveis, para uma e duas defasagens da parte de modificação no zero. Esta escolha foi feita de acordo com as características da série temporal, sem inclusão de covariáveis. Como modelo final, obtemos ZMG-GARMA(0,1)(1):

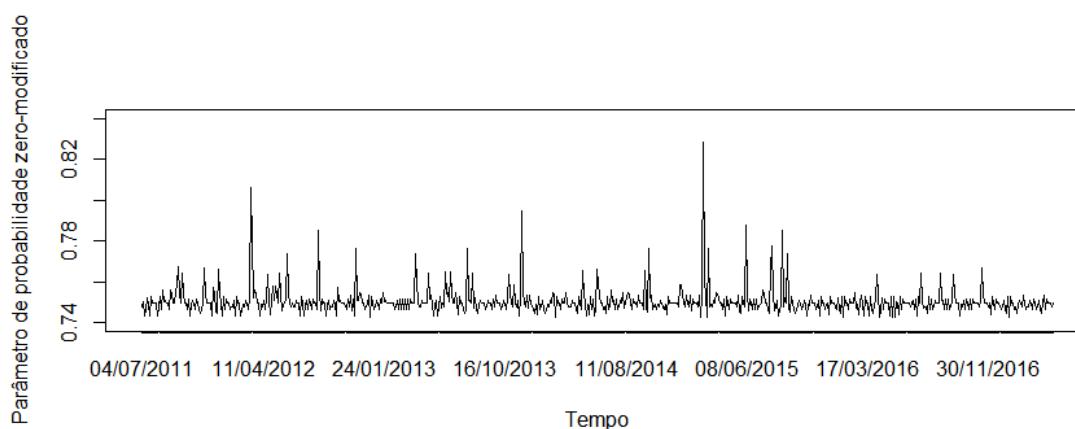
Tabela 9 – Modelo Clássico Final ZMG-GARMA(0,1)(1)

Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão
$\beta$	0,1371	0,0766
$\theta_1$	0,0688	0,0935
$\gamma$	-0,0115	0,0929
$\lambda_1$	0,0426	0,0495

Fonte – Dados da pesquisa

De maneira a analisar o comportamento dos dados, obtemos as estimativas do parâmetro de probabilidade zero-modificado. Podemos visualizar através da Figura 2 que os valores obtidos não ultrapassam o valor entre 0,9 e 0,74, sendo assim, há fortes indícios de que a série é composta por inflação de zeros.

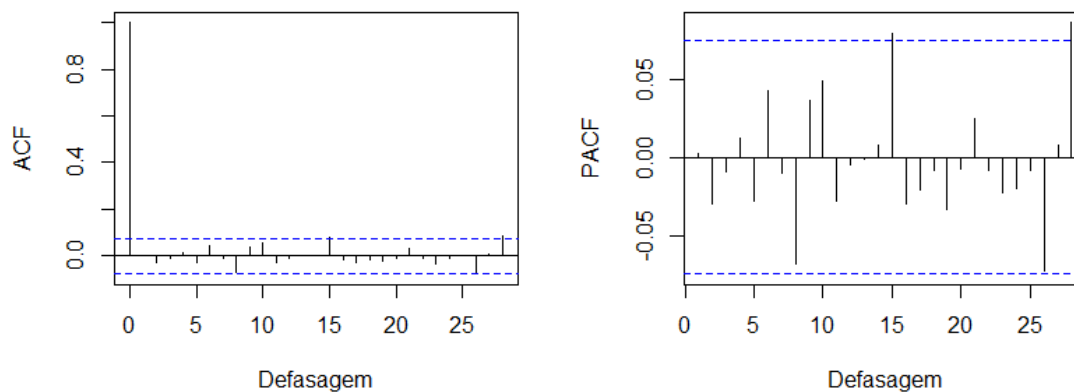
Figura 2 – Parâmetro estimado da probabilidade zero-modificado - ZMG-GARMA Clássico



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com o intuito de analisar a adequabilidade do modelo, realizamos os gráficos de Autocorrelação (ACF) e Autocorrelação parcial (PACF) dos resíduos, através destes resultados podemos concluir que não há relação entre os resíduos.

Figura 3 – Autocorrelação e Autocorrelação parcial dos resíduos - ZMG-GARMA Clássico

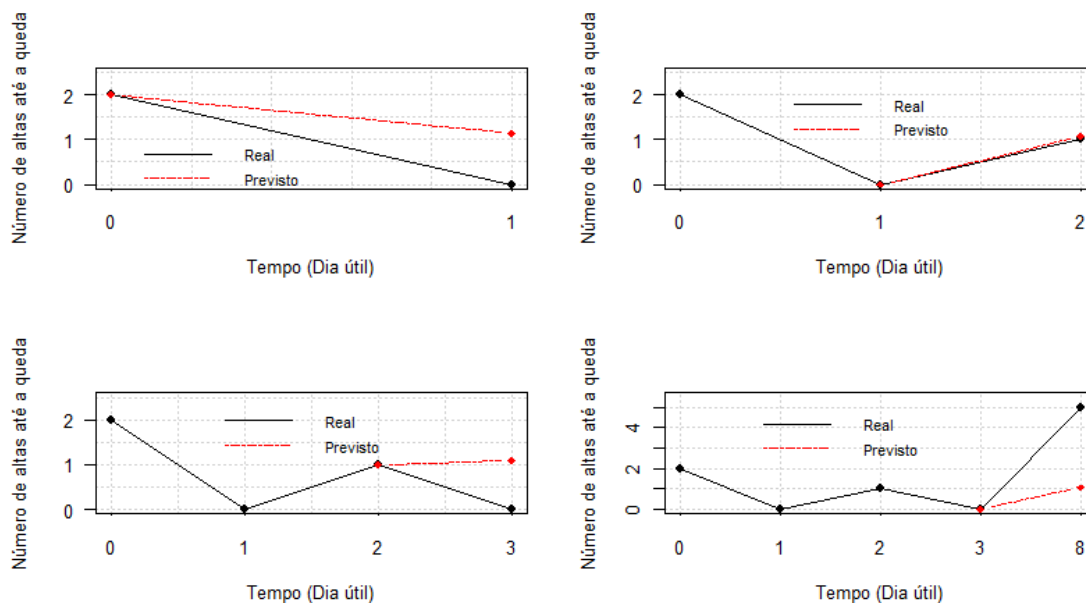


Fonte: Elaborada pelo autor.

Após a escolha do modelo final, realizamos a previsão um passo a frente. Dado que a última observação incluída no modelo foi da data de 31 de março de 2017, iremos realizar a previsão um passo a frente para quatro tempos da série real de abril. Para isto utilizaremos a notação de 0 dia útil como a observação de 31 de março de 2017, 1 dia útil como a primeira data do calendário econômico logo após esta referência e assim por diante.

A Figura 4 contém os quatro gráficos para visualização desta técnica. Verificamos que os valores previstos obtidos são satisfatórios quando a amplitude do número de altas até a queda é baixa. Nota-se que o último gráfico da segunda linha da esquerda para a direita, tem a performance real de 5 altas até a queda e o valor previsto é de aproximadamente uma alta, demonstrando que para amplitudes relativamente grandes, o modelo não consegue capturar esta característica.

Figura 4 – Previsão 1 passo a frente - ZMG-GARMA Clássico



Fonte: Elaborada pelo autor.

### 5.1.2 ZMG-GARMA Bayesiano

Utilizando a metodologia de inferência Bayesiana e conjuntamente com o EBIC, DIC e CPO para seleção de modelos, foi ajustado o modelo ZMG-GARMA(1,0)(1), cujos resultados são apresentados na Tabela 10.

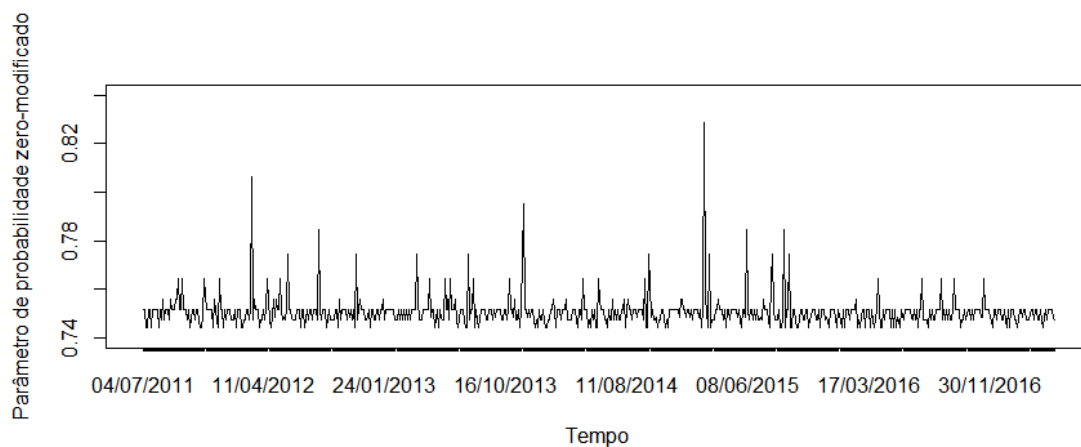
Tabela 10 – Modelo Bayesiano Final ZMG-GARMA(1,0)(1)

Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão
$\beta$	0,1269	0,0513
$\phi_1$	0,0692	0,0661
$\gamma$	-0,0125	0,0630
$\lambda_1$	0,0424	0,0339

Fonte – Dados da pesquisa

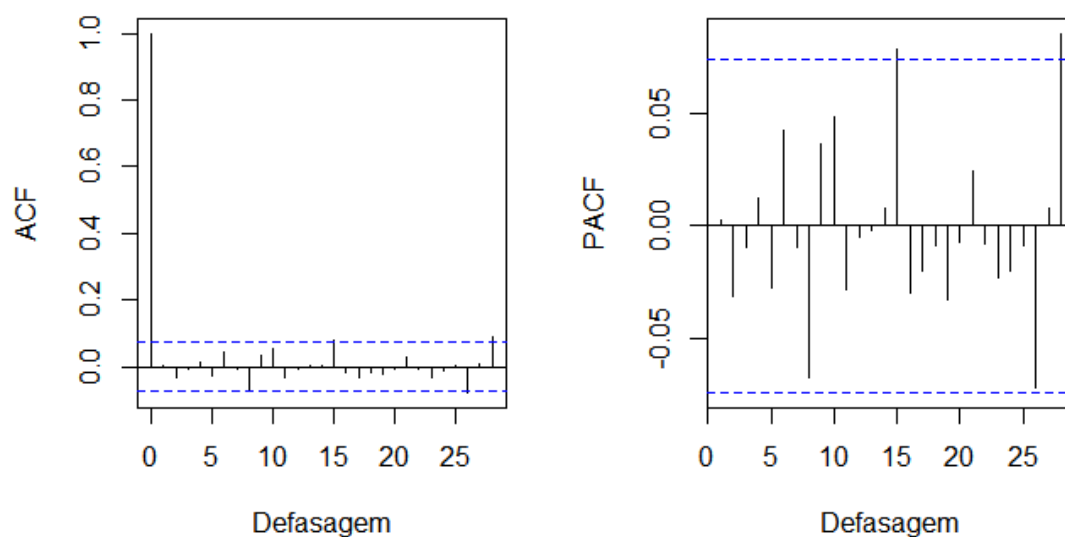
Para observar as características dos dados a partir do parâmetro estimado da probabilidade zero-modificado, as estimativas estão entre 0,7442 e 0,8285, ou seja, há a inflação de zeros. Na Figura 6 é possível observar a ausência de autocorrelação e autocorrelação parcial dos resíduos.

Figura 5 – Parâmetro estimado da probabilidade zero-modificado - ZMG-GARMA Bayesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

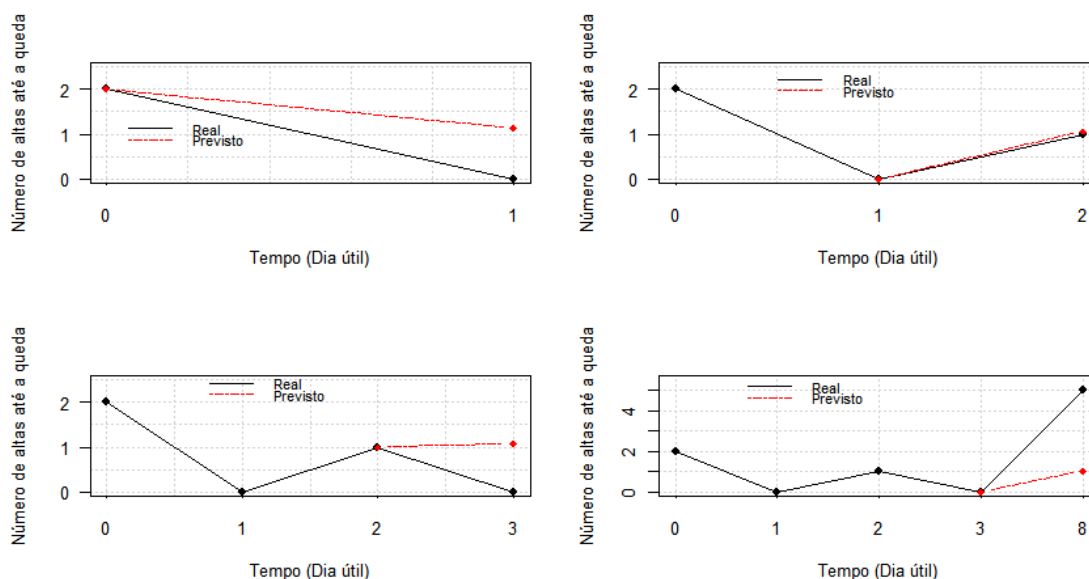
Figura 6 – Autocorrelação e Autocorrelação parcial dos resíduos - ZMG-GARMA Bayesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 7 obtemos a previsão 1 passo a frente para o modelo ajustado ZMG-GARMA(1,0)(1). A conclusão se assemelha aos resultados obtidos deste conjunto de dados através da metodologia de inferência clássica.

Figura 7 – Previsão 1 passo a frente - ZMG-GARMA Bayesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

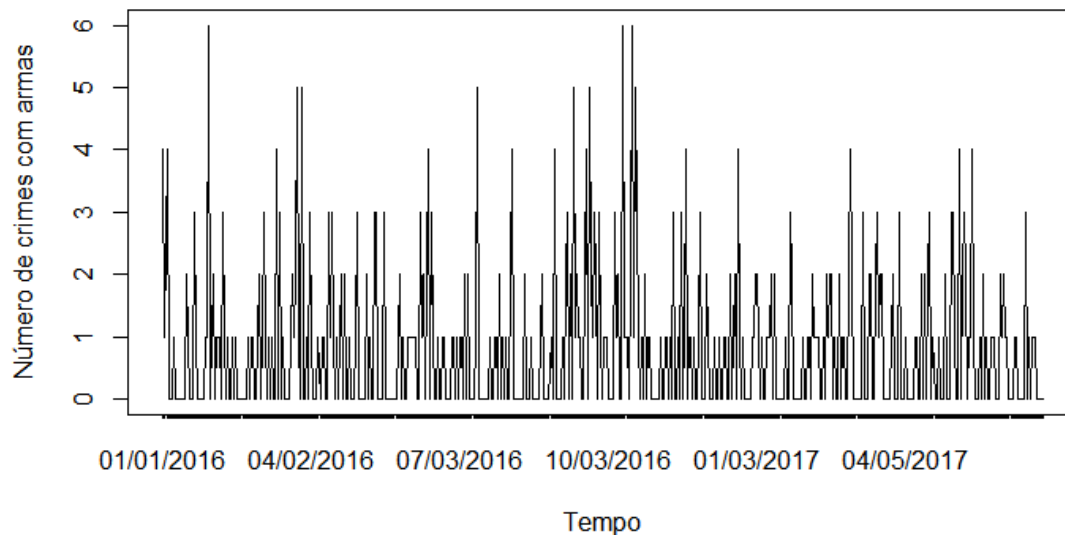
A exceção da ordem do modelo selecionado, tanto o método Bayesiano quanto o Clássico, apresentam bons ajustes aos dados observados através da análise de resíduos, projeções muito semelhantes e as mesmas conclusões sobre a inflação de zeros na série. A previsão mostrou-se eficiente quando o intervalo de previsão e amplitude do número de altas até a queda são pequenos.

## 5.2 ZMP-GARMA - Número de crimes com armas de fogo

O nosso próximo exemplo de aplicação refere-se à série temporal de incidência de crimes com armas de fogo na cidade de São Francisco, no estado da Califórnia, Estados Unidos da América. Estas informações são providas pela cidade de São Francisco através de seu endereço eletrônico sobre incidentes registrados no Departamento de Polícia. O histórico de reportes começa em 01/01/2003. Uma atualização nos limites distritais ocorreu a partir de 19 de julho de 2015. Como o nosso objetivo será modelar as ocorrências com arma de fogo na cidade, sem limitantes distritais, esta mudança de informações não afetará nosso estudo.

Portanto nossa série temporal para estudar a incidência de crimes com armas de fogo na cidade de São Francisco é de 01 de janeiro de 2013 até 24 de junho de 2017. O *download* das informações presentes nesta dissertação foi retirado do endereço eletrônico em 18 de outubro de 2017. Os dados foram fornecidos pela cidade e condado de São Francisco (JOHNSON, 2017).

Figura 8 – Número de crimes com armas de fogo na cidade de São Francisco



Fonte – Cidade e condado de São Francisco - CA, EUA.

### 5.2.1 ZMP-GARMA Clássico

Para a seleção do modelo clássico, foram utilizados os critérios de seleção AIC e BIC, sendo assim, o modelo ZMP-GARMA(1,1)(0) foi ajustado e as estimativas dos parâmetros são apresentadas na Tabela 11. Para avaliar o ajuste do modelo, foi analisado a ausência de correlação entre os valores dos resíduos. Através da Figura 9 é possível observar a adequabilidade do modelo pela autocorrelação e autocorrelação parcial.

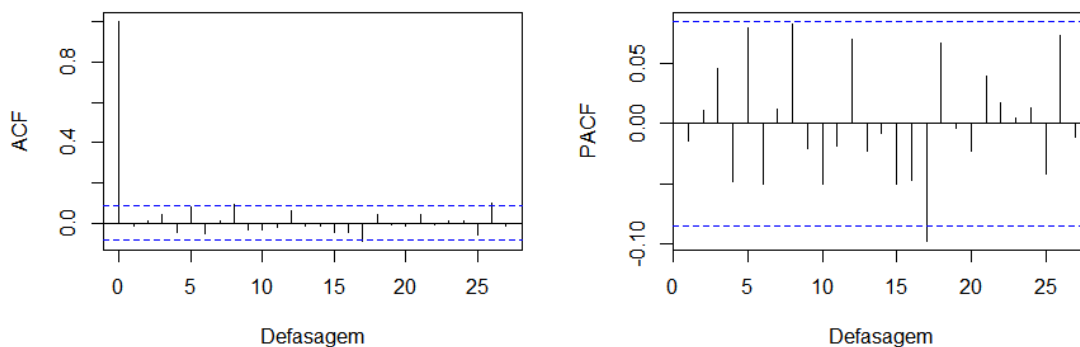
Tabela 11 – Modelo Clássico Final ZMP-GARMA(1,1)(0)

Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão
$\beta$	0,0547	0,0409
$\phi_1$	0,8866	0,1346
$\theta_1$	-0,8063	0,1556
$\gamma$	-0,1369	0,0861

Fonte – Dados da pesquisa



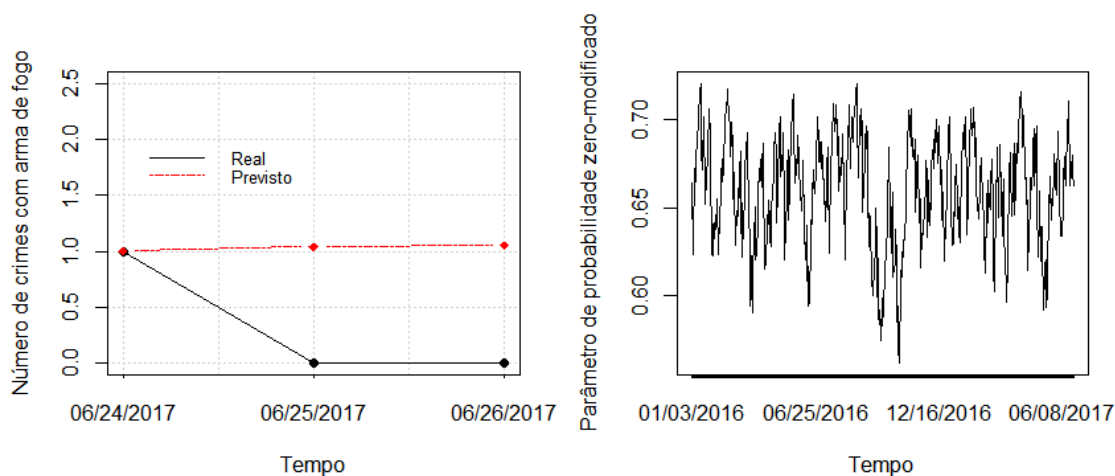
Figura 9 – Autocorrelação e Autocorrelação parcial - ZMP-GARMA Clássico



Fonte: Elaborada pelo autor.

Selecionado o modelo candidato, aplicaremos a previsão dois passos à frente, o resultado pode ser visto na Figura 10. Nesta mesma figura é apresentado o gráfico dos valores obtidos na estimação do parâmetro  $p_t$  (probabilidade zero-modificado), no qual podemos observar que o parâmetro varia entre 0,5617 e 0,7209 indicando a inflação de zeros presente na série observada.

Figura 10 – Previsão e Parâmetro estimado da probabilidade zero-modificado - ZMP-GARMA Clássico



Fonte: Elaborada pelo autor.

### 5.2.2 ZMP-GARMA Bayesiano

Para inferência Bayesiana, utilizaremos o EBIC, DIC e CPO para selecionar a melhor ordem do modelo, ZMP-GARMA(2,1)(1):

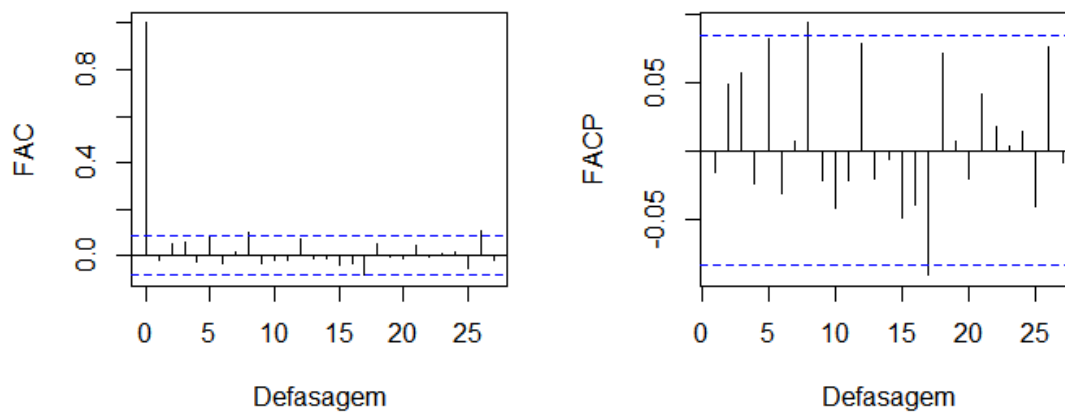
Tabela 12 – Modelo Bayesiano Final ZMP-GARMA(2,1)(1)

Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão
$\beta$	0,4007	0,0249
$\phi_1$	-0,7463	0,0290
$\phi_2$	-0,0357	0,0204
$\theta_1$	0,7918	0,0238
$\gamma$	-0,2083	0,0203
$\lambda_1$	0,0572	0,0144

Fonte – Dados da pesquisa

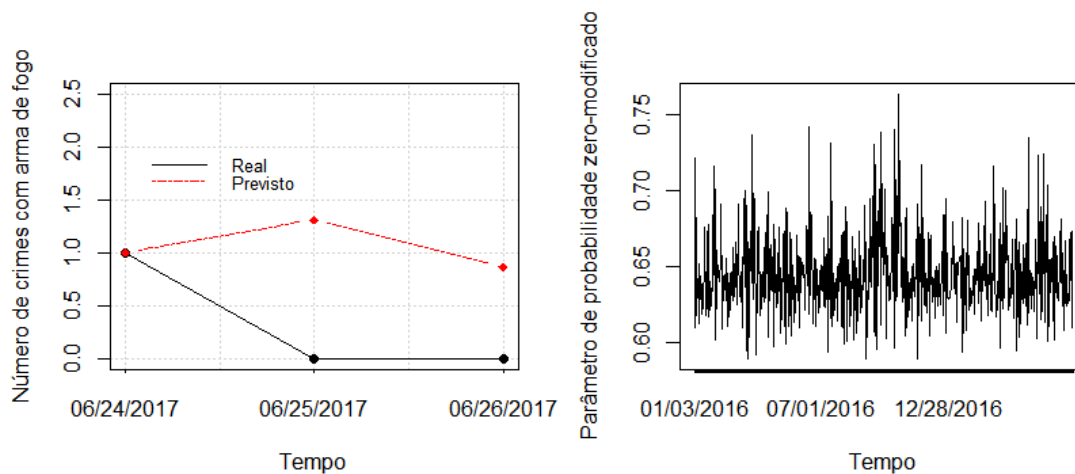
Os gráficos das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial apresentam resíduos não correlacionados, sendo assim, concluímos que o modelo é adequado. As estimativas do parâmetro de probabilidade zero-modificado no tempo é apresentado na Figura 12, indicando a inflação de zeros.

Figura 11 – Autocorrelação e Autocorrelação parcial - ZMP-GARMA Bayesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 12 – Parâmetro estimado da probabilidade zero-modificado - ZMP-GARMA Bayesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

Da aplicação de um caso real, conseguimos retirar algumas conclusões. O número de parâmetros a ser estimado é relacionado com o cálculo dos critérios de seleção de modelos AIC e BIC, fazendo com que provavelmente haja uma preferência entre modelos que possuem menores defasagens na parte de modificação no zero e ARMA.



---

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

O método BFGS de otimização numérica, utilizado para o processo inferencial clássico, funciona muito bem quando os valores iniciais selecionados são próximos do verdadeiro a ser estimado, portanto há a necessidade de um conhecimento prévio sobre o comportamento da série e os valores aproximados dos parâmetros. Quanto maior a defasagem presente na parte proporcional e no modelo ARMA, pior será a aproximação dos valores reais dos parâmetros.

Com relação a performance do ajuste do modelo dado através do método de inferência Bayesiana, podemos observar valores muito próximos dos selecionados para o estudo da simulação. Apesar do modelo ZMP-GARMA apresentar resultados mais distantes do observado, o modelo ZMG-GARMA apresentou uma performance boa.

No estudo de aplicação em um caso real, podemos concluir que o modelo se ajusta bem aos dados, não demonstrando resíduos correlacionados. A série escolhida para trabalho é a cotação do dólar norte americano em comparação à moeda brasileira. Como dito anteriormente, a taxa de câmbio possui uma relação forte com a meta da inflação, fazendo com que a variabilidade desta série temporal não seja muito grande. Realizando a metodologia de previsão, vemos que para o período selecionado, o valor previsto não foi muito aderente ao real, principalmente quando o valor do número de sucessivas altas do câmbio até a queda é grande, devido à esta escassa característica da série. Entretanto foi possível observar que o modelo Bayesiano se ajusta melhor, esta conclusão se deve principalmente pelo resultado observado do desvio padrão das estimativas obtidas pelo método clássico, ou seja, os desvios apresentados representam valores elevados com respeito do valor estimado dos parâmetros, o que nos leva a crer que o AIC e BIC não são bons indicadores para seleção do melhor modelo nestes casos.

Para a aplicação sobre o número de crimes com armas de fogo, as conclusões obtidas são bem próximas a do exemplo ZMG-GARMA. A previsão do exemplo da distribuição de Poisson apresenta resultados satisfatórios, além de ser possível observar o comportamento das estimativas do parâmetro de probabilidade zero-modificado auxiliando a análise da inflação/deflação de

zeros da série ajustada. Com respeito à projeção do modelo Bayesiano, observamos que o erro apresentado nos dois pontos projetados é menor do que o clássico, sendo assim, o modelo ZMP-GARMA(2,1)(1) Bayesiano é melhor para a realização da projeção dois passos à frente.

De maneira geral, o modelo ZMPS-GARMA apresentado serve para modelar dados de contagem positivos aplicado ao contexto de séries temporais com o suporte se iniciando no valor zero. Com este ponto caracterizado, utiliza-se uma modificação no zero para poder capturar melhor esta propriedade. As distribuições estudadas neste trabalho são comumente utilizadas em dados sobredispersos.

Dos resultados extraídos desta dissertação, podemos citar avanços a serem feitos, sendo assim, os próximos passos serão a aplicação do método de inferência no contexto Bayesiano para as distribuições de Poisson Generalizadas e Binomial Negativa.

## REFERÊNCIAS

---



---

- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 6, p. 716–723, 1974. Citado nas páginas 45 e 58.
- ANDRADE, B.; ANDRADE, M.; EHLERS, R. Bayesian gamma models for count data. **Communications in Statistics: Case Studies, Data Analysis and Applications**, v. 4, n. 1, p. 192–205, 2015. Citado nas páginas 20 e 25.
- ANGERS, J.; BISWAS, A. A bayesian analysis of zero-inflated generalized poisson model. **Computational Statistics & Data Analysis**, v. 42, p. 37–46, 2002. Citado na página 20.
- B3. **Estatísticas históricas**. 2018. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br>>. Nenhuma citação no texto.
- BCB. **Banco Central do Brasil**. 2017. Disponível em: <[www.bcb.gov.br](http://www.bcb.gov.br)>. Citado na página 58.
- BELLUZO, L. G. M. **O declínio do Bretton Woods e a emergência dos mercados "globalizados"**. 1995. Disponível em: <[periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/ecos/article/view/8643205/10754](http://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/ecos/article/view/8643205/10754)>. Citado na página 57.
- BENJAMIN, M. A.; RIGBY, R. A.; STASINOPOULOS, D. M. Fitting non-gaussian time series models. **Computational Statistics**, p. 191–196, 1998. Citado nas páginas 20, 24 e 25.
- \_\_\_\_\_. Generalized autoregressive moving average models. **Journal of the American Statistical Association**, v. 98, p. 214–223, 2003. Citado nas páginas 24 e 75.
- BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C.; LJUNG, G. M. **Time series analysis**. 5. ed. [S.l.: s.n.], 2016. Citado nas páginas 19, 23 e 24.
- BROYDEN, C. G. The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 1. general considerations. **IMA Journal of Applied Statistics**, v. 6, p. 76–90, 1970. Citado na página 41.
- CARLIN, B. P.; LOUIS, T. A. **Bayes and empirical Bayes methods for data analysis**. [S.l.: s.n.], 2000. v. 2. Citado na página 45.
- CHEN, M.; SHAO, Q. Monte carlo estimation of bayesian credible and hpd intervals. **Journal of Computational and Graphical Statistics**, v. 8, p. 69–92, 1998. Citado na página 44.
- CONCEIÇÃO, K. S. **Modelos Série de Potência Zero-Modificados**. Tese (Doutorado), 2013. Citado nas páginas 20, 27, 50 e 82.
- CONCEIÇÃO, K. S.; LOUZADA, F.; ANDRADE, M. G.; HELOU, E. S. Zero-modified poisson power series distribution and its hurdle distribution version. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 87, p. 1842–1862, 2017. Citado nas páginas 20, 29 e 36.
- CONCEIÇÃO, K. S.; MARINHO, G. A.; LOUZADA, F. On the zero-modified poisson model: Bayesian analysis and posterior divergence measure. **Computational Statistics**, v. 29, p. 959–980, 2014. Citado na página 20.

- CONSUL, P. C.; FAMOYE, F. **Lagrangian Probability Distributions**. [S.l.]: Birkhäuser, 2006. Citado nas páginas 49 e 81.
- CORDEIRO, G. M.; ANDRADE, M. G.; CASTRO, M. Power series generalized nonlinear models. **Computational Statistics and Data Analysis**, v. 53, p. 1155–1166, 2009. Citado na página 20.
- DIETZ, E.; BÖHNING, D. On estimation of the poisson parameter in zero-modified poisson models. **Computational Statistics and Data Analysis**, v. 34, p. 441–459, 2000. Citado na página 20.
- EDWARDS, S. **The relationship between exchange rates and inflation targeting revisited: Working papers**. 2006. Citado na página 57.
- EFRON, B. How biased is the apparent error rate of a prediction rule? **Journal of American Statistical Association**, v. 81, p. 461–470, 1986. Citado na página 46.
- FLECHER, R. A new approach to variable metric algorithms. **The Computer Journal**, p. 317–322, 1970. Citado na página 41.
- GELFAND, A. E.; DEY, D. K.; CHANG, H. Model determination using predictive distributions with implementation via sampling-based methods. **Bayesian Statistics**, v. 4, p. 147–167, 1992. Citado na página 46.
- GELFAND, A. E.; SMITH, A. F. M. Sampling-based approaches to calculating marginal densities. **Journal of the American Statistical Association**, v. 85, p. 398–409, 1990. Citado na página 43.
- GHOSH, S. K.; MUKHOPADHYAY, P.; LU, J. Bayesian analysis of zero-inflated regression models. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v. 136, p. 1360–1375, 2004. Citado na página 20.
- GOLDFARB, D. A family of variable-metric methods derived by variational means. **American Mathematical Society**, v. 24, p. 23–26, 1970. Citado na página 41.
- GUPTA, R. C. Modified power series distribution and some of its applications. **The Indian Journal of Statistics**, v. 36, n. 3, p. 288–298, 1974. Citado nas páginas 20 e 26.
- GURMU, S. Generalized hurdle count data regression models. **Economics Letters**, v. 58, p. 263–268, 1998. Citado na página 20.
- HASTINGS, W. K. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. **Biometrika**, v. 57, n. 1, p. 97–109, 1970. Citado na página 43.
- JOHNSON, J. **Police Department Incidents**. 2017. Disponível em: <<https://data.sfgov.org/Public-Safety/Police-Department-Incidents/tmnf-yvry>>. Citado na página 63.
- LOUZADA, F.; SUZUKI, A. K.; CANCHO, V. G. The fgm long-term bivariate survival copula model: modelling, bayesian estimation, and case influence diagnostics. **Communications**, v. 42, n. 4, p. 673–691, 2013. Citado na página 46.
- LUNN, D.; SPIEGELHALTER, D.; THOMAS, A.; BEST, N. The bugs project: Evolution, critique and future directions (with discussion). **Statistics in Medicine**, v. 28, p. 3049–3082, 2009. Citado na página 43.



METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A. W.; ROSENBLUTH, M. N.; TELLER, A. H. Equation of state calculations by fast computing machines. **The Journal of Chemical Physics**, v. 21, n. 6, p. 1087–1092, 1953. Citado na página 42.

MULLAY, J. Specification and testing of some modified count data models. **Journal of Econometrics**, v. 33, p. 341–365, 1986. Citado na página 20.

NASH, J. C. **Compact Numeral Methods for Computers: linear algebra and function minimisation**. [S.l.]: Adam Hilger, 1979. Citado na página 41.

NELDER, J.; WEDDERBURN, R. Generalized linear models. **Journal of the Royal Statistical Society**, n. 3, p. 370–384, 1972. Citado nas páginas 19, 24, 25 e 28.

PATIL, G. P. Certain properties of the generalized power series distribution. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, v. 14, p. 179–182, 1962. Citado na página 19.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **The Annals of Statistics**, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978. Citado nas páginas 45 e 58.

SHANNO, D. F. Conditioning of quasi-newton methods for function minimization. **American Mathematical Society**, v. 24, p. 647–656, 1970. Citado na página 41.

SPIEGELHALTER, D. J.; BEST, N. G.; CARLIN, B. P.; LINDE, A. G. D. Bayesian measures of model complexity and fit. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 64(4), p. 583–639, 2002. Citado na página 45.



## ESTACIONARIEDADE NOS MODELOS GARMA

Neste apêndice iremos apresentar os principais resultados obtidos por [Benjamin, Rigby e Stasinopoulos \(2003\)](#) com relação à estacionariedade da média e variância marginais dos modelos GARMA, estes resultados podem ser encontrados no artigo referenciado. A função massa de probabilidade da família exponencial no âmbito de séries temporais é dada por:

$$f(y_t | \mathcal{F}_t) = \exp\left(\frac{y_t \vartheta_t - b(\vartheta_t)}{\varphi} + d(y_t, \varphi)\right)$$

Algumas propriedades do modelo exponencial são extraídas como  $\vartheta_t$  e  $\varphi$ , parâmetros canônicos e de escala, respectivamente.  $b(\cdot)$  e  $d(\cdot)$  são funções específicas que definem as distribuições do modelo exponencial.  $\mathcal{F}_t = (y_{t-1}, \dots, y_1, \mu_{t-1}, \dots, \mu_1, p_{t-1}, \dots, p_1)$  são todas as informações disponíveis até o tempo  $t$ . Com a aplicação de uma função de ligação apropriada, obtemos os modelos Generalizados ARMA:

$$g(\mu_t) = \eta_t = x_t' \beta + \sum_{j=1}^p \phi_j (g(y_{t-j}^*) - x_{t-j}' \beta) + \sum_{j=1}^q \theta_j (g(y_{t-j}^*) - \eta_{t-j})$$

em que  $y_{t-j}^* = \max(y_{t-j}, c)$  e  $0 < c < 1$ . A média e variância condicionais do modelo GARMA são expressas por  $\mu_t = E(Y_t | \mathcal{F}_t) = b'(\alpha_t)$  e  $Var(Y_t | \mathcal{F}_t) = \varphi b''(\alpha_t) = \varphi v(\mu_t)$ , respectivamente.

Com a finalidade de encontrar a região em que o modelo Generalizado Autorregressivo e de Médias Móveis é estacionário, foi considerado a função de ligação identidade.

**Teorema 2.** A média marginal de  $y_t$  do modelo GARMA com função de ligação identidade, é dada por  $E(Y_t) = x_t' \beta$ , com  $\Phi(B)$  invertível. A média marginal é estacionária, considerando  $x_t' \beta = \beta_0$  para todo  $t$ .

*Demonstração.* Seja  $v_t$  os erros martingal, com média marginal zero e não correlacionados. Considere  $y_t = \mu_t + v_t$ . A função de ligação identidade é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mu_t &= x_t' \beta + \sum_{j=1}^p \phi_j (y_{t-j} - x_{t-j}' \beta) + \sum_{j=1}^q \theta_j (y_{t-j} - \mu_{t-j}); & \mu_t &= y_t - v_t \\ y_t - v_t &= x_t' \beta + \sum_{j=1}^p \phi_j (y_{t-j} - x_{t-j}' \beta) + \sum_{j=1}^q \theta_j (y_{t-j} - y_{t-j} + v_{t-j}) \\ y_t - x_t' \beta &= v_t + \sum_{j=1}^p \phi_j (y_{t-j} - x_{t-j}' \beta) + \sum_{j=1}^q \theta_j v_t; & w_t &= y_t - x_t' \beta \\ w_t &= v_t + \sum_{j=1}^p \phi_j w_{t-j} + \sum_{j=1}^q \theta_j v_t \\ w_t - \sum_{j=1}^p \phi_j w_{t-j} &= v_t + \sum_{j=1}^q \theta_j v_t \\ \Phi(B)w_t &= \Theta(B)v_t \\ w_t &= \Phi(B)^{-1} \Theta(B)v_t \\ w_t &= \Psi(B)v_t\end{aligned}$$

A partir deste resultado conseguimos encontrar a média marginal de  $y_t$ :

$$E(Y_t) = E(w_t + x_t' \beta) = E(w_t) + x_t' \beta \quad (\text{A.1})$$

Mas,

$$E(w_t) = E(\Psi(B)v_t) = \Psi(B)E(v_t) = 0$$

Então, segue que (A.1) é dado por:

$$E(Y_t) = x_t' \beta \quad (\text{A.2})$$

Duas considerações serão necessárias para considerar o processo estacionário, primeiro é de  $\Phi(B)^{-1}$  seja invertível e segundo que  $E(Y_t) = x_t' \beta = \beta_0$  (constante) para todo  $t$ .

□

**Teorema 3.** A variância marginal de  $Y_t$  do modelo GARMA com função de ligação identidade, é dada por  $\text{Var}(Y_t) = \phi E(\Psi^{(2)}(B)v(\mu_t))$ , em que  $\Psi^{(2)}(B) = 1 + \psi_1^2 B + \psi_2^2 B^2 + \psi_3^2 B^3 + \dots$ . Assumindo  $\Phi(B)$  invertível.

*Demonstração.* Algumas propriedades são apresentadas a seguir a fim de ajudar na demonstração:

$$\Psi^{(2)}(B) = 1 + \psi_1^2(B) + \psi_2^2(B) + \psi_3^2(B) + \dots \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Var}(\mathbf{v}_t) = E(\mathbf{v}_t^2) - E(\mathbf{v}_t)^2 = E(\mathbf{v}_t^2) = E(E(\mathbf{v}_t^2|\mathcal{F}_t)) \quad (\text{A.4})$$

$$\text{Var}(\mathbf{v}_t|\mathcal{F}_t) = E(\mathbf{v}_t^2|\mathcal{F}_t) - E(\mathbf{v}_t|\mathcal{F}_t)^2 = E(\mathbf{v}_t^2|\mathcal{F}_t) \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Var}(y_t|\mathcal{F}_t) = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{v}(\boldsymbol{\mu}_t) \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Var}(y_t|\mathcal{F}_t) = \text{Var}(\mathbf{v}_t|\mathcal{F}_t) \quad (\text{A.7})$$

A igualde proposta em (A.6) é obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{v}_t|\mathcal{F}_t) &= \text{Var}(y_t - \boldsymbol{\mu}_t|\mathcal{F}_t) = E((y_t - \boldsymbol{\mu}_t)^2|\mathcal{F}_t) - E(y_t - \boldsymbol{\mu}_t|\mathcal{F}_t)^2 \\ &= E(y_t^2 + \boldsymbol{\mu}_t^2 - 2y_t\boldsymbol{\mu}_t|\mathcal{F}_t) - (E(y_t|\mathcal{F}_t) - \boldsymbol{\mu}_t)^2 \\ &= E(y_t^2|\mathcal{F}_t) + \boldsymbol{\mu}_t^2 - 2\boldsymbol{\mu}_t E(y_t|\mathcal{F}_t) - E(y_t|\mathcal{F}_t)^2 + E(y_t|\mathcal{F}_t)^2 \\ &= E(y_t^2|\mathcal{F}_t) - E(y_t|\mathcal{F}_t)^2 \\ &= \text{Var}(y_t|\mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

Sendo assim, utilizando (A.5), (A.6) e (A.7) é possível escrever a sequência lógica:  $\text{Var}(\mathbf{v}_t|\mathcal{F}_t) = \text{Var}(y_t|\mathcal{F}_t) = E(\mathbf{v}_t^2|\mathcal{F}_t) = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{v}(\boldsymbol{\mu}_t)$ . Com as informações do Teorema anterior e deste, podemos iniciar os cálculos da variância marginal:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_t) &= \text{Var}(x_t'\boldsymbol{\beta} - w_t) = \text{Var}(w_t) = E(w_t^2) - E(w_t)^2 = E(w_t^2) \\ &= E(\Psi(B)\mathbf{v}_t\Psi(B)\mathbf{v}_t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_i\psi_j E(\mathbf{v}_{t-i}\mathbf{v}_{t-j}); \quad \mathbf{v}_t \text{ não correlacionados} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 E(\mathbf{v}_{t-i}^2) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 E(E(\mathbf{v}_{t-i}^2|\mathcal{F}_t)); \quad \text{De (A.5)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 E(\boldsymbol{\varphi}\mathbf{v}(\boldsymbol{\mu}_t)) = \boldsymbol{\varphi}E(\Psi^{(2)}(B)\mathbf{v}(\boldsymbol{\mu}_t)) \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Dado que para cada distribuição pertencente à família exponencial, existe um valor para a  $\text{Var}(y_t)$  que é estacionário, iremos apresentar os resultados para as distribuições utilizadas nesta dissertação, com a função de ligação identidade.

**Corolário 7.** A variância marginal para a distribuição Binomial, com função de ligação identidade, é  $Var(Y_t) = \Psi^{(2)}(1)[\beta_0 - (\Psi^{(2)}(1)\beta_0 - \beta_0 + \beta_0^2)(m + \Psi^{(2)}(1) - 1)^{-1}]$ .

*Demonstração.* Para a distribuição de Binomial, sua variância condicional é dada por:  $Var(Y_t|\mathcal{F}_t) = \varphi v(\mu_t) = \mu_t(m + \mu_t)/m$ , já que  $\varphi = 1$ . O resultado a seguir é necessário para o cálculo da variância marginal de  $y_t$ :

$$\begin{aligned} Var(Y_t) &= Var(\mu_t + v_t) = Var(\mu_t) + Var(v_t); & \mu_t \text{ e } v_t \text{ não correlacionados} \\ Var(\mu_t) &= Var(y_t) - Var(v_t) = \varphi E(\Psi^{(2)}(B)v(\mu_t)) - Var(v_t); & \text{De (A.5)} \\ &= \varphi E(\Psi^{(2)}(B)v(\mu_t)) - \varphi E(v(\mu_t)) & (A.8) \\ &= \varphi E((\Psi^{(2)}(B) - 1)v(\mu_t)) \\ E(\mu_t^2) &= Var(\mu_t) + E(\mu_t)^2 = \varphi E((\Psi^{(2)}(B) - 1)v(\mu_t)) + \beta_0^2 \end{aligned}$$

Aplicando aos resultados da distribuição Binomial:

$$\begin{aligned} E(\mu_t^2) &= E((\Psi^{(2)}(B) - 1)v(\mu_t)) + \beta_0^2 \\ &= E\left((\Psi^{(2)}(B) - 1)\frac{\mu_t(m - \mu_t)}{m}\right) + \beta_0^2 \\ &= \frac{(\Psi^{(2)}(B) - 1)}{m}(E(\mu_t m - \mu_t^2)) + \beta_0 \\ &= (\Psi^{(2)}(B) - 1)\beta_0 + \beta_0 - \frac{(\Psi^{(2)}(B) - 1)}{m}E(\mu_t^2) \\ E(\mu_t^2)\left(1 + \frac{(\Psi^{(2)}(B) - 1)}{m}\right) &= (\Psi^{(2)}(B) - 1)\beta_0 + \beta_0^2 \\ E(\mu_t^2) &= ((\Psi^{(2)}(B) - 1)\beta_0 + \beta_0^2)\left(1 + \frac{(\Psi^{(2)}(B) - 1)}{m}\right)^{-1} \end{aligned}$$

A partir deste ponto podemos encontrar a variância marginal:

$$\begin{aligned} Var(Y_t) &= E\left(\Psi^{(2)}(B)\frac{\mu_t(m - \mu_t)}{m}\right) = \Psi^{(2)}(B)\frac{E(\mu_t(m - \mu_t))}{m} = \frac{\Psi^{(2)}(B)}{m}(m\beta_0 - E(\mu_t^2)) \\ &= \Psi^{(2)}(B)[\beta_0 - (\Psi^{(2)}(B)\beta_0 - \beta_0 + \beta_0^2)(m + \Psi^{(2)}(B) - 1)^{-1}] \\ &= \Psi^{(2)}(1)[\beta_0 - (\Psi^{(2)}(1)\beta_0 - \beta_0 + \beta_0^2)(m + \Psi^{(2)}(1) - 1)^{-1}] \end{aligned}$$

□

**Corolário 8.** A variância marginal para a distribuição Geométrica, com função de ligação identidade, é  $Var(Y_t) = 2\Psi^{(2)}(1)\beta_0 - \beta_0 + \beta_0^2$ .

*Demonstração.* Para a distribuição de Geométrica, sua variância condicional é dada por:  $Var(y_t|\mathcal{F}_t) = \varphi v(\mu_t) = \mu_t(1 + \mu_t)$ , já que  $\varphi = 1$ . Utilizando o resultado de (A.8) e aplicando às funções da distribuição Geométrica:

$$\begin{aligned} E(\mu_t^2) &= E((\Psi^{(2)}(B) - 1)\mu_t(1 + \mu_t)) + \beta_0^2 = (\Psi^{(2)}(B) - 1)E(\mu_t + \mu_t^2) + \beta_0^2 \\ &= (\Psi^{(2)}(B) - 1)(\beta_0 + E(\mu_t^2)) + \beta_0^2 \\ E(\mu_t^2)(1 - (\Psi^{(2)}(B) - 1)) &= (\Psi^{(2)}(B) - 1)\beta_0 + \beta_0^2 \\ E(\mu_t^2) &= (\Psi^{(2)}(B)\beta_0 - \beta_0 + \beta_0^2)(\Psi^{(2)}(B))^{-1} \end{aligned}$$

Assim a variância marginal será:

$$\begin{aligned} Var(Y_t) &= E(\Psi^{(2)}(B)\mu_t(1 + \mu_t)) = \Psi^{(2)}(B)E(\mu_t + \mu_t^2) = \Psi^{(2)}(B)(\beta_0 + E(\mu_t^2)) \\ &= \Psi^{(2)}(B)(\beta_0 + (\Psi^{(2)}(B)\beta_0 - \beta_0 + \beta_0^2)(\Psi^{(2)}(B))^{-1}) \\ &= 2\Psi^{(2)}(B)\beta_0 - \beta_0 + \beta_0^2 \\ &= 2\Psi^{(2)}(1)\beta_0 - \beta_0 + \beta_0^2 \end{aligned}$$

□

**Corolário 9.** A variância marginal para a distribuição de Poisson, com função de ligação identidade, é  $Var(Y_t) = \Psi^{(2)}(1)\beta_0$ .

*Demonstração.* Para a distribuição de Poisson, sua variância condicional é dada por:  $Var(Y_t|\mathcal{F}_t) = \varphi v(\mu_t) = \mu_t$ , já que  $\varphi = 1$ .

$$Var(Y_t) = E(\Psi^{(2)}(B)\mu_t) = \Psi^{(2)}(B)E(\mu_t) = \Psi^{(2)}(B)\mu_t = \Psi^{(2)}(1)\mu_t$$

□





## FUNÇÃO GERADORA DE NÚMEROS ALEATÓRIOS

---



---

Para adaptar o algoritmo da função geradora de números aleatórios das distribuições para dados de contagem, ao contexto de séries temporais, é necessário o conhecimento da função origem. Definido a forma da família série de potência (2.5), encontramos a forma recursiva da sua função massa de probabilidade:

$$\pi_{PS}(y; \mu, \alpha) = \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)^y}{f(\mu, \alpha)}, \quad y \in 0, 1, 2, \dots$$

$$\pi_{PS}(y-1; \mu, \alpha) = \frac{a(y-1, \alpha)g(\mu, \alpha)^{y-1}}{f(\mu, \alpha)}, \quad y \in 1, 2, 3, \dots$$

$$\pi_{PS}(y-1; \mu, \alpha)a(y, \alpha) = \frac{a(y-1, \alpha)g(\mu, \alpha)^{y-1}a(y, \alpha)}{f(\mu, \alpha)}$$

$$\pi_{PS}(y-1; \mu, \alpha) \frac{a(y, \alpha)}{a(y-1, \alpha)} = \frac{g(\mu, \alpha)^{y-1}a(y, \alpha)}{f(\mu, \alpha)}$$

$$\pi_{PS}(y-1; \mu, \alpha) \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)}{a(y-1, \alpha)} = \frac{g(\mu, \alpha)^{y-1}g(\mu, \alpha)a(y, \alpha)}{f(\mu, \alpha)}$$

$$\pi_{PS}(y-1; \mu, \alpha) \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)}{a(y-1, \alpha)} = \frac{g(\mu, \alpha)^y a(y, \alpha)}{f(\mu, \alpha)}$$

$$\pi_{PS}(y-1; \mu, \alpha) \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)}{a(y-1, \alpha)} = \pi_{PS}(y; \mu, \alpha)$$

Ao encontrar esta equivalência, é possível aplicar o método da inversa para gerar o algoritmo da função geradora de números aleatórios para distribuições série de potência, como pode ser encontrado em [Consul e Famoye \(2006\)](#) (exemplificando a distribuição de Poisson). Com a inspiração desta técnica, obtemos o procedimento para as distribuições série de potência

zero-modificados, extraídas de [Conceição \(2013\)](#). Seja 2.6 a função massa de probabilidade, aplicando a lógica acima:

$$\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p) = (1-p)I(y) + p\pi_{PS}(y; \mu, \alpha), \quad y \in 0, 1, 2, \dots$$

$$\pi_{ZMPS}(y-1; \mu, \alpha, p) = (1-p)I(y-1) + p\pi_{PS}(y-1; \mu, \alpha), \quad y \in 1, 2, 3, \dots$$

$$\pi_{ZMPS}(y-1; \mu, \alpha, p) = (1-p)I(y-1) + p \frac{a(y-1, \alpha)g(\mu, \alpha)^{y-1}}{f(\mu, \alpha)}$$

$$\pi_{ZMPS}(y-1; \mu, \alpha, p)a(y, \alpha) = (1-p)I(y-1)a(y, \alpha) + p \frac{a(y-1, \alpha)g(\mu, \alpha)^{y-1}a(y, \alpha)}{f(\mu, \alpha)}$$

$$\pi_{ZMPS}(y-1; \mu, \alpha, p) \frac{a(y, \alpha)}{a(y-1, \alpha)} = (1-p)I(y-1) \frac{a(y, \alpha)}{a(y-1, \alpha)} + p \frac{g(\mu, \alpha)^{y-1}a(y, \alpha)}{f(\mu, \alpha)}$$

$$\pi_{ZMPS}(y-1; \mu, \alpha, p) \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)}{a(y-1, \alpha)} = (1-p)I(y-1) \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)}{a(y-1, \alpha)} + p \frac{g(\mu, \alpha)^y a(y, \alpha)}{f(\mu, \alpha)}$$

$$\pi_{ZMPS}(y-1; \mu, \alpha, p) \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)}{a(y-1, \alpha)} =$$

$$(1-p) \left( I(y-1) \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)}{a(y-1, \alpha)} - I(y) \right) + \pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p)$$

Se  $y = 1$ :

$$\pi_{ZMPS}(0; \mu, \alpha, p) \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)}{a(0, \alpha)} = (1-p) \left( \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)}{a(0, \alpha)} \right) + \pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p)$$

$$\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p) = [\pi_{ZMPS}(0; \mu, \alpha, p) - (1-p)] \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)}{a(0, \alpha)}$$

$$\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p) = [(1-p) + p\pi_{PS}(0; \mu, \alpha) - (1-p)] \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)}{a(0, \alpha)}$$

$$\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p) = [p\pi_{PS}(0; \mu, \alpha)] \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)}{a(0, \alpha)}$$

$$\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p) = \left[ p \frac{a(0, \alpha)g(\mu, \alpha)^0}{f(\mu, \alpha)} \right] \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)}{a(0, \alpha)}$$

$$\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p) = p \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)}{f(\mu, \alpha)}$$

$$\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p) = p \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)^y}{f(\mu, \alpha)}$$

Se  $y > 2$ :

$$\pi_{ZMPS}(y-1; \mu, \alpha, p) \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)}{a(y-1, \alpha)} = \pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p)$$

$$\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p) = \frac{a(y, \alpha)g(\mu, \alpha)}{a(y-1, \alpha)} \pi_{ZMPS}(y-1; \mu, \alpha, p)$$

Portanto, temos que o algoritmo gerador de números aleatórios para as distribuições série de potência zero-modificados é dado por:

---

**Algoritmo 5** – Algoritmo gerador de números aleatórios - ZMPS

---

**procedimento RNDZMPS**

2:  $y = 0$   
 Calcular  $f(y, \alpha)$  e  $g(\mu, \alpha)$

4:  $F_Y(y) \leftarrow (1-p) + p \frac{1}{f(\mu, \alpha)}$   
 $u \leftarrow U(0, 1)$

6: **enquanto**  $u > F_Y(y)$  **faça**  
      $y = y + 1$

8:     Calcular  $a(y, \alpha)$   
     **se**  $y = 1$  **então**

10:          $\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p) = pa(y, \alpha)g(\mu, \alpha)^y / f(\mu, \alpha)$   
        **senão**

12:          $\pi_{ZMPS}(y; \mu, \alpha, p) = \pi_{ZMPS}(y-1; \mu, \alpha, p)a(y, \alpha)g(\mu, \alpha) / a(y-1, \alpha)$   
        **fim se**

14:      $F_Y(y) = F_Y(y-1) + \pi_{ZMPS}(y-1; \mu, \alpha, p)$   
     **fim enquanto**

16:     **retorna**  $y$   
     **fim procedimento**

---

O algoritmo adaptado ao modelo ZMPS-GARMA é apresentado na subseção 4.1.