

Emanuel Cardozo Diniz

**Dinâmica dissipativa em sistemas quânticos  
fortemente interagentes**

São Carlos

2019



Emanuel Cardozo Diniz

**Dinâmica dissipativa em sistemas quânticos fortemente  
interagentes**

Tese de Doutorado apresentada à Coordenação de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia (CCET) da Universidade Federal de São Carlos.

Universidade Federal de São Carlos – UFSCar  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia (CCET)  
Programa de Pós-Graduação em Física/CCET

Orientador: Celso Jorge Villas-Bôas

São Carlos

2019



# UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Física

## Relatório de Defesa de Tese

Candidato: Emanuel Cardozo Diniz

Aos 06/12/2018, às 14:00, realizou-se na Universidade Federal de São Carlos, nas formas e termos do Regimento Interno do Programa de Pós-Graduação em Física, a defesa de tese de doutorado sob o título: Dinâmica dissipativa em sistemas quânticos fortemente interagentes, apresentada pelo candidato Emanuel Cardozo Diniz. Ao final dos trabalhos, a banca examinadora reuniu-se em sessão reservada para o julgamento, tendo os membros chegado ao seguinte resultado:

### Participantes da Banca

Prof. Dr. Celso Jorge Villas Boas  
Prof. Dr. Felipe Fernandes Fanchini  
Prof. Dr. Mickel Abreu de Ponte  
Prof. Dr. Diogo de Oliveira Soares Pinto  
Prof. Dr. Francisco Ednilson Alves dos Santos

Função	Instituição
Presidente	UFSCar
Titular	UNESP
Titular	UNESP
Titular	USP
Titular	UFSCar

Conceito  
Aprovado  
Aprovado  
Aprovado  
Aprovado  
Aprovado

Resultado Final: Aprovado

### Parecer da Comissão Julgadora\*:

Encerrada a sessão reservada, o presidente informou ao público presente o resultado. Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada e, para constar, eu, Heloisa Helena Paganelli Meneghelli, representante do Programa de Pós-Graduação em Física, lavrei o presente relatório, assinado por mim e pelos membros da banca examinadora.

Prof. Dr. Felipe Fernandes Fanchini

Prof. Dr. Celso Jorge Villas Boas

Prof. Dr. Mickel Abreu de Ponte

Prof. Dr. Diogo de Oliveira Soares Pinto

Prof. Dr. Francisco Ednilson Alves dos Santos

Representante do PPG: Heloisa Helena Paganelli Meneghelli

Não houve alteração no título da tese ( ) Houve. O novo título passa a ser:

### Observações:

- a) Se o candidato for reprovado por algum dos membros, o preenchimento do parecer é obrigatório.
- b) Para gozar dos direitos do título de Mestre ou Doutor em Física, o candidato ainda precisa ter sua dissertação ou tese homologada pelo Conselho de Pós-Graduação da UFSCar.



---

**Folha de Aprovação**

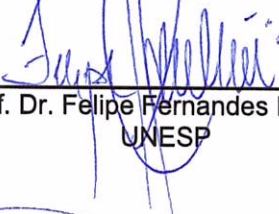
---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Emanuel Cardozo Diniz, realizada em 06/12/2018:




---

Prof. Dr. Celso Jorge Villas Boas  
UFSCar



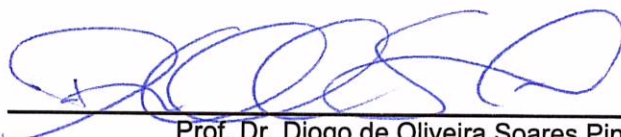
---

Prof. Dr. Felipe Fernandes Fanchini  
UNESP




---

Prof. Dr. Mickel Abreu de Ponte  
UNESP



---

Prof. Dr. Diogo de Oliveira Soares Pinto  
USP



---

Prof. Dr. Francisco Ednilson Alves dos Santos  
UFSCar

*A todos os colegas e parentes que já fizeram a viagem mais inevitável que existe.*

# Agradecimentos

Sou grato ao *homem lá de cima* e aos *anjos da guarda* que me ajudaram a chegar ao fim desta etapa. Agradeço meus pais a querida *velha* e o querido *velho*, irmãos e os animais de estimação por me fornecerem boas fontes de risadas e distrações. Agradeço ao Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas, pela orientação e por ter ajudado de maneira significativa na publicação dos trabalhos que permitiram que esta tese fosse escrita. Sou muito grato à dois colegas de grupo que considero amigos, o grande colega Daniel Zini Rossatto e o Murilo Oliveira. Também gostaria de deixar meus agradecimentos aos antigos membros do grupo, James Alves de Souza, Luis Antônio Cabral, Rommel Oliveira, Bruno Cestari e Iuri Lopes e aos atuais componentes do grupo, Carlos Máximo e Halyne. Sou muito grato ao Prof. Dr. Vivaldo Leiria Campo Jr, que me ajudou quando precisei tirar alguma dúvida e estendeu a mão. Sempre estive disposto em me auxiliar com minhas dúvidas, sendo que sua humildade e profundo conhecimento em física sempre serão uma inspiração. O Prof. Vivaldo sempre tratou os alunos de forma bastante digna e com humanidade!!! Graças a sua ajuda crucial em 2015, me ajudando a entender a física por trás de sistemas supercondutores, onde consegui aprender um pouco sobre os detalhes técnicos dessa área de pesquisa. Sou extremamente grato ao meu orientador de iniciação científica, Rodolfo Casana Sifuentes por ter me dado bons conselhos nesses últimos anos de vida acadêmica. Sou grato ao Prof. Antonio Lima Santos por ter me dado valiosos conselhos tanto no âmbito profissional como também no pessoal, além de estimular discussões interessantes em física teórica. Além disso, foi alguém que sempre me aconselhou em manter a calma e tentar terminar esse doutorado. Gostaria de agradecer ao Prof. Leonardo Castelano por me dar alguns conselhos e pela sua amizade. Aqui fica um agradecimento especial para todos os colegas e amigos que fiz na cidade. Agradeço ao Departamento de Física da Universidade Federal de São Carlos e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) processo 161117/2014-7, pelo apoio financeiro. Além disso, o presente trabalho contou com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo No. 2012/00176-9.





Pode seguir a tua estrela  
O teu brinquedo de star  
Fantasiando um segredo  
No ponto a onde quer chegar

**O teu futuro é duvidoso  
Eu vejo grana, eu vejo dor  
No paraíso perigoso  
Que a palma da tua mão mostrou**

Quem vem com tudo não cansa  
Bete balança, meu amor  
Me avise quando for a hora

Não ligue pr'essas caras tristes  
Fingindo que a gente não existe  
Sentadas, são tão engraçadas  
Dona das suas salas

Pode seguir a tua estrela  
O teu brinquedo de star  
Hummm! Fantasiando um segredo  
No ponto a onde quer chegar

**O teu futuro é duvidoso  
Eu vejo grana, eu vejo dor  
No paraíso perigoso  
Que a palma da tua mão mostrou**

Quem vem com tudo não cansa  
Bete balança o meu amor  
Me avise quando for a hora

Quem tem um sonho não dança  
Bete Balanço, por favor!  
Me avise quando for embora  
(Bete Balanço, Cazuzza)



# Resumo

Nesta tese investigamos a dinâmica dissipativa em sistemas quânticos fortemente interagentes. Este estudo é importante na geração de estados não clássicos da luz, tais como, os estados comprimidos, além de ser útil na descrição de fenômenos de transparência induzida por dipolos acoplados (DIT), que são análogos ao comportamento que ocorre no fenômeno de transparência eletromagnética induzida (EIT). A dinâmica dissipativa exerce papel crucial no entendimento correto da dinâmica estacionária e temporal em sistemas fortemente interagentes descritos por modelos de Heisenberg. Esta tese foi dividida em seis capítulos. No capítulo 2, descrevemos os formalismos dissipativos necessários para descrever a dinâmica com perda de energia que será utilizada em vários seguimentos desta tese. No capítulo 3, relatamos brevemente como investigar modelos de interação radiação matéria e sua implementação no contexto de eletrodinâmica quântica de circuitos. No capítulo 4 fornecemos brevemente os conceitos básicos sobre estados comprimidos de dois modos e, em seguida, mostramos um resultado que concerne na implementação de um protocolo para gerar estados comprimidos de dois modos (TMSS) no contexto da eletrodinâmica quântica de circuitos, além de discutir todos os mecanismos dissipativos reais e seus efeitos na geração do TMSS. No capítulo 5, discutimos brevemente o fenômeno da EIT, que será essencial para entender o resultado obtido em (DIT). Em seguida, adicionamos uma abordagem sobre o efeitos das condições periódicas de contorno e seus efeitos no fenômeno de DIT. Finalmente, no capítulo 6, discutimos a dinâmica dissipativa em cadeias de spin e esclarecemos qual o formalismo dissipativo correto para investigar a dinâmica dissipativa.

**Palavras-chave:** Sistemas quânticos abertos Markovianos, equação mestra microscópica, Interação radiação-matéria, Eletrodinâmica quântica de circuitos, Estados comprimidos de dois modos, Transparência Induzida por dipolos, Dissipação em cadeias de spins.



# Abstract

In this thesis we investigate the dissipative dynamics in strongly interacting quantum systems. The dissipative dynamics that we investigate has relevance in the generation of non-classic states of light, such as the squeezed states, besides being useful in the description of phenomena give by dipole induced transparency (DIT) that are analogous to the behavior that occurs in the electromagnetic induced transparency (EIT). We show that the dissipative dynamics given by the microscopic master equation, plays a crucial role to understand correct stationary and temporal dynamics in strongly interacting systems described by spin chains. This thesis is organized in six chapters. In the second chapter, we introduce, the dissipative formalisms necessary to describe the dissipative dynamics that will be used in the following sections of this thesis. In the chapter 3, we report briefly the basic radiation-matter interaction model, i.e., the Rabi model, and its implementation in the context of circuit quantum electrodynamics (circuit QED). In the chapter 4, we provide the basic concepts of two mode squeezed states (TMSS). Next, we describe the results obtained to implement a protocol that aims to generate the two mode squeezed states in the context of circuit QED, besides discussing all the realistic dissipative mechanisms and their effects on the generation of the TMSS. In the chapter 5, we briefly discuss the phenomenon of electromagnetically induced transparency (EIT) that will be essential to understand the result of transparency induced by dipole-dipole coupling (DIT). We also introduce an approach on the effects of periodic boundary conditions on the DIT phenomenon. Finally, in the chapter 6, we discuss the dissipative dynamics in strongly interacting spin chains and clarify the correct dissipative formalism to investigate the dynamics in these systems.

**Keywords:** Markovian open quantum systems, Master equations, Interaction of Radiation with Matter, circuit quantum electrodynamics, Two mode squeezed states, Dipole induced transparency, dissipation in spin chains.



# Lista de ilustrações

- Figura 1 – Distância traço  $DT$  ( $\rho_{Micr} = \rho_{Gibbs} - \rho_F$ ) em função do acoplamento  $g/\omega_c$ . As taxas de dissipação do modo da cavidade e do átomo são  $\kappa = \gamma = 1.0\omega_c$ . Em nossas análises consideramos o regime de temperatura  $T = 0K$ . A curva azul, vermelha tracejada e preta pontilhada correspondem às dinâmicas para o modelo de Rabi para  $N = 1, 2, 3$  átomos, respectivamente. . . . . 37
- Figura 2 – Representação pictórica da arquitetura utilizada para investigações no contexto de EQCir: (a) Um átomo artificial em verde é fabricado no centro de um guia de onda coplanar em azul. Campos elétricos e magnéticos em forma de onda estacionária são ilustrados pelas linhas vermelhas cheias e tracejadas. (b) Descrição da linha como uma cadeia de circuitos LC discretos. . . . . 39
- Figura 3 – (a) Representação pictórica da junção Josephson. (b) Descrição do circuito que compõem a junção Josephson onde os dois materiais supercondutores são descritos por suas respectivas funções de onda. (c) Representação pictórica do elemento da junção Josephson no circuito comumente vista na literatura de EQCir. . . . . 41
- Figura 4 – (a) Representação real do átomo artificial de fluxo para o sistema em questão. (b) Representação pictórica do circuito do átomo artificial de fluxo interrompido pelas junções Josephson; (c) Representação pictórica do sentido que a supercorrente supercondutora pode circular no *loop* e os dois estados de spin associados com essa supercorrente. . . . . 43
- Figura 5 – Figuras superiores: Descrição do potencial  $U/E_J$  no plano das fases  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  para um parâmetro fixo  $\alpha = 0.75$  e diferentes valores de  $f$ ; Estrutura do potencial em função das fases  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , fixando  $\alpha = 0.75$  e diferentes valores de  $f$ . Figuras inferiores: Descrição do  $U_J/E_J$  em função de uma das fases das junções no *loop* supercondutor. . . . . 44
- Figura 6 – (a, c, d) Primeiros níveis de energia do átomo artificial de fluxo. Os dois níveis inferiores são usualmente utilizados para se construir um qubit. (b) Zoom ilustrando a implementação do qubit de fluxo com os parâmetros característicos do qubit. . . . . 46
- Figura 7 – Representação pictórica no plano de fases X-Y para um estado comprimido. a) Estado comprimido na direção  $\phi = 0$ , b) compressão na direção  $\phi = \pi/6$ . . . . . 49

Figura 8 – Distribuição de fótons para o estado de vácuo comprimido para alguns valores do parâmetros de compressão $r$ . (a) $r = 0.5$ , (b) $r = 1.0$ e (c) $r = 1.5$ . . . . .	51
Figura 9 – Distribuição de fótons para o estado de vácuo comprimido de dois modos para um valor de parâmetro de compressão $r = 1.0$ . . . . .	53
Figura 10 – (a) Diagrama de níveis de energia do qubit e as frequências requeridas para o nosso esquema. (b) Representação pictórica do setup de circuit QED usada para gerar o TMSS. . . . .	56
Figura 11 – Variância como função de $r$ para diferentes regimes de parâmetros comparando $H_{full}$ [Eq. (4.6)] (linha tracejada vermelha), $V_I(t)$ [Eq.(4.10)] (linha sólida azul) e $H_-$ [Eq. (4.14)] (linha preta pontilhada). Os valores fixos são, $g_a = g_b = g$ , $\omega_0 = 500g$ , $\omega_{ef} = 5\omega_0$ , $\theta = \pi/4$ (ângulo de compressão) além disso consideramos (a) $\Delta = 35g$ e $\Omega = 20g$ ( $\lambda = g/20$ ), (b) $\Delta = 90g$ e $\Omega = 50g$ ( $\lambda = g/40$ ), (c) $\Delta = 180g$ e $\Omega = 100g$ ( $\lambda = g/80$ ). O estado inicial em que o sistema foi preparado é $ \psi(0)\rangle =  -\rangle_{atom} \otimes  \Psi(0)\rangle_{ab}$ . . . . .	59
Figura 12 – Dinâmica dissipativa nos modos do ressonador, testemunhada pela evolução da variância $V_{ar}$ em função de $r =  \lambda $ para $\Delta = 90g$ e $\Omega = 50g$ . A linha preta sólida representa o processo de compressão no caso ideal, enquanto que as linhas vermelha pontilhada e azul tracejada descrevem os outros processos dissipativos nos ressonadores. . . . .	61
Figura 13 – Dinâmica dissipativa do qubit, testemunhada pela evolução da variância $V_{ar}$ em função de $r =  \lambda \tau$ para $\Delta = 90g$ e $\Omega = 50g$ . A linha preta sólida representa o processo de compressão no caso ideal, enquanto que as linhas vermelha pontilhada e azul tracejada descrevem processos dissipativos no qubit. . . . .	62
Figura 14 – Evolução da variância $V_{ar}$ em função de $r =  \lambda \tau$ para $\Delta = 90g$ e $\Omega = 50g$ . As linha preta sólida representa o processo de compressão no caso ideal, enquanto que a linha vermelha pontilhada e azul tracejada descreve processos de defasagem no qubit. . . . .	63
Figura 15 – Variância $V_{ar}$ em função de $r =  \lambda \tau$ para o caso $\Delta = 90g$ e $\Omega = 50g$ . A linha preta sólida representa o processo de compressão no caso ideal, enquanto que a linha vermelha pontilhada e azul tracejada descrevem processos de dissipação no ressonador e no qubit. . . . .	64



Figura 16 – Variância versus parâmetro de compressão $r =  \lambda  \tau$ considerando-se a situação ideal (linha preta cheia), parâmetros reais atuais (linha vermelha pontilhada). Um processo de compressão quase ideal pode ser alcançado se formos capazes de melhorar em uma ordem de magnitude os tempos atuais de relaxação de energia e coerência do qubit de fluxo (isto é, assumindo $\gamma = \gamma_{\text{real}}/10$ e $\gamma_{\text{ph}} = \gamma_{\text{ph}}^{\text{real}}/10$ ) como vemos na linha azul tracejada. . . . .	65
Figura 17 – Representação pictórica da configuração do sistema de três níveis interagindo com campos externos necessária para descrever o fenômeno de EIT. Os parâmetros $\omega_p$ e $\omega_c$ são as frequências dos campos de prova e de controle respectivamente. As dessintonias $\Delta_p = \omega_{31} - \omega_p$ e $\Delta_c = \omega_{32} - \omega_c$ . e $\Gamma_{31}$ e $\Gamma_{32}$ são as taxas de decaimento do nível $ 3\rangle$ para os níveis menos excitados $ 1\rangle$ e $ 2\rangle$ , respectivamente. . . . .	67
Figura 18 – Absorção do sistema no regime de EIT em função da dessintonia $\Delta_p/\gamma_{31}$ para diferentes valores $\Omega_c$ . O valor do campo de prova é $\Omega_p = 0.02 \gamma_{31}$ . Em (a) $\Omega_c = 0.2\gamma_{31}$ , (b) $\Omega_c = 0.5\gamma_{31}$ e (c) $\Omega_c = 2.0\gamma_{31}$ . . . . .	70
Figura 19 – Representação pictórica do sistema, com $1 + N$ sistemas de dois níveis com acoplamento dipolo-dipolo $d_i$ entre os primeiros vizinhos, sendo que o primeiro átomo de dois níveis é bombeado por um campo coerente com frequência de Rabi $2\Omega_p$ e frequência oscilante $\omega_p$ . . . . .	72
Figura 20 – (a) Absorção normalizada (linha preta sólida) e dispersão (linha vermelha tracejada) do primeiro TLS quando acoplado ao segundo como função de $\Delta_p/\gamma_0$ . A linha preta pontilhada descreve a absorção para o caso $d_0 = 0$ . (b) Parte imaginária da susceptibilidade óptica de terceira ordem comparando DIT e EIT: dois TLS's acoplados via interação dipolo-dipolo (linha sólida) e o usual sistema de três níveis onde o fenômeno de EIT é observado (linha tracejada). (c) Parte real da susceptibilidade de primeira ordem; (d) parte real da susceptibilidade óptica de terceira ordem para dois TLS's acoplados via interação dipolo-dipolo (linha sólida) e o sistema usual $\Lambda$ (linha tracejada). Em (c) observa-se que as curvas se sobrepõem perfeitamente. Os parâmetros usados são: $\Omega_p = 0.03\gamma_0$ , $d_0 = 0.5\gamma_0$ , $\gamma_1 = 10^{-3}\gamma_0$ . . . . .	75
Figura 21 – Representação pictórica do sistema. O modo da cavidade bombeado por um campo externo acoplado a $1 + N$ TLS's. O acoplamento entre o modo de cavidade e o primeiro TLS é dado pela frequência Rabi $g$ e o campo da sonda bombeia a cavidade com intensidade $\epsilon$ . $d_i$ descreve o acoplamento dipolo-dipolo e $\gamma_i$ refere-se às taxas de dissipação individuais de cada sistema de dois níveis. . . . .	77

Figura 22 – Absorção normalizada, $\text{Im}\langle a \rangle_{ss}$ , (linha sólida preta) e a dispersão, $\text{Re}\langle a \rangle_{ss}$ , (linha tracejada vermelha) do modo da cavidade como uma função da dessintonia normalizada $\Delta_p/\kappa$ . Os parâmetros utilizados são: $\gamma_0 = \kappa$ , $g = 5\kappa$ , $d = 3\kappa$ , $ \epsilon  = 0.03\kappa$ , e $\gamma_1 = 10^{-3}\kappa$ . A linha pontilhada preta descreve a absorção quando o acoplamento entre os TLS's e o modo da cavidade é nulo, isto é ( $g = 0$ ). . . . .	79
Figura 23 – Painéis a esquerda: Primeiras autoenergias em função de $d/\gamma_0$ . Painéis a direita: taxas de transição entre o estado fundamental e os estados mais excitados como função de $d/\gamma_0$ . Em todos os gráficos fixamos os parâmetros $d_0 = 0.5\gamma_0$ e $N = 2$ nos painéis (a) e (b), e $N = 4$ nos painéis (c) e (d). . . . .	80
Figura 24 – Absorção normalizada (linha sólida preta) e dispersão (linha tracejada vermelha) do primeiro TLS acoplado a $N = 4$ TLS's com função de $\Delta_p/\gamma_0$ . Os parâmetros usados são $\Omega_p = 0.03\gamma_0$ , $\gamma_i = \gamma = 10^{-3}\gamma_0$ e $d_0 = 0.5\gamma_0$ . Os valores do acoplamento $d$ são: (a) $d = d_0/\sqrt{2}$ ; (b) $d = 2.5\gamma_0$ . As linhas pontilhadas pretas representam a absorção para $d_0 = 0$ . . . . .	82
Figura 25 – Absorção normalizada, $\text{Im}\langle \sigma_+^0 \rangle_{ss}$ como função da dessintonia normalizada $\Delta_p/\gamma_0$ , para diferentes números de TLS acoplados ao principal ( $N = 7, 10, 12$ e $15$ ). Os parâmetros utilizados são $\gamma_0 = 1$ , $\Omega_p = 0.03\gamma_0$ , $\gamma_i = \gamma = 10^{-3}\gamma_0$ , $d_0 = 0.5\gamma_0$ e $d = d_0/\sqrt{2}$ . . . . .	83
Figura 26 – Absorção normalizada, $\text{Im}\langle \sigma_+^0 \rangle_{ss}$ como função da dessintonia normalizada $\Delta_p/\gamma_0$ , para diferentes números de TLS acoplados ao principal ( $N = 7, 10, 12$ e $15$ ). Os parâmetros utilizados são $\gamma_0 = 1$ , $\Omega_p = 0.03\gamma_0$ , $\gamma_i = \gamma = 10^{-3}\gamma_0$ , $d_0 = 0.5\gamma_0$ e (b) $d = 2.5\gamma_0$ . . . . .	84
Figura 27 – Absorção normalizada (linha contínua preta) e a dispersão (linha tracejada vermelha) do modo da cavidade acoplado a 5 TLS's (isto é, $N = 4$ ) como função de $\Delta_p/\kappa$ . Os parâmetros usados são $ \epsilon  = 0.03\kappa$ , $\gamma_i = \gamma = 10^{-3}\kappa$ , e: (c) $d = 0.4\kappa$ , $g = \sqrt{2}d$ , e $\gamma_0 = 10^{-3}\kappa$ ; e (b) $d = 3.0\kappa$ , $g = 2.0\kappa$ , e $\gamma_0 = 10^{-3}\kappa$ . As linhas pontilhadas pretas representam a absorção para $g = 0$ . . . . .	85
Figura 28 – Painéis a esquerda: Primeiras autoenergias em função de $g/\kappa$ . Painéis a direita: taxas de transição entre o estado fundamental e os estados mais excitados como função de $g/\kappa$ . Em todos os gráficos fixamos os parâmetros $d_0 = 0.5\gamma_0$ e $N = 1$ nos painéis (a) e (b), e $N = 3$ nos painéis (c) e (d). . . . .	86

Figura 29 – Absorção normalizada, $\text{Im}\langle a \rangle_{ss}$ como função da dessintonia normalizada $\Delta_p/\kappa$ , para $1 + N$ TLS's acoplados ao modo da cavidade (para $N = 7, 10, 12$ e $15$ ). Os parâmetros usados são, $\gamma_0 = \gamma_i = 10^{-3}\kappa$ , $ \epsilon  = 0.03\kappa$ , $d = 1.0\kappa$ e $g = \sqrt{2}d$ . . . . .	87
Figura 30 – Absorção normalizada, $\text{Im}\langle a \rangle_{ss}$ como função da dessintonia normalizada $\Delta_p/\kappa$ , para $1 + N$ TLSs acoplados ao modo da cavidade (para $N = 7, 10, 12$ e $15$ ). Os parâmetros usados são, $\gamma_0 = \gamma_i = 10^{-3}\kappa$ , $ \epsilon  = 0.03\kappa$ , $d = 3.0\kappa$ e $g = 2.0\kappa$ . . . . .	88
Figura 31 – Primeiras autoenergias em função de $d/\gamma_0$ para $N = 7$ TLSs acoplados ao principal. Nesse gráfico fixamos o parâmetro $d_0 = 0.5\gamma_0$ . . . . .	90
Figura 32 – Absorção normalizada, $\text{Im}\langle \sigma_+^0 \rangle_{ss}$ , como função da dessintonia normalizada $\Delta_p/\gamma_0$ , para diferentes números de TLSs acoplados ao principal ( $N = 7, 10, 12$ e $15$ ). Os parâmetros utilizados são $\gamma_0 = 1$ , $\Omega_p = 0.03\gamma_0$ , $\gamma_i = \gamma = 10^{-3}\gamma_0$ , $d_i = d_0 = 0.5\gamma_0$ . . . . .	91
Figura 33 – Absorção normalizada, $\text{Im}\langle \sigma_+^0 \rangle_{ss}$ como função da dessintonia normalizada $\Delta_p/\gamma_0$ , para diferentes números de TLS acoplados ao principal ( $N = 7, 10, 12$ e $15$ ). Os parâmetros utilizados são $\gamma_0 = 1$ , $\Omega_p = 0.03\gamma_0$ , $\gamma_i = \gamma = 10^{-3}\gamma_0$ , $d_0 = 0.5\gamma_0$ e $d_i = 0.2\gamma_0$ . . . . .	92
Figura 34 – Na representação pictórica, cada spin sob a ação do campo externo, interage individualmente com seu próprio banho bosônico, descrito por infinitos osciladores harmônicos. . . . .	103
Figura 35 – a) Distância traço $DT (\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$ em função do acoplamento entre os spins $\Delta/\gamma$ , para diferentes números de spins na rede ( $N=2,..9$ ). O campo magnético externo é fixado em $B = 1.0\gamma$ . b) Plot <i>inset</i> da distância traço em função do acoplamento $\Delta/\gamma$ , evidenciando a discordância dos formalismos dissipativos para valores não tão intensos de $\Delta/\gamma$ . . . . .	105
Figura 36 – Evolução temporal da distância traço $DT (\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs})$ e $DT (\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$ para o modelo Ising considerando uma cadeia de $N = 8$ sítios. O valor do campo externo é fixado em $B = 1.0\gamma$ . Os valores de acoplamento entre os primeiros vizinhos são: (a) $\Delta = 0.01\gamma$ ; (b) $\Delta = 0.1\gamma$ e (c) $\Delta = 1.0\gamma$ . O estado inicial utilizado foi $\rho_{\uparrow} = ( \uparrow\rangle\langle\uparrow )^{\otimes N}$ . . . . .	106
Figura 37 – Evolução temporal da distância traço $DT (\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs})$ e $DT (\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$ para o modelo Ising consistindo de uma cadeia com $N = 8$ sítios. O valor do campo externo é fixado em $B = 1.0\gamma$ . Os valores de acoplamento entre os spins na cadeia são: (a) $\Delta = 0.01\gamma$ ; (b) $\Delta = 0.1\gamma$ e (c) $\Delta = 1.0\gamma$ . O estado inicial utilizado foi, $\rho_{\rightarrow} = ( \rightarrow\rangle\langle\rightarrow )^{\otimes N}$ com $ \rightarrow\rangle_N = ( \uparrow\rangle_N +  \downarrow\rangle_N)/\sqrt{2}$ onde $N$ é o índice do número de sítios. . . . .	106

Figura 38 – Evolução temporal da magnetização  $M_{\alpha=x,z}$  para determinados estados iniciais preparados na fase ferromagnética  $\rho_{\uparrow} = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow|)^{\otimes N}$  e paramagnética  $\rho_{\rightarrow} = (|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|)^{\otimes N}$ , com  $|\rightarrow\rangle_N = (|\uparrow\rangle_N + |\downarrow\rangle_N) / \sqrt{2}$  onde  $N$  é o índice do número de sítios. O campo magnético externo é  $B = 50.0\gamma$ , e o valor de acoplamento é  $\Delta = 250\gamma$ . . . . . 108

Figura 39 – (a) Magnetização  $M_x$  versus  $\gamma t$  e (b) Distância traço  $DT(\rho_{Mic} - \rho_F)$  versus  $\gamma t$  para o estado inicial  $\rho_{\rightarrow} = (|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|)^{\otimes N}$  com  $N$  variando de 4 a 8 sítios. Os valores de acoplamento são,  $J_x = 1.8\gamma$ ,  $J_y = 2.2\gamma$  e  $J_z = 2.0\gamma$ . Na Fig. (a), ' $Mic$ ' e ' $F$ ' correspondem as equações mestras microscópica e fenomenológica. . . . . 110

Figura 40 – Distância traço  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  em função da anisotropia  $\Delta/\gamma$  para diferentes números de spins na rede ( $N=2,..9$ ). O valor do campo externo é fixado em  $B = 1.0\gamma$ . (b) Plot *inset* da distância traço em função do acoplamento  $\Delta/\gamma$ , evidenciando a discordância dos formalismos dissipativos para valores não tão intensos de  $\Delta/\gamma$ . . . . . 111

Figura 41 – Evolução temporal da distância traço  $DT(\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs})$  e  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  para o modelo XY com  $N = 8$  sítios. O valor do campo externo é fixado em  $B = 1.0\gamma$ . Os valores de acoplamento entre os primeiros vizinhos são: (a)  $\Delta = 0.01\gamma$ ; (b)  $\Delta = 0.1\gamma$  e (c)  $\Delta = 1.0\gamma$ . O estado inicial utilizado foi  $\rho_{\uparrow} = (|\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow|)^{\otimes N}$  com  $N = 8$  sítios. . . . . 112

Figura 42 – Evolução temporal da distância traço  $DT(\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs})$  e  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  como função de  $\gamma t$  para o modelo XY com  $N = 8$  sítios. O valor do campo externo é fixado em  $B = 1.0\gamma$ . Os valores de acoplamento entre os primeiros vizinhos são: (a)  $\Delta = 0.01\gamma$ ; (b)  $\Delta = 0.1\gamma$  e (c)  $\Delta = 1.0\gamma$ . O estado inicial utilizado é  $\rho_{\uparrow} = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow|)^{\otimes N}$  com  $N = 8$  sítios. . . . . 112

Figura 43 – Distância traço  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  em função da anisotropia entre os spins  $\Delta/\gamma$ , para diferentes números de spins na rede ( $N=2,..9$ ). O campo magnético externo e o acoplamento entre os spins foram definidos respectivamente pelos parâmetros  $B = 1.0\gamma$ ,  $J = 1.0\gamma$ . . . . . 114

Figura 44 – Espectro com os três primeiros autovalores  $\lambda_i/\gamma$  do Liouvilliano microscópico Eq. (6.12) em função da anisotropia entre os spins  $\Delta/\gamma$  com  $N = 6$  spins. O campo magnético externo e o fator de troca entre os spins foram definidos respectivamente pelos parâmetros  $B = 1.0\gamma$ ,  $J = 1.0\gamma$ . 115

- Figura 45 – Evolução temporal da distância traço  $DT(\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs})$  e  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  como função de  $\gamma t$  para determinados valores de anisotropia entre os spins. O campo magnético externo e o fator de troca entre os spins foram definidos respectivamente por  $B = 1.0\gamma$ ,  $J = -1.0\gamma$ . Os valores de acoplamento das anisotropia são: (a)  $\Delta = 0.01\gamma$ ; (b)  $\Delta = 0.1\gamma$  e (c)  $\Delta = 1.0\gamma$ . O estado inicial utilizado foi  $\rho_{\uparrow} = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow|)^{\otimes N}$  com  $N = 8$  sítios. . . . . 116
- Figura 46 – Distância traço  $DT(\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs})$  e  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  como função de  $\gamma t$  para determinados valores de anisotropia entre os spins. O campo magnético externo e o fator de troca entre os spins foram definidos respectivamente por  $B = 1.0\gamma$ ,  $J = 1.0\gamma$ . Os valores de acoplamento entre os primeiros vizinhos são: (a)  $\Delta = 0.01\gamma$ ; (b)  $\Delta = 0.1\gamma$  e (c)  $\Delta = 1.0\gamma$ . O estado inicial utilizado foi  $\rho_{Néel} = (|\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow|)^{\otimes N}$  com  $N = 8$  sítios. . . . . 116
- Figura 47 – Distância traço  $DT(\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs})$  e  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  como função de  $\gamma t$  para a anisotropia entre o spins  $\Delta = 2.0\gamma$  (painéis superiores) e  $\Delta = -2.0\gamma$  (painéis inferiores), fixando o campo magnético externo em  $B = 1.0\gamma$  e o valor do fator de troca  $J = -1.0\gamma$  (a,c) e  $J = 1.0\gamma$  (b,d). Em (b, d) o estado inicial utilizado é  $\rho_{Néel} = (|\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow|)^{\otimes N}$  e (a, c) o estado inicial utilizado é  $\rho_{\uparrow} = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow|)^{\otimes N}$  com  $N = 8$  sítios. . . . . 117
- Figura 48 – Distância traço  $DT(\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs})$  e  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  como função de  $\gamma t$  para a anisotropia entre o spins  $\Delta = 3.0\gamma$  (painéis superiores) e  $\Delta = -3.0\gamma$  (painéis inferiores), fixando o campo magnético externo em  $B = 1.0\gamma$  e o valor do fator de troca  $J = -1.0\gamma$ (a,c) e  $J = 1.0\gamma$ (b,d). Em (b, d) o estado inicial utilizado é  $\rho_{Néel} = (|\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow|)^{\otimes N}$  e (a, c) o estado inicial utilizado foi  $\rho_{\uparrow} = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow|)^{\otimes N}$  com  $N = 8$  sítios. 119
- Figura 49 – Efeito Josephson: (a) Duas peças supercondutoras do mesmo material, separadas por uma fina camada isolante(vermelha).(b) Circuito fechado que constitui a junção. (c) Elemento que representa simbolicamente a junção quando se tem um circuito com mais componentes. . . . . 129
- Figura 50 – Representação pictórica de um circuito elétrico formado por um arranjo de ramos e nós. Representação de um ramo  $b$  do circuito que tem associado a ele um elemento de voltagem  $V_b$  e corrente  $I_b$ . . . . . 134
- Figura 51 – Possíveis escolhas de uma spanning tree, do nó de referência e o caminho que liga aos nós ativos no circuito . . . . . 135
- Figura 52 – Representação pictórica, da spanning tree, do nó de referência e o caminho que liga aos nós ativos no circuito do átomo artificial de fluxo. Cada junção tem uma corrente crítica e uma capacitância. . . . . 139



# Lista de abreviaturas e siglas

EQcav	Eletrodinâmica quântica de cavidades
EQCir	Eletrodinâmica quântica de circuitos
JJ	Junção Josephson
JCM	Modelo de Jaynes-Cummings
RWA	Aproximação de onda girante
EIT	Transparência eletromagnética induzida
AT	Autler-Townes
TMSS	Estado comprimido de dois modos
TLSs	Átomo(s) de dois níveis
DIT	Transparência Induzida por dipolo





# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>29</b>
<b>2</b>	<b>DINÂMICA DISSIPATIVA: FORMALISMO MICROSCÓPICO DE EQUAÇÃO MESTRA</b>	<b>33</b>
2.1	Diferença entre os formalismos dissipativos	36
<b>3</b>	<b>CONCEITOS BÁSICOS EM ELETRODINÂMICA QUÂNTICA DE CIRCUITOS</b>	<b>39</b>
<b>3.1</b>	<b>A cavidade em EQCir: Guia de onda coplanar</b>	<b>39</b>
3.1.1	O átomo artificial	40
3.1.2	Efeito Josephson: Conceitos básicos	40
3.1.3	Qubit de Fluxo	42
3.1.4	Descrição qualitativa do átomo artificial de fluxo	45
<b>3.2</b>	<b>Interação Átomo artificial e ressonador</b>	<b>46</b>
3.2.1	Acoplando o qubit de fluxo ao ressonador	48
<b>4</b>	<b>ESTADOS NÃO-CLÁSSICOS DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO: ESTADOS COMPRIMIDOS</b>	<b>49</b>
<b>4.1</b>	<b>Estados comprimidos de dois modos</b>	<b>51</b>
<b>4.2</b>	<b>Proposta para gerar um estado comprimido de dois modos em EQCir</b>	<b>54</b>
4.2.1	Sistema Físico	54
4.2.2	Aproximações Requeridas	55
<b>4.3</b>	<b>Resultados: Dinâmica unitária</b>	<b>57</b>
4.3.1	Viabilidade do nosso protocolo	58
<b>4.4</b>	<b>Dinâmica Dissipativa</b>	<b>59</b>
4.4.1	Justificativa de utilização da equação mestra (4.16)	60
4.4.2	Dissipação nos ressonadores	60
4.4.3	Dissipação no Qubit	61
4.4.4	Defasagem no Qubit	62
4.4.5	Dissipação total	63
4.4.6	Dissipação utilizando parâmetros realísticos	64
<b>4.5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>65</b>
<b>5</b>	<b>TRANSPARÊNCIA INDUZIDA POR ACOPLAMENTO DIPOLO-DIPOLO.</b>	<b>67</b>

5.1	<b>Dinâmica do processo de EIT</b> . . . . .	68
5.2	<b>Transparência Induzida por dipolos acoplados</b> . . . . .	71
5.2.1	Sistema Físico e modelo . . . . .	71
5.3	<b>DIT no espaço livre</b> . . . . .	72
5.4	<b>DIT em uma cadeia de TLS's acopladas a um ressonador</b> . . . . .	76
5.5	<b>Escalabilidade do Fenômeno de DIT: múltiplas janelas de transparência</b> . . . . .	79
5.6	<b>Cenário de Multi DIT: Espaço livre</b> . . . . .	81
5.7	<b>Cenário de Multi DIT: TLS's acoplados ao ressonador</b> . . . . .	84
5.8	<b>Uma proposta para gerar o cenário de DIT</b> . . . . .	88
5.9	<b>Transparência Induzida por Dipolos acoplados: Efeitos das condições periódicas de contorno</b> . . . . .	89
5.10	<b>Conclusões</b> . . . . .	93
6	<b>DINÂMICA DISSIPATIVA EM CADEIAS DE SPINS</b> . . . . .	95
6.1	<b>Introdução</b> . . . . .	95
6.1.1	Formalismo <i>Fenomenológico</i> de equação mestra Markoviana . . . . .	95
6.1.2	Cadeias de spins dissipativas: Simulação e implementação em átomos frios . . . . .	98
6.1.3	Questionamento sobre o uso do formalismo fenomenológico de equação mestra . . . . .	98
6.1.4	Emprego da equação mestra microscópica em modelos de spin . . . . .	99
6.1.5	Estudos comparativos entre os formalismos Fenomenológico e Microscópica . . . . .	99
6.2	<b>Sistemas quânticos de Spins</b> . . . . .	100
6.2.1	O modelo de Ising . . . . .	100
6.2.2	A cadeia de spin XY . . . . .	101
6.2.3	O modelo de Heisenberg XXZ . . . . .	102
6.3	<b>Dinâmica dissipativa em função do acoplamento entre os primeiros vizinhos em cadeias de spins</b> . . . . .	102
6.3.1	Dinâmica dissipativa estacionária e temporal . . . . .	103
6.4	<b>Possíveis Inconsistências entre os formalismos: Primeiro exemplo</b> . . . . .	107
6.5	<b>Possíveis Inconsistências entre os formalismos: Segundo exemplo</b> . . . . .	109
6.6	<b>Uma análise mais detalhada na dinâmica dissipativa no modelo XXZ</b> . . . . .	116
6.7	<b>Conclusões</b> . . . . .	119
7	<b>CONCLUSÕES GERAIS</b> . . . . .	121
.1	<b>Dinâmica Dissipativa</b> . . . . .	122
.2	<b>Métodos numéricos</b> . . . . .	126

**APÊNDICE A – ELEMENTOS ESSÊNCIAIS EM QUBITS SUPER-**

<b>CONDUTORES</b> . . . . .	129
-----------------------------	-----

<b>A.1</b>	<b>Alguns fundamentos de teoria clássica de circuitos elétricos</b>	<b>133</b>
<b>A.2</b>	<b>Formalismo Lagrangeano do circuito elétrico</b>	<b>134</b>
<b>A.3</b>	<b>Quantização dos modos do ressonador</b>	<b>135</b>
<b>A.4</b>	<b>Qubit de Fluxo</b>	<b>138</b>
<b>APÊNDICE B – PROCEDIMENTOS PARA ENCONTRAR O HAMILTONIANO EFETIVO</b>		
<b>B.0.1</b>	<b>Representação de Interação</b>	<b>143</b>
<b>B.0.2</b>	<b>Primeira transformação: <math>U = \exp[-i(\Omega\sigma_{eg} - \Omega^*\sigma_{ge})t]</math></b>	<b>143</b>
<b>B.1</b>	<b>Dedução do Hamiltoniano efetivo</b>	<b>144</b>
<b>APÊNDICE C – ALGUNS RESULTADOS ANALÍTICOS OBTIDOS PARA O FENÔMENO DE DIT</b>		
<b>C.1</b>	<b>Autoestados, autoenergias e taxas de transição entre os primeiros estados excitados e o estado fundamental para o caso <math>1 + N</math> TLS's</b>	<b>149</b>
<b>C.2</b>	<b>TLS's acoplados ao ressonador: soluções analíticas</b>	<b>151</b>
<b>C.3</b>	<b>Taxas de transição entre o estado fundamental e o primeiros estados excitados para <math>1 + N</math> TLS's acoplados ao ressonador</b>	<b>152</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>		<b>153</b>



---

## Lista de Publicações

---

1. Multiple transparency windows and Fano interferences induced by dipole-dipole couplings. Diniz, E. C. and Borges, H. S. and Villas-Boas, C. J. *Phys. Rev. A*, **97**, 043848,(2018).
2. Two-mode squeezing operator in circuit QED. Diniz, E. C. and Rossatto, D. Z. and Villas-Bôas, C. J. *Quantum Inf Process*, **17**, 202, (2018).
3. Influence of the boundary conditions on the Dipole Induced Transparency in a chain of two-level systems. Diniz, E. C. In progress, (2018).
4. Dissipative dynamics in ultra strong coupling regime: Applications in quantum spin chains. Diniz, E. C, Rossatto, D. Z. and Villas-Bôas, C. J. In progress, (2018).



# 1 Introdução

Nos últimos anos ocorreu um crescente estudo do ponto de vista teórico no contexto de sistemas quânticos dissipativos [1–3]. A abordagem de sistemas quânticos dissipativos tem sido extremamente útil para analisar vários aspectos em diferentes segmentos que abrangem óptica quântica e informação quântica em diferentes arquiteturas [4], física de muitos corpos [5–8], matéria condensada [9], dentre outros. Graças aos progressos no que diz respeito a poderosas técnicas numéricas [10, 11] e técnicas que envolvem teoria quântica de campos [12], para resolver sistemas complexos e mais escaláveis, foi possível obter avanços significativos que permitem o entendimento mais profundo a cerca desses sistemas. Uma das formas mais tradicionais de tratar sistemas fora do equilíbrio é feita através de uma equação de evolução conhecida como equação mestra. Dependendo da natureza do ambiente, isto é, se o mesmo é infinito ou não, este tipo de equação apresenta certas peculiaridades. Na maioria das vezes costuma-se considerar que o ambiente tem uma dimensão muito maior que a do sistema, o que dá origem a uma dinâmica regida por processos Markovianos. A equação mestra de natureza Markoviana, amplamente utilizada na descrição de vários sistemas físicos fora do equilíbrio é regida pela equação mestra na forma de Lindblad [2, 3]. Este tipo de equação é preferencialmente utilizado pois além de descrever a natureza Markoviana do sistema, garante a positividade que é crucial na descrição das propriedades físicas do sistema de interesse. A análise concisa dos efeitos dissipativos é necessária e extremamente relevante na descrição de sistemas onde a interação entre luz e a matéria é fundamental, como em física atômica e óptica quântica, onde a interação pode ser simplificada quando temos um sistema atômico de pouco níveis ou nuvens de átomos interagindo com um único modo do campo eletromagnético [13]. Este tipo de interação tem sido o foco de interesse em física atômica e óptica quântica nas últimas três décadas, em particular na área denominada como eletrodinâmica quântica de cavidades (EQCav) [13]. Em 2004, dois trabalhos pioneiros, um teórico [14] e um experimental [15], evidenciaram que este tipo de interação poderia ser estudada com sucesso em uma nova área, conhecida como Eletrodinâmica Quântica de Circuitos (EQCir). O estudo da interação radiação-matéria nessa área é modelado por um átomo artificial acoplado a um guia de onda coplanar (*coplanar waveguide* – CPW) [14], que assume o papel de uma cavidade. A descrição do átomo artificial é baseada no efeito Josephson responsável por descrever as propriedades de uma corrente supercondutora que flui através de dois materiais supercondutores conectados fracamente por um link que pode ser constituído por um material isolante, semicondutor ou metálico [16]. O sistema descrito no parágrafo anterior é conhecido como junção Josephson que atua como um elemento não linear nos circuitos, onde tal não linearidade assegura um espaçamento não equidistante entre os níveis de energia, tornando propícia a

implementação de um sistema de dois níveis, o qubit (*quantum bit*) [17], sendo isto possível no regime de temperaturas criogênicas [18]. Dependendo da escala de energia dominante, os qubits supercondutores podem ser classificados como qubits de *carga*, *fluxo* e *fase* [19, 20]. Um dos atrativos da EQCir consiste na possibilidade de investigar a interação radiação-matéria em um regime de acoplamento mais intenso do que o alcançado em EQCav. Tal regime de acoplamento é conhecido como regime ultra forte, cujo acoplamento entre o átomo e o modo do campo eletromagnético é da ordem das frequências características do sistema, inviabilizando o uso da aproximação de onda girante (*rotating wave approximation*-RWA), que dá origem ao conhecido Hamiltoniano de Jaynes-Cummings, bastante utilizado em EQCav e EQCir [13–15]. No regime ultraforte, os termos contra-girantes que são desprezados para a obtenção do Hamiltoniano de Jaynes-Cummings [13, 21], fornecem uma contribuição significativa na determinação das propriedades e na dinâmica do sistema. O modelo necessário para descrever o regime ultraforte em EQCir é conhecido como modelo de Rabi [22] que atualmente tem sido bastante estudado, inclusive após verificações experimentais feitas em 2010 [23, 24] que comprovaram que os fenômenos físicos descritos no regime ultra forte não podem ser explicados por intermédio do modelo de Jaynes-Cummings. Arquiteturas construídas a partir de circuitos supercondutores são tidas como promissoras pois tais circuitos podem ser fabricados sem grande dificuldade, tornando-o um sistema atrativo devido a sua potencial escalabilidade, fundamental para o desenvolvimento de tecnologias para o processamento de informação quântica [25]. Uma conexão entre dissipação e interação radiação matéria em circuitos supercondutores, foi um dos tópicos investigado nesta tese. Este tópico é referente a geração de estados não clássicos da luz, especificamente estados comprimidos [26–28], do campo de radiação no contexto de EQCir. Para tal propósito, utilizamos um tipo específico de átomo supercondutor, conhecido como qubit de fluxo [29], que pode ser acoplado indutivamente ou capacitivamente a dois ressonadores, como um esquema apropriado para gerar estes estados utilizando a tecnologia atual de EQCir [30]. A escolha deste átomo pode ser justificada pelo fato deste exibir um dos mais longos tempos de coerência quântica dentre todos os qubits supercondutores existentes, como comprovado em experimentos recentes [31], além deste possuir uma natureza bem anarmônica de níveis de energia. Destacamos também que estados comprimidos de dois modos também tem sido intensamente investigados no âmbito teórico no contexto de circuitos supercondutores [32–34], além de realizações experimentais reportadas nos últimos anos [35–39], o que tem motivado as buscas por propostas que visem um melhor entendimento sobre geração e implementação destes estados em circuitos supercondutores [20]. Os avanços experimentais, podem contribuir para o aperfeiçoamento de medidas quânticas de alta precisão utilizando metrologia quântica [40], como também para detecção de ondas gravitacionais [41–43]. Além disso, vale a pena ressaltar que estados comprimidos de dois modos, constituem um pilar importante na implementação de protocolos de informação e comunicação quânticas [44]. No âmbito de interação-matéria



controlada por campos de lasers, um ramo de pesquisa conhecida como transparência eletromagneticamente induzida (EIT) [45,46] tem se mostrado um fenômeno muito útil para manipular luz com luz, permitindo muitas aplicações, como em transistores ópticos [47,48], memória quântica [49,50], para gerar mudanças de fase controláveis em pulsos de fóton único [51], ou resfriamento do estado fundamental de átomos individuais [52,53], como também em cadeia de íons [54]. Desde a primeira investigação experimental da EIT [45] *et al* utilizando átomos de três níveis em uma configuração atômica tipo  $\Lambda$ , o fenômeno de EIT e seus análogos tem sido estudados em uma variedade de sistemas físicos, tais como osciladores harmônicos clássicos acoplados [55] e quânticos [56], modos de cavidade acoplados [57,58], como também em átomos acoplados ao modo de cavidade ópticas [59,60]. Em sistemas mesoscópicos, o fenômeno de EIT tem sido investigado em moléculas de pontos quânticos [61–63], em sistemas plasmônicos [64,65], optomecânicos [66,67] e sistemas construídos utilizando-se metamateriais [68,69]. Cenários de duas janelas de transparência induzida podem ser obtidos utilizando-se múltiplos campos de controle envolvendo mais e mais estados fundamentais [70]. Esse cenário de multi-EIT e análogos tem sido observado em sistemas de cavidade fotônicas [71], e em sistemas optomecânicos [72].

Reconhecendo os avanços já citados anteriormente, propomos um cenário bem geral para investigar fenômenos análogos de transparência induzida, em uma cadeia de átomos de dois níveis (TLS's) acoplados via interação dipolo-dipolo, com seus primeiros vizinhos, como também quando temos uma cadeia de TLS's acoplados à uma cavidade ou um ressonador [73]. Mostramos que é possível obter um fenômeno análogo ao estudado em EIT, o qual denominamos por *Dipole Induced Transparency-DIT* e, além disso, fornecemos um dos cenários mais gerais atualmente para estudar resposta óptica em cadeias unidimensionais de TLS's acoplados. No mesmo segmento da investigação em DIT, analisamos os efeitos de impor condições periódicas de contorno em uma cadeia de TLS's acoplados e mostramos como a condição de fronteira afeta significativamente a resposta óptica do sistema. Também mostramos que mesmo utilizando condições periódicas de contorno é possível recuperar o cenário ideal de transparência induzida no sistema.

Outro tema no âmbito de dissipação em sistemas fortemente interagentes abordado nesta tese consiste na investigação da dinâmica dissipativa em sistemas de spins. Para modelar a dinâmica de sistemas descritos por cadeias de spin, iremos discutir modelos tais como o Ising com campo transversal, o modelo XY e o modelo XXZ. Embora existam várias abordagens dissipativas em sistemas de spin, um consenso sobre qual formalismo dissipativo seja o ideal na abordagem da dinâmica nestes problemas ainda não está muito claro na literatura de física de muitos corpos. No intuito de esclarecer qual o formalismo dissipativo é adequado para investigar a dinâmica dissipativa de cadeias de spins, analisamos vários aspectos da dinâmica estacionária e temporal em variados modelos de spins, e mostramos que o formalismo microscópico de equação mestra é o mais adequado na análise da dinâmica desses sistemas.

Esta tese tem sua estrutura definida na seguinte maneira: no capítulo 2, descrevemos os mecanismos dissipativos que serão úteis e utilizados durante as abordagens realizadas ao longo da tese. No capítulo 3 descrevemos o sistema físico que compõe a EQCir, isto é, o átomo artificial, o ressonador e o acoplamento átomo-ressonador. Em seguida, no capítulo 4, relatamos conceitos básicos de estados não-clássicos da luz, tendo o foco principal os estados comprimidos e, em seguida, reportamos um protocolo para gerar estados comprimidos de dois modos em circuit QED. No capítulo 5, descrevemos brevemente os conceitos básicos de transparência eletromagnética induzida e, em seguida, mostramos os resultados obtidos no que diz respeito à transparência induzida por uma cadeia de dipolos acoplados em *setups* diferentes e os tipos de interferência que surgem. Finalmente no capítulo 6, analisamos a dinâmica dissipativa em cadeias de spins descritas por modelos de Ising, XY, XXZ, onde esclarecemos qual o formalismo adequado para tratar a dinâmica dissipativa nestes sistemas. Alguns detalhes de cálculos analíticos e alguns conceitos necessários para entender circuitos supercondutores são fornecidos em apêndices.

## 2 Dinâmica dissipativa: Formalismo microscópico de equação mestra

Nesta seção iremos descrever alguns passos importantes na dedução da equação mestra que iremos abordar nesse trabalho. Considere a interação de um sistema que será descrito pelo hamiltoniano  $H_S$  interagindo com um banho representado pelo hamiltoniano  $H_B$ , onde a interação do sistema com o banho é representada por  $H_{SB}$ . A dinâmica do sistema global é governado pelo hamiltoniano independente do tempo dado por:

$$H_T = H_S + H_B + H_{SB}. \quad (2.1)$$

Para obter a equação mestra que rege a dinâmica global que estamos interessados é necessário fazer as seguintes considerações: tratar a equação de Liouville-von Neumann para o operador densidade total na representação de interação com relação a parte livre  $H_S + H_B$  em (2.1). Em seguida deve-se tomar em consideração as seguintes aproximações:

### a) Aproximação de Born

Esta aproximação descreve que o acoplamento entre o sistema-banho  $H_{SB}$  deve ser fraco. Essa aproximação nos diz que o tratamento perturbativo governado pela constante de acoplamento entre o sistema e o banho deve ser tratada até segunda ordem, desprezando-se ordens superiores.

### b) Caráter Markoviano da interação sistema-reservatório

O requerimento para aproximação de Markov envolve condições de escalas de tempo. Essencialmente, o tempo referente ao decaimento das funções de correlação do banho  $\tau_B$  deve ser muito mais curto que a escala de evolução típica do sistema  $\tau_S$ , isto é,  $\tau_B \ll \tau_S$ . Como já foi relatado anteriormente, o sistema possui dimensão muito menor que o banho. Neste caso a interação do sistema com o banho faz com que ocorra troca de excitações que são perdidas na vastidão do banho e não são mais recuperadas pelo sistema. Em resumo, o sistema não tem "*memória*" de qualquer evento anterior que ocorreu durante a interação com o banho.

### c) Interação Sistema-Banho

O Hamiltoniano de interação sistema-banho é descrito na forma:

$$\tilde{H}_{SB} = \sum_{\lambda} A_{\lambda} \otimes B_{\lambda}, \quad (2.2)$$

sendo  $A_{\lambda}$  e  $B_{\lambda}$  os operadores que agem apenas no sistema <sup>1</sup> e no banho, respectivamente. O operador  $A_{\lambda}$  pode ser escrito em função dos autoestados e autovalores  $\epsilon$  do sistema  $H_S$ ,

<sup>1</sup> Este operador deve ser necessariamente Hermiteano!

na forma:

$$A_\lambda(\omega) = \sum_{\omega=\epsilon'-\epsilon} \Pi(\epsilon) A_\lambda \Pi(\epsilon'), \quad (2.3)$$

no qual  $\Pi(\epsilon)$  são os projetores nos autoestados do sistema.

#### d) Aproximação secular

Este tipo de aproximação é útil no intuito de desconsiderar termos que oscilam muito rapidamente na equação mestra Markoviana. A aproximação secular surge diretamente no hamiltoniano de interação sistema-banho (2.2) e especificamente, essa aproximação é válida desde de que o tempo de relaxação típico do sistema seja muito maior que a escala típica de relaxação do sistema quântico aberto global composto pela interação sistema-banho. Então, apenas os termos em frequência que oscilam lentamente, serão considerados nessa aproximação.

#### Equação mestra microscópica

Efetuando algumas manipulações algébricas<sup>2</sup> a equação mestra na representação de Schrödinger é escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{Mic}(t) &= -i [H_S, \rho_S(t)] + \mathcal{D}(\rho_S(t)). \quad (2.4) \\ \mathcal{D}(\rho_S(t)) &= \sum_{\omega} \sum_{\lambda, \beta} \gamma_{\lambda, \beta}(\omega) \left[ A_\beta(\omega) \rho_S(t) A_\lambda^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \{ A_\beta^\dagger(\omega) A_\lambda(\omega), \rho_S(t) \} \right]. \quad (2.5) \end{aligned}$$

onde o segundo termo na expressão (2.5) é o dissipador na forma de Lindblad tradicionalmente útil para descrever sistemas quânticos Markovianos. Os coeficientes  $\gamma_{\lambda, \beta}(\omega)$  na expressão (2.5) são as transformadas de Fourier das funções de correlação do banho mostradas no Apêndice A.

A equação mestra (2.4) foi deduzida no regime de temperatura  $T = 0K$ , embora uma dedução incluindo temperatura finita apenas irá adicionar alguns termos na equação mestra [3]. Em nossa abordagem de equação mestra, iremos utilizar a densidade espectral ôhmica para o banho, que nos permite escrever a função de correlação (13), na forma  $\gamma_{\beta, \lambda}(\omega) \propto J(\omega)$ , onde  $J(\omega)$  o parâmetro que descreve o ruído<sup>3</sup>. Com a informação sobre a função de correlação do banho, podemos escrever a Eq.(2.5), na seguinte representação:

$$\hat{\mathcal{L}}_t \rho_S(t) = \dot{\rho}_S(t), \quad (2.6)$$

em que

$$\hat{\mathcal{L}}_t = i [\rho_S(t), \hat{H}_S] + \mathcal{D}(\rho_S(t)) \quad (2.7)$$

é definido como o *Liouvilliano* do sistema que será muito útil para descrever as propriedades dinâmicas e estacionárias do sistema-banho. Na literatura tradicional existem várias

<sup>2</sup> Encontradas no Apêndice A

<sup>3</sup> Veja a fórmula no Apêndice A. Iremos utilizar o ruído branco, característico de sistemas que exibem densidade espectral do tipo ohmica.

denominações para este tipo de equação mestra tais como equação mestra microscópica [2], equação mestra de Bloch-Redfield [74], equação mestra no formalismo de estado vestido [75]. Nesta tese iremos denominar esta equação como equação mestra microscópica. Uma das propriedades estacionárias do *Liouvilliano* Eq.(2.7), isto é,  $\hat{\mathcal{L}}_t \rho_{ss} = 0$ , consiste na afirmação na qual o estado descrito pelo ensemble de Gibbs:

$$\rho_{Gibbs} = \frac{e^{-\beta H_S}}{\mathcal{Z}}, \quad (2.8)$$

é um estado estacionário da Eq. (2.4) no limite ( $t \rightarrow \infty$ ) sendo que na Eq.(2.8), o termo  $\mathcal{Z} = \text{Tr}_S (e^{-\beta H_S})$  é a função partição. Este resultado é mostrado em detalhes nas referências [3, 76], e consiste na análise dos autovalores do *Liouvilliano* (2.7), condizendo com a situação cujo o único autovalor com parte real nula é associado ao estado de Gibbs (2.8). Embora este resultado seja bem aceito, já foi discutido em [76, 77] que, dependendo da interação do sistema com o banho, pode haver situações onde o estado de Gibbs não é o único estado estacionário do sistema.

### Formalismo fenomenológico de equação mestra

Neste tópico, iremos discutir brevemente os passos necessários para obter o formalismo fenomenológico de equação mestra. Conforme descrito na seção anterior e esclarecido nas Ref. [2, 3] o dissipador é obtido na base de autoestados do hamiltoniano completo que descreve o sistema. Deste modo na dedução da equação mestra não é levado em consideração apenas o acoplamento do sistema com o banho mas também é necessário considerar o acoplamento interno entre os subsistemas que compõem o sistema em questão. Tendo em mente essas considerações e fazendo todo o procedimento feito na seção anterior pode-se obter o formalismo fenomenológico de equação mestra.

O formalismo que chamamos de fenomenológico consiste em desprezar a interação entre os subsistemas e levar em conta os mecanismos dissipativos individuais de cada subsistema. Esse formalismo é de fato válido quando a energia de interação entre os subsistemas é muito menor que a energia dos subsistemas livres, o que de fato acontece em muitos experimentos em Óptica Quântica. No entanto, com o advento de novas tecnologias, por exemplo, eletrodinâmica quântica de circuitos, onde o acoplamento átomo-campo pode ser extremamente forte, tal equação mestra deixa de ser válida para descrever a dinâmica dissipativa do sistema todo.

Por exemplo, a equação mestra fenomenológica, que descreve a interação entre um átomo e um modo do campo de radiação pode ser escrita na forma de Lindblad [78, 79]:

$$\dot{\rho}_F = i [\rho_S, \hat{H}_S] + \mathcal{D}_F [\mathcal{O}] \rho_S, \quad (2.9)$$

onde

$$\mathcal{D}_F [\mathcal{O}] \rho_S = \mathcal{O} \rho_S \mathcal{O}^\dagger - \frac{1}{2} \{ \mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}, \rho_S \}, \quad (2.10)$$

é o dissipador do sistema<sup>4</sup> cujos termos,  $\mathcal{O}_\alpha = \sqrt{\gamma}\sigma^-$  são os operadores de colapso para um átomo com taxa de dissipação  $\gamma$ ,  $\mathcal{O}_\beta = \sqrt{\kappa}a$  operador de colapso para a dissipação na cavidade com taxa de perda  $\kappa$  e  $\mathcal{O}_\xi = \sqrt{\gamma_\phi}\sigma_z$  o operador de colapso para defasagem dos níveis atômicos cuja taxa de perda é  $\gamma_\phi$ .

Finalmente, chegamos a um dos elementos centrais desta tese, que concerne no tratamento correto da dissipação em alguns problemas físicos de nosso interesse e na obtenção de alguns resultados que irão ser reportados em abordagens futuras.

## 2.1 Diferença entre os formalismos dissipativos

No limite onde o acoplamento entre átomo-campo  $g \rightarrow 0$ , as dinâmicas regidas pelas equações mestras (2.4) e (2.9) devem coincidir [2,3]. Isso pode ser visto ao considerar operadores  $A_a = (\sigma^+ + \sigma^-)$  e  $A_c = (a + a^\dagger)$  para o átomo e o campo respectivamente. Os operadores do reservatório são definidos por  $\mathcal{B}_1 = \sum_l \beta_l (b_l + b_l^\dagger)$  e  $\mathcal{B}_2 = \sum_k \xi_k (\eta_k + \eta_k^\dagger)$ , com  $\beta_l$  ( $\xi_k$ ) sendo o acoplamento do campo (átomo) ao  $l$ -ésimo ( $k$ -ésimo) modo do reservatório e  $\beta_l$  e  $\eta_k$  são os operadores de aniquilação dos modos dos respectivos reservatórios. É importante ressaltar que, como já foi mostrado na minha dissertação de mestrado [77], situações onde ocorre dissipação atômica e no modo da cavidade, o estado estacionário previsto pela equação mestra microscópica é dado pelo estado de Gibbs (2.8). Utilizando as condições anteriores para o sistema e o banho, podemos comparar brevemente as dinâmicas dadas pelas equações mestras (2.4) e (2.9) quando se tem sistemas fortemente acoplados descritos por exemplo, pelo modelo de Rabi

$$H_R = \sum_i^N \sigma_z^i \frac{\hbar\omega_0^i}{2} + \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar \sum_i^N g_i \sigma_x^i (a + a^\dagger), \quad (2.11)$$

que descreve a interação de  $N$  átomos de dois níveis com um modo do campo eletromagnético. Em (2.11) o primeiro termo descreve a energia livre de cada qubit com matriz de Pauli  $\hat{\sigma}_z^{(i)}$  e com frequência de transição  $\omega_0^{(i)}$  entre os estados  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ <sup>5</sup>, o segundo termo descreve o modo do ressonador com frequência  $\omega_c$ , enquanto que o último termo descreve a interação qubits-modo, sendo  $g^{(i)}$  o acoplamento entre o qubit  $i$  com um único modo do ressonador e  $\hat{\sigma}_x^{(i)}$  a matriz de Pauli para cada qubit. Este modelo é o mais fundamental na descrição da interação radiação e matéria no contexto de Óptica Quântica. Uma breve descrição deste modelo e sua implementação serão dados no capítulo seguinte.

No intuito de investigar a dinâmica estacionária regida pelas equações mestras utilizamos, uma medida estatística conhecida como, distância traço, definida por [17]:

$$DT(\rho_{Micr} = \rho_{Gibbs}, \rho_F) = \frac{1}{2} Tr(|\rho_{Micr} - \rho_F|). \quad (2.12)$$

<sup>4</sup> Esse dissipador na literatura às vezes pode ser escrito na forma:  $D[\mathcal{O}]\rho = \frac{1}{2} \{2\mathcal{O}\rho\mathcal{O}^\dagger - \rho\mathcal{O}^\dagger\mathcal{O} - \mathcal{O}^\dagger\mathcal{O}\rho\}$

<sup>5</sup> Em nossa terminologia,  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$  referem-se a estados fundamental e excitado respectivamente

A distância traço é útil para caracterizar a distinguibilidade entre dois estados quânticos, sendo que neste caso os estados do nosso interesse são 1) o estado previsto pela equação microscópica  $\rho_{Mic}$  (2.4), e 2) o estado obtido via o formalismo fenomenológico  $\rho_F$  (2.9). Utilizando a distância traço, calculamos a dinâmica estacionária para o modelo de Rabi (2.11) como função do acoplamento  $g/\omega_c$  cujo resultado é pode ser visto na Fig.1. Analisando

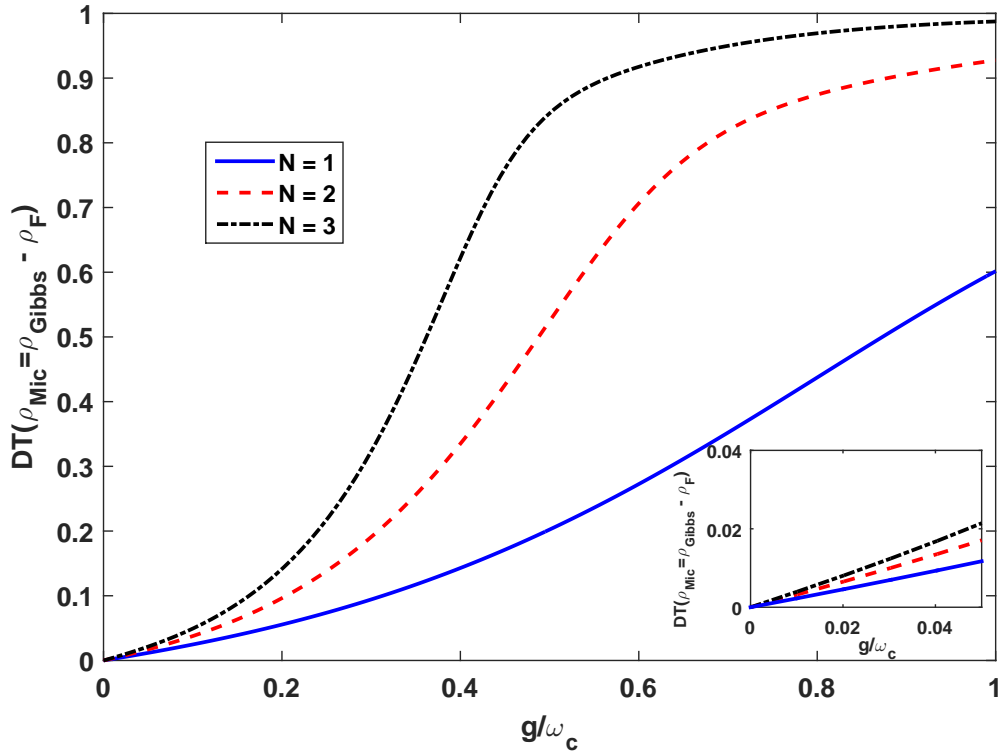


Figura 1 – Distância traço  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  em função do acoplamento  $g/\omega_c$ . As taxas de dissipação do modo da cavidade e do átomo são  $\kappa = \gamma = 1.0\omega_c$ . Em nossas análises consideramos o regime de temperatura  $T = 0K$ . A curva azul, vermelha tracejada e preta pontilhada correspondem às dinâmicas para o modelo de Rabi para  $N = 1, 2, 3$  átomos, respectivamente.

Fonte: O autor.

o resultado da Fig.1, percebemos que as dinâmicas regidas pelas equações mestras coincidem muito bem no limite de acoplamentos fracos, isto é, quando  $g/\omega << 1$  como pode ser visto no *inset* da Fig.1 enquanto que para acoplamentos  $g/\omega$  mais fortes, que engloba o regime ultra forte, as dinâmicas já são totalmente diferentes. Percebemos da Fig.1 que a distinção entre as equações mestras torna-se mais evidente a medida que consideramos o modelo de Rabi com mais átomos<sup>6</sup>. Embora na literatura existam trabalhos que mostrem estas

<sup>6</sup> O modelo de Rabi para mais de um átomo é denominado por modelo de Dicke

diferenças [75, 80], geralmente para  $N = 1$ , resolvemos ir um pouco além e mostrar que essas diferenças podem ser significativas para um modelo de Rabi com mais átomos.

Este resultado nos permite concluir com clareza que o formalismo microscópico é o mais adequado para investigar dinâmica dissipativa no modelo de Rabi.



## 3 Conceitos Básicos em Eletrodinâmica Quântica de Circuitos

O sistema que constitui a eletrodinâmica quântica de circuitos (EQCir) é composto por um átomo artificial acoplado a um ressonador ou um guia de onda coplanar, ilustrada na Fig.2. Em 2004, A. Blais *et al.* [14] utilizaram o cenário representado na Fig. 2 para

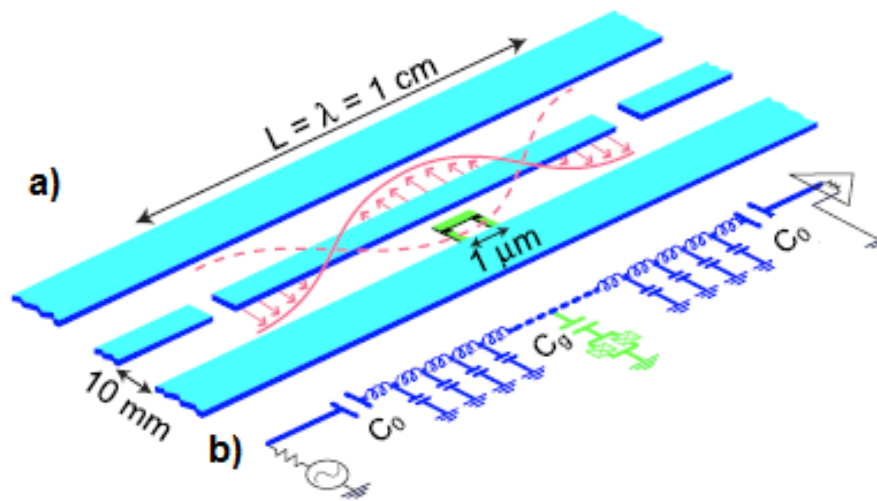


Figura 2 – Representação pictórica da arquitetura utilizada para investigações no contexto de EQCir: (a) Um átomo artificial em verde é fabricado no centro de um guia de onda coplanar em azul. Campos elétricos e magnéticos em forma de onda estacionária são ilustrados pelas linhas vermelhas cheias e tracejadas. (b) Descrição da linha como uma cadeia de circuitos LC discretos.

Fonte: Figura retirada da Ref. [14].

investigar o mesmo tipo de interação radiação-matéria presente na EQCav. A primeira verificação experimental feita por A. Walruff *et al.* [15] deu início a essa área de pesquisa amplamente estudada atualmente. Os componentes de EQCir serão brevemente explanados nas seções a seguir.

### 3.1 A cavidade em EQCir: Guia de onda coplanar

Na tecnologia de circuitos supercondutores o papel desempenhado pela linha de transmissão é análogo ao que usualmente ocorre em um guia de onda em sistemas ópticos, pois ela é o elemento suporte para a propagação de microondas de radiação eletromagnética utilizada no contexto de EQCir. O guia de onda coplanar ilustrado na Fig. 2, é o mais utilizado em experimentos em EQCir, sendo este constituído de um condutor central e dois

condutores laterais. O condutor central é usado para a propagação de sinais de microondas e os condutores laterais são utilizados como o potencial de referência<sup>1</sup>. Na Fig. 2 exibimos uma versão discreta do ressonador, sendo este modelado por uma cadeia de circuitos  $LC$ , discretos e infinitesimais. Seguindo os procedimentos adotados<sup>2</sup> nas Refs. [14, 81] quando submetido a determinadas condições de contorno, o ressonador (guia de onda) tem seus modos normais quantizados descritos pelo hamiltoniano:

$$\hat{H} = \sum_n \hbar\omega_{r,n} \left( \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.1)$$

O hamiltoniano (3.1) é escrito como uma soma discreta de osciladores harmônicos com frequência de ressonância  $\omega_{r,n} = n\pi/l\sqrt{1/LC}$ , com operadores bosônicos de criação ( $\hat{a}_n^\dagger$ ) e destruição ( $\hat{a}_n$ ) de fótons no modo  $n$ . Na maioria das situações em EQCir, apenas um modo ( $n = 1$ ) na Eq. (3.1) é suficiente para investigar a interação com o átomo artificial. No regime de baixas temperaturas o ressonador está no seu estado fundamental com uma ocupação térmica de fótons de microondas muito baixa. Entretanto, flutuações quânticas do vácuo no ressonador induzem uma voltagem de ponto zero  $V_{rms} = \sqrt{\hbar\omega_r/2C}$ , ou uma corrente de ponto zero  $I_{rms} = \sqrt{\hbar\omega_r/2L_r}$ , exatamente no ponto onde o qubit é fabricado [82]. A voltagem total sentida pelo qubit é dada por  $V = V^{DC} + V_{rms} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ , na qual  $V^{DC}$  é a voltagem clássica de controle aplicada no ressonador por uma fonte externa e  $V_{rms}$  é referente à flutuação quântica dos fótons no ressonador.

### 3.1.1 O átomo artificial

Os protótipos conhecidos como átomos artificiais, que iremos discutir aqui são sistemas que fazem uso da tecnologia de circuitos baseados em materiais supercondutores. Embora estes circuitos não sejam microscópicos em escala, eles ainda podem se comportar quânticamente, dependendo do grau de liberdade dominante deste sistema. Tal fato possibilita a descrição de fenômenos de coerência quântica em escala macroscópica nestes circuitos que em determinadas condições, podem ser tratados de maneira análoga a um sistema atômico real. Na Fig. 3, fornecemos uma representação pictórica do circuito que é bem utilizado na literatura atual. O circuito da Fig. 3(d) possui um componente fundamental, a junção Josephson (JJ). Um atrativo para a utilização da junção é que ela representa um elemento não dissipativo a baixas temperaturas, ideal para a construção de circuitos supercondutores que possam ser utilizados para investigações em informação quântica [18].

### 3.1.2 Efeito Josephson: Conceitos básicos

B. Josephson [16] previu teoricamente em 1962 que uma supercorrente  $I_s$  surge em decorrência do tunelamento de pares de Cooper [83] através de um dispositivo conhecido

<sup>1</sup> Estes condutores estão aterrados.

<sup>2</sup> Uma dedução da quantização da linha é feita no Apêndice B.

como junção Josephson (JJ). Uma JJ é constituída por dois eletrodos supercondutores

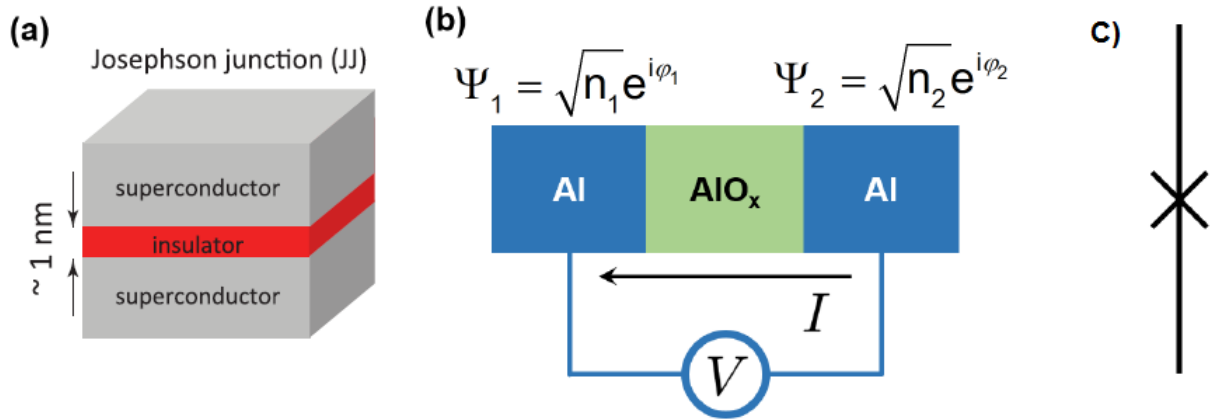


Figura 3 – (a) Representação pictórica da junção Josephson. (b) Descrição do circuito que compõem a junção Josephson onde os dois materiais supercondutores são descritos por suas respectivas funções de onda. (c) Representação pictórica do elemento da junção Josephson no circuito comumente vista na literatura de EQCir.

Fonte: (a) Ref. [84] e (b, c) Ref. [85].

separados por uma fina camada isolante, formando um link fraco como mostrado na Fig.3 (a) e (b). Cada eletrodo supercondutor na junção é descrito por suas respectivas funções de onda<sup>3</sup>  $\Psi_l = \sqrt{n_l} e^{i\varphi_l}$  com ( $l = 1, 2$ ), onde  $n_l$  corresponde à densidade de pares de Cooper em ambos os materiais e  $\varphi_l$  são as fases das funções de onda. Devido à fina camada que separa os materiais, pode ocorrer a sobreposição das funções de onda  $\Psi_l$  por conta do tunelamento dos pares de Cooper de ambos os eletrodos através da camada isolante. Seguindo a derivação feita no Apêndice B, chega-se nas seguintes equações do efeito Josephson:

$$I_s = I_c \sin \varphi, \quad (3.2)$$

$$\dot{\varphi} = (2\pi/\Phi_0) V. \quad (3.3)$$

A Eq.(3.2) descreve o efeito Josephson DC conhecido como relação corrente-fase: uma supercorrente  $I_s$  surge no dispositivo mesmo sem a aplicação de qualquer voltagem nos terminais da junção. A supercorrente  $I_s$  depende apenas da diferença de fase  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  de ambas funções macroscópicas, tendo em vista que a junção deve suportar uma corrente crítica  $I_c$ . Essa corrente depende exclusivamente dos parâmetros da barreira, tais como, o parâmetro de transferência de pares de Cooper através da fina camada e do número de pares de Cooper  $n_{1,2}$  em cada eletrodo [16]. A Eq. (3.3) descreve o efeito Josephson AC, conhecida

<sup>3</sup> A descrição mais geral para esse problema é associada ao conceito de parâmetro de ordem do supercondutor [83].

como relação voltagem-fase: quando aplicada uma diferença de potencial  $V$  nos terminais da junção, observa-se que a diferença de fase  $\varphi$  varia com o tempo, onde  $\Phi_0 = h/2e$  é o quantum de fluxo magnético<sup>4</sup>. A JJ pode armazenar uma quantidade de energia definida por  $U(\varphi) = E_J(1 - \cos \varphi)$  [16]. Na expressão anterior o termo  $E_J = \Phi_0 I_c / 2\pi$  é a energia Josephson. Da definição de indutância  $L = V / (dI_s/dt)$ , e das equações Josephson (3.2) e (3.3) encontramos a indutância Josephson  $L_J = \Phi_0 / (2\pi I_c \cos \varphi)$ , característica por ser um parâmetro não linear<sup>5</sup> da JJ. A não linearidade é o ingrediente fundamental para a implementação de qubits supercondutores. Um esclarecimento mais elaborado a cerca do efeito Josephson e suas peculiaridades é encontrado na Ref. [16].

### 3.1.3 Qubit de Fluxo

Importantes realizações experimentais foram reportadas utilizando o qubit de fluxo [86,87], dentre as quais podemos destacar algumas das mais significativas: **i)** verificação das oscilações de Rabi em um qubit de estado sólido (Chiorescu *et al* [88]) e **ii)** recentemente um novo prótipo de qubit de fluxo desenvolvido denominado como "*Fluxonium*" ganhou destaque pelo alto tempo de coerência e por preservar a anarmonicidade do espectro de energia [89]. Além disso, destacamos que houve uma melhora significativa nos tempos de coerência e defasagem como reportado na Ref. [31]. Nesta seção faremos uma breve descrição do átomo artificial de fluxo, conhecido na literatura como qubit de corrente persistente que opera no regime<sup>6</sup> onde  $E_J \gg E_C$ . Este tipo de átomo artificial é constituído por um *loop* superconductor (SQUID-DC) interrompido por 3 junções Josephson [29], como pode ser visto na Fig. 4. Nessa figura observa-se que para este tipo de qubit temos duas junções Josephson com energias  $E_{J1}, E_{J2}$ , e capacitâncias Josephson iguais  $C_{J1} = C_{J2}$ , sendo que a terceira junção  $E_{J3}$ , é diferente das outras junções do loop por um fator de assimetria  $\alpha$ <sup>7</sup>. Neste sistema, a diferença de fase exerce um papel dominante. A quantização do fluxo magnético é dada por [29,91]:

$$\sum_i \varphi_i + 2\pi f = 2\pi n_f, \quad (3.4)$$

onde  $f = \Phi_{ext} / \Phi_0$  descreve o parâmetro de controle do fluxo magnético<sup>8</sup> no *loop* superconductor que constitui o átomo artificial e  $n_f$  é o número inteiro de quanta de fluxo. É interessante que neste tipo de qubit por conta da dependência entre a diferença de fase e os fluxos magnético externo devido a quantização do fluxo (3.4) o parâmetro  $f$  pode

<sup>4</sup> O quanta de fluxo tem seu valor  $\Phi_0 = 2.06783372 \times 10^{-15} \text{Wb}$ .

<sup>5</sup> Essa não linearidade está relacionada a fase da junção

<sup>6</sup> Neste caso a diferença de fase  $\varphi$  é a variável dominante.

<sup>7</sup> O parâmetro assimétrico  $\alpha$  é relativo à junção de menor sítio, dentre as outras 2 junções que compõem este tipo de qubit. Isso faz com que tenhamos uma energia Josephson reduzida por um fator  $\alpha$ . Esse fator é crucial para se ter um cenário de qubit.

<sup>8</sup> Denominado como parâmetro de frustração magnético.

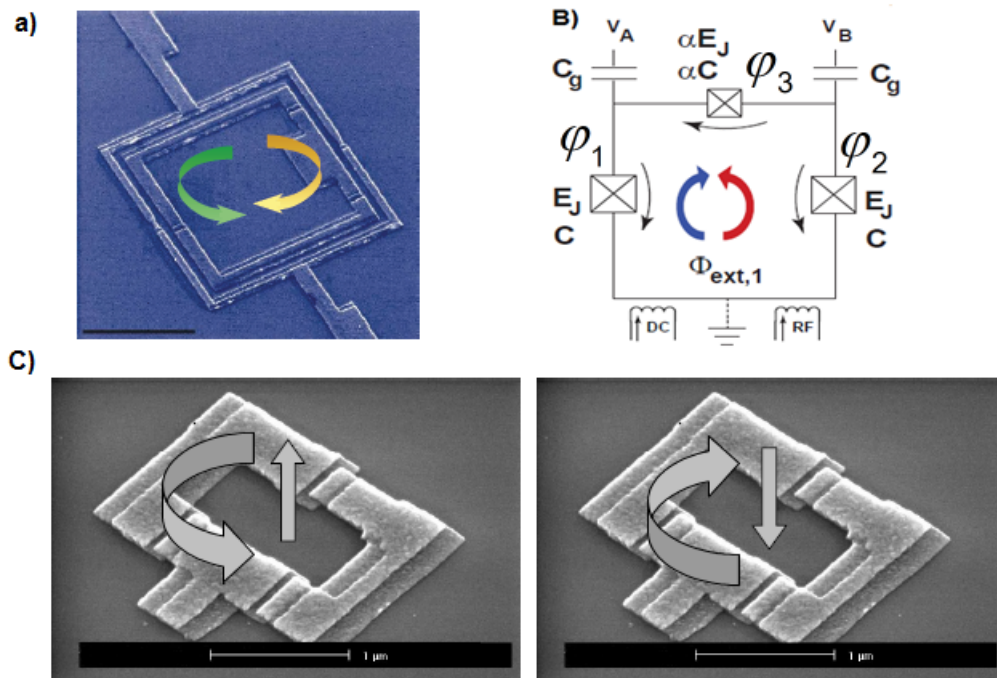


Figura 4 – (a) Representação real do átomo artificial de fluxo para o sistema em questão. (b) Representação pictórica do circuito do átomo artificial de fluxo interrompido pelas junções Josephson; (c) Representação pictórica do sentido que a supercorrente supercondutora pode circular no *loop* e os dois estados de spin associados com essa supercorrente.

Fonte: (a) Ref. [90], (b) adaptada da Ref. [91] e (c) Ref. [92].

ser utilizado como o elemento importante para o controle das propriedades deste átomo artificial.

Utilizando (3.4) podemos escrever a fase  $\varphi_3$  em função das fases  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  em cada junção na Fig. 4(b) permitindo assim o cálculo da energia total Josephson do sistema [29,91]:

$$U_J(\varphi_1, \varphi_2) / E_J = 2 + \alpha - \cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2) - \alpha \cos(2\pi f - \varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.5)$$

Nos painéis superiores mostrados na Fig. 5 ilustramos o potencial definido na Eq.(3.5), na qual podemos observar uma estrutura com dois mínimos degenerados especificamente no ponto de frustração magnético  $f = 0.5$ , onde o potencial apresenta dois mínimos degenerados, sendo que nesse ponto específico torna-se possível a implementação de um sistema de dois estados que pode descrever um qubit [86, 87]. Fora do ponto  $f = 0.5$  é possível observar situações nas quais o potencial apresenta um ponto de máximo correspondendo a um estado de mais alta energia e outro de mínimo com mais baixa energia que podem ser associados com correntes persistentes<sup>9</sup> que circulam em direções

<sup>9</sup> Note que aqui essas correntes persistentes estão relacionadas a um número macroscópico de pares de Cooper.

opostas no *loop* como mostrado nos painéis inferiores da Fig. 5. Este comportamento de corrente persistente foi demonstrado em um experimento seminal reportado na [86] que mostrou a primeira possibilidade de gerar um qubit com esse tipo de setup supercondutor.

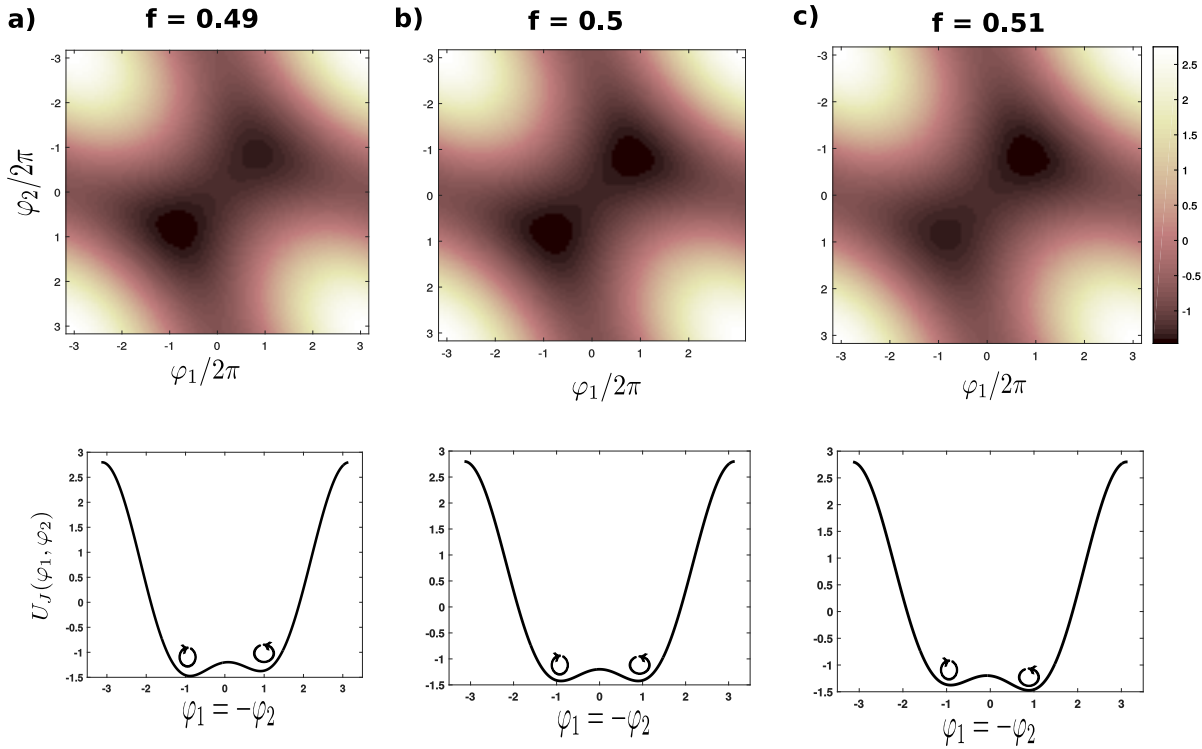


Figura 5 – Figuras superiores: Descrição do potencial  $U/E_J$  no plano das fases  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  para um parâmetro fixo  $\alpha = 0.75$  e diferentes valores de  $f$ ; Estrutura do potencial em função das fases  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , fixando  $\alpha = 0.75$  e diferentes valores de  $f$ . Figuras inferiores: Descrição do  $U_J/E_J$  em função de uma das fases das junções no *loop* supercondutor.

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 3.1.4 Descrição qualitativa do átomo artificial de fluxo

Para este sistema, a dinâmica quântica é dada pelo hamiltoniano que é composto por termos cinéticos devidos aos capacitores e o termo potencial referente a energia acumulada na junção que constituem o circuito da Fig. 4(a). O hamiltoniano deste sistema é dada por [29]:

$$H_{qf} = \frac{1}{2} P^T M^{-1} P + U_J(\varphi_1, \varphi_2) / E_J, \quad (3.6)$$

em que  $P = (-i\hbar\partial/\partial\varphi_1, -i\hbar\partial/\partial\varphi_2)^T$  são os momentos canônicos, e

$$M = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 C \begin{bmatrix} 1 + \alpha & \alpha \\ -\alpha & 1 + \alpha \end{bmatrix},$$

é referente aos termos capacitivos e os termos de assimetria  $\alpha$ . Na Fig. 6 ilustramos os primeiros níveis de energia<sup>10</sup>, calculados numericamente após diagonalizar o hamiltoniano 3.6, utilizando o método empregado na Ref. [93]. Percebemos que à medida que a razão  $E_J/E_C$  diminui, o caráter anarmônico dos níveis de energia do sistema é perdido, sendo que isto pode ser visto de maneira clara a partir da Fig. 6(c) e (d). Observando o espectro do átomo artificial de fluxo ilustrado na Fig. 6 (a) e (b), no ponto  $f = 0.5$ , existe a possibilidade de implementar um estado de qubit como superposição de correntes persistentes<sup>11</sup> sendo que essas correntes circulam no sentido horário e anti-horário no *loop* supercondutor na região que abrange os intervalos  $f < 0.5$  e  $f > 0.5$ . Sob tais considerações, pode-se escrever o hamiltoniano do qubit de fluxo na forma [29, 91]:

$$\hat{H}_{qf} = \frac{\hbar\varepsilon}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Delta}{2} \hat{\sigma}_x, \quad (3.7)$$

onde  $\hat{\sigma}_z$  e  $\hat{\sigma}_x$  são as matrizes de Pauli<sup>12</sup>, e os parâmetros  $\varepsilon$  e  $\Delta$  definem o ponto de degenerescência que depende da corrente persistente e um elemento de matriz de tunelamento entre os vizinhos mais próximos respectivamente. Estes parâmetros são intrínsecos do sistema e são importantes para a implementação do qubit.

<sup>10</sup> No Apêndice B, deduzimos o hamiltoniano 3.6

<sup>11</sup> Corrente persistente  $I_p$  é a corrente que circula no loop. A corrente pode circular tanto no sentido horário, como no sentido anti-horário, dependendo da orientação do campo magnético, para este qubit  $I_p = \pm I_c \sqrt{1 - 1/2\alpha^2}$ .

<sup>12</sup> Na notação de corrente persistente:  $\hat{\sigma}_z = |\circ\rangle\langle\circ| - |\ominus\rangle\langle\ominus|$ ;  $\hat{\sigma}_x = |\circ\rangle\langle\ominus| + |\ominus\rangle\langle\circ|$ .

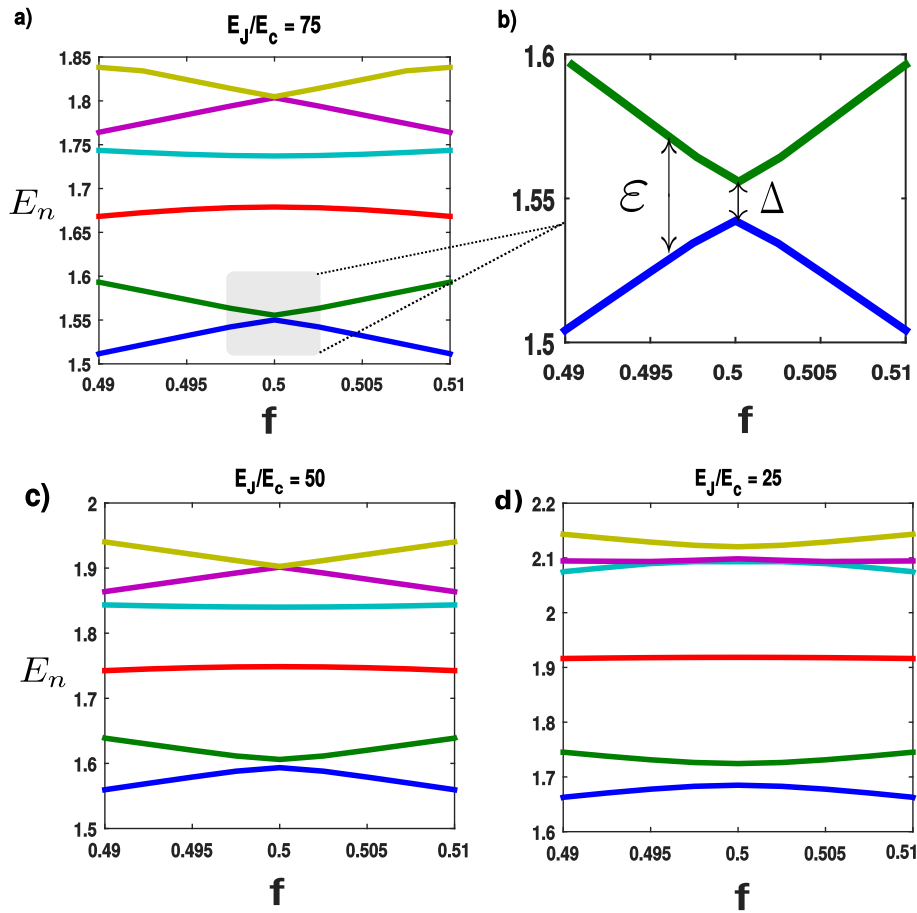


Figura 6 – (a, c, d) Primeiros níveis de energia do átomo artificial de fluxo. Os dois níveis inferiores são usualmente utilizados para se construir um qubit. (b) Zoom ilustrando a implementação do qubit de fluxo com os parâmetros característicos do qubit.

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 3.2 Interação Átomo artificial e ressonador

A interação entre o átomo e um modo quântico da radiação é bem idealizada via interação de dipolo elétrico. Algumas derivações que serão feitas aqui foram adotadas seguindo as Ref. [21, 94]. A interação dipolo elétrico pode ser descrito pelo hamiltoniano:

$$H_I = -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (3.8)$$

sendo  $e$  sendo a carga eletrônica,  $\mathbf{r}$  o operador posição do átomo e  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  o operador campo elétrico. Em óptica quântica é comum levar em consideração que a descrição da maioria dos fenômenos possa ser feita utilizando-se a condição de um campo com um único modo



de maneira que o campo possa ser escrito na forma  $\mathbf{E}(z, t) = \mathcal{E}(a + a^\dagger) \sin(kz)$ , onde

o fator  $\mathcal{E} = \sqrt{\hbar\omega/\epsilon_0 V}$  representa o campo elétrico por modo sendo  $V$  o volume ocupado por esse modo. O hamiltoniano de interação, escrito na base de autoestados do átomo  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$  pode ser escrito como [78]:

$$H_I = d_{eg}(\sigma^- + \sigma^+) \mathbf{E},$$

sendo  $d_{eg} = -e \langle g | \mathbf{r} | e \rangle$  o elemento de matriz de dipolo<sup>13</sup> para a transição atômica e  $\sigma^\pm$  são os operadores atômicos  $\sigma^+ = |e\rangle \langle g|$  e  $\sigma^- = |g\rangle \langle e|$ . Após essas considerações podemos escrever o segundo termo em (3.8) através do hamiltoniano

$$H_I = \hbar g (\sigma^- + \sigma^+) (a + a^\dagger), \quad (3.9)$$

com o parâmetro  $g = \mathcal{E} d_{eg} \sin kz / \hbar$  é responsável por descrever o acoplamento átomo-campo. Após definirmos o hamiltoniano (3.9) que descreve a interação, podemos escrever o hamiltoniano para o sistema total (átomo-campo) na forma:

$$H_R = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z + \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar g (\sigma^- + \sigma^+) (a + a^\dagger), \quad (3.10)$$

onde o primeiro termo corresponde ao átomo de dois níveis<sup>14</sup> o segundo ao modo do campo eletromagnético da cavidade ou ressonador e o último é dado em (3.9). O hamiltoniano definido em (3.10) é conhecido como modelo de Rabi quântico, que constitui o modelo mais fundamental e geral para investigar a interação átomo-campo em uma diversidade de sistemas físicos onde essa interação seja relevante. Embora este modelo exiba uma forma relativamente simples, sua solução é tema de intenso estudo até hoje embora um recente avanço tenha sido obtido recentemente [22]. Um resultado que pode ser obtido do modelo de Rabi tem como base a *aproximação de onda girante* que consiste no descarte de todos os termos que não conservam o número de excitações [20], isto é, devemos desconsiderar em (3.10) termos do tipo  $\sigma^- a$  e  $\sigma^+ a^\dagger$ . Dessa forma, o hamiltoniano (3.10) pode ser aproximado por:

$$H_{JC} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z + \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar g (a\sigma^+ + \sigma^- a^\dagger), \quad (3.11)$$

que descreve o modelo de Jaynes-Cummings (JC) bastante conhecido na literatura de óptica quântica. O modelo JC (3.11) é válido no regime de acoplamento fraco:  $g < \max\{\kappa, \gamma\}$  e forte  $g > \kappa, \gamma$ , mas com  $g \ll \omega_c, \omega_0$ , tanto em EQCav como em EQCir. Nesses regimes o acoplamento entre o qubit e a cavidade pode ser menor ou maior que as taxas de dissipação do átomo  $\gamma$  e da cavidade  $\kappa$ . Entretanto, o modelo de Rabi é ideal e até o momento é o único que consegue ser utilizado para descrever a fenomenologia dos regimes de acoplamento ultra forte  $g \gtrsim 0.1 \omega_0, \omega_c$  e do regime de acoplamento profundamente forte:  $g \gtrsim \omega_0, \omega_c$ .

<sup>13</sup> É importante ressaltar, que por paridade, transições envolvendo os elementos da matriz de dipolo  $d_{gg} = d_{ee} = 0$ . A transição envolve apenas termos não diagonais na matriz.

<sup>14</sup> No primeiro termo, o referencial da energia (ponto onde a energia é nula) foi adotado exatamente entre os níveis  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ , de modo que as respectivas energias ficam definidas como  $-\frac{\hbar\omega_0}{2}$  e  $+\frac{\hbar\omega_0}{2}$ ,

### 3.2.1 Acoplando o qubit de fluxo ao ressonador

Um qubit de fluxo pode ser acoplado a um ressonador utilizando a descrição de acoplamento indutivo. Especificamente, a interação entre ambos é descrito pela interação dipolo magnética  $H_{int} = -\mu \cdot B$  cujo  $\mu$  é o momento magnético da corrente persistente que circula no *loop* de área  $A$  da Fig. 4(b) e  $B$  é o campo magnético no ressonador [95]. O acoplamento entre o qubit de fluxo e o ressonador é definido por [95, 96]:

$$\hbar g = M I_p I_{rms}, \quad (3.12)$$

onde  $M$  é a indutância mútua que acopla o átomo ao ressonador,  $I_p$  é a corrente persistente já definida na seção anterior e  $I_{rms} = \sqrt{\hbar \omega_r / 2 L_r}$  é a corrente de ponto zero gerada por flutuações quânticas do ressonador e depende da indutância  $L_r$  do ressonador. Observa-se que este tipo de acoplamento indutivo permite aumentar o acoplamento entre o qubit-ressonador se a área do qubit for acrescida ao variarmos a indutância  $M$ .

## 4 Estados Não-clássicos do campo eletromagnético: Estados comprimidos

Um dos objetivos deste trabalho concerne no estudo e proposta de geração de uma classe de estados não-clássicos do campo eletromagnético, denominados como estados comprimidos (*squeezed states*) [28]. Estes estados são caracterizados por terem incerteza mínima, mas com diferentes flutuações nas quadraturas (X e Y, que correspondem à amplitude e à fase de um campo eletromagnético), ou seja, a flutuação em uma das quadraturas é menor do que o esperado para o estado coerente<sup>1</sup>. Um estado comprimido de

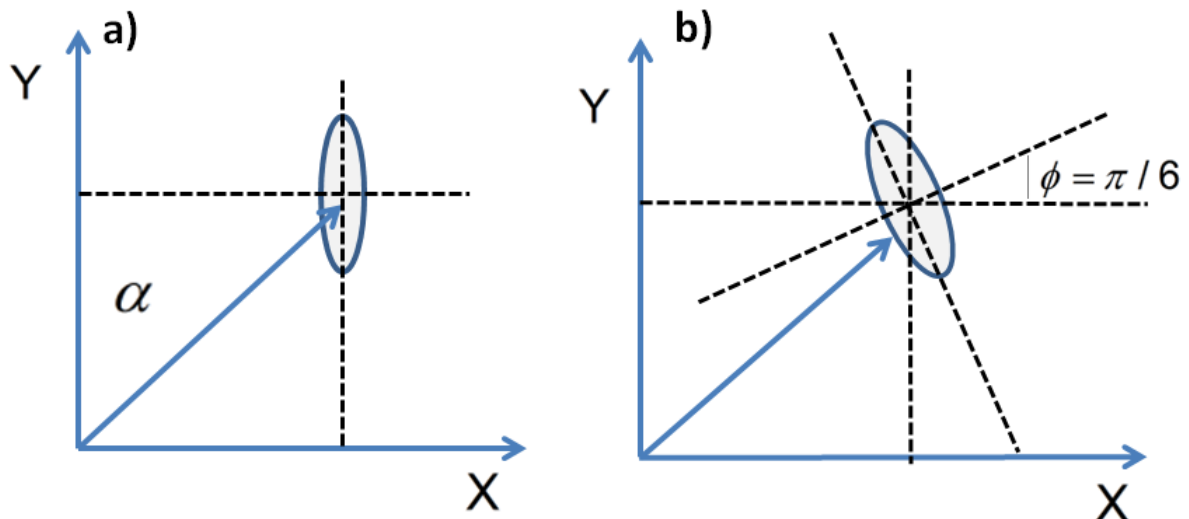


Figura 7 – Representação pictórica no plano de fases X-Y para um estado comprimido. a) Estado comprimido na direção  $\phi = 0$ , b) compressão na direção  $\phi = \pi/6$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

um modo pode ser gerado através de um operador conhecido como operador de compressão:

$$S(\zeta) = \exp \left[ \frac{1}{2} (\zeta^* a^2 - \zeta a^{\dagger 2}) \right],$$

onde  $\zeta = r e^{2i\phi}$  é o parâmetro de compressão, com  $r = |\zeta|$  descrevendo o fator de compressão e  $\phi$  é o ângulo de direção da compressão das quadraturas no espaço de fase. Como definido em [94] o estado comprimido pode ser trabalhado com o auxílio de um operador de

<sup>1</sup> De fato, para um estado coerente, as flutuações são as mesmas ao longo de qualquer direção no espaço de fase do plano X-Y. O termo flutuações refere-se ao diagrama de erro, isto é, uma representação pictórica de um círculo para estados coerentes e uma elipse para estados comprimidos no plano X-Y, como descrito em [28]

aniquilação generalizado:

$$A = S(\zeta) a S(\zeta)^\dagger \quad (4.1a)$$

$$A = \mu a + v a^\dagger, \quad (4.1b)$$

onde  $\mu = \cosh r$  e  $v = e^{i\phi} \sinh r$ .

O estado coerente comprimido é dado por:

$$|\alpha, \zeta\rangle = D(\alpha) S(\zeta) |0\rangle, \quad (4.2)$$

onde  $D(\alpha) = \exp(\alpha a - \alpha^* a^\dagger)$  é o operador de deslocamento. Utilizando (4.2) e manipulando (4.1a) e (4.1b) pode-se encontrar as relações envolvendo os operadores de criação e aniquilação

$$a = \mu A - v A^\dagger, \quad (4.3a)$$

$$a^\dagger = \mu A + v A^\dagger. \quad (4.3b)$$

Tendo em mente as definições anteriores<sup>2</sup>, podemos obter os valores esperados  $\langle \hat{a} \rangle$  e  $\langle \hat{a}^\dagger \rangle$  no estado  $|\alpha, \zeta\rangle$  cujo resultado é [94, 97] :

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \zeta | a | \alpha, \zeta \rangle &= \alpha, \\ \langle \alpha, \zeta | a^\dagger | \alpha, \zeta \rangle &= \alpha^*. \end{aligned}$$

O número médio de fótons  $\hat{n} = a^\dagger a$  nesse estado e o valor esperado de  $a^2$  são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \zeta | n | \alpha, \zeta \rangle &= \sinh^2 r + |\alpha|^2, \\ \langle \alpha, \zeta | a^2 | \alpha, \zeta \rangle &= \alpha^2 - \cosh r \sinh r e^{i\phi}. \end{aligned}$$

Uma informação importante consiste em obter o valor das flutuações nas quadraturas definidas por:

$$\begin{aligned} X &= \frac{ae^{i\phi} - a^\dagger e^{-i\phi}}{2i}, \\ Y &= \frac{ae^{-i\phi} - a^\dagger e^{i\phi}}{2i}, \end{aligned}$$

no estado  $|\alpha, \zeta\rangle$  cujo resultado é [27]:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta X)^2 \rangle &= \frac{1}{4} [\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \sinh r \cosh r \cos \phi], \\ \langle (\Delta Y)^2 \rangle &= \frac{1}{4} [\cosh^2 r + \sinh^2 r + 2 \sinh r \cosh r \cos \phi], \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Aplicando  $\langle \alpha, \zeta | \mu A - v A^\dagger | \alpha, \zeta \rangle = \mu\beta - v\beta^*$  com  $\beta = \alpha \cosh r + \alpha e^{i\phi} \sinh r$ , [94]

que para a direção de compressão  $\phi = 0$  reduz-se a:

$$\begin{aligned}\langle(\Delta X)^2\rangle &= \frac{1}{4}e^{-2r}, \\ \langle(\Delta Y)^2\rangle &= \frac{1}{4}e^{2r}.\end{aligned}$$

É importante ressaltar que apenas para os casos especiais tais como  $\phi = 0$  e  $\phi = \pi$  a relação de incerteza envolvendo  $\Delta X$  e  $\Delta Y$  é igual a

$$\langle(\Delta X)^2\rangle\langle(\Delta Y)^2\rangle \geq \frac{1}{16}.$$

Outra informação importante reside na estatística de fótons envolvendo estados comprimidos. Conhecendo-se a forma do estado de vácuo comprimido de um modo [27] na base de Fock

$$|\zeta\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\sqrt{2m}}{2^m m!} e^{im\phi} (\tanh r)^m |2m\rangle,$$

podemos obter a estatística de distribuição de fótons. A probabilidade de obter fótons para o estado comprimido é

$$\begin{aligned}P_{2m} &= |\langle 2m|\zeta\rangle|^2 = \frac{2m!}{2^m (m!)^2} \frac{(\tanh r)^{2m}}{\cosh r}, \\ P_{2m+1} &= |\langle 2m+1|\zeta\rangle|^2 = 0.\end{aligned}$$

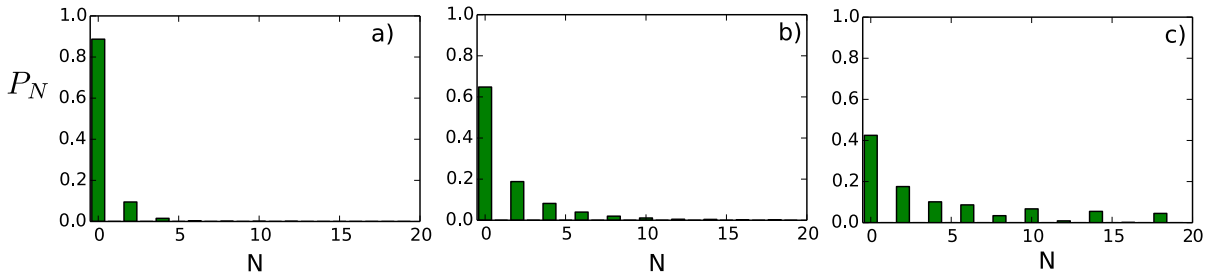


Figura 8 – Distribuição de fótons para o estado de vácuo comprimido para alguns valores do parâmetros de compressão  $r$ . (a)  $r = 0.5$ , (b)  $r = 1.0$  e (c)  $r = 1.5$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

## 4.1 Estados comprimidos de dois modos

Uma classe especial de estados comprimidos que iremos investigar neste trabalho é o estado de vácuo de dois modos comprimidos (TMSS) que pode ser gerado através da aplicação do operador de compressão [27, 28]:

$$S_2(\zeta) = e^{(\zeta^* a b - \xi a^\dagger b^\dagger)}, \quad (4.4)$$

onde  $\zeta = re^{i\phi}$ , com  $r \in (0, \infty)$  denominado como parâmetro de compressão. Enquanto que,  $a$  e  $b$  ( $a^\dagger$  e  $b^\dagger$ ) são os operadores de aniquilação (criação) dos modos  $a$  e  $b$ .

De maneira similar ao que foi feito para o estado comprimido de um modo, pode-se definir operadores de quadratura [27]

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2^{3/2}} (a + a^\dagger + b + b^\dagger), \\ Y &= \frac{1}{2^{3/2}i} (a - a^\dagger + b - b^\dagger), \end{aligned}$$

que obedecem a relação de incerteza  $[X, Y] = i/2$ .

Utilizando operações do tipo [27]

$$\begin{aligned} S_2^\dagger(\zeta) a S_2(\zeta) &= a \cosh r - e^{i\phi} b^\dagger \sinh r, \\ S_2^\dagger(\zeta) b S_2(\zeta) &= b \cosh r - e^{i\phi} a^\dagger \sinh r, \end{aligned}$$

e após um pouco de álgebra obtemos as variâncias [27]

$$\langle (\Delta X)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r} \quad ; \quad \langle (\Delta Y)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2r},$$

que são idênticas às obtidas no caso de um único modo.

Na base de Fock o TMSS é dado por [27]:

$$|\zeta\rangle_2 = \frac{1}{\cosh r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{in\phi} (\tanh r)^n |n_a, n_b\rangle, \quad (4.5)$$

onde  $|n_a\rangle, |n_b\rangle$  são os estados de Fock para os modos  $a$  e  $b$  respectivamente.

Com o auxílio do estado (4.5) podemos encontrar a estatística de fótons para os modos  $a$  e  $b$ . Por exemplo, o número médio de fótons  $n_{a,b} = \langle a^\dagger a \rangle = \langle b^\dagger b \rangle = \sinh^2 r$ . Além disso, é possível obter informações a cerca da probabilidade conjunta de encontrar  $n_1$  fótons no modo  $a$  e  $n_2$  fótons no modo  $b$ . Essa probabilidade é dada por:

$$P_{n_1, n_2} = \frac{1}{\cosh r^2} (\tanh r)^{2n} \delta_{n_1, n} \delta_{n_2, n}.$$

Na Fig. 9, mostramos o comportamento da distribuição de fótons em função do parâmetro de compressão  $r$ . A partir da Fig. 9 observa-se que a probabilidade conjunta do número de fótons no TMSS é uma função diagonal em  $n_1$  e  $n_2$  [27]. Outra característica interessante no TMSS consiste na descrição das propriedades individuais dos modos  $a$  e  $b$ . Caso se tenha interesse em obter informação sobre o modo  $a$ , a partir do estado (4.5), é conveniente efetuar um traço parcial de modo que

$$\begin{aligned} \rho_a &= \text{Tr}_b |\zeta\rangle_2 \langle \zeta| \\ \rho_a &= \frac{1}{\cosh r^2} \sum_{n=0}^{\infty} (\tanh r)^{2n} |n\rangle_a \langle n|, \end{aligned}$$

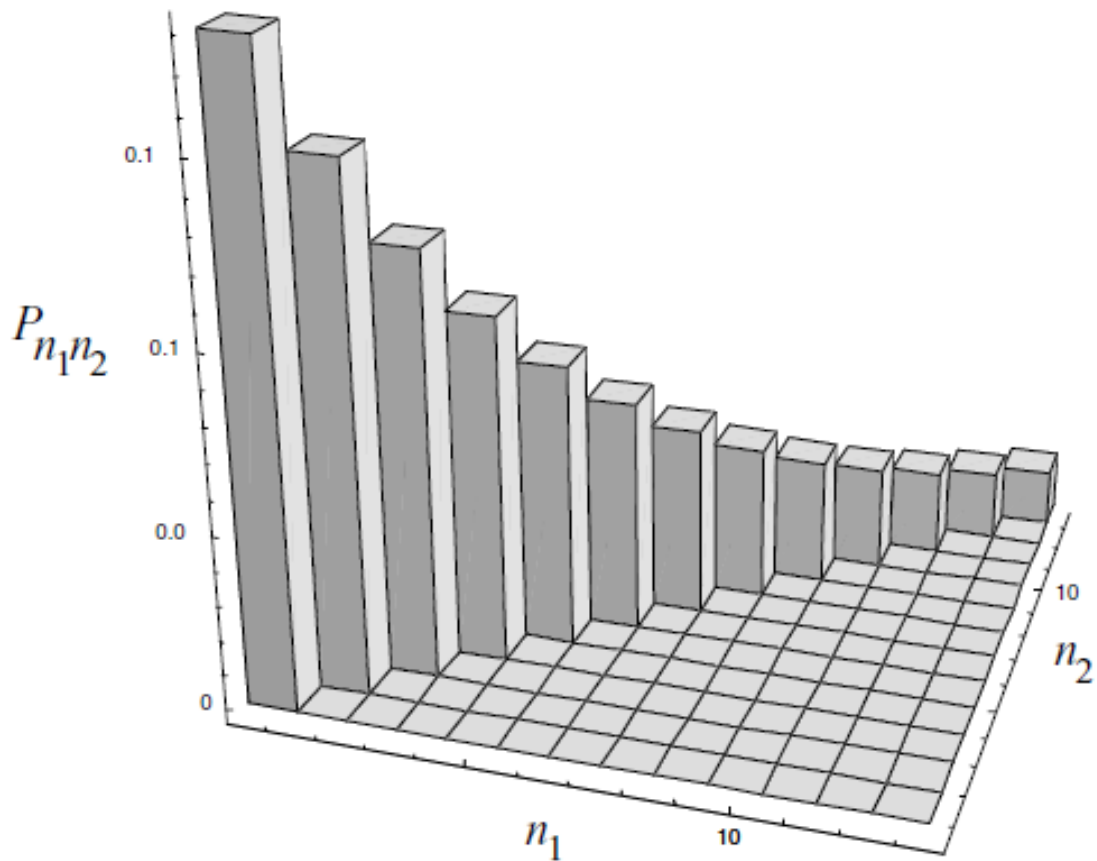


Figura 9 – Distribuição de fótons para o estado de vácuo comprimido de dois modos para um valor de parâmetro de compressão  $r = 1.0$

Fonte: Retirada da Ref. [27].

consequentemente para o modo  $b$ , teremos

$$\rho_b = \text{Tr}_a |\zeta\rangle_2 \langle \zeta|$$

$$\rho_b = \frac{1}{\cosh r^2} \sum_{n=0}^{\infty} (\tanh r)^{2n} |n\rangle_b \langle n|.$$

Com estas expressões podemos obter a informação de cada modo individual referente ao estado (4.5) e propriedades tais como emaranhamento via entropia de von-Neumann [27]. Na próxima seção apresentamos um protocolo para se gerar esses estados de dois modos comprimidos no contexto de eletrodinâmica quântica de circuitos.

## 4.2 Proposta para gerar um estado comprimido de dois modos em EQCir

Nesta parte da tese iremos descrever os resultados obtidos na Ref. [30], na qual fizemos uma proposta para gerar um estado comprimido de dois modos (TMSS) utilizando a plataforma de *circuit QED*. Esse trabalho foi desenvolvido juntamente com o Prof. Dr. Daniel Z. Rossatto (hoje na UNESP/Itapeva, SP), que participou das discussões, interpretação dos resultados e redação do artigo. Embora na literatura algumas propostas tenham sido feitas no intuito de gerar TMSS, fornecemos uma análise mais geral que engloba os efeitos dissipativos e como estes efeitos podem ser determinantes na degradação do estado comprimido. Baseados em uma proposta anterior que tinha como objetivo a implementação de um operador de compressão de um e dois modos no âmbito de *cavity QED* [98], propusemos um esquema que viabiliza a implementação do operador compressão de dois modos no contexto de eletrodinâmica quântica de circuitos, onde introduzimos uma análise detalhada da validade das aproximações empregadas e da influência dos mecanismos de dissipação no processo de geração de um TMSS.

### 4.2.1 Sistema Físico

O sistema utilizado para a implementação do TMSS consiste de um único átomo artificial acoplado a dois ressonadores e submetido a ação de um campo clássico externo. Embora somente os dois níveis de energia mais baixos do átomo sejam de fato relevantes para a dinâmica do nosso sistema, em nossa análise levamos em conta um terceiro nível  $|f\rangle$  e seu acoplamento com os modos. Como veremos, para qubits de fluxo, onde a anarmonicidade dos níveis de energia é suficientemente grande, a presença desse terceiro nível é de fato desprezível. O hamiltoniano que descreve esse sistema é dado por

$$H_{\text{full}} = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + \left( \frac{\omega_0}{2} + \omega_{\text{ef}} \right) \sigma_{\text{ff}} + \left[ g_a (a + a^\dagger) + g_b (b + b^\dagger) + 2\Omega \cos(\omega_d t) \right] \times [(\sigma_{\text{ge}} + \sigma_{\text{eg}}) + (\sigma_{\text{ef}} + \sigma_{\text{fe}})], \quad (4.6)$$

onde  $a$  ( $a^\dagger$ ) e  $b$  ( $b^\dagger$ ) são os operadores aniquilação (criação) para os modos dos ressonadores  $a$  e  $b$ , respectivamente, que possuem frequências  $\omega_a$  e  $\omega_b$ . Os operadores  $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$  e  $\sigma_{\text{eg}} = \sigma_{\text{ge}}^\dagger = |e\rangle\langle g|$  são os operadores do qubit, sendo que  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  são os estados excitado e fundamental do qubit, respectivamente, enquanto que  $\sigma_{\text{ff}} = |f\rangle\langle f|$  e  $\sigma_{\text{ef}} = \sigma_{\text{fe}}^\dagger = |e\rangle\langle f|$ . A frequência de transição entre  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$  é dada por  $\omega_0$  enquanto que a frequência de transição entre  $|e\rangle$  e  $|f\rangle$  é  $\omega_{\text{ef}}$ . O acoplamento entre o qubit e os ressonadores é representado por  $g_a$  ( $g_b$ ).

Como mencionado anteriormente, o qubit é submetido a um campo clássico externo com frequência de Rabi  $2\Omega$ , e frequência de oscilação  $\omega_d$ . Os modos dos ressonadores e o campo externo também acoplam a transição  $|e\rangle \leftrightarrow |f\rangle$ , onde por simplicidade consideramos



os mesmos acoplamentos  $g_a$  ( $g_b$ ) e frequência de Rabi  $2\Omega$ . O hamiltoniano da Eq. (4.6) descreve a dinâmica mais geral do sistema, pois ele possui em sua estrutura os termos girantes e contragirantes tanto nos acoplamentos entre o qubit-ressonador como também no campo externo envolvendo as transições entre os níveis excitado e fundamental e da transição entre o primeiro e segundo nível excitados. De acordo com a condição definida a partir da desigualdade  $\omega_y + \omega_x \gg |\omega_y - \omega_x| \gg |g_x|$ , com  $y = \{0, ef\}$  e  $x = \{a, b, d\}$  ( $g_d \equiv 2\Omega$ ), podemos negligenciar os termos contra girantes na Eq. (4.6). Entretanto, para um qubit com anarmonicidade muito grande ( $|\omega_{ef} - \omega_0|/\omega_0 \gg 1$ ), o terceiro nível não afeta substancialmente a dinâmica o que nos permite desconsiderar o terceiro nível sem perda de generalidade. Tendo em mente esta consideração o hamiltoniano da Eq. (4.6) se reduz ao hamiltoniano [99]

$$H = H_0 + H_I, \quad (4.7)$$

com

$$H_0 = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + \frac{\omega_0}{2} \sigma_z, \quad (4.8)$$

$$H_I = (g_a a + g_b b + \Omega e^{-i\omega_d t}) \sigma_{eg} + \text{H.c.} \quad (4.9)$$

Este hamiltoniano representa o *setup* de circuit-QED ilustrado na Fig. 10 que propomos na Ref. [30]. Como pode ser visto na Fig. 10(a), temos a configuração dos níveis de energia do qubit com as frequências relevantes necessárias, com  $\delta_a = \omega_a - \omega_0$ ,  $\delta_b = \omega_b - \omega_0$ , e  $\omega_d = \omega_0$ . O *setup* da nossa proposta no contexto de circuit QED é ilustrado no Fig. 10(b). Vale a pena destacar que, embora um *setup* similar seja utilizado na Ref. [99], onde os autores propõem um protocolo para gerar TMSS através de engenharia de reservatório utilizando dois campos externos de radiação microondas, em nosso protocolo, apenas um campo clássico externo é requerido. Embora o protocolo proposto em Ref. [99], consiga gerar um TMSS como um estado estacionário e, portanto, robusto contra a decoerência, este não pode ser usado para comprimir estados iniciais arbitrários, como permitido em nosso protocolo. Do ponto de vista experimental, um *setup* similar ao nosso descrito em [100] foi utilizado para gerar um estado de gato de Schrödinger de dois modos utilizando um átomo artificial supercondutor conhecido como *Transmon*<sup>3</sup> [101, 102].

### 4.2.2 Aproximações Requeridas

Um procedimento necessário em nossa investigação consiste em efetuar algumas transformações unitárias no hamiltoniano dado pela Eq.(4.7). O primeiro passo consiste em reescrever o hamiltoniano da Eq. (4.7) na representação de interação

$$V_I(t) = (g_a e^{-i\delta_a t} a + g_b e^{-i\delta_b t} b + \Omega) \sigma_{eg} + \text{H.c.}, \quad (4.10)$$

<sup>3</sup> O transmon faz parte da classe que qubits supercondutores do tipo carga.

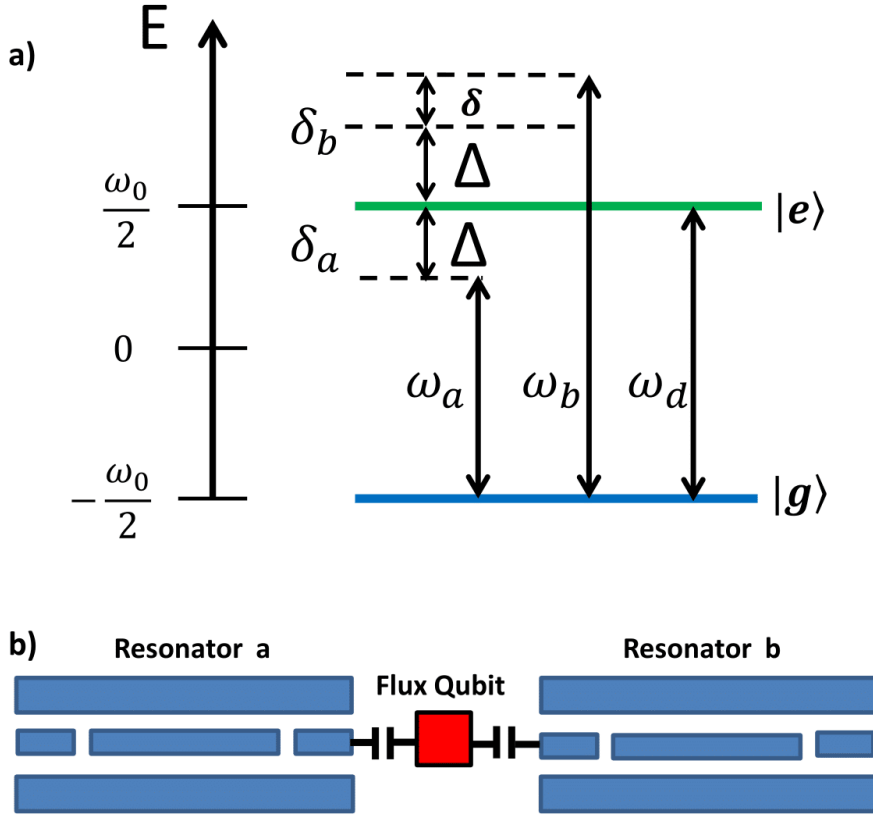


Figura 10 – (a) Diagrama de níveis de energia do qubit e as frequências requeridas para o nosso esquema. (b) Representação pictórica do setup de circuit QED usada para gerar o TMSS.

Fonte: Elaborada pelo autor.

em seguida, aplicamos a transformação unitária  $U = \exp[-i(\Omega\sigma_{eg} + \Omega^*\sigma_{ge})t]$ , que nos permite obter o hamiltoniano

$$\mathcal{V}_I(t) = U^{-1}V_I(t)U - (\Omega\sigma_{eg} + \Omega^*\sigma_{ge}), \quad (4.11)$$

onde este hamiltoniano transformado possui somente termos oscilantes. Com esse hamiltoniano podemos utilizar um procedimento que se tornou bastante popular em óptica quântica e física atômica conhecido na literatura como "*engenharia de interações*", isto é, com o auxílio de campos externos aplicados no átomo artificial ou no modo do ressonador, é possível manipular a interação qubit-modo de forma a se construir uma interação específica, capaz de gerar os estados desejados. Para se obter tais dinâmicas efetivas faremos uso de um método desenvolvido por D. F. V. James [103], que permite o cálculo de hamiltonianos efetivos a partir de dinâmicas dispersivas, isto é, quando o hamiltoniano do sistema  $\mathcal{V}_{IT}(t)$  apresenta somente termos altamente oscilantes como por exemplo na Eq. (4.11). Como

descrito na Ref. [103], nessa condição o hamiltoniano efetivo é dado pela expressão

$$H_{\text{eff}} = -i\mathcal{V}_I(t) \int \mathcal{V}_I(t) dt, \quad (4.12)$$

que permite obter um hamiltoniano efetivo  $H_{\text{eff}}$  que substitui sob determinados parâmetros e regimes o hamiltoniano  $\mathcal{V}_{IT}(t)$  dispersivo da Eq.(4.11). Para um melhor esclarecimento sobre a teoria de hamiltonianos efetivos em óptica quântica e com aplicações em física atômica, recomendamos a leitura da Ref. [104]. Utilizando  $\delta_a = \Delta$  e  $\delta_b = -\Delta - \delta$  ( $|\delta| \ll |\Delta|$ ), sob a condição de larga dessintonia e campos externos intensos, isto é,  $|\Delta + 2\Omega| \gg |\eta|$  com  $\eta = 2\Omega - \Delta$ , além de considerar  $|\eta| \gg g$  obtemos o hamiltoniano efetivo <sup>4</sup> após efetuarmos a aproximação de onda girante [98]

$$H_{\text{eff}} = (\chi_a a a^\dagger + \chi_b b^\dagger b) \sigma_{++} - (\chi_a a^\dagger a + \chi_b b b^\dagger) \sigma_{--} + \left( \frac{g_a g_b e^{i\delta t}}{4\eta} ab + \text{H.c.} \right) (\sigma_{--} - \sigma_{++}), \quad (4.13)$$

em que  $\chi_\alpha = |g_\alpha|^2/4\eta$  ( $\alpha = a, b$ ) e  $\sigma_\pm = |\pm\rangle\langle\pm|$ , com  $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle \pm |e\rangle)$ . A partir do hamiltoniano (4.13), notamos que é possível ter dinâmicas diferentes dependendo do estado inicial do átomo, isto é, se o átomo é preparado no estado  $|+\rangle$  ou  $|-\rangle$ . A geração do processo de compressão em nosso protocolo pode ser feita para ambos os estados do qubit e ajustando a dessintonia  $\delta$ . Podemos preparar o sistema no estado inicial  $|\psi(0)\rangle = |-\rangle_{\text{atom}} \otimes |\Psi(0)\rangle_{ab}$  e após efetuar a transformação unitária  $U_- = \exp[i(\chi_a a^\dagger a + \chi_b b^\dagger b)t]$ , o hamiltoniano efetivo de dois modos é reduzido a:

$$\mathcal{H}_- = \frac{g_a g_b}{4\eta} ab + \text{H.c.}, \quad (4.14)$$

onde neste processo ajustamos  $\delta = -(\chi_a + \chi_b)$ . Este hamiltoniano é exatamente o mesmo que permite a geração de um estado comprimido de dois modos [28], sendo  $\lambda \equiv \left(\frac{g_a g_b}{4\eta}\right)$ , a constante de acoplamento efetiva. No caso ideal (sem dissipação) a evolução deste sistema é,  $|\psi(\tau)\rangle = \exp(-i\lambda\tau ab + \text{H.c.}) |\Psi(0)\rangle_{ab} = S(\zeta)_{ab} |\Psi(0)\rangle_{ab}$ , com  $\zeta = -i\lambda\tau$ , onde  $\tau$  representa o tempo de interação ente o qubit e os modos dos ressonadores. Portanto, o nosso esquema permite comprimir um estado inicial de dois modos arbitrário com o fator de compressão definido por  $r = |\lambda|\tau$ .

### 4.3 Resultados: Dinâmica unitária

Como primeiro requerimento para verificar a validade de nosso resultados, temos que investigar a validade de nossas aproximações realizadas acima. Como o nosso esquema requer um forte campo de bombeio externo e interações não ressonantes, devemos ter certeza sobre o intervalo de validade dos parâmetros. Para este fim, comparamos a

<sup>4</sup> Veja Apêndice C para detalhes algébricos

dinâmica do hamiltoniano efetivo  $\mathcal{H}_-$  [Eq. (4.14)] com o hamiltoniano  $V_I(t)$  [Eq.(4.10)] e o hamiltoniano global sem qualquer aproximação  $H_{\text{full}}$  [Eq. (4.6)]. Nesta seção toda a análise da validade das aproximações utilizadas na seção anterior será feita considerando a dinâmica unitária, isto é, sem levar em conta efeitos dissipativos. Afim de comparar a dinâmica envolvendo estes três hamiltonianos iremos nos focar na geração de um TMSS. Para este fim, o quantificador do grau de compressão é descrito pela variância total de um par de operadores tipo EPR definido como [105]

$$V_{\text{ar}} = \langle (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 \rangle, \quad (4.15)$$

em que  $u = X_a + X_b$  e  $v = P_a - P_b$ , onde os operadores de quadraturas de posição e momentum são definidos como  $X_\alpha = (\alpha e^{-i\theta} + \alpha^\dagger e^{i\theta})/\sqrt{2}$  e  $P_\alpha = -i(\alpha e^{-i\theta} - \alpha^\dagger e^{i\theta})/\sqrt{2}$ , com  $(\alpha = a, b)$ , respectivamente. A direção de compressão  $\theta$ , é um parâmetro importante que depende da fase do campo de bombeio e do acoplamento entre o qubit e os modos dos ressonadores. A variância é um importante quantificador do grau de compressão dos estados de dois modos e funciona como uma testemunha de emaranhamento. O critério utilizado neste trabalho para verificar se o estado de variáveis contínuas é emaranhado ou não, é baseado na Ref. [105], que permite afirmar que um estado de dois modos é emaranhado sempre que obedecer a condição  $V_{\text{ar}} < 2$ . Do ponto de vista experimental, usualmente o grau de compressão é definido em decibéis (dB), que é conectado à definição da variância via a expressão  $-10 \log_{10}(V_{\text{ar}}/2)$  [106]. Na Fig. 11, mostramos os cálculos da dinâmica unitária da variância  $V_{\text{ar}}$  como função do fator de compressão ideal,  $r = |\lambda|\tau$ , assumindo diferentes regimes de parâmetros e assumindo que os modos de ambos os ressonadores estão inicialmente no estado de vácuo. Podemos observar da Fig. 11 que, quanto maior os valores de  $|\Delta|$ ,  $|\Omega|$ , e  $|\eta|$ , ou seja, com o decréscimo de  $|\lambda|$ , a dinâmica regida pelo hamiltoniano  $V_I(t)$  exhibe uma concordância cada vez melhor com os hamiltoniano efetivo  $H_-$ . Quanto menor o valor de  $\lambda$  um maior grau de compressão pode ser obtido, embora um tempo maior de interação seja requerido para o processo.

### 4.3.1 Viabilidade do nosso protocolo

Vale a pena ressaltar que deve-se tomar certas precauções com elevados valores de  $|\eta|$  no qual está imbutido os valores da dessintonia  $\Delta$  e da frequência de Rabi do bombeio externo  $\Omega$ . Como pode ser visto na Fig. 11(c) no limite de elevados valores de  $\Delta$  e  $\Omega$  a validade do modelo dado pela Eq. (4.7) pode ser comprometida. Por exemplo, se assumirmos um valor de acoplamento dado por  $g/2\pi = 20$  MHz, pode implicar em  $\Omega/2\pi = 2.0$  GHz, para valores usados no caso  $\lambda = g/80$ . Nesse caso, a aproximação de onda girante começa a falhar e portanto a dinâmica regida por  $H_{\text{full}}$  não pode ser bem descrita pelo hamiltoniano  $V_I(t)$ . O valor de frequência de Rabi do campo clássico mencionado anteriormente pode induzir transições entre os outros níveis em qubits supercondutores tais como o Transmon, já que suas anarmonicidades dos níveis de energia não são grandes

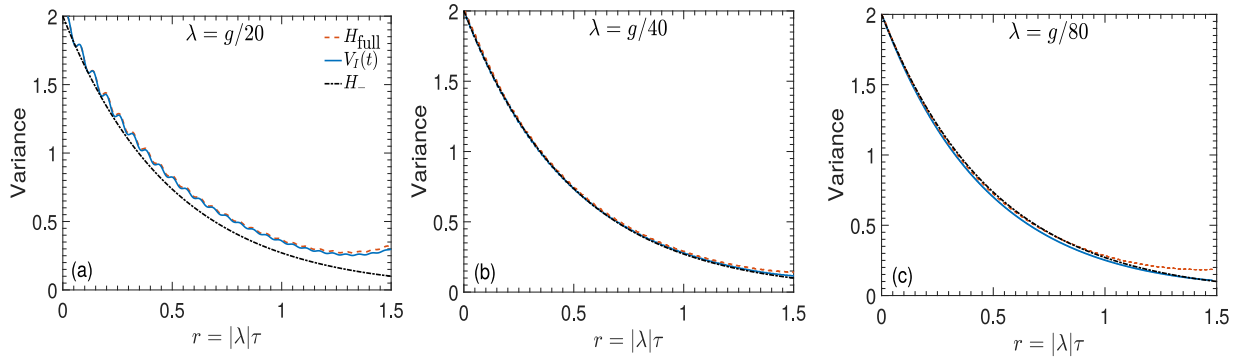


Figura 11 – Variância como função de  $r$  para diferentes regimes de parâmetros comparando  $H_{full}$  [Eq. (4.6)] (linha tracejada vermelha),  $V_I(t)$  [Eq.(4.10)] (linha sólida azul) e  $H_-$  [Eq. (4.14)] (linha preta pontilhada). Os valores fixos são,  $g_a = g_b = g$ ,  $\omega_0 = 500g$ ,  $\omega_{ef} = 5\omega_0$ ,  $\theta = \pi/4$  (ângulo de compressão) além disso consideramos (a)  $\Delta = 35g$  e  $\Omega = 20g$  ( $\lambda = g/20$ ), (b)  $\Delta = 90g$  e  $\Omega = 50g$  ( $\lambda = g/40$ ), (c)  $\Delta = 180g$  e  $\Omega = 100g$  ( $\lambda = g/80$ ). O estado inicial em que o sistema foi preparado é  $|\psi(0)\rangle = |-\rangle_{\text{atom}} \otimes |\Psi(0)\rangle_{ab}$ .

Fonte: Retirada da Ref. [30] (Figura elaborada pelo autor e pelo co-autor Daniel Z. Rossatto).

o suficiente, isto é, a frequência de transição que envolve o estado fundamental e o primeiro estado excitado  $\omega_0/2\pi = 8.6$  GHz é bem próxima da frequência do segundo estado excitado para o primeiro (i.e.,  $\omega_{ef} - \omega_0 = -421$  MHz), o que implica em uma razão  $|\omega_{ef}|/\omega_0 = 0.95$  [107]. Deste modo, um campo clássico com frequência de Rabi da ordem de  $\Omega/2\pi = 2.0$  GHz, mediando a transição entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado certamente induziria transições do primeiro para o segundo estado excitado e então nosso modelo efetivo não seria mais factível. Por esse motivo, o qubit Transmon não pode ser utilizado em nosso protocolo. Entretanto, outro tipo de qubit supercondutor, o qubit de fluxo [29] introduzido no capítulo 2, possui elevada anarmonicidade podendo chegar a razões da ordem  $|\omega_{ef}|/\omega_0 = 5$  [108] e então, mesmo para um campo clássico com frequência de Rabi  $\Omega/2\pi = 2.0$  GHz, somos capazes de negligenciar as transições para estados mais excitados induzidos pelo campo clássico, embora neste caso temos que ter cuidado com a validade da aproximação de onda girante no hamiltoniano do campo de bombeio no qubit. Tais argumentos explicados acima permitem justificar a utilização do qubit de fluxo na implementação do nosso protocolo.

## 4.4 Dinâmica Dissipativa

A seguir, analisamos a influência das perdas do ressonador e do qubit no processo de geração de estados comprimidos. Em nossas análises consideramos  $\lambda = g/40$ , um parâmetro

em que mostramos na Fig. 11(b) que a dinâmica regida por  $V_I(t)$  possui uma excelente concordância com o hamiltoniano sem qualquer aproximação ( $H_{\text{full}}$ ). Se o qubit e os modos dos ressonadores são acoplados aos seus respectivos reservatórios sob a aproximação de Born-Markov, podemos levar em conta os efeitos dissipativos em nosso sistema usando a equação principal na forma de Lindblad [78]

$$\dot{\rho} = -i[V_I(t), \rho] + \frac{\gamma}{2}\mathcal{D}[\sigma_-]\rho + \frac{\gamma_{\text{ph}}}{2}\mathcal{D}[\sigma_{ee}]\rho + \sum_{\alpha=a,b} \frac{\kappa_{\alpha}}{2}\mathcal{D}[\alpha]\rho, \quad (4.16)$$

com  $\mathcal{D}[\mathcal{O}]\rho = 2\mathcal{O}\rho\mathcal{O}^{\dagger} - \mathcal{O}^{\dagger}\mathcal{O}\rho - \rho\mathcal{O}^{\dagger}\mathcal{O}$ . Na expressão anterior o primeiro termo é responsável por descrever a evolução unitária do sistema enquanto que os últimos termos são responsáveis por descrever a dissipação do qubit com taxa de decaimento  $\gamma$ , sua defasagem com taxa  $\gamma_{\text{ph}}$ , e os ressonadores e suas taxas dissipativas  $\kappa_{\alpha}$ , respectivamente.

#### 4.4.1 Justificativa de utilização da equação mestra (4.16)

Pode-se utilizar equação mestra (4.16) em vez da equação mestra microscópica discutida na Ref. [75], pois estamos fora dos regimes de acoplamento ultra forte, ou seja, nossos resultados são válidos quando  $g_{\alpha}/\max(\omega_0, \omega_{\alpha}) < 0.1$  ( $\alpha = a, b$ ). Mesmo abaixo desse limite, sabe-se que a interação dispersiva pode introduzir correções na equação mestra padrão proporcional a  $(g_{\alpha}/\Delta)^2$  e ao número médio de fótons como discutido em [109]. Entretanto, como nosso protocolo requer  $|\Delta| \gg g_{\alpha}$  e lidamos com um número médio de fótons não tão alto, podemos negligenciar tais correções para a Eq.(4.16). Devido à alta dimensão do espaço de Hilbert do nosso sistema, resolvemos numericamente a equação principal usando o método de função de onda de Monte Carlo [78] utilizando a rotina empregada no pacote computacional *Qutip*<sup>5</sup> [110,111]. A seguir discutimos como o processo de dissipação afeta a geração do estado comprimido de dois modos.

#### 4.4.2 Dissipação nos ressonadores

Afim de entender o papel de cada canal de dissipação, primeiro analisamos a influencia da dissipação nos ressonadores, que por simplicidade assumimos como idênticos sem perda de generalidade isto é,  $\kappa_a = \kappa_b = \kappa \neq 0$ . Na Fig. 12(a) exibimos a variância  $V_{\text{ar}}$ , como função de  $(r)$ , considerando o caso para os parâmetros no caso  $\lambda = g/40$ , onde desconsideramos dissipação e defasagem no qubit ( $\gamma = \gamma_{\text{ph}} = 0$ ), e levamos em conta diferentes valores para a dissipação dos ressonadores. Podemos perceber que há uma competição entre a compressão gerada nos modos devido à interação com o qubit e a dissipação nos ressonadores. Portanto, quanto maior a razão  $|\lambda|/\kappa$ , maior é o grau de compressão alcançado, como mostrado na Fig. 12. A seguir as outras análises mostram que os outros canais podem influenciar bastante no processo.

<sup>5</sup> Quantum Toolbox In Python.

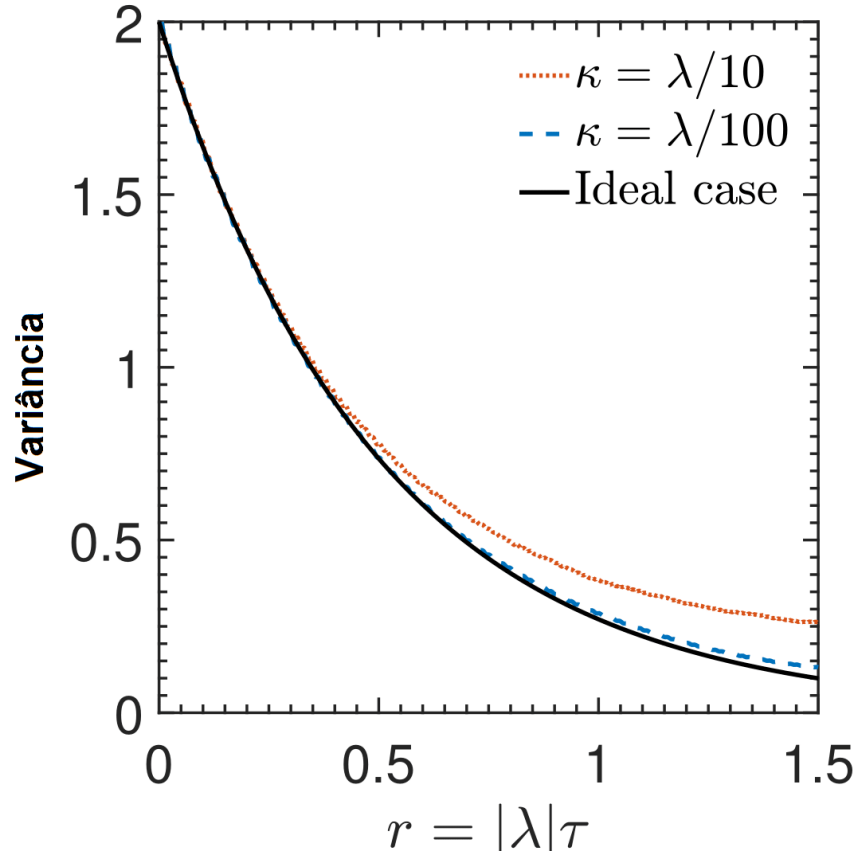


Figura 12 – Dinâmica dissipativa nos modos do ressonador, testemunhada pela evolução da variância  $V_{ar}$  em função de  $r = |\lambda|$  para  $\Delta = 90g$  e  $\Omega = 50g$ . A linha preta sólida representa o processo de compressão no caso ideal, enquanto que as linhas vermelha pontilhada e azul tracejada descrevem os outros processos dissipativos nos ressonadores.

Fonte: Retirada da Ref. [30] (Figura elaborada pelo autor e pelo co-autor Daniel Z. Rossatto).

#### 4.4.3 Dissipação no Qubit

Nesta análise consideramos apenas a dissipação no qubit isto é,  $\gamma \neq 0$  e  $\gamma_{ph} = \kappa_a = \kappa_b = 0$ ), cuja análise é descrita a seguir. A interação do qubit com o ambiente dissipativo pode destruir a superposição atômica inicial que assumimos ser  $|-\rangle = (|g\rangle - |e\rangle)/\sqrt{2}$ . Portanto, a dissipação no qubit o levará a um estado diferente, projetando o hamiltoniano efetivo em outro diferente do  $\mathcal{H}_-$ . Quando o qubit decai, ele vai para o estado fundamental  $|g\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$  e então, a dinâmica efetiva seria dada por uma mistura entre os processos  $\mathcal{H}_-$  (estado  $|-\rangle$ ) e  $\mathcal{H}_+$  (estado  $|+\rangle$ ), que comprime os modos da cavidade em direções ortogonais. Com isso, podemos concluir que a mistura destes dois processos de compressão em direções ortogonais afeta a geração ideal de um estado comprimido de dois modos, como pode ser visto na Fig. 13. Para longos tempos de interação, o decaimento do

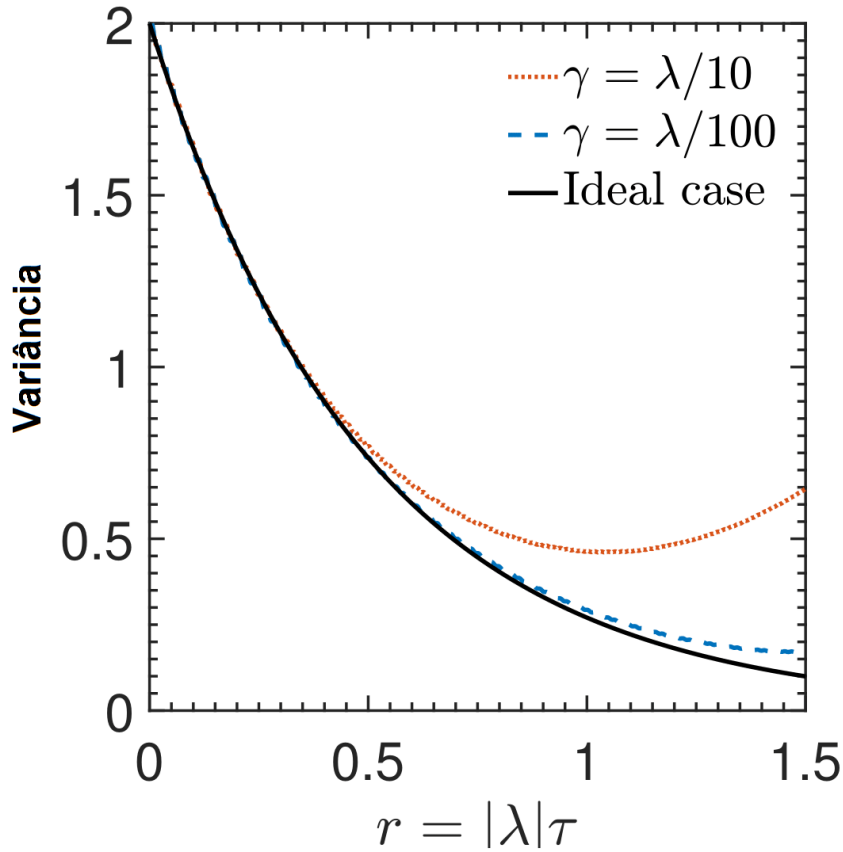


Figura 13 – Dinâmica dissipativa do qubit, testemunhada pela evolução da variância  $V_{ar}$  em função de  $r = |\lambda|\tau$  para  $\Delta = 90g$  e  $\Omega = 50g$ . A linha preta sólida representa o processo de compressão no caso ideal, enquanto que as linhas vermelha pontilhada e azul tracejada descrevem processos dissipativos no qubit.

Fonte: Retirada da Ref. [30] (Figura elaborada pelo autor e pelo co-autor Daniel Z. Rossatto).

qubit desempenha um papel negativo mais proeminente do que o decaimento do ressonador no processo de compressão.

#### 4.4.4 Defasagem no Qubit

Neste tópico, analisamos o papel da defasagem no qubit na geração de estados comprimidos de dois modos, ou seja,  $\gamma_{ph} \neq 0$  e  $\gamma = \kappa_a = \kappa_b = 0$ , como pode ser visto na figura Fig. 14. Como ocorreu no caso anterior (dissipação no qubit), o processo de defasagem também destruirá a superposição atômica inicial e então, esse processo também danificará significativamente a geração de estados altamente comprimidos. De fato, vemos que esse canal de decoerência é o que mais prejudica a geração de TMSS.



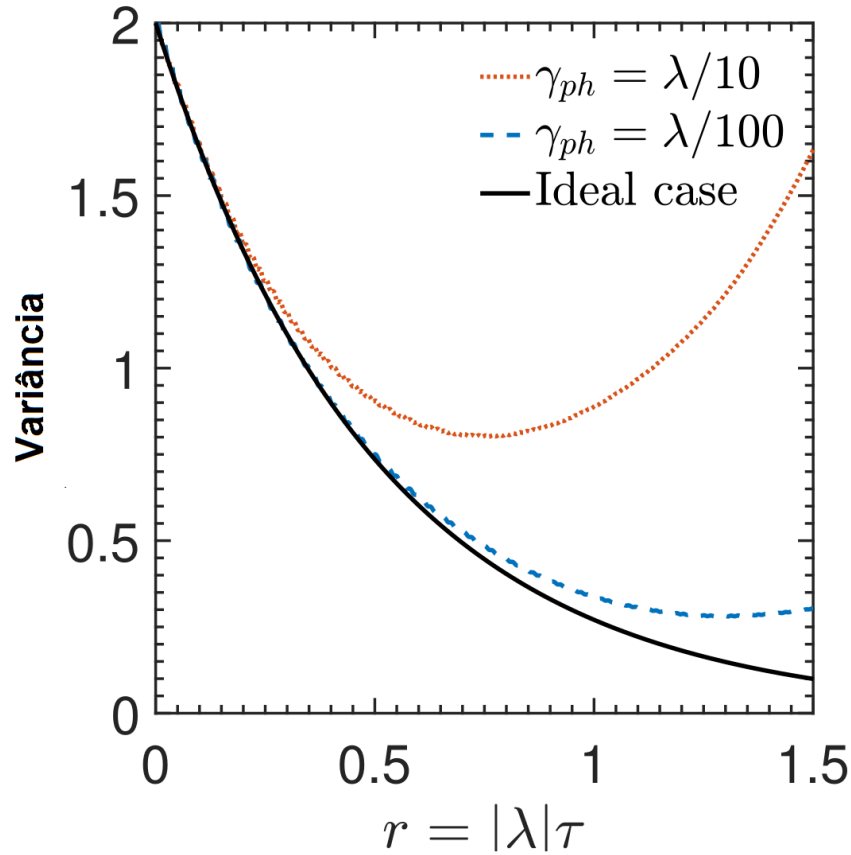


Figura 14 – Evolução da variância  $V_{ar}$  em função de  $r = |\lambda|\tau$  para  $\Delta = 90g$  e  $\Omega = 50g$ . A linha preta sólida representa o processo de compressão no caso ideal, enquanto que a linha vermelha pontilhada e azul tracejada descreve processos de defasagem no qubit.

Fonte: Retirada da Ref. [30] (Figura elaborada pelo autor e pelo co-autor Daniel Z. Rossatto).

#### 4.4.5 Dissipação total

Neste tópico, analisamos o papel da dissipação total, isto é, no qubit  $\gamma \neq 0$ , nos ressonadores  $\kappa_a = \kappa_b \neq 0$  e defasagem  $\gamma_{ph} \neq 0$ , e como estas perdas afetam a geração de estados comprimidos de dois modos, como pode ser visto na figura Fig. 15.

Neste caso, os processos de dissipação atômica e de defasagem influenciam substancialmente a degradação do TMSS. Este processo afeta bastante a compressão do TMSS, bem mais que o canal de defasagem discutido anteriormente.

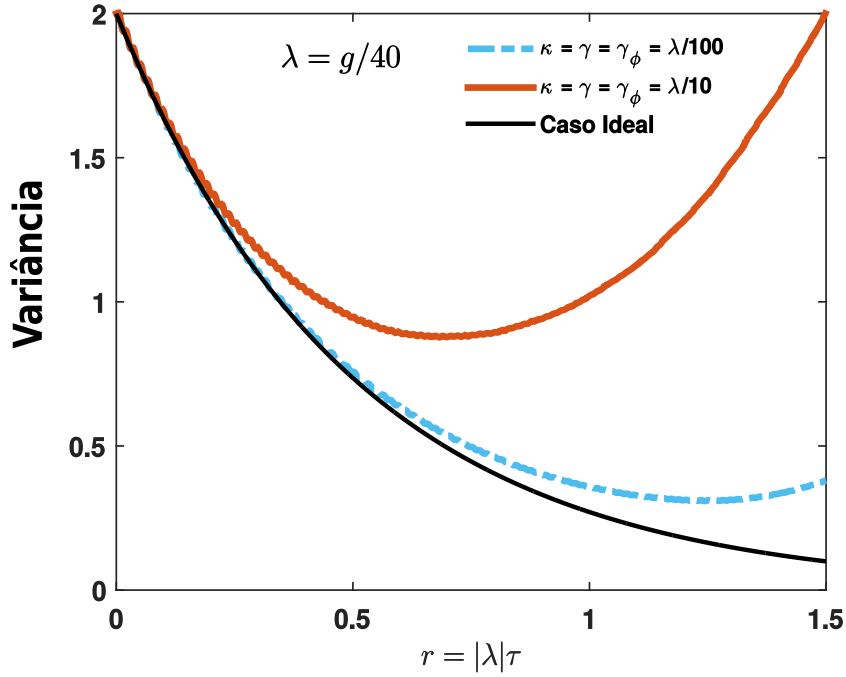


Figura 15 – Variância  $V_{\text{ar}}$  em função de  $r = |\lambda|\tau$  para o caso  $\Delta = 90g$  e  $\Omega = 50g$ . A linha preta sólida representa o processo de compressão no caso ideal, enquanto que a linha vermelha pontilhada e azul tracejada descrevem processos de dissipação no ressonador e no qubit.

Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.4.6 Dissipação utilizando parâmetros realísticos

Nesta análise, investigamos um cenário real levando em conta a dissipação em ambos os ressonadores (assumidos como sendo iguais), o canal de dissipação de defasagem e a taxa de decaimento do qubit de fluxo mostrado na Fig. 10(b). Seguindo as análises feitas anteriormente, fixamos  $\Delta = 90g$  e  $\Omega = 50g$  ( $\lambda = g/40$ ), escolhendo diferentes valores para as taxas de decaimento. Particularmente, consideramos parâmetros atuais de acordo com a tecnologia atual em circuit QED, onde os valores utilizados são baseados em um trabalho experimental recente de F. Yan *et al.* [31], onde os autores reportam um qubit de fluxo com um tempo de relaxação da energia  $T_1 = 60\mu\text{s}$  e um tempo de coerência  $T_2^* = 85\mu\text{s}$ , tal que  $\gamma = T_1^{-1} \simeq 5.2 \times 10^{-3}\lambda$  e  $\gamma_{\text{ph}} = T_2^{*-1} - (2T_1)^{-1} \simeq 1.0 \times 10^{-3}\lambda$ . Considerando  $\kappa = \kappa_a = \kappa_b \simeq 2\pi \times 53 \text{ Hz}$  ( $\kappa^{-1} \simeq 3 \text{ ms}$ ) [100], e assumindo o acoplamento entre qubit-ressonador  $g = 2\pi \times 20 \text{ MHz}$ , temos  $\lambda = 2\pi \times 500 \text{ KHz}$  e  $\kappa \simeq 1.0 \times 10^{-4}\lambda$ . Com estes valores, como pode ser visto na Fig. 16, é possível gerar um TMSS com grau de compressão da ordem de 10.5 dB, correspondendo a uma variância ( $V_{\text{ar}} \simeq 0.178$ ), sendo que este valor é um pouco próximo do obtido (12 dB) na Ref. [39]. Entretanto, no referido trabalho os autores usam ressonadores não-lineares, enquanto o nosso protocolo é baseado apenas em ressonadores lineares. Por outro lado, grau de compressão mais elevados em

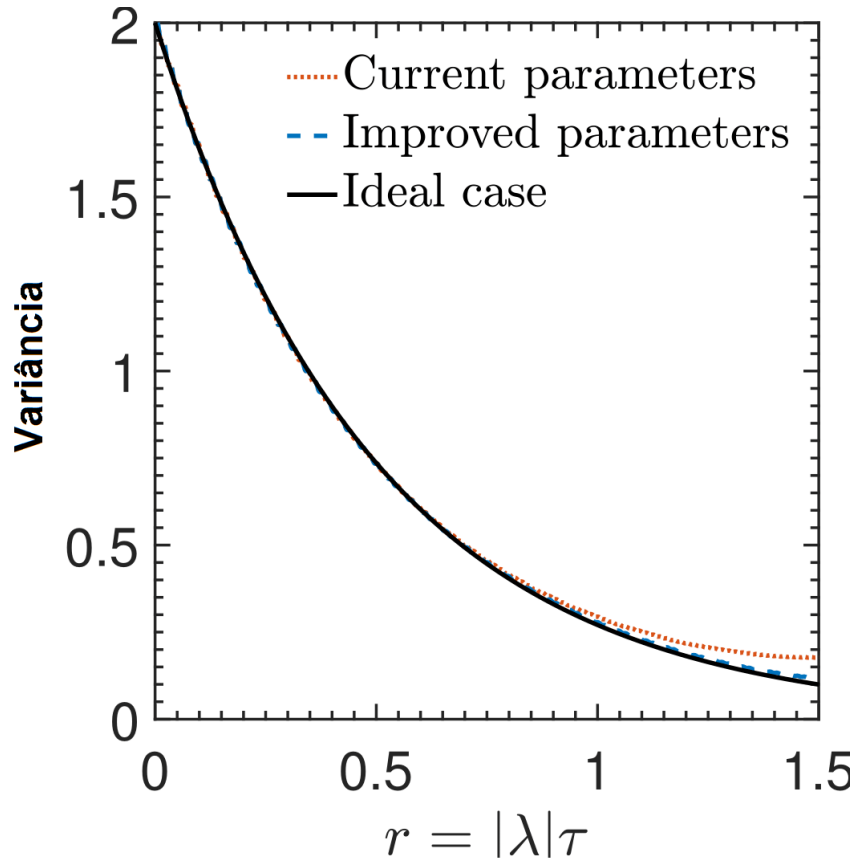


Figura 16 – Variância versus parâmetro de compressão  $r = |\lambda|\tau$  considerando-se a situação ideal (linha preta cheia), parâmetros reais atuais (linha vermelha pontilhada). Um processo de compressão quase ideal pode ser alcançado se formos capazes de melhorar em uma ordem de magnitude os tempos atuais de relaxação de energia e coerência do qubit de fluxo (isto é, assumindo  $\gamma = \gamma_{\text{real}}/10$  e  $\gamma_{\text{ph}} = \gamma_{\text{ph}}^{\text{real}}/10$ ) como vemos na linha azul tracejada.

Fonte: Retirada da Ref. [30] (Figura elaborada pelo autor e pelo co-autor Daniel Z. Rossatto).

nosso trabalho são possíveis, se os tempos  $T_1$  e  $T_2^*$  forem um pouco incrementados, o que é uma situação plausível se levarmos em consideração os rápidos avanços das técnicas experimentais no contexto *circuit QED*. Nosso protocolo prevê um comportamento próximo do ideal e um TMSS com grau de compressão acima de 12 dB considerando a melhoria de uma ordem de grandeza nos tempos atuais de relaxação e coerência  $T_1$  e  $T_2^*$ , como mostrado na Fig. 16, linha azul tracejada.

## 4.5 Conclusões

Nós investigamos como implementar o operador de compressão de dois modos em um sistema de circuit-QED composto por dois ressonadores acoplados a um fluxo qubit,

investigando a fidelidade do protocolo através de sua capacidade de gerar estados de dois modos altamente comprimidos. Como nosso esquema depende de como nosso estado atômico inicial é preparado, os canais de dissipação no qubit podem em algum momento afetar o processo de geração do TMSS . Assim, o tempo de interação entre o ressonador e o qubit deve ser menor que o tempo de vida (ou decoerência) do qubit. Utilizando valores realísticos envolvendo o qubit e os ressonadores conseguimos obter um estado comprimido de dois modos, maior que 10 dB, valor este, que pode ser mais elevado com a melhoria de tais parâmetros tendo em vista os avanços recentes em eletrodinâmica quântica de circuitos, tornando o esquema proposto atraente para o processamento de informação quântica no âmbito de variáveis contínuas e possíveis aplicações em metrologia quântica.

## 5 Transparência induzida por acoplamento dipolo-dipolo.

Neste capítulo discutiremos um fenômeno análogo ao da *transparência eletromagnética induzida* (EIT em inglês). O papel central na descrição tradicional da EIT é baseado na análise de um sistema atômico de três níveis interagindo com dois campos clássicos externos, onde esses campos são responsáveis por gerar um processo de interferência entre diferentes caminhos de excitação envolvendo as transições atômicas.

Na Fig. 17, ilustramos a estrutura de um sistema de três níveis interagindo com um agente externo denominado como *campo de prova* com frequência  $\omega_p$  e outro agente externo denominado por campo de controle com frequência  $\omega_c$ .

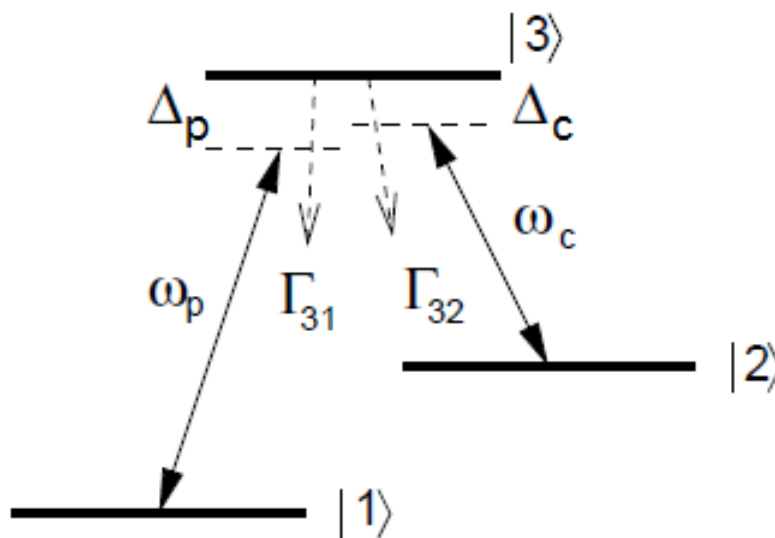


Figura 17 – Representação pictórica da configuração do sistema de três níveis interagindo com campos externos necessária para descrever o fenômeno de EIT. Os parâmetros  $\omega_p$  e  $\omega_c$  são as frequências dos campos de prova e de controle respectivamente. As dessintonias  $\Delta_p = \omega_{31} - \omega_p$  e  $\Delta_c = \omega_{32} - \omega_c$ . e  $\Gamma_{31}$  e  $\Gamma_{32}$  são as taxas de decaimento do nível  $|3\rangle$  para os níveis menos excitados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , respectivamente.

Fonte: Adaptada da Ref. [46].

O hamiltoniano desse sistema, escrito em um referencial independente do tempo é dado por [46]

$$H_{EIT} = \Delta_p \sigma_{33} + (\Delta_c - \Delta_p) \sigma_{22} + (\Omega_p \sigma_{31} + \Omega_c \sigma_{32} + H.c.), \quad (5.1)$$

onde  $\Delta_p = \omega_{31} - \omega_p$  e  $\Delta_c = \omega_{32} - \omega_c$  são as dessintonias envolvendo as frequências de transição atômica e as frequências dos campos externos e  $H.c$  é o Hermiteano conjugado, enquanto que  $\Omega_p$  e  $\Omega_c$  são as frequências de Rabi do campo de prova e de controle com suas respectivas frequências  $\omega_p$  e  $\omega_c$ . Os termos  $\sigma_{31}$  e  $\sigma_{32}$  descrevem as transições atômicas entre os níveis.

Um passo importante no entendimento do processo de EIT consiste na análise do espectro de autovalores e autoenergias obtidos da diagonalização do Hamiltoniano (5.1). O resultado dessa diagonalização nos fornece os autovalores na situação de ressonância de 2 fótons  $\Delta_p = \Delta_c = \Delta$ :

$$\begin{aligned} E_0 &= 0, \\ E_{\pm} &= \left[ \Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_p^2 + \Omega_c^2} \right], \end{aligned}$$

e os autoestados

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= \cos \theta |1\rangle - \sin \theta |2\rangle, \\ |\psi_+\rangle &= \sin \theta \sin \phi |1\rangle + \cos \phi |3\rangle + \cos \theta \sin \phi |2\rangle, \\ |\psi_-\rangle &= \sin \theta \cos \phi |1\rangle - \sin \phi |3\rangle + \cos \theta \cos \phi |2\rangle, \end{aligned}$$

onde são introduzidos os ângulos de mistura  $\theta$  e  $\phi$  que são funções de  $\Delta$ ,  $\Omega_p$  e  $\Omega_c$ , como descrito em [46].

Considerando a situação entre os campos  $\Omega_c \gg \Omega_p$  que corresponde a fazer  $\sin \theta \rightarrow 0$ ,  $\cos \theta \rightarrow 1$ , o estado  $|\psi_0\rangle = |1\rangle$  é totalmente desacoplado dos outros estados  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$ . Devido a essa característica e a sua associação com o autovalor nulo este estado é denominado como estado escuro ou (*dark state* em inglês)<sup>1</sup>. Observamos que o autoestado  $|\psi_0\rangle$  é formado apenas por contribuição entre os dois estados fundamentais do sistema sem depender do estado excitado  $|3\rangle$ . Se o átomo for preparado nesse estado, veremos que a absorção do sistema é nula na ressonância o que significa que o sistema exibe uma transparência na condição  $\Omega_c \gg \Omega_p$ .

## 5.1 Dinâmica do processo de EIT

Embora relatamos na seção anterior que o processo de EIT surge devido a interação entre campos clássicos externos e amostras atômicas na configuração ilustrada na Fig. 17, devemos lembrar que os efeitos dissipativos, isto é, taxas de decaimento envolvendo os processos de transições devem ser levados em consideração na análise do problema.

<sup>1</sup> O sistema neste estado não irá evoluir.

Para isso, é útil considerar a evolução do sistema através da equação mestra [46, 58]:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i [H_{EIT}, \rho] + \sum_{m=1,2} \Gamma_{3m} (2\sigma_{m3}\rho\sigma_{3m} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33}) \\ & + \sum_{n=2,3} \gamma_n (2\sigma_{nn}\rho\sigma_{nn} - \sigma_{nn}\rho - \rho\sigma_{nn}), \end{aligned} \quad (5.2)$$

cujas quantidades  $\Gamma_{3m}$  referem-se as taxas de decaimento do nível  $|3\rangle$  para o nível  $|m\rangle$  com  $m = 1, 2$ . Enquanto que,  $\gamma_{n=2,3}$  são as taxas de defasagem atômica dos níveis  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$ .

O entendimento das propriedades ópticas do sistema, isto é, a absorção e índice de refração são obtidos a partir da análise da polarização do meio a qual é dada por  $\vec{P}(t) = \chi^1 \mathbf{E}$  onde  $\chi^1$  é a susceptibilidade de primeira ordem do meio. Em termos de valores médios do momento dipolo  $\mu$ , do volume  $V$  da amostra atômica e do número de átomos  $N$ , a polarização média é definida como:

$$\vec{P}(t) = -\frac{N}{V} \text{tr}(\mu\rho).$$

A susceptibilidade  $\chi$  pode ser obtida ao encontramos o elemento  $\rho_{31}$  da matriz densidade  $\rho$ , associado à transição  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ , uma vez que  $\chi$  é proporcional a  $\rho_{31}$ . Assumindo  $\rho_{11} \sim 1$  e  $\rho_{22} \sim \rho_{33} \sim 0$  podemos então obter  $\rho_{31}$  no regime estacionário (isto é,  $d\rho/dt = 0$ ), o qual é dado por [58]:

$$\rho_{31}(\omega_P) = \frac{\Omega_P(\delta - i\gamma_2)}{(\Delta_P - i\gamma_{31})(\delta - i\gamma_2) - \Omega_C^2}, \quad (5.3)$$

onde considera-se  $\gamma_{31} = \Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_3$ , e  $\delta = \Delta_p - \Delta_c$ .

As principais informações referentes às propriedades ópticas do sistema são obtidas a partir da Eq.(5.3), isto é, a absorção do meio é definida pela parte imaginária  $Im[\chi(\omega_p)]$  e o índice de refração que é definido pela parte real  $Re[\chi(\omega_p)]$ .

A partir da Fig. (18), podemos observar que o campo de controle tem papel crucial na descrição do fenômeno de EIT, pois, quando desligamos o campo  $\Omega_c = 0$ , o cenário da absorção apenas nos mostra uma curva Lorentziana, enquanto que para valores finitos de  $\Omega_c \gg \Omega_p$ , observamos a formação de uma janela de transparência na ressonância  $\Delta_P = 0$  oriunda da interferência entre os caminhos de absorção.

A partir da Fig. (18)(c) observa-se que o comportamento da absorção e índice de refração do sistema, no regime de campos de prova muito intensos já evidência o regime conhecido como Autler-Townes o qual é caracterizado por uma separação bem significativa dos picos de absorção. O fenômeno de EIT, do ponto de vista prático, pode ser muito útil na redução da velocidade da luz em meios atômicos como foi demonstrado em um trabalho seminal reportado no final da década de 90 [112, 113] o que tornou ainda mais popular e atraente investigações no contexto de EIT. Embora a EIT tenha sido oriunda da física atômica muitos trabalhos que investigam fenômenos análogos ao que ocorre em

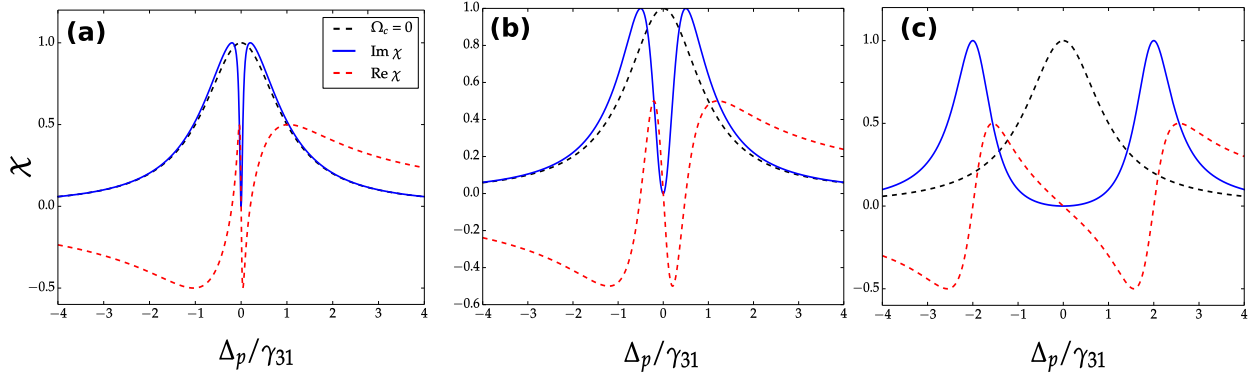


Figura 18 – Absorção do sistema no regime de EIT em função da dessintonia  $\Delta_p/\gamma_{31}$  para diferentes valores  $\Omega_c$ . O valor do campo de prova é  $\Omega_p = 0.02 \gamma_{31}$ . Em (a)  $\Omega_c = 0.2\gamma_{31}$ , (b)  $\Omega_c = 0.5\gamma_{31}$  e (c)  $\Omega_c = 2.0\gamma_{31}$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

EIT tem sido reportados nos últimos anos em diferentes plataformas. Na próxima seção iremos reportar um novo resultado que segue a linha de fenômenos análogos de EIT em sistemas acoplados simples como também a sua extensão para investigar análogos de EIT no âmbito de física de muitos corpos.



## 5.2 Transparência Induzida por dipolos acoplados

Investigamos a resposta óptica de um sistema de dois níveis (TLS) acoplado a uma cadeia 1D composta de  $N$  átomos de dois níveis considerando o acoplamento dipolo-dipolo entre os primeiros vizinhos. Mostramos que o acoplamento dipolo-dipolo desempenha exatamente o mesmo papel que o campo de controle no fenômeno EIT no espaço livre [46,58] ou em experimentos em cavidade [48]. Também investigamos a escalabilidade desse sistema, isto é, como é possível controlar o número de janelas de transparência de acordo com o número de átomos de dois níveis na cadeia unidimensional. Os resultados discutidos nesse capítulo foram publicados na Ref. [73]. Esse trabalho foi desenvolvido em colaboração com a Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Halyne. S. Borges (hoje no Instituto Federal Goiano/Urutaí, GO), que participou das discussões, interpretação dos resultados, elaboração dos códigos em Mathematica que nos auxiliaram na obtenção dos resultados analíticos e redação do artigo

### 5.2.1 Sistema Físico e modelo

Em nosso modelo conforme a representação pictórica na Fig. 19, assumimos que um campo de prova fraco ou campo externo, com frequência de oscilação  $\omega_p$ , age apenas no primeiro átomo de dois níveis da cadeia, de tal forma que o hamiltoniano geral do sistema escrito em um referencial que gira com a frequência do campo externo é dado por:

$$H = \sum_{i=0}^N \frac{\Delta_p \sigma_z^i}{2} + \sum_{i=0}^{N-1} (d_i \sigma_-^i \sigma_+^{i+1} + h.c.) + \Omega_p (\sigma_+^0 + h.c.), \quad (5.4)$$

onde  $\Delta_p = \omega_0 - \omega_p$ . As quantidades  $\sigma_z^i = (|e\rangle\langle e|^{(i)} - |g\rangle\langle g|^{(i)})$  e  $\sigma_-^i = (\sigma_+^i)^\dagger = |g\rangle\langle e|^{(i)}$  são os operadores representados pelas matrizes de Pauli do  $i$ -ésimo TLS, sendo  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  os estados excitado e fundamental atômicos, respectivamente onde a frequência de transição é dada por  $\omega_0$ . O acoplamento dipolo-dipolo entre os TLSs vizinhos é dado por  $d_i$ , e  $2\Omega_p$  é a frequência de Rabi do campo de prova.

Vale a pena destacar que o hamiltoniano Eq.(5.4) pode ser implementado em uma variedade de sistemas físicos tais como redes ópticas [114, 115], cadeias de cavidades ópticas acopladas tendo apenas um átomo aprisionado [116], qubits supercondutores acoplados a sistemas de dois níveis [117–121], qubits supercondutores acoplados [122], íons aprisionados [123], como também em redes de pontos quânticos [124, 125].

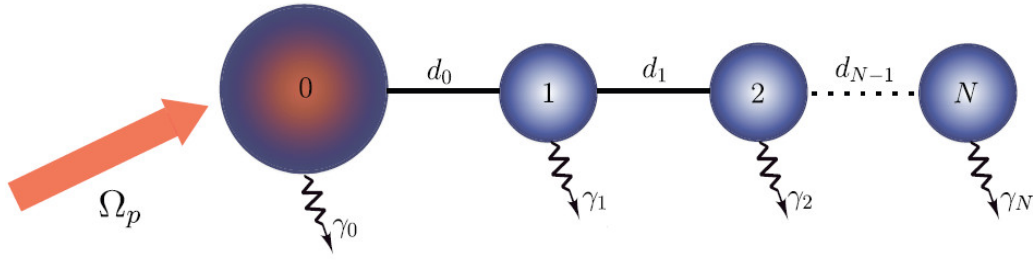


Figura 19 – Representação pictórica do sistema, com  $1 + N$  sistemas de dois níveis com acoplamento dipolo-dipolo  $d_i$  entre os primeiros vizinhos, sendo que o primeiro átomo de dois níveis é bombeado por um campo coerente com frequência de Rabi  $2\Omega_p$  e frequência oscilante  $\omega_p$ .

Fonte: Retirada da Ref. [73] (Figura elaborada pela co-autora Halyne S. Borges).

### 5.3 DIT no espaço livre

Uma abordagem mais realística do fenômeno de transparência induzida por dipolo requer a consideração dos efeitos dissipativos sobre o sistema definido na Eq. (5.4). Para isso, consideramos que o sistema interage com um ambiente a temperatura  $T = 0K$  destacando que o sistema é fracamente acoplado ao reservatório e que o acoplamento dipolo-dipolo é fraco ( $|d_i| \ll \omega_0$ ). A dinâmica dissipativa do sistema total é regida pela equação mestra na forma de Lindblad [2, 78]:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \mathcal{D}[\rho], \quad (5.5)$$

onde

$$\mathcal{D}[\rho] = \sum_{i=0}^N \gamma_i (2\sigma_-^i \rho \sigma_+^i - \sigma_+^i \sigma_-^i \rho - \rho \sigma_+^i \sigma_-^i), \quad (5.6)$$

descreve a parte dissipativa do sistema, e  $\gamma_i$  representa a taxa de decaimento do  $i$ -ésimo sistema de dois níveis. Como pode ser visto na Fig. 19, cada sistema de dois níveis possui seu reservatório independente. A Eq.(5.5) pode ser resolvida analiticamente no regime estacionário que possibilita investigar as propriedades ópticas do sistema de dois níveis principal. Para tal finalidade, derivamos o valor médio  $\langle \sigma_-^0 \rangle_{ss} = Tr(\rho_{ss} \sigma_-^0)$  no limite de campo de prova fraco, isto é,  $|\Omega_p| \ll |d_0|$ , e quando a taxa de decaimento do TLS principal é maior que a taxa dos outros TLSs, isto é, quando  $\gamma_0 \gg \gamma_i$ . As condições anteriores nos permite utilizar a chamada aproximação semiclássica [78], que consiste em desconsiderar as correlações entre os operadores atômicos,  $\langle \sigma_{\pm}^i \sigma_z^j \rangle \approx \langle \sigma_{\pm}^i \rangle \langle \sigma_z^j \rangle$  ( $i \neq j$ ). Utilizando a aproximação semiclássica, encontramos um sistema geral de equações para os valores

esperados dos operadores dos TLS's dados por:

$$\begin{aligned}
\langle \dot{\sigma}_-^0 \rangle &= -(i\Delta_p + \gamma_0) \langle \sigma_-^0 \rangle + id_0 \langle \sigma_z^0 \rangle \langle \sigma_-^1 \rangle + i\Omega_p \langle \sigma_z^0 \rangle, \\
\langle \dot{\sigma}_-^j \rangle &= -(i\Delta_p + \gamma_j) \langle \sigma_-^j \rangle + id_{j-1} \langle \sigma_z^j \rangle \langle \sigma_-^{j-1} \rangle \\
&\quad + id_{j+1} \langle \sigma_z^j \rangle \langle \sigma_-^{j+1} \rangle \text{ (para } 1 \leq j \leq N-1), \\
\langle \dot{\sigma}_-^N \rangle &= -(i\Delta_p + \gamma_N) \langle \sigma_-^N \rangle + id_{N-1} \langle \sigma_z^N \rangle \langle \sigma_-^{N-1} \rangle.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Uma outra consideração importante consiste em considerar em nosso sistema, o regime de baixas excitações, isto é,  $\langle \sigma_z^k \rangle \approx -1$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) no sistema de equações (5.7). Com essas considerações obtemos a solução estacionária geral para o nosso sistema dada por:

$$\langle \sigma_-^0 \rangle_{ss} \approx -\Omega_p \frac{\delta_1}{\delta_0}, \tag{5.8}$$

com

$$\delta_k = \delta_{k+1} (\Delta_p - i\gamma_k) - \delta_{k+2} |d_k|^2, \tag{5.9}$$

para  $k = 0, 1, \dots, N-2$ , e

$$\delta_{N-1} = \delta_N (\Delta_p - i\gamma_{N-1}) - |d_{N-1}|^2, \tag{5.10}$$

$$\delta_N = (\Delta_p - i\gamma_N). \tag{5.11}$$

Vale a pena destacar que para alguns casos especiais obtemos expressões simples para  $\langle \sigma_-^0 \rangle_{ss}$ , embora nossos resultados sejam obtidos para qualquer  $N$ , as expressões não são esteticamente elegantes<sup>2</sup>. Por exemplo, considerando o TLS principal acoplado a outro TLS ( $N = 1$ ), no limite de campo de prova fraco obtemos a solução estacionária

$$\langle \sigma_-^0 \rangle_{ss} = Tr(\rho_{ss} \sigma_-^0) \approx \frac{(\Delta_p - i\gamma_1) \Omega_p}{|d_0|^2 - (\Delta_p - i\gamma_0) (\Delta_p - i\gamma_1)}. \tag{5.12}$$

A partir dessa expressão podemos derivar prontamente a dispersão e absorção, suas partes real e imaginária, respectivamente, e então podemos analisar a resposta óptica deste sistema. Nosso sistema composto por dois TLSs acoplados pode ser comparado ao sistema constituído por dois pontos quânticos com acoplamento dipolo-dipolo empregados para realizar um *switching* óptico como feito em [126]. Diferentemente do nosso sistema, em [126] a transparência não é induzida pela interação dipolo-dipolo. Os autores assumem dois campos externos atuando simultaneamente em ambos os pontos quânticos (TLS) além de assumir as mesmas taxas de decaimento para eles. Também assumem a frequência Rabi do campo de controle muito maior que a taxa de decaimento dos pontos quânticos. De fato, neste regime, há uma separação dos níveis de energia dando origem ao efeito

<sup>2</sup> (Expressões mostradas no Apêndice D)

de Autler-Townes (AT) em vez de uma interferência real entre diferentes caminhos de excitação [127]. Fazendo uma comparação da susceptibilidade linear do nosso sistema com a encontrada em um sistema atômico de três níveis na configuração tipo  $\Lambda$ , no regime do EIT [46, 58], é possível reconhecer imediatamente um tipo de transparência induzida em que o acoplamento dipolo-dipolo  $d_0$  desempenha o mesmo papel que a frequência Rabi do campo de controle. Como dito anteriormente, a susceptibilidade linear é proporcional a  $\langle \sigma_-^0 \rangle_{ss}$ , isto é, desprezando-se o fator de proporcionalidade, podemos escrever

$$\chi_{DIT}^{(1)} = \frac{\Delta_p + i\gamma_1}{d_0^2 + (\gamma_0 - i\Delta_p)(\gamma_1 - i\Delta_p)}, \quad (5.13)$$

e a expressão abaixo descreve a susceptibilidade presente na EIT usual [46],

$$\chi_{EIT}^{(1)} = \frac{\Delta_p}{\Omega_c^2 - \Delta_p(\Delta_p + i\Gamma_3)}, \quad (5.14)$$

sendo  $\Gamma_3 = \Gamma_{31} + \Gamma_{32}$ . Portanto fazendo  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_0 \rightarrow \Gamma_3$  e  $d_0 \rightarrow \Omega_c$ , observamos que as expressões são as mesmas. Também podemos destacar que a taxa de decaimento do primeiro TLS desempenha o mesmo papel que a taxa de decaimento total do estado excitado  $\Gamma_3$  em experimentos usuais de EIT. Por outro lado, a taxa de decaimento do segundo TLS,  $\gamma_1$ , faz o papel da defasagem em sistemas atômicos de três níveis. No entanto, é importante enfatizar que apesar da resposta óptica linear do nosso sistema ser completamente análoga a de um sistema atômico tipo  $\Lambda$ , as respostas não lineares têm diferenças significativas em terceira ordem, como pode ser visto nas expressões:

$$\chi_{DIT}^{(3)} = \frac{2i \left[ -(\gamma_1 - i\Delta_p)^2(\gamma_1 + i\Delta_p)(\gamma_0 + \gamma_1 - 2i\Delta_p) + d_0^4 + d_0^2(\gamma_1^2 + \Delta_p^2) \right]}{(\gamma_0 + \gamma_1 - 2i\Delta_p) [d_0^2 + (\gamma_0 - i\Delta_p)(\gamma_1 - i\Delta_p)]^2 [d_0^2 + (\gamma_0 + i\Delta_p)(\gamma_1 + i\Delta_p)]}, \quad (5.15)$$

$$\chi_{EIT}^{(3)} = \frac{\Delta_p \left( -i\Gamma_{32}\Delta_p^2\Gamma_3^2 + \Delta_p\Omega_c^2 [\Gamma_{32}\Gamma_3 - i\Delta_p(2\Gamma_{31} + 3\Gamma_{32})] - 2i\Gamma_{31}\Omega_c^4 \right)}{\Gamma_{31} [\Delta_p(\Gamma_3 + i\Delta_p) - i\Omega_c^2] [\Delta_p\Omega_c(\Gamma_3 - i\Delta_p) + i\Omega_c^3]^2}. \quad (5.16)$$

Na Fig. 20(a), exibimos as parte real e imaginária de  $\langle \sigma_+^0 \rangle_{ss}$ , com uma função de  $\Delta_p/\gamma_0$  para um conjunto de parâmetros que permite a observação do fenômeno de DIT. Fazendo  $|d_0| \gg |\Omega_p|$  e  $|d_0| < \gamma_0$ , pode-se notar que as janelas de transparência dependem do acoplamento dipolo-dipolo  $d_0$ .

Em um trabalho relacionado [128], os autores afirmam que é possível observar um efeito semelhante, isto é, uma transparência induzida por dipolo, em meio atômico de alta densidade que contém duas espécies de átomos (diferentes dipolos). No entanto, como eles assumem a mesma taxa de decaimento para ambos as espécies de dipolos, eles não podem

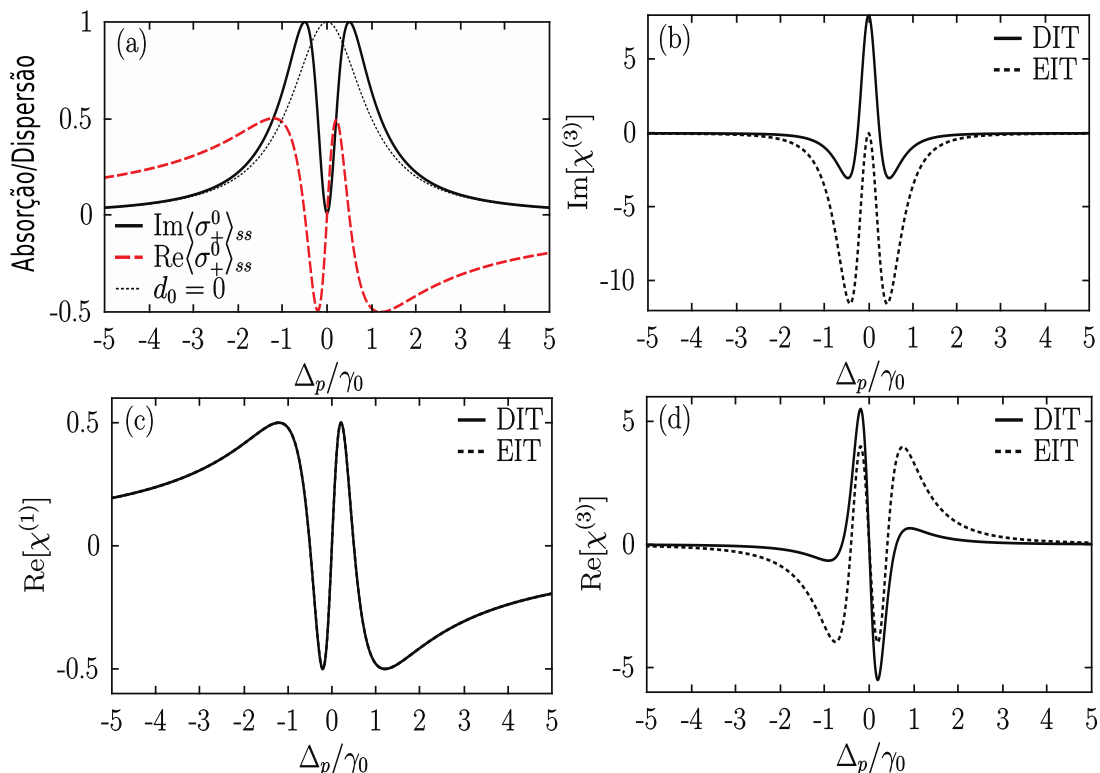


Figura 20 – (a) Absorção normalizada (linha preta sólida) e dispersão (linha vermelha tracejada) do primeiro TLS quando acoplado ao segundo como função de  $\Delta_p/\gamma_0$ . A linha preta pontilhada descreve a absorção para o caso  $d_0 = 0$ . (b) Parte imaginária da susceptibilidade óptica de terceira ordem comparando DIT e EIT: dois TLS's acoplados via interação dipolo-dipolo (linha sólida) e o usual sistema de três níveis onde o fenômeno de EIT é observado (linha tracejada). (c) Parte real da susceptibilidade de primeira ordem; (d) parte real da susceptibilidade óptica de terceira ordem para dois TLS's acoplados via interação dipolo-dipolo (linha sólida) e o sistema usual  $\Lambda$  (linha tracejada). Em (c) observa-se que as curvas se sobrepõem perfeitamente. Os parâmetros usados são:  $\Omega_p = 0.03\gamma_0$ ,  $d_0 = 0.5\gamma_0$ ,  $\gamma_1 = 10^{-3}\gamma_0$ .

Fonte: Retirada da Ref. [73] (Figura elaborada pela co-autora Halyne S. Borges).

observar uma janela de transparência extremamente estreita como normalmente existentes em experimentos de EIT <sup>3</sup>.

No intuito de observar as diferenças e similaridades entre as fenomenologias de EIT em sistemas atômicos de três níveis na configuração  $\Lambda$  e DIT em TLS's acoplados,

<sup>3</sup> Ao considerar dois dipolos acoplados, a taxa de decaimento do segundo dipolo exerce o papel da taxa de defasagem em experimentos usuais de EIT com átomos de três níveis na configuração de níveis tipo  $\Lambda$ . Somente no limite de pequenas taxas de defasagem pode-se observar janelas estreitas de transparência, isto é, a largura máxima a meia altura  $FWHM$ , termo em inglês *full width at half maximum* [63] ( $FWHM < \gamma_0$ ), que é típico de experimentos de EIT. Ao assumir a mesma taxa de decaimento  $\gamma_0$  em ambos os dipolos como feito em [128], teríamos transparência apenas no regime de forte acoplamento de dipolo, ou seja, para  $d \gg \gamma_0$ , embora neste limite temos um fenômeno de Autler-Townes ao invés de fenômeno EIT. De fato, a  $FWHM$  da janela de transparência reportada em [128] é muito mais larga que a necessária para observar o fenômeno de transparência em nossa proposta.

mostramos nas Figs. 20 (b), (c) e (d) a susceptibilidade óptica de ambos os sistemas. Na Fig. 20(b) mostramos a parte imaginária da susceptibilidade óptica de terceira ordem de ambos os sistemas (para o mesmo conjunto de parâmetros) como uma função de  $\Delta_p/\gamma_0$ , onde é possível observar o efeito de transparência induzida pela interação dipolo-dipolo (linha contínua) e pelo campo eletromagnético de controle em átomos de três níveis (linha tracejada). A parte real da primeira ordem e terceira ordem da função de susceptibilidade óptica são exibidas nas Fig's. 20 (c) e 20 (d). Destacamos que neste último caso os resultados evidenciam a diferença entre a resposta óptica não-linear do sistema, embora suas respostas ópticas lineares sejam idênticas.

## 5.4 DIT em uma cadeia de TLS's acopladas a um ressonador

Nesta seção iremos discutir que o fenômeno apresentado na seção anterior pode ser observado em outro *setup* com pequenas modificações. Se considerarmos um átomo de três níveis na configuração de EIT mencionada anteriormente e acoplarmos este átomo a um modo de cavidade, pode-se observar o fenômeno conhecido como *cavity-EIT* [48]. De acordo com a discussão acima, o mesmo efeito deve ser observado substituindo o átomo de três níveis por dois TLSs acoplados. Este é, de fato, o caso, como explicaremos a seguir. Para este fim, vamos primeiramente descrever um sistema mais geral, isto é, a interação de um ressonador quântico com uma cadeia linear 1D de  $1 + N$  TLS's, como pode ser visto na Fig. 21 a seguir. No referido *setup* acima, o primeiro TLS é então acoplado em ressonância ao modo da cavidade (ressonador) onde o acoplamento é dado por  $g$ , e além disso um campo de bombeio de intensidade  $\epsilon$  e frequência  $\omega_p$  age no ressonador. O hamiltoniano deste sistema, escrito no referencial do campo de bombeio é dado por (para  $\hbar = 1$ ):

$$H_c = \Delta_p \left( a^\dagger a + \sum_{i=0}^N \frac{\sigma_z^i}{2} \right) + (\epsilon a + h.c.) + H_I, \quad (5.17)$$

onde

$$H_I = \sum_{i=0}^{N-1} d_i \left( \sigma_-^i \sigma_+^{i+1} + h.c. \right) + g \left( a \sigma_+^0 + h.c. \right), \quad (5.18)$$

descreve o hamiltoniano da interação entre o ressonador e a cadeia de TLSs acoplados. Na Eq. (5.17) a dessintonia é definida por  $\Delta_p = \omega_0 - \omega_p = \omega_{cav} - \omega_p$ , sendo  $\omega_{cav}$  a frequência do modo da cavidade. Neste caso, a dissipação do modo de cavidade pode ser levada em conta pela adição do termo

$$\mathcal{D}[\rho] = \kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a), \quad (5.19)$$

na equação mestra (5.5), sendo  $\kappa$  a taxa de decaimento da amplitude do campo da cavidade. Com a adição deste novo termo a nova equação mestra também pode ser resolvida analiticamente para um conjunto particular de parâmetros. Empregando novamente a aproximação semiclássica [78], que nos permite descorrelacionar os operadores  $\langle a\sigma_-^i \rangle \approx$

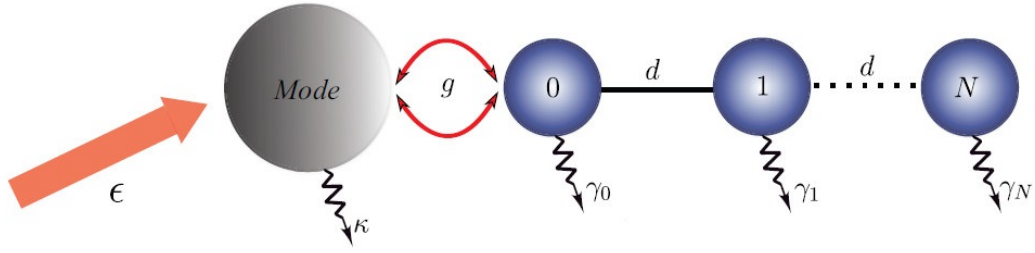


Figura 21 – Representação pictórica do sistema. O modo da cavidade bombeado por um campo externo acoplado a  $1 + N$  TLS's. O acoplamento entre o modo de cavidade e o primeiro TLS é dado pela frequência Rabi  $g$  e o campo da sonda bombeia a cavidade com intensidade  $\epsilon$ .  $d_i$  descreve o acoplamento dipolo-dipolo e  $\gamma_i$  refere-se às taxas de dissipação individuais de cada sistema de dois níveis.

Fonte: Retirada da Ref. [73] (Figura elaborada pela co-autora Halyne S. Borges).

$\langle \sigma_-^i \rangle \langle a \rangle$ , obtemos a solução analítica para o valor médio do operador de aniquilação do modo de cavidade para para o caso  $1 + N$  TLSs acoplados. O uso desta aproximação semiclássica é justificável sempre que o campo de bombeio for muito fraco comparado com a taxa de dissipação do modo da cavidade e o acoplamento átomo-modo da cavidade também não é tão forte (novamente, quando comparado à taxa de decaimento  $\kappa$ ).

A utilização da aproximação semiclássica descrita anteriormente será útil na obtenção da resposta óptica do sistema descrita neste caso pelo valor esperado  $\langle a \rangle$  [58]. A derivação da solução estacionária de  $\langle a \rangle$  para um número arbitrário de TLSs acoplados a um ressonador é obtida por um sistema de equações de movimento que envolvem o valor médio dos operadores atômicos/ressonador. Esse sistema de equações é dado por:

$$\begin{aligned}
 \langle \dot{a} \rangle &= -i(\Delta_p - i\kappa) \langle a \rangle - ig \langle \sigma_-^0 \rangle - i\epsilon, \\
 \langle \dot{\sigma}_-^0 \rangle &= -i(\Delta_p - i\gamma_0) \langle \sigma_-^0 \rangle + ig \langle a \rangle \langle \sigma_z^0 \rangle + id_0 \langle \sigma_z^0 \rangle \langle \sigma_-^1 \rangle, \\
 \langle \dot{\sigma}_-^j \rangle &= -i(\Delta_p - i\gamma_j) \langle \sigma_-^j \rangle + id_{j-1} \langle \sigma_z^j \rangle \langle \sigma_-^{j-1} \rangle \\
 &\quad + id_j \langle \sigma_z^j \rangle \langle \sigma_-^{j+1} \rangle, \text{ (para } 1 \leq j \leq N-1) \\
 \langle \dot{\sigma}_-^N \rangle &= -i(\Delta_p - i\gamma_N) \langle \sigma_-^N \rangle + id_{N-1} \langle \sigma_z^N \rangle \langle \sigma_-^{N-1} \rangle.
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

A partir deste sistema de equações acopladas podemos derivar a solução estacionária de  $\langle a \rangle_{ss}$  para um número arbitrário de TLS acoplado ao modo de cavidade. Seguindo um procedimento similar usado para obter a resposta óptica de uma cadeia 1D de TLSs no espaço livre, podemos escrever os valores esperados dos operadores  $\langle a \rangle$  e  $\langle \sigma_{\pm}^i \rangle$ . Novamente, considerando o limite de baixas excitações  $\langle \sigma_z^k \rangle \approx -1$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) obtemos

$$\langle a \rangle_{ss} \approx -\epsilon \frac{\delta_0}{\delta_c}, \tag{5.21}$$

com

$$\delta_c = \delta_0 (\Delta_p - i\kappa) - \delta_1 |g|^2, \tag{5.22}$$

$$\delta_k = \delta_{k+1} (\Delta_p - i\gamma_k) - \delta_{k+2} |d_k|^2, \quad (5.23)$$

para  $k = 0, 1, \dots, N-2$ , e

$$\delta_{N-1} = \delta_N (\Delta_p - i\gamma_{N-1}) - |d_{N-1}|^2, \quad (5.24)$$

$$\delta_N = (\Delta_p - i\gamma_N). \quad (5.25)$$

Por exemplo, para  $N = 1$  (dois TLSs acoplados ao modo de cavidade), a solução de estado estacionário é

$$\langle a \rangle_{ss} = \frac{\epsilon d^2 - \epsilon (\Delta_p - i\gamma_0) (\Delta_p - i\gamma_1)}{-g^2 (\Delta_p - i\gamma_1) - d_0^2 (\Delta_p - i\kappa) + \Psi}, \quad (5.26)$$

onde  $\Psi = (\Delta_p - i\gamma_0) (\Delta_p - i\gamma_1) (\Delta_p - i\kappa)$ . Esta equação pode ser comparada à equação do valor médio do operador de aniquilação obtido para um modo de cavidade acoplado a um átomo de três níveis na configuração EIT (*cavity-EIT*) obtida em [58]. Na Fig. 22 mostramos a absorção e dispersão normalizada do modo da cavidade acoplada a dois TLSs que definimos como  $\text{Im}\langle a \rangle_{ss}$  e  $\text{Re}\langle a \rangle_{ss}$ , respectivamente.



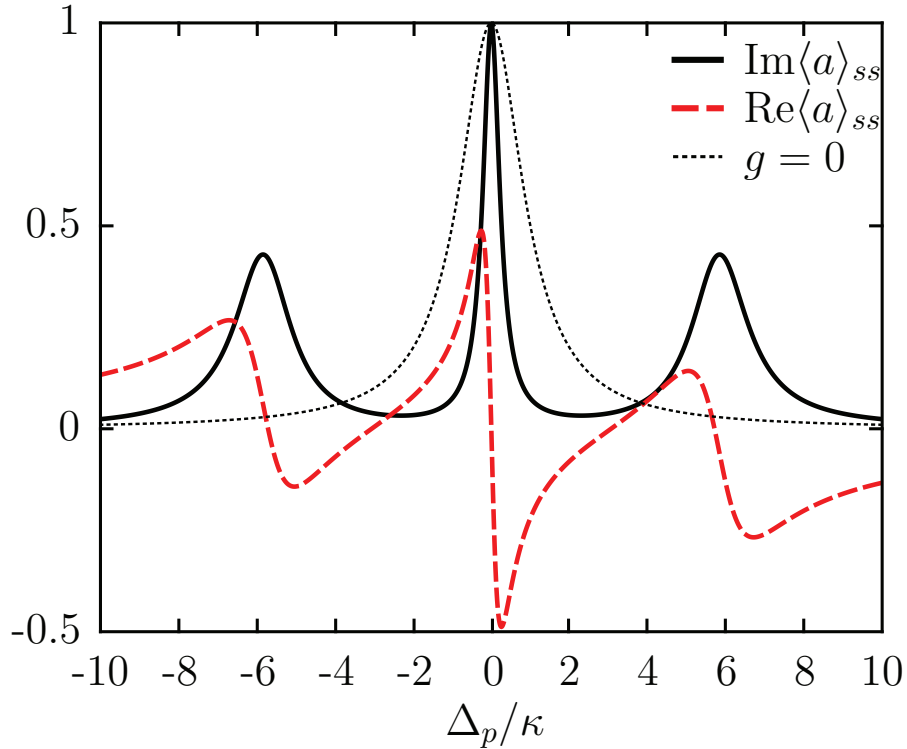


Figura 22 – Absorção normalizada,  $\text{Im}\langle a \rangle_{ss}$ , (linha sólida preta) e a dispersão,  $\text{Re}\langle a \rangle_{ss}$ , (linha tracejada vermelha) do modo da cavidade como uma função da dessintonia normalizada  $\Delta_p/\kappa$ . Os parâmetros utilizados são:  $\gamma_0 = \kappa$ ,  $g = 5\kappa$ ,  $d = 3\kappa$ ,  $|\epsilon| = 0.03\kappa$ , e  $\gamma_1 = 10^{-3}\kappa$ . A linha pontilhada preta descreve a absorção quando o acoplamento entre os TLS's e o modo da cavidade é nulo, isto é ( $g = 0$ ).

Fonte: Retirada da Ref. [73] (Figura elaborada pela co-autora Halyne S. Borges).

## 5.5 Escalabilidade do Fenômeno de DIT: múltiplas janelas de transparência

No trabalho descrito Ref. [73] propomos, uma plataforma útil para gerar múltiplas janelas de transparência envolvendo a interação de muitos TLSs como mostrado nas Fig. 19 e 21. No setup referente a Fig. 19, assumimos que o acoplamento entre o primeiro TLS ( $i = 0$ ) e o segundo ainda é dado por  $d_0$  e, para simplificar, o acoplamento entre os outros TLSs é  $d$ . Também consideramos que os outros TLSs tem a mesma taxa de decaimento  $\gamma_i = \gamma \ll \gamma_0$  ( $i = 1, N$ ). Para entender o que acontece com o sistema quando acoplamos mais TLSs, será extremamente útil analisar as auto-energias do hamiltoniano dado pela Eq.(5.4) que foi diagonalizado sem levar em consideração o termo de campo de bombeio por este ter uma magnitude muito baixa. Quando o acoplamento entre o TLS principal e o primeiro é da ordem ou mais fraco que a sua taxa de decaimento, ou seja, quando  $d_0 \lesssim \gamma_0$ , o sistema pode apresentar interferência entre os diferentes caminhos de excitação,

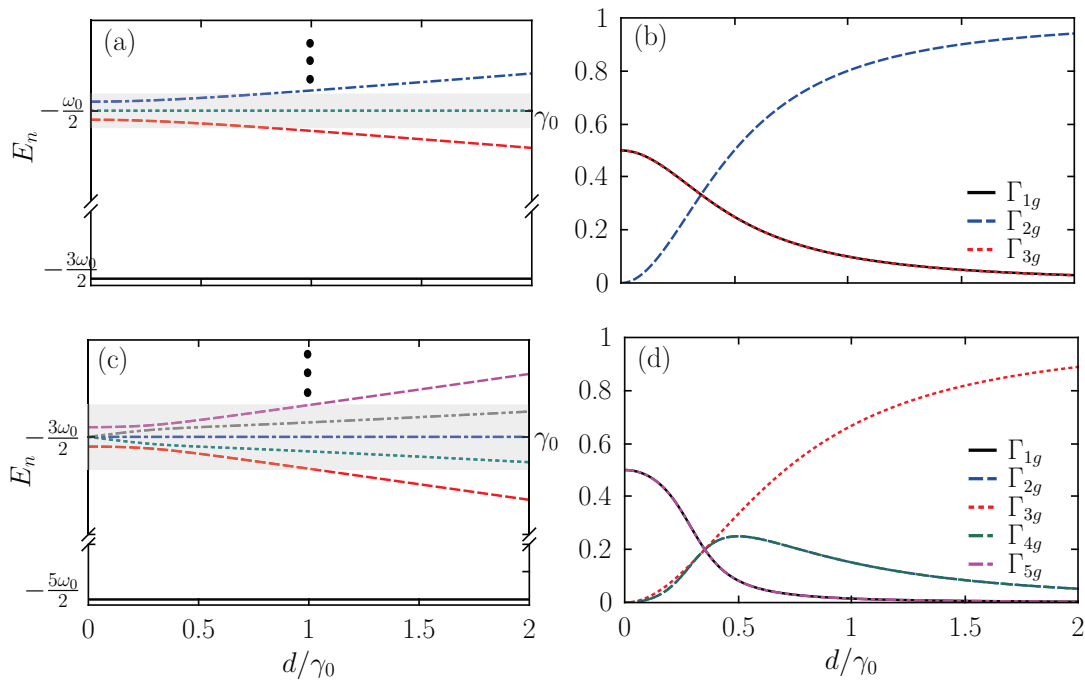


Figura 23 – Painéis a esquerda: Primeiras autoenergias em função de  $d/\gamma_0$ . Painéis a direita: taxas de transição entre o estado fundamental e os estados mais excitados como função de  $d/\gamma_0$ . Em todos os gráficos fixamos os parâmetros  $d_0 = 0.5\gamma_0$  e  $N = 2$  nos painéis (a) e (b), e  $N = 4$  nos painéis (c) e (d).

Fonte: Retirada da Ref. [73] (Figura elaborada pelo autor e pela co-autora Halyne S. Borges).

regime que é representado pela área cinza nas Figs. 23 (a) e (c). Por outro lado, quando  $d_0 \gg \gamma_0$  a separação dos níveis de energia pode ser grande o suficiente para produzir um efeito Autler-Townes. Nos painéis da esquerda Fig. 23, exibimos os resultados para as primeiras autoenergias<sup>4</sup> (estado fundamental e auto-estados com uma excitação) do sistema em função de  $d/\gamma_0$ , fazendo  $\Omega_p = 0$  e  $d_0/\gamma_0 = 0.5\gamma_0$ . A partir de uma análise da Fig. 23 podemos descrever três regimes relacionados a interferências ou ressonâncias do sistema:

*Primeiro regime.* — No caso onde  $d < \gamma_0$  todos os níveis de energia estão dentro da largura de linha do estado excitado do primeiro TLS ( $\gamma_0$ ). Nessa região do espectro definimos que ocorre a interferência total dos diferentes caminhos de excitação, a qual caracteriza a ocorrência do fenômeno de DIT.

*Segundo regime.* — Por outro lado, na região intermediária onde ( $d \sim \gamma_0$ ) alguns níveis podem estar dentro e outros fora da largura de linha do estado excitado apresentando assim, auto-estados próximos com taxas de decaimento possivelmente diferentes. Em suma, pode-se ter diferentes estados ressonantes próximos um do outro, mas com forma de linha

<sup>4</sup> No Apêndice D, mostramos as expressões analíticas para os autoestados e autoenergias para o caso  $N = 2$ .

assimétrica caracterizando interferência Fano [129, 130].

*Terceiro regime.*— Para acoplamentos muito intensos ( $d_0, d \gg \gamma_0$ ), podemos observar a completa separação entre os níveis, característica peculiar do efeito Autler-Townes [46].

Em resumo, dependendo do conjunto de parâmetros pode-se ter diferentes regimes de interferência e ressonância em nosso sistema. Uma informação importante em relação à discussão anterior reside na análise das taxas de transição entre os autoestados do sistema. As taxas de transição entre os estados excitados  $|\psi_k\rangle$  do sistema total para o estado fundamental  $|\psi_g\rangle$  podem ser calculadas utilizando a regra de ouro de Fermi [131]:

$$\Gamma_{kg} = \gamma_0 |\langle \psi_g | \sigma_-^0 | \psi_k \rangle|^2, \quad (5.27)$$

onde negligenciamos os canais de dissipação relacionados aos outros TLSs pois assumimos  $\gamma_0 \gg \gamma$ . Para alguns TLSs podemos derivar analiticamente os auto-estados e depois as expressões analíticas<sup>5</sup> para as taxas de decaimento. Mostramos nas Figs. 23 (b) ( $N = 2$ ) e 23 (d) ( $N = 4$ ), as taxas de transição entre os estados excitado e fundamental de todo o sistema como uma função do acoplamento  $d$ , para um dado acoplamento  $d_0$ . Observamos que essas taxas de decaimento são sempre diferentes exceto por um valor específico de  $d$ , onde todas as taxas de transição coincidem ( $d = d_0/\sqrt{2}$ ). Tal característica terá um efeito direto nas propriedades ópticas do sistema, que iremos discutir adiante.

## 5.6 Cenário de Multi DIT: Espaço livre

Nas Figs. 24 (a) e (b) mostramos a absorção e dispersão do primeiro TLS acoplado a  $N = 4$  outros TLSs, no regime DIT. Podemos observar que as posições dos picos externos dependem de  $d_0$ , enquanto que para os picos internos suas posições e larguras dependem de  $d$ . Dessa forma, o número de janelas de transparência é exatamente igual ao número de TLSs  $N$  acoplados ao TLS principal. Na situação onde  $d_0 < \gamma_0$ , podemos ver da Fig. 24 (a) que temos um cenário de múltiplas janelas de DIT, por outro lado quando  $d_0, d \gg \gamma_0$  temos o efeito Autler-Townes. Para o caso  $d_0 < \gamma_0$  e  $d > \gamma_0$  temos um cenário onde os caminhos de excitação apresentam assimetria resultando em estados ressonantes com formas assimétricas como pode ser visto na Fig. 24(b). Este efeito pode ser explicado devido ao aumento do acoplamento  $d$  que torna os picos internos mais amplos e, dependendo do acoplamento  $d_0$ , eles podem se aproximar dos demais picos produzindo interferências nos caminhos de absorção, revelando as interferências Fano<sup>6</sup> [129, 130]. Outra característica

<sup>5</sup> Consulte o Apêndice D, onde derivamos as expressões analíticas envolvendo os dois setups propostos

<sup>6</sup> A interferência do tipo Fano é característica por exibir um caráter assimétrico no espectro de transmissão em função da frequência quando se tem sistemas interagentes. Um exemplo didático que se utiliza na literatura para associar o efeito Fano com o fenômenos de interferência é o caso de dois osciladores harmônicos acoplados que em certos limites podem exibir no seu espectro de transmissão um perfil de ressonância simétrico Lorentziano ou um perfil de ressonância assimétrico típico de ressonância Fano. A referência [132] é muito esclarecedora sobre a física da ressonância Fano em diferentes sistemas.

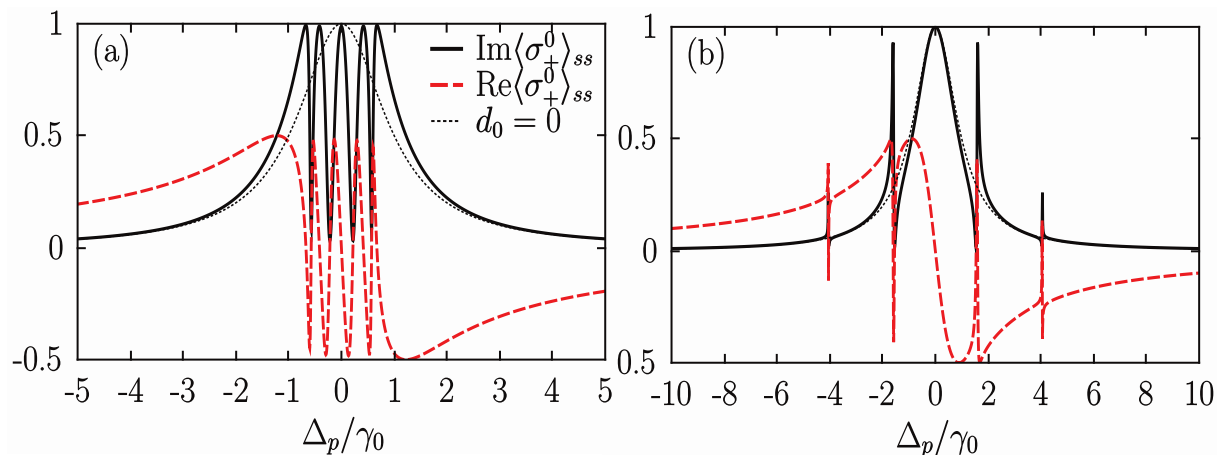


Figura 24 – Absorção normalizada (linha sólida preta) e dispersão (linha tracejada vermelha) do primeiro TLS acoplado a  $N = 4$  TLS's com função de  $\Delta_p/\gamma_0$ . Os parâmetros usados são  $\Omega_p = 0.03\gamma_0$ ,  $\gamma_i = \gamma = 10^{-3}\gamma_0$  e  $d_0 = 0.5\gamma_0$ . Os valores do acoplamento  $d$  são: (a)  $d = d_0/\sqrt{2}$ ; (b)  $d = 2.5\gamma_0$ . As linhas pontilhadas pretas representam a absorção para  $d_0 = 0$ .

Fonte: Retirada da Ref. [73] (Figura elaborada pela co-autora Halyne S. Borges).

interessante é que a profundidade das janelas de transparência é fortemente dependente da taxa de decaimento  $\gamma$ . Observando a Fig. 24(a) podemos ver que a profundidade das janelas de transparência são todas próximas do valor mínimo da absorção quando assumimos um valor muito baixo para a taxa de decaimento  $\gamma$ , nesse caso especificamente para, para  $\gamma = 10^{-3}\gamma_0$ . Por outro lado, a largura das janelas de transparência depende das taxas de transição entre os estados excitados e fundamental do sistema total. Como visto na Fig.23 (b) ( $N = 2$ ) e 23 (d) ( $N = 4$ ) todas as taxas de transição são iguais em um ponto específico, isto é, quando  $d = d_0/\sqrt{2}$ . No valor específico onde as taxas se cruzam, as larguras dos picos de ressonância do sistema, que também dependem do acoplamento  $d$ , é a mesma e então, obtemos um cenário com múltiplas janelas de transparência perfeitamente simétricas. Para qualquer número de TLSs acoplados, o ponto onde todas as taxas de decaimento<sup>7</sup> coincidem ocorre sempre em  $d = d_0/\sqrt{2}$ . Desta forma, escolhendo os parâmetros específicos para esse ponto de cruzamento, teremos um perfil de absorção perfeitamente simétrico. Caso contrário, fora deste ponto específico, o cenário da absorção pode exibir assimetrias nos picos dependendo do valor escolhido dos parâmetros. Por fim, destacamos que um dos grandes resultados apresentados neste trabalho, reside na possibilidade de exibir o fenômeno de DIT para um regime escalável constituído por  $N$  TLSs. Na Fig. 25 apresentamos o espectro de absorção para  $N = 7, 10, 12$  e  $15$ . Observe que o número de janelas de transparência é exatamente igual a  $N$ . Além disso, pode-se observar que a profundidade das janelas de transparência é diferente. Isso se deve à taxa de decaimento  $\gamma$  não nula usada

<sup>7</sup> Conseguimos derivar as taxas de decaimento e os pontos de cruzamento para até  $N = 4$  TLSs acoplados ao principal, como pode ser visto no Apêndice D.

aqui. Aumentando-se o número de TLSs acoplados ao principal, aumentamos o número de janelas de transparência. No entanto, quanto maior o  $N$ , mais significantes podem ser os efeitos dissipativos no cenário de DIT. Então, aqui temos um sistema sintonizável

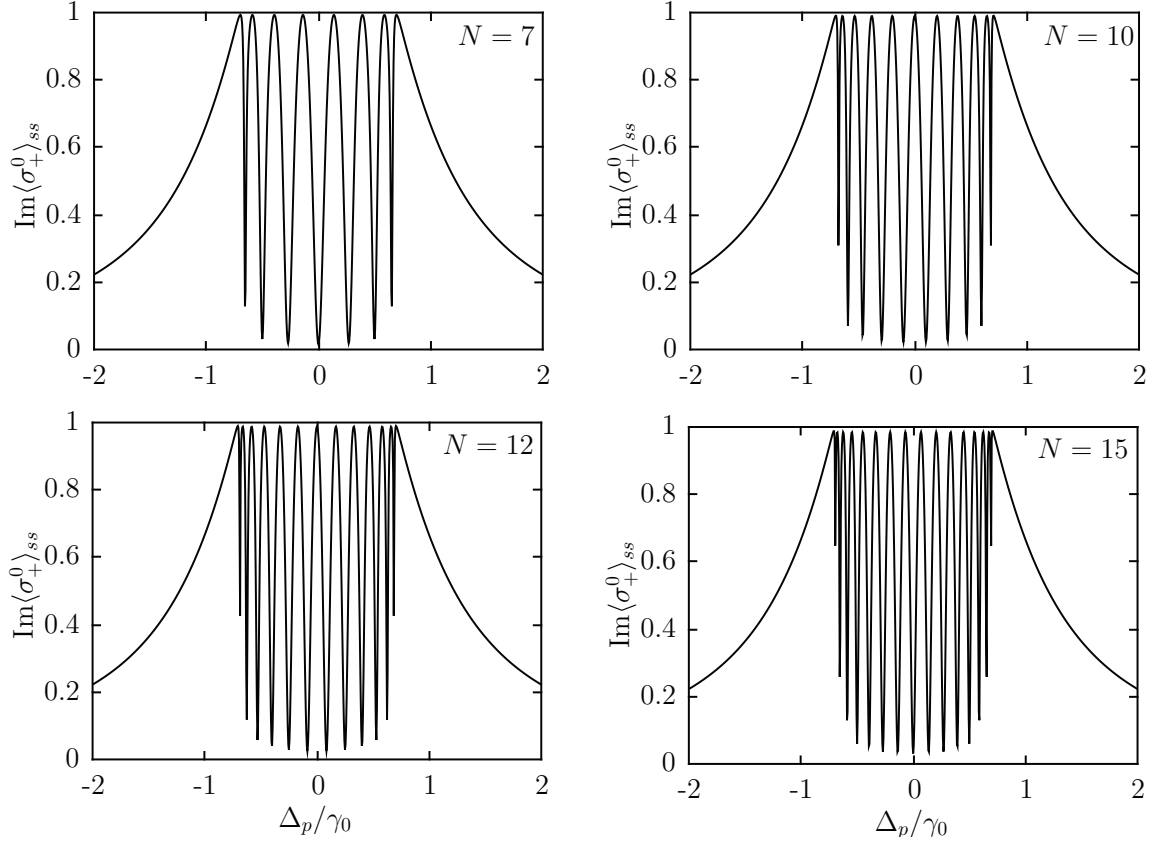


Figura 25 – Absorção normalizada,  $\text{Im}\langle\sigma_+^0\rangle_{ss}$  como função da dessintonia normalizada  $\Delta_p/\gamma_0$ , para diferentes números de TLS acoplados ao principal ( $N = 7, 10, 12$  e  $15$ ). Os parâmetros utilizados são  $\gamma_0 = 1$ ,  $\Omega_p = 0.03\gamma_0$ ,  $\gamma_i = \gamma = 10^{-3}\gamma_0$ ,  $d_0 = 0.5\gamma_0$  e  $d = d_0/\sqrt{2}$ .

Fonte: Retirada da Ref. [73] (Figura elaborada pela co-autora Halyne S. Borges).

que nos permite escolher arbitrariamente o número de janelas de transparência e suas larguras, simplesmente ajustando-se o número de TLS e o acoplamento dipolo-dipolo em nosso modelo. Embora não tenha sido mostrado na publicação Ref. [73] pode-se obter o cenário de interferência Fano para muitos *TLSs* acoplados, como pode ser visto na Fig. 26. Observamos que o cenário de interferência Fano, principalmente os picos laterais, são bem afetados à medida que aumentamos o número de TLSs no sistema enquanto que os picos mais internos próximos da ressonância são menos afetados.

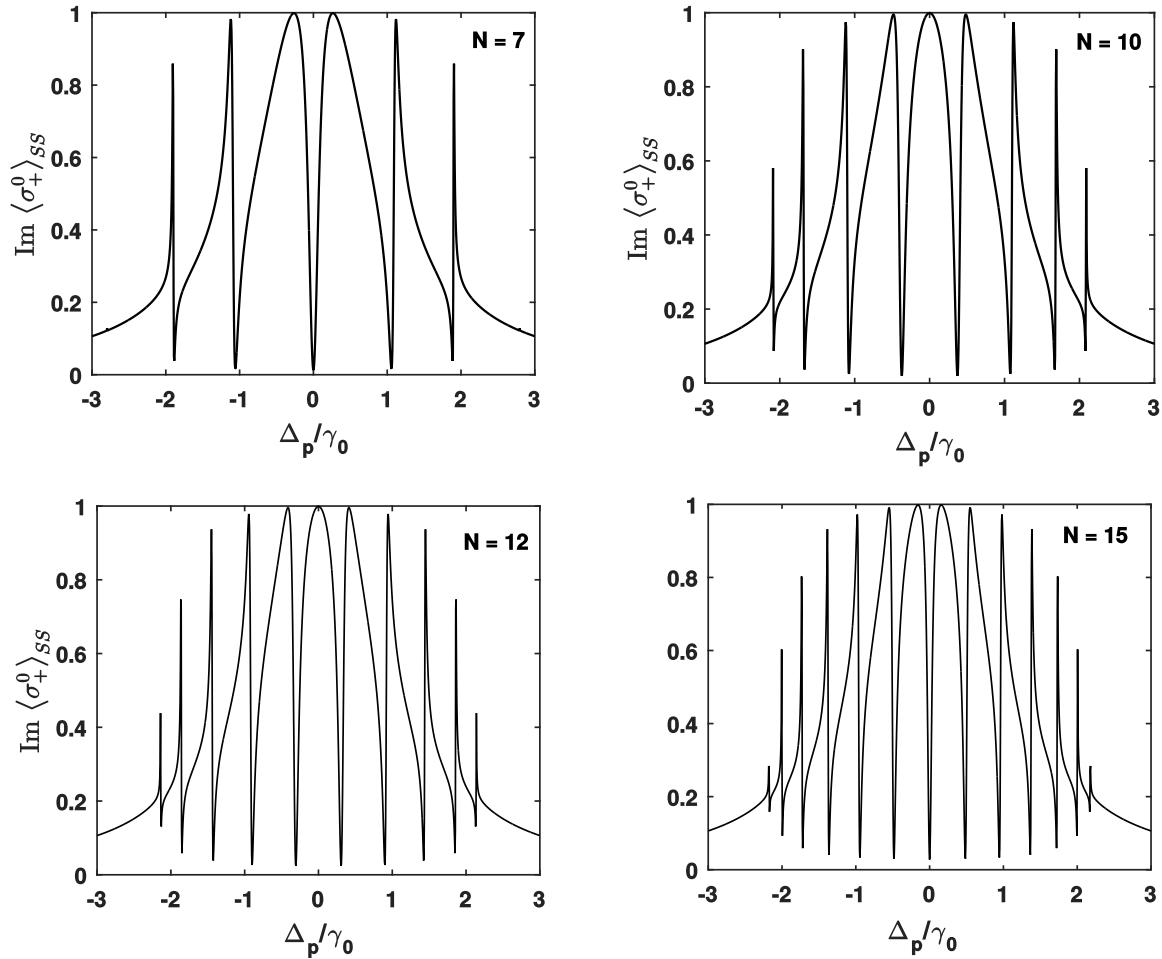


Figura 26 – Absorção normalizada,  $\text{Im}\langle\sigma_+^0\rangle_{ss}$  como função da dessintonia normalizada  $\Delta_p/\gamma_0$ , para diferentes números de TLS acoplados ao principal ( $N = 7, 10, 12$  e  $15$ ). Os parâmetros utilizados são  $\gamma_0 = 1$ ,  $\Omega_p = 0.03\gamma_0$ ,  $\gamma_i = \gamma = 10^{-3}\gamma_0$ ,  $d_0 = 0.5\gamma_0$  e (b)  $d = 2.5\gamma_0$ .

Fonte: Elaborada pelo autor

## 5.7 Cenário de Multi DIT: TLS's acoplados ao ressonador

A interferência multi-DIT ou multi-Fano também aparece quando temos um conjunto de  $1 + N$  TLSs acoplados a um modo do ressonador. Como discutido acima, o número de janelas de transparência é igual ao número de TLSs acoplados ao principal. Assim, considerando  $1 + N$  TLSs acoplados (cada acoplamento dado por  $d$ ), que por sua vez é acoplado ao modo cavidade (acoplamento  $g$ ), teremos  $N$  janelas de transparência como vemos na Fig. 27 (a) para  $N = 4$ , para valores de acoplamento  $g$  e  $d$  pequenos, enquanto que a Fig. 27 (b), apresenta 4 picos internos com uma característica assimétrica, oriunda de interferência tipo Fano, sendo que esta interferência é determinada por todos os acoplamentos entre os TLSs. No entanto, os picos externos são principalmente devidos ao acoplamento átomo-campo  $g$  e os picos internos (e suas larguras) são influenciados principalmente pelos acoplamentos dipolo-dipolo  $d$ .

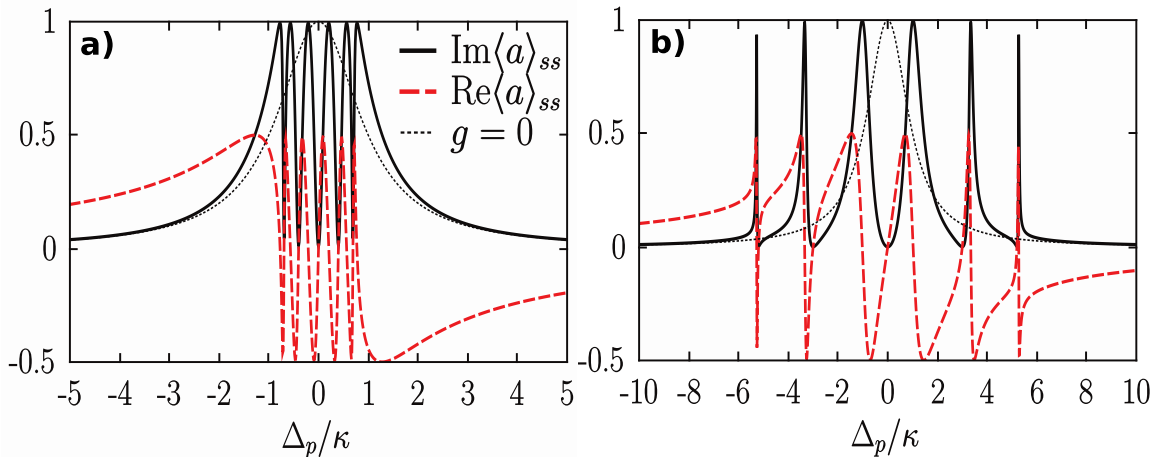


Figura 27 – Absorção normalizada (linha contínua preta) e a dispersão (linha tracejada vermelha) do modo da cavidade acoplado a 5 TLS's (isto é,  $N = 4$ ) como função de  $\Delta_p/\kappa$ . Os parâmetros usados são  $|\epsilon| = 0.03\kappa$ ,  $\gamma_i = \gamma = 10^{-3}\kappa$ , e: (c)  $d = 0.4\kappa$ ,  $g = \sqrt{2}d$ , e  $\gamma_0 = 10^{-3}\kappa$ ; e (b)  $d = 3.0\kappa$ ,  $g = 2.0\kappa$ , e  $\gamma_0 = 10^{-3}\kappa$ . As linhas pontilhadas pretas representam a absorção para  $g = 0$ .

Fonte: Retirada da Ref. [73] (Figura elaborada pela co-autora Halyne S. Borges).

Para entender o que acontece com o sistema quando temos  $1 + N$  TLSs, analisamos as auto-energias do hamiltoniano (5.17) que foi diagonalizado sem levar em consideração o termo de campo de bombeio  $\epsilon$ . Para valores de  $g$  e  $d$  podemos ter interferência ou ressonância de acordo com a classificação a seguir. A partir de uma análise da Fig. 28 das autoenergias podemos descrever três regimes relacionados a interferências ou ressonâncias do sistema:

*Primeiro regime.*— No caso onde  $g < \kappa$  todos os níveis de energia estão dentro da largura de linha do ressonador ( $\kappa$ ). Nessa região do espectro ocorre a interferência total dos diferentes caminhos de excitação onde definimos a ocorrência do fenômeno de cavity-DIT.

*Segundo regime.*— Por outro lado, na região intermediária onde ( $g > \kappa$ ) alguns níveis podem estar dentro e outros fora da largura de linha do estado excitado apresentando assim, auto-estados próximos com taxas de decaimento possivelmente diferentes. Em suma, pode-se ter diferentes estados ressonantes próximos um do outro, mas com forma de linha assimétrica caracterizando interferência Fano [129, 130]).

*Terceiro regime.*— Para acoplamentos muito intensos ( $g \gg \kappa$ ), podemos observar a completa separação entre os níveis, característica peculiar do efeito Autler-Townes [46]. De maneira similar ao que foi feito para DIT no caso do espaço livre das taxa de transição entre o estado fundamental e os estados mais excitados é útil no esclarecimento do cenário de DIT no *setup* abordado neste tópico. Quando temos  $1 + N$  TLSs acoplados ao ressonador, as taxas de transição entre os estados excitados  $|\psi_k\rangle$  do sistema total para o estado

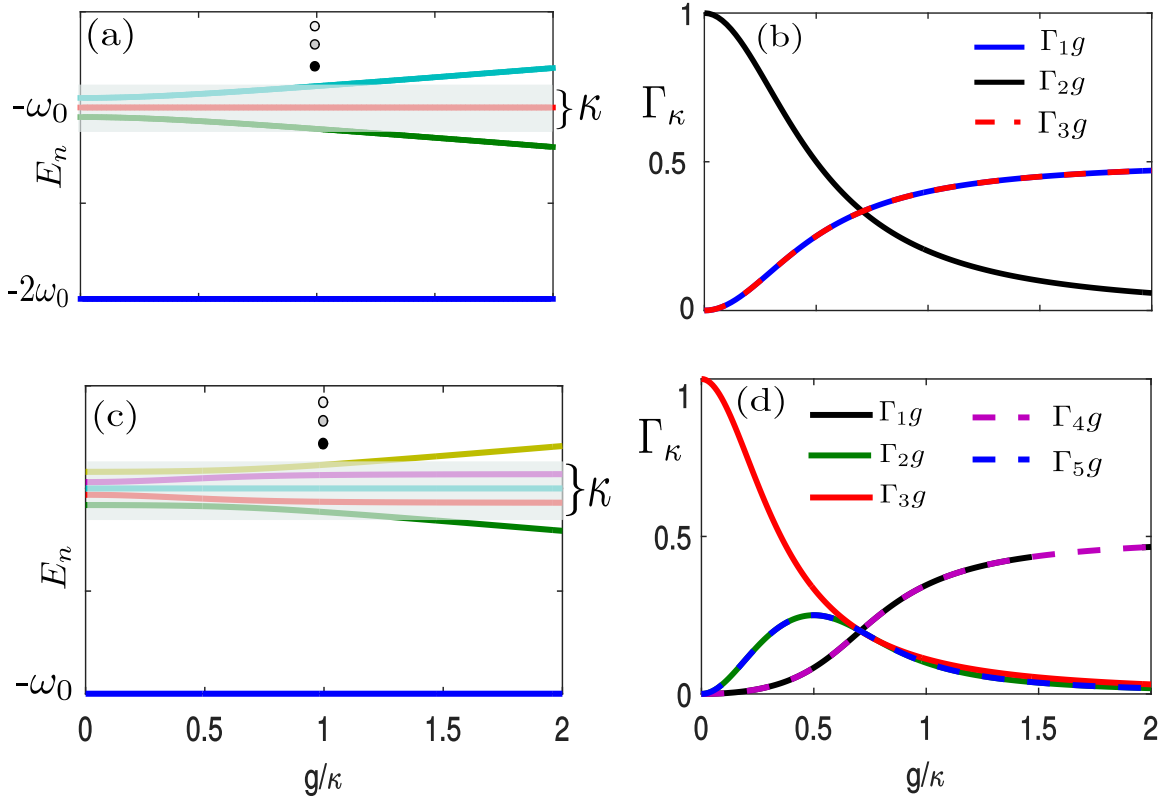


Figura 28 – Painéis a esquerda: Primeiras autoenergias em função de  $g/\kappa$ . Painéis a direita: taxas de transição entre o estado fundamental e os estados mais excitados como função de  $g/\kappa$ . Em todos os gráficos fixamos os parâmetros  $d_0 = 0.5\gamma_0$  e  $N = 1$  nos painéis (a) e (b), e  $N = 3$  nos painéis (c) e (d).

Fonte: Elaborada pelo autor.

fundamental  $|\psi_g\rangle$  podem ser calculadas utilizando a regra de ouro de Fermi [131]:

$$\Gamma_{kg} = \kappa |\langle \psi_g | a | \psi_k \rangle|^2, \quad (5.28)$$

onde negligenciamos os canais de dissipação relacionados aos TLSs pois assumimos  $\kappa \gg \gamma$ . Como visto na Fig. 28 (b) ( $N = 2$ ) e 28 (d) ( $N = 4$ ) todas as taxas de transição são iguais em um ponto específico, isto é, quando  $g = \sqrt{2}d$ . Nesse valor específico onde as taxas se cruzam, a largura dos picos de ressonância do sistema, que também depende do acoplamento  $d$ , é a mesma e então obtemos um cenário múltiplas janelas de transparência perfeitamente simétricas. Para o caso onde  $1 + N$  TLSs são acoplados ao ressonador podemos classificar os regimes de interferência e ressonância analisando os valores dos parâmetros de acoplamento entre os dipolos  $d$  e o acoplamento  $g$  entre o primeiro TLS com o ressonador. Mostramos na Fig. 29 a resposta óptica do sistema, para  $N = 7, 10, 12$  e  $15$ . A partir da Fig. 29 podemos ver que o número de janelas de transparência é exatamente igual ao número de TLSs. No Apêndice D, mostramos soluções analíticas para o valor esperado  $\langle a \rangle_{ss}$  para os casos  $N = 2$  e  $N = 3$ . As soluções analíticas que geram os resultados mostrados na Fig. 29 não são mostradas no Apêndice por serem muito extensas. Embora



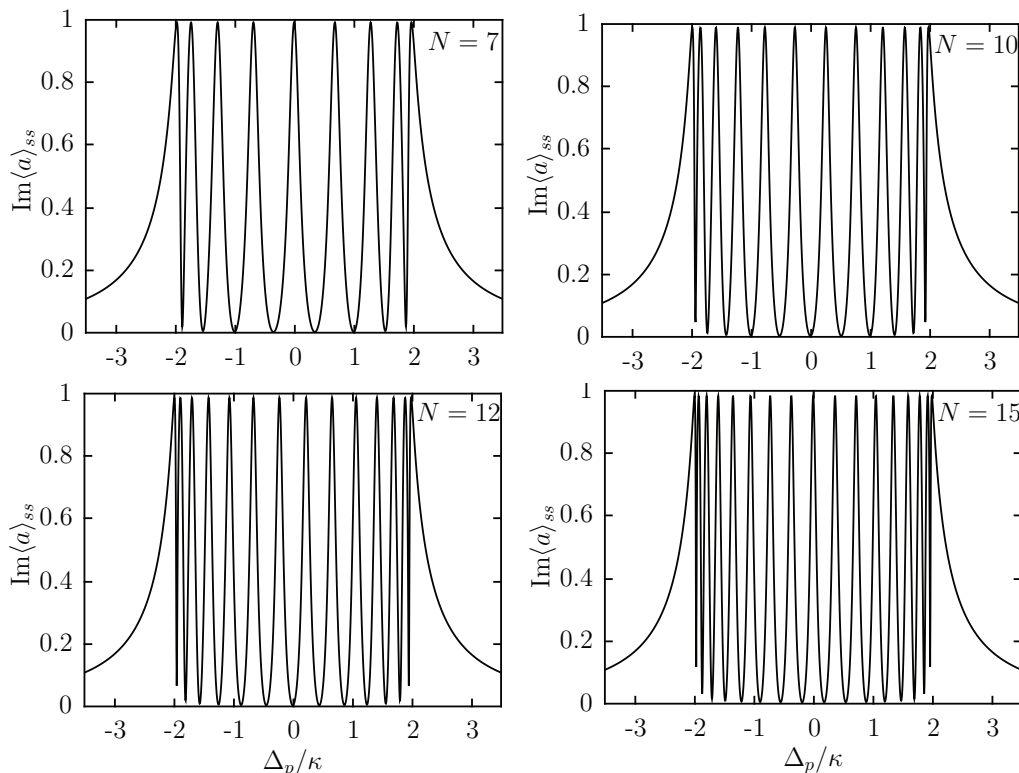


Figura 29 – Absorção normalizada,  $\text{Im}\langle a \rangle_{ss}$  como função da dessintonia normalizada  $\Delta_p/\kappa$ , para  $1 + N$  TLS's acoplados ao modo da cavidade (para  $N = 7, 10, 12$  e  $15$ ). Os parâmetros usados são,  $\gamma_0 = \gamma_i = 10^{-3}\kappa$ ,  $|\epsilon| = 0.03\kappa$ ,  $d = 1.0\kappa$  e  $g = \sqrt{2}d$ .

Fonte: Retirada da Ref. [73](Figura elaborada pela co-autora Halyne S. Borges).

não tenha sido reportado na publicação Ref. [73] que gerou este capítulo, também podemos acessar o cenário de interferência Fano quando se tem um dado número de TLSs acoplados ao ressonador, como pode ser visto na Fig. 30. Observamos que os picos laterais de ressonância Fano são mais afetados pelos efeitos dissipativos enquanto, que os picos mais internos são menos afetados pelos efeitos dissipativos que agem no sistema. Na situação onde temos TLS's acoplados ao ressonador, o cenário de múltiplas interferências é menos afetado que o abordado no espaço livre.

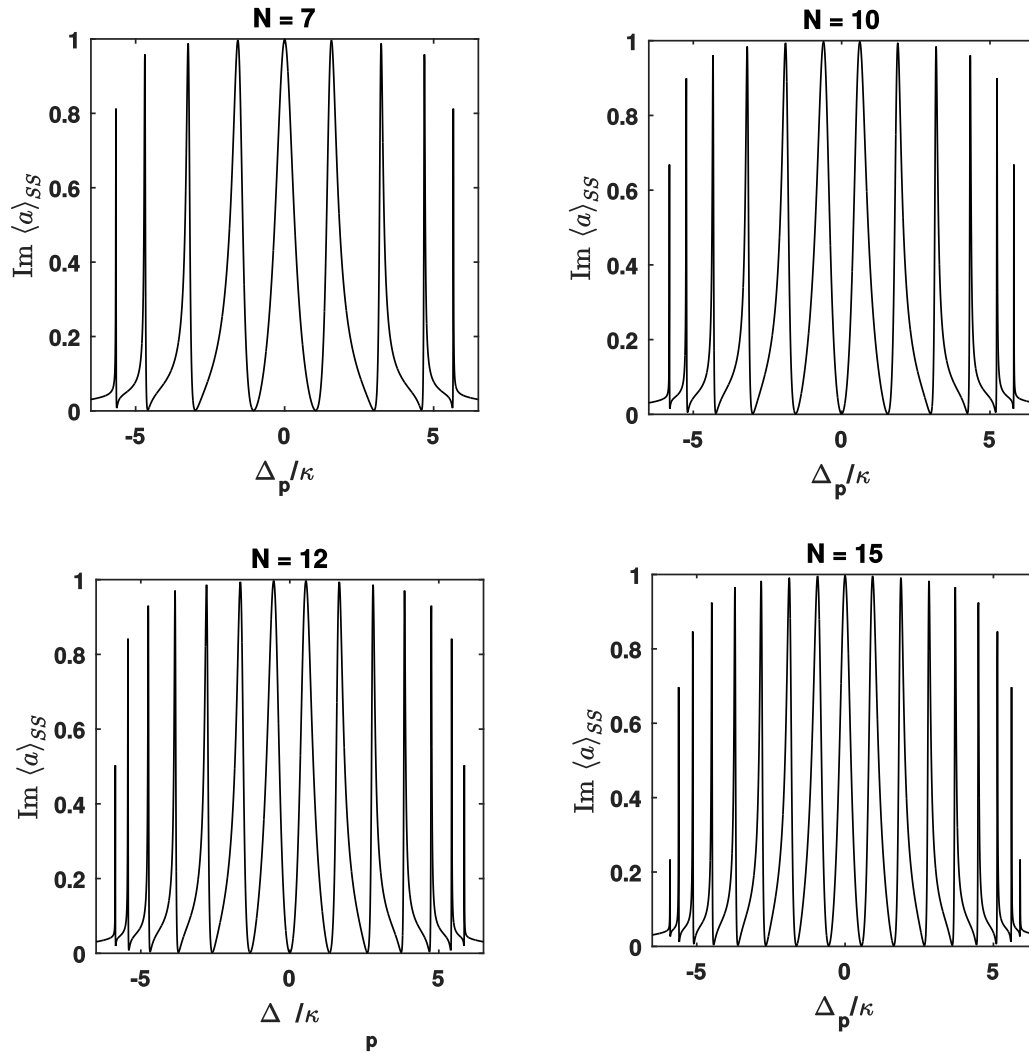


Figura 30 – Absorção normalizada,  $\text{Im} \langle a \rangle_{ss}$  como função da dessintonia normalizada  $\Delta_p / \kappa$ , para  $1 + N$  TLSs acoplados ao modo da cavidade (para  $N = 7, 10, 12$  e  $15$ ). Os parâmetros usados são,  $\gamma_0 = \gamma_i = 10^{-3}\kappa$ ,  $|\epsilon| = 0.03\kappa$ ,  $d = 3.0\kappa$  e  $g = 2.0\kappa$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

## 5.8 Uma proposta para gerar o cenário de DIT

Embora tenhamos feito uma extensa análise teórica sobre o fenômeno de transparência induzida por dipolos, pode-se ter com o desenvolvimento de técnicas atuais a possibilidade de implementar sistemas mais complexos no contexto de física de muitos corpos. Por exemplo na Ref. [118] encontramos uma plataforma interessante para investigar experimentalmente nossos resultados, pois tal plataforma apresenta um acoplamento controlável entre dois sistemas de dois níveis diferentes: o primeiro sistema composto por um átomo artificial de fase Ref. [118], cujos os dois primeiros níveis formam o qubit, enquanto que o segundo sistema é descrito por um ou mais defeitos oriundo, do circuito supercondutor que constitui o átomo artificial. Este defeito descreve o denominado TLS [117]. Como demonstrado em vários experimentos recentes [118, 119, 121], esses TLSs apresentam

tempos de coerência mais longos que os tempos de coerência do qubit supercondutor, fato esse que torna este sistema atraente para a implementação do fenômeno de transparência induzida por dipolo. Em contrapartida na Ref. [120] os autores reportam a observação de um estado escuro com um longo tempo de vida. Nesse trabalho, o *setup* utilizado para tal é um sistema híbrido composto por um qubit de fluxo sintonizável que interage com um ensemble de vacâncias de nitrogênio (*nitrogen vacancy = NV center*) em diamante. A assinatura deste estado escuro está relacionado com a observação experimental de um pico estreito no ponto de cruzamento de níveis na energia. Portanto, o *setup* da Ref. [120] é bem conectado com nossa proposta devido a possibilidade de se ter um sistema escalável.

## 5.9 Transparência Induzida por Dipolos acoplados: Efeitos das condições periódicas de contorno

Como foi discutido na seção anterior, o fenômeno de transparência induzida por dipolos pode ser um caráter escalável tanto no espaço livre quanto no caso onde o primeiro sítio da cadeia é acoplado a um modo de uma cavidade ou ressonador. Entretanto, em nossas investigações consideramos somente a situação em que o primeiro e o último sítio não são acoplados entre si. No entanto, sabe-se que diferentes condições de fronteira podem modificar significativamente as propriedades físicas do sistema. Nesta seção iremos discutir os efeitos da condição de fronteira no fenômeno de transparência induzida por dipolo e suas consequências no comportamento da resposta óptica do sistema para uma cadeia de TLS's acoplados ao principal. Efetivamente o que fizemos neste problema foi levar em consideração que temos condições periódicas de contorno no sistema de DIT no espaço livre descrito na Fig. 19, isto é,  $\sigma_N = \sigma_0$ . Utilizando as aproximações semiclássicas e resolvendo a Eq. (4.8), encontramos a solução analítica para este problema de maneira similar ao que foi feito no caso sem levar em considerações os efeitos de fronteira.

O conjunto de equações para os valores médios no sistema é dado por:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\sigma}_-^0 \rangle &= -(i\Delta_p + \gamma_0) \langle \sigma_-^0 \rangle + id_0 \langle \sigma_z^0 \rangle \langle \sigma_-^1 \rangle + i\Omega_p \langle \sigma_z^0 \rangle, \\ \langle \dot{\sigma}_-^j \rangle &= -(i\Delta_p + \gamma_j) \langle \sigma_-^j \rangle + id_{j-1} \langle \sigma_z^j \rangle \langle \sigma_-^{j-1} \rangle + id_{j+1} \langle \sigma_z^j \rangle \langle \sigma_-^{j+1} \rangle \quad (\text{para } 1 \leq j \leq N-1), \\ \langle \dot{\sigma}_-^N \rangle &= -(i\Delta_p + \gamma_N) \langle \sigma_-^N \rangle + id_{N-1} \langle \sigma_z^N \rangle \langle \sigma_-^{N-1} \rangle + id_{N-1} \langle \sigma_z^N \rangle \langle \sigma_-^0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Baseado na premissa anterior considerando que no limite de baixas excitações podemos utilizar a aproximação semiclássica, encontramos a solução estacionária geral do sistema de equações (5.29), sendo esta dada por:

$$\langle \sigma_-^0 \rangle_{ss} \approx -\Omega_p \frac{\delta_1}{\delta_0}, \quad (5.30)$$

com

$$\delta_k = \delta_{k+1} (\Delta_p - i\gamma_k) - \delta_{k+2} |d_k|^2 - |d_k| |d_{k+1}| |d_N|,$$

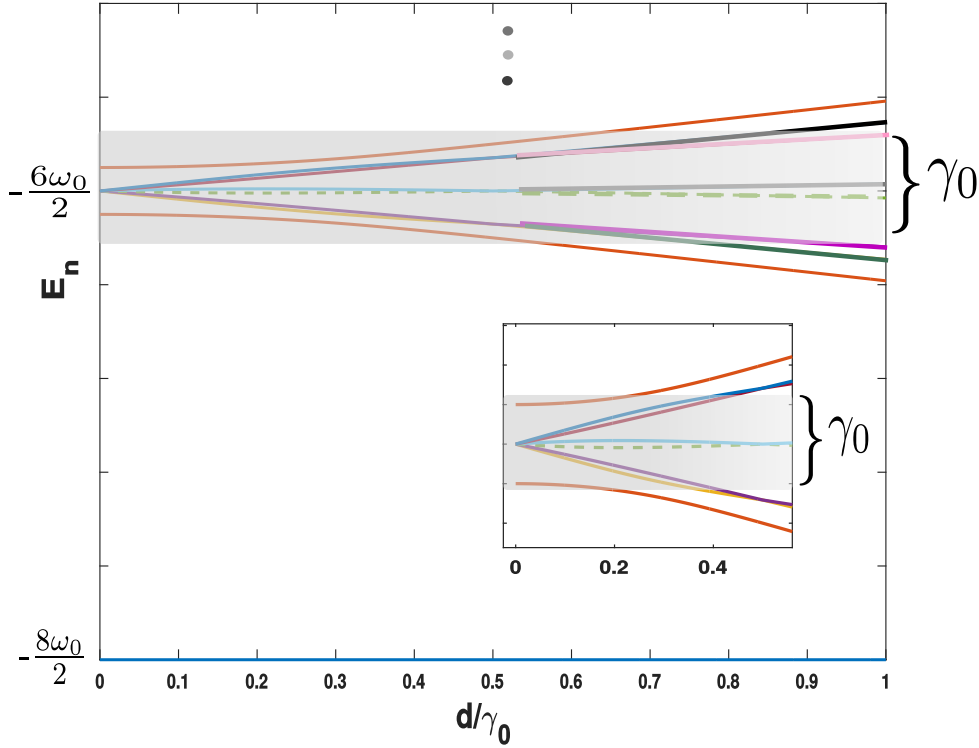


Figura 31 – Primeiras autoenergias em função de  $d/\gamma_0$  para  $N = 7$  TLSs acoplados ao principal. Nesse gráfico fixamos o parâmetro  $d_0 = 0.5\gamma_0$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

e

$$\delta_{k+1} = \delta_{k+2} (\Delta_p - i\gamma_{k+1}) - \delta_{k+3} |d_{k+1}|^2, \quad (5.31)$$

para  $k = 0, 1, \dots, N-2$ , e

$$\delta_{N-1} = \delta_N (\Delta_p - i\gamma_{N-1}) - |d_{N-1}|^2, \quad (5.32)$$

$$\delta_N = (\Delta_p - i\gamma_N). \quad (5.33)$$

Perceba que a inclusão da condição periódica de contorno adiciona alguns termos a mais na solução que dependem especificamente do acoplamento entre os TLSs. Utilizando essa solução podemos analisar o cenário de DIT e como a condição periódica de contorno afeta o sistema. De maneira similar ao que foi feito no fenômeno de DIT, será útil analisar o espectro que corresponde as autoenergias e autoestados do sistema quando impomos as condições periódicas de contorno. Analisando a Fig. 31, é possível observar que existe um ponto onde as autoenergias se cruzam para um determinado valor de acoplamento, especificamente, no ponto  $d = 0.5\gamma_0$ . Deste modo, a largura de linha do sistema é afetada pela condição periódica de contorno imposta no hamiltoniano. Assim, se tivermos interesse em analisar a resposta óptica do sistema, teremos que analisar a largura de linha em um

intervalo antes do ponto de cruzamento como mostrado no *inset* da Fig. 31. Neste intuito, ilustramos o comportamento da resposta óptica quando todos valores de acoplamento tem o mesmo valor do acoplamento entre os dois primeiros TLS na cadeia e do ponto onde as autoenergias internas se cruzam, isto é,  $d_i = d_0 = 0.5\gamma_0$ . Da Fig. 32, observamos

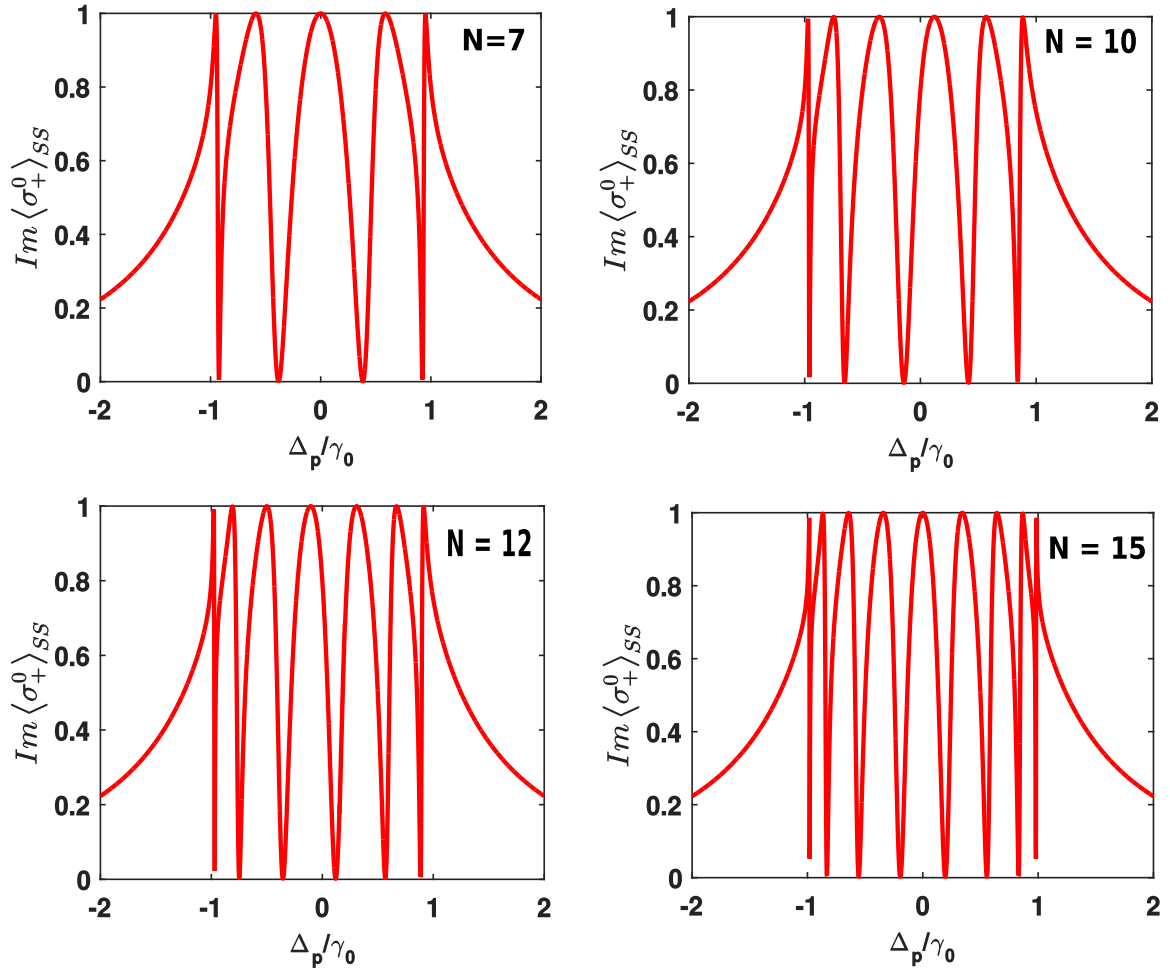


Figura 32 – Absorção normalizada,  $Im\langle\sigma_+^0\rangle_{ss}$ , como função da dessintonia normalizada  $\Delta_p/\gamma_0$ , para diferentes números de TLSs acoplados ao principal ( $N = 7, 10, 12$  e  $15$ ). Os parâmetros utilizados são  $\gamma_0 = 1$ ,  $\Omega_p = 0.03\gamma_0$ ,  $\gamma_i = \gamma = 10^{-3}\gamma_0$ ,  $d_i = d_0 = 0.5\gamma_0$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

que a inclusão do termo de fronteira afeta substancialmente no número de janelas de transparência caso todos os acoplamentos  $d_i$  entre os TLSs sejam iguais, sendo que isso é mais visível à medida que temos um sistema com maior número de sítios. Como pode ser observado na Fig. 32, que a periodicidade do sistema altera o número de janelas no contexto de DIT, impossibilitando gerar um número de janelas de transparência equivalente ao número de TLSs acoplados ao TLS principal, considerando um determinado valor de acoplamento  $d$  entre os TLSs. Como já relatado anteriormente, este modelo é bem similar a uma cadeia de spins do tipo XY que pode, devido as condições periódicas de contorno,

ter sua simetria quebrada e conseqüentemente, pode influenciar o comportamento da resposta óptica do sistema. Felizmente, é possível recuperar o cenário de múltiplas janelas de transparência abordado anteriormente, modificando os parâmetros de acoplamento  $d_0$  e  $d_i$  do TLS principal e dos outros TLSs acoplados. A escolha do ponto  $d_0$  está condicionado ao ponto onde todas as autoenergias se cruzam isto é,  $d_0 = 0.5\gamma_0$ . Além disso, escolher valor de acoplamento  $d_i$  na Fig. 31, em um ponto um fora de onde as autoenergias se cruzam e onde os níveis de energias estejam próximos um dos outros na largura de linha. Utilizando esses parâmetros conseguimos obter de volta o cenário de multi janelas de transparência como pode ser visto nos espectros de absorção mostrados na Fig. 33. O

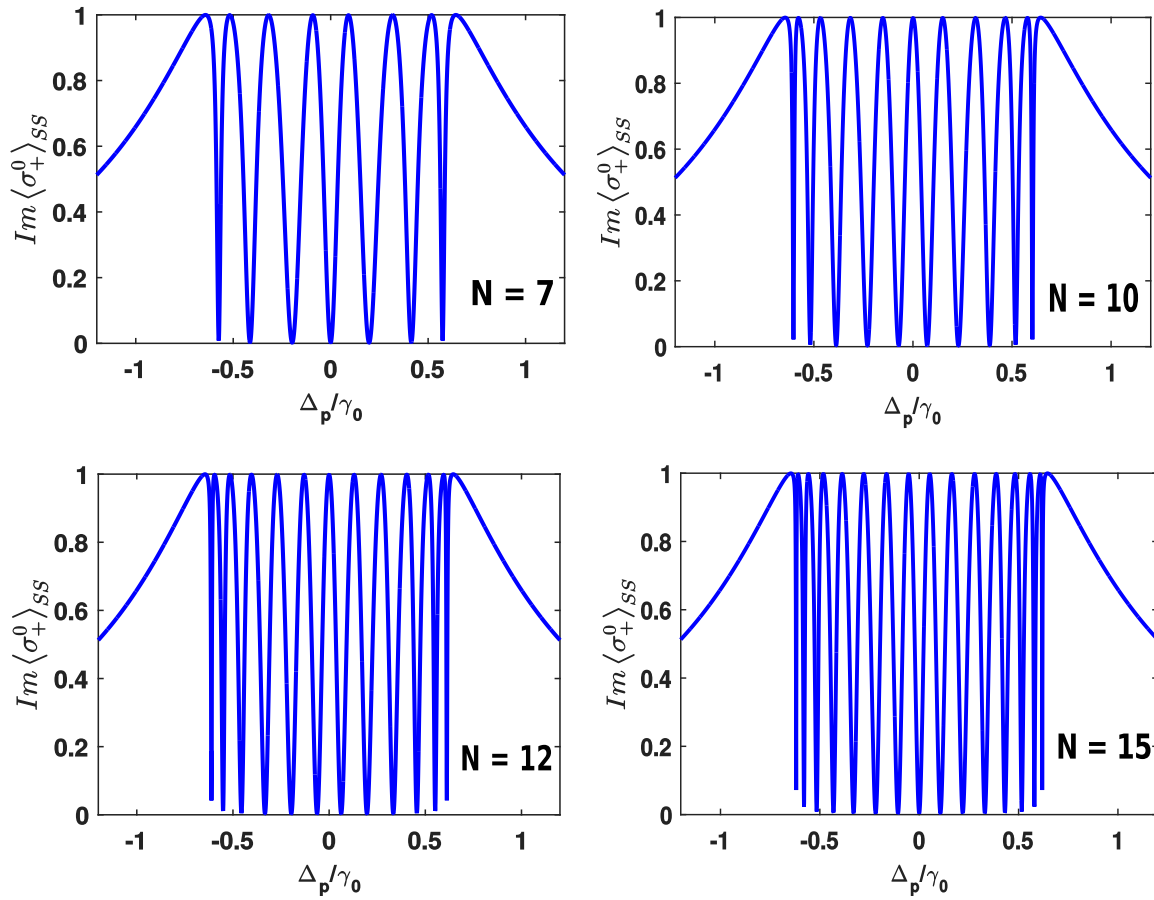


Figura 33 – Absorção normalizada,  $Im\langle\sigma_+^0\rangle_{ss}$  como função da dessintonia normalizada  $\Delta_p/\gamma_0$ , para diferentes números de TLS acoplados ao principal ( $N = 7, 10, 12$  e  $15$ ). Os parâmetros utilizados são  $\gamma_0 = 1$ ,  $\Omega_p = 0.03\gamma_0$ ,  $\gamma_i = \gamma = 10^{-3}\gamma_0$ ,  $d_0 = 0.5\gamma_0$  e  $d_i = 0.2\gamma_0$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

resultado mostrado na Fig. 33 é curioso pois, é possível manipular sob determinados regime de parâmetros, o número de janelas de transparência utilizando a condição periódica de contorno ou outro tipo de condição de fronteira em nossa proposta.

## 5.10 Conclusões

Neste capítulo investigamos como o acoplamento dipolo-dipolo pode induzir transparência em cadeias unidimensionais de sistemas dois níveis acoplados (acoplamento dipolar) no espaço livre ou acopladas a um ressonador. O acoplamento dipolo-dipolo funciona como campo de controle em EIT ou experimentos que descrevem EIT em cavidades, enquanto a taxa de decaimento do primeiro TLS é o equivalente à taxa de decaimento total do estado excitado, em experimentos EIT com átomos de três níveis em uma configuração de níveis atômicos tipo  $\Lambda$ . Mostramos também, que podemos ter um sistema escalável acoplando-se mais TLSs em nosso sistema viabilizando a ocorrência de mais janelas de transparência, sendo que o número de janelas é exatamente igual ao número de TLSs acoplados ao TLS principal. Mostramos que essa escalabilidade do sistema ocorrem em ambos *setups* investigados o que permite acessar um cenário de interferência em diferentes regimes, considerando um número arbitrário de TLSs acoplados. Além disso, indicamos uma possível *setup* presente na tecnologia atual de sistemas híbridos, onde nossa proposta pode ser verificada. Esperamos que este tipo de transparência induzida possa ser útil para manipulação das propriedades ópticas dos TLSs em geral, por exemplo, para o estudo de luz lenta, propriedades de transporte em cadeias de spin, e também filtros de frequência para campos de luz. Além disso, detectando a resposta óptica de um TLS ou ressonador sob a ação de um campo externo, existe a possibilidade de estimar as propriedades da interação dipolo-dipolo.





## 6 Dinâmica Dissipativa em cadeias de spins

Neste capítulo iremos abordar a dinâmica dissipativa em cadeias de spins utilizando os formalismos fenomenológico e microscópico de equação mestra.

### 6.1 Introdução

O estudo de sistemas de muitos corpos sob a ação do meio ambiente tem sido alvo de intensa investigação recente [5–8]. Muito se deve pelo fato serem modelos importantes no contexto de matéria condensada, magnetismo quântico, redes ópticas dentre outros. A descrição de processos dissipativos utilizando a equação mestra fenomenológica tem sido utilizada ao longo das últimas décadas e mostrou-se muito útil para descrever muitos fenômenos físicos interessantes no contexto de óptica quântica. No entanto, com o desenvolvimento de novas tecnologias, regimes de acoplamento ultra forte entre átomos artificiais e campos, por exemplo em circuitos supercondutores, o formalismo de fenomenológico de equação mestra não se mostra mais adequado, sendo então necessária uma descrição mais robusta utilizando o formalismo microscópico no intuito de descrever corretamente tais sistemas fortemente interagentes. Atualmente isso, está bem estabelecido na comunidade de óptica quântica, entretanto ainda não é bem esclarecido em outras áreas que envolvem o estudo de cadeias de spins fortemente interagentes. Neste capítulo mostramos os diferentes comportamentos previstos no emprego dos dois formalismos dissipativos em sistemas fortemente interagentes como modelos de cadeias de spins. Em particular, mostramos que quando todos os spins interagem com seu respectivo reservatório, o formalismo microscópico de equação mestra prevê o regime estacionário correto do sistema, isto é, aquele descrito pelo estado de Gibbs.

A análise de dissipação causada pelo ambiente via equação mestra, tem sido feita ao longo das últimas décadas. Uma das motivações desse trabalho é tornar clara a discrepância entre os resultados obtidos quando se emprega a equação mestra fenomenológica e a microscópica. Tal discrepância é tanto maior quanto maior for a energia de acoplamento entre os spins (em relação à energia livre de cada spin). Nesse intuito, primeiramente apresentamos uma revisão bibliográfica dos trabalhos que empregam as equações mestras fenomenológica ou microscópica em sistemas quânticos fortemente interagentes.

#### 6.1.1 Formalismo *Fenomenológico* de equação mestra Markoviana

Desde o início dos anos 2000, estudos teóricos empregando o formalismo de sistemas quânticos abertos via equação mestra em sistemas fermiônicos de baixa dimensionalidade

obtiveram avanços e resultados significativos. A forma padrão de equação mestra de Lindblad denominada como *equação mestra fenomenológica* [2] é largamente utilizada nesses estudos, especificamente no contexto de transporte no regime de não equilíbrio. A seguir, enumeramos alguns trabalhos que possuem resultados importantes e que impulsionaram avanços significativos.

### **Transporte e termodinâmica quântica de sistemas quânticos abertos**

Em 2003, M. Michel *et al.* [133] mostraram que a lei de Fourier no contexto de transporte poderia ser confirmada em um sistema unidimensional modelado por uma cadeia com poucos spins. Pouco depois em um trabalho mais elaborado H. Wichterich *et al.* [134], esclarecem que a derivação microscópica de equação mestra requer uma nova abordagem adequada para a descrição de propriedades de processos de transporte no contexto de não-equilíbrio, tais como correntes no estado estacionário.

### **Transição de fase quântica no regime de não equilíbrio**

Empregando o formalismo fenomenológico T. Prosen *et al.* [135] descrevem uma transição de fase quântica no regime fora do equilíbrio em um modelo de spin  $XY$ . Neste mesmo modelo Prosen & Ilievski [136] discutem uma transição de fase de não-equilíbrio utilizando equação mestra fenomenológica com periodicidade temporal, que as vezes é conhecida como equação mestra de Floquet.

Em seguida utilizando banhos de spin e de defasagem, também utilizando a equação mestra fenomenológica, M. Znidaric [137, 138] também reporta a ocorrência de transição de fase de não-equilíbrio em um modelo de Heisenberg  $XX$ . No mesmo contexto, Prosen & Znidaric [139] mostram que pode ocorrer uma transição de fase de não-equilíbrio no modelo  $XXZ$ .

### **Transporte em modelos de spins**

No contexto de transporte de energia e corrente utilizando cadeias de spins a equação mestra fenomenológica também foi empregada em modelos de Heisenberg  $XXZ$  como mostrado em Benenti *et al.* [140] e mais recentemente, Droenner *et al.* [141] onde foi descrito um comportamento de *condutividade diferencial negativa*. Estudos mais abrangentes sobre esse tópico foram feitos por Benenti *et al.* [142] e mais recentemente por Droenner *et al.* [143].

A maioria desses estudos foi realizados em sistemas quânticos de spins com poucos sítios devido a dificuldades computacionais em resolver à equação mestra de Lindblad. Buscando contornar esse entrave computacional, T. Prosen [144] desenvolveu um formalismo conhecido como *terceira quantização* que possibilita estudos com sistemas de elevados números de sítios. Em 2009, Prosen & Znidaric [145] inauguraram a era de estudos de transporte de spin em modelos de Heisenberg  $XXZ$  com elevado número de sítios utilizando banhos de Lindblad fenomenológicos em suas extremidades. Nesse mesmo ponto de vista,

M. Znidaric [146] investigou mecanismos de transporte no modelo  $XXZ$  quando banhos de spin e de defasagem são acoplados nas extremidades de um modelo  $XXZ$ . Em um contexto similar Arenas *et al.* [147] estudaram propriedades de transporte e assinaturas de transporte balístico e difusivo sob a ação de banhos de defasagem nas extremidades de um modelo  $XXZ$ . O formalismo fenomenológico foi empregado na obtenção de um estado estacionário exato de não-equilíbrio em um modelo  $XXZ$  como descrito em [148], assim como na descrição de transporte balístico no regime de anisotropia correspondente, como é discutido em [149]. No mesmo ano M. Znidaric [150] fez uma discussão mais geral sobre os mecanismos de transporte no modelo  $XXZ$ . No mesmo contexto do modelo  $XXZ$ , Buca & Prosen [151] descreveram propriedades de transporte e discutem a ocorrência de um par de estados estacionários de não-equilíbrio. Ainda no contexto de transporte de energia em cadeias de spin, V. Popkov [152] e Popkov & Levi [153] discutiram propriedades de corrente e energia em um modelo  $XXZ$  para diferentes tipos de banhos acoplados à cadeia de spin. No mesmo segmento, vários trabalhos envolvendo cadeias de spins acoplados a banhos de Lindblad nas extremidades tem se mostrado úteis para descrever processos de retificação<sup>1</sup> em *diodos de spin*. Recentemente, alguns trabalhos de pesquisadores brasileiros tem sido feitos nesse contexto tais como, [154–157]. Em outro estudo recente, banhos de Lindblad foram utilizados em uma proposta de *motor quântico* descrita em [158] utilizando um sistema  $XY$  com dois spins.

### Termalização em sistemas fermiônicos 1D

Alguns trabalhos abordam a relevância da integrabilidade no processo de termalização utilizando cadeias de spin. Utilizando o formalismo fenomenológico, M. Znidaric *et al.* [159] mostraram que sistemas integráveis podem não termalizar dependendo do acoplamento com o banho. Nesse caso foram estudados vários modelos de spins descritos por sistemas unidimensionais acoplados a banhos de Lindblad, nas extremidades. Outro estudo interessante, Arenas *et al.* [160] mostrou que a integrabilidade ou a ausência dela em um modelo de Heisenberg  $XXZ$  pode acarretar na ocorrência de um determinado regime de transporte além de influenciar na descrição da termalização do sistema.

### Dissipação em cadeias de spins em uma ou mais dimensões

Estudos sobre a transição de fase envolvendo análise de autovalores do Liouvilliano fenomenológico tem sido foco de intensa investigação na última década, levando em consideração cadeias de spins unidimensionais [161] ou em dimensões superiores como abordado em [162–169].

---

<sup>1</sup> Processo no qual ocorre um fluxo preferencial de corrente ou energia em um determinado sistema.

### 6.1.2 Cadeias de spins dissipativas: Simulação e implementação em átomos frios

Simular sistemas fermiônicos em uma ou mais dimensões tem sido tópico de recentes investigações no contexto de magnetismo quântico dissipativo utilizando átomos frios em redes ópticas. Nessa linha destacamos trabalhos recentes como os de H. Schwanger *et al.* [170] utilizando modelos  $XXZ$  e Ising, além de estudos mais amplos utilizando o modelo de Ising com campo transversal como é descrito em [171] e no estudo de metastabilidade [172]. Em todos esses trabalhos a dinâmica dissipativa é regida por operadores de Lindblad fenomenológicos.

### 6.1.3 Questionamento sobre o uso do formalismo fenomenológico de equação mestra

Embora o formalismo fenomenológico de equação mestra seja bastante utilizado no contexto de sistemas fermiônicos 1D modelados por cadeia de spins como mencionado nas seções anteriores, existem patologias em relação à utilização desse formalismo quando a energia de interação entre os spins é da ordem ou maior que a energia dos spins livres (sem interação). Alguns trabalhos relatam certa cautela quanto ao uso do formalismo fenomenológico, como por exemplo, é descrito em [173] e na parte final da Ref. [174], ambos no contexto de transporte. Indiretamente, tais trabalhos estão se referindo a estudos anteriores como por exemplo [133]. Em um estudo mais abrangente Y. Yan *et al.* [175], mencionam que alguns cuidados devem ser tomados em relação ao tipo de formalismo de equação mestra a ser utilizado quando os spins estão acoplados fortemente, onde este estudo foi feito no contexto de transporte utilizando o modelo de Ising com um campo externo. Algum tempo depois, Wu & Berciu [176] mostraram que trabalhos anteriores tais como [145] e [177] encontram resultados contraditórios para o transporte de energia em modelos integráveis modelados por cadeias de spins utilizando, banhos de Lindblad. Os autores do trabalho [176] afirmam não haver diferenças no transporte de energia utilizando banhos de Redfield contrariando os resultados obtidos em [177] e [145]. Recentemente, T. Werlang *et al.* [178] descreveram as diferenças que ocorrem quando o acoplamento entre os spins é fraco ou forte e suas consequências na descrição de transporte, além disso contrariam um resultado obtido no modelo  $XY$  obtido por Manzano *et al.* [179] utilizando banhos de Lindblad fenomenológicos nas extremidades.

### 6.1.4 Emprego da equação mestra microscópica em modelos de spin

A equação mestra microscópica<sup>2</sup> tem sido utilizada especialmente em sistemas de spins no contexto de transporte e termodinâmica quântica. Em 2003 esse formalismo de equação mestra foi empregado por K. Saito [180] no contexto de transporte em uma cadeia quântica de spins. Outros trabalhos subsequentes utilizaram esse formalismo impulsionados por [180] em inúmeras aplicações em sistemas quânticos de spins.

#### Termodinâmica de não-equilíbrio

Em um estudo anterior M. Henrich *et al.* [181] utilizaram esse formalismo em comparação com a dinâmica de Schrödinger para analisar processos de relaxação de sistemas de spins acoplados a um banho térmico. O formalismo microscópico foi utilizado no contexto de termodinâmica quântica de sistemas abertos especificamente na descrição de máquinas térmicas [182, 183]. Nesses trabalhos, cadeias de Heisenberg com poucos sítios acoplados a banhos térmicos nas extremidades funcionam como máquinas térmicas.

#### Transporte em sistemas quânticos de spins

Outros estudos interessantes em sistemas de spins via formalismo microscópico de equação mestra foram feitos nos últimos anos, dentre os quais podemos destacar alguns no contexto de retificação de calor utilizando sistemas quânticos de spin tais como [178, 184–186]. Além desses trabalhos, por intermédio da equação mestra microscópica foi possível, descrever comportamento de criticalidade e transição de fase quântica no modelo de Ising [187]. Recentemente, alguns trabalhos empregaram a equação mestra microscópica para a termalização em modelos quânticos de Ising [188], como também no contexto de transporte em modelos de Heisenberg *XXZ* [189].

### 6.1.5 Estudos comparativos entre os formalismos Fenomenológico e Microscópica

Alguns estudos recentes tem discutido eventuais diferenças entre os formalismos de equação mestra fenomenológica e a microscópica. Um estudo mais abrangente no contexto de transporte em cadeias de spins [175], deixou claro a impossibilidade de utilização de banhos de Lindblad fenomenológicos quando o acoplamento entre os spins é forte. Os autores investigaram transporte no modelo de Ising 1D para regimes de acoplamento fraco e forte. É discutido que na situação onde existe acoplamento forte entre os spins o formalismo dissipativo ideal é descrito pela equação mestra microscópica. Na Fig. 2 da Ref. [175] é ilustrada a concordância entre o estado térmico e a equação mestra adequada no limite onde o spins são fracamente acoplados. Mas na situação onde o acoplamento

<sup>2</sup> Este tipo de equação na literatura às vezes é denominada como *Quantum master equation*, *Dressed master equation* ou *Bloch-Redfield master equation*.

é forte ocorre uma discrepância entre o estado térmico e estado descrito pela equação mestra. Os autores na Ref. [190] compararam assinaturas de transporte de não-equilíbrio em cadeias de spin  $XY$  utilizando os formalismos de fenomenológico e microscópico. Por fim concluem que "*We have found that the phase diagram of the non-equilibrium  $XY$  model is insensitive to the theory with which we describe the baths, and the differences were only quantitative*". Além disso, utilizando o formalismo de Redfield, os autores concluem que a corrente de spin descreve um comportamento similar ao de *condutância de calor diferencial negativa* no regime de temperatura finita. Na Ref. [178], os autores mostram como as propriedades de transporte em um sistema de dois spins são afetadas quando os spins são fraco e fortemente acoplados entre si. Os autores deixam evidente a discrepância no transporte de corrente comparando os formalismos fenomenológico e microscópico no limite de acoplamento forte e além disso corrigem uma aparente contradição da Ref. [179], que discute transporte em uma cadeia de átomos de dois níveis que efetivamente descreve um modelo quântico de spin  $XY$ . Vale a pena esclarecer que um trabalho recente Purkayastha *et al.* [191] realizaram um estudo abrangente comparando os formalismo de equação mestra de Lindblad e microscópica para redes de partículas bosônicas e fermiônicas. Uma investigação recente [192] reportou um estudo comparativo entre a equação mestra de Lindblad e a equação mestra de Redfield para uma cadeia de spin do tipo  $XXZ$  utilizando uma técnica numérica conhecida como *matrix product states (MPSs)*.

## 6.2 Sistemas quânticos de Spins

Nesta seção iremos introduzir brevemente alguns modelos quânticos de spins que são bastante difundidos no contexto de física de muitos corpos, transporte e transições de fase no contexto de equilíbrio e não equilíbrio.

### 6.2.1 O modelo de Ising

Um dos modelos mais fundamentais no estudo de magnetismo quântico em sistemas fermiônicos unidimensionais é o modelo de Ising. No caso unidimensional, o modelo é definido por [193]:

$$H_{Ising} = B \sum_{i=1}^N S_z^i + \Delta \sum_{i=1}^{N-1} S_x^i S_x^{i+1}. \quad (6.1)$$

onde  $B$  descreve a interação dos spins com um campo magnético transversal na direção  $z$  enquanto que,  $\Delta$  é o parâmetro que representa a interação entre os primeiros vizinhos na direção  $x$ . Os operadores de spin são definidos por  $S_\beta^i = \frac{1}{2} \sigma_\beta^i$  sendo  $\beta = x, y, z$  a orientação do spin do sistema. O modelo de Ising é integrável na situação onde apenas um campo externo age nos spins, enquanto que a ação de dois campos quebra a integrabilidade do sistema [194]. No caso integrável, o modelo é solúvel analiticamente utilizando a transformação de Jordan-Wigner [193]. Como descrito em [193, 195], o modelo de Ising

no limite de fracos campos magnéticos descreve um sistema em uma fase ferromagnética onde todos os spins estão alinhados em direções opostas, em  $B = \Delta$ , tem-se o ponto crítico que ilustra uma transição de fase, enquanto que no limite de campos intensos o sistema exibe uma fase paramagnética com os spins na mesma direção. A natureza do estado fundamental é descrita nos seguintes regimes:

· Fase Ferromagnética: no limite  $B \ll \Delta$  o sistema possui dois estados fundamentais, dados por:

$$|GS_F\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle \quad (6.2)$$

· Fase Paramagnética: No limite  $B \gg \Delta$ , o estado fundamental é definido por:

$$|GS\rangle_A = |\rightarrow\rightarrow\rightarrow \dots \rightarrow\rangle, \quad (6.3)$$

$$|GS\rangle_B = |\leftarrow\leftarrow\leftarrow \dots \leftarrow\rangle, \quad (6.4)$$

onde  $|\rightarrow\rangle_i = (|\uparrow\rangle_i + |\downarrow\rangle_i)/\sqrt{2}$  e  $|\leftarrow\rangle_i = (|\uparrow\rangle_i - |\downarrow\rangle_i)/\sqrt{2}$  onde  $i$  é o índice do número de sítios. A magnetização nos modelos de spins é o parâmetro de ordem responsável por descrever a fase magnética do sistema. Neste caso específico, na fase ferromagnética o sistema exibe magnetização finita enquanto que na fase paramagnética a magnetização do sistema é nula [195].

### 6.2.2 A cadeia de spin XY

O modelo quântico de spin  $XY$  é um dos mais estudados no contexto de transição de fase em abordagens fora do equilíbrio. Este modelo é representado pelo hamiltoniano [196, 197]:

$$H_{XY} = J \sum_{i=1}^{N-1} \left[ \frac{(1+\Delta)}{2} S_x^i S_x^{i+1} + \frac{(1-\Delta)}{2} S_y^i S_y^{i+1} \right] + B \sum_{i=1}^N S_z^i, \quad (6.5)$$

onde o primeiro termo descreve a parte interagente enquanto que, o segundo termo corresponde a parte livre não interagente. No modelo acima o parâmetro  $J$  é uma constante de acoplamento que separa as regiões ferromagnéticas e antiferromagnéticas, enquanto que  $\Delta$  é o fator de anisotropia nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente. Este modelo é importante pois, engloba sob certos limites outros dois modelos de cadeia de spins, o de Ising no limite  $\Delta = 1$  e o  $XX$  quando  $\Delta = 0$ . O modelo  $XY$  é dito ser integrável no sentido que existe uma solução exata, solução essa obtida através da transformação de Jordan-Wigner. O diagrama de fase desse modelo [197] descreve a disposição das fases magnéticas que podem ser ordenadas ou desordenadas dependendo da transição de fase no ponto crítico. O modelo  $XY$  possui dois estados fundamentais [198]: 1)  $J = -1$  o estado fundamental é dado por  $|GS, J = -1\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow \dots\rangle$  o qual descreve uma fase ferromagnética com todos os spins alinhados na mesma direção, enquanto que no limite 2)  $J = 1$ , o estado fundamental  $|GS, J = 1\rangle = |\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow\rangle$  descreve uma fase antiferromagnética onde os spins vizinhos

estão alinhados em direções opostas. O parâmetro de ordem que descreve estas fases é a magnetização média que é diferente de zero no caso ferromagnético e zero para a fase antiferromagnética devido a orientação contrária dos spins vizinhos.

### 6.2.3 O modelo de Heisenberg XXZ

Novamente, escolhemos um modelo de cadeia de spin-1/2 que descreve a interação entre spins, cujo modelo é definido por um hamiltoniano conhecido como modelo XXZ:

$$H_{XXZ} = B \sum_{i=1}^N S_z^i + J \sum_{i=1}^{N-1} (S_x^i S_x^{i+1} + S_y^i S_y^{i+1} + \Delta S_z^i S_z^{i+1}), \quad (6.6)$$

cujo primeiro termo descreve um campo magnético externo na direção  $z$  com intensidade  $B$ ,  $J$  é o acoplamento para o modelo  $XY$  e o parâmetro  $\Delta$  é o fator de anisotropia que depende da direção dos spins. Este modelo será utilizado para investigar a dinâmica dissipativa por conta das inúmeras situações abordadas na literatura envolvendo seu estudo no contexto de sistemas fora do equilíbrio e a conexão entre integrabilidade e termalização. O diagrama de fases deste modelo [197], descreve o comportamento das fases magnéticas em três regiões dependendo da intensidade do valor de anisotropia. No limite de anisotropia  $\Delta < 1$ , o sistema exibe uma fase ferromagnética. No limite que corresponde ao intervalo  $-1 \leq \Delta \leq 1$  o modelo é o  $XY$ , enquanto que para  $\Delta > 1$ , o sistema exibe uma fase antiferromagnética descrita pelo estado de Néel que em suma é um dos estados fundamentais do modelo  $XY$  abordado anteriormente. É importante destacar que, no limite de  $\Delta \rightarrow \infty$ , o modelo de Ising é recuperado. Mais detalhes sobre os diagramas de fase do modelo  $XXZ$  podem ser consultados em [193, 197].

## 6.3 Dinâmica dissipativa em função do acoplamento entre os primeiros vizinhos em cadeias de spins

Nesta seção vamos investigar a dinâmica dissipativa de spins como função do acoplamento entre os primeiros vizinhos descritos pelos sistemas abordado nas seções anteriores. A dinâmica dissipativa será regida pela equação mestra microscópica abordada no Capítulo 2:

$$\dot{\rho}_{Mic}(t) = -i [H_S, \rho_{Mic}(t)] + \mathcal{D}_{Mic}(\rho_{Mic}(t)). \quad (6.7)$$

$$\mathcal{D}_{Mic}(\rho_{Mic}(t)) = \sum_i \sum_{\omega} \gamma_i(\omega) \left[ A_i(\omega) \rho_{Mic}(t) A_i^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \{ A_i^\dagger(\omega) A_i(\omega), \rho_{Mic}(t) \} \right] \quad (6.8)$$

e a equação mestra fenomenológica

$$\dot{\rho}_F(t) = -i [H_S, \rho_F(t)] + \mathcal{D}_F(\rho_F(t)), \quad (6.9)$$



onde

$$\mathcal{D}_F(\rho_F(t)) = \sum_i \left[ \mathcal{O}_i \rho_F \mathcal{O}_i^\dagger - \frac{1}{2} \{ \mathcal{O}_i^\dagger \mathcal{O}_i, \rho_F \} \right]. \quad (6.10)$$

Utilizando estas equações mestras iremos investigar a dinâmica dissipativa dos modelos de cadeias de spin e iremos analisar os possíveis comportamentos nestes sistemas. Em alguns casos que iremos abordar nas próximas seções é útil escrever as equações mestras na forma

$$\hat{\mathcal{L}}_t \rho_{Mic,F}(t) = \dot{\rho}_{Mic,F}(t), \quad (6.11)$$

em que

$$\hat{\mathcal{L}}_t^{Mic} = i [\rho_{Mic}(t), \hat{H}_S] + \mathcal{D}(\rho_{Mic}(t)), \quad (6.12)$$

e

$$\hat{\mathcal{L}}_t^F = i [\rho_F(t), \hat{H}_S] + \mathcal{D}(\rho_F(t)), \quad (6.13)$$

são os *Liouvillianos* microscópico e fenomenológico do sistema.

### 6.3.1 Dinâmica dissipativa estacionária e temporal

Na maioria das situações investigadas nas próximas seções, efetuamos os cálculos utilizando os modelos de spin abordados anteriormente considerando que cada spin interagem individualmente com um banho bosônico a  $T = 0K$  como descrito na Fig. 34, onde o operador que rege a interação sistema-banho é dado pelo operador microscópico<sup>3</sup>  $A_i(\omega) = \sum_{\omega=\epsilon'-\epsilon} \Pi(\epsilon) A_i \Pi(\epsilon')$  com  $A_i = S_x^i$ . Este tipo de interação sistema-banho, nos leva a

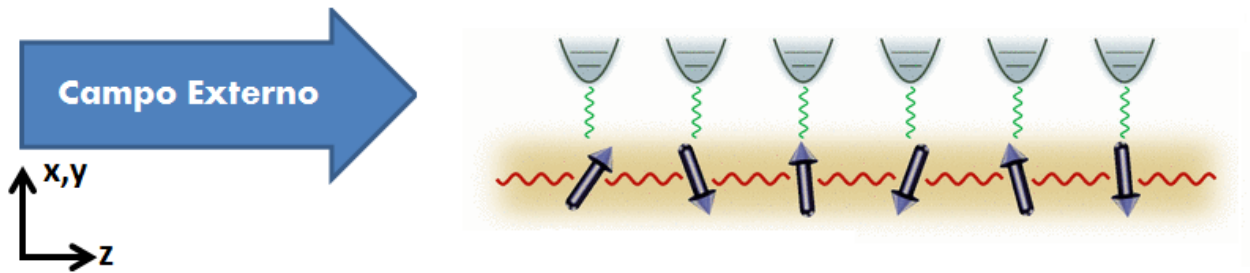


Figura 34 – Na representação pictórica, cada spin sob a ação do campo externo, interage individualmente com seu próprio banho bosônico, descrito por infinitos osciladores harmônicos.

Fonte: Adaptada da Ref [161]

uma situação onde o sistema termaliza e como argumentado no Cap. 2, o estado de Gibbs é o estado estacionário do sistema total, sendo possível e mais viável, avaliar numericamente

<sup>3</sup> Como já foi descrito no capítulo 2, estes operadores são escritos em função dos autoestados do Hamiltoniano do sistema.

o regime estacionário da equação mestra microscópica utilizando a função de partição. No intuito de investigar a distinguibilidade entre os estados previstos pela equação mestra fenomenológica, microscópica e o estado previsto pelo ensemble de Gibbs, iremos utilizar a distância traço

$$DT(\rho_{Mic}, \rho_F) = \frac{1}{2} Tr (|\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs}|), \quad (6.14)$$

e

$$DT(\rho_{Mic}, \rho_F) = \frac{1}{2} Tr (|\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F|). \quad (6.15)$$

O estado descrito pelo ensemble de Gibbs no âmbito de cadeias de spin é dado:

$$\rho_{Gibbs} = \frac{e^{-\beta H_\alpha}}{\mathcal{Z}}, \quad (6.16)$$

onde  $\alpha = (Ising, XY, XXZ)$  é o índice que indica o hamiltoniano dos modelos de spin adotados em nossa abordagem e  $\mathcal{Z} = Tr_S (e^{-\beta H_\alpha})$  é a função de partição. Ressaltamos que a dinâmica dissipativa utilizando os modelos de spin é investigada considerando que não levamos em conta as condições periódicas de contorno durante nossas análises.

## Dinâmica dissipativa do modelo de Ising 1D

Inicialmente, analisamos os resultados da dinâmica dissipativa do modelo de Ising definido na Eq. (6.1) onde cada spin é submetido a uma interação com seu reservatório individual. A interação com o reservatório é definida de acordo com equação microscópica por meio dos operadores  $A_i(\omega) = \sum_{\omega=\epsilon'-\epsilon} \Pi(\epsilon) A_i \Pi(\epsilon')$  com  $A_i = S_x^i$ , enquanto que no caso fenomenológico os operadores do banho são definidos por  $\mathcal{O}_i = \sqrt{\gamma_i} S_-^i$ . Inicialmente ilustramos na Fig. 35, a dinâmica estacionária do modelo de Ising com condição de fronteira aberta para um número finito de spins em função do acoplamento entre os spins além de considerar um campo magnético externo transverso. Percebemos que, a medida que há um acréscimo do acoplamento entre os spins, i.e  $\Delta/\gamma \rightarrow \infty$  a discrepância entre os formalismos é evidente, ficando maior à medida que o número de spins aumenta, o que nos leva a crer que os formalismos prevêm resultados totalmente distintos no limite termodinâmico como pode ser visto na Fig. 35. A dinâmica estacionária ilustrada na Fig. 35, foi calculada considerando que o estado estacionário do sistema devido a interação com o banho  $A_i(\omega) = \sum_{\omega=\epsilon'-\epsilon} \Pi(\epsilon) A_i \Pi(\epsilon')$  com  $A_i = S_x^i$ , é o estado de Gibbs. Na linguagem de sistemas dissipativos Markovianos, afirmar que o estado estacionário do sistema é o estado de Gibbs, significa que ao diagonalizarmos o Liouvilliano definido na Eq. (6.7) encontramos apenas um autovalor nulo, caso contrário se a diagonalização do Liouvilliano do sistema exibir mais de um autovalor nulo, não se pode afirmar que o sistema tem um único estado estacionário. Considerando a interação com o reservatório  $A_i(\omega) = \sum_{\omega=\epsilon'-\epsilon} \Pi(\epsilon) A_i \Pi(\epsilon')$ , investigamos a dinâmica temporal do modelo de Ising, definido na Eq. (6.1) para uma cadeia de  $N = 8$  sítios, escolhendo determinados valores de acoplamento entre os spins na

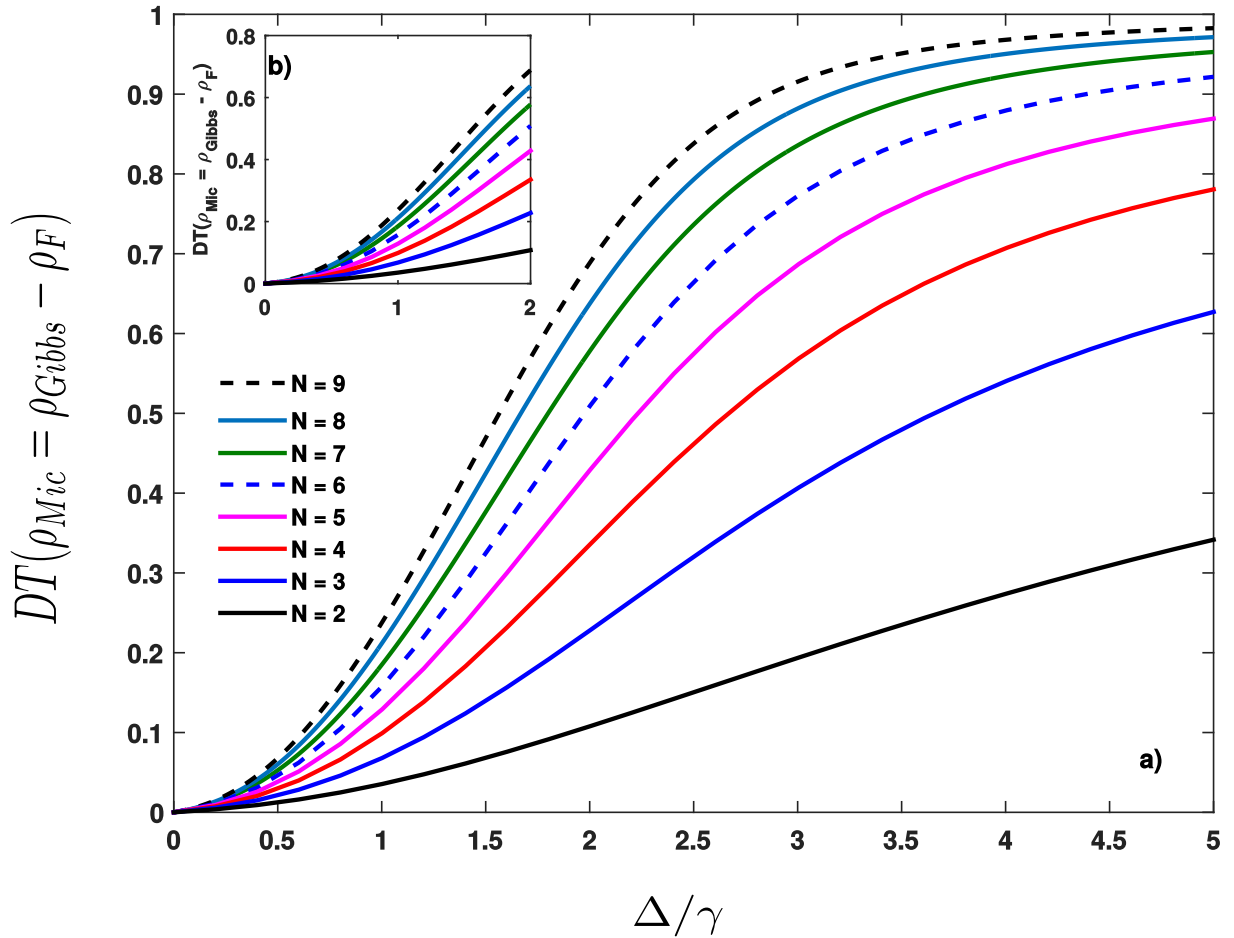


Figura 35 – a) Distância traço  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  em função do acoplamento entre os spins  $\Delta/\gamma$ , para diferentes números de spins na rede ( $N=2,\dots,9$ ). O campo magnético externo é fixado em  $B = 1.0\gamma$ . b) Plot *inset* da distância traço em função do acoplamento  $\Delta/\gamma$ , evidenciando a discordância dos formalismos dissipativos para valores não tão intensos de  $\Delta/\gamma$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

cadeia. Na Fig. 36, observamos que há uma concordância entre as dinâmicas envolvendo os estados previstos pela equação mestra fenomenológica e microscópica (linha azul tracejada) e os estados previstos pela equação mestra microscópica e o obtido através da função partição (linha vermelha sólida). Observamos que no regime assintótico  $t \rightarrow \infty$ , ocorre uma concordância entre os estados previsto por ambos os formalismos dissipativos sob determinados, limites de acoplamento fraco entre os spins, enquanto que, para regimes intensos de acoplamento entre os spins o formalismo que descreve corretamente a dinâmica estacionária do sistema é o formalismo descrito pela equação mestra microscópica. Dos resultados da dinâmica temporal testemunhado pela distância traço para o modelo de Ising, percebemos que, embora os estados iniciais sejam diferentes, o formalismo que descreve a dinâmica estacionária correta será dado pelo formalismo microscópico de equação mestra a medida que o acoplamento entre os spins se torna mais intenso, enquanto que os resultados

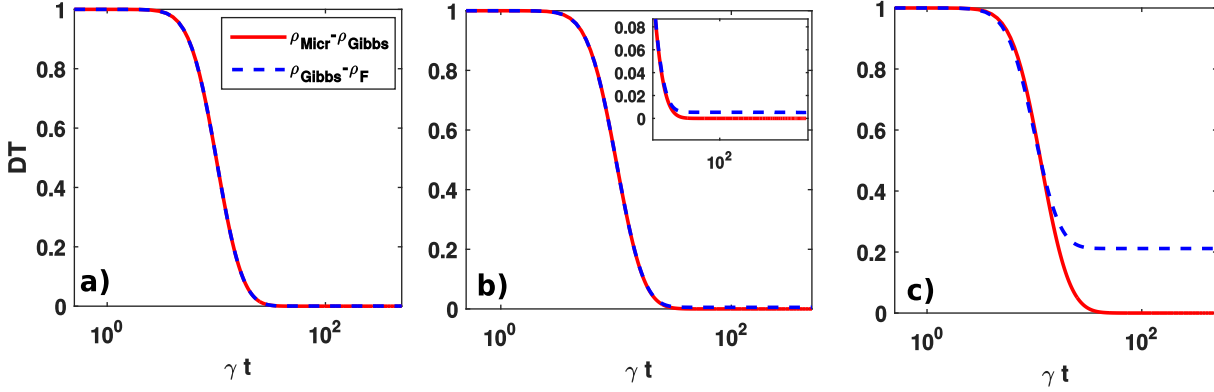


Figura 36 – Evolução temporal da distância traço  $DT(\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs})$  e  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  para o modelo Ising considerando uma cadeia de  $N = 8$  sítios. O valor do campo externo é fixado em  $B = 1.0\gamma$ . Os valores de acoplamento entre os primeiros vizinhos são: (a)  $\Delta = 0.01\gamma$ ; (b)  $\Delta = 0.1\gamma$  e (c)  $\Delta = 1.0\gamma$ . O estado inicial utilizado foi  $\rho_{\uparrow} = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow|)^{\otimes N}$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

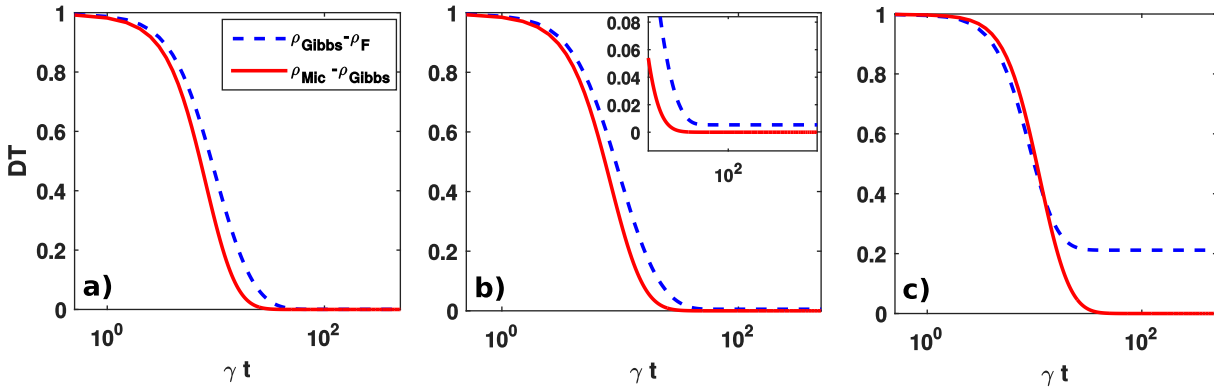


Figura 37 – Evolução temporal da distância traço  $DT(\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs})$  e  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  para o modelo Ising consistindo de uma cadeia com  $N = 8$  sítios. O valor do campo externo é fixado em  $B = 1.0\gamma$ . Os valores de acoplamento entre os spins na cadeia são: (a)  $\Delta = 0.01\gamma$ ; (b)  $\Delta = 0.1\gamma$  e (c)  $\Delta = 1.0\gamma$ . O estado inicial utilizado foi,  $\rho_{\rightarrow} = (|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|)^{\otimes N}$  com  $|\rightarrow\rangle_N = (|\uparrow\rangle_N + |\downarrow\rangle_N) / \sqrt{2}$  onde  $N$  é o índice do número de sítios.

Fonte: Elaborada pelo autor.

ilustrados para a dinâmica temporal utilizando equação fenomenológica descreve uma dinâmica estacionária incorreta para tempos suficientemente longos.

## 6.4 Possíveis Inconsistências entre os formalismos: Primeiro exemplo

Como relatado na extensa revisão bibliográfica feita na seção inicial deste capítulo, o formalismo fenomenológico de equação mestra, tem sido, amplamente utilizado no contexto de matéria condensada e física de muitos corpos. Em contrapartida, o formalismo microscópico de equação mestra apesar de ser utilizado ainda não possui uma ampla audiência na literatura devido a sua complexidade no estudo de sistemas mais escaláveis, tais como ocorre no contexto de física de muitos corpos. Com o objetivo de apontar alguns cuidados que devem ser tomados quanto ao uso dos dois formalismos, nesta seção descreveremos um exemplo que ilustra como a diferença entre os formalismos pode influenciar não somente na dinâmica do sistema como também na descrição de propriedades físicas do sistema. Em um recente trabalho [172], os autores investigam a metastabilidade<sup>4</sup> no modelo de Ising unidimensional considerando determinados valores de campo magnético externo e acoplamento entre os spins no contexto de simulação quântica. Os autores na Ref. [172], consideram que a interação entre os spins pode ser 5 vezes mais intensa que o campo magnético externo em algumas situações onde a dinâmica dissipativa foi investigada. Para ilustrar eventuais diferenças entre os formalismos dissipativos, comparamos a dinâmica dissipativa da magnetização definida por:

$$M_{\alpha=x,z} = \frac{1}{N} \sum_i^N S_{\alpha}^i, \quad (6.17)$$

do modelo de Ising com  $N = 7$  sítios, nos moldes que foi descrito na Ref. [172] mostrado a seguir. Analisando a Fig. 38, percebemos que ocorre uma diferença na dinâmica temporal regida tanto pelo formalismo microscópico como também para o formalismo fenomenológico de equação mestra. Entretanto, um ponto crucial neste problema é que a diferença não é apenas na dinâmica, a diferença ocorre na descrição das fases magnéticas do sistema que são cruciais pois, descrevem o parâmetro de ordem do sistema. Na Fig. 38 (a) e (b) o estado previsto pela equação mestra microscópica, leva o sistema para uma situação onde a magnetização é nula na direção  $z$ , que descreve uma fase paramagnética como previsto pelo diagrama de fase do modelo de Ising, enquanto que a equação mestra fenomenológica prevê magnetização não nula, que se trata de um comportamento típico de uma fase ferromagnética no modelo de Ising. Estes resultados são obtidos no regime no qual o acoplamento entre os primeiros vizinhos é 5 vezes da ordem do campo magnético externo. Entretanto nas Fig's. 38 (c) e (d), a magnetização na direção  $x$  exibe apenas comportamentos qualitativos, não influenciando nas propriedades intrínsecas do sistema, isto é, a diferença entre os formalismos não acarreta na mudança das propriedades físicas

<sup>4</sup> A metaestabilidade é uma característica da dinâmica de sistemas que relaxam de forma lenta, ou seja, o relaxamento parcial em estados de vida longa antes do eventual decaimento para o verdadeiro estado estacionário [172].

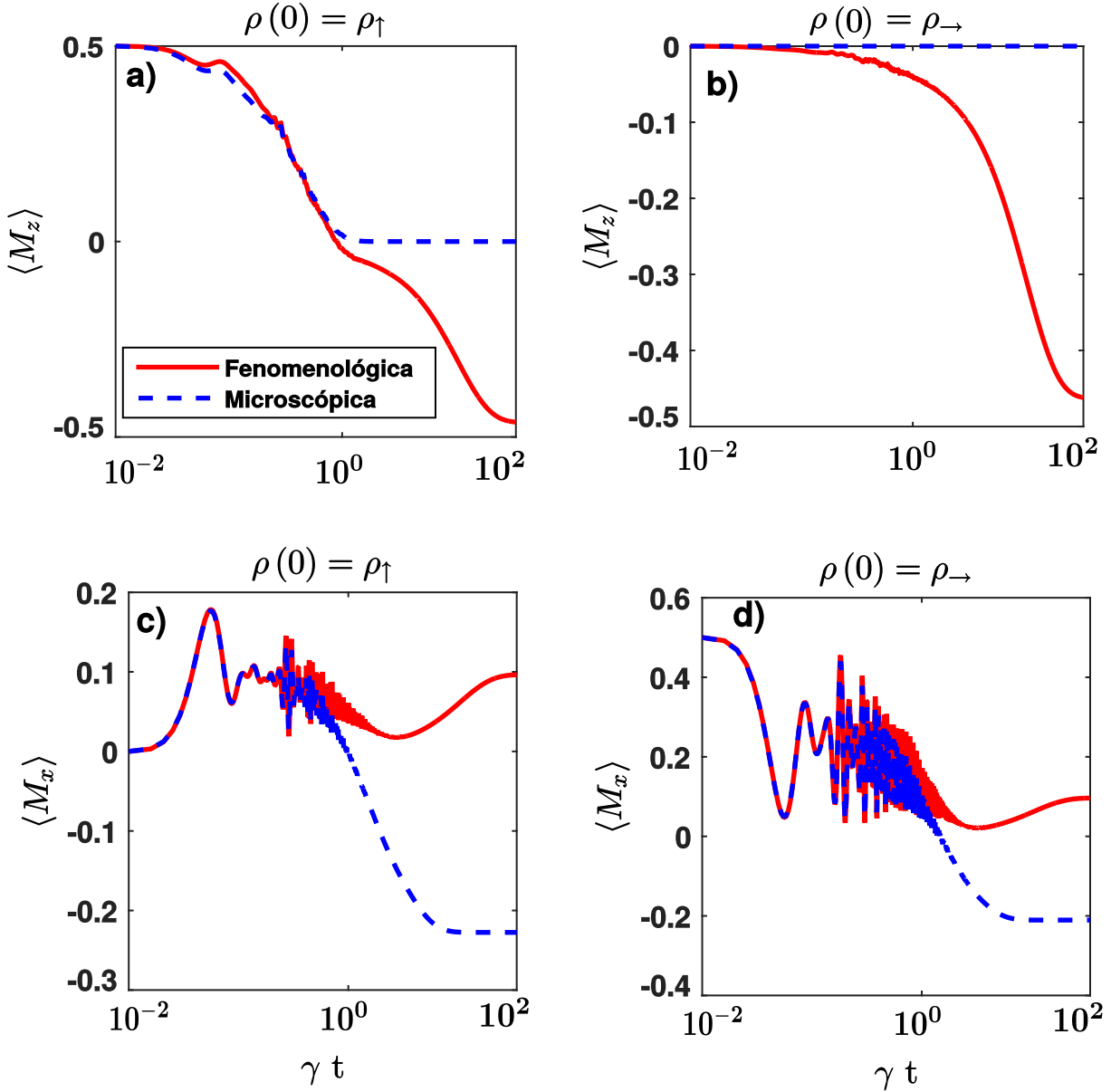


Figura 38 – Evolução temporal da magnetização  $M_{\alpha=x,z}$  para determinados estados iniciais preparados na fase ferromagnética  $\rho_{\uparrow} = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow|)^{\otimes N}$  e paramagnética  $\rho_{\rightarrow} = (|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|)^{\otimes N}$ , com  $|\rightarrow\rangle_N = (|\uparrow\rangle_N + |\downarrow\rangle_N) / \sqrt{2}$  onde  $N$  é o índice do número de sítios. O campo magnético externo é  $B = 50.0\gamma$ , e o valor de acoplamento é  $\Delta = 250\gamma$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

nesse caso. Essa diferença no parâmetro de ordem testemunhado pela magnetização do sistema pode ser explicada por conta da interação do sistema com o banho. No caso estudado na Ref. [172], a interação entre os spins é dada por  $\Delta S_z^i S_z^{i+1}$  e a interação com o banho é  $A_i(\omega) = \sum_{\omega=\epsilon'-\epsilon} \Pi(\epsilon) A_i \Pi(\epsilon')$  com  $A_i = S_x^i$ . Utilizando a comutatividade entre os operadores do sistema e da interação com o banho, percebemos que, este caso específico ocorre uma não comutação entre os operadores, ou seja,  $[A_i(\omega), H_{XZX}(S_z^i S_z^{i+1})] \neq 0$ , e

neste caso, acarreta na ocorrência de um, ou mais estados estacionários<sup>5</sup>. A inexistência de um único estado estacionário, oriundo do caráter metaestável do sistema, pode levar o sistema a exibir transição de fase ou quebra de simetria, embora esta seja uma hipótese que ainda é tema de discussão [199, 200].

## 6.5 Possíveis Inconsistências entre os formalismos: Segundo exemplo

Nesta seção, iremos discutir a inconsistência entre os formalismos dissipativos fenomenológico e microscópico de equação mestra na investigação da dinâmica dissipativa de um modelo mais geral dado pelo modelo  $XYZ$  de Heisenberg, definido na forma:

$$H_{XYZ} = \sum_{\langle i,j \rangle} (J_x \sigma_x^i \sigma_x^j + J_y \sigma_y^i \sigma_y^j + J_z \sigma_z^i \sigma_z^j), \quad (6.18)$$

cujos operadores  $\sigma_{\alpha=x,y,z}^i$  são as matrizes de Pauli que correspondem aos sistemas de spin e  $J_{\alpha=x,y,z}$  são os acoplamentos entre os spins com direção de anisotropia específica. Enfatizamos que o modelo  $XYZ$  descrito na Eq. (6.18) é o mais geral, pois a partir dele podemos recuperar o modelo  $XY$  quando  $J_z = 0$  e  $J_x \neq J_y$ , o modelo  $XXZ$  quando  $J_x = J_y = J$  e  $J_z \neq 0$  e o modelo  $XXX$  na situação onde  $J_x = J_y = J_z = J$ . A motivação para a breve descrição do modelo  $XYZ$  surge quando trabalhos bem recentes tais como reportado na Ref. [165], investigam a dinâmica dissipativa utilizando o formalismo dissipativo fenomenológico. Afim de investigar a dinâmica dissipativa neste modelo nos moldes<sup>6</sup> da Ref. [165], comparamos a evolução temporal da magnetização na direção  $x$

$$M_x = \frac{1}{N} \sum_i^N \sigma_x^i \quad (6.19)$$

para o caso unidimensional definido pelo hamiltoniano (6.18), utilizando o formalismo microscópico e fenomenológico, para o estado inicial cuja configuração dos spins apontam na direção- $x$  positiva. Do resultado fornecido pela Fig.39 (a) percebemos que existe uma diferença significativa na dinâmica dissipativa utilizando os formalismos microscópico e fenomenológico, sendo que a discrepância entre os formalismos dissipativos é mais nítida com o aumento do tamanho da cadeia como pode ser observado para o caso  $N = 8$  spins utilizando os parâmetros de acoplamento adotados em Ref. [165]. Percebemos que a equação microscópica faz com que a magnetização atinja mais rapidamente o estado estacionário. Além disso, as magnetizações estacionárias previstas pelos dois formalismos são totalmente distintas. Com o objetivo de confirmar a discrepância na dinâmica dissipativa entre os

<sup>5</sup> Verificamos durante a diagonalização do Liouvilliano Eq. (6.9), que existem dois autovalores nulos e assim afirmamos que o sistema tem mais de um estado estacionário e portanto o estado estacionário final não é mais o estado de Gibbs

<sup>6</sup> Adotamos condições periódicas de contorno no modelo definido na Eq. (6.18) como foi feito na Ref. [165]

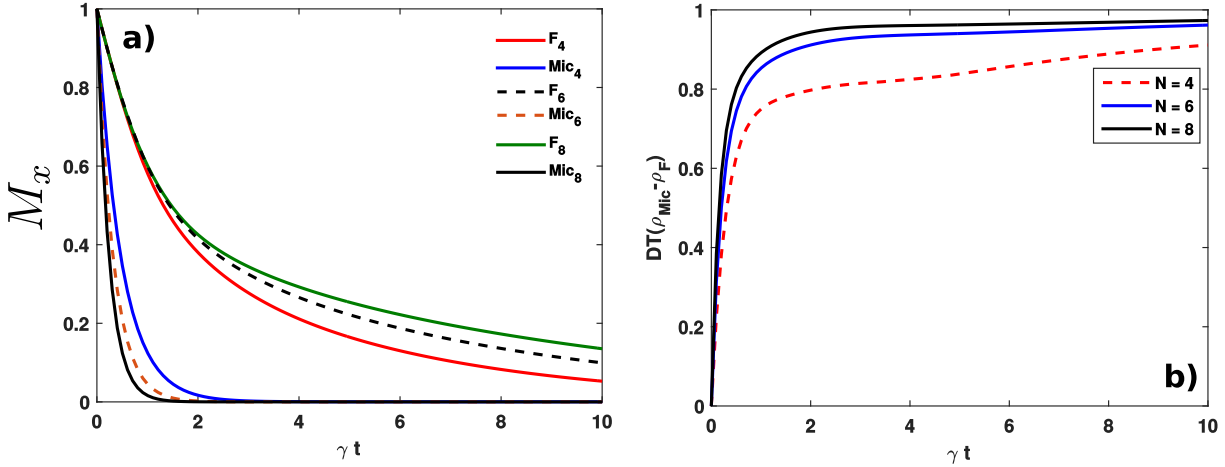


Figura 39 – (a) Magnetização  $M_x$  versus  $\gamma t$  e (b) Distância traço  $DT(\rho_{Mic} - \rho_F)$  versus  $\gamma t$  para o estado inicial  $\rho_{\rightarrow} = (|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|)^{\otimes N}$  com  $N$  variando de 4 a 8 sítios. Os valores de acoplamento são,  $J_x = 1.8\gamma$ ,  $J_y = 2.2\gamma$  e  $J_z = 2.0\gamma$ . Na Fig. (a), ' $Mic$ ' e ' $F$ ' correspondem as equações mestras microscópica e fenomenológica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

formalismos dissipativos, analisamos a dinâmica temporal da distância traço ilustrada na Fig. 39 (b). Analisando a referida figura anterior, é bem nítido que a medida que o tamanho da cadeia aumenta, os formalismos microscópico e fenomenológico são bem distintos entre si. Embora tenhamos feito essa comparação entre as dinâmicas dissipativas apenas para o caso unidimensional, é notório pensar que estas discrepâncias possam ocorrer quando utilizamos o modelo XYZ em dimensões superiores como foi abordado em Ref. [165]. Como o objetivo destes trabalhos é investigar dinâmica dissipativa em sistemas fortemente interagentes, descritos por exemplo por cadeias de spin, ressaltamos que precauções devem ser tomadas quanto ao uso do formalismos dissipativo na investigação de propriedades fundamentais tais como transições de fase, e correlação entre os spins, dentre outras propriedades importantes.

## Dinâmica dissipativa do modelo XY

Investigamos a dinâmica dissipativa em cadeia de spin XY para um determinado número de sítios no intuito de observar possíveis ambiguidades entre os formalismos microscópico e fenomenológico de equação mestra. Na Fig. 40 mostramos o comportamento da dinâmica estacionária da distância traço em função da anisotropia  $\Delta/\gamma$  para o modelo XY definido na Eq. (6.5). Similarmente ao que foi feito na seção anterior a interação de cada spin com o banho é regida pelo operador  $A_i(\omega) = \sum_{\omega=\epsilon'-\epsilon} \Pi(\epsilon) A_i \Pi(\epsilon')$  com  $A_i = S_x^i$ , cujo estado estacionário final é dado pelo estado de Gibbs pois, o dissipador microscópico comuta com a parte interagente do modelo XY dado na Eq. (6.5). Percebemos, a partir da



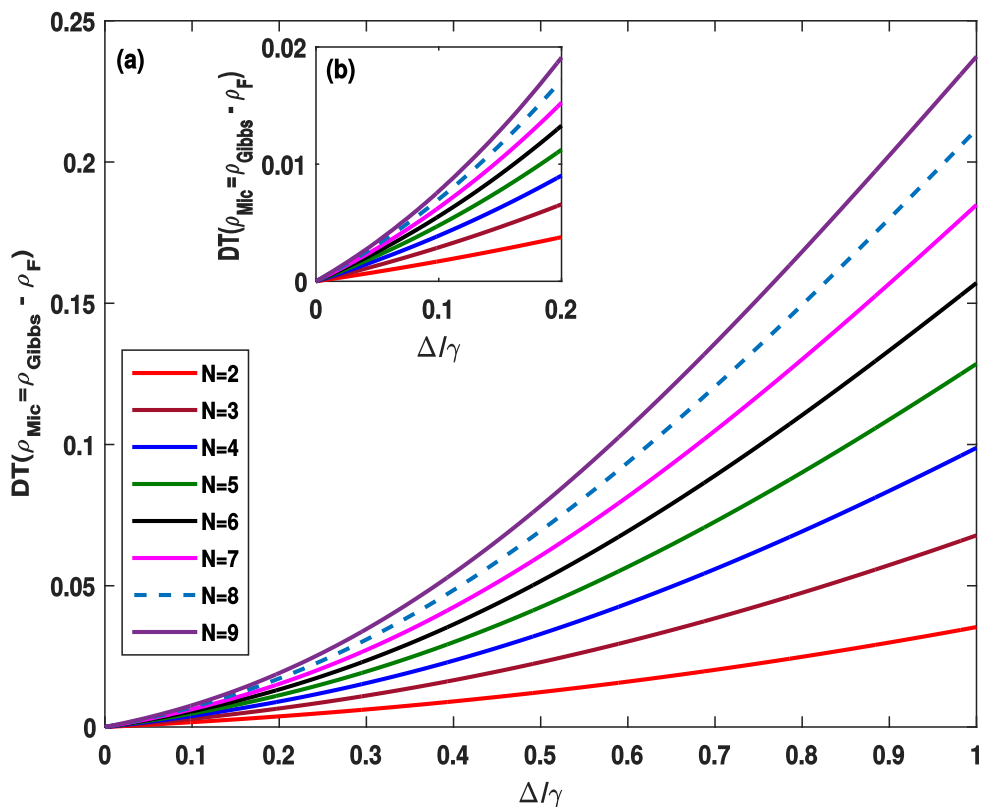


Figura 40 – Distância traço  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  em função da anisotropia  $\Delta/\gamma$  para diferentes números de spins na rede ( $N=2, \dots, 9$ ). O valor do campo externo é fixado em  $B = 1.0\gamma$ . (b) Plot *inset* da distância traço em função do acoplamento  $\Delta/\gamma$ , evidenciando a discordância dos formalismos dissipativos para valores não tão intensos de  $\Delta/\gamma$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Fig. 40 (a), que a discrepância entre os formalismos persiste mesmo em uma situação onde consideramos valores moderados de anisotropia no modelo. Similarmente ao que ocorreu no modelo de Ising, é nítido que a medida que o número de sítios aumenta na cadeia, os formalismos são cada vez mais discrepantes mesmo em situações onde o acoplamento entre os spins não é tão intenso como mostrado no *inset* Fig. 40 (b). Ressaltamos que esse comportamento nos leva a crer que no limite termodinâmico, os dois formalismos de equação mestra são totalmente distinguíveis mesmo para acoplamentos fora do regime onde os spins estão ultrafortemente acoplados. Além de investigarmos a dinâmica estacionária do modelo  $XY$  em função da anisotropia, efetuamos cálculos numéricos no intuito de observar o comportamento da dinâmica temporal do mesmo sistema sob determinados valores de anisotropia  $\Delta/\gamma$ .

Na Fig. 41 mostramos o comportamento da dinâmica temporal do modelo  $XY$  considerando  $N = 8$  sítios, escolhendo um dado estado inicial onde todos os spins estão na fase antiferromagnética. Percebe-se que, para tempos longos no regime assintótico ( $t \rightarrow \infty$ ), e no limite de acoplamento fraco entre os spins, Fig. 41 (a), ambos formalismos

coincidem como já era esperado embora a medida que o acoplamento aumenta, mesmo que não seja muito intenso, os formalismos já exibem discrepâncias significativas, como pode ser visto na Fig. 41 (c). A seguir, na Fig. 42 descrevemos o comportamento da distância

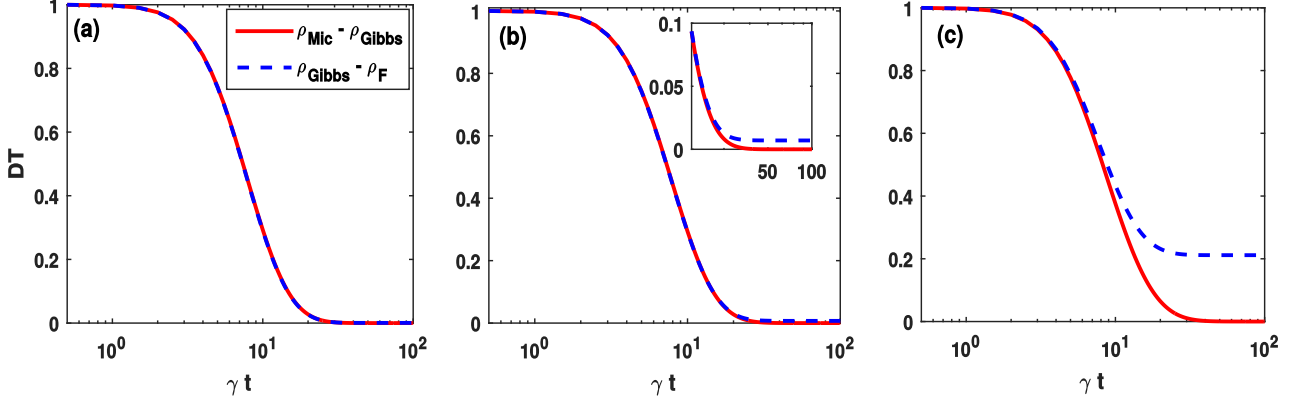


Figura 41 – Evolução temporal da distância traço  $DT(\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs})$  e  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  para o modelo XY com  $N = 8$  sítios. O valor do campo externo é fixado em  $B = 1.0\gamma$ . Os valores de acoplamento entre os primeiros vizinhos são: (a)  $\Delta = 0.01\gamma$ ; (b)  $\Delta = 0.1\gamma$  e (c)  $\Delta = 1.0\gamma$ . O estado inicial utilizado foi  $\rho_{\uparrow} = (|\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow|) \otimes^N$  com  $N = 8$  sítios.

Fonte: Elaborada pelo autor.

traço para o modelo XY com  $N = 8$  sítios partindo do estado inicial onde todos os spins estão na fase ferromagnética. De maneira análoga ao que ocorreu no modelo de Ising, no

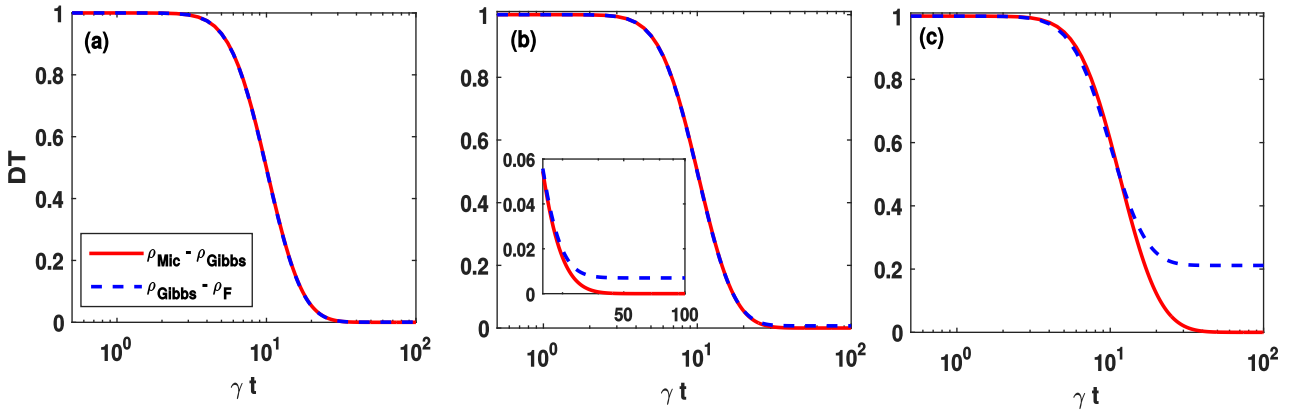


Figura 42 – Evolução temporal da distância traço  $DT(\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs})$  e  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  como função de  $\gamma t$  para o modelo XY com  $N = 8$  sítios. O valor do campo externo é fixado em  $B = 1.0\gamma$ . Os valores de acoplamento entre os primeiros vizinhos são: (a)  $\Delta = 0.01\gamma$ ; (b)  $\Delta = 0.1\gamma$  e (c)  $\Delta = 1.0\gamma$ . O estado inicial utilizado é  $\rho_{\uparrow} = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow|) \otimes^N$  com  $N = 8$  sítios.

Fonte: Elaborada pelo autor.

modelo XY embora ocorra uma diferença apenas qualitativa entre os estados previsto pelos

formalismos microscópico e fenomenológico, a dinâmica estacionária correta no regime ultra forte, é dada pelo formalismo microscópico. Por fim, mostramos que a escolha do estado inicial não influencia de maneira significativa na dinâmica temporal no modelo  $XY$ , isto é, partindo de um estado onde os spins são preparados na fase ferromagnética ou antiferromagnética, a diferença entre os formalismo persiste, a medida que o acoplamento entre os spins se intensifica.

## Dinâmica dissipativa do modelo $XXZ$

Nesta seção iremos abordar a dinâmica dissipativa do modelo  $XXZ$  brevemente abordado anteriormente. Nosso objetivo é investigar o comportamento estacionário  $d\rho_{Mic,F}/dt = 0$  e temporal das equações mestras microscópica e fenomenológica para o modelo  $XXZ$  considerando  $N=2$  até 9 sítios. A interação com o reservatório é a mesma adotada na seção anterior. Na figura abaixo ilustramos o comportamento estacionário da distância traço. Um resultado interessante que pode ser visto na Fig. 43, é relacionado com o parâmetro de anisotropia  $\Delta/\gamma$ . Percebemos que, para valores de anisotropia no limite  $\Delta/\gamma > 1$ , os estados previstos pelos formalismos microscópico e fenomenológico de equação mestra são totalmente distinguíveis para poucos sítios, enquanto que a distinguibilidade cresce a medida que mais sítios são considerados mesmo para valores baixos de anisotropia  $\Delta/\gamma \leq 1$ . Esse comportamento mostra que, o número de sítios influencia de maneira significativa na dinâmica dissipativa mesmo para valores positivos de anisotropia. Por outro lado, este comportamento é muito diferente no regime de anisotropia  $-2 \leq \Delta/\gamma \leq 0$ , onde os formalismos dissipativos são totalmente coincidentes independentemente do número de sítios na cadeia quando se analisa o regime estacionário. Entretanto, nesse caso específico, a comutação entre a parte interagente do modelo  $XXZ$  e o operador do dissipador, isto é,  $[A_i(\omega), H_{int}^{XXZ}] = 0$ , que prediz que o estado estacionário do sistema pode ser descrito pelo ensemble de Gibbs e consequentemente,  $\hat{\mathcal{L}}(\hat{\rho}_{Mic}) = 0$ , pode não ser totalmente obedecida. Analisando o resultado ilustrado na Fig. 43, observamos que no intervalo de anisotropia  $-2 \leq \Delta/\gamma \leq 0$  os formalismos dissipativos são coincidentes. Entretanto, fora da região de anisotropia  $-2 \leq \Delta/\gamma \leq 0$  esta afirmação pode ser inválida e para isso, diagonalizamos numericamente<sup>7</sup> o Liouvilliano microscópico definido na Eq. (6.12) para  $N = 6$  sítios com o objetivo de analisar o espectro de autovalores. A partir dos três primeiros autovalores do Liouvilliano microscópico ilustrados na Fig. 44, observamos que existe apenas uma região (sombreada em azul) onde há apenas um único autovalor nulo, enquanto que, nas outras

<sup>7</sup> Para uma cadeia com  $N = 6$  spins é necessário diagonalizar uma matriz com dimensão total  $4096 \times 4096$ , que corresponde a dimensão total do Liouvilliano.

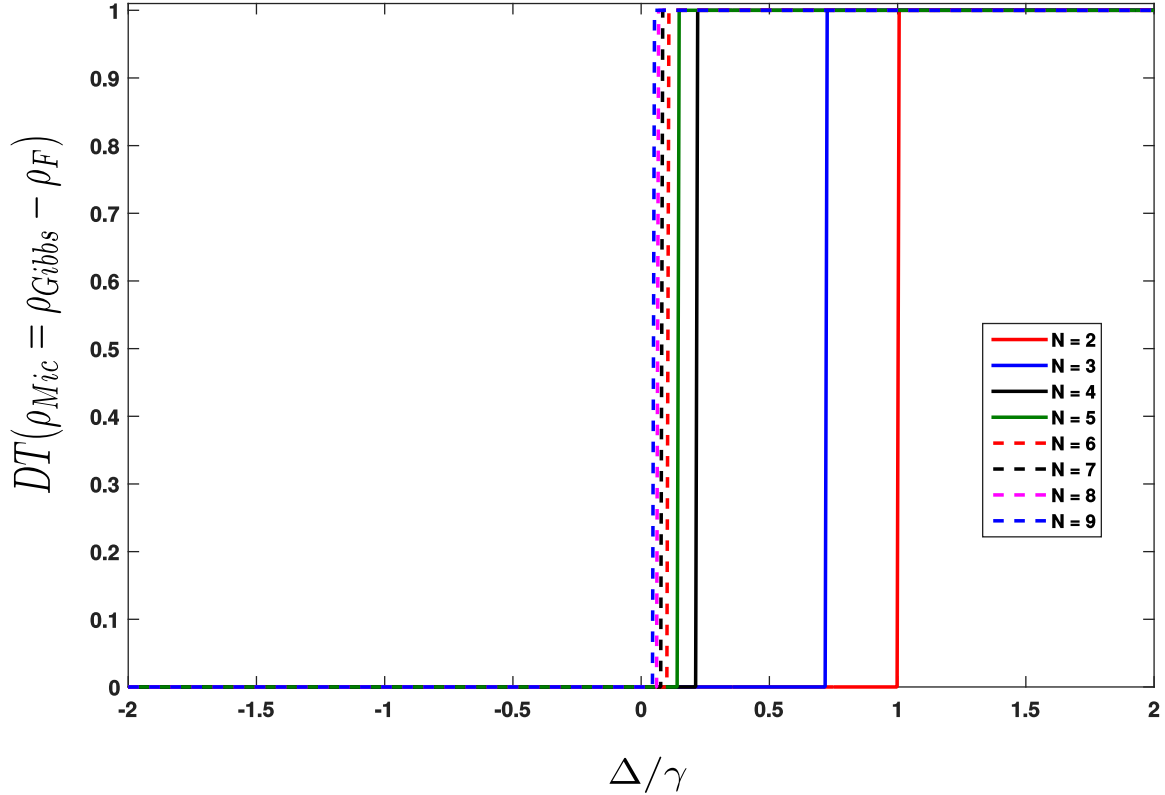


Figura 43 – Distância traço  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  em função da anisotropia entre os spins  $\Delta/\gamma$ , para diferentes números de spins na rede ( $N=2, \dots, 9$ ). O campo magnético externo e o acoplamento entre os spins foram definidos respectivamente pelos parâmetros  $B = 1.0\gamma$ ,  $J = 1.0\gamma$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

regiões sombreadas em vermelho temos dois autovalores nulos. Como ilustrado na Fig. 44, as regiões sombreadas em vermelho não podem ter sua dinâmica estacionária regida pelo estado de Gibbs. A seguir ilustramos a dinâmica temporal da distância traço para uma cadeia de  $N = 8$  sítios, considerando determinados parâmetros de acoplamento entre os spins. Analisando a Fig. 45, percebemos que os formalismos microscópico e fenomenológico de equação mestra coincidem no limite assintótico. Além disso, observamos que ambos estados previstos pelos dois formalismos dissipativos convergem, para o mesmo estado estacionário mesmo no regime de acoplamento forte, quando preparamos os spins no estado inicial na fase ferromagnética como pode ser visto na Fig. 45 (c). Nas Fig's. 46, mostramos a dinâmica temporal descrita pelos formalismos de equação mestra adotados em nossas análises, cujo estado inicial do sistema é preparado na fase antiferromagnética. Percebemos que ambos os formalismos dissipativos coincidem no regime assintótico, cujo estados previsto por cada formalismo dissipativo convergem para o mesmo estado estacionário, como pode ser visto na Fig. 46 (a), enquanto que os formalismos dissipativos apresentam discrepâncias a medida que o acoplamento entre os spins aumenta, como pode ser visto nas Fig's. 46 (b) e (c). Desse modo, vemos que os dois formalismos podem

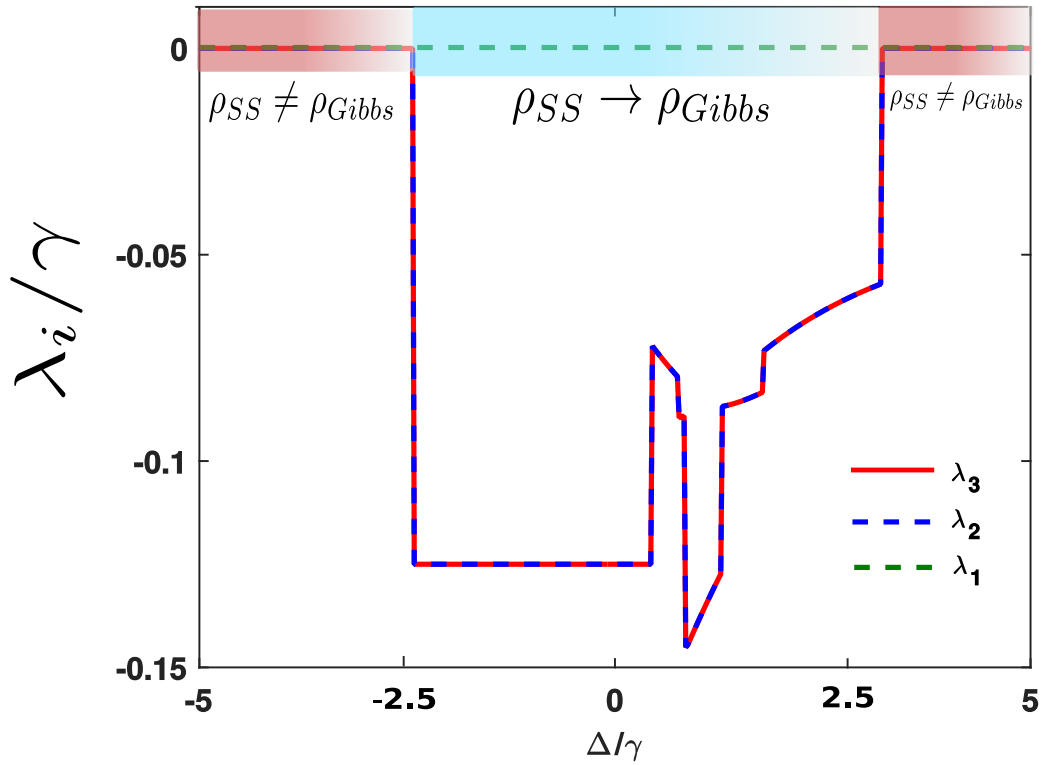


Figura 44 – Espectro com os três primeiros autovalores  $\lambda_i/\gamma$  do Liouvilliano microscópico Eq. (6.12) em função da anisotropia entre os spins  $\Delta/\gamma$  com  $N = 6$  spins. O campo magnético externo e o fator de troca entre os spins foram definidos respectivamente pelos parâmetros  $B = 1.0\gamma$ ,  $J = 1.0\gamma$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

apresentar comportamentos dinâmicos similares mesmo no regime de acoplamento forte, a depender do estado inicial e do tamanho da cadeia de spin.

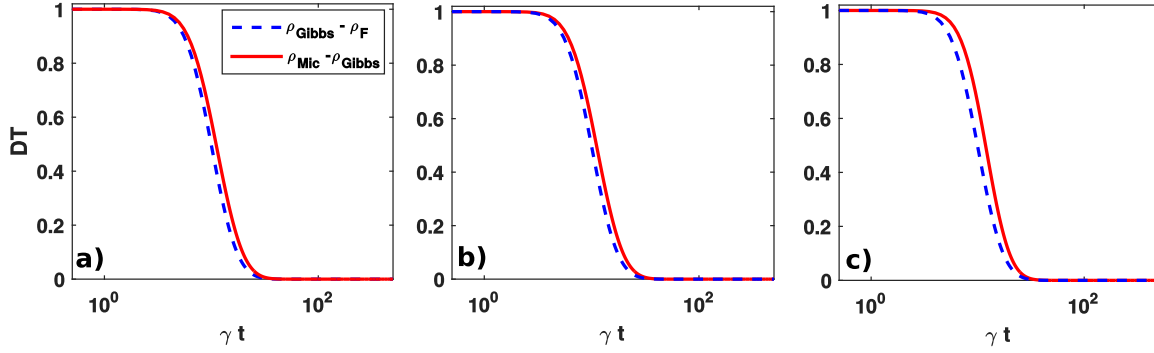


Figura 45 – Evolução temporal da distância traço  $DT(\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs})$  e  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  como função de  $\gamma t$  para determinados valores de anisotropia entre os spins. O campo magnético externo e o fator de troca entre os spins foram definidos respectivamente por  $B = 1.0\gamma$ ,  $J = -1.0\gamma$ . Os valores de acoplamento das anisotropia são: (a)  $\Delta = 0.01\gamma$ ; (b)  $\Delta = 0.1\gamma$  e (c)  $\Delta = 1.0\gamma$ . O estado inicial utilizado foi  $\rho_{\uparrow} = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow|)^{\otimes N}$  com  $N = 8$  sítios.

Fonte: Elaborada pelo autor.

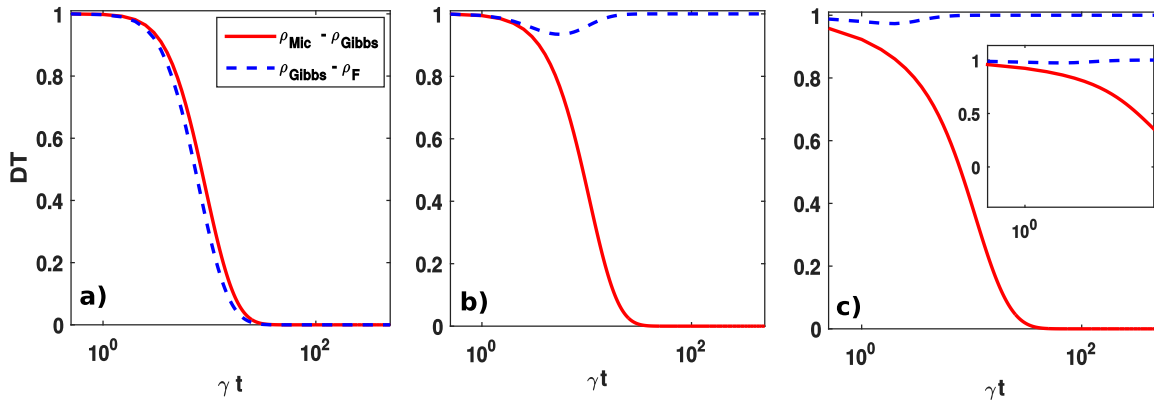


Figura 46 – Distância traço  $DT(\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs})$  e  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  como função de  $\gamma t$  para determinados valores de anisotropia entre os spins. O campo magnético externo e o fator de troca entre os spins foram definidos respectivamente por  $B = 1.0\gamma$ ,  $J = 1.0\gamma$ . Os valores de acoplamento entre os primeiros vizinhos são: (a)  $\Delta = 0.01\gamma$ ; (b)  $\Delta = 0.1\gamma$  e (c)  $\Delta = 1.0\gamma$ . O estado inicial utilizado foi  $\rho_{Néel} = (|\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow|)^{\otimes N}$  com  $N = 8$  sítios.

Fonte: Elaborada pelo autor.

## 6.6 Uma análise mais detalhada na dinâmica dissipativa no modelo XXZ

No intuito de entender qual estado inicial é responsável pela coincidência entre os formalismos dissipativos no regime de anisotropia  $-2 \leq \Delta/\gamma \leq 0$ , e conseqüentemente, tentar compreender o resultado ilustrado na Fig. 43, efetuamos o cálculo da dinâmica temporal da distância traço para uma cadeia com  $N = 8$  sítios, escolhendo dois estados

iniciais no qual o sistema pode estar configurado de acordo com a orientação do spins, na fase ferromagnética ou na fase antiferromagnética. Através do cálculo da dinâmica

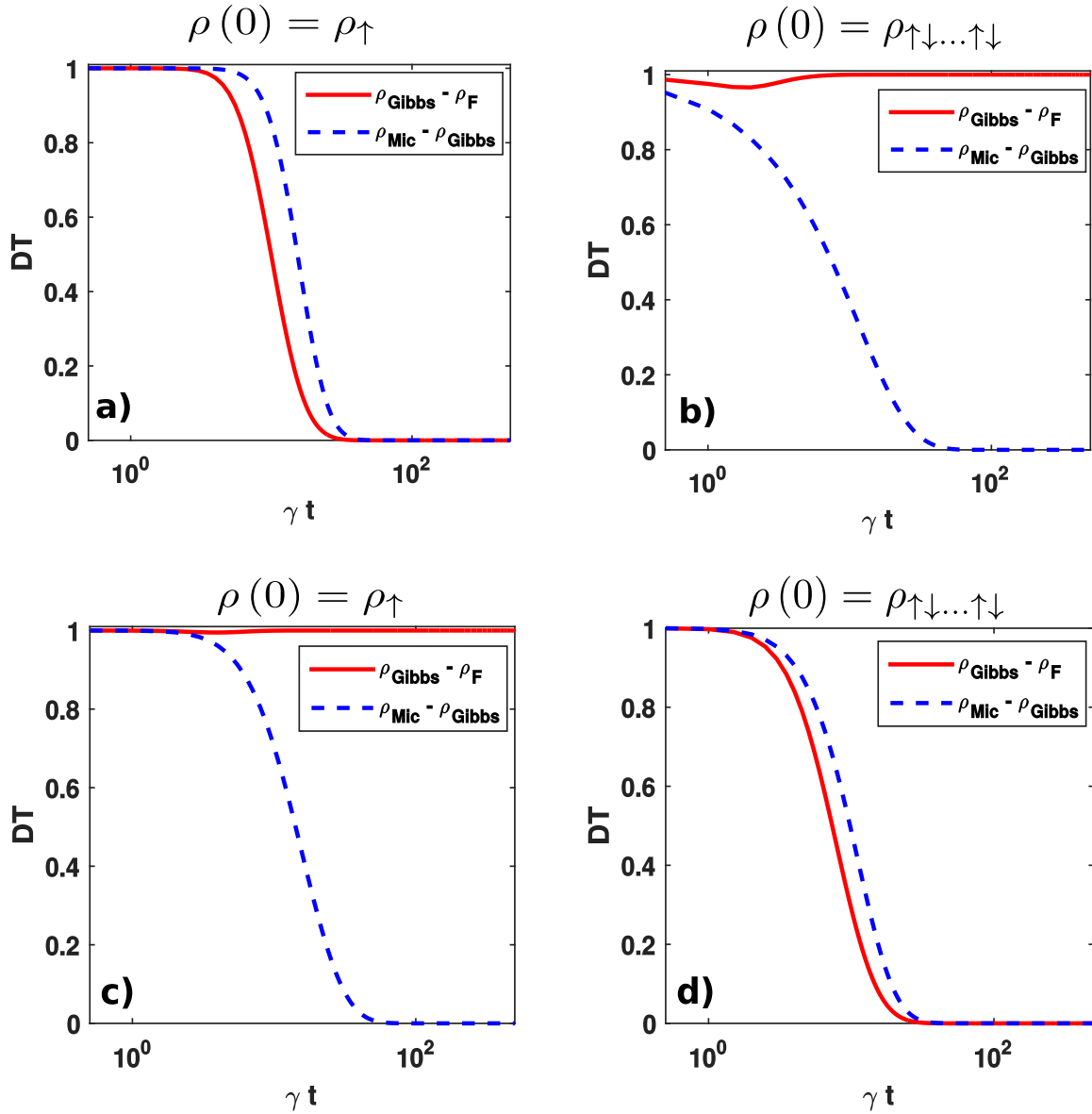


Figura 47 – Distância traço  $DT(\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs})$  e  $DT(\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  como função de  $\gamma t$  para a anisotropia entre o spins  $\Delta = 2.0\gamma$  (painéis superiores) e  $\Delta = -2.0\gamma$  (painéis inferiores), fixando o campo magnético externo em  $B = 1.0\gamma$  e o valor do fator de troca  $J = -1.0\gamma$  (a,c) e  $J = 1.0\gamma$  (b,d). Em (b,d) o estado inicial utilizado é  $\rho_{Néel} = (|\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow|) \otimes^N$  e (a,c) o estado inicial utilizado é  $\rho_{\uparrow} = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow|) \otimes^N$  com  $N = 8$  sítios.

Fonte: Elaborada pelo autor.

temporal, percebemos que o estado de Néel (antiferromagnético) leva a coincidência dos formalismos dissipativos no limite assintótico como mostrado na Fig. 47 (d), na região de anisotropia  $-2 \leq \Delta/\gamma \leq 0$ , enquanto que a diferença entre os formalismos torna-se nítida quando preparamos o sistema na fase ferromagnética Fig. 47 (c), sendo que esta diferença é

bem significativa no regime onde os spins são fortemente acoplados. Enquanto que na região de anisotropia  $0 \leq \Delta/\gamma \leq 2$  os formalismos dissipativos convergem para o mesmo estado estacionário no limite ( $t \rightarrow \infty$ ), quando o sistema é preparado na fase ferromagnética como pode ser visto na Fig. 47 (a), embora a diferença seja significativa quando o sistema é preparado na fase antiferromagnética Fig. 47 (b), que evidencia claramente que o formalismo microscópico, descreve a dinâmica estacionária correta do sistema. Interessante notar que, no limite onde temos dois autovalores nulos, o comportamento descrito pelo sistema dependendo de como o estado inicial é preparado, ocorre uma inversão de comportamentos da dinâmica dissipativa como pode ser visto na Fig. 48. Na região onde há dois autovalores nulos como mostrado na Fig. 44, temos ausência de termalização no sistema. Neste caso específico, observamos que o estado inicial que conduz o sistema ao estado estacionário regido pelo ensemble de Gibbs é o estado de Néel, para o caso de anisotropia  $\Delta/\gamma \geq 3$ , como pode ser visto na Fig. 48 (b), enquanto que no limite de anisotropia  $\Delta/\gamma \geq -3$ , o estado inicial ferromagnético descreve corretamente a dinâmica estacionária prevista pelo estado de Gibbs, como pode ser visto na Fig. 48 (c).

Percebemos que na região onde há ocorrência de autovalores nulos, independente do estado inicial utilizado para descrever a fase do sistema, nenhum dos formalismos no regime assintótico coincidem, diferentemente do caso já analisado anteriormente. O resultado obtido nesta tese tem sua importância pois, se houver situações onde os spins interagem localmente com seus respectivos banhos, é necessário ter uma certa cautela quanto à preparação do estado inicial. É importante enfatizar essa informação por conta do diagrama de fase original do modelo  $XXZ$  que no limite de anisotropia positiva, a fase é antiferromagnética, enquanto que no limite de anisotropia negativa a fase é ferromagnética na presença de um campo magnético externo. A ausência de termalização, isto é, a presença de dois autovalores nulos correspondentes ao intervalo de anisotropia presente na Fig. 44, surgem por conta da interação  $\Delta S_z^i S_z^{i+1}$ , que a medida que  $\Delta \rightarrow \infty$  o modelo de Ising é recuperado, sendo que este tipo de interação tem como resultado, a não comutação entre os operadores da interação e do banho  $A_i(\omega) = \sum_{\omega=\epsilon'-\epsilon} \Pi(\epsilon) A_i \Pi(\epsilon')$  com  $A_i = S_x^i$ , ou seja,  $[\mathcal{A}_i(\omega), H_{XXZ}^{int}(S_z^i S_z^{i+1})] \neq 0$ . Portanto, a existência de um único autovalor nulo que corresponde ao estado de Gibbs já não é obedecida. Nossa análise um pouco mais elaborada no modelo  $XXZ$ , que possui um rico diagrama de fase, pode ser relevante no estudo de sistemas de muitos corpos modelados por cadeias de spin. Por fim, mostramos que o formalismo dissipativo que descreve corretamente a dinâmica dissipativa em cadeias de spins, deve ser o formalismo descrito pela equação mestra microscópica. Um entrave para a utilização deste tipo de equação mestra refere-se à dificuldade computacional uma vez que a dimensão do sistema cresce exponencialmente com o tamanho da cadeia, embora um estudo recente [192] tenha permitido obter soluções numéricas para sistemas com dimensões um pouco maiores do que aqueles abordados por técnicas padrões.



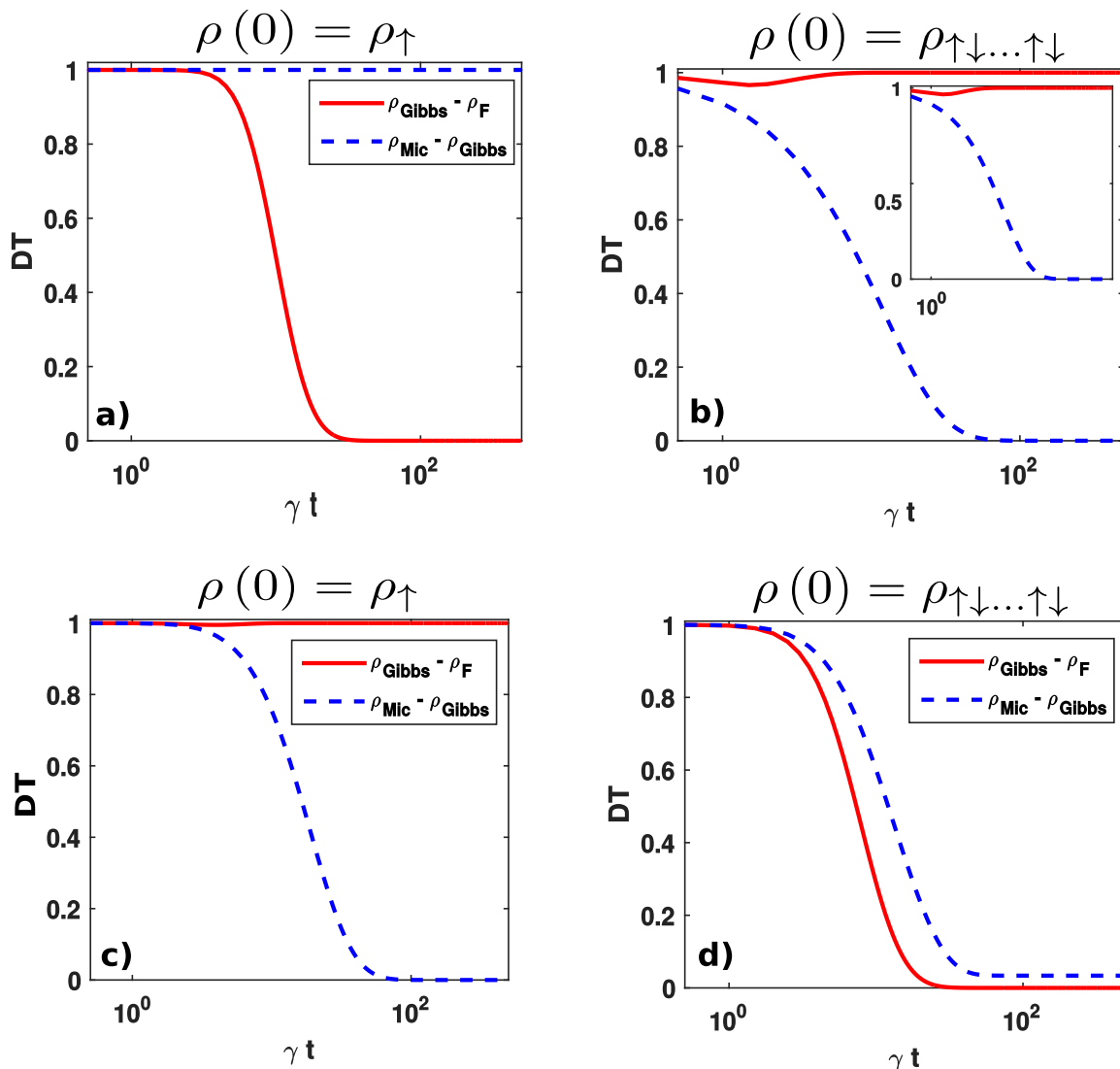


Figura 48 – Distância traço  $DT(\rho_{Mic} - \rho_{Gibbs})$  e  $DT(\rho_{Mic} = \rho_{Gibbs} - \rho_F)$  como função de  $\gamma t$  para a anisotropia entre o spins  $\Delta = 3.0\gamma$  (painéis superiores) e  $\Delta = -3.0\gamma$  (painéis inferiores), fixando o campo magnético externo em  $B = 1.0\gamma$  e o valor do fator de troca  $J = -1.0\gamma$ (a,c) e  $J = 1.0\gamma$ (b,d). Em (b, d) o estado inicial utilizado é  $\rho_{Néel} = (|\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow|) \otimes^N$  e (a, c) o estado inicial utilizado foi  $\rho_{\uparrow} = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow|) \otimes^N$  com  $N = 8$  sítios.

Fonte: Elaborada pelo autor.

## 6.7 Conclusões

Nesta seção investigamos a dinâmica dissipativa em alguns sistemas de spin bem conhecidos, como Ising com campo transverso, o modelo XY, e o modelo XXZ. Mostramos que a dinâmica dissipativa desses modelos fortemente interagentes é melhor descrita pela equação mestra que chamamos de "microscópica". Embora tal fato seja conhecido no âmbito de sistemas que abordem interação spin-bóson, tal como ocorre no modelo de Rabi, esse estudo em cadeias de spins ainda não é muito conhecido. Isso pode ser justificado

pela difícil implementação do formalismo de equação mestra microscópica para sistemas de muitos corpos. Recentemente, na Ref. [192] os autores propõem o formalismo de MPO (em inglês, *Matrix product operator*) para a equação microscópica utilizando o modelo XXZ com um grande número de sítios. Embora essa proposta seja muito promissora, os autores consideram o banho acoplado apenas ao spin central da cadeia XXZ, enquanto nosso estudo considera que todos os spins da cadeia são acoplados a reservatórios locais para uma cadeia com poucos sítios. Mesmo assim, nossos resultados evidenciam as discordâncias da dinâmica estacionária e temporal utilizando os formalismos dissipativos, cujo estudo mencionado não o faz, o que torna nosso resultado ainda relevante.

## 7 Conclusões gerais

Nesta tese investigamos a dinâmica dissipativa em sistemas quânticos fortemente interagentes e analisamos os efeitos dissipativos em alguns casos investigados. Utilizando uma plataforma de eletrodinâmica quântica de circuitos (*circuit QED*), propusemos um protocolo que permite a geração de estados comprimidos de dois modos, onde analisamos os efeitos dissipativos globais e como esses efeitos podem influenciar na geração do estado desejado. Utilizando valores realísticos de acordo com a tecnologia atual em EQCir mostramos que é possível gerar um alto grau de compressão, fazendo com que nosso protocolo seja útil em informação quântica e computação quântica em variáveis contínuas e em metrologia quântica. Outro avanço que foi reportado nesta tese diz respeito a uma proposta de investigar fenômenos análogos de transparência induzida em cadeias de spins em dois *setups* distintos, onde obtivemos soluções gerais para a resposta óptica em ambos os casos propostos. Nossa abordagem permite uma descrição geral do fenômeno de transparência induzida por dipolos (DIT), que permite um entendimento desse fenômeno no contexto escalável. Uma investigação futura no contexto de DIT consiste em investigar, a natureza da luz utilizando funções de correlação de primeira e segunda ordem e como o aumento da cadeia de átomos de dois níveis nos dois setups utilizados afeta o caráter não-clássico da luz devido aos efeitos de interferência que ocorrem no sistema. Além disso, mostramos que a inclusão de condições periódicas de contorno afeta a resposta óptica do sistema.

Por fim, para fechar a discussão à cerca da dissipação em sistemas fortemente interagentes, investigamos a dinâmica dissipativa em vários modelos de cadeias de spin-1/2 onde esclarecemos via estudo da dinâmica estacionária e temporal, que o formalismo microscópico de equação mestra é o correto para tratar dissipação em sistemas fortemente interagentes descritos por tais modelos de spins. Mostramos utilizando ferramental numérico que no regime de acoplamento ultra forte entre os spins o estado estacionário definido pelo ensemble de Gibbs é descrito pelo formalismo microscópico de equação mestra. Mostramos ainda alguns exemplos que deixam bem claro que utilização inadequada do formalismo dissipativo pode levar a resultados físicos incorretos. Este estudo tem uma importância fundamental em vários segmentos de pesquisa atuais que abrangem desde informação quântica até matéria condensada.

## .1 Dinâmica Dissipativa

Nesta seção iremos descrever alguns passos importantes na dedução da equação mestra que iremos abordar no intuito de investigar a dinâmica dissipativa nos problemas analisados nesta tese.

Considere a interação de um sistema que será descrito pelo hamiltoniano  $H_S$  interagindo com um banho representado pelo hamiltoniano  $H_B$ , onde a interação do sistema com o banho é representada por  $H_{SB}$ .

Iremos considerar que a dinâmica do sistema global é governado pelo hamiltoniano dado por:

$$H_T = H_S + H_B + H_{SB}. \quad (1)$$

A informação do sistema pode ser extraída a partir do operador sistema-banho  $\rho(t)$ . A evolução deste operador pode ser definida a partir da equação de Liouville-von Neumann

$$\dot{\rho} = -i [H_T, \rho]. \quad (2)$$

Na representação de interação com respeito a parte livre  $H_0 = H_S + H_B$  em (1) anterior pode ser reescrita na forma

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -i [\tilde{H}_{SB}(t), \tilde{\rho}(t)], \quad (3)$$

com  $\tilde{H}_{SB}(t) = e^{iH_0 t} H_{SB} e^{-iH_0 t}$  e  $\tilde{\rho}(t) = e^{iH_0 t} \rho(t) e^{-iH_0 t}$ .

Integrando a Eq. (3) e utilizando  $\tilde{\rho}(t)$  obtém-se

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -i [\tilde{H}_{SB}(t), \tilde{\rho}(0)] - \int_0^t dt' [\tilde{H}_{SB}(t), [\tilde{H}_{SB}(t'), \tilde{\rho}(t')]]. \quad (4)$$

Um passo importante que deve ser dado consiste em considerar que aqui nestes caso a evolução do sistema é a que realmente estamos interessados, deste modo é necessário fazer uma operação conhecida como traço parcial definida por  $\rho_S(t) = Tr_B(\rho(t))$ . Este procedimento irá nos fornecer a informação do operador densidade reduzido do sistema após efetuar o traço sobre todos os modos do ambiente. Sendo assim, Eq. (3) será escrita como

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = -i Tr_B [\tilde{H}_{SB}(t), \tilde{\rho}(0)] - \int_0^t dt' Tr_B [\tilde{H}_{SB}(t), [\tilde{H}_{SB}(t'), \tilde{\rho}(t')]]. \quad (5)$$

O primeiro termo em (5) é  $Tr_B \{[H_I(t), \tilde{\rho}(0)]\} = 0$ , pois é possível considerar inicialmente que o sistema e o banho não estão correlacionados e que o traço sobre os operadores do banho são nulos<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Costumeiramente, o banho (em muitas aplicações, como em óptica quântica, matéria condensada) é dito ser constituído por infinitos osciladores harmônicos, de tal modo que o traço sobre o estado térmico contém termos lineares envolvendo os operadores do banho  $\langle b^\dagger \rangle = \langle b \rangle = 0$ .

Daqui a diante, outras aproximações serão necessárias afim de encontrarmos a forma final da equação mestra que rege o sistema total.

### Aproximação de Born

Esta aproximação descreve que o acoplamento entre o sistema-banho deve ser fraco. Isto possibilita uma descrição do banho como sendo uma entidade constante de modo que é possível escrever:

$$\tilde{\rho}(t') = \tilde{\rho}_S \otimes \rho_B \quad (6)$$

A aproximação de Born permite escrever (5) na forma:

$$\tilde{\rho}_S(t) = - \int_0^t ds Tr_B \left\{ \left[ \tilde{H}_{SB}(t), \left[ \tilde{H}_{SB}(t'), \tilde{\rho}_S(t') \otimes \rho_B \right] \right] \right\}. \quad (7)$$

Na Eq.(7) pode-se fazer uma modificação que transforme a expressão afim de adquirir um caráter local em  $t$  sendo que isto é feito quando  $\tilde{\rho}_S(t') \rightarrow \tilde{\rho}_S(t)$ . Após esta pequena modificação a equação anterior é reescrita na forma

$$\tilde{\rho}_S(t) = - \int_0^t dt' Tr_B \left\{ \left[ \tilde{H}_{SB}(t), \left[ \tilde{H}_{SB}(t'), \tilde{\rho}_S(t) \otimes \rho_B \right] \right] \right\}, \quad (8)$$

conhecida como *equação mestra de Redfield* [2].

### Caráter Markoviano da interação sistema-reservatório

Um dos primeiros passos em busca da Markovianidade na expressão (7) pode ser feito efetuando uma ligeira mudança substituindo  $t'$  por  $t - \tau$  e fazendo o limite de superior da integração  $t \rightarrow \infty$  a fim de remover qualquer informação sobre o estado inicial do sistema, fazendo com que a Eq.(8) seja redefinida na forma:

$$\tilde{\rho}_S(t) = - \int_0^\infty dt' Tr_B \left\{ \left[ \tilde{H}_{SB}(t), \left[ \tilde{H}_{SB}(t - \tau), \tilde{\rho}_S(t) \otimes \rho_B \right] \right] \right\}, \quad (9)$$

que é uma equação mestra Markoviana [2].

O caráter Markoviano desta equação envolve certas condições:

### Escalas Típicas

O requerimento para aproximação de Markov envolve condições envolvendo escalas de tempo. Essencialmente, o tempo referente ao decaimento das funções de correlação do banho  $\tau_B$  deve decair muito mais rapidamente que a escala de evolução típica do sistema  $\tau_S$ , isto é,  $\tau_B \ll \tau_S$ .

Como já foi descrito na seção anterior, o sistema possui dimensão muito menor que o banho. Neste caso a interação do sistema com o banho faz com que ocorra troca de excitações que são perdidas na vastidão do banho e não são mais recuperadas pelo sistema. Desta forma, o sistema não consegue recuperar qualquer tipo de informação antes trocada com o banho, sendo que necessariamente ocorre apenas efeitos locais no tempo. Em resumo,

o sistema não tem "memória" de qualquer evento anterior que ocorreu durante a interação com o banho.

### Aproximação Secular e Interação Sistema-Banho

Este tipo de aproximação é útil no intuito de desconsiderar termos que oscilam muito rapidamente na equação mestra Markoviana. É importante deixar claro que a essa aproximação empregada aqui é de cunho diferente da popularmente conhecida na literatura de óptica quântica, principalmente na descrição da representação de interação que envolvem sistema acoplado átomo-cavidade. A aproximação secular neste caso é empregada diretamente no hamiltoniano de interação sistema-banho. A seguir descreveremos brevemente os passos necessários para a obtenção da equação mestra Markoviana na forma de Lindblad.

O hamiltoniano de interação sistema-banho é descrito na forma:

$$\tilde{H}_{SB} = \sum_{\lambda} A_{\lambda} \otimes B_{\lambda} \quad (10)$$

sendo  $A_{\lambda}$  e  $B_{\lambda}$  definem os operadores que agem apenas no sistema e no banho. O operador  $A_{\lambda}$ <sup>2</sup> é definido em função dos autoestados e autovalores  $\epsilon$  do sistema  $H_S$ , sendo que isto é necessário para projetar estes operadores em subespaços com diferença de energia fixa, na forma:

$$A_{\lambda}(\omega) = \sum_{\omega=\epsilon'-\epsilon} \Pi(\epsilon) A_{\lambda} \Pi(\epsilon') \quad (11)$$

no qual  $\Pi(\epsilon)$  são os projetores nos autoestados do sistema. Tendo essa informação clara, podemos escrever na representação de interação o hamiltoniano na Eq.(10) como:

$$\tilde{H}_{SB} = \sum_{\lambda, \omega} A_{\lambda}(\omega) \otimes B_{\lambda} = \sum_{\lambda, \omega} e^{-i\omega t} A_{\lambda}(\omega) \otimes B_{\lambda} = \sum_{\lambda, \omega} e^{i\omega t} A_{\lambda}^{\dagger}(\omega) \otimes B_{\lambda}^{\dagger}(t), \quad (12)$$

de modo que na expressão acima foi inserido os operadores do sistema na interação,

$$\begin{aligned} \exp(iH_s t) A_{\lambda}(\omega) \exp(-iH_s t) &= \exp(-i\omega t) A_{\lambda}(\omega), \\ \exp(iH_s t) A_{\lambda}^{\dagger}(\omega) \exp(-iH_s t) &= \exp(i\omega t) A_{\lambda}^{\dagger}(\omega). \end{aligned}$$

Enquanto que os operadores do banho na representação de interação são

$$B_{\lambda}(t) = \exp(iH_B t) B_{\lambda} \exp(-iH_B t),$$

sendo que por conta do banho ser considerado vasto, consideramos que

$$\langle B_{\lambda}(t) \rangle = \text{Tr}_B [B_{\lambda}(t) \rho_B] = 0,$$

que indica que o banho está na situação de equilíbrio.

<sup>2</sup> Este operador deve ser necessariamente Hermiteano!

O passo seguinte consiste em substituir (12) em (9) e após algumas passagens algébricas chega-se a expressão [2, 3, 201]:

$$\tilde{\rho}_S(t) = \sum_{\omega, \omega'} \sum_{\lambda, \beta} e^{i(\omega' - \omega)t} \Gamma_{\lambda, \beta}(\omega) [A_\beta(\omega) \tilde{\rho}_S(t) A_\lambda(\omega')^\dagger - A_\lambda(\omega')^\dagger A_\beta(\omega) \tilde{\rho}_S(t)] + h.c \quad (13)$$

sendo que o fator  $\Gamma_{\lambda, \beta}(\omega)$  dado por

$$\Gamma_{\lambda, \beta}(\omega) = \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} \langle B_\lambda(t)^\dagger B_\lambda(t - \tau) \rangle. \quad (14)$$

é a transformada de Fourier obtida após tomarmos o traço parcial sobre o estado do banho  $\rho_B$ , sendo que além disso, (14) descreve as funções de correlação do banho.

Um passo importante consiste no descarte dos termos  $e^{i(\omega' - \omega)t}$  para  $\omega \neq \omega'$  na expressão (13) que consiste na aplicação da aproximação de onda girante em sistemas quânticos abertos. Esse tipo de aproximação é aplicada quando a escala de tempo típica de evolução do sistema  $\tau_S$  é muito menor que a escala típica de evolução sistema-banho (*sistema aberto*)  $\tau_{SB}$  na representação de interação, sendo que esta condição é descrita por:

$$\tau_S \sim \frac{1}{\Delta} \ll \tau_{SB},$$

com  $\Delta = \omega' - \omega$ . Neste caso, os termos ditos não seculares são os termos que oscilam rapidamente, enquanto que os termos seculares fazem o papel inverso.

Aplicando a aproximação anterior utilizando a relação [202]:

$$\sum_{\omega, \omega'} e^{i(\omega' - \omega)t} A(\omega, \omega') \approx \sum_{\omega} A(\omega, \omega). \quad (15)$$

e inserindo a expressão anterior em (13), obtemos:

$$\tilde{\rho}_S(t) = \sum_{\omega} \sum_{\lambda, \beta} \Gamma_{\lambda, \beta}(\omega) [A_\beta(\omega) \tilde{\rho}_S(t) A_\lambda(\omega)^\dagger - A_\lambda(\omega)^\dagger A_\beta(\omega) \tilde{\rho}_S(t)] + H.c. \quad (16)$$

Na Eq.(16) a função que descreve as propriedades do banho conhecida como função de correlação, é desmembrada em dois termos da forma:

$$\Gamma_{\lambda, \beta} = \frac{1}{2} \gamma_{\lambda, \beta}(\omega) + iS_{\lambda, \beta}(\omega) \quad (17)$$

onde a parte real no primeiro termo (17) é redefinida como:

$$\gamma_{\lambda, \beta}(\omega) = \Gamma_{\lambda, \beta}(\omega) + \Gamma_{\lambda, \beta}^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle B_\lambda(\tau)^\dagger B_\beta(0) \rangle, \quad (18)$$

e define a taxa de relaxação do sistema.

Efetuada algumas manipulações algébricas na expressão (16), e levando em consideração as informações sobre as funções de correlação, encontramos a forma final de (16) na representação de Schrodinger :

$$\dot{\rho}_S(t) = -i [H_S, \rho_S(t)] + \mathcal{D}_{Mic}(\rho_S(t)). \quad (19)$$

$$\mathcal{D}_{Mic}(\rho_S(t)) = \sum_{\omega} \sum_{\lambda, \beta} \gamma_{\lambda, \beta}(\omega) \left[ A_\beta(\omega) \rho_S(t) A_\lambda^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \{ A_\beta^\dagger(\omega) A_\lambda(\omega), \rho_S(t) \} \right], \quad (20)$$

onde a Eq.(17) é o dissipador do sistema na forma de Lindblad.

A equação mestra Eq.(19) pode ser escrita em termos de um superoperador conhecido como *Liouvilliano*

$$\hat{\mathcal{L}}_{Mic}\rho_S(t) = \dot{\rho}_S(t), \quad (21)$$

em que

$$\hat{\mathcal{L}}_{Mic} = i [\rho_S(t), \hat{H}_S] + \mathcal{D}_{Mic}(\rho_S(t)) \quad (22)$$

é o Liouvilliano microscópico. Vale a pena destacar, que o banho tem uma densidade espectral característica que em nosso caso, consideramos um banho com densidade espectral de natureza ôhmica, isto é,  $\gamma_{\lambda,\beta}(\omega) = J(\omega)$  [1] com

$$J(\omega) \propto \gamma_{diss}\omega^s,$$

onde é a taxa de dissipação do sistema e a constante  $s = 1$  para um banho de natureza espectral ôhmica. Para banhos de natureza super-ôhmica  $s > 1$ , enquanto que para banhos de natureza sub-ôhmica  $s < 1$ .

Embora não seja deduzida nesta tese, a equação mestra fenomenológica é bem conhecida e amplamente deduzida em muitas referências como as já citadas no capítulo.1. Por questões de direcionamento iremos mostrar a sua forma final

$$\dot{\rho}_S = i [\rho_S, \hat{H}_S] + \mathcal{D}_{Fen}[\mathcal{O}]\rho_S, \quad (23)$$

onde

$$\mathcal{D}_{Fen}[\mathcal{O}]\rho_S = \mathcal{O}\rho_S\mathcal{O}^\dagger - \frac{1}{2}\{\mathcal{O}^\dagger\mathcal{O}, \rho_S\}, \quad (24)$$

cujo Liouvilliano fenomenológico é

$$\hat{\mathcal{L}}_{Fen}\rho_S(t) = \dot{\rho}_S(t), \quad (25)$$

em que

$$\hat{\mathcal{L}}_{Fen} = i [\rho_S(t), \hat{H}_S] + \mathcal{D}_{Fen}(\rho_S(t)) \quad (26)$$

## .2 Métodos numéricos

**Solução numérica das equações mestras:** As equações mestras definidas acima, podem ser de solução complicadas dependendo da dimensionalidade do espaço de Hilbert do sistema em questão. A diagonalização do hamiltoniano efetivo descrito no capítulo.3, envolve cálculos com uma matriz de dimensão  $M_T = 2 \times \mathcal{N}_F^{a,b}$ , devido à dimensão do qubit ( $D_q = 2$ ) e a dimensão do campo para os modos  $a$  e  $b$  ( $D_{campo} = \mathcal{N}_F$ ), que deve ser ajustada de acordo com a precisão que desejamos em nossos cálculos. Para campos pouco intensos, isto é, como número médio de fótons da ordem de 1 ou 2, uma dimensão de  $\mathcal{N}_F = 25$  já apresenta resultados muito satisfatórios, com erros inferiores a 1%. A diagonalização



dos Liouvillianos (22) e (26) requer a diagonalização de uma matriz  $M_T^2 \times M_T^2$  que torna a solução deste problema um pouco mais demorada em termos de cálculo numérico. O espaço de Hilbert do hamiltoniano efetivo para um sistema de um qubit com dimensão  $D = 2$  e espaço de Fock,  $\mathcal{N}_F = 20$  para os modos  $a$  e  $b$  tem dimensão total  $M_T = 800$ , tornando a solução da equação mestra mais complicada.

Uma técnica muito útil para resolver numericamente problemas desse porte é conhecida como método de trajetórias quânticas [78], que é formulado em termos de uma função de onda de Monte Carlo (*Monte Carlo wave function*). A vantagem do método de monte carlo em relação ao método de solução tradicional de equações mestras reside no fato de utilizarmos o vetor de estado ao invés do operador densidade. Deste modo, se o espaço de Hilbert do sistema tem dimensão total  $N$  podemos resolver apenas  $N$  equações diferenciais, enquanto que a equação mestra requer  $N^2$  equações a serem resolvidas. O cálculo numérico para a solução destes problemas será feito utilizando um pacote recém criado para óptica quântica (o QUTIP) [110, 111] desenvolvido na linguagem de programação Python.

Os cálculos necessários para realizar as simulações numéricas desta tese podem ser adquiridos com o autor desta tese, caso ocorra o interesse.



# APÊNDICE A – Elementos essenciais em qubits supercondutores

Nesta seção iremos abordar os constituintes necessários que compõem a física de átomos supercondutores. Na descrição abordada a seguir, fizemos uso das Referências [193, 203], embora seja um assunto já conhecido na literatura, achamos conveniente relatar neste documento.

No caso de uma junção na qual dois supercondutores são separados por uma barreira isolante muito fina, pode-se observar outro tipo de efeito túnel, diferente do tunelamento de uma única partícula. Trata-se de uma supercorrente de tunelamento de pares de Cooper fluindo de um lado a outro da junção. Nesta seção iremos descrever primeiro, o efeito Josephson DC, onde neste efeito, uma corrente suficientemente pequena pode passar através um elo fraco (junção Josephson), sem dissipação. Em outras palavras, quando uma corrente passa através do elo fraco nenhuma tensão é gerada através da junção.

Seja  $\psi_1$  a amplitude de encontrar os pares de elétrons em um lado da junção Fig. 2 e  $\psi_2$  a amplitude de encontrá-los do outro lado da junção. Como a transferência de

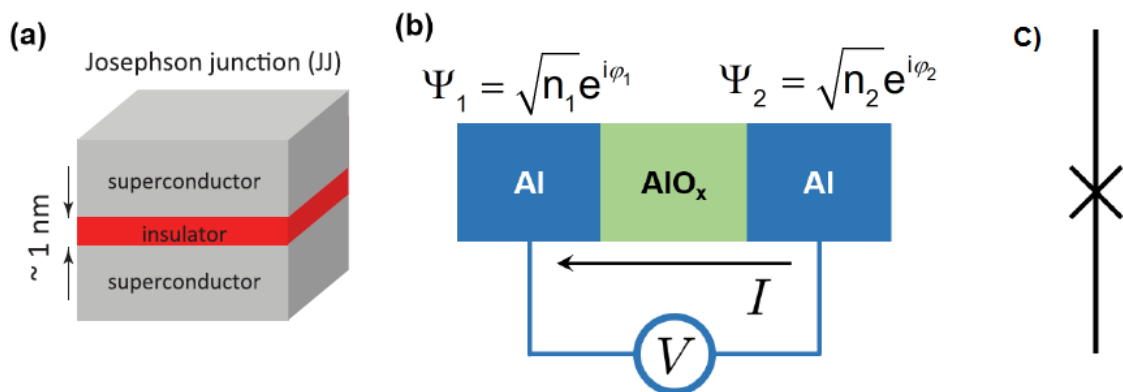


Figura 49 – Efeito Josephson: (a) Duas peças supercondutoras do mesmo material, separadas por uma fina camada isolante(vermelha).(b) Circuito fechado que constitui a junção. (c) Elemento que representa simbolicamente a junção quando se tem um circuito com mais componentes.

Fonte: (a) Ref. [84] e (b, c) Ref. [85].

carga através da barreira é um fenômeno dependente do tempo, são necessárias equações

de movimento para os parâmetros de ordem de um lado e outro da junção. Como a interpretação destes parâmetros de ordem em termos de funções de onda efetivas para os condensados supercondutores é plenamente justificável, escrevemos equações de Schrödinger dependentes do tempo para os dois lados da junção, ou seja

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \hbar K \psi_2, \quad (\text{A.1})$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \hbar K \psi_1, \quad (\text{A.2})$$

nestas equações o parâmetro  $K$  representa a razão de transferência de pares de Cooper através da barreira isolante e é uma característica da junção. Para as equações acima, as soluções que iremos propor estão relacionadas com o parâmetro de ordem que descreve cada junção supercondutora da junção, isto é

$$\psi_1 = \sqrt{n_1} e^{i\varphi_1}, \quad (\text{A.3})$$

$$\psi_2 = \sqrt{n_2} e^{i\varphi_2}, \quad (\text{A.4})$$

onde  $n_1$  e  $n_2$  são as densidades de elétrons<sup>1</sup> supercondutores em cada junção. Substituindo (A.3) e (A.4) em (A.1) e (A.2) obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} n_1^{-1/2} e^{i\varphi_1} \frac{\partial n_1}{\partial t} + i\psi_1 &= -iK\psi_2, \\ \frac{1}{2} n_1^{-1/2} e^{i\varphi_1} \frac{\partial n_1}{\partial t} + i\psi_2 &= -iK\psi_1, \end{aligned}$$

multiplicando  $\psi_1^*$  na primeira equação e  $\psi_2^*$  na segunda equação, e levando em consideração a diferença de fase  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial n_1}{\partial t} + in_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= -iK\sqrt{n_1 n_2} e^{i\varphi}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial n_2}{\partial t} + in_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= -iK\sqrt{n_1 n_2} e^{-i\varphi}, \end{aligned}$$

igualando as partes real, encontramos

$$\begin{aligned} in_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= -iK\sqrt{n_1 n_2} (\cos \varphi) \rightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -K\sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \cos \varphi, \\ in_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= -iK\sqrt{n_1 n_2} (\cos \varphi) \rightarrow \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = -K\sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \cos \varphi, \end{aligned}$$

para a parte complexa temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial n_1}{\partial t} &= -iK\sqrt{n_1 n_2} (i \sin \varphi) \rightarrow \frac{\partial n_1}{\partial t} = 2K\sqrt{n_1 n_2} \sin \varphi \\ \frac{1}{2} \frac{\partial n_1}{\partial t} &= -iK\sqrt{n_1 n_2} (-i \sin \varphi) \rightarrow \frac{\partial n_2}{\partial t} = -2K\sqrt{n_1 n_2} \sin \varphi, \end{aligned}$$

<sup>1</sup> As amplitudes de probabilidade dos elétrons supercondutores no lado 1 da junção e  $\psi_1^* \psi_1 = |\psi_1|^2 = n_1$  e  $\psi_2^* \psi_2 = |\psi_2|^2 = n_2$ .

Considerando que as duas peças supercondutoras são idênticas, então  $n_1 \approx n_2$ . Considerando que as duas peças supercondutoras são idênticas, então  $n_1 \approx n_2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_1}{\partial t} &= -\frac{\partial n_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0.\end{aligned}$$

A corrente que flui através da junção é proporcional a  $\frac{\partial n_s}{\partial t}$ . De fato, quando a corrente é ligada, a densidade de elétrons supercondutores começa a variar a uma taxa  $\partial n_s/\partial t$  dando assim origem a uma corrente

$$I_s = \partial n_s/\partial t.$$

Isto significa que os elétrons passam a deixar o eletrodo supercondutor. Mas este processo é imediatamente compensado pela chegada de novos elétrons a partir de uma fonte de corrente externa, porque a junção é uma parte de um circuito elétrico fechado. Portanto, a densidade  $n_s$  permanece constante à eletroneutralidade do sistema como um todo. Assim, para a definição da supercorrente é suficiente plausível assumir que

$$I_s \propto \partial n_s/\partial t,$$

com estas explicações podemos escrever a expressão do efeito Josephson DC

$$I_s = I_c \sin \varphi, \tag{A.5}$$

Se for aplicada uma voltagem fraca o suficiente em ambos os lados da JJ, um par em um lado da junção pode experimentar uma diferença de potencial  $eV$ , enquanto que no outro lado da junção o elétron experimenta uma diferença de potencial  $-eV$ . Neste caso, pode-se considerar em no segundo membro das expressões (A.1) e (A.2)  $-eV$  e  $eV$ , utilizando um procedimento similar ao obtido anteriormente como é feito, encontramos a segunda equação Josephson

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar}, \tag{A.6}$$

que descreve o efeito Josephson AC, que oriundo da aplicação de uma voltagem na junção. Esta equação nos diz que a diferença de fase varia com o tempo e que a energia requerida para transferir um par de Cooper de um lado a outro da junção é  $2eV$ . Utilizando o conceito de quantum de fluxo [203],

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e}, \tag{A.7}$$

a segunda equação Josephson (A.6) pode ser redefinida como

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi} \dot{\varphi}.$$

A junção pode armazenar uma certa quantidade de energia potencial quando a corrente flui através dela, mesmo sem a aplicação de uma voltagem externa. Suponha que inicialmente

o link fraco que conecta as junções possui diferença de fase  $\varphi = 0$ . O trabalho realizado por uma fonte externa (uma bateria por exemplo) a fim de trazer a diferença de fase para um valor finito  $\varphi$  em um tempo  $t$  é  $U(\varphi) = \int_0^{t_0} I_s V dt$ . A partir da relação anterior,  $V$  é a voltagem aplicada durante o aumento de corrente (corrente nula  $I = 0$ ) em  $t = 0$  à um valor final  $I_s$  em um tempo  $t = t_0$ . Utilizando a relação de corrente-fase (A.5) e voltagem-corrente (A.6), podemos escrever para a energia

$$U(\varphi) = \int_0^{t_0} I_c \sin(\varphi) \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} dt,$$

onde a integral na expressão anterior fica agora, em função apenas da diferença de fase que assume valores,  $\varphi(0) = 0$  e  $\varphi(t_0) = \varphi_0$  de modo que isso nos direciona ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} U(\varphi) &= \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} \int_0^\varphi I_c \sin(\varphi) d\varphi, \\ U(\varphi) &= \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} (1 - \cos \varphi), \\ U(\varphi) &= E_{J0} (1 - \cos \varphi). \end{aligned} \tag{A.8}$$

Na eq.(A.8),  $E_{J0} = \Phi_0 I_c / 2\pi$  é denominada por energia Josephson. A última expressão é denominada como energia de acoplamento Josephson que tem clara dependência com a fase  $\varphi$ . Pelo fato da energia Josephson ser capaz de armazenar uma certa quantidade de energia, torna a junção Josephson um dispositivo não-linear diferente dos convencionais.

### Indutância Josephson

Como foi citado na seção anterior a junção Josephson se caracteriza por ser um dispositivo não linear. Tal dispositivo pode atuar como um indutor, que pode ter suas propriedades expressas em uma fórmula que é definida, utilizando as duas equações de Josephson (A.5) e (A.6), e a definição tradicional de indutância  $V = L dI/dt$ . Inicialmente, efetuamos a derivada temporal da primeira equação Josephson

$$\begin{aligned} \frac{dI_s}{dt} &= I_c \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dI_s}{dt} &= I_c \cos \varphi \frac{2\pi}{\Phi_0} V, \end{aligned}$$

a última expressão obtida pode ser redefinida como

$$\begin{aligned} L_J &= V \left( \frac{dI_s}{dt} \right)^{-1} \\ L_{JS} &= \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \cos \varphi} \rightarrow L_{JS} = L_J \frac{1}{\cos \varphi}. \end{aligned}$$

O termo  $L_J = \Phi_0 / 2\pi I_c$  recebe a denominação de indutância Josephson. Uma propriedade interessante da indutância Josephson não-linear

## A.1 Alguns fundamentos de teoria clássica de circuitos elétricos

Usualmente, os graus de liberdade de um circuito elétrico clássico são as voltagens  $V(t)$  nos nós e as correntes  $I(t)$  circulando nos loops. Sabe-se da mecânica clássica e da quântica que os graus de liberdade são as coordenadas  $q_i$  e os momenta generalizado  $p_i$ . No intuito de estudar o formalismo hamiltoniano de circuitos elétricos Yurke & Denker [204] e Devoret [205] desenvolveram um formalismo adequado para essa finalidade. Neste formalismo, as coordenadas e o momentum são descritos pelo fluxo  $\Phi_\alpha$  e a carga  $Q_\alpha$  associados ao elementos do circuito.

Nesta nova abordagem é conveniente introduzir variáveis de fluxo e carga nos ramos na forma:

$$\Phi_b(t) = \int_{-\infty}^t V_b(t') dt', \quad (\text{A.9})$$

$$Q_b(t) = \int_{-\infty}^t I_b(t') dt', \quad (\text{A.10})$$

onde a integração é iniciada em algum momento passado onde o circuito se encontra completamente em *repouso* onde não há movimentação de cargas. A quantidade definida em (A.9) tem dimensões de fluxo magnético cujo o elo de ligação com circuitos supercondutores pode ser feita através da relação envolvendo a segunda equação Josephson (A.6) de modo que temos a relação<sup>2</sup>

$$\varphi_b = 2\pi \frac{\Phi_b}{\Phi_0}, \quad (\text{A.11})$$

sendo que em (A.11) utilizamos  $\dot{\Phi}_b = V_b$ . Na Fig. 50, fornecemos uma representação pictórica do circuito contendo ramos e nós. Alguns elementos fundamentais de um circuito elétrico, tais como indutores e capacitores armazenam uma determinada quantidade de energia. Por exemplo, uma voltagem atravessando um ramo do circuito pode ser escrita em termos do capacitor a partir da relação constitutiva  $V(t) = Q(t)/C$ , cuja energia que o capacitor armazena em termos da variável de fluxo (A.9) é dada por:

$$E_C = \frac{C \dot{\Phi}_b^2}{2}.$$

Escrevendo a indutância em função da voltagem via lei de Faraday e utilizando as variáveis de fluxo obtemos a energia armazenada no indutor:

$$E_C = \frac{\Phi_b^2}{2L},$$

onde  $L$  é o elemento de indutância.

Esses mesmos resultados podem ser obtidos utilizando em vez de uma variável de fluxo, variáveis de corrente  $I$  e carga  $Q$  como pode ser visto em [81].

<sup>2</sup> Os índices de fluxo valem para os nós gerais do circuitos. Aqui o índice  $b$  é utilizado por conta da representação pictórica.

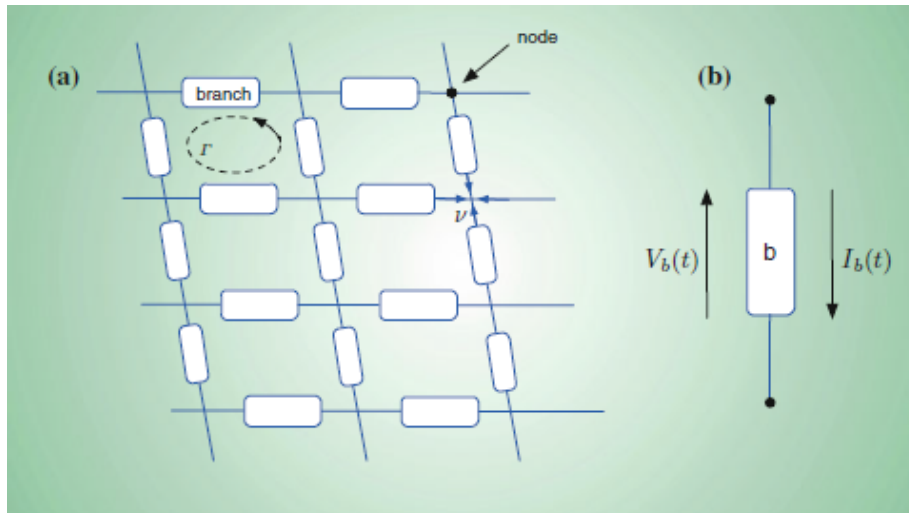


Figura 50 – Representação pictórica de um circuito elétrico formado por um arranjo de ramos e nós. Representação de um ramo  $b$  do circuito que tem associado a ele um elemento de voltagem  $V_b$  e corrente  $I_b$ .

Fonte: [206]

## A.2 Formalismo Lagrangeano do circuito elétrico

Na teoria moderna de circuitos elétricos cujos circuitos são mais elaborados e complexos é possível descrever o sistema por meio de uma variável de nó de fluxo  $\dot{\Phi}_n$  que descreve o nó posicionado no circuito, de modo que estas variáveis são escolhidas e trabalhadas de acordo com a topologia que o circuito possui. Na análise do circuito é conveniente escolher o procedimento conhecido como árvore de dispersão (*spanning tree* em inglês) e adotar um dos nós do circuito como o nó de referência como pode ser visto na ilustração abaixo. Da Fig.51 podemos ver que uma escolha possível consiste em escolher um nó de referência  $\Phi_n = 0$  cujo caminho conecte a outros nós ativos sem fechar o loop. Como descrito em [206] e ilustrado na Fig. 51, existem duas configurações de ramos no circuito: a primeira configuração pertence a *spanning tree* cujo conjunto de ramos é descrito pela cor azul e o outro tipo de configuração é definida pelo conjunto de ramos remanescentes conhecido como ramos de fechamento ( $C$ ) (cor cinza) onde cada um desses ramos é associado a um loop irreduzível. Em geral, esses ramos de fechamento conectam dois nós e uma *spanning tree* como pode ser visto na Fig. 51 (a) e (b).

Na análise do circuito de interesse se o ramo específico faz parte da *spanning tree* então, o ramo de fluxo será definido pela diferença de nós de fluxo  $\Phi_{b(T)} = \Phi_n - \Phi_{n+1}$ . Por outro lado, se o ramo de interesse for de fechamento, então o ramo de fluxo será definido pela relação  $\Phi_{b(C)} = (\Phi_{n+1} - \Phi_n) \pm \tilde{\Phi}_{ext}$ , que é a diferença entre os nós de fluxo considerando também o termo de fluxo associado a um Loop irreduzível.



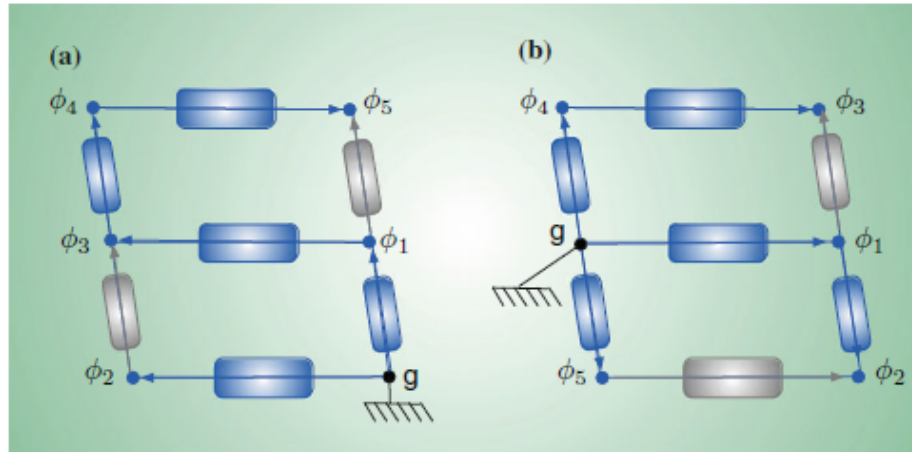


Figura 51 – Possíveis escolhas de uma spanning tree, do nó de referência e o caminho que liga aos nós ativos no circuito

Fonte: [206]

A teoria relatada anteriormente é útil quando, temos elementos adicionais no circuito elétrico tais como junção Josephson, sendo mais conveniente trabalhar com as variáveis de fluxo como coordenadas generalizadas pois, o fluxo magnético que circula no *Loop* que geralmente é descrito em função da diferença de fase Josephson. Com o auxílio das variáveis de nós de fluxo podemos escrever a Lagrangeana  $\mathcal{L}(\Phi_n, \dot{\Phi}_n) = T - V$ , do circuito composto por elementos capacitivos, indutivos e junção Josephson (que possui um capacitância e indutâncias características). Desta forma, termos cinéticos e de potencial envolvendo os elementos do circuito podem ser escritos como [206].

$$T = \frac{C_j}{2} (\dot{\Phi}_{n+1} - \dot{\Phi}_n)^2,$$

$$V = \frac{1}{2L_j} (\Phi_{n+1} - \Phi_n)^2,$$

$$E_J = \frac{C_{j,J}}{2} (\dot{\Phi}_{n+1} - \dot{\Phi}_n)^2 - E_{J0} \cos\left(\frac{\Phi_{n+1} - \Phi_n}{\Phi_0}\right).$$

O leitor desta tese que tiver interesse em se aprofundar de maneira minuciosa na teoria de circuitos descrita aqui, pode consultar a Ref. [205].

### A.3 Quantização dos modos do ressonador

Nesta seção iremos descrever a quantização dos modos de uma linha de transmissão 1D que desempenha o papel da cavidade óptica no contexto de óptica quântica. Agora temos que ter em mente que estamos lidando com elementos de um circuito elétrico, especificamente, um circuito LC. Na teoria de linhas de transmissão, é usual tratar como

uma descrição pictórica que esta linha possa ser descrita como um conjunto de infinitesimais circuitos cada um contendo uma capacitância e indutância por unidade de área. Os passos necessários para esse procedimento são feitos seguindo a Ref. [81].

Seguindo a notação de Devoret [205] a voltagem que é inserida na linha de transmissão pode ser definida a partir da variável de fluxo:

$$\Phi(x, t) = \int_{-\infty}^t V(x, t') dt' \quad (\text{A.12})$$

onde  $V(x, t')$  é a voltagem local na linha de transmissão na posição  $x$  e no tempo  $t$ . A indutância e capacitância por unidade comprimento são definidas por  $l$  e  $c$  respectivamente. Na linha de transmissão cada segmento de linha de comprimento  $dx$  tem uma indutância  $ldx$  e uma voltagem ao longo de cada segmento  $-dx\partial_x\partial_t\Phi(x, t)$ . Em contrapartida, o fluxo através dessa indutância é  $-dx\partial_x\Phi(x, t)$  de modo que o valor local da corrente é definido por:

$$I(x, t) = -\frac{1}{l}\partial_x\Phi(x, t) \quad (\text{A.13})$$

Tendo a voltagem e a corrente que passam através da linha podemos agora definir a lagrangeana da linha de comprimento  $L$ :

$$\mathfrak{L}_r = \int_0^L dx \mathfrak{L}(x, t) = \int_0^L dx \left[ \frac{c}{2} (\partial_t\Phi)^2 - \frac{1}{2l} (\partial_x\Phi)^2 \right] \quad (\text{A.14})$$

A equação de movimento de Euler-Lagrange para este sistema é da forma

$$\frac{\partial\mathfrak{L}_r}{\partial\Phi(x, t)} - \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{\partial\mathfrak{L}_r}{\partial\left(\frac{\partial\Phi(x, t)}{\partial\alpha}\right)} \right) = 0$$

onde  $\alpha = x, t$ . A partir da equação de Euler-Lagrange anterior obtemos a equação de movimento

$$v_p^2\partial_x^2\Phi - \partial_t^2\Phi = 0, \quad (\text{A.15})$$

que nada mais é do que uma equação de onda cuja velocidade é  $v_p = \frac{1}{\sqrt{lc}}$ .

Da lagrangeana O momentum conjugado  $\Phi$  descreve a densidade de carga

$$q(x, t) = \frac{\delta\mathfrak{L}_g}{\delta\partial_t\Phi} = c\partial_t\Phi \quad (\text{A.16})$$

que é  $q(x, t) = cV(x, t)$ . Finalmente o hamiltoniano é dado por

$$H = \int_0^L dx \left\{ \frac{1}{2c}q^2 + \frac{1}{2l}(\partial_x\Phi)^2 \right\} \quad (\text{A.17})$$

Voltando a definição da Eq.(4), pode-se propor uma solução clássica no intuito de descrever os modos normais

$$\Phi(x, t) = e^{-i\omega t}\phi(x) \quad (\text{A.18})$$

que permite encontrar uma equação tipo Schrodinger de autovalor

$$-\partial_x^2\phi(x) = k^2\phi(x) \quad (\text{A.19})$$

onde o vetor de onda é  $k = \frac{\omega}{v_p}$  e a velocidade do modo da onda é  $v_p = \frac{1}{\sqrt{lc}}$ . Uma condição importante diz respeito ao fato da corrente ir à zero na fronteira da linha de transmissão, isto é nas bordas. Isso equivale a condição de circuito aberto, onde as autofunções tem derivadas nulas nas bordas. Escolhendo uma autofunção particular do tipo

$$\phi_n(x) = \sqrt{2} \cos(k_n x) \quad (\text{A.20})$$

A autofunção acima tem duas propriedades particulares:

$$\int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx = L \delta_{nm} \quad (\text{A.21})$$

e

$$\int_0^L dx [\partial_x \phi_n(x)] [\partial_x \phi_m(x)] = L k_n^2 \delta_{nm} \quad (\text{A.22})$$

Sob tais condições a Lagrangeana (3) pode ser diagonalizada usando a base de modos normais espaciais como uma base. Utilizando uma expansão para o fluxo (no mesmo espírito) do potencial vetor na quantização do campo eletromagnético usualmente vista em óptica quântica

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(t) \phi_n(x) \quad (\text{A.23})$$

onde assume-se que  $\xi$  são funções arbitrárias do tempo (não sendo estas necessariamente oscilantes). Substituindo a Eq.(A.23) na lagrangeana clássica Eq.(A.14) e utilizando as relações (A.21) e (A.22) chega-se na Lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{\text{ressonador}} = \frac{1}{2} Lc \sum_{n=0}^{\infty} [\partial_t \xi_n^2 - \omega_n^2 \xi_n^2] \quad (\text{A.24})$$

Da lagrangeana obtida na Eq.(A.24), podemos perceber que esta apresenta uma forma característica de uma equação de oscilador harmônico.

Utilizando a Lagrangeana (A.24) pode-se extrair o momentum conjugado referente a variável  $\xi$  obtendo assim:

$$q_n = \frac{\delta \mathcal{L}_r}{\delta \partial_t \xi_n} = Lc \partial_t \xi_n, \quad (\text{A.25})$$

a cordenada relativa a carga do sistema.

Após efetuar uma tranformação de Legendre obtemos a Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{Lc} q_n^2 + Lc \omega_n^2 \xi_n^2 \right\}. \quad (\text{A.26})$$

No intuito de promover a quantização deste sistema é útil efetuar a correspondência entre as variáveis  $q_n$  e  $\xi_n$  para operadores do tipo

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_n &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_n Lc}} (\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger) \\ \hat{q}_n &= -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_n Lc}{2}} (\hat{a}_n - \hat{a}_n^\dagger). \end{aligned}$$

Substituindo estes operadores no hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{LC} \hat{q}_n^2 + LC\omega_n^2 \hat{\xi}_n^2 \right\},$$

e respeitando a relação de comutação  $[\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] = \delta_{nm}$ , obtém-se a expressão para o hamiltoniano anterior fica

$$H = \hbar\omega_n \left( \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{A.27})$$

onde  $\omega_n = 1/\sqrt{L_r C_r}$ . Perceba que a forma final é independente do tamanho L do ressonador. Para o ressonador  $b$ , o hamiltoniano é similar a (A.27) sendo que os modos bosônicos são definidos por  $\hat{b}_n$ .

Como discutido em [81], as excitações deste sistema pode ser interpretadas como o movimento coletivo de elétrons supercondutores que compõem a linha de transmissão, embora, pode-se também interpretar estas excitações como fótons do campo eletromagnético. Como na dedução da quantização consideramos que esse ressonador é constituído de elementos agrupados de indutância L e capacitância C, é razoável pensar que o campo elétrico pode surgir nas placas do capacitor e um campo magnético aparece por conta da bobina no indutor. Por isso, escolhemos as coordenadas como as variáveis de fluxo pertencentes a bobina, enquanto a carga do capacitor sendo equivalente ao campo elétrico nas placas.

## A.4 Qubit de Fluxo

Neste sistema, a fase exerce um papel dominante sendo que através da quantização do fluxo [203]

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + 2\pi f = 2\pi n, \quad (\text{A.28})$$

onde onde  $f = \frac{\tilde{\Phi}_{ext}}{\Phi_0}$ , é o parâmetro de fluxo magnético. Essa condição entre fluxo magnético externo e diferença de fase das junções é oriunda da teoria de SQUID-DC [203], onde um loop supercondutor interrompido por duas ou mais junções Josephson é utilizado para investigar campos magnéticos altamente sensíveis.

Na Eq. (A.28) com o auxílio da regra de quantização de fluxo [203], pode-se fixar umas das três fases, no caso a fase  $\varphi_3$ , e deixamos livres as outras duas fases simétricas  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Analisando o circuito pictórico do qubit de fluxo ilustrado na Fig.52, observa-se que existe um nó fundamental dado por  $\varphi_g$ , onde a variável dos ramos é <sup>3</sup>  $\Phi(1, g) = \varphi_1$  e  $\Phi(2, g) = \varphi_2$ , enquanto que temos apenas um ramo de fechamento(closure)  $\Phi_C(1, 2)$  com um fluxo  $\tilde{\Phi}_{ext}$  associado.

<sup>3</sup> Sem perda de generalidade iremos adotar  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ .

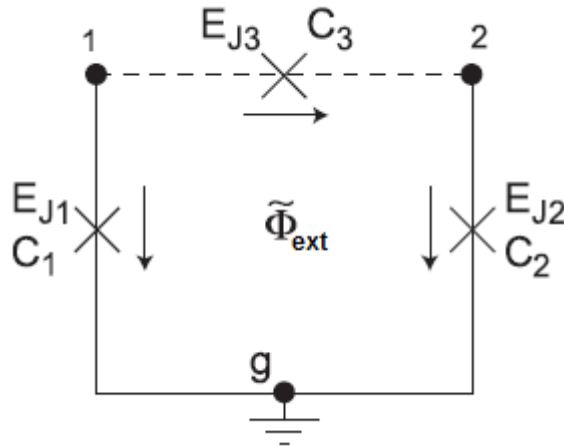


Figura 52 – Representação pictórica, da spanning tree, do nó de referência e o caminho que liga aos nós ativos no circuito do átomo artificial de fluxo. Cada junção tem uma corrente crítica e uma capacitância.

Fonte: Adaptada da Ref. [207]

Sob tal imposição, pode-se escrever a Lagrangeana do sistema em função das variáveis dos nós ativos no loop<sup>4</sup>, obtendo:

$$\mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = T(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) - U(\varphi_1, \varphi_2), \quad (\text{A.29})$$

onde o termo *cinético* é de cada junção JJ na Fig. 52,

$$\begin{aligned} T(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) &= \frac{C}{2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \alpha \dot{\varphi}_3^2), \\ &= \frac{C}{2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \alpha (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2), \\ &= \frac{C}{2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 (\dot{\varphi}_1^2) + \frac{C}{2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 (\dot{\varphi}_2^2) + \frac{C}{2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \alpha (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

com os dois primeiros termos são oriundos da quantização do fluxo, onde fixamos uma das fases para as duas junções simétricas e assimétricas. Em seguida fornecemos o termo referente ao potencial de cada junção, que depende apenas das variáveis  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ :

$$U(\varphi_1, \varphi_2) = -E_J [\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \alpha (\cos \varphi_1 - \varphi_2 - 2\pi f)]. \quad (\text{A.31})$$

A Lagrangeana (A.29) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) &= \frac{C}{2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 (\dot{\varphi}_1^2) + \frac{C}{2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{C}{2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \alpha (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2 + \\ &\quad + E_J [\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \alpha (\cos \varphi_1 - \varphi_2 - 2\pi f)], \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Lembre-se que por conta da diferença de fase ser invariante de gauge, a diferença de fase em cada junção pode ser escrita como  $\varphi_1 = \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi_1$  e  $\varphi_2 = \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi_2$ , onde  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  são os fluxos magnéticos em cada junção.

onde as equações de movimento definida por

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_i} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} = 0,$$

cujas variáveis canônicas são

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_1} = C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 [\dot{\varphi}_1 + \alpha (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)], \quad (\text{A.32})$$

$$p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_2} = C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 [\dot{\varphi}_2 - \alpha (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)], \quad (\text{A.33})$$

sendo que as expressões (A.32) e (A.33), reescritas em termos de  $\dot{\varphi}_1$  e  $\dot{\varphi}_2$  resultam em:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2} \left[ \frac{1 + \alpha}{1 + 2\alpha} p_1 + \frac{\alpha}{1 + 2\alpha} p_2 \right], \quad (\text{A.34})$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{1}{C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2} \left[ \frac{\alpha}{1 + 2\alpha} p_1 + \frac{1 + \alpha}{1 + 2\alpha} p_2 \right]. \quad (\text{A.35})$$

O hamiltoniano do sistema ao efetuar uma transformação de Legendre

$$H(p_1, p_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \sum_i p_i \dot{\varphi}_i - \mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2), \quad (\text{A.36})$$

substituindo (A.34) e (A.35) em (A.36) após alguns procedimentos algébricos

$$H_{QF} = \frac{2\pi^2 ((1 + \alpha) p_1^2 + 2\alpha p_1 p_2 + (1 + \alpha) p_2^2)}{(C + 2C\alpha) \Phi_0^2}, \quad (\text{A.37})$$

e reescrevendo os termos do fluxo magnético e capacitâncias em função de  $\Phi_0 = h/2e$ , na expressão (A.37), obtemos

$$H_{QF} = 4E_C \left( \frac{1 + \alpha}{1 + 2\alpha} p_1^2 + \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha} p_1 p_2 + \frac{1 + \alpha}{1 + 2\alpha} p_2^2 \right) \quad (\text{A.38})$$

$$-E_J [\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \alpha (\cos \varphi_1 - \varphi_2 - 2\pi f)]. \quad (\text{A.39})$$

No hamiltoniano (A.38),  $E_C = e^2/2C$  é a energia de carga do sistema e  $E_J$  é a energia Josephson já obtida antes. Vale apenas destacar que este valor surge apenas por questões de parametrização, pois no qubit de fluxo, é obedecida a razão  $E_J \geq E_C$ . O hamiltoniano Eq.(A.38) do qubit de fluxo, pode ser diagonalizado utilizando a base de carga envolvendo o número de pares de Cooper e a diferença de fase  $[n, \varphi] = -i$  de maneira análoga ao procedimento adotado para diagonalizar o qubit de carga [208]. Utilizando o critério da relação de comutação anterior, é possível diagonalizar o hamiltoniano (A.38) truncando, o sistema em número máximo de estados de par de Cooper na ilha. No pacote numérico conhecido como *quantum toolbox in Python* (QUTIP) [93], existe um código que diagonaliza este sistema, mas também é possível transladar esse código para o Matlab onde também é possível obter essa diagonalização<sup>5</sup>. Expressando os operadores na base de carga temos

$$H_t = -\frac{4E_C}{(1 + 2\alpha)} \left[ (1 + \alpha) \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right)^2 + 2\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + (1 + \alpha) \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right)^2 \right] \quad (\text{A.40})$$

<sup>5</sup> A rotina utilizada pelo autor contém um pacote interno denominado como *wavefunction2d* que permite efetuar cálculos numéricos de equações de onda em duas dimensões.

continuando

$$H_t = -\frac{4}{(1+2\alpha)} \frac{E_C}{E_J} \left[ (1+\alpha) \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right)^2 + 2\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + (1+\alpha) \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right)^2 \right] \quad (\text{A.41})$$

onde na expressão (A.41), utilizamos a relação entre momentum e fase da junção  $p_i \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$  com  $(i = 1, 2)$  e utilizamos o parâmetro  $E_J$  como constante para os cálculos numéricos durante a diagonalização do hamiltoniano. O potencial (A.31) pode ser escrito em função de séries de Fourier devido as fases  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , na forma

$$U(\varphi_1, \varphi_2)/E_J = (2+\alpha) \frac{1}{2} (e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1}) \frac{1}{2} (e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2}) + \alpha \frac{1}{2} (e^{i2\pi f} e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} + e^{-i2\pi f} e^{-i\varphi_1} e^{i\varphi_2})$$

cuja relação entre o número de pares de Cooper e diferença de fase na expressão anterior é dada por

$$U(\varphi_1, \varphi_2)/E_J = \sum_{n_1} \sum_{n_2} u_{n_1, n_2} e^{in_1 \varphi_1} e^{in_2 \varphi_2}.$$

Outros passos no processo de diagonalização são detalhados na Ref. [93].





# APÊNDICE B – Procedimentos para encontrar o Hamiltoniano Efetivo

O hamiltoniano do sistema é dado por

$$H = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + \omega_0 \frac{\hat{\sigma}_z}{2} + (\lambda_a a + \lambda_b b + \Omega e^{-i\omega_1 t}) \sigma_{eg} + h.c),$$

este pode ser separado em duas partes, onde uma parte dita livre é:

$$H_0 = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + \omega_0 \frac{\hat{\sigma}_z}{2}, \quad (\text{B.1})$$

enquanto a parte interagente é dada por

$$V_T = (\lambda_a a \sigma_{eg} + \lambda_b b \sigma_{eg} + \Omega \sigma_{eg} e^{-i\omega_1 t} + h.c). \quad (\text{B.2})$$

## B.0.1 Representação de Interação

Na representação de interação  $V_T$  é escrito na forma:

$$V_{IT}(t) = (\lambda_a e^{-i\delta_a t} a \sigma_{eg} + \lambda_b e^{-i\delta_b t} b \sigma_{eg} + \Omega \sigma_{eg} + h.c)$$

onde  $\delta_a = \omega_0 - \omega_a$ ,  $\delta_b = \omega_0 - \omega_b$  e  $\Omega = |\Omega| e^{i\varphi}$ .

## B.0.2 Primeira transformação: $U = \exp[-i(\Omega \sigma_{eg} - \Omega^* \sigma_{ge}) t]$

Permite escrever  $V_T$  na base atômica, cujo hamiltoniano transformado será:

$$\mathcal{V}_{IT}(t) = UV_{IT}(t)U^{-1} - (\Omega \sigma_{eg} - \Omega^* \sigma_{ge})$$

Utilizando uma mudança para a base atômica de estados  $|\pm\rangle = (|e\rangle \pm e^{-i\varphi} |g\rangle) / \sqrt{2}$  e algumas manipulações algébricas pode-se escrever

$$\mathcal{V}_{IT}(t) = \left( \frac{\lambda_a}{2} a e^{-i\delta_a t} + \frac{\lambda_b}{2} b e^{-i\delta_b t} \right) [(\sigma_{++} - \sigma_{--}) - e^{2i\Omega t} \sigma_{+-} + e^{-2i\Omega t} \sigma_{-+}] + h.c.$$

Na expressão anterior as constantes de acoplamento são  $\lambda_a = \frac{\tilde{\lambda}_a}{2} e^{-i\varphi}$  e  $\lambda_b = \frac{\tilde{\lambda}_b}{2} e^{-i\varphi}$ .

Primeira consideração:

$$\begin{aligned} \delta_a &= |\Delta| \\ \delta_b &= -|\Delta| + \delta \end{aligned}$$

Permite que  $\mathcal{V}_{IT}(t)$  seja escrito como:

$$\mathcal{V}_{IT}(t) = (\lambda_a a e^{i|\Delta|t} + \lambda_b b e^{-i(|\Delta|+\delta)t})[\sigma_{++} - \sigma_{--}] - e^{2i\Omega t} \sigma_{+-} + e^{-2i\Omega t} \sigma_{-+} + h.c$$

Tendo em mente as condições necessárias para efetuar a aproximação de onda girante, isto é,  $\{|\pm(|\Delta| + 2\Omega)| \gg \eta = 2\Omega - |\Delta|\}$  referentes aos termos que oscilam rapidamente, obtemos da expressão anterior

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{IT}(t) = & \lambda_a e^{-i\eta t} a \sigma_{-+} + \lambda_a^* e^{i\eta t} a^\dagger \sigma_{+-} \\ & - \lambda_b e^{i\eta t} e^{-i\delta t} b \sigma_{+-} - \lambda_b^* e^{-i\eta t} e^{i\delta t} b^\dagger \sigma_{-+}. \end{aligned}$$

## B.1 Dedução do Hamiltoniano efetivo

O hamiltoniano de interação é:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{IT}(t) = & (\lambda_a a e^{-i\delta_a t} + \lambda_b b e^{-i\delta_b t})[\sigma_{++} - \sigma_{--}] - e^{2i\Omega t} \sigma_{+-} + e^{-2i\Omega t} \sigma_{-+} + \\ & + (\lambda_a^* a^\dagger e^{i\delta_a t} + \lambda_b^* b^\dagger e^{i\delta_b t})[\sigma_{++} - \sigma_{--}] - e^{-2i\Omega t} \sigma_{-+} + e^{2i\Omega t} \sigma_{+-}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

O termo acima fica para  $\delta_a = \Delta$  e  $\delta_b = -\Delta + \delta$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{IT}(t) = & (\lambda_a a e^{-i\Delta t} + \lambda_b b e^{i(\Delta-\delta)t})[\sigma_{++} - \sigma_{--}] - e^{2i\Omega t} \sigma_{+-} + e^{-2i\Omega t} \sigma_{-+} + \\ & + (\lambda_a^* a^\dagger e^{i\Delta t} + \lambda_b^* b^\dagger e^{-i(\Delta+\delta)t})[\sigma_{++} - \sigma_{--}] - e^{-2i\Omega t} \sigma_{-+} + e^{2i\Omega t} \sigma_{+-}. \end{aligned}$$

Utilizando as condições necessárias para efetuar a aproximação de onda girante, isto é,  $\{|\pm(|\Delta| + 2\Omega)| \gg \eta = 2\Omega - |\Delta|\}$ , referentes aos termos que oscilam rapidamente, obtemos da expressão anterior

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{IT}(t) = & -\lambda_a e^{i\eta t} a \sigma_{+-} - \lambda_a^* e^{-i\eta t} a^\dagger \sigma_{-+} \\ & \lambda_b e^{-i\eta t} e^{-i\delta t} b \sigma_{-+} + \lambda_b^* e^{i\eta t} e^{i\delta t} b^\dagger \sigma_{+-}. \end{aligned}$$

Considerando o regime dispersivo  $|\Delta| \gg |\Omega| \gg |\lambda_a|, |\lambda_b|$

Utilizando o método de James-Jerke

$$\begin{aligned}
H_{ef} &= -i\mathcal{V}_{IT}(t) \int^t \mathcal{V}_{IT}(t') dt' \\
&= -i\mathcal{V}_{IT}(t) \times \left[ -\frac{\lambda_a e^{i\eta t} a \sigma_{+-}}{i\eta} - \frac{\lambda_a^* e^{-i\eta t} a^\dagger \sigma_{-+}}{-i\eta} + \frac{\lambda_b e^{-i\eta t} e^{-i\delta t} b \sigma_{-+}}{-i(\eta + \delta)} + \frac{\lambda_b^* e^{i\eta t} e^{i\delta t} b^\dagger \sigma_{+-}}{i(\eta + \delta)} \right] \\
&= -i \left( -\lambda_a e^{i\eta t} a \sigma_{+-} - \lambda_a^* e^{-i\eta t} a^\dagger \sigma_{-+} + \lambda_b e^{-i\eta t} e^{-i\delta t} b \sigma_{-+} + \lambda_b^* e^{i\eta t} e^{i\delta t} b^\dagger \sigma_{+-} \right) \times \\
&\quad \times \left[ -\frac{\lambda_a e^{i\eta t} a \sigma_{+-}}{i\eta} - \frac{\lambda_a^* e^{-i\eta t} a^\dagger \sigma_{-+}}{-i\eta} + \frac{\lambda_b e^{-i\eta t} e^{-i\delta t} b \sigma_{-+}}{-i(\eta + \delta)} + \frac{\lambda_b^* e^{i\eta t} e^{i\delta t} b^\dagger \sigma_{+-}}{i(\eta + \delta)} \right] \\
&= \frac{|\lambda_a|^2 a a^\dagger \sigma_{++}}{\eta} + \frac{|\lambda_b|^2 b^\dagger b \sigma_{++}}{(\eta - \delta)} - \frac{|\lambda_a|^2 a^\dagger a \sigma_{--}}{\eta} - \frac{|\lambda_b|^2 b b^\dagger \sigma_{--}}{(\eta - \delta)} \\
&\quad + \left( \frac{\lambda_a \lambda_b e^{i\delta t} a b}{\eta} + \frac{\lambda_a^* \lambda_b^* e^{-i\delta t} a^\dagger b^\dagger}{(\eta - \delta)} \right) \sigma_{--} - \left( \frac{\lambda_a \lambda_b e^{-i\delta t} a b}{(\eta - \delta)} + \frac{\lambda_a^* \lambda_b^* e^{i\delta t} a^\dagger b^\dagger}{\eta} \right) \sigma_{++}
\end{aligned}$$

para  $\delta < \eta$ :

$$\begin{aligned}
H_{ef}(t) &= \left( \frac{\lambda_a \lambda_b e^{i\delta t} a b}{\eta} + \frac{\lambda_a^* \lambda_b^* e^{-i\delta t} a^\dagger b^\dagger}{\eta} \right) (\sigma_{--} - \sigma_{++}) - \\
&\quad - \left( \frac{|\lambda_a|^2 a^\dagger a}{\eta} + \frac{|\lambda_b|^2 b b^\dagger}{\eta} \right) \sigma_{--} + \left( \frac{|\lambda_a|^2 a a^\dagger}{\eta} + \frac{|\lambda_b|^2 b^\dagger b}{\eta} \right) \sigma_{++}
\end{aligned}$$

para  $|\Psi(0)\rangle_{atom} = |-\rangle_{atom}$  o hamiltoniano efetivo, após o procedimento algébrico anterior encontramos

$$\mathcal{H}_{ef} = \left( \frac{\lambda_a \lambda_b e^{-i\delta t} a b}{\eta} + h.c \right) - \left( \frac{|\lambda_a|^2 a^\dagger a}{\eta} + \frac{|\lambda_b|^2 b b^\dagger}{\eta} \right),$$

onde

$$H_0 = -(\chi_a a^\dagger a + \chi_b b b^\dagger) \sigma_{--} + (\chi_a a a^\dagger + \chi_b b^\dagger b) \sigma_{++}$$

com  $\chi_\beta = \frac{g_\beta^2}{4\eta}$  ( $\beta = a, b$ ).



# APÊNDICE C – Alguns Resultados analíticos obtidos para o fenômeno de DIT

Da solução geral apresentada no Capítulo-3, pode-se derivar a solução estacionária para um número arbitrário de TLSs acoplados no espaço livre. O procedimento anterior possibilita utilizar a chamada aproximação semiclássica [78], decorrelacionando os operadores atômicos  $\langle \sigma_{\pm}^i \sigma_z^j \rangle \approx \langle \sigma_{\pm}^i \rangle \langle \sigma_z^j \rangle$  ( $i \neq j$ ). O valor médio dos operadores é calculado utilizando a relação

$$\frac{d}{dt} \langle O \rangle = \frac{d}{dt} Tr[\rho O] = Tr \left[ \frac{d\rho}{dt} O \right] = Tr [(\mathcal{L}\rho) O]$$

onde  $\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho$

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \mathcal{D}[\rho] \quad (\text{C.1})$$

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho \quad (\text{C.2})$$

sendo o dissipador

$$\mathcal{D}[\rho] = \sum_{i=0}^N \gamma_i (2\sigma_-^i \rho \sigma_+^i - \sigma_+^i \sigma_-^i \rho - \rho \sigma_+^i \sigma_-^i), \quad (\text{C.3})$$

e o hamiltoniano é o mesmo definido no Capítulo.2.

Efetuada os cálculos dos valores médios  $\langle \sigma_{\pm}^i \rangle$ , utilizando propriedades cíclicas do traço  $Tr(ABC) = Tr(BCA) = Tr(CAB)$  após alguma álgebra obtemos o sistema de equações:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\sigma}_-^0 \rangle &= -(i\Delta_p + \gamma_0) \langle \sigma_-^0 \rangle + id_0 \langle \sigma_z^0 \rangle \langle \sigma_-^1 \rangle + i\Omega_p \langle \sigma_z^0 \rangle, \\ \langle \dot{\sigma}_-^j \rangle &= -(i\Delta_p + \gamma_j) \langle \sigma_-^j \rangle + id_{j-1} \langle \sigma_z^j \rangle \langle \sigma_-^{j-1} \rangle + id_{j+1} \langle \sigma_z^j \rangle \langle \sigma_-^{j+1} \rangle \quad (\text{para } 1 \leq j \leq N-1), \\ \langle \dot{\sigma}_-^N \rangle &= -(i\Delta_p + \gamma_N) \langle \sigma_-^N \rangle + id_{N-1} \langle \sigma_z^N \rangle \langle \sigma_-^{N-1} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

sendo que durante os procedimentos algébricos utilizamos a condição de baixa excitação atômica, isto é,  $\langle \sigma_z^j \rangle \approx -1$ . Para obter a solução estacionária geral para o valor médio  $\langle \dot{\sigma}_-^0 \rangle$  que irá fornecer a resposta óptica do sistema, podemos efetuar um *truque* no qual dado um número arbitrário de TLSs, resolvemos o sistema de equação (C.4) na seguinte

forma: Considere o caso  $N = 5$  TLSs na (C.4)

$$(\Delta_p + i\gamma_0) \sigma^0 + d_0 \sigma^1 + \Omega_p = 0, \quad (\text{C.5})$$

$$(\Delta_p + i\gamma_1) \sigma^1 + d_0 \sigma^0 + d_1 \sigma^2 = 0, \quad (\text{C.6})$$

$$(\Delta_p + i\gamma_2) \sigma^2 + d_1 \sigma^1 + d_2 \sigma^3 = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$(\Delta_p + i\gamma_3) \sigma^3 + d_2 \sigma^2 + d_3 \sigma^4 = 0, \quad (\text{C.8})$$

$$(\Delta_p + i\gamma_4) \sigma^4 + d_3 \sigma^3 + d_4 \sigma^5 = 0, \quad (\text{C.9})$$

$$(\Delta_p + i\gamma_5) \sigma^5 + d_4 \sigma^4 = 0, \quad (\text{C.10})$$

Partindo da Eq. (C.10) temos

$$\sigma^5 = -\frac{d_4 \sigma^4}{(\Delta_p + i\gamma_5)} = -\frac{d_4 \sigma^4}{\delta_5}, \quad (\text{C.11})$$

e substituindo (C.11) em (C.9)

$$\sigma^4 = -\frac{d_3 \delta_5 \sigma^3}{\delta_5 (\Delta_p + i\gamma_4) - d_4^2} = -\frac{d_3 \delta_5 \sigma^3}{\delta_4}, \quad (\text{C.12})$$

novamente substituindo (C.12) em (C.8)

$$\sigma^3 = -\frac{d_2 \delta_4 \sigma^2}{\delta_4 (\Delta_p + i\gamma_3) - d_3^2 \delta_5} = -\frac{d_2 \delta_4 \sigma^2}{\delta_3}, \quad (\text{C.13})$$

novamente substituindo (C.13) em (C.7)

$$\sigma^2 = -\frac{d_1 \delta_3 \sigma^1}{\delta_3 (\Delta_p + i\gamma_2) - d_2^2 \delta_4} = -\frac{d_1 \delta_3 \sigma^1}{\delta_2}, \quad (\text{C.14})$$

continuando, substituindo (C.14) em (C.6)

$$\sigma^1 = -\frac{d_0 \delta_2 \sigma^0}{\delta_2 (\Delta_p + i\gamma_1) - d_1^2 \delta_3} = -\frac{d_0 \delta_4 \sigma^0}{\delta_1}, \quad (\text{C.15})$$

continuando, substituindo (C.15) em (C.5)

$$\sigma^0 = -\frac{\Omega_p \delta_1}{\delta_1 (\Delta_p + i\gamma_0) - d_0^2 \delta_2} = -\frac{\Omega_p \delta_1}{\delta_0}.$$

O procedimento feito acima nos leva a solução estacionária geral para  $\langle \sigma^0 \rangle$

$$\langle \sigma_-^0 \rangle_{ss} \approx -\Omega_p \frac{\delta_1}{\delta_0}, \quad (\text{C.16})$$

com

$$\delta_k = \delta_{k+1} (\Delta_p - i\gamma_k) - \delta_{k+2} |d_k|^2, \quad (\text{C.17})$$

para  $k = 0, 1, \dots, N - 2$ , e

$$\delta_{N-1} = \delta_N (\Delta_p - i\gamma_{N-1}) - |d_{N-1}|^2, \quad (\text{C.18})$$

$$\delta_N = (\Delta_p - i\gamma_N). \quad (\text{C.19})$$

mostrada no capítulo-3.

Por exemplo, abaixo apresentamos algumas expressões explícitas para a solução geral (C.16).

Para  $N = 2$  a solução é

$$\langle \sigma_+^0 \rangle_{ss} = - \frac{\Omega_p [d^2 - (\Delta_p + i\gamma_1)(\Delta_p + i\gamma_2)]}{(\Delta_p + i\gamma_0) [d^2 - (\Delta_p + i\gamma_1)(\Delta_p + i\gamma_2)] + d_0^2 (\Delta + i\gamma_2)}.$$

No caso,  $N = 3$  a solução é dada por

$$\langle \sigma_+^0 \rangle_{ss} = \frac{i\Omega_p (id^2 (\Delta_p + i\gamma_3) + (\gamma_1 - i\Delta_p) (-d^2 + (\Delta_p + i\gamma_2) (\Delta_p + i\gamma_3)))}{d_0^2 (-d^2 + (\Delta_p + i\gamma_2) (\Delta_p + i\gamma_3)) + F},$$

cujo fator no denominador é

$$F = (\Delta_p + i\gamma_0) \left( d^2 (\Delta_p + i\gamma_3) - (\Delta_p + i\gamma_1) \left( -d^2 + (\Delta_p + i\gamma_2) (\Delta_p + i\gamma_3) \right) \right).$$

Para  $N = 4$ , a solução é

$$\langle \sigma_+^0 \rangle_{ss} = \frac{i\Omega_p [d^2 (-d^2 + (\Delta_p + i\gamma_3) (\Delta_p + i\gamma_4)) + \Xi]}{d_0^2 [id^2 (\Delta_p + i\gamma_4) + (\gamma_2 - i\Delta_p) (-d^2 + (\Delta_p + i\gamma_3) (\Delta_p + i\gamma_4))] + \Upsilon}$$

onde

$$\Xi = (\Delta_p + i\gamma_1) \left( d^2 (\Delta_p + i\gamma_4) + (-\Delta_p - i\gamma_2) \left( -d^2 + (\Delta_p + i\gamma_3) (\Delta_p + i\gamma_4) \right) \right).$$

$$\Upsilon = (\Delta_p + i\gamma_0) [d^2 \left( (\gamma_3 - i\Delta_p) (\Delta_p + i\gamma_4) + id^2 \right) + \Theta],$$

sendo que  $\Theta = (\Delta_p + i\gamma_1) (d^2 (\gamma_4 - i\Delta_p) + i (\Delta_p + i\gamma_2) (-d^2 + (\Delta_p + i\gamma_3) (\Delta_p + i\gamma_4)))$  no denominador da expressão anterior.

## C.1 Autoestados, autoenergias e taxas de transição entre os primeiros estados excitados e o estado fundamental para o caso $1 + N$ TLS's

O objetivo principal da presente seção é apresentar as soluções analíticas para as taxas de transição entre os autoestados do sistema (o primeiro excitado e o estado

fundamental). Para este fim, em primeiro lugar, devemos derivar os autoestados do nosso sistema, uma vez que a taxa de transição é definida como:

$$\Gamma_{kg} = \gamma_0 |\langle \psi_g | \sigma_- | \psi_k \rangle|^2, \quad (\text{C.20})$$

sendo  $|\psi_g\rangle$  e  $|\psi_k\rangle$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) o estado fundamental e os primeiros estados excitados, respectivamente.

Obtivemos analiticamente as expressões para os auto-estados e as taxas de transição para  $N = 2, 3$  e 4 somente. Como as expressões para os autoestados e autoenergias são muito extensas, abaixo apresentamos apenas para o  $N = 2$ .

Para  $N = 2$ , os autovalores e autovetores para este caso são:

$$\begin{aligned} E_0 &= -\frac{3\omega_0}{2} \rightarrow |\psi_0\rangle = |ggg\rangle, \\ E_1 &= -\frac{\omega_0}{2} - \sqrt{d_0^2 + d^2} \rightarrow |\psi_1\rangle = \frac{d_0}{\sqrt{2(d_0^2 + d^2)}} |egg\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |geg\rangle + \frac{d}{\sqrt{2(d_0^2 + d^2)}} |gge\rangle, \\ E_2 &= -\frac{\omega_0}{2} \rightarrow |\psi_2\rangle = -\frac{d}{\sqrt{d_0^2 + d^2}} |egg\rangle + \frac{d_0}{\sqrt{d_0^2 + d^2}} |gge\rangle, \\ E_3 &= -\frac{\omega_0}{2} + \sqrt{d_0^2 + d^2} \rightarrow |\psi_3\rangle = \frac{d_0}{\sqrt{2(d_0^2 + d^2)}} |egg\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |geg\rangle + \frac{d}{\sqrt{2(d_0^2 + d^2)}} |gge\rangle, \\ E_4 &= \frac{\omega_0}{2} - \sqrt{d_0^2 + d^2} \rightarrow |\psi_4\rangle = \frac{d}{\sqrt{2(d_0^2 + d^2)}} |eeg\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |ege\rangle + \frac{d_0}{\sqrt{2(d_0^2 + d^2)}} |gee\rangle, \\ E_5 &= \omega_0 \rightarrow |\psi_5\rangle = -\frac{d_0}{\sqrt{d_0^2 + d^2}} |eeg\rangle + \frac{d}{\sqrt{d_0^2 + d^2}} |gee\rangle, \\ E_6 &= \frac{\omega_0}{2} + \sqrt{d_0^2 + d^2} \rightarrow |\psi_6\rangle = \frac{d}{\sqrt{2(d_0^2 + d^2)}} |eeg\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |ege\rangle + \frac{d_0}{\sqrt{2(d_0^2 + d^2)}} |gee\rangle, \\ E_7 &= \frac{3\omega_0}{2} \rightarrow |\psi_7\rangle = |eee\rangle. \end{aligned}$$

Com esses auto-estados, podemos derivar as taxas de transição entre os primeiros estados excitados (com uma excitação) e o estado fundamental, sendo que estas são dadas por:

$$\Gamma_{2g} = \frac{d^2}{d_0^2 + d^2}; \quad \Gamma_{1g} = \Gamma_{3g} = \frac{d_0^2}{2(d^2 + d_0^2)},$$

A partir dessas expressões, descobrimos que essas taxas de transição têm um ponto de cruzamento especificamente em  $d = \frac{d_0}{\sqrt{2}}$ .

Para  $N = 3$ , as taxas de transição são dadas por:



$$\Gamma_{2g} = \Gamma_{3g} = \frac{2d^2 - d_0^2 + \sqrt{4d^2 + d_0^2}}{4\sqrt{4d^2 + d_0^2}}, \quad \Gamma_{1g} = \Gamma_{4g} = \frac{-2d^2 + d_0^2 + \sqrt{4d^2 + d_0^2}}{4\sqrt{4d^2 + d_0^2}},$$

e o ponto de cruzamento das taxas de transição é exatamente o mesmo, isto é,  $d = \frac{d_0}{\sqrt{2}}$ .

Para  $N = 4$ , as expressões para as taxas de transição são dadas pelas expressões a seguir,

$$\begin{aligned} \Gamma_{3g} &= \frac{d^2}{d^2 + 2d_0^2}, \\ \Gamma_{2g} = \Gamma_{4g} &= \frac{d_0^2(2d^2 - d_0^2 + C)}{2(d^2 + 2d_0^2)C}, \\ \Gamma_{1g} = \Gamma_{5g} &= \frac{d_0^2(-2d^2 + d_0^2 + C)}{2(d^2 + 2d_0^2)C}, \end{aligned}$$

onde  $C = \sqrt{5d^4 - 2d^2d_0^2 + d_0^4}$ . Para esta configuração temos dois pontos de cruzamento para as taxas:  $d = \frac{d_0}{\sqrt{2}}$ , onde todas as taxas se cruzam e  $d = \sqrt{\frac{2}{5}}d_0$ , onde algumas taxas se cruzam a medida que é acrescido o valor de acoplamento  $d$ .

## C.2 TLS's acoplados ao ressonador: soluções analíticas

Aqui consideramos  $1 + N$  TLSs acoplados sendo que, somente o primeiro TLS é acoplado ao ressonador. Este pode ser um cenário factível em alguns sistemas híbridos tais como EQcir.

A partir da solução geral apresentada no capítulo.3, pode-se obter expressões explícitas para o valor  $\langle a \rangle_{ss}$  no estado estacionário para qualquer número de TLSs acoplados ao ressonador. O método para obter a solução estacionária é similar ao adotado no caso do espaço livre descrito no início deste apêndice para uma cadeia de TLSs acoplados.

Por exemplo, abaixo mostramos alguma expressão explícita para  $\langle a \rangle_{ss}$ .

Para  $N = 2$ , temos a solução estacionária

$$\langle a \rangle_{ss} = - \left\{ \frac{\epsilon(d^2(-i\gamma_2 + \Delta_p) + (-i\gamma_0 + \Delta_p)(d^2 - (-i\gamma_1 + \Delta_p)(-i\gamma_2 + \Delta_p)))}{-g^2(d^2 - (-i\gamma_1 + \Delta_p)(-i\gamma_2 + \Delta_p)) + \Upsilon} \right\},$$

onde  $\Upsilon = (d^2(-i\gamma_2 + \Delta_p) + (-i\gamma_0 + \Delta_p)(d^2 - (-i\gamma_1 + \Delta_p)(-i\gamma_2 + \Delta_p)))(-i\kappa + \Delta_p)$ .

Para  $N = 3$  obtemos a solução

$$\langle a \rangle_{ss} = - \left\{ \frac{-\epsilon(-d^2(d^2 - (-i\gamma_2 + \Delta_p)(-i\gamma_3 + \Delta_p)) + \Pi))}{(-g^2(d^2(-i\gamma_3 + \Delta_p) + (-i\gamma_1 + \Delta_p)(d^2 - (-i\gamma_2 + \Delta_p)(-i\gamma_3 + \Delta_p))) + \Psi_a)} \right\},$$

com

$$\Pi = (-i\gamma_0 + \Delta_p)(d^2(-i\gamma_3 + \Delta_p) + (-i\gamma_1 + \Delta_p)(d^2 - (-i\gamma_2 + \Delta_p)(-i\gamma_3 + \Delta_p)))$$

$$\Psi_a = (-d^2(d^2 - (-i\gamma_2 + \Delta_p)(-i\gamma_3 + \Delta_p)) + (-i\gamma_0 + \Delta_p)(d^2(-i\gamma_3 + \Delta_p) + (-i\gamma_1 + \Delta_p)(d^2 - (-i\gamma_2 + \Delta_p)(-i\gamma_3 + \Delta_p))))(-i\kappa + \Delta_p).$$

### C.3 Taxas de transição entre o estado fundamental e o primeiros estados excitados para $1 + N$ TLS's acoplados ao ressonador

De maneira análoga ao procedimento adotado no espalo livre, é possível derivar analiticamente as taxas de transição para um número de  $1 + N$  TLSs onde o primeiro TLSs é acoplado ao ressonador. Essas taxas são calculadas utilizando a expressão:

$$\Gamma_{kg} = \gamma_0 |\langle \psi_g | a | \psi_k \rangle|^2,$$

sendo  $|\psi_g\rangle$  e  $|\psi_k\rangle$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) são os autoestados fundamentais e excitados respectivamente..

Para  $N = 2$ , as taxas são:

$$\Gamma_{1g} = \Gamma_{4g} = \frac{d^2 g^2}{4d^4 + g^4 + (2d^2 - g^2) \sqrt{4d^4 + g^4}},$$

$$\Gamma_{2g} = \Gamma_{3g} = \frac{d^2 g^2}{4d^4 + g^4 + (g^2 - 2d^2) \sqrt{4d^4 + g^4}}.$$

De maneira similar ao que ocorre no espaço livre, existe um ponto de cruzamento para um valor específico de  $d$  onde todas as taxas coincidem. Neste caso o ponto de cruzamento é  $d = g/\sqrt{2}$ .

Para o caso  $N = 3$ , as taxas são dadas por:

$$\Gamma_{3g} = \frac{d^2}{d^2 + 2g^2},$$

$$\Gamma_{1g} = \Gamma_{5g} = \frac{g^2 (g^2 - 2d^2 + C)}{2C (d^2 + 2g^2)},$$

$$\Gamma_{2g} = \Gamma_{4g} = \frac{g^2 (2d^2 - g^2 + C)}{2C (d^2 + 2g^2)},$$

sendo  $C = \sqrt{5d^4 - 2d^2g^2 + g^4}$ .

Para este caso todas as taxas se cruzam no ponto  $d = g/\sqrt{2}$ , onde algumas taxas se cruzam no ponto  $d = \sqrt{2/5}g$ .

# Referências

- 1 WEISS, U. *Quantum dissipative systems*. [S.l.]: World scientific, 2012. v. 13. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 126.
- 2 BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. et al. *The theory of open quantum systems*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2002. Citado 7 vezes nas páginas 29, 35, 36, 72, 96, 123 e 125.
- 3 RIVAS, A.; HUELGA, S. F. *Open quantum systems*. [S.l.]: Springer, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 29, 34, 35, 36 e 125.
- 4 HARTMANN, M. J. Quantum simulation with interacting photons. *Journal of Optics*, IOP Publishing, v. 18, n. 10, p. 104005, 2016. Citado na página 29.
- 5 WEIMER, H.; KSHETRIMAYUM, A.; ORÚS, R. Simulation methods for open quantum many-body systems. *arXiv preprint arXiv:1907.07079*, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 95.
- 6 DIEHL, S. et al. Quantum states and phases in driven open quantum systems with cold atoms. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 4, n. 11, p. 878, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 95.
- 7 BUCHHOLD, M. et al. Nonequilibrium effective field theory for absorbing state phase transitions in driven open quantum spin systems. *Physical Review B*, APS, v. 95, n. 1, p. 014308, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 95.
- 8 MARCUZZI, M. et al. Universal nonequilibrium properties of dissipative rydberg gases. *Physical review letters*, APS, v. 113, n. 21, p. 210401, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 95.
- 9 IEMINI, F. et al. Dissipative topological superconductors in number-conserving systems. *Physical Review B*, APS, v. 93, n. 11, p. 115113, 2016. Citado na página 29.
- 10 WERNER, A. et al. Positive tensor network approach for simulating open quantum many-body systems. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 23, p. 237201, 2016. Citado na página 29.
- 11 KSHETRIMAYUM, A.; WEIMER, H.; ORÚS, R. A simple tensor network algorithm for two-dimensional steady states. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 8, n. 1, p. 1291, 2017. Citado na página 29.
- 12 MAGHREBI, M. F.; GORSHKOV, A. V. Nonequilibrium many-body steady states via keldysh formalism. *Physical Review B*, APS, v. 93, n. 1, p. 014307, 2016. Citado na página 29.
- 13 HAROCHE, S.; RAIMOND, J.-M. *Exploring the quantum: atoms, cavities, and photons*. [S.l.]: Oxford university press, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

- 14 BLAIS, A. et al. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation. *Physical Review A*, APS, v. 69, n. 6, p. 062320, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 29, 30, 39 e 40.
- 15 WALLRAFF, A. et al. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 431, n. 7005, p. 162, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 39.
- 16 BARONE, A.; PATERNO, G. *Physics and applications of the Josephson effect*. [S.l.]: Wiley, 1982. Citado 4 vezes nas páginas 29, 40, 41 e 42.
- 17 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. *Quantum computation and quantum information*. [S.l.]: AAPT, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 36.
- 18 DEVORET, M. Mh devoret and jm martinis, quant. info. proc. 3, 163 (2004). v. 3, p. 163, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 40.
- 19 YOU, J.; NORI, F. Superconducting circuits and quantum information. *Physics today*, American Institute of Physics, v. 58, n. 11, p. 42–47, 2005. Citado na página 30.
- 20 GU, X. et al. Microwave photonics with superconducting quantum circuits. *Physics Reports*, Elsevier, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 47.
- 21 SCULLY O, M.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum Optics*. 1nd edition. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 46.
- 22 BRAAK, D. Integrability of the rabi model. *Physical Review Letters*, APS, v. 107, n. 10, p. 100401, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 47.
- 23 NIEMCZYK, T. et al. Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 6, n. 10, p. 772, 2010. Citado na página 30.
- 24 FORN-DÍAZ, P. et al. Observation of the bloch-siegert shift in a qubit-oscillator system in the ultrastrong coupling regime. *Physical review letters*, APS, v. 105, n. 23, p. 237001, 2010. Citado na página 30.
- 25 XIANG, Z.-L. et al. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 85, n. 2, p. 623, 2013. Citado na página 30.
- 26 CAVES, C. M. Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Physical Review D*, APS, v. 23, n. 8, p. 1693, 1981. Citado na página 30.
- 27 GERRY, C.; KNIGHT, P.; KNIGHT, P. L. *Introductory quantum optics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 30, 50, 51, 52 e 53.
- 28 WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. *Quantum optics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 30, 49, 51 e 57.
- 29 ORLANDO, T. P. et al. Superconducting persistent-current qubit. *Phys. Rev. B*, APS, v. 60, n. 22, p. 15398–15413, 1999. Citado 5 vezes nas páginas 30, 42, 43, 45 e 59.

- 30 DINIZ, E. C.; ROSSATTO, D. Z.; VILLAS-BÔAS, C. J. Two-mode squeezing operator in circuit qed. *Quantum Inf Process*, Springer US, v. 17, p. 202, 2018. Citado 8 vezes nas páginas 30, 54, 55, 59, 61, 62, 63 e 65.
- 31 YAN, F. et al. The flux qubit revisited to enhance coherence and reproducibility. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 7, p. 12964, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 30, 42 e 64.
- 32 XUE, F. et al. Two-mode squeezed states and entangled states of two mechanical resonators. *Physical Review B*, APS, v. 76, n. 6, p. 064305, 2007. Citado na página 30.
- 33 JOHANSSON, J. R. et al. Dynamical casimir effect in a superconducting coplanar waveguide. *Physical review letters*, APS, v. 103, n. 14, p. 147003, 2009. Citado na página 30.
- 34 JOHANSSON, J. et al. Dynamical casimir effect in superconducting microwave circuits. *Physical Review A*, APS, v. 82, n. 5, p. 052509, 2010. Citado na página 30.
- 35 WILSON, C. et al. Observation of the dynamical casimir effect in a superconducting circuit. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 479, n. 7373, p. 376, 2011. Citado na página 30.
- 36 EICHLER, C. et al. Observation of two-mode squeezing in the microwave frequency domain. *Physical Review Letters*, APS, v. 107, n. 11, p. 113601, 2011. Citado na página 30.
- 37 FLURIN, E. et al. Generating entangled microwave radiation over two transmission lines. *Physical review letters*, APS, v. 109, n. 18, p. 183901, 2012. Citado na página 30.
- 38 MENZEL, E. et al. Path entanglement of continuous-variable quantum microwaves. *Physical review letters*, APS, v. 109, n. 25, p. 250502, 2012. Citado na página 30.
- 39 EICHLER, C. et al. Quantum-limited amplification and entanglement in coupled nonlinear resonators. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 113, n. 11, p. 110502, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 64.
- 40 ANISIMOV, P. M. et al. Quantum metrology with two-mode squeezed vacuum: parity detection beats the heisenberg limit. *Physical review letters*, APS, v. 104, n. 10, p. 103602, 2010. Citado na página 30.
- 41 SCHNABEL, R. et al. Quantum metrology for gravitational wave astronomy. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 1, p. 121, 2010. Citado na página 30.
- 42 AASI, J. et al. Enhanced sensitivity of the ligo gravitational wave detector by using squeezed states of light. *Nature Photonics*, Nature Publishing Group, v. 7, n. 8, p. 613, 2013. Citado na página 30.
- 43 SCHNABEL, R. Squeezed states of light and their applications in laser interferometers. *Physics Reports*, Elsevier, v. 684, p. 1–51, 2017. Citado na página 30.
- 44 BRAUNSTEIN, S. L.; LOOCK, P. V. Quantum information with continuous variables. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 77, n. 2, p. 513, 2005. Citado na página 30.

- 45 BOLLER, K.-J.; IMAMOĞLU, A.; HARRIS, S. E. Observation of electromagnetically induced transparency. *Physical Review Letters*, APS, v. 66, n. 20, p. 2593, 1991. Citado na página 31.
- 46 FLEISCHHAUER, M.; IMAMOĞLU, A.; MARANGOS, J. P. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media. *Rev. Mod. Phys.*, APS, v. 77, n. 2, p. 633–673, 2005. Citado 8 vezes nas páginas 31, 67, 68, 69, 71, 74, 81 e 85.
- 47 PARKINS, S. Quantum optics: Single-atom transistor for light. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 465, n. 7299, p. 699, 2010. Citado na página 31.
- 48 MÜCKE, M. et al. Electromagnetically induced transparency with single atoms in a cavity. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 465, n. 7299, p. 755, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 31, 71 e 76.
- 49 CHOI, K. S. et al. Mapping photonic entanglement into and out of a quantum memory. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 452, n. 7183, p. 67, 2008. Citado na página 31.
- 50 SPECHT, H. P. et al. A single-atom quantum memory. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 473, n. 7346, p. 190, 2011. Citado na página 31.
- 51 BORGES, H. S.; VILLAS-BÔAS, C. J. Quantum phase gate based on electromagnetically induced transparency in optical cavities. *Physical Review A*, APS, v. 94, n. 5, p. 052337, 2016. Citado na página 31.
- 52 MORIGI, G.; ESCHNER, J.; KEITEL, C. H. Ground state laser cooling using electromagnetically induced transparency. *Physical review letters*, APS, v. 85, n. 21, p. 4458, 2000. Citado na página 31.
- 53 ROOS, C. et al. Experimental demonstration of ground state laser cooling with electromagnetically induced transparency. *Physical review letters*, APS, v. 85, n. 26, p. 5547, 2000. Citado na página 31.
- 54 LECHNER, R. et al. Electromagnetically-induced-transparency ground-state cooling of long ion strings. *Physical Review A*, APS, v. 93, n. 5, p. 053401, 2016. Citado na página 31.
- 55 ALZAR, C. G.; MARTINEZ, M.; NUSSENZVEIG, P. Classical analog of electromagnetically induced transparency. *American Journal of Physics*, AAPT, v. 70, n. 1, p. 37–41, 2002. Citado na página 31.
- 56 PONTE, M. A. et al. Electromagnetically induced transparency and dynamic stark effect in coupled quantum resonators. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 72, n. 3, p. 383, 2005. Citado na página 31.
- 57 XU, Q. et al. Experimental realization of an on-chip all-optical analogue to electromagnetically induced transparency. *Physical review letters*, APS, v. 96, n. 12, p. 123901, 2006. Citado na página 31.
- 58 SOUZA, J. A. et al. Electromagnetically-induced-transparency-related phenomena and their mechanical analogs. *Phys. Rev. A*, APS, v. 92, n. 2, p. 023818, 2015. Citado 6 vezes nas páginas 31, 69, 71, 74, 77 e 78.

- 59 RICE, P. R.; BRECHA, R. J. Cavity induced transparency. In: *Coherence and Quantum Optics VII*. [S.l.]: Springer, 1996. p. 587–588. Citado na página 31.
- 60 WAKS, E.; VUCKOVIC, J. Dipole induced transparency in drop-filter cavity-waveguide systems. *Physical review letters*, APS, v. 96, n. 15, p. 153601, 2006. Citado na página 31.
- 61 YUAN, C.-H.; ZHU, K.-D. Voltage-controlled slow light in asymmetry double quantum dots. *Applied physics letters*, AIP, v. 89, n. 5, p. 052115, 2006. Citado na página 31.
- 62 BORGES, H. et al. Tunneling induced transparency and slow light in quantum dot molecules. *Physical Review B*, APS, v. 85, n. 11, p. 115425, 2012. Citado na página 31.
- 63 BORGES, H.; OLIVEIRA, M.; VILLAS-BOAS, C. Influence of the asymmetric excited state decay on coherent population trapping. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 7, n. 1, p. 7132, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 75.
- 64 LIU, N. et al. Plasmonic analogue of electromagnetically induced transparency at the drude damping limit. *Nature materials*, Nature Publishing Group, v. 8, n. 9, p. 758, 2009. Citado na página 31.
- 65 LU, H.; LIU, X.; MAO, D. Plasmonic analog of electromagnetically induced transparency in multi-nanoresonator-coupled waveguide systems. *Physical Review A*, APS, v. 85, n. 5, p. 053803, 2012. Citado na página 31.
- 66 WEIS, S. et al. Optomechanically induced transparency. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 330, n. 6010, p. 1520–1523, 2010. Citado na página 31.
- 67 SOHAIL, A. et al. Optomechanically induced transparency in multi-cavity optomechanical system with and without one two-level atom. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 6, p. 28830, 2016. Citado na página 31.
- 68 PAPASIMAKIS, N. et al. Metamaterial analog of electromagnetically induced transparency. *Physical Review Letters*, APS, v. 101, n. 25, p. 253903, 2008. Citado na página 31.
- 69 TASSIN, P. et al. Planar designs for electromagnetically induced transparency in metamaterials. *Optics express*, Optical Society of America, v. 17, n. 7, p. 5595–2605, 2009. Citado na página 31.
- 70 LUKIN, M. et al. Quantum interference effects induced by interacting dark resonances. *Physical Review A*, APS, v. 60, n. 4, p. 3225, 1999. Citado na página 31.
- 71 YANG, X. et al. All-optical analog to electromagnetically induced transparency in multiple coupled photonic crystal cavities. *Physical review letters*, APS, v. 102, n. 17, p. 173902, 2009. Citado na página 31.
- 72 MA, P.-C. et al. Tunable double optomechanically induced transparency in an optomechanical system. *Physical Review A*, APS, v. 90, n. 4, p. 043825, 2014. Citado na página 31.

- 73 DINIZ, E. C.; BORGES, H. S.; VILLAS-BOAS, C. J. Multiple transparency windows and fano interferences induced by dipole-dipole couplings. *Phys. Rev. A*, APS, v. 97, n. 4, p. 043848, 2018. Citado 11 vezes nas páginas 31, 71, 72, 75, 77, 79, 80, 82, 83, 85 e 87.
- 74 COHEN-TANNOUJDI, C.; DUPONT-ROC, J.; GRYNBERG, G. *Atom-photon interactions: basic processes and applications*. [S.l.: s.n.], 1998. 678 p. Citado na página 35.
- 75 BEAUDOIN, F.; GAMBETTA, J. M.; BLAIS, A. Dissipation and ultrastrong coupling in circuit qed. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 84, n. 4, p. 043832, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 35, 38 e 60.
- 76 OLIVEIRA, T. W. de. *Termalização e correlações quânticas nos contextos de sistemas quânticos abertos e cadeias de spins*. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado em Física-PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos-SP, Brasil, 2013. Citado na página 35.
- 77 DINIZ, E. C. *Termalização de qubits sujeitos à ação de reservatórios coletivos markovianos*. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado em Física-Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos-SP, Brasil, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.
- 78 CARMICHAEL, H. *An open systems approach to quantum optics: lectures presented at the Université Libre de Bruxelles, October 28 to November 4, 1991*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009. v. 18. Citado 7 vezes nas páginas 35, 47, 60, 72, 76, 127 e 147.
- 79 BRASIL, C. A.; FANCHINI, F. F.; NAPOLITANO, R. d. J. A simple derivation of the lindblad equation. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 35, n. 1, p. 01–09, 2013. Citado na página 35.
- 80 SCALA, M. et al. Microscopic derivation of the jaynes-cummings model with cavity losses. *Physical Review A*, APS, v. 75, n. 1, p. 013811, 2007. Citado na página 38.
- 81 GIRVIN, S. M. Circuit qed: Superconducting qubits coupled to microwave photons. *Proceedings of the 2011 Les Houches Summer School*, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 40, 133, 136 e 138.
- 82 PEROPADRE, B.; GARCÍA-RIPOLL, J. J. *Control of ultrastrongly coupled systems in circuit quantum electrodynamics*. Tese (Doutorado) — PhD thesis. Universidad Complutense de Madrid. Tesis UCM, <http://eprints.ucm.es/24127/1>, 2013. Citado na página 40.
- 83 TINKHAM, M. *Introduction to superconductivity*. [S.l.]: Courier Corporation, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- 84 OLIVER, W. D.; WELANDER, P. B. Materials in superconducting quantum bits. *MRS bulletin*, Cambridge University Press, v. 38, n. 10, p. 816–825, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 129.
- 85 NOVIKOV, S. *Raman coherence effects in a superconducting Jaynes-Cummings system*. Dissertação (Mestrado) — Doctor of Philosophy)-Dissertation submitted to the Faculty of the Graduate School of the University of Maryland, College Park, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 129.



- 86 MOOIJ, J. et al. Josephson persistent-current qubit. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 285, n. 5430, p. 1036–1039, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 42, 43 e 44.
- 87 WAL, C. H. V. D. et al. Quantum superposition of macroscopic persistent-current states. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 290, n. 5492, p. 773–777, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.
- 88 CHIORESCU, I. et al. Coherent quantum dynamics of a superconducting flux qubit. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 299, n. 5614, p. 1869–1871, 2003. Citado na página 42.
- 89 MANUCHARYAN, V. E. et al. Fluxonium: Single cooper-pair circuit free of charge offsets. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 326, n. 5949, p. 113–116, 2009. Citado na página 42.
- 90 CLARKE, J.; WILHELM, F. K. Superconducting quantum bits. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 453, n. 7198, p. 1031, 2008. Citado na página 43.
- 91 OLIVER, W. D. A 4 superconducting qubits. Citado 3 vezes nas páginas 42, 43 e 45.
- 92 MAJER, J. B. *Superconducting quantum circuits*. Tese (Doutorado) — PhD thesis, TU Delft, Delft University of Technology, 2002. Citado na página 43.
- 93 JOHANSSON, R. *Scientific computing projects, Lectures on QuTiP: Flux Qubit*. Citado 3 vezes nas páginas 45, 140 e 141.
- 94 ORSZAG, M. *Quantum Optics*. 2nd edition. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 46, 49 e 50.
- 95 LINDSTRÖM, T. et al. Circuit qed with a flux qubit strongly coupled to a coplanar transmission line resonator. *Superconductor Science and Technology*, IOP Publishing, v. 20, n. 8, p. 814, 2007. Citado na página 48.
- 96 JR, A. A. A. et al. Vacuum rabi splitting due to strong coupling of a flux qubit and a coplanar-waveguide resonator. *Physical review b*, APS, v. 78, n. 18, p. 180502, 2008. Citado na página 48.
- 97 MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical Coherence and Quantum Optics*. 1st edition. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. Citado na página 50.
- 98 PRADO, F. O. et al. Bilinear and quadratic hamiltonians in two-mode cavity quantum electrodynamics. *Phys. Rev. A*, APS, v. 73, n. 4, p. 043803, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 57.
- 99 MA, S.-L. et al. Controllable generation of two-mode-entangled states in two-resonator circuit qed with a single gap-tunable superconducting qubit. *Phys. Rev. A*, APS, v. 90, n. 6, p. 062342, 2014. Citado na página 55.
- 100 WANG, C. et al. A schrödinger cat living in two boxes. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 352, n. 6289, p. 1087–1091, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 64.

- 101 PAIK, H. et al. Observation of high coherence in josephson junction qubits measured in a three-dimensional circuit qed architecture. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 107, n. 24, p. 240501, 2011. Citado na página 55.
- 102 RIGETTI, C. et al. Superconducting qubit in a waveguide cavity with a coherence time approaching 0.1 ms. *Phys. Rev. B*, APS, v. 86, n. 10, p. 100506, 2012. Citado na página 55.
- 103 JAMES, D. F. Quantum computation with hot and cold ions: an assessment of proposed schemes. *Fortschritte der Physik: Progress of Physics*, Wiley Online Library, v. 48, n. 9-11, p. 823–837, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.
- 104 CARVALHO, C. M. *Estudo das técnicas de obtenção de Hamiltonianos efetivos em óptica quântica*. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado em Física)-Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos-SP, Brasil, 2009. Citado na página 57.
- 105 DUAN, L.-M. et al. Inseparability criterion for continuous variable systems. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 84, n. 12, p. 2722–2725, 2000. Citado na página 58.
- 106 ADESSO, G.; RAGY, S.; LEE, A. R. Continuous variable quantum information: Gaussian states and beyond. *Open Systems & Information Dynamics*, World Scientific, v. 21, n. 01n02, p. 1440001, 2014. Citado na página 58.
- 107 PECHAL, M. et al. Microwave-controlled generation of shaped single photons in circuit quantum electrodynamics. *Physical Review X*, APS, v. 4, n. 4, p. 041010, 2014. Citado na página 59.
- 108 BYLANDER, J. et al. Noise spectroscopy through dynamical decoupling with a superconducting flux qubit. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 7, n. 7, p. 565, 2011. Citado na página 59.
- 109 BOISSONNEAULT, M.; GAMBETTA, J. M.; BLAIS, A. Dispersive regime of circuit qed: Photon-dependent qubit dephasing and relaxation rates. *Phys. Rev. A*, APS, v. 79, n. 1, p. 013819, 2009. Citado na página 60.
- 110 JOHANSSON, J.; NATION, P.; NORI, F. Qutip: An open-source python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, Elsevier, v. 183, n. 8, p. 1760–1772, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 127.
- 111 JOHANSSON, J.; NATION, P.; NORI, F. Qutip 2: A python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, Elsevier, v. 184, n. 4, p. 1234 – 1240, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 127.
- 112 HAU, L. V. et al. Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 397, n. 6720, p. 594, 1999. Citado na página 69.
- 113 BUDKER, D. et al. Nonlinear magneto-optics and reduced group velocity of light in atomic vapor with slow ground state relaxation. *Physical review letters*, APS, v. 83, n. 9, p. 1767, 1999. Citado na página 69.

- 114 DUAN, L.-M.; DEMLER, E.; LUKIN, M. D. Controlling spin exchange interactions of ultracold atoms in optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 91, n. 9, p. 090402, 2003. Citado na página 71.
- 115 GARCÍA-RIPOLL, J. J.; MARTIN-DELGADO, M. A.; CIRAC, J. I. Implementation of spin hamiltonians in optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 93, n. 25, p. 250405, 2004. Citado na página 71.
- 116 JOSHI, C.; NISSEN, F.; KEELING, J. Quantum correlations in the one-dimensional driven dissipative  $xy$  model. *Phys. Rev. A*, APS, v. 88, n. 6, p. 063835, 2013. Citado na página 71.
- 117 SIMMONDS, R. W. et al. Decoherence in josephson phase qubits from junction resonators. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 93, p. 077003, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 88.
- 118 NEELEY, M. et al. Process tomography of quantum memory in a josephson-phase qubit coupled to a two-level state. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 4, n. 7, p. 523, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 88.
- 119 LISENFELD, J. et al. Measuring the temperature dependence of individual two-level systems by direct coherent control. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 105, n. 23, p. 230504, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 88.
- 120 ZHU, X. et al. Observation of dark states in a superconductor diamond quantum hybrid system. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 5, p. 3424, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 89.
- 121 LISENFELD, J. et al. Observation of directly interacting coherent two-level systems in an amorphous material. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 6, p. 6182, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 88.
- 122 SALATHÉ, Y. et al. Digital quantum simulation of spin models with circuit quantum electrodynamics. *Phys. Rev. X*, APS, v. 5, n. 2, p. 021027, 2015. Citado na página 71.
- 123 BLATT, R.; ROOS, C. F. Quantum simulations with trapped ions. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 8, n. 4, p. 277, 2012. Citado na página 71.
- 124 AL-AHMADI, A. N.; ULLOA, S. E. Extended coherent exciton states in quantum dot arrays. *Applied physics letters*, AIP, v. 88, n. 4, p. 043110, 2006. Citado na página 71.
- 125 ZAJAC, D. M. et al. Scalable gate architecture for a one-dimensional array of semiconductor spin qubits. *Phys. Rev. Applied*, APS, v. 6, n. 5, p. 054013, 2016. Citado na página 71.
- 126 GEA-BANACLOCHE, J.; MUMBA, M.; XIAO, M. Optical switching in arrays of quantum dots with dipole-dipole interactions. *Phys. Rev. B*, APS, v. 74, p. 165330, 2006. Citado na página 73.
- 127 ANISIMOV, P. M.; DOWLING, J. P.; SANDERS, B. C. Objectively discerning autler-townes splitting from electromagnetically induced transparency. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 107, n. 16, p. 163604, 2011. Citado na página 74.

- 128 PUTHUMPALLY-JOSEPH, R. et al. Dipole-induced electromagnetic transparency. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 113, p. 163603, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 75.
- 129 FANO, U. Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts. *Phys. Rev.*, APS, v. 124, n. 6, p. 1866–1878, 1961. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 85.
- 130 MIROSHNICHENKO, A. E.; FLACH, S.; KIVSHAR, Y. S. Fano resonances in nanoscale structures. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 82, n. 3, p. 2257, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 85.
- 131 COHEN-TANNOUDJI, C.; DUPONT-ROC., J.; GRYNBERG, G. *Atom-Photon Interactions*. [S.l.]: Wiley, New York, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 86.
- 132 ARRUDA, T. J. *Energia interna e espalhamento de ondas eletromagnéticas por esferas ou cilindros: ressonâncias de Fano e suas aplicações em metamateriais*. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado em Física Aplicada à Medicina e Biologia)- Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto-SP, Brasil, 2014. Citado na página 81.
- 133 MICHEL, M. et al. Fourier’s law confirmed for a class of small quantum systems. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Springer, v. 34, n. 3, p. 325–330, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 96 e 98.
- 134 WICHTERICH, H. et al. Modeling heat transport through completely positive maps. *Phys. Rev. E*, APS, v. 76, n. 3, p. 031115, 2007. Citado na página 96.
- 135 PROSEN, T.; PIŽORN, I. Quantum phase transition in a far-from-equilibrium steady state of an  $xy$  spin chain. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 101, n. 10, p. 105701, 2008. Citado na página 96.
- 136 PROSEN, T.; ILIEVSKI, E. Nonequilibrium phase transition in a periodically driven  $xy$  spin chain. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 107, n. 6, p. 060403, 2011. Citado na página 96.
- 137 ŽNIDARIČ, M. Exact solution for a diffusive nonequilibrium steady state of an open quantum chain. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, v. 2010, n. 05, p. L05002, 2010. Citado na página 96.
- 138 ŽNIDARIČ, M. Solvable quantum nonequilibrium model exhibiting a phase transition and a matrix product representation. *Phys. Rev. E*, APS, v. 83, n. 1, p. 011108, 2011. Citado na página 96.
- 139 PROSEN, T.; ŽNIDARIČ, M. Long-range order in nonequilibrium interacting quantum spin chains. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 105, n. 6, p. 060603, 2010. Citado na página 96.
- 140 BENENTI, G. et al. Negative differential conductivity in far-from-equilibrium quantum spin chains. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 85, n. 3, p. 37001, 2009. Citado na página 96.
- 141 DROENNER, L. et al. Spin transport in a lindblad-driven isotropic quantum heisenberg spin-chain. In: INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICS AND PHOTONICS. *Physics and Simulation of Optoelectronic Devices XXV*. [S.l.], 2017. v. 10098, p. 1009800. Citado na página 96.

- 142 BENENTI, G. et al. Charge and spin transport in strongly correlated one-dimensional quantum systems driven far from equilibrium. *Phys. Rev. B*, APS, v. 80, n. 3, p. 035110, 2009. Citado na página 96.
- 143 DROENNER, L.; CARMELE, A. Boundary-driven heisenberg chain in the long-range interacting regime: Robustness against far-from-equilibrium effects. *Phys. Rev. B*, APS, v. 96, n. 18, p. 184421, 2017. Citado na página 96.
- 144 PROSEN, T. Third quantization: a general method to solve master equations for quadratic open fermi systems. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 10, n. 4, p. 043026, 2008. Citado na página 96.
- 145 PROSEN, T.; ŽNIDARIČ, M. Matrix product simulations of non-equilibrium steady states of quantum spin chains. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2009, n. 02, p. P02035, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 96 e 98.
- 146 ŽNIDARIČ, M. Dephasing-induced diffusive transport in the anisotropic heisenberg model. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 12, n. 4, p. 043001, 2010. Citado na página 97.
- 147 MENDOZA-ARENAS, J. et al. Heat transport in the  $XXZ$  spin chain: from ballistic to diffusive regimes and dephasing enhancement. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2013, n. 07, p. P07007, 2013. Citado na página 97.
- 148 PROSEN, T. Exact nonequilibrium steady state of a strongly driven open  $XXZ$  chain. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 107, n. 13, p. 137201, 2011. Citado na página 97.
- 149 PROSEN, T. Open  $XXZ$  spin chain: Nonequilibrium steady state and a strict bound on ballistic transport. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 106, n. 21, p. 217206, 2011. Citado na página 97.
- 150 ŽNIDARIČ, M. Spin transport in a one-dimensional anisotropic heisenberg model. *Physical review letters*, APS, v. 106, n. 22, p. 220601, 2011. Citado na página 97.
- 151 BUČA, B.; PROSEN, T. A note on symmetry reductions of the lindblad equation: transport in constrained open spin chains. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 14, n. 7, p. 073007, 2012. Citado na página 97.
- 152 POPKOV, V. Alternation of sign of magnetization current in driven  $xxz$  chains with twisted  $xy$  boundary gradients. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2012, n. 12, p. P12015, 2012. Citado na página 97.
- 153 POPKOV, V.; LIVI, R. Manipulating energy and spin currents in non-equilibrium systems of interacting qubits. *New Journal of Physics*, v. 15, n. 2, p. 023030, 2013. Citado na página 97.
- 154 LANDI, G. T. et al. Flux rectification in the quantum  $XXZ$  chain. *Phys. Rev. E*, APS, v. 90, n. 4, p. 042142, 2014. Citado na página 97.
- 155 SCHUAB, L.; PEREIRA, E.; LANDI, G. T. Energy rectification in quantum graded spin chains: Analysis of the  $XXZ$  model. *Phys. Rev. E*, APS, v. 94, n. 4, p. 042122, 2016. Citado na página 97.

- 156 PEREIRA, E. Rectification and one-way street for the energy current in boundary-driven asymmetric quantum spin chains. *Phys. Rev. E*, APS, v. 95, n. 3, p. 030104, 2017. Citado na página 97.
- 157 BALACHANDRAN, V. et al. Perfect diode in quantum spin chains. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 120, n. 20, p. 200603, 2018. Citado na página 97.
- 158 BISSBORT, U. et al. Minimal motor for powering particle motion from spin imbalance. *Phys. Rev. E*, APS, v. 95, n. 6, p. 062143, 2017. Citado na página 97.
- 159 ŽNIDARIČ, M. et al. Thermalization and ergodicity in one-dimensional many-body open quantum systems. *Phys. Rev. E*, APS, v. 81, n. 5, p. 051135, 2010. Citado na página 97.
- 160 MENDOZA-ARENAS, J. J.; CLARK, S. R.; JAKSCH, D. Coexistence of energy diffusion and local thermalization in nonequilibrium  $xxz$  spin chains with integrability breaking. *Phys. Rev. E*, APS, v. 91, n. 4, p. 042129, 2015. Citado na página 97.
- 161 CAI, Z.; BARTHEL, T. Algebraic versus exponential decoherence in dissipative many-particle systems. *Physical review letters*, APS, v. 111, n. 15, p. 150403, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 97 e 103.
- 162 LEE, T. E.; GOPALAKRISHNAN, S.; LUKIN, M. D. Unconventional magnetism via optical pumping of interacting spin systems. *Physical review letters*, APS, v. 110, n. 25, p. 257204, 2013. Citado na página 97.
- 163 JIN, J. et al. Cluster mean-field approach to the steady-state phase diagram of dissipative spin systems. *Physical Review X*, APS, v. 6, n. 3, p. 031011, 2016. Citado na página 97.
- 164 ROTA, R. et al. Critical behavior of dissipative two-dimensional spin lattices. *Physical Review B*, APS, v. 95, n. 13, p. 134431, 2017. Citado na página 97.
- 165 ROTA, R. et al. Dynamical properties of dissipative XYZ heisenberg lattices. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 20, n. 4, p. 045003, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 97, 109 e 110.
- 166 OVERBECK, V. R. et al. Multicritical behavior in dissipative ising models. *Physical Review A*, APS, v. 95, n. 4, p. 042133, 2017. Citado na página 97.
- 167 FOSS-FEIG, M. et al. Solvable family of driven-dissipative many-body systems. *Physical review letters*, APS, v. 119, n. 19, p. 190402, 2017. Citado na página 97.
- 168 CASTEELS, W.; WILSON, R. M.; WOUTERS, M. Gutzwiller monte carlo approach for a critical dissipative spin model. *Physical Review A*, APS, v. 97, n. 6, p. 062107, 2018. Citado na página 97.
- 169 BIELLA, A. et al. Linked cluster expansions for open quantum systems on a lattice. *Physical Review B*, APS, v. 97, n. 3, p. 035103, 2018. Citado na página 97.
- 170 SCHWAGER, H.; CIRAC, J. I.; GIEDKE, G. Dissipative spin chains: Implementation with cold atoms and steady-state properties. *Phys. Rev. A*, APS, v. 87, n. 2, p. 022110, 2013. Citado na página 98.

- 171 ATES, C. et al. Dynamical phases and intermittency of the dissipative quantum ising model. *Phys. Rev. A*, APS, v. 85, n. 4, p. 043620, 2012. Citado na página 98.
- 172 ROSE, D. C. et al. Metastability in an open quantum ising model. *Phys. Rev. E*, APS, v. 94, p. 052132, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 98, 107 e 108.
- 173 MICHEL, M.; GEMMER, J.; MAHLER, G. Microscopic quantum mechanical foundation of fourier's law. *International Journal of Modern Physics B*, World Scientific, v. 20, n. 29, p. 4855–4883, 2006. Citado na página 98.
- 174 MEJIA-MONASTERIO, C.; WICHTERICH, H. Heat transport in quantum spin chains. *The European Physical Journal Special Topics*, Springer, v. 151, n. 1, p. 113–125, 2007. Citado na página 98.
- 175 YAN, Y. et al. Nonballistic heat conduction in an integrable random-exchange ising chain studied with quantum master equations. *Physical Review B*, APS, v. 77, n. 17, p. 172411, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 98 e 99.
- 176 WU, J.; BERCIU, M. Heat transport in quantum spin chains: Relevance of integrability. *Phys. Rev. B*, APS, v. 83, n. 21, p. 214416, 2011. Citado na página 98.
- 177 MICHEL, M. et al. Transport in open spin chains: A monte carlo wave-function approach. *Physical Review B*, APS, v. 77, n. 10, p. 104303, 2008. Citado na página 98.
- 178 WERLANG, T. et al. Optimal rectification in the ultrastrong coupling regime. *Phys. Rev. E*, APS, v. 89, n. 6, p. 062109, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 98, 99 e 100.
- 179 MANZANO, D. et al. Quantum transport efficiency and fourier's law. *Phys. Rev. E*, APS, v. 86, n. 6, p. 061118, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 98 e 100.
- 180 SAITO, K. Strong evidence of normal heat conduction in a one-dimensional quantum system. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 61, n. 1, p. 34, 2003. Citado na página 99.
- 181 HENRICH, M. J. et al. Global and local relaxation of a spin chain under exact schrödinger and master-equation dynamics. *Physical Review E*, APS, v. 72, n. 2, p. 026104, 2005. Citado na página 99.
- 182 HENRICH, M.; MICHEL, M.; MAHLER, G. Small quantum networks operating as quantum thermodynamic machines. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 76, n. 6, p. 1057, 2006. Citado na página 99.
- 183 HENRICH, M. J.; MAHLER, G.; MICHEL, M. Driven spin systems as quantum thermodynamic machines: Fundamental limits. *Physical Review E*, APS, v. 75, n. 5, p. 051118, 2007. Citado na página 99.
- 184 YAN, Y.; WU, C.-Q.; LI, B. Control of heat transport in quantum spin systems. *Phys. Rev. B*, APS, v. 79, n. 1, p. 014207, 2009. Citado na página 99.
- 185 ZHANG, L. et al. Reversal of thermal rectification in quantum systems. *Phys. Rev. B*, APS, v. 80, n. 17, p. 172301, 2009. Citado na página 99.
- 186 THINGNA, J.; WANG, J.-S. Spin rectification in thermally driven XXZ spin chain via the spin-seebeck effect. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 104, n. 3, p. 37006, 2013. Citado na página 99.

- 187 VOGL, M.; SCHALLER, G.; BRANDES, T. Criticality in transport through the quantum ising chain. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 109, n. 24, p. 240402, 2012. Citado na página 99.
- 188 JASCHKE, D.; CARR, L. D.; VEGA, I. de. Thermalization in the quantum ising model—approximations, limits, and beyond. *Quantum Science and Technology*, IOP Publishing, v. 4, n. 3, p. 034002, 2019. Citado na página 99.
- 189 BALACHANDRAN, V. et al. Heat current rectification in segmented *XXZ* chains. *Physical Review E*, APS, v. 99, n. 3, p. 032136, 2019. Citado na página 99.
- 190 PROSEN, T.; ŽUNKOVIČ, B. Exact solution of markovian master equations for quadratic fermi systems: thermal baths, open *XY* spin chains and non-equilibrium phase transition. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 12, n. 2, p. 025016, 2010. Citado na página 100.
- 191 PURKAYASTHA, A.; DHAR, A.; KULKARNI, M. Out-of-equilibrium open quantum systems: A comparison of approximate quantum master equation approaches with exact results. *Phys. Rev. A*, APS, v. 93, n. 6, p. 062114, 2016. Citado na página 100.
- 192 XU, X. et al. Many-body open quantum systems beyond lindblad master equations. *Physical Review A*, APS, v. 99, n. 1, p. 012106, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 100, 118 e 120.
- 193 SUZUKI, S.; INOUE, J.-i.; CHAKRABARTI, K. B. *Quantum Ising Phases and Transitions in Transverse Ising Models*. 2 edition. ed. [S.l.]: Springer-Verlang Berlin-Heidelberg, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 100, 102 e 129.
- 194 SAITO, K.; TAKESUE, S. ; MIYASHITA, S. Thermal conduction in a quantum system. *Phys. Rev. E*, APS, v. 54, n. 3, p. 20404–2408, 1996. Citado na página 100.
- 195 DAMSKI, B. Fidelity susceptibility of the quantum ising model in a transverse field: The exact solution. *Phys. Rev. E*, APS, v. 87, n. 5, p. 052131, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 100 e 101.
- 196 PARKINSON, J. B.; FARNELL, D. J. *An introduction to quantum spin systems*. [S.l.]: Springer, 2010. v. 816. Citado na página 101.
- 197 FRANCHINI, F. *An Introduction to Integrable Techniques for One-Dimensional Quantum Systems*. 1 edition. ed. [S.l.]: Springer International Publishing, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 101 e 102.
- 198 ALMEIDA, M. C. *CADEIA DE SPIN XY DISSECADA: CONDIÇÕES DE CONTORNO E VARIEDADE DE VÁCUO*. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado em Física-COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, INSTITUTO DE FÍSICA, Universidade de Brasília, Brasília-DF, Brasil, 2014. Citado na página 101.
- 199 SPOHN, H.; LEBOWITZ, J. L. Irreversible thermodynamics for quantum systems weakly coupled to thermal reservoirs. *Adv. Chem. Phys.*, v. 38, p. 109–142, 1978. Citado na página 109.
- 200 WILMING, H. et al. Emergence of spontaneous symmetry breaking in dissipative lattice systems. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 58, n. 3, p. 033302, 2017. Citado na página 109.



- 201 DEÇORDI, G. L. *Estudo da dinâmica de sistemas quânticos compostos sob a influência de ambientes externos*. Dissertação (Mestrado) — Tese de Doutorado em Física)-Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade de Campinas, Campinas-SP, Brasil, 2016. Citado na página [125](#).
- 202 HORNBERGER, K. Introduction to decoherence theory. In: *Entanglement and Decoherence*. [S.l.]: Springer, 2009. p. 221–276. Citado na página [125](#).
- 203 GROSS, R.; MARX, A.; DEPPE, F. *Applied superconductivity, Lecture Notes: Josephson effect and superconducting electronics*. [S.l.: s.n.]. Citado 3 vezes nas páginas [129](#), [131](#) e [138](#).
- 204 YURKE, B.; DENKER, J. S. Quantum network theory. *Physical Review A*, APS, v. 29, n. 3, p. 1419, 1984. Citado na página [133](#).
- 205 DEVORET, M. H. et al. Quantum fluctuations in electrical circuits. *Les Houches, Session LXIII*, v. 7, n. 8, 1995. Citado 3 vezes nas páginas [133](#), [135](#) e [136](#).
- 206 ANGELAKIS, D. G. Quantum simulations with photons and polaritons. *Quantum Science and Technology (Springer, 2017)*, Springer, 2017. Citado 2 vezes nas páginas [134](#) e [135](#).
- 207 BLAIS, A. Algorithmes et architectures pour ordinateurs quantiques supraconducteurs. In: EDP SCIENCES. *Annales de Physique*. [S.l.], 2003. v. 28, n. 5, p. 1–147. Citado na página [139](#).
- 208 COTTET, A. *Implementation of a quantum bit in a superconducting circuit*. Tese (Doutorado) — PhD Thesis, Université Paris 6, 2002. Citado na página [140](#).