UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dinâmica de EDP parabólicas locais ou não locais: existência, unicidade e comportamento assintótico de solução

Tito Luciano Mamani Luna

São Carlos
Junho/2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dinâmica de EDP parabólicas locais ou não locais: existência, unicidade e comportamento assintótico de solução

Tito Luciano Mamani Luna

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática

Orientador: **Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira**

São Carlos
Julho/2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Tito Luciano Mamani Luna, realizada em 12/07/2019:

Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira
UFSCar

Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho
ICMC/USP

Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira
UFC

Everaldo de Mello Bonotto

Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto
ICMC/USP

Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira
UNICAMP

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pela vida e saúde. Embora a lista de pessoas a quem eu sou grato é grande, eu faria particularmente gosto de expressar minha profunda gratidão ao Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira; pela orientação e apoio contínuo desde o começo deste trabalho. Gostaria também de expressar minha gratidão aos Professores e colegas do DM. Ao Cnpq; pelo auxílio financeiro.

"Viva como se você fosse morrer amanhã... aprenda como se você fosse viver para sempre."

(Mahatma Gandhi)

"E vós também, pondo nisto mesmo toda a diligência, acrescentai à vossa fé a virtude, e à virtude a ciência; e à ciência a temperança, e à temperança a paciência, e à paciência a piedade."

(2 Pedro 1:5-6)

"E não nos cansemos de fazer bem, porque a seu tempo ceifaremos, se não houvermos desfalecido."

(Gálatas 6:9)

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo da dinâmica de algumas equações diferenciais parciais (EDP, abreviadamente) parabólicas, locais ou não locais. Mais precisamente, provamos existência, unicidade e comportamento assintótico de solução, quando o tempo é grande, para uma EDP parabólica com termo de Kirchhoff e condição de fronteira tipo fluxo e duas classes de EDP parabólicas governadas pelo p-Laplaciano envolvendo termos logísticos e potenciais que podem ser indefinidos e ilimitados.

Inicialmente, provamos existência de solução e dependência contínua com respeito aos dados da EDP parabólica com termo de Kirchhoff utilizando o método de Faedo-Galerkin e uma mudança de variáveis adequada. Algumas condições sobre o termo não local são fornecidas de modo que unicidade de solução é assegurada. No que concerne comportamento assintótico de solução, mostramos que o conjunto Omega limite de cada (semi) órbita contém, pelo menos, uma solução estacionária. Estudamos estabilidade de mínimos do funcional energia associado e mostramos, sob certas condições, um resultado de estabilidade assintótica sobre mínimo global da energia. Também fornecemos uma condição suficiente para existência de mínimo local isolado do funcional energia, o qual é inferido ser solução estacionária assintoticamente estável ao construirmos uma vizinhança em que toda solução que nela começa converge àquele mínimo local isolado.

Finalmente, estabelecemos a dinâmica das soluções positivas com dados iniciais limitados de duas classes de EDP parabólicas governadas pelo p-Laplaciano com potenciais indefinidos e ilimitados e com termos logísticos possuindo pesos que também são indefinidos e ilimitados, além de condições de fronteira tipo fluxo (linear ou não linear). As propriedades de estabilidade assintótica das soluções estacionárias são descritas através da relação entre o parâmetro que aparece nas EDP e os autovalores principais de certos problemas de autovalores elípticos com potenciais e pesos indefinidos e ilimitados. Tratamos esses problemas de autovalores em detalhes, devido a pouca regularidade exigida em seus coeficientes do ponto de vista da literatura, para que sejam utilizados no estudo das EDP de evolução.

Abstract

This work is dedicated to the study of dynamical properties of some partial differential equations (PDE, for short) of parabolic type, local or nonlocal ones. We prove existence, uniqueness and establish the asymptotic behavior, for large times, for two classes of PDE. Namely, a (nonlocal) parabolic equation with a Kirchhoff term and flux boundary condition and two parabolic PDE driven by the p-Laplacian with logistic terms involving potentials and weights which may be indefinite and unbounded.

First we prove existence and continuous dependence on data for the PDE with Kirchhoff term using Faedo-Galerkin method and a suitable change of variables. Some sufficient conditions are given to ensure uniqueness of solution. Concerning asymptotic behavior, we show that the omega limit set of each (semi) orbit contains, at least, one stationary solution. We then study stability of local minima of the associated energy functional showing first a result on asymptotic stability of a global minimum for the energy. We also prove a sufficient condition for the existence of isolated local minimum of the energy functional, which is proved to be an asymptotically stable stationary solution in a suitable neighborhood.

Finally we determine the dynamics of positive solutions with bounded initial datum for two classes of parabolic PDE driven by the p-Laplacian with indefinite and unbounded potentials and logistic sources having weights which are also indefinite and unbounded. The boundary conditions appearing are also of flux type (linear or nonlinear). The asymptotic stability properties of the stationary solutions are described using principal eigenvalues of some elliptic eigenvalue problems involving a parameter of the original PDE. Those eigenvalue problems are also studied herein in order to be used as a tool for obtaining our results due to the low regularity assumptions on their coefficients from the viewpoint of the literature.

Sumário

Introdução

Este trabalho é dedicado ao estudo de existência, unicidade e comportamento assintótico de solução, quando o tempo é grande, para algumas classes de problemas parabólicos, locais ou não locais. O mesmo está dividido em duas partes: na primeira, consideramos um problema parabólico de Kirchhoff com condição de fronteira tipo fluxo, tratado no Capítulo 2; enquanto que, na segunda, estudamos problemas parabólicos governados pelo p-Laplaciano envolvendo termos logísticos e potenciais que podem ser indefinidos e ilimitados, objetos do Capítulo 3 e do Capítulo 4.

Problemas não-locais tem sido estudados nas últimas décadas por muitos autores em distintos ramos científicos, por exemplo em física, biologia, engenharia, entre outros. Frequentemente surgem em problemas cujas grandezas envolvidas são difícil de medir pontualmente, mas aferidas em média. Mencionamos, por exemplo, os trabalhos [20, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48] e suas referências.

Em particular, em [47] os autores consideraram a classe de problemas parabólicos não-locais

$$\begin{cases} \partial_t u - a\left(\int |\nabla u|^2\right)\Delta u = f(x) & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

sendo Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $f \in L^2(\Omega)$ e $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função contínua para a qual existem constantes positivas $\lambda, \Lambda > 0$ satisfazendo

$$0 < \lambda \leqslant a(s) \leqslant \Lambda, \qquad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Foi estudado existência, unicidade, soluções estacionarias associadas e comportamento assintótico da solução fraca de (1) por meio de argumentos de compacidade, análise acurada das soluções estacionárias e uma adequada mudança de variáveis.

Problemas com termos não locais como em (1) foram introduzidos por Kirchhoff em 1876 através de um modelo que generalizava a equação da onda clássica descrevendo uma corda vibrante, qual seja,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

em que ρ, P_0, h, E e L são constantes específicas (ver [82, 86]). Esse modelo descreve, em dimensão $N = 1$, oscilações transversais de uma corda esticada considerando o efeito da mudança em seu comprimento durante a vibração. O coeficiente não local na equação original proposta por Kirchhoff era da forma $M(t) = a + bt$, com $a, b > 0$.

Desde então, vários trabalhos tem se dedicado a analisar efeitos de termos não locais em diversos modelos relacionados com equações diferenciais parciais (EDP, abreviadamente). Como a literatura é extensiva, vamos mencionar alguns trabalhos mais proximamente ligados ao problema estudado no Capítulo 2 deste trabalho, introduzido abaixo.

Em [48] o comportamento assintótico, quando o tempo é grande, da solução de (1) foi estudado removendo a limitação superior em (2) para funções a continuamente diferenciáveis. Extensões de [47] envolvendo o operador p-Laplaciano foram obtidas em [20, 44, 45]. Outros termos não locais, de natureza diferente de $a\left(\int |\nabla u|^2\right)$, também tem sido considerados. Por exemplo, em [43] foi tratado um problema parabólico similar a (1) com termo não local dependendo de $\int u$, em [31, 38, 41, 42, 46] considerou-se problemas parabólicos com termo não-local dependendo de $\int gu$, com $g \in L^2(\Omega)$, entre outros.

A contribuição deste trabalho em relação a [44, 45, 47] é abordar o caso em que se tem condição de fronteira não homogênea tipo fluxo, sob hipóteses relativamente gerais. Mais precisamente, vamos considerar no Capítulo 2 o problema parabólico não local

$$\begin{cases} \partial_t u - a\left(\displaystyle\int |\nabla u|^2\right)\Delta u + \alpha(x)u \;=\; f(x) \qquad \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ a\left(\displaystyle\int |\nabla u|^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)u \;=\; g(x) \qquad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(0) \;=\; u_0 \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

sendo Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, com fronteira suave $\Gamma := \partial\Omega$, ν é o vetor unitário exterior a Γ e $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável tal que

$$0 < \lambda \leqslant a(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Os coeficientes satisfazem $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ e $\beta \in L^\infty(\Gamma)$, com $\alpha(x) \geqslant 0$ para quase todo $x \in \Omega$ e $\beta(x) \geqslant 0$ para quase todo $x \in \Gamma$ tais que

$$\int \alpha(x) + \int_\Gamma \beta(x) > 0. \tag{5}$$

Assumimos também

$$f = f(x) \in L^2(\Omega), \quad g = g(x) \in L^2(\Gamma), \tag{6}$$

$$u_0 \in H^1(\Omega). \tag{7}$$

Provamos inicialmente boa postura para o problema (3), ou seja, existência e unicidade de solução, além de dependência continua com relação aos dados f, g e condição inicial u_0. Também provamos um resultado de regularidade de solução. De fato, usando o método de Faedo-Galerkin e uma mudança de variáveis introduzida em [47] provamos existência de solução para (3). Algumas condições são fornecidas de modo que unicidade de solução para (3) é obtida para coeficientes a contínuos (assumindo alguma monotonicidade) ou continuamente diferenciáveis (sem qualquer hipótese de monotonicidade).

A prova que a solução de (3) satisfaz $u \in C([0,T], H^1(\Omega))$ para cada $0 < T < +\infty$ também é algo delicada, dependendo de estimativas uniformes das aproximadas de Faedo-Galerkin, e que traz como subproduto $u'(t) \in H^1(\Omega)$ para quase todo $t \in (0,+\infty)$ (ingrediente importante no estudo do comportamento assintótico de solução). Deve-se registrar que a condição de fronteira em (3) introduz várias dificuldades $-$ quando comparado ao caso em que se tem condição de Dirichlet na fronteira como em [44, 45, 47] $-$ desde produzir certas estimativas à prova da regularidade de solução, por exemplo.

É estabelecida uma bijeção, a exemplo de [44, 47], entre o conjunto das soluções estacionarias de (3) e uma equação algébrica envolvendo números reais, a qual é importante na prova da existência de solução $-$ também unicidade, sob certas condições $-$ para o problema estacionário associado a (3).

No que concerne comportamento assintótico de solução de (3), mostramos inicialmente que se $u(\cdot, t; u_0)$ é solução de (3) então o conjunto omega limite $\omega(u_0)$ contem, pelo menos, uma solução estacionaria. Finalmente, estudamos estabilidade de mínimos do funcional energia associado a (3). Mostramos, sob certas condições, um resultado de estabilidade assintótica sobre mínimo global da energia. Também fornecemos, como em [44, 45, 47], uma condição suficiente que garante existência de mínimo local isolado do funcional energia. Esse mínimo local isolado é inferido ser solução assintoticamente estável de (3) quando construímos uma vizinhança em que toda solução de (3) que nela começa converge àquele mínimo local isolado.

Na segunda parte deste trabalho estudamos, nos Capítulo 3 e Capítulo 4, a dinâmica de algumas EDP parabólicas governadas pelo p-Laplaciano. Mais precisamente, consideramos no Capítulo 3 o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u \;=\; \lambda m(x)|u|^{p-2}u - \rho(\lambda)|u|^{q-2}u & \text{em } \Omega \times (0,+\infty), \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + W(x)|u|^{p-2}u \;=\; 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(0) \;=\; u_0 \quad \text{em } \Omega, & \end{cases} \tag{8}$$

com termo não linear logístico indefinido e condição de fronteira de Neumann ou de Robin homogêneas e, no Capítulo 4, estudamos o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u \;=\; \lambda m(x)|u|^{p-2}u - \rho(\lambda)|u|^{q_1-2}u & \text{em } \Omega \times (0,+\infty), \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \;=\; \lambda \sigma(x)|u|^{p-2}u - \rho(\lambda)|u|^{q_2-2}u & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(0) \;=\; u_0 \quad \text{em } \Omega, & \end{cases} \tag{9}$$

em que termos logísticos indefinidos interagem, descrevendo a reação no interior da região e fluxo (não linear) através de sua fronteira.

Em (8) e (9) o domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geqslant 2$) tem fronteira suave $\partial\Omega$ com vetor normal unitário exterior ν, u_0 é o valor inicial, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-Laplace com $2 \leqslant p < +\infty$, $\lambda > 0$ é um parâmetro real, ρ é a função identidade ($\rho(\lambda) = \lambda$)

ou função constante ($\rho(\lambda) = 1$, por simplicidade) e $q, q_1, q_2 > p$ são números reais fixos. Ainda, V é uma função potencial que pode ser ilimitada e indefinida (i.e., mudar de sinal), m é uma função peso que pode ser ilimitada e indefinida, σ é uma função peso limitada e indefinida e W é uma função não-negativa que pode ser ilimitada. Hipóteses precisas e o estudo detalhado sobre existência, unicidade e comportamento assintótico da solução positiva de (8) e (9) serão conteúdo dos Capítulos 3 e 4, respectivamente.

Equações de evolução parabólicas governadas pelo p-Laplaciano tem sido estudadas sob vários aspectos e diversas são as dificuldades encontradas em relação ao caso linear $p = 2$. A degenerescência ($p > 2$) ou singularidade ($1 < p < 2$) de elipticidade do p-Laplaciano produz novos fenômenos, por exemplo, como o fato de princípios do máximo e de comparação fracos e fortes não serem satisfeitos em geral, a depender sensivelmente da estrutura da equação e de condições sobre os dados, e são significativamente diferentes nas situações de difusão rápida ($1 < p < 2$) e difusão lenta ($p > 2$). Também não se tem, em geral, um princípio de estabilidade linearizada para EDP parabólicas envolvendo o p-Laplaciano ou fórmula da variação das constantes, resultados úteis para estudar equações de evolução, entre outras diferenças que poderiam ser mencionadas. O leitor pode encontrar material clássico sobre equações de evolução envolvendo o p-Laplaciano em [7, 10, 24, 75, 77, 92, 95, 107] e suas referências. Discussões e resultados mais recentes sobre os temas mencionados acima encontram-se, por exemplo, em [17, 22, 34, 33, 35, 54, 56, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 74, 93] e suas referências.

EDP como (8) e (9) surgem em vários campos das ciências. As referências são inúmeras e, sem pretender fornecer um quadro completo, mencionamos alguns trabalhos cujos resultados estão em paralelo com aqueles aqui obtidos.

No caso $p = 2$, EDP tipo (8) aparecem, por exemplo, em geometria no estudo do problema de deformar conformalmente uma métrica numa variedade riemanniana compacta a uma outra métrica com curvatura escalar prescrita, no contexto do problema de Yamabe, ver [55, 81, 85, 96]. Ainda no caso $p = 2$, equações tipo (8) estão relacionadas com a equação não linear de Schrödinger, ver por exemplo [4, 12, 37, 33, 97, 106], a qual modela vários fenômenos físicos, ver por exemplo [14, 36, 37, 97] e suas referências.

Muitas aplicações a problemas envolvendo EDP tipo (8) ocorrem em dinâmica populacional, ver, por exemplo, [13, 30, 91, 94] e suas referências. Nesse contexto, um modelo importante é descrito pela equação parabólica com termo logístico e peso indefinido

$$u_t = -d\Delta u + m(x)u - cu^2 \quad \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \tag{10}$$

ver, por exemplo, [13, 27, 28, 29, 30, 110] e suas referências. Em (10), u corresponde à densidade de uma população habitando uma região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com fronteira suave, a qual se move randomicamente em Ω a uma taxa constante $d > 0$. A função peso m representa a taxa intrínseca local de crescimento ou declínio populacional, a qual é positiva em sub-regiões favoráveis à população e negativa naquelas desfavoráveis, e $c > 0$ é uma constante. Sendo u densidade populacional no modelo fica evidenciado, do ponto de vista das aplicações, que soluções positivas de (8) são aquelas de interesse concreto.

Condições de fronteira típicas para (10) são: (i) $u = 0$ sobre $\partial\Omega\times(0,+\infty)$ (condição de Dirichlet), que corresponde a uma região exterior a Ω completamente hostil à população; (ii) $\partial u/\partial\nu = 0$ sobre $\partial\Omega \times (0,+\infty)$ (condição de Neumann), correspondendo ao caso em que fronteira $\partial\Omega$ age como uma barreira perfeita para a população; (iii) $\partial u/\partial\nu+W(x)u = 0$ sobre $\partial\Omega \times (0,+\infty)$, com $0 \not\equiv W \geq 0$, (condição de Robin) correspondendo à situação em que alguns membros da população que atingem a fronteira $\partial\Omega$ são eliminados e outros retrocedem ao interior da região.

Há vasta literatura sobre EDP tipo (10) e variações não apenas surgindo de refinamentos aos primeiros modelos propostos, em que diversas questões em torno de (10) e suas generalizações tem sido exploradas, mas também de outros problemas em que termos não lineares de tipo logístico tem papel relevante. Mencionamos, por exemplo, os trabalhos [4, 30, 26, 55, 56, 60, 61, 69, 73, 81, 89, 96, 98, 110], entre outros.

No caso em que a função peso m é não limitada, e sob condição de fronteira de Dirichlet, a dinâmica de (10) foi estudada em [98] – ver também [60, 76] em que o problema elíptico (estacionário) foi tratado. Mais precisamente, foi considerado em [98] o problema parabólico

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = m(x)u - n(x)|u|^{q-1}u & \text{em } \Omega \times (0,+\infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{11}$$

sendo $q > 1$, $m \in L^r(\Omega)$ para algum $r > N/2$ e n uma função continua e não-negativa. Foi provado que se $\lambda_1(\Delta + m) > 0$ então 0 é a única solução estacionaria de (11), a qual é globalmente assintoticamente estável. Se $\lambda_1(\Delta + m) < 0$, sob certas condições adicionais sobre m e n, mostrou-se a existência de um par de soluções estacionarias extremais de (11) que são globalmente estáveis inferior e superiormente, respectivamente.

A dinâmica de (10) quando governada pelo operador p-Laplaciano ($p > 1$) foi estudada recentemente em [56]. Derlet e Takáč consideraram em [56] o problema parabólico quasilinear com condição de fronteira de Neumann

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = \lambda|u|^{p-2}u\,(m(x) - |u|^{q-p}) & \text{em } \Omega \times (0,+\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{12}$$

sendo Ω um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $\lambda > 0$ um parâmetro real, $q-p > 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $m \in L^\infty(\Omega)$ um peso indefinido. Os autores provaram existência de soluções minimal e maximal do problema (12) em presença de subsolução e supersolução ordenadas de (12), combinando a teoria de operadores monótonos em [92] (cf. também [24]) e o método de iterações monótonas de Sattinger [102]. Embora existência de solução em presença de sub/super soluções seja um resultado clássico, ver [19, 61] por exemplo, a abordagem em [56] permite deduzir, além de existência, informação sobre o comportamento assintótico (quando o tempo é grande) de soluções, mesmo que unicidade não esteja assegurada. A abordagem adotada em [56] foi empregada neste trabalho para estudarmos (8) e (9), de modo que os resultados obtidos nos Capítulos 3 e 4 generalizam ou completam vários resultados prévios em [27, 28, 30, 55, 56, 60, 61, 73, 69, 76, 89, 96, 98].

Nosso objetivo no Capítulo 3 e no Capítulo 4 é estudar existência de solução global dos problemas (8) e (9) quando existem subsoluções não-negativas α_1, α_2 e supersoluções limitadas β_1, β_2 de (8) e (9), com $\alpha_1 \leqslant \beta_1$ e $\alpha_2 \leqslant \beta_2$ em $\Omega \times (0, +\infty)$, e o comportamento assintótico da solução global quando o tempo $t \to +\infty$. A estrategia adotada é a seguinte: primeiramente estudamos existência de subsoluções e supersoluções para os problemas estacionarios associados às EDP parabólicas em (8) e (9), que são os problemas elípticos

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u - \rho(\lambda)|u|^{q-2}u & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + W(x)|u|^{p-2}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{13}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u & = \lambda m(x)|u|^{p-2}u - \rho(\lambda)|u|^{q_1-2}u \quad \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = \lambda \sigma(x)|u|^{p-2}u - \rho(\lambda)|u|^{q_2-2}u \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{14}$$

respectivamente. Notemos que $u \equiv 0$ é solução de (8) e (9), a qual denominaremos por solução estacionária trivial ou simplesmente solução trivial de (8) e (9). Temos que $\alpha \equiv 0$ é subsolução trivial de (13) e (14) e que $\alpha_1 = \epsilon\varphi_\lambda$ e $\alpha_2 = \epsilon\psi_\lambda$ são subsoluções positivas de (13) e (14) para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, sendo φ_λ e ψ_λ autofunções principais (i.e., positivas) dos problemas de autovalores (no parâmetro μ, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u + \mu|u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + W(x)|u|^{p-2}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{15}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u & = \lambda m(x)|u|^{p-2}u + \mu|u|^{p-2}u \quad \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = \lambda \sigma(x)|u|^{p-2}u + \mu|u|^{p-2}u \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{16}$$

respectivamente. A fim de garantir existência de subsolução não-trivial para os problemas (13) e (14) estudamos existência de autovalores principais $\mu_1 = \mu_1(\lambda)$ (i.e., associados a autofunções positivas) de (15) e (16), em que os coeficientes podem ser ilimitados e ainda V, m, σ podem ser indefinidos (i.e., de sinal arbitrário).

Problemas de autovalores com peso indefinido m envolvendo operadores elípticos lineares foram estudados nos trabalhos pioneiros [25, 53, 78, 79, 90], entre outros, ao passo que as primeiras contribuições considerando o operador p-Laplaciano foram obtidas nos trabalhos [6, 15, 16, 50, 72, 80, 87, 105], entre outros. Autovalores não principais também foram tratados em [8, 9, 50, 51, 52, 53, 72, 84, 90, 105] e algumas de suas referências.

Com relação ao operador $-\Delta + V$, as características de seu espectro na situação em que $V^- \not\equiv 0$ podem ser diferentes do caso em que $V \geq 0$. Quando V é indefinido e sob condição de fronteira de Dirichlet, o problema (15) com $p = 2$ foi estudado, por exemplo, em [5, 67, 88], entre outros.

Existência de autovalores principais para (15) com condição de fronteira de Dirichlet e V, m indefinidos foi estudado em [15, 16], assumindo $V, m \in L^\infty(\Omega)$, e em [52] quando $V, m \in L^r(\Omega)$, com $r > N/p$. O problema (16) foi tratado em [1, 8, 9, 51, 84, 109], sem parâmetro μ ocorrendo simultaneamente na equação e na condição de fronteira. O caso $p = 2$, $V \equiv 0$ e m indefinido foi considerado em [1] quando $\sigma \equiv const.$ e em [109] para σ suave e indefinida. A análise espectral completa de (16) (com $\mu = 0$) quando $V \geq 0$ e $p = 2$ foi desenvolvida em [8] no caso $\sigma \equiv const.$ e em [9] quando σ é limitada. O caso $p > 1$ em (16) com V, m indefinidos, $V, m \in L^\infty(\Omega)$ e $\sigma \in C^{0,r}(\partial\Omega)$, $r \in (0, 1)$, foi considerado em [51] (sem parâmetro μ na condição de fronteira) e em [84] para o caso Steklov (sem parâmetro μ na equação). Os resultados provados no Capítulo 3 e no Capítulo 4 deste trabalho sobre autovalores principais de (15) e (16) generalizam ou complementam resultados em [51, 52, 84, 67] e suas referências.

Retornando às EDP parabólicas (8) e (9), para mostrar existência de solução local introduzimos os problemas parabólicos auxiliares

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u + \widetilde{V}_1(x)|u|^{p-2}u + \rho|u|^{q-2}u = f(x,t) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + W_1(x)|u|^{p-2}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{17}$$

e

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u + \widetilde{V}_2(x)|u|^{p-2}u + \rho|u|^{q_1-2}u & = f(x,t) \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + W_2(x)|u|^{p-2}u + \rho|u|^{q_2-2}u & = g(x,t) \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) & = v_0 \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{18}$$

sendo $0 \leq \widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2 \in L^r(\Omega)$, com $r > N/p$, $0 \leq W_1 \in L^s(\partial\Omega)$, com $s > (N-1)/(p-1)$, $0 \leq W_2 \in L^\infty(\partial\Omega)$, $f \in L^\infty(0,T; L^\infty(\Omega))$ e $g \in L^\infty(0,T; L^\infty(\partial\Omega))$.

Provamos teoremas de existência de solução para (17) e (18) nos Capítulos 3 e 4, respectivamente, combinando método de Faedo-Galerkin [108, 92, 111], técnicas de truncamento e princípio de comparação de soluções. Usando esses resultados construímos iterativamente duas sequências monótonas em presença de subsolução e supersolução não-negativas ordenadas e limitadas dos problemas locais (17) e (18). Cada solução local de (8) e (9) é obtida como limite daquelas sequências monótonas previamente construídas. Argumentando como em [74] cada solução local é estendida à solução global de (8) e (9).

O comportamento assintótico das soluções de (8) e (9) depende fortemente das propriedades das sequências monótonas, acima mencionadas, construídas na parte de existência. Em particular, mostramos que o comportamento assintótico depende do sinal do autovalor principal $\mu_1(\lambda)$ de (15) e (16). De fato, se $\mu_1(\lambda) < 0$ existem únicas soluções positivas u_* e u_{**} de (13) e (14), respectivamente, de modo que quaisquer soluções dos problemas parabólicos (8) e (9) convergem fortemente a u_* e u_{**}, respectivamente, em

$L^s(\Omega)$ para cada $1 \leqslant s < +\infty$, quando $t \to +\infty$. Assim, para cada $\lambda > 0$ tal que $\mu_1(\lambda) < 0$, as soluções estacionarias u_* e u_{**} de (8) e (9), respectivamente, são assintoticamente estáveis. Na situação em que $\mu_1(\lambda) \geqslant 0$, as soluções (8) e (9) convergem para a solução estacionária trivial $u \equiv 0$, a qual é assintoticamente estável.

Finalmente, este trabalho está assim organizado: no Capítulo 1 apresentamos alguns resultados preliminares utilizados nos capítulos subsequentes e fixamos algumas notações. No Capítulo 2 estudamos boa postura e comportamento assintótico de solução do problema (3) e provamos resultados de estabilidade assintótica de mínimos – global e locais – do funcional energia associado a (3). No Capítulo 3 e no Capítulo 4 estabelecemos a dinâmica das soluções positivas com dados iniciais limitados das EDP (8) e (9), respectivamente, governadas pelo p-Laplaciano. As propriedades de estabilidade assintótica das soluções estacionarias de (8) e (9) são descritas através da relação entre o parâmetro $\lambda > 0$ na equação e os autovalores principais $\mu_1(\lambda)$ dos problemas (15) e (16). Estes problemas de autovalores são tratados em detalhes nos Capítulos 3 e 4, devido a pouca suavidade exigida em seus coeficientes do ponto de vista da literatura existente, para serem úteis no estudo de (8) e (9).

Capítulo 1

Preliminares e notações

1.1 Espaços de Banach de funções de valores em um espaço de Banach

Introduzimos aqui algumas noções básicas que usaremos nos próximos capítulos. Isto consiste de uma extensão do conceito de integral e derivada fraca de funções reais com valores reais a funções com valores vetoriais. Nesta seção as funções tomam valores em um espaço de Banach. O domínio destas funções será considerado um intervalo da reta real porém pode-se considerar um espaço de medida geral. Sejam B um espaço de Banach (usualmente os espaços $L^p(\Omega)$, $W^{1,p}(\Omega)$ com $p \geqslant 1$ finito ou infinito) com a norma $\|\cdot\|_B$, B^* o seu dual, T um número real positivo ($T = +\infty$ é admissível) e $u : (0,T) \to B$ uma função de valor vetorial. As referências bibliográficas para esta seção são [32, 24, 111, 108, 100].

Definição 1.1 *1. A função u é chamada simples se $u((0,T)) = \{v_1, \cdots, v_n\} \subset B$ e $u^{-1}(v_i) \subset (0,T)$ é Lebesque mensurável para cada $i = 1, \ldots, n$.*

2. A função u é chamada mensurável (ou fortemente mensurável) se existe uma sequência de funções simples u_n tal que $u_n(t) \to u(t)$ em B para quase todo $t \in (0,T)$.

3. A função u é chamada fracamente mensurável se para cada $f \in B^*$ a função real $t \mapsto \langle f, u(t)\rangle : (0,T) \to \mathbb{R}$ é mensurável.

4. A função u é chamada de valor quase separável se existe um subconjunto Lebesque mensurável $N \subset (0,T)$ de medida zero tal que $\{u(t); t \in (0,T) \setminus N\}$ é separável.

Teorema 1.1 (*Pettis*). *Uma função $u : (0,T) \to B$ é fortemente mensurável se, e somente se, u é fracamente mensurável e de valor quase separável.*

Definição 1.2 *1. A função simples u é chamada integrável se $|u^{-1}(v_i)| < +\infty$ para cada $v_i \neq 0$. Então a integral da função simples u é*

$$\int_0^T u(t)dt := \sum_{v_i \neq 0} |u^{-1}(v_i)| v_i.$$

2. *A função* $u:(0,T)\to B$ *é chamada integrável se existe uma sequência de funções simples integráveis* u_n *tal que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^T \|u_n(t)-u(t)\|_B\,dt=0$. *Então a integral de* u *é*

$$\int_0^T u(t)dt := \lim_{n\to+\infty}\int_0^T u_n(t)dt.$$

Teorema 1.2 (*Bochner*). *Uma função* $u:(0,T)\to B$ *é integrável se, e somente se,* u *é mensurável e* $\int_0^T \|u(t)\|_B\,dt<+\infty$.

Definição 1.3 *1. Denotamos por* $C([0,T];B)$ *o espaço das funções contínuas* $u:[0,T]\to B$ *sobre* $[0,T]$ *e denotamos*

$$\|u\|_{C([0,T];B)} := \sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_B. \tag{1.1}$$

2. *Denotamos por* $L^p(0,T;B)$ *com* $1\leqslant p<+\infty$ *o espaço de funções mensuráveis* $u:(0,T)\to B$ *tal que*

$$\|u\|_{L^p(0,T;B)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_B^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \tag{1.2}$$

3. *Denotamos por* $L^\infty(0,T;B)$ *o espaço de funções mensuráveis* $u:(0,T)\to B$ *que são esssencialmente limitadas, ou seja, existe um número* M *tal que* $\|u(t)\|_B\leqslant M$ *para quase todo* $t\in(0,T)$,

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;B)} := \operatorname{ess}\sup_{t\in(0,T)}\|u(t)\|_B. \tag{1.3}$$

Teorema 1.3 *Sejam* A,B *espaços de Banach. Tem-se:*

1. $C([0,T];B)$, $L^p(0,T;B)$ *para* $1\leqslant p<+\infty$ *e* $L^\infty(0,T;B)$ *são espaços de Banach com as normas* (1.1), (1.2) *e* (1.3) *respectivamente.*

2. *Se* B *é um espaço de Hilbert com produto interno* $(\cdot,\cdot)_B$, *então* $L^2(0,T;B)$ *é um espaço de Hilbert com produto interno*

$$(u,v) := \int_0^T (u(t),v(t))_B dt,$$

para todo $u,v\in L^2(0,T;B)$.

3. $L^p(0,T;B)$, $1<p<+\infty$, *é separável (reflexivo) se o espaço* B *é separável (reflexivo).*

4. *Se a inclusão* $A\hookrightarrow B$ *é contínua, então a inclusão* $L^p(0,T;A)\hookrightarrow L^q(0,T;B)$ *é contínua para todo* $1\leqslant q\leqslant p\leqslant+\infty$.

5. *Sejam B um espaço de Banach reflexivo e separável, $1 < p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então o espaço dual $(L^p(0,T;B))^*$ é isomorfo a $L^{p'}(0,T;B^*)$. A aplicação dualidade entre $L^{p'}(0,T;B^*)$ e $L^p(0,T;B)$ pode ser escrita como*

$$\langle v, u \rangle := \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_{B^*,B} dt$$

para todo $v \in L^{p'}(0,T;B^*)$ e $u \in L^p(0,T;B)$.

6. *Sejam B um espaço de Banach reflexivo e separável. Então o espaço dual $(L^1(0,T;B))^*$ é isomorfo a $L^\infty(0,T;B^*)$. A aplicação dualidade entre $L^\infty(0,T;B^*)$ e $L^1(0,T;B)$ pode ser escrita como*

$$\langle v, u \rangle := \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_{B^*,B} dt$$

para todo $v \in L^\infty(0,T;B^*)$ e $u \in L^1(0,T;B)$.

Definição 1.4 *Uma função de valor vetorial $u : [0,T] \to B$ é chamada de absolutamente contínua se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada sequência finita de intervalos disjuntos (s_n, t_n) em $[0,T]$ que satisfaz $\sum_{n=1}^{N} (t_n - s_n) \leqslant \delta$ tem-se $\sum_{n=1}^{N} \|u(t_n) - u(s_n)\|_B \leqslant \epsilon$.*

Observação 1.1 *Denotamos por $AC([0,T];B)$ o espaço de todas as funções de valor vetorial absolutamente contínuas. Cada função u de valor vetorial em um espaço reflexivo absolutamente contínua é diferenciável para quase todo ponto sobre $(0,T)$ e*

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds.$$

Para mais detalhes ver [24], Corollaire A.2.

Para definir os espaços de Sobolev de funções de valor vetorial precisamos definir derivadas. O enfoque é similar ao caso de derivada fracas para funções de valor real.

Definição 1.5 *Sejam A, B espaços de Banach tal que $A \hookrightarrow B$, $u \in L^1(0,T;A)$ e $w \in L^1(0,T;B)$. A função w é chamada derivada generalizada da função u se*

$$\int_0^T \varphi'(t) u(t) dt = -\int_0^T \varphi(t) w(t) \tag{1.4}$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(0,T)$. Escrevemos $u' = w$.

Definição 1.6 *$B \hookrightarrow H \hookrightarrow B^*$ é chamada uma tripla da evolução se satisfaz as propriedades seguintes:*

(i) B é um espaço de Banach real separável e reflexivo e H é um espaço de Hilbert real com produto escalar $(\cdot,\cdot)_H$.

(ii) A inclusão $B \hookrightarrow H$ é contínua e B é denso em H.

(iii) Identificando o espaço H com seu espaço dual H^* pela aplicação de Riesz, temos $H \cong H^* \hookrightarrow B^*$ com a equação

$$\langle h, v\rangle := (h, v)_H \quad \text{para todo } h \in H \hookrightarrow B^* \text{ e } v \in B.$$

Teorema 1.4 *Sejam $B \hookrightarrow H \hookrightarrow B^*$ uma tripla da evolução, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$ e $u \in L^p(0, T; B)$. Então a derivada generalizada $u' \in L^q(0, T; B^*)$ existe se, e somente se, existe uma função $w \in L^q(0, T; B^*)$ tal que*

$$\int_0^T (u(t), v)_H \varphi'(t) dt = -\int_0^T \langle w(t), v\rangle \varphi(t) dt$$

para todo $v \in B$ e todo $\varphi \in C_c^\infty(0, T)$. Além disso, a derivada generalizada u' é unicamente definida, $u' = w$ e

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_H = \langle u'(t), v\rangle \tag{1.5}$$

para todo $v \in B$ e quase todo $t \in (0, T)$.

Proposição 1.1 *Sejam A e B espaços de Banach tais que $A \hookrightarrow B$ e $1 \leqslant p, q < +\infty$. Se*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } L^p(0, T; A), \text{ quando } n \to +\infty,$$

e

$$u_n' \rightharpoonup v \quad \text{em } L^q(0, T; B), \text{ quando } n \to +\infty,$$

então $u' = v$ em $L^q(0, T; B)$.

Prova: Ver Proposição 23.19 de [111]. □

Definição 1.7 *Seja B um espaço de Banach real separável e reflexivo e $1 < p < +\infty$. Definimos o espaço*

$$W^p(0, T; B) := \{u \in L^p(0, T; B) : u' \in L^{p'}(0, T; B^*)\},$$

sendo u' derivada generalizada e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Teorema 1.5 *Sejam $B \hookrightarrow H \hookrightarrow B^*$ tripla da evolução, $1 < p < +\infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Tem-se:*

1. *O espaço $W^p(0, T; B)$ é um espaço de Banach real separável e reflexivo com a norma*

$$\|u\|_{W^p(0,T;B)} := \|u\|_{L^p(0,T;B)} + \|u'\|_{L^{p'}(0,T;B^*)}$$

para todo $u \in W^p(0, T; B)$.

2. *A inclusão* $W^p(0,T;B) \hookrightarrow C([0,T];H)$ *é contínua, ou seja,*
$$\|u\|_{C([0,T];H)} \leqslant C\|u\|_{W^p(0,T;B)}$$
para todo $u \in W^p(0,T;B)$*, sendo* $C > 0$ *uma constante.*

3. *Para todo* $u, v \in W^p(0,T;B)$ *e* $s, t \in [0,T]$ *com* $s \leqslant t$*, a seguinte fórmula de integração por partes é válida:*
$$(u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H = \int_s^t \langle u'(\tau), v(\tau)\rangle d\tau + \int_s^t \langle v'(\tau), u(\tau)\rangle d\tau. \qquad (1.6)$$

Observação 1.2 *A fórmula de integração por partes acima é equivalente a*
$$\frac{d}{dt}(u(t), v(t))_H = \langle u'(t), v(t)\rangle + \langle v'(t), u(t)\rangle$$
para quase todo $t \in (0,t)$*. Em particular, para* $u = v$ *obtemos*
$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle$$
para quase todo $t \in (0,t)$*, o que implica*
$$\int_s^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle d\tau = \frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(s)\|_H^2 \qquad (1.7)$$
para $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$*.*

No caso em que $B = W^{1,p}(\Omega)$ com $2 \leqslant p < +\infty$ e $H = L^2(\Omega)$ temos $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow (W^{1,p}(\Omega))^*$ uma tripla de evolução. Neste caso obtemos a seguinte generalização da fórmula (1.6).

Teorema 1.6 *Seja* $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e continuamente diferenciável por partes com* $\theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$*,* $\theta(0) = 0$ *e* Θ *a primitiva da função* θ *definida por*
$$\Theta(t) = \int_0^t \theta(\tau) d\tau.$$
Então para cada $u \in W^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ *tem-se*
$$\int_s^t \langle u'(\tau), \theta(u(\tau))\rangle d\tau = \int_\Omega \Theta(u(t)(x))dx - \int_\Omega \Theta(u(s)(x))dx \qquad (1.8)$$
para $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$*.*

Observação 1.3 *Note que se* $\theta(\tau) = \tau$ *temos* (1.7) *com* $H = L^2(\Omega)$*.*

Definição 1.8 *Dizemos que* $v \in L^p_{loc}(0,+\infty;B)$ *(respect.* $v \in W^p_{loc}(0,+\infty;B)$*) se* $v \in L^p(0,T;B)$ *(respect.* $v \in W^p(0,T;B)$*) para cada* $0 < T < +\infty$*.*

Terminamos esta seção introduzindo o seguinte importante critério de compacidade que será necessário no Capítulo 2.

Teorema 1.7 $(Aubin - Lions)$*. Sejam* B_0, B, B_1 *espaços de Banach reflexivos, com a inclusão* $B_0 \hookrightarrow B$ *compacta e a inclusão* $B \subset B_1$ *contínua. Então para* $1 < p, q < +\infty$ *a inclusão* $\mathcal{W} := \{u \in L^p(0,T;B_0) : u' \in L^q(0,T;B_1)\} \hookrightarrow L^p(0,T;B)$ *é compacta.*

1.2 Sistemas de equações diferenciais ordinárias

Nesta seção introduzimos teoremas que garantem a existência de pelo menos solução do sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares de primeira ordem $x' = f(t, x)$, com a condição inicial $x(t_0) = x_0$, sendo $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função não-linear definida no domínio (aberto e conexo) $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $(t_0, x_0) \in D$. Consideremos o problema de valor inicial

$$(E) \begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Seja $f \in C(D)$ contínua. Uma solução do problema (E) sobre um intervalo aberto e conexo I, com $t_0 \in I$, é uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ diferenciável sobre I tal que

i) $(t, \gamma(t)) \in D$ para todo $t \in I$,

ii) $\gamma(t_0) = x_0$,

iii) $\gamma'(t) = f(t, \gamma(t))$ para todo $t \in I$.

Claramente se γ é uma solução do problema (E) sobre I, então temos da condição iii) que $\gamma \in C^1(I)$. O problema de valor inicial (E) é equivalente ao problema de encontrar uma função contínua γ sobre algum intervalo aberto e conexo I satisfazendo a equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \tag{1.9}$$

para todo $t \in I$. A questão de existência de solução do problema de valor inicial (E) é resolvida pelos seguintes resultados. (Para mais detalhes veja [49, 66]))

Teorema 1.8 (*Teorema de Existência local de Cauchy-Peano*). *Se f é contínua sobre o retângulo $\{(t, x) : |t - t_0| \leqslant a,\ \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant b\}$ com $a, b > 0$, então existe uma função γ de classe C^1 solução do problema (E) sobre $|t - t_0| \leqslant d < a$ e $\gamma(t_0) = x_0$.*

Teorema 1.9 *Seja f é contínua sobre um domínio $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e suponha que f é limitada sobre D. Se γ é uma solução do problema (E) sobre um intervalo (a, b) então $\lim_{t \to a^+} \gamma(t)$ e $\lim_{t \to b^-} \gamma(t)$ existem. Se $(a, \lim_{t \to a^+} \gamma(t))$ (ou $(b, \lim_{t \to b^-} \gamma(t))$) está em D, então a solução γ pode ser estendida à esquerda de a (ou à direita de b).*

Nos capítulos subsequentes precisaremos de resultados de existência com hipóteses mais fracas com respeito a função f, por exemplo f podendo ser descontínua em t mas contínua em x, ou seja, para funções Carathéodory f.

Definição 1.9 *Uma função $f : D \to \mathbb{R}^n$ é chamada Carathéodory se*

1) A função $x \mapsto f(t, x)$ é contínua para quase todo ponto t.

2) A função $t \mapsto f(t, x)$ é mensurável para cada x.

3) $\|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant m(t)$ *para quase todo* $(t,x) \in D$ *para alguma uma função integrável* m.

Dizemos que uma solução do sentido estendido do problema (E) sobre um intervalo aberto e conexo I, com $t_0 \in I$, é uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ absolutamente contínua sobre I tal que

i) $(t, \gamma(t)) \in D$ para todo $t \in I$,

ii) $\gamma(t_0) = x_0$,

iii) $\gamma'(t) = f(t, \gamma(t))$ para quase todo $t \in I$.

Equivalentemente, dizemos que uma solução no sentido estendido do problema (E) sobre um intervalo I, com $t_0 \in I$, é uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ absolutamente contínua sobre I que satisfaz (1.9). E tem-se resultados de existência similares ao caso em que f é contínua e apresentamos nos teoremas seguintes (veja [66],[49]).

Teorema 1.10 (*Carathéodory*). *Se* f *é Carathéodory sobre o retângulo* $\{(t,x) : |t - t_0| < a,\ \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < b\}$ *com* $a, b > 0$, *então existe uma solução* γ *do problema* (E) *no sentido estendido sobre o intervalo* $|t - t_0| \leqslant d < a$ *e* $\gamma(t_0) = x_0$.

Teorema 1.11 *Seja* f *Carathéodory sobre* D *e suponha-se que* $(t_0, x_0) \in D$. *Então existe uma função* γ *solução do problema* (E) *sobre* $|t - t_0| \leqslant d$ *com* $d > 0$.

Teorema 1.12 *Seja* f *Carathéodory sobre* D. *Dada uma solução* γ *do problema* (E), *para* $t \in (a,b)$ *tal que* $\lim\limits_{t \to b^-} \gamma(t)$ *existe e* $(b, \lim\limits_{t \to b^-} \gamma(t))$ *está em* D *tem-se que* γ *pode ser estendida sobre* $(a, b + \delta]$ *para algum* $\delta > 0$. *Um resultado similar vale para* a.

Finalmente introduzimos algumas desigualdades importantes que usaremos adiante (ver [65, 104]).

Lema 1.1 (*Desigualdade de Gronwall*). *Seja* $\eta : [0,T] \to \mathbb{R}$ *uma função não-negativa e absolutamente contínua, que satisfaz*

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\eta(t) = \eta'(t) \leqslant \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

para quase todo $t \in (0,T)$, *sendo* $\phi, \psi \in L^1(0,T)$ *e não-negativas. Então*

$$\eta(t) \leqslant \mathrm{e}^{\int_0^t \phi(s)ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right]$$

para todo $t \in [0,T]$. *Além disso, se* $\psi \equiv 0$ *sobre* $[0,T]$ *e* $\eta(0) = 0$, *então* $\eta = 0$ *sobre* $[0,T]$.

Lema 1.2 *Suponha-se que* $y(t)$ *e* $h(t)$ *são duas funções não-negativas,* $y'(t)$ *é localmente integrável sobre* $(0, +\infty)$ *e* $y(t), h(t)$ *satisfazem*

$$y'(t) \leqslant A_1(y(t))^2 + A_2 + h(t), \quad \textit{para quase todo } t \in (0, +\infty),$$

$$\int_0^T y(t)dt \leqslant A_3, \quad \int_0^T h(t)dt \leqslant A_4 \quad \textit{para todo } T > 0$$

com A_1, A_2, A_3, A_4 *sendo constantes positivas independentes de* t *e* T*. Então para cada* $r > 0$*,*

$$y(t+r) \leqslant \left(\frac{A_3}{r} + A_2 r + A_4\right) \mathrm{e}^{A_1 A_3}, \quad \textit{para todo } t \geqslant 0.$$

Além disso, $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0.$

1.3 Convergências e desigualdades

No que segue introduzimos uma coleção de desigualdades fundamentais. Essas desigualdades serão frequentemente usadas nos capítulos subsequentes.

1. Sejam $a, b \geqslant 0$, $\epsilon > 0$, $1 < p < +\infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. A desigualdade de Young é

$$ab \leqslant \epsilon a^p + C(\epsilon) b^{p'} \tag{1.10}$$

sendo $C(\epsilon) = \dfrac{(\epsilon p)^{\frac{-p'}{p}}}{p'} = \dfrac{p-1}{p(\epsilon p)^{\frac{1}{p-1}}}$.

Notemos que se $\epsilon = \frac{1}{p}$ temos que $ab \leqslant \dfrac{1}{p} a^p + \dfrac{1}{p'} b^{p'}$. Em particular se $p = 2$ e $\epsilon = \frac{1}{2}$ temos que $ab \leqslant \dfrac{1}{2} a^2 + \dfrac{1}{2} b^2$ a conhecida desigualdade de Cauchy.

2. Se $x, y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ então

$$C_p |x-y|^p \leqslant \langle |x|^{p-2}x - |x|^{p-2}x, x-y \rangle \quad \text{se } p \geqslant 2, \tag{1.11}$$

sendo C_p constante positiva.

Proposição 1.2 *1. Se* $m \in L^r(\Omega)$ *com* $r \geqslant \frac{N}{p}$ *e* $u_n \to u$ *em* $L^{pr'}(\Omega)$ *quando* $n \to +\infty$ *então*

$$\begin{cases} \displaystyle\int m(x)|u_n|^{p-1}u_n \to \int m(x)|u|^{p-1}u & \textit{quando } n \to +\infty \\ \displaystyle\int m(x)|u_n|^p \to \int m(x)|u|^p & \textit{quando } n \to +\infty \\ \displaystyle\int m(x)|u_n|^{p-1}v \to \int m(x)|u|^{p-1}v & \textit{para todo } v \in L^p(\Omega) \textit{ quando } n \to +\infty \end{cases}$$

2. Se $w \in L^s(\partial\Omega)$ *com* $s \geqslant \frac{N-1}{p-1}$ *e* $u_n \to u$ *em* $L^{ps'}(\partial\Omega)$ *quando* $n \to +\infty$ *então*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\partial\Omega} w(x)|u_n|^{p-1}u_n \to \int_{\partial\Omega} w(x)|u|^{p-1}u & \textit{quando } n \to +\infty \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} w(x)|u_n|^p \to \int_{\partial\Omega} w(x)|u|^p & \textit{quando } n \to +\infty \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} w(x)|u_n|^{p-1}v \to \int_{\partial\Omega} w(x)|u|^{p-1}v & \textit{para todo } v \in L^p(\partial\Omega) \textit{ quando } n \to +\infty. \end{cases}$$

Prova: Como $u_n \to u$ em $L^{pr'}(\Omega)$ existem uma subsequência $\{u_{n_j}\}$ da sequência $\{u_n\}$ e $0 \leqslant h \in L^{pr'}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} u_{n_j}(x) \to u(x) & \text{para quase todo } x \in \Omega \text{ quando } n \to +\infty \\ |u_{n_j}(x)| \leqslant h(x) & \text{para quase todo } x \in \Omega \text{ e para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

daí

$$\begin{cases} m(x)|u_{n_j}(x)|^{p-1}u_{n_j}(x) \to m(x)|u(x)|^{p-1}u(x) & \text{para quase todo } x \in \Omega \\ |m(x)|u_{n_j}(x)|^{p-1}u_{n_j}(x) = |m(x)||u_{n_j}(x)|^p \leqslant |m(x)||h(x)|^p & \text{para todo } n_j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

notemos que $mh^p \in L^1(\Omega)$, pois

$$\left|\int m(x)(h(x))^p\right| \leqslant \int |m(x)|(h(x))^p \leqslant \|m\|_{L^r(\Omega)} \left(\int (h(x))^{pr'}\right)^{\frac{1}{r'}} = \|m\|_{L^r(\Omega)}\|h\|^p_{L^{pr'}(\Omega)},$$

então o Teorema da Convergência Dominada da $\displaystyle\int m(x)|u_{n_j}|^{p-1}u_{n_j} \to \int m(x)|u|^{p-1}u$ quando $n_j \to +\infty$. Se supomos que existe uma outra subsequência $\{u_{n_j}\}$ da sequência $\{u_n\}$ tal que

$$\left|\int m(x)|u_{n_j}|^{p-1}u_{n_j} - \int m(x)|u|^{p-1}u\right| \geqslant \epsilon, \tag{1.12}$$

para algum $\epsilon > 0$ para todo $n_j \in \mathbb{N}$, pelo argumento acima conseguiríamos uma subsequência $\{u_{n_{j_k}}\}$ da sequência $\{u_{n_j}\}$ tal que $\displaystyle\int m(x)|u_{n_{j_k}}|^{p-1}u_{n_{j_k}} \to \int m(x)|u|^{p-1}u$ quando $n_{j_k} \to +\infty$ que contradiz (1.12). Portanto, $\displaystyle\int m(x)|u_n|^{p-1}u_n \to \int m(x)|u|^{p-1}u$ quando $n \to +\infty$. La prova das convergências restantes é feito similarmente. □

Será útil o seguinte lema de mudança de variável introduzida em [47].

Lema 1.3 *Sejam $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $a \in L^\infty(\mathbb{R})$, $0 < m \leqslant a(s) \leqslant M$ para quase todo $s \in \mathbb{R}$ e $\alpha(t) = \displaystyle\int_0^t a(s)ds$ então é válido*

$$\int_0^T f(\alpha(t))a(t)dt = \int_0^{\alpha(T)} f(t)dt. \tag{1.13}$$

Lema 1.4 *Sejam $v > 0$, $u \geqslant 0$ duas funções diferenciáveis em quase todo ponto de Ω e seja $p > 1$. Denotando*

$$\begin{cases} L(u,v) = |\nabla u|^p + (p-1)\dfrac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\dfrac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v, \\ R(u,v) = |\nabla u|^p - \nabla\left(\dfrac{u^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v. \end{cases}$$

Temos $L(u,v) = R(u,v)$. Além disso

1. *$L(u,v) \geqslant 0$ para quase todo ponto de Ω.*

2. *$L(u,v) = 0$ para quase todo ponto de Ω se, e somente se $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = 0$ para quase todo ponto de Ω, isto é $u = cv$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.*

Capítulo 2

Boa postura e comportamento assintótico em problemas parabólicos de Kirchhoff com condição de fronteira tipo fluxo

Neste capítulo consideramos um problema parabólico não-linear com termo não-local e condição de fronteira de Neumann ou Robin, dado por

$$\begin{cases} \partial_t u - a\left(\int |\nabla u|^2\right)\Delta u + \alpha(x)u = f(x) & \text{em } \Omega \times (0,+\infty), \\ a\left(\int |\nabla u|^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)u = g(x) & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Em (2.1) Ω é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant$, com fronteira suave $\Gamma := \partial\Omega$, ν é o vetor unitário exterior a Γ e $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável tal que

$$0 < \lambda \leqslant a(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

os coeficientes $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ e $\beta \in L^\infty(\Gamma)$, com $\alpha(x) \geqslant 0$ para quase todo $x \in \Omega$, e $\beta(x) \geqslant 0$ para quase todo $x \in \Gamma$, satisfazem

$$\int \alpha(x) + \int_\Gamma \beta(x) > 0. \tag{2.3}$$

Assumimos sobre os dados

$$f = f(x) \in L^2(\Omega), \quad g = g(x) \in L^2(\Gamma), \tag{2.4}$$

$$u_0 \in H^1(\Omega). \tag{2.5}$$

O resultado principal de este capítulo é o

Teorema 2.1 *Suponha que* (2.2)-(2.5) *sejam válidas. Então a solução estacionaria* u_* *de* (2.1) *que satisfaz*

$$2a'\left(\int |\nabla u_*|^2\right)\int |\nabla u_*|^2 + a\left(\int |\nabla u_*|^2\right) > 0$$

é assintoticamente estável.

Vamos considerar

$$(\psi, \varphi)_{H^1(\Omega)} := \int \nabla\psi \cdot \nabla\varphi + \int \alpha\psi\varphi + \int_\Gamma \beta\psi\varphi, \quad \forall \psi, \varphi \in H^1(\Omega),$$

o produto inteiro de $H^1(\Omega)$ e por

$$\|\psi\|_{H^1(\Omega)} := \sqrt{\int |\nabla\psi|^2 + \int \alpha\psi^2 + \int_\Gamma \beta\psi^2}, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega) \tag{2.6}$$

a norma associada, que é equivalente a norma usual de $H^1(\Omega)$ devido a (2.3).

Observação 2.1 *Alguns resultados podem ser provados sobre hipóteses mais gerais. Nas Seções 2.1 e 2.3 pode-se considerar* (2.2) *com* $a(\cdot)$ *contínua e* (2.4) *com* $f \in H^1(\Omega)^*$.

O capítulo é organizado como segue. Em Seção 2.1, Seção 2.2, Seção 2.3 e Seção 2.4 estudamos existência, unicidade, continuidade com respeito aos dados e regularidade do problema parabólico, respectivamente. Na Seção 2.5 o assunto é o problema estacionario associado ao problema parabólico. Finalmente na Seção 2.6 estudamos o comportamento assintótico das soluções quando o tempo é grande.

2.1 Existência de solução do problema parabólico

Nesta seção, provamos a existência de solução para o problema (2.1). Para esse fim, usamos uma mudança de variável, o método de Faedo-Galerkin e argumentos de compacidade. Começamos com o problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta\psi_i + \alpha(x)\psi_i = \lambda_i\psi_i & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial\psi_i}{\partial\nu} + \beta(x)\psi_i = \lambda_i\psi_i & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.7}$$

ou seja, $\psi_i \in H^1(\Omega)$ satisfazendo

$$(\psi_i, \varphi)_{H^1(\Omega)} = \lambda_i\left(\int \psi_i\varphi + \int_\Gamma \psi_i\varphi\right), \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{2.8}$$

Lema 2.1 *Suponha* (2.3) *válido. Então existe um sistema completo* $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$ *de autofunções de* (2.7) *com* $(\psi_i, \psi_j)_{H^1(\Omega)} = \delta_{ij}$. *Para cada* $v \in H^1(\Omega)$ *temos* $v = \sum_{i=1}^{\infty}(v, \psi_i)_{H^1(\Omega)}\psi_i$ *em* $H^1(\Omega)$. *Além disso, para cada* $v \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$ *temos* $v = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\int v\varphi_i + \int_\Gamma v\varphi_i\right)\varphi_i$ *em* $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$, *com* $\varphi_i = \sqrt{\lambda_i}\psi_i$.

Prova: Ver [8]. □

Definição 2.1 *Uma solução fraca do problema* (2.1) *é uma função u tal que para todo* $T > 0$ *tem-se* $u \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, *com* $u' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u(0) = u_0$ *e que satisfaz*

$$\int u'(t)v + a\left(\int |\nabla u(t)|^2\right)\int \nabla u(t)\cdot\nabla v + \int \alpha u(t)v + \int_\Gamma \beta u(t)v = \int fv + \int_\Gamma gv, \tag{2.9}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$ *e quase todo* $t \in (0,T)$.

Teorema 2.2 *Suponha que* (2.2)-(2.5) *sejam válidos. Então existe uma solução fraca u do problema* (2.1).

Prova: Como $u_0 \in H^1(\Omega)$ pelo Lema 2.1 temos

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty}(u_0,\psi_i)_{H^1(\Omega)}\psi_i \quad \text{em } H^1(\Omega). \tag{2.10}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos

$$u_n(t) := \sum_{i=1}^{n}\gamma_{in}(t)\psi_i \tag{2.11}$$

sendo $\gamma_{1n},\dots,\gamma_{nn}$ solução do sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \displaystyle\int u_n'(t)v + a\left(\int |\nabla u_n(t)|^2\right)\int \nabla u_n(t)\cdot\nabla v + \int \alpha u_n(t)v + \int_\Gamma \beta u_n(t)v = \int fv + \int_\Gamma gv, \\ \forall v \in \operatorname{span}\{\psi_1,\dots,\psi_n\}, \quad \text{para quase todo } t \in (0,+\infty) \\ \displaystyle u_n(0) = \sum_{i=1}^{n}(u_0,\psi_i)_{H^1(\Omega)}\psi_i. \end{cases} \tag{2.12}$$

Tomando $v = \psi_j$ em (2.12), $j = 1,\dots,n$, vemos que o sistema (2.12) é equivalente ao problema de Cauchy

$$\begin{cases} A_n\gamma_n'(t) = -F_n(\gamma_n(t)), \quad \text{para quase todo } t \in (0,+\infty) \\ \gamma_n(0) = \big((u_0,\psi_1)_{H^1(\Omega)},\cdots,(u_0,\psi_n)_{H^1(\Omega)}\big) \qquad j = 1,\dots,n, \end{cases} \tag{2.13}$$

sendo $\gamma_n(t) = (\gamma_{1n}(t),\cdots,\gamma_{nn}(t))$, $\gamma_n'(t) = (\gamma_{1n}'(t),\cdots,\gamma_{nn}'(t))$, $F_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com $F_n(y) = (F_{1n}(y),\cdots,F_{nn}(y))$ com

$$\begin{aligned} F_{jn}(y_1,\cdots,y_n) \;:=\; & a\left(\int\left|\sum_{i=1}^{n} y_i\nabla\psi_i\right|^2\right)\int\sum_{i=1}^{n} y_i\nabla\psi_i\cdot\nabla\psi_j + \int\alpha\sum_{i=1}^{n} y_i\psi_i\psi_j + \\ & \int_\Gamma\beta\sum_{i=1}^{n} y_i\psi_i\psi_j - \int f\psi_j - \int_\Gamma g\psi_j, \end{aligned}$$

para todo $j = 1, \ldots, n$ e todo $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e

$$A_n = \begin{bmatrix} \displaystyle\int \psi_1^2 & \displaystyle\int \psi_1\psi_2 & \cdots & \displaystyle\int \psi_1\psi_n \\ \displaystyle\int \psi_2\psi_1 & \displaystyle\int \psi_2^2 & \cdots & \displaystyle\int \psi_2\psi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \displaystyle\int \psi_n\psi_1 & \displaystyle\int \psi_n\psi_2 & \cdots & \displaystyle\int \psi_n^2 \end{bmatrix}.$$

Como a função a é contínua, F_n é contínua e A_n é uma Matrix de Gram, que é invertível (ver Teorema 5.2, p. 48, em [99]), pelo Teorema 1.8 (ou ver Teorema 1.1, p. 43, em [49]) esse problema tem uma solução $\gamma_i \in C([0, \delta_n)) \cap C^1((0, \delta_n))$, para algum $\delta_n > 0$.
Tomando $v = u_n'(t)$ em (2.12) obtemos

$$\int |u_n'(t)|^2 + a\left(\int |\nabla u_n(t)|^2\right) \int \nabla u_n(t) \cdot \nabla u_n'(t) + \int \alpha u_n(t) u_n'(t) + \int_\Gamma \beta u_n(t) u_n'(t) - \int f u_n'(t) - \int_\Gamma g u_n'(t) = 0,$$

ou seja,

$$\int |u_n'(t)|^2 + \frac{d}{dt} E(u_n(t)) = 0, \tag{2.14}$$

sendo $E : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_0^{\int |\nabla v|^2} a(s)ds + \frac{1}{2}\int \alpha v^2 + \frac{1}{2}\int_\Gamma \beta v^2 - \int fv - \int_\Gamma gv, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.15}$$

Por integração de (2.14) desde 0 até t obtemos

$$\int_0^t \int |u_n'(s)|^2 ds = E(u_n(0)) - E(u_n(t)). \tag{2.16}$$

Por (2.10) e a coercividade de E, de (2.16) temos

$$\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \quad \forall n, \quad \forall t \geqslant 0, \tag{2.17}$$

sendo $C > 0$ independente de n e de t (ver (2.31) na Observação 2.2 abaixo). Notemos que como $\|\gamma_n(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \sum_{i=1}^{n} (\gamma_{in}(t))^2 = \|u_n(t)\|_{H^1(\Omega)}^2$, temos por (2.17) que γ_n (ou u_n) está definida globalmente sobre $(0, +\infty)$. Além disso, de (2.16) pela coercividade de E temos

$$\int_0^t \int |u_n'(s)|^2 ds = E(u_n(0)) - E(u_n(t)) \leqslant C, \quad \forall n, \quad \forall t \geqslant 0, \tag{2.18}$$

ver (2.33) na Observação 2.2 abaixo.
Assim para cada $T > 0$, u_n é uma sequência limitada $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ e u_n' é uma

sequência limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto, pelo Lema de Aubin-Lions, existe uma subsequência de u_n, ainda denotada de u_n, tal que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } L^2(0,T;H^1(\Omega)), \\ u_n' \rightharpoonup u' \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ u_n \to u \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ u_n \to u \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Gamma)), \\ u_n(t) \to u(t) \quad \text{em } L^2(\Omega) \text{ para quase todo } t \in (0,T), \\ u_n(t) \to u(t) \quad \text{em } L^2(\Gamma) \text{ para quase todo } t \in (0,T), \\ \dfrac{1}{a\left(\displaystyle\int |\nabla u_n(\cdot)|^2\right)} \overset{\star}{\rightharpoonup} a^\infty \quad \text{em } L^\infty(0,T), \\ u_n(T) \rightharpoonup u(T) \quad \text{em } H^1(\Omega), \\ u_n(T) \to u(T) \quad \text{em } L^2(\Omega). \end{cases} \tag{2.19}$$

Afirmamos que $u(0) = u_0$. De fato, considere $\varphi \in C^1([0,T])$ tal que $\varphi(T) = 0$ e $\varphi(0) = 1$. Por integração por partes, Teorema 1.5, para $u_n, \varphi v \in W^2(0,T;H^1(\Omega))$ com $v \in H^1(\Omega)$, temos

$$-\int u_n(0)v = \int_0^T \int u_n'(t)v\varphi(t)dt + \int_0^T \int v\varphi'(t)u_n(t)dt$$

e, passando ao limite, tem-se

$$-\int u_0 v = \int_0^T \int u'(t)v\varphi(t)dt + \int_0^T \int v\varphi'(t)u(t)dt.$$

Por outro lado, por integração por partes, Teorema 1.5, para $u, \varphi v \in W^2(0,T;H^1(\Omega))$ tem-se

$$-\int u(0)v = \int_0^T \int u'(t)v\varphi(t)dt + \int_0^T \int v\varphi'(t)u(t)dt.$$

Assim segue das duas igualdades anteriores que

$$\int (u(0) - u_0)v = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

e em particular para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, donde concluímos a prova da afirmação.
Para mostrar que u é uma solução do problema (2.1), introduzimos a mudança de variáveis no tempo

$$\phi_n(t) := \int_0^t a\left(\int |\nabla u_n(s)|^2\right) ds. \tag{2.20}$$

Notemos que por (2.2) temos que $(0,\lambda T) \subseteq (0,\phi_n(T))$ para todo $n \geqslant 1$ e se $\varphi \in C_c^\infty(0,\lambda T)$, então $\varphi \in C_c^\infty(0,\phi_n(T))$ e $\varphi(\phi_n(\cdot)) \in H^1(0,T)$ para todo $n \geqslant 1$. De (2.12) deduzimos que

$$\int_0^T \varphi(\phi_n(t)) \int u_n'(t) v dt + \int_0^T \varphi(\phi_n(t)) a\left(\int |\nabla u_n(t)|^2\right) \int \nabla u_n(t)\cdot\nabla v dt + \int_0^T \varphi(\phi_n(t)) \int \alpha u_n(t) v dt + \int_0^T \varphi(\phi_n(t)) \int_\Gamma \beta u_n(t) v dt = \int_0^T \varphi(\phi_n(t)) \int f v dt + \int_0^T \varphi(\phi_n(t)) \int_\Gamma g v dt \qquad (2.21)$$

para todo $v \in \text{span}\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$.
A estimativa (2.17) (ou (2.31) na Observação 2.2 abaixo) garante que existe $M > 0$ tal que $0 < \lambda \leqslant a\left(\int |\nabla u_n(t)|^2\right) \leqslant M$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $n \geqslant 1$. Agora, estabelecendo $w_n(\phi_n(t)) := u_n(t)$ em (2.21) e usando Lema 1.3 (ou Lema 2.2 de [47]), resulta

$$\int_0^{\phi_n(T)} \varphi(t) \int w_n'(t) v dt + \int_0^{\phi_n(T)} \varphi(t) \int \nabla w_n(t)\cdot\nabla v dt + \int_0^{\phi_n(T)} \frac{\varphi(t)}{a\left(\int |\nabla w_n(t)|^2\right)} \int \alpha w_n(t) v dt + \int_0^{\phi_n(T)} \frac{\varphi(t)}{a\left(\int |\nabla w_n(t)|^2\right)} \int_\Gamma \beta w_n(t) v dt = \int_0^{\phi_n(T)} \frac{\varphi(t)}{a\left(\int |\nabla w_n(t)|^2\right)} \int f v dt + \int_0^{\phi_n(T)} \frac{\varphi(t)}{a\left(\int |\nabla w_n(t)|^2\right)} \int_\Gamma g v dt$$

para todo $v \in \text{span}\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$. Como $supp(\varphi) \subset (0, \lambda T) \subseteq (0, \phi_n(T))$ para todo $n \geqslant 1$, temos

$$\int w_n'(t) v + \int \nabla w_n(t)\cdot\nabla v + \frac{1}{a\left(\int |\nabla w_n(t)|^2\right)}\left(\int \alpha w_n(t) v + \int_\Gamma \beta w_n(t) v\right) = \frac{1}{a\left(\int |\nabla w_n(t)|^2\right)}\left(\int f v + \int_\Gamma g v\right) \qquad (2.22)$$

para todo $v \in \text{span}\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$ e quase todo $t \in (0, \lambda T)$.
Por outro lado, para qualquer $v \in H^1(\Omega)$ fixo tem-se

$$v_n := \sum_{i=1}^{n} (v, \psi_i)_{H^1(\Omega)} \psi_i \to v \quad \text{em } H^1(\Omega), \text{ quando } n \to +\infty, \qquad (2.23)$$

de modo que $v = v_n$ em (2.22) e integrando sobre $(0, \lambda T)$ temos

$$\int_0^{\lambda T} \varphi(t) \int w_n'(t) v_n dt + \int_0^{\lambda T} \varphi(t) \int \nabla w_n(t)\cdot\nabla v_n dt + \int_0^{\lambda T} \frac{\varphi(t)}{a\left(\int |\nabla w_n(t)|^2\right)} \int \alpha w_n(t) v_n dt + \int_0^{\lambda T} \frac{\varphi(t)}{a\left(\int |\nabla w_n(t)|^2\right)} \int_\Gamma \beta w_n(t) v_n dt = \int_0^{\lambda T} \frac{\varphi(t)}{a\left(\int |\nabla w_n(t)|^2\right)} \int f v_n dt + \int_0^{\lambda T} \frac{\varphi(t)}{a\left(\int |\nabla w_n(t)|^2\right)} \int_\Gamma g v_n dt$$

para todo $n \geqslant 1$. Note que $\{w_n\}$ satisfaz (2.19) para algum $w \in L^2(0, \lambda T; H^1(\Omega))$ com $w' \in L^2(0, \lambda T; L^2(\Omega))$. Então, tomando limite quando $n \to +\infty$, deduzimos que

$$\int_0^{\lambda T} \varphi(t) \int w'(t) v dt + \int_0^{\lambda T} \varphi(t) \int \nabla w(t) \cdot \nabla v dt + \int_0^{\lambda T} \varphi(t) a^{\infty}(t) \int \alpha w(t) v dt +$$
$$\int_0^{\lambda T} \varphi(t) a^{\infty}(t) \int_{\Gamma} \beta w(t) v dt = \int_0^{\lambda T} \varphi(t) a^{\infty}(t) \int f v dt + \int_0^{\lambda T} \varphi(t) a^{\infty}(t) \int_{\Gamma} g v dt.$$

Daí

$$\int w'(t) v + \int \nabla w(t) \cdot \nabla v + a^{\infty}(t) \int \alpha w(t) v + a^{\infty}(t) \int_{\Gamma} \beta w(t) v =$$
$$a^{\infty}(t) \int f v + a^{\infty}(t) \int_{\Gamma} g v \tag{2.24}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$ e quase todo $t \in (0, \lambda T)$.

Resta provar que $a^{\infty}(t) = \dfrac{1}{a\left(\int |\nabla w(t)|^2\right)}$ para quase todo $t \in (0, \lambda T)$. De fato, tomando $v = w_n(t)$ em (2.22) obtemos

$$\int w_n'(t) w_n(t) + \int |\nabla w_n(t)|^2 + \frac{1}{a\left(\int |\nabla w_n(t)|^2\right)} \left(\int \alpha \left(w_n(t)\right)^2 + \int_{\Gamma} \beta \left(w_n(t)\right)^2 \right) =$$
$$\frac{1}{a\left(\int |\nabla w_n(t)|^2\right)} \left(\int f w_n(t) + \int_{\Gamma} g w_n(t) \right)$$

e integrando de 0 a λT conseguimos

$$\int_0^{\lambda T} \int |\nabla w_n(t)|^2 dt = -\frac{1}{2} \int \left(w_n(\lambda T)\right)^2 + \frac{1}{2} \int \left(w_n(0)\right)^2 - \int_0^{\lambda T} \frac{\int \alpha \left(w_n(t)\right)^2}{a\left(\int |\nabla w_n(t)|^2\right)} dt -$$
$$\int_0^{\lambda T} \frac{\int_{\Gamma} \beta \left(w_n(t)\right)^2}{a\left(\int |\nabla w_n(t)|^2\right)} dt + \int_0^{\lambda T} \frac{\int f w_n(t)}{a\left(\int |\nabla w_n(t)|^2\right)} dt + \int_0^{\lambda T} \frac{\int_{\Gamma} g w_n(t)}{a\left(\int |\nabla w_n(t)|^2\right)} dt.$$

Assim

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\lambda T} \int |\nabla w_n(t)|^2 dt = -\frac{1}{2} \int \left(w(\lambda T)\right)^2 + \frac{1}{2} \int u_0^2 - \int_0^{\lambda T} a^{\infty}(t) \int \alpha \left(w(t)\right)^2 dt -$$
$$\int_0^{\lambda T} a^{\infty}(t) \int_{\Gamma} \beta \left(w(t)\right)^2 dt + \int_0^{\lambda T} a^{\infty}(t) \int f w(t) dt + \int_0^{\lambda T} a^{\infty}(t) \int_{\Gamma} g w(t) dt. \tag{2.25}$$

Tomando $v = w(t)$ em (2.24) e integrando de 0 a λT, temos que

$$\frac{1}{2} \int \left(w(t)\right)^2 - \frac{1}{2} \int u_0^2 + \int_0^{\lambda T} \int |\nabla w(t)|^2 dt + \int_0^{\lambda T} a^{\infty}(t) \int \alpha \left(w(t)\right)^2 dt +$$
$$\int_0^{\lambda T} a^{\infty}(t) \int_{\Gamma} \beta \left(w(t)\right)^2 dt = \int_0^{\lambda T} a^{\infty}(t) \int f w(t) dt + \int_0^{\lambda T} a^{\infty}(t) \int_{\Gamma} g w(t) dt. \tag{2.26}$$

Logo

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\lambda T}\int|\nabla w_n(t)|^2dt=\int_0^{\lambda T}\int|\nabla w(t)|^2dt \tag{2.27}$$

o que implica

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\lambda T}\int\left|\nabla\left(w_n(t)-w(t)\right)\right|^2dt=0.$$

Daí existe uma subsequência de w_n, ainda denotada de w_n, tal que

$$\int\left|\nabla\left(w_n(t)-w(t)\right)\right|^2\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\quad\text{para quase todo } t\in(0,\lambda T)$$

e

$$\int|\nabla w_n(t)|^2\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int|\nabla w(t)|^2\quad\text{para quase todo } t\in(0,\lambda T).$$

Como a função a é contínua tem-se

$$\frac{1}{a\left(\int|\nabla w_n(t)|^2\right)}\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{a\left(\int|\nabla w(t)|^2\right)}\quad\text{para quase todo } t\in(0,\lambda T)$$

e pelo Teorema da convergência dominada,

$$\int_0^{\lambda T}\frac{\psi(t)}{a\left(\int|\nabla w_n(t)|^2\right)}dt\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^{\lambda T}\frac{\psi(t)}{a\left(\int|\nabla w(t)|^2\right)}dt$$

para todo $\psi\in L^1(0,\lambda T)$. Relembrando que

$$\int_0^{\lambda T}\frac{\psi(t)}{a\left(\int|\nabla w_n(t)|^2\right)}dt\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^{\lambda T}\psi(t)a^\infty(t)dt$$

para todo $\psi\in L^1(0,\lambda T)$, temos

$$\int_0^{\lambda T}\frac{\psi(t)}{a\left(\int|\nabla w(t)|^2\right)}dt=\int_0^{\lambda T}\psi(t)a^\infty(t)dt$$

para todo $\psi\in L^1(0,\lambda T)$, em particular para todo $\psi\in C_c^\infty(0,\lambda T)$, de modo que o lema fundamental do Cálculo Variacional garante que $\dfrac{1}{a\left(\int|\nabla w(t)|^2\right)}=a^\infty(t)$ para quase todo $t\in(0,\lambda T)$. Definindo

$$\phi(t):=\int_0^t a\left(\int|\nabla u(s)|^2\right)ds\quad\text{e}\quad\phi^{-1}(t):=\int_0^t\left(a\left(\int|\nabla w(s)|^2\right)\right)^{-1}ds, \tag{2.28}$$

notemos que $\phi,\phi^{-1}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ são continuas e diferenciáveis sobre $(0,+\infty)$, com $\phi'(t)=a\left(\int|\nabla u(t)|^2\right)$ e $(\phi^{-1})'(t)=\left(a\left(\int|\nabla w(t)|^2\right)\right)^{-1}$. Além disso, $u_n(\phi_n^{-1}(t))=w_n(t)\to w(t)$ em $L^2(\Omega)$ para quase todo $t\in(0,\lambda T)$ e por integração por partes, Teorema 1.5, temos

$$\begin{aligned}\int\left(u_n(\phi_n^{-1}(t))-u(\phi_n^{-1}(t))\right)^2&=\int\left(u_n(0)-u(0)\right)^2+2\int_0^{\phi_n^{-1}(t)}\int(u_n-u)'(s)(u_n-u)(s)\\&\leqslant\int\left(u_n(0)-u_0\right)^2+2\int_0^T\int|(u_n-u)'(s)||(u_n-u)(s)|ds\\&\leqslant\int\left(u_n(0)-u_0\right)^2+2\int_0^T\int|(u_n-u)'(s)||(u_n-u)(s)|ds\to 0.\end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade de Minkowski,

$$\begin{aligned}\|u_n(\phi_n^{-1}(t)) - u(\phi^{-1}(t))\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant \|u_n(\phi_n^{-1}(t)) - u(\phi_n^{-1}(t))\|_{L^2(\Omega)}\\ &+ \|u(\phi_n^{-1}(t)) - u(\phi^{-1}(t))\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$, para quase todo $t \in (0, \lambda T)$. Portanto, $w(t) = u(\phi^{-1}(t))$ para quase todo $t \in (0, \lambda T)$. Então $\phi(\phi^{-1}(t)) = t$ para todo $t \in (0, \lambda T)$, $\phi^{-1}(\phi(t)) = t$ para todo $t \in (0, \phi^{-1}(\lambda T))$ e $w(0) = w(\phi(0)) = u(0) = u_0$.

Se $\varphi \in C_c^\infty(0, \phi^{-1}(\lambda T))$ então $\varphi(\phi^{-1}(\cdot)) \in H^1(0, \lambda T)$. Logo, integrando (2.24) temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\lambda T} \varphi(\phi^{-1}(t)) \int w'(t)v dt + \int_0^{\lambda T} \varphi(\phi^{-1}(t)) \int \nabla w(t) \cdot \nabla v dt +\\ \int_0^{\lambda T} \frac{\varphi(\phi^{-1}(t))}{a\left(\int |\nabla w(t)|^2\right)} \left[\int \alpha w(t)v + \int_\Gamma \beta w(t)v\right] dt =\\ \int_0^{\lambda T} \frac{\varphi(\phi^{-1}(t))}{a\left(\int |\nabla w(t)|^2\right)} \left[\int fv + \int_\Gamma gv\right] dt\end{aligned}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$. Daí,

$$\begin{aligned}\int_0^{\lambda T} \frac{\varphi(\phi^{-1}(t))}{a\left(\int |\nabla u(\phi^{-1}(t))|^2\right)} \int u'(\phi^{-1}(t))v dt +\\ \int_0^{\lambda T} \frac{\varphi(\phi^{-1}(t)) a\left(\int |\nabla u(\phi^{-1}(t))|^2\right)}{a\left(\int |\nabla w(t)|^2\right)} \int \nabla u(\phi^{-1}(t)) \cdot \nabla v dt +\\ \int_0^{\lambda T} \frac{\varphi(\phi^{-1}(t))}{a\left(\int |\nabla w(t)|^2\right)} \left[\int \alpha u(\phi^{-1}(t))v + \int_\Gamma \beta u(\phi^{-1}(t))v\right] dt =\\ \int_0^{\lambda T} \frac{\varphi(\phi^{-1}(t))}{a\left(\int |\nabla w(t)|^2\right)} \left[\int fv + \int_\Gamma gv\right] dt\end{aligned}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$. Pelo Lema 1.3 (ou Lema 2.2 de [47]) obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\phi^{-1}(\lambda T)} \varphi(t) \int u'(t)v dt + \int_0^{\phi^{-1}(\lambda T)} \varphi(t) a\left(|\nabla u(t)|^2\right) \int \nabla u(t) \cdot \nabla v dt +\\ \int_0^{\phi^{-1}(\lambda T)} \varphi(t) \int \alpha u(t) v dt + \int_0^{\phi^{-1}(\lambda T)} \varphi(t) \int_\Gamma \beta u(t) v dt =\\ \int_0^{\phi^{-1}(\lambda T)} \varphi(t) \left[\int fv + \int_\Gamma gv\right] dt\end{aligned}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$. Como essa igualdade é válida para $\varphi \in C_c^\infty(0, \phi^{-1}(\lambda T))$ arbitrária, temos

$$\int u'(t)v + a\left(\int |\nabla u(t)|^2\right) \int \nabla u(t) \cdot \nabla v + \int \alpha u(t)v + \int_\Gamma \beta u(t)v = \int fv + \int_\Gamma gv \quad (2.29)$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$ e quase todo $t \in (0, \widetilde{T})$, sendo $\widetilde{T} := \phi^{-1}(\lambda T)$. Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $u_k(t) = u(t - (k-1)\widetilde{T})$ para quase todo $t \in \left[(k-1)\widetilde{T}, k\widetilde{T}\right]$, note que

$u_1 = u$ e é solução a (2.29). Para $k > 1$ vejamos que $u((k-1)\widetilde{T}) = u_0$ e $u(k\widetilde{T}) = u(\widetilde{T})$ e, pelo Lema 1.3,

$$\begin{aligned}
\int_{(k-1)\widetilde{T}}^{k\widetilde{T}} u_k(t)\phi'(t) &= \int_{(k-1)\widetilde{T}}^{k\widetilde{T}} u(t-(k-1)\widetilde{T})\phi'(t)dt \\
&= \int_0^{\widetilde{T}} u(s)\phi'(s+(k-1))\widetilde{T})ds \\
&= -\int_0^{\widetilde{T}} u'(s)\phi(s+(k-1)\widetilde{T})ds \\
&= -\int_{(k-1)\widetilde{T}}^{k\widetilde{T}} u'(t-(k-1)\widetilde{T})\phi(t)dt
\end{aligned}$$

para toda $\phi \in C_c^\infty((k-1)\widetilde{T}, k\widetilde{T})$. Ou seja, $u_k'(t) = u'(t-(k-1)\widetilde{T})$ e por (2.29)

$$\int u_k'(t)v + a\left(\int |\nabla u_k(t)|^2\right)\int \nabla u_k(t)\cdot\nabla v + \int \alpha u_k(t)v + \int_\Gamma \beta u_k(t)v = \int fv + \int_\Gamma gv$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$ e quase todo $t \in \Big((k-1)\widetilde{T}, k\widetilde{T}\Big)$. Assim $\widetilde{u}(t) := u_k(t)$ se $t \in \Big[(k-1)\widetilde{T}, k\widetilde{T}\Big]$ é solução fraca do problema (2.1). □

Observação 2.2 *1. A constante $C > 0$ em (2.17) pode ser encontrada como segue. De (2.16) temos*

$$E(u_n(t)) \leqslant E(u_n(0)).$$

Por (2.2)-(2.4) e (2.6), desigualdade de Hölder, e imersões $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_*\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C_{tr}\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, obtemos

$$\begin{aligned}
E(u_n(t)) &\geqslant \frac{\lambda}{2}\int |\nabla u_n(t)|^2 + \frac{1}{2}\int \alpha|u_n(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_\Gamma \beta|u_n(t)|^2 - \int fu_n(t) - \int_\Gamma gu_n(t) \\
&\geqslant \frac{\widetilde{\lambda}}{2}\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 - \int fu_n(t) - \int_\Gamma gu_n(t) \\
&\geqslant \frac{\widetilde{\lambda}}{2}\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)} - \|g\|_{L^2(\Gamma)}\|u_n(t)\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\geqslant \frac{\widetilde{\lambda}}{2}\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 - k\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega)}, \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

sendo $\widetilde{\lambda} := \min\{1, \lambda\}$ and $k := \|f\|_{L^2(\Omega)C_*} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}C_{tr}$. Então

$$\frac{\widetilde{\lambda}}{2}\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 - k\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega)} \leqslant E(u_n(0))$$

e

$$\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 - 2\frac{k}{\widetilde{\lambda}}\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \frac{2E(u_n(0))}{\widetilde{\lambda}}$$

somando $\dfrac{k^2}{\widetilde{\lambda}^2}$ temos

$$\left(\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega)} - \frac{k}{\widetilde{\lambda}}\right)^2 \leqslant \frac{2E(u_n(0))}{\widetilde{\lambda}} + \frac{k^2}{\widetilde{\lambda}^2},$$

assim

$$\left| \|u_n(t)\|_{H^1(\Omega)} - \frac{k}{\widetilde{\lambda}} \right| \leqslant \left(\frac{2E(u_n(0))}{\widetilde{\lambda}} + \frac{k^2}{\widetilde{\lambda}^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto,

$$\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \left(\frac{2E(u_n(0))}{\widetilde{\lambda}} + \frac{k^2}{\widetilde{\lambda}^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{k}{\widetilde{\lambda}} \tag{2.31}$$

daí $u_n \overset{\star}{\rightharpoonup} u$ *em* $L^\infty(0, +\infty; H^1(\Omega))$ *para uma subsequência, assim*

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(0,+\infty;H^1(\Omega))} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|_{L^\infty(0,+\infty;H^1(\Omega))} \leqslant \left(\frac{2E(u_0)}{\widetilde{\lambda}} + \frac{k^2}{\widetilde{\lambda}^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{k}{\widetilde{\lambda}}, \tag{2.32}$$

para quase todo $t \in [0, +\infty)$.

2. *A constante* $C > 0$ *em* (2.18) *pode ser encontrada a partir* (2.16) *e* (2.30). *De fato, usando* (2.16) *e aplicando a desigualdade de Young a* (2.30) *obtemos*

$$\begin{aligned} \int_0^t \int |u_n'(\xi)|^2 d\xi &\leqslant E(u_n(0)) - \frac{\widetilde{\lambda}}{2} \|u_n(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + k\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leqslant E(u_n(0)) - \frac{\widetilde{\lambda}}{2} \|u_n(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{k^2}{2\widetilde{\lambda}} + \frac{\widetilde{\lambda}}{2} \|u_n(t)\|^2_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^t \int |u_n'(\xi)|^2 d\xi \leq E(u_n(0)) + \frac{k^2}{2\widetilde{\lambda}}. \tag{2.33}$$

Como por $u_n' \rightharpoonup u'$ *em* $L^2(0, t; L^2(\Omega))$, *da semicontinuidade da norma em* $L^2(0, t; L^2(\Omega))$ *conseguimos*

$$\int_0^t \int |u'(\xi)|^2 d\xi \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_0^t \int |u_n'(\xi)|^2 d\xi \leqslant E(u_0) + \frac{k^2}{2\widetilde{\lambda}}, \quad \forall t > 0. \tag{2.34}$$

2.2 Unicidade da solução do problema parabólico

Nesta seção, como Chipot e Savitska em [44], provaremos dois resultados de unicidade da solução para o problema (2.1). O primeiro resultado de unicidade é válido assumindo apenas continuidade da função $a(\cdot)$ e a monotonicidade da função $t \longmapsto a(t^2)t$ e é enunciado no

Teorema 2.3 *Suponha que* (2.2) *seja válida com* $a(\cdot)$ *contínua e que* (2.4)-(2.5) *sejam válidas. Se a função real*

$$t \longmapsto a(t^2)t \quad \textit{é não-decrescente} \tag{2.35}$$

então o problema (2.1) *possui, no máximo, uma solução.*

Observação 2.3 *As seguintes funções satisfazem* (2.35)*:*

1. *$a(\cdot)$ não-decrescente,*

2. *$a(t) = \mathrm{e}^{-t} + \lambda$, decrescente, para cada $\lambda > 0$,*

3. *$a(t) = \mathrm{e}^{-(t-b)^2} + \lambda$, não-monótona, com $b \in \mathbb{R}$ para λ suficientemente grande.*

Prova: Sejam u_1, u_2 duas soluções do problema (2.9), ou seja,

$$\begin{cases} u_i \in L^2(0,T;H^1(\Omega)), \quad u_i' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ u_i(0) = u_0, \\ \displaystyle\int u_i'(t)v + a_i(t)\int \nabla u_i(t)\cdot\nabla v + \int \alpha u_i(t)v + \int_\Gamma \beta u_i(t)v = \int fv + \int_\Gamma gv, \\ \text{para todo } v \in H^1(\Omega) \text{ e quase todo } t \in (0,T),\ i = 1,2. \end{cases} \tag{2.36}$$

sendo $a_i(t) := a\left(\int |\nabla u_i(t)|^2\right)$ para $i = 1, 2$. Então,

$$\int (u_1 - u_2)'(t)v + a_1(t)\int \nabla u_1(t)\cdot\nabla v - a_2(t)\int \nabla u_2(t)\cdot\nabla v + \int \alpha(u_1(t) - u_2(t))v + \int_\Gamma \beta(u_1(t) - u_2(t))v = 0,$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$ e quase todo $t \in (0,T)$. Tomando $v = u(t) := u_1(t) - u_2(t)$ temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int (u(t))^2 + a_1(t)\int \nabla u_1(t)\cdot\nabla u(t) - a_2(t)\int \nabla u_2(t)\cdot\nabla u(t) + \int \alpha(u(t))^2 + \int_\Gamma \beta(u(t))^2 = 0. \tag{2.37}$$

Pela desigualdade de Hölder tem-se,

$$\left|\int \nabla u_1(t)\cdot\nabla u_2(t)\right| \leqslant \left(\int |\nabla u_1(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\nabla u_2(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

e usando (2.35) obtemos

$$\begin{aligned} & a_1(t)\int \nabla u_1(t)\cdot\nabla(u_1(t) - u_2(t)) - a_2(t)\int \nabla u_2(t)\cdot\nabla(u_1(t) - u_2(t)) \\ \geqslant\ & a_1(t)\int |\nabla u_1(t)|^2 - a_1(t)\left(\int |\nabla u_1(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int |\nabla u_2(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + a_2(t)\int |\nabla u_2(t)|^2 - \\ & a_2(t)\left(\int |\nabla u_1(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int |\nabla u_2(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ =\ & \left[a\left(\int |\nabla u_1(t)|^2\right)\left(\int |\nabla u_1(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} - a\left(\int |\nabla u_2(t)|^2\right)\left(\int |\nabla u_2(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \times \\ & \left[\left(\int |\nabla u_1(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int |\nabla u_2(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \geqslant\ & 0. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Portanto, de (2.37) temos $\frac{d}{dt}\int(u(t))^2 \leqslant 0$. Integrando sobre $(0,t)$ obtemos

$$\int(u(t))^2 \leqslant \int(u(0))^2 = 0,$$

integrando mais uma vez, sobre $(0,T)$, obtemos $u_1 = u_2$. $\square$

O segundo resultado de unicidade não depende de monotonicidade senão do fato de a função a' ser continua. A demonstração é feita usando uma mudança de variável, desigualdade de Hölder (como em [44]) porém aqui aparece uma dificuldade de estimativa no termo de fronteira, a qual é resolvida através do seguinte lema (ver [70]).

Lema 2.2 *Seja Ω um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 e seja $w(x)$ uma função continuamente diferenciável sobre $\overline{\Omega}$. Então, para qualquer $\delta > 0$,*

$$\int_{\partial\Omega}(w(x))^2 dS_x \leq \delta\int_\Omega |\nabla w(x)|^2 dx + \frac{A'}{\delta}\int_\Omega (w(x))^2 dx,$$

sendo dS_x o elemento de superfície sobre $\partial\Omega$ e A' é uma constante dependendo unicamente Ω.

Nosso segundo resultado de unicidade lê-se como:

Teorema 2.4 *Suponha que* (2.2)-(2.5) *sejam válidas. Então a solução do problema* (2.1) *é única.*

Observação 2.4 *A função $a(t) = sen(t) + \lambda$ com $\lambda > 1$ satisfaz* (2.2) *mas não satisfaz a condição* (2.35).

Prova: Sejam u_1 e u_2 duas soluções fracas do problema (2.1). Considere a mudança de escala de tempo utilizada na prova do Teorema 2.2 $\phi_i(t) := \int_0^t a\left(\int|\nabla u_i(s)|^2\right) ds$ e $w_i(\phi_i(t)) := u_i(t)$, para quase todo $t \in (0,+\infty)$, com $w_i(0) = w_i(\phi_i(0)) = u_i(0) = u_0$ e

$$\int w_i'(t)v + \int\nabla w_i(t)\cdot\nabla v + \frac{1}{a_i(t)}\left[\int\alpha w_i(t)v + \int_\Gamma \beta w_i(t)v\right] = \frac{1}{a_i(t)}\left[\int fv + \int_\Gamma gv\right] \tag{2.39}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$ e quase todo $t \in (0,\phi_i(T))$ para cada $0 < T < +\infty$, sendo $a_i(t) := a\left(\int|\nabla w_i(t)|^2\right)$, para $i = 1,2$.

Por (2.2), seja $t \in (0,\lambda T) \subset (0,\phi_i(T))$, para $i = 1,2$. Segue de (2.39) que

$$\int(w_1'(t) - w_2'(t))v + \int\nabla(w_1(t) - w_2(t))\cdot\nabla v + \frac{1}{a_1(t)}\int\alpha w_1(t)v - \frac{1}{a_2(t)}\int\alpha w_2(t)v$$
$$+\frac{1}{a_1(t)}\int_\Gamma\beta w_1(t)v - \frac{1}{a_2(t)}\int_\Gamma\beta w_2(t)v = \left[\frac{1}{a_1(t)} - \frac{1}{a_2(t)}\right]\left[\int fv + \int_\Gamma gv\right].$$

Tomando $v = w(t) := w_1(t) - w_2(t)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int(w(t))^2 + \int|\nabla w(t)|^2 + \frac{1}{a_1(t)}\int\alpha w_1(t)w(t) - \frac{1}{a_2(t)}\int\alpha w_2(t)w(t) +$$
$$\frac{1}{a_1(t)}\int_\Gamma\beta w_1(t)w(t) - \frac{1}{a_2(t)}\int_\Gamma\beta w_2(t)w(t) = \left[\frac{1}{a_1(t)} - \frac{1}{a_2(t)}\right]\left[\int fw(t) + \int_\Gamma gw(t)\right]$$

o que implica

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int (w(t))^2 + \int |\nabla w(t)|^2 + \frac{1}{a_1(t)}\left[\int \alpha (w(t))^2 + \int_\Gamma \beta (w(t))^2\right] = \left(\frac{1}{a_1(t)} - \frac{1}{a_2(t)}\right) \times \left(-\int \alpha w_2(t) w(t) - \int_\Gamma \beta w_2(t) w(t) + \int f w(t) + \int_\Gamma g w(t)\right).$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int (w(t))^2 \quad + \quad \int |\nabla w(t)|^2 \leqslant \left(\frac{1}{a_1(t)} - \frac{1}{a_2(t)}\right) \times \left(-\int \alpha w_2(t) w(t) - \int_\Gamma \beta w_2(t) w(t) + \int f w(t) + \int_\Gamma g w(t)\right). \quad (2.40)$$

Por (2.2), desigualdade de Hölder e (2.32) temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{a_1(t)} - \frac{1}{a_2(t)}\right| &= \frac{|a_2(t) - a_1(t)|}{a_1(t) a_2(t)} \\
&= \frac{|a'(s_t)|}{a_1(t)a_2(t)}\left|\int |\nabla w_2(t)|^2 - \int |\nabla w_1(t)|^2\right| \\
&\leqslant \frac{\sup_{s\in[0,C^2]}|a'(s)|}{\lambda^2}\left|\int |\nabla w_2(t)|^2 - \int |\nabla w_1(t)|^2\right| \\
&= \frac{\sup_{s\in[0,C^2]}|a'(s)|}{\lambda^2}\left|-\int \nabla w(t)\cdot\nabla(w_1(t) + w_2(t))\right| \\
&\leqslant \frac{\sup_{s\in[0,C^2]}|a'(s)|}{\lambda^2}\int |\nabla w(t)||\nabla(w_1(t) + w_2(t))| \\
&\leqslant \frac{\sup_{s\in[0,C^2]}|a'(s)|}{\lambda^2}\left(\int |\nabla w(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int |\nabla(w_1(t) + w_2(t))|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C_1\left(\int |\nabla w(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

sendo $C_1 > 0$ independente de w_i e de t (veja (2.32)). Note que

$$\begin{aligned}
|I| \;&:=\; \left|-\int \alpha w_2(t) w(t) - \int_\Gamma \beta w_2(t) w(t) + \int f w(t) + \int_\Gamma g w(t)\right| \\
&\leqslant \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_2(t)\|_{L^2(\Omega)}\|w(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)}\|w_2(t)\|_{L^2(\Gamma)}\|w(t)\|_{L^2(\Gamma)} + \\
&\quad\; \|f\|_{L^2(\Omega)}\|w(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}\|w(t)\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\leqslant C_2\left(\|w(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|w(t)\|_{L^2(\Gamma)}\right),
\end{aligned}$$

sendo $C_2 > 0$ constante independente de w_i e de t. Assim combinando as estimativas anteriores com (2.40) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int (w(t))^2 + \int |\nabla w(t)|^2 &\leqslant C_1\Big(\int |\nabla w(t)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}|I| \\
&\leqslant C_3\left(\int |\nabla w(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|w(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|w(t)\|_{L^2(\Gamma)}\right)
\end{aligned}$$

sendo $C_3 = C_1C_2 > 0$. Pela desigualdade de Young, para $\epsilon > 0$ temos

$$\left(\int |\nabla w(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|w(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|w(t)\|_{L^2(\Gamma)}\right) \leqslant \epsilon \int |\nabla w(t)|^2 + \frac{1}{2\epsilon}\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\epsilon}\|w(t)\|^2_{L^2(\Gamma)}$$

Agora escolhemos $\epsilon > 0$ tal que $\xi := 1 - C_3\epsilon$, assim

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int (w(t))^2 + \xi \int |\nabla w(t)|^2 \leqslant \frac{C_3}{2\epsilon}\int (w(t))^2 + \frac{C_3}{2\epsilon}\int_\Gamma (w(t))^2.$$

Pelo Lema 2.2 conseguimos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int (w(t))^2 + \xi \int |\nabla w(t)|^2 \leqslant \left(\frac{C_3}{2\epsilon} + \frac{C_3 A'}{2\epsilon\delta}\right)\int (w(t))^2 + \frac{C_3\delta}{2\epsilon}\int |\nabla w(t)|^2, \quad \forall \delta > 0.$$

Escolhendo $\delta > 0$ tal que $\xi - \dfrac{C_3\delta}{2\epsilon} > 0$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int (w(t))^2 \leqslant C_4 \int (w(t))^2, \quad \text{com } C_4 := \frac{C_3(\delta + A')}{\epsilon\delta}.$$

A desigualdade de Gronwall garante que

$$\int (w(t))^2 \leqslant \mathrm{e}^{C_4 t}\int (w(0))^2 = 0, \quad \forall t \in (0, \lambda T),$$

que implica que $w_1 = w_2$ sobre $(0, \lambda T)$ para cada $0 < T < +\infty$, equivalentemente $u_1 = u_2$ sobre $\left(0, \frac{\lambda T}{M}\right) \subset \left(0, \min\{\phi_1^{-1}(\lambda T)), \phi_2^{-1}(\lambda T)\}\right)$ para cada $0 < T < +\infty$, sendo $M = \sup_{\xi \in [0, C^2]} a(\xi)$, com C definida em (2.32), e $\phi_i^{-1}(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{a\left(\int |\nabla w_i(t)|^2\right)}$. □

2.3 Continuidade da solução com respeito aos dados

Assumindo que a função $t \longmapsto a(t^2)t$ é crescente vamos provar a continuidade da solução do problema (2.1) com respeito aos dados f, g e a condição inicial u_0. Para provarmos usamos o método direto de Cálculo Variacional. O resultado se afirma no seguinte

Teorema 2.5 *Suponha que* (2.2) *seja válida com* $a(\cdot)$ *contínua,* (2.4)-(2.5) *sejam válidas e que a função real*

$$t \longmapsto a(t^2)t \quad \textit{seja crescente.} \tag{2.41}$$

Se $f_j \to f$ *em* $L^2(\Omega)$, $g_j \to g$ *em* $L^2(\Gamma)$ *e* $u_0^j \to u_0$ *em* $H^1(\Omega)$, *quando* $j \to +\infty$, *então a solução* u_j *do problema*

$$\begin{cases} \partial_t u_j - a\left(\int |\nabla u_j|^2\right)\Delta u_j + \alpha(x)u_j = f_j(x) & \textit{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ a\left(\int |\nabla u_j|^2\right)\dfrac{\partial u_j}{\partial \nu} + \beta(x)u_j = g_j(x) & \textit{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u_j(\cdot, 0) = u_0^j & \textit{em } \Omega \end{cases} \tag{2.42}$$

satisfaz $u_j \to u$ *em* $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, *quando* $j \to +\infty$, *para cada* $0 < T < +\infty$, *sendo* u *a solução do problema*

$$\begin{cases} \partial_t u - a\left(\int |\nabla u|^2\right)\Delta u + \alpha(x)u = f(x) & \text{em } \Omega \times (0,+\infty), \\ a\left(\int |\nabla u|^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)u = g(x) & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.43}$$

Prova: De (2.32) e (2.34) temos

$$\|u_j(t)\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \left(\frac{2E(u_0^j)}{\widetilde{\lambda}} + \frac{k_j^2}{\widetilde{\lambda}^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{k_j}{\widetilde{\lambda}}, \quad \forall j,\ \forall t \geqslant 0, \tag{2.44}$$

and

$$\int_0^t \int |u_j'(\xi)|^2 d\xi \leqslant E(u_0^j) + \frac{k_j^2}{2\widetilde{\lambda}}, \quad \forall j, \forall t > 0, \tag{2.45}$$

sendo $k_j = \|f_j\|_{L^2(\Omega)}C_* + \|g_j\|_{L^2(\Gamma)}C_{tr}$ e $\widetilde{\lambda} = \min\{\lambda, 1\}$.
Como $f_j \to f$ em $L^2(\Omega)$, $g_j \to g$ em $L^2(\Gamma)$ e $u_0^j \to u_0$ em $H^1(\Omega)$, quando $j \to +\infty$, e $0 < T < +\infty$ é fixo então temos que u_j é limitada em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ e u_j' é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Relembrando que os espaços $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ e $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ são reflexivos, existe uma subsequência $\{u_{j_k}\}$ of $\{u_j\}$ tal que

$$u_{j_k} \rightharpoonup \widetilde{u} \quad \text{em } L^2(0,T;H^1(\Omega)), \tag{2.46}$$

$$u_{j_k}' \rightharpoonup \widetilde{u}' \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.47}$$

Pelo Lema de Aubin-Lions para a tripla $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ existe uma subsequência de u_{j_k}, ainda denotada por u_{j_k}, e $u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tais que

$$u_{j_k} \to \widetilde{u} \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.48}$$

Essa convergência implica pelo Teorema inversa do teorema da convergência dominada a existência ([23], [68]) de uma subsequência de u_{j_k}, ainda denotada por u_{j_k}, tal que

$$u_{j_k}(t) \to \widetilde{u}(t) \quad \text{em } L^2(\Omega), \text{ para quase todo } t \in (0,T). \tag{2.49}$$

Novamente pelo Lema de Aubin-Lions para a tripla $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Gamma) \hookrightarrow H^1(\Omega)^*$ existe uma subsequência de u_{j_k}, ainda denotada por u_{j_k}, tal que

$$u_{j_k} \to \widetilde{u} \quad \text{in } L^2(0,T;L^2(\Gamma)), \tag{2.50}$$

no sentido traço e, passando a uma subsequência se necessário, pelo Teorema da convergência dominada temos

$$u_{j_k}(t) \to \widetilde{u}(t) \quad \text{em } L^2(\Gamma), \text{ para quase todo } t \in (0,T). \tag{2.51}$$

Substraindo (2.42) e (2.43)

$$\int (u_j'(t) - u'(t))v + a_j(t)\int \nabla u_j(t)\cdot\nabla v - a(t)\int \nabla u(t)\cdot\nabla v + \int \alpha(u_j(t)-u(t))v +$$
$$\int_\Gamma \beta(u_j(t)-u(t))v = \int (f_j - f)v + \int_\Gamma (g_j - g)v$$

sendo $a_j(t) := a\left(\int |\nabla u_j(t)|^2\right)$ para todo $j \geqslant 1$ e $a(t) := a\left(\int |\nabla u(t)|^2\right)$.
Tomando $v = u_j(t) - u(t)$ temos

$$\int (u_j'(t) - u'(t))(u_j(t)-u(t)) + a_j(t)\int \nabla u_j(t)\cdot\nabla(u_j(t)-u(t)) -$$
$$a(t)\int \nabla u(t)\cdot\nabla(u_j(t)-u(t)) + \int \alpha(u_j(t)-u(t))^2 + \int_\Gamma \beta(u_j(t)-u(t))^2 =$$
$$\int (f_j - f)(u_j(t)-u(t)) + \int_\Gamma (g_j - g)(u_j(t)-u(t))$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int (u_j(t)-u(t))^2 + a_j(t)\int \nabla u_j(t)\cdot\nabla(u_j(t)-u(t)) -$$
$$a(t)\int \nabla u(t)\cdot\nabla(u_j(t)-u(t)) + \int \alpha(u_j(t)-u(t))^2 + \int_\Gamma \beta(u_j(t)-u(t))^2 =$$
$$\int (f_j - f)(u_j(t)-u_0(t)) + \int_\Gamma (g_j - g)(u_j(t)-u(t))$$

Por (2.41) temos (2.38) e portanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int (u_j(t)-u(t))^2 &\leqslant \int (f_j - f)(u_j(t)-u(t)) + \int_\Gamma (g_j - g)(u_j(t)-u(t)) \\ &\leqslant \|f_j - f\|_{L^2(\Omega)}\|u_j(t)-u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad \|(g_j - g)\|_{L^2(\Gamma)}\|u_j(t)-u(t)\|_{L^2(\Gamma)}\end{aligned}$$

integrando de 0 a t

$$\frac{1}{2}\int (u_j(t)-u(t))^2 - \frac{1}{2}\int (u_j(0)-u(0))^2 \leqslant \int_0^t \|f_j - f\|_{L^2(\Omega)}\|u_j(s)-u(s)\|_{L^2(\Omega)}ds +$$
$$\int_0^t \|(g_j - g)\|_{L^2(\Gamma)}\|u_j(s)-u(s)\|_{L^2(\Gamma)}ds$$

e

$$\frac{1}{2}\int (u_j(t)-u(t))^2 \leqslant \frac{1}{2}\int (u_0^j - u_0)^2 + \|f_j - f\|_{L^2(\Omega)}\int_0^t \|u_j(s)-u(s)\|_{L^2(\Omega)}ds +$$
$$\|(g_j - g)\|_{L^2(\Gamma)}\int_0^t \|u_j(s)-u(s)\|_{L^2(\Gamma)}ds$$

assim,

$$\|u_j(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \ \text{para todo } t \in (0,T] \tag{2.52}$$

e junto com (2.49) implica $\widetilde{u} = u$.
Por outro lado, tomando $v = u(t)$ em (2.43) temos

$$\int u'(t)u(t) + a(t)\int |\nabla u(t)|^2 + \int \alpha(u(t))^2 + \int_\Gamma \beta(u(t))^2 = \int fu(t) + \int_\Gamma gu(t)$$

integrando de 0 a T

$$\begin{aligned}\int_0^T \int u'(t)u(t)dt + \int_0^T a(t)\int |\nabla u(t)|^2 dt + \int_0^T \int \alpha(u(t))^2 dt +& \\ \int_0^T \int_\Gamma \beta(u(t))^2 dt = \int_0^T \int fu(t)dt + \int_0^T \int_\Gamma gu(t)dt.& \end{aligned} \tag{2.53}$$

Tomando $v = u_{j_k}(t)$ em (2.42) temos

$$\begin{aligned}\int u'_{j_k}(t)u_{j_k}(t) + a_{j_k}(t)\int |\nabla u_{j_k}(t)|^2 + \int \alpha(u_{j_k}(t))^2 + \int_\Gamma \beta(u_{j_k}(t))^2 =& \\ \int f_{j_k}u_{j_k}(t) + \int_\Gamma g_{j_k}u_{j_k}(t),&\end{aligned}$$

integrando de 0 a T

$$\begin{aligned}\int_0^T \int u'_{j_k}(t)u_{j_k}(t)dt + \int_0^T a_{j_k}(t)\int |\nabla u_{j_k}(t)|^2 dt + \int_0^T \int \alpha(u_{j_k}(t))^2 dt +& \\ \int_0^T \int_\Gamma \beta(u_{j_k}(t))^2 dt = \int_0^T \int f_{j_k}u_{j_k}(t)dt + \int_0^T \int_\Gamma g_{j_k}u_{j_k}(t)dt&\end{aligned}$$

passando ao limite

$$\begin{aligned}\int_0^T \int u'(t)u(t)dt + \lim_{j_k\to+\infty}\int_0^T a_{j_k}(t)\int |\nabla u_{j_k}(t)|^2 dt + \int_0^T \int \alpha(u(t))^2 dt +& \\ \int_0^T \int_\Gamma \beta(u(t))^2 dt = \int_0^T \int fu(t)dt + \int_0^T \int_\Gamma gu(t)dt&\end{aligned}$$

assim combinando com (2.53)

$$\lim_{j_k\to+\infty}\int_0^T a_{j_k}(t)\int |\nabla u_{j_k}(t)|^2 dt = \int_0^T a(t)\int |\nabla u(t)|^2 dt. \tag{2.54}$$

Tomando $v = u(t)$ em (2.42) temos

$$\begin{aligned}\int u'_{j_k}(t)u(t) + a_{j_k}(t)\int \nabla u_{j_k}(t)\cdot\nabla u(t) + \int \alpha u_{j_k}(t)u(t) + \int_\Gamma \beta u_{j_k}(t)u(t) =& \\ \int f_{j_k}u(t) + \int_\Gamma g_{j_k}u(t)&\end{aligned}$$

integrando de 0 a T

$$\begin{aligned}\int_0^T \int u'_{j_k}(t)u(t)dt + \int_0^T a_{j_k}(t)\int \nabla u_{j_k}(t)\cdot\nabla u(t)dt + \int_0^T \int \alpha u_{j_k}(t)u(t)dt +& \\ \int_0^T \int_\Gamma \beta u_{j_k}(t)u(t)dt = \int_0^T \int f_{j_k}u(t)dt + \int_0^T \int_\Gamma g_{j_k}u(t)dt&\end{aligned}$$

passando ao limite

$$\int_0^T \int u'(t)u(t)dt + \lim_{j_k\to+\infty}\int_0^T a_{j_k}(t)\int \nabla u_{j_k}(t)\cdot\nabla u(t)dt + \int_0^T\int \alpha(u(t))^2dt + \int_0^T\int_\Gamma \beta(u(t))^2dt = \int_0^T\int fu(t)dt + \int_0^T\int_\Gamma gu(t)dt$$

daí combinando com (2.53)

$$\lim_{j_k\to+\infty}\int_0^T a_{j_k}(t)\int \nabla u_{j_k}(t)\cdot\nabla u(t)dt = \int_0^T a(t)\int |\nabla u(t)|^2dt, \tag{2.55}$$

e por (2.46) temos

$$\lim_{j_k\to+\infty}\int_0^T a(t)\int \nabla u(t)\cdot\nabla u_{j_k}(t)dt = \int_0^T a(t)\int |\nabla u(t)|^2dt. \tag{2.56}$$

Portanto de (2.54), (2.55) e (2.56) obtemos

$$\lim_{j_k\to+\infty}\int_0^T\int \left[a_{j_k}(t)\nabla u_{j_k}(t) - a(t)\nabla u(t)\right]\cdot\left[\nabla(u_{j_k}(t)-u(t))\right]dt = 0 \tag{2.57}$$

por (2.41) e como uma desigualdade similar a (2.38) é válida então

$$\lim_{j_k\to+\infty}\int_0^T \left[\int a(l_{j_k}(t))\,(l_{j_k}(t))^{\frac{1}{2}} - a(l(t))\,(l(t))^{\frac{1}{2}}\right]\left[(l_{j_k}(t))^{\frac{1}{2}} - (l(t))^{\frac{1}{2}}\right]dt = 0, \tag{2.58}$$

sendo $l_{j_k}(t) = \int |\nabla u_{j_k}(t)|^2$ para todo j_k e $l(t) = \int |\nabla u(t)|^2$. Assim, existe uma subsequência $u_{j_{k_l}}$ de u_{j_k} tal que

$$\lim_{j_{k_l}\to+\infty}\left[\int a(l_{j_k}(t))\,(l_{j_k}(t))^{\frac{1}{2}} - a(l(t))\,(l(t))^{\frac{1}{2}}\right]\left[(l_{j_k}(t))^{\frac{1}{2}} - (l(t))^{\frac{1}{2}}\right] = 0, \tag{2.59}$$

para quase todo $t \in (0,T)$.
Como $\int |\nabla u_{j_{k_l}}(t)|^2$ é limitada existe uma subsequência $\int |\nabla u_{j_{k_{l_m}}}(t)|^2$ e $b \geqslant 0$ tal que

$$\lim_{j_{k_{l_m}}\to+\infty}\int |\nabla u_{j_{k_{l_m}}}(t)|^2 = b$$

de (2.59) e a continuidade da função $a(\cdot)$ temos

$$\left[\int a(b)b^{\frac{1}{2}} - a\left(\int |\nabla u(t)|^2\right)\left(\int |\nabla u(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left[b^{\frac{1}{2}} - \left(\int |\nabla u(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] = 0$$

e de (2.41) conseguimos $b = \int |\nabla u(t)|^2$. Além disso,

$$\lim_{j_{k_l}\to+\infty}\int |\nabla u_{j_{k_l}}(t)|^2 = \int |\nabla u(t)|^2$$

de fato, se fosse falsa existiria uma subsequência $\int |\nabla u_{j_{k_{l_n}}}(t)|^2$ de $\int |\nabla u_{j_{k_l}}(t)|^2$ e $\epsilon > 0$ que satisfaz

$$\left| \int |\nabla u_{j_{k_{l_n}}}(t)|^2 - \int |\nabla u(t)|^2 \right| \geqslant \epsilon, \quad \forall j_{k_{l_n}} \tag{2.60}$$

mas pelo argumento prévio existiria uma subsequência $\int |\nabla u_{j_{k_{l_{n_m}}}}(t)|^2$ de $\int |\nabla u_{j_{k_{l_n}}}(t)|^2$ que converge a $\int |\nabla u(t)|^2$, contradizendo a (2.60). Portanto

$$\lim_{j_{k_l} \to +\infty} \int |\nabla u_{j_{k_l}}(t)|^2 = \int |\nabla u(t)|^2 \tag{2.61}$$

para quase todo $t \in (0, T)$, Assim o Teorema da Convergência Dominada e (2.46) garante que $u_{j_{k_l}} \to u$ em $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.
Resta provar que $u_j \to u$ em $L^2(0, T; H^1(\Omega))$, quando $j \to +\infty$, se supomos que é falsa então existe uma subsequência $\widehat{u}_{j_k}$ de u_j e $\epsilon > 0$ tal que

$$\|\widehat{u}_{j_k} - u\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \geqslant \epsilon, \quad \forall j_k \tag{2.62}$$

pelo argumento da prova existe $\widehat{u}_{j_{k_l}}$ de $\widehat{u}_{j_k}$ tal que $\widehat{u}_{j_{k_l}} \to u$ em $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ que contradiz (2.62). Portanto, o resultado segue. □

2.4 Regularidade da solução do problema parabólico

Teorema 2.6 *Suponha que (2.2)-(2.5) sejam válidas. Então* $u \in C([0, T], H^1(\Omega))$ *para cada* $0 < T < +\infty$.

Prova: Seja u_n a aproximação de Galerkin definida por (2.11). Diferenciando (2.12) com respeito a t obtemos

$$\begin{aligned} \int u_n''(t)v + 2a'\left(\int |\nabla u_n(t)|^2\right) \int \nabla u_n(t) \cdot \nabla u_n'(t) \int \nabla u_n(t) \cdot \nabla v + \\ a\left(\int |\nabla u_n(t)|^2\right) \int \nabla u_n'(t) \cdot \nabla v + \int \alpha u_n'(t)v + \int_\Gamma \beta u_n'(t)v = 0 \end{aligned} \tag{2.63}$$

para todo $v \in \operatorname{span}\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ e quase todo $t \in (0, +\infty)$.
Tomando $v = u_n'(t)$ em (2.12)

$$\int |u_n'(t)|^2 + a\left(\int |\nabla u_n(t)|^2\right) \underbrace{\int \nabla u_n(t) \cdot \nabla u_n'(t)}_{I} + \int \alpha u_n(t)u_n'(t) + \int_\Gamma \beta u_n(t)u_n'(t) =$$

$$\int f u_n'(t) + \int_\Gamma g u_n'(t),$$

de modo que, escrevendo $a_n(t) := a\left(\int |\nabla u_n(t)|^2\right)$, pela desigualdade de Hölder e (2.17) (ou (2.31)) conseguimos

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \frac{1}{(a_n(t))^2}\left(\int f u_n'(t) + \int_\Gamma g u_n'(t) - \int |u_n'(t)|^2 - \int \alpha u_n(t)u_n'(t) - \int_\Gamma \beta u_n(t)u_n'(t)\right)^2 \\
&\leqslant \frac{C_1}{\lambda^2}\left[\left(\int f u_n'(t)\right)^2 + \left(\int_\Gamma g u_n'(t)\right)^2 + \left(\int |u_n'(t)|^2\right)^2 + \left(\int \alpha u_n(t)u_n'(t)\right)^2\right] \\
&\quad \frac{C_1}{\lambda^2}\left(\int_\Gamma \beta u_n(t)u_n'(t)\right)^2 \\
&\leqslant \frac{C_1}{\lambda^2}\left[\|f\|^2_{L^2(\Omega)}\|u_n'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\Gamma)}\|u_n'(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + \|u_n'(t)\|^4_{L^2(\Omega)}\right] + \\
&\quad \frac{C_1}{\lambda^2}\left[\|\alpha\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\|u_n'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\beta\|^2_{L^\infty(\Gamma)}\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Gamma)}\|u_n'(t)\|^2_{L^2(\Gamma)}\right] \\
&\leqslant C_2\left[\|u_n'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_n'(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + \|u_n'(t)\|^4_{L^2(\Omega)}\right], \quad \forall n, \forall t \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Assim do Lema 2.2 para $\delta > 0$ temos

$$
I^2 \leqslant C_2\left[(1+\frac{A'}{\delta})\|u_n'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\int |\nabla u_n'(t)|^2 + \|u_n'(t)\|^4_{L^2(\Omega)}\right], \quad \forall \delta > 0. \tag{2.64}
$$

Por outro lado tomando $v = u_n'(t)$ em (2.63)

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |u_n'(t)|^2 + 2a'\left(\int |\nabla u_n(t)|^2\right) I^2 + a\left(\int |\nabla u_n(t)|^2\right)\int |\nabla u_n'(t)|^2 + \int \alpha (u_n'(t))^2 + \int_\Gamma \beta (u_n'(t))^2 = 0,
$$

de modo que por (2.2) e (2.64) temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |u_n'(t)|^2 + \lambda\int |\nabla u_n'(t)|^2 + \int \alpha(u_n'(t))^2 + \int_\Gamma \beta(u_n'(t))^2 \leqslant M I^2 \\
&\leqslant MC_2\left[(1+\frac{A'}{\delta})\|u_n'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\int |\nabla u_n'(t)|^2 + \|u_n'(t)\|^4_{L^2(\Omega)}\right], \quad \forall \delta > 0,
\end{aligned} \tag{2.65}
$$

sendo $M = \sup_{\xi\in[0,C^2]} |-2a'(\xi)|$, com C definido em (2.17) (ou (2.31)). Escolhendo $\delta > 0$ tal que $\epsilon = \lambda - MC_2\delta > 0$ em (2.65) obtemos

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |u_n'(t)|^2 + \epsilon\int |\nabla u_n'(t)|^2 + \int \alpha(u_n'(t))^2 + \int_\Gamma \beta(u_n'(t))^2 \leqslant C_3\left[\|u_n'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_n'(t)\|^4_{L^2(\Omega)}\right]
$$

que implica por (2.6), escrevendo $\widehat{\epsilon} := \min\{\epsilon, 1\}$, a estimativa

$$
\frac{d}{dt}\|u_n'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\widehat{\epsilon}\|u_n'(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant 2C_3\left[\|u_n'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_n'(t)\|^4_{L^2(\Omega)}\right], \tag{2.66}
$$

sendo C_3 uma constante positiva que independe de n e t. Assim, pelo Lema 1.2 (ou Lema 3.1 de [104]) para qualquer $r > 0$

$$
\int |u_n'(t+r)|^2 \leqslant \left(\frac{C}{r} + C\right)\mathrm{e}^{2C_3C^2} = K_r, \quad \forall n, \quad \forall t \geqslant 0, \tag{2.67}
$$

C é definido em (2.18). Assim, para $r > 0$ e $0 < r < T < +\infty$, integrando (2.66) de r a T temos

$$\|u_n'(T)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u_n'(r)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\widehat{\epsilon}\int_r^T \|u_n'(t)\|^2_{H^1(\Omega)}dt \leqslant 2C_3\int_r^T \left[\|u_n'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_n'(t)\|^4_{L^2(\Omega)}\right]dt,$$

então

$$2\widehat{\epsilon}\int_r^T \|u_n'(t)\|^2_{H^1(\Omega)}dt \leqslant 2C_3\int_r^T \left[\|u_n'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_n'(t)\|^4_{L^2(\Omega)}\right]dt + \|u_n'(r)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 2C_3\widetilde{M}T + K_r,$$

sendo $\widetilde{M} = \sup\limits_{\xi\in[0,K_r]}(\xi+\xi^2)$. Assim, u_n' é limitada em $L^2(r,T;H^1(\Omega))$ e então existem uma subsequência u_{n_j} e $\widetilde{u} \in L^2(r,T;H^1(\Omega))$ tal que

$$u_{n_j}' \rightharpoonup \widetilde{u} \quad \text{in } L^2(r,T;H^1(\Omega)),$$

como $L^2(r,T;H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(r,T;L^2(\Omega))$, obtemos que $\widetilde{u} = u'$. Assim $u, u' \in L^2(r,T;H^1(\Omega))$ que implica $u \in C([r,T],H^1(\Omega))$ para cada $r > 0$. Portanto, $u \in C((0,T],H^1(\Omega))$.

Resta mostrar que $u(t) \to u_0$ em $H^1(\Omega)$ quando $t \to 0^+$. Fosse a afirmação falsa, existiram $\epsilon > 0$ e t_k, $t_k \to 0^+$, tais que

$$\|u(t_k) - u_0\|_{H^1(\Omega)} \geqslant \epsilon, \quad \forall t_k. \tag{2.68}$$

Como $\|u(t_k)\|_{H^1(\Omega)}$ é limitado (veja (2.32)) existe subsequência t_{k_j}, $t_{k_j} \to 0^+$, tal que

$$\begin{cases} u(t_{k_j}) \rightharpoonup \widetilde{u} & \text{em } H^1(\Omega),\\ u(t_{k_j}) \to \widetilde{u} & \text{em } L^2(\Omega),\\ u(t_{k_j}) \to \widetilde{u} & \text{em } L^2(\Gamma),\\ \int |\nabla u(t_{k_j})|^2 \to l. \end{cases}$$

Como $u \in C([0,T],L^2(\Omega))$ temos $u_0 = \widetilde{u}$. De (2.68)

$$\int |\nabla u(t_{k_j})|^2 - 2\int \nabla u(t_{k_j})\cdot\nabla u_0 + \int |\nabla u_0|^2 + \int (u(t_{k_j}) - u_0)^2 \geqslant \epsilon^2$$

então passando ao limite,

$$l - \int |\nabla u_0|^2 \geqslant \epsilon^2. \tag{2.69}$$

Por outro lado, passando ao limite na desigualdade $E(u(t_{k_j})) \leqslant E(u_0)$, obtemos

$$\int_0^l a(s)ds \leqslant \int_0^{\int |\nabla u_0|^2} a(s)ds.$$

Logo, por (2.69) $0 < \lambda\epsilon^2 \leqslant \displaystyle\int_{\int |\nabla u_0|^2}^{l} a(s)ds \leqslant 0$ e temos uma contradição. Portanto, segue o teorema. □

Observação 2.5 *Uma consequência importante para a Seção 2.6, devido a que r e T são arbitrários na prova do Teorema 2.6, é que $u'(t) \in H^1(\Omega)$ para quase todo $t \in (0,+\infty)$.*

2.5 O problema estacionário

Nesta seção consideramos o problema estacionário associado ao problema (2.1), isto é, o seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} -a\left(\int |\nabla u|^2\right)\Delta u + \alpha(x)u = f(x) & \text{em } \Omega, \\ a\left(\int |\nabla u|^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)u = g(x) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.70}$$

cuja formulação fraca é

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ a\left(\int |\nabla u|^2\right)\int \nabla u \cdot \nabla v + \int \alpha uv + \int_\Gamma \beta uv = \int fv + \int_\Gamma gv, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.71}$$

Para resolver o problema estacionário introduzimos o seguinte problema auxiliar, dependente do parâmetro $a > 0$,

$$\begin{cases} \varphi_a \in H^1(\Omega), \\ -a\Delta\varphi_a + \alpha(x)\varphi_a = f(x) & \text{em } \Omega, \\ a\dfrac{\partial \varphi_a}{\partial \nu} + \beta(x)\varphi_a = g(x) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.72}$$

A formulação fraca correspondente a (2.72) é

$$\begin{cases} \varphi_a \in H^1(\Omega), \\ a\int \nabla\varphi_a \cdot \nabla v + \int \alpha\varphi_a v + \int_\Gamma \beta\varphi_a v = \int fv + \int_\Gamma gv, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.73}$$

Pelo Teorema de Lax Milgram, para cada $a > 0$ existe um único φ_a solução de (2.73).

Proposição 2.1 *A aplicação*

$$u \longmapsto l(u) = \int |\nabla u|^2 \tag{2.74}$$

é bijetora entre o conjunto de soluções de (2.71) e o conjunto das soluções da equação algébrica (em $\mathbb{R}$*)*

$$\mu = \int |\nabla \varphi_{a(\mu)}|^2. \tag{2.75}$$

Prova: Suponha que u é solução de (2.71), então $u = \varphi_{a(l(u))}$ e $l(u) = \displaystyle\int |\nabla\varphi_{a(l(u))}|^2$. Isto mostra que l aplica as soluções de (2.71) no conjunto das soluções de (2.75).
Considere agora μ solução de (2.75). Tomando $u = \varphi_{a(\mu)}$ temos $l(u) = \displaystyle\int |\nabla\varphi_{a(\mu)}|^2 = \mu$, o que implica que u é solução de (2.71) e l é sobrejetora.
Finalmente, se u_1 e u_2 são soluções de (2.71) tal que $l(u_1) = l(u_2)$, então $u_1 = \varphi_{a(l(u_1))} = \varphi_{a(l(u_2))} = u_2$ e assim l é injetora. $\square$

Teorema 2.7 *Assuma (2.2)-(2.4). Então o problema estacionário (2.71) admite pelo menos uma solução.*

Prova: Notemos que se $\displaystyle\int |\varphi_{a(0)}|^2 = 0$ então 0 é uma solução de (2.75). Então supomos que $\displaystyle\int |\varphi_{a(0)}|^2 > 0$. Seja $\mu \in \mathbb{R}$ e $\varphi_{a(\mu)}$ é solução ao problema (2.73). Tomando $v = \varphi_{a(\mu)}$ obtemos

$$a(\mu)\int |\nabla\varphi_{a(\mu)}|^2 + \int \alpha\varphi_{a(\mu)}^2 + \int_\Gamma \beta\varphi_{a(\mu)}^2 = \int f\varphi_{a(\mu)} + \int_\Gamma g\varphi_{a(\mu)}$$

e por (2.2)

$$\lambda\int |\nabla\varphi_{a(\mu)}|^2 + \int \alpha\varphi_{a(\mu)}^2 + \int_\Gamma \beta\varphi_{a(\mu)}^2 \leqslant \int f\varphi_{a(\mu)} + \int_\Gamma g\varphi_{a(\mu)}.$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\lambda\int |\nabla\varphi_{a(\mu)}|^2 + \int \alpha\varphi_{a(\mu)}^2 + \int_\Gamma \beta\varphi_{a(\mu)}^2 &\leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi_{a(\mu)}\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}\|\varphi_{a(\mu)}\|_{L^2(\Gamma)}\\ &\leqslant (\|f\|_{L^2(\Omega)}C_* + \|g\|_{L^2(\Gamma)}C_{tr})\|\varphi_{a(\mu)}\|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

(veja Observação 2.2) e daí por (2.6)

$$\widetilde{\lambda}\|\varphi_{a(\mu)}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leqslant (\|f\|_{L^2(\Omega)}C_* + \|g\|_{L^2(\Gamma)}C_{tr})\|\varphi_{a(\mu)}\|_{H^1(\Omega)},$$

sendo $\widetilde{\lambda} = \min\{\lambda, 1\}$, assim

$$\|\varphi_{a(\mu)}\|_{L^2(\Omega)}C_* \leqslant \frac{\|f\|_{H^1(\Omega)^*} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}C_{tr}}{\widetilde{\lambda}}. \tag{2.76}$$

.
Seja $\xi \in \mathbb{R}$. Então para $v \in H^1(\Omega)$

$$a(\mu)\int \nabla\varphi_{a(\mu)}\cdot\nabla v + \int \alpha\varphi_{a(\mu)}v + \int_\Gamma \beta\varphi_{a(\mu)}v = a(\xi)\int \nabla\varphi_{a(\xi)}\cdot\nabla v \int \alpha\varphi_{a(\xi)}v + \int_\Gamma \beta\varphi_{a(\xi)}v,$$

o que implica

$$\begin{aligned}a(\mu)\int \nabla(\varphi_{a(\mu)} - \varphi_{a(\xi)})\cdot\nabla v + \int \alpha(\varphi_{a(\mu)} - \varphi_{a(\xi)})v + \int_\Gamma \beta(\varphi_{a(\mu)} - \varphi_{a(\xi)})v =\\ (a(\xi) - a(\mu))\int \nabla\varphi_{a(\xi)}\cdot\nabla v.\end{aligned}$$

Tomando $v = \varphi_{a(\mu)} - \varphi_{a(\xi)}$ deduzimos que

$$\begin{aligned}a(\mu)\int |\nabla(\varphi_{a(\mu)} - \varphi_{a(\xi)})|^2 + \int \alpha(\varphi_{a(\mu)} - \varphi_{a(\xi)})^2 + \int_\Gamma \beta(\varphi_{a(\mu)} - \varphi_{a(\xi)})^2 =\\ (a(\xi) - a(\mu))\int \nabla\varphi_{a(\xi)}\cdot\nabla(\varphi_{a(\mu)} - \varphi_{a(\xi)})\end{aligned}$$

e usando (2.2) e (2.6)

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\lambda}\|\varphi_{a(\mu)}-\varphi_{a(\xi)}\|^2_{H^1(\Omega)} &\leqslant (a(\xi)-a(\mu))\int \nabla\varphi_{a(\xi)}\cdot\nabla(\varphi_{a(\mu)}-\varphi_{a(\xi)})\\
&\leqslant |a(\xi)-a(\mu)|\int |\nabla\varphi_{a(\xi)}||\nabla(\varphi_{a(\mu)}-\varphi_{a(\xi)})|\\
&\leqslant |a(\xi)-a(\mu)|\left(\int|\nabla\varphi_{a(\xi)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int|\nabla(\varphi_{a(\mu)}-\varphi_{a(\xi)})|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant |a(\xi)-a(\mu)|\left(\int|\nabla\varphi_{a(\xi)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|\varphi_{a(\mu)}-\varphi_{a(\xi)}\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\widetilde{\lambda}\|\varphi_{a(\mu)}-\varphi_{a(\xi)}\|_{H^1(\Omega)}\leqslant|a(\xi)-a(\mu)|\left(\int|\nabla\varphi_{a(\xi)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}
$$

e pela continuidade da função $a(\cdot)$ e (2.76) temos que a aplicação $\mu\mapsto\varphi_{a(\mu)}$ é continua de $\mathbb{R}$ em $H^1(\Omega)$. Portanto, a aplicação $\mu\mapsto\mu-\displaystyle\int|\nabla\varphi_{a(\mu)}|^2$ é uma função real de variável real, continua, $-\displaystyle\int|\nabla\varphi_{a(0)}|^2<0$ e por (2.76) $1+\dfrac{\|f\|_{L^2(\Omega)}C_*+\|g\|_{L^2(\Gamma)}C_{tr}}{\widetilde{\lambda}}-\displaystyle\int\left|\nabla\varphi_{a\left(1+\frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}C_*+\|g\|_{L^2(\Gamma)}C_{tr}}{\widetilde{\lambda}}\right)}\right|^2>0$. Logo, pelo teorema de valor intermediário, existe pelo menos uma solução de (2.75) e, assim, de (2.71). □

Uma solução do problema (2.71) pode ser encontrada via método variacional, como ponto crítico do funcional de energia E definido por (2.15). Note que

$$
\langle E'(u),v\rangle = a\left(\int|\nabla u|^2\right)\int\nabla u\cdot\nabla v+\int\alpha uv+\int_\Gamma\beta uv-\int fv-\int_\Gamma gv,\quad\forall u,v\in H^1(\Omega).
\tag{2.77}
$$

Teorema 2.8 *Se (2.2)-(2.4) são válidas, então E admite um minimizador global sobre $H^1(\Omega)$.*

Prova: Para provar este teorema usaremos o método direto de cálculo variacional. Afirmamos que E é coercivo e limitado inferiormente. De fato, pela desigualdade de Hölder e o teorema de traço temos

$$
\begin{aligned}
\left|\int fv+\int_\Gamma gv\right| &\leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}+\|g\|_{L^2(\Gamma)}\|v\|_{L^2(\Gamma)}\\
&\leqslant \left(\|f\|_{L^2(\Omega)}C_*+\|g\|_{L^2(\Gamma)}C_{tr}\right)\|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Portanto, por (2.6)

$$
\begin{aligned}
E(v) &= \frac{1}{2}\int_0^{\int|\nabla v|^2}a(s)ds+\frac{1}{2}\int\alpha v^2+\frac{1}{2}\int_\Gamma\beta v^2-\int fv-\int_\Gamma gv\\
&\geqslant \frac{\lambda}{2}\int|\nabla v|^2+\frac{1}{2}\int\alpha v^2+\frac{1}{2}\int_\Gamma\beta v^2-\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}C_*+\|g\|_{L^2(\Gamma)}C_{tr}\right)\|v\|_{H^1(\Omega)}\\
&\geqslant \frac{\widetilde{\lambda}}{2}\|v\|^2_{H^1(\Omega)}-\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}C_*+\|g\|_{L^2(\Gamma)}C_{tr}\right)\|v\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}
\tag{2.78}
$$

logo $E(v) \to +\infty$, quando $\|v\|_{H^1(\Omega)} \to +\infty$, e E é coercivo. Como E é fracamente s.c.i (como provado abaixo) temos então que E é limitado inferiormente, isto é, $\inf\limits_{v \in H^1(\Omega)} E(v) > -\infty$.

Seja $u_n \in H^1(\Omega)$ uma sequência minimizante de E. De (2.78) u_n é limitada em $H^1(\Omega)$. Portanto, para algum $u_\infty \in H^1(\Omega)$ temos

$$\begin{cases} u_{n_k} \rightharpoonup u_\infty & \text{em } H^1(\Omega), \\ u_{n_k} \to u_\infty & \text{em } L^2(\Omega), \\ u_{n_k} \to u_\infty & \text{em } L^2(\Gamma). \end{cases}$$

Pela semicontinuidade inferior da norma tem-se $\|u_\infty\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \liminf\limits_{n_k \to \infty} \|u_{n_k}\|_{H^1(\Omega)}$. Considere a subsequência $u_{n_{k_j}}$ tal que

$$\liminf_{n_k \to \infty} \|u_{n_k}\|_{H^1(\Omega)} = \lim_{n_{k_j} \to \infty} \|u_{n_{k_j}}\|_{H^1(\Omega)}$$

como $u_{n_{k_j}}$ é uma sequência minimizante conseguimos

$$\begin{aligned} \inf_{v \in H^1(\Omega)} E(v) &= \lim_{j \to \infty} E(u_{n_{k_j}}) \\ &= \lim_{j \to \infty} \left(\frac{1}{2} \left[\int_0^{\int |\nabla u_{n_{k_j}}|^2} a(s) ds + \int \alpha u_{n_{k_j}}^2 + \int_\Gamma \beta u_{n_{k_j}}^2 \right] - \int f u_{n_{k_j}} - \int_\Gamma g u_{n_{k_j}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\lim\limits_{j \to \infty} \int |\nabla u_{n_{k_j}}|^2} a(s) ds + \frac{1}{2} \int \alpha u_\infty^2 + \frac{1}{2} \int_\Gamma \beta u_\infty^2 - \int f u_\infty - \int_\Gamma g u_\infty \\ &\geqslant \frac{1}{2} \int_0^{\int |\nabla u_\infty|^2} a(s) ds + \frac{1}{2} \int \alpha u_\infty^2 + \frac{1}{2} \int_\Gamma \beta u_\infty^2 - \int f u_\infty - \int_\Gamma g u_\infty \\ &= E(u_\infty). \end{aligned}$$

Assim u_∞ atinge o mínimo de E. Note segue do argumento anterior que para qualquer u_{n_k} satisfazendo

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_\infty \quad \text{em } H^1(\Omega),$$

tem-se

$$\liminf_{n_k \to \infty} E(u_{n_k}) \geqslant E(u_\infty)$$

ou seja E é fracamente s.c.i sobre $H^1(\Omega)$. □

Observamos que, a principio, o minimizador pode não ser único. No próximo resultado mostramos que, sob certas condições, tem-se unicidade.

Teorema 2.9 *Suponha que* (2.2) *seja válida com* $a(\cdot)$ *continua,* (2.3) *e* (2.4) *e que a função*

$$t \longmapsto a(t^2)t \quad \textit{seja crescente} \tag{2.79}$$

então a solução a (2.70) é única.

Prova: Se supomos que u_1 e u_2 são duas soluções de (2.70) então

$$a_1\int \nabla u_1\cdot\nabla v+\int \alpha u_1 v+\int_\Gamma \beta u_1 v = a_2\int \nabla u_2\cdot\nabla v+\int \alpha u_2 v+\int_\Gamma \beta u_2 v,\quad \forall v\in H^1(\Omega),$$

sendo $a_i := a\left(\int |\nabla u_i|^2\right)$ para $i=1,2$. Tomando $v=u:=u_1-u_2$ na igualdade acima temos

$$\underbrace{a_1\int |\nabla u_1|^2 - a_1\int \nabla u_1\cdot\nabla u_2 - a_2\int \nabla u_1\cdot\nabla u_2 + a_2\int|\nabla u_2|^2}_{I=} + \int \alpha u^2+\int_\Gamma \beta u^2=0 \tag{2.80}$$

mas por (2.79) e a desigualdade de Hölder obtemos

$$I \;\geqslant\; \left[a_1\left(\int|\nabla u_1|^2\right)^{\frac{1}{2}} - a_2\left(\int|\nabla u_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\left(\int|\nabla u_1|^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int|\nabla u_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\geqslant 0.$$

Assim, de (2.80) temos

$$\left[a_1\left(\int|\nabla u_1|^2\right)^{\frac{1}{2}} - a_2\left(\int|\nabla u_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\left(\int|\nabla u_1|^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int|\nabla u_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]=0$$

e (2.79) implica $\int|\nabla u_1|^2=\int|\nabla u_2|^2$ e $a_1=a_2$. Portanto, de (2.80) temos $a_1\int|\nabla u|^2 = I=0$ de modo que u é uma função constante. Assim, segue de (2.80) que

$$0=\int \alpha u^2+\int_\Gamma \beta u^2=\left(\int\alpha+\int_\Gamma\beta\right)u^2$$

e, por (2.3), $u=0$, ou seja $u_1=u_2$. □

Observação 2.6 *Na Proposição anterior ainda temos unicidade se a função*

$$t\longmapsto a(t^2)t \quad \text{é não-decrescente}$$

e tivermos

$$\alpha(x)>0 \quad \text{para quase todo } x\in\Omega.$$

2.6 Comportamento assintótico da solução

Lema 2.3 *Seja u uma solução fraca de* (2.1) *e suponha que (2.2)-(2.5) sejam válidas. Então existe uma sequência t_k tal que*

$$u(t_k)\to u_* \quad \text{em } H^1(\Omega), \text{ quando } t_k\to+\infty,$$

sendo u_* uma solução estacionária de (2.1).

Prova: Tomando $v = u'(t) \in H^1(\Omega)$ (veja Observação 2.5) em (2.9) temos

$$\int |u'(t)|^2 + \frac{d}{dt}E(u(t)) = 0, \tag{2.81}$$

donde, integrando, $0 \leqslant s < t$

$$\int_s^t \int |u'(\xi)|^2 d\xi = E(u(s)) - E(u(t)). \tag{2.82}$$

Logo $E(u(t)) \leqslant E(u_0)$ e $E(u(t))$ decresce no tempo. Como E é limitado inferiormente segue que

$$E(u(t)) \to E_\infty = \inf_{t \geqslant 0} E(u(t)). \tag{2.83}$$

De (2.82) obtemos

$$\int_0^{+\infty} \int |u'(\xi)|^2 d\xi < +\infty,$$

o que implica a existência de uma sequência $t_k \to +\infty$

$$u'(t_k) \to 0 \quad \text{em } L^2(\Omega), \text{ quando } t_k \to +\infty.$$

Como $u(t_k)$ é limitada em $H^1(\Omega)$ por (2.32) então, a menos de subsequência, temos a existência de $u_* \in H^1(\Omega)$ satisfazendo

$$\begin{cases} u(t_k) \rightharpoonup u_* & \text{em } H^1(\Omega), \\ u(t_k) \to u_* & \text{em } L^2(\Omega), \\ u(t_k) \to u_* & \text{em } L^2(\Gamma), \\ \int |\nabla u(t_k)|^2 \to l_\infty. \end{cases}$$

De (2.9), obtemos

$$\int u'(t_k)u(t_k) + a\left(\int |\nabla u(t_k)|^2\right)\int |\nabla u(t_k)|^2 + \int \alpha(x)(u(t_k))^2 + \int_\Gamma \beta(x)(u(t_k))^2 = \int f(x)u(t_k) + \int_\Gamma g(x)u(t_k)$$

e, passando ao limite, temos

$$a(l_\infty)l_\infty + \int \alpha(x)u_*^2 + \int_\Gamma \beta(x)u_*^2 = \int f(x)u_* + \int_\Gamma g(x)u_*. \tag{2.84}$$

Por outro lado, para $v \in H^1(\Omega)$ também obtemos por (2.9)

$$\int u'(t_k)v + a\left(\int |\nabla u(t_k)|^2\right)\int \nabla u(t_k)\cdot\nabla v + \int \alpha u(t_k)v + \int_\Gamma \beta u(t_k)v = \int fv + \int_\Gamma gv$$

e, passando ao limite, deduzimos

$$a(l_\infty)\int \nabla u_*\cdot\nabla v + \int \alpha(x)u_*v + \int_\Gamma \beta(x)u_*v = \int f(x)v + \int_\Gamma g(x)v. \tag{2.85}$$

De (2.84) e (2.85) com $v = u_*$ vem que

$$l_\infty = \int |\nabla u_*|^2,$$

ou seja , u_* satisfaz (2.71) e é solução estacionária de (2.1). Finalmente, afirmamos que $u(t_k) \to u_*$ em $H^1(\Omega)$. De fato, como

$$\int |\nabla(u(t_k) - u_*)|^2 = \int |\nabla u(t_k)|^2 - 2\int \nabla u(t_k) \cdot \nabla u_* + \int |\nabla u_*|^2,$$

passando ao limite temos que

$$\int |\nabla(u(t_k) - u_*)|^2 \to 0, \quad \text{quando } k \to +\infty,$$

e portanto

$$\|u(t_k) - u_*\|^2_{H^1(\Omega)} = \int |\nabla(u(t_k) - u_*)|^2 + \int \alpha(x)(u(t_k) - u_*)^2 + \int_\Gamma \beta(x)(u(t_k) - u_*)^2 \to 0,$$

quando $k \to +\infty$, assim fica provado o lema. $\square$

Teorema 2.10 *Suponha que* (2.2)-(2.5) *sejam válidas e que E admite um único minimizador global u_{min} e que a condição inicial*

$$u_0 \in \left\{u \in H^1(\Omega) : E(u)<E(u_i) \text{ para qualquer solução estacionária de } (2.1) \text{ com } u_i \neq u_0\right\}.$$

Então

$$u(t) \to u_{min} \quad \text{em } H^1(\Omega), \text{ quando } t \to +\infty. \tag{2.86}$$

Prova: Lembrando que tem-se

$$E(u(t)) \leqslant E(u_0) < E(u_i), \quad u_i \neq u_{min},$$

e

$$E(u(t)) \to E_\infty, \quad \text{quando } t \to +\infty,$$

juntamente com a existência, pelo Lema 2.3, de $t_k \to +\infty$ tal que $u(t_k) \to u_*$ (solução estacionária de (2.1)) em $H^1(\Omega)$. Então

$$E_\infty = E(u_*) = \lim_{k\to+\infty} E(u(t_k)) < E(u_0) < E(u_i),$$

de modo que $u_* = u_{min}$ e $E_\infty = E(u_{min})$. Portanto

$$E(u(t)) \to E(u_{min}), \quad \text{quando } t \to +\infty. \tag{2.87}$$

Como $u(t)$ é uniformemente limitado em $H^1(\Omega)$, por (2.32), para alguma subsequência $\hat{t}_k$, com $\hat{t}_k \to +\infty$, temos

$$u(\hat{t}_k) \rightharpoonup v \quad \text{em } H^1(\Omega), \text{ quando } k \to +\infty.$$

Pela semicontinuidade inferior fraca de E e (2.87) obtemos

$$E(v) \leqslant \liminf_{k\to+\infty} E(u(\hat{t}_k)) = E(u_{min})$$

e como u_{min} é o único minimizador global de E vale que $v = u_{min}$. Isto vale para cada subsequência de $u(t)$ com tempos divergindo para $+\infty$. Então

$$u(t) \rightharpoonup u_{min} \quad \text{em } H^1(\Omega), \text{ quando } t \to +\infty. \tag{2.88}$$

Finalmente a convergência é forte em $H^1(\Omega)$ pois, caso contrario, suponha que existam uma sequência $\tilde{t}_k \to +\infty$ e $\epsilon > 0$ tal que

$$\|u(\tilde{t}_k) - u_{min}\|_{H^1(\Omega)} > \epsilon. \tag{2.89}$$

De (2.88) existe uma subsequência, ainda denotada por $\tilde{t}_k$, tal que

$$\begin{cases} \displaystyle\int |\nabla u(\tilde{t}_k)|^2 \to l, \quad \tilde{t}_k \to +\infty, \quad \text{para algum } l > 0, \\ u(\tilde{t}_k) \rightharpoonup u_{min} \quad \text{em } H^1(\Omega),\ \tilde{t}_k \to +\infty\ , \\ u(\tilde{t}_k) \to u_{min} \quad \text{em } L^2(\Omega),\ \tilde{t}_k \to +\infty\ , \\ u(\tilde{t}_k) \to u_{min} \quad \text{em } L^2(\Gamma),\ \tilde{t}_k \to +\infty\ , \end{cases}$$

e também

$$E(u(\tilde{t}_k)) \to \frac{1}{2}\int_0^l a(s)ds + \frac{1}{2}\int \alpha u_{min}^2 + \frac{1}{2}\int_\Gamma \beta u_{min}^2 - \int f u_{min} - \int_\Gamma g u_{min} = E(u_{min}).$$

Logo $\displaystyle\int_0^l a(s)ds = \int_0^{\int |\nabla u_{min}|^2} a(s)ds$, daí teríamos que $l = \displaystyle\int |\nabla u_{min}|^2$, mostrando que $u(\tilde{t}_k) \to u_{min}$ em $H^1(\Omega)$ o que contradiz a (2.89). Portanto, a convergência é forte. □

Os mínimos locais de E são caracterizados da forma seguinte

Observação 2.7 *Se u_* é uma solução estacionária de* (2.1) *e $\mu_* := \int |\nabla u_*|^2$ é tal que*

$$2a'(\mu_*)\mu_* + a(\mu_*) = \delta > 0, \tag{2.90}$$

então u_* é um mínimo local de E. De fato: Se $\mu_* = 0$, temos que u_* é constante. Logo, pondo $\mu = \int |\nabla u|^2$, temos

$$E(u) - E(u_*) = \frac{1}{2}\int_0^\mu a(s)ds + \frac{1}{2}\int \alpha(u-u_*)^2 + \frac{1}{2}\int_\Gamma \beta(u-u_*)^2 \geqslant 0, \tag{2.91}$$

e então u_* é um mínimo global de E, assim local.
Se $\mu_* > 0$

$$\begin{aligned} E(u) - E(u_*) &= \frac{1}{2}\int_{\mu_*}^\mu a(s)ds + \frac{1}{2}\int \alpha(u-u_*)^2 + \frac{1}{2}\int_\Gamma \beta(u-u_*)^2 + \\ &\quad a(\mu_*)\mu_* - a(\mu_*)\int \nabla u_* \cdot \nabla u \\ &\geqslant \frac{1}{2}\int_{\mu_*}^\mu a(s)ds + a(\mu_*)\mu_* - a(\mu_*)\mu_*^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.92}$$

Defina

$$h(\mu) := \frac{1}{2}\int_{\mu_*}^{\mu} a(s)ds + a(\mu_*)\mu_* - a(\mu_*)\mu_*^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}},$$

sendo $\mu = \int |\nabla u|^2$ *e* $\mu_* = \int |\nabla u_*|^2$. *Note que* $h(\mu_*) = 0$ *e*

$$h'(\mu) = \frac{1}{2}a(\mu) - \frac{a(\mu_*)\mu_*^{\frac{1}{2}}}{2\mu^{\frac{1}{2}}},$$

$$h''(\mu) = \frac{1}{2}a'(\mu) + \frac{a(\mu_*)\mu_*^{\frac{1}{2}}}{4\mu^{\frac{3}{2}}}.$$

Logo, $h'(\mu_*) = 0$ *e por (2.90) temos* $h''(\mu_*) = \dfrac{2a'(\mu_*)\mu_* + a(\mu_*)}{4\mu_*} > 0$. *Assim* μ_* *é um mínimo local de* h. *Portanto* $h(\mu) \geqslant 0$ *para* μ *num intervalo aberto contendo* μ_*. *Pela continuidade da aplicação* $u \longmapsto \int |\nabla u|^2$ *de* $H^1(\Omega)$ *em* $\mathbb{R}$ *e* (2.91) *segue o resultado.*

Na verdade (2.90) garante que u_* é um mínimo local isolado de E, conforme provado na primeira parte da prova do seguinte teorema

Teorema 2.11 *Suponha que* (2.2)-(2.5) *sejam válidas e que* u_* *é uma solução estacionária de* (2.1) *que satisfaz* (2.90). *Então existe* $\epsilon > 0$ *tal que, se a condição inicial* $u_0 \in V_\epsilon(u_*)$ *então*

$$u(t) \to u_* \quad \text{em } H^1(\Omega), \text{ quando } t \to +\infty, \tag{2.93}$$

sendo

$$V_\epsilon(u_*) := \left\{ u \in H^1(\Omega) : \|u - u_*\|_{H^1(\Omega)} < \epsilon, \quad E(u) < E(u_*) + \frac{\rho\epsilon^2}{2} \right\}, \tag{2.94}$$

com $\rho = \min\left\{\lambda, \dfrac{\delta}{2}, 1\right\}$.

Prova: Consideremos $\mathcal{E}(s) = E(u_* + sw)$, com $w = u - u_*$, ou seja

$$\mathcal{E}(s) = \frac{1}{2}\int_0^{\int |\nabla(u_*+sw)|^2} a(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int \alpha(x)(u_* + sw)^2 + \frac{1}{2}\int_\Gamma \beta(x)(u_* + sw)^2 - \int f(x)(u_* + sw) - \int_\Gamma g(x)(u_* + sw).$$

Temos:

- $\mathcal{E}'(s) = a\left(\int |\nabla(u_* + sw)|^2\right)\int \nabla(u_* + sw)\cdot\nabla w + \int \alpha(x)(u_* + sw)w + \int_\Gamma \beta(x)(u_* + sw)w - \int f(x)w - \int_\Gamma g(x)w,$

- $\mathcal{E}''(s) = 2a'\left(\int |\nabla(u_* + sw)|^2\right)\left[\int \nabla(u_* + sw)\cdot\nabla w\right]^2 + a\left(\int |\nabla(u_* + sw)|^2\right)\int |\nabla w|^2$
$$+ \int \alpha(x)w^2 + \int_\Gamma \beta(x)w^2.$$

Como $\mathcal{E}'(0) = 0$ (pois u_* é uma solução estacionária de (2.1)) temos

$$E(u) - E(u_*) = \mathcal{E}(1) - \mathcal{E}(0) = \int_0^1 \mathcal{E}'(s)ds = \int_0^1 (1-s)\mathcal{E}''(s)ds. \tag{2.95}$$

Se $a'\left(\int |\nabla(u_* + sw)|^2\right) \geqslant 0$ então

$$\mathcal{E}''(s) \geqslant a\left(\int |\nabla(u_* + sw)|^2\right)\int |\nabla w|^2 + \int \alpha w^2 + \int_\Gamma \beta w^2 \geqslant \lambda \int |\nabla w|^2 + \int \alpha w^2 + \int_\Gamma \beta w^2. \tag{2.96}$$

Note que pela desigualdade de Hölder temos

$$\left(\int \nabla(u_* + sw)\cdot\nabla w\right)^2 \leqslant \int |\nabla(u_* + sw)|^2 \int |\nabla w|^2$$

e assim, se $a'\left(\int |\nabla(u_* + sw)|^2\right) < 0$, obtemos

$$\mathcal{E}''(s) \geq \left[2a'\left(\int |\nabla(u_* + sw)|^2\right)\int |\nabla(u_* + sw)|^2 + a\left(\int |\nabla(u_* + sw)|^2\right)\right]\int |\nabla w|^2 + \int \alpha w^2 + \int_\Gamma \beta w^2. \tag{2.97}$$

Como a função $\xi \mapsto 2a'(\xi)\xi + a(\xi)$ é continua em μ_*, para $\dfrac{\delta}{2} > 0$ existe $\eta_1 > 0$ tal que se $|\xi - \mu_*| < \eta_1$, então

$$|2a'(\xi)\xi + a(\xi) - 2a'(\mu_*)\mu_* - a(\mu_*)| < \frac{\delta}{2}.$$

Dai, por (2.90),

$$\frac{\delta}{2} < 2a'(\xi)\xi + a(\xi), \quad \text{se } |\xi - \mu_*| < \eta_1\ . \tag{2.98}$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Hölder, para $s \in (0,1)$ vemos que

$$\begin{aligned}
\left|\int |\nabla(u_* + sw)|^2 - \int |\nabla u_*|^2\right| &\leqslant \int \left||\nabla(u_* + sw)|^2 - |\nabla u_*|^2\right| \\
&= \int |\nabla(sw)\cdot\nabla(2u_* + sw)| \\
&\leqslant \left(\int |\nabla(sw)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int |\nabla(2u_* + sw)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant s\left(\int |\nabla w|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left[2\mu_*^{\frac{1}{2}} + \left(\int |\nabla(w)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leqslant \|w\|_{H^1(\Omega)}\left[2\mu_*^{\frac{1}{2}} + \|w\|_{H^1(\Omega)}\right].
\end{aligned} \tag{2.99}$$

De (2.99), para $\eta_1 > 0$ dado existe $\eta_2 > 0$ tal que se $\|w\|_{H^1(\Omega)} < \eta_2$ então

$$\left| \int |\nabla(u_* + sw)|^2 - \int |\nabla u_*|^2 \right| < \eta_1.$$

Assim de (2.96), (2.97) e (2.98), se $\|w\|_{H^1(\Omega)} < \eta_2$ temos que

$$\mathcal{E}''(s) \geqslant \rho \left[\int |\nabla w|^2 + \int \alpha w^2 + \int_\Gamma \beta w^2 \right] = \rho \|w\|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{2.100}$$

sendo $\rho = \min \left\{ \lambda, \frac{\delta}{2}, 1 \right\} > 0$.
Portanto, por (2.95)

$$E(u) - E(u_*) \geqslant \int_0^1 (1-s)\rho \|w\|^2_{H^1(\Omega)} ds = \frac{\rho}{2} \|w\|^2_{H^1(\Omega)} = \frac{\rho}{2} \|u - u_*\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{2.101}$$

Esta última estimativa garante que u_* é um mínimo local isolado entre os mínimos locais de E. Além disso, u_* é um ponto crítico isolado de E, pois se existisse uma sequência (u_j) de soluções estacionárias de (2.1) (que não sejam mínimos locais) convergindo a u_* em $H^1(\Omega)$, pela Observação 2.7 teríamos $2a'(\mu_j)\mu_j + a(\mu_j) \leqslant 0$, para todo j, sendo $\mu_j := \int |\nabla u_j|^2$, e como $\mu_j \to \mu_*$ no limite teríamos $2a'(\mu_*)\mu_* + a(\mu_*) \leqslant 0$, contradizendo (2.90). Portanto podemos escolher $\epsilon < \eta_2$ tal que u_* é a única solução estacionária de (2.1) em

$$B_\epsilon(u_*) = \{u \in H^1(\Omega) : \|u - u_*\|_{H^1(\Omega)} < \epsilon\}.$$

Seja $u_0 \in V_\epsilon(u_*)$. Introduzimos o conjunto $\mathcal{A}$ definido por

$$\mathcal{A} = \{t \in [0, +\infty) : u(t) \in V_\epsilon(u_*)\}.$$

O conjunto $\mathcal{A}$ satisfaz às seguintes propriedades abaixo listadas

1. $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ é aberto. Seja $0 < \hat{t} \in \mathcal{A}$, $u(\hat{t}) \in V_\epsilon(u_*)$, como $u \in C([0,T], H^1(\Omega))$ para $\epsilon - \|u(\hat{t}) - u_*\|_{H^1(\Omega)} > 0$ existe $\hat{\epsilon} > 0$ tal que se $|t - \hat{t}| < \hat{\epsilon}$ então $\|u(t) - u_*\|_{H^1(\Omega)} < \epsilon - \|u(\hat{t}) - u_*\|_{H^1(\Omega)}$. Afirmamos $(\hat{t} - \hat{\epsilon}, \hat{t} + \hat{\epsilon}) \subset \mathcal{A}$, Claramente, se $|t - \hat{t}| < \hat{\epsilon}$

$$\|u(t) - u_*\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|u(t) - u(\hat{t})\|_{H^1(\Omega)} + \|u(\hat{t}) - u_*\|_{H^1(\Omega)} < \epsilon$$

e como $E(u(t)) \leqslant E(u_0)$ para todo $t \geqslant 0$, se tem $E(u(t)) < E(u_*) + \frac{\rho}{2}\epsilon^2$ e assim $t \in \mathcal{A}$.

2. Considere o conjunto $A := \{t > 0; [0,t) \subset \mathcal{A}\}$. Tem-se $t_\infty := \sup A = +\infty$

   - A é não vazio. De fato, como $u(0) = u_0 \in V_\epsilon(u_*)$, temos que $0 \in \mathcal{A}$. Sendo u continua em 0 (veja Teorema 2.6), para $\epsilon - \|u_0 - u_*\|_{H^1(\Omega)} > 0$ existe $\widetilde{\epsilon} > 0$

tal que se $0 \leqslant t < \widetilde{\epsilon}$ então $\|u(t) - u_*\|_{H^1(\Omega)} < \epsilon - \|u_0 - u_*\|_{H^1(\Omega)}$. Afirmamos $[0, \widetilde{\epsilon}) \subset \mathcal{A}$. Com efeito, se $0 < t < \widetilde{\epsilon}$

$$\|u(t) - u_*\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|u(t) - u_0\|_{H^1(\Omega)} + \|u_0 - u_*\|_{H^1(\Omega)} < \epsilon$$

e como $E(u(t)) \leqslant E(u_0)$ para todo $t \geqslant 0$, se tem $E(u(t)) < E(u_*) + \frac{\rho}{2}\epsilon^2$, então $t \in \mathcal{A}$. Portanto, $\exists \widetilde{\epsilon} > 0$ tal que $[0, \widetilde{\epsilon}) \subset \mathcal{A}$

- $t_\infty = +\infty$. De fato, se fosse falso existiria uma sequência $t_n \in \mathcal{A}$, $t_n < t_\infty < +\infty$, tal que $t_n \to t_\infty$. Como $\|u(t_n) - u_*\|_{H^1(\Omega)} < \epsilon$ para todo n e $u \in C([0,T], H^1(\Omega))$ passando ao limite temos que $\|u(t_\infty) - u_*\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \epsilon$. Daí por (2.101) e usando que $E(u(t_\infty)) \leqslant E(u_0)$ teríamos

$$\frac{\rho}{2}\|u(t_\infty) - u_*\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant E(u(t_\infty)) - E(u_*) \leqslant E(u(t_n)) - E(u_*) < \frac{\rho}{2}\epsilon^2.$$

Então t_∞ pertenceria a $\mathcal{A}$ e como $\mathcal{A}$ é aberto conseguiríamos uma contradição com a definição de t_∞.

Portanto, segue de 1. e 2. acima que $\mathcal{A} = [0, +\infty)$. Assim, $u(t) \in V_\epsilon(u_*)$ para todo $t \geqslant 0$. Finalmente, usando o Lema 2.3 mostra-se como no Teorema 2.10 que

$$u(t) \to u_* \quad \text{em } H^1(\Omega), \quad \text{quando } t \to +\infty.$$

$\square$

Capítulo 3

Dinâmica de EDP parabólicas com p-Laplaciano e termo logístico de coeficientes indefinidos e ilimitados

Neste capítulo, consideramos o problema parabólico quasilinear

$$(P_{u_0})\begin{cases} u_t - \Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u \;=\; \lambda m(x)|u|^{p-2}u - \rho(\lambda)|u|^{q-2}u & \text{em } \Omega\times(0,+\infty),\\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial\nu} + W(x)|u|^{p-2}u \;=\; 0 & \text{sobre } \partial\Omega\times(0,+\infty),\\ u(0) \;=\; u_0 \quad \text{em } \Omega, \end{cases}$$

sendo $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\geqslant 2)$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $u_0\in L^\infty(\Omega)$ é o valor inicial, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ o operador p-Laplace para $2\leqslant p<+\infty$, $\lambda>0$ um parâmetro real, ρ é uma função real identidade ($\rho(\lambda)=\lambda$) ou função constante igual a 1 ($\rho(\lambda)=1$), $p<q$ um número real fixo, ν o vetor unitário normal exterior à fronteira $\partial\Omega$. Assumiremos as seguintes hipóteses:

(H_1) V é uma função potencial que pode ser indefinida e ilimitada satisfazendo $V\in L^{r_1}(\Omega)$ com $r_1>\dfrac{N}{p}$ e $V^-\in L^\infty(\Omega)$,

(H_2) m é uma função de peso que pode ser indefinida e ilimitada satisfazendo $m\in L^{r_2}(\Omega)$ com $r_2>\dfrac{N}{p}$, $m^+\in L^\infty(\Omega)$ e $m\not\equiv 0$,

(H_3) $W\in L^s(\partial\Omega)$ com $s>\dfrac{N-1}{p-1}$ e $W(x)\geqslant 0$ para quase todo $x\in\partial\Omega$ (se $W\equiv 0$ temos condição de fronteira de Neumann e para $W\not\equiv 0$ condição de fronteira de Robin).

Observação 3.1 *Em muitos trabalhos, a existência de bases de Schauder dos espaços de Sobolev é desejada com a finalidade de demonstrar a existência de soluções de problemas de valores de fronteira não-lineares. Por exemplo, em [71] Fučík, John e Nečas provaram a existência de bases de Schauder para os espaços $W^{1,p}(\Omega)$ para $1\leqslant p$ e Ω um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente suave. No entanto, não se sabe se os* *elementos destas bases são mutuamente ortogonais em $L^2(\Omega)$, para $p \geqslant 2$, foi observado por Bellout em [11] que ortogonalidade é mais delicado. Esse foi a razão pela qual, foi considerado como um resultado preliminar a base de Markuševič para $W^{1,p}(\Omega)$ com $p \geqslant 2$ introduzida por Boldrini, de Miranda e Planas em [21]*

Lema 3.1 *Seja $\Lambda = (\Delta + I)$, sendo I o operador identidade. Seja também $\nu = span\{\phi_i\}$, sendo $\{\phi_i\}$ as autofunções de Λ com condição de fronteira de Neumann. Então, ν é denso em $W^{1,p}(\Omega)$, para todo $p \geqslant 2$.*

Veamos que as autofunções do operador Laplaciano formam a base de Markuševič para $W^{1,p}(\Omega)$, e em particular, que seu espaço linear é denso neste espaço. Desta forma, esta base tem propriedades especiais que são relevantes para o uso de método de Faedo-Galerkin será usado para provar os Lemas 3.4 e 4.3 (veja prova do Lema 4.3 na Seção 4.3).

Observação 3.2 *Os resultados das seções 3.1 e 3.2 ainda são válidas se consideramos $V^- \in L^{r_1}(\Omega)$ ou $m^+ \in L^{r_2}(\Omega)$ com $r_1, r_2 > \dfrac{N}{p}$. Para os resultados referentes à existência local e global do problema parabólico (P_{u_0}), as hipóteses $V^- \in L^\infty(\Omega)$ e $m^+ \in L^\infty(\Omega)$ serão fundamentais para garantir $f(x,t) = (V^- + \lambda m^+)(x)(\alpha(x,t))^{p-1}$ esta em $L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ que é hipótese do Lema 3.4, pois que a função $f \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ é uma condição essencial no argumento da prova desse lema. As hipóteses $V^- \in L^\infty(\Omega)$ e $m^+ \in L^\infty(\Omega)$ também são fundamentais para provar a unicidade da solução do problema parabólico (P_{u_0}).*

O capítulo é organizado como segue. Na Seção 3.1 estudamos um problema de autovalores com condição de Neumann ou Robin. Seção 3.2 é dedicada à existência de subsolucões não-negativas e supersoluções limitadas do problema estacionário (P) e também à caracterização da existência de solução de (P) em termos do autovalor principal de (EP_λ). Na Seção 3.3 introduzimos um problema parabólico abstrato que envolve um operador monótono. Mostramos existência, unicidade e provamos um principio de comparação. Na Seção 3.4 estudamos a existência local no tempo do problema parabólico (P_{u_0}) e Seção 3.5 existência global no tempo e unicidade da solução de (P_{u_0}). Finalmente na Seção 3.6 estabelecemos o comportamento assintótico das soluções de (P_{u_0}) quando o tempo vai para o infinito.

3.1 Um problema de autovalores

Consideremos para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ o problema de autovalores no parâmetro μ

$$(EP_\lambda) \begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u + \mu|u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + W(x)|u|^{p-2}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Estamos interessados nas soluções fracas positivas do problema (EP_λ), ou seja em função não-negativa $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ que satisfaz

$$\int |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi + \int (V - \lambda m)(x)|u|^{p-2}u\phi + \int_{\partial\Omega} W(x)|u|^{p-2}u\phi = \mu \int |u|^{p-2}u\phi, \quad (3.1)$$

para todo $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$. Denotemos por $E_\lambda : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional de energia associado ao problema (EP_λ), definido por

$$E_\lambda(u) = \int |\nabla u|^p + \int V(x)|u|^p + \int_{\partial\Omega} W(x)|u|^p - \lambda \int m(x)|u|^p, \quad (3.2)$$

e

$$\mathcal{M}_P := \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega); \int |u|^p = 1 \right\}. \quad (3.3)$$

Teorema 3.1 *Suponha $V, m \in L^r(\Omega)$ com $r > \dfrac{N}{p}$ e (H_3). Então para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ o problema (EP_λ) tem um único autovalor principal*

$$\mu_1(\lambda) := \inf_{u \in \mathcal{M}_P} \{E_\lambda(u)\}. \quad (3.4)$$

Além disso, $\mu_1(\lambda)$ é um autovalor simples e toda autofunção u de (EP_λ) associada a $\mu_1(\lambda)$ satisfaz $u > 0$ em $\overline{\Omega}$.

Prova:

1. O funcional E_λ é coercivo sobre $\mathcal{M}_P$. De fato, supomos que existe uma sequência $\{u_n\}$ com $u_n \in \mathcal{M}_P$ tal que

$$\begin{cases} \|u_n\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \to +\infty & \text{quando } n \to +\infty \text{ e} \\ E_\lambda(u_n) \leqslant K & \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \int |\nabla u_n|^p &= E_\lambda(u_n) + \int (\lambda m - V)(x)|u_n|^p - \int_{\partial\Omega} W(x)|u_n|^p \\ &\leqslant K + \int |(\lambda m - V)(x)||u_n|^p \\ &\leqslant K + \|\lambda m - V\|_{L^r(\Omega)}\|u_n\|^p_{L^{pr'}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Como $u_n \in \mathcal{M}_P$ temos de (3.5) que $\displaystyle\int |\nabla u_n|^p \to +\infty$ e assim $t_n := \|u_n\|_{L^{pr'}(\Omega)} \to +\infty$. Considerando $v_n := \dfrac{u_n}{t_n}$ temos

$$\begin{cases} \|v_n\|_{L^{pr'}(\Omega)} = 1, \\ \displaystyle\int |\nabla v_n|^p \leqslant \frac{K}{t_n^p} + \|\lambda m - V\|_{L^r(\Omega)}, \\ \displaystyle\int |v_n|^p = \frac{1}{t_n^p}, \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a sequência $\{v_n\}$ é limitada em $W^{1,p}(\Omega)$ e como este espaço é reflexivo e a inclusão de $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{pr'}(\Omega)$ é compacta, existe v tal que

$$\begin{cases} v_n \rightharpoonup v, & \text{em } W^{1,p}(\Omega), \\ v_n \to v, & \text{em } L^{pr'}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \end{cases}$$

logo passando ao limite teríamos que $\|v\|_{L^{pr'}(\Omega)} = 1$ e $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 0$, uma contradição. Então E_λ é coercivo sobre $\mathcal{M}_P$.

2. O funcional E_λ é fracamente semicontínuo inferiormente sobre $\mathcal{M}_P$. De fato, seja $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$, com $u_n, u \in \mathcal{M}_P$, então

$$\liminf_{n\to+\infty} E_\lambda(u_n) = \lim_{j\to+\infty} E_\lambda(u_j)$$

para alguma subsequência $\{u_j\}$ da sequência $\{u_n\}$. Como $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{pr'}(\Omega)$ compactamente, pois $r > \dfrac{N}{p}$, e $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{ps'}(\partial\Omega)$ compactamente, pois $s > \dfrac{N-1}{p-1}$, existem uma subsequência $\{u_k\}$ da sequência $\{u_j\}$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tais que

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u, & \text{em } W^{1,p}(\Omega), \\ u_k \to u, & \text{em } L^{pr'}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \\ u_k \to u, & \text{em } L^{ps'}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^p(\partial\Omega). \end{cases}$$

Logo, pela Proposição 1.2 temos

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to+\infty} E_\lambda(u_n) &= \lim_{k\to+\infty} E_\lambda(u_k) \\ &\geqslant \liminf_{n\to+\infty} \int |\nabla u_n|^p + \int (V-\lambda m)(x)|u|^p + \int_{\partial\Omega} W(x)|u|^p \\ &\geqslant \int |\nabla u|^p + \int (V-\lambda m)(x)|u|^p + \int_{\partial\Omega} W(x)|u|^p \\ &= E_\lambda(u). \end{aligned}$$

Então o funcional E_λ atinge um mínimo $\mu_1(\lambda)$ em algum $\widetilde{u} \in \mathcal{M}_P$, ou seja

$$E_\lambda(\widetilde{u}) = \mu_1(\lambda) = \inf_{u\in\mathcal{M}} \{E_\lambda(u)\}.$$

3. $\mu_1(\lambda)$ é um autovalor do problema (EP_λ). De fato, o funcional $H : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por $H(u) = \displaystyle\int |u|^p$, satisfaz para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\langle H'(u), v\rangle = p \int |u|^{p-2}uv, \quad \text{para todo } v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{3.6}$$

Como $H(\widetilde{u}) = \displaystyle\int |\widetilde{u}|^p = 1$ temos $\widetilde{u} \not\equiv 0$, e também lembrando que para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\langle E_\lambda'(u), v\rangle = p\left(\int |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v + \int (V-\lambda m)(x)|u|^{p-2}uv + \int_{\partial\Omega} W(x)|u|^{p-2}uv\right), \tag{3.7}$$

para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$, pelo teorema dos multiplicadores de Lagrange temos $E'_\lambda(\widetilde{u}) = \mu H'(\widetilde{u})$ para algum $\mu \in \mathbb{R}$, ou seja $\langle E'_\lambda(\widetilde{u}), v\rangle = \mu\langle H'(\widetilde{u}), v\rangle$, $\forall v \in W^{1,p}(\Omega)$. Em particular, para $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ temos

$$p\left(\int |\nabla \widetilde{u}|^p + \int (V - \lambda m)(x)|\widetilde{u}|^p + \int_{\partial\Omega} W(x)|\widetilde{u}|^p\right) = \mu p \int |\widetilde{u}|^p$$

que implica que $\mu_1(\lambda) = E_\lambda(\widetilde{u}) = \mu$. Portanto $\langle E'_\lambda(\widetilde{u}), v\rangle = \mu_1(\lambda)\langle H'(\widetilde{u}), v\rangle$, $\forall v \in W^{1,p}(\Omega)$, ou seja $\mu_1(\lambda)$ é um autovalor do problema (EP_λ).

4. $\mu_1(\lambda)$ é um autovalor principal do problema (EP_λ). De fato, $E_\lambda(|\widetilde{u}|) = E_\lambda(\widetilde{u})$, então $|\widetilde{u}|$ também é autofunção do problema (EP_λ). Assim $|\widetilde{u}| \geqslant 0$ em Ω e pela desigualdade de Harnack, Teorema 7 de [103], temos $|\widetilde{u}| > 0$ em Ω. Além disso, $|\widetilde{u}| > 0$ em $\overline{\Omega}$ pelo argumento feito na demonstração do Teorema 3.1 em [84].

5. O autovalor principal $\mu_1(\lambda)$ é único e simples. De fato, seja $\xi, \phi \in W^{1,p}(\Omega)$ são duas autofunções principais do problema (EP_λ) associados, respectivamente, a $\mu_1(\lambda)$ e μ. Assumimos que $\xi \geqslant 0$ em Ω e $\phi > 0$ em Ω. De (3.4) deduzimos que $\mu_1(\lambda) \leqslant \mu$. Então aplicamos a identidade de Picone, veja Lema 1.4, para ξ e $\phi+\epsilon$ para qualquer $\epsilon > 0$, e obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \int L(\xi, \phi+\epsilon)\\
&= \int |\nabla \xi|^p - \int |\nabla \phi|^{p-2}\nabla\phi \cdot \nabla\left(\frac{\xi^p}{(\phi+\epsilon)^{p-1}}\right)\\
&= \int (\lambda m - V)(x)\xi^p - \mu_1(\lambda)\int \xi^p - \int_{\partial\Omega} W(x)\xi^p - \int (\lambda m - V)(x)\phi^p \frac{\xi^p}{(\phi+\epsilon)^{p-1}} -\\
&\quad \mu \int \phi^p \frac{\xi^p}{(\phi+\epsilon)^{p-1}} + \int_{\partial\Omega} W(x)\phi^p \frac{\xi^p}{(\phi+\epsilon)^{p-1}}\\
&= \int (\lambda m - V)(x)\xi^p - \mu_1(\lambda)\int \xi^p - \int_{\partial\Omega} W(x)\xi^p - \int (\lambda m - V)(x)\left(\frac{\phi}{\phi+\epsilon}\right)^{p-1}\xi^p -\\
&\quad \mu \int \left(\frac{\phi}{\phi+\epsilon}\right)^{p-1}\xi^p + \int_{\partial\Omega} W(x)\left(\frac{\phi}{\phi+\epsilon}\right)^{p-1}\xi^p.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$(\lambda m - V - \mu)(x)\left(\frac{\phi(x)}{\phi(x)+\epsilon}\right)^{p-1}\xi(x)^p \to (\lambda m - V - \mu)(x)\xi(x)^p$$

quando $\epsilon \to 0^+$, para quase todo $x \in \Omega$ e

$$\left|(\lambda m - V - \mu)(x)\left(\frac{\phi(x)}{\phi(x)+\epsilon}\right)^{p-1}\xi(x)^p\right| \leqslant |(\lambda m - V - \mu)(x)|\,\xi(x)^p \in L^1(\Omega)$$

$\forall\epsilon$, então pelo Teorema de Convergência Dominada obtemos

$$\int (\lambda m - V - \mu)(x)\Big(\frac{\phi(x)}{\phi(x)+\epsilon}\Big)^{p-1}\xi^p \to \int (\lambda m - V - \mu)(x)\xi^p$$

quando $\epsilon \to 0^+$. Similarmente provamos

$$\int_{\partial\Omega} W(x)\left(\frac{\phi(x)}{\phi(x)+\epsilon}\right)^{p-1}\xi^p \to \int_{\partial\Omega}(\lambda m - V - \mu)(x)\xi^p$$

quando $\epsilon \to 0^+$.

Portanto, passando ao limite, quando $\epsilon \to 0^+$,

$$0 \leqslant \int L(\xi,\phi) \leqslant (\mu_1(\lambda)-\mu)\int \xi^p$$

daí, se $\mu_1(\lambda) < \mu$ teríamos uma contradição, logo $\mu_1(\lambda)$ é o único autovalor e $L(\xi,\phi) = 0$ que implica que o autovalor $\mu_1(\lambda)$ é simples.

□

É essencial nos argumentos para o problema parabólico (P_{u_0}) (Seção 3.4, Secão 3.5 e Seção 3.6) que autofunções principais de (EP_λ) sejam limitadas

Proposição 3.1 *Se φ é autofunção principal de (EP_λ) associada a $\mu_1(\lambda)$ então $\varphi \in L^\infty(\Omega)$.*

Prova: Seja φ uma autofunção principal associada a $\mu_1(\lambda)$. Para cada $M > 0$ definimos

$$\varphi_M(x) := \min\{\varphi(x), M\}$$

para quase todo $x \in \Omega$. Para cada $k > 0$ vamos escolher $\phi = \varphi_M^{kp+1} \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ em (3.1), isto é,

$$\int |\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi_M^{kp+1}) = \int(-V+\lambda m+\mu_1(\lambda))(x)\varphi^{p-1}\varphi_M^{kp+1} - \int_{\partial\Omega} W(x)\varphi^{p-1}\varphi_M^{kp+1}.$$

Notemos que

$$\nabla(\varphi_M^{kp+1}) = (kp+1)\varphi_M^{kp}\nabla\varphi_M = \begin{cases}(kp+1)\varphi^{kp}\nabla\varphi, & \text{se } \varphi \leqslant M\\ 0, & \text{se } \varphi > M\end{cases}$$

assim

$$\begin{aligned}\int |\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi_M^{kp+1}) &= (kp+1)\int_{\{\varphi\leqslant M\}}\varphi^{kp}|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\\ &= (kp+1)\int \varphi_M^{kp}|\nabla\varphi_M|^p\\ &= (kp+1)\int |\varphi_M^k\nabla\varphi_M|^p\\ &= \frac{kp+1}{(k+1)^p}\int |\nabla\varphi_M^{k+1}|^p.\end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_M^{k+1}\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} &= \int |\nabla \varphi_M^{k+1}|^p + \int \varphi_M^{(k+1)p} \\
&= \frac{(k+1)^p}{kp+1} \int |\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi_M^{kp+1}) + \int \varphi_M^{(k+1)p} \\
&\leqslant \frac{(k+1)^p}{kp+1}\Big(\int |\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi_M^{kp+1}) + \int \varphi_M^{(k+1)p}\Big) \\
&\leqslant \frac{(k+1)^p}{kp+1}\Big(\int (-V+\lambda m+\mu_1(\lambda))(x)\varphi^{p-1}\varphi_M^{kp+1} + \int \varphi_M^{(k+1)p}\Big) \\
&\leqslant \frac{(k+1)^p}{kp+1}\Big(\int \big|(-V+\lambda m+\mu_1(\lambda))(x)\big|\varphi^{p-1}\varphi_M^{kp+1} + \int \varphi_M^{(k+1)p}\Big) \\
&\leqslant \frac{(k+1)^p}{kp+1}\Big(\int \big|(-V+\lambda m+\mu_1(\lambda))(x)\big|\varphi^{p-1}\varphi^{kp+1} + \int \varphi^{(k+1)p}\Big) \\
&= \frac{(k+1)^p}{kp+1}\Big(\int \big|(-V+\lambda m+\mu_1(\lambda))(x)\big|\varphi^{(k+1)p} + \int \varphi^{(k+1)p}\Big) \\
&= \frac{(k+1)^p}{kp+1}\int \Big(\big|(-V+\lambda m+\mu_1(\lambda))(x)\big| + 1\Big)\varphi^{(k+1)p} \\
&\leqslant \frac{(k+1)^p}{kp+1}\||(-V+\lambda m+\mu_1(\lambda))|+1\|_{L^r(\Omega)}\Big(\int \varphi^{(k+1)pr'}\Big)^{\frac{1}{r'}} \\
&= \frac{(k+1)^p}{kp+1}\||(-V+\lambda m+\mu_1(\lambda))|+1\|_{L^r(\Omega)}\|\varphi\|^{(k+1)p}_{L^{(k+1)pr'}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como a inclusão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ é continua, existe $C^* > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant C^*\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

$\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, e assim

$$\begin{aligned}
\|\varphi_M\|^{k+1}_{L^{(k+1)p^*}(\Omega)} &= \|\varphi_M^{k+1}\|_{L^{p^*}(\Omega)} \\
&\leqslant C^*\|\varphi_M^{k+1}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\
&\leqslant C^*\left(\frac{(k+1)^p}{kp+1}\||(-V+\lambda m+\mu_1(\lambda))|+1\|_{L^r(\Omega)}\|\varphi\|^{(k+1)p}_{L^{(k+1)pr'}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C^*\frac{k+1}{(kp+1)^{\frac{1}{p}}}\||(-V+\lambda m+\mu_1(\lambda))|+1\|^{\frac{1}{p}}_{L^r(\Omega)}\|\varphi\|^{k+1}_{L^{(k+1)pr'}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Daí

$$\|\varphi_M\|_{L^{(k+1)p^*}(\Omega)} \leqslant C^{\frac{1}{k+1}}\left(\frac{k+1}{(kp+1)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{1}{k+1}}\|\varphi\|_{L^{(k+1)pr'}(\Omega)}, \tag{3.8}$$

para todo $k > 0$, sendo $C = C^*\||(-V+\lambda m+\mu_1(\lambda))|+1\|^{\frac{1}{p}}_{L^r(\Omega)}$.

Escolhendo $k := k_1 > 0$ com $(k_1+1)pr' = p^*$, ou seja $k_1 + 1 = \dfrac{p^*}{pr'}$, podemos começar a iteração de Moser em (3.8). Como $\varphi(x) = \lim\limits_{M\to+\infty}\varphi_M(x)$ para quase todo $x \in \Omega$, então o lema de Fatou implica que

$$\|\varphi\|_{L^{(k_1+1)p^*}(\Omega)} \leqslant C^{\frac{1}{k_1+1}}\left(\frac{k_1+1}{(k_1p+1)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{1}{k_1+1}}\|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)}.$$

Logo podemos escolher em (3.8) $k := k_2$ com $(k_2+1)pr' = (k_1+1)p^* = \dfrac{(p^*)^2}{pr'}$, ou seja $k_2 + 1 = \left(\dfrac{p^*}{pr'}\right)^2$, de modo que pelo lema de Fatou temos

$$\|\varphi\|_{L^{(k_2+1)p^*}(\Omega)} \leqslant C^{\frac{1}{k_2+1}} \left(\frac{k_2+1}{(k_2p+1)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{1}{k_2+1}} \|\varphi\|_{L^{(k_1+1)p^*}(\Omega)}.$$

Assim, por indução, obtemos

$$\|\varphi\|_{L^{(k_n+1)p^*}(\Omega)} \leqslant C^{\frac{1}{k_n+1}} \left(\frac{k_n+1}{(k_np+1)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{1}{k_n+1}} \|\varphi\|_{L^{(k_{n-1}+1)p^*}(\Omega)} \tag{3.9}$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$, com $k_n + 1 = \left(\dfrac{p^*}{pr'}\right)^n$. Daí

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{L^{(k_n+1)p^*}(\Omega)} \leqslant C^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i+1}} &\left[\left(\frac{k_1+1}{(k_1p+1)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{k_1+1}}}\right]^{\frac{1}{\sqrt{k_1+1}}} \left[\left(\frac{k_2+1}{(k_2p+1)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{k_2+1}}}\right]^{\frac{1}{\sqrt{k_2+1}}} \cdots \\ &\left[\left(\frac{k_n+1}{(k_np+1)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{k_n+1}}}\right]^{\frac{1}{\sqrt{k_n+1}}} \|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Como $1 < \left(\dfrac{k+1}{(kp+1)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} \leqslant C_2$ para todo $k > 0$, sendo C_2 uma constante positiva, temos

$$\|\varphi\|_{L^{(k_n+1)p^*}(\Omega)} \leqslant C^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i+1}} C_2^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{k_i+1}}} \|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)}. \tag{3.10}$$

Por outro lado, como $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i+1} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{pr'}{p^*}\right)^i$, $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{k_i+1}} = \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\frac{pr'}{p^*}}\right)^i$ e $\dfrac{pr'}{p^*} < 1$ de (3.10) obtemos

$$\|\varphi\|_{L^{(k_n+1)p^*}(\Omega)} \leqslant C_3 \|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)}, \tag{3.11}$$

sendo C_3 uma constante positiva que independe de k_n. Como $(k_n+1)p^* \to +\infty$, quando $n \to +\infty$, temos que $\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_3\|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)}$. De fato, se por contradição $\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} > C_3\|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)}$, existiria $\eta > 0$ e um subconjunto mensurável A de Ω com $|A| > 0$ tal que $\varphi(x) \geqslant C_3\|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)} + \eta$ para todo $x \in A$. Logo,

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{L^{(k_n+1)p^*}(\Omega)} &\geqslant \left(\int_A (\varphi(x))^{(k_n+1)p^*}\right)^{\frac{1}{(k_n+1)p^*}} \\ &\geqslant \left(\int_A (C_3\|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)} + \eta)^{(k_n+1)p^*}\right)^{\frac{1}{(k_n+1)p^*}} \\ &= (C_3\|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)} + \eta)|A|^{\frac{1}{(k_n+1)p^*}},\end{aligned}$$

e assim, por (3.11), $C_3\|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)} \geqslant \liminf\limits_{(k_n+1)p^* \to +\infty} (C_3\|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)} + \eta)|A|^{\frac{1}{(k_n+1)p^*}} = C_3\|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)} + \eta$, uma contradição. Portanto $\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_3\|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)}$. $\square$

Proposição 3.2 *A função* $\mu_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tem as propriedades seguintes:*

1. μ_1 *é concava.*

2. μ_1 *é contínua.*

3. *A função* $\lambda \mapsto \varphi_\lambda$ *definida de* $\mathbb{R}$ *sobre o espaço* $W^{1,p}(\Omega)$ *é contínua, sendo* $\varphi_\lambda \in \mathcal{M}_P$ *autofunção principal associado ao autovalor principal* $\mu_1(\lambda)$*.*

4. μ_1 *é diferenciável e*
$$\mu_1'(\lambda) = -\int m(x)\varphi_\lambda^p \tag{3.12}$$
sendo $\varphi_\lambda \in \mathcal{M}_P$ *autofunção principal associado ao autovalor principal* $\mu_1(\lambda)$*.*

5. *Se* $m^+ \not\equiv 0$ *(respectivamente,* $m^- \not\equiv 0$*) então* $\lim_{\lambda\to+\infty} \mu_1(\lambda) = -\infty$ *(respectivamente,* $\lim_{\lambda\to-\infty} \mu_1(\lambda) = -\infty$*).*

6. *Se* $m^- \equiv 0$ *(respectivamente,* $m^+ \equiv 0$*) então a função* μ_1 *é decrescente (respectivamente, crescente).*

7. $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) = \alpha(V,m)$*, sendo*
$$\alpha(V,m) := \inf\left\{\int |\nabla u|^p + \int V(x)|u|^p + \int_{\partial\Omega} W(x)|u|^p; u \in \mathcal{M}_P \text{ e} \int m(x)|u|^p = 0\right\}.$$

Prova:

1. Sejam $\lambda, \widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ e $s \in (0,1)$. Para $u \in \mathcal{M}_P$ temos
$$s\mu_1(\lambda) + (1-s)\mu_1(\widetilde{\lambda}) \quad \leqslant \quad sE_\lambda(u) + (1-s)E_{\widetilde{\lambda}}(u) = E_{s\lambda+(1-s)\widetilde{\lambda}}(u)$$
daí $s\mu_1(\lambda) + (1-s)\mu_1(\widetilde{\lambda}) \leqslant \mu_1(s\lambda + (1-s)\widetilde{\lambda})$.

2. Seja $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Para $\epsilon > 0$ dado, por (3.4) existe $\widehat{u} \in \mathcal{M}_P$ tal que $\mu_1(\lambda_0) + \frac{\epsilon}{2} \geqslant E_{\lambda_0}(\widehat{u})$. Como $E_\lambda(\widehat{u}) \to E_{\lambda_0}(\widehat{u})$, quando $\lambda \to \lambda_0$, existe $\delta > 0$ tal que $-\frac{\epsilon}{2} \leqslant E_\lambda(\widehat{u}) - E_{\lambda_0}(\widehat{u}) \leqslant \frac{\epsilon}{2}$ para todo $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$. Portanto para $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ temos
$$\mu_1(\lambda) - \mu_1(\lambda_0) \leqslant E_\lambda(\widehat{u}) + \frac{\epsilon}{2} - E_{\lambda_0}(\widehat{u}) = \frac{\epsilon}{2} + E_\lambda(\widehat{u}) - E_{\lambda_0}(\widehat{u}) \leqslant \epsilon. \tag{3.13}$$
Por outro lado como $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ existe $s \in (0,1)$ tal que $\lambda = s(\lambda_0 - \delta) +$

$(1-s)(\lambda_0+\delta)$ e, assim, da concavidade da função μ_1 obtemos

$$
\begin{aligned}
\mu_1(\lambda)-\mu_1(\lambda_0) &= \mu_1(s(\lambda_0-\delta)+(1-s)(\lambda_0+\delta))-\mu_1(\lambda_0)\\
&\geqslant s\mu_1(\lambda_0-\delta)+(1-s)\mu_1(\lambda_0+\delta)-\mu_1(\lambda_0)\\
&\geqslant \min\{\mu_1(\lambda_0-\delta),\mu_1(\lambda_0+\delta)\}-\mu_1(\lambda_0)\\
&= \mu_1(l_\delta)-\mu_1(\lambda_0) \qquad\qquad (\text{sendo } l_\delta\in\{\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta\})\\
&\geqslant -\frac{\epsilon}{2}+E_{l_\delta}(\widehat{u})-E_{\lambda_0}(\widehat{u})\\
&\geqslant -\frac{\epsilon}{2}+E_{l_\delta}(\widehat{u})-E_{\lambda_0}(\widehat{u})\\
&= -\frac{\epsilon}{2}+\int|\nabla\widehat{\widehat{u}}|^p+\int V(x)|\widehat{\widehat{u}}|^p+\int_{\partial\Omega}W(x)|\widehat{\widehat{u}}|^p-l_\delta\int m(x)|\widehat{\widehat{u}}|^p-\\
&\quad\left(\int|\nabla\widehat{\widehat{u}}|^p+\int V(x)|\widehat{\widehat{u}}|^p+\int_{\partial\Omega}W(x)|\widehat{\widehat{u}}|^p-\lambda_0\int m(x)|\widehat{\widehat{u}}|^p\right)\\
&\geqslant -\frac{\epsilon}{2}-\delta\int|m(x)||\widehat{\widehat{u}}|^p,
\end{aligned}
$$

para algum $\widehat{\widehat{u}}\in\mathcal{M}_P$. Agora, escolhendo $\widehat{\delta}\leqslant\delta$ suficientemente pequeno tal que $\widehat{\delta}\displaystyle\int|m(x)||\widehat{\widehat{u}}|^p\leqslant\frac{\epsilon}{2}$, temos que

$$
\mu_1(\lambda)-\mu_1(\lambda_0)\geqslant-\epsilon. \tag{3.14}
$$

Portanto, de (3.13) e (3.14) temos que μ_1 é continua em λ_0.

3. Sejam $\varphi_n,\varphi_0\in\mathcal{M}_P$ as autofunções principais associadas aos autovalores principais $\mu_1(\lambda_n),\mu_1(\lambda_0)$ respectivamente, e $\lambda_n\to\lambda_0$ quando $n\to+\infty$. Como μ_1 é continua temos

$$
\mu_1(\lambda_n)=\int|\nabla\varphi_n|^p+\int V(x)\varphi_n^p+\int_{\partial\Omega}W(x)\varphi_n^p-\lambda_n\int m(x)\varphi_n^p\leqslant K
$$

para todo n, sendo K uma constante positiva. Então

$$
\begin{aligned}
\int|\nabla\varphi_n|^p &= \mu_1(\lambda_n)-\int V(x)\varphi_n^p-\int_{\partial\Omega}W(x)\varphi_n^p+\lambda_n\int m(x)\varphi_n^p\\
&\leqslant K+\int|(-V+\lambda_n m)(x)|\varphi_n^p\\
&\leqslant K+\|-V+\lambda_n m\|_{L^r(\Omega)}\|\varphi_n\|^p_{L^{pr'}(\Omega)}\\
&\leqslant K+\|-V+\lambda_n m\|_{L^r(\Omega)}\left(\epsilon^p\int|\nabla\varphi_n|^p+C(\epsilon,pr')\int\varphi_n^p\right)\\
&= K+\|-V+\lambda_n m\|_{L^r(\Omega)}\left(\epsilon^p\int|\nabla\varphi_n|^p+C(\epsilon,pr')\right)\\
&= K+\left(\|V\|_{L^r(\Omega)}+|\lambda_n|\|m\|_{L^r(\Omega)}\right)\left(\epsilon^p\int|\nabla\varphi_n|^p+C(\epsilon,pr')\right)\\
&= K+\left(\|V\|_{L^r(\Omega)}+\Lambda\|m\|_{L^r(\Omega)}\right)\left(\epsilon^p\int|\nabla\varphi_n|^p+C(\epsilon,pr')\right)
\end{aligned}
$$

sendo λ_n é limitado com $|\lambda_n| \leqslant \Lambda$ para todo n. Agora escolhemos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\widehat{\epsilon} = 1 - \left(\|V\|_{L^r(\Omega)} + \Lambda\|m\|_{L^r(\Omega)}\right)\epsilon^p > 0$ e conseguimos

$$\widehat{\epsilon}\int |\nabla\varphi_n|^p \leqslant K + \left(\|V\|_{L^r(\Omega)} + \Lambda\|m\|_{L^r(\Omega)}\right) C(\epsilon, pr').$$

Assim $\{\varphi_n\}$ é uma sequência limitada em $W^{1,p}(\Omega)$ e então existe uma subsequência de $\{\varphi_n\}$, ainda denotada por $\{\varphi_n\}$, e $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \varphi_n \rightharpoonup \varphi & \text{em } W^{1,p}(\Omega), \text{ quando } n \to +\infty \\ \varphi_n \to \varphi & \text{em } L^{pr'}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \text{ quando } n \to +\infty \\ \varphi_n \to \varphi & \text{em } L^{ps'}(\partial\Omega), \text{ quando } n \to +\infty. \end{cases}$$

Passando ao limite temos $\displaystyle\int |\varphi|^p = \lim_{n\to+\infty}\int \varphi_n^p = 1$, ou seja $\varphi \in \mathcal{M}_P$, e como

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda_0) &= \lim_{n\to+\infty} \mu_1(\lambda_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\int |\nabla\varphi_n|^p + \int V(x)\varphi_n^p + \int_{\partial\Omega} W(x)\varphi_n^p - \lambda_n\int m(x)\varphi_n^p\right) \\ &\geqslant \int |\nabla\varphi|^p + \int V(x)|\varphi|^p + \int_{\partial\Omega} W(x)|\varphi|^p - \lambda_0\int m(x)|\varphi|^p \\ &\geqslant \mu_1(\lambda_0) \end{aligned}$$

obtemos $\varphi = C\varphi_0$ para algum $C > 0$, pois $\mu_1(\lambda_0)$ é um autovalor simples, e $1 = \displaystyle\int |\varphi|^p = C^p$. Portanto, $\varphi = \varphi_0$. Além disso, como $\mu_1(\lambda_n) \to \mu_1(\lambda_0)$ quando $n \to +\infty$ obtemos que $\displaystyle\int |\nabla\varphi_0|^p = \lim_{n\to+\infty}\int |\nabla\varphi_n|^p$, e isto implica que φ_n converge fortemente a φ_0 em $W^{1,p}(\Omega)$ quando $n \to +\infty$. Essa convergência é válida para a sequência toda pois, se supusermos a existência de uma subsequência $\{\varphi_{n_j}\}$ de $\{\varphi_n\}$ tal que

$$\|\varphi_{n_j} - \varphi_0\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geqslant \epsilon > 0 \tag{3.15}$$

para todo n_j, pelo argumento acima existiria uma subsequência $\{\varphi_{n_{j_k}}\}$ de $\{\varphi_{n_j}\}$ tal que $\varphi_{n_{j_k}} \to \varphi_0$ em $W^{1,p}(\Omega)$ o que contradiria (3.15). Portanto, $\varphi_n \to \varphi_0$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Isto implica que a função $\lambda \mapsto \varphi_\lambda$ de $\mathbb{R}$ sobre o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é continua.

4. Para provar a diferenciabilidade da função em μ_1 em λ_0, escrevemos

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda_n) &= \int |\nabla\varphi_n|^p + \int V(x)\varphi_n^p + \int_{\partial\Omega} W(x)\varphi_n^p - \lambda_n\int m(x)\varphi_n^p \\ &\geqslant \mu_1(\lambda_0) + \lambda_0\int m(x)\varphi_n^p - \lambda_n\int m(x)\varphi_n^p \\ &= \mu_1(\lambda_0) - (\lambda_n - \lambda_0)\int m(x)\varphi_n^p \end{aligned}$$

e também

$$
\begin{aligned}
\mu_1(\lambda_0) &= \int |\nabla\varphi_0|^p + \int V(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} W(x)\varphi_0^p - \lambda_0 \int m(x)\varphi_0^p \\
&\geqslant \mu_1(\lambda_n) + \lambda_n \int m(x)\varphi_0^p - \lambda_0 \int m(x)\varphi_0^p \\
&= \mu_1(\lambda_n) - (\lambda_0 - \lambda_n) \int m(x)\varphi_0^p.
\end{aligned}
$$

Assim

$$-(\lambda_n - \lambda_0) \int m(x)\varphi_n^p \leqslant \mu_1(\lambda_n) - \mu_1(\lambda_0) \leqslant (\lambda_0 - \lambda_n) \int m(x)\varphi_0^p.$$

Dai, se $\lambda_n > \lambda_0$ conseguimos

$$-\int m(x)\varphi_n^p \leqslant \frac{\mu_1(\lambda_n) - \mu_1(\lambda_0)}{\lambda_n - \lambda_0} \leqslant -\int m(x)\varphi_0^p$$

e

$$\lim_{\lambda_n \to \lambda_0^+} \frac{\mu_1(\lambda_n) - \mu_1(\lambda_0)}{\lambda_n - \lambda_0} = -\int m(x)\varphi_0^p.$$

Similarmente, se $\lambda_n < \lambda_0$ obtemos

$$\lim_{\lambda_n \to \lambda_0^-} \frac{\mu_1(\lambda_n) - \mu_1(\lambda_0)}{\lambda_n - \lambda_0} = -\int m(x)\varphi_0^p.$$

Portanto, temos (3.12) estabelecido.

5. Se $m^+ \not\equiv 0$ então existe $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$ tal que $\displaystyle\int m(x)|\varphi|^p > 0$ e $\displaystyle\int |\varphi|^p = 1$ (veja [52]). Assim $\mu_1(\lambda) \leqslant \displaystyle\int |\nabla\varphi|^p + \int V(x)|\varphi|^p - \lambda \int m(x)|\varphi|^p$ para todo $\lambda > 0$. Portanto,
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mu_1(\lambda) = -\infty.$$

6. Se $m^- \equiv 0$ como $\varphi_\lambda(x) > 0$ para quase todo $x \in \Omega$ temos $\displaystyle\int m(x)\varphi_\lambda^p > 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e assim o fato segue de (3.12).

7. Notemos primeiro que para todo $u \in \mathcal{M}_P$ tal que $\displaystyle\int m(x)|u|^p = 0$ temos
$$\mu_1(\lambda) \leqslant \int |\nabla u|^p + \int V(x)|u|^p + \int_{\partial\Omega} W(x)|u|^p$$
para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, que implica que
$$\mu_1(\lambda) \leqslant \alpha(V, m) \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.16}$$

7.1. Se $m^+ \not\equiv 0$ e $m^- \not\equiv 0$ então dos itens anteriores temos que μ_1 é limitada superiormente. Logo segue dos itens 5., 2. e 4. que $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) = \mu_1(\lambda_0)$ para algum $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, com $0 = \mu_1'(\lambda_0) = -\displaystyle\int m(x)\varphi_{\lambda_0}^p$. Assim

$$\begin{aligned} \alpha(V,m) &\leqslant \int |\nabla\varphi_{\lambda_0}|^p + \int V(x)\varphi_{\lambda_0}^p + \int_{\partial\Omega} W(x)\varphi_{\lambda_0}^p \\ &= \int |\nabla\varphi_{\lambda_0}|^p + \int V(x)\varphi_{\lambda_0}^p + \int_{\partial\Omega} W(x)\varphi_{\lambda_0}^p - \lambda_0 \int m(x)\varphi_{\lambda_0}^p \\ &= \mu_1(\lambda_0). \end{aligned}$$

7.2. Se $m^+ \not\equiv 0$ e $m^- \equiv 0$ então do item 6. temos que μ_1 é decrescente e assim

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty} \mu_1(\lambda). \tag{3.17}$$

a) Caso $\alpha(V,m) = +\infty$. Suponha, por contradição, $\sup\limits_{\lambda} \mu_1(\lambda) < +\infty$. Então

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda) &= \int |\nabla\varphi_\lambda|^p + \int V(x)\varphi_\lambda^p + \int_{\partial\Omega} W(x)\varphi_\lambda^p - \lambda \int m(x)\varphi_\lambda^p \\ &\geqslant \int |\nabla\varphi_\lambda|^p + \int V(x)\varphi_\lambda^p \end{aligned}$$

para todo $\lambda \leqslant 0$, pois $\displaystyle\int m(x)\varphi_\lambda^p = \int m^+(x)\varphi_\lambda^p > 0$ e $W \geqslant 0$ em $\partial\Omega$. Daí

$$\begin{aligned} \int |\nabla\varphi_\lambda|^p &\leqslant \mu_1(\lambda) - \int V(x)\varphi_\lambda^p \\ &\leqslant \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) + \int |V(x)|\varphi_\lambda^p \\ &\leqslant \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) + \|V\|_{L^r(\Omega)} \|\varphi_\lambda\|_{L^{pr'}(\Omega)}^p \\ &\leqslant \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) + \|V\|_{L^r(\Omega)} \left(\epsilon^p \int |\nabla\varphi_\lambda|^p + C(\epsilon, pr') \int \varphi_\lambda^p\right) \\ &\leqslant \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) + \|V\|_{L^r(\Omega)} \left(\epsilon^p \int |\nabla\varphi_\lambda|^p + C(\epsilon, pr')\right) \end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$ e $C(\epsilon, pr')$ é uma constante positiva. Assim, escolhendo $\epsilon > 0$ tal que $\widehat{\epsilon} = 1 - \|V\|_{L^r(\Omega)}\epsilon^p > 0$ temos $\widehat{\epsilon}\displaystyle\int |\nabla\varphi_\lambda|^p \leqslant \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) + \|V\|_{L^r(\Omega)} C(\epsilon, pr')$ para todo $\lambda \leqslant 0$. Então $\{\varphi_\lambda\}$ é uma família limitada em $W^{1,p}(\Omega)$ e assim existe uma sequência $\lambda_n \to -\infty$, quando $n \to +\infty$, satisfazendo

$$\begin{cases} \varphi_{\lambda_n} \rightharpoonup \varphi & \text{em } W^{1,p}(\Omega) \\ \varphi_{\lambda_n} \to \varphi & \text{em } L^{pr'}(\Omega) \\ \varphi_{\lambda_n} \to \varphi & \text{em } L^{ps'}(\partial\Omega). \end{cases} \tag{3.18}$$

Passando ao limite temos $\int |\varphi|^p = 1$, ou seja, $\varphi \in \mathcal{M}_P$. Notemos que $\int m(x)|\varphi|^p > 0$

$$\begin{aligned}
\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) &= \lim_{\lambda_n\to-\infty} \mu_1(\lambda_n) \\
&= \lim_{\lambda_n\to-\infty} \Big(\int |\nabla\varphi_{\lambda_n}|^p + \int V(x)\varphi_{\lambda_n}^p + \int_{\partial\Omega} W(x)\varphi_{\lambda_n}^p\Big) \\
&\quad - \lim_{\lambda_n\to-\infty} \Big(\lambda_n \int m(x)\varphi_{\lambda_n}^p\Big) \\
&\geqslant \lim_{\lambda_n\to-\infty} \Big(\int |\nabla\varphi_{\lambda_n}|^p + \int V(x)\varphi_{\lambda_n}^p - \lambda_n \int m(x)\varphi_{\lambda_n}^p\Big) \\
&\geqslant \int |\nabla\varphi|^p + \int V(x)|\varphi|^p - \lim_{\lambda_n\to-\infty} \lambda_n \int m(x)\varphi_{\lambda_n}^p \to +\infty,
\end{aligned}$$

o que seria uma contradição pois $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) < +\infty$. Portanto, $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) = +\infty$.

b) Caso $\alpha(V,m) < +\infty$. Por (3.16) e procedendo como na parte a) obtemos que $\varphi \in \mathcal{M}_P$ e $\int m(x)|\varphi|^p = 0$. Daí

$$\begin{aligned}
\alpha(V,m) &\leqslant \int |\nabla\varphi|^p + \int V(x)|\varphi|^p + \int_{\partial\Omega} W(x)|\varphi|^p \\
&= \int |\nabla\varphi|^p + \int V(x)|\varphi|^p + \int_{\partial\Omega} W(x)|\varphi|^p - \lambda \int m(x)|\varphi|^p
\end{aligned}$$

para todo λ, então $\alpha(V,m) \leqslant \mu_1(\lambda)$ para todo λ. Portanto $\alpha(V,m) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda)$.

7.3. Se $m^+ \equiv 0$ e $m^- \not\equiv 0$. A prova é exatamente igual ao item 7.2.

□

Consideremos o seguinte problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + W(x)|u|^{p-2}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.19}$$

Lema 3.2 $\mu_1(\lambda) = 0$ *se, e somente se,* λ *é um autovalor principal de* (3.19).

Prova: Se λ é um autovalor principal de (3.19) então existe φ tal que $\int |\nabla\varphi|^p + \int V(x)\varphi^p + \int_{\partial\Omega} W(x)\varphi^p - \lambda \int m(x)\varphi^p = 0$, tomando $\widehat{\varphi} = \dfrac{\varphi}{\|\varphi\|_{L^p(\Omega)}}$ temos que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{M}_P$ e assim $\mu_1(\lambda) \leqslant 0$. Por outro pela identidade de Picone de Lema 1.4

$$\mu_1(\lambda) = \int |\nabla\varphi_\lambda|^p - \int |\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi \cdot \nabla\left(\frac{\varphi_\lambda^p}{\varphi^{p-1}}\right) \geqslant 0,$$

assim $\mu_1(\lambda) = 0$. A reciproca é verdadeira pois a autofunção φ_λ é solução do problema (3.19). □

Lema 3.3 *1. Se m não muda de sinal então* (3.19) *possui autovalor principal se, e somente se, $\alpha(V,m) > 0$. Nesse caso é único.*

2. Se m muda de sinal então (3.19) *possui autovalor principal se, e somente se, $\alpha(V,m) \geqslant 0$. Mais precisamente*

(a) Se $\alpha(V,m) > 0$ então (3.19) *admite dois autovalores principais.*

(b) Se $\alpha(V,m) = 0$ então (3.19) *tem um único autovalor principal.*

Prova:

1. Suponha que λ_1 é um autovalor principal de (3.19), então pelo Lema 3.2 temos $\mu_1(\lambda_1) = 0$. Logo pelos itens 2 e 6 da Proposição 3.2 tem-se $\alpha(V,m) > 0$. Reciprocamente, se $\alpha(V,m) > 0$ pelos itens 2 e 6 da Proposição 3.2 temos $\mu_1(\lambda_1) = 0$ para algum λ_1, assim o Lema 3.2 garante que λ_1 é um autovalor principal de (3.19). A unicidade é consequência da estrita monotonicidade de μ_1.

2. Suponha que λ_1 é um autovalor principal de (3.19), então pelo Lema 3.2 temos $\mu_1(\lambda_1) = 0$. Logo por (3.16) tem-se $\alpha(V,m) \geqslant 0$. Reciprocamente

   (a) Se $\alpha(V,m) > 0$ pelos itens 2 e 5 da Proposição 3.2 e o Lema 3.2 existem dois autovalores principais de (3.19).

   (b) Se $\alpha(V,m) = 0$ então $\mu_1(\lambda_0) = 0$ em algum $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int m(x)\varphi_{\lambda_0}^p = 0$, pois m muda de sinal, e assim pelo Lema 3.2 λ_0 é um autovalor principal de (3.19). Se supormos que existe λ_1 outro autovalor principal de (3.19), pela identidade de Picone (veja Lema 1.4) teríamos

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \int |\nabla\varphi_{\lambda_0}|^p - \int |\nabla\varphi_{\lambda_1}|^{p-2}\nabla\varphi_{\lambda_1}\cdot\nabla\left(\frac{\varphi_{\lambda_0}^p}{\varphi_{\lambda_1}^{p-1}}\right)\\
&= -\int V(x)\varphi_{\lambda_0}^p - \int_{\partial\Omega} W(x)\varphi_{\lambda_0}^p + \lambda_0\int m(x)\varphi_{\lambda_0}^p + \int V(x)\varphi_{\lambda_0}^p + \\
&\quad \int_{\partial\Omega} W(x)\varphi_{\lambda_0}^p - \lambda_1\int m(x)\varphi_{\lambda_0}^p\\
&= (\lambda_0-\lambda_1)\int m(x)\varphi_{\lambda_0}^p\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

   Daí, $\varphi_{\lambda_0} = c\varphi_{\lambda_1}$, como $\varphi_{\lambda_0}, \varphi_{\lambda_1} \in \mathcal{M}_P$ temos $\varphi_{\lambda_0} = \varphi_{\lambda_1}$. Portanto, $\lambda_0 = \lambda_1$.

□

Recordemos que $\varphi_0 \in \mathcal{M}_P$ é autofunção associada a $\mu_1(0)$ e satisfaz

$$
\begin{cases}
-\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \mu_1(0)|u|^{p-2}u & \text{em } \Omega,\\
|\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + W(x)|u|^{p-2}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega.
\end{cases}
\tag{3.20}
$$

Como em [67] podemos considerar três casos diferentes dependendo do sinal do autovalor $\mu_1(0)$ de (3.20).

CASO I: $\mu_1(0) > 0$**.** Se $V \geqslant 0$, estamos neste caso. Se m não muda de sinal, temos a existência de um único autovalor principal de (3.19) e se m muda de sinal temos exatamente dois autovalores principais de (3.19) e enunciamos no seguinte:

Teorema 3.2 *Suponha* $\mu_1(0) > 0$*.*

1. *Se* $m^+ \not\equiv 0$ *e* $m^- \equiv 0$ *então* (3.19) *possui um único autovalor principal o qual é positivo.*

2. *Se* $m^+ \equiv 0$ *e* $m^- \not\equiv 0$ *então* (3.19) *possui um único autovalor principal o qual é negativo.*

3. *Se* $m^+ \not\equiv 0$ *e* $m^- \not\equiv 0$ *então* (3.19) *possui dois autovalores principais, um positivo e o outro negativo.*

Prova:

1. Se $m^+ \not\equiv 0$ e $m^- \equiv 0$ então pela Proposição 3.2 temos μ_1 decrescente e $\mu_1(\lambda) \to -\infty$, quando $\lambda \to +\infty$, assim $\mu_1(\lambda_1) = 0$ para algum número real $\lambda_1 > 0$. Pelo Lema 3.2 temos o fato.

2. Se $m^+ \equiv 0$ e $m^- \not\equiv 0$ então pela Proposição 3.2 temos μ_1 é crescente e $\mu_1(\lambda) \to -\infty$, quando $\lambda \to -\infty$, assim $\mu_1(\lambda_1) = 0$ para algum $\lambda_1 < 0$ e novamente pelo Lema 3.2 temos o fato.

3. Se $m^+ \not\equiv 0$ e $m^- \not\equiv 0$. Pela Proposição 3.2 existem $\lambda_1^- < 0 < \lambda_1^+$ tais que $\mu_1(\lambda_1^-) = \mu_1(\lambda_1^+) = 0$ de forma que o Lema 3.2 garante que λ_1^- e λ_1^+ são autovalores principais de (3.19).

□

CASO II: $\mu_1(0) = 0$**.** Se $V \equiv 0$ e a condição de fronteira em (3.20) é de Neumann, estamos neste caso. Pelo Lema 3.2 temos que 0 é um autovalor principal de (3.19). Se m não muda de sinal é o único autovalor de (3.19) e se m muda de sinal existe outro autovalor de (3.19), não trivial, se $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p \neq 0$. Portanto obtemos resultados similares [67, 80, 16] e enunciamos no seguinte:

Teorema 3.3 *Suponha* $\mu_1(0) = 0$ *e seja* $\varphi_0 \in \mathcal{M}_P$ *a autofunção principal de* (3.20)*.*

1. *Se* m *não muda de sinal então* 0 *é o único autovalor principal de* (3.19)*.*

2. *Se* m *muda de sinal então* 0 *é um autovalor principal de* (3.19) *e tem-se:*

   (a) *Se* $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p = 0$ *então* 0 *é o único autovalor principal de* (3.19)*.*

(b) Se $\int m(x)\varphi_0^p < 0$ *então existe outro autovalor principal de* (3.19), *o qual é positivo,*

(c) Se $\int m(x)\varphi_0^p > 0$ *então existe outro autovalor principal de* (3.19), *o qual é negativo.*

Prova:

1. Se m não muda de sinal então μ_1 é decrescente ou crescente assim $\mu_1(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \neq 0$. Assim 0 é o único autovalor principal de (3.19).

2. Assuma m que mude de sinal. Não é difícil ver que 0 é um autovalor principal de (3.19). Vejamos os seguintes casos:

   (a) Se $\int m(x)\varphi_0^p = 0$ então $\mu_1(\lambda) \leqslant \alpha(V,m) \leqslant 0$ para todo $\lambda \neq 0$. Se existisse $\lambda \neq 0$ tal que $\mu_1(\lambda) = 0$ pela identidade de Picone (veja Lema 1.4) teríamos

   $$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int |\nabla\varphi_0|^p - \int |\nabla\varphi_\lambda|^{p-2}\nabla\varphi_\lambda \cdot \nabla\left(\frac{\varphi_0^p}{\varphi_\lambda^{p-1}}\right) \\ &= -\int V(x)\varphi_0^p - \int_{\partial\Omega} W(x)\varphi_0^p + \int V(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} W(x)\varphi_0^p - \lambda\int m(x)\varphi_0^p \\ &= -\lambda\int m(x)\varphi_0^p \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Daí, $\varphi_0 = c\varphi_\lambda$, como $\varphi_0, \varphi_\lambda \in \mathcal{M}_P$ temos $\varphi_0 = \varphi_\lambda$. Portanto, $0 = \lambda$.

   (b) Se $\int m(x)\varphi_0^p < 0$ então $\mu_1'(0) > 0$ assim da continuidade da função μ_1 que vai para $-\infty$ quando $\lambda \to +\infty$ existe $\lambda_1 > 0$ tal que $\mu_1(\lambda_1) = 0$. Por Lema 3.2 temos o fato.

   (c) Se $\int m(x)\varphi_0^p > 0$ então $\mu_1'(0) < 0$ assim da continuidade da função μ_1 que vai para $-\infty$ quando $\lambda \to -\infty$ existe $\lambda_1 < 0$ tal que $\mu_1(\lambda_1) = 0$. Por Lema 3.2 temos o fato.

□

Observação 3.3 *Notemos que no caso em que* $W \equiv 0$ *e* $V \equiv 0$ *no problema* (3.20) *tem-se* $\mu_1(0) = 0$ *e* φ_0 *uma função constante.*

CASO III: $\mu_1(0) < 0$**.** Se $V \leqslant 0$, estamos neste caso. Este caso é mais interessante pois dependendo do sinal de $\alpha(V,m)$ o problema (3.19) pode ter dois, um ou nenhum autovalor principal . Obtemos uma descrição genérica de resultados similares ao descrito em [67] com ajuda do Lema 3.3 e enunciamos no seguinte:

Teorema 3.4 *Suponha* $\mu_1(0) < 0$.

1. *Se* $m^+ \not\equiv 0$, $m^- \equiv 0$ *e* $\alpha(V,m) > 0$ *então existe um único autovalor principal de* (3.19), *o qual é negativo.*

2. *Se* $m^+ \equiv 0$, $m^- \not\equiv 0$ *e* $\alpha(V,m) > 0$ *então existe um único autovalor principal de* (3.19), *o qual é positivo.*

3. *Se* m *muda de sinal então temos os seguentes casos:*

   (a) *Se* $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p = 0$ *então não existe autovalor principal de* (3.19).

   (b) *Se* $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p < 0$ *e* $\alpha(V,m) > 0$ *então existem dois autovalores principais de* (3.19), *os quais são positivos,*

   (c) *Se* $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p < 0$ *e* $\alpha(V,m) = 0$ *então existe um único autovalor principal de* (3.19), *o qual é positivo,*

   (d) *Se* $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p > 0$ *e* $\alpha(V,m) > 0$ *então existem dois autovalores principais de* (3.19), *os quais são negativos,*

   (e) *Se* $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p > 0$ *e* $\alpha(V,m) = 0$ *então existe um único autovalor principal de* (3.19), *o qual é negativo.*

Prova: A parte da existência é consequência do Lema 3.3. O sinal é consequência da Proposição 3.2. □

Os resultados obtidos nos Teoremas 3.2, 3.3 e 3.4, com auxílio da Proposição 3.2, são descritos nas seguintes figuras:

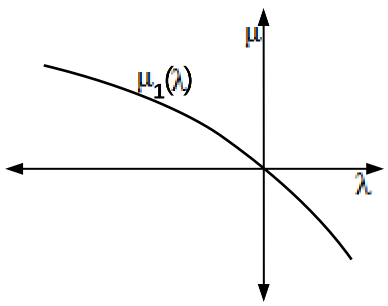

Figura 3.1: $\mu_1(0) = 0$ e $m \geqslant 0$.

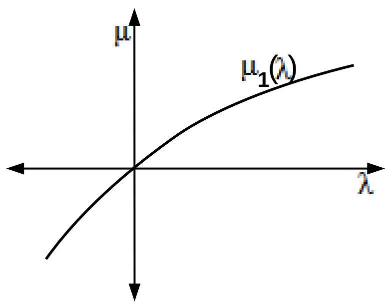

Figura 3.2: $\mu_1(0) = 0$ e $m \leqslant 0$.

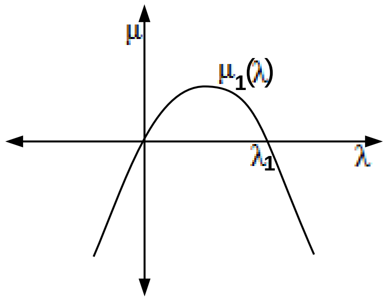

Figura 3.3: $\mu_1(0) = 0$, m muda de sinal e $\int m(x)\varphi_0^p < 0$.

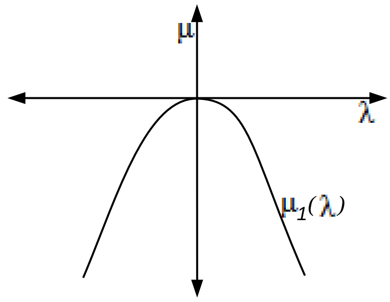

Figura 3.4: $\mu_1(0) = 0$, m muda de sinal e $\int m(x)\varphi_0^p = 0$.

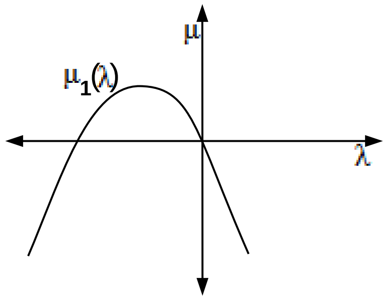

Figura 3.5: $\mu_1(0) = 0$, m muda de sinal e $\int m(x)\varphi_0^p > 0$.

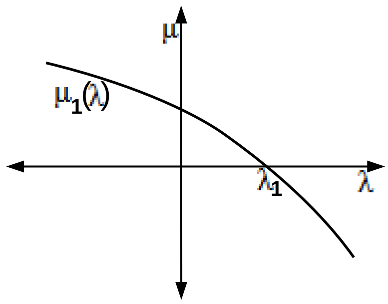

Figura 3.6: $\mu_1(0) > 0$ e $m \geqslant 0$.

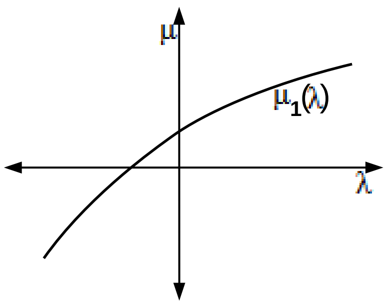

Figura 3.7: $\mu_1(0) > 0$ e $m \leqslant 0$.

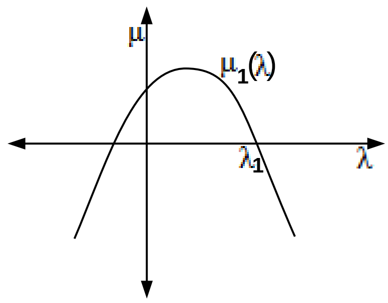

Figura 3.8: $\mu_1(0) > 0$, m muda de sinal e $\int m(x)\varphi_0^p < 0$.

3.2 Subsoluções, supersoluções e soluções do problema estacionário

O problema estacionário associado a (P_{u_0}) é o problema elíptico

$$(P)\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u - \rho(\lambda)|u|^{q-2}u & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + W(x)|u|^{p-2}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

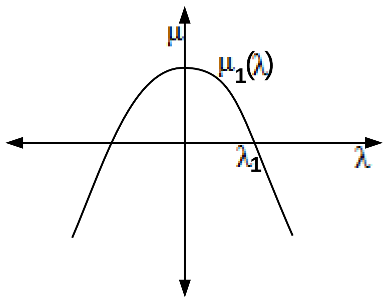

Figura 3.9: $\mu_1(0) > 0$, m muda de sinal e $\int m(x)\varphi_0^p = 0$.

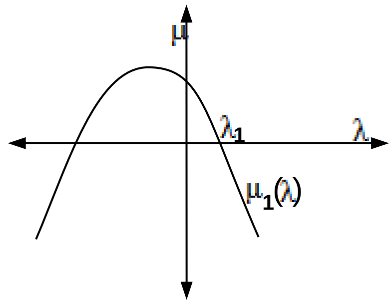

Figura 3.10: $\mu_1(0) > 0$, m muda de sinal e $\int m(x)\varphi_0^p > 0$.

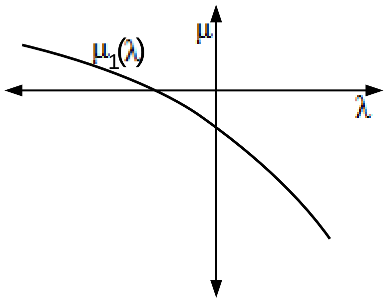

Figura 3.11: $\mu_1(0) < 0$, $m \geqslant 0$ e $\alpha(V, m) > 0$.

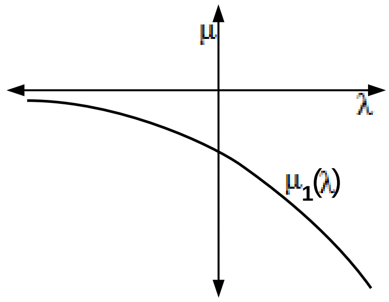

Figura 3.12: $\mu_1(0) < 0$, $m \geqslant 0$ e $\alpha(V, m) \leqslant 0$.

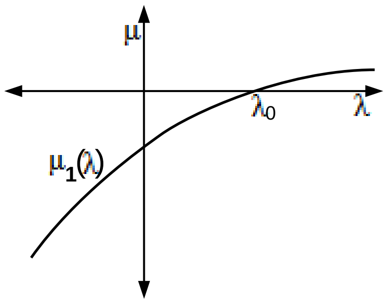

Figura 3.13: $\mu_1(0) < 0$, $m \leqslant 0$ e $\alpha(V, m) > 0$.

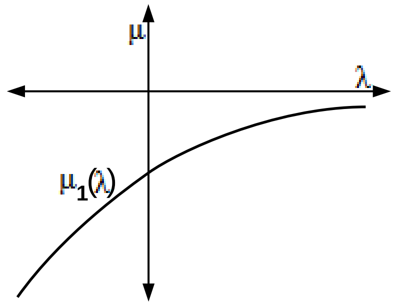

Figura 3.14: $\mu_1(0) < 0$, $m \leqslant 0$ e $\alpha(V, m) \leqslant 0$.

Consideremos o espaço $\mathbb{V} := W^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, com a norma $\|u\|_{\mathbb{V}} := \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^q(\Omega)}$ para todo $u \in \mathbb{V}$, o qual é denso no espaço $L^2(\Omega)$. Recorde que $2 \leqslant p < +\infty$.

Definição 3.1 *Uma função $\widehat{\alpha} \in \mathbb{V}$ é uma subsolução fraca do problema (P) se*

$$\int |\nabla\widehat{\alpha}|^{p-2}\nabla\widehat{\alpha}\cdot\nabla\phi + \int (V - \lambda m)(x)|\widehat{\alpha}|^{p-2}\widehat{\alpha}\phi + \int_{\partial\Omega} W(x)|\widehat{\alpha}|^{p-2}\widehat{\alpha}\phi \leqslant -\rho(\lambda)\int |\widehat{\alpha}|^{q-2}\widehat{\alpha}\phi,$$

para todo $\phi \in \mathbb{V}$.

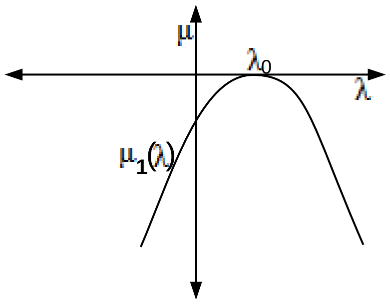

Figura 3.15: $\mu_1(0) < 0$, m muda de sinal, $\int m(x)\varphi_0^p < 0$ e $\alpha(V,m) = 0$.

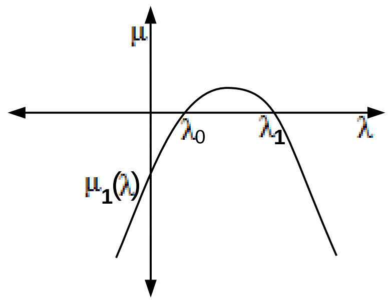

Figura 3.16: $\mu_1(0) < 0$, m muda de sinal, $\int m(x)\varphi_0^p < 0$ e $\alpha(V,m) > 0$.

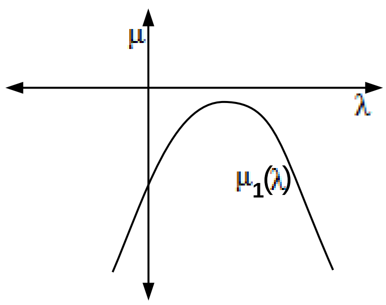

Figura 3.17: $\mu_1(0) < 0$, m muda de sinal, $\int m(x)\varphi_0^p < 0$ e $\alpha(V,m) < 0$.

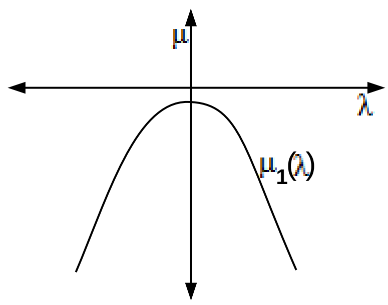

Figura 3.18: $\mu_1(0) < 0$, m muda de sinal e $\int m(x)\varphi_0^p = 0$.

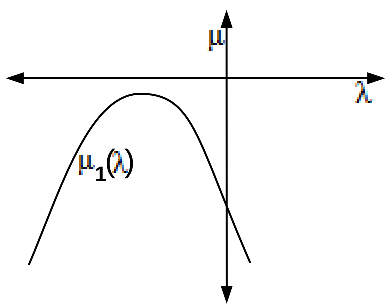

Figura 3.19: $\mu_1(0) < 0$, m muda de sinal, $\int m(x)\varphi_0^p > 0$ e $\alpha(V,m) < 0$.

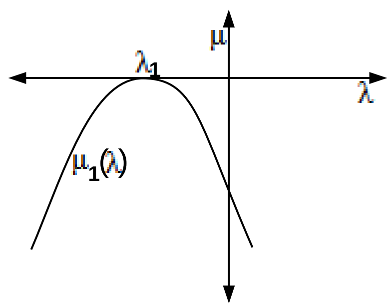

Figura 3.20: $\mu_1(0) < 0$, m muda de sinal, $\int m(x)\varphi_0^p > 0$ e $\alpha(V,m) = 0$.

Definição 3.2 *Uma função $\widehat{\beta} \in \mathbb{V}$ é uma supersolução fraca do problema (P) se*

$$\int |\nabla\widehat{\beta}|^{p-2}\nabla\widehat{\beta}\cdot\nabla\phi + \int (V-\lambda m)(x)|\widehat{\beta}|^{p-2}\widehat{\beta}\phi + \int_{\partial\Omega} W(x)|\widehat{\beta}|^{p-2}\widehat{\beta}\phi \geqslant -\rho(\lambda)\int |\widehat{\beta}|^{q-2}\widehat{\beta}\phi,$$

para todo $\phi \in \mathbb{V}$.

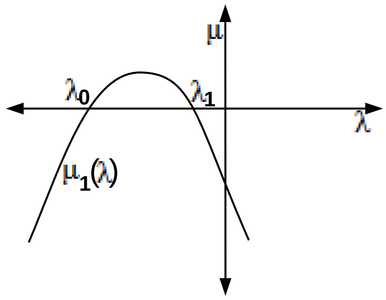

Figura 3.21: $\mu_1(0) < 0$, m muda de sinal,
$\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p > 0$ e $\alpha(V, m) > 0$.

Definição 3.3 *Uma função $u_* \in \mathbb{V}$ é uma solução fraca do problema (P) se*

$$\int |\nabla u_*|^{p-2}\nabla u_* \cdot \nabla\phi + \int (V - \lambda m)(x)|u_*|^{p-2}u_*\phi + \int_{\partial\Omega} W(x)|u_*|^{p-2}u_*\phi = -\rho(\lambda)\int |u|^{q-2}u_*\phi,$$

para todo $\phi \in \mathbb{V}$.

Notemos que $\widehat{\alpha} = 0$ é uma solução fraca do problema (P), então é uma subsolução fraca de (P).
Denotemos por φ_λ a autofunção principal associada ao autovalor $\mu_1(\lambda)$ e notemos que $0 < \inf\varphi_\lambda := \inf_{x\in\overline{\Omega}}\varphi_\lambda(x) \leqslant \varphi_\lambda(x) \leqslant \sup_{x\in\overline{\Omega}}\varphi_\lambda(x) =: \sup\varphi_\lambda$ para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Proposição 3.3 *Se o problema (P) admite uma solução fraca u_* não-negativa e não-trivial para $\lambda > 0$ então $\mu_1(\lambda) < 0$.*

Prova: Suponha que u_* é uma solução fraca não-negativa e não-trivial do problema (P). Então

$$\int |\nabla u_*|^p + \int (V - \lambda m)(x)u_*^p + \int_{\partial\Omega} W(x)u_*^p = -\rho(\lambda)\int u_*^q,$$

e tomando $u = \dfrac{u_*}{\|u_*\|_{L^p(\Omega)}}$ temos que $\displaystyle\int u^p = 1$ e assim

$$\mu_1(\lambda) \leqslant \int |\nabla u|^p + \int (V - \lambda m)(x)u^p + \int_{\partial\Omega} W(x)u^p = -\frac{\rho(\lambda)\displaystyle\int u_*^q}{\|u_*\|_{L^p(\Omega)}^p} < 0.$$

□

Proposição 3.4 *Se $\lambda > 0$, $\mu_1(\lambda) < 0$ e $0 < \epsilon \leqslant \left(\dfrac{-\mu_1(\lambda)}{\rho(\lambda)}\right)^{\frac{1}{q-p}} \dfrac{1}{\sup\varphi_\lambda}$ então $\epsilon\varphi_\lambda$ é uma subsolução do problema (P).*

Prova: Seja $\phi \in \mathbb{V}$ com $\phi(x) \geqslant 0$ para quase todo $x \in \Omega$.

$$\begin{aligned}\int |\nabla(\epsilon\varphi_\lambda)|^{p-2}\nabla(\epsilon\varphi_\lambda)\cdot\nabla\phi + \int (V-\lambda m)(x)(\epsilon\varphi_\lambda)^{p-1}\phi + \int_{\partial\Omega} W(x)(\epsilon\varphi_\lambda)^{p-1}\phi \\ = \mu_1(\lambda)\int (\epsilon\varphi_\lambda)^{p-1}\phi \\ \leqslant -\rho(\lambda)\epsilon^{q-p}(\sup\varphi_\lambda)^{q-p}\int \epsilon^{p-1}\varphi_\lambda^{p-1}\phi \\ \leqslant -\rho(\lambda)\int \epsilon^{q-1}\varphi_\lambda^{q-1}\phi \\ = -\rho(\lambda)\int (\epsilon\varphi_\lambda)^{q-1}\phi.\end{aligned}$$

□

Proposição 3.5 *Suponha que* $(H_1)-(H_3)$ *sejam válidas. Então toda constante* $C \geqslant \left(\dfrac{\|\lambda m^+ + V^-\|_{L^\infty(\Omega)}}{\rho(\lambda)}\right)^{\frac{1}{q-p}}$ *é uma supersolução do problema* (P).

Prova: Seja $\phi \in \mathbb{V}$ com $\phi(x) \geqslant 0$ para quase todo $x \in \Omega$. Então

$$\begin{aligned}\rho(\lambda)\int C^{q-p}\phi \geqslant \int \|\lambda m^+ + V^-\|_{L^\infty(\Omega)}\phi \geqslant \lambda\int m^+(x)\phi + \int V^-(x)\phi \geqslant \\ \lambda\int m(x)\phi - \int V(x)\phi.\end{aligned}$$

Como $W \geqslant 0$ em $\partial\Omega$ temos

$$\int V(x)C^{p-1}\phi + \int_{\partial\Omega} W(x)C^{p-1}\phi \geqslant \lambda\int m(x)C^{p-1}\phi - \rho(\lambda)\int C^{q-1}\phi,$$

ou seja C é uma supersolução do problema (P). □

Observação 3.4 *Se consideramos* $C \geqslant \sup\varphi_\lambda$ *na Proposição 3.5 temos* $\epsilon\varphi_\lambda \leqslant C$.

Proposição 3.6 *Existe uma solução* $u_* > 0$ *em* $\overline{\Omega}$ *do problema* (P) *para* $\lambda > 0$ *se, e somente se,* $\mu_1(\lambda) < 0$. *A solução, quando existe, é única.*

Prova: A condição $\mu_1(\lambda) < 0$ é necessária pela Proposição 3.3. Da Proposição 3.4 e Proposição 3.5 existem subsolução e supersolução positivas e limitadas do problema (P). A existência de uma solução positiva, para (P) segue da desigualdade de Harnack de [103] do Lema 3.8. Para provar unicidade, sejam u_1 e u_2 duas soluções fracas do problema (P) tais que $0 < u_1(x), u_2(x)$ para quase todo $x \in \overline{\Omega}$, ou seja,

$$\int |\nabla u_i|^{p-2}\nabla u_i\cdot\nabla\phi + \int (V-\lambda m)(x)u_i^{p-1}\phi + \int_{\partial\Omega} W(x)u_i^{p-1}\phi = -\rho(\lambda)\int u_i^{q-1}\phi,$$

para todo $\phi \in \mathbb{V}$ e $i = 1, 2$. Assim pela identidade de Picone de [3] (veja Lema 1.4) para o p-laplaciano temos

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \int R(u_1,u_2) + \int R(u_2,u_1)\\
&= \int |\nabla u_1|^p - \int |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \cdot \nabla\Big(\frac{u_1^p}{u_2^{p-1}}\Big) + \int |\nabla u_2|^p - \int |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \cdot \nabla\Big(\frac{u_2^p}{u_1^{p-1}}\Big)\\
&= -\int (V-\lambda m)(x)u_1^p - \int_{\partial\Omega} W(x)u_1^p - \rho(\lambda)\int u_1^q -\\
&\quad \Big[-\int (V-\lambda m)(x)u_2^{p-1}\Big(\frac{u_1^p}{u_2^{p-1}}\Big) - \int_{\partial\Omega} W(x)u_2^{p-1}\Big(\frac{u_1^p}{u_2^{p-1}}\Big) - \rho(\lambda)\int u_2^{q-1}\Big(\frac{u_1^p}{u_2^{p-1}}\Big)\Big]\\
&\quad -\int (V-\lambda m)(x)u_2^p - \int_{\partial\Omega} W(x)u_2^p - \rho(\lambda)\int u_2^q -\\
&\quad \Big[-\int (V-\lambda m)(x)u_1^{p-1}\Big(\frac{u_2^p}{u_1^{p-1}}\Big) - \int_{\partial\Omega} W(x)u_1^{p-1}\Big(\frac{u_2^p}{u_1^{p-1}}\Big) - \rho(\lambda)\int u_1^{q-1}\Big(\frac{u_2^p}{u_1^{p-1}}\Big)\Big]\\
&= -\rho(\lambda)\int u_1^q + \rho(\lambda)\int u_2^{q-p}u_1^p - \rho(\lambda)\int u_2^q + \rho(\lambda)\int n(x)u_1^{q-p}u_2^p\\
&= \rho(\lambda)\int \Big(-u_1^q + u_2^{q-p}u_1^p - u_2^q + u_1^{q-p}u_2^p\Big)\\
&= \rho(\lambda)\int \Big(u_1^p(-u_1^{q-p} + u_2^{q-p}) - u_2^p(u_2^{q-p} - u_1^{q-p})\Big)\\
&= \rho(\lambda)\int (u_1^p - u_2^p)(u_2^{q-p} - u_1^{q-p}),
\end{aligned}
$$

daí temos que $u_1 \equiv u_2$, pois se $u_1 \not\equiv u_2$ teríamos que $\int (u_1^p - u_2^p)(u_2^{q-p} - u_1^{q-p}) < 0$ e este contradiria a desigualdade acima. □

3.3 Um problema parabólico auxiliar

Para provar o Teorema 3.5 abaixo vamos combinar teoria de operadores monótonos e iterações monótonas de [102] seguindo a abordagem de [56]. Para isso vamos considerar o problema parabólico auxiliar

$$
\begin{cases}
u_t - \Delta_p u + \widetilde{V}(x)|u|^{p-2}u + \rho|u|^{q-2}u = f(x,t) & \text{em } \Omega \times (0,T),\\
|\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + W(x)|u|^{p-2}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T),\\
u(0) = v_0 & \text{em } \Omega,
\end{cases}
\tag{3.21}
$$

com função potencial $0 \leqslant \widetilde{V} \in L^r(\Omega)$, $r > \dfrac{N}{p}$, $\rho > 0$ constante e W satisfazendo (H_3). O operador $\mathcal{A} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ associado ao problema auxiliar (3.21) é definido por

$$
\langle \mathcal{A}u, v\rangle := \int |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v + \int \widetilde{V}(x)|u|^{p-2}uv + \int_{\partial\Omega} W(x)|u|^{p-2}uv + \rho\int |u|^{q-2}uv \tag{3.22}
$$

para cada $u, v \in \mathbb{V}$. O operador $\mathcal{A}$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{A}$ é limitado. De fato pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}\left|\int |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v\right| &\leqslant \int |\nabla u|^{p-1}|\nabla v|\\ &\leqslant \left(\int |\nabla u|^{(p-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int |\nabla v|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant \|u\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}\\ &\leqslant \|u\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)}\|v\|_{\mathbb{V}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\int \widetilde{V}(x)|u|^{p-2}uv\right| &\leqslant \int \widetilde{V}(x)|u|^{p-1}|v|\\ &\leqslant \|\widetilde{V}\|_{L^r(\Omega)}\left(\int |u|^{(p-1)p'r'}\right)^{\frac{1}{p'r'}}\left(\int |v|^{pr'}\right)^{\frac{1}{pr'}}\\ &= \|\widetilde{V}\|_{L^r(\Omega)}\|u\|^{p-1}_{L^{pr'}(\Omega)}\|v\|_{L^{pr'}(\Omega)}\\ &\leqslant \|\widetilde{V}\|_{L^r(\Omega)}(C^*)^p\|u\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}\\ &\leqslant \|\widetilde{V}\|_{L^r(\Omega)}(C^*)^p\|u\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)}\|v\|_{\mathbb{V}},\end{aligned}$$

sendo $C^* > 0$ e satisfaz $\|\cdot\|_{L^{pr'}(\Omega)} \leqslant C^*\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, ou seja a inclusão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{pr'}(\Omega)$ é contínua, consequência da hipótese $r \geqslant \frac{N}{p}$.

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Omega} W(x)|u|^{p-2}uv\right| &\leqslant \int_{\partial\Omega} W(x)|u|^{p-1}|v|\\ &\leqslant \|W\|_{L^s(\partial\Omega)}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{(p-1)p's'}\right)^{\frac{1}{p's'}}\left(\int_{\partial\Omega} |v|^{ps'}\right)^{\frac{1}{ps'}}\\ &= \|W\|_{L^s(\partial\Omega)}\|u\|^{p-1}_{L^{ps'}(\partial\Omega)}\|v\|_{L^{ps'}(\partial\Omega)}\\ &\leqslant \|W\|_{L^s(\partial\Omega)}(C_*)^p\|u\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}\\ &\leqslant \|W\|_{L^s(\partial\Omega)}(C_*)^p\|u\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)}\|v\|_{\mathbb{V}},\end{aligned}$$

sendo $C_* > 0$ e satisfaz $\|\cdot\|_{L^{ps'}(\partial\Omega)} \leqslant C_*\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, ou seja a inclusão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{ps'}(\partial\Omega)$ é continua, consequência da hipótese $s > \frac{N-1}{p-1}$.

$$\begin{aligned}\left|\int |u|^{q-2}uv\right| &\leqslant \int |u|^{q-1}|v|\\ &\leqslant \left(\int |u|^{(q-1)q'}\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int |v|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \|u\|^{q-1}_{L^q(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}\\ &\leqslant \|u\|^{q-1}_{L^q(\Omega)}\|v\|_{\mathbb{V}}.\end{aligned}$$

Assim as estimativas anteriores implicam que o operador $\mathcal{A}$ é bem definido e satisfaz

$$\|\mathcal{A}u\|_{\mathbb{V}^*} \leqslant (1 + \|\widetilde{V}\|_{L^r(\Omega)}(C^*)^p + \|W\|_{L^s(\partial\Omega)}(C_*)^p)\|u\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)} + \rho\|u\|^{q-1}_{L^q(\Omega)}. \tag{3.23}$$

para todo $u \in \mathbb{V}$, ou seja, $\mathcal{A}$ é limitado pois leva subconjuntos limitados em subconjuntos limitados.

2. $\mathcal{A}$ é contínuo sobre $\mathbb{V}$. De fato, seja $\{u_n\}$ uma sequência em $\mathbb{V}$ que converge fortemente a u em $\mathbb{V}$, então existe uma subsequência $\{u_{n_j}\}$ de $\{u_n\}$ tal que

$$\begin{cases} \nabla u_{n_j}(x) \to \nabla u(x) & \text{em } \mathbb{R}^N \text{ para quase todo } x \in \Omega \\ |\nabla u_{n_j}(x)| \leqslant h_1(x) & h_1 \in L^p(\Omega), \text{ para quase todo } x \in \Omega \text{ e todo } n_j \\ u_{n_j}(x) \to u(x) & \text{para quase todo } x \in \Omega \\ |u_{n_j}(x)| \leqslant h_2(x) & h_2 \in L^{pr'}(\Omega) \cap L^q(\Omega), \text{ para quase todo } x \in \Omega \text{ e todo } n_j \\ u_{n_j}(x) \to u(x) & \text{para quase todo } x \in \partial\Omega \\ |u_{n_j}(x)| \leqslant h_3(x) & h_3 \in L^{ps'}(\partial\Omega), \text{ para quase todo } x \in \Omega \text{ e todo } n_j. \end{cases} \tag{3.24}$$

Pela desigualdade de Hölder obtemos a estimativa seguinte

$$
\begin{aligned}
|\langle \mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u, v\rangle| \leqslant\ & \int \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right| |\nabla v| + \\
& \int \widetilde{V}(x) \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right| |v| + \\
& \int_{\partial\Omega} W(x) \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right| |v| + \int \left||u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u\right| |v| \\
\leqslant\ & \left(\int \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int |\nabla v|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \\
& \|\widetilde{V}\|_{L^r(\Omega)} \left(\int \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{p'r'}\right)^{\frac{1}{p'r'}} \left(\int |v|^{pr'}\right)^{\frac{1}{pr'}} + \\
& \|W\|_{L^s(\partial\Omega)} \left(\int_{\partial\Omega} \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{p's'}\right)^{\frac{1}{p's'}} \left(\int_{\partial\Omega} |v|^{ps'}\right)^{\frac{1}{ps'}} + \\
& \left(\int \left||u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u\right|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int |v|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leqslant\ & \left(\int \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \\
& \|\widetilde{V}\|_{L^r(\Omega)} \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{L^{p'r'}(\Omega)} \|v\|_{L^{pr'}(\Omega)} + \\
& \|W\|_{L^s(\partial\Omega)} \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{L^{p's'}(\partial\Omega)} \|v\|_{L^{ps'}(\partial\Omega)} + \\
& \||u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u\|_{L^{q'}(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \\
\leqslant\ & \left(\int \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \\
& \|\widetilde{V}\|_{L^r(\Omega)} \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{L^{p'r'}(\Omega)} C^* \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \\
& \|W\|_{L^s(\partial\Omega)} \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{L^{p's'}(\partial\Omega)} C_* \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \\
& \||u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u\|_{L^{q'}(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \\
\leqslant\ & \left(\int \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \|v\|_{\mathbb{V}} + \\
& \|\widetilde{V}\|_{L^r(\Omega)} \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{L^{p'r'}(\Omega)} C^* \|v\|_{\mathbb{V}} + \\
& \|W\|_{L^s(\partial\Omega)} \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{L^{p's'}(\partial\Omega)} C_* \|v\|_{\mathbb{V}} + \\
& \||u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u\|_{L^{q'}(\Omega)} \|v\|_{\mathbb{V}}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u\|_{\mathbb{V}^*} \leqslant\ & \left(\int \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} + \\
& \|\widetilde{V}\|_{L^r(\Omega)} \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{L^{p'r'}(\Omega)} C^* + \\
& \|W\|_{L^s(\partial\Omega)} \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{L^{p's'}(\partial\Omega)} C_* + \\
& \||u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u\|_{L^{q'}(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

Assim de (3.24), (3.25) e o teorema da convergência dominada temos que $\mathcal{A}u_{n_j}$

converge fortemente a $\mathcal{A}u$ em $\mathbb{V}^*$. Essa convergência é válida para a sequência $\{\mathcal{A}u_n\}$, pois se fosse falso existiria uma outra subsequência $\{\mathcal{A}u_{n_k}\}$ de $\{\mathcal{A}u_n\}$ tal que $\|\mathcal{A}u_{n_k} - \mathcal{A}u\|_{\mathbb{V}^*} \geqslant \epsilon$ para todo n_k e para algum $\epsilon > 0$, então pelo argumento acima existiria uma subsequência $\{\mathcal{A}u_{n_{k_l}}\}$ de $\{\mathcal{A}u_{n_k}\}$ tal que $\mathcal{A}u_{n_{k_l}}$ converge fortemente a $\mathcal{A}u$ em $\mathbb{V}^*$, o que seria é uma contradição. Portanto, $\mathcal{A}u_n \to \mathcal{A}u$ em $\mathbb{V}^*$.

3. $\mathcal{A}$ é monótono, ou seja $\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v\rangle \geqslant 0$ para todo $u, v \in \mathbb{V}$ e é uma consequência da não-negatividade das funções $\widetilde{V}$, W e ρ e por (1.11).

O operador $\mathcal{A}$ induz um operador limitado e monótono $\widetilde{\mathcal{A}} : L^p(0,T;\mathbb{V}) \to L^{q'}(0,T;\mathbb{V}^*)$, definido por

$$(\widetilde{\mathcal{A}}u)(t) = \mathcal{A}u(t). \tag{3.26}$$

De fato, por (3.23)

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T \|\mathcal{A}u(t)\|_{\mathbb{V}^*}^{q'} dt\right)^{\frac{1}{q'}} &\leqslant \left(\int_0^T \left|C_1\|u(t)\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{p-1} + C_2\|u(t)\|_{L^q(\Omega)}^{q-1}\right|^{q'} dt\right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\leqslant C_1\left(\int_0^T \|u(t)\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{(p-1)q'} dt\right)^{\frac{1}{q'}} + C_2\left(\int_0^T \|u(t)\|_{L^q(\Omega)}^{(q-1)q'} dt\right)^{\frac{1}{q'}} \\
&= C_1\|u\|_{L^{(p-1)q'}(0,T;W^{1,p}(\Omega))}^{p-1} + C_2\|u\|_{L^q(0,T;L^q(\Omega))}^{q-1},
\end{aligned}$$

e como $p < q$ (e assim $q' < p'$) temos $(p-1)q' < (p-1)p' = p$ o que implica $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)) \hookrightarrow L^{(p-1)q'}(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ e assim $\widetilde{\mathcal{A}}$ é limitado. A monotonicidade de $\widetilde{\mathcal{A}}$ é uma consequência direta da monotonicidade do operador $\mathcal{A}$.

Definição 3.4 *Uma função* $u \in W^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ *é uma solução fraca do problema* (3.21) *se* $u(0) = v_0$ *e satisfaz*

$$\langle u'(t), v\rangle + \langle \mathcal{A}u(t), v\rangle = \int f(t)v, \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e para quase todo } t \in (0,T).$$

Os próximos lemas podem ser vistos como casos mais simples dos Lemas 4.3 e 4.4 do Capítulo 4, a razão pela qual vamos enunciá-los e omitiremos suas provas.

Lema 3.4 *Suponha que* (H_3) *seja válida. Se* $v_0 \in L^\infty(\Omega)$ *e* $f \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ *então problema* (3.21) *tem uma única solução fraca.*

Lema 3.5 *Sejam* $u_1, u_2 \in W^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$*, satisfazendo*

$$\langle u_1'(t), v\rangle + \langle \mathcal{A}u_1(t), v\rangle \leqslant \langle u_2'(t), v\rangle + \langle \mathcal{A}u_2(t), v\rangle \tag{3.27}$$

para todo $0 \leqslant v \in W^{1,p}(\Omega)$ *e quase todo* $t \in (0,T)$*. Se* $u_1(0) \leqslant u_2(0)$ *em* Ω *então* $u_1 \leqslant u_2$ *em* $\Omega \times (0,T)$*.*

3.4 Existência de solução local no tempo do problema parabólico

Para cada $0 < T < +\infty$ consideremos o problema local no tempo

$$(P_{u_0})^T \begin{cases} u_t - \Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u - \rho(\lambda)|u|^{q-2}u & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + W(x)|u|^{p-2}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

associado ao problema (P_{u_0}). Recorde que $\mathbb{V} = W^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $2 \leqslant p < +\infty$.

Definição 3.5 *Uma solução fraca local (respect. global) do problema (P_{u_0}) é uma função $u \in W^p(0,T;\mathbb{V})$ (respect. $u \in W^p_{loc}(0,+\infty;\mathbb{V})$), $u(0) = u_0$ q.t.p em Ω e satisfaz*

$$\langle u'(t), v\rangle + \int |\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t)\cdot\nabla v + \int V(x)|u(t)|^{p-2}u(t)v +$$
$$\int_{\partial\Omega} W(x)|u(t)|^{p-2}u(t)v = \lambda \int m(x)|u(t)|^{p-2}u(t)v - \rho(\lambda)\int |u(t)|^{q-2}u(t)v, \tag{3.28}$$

para todo $v \in \mathbb{V}$ e para quase todo $t \in (0,T)$ (respect. $t \in (0,+\infty)$), para cada $0 < T < +\infty$.

Definição 3.6 *Uma subsolução fraca local (respect. global) do problema (P_{u_0}) é uma função $\alpha \in W^p(0,T;\mathbb{V})$ (respect. $\alpha \in W^p_{loc}(0,+\infty;\mathbb{V})$, $\alpha(0) \leqslant u_0$ q.t.p em Ω e satisfaz*

$$\langle \alpha'(t), v\rangle + \int |\nabla \alpha(t)|^{p-2}\nabla \alpha(t)\cdot\nabla v + \int V(x)|\alpha(t)|^{p-2}\alpha(t)v +$$
$$\int_{\partial\Omega} W(x)|\alpha(t)|^{p-2}\alpha(t)v \leqslant \lambda \int m(x)|\alpha(t)|^{p-2}\alpha(t)v - \rho(\lambda)\int |\alpha(t)|^{q-2}\alpha(t)v, \tag{3.29}$$

para todo $v \in \mathbb{V}$, com $v \geqslant 0$ e para quase todo $t \in (0,T)$ (respect. $t \in (0,+\infty)$), para cada $0 < T < +\infty$.

Definição 3.7 *Uma supersolução fraca local (respect. global) do problema (P_{u_0}) é uma função $\beta \in W^p(0,T;\mathbb{V})$ (respect. $\beta \in W^p_{loc}(0,+\infty;\mathbb{V})$, $\beta(0) \geqslant u_0$ q.t.p em Ω e satisfaz*

$$\langle \beta'(t), v\rangle + \int |\nabla \beta(t)|^{p-2}\nabla \beta(t)\cdot\nabla v + \int V(x)|\beta(t)|^{p-2}\beta(t)v +$$
$$\int_{\partial\Omega} W(x)|\beta(t)|^{p-2}\beta(t)v \geqslant \lambda \int m(x)|\beta(t)|^{p-2}\beta(t)v - \rho(\lambda)\int |\beta(t)|^{q-2}\beta(t)v, \tag{3.30}$$

para todo $v \in \mathbb{V}$, com $v \geqslant 0$ e para quase todo $t \in (0,T)$ (respect. $t \in (0,+\infty)$), para cada $0 < T < +\infty$.

No próximo resultado mostramos, na presença de subsolução e supersolução limitadas e ordenadas, a existência de solução minimal e maximal para $(P_{u_0})^T$.

Teorema 3.5 *Suponha que* $(H_1)-(H_3)$ *sejam válidas e que existam uma subsolução não-negativa* α_0 *e uma supersolução limitada* β_0 *do problema* $(P_{u_0})^T$ *tal que* $\alpha_0 \leqslant \beta_0$ *em* $\Omega \times (0,T)$*. Então existem soluções* u^T_{min} *e* u^T_{max} *do problema* $(P_{u_0})^T$*, tal que*

$$\alpha_0 \leqslant u^T_{min} \leqslant u \leqslant u^T_{max} \leqslant \beta_0 \quad \text{em } \Omega \times (0,T) \tag{3.31}$$

para qualquer solução u *do problema* $(P_{u_0})^T$ *que satisfaz* $\alpha_0(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \beta_0(x,t)$ *para quase todo* $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$*.*

Prova:

I.- **Construção das sequências monótonas.** Como α_0 é uma subsolução do problema $(P_{u_0})^T$ temos $\alpha_0(0) \leqslant u_0$ e pelo Teorema 2.10 de [68] existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções simples tal que $0 \leqslant \phi_1 \leqslant \cdots \leqslant \phi_n \leqslant \cdots \leqslant u_0 - \alpha_0(0)$ em Ω. Logo tomando $\alpha_{0,n} := \alpha_0(0) + \phi_n \in L^\infty(\Omega)$ temos que $\alpha_{0,n}(x) \to u_0(x)$ para quase todo $x \in \Omega$ e

$$\alpha_0(0) \leqslant \alpha_{0,1} \leqslant \cdots \leqslant \alpha_{0,n} \leqslant \cdots \leqslant u_0 \quad \text{em } \Omega, \quad \forall n \geqslant 1. \tag{3.32}$$

Similarmente, como β_0 é uma supersolução do problema $(P_{u_0})^T$ temos $\beta_0(0) \geqslant u_0$, existe uma sequência $\{\widehat{\phi}_n\}$ de funções simples tal que $0 \leqslant \widehat{\phi}_1 \leqslant \cdots \leqslant \widehat{\phi}_n \leqslant \cdots \leqslant \beta_0(0) - u_0$ em Ω. Logo tomando $\beta_{0,n} := \beta_0(0) - \widehat{\phi}_n \in L^\infty(\Omega)$ temos que $\beta_{0,n}(x) \to u_0(x)$ para quase todo $x \in \Omega$ e

$$\beta_0(0) \geqslant \beta_{0,1} \geqslant \cdots \geqslant \beta_{0,n} \geqslant \cdots \geqslant u_0 \quad \text{em } \Omega, \quad \forall n \geqslant 1. \tag{3.33}$$

Consideremos em (3.21) $\widetilde{V} := V^+ + \lambda m^- \in L^r(\Omega)$ sendo $r = \min\{r_1, r_2\}$, $\rho := \rho(\lambda)$ e $f_1(t)(x) := (\lambda m^+(x) + V^-(x))(\alpha_0(t)(x))^{p-1}$ e $\widehat{f}_1(t)(x) := (\lambda m^+(x) + V^-(x))(\beta_0(t)(x))^{p-1}$ para quase todo $x \in \Omega$ e quase todo $t \in (0,T)$. Notemos que $f_1, \widehat{f}_1 \in L^\infty(0,T; L^\infty(\Omega))$, de modo que pelo Lema 3.4 existem α_1 e β_1 soluções fracas dos problemas

$$\begin{cases} (\alpha_1)_t - \Delta_p \alpha_1 + \widetilde{V}(x)|\alpha_1|^{p-2}\alpha_1 + \rho(\lambda)|\alpha_1|^{q-2}\alpha_1 = f_1(x,t) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ |\nabla \alpha_1|^{p-2}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial \nu} + W(x)|\alpha_1|^{p-2}\alpha_1 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ \alpha_1(0) = \alpha_{0,1} & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} (\beta_1)_t - \Delta_p \beta_1 + \widetilde{V}(x)|\beta_1|^{p-2}\beta_1 + \rho(\lambda)|\beta_1|^{q-2}\beta_1 = \widehat{f}_1(x,t) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ |\nabla \beta_1|^{p-2}\dfrac{\partial \beta_1}{\partial \nu} + W(x)|\beta_1|^{p-2}\beta_1 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ \beta_1(0) = \beta_{0,1} & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

respectivamente.

Logo, (3.32), (3.33) e o Lema 3.5 garantem

$$0 \leqslant \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_0 \quad \text{em } \Omega \times (0,T).$$

Assim definimos iterativamente as sequências $f_n(t)(x) := (\lambda m^+(x) + V^-(x))(\alpha_{n-1}(t)(x))^{p-1}$ e $\widehat{f_n}(t)(x) := (\lambda m^+(x) + V^-(x))(\beta_{n-1}(t)(x))^{p-1}$ para quase todo $x \in \Omega$ e quase todo $t \in (0,T)$. Temos $f_n, \widehat{f_n} \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ e assim, pelo Lema 3.4, existem $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ soluções fracas dos problemas

$$\begin{cases} (\alpha_n)_t - \Delta_p \alpha_n + \widetilde{V}(x)|\alpha_n|^{p-2}\alpha_n + \rho(\lambda)|\alpha_n|^{q-2}\alpha_n = f_n(x,t) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ |\nabla \alpha_n|^{p-2}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial \nu} + W(x)|\alpha_n|^{p-2}\alpha_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ \alpha_n(0) = \alpha_{0,n} & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3.34}$$

e

$$\begin{cases} (\beta_n)_t - \Delta_p \beta_n + \widetilde{V}(x)|\beta_n|^{p-2}\beta_n + \rho(\lambda)|\beta_n|^{q-2}\beta_n = \widehat{f_n}(x,t) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ |\nabla \beta_n|^{p-2}\dfrac{\partial \beta_n}{\partial \nu} + W(x)|\beta_n|^{p-2}\beta_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ \beta_n(0) = \beta_{0,n} & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3.35}$$

respectivamente. Por (3.32), (3.33), Lema 3.5 e por indução obtemos

$$0 \leqslant \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n \leqslant \cdots \leqslant \beta_n \leqslant \cdots \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_0 \quad \text{em } \Omega \times (0,T),\ \forall n \geqslant 1. \tag{3.36}$$

Além disso,

$$0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f_n \leqslant \cdots \leqslant \widehat{f_n} \leqslant \cdots \leqslant \widehat{f_1} \quad \text{em } \Omega \times (0,T),\ \forall n \geqslant 1. \tag{3.37}$$

Portanto, de (3.36) deduzimos que os limites

$$\widetilde{\alpha}(x,t) = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n(t)(x) \quad \text{e} \quad \widetilde{\beta}(x,t) = \lim_{n\to+\infty} \beta_n(t)(x) \tag{3.38}$$

existem para quase todo $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$. Certamente temos que $\alpha_0 \leqslant \widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta} \leqslant \beta_0$ em $\Omega \times (0,T)$ e, pelo Teorema de Convergência Dominada, também temos

$$\alpha_n \nearrow \widetilde{\alpha},\ \beta_n \searrow \widetilde{\beta} \quad \text{em } L^s(0,T;L^s(\Omega)),\ \forall 1 \leqslant s < +\infty \tag{3.39}$$

$$f_n \nearrow f,\ \widehat{f_n} \searrow \widehat{f} \quad \text{em } L^s(0,T;L^s(\Omega)),\ \forall 1 \leqslant s < +\infty, \tag{3.40}$$

sendo $f(t)(x) := (\lambda m^+(x) + V^-(x))(\widetilde{\alpha}(t)(x))^{p-1}$ e $\widehat{f}(t)(x) := (\lambda m^+(x) + V^-(x))(\widetilde{\beta}(t)(x))^{p-1}$ para quase todo $x \in \Omega$ e para quase todo $t \in (0,T)$. Note que $f, \widehat{f} \in L^\infty(0,T;L^\infty\Omega))$.

II.- $\widetilde{\alpha}$ **e** $\widetilde{\beta}$ **são soluções fracas de** $(P_{u_0})^T$. Vamos mostrar que $\widetilde{\alpha}$ é uma solução fraca do problema $(P_{u_0})^T$; argumento similar mostra que $\widetilde{\beta}$ também é solução fraca de $(P_{u_0})^T$. De fato, tomando $v = \alpha_n(t)$ na formulação fraca do problema (3.34) temos

$$\langle \alpha_n'(t), \alpha_n(t)\rangle + \langle \mathcal{A}\alpha_n(t), \alpha_n(t)\rangle = \int f_n(t)\alpha_n(t) \leqslant \int f(t)\beta_0(t).$$

Integrando sobre $(0,T)$ temos

$$\frac{1}{2}\int|\alpha_n(T)|^2-\frac{1}{2}\int|\alpha_{0,n}|^2+\int_0^T\langle\mathcal{A}\alpha_n(t),\alpha_n(t)\rangle\leqslant\int_0^T\int f(t)\beta_0(t)dt$$

e daí

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int|\alpha_n(T)|^2+\int_0^T\int|\nabla\alpha_n(t)|^p &\leqslant \frac{1}{2}\int|\alpha_{0,n}|^2+\int_0^T\int f(t)\beta_0(t)dt\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int|u_0|^2+\int_0^T\int f(t)\beta_0(t)dt. \quad (3.41)\end{aligned}$$

Então existe uma subsequência da sequência $\{\alpha_n\}$, ainda denotada por $\{\alpha_n\}$ tal que

$$\begin{cases}\alpha_n\rightharpoonup\widetilde{\alpha} & \text{em } L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)),\\ \alpha_n(T)\rightharpoonup\widetilde{\xi} & \text{em } L^2(\Omega),\\ \widetilde{\mathcal{A}}\alpha_n\rightharpoonup\widetilde{\chi} & \text{em } L^{p'}(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*)\\ \alpha_n(0)=\alpha_{0,n}\nearrow u_0 & \text{em } L^2(\Omega)\end{cases}$$

Argumento como na prova do Lema 4.3, Capítulo 4, mostra-se que existe $\widetilde{\alpha}'=f-\widetilde{\chi}\in L^{p'}(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*)$, $\widetilde{\alpha}(0)=u_0$ e $\widetilde{\xi}=\widetilde{\alpha}(T)$. A prova de $\widetilde{\chi}=\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\alpha}$ é feita da seguinte forma. Notemos que

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to+\infty}\int_0^T\langle\widetilde{\mathcal{A}}\alpha_n(t),\alpha_n(t)\rangle\\ =\ &\limsup_{n\to+\infty}\left(\int_0^T\int f_n(t)\alpha_n(t)-\int_0^T\langle\alpha_n'(t),\alpha_n(t)\rangle\right)\\ =\ &\limsup_{n\to+\infty}\left(\int_0^T\int f_n(t)\alpha_n(t)+\frac{1}{2}\int|\alpha_n(0)|^2-\frac{1}{2}\int|\alpha_n(T)|^2\right)\\ =\ &\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^T\int f_n(t)\alpha_n(t)+\frac{1}{2}\int|\alpha_n(0)|^2\right)-\frac{1}{2}\liminf_{n\to+\infty}\left(\int|\alpha_n(T)|^2\right)\\ =\ &\int_0^T\int f(t)\widetilde{\alpha}(t)+\frac{1}{2}\int|u_0|^2-\frac{1}{2}\liminf_{n\to+\infty}\left(\int|\alpha_n(T)|^2\right)\\ \leqslant\ &\int_0^T\int f(t)\widetilde{\alpha}(t)+\frac{1}{2}\int|u_0|^2-\frac{1}{2}\int|\widetilde{\alpha}(T)|^2\\ =\ &\int_0^T\int f(t)\widetilde{\alpha}(t)-\int_0^T\langle\widetilde{\alpha}'(t),\widetilde{\alpha}(t)\rangle\\ =\ &\int_0^T\langle\widetilde{\chi}(t),\widetilde{\alpha}(t)\rangle. \qquad (3.42)\end{aligned}$$

Além disso,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T\langle\widetilde{\mathcal{A}}\alpha_n(t),v(t)\rangle=\int_0^T\langle\widetilde{\chi}(t),v(t)\rangle, \qquad (3.43)$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T\langle\widetilde{\mathcal{A}}v(t),\alpha_n(t)-v(t)\rangle=\int_0^T\langle\widetilde{\mathcal{A}}v(t),\widetilde{\alpha}(t)-v(t)\rangle, \qquad (3.44)$$

para todo $v \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$. Assim estes limsups e a monotonicidade do operador $\widetilde{\mathcal{A}}$ implicam que

$$0 \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \int_0^T \langle \widetilde{\mathcal{A}}\alpha_n(t) - \widetilde{\mathcal{A}}v(t), \alpha_n(t) - v(t)\rangle \leqslant \int_0^T \langle \widetilde{\chi}(t) - \widetilde{\mathcal{A}}v(t), \widetilde{\alpha}(t) - v(t)\rangle, \tag{3.45}$$

para todo $v \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$. Logo escolhendo $v = \widetilde{\alpha} - \theta w$ em (3.45), com $w \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ e $\theta > 0$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_0^T \langle \widetilde{\chi}(t) - \widetilde{\mathcal{A}}(\widetilde{\alpha} - \theta w)(t), \theta w(t)\rangle \\ &\leqslant \theta \int_0^T \langle \widetilde{\chi}(t) - \widetilde{\mathcal{A}}(\widetilde{\alpha} - \theta w)(t), w(t)\rangle. \end{aligned}$$

Como θ é positivo temos

$$0 \leqslant \int_0^T \langle \widetilde{\chi}(t) - \widetilde{\mathcal{A}}(\widetilde{\alpha} - \theta w)(t), w(t)\rangle$$

e daí, fazendo $\theta \to 0^+$, obtemos

$$0 \leqslant \int_0^T \langle \widetilde{\chi}(t) - \widetilde{\mathcal{A}}(\widetilde{\alpha})(t), w(t)\rangle$$

para todo $w \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$. Portanto, $\widetilde{\chi}(t) = \mathcal{A}\widetilde{\alpha}(t)$ em $W^{1,p}(\Omega)^*$ para quase todo $t \in (0,T)$ e $\widetilde{\alpha}$ é uma solução fraca do problema $(P_{u_0})^T$.

III.- $u^T_{min} = \widetilde{\alpha}$ e $u^T_{max} = \widetilde{\beta}$. Vamos mostrar $\widetilde{\alpha}$ é a solução minimal. De fato, se u é qualquer solução fraca do problema $(P_{u_0})^T$ satisfazendo $\alpha_0 \leqslant u \leqslant \beta_0$ em $\Omega \times (0,T)$, então u é uma subsolução do problema $(P_{u_0})^T$ com $u \leqslant \beta_0$ em $\Omega \times (0,T)$. Assim, no item I.) temos $\alpha_{0,n} = u_0$, $\alpha_n = u$ $\forall n$ e também por (3.36) $u \leqslant \beta_n$ em $\Omega \times (0,T)$. Passando ao limite pontual temos que $u \leqslant \widetilde{\beta}$ em $\Omega \times (0,T)$. Similarmente u é uma supersolução do problema $(P_{u_0})^T$ com $\alpha_0 \leqslant u$ em $\Omega \times (0,T)$. Assim, no item I.) temos $\beta_{0,n} = u_0$, $\beta_n = u$ $\forall n$ e também por (3.36) $\alpha_n \leqslant u$ em $\Omega \times (0,T)$. Passando ao limite pontual temos que $\widetilde{\alpha} \leqslant u$ em $\Omega \times (0,T)$.

□

Observação 3.5 *Como* $u^T_{min} \in L^p(0,T;\mathbb{V})$ *e* $(u^T_{min})' \in L^{p'}(0,T;\mathbb{V}^*)$ *temos que* $u^T_{min} \in C([0,T];L^2(\Omega))$. *Além disso, como* $u^T_{min} \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$, *para* $t, t_0 \in [0,T]$ *e* $2 < s < +\infty$, *temos*

$$\begin{aligned} \int |u^T_{min}(t) - u^T_{min}(t_0)|^s &= \int |u^T_{min}(t) - u^T_{min}(t_0)|^{s-2} |u^T_{min}(t) - u^T_{min}(t_0)|^2 \\ &\leqslant C \int |u^T_{min}(t) - u^T_{min}(t_0)|^2 \end{aligned}$$

mostrando que $u^T_{min} \in C([0,T];L^s(\Omega))$ *para cada* $1 \leqslant s < +\infty$. *Similarmente temos que* $u^T_{max} \in C([0,T];L^s(\Omega))$ *para cada* $1 \leqslant s < +\infty$.

Observação 3.6 *A convergência* (3.39) *pode ser melhorada para $s = p$:*

$$\alpha_n \nearrow u^T_{min},\ \beta_n \searrow u^T_{max} \quad \text{em } L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)). \tag{3.46}$$

De fato, subtraindo as equações

$$\langle \alpha_n'(t), v\rangle + \langle \mathcal{A}\alpha_n(t), v\rangle = \int f_n(t)v$$

e

$$\langle (u^T_{min})'(t), v\rangle + \langle \mathcal{A}u^T_{min}(t), v\rangle = \int f(t)v$$

com $v \in \mathbb{V}$, temos

$$\langle \alpha_n'(t) - (u^T_{min})'(t), v\rangle + \langle \mathcal{A}\alpha_n(t) - \mathcal{A}u^T_{min}(t), v\rangle = \int (f_n(t) - f(t))v$$

para todo $v \in \mathbb{V}$. Logo, tomando $v = \alpha_n(t) - u^T_{min}(t)$ obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |\alpha_n(t) - u^T_{min}(t)|^2 + \langle \mathcal{A}\alpha_n(t) - \mathcal{A}u^T_{min}(t), \alpha_n(t) - u^T_{min}(t)\rangle =$$
$$\int (f_n(t) - f(t))(\alpha_n(t) - u^T_{min}(t)).$$

Integrando sobre $(0,T)$ vem que

$$\frac{1}{2}\int |\alpha_n(T) - u^T_{min}(T)|^2 - \frac{1}{2}\int |\alpha_n(0) - u^T_{min}(0)|^2 +$$
$$\int_0^T \langle \mathcal{A}\alpha_n(t) - \mathcal{A}u^T_{min}(t), \alpha_n(t) - u^T_{min}(t)\rangle = \int_0^T \int (f_n(t) - f(t))(\alpha_n(t) - u^T_{min}(t))$$

e assim

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}\alpha_n(t) - \mathcal{A}u^T_{min}(t), \alpha_n(t) - u^T_{min}(t)\rangle \leqslant \frac{1}{2}\int |\alpha_{0,n} - u_0|^2 +$$
$$\int_0^T \int (f_n(t) - f(t))(\alpha_n(t) - u^T_{min}(t)).$$

Passando ao limite, temos

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T \langle \mathcal{A}\alpha_n(t) - \mathcal{A}u^T_{min}(t), \alpha_n(t) - u^T_{min}(t)\rangle = 0$$

o que implica

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T \int \left(|\nabla\alpha_n(t)|^{p-2}\nabla\alpha_n(t) - |\nabla u^T_{min}(t)(t)|^{p-2}\nabla u^T_{min}(t)(t)\right)\cdot\left(\nabla\alpha_n(t) - \nabla u^T_{min}(t)\right) = 0.$$

Como $p \geqslant 2$, por (1.11) *existe uma constante $C_p > 0$ tal que*

$$C_p|\nabla\alpha_n(t) - \nabla u^T_{min}(t)|^p \leqslant \left(|\nabla\alpha_n(t)|^{p-2}\nabla\alpha_n(t) - |\nabla u^T_{min}(t)(t)|^{p-2}\nabla u^T_{min}(t)(t)\right)\cdot$$
$$\left(\nabla\alpha_n(t) - \nabla u^T_{min}(t)\right).$$

Assim

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T \int |\nabla\alpha_n(t) - \nabla u^T_{min}(t)|^p = 0,$$

donde segue (3.46) *para a sequência $\{\alpha_n\}$. A afirmação para $\{\beta_n\}$ prova-se analogamente.*

3.5 Existência e unicidade da solução global do problema parabólico

Lema 3.6 *Suponha que $(H_1)-(H_3)$ sejam válidas, $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$, $0 < T_1 < T_2$ e que α é uma subsolução não-negativa e β uma supersolução limitada de problema $(P_{u_0})^{T_2}$ e $\alpha \leqslant \beta$ em $\Omega \times (0, T_2)$. Então $u^{T_1}_{min} = u^{T_2}_{min}$ sobre $[0, T_1]$.*

Prova: Como $u^{T_2}_{min}$ é uma solução fraca do problema $(P_{u_0})^{T_2}$, a restrição sobre $[0, T_1]$ é uma solução fraca do problema $(P_{u_0})^{T_1}$ que, pelo Teorema 3.5, satisfaz $\alpha \leqslant u^{T_2}_{min} \leqslant \beta$ em $\Omega \times (0, T_1)$ e assim $u^{T_1}_{min} \leqslant u^{T_2}_{min}$ em $\Omega \times (0, T_1)$. Para mostrar a outra desigualdade consideremos o seguinte problema parabólico

$$\begin{cases} w_t - \Delta_p w + V(x)|w|^{p-2}w = \lambda m(x)|w|^{p-2}w - \rho(\lambda)|w|^{q-2}w & \text{em } \Omega \times (T_1, T_2), \\ |\nabla w|^{p-2}\dfrac{\partial w}{\partial \nu} + W(x)|w|^{p-2}w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (T_1, T_2), \\ w(T_1) = u^{T_1}_{min}(T_1) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.47}$$

Pelo Teorema 3.5 existe pelo menos uma solução fraca $\widehat{w}$ do problema $(P_{u^{T_1}_{min}(T_1)})^{T_2-T_1}$ satisfazendo $\alpha(x,t) \leqslant \widehat{w}(x,t) \leqslant \beta(x,t)$ para quase todo $(x,t) \in \Omega \times (0, T_2 - T_1)$. Definindo $w(t)(x) := \widehat{w}(t - T_1)(x)$ para $t \in [T_1, T_2)$ e para quase todo $x \in \Omega$ temos que w é uma solução fraca do problema (3.47) tal que $\alpha \leqslant w \leqslant \beta$ em $\Omega \times (T_1, T_2)$, pois $w(T_1) = \widehat{w}(0) = u^{T_1}_{min}(T_1)$ e pelo Lema 1.3 temos

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} w(t)\phi'(t) &= \int_{T_1}^{T_2} \widehat{w}(t - T_1)\phi'(t) \\ &= \int_0^{T_2 - T_1} \widehat{w}(s)\phi'(s + T_1) \\ &= -\int_0^{T_2 - T_1} \widehat{w}'(s)\phi(s + T_1) \\ &= -\int_{T_1}^{T_2} \widehat{w}'(t - T_1)\phi(t) \end{aligned} \tag{3.48}$$

para todo $\phi \in C^\infty_c(T_1, T_2)$, ou seja, $w'(t)(x) = \widehat{w}'(t - T_1)$. Também temos

$$\begin{aligned} \int w'(t)v + \langle \mathcal{A}w(t), v\rangle &= \int \widehat{w}'(t - T_1)v + \langle \mathcal{A}\widehat{w}(t - T_1), v\rangle \\ &= \int \big(\lambda m^+(x) + V^-(x)\big)\,(\widehat{w}(t - T_1))^{p-1}v \\ &= \int \big(\lambda m^+(x) + V^-(x)\big)\,(w(t))^{p-1}v \end{aligned}$$

para todo $v \in \mathbb{V}$ e para quase todo $t \in (T_1, T_2)$. Agora, construindo a função

$$\widetilde{w}(t) = \begin{cases} u^{T_1}_{min}(t), & \text{se } t \in [0, T_1], \\ w(t), & \text{se } t \in [T_1, T_2], \end{cases}$$

vemos que $\widetilde{w}$ é solução fraca do problema $(P_{u_0})^{T_2}$ satisfazendo $\alpha \leqslant \widetilde{w} \leqslant \beta$ em $\Omega \times (0, T_2)$. Logo $\widetilde{w} \geqslant u_{min}^{T_2}$ em $\Omega \times (0, T_2)$ e em particular $u_{min}^{T_1} \geqslant u_{min}^{T_2}$ em $\Omega \times (0, T_1)$. Assim $u_{min}^{T_1} = u_{min}^{T_2}$ sobre $[0, T_1]$. □

Teorema 3.6 *Suponha que $(H_1) - (H_3)$ sejam válidas e que existem uma subsolução não-negativa α e uma supersolução limitada β do problema (P_{u_0}) tal que $\alpha \leqslant \beta$ em $\Omega \times (0, +\infty)$. Então existem $u_{min}, u_{max} \in L^\infty(0, +\infty; L^\infty(\Omega))$ soluções fracas limitadas do problema (P_{u_0}), tal que*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant u_{min} \leqslant u \leqslant u_{max} \leqslant \beta \quad \text{em } \Omega \times (0, +\infty) \tag{3.49}$$

para qualquer solução u do problema (P_{u_0}) que satisfaz $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$ em $\Omega \times (0, +\infty)$.

Prova: Seja $\{T_n\}$ uma sequência de números reais tal que $0 < T_n < T_{n+1}$ e $T_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$. Então definimos

$$u_{min}(t) := u_{min}^{T_n}(t) \quad \text{se } t \leqslant T_n. \tag{3.50}$$

Note que se $t \leqslant T_n$, então pelo Lema 3.6 temos $u_{min}(t) = u_{min}^{T_n}(t) = u_{min}^{T_j}(t)$ qualquer que seja $j > n$ e assim (3.50) é bem definido. Além disso, a definição independe da sequência $\{T_n\}$, pois se $\{\widehat{T}_n\}$ é outra sequência tal que $0 < \widehat{T}_n < \widehat{T}_{n+1}$, $\widehat{T}_n \to +\infty$, quando $n \to +\infty$, e definirmos $\widehat{u}_{min}(t) = u_{min}^{\widehat{T}_n}(t)$ para $t \leqslant \widehat{T}_n$ então fixado n, para $\widehat{T}_n > 0$ existe $n_0 > 0$ tal que $\widehat{T}_n \leqslant T_{n_0}$. Logo para $t \leqslant \widehat{T}_n \leqslant T_{n_0}$ temos pelo Lema 3.6 $\widehat{u}_{min}(t) = u_{min}^{\widehat{T}_n}(t) = u_{min}^{T_{n_0}}(t) = u_{min}(t)$, portanto $\widehat{u}_{min} = u_{min}$ em $(0, +\infty)$. Agora vamos mostrar que u_{min} verifica as propriedades do Teorema.

1. u_{min} é uma solução fraca do problema (P_{u_0}). De fato, dado $T > 0$ existe $n_0 > 0$ tal que $T < T_{n_0}$. Logo, pelo Lema 3.6, temos $u_{min} = u_{min}^{T_{n_0}}(t) = u_{min}^{T}$ sobre $[0, T]$, assim u_{min} é uma solução fraca do problema $(P_{u_0})^T$.

2. $\alpha \leqslant u_{min} \leqslant u_{max} \leqslant \beta$ em $\Omega \times (0, +\infty)$. De fato, notemos primeiro que $|\{(x,t) \in \Omega \times (0, T_n); u_{min}(x,t) > \alpha(x,t)\}| = 0$ para cada T_n. Assim

$$\begin{aligned} &|\{(x,t) \in \Omega \times (0, +\infty); u_{min}(x,t) > \alpha(x,t)\}| = \\ &\left|\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(x,t) \in \Omega \times (0, T_n); u_{min}(x,t) > \alpha(x,t)\}\right| \\ = \lim_{T_n \to +\infty} &|\{(x,t) \in \Omega \times (0, T_n); u_{min}(x,t) > \alpha(x,t)\}| = 0, \end{aligned}$$

ou seja $\alpha \leqslant u_{min}$ em $\Omega \times (0, +\infty)$. Similarmente provamos as outras desigualdades. Uma consequência dessas desigualdades é $u_{min}, u_{max} \in L^\infty(0, +\infty; L^\infty(\Omega))$.

3. $u_{min} \leqslant u \leqslant u_{max}$ em $\Omega \times (0, +\infty)$ para qualquer solução fraca do problema (P_{u_0}) tal que $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$ em $\Omega \times (0, +\infty)$. A prova é feita como na parte anterior.

□

Notemos que a função $s \mapsto |s|^{p-2}s$ é localmente Lipschitz sobre $(0,+\infty)$, pois $p \geqslant 2$. Logo temos o seguinte

Teorema 3.7 *Suponha que* $(H_1)-(H_3)$ *sejam válidas. Então o problema parabólico* (P_{u_0}) *tem no máximo uma solução não-trivial, não-negativa e limitada.*

Prova: Sejam u_1, u_2 duas soluções não-triviais, não-negativas e limitadas do problema (P_{u_0}). Então

$$\langle u_1'(t) - u_2'(t), v\rangle + \langle \mathcal{A}u_1(t) - \mathcal{A}u_2(t), v\rangle = \int (\lambda m^+ + V^-)(x)\left((u_1(t))^{p-1} - (u_2(t))^{p-1}\right) v$$

para todo $v \in \mathbb{V}$ e quase todo $t \in (0,+\infty)$. Em particular para $v = u_1(t) - u_2(t)$ pela monotonicidade do operador $\mathcal{A}$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int (u_1(t) - u_2(t))^2 &= \langle u_1'(t) - u_2'(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle \\
&\leqslant \int (\lambda m^+ + V^-)(x)\left((u_1(t))^{p-1} - (u_2(t))^{p-1}\right)(u_1(t) - u_2(t)) \\
&\leqslant \|\lambda m^+ + V^-\|_{L^\infty(\Omega)} \int \left((u_1(t))^{p-1} - (u_2(t))^{p-1}\right)(u_1(t) - u_2(t)) \\
&\leqslant \|\lambda m^+ + V^-\|_{L^\infty(\Omega)} L \int (u_1(t) - u_2(t))^2,
\end{aligned}$$

sendo $L > 0$ uma constante independente de t. Pelo Lema de Gronwall obtemos

$$\int (u_1(t) - u_2(t))^2 \leqslant \mathrm{e}^{2\|\lambda m^+ + V^-\|_{L^\infty(\Omega)} Lt} \int (u_1(0) - u_2(0))^2 = 0 \tag{3.51}$$

para quase todo $t \in (0,T)$ para cada $T > 0$. Integrando sobre $(0,T)$ temos que $\|u_1 - u_2\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = 0$ para cada $T > 0$, ou seja $u_1 = u_2$. □

3.6 Comportamento assintótico da solução

Lema 3.7 *Suponha que* $(H_1)-(H_3)$ *sejam válidas e* $\alpha_0 \leqslant \beta_0$ *uma subsolução não-negativa e supersolução limitada fraca do problema* $(P_{\alpha_0(0)})$. *Se* α_0 *é não-decrescente em* t *para quase todo* $x \in \Omega$ *então a solução minimal* α_{min} *do problema* $(P_{\alpha_0(0)})$ *em* $[\alpha_0, \beta_0]$ *é não-decrescente em* t *para quase todo* $x \in \Omega$. *Similarmente, se* β_0 *é não-crescente em* t *para quase todo* $x \in \Omega$ *então a solução maximal* β_{max} *do problema* $(P_{\beta_0(0)})$ *em* $[\alpha_0, \beta_0]$ *é não-crescente em* t *para quase todo* $x \in \Omega$.

Prova: Suponha que α_0 é não-decrescente em t para quase todo $x \in \Omega$. Fixando $T > 0$, na primeira parte da demonstração do Teorema 3.5 temos por (3.32) com $u_0 = \alpha_0(0)$ que $\alpha_{0,n} = \alpha_0(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha^T_{min}(t)(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n(t)(x)$ e também

$$\alpha_0(t)(x) \leqslant \alpha_1(t)(x) \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n(t)(x) \leqslant \cdots$$

assim é suficiente mostrar que cada α_n é não-decrescente em t. De fato, como α_0 é não-decrescente em t suponha por indução que α_{n-1} é não-decrescente em t. Definamos para qualquer $h \geqslant 0$

$$(\tau_h \alpha_n)(t)(x) := \alpha_n(t+h)(x) \tag{3.52}$$

para todo $t \in [0, T]$ e para quase todo $x \in \Omega$. Temos

$$\begin{aligned}
\int \alpha_n'(t)v + \langle \mathcal{A}\alpha_n(t), v\rangle &= \int f_n(t)v \\
&= \int (\lambda m^+(x) + V^-(x))(\alpha_{n-1}(t))^{p-1}v \\
&\leqslant \int (\lambda m^+(x) + V^-(x))(\alpha_{n-1}(t+h))^{p-1}v \\
&= \int \alpha_n'(t+h)v + \langle \mathcal{A}\alpha_n(t+h), v\rangle \\
&= \int (\tau_h\alpha_n)'(t)v + \langle \mathcal{A}(\tau_h\alpha_n)(t), v\rangle
\end{aligned}$$

para todo $0 \leqslant v \in \mathbb{V}$ e para quase todo $t \in (0, T)$. Como $\alpha 0, n = \alpha_0(0)$, $\forall n$, usando (3.32) e a hipotese de indução, obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha_n(0)(x) &= \alpha_{0,n}(x) = \alpha_0(0)(x) = \alpha_{0,n-1}(x) = \alpha_{n-1}(0)(x) \\
&\leqslant \alpha_{n-1}(h)(x) \\
&\leqslant \alpha_n(h)(x) \\
&= (\tau_h\alpha_n)(0)(x)
\end{aligned}$$

para quase todo em $x \in \Omega$. Então, pelo Lema 3.5, temos $\alpha_n(t)(x) \leqslant (\tau_h\alpha_n)(t)(x) = \alpha_n(t+h)(x)$ para quase todo $x \in \Omega$ e para quase todo $t \in (0, T]$ e todo $h \geqslant 0$. Passando ao limite, quando $n \to +\infty$, concluimos que α_{min}^T é não-decrescente em t. Portanto pela definição de α_{min}, temos que α_{min} é não-decrescente em t. □

Lema 3.8 *Suponha que $(H_1)-(H_3)$ sejam válidas e que $\widehat{\alpha}_0$ é uma subsolução não-negativa e $\widehat{\beta}_0$ é uma supersolução limitada do problema estacionário (P), com $\widehat{\alpha}_0 \leqslant \widehat{\beta}_0$. Seja α_{min} a solução minimal do problema $(P_{\widehat{\alpha}_0})$ e β_{max} a solução maximal do problema $(P_{\widehat{\beta}_0})$ em $[\widehat{\alpha}_0, \widehat{\beta}_0]$. Então, para todo $1 \leqslant s < +\infty$ tem-se*

$$\alpha_{min}(t) \nearrow \alpha_*, \beta_{max}(t) \searrow \beta_* \quad \text{em } L^s(\Omega)$$

quando $t \to +\infty$, sendo α_* e β_* soluções do problema (P) e $\widehat{\alpha}_0 \leqslant \alpha_* \leqslant \beta_* \leqslant \widehat{\beta}_0$.

Prova: Claramente $\widehat{\alpha}_0$ e $\widehat{\beta}_0$ satisfazem as hipóteses do Lema 3.7, o qual implica que α_{min} e β_{max} é não-decrescente em t e não-crescente em t respectivamente e por construção $\alpha_{min}, \beta_{max} \in [\widehat{\alpha}_0, \widehat{\beta}_0]$. Portanto, os limites

$$\alpha_*(x) := \lim_{t\to+\infty} \alpha_{min}(t)(x) \quad \text{e} \quad \beta_*(x) := \lim_{t\to+\infty} \beta_{max}(t)(x)$$

existem para quase todo $x \in \Omega$. Daí $\widehat{\alpha}_0 \leqslant \alpha_* \leqslant \beta_* \leqslant \widehat{\beta}_0$ e pelo teorema da convergência dominada obtemos, quando $t \to +\infty$,

$$\alpha_{min}(t) \nearrow \alpha_*, \beta_{max}(t) \searrow \beta_* \quad \text{em } L^s(\Omega), \text{ para todo } 1 \leqslant s < +\infty.$$

Afirmamos que α_* é uma solução fraca do problema estacionário (P). De fato, fixando $T > 0$ definimos para $h \geqslant 0$

$$(\mathcal{T}_h \alpha_{min})(t)(x) := \alpha_{min}(t+h)(x) \tag{3.53}$$

$\forall t \in [0, T]$ e para quase todo $x \in \Omega$. Então temos

$$(\mathcal{T}_h \alpha_{min})(t) \to \alpha_* \quad \text{em } L^s(\Omega), \tag{3.54}$$

quando $h \to +\infty$, para todo $t \in [0, T]$ e todo $1 \leqslant s < +\infty$.
Vamos mostrar que a sequência $\{\mathcal{T}_h \alpha_{min}\}$ é de Cauchy em $L^p(0, T; \mathbb{V})$. Note que $\mathcal{T}_h \alpha_{min}$ é uma solução fraca do problema $(P_{\alpha_{min}(h)})^T$ para todo $h \geqslant 0$, ou seja, $\mathcal{T}_h \alpha_{min}(0) = \alpha_{min}(h)$ e

$$\langle (\mathcal{T}_h \alpha_{min})'(t), v \rangle + \langle \mathcal{A} \mathcal{T}_h \alpha_{min}(t), v \rangle = \int (\lambda m^+(x) + V^-(x))(\mathcal{T}_h \alpha_{min}(t))^{p-1} v, \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

Denotando por $\mathcal{T}_i := \mathcal{T}_{h_i} \alpha_{min}$, com $h_i \geqslant 0$ para $i = 1, 2$, temos

$$\langle (\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2)'(t), v \rangle + \langle \mathcal{A}\mathcal{T}_1(t) - \mathcal{A}\mathcal{T}_2(t), v \rangle = \int (\lambda m^+(x) + V^-(x)) \left((\mathcal{T}_1(t))^{p-1} - (\mathcal{T}_2(t))^{p-1} \right) v,$$

$\forall v \in \mathbb{V}$. Tomando $v = \mathcal{T}_1(t) - \mathcal{T}_2(t)$ na relação anterior, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |\mathcal{T}_1(t) - \mathcal{T}_2(t)|^2 + \langle \mathcal{A}\mathcal{T}_1(t) - \mathcal{A}\mathcal{T}_2(t), \mathcal{T}_1(t) - \mathcal{T}_2(t) \rangle =$$
$$\int (\lambda m^+(x) + V^-(x)) \left((\mathcal{T}_1(t))^{p-1} - (\mathcal{T}_2(t))^{p-1} \right) (\mathcal{T}_1(t) - \mathcal{T}_2(t)) \, .$$

Integrando sobre $(0, T)$, vem que

$$\frac{1}{2} \int |\mathcal{T}_1(T) - \mathcal{T}_2(T)|^2 - \frac{1}{2} \int |\mathcal{T}_1(0) - \mathcal{T}_2(0)|^2 + \int_0^T \langle \mathcal{A}\mathcal{T}_1(t) - \mathcal{A}\mathcal{T}_2(t), \mathcal{T}_1(t) - \mathcal{T}_2(t) \rangle =$$
$$\int_0^T \int (\lambda m^+(x) + V^-(x)) \left((\mathcal{T}_1(t))^{p-1} - (\mathcal{T}_2(t))^{p-1} \right) (\mathcal{T}_1(t) - \mathcal{T}_2(t))$$

e assim

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}\mathcal{T}_1(t) - \mathcal{A}\mathcal{T}_2(t), \mathcal{T}_1(t) - \mathcal{T}_2(t) \rangle \leqslant \frac{1}{2} \int |\mathcal{T}_1(0) - \mathcal{T}_2(0)|^2 +$$
$$\int_0^T \int (\lambda m^+(x) + V^-(x)) \left((\mathcal{T}_1(t))^{p-1} - (\mathcal{T}_2(t))^{p-1} \right) (\mathcal{T}_1(t) - \mathcal{T}_2(t)) \, .$$

De (3.54) e do Teorema de Convergência dominada temos

$$\mathcal{T}_h \alpha_{min} \to \alpha_* \quad \text{em } L^s(0, T; L^s(\Omega)), \tag{3.55}$$

quando $h \to +\infty$, para todo $1 \leqslant s < +\infty$. Logo

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}\mathcal{T}_1(t) - \mathcal{A}\mathcal{T}_2(t), \mathcal{T}_1(t) - \mathcal{T}_2(t)\rangle \to 0,$$

quando $h_1, h_2 \to +\infty$, o que implica

$$\int_0^T \int \left(|\nabla \mathcal{T}_1(t)|^{p-2}\nabla \mathcal{T}_1(t) - |\nabla \mathcal{T}_2(t)|^{p-2}\nabla \mathcal{T}_2(t)\right) \cdot \nabla(\mathcal{T}_1(t) - \mathcal{T}_2(t)) \to 0,$$

quando $h_1, h_2 \to +\infty$.
Como $p \geqslant 2$ por (1.11) existe uma constante $C_p > 0$ tal que

$$C_p|\nabla(\mathcal{T}_1(t) - \mathcal{T}_2(t))|^p \leqslant \left(|\nabla \mathcal{T}_1(t)|^{p-2}\nabla \mathcal{T}_1(t) - |\nabla \mathcal{T}_2(t)|^{p-2}\nabla \mathcal{T}_2(t)\right) \cdot \nabla(\mathcal{T}_1(t) - \mathcal{T}_2(t))$$

de forma que

$$\int_0^T \int |\nabla(\mathcal{T}_1(t) - \mathcal{T}_2(t))|^p \to 0, \quad \text{quando } h_1, h_2 \to +\infty.$$

Portanto, $\{\mathcal{T}_h \alpha_{min}\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(0, T; \mathbb{V})$ e então existe $\widetilde{\alpha} \in L^p(0, T; \mathbb{V})$ tal que

$$\mathcal{T}_h \alpha_{min} \to \widetilde{\alpha} \quad \text{em } L^p(0, T; \mathbb{V}), \text{ quando } h \to +\infty. \tag{3.56}$$

De (3.55) e (3.56) temos que $\widetilde{\alpha} = \alpha_*$ e existe uma sequência $\{h_k\}$, $h_k \to +\infty$, tal que

$$\widetilde{\mathcal{A}}\mathcal{T}_{h_k}\alpha_{min} \to \widetilde{\mathcal{A}}\alpha_* \quad \text{em } L^{p'}(0, T; \mathbb{V}^*)$$

e também

$$(\lambda m^+(x) + V^-(x))(\mathcal{T}_{h_k}\alpha_{min})^{p-1} \to (\lambda m^+(x) + V^-(x))\alpha_*^{p-1} \quad \text{em } L^{p'}(0, T; \mathbb{V}^*).$$

Assim

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{h_k}\alpha_{min})' &= (\lambda m^+(x) + V^-(x))(\mathcal{T}_{h_k}\alpha_{min})^{p-1} - \widetilde{\mathcal{A}}\mathcal{T}_{h_k}\alpha_{min} \\ &\to (\lambda m^+(x) + V^-(x))\alpha_*^{p-1} - \widetilde{\mathcal{A}}\alpha_* \quad \text{em } L^{p'}(0, T; \mathbb{V}^*) \text{ quando } k \to +\infty. \end{aligned}$$

Esta informação combinada com (3.56) implica, pela Proposição 1.1 (veja também Proposição 23.19 de [111]), que $\alpha'_* = 0 = (\lambda m^+(x) + V^-(x))\alpha_*^{p-1} - \widetilde{\mathcal{A}}\alpha_*$ em $L^{p'}(0, T; \mathbb{V}^*)$. Ou seja, α_* é solução fraca do problema estacionário (P). $\square$

Lema 3.9 *Sejam $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$ e α e β uma subsolução não-negativa e supersolução limitada de ambos os problemas (P_{u_0}) e (P_{v_0}), respectivamente, com $\alpha \leqslant \beta$ em $\Omega \times (0, +\infty)$. Suponha que u_{min} (u_{max}) e v_{min} (v_{max}) são as soluções mínimas (máximas) dos problemas (P_{u_0}) e (P_{v_0}) em $[\alpha, \beta]$ respectivamente. Se $u_0 \leqslant v_0$ em Ω então*

$$u_{min} \leqslant v_{min} \quad (u_{max} \leqslant v_{max}) \quad \text{em } \Omega \times (0, +\infty).$$

Prova: Seja $T > 0$ um número fixo. Sejam $\{\alpha_n^u\}$ e $\{\alpha_n^v\}$ as sequências monótonas do Teorema 3.5 que convergem pontualmente a u_{min}^T e v_{min}^T respectivamente. Sem perda de generalidade, podemos escolher $\{\alpha_{0,n}^u\}$ e $\{\alpha_{0,n}^v\}$ tal que $\alpha_{0,n}^u \leqslant \alpha_{0,n}^v$ em Ω para todo $n \in \mathbb{N}$. Então combinando um argumento de indução e Lema 3.5 temos que $\alpha_n^u \leqslant \alpha_n^v$ em $\Omega \times (0,T)$ para todo n, o que passando ao limite $u_{min}^T \leqslant v_{min}^T$ em $\Omega \times (0,T)$. □

Teorema 3.8 *Assuma $(H_1) - (H_3)$. Sejam $\widehat{\alpha}$ uma subsolução não-negativa e $\widehat{\beta}$ uma supersolução limitada do problema estacionário (P), com $\widehat{\alpha} \leqslant \widehat{\beta}$, e considere $\widehat{\alpha} \leqslant u_0 \leqslant \widehat{\beta}$ em Ω. Então a solução fraca u do problema (P_{u_0}) que verifica $\widehat{\alpha} \leqslant u \leqslant \widehat{\beta}$ em $\Omega \times (0,+\infty)$ satisfaz*

$$\widehat{\alpha} \leqslant \alpha_* \leqslant \liminf_{t\to+\infty} u(t) \leqslant \limsup_{t\to+\infty} u(t) \leqslant \beta_* \leqslant \widehat{\beta} \quad em\ \Omega, \tag{3.57}$$

sendo α_*, β_* soluções fracas do problema (P). Em particular, se (P) admite uma única solução fraca u_* em $[\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}]$ então, para todo $1 \leqslant s < +\infty$,

$$u(t) \to u_* \quad em\ L^s(\Omega),\ quando\ t \to +\infty. \tag{3.58}$$

Prova: Consideremos a solução minimal α_{min} do problema $(P_{\widehat{\alpha}})$ e a solução maximal β_{max} do problema $(P_{\widehat{\beta}})$ em $[\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}]$, cuja existência é garantida pelo Teorema 3.6. Pelo Lema 3.9 temos $\alpha_{min} \leqslant u_{min}$ e $u_{max} \leqslant \beta_{max}$ em $\Omega \times (0,+\infty)$, sendo u_{min} a solução minimal e u_{max} a solução maximal do problema (P_{u_0}) em $[\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}]$. Assim temos que $\alpha_{min} \leqslant u \leqslant \beta_{max}$ em $\Omega \times (0,+\infty)$ e (3.57) segue do Lema 3.8. Agora suponha que u_* seja a única solução fraca do problema (P) em $[\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}]$, ou seja $\alpha_* = \beta_* = u_*$. De (3.57) temos que $u(t)$ converge pontualmente a u_* em Ω e o Teorema de Convergência Dominada implica (3.58). □

Teorema 3.9 *Suponha $(H_1) - (H_3)$. Se $\mu_1(\lambda) < 0$ e $0 < \sigma \leqslant u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$, para quase todo $x \in \Omega$, então a solução não-trivial fraca $u(\cdot,\cdot;u_0)$ do problema (P_{u_0}) satisfaz*

$$u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_* \quad em \quad L^s(\Omega), \quad \forall\, 1 \leqslant s < \infty,$$

sendo u_* a única solução positiva do problema estacionário (P).

Prova: Pela Proposição 3.4 e Proposição 3.5 obtemos $\epsilon\varphi \leqslant \sigma < u_0 \leqslant C$ em Ω sendo ϵ suficientemente pequeno e $C > 0$ uma constante suficientemente grande tal que $\epsilon\varphi_\lambda$ é uma subsolução e C é uma supersolução do problema estacionário (P). Então pelo Teorema 3.6 e Teorema 3.7 temos que $\epsilon\varphi \leqslant u(x,t) \leqslant C$ em $\Omega \times (0,+\infty)$. Assim, por Teorema 3.8, Proposição 3.6 e Proposição 3.3 temos $u(t) \to u_*$ em $L^s(\Omega)$, quando $t \to +\infty$, para todo $1 \leqslant s < +\infty$, sendo u_* a única solução positiva do problema (P). □

Teorema 3.10 *Suponha $(H_1) - (H_3)$. Se $\mu_1(\lambda) \geqslant 0$ e $0 \leqslant u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$ para quase todo $x \in \Omega$, então a solução fraca u do problema (P_{u_0}) verifica*

$$u(t) \to 0 \quad em\ L^s(\Omega),\ quando\ t \to +\infty,$$

para todo $1 \leqslant s < +\infty$.

Prova: Pela Proposição 3.5 obtemos $0 \leqslant u_0 \leqslant C$ em Ω sendo C suficientemente grande tal que 0 é uma subsolução e C é uma supersolução do problema estacionário (P). Assim, pelo Teorema 3.6 e Teorema 3.7 temos $0 \leqslant u(x,t) \leqslant C$ em $\Omega \times (0,+\infty)$. Portanto, pelo Teorema 3.8 e Proposição 3.3 temos $u(t) \to 0$ em $L^s(\Omega)$, quando $t \to +\infty$, para todo $1 \leqslant s < +\infty$. □

Finalmente, pelos Teoremas 3.2, 3.3 e 3.4 as condições $\mu_1(\lambda) < 0$ e $\mu_1(\lambda) \geqslant 0$ podem ser expressos em termos do sinal de $\mu_1(0)$, o parâmetro $\lambda > 0$, e a função peso m como nos corolários abaixo:

Corolário 3.1 *Assuma $(H_1) - (H_3)$ e $\mu_1(0) > 0$.*

1. *Se $m \geqslant 0$ ou m muda de sinal então $\mu_1(\lambda) < 0$ $\forall \lambda \in (\lambda_1, +\infty)$ e $\mu_1(\lambda) \geqslant 0$ $\forall \lambda \in (0, \lambda_1]$ sendo $\lambda_1 > 0$ o único autovalor principal positivo de* (3.19)*. Além disso, $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_*$ em $L^s(\Omega)$ para todo $\lambda > \lambda_1$ e todo $1 \leqslant s < \infty$ sendo u_* a única solução positiva do problema estacionário (P) e $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ em $L^s(\Omega)$ para todo $0 < \lambda \leqslant \lambda_1$ e todo $1 \leqslant s < \infty$.*

2. *Se $m \leqslant 0$ então $\mu_1(\lambda) > 0$ para todo $\lambda > 0$. Além disso, $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ em $L^s(\Omega)$ para todo $\lambda > 0$ e todo $1 \leqslant s < \infty$.*

Corolário 3.2 *Assuma $(H_1) - (H_3)$ e $\mu_1(0) = 0$.*

1. *Se $m \geqslant 0$ ou m muda de sinal satisfazendo $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p \geqslant 0$ então $\mu_1(\lambda) < 0$ para todo $\lambda > 0$. Além disso, $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_*$ em $L^s(\Omega)$ para todo $\lambda > 0$ e todo $1 \leqslant s < \infty$ sendo u_* a única solução positiva do problema estacionário (P).*

2. *Se $m \leqslant 0$ então $\mu_1(\lambda) > 0$ para todo $\lambda > 0$. Além disso, $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ em $L^s(\Omega)$ para todo $\lambda > 0$ e todo $1 \leqslant s < \infty$.*

3. *Se m muda de sinal e $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p < 0$ então $\mu_1(\lambda) < 0$ $\forall \lambda \in (\lambda_1, +\infty)$ e $\mu_1(\lambda) \geqslant 0$ $\forall \lambda \in (0, \lambda_1]$ sendo $\lambda_1 > 0$ o único autovalor principal positivo de* (3.19)*. Além disso, $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_*$ em $L^s(\Omega)$ para todo $\lambda > \lambda_1$ e todo $1 \leqslant s < \infty$ sendo u_* é a única solução positiva do problema estacionário (P) e $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ em $L^s(\Omega)$ para todo $0 < \lambda \leqslant \lambda_1$ e todo $1 \leqslant s < \infty$.*

Corolário 3.3 *Assuma $(H_1) - (H_3)$ e $\mu_1(0) < 0$.*

1. *Se $\alpha(V,m) \leqslant 0$ e m não muda de sinal então $\mu_1(\lambda) < 0$ para todo $\lambda > 0$. Além disso, $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_*$ em $L^s(\Omega)$ para todo $\lambda > 0$ e todo $1 \leqslant s < \infty$ sendo u_* é a única solução positiva do problema estacionário (P).*

2. *Se $\alpha(V,m) > 0$ e $m \geqslant 0$ então $\mu_1(\lambda) < 0$ para todo $\lambda > 0$. Além disso, $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_*$ em $L^s(\Omega)$ para todo $\lambda > 0$ e todo $1 \leqslant s < \infty$ sendo u_* a única solução positiva do problema estacionário (P).*

3. *Se* $\alpha(V,m) > 0$ *e* $m \leqslant 0$ *então* $\mu_1(\lambda) < 0\ \forall\lambda \in (0,\lambda_1)$ *e* $\mu_1(\lambda) \geqslant 0\ \forall\lambda \in [\lambda_1,+\infty)$ *sendo* $\lambda_1 > 0$ *o único autovalor principal positivo de* (3.19). *Além disso,* $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_*$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $0 < \lambda < \lambda_1$ *e todo* $1 \leqslant s < \infty$ *sendo* u_* *a única solução positiva do problema estacionário* (P) *e* $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $\lambda_1 \leqslant \lambda$ *e todo* $1 \leqslant s < \infty$.

4. *Se* $\alpha(V,m) < 0$ *e* m *muda de sinal então* $\mu_1(\lambda) < 0$ *para todo* $\lambda > 0$. *Além disso,* $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_*$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $\lambda > 0$ *e todo* $1 \leqslant s < \infty$ *sendo* u_* *a única solução positiva do problema estacionário* (P).

5. *Se* $\alpha(V,m) \geqslant 0$, m *muda de sinal e* $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p \geqslant 0$ *então* $\mu_1(\lambda) < 0$ *para todo* $\lambda > 0$. *Além disso,* $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_*$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $\lambda > 0$ *e todo* $1 \leqslant s < \infty$ *sendo* u_* *a única solução positiva do problema estacionário* (P).

6. *Se* $\alpha(V,m) > 0$, m *muda de sinal e* $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p < 0$ *então* $\mu_1(\lambda) < 0\ \forall\lambda \in (0,\lambda_1) \cup (\lambda_2,+\infty)$ *e* $\mu_1(\lambda) \geqslant 0\ \forall\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$ *sendo* $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ *os dois autovalores principais positivos de* (3.19). *Além disso,* $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_*$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $\lambda \in (0,\lambda_1) \cup (\lambda_2,+\infty)$ *e todo* $1 \leqslant s < \infty$ *sendo* u_* *a única solução positiva do problema estacionário* (P) *e* $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ *e todo* $1 \leqslant s < \infty$.

7. *Se* $\alpha(V,m) = 0$, m *muda de sinal e* $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p < 0$ *então* $\mu_1(\lambda) < 0\ \forall\lambda \in (0,\lambda_1) \cup (\lambda_1,+\infty)$ *e* $\mu_1(\lambda_1) = 0$ *sendo* $\lambda_1 > 0$ *o único autovalor principal positivo de* (3.19). *Além disso,* $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_*$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $\lambda \in (0,\lambda_1) \cup (\lambda_1,+\infty)$ *e todo* $1 \leqslant s < \infty$ *sendo* u_* *a única solução positiva do problema estacionário* (P) *e* $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *em* $L^s(\Omega)$ *para* $\lambda = \lambda_1$ *e todo* $1 \leqslant s < \infty$.

Capítulo 4

Dinâmica de EDP parabólicas com p-Laplaciano e interação de termos logísticos com coeficientes indefinidos

Neste capítulo, consideramos o problema parabólico quasilinear

$$(Q_{u_0})\begin{cases} u_t - \Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u &= \lambda m(x)|u|^{p-2}u - \rho(\lambda)|u|^{q_1-2}u \qquad \text{em } \Omega\times(0,+\infty),\\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= \lambda\sigma(x)|u|^{p-2}u - \rho(\lambda)|u|^{q_2-2}u \qquad \text{sobre } \partial\Omega\times(0,+\infty),\\ u(0) &= u_0 \quad \text{em } \Omega, \end{cases}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geqslant 2$) um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ é o valor inicial, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ o operador p-Laplace para $2 \leqslant p < +\infty$, $\lambda > 0$ um parâmetro real, ρ é uma função real identidade ($\rho(\lambda) = \lambda$) ou função constante igual a 1 ($\rho(\lambda) = 1$), $p < q_1, q_2$ dois números reais fixos e ν o vetor unitário normal exterior à fronteira $\partial\Omega$.
Suponhamos que:

(H_1) V é uma função potencial tal que $V \in L^{r_1}(\Omega)$ com $r_1 > \dfrac{N}{p}$ e $V^- \in L^\infty(\Omega)$.

(H_2) m é uma função de peso $m \in L^{r_2}(\Omega)$ com $r_2 > \dfrac{N}{p}$ e $m^+ \not\equiv 0 \in L^\infty(\Omega)$ e $m^- \not\equiv 0$ (m muda de sinal).

(H_3) $\sigma \in L^\infty(\partial\Omega)$.

Observação 4.1 *Tal como no Capítulo 3 os resultados das seções 4.1 e 4.2 ainda são válidas se consideramos* $V^- \in L^{r_1}(\Omega)$ *ou* $m^+ \in L^{r_2}(\Omega)$ *com* $r_1, r_2 > \dfrac{N}{p}$. *Para os resultados referentes à existência local e global do problema parabólico* (Q_{u_0}), *as hipóteses* $V^- \in L^\infty(\Omega)$ *e* $m^+ \in L^\infty(\Omega)$ *serão fundamentais para garantir* $f(x,t) = (V^- + \lambda m^+)(x)(\alpha(x,t))^{p-1}$ *esteja em* $L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ *que é hipótese do Lema 4.3, pois que a função* $f \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ *é uma condição essencial no argumento da prova desse lema.*

O capítulo é organizado como segue. Na Seção 4.1 estudamos um problema de autovalores. Seção 4.2 é dedicada à existência de subsolucões não-negativas e supersoluções limitadas do problema estacionario (Q) e também à caracterização da existência de solução de (Q) em termos do autovalor principal de (EQ_λ). Na Seção 4.3 introduzimos um problema parabólico abstrato que envolve um operador monótono. Mostramos existência, unicidade e provamos um principio de comparação. Na Seção 4.4 estudamos a existência local e global no tempo do problema parabólico (Q_{u_0}). Finalmente na Seção 4.5 estabelecemos o comportamento assintótico das soluções de (Q_{u_0}) quando o tempo vai para o infinito.

4.1 Problema de autovalores associado a (Q_{u_0})

Consideremos para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ o problema de autovalores no parâmetro μ

$$(EQ_\lambda)\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u & = \lambda m(x)|u|^{p-2}u + \mu(\lambda)|u|^{p-2}u \quad \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = \lambda \sigma(x)|u|^{p-2}u + \mu(\lambda)|u|^{p-2}u \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Estamos interessados nas soluções fracas do problema (EP_λ), ou seja em função não-negativa $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ que satisfaz

$$\int |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \phi + \int V(x)|u|^{p-2}u\phi = \lambda \left[\int m(x)|u|^{p-2}u\phi + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)|u|^{p-2}u\phi\right] + \mu(\lambda)\left[\int |u|^{p-2}u\phi + \int_{\partial\Omega} |u|^{p-2}u\phi\right], \tag{4.1}$$

para todo $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$. Denotemos por $E_\lambda : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional de energia associado ao problema (EP_λ), definido por

$$E_\lambda(u) = \int |\nabla u|^p + \int V(x)|u|^p - \lambda\left[\int m(x)|u|^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)|u|^p\right], \tag{4.2}$$

e

$$\mathcal{M} := \left\{u \in W^{1,p}(\Omega); \int |u|^p + \int_{\partial\Omega} |u|^p = 1\right\}. \tag{4.3}$$

Teorema 4.1 *Suponha $V, m \in L^r(\Omega)$ com $r > \dfrac{N}{p}$ e assuma (H_3). Então para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ o problema (EQ_λ) tem um único autovalor principal*

$$\mu_1(\lambda) := \inf_{u\in\mathcal{M}}\{E_\lambda(u)\}. \tag{4.4}$$

Além disso, $\mu_1(\lambda)$ é um autovalor simples.

Prova: Procedendo como na prova do Teorema 3.1 o funcional E_λ é coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente sobre $\mathcal{M}$. Assim o funcional E_λ atinge um mínimo $\mu_1(\lambda)$ em algum $\widetilde{u} \in \mathcal{M}$, o qual, pelo teorema dos multiplicadores de Lagrange, $\widetilde{u}$ é uma solução do problema (EQ_λ). Note que $|\widetilde{u}|$ também é autofunção do problema (EQ_λ). Assim $|\widetilde{u}| \geqslant 0$

q.t.p. em Ω. Pela desigualdade Harnack de [103] $|\widetilde{u}| > 0$ q.t.p. em Ω e por argumento feito na prova do Teorema 1. de [84] temos $|\widetilde{u}| > 0$ q.t.p. em $\overline{\Omega}$. A prova que $\mu_1(\lambda)$ é simples segue o mesmo raciocínio aplicado no Teorema 3.4. $\square$

É essencial nos argumentos para o problema parabólico (Seções 4.4 e 4.5) que autofunções principais de (EQ_λ) sejam limitadas. Parece ser dificil aplicar a iteração de Moser ao problema (EQ_λ), como feito na seção 3.1. Vamos seguir outra abordagem , utilizando um resultado de regularidade em [101] e o Lema 5.1 de [83].

Proposição 4.1 *Toda autofunção principal associada a $\mu_1(\lambda)$ é limitada*

Prova: Suponha que ψ é uma autofunção associada ao autovalor $\mu_1(\lambda)$. Segue do Lema 2.1 de [101] que $\psi \in L^s(\Omega) \cap L^s(\partial\Omega)$ para todo $1 \leqslant s < \infty$, pois de $(H_1) - (H_2)$ temos que os coeficientes $-V + \lambda m + \mu_1(\lambda) \in L^r(\Omega)$ com $r > \dfrac{N}{p}$, sendo $r = \min\{r_1, r_2\}$, e de (H_3) temos que $\lambda\sigma + \mu_1(\lambda) \in L^\infty(\partial\Omega)$.

Vamos mostrar que $\psi \in L^\infty(\Omega)$. Sejam $\psi_k = (\psi - k)^+$, sendo $(\psi - k)^+(x) := \max\{\psi(x) - k, 0\}$ para quase todo $x \in \Omega$, e $A_k := \{s \in \Omega; \psi(x) \geqslant k\}$ para $k > 0$. Tomando $\phi = \psi_k$ em (4.1), temos

$$\int |\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi \cdot \nabla\psi_k + \int V(x)\psi^{p-1}\psi_k = \lambda\left[\int m(x)\psi^{p-1}\psi_k + \int_{\partial\Omega}\sigma(x)\psi^{p-1}\psi_k\right]$$
$$+\mu_1(\lambda)\left[\int \psi^{p-1}\psi_k + \int_{\partial\Omega}\psi^{p-1}\psi_k\right]. \quad (4.5)$$

Como

$$\int(\psi_k)^p = \int_{A_k}(\psi - k)^p = \int_{A_k}(\psi - k)^{p-1}(\psi - k) \leqslant \int_{A_k}\psi^{p-1}(\psi - k) = \int \psi^{p-1}\psi_k,$$

de (4.5) temos

$$\begin{aligned}
\|\psi_k\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} &= \int |\nabla\psi_k|^p + \int(\psi_k)^p \\
&\leqslant \int |\nabla\psi_k|^p + \int \psi^{p-1}\psi_k \\
&\leqslant \int (V^- + \lambda m^+ + \mu_1(\lambda) + 1)(x)\psi^{p-1}\psi_k + \int_{\partial\Omega}(\lambda\sigma^+\mu_1(\lambda))(x)\psi^{p-1}\psi_k \\
&\leqslant \|V^- + \lambda m^+ + \mu_1(\lambda) + 1\|_{L^\infty(\Omega)}\int \psi^{p-1}\psi_k \\
&\quad +\|\lambda\sigma^+ + \mu_1(\lambda)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\int_{\partial\Omega}\psi^{p-1}\psi_k \\
&\leqslant C_1\left(\int \psi^{p-1}\psi_k + \int_{\partial\Omega}\psi^{p-1}\psi_k\right) \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

sendo $C_1 := \|V^- + \lambda m^+ + \mu_1(\lambda) + 1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\lambda\sigma^+ + \mu_1(\lambda)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$. Por outro lado, escolha s suficientemente grande tal que $\psi^{p-1} \in L^s(\Omega) \cap L^s(\partial\Omega)$ e

$$\frac{1}{s(p-1)} < \frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}, \quad (4.7)$$

com $p^* := \frac{Np}{N-p}$. Pela desigualdade de Hölder em (4.6) temos

$$
\begin{aligned}
\|\psi_k\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} &\leqslant C_1\left(\|\psi^{p-1}\|_{L^s(\Omega)}\|\psi_k\|_{L^{s'}(\Omega)} + \|\psi^{p-1}\|_{L^s(\partial\Omega)}\|\psi_k\|_{L^{s'}(\partial\Omega)}\right)\\
&\leqslant C_1\left(\|\psi^{p-1}\|_{L^s(\Omega)} + C_2\|\psi^{p-1}\|_{L^s(\partial\Omega)}\right)\left(\|\psi_k\|_{L^{s'}(\Omega)} + \|\psi_k\|_{W^{1,s'}(\Omega)}\right)\\
&\leqslant C_1\left(\|\psi^{p-1}\|_{L^s(\Omega)} + C_2\|\psi^{p-1}\|_{L^s(\partial\Omega)}\right)3|A_k|^{\frac{1}{s'}-\frac{1}{p}}\|\psi_k\|_{W^{1,p}(\Omega)},
\end{aligned}
$$

pois

$$
\left(\int_{A_k}\psi_k^{s'}\right)^{\frac{1}{s'}} \leqslant \left(\int_{A_k}\psi_k^p\right)^{\frac{1}{p}}|A_k|^{\frac{1}{\left(\frac{p}{s'}\right)'}\frac{1}{s'}} \leqslant \|\psi_k\|_{W^{1,p}(\Omega)}|A_k|^{\frac{1}{s'}-\frac{1}{p}}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{A_k}|\nabla\psi_k|^{s'} + \int_{A_k}\psi_k^{s'}\right)^{\frac{1}{s'}} &\leqslant \left[\left(\int_{A_k}|\nabla\psi_k|^p\right)^{\frac{s'}{p}}|A_k|^{\frac{1}{\left(\frac{p}{s'}\right)'}} + \left(\int_{A_k}\psi_k^p\right)^{\frac{s'}{p}}|A_k|^{\frac{1}{\left(\frac{p}{s'}\right)'}}\right]^{\frac{1}{s'}}\\
&\leqslant \left(\int_{A_k}|\nabla\psi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}|A_k|^{\frac{1}{s'}-\frac{1}{p}} + \left(\int_{A_k}\psi_k^p\right)^{\frac{1}{p}}|A_k|^{\frac{1}{s'}-\frac{1}{p}}\\
&\leqslant 2\|\psi_k\|_{W^{1,p}(\Omega)}|A_k|^{\frac{1}{s'}-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\|\psi_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant \left(C_1\left(\|\psi^{p-1}\|_{L^s(\Omega)} + C_2\|\psi^{p-1}\|_{L^s(\partial\Omega)}\right)3\right)^{p-1}|A_k|^{\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{p}\right)}.
$$

Portanto,

$$
\int\psi_k \leqslant \left(\int_{A_k}\psi_k^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}|A_k|^{\frac{1}{(p^*)'}} \leqslant C_*\|\psi_k\|_{W^{1,p}(\Omega)}|A_k|^{\frac{1}{(p^*)'}} \leqslant C_4|A_k|^{1-\frac{1}{(p^*)'}+\frac{1}{p}-\frac{1}{s(p-1)}}
$$

de modo que, por (4.7) e pelo Lema 5.1 do Capítulo 2 em [83], temos $\psi \in L^\infty(\Omega)$. □

Proposição 4.2 *A função $\mu_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem as propriedades seguintes:*

1. *μ_1 é concava.*
2. *μ_1 é contínua.*
3. *A função $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \varphi_\lambda \in W^{1,p}(\Omega)$ é contínua, sendo $\varphi_\lambda \in \mathcal{M}$ autofunção principal associada ao autovalor principal $\mu_1(\lambda)$.*
4. *μ_1 é diferenciável e*

$$
\mu_1'(\lambda) = -\left[\int m(x)\varphi_\lambda^p + \int_{\partial\Omega}\sigma(x)\varphi_\lambda^p\right], \tag{4.8}
$$

sendo $\varphi_\lambda \in \mathcal{M}$ autofunção principal associado ao autovalor principal $\mu_1(\lambda)$. Além disso, μ_1' é uma função continua.

5. *Se* $m^+ \not\equiv 0$ *(respectivamente,* $m^- \not\equiv 0$*) então* $\lim_{\lambda \to +\infty} \mu_1(\lambda) = -\infty$ *(respectivamente,* $\lim_{\lambda \to -\infty} \mu_1(\lambda) = -\infty$*).*

6. $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \mu_1(\lambda) = \alpha(V, m, \sigma)$*, sendo*

$$\alpha(V, m, \sigma) := \inf \left\{ \int |\nabla u|^p + \int V(x)|u|^p ; u \in \mathcal{M}, \int m(x)|u|^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)|u|^p = 0 \right\}.$$

Prova: A prova dos itens 1 até 5 é similar à prova dos itens correspondentes na Proposição 3.2 e será omitida. Para provar o último item, notemos primeiro que para todo $u \in \mathcal{M}$ tal que $\int m(x)|u|^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)|u|^p = 0$ temos

$$\mu_1(\lambda) \leqslant \int |\nabla u|^p + \int V(x)|u|^p - \lambda \left[\int m(x)|u|^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)|u|^p \right] = \int |\nabla u|^p + \int V(x)|u|^p$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o que implica

$$\mu_1(\lambda) \leqslant \alpha(V, m, \sigma) \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Como m muda de sinal por (H_2) temos que μ_1 é limitada superiormente. Logo $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \mu_1(\lambda) = \mu_1(\lambda_0)$ para algum λ_0 com $0 = \mu_1'(\lambda_0) = -\left[\int m(x)\varphi_{\lambda_0}^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_{\lambda_0}^p \right]$. Assim

$$\begin{aligned} \alpha(V, m, \sigma) &\leqslant \int |\nabla \varphi_{\lambda_0}|^p + \int V(x)\varphi_{\lambda_0}^p \\ &= \int |\nabla \varphi_{\lambda_0}|^p + \int V(x)\varphi_{\lambda_0}^p - \lambda_0 \left[\int m(x)\varphi_{\lambda_0}^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_{\lambda_0}^p \right] \\ &= \mu_1(\lambda_0). \end{aligned}$$

□

Consideremos o seguinte problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda \sigma(x)|u|^{p-2}u & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.10}$$

Lema 4.1 $\mu_1(\lambda) = 0$ *se, e somente se,* λ *é um autovalor principal de* (4.10)*.*

Prova: É similar à prova do Lema 3.2. □

Lema 4.2 (4.10) *possui autovalor principal se, e somente se,* $\alpha(V, m) \geqslant 0$*. Mais precisamente*

1. *Se* $\alpha(V, m, \sigma) > 0$ *então* (4.10) *admite dois autovalores principais.*

2. *Se* $\alpha(V, m, \sigma) = 0$ *então* (4.10) *tem um único autovalor principal.*

Prova: É similar à prova do Lema 3.3. □

Recordemos que $\varphi_0 \in \mathcal{M}$ é autofunção associada a $\mu_1(0)$ e satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \mu_1(0)|u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \mu_1(0)|u|^{p-2}u & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.11}$$

Como em [67] podemos especificar a existência do autovalor principal positivo or negativo de (4.10) de acordo com o sinal de autovalor principal $\mu_1(0)$. Quando $\mu_1(0) < 0$ a gente precisa do Lema 4.2. Assim temos os resultados seguintes:

Teorema 4.2 *Suponha* $(H_1) - (H_3)$. *Se* $\mu_1(0) > 0$ *então* (4.10) *possui dois autovalores principais, um positivo e o outro negativo.*

Prova: Pela Proposição 4.2 existem $\lambda_1^- < 0 < \lambda_1^+$ tais que $\mu_1(\lambda_1^-) = \mu_1(\lambda_1^+) = 0$ de forma que o Lema 3.2 garante que λ_1^- e λ_1^+ são autovalores principais de (4.10). □

Teorema 4.3 *Suponha Suponha* $(H_1) - (H_3)$. *Se* $\mu_1(0) = 0$ *e* $\varphi_0 \in \mathcal{M}$ *a autofunção principal de* (4.11) *então* 0 *é um autovalor principal de* (4.10) *e tem-se:*

1. *Se* $\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_0^p = 0$ *então* 0 *é o único autovalor principal de* (4.10).
2. *Se* $\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_0^p < 0$ *então existe outro autovalor principal de* (4.10), *o qual é positivo,*
3. *Se* $\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_0^p > 0$ *então existe outro autovalor principal de* (4.10), *o qual é negativo.*

Prova: É similar à prova do item 2 do Teorema 3.3. □

Teorema 4.4 *Suponha* $(H_1) - (H_3)$. *Se* $\mu_1(0) < 0$ *temos os seguintes casos:*

1. *Se* $\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_0^p = 0$ *então não existe autovalor principal de* (4.10).
2. *Se* $\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_0^p < 0$ *e* $\alpha(V, m, \sigma) > 0$ *então existem dois autovalores principais de* (4.10), *os quais são positivos,*
3. *Se* $\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_0^p < 0$ *e* $\alpha(V, m, \sigma) = 0$ *então existe um único autovalor principal de* (4.10), *o qual é positivo,*
4. *Se* $\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_0^p > 0$ *e* $\alpha(V, m, \sigma) > 0$ *então existem dois autovalores principais de* (4.10), *os quais são negativos,*
5. *Se* $\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_0^p > 0$ *e* $\alpha(V, m, \sigma) = 0$ *então existe um único autovalor principal de* (4.10), *o qual é negativo.*

Prova: A parte da existência é consequência do Lema 4.2. O sinal é consequência da Proposição 4.2. □

Os resultados obtidos nos Teoremas 4.2, 4.3 e 4.4, com auxílio da Proposição 4.2, são descritos nas seguintes figuras:

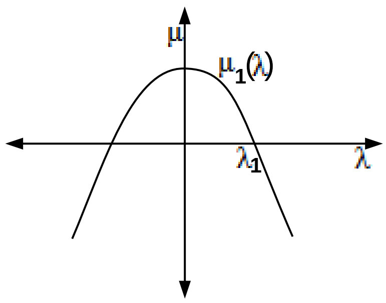

Figura 4.1: $\mu_1(0) > 0$.

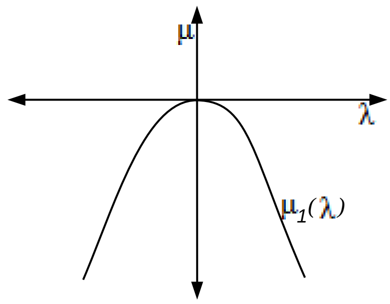

Figura 4.2: $\mu_1(0) = 0$ e $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_0^p = 0$.

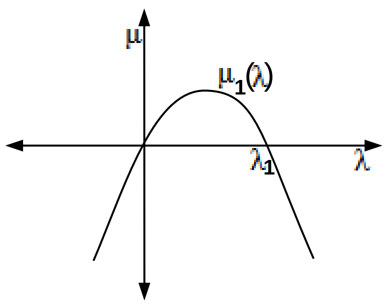

Figura 4.3: $\mu_1(0) = 0$ e $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_0^p < 0$.

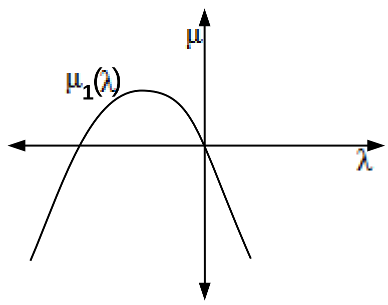

Figura 4.4: $\mu_1(0) = 0$ e $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_0^p > 0$.

4.2 Subsoluções, supersoluções e soluções do problema estacionário

O problema estacionário de (Q_{u_0}) é o problema elíptico

$$(Q)\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u & = \lambda m(x)|u|^{p-2}u - \rho(\lambda)|u|^{q_1-2}u \quad \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = \lambda\sigma(x)|u|^{p-2}u - \rho(\lambda)|u|^{q_2-2}u \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Consideremos o espaço de Banach reflexivo e separável $\mathbb{V} := W^{1,p}(\Omega) \cap L^{q_1}(\Omega) \cap L^{q_2}(\partial\Omega)$, com a norma $\|u\|_{\mathbb{V}} := \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^{q_1}(\Omega)} + \|u\|_{L^{q_2}(\partial\Omega)}$ para todo $u \in \mathbb{V}$ (veja Proposição 5.1 de [93]).

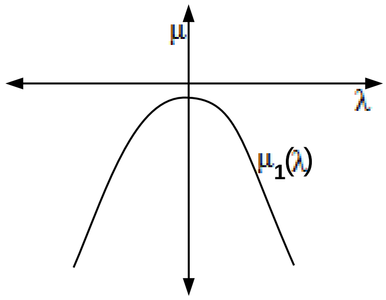

Figura 4.5: $\mu_1(0) < 0$ e $\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_0^p = 0$.

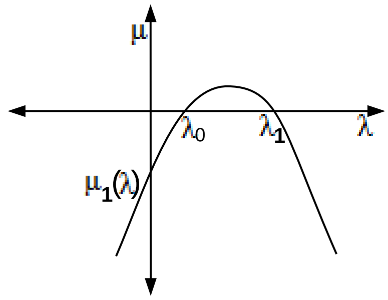

Figura 4.6: $\mu_1(0) < 0$, $\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_0^p < 0$ e $\alpha(V, m, \sigma) > 0$.

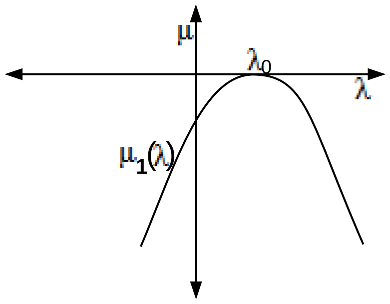

Figura 4.7: $\mu_1(0) < 0$ e $\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_0^p < 0$ e $\alpha(V, m, \sigma) = 0$.

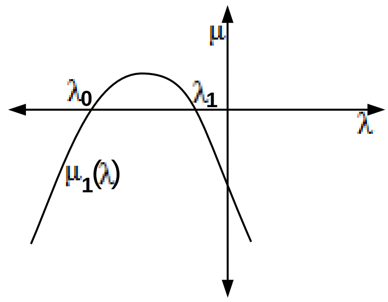

Figura 4.8: $\mu_1(0) < 0$, $\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_0^p > 0$ e $\alpha(V, m, \sigma) > 0$.

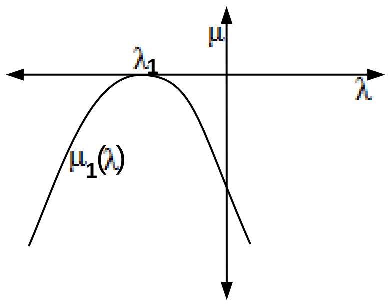

Figura 4.9: $\mu_1(0) < 0$, $\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\varphi_0^p > 0$ e $\alpha(V, m, \sigma) = 0$.

Definição 4.1 *Uma função $\widehat{\alpha} \in \mathbb{V}$ é uma subsolução fraca do problema (Q) se*

$$\int |\nabla\widehat{\alpha}|^{p-2}\nabla\widehat{\alpha}\cdot\nabla\phi + \int V(x)|\widehat{\alpha}|^{p-2}\widehat{\alpha}\phi - \lambda\left[\int m(x)|\widehat{\alpha}|^{p-2}\widehat{\alpha}\phi + \int_{\partial\Omega}\sigma(x)|\widehat{\alpha}|^{p-2}\widehat{\alpha}\phi\right] \leqslant$$
$$-\rho(\lambda)\int|\widehat{\alpha}|^{q_1-2}\widehat{\alpha}\phi - \rho(\lambda)\int_{\partial\Omega}|\widehat{\alpha}|^{q_2-2}\widehat{\alpha}\phi,$$

para todo $\phi \in \mathbb{V}$.

Definição 4.2 *Uma função* $\widehat{\beta} \in \mathbb{V}$ *é uma supersolução fraca do problema* (Q) *se*

$$\int |\nabla\widehat{\beta}|^{p-2}\nabla\widehat{\beta}\cdot\nabla\phi + \int V(x)|\widehat{\beta}|^{p-2}\widehat{\beta}\phi - \lambda\left[\int m(x)|\widehat{\beta}|^{p-2}\widehat{\beta}\phi + \int_{\partial\Omega}\sigma(x)|\widehat{\beta}|^{p-2}\widehat{\beta}\phi\right] \geqslant$$
$$-\rho(\lambda)\int |\widehat{\beta}|^{q_1-2}\widehat{\beta}\phi - \rho(\lambda)\int_{\partial\Omega}|\widehat{\beta}|^{q_2-2}\widehat{\alpha}\phi,$$

para todo $\phi \in \mathbb{V}$.

Definição 4.3 *Uma função* $u_* \in \mathbb{V}$ *é uma solução fraca do problema* (Q) *se*

$$\int |\nabla u_*|^{p-2}\nabla u_*\cdot\nabla\phi + \int V(x)|u_*|^{p-2}u_*\phi - \lambda\left[\int m(x)|u_*|^{p-2}u_*\phi + \int_{\partial\Omega}\sigma(x)|u_*|^{p-2}u_*\phi\right] =$$
$$-\rho(\lambda)\left[\int |u_*|^{q_1-2}u_*\phi + \int_{\partial\Omega}|u_*|^{q_2-2}u_*\phi\right],$$

para todo $\phi \in \mathbb{V}$.

Notemos que $\widehat{\alpha} = 0$ é uma solução fraca do problema (Q) e assim é uma subsolução fraca do problema (Q). Denotemos por φ_λ a autofunção principal associada ao autovalor $\mu_1(\lambda)$ e notemos que $0 < \inf\varphi_\lambda = \inf_{x\in\overline{\Omega}}\varphi_\lambda(x) \leqslant \varphi_\lambda(x) \leqslant \sup_{x\in\overline{\Omega}}\varphi_\lambda(x) = \sup\varphi_\lambda$ para todo $x \in \overline{\Omega}$.
As proposições que seguem fornecem condições para existência de subsolução, supersolução ou solução não-negativas para o problema (Q).

Proposição 4.3 *Se o problema* (Q) *admite para* $\lambda > 0$ *uma solução fraca* u_* *não-negativa e não-trivial então* $\mu_1(\lambda) < 0$.

Prova: Suponha que u_* é uma solução fraca não-negativa e não-trivial do problema (Q). Então

$$\int |\nabla u_*|^p + \int V(x)u_*^p - \lambda\left[\int m(x)u_*^p + \int_{\partial\Omega}\sigma(x)u_*^p\right] = -\rho(\lambda)\left[\int u_*^{q_1} + \int_{\partial\Omega}u_*^{q_2}\right],$$

e tomando $u = \dfrac{u_*}{\left(\|u_*\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u_*\|^p_{L^p(\partial\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}}$ temos que $\int u^p + \int_{\partial\Omega}u^p = 1$. Assim

$$\begin{aligned}\mu_1(\lambda) &\leqslant \int |\nabla u|^p + \int V(x)u^p - \lambda\left[\int m(x)u^p + \int_{\partial\Omega}\sigma(x)u^p\right]\\ &= \frac{-\rho(\lambda)\left[\int u_*^{q_1} + \int_{\partial\Omega}u_*^{q_2}\right]}{\|u_*\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u_*\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} < 0.\end{aligned}$$

□

Proposição 4.4 *Se* $\lambda > 0$, $\mu_1(\lambda) < 0$ *e* $0 < \epsilon \leqslant \min\left\{\left(\frac{-\mu_1(\lambda)}{\rho(\lambda)}\right)^{\frac{1}{q-p}}\frac{1}{\sup\varphi_\lambda}, \frac{1}{\sup\varphi_\lambda}\right\}$, *sendo* $q = \min\{q_1, q_2\}$ *então* $\epsilon\varphi_\lambda$ *é uma subsolução do problema* (Q).

Prova: Seja $\phi \in \mathbb{V}$ com $\phi(x) \geqslant 0$ para quase todo $x \in \Omega$. Temos:

$$
\begin{aligned}
& \int |\nabla(\epsilon\varphi_\lambda)|^{p-2}\nabla(\epsilon\varphi_\lambda)\cdot\nabla\phi + \int (V-\lambda m)(x)(\epsilon\varphi_\lambda)^{p-1}\phi - \lambda\int_{\partial\Omega}\sigma(x)(\epsilon\varphi_\lambda)^{p-1}\phi \\
= \; & \mu_1(\lambda)\int(\epsilon\varphi_\lambda)^{p-1}\phi + \mu_1(\lambda)\int_{\partial\Omega}(\epsilon\varphi_\lambda)^{p-1}\phi \\
\leqslant \; & -\rho(\lambda)(\epsilon\sup\varphi_\lambda)^{q-p}\int(\epsilon\varphi_\lambda)^{p-1}\phi - \rho(\lambda)(\epsilon\sup\varphi_\lambda)^{q-p}\int_{\partial\Omega}(\epsilon\varphi_\lambda)^{p-1}\phi \\
\leqslant \; & -\rho(\lambda)\int(\epsilon\varphi_\lambda)^{q-p}(\epsilon\varphi_\lambda)^{p-1}\phi - \rho(\lambda)\int_{\partial\Omega}(\epsilon\varphi_\lambda)^{q-p}(\epsilon\varphi_\lambda)^{p-1}\phi \\
= \; & -\rho(\lambda)\int(\epsilon\varphi_\lambda)^{q-1}\phi - \rho(\lambda)\int_{\partial\Omega}(\epsilon\varphi_\lambda)^{q-1}\phi \\
\leqslant \; & -\rho(\lambda)\int(\epsilon\varphi_\lambda)^{q_1-1}\phi - \rho(\lambda)\int_{\partial\Omega}(\epsilon\varphi_\lambda)^{q_2-1}\phi.
\end{aligned}
$$

□

Proposição 4.5 *Suponha $(H_1)-(H_3)$. Então toda constante $C \geqslant 1$ e $C \geqslant \left(\frac{\|\lambda m^+ + V^-\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\lambda\sigma^+\|_{L^\infty(\partial\Omega)}}{\rho(\lambda)}\right)^{q-p}$, sendo $q = \min\{q_1, q_2\}$ é uma supersolução do problema (Q).*

Prova: Seja $\phi \in \mathbb{V}$ com $\phi(x) \geqslant 0$ para quase todo $x \in \Omega$. Então

$$
\begin{aligned}
\rho(\lambda)\int C^{q_1-p}\phi &\geqslant \rho(\lambda)\int C^{q-p}\phi \\
&\geqslant \int \|\lambda m^+ + V^-\|_{L^\infty(\Omega)}\phi \\
&\geqslant \lambda\int m^+(x)\phi + \int V^-(x)\phi \\
&\geqslant \lambda\int m(x)\phi - \int V(x)\phi
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\rho(\lambda)\int_{\partial\Omega} C^{q_2-p}\phi &\geqslant \rho(\lambda)\int_{\partial\Omega} C^{q-p}\phi \\
&\geqslant \int_{\partial\Omega}\|\lambda\sigma^+\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\phi \\
&\geqslant \lambda\int_{\partial\Omega}\sigma^+(x)\phi \\
&\geqslant \lambda\int_{\partial\Omega}\sigma(x)\phi.
\end{aligned}
$$

As estimativas anteriores implicam que C é uma supersolução do problema (Q). □

Observação 4.2 *Se consideramos $C \geqslant \sup\varphi_\lambda$ na Proposição anterior temos $\epsilon\varphi_\lambda \leqslant C$.*

Proposição 4.6 *Existe uma única solução $u_* > 0$ em $\overline{\Omega}$ para $\lambda > 0$ do problem (Q) se, e somente se, $\mu_1(\lambda) < 0$.*

Prova: Sendo a prova similar à prova da Proposição 3.6, será omitida. □

4.3 Um problema parabólico auxiliar

Para provar o Teorema 4.5 vamos combinar teoria de operadores monótonos e iterações monótonas. Com esse objetivo vamos considerar o problema parabólico auxiliar

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u + \widetilde{V}(x)|u|^{p-2}u + \rho|u|^{q_1-2}u & = f(x,t) \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + W(x)|u|^{p-2}u + \rho|u|^{q_2-2}u & = g(x,t) \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) & = v_0 \quad \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.12}$$

com função potencial $0 \leqslant \widetilde{V} \in L^r(\Omega)$, $r > \dfrac{N}{p}$, $\rho > 0$ constante e $0 \leqslant W \in L^\infty(\partial\Omega)$. O operador $\mathcal{A} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ associado ao problema auxiliar (4.12) é definido por

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle := \int |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + \int \widetilde{V}(x)|u|^{p-2}uv + \int_{\partial\Omega} W(x)|u|^{p-2}uv + \rho \int |u|^{q_1-2}uv + \rho \int |u|^{q_2-2}uv \tag{4.13}$$

para cada $u, v \in \mathbb{V}$. O operador $\mathcal{A}$ é limitado, continuo e monótono. (Veja 3.3)

Definição 4.4 *Uma função $u \in W^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ é uma solução fraca do problema* (4.12) *se $u(0) = v_0$ e satisfaz*

$$\langle u'(t), v\rangle + \langle \mathcal{A}u(t), v\rangle = \int f(t)v + \int_{\partial\Omega} g(t)v,$$

para todo $v \in \mathbb{V}$ e quase todo $t \in (0,T)$.

A existência de solução única de (4.12) é obtida no próximo resultado

Lema 4.3 *Se $v_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ e $g \in L^\infty(0,T;L^\infty(\partial\Omega))$ então problema* (4.12) *tem uma única solução fraca.*

Para demonstrar esse lema introduzimos os seguintes operadores truncamento: Para cada $k \in \mathbb{N}$ e $u \in L^1(\Omega)$, definimos

$$T_k(u)(x) = \begin{cases} k^{q_1-1} & \text{se } u(x) \geqslant k, \\ |u(x)|^{q_1-2}u(x) & \text{se } |u(x)| \leqslant k, \\ -k^{q_1-1} & \text{se } u(x) \leqslant -k, \end{cases} \tag{4.14}$$

para quase todo $x \in \Omega$. Notemos que T_k tem as propriedades seguintes

1. $T_k(0) = 0$.
2. $|T_k(u)(x)| \leqslant k^{q_1-1}$, em particular $T_k(u) \in L^\infty(\Omega)$.
3. $(T_k(u) - T_k(v))\,(u - v) \geqslant 0$ para todo $u, v \in L^1(\Omega)$.

Similarmente, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $u \in L^1(\partial\Omega)$ definimos

$$S_k(u)(x) = \begin{cases} k^{q_2-1} & \text{se } u(x) \geqslant k, \\ |u(x)|^{q_2-2}u(x) & \text{se } |u(x)| \leqslant k, \\ -k^{q_2-1} & \text{se } u(x) \leqslant -k, \end{cases} \tag{4.15}$$

para quase todo $x \in \partial\Omega$. Notemos que S_k tem as propriedades seguintes

1. $S_k(0) = 0$.
2. $|S_k(u)(x)| \leqslant k^{q_2-1}$, ou seja $S_k(u) \in L^\infty(\partial\Omega)$.
3. $(S_k(u) - S_k(v))\,(u - v) \geqslant 0$ para todo $u, v \in L^1(\partial\Omega)$.

Agora, vamos considerar o operador $\mathcal{A}_k : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)^*$ definido por

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_k u, v\rangle := \int |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + \int \widetilde{V}(x)|u|^{p-2}uv + \int_{\partial\Omega} W(x)|u|^{p-2}uv + \\ \rho \int T_k(u)v + \rho \int_{\partial\Omega} S_k(u)v \end{aligned} \tag{4.16}$$

para cada $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$. Procedendo como na Seção 3.3 pode-se mostrar que o operador $\mathcal{A}_k$ é continuo, monótono e satisfaz

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_k u\|_{W^{1,p}(\Omega)^*} \leqslant \left(1 + \|\widetilde{V}\|_{L^r(\Omega)}(C^*)^p + \|W\|_{L^s(\partial\Omega)}(C_*)^p\right) \|u\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)} + \\ \rho k^{q_1-1}|\Omega|^{\frac{1}{p'}} + \rho k^{q_2-1}C_1, \end{aligned} \tag{4.17}$$

para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, sendo $C_1 > 0$ uma constante tal que $\|\cdot\|_{L^1(\partial\Omega)} \leqslant C_1\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Além disso, o operador $\mathcal{A}_k$ induz um operador limitado e monótono $\widetilde{\mathcal{A}}_k : L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)) \to L^{p'}(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*)$ definido por

$$(\widetilde{\mathcal{A}}_k u)(t) = \mathcal{A}_k u(t). \tag{4.18}$$

De fato, por (4.17),

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T \|\mathcal{A}_k u(t)\|^{p'}_{W^{1,p}(\Omega)^*} dt\right)^{\frac{1}{p'}} &\leqslant \left(\int_0^T \left|C\|u(t)\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)} + \rho k^{q_1-1}|\Omega|^{\frac{1}{p'}} + \rho k^{q_2-1}C_1\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leqslant C\left(\int_0^T \|u(t)\|^{(p-1)p'}_{W^{1,p}(\Omega)} dt\right)^{\frac{1}{p'}} + \rho k^{q_1-1}|\Omega|^{\frac{1}{p'}}T^{\frac{1}{p'}} + \rho k^{q_2-1}C_1 T^{\frac{1}{p'}} \\ &= C\|u\|^{p-1}_{L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))} + \rho k^{q_1-1}|\Omega|^{\frac{1}{p'}}T^{\frac{1}{p'}} + \rho k^{q_2-1}C_1 T^{\frac{1}{p'}}, \end{aligned}$$

donde $\widetilde{\mathcal{A}}_k$ é limitado. A monotonicidade é uma consequência direta da monotonicidade do operador $\mathcal{A}_k$.

Consideremos o problema truncado associado a (4.12), dado por

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u + \widetilde{V}(x)|u|^{p-2}u + \rho T_k(u) & = f(x,t) \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + W(x)|u|^{p-2}u + \rho S_k(u) & = g(x,t) \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) & = v_0 \quad \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.19}$$

Definição 4.5 *Uma função* $u \in W^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ *tal que* $u(0) = v_0$ *se diz que é uma solução fraca do problema* (4.19) *se satisfaz*

$$\langle u'(t), v\rangle + \langle \mathcal{A}_k u(t), v\rangle = \int f(t)v + \int_{\partial\Omega} g(t)v,$$

para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$ *e quase todo* $t \in (0,T)$.

Prova do Lema 4.3: Vamos dividir a prova em três passos.
Passo 1: Unicidade. Para mostrar a unicidade, suponhamos que u e $\widehat{u}$ são duas soluções fracas do problema (4.12). Então

$$\langle u'(t) - \widehat{u}'(t)), v\rangle + \int \left(|\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t) - |\nabla \widehat{u}(t)|^{p-2}\nabla \widehat{u}(t)\right) \cdot \nabla v +$$
$$\int \widetilde{V}(x)\left(|u(t)|^{p-2}u(t) - |\widehat{u}(t)|^{p-2}\widehat{u}(t)\right) v + \int_{\partial\Omega} W(x)\left(|u(t)|^{p-2}u(t) - |\widehat{u}(t)|^{p-2}\widehat{u}(t)\right) v +$$
$$\rho\int \left(|u(t)|^{q_1-2}u(t) - |\widehat{u}(t)|^{q_1-2}\widehat{u}(t)\right) v + \rho\int_{\partial\Omega} \left(|u(t)|^{q_2-2}u(t) - |\widehat{u}(t)|^{q_2-2}\widehat{u}(t)\right) v = 0,$$

para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e para quase todo $t \in (0,T)$. Tomando $v = u(t) - \widehat{u}(t)$, pela monotonicidade do operador $\mathcal{A}_k$ e a equação anterior, temos

$$\langle u'(t) - \widehat{u}'(t), u(t) - \widehat{u}(t)\rangle \leqslant 0.$$

Por integração por partes (Teorema 1.5) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |u(t) - \widehat{u}(t)|^2 \leqslant 0,$$

e assim integrando sobre $(0,t)$ para $t \in (0,T)$, temos

$$\int |u(t) - \widehat{u}(t)|^2 \leqslant \int |u(0) - \widehat{u}(0)|^2 = 0.$$

uma nova integração sobre $(0,T)$ produz

$$\|u - \widehat{u}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \int_0^T \int |u(t) - \widehat{u}(t)|^2 \leqslant 0,$$

ou seja, $u = \widehat{u}$.
Passo 2: Existência de solução fraca de (4.14).

A prova da existência de solução fraca do problema (4.19) será obtida pelo método de Faedo-Galerkin. De fato, seja $\{\psi_j\}$ suma base de Marcuševič do espaço $W^{1,p}(\Omega)$ (ver Lema 4 de [21]) a qual é ortogonal em $L^2(\Omega)$. Como $v_0 \in L^2(\Omega)$ e span$\{\psi_j\}$ é denso em $L^2(\Omega)$ existe uma sequência (β_j) em $\mathbb{R}$ tal que

$$u_n(0) = \sum_{i=1}^n \beta_i\psi_i \to v_0 \quad \text{em } L^2(\Omega), \quad \text{quando } n \to +\infty. \tag{4.20}$$

Consideremos

$$u_n(t) := \sum_{i=1}^{n} \gamma_{in}(t)\psi_i \tag{4.21}$$

sendo $\gamma_{1n}, \dots, \gamma_{nn}$ solução do sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \int u_n'(t)v + \langle \mathcal{A}_k u_n(t), v\rangle = \int f(t)v + \int_{\partial\Omega} g(t)v \\ v \in \operatorname{span}\{\psi_1, \cdots, \psi_n\} \\ u_n(0) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \psi_i. \end{cases} \tag{4.22}$$

Tomando $v = \psi_j$, para $j = 1, \dots, n$, e usando o fato que o conjunto $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$ é ortogonal em $L^2(\Omega)$ vemos que o sistema (4.22) é equivalente ao problema de Cauchy

$$\begin{cases} \gamma_n'(t) = F_n(t, \gamma_n(t)) = F_n(\gamma_n(t)) + G_n(t) \\ \gamma_n(0) = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \end{cases} \tag{4.23}$$

sendo:

$$\gamma_n(t) = \left(\gamma_{1n}(t)\left(\int \psi_1^2\right)^{\frac{1}{2}}, \cdots, \gamma_{nn}(t)\left(\int \psi_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right), \tag{4.24}$$

$\gamma_n'(t) = \left(\gamma_{1n}'(t)\left(\int \psi_1^2\right)^{\frac{1}{2}}, \cdots, \gamma_{nn}'(t)\left(\int \psi_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$, $F_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dado por $F_n(x) = (F_{1n}(x), \cdots, F_{nn}(x))$ e $F_{jn}(x) := -\left\langle \mathcal{A}_k \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\psi_i}{\left(\int \psi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \frac{\psi_j}{\left(\int \psi_j^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right\rangle$ para todo, $j = 1, \dots, n$ e todo $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e

$$G_n(t) := \left(\int f(t)\frac{\psi_1}{\left(\int \psi_1^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \int_{\partial\Omega} g(t)\frac{\psi_1}{\left(\int \psi_1^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \cdots, \int f(t)\frac{\psi_n}{\left(\int \psi_n^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \int_{\partial\Omega} g(t)\frac{\psi_n}{\left(\int \psi_n^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Como o operador $\mathcal{A}_k$ é continuo, F_n é continua e G_n é mensurável, pelo Teorema 1 de [66] o problema de Cauchy (4.23) possui uma solução $\gamma_n \in AC([0, t_n]; \mathbb{R}^n)$ para algum $t_n > 0$. Tomando $v = u_n(t)$ em (4.22), por (4.13) temos

$$\begin{aligned} \int u_n'(t)u_n(t) + \int |\nabla u_n(t)|^p + \int \widetilde{V}(x)|u_n(t)|^p + \int_{\partial\Omega} W(x)|u_n(t)|^p + \rho \int T_k(u_n(t))u_n(t) \\ + \rho \int_{\partial\Omega} S_k(u_n(t))u_n(t) = \int f(t)u_n(t) + \int_{\partial\Omega} g(t)u_n(t). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Pela desigualdade de Young,

$$\left|\int f(t)u_n(t)\right| \leqslant \int |f(t)||u_n(t)| \leqslant \frac{1}{2}\int |u_n(t)|^2 + \frac{1}{2}\int |f(t)|^2$$

e combinando as desigualdades de Young e Hölder com o Lema 2.2 obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial\Omega} g(t)u_n(t)\right| &\leqslant \int_{\partial\Omega} |g(t)||u_n(t)| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |u_n(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |g(t)|^2 \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int |\nabla u_n(t)|^2 + \frac{A'}{2}\int |u_n(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |g(t)|^2 \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\int |\nabla u_n(t)|^p\right)^{\frac{2}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{(\frac{p}{2})'}} + \frac{A'}{2}\int |u_n(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |g(t)|^2 \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int |\nabla u_n(t)|^p + \frac{C(1)}{2}|\Omega| + \frac{A'}{2}\int |u_n(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |g(t)|^2,
\end{aligned}$$

sendo $C(1)$ a constante em (1.10) para $\frac{p}{2}$ e $\epsilon = 1$.
As estimativas anteriores permitem obter de (4.25) a desigualdade

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |u_n(t)|^2 + \frac{1}{2}\int |\nabla u_n(t)|^p \leqslant \frac{1+A'}{2}\int |u_n(t)|^2 + \frac{1}{2}\int |f(t)|^2 + \frac{C(1)}{2}|\Omega| + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |g(t)|^2. \quad (4.26)$$

Pelo Lema de Gronwall,

$$\int |u_n(t)|^2 \leqslant \mathrm{e}^{(1+A')t}\left[\int |u_n(0)|^2 + \int_0^t\int |f(s)|^2 ds + \int_0^t C(1)|\Omega| ds + \int_0^t\int_{\partial\Omega} |g(s)|^2 ds\right], \quad (4.27)$$

$\forall t \in [0,T]$, que implica a estimativa

$$\int |u_n(t)|^2 \leqslant \mathrm{e}^{(1+A')T}\left[\int |u_n(0)|^2 + \int_0^T\int |f(t)|^2 dt + C(1)|\Omega|T + \int_0^T\int_{\partial\Omega} |g(t)|^2 dt\right], \quad (4.28)$$

$\forall t \in [0,T]$. Notemos que $\displaystyle\int |u_n(t)|^2 = \sum_{i=1}^n (\gamma_{in}(t))^2 \int \psi_i^2 = \|\gamma_n(t)\|^2_{\mathbb{R}^n}$ (veja (4.24)), assim por (4.28) γ_n (ou u_n) está definido globalmente sobre $[0,T]$. Além disso, integrando (4.26) sobre $(0,T)$ com $t \in (0,T]$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int |u_n(T)|^2 - \frac{1}{2}\int |u_n(0)|^2 + \frac{1}{2}\int_0^T\int |\nabla u_n(t)|^p dt &\leqslant \frac{1+A'}{2}\int_0^T\int |u_n(t)|^2 dt \\
&+\frac{1}{2}\int_0^T\int |f(t)|^2 dt + \frac{C(1)}{2}|\Omega|T + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega} |g(t)|^2 dt.
\end{aligned}$$

Combinando com as desigualdades anteriores (4.28) obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int |\nabla u_n(t)|^p dt &\leqslant \int |u_n(0)|^2 + (1+A')\int_0^T\int |u_n(t)|^2 dt + \int_0^T\int |f(t)|^2 dt + \\
&\quad C(1)|\Omega|T + \int_0^T\int_{\partial\Omega} |g(t)|^2 dt \\
&\leqslant C_T, \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

sendo

$$C_T = \Big(1 + (1+A')\mathrm{e}^{(1+A')T}T\Big)\left[\int |u_n(0)|^2 + \int_0^T \int |f(t)|^2 dt + C(1)|\Omega|T + \int_0^T \int_{\partial\Omega} |g(t)|^2 dt\right].$$

Além disso, de (4.28), (4.29) e Observação 15 de [23](p. 286)

$$\begin{cases} u_n \text{ é uma sequência limitada em } L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)), \\ u_n(T) \text{ é uma sequência limitada em } L^2(\Omega), \end{cases}$$

e como o operador $\widetilde{\mathcal{A}}_k : L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)) \to L^{p'}(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*)$, dado por (4.18), é limitado, temos que

$$\widetilde{\mathcal{A}}_k u_n \text{ é uma sequência limitada em } L^{p'}(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*).$$

Portanto, passando a uma subsequência se necessário, obtemos

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)), & \text{quando } n \to +\infty\ , \\ u_n(T) \rightharpoonup \xi \quad \text{em } L^2(\Omega), & \text{quando } n \to +\infty\ , \\ \widetilde{\mathcal{A}}_k u_n \rightharpoonup \chi \quad \text{em } L^{p'}(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*), & \text{quando } n \to +\infty\ . \end{cases}$$

Agora vamos mostrar que u é uma solução fraca do problema (4.19). Seja $\psi \in C^\infty([0,T])$ e $v \in W^{1,p}(\Omega)$, então existe $v_n \in \operatorname{span}\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$ tal que

$$v_n \to v \quad \text{em } W^{1,p}(\Omega), \text{ quando } n \to +\infty\ . \tag{4.30}$$

Por integração por partes (Teorema 1.5) temos que

$$\int u_n(T)\psi(T)v_n - \int u_n(0)\psi(0)v_n = \int_0^T \int u_n'(t)\psi(t)v_n + \int_0^T \int u_n(t)\psi'(t)v_n$$

e, por (4.22),

$$\begin{aligned} \int u_n(T)\psi(T)v_n - \int u_n(0)\psi(0)v_n &= \int_0^T \int f(t)\psi(t)v_n + \int_0^T \int_{\partial\Omega} g(t)\psi(t)v_n \\ &\quad - \int_0^T \langle \mathcal{A}_k u_n(t), \psi(t)v_n\rangle + \int_0^T \int u_n(t)\psi'(t)v_n. \end{aligned}$$

Assim, passando ao limite quando $n \to +\infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \int \xi\psi(T)v - \int v_0\psi(0)v &= \int_0^T \int f(t)\psi(t)v + \int_0^T \int_{\partial\Omega} g(t)\psi(t)v \\ &\quad - \int_0^T \langle \chi(t), \psi(t)v\rangle + \int_0^T \int u(t)\psi'(t)v, \end{aligned} \tag{4.31}$$

para todo $\psi \in C^\infty([0,T])$ e $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Um caso particular de (4.31) é

$$\int_0^T \left(\int f(t)v + \int_{\partial\Omega} g(t)v - \langle \chi(t), v\rangle\right)\psi(t) = -\int_0^T \left(\int u(t)v\right)\psi'(t), \tag{4.32}$$

para todo $\psi \in C_c^\infty((0,T))$ e $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Então por Teorema 1.4 (ou Proposição 23.20 de [111]) a equação (4.32) nos garante que a derivada generalizada u' existe e

$$u' = f + g - \chi \quad \text{em } L^{p'}(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*), \tag{4.33}$$

ou seja, $u \in W^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$. Por outro lado, para $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\psi \in C^\infty([0,T])$, por integração por partes (Teorema 1.5) com $u, \psi v \in W^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$, temos

$$\int u(T)\psi(T)v - \int u(0)\psi(0)v = \int_0^T \int \langle u'(t), \psi(t)v\rangle + \int_0^T \int u(t)\psi'(t)v.$$

Logo, por (4.31) e (4.33) temos que

$$\int u(T)\psi(T)v - \int u(0)\psi(0)v = \int \xi\psi(T)v - \int v_0\psi(0)v, \tag{4.34}$$

para todo $\psi \in C^\infty([0,T])$ e $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Escolhendo $\psi \in C^\infty([0,T])$ tal que $\psi(0) = 1$ e $\psi(T) = 0$ em (4.34) obtemos $\displaystyle\int (u(0) - v_0)v = 0$ para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$, em particular para todo $v \in C_c^\infty(\Omega)$, que implica que

$$u(0) = v_0. \tag{4.35}$$

Similarmente, escolhendo $\psi \in C^\infty([0,T])$ tal que $\psi(0) = 0$ e $\psi(T) = 1$ em (4.34) obtemos $\displaystyle\int (u(T) - \xi)v = 0$ para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$, o que implica

$$u(T) = \xi. \tag{4.36}$$

Resta mostrar que $\chi = \widetilde{\mathcal{A}}_k u$. Notemos que por (4.22), (4.35), (4.36) e (4.33)

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} \int_0^T \langle \widetilde{\mathcal{A}}_k u_n(t), u_n(t)\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^T \left(\int f(t)u_n(t) + \int_{\partial\Omega} g(t)u_n(t)\right) - \\
&\quad \liminf_{n\to+\infty} \int_0^T \int u_n'(t)u_n(t) \\
&= \int_0^T \int f(t)u(t) + \int_0^T \int_{\partial\Omega} g(t)u(t) - \\
&\quad \liminf_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\int |u_n(T)|^2 - \frac{1}{2}\int |u_n(0)|^2 \right) \\
&= \int_0^T \int f(t)u(t) + \int_0^T \int_{\partial\Omega} g(t)u(t) + \frac{1}{2}\int |v_0|^2 - \\
&\quad \frac{1}{2}\liminf_{n\to+\infty} \int |u_n(T)|^2 \\
&\leqslant \int_0^T \int f(t)u(t) + \int_0^T \int_{\partial\Omega} g(t)u(t) + \frac{1}{2}\int |v_0|^2 - \\
&\quad \frac{1}{2}\int |u(T)|^2 \\
&= \int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T \langle \widetilde{\mathcal{A}}_k u_n(t), v(t)\rangle = \int_\delta^T \langle \chi(t), v(t)\rangle, \quad \forall v \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)) \tag{4.38}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T \langle \widetilde{\mathcal{A}}_k v(t), u_n(t)-v(t)\rangle = \int_0^T \langle \widetilde{\mathcal{A}} v(t), u(t)-v(t)\rangle, \quad \forall v \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)). \tag{4.39}$$

Assim (4.37), (4.38), (4.39) e a monotonicidade do operador $\widetilde{\mathcal{A}}_k$ implicam que

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \limsup_{n\to+\infty}\int_0^T \langle \widetilde{\mathcal{A}}_k u_n(t) - \widetilde{\mathcal{A}}_k v(t), u_n(t)-v(t)\rangle \\ &= \int_0^T \langle \chi(t) - \widetilde{\mathcal{A}}_k v(t), u(t)-v(t)\rangle, \end{aligned} \tag{4.40}$$

para todo $v \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$. Logo escolhendo $v = u - \theta w$ em (4.40) para $w \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ e $\theta > 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_0^T \langle \chi(t) - \widetilde{\mathcal{A}}_k(u-\theta w)(t), \theta w(t)\rangle \\ &\leqslant \theta\int_0^T \langle \chi(t) - \widetilde{\mathcal{A}}_k(u-\theta w)(t), w(t)\rangle, \end{aligned}$$

e como θ é positivo, temos

$$0 \leqslant \int_0^T \langle \chi(t) - \widetilde{\mathcal{A}}_k(u-\theta w)(t), w(t)\rangle.$$

Fazendo $\theta \to 0^+$ obtemos

$$0 \leqslant \int_0^T \langle \chi(t) - \widetilde{\mathcal{A}}_k(u)(t), w(t)\rangle$$

para todo $w \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$. Portanto, $\chi = \widetilde{\mathcal{A}}_k u$ e assim u é uma solução fraca do problema (4.19), ou seja,

$$\langle u'(t), v\rangle + \langle \mathcal{A}_k u(t), v\rangle - \int f(t)v - \int_{\partial\Omega} g(t)v = 0$$

para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e quase todo $t \in (0,T)$.

Passo 3: $u \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ para k suficientemente grande e é solução fraca de (4.12).

Seja $w(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t)$, então $u(t) = \mathrm{e}^t w(t)$ e $u'(t) = \mathrm{e}^t w'(t) + \mathrm{e}^t w(t)$, e assim

$$\langle \mathrm{e}^t w'(t) + \mathrm{e}^t w(t), v\rangle + \langle \mathcal{A}_k \mathrm{e}^t w(t), v\rangle - \int f(t)v - \int_{\partial\Omega} g(t)v = 0$$

para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e quase todo $t \in (0,T)$, ou seja,

$$\langle w'(t), v\rangle + \int w(t)v + \mathrm{e}^{-t}\langle \mathcal{A}_k \mathrm{e}^t w(t), v\rangle - \mathrm{e}^{-t}\int f(t)v - \mathrm{e}^{-t}\int_{\partial\Omega} g(t)v = 0 \tag{4.41}$$

para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e quase todo $t \in (0,T)$.
Seja $M \geqslant \max\left\{\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \left(\frac{\|f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}}{\rho}\right)^{\frac{1}{q_1-1}}, \left(\frac{\|g\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\partial\Omega))}}{\rho}\right)^{\frac{1}{q_2-1}}\right\}$ e fixe $k > M$. Tomando $v = (w(t) - M)^+$ em (4.41) temos

$$\langle w'(t), v\rangle + \int w(t)v + \mathrm{e}^{t(p-2)} \int |\nabla w(t)|^{p-2}\nabla w(t)\cdot\nabla v + \mathrm{e}^{t(p-2)} \int \widetilde{V}(x)|w(t)|^{p-2}w(t)v +$$
$$\mathrm{e}^{t(p-2)} \int_{\partial\Omega} W(x)|w(t)|^{p-2}w(t)v + \rho\mathrm{e}^{-t} \int T_k(\mathrm{e}^t w(t))v + \rho\mathrm{e}^{-t} \int_{\partial\Omega} S_k(\mathrm{e}^t w(t))v -$$
$$\mathrm{e}^{-t} \int f(t)v - \mathrm{e}^{-t} \int_{\partial\Omega} g(t)v = 0$$

Notemos que se $w(t)(x) > M$ então $\mathrm{e}^t w(t)(x) > M$ e assim

$$T_k(\mathrm{e}^t w(t))(x) = \begin{cases} k^{q_1-1} > M^{q_1-1}, & \text{se } \mathrm{e}^t w(t)(x) \geqslant k, \\ (\mathrm{e}^t w(t)(x))^{q_1-1} > M^{q_1-1}, & \text{se } M < \mathrm{e}^t w(t)(x) \leqslant k. \end{cases} \tag{4.42}$$

Logo

$$\int_{\{w(t)>M\}} \left(\rho T_k(\mathrm{e}^t w(t)) - f\right) v \geqslant \int_{\{w(t)>M\}} \left(\rho M^{q_1-1} - \|f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\right)(w(t) - M)^+ \geqslant 0$$

e similarmente

$$\int_{\{w(t)>M\}} \left(\rho S_k(\mathrm{e}^t w(t)) - g(t)\right) v \geqslant \int_{\{w(t)>M\}} \left(\rho M^{q_2-1} - \|g\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\partial\Omega))}\right)(w(t) - M)^+ \geqslant 0.$$

Portanto,

$$\langle w'(t), (w(t) - M)^+\rangle \leqslant 0$$

e integrando sobre $(0,t)$ para $t \in (0,T)$, pelo Teorema 1.6 (ou exemplo 2.148 de [32]) temos

$$\int |(w(t) - M)^+|^2 \leqslant \int |(w(0) - M)^+|^2 = \int |(v_0 - M)^+|^2 = 0$$

que implica que $w(t)(x) \leqslant M$ para quase todo $x \in \Omega$.
Similarmente tomando $v = -(w(t) + M)^-$ em (4.41) temos que $-M \leqslant w(t)(x)$ para quase todo $x \in \Omega$. Portanto $|u(t)(x)| \leqslant M\mathrm{e}^t \leqslant M\mathrm{e}^T$ para todo $t \in (0,T)$ e quase todo $x \in \Omega$. Assim escolhendo $k_0 \geqslant M\mathrm{e}^T$ temos que $|u(t)(x)| \leqslant k$ para todo $k \geqslant k_0$, ou seja $T_k(u(t))(x) = |u(t)(x)|^{q_1-2}u(t)(x)$ para quase todo $x \in \Omega$ e $S_k(u(t))(x) = |u(t)(x)|^{q_2-2}u(t)(x)$ para quase todo $x \in \partial\Omega$ para quase todo $t \in (0,T)$ para todo $k \geqslant k_0$. Portanto, u é uma solução fraca de (4.12).

Lema 4.4 *Sejam $u_1, u_2 \in W^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$, satisfazendo*

$$\langle u_1'(t), v\rangle + \langle \mathcal{A}u_1(t), v\rangle \leqslant \langle u_2'(t), v\rangle + \langle \mathcal{A}u_2(t), v\rangle \tag{4.43}$$

para todo $0 \leqslant v \in W^{1,p}(\Omega)$ e quase todo $t \in (0,T)$. Se $u_1(0) \leqslant u_2(0)$ em Ω então $u_1 \leqslant u_2$ em $\Omega \times (0,T)$.

Prova: Tomando $v = (u_1(t) - u_2(t))^+ \geqslant 0$ em (4.43) temos

$$\langle u_1'(t) - u_2'(t), (u_1(t) - u_2(t))^+\rangle + \langle \mathcal{A}u_1(t) - \mathcal{A}u_2(t), (u_1(t) - u_2(t))^+\rangle \leqslant 0.$$

Logo pela monotonicidade do operador $\mathcal{A}$ obtemos

$$\langle u_1'(t) - u_2'(t), (u_1(t) - u_2(t))^+\rangle \leqslant 0. \tag{4.44}$$

Integrando (4.44) sobre $(0,t)$ conseguimos

$$\int_0^t \langle u_1'(s) - u_2'(s), (u_1(s) - u_2(s))^+\rangle ds \leqslant 0$$

e, pelo Teorema 1.6 (ou exemplo 2.148 de [32]),

$$\frac{1}{2}\int \left|(u_1(t) - u_2(t))^+\right|^2 \leqslant \frac{1}{2}\int \left|(u_1(0) - u_2(0))^+\right|^2 = 0.$$

Ou seja, $(u_1(t) - u_2(t))^+(x) = 0$ para quase todo x em Ω, ou equivalentemente, $u_1(t)(x) \leqslant u_2(t)(x)$ para quase todo $x \in \Omega$ e quase todo $t \in (0,T)$. □

4.4 Existência de solução local e global no tempo do problema parabólico (Q_{u_0})

Para cada $0 < T < +\infty$ consideremos o problema local no tempo

$$(Q_{u_0})^T \begin{cases} u_t - \Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u - \rho(\lambda)|u|^{q_1-2}u & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda\sigma(x)|u|^{p-2}u - \rho(\lambda)|u|^{q_2-2}u & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0 \quad \text{em } \Omega, \end{cases}$$

associado ao problema (Q_{u_0}). Relembremos que $\mathbb{V} := W^{1,p}(\Omega) \cap L^{q_1}(\Omega) \cap L^{q_2}(\partial\Omega)$, o qual é denso no espaço $L^2(\Omega)$.

Definição 4.6 *Uma solução fraca local (respect. global) do problema (Q_{u_0}) é uma função $u \in W^p(0,T;\mathbb{V})$ (respect. $u \in W^p_{loc}(0,+\infty;\mathbb{V})$) satisfazendo $u(0) = u_0$ e*

$$\begin{aligned} \langle u'(t), v\rangle + \int |\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t)\cdot\nabla v + \int V(x)|u(t)|^{p-2}u(t)v = \\ \lambda\left[\int m(x)|u(t)|^{p-2}u(t)v + \int_{\partial\Omega}\sigma(x)|u(t)|^{p-2}u(t)v\right] - \\ \rho(\lambda)\left[\int |u(t)|^{q_1-2}u(t)v + \int_{\partial\Omega}|u(t)|^{q_2-2}u(t)v\right], \end{aligned}$$

para todo $v \in \mathbb{V}$ e para quase todo $t \in (0,T)$ (respect. $t \in (0,+\infty)$), para cada $0 < T < +\infty$.

Definição 4.7 *Uma subsolução fraca local (respect. global) do problema (Q_{u_0}) é uma função $\alpha \in W^p(0,T;\mathbb{V})$ (respect. $\alpha \in W^p_{loc}(0,+\infty;\mathbb{V})$ satisfazendo $\alpha(0) \leqslant u_0$ e*

$$\begin{aligned}\langle \alpha'(t), v\rangle + \int |\nabla \alpha(t)|^{p-2}\nabla\alpha(t)\cdot\nabla v + \int V(x)|\alpha(t)|^{p-2}\alpha(t)v \leqslant \\ \lambda\left[\int m(x)|\alpha(t)|^{p-2}\alpha(t)v + \int_{\partial\Omega}\sigma(x)|\alpha(t)|^{p-2}\alpha(t)v\right] - \\ \rho(\lambda)\left[\int |\alpha(t)|^{q_1-2}\alpha(t)v + \int_{\partial\Omega}|\alpha(t)|^{q_2-2}\alpha(t)v\right],\end{aligned}$$

para todo $v \in \mathbb{V}$, com $v \geqslant 0$ e para quase todo $t \in (0,T)$ (respect. $t \in (0,+\infty)$), para cada $0 < T < +\infty$.

Definição 4.8 *Uma supersolução fraca local (respect. global) do problema (Q_{u_0}) é uma função $\beta \in W^p(0,T;\mathbb{V})$ (respect. $\beta \in W^p_{loc}(0,+\infty;\mathbb{V})$ satisfazendo $\beta(0) \leqslant u_0$ e*

$$\begin{aligned}\langle \beta'(t), v\rangle + \int |\nabla \beta(t)|^{p-2}\nabla\beta(t)\cdot\nabla v + \int V(x)|\beta(t)|^{p-2}\beta(t)v \geqslant \\ \lambda\left[\int m(x)|\beta(t)|^{p-2}\beta(t)v + \int_{\partial\Omega}\sigma(x)|\beta(t)|^{p-2}\beta(t)v\right] - \\ \rho(\lambda)\left[\int |\beta(t)|^{q_1-2}\beta(t)v + \int_{\partial\Omega}|u(t)|^{q_2-2}\beta(t)v\right],\end{aligned}$$

para todo $v \in \mathbb{V}$, com $v \geqslant 0$ e para quase todo $t \in (0,T)$ (respect. $t \in (0,+\infty)$), para cada $0 < T < +\infty$.

Teorema 4.5 *Suponha que $(H_1) - (H_3)$ sejam válidas e que existam uma subsolução não-negativa α_0 e uma supersolução limitada β_0 do problema $(Q_{u_0})^T$ tal que $\alpha_0 \leqslant \beta_0$ em $\Omega \times (0,T)$. Então existem soluções u^T_{min} e u^T_{max} do problema $(Q_{u_0})^T$, tal que*

$$\alpha_0 \leqslant u^T_{min} \leqslant u \leqslant u^T_{max} \leqslant \beta_0 \quad \text{em } \Omega\times(0,T) \tag{4.45}$$

para qualquer solução u do problema $(Q_{u_0})^T$ que satisfaz $\alpha_0 \leqslant u \leqslant \beta_0$ em $\Omega \times (0,T)$.

Observação 4.3 *Se $\alpha, \beta \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\alpha(x) \leqslant \beta(x)$ para quase todo $x \in \Omega$ então $\gamma(\alpha)(x) \leqslant \gamma(\beta)(x)$ para quase todo $x \in \partial\Omega$, sendo γ o operador traço sobre $\partial\Omega$. De fato, como $(\alpha-\beta)^+(x) = 0$ para quase todo $x \in \Omega$ e $\gamma((\alpha-\beta)^+) = (\gamma(\alpha-\beta))^+$ (equação (2.49) do Teorema 2.8. de [40]) obtemos $(\gamma(\alpha-\beta))^+(x) = 0$ para quase todo $x \in \partial\Omega$ e isso é equivalente a $\gamma(\alpha-\beta)(x) \leqslant 0$ para quase todo $x \in \partial\Omega$. Portanto, o resultado segue da linearidade de γ.*

Prova:

I.- **Construção das Sequências Monótonas.** Como α_0 é uma subsolução do problema $(Q_{u_0})^T$ temos $\alpha_0(0) \leqslant u_0$. Pelo Teorema 2.10 de [68] existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções simples tal que $0 \leqslant \phi_1 \leqslant \cdots \leqslant \phi_n \leqslant \cdots \leqslant u_0 - \alpha_0(0)$ em Ω. Logo tomando $\alpha_{0,n} := \alpha_0(0) + \phi_n \in L^\infty(\Omega)$ temos que $\alpha_{0,n}(x) \to u_0(x)$ para quase todo $x \in \Omega$ e

$$\alpha_0(0) \leqslant \alpha_{0,1} \leqslant \cdots \leqslant \alpha_{0,n} \leqslant \cdots \leqslant u_0 \quad \text{em } \Omega,\ \forall n \geqslant 1. \tag{4.46}$$

Similarmente, como β_0 é uma supersolução do problema $(Q_{u_0})^T$ temos $\beta_0(0) \geqslant u_0$ e existe uma sequência $\{\widehat{\phi}_n\}$ de funções simples tal que $0 \leqslant \widehat{\phi}_1 \leqslant \cdots \leqslant \widehat{\phi}_n \leqslant \cdots \leqslant \beta_0(0) - u_0$ em Ω. Logo tomando $\beta_{0,n} := \beta_0(0) - \widehat{\phi}_n \in L^\infty(\Omega)$ temos que $\beta_{0,n}(x) \to u_0(x)$ para quase todo $x \in \Omega$ e

$$\beta_0(0) \geqslant \beta_{0,1} \geqslant \cdots \geqslant \beta_{0,n} \geqslant \cdots \geqslant u_0 \quad \text{em } \Omega,\ \forall n \geqslant 1. \tag{4.47}$$

Consideremos em (4.12) $\widetilde{V} := V^+ + \lambda m^- \in L^r(\Omega)$, sendo $r = \min\{r_1, r_2\}$, $W := \lambda\sigma^- \in L^\infty(\partial\Omega)$, $\rho := \rho(\lambda)$, $f_1(t)(x) := (\lambda m^+(x) + V^-(x))(\alpha_0(t)(x))^{p-1}$ e $\widehat{f}_1(t)(x) := (\lambda m^+(x) + V^-(x))(\beta_0(t)(x))^{p-1}$ para quase todo $x \in \Omega$ e quase todo $t \in (0,T)$, e $g_1(t)(x) := (\lambda\sigma^+(x))(\alpha_0(t)(x))^{p-1}$ e $\widehat{g}_1(t)(x) := (\lambda\sigma^+(x))(\beta_0(t)(x))^{p-1}$ para quase todo $x \in \partial\Omega$ e quase todo $t \in (0,T)$. Notemos que $f_1, \widehat{f}_1 \in L^\infty(0,T; L^\infty(\Omega))$ e $g_1, \widehat{g}_1 \in L^\infty(0,T; L^\infty(\partial\Omega))$ de modo que, pelo Lema 4.3, existem α_1 e β_1 soluções fracas dos problemas

$$\begin{cases} (\alpha_1)_t - \Delta_p \alpha_1 + \widetilde{V}(x)|\alpha_1|^{p-2}\alpha_1 + \rho(\lambda)|\alpha_1|^{q_1-2}\alpha_1 = f_1(x,t) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ |\nabla \alpha_1|^{p-2}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial \nu} + W(x)|\alpha_1|^{p-2}\alpha_1 + \rho(\lambda)|\alpha_1|^{q_2-2}\alpha_1 = g_1(x,t) & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ \alpha_1(0) = \alpha_{0,1} & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} (\beta_1)_t - \Delta_p \beta_1 + \widetilde{V}(x)|\beta_1|^{p-2}\beta_1 + \rho(\lambda)|\beta_1|^{q_1-2}\beta_1 = \widehat{f}_1(x,t) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ |\nabla \beta_1|^{p-2}\dfrac{\partial \beta_1}{\partial \nu} + W(x)|\beta_1|^{p-2}\beta_1 + \rho(\lambda)|\beta_1|^{q_2-2}\beta_1 = \widehat{g}_1(x,t) & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ \beta_1(0) = \beta_{0,1} & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

respectivamente. Logo, (4.46), (4.47) e o Lema 4.4 garantem

$$0 \leqslant \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_0 \quad \text{em } \Omega \times (0,T),$$

e pela Observação 4.3,

$$0 \leqslant \gamma(\alpha_0) \leqslant \gamma(\alpha_1) \leqslant \gamma(\beta_1) \leqslant \gamma(\beta_0) \quad \text{em } \partial\Omega \times (0,T).$$

Assim definimos iterativamente as sequências $f_n(t)(x) := (\lambda m^+(x) + V^-(x))(\alpha_{n-1}(t)(x))^{p-1}$ e $\widehat{f}_n(t)(x) := (\lambda m^+(x) + V^-(x))(\beta_{n-1}(t)(x))^{p-1}$ para quase todo $x \in \Omega$ e quase todo $t \in (0,T)$, $g_n(t)(x) := (\lambda\sigma^+(x))(\alpha_{n-1}(t)(x))^{p-1}$ e $\widehat{g}_n(t)(x) := (\lambda\sigma^+(x))(\beta_{n-1}(t)(x))^{p-1}$ para quase todo $x \in \partial\Omega$ e quase todo $t \in (0,T)$. Temos $f_n, \widehat{f}_n \in L^\infty(0,T; L^\infty(\Omega))$ e $g_n, \widehat{g}_n \in L^\infty(0,T; L^\infty(\partial\Omega))$ e assim, pelo Lema

4.3, existem $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ soluções fracas dos problemas

$$\begin{cases} (\alpha_n)_t - \Delta_p \alpha_n + \widetilde{V}(x)|\alpha_n|^{p-2}\alpha_n + \rho(\lambda)|\alpha_n|^{q_1-2}\alpha_n = f_n(x,t) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ |\nabla \alpha_n|^{p-2}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial \nu} + W(x)|\alpha_n|^{p-2}\alpha_n + \rho(\lambda)|\alpha_n|^{q_2-2}\alpha_n = g_n(x,t) & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ \alpha_n(0) = \alpha_{0,n} & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.48}$$

e

$$\begin{cases} (\beta_n)_t - \Delta_p \beta_n + \widetilde{V}(x)|\beta_n|^{p-2}\beta_n + \rho(\lambda)|\beta_n|^{q_1-2}\beta_n = \widehat{f}_n(x,t) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ |\nabla \beta_n|^{p-2}\dfrac{\partial \beta_n}{\partial \nu} + W(x)|\beta_n|^{p-2}\beta_n + \rho(\lambda)|\beta_n|^{q_2-2}\beta_n = \widehat{g}_n(x,t) & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ \beta_n(0) = \beta_{0,n} & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.49}$$

respectivamente. Por (4.46), (4.47), Lema 4.4 e por indução obtemos

$$0 \leqslant \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n \leqslant \cdots \leqslant \beta_n \leqslant \cdots \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_0 \quad \text{em } \Omega \times (0,T),\ \forall n \geqslant 1. \tag{4.50}$$

Além disso,

$$0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f_n \leqslant \cdots \leqslant \widehat{f}_n \leqslant \cdots \leqslant \widehat{f}_1 \quad \text{em } \Omega \times (0,T),\ \forall n \geqslant 1, \tag{4.51}$$

e, pela Observação 4.3,

$$0 \leqslant \gamma(\alpha_0) \leqslant \gamma(\alpha_1) \leqslant \cdots \leqslant \gamma(\alpha_n) \leqslant \cdots \leqslant \gamma(\beta_n) \leqslant \cdots \leqslant \gamma(\beta_1) \leqslant \gamma(\beta_0) \tag{4.52}$$

em $\partial\Omega \times (0,T)$, $\forall n \geqslant 1$. Também temos

$$0 \leqslant g_1 \leqslant g_2 \leqslant \cdots \leqslant g_n \leqslant \cdots \leqslant \widehat{g}_n \leqslant \cdots \leqslant \widehat{g}_1 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0,T),\ \forall n \geqslant 1. \tag{4.53}$$

Portanto de (4.50) deduzimos que os limites

$$\widetilde{\alpha}(x,t) = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n(t)(x) \quad \text{e} \quad \widetilde{\beta}(x,t) = \lim_{n\to+\infty} \beta_n(t)(x) \tag{4.54}$$

existem para quase todo $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$ e de (4.52)

$$\widetilde{\widetilde{\alpha}}(x,t) = \lim_{n\to+\infty} \gamma(\alpha_n(t))(x) \quad \text{e} \quad \widetilde{\widetilde{\beta}}(x,t) = \lim_{n\to+\infty} \gamma(\beta_n(t))(x) \tag{4.55}$$

existem para quase todo $(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$. Não é dificil ver que $\alpha_0 \leqslant \widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta} \leqslant \beta_0$ em $\Omega \times (0,T)$ e $\gamma(\alpha_0) \leqslant \widetilde{\widetilde{\alpha}} \leqslant \widetilde{\widetilde{\beta}} \leqslant \gamma(\beta_0)$ em $\partial\Omega \times (0,T)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada temos, quando $n \to +\infty$,

$$\alpha_n \nearrow \widetilde{\alpha},\ \beta_n \searrow \widetilde{\beta} \qquad \text{em } L^s(0,T;L^s(\Omega)),\ \forall 1 \leqslant s < +\infty \tag{4.56}$$

$$\gamma(\alpha_n) \nearrow \widetilde{\widetilde{\alpha}},\ \gamma(\beta_n) \searrow \widetilde{\widetilde{\beta}} \qquad \text{em } L^s(0,T;L^s(\partial\Omega)),\ \forall 1 \leqslant s < +\infty \tag{4.57}$$

$$f_n \nearrow f,\ \widehat{f}_n \searrow \widehat{f} \qquad \text{em } L^s(0,T;L^2(\Omega)),\ \forall 1 \leqslant s < +\infty, \tag{4.58}$$

sendo $f(t)(x) := (\lambda m^+(x) + V^-(x))(\widetilde{\alpha}(t)(x))^{p-1}$ e $\widehat{f}(t)(x) := (\lambda m^+(x) + V^-(x))(\widetilde{\beta}(t)(x))^{p-1}$ para quase todo $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$. Note que $f, \widehat{f} \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$. Também temos

$$g_n \nearrow g,\ \widehat{g}_n \searrow \widehat{g} \quad \text{em } L^s(0,T;L^2(\Omega)),\ \forall 1 \leqslant s < +\infty, \tag{4.59}$$

sendo $g(x,t) := (\lambda\sigma^+(x))(\widetilde{\widetilde{\alpha}}(x,t))^{p-1}$ e $\widehat{g}(x,t) := (\lambda\sigma^+(x))(\widetilde{\widetilde{\beta}}(x,t))^{p-1}$ para quase todo $(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$. Note que $g, \widehat{g} \in L^\infty(0,T;L^\infty(\partial\Omega))$.

II.- **$\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{\beta}$ são soluções fracas de** $(Q_{u_0})^T$. Vamos mostrar que $\widetilde{\alpha}$ é uma solução fraca do problema $(Q_{u_0})^T$; argumento semelhante se aplica a $\widetilde{\beta}$. De fato, tomando $v = \alpha_n(t)$ na formulação fraca do problema (4.48) temos

$$\begin{aligned}\langle \alpha_n'(t), \alpha_n(t)\rangle + \langle \mathcal{A}\alpha_n(t), \alpha_n(t)\rangle &= \int f_n(t)\alpha_n(t) + \int_{\partial\Omega} g_n(t)\alpha_n(t)\\ &\leqslant \int f(t)\beta_0(t) + \int_{\partial\Omega} g(t)\beta_0(t).\end{aligned}$$

Integrando sobre $(0,T)$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int |\alpha_n(T)|^2 - \frac{1}{2}\int |\alpha_{0,n}|^2 + \int_0^T \langle \mathcal{A}\alpha_n(t), \alpha_n(t)\rangle \leqslant \int_0^T \left(\int f(t)\beta_0(t) + \int_{\partial\Omega} g(t)\beta_0(t)\right)$$

e assim

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int |\alpha_n(T)|^2 + \int_0^T\int |\nabla\alpha_n(t)|^p &\leqslant \frac{1}{2}\int |\alpha_{0,n}|^2 + \int_0^T \left(\int f(t)\beta_0(t) + \int_{\partial\Omega} g(t)\beta_0(t)\right)\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int |u_0|^2 + \int_0^T \left(\int f(t)\beta_0(t) + \int_{\partial\Omega} g(t)\beta_0(t)\right).\end{aligned} \tag{4.60}$$

Então existe uma subsequência da sequência $\{\alpha_n\}$, ainda denotada por $\{\alpha_n\}$, tal que

$$\begin{cases}\alpha_n \rightharpoonup \widetilde{\alpha} & \text{em } L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)),\\ \alpha_n(T) \rightharpoonup \widetilde{\xi} & \text{em } L^2(\Omega),\\ \widetilde{\mathcal{A}}\alpha_n \rightharpoonup \widetilde{\chi} & \text{em } L^{p'}(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*)\\ \alpha_n(0) = \alpha_{0,n} \nearrow u_0 & \text{em } L^2(\Omega).\end{cases}$$

A primeira convergência implica que $\gamma(\alpha_n) \rightharpoonup \gamma(\widetilde{\alpha})$ em $L^p(0,T;L^p(\partial\Omega))$ e essa convergência junto com (4.57) implica $\gamma(\widetilde{\alpha}) = \widetilde{\widetilde{\alpha}}$.

Como na prova da existência do Lema 4.3 mostra-se que existe $\widetilde{\alpha}' = f + g - \widetilde{\chi} \in L^{p'}(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*)$, $\widetilde{\alpha}(0) = u_0$ e $\widetilde{\xi} = \widetilde{\alpha}(T)$. A prova de $\widetilde{\chi} = \widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\alpha}$ é feito como segue.

Notemos que

$$
\begin{aligned}
& \limsup_{n\to+\infty} \int_0^T \langle \widetilde{\mathcal{A}}\alpha_n(t), \alpha_n(t)\rangle \\
= \; & \limsup_{n\to+\infty} \left(\int_0^T \int f_n(t)\alpha_n(t) + \int_0^T \int_{\partial\Omega} g_n(t)\alpha_n(t) - \int_0^T \int \alpha_n'(t)\alpha_n(t) \right) \\
= \; & \limsup_{n\to+\infty} \left(\int_0^T \int f_n(t)\alpha_n(t) + \int_0^T \int_{\partial\Omega} g_n(t)\alpha_n(t) + \frac{1}{2}\int |\alpha_n(0)|^2 - \frac{1}{2}\int |\alpha_n(T)|^2 \right) \\
= \; & \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^T \int f_n(t)\alpha_n(t) + \int_0^T \int_{\partial\Omega} g_n(t)\alpha_n(t) + \frac{1}{2}\int |\alpha_n(0)|^2 \right) - \\
& \frac{1}{2} \liminf_{n\to+\infty} \left(\int |\alpha_n(T)|^2 \right) \\
= \; & \int_0^T \int f(t)\widetilde{\alpha}(t) + \int_0^T \int_{\partial\Omega} g(t)\widetilde{\alpha}(t) + \frac{1}{2}\int |u_0|^2 - \frac{1}{2} \liminf_{n\to+\infty} \left(\int |\alpha_n(T)|^2 \right) \\
\leqslant \; & \int_0^T \int f(t)\widetilde{\alpha}(t) + \int_0^T \int_{\partial\Omega} g(t)\widetilde{\alpha}(t) + \frac{1}{2}\int |u_0|^2 - \frac{1}{2}\int |\widetilde{\alpha}(T)|^2 \\
= \; & \int_0^T \int f(t)\widetilde{\alpha}(t) + \int_0^T \int_{\partial\Omega} g(t)\widetilde{\alpha}(t) - \int_0^T \langle \widetilde{\alpha}'(t), \widetilde{\alpha}(t)\rangle \\
= \; & \int_0^T \langle \widetilde{\chi}(t), \widetilde{\alpha}(t)\rangle.
\end{aligned} \tag{4.61}
$$

Também são válidas

$$
\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \langle \widetilde{\mathcal{A}}\alpha_n(t), v(t)\rangle = \int_0^T \langle \widetilde{\chi}(t), v(t)\rangle \tag{4.62}
$$

e

$$
\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \langle \widetilde{\mathcal{A}}v(t), \alpha_n(t) - v(t)\rangle = \int_0^T \langle \widetilde{\mathcal{A}}v(t), \widetilde{\alpha}(t) - v(t)\rangle, \tag{4.63}
$$

para todo $v \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$.

Os limites superiores nas relações acima e a monotonicidade do operador $\widetilde{\mathcal{A}}$ implicam

$$
\begin{aligned}
0 \; & \leqslant \; \limsup_{n\to+\infty} \int_0^T \langle \widetilde{\mathcal{A}}\alpha_n(t) - \widetilde{\mathcal{A}}v(t), \alpha_n(t) - v(t)\rangle \\
& \leqslant \; \int_0^T \langle \widetilde{\chi}(t) - \widetilde{\mathcal{A}}v(t), \widetilde{\alpha}(t) - v(t)\rangle,
\end{aligned} \tag{4.64}
$$

para todo $v \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$. Logo, escolhendo $v = \widetilde{\alpha} - \theta w$ em (4.64) para $w \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ e $\theta > 0$ temos

$$
\begin{aligned}
0 \; & \leqslant \; \int_0^T \langle \widetilde{\chi}(t) - \widetilde{\mathcal{A}}(\widetilde{\alpha} - \theta w)(t), \theta w(t)\rangle \\
& \leqslant \; \theta \int_0^T \langle \widetilde{\chi}(t) - \widetilde{\mathcal{A}}(\widetilde{\alpha} - \theta w)(t), w(t)\rangle
\end{aligned}
$$

e como θ é positivo temos

$$
0 \; \leqslant \; \int_0^T \langle \widetilde{\chi}(t) - \widetilde{\mathcal{A}}(\widetilde{\alpha} - \theta w)(t), w(t)\rangle.
$$

Fazendo $\theta \to 0^+$ obtemos

$$0 \leqslant \int_0^T \langle \widetilde{\chi}(t) - \widetilde{\mathcal{A}}(\widetilde{\alpha})(t), w(t) \rangle$$

para todo $w \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$. Portanto, $\widetilde{\chi}(t) = \mathcal{A}\widetilde{\alpha}(t)$ em $W^{1,p}(\Omega)^*$ para quase todo $t \in (0,T)$ e $\widetilde{\alpha}$ é uma solução fraca do problema $(Q_{u_0})^T$.

III.- $u^T_{min} = \widetilde{\alpha}$ e $u^T_{max} = \widetilde{\beta}$. Começamos mostrando que $\widetilde{\alpha}$ é a solução minimal. De fato, se u é qualquer solução fraca do problema $(Q_{u_0})^T$ satisfazendo $\alpha_0 \leqslant u \leqslant \beta_0$ em $\Omega \times (0,T)$, então u é uma subsolução do problema $(Q_{u_0})^T$ com $u \leqslant \beta_0$ em $\Omega \times (0,T)$. Assim, no item I.) temos $\alpha_{0,n} = u_0$, $\alpha_n = u$ $\forall n$ e também por (4.50) $u \leqslant \beta_n$ em $\Omega \times (0,T)$. Passando ao limite pontual temos que $u \leqslant \widetilde{\beta}$ em $\Omega \times (0,T)$. Similarmente u é uma supersolução do problema $(Q_{u_0})^T$ com $\alpha_0 \leqslant u$ em $\Omega \times (0,T)$. Assim, no item I.) temos $\beta_{0,n} = u_0$, $\beta_n = u$ $\forall n$ e também por (4.50) $\alpha_n \leqslant u$ em $\Omega \times (0,T)$. Passando ao limite pontual temos que $\widetilde{\alpha} \leqslant u$ em $\Omega \times (0,T)$.

□

Observação 4.4 $u^T_{min}, u^T_{max} \in C([0,T]; L^s(\Omega))$ *para cada* $1 \leqslant s < +\infty$.

Observação 4.5

$$\alpha_n \nearrow u^T_{min},\ \beta_n \searrow u^T_{max} \quad \text{em } L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)). \tag{4.65}$$

Lema 4.5 *Suponha que* $(H_1) - (H_3)$ *sejam válidas,* $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$, $0 < T_1 < T_2$ *e que* α *é uma subsolução não-negativa e* β *uma supersolução limitada de problema* $(Q_{u_0})^{T_2}$ *e* $\alpha \leqslant \beta$ *em* $\Omega \times (0,T_2)$. *Então* $u^{T_1}_{min} = u^{T_2}_{min}$ *sobre* $[0,T_1]$.

Prova: Similar à prova do Lema 3.6. □

Teorema 4.6 *Suponha que* $(H_1) - (H_3)$ *sejam válidas e que existam uma subsolução não-negativa* α *e uma supersolução limitada* β *do problema* (Q_{u_0}) *tal que* $\alpha \leqslant \beta$ *em* $\Omega \times (0,+\infty)$. *Então existem* u_{min} *e* u_{max} *soluções fracas limitadas do problema* (Q_{u_0}) *tal que*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant u_{min} \leqslant u \leqslant u_{max} \leqslant \beta \quad \text{em } \Omega \times (0,+\infty) \tag{4.66}$$

para qualquer solução u *do problema* (Q_{u_0}) *que satisfaz* $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$ *em* $\Omega \times (0,+\infty)$.

Prova: Similar à prova do Teorema 3.6. □

4.5 Comportamento Assintótico da Solução

Lema 4.6 *Suponha que* $(H_1) - (H_3)$ *sejam válidas e* $\alpha_0 \leqslant \beta_0$ *sejam uma subsolução não-negativa e supersolução limitada fraca do problema* $(Q_{\alpha_0(0)})$, *respectivamente. Se* α_0 *é não-decrescente em* t *para quase todo* $x \in \Omega$ *então a solução minimal* α_{min} *do problema* $(Q_{\alpha_0(0)})$ *em* $[\alpha_0, \beta_0]$ *é não-decrescente em* t *para quase todo* $x \in \Omega$. *Similarmente, se* β_0 *é não-crescente em* t *para quase todo* $x \in \Omega$ *então a solução maximal* β_{max} *do problema* $(Q_{\beta_0(0)})$ *em* $[\alpha_0, \beta_0]$ *é não-crescente em* t *para quase todo* $x \in \Omega$.

Prova: Similar à prova do Lema 3.7. □

Lema 4.7 *Suponha que* $(H_1)-(H_3)$ *sejam válidas e que* $\widehat{\alpha}_0$ *é uma subsolução não-negativa e* $\widehat{\beta}_0$ *é uma supersolução limitada do problema estacionário* (Q), *com* $\widehat{\alpha}_0 \leqslant \widehat{\beta}_0$. *Seja* α_{min} *a solução minimal do problema* $(Q_{\widehat{\alpha}_0})$ *e* β_{max} *a solução maximal do problema* $(Q_{\widehat{\beta}_0})$ *em* $[\widehat{\alpha}_0, \widehat{\beta}_0]$. *Então, para todo* $1 \leqslant s < +\infty$

$$\alpha_{min}(t) \nearrow \alpha_*, \beta_{max}(t) \searrow \beta_* \quad em\ L^s(\Omega),$$

quando $t \to +\infty$, *sendo* α_* *e* β_* *soluções do problema* (Q) *e* $\widehat{\alpha}_0 \leqslant \alpha_* \leqslant \beta_* \leqslant \widehat{\beta}_0$.

Prova: Similar à prova do Lema 3.8. □

Lema 4.8 *Sejam* $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$ *e* α *e* β *uma subsolução não-negativa e supersolução limitada dos problemas* (Q_{u_0}) *e* (Q_{v_0}), *respectivamente, com* $\alpha \leqslant \beta$ *em* $\Omega \times (0, +\infty)$. *Suponha que* u_{min} (u_{max}) *e* v_{min} (v_{max}) *sejam as soluções mínimas (máximas) dos problemas* (Q_{u_0}) *e* (Q_{v_0}) *em* $[\alpha, \beta]$, *respectivamente. Se* $u_0 \leqslant v_0$ *em* Ω *então*

$$u_{min} \leqslant v_{min} \quad (u_{max} \leqslant v_{max}) \quad em\ \Omega \times (0, +\infty).$$

Prova: Similar à prova do Lema 3.9. □

Teorema 4.7 *Assuma que* $(H_1) - (H_3)$ *sejam válidas. Sejam* $\widehat{\alpha}$ *uma subsolução não-negativa e* $\widehat{\beta}$ *uma supersolução limitada do problema estacionário* (Q) *e considere* $\widehat{\alpha} \leqslant u_0 \leqslant \widehat{\beta}$ *em* Ω. *Se* u *é uma solução fraca do problema* (Q_{u_0}) *e considere* $\widehat{\alpha} \leqslant u \leqslant \widehat{\beta}$ *em* $\Omega \times (0, +\infty)$ *então*

$$\widehat{\alpha} \leqslant \alpha_* \leqslant \liminf_{t \to +\infty} u(t) \leqslant \limsup_{t \to +\infty} u(t) \leqslant \beta_* \leqslant \widehat{\beta} \quad em\ \Omega, \tag{4.67}$$

sendo α_*, β_* *duas soluções fracas do problema estacionário* (Q). *Em particular, se* (Q) *admite uma única solução fraca* u_* *em* $[\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}]$, *então para todo* $1 \leqslant s < +\infty$,

$$u(t) \to u_* \quad em\ L^s(\Omega),\ quando\ t \to +\infty. \tag{4.68}$$

Prova: Similar à prova do Teorema 3.8 □

Teorema 4.8 *Assuma* $(H_1) - (H_3)$. *Se* $\mu_1(\lambda) < 0$ *e* $0 < \xi \leqslant u_0(x)$ *para quase todo* $x \in \Omega$, *então toda solução fraca limitada* $u(\cdot, \cdot; u_0)$ *do problema* (Q_{u_0}) *tal que* $0 < \xi \leqslant u$ *em* $\Omega \times (0, +\infty)$ *satisfaz*

$$u(t) \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} u_* \quad em \quad L^s(\Omega), \quad \forall\, 1 \leqslant s < \infty,$$

sendo u_* *a única solução positiva do problema estacionário* (Q).

Prova: Pelas hipóteses e Proposições 4.4 e 4.5 podemos escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $C > 0$ uma constante suficientemente grande tais que $\epsilon\varphi_\lambda \leqslant u, u_0 \leqslant C$ em $\Omega \times (0, +\infty)$ $\epsilon\varphi_\lambda$ seja subsolução e C seja supersolução do problema estacionário (Q). Então pelo Teorema 4.7 e as Proposições 4.6 e 4.3 temos $u(t) \to u_*$ em $L^s(\Omega)$, quando $t \to +\infty$, para todo $1 \leqslant s < +\infty$, sendo u_* a única solução positiva do problema (Q). □

Teorema 4.9 *Assuma* $(H_1)-(H_3)$. *Se* $\mu_1(\lambda)\geqslant 0$ *e* $0\leqslant u_0(x)$ *para quase todo* $x\in\Omega$, *então toda solução fraca limitada* $0\leqslant u(\cdot,\cdot\,;u_0)$ *em* $\Omega\times(0,+\infty)$ *do problema* (Q_{u_0}) *verifica*

$$u(t)\to 0 \quad \text{em } L^s(\Omega), \text{ quando } t\to+\infty.$$

para todo $1\leqslant s<+\infty$.

Prova: Pelas hipóteses e Proposição 4.5 obtemos $0\leqslant u,u_0\leqslant C$ em $\Omega\times(0,+\infty)$ para alguma constante $C>0$ suficientemente grande tal que seja supersolução do problema estacionário (Q). Então, pelo Teorema 4.7 e Proposição 4.3, temos $u(t)\to 0$ em $L^s(\Omega)$, quando $t\to+\infty$, para todo $1\leqslant s<+\infty$. □

Finalmente, pelos Teoremas 4.2, 4.3 e 4.4 as condições $\mu_1(\lambda)<0$ e $\mu_1(\lambda)\geqslant 0$ podem ser expressos em termos do sinal de $\mu_1(0)$, o parâmetro $\lambda>0$, e as funções de peso m e σ como nos corolários abaixo:

Corolário 4.1 *Assuma* $(H_1)-(H_3)$. *Se* $\mu_1(0)>0$ *então* $\mu_1(\lambda)<0$ $\forall\lambda\in(\lambda_1,+\infty)$ *e* $\mu_1(\lambda)\geqslant 0$ $\forall\lambda\in(0,\lambda_1]$ *sendo* $\lambda_1>0$ *o único autovalor principal positivo de* (4.10). *Além disso,* $u(t)\overset{t\to+\infty}{\longrightarrow}u_*$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $\lambda>\lambda_1$ *e todo* $1\leqslant s<\infty$ *sendo* u_* *a única solução positiva do problema estacionário* (Q) *e* $u(t)\overset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $0<\lambda\leqslant\lambda_1$ *e todo* $1\leqslant s<\infty$.

Corolário 4.2 *Assuma* $(H_1)-(H_3)$ *e* $\mu_1(0)=0$.

1. *Se* $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p+\int_{\partial\Omega}\sigma\varphi_0^p\geqslant 0$ *então* $\mu_1(\lambda)<0$ $\forall\lambda>0$. *Além disso,* $u(t)\overset{t\to+\infty}{\longrightarrow}u_*$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $\lambda>0$ *e todo* $1\leqslant s<\infty$ *sendo* u_* *a única solução positiva do problema estacionário* (Q) .

2. *Se* $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p+\int_{\partial\Omega}\sigma\varphi_0^p<0$ *então* $\mu_1(\lambda)<0$ $\forall\lambda\in(\lambda_1,+\infty)$ *e* $\mu_1(\lambda)\geqslant 0$ $\forall\lambda\in(0,\lambda_1]$ *sendo* $\lambda_1>0$ *o único autovalor principal positivo de* (3.19). *Além disso,* $u(t)\overset{t\to+\infty}{\longrightarrow}u_*$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $\lambda>\lambda_1$ *e todo* $1\leqslant s<\infty$ *sendo* u_* *a única solução positiva do problema estacionário* (Q) *e* $u(t)\overset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $0<\lambda\leqslant\lambda_1$ *e todo* $1\leqslant s<\infty$.

Corolário 4.3 *Assuma* $(H_1)-(H_3)$ *e* $\mu_1(0)<0$.

1. *Se* $\alpha(V,m\sigma)<0$ *então* $\mu_1(\lambda)<0$ *para todo* $\lambda>0$. *Além disso,* $u(t)\overset{t\to+\infty}{\longrightarrow}u_*$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $\lambda>0$ *e todo* $1\leqslant s<\infty$ *sendo* u_* *a única solução positiva do problema estacionário* (Q).

2. *Se* $\alpha(V,m\sigma)\geqslant 0$ *e* $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p+\int_{\partial\Omega}\sigma\varphi_0^p\geqslant 0$ *então* $\mu_1(\lambda)<0$ *para todo* $\lambda>0$. *Além disso,* $u(t)\overset{t\to+\infty}{\longrightarrow}u_*$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $\lambda>0$ *e todo* $1\leqslant s<\infty$ *sendo* u_* *a única solução positiva do problema estacionário* (Q).

3. *Se* $\alpha(V,m,\sigma) > 0$ *e* $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma\varphi_0^p < 0$ *então* $\mu_1(\lambda) < 0\ \forall\lambda \in (0,\lambda_1)\cup(\lambda_2,+\infty)$ *e* $\mu_1(\lambda) \geqslant 0\ \forall\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$ *sendo* $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ *os dois autovalores principais positivos de* (4.10). *Além disso,* $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_*$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $\lambda \in (0,\lambda_1)\cup(\lambda_2,+\infty)$ *e todo* $1 \leqslant s < \infty$ *sendo* u_* *a única solução positiva do problema estacionário* (Q) *e* $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ *e todo* $1 \leqslant s < \infty$.

4. *Se* $\alpha(V,m,\sigma) = 0$ *e* $\displaystyle\int m(x)\varphi_0^p + \int_{\partial\Omega} \sigma\varphi_0^p < 0$ *então* $\mu_1(\lambda) < 0\ \forall\lambda \in (0,\lambda_1)\cup(\lambda_1,+\infty)$ *e* $\mu_1(\lambda_1) = 0$ *sendo* $\lambda_1 > 0$ *o único autovalor principal positivo de* (4.10). *Além disso,* $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_*$ *em* $L^s(\Omega)$ *para todo* $\lambda \in (0,\lambda_1)\cup(\lambda_1,+\infty)$ *e todo* $1 \leqslant s < \infty$ *sendo* u_* *a única solução positiva do problema estacionário* (Q) *e* $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *em* $L^s(\Omega)$ *para* $\lambda = \lambda_1$ *e todo* $1 \leqslant s < \infty$.

Referências Bibliográficas

[1] G.A. Afrouzi, K.J. Brown, *On principal eigenvalues for boundary eigenvalue problems with indefinite weight and Robin boundary conditions*, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 125–130.

[2] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I*, Comm. Pure Appl. Math. 12, (1959), 623–727.

[3] W. Allegretto, Y.X. Huang, *A Picone's identity for the p-laplacian and applications*, Nonlinear Anal. TMA 32(7), (1998), 819–830.

[4] S. Alama, G. Tarantello, *On the solvability of a semilinear elliptic equation via an associated eigenvalue problem,* Math. Z. 221 (1996), 467–493.

[5] W. Allegretto, A. Mingarelli, *On the nonexistence of positive solutions for a Schrödinger equation with an indefinite weight-function*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Can. 8 (1986), 69–73.

[6] A. Anane, *Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-laplacien avec poids.* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 305 (1987), 725–728.

[7] A.V. Babin, M.I. Vishik, *Attractors of Evolution Equations*, North Holland, Amsterdam (1992).

[8] C. Bandle, J.V. Below, W. Reichel, *Parabolic problems with dynamical boundary conditions: eigenvalue expansions and blow up*, Rend. Lincei Math. Appl. 17 (2006), 35–67.

[9] C. Bandle, W. Reichel, *A linear parabolic problem with non-dissipative dynamical boundary conditions*, in: M. Chipot, H. Ninomiya (Eds.), Recent Advances on Elliptic and Parabolic Issues, World Scientific, 2006, pp.46–79.

[10] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Noordhoff, 1976.

[11] H. Bellout, *On a special Schauder basis for the Sobolev spaces* $W_0^{1,p}(\Omega)$, Illi. Jour. Math. 39(2), (1995), 187–195.

[12] H. Berestycki, T. Cazenave, *Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 293: 489−492, 1981.

[13] H. Berestycki, F. Hamel, L. Roques, *Analysis of the periodically fragmented environment model. I. Species persistence*, J. Math. Biol. 51 (2005), 75–113.

[14] F.A. Berezin, M.A. Shubin, *The Schrödinger equation*, Kluwer, Netherlands, 1991.

[15] P.A. Binding, Y.X. Huang, *The principal eigencurve for the p-Laplacian* Differ. Integral Equ. 8 (1995), 405–414.

[16] P.A. Binding, Y.X. Huang, *Existence and nonexistence of positive eigenfunctions for the p-Laplacian*, Proc. Amer. Math. Soc. 123, (1995), 1833–1838.

[17] V.E. Bobkov, P. Takáč, *A strong maximum principle for parabolic equations with the p-Laplacian*, J. Math. Anal. Appl. 419 (2014), 218–230.

[18] V.E. Bobkov, P. Takáč, *On maximum and comparison principles for parabolic problems with the p-Laplacian*, RACSAM 113 (2019), 1141–1158.

[19] L. Boccardo, F. Murat, J.-P. Puel, *Existence results for some quasilinear parabolic equations*, Nonlinear Anal., 13 (1989), 373–392.

[20] V. Bögelein, F. Duzaar, P. Marcellini, S. Signoriello, *Nonlocal diffusion equations*, J. Math. Anal. Appl. 432 (2015), 398-428.

[21] J.L. Boldrini, L.H. de Miranda, G. Planas, *Existence and fractional regularity of solutions for a doubly nonlinear differential inclusion*, J. Evol. Equ. 13 (2013), 535–560.

[22] M. Bonforte, R.G. Iagar, J.L. Vazquez, *Local smoothing effects, positivity, and Harnack inequalities for the fast p-Laplacian equation*, Adv. Mathematics 224 (2010), 2151–2215.

[23] H. Brézis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, New York, 2011.

[24] H. Brézis, *Operateurs maximaux monotones*, North Holland, Amsterdam, 1973.

[25] K.J. Brown, S.S. Lin, *On the existence of positive eigenfunctions for an eigenvalue problem with indefinite weight function*, J. Math. Anal. Appl. 75 (1980) 112–120.

[26] L. Caffarelli, S. Dipierro, E. Valdinoci, *A logistic equation with nonlocal interactions*, Kinetic and Related Models 10 (2017), 141–170.

[27] R.S. Cantrell, C. Cosner, *Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments*. Proc. Roy. Soc. Edinb. 112, (1989), 293–318.

[28] R.S. Cantrell, C. Cosner, *The effects of spatial heterogeneity in population dynamics*, J. Math. Biol. 29, (1991), 315–338.

[29] R. S. Cantrell and C. Cosner, *Diffusive logistic equations with indefinite weights: Population models in disrupted environments. II*, SIAM J. Math. Anal. 22 (1991), 1043–1064.

[30] R.S. Cantrell, C. Cosner, *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations*, John Wiley & Sons, Great Britain, 2003.

[31] T. Caraballo, M. Herrera-Cobos, P. Marín-Rubio, *Global attractor for a nonlocal p-laplacian equation without uniqueness of solution*, Discrete and continuous Dynamical Systems Series B, 22 no 5, (2017), 1801–1816.

[32] S. Carl, V.K. Le, D. Motreanu, *Nonsmooth variational problems and their inequalities comparison principles and applications*, Springer, New York, 2007

[33] A.N. Carvalho, J. Cholewa, *NLS-like equations in bounded domains: parabolic approximation procedure*, Dicrete Cont. Dyn. Syst. 23 (2018), 57–77.

[34] A.N. Carvalho, J.W. Cholewa, T. Dlotko, *Global attractors for problems with monotone operators*, Boll. Un. Mat. Ital. B (8) 2-B (2000), 693–706.

[35] A.N. Carvalho, C.B. Gentile, *Asymptotic behaviour of non-linear parabolic equations with monotone principal part*, J. Math. Anal. Appl. 280, (2003), 252–272.

[36] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger Equations*, Courant Lecture Notes, 10, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[37] T. Cazenave, P.-L. Lions, *Orbital stability of standing waves for some non inear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. 85 (1982), 549–561.

[38] N.H. Chang, M. Chipot, *On some mixed boundary value problems with nonlocal diffusion*, Adv. Math. Sci. Appl. 14(1), (2004), 1–24.

[39] N.H. Chang, M. Chipot, *Nonlinear nonlocal evolution problems*, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. 97(no 3), (2003), 423–445.

[40] M. Chipot, *Elements of nonlinear analysis*, Birkhauser Advanced Text, 2000.

[41] M. Chipot, B. Lovat, *On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems*, Positivity, 3, (1999), 65–81.

[42] M. Chipot, L. Molinet, *Asymptotic behaviour of some nonlocal diffusion problems*, Applicable Analysis, 80, (2001), 273–315.

[43] M. Chipot, J.F. Rodrigues, *On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems*, Math. Mod. and Num. Anal., 26, (1992), 447–468.

[44] M. Chipot, T. Savitska, *Nonlocal p-laplace equations depending on the L^p norm of the gradient*, Advances in Differential Equations 19 no 11-12,(2014), 997–1020.

[45] M. Chipot, T. Savitska, *Asymptotic behaviour of the solutions of nonlocal p-laplace equations depending on the L^p norm of the gradient*, Journal of Elliptic and Parabolic Equations 1, (2015), 63–74.

[46] M. Chipot, M. Siegwart, *On the asymptotic behaviour of some nonlocal mixed boundary value problems*, Nonlinear analysis and applications: To V. Lakshmikanthan on his 80th birthday. Vol. 1,2, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (2003), 431–449.

[47] M. Chipot, V. Valente, G. Vergara Caffarelli, *Remarks on a nonlocal problem involving the Dirichlet energy*, Bend. Sem. Mat. Univ. Padova 110, (2003), 199–220.

[48] M. Chipot, S. Zheng, *Asymptotic behaviour of solutions to nonlinear parabolic equations with nonlocal terms*, Asymptot. Anal. 45 no 3-4, (2005), 301–312.

[49] E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company. Inc, USA, 1955.

[50] M. Cuesta, *Eigenvalue problems for the p-Laplacian with indefinite weights*, Electron. J. Differential Equations 33 (2001), 1–9.

[51] M. Cuesta, L. Leadi, *Weighted eigenvalue problems for quasilinear elliptic operators with mixed Robin-Dirichlet boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl. 422, (2015), 1–26.

[52] M. Cuesta, H. Ramos Quoirin, *A weighted eigenvalue problem for the p-laplacian plus a potencial*, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 16 (2009) 469–491.

[53] D.G. de Figueiredo, *Positive solutions of semilinear elliptic problems*. In D.G. de Figueiredo, ed. Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics, 957, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[54] J.I. Díaz, F. De Thélin, *On a nonlinear parabolic problem arising in some models related to turbulent flows*, SIAM J. Math. Anal., 25 (1994), 1085–1111.

[55] M.A. del Pino, *Positive solutions of a semilinear elliptic equation on a compact manifold*, Nonlinear Anal. 22 (1994), 1423–1430.

[56] A. Derlet, P. Takáč, *A quasilinear parabolic model for population evolution*, Differ. Equ. Appl. 4(1), (2012), 121–136.

[57] J. Deuel, P. Hess, *Nonlinear parabolic boundary value problems with upper and lower solutions*, Israel J. Math., 29 (1978), 92–104.

[58] E. DiBennedeto, *Degenerate parabolic equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[59] E. DiBenedetto, U.P. Gianazza, V. Vespri, *Harnack's inequality for degenerate and singular parabolic equations,* Springer, New York, 2012.

[60] P. Drábek, J. Hernández, *Existence and uniqueness of positive solutions for some quasilinear elliptic problems*, Nonlinear Analysis 44 (2001) 189–204.

[61] Y. Du, P. Huang, *Blow-up solutions for a class of semilinear elliptic and parabolic equations*, SIAM J. Math. Anal. 31 (1999), 1–18.

[62] M.A Efendiev, M. Ôtani, *Infinite-dimensional attractors for parabolic equations with p-Laplacian in heterogeneous medium* Ann. I. H. Poincaré – AN 28 (2011), 565–582.

[63] A. El Hachimi, F. De Thélin, *Supersolutions and stabilization of the solutions of the equation* $(\partial u/\partial t) - \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u)$, Nonlinear Anal. 12 (1988), 1385–1398.

[64] A. El Hachimi, F. De Thélin, *Supersolutions and stabilization of the solutions of the equation* $(\partial u/\partial t) - \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = h(x,u)$, part II, Pub. Mat. 35 (1991), 347–362.

[65] L.A. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, 1998.

[66] A.F. Filippov, *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Dordrecht: Kluwer, The Netherlands, 1988.

[67] J. Fleckinger, J. Hernández, F. de Thélin, *Existence of multiple principal eigenvalues for some indefinite linear eigenvalue problems*, Bolletino U.M.I. (8) 7-B (2004), 159–188.

[68] G.B. Folland, *Real analysis: Modern techniques and their applications*, J. Wiley & Sons Inc., New York, 1999.

[69] J.M. Fraile, P. Koch Medina, J. López-Gómez, S. Merino, *Elliptic eigenvalue problems and unbounded continua of positive solutions of a semilinear elliptic equation*, J. Differential Equations 127 (1996), 295–319.

[70] A. Friedman, *Partial Differential equations of Parabolic Type*, Robert E. Krieger publishing company, inc, USA, 1983.

[71] S. Fučík, O. John, J. Nečas *On the existence of Schauder basis in Sobolev spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. 13, (1972), 163–175.

[72] J.P. García Azorero, I. Peral Alonso, *Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian: nonlinear eigenvalues*, Comm. Partial Differential Equations 12 (1987), 1389–1430.

[73] J. García-Melián, R. Gómez-Reñasco, J. López-Gómez, J.C. Sabina de Lis, *Pointwise growth and uniqueness of positive solutions for a class of sublinear elliptic problems where bifurcation from infinity occurs*, Arch. Ration. Mech. Anal. 145 (1998) 261–289.

[74] N. Grenon, *Asymptotic behaviour for some quasilinear parabolic equations*, Nonlinear Analysis TMA. 20(7) (1993) 755–766.

[75] J.K. Hale, *Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems*, in: Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 25, American Mathematical Society, 1989.

[76] J. Hernández, *Positive solutions for the logistic equation with unbounded weights*, em: Reaction Diffusion Systems, Trieste, 1995, em: Lect. Notes Pure Appl. Math., vol. 194, Dekker, New York, 1998, pp. 183–197.

[77] P. Hess, *Periodic-parabolic boundary value problems and positivity*, Pitman Res. Notes Math. Ser. 247, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991.

[78] P. Hess, T. Kato, *On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function*, Comm. in Partial Differential Equations 5 (1980), 999–1030.

[79] S. Senn, P. Hess, *On positive solutions of a linear elliptic eigenvalue problem with Neumann boundary conditions*, Math. Ann. 258 (1982), 459–470.

[80] Y.X. Huang, *On eigenvalue problems of the p-Laplacian with Neumann boundary conditions*, Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990), 177–184.

[81] J.L. Kazdan, F.W. Warner, *Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure*, J. Differential Geometry 10 (1975), 113–134.

[82] G. Kirchhoff, *Vorlesungen über Matematische Physik. Teubner,* Leipzig, 1876.

[83] O.A. Ladyzhenskaya, N.N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press., New York, (1968).

[84] L. Leadi, A. Marcos, *A weighted eigencurve for Steklov problems with a potential*, NoDEA Nonlinear Diff. Equ. Appl. 16 (2013), 687–713.

[85] J. Lee, T. Parker, *The Yamabe problem*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 17 (1987), 37–91.

[86] Z. Liang, F. Li, J. Shi, *Positive solutions of Kirchhoff-type non-local elliptic equation: a bifurcation approach.* Proc. Royal Soc. Edinburgh 147 (2017), 875–894.

[87] P. Lindqvist, *On the equation* $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda |u|^{p-2} = 0$, Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990), 157–164. *Addendum*: Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992), 583–584.

[88] J. Lopez-Gomez, *The maximum principle and the existence of principal eigenvalues for some linear weighted eigenvalue problems*, J. Differential Equuations 127 (1996), 263–294.

[89] J. López-Gómez, *Metasolutions: Malthus versus Verhulst in population dynamics. A dream of Volterra*, em: Handb. Differ. Equ., Stationary Partial Differential Equations, vol. II, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2005, pp.211–309.

[90] A. Manes, A.M. Micheletti, *Un' estensione della teoria variazionale classica degli autovalori per operatori ellitici del secondo ordine.* Boll. Un. Mat. Ital. 7 (1973), 285–301.

[91] J.D. Murray, *Mathematical Biology*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1993.

[92] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[93] R. Nittka, *Quasilinear elliptic and parabolic Robin problems on Lipschitz domains*, Nonlinear Diff. Equ. Appl. 20 (2013), 1125–1155.

[94] A. Okubo, *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[95] M. Ôtani, *Nonmonotone perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators, Cauchy problems*, J. Differential Equations 46 (1982), 268–299.

[96] T. Ouyang, *On the positive solutions of semilinear equations* $\Delta u + \lambda u - hu^p = 0$ *on the compact manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 331 (1992), 503–527.

[97] V.M. Pérez-García, R. Pardo, *Localization phenomena in nonlinear Schrödinger equations with spatially inhomo-geneous nonlinearities: theory and applications to Bose–Einstein condensates*, Phys. D 238 (2009), 1352–1361.

[98] A. Rodríguez-Bernal, A. Vidal-López, *Extremal equilibria for reaction-diffusion equations in bounded domains and applications*, J. Differential Equations 244, (2008), 2983–3030.

[99] K. Rektorys, *Variational methods in mathematics*, Science and Engineering, Springer, Netherlands, 1977.

[100] J. Robinson, *Infinite dimensional dynamical systems: An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[101] J.C. Sabina de Lis, *A concave-convex quasilinear elliptic problem subject to a nonlinear boundary condition*, Diff. Eq. Apps., 3(4), (2011), 469–486.

[102] D.H. Sattinger, *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. Journal, 21, (1971/1972), 979–1000.

[103] J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasilinear equations*, Acta Math. 111 (1962), 247–302.

[104] W. Shen, S. Zheng, *On the coupled Cahn-Hilliard equations*, Comm. Part. Diff. Eq., 18:3-4, (1993), 701–727.

[105] A. Szulkin, M. Willem, *Eigenvalue problems with indefinite weight*, Studia Math. 135 (1999), 191–201.

[106] T. Tao, M. Visan, X. Zhang, *The nonlinear Schrödinger equation with combined power-type nonlinearities*, Comm. Part. Diff. Eq. 32 (2007), 1281−1343.

[107] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York (1988).

[108] R. Temam, *Navier-Stokes equations: Theory and numerical analysis*, North-Holland Publishing Company, 1979.

[109] K. Umezu, *On eigenvalue problems with Robin type boundary conditions having indefinite coefficients*, Appl. Anal. 85 (2006), 1313–1325.

[110] M. Wang, *A diffusive logistic equation with a free boundary and sign-changing coefficient in time-periodic environment*, J. Functional Analysis 270 (2016) 483–508.

[111] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications II-B*, Springer, New York, 1991.