UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

Francisco Novales Segura

MODELAGEM NUMÉRICA NO ENSINO DE FENÔMENOS DINÂMICOS: UM EXEMPLO NA FARMACOLOGIA

São Carlos

2019

Francisco Novales Segura

MODELAGEM NUMÉRICA NO ENSINO DE FENÔMENOS DINÂMICOS: UM EXEMPLO NA FARMACOLOGIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação: Prof. Dr. José Antonio Salvador

São Carlos

2019

Modelo de ficha catalográfica

http://www.sibi.ufscar.br/servicos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Francisco Novales Segura, realizada em 27/06/2019:

Prof. Dr. José Antonio Salvador
UFSCar

Érica Filletti

Profa. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento
UNESP

Magda Peixoto

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
UFSCar

DEDICATÓRIA

A você, Minha Mãe, que não presenciou este momento junto a mim, mas o fez, orgulhosamente, junto ao Criador.

AGRADECIMENTO

Ao meu orientador, Prof. Doutor José Antonio Salvador, por toda a ajuda e orientação, sempre apontando os melhores caminhos e dando estímulo para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSCar, pelos ensinamentos, dentro e fora da sala de aula, durante o mestrado.

Aos meus amigos de trabalho, pela paciência com os meus estudos.

Aos meus colegas de mestrado, pelo companheirismo.

À minha esposa Vania, e às minhas filhas Agnes e Stella, sempre fiéis e pacientes, razões da minha vida.

A todos aqueles, que embora não citados nominalmente, contribuíram, direta ou indiretamente para a execução deste trabalho.

RESUMO

SEGURA, Francisco Novales. Modelagem numérica no ensino de fenômenos dinâmicos: um exemplo na Farmacologia. 2019. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, *Departamento de matemática*, São Carlos, 2019.

O ensino dos fenômenos nas Ciências passa, atualmente, por uma mudança de paradigmas. Buscando um aumento do interesse nas carreiras científicas, deseja-se aprofundar sua compreensão através da Matemática, de modo que não se fique restrito à exposição de conceitos e apresentação de fórmulas aos estudantes. Para isso, faz-se necessário utilizar instrumentos adequados, cuja escolha deve ocorrer com base nas evidências extraídas das pesquisas já realizadas. Nesse diapasão, destacam-se a Modelagem Matemática e o uso da tecnologia. Do cruzamento destes, surgem os métodos numéricos na resolução de modelos matemáticos de fenômenos, em especial os dinâmicos, cuja liderança nas aplicações e adequação ao método científico justificam nosso olhar. Diante disso, apresentamos aqui uma atividade de modelagem numérica formulada com o objetivo de explorar o tema científico da Farmacologia no Ensino Médio e no Ensino Superior, notadamente em carreiras da área das Ciências Biológicas.

Palavras-chave: Matemática. Métodos Numéricos. Modelagem Quantitativa. Biologia. Farmacologia. Educação. Ensino de Ciências.

ABSTRACT

SEGURA, Francisco Novales. Modelagem numérica no ensino de fenômenos dinâmicos: um exemplo na Farmacologia. 2019. Master's Thesis (Teaching of Exact Sciences) – Federal University of São Carlos, *Mathematics Department*, São Carlos, 2019.

The teaching of phenomena in the sciences now passes through a paradigm shift. Seeking an increase in interest in scientific careers, it is desired to deepen the understanding of those through mathematics, so that it is not restricted to exposition of concepts and presentation of formulas to the students. To this end, appropriate instruments must be used, the choice of which should occur based on the evidence gathered from the research already carried out. In this tuning fork, mathematical modeling and the use of technology stand out. From the crossing of these, numerical methods arise in the resolution of mathematical models of phenomena, especially the dynamic ones, whose leadership in applications and adaptation to the scientific method justify our gaze. Therefore, we present here an activity designed to explore the scientific theme pharmacology in high school and higher education, especially in careers in the biological sciences.

Keywords: Mathematics. Numerical Methods. Quantitative Modelling. Biology. Farmacology. Education. Sciencies Teaching.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AAAS	Associação Americana para o Avanço da Ciência
BNCC	Base Nacional Curricular Comum
CNE	Conselho Nacional de Educação
CREMM	Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino
EBAE	Engajamento Ativo Baseado em Evidências
GPIMEM	Grupo de Pesquisa em Informática, Mídias e Educação Matemática
ICMI	Comissão Internacional de Instrução Matemática
ICTMA	Comunidade Internacional de Professores de Modelagem Matemática
INPE	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
LB	Baseado em Exposição
NCTM	Conselho Nacional dos Professores de Matemática
NRC	Conselho Nacional de Pesquisa
SALG	Avalição dos Ganhos de Aprendizagem dos Estudantes
SBEM	Sociedade Brasileira em Educação Matemática
SOR	Método de Super Relaxamentos Sucessivos
STEM	Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática
UEFS	Universidade Estadual de Feira de Santana
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFSCar	Universidade Federal de São Carlos
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
VBA	Aplicações Básicas Visuais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho se dá a partir das reflexões realizadas durante as aulas da disciplina Matemática e Atualidades do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da UFSCar sobre a modelagem de fenômenos. A experiência pessoal possibilitou ao pesquisador recordar situações em que o uso de modelos matemáticos traria compreensão e interesse adicionais ao aprendizado de fenômenos científicos.

Com isso, levantaram-se problemas referentes ao prejuízo compreensivo e ao desinteresse por parte dos estudantes quando se deparam com exposições tradicionais carregadas de conceitos e fórmulas sobre esses fenômenos, cujos exemplos advêm das mais variadas áreas, desde a Física até a Biologia, passando pela Sociologia e pela Economia. A Licenciatura em Matemática e o Bacharelado em Farmácia me forneceram, respectivamente, os exemplos da Cinemática no Ensino Médio e da Farmacologia no Ensino Superior.

Então, à medida que se aprofundava no assunto, percebeu-se que a escolha das técnicas a serem utilizadas é crucial para o ensino, independentemente de em qual nível se encontre. Além disso, verificou-se a impressionante diversidade de fenômenos (e com elevado grau de profundidade) que poderiam ser estudados dessa maneira.

Chegou-se, pois, à formulação da hipótese de que a utilização de métodos numéricos na Modelagem Matemática pelo estudante, através de sua ativa participação e com auxílio da tecnologia, contribuiria para seu aprendizado, estimulando a iniciativa e desenvolvendo o espírito crítico na construção do conhecimento.

O objetivo aqui será o de propor, através de um exemplo oriundo da Farmacologia, o uso de métodos numéricos na resolução de modelos matemáticos de fenômenos dinâmicos para alunos do Ensino Médio e do Ensino Superior cujas grades curriculares não contemplem o Cálculo Numérico.

A justificativa da proposta é facilitar o aprendizado e aprofundar a compreensão de fenômenos dinâmicos, de maneira a despertar nos alunos o interesse pelas Ciências. Ela está lastreada nos resultados das pesquisas realizadas sobre o assunto, cujas conclusões mostrariam os benefícios oriundos de aplicações dessa natureza no aprendizado de fenômenos, ou a ausência deles.

O texto está dirigido, principalmente, a alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática, professores de Matemática do Ensino Médio e professores de disciplinas universitárias cujo conteúdo inclua fenômenos dinâmicos.

A estrutura do trabalho é a seguinte:

Após esta introdução, inicia-se o capítulo 2, onde se discorre sobre as dificuldades no ensino dos fenômenos e como contorná-las. A seguir, mencionam-se diversos tópicos afetos ao processo de ensino-aprendizagem que podem ser úteis ao nosso objetivo, com ênfase na importância do método científico e de seu aprendizado. Depois se atinge o núcleo teórico da dissertação, qual seja, a aplicação de métodos numéricos na resolução de modelos matemáticos de fenômenos dinâmicos. Discorre-se ainda sobre os resultados de algumas pesquisas que versam sobre aplicações similares.

Ao final do capítulo 2 descreve-se uma atividade de modelagem numérica formulada para se aplicar no Ensino Médio ou no Ensino Superior, notadamente em carreiras cujas grades curriculares contemplem fenômenos dinâmicos.

No capítulo 3 apresentam-se as conclusões obtidas e fazem-se recomendações para o prosseguimento das pesquisas.

Por fim, no apêndice encontra-se o roteiro da atividade proposta e como anexo estão algumas referências de material que podem ser úteis aos professores dos dois níveis interessados em aplicar a Matemática no estudo das Ciências.

Uma observação: no decorrer do texto foram inseridos os trechos dos documentos pesquisados após nossa tradução para o português. Tais trechos, na língua original, encontram-se em notas de rodapé.

2 ENSINO DE CIÊNCIAS ATRAVÉS DA MODELAGEM NUMÉRICA

Nas últimas décadas temos visto um aumento da utilização dos métodos quantitativos nas Ciências, pois um dos pilares do moderno método científico é a validação de modelos matemáticos através da comparação de seus resultados com observações empíricas.

Podemos ver o que nos diz M. Alder, professor do Departamento de Matemática e Estatística da Western Australia University:

> A quantidade de Matemática nas Ciências tem aumentado dramaticamente nas últimas décadas. Você pode estar se questionando por que isso ocorre. Matemáticos são de alguma forma capazes de coagir outros departamentos para empurrar sua própria mercadoria goela abaixo? Não, na verdade são muito ruins nisso. Mas o que está acontecendo é que muitas áreas que costumavam ser estudadas pelo caminho literário, com pessoas discutindo em linguagem natural, de repente tornaram-se passíveis de modelagem. A principal razão é que os computadores têm entrado em nossas vidas. Isto significa que podemos explorar sistemas muito mais complexos do que poderia ter sido sonhado há uns vinte anos. O impacto no nível da pesquisa tem sido dramático nos últimos vinte anos, e isto está se inserindo lentamente nos cursos de graduação. Há outras razões, mais fundamentais que a revolução do computador, pelas quais isso acontece: as Ciências evoluem. Começa-se com a coleta de borboletas e flores e em um século chega-se à clonagem de ovelhas. A evolução precisa de um aumento na precisão com que você comunica os fatos que descobriu, e a Matemática é a linguagem de escolha aqui (ALDER, 2001, p. 1)[1].

Assim, para podermos aprofundar a compreensão dos fenômenos científicos parece ser apropriado usar Matemática, com o devido apoio da tecnologia.

Vejamos o que diz P. H. Nelson, professor da Benedictine University of Illinois sobre o ensino das ciências nos Estados Unidos da América:

> O relatório “Vision and Change” (AAAS, 2011) identifica seis principais competências necessárias aos estudantes, as quais incluem:
>
> 1) aplicar o método científico;

---

[1] The amount of Mathematics in the soft sciences has been increasing dramatically in the last few decades. You might be puzzled as to why this is. Are mathematicians somehow able to coerce other departments into pushing their own merchandise down everybody’s throats? No, actually we are very bad at this. But what is happening is that many areas that used to be done in a literary sort ofw ay, with people arguing in natural language, have suddenly become amenable to modelling. The main reason is that computers have come into our lives. This means we can explore much more complex systems than could have been dreamed oft wenty years ago. The impact on the research level has been dramatic over the last twenty years, and this is slowly filtering down to the undergraduate courses. There are other reasons, more fundamental than the computer revolution why this happens: sciences evolve. They start off as collecting butterflies and newts and flowers and in a century they are cloning sheep. The evolution needs an increase in the precision with which you communicate the facts you have discovered, and Mathematics is the language of choice here.

> 2) raciocinar quantitativamente;
>
> 3) usar modelagem e simulação;
>
> 4) explorar a natureza interdisciplinar das Ciências;
>
> 5) comunicar-se e colaborar com outras áreas; e
>
> 6) entender a relação entre ciência e sociedade.
>
> (NELSON, 2012, p. 1)[2]

Tomando, por exemplo, a Física, podemos ver que ela é uma ciência intuitivamente quantitativa. Dessa forma, deveria abusar dessas competências. Todavia, quando nos debruçamos sobre o aprendizado tradicional (tome-se, por exemplo, a cinemática, geralmente no início do currículo), notamos pouca ou nenhuma delas. Assim, os estudantes, não tendo nas mãos o instrumental para sua compreensão, se veem em grandes dificuldades. Não é muito diferente com a Química, particularmente com a Físico-Química.

Mas é na Biologia, ou nas "Ciências da vida", que uma verdadeira revolução tem acontecido, e isto por conta do uso do método científico. Entretanto, mais uma vez podemos notar lacunas nos currículos educacionais a seu respeito.

Ocorre que a grande maioria dos fenômenos, e em particular os fenômenos biológicos, são dinâmicos. Isso nos leva a necessidade de termos instrumentos matemáticos que possibilitem o estudo de variações dos sistemas no tempo.

Em seu trabalho, os professores E. A. Veit, do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, e V. D. Teodoro, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, introduzem o problema da seguinte forma:

> De particular interesse em Física são os modelos de sistemas dinâmicos, isto é, modelos que estabelecem alguma relação Matemática entre quantidades físicas e o tempo, considerado como uma variável independente. Estes são os modelos em que estamos particularmente interessados neste artigo, pois a maior parte dos conteúdos de Física da escola de Ensino Médio e universitário está ancorada neste tipo de modelo, ainda que muitas vezes isto não seja transparente ao estudante (VEIT & TEODORO, 2011, p. 3).

---

[2] The Vision and Change report (AAAS, 2011) identified 6 core competencies required for all students, including the habilities to: 1) apply the process of science; 2) use quantitative reasoning; 3) use modeling and simulation; 4) tap into the interdisciplinary nature of science; 5) communicate and collaborate with other disciplines; and 6) to undestand the relationship between science and society.

Mas antes disso, M. Alder apontava uma solução:

> O Cálculo age, em grande parte, sobre sistemas que mudam no tempo e sobre o problema de dizer algo a respeito de como isso pode acontecer. Visto que muitos sistemas biológicos e sociais evoluem, há muitas aplicações de Cálculo aqui e algumas delas muito didáticas (ALDER, 2001, p. 2)[3].

O instrumento necessário seria, portanto, o Cálculo. Entretanto, aqui nos deparamos com um problema estrutural, pois Cálculo geralmente é visto apenas nos currículos do Ensino Superior e, para piorar, apenas em alguns cursos. E o que dizer do Ensino Médio?

De fato, concordamos com o que afirma J. Benacka, professor do Departamento de Informática da Faculdade de Ciências Naturais da Constantine the Philosopher University, na Eslováquia:

> Durante o Ensino Médio, os estudantes são expostos a vários sistemas dinâmicos, cujos comportamentos são descritos por equações diferenciais. Entretanto, o Cálculo é abordado no Ensino Superior, o que leva ao estudo simplificado desses sistemas pela adoção de fórmulas nas condições ideais. É deveras frustrante para um jovem cientista ouvir ao final da aula que a teoria apresentada é um "conto de fadas", pois as condições reais não foram contempladas ... (BENACKA, 2008, p. 1)[4]

Ou ainda com F. Ornek, professor da Balikesir University, na Turquia, sobre o relato de um estudante secundarista anônimo quanto ao estudo da Física: "... há mais na Física do que memorizar este enorme conjunto de equações que o professor diz que funciona." (ORNEK, 2008, p. 44)[5].

Isto leva à questão da utilidade. Assim, diante do aprendizado em condições idealizadas, pode-se perguntar: onde vou usar isso? Ou para que serve?

Ora, os professores R. Chabay e B. Sherwood, do Departamento de Física da North Carolina State University, Estados Unidos da América, enfatizam isso e mostram como contornar a questão:

---

[3] Calculus is largely about systems which change in time and the problem of saying something about how this can happen. Since many biological and social systems do evolve, there are plenty of applications of Calculus, and some oft hem are very illuminating.

[4] During secondary school study, students are acquainted with various dynamic systems. The behavior of these can be described by differential equations. However, calculus is usually taught in the highest grade, so the systems are studied in a simplified way, and the conditions are idealized. It is rather frustrating then for a young scientist to hear at the end of a physics lesson that all the presented theory is a fairy tale as the main precondition is usually not fulfilled...

[5] ... there´s more to just physics than memorize this humongous block of equations the teacher says works.

> Quase todos os problemas resolvidos por alunos nos cursos introdutórios tradicionais são altamente idealizados. Esta idealização contribui para a percepção, por muitos alunos, que a Física tem pouca ou nenhuma relevância no mundo real. A Modelagem Computacional fornece um ambiente em que os alunos podem começar com um modelo simplificado, idealizado, de uma situação e adicionem características que tornam o modelo mais realista. Empregando-se apenas a técnica mais simples de integração numérica, os alunos podem analisar situações que não são acessíveis no nível introdutório, e em alguns casos, em qualquer nível, tais como órbitas elípticas ou parabólicas, interações de três corpos, oscilações ou movimentos amortecidos pela resistência do ar, ... (CHABAY & SHERWOOD, 2008, p. 308)[6]

Ora, além de poder compreender melhor os fenômenos, o aluno do Ensino Médio, assim agindo, é levado a se aprofundar, uma vez que possui um instrumento matemático para isso.

Por outro lado, não podemos fechar os olhos ante o problema da falta de interesse dos estudantes em trilhar carreiras de exatas em nosso país, ainda mais se considerarmos sua importância para o desenvolvimento da nação. Tal fato decorre em grande parte da dificuldade no aprendizado da Matemática. Por exemplo, diante da conhecida dificuldade dos alunos de Ensino Superior com a disciplina de Cálculo, concordamos com o que diz J. Molon, mestre em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria, ao observar a ausência da base Matemática na escolarização anterior:

> Acredita-se que uma maior atenção à aplicação, à experimentação e a visualização dos conceitos matemáticos nesta fase da escolaridade, pode reverter o quadro de dificuldades e altos índices de reprovação nas disciplinas de Cálculo no Ensino Superior. A disciplina de Cálculo é responsável por um grande número de reprovações e desistências de alunos nos cursos de graduação, uma vez que os mesmos, ao ingressarem em um curso superior na área das Ciências Exatas e Tecnologia, se deparam com atividades muitas vezes sem contextualização e já aprofundadas, sem este estudo prévio, ou seja, sem a construção das ideias fundamentais para a compreensão da disciplina em questão. (MOLON, 2013, p. 110)

Haveria uma conduta a ser seguida no ensino Médio a fim de evitar a barreira do Cálculo mais adiante? Vejamos o que diz W. M. Rezende, em seu estudo sobre as dificuldades no ensino de Cálculo:

---

[6] Almost all of the problems solved by students in the traditional introductory course are highly idealized. This idealization contributes to the view held by many students that physics has little or no relevance in the real world. Computational modeling provides a venue in which students can begin with a simplified, idealized model of a situation, and then add features which make the model more realistic. By employing only the simplest numerical integration technique, students can analyze situations that are not accessible analytically at the introductory level _or, in some cases, at any level_, such as elliptical or parabolic orbits, three-body interactions, 3D spring-mass oscillations, or motion damped by air resistance,...

> Para superar esta crise é necessário rediscutir o papel do ensino de Cálculo no Ensino Superior. No entanto, conforme observamos em páginas anteriores neste artigo, o sucesso do Ensino Superior de Cálculo está condicionado a uma preparação das ideias básicas do Cálculo no Ensino Básico de Matemática. Ao permitir o Cálculo participar efetivamente da tecedura do conhecimento matemático do Ensino Básico, acreditamos que as dificuldades de aprendizagem do Ensino Superior de Cálculo serão, em grande parte, superadas, tanto quanto as do próprio ensino de Matemática ... (REZENDE, 2003, p. 15).

Em sua dissertação de Mestrado, V. M. C. Pereira, analisa Rezende, que vai mais além e conclui que a ausência de um pré-Cálculo no Ensino Básico constitui o núcleo do problema:

> ...Rezende (2003) consubstanciou cinco macro espaços de dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo e identificou, em essência, um único lugar-matriz dessas dificuldades: o da evitação/ausência das ideias e problemas construtores do Cálculo no Ensino Básico de Matemática. (PEREIRA, 2009, Resumo da Dissertação)

Vemos, portanto, que é fundamental fortalecer a base Matemática para o Cálculo já no Ensino Básico. Além disso, no Ensino Superior, como certos cursos dependem de modelagem mas não contém em seu currículo Cálculo ou mesmo algo como pré-Cálculo, essa necessidade se faz ainda mais evidente.

Veja-se no trabalho de Veit e Teodoro o caso da Física:

> Claro está que a modelagem é uma ferramenta valiosa também no ensino universitário... Em ambos os níveis, uma das motivações de sua utilização é a possibilidade de se tratar de problemas mais realísticos e mais atuais. ... Tradicionalmente restringiu-se o estudo de fenômenos físicos a casos ideais em que há solução analítica, mesmo quando o estudante não é capaz de obtê-la, por exemplo, o período do pêndulo simples no Ensino Médio. Resulta que, em não sendo capaz de derivar a solução, só lhe resta "decorar a fórmula" (e decorar, também, que esta fórmula só vale para pequenas amplitudes, expressão esta que na maior parte das vezes sequer sabe o que significa). (VEIT & TEODORO, 2011, p. 12)

Isto dito, concluimos por debruçar-se sobre a Modelagem Matemática. Nas Ciências Biológicas ela é particularmente atraente, pois explicita a interdisciplinaridade e permite visualizar como se faz ciência. Os alunos podem percorrer as diversas etapas do método científico: determinar o objetivo do modelo, distinguir dentre os aspectos biológicos os que serão considerados, definir as hipóteses a serem verificadas e, finalmente, construir, analisar e validar o modelo. Por exemplo, dentro das Ciências Biológicas, a Farmacologia se mostra um excelente ambiente para introduzirmos a Modelagem Matemática, pois os estudantes podem desenvolver um modelo farmacocinético a partir de algo muito rotineiro e conhecido, atravessando todas as suas fases, desde a definição do objetivo e formulação da hipótese a ser estudada até sua construção e validação. Esta última, nem sempre fácil de ser executada, é presenteada, neste caso, com a grande disponibilidade de dados empíricos. Com pouca bagagem Matemática, pode-se compreender o conceito de meia-vida e construir modelos simples. A partir disso, faz-se necessário amadurecer essa bagagem para a construção de modelos mais complexos. É o que veremos na atividade proposta por esta dissertação.

Assim, percebe-se a importância de utilizar a modelagem, dada a hipótese de que a aproximação com a realidade leva à motivação do estudante na construção do conhecimento. Vejamos o que dizem os professores A. W. Glancy e T. J. Moore, da University of Minnesota e Purdue University, nos Estados Unidos da América:

> Nesta abordagem, ao invés de desafiar os alunos com problemas simples, ou simplificados, deve-se expô-los a problemas complexos, realistas que são "simulações das experiências da vida real" (Lesh & Harel, 2003, pg. 158). Dentro de um ambiente acadêmico, essas experiências realistas podem ser o salto em direção a conceitos de Engenharia, Tecnologia. ... (GLANCY & MOORE, 2013, p. 5)[7]

Conforme consta em artigo da professora C. V. Schwarz, do College of Education da Michigan State University, nos Estados Unidos da América, e colegas: “A oportunidade de se envolver em modelagem científica é crucial no desenvolvimento e avaliação de explicações do mundo real.” (SCHWARZ ET AL., 2009, p. 633)[8].

Basta questionar qualquer profissional para se entender que os problemas do dia a dia das profissões na maioria das vezes não são resolvidos com fórmulas “prontas” vistas nos cursos. É comum se utilizar manuais ou tabelas obtidas a partir de simulações computacionais em razão da quantidade de variáveis ou da complexidade da questão.

Com isso corrobora C. O. C. Spina, em sua dissertação de Mestrado:

> Fórmulas, exemplos e exercícios sugeridos nos livros são sempre escolhidos para que os resultados e as situações obtidas sejam exatos. Acontece que historicamente muitos resultados e expressões que temos hoje foram obtidos a partir de uma tabela de dados obtidos experimentalmente. (SPINA, 2002, p. 82)

---

[7] In this approach, rather than challenging students with straightforward, simplified problems, students are given complex, realistic problems that are “simulations of real life experiences” (Lesh & Harel, 2003, p. 158). Within a STEM environment, those realistic experiences can be the jumping off point toward the science, technology, or engineering concepts.

[8] The opportunity to engage in scientific modeling is central in developing and evaluating explanations of the natural world.

Por fim, sabe-se que a Matemática é um componente extremamente importante na formação intelectual dos cidadãos, habilitando-os ao raciocínio lógico nas tomadas de decisão e ao gerenciamento de recursos materiais, humanos ou de informação. Por que não usá-la, então, em benefício do aprendizado científico e ter o bônus de exercitar o raciocínio?

Ante o exposto, percebe-se a necessidade de inserir a Matemática nas grades curriculares de praticamente todas as carreiras, particularmente as de cunho científico, e, a cada caso, aprofundá-la suficientemente. Não basta, entretanto, expor o aluno a um cabedal de fórmulas e conceitos a serem memorizados. É necessário instrumentá-lo antes, no Ensino Básico, com ferramentas que possibilitem o entendimento dos fenômenos como realmente ocorrem, a fim de utilizarem esse conhecimento onde e quando necessário. Melhor ainda se houver uma continuidade entre o Ensino Básico e o superior. Veremos, a seguir, como isso se faz possível.

2.1 INSTRUMENTOS DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE FENÔMENOS

Da literatura consultada, pode-se extrair um conjunto de instrumentos que possibilite honrar nosso objetivo. Antes, porém, serão mencionados alguns tópicos preparatórios que, não por acaso, constituem competências do ensino de Ciências norte-americano.

Vejamos o que dizem M. B. Yarker e S. Park, professores da University of Iowa, nos Estados Unidos da América:

> Abordagens interdisciplinares para a aprendizagem das Ciências são uma parte importante da criação de uma sociedade cientificamente alfabetizada. Os alunos devem ser preparados para avaliar e pensar criticamente sobre problemas do mundo real, que raramente são confinados ao conhecimento baseado em ciência apenas. Como resultado, nós devemos esperar que os alunos aprendam a ciência usando abordagens interdisciplinares a fim de prepará-los para serem pensadores críticos... "Os National Science Education Standards (NRC, 1996; 2012) enfatizam a importância de integrar Matemática e ciência ao preparar os estudantes para serem cientificamente alfabetizados". Sugerem que a compreensão Matemática é fundamental para todos os aspectos da investigação científica como fazer perguntas, reunir, organizar e apresentar dados e estruturar reivindicações plausíveis. Dada esta ênfase, é surpreendente que a Matemática não seja incorporada nas aulas de ciências mais frequentemente. (YARKER & PARK, 2012, p. 230)[9]

[9] Interdisciplinary approaches to learning science are an important part of raising a scientifically literate society. Students should be expected to evaluate and think critically about claims regarding real-world problems, which are rarely confined to science-based knowledge only. As a result, we should expect students to learn science using interdisciplinary approaches in

Portanto, deve-se destacar a interdisciplinaridade no ensino, com a benéfica participação da Matemática. E, como vimos, não apenas da maneira tradicional, mas como meio de compreender o mundo à nossa volta.

Em trabalho já mencionado, o qual se relaciona com o tema, A. W. Glancy e T. J. Moore, após citarem colegas, concluem sobre como deve ser o ensino das Ciências na escola ao discorrerem sobre a importância do trabalho em equipe:

> ... De acordo com Lesh, problemas interdisciplinares, realistas, fora da escola são normalmente resolvidos por equipes, muitas vezes onde membros têm diferentes áreas de especialização (ver, por exemplo, (Hamilton, Lesh, Lester, & Brilleslyper, 2008), (Lesh, Hoover, Hole, Kelly, & Post, 2000)). Por isso, é lógico que os alunos também abordem seus problemas em equipes. (GLANCY & MOORE, 2013, p. 6)[10]

Isto traz à tona a necessidade de aprender não apenas o conteúdo científico, mas também de como isso será aplicado. Trata-se de interagir com a sociedade em que nos inserimos quando estamos em nosso trabalho. Ora, o espaço acadêmico deveria proporcionar, portanto, o ambiente em que a relação entre ciência e sociedade seria aprendida e exercitada.

Após analisarem trabalhos recentes, D. G. Brenner e colegas, pesquisadores da WestEd Agency, Estados Unidos da América, entidade focada na pesquisa de melhora do aprendizado, apoiam-se em evidências neles levantadas para discorrer sobre os benefícios dos modelos matemáticos, ou como se referem eles, das simulações:

> Numerosos estudos ilustram os benefícios das simulações para o aprendizado de Ciências. Elas podem favorecer o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda e de melhores habilidades na resolução de problemas em áreas como Genética, Ciência Ambiental e Física (Krajcik, Marx, Blumenfeld, Soloway e Fishman, 2000; Schwartz e Heiser, 2006; Rieber et al. 2004; Buckley et al., 2004; Buckley et al., 2010). Alunos que usam simulações tendem a confiar mais em abordagens conceituais do que em abordagens mecânicas ou receitas prontas durante a resolução de problemas (Stieff e Wilensky, 2003; White & Frederiksen, 1998), e podem fazer conexões causa-efeito entre os níveis dos sistemas científicos (Hmelo-Silver, et al., 2008; Loannidou, et al., 2010). Usar modelos dinâmicos em simulações interativas tornam essas conexões explícitas e beneficia a

---

order to prepare them to be critical thinkers... The National Science Education Standards (NRC, 1996; 2012) emphasize the importance of integrating math and science in preparing students to be scientifically literate. The NSES suggest that mathematical understanding is critical to all aspects of scientific inquiry; such as asking questions, gathering, organizing, and presenting data, and structuring plausible claims. Given this emphasis, it is surprising that math is not incorporated into the science classroom more often.

[10] According to Lesh, realistic, interdisciplinar problems outside of school are usually tackled by teams, often where members have diferente areas of expertise (see e.g. Hamilton, Lesh, Lester, & Brilleslyper, 2008; Lesh, Hoover, Hole,Kelly, & Post, 2000). Because of this, it is logical for students to also approach their problems in teams.

> aprendizagem dos alunos (Slotta & Chi, 2006). (BRENNER ET AL, 2015, p. 195)[11]

Por fim, basta imitar os cientistas para que aprendamos a "fazer ciência". Nelson afirma: "Pelo desenvolvimento de modelos quantitativos e, em seguida, pela comparação crítica destes com dados experimentais, os alunos ganham profunda experiência com a aplicação do método científico a problemas do mundo real" (NELSON, 2014, p. 2)[12]. O que se extrai disto é a necessidade de apresentar ao estudante o método científico.

Essas são algumas conclusões que corroboram as competências delineadas no já mencionado relatório "Vision and Change".

Cabe aqui darmos uma olhada na Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio para ver sua relação com o tema. Podemos ver no detalhamento das habilidades que suportam uma das competências da área de Matemática e suas Tecnologias:

> As habilidades indicadas para o desenvolvimento da competência estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, espaciais, estatísticos, probabilísticos, entre outros.
>
> Esses problemas incluem, necessariamente, os contextos relativos às áreas das Ciências da Natureza e Humanas e da própria Matemática, incluindo os oriundos do avanço tecnológico. No Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida; por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho.
>
> Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática. Para resolver esses problemas, eles devem, logo no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados, na chamada formulação Matemática do problema. Depois disso, eles devem aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os

[11] Numerous studies illustrate the benefits of simulations for science learning. Simulations can support the development of deeper understanding and better problem-solving skills in areas such as genetics, environmental science, and physics (Krajcik, Marx, Blumenfeld, Soloway, & Fishman, 2000; Schwartz & Heiser, 2006; Rieber et al., 2004; Buckley et al., 2004; Buckley et al., 2010). Students using simulations tend to rely more on conceptual approaches than on algorithmic approaches or rote facts during problem-solving (Stieff & Wilensky, 2003; White & Frederiksen, 1998), and can make causal connections among the levels of science systems (Hmelo-Silver, et al., 2008; Ioannidou, et al., 2010). Using dynamic, interactive simulations to make these connections explicit and salient benefits students' learning (Slotta & Chi, 2006).

[12] By developing quantitative models and then critically comparing them with experimental data, students gain in-depth experience with applying the scientific method to real world problems

> resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente.
>
> No entanto, essa tarefa pode exigir processos cognitivos diferentes, dependendo da natureza do problema. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.
>
> Devem-se considerar, também, os problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades, a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problemas, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados.
>
> Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes aprofundar sua participação ativa nesse processo de resolução de problemas. São alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. (Brasil, BNCC, 2017, p. 535)

Ademais de se notar uma convergência das competências, tanto entre países, quanto entre áreas, aqui se tocam os instrumentos de ensino-aprendizagem modelagem, aprendizagem ativa e uso da tecnologia, sobre os quais se falará a seguir.

2.1.1. Sobre a Modelagem Matemática e Computacional

Desde os tempos remotos, o homem busca a compreensão das leis da natureza com o intuito de realizar previsões que facilitem a tomada de decisão em prol da melhoria das condições de vida. Pouco a pouco, percebe que a Matemática constitui poderosa ferramenta para isso. Assim, tem sido um dos objetivos do que se denomina “Matemática Aplicada”, analisar fenômenos através da construção de modelos que os expliquem. E. C. Ferruzzi, em sua dissertação de Mestrado, menciona Y. Chevallard, docente do Institut Universitaire de Formation des Maîtres de l’Académie d’Aix-Marseille, na França:

> Um aspecto essencial da atividade Matemática consiste em construir um modelo (matemático) da realidade que queremos estudar, trabalhar com tal modelo e interpretar os resultados obtidos nesse trabalho para responder as questões inicialmente apresentadas. Grande parte da atividade Matemática

> pode ser identificada, portanto, com uma atividade de Modelagem Matemática. (FERRUZZI, 2003, APUD CHEVALLARD, 2001, p. 33)

A utilização da Modelagem Matemática no ensino tem gerado, ao longo do tempo, entendimentos distintos por parte dos pesquisadores. Em uma das primeiras discussões acerca do tema, G. Kaiser, da University of Hamburg, na Alemanha, e B. Sriraman, da University of Montana, nos Estados Unidos da América, relatam duas principais perspectivas:

- A perspectiva pragmática, com objetivos utilitários, cujo foco é a habilidade de aplicar Matemática para resolver problemas práticos. Tem em Henry Pollak seu protótipo;

- A perspectiva científico-humanística, a qual é orientada à habilidade de criar relações entre Matemática e realidade. Hans Freudenthal a representa;

Posteriormente, a partir da década de 1990, desenvolveram-se estudos empíricos de ensino e aprendizagem de modelagem que culminaram com o que se denomina o marco da maturação da modelagem como campo de pesquisa na Educação Matemática: o 14º ICMI Study, onde a decisiva participação de Pollak impulsiona o ensino através da Modelagem Matemática. Nele vemos:

> Os matemáticos podem, muitas vezes, argumentar que a importância e beleza do assunto podem justificar o tempo despendido com ele. Mas nem todos os alunos podem sentir o mesmo. Há alguns alunos, acredito que muitos deles, que estão mais interessados na utilidade da Matemática do que em se tornarem matemáticos profissionais. Sendo assim, muitos alunos são perdidos ao longo do caminho. Portanto, uma parte essencial da Educação Matemática deve servir para esclarecer a respeito da forma de utilizar a Matemática (14º ICMI STUDY, 2007, p. 110).

Por outro lado, em resposta à alegação de críticos de que os livros estão cheios de problemas (e esse é o caminho natural da Matemática), Pollak considera que a contextualização na realidade exterior é um modo de despertar o interesse dos alunos, mas a Matemática, basicamente, formula problemas fora de seu âmbito e procura resolvê-los conforme essa formulação. Explica que há um movimento para frente e para trás, e todo esse processo começa com uma situação que estamos tentando compreender matematicamente. Esse processo continua até chegarmos a uma imagem clara da situação e a uma formulação que permita obter algumas respostas. Todo esse processo, completa ele, é o que se chama de Modelagem Matemática.

Contemporâneo ao 14º ICMI Study é o trabalho de G. Kaiser e B. Sriraman (KAISER & SRIRAMAN, 2006), onde se aponta uma classificação que aperfeiçoa, à luz da literatura gerada pela ICMI – International Mathematical Union e pela ICTMA – International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications, as inicialmente descritas. Dentre as vertentes que constam dessa classificação, está a que se denomina realista, cuja base vem de Pollak. Suas características são:

- Modelagem Matemática Aplicada como resolução de problemas;

- Uso da tecnologia como recurso para a aplicação;

- Escolha da área de aplicação como um assunto ligado ao mundo real, levando à interdisciplinaridade;

Nosso trabalho está lastreado nessa vertente, como veremos. Deve-se destacar a similaridade entre as características dessa vertente e os instrumentos/competências utilizados em nossa aplicação.

No Brasil, muitos esforços têm sido despendidos em pesquisas relacionadas à Modelagem Matemática. Historicamente, a utilização ou a criação de modelos matemáticos visando o ensino começou a ser pesquisada por alunos de cursos de pós-graduação stricto sensu, a partir de meados da década de 1970. Esse movimento tem-se destacado no ensino brasileiro pelos trabalhos executados ao longo das últimas décadas por estudiosos importantes, a começar por Ubiratan D'Ambrosio, representante brasileiro na comunidade internacional de Educação Matemática. Outro pesquisador pioneiro é Rodney Carlos Bassanezi, grande propagador da Modelagem Matemática junto aos cursos e projetos na UNICAMP e em outras Universidades. Marcelo de Carvalho Borba também se destaca como pesquisador e coordena o Grupo de Pesquisa em Informática, Outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) na UNESP, campus de Rio Claro. Destacam-se também Jonei Cerqueira Barbosa (UEFS), Ademir Donizeti Caldeira (UFSCar) e Jussara de Loiola Araújo (UFMG), que coordenam o Grupo de Trabalho de Modelagem Matemática, organizado no âmbito da Sociedade Brasileira em Educação Matemática (SBEM) em 2001. A meta do Grupo é favorecer o debate e a colaboração dos pesquisadores brasileiros que realizam investigações sobre Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, e articular o desenvolvimento dessa frente de pesquisa no país. Maria Salett Biembengut também é menção obrigatória pela criação (outubro de 2006) do Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino – CREMM na Universidade Regional de Blumenau, o qual conta com a colaboração do pesquisador Nelson Hein. Esse Centro iniciou-se com um número pequeno de produções acadêmicas, objetivando tornar-se um Centro de Estudo e Pesquisa integrado a outros grupos de pesquisa na área, a fim de promover ações que contribuam para a Educação Matemática.

No âmbito da Matemática Aplicada, há que se destacar os comitês temáticos da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, responsáveis pelo ensino de Matemática Aplicada e Computacional e pela pesquisa e pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional em Ciência e Engenharia.

Ante o exposto, tentemos definir o que vem a ser modelagem. Ornek, por exemplo, a partir do conceito de modelo, trilha o seguinte caminho:

> No sentido lato, um modelo é a representação de um fenômeno, um objeto ou ideia (Gilbert, Boulter, & Elmer, 2000). Em ciência, um modelo é o resultado de representar um objeto, fenômeno ou ideia (o alvo) de maneira mais precisa (a fonte) (Tregidgo & Ratcliffe, 2000)... Existem diferentes tipos de modelos no ensino de Ciências. ... Modelos conceituais são concebidos como ferramentas para a compreensão ou o ensino de sistemas. ... Com base na literatura, modelos conceituais incluem modelos matemáticos, modelos físicos e modelos de computador... Um modelo matemático é o uso da linguagem Matemática para descrever o comportamento de um sistema. Ou seja, é uma descrição ou sumarização das características importantes de um sistema de mundo real ou o fenômeno em termos de números, equações e símbolos. Modelos matemáticos são aproximações. Nem sempre coincidem com o que na verdade é medido. ... Um modelo de computador é um programa de computador que tenta simular o comportamento de um determinado sistema. Em outras palavras, um modelo de computador é um programa de computador que é criado usando um modelo matemático para encontrar soluções analíticas aos problemas que permitem a previsão do comportamento do sistema complexo de um conjunto de parâmetros e condições iniciais. ... O principal objetivo é compreender o fenômeno. ... (ORNEK, 2008, p. 39)[13]

[13] In a general sense, a model is a representation of a phenomenon, an object, or idea (Gilbert, 2000). In science, a model is the outcome of representing na object, phenomenon or idea (the target) with a more familiar one (the source) (Tregidgo & Ratcliffe, 2000)... There are different types of models in Science education... Conceptual models are devised as tools for the understanding or teaching of systems... Based on the literature, conceptual models include mathematical models, computer models, and physical models... A mathematical model is the use of mathematical language to describe the behavior of a system. That is, it is a description or summarization of important features of a real-world system or phenomenon in terms of symbols, equations, and numbers. Mathematical models are approximations. They do not always yield what is actually measured... A computer model is a computer program which attempts to simulate the behavior of a particular system. In other words, a computer model is a computer program which is created by using a mathematical model to find analytical solutions to problems which enable the prediction of the behavior of the complex system from a set of parameters and initial conditions...

Outra boa definição, mais sintética, encontramos nas notas sobre Modelagem Matemática Ambiental do professor da UFSCar J. A. Salvador:

> Simplificando, podemos afirmar que um modelo é uma representação do comportamento de um dado sistema levando em consideração as mesmas características da realidade, ou seja, representando as variáveis essenciais do fenômeno e estabelecendo suas relações por meio de hipóteses ou baseadas em dados experimentais. (SALVADOR & ARENALES, 2009, p. 4)

Ora, dadas as dificuldades de se reproduzir certos fenômenos de forma repetida, a modelagem se destaca como um instrumento muito útil no entendimento dos mesmos. Em certas situações, a reprodução dos fenômenos pode se tornar proibitiva por incorrer em riscos ou na descaracterização do contexto no qual se inserem. Veremos essa característica na atividade proposta por esta dissertação. Salvador e seus colegas reforçam essa utilidade do modelo:

> Num modelo matemático procuramos representar a natureza de um sistema, através de uma formulação de um conjunto de equações ou sistemas de equações matemáticas a partir de um conjunto de hipóteses ou leis. Uma grande vantagem de um modelo matemático é a versatilidade em que podemos modificar a sua lógica, incluindo ou retirando novos aspectos do problema real e fazendo diversas simulações para obtenção dos resultados de diferentes situações de um mesmo problema ou de diferentes problemas, além de obtermos resposta com mais rapidez e segurança com as ferramentas computacionais. (SALVADOR ET AL, 2014, p. 130)

Cabe aqui um apêndice no que se refere à teoria da Modelagem Matemática para englobar a questão da avaliação. O professor R. C. Bassanezzi, juntamente com colegas da UNICAMP, faz uma breve, porém diligente, colocação sobre o assunto:

> Um aspecto novo que surge como consequência da incorporação da Modelagem Matemática no ensino diz respeito ao método de avaliação, visto que a Modelagem traz grandes mudanças para a sala de aula. O contexto de ensino e aprendizagem se altera quando uma diferente prática pedagógica é estabelecida e o uso da Modelagem Matemática é uma dessas diferentes práticas pedagógicas. Contextos de ensino e aprendizagem diferentes implicam em diferentes métodos de avaliação e, portanto, necessita-se estabelecer métodos de avaliação quando a Modelagem é usada em sala de aula. Sendo assim, não faz sentido que sejam mantidos os métodos de avaliação tradicionais quando a prática pedagógica da Modelagem é usada.
>
> Ao relatarem experiências que tiveram com Modelagem Matemática em cursos de Matemática, GALBRAITH & CLATWAORTHY (1990), BASSANEZI (1994, 2002) e CROSS & MOSCARDINI (1985) descrevem os métodos de avaliação usados nos respectivos cursos. A principal característica de todos eles é a distribuição da avaliação em todas as fases do processo de Modelagem. Aspectos como a habilidade de especificar o

> problema claramente, formular um modelo apropriado, usar coerentemente os conceitos matemáticos, avaliar e comunicar os resultados, elaborar relatórios escritos, trabalhar em grupo etc. são todos continuamente avaliados, o que valoriza o trabalho como um todo e não apenas o seu resultado final. Além disso, a avaliação contínua, na qual o professor acompanha e discute com os estudantes o desenvolvimento de seus trabalhos, proporciona um aprimoramento constante dos mesmos. E isso, além de enriquecer a habilidade dos estudantes de trabalharem com a Modelagem, contribui para uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos e no aperfeiçoamento dos trabalhos. (BASSANEZZI ET AL, 2014, p. 132)

Veremos que a aplicação proposta possui uma estrutura que proporciona a avaliação nos moldes mencionados.

Concluídas as visões sobre modelagem, cabe-nos refletir sobre como se daria a preparação dos professores a respeito. M. S. Biembengut e colegas falam sobre isso em artigo apresentado no IX Congresso Brasileiro de Educação:

> ... identificou-se que as limitações encontram-se: na duração do curso que não é suficiente para suprir todas as possíveis lacunas deixadas pela formação do professor e na disponibilidade da maioria dos participantes para efetuar um estudo complementar, fora dos limites do curso; e as possibilidades situam no interesse de alguns professores em aprender para mudar suas práticas, a despeito das dificuldades que possam surgir. ... as multiocupações em que a maioria desses participantes está envolvida relativas aos interesses e as necessidades diversas, aliadas aos desinteresses de muitos estudantes em todos os níveis por aprender e as prescrições nas políticas educacionais, podem não levar as mudanças necessárias na Educação brasileira, a despeito das pesquisas indicarem caminhos. Uma mudança da magnitude enfrentada requereria um comprometimento das autoridades para uma reestruturação das escolas de todos os níveis, levando os professores a terem necessidade de alterar suas práticas e os estudantes interesse em aprender. (BIEMBENGUT ET AL, 2009, p. 10106)

Pode-se inferir daí que apenas formar o professor não é suficiente para o sucesso da empreitada. Ademais, implementar modelagem no currículo demanda amplo debate já que traz à tona a questão do “como” e não apenas do “quando” ou do “o que”. Apesar de abordarmos algo sobre o ambiente ativo de aprendizagem, não é nosso intenção tocarmos questões epistemológicas ou cognitivas da modelagem, apontando apenas essa necessidade. Muitos pesquisadores já o fazem e ainda há muito por se fazer.

2.1.1.1. Base Matemática necessária

Ora, vimos que nosso objetivo de aprofundar a compreensão de fenômenos passa pela Modelagem Matemática. Será isto simples?

Não. Acontece que a dificuldade não se limita a encontrar a solução do problema, mas, também, encontrar a “fórmula” que se usa para chegar à solução.

Salvador e Arenales colocam essa questão da seguinte forma:

> Alguns modelos mais realistas podem apresentar uma desvantagem devido à dificuldade de representar convenientemente certos fenômenos físicos. Além disso, o controle na discretização dos processos contínuos gerados por equações que não possuem solução exata podem gerar muitos erros. ... Devemos, no entanto, ter em mente que nenhum modelo é capaz de descrever exatamente os processos naturais por causa de diversos fatores como: a grande complexidade deles; o grande número de parâmetros e a falta de conhecimento ou imprecisão de alguns deles; as hipóteses introduzidas, as simplificações convenientes e as generalizações introduzidas. A resposta de um modelo depende fortemente das simplificações e da exatidão dos parâmetros de entrada que propiciou a sua resolução. Às vezes, somos levados a dividir os grandes problemas em vários problemas menores e mais simples, e a partir dos mais simples resolver o mais complexo! (SALVADOR & ARENALES, 2009, p. 13)

Isto reforça o exposto na brilhante obra do professor Bassanezi sobre equações diferenciais, onde se vê, todavia, a possibilidade de chegarmos muito próximo de um resultado satisfatório:

> ... um problema real não pode ser representado de maneira exata, em toda a sua complexidade, por uma equação Matemática ou um sistema de equações. No entanto, se trabalharmos com as variáveis essenciais do fenômeno observado, o modelo matemático que simula tal fenômeno poderá levar a situações bastante próximas daquelas observadas na realidade. (BASSANEZZI & FERREIRA JR., 1988, p. 9)

Como vimos, um dos objetivos da Matemática Aplicada é possibilitar o estudo de situações concretas a partir de modelos construídos com base nas relações existentes entre as variáveis dos fenômenos, as quais nada mais são do que funções.

À medida que progride o nível educacional, o estudo das funções vai se tornando mais complexo. No Ensino Fundamental o foco são as funções linear, afim e quadrática, e no Ensino Médio vai-se da exponencial às trigonométricas e, em alguns casos, faz-se uma introdução ao estudo das derivadas.

Quanto à característica do fenômeno, a modelagem ocorre da seguinte maneira: se ele for estático, utilizaremos uma modelagem algébrica simples, e se for dinâmico, lançaremos mão do Cálculo Diferencial e Integral.

Ocorre que a grande maioria dos fenômenos são dinâmicos, o que nos leva à segunda opção. Veja-se o que dizem Bassanezi e Ferreira quanto a isso:

> É muito frequente, em se tratando de modelar um fenômeno ou um experimento qualquer, obtermos equações que envolvam as "variações da quantidade" (variáveis) presentes e consideradas essenciais. Desta forma, as leis que regem tal fenômeno são traduzidas por equações de variações. Quando estas variações são instantâneas, o fenômeno se desenvolve continuamente e as equações matemáticas são denominadas equações diferenciais, ao passo que se as variáveis envolvidas forem discretizadas, isto é, funções de uma rede de pontos, em que temos as médias das variações, então as equações que descrevem o fenômeno são denominadas equações de diferenças. (BASSANEZZI & FERREIRA JR., 1988, p. 9)

Por outro lado, B. M. Pedrosa, pesquisadora da Divisão de Processamento e Imagens do INPE, relata:

> A configuração inicial de um modelo dinâmico pode ser obtida através de dados históricos do fenômeno em estudo, chamados de séries temporais. Neste caso, equações diferenciais (totais ou parciais) que incluem pelo menos um termo derivado no tempo podem ser utilizadas para representar o modelo e o processo é classificado como determinístico. Quando variáveis aleatórias são utilizadas para explicar um sistema o processo é classificado como estocástico-probabilístico. (PEDROSA & CÂMARA, 2003, p. 11)

E Alder, em suas notas de aula, completa:

> …construir um modelo para os dados com base no conhecimento do sistema pode ou não envolver a diferença ou equações diferenciais (poderia envolver modelagem probabilística, por exemplo), mas as chances são boas que assim será..., (ALDER, 2001, p. 1)[14]

A grande maioria dos fenômenos são determinísticos, mas não nos dão suas funções. É preciso descobri-las e aí passamos a ter de resolver equações diferenciais.

Portanto, podemos concluir que na maioria das vezes estaremos diante de fenômenos dinâmicos determinísticos, modeláveis por equações diferenciais cujo histórico de dados pode ser obtido.

---

[14] to construct a model for the data based on knowledge of the system. This may or may not involve difference or differential equations (it could involve probabilistic modelling, for example), but the chances are good that it will,...

Observemos o que foi dito por Bassanezi e Ferreira:

> A nossa disciplina, equações diferenciais, talvez seja o ramo da Matemática que maior proximidade e interações tem experimentado com outras Ciências, desde a sua origem, que se confunde mesmo com a do Cálculo Diferencial e Integral e da mecânica clássica.
>
> De fato, o desenvolvimento desta teoria constitui-se em um dos melhores exemplos da interação bem sucedida entre a Matemática e a ciência em geral, o que tem se confirmado progressivamente com a Matemática contemporânea e a Física, Química, Biologia, Economia e Engenharia. (BASSANEZZI & FERREIRA JR., 1988, p. 2)

Mas aí vem à tona o problema, já mencionado, do conhecimento em Cálculo, conforme expõem os citados autores:

> ... para que o estudo das equações diferenciais tenha algum valor a nível profissional e não fique apenas em curiosidades inócuas, é indispensável que ele seja precedido de um bom conhecimento do alicerce básico da Educação Matemática superior que consiste no Cálculo Diferencial... (BASSANEZZI & FERREIRA JR., 1988, p. 5)

Além disso, completam eles:

> ... tornou-se claro com o tempo que não seria possível obter métodos gerais de resolução explícita (em termos de funções elementares e suas integrais) para as equações diferenciais. O próprio Euler introduziu métodos que geravam uma solução aproximada... (BASSANEZZI & FERREIRA JR., 1988, p. 8)

Por estas razões, chegamos ao cerne de nosso trabalho, qual seja o de propor o ensino de fenômenos dinâmicos através da resolução de seus modelos matemáticos sem utilização do Cálculo.

Na verdade, diversas ações têm sido conduzidas nesse sentido. Um exemplo está descrito no artigo sobre modelagem na Física dos professores Veit e Teodoro:

> A integração da Física com a Matemática e com suas tecnologias recebeu recentemente um novo impulso com o projeto do Institute of Physics do Reino Unido em que o Modellus é considerado como uma ferramenta que faz parte do curso (Lawrence & Whitehouse, 2000). Esse é, provavelmente, o primeiro projeto de ensino não superior em que a utilização de ferramentas computacionais - especificamente o Modellus e a planilha eletrônica - desempenha um papel essencial, quer para a exemplificação de situações quer para a aprendizagem da construção de modelos. Por exemplo, no início do segundo ano do curso (o último ano do Ensino Médio) o estudante constrói modelos utilizando funções e equações diferenciais. (VEIT & TEODORO, 2011, p. 13)

Vejamos, no tópico a seguir, como proceder.

2.1.1.2. Como não usar Cálculo Diferencial e Integral?

Mesmo quando trabalhamos no âmbito de sistemas estáticos, onde os resultados não variam, podemos nos deparar com equações cuja solução não pode ser encontrada analiticamente. Tome-se, por exemplo, um sistema onde se tem como modelo uma equação não linear. É bem provável que tenhamos problemas para resolvê-la, a não ser que ela seja do tipo quadrática ou redutível a isso. Então devemos utilizar técnicas numéricas como o método numérico de Newton ou o da secante.

Agora, dentro do âmbito de sistemas dinâmicos, onde recai a maioria dos modelos de fenômenos, os problemas são mais complexos ainda, já que os resultados, como vimos, compõem-se de funções. Neste caso, devemos resolver equações diferenciais ou, numa tentativa de simplificá-las, equações de diferenças. A chance de termos uma equação cuja solução se dê pela via analítica é cada vez menor à medida que o modelo se aproxima da realidade, dada sua complexidade. Salvador e Arenales corroboram isto, como podemos ver em seu artigo:

> Sempre que possível resolvemos analiticamente a equação ou sistema de equações que rege um modelo matemático. No entanto, na maioria das vezes, nem sempre é possível encontrar uma solução analítica, o que nos leva a considerar o tratamento numérico. Nesse tratamento, buscamos aproximações da solução, como por exemplo, a descrição aproximada da equação diferencial por uma formulação algébrica de equações de diferenças, etc. e o Cálculo das variáveis em pontos discretos do domínio considerado. (SALVADOR & ARENALES, 2009, p. 13)

O estudo das equações diferenciais possui três vertentes principais:

a) Métodos exatos ou analíticos;

b) Métodos geométricos;

c) Métodos numéricos.

Deve-se salientar aqui que, em razão da maioria das equações diferenciais não poder ser resolvida analiticamente, devemos analisar o uso dos métodos numéricos e geométricos.

Lembremos, todavia, que com o advento da informática, surge a possibilidade de resolvermos uma miríade de problemas que, antes, eram considerados impraticáveis.

É o que dizem Chabay e Sherwood, citados por Ornek:

> Simulações computacionais permitem o desenvolvimento de modelos numéricos do mundo real. ... Tais simulações computacionais tornam possível analisar sistemas complexos. Em alguns casos, a complexidade do sistema requer Matemática tão sofisticada que não se pode analisá-lo sem o auxílio de computadores (Chabay & Sherwood, 2002). (ORNEK, 2008, p. 39)[15]

Assim, a computação prescinde de métodos numéricos.

Os métodos numéricos pressupõem a divisão de um intervalo da variável independente em um grande número de subintervalos. À medida que estes se aproximam de zero, a razão das diferenças finitas se aproxima da derivada.

Vejamos o que diz o professor A. C. C. Barbosa, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, sobre como expor o tema no Ensino Médio:

> Há anos os métodos numéricos fazem parte do currículo de graduação dos cursos da área tecnológica, onde, normalmente, são oferecidas disciplinas que abordam métodos clássicos para se resolver problemas de Calculo numericamente.
>
> Nas disciplinas de Cálculo Numérico (Cláudio & Marins, 1989), invariavelmente, o professor apresenta aos alunos métodos para se resolver numericamente integrais e equações diferenciais. Em certos casos, no entanto, é possível se adotar a formulação numérica como via principal para descrever a dinâmica do sistema. Em outras palavras, ao invés de tomar o caminho de descrever a dinâmica analiticamente e, se preciso, resolver as equações resultantes numericamente, às vezes é possível se tratar o problema desde o início empregando-se estruturas numéricas. Esse tratamento evita as equações diferenciais, que são impróprias para o Ensino Médio e para os cursos superiores que não disponham de Cálculo Numérico no currículo. (BARBOSA ET AL, 2006, p. 251)

Conforme Erickson, pesquisador do Institute of Education Sciences do U.S. Department of Education, Estados Unidos da América:

---

[15] Computer models allow students to develop numerical models of the real world... Such computer simulations make it possible for students to analyze complex systems. Sometimes, complex systems require really very sophisticated mathematics to analyze and they cannot be analyzed without computers (Chabay & Sherwood, 1999).

> Note que existem muitas maneiras diferentes de fazer este tipo de modelagem numérica. Desde que o ponto é ajudar os alunos a compreender a ciência através de Matemática acessível, escolhemos o tipo mais simples que nos dê respostas que sejam boas o suficiente. Podem-se obter resultados mais precisos (por exemplo, através da integração com trapézios em vez de retângulos), mas achamos que isso traz complexidade adicional. (ERICKSON, 2001, p.11)[16]

Os métodos mais simples, como o de Euler e o das diferenças finitas, apesar de menos precisos, são mais fáceis de usar e, se devidamente explorados, possibilitam uma aproximação suficiente.

Vejamos como Nelson afirma isso: “Métodos como o das diferenças finitas ... refletem mais precisamente as ferramentas quantitativas e computacionais realmente utilizadas por muitos engenheiros e cientistas”. (NELSON, 2014, p. 2)[17]

E, para o nosso espanto, vejamos o que diz o professor Nearing do Departamento de Física da University of Miami, Estados Unidos da América:

> Você poderia dizer que algumas das equações que você encontra na descrição de sistemas físicos não podem ser resolvidas em termos de funções familiares e que exigem cálculos numéricos para resolver. Seria precipitado dizer isto no entanto, porque o que ocorre, na realidade, é o oposto. A maioria das equações que descrevem o mundo real é suficientemente complexa que a única esperança de resolvê-las é usar métodos numéricos. As equações simples que encontramos nos textos introdutórios estão lá porque elas podem ser resolvidas em termos de cálculos elementares. Quando você começar a adicionar realidade, você rapidamente chegará a um ponto em que nenhuma habilidade analítica trará uma solução. (NEARING, 2003, p. 267)[18]

Diante dessa realidade, resta-nos o caminho da análise numérica, conforme podemos ver no relatório de Erickson:

> ... Nós também usamos funções para comparar dados à teoria. Mas muitos fenômenos têm teorias para as quais é difícil descobrir a função. Se uma

---

[16] We should note that there are lots of different ways to do this kind of numerical modeling. Since the point is to help students understand science through accessible mathematics, we chose the simplest kind that would give us answers that were good enough. One can get more accurate results (for example, by integrating with trapezoids instead of rectangles) but we think that comes at a price in understandability.

[17] Finite difference methods ... more accurately reflects the quantitative and computational methods that are actually used by most practicing engineers and scientists.

[18] You could say that some of the equations that you encounter in describing physical systems can't be solved in terms of familiar functions and that they require numerical calculations to solve. It would be misleading to say this however, because the reality is quite the opposite. Most of the equations that describe the real world are suficiently complex that your only hope of solving them is to use numerical methods. The simple equations that you find in introductory texts are there because they can be solved in terms of elementary calculations. When you start to add reality, you quickly reach a point at which no amount of clever analytical ability will get you a solution.

> equação diferencial descreve a situação, podemos não saber sua solução. Mesmo se o fizermos, nós gostaríamos de evitar o uso de Matemática avançada — especialmente quando a Matemática mais fácil pode resolver nosso problema: podemos resolver muitas equações diferenciais, numericamente, como equações de diferença para um grau arbitrário de precisão... quando você modela numericamente, você divide o tempo em pequenos incrementos e repetidamente executa cálculos simples de posição, velocidade e aceleração. Isto produz mudanças pequenas, passo a passo nas quantidades que, juntas, levam a resultados dinâmicos complexos. ... . Basta apenas um pouquinho de Álgebra para trabalhar um único incremento. E o resultado é preciso. Se não for suficientemente preciso, fazemos o passo de tempo menor. Aqui, é claro, existe uma conexão importante: se você fize-lo muito menor, você chega no Cálculo. Não seria interessante — afinal, agora temos o poder de computação — aprender Física numericamente, assim que primeiro ver Álgebra? (ERICKSON, 2001, p. 11)[19]

Todavia devemos ter cautela no uso dos métodos numéricos. Vejamos o que diz P. J. OLVER em seu livro sobre equações diferenciais:

> Como podemos decidir quando um método está dando resultados imprecisos, desde que presumivelmente não sabemos a verdadeira solução e não temos nada com o que, diretamente, testar a aproximação numérica? Uma ideia útil é integrar a equação diferencial usando dois esquemas numéricos diferentes, geralmente de diferentes ordens de precisão e em seguida, comparar os resultados. Se os valores das duas soluções estão razoavelmente perto, então ficaremos seguros em assumir que os métodos estão, ambos, dando resultados precisos, enquanto que no caso em que eles diferem além de alguma tolerância pré-definida, precisamos reavaliar o tamanho do passo. O ajustamento necessário para o tamanho de passo depende de uma análise mais detalhada do erro existente. Vários métodos bem estudados são empregados em situações práticas… (OLVER, 2012, p. 1140)[20]

A despeito da necessária cautela, finalizamos elegendo o uso dos métodos numéricos, dado que proporciona uma maneira intuitiva de modelar matematicamente qualquer fenômeno sem necessitarmos conhecer Cálculo Diferencial e Integral e faz uso da tecnologia disponível.

---

[19] ... We also use functions to compare data to theory. But many phenomena have theories for which it’s hard to figure out the function. If some differential equation describes the situation, we may not know its solution. Even if we do, we would like to avoid bringing out such difficult mathematics—especially when easier math can solve our problem: we can solve many differential equations, numerically, as difference equations to an arbitrary degree of accuracy ... when you model mechanics numerically, you break time down into tiny increments, and repeatedly perform simple calculations on position, velocity, and acceleration. These yield small, step-by-step changes in those quantities which connect together to produce complex dynamical results....It only takes a tiny bit of algebra to understand a single increment. And it’s accurate. If it’s not accurate enough, make the time step smaller. Here, of course, is an importante connection: if you keep making it smaller, you get calculus. Wouldn’t it be interesting—after all, we now have the computing power—to learn physics, numerically, when you first see algebra?

[20] How might one decide when a method is giving inaccurate results, since one presumably does not know the true solution and so has nothing to directly test the numerical approximation against? One useful idea is to integrate the differential equation using two different numerical schemes, usually of different orders of accuracy, and then compare the results. If the two solution values are reasonably close, then one is usually safe in assuming that the methods are both giving accurate results, while in the event that they differ beyond some preassigned tolerance, then one needs to re-evaluate the step size. The required adjustment to the step size relies on a more detailed analysis of the error terms. Several well-studied methods are employed in practical situations...

Isto leva à aplicação, não apenas em cursos superiores onde não se tem o aprofundamento matemático exigido a princípio, mas também no Ensino Médio. Neste caso, leva ao despertar do aluno para o aprendizado da Matemática superior, notadamente o Cálculo.

2.1.2. A tecnologia na sala de aula

A grande vantagem das ferramentas tecnológicas em sala de aula é a possibilidade de confronto com atividades mais complexas, caso dos problemas oriundos do mundo real, ricas do ponto de vista da aprendizagem significativa.

Além disso, tais ferramentas possuem recursos que ajudam na resolução dos problemas citados ao preparar os dados, como é o caso do ajuste de curvas. Apesar de não constar nem do currículo do Ensino Médio e nem da maioria dos currículos universitários, esse recurso é um poderoso instrumento para o desenvolvimento das conexões entre os dados reais e os calculados pelo modelo que represente determinada função Matemática.

Pesquisas internacionais têm demonstrado estas assertivas, como é o caso das seguintes atividades:

- modelagem, simulação e resolução de situações problemáticas;

- uso de cenários visuais gerados pelo equipamento para ilustrar conceitos matemáticos;

- estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções;

- antevisão dos conceitos do Cálculo Diferencial;

Em outro contexto, as tecnologias levam à formação de parcerias inteligentes. Estas são caracterizadas por uma divisão complementar do trabalho com o usuário, quando este planeja e implementa a solução mas transfere o "trabalho braçal" para a ferramenta. Por exemplo, quando na necessidade de desenhar, com rapidez e precisão, um gráfico de uma função. Se feito à mão, tal gráfico demandaria bastante tempo e estaria sujeito aos erros inerentes a essa atividade.

Em seu artigo, H. S. Drier, da North Carolina State University, nos Estados Unidos da América, ressalta o impacto da tecnologia na Matemática:

> A tecnologia é essencial no ensinar e aprender Matemática. Ela influencia a Matemática que é ensinada e incrementa o aprendizado dos alunos, conforme (NCTM, 2000). Este parágrafo é um dos seis princípios descritos em (Princípios e Padrões para Matemática Escolar, NCTM). ... As recentes tendências na educação enfatizam a importância de aprender COM tecnologia ao invés de aprender SOBRE tecnologia. Isto significa que os professores devem aprender tecnologia como instrumento para alavancar o ensino do conteúdo ... (DRIER, 2001, p. 170)[21]

Conforme Barbosa e colegas:

> Apesar da utilização crescente de computadores como elemento no fornecimento de informações e também como agente auxiliar na construção do conhecimento, existe ainda uma grande resistência dos professores e alunos em utilizá-lo como ferramenta para o desenvolvimento e aprendizagem na área científica. Isso na maioria dos casos se dá em função do desconhecimento de linguagens de computação. (BARBOSA, CARVALHAES, & COSTA, 2006, p. 252)

Portanto, pode-se concluir que o uso da tecnologia traz benefício ao aprendizado. Entretanto, diversos são os softwares disponíveis para uso. A qual deles recorrer?

2.1.2.1. Planilhas eletrônicas

As planilhas eletrônicas constituem a ferramenta ideal para o desenvolvimento de modelos, pois apresentam uma maneira interativa de se observar seu comportamento tanto em situações óbvias quanto em extremas. Uma das maiores vantagens é que não se necessita conhecer técnicas de programação e geralmente estão disponíveis nas escolas. Vários autores mencionam isso, como veremos a seguir.

Veja-se o artigo de Drier sobre as vantagens de se usar planilhas, tanto para alunos quanto para professores:

> Estes usos das planilhas permitem aos estudantes explorar processos alternativos para encontrar soluções que vão além da manipulação simbólica e com isso aprofundar o entendimento de conceitos inseridos em um problema.... As planilhas eletrônicas permitem aos estudantes modelar e simular situações matematicamente da mesma forma que os cientistas o

---

[21] Technology is essential in teaching and learning mathematics; it influences the mathematics that is taughtand enhances student' learning (NCTM, 2000). This statement is one of the six principles described in the NCTM Principles and Standards for School Mathematics ... Recent trends in teacher education have enphasized the importance of learning with technology rather than learning about technology. This implies that teachers should learn to use a computer as a cognitive tool to enhance student learnig of content material ...

> fazem em laboratórios a fim de descobrir e testar novas leis. (DRIER, 2001, p. 170)[22]

Segundo Benacka, em seu trabalho sobre os impactos da modelagem numérica no interesse dos alunos pelas carreiras tecnológicas:

> A revisão da literatura sugere que a modelagem em planilhas promove o interesse dos alunos do Ensino Médio nas carreiras científicas e os motiva, os inspira e os encoraja a estudar suas disciplinas na universidade. Envolve criatividade, visualização, questionamento e autenticidade, os quais são fundamentais para o aprendizado prazeroso. Criar uma aplicação que possibilite encontrar a solução de um problema real constitui um forte fator motivante... (BENACKA, 2016, p. 949)[23]

O artigo mostra, detalhadamente, os resultados de diversas pesquisas com planilhas, constituindo-se em ótima referência para o leitor interessado. Ao final, conclui:

> Isso tudo sugere que a modelagem com planilhas pode promover as disciplinas de exatas para alunos do Ensino Médio e motivá-los, inspirá-los e incentivá-los a estudar essas disciplinas nas universidades. Estudar exatas com planilhas envolve Criatividade, Visualização, Inquérito e Autenticidade, que são vitais para a aprendizagem prazerosa. Criar um aplicativo que permita resolver um problema real é um forte fator motivador. (BENACKA, 2016, p. 949)[24]

Um dos grandes limitadores no uso das novas tecnologias é a necessidade de se aprender a utilizar um determinado software, o que, convenhamos, não se encontra facilmente nas diretrizes curriculares dos cursos. Ocorre que a maioria dos softwares dedicados à resolução de equações diferenciais demanda esse investimento.

Portanto, trata-se de utilizar softwares que possuam as características desejáveis e sejam também muito interativos.

É o que diz Nelson:

---

[22] These uses of spreasheets allow students to explorealternative solution processes that go beyond symbolic manipulation and can provide students with a deeper understanding of concepts embedded in a problem ... The spreadsheets allowto students modelling and simuling mathematicaly situations in the same way scientists do in labs in order to discover and test the new statements.

[23] The overview suggests that spreadsheet modelling may promote STEM to high school students and motivate, inspire and encourage them to study the disciplines at universities. Doing STEM with spreadsheets involves Creativity, Visualization, Inquiry and Authenticity, which are vital to enjoyable learning. Creating an application that enables one to solve a real problem is a strong motivating factor.

[24] The overview suggests that spreadsheet modelling may promote STEM to high school students and motivate, inspire and encourage them to study the disciplines at universities. Doing STEM with spreadsheets involves Creativity, Visualization, Inquiry and Authenticity, which are vital to enjoyable learning. Creating an application that enables one to solve a real problem is a strong motivating factor.

> A habilidade de aprender como escrever um algoritmo livre de erros é provavelmente a habilidade mais difícil para muitos alunos nesses módulos. O uso do Excel atenua esse problema porque o algoritmo é implementado espacialmente nas células de uma planilha, exigindo menos sintaxe formal do que uma linguagem de programação tradicional. Além disso, a maioria dos alunos já está familiarizada com o Excel, o que é uma vantagem significativa, porque os alunos não são intimidados por ele (não houve comentários negativos dos alunos sobre o uso do Excel na pesquisa realizada). (NELSON, 2014, p. 10)[25]

K. F. Lim, professor da Deakin University, Austrália, justifica assim a preferência por planilhas em detrimento dos softwares de modelagem:

> Pesquisas em educação mostraram que o uso de software matemático especializado cria uma barreira adicional para a aprendizagem: não só os alunos têm que aprender a Matemática, mas também precisam aprender uma nova "linguagem de programação" (Galbraith & Pemberton, 2002). Por outro lado, como os alunos seriam (pelo menos um pouco) mais familiarizados com o uso de planilhas, há menos uma barreira de aprendizagem. (LIM, 2005, p. 231)[26]

Entretanto, devemos realçar que, atualmente, as planilhas de softwares livres aproximam-se suficientemente das planilhas pagas para permitir essa substituição. Isso implica na eliminação do custo de aquisição.

Cabe mencionar que, a despeito do exposto, existem ótimos softwares pedagógicos que disponibilizam planilhas. É o caso do Geogebra, como se lê no Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, pela UFPB, de E. J. Santana Júnior:

> O Geogebra é um software educativo gratuito que admite ser explorado pela Geometria e pela Álgebra. Aos poucos vem se tornando mais popular no Brasil, a partir do momento em que os educadores vão se deparando com os efeitos de suas ferramentas. Desenvolvido em 2002, pelo Austríaco Ph.D. Markus Hohenwarter, professor e pesquisador na área de Informática aplicada à Educação Matemática, o Geogebra já tem uma grande aceitabilidade no espaço educativo e é considerado um forte aliado para o ensino da Matemática. ...
>
> ... O Geogebra é escrito em Java e assim está colocado em múltiplas plataformas. Além de ser gratuito, as construções podem ser disponibilizadas

[25] The skill of learning how to write an error-free algorithm is probably the most difficult skill for many students in these modules. The use of Excel mitigates this problem because the algorithm is implemented spatially in the cells of a spreadsheet, requiring less formal syntax than a traditional programming language. In addition, most students are already familiar with Excel, which is a significant advantage because students are not intimidated by it (there were no negative student comments about the use of Excel in the SALG survey).

[26] Science education research has shown that the use of specialist mathematical software creates an additional barrier to learning: not only do students have to learn the mathematical knowledge content, but they also have to learn a new "programming language" in order to do so [7]. Conversely, since students would be (at least slightly) more familiar with the use of spreadsheets, there is less of a learning barrier

> na Internet, e é compatível com qualquer sistema operacional (Microsoft Windows, GNU/Linux, Macintosh. Sua aquisição pode ser feita por inúmeros sites de download espalhados pela Internet, mas o que está sempre atualizado e é destinado exclusivamente ao Geogebra é o seu site oficial cujo endereço é http://www.geogebra.org disponível em trinta e nove diferentes línguas. (SANTANA JUNIOR, 2011, p. 30)

Assim, o software eleito para se utilizar na modelagem numérica é a planilha eletrônica, independente de sua origem comercial ou livre e se está ou não inserido em outro pacote de ferramentas.

2.1.3. Ambiente de aprendizagem ativo

Em razão da necessidade de ampliação da mão de obra disponível nas carreiras científicas, e considerando o resultado das recentes pesquisas na educação, há uma mudança de paradigma no que se refere à forma como se ensina Ciências. Pois vejamos o que afirma Nelson sobre o tema:

> Há um movimento crescente para transformar a educação de graduação, de um processo passivo (às vezes chato) baseado em aulas expositivas em um processo ativo conforme pesquisas educacionais realizadas por (DiCarlo, 2009). Basicamente, a recomendação é que "devemos ensinar do jeito que aprendemos". Os alunos devem perceber que a ciência produz conhecimento com base em evidências e entendimento – não apenas uma lista de declarações por alguma autoridade que precisam ser aceitas e memorizadas sem qualquer evidência. (NELSON, 2014, p. 2)[27]

O ambiente de aprendizagem ativo caracteriza-se por estímulos aos estudantes para que descubram as coisas por eles mesmos, usando modelos construídos com base em hipóteses previamente estabelecidas. Segundo o Instituto Nacional de Pesquisas dos Estados Unidos da América (National Research Council), os objetivos do ambiente de aprendizagem ativo nas Ciências são:

- Delinear, sólida e profundamente, uns poucos conceitos fundamentais;

- Reter, a longo prazo, o que foi aprendido;

- Construir um esquema mental que sirva de base para futuros aprendizados;

---

[27] There is a growing movement to transform undergraduate education from a (sometimes boring) passive lecture-based process into an active-learning process based on educational research (DiCarlo, 2009). Basically the recommendation is that “we should teach the way we learn”. Students should realize that science produces evidence-based knowledge and understanding – not just a list of declarations by some authority that need to be accepted and memorized without any evidence.

- Desenvolver competências alicerçadas na crítica, interpretação, construção e interligação de sistemas biológicos com sistemas físicos;

- Desenvolver habilidades (especialmente julgamento analítico e crítico) para utilizar informações científicas na tomada de decisões;

- Entender o método científico;

- Ter satisfação em engajar-se em questões do mundo real que necessitam de conhecimento científico.

No trabalho de Veit e Teodoro encontramos o seguinte sobre o ambiente de aprendizagem ativo:

> É preciso mudar convicções equivocadas, culturalmente difundidas em toda a sociedade, de que os alunos são os pacientes, de que os agentes são os professores e de que a escola estabelece simplesmente o cenário do processo de ensino. [op. cit. p. 263]
>
> Se há uma unanimidade, pelo menos no plano dos conceitos entre educadores para as Ciências e a Matemática, é quanto à necessidade de se adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo.[op. cit. p. 266] (VEIT & TEODORO, 2011, p. 5)

De fato, conforme R. Narayan, da University of North Texas at Dallas, Estados Unidos da América, e colegas, os estudantes passam a se interessar pelas carreiras científicas quando participam do ambiente de aprendizagem ativo: "... os alunos que veem a ciência como prática ativa ficam inclinados a escolher uma carreira relacionada com ciência, mais do que os estudantes que a veem de forma passiva...”. (NARAYAN, PARK, PEKER, & SUH, 2013, p. 126)[28]

Aqui também as pesquisas desempenham papel relevante, resultando em indiscutíveis ganhos. O professor R. R. Hake, do Departamento de Física da Indiana University, Estados Unidos da América, retrata bem este fato:

> Os resultados conceituais e de solução de problemas sugerem fortemente que o uso de estratégias de aprendizagem interativa pode aumentar a eficácia do

[28] students who view science as an active practice are inclined to choose a science-related career rather than students who view it passively

> curso de Física bem além da obtida com os métodos tradicionais. (HAKE, 1998, p. 1)[29]

Entretanto, a despeito dos benefícios encontrados, alguma cautela faz-se necessária, conforme mencionam Karim e colegas em seu artigo sobre o impacto da participação ativa dos estudantes no aprendizado:

> Em todos os casos investigados, descobrimos que, em média, os alunos dos cursos que fizeram uso significativo de métodos EBAE (“evidence-based active-engagement”) superaram aqueles de cursos ensinados principalmente usando LB (“lecture-based”) no pós-teste de pesquisas conceituais padronizadas, dado não haver diferença estatística significante no pré-teste. ... No entanto, o tamanho típico para as diferenças entre EBAE e LB de cursos equivalentes foi entre 0,23 e 0,49, considerados pequenos. Portanto, os benefícios dessas abordagens EBAE não foram tão grandes quanto se poderia esperar. Existem muitos desafios em potencial para usar as estratégias de ensino EBAE de forma eficaz, incluindo, mas não se limitando a:
>
> • Cobertura de conteúdo. ...
>
> • Falta de entusiasmo dos alunos com pedagogias EBAE ...
>
> • Falta de envolvimento dos alunos com atividades de aprendizagem ativa em sala de aula (por exemplo, perguntas espontâneas e resolução de problemas em grupo). ...
>
> • Turmas grandes podem ser um impedimento. ... (KARIM ET AL, 2018, p. 22)[30]

Então, uma das estratégias úteis, aliado ao uso da tecnologia, e ainda que sob investimentos na adequação, é o ambiente de aprendizagem ativo.

O tópico a seguir discorre sobre uma técnica a ser incorporada no dia a dia dos estudantes. Técnica esta que pode (e deve) ser utilizada além das instalações acadêmicas, mormente pela demanda atual do mercado de trabalho.

---

[29] The conceptual and problem-solving test results strongly suggest that the classroom use of IE methods can increase mechanics-course effectiveness well beyond that obtained in traditional practice.

[30] In all cases investigated, we find that on average, introductory students in the courses which made significant use of EBAE methods outperformed those in courses primarily taught using LB instruction on standardised conceptual surveys (FCI or CSEM) on the post-test even though there was no statistically significant difference on the pre-test. ... However, the typical effect sizes for the differences between equivalent EBAE and LB courses was between 0.23 and 0.49, which are small. Thus, the benefits of these EBAE approaches were not as large as one might expect to observe. There are many potential challenges to using EBAE instructional strategies effectively, including but not limited to:

• Content coverage. ...

• Lack of student buy-in of EBAE pedagogies ...

• Lack of student engagement with in-class active-learning activities (e.g. clicker questions and group problem solving). ...

• Large class sizes may be an impediment. ...

2.1.4. O método científico

A ideia básica é desenvolver um modelo matemático do que se está investigando para comparar seus resultados com os obtidos empiricamente.

Vejamos o que mostram a professora C. V. Schwarz e seus colegas, sobre modelagem científica no Ensino Básico:

> Envolver os alunos em práticas de modelagem pode ajudá-los a construir conhecimento de assunto, compreensão epistemológica e experiência nas práticas de construção e avaliação de conhecimentos científicos (Lehrer & Schauble, 2006); (Doerr & Lesh, 2000); (Schwarz & White, 2005); (Stewart, Cartier, & Passmore, 2005). A oportunidade de se envolver em modelagem científica é central no desenvolvimento e avaliação das explicações do mundo natural. Modelagem científica, no entanto, é raramente incorporada como experiência educativa de alunos do Ensino Fundamental ou Médio. Quando o uso de modelos ocorre, é geralmente reservada para os alunos mais velhos e usado principalmente para fins ilustrativos ou comunicativos, limitando assim a riqueza epistemológica da prática científica (Windschitl, Thompson, & Braaten, 2008). (SCHWARZ ET AL, 2009, p. 633)[31]

Como já dito, o método científico está apoiado na comparação dos dados de um modelo com os obtidos empiricamente. Ora, trata-se aqui de sua validação.

Ornek nos diz o seguinte, a respeito disso:

> A modelagem envolve a construção de um modelo... simplificado, idealizado, de uma situação complicada do mundo real por meio de aproximações. Em seguida, os resultados ou as previsões do modelo são comparados com o sistema real. A etapa final é refinar o modelo para obter o melhor, se necessário... Como resultado, os modelos fornecem uma aplicação do conhecimento em situações do mundo real para ver como as coisas se aplicam na realidade em vez de apenas se olhar para as equações. Em outras palavras, ajudam os alunos a aprender e compreender os fenômenos... (ORNEK, 2008, p. 39)[32]

---

[31] Involving learners in modeling practices can help them build subject matter expertise, epistemological understanding, and expertise in the practices of building and evaluating scientific knowledge (Lehrer & Schauble, 2006; Lesh & Doerr, 2000; Schwarz & White, 2005; Stewart, Cartier,&Passmore, 2005). The opportunity to engage in scientific modeling is central in developing and evaluating explanations of the natural world. Scientific modeling, however, is rarely incorporated into educational experiences of elementary or middle school students. When use of models occurs, it is often reserved for older learners and primarily used for illustrative or communicative purposes, thus limiting the epistemic richness of the scientific practice (Windschitl, Thompson, & Braaten, 2008).

[32] Modeling involves making a simplified, idealized physics model of a messy real-world situation by means of approximations. Then, the results or predictions of the model are compared with the actual system. The final stage is to refine the model to obtain better agreement, if needed.... As a result, models provide an application of the knowledge to real world

E a opinião de Salvador e Arenales:

> Estabelecido um modelo envolvendo alguns parâmetros essenciais e se os valores reais observados coincidirem ou se aproximarem dos valores obtidos pelo modelo matemático, dizemos que o modelo representa bem o problema e este poderá ser útil na previsão da população. Quando na resolução de um problema real, a formulação Matemática correspondente não conduz a um resultado aceitável, ou uma situação em que não se consegue obter uma solução compatível com a situação real do problema, devemos revê-lo e fazer ajustes acrescentando hipóteses, parâmetros ou restrições adequadas, de modo a não invalidá-lo ou mesmo recomeçar abordando o problema com um novo modelo matemático. (SALVADOR & ARENALES, 2012, p. 7)

E prosseguem eles:

> Na coleta de dados de um problema, as quantidades que influenciam nos resultados de um modelo, são as variáveis, os parâmetros e as constantes envolvidas. As constantes são quantidades fixas e, portanto estas possuem o mesmo valor durante o processo dinâmico. Os parâmetros são medidas ou valores auxiliares que podem ser fixos ou variar durante o processo. As variáveis discretas ou contínuas são quantidades que variam com o processo.
>
> Com a observação, o entendimento, o levantamento e a interpretação dos dados, partimos para a abstração, a consideração das principais variáveis, parâmetros e constantes, a formulação de hipóteses razoáveis para elaboração do modelo e, posteriormente com a escolha de métodos analíticos ou numéricos para a resolução Matemática do mesmo, e após a determinação da sua solução a verificação da validade dos resultados e a aplicabilidade do mesmo. (SALVADOR & ARENALES, 2012, p. 27)

Quando validamos modelos matemáticos, podemos lançar mão de ferramentas que nos ajudem a preparar os dados que obtemos. No caso do ajuste de curvas, a despeito da importância de conhecer em detalhes esse método, deve-se frisar que as planilhas eletrônicas utilizam-no de maneira bastante amigável, o que simplifica muito o trabalho do modelador. É o que teremos oportunidade de ver na atividade-modelo.

2.2. APLICANDO MÉTODOS NUMÉRICOS NA RESOLUÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS

Durante a estruturação deste trabalho, conforme (FIORENTINI & LORENZATO, 2012), nos deparamos com a necessidade de optar por um dos dois caminhos: ou faríamos a aplicação de atividades nos mais diversos contextos educacionais, sem nos preocuparmos com os resultados dos trabalhos antes feitos, a fim de concluirmos pela evidência a partir dos

---

situations-made to see how things apply in the real world instead of just looking at equations. In other words, helped students learn and understand physical phenomenon...

resultados empíricos obtidos em nossa aplicação, seguindo, portanto, a metodologia da pesquisa empírica, ou levaríamos em consideração o obtido em pesquisas já realizadas, a fim de validarmos nossa hipótese, convencendo-nos do valor da atividade proposta, para então propor sua aplicação pelos que se interessarem, seguindo, portanto, a metodologia da pesquisa teórica.

Considerando-se que no primeiro caso o tempo necessário e o contexto para a aplicação poderiam extrapolar o disponível, entendemos ser pertinente o segundo caminho, mormente pela sua adequação ao objetivo regimental de desenvolver "prática profissional transformadora por meio da incorporação do método científico e da aplicação dos conhecimentos".

2.2.1. Alguns resultados de pesquisas sobre atividades similares

Antes de discorrermos sobre a atividade, a despeito dos benefícios verificados nas diversas referências mencionadas até o presente momento, analisaremos as conclusões de algumas pesquisas realizadas com atividades similares a fim de nos certificarmos das evidências.

Podemos ver o impacto no interesse dos alunos pelas carreiras científicas no artigo de Benacka sobre Modelagem Numérica:

> Os resultados se correlacionam com os encontrados anteriormente (Benacka & Ceretkova, 2014), implicando que o desenvolvimento de aplicações em planilhas que modelem sistemas dinâmicos reais pelo uso do método de Euler de resolução de equações diferenciais promove o interesse dos alunos pelas carreiras científicas e tecnológicas. (BENACKA, 2016, p. 961)[33]

Eis a referência citada acima, texto de J. Benacka e S. Ceretkova, professores da Constantine the Philosopher University, Eslováquia:

> O artigo mostra os resultados de um experimento no qual foi desenvolvido um modelo numérico de caça à população mundial de baleias cachalote com 27 alunos de Ensino Médio de 18-19 anos de idade. O modelo foi resolvido pelo método de Euler de resolução de equações diferenciais. Um questionário foi dado aos alunos para saber sua opinião sobre a lição. O principal resultado é que 100% dos alunos acharam a lição interessante e 89% gostariam de continuar com o desenvolvimento de um modelo de

[33] The result corresponds well with the findings of Benacka and Ceretkova (2014) (100% and 89%), and implies that developing spreadsheet applications that model real dynamic systems by using the Euler method of solving the governing differential equation has the potential to promote STEM to high school students.

> predador-presa. Isso implica que a modelagem de sistemas dinâmicos com planilhas usando o método de Euler de resolução de equações diferenciais tem um potencial de promover Ciências e Matemática a nível pré-universitário. (BENACKA & CERETKOVA, 2014, p. 6)[34]

O professor G. A. Buxton, da Robert Morris University, Estados Unidos da América, em seu trabalho sobre a aplicação de modelagem na Biologia, expõe:

> Descobrimos que a incorporação de simulações computacionais na Biologia é importante para melhorar as habilidades quantitativas de nossos alunos e sua capacidade de usar planilhas para análise de resultados experimentais. Isto talvez não seja muito surpreendente depois de um curso de semestre inteiro onde os alunos implementam modelos de computador em um ambiente de planilha. Além disso, vários estudantes subsequentemente utilizaram ou incorporaram modelos de planilhas em seus projetos de conclusão de curso ou em projetos de pesquisa fora do curso. Em particular, nas duas últimas seções oferecidas (que continham em média 15 alunos cada), seis alunos de Biologia continuaram usando modelos de computador e simulações em seus futuros projetos de pesquisa; algo inédito antes que esta aula fosse oferecida. (BUXTON, 2018, p. 17)[35]

O artigo a seguir, de autoria de Ornek, realça o valor dos modelos: "Como resultado, os modelos fornecem uma aplicação do conhecimento em situações do mundo real para ver como as coisas ocorrem em vez de apenas olhar para equações”. (ORNEK, 2008, p. 44)[36]

Outra forte evidência do sucesso da aplicação do que se propõe pode ser visto em no artigo de Nelson:

> Em uma pesquisa denominada "Student Assessment of their Learning Gains" os estudantes classificaram a abordagem da modelagem científica quantitativa através da aprendizagem ativa como uma maneira que produz muito no entendimento de problemas do mundo real e na aplicação do método científico. (NELSON, 2014, p. 1)[37]

---

[34] The paper gave the results of an experiment in which a numeric model of harvesting the world population of the Sperm whale was developed with 27 gymnasium (high school) students of age 18-19. The model applied the Euler method of solving differential equations. A questionnaire was given to the students to find out their opinion of the lesson. The main result is that 100% of the students found the lesson interesting and 89% would like to continue with developing a predator-prey model. That implies that modelling dynamics systems with spreadsheets by using the Euler method of solving differential equations has a potential in promoting sciences and applied mathematics at the pre-university level.

[35] We have found that the incorporation of computer simulations within undergraduate biology is important for improving the quantitative skills of our students, and their ability to use spreadsheets to analysis experimental results. This is perhaps not too surprising after an entire semester course where the students implement computer models in a spreadsheet environment. Furthermore, a number of students have subsequently gone on and incorporated spreadsheet models within their senior thesis research projects and honors research projects (outside of this course). In particular, in the last two sections offered (which contained on average 15 students each) 6 biology students have continued using computer models and simulations in their future research projects; something that would have been unheard of before this class was offered.

[36] As a result, models provide an application of the knowledge to real world situations-made to see how things apply in the real world instead of just looking at equations.

[37] In a “Student Assessment of their Learning Gains” (SALG) survey, students identified this approach as producing “great gains” in their understanding of real world problems and scientific research.

Quanto ao uso da tecnologia nas carreiras de exatas, destaca-se o imponente trabalho realizado por C. D’Angelo e colegas, pesquisadores da Bill & Melinda Gates Foundation, Estados Unidos da América, o qual conclui:

> Neste relatório, descrevemos nossa revisão sistemática e meta-análise da literatura sobre simulações computacionais projetadas para o aprendizado das disciplinas de exatas (“STEM”) nos currículos da educação básica (“K-12”). ... Resultados da meta-análise destes artigos indicam que, em geral, o uso de simulações apresenta vantagem sobre o não uso. Além disso, simulações com modificações apresentaram vantagem sobre simulações sem modificações. A maioria das avaliações usadas para medir os resultados associados a simulações eram de lápis e papel; poucas aproveitaram o potencial da tecnologia envolvida nas simulações que foram estudadas. É importante notar que os estudos incluídos na meta-análise foram predominantemente em educação científica, sugerindo que uma necessidade importante é um conjunto mais robusto de estudos de alta qualidade sobre simulações em outros domínios no nível básico (“K-12”). Portanto, enquanto o nosso trabalho mostra que simulações, em diferentes configurações ou contextos dentro da sala de aula, melhoram a aprendizagem do aluno, ainda há muito a ser aprendido sobre os benefícios das simulações de computador nas Ciências. (D’ANGELO ET AL, 2014, p. 27)[38]

2.2.2. A atividade proposta: um exemplo na Farmacologia

1. Introdução

A atividade de modelagem que propomos baseia-se em métodos numéricos e tem a finalidade de aprofundar o aprendizado dos fenômenos dinâmicos, além de construir um esquema de aprendizado útil ao método científico. Ao desenvolver modelos quantitativos e validá-los com experimentos reais, o estudante se depara naturalmente com o método. Nela são vistos elementos de computação (como algoritmos e recursividade) e de Matemática (sequências e funções, por exemplo). A análise gráfica é estimulada através do uso de planilhas convencionais, largamente disponíveis nos ambientes informatizados. Com o

---

[38] In this report, we have described our systematic review and meta-analysis of the literature on computer simulations designed to support science, technology, engineering, and mathematics (STEM) learning in K-12 instructional settings. Both quantitative and qualitative research studies on the effects of simulation in STEM were reviewed. Only studies that reported effect size measures or the data necessary to calculate effect sizes were included in the meta-analysis. Initial search results identified 260 articles, of which 59 (23%) met this requirement. Results from the metaanalysis of 59 studies indicate that, overall, simulations have a beneficial effect over treatments in which there were no simulations. Also, simulations with modifications were shown to have a beneficial effect over simulations without those modifications. Most of the assessments used to measure outcomes associated with simulations were paper/pencil based; few took advantage of the affordances of the technology involved in the simulations that were studied. It is important to note that the studies included in the meta-analysis were predominately in science education, suggesting that an important need is a more robust pool of high quality research studies on simulations in other STEM domains at the K-12 level. Thus, while our work shows that simulations, in many diferente configurations or contexts within the classroom, can improve student learning, there is still much to be learned about the educational benefits of computer simulations across the STEM domains.

advento das técnicas computacionais, protótipos dessa natureza têm sido cada vez mais utilizados em modelagem científica quantitativa.

Possui a característica de ser auto conduzida, sob tutoria, nos moldes do ambiente de aprendizagem ativo, um dos fatores de sucesso da Modelagem Matemática.

A fim de explorar devidamente a interdisciplinaridade, escolheu-se o tema da Farmacologia, de grande visibilidade nas Ciências Biológicas. Dentro dele temos a Farmacocinética, a qual se preocupa com o que acontece com uma droga no organismo desde a absorção até a eliminação, e a farmacodinâmica, preocupada com o que acontece com o organismo sob a ação de uma droga. Nossa atividade está focada na primeira área, particularmente no estágio de eliminação.

A hipótese da atividade é a de que o fenômeno de eliminação de um fármaco pode ser explicado por um modelo recursivo onde a condição inicial é a de certa concentração deste no sangue e cuja dinâmica apresenta concentrações menores à medida que o tempo passa. O modelo permite que se conheça a concentração do fármaco no sangue sem que se tenha que colher amostras posteriores, o que elevaria o risco do paciente.

Trata-se da injeção intravascular de 5 miligramas (mg) de sulfato de morfina em um indivíduo adulto, o que resulta em uma concentração plasmática de 5,51 nanogramas por mililitro (ng/mL) verificado experimentalmente certo tempo após a injeção (ρ_0).

Devemos considerar que, por se tratar de uma injeção intravascular, a absorção será imediata. Quanto à distribuição, iremos assumir que o fármaco será transportado rapidamente às partes do corpo por quais tenha afinidade, dada sua via de administração. Por outro lado, sabe-se, do experimento, que uma parcela razoável do fármaco transforma-se em metabólitos. Isto foi considerado nas amostras. Por fim, iremos supor que a eliminação retratada é predominantemente renal.

O fármaco estudado é o sulfato de morfina, poderoso analgésico utilizado em pacientes com câncer. Sua meia-vida, tempo em que a quantidade do fármaco se reduz à metade, traz subsídios para a exploração das funções exponencial e logarítmica, mostrando aos alunos a relação entre elas.

A atividade proporciona uma comparação entre os métodos numérico e analítico, despertando no estudante o interesse pelo aperfeiçoamento dos resultados obtidos no primeiro à vista do segundo.

Mostra, ainda, como obter os parâmetros de meia-vida e de concentração a partir da equação gerada pelo ajuste de curvas. Aqui, no caso de turmas com base de Cálculo, pode ser explorado pelo professor o método dos mínimos quadrados com o intuito de compará-lo com o que se dá na planilha.

Uma das características da atividade é a verificação de que um modelo matemático não é perfeito e que, por essa razão, a teoria dos erros é outra área que pode ser explorada no decorrer do exercício.

O Apêndice contém a ficha da atividade a ser aplicada.

2. Base teórica

O modo mais simples de descrever a eliminação de um fármaco da corrente sanguínea é imaginar sucessivas "trocas" de uma certa quantidade de sangue "contaminado" por sangue "puro". O que acontecerá em cada troca é representado pelo modelo físico a seguir:

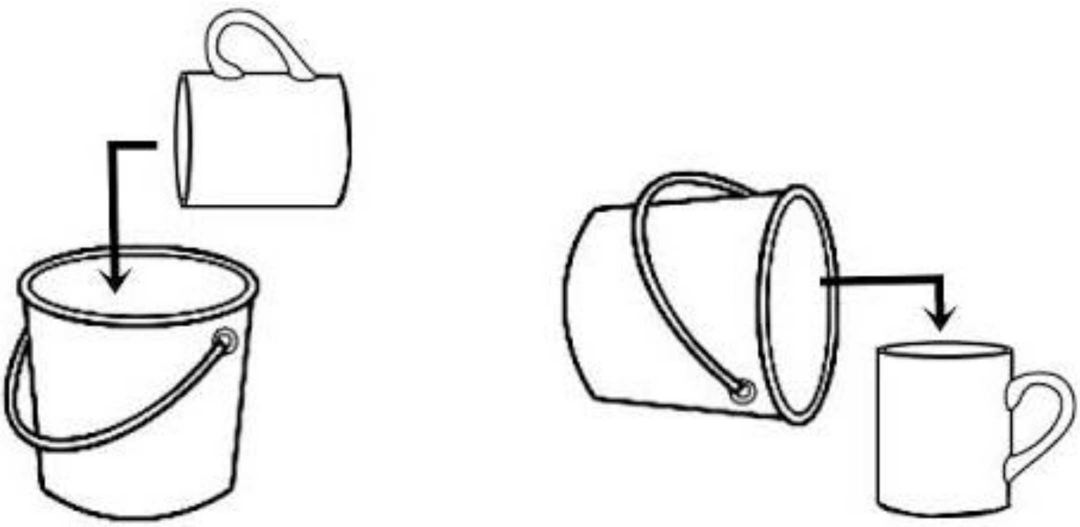


Figura 1. Modelo físico da atividade proposta

Vamos calcular, a cada troca, a quantidade de morfina no plasma sanguíneo.

Deve-se notar que a Farmacologia faz uso de grandezas específicas para mensurar a quantidade de uma substância. O motivo é que normalmente tais substâncias são parte de uma mistura cujos demais componentes não nos interessa.

Por outro lado, como o volume total de sangue no corpo humano é aproximadamente de 6 litros e constante ao longo do tempo, podemos substituir, nos cálculos, a quantidade pela concentração. Isso resolve o problema.

Pois bem, seja ρ a concentração do fármaco no sangue.

A variação da concentração por intervalo de tempo ($\frac{\Delta\rho}{\Delta t}$) é uma proporção $k > 0$ da concentração anterior. Então:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = k.\rho$$

Entretanto, poderemos ter entrada e saída. Ou seja, podemos ter, nesse intervalo, a entrada (injeção) do fármaco em uma dada concentração (e a uma proporção, ou taxa, k_i), e a saída (eliminação) do fármaco em outra (a uma proporção, ou taxa, k_s). Portanto:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = k_i.\rho_i - k_s.\rho_s$$

Ora, se não houver injeção nesse intervalo não teremos entrada e então:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = -k_s.\rho_s$$

A fim de facilitar a escrita, de agora em diante denominaremos ρ_s de ρ simplesmente:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = -k_s.\rho$$

Dado que não haverá novas injeções do fármaco, vamos retirar, a cada troca, uma proporção x ($\frac{\Delta\rho}{\rho}$) da concentração anterior, a fim de determinarmos a nova concentração:

1ª troca:

$$\rho_1 = \rho_0 - x.\rho_0$$

2ª troca:

$$\rho_2 = \rho_1 - x.\rho_1$$

...

n-ésima troca:

$$\rho_n = \rho_{n-1} - x.\rho_{n-1}$$

Trata-se de uma equação discreta que nos dá a n-ésima troca.

Multiplicando os respectivos lados das equações anteriores, fica:

$$\rho_1.\rho_2.\dots.\rho_n = (\rho_0 - x.\rho_0).(\rho_1 - x.\rho_1).\dots.(\rho_{n-1} - x.\rho_{n-1})$$

$$\rho_n = \frac{(\rho_0 - x.\rho_0).(\rho_1 - x.\rho_1).\dots.(\rho_{n-1} - x.\rho_{n-1})}{\rho_1.\rho_2.\dots.\rho_{n-1}}$$

$$\rho_n = \frac{\rho_0.(1-x).\rho_1.(1-x).\dots.\rho_{n-1}.(1-x)}{\rho_1.\rho_2.\dots.\rho_{n-1}}$$

$$\rho_n = \rho_0.(1-x).(1-x).\dots.(1-x)$$

$$\rho_n = \rho_0.(1-x)^n$$

Mas

$$x = \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

E dado que

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = -k_s.\rho$$

Vem que

$$x = -k_s.\Delta t$$

Uma vez que os sinais negativos, tanto aqui quanto na equação discreta, significam saída, não se operam. Por isso, resulta que:

$$\rho_n = \rho_0.(1 - k_s.\Delta t)^n$$

Eis a equação discreta. A sequência ρ_n representa a concentração do fármaco no plasma sanguíneo após n trocas, dado não haver novas doses.

Agora, vamos passar do tratamento discreto para o tratamento contínuo a fim de ver o que ocorre com nosso modelo.

Obs.: A passagem a seguir envolve conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral, de maneira que, conforme o caso, será utilizado pelo professor somente.

Havíamos visto que:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = -k_s.\rho$$

Se fizermos Δt muito pequeno, no limite ($\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\rho}{\Delta t} = \frac{d\rho}{dt}$) chegaremos à equação diferencial:

$$\frac{d\rho}{dt} = -k_s.\rho$$

Reescrevendo e integrando ambos os membros:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -k_s.dt$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \int_0^t -k_s\,.dt$$

$$\ln\rho - \ln\rho_0 = -k_s.t$$

$$ln\frac{\rho}{\rho_0} = -k_s.t$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{-k_s.t}$$

Donde vem que:

$$\rho = \rho_0. e^{-k_s.t}$$

Esta é a solução contínua, também chamada de analítica. Podemos usá-la para calcular a concentração a qualquer momento (sem recursividade).

Vamos entender a taxa de eliminação:

A eliminação de um fármaco se dá por diferentes maneiras (renal, metabólica, respiratória e intestinal). A taxa de eliminação (k_s) se define por uma certa quantidade eliminada em um dado intervalo de tempo. Pode-se obter essa taxa do tempo de meia-vida, que é o tempo necessário para que a quantidade do fármaco no organismo caia à metade e que se pode encontrar facilmente na literatura:

$$k_s = \frac{ln2}{t_{\frac{1}{2}}}$$

Onde $t_{\frac{1}{2}}$ é o tempo de meia-vida

Vejamos como chegar neste resultado.

Ora, vimos que a equação analítica é dada por:

$$\rho = \rho_0. e^{-k_s.t}$$

Para o caso da meia-vida, tempo em que a quantidade do fármaco se reduz à metade, podemos fazer:

$$\rho = \frac{\rho_0}{2}$$

e

$$t = t_{\frac{1}{2}}$$

Então:

$$\frac{\rho_0}{2} = \rho_0 . e^{-k_s . t_{\frac{1}{2}}}$$

$$ln\frac{\rho_0}{2} = ln\rho_0 . e^{-k_s . t_{\frac{1}{2}}}$$

$$ln\rho_0 - ln2 = ln\rho_0 + lne^{-k_s . t_{\frac{1}{2}}}$$

$$-ln2 = lne^{-k_s . t_{\frac{1}{2}}}$$

$$-ln2 = -k_s . t_{\frac{1}{2}}$$

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{-ln2}{-k_s}$$

$$k_s = \frac{ln2}{t_{\frac{1}{2}}} \qquad (*)$$

3. Acerca do modelo discreto

Dada a equação discreta:

$$\rho_n = \rho_0 . (1 - k_s . \Delta t)^n$$

A sequência ρ_n representa a concentração do fármaco no plasma sanguíneo após n trocas. No nosso caso, simularemos uma troca a cada hora. Assim, $\Delta t = 1h$.

Uma vez que a meia-vida da morfina, conforme bula do Dimorf® (Cristália Produtos Químicos e Farmacêuticos Ltda., 2017), é de cerca de 2,5 horas, tem-se de (*) que:

$$k_s = \frac{ln2}{t_{\frac{1}{2}}} = \frac{ln2}{2{,}5} \cong 0{,}28h^{-1}$$

Sendo

$$n = t . \Delta t^{-1}$$

E

$$\rho_0 = 5{,}51\ ng/mL$$

Teremos, então:

$$\rho_0 = 5{,}51.(1 - 0{,}28)^0$$

$$\rho_1 = 5{,}51.(1 - 0{,}28)^1$$

E assim sucessivamente. A fim de prepararmos as condições para comparação com os valores reais, preencheremos até $t = 5h$.

O resultado será mostrado em uma tabela (planilha eletrônica) como a seguir:

Tabela T.3 – Dados para o modelo discreto

$t(h)$	$\rho_n(\frac{ng}{mL})$
0	5,51
1	3,97
2	2,86
3	2,06
4	1,48
5	1,07

Q.3a. Note que nossa sequência será dada pela progressão geométrica de termo inicial ρ_0 e razão $1 – 0{,}28 = 0{,}72 < 1$. Que tipo de relação obtemos aqui?

R: Trata-se de uma progressão geométrica decrescente, solução da sequência.

Outra informação que podemos extrair é a taxa de variação relativa da concentração do fármaco injetado para uma unidade de tempo, dada por:

$$r = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} = \frac{3{,}97 - 5{,}51}{5{,}51} = -0{,}28 = -28\%$$

Q.3b. A taxa de variação mudaria se utilizássemos outros termos da sequência em seu Cálculo? Porquê?

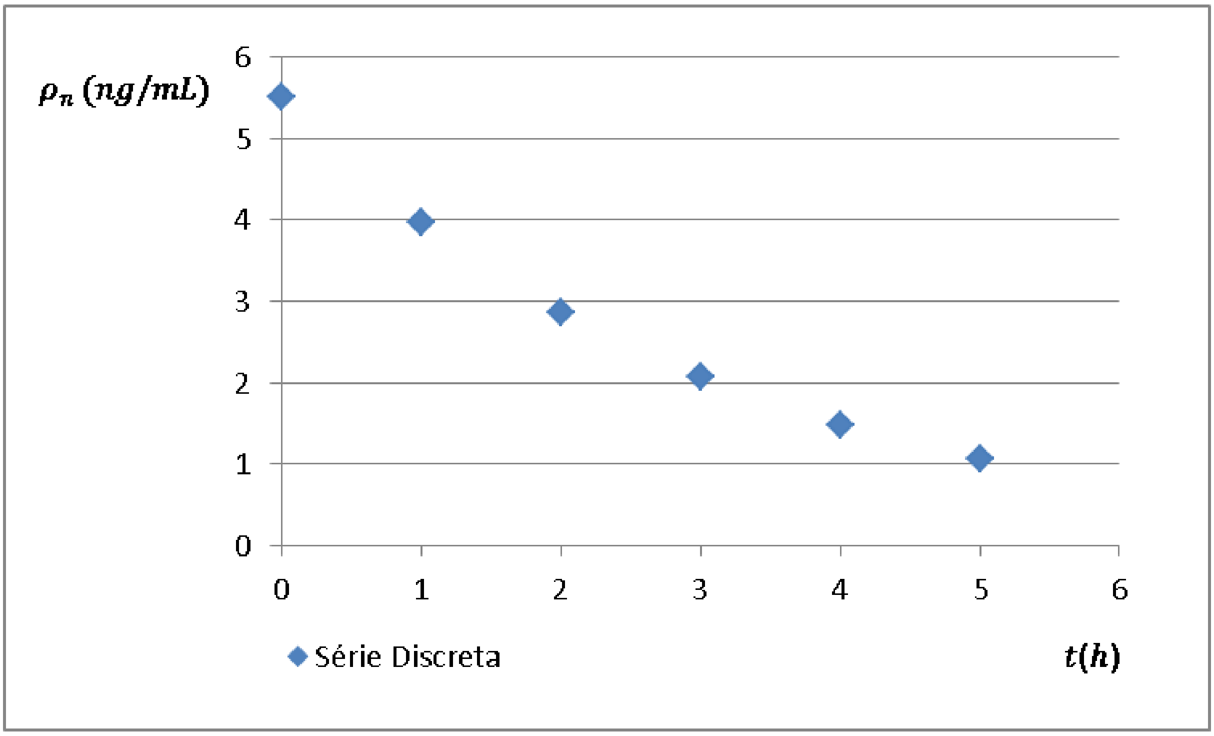
R: Não mudaria pois a taxa de variação é referente a uma progressão geométrica de 1ª ordem, e, por isso, constante.

Q.3c. O que significa o sinal negativo da taxa de variação?

R: Significa que a função (progressão geométrica) é decrescente, ou seja, a concentração se reduz ao longo do tempo.

Façamos um gráfico de $\rho(\frac{ng}{mL})$ em função de $t(h)$. Vamos denominá-lo Gráfico G.3

Gráfico G.3 – Modelo discreto



Fonte: próprio autor

4. Acerca do modelo contínuo

Dada a solução contínua para $\rho = \rho(t),\ t > 0$:

$$\rho = \rho_0 . e^{-k_s . t}$$

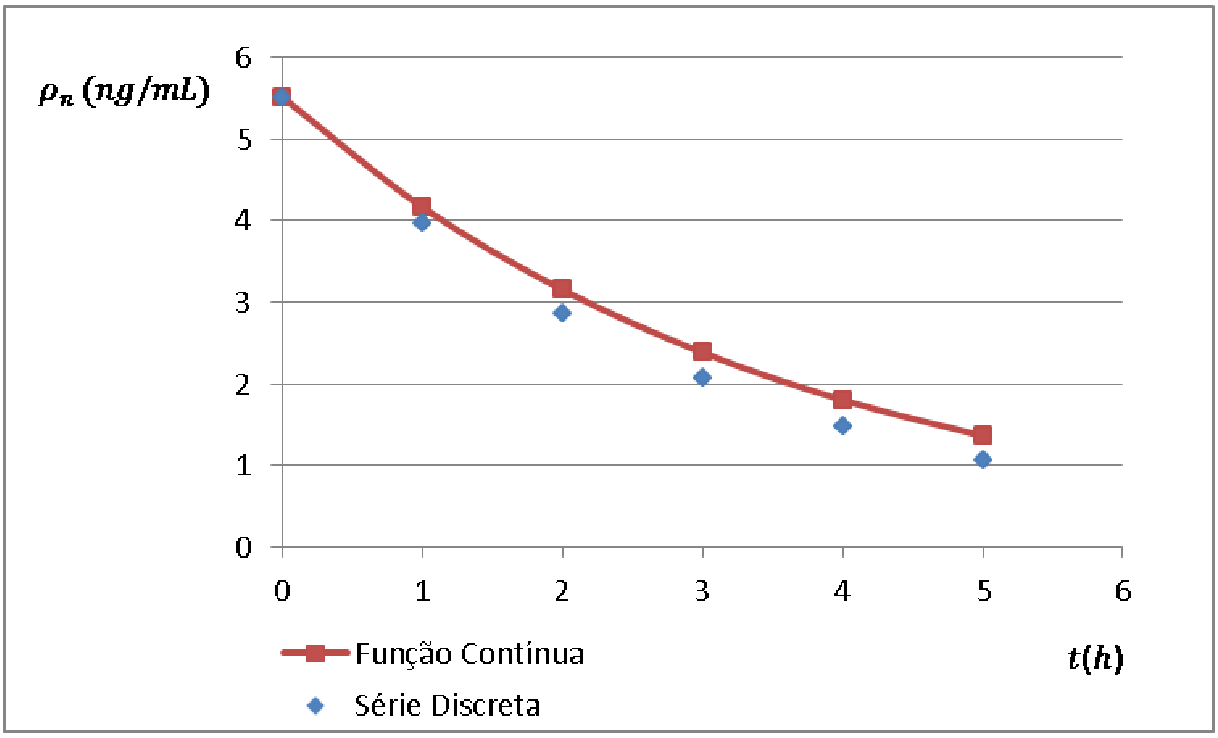
Usando a equação acima, vamos adicionar à nossa tabela T.3 uma coluna de $\rho(t)$ para o caso contínuo. Podemos ver o resultado na tabela T.4, a seguir.

Tabela T.4 – Dados para o modelo contínuo

$t(h)$	$\rho_n(\frac{ng}{mL})$	$\rho(\frac{ng}{mL})$
0	5,51	5,51
1	3,97	4,16
2	2,86	3,15
3	2,06	2,38
4	1,48	1,80
5	1,07	1,36

Em seguida, adicionaremos uma nova série no gráfico G.3 a partir dessa coluna, salvando-o agora como gráfico G.4. Note nele a diferença entre a série (progressão geométrica) e a função exponencial (contínua).

Gráfico G.4 – Modelo contínuo



Fonte: próprio autor

Analiticamente, do caso discreto, temos:

$$\rho = \rho_0.(1 - 0{,}28)^n$$

Mas

$$n = t.\Delta t^{-1},$$

Logo:

$$\rho = \rho_0.(1 - 0{,}28)^t$$

$$\rho = \rho_0.0{,}72^t$$

E do caso contínuo, vem que:

$$\rho = \rho_0.e^{-0{,}28.t}$$

$$\rho = \rho_0.0{,}76^t$$

As equações discreta e contínua confirmam os diferentes gráficos representando o mesmo fenômeno.

5. Acerca do modelo discreto aprimorado

Vamos agora fazer 10 trocas a cada hora:

$$\Delta t = 0{,}1h\ (6\ min)$$

Dados:

$$n = t.\Delta t^{-1}$$

$$\rho_0 = 5{,}51\ ng/mL$$

E lembrando a equação discreta:

$$\rho_n = \rho_0.(1 - k_s.\Delta t)^n$$

Vamos preencher outra tabela onde constem $t(h)$ e $\rho_n(\frac{ng}{mL})$:

Tabela T.5 – Dados para o modelo discreto aprimorado

$t(h)$	$\rho_n(\frac{ng}{mL})$
0	5,51
0,1	5,34
0,2	5,18
0,3	5,03
0,4	4,88
0,5	4,73
0,6	4,59
0,7	4,45
0,8	4,32
0,9	4,19
1	4,06
1,1	3,94
1,2	3,82
1,3	3,71
1,4	3,60
1,5	3,49
1,6	3,38
1,7	3,28
1,8	3,18
1,9	3,09

$t(h)$	$\rho_n(\frac{ng}{mL})$
2	3,00
2,1	2,91
2,2	2,82
2,3	2,73
2,4	2,65
2,5	2,57
2,6	2,50
2,7	2,42
2,8	2,35
2,9	2,28
3	2,21
3,1	2,14
3,2	2,08
3,3	2,02
3,4	1,96
3,5	1,90
3,6	1,84
3,7	1,79
3,8	1,73
3,9	1,68
4	1,63
4,1	1,58

$t(h)$	$\rho_n(\frac{ng}{mL})$
4,2	1,53
4,3	1,49
4,4	1,44
4,5	1,40
4,6	1,36
4,7	1,32
4,8	1,28
4,9	1,24
5	1,20

Note que agora temos:

$\rho = 5{,}51\,.(1 - 0{,}03)^{0.10}$

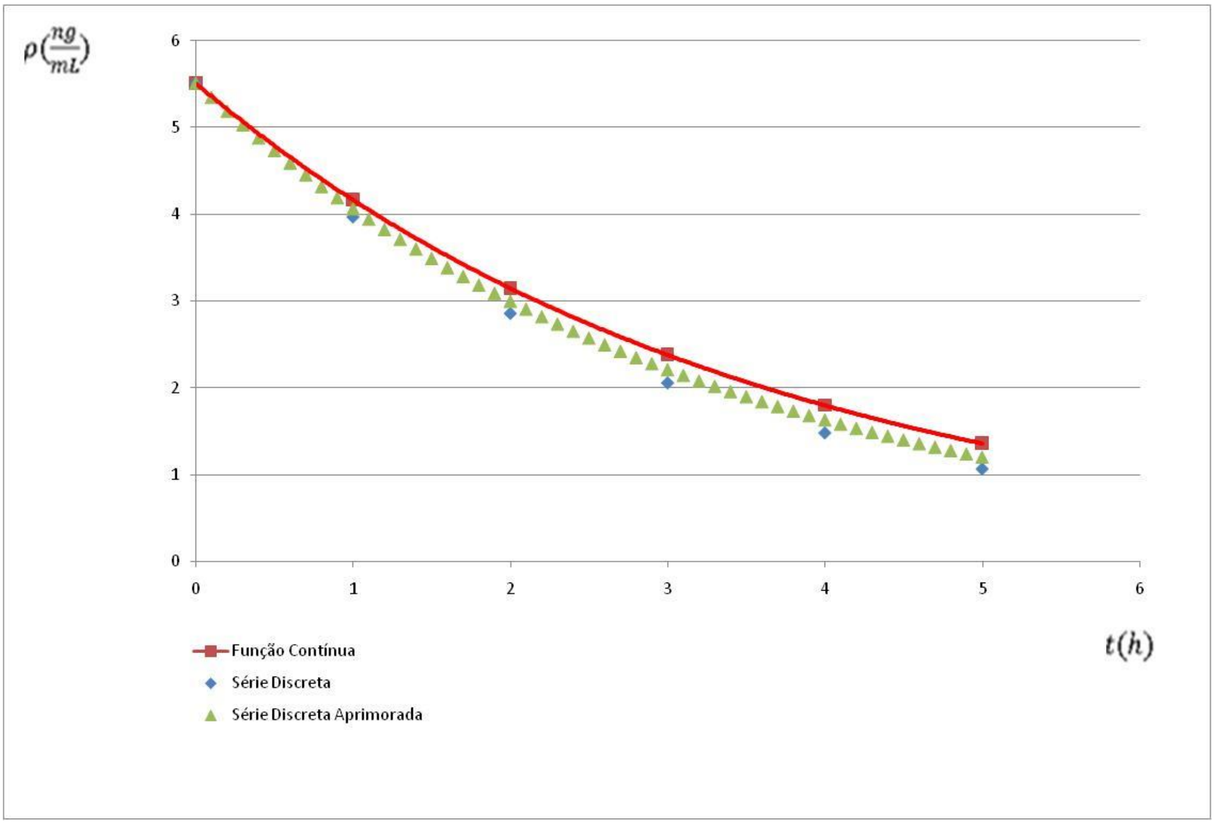
$\rho = 5{,}51\,.(1 - 0{,}03)^{0{,}1.10}$

$\rho = 5{,}51\,.(1 - 0{,}03)^{0{,}2.10}$

E assim sucessivamente até $t\ =\ 5h$.

Inserindo a nova série no gráfico de $\rho(\frac{ng}{mL})$ em função de $t(h)$ (gráfico G.4), renomeie-o gráfico G.5

Gráfico G.5 – Modelo discreto aprimorado



Fonte: próprio autor

Q.5. O que podemos concluir da comparação entre os gráficos?

R: A conclusão é que quanto menor o intervalo de tempo aplicado (no conjunto 3, menor que no conjunto 1), mais o gráfico da série discreta se aproxima da função contínua (função 2), tida como ideal mas que na maioria das vezes não pode ser calculada. Isto mostra o poder do método numérico na compreensão de fenômenos dinâmicos.

Analiticamente, do caso discreto, agora vem:

$$\rho = \rho_0.(1 - 0{,}03)^n$$

Mas

$$n = t.\Delta t^{-1},$$

Logo:

$$\rho = \rho_0.(1 - 0{,}03)^{10.t}$$

$$\rho = \rho_0 . 0{,}74^t$$

E do caso contínuo temos:

$$\rho = \rho_0 . e^{-0{,}28.t}$$

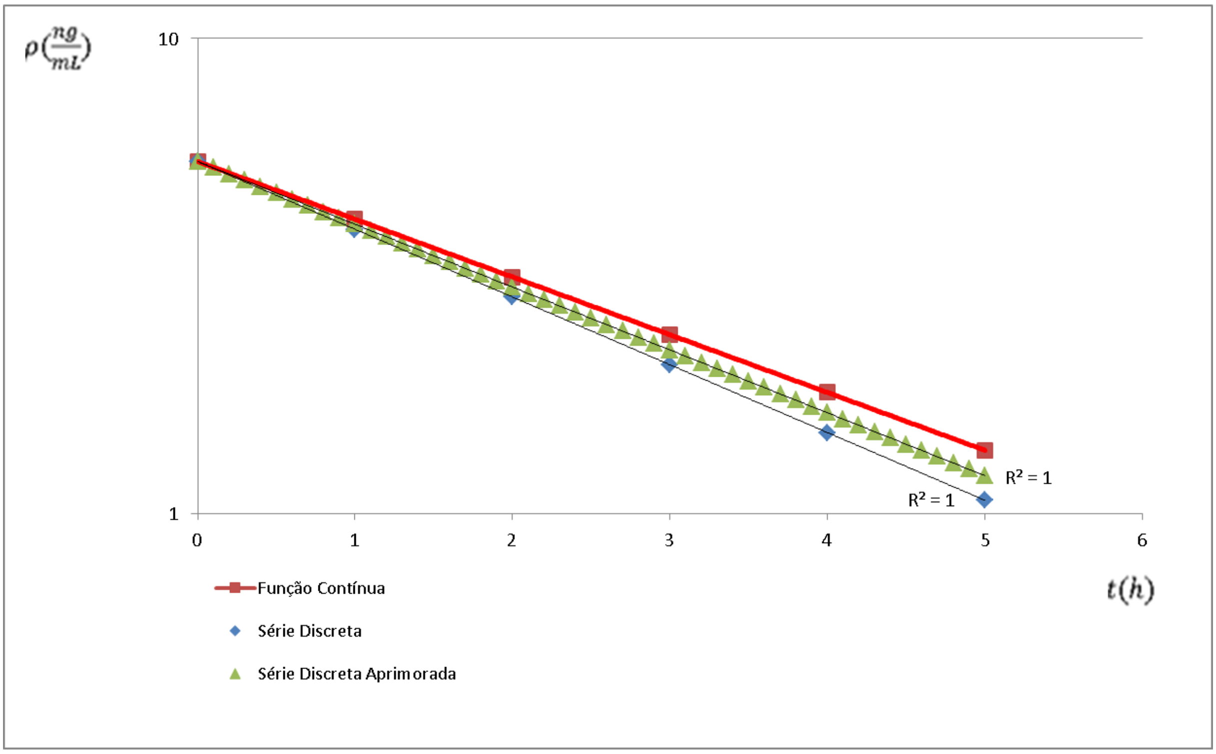
$$\rho = \rho_0 . 0{,}76^t$$

Note a aproximação razoável entre os gráficos das equações, confirmada pela aproximação da nova série com a função contínua.

6. Relação entre as funções exponencial e logarítmica

Vamos trabalhar agora as funções exponencial e logarítmica. Para isso, vamos alterar o eixo y do gráfico G.5 para escala logarítmica, renomeando-o como gráfico G.6, e observar o que acontece.

Gráfico G.6 – Alterando a escala da concentração



Fonte: próprio autor

Q.6. O que se pode concluir?

R: Ao transformarmos a escala do eixo y em logarítmica, estamos fazendo uma mudança de variável. Isso significa utilizar nossa equação de concentração, que é exponencial, como parâmetro de uma função logarítmica. Ao obtermos uma linha reta, processo conhecido como linearização, podemos utilizar uma regressão linear para encontrar a função que melhor representa os dados.

Vamos ver, matematicamente, o que aconteceu.

Alterar a escala significa aplicar a função logarítmica à nossa equação. Senão vejamos:

$$ln\,\rho = ln(5{,}51\,.\,e^{-0{,}28.t})$$

$$ln\rho = -0{,}28.\,t + ln5{,}51$$

$$ln\rho = -0{,}28.\,t + 1{,}71$$

Chamando $ln\rho$ de y e t de x, a e b constantes, temos:

$$y = a.\,x + b$$

Uma função linear, ou seja, uma reta no gráfico $ln\rho$ versus t!

7. Meia-vida

A meia-vida pode ser utilizada para trabalharmos a função exponencial. Por exemplo, supondo $\rho_0 =$ 2,755 ng/mL (metade do valor inicial), vamos adicionar outra coluna à tabela T.4, gerando a tabela T.7a (veja a seguir).

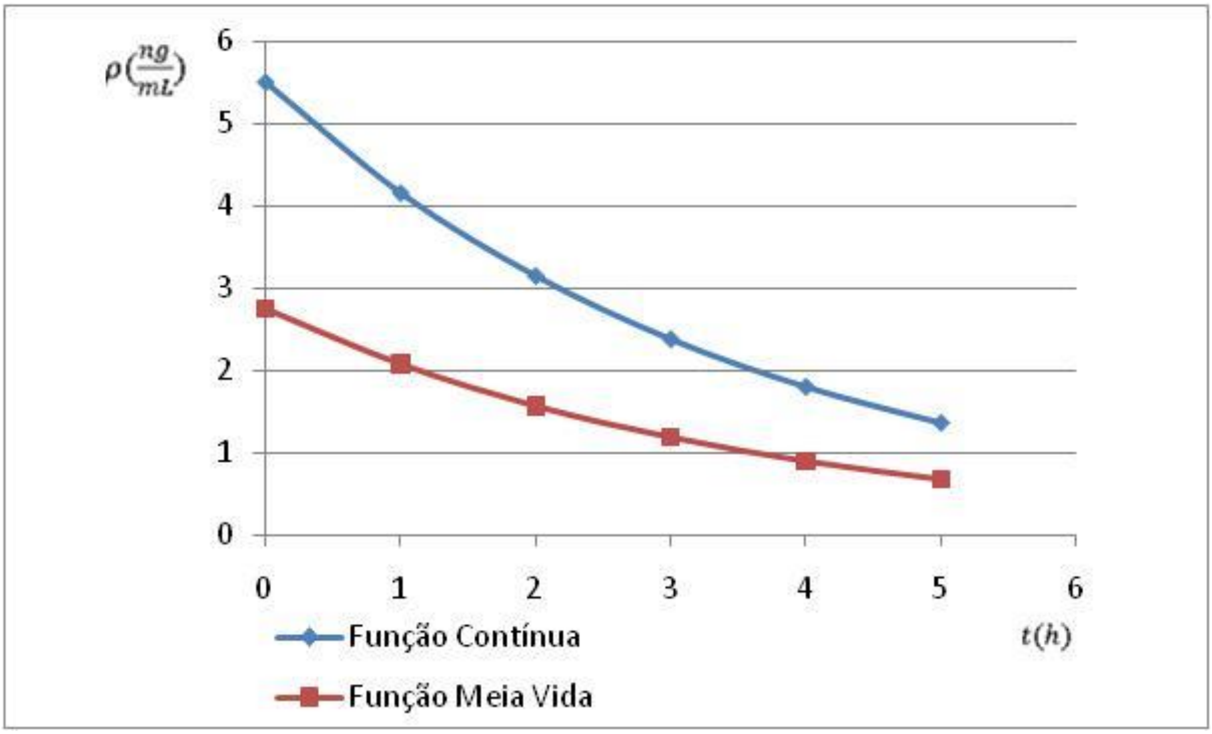
Tabela T.7a – Inserindo dados para a meia-vida

$t(h)$	$\rho_n(\frac{ng}{mL})$	$\rho(\frac{ng}{mL})$	$\frac{\rho}{2}(\frac{ng}{mL})$
0	5,51	5,51	2,76
1	3,97	4,16	2,09
2	2,86	3,15	1,58

$t(h)$	$\rho_n(\frac{ng}{mL})$	$\rho(\frac{ng}{mL})$	$\frac{\rho}{2}(\frac{ng}{mL})$
3	2,06	2,38	1,2
4	1,48	1,80	0,91
5	1,07	1,36	0,69

Na tabela T.7a colocaremos os resultados de $\rho = \rho_0 . e^{-k_s . t}$ a cada intervalo de tempo, gerando um novo gráfico (chame-o gráfico G.7a) que contenha apenas as funções contínuas.

Gráfico G.7a – Meia-vida?



Fonte: próprio autor

Q.7a. Podemos dizer que as funções são iguais?

R: Aparentemente, são diferentes.

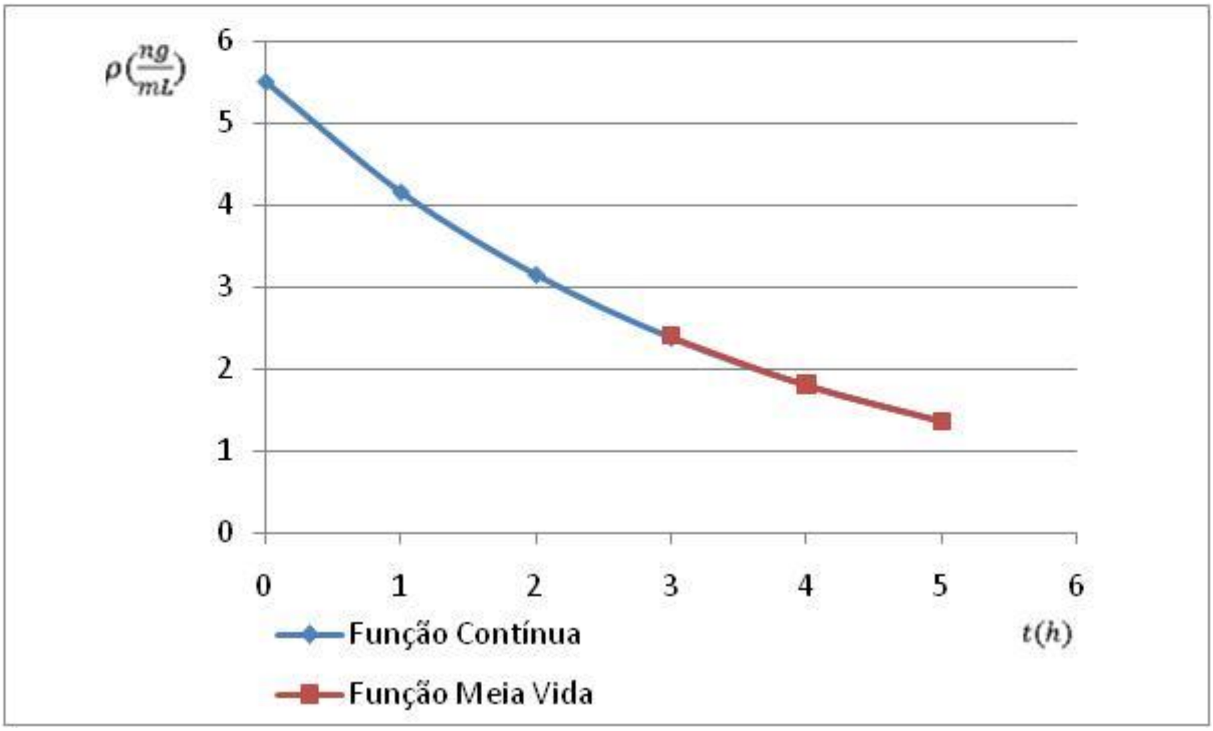
Agora, desloquemos a nova série $2{,}5\,h - 1$ à direita (fazendo $t = t - 2{,}5$), conforme a tabela abaixo:

Tabela T.7b - Deslocando dados para a meia-vida

$t(h)$	$\rho_n(\frac{ng}{mL})$	$\rho(\frac{ng}{mL})$	$\frac{\rho}{2}(\frac{ng}{mL})$
0	5,51	5,51	X
1	3,97	4,16	X
2	2,86	3,15	X
3	2,06	2,38	2,40
4	1,48	1,80	1,81
5	1,07	1,36	1,37

Com a nova série inserida no gráfico G.7a, renomeie-o como gráfico G.7b.

Gráfico G.7b – Meia-vida!



Fonte: próprio autor

Q.7b. O que aconteceu?

R: As series se sobrepõem. Isso indica que são idênticas, ou seja, possuem o mesmo decaimento.

Provemos que $\rho = 5{,}51.e^{-0{,}28.t}$ é o mesmo que $\rho = 2{,}755.e^{-0{,}28.(t-2{,}5)}$:

$$5{,}51.e^{-0{,}28.t} = 2{,}755.e^{-0{,}28.(t-2{,}5)}$$

$$2.e^{-0{,}28.t} = e^{-0{,}28.(t-2{,}5)}$$

$$e^{0{,}7}.e^{-0{,}28.t} = e^{-0{,}28.(t-2{,}5)}$$

$$e^{0{,}7-0{,}28t} = e^{-0{,}28.(t-2{,}5)}$$

$$0{,}7 - 0{,}28.t = -0{,}28.(t - 2{,}5)$$

$$0{,}7 - 0{,}28.t = -0{,}28t + 0{,}7 \qquad \text{c.q.d.}$$

Podemos notar as transformações no gráfico de ρn a partir de $t = t - 2{,}5$ (translação horizontal) e de $\rho = \frac{\rho_0}{2}$ (mudança na inclinação).

8. Comparação com os dados clínicos

Os dados extraídos do ensaio clinico (HOSKIN ET AL, 1989, P. 501) para validar nosso modelo estão a seguir:

Tabela T.8a – Dados clínicos

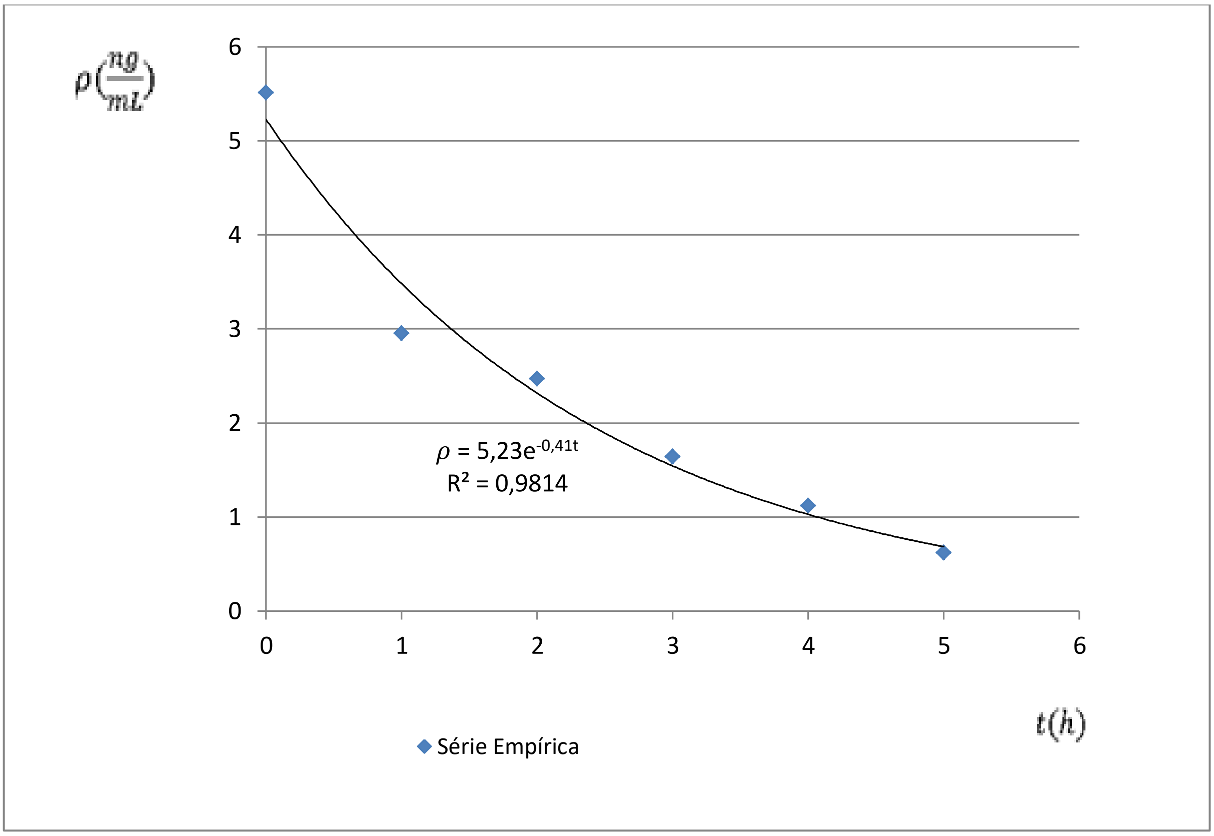
$t(h)$	$\rho(\frac{ng}{mL})$
0	5,51
1	2,95
2	2,47
3	1,64
4	1,12

$t(h)$	$\rho(\frac{ng}{mL})$
5	0,62

Abra a planilha, insira a tabela T.8a e faça um gráfico de $\rho(\frac{ng}{mL})$ em função de $t(h)$.

Como os dados tabelados são discretos, vamos inserir uma linha de tendência a fim de descobrir, pelo ajuste de curvas da planilha, qual curva melhor se adequa aos dados. Escolhida a curva, veja qual função o software mostra. O gráfico resultante será chamado gráfico G.8a.

Gráfico G.8a – Dados clínicos



Fonte: próprio autor

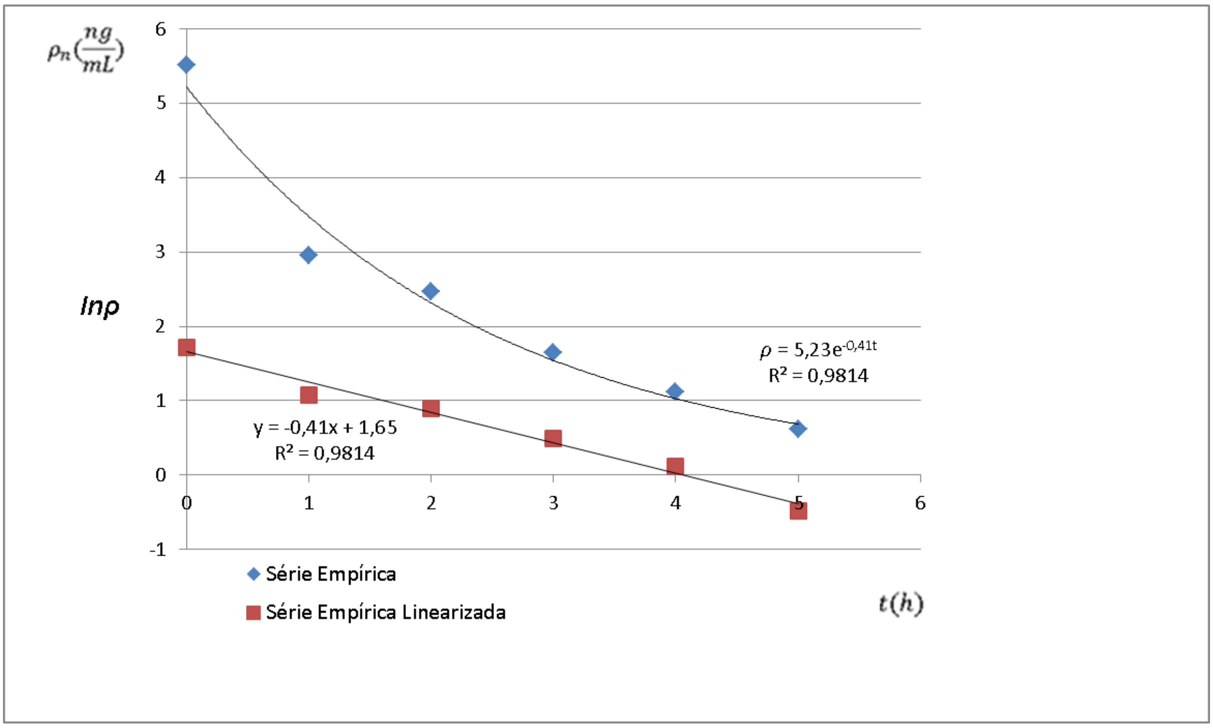
Os valores de k_s e ρ_0 estão explícitos na equação ρ = 5,23. $e^{-0,41t}$, t > 0.

Aqui pode-se questionar como o software determinou a linha de tendência. Para responder isso, vamos adicionar uma coluna à tabela T.8.a com os valores de $ln\rho$ de modo a gerar uma nova série no gráfico (conforme a tabela T.8b, a seguir). Depois vamos inserir a melhor linha de tendência (gráfico G.8b) e, considerando o exposto em A.2.6, comparar os valores das equações.

Tabela T.8b – Linearização dos dados clínicos

$t(h)$	$\rho(\frac{ng}{mL})$	$ln\rho$
0	5,51	1,71
1	2,95	1,08
2	2,47	0,90
3	1,64	0,49
4	1,12	0,11
5	0,62	-0,48

Gráfico G.8b – Linearização dos dados clínicos



Fonte: próprio autor

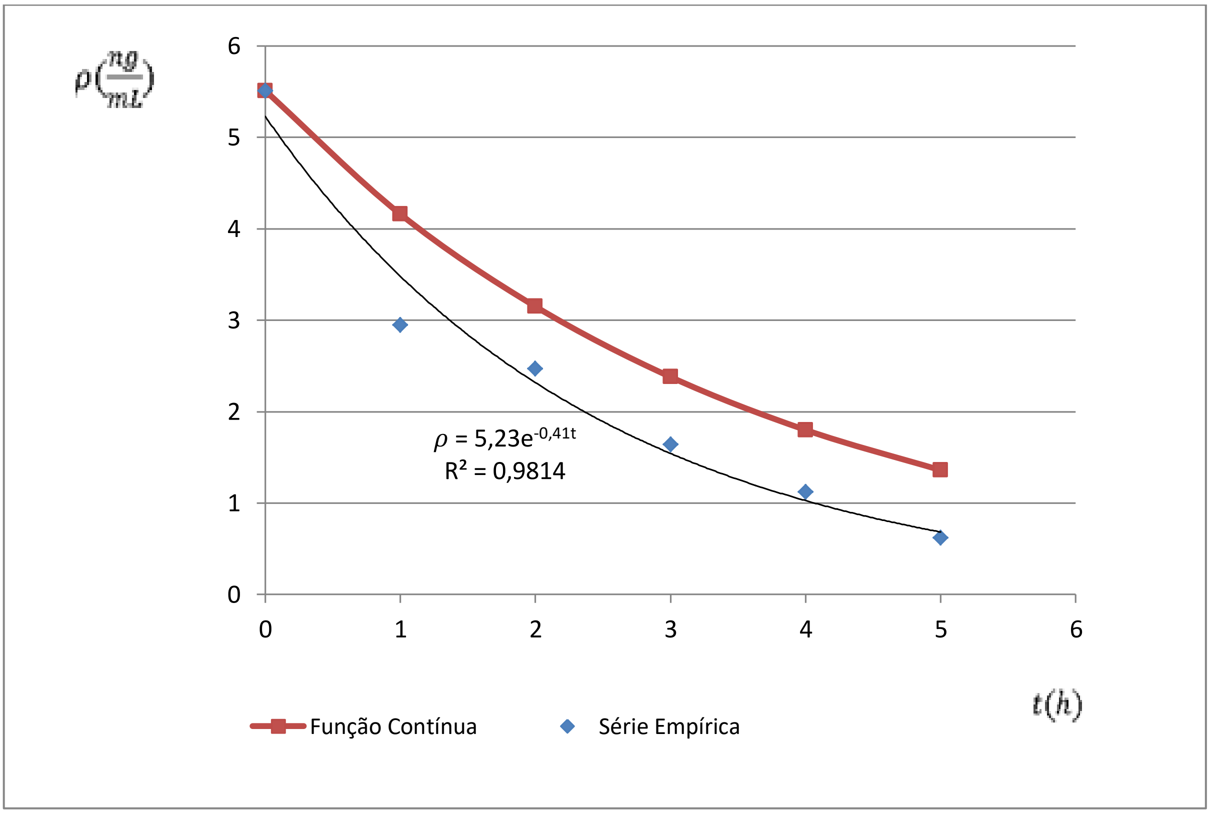
Nossa conclusão é que o software parece utilizar uma regressão linear a partir do método dos mínimos quadrados. Para isso, precisa linearizar a curva. Isso pode gerar erros pois o ideal, a despeito da complexidade, seria utilizar regressão não linear a partir da curva original.

Insira uma coluna na tabela T.8a com os dados da função contínua (conforme a tabela T.8c, a seguir) e gere, a partir dela, o novo gráfico (chame-o gráfico G.8c). Insira a linha de tendência.

Tabela T.8c – Comparativo dos dados clínicos e do modelo contínuo

$t(h)$	$\rho_n(\frac{ng}{mL})$	$\rho(\frac{ng}{mL})$
0	5,51	5,51
1	2,95	4,16
2	2,47	3,15
3	1,64	2,38
4	1,12	1,80
5	0,62	1,36

Gráfico G.8c – Comparativo dos dados clínicos e do modelo contínuo



Fonte: próprio autor

Q.8. Comparando os dados da função contínua e do experimento, o que se pode concluir?

R: Pode-se concluir, dada a semelhança entre as curvas, que o modelo parece refletir razoavelmente bem o fenômeno.

9. Limitações do modelo

Vamos observar as diferenças entre os valores de concentração obtidos experimentalmente e os calculados analiticamente (através dos parâmetros extraídos da equação no gráfico G.8a). A cada instante, teremos $d = \rho_e - \rho_c$, em que ρ_e representa o valor experimental e ρ_c o valor obtido pela aproximação da função contínua.

Monte uma tabela como a seguir:

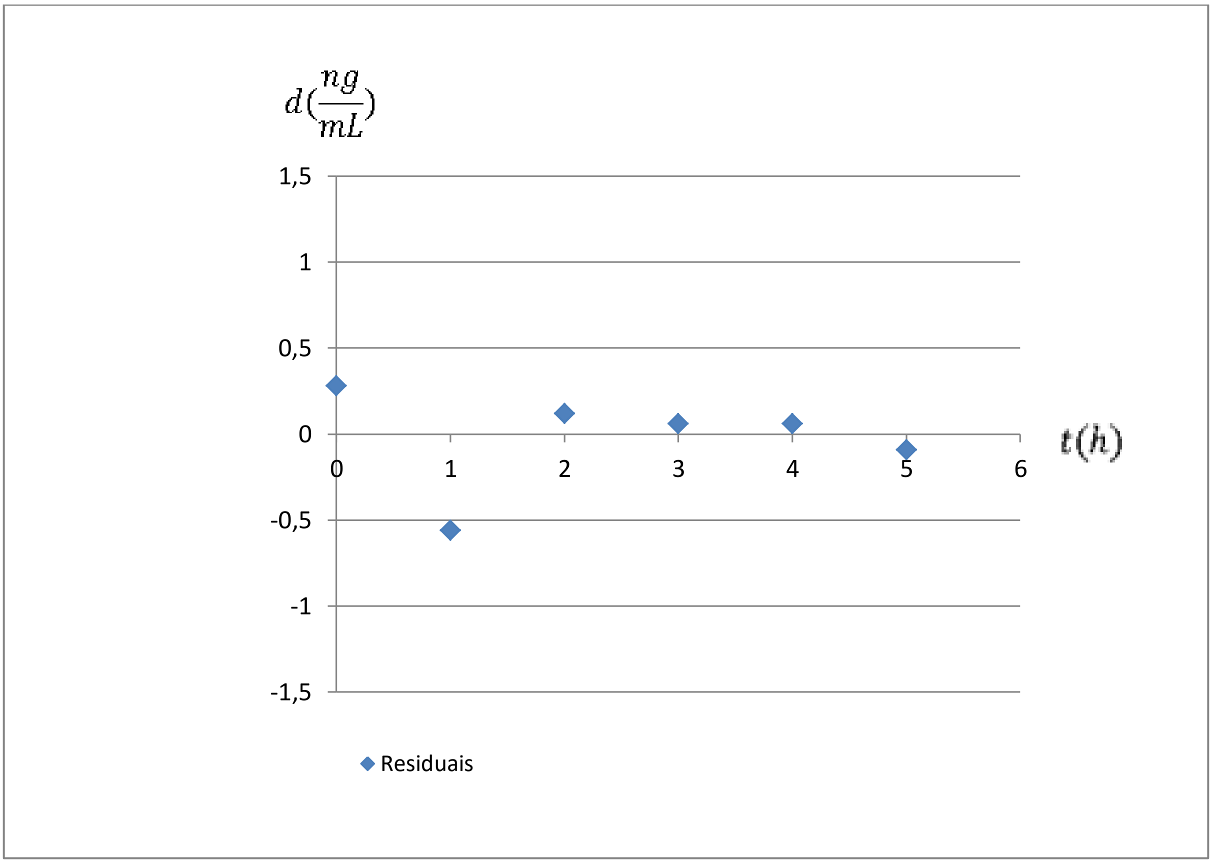
Tabela T.9 – Valores residuais

$t(h)$	$\rho_e(\frac{ng}{mL})$	$\rho_c(\frac{ng}{mL})$	$d(\frac{ng}{mL})$
0	5,51	5,23	0,28
1	2,95	3,51	-0,56
2	2,47	2,35	0,12
3	1,64	1,58	0,06
4	1,12	1,06	0,06
5	0,62	0,71	-0,09

O modelo será tão mais fiel ao fenômeno quanto menores forem os valores de d.

A partir da tabela, vamos gerar o gráfico de residuais (d versus $t(h)$), o qual será denominado gráfico G.9.

Gráfico G.9 – Valores residuais



Fonte: próprio autor

Observando o gráfico, pode-se ver que há um desvio pontual em $t = 1h$. Se aceitarmos que nosso modelo não é perfeito, concluiremos que ele não reflete bem o comportamento do fenômeno em $t = 1h$, mas o faz bem para $t >= 2h$. Vamos calcular o erro máximo em percentagem:

$$\Delta\% = \frac{|\rho_e - \rho_c|}{\rho_c}(\frac{100\%}{1})$$

$$\Delta\% = \frac{|2,95 - 3,51|}{3,51}(\frac{100\%}{1})$$

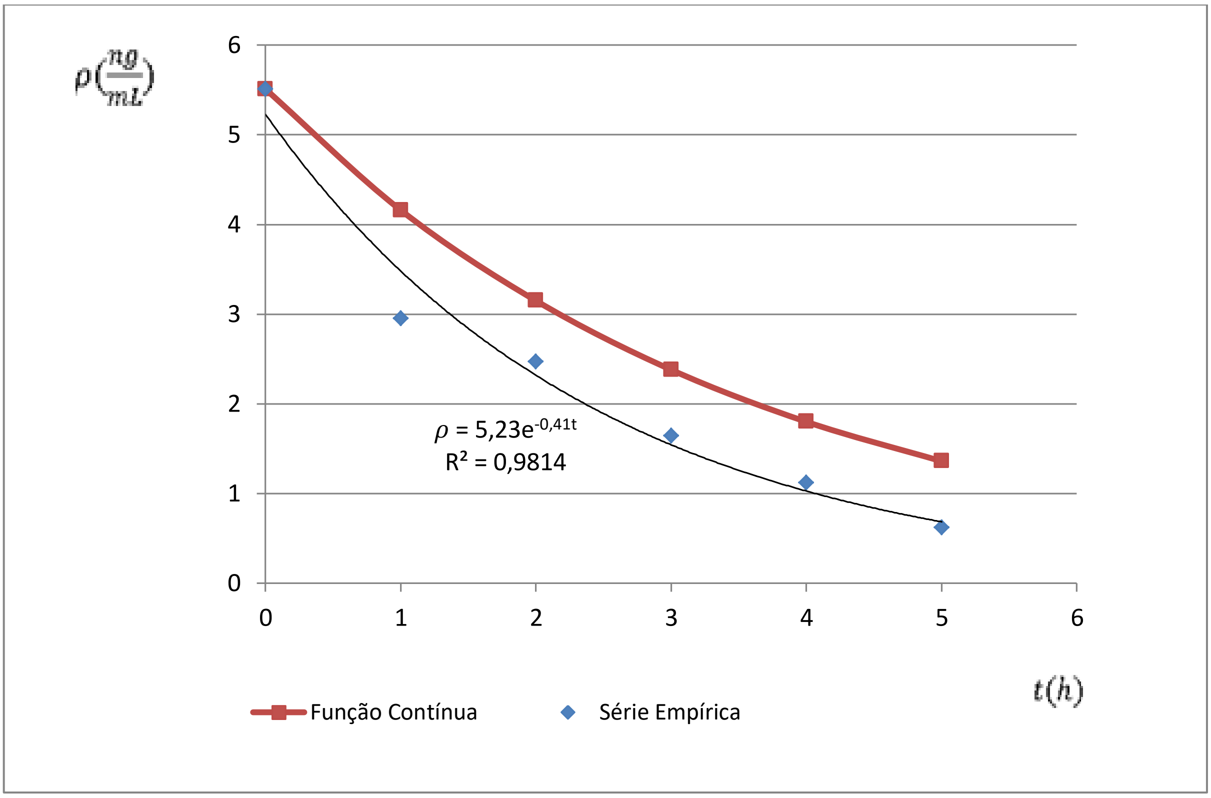
$$\Delta\% \cong 16\%$$

10. Desafios

Q.10a. O que nos diz esta diferença entre os parâmetros do modelo experimental e do modelo contínuo?

R: Pode-se deduzir que o fármaco, para este paciente, decai mais rapidamente, como mostra a curva no gráfico.

Gráfico G.8c – Comparativo dos dados clínicos e do modelo contínuo



Fonte: próprio autor

Q.10b. Com o novo valor de k_s podemos determinar a meia-vida para este paciente, especificamente, já que esse parâmetro é bastante confiável agora. Qual seria a meia-vida no caso do experimento então? Compare-a com as mencionadas no artigo original e na literatura.

R: Ao usarmos $ks = 0{,}41$ para descobrir a meia-vida nesse paciente, vem:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{ln2}{k_s}$$

Do que resulta $1{,}7\ h$, em concordância com o artigo original! Entretanto, percebe-se a subjetividade da Farmacocinética quando a comparação ocorre com o valor da literatura, $2{,}5\ h$, pois cada organismo elimina o fármaco de maneira mais rápida ou mais devagar.

Q.10c. O que aconteceria com o gráfico se a droga fosse injetada em um paciente renal crônico, incapaz de eliminar o fármaco no tempo previsto? O que isso significa em termos de meia-vida?

R: Neste caso, o fármaco decairia mais lentamente, implicando em um tempo de meia-vida maior.

Q.10d. Sabendo que a droga exerce o efeito analgésico em concentração superior a $1\ ng/mL$, após quanto tempo deveríamos injetar uma nova dose?

R: Vamos substituir a concentração na fórmula encontrada para descobrir o tempo:

$$\rho = 5{,}23.\,e^{-0{,}41.t}$$

$$1 = 5{,}23.\,e^{-0{,}41.t}$$

$$0{,}19 = e^{-0{,}41.t}$$

$$ln\ 0{,}19 = -0{,}41.\,t$$

$$-1{,}66 = -0{,}41.\,t$$

$$t \cong 4h$$

Q.10e. Observando o obtido do gráfico dos dados experimentais, e sabendo que a massa de morfina injetada foi de $5\ mg$, podemos concluir que apenas uma pequena parte da morfina circula no sangue. O que isso significa?

R: Isso significa que a morfina injetada flui rapidamente do sangue para o sistema nervoso, ali agindo. Após isso, supõe-se que seja metabolizada e eliminada como outra substância.

3 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Nossa proposta partiu da inquietude do pesquisador diante das limitações verificadas no ensino de fenômenos científicos e da possibilidade de aprimorar a compreensão dos mesmos através da Matemática. Vimos como tal ensino, conduzido de maneira tradicional, leva à dificuldade de aprendizagem e ao desinteresse por parte dos alunos.

Ao lançar a hipótese, debruçamo-nos sobre os resultados de pesquisas já realizadas, deles se extraindo instrumentos adequados à nova conduta, dentre os quais destacamos a Modelagem Matemática Realista e o aprendizado ativo, sempre sob a égide das evidências obtidas. Em especial, destacamos o uso dos métodos numéricos na resolução de modelos matemáticos de fenômenos dinâmicos, de maneira a evitar a necessidade de domínio do Cálculo Diferencial e Integral pelos estudantes e, simultaneamente, prepará-los para isso.

Vimos como a tecnologia pode ser nossa aliada ao possibilitar o exercício de diversos conceitos matemáticos e a aplicação do método científico, inserindo o raciocínio analítico e despertando nos alunos o interesse pelas Ciências e a prática da aprendizagem ativa.

O uso de planilhas ficou evidenciado pela praticidade e familiaridade, ante seu caráter amigável ao usuário e sua ampla disponibilidade.

Com isso, validamos nossa hipótese e partimos para a proposta de uma atividade de modelagem numérica, a qual visa explorar a interdisciplinaridade, ao abordar o interessante e atual tema da Farmacologia, e o uso intensivo da tecnologia, com os benefícios daí oriundos. Através dela obtivemos um poderoso instrumento de previsão de dose e de intervalo de administração do fármaco, eliminando a necessidade de sucessivas coletas de sangue em pacientes já impactados pela dor.

O pesquisador, antes empolgado apenas com a didática proporcionada pelo método, foi surpreendido com seu poder de aplicação.

Em resumo, vimos como a modelagem numérica realista explora os conceitos propostos na reformulação do ensino das ciências ao exercitar o raciocínio quantitativo, fazer uso da tecnologia e promover a participação ativa dos estudantes. Tratando-se de produto interdisciplinar e flexível, pode ser utilizada tanto no ensino médio quanto no ensino superior, nas áreas em que os fenômenos apresentem dificuldade de entendimento.

É de nossa percepção que este trabalho pode servir de estímulo aos pesquisadores interessados em aprofundar os métodos aqui citados, dado que não tivemos a intenção de exaurir o tema. Fica também a sugestão de inserção do mesmo nos currículos dos cursos de formação de professores, tanto do Ensino Médio quanto do Ensino Superior nas áreas em que fenômenos dinâmicos devam ser explorados.

REFERÊNCIAS

American Association for the Advancement of Science. Vision and Change in Undergraduate Biology Education: A Call to Action, Final Report, 2011. Disponível em: http://visionandchange.org/finalreport.

Alder, M. **An Introduction to Mathematical Modelling: A Menagerie of Difference Equations**. Austrália: HeavenforBooks.Com., 2001.

Baker, J., & Sugden, S. J. Spreadsheets in Education - The first 25 years. **Spreadsheets in Education,** 1(1), p. 18-43, 2003.

Barbosa, A. C., Carvalhaes, C. G., & Costa, M. V. A computação numérica como ferramenta para o professor de Física do Ensino Médio. **Revista Brasileira de Ensino de Física,** 28(2), p. 249-254, 2006.

Bassanezi, R. C., & Ferreira Jr., W. C. **Equações Diferenciais com Aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.

Bassanezi, R. C., Bisognin, E., Bisognin, V., & Salvador, J. A. Modelagem Computacional para o Ensino de Matemática. *In:* Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2014, Natal/RN, Disponível em: http://www.sbmac.org.br/arquivos/notas/livro_54.pdf.

Benacka, J. Spreadsheet Numerical Modeling in Secondary School Physics and Biology. **Spreadsheets in Education,** 2(3), p. 3, 2008.

Benacka, J. High-altitude free fall revised. **American Journal of Physics**, 78(6), p. 616-619, 2010.

Benacka, J. School mathematics with Excel. *In:* M. Lau, & S. J. Sugden, **Applications of Spreadsheets in Education: The Amazing Power of a Simple Tool**. União dos Emirados Árabes: Bentham Science Publishers/Bentham eBooks, 2011, p. 173-240.

Benacka, J. Introduction to 3D graphics through Excel. **Informatics in Education**, 12(2), p. 221-230, 2013.

Benacka, J. Creating realistic 3D graphics with Excel at high school – vector algebra in practice. **Informatics in Education**, 14(2), p. 161-173, 2015.

Benacka, J. Introduction to integral calculus at high school through calculating area and volume with spreadsheets. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 47(1), p. 149-155, 2015.

Benacka, J. Projectile general motion in a vacuum and a spreadsheet simulation. **Physics Education**, 50(1), p.58, 2015.

Benacka, J. Spreadsheet application showing the proper elevation angle, points of shot and impact of a projectile. **Physics Education**, 50(3), p. 342-347, 2015.

Benacka, J. Numerical Modelling with Spreadsheets as a Means to Promote STEM to High School Students. **Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education**, 12(4), p. 947-964, 2016.

Benacka, J., & Ceretkova, S. Excel modelling in upper secondary mathematics – a few tips for learning functions and calculus. *In:* Ubuz, B., Haser, C., & Mariotti, M. A., **Proceedings of CERME 8**. Turquia: Middle East Technical University, 2013, p. 970-979.

Benacka, J., & Ceretkova, S. Modelling harvesting animal population at high school with spreadsheets – the case of Moby Dick. **Spreadsheets in Education**, 7(3), p. 107-112, 2014.

Benacka, J., & Stubna, I. Ball launched against an inclined plane – an example of using recurrent sequences in school physics. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 40(5), p. 696-705, 2009.

Biembengut, M. S., & Faria, T. M. B. Modelagem Matemática na Formação de Professores: Possibilidades e Limitações. *In:* Congresso Nacional de Educação, IX, 2009, Curitiba/PR.

Brasil. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br.

Brasil. Ministério da Educação. Diretrizes curriculares para os cursos de graduação. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12991.

Brasil. Câmara de Ensino Básico do Conselho Nacional de Educação. Resolução CEB n. 3, 26 jun. 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb03_98.pdf.

Brasil. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CP 027/2001 e CNE/CP 028/2001, 2 out. 2001. Disponíveis em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/027.pdf e http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/028.pdf.

Brenner, D. G., Buckley, B. C., Loveland, M. T., Quellmalz, E.S., Silberglitt, M. D. Simulations for Supporting and Assessing Science Literacy. *In:* **Handbook of Research on Technology Tools for Real-World Skill Development**, Estados Unidos da América: IGI Global, 2015. p.191-229.

Brosnan, T. Using spreadsheets to develop understanding in science. *In:* H. Mellar, R. Boohan, J. Bliss, J. Ogborn, & C. Tompsett, **Learning with Artificial Worlds: Computer Based Modelling in the Curriculum.** Inglaterra: Falmer Press, 1994. p. 73-84.

Buckley, B., Gobert, J., Kindfield, A., Horwitz,P., Tinker, R., Gerlits, B., & Willett, J. et al. Model-based teaching and learningwith BioLogica™: What do they learn? How dothey learn? How do we know? **Journal of Science Education and Technology**, 13(1), p. 23–41, 2004.

Buckley, B. C. Model-based teaching. *In:* M. Norbert (Ed.), **Encyclopedia of the sciences of learning**. Estados Unidos da América: Springer, 2012. p. 2312–2315.

Burghes, D. N., & Borrie, M. S. Mathematical modeling: A new approach to teaching applied mathematics. **Physics Education,** 14, p. 82-86, 1979.

Buxton, G. A. Mathematical Modelling and Computer Simulation in Undergraduate Biology Education, **Spreadsheets in Education**, 10(3), 2018.

Chabay, R. W., & Sherwood, B. A. **Matter and interactions: Modern mechanics, vol. I**. Estados Unidos da América: John Wiley & Sons, 2002.

Chabay, R., & Sherwood, B. Computational physics in the introductory calculus-based course. **American Journal of Physics**, 76(4&5), p. 307-313, 2008.

Chevallard, Y. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Rio Grande do Sul: Artmed, 2001.

Cláudio, D. M., & Marins, J. M., **Cálculo Numérico Computacional.** São Paulo: Atlas, 1989.

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. *In:* L. B. Resnick (Ed.), **Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser**. Inglaterra: Routledge, 1989. p. 453–494.

Cristália Produtos Químicos e Farmacêuticos Ltda. Dimorf®, sulfato de morfina pentaidratada: **Modelo de Bula para Profissional de Saúde**, 2017. Disponível em: http://www.anvisa.gov.br/datavisa/fila_bula/frmVisualizarBula.asp?pNuTransacao=425882017&pIdAnexo=4575944.

Crook, S. J., Sharma, M. D., & Wilson, R. An evaluation of the impact of 1:1 laptops on student attainment in senior high school sciences. **International Journal of Science Education**, 37(2), p. 272-293, 2015.

D'Angelo, C., Rutstein, D., Harris, C., Bernard, R., Borokhovski, E., Haertel, G. **Simulations for STEM Learning: Systematic Review and Meta-Analysis (Executive Summary)**. Canadá: SRI International, 2014.

DiCarlo, S. Too much content, not enough thinking, and too little fun! **AJP Advances in Physiology Education,** 33(4), p. 257-264, 2009.

Doerr, H., & Lesh, R. Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. *In:* E. Y. P. Cobb, & K. McClain, **Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design**. Estados Unidos da América: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 361-383.

Drier, H. S. Teaching and learning mathematics with interactive spreadsheets. **School Science and Mathematics**, 101(4), p. 170-179, 2001.

Duschl, R. A., Schweingruber, H. A., & Shouse,A. W. **Taking science to school: Learning and teaching science in grades k–8**. Estados Unidos da América: The National Academies Press, 2007.

Erickson, T. E. **SBIR Phase I Final Report**: Connecting Mathematics and Science through Data. Estados Unidos da América, 2001, Disponível em: http://www.eeps.com/pdfs/FathomSciencePhaseI_Report.pdf.

Estados Unidos da América. National Research Council. **Everybody counts**. Estados Unidos da América: National Academy of Sciences, 1989. p. 36.

Eylon, B. S. Physical Sciences: secondary school programs. *In:* Husén, T. (Ed.). **Education: the complete encyclopedia.** Estados Unidos da América: Pergamon Press, 1998.

Ferruzzi, E. C. **A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos Superiores de Tecnologia**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas). Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2003.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. **Investigação em Educação Matemática - percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores associados, 2012.

Freudenthal, H. **Mathematics as an educational task.** Holanda: D. Reidel Publishing Company, 1973.

Galbraith, P. & Pemberton, M. Convergence or divergence? Students, Maple, and mathematics learning. *In:* Barton, B. ET AL, **Mathematics Education in the South Pacific.** Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia, 2002, p.285-292.

Gilbert, J. K., Boulter, C. J., & Elmer, R. Positioning models in science education and in design and Technology education. *In:* Gilbert J. K., Boulter C. J. (Eds.), **Developing models in science education,** 2000, p. 3-17.

Glancy, A. W., & Moore, T. J. Theoretical Foundations for Effective STEM Learning Environments. **School of Engineering Education Working Papers**. Purdue e-Pubs, 2013. Disponível em: http://docs.lib.purdue.edu/enewp/1.

Greiner, W. **Classical Mechanics. Point Particles and Relativity**. Estados Unidos da América: Springer, 2004.

Hake, R. R. Interactive-engagement vs traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses. **American Journal of Physics**, 66, p. 64-74, 1998.

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, R. **Fundamentals of Physics**. Estados Unidos da América: Hoboken, 2011.

Hamilton, E., Lesh, R. A., Lester, F., & Brilleslyper, M. Model-eliciting activies as a bridge between engineering education research and mathematics education research. **Advances in Engineering Education**, 1(2), 2008.

Haspekian, M. An “instrumental approach” to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets**. International Journal of Computers for Mathematical Learning,** 10(2), p. 109-141, 2005.

Healy, L., & Sutherland, R. **Exploring Mathematics with Spreadsheets**. Inglaterra: Nelson Thornes, 1992.

Heller, P., Keith, R., & Anderson, S., Teaching problem solving through cooperative grouping: 1. Group versus individual problem solving. **American Journal of Physics**, 60, p. 627-637, 1992.

Hmelo-Silver, C. E., Jordan, R., Liu, L., Gray,S., Demeter, M., Rugaber, S., & Goel, A. et al. Focusing on Function: Thinking belowthe Surface of Complex Natural Systems. **Science Scope**, 31(9), p. 27–35, 2008.

Hodgson, S. M., Rojano, T., Sutherland, R., & Ursini, S. Mathematical modeling: The interaction of culture and practice. **Educational Studies in Mathematics**, 39(1-3), p. 167-183, 1999.

Hoskin, P. J., Hanks, G. W., Aerne, G. W., Chapman, D., Littleton, P., & Filshie, J. The bioavailability and pharmacokinetics of morphine after intravenous, oral in buccal administration in healthy volunteers. **British Journal of Clinical Pharmacology**, 27, p. 499 – 505, 1989.

Ioannidou, A., Repenning, A., Webb, D., Keyser, D., Luhn, L., & Daetwyler, C. Mr. Vetro:A Collective Simulation for teaching healthscience. **International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning**, 5(2), p. 141–166, 2010.

Kaiser, G., & Sriraman, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, 38(3), p. 302-310, 2006.

Kaiser-Messmer, G. **Anwendungen im Mathematikunterricht, vol. I**. Alemanha: Springer, 1986.

Karim, N. I. et al. Do evidence-based active-engagement courses reduce the gender gap inintroductory physics? **European Journal of Physics**. 39(2), 2018.

Keune, M., & Henning, H. Modelling and spreadsheet calculation. *In:* Ye, Q., Blum, W., Houston, K., & Jiang, Q. **Mathematical Modelling in Education and Culture**. Inglaterra: Horwood Publisher, 2003. p. 101-110.

Krajcik, J., Marx, R., Blumenfeld, P., Soloway, E., & Fishman, B. Inquiry based science supported by technology: Achievement among urban middle school students. *In:* 2000 Annual Meeting of the American Educational Research Association, Estados Unidos da América. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED443676.pdf.

Lawrence, I., & Whitehouse, M. (Eds.). **Advancing Physics.** Inglaterra: Institute of Physics, 2000.

Laws, P., Willis, M., Jackson, D., Koenig, K. & Teese, R. Using research-based interactive video vignettes to enhance out-of-class learning in introductory physics, **The Physics Teacher**, 53(2), p.114-117, 2015.

Lehrer, R., & Schauble, L. Scientific thinking and science literacy: Supporting development in learning in contexts. *In:* Damon, W., Lerner, R., Renninger, K. & Sigel, I., **Handbook of child psychology (6th Ed., Vol. 4)**. Estados Unidos da América: John Wiley and Sons, 2006.

Lesh, R. A., & Harel, G. Problem Solving, Modeling, and Local Conceptual Development. **Mathematical Thinking and Learning**, 5(2&3), p. 157-189, 2003.

Lesh, R. A., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. **Research design in mathematics and science education,** p. 591-646, 2000.

Lim, K. F. A Survey of First-Year University Students' Ability to use Spreadsheets. **Spreadsheets in Education,** 1(2), 2004.

Lim, K. F. Book Review: The Active Modeler: Mathematical Modeling with Microsoft Excel by E. Neuwirth and D.Arganbright. **Spreadsheets in Education**, 1(3), 2005.

Lingefjärd, T., & Meier, S. The Sun hour project. *In:* Kaiser, G., Blum, W., Ferri, R. B., & Stillman, G., **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**. Alemanha: Springer, 2011. p. 97-106.

Molon, J. **Cálculo no Ensino Médio: Uma Abordagem Possível e Necessária com Auxíio do Software Geogebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2013.

Moreira, M. A. Ensino de Física no Brasil: retrospectiva e perspectiva. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 22(1), p. 94-99, 2000.

Narayan, R., Park, S., Peker, D., & Suh, J. Students' Images of Scientists and Doing Science: An International Comparison Study. **Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education,** 9(2), p. 115-129, 2013.

National Council of Teachers of Mathematics. **Principles and standards for school mathematics.** Estados Unidos da América: Reston VA, 2000.

Nearing, J. Mathematical Tools for Physics. **Notas de aula.** Estados Unidos da América: University of Miami, 2003.

Nelson, P. H. Teaching introductory STEM with the Marble Game. **Artigo.** Estados Unidos da América: Benedictine University, 2014.

Nelson, P. H. **Biophysics and Physiological Modeling - Chapter 4: Model Validation and Penicillin. (v.4.3).** Estados Unidos da América: Benedictine University, 2014. Disponível em: http://circle4.com/biophysics.

Neurath, R. A., & Stephens, L. J. The effect of using Microsoft Excel in a high school algebra class. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 37(6), p. 721-756, 2006.

Neuwirth, E., & Arganbright, D. **The Active Modeler: Mathematical Modeling with Microsoft® Excel**. Canadá: Brooks/Cole – Thomson Learning, 2004.

Nisawa, Y., & Moriya, S. Evaluation of teaching activities with multi-variable functions in context. *In:* Kaiser, W. B. G. **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**. Alemanha: Springer, 2011, p. 117–126.

Oliveira, M., & Nápoles, S. Functions and Mathematical Modelling with Spreadsheets. **Spreadsheets in Education**, 10(2), 2017.

Olver, P. J. Nonlinear Ordinary Differential Equations. *In:* Olver, P. J. **Ordinary Differential Equations**, Estados Unidos da América: University of Minnesota, 2012, p. 1081-1142.

Ornek, F. Models in Science Education: Applications of Models in Learning and Teaching Science. **International Journal of Environmental & Science Education**, 3(2), p. 35-45, 2008.

Pashler, H., Bain, P. M., Bottge, B. A., Graesser,A., Koedinger, K., McDaniel, M., & Metcalfe, J. U.S. Department of Education. Organizing instruction and study to improve student learning, a practice guide, 2007, Disponível em: https://ies.ed.gov/ncee/wwc/Docs/PracticeGuide/20072004.pdf

Pedrosa, B. M.; Câmara, G. Modelagem dinâmica: conceitos básicos e exemplos de sistemas. *In:* Almeida, C. M.; Monteiro, A. M. V.; Câmara, G. **Geoinformação em urbanismo: cidade real x cidade virtual**. São Paulo: Oficina de Textos, 2007. p.86-105

Pereira, V. M. Cálculo no Ensino Médio: **Uma Proposta para o Problema da Variabilidade**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

Pollak, H. How can we teach applications of mathematics? **Educational Studies in Mathematics**, 2, p. 393-404, 1969.

Raizen, S. A., The reform of science education in the U.S.A. Déjà vu? **Studies in Science Education**, 19, p. 1-41, 1991.

Rezende, W. M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

Rieber, L. P., Tzeng, S. C., & Tribble, K. Discovery learning, representation, and explanation within a computer-based simulation: Finding the right mix. **Learning and Instruction**, 14(3), p. 307–323, 2004.

Salvador, J. A., & Arenales, S. H. V. **Modelagem Matemática ambiental**. São Carlos: EDUFSCar, 2012.

Santana Júnior, E. J. **Uso do Geogebra no Ensino das Funções Quadráticas: Uma proposta para sala de aula**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal da Paraíba, Paraíba, 2011.

Schwartz, D. L., & Heiser, J. Spatial representations and imagery in learning. *In:* Sawyer R. K. (Ed.), **The Cambridge handbook of the learning sciences**. Estados Unidos da América: Cambridge University Press, 2006.

Schwarz, C. V., Reiser, B. J., Davis, E. A., Kenyon, L., Achér, A., Fortus, D., & Krajcik, J. Developing a Learning Progression for Scientific Modeling: Making Scientific Modeling Accessible and Meaningful for Learners. **Journal of Research in Science Teaching**, 46(6), p. 632-654, 2009.

Schwarz, C., & White, B. Metamodeling knowledge: Developing students' understanding of scientific modeling. **Cognition and Instruction**, 23(2), p. 165-205, 2005.

Sinex, S. A. Exploring Radioactive Decay in Excel: An Interactive Visual Thinking Tool. **Using Computers in Chemical Education Newsletter**, Estados Unidos da América: Prince George's Community College, 2005.

Sivasubramaniam, P. Distributed cognition, computers and the interpretation of graphs. **Research in Mathematics Education**, 2(1), p. 169-190, 2000.

Slotta, J. D., & Chi, M. T. H. The impact of ontology training on conceptual change: Helping students understand the challenging topics in science. **Cognition and Instruction**, 24(2), p. 261–289, 2006.

Smith, G. A., First-day questions for the learner-centered classroom. **National Teaching and Learning Forum**, Estados Unidos da América, 2008.

Spina, C. D. **Modelagem Matemática no Processo Ensino-Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2002.

Stewart, J., Cartier, J., & Passmore, C. Developing understanding through model-based inquiry. *In:* Donovan, M. & Bransford, J. **How students learn**. Estados Unidos da América: National Research Council, 2005, p. 515-565.

Stieff, M., & Wilensky, U. Connected chemistry—incorporating interactive simulations into the chemistry classroom. **Journal of Science Education and Technology**, 12(3), p. 285–302, 2003.

Tregidgo, D., & Ratcliffe, M. The use of modeling for improving pupils' learning about cells. **School Science Review**, 81, p. 53-59, 2000.

Truskey, G. A., Yuan, F., & Katz, D. F. **Transport phenomena in biological systems.** Estados Unidos da América: Pearson Prentice Hall, 2009.

Veit, E. A., & Teodoro, V. D. Modelagem no ensino/aprendizagem de Física e os novos parâmetros curriculares nacionais para o Ensino Médio. **Artigo.** Rio Grande do Sul, 2011.

Wells, M., Hestenes, D., & Swackhamer, G. A modeling method for high school physics instruction, **American Journal of Physics**, 63, p. 606-619, 1995.

White, B. Y., & Frederiksen, J. R. Inquiry, modeling, and metacognition: Making science accessible to all students. **Cognition and Instruction**, 16(1), p. 3–118, 1998.

Windschitl, M., Thompson, J., & Braaten, M. Beyond the scientific method: Model-based inquiry as a new paradigm of preference for school science investigations. **Science Education,** 92(5), p. 941-967, 2008.

Yarker, M. B. & Park, S. Analysis of Teaching Resources for Implementing an Interdisciplinary Approach in the K-12 Classroom. **Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education**, 8(4), p. 223-232, 2012.

APÊNDICE

Modelo matemático de eliminação de drogas do organismo

A seguir, descrevemos a atividade que poderá ser aplicada e que vem ao encontro do objetivo deste trabalho. Ela mostra como utilizar o método científico e pode ser aplicada tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior.

Ao validarmos um modelo de como as drogas são eliminadas do corpo em relação a dados clínicos previamente obtidos, exercitamos o método científico.

A.1. Informações para a aplicação da atividade:

A.1.1. Atividade: eliminação de drogas do organismo.

A.1.2. Objetivo: exercitar o método científico através do uso de métodos numéricos para obter um modelo matemático que se aproxime de um fenômeno real, a fim de proporcionar a compreensão de diversos tópicos relacionados à Matemática, como sequências e funções, e aos fenômenos dinâmicos, como, neste exemplo, a Farmacocinética de eliminação de drogas.

A.1.3. Turma: Ensino Médio ou cursos de graduação, em particular na área da saúde.

A.1.4. Disciplinas: Matemática (Ensino Médio) e Matemática Aplicada ou outras que abordem Farmacocinética (Ensino Superior).

A.1.5. Duração: de 6 a 12 horas-aula.

A.1.6. Recursos materiais: computador com planilha eletrônica.

A.1.7. Pré-requisitos: alguma familiaridade com ambiente computacional e com planilhas eletrônicas. Espera-se o conhecimento matemático básico de sequências e funções.

A.1.8. Metodologia: atividade de modelagem em grupos de 2 a 4 alunos, conduzida em laboratório.

A.2. Desenvolvimento sugerido

A.2.1. Introdução

Trata-se da injeção intravascular de 5 miligramas (mg) de sulfato de morfina em um indivíduo adulto, o que resulta em uma concentração plasmática de 5,51 nanogramas por mililitro (ng/mL) verificado experimentalmente certo tempo após a injeção (ρ_0).

A.2.2. Roteiro teórico

A critério do professor, com base no exposto em 2.2.2 e considerando-se o nível matemático e científico da turma.

A.2.3. Modelo discreto

Dada a equação discreta:

$$\rho_n = \rho_0.(1 - k_s.\Delta t)^n$$

A sequência ρ_n representa a concentração do fármaco no plasma sanguíneo após n trocas. No nosso caso, simularemos uma troca a cada hora. Assim, $\Delta t = 1h$.

Uma vez que a meia-vida da morfina, conforme bula do Dimorf® (Cristália Produtos Químicos e Farmacêuticos Ltda., 2017), é de cerca de 2,5 horas, tem-se de (*) que:

$$k_s = \frac{ln2}{t_{\frac{1}{2}}} = \frac{ln2}{2,5} \cong 0,28h^{-1}$$

Sendo

$$n = t.\mathit{\Delta} t^{-1}$$

E

$$\rho_0 = 5,51\ ng/mL$$

Teremos, então:

$$\rho_0 = 5,51.(1 - 0,28)^0$$

$$\rho_1 = 5,51.(1 - 0,28)^1$$

e assim sucessivamente. A fim de prepararmos as condições para comparação com os valores reais, preencheremos até $t = 5h$.

O resultado será mostrado em uma tabela (planilha eletrônica) como a seguir:

Tabela T.A.2.3 – Dados para o modelo discreto

$t(h)$	$\rho_n(\frac{ng}{mL})$
0	
...	
5	

Q.A.2.3a. Note que nossa sequência será dada pela progressão geométrica de termo inicial ρ_0 e razão $1 - 0{,}28 = 0{,}72 < 1$. Que tipo de relação obtemos aqui?

Outra informação que podemos extrair é a taxa de variação relativa da concentração do fármaco injetado para uma unidade de tempo, dada por:

$$r = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} = \frac{3{,}97 - 5{,}51}{5{,}51} = -0{,}28 = -28\%$$

Q.A.2.3b. A taxa de variação mudaria se utilizássemos outros termos da sequência em seu Cálculo? Porquê?

Q.A.2.3c. O que significa o sinal negativo da taxa de variação?

Façamos um gráfico de $\rho(\frac{ng}{mL})$ em função de $t(h)$. Vamos denominá-lo Gráfico G.A.2.3

A.2.4. Modelo contínuo

Dada a solução contínua para $\rho = \rho(t),\ t > 0$:

$$\rho = \rho_0 . e^{-k_s . t}$$

Usando a equação acima, vamos adicionar à nossa tabela T.3 uma coluna de $\rho(t)$ para o caso contínuo. Podemos ver o resultado na tabela T.A.2.4, a seguir. Em seguida, adicionaremos uma nova série no gráfico G.A.2.3 a partir dessa coluna, salvando-o agora como gráfico G.A.2.4. Note nele a diferença entre a série (progressão geométrica) e a função exponencial (contínua).

Tabela T.A.2.4 – Dados para o modelo contínuo

$t(h)$	$\rho_n(\frac{ng}{mL})$	$\rho(\frac{ng}{mL})$
0		
...		
5		

Analiticamente, do caso discreto, temos:

$$\rho = \rho_0.(1 - 0{,}28)^n$$

Mas

$$n = t.\Delta t^{-1},$$

Logo:

$$\rho = \rho_0.(1 - 0{,}28)^t$$

$$\rho = \rho_0.0{,}72^t$$

E do caso contínuo, vem que:

$$\rho = \rho_0.e^{-0{,}28.t}$$

$$\rho = \rho_0.0{,}76^t$$

As equações discreta e contínua confirmam os diferentes gráficos representando o mesmo fenômeno.

A.2.5. Modelo discreto aprimorado

Vamos agora fazer 10 trocas a cada hora:

$$\Delta t \; = \; 0{,}1h \; (6 \; min)$$

Dados:

$$n = t. \Delta t^{-1}$$

$$\rho_0 = 5{,}51 \; ng/mL$$

E lembrando a equação discreta:

$$\rho_n = \rho_0. (1 - k_s. \Delta t)^n$$

Vamos preencher outra tabela onde constem $t(h)$ e $\rho_n(\frac{ng}{mL})$:

Tabela T.A.2.5 – Dados para o modelo discreto aprimorado

$t(h)$	$\rho_n(\frac{ng}{mL})$
0,0	
...	
5,0	

Note que agora temos:

$$\rho = 5{,}51 \, . (1 - 0{,}03)^{0.10}$$

$$\rho = 5{,}51 \, . (1 - 0{,}03)^{0{,}1.10}$$

$$\rho = 5{,}51 \, . (1 - 0{,}03)^{0{,}2.10}$$

E assim sucessivamente até $t \; = \; 5h$.

Inserindo a nova série no gráfico de $\rho(\frac{ng}{mL})$ em função de $t(h)$ (gráfico G.A.2.4), renomeie-o gráfico G.A.2.5

Q.A.2.5. O que podemos concluir da comparação entre os gráficos?

Analiticamente, do caso discreto, agora vem:

$$\rho = \rho_0.(1 - 0{,}03)^n$$

Mas

$$n = t.\Delta t^{-1},$$

Logo:

$$\rho = \rho_0.(1 - 0{,}03)^{10.t}$$

$$\rho = \rho_0.0{,}74^t$$

E do caso contínuo temos:

$$\rho = \rho_0.e^{-0{,}28.t}$$

$$\rho = \rho_0.0{,}76^t$$

Note a aproximação razoável entre as equações, confirmada pela aproximação da nova série com a função contínua.

A.2.6. Relação entre as funções exponencial e logarítmica

Vamos trabalhar agora as funções exponencial e logarítmica. Para isso, vamos alterar o eixo y do gráfico G.A.2.5 para escala logarítmica, renomeando-o como gráfico G.A.2.6, e observar o que acontece.

Q.A.2.6. O que se pode concluir?

Vamos ver, matematicamente, o que aconteceu.

Alterar a escala significa aplicar a função logarítmica à nossa equação. Senão vejamos:

$$ln\,\rho = ln(5{,}51\,.\,e^{-0{,}28.t})$$

$$ln\rho = -0{,}28.\,t + ln5{,}51$$

$$ln\rho = -0{,}28.\,t + 1{,}71$$

Chamando $ln\rho$ de y e t de x , a e b constantes, temos:

$$y = a.\,x + b$$

Uma função linear, ou seja, uma reta no gráfico $ln\rho$ versus t!

A.2.7. Meia-vida

A meia-vida pode ser utilizada para trabalharmos a função exponencial. Por exemplo, supondo $\rho_0 = 2{,}755$ ng/mL (metade do valor inicial), vamos adicionar outra coluna à tabela T.A.2.4, gerando a tabela T.A.2.7a (veja a seguir).

Tabela T.A.2.7a – Inserindo dados para a meia-vida

$t(h)$	$\rho_n(\frac{ng}{mL})$	$\rho(\frac{ng}{mL})$	$\frac{\rho}{2}(\frac{ng}{mL})$
0			
...			
5			

Na tabela T.A.2.7a colocaremos os resultados de $\rho = \rho_0.\,e^{-k_s.t}$ a cada intervalo de tempo, gerando um novo gráfico (chame-o gráfico G.A.2.7a) que contenha apenas as funções contínuas.

Q.A.2.7a. Podemos dizer que as funções são iguais?

Agora, desloquemos a nova série 2,5 $h-1$ à direita (fazendo $t = t - 2{,}5$), conforme a tabela abaixo. Com a nova série inserida no gráfico G.A.2.7a, renomeie-o como gráfico G.A.2.7b.

Tabela T.A.2.7b - Deslocando dados para a meia-vida

$t(h)$	$\rho_n(\frac{ng}{mL})$	$\rho(\frac{ng}{mL})$	$\frac{\rho}{2}(\frac{ng}{mL})$
0			X
1			X
2			X
3			
4			
5			

Q.A.2.7b. O que aconteceu?

Provemos que $\rho = 5{,}51.e^{-0{,}28.t}$ é o mesmo que $\rho = 2{,}755.e^{-0{,}28.(t-2{,}5)}$:

$$5{,}51.e^{-0{,}28.t} = 2{,}755.e^{-0{,}28.(t-2{,}5)}$$

$$2.e^{-0{,}28.t} = e^{-0{,}28.(t-2{,}5)}$$

$$e^{0{,}7}.e^{-0{,}28.t} = e^{-0{,}28.(t-2{,}5)}$$

$$e^{0{,}7-0{,}28t} = e^{-0{,}28.(t-2{,}5)}$$

$$0{,}7 - 0{,}28.t = -0{,}28.(t - 2{,}5)$$

$$0{,}7 - 0{,}28.t = -0{,}28t + 0{,}7 \qquad \text{c.q.d.}$$

Podemos notar as transformações no gráfico de ρn a partir de $t = t - 2{,}5$ (translação horizontal) e de $\rho = \frac{\rho_0}{2}$ (mudança na inclinação).

A.2.8. Comparação com os dados clínicos

Os dados extraídos do ensaio clinico (HOSKIN ET AL, 1989, p. 501) para validar nosso modelo estão a seguir:

Tabela T.A.2.8a – Dados clínicos

$t(h)$	$\rho(\frac{ng}{mL})$
0	5,51
1	2,95
2	2,47
3	1,64
4	1,12
5	0,62

Abra a planilha, insira a tabela T.A.2.8a e faça um gráfico de $\rho(\frac{ng}{mL})$ em função de $t(h)$.

Como os dados tabelados são discretos, vamos inserir uma linha de tendência a fim de descobrir, pelo ajuste de curvas da planilha, qual curva melhor se adequa aos dados. Escolhida a curva, veja qual função o software mostra. O gráfico resultante será chamado gráfico G.A.2.8a.

Os valores de k_s e ρ_0 estão explícitos na equação.

Aqui pode-se questionar como o software determinou a linha de tendência. Para responder isso, vamos adicionar uma coluna à tabela T.A.2.8.a com os valores de $ln\rho$ de modo a gerar uma nova série no gráfico (conforme a tabela T.A.2.8b, a seguir). Depois vamos inserir a melhor linha de tendência (gráfico G.A.2.8b) e, considerando o exposto em A.2.6, comparar os valores das equações.

Tabela T.A.2.8b – Linearização dos dados clínicos

$t(h)$	$\rho(\frac{ng}{mL})$	$ln\rho$

$t(h)$	$\rho(\frac{ng}{mL})$	$ln\rho$
0		
...		
5		

Nossa conclusão é que o software parece utilizar uma regressão linear a partir do método dos mínimos quadrados. Para isso, precisa linearizar a curva. Isso pode gerar erros pois o ideal seria utilizar regressão não linear a partir da curva original.

Insira uma coluna na tabela T.A.2.8a com os dados da função contínua (conforme a tabela T.A.2.8c, a seguir) e gere, a partir dela, o novo gráfico (chame-o gráfico G.A.2.8c). Insira a linha de tendência.

Tabela T.A.2.8c – Comparativo dos dados clínicos e do modelo contínuo

$t(h)$	$\rho_n(\frac{ng}{mL})$	$\rho(\frac{ng}{mL})$
0	5,51	
1	2,95	
2	2,47	
3	1,64	
4	1,12	
5	0,62	

Q.A.2.8. Comparando os dados da função contínua e do experimento, o que se pode concluir?

A.2.9. Limitações do modelo

Vamos observar as diferenças entre os valores de concentração obtidos experimentalmente e os calculados analiticamente (através dos parâmetros extraídos da equação no gráfico G.8a). A cada instante, teremos $d = \rho_e - \rho_c$, em que ρ_e representa o valor experimental e ρ_c o valor obtido pela aproximação da função contínua.

Monte uma tabela como a seguir:

Tabela T.A.2.9 – Valores residuais

$t(h)$	$\rho_e(\frac{ng}{mL})$	$\rho_c(\frac{ng}{mL})$	$d(\frac{ng}{mL})$
0			
...			
5			

O modelo será tão mais fiel ao fenômeno quanto menores forem os valores de d.

A partir da tabela, vamos gerar o gráfico de residuais (d versus $t(h)$), o qual será denominado gráfico G.9.

Observando o gráfico, pode-se ver que há um desvio pontual em $t = 1h$. Se aceitarmos que nosso modelo não é perfeito, concluiremos que ele não reflete bem o comportamento do fenômeno em $t = 1h$, mas o faz bem para $t >= 2h$. Vamos calcular o erro máximo em percentagem:

$$\Delta\% = \frac{|\rho_e - \rho_c|}{\rho_c}\left(\frac{100\%}{1}\right)$$

$$\Delta\% = \frac{|2{,}95 - 3{,}51|}{3{,}51}\left(\frac{100\%}{1}\right)$$

$$\Delta\% \cong 16\%$$

A.2.10. Desafios

Q.A.2.10a. Com o novo valor de k_s podemos determinar a meia-vida para este paciente, especificamente, já que esse parâmetro é bastante confiável agora. Qual seria a meia-vida no caso do experimento então? Compare-a com as mencionadas no artigo original e na literatura.

Q.A.2.10b. Qual seria a meia-vida no caso do experimento então? Compare-a com as mencionadas no artigo original e na literatura.

Q.A.2.10c. O que aconteceria com o gráfico se a droga fosse injetada em um paciente renal crônico, incapaz de eliminar o fármaco no tempo previsto? O que isso significa em termos de meia-vida?

Q.A.2.10d. Sabendo que a droga exerce o efeito analgésico em concentração superior a 1 ng/mL, após quanto tempo deveríamos injetar uma nova dose?

Q.A.2.10e. Observando o obtido do gráfico dos dados experimentais, e sabendo que a massa de morfina injetada foi de $5\ mg$, podemos concluir que apenas uma pequena parte da morfina circula no sangue. O que isso significa?

ANEXO

Sugestão de materiais para o professor

A seguir, uma sequência de bons materiais para os professores que estiverem interessados em aplicar as técnicas vistas nesta dissertação.

Benacka, J. Spreadsheet Numerical Modeling in Secondary School Physics and Biology. **Spreadsheets in Education,** 2(3), p. 3, 2008.

O artigo dá três exemplos de modelagem numérica com planilhas no Ensino Médio nas disciplinas de Física e Biologia − queda livre no ar, crescimento de população animal e oscilação amortecida. O objetivo é introduzir o leitor à modelagem numérica. Os métodos numéricos mais simples são usados – o Método de Euler e o Método de Diferenças Finitas. Os modelos permitem que o aluno experimente os parâmetros e investigue o comportamento dos sistemas.

Buxton, G. A. Mathematical Modelling and Computer Simulation in Undergraduate Biology Education. **Spreadsheets in Education,** 10(3), 2018.

O artigo detalha a Modelagem Matemática em planilhas de alguns fenômenos abordados em um curso de Biologia Computacional: o modelo de Lotka-Volterra predador-presa, um modelo celular de crescimento de tumores e um modelo de surto de doenças infecciosas. A experiência incentiva o uso de planilhas para modelar matematicamente fenômenos biológicos, deixando os alunos mais confortáveis para interpretar a literatura científica e habilitando-os como pesquisadores e cientistas em suas carreiras.

Rispoli, F. J., Feuer, J., & Wilkens, R. Teaching the Logistic Growth Difference Equation Using Spreadsheets, **Spreadsheets in Education**, 3(3), 2010.

A equação de diferenças de crescimento logístico é frequentemente usada em Biologia para modelar o crescimento populacional. Os termos que satisfazem essa equação têm muitas propriedades matemáticas notáveis, tais como exibição de comportamento caótico. Usando ferramentas de modelagem de planilhas, as propriedades do crescimento logístico podem ser investigadas pelos alunos em um ambiente amigável. Os alunos aprenderão sobre ferramentas computacionais e de modelagem úteis, enquanto se deparam com uma nova área da Matemática que fascinou muitos, a Teoria do Caos.

Benacka, J. Modelling harvesting animal population at constant rate and constant effort. **International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, 8, p. 107-112, 2014.

O problema de caça à população animal à taxa e esforço constante é apresentado, resolvido e modelado neste artigo. As equações são resolvidas analiticamente. As condições de sobrevivência são encontradas e casos limites são mostrados. As implementações da solução em planilhas são apresentadas. A caça às populações mundiais do cachalote e dos bisões americanos é modelada e analisada.

Barbosa, A. C., Carvalhaes, C. G., & Costa, M. V. A computação numérica como ferramenta para o professor de Física do Ensino Médio. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 28(2), p. 249-254, 2006.

A proposta deste trabalho e apresentar ao professor de Física do Ensino Médio uma forma de empregar recursos computacionais para esclarecer e aprofundar conceitos de Física que são explorados de forma limitada por não se poder recorrer ao Calculo Diferencial e Integral. O pendulo simples é usado como protótipo para o tratamento sugerido. Mostra-se que apenas com o auxilio de uma planilha eletrônica (sem a necessidade, portanto, de conhecimentos avançados de computação) é possível criar um ambiente para o aluno testar o processo de convergência numérica e obter informações do comportamento do sistema a partir de analises gráficas.

Salvador, J. A.; Araújo, J. L. Mathematical Modelling in Calculus Courses. *In:* Matos, J. F.; Blum, W.; Houston, S. K.; Carreira., S. P. (Org.). **Modelling and Mathematics Education**. Inglaterra: Horwood Publishing Series: Mathematics and Applications, Springer, 2001. p. 195-204.

Este artigo apresenta um estudo sobre o papel de assessoria do professor em um projeto de Modelagem Matemática desenvolvido por grupos de alunos de um curso de Cálculo Diferencial e Integral. O projeto de modelagem foi desenvolvido com a ajuda do software Maple V, e foi uma das atividades propostas do programa de Cálculo acima mencionado, do qual o primeiro autor deste trabalho é o professor da turma. Um dos objetivos deste projeto é fazer com que o aluno busque funções provenientes de situações reais e, através delas, trabalhe com os conceitos do curso de Cálculo.

Kyng, T. J.; Purcal, S.; and Zhang, J. C. Excel implementation of finite difference methods for option pricing, **Spreadsheets in Education**, 9(3), 2016

Este artigo apresenta e explica métodos de diferenças finitas para preços de opções e mostra como esses métodos podem ser implementados no Excel. São cobertos os métodos explícito e implícito de diferenças finitas. Cada um usa uma aproximação numérica para a equação diferencial parcial e condição de contorno para converter a equação diferencial em uma equação de diferenças. A equação de diferenças pode ser resolvida usando o Excel e esta solução é uma aproximação numérica ao preço da opção. Explica-se como obter a equação de diferenças a partir da equação diferencial e mostra-se ao leitor como implementá-la e resolve-la usando o Excel.

Lau, M. A. Spreadsheet Implementation of Numerical and Analytical Solutions to Some Classical Partial Differential Equations, **Spreadsheets in Education,** 9(3), 2016.

Este trabalho apresenta a implementação de soluções numéricas e analíticas de algumas das equações diferenciais usando planilhas do Excel. Em particular, a equação do calor, a equação de onda e a equação de Laplace, uma vez que têm soluções analíticas bem conhecidas. As soluções numéricas podem ser facilmente obtidas uma vez que as equações diferenciais são discretizadas por diferenças finitas e obtidas fórmulas de células para implementar os algoritmos recursivos resultantes e outros métodos iterativos, como o método de super relaxamentos sucessivos (SOR). Os recursos gráficos das planilhas podem ser explorados para melhorar a visualização das soluções para essas equações. Além disso, usando o Visual Basic for Applications (VBA) pode-se facilitar enormemente a implementação das soluções analíticas para estas equações e obter aproximações em Série de Fourier para funções que governam as condições iniciais e / ou condições de contorno.

Koch, G. A. Drugs in the Classroom: Using Pharmacokinetics to Introduce Biomathematical Modeling. **Mathematical Modelling of Natural Phenomena**, 6(6), p. 227-244, 2011

Aqui os estudantes têm a oportunidade de desenvolver um modelo matemático de um fenômeno biológico com o qual todos podem se familiarizar. Os alunos podem fazer conexões interdisciplinares entre este modelo e suas experiências pessoais anteriores, sejam matemáticas ou outras disciplinas. Começando com um modelo simples envolvendo a meia-vida de uma droga, os estudantes aproveitam as vantagens matemáticas para explorar a Biologia. Eles podem então usar o conhecimento obtido da análise do modelo simples para criar modelos mais complicados, ganhando assim maturidade matemática e de modelagem através da melhoria da precisão do modelo.