Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas envolvendo operadores fracionários

Rodrigo de Freitas Gabert

Orientador: Rodrigo da Silva Rodrigues

São Carlos
Agosto de 2019

Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas envolvendo operadores fracionários

Rodrigo de Freitas Gabert

Orientador: Rodrigo da Silva Rodrigues

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de doutor em Matemática.

São Carlos
Agosto de 2019

de Freitas Gabert, Rodrigo

Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas envolvendo operadores fracionários / Rodrigo de Freitas Gabert. -- 2019.
132 f. : 30 cm.

Tese (doutorado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador: Rodrigo da Silva Rodrigues
Banca examinadora: Rodrigo da Silva Rodrigues, Adilson Eduardo Presoto, Olimpio Hiroshi Miyagaki, Ma To Fu, Uberlandio Batista Severo
Bibliografia

1. Métodos variacionais. 2. Problemas de Kirchhoff fracionários. 3. Expoentes críticos de Hardy-Sobolev fracionários. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).
DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)
Bibliotecário(a) Responsável: Ronildo Santos Prado – CRB/8 7325

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Rodrigo de Freitas Gabert, realizada em 14/08/2019:

Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues
UFSCar

Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto
UFSCar

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki
UFJF

Prof. Dr. Ma To Fu
USP

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo
UFPB

Aos meus pais, Dilmair e Rosangela.

(...) "Se tu podes crer; tudo é possível ao que crê". (Marcos 9:23)

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela vida, pela saúde e por ter me dado forças para concluir mais uma etapa importante da minha trajetória acadêmica.

Aos meus pais, Dilmair e Rosangela, pelas incessantes orações, pelo suporte familiar e pelo apoio em meus estudos e minhas escolhas profissionais. Agradeço por estarem sempre ao meu lado nos bons e maus momentos, pelos ensinamentos e pelo carinho recebido desde minha infância.

Ao meu irmão Diego, à minha cunhada Jeane, por todo o suporte emocional nesse período e à minha querida sobrinha Ayla, que nasceu durante meu curso de doutorado, nos trazendo muitas alegrias.

Ao professor Rodrigo da Silva Rodrigues, pela confiança em meu trabalho durante o período de pesquisa sobre o tema proposto e pelo comprometimento nos trabalhos de orientação.

Aos professores da banca Adilson Eduardo Presoto, Ma To Fu, Olimpio Hiroshi Miyagaki e Uberlandio Batista Severo, pelas correções e valiosas sugestões.

Aos meus professores da graduação, pela contribuição em minha formação acadêmica e incentivo à continuação dos estudos, em especial aos professores João Batista Peneireiro, Márcio Luís Miotto, Taísa Junges Miotto e Ricardo Fajardo.

Aos meus amigos da graduação Maurício (vulgo Pedro), Rian e Vanessa, pelos quais tenho grande admiração e carinho.

Agradeço ao meu grande amigo Ronaldo (amigo para a vida toda), pelo companheirismo, desde os tempos da graduação até o final do doutorado. Começamos uma longa caminhada em busca de nossos objetivos e esse ser humano excepcional foi fundamental para que tudo isso acontecesse.

Ao meu amigo Marcos, agradeço pela amizade e pelos momentos marcantes em que nos reuníamos para conversar e tocar violão, juntamente com o Ronaldo.

À querida Rafaela, por todo o apoio em momentos difíceis da minha vida durante o doutorado. Uma pessoa incrível e uma das mais humildes que conheci. Sempre estarei torcendo pelo seu sucesso.

Agradeço a todos os amigos do doutorado que, de alguma forma, fizeram parte da minha vida, em especial aos amigos Jéssica, Patrícia, Renan e Renata.

Aos professores do DM que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento desta tese de doutorado.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos existência e multiplicidade de soluções fracas para três problemas envolvendo operadores fracionários, com ênfase em não linearidades de crescimento crítico. O primeiro problema trata da existência de solução mudando de sinal para uma equação envolvendo o Laplaciano fracionário e expoentes críticos de Sobolev fracionários. No segundo problema, estudamos a existência de soluções com sinal constante e mudando de sinal para uma equação envolvendo o p-Laplaciano fracionário com um termo de Kirchhoff e expoentes subcrítico e crítico de Hardy-Sobolev fracionários. O último problema aborda existência e multiplicidade de soluções positivas para uma equação envolvendo o p-Laplaciano fracionário com um termo de Kirchhoff, expoentes subcrítico e crítico de Hardy-Sobolev fracionários e pesos de sinal indefinido.

A presença de expoentes críticos gera dificuldades matemáticas adicionais na obtenção de soluções devido à falta de compacidade da imersão de Sobolev.

Em nossos estudos, utilizamos métodos variacionais como o Teorema do Passo da Montanha, minimização restrita a conjuntos de Nehari e o método das fibrações.

Abstract

In this work, we study existence and multiplicity of weak solutions for three problems involving fractional operators, with emphasis on critical growth nonlinearities. The first problem deals with the existence of sign-changing solution for an equation involving the fractional Laplacian and fractional critical Sobolev exponents. In the second problem, we study the existence of signed and sign-changing solutions for an equation involving the fractional p-Laplacian with a Kirchhoff term and fractional subcritical and critical Hardy-Sobolev exponent. The last problem approaches existence and multiplicity of positive solutions for an equation involving the fractional p-Laplacian with a Kirchhoff term, fractional subcritical and critical Hardy-Sobolev exponent and weight with indefinite signal.

The presence of critical exponents generates additional mathematical difficulties in obtaining solutions due to lack of compactness of the Sobolev embedding.

In our studies, we used variational methods such as the Mountain Pass Theorem, constraint minimization on Nehari sets and the fibering method.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudamos a existência e multiplicidade de soluções não triviais para problemas envolvendo operadores do tipo fracionário com ênfase em não linearidades de crescimento crítico, considerando o sinal dessas soluções. Especificamente, estudamos três problemas, sendo que o primeiro aborda o Laplaciano fracionário e os dois últimos o p-Laplaciano fracionário com um termo de Kirchhoff.

O primeiro problema estudado em nosso trabalho é o seguinte:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = \lambda f(x,u) + |u|^{2_s^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que $(-\Delta)^s$ é o operador Laplaciano fracionário, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave, $s \in (0,1)$, $2s < N$, λ é um parâmetro positivo, $2^* = \frac{2N}{N-2s}$ é o expoente crítico de Sobolev fracionário e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz determinadas condições.

O segundo problema que abordamos envolve uma equação mais geral da seguinte forma:

$$\begin{cases} M\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy\right)(-\Delta_p)^s u = \lambda f(x,u) + \frac{|u|^{r-2}u}{|x|^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

sendo $(-\Delta_p)^s$ o operador p-Laplaciano fracionário, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, suave, com $1 < p < \infty$, $s \in (0,1)$, $0 \leq \alpha < ps < N$, $p < r \leq p_\alpha^*$ sendo $p_\alpha^* := \frac{(N-\alpha)p}{N-sp}$ o expoente crítico de Hardy-Sobolev fracionário, λ um parâmetro positivo, $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ uma função de Kirchhoff que pode ser tanto degenerada ($\inf_{t\geq 0} M(t) = 0$) quanto não degenerada ($\inf_{t\geq 0} M(t) > 0$) e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo determinadas condições.

O terceiro problema que estudamos foi o seguinte:

$$\begin{cases} M\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy\right)(-\Delta_p)^s u = \lambda f(x)\frac{|u|^{q-2}u}{|x|^\beta} + g(x)\frac{|u|^{r-2}u}{|x|^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave, $s \in (0,1)$, $0 \leq \alpha < sp < N$, $0 \leq \beta < sp$ e $1 < q < p < r \leq p_\alpha^*$ e $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função de Kirchhoff da forma $M(t) = a + bm(t)$, $a > 0$, $b \geq 0$, com $m : [0,\infty) \to [0,\infty)$ satisfazendo determinadas condições. As funções $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ são tomadas em $L^\infty(\Omega)$ com sinal indefinido.

O operador Laplaciano fracionário $(-\Delta)^s$ é definido para $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (o espaço de Schwartz) como

$$(-\Delta)^s u(x) := C(N,s) \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,\epsilon)} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

sendo $B(x,\epsilon) := \{y \in \mathbb{R}^N : |x-y| < \epsilon\}$ e $C(N,s)$ uma constante positiva de normalização. Em relação a transformada de Fourier $\mathcal{F}$, este operador tem a seguinte expressão:

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{2s} \left(\mathcal{F}u\right)(\xi)\right)(x) \;\; x \in \mathbb{R}^N.$$

Para $1 < p < \infty$ e $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, o operador $(-\Delta_p)^s$ é definido por

$$(-\Delta_p)^s u(x) := 2 \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\epsilon)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x-y|^{N+sp}} dy \;\; x \in \mathbb{R}^N.$$

Esses operadores, quando avaliados em uma função u e avaliados em um ponto $x \in \mathbb{R}^N$, não dependem apenas do valor de u em x, dependem também dos valores dessa função nos demais pontos do $\mathbb{R}^N$. Por essa razão, tais operadores são denominados *não-locais*.

Nos últimos anos, tem crescido o interesse no estudo de operadores do tipo fracionário. Muitos trabalhos têm sido publicados provando existência, multiplicidade, não existência e regularidade de soluções de problemas envolvendo tais operadores. Em [22] , de modo pioneiro, Caffarelli e Silvestre apresentaram uma abordagem local para o Laplaciano fracionário através da técnica de extensão s-harmônica. Este artigo motivou outros autores a produzirem trabalhos relevantes acerca desse tema. Veja, por exemplo, [7, 13, 20, 26, 74], nos quais foram tratados problemas sobre o Laplaciano fracionário espectral através de extensão s-harmônica em um cilindro.

Por outro lado, Servadei e Valdinoci, em [70] e [71], trabalharam com o operador Laplaciano fracionário por meio de integrais de núcleos singulares. Para tanto, foi apresentado um espaço de Sobolev fracionário adequado para problemas com condições de fronteira de Dirichlet, bem como uma formulação variacional condizente com esse espaço. A partir dessa abordagem, surge uma extensa literatura tratando de problemas fracionários, confira, por exemplo, [11, 41, 67] e suas referências. Além disso, como generalização natural do Laplaciano fracionário, ganha destaque o p-Laplaciano fracionário e problemas que eram abordados para o p-Laplaciano, tais como o de autovalor, passam a ser tratados para o caso do operador não local p-Laplaciano fracionário, como se pode conferir em [48, 52, 57], entre outros.

Operadores fracionários possuem aplicações em diversas áreas, como matemática financeira, mecânica quântica, ondas de água, transição de fase, superfícies mínimas, dinâmica populacional, controle ótimo, teoria dos jogos, processos de Lévy na teoria da probabilidade, entre outras. Para mais detalhes sobre esses assuntos, veja [5, 19, 21, 31, 54] e suas referências.

Devido à presença da função $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$, as equações (2) e (3) são denominadas equações de Kirchhoff fracionárias, sendo M denominada função de Kirchhoff. Essas equações têm origem a partir da versão estacionária da equação de Kirchhoff envolvendo o Laplaciano clássico, que modela vibrações não lineares de uma corda elástica com extremidades fixas,

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = g(x,u) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & \end{cases}$$

como generalização da equação proposta por Kirchhoff em [53], a saber,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{4}$$

A equação (4) leva em conta os efeitos das mudanças no comprimento da corda produzida pelas vibrações transversais. Em (4), L é o comprimento da corda, h é a área da secção transversal da corda, E é o módulo de Young do material, ρ é a densidade de massa e P_0 é a tensão inicial da corda. A equação de Kirchhoff é uma extensão não linear da equação da onda de D'Alembert. Consulte [2, 42, 43, 53] para mais detalhes sobre problemas de Kirchhoff.

Na medida que os estudos sobre problemas fracionários foram se difundindo, também fez sentido considerar a presença de um termo de Kirchhoff nas equações em questão. Em [47], uma motivação física foi proposta levando em conta o aspecto não local da tensão da corda no modelo proposto por Kirchhoff. Para mais detalhes sobre problemas de Kirchhoff fracionários, confira [6, 24, 46, 62] e suas referências.

Ao abordar o Problema (1), nosso interesse é estudar a existência de pelo menos uma solução mudando de sinal. O estudo de existência de soluções mudando de sinal para o Problema (1) é motivado principalmente pelo trabalho de Teng, Wang e Wang em [77], sendo esse um dos primeiros trabalhos sobre soluções que mudam de sinal envolvendo operadores fracionários. Usando minimização em conjuntos de Nehari e lema de deformação, eles provaram a existência de solução que muda de sinal para o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e com a função f de classe C^1 e de crescimento subcrítico satisfazendo a hipótese

$$\frac{f(x,t)}{t} \text{ é crescente em } |t| \neq 0, \text{ q.t.p.}\, x \in \Omega.$$

O Problema (5) também foi estudado em [35], [59] e [61] para operadores fracionários com núcleos mais gerais e com f satisfazendo condições de crescimento similares.

Recentemente, vários trabalhos têm sido desenvolvidos sobre existência de soluções não triviais e não negativas para problemas envolvendo o operador Laplaciano fracionário e não linearidades de crescimento crítico. Dentre eles, podemos destacar [45, 67, 68, 69] para domínios limitados e [37], [38] para domínios ilimitados. Em [68], Servadei e Valdinoci estudaram a existência de soluções não negativas para o problema de Brezis-Niremberg fracionário

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{6}$$

que é a versão não local do famoso problema de Brezis-Nirenberg desenvolvido em [17]. Citamos [32] para existência e comportamento assintótico de soluções radiais que mudam de sinal para o Problema (6). No caso local, em que o operador em questão é o Laplaciano clássico, a existência de soluções mudando de sinal para problemas críticos é tratada em [9, 34, 56, 73].

Nosso foco, ao estudar o Problema (2), é a obtenção de soluções com sinal constante e mudando de sinal, com ênfase no caso crítico $r = p_\alpha^*$. Recentemente, em [29], Chen, Mosconi e Squassina obtiveram solução com sinal constante e mudando de sinal para o Problema (2) com $M \equiv 1$ e $f(x,u) = |u|^{q-2}u$, $p \leq q < p_\alpha^*$. Eles estudaram a versão fracionária do problema considerado em [50] para o operador p-Laplaciano. A motivação para considerarmos o termo de Kirchhoff M no Problema (2) é devido aos trabalhos desenvolvidos em [72], [44] e [58]. Em [72], Shuai combinou métodos variacionais restritos a conjuntos de Nehari e um lema quantitativo de deformação para obter solução com sinal constante e mudando de sinal para o problema

$$\begin{cases} \left(a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)(-\Delta)u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $N = 1, 2, 3$, $a, b > 0$ e f de crescimento subcrítico satisfazendo a condição

$$\frac{f(t)}{t^3} \text{ é crescente em } |t| \neq 0. \tag{7}$$

Em [44], Figueiredo e Nascimento estudaram a existência de solução mudando de sinal para uma uma equação de Kirchhoff mais geral

$$\begin{cases} M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)(-\Delta)u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado, $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ de classe C^1, crescente, não degenerada ($M(0) > 0$) com $\frac{M(t)}{t}$ decrescente em $t > 0$ e f de classe C^1 com crescimento subcrítico satisfazendo (7). Em [58], Lu estendeu o resultado sobre existência de soluções mudando de sinal obtido por Figueiredo e Nascimento considerando o Problema (8) com um parâmetro $\lambda > 0$ e assumindo que, para algum $\mu > 2$, a função de Kirchhoff M é tal que $\frac{M(t)}{t^{\frac{\mu-2}{2}}}$ é decrescente e que f satisfaz

$$\frac{f(t)}{|t|^{\mu-2}t} \text{ é crescente em } |t| \neq 0.$$

Além disso, sem assumir que $\frac{M(t)}{t^{\frac{\mu-2}{2}}}$ é decrescente, através de um truncamento em M, Lu obteve resultados sobre existência de solução com sinal constante e mudando de sinal para o Problema (8) com o parâmetro λ suficientemente grande.

Para o Problema (3), buscamos estudar a existência e multiplicidade de soluções não negativas, direcionando maior atenção para o caso crítico $r = p_\alpha^*$. O Problema (3) foi estudado por Goyal e Sreenadh em [51] no caso subcrítico, com $\alpha = \beta = 0$ e $M \equiv 1$. Eles usaram a variedade de Nehari e o método das fibrações, introduzido por Drábek e Pohozaev em [39], para obter múltiplas soluções não negativas. Mishra e Sreenadh também estudaram o Problema (3) em [62], com $\alpha = \beta = 0$ e $M(t) = a+bt$, $a, b > 0$. Eles mostraram a existência de duas soluções não negativas no caso subcrítico e de uma solução não negativa no caso crítico. Em particular, Brändle, Colorado, de Pablo e Sánchez estudaram o problema côncavo-convexo envolvendo o operador Laplaciano fracionário no caso subcrítico, em [13]. Barrios, Colorado, Servadei e Soria em [8] estudaram o problema côncavo-convexo fracionário no caso crítico. Esses problemas têm origem a partir do célebre problema côncavo-convexo apresentado por Ambrosetti, Brézis e Cerami em [4].

Um dos primeiros trabalhos a usar variedade de Nehari e o método das fibrações para obter soluções de problemas envolvendo pesos com sinal indefinido foi devido a Brown e Zhang em [18]. Por outro lado, também de modo pioneiro, Chen, Kuo e Wu consideraram o efeito não local da função de Kirchhoff em problemas com pesos indefinidos em [28]. Especificamente, eles estudaram existência e multiplicidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)(-\Delta)u = \lambda f(x)|u|^{q-2}u + g(x)|u|^{r-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $1 < q < 2 < r < 2^*$ em que 2^* é o expoente crítico de Sobolev e $M(t) = a + bt$, $a, b > 0$, $t \geq 0$ e $f, g \in L^\infty(\Omega)$ com sinais indefinidos.

Uma das principais dificuldades em estudar os problemas (1), (2) e (3) é a falta de compacidade devido à presença do termo de crescimento crítico. Além disso, uma vez que os problemas considerados são não locais, também existem certas dificuldades na obtenção de soluções mudando de sinal, mesmo no caso subcrítico. De fato, as interações não locais impedem que a norma nos espaços decomponha as partes positiva e negativa de uma função (confira (1.6)), impossibilitando o uso de ferramentas poderosas para obtenção de soluções mudando de sinal construídas em variedades como métodos do tipo Lusternick-Schnirelman (confira [73]) e Princípio Variacional de Ekeland em variedades de Banach (confira [33]). Por isso, é necessário utilizar outras ferramentas como minimização restrita a conjuntos de Nehari combinada ao uso de algum lema de deformação.

O Problema (1) trata o caso crítico da equação estudada por Teng, Wang e Wang em [77]. Motivados pelo trabalho de Alves e Souto em [3], os autores de [77] usaram minimização restrita a conjuntos de Nehari e um lema de deformação para obter solução mudando de sinal do problema (5). Nossa estratégia para obtenção de solução mudando de sinal para o Problema (1) é similar. No entanto, esse método utiliza fortemente que o funcional energia associado ao problema é fracamente semicontínuo inferiormente que no caso crítico essa propriedade não é válida. Para contornar esse problema, utilizamos o Lema de Brézis-Lieb e fizemos análises de máximos de funções para garantir a convergência em $L^{2^*}(\Omega)$ de sequências minimizantes.

O estudo de solução com sinal constante e mudando de sinal para o Problema (2) visa obter e ampliar resultados provados para problemas de Kirchhoff envolvendo o Laplaciano clássico para problemas de Kirchhoff fracionários com não linearidades críticas. Consideraremos os casos degenerado ($\inf_{t\geq 0} M(t) = 0$) e não degenerado ($\inf_{t\geq 0} M(t) > 0$) da função de Kirchhoff M. Seguindo as ideias de Chen, Mosconi e Squassina em [29], nossa estratégia para obtenção de solução de sinal constante é usar o Teorema do Passo da Montanha combinado com minimização sobre conjuntos de Nehari. No caso subcrítico, para a obtenção de soluções que mudam de sinal, a estratégia é a minimização sobre conjuntos de Nehari combinada a algum lema de deformação. No caso crítico, para contornar a falta de compacidade, usaremos um princípio de concentração de compacidade com expoentes variáveis. Vale ressaltar que, no que é de nosso conhecimento, nosso trabalho é o primeiro na literatura que trata a existência de soluções que mudam de sinal para o caso degenerado.

O estudo de existência e multiplicidade de soluções para o Problema (3) visa estender alguns resultados obtidos em [62], principalmente no caso crítico. Usando as ideias de Chen e Squassina em [30] e de do Ó, Giacomoni, Mishra em [64], usaremos funções extremais para garantir a existência de duas soluções positivas para o problema (3) no caso crítico. Ressaltamos que em [62], os autores consideraram a função de Kirchhoff M da forma $M(t) = a+bt$. Em nosso trabalho, consideraremos $M(t) = a+bm(t)$, permitindo que m seja não homogênea, por exemplo, uma função logarítmica.

Este trabalho é dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1, apresentaremos algumas interpretações feitas por diferentes autores para o Laplaciano fracionário e mostraremos sua relação com o Laplaciano clássico. Consideraremos também o operador p-Laplaciano fracionário e destacaremos algumas definições e propriedades concernentes a espaços funcionais. O Capítulo 2 é destinado ao estudo do Problema (1). Neste capítulo, apresentaremos um resultado sobre existência de solução mudando de sinal assumindo que f satisfaz condições de crescimento subcrítico. O Capítulo 3 é destinado ao estudo do Problema (2). Nele, apresentaremos cinco resultados principais, sendo os dois primeiros relativos ao caso degenerado e os três últimos ao caso não degenerado. Em todos eles, uma solução positiva, uma negativa, e outra mudando de sinal serão obtidas. O segundo resultado e o quinto tratam o caso crítico $r = p_\alpha^*$. Por fim, no Capítulo 4, estudaremos o Problema (3). Este Capítulo apresenta dois resultados principais. O primeiro deles estabelece existência de pelo menos duas soluções positivas para o Problema (3), no caso subcrítico $r < p_\alpha^*$. O segundo resultado prova a existência de ao menos uma solução positiva no caso crítico para qualquer $b \geq 0$ e se restringirmos b a um certo intervalo, obtemos duas soluções positivas para (3) no caso crítico.

Ressaltamos que o resultado obtido no Capítulo 2 foi publicado e pode ser encontrado na referência [49]. Os resultados obtidos no Capítulo 3 foram aceitos para publicação.

Capítulo

1

Noções Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos um pouco sobre a história dos problemas fracionários bem como a motivação pela qual levou autores de várias partes do mundo a estudarem esse tema, produzindo resultados importantes na área de Equações Diferenciais Parciais. Além disso, a fim de deixar o leitor a par dos detalhes técnicos de nosso texto, introduziremos algumas definições e notações importantes, que serão frequentemente utilizadas no decorrer do texto.

1.1 Operadores do tipo fracionário

Seja $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ o espaço de Schwartz definido por

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \sup |x^\alpha D^\beta u(x)| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N\},$$

com $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Para cada $s \in (0,1)$, consideremos o operador integro-diferencial $(-\Delta)^s : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ definido por

$$(-\Delta)^s u(x) := C(N,s) \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,\epsilon)} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

sendo $B(x,\epsilon) := \{y \in \mathbb{R}^N : |x-y| < \epsilon\}$ e $C(N,s)$ a constante positiva de normalização

$$C(N,s) := \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - \cos \zeta_1}{|\zeta|^{N+2s}} d\zeta \right)^{-1},$$

com $\zeta = (\zeta_1, \zeta')$ e $\zeta' \in \mathbb{R}^{N-1}$.

O operador definido acima traz a notação sugestiva como potência s do operador Laplaciano $\Delta := \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Porém, somente analisando suas definições, estes operadores parecem não ter vínculo algum. Por isso, a seguir faremos uma breve introdução sobre o operador $(-\Delta)^s$.

Em 1997, ao desenvolver um trabalho sobre teoria do potencial em [12], Bogdan usou a notação sugestiva do operador integro-diferencial definido acima, como potência do

Laplaciano, pelo fato de a transformada de Fourier desse operador satisfazer o seguinte:

$$[\widehat{(-\Delta)^s u}](\xi) = |\xi|^{2s}\widehat{u}(\xi), \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

isto é, $(-\Delta)^s$ tem símbolo $|\xi|^{2s}$, que é o símbolo do operador Laplaciano clássico elevado à potência s.

Em 2007, Caffarelli e Silvestre em [22] fizeram outra interpretação do operador $(-\Delta)^s$ da seguinte forma: dada uma função suave limitada $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, eles resolvem o problema de extensão

$$\begin{cases} w(x,0) = u(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ \Delta w(x,y) = 0, & x \in \mathbb{R}^N, \ y > 0 \end{cases}$$

para obter uma função suave w satisfazendo

$$-w_y(x,0) = (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Assim, $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ pode ser obtido como um operador da forma

$$T : u \longmapsto -w_y(\cdot, 0).$$

Então, T satisfaz a seguinte igualdade:

$$T^2(u)(x) = T(-w_y(\cdot,0))(x) = w_{yy}(x,0) = -\Delta_x(u)(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Desde que T é um operador positivo, conclui-se que $T = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$, no sentido da raiz quadrada de operadores lineares positivos em espaços de Hilbert.

Mais geralmente, considerando o problema de extensão

$$\begin{cases} w(x,0) = u(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ \operatorname{div}(y^{1-2s}\nabla w) = 0, & x \in \mathbb{R}^N, y > 0, \end{cases}$$

a partir da mudança de variáveis $z = \left(\frac{y}{2s}\right)^{2s}$, eles mostraram que

$$(-\Delta)^s u(x) = -\lim_{y \to 0^+} y^{1-2s} w_y(x,y) = -w_z(x,0),$$

concretizando, dessa forma, o operador integro-diferencial $(-\Delta)^s$ como potência s do Laplaciano clássico.

Outro importante fato sobre o operador $(-\Delta)^s$ é seu comportamento assintótico quando s se aproxima de 0 e de 1, isto é, para cada $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tem-se

$$\lim_{s \to 0^+} (-\Delta)^s u(x) = u(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N;$$

$$\lim_{s \to 1^-} (-\Delta)^s u(x) = -\Delta u(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Para mais detalhes sobre esse fato, veja [36, Proposição 4.4]. Por todas as razões apresentadas anteriormente, o operador $(-\Delta)^s$ é denominado Laplaciano fracionário.

De maneira mais geral, para $1 < p < \infty$ e $s \in (0,1)$, podemos considerar o operador p-Laplaciano fracionário definido para $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ por

$$(-\Delta_p)^s u(x) := 2 \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\epsilon)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

A menos de constante de normalização, dependendo de N, p e s, esta definição é consistente com aquela do Laplaciano fracionário $(-\Delta)^s$ no caso $p = 2$.

1.2 Definições e espaços funcionais

Para cada $s \in (0,1)$, considere o espaço de Sobolev fracionário

$$H^s(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{N/2+s}} \in L^2(\mathbb{R}^{2N}) \right\},$$

que é munido da norma $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} := \left(|u|_2^2 + [u]_{2,s}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, sendo

$$[u]_{s,2} := \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}$$

a seminorma de Gagliardo e $|\cdot|_2$ a norma em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Em 2015, com o objetivo de abordar um problema de Dirichlet em domínio limitado do tipo

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = g(x,u), & \text{em}\, \Omega, \\ u = 0, & \text{em}\, \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

Servadei e Valdinoci, em [70], introduziram o espaço

$$H_0^s(\Omega) := \{u \in H^s(\mathbb{R}^N) : u(x) = 0 \ \text{q. t. p.}\, x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega\},$$

que é munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H_0^s(\Omega)} := \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy, \quad u, v \in H_0^s(\Omega).$$

Dessa forma, uma solução fraca do Problema (1.1) é uma função $u \in H_0^s(\Omega)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = \int_\Omega g(x,u) v dx, \forall v \in H_0^s(\Omega).$$

Mais geralmente, para $1 < p < \infty$ e para cada função mensurável $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definamos a seminorma de Gagliardo por

$$[u]_{s,p} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$$

e o espaço de Sobolev fracionário, definimos por

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^N) : [u]_{s,p} < \infty\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} := \left(|u|_p^p + [u]_{s,p}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

sendo $|\cdot|_p$ a norma em $L^p(\mathbb{R}^N)$ (veja [36] para mais detalhes). Uma vez que os problemas a serem considerados neste texto envolvem um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e condição de fronteira de Dirichlet, introduziremos o espaço

$$W_0^{s,p}(\Omega) := \{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) :\ u(x) = 0, \text{ a. e. } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}$$

que pode ser normado por $\|\cdot\| := [\cdot]_{s,p}$, sendo tal norma equivalente a $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$ (confira [36, Teorema 7.1]). O espaço $W_0^{s,p}$ é um espaço de Banach, separável, reflexivo com relação à norma $[\cdot]_{s,p}$ e pode ser visto como o completamento de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ na norma $[\cdot]_{s,p}$ (veja [14, Teorema 2.1]). Denotamos o espaço topológico dual de $W_0^{s,p}(\Omega)$ por $W^{-s,p'}(\Omega)$, sendo $p' = \frac{p}{p-1}$ o expoente conjugado de p e escrevemos $\langle \cdot, \cdot \rangle : W^{-s,p'}(\Omega) \times W_0^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ para designar o par de dualidade. No decorrer do texto, usaremos apenas a notação $\|\cdot\|$ para indicar a norma no espaço de Sobolev fracionário considerado.

Uma vez que abordaremos problemas envolvendo expoentes de Hardy-Sobolev, introduziremos um espaço L^r a partir de uma medida que depende de $\alpha \in [0, \infty)$. Este espaço é definido por

$$L^r\left(\Omega, \frac{dx}{|x|^\alpha}\right) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e } \int_\Omega \frac{|u|^r}{|x|^\alpha} dx < \infty \right\}.$$

A desigualdade de Hardy-Sobolev fracionária (confira [29, Lemma 2.1])

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha} dx \right)^{\frac{1}{p_\alpha^*}} \leq C(N,p,\alpha) \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$$

implica que a imersão

$$W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r\left(\Omega, \frac{dx}{|x|^\alpha}\right) \tag{1.2}$$

é contínua, para todo $r \in [1, p_\alpha^*]$ com $0 \leq \alpha \leq ps$, sendo

$$p_\alpha^* = \frac{(N-\alpha)p}{N-sp}$$

o expoente crítico de Hardy-Sobolev fracionário. Em particular, se $\alpha = 0$, o espaço $L^r(\Omega, dx/|x|^\alpha)$ coincide com o espaço $L^r(\Omega)$ e $p^* := p_0^* = \frac{Np}{N-sp}$ é o expoente crítico de Sobolev fracionário. Além disso, a imersão (1.2) é compacta para todo $r \in [1, p_\alpha^*)$ com $0 \leq \alpha \leq ps$ (confira [29, Lemma 2.3]).

Para cada $r \in [1, p_\alpha^*]$, denotamos por

$$S_{r,\alpha} = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|^p}{|u|x|^{-\alpha/p}|_r^p} \tag{1.3}$$

a melhor constante correspondente à imersão de Hardy-Sobolev fracionária (1.2). Particularmente, quando $r = p_\alpha^*$, a denotamos apenas por S_α. Além disso, para $p = 2$ e $\alpha = 0$, usamos a notação simplificada $S := S_{2_0^*,0}$.

Para cada $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$, o operador p-Laplaciano fracionário $(-\Delta_p)^s u$ pode ser visto, no sentido fraco, como um elemento de $W^{-s,p'}(\Omega)$, unicamente definido por

$$\langle (-\Delta_p)^s u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}} dxdy, \quad \forall v \in W_0^{s,p}(\Omega).$$

Agora, introduziremos a noção de solução fraca nos espaços de Sobolev fracionários $W_0^{s,p}(\Omega)$ para problemas do tipo

$$\begin{cases} \mathcal{L}_p^s(u) = g_\lambda(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave, $g_\lambda : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Carathéodory, λ um parâmetro positivo e $\mathcal{L}_p^s$ o operador fracionário dado por

$$\mathcal{L}_p^s(u) := M\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy\right)(-\Delta_p)^s u$$

em que $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função contínua, denominada função de Kirchhoff, e $(-\Delta_p)^s$ representa o operador p-Laplaciano fracionário com $1 < p < \infty$. Em particular, se $M \equiv 1$, temos que $\mathcal{L}_p^s = (-\Delta_p)^s$.

Definição 1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ um domínio limitado e seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é uma função Carathéodory se f satisfaz as seguintes condições:*

(i) $f(\cdot, t)$ é mensurável em Ω para todo $t \in \mathbb{R}$ fixado;

(ii) $f(x, \cdot)$ é contínua em $\mathbb{R}$ para q.t.p. $x \in \Omega$.

Definição 1.2. *Dizemos que uma função $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ é uma solução fraca da equação* (1.4) *se*

$$M(\|u\|^p)\langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle = \int_\Omega g_\lambda(x,u) v dx,$$

para todo $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$.

Se g_λ é uma função Carathéodory satisfazendo determinadas condições de crescimento e $G_\lambda(x,t) := \int_0^t G_\lambda(x,\tau)d\tau$, então o funcional energia $I_\lambda : W_0^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \int_\Omega G_\lambda(x,u)dx,$$

com $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(\tau)d\tau$, está bem definido em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Além disso, $I_\lambda \in C^1(W_0^{s,p}(\Omega),\mathbb{R})$ e sua derivada é dada por

$$\langle I_\lambda'(u), v\rangle \;=\; M\left(\|u\|^p\right)\langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle - \int_\Omega f(x,u)v dx \;\forall v \in W_0^{s,p}(\Omega).$$

Assim, as soluções fracas do Problema (1.4) são os pontos críticos do funcional I_λ.

No decorrer do texto, usaremos apenas o termo *solução* para designar solução fraca de uma equação. Além disso, sempre que usarmos o termo *solução positiva* estamos nos referindo a uma solução fraca não trivial, não negativa q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Analogamente, *solução negativa* designará uma solução fraca não trivial e não positiva q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Considere o conjunto das soluções não triviais de (1.4) definido por

$$\mathcal{O}_\lambda := \{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\} : I_\lambda'(u) = 0\}.$$

Então, podemos definir conjuntos de soluções que minimizam o funcional I_λ em diferentes aspectos:

$$\mathcal{S}_\lambda := \{u \in \mathcal{O}_\lambda : I_\lambda(u) \le I_\lambda(v), \forall v \in \mathcal{O}_\lambda\};$$

$$\mathcal{S}_{\lambda,1} := \{u \in \mathcal{O}_\lambda : I_\lambda(u) \le I_\lambda(v), \forall v \in \mathcal{O}_\lambda, v \ge 0\};$$

$$\mathcal{S}_{\lambda,2} := \{u \in \mathcal{O}_\lambda : I_\lambda(u) \le I_\lambda(v), \forall v \in \mathcal{O}_\lambda, v \le 0\};$$

$$\mathcal{S}_{\lambda,3} := \{u \in \mathcal{O}_\lambda : u^\pm \neq 0, I_\lambda(u) \le I_\lambda(v), \forall v \in \mathcal{O}_\lambda, v^\pm \neq 0\}.$$

Note que $\mathcal{S}_\lambda$ é o conjunto das soluções que minimizam o funcional I_λ sobre todas as soluções não triviais, $\mathcal{S}_{\lambda,1}$, sobre as positivas, $\mathcal{S}_{\lambda,2}$, sobre as negativas e $\mathcal{S}_{\lambda,3}$, sobre as que mudam de sinal. Soluções em $\mathcal{S}_\lambda$ são também denominadas soluções de energia mínima.

Uma vez que faremos uso de métodos variacionais em nosso trabalho, precisamos definir o que são sequências de Palais-Smale (PS) e a condição de Palais-Smale:

Definição 1.3. *Seja W um espaço de Banach real e $J \in C^1(W,\mathbb{R})$. Dizemos que $\{u_n\} \subset W$ é uma sequência $(PS)_c$ para J se $J(u_n) \to c$ e $J'(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$. Também, dizemos que J satisfaz a condição $(PS)_c$ se qualquer sequência $(PS)_c$ tem subsequência fortemente convergente em W.*

Desde que a obtenção de soluções mudando de sinal também é assunto deste texto, precisamos considerar, frequentemente, as partes positiva e negativa das funções. Dada uma função u definida em um subconjunto de $\mathbb{R}^N$, definimos sua parte positiva u^+ e sua parte negativa u^- por

$$u^+(x) := \max\{u(x), 0\}, \quad u^-(x) := \min\{u(x), 0\}.$$

Então, u^+ é uma função não negativa e u^- uma função não positiva e é possível escrever

$$u = u^+ + u^-.$$

Dessa forma, podemos analisar possíveis decomposições de uma função u com respeito à sua norma nos espaços de Sobolev fracionários. De fato, para cada $u \in H_0^s(\Omega)$, temos que

$$\langle u^+, u^- \rangle_{H_0^s(\Omega)} = -2 \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}} dxdy.$$

Usando propriedades do produto interno, podemos escrever

$$\langle u, u^\pm \rangle_{H_0^s(\Omega)} = \|u^\pm\|^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \tag{1.5}$$

e

$$\|u\|^2 = \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2 - 4 \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}} dxdy. \tag{1.6}$$

A partir destas decomposições, podemos notar que se u muda de sinal, isto é, $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$, então $\langle u^+, u^- \rangle_{H_0^s(\Omega)} > 0$ e

$$\|u\|^2 > \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2.$$

No caso mais geral $1 < p < \infty$, devido a ausência de produto interno, não existe uma decomposição da norma de u em termos das normas de u^+ e u^-. Porém, em [29], os autores apresentaram uma decomposição da norma de u em termos de integrais sobre os suportes de u^+ e u^-. Mais precisamente, para cada $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$, denotemos por $\Omega_\pm := \operatorname{supp}(u^\pm)$ os suportes de u^+ e u^-, respectivamente. Assim, é possível descrever explicitamente

$$\langle (-\Delta_p)^s u, u^\pm \rangle = A^\pm(u) + B^\pm(u), \tag{1.7}$$

com

$$A^\pm(u) := \int_{\Omega_\mp^c \times \Omega_\mp^c} \frac{|u^\pm(x) - u^\pm(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy,$$

$$B^\pm(u) := 2 \int_{\Omega_+ \times \Omega_-} \frac{|u^+(x) - u^-(y)|^{p-1}(u^\pm(x) - u^\pm(y))}{|x-y|^{N+sp}} dxdy.$$

Dessa forma, obtemos a seguinte decomposição da norma de qualquer função $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$:

$$\|u\|^p = A(u) + B(u) \tag{1.8}$$

com $A(u) := A^+(u) + A^-(u)$ e $B(u) := B^+(u) + B^-(u)$.

Além disso, desde que a função $\phi_p(t) = |t|^{p-2}t$ satisfaz a desigualdade

$$\phi_p(t^\pm - \theta^\pm)(t^\pm - \theta^\pm) \leq \phi_p(t-\theta)(t^\pm - \theta^\pm) \leq \phi_p(t-\theta)(t-\theta),$$

para quaisquer $t, \theta \in \mathbb{R}$, sendo $t^+ := \max\{t, 0\}$ e $t^- := \min\{t, 0\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos as seguintes desigualdades:

$$\|u^\pm\|^p = \langle(-\Delta_p)^s u^\pm, u^\pm\rangle \leq \langle(\Delta_p)^s u, u^\pm\rangle \leq \langle(\Delta_p)^s u, u\rangle = \|u\|^p, \tag{1.9}$$

para todo $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ com desigualdade estrita sempre que u muda de sinal.

A partir de (1.9), concluímos que

$$\|u^+\|^p + \|u^-\|^p \leq \langle(-\Delta_p)^s u, u^+\rangle + \langle(-\Delta_p)^s u, u^-\rangle = \langle(-\Delta_p)^s u, u\rangle = \|u\|^p, \tag{1.10}$$

para todo $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ com a desigualdade estrita sempre que u muda de sinal.

No decorrer do texto, usaremos algumas notações padronizadas. Serão usadas as notações " $\to$ " e " $\rightharpoonup$ " para designar as convergências forte e fraca em $W_0^{s,p}(\Omega)$, respectivamente. Em geral, C, C_1, C_2, ... denotarão constantes positivas cujos valores exatos não tem importância, a menos que sejam especificados. Para $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ representará o expoente conjugado de p, isto é, o valor real que satisfaz a identidade $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Além disso, se um funcional $J : W_0^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ for limitado inferiormente em $X \subset W_0^{s,p}(\Omega)$, denotaremos seu ínfimo sobre X por

$$c_X := \inf_{u \in X} J(u).$$

Capítulo

2

Existência de solução mudando de sinal para uma equação envolvendo o Laplaciano fracionário com expoente crítico

Neste capítulo, estudaremos a existência de solução que muda de sinal para o seguinte problema fracionário:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = \lambda f(x,u) + |u|^{2_s^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $s \in (0,1)$, $2s < N$, $\lambda > 0$ e $2^* = 2^*(s) = \frac{2N}{N-2s}$ é o expoente crítico de Sobolev fracionário.

Assumiremos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory tal que $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável para q.t.p. $x \in \Omega$, e satisfaz as seguintes condições:

(f_0) existem $q \in (2, 2^*)$ e $C > 0$ tais que

$$|\partial_t f(x,t)| \leq C(1 + |t|^{q-2}),$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \in \mathbb{R}$;

(f_1) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} = 0$, uniformemente para q.t.p. $x \in \Omega$;

(f_2) existe $\mu \in (2, 2^*)$ tal que

$$0 < \mu F(x,t) \leq tf(x,t),$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \neq 0$, sendo $F(x,t) := \int_0^t f(x,\tau)d\tau$;

(f_3) $\dfrac{f(x,t)}{t}$ é crescente em $|t| \neq 0$, para q.t.p. $x \in \Omega$.

Observação 2.1. *Note que a partir das hipóteses (f_2) e (f_3), concluímos que a função $H(x,t) := tf(x,t) - 2F(x,t)$ é não negativa, crescente em $t > 0$ e decrescente em $t < 0$, para q.t.p. $x \in \Omega$. Assim,*

$$t^2 \partial_t f(x,t) - tf(x,t) = \partial_t H(x,t)t > 0, \tag{2.1}$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ *e todo* $t \neq 0$.

Exemplo 2.1. *Seja* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,t) := a_1(x)|t^+|^{q_1-2}t^+ + a_2(x)|t^-|^{q_2-2}t^-$ *com* $q_1, q_2 \in (2, 2^*)$, $a_1, a_2 \in L^\infty(\Omega)$, $a_1(x) > 0$ *e* $a_2(x) > 0$ *para q.t.p.* $x \in \Omega$. *Então,* f *satisfaz as hipóteses* (f_0)*-*(f_3).

Nosso resultado principal para este capítulo é o seguinte:

Teorema 2.1. *Suponhamos que* f *satisfaz* (f_0)*-*(f_3). *Então, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que para todo* $\lambda \geq \lambda^*$, *o Problema* (P_λ) *possui uma solução mudando de sinal* $u_\lambda \in \mathcal{S}_{\lambda,3}$.

2.1 Formulação variacional

Associado ao Problema (P_λ), temos o funcional $I_\lambda : H_0^s(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_\lambda(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}dx,$$

com $F(x,t) := \int_0^t f(x,\tau)d\tau$. Se f satisfaz as condições (f_0) e (f_1), então o funcional I_λ está bem definido, $I_\lambda \in C^1(H_0^s(\Omega), \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por

$$\langle I'_\lambda(u), v\rangle = \langle u, v\rangle_{H_0^s(\Omega)} - \lambda \int_\Omega f(x,u)vdx - \int_\Omega |u|^{2^*-2}uvdx.$$

Dessa forma, os pontos críticos de I_λ são as soluções fracas de (P_λ). Agora, consideremos os seguintes conjuntos de Nehari associados a I_λ:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\lambda &:= \{u \in H_0^s(\Omega) \setminus \{0\} : \langle I'_\lambda(u), u\rangle = 0\};\\ \mathcal{M}_\lambda &:= \{u \in H_0^s(\Omega) : \langle I'_\lambda(u), u^\pm\rangle = 0, u^\pm \neq 0\}.\end{aligned}$$

A técnica variacional que utilizaremos para obter solução mudando de sinal para o Problema (P_λ), em linhas gerais, consiste em provar que o ínfimo

$$c_{\mathcal{M}_\lambda} := \inf_{v \in \mathcal{M}_\lambda} I_\lambda(v)$$

é atingido por uma função $u \in \mathcal{M}_\lambda$ e que u é um ponto crítico de I_λ.

Note que para cada $u \in H_0^s(\Omega)$, decompondo $u = u^+ + u^-$ e usando (1.5) e (1.6), obtemos as seguintes decomposições para o funcional I_λ:

$$I_\lambda(u) = I_\lambda(u^+) + I_\lambda(u^-) - 2\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \geq I_\lambda(u^+) + I_\lambda(u^-); \tag{2.2}$$

$$\langle I'_\lambda(u), u^\pm\rangle = \langle I'_\lambda(u^\pm), u^\pm\rangle - 4\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \geq \langle I'_\lambda(u^\pm), u^\pm\rangle.$$

As desigualdades acima são estritas sempre que u muda de sinal, isto é, $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$.

2.2 Resultados técnicos

Iniciamos esta seção com um resultado sobre o crescimento da função f decorrente de nossas hipóteses.

Lema 2.1. *Suponhamos que f satisfaz as condições (f_0)-(f_1). Então, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$|f(x,t)| \leq \epsilon|t| + \delta(\epsilon)|t|^{q-1},$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Fixado $\epsilon > 0$, por (f_1), existe $\sigma = \sigma(\epsilon) > 0$ tal que se $|t| < \sigma$, então

$$|f(x,t)| < \epsilon|t|, \tag{2.3}$$

para q.t.p. $x \in \Omega$. Por outro lado, a partir de (f_0), se $|t| \geq \sigma$, então

$$\begin{aligned} |\partial_t f(x,t)| &\leq C_1(1 + |t|^{q-2}) \\ &\leq C_1(\sigma^{2-q}|t|^{q-2} + |t|^{q-2}) \\ &\leq \delta'(\sigma)|t|^{q-2}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \in \mathbb{R}$, em que $\delta'(\sigma) := C_1(\sigma^{2-q} + 1) > 0$. Desde que $f(x,0) = 0$, integrando de 0 a t em (2.4), existe $\delta = \delta(\sigma) > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \delta(\sigma)|t|^{q-1}, \tag{2.5}$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, a partir de (2.3) e (2.5), segue que

$$|f(x,t)| \leq \epsilon|t| + \delta(\epsilon)|t|^{q-1},$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \in \mathbb{R}$. □

Agora, apresentaremos alguns resultados que descrevem propriedades de $\mathcal{M}_\lambda$, bem como o comportamento do funcional I_λ sobre este conjunto. O próximo resultado descreve a geometria do funcional I_λ, importante na prova de que $\mathcal{M}_\lambda$ é não vazio.

Lema 2.2. *O funcional I_λ satisfaz as seguintes condições geométricas:*

(i) para cada $u \in H_0^s(\Omega) \setminus \{0\}$, temos que

$$I_\lambda(tu^+ + \theta u^-) \to -\infty, \text{ quando } |(t,\theta)| \to \infty;$$

(ii) existe $R = R(\lambda) > 0$ tal que para todo $u \in H_0^s(\Omega)$ com $\|u\| \leq R$, tem-se

$$I_\lambda(u) \geq R\|u\|^2.$$

Demonstração. (i) Pela hipótese (f_2), temos que $F(x,t) \geq 0$ para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \in \mathbb{R}$, o que implica

$$\begin{aligned} I_\lambda(tu^+ + \theta u^-) &= \frac{1}{2}\|tu^+ + \theta u^-\|^2 - \lambda \int_\Omega F(x, tu^+ + \theta u^-)dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |tu^+ + \theta u^-|^{2^*}dx \\ &\leq \frac{1}{2}t^2\|u^+\|^2 + \frac{1}{2}\theta^2\|u^-\|^2 - 2t\theta \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\ & -\frac{1}{2^*}t^{2^*}\int_\Omega |u^+|^{2^*}dx - \frac{1}{2^*}\theta^{2^*}\int_\Omega |u^-|^{2^*}dx. \end{aligned}$$

Desde que $2^* > 2$, segue que $I_\lambda(tu^+ + \theta u^-) \to -\infty$, quando $|(t,\theta)| \to \infty$.
(ii) Dado $\epsilon > 0$, a partir do Lema 2.1 e da continuidade da imersão $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$ para todo $t \in [1, 2^*]$, existem $C > 0$ e $C_{q,\epsilon} > 0$ tais que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda\epsilon}{2}\int_\Omega |u|^2dx - \frac{\lambda\delta(\epsilon)}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - C\epsilon\right)\|u\|^2 - C_{\epsilon,q}\|u\|^q - C\|u\|^{2^*} \\ &= \|u\|^2\left[\left(\frac{1}{2} - C\epsilon\right) - C_{\epsilon,q}\|u\|^{q-2} - C\|u\|^{2^*-2}\right] \end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ tal que $(1/2 - C\epsilon) > 0$, desde que $2 < q$ e $2 < 2^*$, existe $R = R(\lambda) > 0$ suficientemente pequeno tal que $I_\lambda(u) \geq R\|u\|^2$, sempre que $\|u\| \leq R$. □

Para cada $u \in H_0^s(\Omega)$ com $u^\pm \neq 0$, consideremos a função $\psi_u : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\psi_u(t,\theta) = I_\lambda(tu^+ + \theta u^-). \tag{2.6}$$

e também $\Psi_u : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{aligned} \Psi_u(t,\theta) &:= (t\partial_t\psi_u(t,\theta), \theta\partial_\theta\psi_u(t,\theta)) \\ &= \left(\langle I'_\lambda(tu^+ + \theta u^-), tu^+\rangle, \langle I'_\lambda(tu^+ + \theta u^-), \theta u^-\rangle\right), \end{aligned} \tag{2.7}$$

que é de classe C^1 desde que f satisfaz a hipótese (f_0) e $f(x,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 para q.t.p. $x \in \Omega$.

Note que $tu^+ + \theta u^- \in \mathcal{M}_\lambda$ se, e somente se, $\Psi_u(t,\theta) = (0,0)$. Assim, mostrar que $\mathcal{M}_\lambda$ é não vazio equivale a mostrar que ψ_u tem ponto crítico, para algum $u \in H_0^s(\Omega)$. No próximo lema, veremos que $\mathcal{M}_\lambda$ é não vazio e que ψ_u possui um único ponto de máximo.

Lema 2.3. *Para cada $u \in H_0^s(\Omega)$ com $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$, existe único par $(t_u, \theta_u) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ tal que*

$$t_u u^+ + \theta_u u^- \in \mathcal{M}_\lambda.$$

Em particular, $\mathcal{M}_\lambda \neq \emptyset$. Além disso, para todo $t, \theta \geq 0$ com $(t, \theta) \neq (t_u, \theta_u)$, temos que

$$I_\lambda(tu^+ + \theta u^-) < I_\lambda(t_u u^+ + \theta_u u^-).$$

Demonstração. Fixado $u \in H_0^s(\Omega)$ com $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$, podemos considerar a função ψ_u dada em (2.6). Pelo Lema 2.2 e pela continuidade de ψ_u, deve existir $(t_u, \theta_u) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ tal que

$$\psi_u(t_u, \theta_u) = \max_{(t,\theta)\in[0,\infty)\times[0,\infty)} \psi_u(t, \theta).$$

Observe que para cada $t \geq 0$, pelo item (ii) do Lema 2.2 e por (2.2), temos que

$$\psi_u(t, 0) = I_\lambda(tu^+) < I_\lambda(tu^+) + I_\lambda(\theta u^-) \leq I_\lambda(tu^+ + \theta u^-) = \psi_u(t, \theta),$$

para $0 < \theta < 1$ suficientemente pequeno. Logo, $(t, 0)$ não é ponto de máximo de ψ_u. De modo análogo, podemos provar que $(0, \theta)$ não é ponto de máximo de ψ_u. Assim, o ponto de máximo $(t_u, \theta_u) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$. Portanto, (t_u, θ_u) é um ponto crítico de ψ_u, isto é, $t_u u^+ + \theta_u u^- \in \mathcal{M}_\lambda$.

Observe que para provar a unicidade, basta verificar que se $u \in \mathcal{M}_\lambda$ e $t_u u^+ + \theta_u u^- \in \mathcal{M}_\lambda$, então $t_u = \theta_u = 1$. Uma vez que

$$\langle I'_\lambda(t_u u^+ + \theta_u u^-), t_u u^+\rangle = 0 = \langle I'_\lambda(t_u u^+ + \theta_u u^-), \theta_u u^-\rangle,$$

valem as seguintes identidades:

$$t_u^2\|u^+\|^2 - 2t_u\theta_u \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = \lambda \int_\Omega f(x, t_u u^+) t_u u^+ dx + t_u^{2^*} \int_\Omega |u^+|^{2^*} dx, \quad (2.8)$$

$$\theta_u^2\|u^-\|^2 - 2t_u\theta_u \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = \lambda \int_\Omega f(x, \theta_u u^-) \theta_u u^- dx + \theta_u^{2^*} \int_\Omega |u^-|^{2^*} dx. \quad (2.9)$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $t_u \geq \theta_u$. Então, usando (2.8), obtemos

$$\lambda \int_\Omega f(x, t_u u^+) t_u u^+ dx \leq t_u^2\|u^+\|^2 - 2t_u^2 \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - t_u^{2^*} \int_\Omega |u^+|^{2^*} dx. \quad (2.10)$$

Por outro lado, desde que $\langle I'_\lambda(u), u^+\rangle = 0 = \langle I'_\lambda(u), u^-\rangle$, temos que

$$\lambda \int_\Omega f(x, u^+) u^+ dx = \|u^+\|^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - \int_\Omega |u^+|^{2^*} dx, \quad (2.11)$$

$$\lambda \int_\Omega f(x, u^-) u^- dx = \|u^-\|^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - \int_\Omega |u^-|^{2^*} dx. \quad (2.12)$$

Por (2.10) e (2.11), segue que

$$\lambda \int_\Omega \left(\frac{f(x, t_u u^+) t_u u^+}{(t_u u^+)^2} - \frac{f(x, u^+) u^+}{(u^+)^2} \right) (u^+)^2 dx \leq (1 - t_u^{2^*-2}) \int_\Omega |u^+|^{2^*} dx.$$

Então, por (f_3), temos que $\theta_u \leq t_u \leq 1$. De modo similar, usando (2.9) e (2.12), podemos garantir que $\theta_u \geq 1$. Portanto, $t_u = \theta_u = 1$. Para concluir a prova, notemos que pela unicidade do máximo de ψ_u, tem-se

$$I_\lambda(tu^+ + \theta u^-) < I_\lambda(t_u u^+ + \theta_u u^-),$$

para todo $(t, \theta) \neq (t_u, \theta_u)$. □

Como consequência de nosso último lema, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 2.1. *Para cada $u \in H_0^s(\Omega)$ com $u^\pm \neq 0$ e $\langle I'_\lambda(u), u^\pm \rangle \leq 0$, existe único par $(t_u, \theta_u) \in (0, 1] \times (0, 1]$ tal que $t_u u^+ + \theta_u u^- \in \mathcal{M}_\lambda$.*

Demonstração. A existência e unicidade de $t_u, \theta_u > 0$, tais que $t_u u^+ + \theta_u u^- \in \mathcal{M}_\lambda$, é garantida pelo Lema 2.3. Usando os mesmos argumentos apresentados na prova da unicidade de t_u e θ_u, desde que $\langle I'_\lambda(u), u^\pm \rangle \leq 0$, concluímos que $t_u, \theta_u \leq 1$. □

No lema seguinte, apresentaremos uma limitação inferior para a norma das partes positiva e negativa das funções em $\mathcal{M}_\lambda$. Em termos topológicos, isso garante que $\mathcal{M}_\lambda$ é um conjunto fechado em $W_0^{s,p}(\Omega)$.

Lema 2.4. *Existe $\kappa := \kappa_\lambda > 0$ tal que para todo $u \in \mathcal{M}_\lambda$, tem-se*

$$\|u^+\|,\ \|u^-\| \geq \kappa.$$

Demonstração. Se $u \in \mathcal{M}_\lambda$, então

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x) - u(y))(u^\pm(x) - u^\pm(y))}{|x - y|^{N+2s}} dxdy = \lambda \int_\Omega f(x, u^\pm) u^\pm dx + \int_\Omega |u^\pm|^{2^*} dx.$$

Desde que

$$\|u^\pm\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x) - u(y))(u^\pm(x) - u^\pm(y))}{|x - y|^{N+2s}} dxdy,$$

usando o Lema 2.1 e a continuidade da imersão $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para todo $r \in [1, 2^*]$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\|u^\pm\|^2 &\leq \lambda \int_\Omega f(x, u^\pm) u^\pm dx + \int_\Omega |u^\pm|^{2^*} dx \\
&\leq \lambda\epsilon \int_\Omega |u^\pm|^2 dx + \delta(\epsilon)\lambda \int_\Omega |u^\pm|^q dx + \int_\Omega |u^\pm|^{2^*} dx \\
&\leq \lambda\epsilon C \|u^\pm\|^2 + \lambda C_\epsilon \|u^\pm\|^q + C\|u^\pm\|^{2^*}.
\end{aligned}$$

Portanto, para cada $u \in \mathcal{M}_\lambda$, temos que

$$(1-\epsilon\lambda C)\|u^\pm\|^2 \leq \lambda C_\epsilon \|u^\pm\|^q + C\|u^\pm\|^{2^*}. \tag{2.13}$$

Dividindo por $\|u^\pm\|^2$ em ambos os lados da desigualdade (2.13), obtemos

$$(1-\epsilon\lambda C) \leq \lambda C_\epsilon \|u^\pm\|^{q-2} + C\|u^\pm\|^{2^*-2}.$$

Tomando $\epsilon > 0$ tal que $1 - \epsilon\lambda C > 0$, obtemos a conclusão desejada, desde que $q > 2$ e $2^* > 2$. □

A seguir, apresentaremos uma estimativa inferior e superior para o funcional I_λ sobre $\mathcal{M}_\lambda$ em termos da norma. Isso possibilita, por exemplo, a limitação de sequências minimizantes em $\mathcal{M}_\lambda$.

Lema 2.5. *Existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que para todo $u \in \mathcal{M}_\lambda$, tem-se*

$$C_1\|u\|^2 \leq I_\lambda(u) \leq C_2\|u\|^2.$$

Demonstração. Dado $u \in \mathcal{M}_\lambda$, desde que $\mathcal{M}_\lambda \subset \mathcal{N}_\lambda$, temos que $\langle I'_\lambda(u), u\rangle = 0$. Então, usando (f_2), segue que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= I_\lambda(u) - \frac{1}{\mu}\langle I'_\lambda(u), u\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u\|^2 + \lambda\int_\Omega \frac{1}{\mu} f(x,u)u - F(x,u)dx \\
&\quad + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega |u|^{2^*}dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u\|^2 := C_1\|u\|^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, desde que por (f_2), $F(x,t) \geq 0$, para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}dx \\
&\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 := C_2\|u\|^2,
\end{aligned}$$

para todo $u \in \mathcal{M}_\lambda$. □

Como vimos na Seção 2.1, um dos passos para provar a existência de solução mudando de sinal para o problema (P_λ) é garantir que o ínfimo $c_{\mathcal{M}_\lambda}$ é atingido. Uma vez que estamos abordando um problema com expoentes críticos, como veremos na prova do Teorema 2.1, provar que o ínfimo é atingido será possível desde que

$$c_{\mathcal{M}_\lambda} < c_\infty := \frac{s}{N} S^{\frac{N}{2s}}.$$

Para tanto, exploraremos o comportamento assintótico de $c_{\mathcal{M}_\lambda}$ quando $\lambda \to \infty$ na proposição seguinte.

Proposição 2.1. *Se $c_{\mathcal{M}_\lambda} = \inf_{u\in\mathcal{M}_\lambda} I_\lambda(u)$, então*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} c_{\mathcal{M}_\lambda} = 0.$$

Demonstração. Pelo Lema 2.5, segue que $I_\lambda(u) > 0$ para todo $u \in \mathcal{M}_\lambda$. Assim, I_λ é limitado inferiormente sobre $\mathcal{M}_\lambda$. Portanto, $c_{\mathcal{M}_\lambda} = \inf_{u\in\mathcal{M}_\lambda} I_\lambda(u)$ está bem definido.

Fixemos $u \in H_0^s(\Omega)$ com $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$. Pelo Lema 2.3, para cada $\lambda > 0$, existe $t_\lambda > 0$ e $\theta_\lambda > 0$ tal que $t_\lambda u^+ + \theta_\lambda u^- \in \mathcal{M}_\lambda$. Então, pelo Lema 2.5, temos que

$$\begin{aligned} 0 < c_{\mathcal{M}_\lambda} &= \inf_{v\in\mathcal{M}_\lambda} I_\lambda(v) \leq I_\lambda(t_\lambda u^+ + \theta_\lambda u^-) \\ &\leq \frac{1}{2}\|t_\lambda u^+ + \theta_\lambda u^-\|^2 \\ &\leq t_\lambda^2\|u^+\|^2 + \theta_\lambda^2\|u^-\|^2. \end{aligned}$$

Assim, é suficiente provar que $t_\lambda \to 0$ e $\theta_\lambda \to 0$ quando $\lambda \to +\infty$. Para tanto, consideremos o conjunto

$$Q_u = \{(t_\lambda, \theta_\lambda) \in (0,\infty)\times(0,\infty) : \Psi_u(t_\lambda,\theta_\lambda) = (0,0), \lambda > 0\},$$

onde Ψ_u foi definida em (2.7). Desde que $f(x,t)t \geq 0$, para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \in \mathbb{R}$, por (f_2)), e $t_\lambda u^+ + \theta_\lambda u^- \in \mathcal{N}_\lambda$, temos que

$$\begin{aligned} t_\lambda^{2^*}\int_\Omega |u^+|^{2^*}dx + \theta_\lambda^{2^*}\int_\Omega |u^-|^{2^*}dx &\leq t_\lambda^{2^*}\int_\Omega |u^+|^{2^*}dx + \theta_\lambda^{2^*}\int_\Omega |u^-|^{2^*}dx \\ &\quad +\lambda\int_\Omega f(x,t_\lambda u^+)t_\lambda u^+dx + \lambda\int_\Omega f(x,\theta_\lambda u^-)\theta_\lambda u^-dx \\ &= \|t_\lambda u^+ + \theta_\lambda u^-\|^2 \\ &\leq 2t_\lambda^2\|u^+\|^2 + 2\theta_\lambda^2\|u^-\|^2 \end{aligned}$$

que implica na limitação do conjunto Q_u, pois $2^* > 2$.

Seja $\{\lambda_n\} \subset (0,\infty)$ tal que $\lambda_n \to +\infty$. Então, existem $t_0 \geq 0$ e $\theta_0 \geq 0$ tais que, a menos de subsequência, $\{(t_{\lambda_n}, \theta_{\lambda_n})\}$ converge para (t_0, θ_0).

Afirmação: $t_0 = \theta_0 = 0$.

De fato, suponhamos, por contradição, que $t_0 > 0$ ou $\theta_0 > 0$. Desde que

$t_{\lambda_n}u^+ + \theta_{\lambda_n}u^- \in \mathcal{N}_{\lambda_n}$ para todo n, temos que

$$\begin{aligned} \|t_{\lambda_n}u^+ + \theta_{\lambda_n}u^-\|^2 &= \lambda_n \int_\Omega f(x, t_{\lambda_n}u^+ + \theta_{\lambda_n}u^-)(t_{\lambda_n}u^+ + \theta_{\lambda_n}u^-)dx \\ &\quad + \int_\Omega |t_{\lambda_n}u^+ + \theta_{\lambda_n}u^-|^{2^*}dx. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Uma vez que $t_{\lambda_n}u^+ \to t_0u^+$ e $\theta_{\lambda_n}u^- \to \theta_0u^-$ em $H_0^s(\Omega)$, pelo Lema 2.1 e pela hipótese (f_2), segue que

$$\int_\Omega f(x, t_{\lambda_n}u^+ + \theta_{\lambda_n}u^-)(t_{\lambda_n}u^+ + \theta_{\lambda_n}u^-)dx \to \int_\Omega f(x, t_0u^+ + \theta_0u^-)(t_0u^+ + \theta_0u^-)dx > 0.$$

Desde que $\lambda_n \to +\infty$ e a sequência $\{t_{\lambda_n}u^+ + \theta_{\lambda_n}u^-\}$ é limitada em $H_0^s(\Omega)$, temos uma contradição na igualdade (2.14). Assim, $t_0 = \theta_0 = 0$, provando a afirmação.

Portanto, $c_{\mathcal{M}_{\lambda_n}} \to 0$, o que conclui a prova da proposição. $\square$

Nosso principal objetivo é garantir a existência de um ponto crítico de I_λ no conjunto $\mathcal{M}_\lambda$. Para tanto, mostraremos que todo elemento de $\mathcal{M}_\lambda$ que minimize o funcional I_λ sobre $\mathcal{M}_\lambda$ é um ponto crítico de I_λ. O lema seguinte é um resultado técnico essencial na prova desse fato.

Lema 2.6. *Seja $u \in \mathcal{M}_\lambda$. Então,* $\det J_{(1,1)}\Psi_u > 0$*, sendo $J_{(1,1)}\Psi_u$ a matriz Jacobiana de Ψ_u em* $(1,1)$.

Demonstração. Através de alguns cálculos, podemos mostrar que

$$\partial^2_{t,t}\psi_u(t,\theta) = \|u^+\|^2 - \lambda \int_\Omega \partial_t f(x, tu^+)(u^+)^2dx - (2^*-1)t^{2^*-2}\int_\Omega |u^+|^{2^*}dx,$$

$$\partial^2_{\theta,\theta}\psi_u(t,\theta) = \|u^-\|^2 - \lambda \int_\Omega \partial_\theta f(x, \theta u^-)(u^-)^2dx - (2^*-1)\theta^{2^*-2}\int_\Omega |u^-|^{2^*}dx,$$

$$\partial^2_{t,\theta}\psi_u(t,\theta) = -2\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}}dxdy.$$

Assim, o determinante da matriz Jacobiana de de Ψ_u no ponto $(1,1)$ é da forma

$$\begin{aligned} \det J_{(1,1)}\Psi_u &= \partial^2_{t,t}\psi_u(1,1)\partial^2_{\theta,\theta}\psi_u(1,1) - \partial^2_{t,\theta}\psi_u(1,1)\partial^2_{\theta,t}\psi_u(1,1) \\ &= \left(\|u^+\|^2 - \lambda\int_\Omega \partial_t f(x,u^+)(u^+)^2dx - (2^*-1)\int_\Omega |u^+|^{2^*}dx\right) \\ &\quad \left(\|u^-\|^2 - \lambda\int_\Omega \partial_\theta f(x,u^-)(u^-)^2dx - (2^*-1)\int_\Omega |u^-|^{2^*}dx\right) \\ &\quad -4\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^2. \end{aligned}$$

Uma vez que $u \in \mathcal{M}_\lambda$, obtemos

$$\begin{aligned}
\det J_{(1,1)}\Psi_u &= \left(2\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \lambda\int_\Omega \partial_t H(x,u^+)u^+dx - (2^*-2)\int_\Omega |u^+|^{2^*}dx\right)\\
&\quad \left(2\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \lambda\int_\Omega \partial_\theta H(x,u^-)u^-dx - (2^*-2)\int_\Omega |u^-|^{2^*}dx\right)\\
&\quad -4\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^2, \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

em que $H(x,t)$ foi definido na Observação 2.1. Por (2.1), segue que

$$\int_\Omega \partial_t H(x,u^+)u^+dx > 0 \quad \text{e} \quad \int_\Omega \partial_\theta H(x,u^-)u^-dx > 0. \qquad (2.16)$$

Além disso, notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}}dxdy < 0. \qquad (2.17)$$

Usando a propriedade distributiva em (2.15), a partir de (2.16) e (2.17), deduzimos que

$$\det J_{(1,1)}\Psi_u > 4\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^2 - 4\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^2 = 0.$$

$\square$

Agora, provemos que todo minimizador do funcional I_λ sobre $\mathcal{M}_\lambda$ é um ponto crítico do funcional I_λ.

Proposição 2.2. *Se existe $u \in \mathcal{M}_\lambda$ tal que $I_\lambda(u) = c_{\mathcal{M}_\lambda}$, então $I'_\lambda(u) = 0$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{M}_\lambda$ tal que $I_\lambda(u) = c_{\mathcal{M}_\lambda}$. Suponhamos, por contradição, que $I'_\lambda(u) \neq 0$. Então, existe $v \in H^s_0(\Omega)$ (que, por densidade, pode ser tomada em $C^\infty_c(\Omega)$) tal que $\langle I'_\lambda(u), v\rangle < -1$, e pela continuidade de I'_λ, existe $\tau_0 > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$\langle I'_\lambda(tu^+ + \theta u^- + \tau v), v\rangle < -1, \qquad (2.18)$$

sempre que $(t,\theta) \in \overline{B}((1,1),\tau_0)$ e $|\tau| \leq \tau_0$. Agora, pelo Lema 2.3, $(1,1)$ é o único par tal que $\Psi_u(1,1) = (0,0)$. Então,

$$\Psi_u(t,\theta) = \left(\left\langle I'_\lambda(tu^+ + \theta u^-), tu^+\right\rangle, \left\langle I'_\lambda(tu^+ + \theta u^-), \theta u^-\right\rangle\right) \neq (0,0), \qquad (2.19)$$

para todo $(t,\theta) \in \partial D$, onde $D = B((1,1),\tau_0)$. Consideremos $h(\tau,t,\theta) = tu^+ + \theta u^- + \tau v$ que satisfaz $h^\pm \neq 0$ se $(t,\theta) \in \overline{D}$ e $0 \leq \tau \leq \tau_1$ com $0 < \tau_1 < \tau_0$ suficientemente pequeno. Também consideremos a homotopia $H : [0,\tau_1] \times \overline{D} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$H_\tau(t,\theta) := \left(\langle I'_\lambda(h(\tau,t,\theta)), h^+(\tau,t,\theta)\rangle, \langle I'_\lambda(h(\tau,t,\theta)), h^-(\tau,t,\theta)\rangle\right).$$

Note que $H_0 = \Psi_u$ e por (2.19), $\inf_{\partial D} |H_0| > 0$. Além disso, por continuidade uniforme, obtemos $\inf_{\partial D} |H_\tau| > 0$, para todo $0 \leq \tau \leq \tau_1$ com τ_1 suficientemente pequeno. Assim, pelo Lema 2.6, segue que

$$\deg(\Psi_u, D, (0,0)) = \operatorname{sgn} \det J_{(1,1)} \Psi_u = 1,$$

sendo $\deg(\Psi_u, D, (0,0))$ o grau topológico de Brouwer da tripla $(\Psi_u, D, (0,0))$. Pela invariância por homotopia, obtemos

$$\deg(H_{\tau_1}, D, (0,0)) = \deg(H_0, D, (0,0)) = 1.$$

Portanto, existe $(t_1, \theta_1) \in D$ tal que $H_{\tau_1}(t_1, \theta_1) = (0,0)$, isto é, $h(\tau_1, t_1, \theta_1) \in \mathcal{M}_\lambda$. Aplicando (2.18) e o Lema 2.3, temos que

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{M}_\lambda} \leq I_\lambda(h(\tau_1, t_1, \theta_1)) &= I_\lambda(t_1 u^+ + \theta_1 u^-) + \int_0^{\tau_1} \langle I'_\lambda(t_1 u^+ + \theta_1 u^- + tv), v \rangle dt \\ &\leq I_\lambda(t_1 u^+ + \theta_1 u^-) - \tau_1 \\ &\leq I_\lambda(u) - \tau_1 = c_{\mathcal{M}_\lambda} - \tau_1 \end{aligned}$$

que é uma contradição. Portanto, $I'_\lambda(u) = 0$. □

2.3 Prova do Teorema 2.1

Por definição de $c_{\mathcal{M}_\lambda}$, existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_\lambda$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} I_\lambda(u_n) = c_{\mathcal{M}_\lambda}. \tag{2.20}$$

Pelo Lema 2.5 e pela limitação de $\{I_\lambda(u_n)\}$, existem $C_1, C_2 > 0$ tal que

$$C_1 \|u_n\|^2 \leq I_\lambda(u_n) \leq C_2.$$

Assim, $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $H_0^s(\Omega)$. Então, passando a uma subsequência, ainda denotada por $\{u_n\}$, existe $u \in H_0^s(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^s(\Omega)$. Pelo Lema A.7, segue que $u_n^\pm \rightharpoonup u^\pm$ em $H_0^s(\Omega)$. Desde que a imersão $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ é compacta para todo $r \in [1, 2^*)$, temos que

$$\begin{aligned} &u_n^\pm \to u^\pm \text{ em } L^r(\Omega), \\ &u_n^\pm(x) \to u^\pm(x) \text{ q. t. p. } x \in \Omega, \\ &|u_n^\pm| \leq g, \text{ para algum } g \in L^r(\Omega). \end{aligned}$$

Consideremos a constante $c_\infty = \frac{s}{N} S^{\frac{N}{2s}}$, em que S é a constante definida em (1.3) com

$p = 2$ e $\alpha = 0$. Pela Proposição 2.1, existe $\lambda_* > 0$ tal que

$$c_{\mathcal{M}_\lambda} < c_\infty, \tag{2.21}$$

para todo $\lambda \geq \lambda_*$.

Fixemos $\lambda \geq \lambda_*$. A partir do Lema 2.3, obtemos

$$I_\lambda(tu_n^+ + \theta u_n^-) \leq I_\lambda(u_n), \tag{2.22}$$

para todo $t \geq 0$ e todo $\theta \geq 0$.

Agora, pelo Lema 2.1, segue que

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} I_\lambda(tu_n^+ + \theta u_n^-) &= \frac{t^2}{2}\lim_{n\to\infty}\|u_n^+\|^2 + \frac{\theta^2}{2}\lim_{n\to\infty}\|u_n^-\|^2 \\
&\quad + \liminf_{n\to\infty}\left(-2t\theta\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{u_n^+(x)u_n^-(y)}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right) \\
&\quad - \frac{t^{2^*}}{2^*}\lim_{n\to\infty}|u_n^+|_{2^*}^{2^*} - \frac{\theta^{2^*}}{2^*}\lim_{n\to\infty}|u_n^-|_{2^*}^{2^*} \\
&\quad - \lambda\int_\Omega F(x, tu^+ + \theta u^-)dx.
\end{aligned}$$

Usando o Lema A.6, o Lema de Fatou's (ver Lema A.3) e o Lema de Brezis-Lieb (ver Lema A.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} I_\lambda(tu_n^+ + \theta u_n^-) &\geq \frac{t^2}{2}\lim_{n\to\infty}\|u_n^+ - u^+\|^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\lim_{n\to\infty}|u_n^+ - u^+|_{2^*}^{2^*} \\
&\quad + \frac{\theta^2}{2}\lim_{n\to\infty}\|u_n^- - u^-\|^2 - \frac{\theta^{2^*}}{2^*}\lim_{n\to\infty}|u_n^- - u^-|_{2^*}^{2^*} \\
&\quad + \frac{t^2}{2}\|u^+\|^2 + \frac{\theta^2}{2}\|u^-\|^2 - 2t\theta\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\
&\quad - \frac{t^{2^*}}{2^*}|u^+|_{2^*}^{2^*} - \frac{\theta^{2^*}}{2^*}|u^-|_{2^*}^{2^*} - \lambda\int_\Omega F(x, tu^+ + \theta u^-)dx \\
&= L^+\frac{t^2}{2} - l^+\frac{t^{2^*}}{2^*} + L^-\frac{\theta^2}{2} - l^-\frac{\theta^{2^*}}{2^*} + I_\lambda(tu^+ + \theta u^-),
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
L^\pm &= \lim_{n\to\infty}\|u_n^\pm - u^\pm\|^2, \\
l^\pm &= \lim_{n\to\infty}|u_n^\pm - u^\pm|_{2^*}^{2^*}.
\end{aligned}$$

Portanto, por (2.20) e (2.22), segue que

$$I_\lambda(tu^+ + \theta u^-) + L^+\frac{t^2}{2} - l^+\frac{t^{2^*}}{2^*} + L^-\frac{\theta^2}{2} - l^-\frac{\theta^{2^*}}{2^*} \leq c_{\mathcal{M}_\lambda}, \tag{2.23}$$

para todo $t \geq 0$ e todo $\theta \geq 0$.

Afirmação 1: $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$.

Mostraremos apenas que $u^+ \neq 0$, porque mostrar que $u^- \neq 0$ é similar. Suponhamos, por contradição, que $u^+ = 0$. Assim, precisamos analisar dois casos:

Caso 1: $l^+ = 0$.

Neste caso, se $L^+ = 0$, $u_n^+ \to u^+$ em $H_0^s(\Omega)$, e pelo Lema 2.4, obtemos $\|u^+\| > 0$, que contradiz a nossa suposição. Se $L^+ > 0$, por (2.23), obtemos $L^+ \frac{t^2}{2} \leq c_{\mathcal{M}_\lambda}$, para todo $t \geq 0$, que é falso. De qualquer modo, temos uma contradição.

Case 2: $l^+ > 0$.

Para este caso, relembrando a definição de S em (1.3), temos que

$$c_\infty = \frac{s}{N} S^{\frac{N}{2s}} \leq \frac{s}{N} \left(\frac{L^+}{(l^+)^{\frac{2}{2^*}}} \right)^{\frac{N}{2s}}. \tag{2.24}$$

Por outro lado,

$$\frac{s}{N} \left(\frac{L^+}{(l^+)^{\frac{2}{2^*}}} \right)^{\frac{N}{2s}} = \max_{t \geq 0} \left(L^+ \frac{t^2}{2} - l^+ \frac{t^{2^*}}{2^*} \right). \tag{2.25}$$

Assim, por (2.21) e (2.23), obtemos

$$c_\infty \leq \max_{t \geq 0} \left(L^+ \frac{t^2}{2} - l^+ \frac{t^{2^*}}{2^*} \right) < c_\infty,$$

que é uma contradição. Assim, concluímos que $u^+ \neq 0$.

Afirmação 2: $l^+ = l^- = 0$.

Como na Afirmação 1, mostraremos apenas que $l^+ = 0$, porque podemos mostrar que $l^- = 0$ similarmente. Suponhamos, por contradição, que $l^+ > 0$ e consideremos os seguintes casos:

Caso 1: $l^- > 0$.

Sejam $t_{\max}$ e $\theta_{\max}$ tais que

$$\max_{t \geq 0} \left(L^+ \frac{t^2}{2} - l^+ \frac{t^{2^*}}{2^*} \right) = L^+ \frac{t_{\max}^2}{2} - l^+ \frac{t_{\max}^{2^*}}{2^*},$$

$$\max_{\theta \geq 0} \left(L^- \frac{\theta^2}{2} - l^- \frac{\theta^{2^*}}{2^*} \right) = L^- \frac{\theta_{\max}^2}{2} - l^- \frac{\theta_{\max}^{2^*}}{2^*}.$$

Desde que $[0, t_{\max}] \times [0, \theta_{\max}]$ é compacto e ψ_u é contínua, existe $(t_u, \theta_u) \in [0, t_{\max}] \times [0, \theta_{\max}]$ tal que

$$\psi_u(t_u, \theta_u) = \max_{(t,\theta) \in [0, t_{\max}] \times [0, \theta_{\max}]} \psi_u(t, \theta).$$

Mostraremos que $(t_u, \theta_u) \in (0, t_{\max}) \times (0, \theta_{\max})$, isto é, mostraremos que $(t_u, \theta_u) \notin \partial([0, t_{\max}] \times [0, \theta_{\max}])$. A partir do item (ii) do Lema 2.2 e de (2.2), para $0 < \theta \ll 1$, obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned}\psi_u(t,0)=I_\lambda(tu^+) &< I_\lambda(tu^+)+I_\lambda(\theta u^-)\\ &\leq I_\lambda(tu^+ + \theta u^-)=\psi_u(t,\theta),\end{aligned}$$

para todo $t\in[0,t_{\max}]$. Portanto, existe $\theta_0\in[0,\theta_{\max}]$ tal que

$$\psi_u(t,0)<\psi_u(t,\theta_0),$$

para todo $t\in[0,t_{\max}]$. Assim, qualquer ponto da forma $(t,0)$, com $0\leq t\leq t_{\max}$, não é ponto de máximo para ψ_u em $[0,t_{\max}]\times[0,\theta_{\max}]$. Portanto, $(t_u,\theta_u)\notin[0,t_{\max}]\times\{0\}$. Analogamente, mostra-se $(t_u,\theta_u)\notin\{0\}\times[0,\theta_{\max}]$.

Agora, através de uma análise simples, obtemos

$$L^+\frac{t^2}{2}-l^+\frac{t^{2^*}}{2^*}>0,\ \forall t\in(0,t_{\max}], \tag{2.26}$$

$$L^-\frac{\theta^2}{2}-l^-\frac{\theta^{2^*}}{2^*}>0,\ \forall \theta\in(0,\theta_{\max}]. \tag{2.27}$$

Assim, usando a definição de c_∞, (2.26) e (2.27), segue que

$$c_\infty\leq L^+\frac{t^2}{2}-l^+\frac{t^{2^*}}{2^*}+L^-\frac{\theta_{\max}^2}{2}-l^-\frac{\theta_{\max}^{2^*}}{2^*},\ \forall t\in[0,t_{\max}],$$

$$c_\infty\leq L^+\frac{t_{\max}^2}{2}-l^+\frac{t_{\max}^{2^*}}{2^*}+L^-\frac{\theta^2}{2}-l^-\frac{\theta^{2^*}}{2^*},\ \forall \theta\in[0,\theta_{\max}].$$

Por (2.21) e (2.23), segue que

$$\psi_u(t,\theta_{\max})\leq 0,\ \forall t\in[0,t_{\max}],$$

$$\psi_u(t_{\max},\theta)\leq 0,\ \forall \theta\in[0,\theta_{\max}].$$

Portanto, $(t_u,\theta_u)\notin([0,t_{\max}]\times\{\theta_{\max}\})\cup(\{t_{\max}\}\times[0,\theta_{\max}])$. Assim, concluímos que $(t_u,\theta_u)\notin\partial([0,t_{\max}]\times[0,\theta_{\max}])$.

Sendo (t_u,θ_u) um ponto de máximo interior de ψ_u no retângulo $[0,t_{\max}]\times[0,\theta_{\max}]$, segue que (t_u,θ_u) é um ponto crítico de ψ_u. Assim, $\Psi_u(t_u,\theta_u)=(0,0)$, isto é, $t_uu^+ + \theta_uu^-\in\mathcal{M}_\lambda$, com $t_u\in(0,t_{\max})$ e $\theta_u\in(0,\theta_{\max})$.

Portanto, por (2.23), (2.26) e (2.27), obtemos

$$\begin{aligned}c_{\mathcal{M}_\lambda} &\geq L^+\frac{(t_u)^2}{2}-l^+\frac{(t_u)^{2^*}}{2^*}+L^-\frac{(\theta_u)^2}{2}-l^-\frac{(\theta_u)^{2^*}}{2^*}+I_\lambda(t_uu^+ + \theta_uu^-)\\ &> I_\lambda(t_uu^+ + \theta_uu^-)\geq c_{\mathcal{M}_\lambda},\end{aligned}$$

que é uma contradição.

Caso 2: $l^- = 0$.

Neste caso, podemos maximizar ψ_u em $[0, t_{\max}] \times [0, +\infty)$. De fato, usando o item (i) do Lema 2.2, é possível mostrar que existe $\theta_0 \in [0, +\infty)$ tal que $I_\lambda(tu^+ + \theta u^-) \leq 0$, para todo $(t, \theta) \in [0, t_{\max}] \times [\theta_0, +\infty)$. Portanto, existe $(t_u, \theta_u) \in [0, t_{\max}] \times [0, +\infty)$ tal que

$$\psi_u(t_u, \theta_u) = \max_{(t,\theta) \in [0,t_{\max}] \times [0,+\infty)} \psi_u(t, \theta).$$

Precisamos garantir que $(t_u, \theta_u) \in (0, t_{\max}) \times (0, +\infty)$. Desde que, para $0 < \theta \ll 1$, tem-se

$$\psi_u(t, 0) < \psi_u(t, \theta), \ \forall t \in [0, t_{\max}],$$

segue que $(t_u, \theta_u) \notin [0, t_{\max}] \times \{0\}$. Também, para $0 < t \ll 1$, tem-se

$$\psi_u(0, \theta) < \psi_u(t, \theta), \ \forall \theta \in [0, +\infty).$$

Então, $(t_u, \theta_u) \notin \{0\} \times [0, +\infty)$. Além disso, note que

$$c_\infty \leq L^+ \frac{t_{\max}^2}{2} - l^+ \frac{t_{\max}^{2^*}}{2^*} + L^- \frac{\theta^2}{2}, \ \forall \theta \in [0, +\infty),$$

que implica

$$\psi_u(t_{\max}, \theta) \leq 0, \ \forall \theta \in [0, +\infty).$$

Assim, $(t_u, \theta_u) \notin \{t_{\max}\} \times [0, +\infty)$. Portanto, $(t_u, \theta_u) \in (0, t_{\max}) \times (0, +\infty)$. Consequentemente, (t_u, θ_u) é um ponto de máximo interior para ψ_u em $[0, t_{\max}] \times [0, +\infty)$. Logo, $\Psi_u(t_u, \theta_u) = (0, 0)$, isto é, $t_u u^+ + \theta_u u^- \in \mathcal{M}_\lambda$.

Portanto, por (2.23) e (2.26), obtemos

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{M}_\lambda} &\geq L^+ \frac{(t_u)^2}{2} - l^+ \frac{(t_u)^{2^*}}{2^*} + L^- \frac{(\theta_u)^2}{2} + I_\lambda(t_u u^+ + \theta_u u^-) \\ &> I_\lambda(t_u u^+ + \theta_u u^-) \geq c_{\mathcal{M}_\lambda}, \end{aligned}$$

que é uma contradição. Logo, $l^+ = 0$, finalizando a prova da afirmação 2.

Afirmação 3. O ínfimo $c_{\mathcal{M}_\lambda}$ é atingido.

Desde que $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$, pelo Lema 2.3, existem únicos $t_u > 0$ e $\theta_u > 0$ tais que $t_u u^+ + \theta_u u^- \in \mathcal{M}_\lambda$. Além disso, como $u_n \in \mathcal{M}_\lambda$, para todo n, novamente pelo Lema 2.3, segue que

$$I_\lambda(t_u u_n^+ + \theta_u u_n^-) \leq I_\lambda(u_n^+ + u_n^-) = I_\lambda(u_n).$$

Devido ao crescimento subcrítico de $F(x, t)$ proveniente do Lema 2.1, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema A.2) para obter

$$\int_\Omega F(x, t_u u_n^+ + \theta_u u_n^-) dx \to \int_\Omega F(x, t_u u^+ + \theta_u u^-) dx. \tag{2.28}$$

Assim, desde que $l^{\pm} = 0$ e a norma em $H_0^s(\Omega)$ é fracamente semicontínua inferiormente, usando (2.28), segue que

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{M}_\lambda} &\leq I_\lambda(t_u u^+ + \theta_u u^-) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(t_u u_n^+ + \theta_u u_n^-) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = c_{\mathcal{M}_\lambda}. \end{aligned}$$

Dessa forma, o ínfimo $c_{\mathcal{M}_\lambda}$ é atingido pela função $t_u u^+ + \theta_u u^- \in \mathcal{M}_\lambda$, concluindo a prova da Afirmação 3.

Portanto, existe $v := t_u u^+ + \theta_u u^- \in \mathcal{M}_\lambda$ tal que $I_\lambda(v) = c_{\mathcal{M}_\lambda}$. Pela Proposição 2.2, temos que $I'_\lambda(v) = 0$, isto é, v é uma solução mudando de sinal da equação (P_λ) tal que $u \in \mathcal{S}_3$. $\square$

Capítulo

3

Existência de soluções com sinal constante e mudando de sinal para uma equação de Kirchhoff fracionária com expoente crítico de Hardy

Neste capítulo, estudaremos a existência de uma solução positiva, uma negativa e outra mudando de sinal para o seguinte problema fracionário:

$$\begin{cases} M\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy\right)(-\Delta_p)^s u = \lambda f(x,u) + \frac{|u|^{r-2}u}{|x|^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, suave, com $1 < p < \infty$, $s \in (0,1)$, $0 \leq \alpha < ps < N$, $p < r \leq p_\alpha^*$ sendo $p_\alpha^* := \frac{(N-\alpha)p}{N-sp}$ o expoente crítico de Hardy-Sobolev fracionário e λ um parâmetro positivo.

Assumiremos que $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função contínua com $\overline{M}(t) := M(t)t$ continuamente diferenciável em $[0,\infty)$, e satisfaz as seguintes condições:

(M_1) M é crescente;

(M_2) existe $\gamma \in (p,r)$ tal que $\frac{M(t)}{t^{\frac{\gamma-p}{p}}}$ é decrescente em $t > 0$.

Um protótipo para M é dado pela função $M(t) = a + bt^\vartheta$, para $t \geq 0$ com $a, b \geq 0$, $a + b > 0$ e $0 < \vartheta < \frac{r-p}{p}$. Quando a função M satisfaz $M(t) \geq m_0 > 0$ para todo $t \geq 0$, o problema de Kirchhoff (P_λ) é chamado não degenerado, que em nosso modelo, ocorre sempre que $a > 0$ e $b \geq 0$. Por outro lado, se $M(0) = 0$, o problema (P_λ) é chamado degenerado que é o caso de nossa particular M quando $a = 0$ e $b > 0$.

Neste capítulo, trataremos os casos degenerado e não degenerado do Problema (P_λ), começando pelo caso degenerado.

Para o caso degenerado $M(0) = 0$, assumiremos que a não linearidade $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory tal que $\overline{f}(x,t) := f(x,t)t$ é continuamente diferenciável na variável t para q.t.p. $x \in \Omega$ e satisfaz as seguintes condições:

(f_0) $\overline{f}(x,t) > 0$, para q.t.p. $x \in \Omega$, para todo $t \neq 0$, e existe $C > 0$ tal que

$$|\partial_t \overline{f}(x,t)| \leq C(1 + |t|^{p^*-1}),$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \in \mathbb{R}$, sendo $p^* := p_0^* = \frac{Np}{N-sp}$ o expoente crítico de Sobolev fracionário;

(f_1) dados $\epsilon > 0$ e $q \in (\gamma, p^*)$, existe $C_{\epsilon,q} > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \epsilon(|t|^{\gamma-1} + |t|^{p^*-1}) + C_{\epsilon,q}|t|^{q-1},$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \in \mathbb{R}$, sendo γ dado em (M_2);

(f_2) existe $\mu \in (\gamma, r)$ tal que

$$\mu F(x,t) \leq f(x,t)t$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \in \mathbb{R}$, em que $F(x,t) := \int_0^t f(x,\tau)d\tau$;

(f_3) $\dfrac{f(x,t)}{|t|^{\gamma-2}t}$ é crescente em $|t|$, para q.t.p. $x \in \Omega$.

Exemplo 3.1. *Considere $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dada por $M(t) = \arctan\left(t^{\vartheta}\right)$, com $0 < \vartheta < \frac{r-p}{p}$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,t) = a(x)|t|^{q-2}t$, com $p(\vartheta + 1) < q < p^*$, e $a \in L^\infty(\Omega)$ tal que $a(x) > 0$ para q.t.p. $x \in \Omega$. Então, M é uma função de Kirchhoff degenerada que satisfaz (M_1)-(M_2) e f é uma função Carathéodory que satisfaz (f_0)-(f_3), com $\overline{f}(x,t)t = a(x)|t|^q$ continuamente diferenciável em t.*

Nossos principais resultados no caso degenerado são os seguintes:

Teorema 3.1. *Suponhamos que $M(0) = 0$, M satisfaz (M_1)-(M_2) e f satisfaz (f_0)-(f_3). Se $p < r < p_\alpha^*$, para todo $\lambda > 0$, vale a seguinte afirmação:*

$(\mathcal{C}_\lambda)$ o problema (P_λ) tem uma solução positiva $u_{\lambda,1} \in \mathcal{S}_{\lambda,1}$ e uma negativa $u_{\lambda,2} \in \mathcal{S}_{\lambda,2}$ tais que uma delas pertence a $\mathcal{S}_\lambda$. Além disso, o problema (P_λ) tem uma solução mudando de sinal $u_{\lambda,3} \in \mathcal{S}_{\lambda,3}$ tal que

$$I_\lambda(u_{\lambda,3}) > I_\lambda(u_{\lambda,1}) + I_\lambda(u_{\lambda,2}),$$

em que I_λ é o funcional energia associado a este problema.

Teorema 3.2. *Suponhamos que $M(0) = 0$, M satisfaz (M_1)-(M_2) e f satisfaz (f_0)-(f_3). Se $r = p^*_\alpha$, então existe $\lambda^* > 0$ tal que a afirmação $(\mathcal{C}_\lambda)$ é válida, para todo $\lambda \geq \lambda^*$.*

Note que se u é uma solução não trivial do Problema (P_λ) de energia mínima (em $\mathcal{S}_\lambda$) e w é qualquer solução que muda de sinal deste problema, pela conclusão (C_λ), temos que

$$I_\lambda(w) > 2I_\lambda(u).$$

Esta propriedade foi denominada *duplicação de energia* por Weth em [78].

No caso não degenerado, além da hipótese (M_1), assumiremos que M satisfaz:

(M_0) $M(0) = m_0 > 0$,

que juntas providenciam uma limitação inferior para M, $M(t) \geq m_0$, para todo $t \geq 0$.

A hipótese (M_2), neste caso, poderá ser retirada se fizermos um truncamento adequado em M, desde que, de alguma forma, pudermos garantir que as soluções obtidas para o problema truncado seja ainda solução do problema original. Isso proporcionará uma ampliação da classe de funções M não degeneradas a ser considerada.

A fim de abordar esse caso, assumiremos que a não linearidade $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory tal que $\overline{f}(x,t) = f(x,t)t$ é continuamente diferenciável em t, para q.t.p. $x \in \Omega$. Além disso, assumiremos que f satisfaz (f_0) bem como as seguintes condições:

(F_1) dados $\epsilon > 0$ e $q \in (p, p^*)$, existe $C_{\epsilon,q} > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \epsilon(|t|^{p-1} + |t|^{p^*-1}) + C_{\epsilon,q}|t|^{q-1},$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \in \mathbb{R}$;

(F_2) existe $\mu \in (p, r)$ tal que $\frac{f(x,t)}{|t|^{\mu-2}t}$ é crescente em $|t| \neq 0$, para q.t.p. $x \in \Omega$.

Comparando com as hipóteses sobre f no caso degenerado, podemos perceber que (F_1) substitui (f_1) e a condição (F_2) substitui ambas (f_2) e (f_3).

Exemplo 3.2. *Um exemplo de uma função de Kirchhoff não degenerada M satisfazendo (M_0)-(M_2) e de uma função f que não é ímpar e satisfaz (f_0), (F_1) e (F_2) são, respectivamente, $M(t) = m_0 + \log(1 + |t|^\vartheta)$, $m_0 > 0$, $0 < \vartheta < \frac{q-p}{p}$ e*

$$f(t) = q\log(1+t^+)(t^+)^{q-1} + \frac{|t^-|^{q-1}t^-}{1+|t^-|},\ p < q < p^*.$$

Nossos principais resultados relativos ao problema não degenerado são os seguintes:

Teorema 3.3. *Suponhamos que M satisfaz (M_0)-(M_2) e que f satisfaz (f_0), (F_1), (f_2) e (f_3). Se $p < r < p^*_\alpha$, então a afirmação $(\mathcal{C}_\lambda)$ é válida para todo $\lambda > 0$.*

Teorema 3.4. *Suponhamos que M satisfaz (M_0) e (M_1) e que f satisfaz (f_0), (F_1) e (F_2). Se $p < r < p_\alpha^*$, então existe $\lambda^* > 0$ tal que a afirmação $(\mathcal{C}_\lambda)$ é válida para todo $\lambda \geq \lambda^*$.*

Teorema 3.5. *Suponhamos que M satisfaz (M_0) e (M_1) e que f satisfaz (f_0), (F_1) e (F_2). Se $r = p_\alpha^*$, então existe $\lambda^{**} > 0$ tal que a afirmação $(\mathcal{C}_\lambda)$ é válida para todo $\lambda \geq \lambda^{**}$.*

3.1 Formulação variacional

Associado ao Problema (P_λ), temos o funcional $I_\lambda : W_0^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) := \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx - \int_\Omega \frac{|u|^r}{|x|^\alpha}dx,$$

sendo $\widehat{M}(t) := \int_0^t M(\tau)d\tau$ e $F(x,t) := \int_0^t f(x,\tau)d\tau$. Se f satisfaz uma das condições de crescimento (f_1) ou (F_1), usando argumentos clássicos, podemos concluir que I_λ está bem definido e $I_\lambda \in C^1(W_0^{s,p}(\Omega), \mathbb{R})$, cuja derivada é dada por

$$\langle I_\lambda(u), v\rangle = M(\|u\|^p)\langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle - \lambda \int_\Omega f(x,u)vdx - \int_\Omega \frac{|u|^{r-2}uv}{|x|^\alpha}dx.$$

Assim, todo ponto crítico de I_λ é solução fraca do Problema (P_λ).

Além disso, podemos considerar os seguintes conjuntos de Nehari associados ao funcional I_λ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_\lambda &:= \{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\} : \langle I'_\lambda(u), u\rangle = 0\};\\
\mathcal{N}_{\lambda,1} &:= \{u \in \mathcal{N}_\lambda : u^- = 0\};\\
\mathcal{N}_{\lambda,2} &:= \{u \in \mathcal{N}_\lambda : u^+ = 0\};\\
\mathcal{M}_\lambda &:= \{u \in W_0^{s,p}(\Omega) : \langle I'_\lambda(u), u^\pm\rangle = 0, u^\pm \neq 0\}.
\end{aligned}$$

O conjunto $\mathcal{N}_\lambda$ contém todas as soluções não triviais, $\mathcal{N}_{\lambda,1}$ as positivas, $\mathcal{N}_{\lambda,2}$ as negativas e $\mathcal{M}_\lambda$ as que mudam de sinal.

No que segue, sempre que for necessário enfatizar a dependência de r, usaremos a notação $I_{\lambda,r}$ para o funcional energia e para designar os conjuntos de Nehari associados a este funcional, usaremos $\mathcal{N}_{\lambda,r}$, $\mathcal{N}_{\lambda,1,r}$, $\mathcal{N}_{\lambda,2,r}$ e $\mathcal{M}_{\lambda,r}$.

Os métodos usados neste capítulo para obter soluções com sinal constante e mudando de sinal para o Problema (P_λ) serão descritos a seguir.

Soluções com sinal constante:

Para abordarmos a existência de soluções com sinal constante para o Problema (P_λ), consideraremos os seguintes funcionais:

$$I_\lambda^\pm(u) := \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \lambda \int_\Omega F(x,u^\pm)dx - \frac{1}{r}\int_\Omega \frac{|u^\pm|^r}{|x|^\alpha}dx,$$

os quais são de classe C^1. Assim, se u é ponto crítico de I_λ^+, tomando u^- como função teste, obtemos

$$M(\|u\|^p)\|u^-\|^p \leq M(\|u\|^p)\langle(-\Delta_p)^s u, u^-\rangle = 0.$$

Logo $u^- = 0$. Então, todo ponto crítico de I_λ^+ é uma função não negativa. De modo análogo, concluímos que todo ponto crítico de I_λ^- é uma função não positiva.

Aplicaremos uma versão mais geral do Teorema do Passo da Montanha (confira [79, Teorema 2.9]) para os funcionais I_λ, I_λ^+ e I_λ^- para provar que $c_{\mathcal{N}_\lambda}$, $c_{\mathcal{N}_{\lambda,1}}$ e $c_{\mathcal{N}_{\lambda,2}}$ são atingidos por pontos críticos de I_λ. Depois mostraremos que $c_{\mathcal{N}_\lambda} = \min\{c_{\mathcal{N}_\lambda^+}, c_{\mathcal{N}_\lambda^-}\}$.

Soluções mudando de sinal no caso subcrítico:

A estratégia principal para obtermos solução mudando de sinal para o Problema (P_λ) é provar que o ínfimo $c_{\mathcal{M}_\lambda}$ é atingido por uma função $u \in \mathcal{M}_\lambda$ e verificar que todo minimizador de I_λ em $\mathcal{M}_\lambda$ é um ponto crítico de I_λ.

Soluções mudando de sinal no caso crítico:

Nossa estratégia é usar a solução mudando de sinal obtida no caso subcrítico para produzir a solução desejada no caso crítico. Isso pode ser feito através de aproximação quasi-crítica como em [25, 76]. Em suma, consideraremos uma sequência de expoentes $\{r_n\} \subset (p, p_\alpha^*)$ tal que $r_n \to p_\alpha^*$ e uma correspondente sequência de soluções mudando de sinal de (P_λ), $\{u_n\}$. Usando o princípio de concentração de compacidade com expoentes variáveis desenvolvido em [29], provaremos que, para λ suficientemente grande, $\{u_n\}$ converge para uma solução mudando de sinal do problema (P_λ) com $r = p_\alpha^*$.

Agora, note que a partir de (M_1), obtemos a seguinte desigualdade sobre a função $\widehat{M}$:

$$\widehat{M}(t+\theta) \geq \widehat{M}(t) + \widehat{M}(\theta),\ \forall t, \theta \geq 0. \tag{3.1}$$

Então, por (1.10) e (3.1), o funcional I_λ satisfaz

$$I_\lambda(u) \geq I_\lambda(u^+) + I_\lambda(u^-),\ \ \forall u \in W_0^{s,p}(\Omega). \tag{3.2}$$

Além disso, usando (1.9), segue que

$$\langle I_\lambda'(u), u^+\rangle \geq \langle I_\lambda'(u^+), u^+\rangle \text{ e } \langle I_\lambda'(u), u^-\rangle \geq \langle I_\lambda'(u^-), u^-\rangle,\ \ \forall u \in W_0^{s,p}(\Omega) \tag{3.3}$$

As desigualdades (3.2) e (3.3) são estritas sempre que u muda de sinal.

3.2 O problema degenerado

Iniciamos esta seção apresentando alguns resultados técnicos sobre os conjuntos de Nehari definidos anteriormente, com o objetivo de obter soluções que minimizam o funcional I_λ sobre tais conjuntos.

3.2.1 Resultados técnicos para o problema degenerado

Primeiramente, descreveremos algumas propriedades que as funções M e f satisfazem em decorrência das hipóteses assumidas no caso degenerado. Aplicando (M_1) para $0 \leq t \leq 1$ e (M_2) para $t \geq 1$, deduzimos que

$$M(t) \leq M(1) + M(1)t^{\frac{\gamma-p}{p}}, \ \forall t \geq 0. \tag{3.4}$$

Por outro lado, usando (M_1) para $t \geq 1$ e (M_2) para $0 < t \leq 1$,

$$M(t) \geq M(1) \min\left\{1, t^{\frac{\gamma-p}{p}}\right\}, \ \forall t \geq 0. \tag{3.5}$$

Além disso, derivando a função $\dfrac{\overline{M}(t)}{t^{\frac{\gamma}{p}}}$ em relação a t e usando a condição (M_2), obtemos a desigualdade

$$p\overline{M}'(t)t < \gamma\overline{M}(t), \ \forall t > 0, \tag{3.6}$$

ou escrita de outra forma,

$$pM'(t)t < (\gamma - p)M(t), \ \forall t > 0. \tag{3.7}$$

Assim, por (3.7), segue que

$$\frac{1}{p}\widehat{M}(t) - \frac{1}{\gamma}M(t)t \ \text{é crescente e positiva para } t > 0. \tag{3.8}$$

Podemos também pontuar algumas propriedades de f decorrentes de nossas hipóteses. De fato, por (f_0), segue que

$$F(x,t) > 0, \tag{3.9}$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \neq 0$. Ademais, derivando a função $\dfrac{\overline{f}(x,t)}{|t|^{\gamma}}$ em relação a t, a partir de (f_3), concluímos que

$$\partial_t\overline{f}(x,t)t - \gamma\overline{f}(x,t) > 0, \tag{3.10}$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Consequentemente, tem-se que

$$\frac{1}{\gamma}f(x,t)t - F(x,t) \geq 0 \ \text{e é crescente em } t > 0, \text{ decrescente em } t < 0. \tag{3.11}$$

Pelas condições (f_1) e (f_2), temos que

$$F(x,t) \geq C_1(x)|t|^{\mu} - C_2(x), \tag{3.12}$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \in \mathbb{R}$, sendo

$$C_1(x) := F(x,1) \quad \text{e} \quad C_2(x) := \max_{t\in[0,1]} |F(x,t) - C_1(x)|t|^{\mu}|\,,$$

ambas em $L^{\infty}(\Omega)$ com $\mu > \gamma$ dado em (f_2).

Desde que nosso objetivo é obter soluções que minimizam o funcional I_λ sobre os conjuntos de Nehari $\mathcal{N}_\lambda$, $\mathcal{N}_{\lambda,1}$, $\mathcal{N}_{\lambda,2}$ e $\mathcal{M}_\lambda$, precisamos explorar algumas propriedades desses conjuntos. Para tanto, definiremos algumas funções que auxiliam na obtenção dessas propriedades.

Para cada $u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, definamos $\varphi_u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi_u(t) = I_\lambda(tu).$$

Também, para cada $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ com $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$, consideremos as funções $\psi_u : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\psi_u(t,\theta) = I_\lambda(tu^+ + \theta u^-) \tag{3.13}$$

e $\Psi_u : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$\Psi_u(t,\theta) = \left(t\frac{\partial \psi_u}{\partial t}(t,\theta), \theta\frac{\partial \psi_u}{\partial \theta}(t,\theta) \right) = (\langle I'_\lambda(tu^+ + \theta u^-), tu^+\rangle, \langle I'_\lambda(tu^+ + \theta u^-), \theta u^-\rangle), \tag{3.14}$$

que é de classe C^1, desde que $\overline{f}(x,\cdot)$ é de classe C^1, para q.t.p. $x \in \Omega$ e f satisfaz (f_0).

A partir das propriedades de M e f descritas anteriormente, temos condições de estudar a geometria do funcional I_λ. No próximo lema, veremos que o funcional I_λ possui a geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 3.1. *O funcional I_λ satisfaz as seguintes condições geométricas:*

(i) para cada $u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, temos que

$$I_\lambda(tu^+ + \theta u^-) \to -\infty, \text{ quando } |(t,\theta)| \to \infty;$$

(ii) existe $R > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) \geq R\|u\|^{\gamma} \quad \text{e} \quad \langle I'_\lambda(u), u\rangle \geq R\|u\|^{\gamma}, \tag{3.15}$$

sempre que $\|u\| \leq R$.

Demonstração. **(i)** Por (3.4) e (3.9), temos que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(tu^+ + \theta u^-) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|tu^+ + \theta u^-\|^p) - \lambda \int_\Omega F(x, tu^+ + \theta u^-)dx \\
&\quad -\frac{1}{r}\int_\Omega \frac{|tu^+ + \theta u^-|^r}{|x|^\alpha}dx \\
&\leq \frac{M(1)}{p}\|tu^+ + \theta u^-\|^p + \frac{M(1)}{\gamma}\|tu^+ + \theta u^-\|^\gamma \\
&\quad -\frac{1}{r}\int_\Omega \frac{|tu^+ + \theta u^-|^r}{|x|^\alpha}dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular da norma $\|\cdot\|$ e a desigualdade dada no Lema A.2, obtemos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(tu^+ + \theta u^-) &\leq \frac{2^{p-1}}{p}M(1)t^p\|u^+\|^p + \frac{2^{\gamma-1}}{\gamma}M(1)t^\gamma\|u^+\|^\gamma - \frac{1}{r}t^r\int_\Omega \frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx \\
&\quad +\frac{2^{p-1}}{p}M(1)\theta^p\|u^-\|^p + \frac{2^{\gamma-1}}{\gamma}M(1)\theta^\gamma\|u^-\|^\gamma - \frac{1}{r}\theta^r\int_\Omega \frac{|u^-|^r}{|x|^\alpha}dx.
\end{aligned}$$

Desde que $p < r$ e $\gamma < r$, segue que $I_\lambda(tu^+ + \theta u^-) \to -\infty$, quando $|(t,\theta)| \to \infty$.
(ii) A partir da desigualdade (3.5), da hipótese (f_1) e da continuidade da imersão $W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega, \frac{dx}{|x|^\beta})$ com $0 \leq \beta < ps$ e $q \in [1, p_\beta^*]$, existem constantes $C, C_\epsilon, C_{\epsilon,q}, C_r > 0$ tais que, para $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ com $\|u\| \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{r}\int_\Omega \frac{|u|^r}{|x|^\alpha}dx \\
&\geq \frac{M(1)}{\gamma}\|u\|^\gamma - \frac{\epsilon}{\gamma}\int_\Omega |u|^\gamma dx - \frac{\epsilon}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}dx - C_{\epsilon,q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{1}{r}\int_\Omega \frac{|u|^r}{|x|^\alpha}dx \\
&\geq \left(\frac{M(1)}{\gamma} - \epsilon C\right)\|u\|^\gamma - C_\epsilon\|u\|^{p^*} - C_{\epsilon,q}\|u\|^q - C_r\|u\|^r \\
&= \|u\|^\gamma\left[\left(\frac{M(1)}{\gamma} - \epsilon C\right) - C_\epsilon\|u\|^{p^*-\gamma} - C_{\epsilon,q}\|u\|^{q-\gamma} - C_r\|u\|^{r-\gamma}\right].
\end{aligned}$$

Seja $0 < \epsilon < 1$ suficientemente pequeno tal que $M(1)/\gamma - \epsilon C > 0$. Desde que $p^*, q, r > \gamma$, existe $R > 0$, suficientemente pequeno, tal que $I_\lambda(u) \geq R\|u\|^\gamma$, sempre que $\|u\| \leq R$. Procedendo de modo similar, podemos mostrar a mesma estimativa para $\langle I'_\lambda(u), u\rangle$. □

Estudando a função φ_u, podemos garantir que o conjunto $\mathcal{N}_\lambda$ é não vazio, como mostra o lema seguinte.

Lema 3.2. *Para cada $u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, existe único $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_\lambda$. Em particular, $\mathcal{N}_\lambda$, $\mathcal{N}_{\lambda,1}$ e $\mathcal{N}_{\lambda,2}$ são não vazios. Além disso, $I_\lambda(t_u u) > I_\lambda(tu)$, para todo $t \geq 0$, $t \neq t_u$.*

Demonstração. Fixado $u \in W_0^{s,p}(\Omega)\setminus\{0\}$, pelo Lema 3.1 e pela continuidade de φ_u, segue

que existe $t_u > 0$ tal que
$$\varphi_u(t_u) = \max_{t \geq 0} \varphi_u(t) > 0.$$
Então, $\varphi'_u(t_u) = 0$ e assim $t_u u \in \mathcal{N}_\lambda$. Por (M_2) e (f_3), deduzimos que $\frac{\varphi'_u(t)}{t^{\gamma-1}}$ é decrescente em $t > 0$. Desde que $\frac{\varphi'_u(t_u)}{(t_u)^{\gamma-1}} = 0$, segue que t_u é o único ponto em $(0, \infty)$ com a propriedade $\varphi'_u(t_u) = 0$. Por unicidade, temos que $\varphi_u(t_u) > \varphi_u(t)$, para todo $t \geq 0$ com $t \neq t_u$. $\square$

Corolário 3.1. *Para cada $u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ com $\langle I'_\lambda(u), u\rangle \leq 0$, existe único $t_u \in (0, 1]$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_\lambda$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.2, existe único $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_\lambda$. Então, $\varphi'_u(t_u) = 0$ e por hipótese $\varphi'_u(1) \leq 0$. Desde que $\frac{\varphi'_u(t)}{t^{\gamma-1}}$ é decrescente, concluímos que $t_u \in (0, 1]$. $\square$

Estudando a função ψ_u podemos provar que o conjunto $\mathcal{M}_\lambda$ é não vazio como mostra o seguinte resultado:

Lema 3.3. *Para cada $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ com $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$, existe único par $(t_u, \theta_u) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ tal que*
$$t_u u^+ + \theta_u u^- \in \mathcal{M}_\lambda.$$
Em particular, $\mathcal{M}_\lambda \neq \emptyset$. Além disso, para todo $t, \theta \geq 0$ com $(t, \theta) \neq (t_u, \theta_u)$, temos que
$$I_\lambda(tu^+ + \theta u^-) < I_\lambda(t_u u^+ + \theta_u u^-).$$

Demonstração. Primeiramente, mostraremos a existência do par (t_u, θ_u). Pelo item (i) do Lema 3.1, segue que
$$\lim_{|(t,\theta)| \to \infty} \psi_u(t, \theta) \to -\infty.$$
Este fato juntamente com a continuidade de ψ_u implicam que existe $(t_u, \theta_u) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ tal que
$$\psi_u(t_u, \theta_u) = \max_{(t,\theta) \in [0,\infty) \times [0,\infty)} I_\lambda(tu^+ + \theta u^-).$$

Agora, fixado $t \geq 0$, pelo item (ii) do Lema 3.1, segue que
$$\psi_u(t, 0) = I_\lambda(tu^+) < I_\lambda(tu^+) + I_\lambda(\theta u^-) \leq I_\lambda(tu^+ + \theta u^-) = \psi_u(t, \theta),$$
para $0 < \theta < 1$ suficientemente pequeno. Consequentemente, $(t, 0)$ não pode ser ponto de máximo de ψ_u, para qualquer $t \geq 0$. Analogamente, $(0, \theta)$ não é ponto de máximo de ψ_u, para todo $\theta \geq 0$. Desse modo, mostramos que o ponto de máximo (t_u, θ_u) é um ponto interior ao conjunto $[0, \infty) \times [0, \infty)$. Logo, (t_u, θ_u) é um ponto crítico de ψ_u com $t_u > 0$ e $\theta_u > 0$. Portanto, existe $(t_u, \theta_u) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ tal que $\Psi_u(t_u, \theta_u) = (0, 0)$, isto é, $t_u u^+ + \theta_u u^+ \in \mathcal{M}_\lambda$.

Resta mostrar a unicidade de (t_u, θ_u). Para tanto, é suficiente mostrar que se $u \in \mathcal{M}_\lambda$ e $tu^+ + \theta u^- \in \mathcal{M}_\lambda$ com $t > 0$ e $\theta > 0$, então $(t, \theta) = (1, 1)$. De fato, seja $u \in \mathcal{M}_\lambda$ tal que

$tu^+ + \theta u^- \in \mathcal{M}_\lambda$, com $t > 0$ e $\theta > 0$. Então, $\langle I'_\lambda(tu^+ + \theta u^-), tu^+\rangle = 0$ e $\langle I'_\lambda(u), u^+\rangle=0$, que correspondem, respectivamente, às igualdades

$$M(\|tu^+ + \theta u^-\|^p)\langle(-\Delta_p)^s(tu^+ + \theta u^-), tu^+\rangle = \lambda\int_\Omega f(x, tu^+)tu^+ dx + t^r\int_\Omega \frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx,$$

$$M(\|u\|^p)\left\langle(-\Delta_p)^s u, u^+\right\rangle = \lambda\int_\Omega f(x, u^+)u^+ dx + \int_\Omega \frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\theta \leq t$. Assim, a partir das decomposições (1.7) e (1.8), temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}\langle(-\Delta_p)^s(tu^+ + \theta u^-), tu^+\rangle &= t^p A^+(u) + B^+(tu^+ + \theta u^-)\\ &\leq t^p(A^+(u) + B^+(u)) = t^p\langle(-\Delta_p)^s u, u^+\rangle, \qquad (3.16)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|tu^+ + \theta u^-\|^p &= A(tu^+ + \theta u^-) + B(tu^+ + \theta u^-)\\ &\leq t^p(A(u) + B(u)) = t^p\|u\|^p. \qquad (3.17)\end{aligned}$$

Desde que M é crescente, por (3.16) e (3.17), segue que

$$\frac{M(t^p\|u\|^p)}{t^{\gamma-p}\|u\|^{\gamma-p}}\langle(-\Delta_p)^s u, u^+\rangle\|u\|^{\gamma-p} \geq \lambda\int_\Omega \frac{f(x, tu^+)}{(tu^+)^{\gamma-1}}(u^+)^\gamma dx + t^{r-\gamma}\int_\Omega \frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx. \qquad (3.18)$$

Por outro lado,

$$\frac{M(\|u\|^p)}{\|u\|^{\gamma-p}}\langle(-\Delta_p)^s u, u^+\rangle\|u\|^{\gamma-p} = \lambda\int_\Omega \frac{f(x, u^+)}{(u^+)^{\gamma-1}}(u^+)^\gamma dx + \int_\Omega \frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx. \qquad (3.19)$$

Combinando (3.18) e (3.19), obtemos

$$\begin{aligned}&\left(\frac{M(t^p\|u\|^p)}{t^{\gamma-p}\|u\|^{\gamma-p}} - \frac{M(\|u\|^p)}{\|u\|^{\gamma-p}}\right)\langle(-\Delta_p)^s u, u^+\rangle\|u\|^{\gamma-p}\\ &\qquad \geq \lambda\int_\Omega\left(\frac{f(x, tu^+)}{(tu^+)^{\gamma-1}} - \frac{f(x, u^+)}{(u^+)^{\gamma-1}}\right)(u^+)^\gamma dx + (t^{r-\gamma} - 1)\int_\Omega \frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx.\end{aligned}$$

Por (M_2), (f_3) e pela última desigualdade, segue que $0 < \theta \leq t \leq 1$. Usando o mesmo método com as equações $\langle I'_\lambda(tu^+ + \theta u^-), \theta u^-\rangle = 0$ e $\langle I'_\lambda(u), u^-\rangle = 0$, podemos concluir que $1 \leq \theta \leq t$, que implica $t = \theta = 1$, concluindo a prova da unicidade de (t_u, θ_u).

Finalmente, pela unicidade do ponto de máximo (t_u, θ_u), segue que

$$I_\lambda(tu^+ + \theta u^-) < I_\lambda(t_u u^+ + \theta_u u^-),\ \forall\,(t, \theta) \neq (t_u, \theta_u),$$

concluindo a demonstração. □

Corolário 3.2. *Para cada $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ com $u^\pm \neq 0$ e $\langle I'_\lambda(u), u^\pm\rangle \leq 0$, existe único par $(t_u, \theta_u) \in (0,1] \times (0,1]$ tal que $t_u u^+ + \theta_u u^- \in \mathcal{M}_\lambda$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.3, podemos garantir a existência e a unicidade do par $(t_u, \theta_u) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$. Procedendo como na prova desse mesmo lema, podemos garantir que $(t_u, \theta_u) \in (0,1] \times (0,1]$. □

No próximo lema, veremos algumas sentenças que garantem que os conjuntos de Nehari definidos na Seção 3.1 são fechados em $W_0^{s,p}(\Omega)$ e que I_λ é coercivo sobre $\mathcal{N}_\lambda$.

Lema 3.4. *(i) Existe $\kappa := \kappa_\lambda > 0$ tal que para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda$,*

$$\|u\| \geq \kappa$$

e para todo $w \in \mathcal{M}_\lambda$,

$$\|w^+\|, \|w^-\| \geq \kappa.$$

(ii) Para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda$,

$$I_\lambda(u) \geq \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\mu}\right) M(1) \min\{1, \|u\|^{\gamma-p}\}\|u\|^p.$$

(iii) Se $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda$ e $\{w_n\} \subset \mathcal{M}_\lambda$ são sequências limitadas, então

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{|u_n|^r}{|x|^\alpha} dx > 0 \quad \text{e} \quad \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{|w_n^\pm|^r}{|x|^\alpha} dx > 0.$$

Demonstração. **(i)** Provaremos a afirmação apenas para $\mathcal{M}_\lambda$, pois para $\mathcal{N}_\lambda$ segue de modo similar. Sabemos que para $w \in \mathcal{M}_\lambda$, tem-se $\langle I'_\lambda(w), w^\pm\rangle = 0$. Por (1.9), (3.5), (M_1), (f_1) e pela desigualdade de Hölder (confira Teorema A.1), existe $C_{\epsilon,q} > 0$ tal que para $w \in W_0^{s,p}(\Omega)$ com $\|w\| \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned} M(1)\|w^\pm\|^\gamma &\leq M(\|w^\pm\|^p)\|w^\pm\|^p \leq M(\|w\|^p)\langle(-\Delta_p)^s w, w^\pm\rangle \\ &= \lambda \int_\Omega f(x, w^\pm) w^\pm dx + \int_\Omega \frac{|w^\pm|^r}{|x|^\alpha} dx \\ &\leq \lambda\epsilon \int_\Omega (|w^\pm|^\gamma + |w^\pm|^{p^*}) dx + \lambda C_{\epsilon,q} \int_\Omega |w^\pm|^q dx \\ &\quad + \left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} dx\right)^{\frac{p_\alpha^* - r}{p_\alpha^*}} \left(\int_\Omega \frac{|w^\pm|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha} dx\right)^{\frac{r}{p_\alpha^*}}. \end{aligned}$$

Pela continuidade da imersão $W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega, \frac{dx}{|x|^\beta})$ com $0 \leq \beta < ps$ e $t \in [1, p_\beta^*]$, segue que existem constantes positivas $C, C_\epsilon, C_{\epsilon,q}$, e C_α tais que

$$M(1)\|w^\pm\|^\gamma \leq C\lambda\epsilon\|w^\pm\|^\gamma + \lambda C_\epsilon \|w^\pm\|^{p^*} + \lambda C_{\epsilon,q}\|w^\pm\|^q + (C_\alpha)^{\frac{p_\alpha^* - r}{p_\alpha^*}} C\|w^\pm\|^r.$$

Portanto,

$$(M(1) - C\lambda\epsilon)\|w^{\pm}\|^{\gamma} \leq \lambda C_{\epsilon}\|w^{\pm}\|^{p^*} + \lambda C_{\epsilon,q}\|w^{\pm}\|^{q} + (C_{\alpha})^{\frac{p_{\alpha}^*-r}{p_{\alpha}^*}} C\|w^{\pm}\|^{r}. \tag{3.20}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ de modo que $M(1) - C\lambda\epsilon > 0$, obtemos a conclusão desejada, uma vez que $q, r, p^* > \gamma$.

(ii) Dada $u \in \mathcal{N}_{\lambda}$, temos que $\langle I'_{\lambda}(u), u\rangle = 0$. Então, por (3.8), (f_2) e (3.5), desde que $\gamma < \mu < r$, segue que

$$\begin{aligned} I_{\lambda}(u) &= I_{\lambda}(u) - \frac{1}{\mu}\langle I'_{\lambda}(u), u\rangle \\ &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \frac{1}{\mu}M(\|u\|^p)\|u\|^p \\ &\quad + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{r}\right)\int_{\Omega}\frac{|u|^r}{|x|^{\alpha}}dx + \lambda\int_{\Omega}\left[\frac{1}{\mu}f(x,u)u - F(x,u)\right]dx \\ &\geq \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\mu}\right)M(\|u\|^p) \geq \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\mu}\right)M(1)\min\{1, \|u\|^{\gamma-p}\}\|u\|^p. \end{aligned}$$

(iii) Como no item (i), mostraremos a propriedade apenas para a sequência $\{w_n\} \subset \mathcal{M}_{\lambda}$, pois para $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_{\lambda}$ usa-se a mesma estratégia. Desde que $\{w_n\}$ é limitada, existe $C > 0$ tal que $\|w_n\| \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, usando o item (i) deste lema, a hipótese (f_1) com $q \in (p, r)$ e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} M(1)\kappa^{\gamma} &\leq M(1)\|w_n^{\pm}\|^{\gamma} \leq M(\|w^{\pm}\|^p)\|w^{\pm}\|^p \leq M(\|w\|^p)\langle(-\Delta_p)^s w, w^{\pm}\rangle \\ &= \lambda\int_{\Omega} f(x, w^{\pm})w^{\pm}dx + \int_{\Omega}\frac{|w^{\pm}|^r}{|x|^{\alpha}}dx \\ &\leq \lambda\epsilon\int_{\Omega}|w_n^{\pm}|^{\gamma}dx + \lambda\epsilon\int_{\Omega}|w_n^{\pm}|^{p^*}dx + \lambda C_{q,\epsilon}\int_{\Omega}|w_n^{\pm}|^{q}dx + \int_{\Omega}\frac{|w_n^{\pm}|^r}{|x|^{\alpha}}dx \\ &\leq \epsilon C_{\lambda} + C_{\lambda,q,\epsilon}\left(\left(\int_{\Omega}\frac{|w_n^{\pm}|^r}{|x|^{\alpha}}dx\right)^{\frac{q}{r}} + \int_{\Omega}\frac{|w_n^{\pm}|^r}{|x|^{\alpha}}dx\right). \end{aligned}$$

Se tomarmos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $M(1)k^{\gamma} - \epsilon C_{\lambda} > 0$, podemos concluir que

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega}\frac{|w_n^{\pm}|^r}{|x|^{\alpha}}dx > 0.$$

$\square$

Observação 3.1. *Pelos itens (i) e (ii) do Lema 3.4, segue que* $c_{\mathcal{N}_{\lambda}} > 0$, *para todo* $\lambda > 0$. *Ademais, dado* $u \in \mathcal{M}_{\lambda}$, *existem* $t_{u^+} > 0$ *e* $\theta_{u^-} > 0$ *tais que* $t_{u^+}u^+ \in \mathcal{N}_{\lambda,1}$ *e* $\theta_{u^-}u^- \in \mathcal{N}_{\lambda,2}$. *Assim,*

$$I_{\lambda}(u) \geq I_{\lambda}(t_{u^+}u^+ + \theta_{u^-}u^-) > I_{\lambda}(t_{u^+}u^+) + I_{\lambda}(\theta_{u^-}u^-) \geq c_{\mathcal{N}_{\lambda,1}} + c_{\mathcal{N}_{\lambda,2}} \geq 2c_{\mathcal{N}_{\lambda}}.$$

Logo, por definição de $c_{\mathcal{M}_\lambda}$*, temos que*

$$c_{\mathcal{M}_\lambda} \geq c_{\mathcal{N}_{\lambda,1}} + c_{\mathcal{N}_{\lambda,2}} \geq 2c_{\mathcal{N}_\lambda}. \tag{3.21}$$

Além disso, se $c_{\mathcal{M}_\lambda}$ *é atingido, então* $c_{\mathcal{M}_\lambda} > c_{\mathcal{N}_{\lambda,1}} + c_{\mathcal{N}_{\lambda,2}} \geq 2c_{\mathcal{N}_\lambda}$.

A próxima proposição descreve propriedades assintóticas dos ínfimos $c_{\mathcal{N}_\lambda}$, $c_{\mathcal{N}_{\lambda,1}}$, $c_{\mathcal{N}_{\lambda,2}}$ e $c_{\mathcal{M}_\lambda}$ quando $\lambda \to \infty$. Essa propriedade terá grande importância quando tratarmos o caso crítico, pois permitirá tornar esses níveis de energia menores do que constantes específicas, se considerarmos λ suficientemente grande.

Proposição 3.1. *As seguintes propriedades assintóticas são válidas:*

(i) Para $X_\lambda = \mathcal{N}_\lambda, \mathcal{N}_{\lambda,1}, \mathcal{N}_{\lambda,2}, \mathcal{M}_\lambda$*, temos que* c_{X_λ} *é não crescente em* $\lambda > 0$ *e*

$$\lim_{\lambda\to\infty} c_{X_\lambda} = 0.$$

(ii) Seja $\{r_n\} \subset (p, p_\alpha^*]$ *uma sequência de expoentes tal que* $r_n \to p_\alpha^*$*. Então,*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \limsup_{n\to\infty} c_{\mathcal{M}_{\lambda,r_n}} = 0.$$

Demonstração. **(i)** Primeiramente, vejamos que $c_{\mathcal{M}_\lambda}$ é não crescente. De fato, sejam $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. Para cada $\lambda > 0$, denotemos por $\psi_u^\lambda(t,\theta) := I_\lambda(tu^+ + \theta u^-)$, para $t, \theta \geq 0$. Dada $u \in \mathcal{M}_{\lambda_1}$, pelo Lema 3.3, existem $t_1, \theta_1 > 0$ tais que $t_1u^+ + \theta_1 u^- \in \mathcal{M}_{\lambda_2}$. Por (3.9), temos que $F(x, tu^+ + \theta u^-) > 0$ para q.t.p. $x \in \Omega$. Portanto, desde que $(1,1)$ é o ponto de máximo de $\psi_u^{\lambda_1}$, segue que

$$\begin{aligned} I_{\lambda_1}(u) &= \psi_u^{\lambda_1}(1,1) \geq \psi_u^{\lambda_1}(t,\theta) = \psi_u^{\lambda_2}(t,\theta) + (\lambda_2 - \lambda_1)\int_\Omega F(tu^+ + \theta u^-)dx \\ &> \psi_u^{\lambda_2}(t,\theta) \geq c_{\mathcal{M}_{\lambda_2}}, \end{aligned}$$

que implica $c_{\mathcal{M}_{\lambda_1}} \geq c_{\mathcal{M}_{\lambda_2}}$. Analogamente, usando φ_u em vez de ψ_u, obtemos a mesma conclusão para os demais c_{X_λ}.

Agora, provaremos o comportamento assintótico de c_{X_λ}. Seja $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ com $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$. Pelo Lema 3.3, para cada $\lambda > 0$, existem $t_\lambda > 0$ e $\theta_\lambda > 0$ tais que

$$t_\lambda u^+ + \theta_\lambda u^- \in \mathcal{M}_\lambda.$$

Assim, por (3.9) e (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} 0 < c_{X_\lambda} \leq c_{\mathcal{M}_\lambda} = \inf_{v\in\mathcal{M}_\lambda} I_\lambda(v) &\leq I_\lambda(t_\lambda u^+ + \theta_\lambda u^-) \\ &\leq \frac{M(1)}{p}\|t_\lambda u^+ + \theta_\lambda u^-\|^p + \frac{M(1)}{\gamma}\|t_\lambda u^+ + \theta_\lambda u^-\|^\gamma. \end{aligned}$$

Dessa forma, é suficiente mostrar que $t_\lambda \to 0$ e $\theta_\lambda \to 0$, quando $\lambda \to \infty$.

Consideremos o conjunto

$$Q_u = \{(t_\lambda, \theta_\lambda) \in [0,\infty) \times [0,\infty) : \Psi_u(t_\lambda, \theta_\lambda) = (0,0), \lambda > 0\},$$

sendo Ψ_u a aplicação definida em (3.14). Dado $(t_\lambda, \theta_\lambda) \in Q_u$, desde que $t_\lambda u^+ + \theta_\lambda u^- \in \mathcal{N}_\lambda$, pela hipótese (f_0), por (3.4) e pela desigualdade dada no Lema A.2, temos que

$$\begin{aligned} t_\lambda^r \int_\Omega \frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha} dx + \theta_\lambda^r \int_\Omega \frac{|u^-|^r}{|x|^\alpha} dx &\leq M(\|t_\lambda u^+ + \theta_\lambda u^-\|^p)\|t_\lambda u^+ + \theta_\lambda u^-\|^p \\ &\leq 2^{p-1}M(1)t_\lambda^p\|u^+\|^p + 2^{p-1}M(1)\theta_\lambda^p\|u^-\|^p \\ &\quad +2^{\gamma-1}M(1)t_\lambda^\gamma\|u^+\|^\gamma + 2^{\gamma-1}M(1)\theta_\lambda^\gamma\|u^-\|^\gamma. \end{aligned}$$

Uma vez que $r > \gamma > p$, segue que Q_u é limitado. Portanto, se $\{\lambda_n\} \subset (0,\infty)$ é tal que $\lambda_n \to \infty$, passando para uma subsequência, se necessário, ainda denotada por $\{(t_{\lambda_n}, \theta_{\lambda_n})\}$, existem $\bar{t}, \bar{\theta} \geq 0$ tais que $t_{\lambda_n} \to \bar{t}$ e $\theta_{\lambda_n} \to \bar{\theta}$.

Afirmação: $\bar{t} = \bar{\theta} = 0$.

De fato, suponhamos, por contradição, que $\bar{t} > 0$ ou $\bar{\theta} > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $t_{\lambda_n} u^+ + \theta_{\lambda_n} u^- \in \mathcal{N}_{\lambda_n}$, isto é,

$$\begin{aligned} M(\|t_{\lambda_n}u^+ + \theta_{\lambda_n}u^-\|^p)\|t_{\lambda_n}u^+ + \theta_{\lambda_n}u^-\|^p &= \lambda_n \int_\Omega f(x, t_{\lambda_n}u^+ + \theta_{\lambda_n}u^-)(t_{\lambda_n}u^+ + \theta_{\lambda_n}u^-)dx \\ &\quad + \int_\Omega \frac{|t_{\lambda_n}u^+ + \theta_{\lambda_n}u^-|^r}{|x|^\alpha} dx. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Como $t_{\lambda_n}u^+ \to \bar{t}u^+$ e $\theta_{\lambda_n}u^- \to \bar{\theta}u^-$ em $W_0^{s,p}(\Omega)$, pelo Lema A.10 e por (f_0), temos que

$$\int_\Omega f(x, t_{\lambda_n}u^+ + \theta_{\lambda_n}u^-)(t_{\lambda_n}u^+ + \theta_{\lambda_n}u^-)dx \to \int_\Omega f(x, \bar{t}u^+ + \bar{\theta}u^-)(\bar{t}u^+ + \bar{\theta}u^-)dx > 0.$$

Desde que $\lambda_n \to \infty$ e $\{t_{\lambda_n}u^+ + \theta_{\lambda_n}u^-\}$ é limitado em $W_0^{s,p}(\Omega)$, temos uma contradição com a desigualdade (3.22). Assim, $\bar{t} = \bar{\theta} = 0$. Portanto, $c_{X_{\lambda_n}} \to 0$, concluindo a prova do item (i).

(ii) Dada $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ com $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$, pelo Lema 3.3 podemos tomar $(t_{\lambda,r_n}, \theta_{\lambda,r_n}) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ tal que $t_{\lambda,r_n}u^+ + \theta_{\lambda,r_n}u^- \in \mathcal{M}_{\lambda,r_n}$ e $(t_{\lambda,p_\alpha^*}, \theta_{\lambda,p_\alpha^*}) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ tal que $t_{\lambda,p_\alpha^*}u^+ + \theta_{\lambda,p_\alpha^*}u^- \in \mathcal{M}_{\lambda,p_\alpha^*}$.

Afirmação: $\lim_{n\to\infty}(t_{\lambda,r_n}, \theta_{\lambda,r_n}) = (t_{\lambda,p_\alpha^*}, \theta_{\lambda,p_\alpha^*})$.

Escrevemos $\psi_u^{r_n}(t,\theta) := I_{\lambda,r_n}(tu^+ + \theta u^-)$ e notemos que por (3.4) e (3.12), temos que

$$\psi_u^{r_n}(t,\theta) \leq \frac{1}{p}\widehat{M}(\|tu^+ + \theta u^-\|^p) - \lambda \int_\Omega F(x, tu^+ + \theta u^-) \to -\infty,$$

quando $|(t,\theta)| \to \infty$, independentemente de n. Portanto, existe $\tilde{t}, \tilde{\theta} > 0$ tal que $(t_{\lambda,r_n}, \theta_{\lambda,r_n}) \in (0,\tilde{t}] \times (0,\tilde{\theta}]$, para todo n. Então, passando a uma subsequência, se necessário, tem-se que $(t_{\lambda,r_n}, \theta_{\lambda,r_n}) \to (\bar{t}, \overline{\theta}) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$. Desde que $\psi_u^{r_n} \to \psi_u^{p_\alpha^*}$ uniformemente sobre compactos, segue que

$$\psi_u^{r_n}(t_{\lambda,r_n}, \theta_{\lambda,r_n}) \to \psi_u^{p_\alpha^*}(\bar{t}, \overline{\theta})$$

e

$$\psi_u^{r_n}(t_{\lambda,r_n}, \theta_{\lambda,r_n}) = \sup_{(t,\theta)} \psi_u^{r_n}(t,\theta) \to \sup_{(t,\theta)} \psi_u^{p_\alpha^*}(t,\theta).$$

Assim, $\psi_u^{p_\alpha^*}(\bar{t}, \overline{\theta}) = \sup_{(t,\theta)} \psi_u^{p_\alpha^*}(t,\theta) = \psi_u^{p_\alpha^*}(t_{\lambda,p_\alpha^*}, \theta_{\lambda,p_\alpha^*})$. Pela unicidade do ponto de máximo, garantida pelo Lema 3.3, segue que $t_{\lambda,p_\alpha^*} = \bar{t}$ e $\theta_{\lambda,p_\alpha^*} = \overline{\theta}$, o que prova a afirmação.

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema A.2), obtemos

$$\int_\Omega \frac{|u^\pm|^{r_n}}{|x|^\alpha} dx \to \int_\Omega \frac{|u^\pm|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha} dx.$$

Portanto, relembrando que $\psi_u^{r_n}(t_{\lambda,r_n}, \theta_{r_n}) = I_{\lambda,r_n}(t_{\lambda,r_n}u^+ + \theta_{\lambda,r_n}u^-)$, deduzimos que, para cada $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} c_{\mathcal{M}_{\lambda,r_n}} &\leq \lim_{n\to\infty} \psi_u^{r_n}(t_{\lambda,r_n}, \theta_{\lambda,r_n}) \\ &= \psi_u^{p_\alpha^*}(t_{\lambda,p_\alpha^*}, \theta_{\lambda,p_\alpha^*}). \end{aligned}$$

Como vimos na prova do item (i), se $\lambda \to \infty$, então $t_{\lambda,p_\alpha^*} \to 0$ e $\theta_{\lambda,p_\alpha^*} \to 0$. Desde que a função $\psi_u^{p_\alpha^*}$ é contínua temos que $\psi_u^{p_\alpha^*}(t_{\lambda,p_\alpha^*}, \theta_{\lambda,p_\alpha^*}) \to 0$, se $\lambda \to \infty$. Consequentemente,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \limsup_{n\to\infty} c_{\mathcal{M}_{\lambda,r_n}} = 0.$$

□

O lema seguinte é análogo ao Lema 2.6 e essencial na prova de que todo minimizador de I_λ sobre $\mathcal{M}_\lambda$ é um ponto crítico de I_λ.

Lema 3.5. *Para cada $u \in \mathcal{M}_\lambda$, temos que $\det J_{(1,1)}\Psi_u > 0$, sendo $J_{(1,1)}\Psi_u$ a matriz Jacobiana de Ψ_u no ponto $(1,1)$.*

Demonstração. Podemos escrever

$$\Psi_u(t,\theta) := (\Psi_u^1(t,\theta), \Psi_u^2(t,\theta)),$$

com $\Psi_u^1(t,\theta) = \langle I_\lambda(tu^+ + \theta u^-), tu^+\rangle$ e $\Psi_u^2(t,\theta) = \langle I_\lambda(tu^+ + \theta u^-), \theta u^-\rangle$. Usando o Teorema do Valor Médio e o Teorema da Convergência Dominada, podemos derivar sob sinal da integral para obter

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_u^1}{\partial t}(1,1) &= pM'(\|u\|^p)(A^+(u)+B^+(u))^2 + pM(\|u\|^p)(A^+(u)+B^+(u))\\ &\quad -M(\|u\|^p)C(u) - \lambda\int_\Omega \partial_t \overline{f}(x,u^+)u^+dx - r\int_\Omega \frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_u^2}{\partial \theta}(1,1) &= pM'(\|u\|^p)(A^-(u)+B^-(u))^2 + pM(\|u\|^p)(A^-(u)+B^-(u))\\ &\quad -M(\|u\|^p)C(u) - \lambda\int_\Omega \partial_t \overline{f}(x,u^-)u^-dx - r\int_\Omega \frac{|u^-|^r}{|x|^\alpha}dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_u^1}{\partial \theta}(1,1) = \frac{\partial \Psi_u^2}{\partial t}(1,1) &= pM'(\|u\|^p)(A^+(u)+B^+(u))(A^-(u)+B^-(u))\\ &\quad +M(\|u\|^p)C(u) > 0,\end{aligned}$$

sendo

$$C(u) = 2(p-1)\int_{\Omega_+\times\Omega_-} \frac{|u^+(x)-u^-(y)|^{p-2}u^+(x)(-u^-(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy.$$

Por (3.7), segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_u^1}{\partial t}(1,1) &< \gamma M(\|u\|^p)(A^+(u)+B^+(u))\\ &\quad -pM'(\|u\|^p)(A^+(u)+B^+(u))(A^-(u)+B^-(u)) - M(\|u\|^p)C(u)\\ &\quad -\lambda\int_\Omega \partial_t \overline{f}(x,u^+)u^+dx - r\int_\Omega \frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx.\end{aligned}$$

Desde que $\langle I_\lambda'(u), u^+\rangle = 0$, usando (3.10) com $p<\gamma<r$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_u^1}{\partial t}(1,1) &< -pM'(\|u\|^p)(A^+(u)+B^+(u))(A^-(u)+B^-(u)) - M(\|u\|^p)C(u)\\ &\quad +\int_\Omega \gamma f(x,u^+)u^+ - \partial_t\overline{f}(x,u^+)u^+dx + (\gamma - r)\int_\Omega \frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx\\ &\le -pM'(\|u\|^p)(A^+(u)+B^+(u))(A^-(u)+B^-(u)) - M(\|u\|^p)C(u)\\ &= -\frac{\partial \Psi_u^1}{\partial \theta}(1,1).\end{aligned}$$

Analogamente, concluímos que

$$\frac{\partial \Psi_u^2}{\partial \theta}(1,1) < -\frac{\partial \Psi_u^1}{\partial \theta}(1,1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\det J_{(1,1)}\Psi_u &= \frac{\partial \Psi_u^1}{\partial t}(1,1)\frac{\partial \Psi_u^2}{\partial \theta}(1,1) - \frac{\partial \Psi_u^1}{\partial \theta}(1,1)\frac{\partial \Psi_u^2}{\partial t}(1,1)\\ &> \left(\frac{\partial \Psi_u^1}{\partial \theta}(1,1)\right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi_u^1}{\partial \theta}(1,1)\right)^2 = 0.\end{aligned}$$

□

Agora, a fim de utilizar ferramentas de Análise Funcional para obter convergência forte de sequências, apresentaremos a seguir alguns resultados relacionados à compacidade.

Para $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, definamos a função

$$|D^s u|^p(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dy.$$

Iniciamos com um princípio de concentração de compacidade desenvolvido em [29] que considera expoentes variáveis.

Lema 3.6 (Princípio de concentração de compacidade com expoentes variáveis)**.** *Seja $0 \leq \alpha \leq ps < N$, Ω um conjunto limitado em $\mathbb{R}^N$ contendo 0 e $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Dada uma sequência de expoentes $\{r_n\}$ com $p < r_n \leq p^*_\alpha$ tal que $r_n \to p^*_\alpha$, existem duas medidas ν, σ e um conjunto no máximo contável $\{x_j\}_{j\in\mathcal{J}} \subset \overline{\Omega}$ tal que, a menos de subsequência,*

$$|D^s u_n|^p \rightharpoonup^* \sigma, \quad \frac{|u_n|^{r_n}}{|x|^\alpha} \rightharpoonup^* \nu, \tag{3.23}$$

$$\sigma \geq |D^s u|^p + \sum_{j\in\mathcal{J}} \sigma_j \delta_{x_j}, \quad \sigma_j = \sigma(\{x_j\}), \tag{3.24}$$

$$\nu = \frac{|u|^{p^*_\alpha}}{|x|^\alpha} + \sum_{j\in\mathcal{J}} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \nu_j = \nu(\{x_j\}), \tag{3.25}$$

$$\sigma_j \geq S_\alpha \nu_j^{\frac{p}{p^*_\alpha}}, \ \ \forall j \in \mathcal{J}. \tag{3.26}$$

Além disso, se $\alpha > 0$, então $\{x_j\}_{j\in\mathcal{J}} = \{0\}$.

Demonstração. Veja [29, Lema 4.5]. □

A seguir, serão apresentados alguns resultados envolvendo convergência de sequências no espaço $W_0^{s,p}(\Omega)$. Dessa forma, precisamos elucidar alguns fatos importantes sobre convergência e fixar algumas notações.

Se $\{u_n\}$ é uma sequência tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{s,p}(\Omega)$, então $u_n^\pm \rightharpoonup u^\pm$ (veja Lema A.7). Assim, podemos aplicar o Lema 3.6 para $\{u_n\}$ e obter medidas ν, σ, bem como um conjunto de pontos $\{x_j\}_{j\in\mathcal{J}} \subset \overline{\Omega}$ satisfazendo (3.23)-(3.26). Também, aplicando o mesmo lema para $u^\pm$, obtemos correspondentes $\nu^\pm$, $\sigma^\pm$ e $\{x_j^\pm\}_{j\in\mathcal{J}^\pm}$. Com estas notações, temos o seguinte resultado:

Lema 3.7. *Sejam* $\{u_n\} \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ *e* $\{r_n\} \subset (p, p_\alpha^*)$ *sequências satisfazendo as hipóteses do Lema 3.6 tais que* $I'_{\lambda,r_n}(u_n) \to 0$. *Com as notações prévias, se* $\nu_k^\pm > 0$ *para algum* $k \in \mathcal{J}^\pm$, *temos que*

$$\nu_k^\pm \geq \min\left\{(M(1)S_\alpha)^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}}, \left(M(1)S_\alpha^{\frac{\gamma}{p}}\right)^{\frac{p_\alpha^*}{p_\alpha^*-\gamma}}\right\}.$$

Além disso, se $\nu_j > 0$ *para algum* $j \in \mathcal{J}$, *obtemos a mesma estimativa para* ν_j.

Demonstração. Fixemos $k \in \mathcal{J}^\pm$ tal que $\nu_k^\pm > 0$, $x_k^\pm \in \overline{\Omega}$ e para $\varrho > 0$ consideremos $\phi_\varrho \in C_c^\infty(B(x_k^\pm, 2\varrho))$ tal que

$$0 \leq \phi_\varrho \leq 1, \ \ \phi|_{B(x_k^\pm,\varrho)} = 1, \ \ |\nabla\phi_\varrho| \leq \frac{C}{\varrho}.$$

Desde que $\{\phi_\varrho u_n^\pm\}$ é limitada, temos que $\langle I'_{\lambda,r_n}(u_n), \phi_\varrho u_n^\pm\rangle = o_n(1)$. Assim,

$$\int_\Omega \frac{|u_n^\pm|^{r_n}}{|x|^\alpha}\phi_\varrho dx + \lambda\int_\Omega f(x,u_n^\pm)u_n^\pm\phi_\varrho dx = M(\|u_n\|^p)\langle(-\Delta_p)^s u_n, \phi_\varrho u_n^\pm\rangle + o_n(1).$$

Escrevendo explicitamente $\langle(-\Delta_p)^s u_n, \phi_\varrho u_n^\pm\rangle$, para cada n, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))(\phi_\varrho(x)u_n^\pm(x)-\phi_\varrho(y)u_n^\pm(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N}|D^s u_n^\pm|^p\phi_\varrho dx\\ &\quad -\left|\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))u_n^\pm(y)(\phi_\varrho(x)-\phi_\varrho(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right|.\end{aligned}$$

Procedendo como em [63, Lemma 3.1], obtemos

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}&\left|\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))u_n^\pm(y)(\phi_\varrho(x)-\phi_\varrho(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right|\\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N}|D^s\phi_\varrho|^p|u^\pm|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Então, desde que $\|u_n^\pm\| \to \tau_\pm \geq 0$, podemos tomar o limite em n para concluir que

$$\begin{aligned}M(\tau_\pm^p)\int_{\mathbb{R}^N}\phi_\varrho d\sigma^\pm \ &\leq\ \int_{\mathbb{R}^N}\phi_\varrho d\nu^\pm + \lambda\int_\Omega f(x,u^\pm)u^\pm\phi_\varrho dx\\ &\quad + CM(\tau_\pm^p)\left(\int_{\mathbb{R}^N}|D^s\phi_\varrho|^p|u^\pm|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Além disso, por [63, (2.14)], segue que

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}|D^s\phi_\varrho|^p|u|^p dy = 0.$$

Ainda, aplicando o Teorema da Convergência dominada, temos que se $\varrho \to 0$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi_\varrho d\sigma^\pm \to \sigma^\pm(\{x_k^\pm\}), \quad \int_{\mathbb{R}^N} \phi_\varrho d\nu^\pm \to \nu^\pm(\{x_k^\pm\}) \ \text{ e } \ \int_\Omega f(x,u^\pm)u^\pm\phi_\varrho dx \to 0.$$

Fazendo $\varrho \to 0$ em (3.27), obtemos

$$\nu_k^\pm \geq M(\tau_\pm^p)\sigma_k^\pm.$$

Desde que $|D^s u_n^\pm|^p \rightharpoonup^* \sigma^\pm$, por (3.24), temos que $\tau_\pm^p \geq \sigma_k^\pm$. Então, por (3.5), segue que

$$\nu_k^\pm \geq M(1)\min\{1,(\sigma_k^\pm)^{\frac{\gamma-p}{p}}\}\sigma_k^\pm.$$

A partir de (3.26), concluímos que

$$\nu_k^\pm \geq \min\left\{(M(1)S_\alpha)^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}}, \left(M(1)S_\alpha^{\frac{\gamma}{p}}\right)^{\frac{p_\alpha^*}{p_\alpha^*-\gamma}}\right\}.$$

Através de argumentos similares, a mesma desigualdade pode ser obtida para ν_j. $\square$

Veremos na próxima proposição que o funcional I_λ satisfaz a condição (PS) globalmente no caso subcrítico e localmente no caso crítico.

Proposição 3.2 (Condição PS). *As seguintes afirmações são verdadeiras:*
(i) para $p < r < p_\alpha^*$, I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$, para todo $c \in \mathbb{R}$;
(ii) para $r = p_\alpha^*$, I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$, para todo

$$c < \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{p_\alpha^*}\right)\min\left\{(M(1)S_\alpha)^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}}, \left(M(1)S_\alpha^{\frac{\gamma}{p}}\right)^{\frac{p_\alpha^*}{p_\alpha^*-\gamma}}\right\}.$$

Demonstração. **(i)** Seja $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)_c$ de I_λ. Então, por definição,

$$I_\lambda(u_n) = c + o_n(1) \ \text{ e } \ I'_\lambda(u_n) = o_n(1) \ \text{ em } W^{-s,p'}(\Omega).$$

Assim, por (f_2) e (3.8), desde que $\gamma < \mu < r$, obtemos

$$\begin{aligned} c + o_n(1)\|u_n\| &= I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\mu}\langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle \\ &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|^p) - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^p)\|u_n\|^p + \lambda\int_\Omega \frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{r}\right)\int_\Omega \frac{|u_n|^r}{|x|^\alpha}dx \geq \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\mu}\right)M(\|u_n\|^p)\|u_n\|^p. \end{aligned}$$

Como estamos considerando o caso degenerado $M(0) = 0$, precisamos separar o restante da demonstração em dois casos, como segue:
Case 1: $\inf_n \|u_n\| = d_\lambda > 0$.

Pela hipótese (M_1), temos que $M(\|u_n\|^p) \geq M(d_\lambda^p) > 0$ que implica na limitação de $\{u_n\}$, desde que

$$c + o_n(1)\|u_n\| \geq \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\mu}\right) M(d_\lambda^p)\|u_n\|^p.$$

Portanto, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ e pela compacidade da imersão $W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega, \frac{dx}{|x|^\beta})$ para cada $t \in [1, p_\beta^*)$ com $0 \leq \beta < ps$, obtemos

$$\begin{aligned}
&u_n \to u, \text{ in } L^t(\Omega, \tfrac{dx}{|x|^\beta}),\\
&u_n(x) \to u(x), \text{ q. t. p. } x \in \Omega,\\
&\|u_n\| \to \tau_\lambda > 0.
\end{aligned}$$

Usando a convergência fraca de $\{u_n\}$ para u e os lemas A.9, A.10, obtemos

$$\int_\Omega f(x, u_n)(u_n - u)dx \to 0 \quad \text{and} \quad \int_\Omega \frac{|u_n|^{r-2}u_n(u_n - u)}{|x|^\alpha}dx \to 0, \ n \to \infty. \tag{3.28}$$

Por outro lado, $\langle I_\lambda'(u_n), u_n - u\rangle = o_n(1)$. Assim, por (3.28), segue que

$$M(\tau_\lambda)\langle(-\Delta_p)^s u_n, u_n - u\rangle = o_n(1).$$

Desde que $M(\tau_\lambda) > 0$, concluímos que

$$\langle(-\Delta_p)^s u_n, u_n - u\rangle = o_n(1),$$

que, pelo Lema A.5, implica na convergência $\|u_n\| \to \|u\|$. Pelo Lema A.6, segue que $\{u_n\}$ converge fortemente para u.

Caso 2: $\inf_n \|u_n\| = 0$

Neste caso, temos duas possibilidades: 0 é um ponto de acumulação da sequência $\{\|u_n\|\}$ ou 0 é um ponto isolado de $\{\|u_n\|\}$. Se a primeira possibilidade ocorre, temos que $u_n \to 0$ fortemente, consequentemente, o resultado está provado. Se ocorre a segunda, existe uma subsequência $\{\|u_{n_k}\|\}$ tal que $\inf_k \|u_{n_k}\| = d_\lambda > 0$. Assim, podemos proceder como no Caso 1 para provar que $u_{n_k} \to u$.

(ii) Seja $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)_c$ de I_λ com

$$c < \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{p_\alpha^*}\right) \min\left\{(M(1)S_\alpha)^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}}, \left(M(1)S_\alpha^{\frac{\gamma}{p}}\right)^{\frac{p_\alpha^*}{p_\alpha^*-\gamma}}\right\}.$$

Como no item (i), primeiramente, trataremos do caso $\inf_n \|u_n\| = d_\lambda > 0$. Então, de maneira similar, temos que $\{u_n\}$ é limitada. Logo, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Aplicando o princípio de concentração de compacidade (veja Lema 3.6) para a sequência $\{u_n\}$ com $r_n = p_\alpha^*$, obtemos duas medidas ν, σ e um conjunto no máximo contável $\{x_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ satisfazendo (3.23)-(3.26). Suponhamos que existe $j \in \mathcal{J}$ tal que $\nu_j > 0$.

Assim, podemos aplicar (3.8), (3.11) e o Lema 3.7 para obter

$$\begin{aligned} c &= I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\gamma}\langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle + o_n(1) \\ &\geq \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{p^*_\alpha}\right)\int_\Omega \frac{|u_n|^{p^*_\alpha}}{|x|^\alpha}dx + o_n(1) \\ &\geq \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{p^*_\alpha}\right)\nu_j \geq \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{p^*_\alpha}\right)\min\left\{(M(1)S_\alpha)^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}}, \left(M(1)S_\alpha^{\frac{\gamma}{p}}\right)^{\frac{p^*_\alpha}{p^*_\alpha-\gamma}}\right\}, \end{aligned}$$

que é uma contradição. Portanto, $\mathcal{J} = \emptyset$. Consequentemente, $u_n \to u$ em $L^{p^*_\alpha}(\Omega, \frac{dx}{|x|^\alpha})$. A convergência forte $u_n \to u$ em $W^{s,p}_0(\Omega)$ pode ser obtida por argumento padrão já apresentado no item (i). Finalmente, se $\inf_n \|u_n\| = 0$, procedemos como no caso 2 do item (i). $\square$

Agora, consideremos os conjuntos

$$\Gamma_\lambda := \{g \in C([0,1], W^{s,p}_0(\Omega)) : g(0) = 0,\ I_\lambda(g(1)) < 0\},$$

$$\Gamma^\pm_\lambda := \{g \in C([0,1], W^{s,p}_0(\Omega)) : g(0) = 0,\ I^\pm_\lambda(g(1)) < 0\}$$

e os níveis minimax

$$c_\lambda := \inf_{g\in\Gamma_\lambda}\sup_{t\in[0,1]} I_\lambda(g(t)),$$

$$c^\pm_\lambda := \inf_{g\in\Gamma^\pm_\lambda}\sup_{t\in[0,1]} I^\pm_\lambda(g(t)).$$

Provaremos a seguir um resultado auxiliar sobre os níveis c_λ and $c^\pm_\lambda$, importante na demonstração da existência de soluções de sinal constante para o Problema (P_λ).

Proposição 3.3. *Existem uma sequência $\{u_n\}$ do tipo $(PS)_{c_\lambda}$ para I_λ e sequências $\{u_{n,\pm}\}$ do tipo $(PS)_{c^\pm_\lambda}$ para $I^\pm_\lambda$.*

Demonstração. A partir do Lema 3.1, temos que os funcionais I_λ e $I^\pm_\lambda$ satisfazem as condições geométricas da versão do Teorema do Passo da montanha dada pelo Teorema A.7:

- existem constantes positivas d e d' tal que $J(u) \geq d$ para todo $u \in W^{s,p}_0(\Omega)$, com $\|u\| = d'$;
- existe $e \in W^{s,p}_0(\Omega)$ com $\|e\| > d'$ tal que $J(e) < 0$.

Aplicando o Teorema A.7 para o funcional I_λ, obtemos uma sequência $\{u_n\}$ tal que

$$I_\lambda(u_n) = c_\lambda + o_n(1) \quad \text{e} \quad I'_\lambda(u_n) = o_n(1) \text{ em } W^{-s,p'}(\Omega).$$

De modo análogo, obtemos sequências $\{u_{n,\pm}\}$ tais que

$$I^\pm_\lambda(u_{n,\pm}) = c^\pm_\lambda + o_n(1), \quad (I^\pm_\lambda)'(u_{n,\pm}) = o_n(1).$$

Portanto, as sequências $\{u_n\}$, $\{u_{n,\pm}\}$ satisfazem as conclusões desta proposição. $\square$

O próximo resultado estabelece que toda solução obtida nos níveis minimax c_λ e $c_\lambda^\pm$, acima definidos, é de energia mínima com relação aos respectivos funcionais I_λ e $I_\lambda^\pm$.

Lema 3.8. *Para todo $\lambda > 0$, valem as seguintes igualdades:*

$$c_{\mathcal{N}_\lambda} = c_\lambda \quad \text{e} \quad c_{\mathcal{N}_{I_\lambda^\pm}} = c_\lambda^\pm,$$

sendo $\mathcal{N}_{I_\lambda^\pm} := \{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\} : \langle (I_\lambda^\pm)'(u), u\rangle = 0\}$ o conjunto de Nehari associado a $I_\lambda^\pm$.

Demonstração. Provaremos somente a primeira igualdade $c_{\mathcal{N}_\lambda} = c_\lambda$, pois as demais são análogas. De fato, pelo Lema 3.2, temos que $c_{\mathcal{N}_\lambda} = \tilde{c} := \inf_{u\neq 0} \max_{t\geq 0} I_\lambda(tu)$. Desde que $I(tu) < 0$ para $u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ e t suficientemente grande, temos que $c_\lambda \leq \tilde{c}$. Por outro lado, dado $g \in \Gamma_\lambda$, pelo Lema 3.1 temos que existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\langle I'(g(t_0)), g(t_0)\rangle \geq 0$, com $g(t) \neq 0$, para todo $t \in [t_0, 1]$. Como vimos na Proposição 3.2, vale que

$$I_\lambda(g(1)) - \frac{1}{\mu}\langle I_\lambda'(g(1)), g(1)\rangle \geq \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\mu}\right) M(\|g(1)\|^p)\|g(1)\|^p \geq 0.$$

Desde que $I_\lambda(g(1)) < 0$, temos que $\langle I_\lambda'(g(1)), g(1)\rangle < 0$. Portanto, existe $t_1 \in [t_0, 1)$ tal que $g(t_1) \neq 0$ e $\langle I_\lambda'(g(t_1)), g(t_1)\rangle = 0$, isto é, $g(t_1) \in \mathcal{N}_\lambda$. Logo, $c_{\mathcal{N}_\lambda} \leq c_\lambda$, que conclui a prova deste lema. $\square$

Nosso último resultado técnico desta seção mostra que todo minimizador de I_λ sobre $\mathcal{M}_\lambda$ é um ponto crítico de I_λ.

Proposição 3.4. *Se existe $u \in \mathcal{M}_\lambda$ tal que $I_\lambda(u) = c_{\mathcal{M}_\lambda}$, então $I_\lambda'(u) = 0$.*

Demonstração. A prova desta proposição, em linhas gerais, é a mesma apresentada para a Proposição 2.2 do Capítulo 2. Destacamos que, neste caso, usamos o Lema 3.5 no lugar do Lema 2.6. $\square$

3.2.2 Prova do Teorema 3.1

Existência de soluções com sinal constante:

A fim de provar a existência de uma solução positiva e de uma negativa para (P_λ), mostraremos que $c_{\mathcal{N}_{\lambda,1}}$ e $c_{\mathcal{N}_{\lambda,2}}$ são atingidos por pontos críticos de I_λ e verificaremos que um deles atinge a energia mínima $c_{\mathcal{N}_\lambda}$. De fato, pela Proposição 3.3, existem uma sequência $\{u_n\}$ do tipo $(PS)_{c_\lambda}$ para I_λ e sequências $\{u_{n,\pm}\}$ do tipo $(PS)_{c_\lambda^\pm}$ para $I_\lambda^\pm$. A partir do item (i) da Proposição 3.2, existem $u, u_\pm \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tais que, a menos de subsequência, $u_n \to u$ e $u_{n,\pm} \to u_\pm$ fortemente em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Então, u é solução não trivial de (P_λ) tal que $I_\lambda(u) = c_\lambda$, u_+ é solução positiva de (P_λ) tal que $I_\lambda(u_+) = c_\lambda^+$ e u_- é solução negativa de (P_λ) tal que $I_\lambda(u_-) = c_\lambda^-$.

Agora, pelo Lema 3.8, valem as igualdades

$$c_{\mathcal{N}_\lambda} = c_\lambda \quad \text{e} \quad c_{\mathcal{N}_{I_\lambda^\pm}} = c_\lambda^\pm.$$

Desde que $u_\pm$ é ponto crítico de I_λ, podemos garantir que $c_{\mathcal{N}_{I_\lambda^+}} = c_{\mathcal{N}_{\lambda,1}}$ e $c_{\mathcal{N}_{I_\lambda^-}} = c_{\mathcal{N}_{\lambda,2}}$. Assim, $u \in \mathcal{N}_\lambda$, $u_+ \in \mathcal{N}_{\lambda,1}$ e $u_- \in \mathcal{N}_{\lambda,2}$ com

$$I_\lambda(u) = c_{\mathcal{N}_\lambda}, \ \ I_\lambda(u_+) = c_{\mathcal{N}_{\lambda,1}} \ \ \text{e} \ \ I_\lambda(u_-) = c_{\mathcal{N}_{\lambda,2}}.$$

Portanto, $u_{\lambda,1} := u_+$ e $u_{\lambda,2} := u_-$ são soluções de (P_λ) tais que $u_{\lambda,1} \in \mathcal{S}_{\lambda,1}$ e $u_{\lambda,2} \in \mathcal{S}_{\lambda,2}$. Vejamos ainda que $u_{\lambda,1}$ ou $u_{\lambda,2}$ pertence a $\mathcal{S}_\lambda$. De fato, seja $u_0 \in \mathcal{S}_\lambda$ uma solução de mínima energia arbitrária de (P_λ). Então, $u_0 \in \mathcal{N}_\lambda$ com $I_\lambda(u_0) = c_{\mathcal{N}_\lambda}$ e $I'_\lambda(u_0) = 0$. Podemos observar que u_0 tem sinal constante, pois, caso contrário, $u_0 \in \mathcal{M}_\lambda$ e pela Observação 3.1, segue que

$$c_{\mathcal{N}_\lambda} = I_\lambda(u_0) \geq c_{\mathcal{M}_\lambda} \geq 2c_{\mathcal{N}_\lambda},$$

que é uma contradição. Portanto,

$$\min\{c_{\mathcal{N}_{\lambda,1}}, c_{\mathcal{N}_{\lambda,2}}\} \leq I_\lambda(u_0) = c_{\mathcal{N}_\lambda} \leq \min\{c_{\mathcal{N}_{\lambda,1}}, c_{\mathcal{N}_{\lambda,2}}\}.$$

Consequentemente, $c_{\mathcal{N}_\lambda} = \min\{c_{\mathcal{N}_{\lambda,1}}, c_{\mathcal{N}_{\lambda,2}}\}$. Assim, pelo menos uma das soluções $u_{\lambda,1}$ ou $u_{\lambda,2}$ pertence a $\mathcal{S}_\lambda$.

Existência de solução mudando de sinal:

Seja $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_\lambda$ uma sequência tal que

$$\lim_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = c_{\mathcal{M}_\lambda}.$$

Pelo item (ii) do Lema 3.4 e pela limitação de $\{I_\lambda(u_n)\}$, segue que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Então, a menos de subsequência, existe $u_0 \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$, e pelo Lema A.7, temos que $u_n^\pm \rightharpoonup u_0^\pm$ em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Desde que a imersão $W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega, \frac{dx}{|x|^\beta})$ é compacta, para todo $t \in [1, p_\beta^*)$ e todo $0 \leq \beta < ps$, temos que

$$\begin{aligned} &u_n^\pm \to u_0^\pm, \text{ in } L^r(\Omega, \tfrac{dx}{|x|^\beta}), \\ &u_n^\pm(x) \to u_0^\pm(x), \text{ a. e. } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Como $r < p_\alpha^*$, a partir do item (iii) do Lema 3.4, temos que

$$\int_\Omega \frac{|u_0^\pm|^r}{|x|^\alpha} dx = \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{|u_n^\pm|^r}{|x|^\alpha} dx > 0,$$

que implica $u_0^+ \neq 0$ e $u_0^- \neq 0$. Também, por (M_1), Lema de Fatou (confira Lema A.3) e

Lema A.9, segue que

$$\langle I'_\lambda(u_0), u_0^\pm\rangle \le \liminf_{n\to\infty}\langle I'_\lambda(u_n), u_n^\pm\rangle = 0.$$

Então, pelo Corolário 3.2, existe $(t_{u_0}, \theta_{u_0}) \in (0,1]\times(0,1]$ tal que $t_{u_0}u_0^+ + \theta_{u_0}u_0^- \in \mathcal{M}_\lambda$. Assim, por (3.8), (3.11) e pelo Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{M}_\lambda} \le I_\lambda(t_{u_0}u_0^+ + \theta_{u_0}u_0^-) &= I_\lambda(t_{u_0}u_0^+ + \theta_{u_0}u_0^-) - \frac{1}{\gamma}\langle I'_\lambda(t_{u_0}u_0^+ + \theta_{u_0}u_0^-), t_{u_0}u_0^+ + \theta_{u_0}u_0^-\rangle \\ &\le I_\lambda(u_0) - \frac{1}{\gamma}\langle I'_\lambda(u_0), u_0\rangle \qquad (3.29)\\ &\le \liminf_{n\to\infty}\left(I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\gamma}\langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle\right)\\ &= \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = c_{\mathcal{M}_\lambda} \end{aligned}$$

e quando $t_{u_0} < 1$ ou $\theta_{u_0} < 1$, a desigualdade (3.29) é estrita. Portanto, $t_{u_0} = \theta_{u_0} = 1$. Dessa forma, $u_0 \in \mathcal{M}_\lambda$ com $I_\lambda(u_0) = c_{\mathcal{M}_\lambda}$. Pela Proposição 3.4, segue que $I'_\lambda(u_0) = 0$. Consequentemente, $u_{\lambda,3} := u_0 \in \mathcal{S}_{\lambda,3}$ é uma solução mudando de sinal para (P_λ), e pela Observação 3.1, temos que

$$I_\lambda(u_{\lambda,3}) > I_\lambda(u_{\lambda,1}) + I_\lambda(u_{\lambda,2}).$$

□

Na demostração do nosso segundo teorema, devido à criticalidade do problema, utilizaremos uma constante específica dada por:

$$c_{\infty,1} := \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{p_\alpha^*}\right)\min\left\{(M(1)S_\alpha)^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}}, \left(M(1)S_\alpha^{\frac{\gamma}{p}}\right)^{\frac{p_\alpha^*}{p_\alpha^*-\gamma}}\right\}.$$

3.2.3 Prova do Teorema 3.2

Existência de soluções com sinal constante:

A partir do item (i) da Proposição 3.1, existe $\lambda^* > 0$ tal que para todo $\lambda \ge \lambda^*$, temos que

$$c_{\mathcal{N}_\lambda} \le c_{\mathcal{N}_{\lambda,i}} < c_{\infty,1}, \quad i = 1, 2.$$

Desde que $c_\lambda = c_{\mathcal{N}_\lambda}$, $c_\lambda^+ \le c_{\mathcal{N}_{\lambda,1}}$ e $c_\lambda^- \le c_{\mathcal{N}_{\lambda,2}}$, aplicando a Proposição 3.3 e em seguida o item (ii) da Proposição 3.2, concluímos que existem uma solução não trivial $u \in \mathcal{N}_\lambda$, uma solução positiva $u_+ \in \mathcal{N}_{\lambda,1}$ e uma solução negativa $u_- \in \mathcal{N}_{\lambda,2}$ tais que

$$I_\lambda(u) = c_{\mathcal{N}_\lambda}, \quad I_\lambda(u_+) = c_{\mathcal{N}_{\lambda,1}} \;\text{ e }\; I_\lambda(u_-) = c_{\mathcal{N}_{\lambda,2}}.$$

Como no Teorema 3.2, obtemos uma solução positiva $u_{\lambda,1} \in \mathcal{S}_{\lambda,1}$ e uma negativa $u_{\lambda,2} \in \mathcal{S}_{\lambda,2}$ tais que uma delas pertence a $\mathcal{S}_\lambda$.

Existência de solução mudando de sinal:

Seja $\{r_n\} \subset (\mu, p_\alpha^*)$ uma sequência de expoentes tal que $r_n \to p_\alpha^*$. Pela Proposição 3.1, existe $\lambda^* > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda^*$,

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,p_\alpha^*}} < c_{\infty,1} \tag{3.30}$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} c_{\mathcal{M}_{\lambda,r_n}} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,p_\alpha^*}} + c_{\infty,1}. \tag{3.31}$$

Fixemos $\lambda \geq \lambda^*$. Então, pelo Teorema 3.1 com $r = r_n$, existe uma sequência $\{u_{r_n}\} \subset \mathcal{M}_{\lambda,r_n}$ tal que $I_{\lambda,r_n}(u_{r_n}) = c_{\mathcal{M}_{\lambda,r_n}}$ e $I'_{\lambda,r_n}(u_{r_n}) = 0$. Pelo item (ii) do Lema 3.4, temos que

$$\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\mu}\right) M(1) \min\{1, \|u_{r_n}\|^{\frac{\gamma-p}{p}}\}\|u_{r_n}\|^p \leq I_{\lambda,r_n}(u_{r_n}) \leq C$$

que implica na limitação de $\{u_{r_n}\}$. Assim, a menos de subsequência, $u_{r_n} \rightharpoonup u_0 \in W_0^{s,p}(\Omega)$. A partir do Lema A.7, temos que $u_{r_n}^{\pm} \rightharpoonup u_0^{\pm}$. Então, podemos supor que

$$\begin{aligned}
&u_{r_n}^{\pm} \to u_0^{\pm}, \text{ in } L^r(\Omega),\ r \in [1, p^*)\\
&u_{r_n}^{\pm}(x) \to u_0^{\pm}(x), \text{ a. e. } x \in \Omega,\\
&\|u_{r_n}\| \to \tau_0 \geq 0.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade (3.20) com $r = r_n$, obtemos

$$\|u_{r_n}\| \geq \|u_{r_n}^{\pm}\| \geq \kappa > 0, \forall n. \tag{3.32}$$

Agora, provemos que $u_n \to u_0$ fortemente em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Aplicando o princípio de concentração de compacidade para $\{u_{r_n}\}$, obtemos medidas ν, σ e uma coleção, no máximo contável, $\{x_j\}_{j\in\mathcal{J}} \subset \overline{\Omega}$, satisfazendo (3.23)-(3.26). Aplicando o mesmo princípio para ambas $\{u_{r_n}^{\pm}\}$, obtemos correspondentes $\nu^{\pm}$, $\sigma^{\pm}$, $\{x_j^{\pm}\}_{j\in\mathcal{J}^{\pm}}$.

Desde que $I'_{\lambda,r_n}(u_{r_n}) = 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
c_{\mathcal{M}_{\lambda,r_n}} &= I_{\lambda,r_n}(u_{r_n}) - \frac{1}{\gamma}\langle I'_{\lambda,r_n}(u_{r_n}), u_{r_n}\rangle\\
&= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_{r_n}\|^p) - \frac{1}{\gamma}M(\|u_{r_n}\|^p)\|u_{r_n}\|^p\\
&\quad +\lambda \int_\Omega \frac{1}{\gamma} f(x, u_{r_n})u_{r_n} - F(x, u_{r_n})dx + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{r_n}\right)\int_\Omega \frac{|u_{r_n}|^{r_n}}{|x|^\alpha}dx.
\end{aligned}$$

Assim, por (3.8), (3.11), (3.25) e pelo Lema de Fatou temos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} c_{\mathcal{M}_{\lambda,r_n}} &\geq \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_0\|^p) - \frac{1}{\gamma}M(\|u_0\|^p)\|u_0\|^p + \lambda\int_\Omega \frac{1}{\gamma}f(x,u_0)u_0 - F(x,u_0)dx\\
&\quad + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{p_\alpha^*}\right)(\nu^+ + \nu^-)(\mathbb{R}^N).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Note que $u_0 \neq 0$. De fato, suponha que $u_0 = 0$, então $\nu_j^+ > 0$ para algum $j \in \mathcal{J}^+$ e $\nu_l^- > 0$ para algum $l \in \mathcal{J}^-$ porque, caso contrário, teríamos, por exemplo, que $\nu_j^+ = 0$ para todo $j \in \mathcal{J}^+$, e pelo Lema A.9, isso implicaria na contradição

$$\begin{aligned} 0 < M(\kappa^p)\kappa^p \leq M(\tau_0^p) \lim_{n\to\infty} \|u_{r_n}^+\|^p &\leq \lim_{n\to\infty} M(\|u_{r_n}\|^p)\langle(-\Delta_p)^s u_{r_n}, u_{r_n}^+\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \lambda \int_\Omega f(x, u_{r_n}^+)u_{r_n}^+ dx + \int_\Omega \frac{|u_{r_n}^+|^{r_n}}{|x|^\alpha} dx = 0. \end{aligned}$$

Assim, por (3.33), desde que $\nu_j > 0$ e $\nu_l > 0$, podemos aplicar o Lema 3.7 para obter

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} c_{\mathcal{M}_{\lambda,r_n}} &\geq \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{p_\alpha^*}\right)\nu_j^+ + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{p_\alpha^*}\right)\nu_l^- \\ &\geq 2c_{\infty,1} \end{aligned}$$

que, por (3.30), contradiz (3.31). Portanto, $u_0 \neq 0$. Além disso, pelos Lemas A.9, A.5 e A.8, temos que

$$\langle I'_{\lambda,p_\alpha^*}(u_0), u_0\rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle I'_{\lambda,r_n}(u_{r_n}), u_0\rangle = 0$$

e, dessa forma, pelo Corolário 3.1, existe $t_{u_0} \in (0,1]$ tal que $t_{u_0}u_0 \in \mathcal{N}_{\lambda,p_\alpha^*}$.

Agora, podemos provar que $\nu_j^+ = 0$, para todo $j \in \mathcal{J}^+$ e $\nu_j^- = 0$ para todo $j \in \mathcal{J}^-$. Supondo que isso não ocorre, por (3.33), (3.8), (3.11) e pelo Lema 3.7, temos que

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} c_{\mathcal{M}_{\lambda,r_n}} &\geq I_{\lambda,p_\alpha^*}(u_0) - \frac{1}{\gamma}\langle I'_{\lambda,p_\alpha^*}(u_0), u_0\rangle + c_{\infty,1} \\ &\geq I_{\lambda,p_\alpha^*}(t_{u_0}u_0) - \frac{1}{\gamma}\langle I'_{\lambda,p_\alpha^*}(t_{u_0}u_0), t_{u_0}u_0\rangle + c_{\infty,1} \\ &\geq I_{\lambda,p_\alpha^*}(t_{u_0}u_0) + c_{\infty,1} \\ &\geq c_{\mathcal{N}_{\lambda,p_\alpha^*}} + c_{\infty,1} \end{aligned}$$

contradizendo (3.31). Portanto, $\nu_j^+ = 0$, para todo $j \in \mathcal{J}^+$ e $\nu_j^- = 0$ para todo $j \in \mathcal{J}^-$ que implica na convergência

$$\int_\Omega \frac{|u_{r_n}^\pm|^{r_n}}{|x|^\alpha} dx \to \int_\Omega \frac{|u_0^\pm|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha} dx. \tag{3.34}$$

Esta convergência juntamente com o Lema A.8 garantem que

$$\int_\Omega \frac{|u_{r_n}|^{r_n-2}u_{r_n}(u_{r_n} - u_0)}{|x|^\alpha} dx = o_n(1).$$

Além disso, aplicando os lemas A.9 e A.10 para f, obtemos

$$\int_\Omega f(x, u_{r_n})(u_{r_n} - u_0) dx = o_n(1).$$

Consequentemente, desde que $\langle I'_{\lambda,r_n}(u_{r_n}), u_{r_n} - u_0\rangle = 0$, segue que

$$M(\tau_0^p)\langle(-\Delta_p)^s u_{r_n}, u_{r_n} - u_0\rangle = o_n(1).$$

Como $\tau_0^p \geq \kappa^p > 0$, temos que $M(\tau_0^p) \neq 0$. Logo, $\langle(-\Delta_p)^s u_{r_n}, u_{r_n} - u_0\rangle = o_n(1)$. Pelo Lema A.5, segue que

$$\|u_{r_n}\|^p \to \|u_0\|^p.$$

Então, pelo Lema A.6, concluímos que $u_{r_n} \to u_0$ em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Além disso, usando a continuidade de $P^{\pm}$ (veja Lema A.7), temos que $u_{r_n}^{\pm} \to u_0^{\pm}$ em $W_0^{s,p}(\Omega)$ e por (3.32), obtemos

$$\|u_0^{\pm}\| = \lim_{n\to\infty} \|u_{r_n}^{\pm}\| \geq \kappa > 0,$$

isto é, u_0 muda de sinal. Portanto, desde que a derivada I'_{λ,p_α^*} é contínua, pelo Lema A.8, segue que

$$\begin{aligned}
\langle I'_{\lambda,p_\alpha^*}(u_0), v\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle I'_{\lambda,p_\alpha^*}(u_{r_n}), v\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle I'_{\lambda,p_\alpha^*}(u_{r_n}) - I'_{\lambda,r_n}(u_{r_n}), v\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega \frac{|u_{r_n}|^{r_n-2}u_{r_n}}{|x|^\alpha}vdx - \int_\Omega \frac{|u_{r_n}|^{p_\alpha^*-2}u_{r_n}}{|x|^\alpha}vdx\right) = 0, \ \forall v \in W_0^{s,p}(\Omega).
\end{aligned}$$

Logo, $I'_{\lambda,p_\alpha^*}(u_0) = 0$ e $u_0 \in \mathcal{M}_{\lambda,p_\alpha^*}$.

Resta provar que u_0 tem energia mínima em $\mathcal{M}_{\lambda,p_\alpha^*}$, isto é, $I_\lambda(u_0) = c_{\mathcal{M}_{\lambda,p_\alpha^*}}$. Com efeito, dado $v \in \mathcal{M}_{\lambda,p_\alpha^*}$, pelo Lema 3.3, existem $t_n, \theta_n > 0$ tais que

$$v_n = t_n v^+ + \theta_n v^- \in \mathcal{M}_{\lambda,r_n}.$$

Então, procedendo como na prova do item (ii) da Proposição 3.1, concluímos que $(t_n, \theta_n) \to (1,1)$. Assim, desde que

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,r_n}(v_n) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|v_n\|^p) - \frac{1}{\mu}M(\|v_n\|^p) + \lambda\int_\Omega \frac{1}{\mu}f(x,v_n)v_n - F(x,v_n)dx \\
&\quad + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{r_n}\right)t_n^{r_n}\int_\Omega \frac{|v^+|^{r_n}}{|x|^\alpha}dx + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{r_n}\right)\theta_n^{r_n}\int_\Omega \frac{|v^-|^{r_n}}{|x|^\alpha}dx,
\end{aligned}$$

pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que $I_{\lambda,r_n}(v_n) \to I_{\lambda,p_\alpha^*}(v)$. Além disso, por (3.34), segue que $I_{\lambda,r_n}(u_{r_n}) \to I_{\lambda,p_\alpha^*}(u_0)$.

Note que, por construção, $I_{\lambda,r_n}(u_{r_n}) \leq I_{\lambda,r_n}(v_n)$, que implica

$$I_{\lambda,p_\alpha^*}(u_0) = \lim_{n\to\infty} I_{\lambda,r_n}(u_{r_n}) \leq \lim_{n\to\infty} I_{\lambda,r_n}(v_n) = I_{\lambda,p_\alpha^*}(v)$$

e, portanto, $I_{\lambda,p_\alpha^*}(u_0) = c_{\mathcal{M}_{\lambda,p_\alpha^*}}$.

Para concluir, considerando $u_{\lambda,3} := u_0 \in \mathcal{S}_{\lambda,3}$, obtemos a terceira solução de (P_λ) como queríamos, para todo $\lambda \geq \lambda^*$. $\square$

3.3 O problema não degenerado

Nesta seção, trataremos o problema de Kirchhoff não degenerado, aquele cuja função de Kirchhoff M satisfaz $M(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \geq 0$.

3.3.1 O problema auxiliar

Suponhamos que M é uma função de Kirchhoff tal que $\overline{M}(t) := M(t)t$ é continuamente diferenciável em $[0, \infty)$, e que M satisfaz as condições (M_0) e (M_1), mas que não, necessariamente, satisfaz a condição (M_2). Então, seguindo as ideias apresentadas em [58], podemos fazer um truncamento C^1 de modo que a nova função obtida ainda satisfaça (M_0) e (M_1) e que cumpra uma outra condição dada por

(M_2') $\frac{M(t)}{t^{\frac{\mu-p}{p}}}$ é decrescente em $t > 0$,

sendo $\mu > p$ dada em (F_2).

Desde que M satisfaz (M_0) e (M_1), existe $t_0 > 0$ tal que

$$m_0 < M(t_0) < \frac{1}{p} m_0 \mu, \tag{3.35}$$

para $\mu > p$ introduzida em (F_2).

Além disso, desde que $\overline{M}'$ é contínua em $[0, \infty)$ e $M(0) = m_0$, temos que

$$\lim_{t \to 0^+} \overline{M}'(t) = \overline{M}'(0) = m_0,$$

que implica na existência de $t_1 > 0$ tal que

$$p\overline{M}'(t) < \mu m_0 \leq \mu M(t), \quad \forall t \in [0, t_1)$$

e, portanto,

$$pM'(t)t < (\mu - p)M(t), \quad \forall t \in (0, t_1). \tag{3.36}$$

Sejam $t_2 = \min\{t_0, t_1\}$ e $a = M(t_2)$. Considere a função C^2 dada por

$$m(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, \delta] \\ \delta + \frac{2}{\pi}(t_2 - \delta) \arctan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t-\delta}{t_2-\delta}\right), & t \in [\delta, \infty), \end{cases} \tag{3.37}$$

sendo $\delta \in (0, t_2)$. Finalmente, escolhemos um truncamento para M dado pela função $M_a : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por

$$M_a(t) = M(m(t)).$$

Através de alguns cálculos, podemos inferir que

$$m'(t) > 0 \;\text{ e }\; m''(t) \leq 0, \;\; \forall t > 0, \tag{3.38}$$

que implica

$$m(t) \in (0, t_2) \;\text{ e }\; m'(t)t \leq m(t), \;\; \forall t > 0. \tag{3.39}$$

Então, por (3.36), (3.38) e (3.39), segue que M_a é continuamente diferenciável em $(0, \infty)$ e satisfaz

$$pM_a'(t)t < (\mu - p)M_a(t), \quad \forall t > 0. \tag{3.40}$$

Assim, M_a deve satisfazer (M_0), (M_1) e (M_2'). Além disso, por (3.35), temos que

$$M_a(t) \leq a < \frac{1}{p} m_0 \mu, \; \forall t \geq 0. \tag{3.41}$$

Ademais,

$$M_a(t) = M(t), \; \forall t \in [0, \delta]. \tag{3.42}$$

Pondo $\widehat{M_a}(t) := \int_0^t M_a(\tau) d\tau$, por (M_2'), segue que

$$\frac{1}{p}\widehat{M_a}(t) - \frac{1}{\mu} M_a(t)t \text{ é crescente e positiva para } t > 0. \tag{3.43}$$

A partir deste truncamento, podemos considerar o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{cases} M_a\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy\right)(-\Delta_p)^s u = \lambda f(x,u) + \frac{|u|^{r-2}u}{|x|^\alpha} & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases} \tag{$P_{\lambda,a}$}$$

e denotamos por $I_{\lambda,a}$ o funcional energia associado ao Problema $(P_{\lambda,a})$. Além disso, denotamos por

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\lambda,a} &:= \{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\} : \langle I_{\lambda,a}'(u), u \rangle = 0\}; \\ \mathcal{N}_{\lambda,a,1} &:= \{u \in \mathcal{N}_{\lambda,a} : u^- = 0\}; \\ \mathcal{N}_{\lambda,a,2} &:= \{u \in \mathcal{N}_{\lambda,a} : u^+ = 0\}; \\ \mathcal{M}_{\lambda,a} &:= \{u \in W_0^{s,p}(\Omega) : \langle I_{\lambda,a}'(u), u^\pm \rangle = 0, u^\pm \neq 0\} \end{aligned}$$

os correspondentes conjuntos de Nehari associados a $I_{\lambda,a}$.

Obtemos o seguinte resultado sobre o problema auxiliar:

Teorema 3.6. *Suponhamos que M satisfaz (M_0) e (M_1) e que f satisfaz (f_0), (F_1), (F_2). Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) se $p < q < p_\alpha^*$, temos que, para todo $\lambda > 0$,

($\mathcal{C}_{\lambda,a}$) *o problema* ($P_{\lambda,a}$) *tem três soluções,* $u_{\lambda,a,1} \in \mathcal{N}_{\lambda,a,1}$*,* $u_{\lambda,a,2} \in \mathcal{N}_{\lambda,a,2}$ *e* $u_{\lambda,a,3} \in \mathcal{M}_{\lambda,a}$ *tais que*

$$I_{\lambda,a}(u_{\lambda,a,1}) = c_{\mathcal{N}_{\lambda,a,1}}, \quad I_{\lambda,a}(u_{\lambda,a,2}) = c_{\mathcal{N}_{\lambda,a,2}}, \quad I_{\lambda,a}(u_{\lambda,a,3}) = c_{\mathcal{M}_{\lambda,a}}$$

satisfazendo $c_{\mathcal{M}_{\lambda,a}} > c_{\mathcal{N}_{\lambda,a,1}} + c_{\mathcal{N}_{\lambda,a,2}}$ *e* $c_{\mathcal{N}_{\lambda,a}} = \min\{c_{\mathcal{N}_{\lambda,a,1}}, c_{\mathcal{N}_{\lambda,a,2}}\}$.

(ii) if $q = p_\alpha^*$*, então existe* $\overline{\lambda} > 0$ *tal que* ($\mathcal{C}_{\lambda,a}$) *vale, para todo* $\lambda \geq \overline{\lambda}$.

3.3.2 Resultados técnicos para o problema não degenerado

Nesta subseção, enunciaremos alguns resultados técnicos para o funcional truncado $I_{\lambda,a}$. As provas destes resultados serão omitidas porque são similares àquelas apresentadas na subseção 3.2.1. De fato, levando em conta que $m_0 \leq M_a(t) \leq a$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é suficiente trocar (M_2) por (M_2'), (f_1) por (F_1), e as condições (f_2) e (f_3) por (F_2).

Note que se f satisfaz (F_1) e (F_2), obtemos as seguintes propriedades:

$$\partial_t \overline{f}(x,t)t - \mu f(x,t)t \geq 0,$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $t \in \mathbb{R}$ com $\mu > p$ dado em (F_2). Assim, deduzimos que

$$\frac{1}{\mu} f(x,t)t - F(x,t) \geq 0 \ \text{ e é crescente em } t > 0, \text{ decrescente em } t < 0.$$

Além disso, existem funções não negativas $C_1, C_2 \in L^\infty(\Omega)$ tais que

$$F(x,t) \geq C_1(x)|t|^\mu - C_2(x),$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e para todo $t \in \mathbb{R}$.

A partir dessas propriedades de f e das propriedades da função truncada M_a, podemos seguir as mesmas ideias usadas no caso degenerado para provar os seguintes resultados técnicos:

Lema 3.9. *O funcional* $I_{\lambda,a}$ *satisfaz as seguintes condições geométricas:*

(i) para cada $u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}$*, temos que*

$$I_{\lambda,a}(tu^+ + \theta u^-) \to -\infty, \ \text{as} \ |(t,\theta)| \to \infty;$$

(ii) existe $R > 0$ *tal que*

$$I_{\lambda,a}(u) \geq R\|u\|^p \ \text{ e } \ \langle I'_{\lambda,a}(u), u\rangle \geq R\|u\|^p.$$

Lema 3.10. *Para cada* $u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}$*, existe único* $t_u > 0$ *tal que* $t_u u \in \mathcal{N}_{\lambda,a}$*. Em* *particular, os conjuntos* $\mathcal{N}_{\lambda,a}$ *e* $\mathcal{N}_{\lambda,a,1}$ *e* $\mathcal{N}_{\lambda,a,2}$ *são não vazios. Além disso,* $I_{\lambda,a}(t_u u) > I_{\lambda,a}(tu)$*, para todo* $t \geq 0$*,* $t \neq t_u$*.*

Corolário 3.3. *Para cado* $u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ *com* $\langle I'_{\lambda,a}(u), u\rangle \leq 0$*, existe único* $t_u \in (0,1]$ *tal que* $t_u u \in \mathcal{N}_{\lambda,a}$*.*

Lema 3.11. *Para cada* $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *com* $u^+ \neq 0$ *e* $u^- \neq 0$*, existe único par* $(t_u, \theta_u) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ *tal que*

$$t_u u^+ + \theta_u u^- \in \mathcal{M}_{\lambda,a}.$$

Em particular, $\mathcal{M}_{\lambda,a} \neq \emptyset$*. Além disso, para todo* $t, \theta \geq 0$ *com* $(t,\theta) \neq (t_u, \theta_u)$*, temos que*

$$I_{\lambda,a}(tu^+ + \theta u^-) < I_{\lambda,a}(t_u u^+ + \theta_u u^-).$$

Corolário 3.4. *Para cada* $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *com* $u^\pm \neq 0$ *e* $\langle I'_{\lambda,a}(u), u^\pm\rangle \leq 0$*, existe único par* $(t_u, \theta_u) \in (0,1] \times (0,1]$ *tal que* $t_u u^+ + \theta_u u^- \in \mathcal{M}_{\lambda,a}$*.*

Lema 3.12. *(i) Existe* $\kappa := \kappa_\lambda > 0$ *tal que para todo* $u \in \mathcal{N}_{\lambda,a}$*,*

$$\|u\| \geq \kappa$$

e para todo $w \in \mathcal{M}_{\lambda,a}$*,*

$$\|w^+\|, \|w^-\| \geq \kappa;$$

(ii) Para todo $u \in \mathcal{N}_{\lambda,a}$*,*

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \left(\frac{m_0}{p} - \frac{a}{\mu}\right) \|u\|^p;$$

(iii) Se $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_{\lambda,a}$ *e* $\{w_n\} \subset \mathcal{M}_{\lambda,a}$ *são limitadas, então*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{|u_n|^r}{|x|^\alpha} dx > 0 \text{ and } \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{|w_n|^r}{|x|^\alpha} dx > 0.$$

Lema 3.13. *Para cada* $w \in \mathcal{M}_{\lambda,a}$*, temos que* $\det J_{(1,1)}\psi_{w,a} > 0$*, sendo* $J_{(1,1)}\psi_{w,a}$ *a matriz Jacobiana de* $\psi_{w,a}$ *no par* $(1,1)$*.*

Proposição 3.5. *As seguintes propriedades assintóticas são válidas:*

(i) Para $X_{\lambda,a} = \mathcal{N}_{\lambda,a}, \mathcal{N}_{\lambda,a,1}, \mathcal{N}_{\lambda,a,2}, \mathcal{M}_{\lambda,a}$*, temos que* $c_{X_{\lambda,a}}$ *é não crescente em* $\lambda > 0$ *e*

$$\lim_{\lambda\to\infty} c_{X_{\lambda,a}} = 0.$$

(ii) Seja $\{r_n\} \subset (p, p_\alpha^*]$ *tal que* $r_n \to p_\alpha^*$*. Então,*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \limsup_{n\to\infty} c_{\mathcal{M}_{\lambda,a,r_n}} = 0.$$

Lema 3.14. *Sejam* $\{u_n\} \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ *e* $\{r_n\} \subset (p, p_\alpha^*)$ *sequências satisfazendo as hipóteses do Lema 3.6 tais que* $I'_{\lambda,a,r_n}(u_n) \to 0$. *Com as notações prévias, se* $\nu_j > 0$ *para algum* $j \in \mathcal{J}$ *ou* $\nu_k^\pm > 0$ *para algum* $k \in \mathcal{J}^\pm$, *temos que*

$$\nu_j, \nu_k^\pm \geq (m_0 S_\alpha)^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}}.$$

Proposição 3.6 (Condição (PS))**.** *As seguinte afirmações são verdadeiras:*
(i) para $p < q < p_\alpha^*$, $I_{\lambda,a}$ *satisfaz* $(PS)_c$, *para todo* $c \in \mathbb{R}$;
(ii) para $q = p_\alpha^*$, $I_{\lambda,a}$ *satisfaz* $(PS)_c$, *para todo*

$$c < \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p_\alpha^*}\right)(m_0 S_\alpha)^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}}.$$

Proposição 3.7. *Existe uma sequência* $\{u_n\}$ *do tipo* $(PS)_{c_{\lambda,a}}$ *para* $I_{\lambda,a}$ *e uma sequência* $\{u_{n,\pm}\}$ *do tipo* $(PS)_{c^\pm_{\lambda,a}}$ *para* $I^\pm_{\lambda,a}$.

Na demonstração dos nossos principais resultados, relativos ao problema não degenerado, será importante definirmos o seguinte nível:

$$c_{\infty,2} := \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p_\alpha^*}\right)(m_0 S_\alpha)^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}}.$$

3.3.3 Prova do Teorema 3.6

Para demonstrar este resultado, podemos trocar os resultados técnicos demonstrados na Seção 3.2 por aqueles apresentados na Seção 3.3. No caso subcrítico, obtemos as três soluções $u_{\lambda,a,1}$, $u_{\lambda,a,2}$ e $u_{\lambda,a,3}$ para o Problema $(P_{\lambda,a})$ para todo $\lambda > 0$. No caso crítico, usando o nível $c_{\infty,2}$ no lugar de $c_{\infty,1}$, podemos garantir que existe $\overline{\lambda} > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \overline{\lambda}$, vale $(\mathcal{C}_{\lambda,a})$. □

3.3.4 Prova do Teorema 3.3

A demonstração deste teorema é similar àquela feita para o Teorema 3.1. A principal diferença neste caso é a limitação inferior de M por um valor positivo dada por (M_0) e (M_1), que possibilita a troca da hipótese (f_1) pela hipótese mais abrangente (F_1). □

3.3.5 Prova do Teorema 3.4

Pelo item (i) do Teorema 3.6, existem três soluções $u_{\lambda,a,1}$, $u_{\lambda,a,2}$ e $u_{\lambda,a,3}$ para o Problema $(P_{\lambda,a})$, para as quais vale $(\mathcal{C}_{\lambda,a})$. Por outro lado, a partir da Proposição 3.5, existe $\lambda^* > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda^*$, temos que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,a,1}}, c_{\mathcal{N}_{\lambda,a,2}}, c_{\mathcal{M}_{\lambda,a}} < \delta\left(\frac{m_0}{p} - \frac{a}{\mu}\right).$$

Pelo item (ii) do Lema 3.12 segue que $\|u_{\lambda,a,i}\|^p \leq \delta$, $i = 1, 2, 3$. Por (3.42), temos que $M_a(\|u_{\lambda,a,i}\|^p) = M(\|u_{\lambda,a,i}\|^p)$, $i = 1, 2, 3$. Portanto, para todo $\lambda \geq \lambda^*$ temos que $u_{\lambda,i} := u_{\lambda,a,i}$ é solução de (P_λ), $i = 1, 2, 3$, de modo que a afirmação $(\mathcal{C}_\lambda)$ é válida para tais soluções. $\square$

3.3.6 Prova do Teorema 3.5

Pelo item (ii) do Teorema 3.6, existe $\overline{\lambda} > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \overline{\lambda}$ o problema $(P_{\lambda,a})$ admite três soluções $u_{\lambda,a,1}$, $u_{\lambda,a,2}$ e $u_{\lambda,a,3}$ para as quais $(\mathcal{C}_{\lambda,a})$ é valida. Além disso, pela Proposição 3.5, existe $\lambda^{**} \geq \overline{\lambda}$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda^{**}$, temos que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,a,1}}, c_{\mathcal{N}_{\lambda,a,2}}, c_{\mathcal{M}_{\lambda,a}} < \delta \left(\frac{m_0}{p} - \frac{a}{\mu} \right).$$

A partir do item (ii) do Lema 3.12 segue que $\|u_{\lambda,a,i}\|^p \leq \delta$, $i = 1, 2, 3$. Consequentemente, por (3.42), segue que $M_a(\|u_{\lambda,a,i}\|^p) = M(\|u_{\lambda,a,i}\|^p)$, $i = 1, 2, 3$. Portanto, $u_{\lambda,i} := u_{\lambda,a,i}$, $i = 1, 2, 3$, são soluções de (P_λ), satisfazendo $(\mathcal{C}_\lambda)$ para todo $\lambda \geq \lambda^{**}$. $\square$

Capítulo

4

Existência de soluções com sinal constante para uma equação de Kirchhoff fracionária com pesos indefinidos e expoente crítico de Hardy

Neste capítulo, mostraremos a existência de múltiplas soluções positivas para o seguinte problema fracionário:

$$\begin{cases} M\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right)(-\Delta_p)^s u = \lambda f(x)\frac{|u|^{q-2}u}{|x|^\beta} + g(x)\frac{|u|^{r-2}u}{|x|^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \qquad (P_\lambda)$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave, $s \in (0,1)$, $0 \leq \alpha < sp < N$, $0 \leq \beta < sp$ e $1 < q < p < r \leq p_\alpha^*$, sendo $p_\alpha^* := \frac{(N-\alpha)p}{N-sp}$ o expoente crítico de Hardy-Sobolev.

A função $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é dada por $M(t) = a + bm(t)$, sendo $a > 0$, $b \geq 0$ e $m : [0,\infty) \to [0,\infty)$ uma função contínua em $[0,\infty)$ e de classe C^1 em $(0,\infty)$, satisfazendo as seguintes hipóteses:

(m_1) m é não decrescente;

(m_2) existe $p < \gamma < p_\alpha^*$ tal que $\dfrac{m'(t)}{t^{\frac{\gamma-2p}{p}}}$ é não crescente em $t > 0$.

Assumiremos que as funções $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ tem sinal indefinido e satisfazem
(f) $f \in L^\infty(\Omega)$ com $f^+ \neq 0$;
(g) $g \in L^\infty(\Omega)$ com $g^+ \neq 0$.

Exemplo 4.1. *As seguintes funções de Kirchhoff satisfazem as condições* (m_1) *e* (m_2)*:*

(i) $m(t) = t^\vartheta$, $0 < \vartheta < \frac{r-p}{p}$, $t \geq 0$;

(ii) $m(t) = \log(1+t)$, $t \geq 0$;

(iii) $m(t) = \arctan(t)$, $t \geq 0$.

Nossos resultados principais são os seguintes:

Teorema 4.1. *Suponhamos que m satisfaz (m_1)-(m_2), f e g satisfazem (f) e (g), respectivamente. Se $\gamma < r < p_\alpha^*$, existe $\lambda^* > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$, o problema (P_λ) possui pelo menos duas soluções positivas.*

Para o próximo resultado, assumiremos as seguintes hipóteses sobre as funções f e g:

$(\widehat{f})$ $f \in L^\infty(\Omega)$ e existem $\rho_0 > 0$, $\tau_0 > 0$ tais que $B(0, \rho_0) \subset \Omega$ e $f(x) \geq \tau_0$, para q.t.p. $x \in B(0, \rho_0)$;

$(\widehat{g})$ $g \in L^\infty(\Omega)$ e $g(x) = |g|_\infty > 0$, para q.t.p. $x \in B(0, \rho_0)$.

Teorema 4.2. *Suponhamos que m satisfaz (m_1)-(m_2), f e g satisfazem (f) e (g), respectivamente. Se $r = p_\alpha^*$, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) existe $\lambda^* = \lambda^*(b) > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$, o Problema (P_λ) possui pelo menos uma solução positiva;

(ii) suponhamos que f satisfaz $(\widehat{f})$, g satisfaz $(\widehat{g})$ e que as seguintes condições valham:

$$sp^2 - \beta(p-1) < N < \begin{cases} \infty, & p \geq 2 \\ \frac{sp-\beta(p-1)}{2-p}, & p < 2 \end{cases}, \quad \frac{(N-\beta)(p-1)}{N-sp} \leq q < p. \tag{4.1}$$

Então, existe $b_0 > 0$ tal que para cada $0 \leq b < b_0$, deve existir $\lambda^{**}(b) < \lambda^*(b)$ de modo que para todo $\lambda \in (0, \lambda^{**}(b))$, o Problema (P_λ) possui pelo menos duas soluções positivas.

4.1 Formulação variacional

Seja $I_\lambda : W_0^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)\frac{|u|^q}{|x|^\beta}dx - \frac{1}{r}\int_\Omega g(x)\frac{|u|^r}{|x|^\alpha}dx$$

o funcional energia associado ao problema (P_λ), sendo $\widehat{M}(t) := \int_0^t M(\tau)d\tau$. Então, $I_\lambda \in C^1(W_0^{s,p}(\Omega), \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por

$$\langle I_\lambda'(u), v\rangle = M(\|u\|^p)\langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle - \lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u|^{q-2}uv}{|x|^\beta}dx - \int_\Omega g(x)\frac{|u|^{r-2}uv}{|x|^\alpha}dx,$$

para todo $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$.

Para encontrar soluções do problema (P_λ), estudaremos os pontos críticos do funcional I_λ em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Desde que estamos interessados em soluções positivas, consideraremos um funcional auxiliar $I_\lambda^+ : W_0^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda^+(u) := \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx - \frac{1}{r}\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx$$

que é também de classe C^1, cuja derivada é dada por

$$\langle (I_\lambda^+)'(u), v\rangle = M(\|u\|^p)\langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle - \lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^{q-2}u^+v}{|x|^\beta}dx - \int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^{r-2}u^+v}{|x|^\alpha}dx.$$

Para simplificar a notação, escrevemos $J_\lambda := I_\lambda^+$. Podemos observar que se u é um ponto crítico não trivial de J_λ, então u é uma função não negativa que também é ponto crítico de I_λ. De fato, suponhamos que u é ponto crítico não trivial de J_λ. Usando u^- como função teste, obtemos

$$0 = \langle J_\lambda(u), u^-\rangle = M(\|u\|^p)\langle(-\Delta_p)u, u^-\rangle \geq a\langle(-\Delta_p)^s u^-, u^-\rangle = a\|u^-\|^p.$$

Portanto, $u^- = 0$ e assim $u = u^+ \geq 0$.

Associada ao funcional J_λ, temos a variedade de Nehari

$$\mathcal{N}_\lambda := \{u \in W_0^{s,p}(\Omega) : \langle J_\lambda'(u), u\rangle = 0, u \neq 0\}.$$

Dessa forma, $u \in \mathcal{N}_\lambda$ se, e somente se, $u^+ \neq 0$ e

$$a\|u\|^p + bm(\|u\|^p)\|u\|^p = \lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx + \int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx.$$

A variedade de Nehari $\mathcal{N}_\lambda$ está relacionada ao comportamento de funções da forma $\varphi_u : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\varphi_u(t) := J_\lambda(tu) = a\frac{t^p}{p}\|u\|^p + \frac{b}{p}\widehat{m}(t^p\|u\|^p) - \lambda\frac{t^q}{q}\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx - \frac{t^r}{r}\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx,$$

sendo $\widehat{m}(t) := \int_0^t m(\tau)d\tau$.

Essas funções são conhecidas como fibrações, as quais foram introduzidas por Drábek e Pohozaev em [39]. Podemos observar que

$$\varphi_u'(t) = at^{p-1}\|u\|^p + bm(t^p\|u\|^p)t^{p-1}\|u\|^p - \lambda t^{q-1}\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx - t^{r-1}\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx,$$

$$\begin{aligned}\varphi_u''(t) &= a(p-1)t^{p-2}\|u\|^p + b\left[pm'(t^p\|u\|^p)t^{2p-2}\|u\|^{2p} + (p-1)m(t^p\|u\|^p)t^{p-2}\|u\|^p\right]\\ &\quad -\lambda(q-1)t^{q-2}\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx - (r-1)t^{r-2}\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx.\end{aligned}$$

Desse modo, dado $u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, temos que $tu \in \mathcal{N}_\lambda$ se, e somente se, $\varphi_u'(t) = 0$. Portanto, para $u \in \mathcal{N}_\lambda$, temos que $\varphi_u'(1) = 0$. Isso nos permite escrever

$$
\begin{aligned}
\varphi_u''(1) &= a(p-1)\|u\|^p + b\left[pm'(\|u\|^p)\|u\|^{2p} + (p-1)m(\|u\|^p)\|u\|^p\right] \\
&\quad -\lambda(q-1)\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx - (r-1)\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx \\
&= a(p-q)\|u\|^p + b\left[pm'(\|u\|^p)\|u\|^{2p} + (p-q)m(\|u\|^p)\|u\|^p\right] \\
&\quad -(r-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx \qquad (4.2) \\
&= a(p-r)\|u\|^p + b\left[pm'(\|u\|^p)\|u\|^{2p} + (p-r)m(\|u\|^p)\|u\|^p\right] \\
&\quad +\lambda(r-q)\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx. \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

A partir da função φ_u'', podemos separar a variedade de Nehari em três partes correspondendo aos pontos de mínimo local, máximo local e de inflexão de φ_u, como segue

$$\mathcal{N}_\lambda^+ := \{u \in \mathcal{N}_\lambda : \varphi_u''(1) > 0\},$$

$$\mathcal{N}_\lambda^- := \{u \in \mathcal{N}_\lambda : \varphi_u''(1) < 0\},$$

$$\mathcal{N}_\lambda^0 := \{u \in \mathcal{N}_\lambda : \varphi_u''(1) = 0\}.$$

A estratégia para obtenção de solução é a minimização do funcional J_λ sobre os conjuntos $\mathcal{N}_\lambda^+$ e $\mathcal{N}_\lambda^-$.

4.2 As propriedades das fibrações

Em virtude de nossas hipóteses (m_1) e (m_2) sobre a função m, temos algumas consequências acerca de seu crescimento, que serão importantes para descrever a função φ_u. De fato, a partir de (m_1) temos que $m'(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e por (m_2) valem as seguintes desigualdades

$$m'(t) \leq m'(1)t^{\frac{\gamma-2p}{p}},\ \forall\, t \geq 1; \tag{4.4}$$

$$m'(t) \geq m'(1)t^{\frac{\gamma-2p}{p}},\ \forall\, 0 < t \leq 1. \tag{4.5}$$

Agora, considere $g(t) := m\left(t^{\frac{p}{\gamma-p}}\right)$, $t \geq 0$ e note que

$$g'(t) = \frac{p}{\gamma-p}\,\frac{m'(t^{\frac{p}{\gamma-p}})}{\left(t^{\frac{p}{\gamma-p}}\right)^{\frac{\gamma-2p}{p}}},\quad t > 0.$$

Então, por (m_2), temos que g' é não crescente. Portanto, g é côncava. Por caracterização de funções côncavas, segue que

$$g(0) \leq g(t) + g'(t)(0-t), \ \forall t > 0.$$

Desde que $g(0) \geq 0$, segue que

$$g'(t)t - g(t) \leq 0, \forall t > 0.$$

Consequentemente, $\frac{g(t)}{t}$ é não crescente em $t > 0$. Portanto, fazendo uma mudança de variáveis, concluímos que

$$\frac{m(t)}{t^{\frac{\gamma-p}{p}}} = \frac{g(t^{\frac{\gamma-p}{p}})}{t^{\frac{\gamma-p}{p}}} \ \text{ é não crescente em } \ t > 0. \tag{4.6}$$

Derivando a função $m(t)/t^{\frac{\gamma-p}{p}}$, segue que

$$pm'(t)t - (\gamma - p)m(t) \leq 0, \ \forall t > 0 \tag{4.7}$$

e, desse modo, obtemos que

$$\frac{1}{p}\widehat{m}(t) - \frac{1}{\gamma}m(t)t \ \text{ é não decrescente e não negativa para } \ t > 0. \tag{4.8}$$

Outras constatações que seguem de (4.6) são as desigualdades

$$m(t) \leq m(1)\max\{1, t^{\frac{\gamma-p}{p}}\}, \ \forall\, t \geq 0; \tag{4.9}$$

$$m(t) \geq m(1)\min\{1, t^{\frac{\gamma-p}{p}}\}, \ \forall\, t \geq 0. \tag{4.10}$$

Ainda, usando novamente (m_2), temos que se $0 < t_1 < t_2$, então

$$\begin{aligned}
pm'(t_1)t_1 - (\gamma-p)m(t_1) &= pm'(t_1)t_1 - (\gamma-p)m(t_2) + (\gamma-p)\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{m'(t)}{t^{\frac{\gamma-2p}{p}}}\right] t^{\frac{\gamma-2p}{p}}dt \\
&\geq pm'(t_1)t_1 - (\gamma-p)m(t_2) + (\gamma-p)\frac{m'(t_2)}{t_2^{\frac{\gamma-2p}{p}}}\int_{t_1}^{t_2} t^{\frac{\gamma-2p}{p}}dt \\
&= pm'(t_1)t_1 - (\gamma-p)m(t_2) + p\frac{m'(t_2)}{t_2^{\frac{\gamma-2p}{p}}}\left(t_2^{\frac{\gamma-p}{p}} - t_1^{\frac{\gamma-p}{p}}\right) \\
&\geq pm'(t_2)t_2 - (\gamma-p)m(t_2) + pm'(t_1)t_1 - p\frac{m'(t_1)}{t_1^{\frac{\gamma-2p}{p}}}t_1^{\frac{\gamma-p}{p}} \\
&= pm'(t_2)t_2 - (\gamma-p)m(t_2),
\end{aligned}$$

isto é,

$$pm'(t)t - (\gamma-p)m(t) \ \text{ é não crescente em } \ t > 0. \tag{4.11}$$

Para simplificar a notação, consideremos o conjunto $\Lambda_\Gamma := \{\lambda > 0 : \lambda < \Gamma\}$. Além disso, consideremos a seguinte constante:

$$\Gamma_1 := \frac{a(r-p)S_{q,\beta}^{\frac{q}{p}}}{(r-q)|f|_\infty}\left(\frac{a(p-q)S_{r,\alpha}^{\frac{r}{p}}}{(r-q)|g|_\infty}\right)^{\frac{p-q}{r-p}}, \tag{4.12}$$

sendo $|f|_\infty$ e $|g|_\infty$ as normas do supremo essencial de f e g em $L^\infty(\Omega)$, respectivamente. A constante Γ_1 estará presente na maioria dos resultados técnicos desse capítulo.

Começaremos provando que a função φ_u não possui pontos de inflexão, para todo $u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ e $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$.

Lema 4.1. *Se $r > \gamma$ e $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$, então $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$.*

Demonstração. (i) Suponhamos que existe $u \in \mathcal{N}_\lambda^0$. Em virtude de (4.2) e (4.3), temos que

$$\begin{cases} a(p-q)\|u\|^p + b\left[pm'(\|u\|^p)\|u\|^{2p} + (p-q)m(\|u\|^p)\|u\|^p\right] = (r-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx, \\ \\ a(r-p)\|u\|^p - b\left[pm'(\|u\|^p)\|u\|^p - (r-p)m(\|u\|^p)\right]\|u\|^p = (r-q)\lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx. \end{cases} \tag{4.13}$$

Consideremos o funcional $Q_\lambda : \mathcal{N}_\lambda \to \mathbb{R}$ definido por

$$Q_\lambda(u) := \frac{a(r-p)\|u\|^p - b\left[pm'(\|u\|^p)\|u\|^p - (r-p)m(\|u\|^p)\right]\|u\|^p}{(r-q)} - \lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx.$$

Então, $Q_\lambda(u) = 0$, para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda^0$. Agora, desde que $r > \gamma$, por (4.7), segue que

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u) &\geq a\,\frac{r-p}{r-q}\|u\|^p - \lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx \\ &\geq a\frac{r-p}{r-q}\|u\|^p - \lambda|f|_\infty S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\|u\|^q \\ &\geq \|u\|^q\left(a\frac{r-p}{r-q}\|u\|^{p-q} - \lambda|f|_\infty S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\right). \end{aligned}$$

Agora, usando a primeira equação de (4.13), desde que m e m' são não negativas e $q < p$, obtemos

$$\begin{aligned} a(p-q)\|u\|^p &\leq (r-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx \\ &\leq (r-q)|g|_\infty S_{r,\alpha}^{\frac{-r}{p}}\|u^+\|^r \\ &\leq (r-q)|g|_\infty S_{r,\alpha}^{\frac{-r}{p}}\|u\|^r. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u\| \geq \left(\frac{a(p-q)S_{r,\alpha}^{\frac{r}{p}}}{(r-q)|g|_\infty} \right)^{\frac{1}{r-p}}.$$

Consequentemente, temos que

$$Q_\lambda(u) \geq \|u\|^q \left[a\,\frac{r-p}{r-q} \left(\frac{a(p-q)S_{r,\alpha}^{\frac{r}{p}}}{(r-q)|g|_\infty} \right)^{\frac{p-q}{r-p}} - \lambda S_{q,\beta}^{\frac{-q}{p}}|f|_\infty \right].$$

Lembrando a definição da constante Γ_1 dada em (4.12), concluímos que se $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$, para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda^0$, vale que $Q_\lambda(u) > 0$, que é uma contradição. Portanto, $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$ para todo $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$. □

Desde que $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$, veremos a seguir que é possível decompor $\mathcal{N}_\lambda$ como união disjunta de dois conjuntos não vazios.

Proposição 4.1. *Se $r > \gamma$ e $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$, então $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{N}_\lambda^+ \cup \mathcal{N}_\lambda^-$ com $\mathcal{N}_\lambda^\pm \neq \emptyset$.*

Para demonstrar esta proposição, precisamos estudar precisamente o comportamento de φ_u. Para tanto, definiremos algumas funções auxiliares e provaremos alguns lemas concernentes a essas funções. Considere $\Psi_u, \Phi_u : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, dadas por

$$\Psi_u(t) := at^{p-q}\|u\|^p + bm(t^p\|u\|^p)t^{p-q}\|u\|^p - t^{r-q}\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx, \tag{4.14}$$

$$\Phi_u(t) = at^{p-r}\|u\|^p + bm(t^p\|u\|^p)t^{p-r}\|u\|^p - \lambda t^{q-r}\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx. \tag{4.15}$$

Para simplificar a notação, consideraremos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}
F^+ &:= \{u \in W_0^{s,p}(\Omega) : \textstyle\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx > 0\};\\
F^- &:= \{u \in W_0^{s,p}(\Omega) : \textstyle\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx \leq 0\};\\
G^+ &:= \{u \in W_0^{s,p}(\Omega) : \textstyle\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx > 0\};\\
G^- &:= \{u \in W_0^{s,p}(\Omega) : \textstyle\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx \leq 0\}.
\end{aligned}$$

Os dois lemas seguintes descrevem, precisamente, o comportamento de Ψ_u e de Φ_u. As propriedades de m apresentadas no início da seção terão papel importante nessa tarefa.

Lema 4.2 (Propriedades de Ψ_u)**.** *Seja $u \in G^+$. Então, Ψ_u satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) Ψ_u tem único ponto crítico em um ponto de máximo $t_{\max} = t_{\max}(u) > 0$;

(ii) Ψ_u é estritamente crescente em $(0, t_{\max})$ e estritamente decrescente em $(t_{\max}, \infty)$.

(iii) $\lim_{t\to 0^+}\Psi_u(t) = 0$ e $\lim_{t\to\infty}\Psi_u(t) = -\infty$.

Demonstração. Derivando Ψ_u, obtemos

$$\begin{aligned}\Psi_u'(t) &= a(p-q)t^{p-q-1}\|u\|^p + bpm'(t^p\|u\|^p)t^{2p-q-1}\|u\|^{2p} \\ &\quad + b(p-q)m(t^p\|u\|^p)t^{p-q-1}\|u\|^p - (r-q)t^{r-q-1}\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx.\end{aligned}$$

Seja $R_u : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$R_u(t) := a(p-q)t^{p-r}\|u\|^p + b\left[pm'(t^p\|u\|^p)t^{2p-r}\|u\|^{2p} + (p-q)m(t^p\|u\|^p)t^{p-r}\|u\|^p\right].$$

Podemos reescrever $R_u(t)$ da seguinte forma:

$$R_u(t) = a(p-q)t^{p-r}\|u\|^p + b\left[p\frac{m'(t^p\|u\|^p)}{(t^p\|u\|^p)^{\frac{r-2p}{p}}} + (p-q)\frac{m(t^p\|u\|^p)}{(t^p\|u\|^p)^{\frac{r-p}{p}}}\right]\|u\|^r.$$

Assim, a partir da hipótese (m_2) e de (4.6), desde que $r > \gamma$, concluímos que R_u é decrescente em $t > 0$.

Desde que $m(t) \geq 0$ e $m'(t) \geq 0$, para todo $t \geq 0$, segue que

$$R_u(t) \geq a(p-q)t^{p-r}.$$

e por (4.4) e (4.9), para $t \geq 1/\|u\|$, obtemos

$$0 \leq R_u(t) \leq a(p-q)t^{p-r} + bpm'(1)t^{\gamma-r}\|u\|^\gamma + b(p-q)m(1)t^{\gamma-r}\|u\|^\gamma.$$

Portanto, desde que $p < \gamma < r$, R_u tem o seguinte comportamento assintótico:

$$\lim_{t\to 0^+} R_u(t) = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} R_u(t) = 0.$$

Dessa forma, como $u \in G^+$ e R_u é decrescente, existe único $t_* > 0$ tal que

$$\begin{aligned}&R_u(t_*) = (r-q)\textstyle\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx;\\ &R_u(t) > (r-q)\textstyle\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx, \quad \forall t \in (0,t_*);\\ &R_u(t) < (r-q)\textstyle\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx, \quad \forall t \in (t_*,\infty).\end{aligned}$$

Além disso, por (4.9), para todo $t \geq 1/\|u\|$, temos que

$$\begin{aligned}\Psi_u(t) &= at^{p-q}\|u\|^p + bm(t^p\|u\|^p)t^{p-q}\|u\|^p - t^{r-q}\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx \\ &\leq at^{p-q}\|u\|^p + bm(1)t^{\gamma-q}\|u\|^\gamma - t^{r-q}\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx.\end{aligned}$$

Desde que m é contínua em 0, $u \in G^+$ e $p < \gamma < r$, Ψ_u tem o seguinte comportamento assintótico:

$$\lim_{t\to 0^+} \Psi_u(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \Psi_u(t) = -\infty.$$

Agora, note que podemos escrever Ψ_u da seguinte forma:

$$\Psi_u(t) = t^{r-q-1}\left(R_u(t) - (r-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx\right).$$

Então, pela descrição de R_u, segue que Ψ_u atinge seu único máximo em $t_{\max} = t_*$ e

$$\begin{aligned}
&\Psi_u'(t_{\max}) = 0,\\
&\Psi_u'(t) > 0,\ \forall t \in (0, t_{\max}),\\
&\Psi_u'(t) < 0,\ \forall t \in (t_{\max}, \infty).
\end{aligned}$$

Dessa forma os itens (i), (ii) e (iii) estão demonstrados. □

A Figura 4.1 exibe um esboço do gráfico da função Ψ_u, com $u \in G^+$, obtido a partir do Lema 4.2.

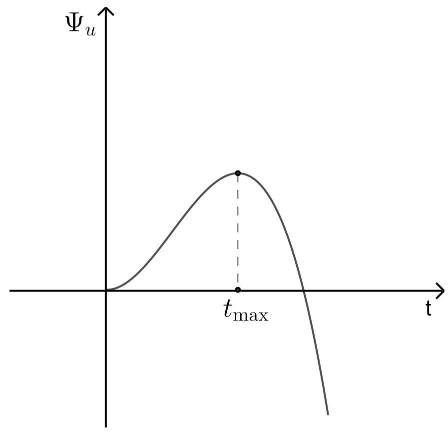

Figura 4.1: Gráfico de Ψ_u, $u \in G^+$.

Lema 4.3 (Propriedades de Φ_u)**.** *Seja $u \in F^+$. Então, Φ_u satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) Φ_u tem único ponto crítico em um ponto de máximo $\bar{t}_{\max} = \bar{t}_{\max}(u)$;

(ii) Φ_u é estritamente crescente em $(0, \bar{t}_{\max})$ e estritamente decrescente em $(\bar{t}_{\max}, \infty)$;

(iii) $\lim_{t\to 0^+} \Phi_u(t) = -\infty$ e $\lim_{t\to\infty} \Phi_u(t) = 0$.

Demonstração. Derivando Φ_u, obtemos

$$\begin{aligned}
\Phi_u'(t) &= a(p-r)t^{p-r-1}\|u\|^p + b\left[m'(t^p\|u\|^p)t^{2p-r-1}\|u\|^{2p} + (p-r)m(t^p\|u\|^p)t^{p-r-1}\|u\|^p\right]\\
&\quad -\lambda(q-r)t^{q-r-1}\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx.
\end{aligned}$$

Seja $\overline{R}_u : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\overline{R}_u(t) = a(p-r)t^{p-q}\|u\|^p + b\left[pm'(t^p\|u\|^p)t^{2p-q}\|u\|^{2p} + (p-r)m(t^p\|u\|^p)t^{p-q}\|u\|^p\right].$$

Podemos reescrever $\overline{R}_u$ do seguinte modo:

$$\overline{R}_u(t) \;=\; a(p-r)t^{p-q}\|u\|^p + b\left[pm'(t^p\|u\|^p)(t^p\|u\|^p) - (r-p)m(t^p\|u\|^p)\right]t^{p-q}\|u\|^p.$$

Usando (4.7) e (4.11), desde que $p < \gamma < r$, obtemos que R_u é decrescente.

Agora, por (4.5) e (4.7), para todo $0 < t \leq 1/\|u\|$, segue que

$$a(p-r)t^{p-q}\|u\|^p + b\left[pm'(1)t^{\gamma-q}\|u\|^{\gamma} - (p-r)m(t^p\|u\|^p)t^{p-q}\|u\|^p\right] \leq \overline{R}_u(t) \leq 0$$

e por (4.7), para todo $t > 0$, temos que

$$\overline{R}_u(t) \leq a(p-r)t^{p-q}\|u\|^p.$$

Portanto, desde que $q < p < \gamma < r$, $\overline{R}_u$ tem o seguinte comportamento assintótico:

$$\lim_{t\to 0^+} \overline{R}_u(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \overline{R}_u(t) = -\infty.$$

Dessa forma, como $u \in F^+$ e R_u é decrescente, existe único $t^* > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\overline{R}_u(t^*) = \lambda(q-r)\textstyle\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx;\\
&\overline{R}_u(t) > \lambda(q-r)\textstyle\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx,\ \forall t \in (0,t^*);\\
&\overline{R}_u(t) < \lambda(q-r)\textstyle\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx,\ \forall t \in (t^*,\infty).
\end{aligned}$$

Além disso, por (4.9), para todo $t \leq 1/\|u\|$, temos que

$$\begin{aligned}
\Phi_u(t) &= at^{p-r}\|u\|^p + bm(t^p\|u\|^p)t^{p-r}\|u\|^p - \lambda t^{q-r}\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx\\
&\leq at^{p-r}\|u\|^p + bm(1)t^{p-r}\|u\|^p - \lambda t^{q-r}\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx.
\end{aligned}$$

Desde que $f \in F^+$, Φ_u tem o seguinte comportamento assintótico:

$$\lim_{t\to 0^+} \Phi_u(t) = -\infty, \quad \lim_{t\to\infty} \Phi_u(t) = 0.$$

Podemos reescrever Φ_u' como

$$\Phi_u'(t) = t^{q-r-1}\left(\overline{R}_u(t) - \lambda(q-r)\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx\right).$$

Portanto, pela descrição de $\overline{R}_u$, tem-se que $\Phi_u(t)$ atinge seu único ponto de máximo em

$\bar{t}_{\max} = t^*$ e

$$\begin{aligned}
&\Phi_u'(\bar{t}_{\max}) = 0, \\
&\Phi_u'(t) > 0, \forall t \in (0, \bar{t}_{\max}), \\
&\Phi_u'(t) < 0, \forall t \in (\bar{t}_{\max}, \infty).
\end{aligned}$$

Assim, os itens (i) e (ii) e (iii) estão provados. □

A Figura 4.2 mostra um esboço do gráfico da função Φ_u, com $u \in F^+$, obtido a partir do Lema 4.3.

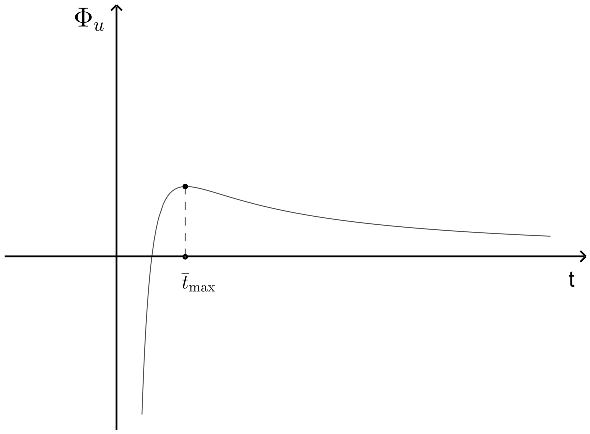

Figura 4.2: Gráfico de Φ_u, $u \in F^+$.

A partir do comportamento de Ψ_u, temos um resultado que descreve pontos de máximo e de mínimo local de φ_u.

Lema 4.4. *Suponha que $r > \gamma$ e $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$. Então, para cada $u \in G^+$, as seguintes afirmações são válidas:*

(i) se $u \in F^-$, então existe único $t_-(u) > t_{\max}(u)$ tal que $t_- u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ e

$$J_\lambda(t_- u) = \max_{t \geq 0} J_\lambda(tu).$$

(ii) se $u \in F^+$, então existem únicos $t_+(u) < t_{\max}(u) < t_-(u)$ tal que $t_\pm u \in \mathcal{N}_\lambda^\pm$ e

$$J_\lambda(t_+ u) = \min_{0 \leq t \leq t_{\max}} J_\lambda(tu), \quad J_\lambda(t_- u) = \max_{t \geq 0} J_\lambda(tu).$$

Demonstração. Dada $u \in G^+$, consideremos a função Ψ_u definida em (4.14). Então,

$$tu \in \mathcal{N}_\lambda \iff \Psi_u(t) = \lambda \int_\Omega f(x) \frac{|u^+|^q}{|x|^\beta} dx.$$

Podemos escrever $\Psi_u(t) = \widetilde{\Psi}_u(t) + bm(t^p \|u\|^p) t^{p-q} \|u\|^p$, sendo

$$\widetilde{\Psi}_u(t) := a t^{p-q} \|u\|^p - t^{r-q} \int_\Omega g(x) \frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha} dx.$$

Observe que $\Psi_u(t) \geq \widetilde{\Psi}_u(t)$, para todo $t \geq 0$. Derivando $\widetilde{\Psi}_u$, obtemos

$$\widetilde{\Psi}'_u(t) = a(p-q)t^{p-q-1}\|u\|^p - (r-q)t^{r-q-1}\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx.$$

Então, $\widetilde{\Psi}_u$ possui único ponto crítico, que é também seu ponto de máximo, em

$$t_{**} = \left(\frac{a(p-q)\|u\|^p}{(r-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx}\right)^{\frac{1}{r-p}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Psi_u(t_{\max}) &\geq \Psi_u(t_{**}) \geq \widetilde{\Psi}_u(t_{**}) \\
&= a\left(\frac{a(p-q)\|u\|^p}{(r-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}}\right)^{\frac{p-q}{r-p}}\|u\|^p \\
&\quad - \left(\frac{a(p-q)\|u\|^p}{(r-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}}\right)^{\frac{r-q}{r-p}}\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx \\
&= a\left(\frac{a(p-q)\|u\|^r}{(r-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}}\right)^{\frac{p-q}{r-p}}\left(1-\frac{p-q}{r-q}\right)\|u\|^q \\
&\geq a\left(\frac{a(p-q)S_{r,\alpha}^{\frac{r}{p}}}{(r-q)|g|_\infty}\right)^{\frac{p-q}{r-p}}\left(\frac{r-p}{r-q}\right)\|u\|^q.
\end{aligned}$$

Por outro lado, desde que

$$\lambda\int_\Omega f(x)|u^+|^q dx \leq \lambda|f|_\infty S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\|u\|^q,$$

segue que para cada $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$, temos

$$\begin{aligned}
\Psi_u(t_{\max}) &\geq \frac{a(r-p)}{r-q}\left(\frac{a(p-q)S_{r,\alpha}^{\frac{r}{p}}}{(r-q)|g|_\infty}\right)^{\frac{p-q}{r-p}}\|u\|^q && (4.16)\\
&> \lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}. && (4.17)
\end{aligned}$$

Dessa forma, se $u \in F^-$, pelo Lema 4.2, existe único $t_-(u) > t_{\max}(u)$ tal que

$$\Psi_u(t_-) = \lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx.$$

Assim, temos que

$$\varphi'_u(t_-) = (t_-)^{q-1}\left(\Psi_u(t_-) - \lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx\right) = 0,$$

isto é, $t_- u \in \mathcal{N}_\lambda$. Além disso, novamente pelo Lema 4.2, segue que

$$\varphi_u''(t_-) = (t_-)^{q-1}\Psi_u'(t_-) < 0.$$

Desde que $\varphi_{t_-u}''(1) = (t_-)^2\varphi_u''(t_-)$, segue que $t_-u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ e

$$J_\lambda(t_-u) = \max_{t\geq 0} J_\lambda(tu),$$

provando o item (i).

Agora, se $u \in F^+$, pelo Lema 4.2 segue que existem únicos $t_+(u) < t_{\max}(u) < t_-(u)$ tais que

$$\Psi_u(t_+) = \lambda \int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx = \Psi_u(t_-).$$

Além disso, o Lema 4.2 garante que

$$\Psi_u'(t_+) > 0 > \Psi_u'(t_-).$$

Usando o mesmo argumento da prova do item (i), podemos garantir que $t_\pm u \in \mathcal{N}_\lambda^\pm$ e

$$J_\lambda(t_+) = \min_{0\leq t\leq t_{\max}} J_\lambda(tu), \quad J_\lambda(t_-u) = \max_{t\geq 0} J_\lambda(tu),$$

o que prova o item (ii). $\square$

Nas figuras 4.3 e 4.4, esboçamos o gráfico da função $\varphi_u(t) = J_\lambda(tu)$, nos casos em que $u \in G^+ \cap F^-$ e $u \in G^+ \cap F^+$, respectivamente.

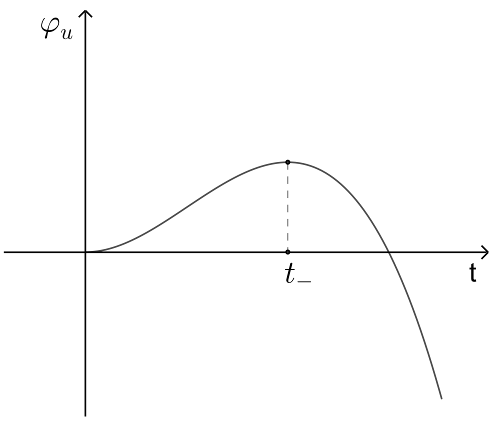

Figura 4.3: Gráfico de φ_u, $u \in G^+ \cap F^-$;

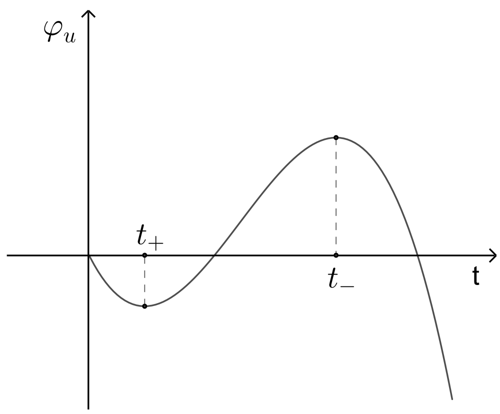

Figura 4.4: Gráfico de φ_u, $u \in G^+ \cap F^+$.

A partir do comportamento de Φ_u, temos outro resultado que descreve pontos de máximo e de mínimo local de $\varphi_u(t) = J_\lambda(tu)$.

Lema 4.5. *Suponhamos que $r > \gamma$ e $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$. Então, para cada $u \in F^+$, as seguintes afirmações são válidas:*

(i) se $u \in G^-$, então existe único $t_-(u) > \bar{t}_{\max}(u)$ tal que $t_- u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ e

$$J_\lambda(t_- u) = \max_{t \geq 0} J_\lambda(tu);$$

(ii) se $u \in G^+$, então existem únicos $t_+(u) < \bar{t}_{\max}(u) < t_-(u)$ tais que $t_\pm u \in \mathcal{N}_\lambda^\pm$ e

$$J_\lambda(t_+ u) = \min_{0 \leq t \leq \bar{t}_{\max}} J_\lambda(tu) \qquad \text{e} \qquad J_\lambda(t_- u) = \max_{t \geq 0} J_\lambda(tu).$$

Demonstração. Dada $u \in F^+$, consideremos a função Φ_u definida em (4.15). Então,

$$tu \in \mathcal{N}_\lambda \Longleftrightarrow \Phi_u(t) = \int_\Omega g(x) \frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha} dx.$$

Podemos escrever

$$\Phi_u(t) = \tilde{\Phi}_u(t) + bm(t^p \|u\|^p) t^{p-r} \|u\|^p,$$

sendo

$$\tilde{\Phi}_u(t) = at^{p-r}\|u\|^p - \lambda t^{q-r} \int_\Omega f(x) \frac{|u^+|^q}{|x|^\beta} dx.$$

Então, $\Phi_u(t) \geq \tilde{\Phi}_u(t)$, para todo $t \geq 0$. Derivando $\tilde{\Phi}_u(t)$, obtemos

$$\tilde{\Phi}_u'(t) = a(p-r)t^{p-r-1}\|u\|^p - \lambda(q-r)t^{q-r-1} \int_\Omega f(x) \frac{|u^+|^q}{|x|^\beta} dx.$$

Então, $\tilde{\Phi}_u$ possui único ponto crítico, que é também seu ponto de máximo, dado explicitamente por

$$t^{**} = \left(\frac{(r-q)\lambda \int_\Omega f(x) \frac{|u^+|^q}{|x|^\beta} dx}{a(r-p)\|u\|^p} \right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
\Phi_u(\bar{t}_{\max}) &\geq \Phi_u(t^{**}) \geq \tilde{\Phi}_u(t^{**}) \\
&= a \left(\frac{(r-q)\lambda \int_\Omega f(x) \frac{|u^+|^q}{|x|^\beta} dx}{a(r-p)\|u\|^p} \right)^{\frac{p-r}{p-q}} \|u\|^p \\
&\quad - \left(\frac{(r-q)\lambda \int_\Omega f(x) \frac{|u^+|^q}{|x|^\beta} dx}{a(r-p)\|u\|^p} \right)^{\frac{q-r}{p-q}} \lambda \int_\Omega f(x) \frac{|u^+|^q}{|x|^\beta} dx \\
&= a^{\frac{r-q}{p-q}} \left(\frac{r-q}{r-p} \right)^{\frac{p-r}{p-q}} \left(1 - \frac{r-p}{r-q} \right) \left(\lambda \int_\Omega f(x) \frac{|u^+|^q}{|x|^\beta} dx \right)^{\frac{p-r}{p-q}} \|u\|^{p\frac{r-q}{p-q}} \\
&= a^{\frac{r-q}{p-q}} \left(\frac{r-q}{r-p} \right)^{\frac{p-r}{p-q}} \left(\frac{p-q}{r-q} \right) \left(\lambda \int_\Omega f(x) \frac{|u^+|^q}{|x|^\beta} dx \right)^{\frac{p-r}{p-q}} \|u\|^{p\frac{r-q}{p-q}}.
\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\lambda \int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx \;\; \leq \;\; \lambda |f|_\infty S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\|u\|^q.$$

Desde que $r > p$, temos que

$$\left(\lambda \int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx\right)^{\frac{p-r}{p-q}} \geq \left(\lambda |f|_\infty S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p-r}{p-q}} \|u\|^{q\frac{p-r}{p-q}}.$$

Consequentemente, a seguinte desigualdade é obtida:

$$\Phi_u(\bar{t}_{\max}) \geq a^{\frac{r-q}{p-q}}\left(\frac{r-q}{r-p}\right)^{\frac{p-r}{p-q}}\left(\frac{p-q}{r-q}\right)\|u\|^r\left(\lambda |f|_\infty S_{q,\beta}^{\frac{-q}{p}}\right)^{\frac{p-r}{p-q}}. \tag{4.18}$$

Portanto, se $u \in G^-$, é claramente válida a desigualdade

$$\Phi_u(\bar{t}_{\max}) > \int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx.$$

A partir do comportamento de Φ_u descrito no Lema 4.3, segue que existe único ponto $0 < t_+(u) < \bar{t}_{\max}$ tal que

$$\Phi_u(t_+) = \int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx,$$

isto é, $t_+u \in \mathcal{N}_\lambda$. Para concluir a prova do item (i), basta notar que pelo item (ii) do Lema 4.3, temos que

$$\varphi_u''(t_+) = (t_+)^{r-1}\Phi_u'(t_+) > 0,$$

isto é, $t_+u \in \mathcal{N}_\lambda^+$ e

$$J_\lambda(t_+u) = \min_{t\geq 0} J_\lambda(tu).$$

Por outro lado, se $u \in G^+$, desde que

$$S_{r,\alpha}^{\frac{r}{p}}\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx \leq \|u\|^r,$$

por (4.18), obtemos

$$\Phi_u(\bar{t}_{\max}) \geq a^{\frac{r-q}{p-q}}\left(\frac{r-q}{r-p}\right)^{\frac{p-r}{p-q}}\left(\frac{p-q}{r-q}\right)S_{r,\alpha}^{\frac{r}{p}}\left(\lambda |f|_\infty S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p-r}{p-q}}\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx.$$

Portanto, para cada $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$, vale a desigualdade

$$\Phi_u(\bar{t}_{\max}) > \int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx.$$

A partir do comportamento de Φ_u apresentado no Lema 4.3, segue que existem únicos pontos

$$t_+(u) < \bar{t}_{\max}(u) < t_-(u)$$

tais que

$$\Phi_u(t_+) = \int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx = \Phi_u(t_-),$$

que implica $t_\pm u \in \mathcal{N}_\lambda$. O restante da demonstração do item (ii) deste lema segue de modo análogo à demonstração apresentada no item (ii) do Lema 4.4. $\square$

Observação 4.1. *Note que, pelo Lema 4.5, a representação gráfica de φ_u é similar à Figura 4.3 para $u \in F^+ \cap G^-$. Analogamente, a representação gráfica de φ_u para $u \in F^+ \cap G^+$ é similar à figura 4.4.*

Demonstração da Proposição 4.1. Desde que $g^+ \neq 0$, segue que existe $u \in G^+$. Pelo Lema 4.4, existe único $t_- > 0$ tal que $t_- u \in \mathcal{N}_\lambda^-$. Além disso, desde que $f^+ \neq 0$, existe $v \in F^+$. Então, pelo Lema 4.5, existe único $t_+ > 0$ tal que $t_+ v \in \mathcal{N}_\lambda^+$. Portanto, a partir do Lema 4.1, podemos escrever $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{N}_\lambda^+ \cup \mathcal{N}_\lambda^-$ com $\mathcal{N}_\lambda^\pm \neq \emptyset$. $\square$

A seguir, mostraremos a limitação inferior e a coercividade do funcional J_λ sobre $\mathcal{N}_\lambda$. Particularmente, a propriedade de coercividade garante a limitação de sequências de Palais-Smale em $\mathcal{N}_\lambda$.

Lema 4.6. *Se $r > \gamma$, então J_λ é coercivo e limitado inferiormente sobre $\mathcal{N}_\lambda$, para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. Dado $u \in \mathcal{N}_\lambda$, como $r > \gamma$, usando (4.8), obtemos

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)a\|u\|^p + b\left(\frac{1}{p}\widehat{m}(\|u\|^p) - \frac{1}{r}m(\|u\|^p)\|u\|^p\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx \\
&\geq \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)a\|u\|^p - \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)S_{q,\beta}^{\frac{-q}{p}}\lambda|f|_\infty\|u^+\|^q \\
&\geq \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)a\|u\|^p - \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)S_{q,\beta}^{\frac{-q}{p}}\lambda|f|_\infty\|u\|^q \\
&= \|u\|^p\left[\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)a - \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)S_{q,\beta}^{\frac{-q}{p}}\lambda|f|_\infty\|u\|^{q-p}\right].
\end{aligned}$$

Portanto, J_λ é coercivo e limitado inferiormente. $\square$

A seguir, provaremos que $\mathcal{N}_\lambda^-$ possui uma distância da origem positiva. Isso permite provar que tal conjunto é fechado.

Lema 4.7. *Se $\mathcal{N}_\lambda^- \neq \emptyset$, então para cada $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$, temos a limitação inferior*

$$\|u\| \geq \left(\frac{a(p-q)}{(r-q)|g|_\infty}\right)^{\frac{1}{r-p}} S_{r,\alpha}^{\frac{r}{p(r-p)}} > 0. \tag{4.19}$$

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$. Então, por (4.2), temos que

$$\begin{aligned} a(p-q)\|u\|^p + b\left[pm'(\|u\|^p)\|u\|^p + (p-q)m(\|u\|^p)\right]\|u\|^p &< (r-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx \\ &\leq (r-q)|g|_\infty S_{r,\alpha}^{-\frac{r}{p}}\|u^+\|^r. \end{aligned}$$

Desde que m e m' são não negativas, bem como $\|u^+\| \leq \|u\|$, temos que

$$a(p-q)\|u\|^p < (r-q)|g|_\infty S_{r,\alpha}^{-\frac{r}{p}}\|u\|^r.$$

Portanto, para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$, vale a estimativa

$$\|u\| \geq \left(\frac{a(p-q)}{(r-q)|g|_\infty}\right)^{\frac{1}{r-p}} S_{r,\alpha}^{\frac{r}{p(r-p)}}.$$

$\square$

Pela definição, podemos notar que $\mathcal{N}_\lambda$ é um conjunto fechado em $W_0^{s,p}(\Omega)$. A partir do lema anterior, provaremos que $\mathcal{N}_\lambda^-$ também é fechado.

Corolário 4.1. *Suponha que $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$. Então $\mathcal{N}_\lambda^-$ é fechado em $W_0^{s,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ tal que $u_n \to u$, para algum $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$. Então, $\langle I_\lambda'(u), u\rangle = 0$ e a partir do Lema 4.7, concluímos que $u \neq 0$. Logo, $u \in \mathcal{N}_\lambda$. Além disso, usando a expressão de $\varphi_{u_n}''(1)$, obtemos a convergência $\varphi_{u_n}''(1) \to \varphi_u''(1)$. Desde que $\varphi_{u_n}''(1) < 0$, para todo n, segue que $\varphi_u''(1) \leq 0$. Por outro lado, como $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$, para todo $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$, temos que $\varphi_u''(1) < 0$. Consequentemente, $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$, concluindo que $\mathcal{N}_\lambda^-$ é fechado. $\square$

Agora, a partir do Lema 4.7, podemos considerar os ínfimos

$$c_{\mathcal{N}_\lambda} := \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda} J_\lambda(u), \quad \text{e} \quad c_{\mathcal{N}_\lambda^\pm} = \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda^\pm} J_\lambda(u).$$

Pretendemos mostrar que para λ em certo intervalo, $c_{\mathcal{N}_\lambda^+}$ e $c_{\mathcal{N}_\lambda^-}$ tem sinais opostos. Antes disso, faremos um lema técnico sobre a função m que será útil na demostração desse fato.

Lema 4.8. *Suponha que m satisfaz (m_1)-(m_2) e $1 < q < p < r$. Então, para todo $t > 0$, tem-se*

$$\frac{1}{p}\widehat{m}(t) - \frac{1}{q}m(t)t + \frac{1}{rq}\left[pm'(t)t^2 + (p-q)m(t)t\right] \leq 0.$$

Demonstração. Considere $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} g(t) &:= \frac{1}{p}\widehat{m}(t) - \frac{1}{q}m(t)t + \frac{1}{rq}\left[pm'(t)t^2 + (p-q)m(t)t\right] \\ &= \frac{1}{p}\widehat{m}(t) - \frac{1}{r}m(t)t + \frac{1}{rq}\left[pm'(t)t - (r-p)m(t)\right]t. \end{aligned}$$

Desde que $q < p$, usando (4.7), obtemos

$$g(t) \leq \frac{1}{p}\widehat{m}(t) - \frac{1}{r}m(t)t + \frac{1}{rp}[pm'(t)t - (r-p)m(t)]t, \ \forall t > 0. \tag{4.20}$$

Seja $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) := \frac{1}{p}\widehat{m}(t) - \frac{1}{r}m(t)t.$$

Derivando h em relação a t, obtemos

$$h'(t) = -\frac{1}{rp}[pm'(t)t - (r-p)m(t)], \quad \forall t > 0.$$

Aplicando (4.11), desde que $r > \gamma$, temos que h' é não decrescente. Portanto h é convexa. Assim, por caracterização de funções convexas, desde que $h(0) = 0$, obtemos

$$h(t) - h'(t)t \leq 0, \quad \forall t > 0.$$

Logo, por (4.20), segue que $g(t) \leq h(t) - h'(t)t \leq 0$, para todo $t > 0$, como queríamos. $\square$

O lema seguinte explicita os sinais dos ínfimos $c_{\mathcal{N}_\lambda}$, $c_{\mathcal{N}_\lambda^+}$ e $c_{\mathcal{N}_\lambda^-}$.

Lema 4.9. *Suponhamos que $r > \gamma$. Então, as seguintes afirmações são válidas:*

(i) se $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$, então $c_{\mathcal{N}_\lambda} \leq c_{\mathcal{N}_\lambda^+} < 0$;

(ii) se $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_2}$ com $\Gamma_2 := \frac{q}{p}\Gamma_1$, então $c_{\mathcal{N}_\lambda^-} \geq d_\lambda > 0$.

Demonstração. (i) Fixado $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$, pela Proposição 4.1, segue que $\mathcal{N}_\lambda^+ \neq \emptyset$. Então, para cada $u \in \mathcal{N}_\lambda^+$, temos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|u\|^p + b\left(\frac{1}{p}\widehat{m}(\|u\|^p) - \frac{1}{q}m(\|u\|^p)\|u\|^p\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx \end{aligned} \tag{4.21}$$

e

$$a(p-q)\|u\|^p + b\left[pm'(\|u\|^p)\|u\|^{2p} + (p-q)m(\|u\|^p)\|u\|^p\right] > (r-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx. \tag{4.22}$$

Usando a desigualdade (4.22) na igualdade (4.21) e aplicando o Lema 4.8, obtemos

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u) &< a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\|u\|^p + b\left(\frac{1}{p}\widehat{m}(\|u\|^p) - \frac{1}{q}m(\|u\|^p)\|u\|^p\right) \\
&\quad + a\frac{(p-q)}{rq}\|u\|^p + \frac{b}{rq}\left[pm'(\|u\|^p)\|u\|^{2p} + (p-q)m(\|u\|^p)\|u\|^p\right] \\
&= b\left[\frac{1}{p}\widehat{m}(\|u\|^p) - \frac{1}{q}m(\|u\|^p)\|u\|^p + \frac{1}{rq}\left(pm'(\|u\|^p)\|u\|^{2p} + (p-q)m(\|u\|^p)\|u\|^p\right)\right] \\
&\quad + a\left(\frac{q-p}{pq} + \frac{p-q}{rq}\right)\|u\|^p \\
&\leq -a\frac{(r-p)(p-q)}{rpq}\|u\|^p < 0
\end{aligned}
$$

Portanto, por definição, temos que $c_{\mathcal{N}_\lambda} \leq c_{\mathcal{N}_\lambda^+} \leq J_\lambda(u) < 0$.
(ii) Pelo Lema 4.7, vale a estimativa

$$
\|u\| \geq \left(\frac{a(p-q)}{r-q}\right)^{\frac{1}{r-p}} S_{r,\alpha}^{\frac{r}{p(r-p)}}, \quad \forall u \in \mathcal{N}_\lambda^-.
$$

Além disso, para todo $\lambda > 0$, vale a desigualdade

$$
\lambda \int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx \leq \lambda S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}|f|_\infty \|u\|^q. \tag{4.23}
$$

Agora, para cada $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)a\|u\|^p + b\left(\frac{1}{p}\widehat{m}(\|u\|^p) - \frac{1}{r}m(\|u\|^p)\|u\|^p\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx.
\end{aligned}
$$

Aplicando (4.8) e (4.23), segue que para cada $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ e cada $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_3}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u) &\geq \|u\|^q\left[a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\|u\|^{p-q} - \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\lambda|f|_\infty\right] \\
&\geq \|u\|^q\left[a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{a(p-q)}{r-q}\right)^{\frac{p-q}{r-p}} S_{r,\alpha}^{\frac{r(p-q)}{p(r-p)}} - \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\lambda|f|_\infty\right] \geq d_\lambda > 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $c_{\mathcal{N}_\lambda^-} \geq d_\lambda > 0$, como queríamos. □

Com o objetivo de construir sequências (PS) em $\mathcal{N}_\lambda$ para o funcional J_λ, usaremos as ideias de Tarantello em [75] que consiste em obter curvas em $\mathcal{N}_\lambda$ diferenciáveis que possam ser relacionadas com a derivada do funcional J_λ. O próximo lema garante a existência de tais curvas.

Lema 4.10. *Suponhamos que $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$. Dada $u \in \mathcal{N}_\lambda$, existem $\epsilon > 0$ e uma função* *diferenciável* $\xi : B(0,\epsilon) \to \mathbb{R}^+$, *com* $\xi(0) = 1$ *tal que* $\xi(v)(u-v) \in \mathcal{N}_\lambda$ *e*

$$\langle \xi'(0), v\rangle = \frac{p\overline{M}'(\|u\|^p)\langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle - \lambda q \int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^{q-2}u^+v}{|x|^\beta}dx - r\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^{r-2}u^+v}{|x|^\alpha}dx}{[a(p-q) + bpm'(\|u\|^p)\|u\|^p + b(p-q)m(\|u\|^p)]\,\|u\|^p - (r-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx}, \tag{4.24}$$

sendo $\overline{M}(t) := at + bm(t)t$.

Demonstração. Para cada $u \in \mathcal{N}_\lambda$, definamos $F_u : \mathbb{R}^+ \times W_0^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$F_u(\xi, w) = \langle J_\lambda'(\xi(u-w)), \xi(u-w)\rangle.$$

Então, $F_u(1,0) = \langle J_\lambda'(u), u\rangle$ e desde que $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\xi}F_u(1,0) &= ap\|u\|^p + b\left[pm'(\|u\|^p)\|u\|^{2p} + pm(\|u\|^p)\|u\|^p\right] - \lambda q\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx \\
&\quad -r\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx \\
&= a(p-q)\|u\|^p + b\left[pm'(\|u\|^p)\|u\|^{2p} + (p-q)m(\|u\|^p)\|u\|^p\right] \\
&\quad -(r-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx \\
&= \varphi_u''(1) \neq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita em espaços de Banach, existe $\epsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi : B(0,\epsilon) \to \mathbb{R}^+$, com $\xi(0) = 1$ tal que

$$\langle \xi'(0), v\rangle = -\left[\frac{d}{d\xi}F_u(1,0)\right]^{-1}[\partial_w F_u(1,0)]v, \ \ \forall v \in W_0^{s,p}(\Omega),$$

que produz a fórmula (4.24). Além disso, $F_u(\xi(v), v) = 0$ para todo $v \in B(0,\epsilon)$, que equivale a

$$\langle J_\lambda'((\xi(v)(u-v)), \xi(u)(u-v)\rangle = 0, \ \ \forall v \in B(0,\epsilon).$$

Pela continuidade de ξ, é possível escolher $\epsilon > 0$ tal que $\xi(v)(u-v) \neq 0$ para todo $v \in B(0,\epsilon)$. Portanto, $\xi(u)(u-v) \in \mathcal{N}_\lambda$ para todo $v \in B(0,\epsilon)$. □

Em $\mathcal{N}_\lambda^-$, obtemos curvas análogas como mostra o lema seguinte.

Lema 4.11. *Suponhamos que* $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$ *e que* $\mathcal{N}_\lambda^- \neq \emptyset$. *Então, para cada* $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$, *existem* $\epsilon > 0$ *e uma função diferenciável* $\xi^- : B(0,\epsilon) \to \mathbb{R}^+$ *com* $\xi^-(0) = 1$ *tal que* $\xi^-(v)(u-v) \in \mathcal{N}_\lambda^-$ *e* $(\xi^-)'(0)$ *é dada por* (4.24).

Demonstração. Como no Lema 4.10, podemos mostrar a existência de $\epsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi^- : B(0,\epsilon) \to \mathbb{R}^+$ tal que $\xi^-(0) = 1$ e $\xi^-(v)(u-v) \in \mathcal{N}_\lambda$, para todo $v \in B(0,\epsilon)$ e satisfazendo (4.24).

Agora, lembrando que

$$\begin{aligned}\varphi_u''(1) &= a(p-q)\|u\|^p + b\left[pm'(\|u\|^p)\|u\|^{2p} + (p-q)m(\|u\|^p)\|u\|^p\right] \\ &\quad -(r-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx < 0,\end{aligned}$$

desde que $\xi^-(v)(u-v)$ está próximo de u para ϵ suficientemente pequeno e $v \in B(0,\epsilon)$, por continuidade, temos que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\varphi''_{\xi^-(v)(u-v)}(1) < 0, \quad \forall v \in B(0,\epsilon).$$

Logo, $\xi^-(v)(u-v) \in \mathcal{N}_\lambda^-$, para todo $v \in B(0,\epsilon)$. □

Agora, utilizaremos as curvas obtidas nos lemas 4.10 e 4.11 para obter sequências (PS).

Proposição 4.2 (Existência de sequência (PS)). *Suponhamos que $r > \gamma$. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) se $\lambda \in \lambda_{\Gamma_1}$, então existe uma sequência $(PS)_{c_{\mathcal{N}_\lambda}}$, $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda$ para J_λ.

(ii) se $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_2}$ com $\Gamma_2 = \frac{q}{p}\Gamma_1$, então existe uma sequência $(PS)_{c_{\mathcal{N}_\lambda^-}}$, $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ para J_λ.

Demonstração. (i) Pelo princípio variacional de Ekeland (confira Teorema A.5), existe uma sequência $u_n \subset \mathcal{N}_\lambda$ tal que

$$J_\lambda(u_n) < c_{\mathcal{N}_\lambda} + \frac{1}{n}, \quad J_\lambda(u_n) < J_\lambda(v) + \frac{1}{n}\|u_n - v\|, \ \forall v \in \mathcal{N}_\lambda, v \neq u_n.$$

Desde que J_λ é coercivo sobre $\mathcal{N}_\lambda$, temos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada. Além disso, como $c_{\mathcal{N}_\lambda} < 0$ para todo $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$, segue que, para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned}J_\lambda(u_n) &= \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)a\|u_n\|^p + b\left(\frac{1}{p}\widehat{m}(\|u\|^p) - \frac{1}{r}m(\|u\|^p)\|u\|^p\right) \\ &\quad -\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u_n^+|^q}{|x|^\beta}dx < \frac{c_{\mathcal{N}_\lambda}}{2}.\end{aligned}$$

Desde que $p < \gamma < r$, por (4.8), obtemos

$$-\frac{c_{\mathcal{N}_\lambda}}{2} \leq \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u_n^+|^q}{|x|^\beta}dx \leq \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\lambda|f|_\infty S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\|u_n\|^q,$$

que implica

$$\|u_n\| > \left[-\frac{rq}{\lambda(r-q)|f|_\infty}\frac{c_{\mathcal{N}_\lambda}}{2}S_{q,\beta}^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{4.25}$$

Afirmação: $J_\lambda'(u_n) \to 0$.

Para cada n, aplicando o Lema 4.11, obtemos uma função $\xi_n : B(0,\epsilon) \to \mathbb{R}^+$ tal que $\xi_n(v)(u_n - v) \in \mathcal{N}_\lambda$. Para $0 < \rho < \epsilon_n$ e $v \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, ponha $v^* = \frac{\rho v}{\|v\|} \in B(0,\epsilon_n)$. Considere $v_\rho = \xi_n(v^*)(u_n - v^*)$. Então $v_\rho \in \mathcal{N}_\lambda$. Assim,

$$J_\lambda(v_\rho) - J_\lambda(u_n) \geq -\frac{1}{n}\|u_n - v_\rho\|.$$

Pela definição da derivada de Fréchet, obtemos

$$\langle J_\lambda'(u_n), v_\rho - u_n\rangle + o_\rho(\|u_n - v_\rho\|) \geq -\frac{1}{n}\|v_\rho - u_n\|.$$

Assim,

$$\langle J_\lambda'(u_n), -v^*\rangle + (\xi_n(v^*) - 1)\langle J_\lambda'(u_n), u_n - v^*\rangle \geq -\frac{1}{n}\|v_\rho - u_n\| + o_\rho(\|v_\rho - u_n\|).$$

Desde que $\xi_n(v_\rho)(u_n - v_\rho) \in \mathcal{N}_\lambda$, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} -\rho\left\langle J_\lambda'(u_n), \frac{v}{\|v\|}\right\rangle + (\xi_n(v^*) - 1)\langle J_\lambda'(u_n) - J_n'(v_\rho), u_n - v^*\rangle \\ \geq -\frac{1}{n}\|v_\rho - u_n\| + o_\rho(\|v_\rho - u_n\|). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left\langle J_\lambda'(u_n), \frac{v}{\|v\|}\right\rangle &\leq \frac{1}{n}\|v_\rho - u_n\| + \frac{o_\rho(\|u_n - v_\rho\|)}{\rho} \\ &\quad + \frac{(\xi_n(v^*) - 1)}{\rho}\langle J_\lambda'(u_n) - J_\lambda'(v_\rho), u_n - v_\rho\rangle. \end{aligned}$$

Podemos observar que

$$\|v_\rho - u_n\| \leq \rho|\xi_n(v^*)| + |\xi_n(v^*) - 1|\|u_n\|,$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{|\xi_n(v^*) - 1|}{\rho} \leq \|\xi_n'(0)\|.$$

Então, existe $C > 0$ tal que para $\rho \to 0$ tem-se

$$\left\langle J_\lambda'(u_n), \frac{v}{\|v\|}\right\rangle \leq \frac{C}{n}(1 + \|\xi_n'(0)\|).$$

Para concluir a demonstração, resta mostrar que $\|\xi_n'(0)\|$ é uniformemente limitada em n. A partir da expressão (4.24), usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$|\langle \xi_n'(0), v\rangle| \leq \frac{C_1\|v\|}{K(u)},$$

sendo $K(u)$ dada por

$$K(u) = \left| [a(p-q) + b\,(pm'(\|u\|^p)\|u\|^p + (p-q)m(\|u\|^p))]\,\|u\|^p - (r-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^r}{|x|^\alpha}dx \right|.$$

Assim, precisamos mostrar que existe $C_2 > 0$ tal que

$$K(u) \geq C_2.$$

Suponhamos, por contradição, que a menos de uma subsequência, tenhamos

$$\begin{aligned} a(p-q)\|u_n\|^p + b\left(pm'(\|u\|^p)\|u\|^{2p} + (p-q)m(\|u\|^p)\|u\|^p\right) \\ -(r-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u_n^+|^r}{|x|^\alpha}dx = o_n(1). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Então, desde que m e m' são não negativas, temos que

$$\begin{aligned} \|u_n\|^p &\leq \frac{r-q}{a(p-q)}\int_\Omega g(x)\frac{|u_n^+|^r}{|x|^\alpha}dx + o_n(1) \\ &\leq \frac{r-q}{a(p-q)}|g|_\infty S_{r,\alpha}^{-\frac{r}{p}}\|u_n\|^r + o_n(1). \end{aligned}$$

Portanto, em virtude de (4.25), podemos dividir por $\|u_n\|^p$ para obter a estimativa

$$\|u_n\| \geq \left[\frac{a(p-q)}{(r-q)|g|_\infty}S_{r,\alpha}^{\frac{r}{p}}\right]^{\frac{1}{r-p}} + o_n(1). \tag{4.27}$$

Por outro lado, desde que $u_n \in \mathcal{N}_\lambda$, temos que

$$a\|u_n\|^p + bm(\|u_n\|^p)\|u_n\|^p = \lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u_n^+|^q}{|x|^\beta}dx + \int_\Omega g(x)\frac{|u_n^+|^r}{|x|^\alpha}dx. \tag{4.28}$$

Consequentemente, por (4.26) e (4.28), obtemos

$$\begin{aligned} a(r-p)\|u_n\|^p - b\left(pm'(\|u_n\|^p)\|u_n\|^{2p} - (r-p)m(\|u_n\|^p)\|u_n\|^p\right) \\ = (r-q)\lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u_n^+|^q}{|x|^\beta}dx + o_n(1) \\ \leq (r-q)\lambda|f|_\infty S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\|u_n\|^q + o_n(1). \end{aligned}$$

Como $r > \gamma$, por (4.7), obtemos a estimativa superior

$$\|u_n\|^{p-q} \leq \frac{r-q}{a(r-p)}\lambda|f|_\infty S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}} + o_n(1). \tag{4.29}$$

Logo, por (4.27) e (4.29), obtemos a desigualdade

$$\left[\frac{a(p-q)}{(r-q)|g|_\infty} S_{r,\alpha}^{\frac{r}{p}}\right]^{\frac{p-q}{r-p}} \leq \frac{r-q}{a(r-p)} \lambda |f|_\infty S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}} + o_n(1).$$

Dessa forma, obtemos a seguinte contradição

$$\lambda \geq \frac{a(r-p)}{(r-q)|f|_\infty} S_{q,\beta}^{\frac{q}{p}} \left[\frac{a(p-q)}{(r-q)|g|_\infty} S_{r,\alpha}^{\frac{r}{p}}\right]^{\frac{p-q}{r-p}} = \Gamma_1$$

desde que $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$, em que Γ_1 foi definida em (4.12). Portanto, $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_{c_{\mathcal{N}_\lambda}}$ para J_λ.
(ii) A prova deste item pode ser obtida de maneira similar ao item (i). □

A seguir, provaremos que J_λ satisfaz a condição (PS) global no caso subcrítico e local no caso crítico.

Proposição 4.3 (Condição (PS)). *As seguintes afirmações são válidas:*

(i) se $\gamma < r < p_\alpha^*$, então o funcional J_λ satisfaz a condição $(PS)_c$, para todo $c \in \mathbb{R}$;

(ii) se $r = p_\alpha^*$, então o funcional J_λ satisfaz a condição $(PS)_c$, sempre que

$$c < c_{\infty,\lambda} := \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_\alpha^*}\right) \left(\frac{a^{\frac{p_\alpha^*}{p}}}{|g|_\infty}\right)^{\frac{p}{p_\alpha^*-p}} S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} - \widehat{C}(\lambda |f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}}, \tag{4.30}$$

sendo

$$\widehat{C} := \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p_\alpha^*}\right) \frac{p-q}{p} \left[a\left(\frac{p}{q}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_\alpha^*}\right)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p_\alpha^*}\right)^{-1}\right)^{-\frac{q}{p}} S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\right]^{\frac{p}{p-q}}.$$

Demonstração. (i) Seja $\{u_n\} \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ uma sequência $(PS)_c$, isto é,

$$J_\lambda(u_n) = c + o_n(1) \quad \text{e} \quad J_\lambda'(u_n) = o_n(1).$$

Então, desde que $r > \gamma$, por (4.8), obtemos

$$\begin{aligned}
c + o_n(1)(1 + \|u_n\|) &= J_\lambda(u_n) - \frac{1}{r}\langle J_\lambda'(u_n), u_n\rangle \\
&= a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)\|u_n\|^p + b\left(\frac{1}{p}\widehat{m}(\|u_n\|^p) - \frac{1}{r}m(\|u_n\|^p)\|u_n\|^p\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)\lambda \int_\Omega f(x)\frac{|u_n^+|^q}{|x|^\beta}dx \\
&\geq a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)\|u_n\|^p - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)\lambda \int_\Omega f(x)\frac{|u_n^+|^q}{|x|^\beta}dx.
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\int_\Omega f(x)\frac{|u_n^+|^q}{|x|^\beta}dx \le |f|_\infty S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\|u_n\|^q,$$

obtemos a desigualdade

$$a\frac{r-p}{rp}\|u_n\|^p \le \frac{r-q}{rq}\lambda|f|_\infty S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\|u_n\|^q + c + o_n(1)(1+\|u_n\|).$$

Como $1 < q < p < r$, segue que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada. Assim, existe $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$. Além disso, pelo Lema A.7, segue que $u_n^+ \rightharpoonup u^+$. Dessa forma, desde que a imersão $W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega, |x|^{-\nu})$ é compacta, para todo $t \in [1, p_\nu^*)$ e todo $0 \le \nu < sp$, temos que

$$\begin{aligned} &u_n^+ \to u^+, \text{ em } L^t(\Omega, |x|^{-\nu}),\\ &u_n^+ \to u^+, \text{q. t. p. } x \in \Omega,\\ &u_n^+ \le h, \text{ para algum } h \in L^t(\Omega, |x|^{-\nu}),\\ &\|u_n\| \to \sigma_0 \ge 0. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada (confira Teorema A.2), segue que

$$\int_\Omega f(x)\frac{|u_n^+|^{q-2}u_n^+(u_n^+-u)}{|x|^\beta}dx \to 0 \quad \text{e} \quad \int_\Omega g(x)\frac{|u_n^+|^{r-2}u_n^+(u_n^+-u)}{|x|^\alpha}dx \to 0. \tag{4.32}$$

Agora, desde que $J_\lambda(u_n) = o_n(1)$ e $\{u_n\}$ é limitada, temos que $\langle J_\lambda'(u_n), u_n - u\rangle = o_n(1)$. Assim, por (4.32), segue que

$$(a + bm(\|u_n\|^p))\langle(-\Delta_p)^s u_n, u_n - u\rangle = o_n(1).$$

Desde que $\|u_n\| \to \sigma_0$, temos que

$$(a + bm(\sigma_0^p))\langle(-\Delta_p)^s u_n, u_n - u\rangle = o_n(1).$$

Como $a + bm(\sigma_0^p) > 0$, obtemos

$$\langle(-\Delta_p)^s u_n, u_n - u\rangle = o_n(1).$$

Pelo Lema A.5, segue que $\|u_n\|^p \to \|u\|^p$. Portanto, $u_n \to u$ em $W_0^{s,p}(\Omega)$.

(ii) Seja $\{u_n\} \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ uma sequência $(PS)_c$, com c satisfazendo a desigualdade (4.30). Como no item (i), podemos verificar que $\{u_n\}$ é limitada. Portanto, a menos de subsequência, temos que $u_n \rightharpoonup u$ e $u_n^+ \rightharpoonup u^+$. Dessa forma, $\{u_n\}$ satisfaz as conclusões obtidas em (4.31). Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\int_\Omega f(x)\frac{|u_n^+|^{q-2}u_n^+(u_n^+-u)}{|x|^\beta}dx = o_n(1). \tag{4.33}$$

Além disso, desde que $u_n^+ \rightharpoonup u^+$ em $L^{p_\alpha^*}(\Omega, dx/|x|^\alpha)$, obtemos

$$\int_\Omega g(x)\frac{|u_n^+|^{p_\alpha^*-2}u_n^+(u_n^+-u)}{|x|^\alpha}dx = \int_\Omega g(x)\frac{|u_n^+|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}dx - \int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}dx + o_n(1). \quad (4.34)$$

Ainda, pelo Lema A.5 segue que

$$\langle(-\Delta_p)^s u_n, u_n - u\rangle = \|u_n\|^p - \|u\|^p + o_n(1). \quad (4.35)$$

Agora, desde que $\langle J_\lambda'(u_n), u_n - u\rangle = o_n(1)$ temos que

$$\begin{aligned}(a + bm(\sigma_0^p))\langle(-\Delta_p)^s u_n, u_n - u\rangle &= \lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u_n^+|^{q-2}u_n^+(u_n^+-u)}{|x|^\beta}dx \\ &\quad + \int_\Omega g(x)\frac{|u_n^+|^{p_\alpha^*-2}u_n^+(u_n^+-u)}{|x|^\alpha}dx + o_n(1).\end{aligned}$$

Assim, por (4.33), (4.34) e (4.35), obtemos

$$(a + bm(\sigma_0^p))(\|u_n\|^p - \|u\|^p) = \int_\Omega g(x)\frac{|u_n^+|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}dx - \int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}dx + o_n(1). \quad (4.36)$$

Pelo Lema A.6, temos que

$$\|u_n\|^p = \|u_n - u\|^p + \|u\|^p + o_n(1), \quad (4.37)$$

Aplicando o Lema de Brézis-Lieb (ver Lema A.4) para a sequência $\{u_n^+/|x|^{\frac{\alpha}{p_\alpha^*}}\}$ e usando que $g \in L^\infty(\Omega)$, obtemos

$$\int_\Omega g(x)\frac{|u_n^+|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}dx = \int_\Omega g(x)\frac{|u_n^+ - u^+|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}dx + \int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}dx + o_n(1). \quad (4.38)$$

Portanto, usando (4.37) e (4.38) em (4.36), obtemos

$$(a + bm(\sigma_0^p))\|u_n - u\|^p = \int_\Omega g(x)\frac{|u_n^+ - u^+|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}dx + o_n(1). \quad (4.39)$$

Suponhamos, por contradição, que $u_n \nrightarrow u$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|^p = d > 0.$$

Desde que, para todo n, $|u_n^+(x) - u^+(x)| \le |u_n(x) - u(x)|$, q.t.p. $x \in \Omega$, usando a definição de S_α em (1.3), obtemos

$$\begin{aligned} S_\alpha\left(\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g(x)\frac{|u_n^+ - u^+|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}dx\right)^{\frac{p}{p_\alpha^*}} &\le |g|_\infty^{\frac{p}{p_\alpha^*}} S_\alpha \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega \frac{|u_n - u|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}dx\right)^{\frac{p}{p_\alpha^*}} \\ &\le |g|_\infty^{\frac{p}{p_\alpha^*}}\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|^p = |g|_\infty^{\frac{p}{p_\alpha^*}} d.\end{aligned}$$

Consequentemente, por (4.39), segue que

$$S_\alpha\left[(a+bm(\sigma_0^p))d\right]^{\frac{p}{p_\alpha^*}} \le |g|_\infty^{\frac{p}{p_\alpha^*}} d,$$

que implica $d \ge (a/|g|_\infty)^{\frac{p}{p_\alpha^*-p}} S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}}$. Como $q < p_\alpha^*$, temos que

$$\int_\Omega f(x)\frac{|u_n^+|^q}{|x|^\alpha}dx \to \int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\alpha}dx,$$

e por (4.8) e (4.37), obtemos

$$\begin{aligned}
c+o_n(1) &= J_\lambda(u_n) - \frac{1}{p_\alpha^*}\langle J_\lambda'(u_n), u_n\rangle \\
&= a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\|u_n\|^p + b\left(\frac{1}{p}\widehat{m}(\|u_n\|^p) - \frac{1}{p_\alpha^*}m(\|u_n\|^p)\|u_n\|^p\right) \\
&\quad -\lambda\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\int_\Omega f(x)\frac{|u_n^+|^q}{|x|^\beta}dx \\
&\ge a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\|u_n-u\|^p + a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\|u\|^p \\
&\quad -\lambda\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx.
\end{aligned}$$

Desde que $d \ge (a/|g|_\infty)^{\frac{p}{p_\alpha^*-p}} S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}}$, segue que

$$\begin{aligned}
c &\ge a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)d + a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\|u\|^p - \lambda\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx \\
&\ge \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\left(\frac{a^{\frac{p_\alpha^*}{p}}}{|g|_\infty}\right)^{\frac{p}{p_\alpha^*-p}} S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} + a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\|u\|^p \\
&\quad -\lambda\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Por outro lado, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx &\le \lambda|f|_\infty S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\|u\|^q \\
&= \left[\left(a\frac{p}{q}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)^{-1}\right)^{\frac{q}{p}}\|u\|^q\right] \\
&\quad \left[\left(a\frac{p}{q}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)^{-1}\right)^{-\frac{q}{p}} S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\lambda|f|_\infty\right].
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young (confira Lema A.1), obtemos

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx &\leq a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)^{-1}\|u\|^p\\ &+\frac{p-q}{p}\left[\left(a\frac{p}{q}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)^{-1}\right)^{-\frac{q}{p}}S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\right]^{\frac{p}{p-q}}\\ &(\lambda|f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}}.\end{aligned}$$

Portanto, se tomarmos

$$\widehat{C}=\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\frac{p-q}{p}\left[\left(a\frac{p}{q}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)^{-1}\right)^{-\frac{q}{p}}S_{q,\beta}^{-\frac{q}{p}}\right]^{\frac{p}{p-q}},$$

obtemos a desigualdade

$$\lambda\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx\leq a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\|u\|^p+\widehat{C}(\lambda|f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}}. \tag{4.41}$$

Usando (4.41) em (4.40), temos que

$$c\geq\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\left(\frac{a^{\frac{p_\alpha^*}{p}}}{|g|_\infty}\right)^{\frac{p}{p_\alpha^*-p}}S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}}-\widehat{C}(\lambda|f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}}=c_{\lambda,\infty},$$

que contradiz a desigualdade (4.30). Logo, $u_n\to u$ em $W_0^{s,p}(\Omega)$. □

Seja S_α a constante definida em (1.3). Em [29], os autores provaram que para $1<p<\infty$, $s\in(0,1)$ e $0\leq\alpha<sp<N$, existe uma função com sinal constante minimizante para S_α e que para qualquer função minimizante U_α de S_α, não negativa, existe $x_0\in\mathbb{R}^N$ e uma função não negativa e não crescente $u_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$U_\alpha(x)=u_\alpha(|x-x_0|).$$

Assim, podemos considerar U_α uma função minimizante para S_α sendo radial, não negativa e não crescente. Então, U_α é solução fraca do problema

$$(-\Delta_p)^sU_\alpha=S_\alpha\frac{U_\alpha^{p_\alpha^*-1}}{|x|^\alpha}\quad\text{em }\mathbb{R}^N.$$

Multiplicando por uma constante, se necessário, podemos assumir que

$$(-\Delta_p)^sU_\alpha=\frac{U_\alpha^{P_\alpha^*-1}}{|x|^\alpha}\quad\text{em }\mathbb{R}^N. \tag{4.42}$$

Testando a equação (4.42) com U_α, obtemos

$$\|U_\alpha\|^p = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{U_\alpha^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha} dx = S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}}.$$

Para o p-Laplaciano fracionário ainda não foi obtida uma forma explícita para os minimizadores U_α, porém em [29], foi provado um decaimento ótimo para essas funções, como mostra o seguinte lema:

Lema 4.12. *Existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que*

$$\frac{C_1}{r^{\frac{N-sp}{p-1}}} \leq U_\alpha(r) \leq \frac{C_2}{r^{\frac{N-sp}{p-1}}}, \ \forall r \geq 1.$$

Além disso, existe $\theta > 1$ tal que

$$U_\alpha(\theta r) \leq \frac{1}{2} U_\alpha(r), \ \forall r \geq 1.$$

Demonstração. Veja [29, Lema 2.9]. □

Agora, para todo $\epsilon > 0$, a função $U_{\alpha,\epsilon}(x) := \epsilon^{-\frac{N-sp}{p}} U_\alpha(\frac{x}{\epsilon})$ é também um minimizador para S_α, satisfazendo (4.42).

Para cada $\delta \geq \epsilon > 0$, consideremos

$$m_{\epsilon,\delta} := \frac{U_{\alpha,\epsilon}(\delta)}{U_{\alpha,\epsilon}(\delta) - U_{\alpha,\epsilon}(\theta\delta)}.$$

Considere ainda a função não crescente e absolutamente contínua

$$G_{\epsilon,\delta}(t) := \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t \leq U_{\alpha,\epsilon}(\theta\delta), \\ (t - U_{\alpha,\epsilon}(\theta\delta))m_{\epsilon,\delta}, & \text{se } U_{\alpha,\epsilon}(\theta\delta) \leq t \leq U_{\alpha,\epsilon}(\delta), \\ t, & \text{se } t \geq U_{\alpha,\epsilon}(\delta). \end{cases}$$

A partir de $G_{\epsilon,\delta}$, podemos definir a função radial não crescente

$$u_{\alpha,\epsilon,\delta}(r) := G_{\epsilon,\delta}(U_{\alpha,\epsilon}(r)),$$

que satisfaz

$$u_{\alpha,\epsilon,\delta}(r) = \begin{cases} U_{\alpha,\epsilon}(r), & \text{se } r \leq \delta, \\ 0, & \text{se } r \geq \delta. \end{cases} \tag{4.43}$$

Dessa forma, para $\delta < \theta^{-1} \operatorname{dist}(0, \partial\Omega)$, temos que $u_{\alpha,\epsilon,\delta} \in W_0^{s,p}(\Omega)$. Para as funções $u_{\alpha,\epsilon,\delta}$, temos algumas estimativas dadas pelo seguinte resultado:

Lema 4.13. *Existe $C > 0$ tal que para todo $0 < 2\epsilon \leq \delta < \theta^{-1} \operatorname{dist}(0, \partial\Omega)$, valem as estimativas*

$$\|u_{\alpha,\epsilon,\delta}\|^p \leq S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} + C\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{\frac{N-sp}{p-1}}; \tag{4.44}$$

$$\int_{\Omega}\frac{u_{\alpha,\epsilon,\delta}^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}dx \geq S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} - C\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{\frac{N-\alpha}{p-1}}. \tag{4.45}$$

Demonstração. Veja [29, Lema 2.10]. □

Como vimos na Proposição 4.3, no caso crítico, a condição $(PS)_c$ é válida sempre que $c < c_{\lambda,\infty}$, em que $c_{\lambda,\infty}$ foi definida em (4.30). Desde que estamos interessados em obter solução no nível $c_{\mathcal{N}_\lambda^-}$, precisamos mostrar que para λ em certo intervalo, $c_{\mathcal{N}_\lambda^-} < c_{\lambda,\infty}$. Isso será feito no próximo lema, usando as funções $u_{\alpha,\epsilon,\delta}$.

Lema 4.14. *Suponha que $r = p_\alpha^*$, que f e g satisfaçam $(\widehat{f})$ e $(\widehat{g})$, respectivamente e que as condições (4.1) são válidas. Então, existe $b_0 > 0$ tal que para cada $b \in [0, b_0)$, existe $\Gamma_3 = \Gamma_3(b) > 0$ de modo que para todo $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_3}$, é possível obter uma função $u_\lambda \in W_0^{s,p}(\Omega)\setminus\{0\}$ com $u_\lambda \geq 0$ tal que*

$$c_{\mathcal{N}_\lambda^-} \leq \sup_{t\geq 0} J_\lambda(tu_\lambda) < c_{\lambda,\infty}. \tag{4.46}$$

Demonstração. Lembremos que

$$J_\lambda(u) = \frac{a}{p}\|u\|^p + \frac{b}{p}\widehat{m}(\|u\|^p) - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx - \frac{1}{p_\alpha^*}\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}dx.$$

Então, podemos escrever

$$J_\lambda(u) = K_0(u) + K_\lambda(u),$$

sendo

$$K_0(u) = \frac{a}{p}\|u\|^p + \frac{b}{p}\widehat{m}(\|u\|^p) - \frac{1}{p_\alpha^*}\int_\Omega g(x)\frac{|u^+|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}dx,$$

$$K_\lambda(u) = \lambda\int_\Omega f(x)\frac{|u^+|^q}{|x|^\beta}dx.$$

Seja $u_{\alpha,\epsilon,\delta} \in W_0^{s,p}(\Omega)$ dada em (4.43). Fixemos $0 < \delta < \min\{\rho_0, \theta^{-1}\operatorname{dist}(0,\partial\Omega)\}$. Então, $\operatorname{supp} u_{\alpha,\epsilon,\delta} \subset B(0,\rho_0)$. Assim, por $(\widehat{f})$ e $(\widehat{g})$, segue que

$$f(x) \geq \tau_0 \ \text{ e } \ g(x) = |g|_\infty, \text{ q. t. p. } x \in \operatorname{supp} u_{\alpha,\epsilon,\delta}.$$

Consideremos a função

$$h_\epsilon(t) := J_0(tu_{\alpha,\epsilon,\delta}) = \frac{a}{p}t^p\|u_{\alpha,\epsilon,\delta}\|^p + \frac{b}{p}\widehat{m}(\|u_{\alpha,\epsilon,\delta}\|^p) - \frac{t^{p_\alpha^*}}{p_\alpha^*}|g|_\infty\int_\Omega\frac{|u_{\alpha,\epsilon,\delta}|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}dx.$$

Para $t \geq 1/\|u_{\alpha,\epsilon,\delta}\|$, por (4.9) e pelas desigualdades (4.44) e (4.45), segue que

$$\begin{aligned} h_\epsilon(t) \ &\leq \ \frac{a}{p}t^p\left(S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} + C\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{\frac{N-sp}{p-1}}\right) + \frac{b}{p}m(1)t^\gamma\left(S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} + C\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{\frac{N-sp}{p-1}}\right)^{\frac{\gamma}{p}} \\ &\quad -\frac{|g|_\infty}{p_\alpha^*}t^{p_\alpha^*}\left(S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} - C\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{\frac{N-\alpha}{p-1}}\right). \end{aligned}$$

Dessa forma, para $\delta_0 > 0$ fixado, existe $\epsilon_0 < \frac{\delta_0}{2}$ tal que $h_\epsilon(t) \to -\infty$, se $t \to \infty$, uniformemente em $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$. Além disso, $h_\epsilon(0) = 0$. Portanto, existem $0 < t_1 < t_2$ tais que

$$\sup_{t\geq 0} h_\epsilon(t) = \sup_{t\in[t_1,t_2]} h_\epsilon(t), \quad \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0].$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} h_\epsilon(t) &\leq \sup_{t\geq 0}\left(\frac{a}{p}t^p - \frac{|g|_\infty}{p^*_\alpha}t^{p^*_\alpha}\right) S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} + \frac{a}{p}t_2^p C\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{\frac{N-sp}{p-1}} \\ &+ \frac{b}{p}t_2^\gamma\left(S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} + C\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{\frac{N-sp}{p-1}}\right)^{\frac{\gamma}{p}} + \frac{t_2^{p^*_\alpha}}{p^*_\alpha}C\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{\frac{N-\alpha}{p-1}}.\end{aligned}$$

Notemos que

$$\sup_{t\geq 0}\left(\frac{a}{p}t^p - \frac{|g|_\infty}{p^*_\alpha}t^{p^*_\alpha}\right) S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*_\alpha}\right)\left(\frac{a^{\frac{p^*_\alpha}{p}}}{|g|_\infty}\right)^{\frac{p}{p^*_\alpha - p}} S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}}.$$

Além disso, desde que $N - \alpha > N - sp$, para $\frac{\epsilon}{\delta}$ suficientemente pequeno, temos que

$$\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{\frac{N-\alpha}{p-1}} \leq \left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{\frac{N-sp}{p-1}}.$$

Portanto, se $b = \left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{\frac{N-sp}{p-1}} \leq 1$, então

$$\sup_{t\geq 0} J_0(tu_{\alpha,\epsilon,\delta}) = \sup_{t\geq 0} h_\epsilon(t) \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*_\alpha}\right)\left(\frac{a^{\frac{p^*_\alpha}{p}}}{|g|_\infty}\right)^{\frac{p}{p^*_\alpha - p}} S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} + C_\alpha\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{\frac{N-sp}{p-1}}. \tag{4.47}$$

Por outro lado, desde que $\operatorname{supp} u_{\alpha,\epsilon,\delta} \subset B(0, \rho_0)$ e $f(x) \geq \tau_0 > 0$ para q.t.p. $x \in B(0, \rho_0)$, aplicando (4.9), obtemos, para todo $\lambda > 0$ e todo $t \geq 0$,

$$J_\lambda(tu_{\alpha,\epsilon,\delta}) \leq \frac{a}{p}t^p\|u_{\alpha,\epsilon,\delta}\|^p + \frac{b}{p}m(1)t^p\|u_{\alpha,\epsilon,\delta}\|^p + \frac{b}{\gamma}m(1)t^\gamma\|u_{\alpha,\epsilon,\delta}\|^\gamma. \tag{4.48}$$

Agora, podemos escolher $\delta_1 > 0$ tal que para todo $0 < \lambda < \delta_1$, vale que

$$c_{\lambda,\infty} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*_\alpha}\right)\left(\frac{a^{\frac{p^*_\alpha}{p}}}{|g|_\infty}\right)^{\frac{p}{p^*_\alpha - p}} S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} - \widehat{C}(\lambda|f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}} > 0.$$

Então, por (4.48), existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que para $0 < \lambda < \delta_1$, vale a desigualdade

$$\sup_{0\leq t\leq t_0} J_\lambda(tu_{\alpha,\epsilon,\delta}) < c_{\lambda,\infty}. \tag{4.49}$$

Assim, nos resta mostrar que

$$\sup_{t\geq t_0} J_\lambda(tu_{\alpha,\epsilon,\delta}) < c_{\lambda,\infty}, \tag{4.50}$$

para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.

Usando (4.47) e a hipótese $(\widehat{f})$, segue que

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq t_0} J_\lambda(tu_{\alpha,\epsilon,\delta}) &= \sup_{t\geq t_0}[J_0(tu_{\alpha,\epsilon,\delta}) - K_\lambda(tu_{\alpha,\epsilon,\delta})] \\
&\leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*_\alpha}\right)(aS_\alpha)^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} + C\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{\frac{N-sp}{p-1}} - \frac{\lambda}{q}t_0^q \int_{B(0,\delta)} f(x)\frac{|u_{\alpha,\epsilon,\delta}|^q}{|x|^\beta}dx \\
&\leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*_\alpha}\right)(aS_\alpha)^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} + C\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{\frac{N-sp}{p-1}} - \frac{\lambda}{q}t_0^q\tau_0 \int_{B(0,\delta)} \frac{|u_{\alpha,\epsilon,\delta}|^q}{|x|^\beta}dx.
\end{aligned}$$

Agora, para qualquer $\epsilon < \frac{\delta}{2}$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,\delta)} \frac{|u_{\alpha,\epsilon,\delta}|^q}{|x|^\beta}dx &= \int_{B(0,\delta)} \frac{|U_{\alpha,\epsilon}|^q}{|x|^\beta}dx = \int_{B(0,\delta)} \frac{|U_\alpha(\frac{x}{\epsilon})|^q}{|x|^\beta}dx \\
&= \epsilon^{(N-\beta)-\frac{N-sp}{p}q} \int_{B(0,\frac{\epsilon}{\delta})} \frac{|U_\alpha(x)|^q}{|x|^\beta}dx \\
&\geq \epsilon^{(N-\beta)-\frac{N-sp}{p}q} \int_1^{\frac{\delta}{\epsilon}} r^{(N-\beta)-\frac{N-sp}{p-1}q-1}dr.
\end{aligned}$$

Calculando a última integral, obtemos

$$\int_1^{\frac{\delta}{\epsilon}} r^{(N-\beta)-\frac{N-sp}{p-1}q-1}dr = \begin{cases} C, & \text{se } q > \frac{p^*_\beta}{p'}, \\ C\left|\log\frac{\delta}{\epsilon}\right|, & \text{se } q = \frac{p^*_\beta}{p'}, \\ C\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right)^{(N-\beta)-\frac{N-sp}{p-1}q}, & \text{se } q < \frac{p^*_\beta}{p'}. \end{cases}$$

Portanto, desde que δ está fixado, podemos inferir que

$$\int_{B(0,\delta)} \frac{|u_{\alpha,\epsilon,\delta}|^q}{|x|^\beta}dx \geq C\begin{cases} \epsilon^{(N-\beta)-\frac{N-sp}{p}q}, & \text{se } q > \frac{p^*_\beta}{p'}, \\ \epsilon^{(N-\beta)-\frac{N-sp}{p}q}\left|\log\epsilon\right|, & \text{se } q = \frac{p^*_\beta}{p'}, \\ \epsilon^{\frac{N-sp}{p(p-1)}q}, & \text{se } q < \frac{p^*_\beta}{p'}. \end{cases}$$

A partir do enunciado do Teorema 4.2, assumiremos que $q \geq \frac{p^*_\beta}{p'}$. Assim, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq t_0} J_\lambda(tu_{\alpha,\epsilon,\delta}) \leq{}& \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*_\alpha}\right)(aS_\alpha)^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} + C\epsilon^{\frac{N-sp}{p-1}} \\
&-C\lambda\begin{cases} \epsilon^{(N-\beta)-\frac{N-sp}{p}q}, & \text{se } q > \frac{(N-\beta)(p-1)}{N-sp} \\ \epsilon^{(N-\beta)-\frac{N-sp}{p}q}|\log\epsilon|, & \text{se } q = \frac{(N-\beta)(p-1)}{N-sp}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Consideremos $\epsilon = \left[(\lambda|f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}}\right]^{\frac{p-1}{N-sp}} < \frac{\delta}{2}$. Para obter a estimativa desejada, separaremos a demonstração em dois casos como segue:

Caso 1: $q > \frac{(N-\beta)(p-1)}{N-sp}$.

Neste caso, temos a estimativa

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq t_0} J_\lambda(tu_{\alpha,\epsilon,\delta}) \ &\leq \ \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\left(\frac{a^{\frac{p_\alpha^*}{p}}}{|g|_\infty}\right)^{\frac{p}{p_\alpha^*-p}} S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} + C(\lambda|f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}} \\ &\quad -C(\lambda|f|_\infty)\left[(\lambda|f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}}\right]^{\frac{(N-\beta)(p-1)}{N-sp}-\frac{p-1}{p}q}.\end{aligned}$$

Pela definição de $c_{\lambda,\infty}$ dada em (4.34), para que a estimativa (4.50) seja válida precisamos que a seguinte desigualdade ocorra:

$$C(\lambda|f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}} - C(\lambda|f|_\infty)(|f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}\left(\frac{p-1}{N-sp}\right)\left(N-\beta-\frac{N-sp}{p}q\right)} < -\widehat{C}(\lambda|f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}}.$$

Isso é sempre possível quando $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno e

$$1+\frac{p}{p-q}\left(\frac{p-1}{N-sp}\right)\left(N-\beta-\frac{N-sp}{p}q\right) < \frac{p}{p-q},$$

que é válida sempre que $q > \frac{(N-\beta)(p-1)}{N-sp}$. Portanto, existe $\delta_2 > 0$ tal que, para $0 < \lambda < \delta_2$, a estimativa (4.50) é valida, que juntamente com (4.49) provam a segunda desigualdade de (4.46) com $u_\lambda = u_{\alpha,\epsilon,\delta}$.

Caso 2: $q = \frac{(N-\beta)(p-1)}{N-sp}$.

Para este caso, vale a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq t_0} J_\lambda(tu_{\alpha,\epsilon,\delta}) \ &\leq \ \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\alpha^*}\right)\left(\frac{a^{\frac{p_\alpha^*}{p}}}{|g|_\infty}\right)^{\frac{p}{p_\alpha^*-p}} S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} + C(\lambda|f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}} \\ &\quad -C(\lambda|f|_\infty)\left[(\lambda|f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}}\right]^{\frac{(N-\beta)(p-1)}{N-sp}-\frac{p-1}{p}q}|\log(\lambda|f|_\infty)|.\end{aligned}$$

Assim, para obter a estimativa (4.50), precisamos garantir que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, tenhamos

$$C(\lambda|f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}} - C(\lambda|f|_\infty)(\lambda|f|_\infty)^{\frac{p}{p-1}\left(\frac{p-1}{N-sp}\right)\left(N-\beta-\frac{N-sp}{p}q\right)}|\log(\lambda|f|_\infty)| < -\widehat{C}\,(\lambda|f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}}. \tag{4.51}$$

Desde que $q = \frac{(N-\beta)(p-1)}{N-sp}$, através de alguns cálculos, obtemos

$$\frac{p}{p-q}\left(\frac{p-1}{N-sp}\right)\left(N-\beta-\frac{N-sp}{p}q\right)+1 = \frac{p}{p-q}.$$

Assim, (4.51) se resume em

$$(C+\widehat{C})(\lambda|f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}} < C|\log(\lambda|f|_\infty)|(\lambda|f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}}. \tag{4.52}$$

Uma vez que $|\log(\lambda|f|_\infty)| \to \infty$, quando $\lambda \to 0$, segue que existe $\delta_3 > 0$ tal que para $0 < \lambda < \delta_3$, a desigualdade (4.52) é válida. Assim, concluímos que neste caso, a segunda desigualdade de (4.46) é estabelecida para todo $0 < \lambda < \delta_3$.

Para finalizar a demonstração, podemos concluir que existem constantes $b_0 > 0$ e

$$\Gamma_3 := \min\left\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \Gamma_2, \frac{1}{|f|_\infty}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{(N-sp)(p-q)}{p(p-1)}}\right\},$$

tais que se $b \in [0, b_0)$ e $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_3}$, então

$$\sup_{t\geq 0} J_\lambda(tu_\lambda) < c_{\lambda,\infty},$$

com $u_\lambda = u_{\alpha,\epsilon,\delta}$. Pelo Lema 4.4, existe $t_- > 0$ tal que $t_-u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^-$ e

$$c_{\mathcal{N}_\lambda^-} \leq J_\lambda(t_-u_\lambda) \leq \sup_{t\geq 0} J_\lambda(tu_\lambda) < c_{\lambda,\infty}.$$

□

4.3 Prova do Teorema 4.1

Existência da primeira solução:

Fixe $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$. Pela proposição 4.2, existe uma sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda$ tal que

$$J_\lambda(u_n) = c_{\mathcal{N}_\lambda} + o_n(1) \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_n) = o_n(1).$$

Pela Proposição 4.3, item (i), existe $u_1 \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \to u_1$ fortemente em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Assim, segue que u_1 é uma solução de (P_λ) tal que $u \in \mathcal{N}_\lambda$ e $J_\lambda(u_1) = c_{\mathcal{N}_\lambda} < 0$. Vejamos que $u_1 \in \mathcal{N}_\lambda^+$. De fato, suponhamos, por contradição, que $u_1 \in \mathcal{N}_\lambda^-$. Por (4.2), segue que $u_1 \in G^+$ e usando o fato que $u_1 \in \mathcal{N}_\lambda$ juntamente com $J_\lambda(u_1) < 0$, obtemos que $u_1 \in F^+$. Então, existem únicos $0 < t_+ < t_-$ tais que $t_+u_1 \in \mathcal{N}_\lambda^+$ e $t_-u_1 \in \mathcal{N}_\lambda^-$. Em particular, $t_+ < t_- = 1$. Desde que, por definição,

$$\frac{d}{dt}J_\lambda(t_+u_1) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dt^2}J_\lambda(t_+u_1) > 0,$$

existe $t^* \in (t_+, 1]$ tal que

$$J_\lambda(t_+u_1) < J_\lambda(t^*u_1) \leq \max_{t\geq 0} J_\lambda(tu_1) = J_\lambda(t_-u_1).$$

Como $t_- = 1$, segue que

$$c_{\mathcal{N}_\lambda} \leq J_\lambda(t_+ u_1) < J_\lambda(u_1) = c_{\mathcal{N}_\lambda},$$

que é uma contradição. Portanto, para todo $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$, $u_1 \in \mathcal{N}_\lambda^+$ é uma solução de (P_λ) tal que

$$J_\lambda(u_1) = c_{\mathcal{N}_\lambda} = c_{\mathcal{N}_\lambda^+}.$$

Existência da segunda solução:

Fixado $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_2}$, pelo item (ii) da Proposição 4.2, existe uma sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ tal que

$$J_\lambda(u_n) = c_{\mathcal{N}_\lambda^-} + o_n(1) \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_n) = o_n(1).$$

Pela Proposição 4.3, a menos de subsequência, existe $u_2 \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u_2$ fortemente em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Desde que $\mathcal{N}_\lambda^-$ é fechado, segue que u_2 é uma solução de (P_λ) tal que $u_2 \in \mathcal{N}_\lambda^-$ e

$$J_\lambda(u_2) = c_{\mathcal{N}_\lambda^-} > 0.$$

Portanto, se $\lambda^* := \Gamma_2$, temos que para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$, o Problema (P_λ) possui duas soluções positivas u_1 e u_2 tais que $I_\lambda(u_1) < 0 < I_\lambda(u_2)$. $\square$

4.4 Prova do Teorema 4.2

Prova do item (i):

Fixemos $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$. Pela Proposição 4.2, existe uma sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda$ tal que

$$J_\lambda(u_n) = c_{\mathcal{N}_\lambda} + o_n(1) \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_n) = o_n(1).$$

De acordo com o item (ii) da Proposição 4.3, podemos garantir que J_λ satisfaz a condição $(PS)_c$, sempre que

$$c < c_{\lambda,\infty} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_\alpha^*}\right) \left(\frac{a^{\frac{p_\alpha^*}{p}}}{|g|_\infty}\right)^{\frac{p}{p_\alpha^* - p}} S_\alpha^{\frac{N-\alpha}{sp-\alpha}} - \widehat{C}(\lambda |f|_\infty)^{\frac{p}{p-q}}.$$

Notemos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que $c_{\lambda,\infty} > 0$, para todo $0 < \lambda < \lambda_0$. Então, podemos considerar $\Gamma_4 := \sup\{\lambda > 0 : c_{\lambda,\infty} > 0\}$. Desde que $c_{\mathcal{N}_\lambda} < 0$ para todo $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_1}$, considerando $\Gamma_5 := \min\{\Gamma_1, \Gamma_4\}$, segue que para todo $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_5}$,

$$c_{\mathcal{N}_\lambda} < c_{\lambda,\infty}.$$

Portanto, aplicando o item (ii) da Proposição 4.3, existe $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$, fortemente em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Portanto, u é uma solução de (P_λ) tal que $u \in \mathcal{N}_\lambda$ e

$$J_\lambda(u) = c_{\mathcal{N}_\lambda}.$$

Dessa forma, considerando $\lambda^* := \Gamma_5$ e argumentando como na prova do Teorema 4.1, concluímos que u é uma solução positiva de (P_λ) tal que $u \in \mathcal{N}_\lambda^+$ e

$$I_\lambda(u) = J_\lambda(u) = c_{\mathcal{N}_\lambda^+} < 0,$$

para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Prova do item (ii):

O item (i) garante a existência de uma solução positiva $u_1 \in \mathcal{N}_\lambda^+$ tal que

$$J_\lambda(u_1) = c_{\mathcal{N}_\lambda^+},$$

para todo $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_5}$.

Agora, mostremos a existência da segunda solução. De fato, pela Proposição 4.2, para $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_2}$, existe $\{v_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ tal que

$$J_\lambda(v_n) = c_{\mathcal{N}_\lambda^-} + o_n(1) \quad \text{e} \quad J'_\lambda(v_n) + o_n(1).$$

Pelo Lema 4.14, existe $b_0 > 0$ tal que para cada $b \in [0, b_0)$ é possível encontrar $\Gamma_3(b) > 0$ tal que para $\lambda \in \Lambda_{\Gamma_3(b)}$, vale a estimativa

$$c_{\mathcal{N}_\lambda^-} < c_{\lambda,\infty}.$$

Assim, a partir do item (ii) da Proposição 4.3, existe $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que $v_n \to v$ fortemente em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Portanto, v é uma solução positiva de (P_λ) tal que $v \in \mathcal{N}_\lambda^-$ e

$$J_\lambda(v) = c_{\mathcal{N}_\lambda^-} > 0.$$

Assim, para cada $b \in [0, b_0)$, podemos considerar

$$\lambda^{**}(b) := \min\{\Gamma_2, \Gamma_3(b), \Gamma_5\}$$

de modo que para cada $\lambda \in (0, \lambda^{**}(b))$, o Problema (P_λ) possui duas soluções positivas u_1 e u_2 tais que

$$I_\lambda(u_1) < 0 < I_\lambda(u_2).$$

$\square$

Apêndice

$\mathcal{A}$

Apêndice

A.1 Desigualdades

Lema A.1 (Desigualdade de Young). *Seja $1 < p < \infty$. Então, para todo $a, b \geq 0$, tem-se*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Demonstração. Ver p. 92 de [15]. □

Teorema A.1 (Desigualdade de Hölder). *Se $1 < p < \infty$ e $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega uvdx \leq |u|_p |v|_{p'}.$$

Demonstração. Veja [1, Teorema 2.4]. □

Lema A.2. *Se $1 \leq p < \infty$ e $a \geq 0$, $b \geq 0$, então*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Demonstração. Veja [1, Lema 2.2]. □

A.2 Resultados de convergência

Lema A.3 (Lema de Fatou). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável e $\{u_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas. Então,*

$$\int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} u_n \right) dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega u_n dx.$$

Demonstração. Veja [1, Teorema 1.49]. □

Teorema A.2 (Teorema da Convergência Dominada). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável e $\{u_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis tal que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p.*

$x \in \Omega$. *Se existe* $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|u_n(x)| \leq g(x)$, *para todo* n *e para q.t.p.* $x \in \Omega$, *então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n dx = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} u_n dx.$$

Demonstração. Veja [1, Teorema 1.50]. □

Teorema A.3. *Se X é um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência limitada em X possui uma subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Veja [15, Proposição 3.5]. □

Teorema A.4. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto mensurável,* u_n *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $u \in L^p(\Omega)$ *tal que* $|u_n - u|_p \to 0$. *Então, existe uma subsequência* $\{u_{n_k}\}$ *de* $\{u_n\}$ *e uma função* $h \in L^p(\Omega)$ *tais que*

(i) $u_{n_k}(x) \to u(x)$, *q.t.p.* $x \in \Omega$;

(ii) $|u_{n_k}(x)| \leq h$, *q.t.p.* $x \in \Omega$.

Demonstração. Veja [15, Teorema 4.9]. □

Lema A.4 (Brézis-Lieb)**.** *Seja* $\{u_n\} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$, $0 < p < \infty$ *uma sequência limitada tal que* $u_n \to u$ *q.t.p.* $x \in \mathbb{R}^N$. *Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx + o_n(1).$$

Demonstração. Confira [16, Teorema 1]. □

Lema A.5. *O funcional* $L : W_0^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dado por* $L(u) := \frac{1}{p}\|u\|^p$ *é de classe* C^1 *e sua derivada, denotada por* $(-\Delta_p)^s : W_0^{s,p}(\Omega) \to W^{-s,p'}(\Omega)$ *é dada por*

$$\langle (-\Delta_p)^s(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp}} dxdy.$$

Além disso, $(-\Delta_p)^s$ *é um operador sequencialmente contínuo do tipo fraco-fraco.*

Demonstração. Veja [29, Lema 2.2]. □

Lema A.6. *Se* $\{u_n\}$ *é uma sequência limitada em* $W_0^{s,p}(\Omega)$ *e existe* $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *tal que* $u_n(x) \to u(x)$, *q.t.p.* $x \in \Omega$, *então*

$$\|u_n - u\|^p = \|u_n\|^p - \|u\|^p + o_n(1).$$

Demonstração. Veja [65, Lemma 3.2]. □

Lema A.7. *Se* $1 \leq p < \infty$, *então os operadores* $P^\pm : W_0^{s,p}(\Omega) \to W_0^{s,p}(\Omega)$ *definidos por* $P^\pm(u) = u^\pm$ *são tanto fracamente quanto fortemente contínuos.*

Demonstração. Note que os operadores $P^{\pm}$ estão bem definidos desde que $\|u^{\pm}\| \leq \|u\|$. Primeiro, mostremos que $P^{\pm}$ são fracamente contínuos. De fato, seja $\{u_n\} \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ uma sequência tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Então, $\{u_n\}$ é limitada e desde que $\|u_n^{\pm}\| \leq \|u_n\|$, as sequências $\{u_n^{\pm}\}$ também são limitadas. Logo, existem v_1 e v_2 em $W_0^{s,p}(\Omega)$ tais que, passando a uma subsequência, $u_n^+ \rightharpoonup v_1$ e $u_n^- \rightharpoonup v_2$. Desde que a imersão $W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ é compacta para todo $r \in [1, p^*)$, a menos de subsequência, temos que $u_n \to u$, $u_n^+ \to v_1$ e $u_n^+ \to v_2$ em $L^r(\Omega)$. Dessa forma, $u_n^{\pm}(x) \to u^{\pm}(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$, bem como $u_n^+(x) \to v_1(x)$ e $u_n^-(x) \to u^-(x)$, q.t.p. $x \in \Omega$. Portanto, $v_1 = u^+$ e $v_2 = u^-$, provando que $P^{\pm}(u_n) \rightharpoonup P^{\pm}(u)$ fracamente.

Agora, provemos que os operadores $P^{\pm}$ são fortemente contínuos. Seja $\{u_n\} \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ uma sequência tal que $u_n \to u$ fortemente em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^{2N}$, $x \neq y$, definamos

$$w_n(x,y) := \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \quad \text{e} \quad w(x,y) := \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}.$$

Então, a menos de subsequência, temos que

$$\begin{aligned} &w_n \to w, \text{ em } L^1(\mathbb{R}^{2N}),\\ &w_n \leq h, \text{ para algum } h \in L^1(\mathbb{R}^{2N}). \end{aligned}$$

Além disso, pela compacidade da imersão $W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, para $r \in [1, p^*)$, temos que

$$\begin{aligned} &u_n \to u, \text{ em } L^r(\mathbb{R}^{2N}),\\ &u_n(x) \to u(x), \text{ q. t. p. } x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Considere ainda as funções

$$w_{n,\pm}(x,y) := \frac{|u_n^{\pm}(x) - u_n^{\pm}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \quad \text{e} \quad w_{\pm}(x,y) := \frac{|u^{\pm}(x) - u^{\pm}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}.$$

Como $w_{n,\pm} \leq w_n$, temos que $w_{n,\pm} \leq h$ para todo n, e desde que $u_n^{\pm}(x) \to u^{\pm}(x)$, q.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$, segue que $w_{n,\pm}(x,y) \to w^{\pm}(x,y)$, q.t.p. $(x,y) \in \mathbb{R}^{2N}$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos que $\|u_n^{\pm}\| \to \|u^{\pm}\|$. Desde que $P^{\pm}$ são fracamente contínuos, obtemos $u_n^{\pm} \rightharpoonup u^{\pm}$. Pelo Lema A.6, segue que $u_n^{\pm} \to u^{\pm}$. Acabamos de mostrar que se $\{u_n\}$ é qualquer sequência que converge para u, então $\{P^{\pm}(u_n)\}$ tem subsequência que converge para $P^{\pm}(u)$. Assim, se existir uma sequência $\{u_n\}$ que converge para u mas que $\{P^{\pm}(u_n)\}$ não converge para $P^{\pm}(u)$, devem existir $\epsilon > 0$ e uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ tal que $\|P^{\pm}(u_{n_k}) - P^{\pm}(u)\| \geq \epsilon$, para todo k. Dessa forma, $\{P^{\pm}(u_{n_k})\}$ não possui subsequência convergindo para $P^{\pm}(u)$, o que é uma contradição. Portanto, $P^{\pm}$ são fortemente contínuos. $\square$

Lema A.8. *Seja $\{u_n\} \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ uma sequência limitada com $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$, para algum $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ e $p < r_n \leq p_\alpha^*$ com $r_n \to p_\alpha^*$ as $n \to \infty$. Então, a menos de* *subsequência, temos que*

$$\int_\Omega \frac{|u_n|^{r_n-2}u_n}{|x|^\alpha} v dx = \int_\Omega \frac{|u|^{p_\alpha^*-2}u}{|x|^\alpha} v dx + o_n(1), \ \forall v \in W_0^{s,p}(\Omega).$$

Demonstração. Veja [29, Lema 2.14]. □

Lema A.9. *Sejam $0 \leq \alpha < sp < N$, $1 < q \leq p^*$, $1 < r \leq p_\alpha^*$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Carathéodory tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ de modo que*

$$|g(x,t)| \leq \epsilon |t|^{p^*-1} + C_\epsilon (1 + |t|^{q-1} + |t|^{r-1}/|x|^\alpha), \ \text{q. t. p. } x \in \Omega, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{A.1}$$

Então, o funcional $H : W_0^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$H(u) := \int_\Omega G(x,u) dx, \ \text{com} \ G(x,t) = \int_0^t g(x,\tau) d\tau,$$

é de classe C^1 e

$$\langle H'(u), v \rangle = \int_\Omega g(x,u) v dx, \quad \forall \, v \in W_0^{s,p}(\Omega). \tag{A.2}$$

Além disso, o operador $H' : W_0^{s,p}(\Omega) \to W^{-s,p'}(\Omega)$ é sequencialmente contínuo do tipo fraco-fraco. Se $q < p^*$ e $r < p_\alpha^*$, então H é sequencialmente fracamente contínuo.

Demonstração. A partir de (A.1), temos que H está bem definida e por meio de argumentos padrões, prova-se que H é de classe C^1 com derivada H' dada por (A.2).

Vejamos que H' é sequencialmente contínua do tipo fraco-fraco. De fato, seja $\{u_n\} \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Lembremos que a imersão $W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega, dx/|x|^\beta)$ é contínua para $t \in [1, p_\beta^*]$ e compacta para $t \in [1, p_\beta^*)$ com $0 \leq \beta < sp$. Então, $u_n \to u$ em $L^t(\Omega, dx/|x|^\beta)$. Portanto, $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$. Ademais, por (A.1), $\{g(x,u_n)\}$ é limitada em $L^{(p^*)'}(\Omega)$ que implica na existência de $w \in L^{(p^*)'}(\Omega)$ tal que $g(x,u_n) \rightharpoonup w$ fracamente em $L^{(p^*)'}(\Omega)$. Como $g(x,u_n) \to g(x,u)$ q.t.p. $x \in \Omega$, segue que $w = g(x,u)$. Assim, para todo $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$, temos que

$$\langle H'(u_n), v \rangle = \int_\Omega g(x,u_n) v dx \to \int_\Omega g(x,u) v dx = \langle H'(u), v \rangle, \tag{A.3}$$

como queríamos.

Resta mostrar que H é sequencialmente fracamente contínuo. Com efeito, seja $\{u_n\} \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Então, $\{u_n\}$ é limitada e pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega G(x,u_n)-G(x,u)dx\right| &\leq \int_\Omega\int_0^1 |g(x,tu_n+(1-t)u)||u_n-u|dtdx\\ &\leq C\epsilon + C_\epsilon\int_\Omega |u_n-u|dx + C_\epsilon\int_\Omega |u_n-u|^q dx\\ &\quad + C_\epsilon\int_\Omega \frac{|u_n-u|^r}{|x|^\alpha}dx.\end{aligned}$$

Desde que $q<p^*$ e $r<p_\alpha^*$, segue que

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_\Omega G(x,u_n)-G(x,u)dx\right|\leq C\epsilon,\quad \forall\epsilon>0.$$

Portanto, $H(u_n)\to H(u)$, que conclui a prova. $\square$

Lema A.10. *Sejam $0\leq\alpha\leq sp<N$, $1<q<p^*$, $1<r<p_\alpha^*$ e $g:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função Carathéodory satisfazendo* (A.1). *Se $\{u_n\}\subset W_0^{s,p}(\Omega)$ é uma sequência tal que $u_n\rightharpoonup u$, então, a menos de subsequência, temos que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g(x,u_n)u_n dx = \int_\Omega g(x,u)udx.$$

Demonstração. Seja $\{u_n\}\subset W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que $u_n\rightharpoonup u$. Pelo Lema A.9, temos que $H'(u_n)\rightharpoonup H'(u)$ fracamente em $W^{-s,p'}(\Omega)$. Como $W_0^{s,p}(\Omega)$ é reflexivo, obtemos

$$\int_\Omega g(x,u_n)udx\to\int_\Omega g(x,u)udx.$$

Dado $\epsilon>0$, por (A.1) e pela desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega g(x,u_n)u_n-g(x,u)udx\right| &\leq \int_\Omega |g(x,u_n)||u_n-u|dx+\left|\int_\Omega (g(x,u_n)-g(x,u))udx\right|\\ &\leq \epsilon|u_n|_{p^*}|u_n-u|_{p^*}+C_\epsilon\left(|u_n|_1|u_n-u|_1+|u_n|_r|u_n-u|_r\right)\\ &\quad + C_\epsilon\left(\int_\Omega\frac{|u_n|^q}{|x|^\alpha}dx\right)\left(\int_\Omega\frac{|u_n-u|^q}{|x|^\alpha}\right)\\ &\quad + \left|\int_\Omega (g(x,u_n)-g(x,u))udx\right|.\end{aligned}$$

Desde que a imersão $W_0^{s,p}(\Omega)\hookrightarrow L^t(\Omega,dx/|x|^\beta)$ é compacta, para todo $t\in[1,p_\beta^*)$ e todo $\beta\in[0,sp)$, existe $C>0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_\Omega g(x,u_n)u_n-g(x,u)udx\right|\leq C\epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, concluímos o resultado. $\square$

A.3 Resultados de métodos variacionais

Teorema A.5 (Ekeland)**.** *Sejam (X,d) um espaço métrico completo, e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Para todo $u \in X$ tal que*

$$\inf I \leq I(u) \leq \inf I + \epsilon$$

e todo $\delta > 0$, existe $v \in X$ tal que

$$I(v) \leq I(u),$$

$$d(u,v) \leq \delta,$$

$$I(w) > I(v) - \left(\frac{\epsilon}{\delta}\right) d(v,w), \ \forall w \neq v.$$

Demonstração. Confira [40, Teorema 1.1]. □

Teorema A.6. *Seja X um espaço de Banach. Sejam F_0 um subespaço fechado de um espaço métrico F e $\Gamma_0 \subset C(F_0, X)$. Defina*

$$\Gamma = \{g \in C(F,X) : g|_{F_0} \in \Gamma_0\}.$$

Se $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ satisfaz

$$\infty > c := \inf_{g \in \Gamma} \sup_{u \in F} I(g(u)) > a := \sup_{g_0 \in \Gamma_0} \sup_{u \in F_0} I(g_0(u)), \tag{A.4}$$

então existe uma sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que

$$I(u_n) \to c, \quad I'(u_n) \to 0.$$

Em particular, se I satisfaz a condição $(PS)_c$, então c é um valor crítico de I.

Demonstração. Veja [79, Teorema 2.9]. □

Teorema A.7. *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ tal que $I(0) = 0$ e satisfaz as seguintes condições:*

(i) existem $d, d' > 0$ tais que $I(u) \geq d'$ para todo $u \in X$ com $\|u\| = d$;

(ii) existe $e \in X$ tal que $\|e\| > d$ e $I(e) < 0$.

Então, existe uma sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que

$$I(u_n) \to c, \quad I'(u_n) \to 0,$$

sendo

$$\begin{aligned} c: &= \inf_{g\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]} I(g(t)) > 0, \\ \Gamma: &= \{g \in C([0,1],X) : g(0)=0, I(g(1))<0\}. \end{aligned}$$

Em particular, se I satisfaz a condição $(PS)_c$, então c é um valor crítico de I.

Demonstração. Basta aplicar o Teorema A.6 considerando $F=[0,1]$, $F_0=\{0,1\}$ e $\Gamma_0=\{g_0:\{0,1\}\to X : g_0(0)=0, I(g_0(1))<0\}$. De fato, a hipótese (A.4) é satisfeita, pois a partir de (i) e (ii), temos que

$$c \geq \inf_{\|u\|=d} I(u) > 0 = \sup_{g_0\in\Gamma_0}\sup_{t\in F_0} I(g_0(t)).$$

□

Referências Bibliográficas

[1] R. Adams, J. Fournier, *Sobolev spaces*, Academic Press, Boston, 2003.

[2] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa, T.F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type* , Comp. & math. with appl. **49** (2005), 85-93.

[3] C.O. Alves, M. A. S. Souto; *Existence of least energy nodal solution for a Schrödinger-Poisson system in bounded domains*, Z. Angew. Math. Phys. **65** (2014), 1153-1166.

[4] A. Ambrosetti, H. Brézis, G. Cerami; *Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems*, J. Funct. Anal. **122** (1994), 519-546.

[5] D. Applebaum; *Levy processes and stochastic calculus* 2nd edn. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 116. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[6] G. Autuori, A. Fiscella, P. Pucci, *Stationary Kirchhoff problems involving a fractional elliptic operator and a critical nonlinearity*, Nonlinear Analysis **125** (2015), 699-714.

[7] B. Barrios, E. Colorado, A. de Pablo, U. Sánchez; *On some critical problems for the fractional Laplacian operator*, J. Differential Equations **252** (2012), 6133-6162.

[8] B. Barrios, E. Colorado, R. Servadei, F. Soria; *A critical fractional equation with concave-convex power nonlinearities*, Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Non Linéaire **32** (2015), 875-900.

[9] T. Bartsch, T. Weth; *Three nodal solutions of singularly perturbed elliptic equations on domains without topology*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **22** (2005), 259-281.

[10] G. M. Bisci, V. D. Radulescu, R. Servadei; *Variational methods for nonlocal fractional problems*, vol. 162 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[11] G. M. Bisci, D. Repovs; *Fractional nonlocal problems involving nonlinearities with bounded primitive*, J. Math. Anal. Appl. **420** (2014), 167-176.

[12] K. Bogdan; *The boundary Harnack principle for the fractional Laplacian*, Studia Math. **123** (1997), 43-80.

[13] C. Brändle, E. Colorado, A. de Pablo, U. Sánchez*A concave-convex elliptic problem involving the fractional Laplacian*, The Royal Society of Edinburgh **143A** (2013), 39-71.

[14] L. Brasco, S. Mosconi, M. Squassina; *Optimal decay of extremals for the fractional Sobolev inequality* Calc. Var. Partial Differential Equations **55** (2016), 1-32.

[15] H. Brézis; *Functional Analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, New York, 2010.

[16] H. Brezis, E. Lieb; *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 486-490.

[17] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), 437-477.

[18] K.J. Brown, Y. Zhang, *The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function*, J. Differential Equations 193 (2003), 481-499.

[19] C. Bucur, E. Valdinoci; *Nonlocal diffusion and applications* vol. 1 Springer International Publishing, Switzerland, 2016.

[20] X. Cabré, J. Tan; *Positive solutions of nonlinear problems involving the square root of the Laplacian*, Advances in Mathematics **224** (2010), 2052-2093.

[21] L. Caffarelli; *Nonlocal equations, drifts and games*, Nonlinear Partial Differential Equations **7** (2012), 37-52.

[22] L. Caffarelli, L. Silvestre; *An extension problem related to the fractional Laplacian, Comm. Partial Differential Equations* **32** (2007), 1245-1260.

[23] L. Caffarelli, *Surfaces minimizing nonlocal energies* Rend. Lincei Mat. Appl. **20** (2009), 281-299.

[24] M. Caponi, P. Pucci, *Existence theorems for entire solutions of stationary Kirchhoff fractional p-Laplacian equations*, Annali di Matematica **195** (2016), 2099-2129.

[25] C. Cerami, S. Solimini, M. Struwe; *Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents*, J. Functional Analysis **69** (1986), 289-306.

[26] X. J. Chang, Z. Q. Wang; *Ground state of scalar field equations involving a fractional Laplacian with general nonlinearity*, Nonlinearity **26** (2013), 479-494.

[27] X. J. Chang, Z. Q. Wang; *Nodal and multiple solutions of nonlinear problems involving the fractional Laplacian*, J. Differential Equations **256** (2014), 2965-2992.

[28] C. Chen, Y. Kuo, T. Wu; *The Nehari manifold for a Kirchhoff type problem involving sign-changing weight functions*,J. Differential Equations 250 (2011), 1876-1908

[29] W. Chen, S. Mosconi, M. Squassina, *Nonlocal problems with critical Hardy nonlinearity*, J. Funct. Anal. **275** (2018), 3065-3114.

[30] W. Chen, M. Squassina; *Critical Nonlocal Systems with Concave-Convex Powers*, Advanced Nonlinear Studies **16** (2016), 821-842

[31] R. Cont, P. Tankov; *Financial modelling with jump processes*, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, Boca Raton, 2004.

[32] G. Cora, A. Iacopetti; *On the structure of the nodal set and asymptotics of least energy sign-changing radial solutions of the fractional Brezis-Nirenberg problem*, Nonlinear Analysis **176** (2018), 226-271.

[33] M. Cuesta; *Minimax theorems on C^1 manifolds via Ekeland variational principle*, Abstr. Appl. Anal. **2003** (2003), 757-768.

[34] E. N. Dancer, D. Yihong; *On sign-changing solutions of certain semilinear elliptic problems*, Appl. Anal. **56** (1995), 193-206.

[35] Y. Deng, W. Shuai; *Sign-changing solutions for non-local elliptic equations involving the fractional Laplacain* Adv. Differential Equations **23** (2018), 129-134.

[36] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci; *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. math. **136** (2012), 521-573.

[37] S. Dipierro, M. Medina, I. Peral, E. Valdinoci,*Bifurcation results for a fractional elliptic equation with critical exponent in $\mathbb{R}^n$*, Manuscripta Math. **153** (2017), no. 1-2, 183-230.

[38] S. Dipierro, M. Medina, E. Valdinoci, *Fractional elliptic problems with critical growth in the whole of $\mathbb{R}^n$*, Appunti. Scuola Normale Superiore di Pisa (Nuova Serie) [Lecture Notes. Scuola Normale Superiore di Pisa (New Series)], 15. Edizioni della Normale, Pisa, 2017. viii+152 pp.

[39] P. Drábek, S.I. Pohozaev, *Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 127 (1997), 703-726.

[40] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47** (1974), 324-353.

[41] M. Ferrara, G. Molica Bisci, B. Zhang; *Existence of weak solutions for non-local fractional problems via Morse theory*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B **19** (2014), 2493-2499.

[42] G.M. Figueiredo, *Existence of a positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument*, J. Math. Anal. Appl. **401** (2013), 706-713.

[43] G.M. Figueiredo, J.R.S. Junior, *Multiplicity of solutions for a Kirchhoff equation with subcritical or critical growth* Differential and Integral Equations **25** (2012), 853-868.

[44] G.M. Figueiredo, R.G. Nascimento, *Existence of a nodal solution with minimal energy for a Kirchhoff equation*, Math. Nachr. **288** (2015), 46-60.

[45] A. Fiscella, G.M. Bisci, R.Servadei, *Bifurcation and multiplicity results for critical nonlocal fractional Laplacian problems*, Bulletin des Sciences Mathématiques **140** (2016), 14-35.

[46] A. Fiscella, P. Pucci, *p-fractional Kirchhoff equations involving critical nonlinearities*, Nonlinear Analysis:Real World Applications **35** (2017), 350-378.

[47] A. Fiscella, E. Valdinoci, *A critical Kirchhoff type problem involving a nonlocal operator*, Nonlinear Analysis **94** (2014), 156-170.

[48] G. Franzina, G. Palatucci, *Fractional p-eigenvalues*, Riv. Mat. Univ. Parma **5** (2014), 315-328.

[49] R.F. Gabert, R.S. Rodrigues; *Existence of sign-changing solution for a problem involving the fractional Laplacian with critical growth nonlinearities* Compl.Var. Ellipt. Equat. (2019), DOI: 10.1080/17476933.2019.1579208.

[50] N. Ghoussoub, C. Yuan, *Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 5703-5743.

[51] S. Goyal, K. Sreenadh; *Nehari manifold for non-local elliptic operator with concave-convex nonlinearities and sign-changing weight functions*, Adv. Nonlinear Anal. **4** (2015), 37-58.

[52] A. Iannizzotto, S. Liu, K. Perera, M. Squassina, *Existence results for fractional p-Laplacian problems via Morse theory*, Adv. Calc. Var **9** (2014), 101-125.

[53] G. Kirchhoff, *Mechanik*, Teubner, Leipzig (1883).

[54] N. Laskin, *Fractional quantum mechanics and Levy path integrals*, Physics Letters A **268** (2000), 298-305.

[55] X. Liu, Y. Mei; *Existence of nodal solution for semi-linear elliptic equations with critical sobolev exponent on singular manifold*, Acta Mathematica Scientia **33** (2013), 543-555.

[56] Z. Liu, J. Sun; *Invariant Sets of Descending Flow in Critical Point Theory with Applications to Nonlinear Differential Equations* J. Differential Equations **172** (2001), 257-299.

[57] E. Lindgren, P. Lindqvist, Fractional eigenvalues, Calc. Var. Partial Differential Equations **49** (2014), 795-826.

[58] S.S. Lu, *Signed and sign-changing solutions for a Kirchhoff-type equation in bounded domains*, J. Math. Anal. Appl. **432** (2015), 965-982.

[59] H. Luo; *Sign-changing solutions for non-local elliptic equations*, EJDE **180** (2017), 1-15.

[60] H. Luo, X. Tang, Z. Gao, *Ground state sign-changing solutions for fractional Kirchhoff equations in bounded domains*, J. Mathematical Physics **59** (2018), 15 pages.

[61] H. Luo, X. Tang, Z. Gao; *Sign-changing solutions for non-local elliptic equations with asymptotically linear term* Americ. Inst. of Math. Scienc. **17** 3 (2018), 1147-1159.

[62] P. Mishra, K. Sreenadh; *Existence and multiplicity results for fractional p-Kirchhoff equation with sign changing nonlinearities*, Adv. Pure Appl. Math. **7** (2015), 97-114

[63] S. Mosconi, M. Squassina, *Nonlocal problems at nearly critical growth*, Nonlinear Anal. **136** (2016), 84-101.

[64] J.M. do Ó, J. Giacomoni, P.K. Mishra; *Nehari Manifold for Fractional Kirchhoff Systems with Critical Nonlinearity*, Milan J. Math (2019), 1-31.

[65] K. Perera, M. Squassina, Y. Yang; *Bifurcation and multiplicity results for critical fractional p-Laplacian problems*, Math. Nachr. **289** (2016), 332-342.

[66] X. Ros-Oton, *Nonlocal elliptic equations in bounded domains*, Publ. Mat. **60** (2016), 3-26.

[67] R. Servadei, E. Valdinoci; *A Brezis-Nirenberg result for non-local critical equations in low dimension*, CPAA **12** (2013), 2445-2464.

[68] R. Servadei, E. Valdinoci; *The Brezis-Nirenberg result for the fractional Laplacian*, Trans. Am. Math. Soc. **367** (2015), 67-102.

[69] R. Servadei, E. Valdinoci; *Fractional Laplacian equations with critical Sobolev exponent* Rev. Mat. Comput. **28** 655-676, 2015.

[70] R. Servadei, E. Valdinoci; *Mountain Pass solutions for non-local elliptic operators*, J. Math. Anal. Appl. **389** (2012), 887-898.

[71] R. Servadei, E. Valdinoci; *Variational methods for non-local operators of elliptic type*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **33** (2013), 2105-2137.

[72] W. Shuai; *Sign-changing solutions for a class of Kirchhoff-type problem in bounded domains*, J. Diff. Equat. **259** 4 (2015), 1256-1274.

[73] M. Struwe; *Three nontrivial solutions of anticoercive boundary value problems for the pseudo-Laplace-operator*, J. Reine Angew. Math. **325** (1981), 68-74.

[74] J. Tan; *The Brezis-Nirenberg type problem involving the square root of the Laplacian*, Calculus of Variations **42** (2011), 21-41.

[75] G. Tarantello, *On nonhomogeneous elliptic involving critical Sobolev exponent*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lináire **9** (1992), 281-304.

[76] G. Tarantello, H. Brezis; *Nodal solutions of semilinear elliptic equations with critical exponent*, Differential Integral Equations **5** (1992), 25-42.

[77] K. Teng, K. Wang, R. Wang; *A sign-changing solution for nonlinear problems involving the fractional Laplacian*, EJDE **109** (2015), 1-12.

[78] T. Weth, *Energy bounds for entire nodal solutions of autonomous superlinear equations*, Calc. Var. Partial Differential Equations **27** (2006), 421-437.

[79] M. Willem, *Minimax theorems* Progress in nonlinear differential equations and their applications, Birkhäuser, Boston, 1996.