UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE

MAURÍCIO PUPPIN

CÔNICAS: uma prática escolar

São Carlos
2019

MAURÍCIO PUPPIN

CÔNICAS: uma prática escolar

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello.

São Carlos

2019

Puppin, Mauricio

Cônicas: uma prática escolar / Mauricio Puppin. -- 2019.
114 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador: Luciene Nogueira Bertoncello
Banca examinadora: Luciene Nogueira Bertoncello, José Luciano Santinho Lima, Selma Helena de Jesus Nicola
Bibliografia

1. Geometria Analítica: Cônicas - Elipse. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).
DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)
Bibliotecário(a) Responsável: Ronildo Santos Prado – CRB/8 7325

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestra candidato Maurício Puppin, realizada em 30/07/2019:

Profa. Dra. Lucienne Nogueira Bertoncello
UFSCar

Prof. Dr. José Luciano Santinho Lima
IFSP

Profa. Dra. Selma Helena de Jesus Nicola
UFSCar

Dedico este trabalho a todos que em algum momento da minha trajetória me fizeram lembrar de que a Matemática é muito mais que símbolos e operações.

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a minha mãe Therezinha Mazali Puppin, minha irmã Regina Maria Puppin Rontani, aos meus irmãos João Henrique Puppin e Marco Antonio Puppin, meu cunhado Milton Rontani Junior e cunhadas Débora Maria Mariano Puppin e Adriana Lazarini Puppin, às minhas sobrinhas Sofia Puppin Rontani, Julia Puppin Rontani, Giovana Puppin e ao meu sobrinho Ricardo Lazarini Puppin que sempre me apoiaram e me incentivaram durante minha trajetória no mestrado.

Agradeço também meus amigos e amigas Everton Davanzo, Danilo Spironello Carraro, João Paulo Barbosa e Juliana Cristina Barbosa, Isabelle Perim, por todo apoio que me deram nesse período.

E por fim, um agradecimento especial à minha professora, orientadora e amiga Luciene Nogueira Bertoncello, pelo apoio, paciência e disposição para dividir comigo um pouco de sua experiência.

RESUMO

Fundamentado no protagonismo do educando, este trabalho visa auxiliar o professor de matemática do Ensino Médio, no ensino da Geometria Analítica. Com uma abordagem prática para facilitar o entendimento do aluno sobre cônicas, com ênfase na elipse. Usando o software livre Geogebra, o aluno pode observar transladando a curva no plano, diferenças em sua equação entre as posições horizontal e vertical, tornando o aprendizado dinâmico e mais efetivo.

Palavras-Chave: Geometria Analítica; Cônicas; Elipse; Protagonismo.

ABSTRACT

Based on the protagonism of the learner, this work aims to assist the teacher of mathematics of High School, in the teaching of Analytical Geometry, with a practical approach to facilitate the student's understanding of Conics, with emphasis on ellipse. By the use of free software Geogebra, the student can observe the translation of the curve in the plane and identify in its equation, the differences between the positions: horizontal and vertical, making learning dynamic and more effective.

Key words: Analytical Geometry; conics; Ellipsis; Protagonism.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho é voltado às cônicas da Geometria Analítica, em particular, à elipse. Como professor de Matemática há 22 anos dos quais grande parte dediquei ao Ensino Médio, uma das maiores dificuldades que encontrei nesta jornada foi fazer com que meus alunos entendessem a Geometria Analítica. Tal dificuldade advinda de lacunas que os próprios estudantes traziam consigo dos conteúdos de Geometria Plana Euclidiana e, associado há uma certa desmotivação, acabava por gerar até a indisciplina durante as aulas. De todo o conteúdo de Geometria Analítica o ponto mais difícil para o estudante do 3º ano eram as cônicas. O entendimento pelo aluno de figuras (curvas planas) tão estranhas ao seu cotidiano imediato, com conceitos, elementos e fórmulas, um aglomerado de informações que chegavam de forma rápida, e às vezes confusa, tornava seu aprendizado difícil e desinteressante. Observando por anos essa dificuldade por parte dos alunos, procurei subsídios para criar uma aula mais dinâmica onde o aluno passasse a ter um papel mais ativo, exercendo seu protagonismo.

Primeiramente, o trabalho irá apresentar ao leitor um pouco da história das cônicas na aplicação do problema da duplicação do cubo, em seguida apresenta uma abordagem pedagógica que justifica a necessidade da reinvenção da aula de Matemática. Em seguida, as teorias matemáticas com demonstrações das equações das cônicas e as respectivas propriedades reflexivas, com suas demonstrações fazendo uso de vetores, e por fim, segue a minha experiência com a sequência didática que desenvolvida e aplicada para os alunos do 3º ano do Ensino Médio sobre a elipse junto com uma análise dos resultados obtidos seguido de sua conclusão.

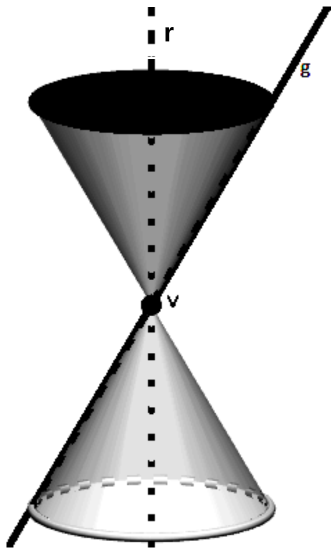
1 AS SECÇÕES CÔNICAS

Neste capítulo abordaremos as definições e características das secções cônicas não degeneradas chamadas: parábola, elipse e hipérbole. Os casos chamados degenerados são: circunferência, uma ou duas retas, ou um ponto. Embora seja uma cônica, a circunferência não é tratada com esta nomenclatura no Ensino Médio, e os demais casos nem são abordados, bem como as rotações das cônicas.

1.1 NA VISÃO DA GEOMETRIA ESPACIAL

Considere um cone circular reto de duas folhas (clepsidra) com vértice V, eixo *r* e geratrizes *g*, como na figura 1.

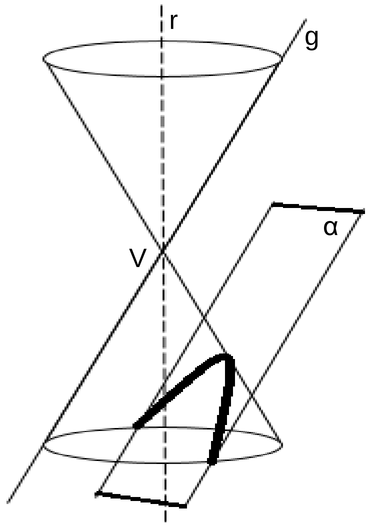
Figura 1 - Clepsidra.



Fonte: elaborado pelo autor.

Temos uma secção cônica quando intersectamos o cone por um plano α. Observe nas figuras que se seguem: um exemplo de parábola (figura 2), um de elipse (figura 3) e um de hipérbole (figura 4).

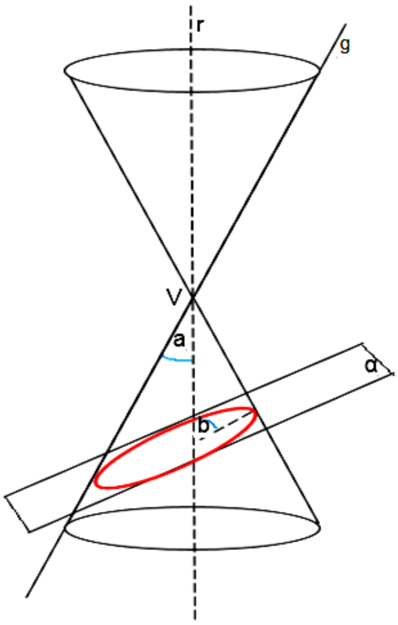
Figura 2 - Um exemplo de parábola.



Fonte: elaborado pelo autor.

Quando tal plano é concorrente ao eixo do cone e paralelo a uma de suas geratrizes, temos uma parábola (figura 2).

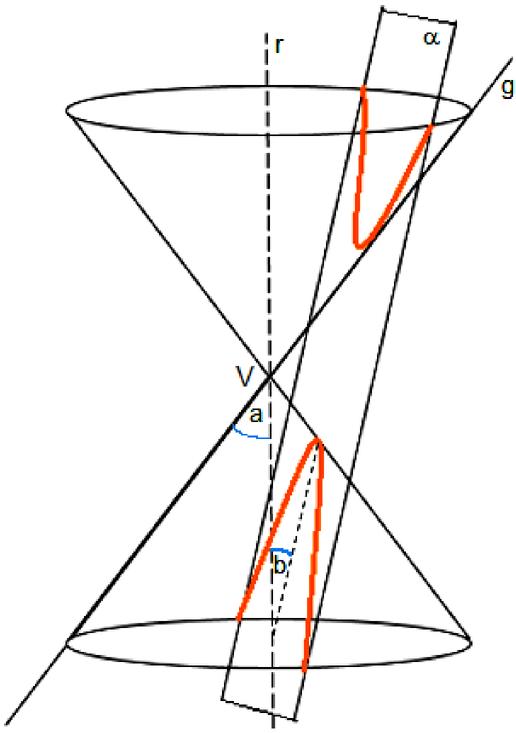
Figura 3 - Um exemplo de elipse



Fonte: elaborado pelo autor.

Quando o plano α é concorrente ao eixo do cone, e não paralelo a nenhuma de suas geratrizes e a medida angular entre α e r é maior do que a medida angular entre g e r com $V \notin \alpha$, temos uma elipse (figura 3).

Figura 4 - Um exemplo de hipérbole.



Fonte: elaborado pelo autor.

Para obtermos uma hipérbole, a medida angular entre α e r é menor do que a medida angular entre r e g e $V \notin \alpha$ (figura 4).

1.2 NA GEOMETRIA ANALÍTICA

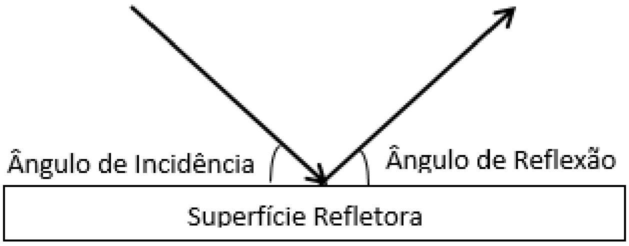
Nesta seção serão apresentadas as definições das cônicas: elipse, hipérbole e parábola, bem como suas características, equações e a propriedade reflexiva.

Ao mencionar a propriedade reflexiva devemos enunciar o Princípio da Reflexão de Heron de Alexandria.

Heron de Alexandria, pensador helenista, viveu em Alexandria no século I da era Cristã. Com fortes interesses em dispositivos mecânicos, desenvolveu teoremas geométricos e pesquisou princípios da óptica. O princípio da óptica do caminho mais curto foi proposto por Heron em seu livro *Katoptrica*, que tratava de estudos sobre fenômenos de reflexão. (MARTINS e SILVA, 2013).

Princípio da Reflexão de Heron: *Dada uma superfície refletora os ângulos de incidência e reflexão são iguais* (figura 5).

Figura 5 - Princípio da Reflexão de Heron



Fonte: elaborado pelo autor.

As demonstrações relativas às propriedades reflexivas das cônicas estão disponibilizadas no apêndice B deste trabalho, com o intuito de aprofundar os conhecimentos do leitor.

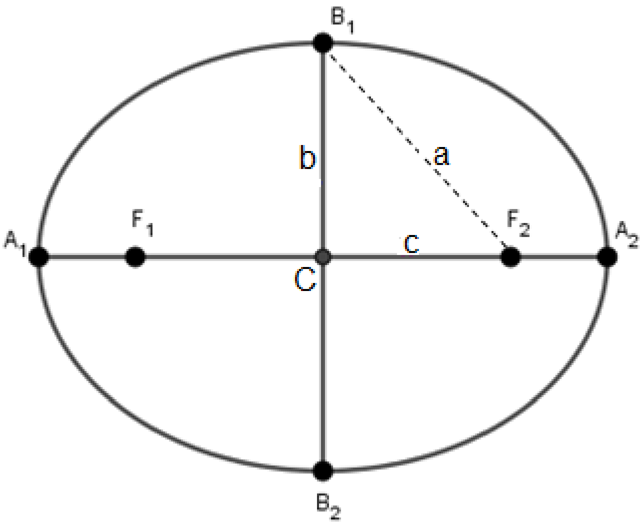
1.2.1 Elipse

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 em um plano α, chama-se elipse ao conjunto dos pontos P deste plano tais que a soma das distâncias de $d(P,F_1)$ e $d(P,F_2)$ é igual a uma constante 2a, com $2a > d(F_1, F_2) = 2c$.

Em outras palavras temos que uma elipse é definida algebricamente por: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.

Na figura 6 estão representados os elementos de uma elipse.

Figura 6 - Elementos da elipse



Fonte: elaborado pelo autor.

- O ponto médio do segmento F_1F_2, aqui denotado por C, é chamado de centro da elipse.
- F_1 e F_2 são chamados focos.
- A_1, A_2, B_1 e B_2 são os vértices.
- $d(F_1, F_2) = 2c$, é a distância focal.
- $d(A_1, A_2) = 2a$ é a medida do eixo focal ou eixo maior.
- $d(B_1, B_2) = 2b$ é a medida do eixo não focal ou eixo menor onde b é definido por $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

1.2.1.1 Excentricidade (*e*)

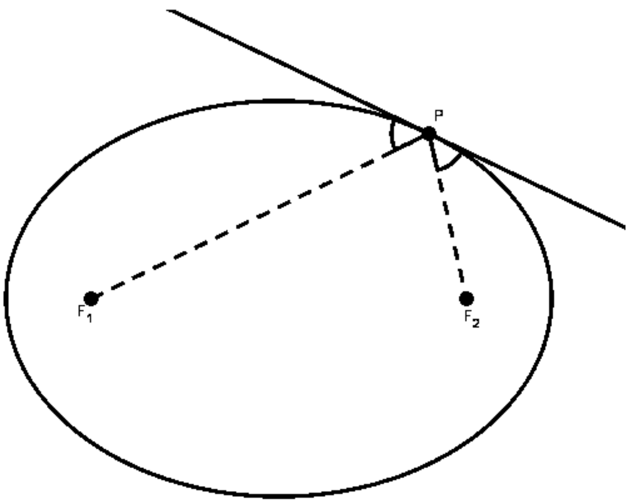
$$e = \frac{c}{a}.$$

Para a elipse, como c < a, sua excentricidade está no intervalo]0; 1[.

1.2.1.2 Propriedade reflexiva

Na elipse, partindo de um dos focos, traçamos um segmento de reta qualquer que encontra a curva em um ponto, este segmento forma um ângulo com a reta tangente à elipse nesse ponto e, a partir dele, traçamos outro segmento de reta formando um ângulo com a tangente congruente ao ângulo do segmento anterior, este novo segmento passa pelo outro foco da elipse como mostra a figura 7.

Figura 7 - Propriedade reflexiva da elipse

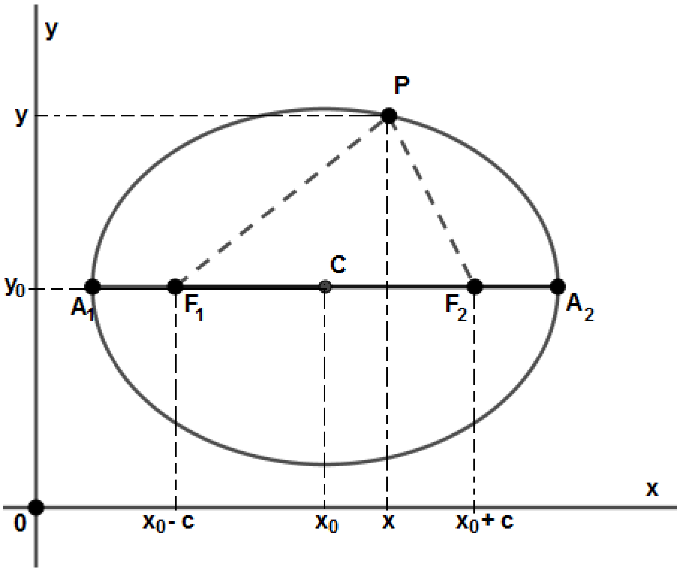


Fonte: elaborado pelo autor.

1.2.1.3 Equação da elipse com eixo focal paralelo ao eixo das abscissas

No plano α considere um sistema de coordenadas ortogonal tal que $F_1=(x_o - c, y_o)$ e $F_2=(x_o + c, y_o)$ e centro $C=(x_o, y_o)$ como na figura 8.

Figura 8 - Esquema para equação da elipse



Fonte: elaborado pelo autor.

Tomando-se um ponto P(x,y) pertencente a elipse, por definição temos:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_o+c)^2+(y-y_o)^2} + \sqrt{(x-x_o-c)^2+(y-y_o)^2} = 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-x_o+c)^2+(y-y_o)^2}\right)^2 = \left(2a-\sqrt{(x-x_o-c)^2+(y-y_o)^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-x_o+c)^2+(y-y_o)^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-x_o-c)^2+(y-y_o)^2}+(x-x_o-c)^2+(y-y_o)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2+x_o{}^2+c^2-2xx_o+2xc-2x_oc-4a^2 = -4a\sqrt{(x-x_o-c)^2+(y-y_o)^2}+$$
$$+x^2+x_o{}^2+c^2-2xx_o-2xc+2x_oc$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(a^2+x_oc-xc\right)^2 = \left(a\sqrt{(x-x_o\ -c)^2+(y-y_o)^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(a^2+x_oc-xc\right)^2 = a^2\left[(x-x_o\ -c)^2+(y-y_o)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a^4 + x_o^2 c^2 + x^2 c^2 + 2a^2 x_o c - 2a^2 xc - 2x_o xc^2 =$$
$$a^2 x^2 + a^2 x_o^2 + a^2 c^2 - 2a^2 xx_o - 2a^2 xc + 2a^2 x_o c + a^2 (y - y_o)^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a^4 + x_o^2 c^2 + x^2 c^2 - 2x_o xc^2 = a^2 x^2 + a^2 x_o^2 + a^2 c^2 - 2a^2 xx_o + a^2 y^2 - 2a^2 yy_o + a^2 y_o^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a^4 - a^2 c^2 = a^2 x^2 - x^2 c^2 + a^2 x_o^2 - x_o^2 c^2 - 2a^2 xx_o + 2x_o xc^2 + a^2 y^2 - 2a^2 yy_o + a^2 y_o^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(a^2 - c^2)a^2 = (a^2 - c^2)x^2 + (a^2 - c^2)x_o^2 - 2xx_o(a^2 - c^2) + a^2 y^2 - 2a^2 yy_o + a^2 y_o^2$$

Fazendo $b^2 = a^2 - c^2$ temos:

$$b^2 a^2 = b^2 x^2 + b^2 x_o^2 - 2xx_o b^2 + a^2 y^2 - 2a^2 yy_o + a^2 y_o^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2x_o b^2 x - 2a^2 y_o y + b^2 x_o^2 + a^2 y_o^2 - a^2 b^2 = 0$$

A equação acima é chamada de equação geral da elipse.

Para determinar a equação reduzida basta reorganizar em trinômios quadrados perfeitos e fatorar, como segue:

$$b^2 x^2 - 2x_o b^2 x + b^2 x_o^2 + a^2 y^2 - 2a^2 y_o y + a^2 y_o^2 - a^2 b^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$b^2 (x^2 - 2x_o x + x_o^2) + a^2 (y^2 - 2y_o y + y_o^2) - a^2 b^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$b^2 (x - x_o)^2 + a^2 (y - y_o)^2 = a^2 b^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$

A dedução da elipse com centro C=(x_o, y_o) e eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas é análoga. Então temos que as equações para a elipse de centro C=(x_o, y_o) são:

- Com eixo focal paralelo ao eixo das abscissas:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$

- Com eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas:

$$\frac{(x-x_o)^2}{b^2}+\frac{(y-y_o)^2}{a^2}=1$$

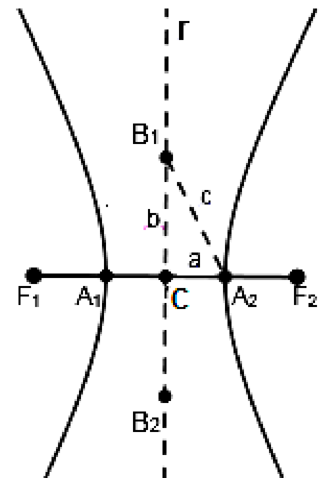
1.2.2 Hipérbole

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 em um plano α, chama-se hipérbole o lugar geométrico desse plano dos pontos P tais que o valor absoluto da diferença entre as distâncias de d(P,F_1) e d(P,F_2) é igual a uma constante 2a, onde 0 < 2a < 2c, onde 2c é a medida do segmento F_1F_2.

Em outras palavras temos que uma hipérbole é definida algebricamente pelos $P \in \alpha$ tais que $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$.

Os elementos de uma hipérbole estão representados nas figuras 9 e 10.

Figura 9 - Elementos da hipérbole - I

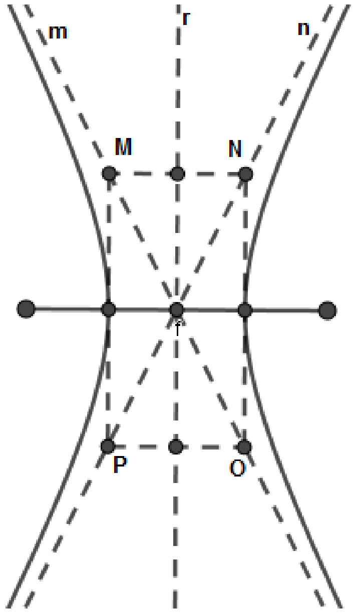


Fonte: elaborado pelo autor.

- O ponto médio do segmento F_1F_2, denotado por C é chamado de centro da hipérbole.
- F_1 e F_2 são chamados focos.
- A_1, A_2 são os vértices.
- d(F_1, F_2) = 2c é a distância focal.
- d(A_1, A_2) = 2a é a medida do eixo focal ou eixo real.

- d(B_1, B_2) = 2b é a medida do eixo não focal ou eixo imaginário onde b é definido por $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Figura 10 - Elementos da hipérbole - II



Fonte: elaborado pelo autor.

- As retas **m** e **n** são as assíntotas da hipérbole.
- A reta **r** é o eixo de simetria da hipérbole.

Observação:

Se a = b, o retângulo MNOP será um quadrado e a hipérbole é chamada de Hipérbole Equilátera. Nessas condições as retas assíntotas serão perpendiculares entre si, pois são as diagonais do quadrado MNOP.

1.2.2.1 Excentricidade (e)

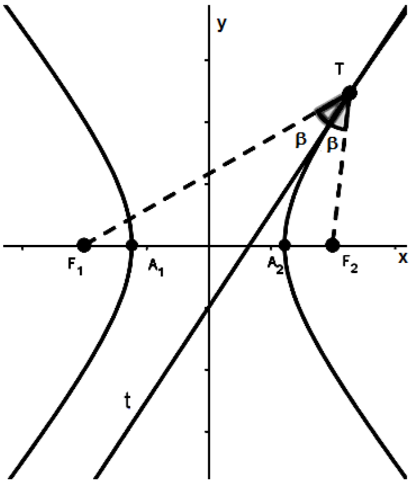
$$e = \frac{c}{a}.$$

Para a hipérbole, tendo c > a, sua excentricidade está no intervalo]1; +∞[.

1.2.2.2 Propriedade reflexiva

Na hipérbole, partindo de um dos focos, traçamos um segmento de reta qualquer que encontra a curva em um ponto, este segmento forma um ângulo com a reta tangente à hipérbole nesse ponto e, a partir dele, traçamos outro segmento de reta formando um ângulo com a tangente congruente ao ângulo do segmento anterior, este novo segmento passa pelo outro foco da hipérbole com ilustrado na figura 11.

Figura 11 - Propriedade reflexiva da hipérbole

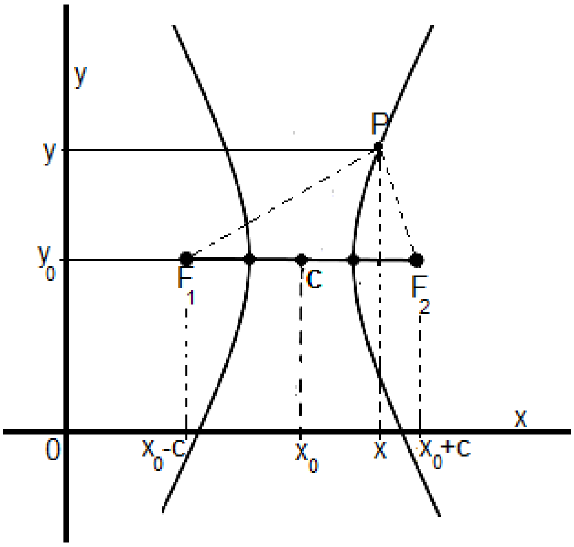


Fonte: elaborado pelo autor.

1.2.2.3 Equação da hipérbole com eixo focal paralelo ao eixo das abscissas

Seja $P=(x,y)$ um ponto da hipérbole de centro $C=(x_o, y_o)$ e focos $F_1=(x_o - c, y_o)$ e $F_2=(x_o + c, y_o)$.

Figura 12 - Esquema para a equação da hipérbole



Fonte: elaborado pelo autor.

Aplicando a definição $\left| d(P,F_1) - d(P,F_2) \right| = 2a$, temos:

$$d(P,F_1) - d(P,F_2) = \pm 2a \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x - x_o + c)^2 + (y - y_o)^2} - \sqrt{(x - x_o - c)^2 + (y - y_o)^2} = \pm 2a \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x - x_o + c)^2 + (y - y_0)^2} = \pm 2a + \sqrt{(x - x_o - c)^2 + (y - y_0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{(\mathrm{x} - \mathrm{x}_\mathrm{o} + \mathrm{c})^2 + (\mathrm{y} - \mathrm{y}_0)^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(\mathrm{x} - \mathrm{x}_\mathrm{o} - \mathrm{c})^2 + (\mathrm{y} - \mathrm{y}_0)^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\mathrm{x} - \mathrm{x}_\mathrm{o} + \mathrm{c})^2 + (y - y_0)^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(\mathrm{x} - \mathrm{x}_\mathrm{o} - \mathrm{c})^2 + (y - y_0)^2} + (\mathrm{x} - \mathrm{x}_\mathrm{o} - \mathrm{c})^2 + (y - y_0)^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$+ 2\mathrm{xc} - 2\mathrm{x}_\mathrm{o}\mathrm{c} - 4\mathrm{a}^2 = \pm 4\mathrm{a}\sqrt{(\mathrm{x} - \mathrm{x}_\mathrm{o} - \mathrm{c})^2 + (y - y_0)^2} - 2\mathrm{xc} + 2\mathrm{x}_\mathrm{o}\mathrm{c} \Leftrightarrow$$

$$4\mathrm{xc} - 4\mathrm{x}_\mathrm{o}\mathrm{c} - 4\mathrm{a}^2 = \pm 4\mathrm{a}\sqrt{(\mathrm{x} - \mathrm{x}_\mathrm{o} - \mathrm{c})^2 + (y - y_0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\mathrm{xc} - \mathrm{x}_\mathrm{o}\mathrm{c} - \mathrm{a}^2\right)^2 = \left(\pm \mathrm{a}\sqrt{(\mathrm{x} - \mathrm{x}_\mathrm{o} - \mathrm{c})^2 + (y - y_0)^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{x}^2\mathrm{c}^2 + \mathrm{x}_\mathrm{o}{}^2\mathrm{c}^2 + \mathrm{a}^4 - 2\mathrm{c}^2\mathrm{xx}_\mathrm{o} - 2\mathrm{a}^2\mathrm{cx} + 2\mathrm{a}^2\mathrm{cx}_\mathrm{o} = \mathrm{a}^2\left[(\mathrm{x} - \mathrm{x}_\mathrm{o} - \mathrm{c})^2 + (y - y_0)^2\right] \Leftrightarrow$$

$$x^2c^2 + x_o{}^2c^2 + a^4 - 2c^2xx_o - 2a^2cx + 2a^2cx_o =$$

$$= \mathrm{a}^2\mathrm{x}^2 + \mathrm{a}^2\mathrm{x}_\mathrm{o}{}^2 + \mathrm{a}^2\mathrm{c}^2 - 2\mathrm{a}^2\mathrm{xx}_\mathrm{o} - 2\mathrm{a}^2\mathrm{xc} + 2\mathrm{a}^2\mathrm{x}_\mathrm{o}\mathrm{c} + \mathrm{a}^2(y - y_0)^2 \Leftrightarrow$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - x^2c^2 + a^2x_o{}^2 - x_o{}^2c^2 - 2a^2xx_o + 2xx_oc^2 + a^2(y - y_o)^2 \Leftrightarrow$$

Colocando fatores comuns em evidência temos:

$$\left(a^2-c^2\right)a^2=\left(a^2-c^2\right)x^2+\left(a^2-c^2\right)x_o{}^2-2\left(a^2-c^2\right)xx_o+a^2(y-y_o)^2\Leftrightarrow$$

Fazendo $b^2 = a^2 - c^2$ segue que

$$b^2a^2=b^2x^2+b^2x_o{}^2-2b^2xx_o-a^2y^2+2a^2yy_o-a^2y_o{}^2\Leftrightarrow$$

$$b^2x^2-a^2y^2-2b^2xx_o+2a^2yy_o+b^2x_o{}^2-a^2y_o{}^2-b^2a^2=0$$

A equação acima é chamada de equação geral da hipérbole.

A dedução da equação da hipérbole com eixo real paralelo ao eixo das ordenadas e centro $C=(x_o, y_o)$ é análoga.

Completando os quadrados na equação geral, encontramos a equação,

$$b^2x^2-2b^2xx_o+b^2x_o{}^2-a^2y^2+2a^2yy_o-a^2y_o{}^2=b^2a^2\Leftrightarrow$$
$$b^2\left(x^2-2xx_o+x_o{}^2\right)-a^2\left(y^2-2yy_o+y_o{}^2\right)=b^2a^2\Leftrightarrow$$
$$b^2\left(x-x_o\right)^2-a^2\left(y-y_o\right)^2=b^2a^2\Leftrightarrow$$

$\dfrac{\left(x-x_o\right)^2}{a^2}-\dfrac{\left(y-y_o\right)^2}{b^2}=1,$ chamada de equação reduzida da hipérbole.

A demonstração para a hipérbole com centro $C=(x_o, y_o)$ e eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas é análoga. Então temos que as equações para a hipérbole são:

- Com eixo focal paralelo ao eixo das abscissas:

$$\frac{\left(x-x_o\right)^2}{a^2}-\frac{\left(y-y_o\right)^2}{b^2}=1$$

- Com eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas:

$$\frac{\left(y-y_o\right)^2}{a^2}-\frac{\left(x-x_o\right)^2}{b^2}=1$$

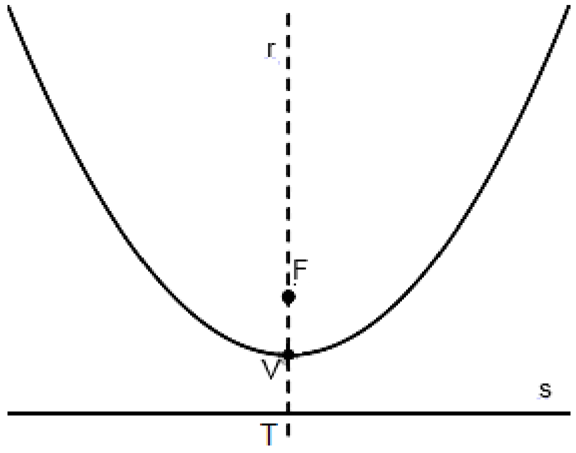
1.2.3 Parábola

Considere em um plano α, uma reta s e um ponto F tal que $F \notin s$.

Chama-se parábola o lugar geométrico de todos os pontos $P \in \alpha$ tais que a distância de P a F seja igual a distância de P a s, ou seja, d(P, F) = d(P, s).

Os elementos de uma parábola estão representados na figura 13.

Figura 13 - Elementos da parábola



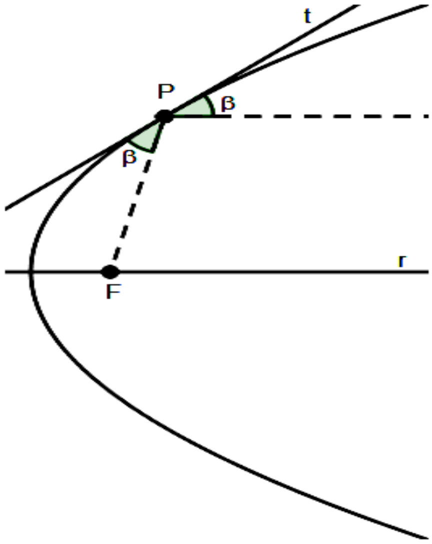
Fonte: elaborado pelo autor.

- F é chamado de foco.
- A reta *s* é chamada de reta diretriz.
- A reta *r* que é a reta perpendicular a reta *s* que contém F é chamada de eixo de simetria, e r determina em s um ponto T.
- V é o ponto médio do segmento FT chamado de vértice.

1.2.3.1 Propriedade reflexiva

Na parábola, partindo do foco, traçamos um segmento de reta qualquer que encontra a curva em um ponto, este segmento forma um ângulo com a reta tangente à parábola nesse ponto e, a partir dele, traçamos outro segmento de reta formando um ângulo com a tangente congruente ao ângulo do segmento anterior, este novo segmento é paralelo ao eixo de focal da parábola. Se traçarmos um segmento qualquer paralelo ao eixo focal da parábola encontra a curva em um ponto formando um ângulo com a reta tangente à parábola nesse ponto, traçamos a partir desse ponto outro segmento de reta com o mesmo ângulo que o anterior, esse segmento passa pelo foco da parábola com ilustrado na figura 14.

Figura 14 - Propriedade reflexiva da parábola

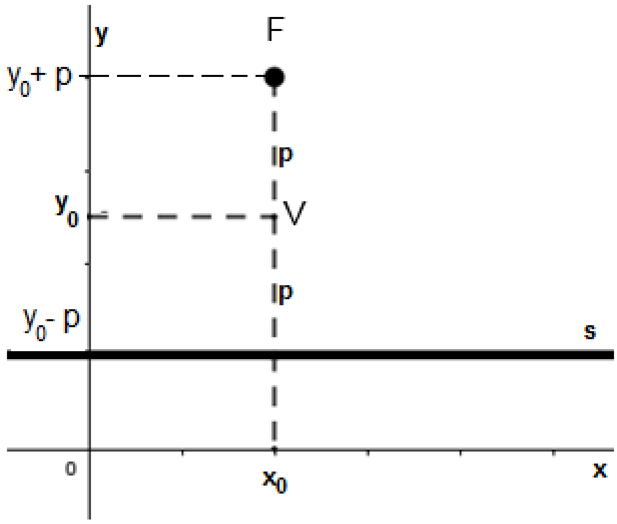


Fonte: elaborado pelo autor.

1.2.3.2 Equação da parábola com reta diretriz paralela ao eixo das abscissas

Seja um referencial cartesiano no plano *α* tal que d tem equação $y = y_0 - p$ e $F = (x_0, y_0 + p)$, como na figura 15.

Figura 15 - Representação inicial da parábola com reta diretriz horizontal



Fonte: elaborado pelo autor.

Tomando um ponto P=(x, y) da parábola com vértice V=(x_o, y_o) e reta diretriz *s* paralela ao eixo das abscissas, V é ponto da parábola, pois d(V, F) = d(V, s) = p, tal p é parâmetro.

Por definição, P é ponto da parábola se e só se, d(P, F) = d(P, s), como o eixo de simetria é perpendicular à reta s e paralelo ao eixo das ordenadas têm-se d(P, s) = y – (y_o – p) = y - y_o + p, então segue que:

$$d(P,s) = d(P,F) \Leftrightarrow$$
$$y - y_o + p = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o - p)^2} \Leftrightarrow$$
$$(y - y_o + p)^2 = \left(\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o - p)^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$y^2 + y_o^2 + p^2 - 2yy_o + 2yp - 2y_o p = (x - x_o)^2 + y^2 + y_o^2 + p^2 - 2yy_o - 2yp + 2y_o p \Leftrightarrow$$
$$4yp - 4y_o p = x^2 - 2x_o x + x_o^2$$

Logo, temos a equação abaixo, chamada de equação geral da parábola:

$$x^2 - 2x_o x - 4yp + 4y_o p + x_o^2 = 0 \,.$$

Para obter a equação reduzida, reorganizamos o trinômio quadrado perfeito e fatoramos a equação como segue:

$$x^2 - 2x_o x - 4yp + 4y_o p + x_o^2 = 0$$
$$x^2 - 2x_o x + x_o^2 = 4yp - 4y_o p$$
$$(x - x_o)^2 = 4p(y - y_o)$$

Portanto as equações das parábolas com reta diretriz paralela ao eixo abscissa:

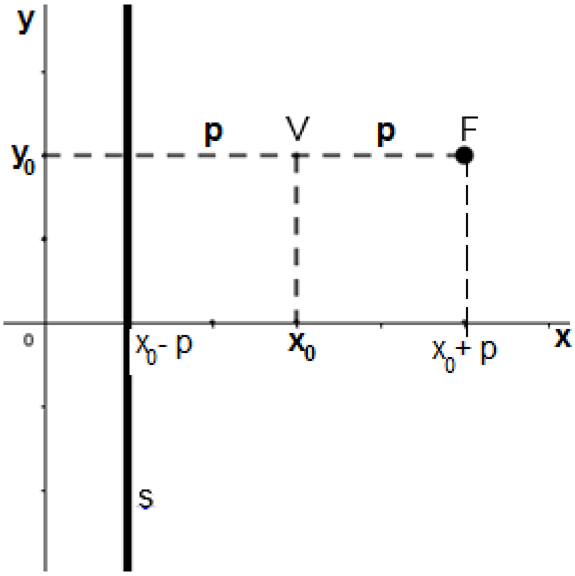
- Com foco acima de s: $(x - x_o)^2 = 4p(y - y_o)$;
- Com foco abaixo de s: $(x - x_o)^2 = -4p(y - y_o)$.

Esta última, obtemos quando o referencial fixado é tal que V = (x_o, y_o), d: y = y_o + p e F = (x_o, y_o – p).

1.2.3.3 Equação da parábola com reta diretriz paralela ao eixo das ordenadas

Seja um referencial cartesiano no plano *α* tal que s tem equação $x = x_0 - p$ e $F = (x_o + p, y_o)$, como na figura 16.

Figura 16 - Representação inicial da parábola com reta diretriz vertical



Fonte: elaborado pelo autor.

Tomando um ponto P=(x, y) pertencente a parábola de vértice V=(x_o, y_o) e reta diretriz s paralela ao eixo das ordenadas, V é ponto da parábola, pois d(V, F) = d(V, s) = p, tal p é parâmetro.

Nessas condições, o foco terá as coordenadas F=(x_o+p, y_o) e a reta diretriz tem equação x = x_o – p. Como o eixo focal é perpendicular à reta s e paralela ao eixo das ordenadas, temos que d(P, s) = x – (x_o - p) = x - x_o – p. Por definição temos *d(P, s) = d(P, F)*

$$x - x_o + p = \sqrt{(x - x_o - p)^2 + (y - y_o)^2} \Leftrightarrow$$

$$(x - x_o + p)^2 = \left(\sqrt{(x - x_o - p)^2 + (y - y_o)^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x_o^{\ 2} + p^2 - 2xx_o + 2xp - 2x_o p = x^2 + x_o^{\ 2} + p^2 - 2xx_o - 2xp + 2x_o p + (y - y_o)^2 \Leftrightarrow$$

$$4xp - 4x_o p = y^2 - 2y_o y + y_o^{\ 2} \Leftrightarrow$$

Logo, temos abaixo, a chamada equação geral da parábola:

$$y^2 - 2y_o y - 4xp + 4x_o p + y_o^{\ 2} = 0.$$

Para obter a equação reduzida, reorganizamos o trinômio quadrado perfeito e fatoramos a equação como segue:

$$y^2 - 2y_o y - 4xp + 4x_o p + y_o{}^2 = 0$$
$$y^2 - 2y_o y + y_o{}^2 = 4xp - 4x_o p \Leftrightarrow$$
$$(y - y_o)^2 = 4p(x - x_o)$$

Portanto as equações das parábolas com reta diretriz paralela ao eixo ordenada:

- Com foco à direita de s: $(y - y_o)^2 = 4p(x - x_o)$;
- Com foco à esquerda: $(y - y_o)^2 = -4p(x - x_o)$.

Esta última, obtemos quando o referencial fixado é tal que V = (x_o, y_o), s: x = x_o + p e F = (x_o – p, y_o).

2 CÔNICAS: UM BREVE RELATO HISTÓRICO E APLICAÇÕES

Veremos, neste capítulo, um pouco sobre a presença das cônicas na história da Matemática e sua aplicação para solucionar o problema da duplicação do cubo.

2.1 O PROBLEMA DA DUPLICAÇÃO DO CUBO

Nesta seção, apresentamos o problema da duplicação do cubo, como pensavam os antigos para solucionar o problema com régua e compasso, e a solução do problema em linguagem Matemática Contemporânea.

2.1.1 Breve histórico

Segundo Boyer (1996 apud SILVA e SANTOS, 2016), acreditava-se que no tempo dos matemáticos Anaxágora (500 a.C. – 428 a.C.), Arquitas (428 a.C. – 347 a.C.), Péricles (495/492 a.C. – 429 a.C.) e Platão (428/427 – 348/347 a.C.), havia uma peste assolando Atenas, e, nessa época que surgiu o problema. Uma lenda conta que um grupo preocupado com a peste procurou o oráculo de Apolo, na cidade de Delos, com o objetivo de encontrar um meio para dar um fim na peste. O oráculo orientou que para resolver a solução de tal problema seria necessário que alguém conseguisse duplicar o volume do cubo que sustentava a estátua do deus do sol, Apolo.

Este problema consiste em construir, usando régua e compasso, a medida da aresta de um cubo que possui o dobro do volume de um cubo dado.

Usando a linguagem contemporânea da álgebra: se a é a aresta do cubo dado então seu volume é a^3 e, devemos obter um cubo de aresta x de volume igual a $2a^3$.

Como naquela época não se fazia uso da linguagem algébrica, o problema geométrico em questão deveria ser solucionado com uso de régua e compasso.

2.1.2 O problema na linguagem contemporânea

Entender o problema da duplicação do volume do cubo, assim como determinar sua solução, não é tão difícil quando usamos a linguagem algébrica, uma ferramenta que não era familiar aos gregos antigos.

O problema similar ao da duplicação do cubo, no caso de figuras planas, é determinar a medida do lado de um quadrado com área igual ao dobro da área de um quadrado dado. Em linguagem algébrica temos: dado um quadrado de lado x unidades sua área será igual a x^2 unidades quadradas. Queremos determinar um quadrado de lado y que tenha área igual a $2x^2$, ou seja, $y^2 = 2x^2$ o que implica dizer que $y = x\sqrt{2}$ unidades. Em termos numéricos para $x = 1$ no primeiro quadrado teríamos $y = \sqrt{2}$ no segundo quadrado.

Os gregos entendiam esse problema como uma proporção, em que a solução era inserir uma média proporcional entre dois números dados, no caso, o lado do quadrado e o dobro de sua área, assim como veremos na seção seguinte.

Seguindo esse raciocínio, para solucionar o problema do cubo, deveriam inserir duas médias proporcionais entre dois números dados, a medida do lado do cubo dado e o dobro de seu volume. Mas o problema estava em como se determinar essas médias proporcionais com régua e compasso.

2.1.3 Uma solução engenhosa

O matemático e astrônomo Apolônio de Pérgamo (262 – 190 a.C.), em sua obra *Cônicas,* fez um estudo sobre as secções do cone, e esta o consagrou como o maior dos geômetras da época (BOYER, 1996 apud SANTOS e SILVA, 2016).

Menecmo (380 – 320 a.C.), aluno de Eudoxo (408 a.C - 355 a.C.), que no estudo do problema de médias proporcionais duplas, obteve as secções cônicas.

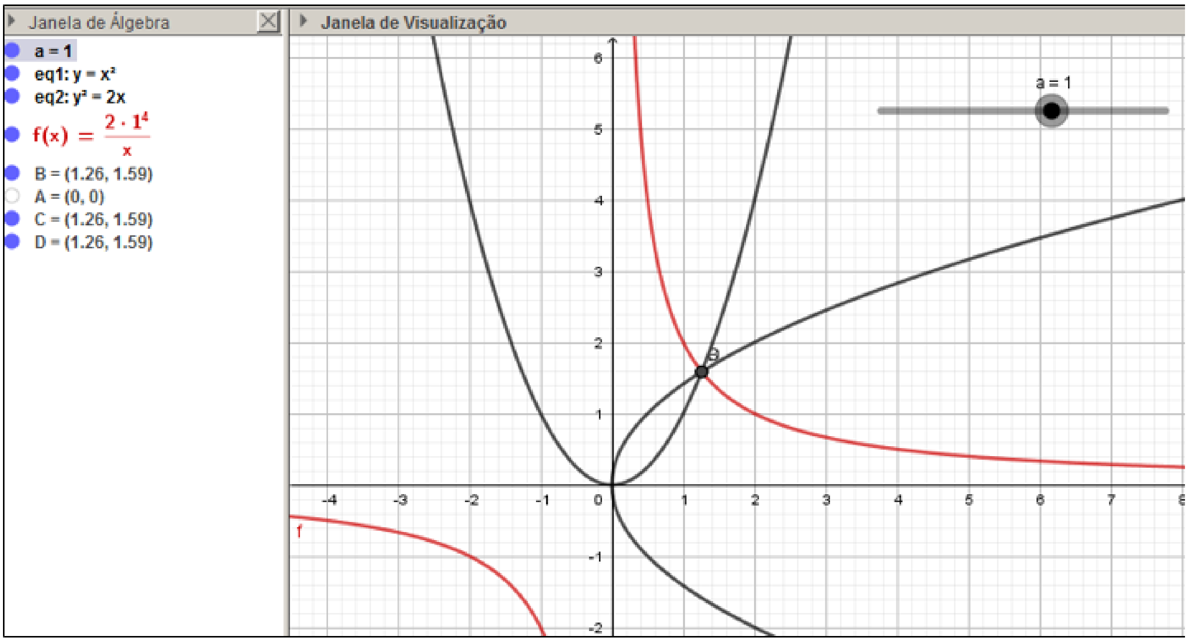
Dizemos que x e y estão em média proporcional dupla em relação a dois segmentos de reta a e b se $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, o que é o equivalente das equações: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow x^2 = ay$; $\frac{x}{y} = \frac{y}{b} \Leftrightarrow y^2 = bx$ e $\frac{a}{x} = \frac{y}{b} \Leftrightarrow xy = ab$; sendo as duas primeiras equações de parábolas e a terceira de uma hipérbole.

Segundo BOYER (1996 apud SANTOS e SILVA, 2016), foi Hipócrates de Quíos (sec. V a.C.), que havia mostrado que a solução para o problema da duplicação do cubo estava em determinar x e y em média proporcional dupla com a e b, tais que $b = 2a$.

Então, se temos um cubo dado com aresta x, seu volume é x^3, queremos determinar um cubo de aresta y tal que seu volume é $y^3 = 2x^3$. Sendo: $y^3 = y^2.y$; $b = 2a$ e as equações: $x^2 = ay \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{a}$; $y^2 = bx$ e $xy = ab$, temos que $y^3 = y^2.y = bx.\frac{x^2}{a} = \frac{bx^3}{a}$ e como $b = 2a$, segue que $y^3 = \frac{2ax^3}{a} = 2x^3$.

Logo o problema se reduz a determinar o ponto de interseção entre a parábola e a hipérbole como mostra a figura 17.

Figura 17 - Solução engenhosa



Fonte: elaborado pelo autor.

2.2 ALGUMAS APLICAÇÕES DAS CÔNICAS NA ATUALIDADE

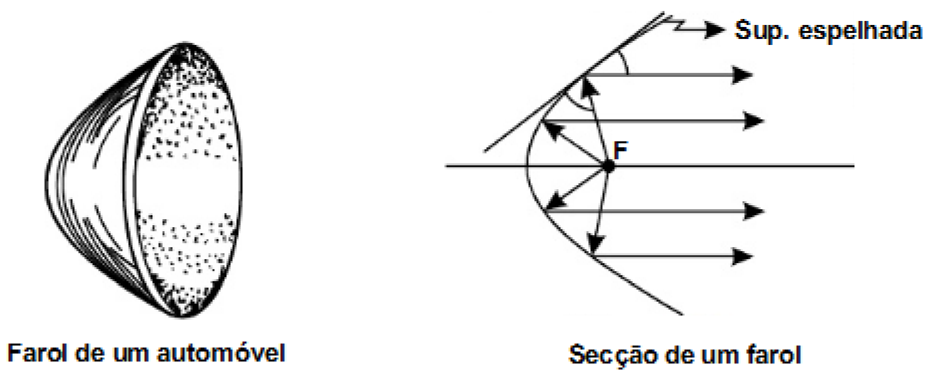
Nesta seção são apresentadas a propriedade reflexiva das cônicas e algumas aplicações no cotidiano.

2.2.1 Parábolas

A lei da reflexão em uma parábola, que é estudada em física no Ensino Médio, afirma que quando um raio, partindo do foco F de uma parábola, incide em um ponto P pertencente a ela, forma com a reta tangente à parábola nesse ponto, um ângulo de medida α (ângulo de incidência), este raio é refletido formando, com essa mesma tangente, um ângulo de medida α (ângulo de reflexão). O raio refletido é paralelo ao eixo focal da parábola (vide figura 18). A recíproca também é verdadeira, se um raio, paralelo ao eixo focal da parábola, incide em um ponto P pertencente a ela, forma com a reta tangente à parábola nesse ponto um ângulo de medida α (ângulo de incidência), esse raio é refletido formando, com a mesma tangente, um ângulo de medida α (ângulo de reflexão), tal raio passará pelo foco da parábola. A demonstração dessa propriedade será desenvolvida no apêndice B.

Uma aplicação cotidiana está no farol de um carro, é um espelho parabólico em que a lâmpada ocupa a posição de seu foco. Os raios emitidos pela lâmpada colidem com o espelho parabólico e refletem em direção paralela ao eixo focal da parábola contida no espelho parabólico.

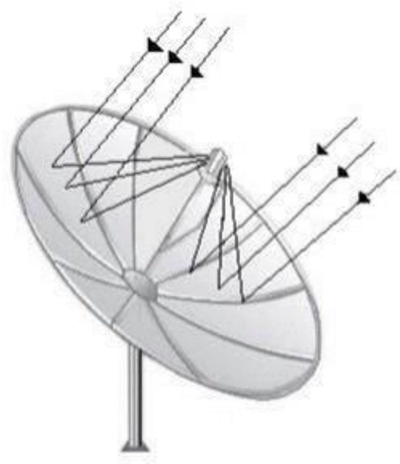
Figura 18 - Propriedade da reflexão



Fonte: SCHMIDT (2012)

As antenas parabólicas (figura 18) também são aplicações dessa mesma propriedade das parábolas, em seu foco é colocado um receptor de sinal, no momento em que o espelho a antena parabólica recebe um raio (sinal de transmissão), este é refletido em direção ao foco da parábola (receptor).

Figura 19 - Esquema de incidência de raios sobre uma antena

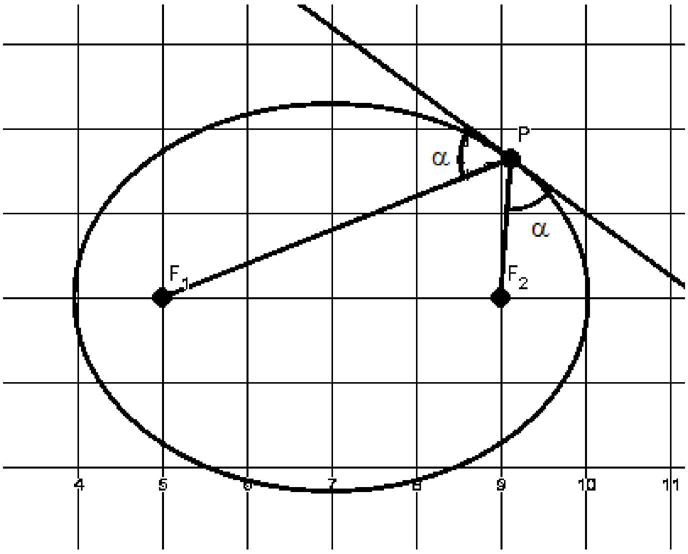


Fonte: CHOMEN, (2016)

2.2.2 Elipse

A propriedade da reflexão: um raio partindo de um de seus focos incide sobre um ponto P pertencente à elipse, formando com a reta tangente à curva neste ponto, um ângulo de incidência de medida α, e o raio é refletido a partir desse ponto, formando um ângulo de reflexão com a reta tangente de medida α. Nessas condições a outra extremidade do raio refletido é o outro foco da elipse, conforme mostra o esquema na figura 20.

Figura 20 - Representação da propriedade da elipse



Fonte: elaborado pelo autor.

Encontramos uma aplicação dessa propriedade na acústica. Numa sala que possui um formato elíptico, se duas pessoas posicionam-se, uma em cada foco, o que uma pessoa falar em um dos focos, será ouvido nitidamente pela outra pessoa que está sobre o outro foco. Na fotografia 1, temos a representação de uma dessas salas.

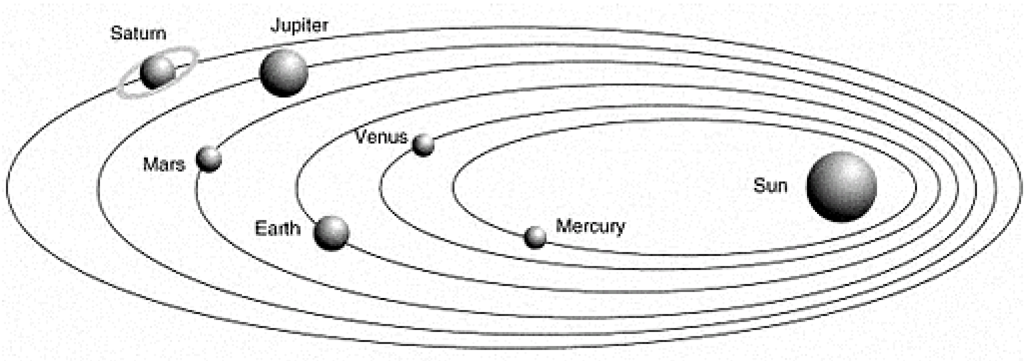
Fotografia 1 - Sala Elíptica – Palácio Nacional de Mafra (Portugal)

Fonte: Olhares, fotografia online[1].

[1] Fotografia de Alvaro Campeão (2010). Disponível em: <http://olhares.sapo.pt/sala-eliptica-foto3787847.html>. Acesso em: 20 mar. 2018.

Além da arquitetura, na natureza, encontramos as elipses nas órbitas planetárias. Foi Johannes Kepler (1571-1630) que afirmou em sua Lei das órbitas elípticas (1609) que, a órbita de cada planeta no sistema solar é uma elipse, contendo o Sol em um dos focos. Na figura 21 podemos observar uma representação simples das órbitas dos planetas, sendo que não representa um modelo real, e sim apenas uma ilustração das órbitas.

Figura 21 - Representação simplista das órbitas planetárias



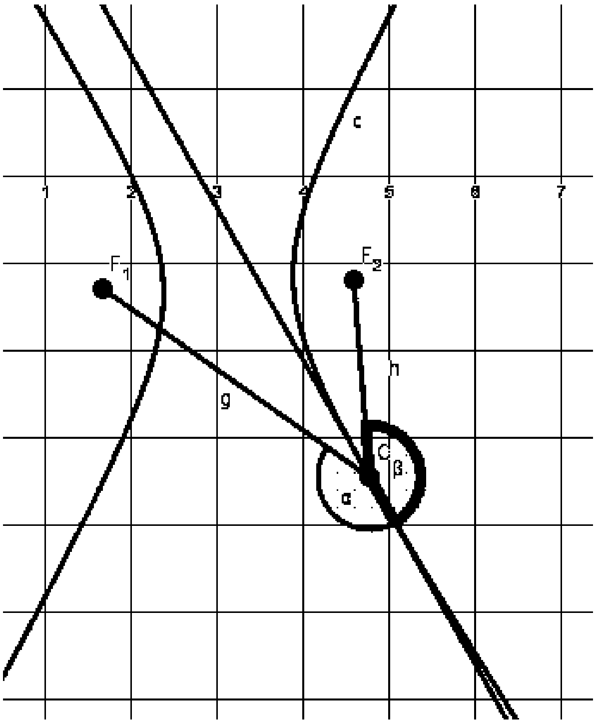
Fonte: Thing Link. (autor desconhecido)[2].

2.2.3 Hipérbole

Na hipérbole, a propriedade reflexiva diz que, se partir de um dos focos, se traçarmos um segmento de reta dirigido a um dos ramos da hipérbole, este segmento encontra um ponto P no ramo da hipérbole, e, forma um ângulo com a reta tangente a ela neste ponto (ângulo de incidência), se traçarmos outro segmento de reta partindo deste mesmo ponto P e com a mesma inclinação que o anterior em relação a reta tangente (ângulo de reflexão), este segmento será dirigido ao outro foco, isto é, a reta tangente em P é a bissetriz do ângulo F_2PF_1 (figura 22).

[2] Disponível em: <https://cdn.thinglink.me/api/image/ADdPNhvhBjjTrK5FkCPNcE39ZaBjacX6VstpULc2SB4GgZZ5JdVm8XH8MvgknFBPizR2Xfbk5kDCYgiXFW7cvgj1w/10/10/none>. Acesso em: 20 mar. 2018.

Figura 22 - Esquema da propriedade reflexiva da hipérbole

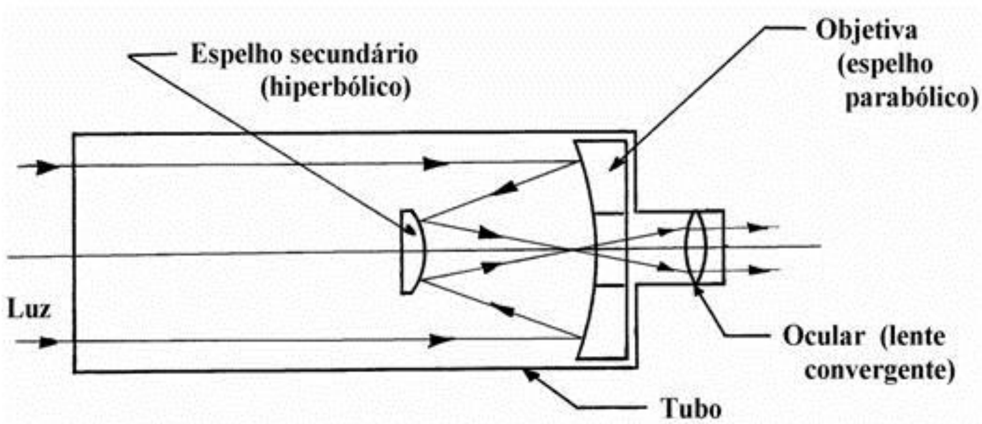


Fonte: elaborado pelo autor.

Na figura 22, **α** e **β** são congruentes.

Uma aplicação da propriedade reflexiva da hipérbole está no telescópio de reflexão hiperbólico proposto pelo astrônomo francês Cassegrain, em 1672, para substituir o telescópio refletor parabólico utilizado por Isaac Newton (1642-1727). O esquema do telescópio de Cassegrain está representado na figura 23.

Figura 23 - Esquema do telescópio de Cassegrain



Fonte: Apostila do Curso Leitura do Céu e Sistema Solar (2003)[3].

[3] Disponível em: <http://www.gea.org.br/historia/2003postilaleituradoceu.htm>. Acesso em: 20 mar. 2018.

Seu funcionamento é semelhante ao telescópio de Newton, substituindo o espelho plano por um hiperbólico que concentra o feixe principal em seu centro, a grande vantagem do telescópio de Cassegrain em relação ao de Newton é o tamanho, o telescópio de Cassegrain é bem mais compacto quando comparado a um telescópio de Newton com mesmo diâmetro e mesma distância focal.

Há também aplicações na arquitetura, por exemplo, a catedral de Brasília (fotografia 2), que apresenta várias hipérboles em sua construção.

Fotografia 2 - Catedral de Brasília

Fonte: Photo Travel 360. (autor desconhecido)[4].

[4] Disponível em: <http://www.phototravel360.com/catedral-de-brasilia/>. Acesso em: 20 mar. 2018.

3 A MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Este capítulo apresenta o tratamento dado às cônicas no Ensino Médio, segundo o Currículo do Estado de São Paulo, enfatizando a necessidade do protagonismo do educando e o auxílio do computador para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem.

3.1 TRATAMENTO DOS CONTEÚDOS

Como professor de Matemática do Ensino Médio, o autor deste trabalho tem observado por meio da experiência que os estudantes apresentam maior dificuldade com a geometria devido à deficiência de conhecimento prévio. Os educandos quando em contato com os conceitos, definições e teoremas, encontram dificuldade para compreendê-los e por consequência aplicá-los, muitas vezes por falta de domínio de assuntos abordados no ensino fundamental que são base para continuar os estudos no Ensino Médio e, além disso, a forma como são apresentados aos educandos, os colocando em posição de meros espectadores passivos, não interagindo com o aprendizado.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM), no Ensino Médio, a Matemática tem papel importante no desenvolvimento de habilidades de pensamento. No Ensino Médio, como etapa final da educação básica, os Parâmetros Curriculares afirmam que a Matemática deve ser vista pelo educando como uma parcela do conhecimento auxiliando na construção de uma visão de mundo, desenvolvendo a leitura e a interpretação da realidade desenvolvendo no educando suas capacidades que serão exigidas em sua vida social e profissional.

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno [...] (BRASIL, 1997, p. 111).

Segundo as Orientações Curriculares para o ensino de Matemática para o Ensino Médio, o documento propõe a respeito do aspecto dos conteúdos abordados que devem ser considerados os diferentes propósitos da formação matemática.

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p. 69).

As finalidades do ensino de matemática no nível médio, de acordo com o PCNEM – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, objetivam levar o aluno a:

> Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral; aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas; analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade; desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo; utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos; expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática; estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo; reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações; promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, 2000, p. 42).

Essas finalidades mostram a necessidade de uma organização curricular para o ensino da Matemática de maneira contextualizada e interdisciplinar. Desta forma o aluno do Ensino Médio conseguirá relacionar os temas abordados pela Matemática, com suas aplicações em outras áreas do conhecimento das ciências da natureza.

A Proposta Curricular do Estado de São Paulo, com foco na Matemática, mostra que:

> Os currículos escolares, em todas as épocas e culturas, têm no par Matemática– língua materna seu eixo fundamental. Gostando ou não da Matemática, as crianças a estudam e os adultos a utilizam em suas ações como cidadãos, pessoas conscientes e autônomas, consumidores ou não. Todos lidam com números, medidas, formas, operações; todos leem e interpretam textos e gráficos, vivenciam relações de ordem e de equivalência, argumentam e tiram conclusões válidas a partir de proposições verdadeiras, fazem inferências plausíveis a partir de informações parciais ou incertas. Em outras palavras, a ninguém é permitido dispensar o conhecimento da Matemática sem abdicar de seu bem mais precioso: a consciência nas ações. (SÃO PAULO, 2008, p. 41).

Consta ainda em tal proposta que os conteúdos devem ter uma abordagem transdisciplinar com foco em um tema central que possibilite o desenvolvimento parcial ou total dos conteúdos ministrados em um bimestre. De forma a desenvolver as habilidades e competências do aluno, a Proposta Curricular sugere o uso das tecnologias e modelagens sempre que possível. Com base nessa premissa é que, neste trabalho, desenvolvemos, dentro do estudo da Geometria Analítica: Cônicas uma proposta de trabalho com elipse, fazendo uso do software de geometria dinâmica *Geogebra.* Este software permite uma interação do aluno com os elementos geométricos, construções geométricas a partir das ferramentas disponibilizadas, buscando assim que este desenvolva conceitos, manipule informações e as aplique.

VALENTE (1993) coloca que o computador já é uma ferramenta educacional utilizada como foco principal nos cursos próprios da área da informática, mas, este mesmo instrumento, pode ser usado de maneira secundária, em que o educando interagindo com softwares próprios, construa seus conhecimentos em diversas áreas. Dessa forma, o educando passa a ter um caráter ativo, se torna um protagonista no processo ensino-aprendizagem.

> Quando [...] se propõem métodos de aprendizado ativo, em que os alunos se tornem protagonistas do processo educacional, não pacientes deste, quer se ter a certeza de que o conhecimento foi de fato apropriado pelos alunos, ou mesmo elaborado por eles (BRASIL, 2000, p. 54).

O uso do computador é um dos caminhos para atingir o objetivo do aprendizado ativo. Na atualidade, com o advento da internet, o educando tem acesso a uma variedade de ferramentas como, tutoriais, vídeo aulas, entre outras. O educando pode fazer uso dessas informações, com incentivo ou não, para uma simples pesquisa escolar, revisar assuntos trabalhados em sala de aula e desenvolver atividades educacionais interativas. Com uso de softwares educativos, o professor em sala, pode apresentar atividades aos alunos que os guiem para o desenvolvimento de determinado assunto a ser abordado.

No estudo da geometria, o uso de um ambiente dinâmico fornece ao aluno ferramentas para estudar e analisar conceitos, definições, propriedades e teoremas a partir de construções geométricas realizadas nesse ambiente podendo manipulá-las para testar conjecturas e propriedades. “[...] o aspecto dinâmico dos ambientes pode indicar a validade matemática das construções, e especialmente sua não validade". (GIRALDO, CAETANO e MATTOS, 2013, p. 117).

Ainda, para estes autores, o recurso do ambiente dinâmico, pode ser explorado para instigar no educando a diferença entre argumentos válidos e argumentos empíricos. O educando, através de um ambiente dinâmico, executa construções, as manipula e analisa os resultados tendo como base argumentos matemáticos e, com isso, pode concluir a veracidade de um argumento válido.

O foco deste trabalho é a Geometria Analítica, mais particularmente as cônicas. O assunto é abordado, segundo o Currículo do Estado de São Paulo de Matemática (2011), na 3ª série do Ensino Médio, tendo como objetivos desenvolver no aluno habilidades como: uso de modo sistemático do sistema de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações e equações; saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas.

Buscando atender as finalidades do Ensino Médio de maneira que o educando atue como protagonista no processo ensino-aprendizagem, com o auxílio do software *Geogebra*, a sequência didática desenvolvida neste trabalho tem como foco a elipse e visa desenvolver no educando as habilidades propostas pelo Currículo do Estado de São Paulo. Essa sequência didática pode ser adaptada para outras cônicas.

3.2 UMA BREVE ANÁLISE DE ALGUNS MATERIAIS DIDÁTICOS

Nesta seção fazemos uma breve análise em alguns materiais didáticos.

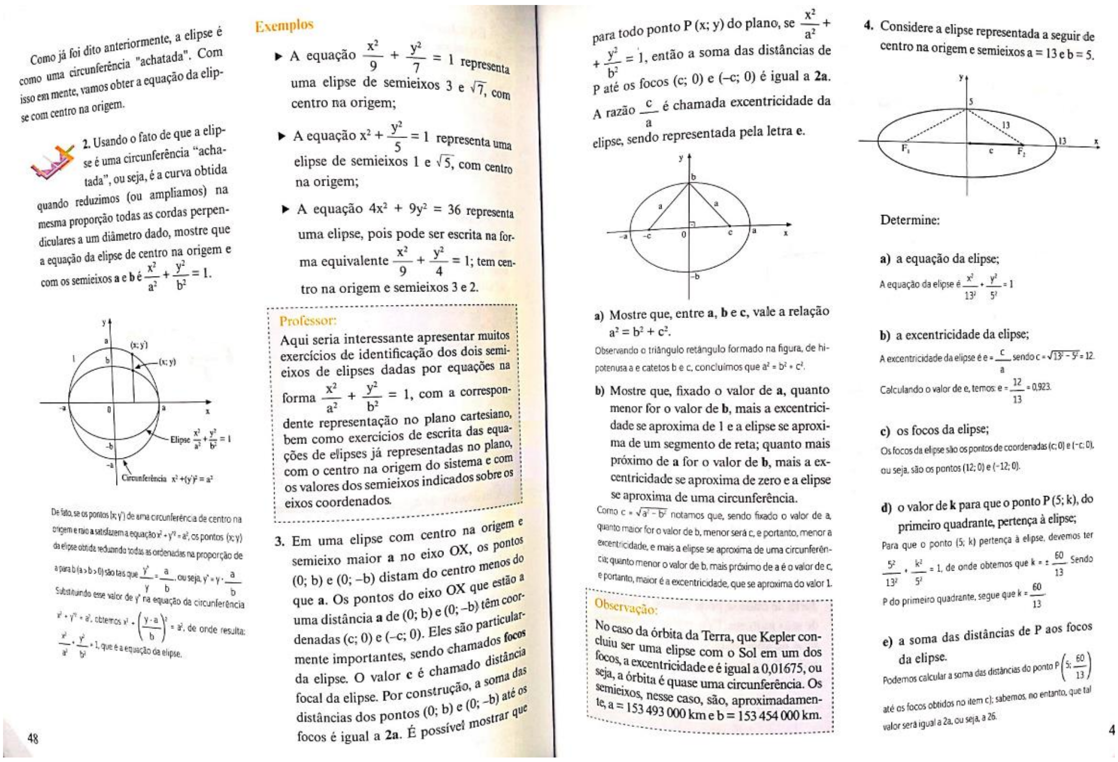
Para fazer essa análise, o autor deste trabalho escolheu três materiais didáticos: o Caderno de Matemática do 3º ano do Ensino Médio do Governo do Estado de São Paulo, por ser um material de uso em sala de aula, e os livros didáticos "Matemática para compreender o mundo" (SMOLE e DINIZ, 2017) e "Matemática Contexto & Aplicações" (DANTE, 2016) que são materiais de divulgação das editoras e possuem abordagens distintas sobre o assunto das cônicas.

No livro didático "Matemática para compreender o mundo" os autores abordam as cônicas como um estudo aprofundado da Geometria Analítica.

Introduzem as cônicas com um exemplo simples associado ao cotidiano e relacionado à astronomia.

Nele é apresentada a definição formal e os elementos das cônicas de forma técnica, as equações são com centro na origem, para elipse e hipérbole, não apresentando translação. Os exercícios buscam aplicar o uso das fórmulas das equações apresentadas e apresenta poucas questões de vestibulares, bem como não traz dinâmicas, como com uso do computador para construção das cônicas, para estimular no educando o desenvolvimento do conteúdo.

Fotografia 3 - Foto da parte interna do livro: “Matemática para compreender o mundo”



Como já foi dito anteriormente, a elipse é como uma circunferência "achatada". Com isso em mente, vamos obter a equação da elipse com centro na origem.

2. Usando o fato de que a elipse é uma circunferência “achatada”, ou seja, é a curva obtida quando reduzimos (ou ampliamos) na mesma proporção todas as cordas perpendiculares a um diâmetro dado, mostre que a equação da elipse de centro na origem e com os semieixos a e b é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

De fato, se os pontos (x; y') de uma circunferência de centro na origem e raio a satisfazem a equação $x^2 + y'^2 = a^2$, os pontos (x; y) da elipse obtida reduzindo todas as ordenadas na proporção de a para b (a > b > 0) são tais que $\frac{y'}{y} = \frac{a}{b}$, ou seja, $y' = y \cdot \frac{a}{b}$. Substituindo esse valor de y' na equação da circunferência $x^2 + y'^2 = a^2$, obtemos $x^2 + \left(\frac{y \cdot a}{b}\right)^2 = a^2$, de onde resulta: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, que é a equação da elipse.

Exemplos

- A equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$ representa uma elipse de semieixos 3 e $\sqrt{7}$, com centro na origem;
- A equação $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$ representa uma elipse de semieixos 1 e $\sqrt{5}$, com centro na origem;
- A equação $4x^2 + 9y^2 = 36$ representa uma elipse, pois pode ser escrita na forma equivalente $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; tem centro na origem e semieixos 3 e 2.

Professor: Aqui seria interessante apresentar muitos exercícios de identificação dos dois semieixos de elipses dadas por equações na forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, com a correspondente representação no plano cartesiano, bem como exercícios de escrita das equações de elipses já representadas no plano, com o centro na origem do sistema e com os valores dos semieixos indicados sobre os eixos coordenados.

3. Em uma elipse com centro na origem e semieixo maior a no eixo OX, os pontos (0; b) e (0; –b) distam do centro menos do que a. Os pontos do eixo OX que estão a uma distância a de (0; b) e (0; –b) têm coordenadas (c; 0) e (–c; 0). Eles são particularmente importantes, sendo chamados focos da elipse. O valor c é chamado distância focal da elipse. Por construção, a soma das distâncias dos pontos (0; b) e (0; –b) até os focos é igual a 2a. É possível mostrar que para todo ponto P (x; y) do plano, se $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, então a soma das distâncias de P até os focos (c; 0) e (–c; 0) é igual a 2a. A razão $\frac{c}{a}$ é chamada excentricidade da elipse, sendo representada pela letra e.

a) Mostre que, entre a, b e c, vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

Observando o triângulo retângulo formado na figura, de hipotenusa a e catetos b e c, concluímos que $a^2 = b^2 + c^2$.

b) Mostre que, fixado o valor de a, quanto menor for o valor de b, mais a excentricidade se aproxima de 1 e a elipse se aproxima de um segmento de reta; quanto mais próximo de a for o valor de b, mais a excentricidade se aproxima de zero e a elipse se aproxima de uma circunferência.

Como $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ notamos que, sendo fixado o valor de a, quanto maior for o valor de b, menor será c, e portanto, menor a excentricidade, e mais a elipse se aproxima de uma circunferência; quanto menor o valor de b, mais próximo de a é o valor de c, e portanto, maior é a excentricidade, que se aproxima do valor 1.

Observação: No caso da órbita da Terra, que Kepler concluiu ser uma elipse com o Sol em um dos focos, a excentricidade e é igual a 0,01675, ou seja, a órbita é quase uma circunferência. Os semieixos, nesse caso, são, aproximadamente, a = 153 493 000 km e b = 153 454 000 km.

4. Considere a elipse representada a seguir de centro na origem e semieixos a = 13 e b = 5.

Determine:

a) a equação da elipse;

A equação da elipse é $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

b) a excentricidade da elipse;

A excentricidade da elipse é $e = \frac{c}{a}$ sendo $c = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

Calculando o valor de e, temos: $e = \frac{12}{13} \approx 0{,}923$.

c) os focos da elipse;

Os focos da elipse são os pontos de coordenadas (c; 0) e (–c; 0), ou seja, são os pontos (12; 0) e (–12; 0).

d) o valor de k para que o ponto P (5; k), do primeiro quadrante, pertença à elipse;

Para que o ponto (5; k) pertença à elipse, devemos ter $\frac{5^2}{13^2} + \frac{k^2}{5^2} = 1$, de onde obtemos que $k = \pm\frac{60}{13}$. Sendo P do primeiro quadrante, segue que $k = \frac{60}{13}$

e) a soma das distâncias de P aos focos da elipse.

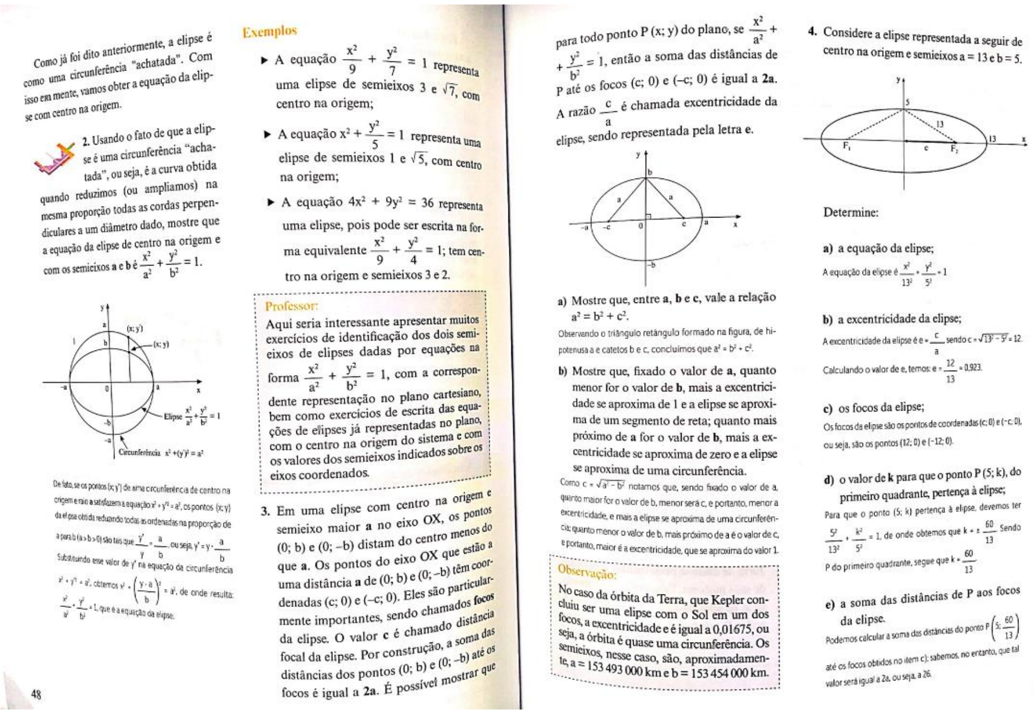
Podemos calcular a soma das distâncias do ponto $P\left(5; \frac{60}{13}\right)$ até os focos obtidos no item c); sabemos, no entanto, que tal valor será igual a 2a, ou seja, a 26.

48 4

Fonte: elaborado pelo autor.

No caderno de Matemática, utilizado na rede de ensino público do Estado de São Paulo, o conteúdo de geometria analítica: cônicas; é abordado com atividades de sala de aula apresentando a elipse, por exemplo, como uma circunferência achatada e relacionando sua excentricidade com a variação de aumento ou redução proporcional das cordas perpendiculares deixando livre para o professor a definição formal das cônicas. Na seção que trata da elipse, a primeira atividade trata da demonstração da equação reduzida com centro na origem. No caderno constam apenas atividades, não apresenta teoria e exercícios para fixação dos conceitos. As atividades precisam ser desenvolvidas junto com o professor, pois apresentam em algumas partes situações em que o aluno não consegue responder sozinho. O material não apresenta atividade de construção geométrica, deixando livre para o professor o desenvolvimento da parte teórica.

Fotografia 4 - Fotografia interna do caderno de matemática do 3º ano do Ensino Médio



Como já foi dito anteriormente, a elipse é como uma circunferência "achatada". Com isso em mente, vamos obter a equação da elipse com centro na origem.

2. Usando o fato de que a elipse é uma circunferência "achatada", ou seja, é a curva obtida quando reduzimos (ou ampliamos) na mesma proporção todas as cordas perpendiculares a um diâmetro dado, mostre que a equação da elipse de centro na origem e com os semieixos **a** e **b** é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Circunferência $x^2 + (y')^2 = a^2$

De fato, se os pontos (x; y') de uma circunferência de centro na origem e raio a satisfazem a equação $x^2 + y'^2 = a^2$, os pontos (x; y) da elipse obtida reduzindo todas as ordenadas na proporção de a para b (a > b > 0) são tais que $\frac{y'}{y} = \frac{a}{b}$, ou seja, $y' = y \cdot \frac{a}{b}$. Substituindo esse valor de y' na equação da circunferência $x^2 + y'^2 = a^2$, obtemos $x^2 + \left(\frac{y \cdot a}{b}\right)^2 = a^2$, de onde resulta: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, que é a equação da elipse.

48

Exemplos

- A equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$ representa uma elipse de semieixos 3 e $\sqrt{7}$, com centro na origem;
- A equação $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$ representa uma elipse de semieixos 1 e $\sqrt{5}$, com centro na origem;
- A equação $4x^2 + 9y^2 = 36$ representa uma elipse, pois pode ser escrita na forma equivalente $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; tem centro na origem e semieixos 3 e 2.

Professor:
Aqui seria interessante apresentar muitos exercícios de identificação dos dois semieixos de elipses dadas por equações na forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, com a correspondente representação no plano cartesiano, bem como exercícios de escrita das equações de elipses já representadas no plano, com o centro na origem do sistema e com os valores dos semieixos indicados sobre os eixos coordenados.

3. Em uma elipse com centro na origem e semieixo maior **a** no eixo OX, os pontos (0; b) e (0; –b) distam do centro menos do que **a**. Os pontos do eixo OX que estão a uma distância **a** de (0; b) e (0; –b) têm coordenadas (c; 0) e (–c; 0). Eles são particularmente importantes, sendo chamados **focos** da elipse. O valor **c** é chamado distância focal da elipse. Por construção, a soma das distâncias dos pontos (0; b) e (0; –b) até os focos é igual a **2a**. É possível mostrar que para todo ponto P (x; y) do plano, se $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, então a soma das distâncias de P até os focos (c; 0) e (–c; 0) é igual a **2a**. A razão $\frac{c}{a}$ é chamada excentricidade da elipse, sendo representada pela letra **e**.

a) Mostre que, entre **a**, **b** e **c**, vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$.
Observando o triângulo retângulo formado na figura, de hipotenusa a e catetos b e c, concluímos que $a^2 = b^2 + c^2$.

b) Mostre que, fixado o valor de **a**, quanto menor for o valor de **b**, mais a excentricidade se aproxima de 1 e a elipse se aproxima de um segmento de reta; quanto mais próximo de **a** for o valor de **b**, mais a excentricidade se aproxima de zero e a elipse se aproxima de uma circunferência.
Como $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ notamos que, sendo fixado o valor de a, quanto maior for o valor de b, menor será c, e portanto, menor a excentricidade, e mais a elipse se aproxima de uma circunferência; quanto menor o valor de b, mais próximo de a é o valor de c, e portanto, maior é a excentricidade, que se aproxima do valor 1.

Observação:
No caso da órbita da Terra, que Kepler concluiu ser uma elipse com o Sol em um dos focos, a excentricidade e é igual a 0,01675, ou seja, a órbita é quase uma circunferência. Os semieixos, nesse caso, são, aproximadamente, a = 153 493 000 km e b = 153 454 000 km.

4. Considere a elipse representada a seguir de centro na origem e semieixos a = 13 e b = 5.

Determine:

a) a equação da elipse;
A equação da elipse é $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

b) a excentricidade da elipse;
A excentricidade da elipse é $e = \frac{c}{a}$ sendo $c = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.
Calculando o valor de e, temos: $e = \frac{12}{13} = 0{,}923$.

c) os focos da elipse;
Os focos da elipse são os pontos de coordenadas (c; 0) e (–c; 0), ou seja, são os pontos (12; 0) e (–12; 0).

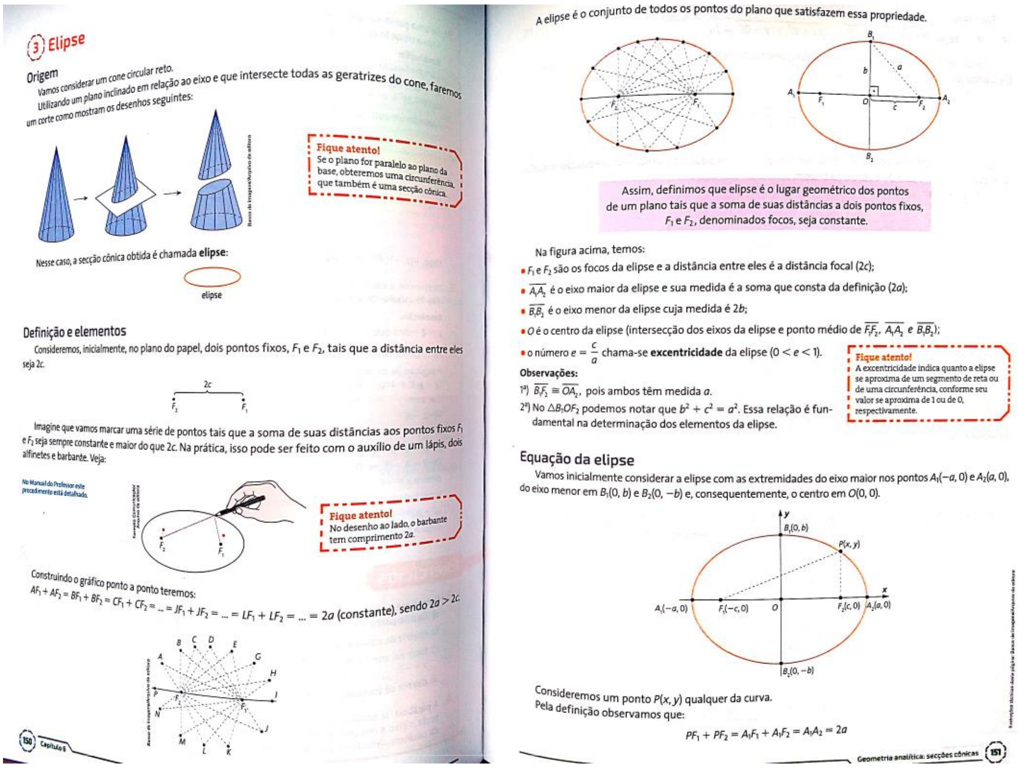
d) o valor de **k** para que o ponto P (5; k), do primeiro quadrante, pertença à elipse;
Para que o ponto (5; k) pertença à elipse, devemos ter $\frac{5^2}{13^2} + \frac{k^2}{5^2} = 1$, de onde obtemos que $k = \pm\frac{60}{13}$. Sendo P do primeiro quadrante, segue que $k = \frac{60}{13}$.

e) a soma das distâncias de P aos focos da elipse.
Podemos calcular a soma das distâncias do ponto $P\left(5; \frac{60}{13}\right)$ até os focos obtidos no item c); sabemos, no entanto, que tal valor será igual a 2a, ou seja, a 26.

Fonte: elaborado pelo autor.

No livro didático “Matemática Contexto & Aplicações”, o autor aborda o tema de cônicas contextualizando sua presença na arquitetura e, em seguida, conecta a origem a partir das secções do cone apresentando uma conexão entre a geometria plana e a espacial. Antes de apresentar as definições, o autor associa a construção geométrica da elipse aos seus elementos, faz uma demonstração clara e simples da equação reduzida com centro na origem e comenta as equações reduzidas obtidas por translação. O livro possui questões teóricas e contextualizadas e uma sugestão de atividade para ser desenvolvida no software *Geogebra*. O livro contempla as habilidades e competências previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN+), criado em 1997 e na matriz curricular do Estado de São Paulo (2011).

Fotografia 5 - Fotografia da parte interna do livro “Matemática Contexto & Aplicações”



3 Elipse

Origem

Vamos considerar um cone circular reto.

Utilizando um plano inclinado em relação ao eixo e que intersecte todas as geratrizes do cone, faremos um corte como mostram os desenhos seguintes:

Fique atento!
Se o plano for paralelo ao plano da base, obteremos uma circunferência, que também é uma secção cônica.

Nesse caso, a secção cônica obtida é chamada **elipse**:

elipse

Definição e elementos

Consideremos, inicialmente, no plano do papel, dois pontos fixos, F_1 e F_2, tais que a distância entre eles seja $2c$.

Imagine que vamos marcar uma série de pontos tais que a soma de suas distâncias aos pontos fixos F_1 e F_2 seja sempre constante e maior do que $2c$. Na prática, isso pode ser feito com o auxílio de um lápis, dois alfinetes e barbante. Veja:

No Manual do Professor este procedimento está detalhado.

Fique atento!
No desenho ao lado, o barbante tem comprimento $2a$.

Construindo o gráfico ponto a ponto teremos:

$AF_1 + AF_2 = BF_1 + BF_2 = CF_1 + CF_2 = ... = JF_1 + JF_2 = ... = LF_1 + LF_2 = ... = 2a$ (constante), sendo $2a > 2c$.

150 Capítulo 6

A elipse é o conjunto de todos os pontos do plano que satisfazem essa propriedade.

Assim, definimos que elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, F_1 e F_2, denominados focos, seja constante.

Na figura acima, temos:

- F_1 e F_2 são os focos da elipse e a distância entre eles é a distância focal ($2c$);
- $\overline{A_1A_2}$ é o eixo maior da elipse e sua medida é a soma que consta da definição ($2a$);
- $\overline{B_1B_2}$ é o eixo menor da elipse cuja medida é $2b$;
- O é o centro da elipse (intersecção dos eixos da elipse e ponto médio de $\overline{F_1F_2}$, $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$);
- o número $e = \frac{c}{a}$ chama-se **excentricidade** da elipse ($0 < e < 1$).

Observações:

1ª) $\overline{B_1F_2} \equiv \overline{OA_2}$, pois ambos têm medida a.

2ª) No $\triangle B_1OF_2$ podemos notar que $b^2 + c^2 = a^2$. Essa relação é fundamental na determinação dos elementos da elipse.

Fique atento!
A excentricidade indica quanto a elipse se aproxima de um segmento de reta ou de uma circunferência, conforme seu valor se aproxima de 1 ou de 0, respectivamente.

Equação da elipse

Vamos inicialmente considerar a elipse com as extremidades do eixo maior nos pontos $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$, do eixo menor em $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$ e, consequentemente, o centro em $O(0, 0)$.

Consideremos um ponto $P(x, y)$ qualquer da curva.

Pela definição observamos que:

$$PF_1 + PF_2 = A_1F_1 + A_1F_2 = A_1A_2 = 2a$$

Geometria analítica: secções cônicas 151

Fonte: elaborado pelo autor.

4 ATIVIDADE SOBRE CÔNICAS – ELIPSE

Este capítulo apresenta uma sequência didática aplicada pelo autor a alunos do 3º ano do Ensino Médio, bem como a análise dos resultados obtidos.

Primeiramente, a escolha das cônicas e, principalmente a elipse, deve-se ao fato de que no material utilizado pela escola, assim como no Currículo do Estado de São Paulo, o tema “Geometria Analítica” é abordado com os alunos do 3º ano do Ensino Médio, e por se tratar de um assunto extenso, programado por cerca de um bimestre para a abordagem do mesmo.

Após vinte e três anos de magistério, dos quais quinze foram no Ensino Médio, sempre que o assunto “Geometria Analítica” fora abordado, os estudantes apresentavam maior dificuldade nas cônicas. Suas queixas eram principalmente a quantidade de fórmulas e nenhuma aplicação prática ao cotidiano imediato do estudante. Havia também o fato de que a forma tratada pelo material apresentava uma linguagem direta e técnica, onde se apresentam definições, elementos, relação notável e suas respectivas fórmulas e em seguida exercícios. Conforme o programa do material didático, o professor deve dispor de no máximo três aulas semanais para cada cônica. No plano de curso, programava-se, cada aula com 50 minutos, uma para apresentação e explicação da teoria, uma para exemplos e exercícios e a última para correção de exercícios e tarefas.

A escolha da elipse, para desenvolver a sequência didática, deve-se ao fato de que, na programação do material, era a primeira cônica apresentada aos alunos.

Visto a necessidade de um conhecimento mais aprofundado sobre as cônicas, a busca pelo mestrado profissional oferecido pela UFSCar de São Carlos foi de grande valia. Os professores auxiliaram não só na compreensão teórica, mas também na prática do assunto abordado. Com tempo e a dedicação necessários para desenvolvimento, o curso oferece caminhos que ampliaram a maneira de olhar a Matemática. No intuito de se aplicar o conteúdo aprendido, essa dissertação teve por objetivo avaliar o procedimento *in loco.* Como determinante da aplicação e avaliação do aprendizado, foi escolhida uma escola para aplicação da metodologia de ensino. Após o primeiro ano do mestrado, faz-se necessário determinar o conteúdo a ser trabalhado com os alunos e escola para desenvolver o projeto.

A escola escolhida foi o Colégio Técnico e Industrial de Piracicaba (COTIP), situado na mesma, na qual o ensino de Matemática à turma do 3º ano do Ensino

Médio tem sido dirigido pelo autor há mais de 10 anos. A busca para o desenvolvimento de atividades diferenciadas para o Ensino Médio sempre foi o foco de estudo. Devido ao tempo escasso para a abordagem dos conteúdos desenvolvidos no 3º ano, a procura pelo aprofundamento nas metodologias de ensino foi primordial, sem interferência no programa planejado.

A escola possui uma ótima infraestrutura com vários laboratórios de informática e acesso estável à internet, facilitando a aplicação de atividades didático-pedagógicas, uma vez que o aluno desenvolve individualmente, usando seus próprios conhecimentos, sem auxílio de outros. No desenvolvimento da sequência didática, os alunos fizeram uso do *software* livre *Geogebra* na versão online. Para minimizar ao máximo a interferência do professor no trabalho dos alunos, prevendo que poderiam apresentar dificuldades com o uso do *software*, foram utilizadas duas aulas de correção de exercícios sobre posições relativas entre retas, e entre reta e circunferência, fazendo a verificação dos cálculos com o *software*, com o objetivo de familiarizá-los com o uso do mesmo.

Em 2017, realizou-se a primeira tentativa com aplicação de uma atividade diferenciada para uma turma de 3º ano com trinta estudantes.

Tal atividade era constituída de três etapas, cada uma com um tempo de duas aulas. A primeira dificuldade já se apresentou nesse ponto, precisava-se de muito tempo para a realização da atividade programada e necessitaria reduzir o tempo de outros assuntos. A primeira etapa consistia na construção de uma elipse, a partir de alguns dados usados como base, e utilização de régua e compasso. A atividade foi realizada em dupla em sala de aula. Essa etapa foi muito produtiva, mas foi necessário o auxílio do professor o tempo todo, pois os alunos, em sua maioria, não tinham prévio contato com desenho geométrico. Na segunda etapa, a mesma dupla deveria, a partir do desenho realizado, determinar a equação reduzida da elipse. Esse foi um momento problemático, as dificuldades não previstas do uso da álgebra tornaram a atividade improdutiva, de maneira que não houve aproveitamento algum, mesmo com o auxílio do professor. Muitas dificuldades puderam ser observadas em relação aos alunos quanto à fatoração e produtos notáveis. Não havendo tempo hábil para trabalhar todas as dificuldades apresentadas pelos alunos, assim, a sequência didática teve de ser abandonada para dar sequência ao programa original, que necessitou ser retomado de modo a não atrasá-lo mais, pois, já haviam sido utilizadas oito aulas. Essa experiência possibilitou tornar a atividade mais objetiva e direcionada, com uso exclusivo do laboratório de informática, que seria a etapa 3, que seria usada para constatar as construções e as informações das etapas anteriores.

Em 2018, uma nova versão foi aplicada para a turma do 3º ano, com vinte e um alunos, divididos em dois grupos, e utilizando dois laboratórios, com um grupo para cada laboratório, e um aluno por computador, monitorando o desenvolvimento dos alunos. Os laboratórios utilizados tinham as portas de acesso vizinhas, o que facilitava o monitoramento. Todas as despesas de impressão foram custeadas pelo professor com recursos próprios.

É de suma importância que, em aulas anteriores a aplicação desta atividade, os alunos tenham contato com a definição, os elementos e equações reduzidas, para usar como base em suas respostas.

Após a aplicação da atividade, em aula posterior, fizemos uma discussão aberta sobre os resultados e o que era esperado.

4.1 DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE

Abaixo, segue sequência de fotografias dos alunos desenvolvendo a sequência didática.

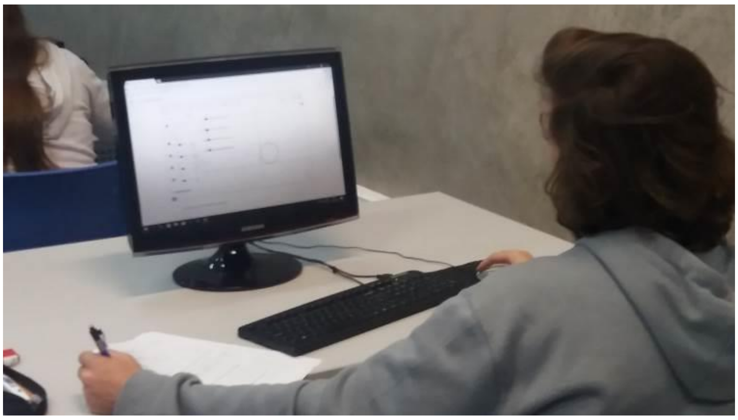
Fotografia 6 - Alunos desenvolvendo a sequência didática

Fonte: elaborado pelo autor.

Fotografia 7 - Alunos desenvolvendo a sequência didática

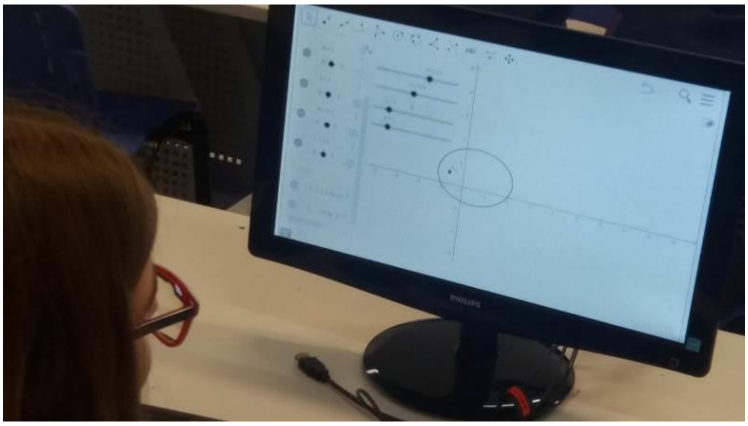
Fonte: elaborado pelo autor.

Fotografia 8 - Alunos desenvolvendo a sequência didática



Fonte: elaborado pelo autor.

Fotografia 9 - Alunos desenvolvendo a sequência didática



Fonte: elaborado pelo autor.

4.2 DA ATIVIDADE

Nesta seção, o autor apresenta a atividade que foi aplicada aos alunos e no apêndice A encontra-se o texto na íntegra para que se possa fazer uso mais facilmente.

Material:

Cópias (uma por aluno) da sequência didática.

Laboratório de Informática com acesso à internet.

Software livre Geogebra online[5].

Tempo previsto para o desenvolvimento:

Foi previsto um tempo de duas aulas de 45 minutos cada, para o desenvolvimento dessa atividade no computador.

Objetivo:

A atividade visa revisar conceitos vistos em sala de aula sobre a cônica ELIPSE. Com uso de parâmetros, busca-se estudar através da observação, as transformações da cônica quando forem alteradas as medidas dos semieixos e as coordenadas do centro, além de observar a mudança no valor da excentricidade.

Método:

Com uso do computador e o software livre GEOGEBRA, os alunos construirão a cônica seguindo o procedimento abaixo descrito.

Procedimento:

Após abrir o GEOGEBRA no site: <*https://www.geogebra.org/m/KGWhcAqc*>, siga as orientações.

1º passo: Clique com o botão direito do *mouse* sobre a Região Gráfica do Geogebra e escolha a opção “Grelha”

---

[5] Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/KGWhcAqc>.

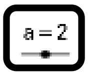
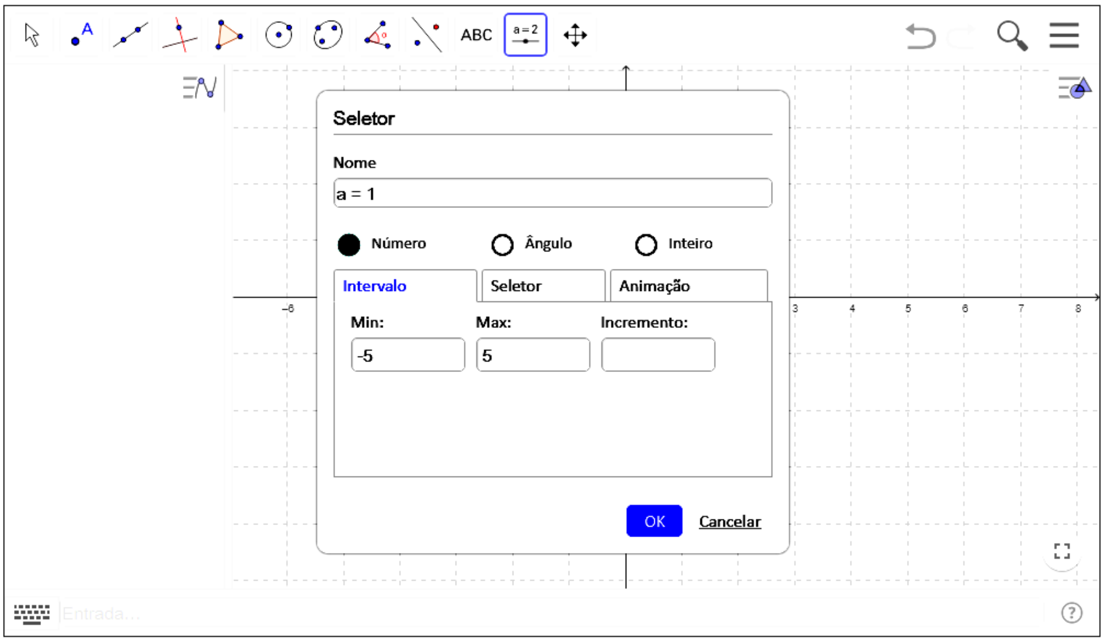
2º passo: Na Barra de ferramentas, clique com botão esquerdo do *mouse*, inicialmente na opção “Controle deslizante”  e, em seguida, clique em qualquer ponto da janela de visualização (Região Gráfica); abrirá uma janela como a da figura 24.

Figura 24 - Captura da tela do 2º passo



Fonte: elaborado pelo autor.

Altere o nome do parâmetro para “**m**” e modifique o valor mínimo no campo “Min” para **zero** e tecle “OK”. Proceda da mesma forma para criar os botões dos parâmetros n, k e h.

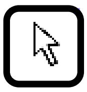
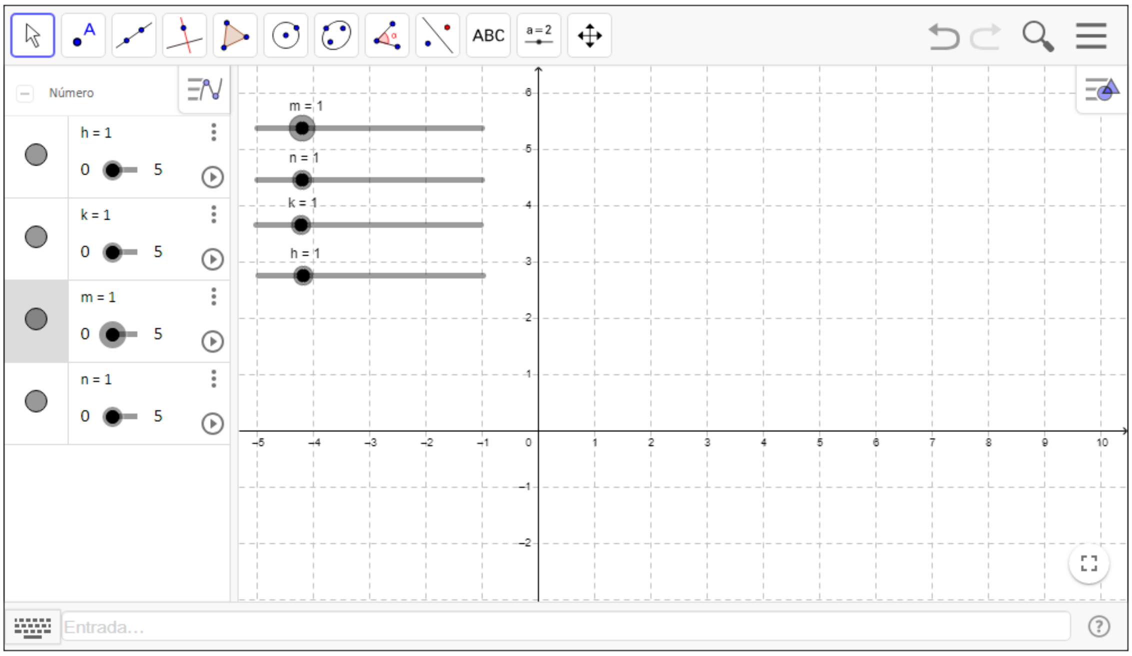
3º passo: Na Barra de ferramentas, clique com o botão esquerdo do mouse na opção “Selecionar”  e depois arraste os quatro controles deslizantes para o 2º quadrante da Região Gráfica da tela (Plano Cartesiano). Veja figura 25.

Figura 25 - Captura da tela do 3º passo



Fonte: elaborado pelo autor.

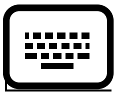
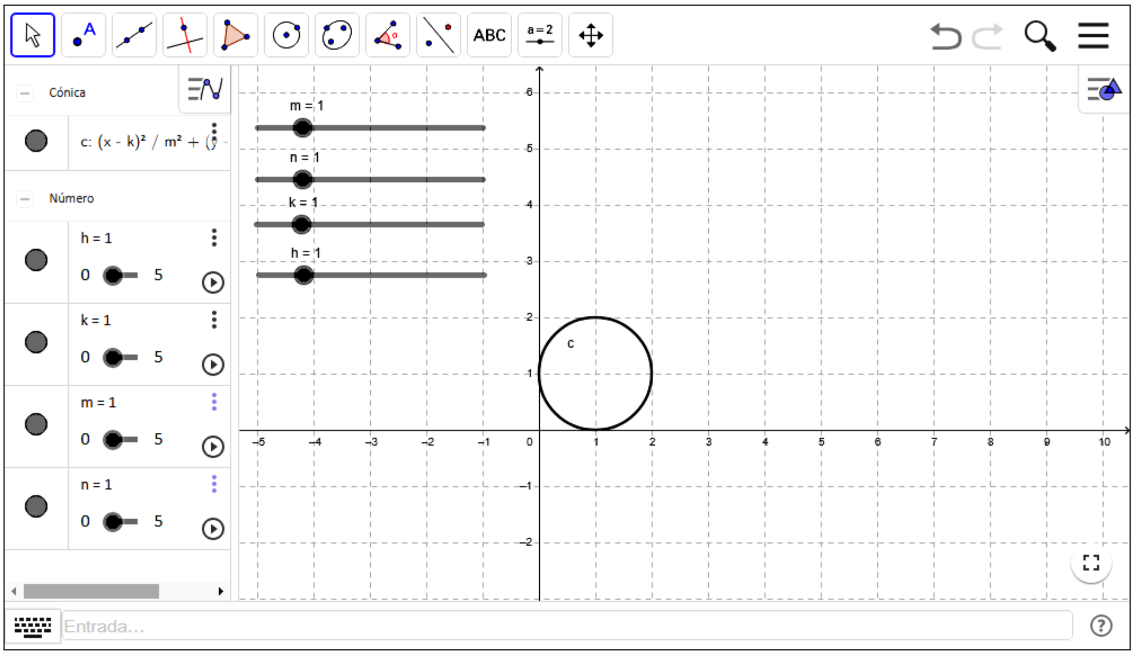
4º passo: No campo Entrada de comando (situado na parte inferior da tela) ao lado da figura  digite: **((x – k)^2)/(m^2) + ((y – h)^2)/(n^2) = 1** e tecle "Enter". Observe que "^" significa a operação de potenciação.

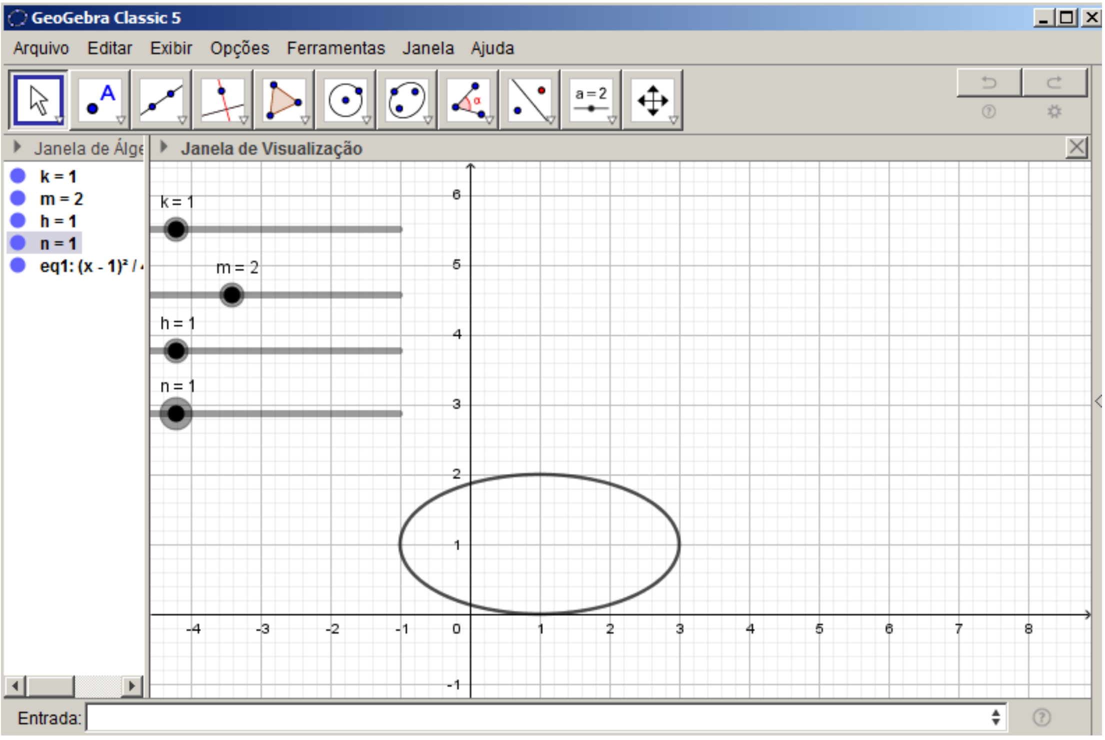
Figura 26 - Captura da tela do 4º passo



Fonte: elaborado pelo autor.

5º passo: Observe significados importantes para os parâmetros m, n, k e h. Para isso, clique na bolinha do controle deslizante do parâmetro **m** e altere lentamente o seu valor (basta arrastar a bolinha para os lados). Observe o que acontece com o gráfico da elipse e anote suas observações. Repita a operação para os controles deslizantes dos parâmetros n, *k* e h. Anote suas observações (utilize um controle deslizante por vez).

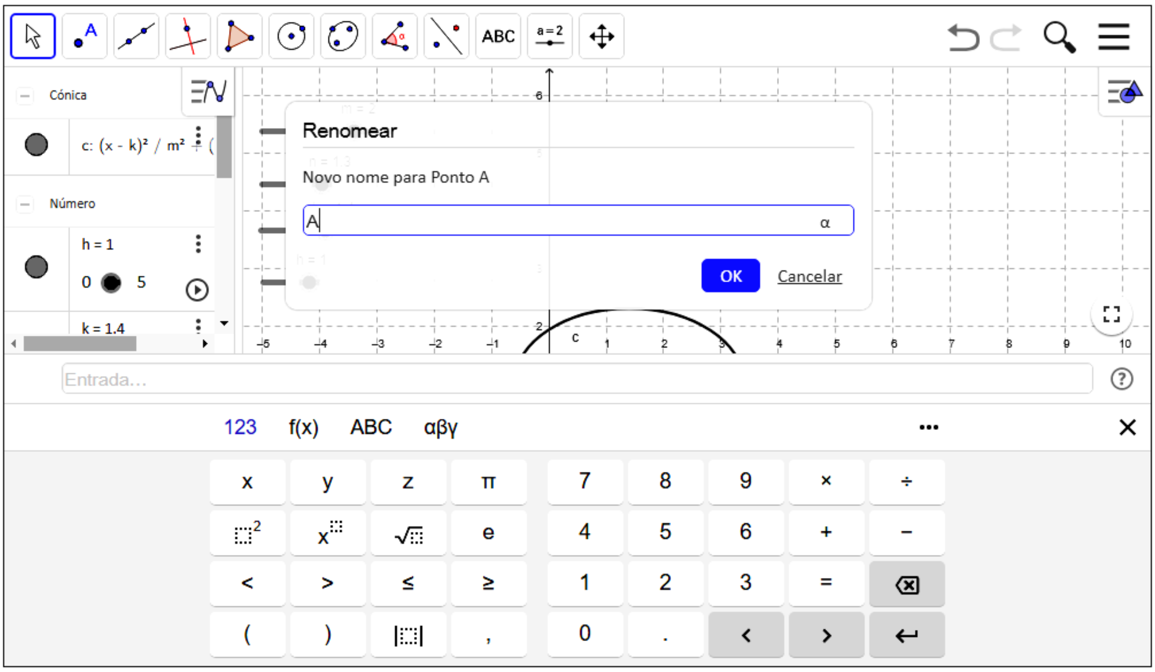
Figura 27 - Captura da tela do 5º passo



Fonte: elaborado pelo autor.

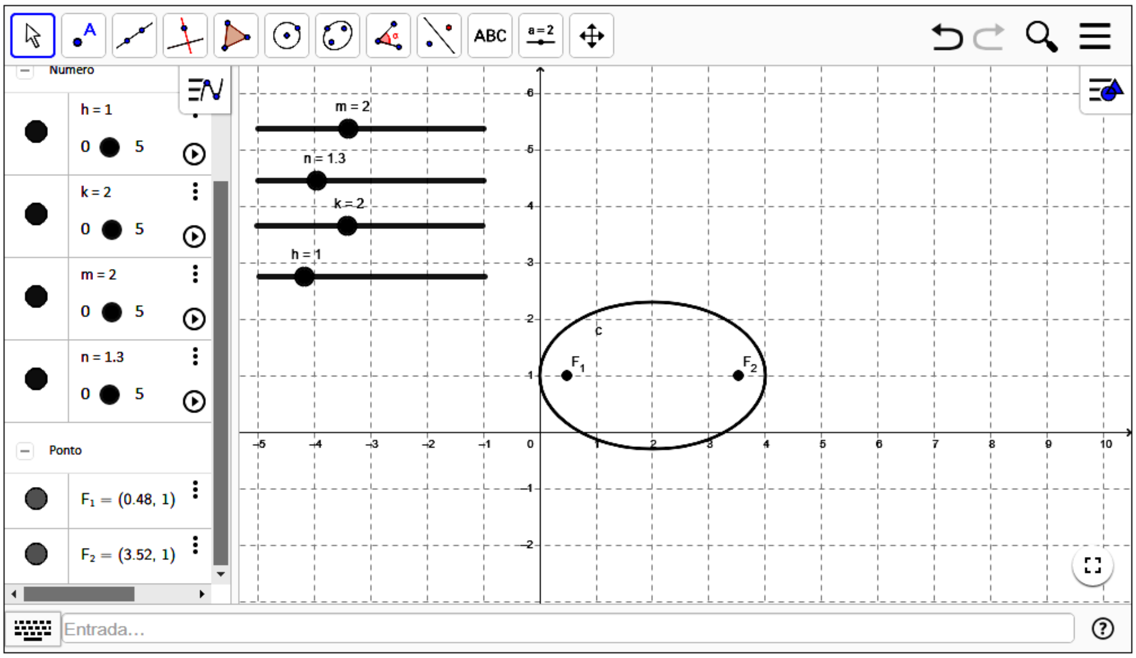
6º passo: Digite no campo de entrada: **Foco(c).** Note que aparecerão dois pontos: A e B. Altere o nome do ponto A para F_1, para isso, basta clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto A e escolher a opção “**Renomear”,** abrirá uma caixa de diálogo com a letra A, apague a letra e digite **F_1** e clique em “**OK”.** Altere o nome do ponto B para **F_2**, procedendo da mesma forma.

Figura 28 - Captura da tela do 6º passo



Fonte: elaborado pelo autor.

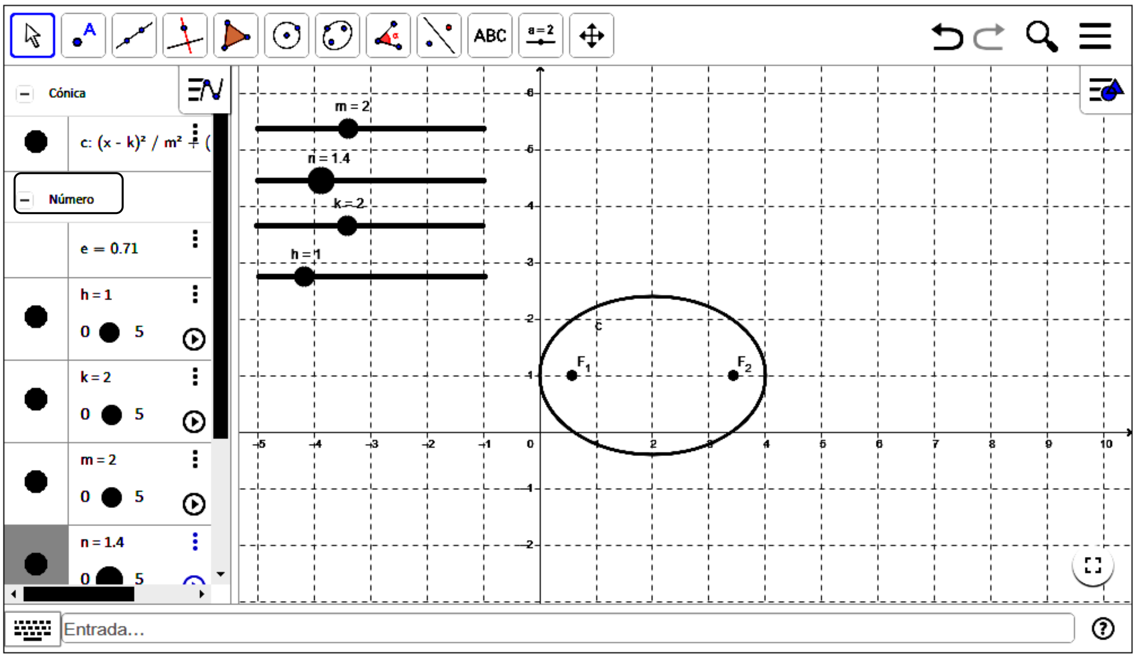
Figura 29 - Captura da tela do 6º passo (conclusão)



Fonte: elaborado pelo autor.

7º passo: Digite **e = Excentricidade(c)** no campo de Entrada de comando e tecle “Enter”. Note que aparecerá a letra ***e*** na zona algébrica. O número que está à direita do ***e*** representa a excentricidade da elipse.

Figura 30 - Captura de tela do 7º passo



Fonte: elaborado pelo autor.

Agora, responda às perguntas tendo como base a elipse:

$$\frac{(x-k)^2}{m^2}+\frac{(y-h)^2}{n^2}=1.$$

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

d) Conforme são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geram uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria?

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

4.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS COLETADOS

A atividade foi aplicada para vinte e um alunos do 3º ano do Ensino Médio com o objetivo de rever os conceitos sobre a elipse estudados em aulas anteriores.

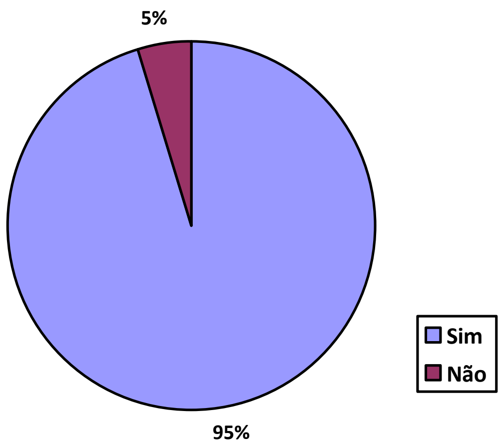
O autor disponibiliza no apêndice C, as respostas na íntegra de todos os alunos participantes deste trabalho.

Os resultados obtidos foram:

a) <u>Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?</u>

Objetivo da questão: Espera-se que neste item o aluno conclua que variando os parâmetros *m* e *n* altera a medida dos eixos da elipse.

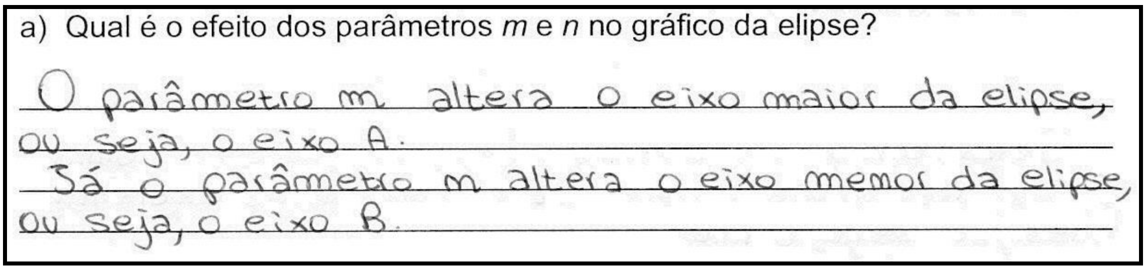
Gráfico 1 - Percentual de alunos que atingiram o objetivo da questão A.



Fonte: elaborado pelo autor.

Resposta que mais se aproxima do objetivo do item:

Fotografia 10 - Resposta recortada da atividade do aluno.


a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

O parâmetro m altera o eixo maior da elipse, ou seja, o eixo A.
Já o parâmetro m altera o eixo menor da elipse, ou seja, o eixo B.

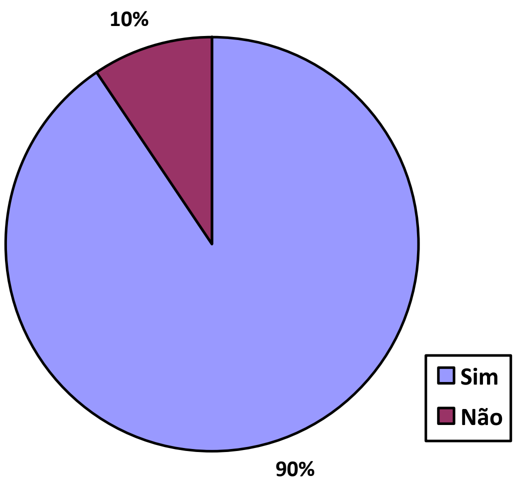
Fonte: elaborado pelo autor.

Pode-se se verificar através do gráfico acima que quase a totalidade da turma compreendeu as transformações realizadas pelos parâmetros *m* e *n*. A maioria das respostas coletadas explicou claramente que os parâmetros realizavam alterações na horizontal e vertical dos eixos, mas sem apontar qual eixo foi modificado. Apenas um aluno não concluiu o objetivo, pois a explicação de sua observação não foi clara.

b) <u>Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?</u>

Objetivo da questão: Espera-se que o aluno observe que os valores de *k* e *h* efetuam translações na elipse.

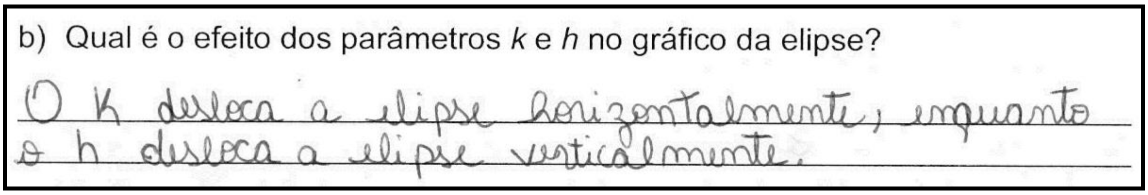
Gráfico 2 - Percentual de alunos que atingiram o objetivo da questão B.



Fonte: elaborado pelo autor.

Resposta que mais se aproxima do objetivo do item:

Fotografia 11 - Resposta recortada da atividade do aluno.



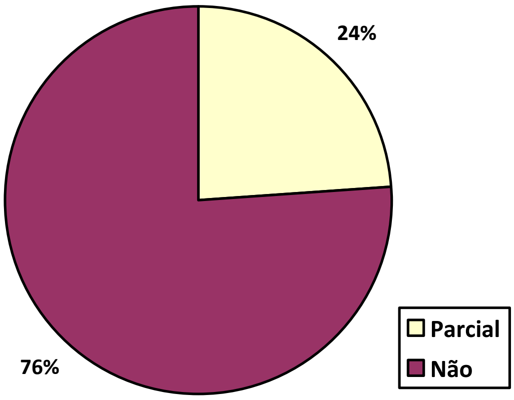
Fonte: elaborado pelo autor.

Pode-se constatar que quase a totalidade dos alunos observou que os parâmetros k e h efetuam a translação da elipse no plano cartesiano. Os alunos que não atingiram o objetivo da questão, em suas observações, confundiram as transformações do item b) com as do item a).

c) <u>No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?</u>

Objetivo da questão: Determinar que k e h são as coordenadas do centro da elipse.

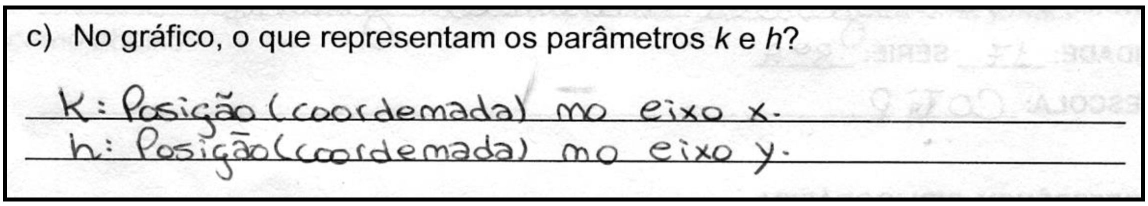
Gráfico 3 - Percentual de alunos que atingiram o objetivo da questão C.



Fonte: elaborado pelo autor.

Resposta que mais se aproxima do objetivo do item:

Fotografia 12 - Resposta recortada da atividade do aluno.



Fonte: elaborado pelo autor.

Neste item, os alunos, que em sua maioria, não atingiram o objetivo da questão, escreveram em suas observações a conclusão do item anterior, e não se atentaram para que as respostas devessem levar em consideração a equação reduzida apresentada na atividade. Para tanto, os alunos que concluíram parcialmente o objetivo (como a resposta acima) observaram que k e h representavam as coordenadas x e y do plano cartesiano, mas não notaram que ambas representam as coordenadas do centro da elipse.

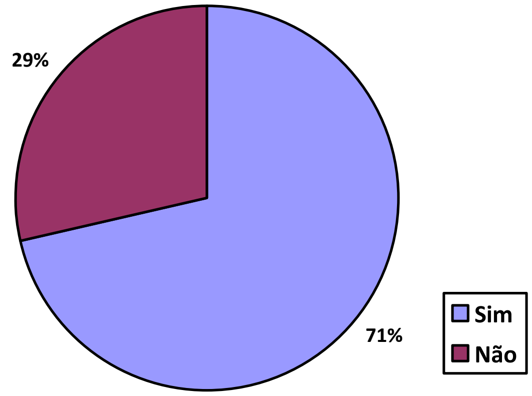
Uma sugestão para evitar o erro de interpretação, seria mudar o enunciado da questão para:

c) No gráfico, que elemento da elipse os parâmetros k e h representam?

d) Conforme são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geram uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

Objetivos da questão: Espera-se que o aluno perceba que m > n a elipse tem segmento focal paralelo ao eixo horizontal e se n > m a elipse tem segmento paralelo ao eixo vertical.

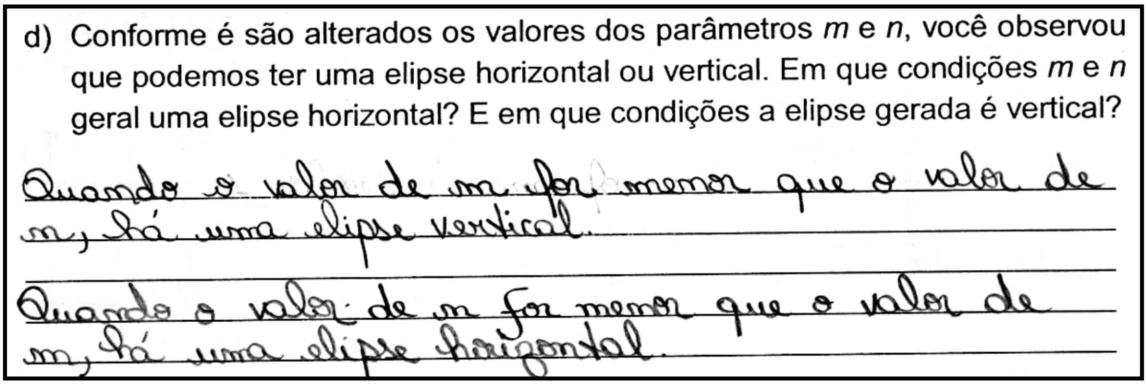
Gráfico 4 - Percentual de alunos que atingiram o objetivo da questão D.



Fonte: elaborado pelo autor.

Resposta que mais se aproxima do objetivo do item:

Fotografia 13 - Resposta recortada da atividade do aluno.


d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

Quando o valor de m for menor que o valor de n, há uma elipse vertical.

Quando o valor de n for menor que o valor de m, há uma elipse horizontal.

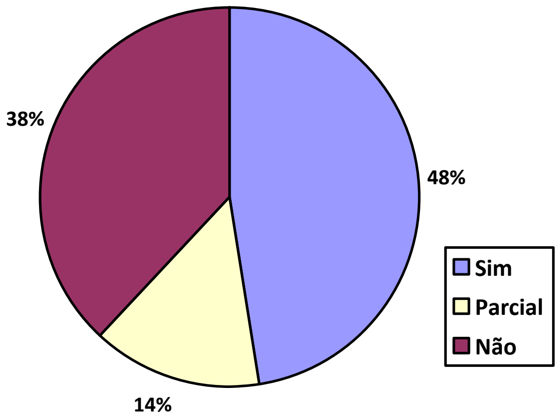
Fonte: elaborado pelo autor.

Neste item, 70% dos alunos compreenderam as condições em que m e n geram a elipse vertical e a horizontal, porém os 30% que não atingiram o objetivo, segundo suas respostas, fizeram uma comparação não entre m e n, mas sim em relação ao valor numérico inicial 1 e não perceberam a relação entre os parâmetros ou não souberam transcrever suas observações.

e) <u>Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?</u>

Objetivos da questão: Espera-se que o aluno consiga identificar que se m > n na elipse horizontal então, m é o semieixo maior e n é o semieixo menor. Para o caso em que n > m então, n é o semieixo maior e m é o semieixo menor.

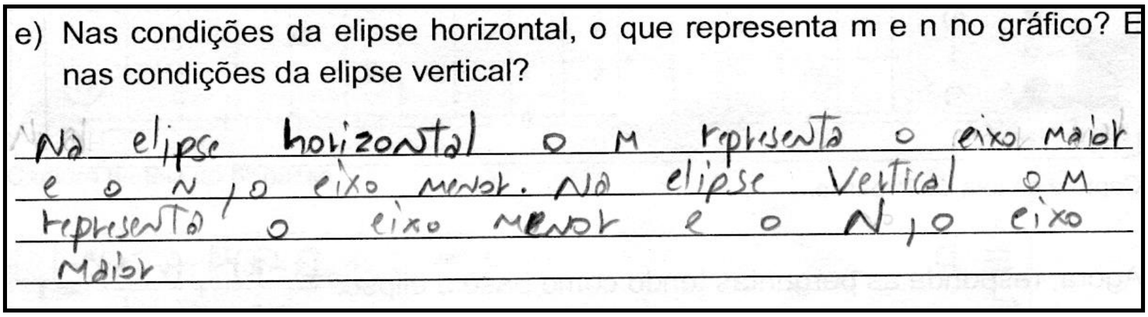
Gráfico 5 - Percentual de alunos que atingiram o objetivo da questão E.



Fonte: elaborado pelo autor.

Resposta que mais se aproxima do objetivo do item:

Fotografia 14 - Resposta recortada da atividade do aluno.


e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

Na elipse horizontal o m representa o eixo maior e o n, o eixo menor. Na elipse vertical o m representa o eixo menor e o n, o eixo maior

Fonte: elaborado pelo autor.

Os alunos compreenderam parcialmente o objetivo da questão, concluíram corretamente a função de m e n na elipse, porém não souberam associar os parâmetros aos eixos, relacionaram com altura e comprimento da elipse. Em sua forma de escrita, o comprimento representa o eixo maior e a altura o eixo menor.

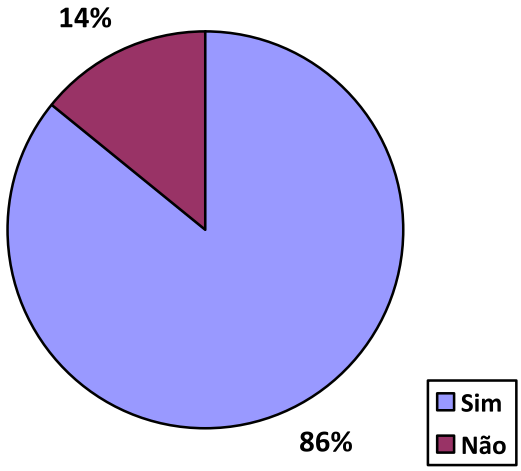
Os alunos que não atingiram o objetivo não souberam relacionar os parâmetros.

Uma sugestão para melhorar o desempenho dos resultados desse item estaria em enfatizar, na aula anterior à aplicação desta atividade, os elementos da elipse, para que o aluno consiga associar melhor os parâmetros da atividade com os elementos da elipse.

f) <u>Se m = n que tipo de elipse você obteria?</u>

Objetivo da questão: O aluno deve observar que se m = n então a figura gerada é uma circunferência (caso degenerado de elipse).

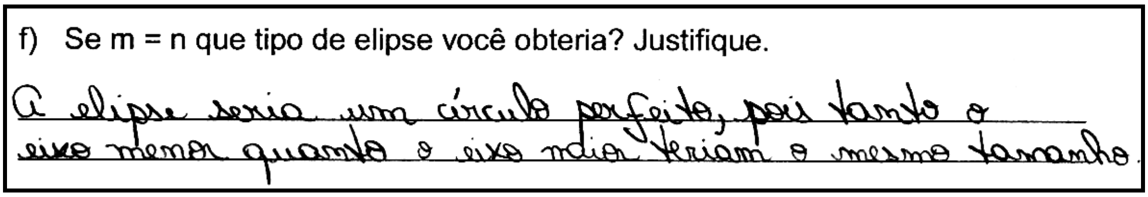
Gráfico 6 - Percentual de alunos que atingiram o objetivo da questão F.



Fonte: elaborado pelo autor.

Resposta que mais se aproxima do objetivo do item:

Fotografia 15 - Resposta recortada da atividade do aluno.



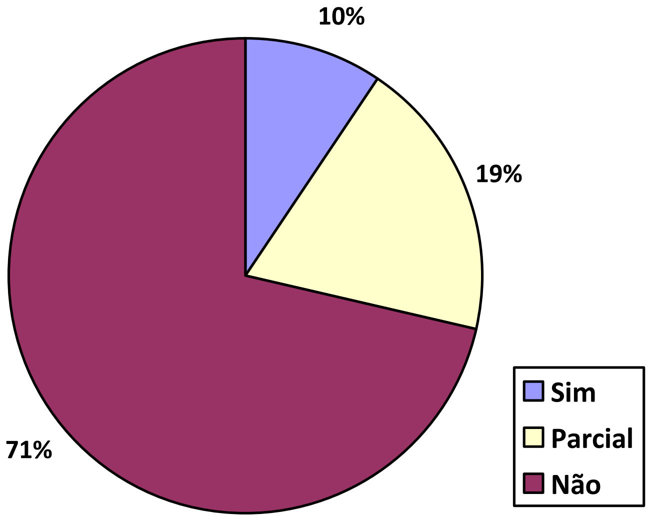
Fonte: elaborado pelo autor.

Os alunos que não atingiram o objetivo da questão, em suas justificativas, não conseguiram observar e/ou explicar a mudança da elipse para circunferência.

g) <u>Ao movimentar os parâmetros *m* e *n*, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?</u>

Objetivos da questão: Espera-se que o aluno observe através do valor da excentricidade, em que situações os parâmetros *m* e *n* geram os casos degenerados da elipse (segmento de reta e circunferência).

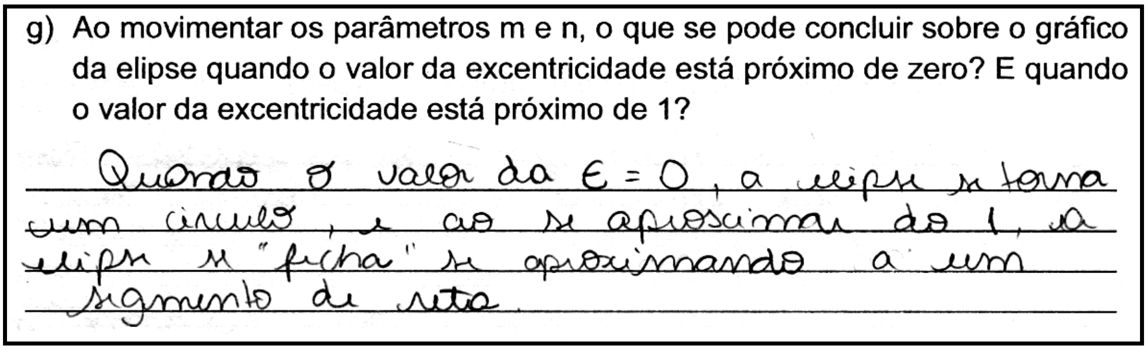
Gráfico 7 - Percentual de alunos que atingiram o objetivo da questão G.



Fonte: elaborado pelo autor.

Resposta que mais se aproxima do objetivo do item:

Fotografia 16 - Resposta recortada da atividade do aluno.


g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Quando o valor da $\epsilon = 0$, a elipse se torna um circulo, e ao se aproximar do 1, a elipse se "fecha" se aproximando a um segmento de reta.

Fonte: elaborado pelo autor.

Os alunos que não atingiram os objetivos da questão, em suas respostas, mostram que não compreenderam o que era para ser observado na relação entre o valor da excentricidade e a transformação do gráfico. Já os alunos que atingiram parcialmente os objetivos, apresentaram dificuldade em justificar as transformações.

Proponho para este item uma modificação em seu texto, de tal forma a direcionar melhor a observação do aluno. O novo texto poderia se apresentar, como o exemplo:

g) Movimente os parâmetros m e n separadamente e observe as alterações que acontecem no gráfico. Primeiro faça as variações de forma que a excentricidade se aproxime de zero, e anote em que condições para m e n temos excentricidade igual a zero e que desenho o gráfico representa nestas condições. Agora, faça o mesmo variando m e n para que a excentricidade se aproxime do valor 1 (um), relate suas observações com relação a m e n e o desenho do gráfico.

Durante a aplicação da atividade observou-se que, até mesmo os alunos que apresentam dificuldade com a Matemática e, nas aulas tradicionais se apresentam desmotivados, nessas aulas se empenharam, desenvolveram e participaram ativamente do processo.

Posteriormente, na avaliação bimestral, fora colocado uma questão sobre o assunto abordado na sequência didática e o retorno observado foi positivo.

5 CONCLUSÂO

Partindo de uma abordagem prática sobre o conteúdo de cônicas, no caso elipse, observou-se que o protagonismo dos alunos em sala de aula é a essência para sua motivação, embora a sequência didática aplicada tenha sido direcionada, ainda assim mostrou uma melhor participação dos estudantes às aulas, o que vem a ser de suma importância para que o aprendizado seja efetivo, no que se refere ao PCN, mas é preciso ter clareza de que não se pode desenvolver todas as aulas dessa forma devido ao tempo e ao excesso de conteúdo a ser abordado no decorrer do Ensino Médio. Porém sempre há espaço para que se possa “encaixar” atividades dessa magnitude para que o aluno deixe sua postura passiva e passe a ter uma presença mais ativa e motivada em aula. Também notei que com os assuntos das cônicas hipérbole e parábola, após o desenvolvimento da metodologia, os alunos apresentaram menor resistência e compreenderam melhor as diferenças, semelhanças e suas relações.

REFERÊNCIAS

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. *Geometria analítica:* um tratamento vetorial. São Paulo: Makron Books do Brasil, 2009. Disponível em: <http://mtm.ufsc.br/~muniz/mtm5512/refs/Geometria_Analitica_Boulos.pdf>. Acesso em: 12 set. 2018.

BOYER, Carlos B, *História da matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio (PCN+):* ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2018.

______. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o ensino médio:* ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. vol. 2, Brasília, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 26 ago. 2019.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio*: o jovem como sujeito do ensino médio. Etapa I, caderno II. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

______. Ministério da Educação. Secretária de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. *Parte III* - Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC / SEMTEC, 2000.

CALVOSO, Julio Cesar. *Estudo das cônicas com aplicações e o software Geogebra como ferramenta de apoio didático.* 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=893>. Acesso em: 4 abr. 2018.

CHOMEN, Gabriele. *Parábolas:* as curvas misteriosas. 2016. Disponível em: <https://www3.unicentro.br/petfisica/2016/03/30/parabolas-as-curvas-misteriosas/>. Acesso em: 28 fev. 2018.

CHUNG, Kenji. *A Parábola, sua propriedade refletora e aplicações.* 2013. Trabalho de Conclusão (Mestrado Profissional) - Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013. Disponível em: <http://www.dm.ufrpe.br/sites/www.dm.ufrpe.br/files/tcc_kenji_chung_saldanha.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2018.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*: contexto & aplicações. São Paulo: Ática, 2016.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia Rosenvald; CRISSAFF, Lhaylla dos Santos. *Geometria analítica.* 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

GARDA, Lais. *Aplicações no cotidiano.* [201-?]. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/pxU5GYen >. Acesso: 28 fev. 2018.

GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo; MATTOS, Francisco. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

GONÇALVES, Leandro. *Propriedades reflexivas das cônicas*. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=929>. Acesso em: 8 maio 2018.

LENZ, Mainara. *O estudo das cônicas a partir da construção geométrica.* 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2014. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/tmelo/diss-mainara.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2018.

LOPES, Juracélio Ferreira. *Cônicas e aplicações*. 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática Universitária) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2011. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91061/lopes_jf_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 20 jun. 2018.

MACHADO, Mirtes Tamy Gomes. *Parábolas*: as curvas preciosas. 2007. Material didático – Trabalho (Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE) – Universidade Estadual de Londrina, Santo Antônio da Platina, 2007. Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_mirtes_tamy_gomes_machado.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2018.

MARTINS, Roberto de Andrade; SILVA, Ana Paula Bispo da. Princípios da óptica geométrica e suas exceções: Heron e a reflexão em espelhos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, v. 35, n.1, p. 1-9, mar. 2013. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172013000100028. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172013000100028>. Acesso em: 24 mar. 2019.

MOL, Rogério Santos. *Introdução à história da matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. ISBN 978-85-64724-26-6. Disponível em: <https://pt.scribd.com/doc/317062363/Untitled?secret_password=Iz3zp58H2wg0ofnYVq4J#fullscreen&from_embed>. Acesso em: 10 mar. 2018.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Geometria*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
OLIVEIRA, Oswaldo Rio Branco de. *Cônicas* (propriedades de reflexão). São Paulo, [2009?]. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~oliveira/ele-conicas.pdf>. Acesso em: 2 jul. 2018.

QUEIRÓ, João Filipe. *A elipse, a parábola e a hipérbole*: propriedades e aplicações. Universidade de Coimbra. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~jfqueiro/aplicacoes.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2018.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. FINI, Maria Inês (coord. geral). Matemática: ensino médio. *Caderno do professor*, vol.1, São Paulo: SEE. 2013.

______. Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo. *Caderno do professor,* Ensino médio, 3. série, vol. 1, São Paulo, 2014 – 2017.

SÃO PAULO (Estado); Secretaria da Educação; FINI, Maria Inês (coord. geral). *Currículo do Estado de São Paulo*: matemática e suas tecnologias. 1. ed. atual. São Paulo: SEE, 2011. Disponível em: <https://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf>. Acesso em: 5 jul. 2018.

______. *Proposta curricular do Estado de São Paulo:* matemática. São Paulo: SEE, 2008. Disponível em: <http://www.rededosaber.sp.gov.br/portais/Portals/18/arquivos/Prop_MAT_COMP_red_md_20_03.pdf>. Acesso em: 5 jul. 2018.

SCHMIDT, Carlos Roberto. *Trabalho de quádricas.* 2012. Trabalho apresentado para avaliação de disciplina de Geometria Analítica do Trabalho Acadêmico. (Graduação em Engenharia de Produção) – Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade Regional de Blumenau, Blumenau – SC, 2012. Disponível em: <https://www.docsity.com/pt/quadricas-marlon/4838868/>. Acesso: 21 ago. 2019.

SILVA, Arianne Alves da; SANTOS, Mirianne Andressa Silva. As cônicas de Apolônio. *In:* XII Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo: UNICSUL, jul., 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5062_3970_ID.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2018.

SIQUEIRA, Carlos Alberto Fernandes. *Um estudo didático das cônicas:* quadros, registros e pontos de vista. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/19695/2/Carlos%20Alberto%20Fernandes%20de%20Siqueira.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2018.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. *Matemática para compreender o mundo:* ensino médio. vol. 3. São Paulo: Saraiva, 2017.

SOUZA, Lindomar Duarte. *Cônicas e suas propriedades notáveis*. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/128599/328484.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 20 jun. 2018.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica*. São Paulo: McGRAW-HILL, 1987.

VALENTE, José Armando. Diferentes usos do computador na educação. *Em Aberto,* Brasília, ano 12, n. 57, p. 3-9, jan./mar. 1993. Disponível em: http://rbep.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/1876/1847. Acesso em: 13 set. 2018.

VENTURI, Jacir. Apolônio de Perga. *Geometria Analítica*, 2012. Disponível em: <https://www.geometriaanalitica.com.br/copia-israel-4>. Acesso em: 15 fev. 2018.

APÊNDICE A – Material para o desenvolvimento da atividade com os alunos

ATIVIDADE SOBRE CÔNICAS – ELIPSE

Material:

Software livre Geogebra online.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/KGWhcAqc>.

Objetivo:

A atividade visa revisar conceitos vistos em sala de aula sobre a cônica ELIPSE. Com uso de parâmetros, busca-se estudar através da observação, as transformações da cônica quando forem alteradas as medidas dos semieixos e as coordenadas do centro, além de observar a mudança no valor da excentricidade.

Método:

Com uso do computador e o software livre GEOGEBRA, os alunos construirão a cônica seguindo o procedimento abaixo descrito.

Procedimento:

Após abrir o GEOGEBRA no site: <*https://www.geogebra.org/m/KGWhcAqc*>, siga as orientações.

1º passo: Clique com o botão direito do *mouse* sobre a Região Gráfica do *Geogebra* e escolha a opção “Grelha”

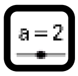
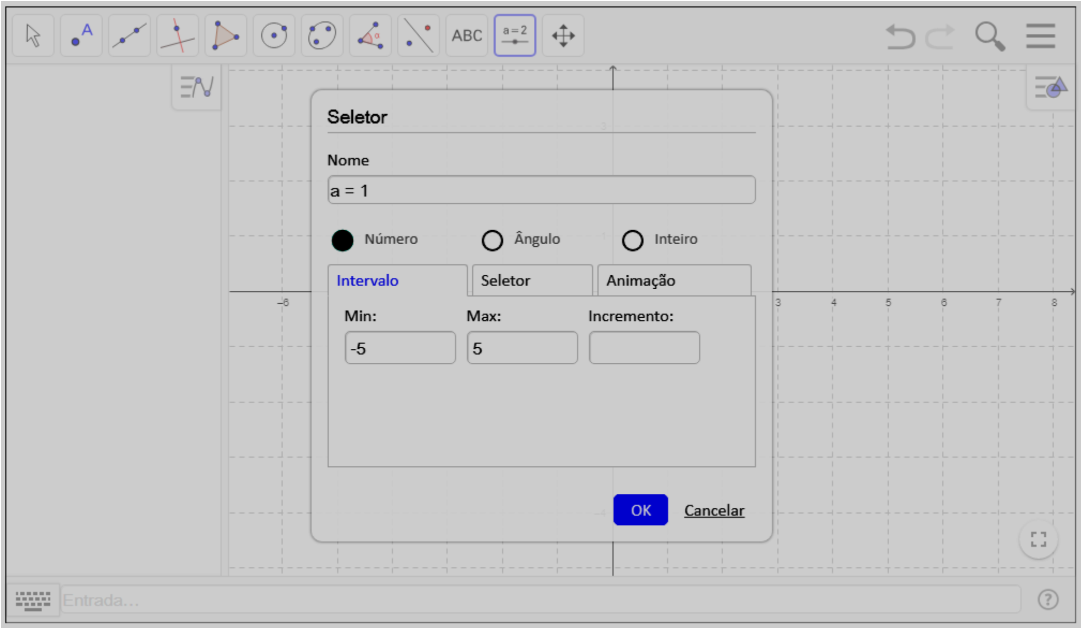
2º passo: Na Barra de ferramentas, clique com botão esquerdo do *mouse*, inicialmente na opção “Controle deslizante”  e, em seguida, clique em qualquer ponto da janela de visualização (Região Gráfica), abrirá uma janela como abaixo.

Figura 1 - Captura da tela do 2º passo



Fonte: Geogebra.

Altere o nome do parâmetro para "**m**" e modifique o valor mínimo no campo "Min" para **zero** e tecle "OK". Proceda da mesma forma para criar os botões dos parâmetros n, k e h.

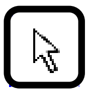
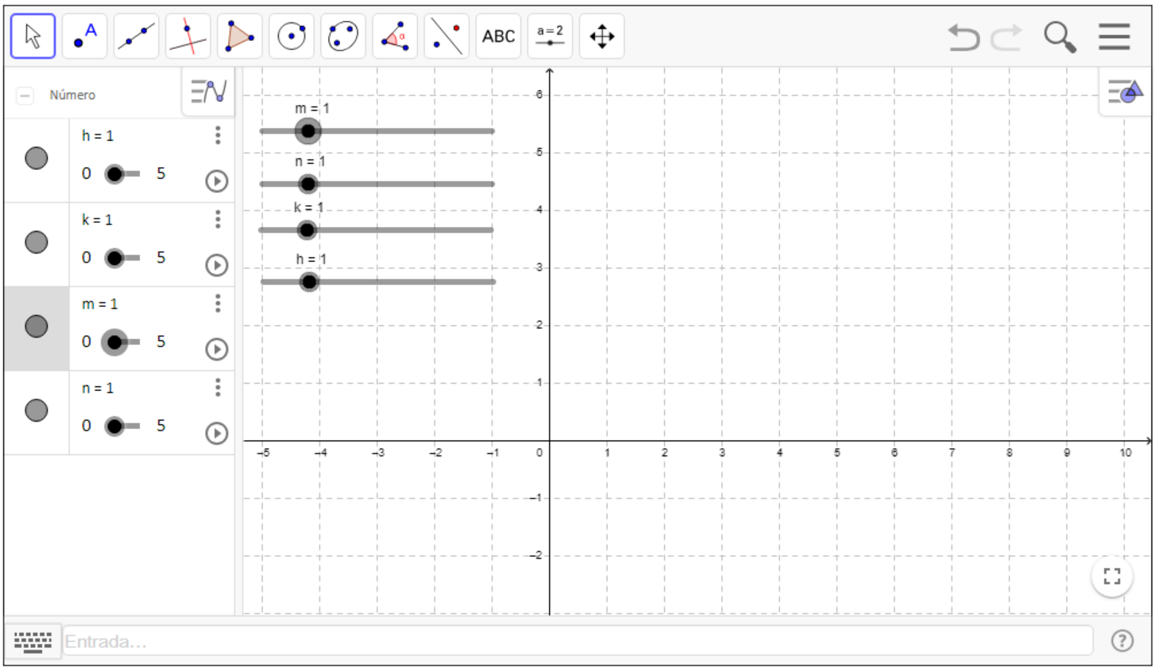
3º passo: Na Barra de ferramentas, clique com o botão esquerdo do mouse na opção "Selecionar"  e depois arraste os quatro controles deslizantes para o 2º quadrante da Região Gráfica da tela (Plano Cartesiano). Como na figura 2 a seguir.

Figura 2 - Captura da tela do 3º passo.



Fonte: Geogebra.

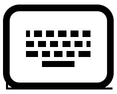
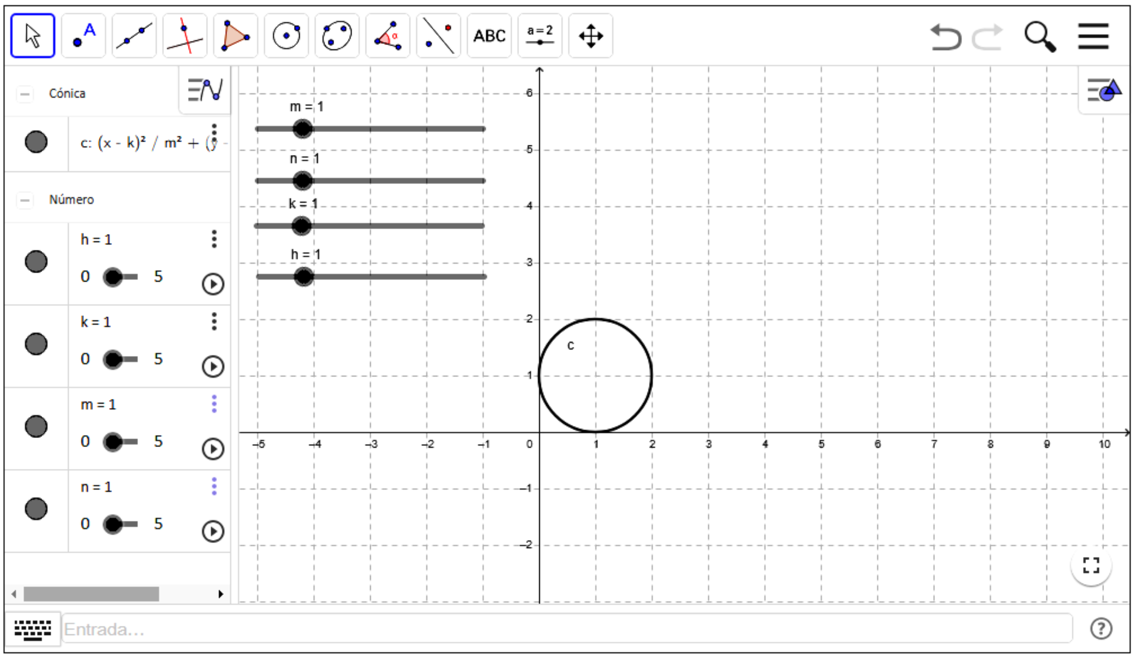
4º passo: No campo Entrada de comando (situado na parte inferior da tela) ao lado da figura  digite: **((x – k)^2)/(m^2) + ((y – h)^2)/(n^2) = 1** e tecle "Enter". Observe que "^" significa a operação de potenciação.

Figura 3 - Captura da tela do 4º passo.

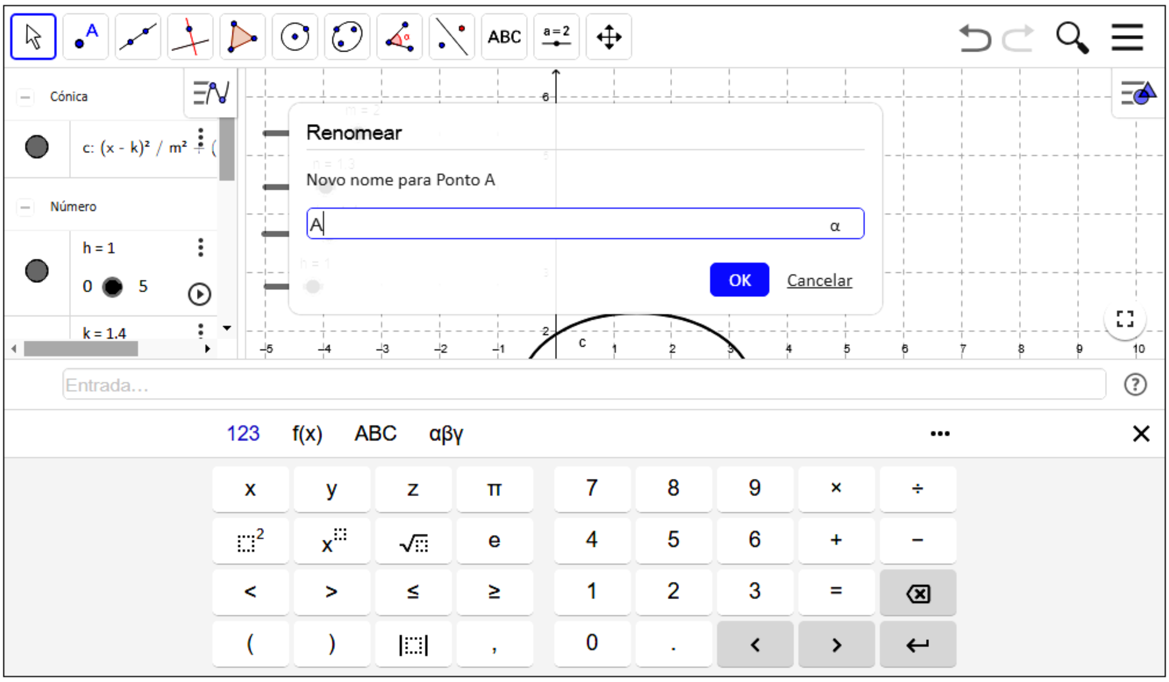


Fonte: Geogebra.

5º passo: Observe significados importantes para os parâmetros m, n, k e h. Para isso, clique na bolinha do controle deslizante do parâmetro **m** e altere lentamente o seu valor (basta arrastar a bolinha para os lados). Observe o que acontece com o gráfico da elipse e anote suas observações. Repita a operação para os controles deslizantes dos parâmetros n, *k* e h. Anote suas observações (utilize um controle deslizante por vez).

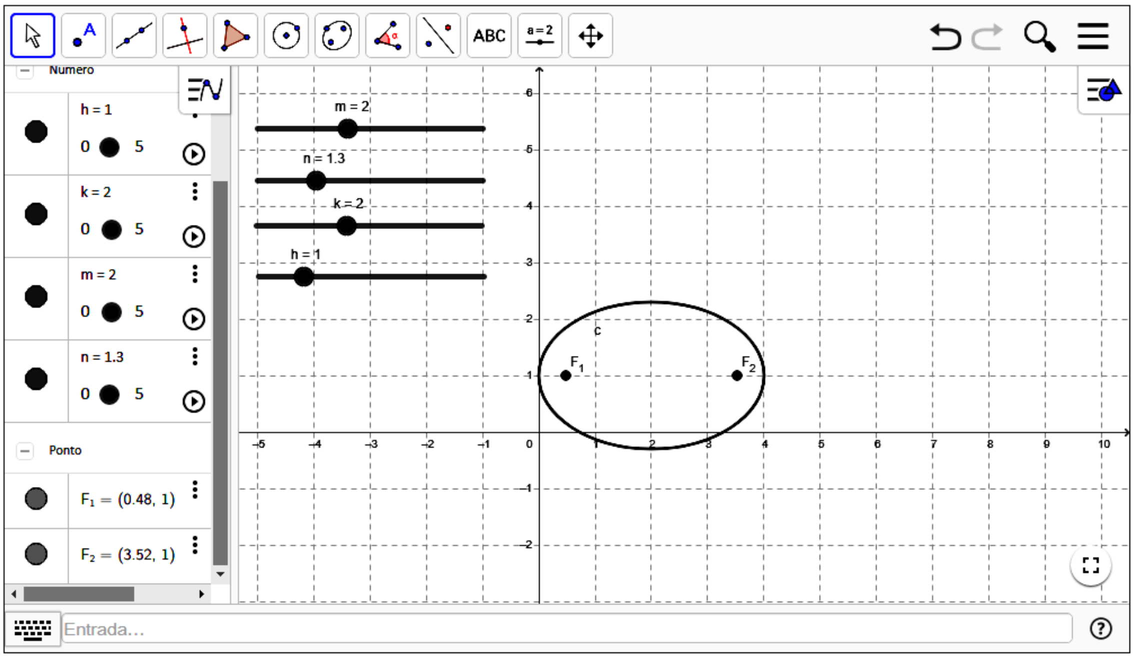
6º passo: Digite no campo de entrada: **Foco(c).** Note que aparecerão dois pontos: A e B. Altere o nome do ponto A para F_1, para isso, basta clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto A e escolher a opção "**Renomear",** abrirá uma caixa de diálogo com a letra A, apague a letra e digite **F_1** e clique em "**OK".** Altere o nome do ponto B para **F_2**, procedendo da mesma forma.

Figura 4 - Captura da tela do 6º passo.



Fonte: Geogebra.

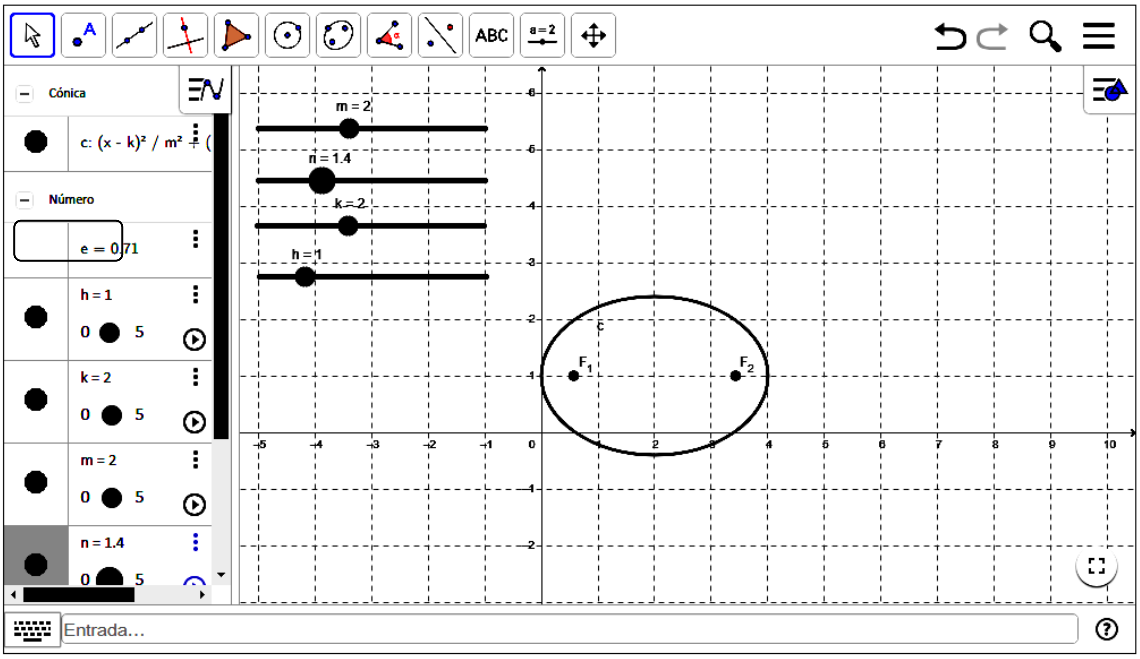
Figura 5 - Captura da tela do 6º passo (conclusão).



Fonte: Geogebra.

7º passo: Digite **e = Excentricidade(c)** no campo de Entrada de comando e tecle "Enter". Note que aparecerá a letra ***e*** na zona algébrica. O número que está à direita do ***e*** representa a excentricidade da elipse.

Figura 6 - Captura de tela do 7º passo.



Fonte: Geogebra.

Agora, responda às perguntas tendo como base a elipse: $\frac{(x-k)^2}{m^2}+\frac{(y-h)^2}{n^2}=1$.

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

d) Conforme são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

____

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

____

____

____

____

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

____

____

____

____

IDENTIFICAÇÃO DO ALUNO (A)

NOME COMPLETO:____

IDADE: ______ **SÉRIE:** _______

ESCOLA:

____

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA:

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*: contexto & aplicações. São Paulo: Ática, 2016.

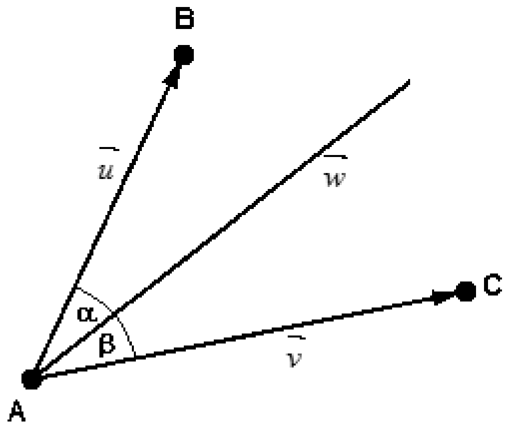
APÊNDICE B – DEMONSTRAÇÕES COMPLEMENTARES

Para demonstrar as propriedades reflexivas das cônicas será feito uso do seguinte lema:

1. Proposição 1

Sejam os pontos A, B e C coplanares e não colineares, e os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ de norma igual a *p* e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ de norma igual a *q* (figura 1). Então o vetor $\vec{w} = q\vec{u} + p\vec{v}$ é paralelo à bissetriz do ângulo BÂC.

Figura 1 - Proposição 1.



Fonte: elaborado pelo autor.

Antes de demonstrarmos o lema acima, precisamos de algumas definições e conceitos do tratamento vetorial da geometria analítica.

Definições:

Fixemos um sistema de coordenadas ortogonal, de agora em diante,

i) Coordenadas de um vetor

Dados os pontos A = (a_1, a_2) e B = (b_1, b_2), então as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ são dadas por $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

ii) Norma de um vetor

Chama-se norma (ou módulo, ou comprimento) de um vetor ao comprimento de qualquer um de seus representantes; indica-se a norma de $\vec{u}$ por $\|\vec{u}\|$.

iii) Produto escalar

Sejam os vetores $\vec{u} = (a,b)$ e $\vec{v} = (c,d)$, chama-se produto escalar entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o número real dado por $\vec{u}\,.\,\vec{v} = ac + bd$.

iv) Ângulo entre dois vetores

O ângulo formado entre dois vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ não nulos é o menor ângulo formado entre os segmentos OA e OB representantes desses dois vetores.

A medida desse ângulo é dada por $\arccos\left(\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)$.

Demonstração

Para mostrar que $\vec{w} = q\vec{u} + p\vec{v}$ é paralelo à bissetriz do ângulo BÂC, basta mostrar que o cosseno do ângulo formado entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$ é igual ao cosseno do ângulo formado entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Suponhamos que $\vec{u} = (a,b)$, $\vec{v} = (c,d)$ e que a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$ é igual a α e a medida do ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a β. Então $\vec{w} = q\vec{u} + p\vec{v} = q(a,b) + p(c,d) = (qa + pc, qb + pd)$ e

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u}.\vec{w}}{\|\vec{u}\|\|\vec{w}\|} = \frac{(a^2 + b^2)q + (ac + bd)p}{p\|\vec{w}\|}$$

Como $\|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2 = p^2$, segue que:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u}.\vec{w}}{\|\vec{u}\|\|\vec{w}\|} = \frac{(a^2 + b^2)q + (ac + bd)p}{p\|\vec{w}\|} = \frac{p^2 q + (ac + bd)p}{p\|\vec{w}\|} = \frac{pq + ac + bd}{\|\vec{w}\|}$$

Agora,

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{v}.\vec{w}}{\left\|\vec{v}\right\|\left\|\vec{w}\right\|} = \frac{(c^2+d^2)p+(ac+bd)q}{q\left\|\vec{w}\right\|}$$

Como $\left\|\vec{v}\right\|^2 = c^2 + d^2 = q^2$, segue que:

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{v}.\vec{w}}{\left\|\vec{v}\right\|\left\|\vec{w}\right\|} = \frac{(c^2+d^2)p+(ac+bd)q}{q\left\|\vec{w}\right\|} = \frac{q^2p+(ac+bd)q}{q\left\|\vec{w}\right\|} = \frac{pq+ac+bd}{\left\|\vec{w}\right\|}$$

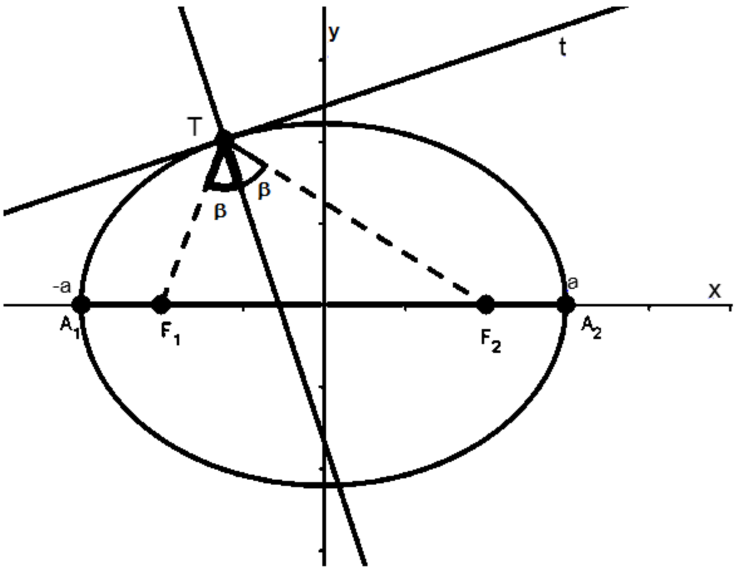
Logo, como $\cos(\alpha) = \cos(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$, já que ângulo entre os vetores está entre 0° e 180°. Daí é não nulo e paralelo à bissetriz do ângulo BÂC.

2. Demonstração da propriedade reflexiva da elipse

Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ com focos $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$ e a reta t tangente a elipse no ponto $T = (x,y)$.

Para provar a propriedade reflexiva, pela Proposição 1, basta mostrar que o vetor $\vec{u} = \left\|\overrightarrow{TF_1}\right\|\overrightarrow{TF_2} + \left\|\overrightarrow{TF_2}\right\|\overrightarrow{TF_1}$ é não nulo e paralelo ao vetor $\vec{n} = (b^2x, a^2y)$, vetor normal à elipse em T que contém a bissetriz do ângulo $F_1\hat{T}F_2$, como mostra a figura 2.

Figura 2 - Propriedade reflexiva da elipse



Fonte: elaborado pelo autor.

O vetor $\vec{u}$ é paralelo à $\vec{n}$ se existir um escalar *p* tal que $\vec{u} = p\vec{n}$,.

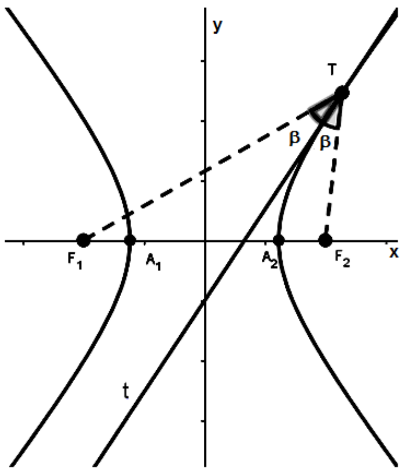
Substituindo $\overrightarrow{TF_1} = (-c-x,-y)$, $\overrightarrow{TF_2} = (c-x, y)$, $\left\|\overrightarrow{TF_1}\right\| = a + \frac{cx}{a}$ e $\left\|\overrightarrow{TF_2}\right\| = a - \frac{cx}{a}$ em $\vec{u} = \left\|\overrightarrow{TF_1}\right\|.\overrightarrow{TF_2} + \left\|\overrightarrow{TF_2}\right\|.\overrightarrow{TF_1}$ segue que $\vec{u} = \left(a + \frac{cx}{a}\right)(c-x,-y) + \left(a - \frac{cx}{a}\right)(-c-x,-y)$ e, efetuando as devidas operações $\vec{u} = \left(\frac{-2a^2x+2c^2x}{a}, \frac{-2a^2y}{a}\right) = \left(\frac{-2x(a^2-c^2)}{a}, \frac{-2a^2y}{a}\right)$. Como $a^2 - c^2 = b^2$, segue que $\vec{u} = \left(\frac{-2x(a^2-c^2)}{a}, \frac{-2a^2y}{a}\right) = \left(\frac{-2xb^2}{a}, \frac{-2a^2y}{a}\right) = \; = -\frac{2}{a}\left(b^2x, a^2y\right) = -\frac{2}{a}\vec{n}$.

Logo, o vetor $\vec{u}$ é não nulo e paralelo ao vetor $\vec{n}$, e então paralelo à bissetriz do ângulo $F_1\hat{T}F_2$.

3. Demonstração da propriedade reflexiva da hipérbole

Seja a hipérbole *H* de focos $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$ e equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Como a hipérbole é simétrica, considere a reta t tangente a hipérbole no ponto $T = (x, y)$ pertencente ao ramo *H*2, ou seja, $x \geq a$. Quero mostrar que a reta t contém a bissetriz do ângulo $F_1\hat{T}F_2$ (vide figura 3).

Figura 3 - Propriedade reflexiva da hipérbole



Fonte: elaborado pelo autor.

Pela Proposição 1, basta mostrar que o vetor $\vec{u} = \|\overrightarrow{TF_1}\|\overrightarrow{TF_2} + \|\overrightarrow{TF_2}\|\overrightarrow{TF_1}$ é não nulo e paralelo ao vetor $\vec{t} = (a^2 y, b^2 x)$, vetor tangente a H no ponto T.

Tem-se da definição da hipérbole que $\|\overrightarrow{TF_1}\| = \frac{cx}{a} + a$ e $\|\overrightarrow{TF_2}\| = \frac{cx}{a} - a$.

O vetor $\vec{u}$ é paralelo à $\vec{t}$ se, e só se existe um escalar *p* tal que $\vec{u} = p\vec{t}$.

Como $\overrightarrow{TF_1} = (-c - x, -y)$ e $\overrightarrow{TF_2} = (c - x, y)$, substituindo em $\vec{u} = \|\overrightarrow{TF_1}\|\overrightarrow{TF_2} + \|\overrightarrow{TF_2}\|\overrightarrow{TF_1}$ segue que $\vec{u} = \left(\frac{cx}{a} + a\right)(c - x, -y) + \left(\frac{cx}{a} - a\right)(-c - x, -y)$. Efetuando as devidas operações, tem-se que $\vec{u} = \left(\frac{-2x^2c + 2a^2c}{a}, \frac{-2cxy}{a}\right) = \frac{2}{a}\left(c(a^2 - x^2), -cxy\right)$ e como, da equação da hipérbole tem-se, $a^2 - x^2 = \frac{-a^2y^2}{b^2}$, segue que

$$\vec{u} = \left(\frac{-2x^2c + 2a^2c}{a}, \frac{-2cxy}{a}\right) = \frac{2}{a}\left(c(a^2 - x^2), -cxy\right) = \frac{2}{a}\left(c\frac{-a^2y^2}{b^2}, -cxy\right) =$$

$$= -\frac{2cy}{ab^2}\left(a^2y, b^2x\right) = -\frac{2cy}{ab^2}\vec{t}.$$

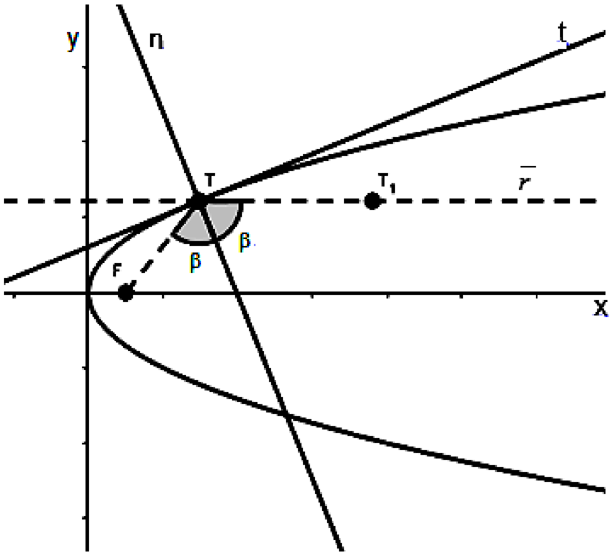
Sendo $y \neq 0$ segue que $\vec{u}$ é não nulo e paralelo à $\vec{t}$ que contém a bissetriz do ângulo $F_1\hat{T}F_2$. Por outro lado, se $y = 0$, segue que $\vec{u} = \vec{0}$ e T = A_2 e nesse caso a reta t é perpendicular ao eixo x e contém a bissetriz do ângulo $F_1\hat{T}F_2$.

4. **D**emonstração da propriedade reflexiva da parábola

Vamos considerar a parábola P de equação $y^2 = 4px$, e seja *t* a reta tangente a *P* no ponto $T = (x, y)$.

Considere a reta $\bar{r}$ paralela ao eixo da parábola tal que $T \in r$ e tome um ponto $T_1 = (x_1, y)$ pertencente a $\bar{r}$ tal que $x < x_1$. Então n a reta normal à parábola no ponto *T* contém a bissetriz do ângulo $F\hat{T}T_1$, como mostrado na figura 4.

Figura 4 - Propriedade reflexiva da parábola



Fonte: elaborado pelo autor.

Pela Proposição 1, basta mostrar que o vetor $\vec{u} = \|\overrightarrow{TF}\|\overrightarrow{TT_1} + \|\overrightarrow{TT_1}\|\overrightarrow{TF}$ é não nulo e paralelo ao vetor $\vec{n} = (-2p, y)$, vetor normal a *P* no ponto *T*.

Considere os vetores $\overrightarrow{TF} = (p - x, -y)$ e $\overrightarrow{TT_1} = (x_1 - x, 0)$ cujas normas são $\|\overrightarrow{TF}\| = p + x$ e $\|\overrightarrow{TT_1}\| = x_1 - x$. Substituindo em $\vec{u} = \|\overrightarrow{TF}\|\overrightarrow{TT_1} + \|\overrightarrow{TT_1}\|\overrightarrow{TF}$ tem-se que:

$$\vec{u} = \|\overrightarrow{TF}\|.\overrightarrow{TT_1} + \|\overrightarrow{TT_1}\|.\overrightarrow{TF} = (p + x)(x_1 - x, 0) + (x_1 - x)(p - x, -y) = (2px_1 - 2px, y(x - x_1)) =$$

$$= (-2p(x - x_1), y(x - x_1)) = (x - x_1)(-2p, y) = (x - x_1)\vec{n}.$$

Como $x \neq x_1$ o vetor $\vec{u}$ é não nulo e paralelo do vetor $\vec{n}$. Logo a reta n é bissetriz do ângulo $F\hat{T}T_1$.

APÊNDICE C – Respostas dos Alunos

Neste apêndice encontram-se cópias das respostas da sequência didática de todos os alunos.

- **Aluno 1**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

m= A elipse não se movimenta, mas o eixo menor aumenta e diminui.

n= A elipse não se movimenta, mas o eixo maior aumenta e diminui.

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

K= A elipse se movimenta da esquerda para a direita

h= A elipse se movimenta de cima para baixo.

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

K representa o movimento horizontal do eixo x.

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

Quando o valor de m for menor que o valor de n, há uma elipse vertical.

Quando o valor de n for menor que o valor de m, há uma elipse horizontal.

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

m representa o movimento do eixo x, e n representa o movimento do eixo y.

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

A elipse seria um círculo perfeito, pois tanto o eixo menor quanto o eixo maior teriam o mesmo tamanho.

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Que o seu tamanho se torna minúsculo, e que F_1 se junta ao F_2.

- **Aluno 2**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

O parâmetro m varia o eixo maior (A) e o parâmetro n varia o eixo menor (B).

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

O parâmetro K muda a posição do círculo horizontalmente no gráfico, e o parâmetro h o faz verticalmente.

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

Eles representam os eixos do plano cartesiano; K = x e h = y.

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

Uma elipse horizontal é obtida sempre que m for maior que n. Enquanto uma elipse vertical é obtida sempre que n for maior que m.

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

Na elipse horizontal m representa a distância entre A_1 e A_2, enquanto n representa a distância entre B_1 e B_2.
Na elipse vertical isso se inverte, a distância A_1 e A_2 passa a ser representada por n e entre B_1 e B_2 a ser representada por m.

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Obteríamos uma circunferência já que tanto o eixo maior (A) quanto o menor (B) teriam a mesma medida.

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

O valor da excentricidade diminui conforme a diferença entre os valores de m e n diminuem. Quanto mais próximo de 1 o valor da excentricidade, observa-se que a diferença entre os valores de m e n são crescentes.

- **Aluno 3**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

No Parâmetro M o Circulo estica Para Esquerda e Para direito, Já no Parâmetro N o Circulo se estica Para Cima e Para baixo ao mesmo tempo

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e ~~*h*~~ no gráfico da elipse?

Em K o Circulo se move sobre o eixo x, e em h se move sobre o eixo y

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

K representa o eixo x e h representa o eixo y

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

Na Horizontal quando m for maior do que 1 e quando n estiver entre 0 e 1. Na vertical quando n for maior que 1 e quando m estiver entre 0 e 1

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

Na Horizontal, o m representa o maior valor e no n o menor valor

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Quando m = n a elipse é um circulo

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Conclui-se que é uma elipse achatada e proximo de 1 um circulo

- **Aluno 4**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

O parâmetro m altera o eixo maior da elipse, ou seja, o eixo A.
Já o parâmetro m altera o eixo menor da elipse, ou seja, o eixo B.

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

O parâmetro K move a elipse pelo eixo x.
O parâmetro h move a elipse pelo eixo y.

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

K: Posição (coordenada) no eixo x.
h: Posição (coordenada) no eixo y.

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

Para uma elipse horizontal m deverá ser maior que n.
Para uma elipse vertical n deverá ser maior que m.

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

Na elipse horizontal o m representa A, que é o eixo maior, enquanto n representa B, que é o eixo menor.
Já na elipse vertical, o m representa B, que é o eixo menor, enquanto n representa A, que é o eixo maior.

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Seria uma circunferência, pois possuiria uma única distância entre o centro e as extremidades, ou seja, o raio.

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

O valor da excemtricidade fica próximo de 0 comforme os valores de m e m vão se igualamdo. E o valor se aproxima de 1 comforme os valores de m e m ficam mais distamtes.

- **Aluno 5**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

O m aumenta a elipse horizontalmente, enquanto o n aumenta a elipse verticalmente.

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

O K desloca a elipse horizontalmente, enquanto o h desloca a elipse verticalmente.

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

K e h representam a posição da elipse dentro do gráfico.

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

A elipse horizontal é gerada quando m > n, e a elipse vertical é gerada quando n > m.

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

Elipse horizontal: m = comprimento e n = altura, sendo o comprimento a maior distância.
Elipse vertical: m = altura ; e ~~m~~ n = comprimento, sendo a altura a maior distância.

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Obteria um círculo, pois os dois focos estariam localizados no mesmo ponto.

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Quando próximo de zero, a elipse se torna menor e distante dos dois eixos, quando próximo de 1, a elipse se torna maior e fica próxima dos ~~eixo~~ dois eixos.

- **Aluno 6**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

Quando m é menor que 1, a elipse fica oval na vertical, sem alterar sua altura. Já quando m é maior que 1, fica oval na horizontal, aumentando sua largura.
Quando n é menor que 1, a elipse fica oval na horizontal sem alterar sua largura, já se for maior que 1, fica oval na vertical aumentando sua altura, e diminuindo a largura.

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

Em K mecha na posição, menor que 1 fica em cima do y, e quando fica maior se estende mais para direita, ou seja, deixando sua largura maior.
Em h mecha em sua altura, menor que 1 se move p/ baixo sem alterar a elipse, e maior que 1 se move p/ cima sem alterar a elipse.

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

Eles mechem na posição da elipse, nos eixos x e y. Alterando sua posição no gráfico.

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

Em m a elipse é horizontal maior que 1, e em n menor que 1.
E em m a elipse é vertical, quando é menor que 1, e em n quando é maior que 1.

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

horizontal m apresenta um numero maior que 1, e em n menor que 1.
Nas condições vertical m é menor que 1, e em n maior que 1.

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Se obtera uma elipse esferica, pois os eixos são igual, tem os mesmos tamanhos, medidas

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Quando fica próximo de 0, o valor de m e n é quase igual, porém a elipse não é uma esfera perfeita. E quando a excentricidade está perto de 1, os valores de m e n ficam muito "distantes", e a lipse se torna oval.

- **Aluno 7**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

m: deforma o circulo na horizontal
n: deforma o circulo na vertical

Ambos efeitos formam uma elipse quando movidos individualmente

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

K: move o circulo na horizontal
h: move o círculo na vertical

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

Representam a posição do poligono no plano cartesiano

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

Elipse horizontal: $m > n$
Elipse vertical: $n > m$

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

Nas duas condições m e n representam a excentricidade

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Não existe elipse, devido a ausência de excentricidade. O poligono formado é um circulo

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Quanto maior a diferença entre m e n, maior será a excentricidade

- **Aluno 8**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

No m ele cresce na horizontal, e no n ele cresce na Vertical, já usando o número negativo a bola vai diminuindo mais dependendo do número

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

na K ele anda para direita cada Vez mais, já no h ele sobe

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

Representa elas se deslocando tanto na horizontal quanto na Vertical

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

Quando colocamos tanto o m quanto N, em seus números negativos eles mudam de Horizontal para Vertical e de Vertical para Horizontal

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

M representa eixo maior e N representa o eixo menor

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Se deixarmos o m e o N no mesmo Valor, obtemos um Circulo

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

O Valor aumenta e fica mais perto de um Circulo, quanto mais se aproxima do 1 mais ela diminui.

- **Aluno 9**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

O m determina a largura da elipse, quando o valor de m é alterado para um valor maior, os pontos F1 e F2 se distanciam em "latitude", deixando a elipse mais larga. Já no parâmetro, os pontos F1 e F2 se distanciam em "altitude"

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

O parâmetro K altera a posição em que a elipse fica no gráfico, quanto maior for o valor que damos, mais a direita do gráfico ela fica, quanto menor, mais à esquerda
O parâmetro h indica a altura em que a elipse fica no gráfico, seguindo a mesma linha de raciocínio: quanto maior o valor, mais alta a posição da elipse.

no entanto, F_1 e F_2 não se distanciam

altura relacionado a posição em que a elipse fica no plano, e não de tamanho (largura)

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

Posição e altura, respectivamente.

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

Horizontal: se $m > 1$ e $n < 1$
Vertical: se $m < 1$ $m > 0$ e $n > 1$

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

Horizontal: o m está relacionado a largura e o n a altura ~~[illegible]~~.

Vertical: n altura da elipse e m continua determinando a largura

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Se m= n e o valor de ambos for 1, formará uma circunferência, porque os pontos F1 e F2 estão um sobre o outro.

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Quando o e está no 0 (zero), os pontos F1 e F2 posicionam-se um sobre o outro, formando uma circunferência. Quando perto de 1 forma-se uma elipse totalmente achatada, com pontos F1 e F2 distantes.

- **Aluno 10**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

O efeito do parametro m no gráfico da elipse, aumenta o ângulo horizontal e o efeito do parametro n é crescer verticalmente.

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

O efeito do parametro k no gráfico da elipse, mostra o angulo se deslocando para à direita/esquerda e o efeito do parametro h, mostra o angulo se deslocando para cima e para baixo.

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

Os parametros k e h mostra o deslocamento do ângulo, verticalmente e horizontalmente

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

O eixo maior é m e o menor é n. Quando você desloca a elipse dos dois para o lado direito (positivo) torna-se um angulo maior e vice versa.

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

acima de 0 o eixo m é maior e o n é o menor então se torna um angulo maior. Abaixo de 0 ocorre o contrario, com o angulo ficando menor.

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Dependendo do tamanho da elipse, mas um angulo igual, horizontal e verticalmente.

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Que proximo de 0 começa a diminuir totalmente o angulo e proximo de 1, já começa a aumentar.

- **Aluno 11**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

O parametro m aumentam a larguro e comprimento do circunferência.
O parametro n aproximam os pontos F1 e F2.

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

O parametro k movimento o circulo para esquerda e direita.
O parametro h movimento o circulo para cima e para baixo.

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

Horizontal e vertical

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

Os parametros m e n podem gerar uma elipse horizontal acima de 1.7 e acima de 1.3.
Em vertical anterior a 1 e 1.3.

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

m e n representam a aproximação dos pontos F1 e F2, e o comprimento e largura.

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

m = n Pensando que m é igual a 1, e m igual a n, obtem o resultado 1.
m = 1

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Em m o circulo vai se fechando
Em n o circulo começa a ficar largo

- **Aluno 12**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

No situação "m" a elipse aumenta sua largura na horizontal, sendo os números maiores que 1 ela aumenta e menores que 1 diminui a largura. Já no "n" a elipse se movimenta na vertical, ou seja, seu "tamanho", sendo números maiores que 1 a elipse aumenta seu tamanho e menores que 1 diminui o seu tamanho.

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

Quando move o "k" a elipse se movimenta inteira pelo gráfico, sendo números maiores que 1 ela se move pra direita e menores que 1 se movimenta pra esquerda. Já no "h" a elipse se movimenta inteira para cima e para baixo sendo números maiores que 1 para cima e menores que 1 para baixo.

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

O "k" significa a posição e o "h" a altura da elipse.

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

Quando o "n" se encontra no 1 e o "m" é colocado em um número maior que 1 a elipse se torna horizontal. Quando "m" se encontra em 1 e "n" menor que 1 ela também se torna horizontal. Se "m" estiver = 1 e "n" maior que 1 a elipse se torna vertical. E se "n" estiver = 1 e "m" menor que 1 a elipse também se torna vertical.

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

Na horizontal o "m" representa o eixo maior e o "n" o eixo menor e na vertical o "m" representa o eixo menor e o "n" o eixo maior.

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Se m=n se obtem um circulo normal, com o F1 e F2 localizados no centro da elipse.

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Quando esta proximo de zero ele diminui e quando esta proximo de 1 a elipse aumenta.

- **Aluno 13**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

No parâmetro m quando aumenta o valor da elipse, ela se torna horizontal.
No parâmetro n quando aumenta o valor da elipse, ela se torna vertical.

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

No parâmetro K a elipse se movimenta para direita no gráfico.
No parâmetro h a elipse se movimenta para cima

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

No gráfico os parâmetros K e n representa a posição e a altura.

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

A elipse m e n torna-se horizontal quando m é um número maior que n.
A elipse m e n torna-se vertical quando m é um número menor que n

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

Na elipse horizontal m é o eixo maior e n é o eixo menor.
Na elipse vertical m é o eixo menor e n é o eixo maior.

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Se m = n obteria uma elipse circular.

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Quando a excentricidade está proxímo de 0 m e n se torna um ponto. Quando a excentricidade está próximo de 1 aumenta a elipse horizontal.

- **Aluno 14**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

O efeito dos parâmetros é que quando aumento o valor de m>1 a elipse fica na horizontal (com sua forma oval). E quando aumentar o valor de n>1 a elipse fica na vertical (com sua forma oval)

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

O efeito dos parâmetros é que quando movimenta o K>1 a elipse é movimentar-se para o lado direito na horizontal e quando chega no K=0 a elipse fica no meio do valor zero no gráfico. E quando movimenta o h>1 a elipse é movimentar-se o lado para cima do gráfico no vertical e quando chega no valor zero a elipse fica no meio do zero no gráfico

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

Eles representam a posição e a altura.

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

As condições que m e n geram uma elipse horizontal é quando o valor de n é menor que o de m.
As condições que a elipse gerada é vertical é quando o valor de m é menor que o valor de n.

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

Nas condições da elipse horizontal m representa o eixo maior e n o eixo menor. E na elipse vertical m é o eixo menor e n é o eixo maior

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Obteria uma circunferência, pois seus eixos são iguais

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Pode se concluir que virou uma circunferência e só tem um foco. Quando o valor está próximo de 1 a circunferência vai ficando "fina" até desaparecer, com cada foco numa extremidade do eixo menor.

- **Aluno 15**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

M estende o círculo aos lados e o N estende para cima e para baixo.

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

K leva ou move o círculo para outras áreas e H move para cima ou para baixo o círculo.

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

K é distância que move o círculo para direita ou esquerda e h é a distância que o círculo é movido para cima/baixo.

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

Quando m=n estão posicionadas igual à 2.

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

M e N representam distância na horizontal e altura na vertical.

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Elipse vertical.

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

(1) F_1 está próximo do ponto 1 vertical.

- **Aluno 16**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

O parâmetro m movimenta o eixo maior e o parâmetro n movimenta o eixo menor

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

O parametro K movimenta a elipse na horizontal e o h movimenta a elipse na vertical

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

No parâmetro K o movimento horizontal, e o h na vertical

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

M > n horizontal
n > M elipse vertical

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

m representa o maior valor e n o menor valor.

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Então é um círculo

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Quando esta proximo de o ele desaparece e quando esta perto de 1 quase desaparece.

- **Aluno 17**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

O parâmetro m movimenta o eixo maior e o parâmetro n movimenta o eixo menor

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

O parâmetro K movimenta a elipse na horizontal no gráfico e o parâmetro h movimenta a elipse no vertical

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

O movimento horizontal e vertical

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

M>N → Elipse horizontal
N>M → Elipse Vertical
M=N → Círculo

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

Na elipse horizontal, o m representa o maior valor e n o menor e na elipse Vertical, m representa o menor valor e n o maior valor

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Se torna um círculo, pois eixo maior e eixo menor estariam na mesma posição.

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Quanto mais próximo de 1, maior será o eixo maior ou menor. E quanto mais próximo de 0, menor será o eixo maior ou menor.

- **Aluno 18**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

O "m" se você aumenta ele expande e se você diminuir ele contrair, no eixo "x". Já a "n" se você aumentar ele expande e se você diminuir ele contrair no eixo "y"

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

O "K" vai da direita para esquerda e o "h" vai de cima para baixo

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

"K" é o eixo "x" do gráfico e o "h" é o eixo "y" sendo que "x" é horizontal e o "y" é vertical

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

na horizontal quando "m" é maior que 1 ou menor e vertical quando o "n" é maior ou menor que 1

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

na elipse horizontal, o m apresenta maior valor que n e na vertical o n é maior que m

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Se tomo um círculo por os dois são iguais

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Quanto mais próximo de 1 maior será o eixo, e quanto mais 0 menor será o eixo.

- **Aluno 19**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

m = a elipse aumenta e diminui na horizontal
n = a elipse aumenta e diminui na vertical

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

K = a elipse desliza para o lado esquerdo diminuindo o valor e para o lado direito aumentando o valor

h = a elipse desliza para cima aumentando o valor e para baixo diminuindo o valor.

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

O parâmetro K significa a posição e o parâmetro h a altura da elipse.

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

Quando m aumenta seu valor e o n diminui forma-se uma elipse horizontal.
Quando m diminui seu valor e o n aumenta forma-se uma elipse vertical.

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

Na elipse horizontal o m reppresenta o eixo maior e o n o eixo menor
Na elipse vertical o m reppesenta o eixo menor e o n o eixo maior

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Obteria uma elipse em circulo sempre, com seus valores iguais.

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Quando está próximo ao 0 ele diminui e quando está próximo ao 1 ele aumenta.

- **Aluno 20**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

O parâmetro M fez com que o circulo deformasse para os lados (na horizontal)
O parâmetro N fez com que o circulo deformasse para cima e para baixo (na vertical)

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

O parâmetro k fez com que o circulo se movimentasse para os lados (na horizontal)
O parâmetro h fez com que o círculo se movimentasse para cima e para baixo (na vertical)

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

Os parâmetros k e h representam o plano cartesiano (K = x ; h = y)

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

M > N gera uma elipse horizontal
N > M gera uma elipse vertical

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

Na elipse horizontal o M representa o eixo maior e o N, o eixo menor. Na elipse vertical o M representa o eixo menor e o N, o eixo maior

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Forma um círculo

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

o valor de "e" (excentricidade) tem relação com o movimento dos valores de M e N

- **Aluno 21**

a) Qual é o efeito dos parâmetros *m* e *n* no gráfico da elipse?

M= a elipse se expande para os lados, e não altera seu tamanho
N= A elipse aumenta ou diminui seu tamanho, mas não altera a largura

b) Qual é o efeito dos parâmetros *k* e *h* no gráfico da elipse?

K: A elipse se move para a esquerda ou direita, mas não altera seu tamanho nem largura.
H: Se move para cima e p/ baixo, e também não altera seu tamanho nem largura

c) No gráfico, o que representam os parâmetros *k* e *h*?

K= Posição da elipse
H- altura

d) Conforme é são alterados os valores dos parâmetros *m* e *n*, você observou que podemos ter uma elipse horizontal ou vertical. Em que condições *m* e *n* geral uma elipse horizontal? E em que condições a elipse gerada é vertical?

Para criar uma elipse vertical, o "M" precisa ser menor que o N, e se for ao contrário, ou seja, o M maior que o N, gera então uma elipse horizontal. Se os números forem iguais, formará um círculo.

e) Nas condições da elipse horizontal, o que representa m e n no gráfico? E nas condições da elipse vertical?

Na horizontal o eixo maior é o M, e o N o menor.
Na vertical o eixo maior é o N, e o menor é o M.
(Relação da altura e largura)

f) Se m = n que tipo de elipse você obteria? Justifique.

Um circulo, pois o N e o M com um valor igual tem uma circunferencia propor-cional à altura e largura, obtendo uma figura circular

g) Ao movimentar os parâmetros m e n, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Quando o valor da $E = 0$, a elipse se torna um circulo, e ao se aproximar do 1, a elipse se "fecha" se aproximando a um segmento de reta