

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

UM ESTUDO SOBRE O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO DE
CONTINUIDADE

RAFAEL SIQUEIRA SILVA

SÃO CARLOS
2019

RAFAEL SIQUEIRA SILVA

**UM ESTUDO SOBRE O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO DE
CONTINUIDADE**

Tese apresentada no Programa de Pós-Graduação
em Educação da Universidade Federal de São
Carlos, para a obtenção do título de Doutor em
Educação.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Maria do Carmo de
Sousa

SÃO CARLOS

2019

SILVA, RAFAEL SIQUEIRA

UM ESTUDO SOBRE O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO
CONCEITO DE CONTINUIDADE / RAFAEL SIQUEIRA SILVA. – 2019.
220 f. : 30 cm.

Tese (doutorado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos,
São Carlos

Orientador: MARIA DO CARMO DE SOUSA

Banca examinadora: ANTONIO SÉRGIO COBIANCHI, JOSÉ
ANTONIO ARAÚJO ANDRADE, RENATA PRENSTTETER GAMA,
WANIA TEDESCHI

Bibliografia

1. ENSINO DE CÁLCULO. 2. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. 3.
TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL. I. Orientador. II. Universidade Federal
de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

Bibliotecário(a) Responsável: Ronildo Santos Prado – CRB/8 7325

*À minha esposa Jordana.
Às minhas filhas Alice e Clara.
Nada disso teria sentido sem vocês.*

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Jordana pela dedicação, força e companheirismo nessa jornada. Seguimos e enfrentamos juntos todos os desafios que nos foram postos até aqui.

Às minhas filhas Alice e Clara, dois presentes divinos concedidos a nós durante esse período, que me ensinam todos os dias o verdadeiro sentido da vida.

À minha família, em especial, minha mãe Walnice e minha irmã Nathália, que estiveram distantes, mas que nunca deixaram de me apoiar e transmitir forças.

À “vó Maci” pela dedicação e cuidado conosco. Sua força e sabedoria foram inspiradoras e essenciais.

À minha orientadora Maria do Carmo por saber conduzir esse processo de forma tão profissional e humana. Suas contribuições vão além da pesquisa, mas também em minha formação enquanto indivíduo-coletivo humano.

Ao Fernando Fernandes e sua família pelo apoio e acolhimento. Certamente sua amizade também foi um presente divino que nos trouxe conforto durante toda caminhada.

Aos/Às colegas do Grupo de Pesquisa e Estudos em Formação Compartilhada (GPEFCom) pela troca de experiências e pelas contribuições em nosso trabalho.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Educação da (PPGE) da UFSCar. Em especial os/as professores/as Ademir Caldeira, Carmem Passos, Denise Vilela, Wania Tedeschi e Renata Gama por participarem tão ativamente em minha formação.

Aos/Às professores/as José Antônio Araújo Andrade, Antônio Sérgio Cobiانchi, Wania Tedeschi, Renata Prenstteter Gama e Marisa Silva Dias pelas contribuições no desenvolvimento e conclusão da pesquisa.

Aos/Às colegas do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Jataí pela parceria profissional.

À Universidade Federal de Jataí pelo afastamento e auxílio financeiro que oportunizou a realização do doutorado.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento e Pessoal em Nível Superior – Brasil (CAPES).



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Educação e Ciências Humanas
Programa de Pós-Graduação em Educação

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Rafael Siqueira Silva, realizada em 03/12/2019:

Profa. Dra. Maria do Carmo de Sousa
UFSCar

Prof. Dr. Antonio Sérgio Cobiانchi
USP

Prof. Dr. José Antonio Araújo Andrade
UFLA

Profa. Dra. Renata Prenstteter Gama
UFSCar

Profa. Dra. Wania Tedeschi
IFSP

RESUMO

O objetivo deste trabalho é investigar o movimento lógico-histórico do conceito de Continuidade por meio de um Estudo Documental, com vistas à determinação das relações essenciais que podem se configurar como nexos conceituais. Tendo como pressuposto os aportes teóricos da teoria Histórico-Cultural, os nexos conceituais são entendidos como a síntese das relações internas e externas de um conceito, cuja determinação se concretiza por meio do movimento lógico-histórico. Assim, se estabelece como pergunta norteadora: Quais são as relações estabelecidas no movimento lógico-histórico do conceito de Continuidade que podem se configurar como nexos conceituais a partir da realização da Análise Documental em confluência com a Análise Histórico-Epistemológica? A metodologia da pesquisa se pauta nos princípios do materialismo histórico-dialético e está constituída pela realização da Análise Documental das pesquisas sobre ensino da Continuidade e a Análise Histórico-Epistemológica de fontes historiográficas que abordam aspectos essenciais sobre o desenvolvimento deste conceito. Os resultados apontam para a determinação dos nexos conceituais nos pares dialéticos Comensurável-Incomensurável, Discreto-Contínuo, Infinito-Infinitésimo, Permanência-Fluência, *Pontual-Geral* e *Rigor-Intuição*. As reflexões sobre os resultados indicam a ressignificação da estrutura curricular da Continuidade nos âmbitos do ensino básico e superior. Além disso, discorre também sobre a necessidade de concretização de uma organização do ensino da Continuidade que se pautem nos nexos conceituais e na apropriação conceitual pelos estudantes.

Palavras-Chave: Continuidade. Lógico-Histórico. Nexos Conceituais. Ensino. Cálculo.

ABSTRACT

The aim of this paper is to investigate the logical-historical movement of the concept of Continuity through a historical-epistemological analysis, with a view to determining the essential relations that can be configured as conceptual nexus. Assuming the theoretical contributions of the Historical-Cultural theory, the conceptual nexus are understood as the synthesis of the internal and external relations of a concept, whose determination is realized through the logical-historical movement. Thus, it is established as a guiding question: What are the relations established in the logical-historical movement of the concept of Continuity that can be configured as conceptual nexus from the realization of a historical-epistemological analysis? The research methodology is based on the principles of historical-dialectical materialism and is constituted by the realization of the State of the Art of research on Continuity teaching and the historical-epistemological analysis of historiographical sources that address essential aspects on the development of this concept. The results point to the determination of conceptual connections in the commensurable-incommensurable, discrete-continuous, infinite-infinitesimal, permanence-fluency, punctual-general and rigor-intuition dialectical pairs. Reflections on the results indicate the resignification of the curriculum structure of Continuity in the fields of basic and higher education. In addition, it also discusses the need for the realization of teaching organization of Continuity based on conceptual nexus and conceptual appropriation by students.

Keywords: Concept of Continuity. Logical-Historical. Conceptual Nexus. Teaching. Calculus.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Movimento de Construção da Pesquisa	24
Figura 2 - Interação Sujeito-Objeto na Constituição do Pensamento.....	29
Figura 3 - Estrutura do Lógico na Compreensão do Pensamento	39
Figura 4 - Estrutura do Histórico na Compreensão do Conhecimento.....	46
Figura 5 - Estrutura para Análise Histórico-Epistemológica.....	55
Figura 6 - Estrutura de Interação dos Sistemas Semióticos de Significação Cultural....	85
Figura 7 - Estrutura para Análise dos Extratos.....	87
Figura 8 - Triângulo Característico de Leibniz no Cálculo de Tangentes à Curva	115
Figura 9 - Sistematização na Determinação dos Nexos Conceituais.....	133

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Informações Sobre as Pesquisas Levantadas	65
Quadro 2 - Relação dos Conceitos Abordados nas Pesquisas	67
Quadro 3 - Relação dos Conceitos Abordados nos Artigos	67
Quadro 4 - Disciplina História da Matemática da UFSCar/Campus Sorocaba.....	80

SUMÁRIO

Apresentação	13
1. Introdução.....	15
1.1. Contexto de Surgimento da Pesquisa	17
1.2. A Construção da Pesquisa.....	21
2. Aspectos Teórico-Metodológicos da Pesquisa	26
2.1. A Manifestação do Pensamento e a Construção Lógica do Conhecimento	27
2.2. A História no Desenvolvimento do Conhecimento.....	39
2.3. Análise Histórica do Conhecimento e a Determinação dos Nexos Conceituais	47
2.4. O Estabelecimento dos Aspectos Metodológicos	55
3. Análise Documental das Pesquisas Sobre o Ensino de Continuidade.....	60
3.1. A Obtenção dos Trabalhos e a Construção do <i>Corpus</i> para Análise.....	60
3.2. O que Encontramos nas Pesquisas e Artigos Analisados?	65
3.3. O que Revelam as Pesquisas e Artigos Analisados?	70
3.3. Alguns Apontamentos sobre as Pesquisas.....	81
4. Análise Histórico-Epistemológica do Conceito de Continuidade	84
4.1. Período de Desenvolvimento da Matemática na Antiguidade	88
4.2. Período de Desenvolvimento da Matemática Elementar	101
4.3. Período de Desenvolvimento da Matemática das Variáveis	110
4.4. Período de Surgimento da Matemática Moderna	116
4.5. Alguns Apontamentos Sobre as Historiografias	129
5. A Determinação dos Nexos Conceituais do Conceito de Continuidade	132
5.1. O Par Dialético Contínuo-Discreto	135
5.2. O Par Dialético Infinito-Infinitésimo	139
5.3. O Par Dialético Permanência-Fluência	143
5.4. O Par Dialético Pontual-Geral.....	147
5.5. Aspectos Conclusivos	155
6. Considerações Finais	158
Referências Bibliográficas.....	163
Apêndices	169
Apêndice 1: Relação de Teses e Dissertações Analisadas	169

Apêndice 2: Relação de Artigos Encontrados.....	170
Apêndice 3: Ficha Catalográfica.....	172
Apêndice 4: Organização dos Dados Coletados nas Pesquisas.....	174
Apêndice 5: Organização dos Dados Coletados nos Artigos.....	187
Apêndice 6: Levantamento de Disciplinas que Abordam a Continuidade nos PPCs.....	190
Apêndice 7: Levantamento das Disciplinas de História da Matemática.....	202

Apresentação

Este texto se configura como uma exposição das sínteses elaboradas durante o desenvolvimento da pesquisa de Doutorado que teve como foco a determinação dos nexos conceituais da Continuidade por meio do movimento lógico-histórico. A pesquisa se desenvolveu ao longo do período de 2016 a 2019, nas dependências da Universidade Federal de São Carlos em São Carlos, São Paulo.

O processo de investigação se consolidou com base na pergunta norteadora: quais são as relações estabelecidas no movimento lógico-histórico do conceito de Continuidade que podem se configurar como nexos conceituais a partir da realização de uma análise histórico-epistemológica? Nesse sentido, o objetivo se centrou em investigar o movimento lógico-histórico do conceito de Continuidade por meio de uma análise histórico-epistemológica, com vistas à determinação das relações essenciais que podem se configurar como nexos conceituais.

Para a apresentação das análises e reflexões acerca desta investigação, o texto foi dividido em 6 (seis) seções. A primeira seção refere-se aos aspectos introdutórios do trabalho divididos em contexto de surgimento e construção da pesquisa. O objetivo desta seção é discorrer sobre os motivos e as condições objetivas para a concretização desta investigação.

Já na seção 2 (dois), discorre-se sobre as bases teórico-metodológicas que sustentam o movimento lógico-histórico do conhecimento e a composição procedimental da pesquisa. O objetivo desta seção é tecer sobre o modo como se constitui a relação dialética entre o lógico e o histórico na compreensão do pensamento humano e sua síntese com a estruturação das ações de pesquisa.

Na seção 3 (três) são apresentados e discutidos os resultados do levantamento bibliográfico acerca das pesquisas sobre o ensino da Continuidade. O objetivo deste capítulo é desvelar as formas como os pesquisadores têm compreendido o ensino de Continuidade e identificar possíveis relações estabelecidas ao desenvolvimento e tratamento pedagógico deste conceito, por meio da Análise Documental de teses, dissertações e artigos em âmbitos nacionais e internacionais.

Na quarta seção, efetiva-se o desenvolvimento da análise histórico-epistemológica da Continuidade por meio da divisão em períodos históricos. Esta análise se estrutura por meio de recortes de historiografias (extratos) e apresentação de momentos tensionadores reveladores de necessidades na produção do conhecimento. O objetivo é identificar através

desta análise, elementos que apontam para o estabelecimento de relações essenciais no desenvolvimento da Continuidade.

As reflexões propostas nas seções 3 (três) e 4 (quatro) servem de premissa para o estabelecimento das relações essenciais identificadas como nexos conceituais da Continuidade na quinta seção. O objetivo é discorrer sobre o modo como estas relações se constituem e interagem entre na si, com vistas à sua abordagem em ambiente educacional.

Por fim, a seção 6 (seis) se efetiva com a exposição de reflexões sobre o processo de investigação e o apontamento de perspectivas futuras, para a composição das considerações finais sobre a pesquisa.

1. Introdução

O Cálculo remonta sua importância no desenvolvimento da Matemática desde sua criação durante o século XVII com o estabelecimento das estruturas essenciais para a compreensão de fenômenos da realidade. Marcado pelo desenvolvimento significativo do pensamento científico durante os séculos que seguiram, o Cálculo passou a ser compreendido não só como um conjunto de conhecimentos produzidos em torno da busca por solução de problemas práticos, mas também como um pilar para o desenvolvimento de diversas áreas da Matemática e Ciências Naturais.

Entendido como conhecimento fundamental para o desenvolvimento da ciência moderna (BARUFI, 1999; REIS, 2001; REZENDE, 2003), uma proposta curricular para o ensino de Cálculo só foi constituída no século XVIII, com forte influência da cultura europeia, e, desde então, vem sendo marcada pelo embate entre a ênfase no formalismo lógico-simbólico, cujo refinamento conceitual exigiu a criação da Análise Matemática, e na aplicabilidade no enfrentamento de problemas científicos e tecnológicos. Dessa forma, tornou-se um componente essencial no currículo para a formação de diferentes profissionais.

O Cálculo se efetivou com o acúmulo de ferramentas matemáticas criadas a partir da solução de problemas que assolaram a comunidade científica durante muito tempo como o controle e previsibilidade de fenômenos em movimento; o enfrentamento de situações que envolviam quantidades infinitamente pequenas ou grandes; a determinação conceitual de agrupamento dos números; entre outros (BARUFI, 1999). Dentre estas variadas ferramentas, o conceito de Continuidade se insere nesse contexto como um pilar para compreensão e construção de teorias, como por exemplo, Limite e Números Reais.

Ao longo do desenvolvimento histórico da matemática, as relações atribuídas à Continuidade estiveram ligadas à constituição da atividade matemática que envolve a formalização dos conceitos de número, infinito e movimento. Entendida como conceito fundamental para o tratamento de métodos de derivação e integração, sua abordagem está essencialmente relegada às disciplinas de Cálculo e Análise, no âmbito do Ensino Superior.

Apesar de sua importância, o contexto de seu ensino também revela uma realidade não alentadora tanto para os estudantes, quanto para os professores. O que se pode constatar, em uma situação recorrente desde a primeira metade do século XX, são os altos índices de reprovação e desistência nas disciplinas que compõem o Cálculo, permeados por um sentimento de insatisfação dos estudantes e de preocupação dos profissionais de diferentes áreas que necessitam do domínio destes conhecimentos para a realização de seu labor diário (AHN,

1993; BROLEZZI, 1996; CAVASOTTO, 2010; ESCHER, 2011; BEZERRA, 2015; DONEL, 2015). Nesse contexto, as dificuldades referentes à apropriação da Continuidade se estabelecem também como um impedimento para a aprendizagem dos conceitos a ela relacionados (COBIANCHI, 2001; DIAS, 2007; ABREU, 2010).

Diante disso, este trabalho busca se pautar nos aportes teórico-metodológicos da Teoria Histórico-Cultural, cuja base se fundamenta no materialismo histórico-dialético e nos trabalhos de psicólogos soviéticos como Vygotsky (1866 – 1934), Davydov (1930 – 1998), Leontiev (1903 – 1979), entre outros. Em particular, a educação na perspectiva histórico-cultural é compreendida como processo de apropriação dos bens culturais produzidos pela humanidade ao longo da história. Nessa compreensão, o indivíduo se humaniza em seu acesso ao que foi produzido pelo homem e em sua capacidade de se apoderar, reproduzir e criar novas possibilidades na satisfação de suas necessidades.

O conhecimento como produto inerentemente humano se torna, nessa perspectiva, um elemento fundamental para o processo de humanização do indivíduo, em especial, o conhecimento científico (MOURA *et al.*, 2010). As instituições educacionais científicas (escolas, universidades, faculdades, entre outros) carregam a tarefa de permitir não só o acesso, mas também a formação de sujeitos capazes de utilizar o conhecimento científico em favor do desenvolvimento social, econômico, cultural, político etc. E é nesse âmbito que esta pesquisa busca compreender a Continuidade como produto essencialmente humano, acessível a toda comunidade humana, capaz de permitir que o indivíduo se apodere e o reproduza em prol do desenvolvimento da humanidade.

Além disso, o processo de apropriação do conhecimento deve ser conduzido para além da mera reprodução de seus elementos aparentes, de maneira mecanizada, mas permitir que o indivíduo o utilize como ferramenta de atuação em sua realidade, percorrendo processos de desenvolvimento de sua capacidade psíquica (MOURA, 2000).

Frente às diversas possibilidades que a Teoria Histórico-Cultural nos oferece para trilhar este caminho, neste trabalho voltamos nossos olhares para a história do conhecimento matemático e, em especial, para o movimento lógico-histórico¹ do conceito de Continuidade, como uma alternativa na constituição de uma organização do ensino com vistas ao pleno desenvolvimento da capacidade psíquica dos indivíduos.

Porém, antes de nos dedicarmos para a compreensão das relações essenciais da Continuidade, as próximas subseções tratam da apresentação do contexto de surgimento e

¹ Por se tratar de um conceito fundamental em nossa investigação, deixaremos para descrevê-lo com profundidade nas próximas seções.

construção da pesquisa, evidenciando os motivos e condições objetivas que possibilitaram a organização deste trabalho.

1.1. Contexto de Surgimento da Pesquisa

A constituição de um processo investigativo está, de certa forma, entrelaçada com a história de vida do pesquisador que o conduz. Em alguma medida, a busca pela objetivação de suas ações sempre envolve uma tomada de decisões que seja coerente com suas experiências de vida. Compreender essas questões permite não só a contextualização do movimento de construção da pesquisa, esclarecendo os modos como uma investigação se consolida, mas também o conhecimento dos motivos que orientam a escolha das estratégias estabelecidas.

Em particular, os motivos que levaram à elaboração deste trabalho estão diretamente ligados à minha história de formação e atuação profissional². Nesse sentido, cabe aqui uma breve narrativa sobre momentos importantes em meu percurso acadêmico/profissional e suas implicações para a pesquisa.

Advindo de uma cidade interiorana do estado de Goiás, o município de Ceres, realizei grande parte de minha trajetória escolar em uma instituição de missão franciscana que tinha entre outras finalidades oferecer atividades extracurriculares no decorrer ano letivo, nas quais sempre me envolvi com intensidade, como gincanas, teatros, festas, atividades cíveis e práticas esportivas. Por essas razões, aprendi desde cedo a lidar com as pessoas e, mais importante, a gostar de lidar com elas. Acredito que este sentimento foi decisivo na escolha por seguir carreira docente anos depois.

Por ter bom relacionamento com colegas e professores e aliado ao bom desempenho escolar, tive a oportunidade de estudar com bolsa parcial em uma instituição privada durante o Ensino Médio. Nesta época criei um apreço maior pelas disciplinas de História, Física e Matemática. Já nesse momento escolhi o curso de Matemática como uma possibilidade para seguimento na carreira profissional.

Minha formação como educador matemático teve início em 2007 com a realização da graduação em Matemática no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás (IME/UFG), em Goiânia. Nesse período, o ingresso nesta universidade era marcado pela escolha do próprio estudante pela modalidade, bacharelado ou licenciatura, na qual almejava cursar. Movido por influências externas, optei pela realização do bacharelado.

² Ao longo desta seção, optamos pelo uso da primeira pessoa no singular em função do caráter descritivo sobre momentos da vida que conduziram o pesquisador para a constituição desta pesquisa. Ao passo que nas demais seções será utilizada a conjugação verbal na primeira pessoa do plural por acreditar que o movimento de investigação é resultado de um processo coletivo de apropriação do fenômeno estudado.

Durante os primeiros anos, minhas experiências acadêmicas estiveram voltadas para o cumprimento de um currículo próprio da formação do bacharel em Matemática.

Assim como muitos estudantes, sobretudo de Matemática, fiz parte de um contingente estatístico que engloba os alunos com problemas de rendimento nas disciplinas iniciais do curso, entre elas o Cálculo Diferencial e Integral. Durante esse período, também ficou marcado pela falta de interesse nas aulas; a luta constante contra a desistência do curso; a culpa de não corresponder às expectativas de professores e familiares; a ausência de perspectivas profissionais em uma futura atuação como bacharel; etc. Mesmo diante dessa realidade, obtive aprovação nesta disciplina.

Apesar da seriedade com que tais questões interferem na saúde mental do estudante e o número expressivo de indivíduos que se encontram nessa mesma situação, tudo isso ainda soa como certa naturalidade nos corredores acadêmicos, reforçando o estigma de que “a Matemática é para poucos”, ou ainda, “a Matemática é para os fortes”. Mesmo com toda essa bagagem, insisti pela realização do curso.

No início do segundo ano, diante de algumas dificuldades financeiras, tive a oportunidade de ser contemplado com uma bolsa de caráter social, que tinha por finalidade garantir condições básicas de permanência nos estudos a alunos provenientes de famílias com baixa renda. Durante o ano de 2008, minhas atividades ficaram restritas ao auxílio administrativo da secretaria e diretoria do IME/UFG.

Já no ano seguinte, ainda com a contemplação da bolsa social e aliado à melhora de meu desempenho, minhas ações voltaram para o atendimento/auxílio de alunos com dificuldades nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica. Essas ações se pautavam em um formato de monitoria, onde pude aprender ainda mais sobre o Cálculo e a lidar com outros alunos e suas dificuldades em se apropriarem dos conceitos envolvidos nestas disciplinas. Esse momento marcou significativamente minha trajetória com o surgimento de questionamentos que me acompanhariam durante toda a carreira profissional. Pude conviver e compartilhar sentimentos com colegas e perceber as angústias dos estudantes em torno da realização destas disciplinas.

Importante ressaltar que essa bolsa continuava com um caráter social, ao passo que as demais monitorias estavam pautadas no mérito dos estudantes. Em função dos resultados considerados medianos durante o primeiro ano, não estava apto para concorrer a uma vaga no processo de seleção de Monitoria. No entanto, com a criação de um projeto de

acompanhamento de estudantes com dificuldades de aprendizagem, as atividades de auxílio na administração do curso foram convertidas em uma espécie de monitoria.

Foi nesse período também que tive os primeiros contatos com disciplinas do curso de licenciatura, em particular Didática e Políticas Educacionais, com a finalidade de cumprir carga horária obrigatória³. Durante as primeiras aulas, lembro-me de ficar impressionado com as discussões e com a possibilidade de pertencer a um espaço tão rico, dialógico e diferente das aulas que havia frequentado até então.

Houve então uma ruptura. Havia ali encontrado condições de compreender as frustrações com o início de minha formação e vislumbrar a possibilidade de uma atuação profissional que atendesse às minhas necessidades. Decidi pela mudança de modalidade e a escolha pela licenciatura. Apesar de parecer simples essa escolha, tive de enfrentar muitos preconceitos e julgamentos tanto no âmbito familiar, quanto no acadêmico.

No início de 2010, fui contemplado com uma bolsa no Programa de Educação Tutorial da Licenciatura em Matemática (PETMAT/UFG) e, com a colaboração de onze colegas, me dediquei à realização de ações voltadas à Educação Matemática, com caráter de ensino, pesquisa e extensão. Além do cumprimento de atividades obrigatórias do curso, as experiências vividas no PETMAT abriram novas perspectivas de atuação e o vislumbre de uma futura pós-graduação em Educação Matemática.

O momento de conclusão do curso esteve permeado pelas ações do estágio supervisionado e elaboração do relatório final. O estágio se configurou como espaço privilegiado para a compreensão do universo escolar e seus desafios para a carreira docente. De qualquer forma, o processo de observação, intervenção e reflexão sobre o trabalho pedagógico me despertou o interesse na qualificação profissional por meio da realização do mestrado.

Com o fim da graduação, ingressei em 2011 no programa multidisciplinar de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática da UFG. Passei os anos seguintes me dedicando à realização da pesquisa intitulada *Os Indícios de um Processo de Formação: a organização do ensino no Clube de Matemática*⁴. O objetivo se pautou em investigar mudanças significativas na organização de ensino de professores de matemática em exercício, através de uma proposta de intervenção pautada no projeto Clube Matemática do IME/UFG. Foi durante esse período

³ Para a conclusão do curso de bacharelado era obrigatório o cumprimento de carga horária em disciplinas tidas como “optativas” e escolhidas pelos estudantes. Para tanto, as disciplinas do curso de licenciatura, assim como de outros cursos, contemplavam essa obrigatoriedade.

⁴ SILVA, R. S. *Os Indícios de um Processo de Formação: a organização do ensino no Clube de Matemática*. (Dissertação) Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2013.

que pude estudar e conhecer os princípios da Teoria Histórico-Cultural e suas contribuições para o universo educacional.

A carreira docente teve início durante a realização do mestrado, onde pude atuar como professor de matemática para turmas de Ensino Fundamental e Médio. Nesse tempo adquiri experiência e vivenciei contextos particulares sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática no ensino básico.

Com a finalização do mestrado, recebi o convite para compor o quadro docente da Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC/Goiás) para o atendimento às disciplinas da grade curricular de Matemática às turmas dos cursos de Engenharia e Licenciatura (Matemática, Física e Química), em particular, as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Durante esse tempo pude entender melhor o contexto que envolve a aprendizagem dos conceitos de Cálculo e as nuances do ensino superior. Nesse novo ambiente foi possível perceber os desafios que são impostos à prática educativa e as dificuldades persistentes vivenciadas pelos estudantes. Apesar de toda minha bagagem, com o acionamento de estratégias aprendidas ao longo de minha formação didático-pedagógica, as tentativas de amenizar tais dificuldades não passaram de meras tentativas.

Enfim, por mais que entendesse a necessidade de mudanças na condução desta disciplina e me apoiasse em diferentes teorias didático-pedagógicas, continuavam presentes os questionamentos sobre o modo como estas disciplinas eram conduzidas. Fatores limitantes como o engessamento do currículo, excesso de carga horária do trabalho docente, quantidade de alunos em sala de aula, dificuldades dos estudantes em conceitos básicos, entre outros, contribuíam para que essa questão se perpetuasse.

Em 2014 obtive a aprovação em concurso para o cargo de Professor Assistente no curso de Licenciatura em Matemática da UFG - campus Jataí, onde tenho desempenhado minhas atividades profissionais. O concurso teve como objetivo a contratação de um profissional que atendesse as demandas da área de Matemática, ao ministrar aulas nas disciplinas introdutórias dos cursos de exatas (Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica, Geometria Euclidiana e outras), e da área de Educação Matemática com a orientação de alunos em estágios e suas disciplinas (Didáticas da Matemática, Práticas de Ensino, Introdução à Pesquisa em Educação, entre outras).

Diante desse cenário, meu cotidiano profissional envolve atividades de ensino na disciplina de Cálculo para vários cursos de graduação com um contexto permeado por

elevados índices de reprovação e desistência; problemas com o nível de conhecimentos elementares apresentados pelos estudantes; e a preocupação com a formação de profissionais capazes de atenderem às demandas de sua atuação profissional, sobretudo no que diz respeito à formação de professores que ensinam matemática.

Portanto, é nesse contexto que se efetivou a necessidade não só de investigar aspectos mais intrínsecos acerca do ensino de Cálculo, como também de construir novas possibilidades para superação dessa realidade. Mais do que empreender estratégias de ensino já consolidadas, esta pesquisa se intenta em abrir novos campos de questionamentos sobre o desenvolvimento lógico-histórico do Cálculo e suas possibilidades ao ambiente educacional.

Em particular, como conceito elementar para o Cálculo, os esforços desta investigação estarão centrados na análise do modo como a Continuidade foi desenvolvida ao longo do tempo, abrangendo a análise de manifestações do pensamento em diferentes momentos da história, culminando na compreensão de relações essenciais a serem abordadas em sala de aula.

Assim, na próxima subseção serão apresentados alguns momentos importantes sobre a construção da pesquisa com o intuito de dar significado às escolhas realizadas ao longo do processo.

1.2. A Construção da Pesquisa

Na constituição do fazer científico, a pesquisa se instaura como o cerne da atividade investigativa que o sujeito concretiza na sua busca pela compreensão dos fenômenos da realidade objetiva. Nesse sentido, é entendida como um processo que possibilita ao cientista a identificação de características mais profundas e significativas em sua comprovação com a manifestação na vida prática (ARAUJO, 2012).

No entanto, ao longo de todo esse processo os elementos que compõe a estrutura da investigação se modificam ao longo do tempo, ganhando novos sentidos e se adequando às novas necessidades que surgem no tratamento do fenômeno estudado.

Com vistas à busca de mudanças no ensino de Cálculo, a ideia inicial para este trabalho esteve pautada na análise das possibilidades de uma intervenção didático-pedagógica com base nos princípios da Teoria Histórico-Cultural. O objetivo era compreender como uma proposta de organização do ensino assentada nesses princípios poderia contribuir (ou não) ao processo de apropriação de conceitos do Cálculo.

A questão da análise de uma intervenção é legitimada por sua importância na compreensão de aspectos da/sobre/na prática, mas traz em si uma complexidade que exige o

reconhecimento dos limites impostos ao pesquisador. Em nosso caso, duas adversidades foram cruciais para reconsiderar a estrutura do projeto. A primeira diz respeito ao modo como os estudantes se apropriam dos conceitos desenvolvidos nas ações em sala de aula. Em seu trabalho, Oliveira (2014) relata dificuldades encontradas na apropriação do conceito de Função por crianças, em uma proposta de organização do ensino pautada na Teoria Histórico-Cultural, e mostra que tais contratempos podem ser resultados de equívocos cometidos na elaboração das tarefas propostas aos estudantes. No contexto desta pesquisa, isto esteve ligado ao modo como os pesquisadores não se atentaram a aspectos importantes ligados ao movimento lógico-histórico da Função.

As conclusões propostas por Oliveira (2014) nos ofereceu elementos suficientes para entender a importância de (re)tomar as bases teórico-metodológicas que fundamentam o movimento lógico-histórico. Esta estratégia visava contribuir não só para o aperfeiçoamento da compreensão sobre o desenvolvimento histórico dos conceitos, como também no levantamento de novas questões sobre a determinação dos nexos conceituais⁵.

Dessa forma, houve o entendimento de que o tempo destinado à realização de uma intervenção seria insuficiente para abarcar os processos pautados em 1) análise histórica e construção do movimento lógico-histórico do Cálculo; 2) determinação dos nexos conceituais; 3) elaboração de situações desencadeadoras da aprendizagem; 4) desenvolvimento e coleta dos dados sobre o processo de intervenção; e 5) análise do material coletado. Certamente, a constituição desse processo sem o devido cuidado com as questões levantadas por Oliveira (2014) poderiam comprometer os objetivos da investigação proposta.

Já a segunda questão, diz respeito ao número significativamente irrisório de pesquisas que recorrem à Teoria Histórico-Cultural, particularmente, ao movimento lógico-histórico, como fonte propositiva para o ensino de Cálculo. Vários trabalhos apontam as contribuições da perspectiva lógico-histórica à aprendizagem da matemática no ensino básico (DIAS, 2007; DIAS; SAITO, 2009; SOUSA, 2004; 2017; 2018; SOUSA, PANOSSIAN e CEDRO, 2014; PANOSSIAN, 2008; 2014). A compreensão dos resultados apontados por esses autores nos ajudam a tecer estratégias profícuas ao contexto do Ensino Superior.

Nesse contexto, é preciso chamar a atenção ao trabalho desenvolvido por Abreu (2010) cujo título é *Investigando os Conceitos de Limite e Continuidade a partir da Perspectiva Lógico-Histórica*. Este trabalho é uma monografia apresentada ao Curso de Matemática da Univeridade Federal de Lavras, como exigência obrigatória para a obtenção do

⁵ Por se tratar de um conceito fundamental em nossa investigação, deixaremos para descrevê-lo com profundidade nas próximas seções.

título de Licenciado. A proposta desenvolvida por Abreu (2010) revela o esforço implicado pela professora em formação em compreender a apropriação de nexos conceituais dos conceitos de Limite e Continuidade por estudantes do curso de Cálculo.

Em seu trabalho, a autora recorre à pesquisa de Sousa (2004) na compreensão dos conceitos sobre o movimento lógico-histórico e às historiografias de Caraça (1958), Guillen (1987) e Karlson (1961). A partir desse contexto, Abreu (2010) estabelece como nexos conceituais para o Limite e Continuidade os conceitos de vizinhança, infinitésimo, infinito, interdependência, movimento (fluência), variável e função e sua abordagem em atividades pautadas na Atividade Orientadora de Ensino (AOE).

Após a elaboração, aplicação e análise das atividades com os estudantes, Abreu (2010) aponta que

O ensino apoiado na perspectiva lógico-histórica possibilita aos alunos o entendimento do conceito em seu cerne. Este entendimento é possível, pois os alunos têm a oportunidade de (re)elaborar suas concepções sobre o conceito ao invés de simplesmente decorá-lo. [...] A Educação Conceitual também foi discutida, e concluímos que esta filosofia é uma forma de os alunos receberem algumas informações que o incentive a refletir até formar um determinado conceito e entender quando e como usá-lo. Com este método podemos ver que há um movimento no pensamento dos alunos, permitindo que eles entendam o conceito de forma significativa. Assim o aluno consegue aplicar o que estudou em diversas situações e não caem no esquecimento, pois quando o processo é entendido se consegue aplicá-lo em qualquer situação (ABREU, 2010, p. 57).

A autora nos ajuda, assim, a compreender as possibilidades que o ensino pautado nessas diretrizes pode oferecer. Ainda que Abreu (2010) apresente elementos que apontam para a apropriação dos conceitos ali desenvolvidos, entendemos que a existência de aspectos importantes, os quais necessitam de aprofundamentos teórico-metodológicos, sobretudo no âmbito da determinação dos nexos conceituais. Ressaltamos que por se tratar de uma monografia de conclusão de curso, o trabalho apresenta reflexões densas e consistentes, dignas de pesquisas no âmbito da pós-graduação.

Os resultados apresentados por Abreu (2010), aliados aos de Oliveira (2014), nos ajudam a compreender os desafios da condução de uma proposta como esta e a necessidade de se aprofundar os estudos e investigações sobre a constituição do movimento lógico-histórico dos conceitos matemáticos. Certamente as contribuições de Abreu (2010) nos serviu como ponto de partida para a tomada de decisões importantes à pesquisa.

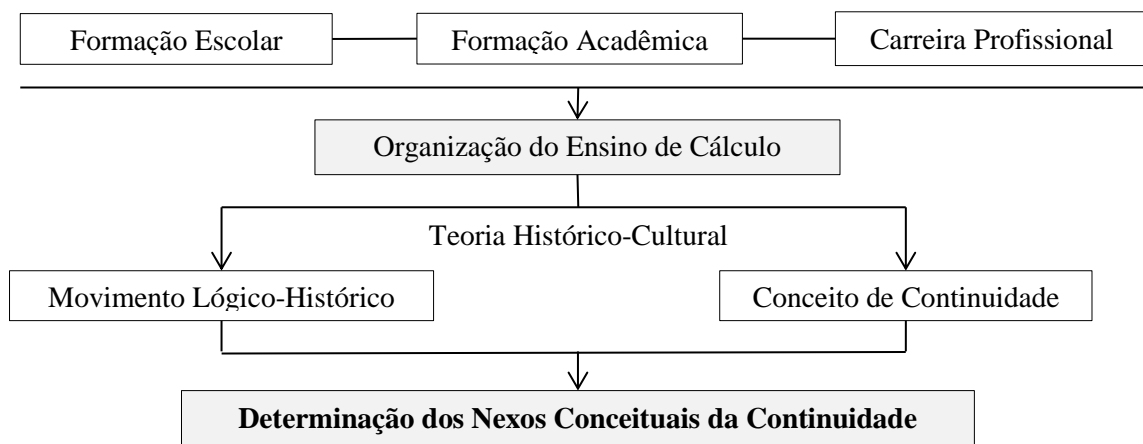
Diante desses fatores, é possível perceber a necessidade do estabelecimento de um estudo cuidadoso sobre o processo de constituição do movimento lógico-histórico, ao elucidar

os fundamentos teórico-metodológicos que os sustenta, e a possibilidade da determinação dos nexos conceituais da Continuidade com vistas à organização do ensino que possibilite sua apropriação.

Outra questão fundamental foi a necessidade de superar uma visão ingênua sobre o Cálculo e fazer um recorte sobre os muitos conceitos por ele abarcados. Isso porque falar sobre a história do Cálculo é o mesmo que falar sobre a História da Matemática, pois sua constituição envolve a relação de confluência entre o desenvolvimento, por exemplo, da Álgebra, Geometria, Aritmética, Filosofia, entre outras. Assim, optamos pelo foco sobre a Continuidade, em função de sua importância para o contexto do Cálculo, em alusão à elaboração de outros conceitos como Limite, Números Reais, Derivadas, Integrais, etc. (BROLEZZI, 1996; COBIANCHI, 2001; DIAS, 2007; ABREU, 2010; ABREU; ANDRADE, 2010; BACHA; SAITO, 2014).

O processo de construção da pesquisa pode ser sintetizado na figura a seguir (Figura 1).

Figura 1- Movimento de Construção da Pesquisa



Fonte: Próprio Autor

Nessa nova e atual configuração, a pergunta norteadora desta pesquisa se sintetizou em: *Quais são as relações essenciais estabelecidas no movimento lógico-histórico do conceito de Continuidade que podem se configurar como nexos conceituais a partir da realização da Análise Documental e da Análise Histórico-Epistemológica?*

Tendo essa problemática como pano de fundo, a tese que se busca defender neste trabalho se constitui no entendimento de que é por meio do movimento lógico-histórico que se efetiva a determinação dos nexos conceituais da Continuidade como aspecto fundamental

para sua abordagem em sala de aula, com vistas ao desenvolvimento psíquico dos sujeitos. Assim, a pesquisa passa a se estruturar a partir da Análise Histórico-Epistemológica (RADFORD, 2011) do conceito de Continuidade com vistas à determinação de seus nexos conceituais.

Para aclararmos o contexto de construção e desenvolvimento dessa investigação, na próxima seção serão apresentados os elementos teórico-metodológicos da pesquisa.

2. Aspectos Teórico-Metodológicos da Pesquisa

O desenrolar da vida humana segue seu fluxo contínuo de mutabilidade e surgimento constante de novas necessidades. Com o despertar de novas gerações, instaura-se também o desafio de resguardar todo o aparato intelectual e material acumulado, como ponto de partida para a manutenção da vida e a produção de novas descobertas.

Com o advento de uma organização social cada vez mais complexa, as relações estabelecidas entre o homem e o mundo exterior se voltam para a necessidade de determinação de previsibilidade, manejo e controle dos mais diversos fenômenos que afetam a vida humana. Diferentemente das outras espécies, o organismo humano é dotado da capacidade de inteligibilidade e atuação consciente sobre o ambiente, no qual encontra no pensamento científico, em especial no pensamento matemático, uma manifestação sistemática no que diz respeito a uma construção coletiva do conhecimento.

O desafio de compreender as adversidades que afligem o desenvolvimento da vida ganhou força com a criação de ferramentas inteligíveis capazes de fornecer condições favoráveis para a atuação humana sobre a natureza. Dentre as distinções atualmente estabelecidas sobre as formas de conhecimento, a Matemática carrega uma potência significativamente criadora e criativa para a o cumprimento dessa tarefa. A criação dos conceitos de número, variável e função, por exemplo, permitiu o estabelecimento de uma consciência e a determinação de formas reguladoras da ação humana.

Esse processo ganha ainda mais notoriedade com a necessidade de perpetuação e transferência do que foi produzido aos demais indivíduos da comunidade humana. Isso permite não só partilhar a ideia de uma construção coletiva do conhecimento, mas também que reconheçamos a responsabilidade na inserção das novas gerações a um mundo humanamente modificado/construído. Para tal, é necessária a apropriação dos bens culturalmente produzidos, conduzido por um processo educativo intencional (CEDRO, 2004).

No que diz respeito às novas gerações, ao se apropriarem da significação das ferramentas já produzidas pelas gerações que as precederam, os indivíduos passam a compartilhar de um modo particular de ação coletiva. Inserem-se assim num movimento infundável de compartilhamento e humanização (MOURA, 2000). Assim, o processo de apropriação de tudo o que foi acumulado pela humanidade perpassa, num primeiro momento, pelo acesso ao conteúdo e aos instrumentos de comunicação que o carregam, e, por fim, pela adoção de estratégias de ensino capazes de tornar possível tal apropriação.

É nesse contexto que a organização do ensino se fixa como um componente essencial para a constituição de uma atividade que tem a aprendizagem e o desenvolvimento psíquico como finalidades. Além disso, é premissa deste trabalho que através de uma análise histórica, com base no movimento lógico-histórico, se encontra a possibilidade de compreender as relações essenciais dos conceitos a serem abordados em sala de aula. No caso dessa pesquisa, o conceito de Continuidade no contexto do ensino superior.

Portanto, o objetivo desta seção é promover uma síntese sobre as bases teóricas do movimento lógico-histórico que estão pautadas em categorias do materialismo histórico-dialético, atentando-se para os elementos que, ao mesmo tempo, se transfiguram em método de conhecimento. Somado a isso, intenta-se também na condução de reflexões sobre a conversão da análise histórica em premissa metodológica para a condução da pesquisa, por meio da determinação das relações essenciais da Continuidade, ao que denominamos de nexos conceituais.

As duas próximas subseções tratam separadamente de uma abordagem sobre os conceitos de lógica, enquanto estudo do desenvolvimento do pensamento, e de história na perspectiva marxista, como uma tentativa de estabelecer as relações que constituem o par dialético lógico-histórico. Por fim, as reflexões da última subseção avançam para a discussão sobre a concretização do movimento lógico-histórico por meio de análise histórica da Continuidade e o processo de determinação de seus nexos conceituais.

2.1. A Manifestação do Pensamento e a Construção Lógica do Conhecimento

Não há dúvidas que a forma como o ser humano se relaciona com o mundo externo perpassa pela condução da ação por meio do pensamento. Apesar do consenso sobre tal afirmação, diversas perspectivas têm se aventurado em explicar como esse processo se constitui. A adoção de uma perspectiva em particular certamente exige do pesquisador o conhecimento das bases conceituais que as constituem.

No que tange o contexto desta pesquisa, o pensamento é resultado de um processo de interação dialética entre a inteligibilidade humana e o mundo material. Isso requer o reconhecimento de uma relação de reciprocidade entre o sujeito pensante e o objeto do pensamento. Mas esta relação não se constitui de maneira direta e instantânea. Para entendê-la, torna-se fundamental a compreensão de que nessa perspectiva o pensamento apresenta duas características essenciais: em primeiro lugar, que ele é o processo resultante e mobilizador de uma atividade prática e, em segundo, é mediatizado por um sistema de linguagem coletivamente forjado.

Essa interação dialética entre pensamento-linguagem-atividade se configura como elemento crucial para essa pesquisa e denota a forma como se compreende a elaboração conceitual da Continuidade. Ou seja, a Continuidade aqui é entendida como uma síntese na relação entre a atividade e o pensamento, mediante o estabelecimento coletivo de uma linguagem, no caso, a linguagem lógico-simbólica de fundamentação da Matemática. Mas antes de nos debruçarmos sobre a Continuidade, é necessário esclarecer essa relação.

No pensamento, uma vez que determinado objeto possui uma imagem refletida na mente humana, esta imagem passa a compor um quadro de relações socialmente estabelecidas e cristalizadas no consciente, tornando-se um componente ativo na regulação da ação (KOPNIN, 1978). Nesse momento, o sujeito age conscientemente sobre determinado objeto a partir das relações construídas e assimiladas em seu contexto sociocultural. Esta perspectiva é fruto de estudos realizados por psicólogos russos e seus sucessores que buscam compreender fenômenos da vida humana a partir da Teoria Histórico-Cultural, cuja base se concebe nos trabalhos de Karl Marx (1818-1883).

Assim, estabelecido o *lugar* de onde falamos, é justamente nesse movimento de interação entre sujeito pensante e realidade objetiva que se concentra a compreensão dialética do conceito de trabalho no qual o sujeito, ao se deparar com a realidade objetiva, transforma o mundo em seu redor através de sua ação e, ao mesmo tempo, é transformado por meio da construção de novas estruturas cognitivas que controlam tal ação, tornando-se um processo vivo de constantes modificações (ANTUNES, 2010). É nesta perspectiva de trabalho em Marx que o pensamento se constitui. Com sua base na realidade objetiva, no pensamento está a interação do externo e o interno, do objetivo e o subjetivo, por meio da satisfação intencional de uma necessidade prática (LEONTIEV, 1983).

Kopnin (1978) retrata que

o pensamento, suas formas e leis, são resultado da ação recíproca material do sujeito com o objeto, a qual atua sob a forma de prática. A essência do pensamento pode ser expressa pela fórmula: atividade do sujeito que concebe o objeto ou a realidade objetiva em determinadas formas. No pensamento podem-se destacar vários aspectos interligados: 1) o objeto, dado no pensamento; 2) a atividade do sujeito, dirigida no sentido do objeto; 3) o resultado dessa atividade: as formas do pensamento, sob as quais atua o objeto (KOPNIN, 1972, p. 38).

E complementa ao discorrer que

enquanto atividade intelectual, o pensamento é, a seguir, um processo com fim definido. No pensamento o homem se propõe a determinados fins, que tem significado objetivo e são produto das necessidades práticas. Visando a

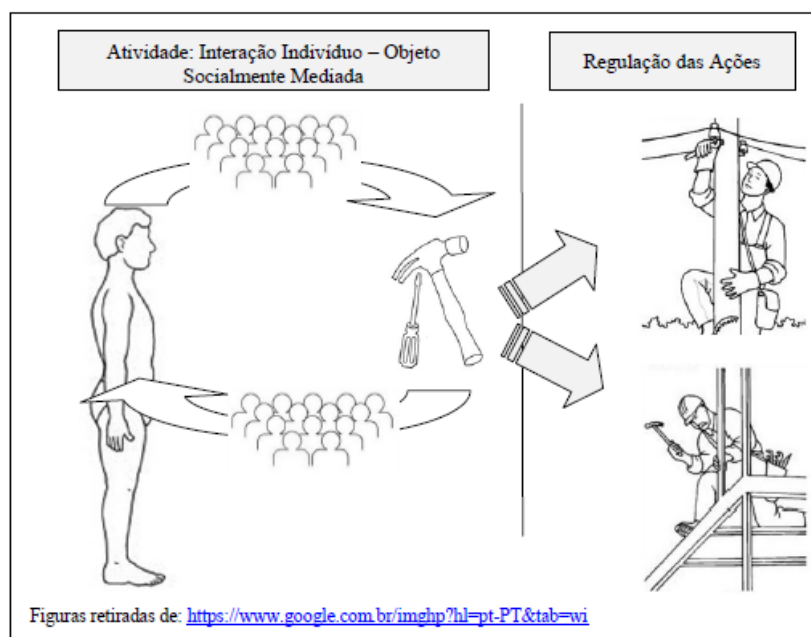
determinados fins, o homem coloca e resolve o problema da relação da essência do pensamento com a realidade objetiva. Deste modo realiza-se a verificação material dos resultados do pensamento, elucida-se até que ponto concretizou-se o fim colocado diante do pensamento (KOPNIN, 1978, p. 130).

Apesar de ter uma dinâmica essencialmente intelectual (ideal), o pensamento se constitui a partir de uma atividade prática, isto é, tem sua base existencial no mundo objetivo. Qualquer tipo de separação do pensamento enquanto atividade intelectual de sua relação com a vida material está fadada ao equívoco de se perder a essência de sua existência.

Há ainda o outro aspecto fundamental, a linguagem. Na busca de organização das estruturas psíquicas que coordenam a reflexão do objeto no pensamento, a imagem assim refletida não permanece estagnada, como em uma fotografia impressa numa folha em branco, mas se insere num conjunto de relações previamente estabelecidas (e em constantes transformações) cujas propriedades são interpretadas por categorias culturalmente assimiladas ao longo da vida em sociedade (KOPNIN, 1978).

Esse aspecto resgata o modo como coletivamente o pensamento é constituído pelo sujeito. Em sua interação com o objeto através da atividade prática, o sujeito se apropria de um modo culturalmente estabelecido e assimilado ao longo de suas relações interpessoais, compartilhando significados sobre o objeto, que conduz a um modo particular de regulação de sua ação (Figura 1).

Figura 2 - Interação Sujeito-Objeto na Constituição do Pensamento



Como exemplificado na Figura 1, o indivíduo pode até se apropriar das características físicas dos objetos num primeiro momento, como o tamanho, peso, materiais de fabricação, entre outros. Características primárias, por assim dizer, que diferenciam (ou aproximam) dois objetos. No caso da Figura 1, a diferença entre o martelo e a chave de fenda. No entanto, ao se apropriar do valor social que cada ferramenta carrega na execução de uma atividade prática específica, esse indivíduo passa a compartilhar de um significado culturalmente estabelecido e, assim, estabelece diretrizes para a regulação de sua ação. Toma posse de seu lugar em um coletivo de indivíduos que usam, entre outras funções, o martelo para “martelar” e a chave de fenda para “parafusar”.

Portanto, o pensamento se estabelece em duas categorias essenciais: a partir de uma atividade prática⁶ em contato com o mundo material e mediado por relações culturalmente assimiladas ao longo da vida. E como essas relações se cristalizam na mente do sujeito?

Como aponta Vigotski (2007), o modo como o sujeito se apropria dessas relações está diretamente mediatizado por um conjunto de signos e instrumentos construídos coletivamente através da linguagem. Ao corroborar com essa questão, Kopnin (1972) defende que

o pensamento não pode começar do nada. Para assimilar teoricamente o objeto o homem precisa ter diante de si esse objeto, estar em interação prática com ele. Necessita de meios que lhe ajudem a captar o objeto em formas determinadas. É na qualidade de semelhantes instrumentos que atua a experiência do conhecimento do mundo corroborada com a linguagem (KOPNIN, 1972, p. 39-40).

Destacamos nossa compreensão aqui que a linguagem se institui a partir de um sistema simbólico organizado coletivamente ao longo do tempo, numa relação dialética entre a comunicação (intersíquico) e a constituição do pensamento (intrapíquico). Esse sistema é constituído por toda ação e/ou conjunto de estruturas que permitem a emissão, recepção e interpretação de mensagens entre sujeitos num grupo, sejam através de sons, imagens, signos, gestos etc. Nesse sentido,

o processo de pensamento se realiza à base de sinais, via de regra de palavras e proposições que são forma sensorial, material de existência do ideal. “O ‘espírito’ carrega desde o início a maldição de ser ‘sobrecarregado’ pela matéria que aqui se manifesta sob a forma de camadas móveis de ar, de sons, em suma, sob a forma de linguagem” – escreveu K. Marx. Enquanto imagem

⁶ Importante ressaltar que utilizamos o termo “atividade prática” com referência à qualidade da ação humana com a realidade objetiva. Com a complexificação das relações sociais, econômicas e culturais, aos poucos vão surgindo novas necessidades e essa atividade prática se converte também em “atividade intelectual” em alusão ao modo como o indivíduo passa a operar na concretude de objetos mentais, como no caso da atividade científica ou, então, da atividade matemática. A estrutura da atividade se mantém a mesma, mas o que muda são as relações estabelecidas com os diferentes objetos (materiais e mentais).

cognitiva do objeto, enquanto abstração, o ideal realmente existe para outro homem no processo de comunicação entre os homens, logo, existe para o próprio ser pensante apenas quando atua sob a forma material sensorial; sob a forma de palavras, proposições. O sujeito pode perceber do mundo exterior somente aquilo que atua sobre os órgãos do seu sentido; o cérebro humano pode entrar em interação somente com os fenômenos capazes de suscitar nele as excitações correspondentes, i. e., com o material, o sensorial. Por isto as imagens reais dos objetos assumem na linguagem a sua forma sensorial-material e deste modo tornam os resultados do pensamento acessíveis, reais (KOPNIN, 1978, p. 132).

Assim, no processo de comunicação, a linguagem permite que os indivíduos compartilhem e negociem as formas como subjetivamente o pensamento é elaborado e convertido em formas reguladoras da ação humana. Através da criação e compartilhamento de instrumentos inteligíveis de compreensão do mundo (signos, sinais, imagens, grafias, sons, etc.) é que se tornam possíveis a concretude do pensamento e sua manifestação na prática. Em outras palavras, ao passo que a linguagem conduz o processo de apropriação do mundo, mediatizando significados cristalizados pelo indivíduo ao longo da vida em sociedade, ao mesmo tempo ela se converte na materialização do pensamento, constituindo um meio essencial de produção coletiva de conhecimento.

O resultado dessa interação entre pensamento e linguagem é a constituição do que entendemos por conhecimento e que se configura em um “processo de criação de ideias, dirigidas a um fim, que refletem com perfeição a realidade objetiva sob as formas de sua atividade [o pensamento] e que existem como determinado sistema linguístico [linguagem]” (KOPNIN, 1972, p. 25).

Portanto, na égide de desenvolvimento do pensamento está o potencial de criação do conhecimento que se converte em traduções da realidade objetiva por meio da linguagem. No conhecimento estão encarnadas não só as representações da realidade objetiva pelo pensamento humano, mas também elementos de práticas culturais acumuladas ao longo do tempo.

Em guisa de exemplo, ao se deparar com a necessidade de controle de quantidades ou de medição de determinados objetos em diferentes civilizações, é possível estabelecer relações entre instrumentos de linguagem construídos que se aproximam do conceito de número. Ao se apropriar deste conhecimento, o sujeito não só assimila um elemento particular de linguagem, mas principalmente passa a compartilhar de uma forma culturalmente estabelecida de pensamento e, conseqüentemente, de regulação de sua ação.

É na constituição do conhecimento que se estabelecem categorias e conceitos, cuja finalidade se instaura na representação do mundo material por meio de generalizações

inteligíveis que orientam a ação humana. E isso é um aspecto importante, pois é na existência de diferentes formas em como esse processo é conduzido que se firma a diferenciação em pensamento científico e rotineiro (KOPNIN, 1978).

Sobre isso, a produção de conhecimentos socialmente aceitos ao longo do tempo tem exigido cada vez mais o estabelecimento de características de precisão e veracidade. Tais características estão ligadas ao modo como os conhecimentos se vinculam à realidade objetiva e como objetivamente são capazes de traduzir as relações observadas na prática. Como modo inerente à atividade prática, a produção de conhecimento também é resultado da vida em sociedade, mas foi durante o período renascentista nos séculos XVI e XVII que ela sofreu transformações em sua forma e conteúdo e passa se configurar nos moldes da ciência moderna. A partir disso, o desenvolvimento do pensamento, e conseqüentemente do conhecimento, volta-se para a “formação de novas teorias e conceitos, com o movimento das ideias fora dos limites das concepções teóricas anteriores e genéricas, ou seja, com a formação de uma nova qualidade” (KOPNIN, 1978, p. 129).

A determinação do conhecimento em sua qualidade de científico foi (e ainda é) matéria de discussão em diferentes áreas. Esse problema ganha notoriedade e força com a necessidade de demarcação sobre as forças que regem o “trato científico” em compreender determinado fenômeno ou objeto da realidade objetiva e, principalmente, pela profundidade em que se almeja realizar tal empreitada.

Diferentemente do conhecimento rotineiro (cotidiano, espontâneo, senso comum, etc.) que surge à base de generalizações arbitrárias advindas de experiências da vida diária, o conhecimento científico tem por princípio a criação de meios e instrumentos que comprovem (ou garantem) com profundidade suas generalizações e que estas consigam refletir, o quanto mais próximo possível, a realidade objetiva (KOPNIN, 1978).

Não há a intenção aqui de aprofundar nessas questões, sobretudo no que diz respeito ao mérito e à existência (ou não) da hierarquização das diferentes formas de manifestação do pensamento em conhecimento científico ou rotineiro. No entanto, a perspectiva deste trabalho está na compreensão de como o conhecimento científico, e em particular o conhecimento matemático, se desenvolve no sentido de conduzir o processo de reflexão das leis da realidade objetiva em leis do pensamento através do estabelecimento de categorias, conceitos e métodos.

Isso traz implicações importantes para o contexto do objeto dessa pesquisa, o conceito de Continuidade. Entendido como resultado de um processo de produção do conhecimento, ao

se apropriar deste conceito o indivíduo assimila um conjunto de significados elaborados no âmbito da linguagem lógico-simbólica e compartilha uma forma coletiva de regulação de sua ação, pois passa a compreender novos conceitos (ou a ressignificar os já existentes) a partir das estruturas mentais advindas com a Continuidade.

Assim se levanta uma questão importante: Como ter acesso aos diferentes estágios de manifestação do pensamento, desde suas manifestações primárias até as formas mais aprimoradas? Em nosso caso, como acessarmos os diferentes momentos de manifestação do pensamento na produção da Continuidade? Sabemos que um caminho possível na busca por resposta a estas questões é por meio da história.

Não havíamos até aqui ao menos estabelecido qualquer relação do pensamento/conhecimento com a história. Isto é provocativo. Deixaremos para aprofundar nesta relação nas próximas seções do capítulo. Antes disso, continuemos nos debruçando sobre a questão do conhecimento.

Ao longo do tempo, a compreensão do desenvolvimento do conhecimento esteve relegada à parte da filosofia dedicada à Lógica. Apesar da existência de muitas correntes lógicas, pode-se estabelecer, em modo geral, que a lógica é “o estudo da estrutura, dos meios de demonstração, do surgimento e evolução de uma teoria científica” (KOPNIN, 1978, p. 21). E mais,

a lógica não deve estudar algum pensamento correto, conhecido de antemão, mas o movimento do conhecimento humano no sentido da verdade, desmembrando deste formas e leis em cuja observância o pensamento atinge a verdade objetiva. E uma vez que o conhecimento aumenta sem cessar, mudando quantitativa e qualitativamente, o campo do lógico se enriquece com um novo conteúdo incorporando novos elementos, transformando-se e reorganizando-se interiormente (KOPNIN, 1978, p. 21).

Em síntese, o fundamento lógico (aqui trataremos como somente lógico) reflete o movimento do pensamento como resultado do processo de estudo das transformações do conhecimento. Nas palavras de Kopnin (1978),

uma vez apreendidas, as leis do mundo objetivo se convertem em leis também do pensamento, e todas as leis do pensamento são leis representadas do mundo objetivo; revelando as leis de desenvolvimento do próprio objeto, apreendemos também as leis de desenvolvimento do conhecimento e vice-versa, mediante o estudo do conhecimento e suas leis descobrem-se as leis do mundo objetivo (KOPNIN, 1978, p. 53).

Isto é fundamental a esta pesquisa. Ao buscarmos compreender as leis na produção do pensamento sobre a Continuidade, intentamos em relacionar com as formas de apreensão das leis da realidade objetiva refletidas neste conceito.

No entanto, há que se ressaltar que diferentes correntes lógicas conduzem a processos distintos de determinação das leis objetivas. Um exemplo clássico é o da lógica formal⁷ que serviu adequadamente aos problemas da ciência moderna, cujos princípios de compreensão do pensamento nesta corrente estiveram fortemente ligados à produção de sistemas linguísticos construídos ao longo dos últimos séculos (KOPNIN, 1978). Com o aparato simbólico advindo da matemática, a lógica formal impulsionou o desenvolvimento de teorias revolucionárias ao cenário das ciências naturais, mas em certa medida limitou o processo de ascensão a estruturas mais internas de fenômenos da realidade objetiva.

Sobre a lógica formal, com referência à lógica clássica pautada nas obras de Aristóteles, Kopnin (1978) discorre que

Ao analisar as formas do pensamento, a alógica clássica acentua sua atenção no conteúdo formal, ou seja, ela não dá prioridade ao que essa forma de pensamento reflete e a maneira como faz. Nas formas de pensamento, ela estuda o conteúdo que permita extrair um novo juízo dos juízos existentes. Por exemplo, de qualquer juízo geral da forma: “Todo A é B” pode-se extrair o juízo “C é B”, caso seja estabelecido que C é o objeto dos referidos juízos; isto está relacionado com o conteúdo formal dos juízos e suas relações. O conteúdo formal é material, representa o reflexo das leis objetivas, das leis mais gerais e mais simples, porém não está imediatamente ligado às propriedades concretas de qualquer objeto determinado, refletido nesse ou naquele juízo concreto (KOPNIN, 1972, p. 73).

De maneira geral, ao se afastar cada vez mais de problemas de ordem filosófica e apregoar estruturas rígidas baseadas em sistemas axiomáticos e modelos de dedução, as características dos objetos e/ou fenômenos abarcados pela lógica formal tendem a refletir suas relações mais visíveis e sensíveis a priori. E o argumento que sustenta esta questão é que tais relações são passíveis de quantificação e redução em um sistema simbólico formal. Características tão caras e necessárias à lógica formal.

Voltada para uma direção diferente, a lógica dialética se estabelece em sua “capacidade de relacionar a objetividade do conteúdo dos conceitos e teorias da ciência com sua mutabilidade, instabilidade” (KOPNIN, 1978, p. 82). Com vistas à construção da verdade objetiva, busca se constituir como lógica que revela “as leis do conhecimento enquanto processo de conhecimento pelo pensamento” (*ibidem*).

⁷ Referimos ao termo lógica formal utilizado por Kopnin (1978) em alusão ao desenvolvimento do pensamento

Enquanto a lógica formal se estrutura em sistemas integrados de uma simbologia generalista e suas relações, a lógica dialética se configura como combinação entre pensamento e realidade. Segundo Kopnin (1978),

as formas e leis do pensamento que a dialética como lógica estuda não são mais que as formas e leis do movimento do mundo material, incorporado ao processo conjunto de trabalho e inserido no campo da atividade humana. O traço peculiar da atividade do homem e do seu pensamento consiste justamente na universalidade, i. e., no fato de o homem social ser capaz de transformar qualquer objeto da natureza em objeto e condição de sua atividade vital e não estar atrelado às condições biológicas limitadas da vida da espécie, como ocorre com o animal. Com isto o homem demonstra a sua universalidade em geral e a universalidade do seu pensamento em particular, de vez que o pensamento nada mais é que a capacidade desenvolvida de atuar conscientemente com qualquer objeto, segundo a forma própria e medida deste, com base na imagem que com veracidade objetiva o reflete (1978, p. 81).

E o autor ainda complementa,

É justamente por isso que a dialética revela as leis do movimento dos objetos e processos, converte-se ainda em método, em lógica do avanço do pensamento no sentido do descobrimento da natureza objetiva do objeto, dirige o processo de pensamento segundo leis objetivas visando a que o pensamento coincida em conteúdo com a realidade objetiva que fora dele se encontra e, após concretizar-se em termos práticos, leve ao surgimento de um novo mundo de objetos e relações (KOPNIN, 1972, p. 53)

Assim como está dito, diferentemente da lógica formal, que parte do princípio da estagnação dos fenômenos naturais e sua reprodução em ambientes controlados capazes de fornecer todas as informações possíveis, a dialética se estabelece na compreensão da realidade em movimento.

Determinar o lógico sobre o conhecimento deve percorrer não só as diferentes etapas de produção de suas estruturas formal-simbólicas, enquanto aspectos externos e finais de seu estágio de desenvolvimento, mas também revelar as relações (identidade, transições, contradições, etc.) entre os conceitos, como reflexos do mundo material em seu devir. Estas relações revelam as essencialidades na constituição do conhecimento. Assim, o que buscamos é a compreensão das relações essenciais de constituição da Continuidade.

Para endossar esta visão, Caraça (1958) afirma que a realidade objetiva se apresenta a partir de dois princípios essenciais. O primeiro é a lei de Interdependência das coisas (objetos, pessoas e fenômenos) que estabelece a realidade como um organismo uno e vivo, onde todas as coisas se comunicam entre si e participam da vida uma das outras. Já a segunda diz respeito

à lei da Fluência, a qual determina que todas as coisas estão em constante movimento transformação.

Diante disso, como estabelecer formas de compreender e explicar o movimento da realidade e sua reflexão no pensamento?

Caraça nos dá elementos de como conduzir esta questão a partir da categoria dialética da quantidade-qualidade. Na composição de seus argumentos, o autor introduz o conceito do “isolado” (CARAÇA, 1958, p. 112) que representa um (re)corte bem sucedido da realidade, certificando-se da presença de características dominantes presentes na realidade objetiva e que nelas certamente se resguardem as relações de interdependência já mencionadas.

Como já dissemos, assim como acontece na lógica formal e, levando em consideração a fluência das coisas, qualquer secção produzida sobre a realidade está fadada ao fracasso de reproduzir a própria realidade, uma vez que se torna impossível a contenção de suas transformações e a replicação das condições iniciais. No entanto, Caraça (1958) chama a atenção para a presença de “inesperados” apregoados neste processo (CARAÇA, 1958, p. 114). Os inesperados nada mais são que a revelação de elementos antes não abarcados na elaboração de um isolado, cuja existência denuncia a presença de uma característica dominante nova.

Isso pode ser um problema a princípio. Nos moldes da lógica formal, isso certamente significaria abandonar o recorte realizado, uma vez que não oferece condições básicas de replicação e controle, ou, na melhor das hipóteses, levaria à criação de um novo recorte, agora com a preservação da característica recém-revelada. Mas, para a lógica dialética, o inesperado é o modo como ativamente se encontra o processo de fluência do fenômeno analisado. Sem considerar a existência de inesperados, é impossível empreender o processo de compreensão e explicação da realidade.

Rigorosamente, deveríamos dizer que a cada momento temos um *isolado novo*, mas, pelo mesmo acto arbitrário que nos levou já a *recortá-lo* do seio da Realidade (acto justificado pela necessidade e comodidade de estudo), diremos que o isolado *evoluciona* e que os diferentes estados observados correspondem, não a isolados novos, mas a diferentes *fases de evolução* do isolado inicial (CARAÇA, 1958, p. 117).

A evolução de um isolado perpassa então pela compreensão de suas características em movimento e as relações que estão estabelecidas entre si a cada novo momento. Para compreender melhor este processo, Caraça (1958) recorre ao princípio dialético das leis de qualidade e quantidade. O conceito de qualidade está ligado ao “conjunto de relações em que um determinado ser encontra com os outros seres dum agregado” (CARAÇA, 1958, p. 113).

Estas relações são estabelecidas a partir de características que podem ser observadas dentro de um isolado e num determinado contexto histórico. Cada característica de determinado ser se liga a outro, constituindo uma rede de relações. Uma vez que é observada uma mudança em uma característica existente, ou até mesmo o aparecimento de uma nova característica, é de se esperar que haja alterações nas relações antes estabelecidas. Nas palavras do autor,

tomemos um certo *isolado* de estudo; arrastado na fluência de todas as coisas, ele transforma-se – cada um dos seus componentes *devém* a todo o instante uma coisa nova. Alterando-se constantemente os elementos constitutivos, alteram-se as suas relações, isto é, as suas *qualidades*, e o *isolado* aparece a todo o momento com qualidades novas (CARAÇA, 1958, p. 117).

Assim, Caraça recorre ao conceito de “quantidade” (CARAÇA, 1958, p. 115). A princípio esse termo pode conduzir nosso entendimento aproximando do significado atribuído à palavra número, ou melhor, a elementos suscetíveis de contagem. No entanto, a quantidade aqui é compreendida como um atributo do conceito de qualidade.

Em um determinado isolado, cada relação entre os elementos que o constitui recebe determinações ligadas ao conceito de quantidade. Estas determinações podem ter caráter de juízo, grandeza, intensidade, entre outros. A quantidade diz respeito às relações mais internas e diretas entre os elementos do isolado. De qualquer forma, o estabelecimento de qualquer ponderação sobre a qualidade de um isolado requer a análise das relações concebidas em sua quantidade.

Segundo Caraça (1958), por vezes uma mudança ocorrida na quantidade pode chegar a um nível significativo de alteração que contraria a qualidade estrutural de um isolado, obrigando à criação de uma nova qualidade. Esse processo é chamado de “transformação da quantidade em qualidade” (CARAÇA, 1958, p. 118). Isso significa que mudanças profundas podem ocorrer no seio das relações mais internas de um isolado, trazendo à tona a importância de se ater aos elementos da quantidade.

Disso podemos compreender que explicar o movimento lógico da realidade objetiva pelo pensamento perpassa pela análise criteriosa das mudanças ocorridas nas camadas mais internas de um isolado. Explicar um fenômeno da realidade objetiva é explicar a evolução de um isolado (CARAÇA, 1958).

No âmbito da relação quantidade-qualidade, esse processo permite o reconhecimento de mudanças ocorridas em elementos mais ocultos, cujas relações não são relativamente diretas. No entanto, ao passo que ganha novas configurações, o sistema de relações se modifica e o que antes era simples, passa a se tornar mais complexo. Nas palavras de Kopnin

(1978), “a lógica do movimento do pensamento tem como uma de suas leis principais a ascensão do simples ao complexo, do inferior ao superior, e esse movimento do pensamento expressa a lei do desenvolvimento dos fenômenos do mundo objetivo” (KOPNIN, 1978, p. 184).

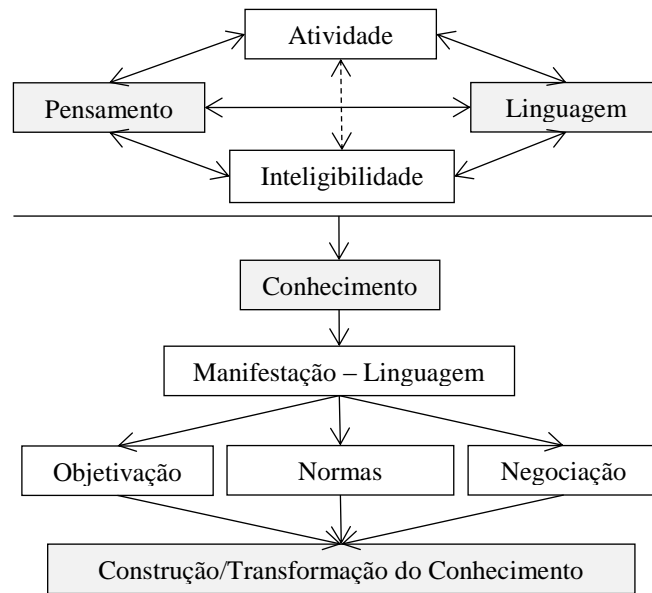
Importante ressaltar que estas transformações estão limitadas às fronteiras impostas pela própria linguagem, pois tendem a refletir as características dos fenômenos da realidade por meio das representações abstratas que foram construídas. O que são passíveis de serem analisadas no âmbito do lógico são as relações construídas entre os objetos que lhe são inerentes. Quanto mais profundo se alcança no âmbito da análise da quantidade, mais complexo se torna o sistema de relações construído e mais o pensamento se aproxima de uma representação abstrata e fidedigna da realidade. Mas ainda lhe faltará abarcar questões cujos objetos são incapazes de exprimir. Nelas estão expressas as relações de casualidades, contrariedades, desvios, entre outros, em que o aparato simbólico tende a ocultar (KOPNIN, 1978).

Dessa forma, essas considerações sobre as transformações da realidade objetiva nos ajuda a compreender melhor as formas de transformação do conhecimento ao longo do tempo. Isso implica que, na investigação das transformações lógicas da Continuidade, é preciso atentarmos para as mudanças nas relações tanto no âmbito mais externo, em alusão às manifestações da linguagem formal, quanto no âmbito mais interno.

Nesse sentido, enquanto resultado de um processo coletivo, a determinação de um sistema linguístico se constitui ao longo de negociação entre indivíduos com vistas à construção de uma estrutura objetiva para o conhecimento. Este processo envolve o estabelecimento de normas linguísticas que tendem a padronizar e aproximar as diversas formas de pensamento. No entanto, aspectos importantes vão se constituindo como obsoletos e vão dando espaço para novas representações. Nesse caminho, ideias são descartadas, reelaboradas ou substituídas. Estruturas, antes fundamentais, caem ao desuso e problemas que um dia foram pontos de partida cedem lugar para a criação de modelos.

Portanto, na Figura 2 apresentada a seguir sintetizamos a estrutura do lógico na constituição do conhecimento.

Figura 3 - Estrutura do Lógico na Compreensão do Pensamento



Fonte: Próprio Autor

Essa estrutura (Figura 2) nos ajuda a compreender o modo no qual o conhecimento se estabelece na relação pensamento-linguagem-atividade e aponta para características importantes de acesso à sua construção (transformação) ao longo do tempo.

Em sua forma mais acurada, quanto mais objetivo e abstrato o conhecimento, maior sua capacidade lógica de abarcar os fenômenos da realidade. Assim, tais questões são suprimidas e relegadas à história. E é exatamente aqui que se constituem os limites do lógico.

Para a apreensão de aspectos que fogem aos limites da linguagem é preciso o reconhecimento de uma estrutura que avance ao sistema de abstrações e abarque a análise das relações que são esquecidas ou ocultadas nesse processo. Certamente encontraremos respostas a estas questões no âmbito do fundamento histórico.

Na subseção seguinte serão apresentados os princípios que sustentam a visão materialista da história e seu vínculo com a interpretação da essência dos fenômenos da realidade objetiva. Veremos que nessa relação de complementariedade entre o lógico e o histórico se constitui o fator fundamental para a compreensão do movimento do pensamento e, em especial, do desenvolvimento da Continuidade.

2.2. A História no Desenvolvimento do Conhecimento

Entre as mais distintas criações da humanidade, certamente a elaboração de uma ideia de história se fixa como um marco para o desenvolvimento do pensamento. Este foi um

grande passo para a compreensão e transformação do mundo. É através da percepção de um processo temporal irreversível que se tornou possível ao ser humano o acúmulo de conhecimento sobre a realidade e sobre si.

O reconhecimento da temporalidade presente na construção do conhecimento possibilitou ao homem não só a clareza sobre as mudanças irreversíveis que lhe são impostas em sua interação com o mundo, mas também proporcionou condições fundamentais para previsão e controle sobre os fenômenos da realidade. E é nesse sentido que o conceito de história deve ser entendido neste trabalho.

Para esclarecer melhor esta questão, ao longo desta seção serão discutidos os elementos que sustentam uma visão materialista de história e sua relação dialética com a manifestação lógica do conhecimento. O objetivo é promover algumas reflexões sobre os fundamentos do materialismo histórico e apresentar argumentos suficientes que conduzem à complementariedade entre o lógico e o histórico no desenvolvimento do pensamento.

Apesar de ser um termo facilmente reconhecido, o conceito de história também é tema de inúmeros debates sobre os quais se assentam várias concepções e que servem de base para a sua recorrência como recurso, seja no âmbito da explicação de fenômenos, seja na exortação (ou degeneração) de eventos ou personagens passados, entre outros.

Durante o século XIX uma visão tradicionalista de história foi amplamente difundida e contribuiu para o desenvolvimento da ciência moderna aos moldes da lógica formal (DIAS, 2012). De maneira geral, esta visão está pautada no reconhecimento de aspectos que pressupõe o entendimento da neutralidade dos fatos históricos e a sucessão cronológica dos acontecimentos, cuja evolução natural é justificada pela realidade atual.

Esse modo de compreender a história tende a tratar os relatos históricos como verdadeiros e objetivos, uma vez que refletem uma composição cronológica de eventos estudados, cuja estrutura revela com fidedignidade os fatos ocorridos e a assepsia de qualquer perturbação ideológica ou teórica em sua constituição (DIAS, 2012). Isso fez com que por um longo tempo se acreditasse na existência de uma história universal e idealista, cuja essência está na possibilidade humana em “ascender”, “descobrir” ou “resgatar” a verdade escondida em uma entidade metafísica.

Mas foi com o advento dos debates sobre os rumos da ciência no final do século XIX, sobretudo ao longo do século XX, que se tornou possível a ampliação e sistematização de outras tendências históricas. Para aclarar esse movimento, Cardoso (1997) adota uma

perspectiva macroteórica e chama a atenção para o advento, entre outros, de um paradigma iluminista sobre a história.

Segundo o autor, a história em sua perspectiva iluminista concebe como premissa seu caráter racional e científico, cuja objetividade está na elaboração de teorias de compreensão e explicação do mundo. “Trata-se de uma história analítica, estrutural [...] e explicativa” (CARDOSO, 1997, p. 27). Em contraposição ao modelo tradicionalista, pode-se levantar como características do paradigma iluminista,

1. O reconhecimento da necessidade de uma síntese global que explique tanto as articulações entre os níveis que fazem da sociedade humana uma totalidade estruturada quanto as especificidades no desenvolvimento de cada nível.
2. A convicção de que a consciência que os homens de determinada época têm da sociedade em que vivem não coincide com a realidade social da época em questão.
3. O respeito pela especificidade histórica de cada período e sociedade (por exemplo, as leis econômicas só valem, em princípio, para o sistema econômico em função do qual foram elaboradas).
4. A aceitação da inexistência de fronteiras estritas entre as ciências sociais (sendo a história uma delas), se bem que o marxismo seja muito mais radical quanto à unidade delas.
5. A vinculação da pesquisa histórica com as preocupações do presente (CARDOSO, 1997, p. 31).

Contribuindo nesse cenário, Nobre (2004, p. 532) aponta que esse movimento apregoa

uma história que não é imutável, pois, de tempos em tempos, as verdades se modificam e se atualizam. Coisas que eram assumidas como verdades absolutas transformam-se em verdades relativas, o que leva historiadores a realizarem análises críticas em obras escritas no passado, com o intuito de efetivarem as necessárias correções. Esse fato gera um ciclo: com o aprofundar das investigações históricas, novas verdades são descobertas, novas interpretações são dadas a elas e a escrita da história ganha novos direcionamentos.

Entre as mais diversas escolas que compõe esse paradigma, Cardoso aponta a visão marxista como uma de suas “vertentes mais influentes e prestigiosas” (CARDOSO, 1997, p. 23). Ao que o autor chamou de vertente marxista, entendemos que se vincula propriamente ao conceito de materialismo histórico que encontra em Marx e Engels (1979) sua forma mais difundida.

Como o próprio conceito já denota, a história na perspectiva marxista carrega em sua égide a superação de uma visão idealista e se configura como um constructo resultante da interação entre sujeito e realidade objetiva (VIANA, 2007). Esta afirmação revela que o

conceito de história está atrelado ao resultado da atividade humana cuja finalidade se orienta na elaboração de uma representação dos fenômenos da vida pelo pensamento.

Por ser “constructo” e “resultado”, diferente do que pressupõe o conceito tradicionalista, a história deixa de possuir uma existência em si mesma e passa a se manifestar a partir de uma necessidade humana e de condições sociais concretas. Para o materialismo, a história se constitui no movimento incessante de produção de novas necessidades como resultado da interação do homem com o mundo material (MARX e ENGELS, 1979). Assim, “por histórico subentende-se o processo de mudança do objeto, as etapas de surgimento e desenvolvimento” (KOPNIN, 1978, p. 183).

De maneira análoga, para Viana (2007, p. 62)

a história está indissolúvelmente ligada à ontologia. Por história entendemos o desenvolvimento temporal irreversível e por ontologia entendemos a essência de um ser. Toda tentativa de analisar o desenvolvimento temporal irreversível, ou seja, a história de uma coisa sem analisar, simultaneamente a essência, ou seja, sua essência ou sua ontologia, e vice-versa, fatalmente será um fracasso. Em outras palavras, toda história é ontológica e toda ontologia é histórica (p. 62).

O conceito de história, portanto, está diretamente ligado ao conhecimento das mudanças estruturais que ocorrem em determinado objeto ou fenômeno ao longo do tempo. Ao tratar da essência e ontologia, Viana (2007) resgata o significado da compreensão sobre o que ocorre nas relações mais internas e significativas do que se pretende conhecer.

Partindo de um exemplo sobre análise da essência no processo de mudança em diferentes sociedades, Viana (2007) estabelece que

a história da humanidade não é unilinear e nem única, pois ela é a história de diversas formas de sociedades, sendo que umas surgiram independentemente de outras e desenvolveram também de forma independente. Cada sociedade possui uma historicidade própria, embora existam elementos comuns. É que a história de todas as sociedades humanas é marcada pelo desenvolvimento temporal irreversível determinada pela dinâmica de sua totalidade engendrada pelo modo de produção e reprodução da vida material dos seus componentes. Entretanto, cada modo de produção possui sua dinâmica própria e é esta que determina a forma de historicidade de uma sociedade determinada (VIANA, 2007, p. 63).

E ainda complementa ao dizer que “se cada sociedade possui sua historicidade e esta é determinada pelo seu modo de produção, então esta historicidade só pode ser compreendida analisando-se seu modo de produção específico” (VIANA, 2007, p. 64).

Essa reflexão denota que para a compreensão dos eventos estruturais em cada sociedade é preciso se ater ao modo de produção e de reprodução da vida material perpetrado

em cada realidade histórico-concreta. Só assim, compreendidas as relações entre as diferentes formas de intercâmbio material com o mundo, situadas num contexto sociocultural, é que se torna possível a revelação da essência sobre os processos históricos ocorridos ao longo do tempo. E como isso nos ajuda a compreender a questão da essência no desenvolvimento do conhecimento ao longo do tempo?

Como observado anteriormente, o conhecimento é resultado de um processo de interação entre pensamento e realidade objetiva. Sua constituição e manifestação estão atreladas às condições objetivas impostas pelo contexto social no qual o indivíduo se insere, seja na determinação da linguagem, seja no acesso a instrumentos e recursos, etc. Mas, como fenômeno inserido nessa realidade, o processo de elaboração e difusão do conhecimento se constitui como um aspecto particular de uma totalidade e carrega consigo relações basilares desta. Segundo Viana (2007),

para compreender um aspecto particular das relações sociais é preciso relacioná-lo com sua totalidade, ou seja, com o modo de produção e as formas de regularização das relações sociais. [...] O estudo do particular deve reconhecer a ligação indissolúvel entre ele e a totalidade e com a determinação fundamental e sua especificidade (VIANA, 2007, p. 122).

Dessa forma, ao se propor o estudo do aspecto histórico do conhecimento, em particular da Continuidade, em suas modificações ao longo do tempo, é importante perceber que isso perpassa pela compreensão de suas relações particulares estabelecidas pelo modo de produção e suas formas de reprodução material, resultantes de sua conexão com a totalidade. Diferentemente do que se propõe na lógica formal, o conhecimento aqui não é desinteressado de questões sociais e nem livre de perturbações ideológicas. Pelo contrário, como um fenômeno imergido numa totalidade, a gênese do conhecimento está no processo de atividade humana que carrega os traços de sua coletividade e na revelação um modo particular de se produzir representações sobre o mundo. “Em uma análise histórica do passado já sabemos o resultado do processo e cabe, portanto, neste caso, descobrir a gênese de um modo de produção no interior de outro e como das diversas possibilidades postas uma se tornou predominante vitoriosa” (VIANA, 2007, p. 87).

Em síntese, descobrir a gênese de um modo de produção é compreender a relação existente entre as forças produtivas e as relações de produção estabelecidas no processo que se pretende entender. Esta relação é precisamente dialética e qualquer separação com vistas ao entendimento de cada uma não passará dos limites de uma explicação (ANTUNES, 2010). Aqui reside um aspecto importante para esta pesquisa. Isso implica que acessar a essência no

desenvolvimento da Continuidade implica em compreender as relações de seu modo de produção. E como fazemos isso?

No que compete ao conhecimento, as forças produtivas dizem respeito às condições objetivas e intelectuais do indivíduo em se deparar com uma questão em que se almeja empreender a busca de sua compreensão ou solução. Esse é um aspecto particular e se volta para questões sobre capacidades cognitivas e os recursos (materiais e inteligíveis) acessíveis para o cumprimento de tal tarefa.

Já as relações de produção se voltam para os vínculos estabelecidos entre o sujeito e os problemas a serem respondidos na coletividade. Isso envolve tanto o reconhecimento dos problemas particulares na produção do conhecimento em determinada área do conhecimento, quanto das demandas socioculturais nas quais uma resposta almeja atender. Isso requer o reconhecimento do aspecto sociocultural no processo de produção do conhecimento, uma vez que revelam as condições pelas quais um problema ganha legitimidade em ser estudado; um estudo ganha razoabilidade em ser investido; uma resposta ganha notoriedade em ser divulgada; entre outros. Estas relações revelam os modos pelos quais as forças produtivas se constituem e se modificam ao longo do tempo.

Ao se levar em conta o modo de produção da Continuidade, entende-se a importância de compreender os saltos pelos quais esse conhecimento vai conquistando ao longo do tempo, partindo da análise das mudanças na forma e no conteúdo da linguagem, e desvelando as contingências que levaram ao alcance de tal resultado. Isso traz implicações importantes para o contexto metodológico da pesquisa. Trataremos disso nas próximas subseções.

Assim como acontece na transformação da sociedade em sua totalidade, os modos de produção tendem a se efetivarem a partir de condições particulares na égide das relações de produção e, conseqüentemente, das forças de produção. Ao longo de uma complexa análise empreendida por Marx e Engels (1979) sobre o modo de produção capitalista, pode-se perceber como a repartição do trabalho em diferentes contextos reproduz a divisão em classes, enquanto reflexo de sua totalidade.

Ao conceber a análise do modo de produção como aspecto elementar para a compreensão da essência no desenvolvimento do conhecimento, é preciso levar em conta as relações estabelecidas em determinado momento histórico e suas relações com a totalidade. Isso implica estudar o fenômeno em suas múltiplas significações com a realidade objetiva.

Ascender à essência no desenvolvimento da Continuidade implica, então, compreender o modo de produção em suas múltiplas relações e transformações. E aqui reside

a necessidade de retornarmos ao âmbito da manifestação do pensamento por meio do lógico. Por se tratar de um produto inteligível, é através da linguagem e de sua ligação com o mundo material que se efetiva a análise mais profunda e a determinação de aspectos internos e externos do conhecimento (SOUSA, 2004).

Esta relação não podia ser outra senão dialética, uma vez que a separação dos dois conceitos se situa somente no âmbito da explicação e exposição. O lógico e o histórico se constituem em suas características singulares, mas se complementam na compreensão da essência sobre os fenômenos da realidade objetiva. Em síntese,

O histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo. O pensamento visa à reprodução do processo histórico real em toda sua objetividade, complexidade e contrariedade. O lógico é o meio através do qual o pensamento realiza essa tarefa, mas é o reflexo do histórico em forma teórica, vale dizer, é a reprodução da essência do objeto e da história de seu desenvolvimento no sistema de abstrações. O histórico é primário em relação ao lógico, a lógica reflete os principais períodos da história (KOPNIN, 1978, p. 183).

Nesse sentido, o lógico se constitui na análise da linguagem na formulação de um sistema que tende a ser legitimamente depurado por meio de abstrações. Isso certamente oferece condições necessárias para a construção e manipulação de instrumentos (inteligíveis e concretos) na interação entre pensamento e realidade objetiva. Mas tais abstrações expressam as relações mais externas e acuradas do conhecimento, uma vez que se estruturam nas etapas finais de seu desenvolvimento. Cabe, assim, a recorrência ao histórico como fonte fundamental para a descoberta de relações mais essenciais.

O degrau supremo de desenvolvimento do objeto leva implícitos em forma original, “desnatada”, como se costuma dizer, degraus antecedentes, assim como a forma superior de movimento da matéria incorpora todos os degraus inferiores. Isto significa que a reprodução da essência desse ou daquele fenômeno no pensamento constitui ao mesmo tempo a descoberta da história desse fenômeno, que a teoria de qualquer objeto não pode deixar de ser também a sua história. Por isso as definições primárias do objeto, a lógica dos conceitos que o expressam constitui ponto de partida no estudo do processo de formação e desenvolvimento de dado objeto (KOPNIN, 1972, p. 185).

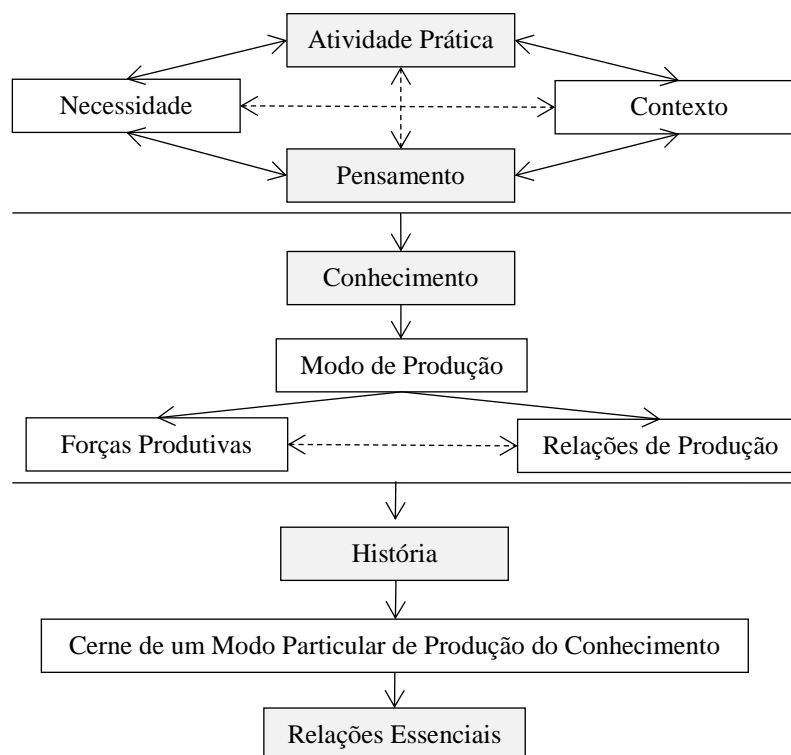
No movimento lógico-histórico do conhecimento se encarnam os pressupostos de reflexo do movimento do pensamento, por meio da análise de suas relações mais essenciais. Enquanto o lógico fornece, em forma objetiva, as condições suficientes de explorar o desenvolvimento, o histórico oferece o conteúdo necessário para interpretá-lo.

Daí a unidade entre o lógico e o histórico ser premissa necessária para a compreensão do processo de movimento do pensamento, da criação da teoria científica. À base do conhecimento da dialética do histórico e do lógico resolve-se o problema da correlação entre pensamento individual e o social; em seu desenvolvimento intelectual individual o homem repete em forma resumida toda a história do pensamento humano. A unidade entre o lógico e o histórico é premissa metodológica indispensável na solução de problema da inter-relação do conhecimento e da estrutura do objeto e conhecimento da história e seu desenvolvimento (KOPNIN, 1978, p. 186).

Portanto, ao mesmo tempo que a unidade dialética lógico-histórico se configura como um fundamento teórico para compreensão do pensamento, também se estabelece como princípio metodológico para propostas que almejam compreender o cerne na produção do conhecimento.

Para sintetizar as relações no âmbito do histórico, apresentamos a seguir um organograma conforme a Figura 3.

Figura 4 - Estrutura do Histórico na Compreensão do Conhecimento



Fonte: Próprio Autor

A Figura 3 ilustra a estrutura sobre o modo como se concretiza a compreensão das relações essenciais a partir do histórico. Frente a isso, podemos sintetizar elementos centrais

na constituição do movimento lógico-histórico da Continuidade, cujo movimento de pesquisa deve estar atento:

- A percepção da Continuidade como um processo resultante da atividade humana e da representação abstrata do pensamento em sua relação com a realidade objetiva.
- No âmbito do lógico, a manifestação simbólica e objetiva da Continuidade é concretizada por meio da transformação da quantidade em qualidade, ou seja, em mudanças nas relações do inferior ao superior, do simples ao complexo.
- No âmbito do histórico estão envolvidas as inter-relações entre as forças produtivas e as relações de produção como fonte de acesso à essência no desenvolvimento da Continuidade.
- As transformações compreendidas no lógico tendem a refletir os saltos na estrutura da Continuidade, em seu conteúdo formal. Já no histórico estão engendrados os elementos relativos ao modo de produção do pensamento, em sua relação com a totalidade.

A partir destes elementos, é possível perceber a existência de aspectos fundamentais para a efetivação de processos investigativos sobre a produção do conhecimento e, nesse caso, da Continuidade. Não levar em conta tais questões pode resultar em imprecisões na elaboração de juízos sobre a essência e comprometer o encadeamento de situações decorrentes dela.

No que tange a concretização do movimento lógico-histórico, um meio pelo qual se torna possível efetivar tal empreitada é a Análise Histórico-Epistemológica do conhecimento (RADFORD, 2011). Ao mesmo tempo em que serve de acesso a informações importantes ao desenvolvimento lógico, podem conduzir a reflexões sobre o momento social e histórico das mudanças ocorridas em determinado conhecimento.

Para tratar dessas questões com o devido cuidado, na próxima subseção serão discutidos os aspectos referentes à análise histórica, no que diz respeito às suas possibilidades e desafios na efetivação do movimento lógico-histórico, com especial atenção no conceito de Continuidade. Para contextualizar, serão levantados elementos sobre o conhecimento matemático e os caminhos para a compreensão do movimento lógico-histórico enquanto perspectiva investigativa para o ensino de continuidade, por meio da determinação dos nexos conceituais.

2.3. Análise Histórica do Conhecimento e a Determinação dos Nexos Conceituais

O “voltar-se” para o passado, ou mesmo o “projetar-se” ao futuro, pressupõe uma ideia de história. O que se entende por essa ideia está intimamente ligado a relatos de eventos, seja no âmbito da descrição dos fatos, seja na liberdade da fantasia. O que de alguma forma não se coloca em questionamento é que toda história é essencialmente uma narrativa de acontecimentos (D'AMBRÓSIO, 1999; RADFORD, 2011; SAITO, 2015). No entanto, como já discutimos anteriormente, diferentes visões conduzem a processos diferentes em se debruçar sobre a história.

No contexto da História da Matemática não é diferente. Ao longo de muito tempo se acreditou na vertente de uma história linear e progressista de evolução do conhecimento. Com a atenção voltada para o presente, essa vertente tende a entender a história como pronta e acabada, cuja a eliminação de percalços ao longo do caminho levaria invariavelmente a atual conjuntura do conhecimento (RADFORD, 2011; SAITO, 2015).

Esse tipo de visão do conhecimento se vincula ao aspecto tradicionalista de história e sua narrativa privilegia aspectos relativos aos grandes feitos pelos matemáticos, como uma estratégia de legitimar o atual estágio de desenvolvimento do conhecimento (RADFORD, 2011). Alinhado com o advento da lógica formal, essa vertente tem em sua égide uma história panorâmica cuja recorrência se dá pela significação dos feitos no passado em alusão ao atual estágio do conhecimento. No processo de produção histórica, a visão tradicionalista privilegia aspectos endógenos da matemática e exclui processos que envolvem debates sociais, políticos, econômicos, culturais etc.

Enquanto processo de produção do conhecimento, essa vertente se consolida a partir das necessidades histórico-concretas de sua época. Durante o período entre os séculos XVI e XIX, o desenvolvimento do pensamento científico moderno se alinha às estruturas formal-simbólicas, abrindo espaço para uma compreensão histórica que se ativesse ao pleno desenvolvimento das ideias matemáticas. Dessa forma, a visão tradicionalista não só atende as necessidades de um grupo em determinado momento histórico, como também cumpre bem com o papel a que foi designada. Disso não há razões para questionamentos (D'AMBRÓSIO, 1999). A grande questão que se levanta é até que ponto essa vertente contribui para a compreensão de aspectos internos na produção histórica da Continuidade?

No que compete ao âmbito lógico, ao se enveredar pela exaltação das grandes descobertas, a visão tradicionalista tende a excluir, omitir ou suprimir os percalços/saltos realizados ao longo da construção dos conceitos. Uma vez que privilegia os níveis avançados do conhecimento, a descrição dos estágios antecedentes não alcança qualquer importância,

senão como exemplos de erros técnicos cometidos por matemáticos do passado (SAITO, 2015).

Isso, de certa forma, limita o reconhecimento das mudanças conceituais ocorridas na construção teórica da Continuidade e induz ao entendimento de que tais questões são insignificantes. Como vimos, o acesso às mudanças nas características mais internas do conhecimento é premissa para a compreensão de seu desenvolvimento enquanto representação da realidade objetiva pelo pensamento.

Já no âmbito histórico, suprimidas quaisquer relações que não estão diretamente ligadas à construção do conhecimento, o objetivo de se aprofundar no modo de produção fica comprometido.

Nesse sentido, há a emergência da compreensão de outras vertentes sobre a História da Matemática. Essa perspectiva pressupõe a superação da visão tradicionalista ao conceber que

a história da matemática não é um monólito. Existem diferentes histórias da matemática, escritas em diferentes contextos e épocas. Uma história da matemática escrita por matemáticos, por exemplo, será diferente daquela escrita por filósofos, por sociólogos e por historiadores. Isso porque é possível narrar uma história por diferentes perspectivas e grande parte do que é escrito em história depende de quem escreve (SAITO, 2015, p. 21).

Assim, perspectivas atuais sobre a história da matemática buscam se orientar a partir do entendimento sobre a existência de diferentes produções historiográficas da matemática. Segundo Saito (2015) o termo historiografia se aproxima do ofício de escrever a história e defende que

devemos aqui entender, por historiografia, a “escrita da história”, e que toda narrativa da história da matemática é historiograficamente orientada. Isso significa que as narrativas históricas não são neutras e são influenciadas por diferentes fatores ligados à formação e à concepção de ciência (isto é, de conhecimento válido numa época) daquele que as escreve (SAITO, 2015, p. 21/22).

Nesse movimento, o processo investigativo sobre a História da Matemática se intenta em compreender o processo de produção do conhecimento matemático por meio de diferentes técnicas, conteúdos e contextos socioculturais. Isso possibilita a identificação de diferentes fontes históricas e em diferentes espaços, cuja finalidade se encontra na elaboração de um quadro abundante de informações sobre o fenômeno a ser estudado.

Nesse movimento, ao que Saito (2015) chamou de (re)construção histórica, o sentido da análise de fontes do passado se inverte, em que

dessa maneira, procura partir do passado em direção ao presente na medida que é a partir de um acontecimento do passado que se deve entender o presente, e não ao contrário. Diferentemente das narrativas históricas tradicionais, a história da matemática baseada numa historiografia atualizada “inverte”, por assim dizer, o “sentido” da história e estabelece novos critérios de escrita. Seguindo esses novos critérios historiográficos, o historiador evita julgar o conhecimento do passado comparando-o com o do presente. Além disso, na medida em que o conhecimento matemático do passado é contextualizado “no passado”, o historiador passa a ter acesso ao seu processo de construção (SAITO, 2015, p. 27).

O entendimento da existência de diferentes fontes historiográficas contribui para superar a complexa tarefa de ascender à compreensão da essência de um fenômeno. De qualquer forma, a escolha por uma historiografia deve ser antecedida do entendimento de suas determinações enquanto fonte propositiva para o que se almeja descobrir sobre o fenômeno estudado. Ao se aproximar dessas questões, Viana (2007) ressalta que

para sabermos qual representação da história é verdadeira, devemos reconhecer quais são os interesses que estão por detrás de cada uma dessas representações. Só se pode descobrir isto observando quem são os portadores destas representações, ou seja, os seres humanos histórico-concretos que as produzem e, assim, desvendar qual perspectiva produz tal representação. Portanto, é no próprio desenvolvimento histórico da humanidade que podemos descobrir o surgimento e o desenvolvimento da consciência da história (VIANA, 2007, p. 54).

Nesse sentido, cada representação de história ou vertente historiográfica carrega em si os pressupostos de uma visão de totalidade sobre a realidade objetiva. Isso implica dizer que é preciso reconhecer os limites de cada fonte analisada, visto que dizem respeito a uma visão particular e interessada sobre a história, e que ao mesmo tempo a análise de diferentes historiografias pode ajudar na composição de um quadro geral sobre o fenômeno estudado, a partir do preenchimento de lacunas deixadas por outras vertentes.

Em síntese, a análise histórica

busca compreender e analisar o processo de construção do conhecimento considerando os conceitos e o conhecimento em seu contexto. Nesse sentido, mais do que uma análise meramente filosófica, religiosa, científica, social, política, econômica etc., a história da matemática investiga o processo da construção do conhecimento acerca da natureza e das técnicas matemáticas na inter-relação de diferentes aspectos em torno do objeto matemático (SAITO, 2015, p. 33).

É nesse sentido que se torna possível a concretização do movimento lógico-histórico da Continuidade ao percorrer a análise minuciosa das informações que fontes historiográficas são capazes de fornecer.

As historiografias são resultantes de um processo de construção do conhecimento sobre a história e, portanto, também são sínteses de uma interação entre pensamento e atividade. Sendo assim, estão inseridas em um contexto sociocultural e refletem as condições pelas quais estão subordinadas. Isto ajuda a compreender o modo como foram construídas e o que se pode esperar a partir de sua análise.

Já as análises históricas são constituídas a partir das categorias estabelecidas entre o lógico e o histórico. Na esfera do lógico, encontram-se as mudanças ocorridas no sistema linguístico-simbólico e suas significações. Enquanto na esfera do histórico se efetiva a compreensão das relações sobre o modo de produção do conhecimento.

Na busca de alternativas para a concretização dessas análises, Radford (2011) fornece elementos que nos ajudam a compor o quadro de estratégias teórico-metodológicas para a condução da pesquisa. Em termos gerais, o autor utiliza o termo “investigação histórico-epistemológica” (RADFORD, p. 15) para se referir a um modo emergente de abordagem da história da matemática em processos educativos em sala de aula.

Ao que estabelece como uma perspectiva didática historiográfica da matemática, Radford (2011) esclarece que sua visão

concentra-se na investigação de raízes sociais nas quais a atividade matemática está embutida e na investigação da dimensão tridática funcional dos conceitos, problemas e dos procedimentos da solução de problemas. Uma vez que um conceito não pode ser limitado à sua formulação verbal formal, acreditamos que sua natureza pode ser mais bem compreendida nas relações dinâmicas que unem o conceito a outros conceitos, aos problemas aos quais ele se aplica e aos procedimentos de resolução que são construídos a fim de resolver esses problemas (RADFORD, 2011, p. 18).

Nesta visão particular, o autor nos fornece elementos que nos ajudam a entender seu distanciamento de visões naturalísticas do conhecimento matemático, como a própria lógica formal, e estabelece parâmetros de situar este conhecimento a partir de suas relações sociais e dinâmicas. Para ajudar a compreender melhor seu posicionamento, ao referir-se sobre a álgebra, o autor esclarece que

Nossa abordagem histórico-epistemológica, a compreensão dos elementos cognitivos subjacentes à atividade algébrica tem que levar em consideração a dimensão sócio-cultural na qual a atividade está embutida e com a qual ela interage – uma interação que molda a própria atividade matemática. A estrutura do pensamento matemático, em geral – e do pensamento algébrico, em particular – tem que ser esmiuçada em seu ambiente social e intelectual e não pode ser verdadeiramente compreendida através da fusão de fatores cognitivos e sociais (RADFORD, 2011, p. 19).

A partir deste trecho, é possível perceber que há uma consonância entre a forma de conceber o pensamento matemático de Radford (2011) com a visão de Kopnin (1978), entre outros. Mais especificamente, essa concepção não só ressalta a dimensão sociocultural na compreensão dos conceitos, mas enfatiza também o âmbito de sua raiz na atividade humana. E, ao esclarecer que a estrutura do pensamento está na compreensão do ambiente social e intelectual, para além de sua fusão, se aproxima de uma visão dialética sobre a produção do pensamento que está mediada por uma atividade e inserida num contexto sociocultural.

Essas marcas convergem ao entendimento sobre o pensamento matemático em que, partindo das ideias de Kopnin (1978), está intimamente relacionado com a atividade humana e mediada pela linguagem. Além disso, ao discorrer sobre a relação existente entre o papel da cultura na produção do conhecimento matemático, Radford (2011) recorre ao conceito de atividade forjado por Leontiev (1983) para concretizar sua ideia sobre práticas culturais, cuja estrutura se configura na compreensão das condições objetivas nas quais o indivíduo se constitui como elemento decisivo para a produção de seus pensamentos. Nas palavras de Radford (2011), “concebo pensamento como uma *praxis* cognitiva. Mais precisamente, pensamento é uma reflexão cognitiva do mundo na forma de atividades culturalmente moldadas no indivíduo” (RADFORD, 2011, p. 197) e acrescenta que “conceitos teóricos são reflexões que mostram que o mundo está em conformidade aos processos sociais de produção de sentido e categorias conceituais culturais disponíveis aos indivíduos” (*ibidem*).

O conceito de atividade elaborado por Leontiev (1983) se constitui a partir da categoria de trabalho de Marx (ANTUNES, 2010) e busca compreender a partir de uma estrutura psicológica, a interação dialética entre o pensamento, as ações e as transformações da realidade objetiva. Assim,

A atividade é uma unidade molar não aditiva da vida do sujeito corporal e material. Em um sentido mais específico, quer dizer, em um nível psicológico, esta unidade da vida se vê mediada pelo reflexo psíquico, cuja função real consiste em que este orienta o sujeito no mundo dos objetos (LEONTIEV, 1983, p. 66, tradução nossa).

Dessa forma, pode-se entender a atividade como um modo particular de interpretação das ações humanas que se concretiza na relação entre necessidade, objeto da ação e condições objetivas.

A atividade do sujeito sempre está ligada a certa necessidade. Sendo expressão da carência de algo que experimenta o sujeito, a necessidade provoca sua tendência a busca, a qual se manifesta a plasticidade da atividade: sua semelhança às propriedades dos objetos independentemente

dela. Nesta subordinação ao objeto, nesta semelhança consiste a determinação da atividade do homem por parte do mundo externo. Nesse processo tem lugar “a palpação” de seu objeto por parte da necessidade, sua objetivação, sua conversão em motivo concreto da atividade (DAVIDOV, 1988, p. 28, tradução nossa).

Dessa forma, o entendimento sobre as diferentes formas de condução do pensamento matemático implica na compreensão de um modo de produção pautado em elementos de uma atividade específica (necessidade, objeto e condições objetivas) e inserido num contexto permeado por práticas culturais. Esta visão remonta a um cenário cuja análise histórica do conceito de Continuidade deve estar munida de estratégias que possibilitem a ascensão aos modos de produção do conhecimento situado temporal e contextualmente.

O que nós sugerimos é que o quadro conceitual matemático, a partir do qual a ideia se forma e contra o qual o pensamento se instala no ato da invenção, faz parte de um conjunto de mais vasto, a saber, aquele da racionalidade cultural, racionalidade que, para utilizar uma expressão que remonta a Fleck (1935), define o estilo de pensamento da cultura em questão. O estilo de pensamento da cultura fornece os critérios e os modos que determinam, entre outros, a natureza ontológica dos objetos matemáticos, o tipo de discurso científico tido como aceitável, os argumentos reconhecidos como válidos e os métodos de pesquisa que lhe são próprios (Crombie, 1995). O estilo de pensamento configura, assim, o “aspecto” ou a “forma” do objeto criado assim como seu “conteúdo” (RADFORD, 2011, p. 50).

Para concretizar tais ações, Radford (2011) cria o conceito de “Sistemas Semióticos Culturais de Significações (SSCS⁸)” (RADFORD, 2011, p. 290) que, de maneira geral, se resume num sistema simbólico de interpretação das relações estabelecidas entre atividade, artefatos e relações socioculturais sobre a produção do pensamento em determinada cultura.

A compreensão do SSCS é uma tarefa importante na investigação do tipo de pensamento matemático de uma cultura. Os SSCSs interagem com atividades – objetivos, ações, distribuição do trabalho, etc. (Leontiev, 1978) – e com a tecnologia da mediação semiótica (isto é, o território do artefato). Ao fazer isso, os SSCSs dão origem, por um lado, às formas de atividade; e, por outro lado, aos modos específicos de conhecer ou epistemes (Foucault, 1966) (RADFORD, 2011, p. 290).

Assim, por meio do conceito de atividade e da mediação dos artefatos, fixa-se a análise das interações em determinado momento histórico que possibilitam a identificação de “problemas interessantes, e destaca os métodos, os argumentos, os fatos, etc. que são considerados válidos” (RADFORD, 2011, p. 290). Certamente o que se busca aqui é a compreensão das características fundamentais que sustentam o desenvolvimento da

⁸ Na expressão original, *Semiotic Systems of Cultural Significatio*, (RADFORD, 2016).

Continuidade, conseqüentemente das representações da realidade objetiva pelo pensamento, e suas relações essenciais. Sobre essa questão, Davydov (1982) discorre que na estrutura de um conceito se estabelece a relação entre os nexos internos e externos.

Os nexos externos se voltam para as características mais aparentes e visíveis do conceito. Dizem respeito ao estabelecimento de representações da linguagem simbólica e suas atribuições. Já os nexos internos carregam as relações mais profundas e ocultas, pois estão impregnados de história (SOUSA, 2017). Assim, os nexos conceituais se estabelecem como a síntese dos nexos internos e externos do conhecimento e refletem suas relações essenciais.

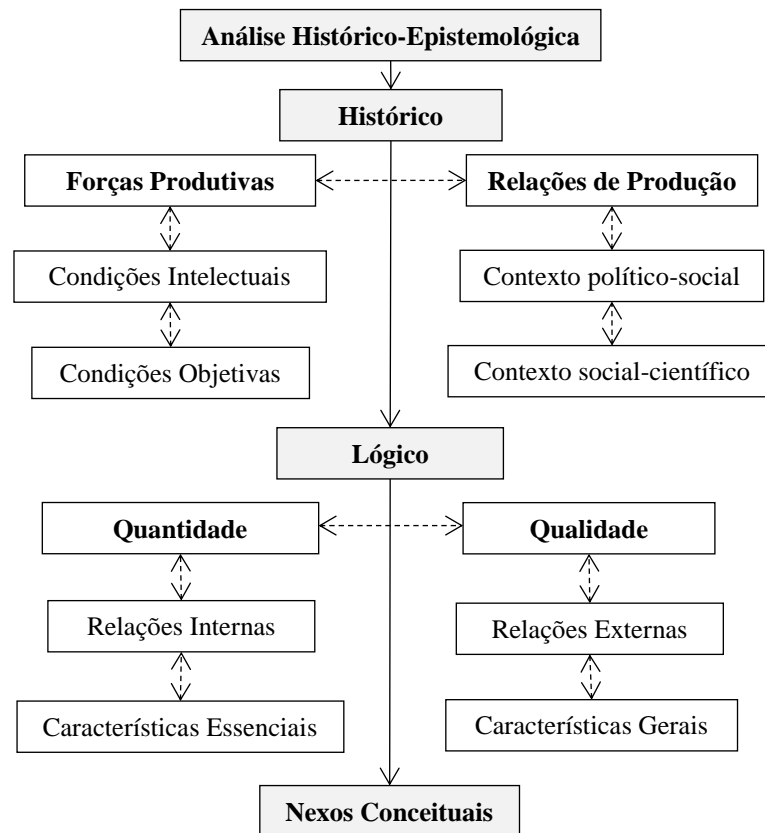
Os nexos conceituais estão diretamente ligados às características do objeto do conhecimento e refletem a representação de seu movimento pelo pensamento. Eles carregam a essência do movimento de produção do conhecimento pela humanidade, permitindo que ao apreendê-los o indivíduo não só memorize regras, métodos, algoritmos ou aplicações, mas também se aproprie de um modo geral de pensamento. Sua divisão em internos e externos serve de referência para a necessidade de romper com a superficialidade de interpretações sobre os elementos da linguagem e de resgatar a historicidade como elemento fundamental.

O estudo do movimento lógico-histórico adquire, assim, sua dimensão didática,

Ao reproduzir a criação e o desenvolvimento de um conceito, além de compreender sua necessidade, e as aptidões humanas nele sintetizadas, novos aspectos e novas relações do movimento do objeto no pensamento são descobertos. Desse modo, ao explorar o movimento lógico-histórico do conceito como investigação didática, também contribuimos na aprendizagem da forma de construção do conhecimento, possibilitando que o indivíduo compreenda a inexistência de verdades absolutas, concepções freqüentes de estudantes em relação à matemática, gerada pelo método de ensino que aborda somente a lógica formal (SAITO; DIAS, 2009, p. 11).

Assim, o caminho possível para a concretização do movimento lógico-histórico por meio da Análise Histórico-Epistemológica é a construção de uma rede de relações essenciais do conhecimento. Essa forma de conduzir as investigações nos fornece um caminho para a construção da metodologia de nossa pesquisa, ao propormos este tipo de análise do conceito de Continuidade e a determinação de seus nexos conceituais. Para esclarecer melhor, a figura 4 ilustra uma estrutura que sintetiza o que foi discutido até o momento e fornece subsídios orientadores para as ações de pesquisa.

Figura 5 - Estrutura para Análise Histórico-Epistemológica



Fonte: Próprio Autor

Como visto na figura 4, a compreensão de elementos na investigação nos âmbitos lógico e histórico culmina no levantamento de relações importantes para o estabelecimento dos nexos conceituais. No âmbito do lógico se efetivam a análise das transformações simbólicas, (quantidade-qualidade), enquanto no histórico se consolidam a análise do modo de Produção.

Portanto, a estratégia adotada para a significação da dialética entre o lógico e o histórico resulta na identificação de elementos fundamentais para a investigação histórica do conceito de Continuidade. Para dar significado a isso, apresentaremos na próxima subseção a organização metodológica da pesquisa.

2.4. O Estabelecimento dos Aspectos Metodológicos

Ao retomar o contexto de surgimento e construção desta pesquisa é de suma importância ressaltar que os motivos que conduzem o processo investigativo tem invariavelmente a sala de aula como ponto de partida e chegada. A busca incessante por melhorias no ambiente educacional, sobretudo no Ensino Superior, significa tornar todo o

processo de apropriação da cultura humana uma atividade vital e humanizadora. E, em particular, é por meio do tratamento com o conceito de Continuidade que buscamos concretizar esse processo.

Frente ao que foi tratado anteriormente, apresentamos como ponto de partida a problemática de investigação: *Quais são as relações estabelecidas no movimento lógico-histórico do conceito de Continuidade que podem se configurar como nexos conceituais a partir da realização da Análise Documental em confluência com a Análise Histórico-Epistemológica?*

A partir dessa problemática, o objetivo da pesquisa é investigar o movimento lógico-histórico do conceito de Continuidade por meio de um Estudo Documental, com vistas à determinação de relações essenciais que podem se configurar como nexos conceituais.

A complexidade do objeto (ou fenômeno) de investigação proposto revela a necessidade do emprego da abordagem qualitativa, uma vez que lida com contexto de “interação dinâmica retroalimentando-se, reformulando-se constantemente” (TRIVIÑOS, 2008, p. 137). Optamos aqui pelo termo “abordagem qualitativa” ao concordarmos com Severino (2007, p. 119) em referência aos aspectos mais epistemológicos do que técnicos da pesquisa.

No que tange os procedimentos metodológicos, a pesquisa é constituída pela realização de um Estudo Documental dividido em Análise Documental das pesquisas sobre o ensino da Continuidade e na análise de fontes historiográficas que abordam aspectos essenciais sobre o desenvolvimento deste conceito. Na primeira parte, desenvolvemos uma síntese acerca dos trabalhos que tem o ensino da Continuidade como objeto de investigação, por meio da identificação de relações essenciais apontadas pelos autores. Já na segunda parte, analisamos fontes historiográficas da Matemática com vistas à compreensão das transformações lógicas e o modo de produção histórica da Continuidade.

Dessa forma, a organização das informações analisadas se constitui a partir da elaboração de uma grade de conceitos fundamentais, no formato de ficha catalográfica (Apêndice 3), cujo conteúdo permite a construção de parâmetros sobre representações lógicas, epistemológicas, didáticas, sociais, culturais, entre outros.

As obras historiográficas utilizadas foram:

- *Historia de las Matemáticas* de Konstantin Alekseevich Ríbnikov⁹. Esta obra é um livro publicado em 1974 sob a autoria do pesquisador soviético Ríbnikov. A

⁹ RÍBNIKOV, K. *Historia de las matemáticas*. Moscou: Editorial Mir, 1987.

escolha desse material se deu em função de sua importância para o contexto da educação soviética durante o século XX ao abordar a História da Matemática a partir de um viés materialista histórico-dialético;

- *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*¹⁰ de Carl Benjamin Boyer. A opção por essa obra se concretizou por se tratar de uma historiografia particular sobre o desenvolvimento do Cálculo.
- *História da Matemática*¹¹ de Carl Benjamin Boyer. Conforme levantamento realizado no Capítulo 3, sua escolha se efetivou em função de ser o livro mais recorrente nas bibliografias básicas dos cursos de Licenciatura em Matemática de instituições públicas no Estado de São Paulo.
- *Introdução à História da Matemática*¹² de Howard Eves. Assim como o anterior, a escolha dessa obra se deu em decorrência de ser o segundo livro mais recorrente nas bibliografias básicas dos cursos de Licenciatura em Matemática de instituições públicas no Estado de São Paulo.
- *Conceitos Fundamentais da Matemática* de Bento Jesus Caraça¹³. Diferentemente das demais historiografias, esta obra com cunho didático não se configura em um material descritivo sobre a história da matemática, mas faz uso da história para compreensão de elementos da matemática. Assim, a escolha se efetiva frente sua importância para compreensão de aspectos não abordados nos demais materiais.
- Teses que trazem uma abordagem historiográfica da Continuidade. A escolha destes materiais invoca a necessidade de se compreender relações sobre a Continuidade a partir dos apontamentos pelas pesquisas. Em particular, os trabalhos:

BROLEZZI, A. C. *A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática*. (Tese) Doutorado em Educação. Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo. São Paulo, 1996.

COBIANCHI, A. S. *Estudos de continuidade e números reais: matemática, descobertas e justificativas de professores*. (Tese) Doutorado em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2001.

¹⁰ BOYER, C. *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. Nova York: Dover, 1949.

¹¹ BOYER, C. *História da matemática*. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2004.

¹² EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

¹³ CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais de Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1958.

REZENDE, W. M. *O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. (Tese) Doutorado em Educação. Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.

As duas etapas de realização da pesquisa se interagem de maneira complementar. Na Análise Documental (FIORENTINI e LORENZATO, 2009), estruturada nos moldes do Estado da Arte (FERREIRA, 2002), se pretende identificar o modo como os pesquisadores têm compreendido a Continuidade e os possíveis apontamentos para o seu contexto educacional. Acreditamos que isso permite também o reconhecimento de aspectos intrínsecos ao movimento lógico-histórico da Continuidade, pois esta também é uma forma de se produzir sua história.

Já na análise de fontes historiográficas, o que se propõe é a realização da Análise Histórico-Epistemológica, conduzida por meio da divisão em períodos históricos e da argumentação sobre elementos tensionadores no desenvolvimento da Continuidade. Tais momentos estão embasados no conceito de “elementos pedagógicos tensionadores” (LANNER DE MOURA, 2003) e refletem as necessidades e condições objetivas na produção da Continuidade ao longo da história.

Para sistematizar nossa argumentação, os elementos tensionadores são apresentados por meio de recortes extraídos das historiografias (Extratos), que possibilitam a concretização da análise e identificação das relações essenciais com base nos Sistemas Semióticos Cultural de Significação (RADFORD, 2011) e na teoria da atividade (LEONTIEV, 1983).

Ao longo da realização das duas etapas, identificamos a interação no desenvolvimento da Continuidade com os conceitos de Incomensurável, Discreto, Contínuo, Infinito (Potencial e Atual), Infinitésimos, Ordenação, Enurabilidade, Acumulação, Densidade, Continuidade (Pontual e Global), Descontinuidade, Indivisíveis, Movimento, Limite, Variável, Função, Divisibilidade, Números Racionais, Irracionais e Reais. A partir daí, sintetizamos estas relações com a determinação dos nexos conceituais da Continuidade nos pares dialéticos *Comensurável-Incomensurável*, *Discreto-Contínuo*, *Infinito-Infinitésimo*, *Permanência-Fluência*, *Pontual-Geral* e *Rigor-Intuição*.

No que compõe o quadro explicativo sobre esse processo, organizamos a argumentação sobre esta síntese por meio de quatro categorias: Discreto-Contínuo (engloba a relação Comensurável-Incomensurável), Infinito-Infinitésimo, Permanência-Fluência e Pontual-Geral (engloba a relação Rigor-Intuição).

Portanto, as reflexões sobre a base teórico-metodológica do movimento lógico-histórico surgem a partir da necessidade do estabelecimento das interações dialéticas entre pensamento-linguagem-atividade e resulta no modo de organização desta pesquisa, com a determinação dos nexos conceituais da Continuidade. Nas próximas seções nos dedicaremos a tratar deste processo com profundidade.

3. Análise Documental das Pesquisas Sobre o Ensino de Continuidade

Na seção anterior, discutimos como o conhecimento se consolida a partir da atividade e da linguagem, fruto da interação com o mundo exterior. Dessa forma, as ferramentas matemáticas são criadas com vistas à compreensão dos mais variados fenômenos que assolam a vida humana.

No contexto desta pesquisa, nosso olhar está voltado para a Continuidade e seus desdobramentos na compreensão de situações que partem existencialmente da solução de problemas práticos e resultam na construção de teorias basilares para o desenvolvimento da matemática que conhecemos hoje. Fundamentalmente, a formalização da Continuidade serviu de âncora para a elaboração de outros conceitos que revolucionaram o pensamento, como os Números Reais e a teoria do Limite.

Dada sua importância, parte-se da prerrogativa que as pesquisas sobre o ensino de Continuidade tendem a revelar apontamentos fundamentais para a apropriação do pensamento matemático pelos estudantes. Para entender melhor esse contexto, o objetivo deste capítulo é compreender como a Continuidade tem sido entendida no âmbito das investigações sobre o ensino de Matemática, em diferentes níveis de ensino, a partir da análise de documentos de divulgação científica que abordam tal temática. A metodologia adotada para o cumprimento desta etapa se pauta na Análise Documental e tem como foco a apreciação de dissertações, teses e artigos elaborados em âmbitos nacional e internacional.

3.1. A Obtenção dos Trabalhos e a Construção do *Corpus* para Análise

Frente ao contexto histórico de produção do conhecimento, há pouco espaço para dúvidas sobre a importância da abordagem da Continuidade em sala de aula, sobretudo no que diz respeito ao entendimento pelos estudantes dos conceitos a ela relacionados como Conjuntos Numéricos, Função, Limite, Derivadas, Integrais, entre outros. No entanto, há certas questões que estão relacionadas a esse contexto: Como a Continuidade tem sido abordada em sala de aula, sobretudo no ensino superior? Em que momento o estudante de graduação, em especial o futuro professor de matemática, tem acesso a esse conhecimento? Como ele tem sido entendido e abordado nas ementas curriculares? O que dizem as pesquisas no âmbito do ensino da matemática que tem a Continuidade como objeto de estudo? Como elas foram conduzidas e para quais resultados elas apontam? Com base nesses trabalhos, que elementos podem ser verificados e que contribuem para a determinação dos nexos conceituais

da Continuidade? Em nossa visão, a busca por respostas a estas questões perpassa pelo levantamento bibliográfico de trabalhos acadêmicos.

Antes de tratarmos do levantamento, importante ressaltar que Cobianchi (2001) realizou analogamente essa tarefa e nos ajuda a construir um quadro geral sobre o ensino de Continuidade na atualidade. Em seu trabalho sobre os estudos de Continuidade e Números Reais, na tentativa de entender como esses conceitos são compreendidos no contexto da educação brasileira, Cobianchi (2001) propõe uma análise de livros didáticos (no ensino básico e superior) e da produção científica sobre o tema em instituições brasileiras, revistas especializadas e anais de congressos brasileiros. Segundo o autor, até a publicação de seu material, não se encontrou materiais que tratavam especificamente de Continuidade e Números Reais, o que o levou ao levantamento de temas semelhantes.

Em relação aos artigos, Cobianchi (2001) apresenta 07 (sete) trabalhos organizados em temas relacionados às grandezas incomensuráveis e Números Racionais; ensino de Números Reais com contribuições de Eudoxo e Dedekind; ensino de Matemática e os paradoxos de Zenão; definição circular de Números Reais; abordagens do Cálculo a partir de uma perspectiva histórico-pedagógica; concepções de licenciandos sobre os Números Reais; aprendizagem e representação visual mediante o uso de software.

Quanto às teses e dissertações, o autor apresenta 19 (dezenove) trabalhos que tratam, entre outras, de temáticas sobre contribuições de uma abordagem histórica e/ou epistemológica para o ensino de Matemática; contribuições da modelagem no ensino de Cálculo; produção de significados sobre conceitos do Cálculo; análise de discurso de estudantes e professores de Cálculo; e contribuições da psicanálise à educação matemática.

A partir da análise dos livros didáticos, Cobianchi (2001) conclui que as abordagens identificadas tendem a valorizar aspectos pedagógicos que impedem a devida aprendizagem dos conceitos pelos estudantes, mediante a ocultação de elementos sobre a construção histórica dos números. Apesar de haver algumas exceções, estas não passam de tentativas de exemplificação ou são pouco utilizadas no currículo atual.

Tendo o levantamento de Cobianchi (2001) como ponto de partida, dentre as diversas formas de estruturação do levantamento desses trabalhos, optamos pela realização da Análise Documental sobre a produção científica em torno do tema *ensino de Continuidade*. Concordamos com Romanowski e Ens (2006) que este tipo de análise, com base na sistematização do levantamento bibliográfico nos moldes do Estado da Arte, ajuda na

identificação de elementos pertinentes aos pesquisadores dentro de um campo¹⁴; no apontamento de lacunas a serem preenchidas por futuros trabalhos; na disseminação de resultados; e na criação de modelos para atuação científica. No âmbito da educação, o Estado da Arte tem como objetivo

compreender como se dá a produção do conhecimento em uma determinada área de conhecimento em teses de doutorado, dissertações de mestrado, artigos de periódicos e publicações. Essas análises possibilitam examinar as ênfases e temas abordados nas pesquisas; os referenciais teóricos que subsidiaram as investigações; a relação entre o pesquisador e a prática pedagógica; as sugestões e proposições apresentadas pelos pesquisadores; as contribuições da pesquisa para mudança e inovações da prática pedagógica; a contribuição dos professores/pesquisadores na definição das tendências do campo de formação de professores (ROMANOWSKI; ENS, 2006, p. 39).

Assim, as reflexões propostas por este tipo de sistematização exigem uma análise acurada das informações presentes nos trabalhos levantados, pois tendem à elaboração de sínteses com amplitude e abstração consideráveis (FERREIRA, 2002). Como acontece em outras áreas da ciência, a exemplo a área da Saúde, cujas mudanças em protocolos de conduta por muitas vezes são pautadas em resultados deste tipo de levantamento, o Estado da Arte pode favorecer um rastreamento do conhecimento já produzido sobre determinados fenômenos no âmbito da Educação e sua significação tende a suscitar informações importantes para realização de futuras pesquisas.

De acordo com Palanch e Freitas (2015) é importante destacar que quaisquer sínteses realizadas a partir do Estado da Arte devem ser localizadas em âmbitos históricos, sociais e temporais. Suas limitações alcançam as fronteiras impostas pelos pesquisadores, no que dizem respeito ao corte temporal, aos procedimentos metodológicos adotados, aos preceitos teóricos adotados para elaboração das análises, entre outros.

No contexto desta pesquisa, opta-se pela realização da Análise Documental cujos princípios estão alicerçados na perspectiva do levantamento de informações próprio do Estado da Arte. No entanto, em face do alcance das informações pretendidas, as análises se restringem à compreensão de relações essenciais que possibilitam a determinação dos nexos conceituais presentes nas fontes em questão. Tais relações se efetivam a partir da identificação de elementos sociais, históricos, epistemológicos, pedagógicos, entre outros, que ajudam a compor o movimento lógico-histórico do conceito de Continuidade. Dessa forma,

¹⁴ Esse tipo de pesquisa ajuda na sintetização de problemáticas recorrentes; principais fontes teóricas; tipos de metodologias acionadas; e resultados apontados.

entende-se que apesar de se aproximar de uma perspectiva de Estado da Arte, a Análise Documental pretendida se fixa com uma abordagem voltada para elementos distintos.

Assim, nesta pesquisa, o processo de Análise Documental foi dividido em: 1) planejamento das buscas; 2) levantamento das pesquisas; 3) organização do que foi encontrado; 4) definição do *corpus* para a leitura; 5) preenchimento das fichas catalográficas; 6) organização e comparação das informações coletadas e 7) discussão dos resultados alcançados.

A primeira fase foi constituída pelo planejamento das buscas a partir da definição dos termos de busca (palavras-chaves ou *thesauros*), tipos de materiais, bases de dados e período de corte. Para tanto, os termos utilizados foram *Continuidade*, *Matemática* e *ensino* com suas variações e similaridades, além de traduções para a língua inglesa. Também houve o uso de operadores lógicos e critérios de busca para a filtragem dos trabalhos em interesse, conforme regras estabelecidas em cada base de dados. A coleta se baseou na presença de ambos os termos no título, assunto, resumo e palavras-chaves.

Com referência ao tipo de material a ser pesquisado, optamos pelos documentos de divulgação científica pautados nos formatos de teses, dissertações e artigos científicos publicados em periódicos indexados. No que tange às teses e dissertações, as bases de dados consultadas foram o Banco de Teses e Dissertações da CAPES (Centro de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior), Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações do Ibict (Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia) e repositórios de programas de pós-graduação em universidades brasileiras, com acesso aos textos completos. A escolha desse formato se deve em decorrência da profundidade com que as questões são abordadas nos relatórios, constituindo uma fonte rica em informações.

Já em relação aos artigos, optamos pela busca nas bases *Scientific Electronic Library Online* (SciELO) e *Institute of Education Sciences* (ERIC). Ambas lidam com acervo de revistas indexadas e com conteúdos online.

Feito o planejamento, a próxima etapa se configurou no levantamento dos trabalhos e o acesso, sempre que possível, ao texto completo ou mesmo pelo resumo. As buscas iniciais resultaram em 39 (trinta e nove) trabalhos pelo repositório da Capes, sendo destes 24 (vinte e quatro) dissertações e 15 (quinze) teses; 44 (quarenta e quatro) trabalhos pelo BDTD/Ibict, sendo destes 32 (trinta e duas) dissertações e 12 (doze) teses; 11 (onze) artigos pela SciELO e 25 (vinte e cinco) artigos pela ERIC. Após o levantamento, passamos pela leitura dos resumos e identificação dos materiais que comporiam o *corpus* da pesquisa. Importa dizer que não

houve corte quanto a determinado período, pois a quantidade de trabalhos encontrados favoreceu a leitura e análise do material em tempo hábil.

Durante esta etapa, a leitura dos trabalhos se tornou exaustiva por dois grandes fatores:

1º) A diversidade de significados da palavra *continuidade* fez com que um grande volume de trabalhos que não tratava especificamente do conceito de Continuidade fosse excluído, apesar da presença deste termo em alguma seção do manuscrito (título, assunto, palavras-chave ou resumo). Isso se deve pela referência ao verbo *continuar* e não necessariamente ao conceito pretendido.

2º) A similaridade da palavra *continuidade* com os termos *contínuo*, *contínua* e *continuada*. Disso decorre a presença de um número significativo de trabalhos que tinham como tema a formação continuada de professores e que se afastavam do foco desta pesquisa.

Assim, para a formação do *corpus*, optou-se por incluir os materiais que, em alguma medida, tratavam da realização de procedimentos e reflexões que envolviam diretamente o conceito de Continuidade. A partir desses critérios, foram escolhidos 24 (vinte e quatro) trabalhos divididos em 05 (cinco) dissertações, 06 (seis) teses e 13 (treze) artigos científicos. O período de publicação desses materiais é de 1999 (mil novecentos e noventa e nove) a 2018 (dois mil e dezoito) que configura a data do trabalho mais antigo encontrado nos bancos consultados até o mais atual, conforme os Apêndices 01 e 02.

Determinado o conjunto dos trabalhos que atende aos critérios estabelecidos, iniciou-se o processo de leitura e preenchimento das fichas catalográficas (Apêndice 03) que serviu como instrumento orientador e para a sistematização das informações coletadas. Adaptada a partir do instrumento de pesquisa utilizado pelo Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores de Matemática – GEPFPM (PASSOS et al., 2006), esta ficha permitiu a obtenção de informações sobre Identificação, Aspectos Teórico-Methodológicos e Aspectos Conceituais, que contribuem para a verificação de aspectos significativos entre os diferentes trabalhos e a possibilidade da realização da Análise Documental.

Já nesse momento, as dificuldades encontradas mostram os desafios desse tipo de empreitada. Em alguma medida tais dificuldades dizem respeito à contemplação de normas estabelecidas pela ABNT e à diversidade teórico-metodológica do material investigado.

Como já apontadas por outros autores, (ROMANOWSKI; ENS, 2006; PAGANI; ALLEVATO, 2014) as limitações impostas a esse tipo de levantamento bibliográfico, entre outras, estão ligadas às diferentes diretrizes para a elaboração dos resumos. Partindo do pressuposto que informações sobre tema, problemática, objetivos, metodologia, coleta de

dados, análise e resultados alcançados são efetivamente encontradas no resumo, como componente obrigatório para publicação do trabalho, o pesquisador teria condições favoráveis para realizar suas ações sem muitas dificuldades e em tempo hábil. No entanto, o que se pode verificar é a recorrente ausência destas informações em resumos, o que não permite a efetivação dessa etapa. Isso força o pesquisador a “garimpar” os dados ao longo da leitura dos textos na íntegra.

Outro aspecto importante é a lacuna entre o que o pesquisador almeja encontrar de informação sobre determinada questão e a forma como tal informação é abordada nos materiais investigados. Em guisa de exemplo, foram consultados manuais de metodologia da pesquisa em Educação e Educação Matemática para a elaboração da ficha catalográfica (SEVERINO, 2007; TRIVIÑOS, 2008; FIORENTINI; LORENZATO, 2009) e para determinação de possíveis características a serem encontradas. Apesar disso, é possível encontrar uma riqueza de procedimentos e instrumentos não abarcados pela ficha, o que de alguma forma mostra a pluralidade de métodos acionados nas pesquisas investigadas e a exigência do olhar atento do pesquisador na obtenção de tais informações.

3.2. O que Encontramos nas Pesquisas e Artigos Analisados?

Com o preenchimento das fichas, a organização dos dados se configurou no agrupamento das informações a partir dos aspectos teórico-metodológicos e conceituais, aclarando alguns elementos que são relevantes a este trabalho. No que tange os primeiros aspectos, optou-se pela organização das informações sobre a problematização, objeto de investigação, objetivos, principais teóricos, procedimentos metodológicos, análise e resultados apontados (Apêndice 04).

Em síntese, todas as teses e dissertações adotaram a abordagem qualitativa (SEVERINO, 2007) como princípio de atuação investigativa. No que tange o tipo de pesquisa (FIORENTINI; LORENZATO, 2009), os trabalhos foram agrupados conforme similaridades em estudo de caso (01), implementação e análise de uma proposta de ensino (04), pesquisa diagnóstica (03) e pesquisa documental (03), conforme o quadro a seguir (Quadro 1).

Quadro 1- Informações Sobre as Pesquisas Levantadas

Abordagem	Tipo de Pesquisa	Especificações	Quantidade
Qualitativa	Estudo de Caso	Observação e gravação de aulas em um curso de Pós-Graduação	1
	Implementação e Análise de uma Proposta de Ensino	Aplicação de atividades exploratórias em curso de Graduação	2
		Aplicação de atividades em curso de	1

		Formação Continuada de Professores	
		Aplicação de atividades em Curso de Formação Tecnológica	1
	Pesquisa diagnóstica	Análise de instrumentos de avaliação	2
		Observação de aulas e entrevistas com estudantes	1
	Pesquisa documental	Análise de Documentos oficiais, científicos, materiais didáticos, etc.	3

Fonte: Próprio autor

A partir do agrupamento apresentado no Quadro 01, pode-se perceber que 08 (oito) dos 11 (onze) trabalhos analisados tem a sala de aula como contexto de realização da investigação e, entre eles, 05 (cinco) partem para a aplicação e análise de atividades com os sujeitos. A nosso ver, isso mostra que existe uma preocupação dos pesquisadores em compreender características peculiares no contexto prático do ensino de Continuidade, sobretudo no que diz respeito ao desempenho dos estudantes sobre métodos/estratégias de abordagem deste conceito.

Com relação aos principais autores, constatamos uma diversificação na adoção de linhas teóricas como a Teoria da Cognição Corporificada (D1)¹⁵; Modelo da Estratégia Argumentativa (D1); Modelo Teórico dos Campos Semântico (D1); Pensamento matemático avançado (D3); Relação entre Rigor e Intuição (D3); Relação entre Imagem Conceitual e Definição Conceitual (D3; T3; T6); Teoria das Situações Didáticas (D4); Engenharia Didática (D4); Teoria Antropológica do Didático (D5); Teoria da Atividade e Atividade Orientadora de Ensino (T3); Semiótica de Pierce (T5); Princípio da Complementaridade (T5); entre outros.

Diante desta diversidade de teorias acionadas, há o destaque para a maior recorrência (03) ao trabalho de David Tall e Shlomo Vinner (1981) sobre a relação entre Imagem Conceitual e Definição Conceitual manifestada por estudantes sobre os conceitos de Função e Continuidade. Isso nos leva a inferir sobre a existência de uma pluralidade teórica presente nas pesquisas que, em alguma medida, enriquece o debate sobre o ensino de Continuidade, em função dos diferentes olhares e estratégias adotadas para compreender determinadas singularidades sobre este fenômeno. Além disso, amplia-se também o levantamento de distintas questões a serem consideradas.

¹⁵ Para dar dinamicidade à apresentação das informações, codificamos as pesquisas analisadas conforme os quadros em Apêndice 01 e 02. As dissertações são classificadas em “D” acompanhadas do número em ordem cronológica ascendente de acordo com a data de publicação (por exemplo, o número 1 refere-se à mais antiga e assim sucessivamente). Da mesma forma, as teses em “T” e os artigos científicos em “A”, acompanhados de seus respectivos números em ordem cronológica.

Com relação aos conceitos abordados nas pesquisas, verificou-se que a grande maioria dos trabalhos (dez) não pautaram suas investigações com foco exclusivo na Continuidade (Quadro 2).

Quadro 2 - Relação dos Conceitos Abordados nas Pesquisas

Trabalho	Conceito(s) Trabalhado(s)
D1	Continuidade
D2	Função, Limite e Continuidade
D3	Limite e Continuidade
D4	Função, Limite e Continuidade
D5	Limite, Continuidade e Derivada
T1	Números Reais e Continuidade
T2	Números Reais e Continuidade
T3	Reta Real (Números Reais)
T4	Teorema Fundamental do Cálculo
T5	Funções Integráveis
T6	Limite e Continuidade

Fonte: próprio autor

Podemos observar a partir do Quadro 02, que dos 11 (onze) trabalhos, somente 01 (um) objetivou compreender aspectos ligados exclusivamente à Continuidade (D1). Nos demais trabalhos, ora explicitam a abordagem da Continuidade atrelada a outros conceitos (cinco), ora tratam de outros conceitos que exigem a abordagem da Continuidade como pressuposto para sua investigação (quatro).

O mesmo pode ser percebido nos conceitos abordados nos artigos analisados, conforme Quadro 3 a seguir.

Quadro 3 - Relação dos Conceitos Abordados nos Artigos

Trabalho	Conteúdos
A1	Limite e Continuidade
A2	Limite, Continuidade e Função
A3	Limite, Continuidade e Função
A4	Completeness, Continuidade e Números Reais
A5	Continuidade e Função
A6	Limite, Continuidade e Função
A6	Continuidade e Função
A7	Continuidade e Função
A8	Continuidade e Função

A9	Continuidade e Infinitesimais
A10	Limite e Continuidade
A11	Limite e Continuidade
A12	Continuidade e Funções
A13	Função, Limite, Continuidade, Derivada e Integral

Fonte: próprio autor

Conforme o Quadro 03, todos os 13 (treze) artigos analisados fazem alusão da investigação do conceito de Continuidade a partir de sua intrínseca ligação com os conceitos de Números Reais, Função, Limite, Derivada, Integral, entre outros.

A nosso ver, há um movimento de compreensão da continuidade a partir de dois âmbitos distintos: ontológico e pedagógico. Mais precisamente, em sua abordagem a partir da construção conceitual de Números Reais e do estudo sobre o comportamento das Funções, respectivamente.

Em âmbito ontológico, a Continuidade é compreendida em alusão ao desenvolvimento histórico do pensamento matemático que teve grande importância para a elaboração da teoria dos Números Reais. Nesse contexto, os autores recorrem ao significado histórico de superação de problemas seculares que envolvem a fundamentação da Continuidade para o desenvolvimento desta teoria.

Já no âmbito pedagógico, o que se percebe é a ênfase no tratamento da Continuidade como aparato lógico-simbólico necessário para o estudo do comportamento de funções. Importante ressaltar que esse tratamento basicamente se estrutura nos trabalhos de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), em alusão ao desenvolvimento da Continuidade. No entanto, ressaltamos que essa abordagem sobre a Continuidade evoca particularmente um caráter mais técnico e operacional a partir do conceito de Limite, tendo sido amplamente adotada para o âmbito pedagógico.

Com referência aos resultados alcançados, foi possível perceber uma diversidade de questões abarcadas pelos autores. Para sistematizar a apresentação destas questões, estruturamos os resultados em duas grandes categorias conforme a existência da relação de semelhanças entre eles: questões diagnósticas e questões propositivas.

As questões diagnósticas dizem respeito aos resultados alcançados com avaliações de desempenho de estudantes; entrevistas com estudantes e professores; análise de materiais didáticos, entre outros. Elas apontam para os elementos que nos ajudam a construir um panorama sobre a atual conjuntura dos desafios a serem superados no âmbito do ensino. Em síntese, dentro dessa categoria, percebe-se o destaque para as dificuldades manifestadas pelos

estudantes na apropriação do conceito de Continuidade e a ênfase no formalismo em abordagens do conceito em sala de aula.

As principais dificuldades encontradas pelos autores (D3, T1, A1, A2, A3, A5, A8, A11, A12, A13) dizem respeito à falta de domínio de características formalizadas do conceito pelos estudantes, sobretudo com relação à definição formal (ε e δ)¹⁶. Os resultados mostram que os estudantes tendem a se apropriar de uma visão intuitiva da Continuidade que, em muitas das vezes, conduz a uma confusão conceitual, tornando-se um obstáculo para sua aprendizagem. Outros aspectos que estiveram presente nos trabalhos, é a ausência de manifestação de sentidos pelos estudantes sobre a definição formal do conceito pelos estudantes (D1, D3, D5, A6) e o impedimento da aprendizagem de outros conceitos em função disso (T4, T5).

Houve certa recorrência também na identificação da ênfase no rigor formal acerca do tratamento dado à Continuidade em sala de aula (D1, D3, T1, A2, A10). Segundo os autores, o excesso de formalismo tende a valorizar a técnica com base em procedimentos de demonstração, em detrimento da produção de significados que se aproxima da definição conceitual em si pelos estudantes.

Outras questões que também aparecerem: a dificuldade de compreensão da Continuidade mediante confusão conceitual entre Continuidade Global e Continuidade Pontual no estudo de funções (A8) e os problemas com as inconsistências nas definições apresentadas em materiais didáticos impressos e digitais (A12).

Já as questões propositivas fazem referência às estratégias acionadas e/ou indicadas pelos autores como possibilidade de se concretizar as mudanças em sala de aula. Tais questões foram agrupadas em necessidade de mudanças nas abordagens da Continuidade em sala de aula; as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) como facilitadoras do ensino; e o uso da história como ponto de partida para o tratamento da Continuidade.

Com referências às dificuldades mencionadas anteriormente, os autores apontam para a necessidade de se promover mudanças nas abordagens acionadas pelos professores em sala de aula. Essa necessidade engloba a utilização de abordagens mais intuitivas e que valorizam o conhecimento manifestado pelo estudante (D1, D3, A5, A9); a importância de se trabalhar a Continuidade a partir da construção dos números (T1, T2, T3, A1, A2, A8, A10); a necessidade de se trabalhar a relação entre Infinito Potencial e Infinito Atual como pressuposto para a aprendizagem da Continuidade (T1, A2); o tratamento de Continuidade

¹⁶ Deixaremos para abordar esta questão com profundidade nos próximos capítulos.

Pontual mediante a aprendizagem de Descontinuidade Pontual e Continuidade Global (A3, A4); a preservação de uma estrutura hierárquica na aprendizagem dos conceitos (A13); entre outros.

Nesse sentido, como forma de concretizar tais mudanças, vários autores recorrem às TICs como instrumentos capazes de estabelecer a ponte entre o conhecimento prévio dos estudantes, normalmente pautado em aspectos intuitivos, e o domínio da definição formal (D1, D2, D4, A6, A7, A13). Segundo esses autores, as TICs oferecem ambiente propício tanto para a produção de significados, mediante visualização, interação e manipulação de ferramentas computacionais, quanto para o desenvolvimento da capacidade de generalização, tão fundamental à compreensão da definição formal.

Por fim, nesse mesmo movimento, vários autores recorrem ao uso da história como ponto de partida para se pensar em estratégias de abordagem da continuidade em sala de aula (T1, T2, T3, T5, A1, A2, A8, A10). Estes autores defendem que é através do reconhecimento do modo como o pensamento matemático se desenvolveu que se possibilita a compreensão de aspectos fundamentais para a aprendizagem conceitual da continuidade.

Assim, partindo desse cenário, na próxima seção objetivamos promover algumas reflexões acerca das questões apresentadas e dar encaminhamentos necessários para a nossa pesquisa.

3.3. O que Revelam as Pesquisas e Artigos Analisados?

Com relação aos conceitos abordados pelos trabalhos (Quadro 02 e 03), é possível perceber que o movimento de se trabalhar a Continuidade juntamente com outros conceitos está ligado ao modo como historicamente ela foi constituída e sua abordagem nos currículos educacionais.

No que tange a construção histórica do conceito, deixaremos para abordá-la com profundidade nos próximos capítulos. Porém, em geral, suas primeiras manifestações estão ligadas à busca de solução de problemas práticos na Antiguidade, mas sua elaboração formal só se deu em pleno século XIX, frente à necessidade de desenvolvimento de outras teorias, como as teorias do Limite e dos Números Reais.

Com relação aos aspectos educacionais, percebe-se que há algumas especificidades em sua abordagem segundo os diferentes níveis de ensino. Na tentativa de esclarecer melhor, consideraremos tais especificidades a partir dos níveis básico e superior de ensino, em especial na formação de professores de matemática. Para isso, recorreremos às reflexões de

Cobianchi (2001) feitas a partir de análise das pesquisas, livros didáticos e entrevistas com professores.

Ao tratar do ensino básico, Cobianchi (2001) discorre que não há menções do conceito de Continuidade tanto em currículos do ensino fundamental e médio, quanto nos livros didáticos voltados para esse público. Em contrapartida, percebe que há uma preocupação de professores e pesquisadores sobre a necessidade de se abordar temas relacionados à Continuidade nesses níveis de ensino, sobretudo no que diz respeito à compreensão de conceitos importantes como os Números Reais. Em suas palavras,

baseado nas entrevistas que realizamos; em opiniões de professores de Matemática; nos artigos e obras analisadas e estudadas; consideramos que a construção de um procedimentos de ensino para números reais deva ser precedida por ideias intuitivas de continuidade. Observamos que estas noções, tão importantes para o entendimento desse conjunto numérico, não existem em nenhuma obra didática que analisamos (COBIANCHI, 2001, p. 420).

Na tentativa de compreender tais resultados na atualidade, partimos para uma breve análise do documento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018). Segundo este documento, a BNCC

é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996)¹, e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN)¹⁷ (BRASIL, 2018, p. 7).

Criada com o objetivo de ser referência didático-pedagógica para o ensino básico no Brasil, a BNCC estabelece também um conjunto de diretrizes para o ensino de Matemática. Sendo considerada parte fundamental na formação escolar dos indivíduos, o currículo de Matemática proposto pela BNCC engloba a articulação entre os campos da Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade. Tal articulação

¹⁷ BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria de Educação Básica. Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Brasília: MEC, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curriculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 16 out. 2017.

precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018, p. 265).

Conforme este documento, tais diretrizes se pautam em temas cruciais para a elaboração de propostas de ensino de Matemática com vistas à formação integral dos estudantes. No entanto, no que se refere à Continuidade, não há nenhuma menção sobre seu tratamento, seja no ensino fundamental ou médio.

A guisa de exemplo, no tocante tema dos Números no ensino fundamental, cujo aparato conceitual se desenvolve a partir da consideração da Continuidade, o documento discorre que

a unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações (BRASIL, 2018, p. 267).

É possível perceber que o documento faz alusão às ideias de aproximação, equivalência e ordem, e usa o termo “entre outras”, deixando espaço para a significação de outros elementos conceituais em relação à Continuidade. Porém entendemos que isso não está claro.

Além disso, ressalta também a necessidade de uma abordagem ao que considera “ampliação dos campos numéricos”, apontando para um tratamento da construção dos conjuntos numéricos a partir da ideia de complementariedade. Sobre isso, Cobianchi (2001) nos chama a atenção ao perceber que

a grande maioria dos entrevistados introduz didaticamente a questão dos números reais e continuidade, usando procedimentos metodológicos semelhantes. Usam a reta numerada, recordando o conjunto dos números naturais, o dos inteiros, o conjunto dos números racionais, e apresentam os irracionais, pela negação dos racionais. Afirmam que o conjunto dos inteiros contém o dos naturais, o dos racionais contém os anteriores, e finalmente o

conjunto dos números reais engloba todos os conjuntos dos números anteriores. Julgamos que esse procedimento é motivado pela maneira como a maioria dos livros didáticos trata o conjunto dos números reais, procedimento que se transmite para a maneira pedagógica de como o professor de Matemática apresenta esse assunto em sala de aula (COBIANCHI, 2001, p. 427).

É possível que esse tipo de estratégia adotada para o ensino das relações entre os conjuntos numéricos evoca um sentido pedagógico de adaptação para o estágio de maturidade cognitiva dos estudantes do ensino fundamental e médio. Porém, concordamos com Cobianchi (2001) e Dias (2007) que esta estratégia tende a ocultar elementos conceituais sobre a construção e relação entre os conjuntos numéricos, esboçando uma resposta simplista, porém ineficaz para apropriação conceitual dos Números Reais, sobretudo da continuidade.

Nas entrevistas, constatamos a concordância desses professores, que julgam, para a apresentação dessas noções de continuidade, poderia ser feita a junção de algumas justificativas fornecidas pelo instrumento de pesquisa, como a do axioma de exaustão, os indivisíveis de Cavalieri. Julgamos que se poderiam usar também alguns paradoxos de Zenão. [...] Então, acreditamos na possibilidade de se fazer um procedimento de ensino para números reais em que as noções intuitivas sejam fornecidas por essas justificativas, ou outras, aliadas com seus elementos históricos e as técnicas usadas nas mesmas. Neste procedimento julgamos pertinente o uso dos conceitos de infinidade, ordenação, enumerabilidade e densidade; e esse processo culminaria com uma das justificativas que é a construção de Dedekind dos números reais, que consideramos a mais apropriada para os cursos de licenciatura em Matemática (COBIANCHI, 2001, p. 427).

Diante disso, no que se refere ao ensino dos Números Reais, como tentativa de superar a visão de complementariedade proposto pela BNCC, depreende-se a necessidade de recorrência a uma perspectiva histórica sobre a abordagem da continuidade, a partir dos conceitos a ele relacionados como infinidade, ordenação, enumerabilidade e densidade (COBIANCHI, 2001). Assim, Cobianchi (2001) nos ajuda a melhor compreender essas relações intrínsecas de desenvolvimento dos conceitos sobre a continuidade, apontando para elementos sobre a determinação dos nexos conceituais. Mas, como entendemos estas questões no contexto do ensino superior?

A partir de entrevistas, Cobianchi (2001) também concluiu que houve certo desconhecimento por parte dos professores acerca de elementos históricos na constituição da Continuidade e que, de alguma forma, estava relacionado à sua abordagem nos cursos de graduação e a ausência de disciplinas dedicadas ao desenvolvimento histórico e filosófico deste conceito.

Sobre o modo como a Continuidade tem sido abordada no ensino superior, Cobianchi (2001) ressalta que há uma tendência para a presença de um excesso de formalismo que norteia as práticas docentes nas disciplinas que tratam deste conceito, sobretudo ancorados nos livros de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Matemática, e a recorrência da abordagem da Continuidade a partir dos temas ligados ao Limite e Função Contínua.

Para entender melhor esta questão, fizemos um levantamento das ementas curriculares presentes no Projeto Pedagógico de Curso (PPC) dos cursos de licenciatura em matemática em instituições públicas do estado de São Paulo¹⁸. O objetivo é compreender, a partir da leitura dos objetivos e da distribuição curricular, o modo como a Continuidade tem sido abordado ao longo da formação inicial de professores de Matemática na contemporaneidade (Apêndice 5) e comparar com as informações apresentadas por Cobianchi (2001). A escolha destas instituições se deu em função da regionalidade do local de realização desta pesquisa.

De maneira geral, podemos verificar a partir dos documentos analisados que existe uma organização curricular predominante em todos os cursos, nos quais a Continuidade é abordada nas disciplinas referentes ao Cálculo e à Análise Matemática¹⁹. Isso é corriqueiro, já que historicamente a Continuidade se situa no campo dos conceitos relacionados ao Cálculo e, conseqüentemente, à Análise. No entanto, o que nos interessa é o momento e a forma como tal conceito é desenvolvido no interior destas disciplinas.

A organização curricular das disciplinas analisadas referentes ao Cálculo²⁰ tem como base a sequência didática de Cauchy-Weierstrass (BARUFI, 1999) cuja distribuição pode ser resumida em: Números Reais, Funções Elementares, Limites, Diferenciação, Estudo da Variação das Funções de Uma Variável Real, Integração, Teorema Fundamental do Cálculo, Séries, e Equações Diferenciais Ordinárias. A partir desta distribuição, a Continuidade aparece como aspecto fundamental ora como consequência dos estudos sobre o Limite de uma Função em determinado ponto ou intervalo, ora como estudo de uma qualidade apregoada às Funções Contínuas.

Em guisa de exemplo, o curso de licenciatura em matemática da UFSCar (Campus São Carlos) apresenta como objetivo para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral A:

¹⁸ Cursos de Licenciatura em Matemática desenvolvidos em Universidade Federal de São Carlos (campi São Carlos e Sorocaba), Universidade Estadual Paulista “Júlio Mesquita Filho” (campi Ilha Solteira, Bauru, Guaratinguetá, Presidente Prudente, Rio Claro e Rio Preto), Universidade Estadual de Campinas, Universidade de São Paulo (campi São Carlos e São Paulo) e Universidade Federal do ABC (Campus Santo André).

¹⁹ Houve também a recorrência em menor número em disciplinas de Espaços Métricos e Topologia. Ambos com referência de abordagem da continuidade a partir de limites e funções contínuas.

²⁰ Chamamos aqui de “disciplinas relacionadas ao Cálculo”, pois há uma diversidade de organização curricular em cada instituição, segundo suas especificidades.

Desenvolver os conceitos de continuidade e diferenciabilidade de funções de uma variável real. Explorar a derivada como recurso de investigação das propriedades de funções. Utilizar a interpretação de derivada como medida de movimento nas suas mais variadas aplicações. Analisar sua aplicação como taxa de variação caracterizando-a como recurso fundamental no estudo de fenômenos evolutivos. Explorar recursos computacionais algébricos, numéricos e de visualização em suas aplicações ao cálculo diferencial de funções de uma variável (UFSCAR, 2018, p. 98)²¹.

O que podemos perceber é que há uma preocupação legítima em se trabalhar o conceito de Continuidade para o estudo do comportamento de Funções de uma Variável Real. Essa estratégia evoca a relação intrínseca entre Continuidade e Limite, cujo tratamento em sala de aula pode ser feito de diversas formas²².

A continuidade é descrita e definida para se adequar a diferentes públicos em diferentes níveis, incluindo o uso de descrições intuitivas, definições informais, definições formais de limites e a definição mais rigorosa de epsilon-delta. No contexto de um curso introdutório de cálculo, e também em muitos outros recursos comuns, as definições usadas para conceitos relacionados à continuidade são definições de limites (JAYAKODY; ZAZKIS, 2015, p. 8, tradução nossa).

Segundo Jayakody e Zazkis (2015), ao concordarem com Cobianchi (2001), o mais recorrente é que o primeiro contato dos estudantes com a Continuidade nos cursos de Cálculo aconteça mediante sua definição via Limite, sobretudo no que diz respeito ao estudo da Continuidade Pontual de funções.

Sobre isso, Aparicio e Cantoral (2006) discorrem que

visivelmente, já nos anos finais do século XVIII a concepção sobre continuidade se notou mais relacionada com a percepção espacial da noção gráfica da função, isto é, a continuidade era concebida como uma qualidade de forma. Um objeto era contínuo se não manifestava interrupção alguma; nesse sentido, uma curva seria caracterizada por meio das conexões ou continuidade de sua trajetória (APARICIO; CANTORAL, 2006, p. 12, tradução nossa)

Dessa forma, Aparicio e Cantoral (2003) ressaltam que

Na maioria dos sistemas escolares, a apresentação habitual deste conceito inicia considerando a definição de continuidade pontual de uma função em

²¹ UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS (UFSCAR). Projeto pedagógico do curso de licenciatura em matemática. São Carlos: UFSCar, 2018. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/graduacao/attachments/article/243/projeto_licenciatura.pdf>. Acesso em: 03 set. 2019.

²² Apesar de não se encerrar nestas, em seu trabalho, Alves (2010) sugere a presença de três maneiras recorrentes de abordagem da continuidade com relação às funções de uma variável real: a definição formal “weirstrassiana”, a definição intuitiva por meio do estudo do Limite em um ponto ou a visualização gráfica (geométrica) via software.

um ponto interior de um conjunto aberto nos reais. Em seguida, se discutem ao nível operativo alguns critérios para decidir a continuidade ou descontinuidade de uma função em um ponto. Asseguramos que este tipo de tratamento escolar induz problemas de aprendizagem entre os estudantes. Pressupõe-se que a noção de continuidade, em um sentido global, possui um caráter apriorístico no ser humano. As pessoas percebem a mudança no estudo de fenômenos reais em termos globais, não locais. Tomemos por exemplo, ao movimento da mão que se desloca de um lado para o outro sem cessar, imaginamos trajetórias contínuas descrevendo seu movimento, a mão então, recobre todos os pontos intermediários entre um extremo e o outro sobre sua trajetória. Como não havia de fazê-lo? Da mesma maneira, no comportamento dos gráficos se pensa que estes passam por todos os pontos intermediários de sua trajetória (APARICIO; CANTORAL, 2003, p. 341, tradução nossa).

Aparicio e Cantoral (2003) chamam a atenção que tal organização curricular da Continuidade pode conduzir a ciladas de ordem pedagógica, já que esta visão apresentada aos estudantes (por muitas das vezes, a primeira) induz a uma valorização da técnica e de sua aplicabilidade, em detrimento de uma significação histórica. Nesse sentido, Cobianchi (2001) contribui nessa afirmação ao acentuar os problemas de aprendizagem que tal organização pode provocar. Segundo o autor,

não podemos esquecer de que para se ter uma definição correta de função contínua, é necessário uma definição clara de números reais, que possa ser o suporte para o fornecimento de números reais e intervalos numéricos necessários a qualquer análise de continuidade de funções. Mas para uma definição de números reais, são necessárias noções de continuidade (COBIANCHI, 2001, p. 430).

Em geral, essa organização tende a suprimir relações importantes na apropriação da continuidade pelos estudantes, levando a dificuldades e/ou confusões de compreensão do conceito²³.

Esse contexto se estende também à organização dos conteúdos das disciplinas analisadas referentes à Análise Matemática. Com o foco na refinação formal dos conceitos trabalhados no Cálculo, o que se percebe ainda é a recorrência de uma abordagem da continuidade voltada para o estudo de limite e funções contínuas.

Ao se deparar com realidade semelhante, Cobianchi (2001) discorre que esse tipo de organização é motivada

talvez por um excesso de formalismo que norteia esses professores, ou porque as definições de limite e de função contínua são os elementos que mais se destacam quando se aborda continuidade. Ou talvez por acreditarem

²³ Deixaremos para tratar desta questão com profundidade no Capítulo 4.

que não exista a necessidade de se incorporar algum elemento novo para o ensino de continuidade e números reais (COBIANCHI, 2001, p. 430).

Isso pode ser percebido nas ementas dos cursos analisados (Apêndice 04). Com exceção do curso da USP (campus São Carlos) que, diferentemente dos demais, esboça uma preocupação com a formação do futuro professor fazendo referências à necessidade de relação com a prática profissional. A disciplina de Análise para Licenciatura oferecida por esta instituição tem como objetivo

Abordar a análise matemática e seus aspectos históricos proporcionando ao futuro professor conhecer como se estruturou o rigor na área de Matemática, particularmente no que diz respeito às contribuições para a Análise, e suas relações com a formalização de alguns resultados ensinados nos níveis Fundamental e Médio (USP, 2017, s/p)²⁴.

Além de se diferenciar pela necessidade de relacionar os conceitos aprendidos com a prática profissional, é possível perceber também que há certa preocupação com referência aos aspectos históricos. Isso de alguma maneira se aproxima de uma abordagem que tende a revelar elementos intrínsecos no desenvolvimento dos conceitos. Isso fica mais claro quando observamos a distribuição dos conteúdos na ementa.

Números reais: grandezas incomensuráveis. Cortes de Dedekind e os números reais. Propriedades e números irracionais. Aplicação à sala de aula no Ensino Fundamental e Médio. Notas históricas: teoria de conjuntos, conjunto de Cantor, paradoxos, linguagem matemática, não-enumerabilidade dos números reais. Sequências e séries numéricas: Teoremas de convergência de sequências e exemplos. Critérios de convergência de séries. Teste da comparação, razão e integral. Notas históricas: Teorema de Bolzano-Weierstrass, origem das séries infinitas, divergência da série harmônica. A irracionalidade do número de Euler. Notas históricas: surgimento do número de Euler. Funções, limites e continuidade. Teorema do Valor Intermediário. Notas históricas: Teorema do Valor Intermediário, Teorema de Weierstrass, Gauss. O cálculo diferencial: a derivada e a diferencial. Máximos e mínimos locais. Teorema do Valor Médio. Notas históricas: a origem do cálculo, Newton e Leibniz. Teoria da integral: Integrais por somas superiores e inferiores e a Integral de Riemann. Teorema Fundamental do Cálculo. Notas históricas: quadratura, Arquimedes e a área do círculo. A irracionalidade de pi. As Práticas como Componentes Curriculares (PCC) relacionadas às discussões e leituras realizadas e articulando os conhecimentos teóricos, compreendem as seguintes atividades - Análise de livros didáticos que abordam os conteúdos da disciplina para saber ensinar os conteúdos específicos (20h). – Explicitar a estrutura de um dos componentes da disciplina e refletir sobre como foi sua aprendizagem (20h); - Elaborar atividades para o ensino envolvendo o conteúdo da

²⁴ UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Grade Curricular do curso de licenciatura em matemática. São Carlos: USP, 2017. Disponível em: <
<https://uspdigital.usp.br/jupiterweb/listarGradeCurricular?codcg=55&codcur=55030&codhab=300&tipo=N>>.
 Acesso em: 03 set. 2019.

disciplina para que outros se apropriem desse conteúdo (20h) (USP, 2017, s/p)²⁵.

Mesmo esboçando uma organização curricular de abordagem da Continuidade vinculada aos conceitos de Limite e Função, acreditamos que a recorrência ao desenvolvimento lógico-formal a partir de uma perspectiva histórica dos Números Reais potencializa a abordagem de relações intrínsecas à Continuidade, ao invés de suprimi-las. Isso vai ao encontro dos resultados apontados pelos autores nos materiais analisados sobre a necessidade de abordagens que recorrem à história como possibilidade de mudança no ensino.

Com relação aos cursos de formação, em muitos casos, a estratégia utilizada para contornar essa questão é a oferta de disciplinas que tem como foco o estudo sobre a história da Matemática. Pressupõe-se assim que nestas disciplinas o estudante tem a possibilidade de acesso ao modo como o conhecimento matemático se desenvolveu ao longo do tempo.

Diante disso, assim como tratado anteriormente nas disciplinas que abordam a Continuidade, fizemos o levantamento de informações para compreender o modo como os cursos de Licenciatura em Matemática das instituições já mencionadas tem organizado o currículo sobre o tema história da matemática. Para isso, buscamos informações sobre quais disciplinas abordam tal tema, além de seus objetivos, conteúdo programático, carga horária, período sugerido e bibliografia (Apêndice 05).

Do montante de 11 (onze) cursos analisados, 09 (nove) disponibilizam a disciplina História da Matemática em suas grades curriculares com uma carga horária média de 60 horas e, dentre estes, 07 (sete) são de caráter obrigatório. Os cursos das instituições Unesp/Campus Bauru e Unesp/Campus Presidente Prudente não apresentaram especificamente uma disciplina dedicada aos estudos da história da matemática. O primeiro designa o tratamento histórico do conhecimento ao longo das demais disciplinas de sua grade. Já o segundo, aborda estas questões na disciplina intitulada Fundamentos da Educação e Aspectos Histórico-Filosóficos da Matemática de 60 horas, cujo objetivo é estudar os conhecimentos históricos aliados aos aspectos do ensino de matemática.

Importante ressaltar que, apesar de nem todos dedicarem disciplinas isoladas voltadas para o ensino de aspectos históricos, a nosso ver todos os cursos estão alinhados com o relatório de Diretrizes Nacionais para os cursos de Matemática nas modalidades de

²⁵ UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Grade Curricular do curso de licenciatura em matemática. São Carlos: USP, 2017. Disponível em: <<https://uspdigital.usp.br/jupiterweb/listarGradeCurricular?codcg=55&codcur=55030&codhab=300&tipo=N>>. Acesso em: 03 set. 2019.

Licenciatura e Bacharelado CNE/CES²⁶ n°: 1.302/2001 (BRASIL, 2001), que dispõe sobre os conteúdos comuns a todos os cursos de licenciatura e incluem a História e Filosofia das Ciências e da Matemática.

Em guisa de exemplo, ao analisarmos o PPC do curso de Licenciatura em Matemática da Unesp/Ilha Solteira, percebe-se que há um claro entendimento sobre a importância do ensino aliado à história.

É importante que o aluno tenha uma visão não só histórica, mas também uma visão do desenvolvimento e das várias formas de se fazer matemática. Pretende-se que, nas disciplinas, faça-se uma apresentação da evolução das idéias e conceitos e certamente a disciplina História da Matemática terá um papel preponderante na busca deste objetivo. No entanto, esta abordagem histórica deve ser preocupação em todas as disciplinas do curso, sempre com o objetivo de despertar no aluno o senso crítico face ao desenvolvimento dos conceitos e mostrando que o conhecimento matemático (e científico) continua sua evolução (UNESP, 2008, p. 3)²⁷.

Apesar de esboçar o entendimento sobre a importância de uma compreensão histórica na formação do futuro professor, afirmando que essa visão deve, inclusive, ser trabalhada em todas as disciplinas, o que se percebe é uma organização curricular que não favorece a implementação desta visão na prática.

Ao nos debruçarmos sobre as grades curriculares dos cursos que oferecem a disciplina História da Matemática, percebemos que todas sugerem a realização desta disciplina pelos estudantes nos últimos semestres. Ou seja, o estudante terá contato efetivo com uma abordagem sobre a história do conhecimento matemático nos últimos momentos de sua formação. Com exceção daquelas disciplinas em que o professor decida por utilizar aspectos ligados à história em sua prática docente. Porém, neste caso, isso fica a cargo do próprio professor e não numa perspectiva curricular.

Isso nos leva a inferir que essa forma de organização curricular tende a priorizar uma relação entre ensino e história da Matemática pautada em aspectos de motivação, conscientização, significação ou desmistificação do conhecimento (MIGUEL, 1993). Isso certamente contribui na produção de significados sobre os conhecimentos já apreendidos (ou decorados) pelos estudantes, porém tais relações não oferecem condições favoráveis para a abordagem de aspectos conceituais em momento adequado, como no caso da continuidade para a apropriação dos números reais. De acordo com Cobianchi (2001), “mais que a ausência

²⁶ Conselho Nacional de Educação / Câmara de Educação Superior

²⁷ UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA (UNESP). Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática. Ilha Solteira: Unesp, 2017.

ou falhas na disciplina de História da Matemática, observamos a ausência de elementos da História da Matemática junto com o ensino do Cálculo e da Análise” (COBIANCHI, 2001, p. 423).

Tais relações ficam ainda mais evidentes quando se observa o conteúdo programático das disciplinas. Como exemplo, o quadro a seguir (Quadro 4) diz respeito às informações coletadas no PPC do curso de licenciatura da UFSCar/Campus Sorocaba sobre a disciplina História da Matemática. Conforme informações apresentadas no Apêndice 05, a disciplina em questão é de caráter obrigatório à licenciatura e o semestre sugerido de realização é o 8º (oitavo), ou seja, o último semestre para a conclusão do curso, com carga horária de 60 horas.

Quadro 4 - Disciplina História da Matemática da UFSCar/Campus Sorocaba

Objetivo	Conteúdo Programático
Ao final da disciplina o aluno deverá ser capaz de descobrir o como e o porquê do aparecimento e desenvolvimento das principais teorias matemáticas. Ênfase deverá ser dada sobre as teorias que melhor possam esclarecer conceitos elementares e indispensáveis tanto ao professor de matemática dos Ensinos Fundamental (Ciclo Final) e Médio, quanto ao futuro pesquisador em matemática.	A civilização pré-helênica; origens da geometria e do conceito de número. A Idade Clássica. Gênese da Matemática dedutiva na Antiga Grécia. O nascimento do Cálculo Integral. O Renascimento e as raízes da Matemática atual. Gênese do Cálculo Diferencial. A época de Euler. Os séculos XIX e XX e o desenvolvimento da Matemática. A axiomatização da Matemática. Nossa época e tópicos da história da Matemática Contemporânea. História da Matemática no Brasil.

Fonte: UFSCar, 2010²⁸.

O objetivo descrito no documento retrata uma preocupação com a produção de significados aos conceitos pelos estudantes ao recorrer sobre os termos “como” e “porquê” sobre o surgimento e desenvolvimento das “principais” teorias matemáticas, sobretudo no que diz respeito aos conceitos “elementares e fundamentais” aos futuros professores e pesquisadores em Matemática. Isso reforça nosso entendimento sobre a ênfase num caráter de significação e desmistificação do conhecimento matemático por meio do uso da história no ensino.

Além disso, o conteúdo programático é dividido no estudo de teorias matemáticas surgidas e desenvolvidas em períodos históricos que vão da Idade Antiga aos dias atuais. Diante disso, é certo dizer que, em face da complexidade sobre o desenvolvimento matemático ao longo de séculos e da quantidade de horas destinada à realização da disciplina,

²⁸ UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS (UFSCar). Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática. Sorocaba: UFSCAR, 2010.

há uma perspectiva generalista de apresentação de eventos históricos em cada período mencionado.

O caso da disciplina ofertada pela UFSCar/Sorocaba, assim como os demais apresentados no Apêndice 05, nos ajuda a entender o contexto sobre como se tem compreendido a relação entre ensino e história da matemática nos cursos de formação de professores e seus desdobramentos com os resultados apontados pelos trabalhos analisados.

Com relação às obras consultadas para realização das disciplinas, focamos no levantamento de autores citados na bibliografia básica. Importante ressaltar que não conseguimos encontrar estas informações nos PPCs de Unesp/Campus Ilha Solteira, Unesp/Campus Guaratinguetá e Unesp/Rio Claro. Nos demais, houve a recorrência em maior número à obra *História da Matemática* de Carl Boyer²⁹ (seis) seguida de *Introdução à História da Matemática* de Howard Eves³⁰ (três). Não nos debruçaremos aqui sobre uma análise das obras citadas, o que avançaria aos objetivos desta seção. No entanto, cabe ressaltar que ambos os autores buscaram retratar em seus livros aspectos históricos relacionados à construção do conhecimento matemático, ora com uma abordagem com ênfase na descrição de eventos históricos que contextualizam a produção do conhecimento (Boyer), ora como foco na narração de situações históricas com vistas à aprendizagem da matemática (Eves).

Portanto, o que se pode perceber a partir de uma análise dos PPCs é que existe uma preocupação dos cursos em abordar temas relacionados à história da matemática para a formação de professores. No entanto, assim como descrito por Cobianchi (2001), é necessário que a organização curricular privilegie o tratamento histórico dos conceitos para além da produção de significados pelos estudantes, sobretudo com referência à continuidade.

Os resultados das pesquisas e artigos analisados apontam para a necessidade não só de contextualização da produção histórica da continuidade, mas também para a valorização de aspectos conceituais imprescindíveis à sua apropriação pelo estudante.

3.3. Alguns Apontamentos sobre as Pesquisas

O objetivo desta seção foi compreender como o conceito de Continuidade tem sido entendido no âmbito da produção científica sobre o ensino de matemática. Na busca por contemplá-lo, optamos pela realização da Análise Documental sobre as produções que tiveram como foco o ensino de continuidade.

²⁹ BOYER, C. *História da Matemática*. Trad. Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

³⁰ EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. Unicamp, 1999.

Em geral, apesar de considerar as singularidades de nosso levantamento, o número de trabalhos analisados (vinte e quatro) revela a necessidade de realização de mais investigações sobre fenômenos de ensino e aprendizagem da Continuidade, por estudantes de diferentes níveis de ensino. Contudo, a pluralidade de olhares e a riqueza de informações que encontramos nesses trabalhos sugerem que é possível pensarmos em maneiras mais eficazes de sua abordagem em sala de aula, como fontes propositivas em melhorias na aprendizagem dos estudantes.

Ao longo das análises, no que se refere ao ensino, pudemos perceber que a relação da Continuidade com outros conceitos se diferencia nos âmbitos ontológico e pedagógico. Isso é decorrente do movimento de autores que defendem sua introdução ora no trato da continuidade na construção conceitual dos Números Reais, ora a partir de sua definição formal via estudo do comportamento das funções. A nosso ver, esse embate é profícuo e nos ajuda a delimitar sobre o que se espera com o ensino de Continuidade, sobretudo na formação de professores.

Também, a partir da análise dos resultados indicados pelos autores, o que se pode identificar na atualidade é a ausência de tratamento da Continuidade no ensino básico e, no que compete ao ensino superior, a dificuldade dos estudantes em se apropriarem do conceito, aliada ao excesso de formalismo praticado pelos professores. Como forma propositiva, os resultados também apontam para a necessidade de mudanças nesta realidade com a adoção de diferentes estratégias, como o uso das TICs e a organização do ensino pautada em elementos da história da matemática.

O levantamento de informações sobre a BNCC e os PPCs dos cursos de Licenciatura em Matemática de instituições públicas de São Paulo, corrobora com os resultados analisados sobre a necessidade de se pensar em mudanças sobre a organização educacional em torno da Continuidade. Percebemos que ainda há a valorização de uma visão técnica e formalista deste conceito na formação do professor.

Portanto, entendemos que ainda há muitas lacunas a serem preenchidas e descobertas no que tange a investigação sobre o fenômeno do ensino de Continuidade, especialmente no que concerne a novas alternativas de se promover as mudanças relatadas.

Em nossa visão, concordamos na recorrência à história como prerrogativa para a organização do ensino, pois esta estratégia não só favorece a aprendizagem dos conceitos, como também permite o desenvolvimento das capacidades psíquicas pelos estudantes. No entanto, diferentemente das relações já mencionadas entre ensino e história da matemática, o

pressuposto de nossa pesquisa se baseia no movimento lógico-histórico da Continuidade e a determinação de seus nexos conceituais a serem trabalhados em sala de aula.

Dentre os trabalhos levantados, ressaltamos a tese defendida por Dias (2007) intitulada *Formação da Imagem Conceitual da Reta Real: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica*. Com o foco na compreensão de aspectos importantes sobre a Reta Real, a autora se utiliza do movimento lógico-histórico do conceito e sua relação com a imagem conceitual manifestado por professores do ensino básico em um curso de formação. Entre as relações fundamentais mencionadas pela autora, está a necessidade de se abordar o conceito de Continuidade.

Nesse sentido, em sua pesquisa, Dias (2007) retrata que ao abordar questões pertinentes à apropriação do conceito de Reta Real, exige-se a recorrência dos conceitos de Infinito Potencial, Infinito Real (Atual), Densidade e Continuidade. A autora também aponta que, a partir de suas análises, a manifestação do pensamento sobre a Reta Real perpassa pela compreensão dialética sobre discreto-denso-contínuo, comensurável-incomensurável, finito-infinito, cardinalidade-ordenação.

Portanto, ao longo deste levantamento bibliográfico foi possível também apreender relações importantes estabelecidas no desenvolvimento histórico da Continuidade com outros conceitos indicados pelos autores. São eles: Incomensurável, Discreto, Contínuo, Infinito (Potencial e Atual), Infinitésimos, Ordenação, Enurabilidade, Acumulação, Densidade, Continuidade (Pontual e Global) e Descontinuidade.

Seriam estes os nexos conceituais da continuidade? Até aqui, qualquer resposta a esta pergunta seria minimamente incipiente. Para nos aprofundarmos nesta questão, na próxima seção nos debruçaremos sobre a Análise Histórico-Epistemológica do conceito a partir de obras historiográficas da Matemática.

4. Análise Histórico-Epistemológica do Conceito de Continuidade

Como discutido na Seção 2, no processo de evolução, o estabelecimento de uma ideia sobre a temporalidade dos eventos que assolam a vida humana talvez se configure em um dos principais saltos sobre a construção de uma consciência na relação do ser humano com o mundo material. E certamente tal ideia só pôde ser constituída a partir de fenômenos que despertaram uma necessidade frente a situações de interação com esse mundo.

Dessa forma, a história é compreendida a partir de sua relação intrínseca com o próprio processo de humanização. É baseada nessa compreensão que o indivíduo se apropria de conhecimentos culturalmente acumulados ao longo do tempo e estabelece maneiras de produção e regulação de seus pensamentos. Quando nos debruçamos sobre a história da Matemática e seu potencial para a concretização de ações pedagógicas, também é nessa perspectiva que a interpretamos. Isso significa dizer que é necessário reconhecer que sua produção, e certamente sua apropriação, envolve relações estabelecidas em âmbitos sociais, culturais, cognitivos e históricos (MORETTI; RADFORD, 2015).

Como vimos seção 2, há diferentes formas de estabelecer a relação entre história e ensino de Matemática. O fundamento teórico desta pesquisa está assentado no reconhecimento da dialética entre o lógico e o histórico da Continuidade (KOPNIN, 1978) a partir da determinação de seus nexos conceituais (SOUSA, 2004), ao considerar os aspectos ontogenéticos e filogenéticos de um conceito.

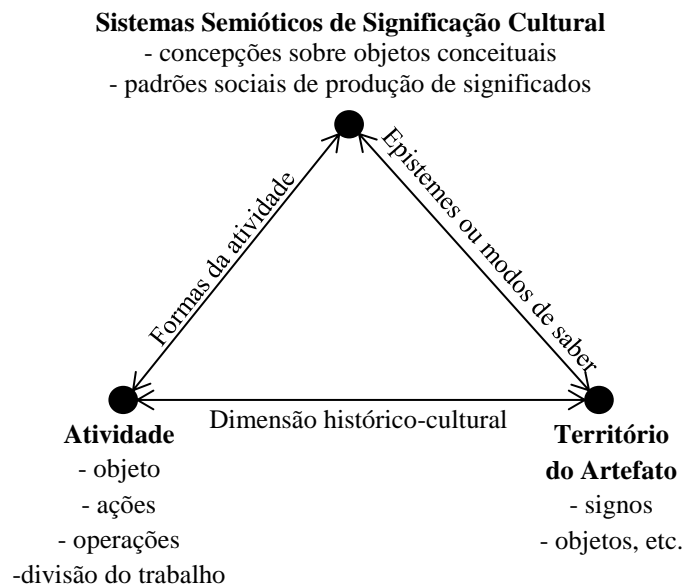
Segundo Radford (2011), a compreensão destes aspectos deve levar em conta as formas singulares de produção do conhecimento inseridas em seus contextos temporais, ou seja, “para compreender os desenvolvimentos conceituais precisamos colocar o sujeito conhecedor e toda a atividade matemática em estudo dentro da sua concepção cultural da Matemática e da ciência geral.” (RADFORD, 2011, p.82).

Sendo assim, no que tange o ambiente pedagógico, história e ensino devem se estabelecer a partir de uma relação ontofilogenética (MORETTI; RADFORD, 2015), pois a compreensão de aspectos intrínsecos ao conhecimento só se efetiva a partir de sua atividade de produção e dentro dos limites impostos por seu contexto cultural. Importante dizer que esta relação não se concretiza baseada em uma mera reprodução de situações históricas em sala de aula. A ação de quem organiza o ensino deve voltar-se para o reconhecimento e a problematização de elementos inerentes à produção do conhecimento – os nexos conceituais – somente revelados no desenrolar da história.

Dessa forma, o objetivo desta seção é apresentar a Análise Histórico-Epistemológica de materiais historiográficos da matemática com vistas à construção do movimento lógico-histórico do conceito de Continuidade e a determinação de seus nexos conceituais.

Para acessar e conhecer as relações mais internas e essenciais na produção histórica da Continuidade, as análises foram estruturadas segundo o conceito de Sistemas Semióticos Culturais de Significação (SSCS) proposto por Radford (2006; 2011) que tem como pressuposto a compreensão da rede de relações entre o desenvolvimento epistemológico na história e as práticas culturais de produção do conhecimento. Isso implica dizer que na análise do desenvolvimento histórico da Continuidade, visamos compreender as manifestações do pensamento matemático em seu vínculo com a atividade humana (LEONTIEV, 1983), inseridas num contexto revelador das condições objetivas de produção deste conhecimento (Figura 01).

Figura 6 - Estrutura de Interação dos Sistemas Semióticos de Significação Cultural



Fonte: (RADFORD, 2006, p. 109, tradução nossa)

Conforme a Figura 5, a estrutura dos SSSC pressupõe a consideração de uma rede de relações entre a atividade humana e o território do conhecimento em si (artefato). Estas relações são, em si, dialéticas e se constituem na consideração sobre as formas particulares da atividade e os modos de saber, ou melhor, de produção do conhecimento.

Para sistematizar o processo de análise, optamos por explorar as manifestações da Continuidade ao longo de períodos históricos de acordo com a divisão proposta por Ríbnikov (1987). Esta escolha se deu pela proximidade teórica do autor com esta pesquisa, que tem o

materialismo histórico dialético como pressuposto para a compreensão dos fenômenos sobre a matemática. Segundo o autor,

Na história da Matemática podem se distinguir períodos isolados, diferenciados um do outro por uma série de características particulares. A periodização é necessária para poder orientar-se com maior facilidade em toda a riqueza de feitos que apresenta o desenvolvimento histórico da matemática. Existem muitas tentativas de periodização da história da matemática. A periodização se efetua por países, por formações socioeconômicas, por descobrimentos relevantes, os quais determinam até certo ponto o caráter do desenvolvimento da matemática, etc. A discussão sobre as periodizações são intermináveis. No entanto, segundo nosso critério, o papel das periodizações é puramente auxiliar e se determina pelas necessidades do objetivo fundamental: o descobrimento das leis do desenvolvimento objetivo da matemática (RÍBNIKOV, 1987, p. 16, tradução nossa).

Nesse sentido, com vistas ao descobrimento das leis do desenvolvimento objetivo da matemática, as subseções da análise foram divididas em eixos temáticos de acordo com os períodos que englobam a produção histórica da Continuidade:

- A matemática na Antiguidade – período correspondente às primeiras manifestações de um conhecimento matemático estruturado coletivamente.
- O desenvolvimento da matemática elementar³¹ – período correspondente à acumulação de métodos próprios de estudo das magnitudes constantes;
- A criação da matemática das variáveis – período correspondente ao enfrentamento de problemas que envolvem magnitudes variáveis e a elaboração de uma linguagem própria;
- O início da matemática moderna³² – período correspondente ao desenvolvimento da matemática enquanto área científica como conhecemos atualmente.

Essa sistematização visa identificar em cada um destes períodos os momentos de produção do conhecimento, aclarando as relações estabelecidas entre o lógico e o histórico e os elementos indicadores de nexos conceituais. Assim, recorreremos aos elementos pedagógicos tensionadores³³ na história proposto por Lanner de Moura (2003). Segundo a autora, o processo de se debruçar sobre a história do conceito,

pretende ser um aprofundamento de seu movimento de criação na história humana buscando encontrar elementos pedagógicos tensionadores, da

³¹ Manteremos o termo “elementar” que Ribnikov (1987) utilizou em sua obra ao se referir ao período em que se produz a grande maioria dos conceitos abordados na Educação Básica.

³² Da mesma forma que o anterior, manteremos o termo “moderno” utilizado por Ribnikov (1987) em referência à produção da Matemática como a entendemos atualmente.

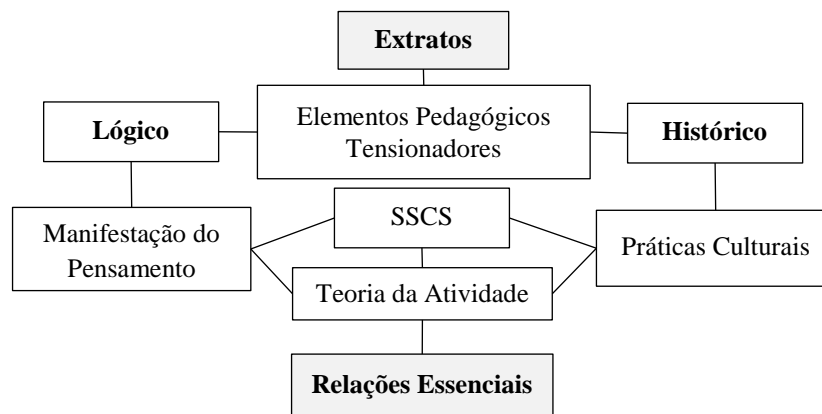
³³ Para contribuir na construção do texto, chamaremos somente de “elementos tensionadores”.

(re)criação conceitual em quem ensina e em quem aprende; ao entender que o elemento tensionador é determinante para estabelecer uma relação subjetiva do sujeito, com o conceito (LANNER DE MOURA, 2003, p. 2).

No contexto da análise, a inquirição dos elementos tensionadores na história está relacionada à percepção das necessidades, motivações e condições objetivas (LEONTIEV, 1983) que conduziram à produção de determinado conhecimento. Assim, a estrutura dos argumentos tem como ponto de partida a discussão sobre elementos tensionadores com base em recortes feitos nas obras analisadas, nos quais chamaremos de extratos.

Assim, o processo de compreensão das relações essenciais se efetiva a partir da análise dos extratos, que são fontes reveladoras de elementos tensionadores, em âmbitos lógico e histórico e com base nos SSCS e na Teoria da Atividade (Figura 6).

Figura 7 - Estrutura para Análise dos Extratos



Fonte: próprio autor

Dessa forma, na Figura 6 se descreve que a estrutura de análise dos extratos se concretiza a partir dos elementos tensionadores que são reveladores da interação entre o Lógico e o Histórico para a determinação das relações essenciais.

As próximas subseções serão constituídas conforme a divisão de períodos mencionada e, por fim, apresentamos a última seção com aspectos conclusivos com indicadores sobre os nexos conceituais da Continuidade.

Mas antes, importa-se dizer que não se pretende realizar uma produção historiográfica sobre o desenvolvimento da Continuidade. Em primeiro lugar, acreditamos que já existem trabalhos que cumprem com essa tarefa e que se firmam como material de análise para esta pesquisa, como no caso de Brolezzi (1996), Cobianchi (2001) e Rezende (2003). Em segundo lugar, o foco da análise está centrado na identificação e discussão sobre os elementos

tensionadores presentes em diferentes momentos históricos e que nos ajudam a compreender as relações do desenvolvimento da Continuidade.

4.1. Período de Desenvolvimento da Matemática na Antiguidade

As primeiras manifestações sobre o desenvolvimento do conceito de Continuidade datam ainda da Grécia Antiga a partir de problemas que envolvem a incomensurabilidade (COBIANCHI, 2001). Esse período compreende os primórdios do desenvolvimento do pensamento matemático no trato com magnitudes constantes.

Ao referir-se sobre as magnitudes constantes, Ríbnikov (1987) faz alusão aos problemas da época voltados para relações de logística, construções, agrimensura etc., que exigiam um aparato matemático mais desenvolvido que os problemas práticos enfrentados por filósofos/matemáticos que viveram no período conhecido como “o nascimento da matemática” (RÍBNIKOV, 1987, p. 16) ou “pré-helênico³⁴” (EVES, 2004, p. 90). O período anterior abarca as manifestações do pensamento matemático em sociedades primitivas e o acúmulo de conhecimento que possibilitou a conversão da matemática em uma ciência independente e com métodos próprios na Antiguidade.

Ao passo que se instaurava a aglomeração de pessoas num lugar, fortalecia-se assim o desenvolvimento de atividades agrárias e cessava a necessidade de longas viagens para a obtenção de mantimentos através da caça e pesca. Com isso se constituíram condições favoráveis ao enfrentamento de problemas práticos e a criação de leis gerais do pensamento, e em particular, do pensamento matemático.

Com uma organização social complexa, a divisão do trabalho nas civilizações pré-helênicas possibilitou o estabelecimento de funções sociais ligadas à produção do conhecimento como sacerdotes, escribas e astrólogos. Essa divisão estava diretamente ligada às necessidades do desenvolvimento da sociedade a partir do enfrentamento de tarefas ligadas ao cultivo da terra, controle da produção agrícola, previsão das mudanças no clima, construção de obras de irrigação, entre outras, mas também às questões políticas, econômicas, astronômicas, etc. Assim se estabelece uma divisão sobre os indivíduos dedicados a uma atividade mais intelectualizada (distanciada de um labor braçal) e outros ligados a uma atividade mais prática (EVES, 2004).

Um exemplo notório foi o nível de complexidade adquirido pelas sociedades da Grécia Antiga. Dividida em diferentes cidades-estado, a Grécia marcou o início de uma atividade

³⁴ O período helenístico (323-146 a.C.) corresponde ao período de ascensão da cultura grega (POLITO e SILVA FILHO, 2013).

científica em função das relações sociais estabelecidas na época. Seu território favoreceu o desenvolvimento de diferentes atividades ligadas ao comércio, agricultura, navegações, exército, política, etc. Baseado numa cultura escravista, o modo de produção esteve pautada na divisão em classes detentoras dos meios de produção e das forças produtivas.

Passíveis de usufruir um tempo longe de atividades braçais, essa divisão do trabalho possibilitou que a classe dominante pudesse se dedicar a tipos específicos de atividades intelectuais, entre elas, a produção do pensamento matemático.

Nesse contexto, o Extrato 1 a seguir foi escolhido com vistas à caracterização da mudança ocorrida na organização social da Antiga Grécia que possibilitou a efetivação de uma atividade ligada à produção do conhecimento, em especial da matemática.

Extrato 1: A divisão do trabalho e a produção do conhecimento matemático	
Descrição	Elemento Tensionador
Na matemática dessa época os problemas práticos relacionados com a necessidade de cálculos numéricos, medições e construções geométricas continuaram tendo um grande papel. No entanto, o novo era que estes problemas pouco a pouco se desprenderam em um campo independente da matemática que obteve a denominação de logística. À logística foram atribuídas: as operações com números inteiros, a extração numérica de raízes, o cálculo com a ajuda de dispositivos auxiliares, do tipo do ábaco, o cálculo de frações, a resolução numérica de problemas que conduzem a equações de 1º e 2º graus, problemas práticos de cálculo e construtivos da arquitetura, agrimensura, etc. (RÍBNIKOV, 1987, p. 51, tradução nossa).	A complexificação das relações sociais que exigiu a divisão do trabalho e a existência de pessoas que tinham como atividade principal dedicada à filosofia, matemática, artes, entre outras, distanciadas do trabalho braçal.

Como retratado no Extrato 1, Ríbnikov (1987) chama a atenção para que, apesar de estarem ligados a problemas de ordem prática, nesse período se inicia um movimento de se pensar em formas gerais na produção do pensamento, com a criação de um campo independente da matemática. Segundo Eves (2004), foi em decorrência dessa divisão que se pôde pensar na construção da ideia dedutiva sobre o que conhecemos hoje por pensamento matemático.

O destaque para o elemento tensionador do Extrato 1 se efetiva na mudança provocada por um comportamento coletivo frente às necessidades impostas por uma nova organização social. Apesar de ainda estarem diretamente ligados à busca de solução para problemas práticos, houve a necessidade de se estabelecer uma atividade específica voltada para a produção de conhecimento. Além disso, em função de sua intensa atividade comercial e de sua localização que beneficiava o intercâmbio cultural, as condições objetivas eram favoráveis para que esse movimento se efetivasse.

Esse movimento significou um salto na relação estabelecida entre sujeito conhecedor e objeto do conhecimento, pois garantiu a disponibilização de tempo e liberdade para a mente criativa do ser humano (KOPNIN, 1978). O resultado disso são as primeiras manifestações do pensamento baseadas em estruturas dedutivas, mediante raciocínios lógicos, e não mais ligadas à explicação mítica da realidade (EVES, 2004). Esse tipo de atividade estava diretamente vinculado ao ramo da filosofia.

O contexto de surgimento da filosofia grega é marcado por tentativas de superação de explicações sobre a natureza advindas de ações de seres divinos dotados de personalidade (os deuses). Assim, o pensamento filosófico grego buscava substituir o *mithos* (mitológico) pelo *logos* (racional) com pressuposto para compreensão da realidade (POLITO; SILVA FILHO, 2013).

Segundo Polito e Silva Filho (2013),

Acompanhando as necessidades de rigor e objetividade, regras para a elaboração do discurso, para a correção do raciocínio e para a articulação conceitual dos elementos concretos da realidade sensível foram formuladas. Assim é que a lógica e a matemática foram criadas como disciplinas propriamente ditas, ambas passando por um desenvolvimento único entre os gregos. A primeira, como uma disciplina puramente linguística e conceitual, teve sua formulação plena nas obras de Aristóteles e da escola estoica. Já a matemática grega – a qual era constituída quase que inteiramente pela geometria (euclidiana) e pela aritmética –, foi concebida como paradigma de correção de pensamento e demonstração de verdades (POLITO; SILVA FILHO, 2013, p. 330).

Dessa forma, a atividade de produção do conhecimento estava relegada à criação de estruturas racionais para a compreensão dos fenômenos sobre a natureza, mas também para a determinação dos elementos que os constituía. Entretanto, Polito e Silva Filho (2013) ressaltam que

apesar da lógica e da matemática terem atingido níveis muito elevados de desenvolvimento entre os gregos, ambas permaneceram, durante a maior parte do tempo, como disciplinas propedêuticas da filosofia, uma vez que eram consideradas meros instrumentos para a elaboração ulterior do pensamento filosófico. Ainda assim, dois são os motivos pelos quais não se pode subestimar essas aquisições. Primeiro, porque na sua base está o pressuposto de que a filosofia natural (ou seja, a ciência) versa sobre o *universal* e o *necessário*, não sobre o casual e o contingente. Isso significa que, para além de mera compilação de fatos, sua busca é pelo que é *essencial* na natureza. Seu objeto são *categorias* de fenômenos, não fenômenos isolados. Em segundo lugar, porque o debate e a discussão racionais – e não o dogma ou a revelação religiosa – passaram a ser a “marca registrada” do novo “método” inventado pelos gregos. Esse espírito crítico seria

indelevelmente impresso na ciência moderna como uma de suas características mais fundamentais (POLITO; SILVA FILHO, 2013, p. 330).

No pensamento grego são manifestadas as primeiras tentativas de estabelecimento de características universais para a explicação e constituição de fenômenos ligados à vida humana. Tais características versam sobre a definição de uma estrutura rígida para a construção do pensamento, com base em princípios elementares, e sua aceitação (ou refutação) por meio de uma interação coletiva. Certamente esse processo marcou o desenvolvimento futuro da ciência moderna.

Essas manifestações estão ligadas a duas figuras imprecisas historicamente³⁵, Tales de Mileto (624-548 a.C. aproximadamente) e Pitágoras de Samos (580-500 a.C. aproximadamente) (BOYER, 1974). Dada a importância da escola pitagórica para a construção do conceito de Continuidade (COBIANCHI, 2001), focaremos nos relatos históricos sobre o conhecimento atribuído a Pitágoras e seus precursores.

Sem sombras de dúvidas, Pitágoras é uma das figuras (ou celebridades) matemáticas mais intrigantes da história. Em partes, isso se deve em decorrência dos mistérios sobre sua vida, que envolve lendas e misticismo, mas também no que diz respeito aos segredos da rotina de sua escola (comunidade, confraria, irmandade, seita, etc.). Além disso, há também o famoso teorema que carrega seu nome, o qual estabelece uma relação lógica entre os lados do triângulo retângulo, tão recorrente nos currículos do ensino básico e superior.

Dentre os diversos fundamentos que sustentavam as teorias da escola pitagórica, a enumerabilidade e ordenação do universo ocupavam um local de destaque (BOYER, 1974). Segundo Eves (2004), “a filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros” (2004, p. 97). Nesta visão, toda explicação e constituição dos fenômenos que assolam a vida humana eram expressas através dos números inteiros.

Caraça (1958) nos ajuda a entender melhor esse cenário ao discorrer que, para apoiar essa ideia,

Teve que, fora da necessária experimentação e verificação, procurar uma estrutura da matéria idêntica à estrutura numérica. Tal procura parece ter cristalizado na afirmação seguinte: que a matéria era formada por corpúsculos cósmicos, de extensão não nula, embora pequena, os quais, reunidos em certa quantidade e ordem, produziam os corpos; cada um de tais corpúsculos – mônadas – era assimilado à unidade numérica e, assim, os

³⁵ Segundo Boyer (1974) o termo impreciso se refere à ausência (ou perda) de documentos que atestem a veracidade sobre a história desses indivíduos.

corpos de formavam por quantidade e arranjo das mônadas como os números se formam por quantidade e arranjo das unidades (CARAÇA, 1958, p. 72).

Para os pitagóricos, os números inteiros não significavam somente instrumentos de quantificação, mas também estavam dotados de uma capacidade abstrata de interpretação da vida humana.

Importante ressaltar que, segundo Boyer (1974), apesar da significação desses feitos pelos pitagóricos na história da matemática, a sociedade grega da época era reconhecida por sua capacidade de intercâmbio comercial, realização de construções terrenas e marítimas, e apregoavam relações com os números baseados em suas atividades práticas. “Atividades numéricas desse nível [advindas da atividade prática] não mereciam a atenção dos filósofos e registros de aritmética prática não apareciam nas bibliotecas dos estudiosos” (BOYER, 1974, p. 42). Nesse sentido, pode-se dizer que a atividade de produção do conhecimento pelos pitagóricos estava relegada à sua motivação em buscar respostas para os fenômenos sobre o universo por meio de generalizações inteligíveis.

Um aspecto importante que está presente em ambos os pensamentos (pitagórico e advindos da atividade prática) é a de que os números inteiros são suficientes para a manutenção da vida naquela época. Independente da complexidade em que se atribuía o papel do número na explicação de fenômenos, a vida em sociedade estava resguardada sob o poder dos números inteiros em resolver os problemas cotidianos da sociedade grega.

Assim, para os pitagóricos, os números de significação prática resultavam de contagem ou de mensuração, e eram inteiros ou frações racionais. Sem dúvida, eles podem ter aprendido a usar símbolos e termos que se referem a entidades não-rationais, mas para eles essas expressões eram apenas termos de linguagem. No final, o número racional aparecia como a única grandeza a que se podia dar em uso prático (COBIANCHI, 2001, p. 81).

Nesse contexto, as relações estabelecidas entre os indivíduos na sociedade grega estavam diretamente influenciadas pela existência e manejo das situações rotineiras por meio dos números inteiros e a razão estabelecida entre eles (Número Racional). A grande questão que surge nesse contexto esteve ligada à incapacidade dos gregos em lidar com situações em que tal representação numérica já não conseguia oferecer uma explicação lógica. Esta questão esteve ligada à formação de uma consciência sobre a incomensurabilidade³⁶. O Extrato 2 a seguir se constitui a partir disso.

³⁶ Trataremos aqui como a “formação da consciência” sobre a incomensurabilidade em substituição do termo “descoberta”, amplamente difundido (KOSTIUK, 2005). Isso faz alusão ao nosso posicionamento teórico em conceber que o conhecimento é uma construção humana advindo de sua interação com a atividade prática.

Extrato 2: A crise sobre a incomensurabilidade	
Descrição	Elemento Tensionador
Mas que é feito, então, da afirmação de que os princípios dos números são os elementos de todos os seres, que o Céu inteiro é harmonia e número? Que valor tem ela, se os números não podem dar conta, sequer, desta coisa simples e elementar que é a razão dos comprimentos de dois segmentos de reta? Onde está o alcance universal dessa afirmação? No dia em que foi descoberto o fenômeno da incomensurabilidade de segmentos, a escola pitagórica estava ferida de morte (CARAÇA, 1958, p. 74).	A crise nos fundamentos pitagóricos de enumerabilidade e ordenação, frente à formação da consciência sobre os incomensuráveis.

No Extrato 2, a morte na qual se refere Caraça (1958) representa o momento de crise vivida pelos pitagóricos que abalou os alicerces de sua teoria. Basicamente os incomensuráveis retratam situações em que se torna impossível descrevê-las utilizando Números Inteiros e suas razões (Números Racionais). O modo *como*, *quando* e *por quem* se deu essa construção é incerto. No entanto, sua consideração revela muito sobre o modo de produção do conhecimento naquela época e a abertura para a elaboração de conceitos fundamentais e predecessores da Continuidade.

Uma das mais difundidas argumentações sobre a existência dos incomensuráveis está voltado para a relação entre os lados e a hipotenusa de um triângulo retângulo a partir da aplicação do teorema de Pitágoras, tradicionalmente vinculada a Aristóteles³⁷. Apesar do nível complexo de abstração envolvido nestas argumentações, dificilmente foram os pitagóricos que as desenvolveram (BOYER, 1974). No entanto, elas nos ajudam a compreender o nível de desestruturação provocado às bases teóricas dos pitagóricos.

Segundo Caraça (1958), essa perturbação foi profunda à escola pitagórica, pois lhe atingia não somente na refutabilidade de seus argumentos lógicos, no que se refere à certeza da mensuração de qualquer objeto via números inteiros, mas também em ordem filosófica, no que compete o questionamento da existência das mônadas. Ao concordar com isso, Eves (2004) retrata que

[a incomensurabilidade,] pois não só parecia perturbar a suposição básica da escola [pitagórica], de que tudo dependia dos números inteiros, como também porque a definição de proporção, assumindo como comensurável duas grandezas quaisquer similares, fazia que todas as proposições da teoria pitagórica das proporções se limitassem a grandezas comensuráveis (EVES, 2004, p. 107).

Assim, a incomensurabilidade aqui é entendida como resultado de um processo de produção do conhecimento sobre situações práticas vividas na época.

³⁷ Ver Caraça (1958, p. 73), Boyer, (1974, p. 54), Brolezzi (1996, p. 18), Cobiانchi (2001, p. 84) e Eves (2004, p. 105).

Dessa forma, o elemento tensionador vislumbrado no Extrato 2 faz referência a esse momento de crise vivido pelos pitagóricos com a evidenciação da incomensurabilidade e a necessidade de superar a inconsistência em suas bases lógico-argumentativas.

Além das questões de ordem lógica e filosófica, Brolezzi (1996) também chama a atenção para o aspecto revelador sobre a relação entre os números e a atividade humana manifestada nesse movimento, especificamente no que compete às ações de contar e o medir.

A crise dos incomensuráveis marca assim o início claro de uma visão dicotômica entre a contagem e a medida, entre o discreto e o contínuo. E mostra claramente que a ideia de número é composta tanto de referências à contagem quanto de referências à medida (BROLEZZI, 1996).

As aspirações sobre a formulação de um pensamento abstrato, como a própria ideia de enumerabilidade dos pitagóricos, estavam diretamente relacionadas às necessidades de contagem (quantificação) e medições. E é nesse contexto que se inicia a formação da consciência sobre a distinção entre o discreto e o contínuo. Para esclarecer a relação entre estes conceitos, Brolezzi (1996) discorre que

existem, como sabemos, certas grandezas chamadas *contáveis*, que são objeto de contagem, como o número de livros em uma prateleira. Outro tipo de grandezas é formado por aquelas quantidades que são passíveis de *medida*, como a largura desta folha de papel em que escrevo, ou o peso de uma caneta. O primeiro tipo de grandezas é chamado *discreto*. Grandezas discretas são as que se prestam a contagem. Já o segundo tipo é chamado *contínuo*, e se refere às medidas (BROLEZZI, 1996, p. 1).

Nesse contexto, não compete aos gregos desta época a distinção entre discreto e contínuo. Essa relação só se efetivará séculos depois com o desenvolvimento de um aparato mais complexo que envolve relações de divisibilidade e a compreensão do movimento. No entanto,

depois da confrontação entre comensurável/incomensurável, surgiu com força a indagação a respeito de outras formas de realidade dual, também importantes para a formação do pensamento grego: a contraposição divisível/indivisível, presente nas discussões acerca da natureza e possibilidade do movimento, e as noções de espaço/tempo (BROLEZZI, 1996, p. 20).

Ao tratar dessas formas de realidade dual, Brolezzi (1996) faz referência ao problemas envolvendo a noção de divisibilidade, ou melhor, do questionamento da existência dos indivisíveis. Nesse sentido, também envolta de uma imprecisão histórica, a primeira manifestação sobre os indivisíveis é atribuída a Demócrito de Abdera (460–370 a.C.). Segundo Rybnikov (1987) “Demócrito considerava que todos os corpos estavam constituídos

de pequenos átomos, as magnitudes primárias. Os corpos se diferenciam entre si pela forma, posição e método de união dos átomos que os compõe” (RÍBNIKOV, 1987, p. 74, tradução nossa).

Na teoria de Demócrito, a ideia de que a realidade é constituída a partir de dois aspectos elementares: o átomo e o vazio. Tudo passa a ser explicado, então, na relação de composição entre eles. Os átomos, assim, se configuravam em estruturas indivisíveis e muito pequenas. E assim como na escola pitagórica, todo fenômeno era constituído de estruturas infinitamente pequenas e indivisíveis (COBIANCHI, 2001).

Concordamos com Brolezzi (1996) que

a importância de Demócrito para nosso assunto está no fato de ter sido, aparentemente, o primeiro a falar de infinitesimais, e a considerar a possibilidade de trabalhar com o infinitamente pequeno a fim de recompor o todo, como no caso de utilizar lâminas circulares infinitamente finas para calcular o volume de cilindros e cones (BROLEZZI, 1996, p. 22).

Não é certo que exista relação entre as mônadas dos pitagóricos e a teoria atomística de Demócrito, ou que a segunda tenha sido baseada na primeira. Mas ambas nos ajudam a entender o modo como a atividade matemática estava sendo desenvolvida nessa época. Acompanhado por uma ideia de enumerabilidade, ordenação, indivisíveis e intuitivamente de infinitesimais, esse tipo de pensamento contribuiu por muito tempo de maneira satisfatória para descrição e explicação dos fenômenos da vida humana (BOYER, 1974). O questionamento sobre sua capacidade lógica viria anos depois pela escola filosófica surgida em Elea, na Grécia Antiga. O Extrato 3 a seguir se constitui a partir desse contexto.

Extrato 3: A crise sobre os indivisíveis	
Descrição	Elemento Tensionador
A teoria dos infinitesimais de Demócrito e seus seguidores foi combatida duramente por outra escola filosófica, nascida em Eléa (Magna Grécia), pelo influxo das ideias de Parmênides. A doutrina eleática chamava a atenção para os paradoxos e contradições existentes na concepção do mundo físico como composto por partículas infinitamente pequenas e indivisíveis. Propunha, em substituição, considerar a imutabilidade e unidade essencial do mundo físico (BROLEZZI, 1996, p. 22)	A crítica aos fundamentos da teoria atomística, sobretudo no que compete à existência dos infinitésimos e do movimento.

As ideias filosóficas da teoria atomística foram assoladas por duras críticas pela escola eleática, sobretudo com referência às figuras de Parmênides (aproximadamente 530-460 a.C.) e seu discípulo Zenão (aproximadamente 495-425 a.C.). Baseados numa corrente filosófica que pressupunha os seres como unidade indivisível e estática, os eleáticos combateram as

ideias atomísticas sobre a existência da multiplicidade e, sobretudo, do movimento. Essas críticas se pautavam na perspectiva de que

a ideia de [existência dos] infinitésimos é totalmente absurda, pois se possuem algum comprimento, então uma quantidade infinita deles irá compor uma reta de comprimento infinito; e se não têm nenhum comprimento, então uma quantidade infinita deles tampouco terá comprimento algum. Além disso, dirá também: aquilo que acrescentado a outro não o faz maior, e subtraído de outro não o faz menor, é simplesmente nada (BROLEZZI, 1996, p. 22).

Essa postura filosófica estava inserida numa corrente de pensamento que se baseava no princípio que todo conhecimento se constituía como resultado de um método racional, abastado dos sentidos sensoriais. Assim,

os membros da escola eleática foram os primeiros de uma longa tradição racionalista que, desde Platão até os nossos dias (passando por Descartes, Kant e Hegel), não só negaria status de conhecimento (ou, no mínimo, segurança irrestrita) aos dados brutos obtidos por via sensorial, como também sustentaria a tese de que *conhecer* consiste em revelar as estruturas profundas que se encontram veladas pelas aparências fenomênicas. Essa tese é bastante moderna, e integra o que se conhece hoje como *realismo científico* (POLITO; SILVA FILHO, 2013, p. 345).

A forma como os eleatas expunham seus questionamentos marcou profundamente a história do pensamento matemático, especialmente no que compete aos paradoxos de Zenão sobre o movimento. Os mais famosos são os paradoxos da Dicotomia, de Aquiles, da Flecha e do Estádio (BOYER, 1974).

Esses paradoxos³⁸ tinham como foco o questionamento sobre as teorias atomísticas que, assim como Demócrito e os pitagóricos, pressupunham que espaço e tempo eram constituídos por estruturas infinitamente pequenas e indivisíveis, como ponto e instantes respectivamente. Segundo Brolezzi (1996), mesmo distante de sugerir alguma intuição sobre o conceito de Continuidade, Zenão revelou que “espaço e tempo possuem a propriedade da Continuidade, e esses paradoxos deixam a descoberto as dificuldades de se imaginar ou intuir os fenômenos associados à Continuidade” (BROLEZZI, 1996, p. 22).

A *Dicotomia* e o *Aquiles* argumentam que o movimento é impossível sob a hipótese de subdivisibilidade indefinida do espaço e tempo; a *Flecha* e o *Estádio*, de outro lado, argumentam que também é impossível, sob a hipótese contrária – de que a subdivisibilidade do tempo e espaço termina em indivisíveis (BOYER, 1974, p. 55).

³⁸ Para mais informações ver Boyer (1974, p. 55), Rybnikov (1987, p. 75), Brolezzi (1996, p. 23) e Cobiانchi (2001, p. 96).

Os paradoxos revelam não só a incapacidade de argumentação lógica das teorias atomísticas em explicar o movimento a partir de uma noção intuitiva sobre os infinitésimos, mas também as intenções de Zenão em argumentar que toda mudança é ilusória.

É sobre esse contexto que Polito e Silva Filho (2013) afirmam que os paradoxos “expressavam a deficiência da matemática grega para lidar com o problema do contínuo e do infinito. Tais deficiências só seriam definitivamente sanadas com o advento do cálculo infinitesimal” (POLITO; SILVA FILHO, 2013, p. 345).

De acordo com Eves (2004),

Já se deram muitas explicações para os paradoxos de Zenão. Por outro lado, não é difícil mostrar que eles desafiam as seguintes crenças da intuição comum: de que a soma de um número infinito de quantidades positivas é infinitamente grande, mesmo que cada uma delas seja extremamente pequena ($\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \infty$) e de que a soma de um número finito ou infinito de quantidade de dimensão zero é zero ($n \times 0 = 0$ e $\infty \times 0 = 0$). Qualquer que tenha sido a motivação dos paradoxos, o fato é que eles excluam os infinitésimos da geometria demonstrativa grega (EVES, 2004, p. 418).

Assim sendo, a crise provocada pelos paradoxos de Zenão revelam características importantes sobre a construção do pensamento matemático na Grécia Antiga. A busca por respostas a estes imbróglis atravessou séculos e só conseguiu encontrar uma base sustentável com a futura definição de relações entre Discreto e Contínuo (BROLEZZI, 1996) e Infinito Potencial e Atual³⁹ (COBIANCHI, 2001).

No entanto, após a difusão das ideias propostas pelos elatas, o que se viu foi a incapacidade dos gregos em lidarem com os problemas que envolviam concepções de infinito, sobretudo dos infinitésimos. Brolezzi (1996) descreve que esse período foi marcado pelo “Horror ao Infinito” (BROLEZZI, 1996, p. 23). Isso remete ao posicionamento dos filósofos gregos que, frente a essa incapacidade, optam por uma espécie de fuga ao tratamento lógico do Infinito.

O Extrato 4 a seguir é estabelecido com referência à saída adotada pelos filósofos/matemáticos gregos para lidarem com esse contexto.

³⁹ Deixaremos para nos aprofundar sobre tais conceitos no próximo capítulo.

Extrato 4: A saída pela criação do método de exaustão	
Descrição	Elemento Tensionador
Nessa Matemática grega, o conceito de curva estava limitado à reta, circunferências e cônicas. Nela aconteceu a fuga de tudo que estivesse relacionado com concepções quantitativas e dinâmicas; particularmente do conceito de infinito, não porque se banisse da filosofia esse conceito, mas porque se renunciou abordar um estudo quantitativo do infinito, e se passou a eliminá-lo sistematicamente dos raciocínios matemáticos. E da Matemática grega veio um método de raciocínio, o “método de exaustão” (COBIANCHI, 2001, p. 88).	A saída proposta pelos gregos para a incapacidade de lidar com as questões dos incomensuráveis e infinitésimos: a criação do método de exaustão.

A busca por respostas aos obstáculos levantados pelos eleáticos se configurou na elaboração teórica de formulação do pensamento sobre a razão/proporção e a relação entre figuras curvas e retilíneas (BOYER, 1974). Sobre esse contexto, ressaltam-se os feitos de Eudoxo de Cnido (390-330 a.C.).

Advindo da escola platônica, Eudoxo compartilhava das ideias sobre a transcendência da realidade e a busca de uma essência sobre os fenômenos da natureza. Essa essência não se alcançava com base nos sentidos, mas a partir do pensamento racional. Assim, a contribuição de Eudoxo para o desenvolvimento do pensamento matemático grego se baseia na retomada dos princípios de ordenação do mundo, advindos da escola pitagórica, mas com um tratamento qualitativo dos fenômenos, em que o número passa a dar lugar à figura (forma) (COBIANCHI, 2001).

Eudoxo se inseria no movimento de separação (por vezes até substituição) da Aritmética e Geometria. Basicamente esse movimento se efetiva em estratégias de se evitar a “resolução de problemas aritméticos ou algébricos lidando diretamente com grandezas contínuas, isto é, realizando todas as operações sem necessidade de referência direta a números e suas representações” (BROLEZZI, 1996, p. 24).

Em exemplo disso está o problema relacionado à teoria da proporção de dois segmentos difundida pelos pitagóricos.

Quatro quantidades estão em proporção, $a : b = c : d$, se as duas razões $a : b$ e $c : d$ tem a mesma subtração mútua; isto é, se em cada razão, a quantidade menor cabe um igual número [inteiro] de vezes na maior e o resto em cada caso cabe um igual número inteiro de vezes na menor e o novo resto no precedente o mesmo número inteiro de vezes e assim por diante (BOYER, 1974, p. 66).

Como vimos, esta forma de se compreender a proporção, baseada em procedimentos sucessivos indefinidamente, foi duramente criticado pelos eleatas. Sua estruturação lógica já

não conseguia se sustentar, frente aos problemas relacionados à significação tanto dos incomensuráveis, quanto dos infinitésimos.

Assim, a saída proposta por Eudoxo para a questão da razão foi o estabelecimento de uma definição que contornasse tais problemas.

Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da terceira e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente⁴⁰ (BOYER, 1974, p. 66).

De maneira geral, a definição de razão proposta por Eudoxo evita os imbróglios já mencionados e permite que os gregos conduzam o enfrentamento de problemas que envolvem grandezas contínuas. Isso só pôde ser concretizado pelo tratamento geométrico dado às grandezas, evitando qualquer relação com o campo numérico.

Outro grande salto para o desenvolvimento matemático da época diz respeito à busca de solução para problemas que envolvem a relação entre curvas e segmentos de retas, seja para o cálculo da área, volume e/ou comprimento de arcos.

Segundo Eves (2004), uma das primeiras manifestações sobre tentativas de quadratura do círculo foi atribuída a Antífon, o Sofista (aproximadamente 470-420 a.C.). Segundo o autor, Antífon teria se antecipado sobre a ideia de que por “sucessivas duplicações de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre o círculo e o polígono ao fim exaurir-se-ia” (EVES, 2004, p. 418). A crítica ao método de Antífon se efetiva novamente na dificuldade em estabelecer uma definição sobre a noção de infinitas sucessões e subdivisões.

Contudo, imputa-se a Eudoxo o desenvolvimento do princípio lógico de superação desses problemas. Assim como fez no caso da razão, a estratégia adotada foi a de estabelecer a relação entre duas grandezas geométricas. A esse princípio se apregoa o termo método de exaustão. Sua definição pode ser compreendida em:

Se de uma grandeza qualquer subtrair-se um aparte não menor que sua metade, do restante subtrair-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie (EVES, 2004, p. 419)

⁴⁰ Considera-se “ $a/b = c/d$ se, e somente se, dados inteiros quaisquer m e n sempre que $ma < nb$, então $mc < nd$; ou se $ma = nb$, então $mc = nd$; ou se $ma > nb$, então $mc > nd$ ” (BOYER, 1974, p. 66).

Com essa definição, Eudoxo extrai qualquer menção aos infinitesimais e estabelece uma relação entre grandezas que permite alcançar uma grandeza de mesma espécie *tão pequena quanto se queira*. Aos dias de hoje, o método de exaustão demonstra uma complexidade significativa sobre conceitos próprios do Cálculo. Tal contribuição significou um momento de revolução para o pensamento matemático e estabeleceu o germe para a futura passagem ao limite e a elaboração do conceito de integral (RÍBNIKOV, 1987).

O método de exaustão foi um instrumento eficaz para o tratamento de problemas que envolviam o cálculo de áreas de figuras, volume de corpos, comprimento de curvas, busca do cálculo de tangentes de curvas, entre outros (RÍBNIKOV, 1987). Porém foi Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) com quem o método ganhou novas significações.

Diante das contribuições de Arquimedes para o desenvolvimento da matemática, a Quadratura da Parábola possui uma posição de destaque. Em síntese, Arquimedes fez uso do método de exaustão para demonstrar que a área de uma superfície parabólica é quatro terços da área do triângulo tendo a mesma base e mesma altura⁴¹. A riqueza e profundidade desta conclusão só podem ser percebidas baseadas num panorama histórico sobre o desenvolvimento lógico-histórico de outros conceitos, entre elas o de Integral.

Em seu método, Arquimedes considera que a superfície da parábola é constituída por retas. Segundo Brolezzi (1996),

não sabemos se considerava que haveria infinitos segmentos de retas compondo a área de uma figura. Parece que considerava-os como indivisíveis, pois chegava a muitos resultados pelo método da balança, usando o princípio do nivelamento como quem estivesse pesando mecanicamente uma coleção de lâminas finas ou de fitas de algum material pesado (BROLEZZI, 1996, p. 28).

Como mencionado, Arquimedes não foi o primeiro a buscar promover o enquadramento de curvas. No entanto, foi o primeiro a conseguir estabelecer relações que sobreviveram às incoerências de origem lógica, apontadas pelos eleátas. Uma figura que se sobressaiu ao longo da história no que tange as contribuições ao universo da matemática. Por muitos, é considerado o maior matemático da Antiguidade (BROLEZZI, 1996).

Portanto, o modo de organização social na Grécia Antiga possibilitou o desenvolvimento da matemática elementar como resultado de uma atividade intelectual voltada para uma compreensão universal da realidade (CARAÇA, 1958). Ao longo de uma série de embates filosóficos, o contexto de produção do conhecimento ficou marcado por essa

⁴¹ Para mais informações ver Boyer (1974, p. 95), Rybnikov (1987, p. 76), Brolezzi (1996, p. 28).

cisão entre Aritmética e Geometria, com o abandono do estudo quantitativo (numérico) dos fenômenos e o refúgio nas percepções qualitativas (geométrico), além da exclusão de tudo o que envolvesse a dinamicidade das coisas (movimento), sobretudo das questões relativas ao infinito, via método de exaustão (CARAÇA, 1958).

Segundo Caraça (1958),

Estas características vão manter-se durante quase duas dezenas de séculos na Europa. O seu reinado só devia terminar quando uma sociedade nova, dominada por uma classe nova, portadora de interesses e problemas novos, impusesse à Filosofia e à Ciência um rumo diferente (CARAÇA, 1958, p. 197).

Assim, a superação desse modo de compreensão da realidade se efetiva frente ao surgimento de novas necessidades de ordem social e cultural. Nesse novo contexto, a produção do conhecimento é marcada pela ressignificação das teorias gregas e a construção de teorias sobre o Infinito e o Movimento.

4.2. Período de Desenvolvimento da Matemática Elementar

O período posterior ao desenvolvimento da matemática helenística é marcado por mudanças de ordem social, política e econômica, em consequência de uma série de invasões sobre o vasto território correspondente à Grécia Antiga, sobretudo advindas do Império Romano⁴², no qual uma nova organização política foi imposta. Durante esse período, a divisão do trabalho ainda manteve-se ligada à agricultura, comércio e com forte manutenção do trabalho escravo. Nesse processo, a estrutura social grega foi dando espaço para novas formas de organização, sobretudo com a difusão do cristianismo. Esse período (séc. V – XV) ficou conhecido como Idade Média e se caracteriza, entre outros aspectos, pelo poder da igreja católica sobre a Europa e uma organização social pautada no Feudalismo

O que antes servia de espaço privilegiado para a produção do conhecimento, agora enfrenta os obstáculos impostos por uma dominação intelectual advinda dos dogmas da religião. Durante esse período, segundo Eves (2004), com referência à produção do conhecimento, “o pensamento criativo cedeu lugar a compilações e comentários” (2004, p. 191). Alguns fatores contribuíram para esse cenário e estão ligados à devastação populacional provocada por epidemias e guerras.

No que tange ao desenvolvimento do conceito de Continuidade, o que se pode destacar foi a ampla difusão e aplicação dos trabalhos de Arquimedes e o desenvolvimento do

⁴² Período aproximadamente 31-476 d.C.

pensamento algébrico em civilizações árabes (BROLEZZI, 1996). Em função dos objetivos traçados para nossas análises, daremos foco para as descrições sobre as manifestações matemáticas no próximo período, o Renascimento⁴³.

O advento de uma nova fase para a produção da Continuidade foi resultado de mudanças sociais e políticas, impulsionadas pelo surgimento de necessidades ligadas ao modo de produção capitalista, dando início ao período do Renascimento. O Extrato 5 a seguir se efetiva a partir desse contexto.

Extrato 5: Necessidades advindas do modo de produção capitalista	
Descrição	Elemento Tensionador
Para uma nova ascensão da ciência matemática foi necessária uma nova ascensão das forças produtivas da sociedade humana. Na Europa e na região da bacia do Mediterrâneo, este novo princípio em ascensão apareceu somente muitos séculos depois, começando com a época do chamado Renascimento, época final do Feudalismo e começo do desenvolvimento do modo de produção capitalista. Ademais, uma das fontes mais importantes de novas ideias matemáticas foi a assimilação da herança clássica dos matemáticos da Grécia Antiga, Euclides, Arquimedes e outros (RÍBNIKOV, 1987, p. 106, tradução nossa).	Mudanças em âmbitos sociais, políticos e econômicos que provocaram o surgimento de novas necessidades e a busca por sua satisfação através da ressignificação das bases do pensamento advindo da escola grega clássica.

Esse período de transição do Feudalismo Europeu para o Renascimento ficou marcado pela intensificação de relações comerciais e o crescimento populacional nas cidades, impulsionados pela fuga do campo e pela busca de melhores condições de vida (EVES, 2004). Um dos grandes marcos dessa época foi a utilização de um sistema monetário em detrimento das antigas relações de escambo.

Tais fatores, aliados ao fim da escravidão e a exploração marítima de novas rotas comerciais, provocaram o surgimento de necessidades na produção do conhecimento matemático frente ao enfrentamento de novos problemas. Assim, o elemento tensionador destacado no Extrato 5 revela esse momento histórico no surgimento de novas necessidades e a ineficiência da matemática da escola grega clássica em lidar com tais problemas. Sobre isso, Ríbnikov (1987) discorre que

As ciências naturais, em geral, se desenvolveram em uma atmosfera de mudanças tempestuosas, relacionadas em sua base econômica com a decomposição que começava da sociedade feudal e o estabelecimento das relações burguesas capitalistas. As mudanças transcorriam na indústria, de onde surgiam as manufaturas com a divisão do trabalho característica para elas e a introdução de máquinas e aperfeiçoamentos técnicos. Em um desenvolvimento não visto anteriormente, começaram a obter as relações

⁴³ O período do Renascimento corresponde aproximadamente ao início do século XIV e final do século XVI.

comerciais e a navegação, acompanhadas pelos grandes descobrimentos geográficos. Na ordem política, as mudanças fundamentais consistiam que o poder e as influências da nobreza feudal foram quebrados em função da pressão do poder real e com o apoio dos cidadãos, e que se formaram grandes monarquias, em essências nacionais. Finalmente, o florescimento da cultura e da arte na Itália, França e outros países, a invenção da imprensa (em meados do século XV) determinou um nível totalmente novo de exigências intelectuais e das ocupações de um grupo cada vez mais extenso de indivíduos (RÍBNIKOV, 1987, p. 127, tradução nossa).

Em acordo com essa visão, Cobianchi (2001) ressalta que

O desenvolvimento dessa sociedade favoreceu o aparecimento de uma nova mentalidade, motivada pelas necessidades de um cotidiano que pouco a pouco vai se tornando mais complexo com novas exigências; mostrando a ineficiência do filósofo tradicional, embasado no platônico-aristotélico, para quem a verdade está no pensamento e nos seus quadros lógicos. Surgiu a necessidade de um filósofo novo para quem a verdade deveria primeiro ser descoberta na Natureza, pela observação experimental e somente mais tarde, elaborada no pensamento. E colocou-se uma questão, se a verdade deveria ser para a *razão* ou para a *experiência*; sendo que para atingir o conhecimento verdadeiro, *razão* e *experiência* opõem-se a princípio como dois caminhos contrários para atingir esse fim (COBIANCHI, 2001, p. 118).

Nesse contexto, o enfrentamento dos problemas que assolavam o início do desenvolvimento de uma sociedade capitalista exigiu o questionamento das bases filosóficas sobre o pensamento na época. Ao longo dos próximos séculos, o continente europeu viveria a “Era das Explorações” (EVES, 2004, p. 334) marcada por momentos de intensa comercialização, conquistas, anexação e colonização de outros territórios. Esse processo exigiu o desenvolvimento de um aparato tecnológico capaz de sustentar cada um desses momentos. O conhecimento, assim, esteve voltado para a realização de previsões climáticas, abastecimento das cidades, grandes deslocamentos de produção agrícola, localização em águas desconhecidas (astronomia), produção de armamentos, entre outros. Isso exigiu que o pensamento humano se afastasse cada vez mais dos limites impostos pela escola grega (princípio da razão) e se aproximasse de uma visão mais próxima da experiência (princípio da experimentação) (BOYER, 1974).

Importante destacar que essa incursão sobre a base racionalista grega é fruto de uma série de mudanças sociais e culturais vivenciados nesse período. Com a intensificação das relações entre diferentes regiões, foi inevitável também o intercâmbio cultural europeu com diversas civilizações, por meio das rotas comerciais estabelecidas com impérios árabes e a colonização de uma diversidade de outros povos. Esse processo de internacionalização possibilitou a criação de um ambiente favorável ao acesso a diferentes modos de se

compreender os fenômenos da realidade. Outro aspecto que também contribuiu para esse contexto foi a Reforma Protestante, a qual desafiou as limitações impostas pelo catolicismo e enfraqueceu o poder da igreja sobre a determinação da verdade (EVES, 2004).

Esse período de intensas mudanças culturais permitiu novamente certa abertura para a produção do conhecimento matemático.

Os problemas que surgiram devido à necessidade da navegação, que proporcionou grandes descobertas, levaram a uma investigação cada vez mais cuidadosa do movimento dos astros exigindo um estudo *quantitativo* mais rigoroso do movimento, que permitisse *medir* e *prever*. Assim, diante de uma exigência nova, estava uma insuficiência antiga que a bloqueava, sendo uma barreira que deveria ser derrubada, e que se convertia em uma evolução necessária (COBIANCHI, 2001, p. 118).

Dessa forma, Cobianchi (2001) nos ajuda a entender as mudanças intrínsecas realizadas na produção da matemática. Novos problemas e novas necessidades exigiram o desenvolvimento de estruturas que garantissem não só a possibilidade em *prever* e *medir*, mas também em compreender fenômenos ligados ao *movimento*. Como já abordado na seção anterior, estes são conceitos importantes que acompanharam a produção do conhecimento na Grécia Antiga.

E aqui reside um aspecto fundamental que impulsionará a produção matemática dessa época. A construção de uma base sobre os pensamentos da escola grega clássica, mas com certa liberdade (ou ousadia) de se absterem do rigor lógico tão profundo e necessário para os filósofos desta escola (EVES, 2004).

Assim, no desenvolvimento da Continuidade, uma das principais manifestações do pensamento está ligada à (re)significação do Infinito/Infinitésimos a partir dos trabalhos de Simon Stevin (1548-1620), Galileu Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647)⁴⁴. Esses trabalhos alimentam a compreensão de como a busca por solução de problemas da época, como a questão do centro de gravidade de figuras por Stevin, da vasta construção de instrumentos de medida por Galilei e da medida do volume dos barris de Kepler⁴⁵, exigiu a utilização do método de exaustão difundido por Arquimedes, mas com um novo tratamento dado às infinitudes, tão evitadas pelo pensamento grego. Em especial, o Extrato 6 se consolida a partir da produção de Cavalieri sobre a teoria dos indivisíveis.

⁴⁴ Com vistas ao cumprimento dos objetivos propostos a este capítulo, daremos destaque às contribuições de Cavalieri. Para mais informações ver Boyer (1974, p. 236).

⁴⁵ Para mais informações ver Boyer (1974), Rybnikov (1987), Rezende (2003) e Eves (2004).

Extrato 6: A produção do conhecimento sobre os infinitésimos	
Descrição	Elemento Tensionador
[O argumento de Cavalieri se baseava em] que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou “indivisíveis” e que um volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase-atômicos. Embora Cavalieri na época não pudesse tê-lo percebido, ele seguiu as pegadas realmente muito respeitáveis, pois esse é exatamente o tipo de raciocínio que Arquimedes usou em <i>O Método</i> , então perdido. Mas Cavalieri, ao contrário de Arquimedes, não hesitava perante as deficiências lógicas nas bases de tais processos (BOYER, 1974, p. 241).	A produção do conhecimento sobre os indivisíveis de Cavalieri frente à necessidade de lidar com a questão dos infinitésimos.

O método dos indivisíveis proposto por Cavalieri nos ajuda a melhor compreender o modo de produção do conhecimento em sua época. Esse método pode ser resumido a partir de dois princípios⁴⁶:

1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções de segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante (EVES, 2004, p. 426).

O conceito de indivisível, embora tenha sido classificado como “prolixo e pouco claro” (EVES, 2004, p. 425), demonstra uma postura epistêmica de referência à teoria atomística de Demócrito e ao método de exaustão de Arquimedes, mas também aliado ao descrédito dado ao rigor sobre as incoerências lógicas de se considerar estruturas infinitamente pequenas. Segundo Ríbnikov (1987),

o método dos indivisíveis foi pensado para a determinação das medidas das figuras planas e corpos. Tanto as figuras como os corpos se representavam como compostos de elementos, os quais tinham dimensão em uma unidade a menos. Assim, as figuras contam de segmentos de retas traçadas paralelamente a certa reta diretriz denominada reguladora. Estes seguimentos figurados eram infinitos. Estavam compreendidos entre duas tangentes que tinham o nome de pares. As tangentes eram paralelas à reguladora; como reguladora pode tomar-se uma delas (RÍBNIKOV, 1987, p. 177, tradução nossa).

Assim, desconsiderando as incongruências lógicas sobre a questão dos infinitésimos, Cavalieri estabeleceu uma relação geométrica entre dois elementos distintos, como figuras e sólidos, limitando-se à compreensão da razão entre os indivisíveis que os compõe

⁴⁶ Princípios de Cavalieri (EVES, 2004, p. 426).

(RÍBNIKOV, 1987). Esta relação se baseava numa correspondência um a um dos indivisíveis que constituem tais elementos (BOYER, 1974).

A essência da geometria dos indivisíveis de Cavalieri pode ser formulada assim: as figuras planas e os corpos se relacionam entre si com todos os seus indivisíveis tomados em conjunto; se os indivisíveis se encontram em uma mesma relação um com o outro, então a relação entre as áreas das figuras correspondentes (ou os volumes dos corpos) é igual a essa relação (RÍBNIKOV, 1987, p. 177).

Esse método proposto por Cavalieri trouxe significativo desenvolvimento da matemática para época, pois possibilitou que uma série de problemas até então não passíveis de solução, mediante o pensamento grego, fosse resolvida. Cavalieri fez parte de um movimento de produção do pensamento que não tinha como intenção o aprofundamento sobre as questões lógicas que sustentavam as teorias gregas, mas sim de se abster das fronteiras epistêmicas que impediam o desenvolvimento de novas ideias (COBIANCHI, 2001). Em síntese, tal método carrega o germe da futura elaboração da teoria sobre o conceito de Integral Definida.

Os indivisíveis de Cavalieri se inserem num movimento de abertura para a elaboração de teorias matemáticas que ousaram avançar aos limites impostos pela rigidez lógica estabelecida na Grécia Antiga. Isso revela o modo particular de efetivação da atividade matemática da época vinculada às exigências de uma realidade em transformação.

Importante destacar que, embora os indivisíveis tenham ganhado ampla notoriedade com Cavalieri, não foi ele o primeiro a abordá-los. Sobre isso, Cobianchi (2001) discorre que Galilei e Kepler “foram os primeiros a abandonar a estrutura de demonstração introduzida por Arquimedes em troca do uso dos indivisíveis. Galileu usou a noção de indivisíveis no desenvolvimento dos princípios da cinemática, no estudo do movimento” (COBIANCHI, 2001, p. 127) e destaca que “esses personagens, ao contrário dos antigos matemáticos gregos, não analisaram a estrutura do ‘continuum’, cada um deles somente inventou alguns cálculos baseados no atomismo e o usaram para resolver problemas” (*ibidem*).

Assim, o estabelecimento de uma base mais sólida sobre os infinitésimos também permitiu que problemas relacionados ao movimento fossem finalmente enfrentados. Para tratar dessa questão, o Extrato 7 a seguir se configura a partir da elaboração do pensamento matemático sobre o movimento.

Extrato 7: A compreensão matemática de movimento	
Descrição	Elemento Tensionador
A descoberta e a re-significação da física aristotélica nesse período irá provocar, sem dúvida, sensíveis mudanças na produção do conhecimento matemático. Foi o que aconteceu: para dar conta dos novos modelos e interpretações dos fenômenos físicos, a matemática precisará se despojar, de modo paulatino, de sua característica estática, finita e rigorosa herdada dos antigos. (REZENDE, 2003, p. 123).	O desenvolvimento do pensamento a partir do estabelecimento da relação entre a Geometria e a Álgebra, e construção de uma teoria de explicação do movimento.

Como dito anteriormente, por muito tempo a visão de estaticismo se consolidou como a principal forma de se compreender a realidade. Com base nos princípios advindos da escola eleática, pautados nas ideias de unicidade e invariabilidade do mundo, aliados ao conservadorismo da doutrina cristã, o que se viu foi o domínio da Geometria no enfrentamento dos problemas. Assim, o elemento tensionador do Extrato 7 se constitui a partir do momento de aproximação do pensamento geométrico e os métodos algébricos, que possibilitou um tratamento adequado para a dinamicidade dos fenômenos. Segundo Rezende (2003),

os conceitos de movimento não exerceram papel preponderante na estrutura formal da matemática grega. Apesar da frustrada tentativa de Platão e do caso isolado do método de tangentes de Arquimedes, o conceito de movimento e, conseqüentemente, o de variabilidade e funcionalidade, se desenvolveram, ainda que de modo incipiente, através da filosofia. E é na filosofia que ela permanecerá incubada até que se consiga o ingrediente fundamental para resgatá-la para o ambiente matemático. O ingrediente de que falamos depende diretamente de um processo de “libertação” do pensamento algébrico do contexto geométrico (REZENDE, 2003, p. 114).

Tal força revolucionária pode ser compreendida com mudanças no espírito científico, cuja égide esteve também voltada para a criação de leis gerais de explicação e previsão dos fenômenos da realidade. Isso se efetivou a partir da valorização de princípios algébricos nos trabalhos de François Viète (1540-1603) e, posteriormente, com René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1607-1665), John Wallis (1616-1703), entre outros. Em especial, daremos destaque para as contribuições de Descartes e Fermat na construção de uma geometria algébrica, ou melhor, do que conhecemos atualmente por Geometria Analítica.

As primeiras manifestações sobre o tratamento de estruturas variáveis são atribuídas aos geômetras gregos. Para eles, “uma variável correspondia ao comprimento de um segmento, o produto de duas variáveis à área de algum retângulo e o produto de três variáveis ao volume de algum paralelepípedo retângulo” (EVES, 2004, p. 384). Assim, havia certa limitação quanto à amplitude dos problemas que esse tipo de estratégia ajudava a enfrentar. O

salto para a superação desta limitação veio com mudanças na forma de considerar tais variáveis.

Nesse contexto, há o devido destaque para os trabalhos de Descartes. Impulsionado pelo espírito revolucionário da época, Descartes parte para a utilização de estruturas algébricas em conjunto com métodos já consagrados pela Geometria (EVES, 2004). Em exemplo, ao tratar das questões sobre a compreensão algébrica de área e volume, Descartes passa a considerar o produto de dois segmentos (ou mais) como um segmento também, ou seja, se considerarmos x como uma unidade de segmento, o produto xx (ou x^2) também será um segmento e não mais como a área do retângulo cuja base e altura são x . Isso permitiu que Descartes trabalhasse com certa flexibilidade, dando *liberdade* ao pensamento que não mais precisava de se voltar para a limitação figurativa dos instrumentos geométricos (BOYER, 1974). Em linhas gerais, a estratégia criada por Descartes se baseava em que

para resolver qualquer problema, é necessário inicialmente considerá-lo como se estivesse resolvido e designar tudo com letras, tanto os dados quanto as linhas pesquisadas. Depois, não fazendo nenhuma diferença entre os dados e as linhas pesquisadas, é necessário advertir a relação entre elas para obter duas expressões para uma mesma magnitude; isto conduz a uma equação, a qual serve para a resolução do problema, já que pode se igualar uma expressão à outra. Demonstra-se que todos os problemas geométricos, que se resolvem mediante régua e compasso, se reduzem à resolução de equações de grau não superior ao 2º. As regras gerais de sua geometria analítica, Descartes não as expõe detalhadamente em forma global, e sim às demonstra em resolução de problemas difíceis (RÍBNIKOV, 1987, p. 158).

Assim sendo, o método desenvolvido por Descartes possibilitou que houvesse o estudo algébrico de estruturas geométricas que descrevem o movimento de fenômenos, como no caso de deslocamento de objetos. Esse tipo de problema já havia despertado o interesse de Cavalieri, Galilei e Viète, mas foi com Descartes que projeta um método capaz de transpor as barreiras impostas ao desenvolvimento do pensamento.

Porém, ao mesmo tempo em que os trabalhos de Descartes apontavam para a criação da geometria algébrica, outro matemático que se destacou nessa mesma época foi Pierre de Fermat. Concomitantemente, Fermat se dedicou à construção de uma relação entre os conceitos geométricos e algébricos no enfrentamento de problemas sobre o movimento.

O devido destaque sobre os trabalhos de Fermat está na adoção de estratégias que fazem alusão aos infinitésimos, a partir da ideia do estudo da vizinhança de um determinado ponto de máximo ou mínimo, em problemas que envolvem otimização (EVES, 2004). Para exemplificar,

Para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$ ele notou de um modo muito engenhoso para achar pontos em que a função assume um máximo ou um mínimo. Ele comparou o valor de $f(x)$ num ponto com valor $f(x + E)$ num ponto vizinho. Em geral esses valores são bem diferentes, mas num alto ou num baixo da curva lisa a variação será quase imperceptível. Portanto para achar os pontos de máximo e de mínimo Fermat igualava $f(x)$ e $f(x + E)$, percebendo que os valores, embora não exatamente iguais, são quase iguais. Quanto menor o intervalo E entre os dois pontos mais perto chega a pseudo-equação de ser uma verdadeira equação; por isso Fermat, depois de dividir tudo por E fazia $E = 0$. Os resultados lhe davam as abscissas dos pontos de máximo e de mínimo do polinômio (BOYER, 1974, p. 255).

Em termos de notação da atualidade, o que Fermat propôs é uma interpretação algébrica embrionária da diferenciação e o método de se determinar pontos de máximo e mínimo através da equação $\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x+E)-f(x)}{E} = 0$. No entanto, o método de Fermat não esclarecia que a condição $f'(x) = 0$ é necessária, mas não suficiente, para a determinação de máximo ou mínimo e não era capaz de distinguir se o valor estabelecido era de máximo ou de mínimo (EVES, 2004). Sobre os infinitésimos, Rezende (2003) ressalta que

a primeira grande diferença, provocada pela introdução do simbolismo algébrico na geometria, ocorre no próprio conceito de infinitesimal. Enquanto quantidades infinitesimais estiveram associadas, ao longo da história, a linhas ou superfícies indivisíveis, ou mesmo números infinitamente pequenos, com Fermat, as quantidades infinitesimais passam a ser uma “constante indeterminada”, representada em geral pela letra “E”, e que assume um papel mais próximo do nosso conceito de variável (REZENDE, 2003, p. 166).

Outro aspecto atribuído a Descartes e Fermat foi a elaboração de métodos de representação gráfica através de coordenadas⁴⁷. Isso permitiu o tratamento de problemas que antes não puderam ser resolvidos mediante a utilização de instrumentos geométricos, como a régua e o compasso (EVES, 2004). Segundo Boyer (BOYER, 1974), tratado como o princípio fundamental da geometria analítica, para Fermat “sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha, reta ou curva” (BOYER, 1974, p. 253).

Portanto, a partir dos trabalhos de Fermat, é possível perceber que o conceito de indivisível e de quantidades infinitamente pequenas “retornam ao cenário matemático, tornando, pouco a pouco, os processos infinitos um instrumento normal da matemática da época: é a geometria euclidiana caminhando na direção da invenção do Cálculo” (REZENDE,

⁴⁷ A construção de um sistema de coordenadas para fins de representação gráfica já havia sido mencionado nos trabalhos de Apolônio de Tiana (aproximadamente 15-100) e Nicole Oresme (1323-1382). Mas no caso de Descartes e Fermat, as coordenadas não são frutos de situações relacionados à vida prática, mas como uma aplicação algébrica a problemas de caráter geométrico.

2003, p. 123). Além disso, ajuda-nos a compreender a estreita relação entre a noção de infinitésimos e de movimento no processo de produção da Continuidade.

Isso explica porquê o Cálculo, nos estágios iniciais do seu desenvolvimento, estava cercado com conceitos de geometria do movimento, e com explicações de indivisíveis e infinitamente pequenos; pois estas ideias eram sugeridas pela intuição e experiência ingênuas de continuidade (BOYER, 1949, p. 11).

Importante também dizer que durante o Renascimento, as primeiras exposições sobre a consideração do movimento podem ser atribuídas a Galilei e Kepler em seus trabalhos sobre a queda de corpos e a disposição dos planetas, respectivamente. No entanto, “a virada na inter-relação da álgebra e da geometria e a penetração mútua de seus métodos com ajuda do método de coordenadas representou na matemática um fenômeno revolucionário” (RYBNIKOV, 1987, p. 163, tradução nossa).

Portanto, o período de desenvolvimento de uma matemática elementar contemplou significativas mudanças na produção do conhecimento matemático. A elaboração da geometria analítica significará um grande propulsor para a criação do Cálculo, sobretudo de desenvolvimento do conceito de Continuidade, num período de desenvolvimento da matemática das variáveis.

4.3. Período de Desenvolvimento da Matemática das Variáveis

O desenvolvimento do pensamento matemático que se pautasse na consideração da variabilidade dos fenômenos pode também ser compreendido como o período de criação da análise infinitesimal. O elemento propulsor para a elaboração de teorias sobre o movimento foi o estabelecimento da relação entre os métodos integrais e diferenciais ao longo do século XVII.

Isso se deu em relação ao acúmulo de conhecimentos produzidos nos séculos anteriores que podem ser sintetizados na aproximação entre as teorias algébricas e os métodos geométricos; na consideração de estruturas intuitivas sobre variáveis; a criação de métodos de coordenadas; a assimilação de ideias infinitesimais; e a acumulação de métodos de resolução de problemas que envolvem quadraturas, curvaturas, otimização, cálculo de tangentes, entre outros (RÍBNIKOV, 1987).

O Extrato 7 a seguir foi elaborado com referência ao contexto de produção de necessidades para a construção da análise infinitesimal e do movimento.

Extrato 7: Os métodos infinitesimais na produção do pensamento	
Descrição	Elemento Tensionador
As causas que motivaram este processo [a criação da análise infinitesimal] foram em primeiro lugar as exigências da mecânica, a astronomia e a física. Estas ciências não somente projetavam à matemática as exigências da resolução de uma ou outra classe de problemas. Elas enriqueciam suas representações acerca das magnitudes contínuas e movimentos contínuos, acerca da essência e forma das dependências funcionais. Em uma estreita interação da matemática e as ciências próximas se elaboraram os métodos infinitesimais que são a base da matemática das variáveis (RYBNIKOV, 1987, p. 167, tradução nossa).	A elaboração de métodos infinitesimais sobre a produção do pensamento matemático e no enfrentamento de problemas que envolvem o movimento.

O que se pode perceber a partir do Extrato 7 é a exemplificação de necessidades impostas à produção do pensamento em pleno século XVII. Após o período renascentista, o que se viu foi a existência de uma efervescência na matemática com a elaboração de teorias que avançassem ao que, até então, havia sido acumulado, sobretudo no que diz respeito à consideração dos fenômenos em movimento. Com vistas à elaboração teorias gerais sobre os fenômenos, instaura-se assim um clima favorável ao tratamento de variáveis e magnitudes contínuas.

O modo como se desenvolveram os conhecimentos sobre tais fenômenos pode ser dividido a partir dos métodos aos quais se propuseram a analisar, os integrais e os diferenciáveis. Em síntese, esta divisão vai se consolidar como uma revolução na produção do pensamento matemático sobre os infinitesimais, com a futura criação do Cálculo.

Os métodos integrais dizem respeito ao agrupamento das soluções aos problemas que envolvem o cálculo de volumes, áreas, comprimento de curvas, centros de gravidades, entre outros. Assim como já discutido em seções anteriores, estes métodos têm suas raízes no método de exaustão de Eudoxo e Arquimedes, e ganha um robusto tratamento lógico com Kepler, Galilei, Cavalieri, entre outros (RÍBNIKOV, 1987). Já os métodos diferenciáveis se voltam para a busca de solução de problemas que envolvem a determinação de retas tangentes às curvas, de máximos e mínimos de funções e das condições de existência de múltiplas raízes de equações algébricas (COBIANCHI, 2001), que ganham impulso a partir dos trabalhos de Descartes e Fermat.

As raízes dos métodos integrais e diferenciáveis envolvem a busca por soluções a problemas diferentes. No entanto, o grande salto no desenvolvimento da análise infinitesimal foi o estabelecimento da relação de inversibilidade entre estes métodos. A construção desta relação é fruto de uma série de situações em que é recorrente ser atribuída à busca de soluções para problemas inversos às tangentes.

Os problemas inversos às tangentes surgiram como resultado das exigências da prática. Por exemplo, os navegantes, já na época dos grandes descobrimentos geográficos, prestaram atenção à curva do curso verdadeiro constante do navio, quer dizer a loxodromia. Esta é uma curva cujas tangentes interceptam os meridianos, traçados nos pontos de tangência, sob um ângulo constante. Diferentes problemas inversos sobre tangentes foram propostos também em óptica geométrica e em cinemática (RÍBNIKOV, 1987, p. 186, tradução nossa).

Em essência, o ponto de encontro entre esses métodos está na investigação sobre os infinitesimais na busca de compreender fenômenos da realidade (REZENDE, 2003). Seja no estabelecimento da quadratura de uma curva ou na definição da tangente de uma trajetória, o elemento pulsante presente em ambos é a forma como se estabelece o entendimento sobre os infinitésimos. Ora entendido como entidade contínua, ora definido como uma sucessão discreta, isso resultará em diferentes abordagens na criação do Cálculo. Em particular, na produção da teoria das fluxões de Isaac Newton (1643-1727) e do cálculo de diferenciáveis de Gottfried Leibniz (1646-1716).

O Extrato 8 a seguir foi construído com vistas à significação do contexto de criação do Cálculo e a relação entre diferencial e integral.

Extrato 8: A criação do Cálculo	
Descrição	Elemento Tensionador
<p>O desenvolvimento dos cálculos matemáticos carrega um caráter dialético expressado claramente. No domínio dos cálculos já existente transcorre o processo de acumulação de premissas, elementos e partes componentes do novo Cálculo. A continuação alcança o momento quando ocorre a virada no método. Surgem trabalhos matemáticos, nos quais os feitos acumulados em um domínio dado se reconsideram desde um novo ponto de vista único. O centro da atenção passa dos esforços por resolver problemas independentes ao próprio método ou grupo de métodos, os quais se formulam explicitamente, se aperfeiçoam e se aplicam. O campo de aplicação do Cálculo surgido de tal maneira, como regra, resulta mais amplo que o campo de origem. Os trabalhos de I. Newton e G. W. Leibniz sobre a análise infinitesimal refletem precisamente este ponto de virada na história da Análise Matemática (RYBNIKOV, 1987, p. 189, tradução nossa).</p>	<p>O aprofundamento da análise infinitesimal com a criação do Cálculo a partir dos trabalhos de Newton e Leibniz.</p>

O aprofundamento sobre a análise infinitesimal promoveu mudanças consideráveis sobre as formas de produção do conhecimento matemático. Assim como abordado no Extrato 8, o que antes se pautava no acúmulo de soluções para problemas práticos, agora os esforços passam a se concentrar na criação de leis gerais sobre os fenômenos e métodos. Isso permitiu um estudo acurado sobre a relação estabelecida entre integrais e diferenciáveis e que resultou na criação do Cálculo. Segundo Rezende (2003),

Há de se ressaltar o importante papel que tiveram as quantidades infinitesimais nesse empreendimento de construção do Cálculo Diferencial e Integral: os infinitésimos se constituíram, a partir de então, como a fonte de “inspiração” e o ponto de partida das investigações e produções de todos os matemáticos que se aventuravam pelo domínio do Cálculo. Assim, o Cálculo Diferencial e Integral, antes de tornar o que é hoje, precisou ser antes “Cálculo Infinitesimal” (REZENDE, 2003, p. 184).

Essas considerações sobre os infinitesimais revelam o momento importante vivido pelos matemáticos no século XVII. O destaque para as produções desse período se volta para os trabalhos de Newton e Leibniz. Em certa medida, durante esse período, Newton e Leibniz desenvolvem suas teorias no estabelecimento da inversibilidade entre os métodos integrais e diferenciáveis, que futuramente se configurará como o cerne do Cálculo. Porém, as formas pelas quais se alcançam tal resultado definem a diferença crucial nos modos de entendimento sobre os infinitésimos.

Newton tinha sua atividade científica voltada aos estudos sobre a física, a mecânica, a astronomia e a matemática. Com uma visão generalista sobre os fenômenos, passou grande parte de sua vida dedicada à criação de leis gerais de interpretação da realidade como a elaboração das leis fundamentais da mecânica clássica, da gravitação universal e de decomposição da luz (EVES, 2004). Tendo o movimento como cerne em suas teorias, considerou a velocidade como componente basilar em seu método das fluxões.

No método das fluxões se estudam as magnitudes variáveis, introduzidas como abstração das diferentes formas do movimento mecânico contínuo. Denominam-se fluentes. Todos os fluentes são variáveis dependentes e tem um argumento comum, o tempo. Mais precisamente, se trata da abstração matemática análoga ao tempo, certa magnitude independente imaginária abstrata que flui uniformemente e com a que se relacionam todos os fluentes (RYBNIKOV, 1987, p. 191, tradução nossa).

O método se baseia na ideia de movimento contínuo e, ao longo de suas obras, Newton foi descartando as menções sobre a existência de estruturas infinitesimais. Segundo Boyer (1949), Newton se negou a considerar o movimento constituído de quantidades infinitamente pequenas e, ao invés disso, propôs o entendimento de movimento a partir de elementos contínuos ou fluxões de quantidades.

A fluxão de Newton é uma velocidade finita, e não uma quantidade infinitamente pequena. Para Newton, as variáveis eram todas consideradas como quantidades fluentes. Newton constrói o Cálculo utilizando conceitos mecânicos, cinemáticos, para expressar as variáveis, o que seria, em linguagem de hoje, considerá-las em função do tempo (BROLEZZI, 1996, p. 30).

Newton constrói sua teoria percorrendo o caminho de consideração da cinemática que tem suas raízes em Platão e Arquimedes, e posteriormente nos trabalhos de Galileu, Cavalieri, John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1667) (REZENDE, 2003). De acordo com Eves (2004),

Newton considerou dois tipos de problemas. No primeiro, dada uma relação ligando alguns fluentes, pretende-se estabelecer uma relação envolvendo esses fluentes e seus fluxos, [...] isso é equivalente, como é claro, à diferenciação. No segundo, dada uma relação entre alguns fluentes e seus fluxos, pretende-se achar uma relação envolvendo somente os fluentes. Trata-se do problema inverso, que equivale a resolver uma equação diferencial (EVES, 2004, p. 439).

Assim, Newton consegue encontrar a relação de inversibilidade entre integrais e diferenciáveis a partir do enfrentamento destes problemas e com uso de seu método das fluxões. Além disso, seu método foi eficaz na

determinação de máximos e mínimos, tangentes às curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas; aplicou-o também a muitas quadraturas e retificações de curvas. Demonstrou habilidade extraordinária na integração de algumas equações diferenciais (EVES, 2004, p. 440).

Já em relação a Leibniz, o método de interpretação dos fenômenos se pautava no estaticismo dos fenômenos. Enquanto Newton forjou sua teoria evitando os infinitésimos, Leibniz desenvolveu seu estudo considerando a variabilidade constituída por uma sequência de valores infinitamente próximos (BOYER, 1974). Isso remete às teorias atomísticas precedentes com base nos trabalhos de Demócrito, depois em Kepler, Fermat, Blaise Pascal (1623-1662) e Christiaan Huygens (1629-1695)⁴⁸.

Em sua análise infinitesimal, Leibniz teceu sua teoria baseada no conceito de diferencial, ou melhor, em diferenças infinitamente pequenas. Para ele, a significação de variável envolve a consideração de valores infinitamente pequenos e próximos sendo percorridos em sequência. Nesse sentido, a diferencial de uma variável se consolida na diferença entre dois elementos consecutivos em uma sequência de valores infinitamente próximos (BROLEZZI, 1996).

Diferentemente de Newton, Leibniz se dedicou ao trabalho árduo de construção lógica de suas teorias. Tinha acentuado respeito ao rigor em seus argumentos e isso se constituiria

⁴⁸ Importante dizer que Galileu, Cavalieri e Barrow eram familiarizados com teorias tanto cinemáticas, quanto atomísticas. Além disso, Newton também teve influências dos trabalhos de Fermat, Pascal e Huygens (REZENDE, 2003).

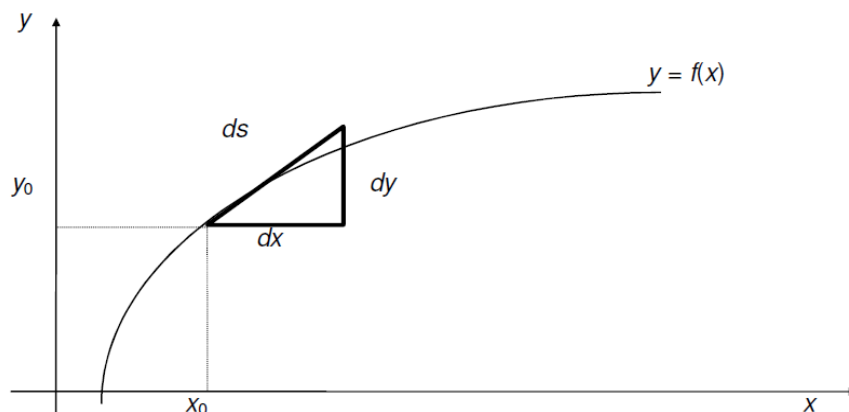
como uma das principais características de seus trabalhos. Em especial, Leibniz dedicou boa parte de sua obra na análise infinitesimal.

Os germes das novas matemáticas se conservam na velha. Esta última é necessário estudá-la, selecionar e propor problemas, os quais se relacionam com a elaboração de processos infinitos e com os que a álgebra pode operar, criar novos algoritmos. A estes algoritmos é necessário dar, sempre que possível, um simbolismo aperfeiçoado que reflete a essência dos conceitos e operações. À eleição do simbolismo, Leibniz dava uma enorme importância. Ele indicava que era necessário eleger designações cômodas para os descobrimentos, ou seja, é necessário que as denominações brevemente expressem a essência das coisas. Então se simplifica o trabalho da mente. O significado operativo dos novos algoritmos cresce se eles são mecanizados. Tais eram, em fundamento, as diretrizes iniciais de Leibniz. Elas determinaram a direção e o caráter de suas atividades matemáticas, as quais conduzem ao descobrimento do Cálculo Diferencial e Integral (RYBNIKOV, 1987, p. 199, tradução nossa).

Essa necessidade de se ater ao simbolismo formal e lógico permitiu que Leibniz se impulsionasse à consideração dos infinitésimos no cerne de sua teoria. Além disso, pôde operá-los a partir do conceito de diferencial no enfrentamento de problemas que envolviam traçados de tangentes às curvas.

Em termos gerais e utilizando uma linguagem atual, podemos exemplificar o método de Leibniz na obtenção da tangente à curva em um dado ponto (x_0, y_0) (Figura 03). Em cada ponto (x, y) da curva obtém-se o triângulo dx , dy e ds , em que se estabelece dx como a diferencial dos valores na abscissa, dy a diferencial das ordenadas e ds a diferencial do arco s . Prolongando-se o segmento ds infinitamente pequeno, obtém-se a reta tangente à curva em (x_0, y_0) .

Figura 8 - Triângulo Característico de Leibniz no Cálculo de Tangentes à Curva



Fonte: (BROLEZZI, 1996, p. 32)

O exemplo da Figura 03 nos ajuda a entender o modo como Leibniz conduz seus pensamentos sobre o enfrentamento de problemas que exigem a determinação da reta tangente a uma determinada curva. Esse tipo de operação com os infinitésimos, melhor dizendo, com os diferenciais, permitiu que Leibniz expandisse seu método para a resolução de problemas de curvatura a partir da soma dos diferenciais. Dessa maneira, sem antes conhecer os trabalhos de Newton, “Leibniz, percebendo esta situação, enunciou a proposição de que a resolução de problemas inversos de tangentes, totalmente ou em sua maior parte, podem se reduzir a quadraturas” (RÍBNIKOV, 1987, p. 200).

Em alguma medida, Newton e Leibniz construíram as bases para criação do Cálculo, estabelecendo de maneira particular o tratamento da análise infinitesimal e a relação de inversibilidade entre integrais e diferenciáveis. Para além dessa realização que os une, também nos interessa o destaque para suas significativas diferenças. Enquanto Newton percorria a consideração de infinitésimos via contínuo, a importância dada ao rigor simbólico levou Leibniz a considera-los via discreto.

A visão discreta de Leibniz e a visão contínua de Newton foram ambas igualmente úteis para compor o cenário para o Cálculo que estava nascendo. As preocupações metafísicas de Newton e Leibniz levaram ambos a tentar esclarecer a natureza do "ser" das variáveis e dos fenômenos relacionados a elas. Essas explicações iniciais serviram para dar sustentação a esse período inicial do Cálculo, até que a matemática evoluísse mais para poder ultrapassar a visão dicotômica entre o discreto e o contínuo (BROLEZZI, 1996, p. 32).

Portanto, o período correspondente à criação da matemática das variáveis envolve a construção de métodos em se compreender a realidade e sua dinamicidade. Resguardadas as diferentes formas de condução do pensamento, o salto em relação às teorias precedentes se configura a partir do tratamento dos infinitesimais e significará um importante pilar para a futura elaboração dos conceitos de Função, Limite e Números Reais. Consequentemente, também se aprofundam as questões de desenvolvimento da Continuidade.

A próxima seção se efetiva no período que sucede o desenvolvimento da matemática das variáveis, com o surgimento de uma matemática mais próxima de como a conhecemos hoje.

4.4. Período de Surgimento da Matemática Moderna

Ao longo do século XVII houve a intensificação da atividade matemática na Europa, mediante as exigências de uma sociedade em transformação. Vimos que a busca pela

resolução de problemas práticos ligados à expansão econômica impulsionou a produção do conhecimento. Já nos séculos XVIII e XIX, essa transformação se transfigura na complexificação do modo de produção advinda do capitalismo industrial (RÍBNIKOV, 1987).

O capitalismo industrial estabeleceu mudanças nos âmbitos econômico, cultural, político e, sobretudo, científico. Nesta nova etapa, a divisão do trabalho se acirra e a consolidação de grandes centros urbanos exige cada vez mais da produção científica como eixo fundamental para o desenvolvimento social. Isso produziu também um progresso significativo da matemática com referência a problemas relacionados ao abastecimento e modernização das indústrias; construções civis e militares; navegações; entre outros.

Outro aspecto que também trouxe mudanças significativas no seio da ciência foi a criação de agremiações instrucionais subsidiadas pelo Estado, as Academias de Ciência. Esse movimento inaugurou de forma institucionalizada a divisão do trabalho, no qual passa a estabelecer a atividade científica (aliada ao ensino) como uma atividade vital para a preservação e desenvolvimento da sociedade (RÍBNIKOV, 1987). O resultado foi a criação de grandes centros de desenvolvimento científico na Europa, permitindo cada vez mais o intercâmbio intelectual sobre as produções, mediante investimentos estatais em pessoas que tem como atividade principal o desenvolvimento científico e seu ensino.

Esse clima de atividade científica que se instaura traz relevantes aspectos sobre a produção do pensamento matemático. Como vimos, no século XVII se pôde conduzir o pensamento para o acúmulo de métodos elaborados ao longo de séculos e o estabelecimento de relações fundamentais com a criação do Cálculo. Já nos séculos seguintes, a atividade matemática passa a se estabelecer cada vez mais com objetivos em si mesma, mediante a busca pela formalização rigorosa de seus conceitos em seu estabelecimento como um campo científico particular.

O Extrato 9 a seguir se efetiva sobre a descrição na produção de necessidades em mudanças na atividade matemática.

Extrato 9: Necessidade de mudanças na atividade matemática	
Descrição	Elemento Tensionador
O cálculo, apoiado pela Geometria Analítica, foi o maior instrumento matemático descoberto no século XVII. Ele se mostrou notavelmente poderoso e eficiente para atacar problemas inexpugnáveis em tempos anteriores. Foi sua ampla e surpreendente aplicabilidade que atraiu o grosso dos matemáticos da época, resultando daí uma profusão de artigos pouco preocupados com o estado bastante insatisfatório dos fundamentos do assunto. Os processos empregados eram frequentemente justificados com o argumento de que eles	A formalização rigorosa dos conceitos frente à superação do domínio da aplicabilidade e intuição.

<p>funcionavam. E só perto do século XVIII, quando muitos absurdos e contradições tinham-se insinuado na matemática, sentiu-se que era essencial examinar as bases da análise para dar-lhes uma fundamentação lógica rigorosa. O cuidadoso esforço que se seguiu, visando a fundamentação, foi uma reação ao emprego descontrolado da intuição e do formalismo do século anterior. A tarefa se mostrou difícil, ocupando, em suas várias ramificações, a maior parte dos cem anos seguintes. Como consequência desse empreendimento, verificou-se um trabalho e igualmente cuidadoso com os fundamentos de todos os ramos da matemática, bem como o refinamento de muitos conceitos importantes (EVES, 2004, p. 462).</p>	
---	--

O Extrato 9 retrata a descrição de Eves (2004) sobre o modo como o pensamento matemático se desenvolve ao longo do século XVII e começa a ganhar novos rumos durante o século XVIII. A revolução advinda da recém-criada análise infinitesimal e sua aplicabilidade em diversas situações ocasionou também sua difusão por toda Europa e países do Ocidente. Ao passo que expandem os problemas abarcados em seu método, também se impregna certa negligência com os fundamentos lógicos. Sobre isso, Ríbnikov (1987) discorre que

através de um trabalho enérgico em diferentes ramos das ciências exatas, cresceu rapidamente o número de problemas solucionáveis pelo método, até então novo, da análise infinitesimal. Reafirmou-se a convicção de que as equações diferenciais refletiam, se não todas, ao menos as mais importantes, as leis da natureza. A resolução de equações diferenciais se considerava por muitos científicos como um método universal do conhecimento. Sem dúvida, este potente arsenal de métodos levava em seus fundamentos uma contradição não resolvida entre os crescentes êxitos práticos e a inconsequência lógica, a não fundamentação dos procedimentos e operações com as magnitudes infinitesimais e particularmente na não fundamentação de sua eliminação (RÍBNIKOV, 1987, p. 209, tradução nossa).

Esse acirramento entre a aplicabilidade e a fundamentação lógica significará em motivação para divisões significativas no tratamento da matemática. Por um lado, estão aqueles que se dedicaram na ampliação dos problemas que podem ser atacados pelo método, entre eles a construção de uma série de equações diferenciais cabíveis de serem solucionadas, como aponta Ríbnikov (1987). Por outro lado, estão os matemáticos que implicaram seus esforços na formalização lógica de conceitos basilares que começa pelo Cálculo, mas alcança também a Geometria, Aritmética e Álgebra. Esse segundo movimento ganha certa notoriedade em nossos estudos, pois é através dele que se desencadeará a revisão do conceito de infinitesimal e a formalização da Continuidade.

Dentre os matemáticos que se dedicaram a esse movimento, é preciso destacar os trabalhos de Leonhard Euler (1707-1783) como os principais tratados sobre a formalização da análise infinitesimal. Segundo Rezende (2003), “a maioria dos seus predecessores considerou

o cálculo diferencial tendo ligação estrita com a geometria, mas Euler fez do tema uma teoria formal de funções que não precisava recorrer a diagramas ou a concepções geométricas” (REZENDE, 2003, p. 227).

Euler se dedicou à formalização de uma série de conceitos em diferentes campos da matemática e também se destacou pelo cuidado rigoroso no emprego de uma linguagem simbólica consistente para notações, por vezes utilizada inclusive nos dias atuais, como o uso de $f(x)$ para funções, Σ para somatório, i para a unidade imaginária $\sqrt{-1}$, entre outros (EVES, 2004). Além do emprego de notações, importa-nos que Euler construiu novo significado para as funções.

Muitos de seus antecessores consideraram o cálculo diferencial vinculado à geometria, mas Euler o transformou em uma teoria formal de funções que não precisava se voltar para diagramas ou concepções geométricas. Leibniz fez menção ao uso da função simbólica⁴⁹ em nosso sentido, e se gabou de que seu método infinitesimal não se limitava às funções algébricas, como era o de Descartes, mas também era aplicável aos logaritmos e exponenciais. No entanto, Euler foi o primeiro matemático a dar destaque ao conceito de função e a fazer um estudo e classificação sistemáticos de todas as funções elementares, juntamente com seus diferenciais e integrais (BOYER, 1949, p. 243, tradução nossa).

Inserido no contexto de valorização dos processos de formalização, Euler se volta para os métodos de diferenciais e das fluxões e passa a considera-los como métodos gerais do pensamento. Em seus trabalhos, a Função passa a se firmar como o conceito central da Análise. Segundo Boyer (1974) a Função “fora prenunciada pela latitude das formas medieval, e estava implícita na geometria analítica de Fermat e Descartes, bem como no Cálculo de Newton e Leibniz” (BOYER, 1974, p. 327). No entanto, o autor também ressalta que o conceito de Função

significava para Euler não tanto uma quantidade concebida como dependente de variáveis, e sim como uma expressão analítica formada por constantes e variáveis que poderiam ser representadas por símbolos simples. A funcionalidade era uma questão de representação formal, em vez do reconhecimento conceitual de um relacionamento. O desenvolvimento quase automático do cálculo durante o século XVIII foi em grande parte o resultado dessa visão formalista, à qual a notação de Leibniz foi tão notavelmente bem adaptada (BOYER, 1949, p. 243, tradução nossa).

De qualquer forma, dos trabalhos de Euler resulta que a principal dificuldade no desenvolvimento da análise infinitesimal era a necessidade de se estabelecer uma ideia sobre a

⁴⁹ O termo original “word function” traduzimos para função simbólico com relação ao emprego de um simbolismo algébrico ao conceito de função.

relação de correspondência entre as variáveis. Conforme afirma Ríbnikov (1987) “Euler escreveu que toda a análise infinitesimal gira em torno das magnitudes variáveis e suas funções” (RÍBNIKOV, 1987, p. 219).

Os trabalhos de Euler introduziram uma abertura fundamental para o desenvolvimento do Cálculo e da Análise, mas estavam limitados ao estudo de um número particular de funções bem comportadas, ou seja, aquelas que apresentam as mesmas propriedades de expressões analíticas (COBIANCHI, 2001; REZENDE, 2003). O avanço sobre esta questão se efetivará futuramente com a criação dos conceitos de Limite e Continuidade.

No que tange os infinitésimos, Euler estabeleceu que uma quantidade infinitamente pequena (ou evanescente) era simplesmente algo que, em sua essência, é nulo (BOYER, 1949). Apesar de se aproximar de uma ideia sobre o Limite (quantidade que tende a zero), para Euler não haveria certa aproximação, e sim a consideração absoluta do valor zero. Por exemplo, os diferenciais são em sua essência zero, o que garantiria sua aplicabilidade em problemas nos quais eram investidos. Essa visão de Euler sobre os infinitésimos foi fortemente criticada.

Contemporâneo de Euler, Jean Le Rond D’Alembert (1717-1783) teve mais aceitabilidade com suas obras sobre os infinitésimos. Baseado nos trabalhos de Newton, D’Alembert interpretou a expressão “primeira e última razão” de uma quantidade, atribuída a Newton, não literalmente, mas em termos de um limite (BOYER, 1949). Segundo Rezende (2003),

D’Alembert foi, na verdade, o primeiro matemático a dar uma definição para esta operação: ele chamou uma quantidade de limite da outra se a segunda pode aproximar-se da primeira indefinidamente, ou então, que a diferença entre elas é absolutamente indeterminável. [...] Ele afirmou, entretanto, que a quantidade variável nunca coincide, ou é igual, ao seu limite (REZENDE, 2003, p. 230).

Assim, para D’Alembert os infinitésimos não podem ser considerados como uma quantidade fixa em um estágio localizado entre algo substancialmente positivo e zero, ou seja, entre a existência e a inexistência. Para ele, se uma quantidade existe, ela simplesmente não deixa de existir em dado momento. O infinitamente pequeno é algo que deve ser compreendido em termos do Limite (BOYER, 1949).

Também se destacaram suas considerações sobre o infinito. Assim como a ideia sobre os infinitésimos, “D’Alembert afirmou que a noção de infinito é apenas uma abreviação conveniente para a interpretação em termos de limites e que o seu significado está associado tão somente à ideia de ‘indefinidamente grande’” (REZENDE, 2003, p. 231). No entanto, sua

ideia estava voltada mais para uma interpretação geométrica do que aritmética. D’Alembert relegava à filosofia a tarefa de supor a existência do Infinito Atual.

Ao longo do século XIX as contribuições de Euler e D’Almbert penetrarão de forma significativa no desenvolvimento do Cálculo e da Análise, sobretudo na construção de conceitos basilares como a Continuidade, em especial, na elaboração de teorias sobre Limite, Continuidade e Diferenciação. O Extrato 10 a seguir se constitui no contexto sobre Limites.

Extrato 10: Necessidades na elaboração de uma teoria sobre limites	
Descrição	Elemento Tensionador
[As] definições do conceito de limite e dos conceitos com ele relacionados podem servir somente para explicação, interpretação e finalmente justificação da validade dos resultados da análise infinitesimal. [...] Mas para a introdução na análise das considerações sobre o limite [...] teve que se superar grandes dificuldades relativas à: necessidade de determinar a existência dos limites; a ausência de um algoritmo do cálculo de limites; a ausência da expressão matemática dos limites que permitia operar com eles e o simbolismo correspondente (RYBNIKOV, 1987, p. 359, tradução nossa).	A formalização no tratamento dos infinitésimos/infinito por meio de uma teoria sobre Limites.

Durante o século XIX, assim como descrito nas contribuições de Euler e D’Alembert, o impasse sobre o tratamento dos infinitésimos ainda se efetivava como um problema de ordem lógica a ser enfrentado. No Extrato 10 pode se verificar que, apesar de haver definições sobre o conceito de Limite, estas ainda careciam de um tratamento formal. Dessa forma, o elemento tensionador presente neste extrato diz respeito às necessidades de avanço no desenvolvimento do pensamento matemático por meio da elaboração formal de Limite.

Algumas das principais obras que se intentaram em formalizar um tratamento lógico para o Limite são de autoria do matemático Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). A base da teoria desenvolvida por Cauchy está na compreensão dos infinitésimos. Enquanto muitos de seus predecessores enxergavam os infinitésimos como números fixos extremamente pequenos, Cauchy os definiu a partir do conceito de Variável Dependente, por meio da ideia de Limite (COBIANCHI, 2001). Sua definição para Limite se aproxima da proposta por D’Alembert e pode ser entendida como “quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixado por uma diferença dele tão pequena quanto se queira, este último é então chamado o limite de todos os outros” (BARON; BOS, 1985 *apud* REZENDE, 2003, p. 242).

Cauchy, ao invés de evitar trabalhar com a noção de infinitesimais, busca considerá-los a partir de uma base aritmética rigorosa. Em suas colocações, o infinitesimal não é um

número constante e nem possui um valor nulo (zero), mas uma variável cuja aproximação tende ao zero. Nesse sentido, os infinitésimos podem ser definidos como

[...] quando os valores numéricos sucessivos de uma variável diminuem indefinidamente de modo a tornarem-se menores que qualquer número dado, dizemos que a variável se torna "infinitamente pequena" ou uma quantidade infinitamente pequena. O limite de tal quantidade é zero (BARON; BOS, 1985 *apud* REZENDE, 2003, p. 242).

Dessa forma, enquanto os matemáticos de outrora se dedicaram no entendimento dos infinitésimos como uma entidade metafísica, o modo estabelecido por Cauchy para superar o problema milenar de estabelecimento formal deste conceito foi tratá-lo aritmeticamente a partir do conceito de Limite. Conforme Cobianchi (2001), o Limite se estabelecia como referência ao uso das desigualdades. Para exemplificar, Cobianchi (2001) apresenta a demonstração do teorema: *se, por um aumento de valores de x, a diferença $f(x + 1) - f(x)$ converge para certo limite k, a fração $\frac{f(x)}{x}$ converge ao mesmo tempo para o mesmo limite.*

Dado um valor ε , tão pequeno quanto se queira, k um valor finito, pode-se encontrar um número h tal que se $x \geq h$, então $k - \varepsilon < f(x + 1) - f(x) < k + \varepsilon$. Como cada uma das diferenças $f(h + i) - f(h + i - 1)$ para $i = 1, 2, \dots, n$ satisfaz a desigualdade, assim como suas médias aritméticas $\frac{f(h+n)-f(h)}{n}$. Disso resulta que $\frac{f(h+n)-f(h)}{n} = k + \alpha$ em que $-\varepsilon < \alpha < \varepsilon$ ou colocando $x = h + n$, então $\frac{f(x)-f(h)}{x-h} = k + \alpha$. Mas então, $f(x) = f(h) + (x - h)(k + \alpha)$ ou $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(h)}{x} + \left(1 - \frac{h}{x}\right)(k + \alpha)$. Como h é fixado, Cauchy conclui que como x se torna maior, $\frac{f(x)}{x}$ aproxima $k + \alpha$ em que $-\varepsilon < \alpha < \varepsilon$. Como é arbitrário, ε sustenta a conclusão do teorema (COBIANCHI, 2001, p. 159).

Nesse sentido, o salto para o desenvolvimento da análise infinitesimal se constitui a partir do tratamento dado às estruturas infinitesimais com base na teoria dos limites. Importante ressaltar que isso só foi possível em decorrência do anseio de se buscar a formalização dos conceitos fundamentais do Cálculo, tão marcado pela liberdade e intuição nos séculos anteriores, e da compreensão basilar de Variável.

Feito isso, um novo campo de investigação se abre para o desenvolvimento dos conhecimentos do Cálculo e da Análise, sobretudo com relação ao conceito de Continuidade. Uma vez determinada a teoria dos limites, Cauchy também estabelece uma estrutura formal para a definição de Continuidade das funções. De acordo com Rybnikov (1987), para Cauchy a Continuidade de uma Função é compreendida como “a existência da correspondência de um

incremento infinitesimal da função a um incremento infinitesimal do argumento” (RÍBNIKOV, 1987, p. 363, tradução nossa).

A função $f(x)$ será, entre dois valores fixados da variável x , uma função contínua destas variáveis se para cada valor de x entre estes limites, o valor numérico (absoluto) da diferença $f(x + \alpha) - f(x)$ decresce indefinidamente com α . Em outras palavras, a função $f(x)$ continuará contínua em relação a x , entre dois valores dados se, entre estes valores, um incremento infinitamente pequeno de uma variável sempre produz um incremento infinitamente pequeno da função dessa variável (COBIANCHI, 2001, p. 160).

Em face da conceituação sobre o Limite, Cauchy constrói sua visão sobre a Continuidade das funções baseada na ideia de significação dos infinitésimos e sua constituição via incrementos na relação entre Variável e Função. Isso permitiu o avanço no estudo do comportamento das funções, sobretudo no que diz respeito à diferenciabilidade. No entanto, Cobianchi (2001) chama a atenção para que

Apesar de todo esse avanço no conceito de função e na ideia de função contínua, ainda faltava a formalização do conjunto numérico, o conjunto dos números reais, essencial para o fornecimento dos conjuntos a serem trabalhados e aplicados por essas funções, direcionados às múltiplas aplicações desse importante conceito, no cotidiano de todas as sociedades (COBIANCHI, 2001, p. 161).

Quando se refere à formalização do conjunto numérico, Cobianchi (2001) faz alusão às dificuldades de ordem conceitual da teoria de Cauchy em lidar com expressões do tipo “aproximar indefinidamente, tão pequeno quanto se queira, última razão de incrementos infinitamente pequenos” (BOYER, 1974, p. 411). Isso porque Cauchy relacionava os limites (mesmo aqueles ligados às séries e sequências) aos números racionais e chegou até a considerar a existência dos irracionais. A grande questão que se resguarda neste contexto é a fragilidade imbuída em sua teoria sobre a garantia de existência do Limite, o que futuramente exigiria a formalização da Continuidade em termos de Conjunto Numérico.

Os êxitos de Cauchy com a definição de Limite como a base de sua teoria, incluindo suas fragilidades, efervesceram ainda mais a produção do conhecimento sobre o Cálculo e a Análise em pleno século XIX. Como efeito desse processo para a significação do desenvolvimento da Continuidade, outro matemático que se destacou foi Karl Weierstrass (1815-1897) ao propor sua teoria estática do conceito de Variável. Tendo como fator motivacional a aritmetização da análise, Weierstrass criticou os trabalhos de Cauchy que se referenciavam na noção de movimento contínuo das funções, cuja Variável se aproxima de

um determinado Limite. Em substituição, Weierstrass propôs a compreensão da Variável como uma expressão genérica (em forma de letra) que designa qualquer número de uma coleção de valores numéricos (BOYER, 1949).

Para Weierstrass, um conjunto contínuo pode ser definido como “se para qualquer valor x_0 do conjunto e para qualquer sequência de números positivos $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$, entretanto pequenos, existem nos intervalos $(x_0 - \delta_i, x_0 + \delta_i)$ outros [elementos] do conjunto, este [conjunto] é [então] chamado contínuo” (REZENDE, 2003, p. 251). Em síntese, a mudança estabelecida por Weierstrass elimina qualquer menção aos infinitesimais por meio de seu simbolismo.

Na teoria de limites de Weierstrass o conceito de limite não está associado a qualquer ideia de movimento contínuo, mas, ao contrário, é definido a partir de uma relação lógica entre duas desigualdades. O seu conceito de variável não representa uma passagem progressiva através de todos os valores de um intervalo, mas a suposição disjuntiva de qualquer um dos valores do intervalo. Portanto, não faz sentido perguntar na teoria de limites de Weierstrass “se uma variável alcança, ou não, o seu valor limite”, mesmo porque a questão que se coloca agora é “se o limite de uma função é, ou não, igual a L”. O conceito de limite de Weierstrass não envolve a ideia de aproximação, mas é tão somente um estado de coisas estáticas (REZENDE, 2003, p. 252).

Como dito, essa forma de lidar com o conceito de Limite se insere num movimento de formalização e aritmetização da Análise. As considerações de Weierstrass abriram as portas para a produção de novas necessidades sobre a construção dos conjuntos numéricos e, conseqüentemente, da Continuidade. Em particular, estas culminaram na realização dos trabalhos de Georg Cantor (1845-1918) e Richard Dedekind (1831-1916). Nesse sentido, o Extrato 11 a seguir se consolida na consideração das necessidades que levaram ao aprofundamento da Continuidade e na criação dos Números Reais.

Extrato 11: O aprofundamento na construção da Continuidade e a criação dos Números Reais	
Descrição	Elemento Tensionador
A fundamentação dos conceitos da Análise trouxe de volta, então, os problemas de Zenão com respeito aos conceitos de infinito e continuidade. Para muitos matemáticos esses dois conceitos eram - assim como a própria operação de limite foi um dia - conceitos metafísicos, e se encontravam além da definição matemática. Por tal razão, suas definições eram muito mais objeto da Filosofia do que da Matemática. Mais uma vez, os matemáticos estavam enganados... (REZENDE, 2003, p. 253).	A formalização do conceito de Continuidade e a criação dos Números Reais com Dedekind.

Durante a segunda metade do século XIX, inseridos num movimento de aritmetização da Análise, pode-se dizer que a grande motivação na elaboração de uma teoria sobre os conjuntos se consolidou na definição de uma coleção de agregados numéricos infinitos e contínuos que não se pautavam na ideia de Limite. Segundo Rezende (2003), “pode-se afirmar que a construção do conjunto dos Números Reais de modo independente da noção de limite foi, ao mesmo tempo, a substância e a fonte de inspiração desse empreendimento” (REZENDE, 2003, p. 254).

Dessa forma, assim como expressado no Extrato 11, o modo como se conduziram as estratégias de determinação da Continuidade se pautou na retomada de problemas lógicos percebidos ainda nos paradoxos de Zenão. Tais problemas revelam as dificuldades em lidar com as questões do infinito (e infinitésimos). Ao longo da história, é possível perceber várias menções sobre o tratamento da Continuidade, sobretudo com referência a percepções sensíveis da realidade. Segundo Caraça (1958),

O problema da continuidade é dos mais importantes da Ciência e dos que mais tem sido estudados e debatidos em todos os tempos. Todos nós temos uma noção intuitiva da continuidade como a de uma variação que se faz por gradações insensíveis. Quer seja o movimento de um automóvel sobre uma estrada, oposto ao movimento que teria sobre a estrada um canguru; quer seja a variação de comprimento de uma barra metálica com a temperatura, oposta à variação que se obteria cortando ou soldando bocados à barra, em qualquer fenômeno a respeito do qual falemos de continuidade, entendemos sempre variações por graus insensíveis (CARAÇA, 1958, p. 57).

Assim, somente inseridos num processo de afastamento destas percepções sensíveis que se possibilitou a construção de argumentos formais devidamente aceitos sobre a Continuidade. E esse processo teve como ponto de partida o reconhecimento da Continuidade presente na reta (geométrica) a partir dos trabalhos de Dedekind.

Em alguma medida, a saída proposta por Dedekind foi encontrar uma base sólida para se discutir continuidade e estabelecer uma relação de correspondência com os campos numéricos. Esta base era a reta e estava resguardada na Geometria (COBIANCHI, 2001). Segundo Dedekind (*apud* CARAÇA, 1958)

[...] nós atribuímos à reta a qualidade de ser completa, sem lacunas, ou seja, contínua. Mas esta continuidade, em que consiste? A resposta a esta pergunta deve compreender em si tudo, e somente ela permitirá desenvolver em bases científicas o estudo de todos os campos contínuos. Naturalmente, não se consegue nada quando, para explicar a continuidade, se fala, de um modo vago, de uma conexão ininterrupta nas suas partes mais pequenas; o que se procura é formular uma propriedade característica e precisa da continuidade que possa servir de base a deduções verdadeiras e próprias. [...]

[Assim] verificou-se que todo ponto da reta determina uma decomposição da mesma em duas partes, de tal natureza que todo ponto de uma delas está à esquerda de todo ponto da outra. Ora, eu vejo a essência da continuidade na inversão desta propriedade e, portanto, no princípio seguinte: se uma repartição de todos os pontos da reta em duas classes é de tal natureza que todo ponto de uma das classes está à esquerda de todos os pontos da outra, então existe um e um só ponto pelo qual é produzida esta repartição de todos os pontos em duas classes, ou esta decomposição da reta em duas partes. Como já disse, creio não errar admitindo que toda gente reconhecerá imediatamente a exatidão do princípio enunciado. [...] A propriedade da reta expressa por este princípio não é mais que um axioma, e é sob a forma deste axioma que pensamos a continuidade da reta, que reconhecemos à reta a sua continuidade (DEDEKIND apud CARAÇA, 1958, p. 59).

Ao assumir este princípio de continuidade da reta, Dedekind parte para a aplicação de procedimentos que visam a correspondência entre o conjunto dos números racionais e a reta. Sobre isso, Cobianchi (2001) ressalta que para a realização de tais procedimentos, carecia-se de uma definição acurada sobre as ideias de *infinidade*, *ordenação* e *densidade de conjuntos*. E acrescenta que

finalmente tentou estabelecer uma correspondência entre o conjunto dos números racionais R e os pontos de uma reta L , verificando a não correspondência biunívoca entre esses dois conjuntos, isto é, a existência de lacunas no conjunto dos números racionais (COBIANCHI, 2001, p. 175).

Sobre as ideias de estabelecimento da infinidade de um conjunto, Dedekind propõe a demonstração que a reta é constituída por infinitos pontos. Em síntese, seu argumento está respaldado no processo de divisões sucessivas de segmentos da reta (cortes), conduzindo o raciocínio para a determinação de infinitos pontos que compõe a reta e de infinitos pontos que compõe qualquer de seus segmentos. Segundo Caraça, o postulado da continuidade de Dedekind pode ser entendido como “todo corte da reta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte (A, B) existe sempre um ponto da reta que separa as duas classes (A) e (B) ” (CARAÇA, 1958, p. 60).

O processo de determinação da infinidade de um conjunto pode ser compreendido como: Considere dois pontos quaisquer A e B pertencentes à reta r e que determinam o segmento \overline{AB} . Por sucessivos cortes determinamos que o ponto A_1 divide o segmento \overline{AB} ao meio, o ponto A_2 divide o segmento $\overline{A_1B}$ ao meio, o ponto A_3 divide o segmento $\overline{A_2B}$ ao meio, continuamente. Assim, essa divisão se repete infinitamente e tem-se sobre o segmento \overline{AB} uma infinidade de pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$. Portanto, se \overline{AB} é infinito, então r também

o é⁵⁰ (COBIANCHI, 2001). Usando esse raciocínio e estabelecendo a correspondência com a reta, Dedekind chega à conclusão sobre a infinidade do conjunto dos racionais.

Já em relação à ideia de ordenação, Dedekind estabelece a partir de seus cortes, a existência de um elemento que divide o conjunto em classes que estão à esquerda e à direita deste elemento. Uma forma de interpretar pode ser compreendida como: Considere dois pontos quaisquer A e B pertencentes à reta r , diz-se que A precede B se estiver à sua esquerda. Pelo critério de transitividade, temos que se A precede B e B precede C , então A precede C . Logo o conjunto que satisfaz o critério de transitividade é chamado de conjunto ordenado. Ao estabelecer a relação com os racionais, Dedekind designa que dados dois racionais quaisquer r e s , tem-se que r precede s , se $r < s$. Diz-se que se s precede um terceiro racional t com $s < t$, então pelo critério de transitividade, r precede t com $r < s < t$. Portanto, o conjunto dos números racionais é ordenado (COBIANCHI, 2001).

No que se refere à densidade, Dedekind se baseia no argumento geométrico de que, supondo que o ponto de uma reta não tem dimensões, dados dois pontos quaisquer A e B pertencentes à reta r , existe sempre uma infinidade de pontos entre eles, por mais próximos que A e B estejam um do outro (CARAÇA, 1958). Assim, “todo conjunto em que entre dois dos seus elementos quaisquer exista uma infinidade de elementos do mesmo conjunto, chama-se conjunto denso” (COBIANCHI, 2001, p. 177). Para compreender a densidade do conjunto dos racionais, analogamente ao método de Dedekind, podemos proceder da seguinte forma: Considere r e s racionais quaisquer tal que $r < s$. Seja $t = s - r$, com t racional, já que a diferença entre dois racionais também é um racional. Considere agora o número $r_1 = r + t_1$, com $t_1 < t$. Logo, $r < r_1 < s$. Assim, ao realizar tal procedimento sucessivamente, obtêm-se uma infinidade de números racionais r_1 , tantos quanto forem os números $t_1 < t$. Como t é racional, temos que $t = \frac{m}{n}$ com m e n inteiros e n não nulo. Seja p um número natural, logo $\frac{m}{n+p} < \frac{m}{n}$. Como existem infinitos números naturais p , podemos dizer que existem também infinitos $t_1 < t$. Portanto, o conjunto dos números racionais é um conjunto denso (COBIANCHI, 2001).

O próximo passo para a significação da relação entre a reta e o conjunto dos números racionais se efetivou no estabelecimento da correspondência biunívoca entre os elementos deste conjunto e os pontos da reta. Para isso, Dedekind buscou a correspondência entre os racionais e os pontos da reta ($R \rightarrow L$). Podemos entendê-la a partir de: Considere o número

⁵⁰ Para mais informações, ver Cobianchi (2001, p. 175).

racional $r = \frac{m}{n}$, com m e n inteiros. Sobre a reta s , tomemos arbitrariamente os pontos O e A , com A à direita de O , e o segmento \overline{OA} como unidade. Divide-se \overline{OA} em n partes e toma-se, a partir de O , o ponto B na m -ésima parte. Logo, o número r corresponde ao segmento \overline{OB} . Como \overline{OB} é único, logo está estabelecida a correspondência unívoca ($R \rightarrow L$) (COBIANCHI, 2001).

Para a designação da relação inversa, ou seja, a correspondência da reta com os números racionais ($L \rightarrow R$), podemos entendê-la a partir das seguintes afirmações: Considere os pontos arbitrários O e A da reta, com A à direita de O , e o segmento \overline{OA} como unidade. Devemos encontrar o ponto B tal que a medida do segmento \overline{OB} em relação a \overline{OA} , corresponda ao número racional $r = \frac{m}{n}$ único, com m e n inteiros. Porém, se \overline{OB} é incomensurável em relação a \overline{OA} , então não existe o racional r que estabeleça a relação de correspondência $L \rightarrow R$. Portanto, não biunivocidade entre a reta e o conjunto dos números racionais (COBIANCHI, 2001).

Assim, Dedekind encontra argumentos lógicos para atestar sobre a existência de lacunas no conjunto dos números racionais, em face da não correspondência com uma infinidade de pontos da reta. Esse feito alcança um nível de revolução significativa na produção do pensamento matemático, pois apresenta de forma lógica o problema que assolava a humanidade desde a Grécia antiga sobre a existência (ou não) dos incomensuráveis.

Importante ressaltar que o conceito de densidade já havia sido considerado por Galileu e Leibniz. Para eles, a Continuidade de um conjunto estava em sua qualidade de denso, uma vez que estava garantida a existência de infinitos pontos entre dois qualquer do mesmo conjunto. No entanto, em seu método, Dedekind constrói argumentos que mostram que o conjunto de números racionais apesar de denso, possui lacunas de correspondência com a reta, ou seja, era descontínuo. Segundo Boyer (1974), “os números racionais tem essa propriedade [da densidade], no entanto não formam um *continuum*” (BOYER, 1974, p. 410).

Assim, a saída proposta por Dedekind à necessidade de estabelecimento da biunivocidade entre um conjunto numérico e a reta, ou seja, no estabelecimento rigoroso da continuidade, é a construção de um novo conjunto que satisfizesse tal relação. Esse novo conjunto é constituído a partir da extensão da estrutura dos racionais para a formação de um *continuum*, com a significação da existência de números irracionais. A esse *continuum* se designa como o conjunto dos Números Reais.

Expresso aritmeticamente, isso significa que para toda divisão dos números racionais em duas classes A e B tais que todo número da primeira classe, A , é menor que todo número da segunda classe, B , existe um e um só número real que produz esse Schnitt, ou corte de Dedekind. Se A tem um maior número, ou se B contém um menor número, o corte define um número racional; mas se A não tem maior elemento e B não tem um menor, então o corte define um número irracional (BOYER, 1974, p. 410).

Dessa forma, Dedekind estabelece uma forma de se conceber os números irracionais como uma estrutura gerada a partir da necessidade de se construir o *continuum* dos Números Reais. Além disso, possibilitou a formalização da Continuidade tanto para os conjuntos numéricos, quanto para a linearidade da reta geométrica. O resultado disso foi a libertação da aritmética para a formalização em sua terminologia do Limite, o avanço da Geometria Analítica na interpretação de fenômenos geométricos por meio da análise aritmética e a autonomia da análise infinitesimal sobre os conceitos geométricos intuitivos.

Portanto, a formalização do conceito de Continuidade por Dedekind esteve diretamente ligada à superação dos problemas de aritmetização da análise infinitesimal. Considerando que foi Cauchy quem esboçou as primeiras manifestações formalizadas deste conceito, certamente foi com Dedekind que a Continuidade alcançou seu aperfeiçoamento.

É nesse contexto de necessidade da formalização dos conceitos da análise infinitesimal, sobretudo com a elaboração rigorosa dos conceitos de Função, Limite e Números Reais, que se pôde construir uma definição sólida sobre o conceito de Continuidade. A sustentação deste conceito está nas ideias sobre o tratamento de estruturas do pensamento ligados à atividade matemática.

4.5. Alguns Apontamentos Sobre as Historiografias

Como discutido, o processo histórico de desenvolvimento do conceito de Continuidade está relacionado também ao desenvolvimento de uma série de conceitos fundamentais para a consolidação de como entendemos a matemática na atualidade, em especial os campos do Cálculo e da Análise. Esse processo envolve o debate sobre temas de complexidade significativa que assolaram a humanidade por séculos, como a existência e potencialidade de grandezas infinitamente grandes e pequenas. Isso porque somente no seio do simbolismo lógico da filosofia e da matemática que se torna possível a aceitação de ideias tão distantes de nossos sentidos.

A perspectiva de condução desta análise percorreu um vasto período histórico e a compreensão de aspectos históricos tão profundos sobre a produção do conhecimento se consolidou como um desafio. A estrutura da Análise Histórico-Epistemológica a partir dos

trabalhos de Radford (2011) permite que nos atentemos para características importantes no processo de produção do conhecimento, em particular, nos elementos que apontam para a efetivação da atividade matemática na busca por satisfação de necessidades particulares e inseridas numa rede de significação cultural.

Para tanto, a divisão em períodos baseada em Ríbnikov (1987) nos ajudou a compreender aspectos históricos importantes sobre a produção da Continuidade, aclarando semelhanças nas condições objetivas em cada momento histórico.

No período de desenvolvimento da matemática na Antiguidade foi possível perceber como a construção de teorias sobre a realidade esteve ligada à busca de solução de problemas da vida prática e às mudanças na organização social, com o surgimento de uma atividade intelectual voltada para filosofia, matemática, artes, etc. Em especial, nesse período é marcado pela adoção da enumerabilidade como tentativa de explicação da realidade com os Pitagóricos e pelas crises na compreensão dos incomensuráveis e dos infinitésimos.

O período seguinte, relativo ao desenvolvimento da matemática elementar, envolve mudanças significativas em âmbito social, cultural, econômico, político, etc. que compreende o contexto da Europa Medieval e Renascimento. Nesse momento, a atividade matemática voltou-se para a (re)significação dos conhecimentos acumulados ao longo dos séculos anteriores e o esforço em atender as demandas do nascimento de uma sociedade capitalista. Aqui aparecem necessidades ligadas a novos entendimentos sobre os infinitésimos e de novas interpretações do movimento, com o devido destaque para o germe de criação da Geometria Analítica com Fermat e Descartes.

Já no período de formação de uma matemática das variáveis, o que se percebe é o aprofundamento das questões sobre o movimento com o destaque para a criação do Cálculo Diferencial e Integral com Newton e Leibniz. Esse período tem como aspecto central a construção de uma teoria que relaciona os métodos integrais e diferenciáveis, que possuem em sua égide o início de desenvolvimento da análise infinitesimal. Estes feitos revolucionaram o universo da matemática e serviram de combustível para a construção de uma matemática moderna, ou melhor, mais próxima dos dias atuais.

O período de construção da matemática moderna se consolida a partir do acirramento das relações de uma sociedade capitalista com a revolução industrial. Nesse contexto, o que se percebe é o estabelecimento de uma complexa organização social e econômica que exige cada vez mais do progresso da ciência como elemento fundamental para o progresso capitalista. Assim, a atividade de produção matemática se modifica e passa a se estabelecer como fim em

si mesma, estabelecendo condições objetivas favoráveis para o desenvolvimento da análise infinitesimal. Neste período o esforço coletivo se volta para a formalização dos diversos campos da matemática, com o objetivo de superar os desvios (ou incongruências) causados pelo pensamento intuitivo das teorias anteriores. O resultado foi a construção formal de conceitos elementares como Função, Limite, Números Reais e, entre eles, a Continuidade.

Portanto, a efetivação de uma análise histórico-epistemológica da Continuidade envolveu uma complexa significação de séculos de produção intelectual que tem em sua essência uma rede de aprofundamento e definições de outros conceitos a ela relacionados. Isso nos fornece elementos indicativos necessários para o estabelecimento dos nexos conceituais a serem abordados em sala de aula.

Antes de nos atermos sobre os nexos, é importante ressaltar que o destaque dos extratos a partir das obras historiográficas analisadas contribuíram para a revelação de elementos tensionadores importantes para a composição da análise. Como dito no início desta seção, tais elementos se constituíram como fontes reveladoras das necessidades na produção do conhecimento. Certamente servem como ponto de partida tanto para a determinação dos nexos conceituais, como também para a elaboração de situações desencadeadoras da aprendizagem na organização do ensino.

Também foi dito anteriormente que a intenção deste capítulo não se configurava na elaboração de uma perspectiva historiográfica. Apesar de, em muitos momentos, nos aproximarmos de narrativas históricas, retomamos o objetivo deste capítulo cujo foco está centrado na identificação de relações essenciais no desenvolvimento da Continuidade que apontam para a determinação dos nexos conceituais.

Como resultado dessa análise, pôde-se perceber que as relações essenciais no desenvolvimento da Continuidade apontam para os seguintes nexos conceituais, divididos em pares dialéticos: comensurável/incomensurável, contínuo/discreto, infinito/infinitésimos, permanência/variabilidade, pontual-geral e rigor-intuição. Dessa forma, no capítulo a seguir discutiremos com certa profundidade os elementos resultantes da análise realizada e que compõe cada um destes nexos apontados.

5. A Determinação dos Nexos Conceituais do Conceito de Continuidade

Como discutido nas seções anteriores, o processo de análise histórica de determinado conceito, com vistas à compreensão do movimento lógico-histórico, tem como finalidade a obtenção de informações sobre as relações essenciais que o constitui. Tais relações são resultado da atividade humana na produção do conhecimento que se efetiva, de uma forma ou de outra, na interpretação, explicação e previsão de fenômenos da realidade.

Ao longo da jornada histórica de desenvolvimento do conceito de Continuidade, pudemos perceber como o conhecimento humano se constitui e se transforma com base no enfrentamento de questões próprias em cada contexto particular. Esse processo se consolida a partir da busca incessante da satisfação de necessidades que, por sua vez, se modificam ao longo do tempo. O surgimento de novas organizações sociais implicou em transformações culturais, econômicas, políticas e, conseqüentemente, nas formas de condução do pensamento.

A elaboração do conceito da Continuidade foi resultado de séculos de transformação do pensamento matemático cuja origem se encontra no enfrentamento de problemas práticos da vida cotidiana e culmina em sua definição abstrata, como resultado do processo de formalização no campo do simbolismo lógico. A consideração disso é de suma importância para a construção tanto de um entendimento materialista sobre a matemática, quanto para a organização do ensino e a apropriação dos conceitos pelos estudantes. Em nosso caso, esta apropriação da continuidade está alicerçada nos princípios de uma educação humanizadora (MOURA, 2000) para o tratamento didático-pedagógico de suas relações essenciais, ou seja, de seus nexos conceituais.

O processo de Análise Histórico-Epistemológica, por meio da significação dos elementos tensionadores extraídos das obras historiográficas⁵¹, aliado ao levantamento de questões apontadas pelos pesquisadores na Análise Documental⁵², revelou a existência de relações entre uma série de conceitos no desenvolvimento da Continuidade. Como já mencionados anteriormente, a partir das pesquisas foram levantados os seguintes conceitos: Incomensurável, Discreto, Contínuo, Infinito (Potencial e Atual), Infinitésimos, Ordenação, Enumerabilidade, Acumulação, Densidade, Continuidade (Pontual e Global) e Descontinuidades. A partir da análise histórica, a estes podem ser somados os conceitos de Indivisíveis, Movimento, Limite, Variável, Função, Divisibilidade, Números Racionais,

⁵¹ Ver Capítulo 3 deste trabalho.

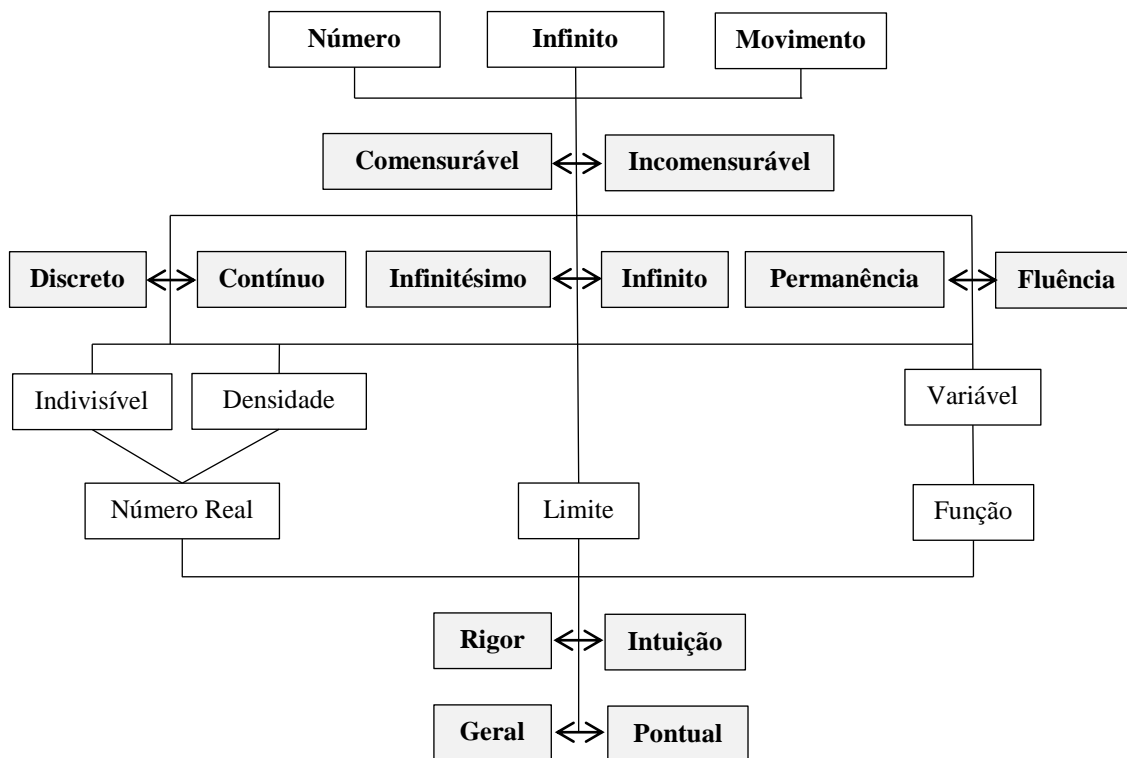
⁵² Ver Capítulo 2 deste trabalho.

Irracionais e Reais. Isso, em alguma medida, retrata a importância e a complexidade de se lidar com a Continuidade.

Frente a esse conjunto de conceitos que dá sustentação epistemológica à Continuidade, o objetivo desta seção é conduzir as reflexões sobre as relações essenciais que os conectam por meio da determinação dos nexos conceituais. A partir disso, as relações que puderam ser identificadas como nexos conceituais se configuram nos pares dialéticos *comensurável-incomensurável*, *discreto-contínuo*, *infinito-infinitésimo*, *permanência-fluência*, *pontual-geral* e *rigor-intuição*. Juntas, estas relações compõem um quadro das essencialidades na produção da Continuidade.

Para compor a reflexão sobre esses nexos conceituais, nas próximas subseções sintetizamos tais relações em quatro categorias: Contínuo-Discreto, Infinito-Infinitésimos, Permanência-Fluência e Pontual- Geral. Isso porque entendemos que na composição da categoria contínuo-discreto se efetiva também o tratamento da relação comensurável-incomensurável, assim também na categoria pontual-geral que engloba rigor-intuição. A sistematização destas categorias pode ser ilustrada por meio da Figura 1 a seguir.

Figura 9 - Sistematização na Determinação dos Nexos Conceituais



Fonte: próprio autor

Na Figura 1 se representa o modo como as diferentes relações identificadas nas análises compõem um quadro de interação na construção do conceito de Continuidade. Importante ressaltar que esta representação é meramente ilustrativa e não consegue abarcar a complexidade envolvida nestas relações, uma vez que elas se constituem em constante interação, mediante a significação do contexto histórico. No entanto, ajuda-nos a exemplificar a forma em como se estrutura os nexos conceituais.

Para essa divisão em categorias, levou-se em consideração a construção histórica dos conceitos, tendo como ponto de partida os problemas que envolveram as questões sobre *número*, *infinito* e *movimento*. A partir deles se pode estabelecer uma complexa rede que definirá o movimento lógico-histórico da Continuidade. Tais categorias servem de referência para destacarmos os cerne na determinação dos nexos conceituais, porém é importante ressaltar que não existem fronteiras entre elas, ou seja, elas também se encontram em um constante movimento dialético.

Em particular, a primeira categoria se efetiva com base no par dialético discreto-contínuo e engloba relações importantes sobre os conceitos de Incomensurabilidade, Indivisíveis, Enumerabilidade, Ordenação, Números Racionais, Irracionais e Reais. Isso desencadeou uma série de construções teóricas que envolvem a criação do Cálculo com Newton e Leibniz, e que culminou em significativas contribuições para a construção dos Números Reais com Dedekind.

A segunda categoria diz respeito às questões relacionadas ao par dialético infinito-infinitésimo cuja origem se consolida nas estratégias em lidar com as questões sobre o infinitamente grande e/ou pequeno. Essa categoria está intimamente ligada com a anterior, porém envolve um embate histórico entre concepções filosóficas e matemáticas que resultaram na elaboração da teoria sobre o Limite e os Números Reais.

Já a terceira categoria diz respeito ao par dialético permanência-fluência que envolve as questões sobre a significação do embate sobre o movimento ao longo da história e sua importância para a elaboração do Cálculo, em especial, na construção dos conceitos de Variável e Função.

Por fim, a última categoria se configura a partir do par dialético pontual-geral que faz referência aos problemas de âmbito didático-pedagógico. Estes problemas remetem ao domínio da abordagem sobre a Continuidade a partir dos trabalhos de Cauchy no ensino de Cálculo e as conseqüentes dificuldades em sua apropriação pelos estudantes relacionadas à questão do rigor-inuição.

5.1. O Par Dialético Contínuo-Discreto

Pode-se dizer que as primeiras manifestações do pensamento matemático estavam ligadas ao quantificar (contar) e ao medir (RÍBNIKOV, 1987). A simplicidade dessa afirmação ressalta o entendimento sobre como a matemática é fruto da atividade na interação *homem-mundo objetivo*. Certamente é impossível dizer “como”, “quando” e “onde” surgiram tais manifestações, mas as tentativas mais coerentes e aceitas se voltam para as civilizações primitivas.

De maneira geral, o contar e o medir são atividades humanas produzidas na busca por satisfação de necessidades ligadas aos mais variados aspectos da vida e se voltam para a significação de grandezas discretas e contínuas, respectivamente. Segundo Brolezzi (1996),

existem, como sabemos, certas grandezas chamadas *contáveis*, que são objeto de contagem, como o número de livros em uma prateleira. Outro tipo de grandezas é formado por aquelas quantidades que são passíveis de *medida*, como a largura desta folha de papel em que escrevo, ou o peso de uma caneta. O primeiro tipo de grandezas é chamado *discreto*. Grandezas discretas são as que se prestam a contagem. Já o segundo tipo é chamado *contínuo*, e se refere às medidas (BROLEZZI, 1996, p. 1).

A discretude dos números se baseia nas ideias da atividade de contagem que se configura na sucessão e acumulação (coleção) de objetos, pessoas, etc. Já com relação à concepção de contínuo, tem-se na atividade da comparação o cerne de sua constituição (BROLEZZI, 1996). Essa distinção entre grandezas revela as formas particulares de produção do pensamento baseadas em problemas práticos da vida cotidiana e foi na Antiga Grécia que essa divisão ganhou certa notoriedade.

Como abordado na seção anterior, em particular no Extrato 1, as condições objetivas na Grécia Antiga eram favoráveis para a condução do pensamento sobre a realidade e foi com a escola pitagórica que se tornaram fecundas as ideias sobre enumerabilidade e ordenação para a interpretação/explicação dos fenômenos.

A concepção grega sobre número, com referência às ideias de Aristóteles, se baseava na acumulação de unidades indivisíveis como representação das coisas na realidade objetiva. Dessa forma, a unidade correspondia a determinado objeto, pessoa ou coisa concreta, na qual não se podia dividir sem que perca sua essencialidade (ARMELLA; WALDEGG, 1995). A divisibilidade do número se encerrava com a obtenção de sua unidade. Os números se configuravam, assim, como instrumentos próprios para a contagem, ou seja, eram discretos.

Já com relação à medição, no âmbito do contínuo, os fenômenos eram entendidos como magnitudes. Distâncias, áreas e volumes eram vistos como magnitudes e

compreendidos com base numa ideia geométrica de segmentos. Diferente das representações numéricas, os segmentos eram constituídos por um conjunto de elementos abstratos ordenados e passíveis de divisibilidade *ad infinitum*. Um exemplo foi a reta geométrica definida por Euclides que estava dotada da capacidade de se prolongar indefinidamente (infinitamente) e sua divisibilidade envolvia a obtenção de segmentos tão pequenos quanto se queira (BOYER, 1949).

A grande crise veio com a elaboração de ideias sobre a existência da incomensurabilidade (Extrato 2) e estava diretamente ligada à questão da divisibilidade. Segundo Armella e Waldegg (1995), esta questão pode ser entendida como

se é possível encontrar uma magnitude finita que “meça” (ou melhor, que divida exatamente) de modo simultâneo a duas magnitudes dadas, estas duas são consideradas comensuráveis. Se, pelo contrário, a busca desta “unidade de magnitude” nos conduz a tomar magnitudes cada vez menores em processo de divisão potencialmente infinito, as magnitudes são incomensuráveis. No primeiro caso, quando as magnitudes são comensuráveis, as razões entre elas tem um comportamento análogo ao das razões numéricas. Em consequência, podem ser tratadas como estas últimas. [...] Do contrário, não há vinculação possível entre magnitude e número (ARMELLA; WALDEGG, 1995, p. 17, tradução nossa).

Essa crise marca o início de uma revolução na produção do pensamento matemático por dois grandes motivos: 1) a exposição da insuficiência da relação entre números e magnitudes em explicar determinados fenômenos da realidade, os incomensuráveis, e 2) a cisão no tratamento numérico entre o discreto e o contínuo (RÍBNIKOV, 1987). De acordo com Limini (1994),

a matemática teórica grega separou o domínio da aritmética do domínio da geometria devido à existência de magnitudes incomensuráveis, cuja razão não era possível expressar mediante uma razão numérica. No terreno da filosofia, Aristóteles assumiu esta divisão estabelecendo uma diferença entre as quantidades contínuas, como as magnitudes geométricas, e as quantidades discretas, como os números da aritmética (LIMINI, 1994, p. 25, tradução nossa).

A cisão entre contínuo e discreto, ou melhor, entre Geometria e Aritmética, marcou o desenvolvimento do pensamento matemático. Em especial, a crise provocada pelos incomensuráveis também gerou ruídos sobre a existência de estruturas infinitamente pequenas (Extrato 3). Segundo Boyer (1949),

se não houver um segmento finito tão pequeno que a diagonal e o lado possam ser expressos em termos dele, não haverá uma mônada ou unidade

de tal natureza que um número indefinido deles seja necessário para a diagonal e para o lado do quadrado? (BOYER, 1949, p. 20, tradução nossa).

Esse tipo de questionamento afligiu a teoria atomística de Demócrito e ganhou grandes proporções com os paradoxos de Zenão sobre a existência dos indivisíveis e a impossibilidade do movimento. O cerne das ideias de Zenão se configura nessa incapacidade de relacionar os domínios do discreto e do contínuo. O resultado disso se perdurará por séculos e culminará na elaboração do Cálculo.

Como já mencionado no capítulo anterior (Extrato 8), Newton irá propor sua teoria por meio da ideia de fluxões, cujo princípio se efetiva em representações do contínuo. Já Leibniz dará um tratamento formal à questão dos diferenciais, via discreto.

Os dois caminhos percorridos por Newton e Leibniz se encontraram em um mesmo ponto, o Cálculo. Consequentemente, o Cálculo é o “reino” onde interagem de modo especial o discreto e o contínuo. Para chegar a uma melhor definição do Cálculo, foi necessário elaborar a teoria sobre o contínuo, e tentar compreender a natureza da reta real. O Cálculo irá se apoiar assim sobre os números reais, e sobre a ideia de limite (BROLEZZI, 1996, p. 33).

Os diferentes métodos propostos por Newton e Leibniz se efetivam na construção da inversibilidade entre integrais e diferenciáveis. Esta relação denota na resignificação entre contínuo e discreto e passa, assim, a se tornar um aspecto fundamental para a construção do Cálculo e, em especial, da Continuidade. Nessa construção, o domínio numérico começa a se encontrar com o domínio geométrico, em que se supõe que seja possível estabelecer uma correspondência entre números e magnitudes (ARMELLA; WALDEGG, 1995).

Na teoria de Newton sobre as fluxões, as quantidades contínuas em constante movimento poderiam ser reconhecidas como produtos, quocientes, raízes, retângulos, quadrados, cubos, lados do quadrado ou do cudo, etc., e convergiam para a ideia de número (discreto). Já em Leibniz, as ideias sobre os diferenciais se relacionavam com aplicações geométricas, sobretudo no enfrentamento de problemas da Mecânica (LIMINI, 1994). No entanto, apesar dos diferentes métodos expandirem essas ideias, Newton e Leibniz compreendiam estas relações somente em nível operatório. O tratamento formal sobre a construção de uma base lógica para a relação contínuo-discreto só se concretizou com os trabalhos de Dedekind.

Como vimos, na elaboração da teoria sobre os Números Reais (Extrato 11), Dedekind desenvolve a expansão dos números racionais, com a devida formalização dos

incomensuráveis (irracionais), mediante a consideração da característica contínua da reta geométrica.

Não há dúvidas que a reta é, como disse Dedekind, modelo irrevogável do contínuo. Na linha resultam plausíveis, e incluem evidentes, muitos dos conceitos ou das operações lógicas relacionadas à continuidade. Enquanto a linha sempre foi tratada como um domínio contínuo, para construir um domínio numérico contínuo é necessário ampliar o conjunto dos naturais e racionais (com os que se podem representar operações concretas, como são o contar e o medir) e definir os números irracionais, objetos que são resultado de uma operação formal. A variação contínua na reta resulta, portanto, mais clara quando se aplica ao campo aritmético, no que é preciso transpor os números decimais finitos, com base nos quais somente é possível construir sucessões discretas de números. Na linha, ademais, os princípios de continuidade são plausíveis, a diferença do que sucede no terreno aritmético (LIMINI, 1994, p. 25, tradução nossa).

Nesse contexto, Dedekind assume como princípio basilar de sua teoria, a compreensão aristotélica sobre a continuidade da reta no campo da geometria e passa a estabelecer correspondência com o campo numérico. Sua estratégia se pautou na elaboração de um contínuo numérico pautado em propriedades e operações do contínuo geométrico. No entanto, há certa diferença nos fundamentos nos quais se constrói a reta analítica⁵³ em relação à reta geométrica presentes nos trabalhos de Aristóteles e Euclides.

A construção da reta analítica por Dedekind se estabelece a partir do conceito de Continuidade no qual se assenta dois grandes pilares: 1) de que a reta é formada por pontos e 2) o processo de divisibilidade sucessiva que se realiza sobre ela leva também à obtenção de pontos. Isso revela aspectos importantes sobre a compreensão da Continuidade da reta analítica, uma vez que este conceito na teoria aristotélica era reconhecido a partir da propriedade de sucessivas divisões da reta geométrica, no qual implicava em sua subdivisão em segmentos. Isso significa dizer que, uma vez que a Continuidade da reta geométrica se configura em seu processo infundável de subdivisões, o resultado de uma divisão de um segmento da reta só pode ser compreendido como um novo segmento (também passível de subdivisões) (BOYER, 1949).

A ideia aristotélica de reta coincide com a que se maneja nos Elementos de Euclides. Apesar de que a definição de linha reta que aparece nesta obra ser bastante obscura, é plausível pensar que a reta euclidiana como semelhante à aristotélica a partir da forma em que Euclides opera esse objeto geométrico: igual à do filósofo, é uma “reta sintética”, ou seja, não atômica, subdivisível

⁵³ Assim como proposto por Limini (1994), chamaremos de reta analítica a construção teórica de Dedekind sobre a reta para diferenciar do termo reta geométrica da escola grega.

potencialmente ao infinito e delimitada em seus extremos por seus pontos (LIMINI, 1994, p. 29, tradução nossa).

Diante disso, a reta analítica proposta por Dedekind se diferencia potencialmente do conceito de reta geométrica em alusão à sua constituição por estruturas indivisíveis, os pontos. Vimos ao longo de nossa análise histórica que as teorias sobre o domínio do discreto se pautaram particularmente com base na existência e operações de indivisíveis. Isso mostra como a superação da cisão entre o contínuo e o discreto se consolidava no âmago da construção teórica proposta por Dedekind em sua concepção sobre a Continuidade.

O modo como Dedekind se dedicou para superar os problemas de tratamento discreto do contínuo (ou vice-versa), tão explorados por Zenão, se configurou com a criação de seus cortes. Enquanto o argumento da escola grega sobre o contínuo se configurava na sucessão potencialmente infinita de divisibilidade da reta geométrica, Dedekind elabora sua ideia sobre os cortes cuja essência se consolida na divisão da reta em segmentos distintos a partir de determinado ponto (indivisível).

É nesta visão sobre a reta analítica que Dedekind produz o salto sobre a determinação da relação de correspondência entre os campos geométricos e aritméticos, ou melhor, entre magnitudes contínuas e discretas, para a elaboração formal do conceito de Continuidade e, em consequência, dos Números Reais.

Em síntese, é possível perceber que a construção histórica da relação contínuo-discreto tem em sua égide no par dialético comensurável-incomensurável. A perturbação provocada pela incerteza sobre a potencialidade dos números racionais em lidar com fenômenos incomensuráveis provoca a necessidade na produção do pensamento ao longo de séculos sobre a resignificação da relação contínuo-discreto. Ou seja, “a crise dos incomensuráveis, que marca o surgimento dos números irracionais, nada mais é que a explosão da tensão acumulada entre o discreto e o contínuo no mundo grego” (BROLEZZI, 1996, p. 46).

Dessa forma, o estabelecimento das relações comensurável-incomensurável e contínuo-discreto se consolida como nexos conceituais para a apropriação da Continuidade, uma vez que juntas produzem uma rede de significados lógicos e históricos fundamentais à sua constituição. Mas não estão sozinhas. Dando seguimento, na próxima seção serão apresentados os argumentos que compõe a consideração do par dialético infinito-infinitésimo.

5.2. O Par Dialético Infinito-Infinitésimo

Ao longo de toda essa jornada histórica, vimos que no desenvolvimento da Continuidade o problema sobre a significação do infinito se perdurou por muitos séculos.

Suas primeiras manifestações também estiveram atreladas às questões sobre a existência dos incomensuráveis e do movimento. A grande dificuldade na produção de conhecimentos sobre o infinitamente grande e pequeno está relacionada à exigência de uma atitude epistêmica de afastamento dos aspectos sensoriais da realidade. A superação desta dificuldade só foi possível com o desenvolvimento de um aparato lógico-simbólico acurado na criação da análise infinitesimal.

Na seção anterior, pôde-se perceber que a crise provocada pelos incomensuráveis (Extrato 2) trouxe consigo uma série de questões lógicas sobre a capacidade grega de lidar com sucessivas divisibilidades no domínio do discreto e do contínuo. Com seus paradoxos, Zenão expôs as fragilidades em se conceber ideias sobre os infinitesimais a partir de uma base intuicionista. Assim, a saída promulgada por boa parte dos filósofos gregos foi a evitação de algum tratamento ao infinito, entre eles Aristóteles. Dizemos boa parte, pois assim como Demócrito e sua teoria sobre os indivisíveis, houve aqueles que elaboraram suas percepções com base na ideia de infinitésimos.

Importante ressaltar que a produção do pensamento sobre o infinito teve como princípio bases filosóficas de interpretação da realidade. Para Aristóteles, a compreensão de infinito estava ligada a algo indeterminado (ilimitado), mas não necessariamente como um objeto matemático. De acordo com Moreno e Waldegg (1991), a partir de uma análise gramatical, a concepção grega sobre o infinito pairava sobre as seguintes significações:

1. Como substantivo, aparecendo apenas em relatos dos tipos mitológico, teológico ou metafísico: "Infinito" pertence ao reino dos deuses.
2. Como adjetivo que descreve um substantivo, é usado apenas quando este possui as características de um absoluto, como o Universo, o Ser, o espaço ou o tempo. Aristóteles somente usa essa forma ao negar sua existência real (física), uma vez que o conceito abraça uma infinidade real que a filosofia aristotélica realista não permite.
3. Como advérbio, é usado para qualificar ações (mentais), como, por exemplo, estender, subdividir, continuar, adicionar, aproximar etc. Esse uso do infinito tem a ver com o que chamamos infinito potencial, ou seja, quando o processo em questão pode ser continuado indefinidamente (MORENO; WALDEGG, 1991, p. 212, tradução nossa).

No que tange o campo da matemática grega, só se concebia a ideia de infinito vinculada à ideia de processo (advérbio), já que sua compreensão como substantivo ou adjetivo excluía a existência concreta de objetos infinitos. Inserido nesse contexto, Aristóteles reconhecia a existência do infinito frente à necessidade de se operar com a sucessão (ou divisibilidade) indefinida de grandezas. Esta forma de conceber o infinito foi denominada como Infinito Potencial. Sobre isso, Radice (*apud* COBIANCHI, 2001) retrata que

infinito potencial, para uma sucessão de elementos, é a possibilidade de ir sempre mais longe, sem que haja um elemento último. [...] Um infinito em ato, portanto, e não apenas uma potência é uma infinidade realizada, e não apenas não completável; esgotada e não unicamente inesgotável. Uma sucessão infinita discreta, sempre reconduzível à repetição infinita de “mais outro”, constitui um objetivo mental de todo o repouso (RADICE apud COBIANCHI, 2001, p. 91).

Essa forma de conceitualização do infinito traz implicações importantes para a produção do pensamento matemático. Apesar de reconhecer a necessidade de se considerar o Infinito Potencial, os gregos negavam a existência de formas sobre o Infinito Atual. Isso caracterizará as formas de condução do pensamento que culminará na elaboração do método de exaustão por Eudoxo e Arquimedes (Extrato 4) e, como consequência, no desenvolvimento das estruturas basilares do Cálculo. No entanto, uma sólida explicação para a existência do infinito atual só se estabeleceu com o movimento de formalização da análise infinitesimal em pleno século XIX (MORENO; WALDEGG, 1991).

Pensar sobre a possibilidade de operar com Infinito Potencial levou ao desenvolvimento de procedimentos de quadratura de curvas, cálculo de comprimento, área e volume, entre outros, e configurou-se como cerne na criação de métodos integrais e diferenciais. Essa concepção do infinito está assentada na forma de concebê-lo como “resultado de um processo iterativo mediante o qual se gera um número específico em cada passo” (LIMINI, 1994, p. 27, tradução nossa). Isso permitiu o avanço ao entendimento sobre processos de prolongamento indefinido e divisibilidade sucessivas, ou seja, na aceitação de expressões como “tão grande ou tão pequeno quanto se queira”.

Importante aqui ressaltar que esse tipo de compreensão sobre o infinito possibilitou que D’Alembert e Cauchy elaborassem suas ideias na construção do Limite (Extrato 10). Tais ideias buscaram evidenciar não somente a formalização de estruturas infinitesimais, como também objetificá-las a fim de promover operações sobre elas. Retomando o que já foi comentado no capítulo anterior, Cauchy constrói sua teoria sobre o Limite com base no conceito de Variável e percorrendo a sucessão numérica a ela atribuída. No caso dos infinitesimais, estes são entendidos como uma sucessão de valores que diminuem indefinidamente, ao se tornarem menores que qualquer número dado, cujo limite tende a zero (REZENDE, 2003).

Essa atitude epistêmica frente ao Infinito Potencial na elaboração do Limite também pode ser percebida com a definição de Continuidade proposta por Cauchy. Os princípios pelos quais se elabora a conceitualização da Continuidade de uma função $f(x)$ em relação a x estão pautados na análise do comportamento desta função a partir de incrementos infinitamente

pequenos. Em outras palavras, diz que $f(x)$ é contínua em relação a x se, para cada valor de x , o valor numérico da diferença $f(x + \alpha) - f(x)$ decresce indefinidamente com α (COBIANCHI, 2001).

Sem dúvidas, o modo como Cauchy desenvolveu sua conceitualização sobre a Continuidade envolve um nível complexo de elaboração lógica e permitiu um tratamento eficaz para os infinitésimos e o estudo do comportamento das funções. Porém, como percebemos ao longo da história, a visão sobre a Continuidade careceria ainda de um refinamento formal, o qual só foi possível com a significação do infinito atual, a partir da criação dos Números Reais (Extrato 11).

Em sua teoria, Dedekind elabora uma visão particular sobre a noção de infinito a partir da extensão do conjunto dos Números Racionais. Ao considerar tal conjunto como infinito em extensão, Dedekind não rompe com a concepção de Infinito Potencial. Mas o grande salto está na consideração de infinito no interior do conjunto (MORENO; WALDEGG, 1991). Essa forma de conceber o Infinito Atual pressupõe uma mudança conceitual em relação ao Infinito Potencial. De acordo com Limini (1994),

a conceitualização do infinito atual se sustenta em instrumentos cognoscitivos diferentes daqueles sobre os quais descansa a aceitação do infinito potencial. [...] Em geral, a aceitação de processos potencialmente infinitos se apoiam na possibilidade de reiteirar um processo que se aplica cada vez a objetos particulares, o que encontra sustentação na hipótese de prolongamento indefinido do tempo; enquanto que a conceitualização do infinito atual está embasada em operações atemporais, ou melhor, nas que estão excluídas toda alusão a processos que se exprimem de acordo com uma ordem cronológica. A atualização do infinito foi moldada a partir da postulação de novos entes matemáticos; isto não se apresenta nos processos potencialmente infinitos, os que de certa forma podem considerar-se como operações “encerradas” em um domínio dado (LIMINI, 1994, p. 27, tradução nossa).

A autora ainda complementa que

no caso do infinito por extensão, a suposição da atualidade leva aos conjuntos infinitos, entes especialmente distintos aos elementos que os conformam. A atualização dos processos infinitos que se dão ao “interior do contínuo” (como os de subdivisão, os de convergência de sucessões infinitas de números ou pontos, etc.) resultam na “construção” de um ente distinto àqueles sobre os que se aplica o processo (LIMINI, 1994, p. 27, tradução nossa).

A criação do Infinito Atual permitiu que Dedekind não só superasse os problemas provocados pelos paradoxos de Zenão, como também preparasse o terreno para a elaboração da correspondência biunívoca entre a reta e o conjunto dos Números Reais, ou melhor, para a

formalização da Continuidade. Assim, é a partir da consideração das relações intrínsecas ao infinito atual que se produz a sustentação dos conceitos de infinidade, ordenação e densidade do conjunto numérico por Dedekind.

A consideração dessa relação entre Infinito Potencial e Atual revela o modo como a produção do conhecimento se transformou ao longo de séculos, na tentativa de lidar com problemas que afligiram (e ainda afligem) a inteligibilidade humana. Isso porque a complexa formulação da ideia de Infinito Atual exige um nível de afastamento considerável de percepções intuicionistas da realidade. É somente no seio do formalismo lógico-simbólico da análise infinitesimal que se é possível compreender as relações estabelecidas entre o par dialético infinito-infinitésimo. Isso traz implicações significativas para o âmbito educacional.

Importante ressaltar que a dialética na interação infinito-infinitésimo se configura a partir do modo como a produção do conhecimento sobre o infinitamente grande (infinito) promoveu transformações na concepção do infinitamente pequeno (infinitésimo) e vice-versa. Essa interação é fruto da busca incessante de respostas sobre problemas que envolvem a extensão do universo. No que tange o desenvolvimento da Continuidade, em particular, essa relação também está diretamente vinculada ao par dialético contínuo-discreto, uma vez que se exprime no contexto de correspondência entre elementos da reta e do campo numérico. Isso pode ser evidenciado a partir do conceito de densidade por Dedekind. Ao se propor entender que por densidade se estabelece a garantia da existência de infinitos pontos entre dois pontos quaisquer de um conjunto, Dedekind traduz seu posicionamento epistêmico de univalência dos pares infinito-infinitésimo e contínuo-discreto na formalização da Continuidade.

De qualquer forma, há ainda elementos a serem considerados na constituição da Continuidade. Em particular, na forma como a busca de explicações sobre o movimento implica na consideração do par dialético permanência-fluência, abordado na próxima subseção.

5.3. O Par Dialético Permanência-Fluência

Um dos grandes pilares no desenvolvimento da Continuidade se assenta sobre a ideia de movimento. Ou melhor, sobre o imbróglio em se compreender a fluência (ou permanência) dos fenômenos da realidade. Em nossa descrição histórica, vimos que essa questão se constituiu como elemento basilar para as teorias da escola eleática, cujos fundamentos se configuravam na ideia de unidade e invariabilidade do mundo.

A impossibilidade do movimento advinda de Parmênides, Zenão e seus sucessores, estava pautada em dois princípios importantes. O primeiro diz respeito ao entendimento de

que toda mudança pressupõe a anulação da existência, ou seja, uma coisa que muda passa a ser o que *não é*. Logo, deixa de existir para se tornar algo que ainda não existe. Já a segunda faz alusão à negação da existência de espaço vazio, já que a consideração do vazio pressupõe entendê-lo como um lugar onde existe o que *não é*, ou melhor, onde não existe a coisa em si. (POLITO; SILVA FILHO, 2013). O cerne desta visão é o conceito de permanência (invariabilidade) que resguarda em todas as coisas sua identidade inviolável. A realidade objetiva, assim, deveria ser pensada como um organismo uno e invariável. Segundo Caraça (1958),

O pensamento grego dominante aparece invadido pelo horror da *transformação*, e daí resulta o horror ao *movimento*, do *material*, do *sensível*, do *manual*. O homem de *elite*, rejeita o *manual*, o *mecânico*, e exalta o *bem* e a *virtude*, de cuja procura faz o fim máximo do homem (CARAÇA, 1958, p. 189).

Como já mencionado no capítulo anterior (Extrato 3), essa forma de compreensão do mundo atingiu de maneira contundente as bases lógicas de teorias atomísticas e designou os rumos de produção do pensamento matemático. Os paradoxos de Zenão revelaram a incapacidade de lidar com a questão do movimento pautando-se em ideias intuitivas sobre os infinitesimais. A crise provocada por tais ideias se perdurou por séculos e uma representação definitiva sobre o movimento só se tornou possível como resultado de um afastamento das amarras lógicas advindas do pensamento grego (Extrato 5).

Vimos que novas formas de organização social, com o advento de uma sociedade capitalista, exigiram uma nova postura frente ao desenvolvimento científico. Em particular, o *horror ao movimento* foi dando espaço para significações sobre a relação entre razão e experiência na elaboração do conhecimento, cuja atitude epistêmica se consolida também na percepção sensorial e apreensão das mudanças ocorridas na realidade. Frente a esse contexto, a produção do pensamento sobre o movimento se desenvolverá com base em duas perspectivas: a retomada de ideias sobre enurabilidade e ordenação, próprias da escola pitagórica, e o aperfeiçoamento de estruturas algébricas na interpretação de fenômenos da realidade (Extrato 7).

As primeiras manifestações sobre um tratamento matemático da variabilidade podem ser percebidas ainda na Grécia Antiga, cuja significação envolvia a dificuldade grega em lidar com o discreto e o contínuo, em que o conceito de Variável era identificado ora como demonstrações geométricas de problemas intrinsecamente algébricos, ora como representações de magnitudes contínuas. Somente com os trabalhos de Viète e com o

desenvolvimento da álgebra, é que se pôde libertar o conceito de Variável do contexto geométrico e este passasse a ser concebido como uma extensão algébrica de um número desconhecido (REZENDE, 2003). Segundo Caraça (1958), essa forma de compreensão da variável trouxe significativas mudanças para a produção do pensamento.

O número é, em última análise, o que constitui a substância do conceito de variável e, portanto, de função; o papel primacial que esta passa a representar na Ciência traz como consequência, o número para a primeira plana da explicação científica; daqui resulta o primado do número sobre a figura e, conseqüentemente, o fim da separação da Aritmética e da Geometria em compartimentos estanques (CARAÇA, 1958, p. 204).

O conceito de Variável resultará, então, na criação da Geometria Analítica, com base nos trabalhos de Fermat e Descartes, enquanto uma estratégia de enfrentamento de problemas que envolvem o estudo das curvas mediante o uso de métodos algébricos. As designações de interpretação dos fenômenos em movimento passaram, portanto, a se configurar dentro de uma relação entre modelos geométricos e métodos algébricos de representação, estabelecendo uma ligação intrínseca entre as curvas e as equações (BOYER, 1949). Nesse sentido, “a equação de uma curva passa a se estabelecer como uma relação de interdependência entre as variáveis” (REZENDE, 2003, p. 291).

Diante disso, a forma como se constrói a representação matemática do movimento está diretamente ligada às transformações na relação estabelecida entre os domínios do contínuo e o discreto. Somente com a ressignificação entre a Geometria (reino do contínuo) e a Aritmética (reino do discreto), e com o auxílio do pensamento abstrato algébrico, é que se pôde aprimorar o conceito de Variável e, conseqüentemente, criar o de Função. Sobre o último, foi Leibniz, a partir dos trabalhos de Bernoulli, quem passou a estabelecer a Função como relação de interdependência entre as variáveis.

Essa ideia de Função se perdurará com a construção do Cálculo por Leibniz e Newton, e foi através dos trabalhos de Euler que esta passa a ser concebida como cerne para o desenvolvimento do Cálculo (Extrato 9). Para o contexto de nossa análise, isso traz implicações importantíssimas na compreensão do par dialético permanência-fluência. As transformações históricas dos conceitos de Variável e Função conduziram para a consideração do movimento como aspecto central no desenvolvimento do Cálculo e, conseqüentemente, da Continuidade.

É nesse contexto que Cauchy, com vistas à fundamentação dos conceitos do Cálculo, irá desenvolver sua teoria acerca do Limite e da Continuidade de uma Função (Extrato 10). Conforme já mencionado no capítulo anterior, a Continuidade proposta por Cauchy traz

implicações importantes para a compreensão do Cálculo no que se refere ao estudo do comportamento das funções. Como dito anteriormente, o tratamento acurado das bases formais da Continuidade só se efetivaria anos depois com a construção dos Números Reais e o estabelecimento de uma teoria sobre os conjuntos numéricos.

De acordo com Rezende (2003),

A inserção da noção de conjunto na matemática, a interpretação do conceito de função e da noção de infinito neste novo contexto, possibilitará a Weierstrass desenvolver sua teoria estática de variável. Nesse sentido, a variável "x" é simplesmente uma letra designando qualquer número de uma coleção de valores numéricos. Esse contexto é, com efeito, o contexto da Análise (REZENDE, 2003, p. 295).

É com a construção das ideias sobre conjunto numérico que a Variável alcança sua significação como uma expressão genérica vinculada a uma coleção de números. Essa construção concedeu certa liberdade para a compreensão da Variável, uma vez que passa a ser dotada da capacidade de se realizar operações próprias no domínio discreto.

Portanto, o par dialético permanência-fluência se configura como elemento crucial para a compreensão das transformações do pensamento na tentativa de estabelecer representações sobre o movimento dos fenômenos na realidade objetiva. Somado às construções teóricas sobre o Número e o Infinito, o embate sobre a consideração do Movimento envolveu o esforço de inúmeros personagens ao longo de séculos de produção matemática e desencadeou a elaboração dos conceitos fundamentais à formalização da Continuidade.

O conceito de Variável em si carrega a necessidade humana de se considerar os fenômenos em seu devir. A dificuldade advinda da escola grega em se formular ideias sobre variabilidade é fruto do impasse da determinação de relações entre contínuo e discreto e entre infinito e infinitésimo. Somente com o limiar de ressignificação destas relações, aliado ao desenvolvimento de um aparato simbólico da álgebra, é que foi possível construir uma representação formal sobre variabilidade.

O carácter contraditório do conceito – a variável *é* e *não é* cada um dos elementos do conjunto – deu origem a que a sua introdução na Ciência seja relativamente recente. Pelo seu carácter essencial – síntese do *ser* e *não ser* – ela sai fora daquele quadro de ideias que quer ver na Realidade uma *permanência* e irrompe ligada à corrente de pensamento que, expressa ou tacitamente, vê na *fluência* a primeira das suas características (CARAÇA, 1958, p. 128).

Esse entendimento sobre a Variável também agrega significados sobre a elaboração do conceito de Função. Segundo Caraça (1958), a relação de interdependência entre as variáveis se constitui como representação das leis objetivadas por meio de expressões analíticas. Assim, “o conceito de função permite estabelecer uma correspondência entre as leis matemáticas e as leis geométricas, entre as expressões analíticas e os lugares geométricos (conjuntos de todos os pontos que gozam de uma mesma propriedade)” (CARAÇA, 1958, p. 139).

O resultado desse processo pode ser percebido no modo como a Continuidade passou a ser entendida como aspecto fundamental para o estudo de uma função, ou seja, para a compreensão dos fenômenos em movimento. A relação entre Função e Continuidade traz implicações importantes para o ambiente pedagógico e será abordada com profundidade na próxima seção.

5.4. O Par Dialético Pontual-Geral

Durante as seções anteriores deste capítulo, pudemos perceber que historicamente o conceito de Continuidade é resultado da produção do pensamento sobre questões que estavam ligadas a fenômenos que envolvem a conceitualização de Número, Infinito e Movimento. De certa forma, as categorias analisadas até aqui estão intimamente ligadas uma nas outras, uma vez que há entre elas uma interação dialética que une (e separa ao mesmo tempo) os objetos/cernes que as constituem.

No entanto, nesta subseção nos proporemos a analisar relações que também estão pautadas no desenvolvimento histórico da Continuidade, mas que são evidenciadas particularmente no âmbito pedagógico. O objetivo aqui é identificar o modo como se estrutura o par dialético pontual-geral na constituição da Continuidade e seus reflexos para a abordagem deste conceito em sala de aula. Além disso, refletiremos como esta relação também está diretamente ligada ao embate epistêmico entre rigor-intuição.

Conforme já abordado na seção 3 (três), ao se tratar da abordagem da Continuidade em âmbito pedagógico, percebe-se, em geral, a ausência de seu tratamento no ensino básico e a ênfase em temas ligados à Continuidade Pontual de uma Função em disciplinas de Cálculo. Isso implica dizer que há uma valorização no ensino de técnicas e operações com a Continuidade via Limite, no qual relega uma abordagem global da Continuidade às disciplinas de Análise. Além disso, nesse contexto, Aparacio e Cantoral (2003) chamam a atenção também para a pouca significação dada à análise das descontinuidades. Estas relações podem ser exemplificadas a seguir (Figura 9).

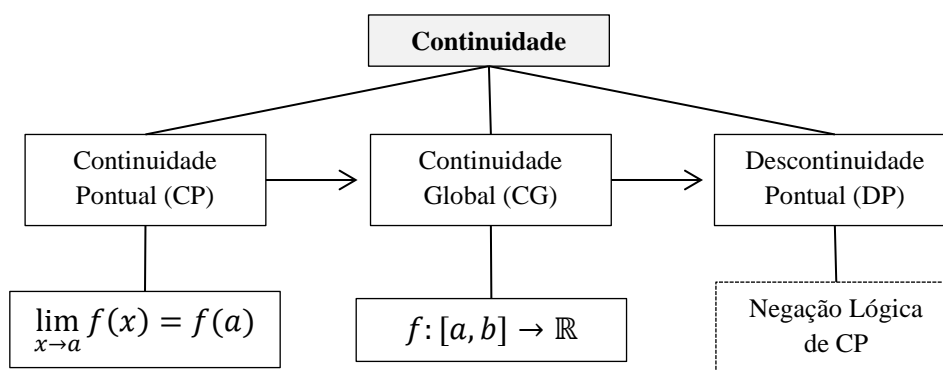


Figura 9: Estrutura de Ensino da Continuidade

Fonte: (APARICIO; CANTORAL, 2003, p. 342)

A ideia de Continuidade Pontual está assentada, sobretudo, na definição elaborada por Cauchy em alusão ao estudo do comportamento de funções. Como mencionado no Capítulo 3, essa forma de se compreender a Continuidade traz em si a significação do conceito de Limite e sua potencialidade na investigação de aproximações infinitesimais de uma variável numa vizinhança de determinado ponto ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$). Conseqüentemente, a Descontinuidade Pontual é atribuída a qualquer situação que foge aos critérios estabelecidos na definição de Continuidade Pontual. Já com relação à Continuidade Global, esta diz respeito ao modo como a Continuidade é formalizada com base na conceitualização proposta por Dedekind ($f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$).

No decorrer da seção 3 (três), mostramos que a estrutura curricular de cursos de Licenciatura em Matemática de instituições públicas do estado de São Paulo tende a priorizar o tratamento da Continuidade Pontual em disciplinas de Cálculo e Análise. Segundo Aparicio e Cantoral (2003), esse tipo de proposta curricular conduz a apropriação de elementos técnicos e operatórios da Continuidade a partir de uma análise infinitesimal no entorno de um ponto, via Limite.

Em muitos livros universitários atuais se apresenta de forma habitual primeiro a definição de continuidade de uma função em um ponto relativa a um ponto interior de um conjunto, em geral, aberto. Após este conceito se passa regularmente à conservação da continuidade pontual ao operar com funções contínuas, e geralmente se apresentam condições necessárias, condições suficientes e condições necessárias e suficientes para assegurar a continuidade. Caso contrário, tem-se a não continuidade em um ponto ou descontinuidade da função nesse ponto. Pode-se dizer que vários autores escolhem algumas das caracterizações como definição de continuidade, embora a mais frequente seja a relacionada ao limite, como tal ou em termos de epsilon-delta (PINEDA, 2012, p. 29, tradução nossa).

O resultado disso é a desencadeamento de problemas conceituais sobre a percepção conceitual da Continuidade (VASQUÉZ *et al*, 2000; COBIANCHI, 2001; APARICIO; CANTORAL, 2003; PINEDA, 2012). Como exemplo, esses problemas estão relacionados a dificuldade na produção de significados sobre a Continuidade por estudantes, que conduz a interpretações sobre a suficiência dos critérios estabelecidos na Continuidade Pontual para uma generalização conceitual. Segundo Pineda (2012),

A continuidade global é apresentada [assim] como um subproduto obtido a partir da afirmação de continuidade em cada um dos pontos de um subconjunto em que é definido ou de todos os \mathbb{R} . Isto é, uma função é contínua em um conjunto, se e somente se for contínua, em cada um dos pontos do conjunto (PINEDA, 2012, p. 29, tradução nossa).

Esse tipo de interpretação conduz a dificuldades na produção de sentidos sobre a Continuidade Global. Mas, afinal, onde se pretende chegar com essa afirmação? Em nosso entendimento, o ponto central desta questão está na consideração do par dialético pontual-geral.

Essa interação entre o pontual e o geral está no âmago da construção história da matemática. A interação entre atividade prática e produção do pensamento se efetiva na busca pela satisfação de necessidades pontuais, ou seja, na solução de problemas particulares. No entanto, é através de tentativas de generalização de determinadas características destas soluções que a matemática se desenvolveu. Em síntese, a interação pontual-geral se efetiva por meio da relação singular-particular-universal (OLIVEIRA, 2005).

Essa relação tem como fundamento a compreensão dialética da síntese de determinação que carrega o singular da universalidade, ou então, o universal na singularidade. Dentro desta visão, o singular pode ser entendido como um conjunto de características próprias de um evento, objeto ou indivíduo que está inserido num contexto histórico-cultural. Já o universal pode ser entendido como um aglomerado de características que definem um grupo de singularidades. Dessa forma, a dialética singular-particular-universal se constitui na “compreensão de como a singularidade se constrói na universalidade e, ao mesmo tempo e do mesmo modo, como a universalidade se concretiza na singularidade, tendo a particularidade como mediação” (OLIVEIRA, 2005, p. 26).

Para descrever tal relação, Oliveira (2005) discorre que

Engels em *A dialética da Natureza* (1979, p.182-183) utiliza o exemplo do *atrído que produz calor*, ao fazer uma detalhada interpretação materialista da teoria do juízo em Hegel, na qual a relação singular-particular-universal é um elemento central. Trata-se dos juízos feitos por um determinado sujeito

sobre a produção do calor obtido através do atrito. Este calor é o produto imediato adquirido, por esse sujeito, nessa sua ação de atritar. Acumulando experiências semelhantes, esse sujeito emite o juízo desse ato singular: “o atrito gera calor”. Com a continuidade das experiências, o juízo é reelaborado num nível de maior amplitude do que o ato singular que deu origem ao primeiro juízo, pois se refere não mais ao ato do atrito grandando calor, mas ao fato de que *uma forma particular de movimento* (o mecânico) *pode transformar-se, em determinadas circunstâncias* (no caso, o atrito), *em uma outra forma de movimento* (no caso, o calor). Com a continuidade de sua ação e o aumento cada vez maior de sua complexificação, o sujeito passa a deduzir, considerando os juízos anteriores, um terceiro juízo de amplitude ainda maior, amplitude essa que, no caso em questões seria denominada universal. Assim, o terceiro juízo reza que *toda forma de movimento está apta, aliás compelida* (como diz Engels), *a se tornar outra forma de movimento*. O objetivo de Engels, ao utilizar esse exemplo, era o de demonstrar como podemos refletir, em nosso pensamento, o vir-a-ser real de nossa atuação, através de juízos, partindo da singularidade até a universalidade, através da medição do particular. E explica que permanecendo-se em um desses juízos chega-se necessariamente a falsos resultados que, se utilizados, estarão distorcendo a orientação da ação do sujeito (OLIVEIRA, 2005, p. 27).

Esse exemplo dado por Engels (1979) e descrito por Oliveira (2005) nos ajuda a entender o modo como se constitui a relação singular-particular-universal e permite que alguns elementos sejam transpostos ao par dialético pontual-geral, no caso da Continuidade. Esta relação pode ser entendida a partir de uma análise da interação entre os conceitos de Continuidade Pontual e Continuidade Global.

Antes de tentar estabelecer qualquer relação entre estes conceitos, é necessário nos atentarmos para alguns aspectos importantes. Em primeiro lugar, é importante ressaltar que é com vista à organização do ensino, ou melhor, na apropriação conceitual da Continuidade pelos estudantes, que se assenta o aspecto mobilizador desta empreitada. E, em segundo, que ao partirmos para o estabelecimento desta relação, adentraremos no universo de estudo do comportamento das funções de uma variável real⁵⁴.

A singularidade no conceito de Continuidade Pontual pode ser entendido em seu caráter restritivo de análise da Continuidade em um determinado ponto, frente à infinidade de pontos que compõem o conjunto dos Números Reais. Esse conceito permite a realização de um olhar mais atento ao comportamento da Função em cada ponto singular e sua vizinhança, via aplicação do Limite. De acordo com Jayakody e Zazkis (2015) a definição de Continuidade Pontual usualmente é apresentada da seguinte forma:

⁵⁴ Optamos pelo contexto restrito no tratamento de funções de uma variável real para a composição de nossos argumentos, por se tratar de um tópico abordado nos anos iniciais de estudos do Cálculo. Isso nos ajuda a construir um quadro explicativo sobre a apropriação da Continuidade. Mas ressaltamos que essas reflexões não se encerram aqui.

Definição: Uma função f é dita contínua em c se,

- 1) $f(x)$ é definida em $x = c$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe;
- 3) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

A função f é descontínua se alguma dessas condições não for satisfeita.

Esse tipo de abordagem evoca o domínio dos conceitos de função, função contínua, limite e descontinuidade, além de permitir que a ideia de Continuidade seja trabalhada por meio da aplicação de técnicas de Limite. No entanto, Jayakody e Zazkis (2015) também chamam a atenção para o nível de generalidade que essa definição tende a suscitar. Segundo as autoras, essa generalização está na definição de Função Contínua. Em seu levantamento, Jayakody e Zazkis (2015) detectaram a presença de diferentes formalizações:

Definição (1): Uma função é dita função contínua se é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Definição (2): Uma função que é contínua em $(-\infty, +\infty)$ é dita contínua em toda parte ou simplesmente contínua.

Definição (3): Uma função é uma função contínua se ele é contínua para todo número real.

No que se refere à existência destas diferenças, as autoras discorrem que

Essa situação deixa espaço para que os alunos construam intencionalmente ou não intencionalmente um significado para a função contínua. Intuitivamente, é provável que isso seja interpretado como “contínuo em toda parte”, o que novamente é problemático. Onde está “em toda parte”? Em todos os lugares pode significar na linha do número real ou em todo número real. No entanto, “em toda parte” também pode ser interpretado como todos os pontos do domínio da função. [...] Portanto, essa situação tem o potencial de levar os alunos a construir seu próprio significado para uma função contínua, que pode estar em desacordo com a definição pretendida (JAYAKODY e ZAZKIS, 2015, p. 10, tradução nossa).

O argumento de Jayakody e Zazkis (2015) nos ajuda a compreender possíveis ciladas acerca do nível de generalidade do conceito de Função Contínua a partir da Continuidade Pontual. Em geral, a generalidade é vinculada à formalização da Continuidade Pontual por ε e δ que pode ser entendida como (REIS, 2001):

Definição: Uma função $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Em certa medida, as autoras discorrem sobre os cuidados necessários aos professores na escolha de uma definição formal de Função Contínua que minimize a existência de problemas com uma apropriação conceitual equivocada pelos estudantes. Segundo Reis (2001), tais problemas podem ser entendidos como

- 1) Quando se resume a continuidade de uma função a um processo de, dado um ε , encontrar um δ , está se caracterizando não a continuidade em si, mas uma “correspondência” entre os dois elementos δ e ε ;
- 2) Nos termos apresentados na definição, uma linha, no caso, o gráfico da função contínua, é considerada um conjunto de pontos, para os quais se verifica isoladamente a continuidade, explicitando uma visão discreta e não-holística;
- 3) Logo, por ressaltar uma idéia de correspondência e ser apresentada pontualmente, a definição não contempla a essência da “continuidade natural” de uma função, concebida por Euler ao caracterizar uma função contínua como sendo “a curva descrita pelo movimento livre de uma mão através do plano cartesiano” (REIS, 2001, p. 77).

Esse equívoco certamente está relacionado à uma compreensão geral do conceito de Continuidade. Ao nos atentarmos para o conceito de Continuidade Global, comumente nos afastamos do ambiente de ensino do Cálculo e nos aproximamos da Análise. O conceito de Continuidade Global é relacionado ao de “Função Contínua em um conjunto aberto do conjunto dos números reais. Quer dizer, uma função tal que a imagem inversa de qualquer conjunto aberto é um conjunto aberto” (PINEDA, 2012, p. 28). O que essa forma de compreensão intrinsecamente evoca é o cerne de fundamentação da Continuidade a partir da construção conceitual dos Números Reais com Dedekind. A apropriação desse tipo de generalização exige o domínio sobre os critérios estabelecidos na correspondência biunívoca entre os elementos do conjunto numérico e a reta real, conforme descrito no capítulo anterior (Extrato 11).

Esse nível de generalização nos leva a entender a Continuidade Global como o universal na determinação dialética singular-particular-universal, uma vez que se configura como uma síntese das transformações históricas no desenvolvimento da Continuidade. No entanto, sua abordagem em sala de aula exige o domínio de estruturas formais pelos estudantes e, em função disso, normalmente é relegada para os anos finais de cursos de formação superior (APARICIO; CANTORAL, 2003).

Assim, o que podemos perceber é que existe um problema cíclico que tem afligido o ambiente diadático-pedagógico da Continuidade. A valorização da Continuidade Pontual, cujo tratamento se configura como mais operacional e acessível aos estudantes, tende a provocar problemas com a apropriação conceitual da Continuidade, enquanto que uma

abordagem da Continuidade Global exige certo domínio de um aparato lógico-simbólico pelos estudantes. Partindo do pressuposto que essa relação deve ser compreendida essencialmente como dialética, a saída para esse imbróglio é a consideração da interação singular-particular-universal, cuja particularidade se encontra no par dialético rigor-intuição.

Sobre isso, a Continuidade Pontual carrega em si os traços de universalidade da Continuidade, uma vez que para seu pleno entendimento é necessária uma elaboração conceitual sobre a teoria dos conjuntos numéricos (COBIANCHI, 2001). E, historicamente, a singularidade na Continuidade Pontual, a partir das obras de Cauchy e do movimento de aritmetização da análise, serviu de elemento mobilizador para a elaboração de uma teoria sobre os Números Reais por Dedekind.

Dessa forma, a particularidade que mediatiza essa relação se concretiza na relação entre os conceitos de rigor e intuição. Ao longo da produção histórica da Continuidade, vimos que o pensamento intuitivo serviu de base para a construção do Cálculo, assim como a busca pela fundamentação rigorosa do conhecimento foi combustível para a criação da Análise. A partir desse contexto, o que se pôde perceber foi a dicotomização de tais conceitos em âmbito pedagógico, ocasionando em problemas significativos ao contexto do ensino do Cálculo e da Análise (REIS, 2001) e, em especial, da Continuidade.

Importante ressaltar que o rigor aqui é entendido como algo que reflete rigidez e inflexibilidade, ou melhor, um padrão inflexível a ser seguido (BICUDO, 1992). Nesse sentido, o pensamento rigoroso na matemática pode ser entendido como resultado de uma atividade intelectual na busca pela formalização de conceitos, baseados num padrão inflexível. Já a intuição está voltada para a caracterização de um pensamento mais natural e instintivo, cuja estrutura goza de certa liberdade pautada em aspectos mais sensoriais e aplicáveis (REIS, 2001).

É necessário distanciar da intuição a ausência de sistematização do pensamento. O pensamento intuitivo é imediato, mas aciona relações advindas de experiências acumuladas pelo indivíduo ao longo do tempo. Já o rigor se estabelece como uma estratégia de formalização dos conceitos abastados de relações ingênuas e sensoriais. Segundo Bicudo (1996), “do equilíbrio de duas tendências resulta sua estabilidade pelos tempos fora: de um lado, a diferenciação, força natural, espontânea, desagregadora; de outro, a unificação, força coercitiva, disciplinante, conservadora” (BICUDO, 1992, p. 2).

Em acordo com as questões apontadas na seção 3 (três), Reis (2001) afirma que as propostas curriculares do Cálculo e da Análise “refletem um relação desigual e dicotômica

entre rigor e intuição na apresentação dos conteúdos, ocorrendo uma primazia do primeiro elemento deste par tensional em detrimento do segundo” (REIS, 2001, p. 195). Em âmbito educacional, a necessidade histórica de fundamentação rigorosa dos conhecimentos tem se convertido em objetivo da ação pedagógica, em detrimento do pensamento intuitivo, resultando em problemas na apropriação conceitual pelos estudantes.

Esquecem-se os que se exprimem desse modo relativamente ao rigor que a intuição é construída no tratamento cotidiano das questões e que a “segurança” da intuição, baseada na familiaridade com as questões tratadas, se esboroa de encontro a situações novas, que ultrapassem os limites daquelas que a ajudaram a se construir. Aí, então, o rigor é fundamental para liberar tais situações de tudo o que seja essencial e, desse modo, preparar o terceiro terreno em que vicejará uma nova intuição. É por essa tensão dialética entre intuição e rigor que se sobe na espiral do conhecimento matemático. Mesmo que não percebamos, a intuição está impregnada do rigor que colaborou nas possibilidades de sua criação. É o equilíbrio das tendências de DIFERENCIAÇÃO (intuição) e UNIFICAÇÃO (rigor). Não há avanço de uma sem a outra. Essa é a função do rigor: não apenas sancionar a intuição, mas também possibilitar a sua construção (BICUDO, 1992, p. 3).

Para além da visão dicotômica que tende a provocar uma anulação dos dois tipos de pensamento, é no entendimento sobre a dialética na interação rigor-intuição que se estabelece o desenvolvimento do pensamento matemático. Essa interação pode ser compreendida como

- 1) O movimento de rigorização não pode iniciar-se antes do movimento de intuicionalização;
- 2) O rigor pode ser concebido como uma grandeza que varia em função da intuição, sendo esta última uma variável independente, enquanto que o rigor é uma variável dependente;
- 3) Como nenhum movimento de intuicionalização se processa em um estado de ausência absoluta de rigor, quando o movimento de intuicionalização se inicia, ele já atua sobre o movimento de rigorização, a partir de um certo patamar diferente de zero. (REIS, 2001, p. 203).

Isso traz resultados significativos para a compreensão da relação pontual-geral de constituição da Continuidade. Vários trabalhos apontam para a significação do pensamento intuitivo da Continuidade com referência ao seu desenvolvimento histórico (HITT, 1994; VÁSQUEZ *et al*, 2000; APARICIO; CANTORAL, 2003; PINEDA, 2012; JAYAKODY; ZAZKIS, 2015). As manifestações desse pensamento pelos estudantes normalmente recorrem ao sentido de Continuidade em relação à constituição de uma curva (geométrica) que não possui saltos, ou seja, um objeto é dito contínuo se não possui nenhum tipo de interrupção. Uma expressão corriqueira sobre isso é a possibilidade de se desenhar uma curva ou gráfico sem levantar o lápis do papel.

Segundo Landa e Uriza (2011), isso permite considerar que os estudantes tendem a atribuir sentidos voltados para uma ideia intuitiva de Continuidade Global, apesar de não mencionarem qualquer tipo de correspondência com conjuntos numéricos.

Nesse sentido, uma curva seria caracterizada por meio das conexões ou continuidades de sua trajetória. Assim, dizemos que a continuidade pontual surge como resultado das patologias da continuidade global. A noção de continuidade pontual ou funções contínuas em pontos foi desenvolvida em estreita relação com a forma como os conceitos de função e continuidade são concebidos (LANDA e URIZA, 2011, p. 12, tradução nossa).

Ao dizer que a ideia de Continuidade Pontual surge de patologias (ou anomalias) da Continuidade Geral, Landa e Uriza (2011) fazem alusão à elaboração de uma consciência sobre a existência de pontos problemáticos na continuidade, ou melhor, da Descontinuidade Pontual. Assim, no que se refere às manifestações intuitivas pelos estudantes, a necessidade de abordagem da Continuidade Pontual se estabelece como resultado da produção de significados sobre a Continuidade Global e a Descontinuidade Pontual, num sentido distinto ao apresentado na Figura 2. Além disso, a formalização rigorosa da Continuidade Pontual exige tanto a compreensão de uma correspondência entre os pontos da curva e o conjunto numérico de formação da função, quanto a significação de uma expressão algébrica que a constitui.

Assim, aspectos conceituais da Continuidade Global (geral) passa a se configurar como uma relação fundamental para o estudo do comportamento de uma função e para a formalização da Continuidade Pontual (pontual) via Limite. Esse processo tende a focalizar o ensino centrado na valorização da construção lógico-histórica da Continuidade e menos em sua operacionalização.

Portanto, por meio da consideração de elementos sobre rigor-intuição, é possível se pensar no modo como a Continuidade Pontual e a Continuidade Global estão dialeticamente relacionadas. Entendemos que a síntese da relação pontual-geral se constitui como necessidade do tratamento sobre os nexos conceituais mencionados anteriormente e na condução de uma organização do ensino com vistas à sua apropriação.

5.5. Aspectos Conclusivos

Ao longo da jornada de análise lógico-histórica da Continuidade foi possível perceber o modo como o pensamento se manifesta e se transforma. A compreensão das necessidades e a busca de estratégias que passa a satisfazê-las, permitiu a determinação das relações essenciais na construção deste conceito. Em particular, vimos que estas relações se

configuram nos pares dialéticos comensurável-incomensurável, contínuo-discreto, infinito-infinitésimo, permanência-fluência, pontual-geral e rigor-intuição.

A consideração dessas relações como nexos conceituais carrega em si a significação de elementos fundamentais ao processo de organização do ensino que se objetiva na apropriação conceitual pelos estudantes. Dessa forma, pensar em estratégias eficazes para uma abordagem didático-pedagógica da Continuidade, perpassa necessariamente pelo reconhecimento e tratamento com seus nexos conceituais. Em alusão ao levantamento realizado anteriormente (Seção 3), podemos perceber que a realidade educacional atual carece de mudanças significativas.

No que tange a categoria contínuo-discreto, de modo geral, o que se percebe é ausência de sua abordagem em todos os níveis de ensino da matemática no Brasil (BROLEZZI, 1996; REZENDE, 2003; DIAS, 2007). Um dos aspectos que atestam tal afirmação é a incapacidade dos estudantes de diferentes níveis e de professores em manifestar o entendimento sobre o processo de construção (e definição) dos Números Reais. Segundo Rezende (2003), essa incapacidade decorre, entre outros fatores, dessa ausência (ou insuficiência) durante a formação escolar e universitária.

Como já apontado anteriormente por Cobianchi (2001), esse tipo de situação conduz a problemas na apropriação da construção dos conjuntos numéricos, cuja ideia se baseia na ampliação dos naturais para a formação dos inteiros, dos inteiros para a formação dos racionais, da formação dos irracionais via negação dos racionais e, por fim, a constituição dos Reais como um aglomerado dos demais conjuntos. De acordo com Caraça (1958) esse problema ocorre em decorrência da negligência no tratamento contínuo-discreto no processo de construção dos conjuntos numéricos e, em especial, de uma abordagem sobre a Continuidade.

Outra negligência também pode ser compreendida com relação à abordagem de infinito-infinitésimo. Por via de regra, o que se percebe também é a ausência de tratamento adequado das distintas formas de construção do infinito em diferentes níveis de ensino (REZENDE, 2003; AMADEI, 2005; BELMONTE; MODESTO, 2011; HITT, 2013). Ao analisar as manifestações de estudantes e professores, Belmonte e Modesto (2011) apontam para a prevalência de visões intuicionistas do infinito por estudantes e de abordagens potencialista do infinito em sala de aula. Além disso, discorrem sobre a ausência de um tratamento adequado sobre as diferenças intrínsecas entre Infinito Potencial e Atual em cursos de Cálculo e Análise, sobretudo na formação de professores. Isso induz à existência de

problemas relacionados ao domínio de temas tão profundos e necessários para a apropriação de diferentes conceitos, entre eles, a Continuidade.

Diferentemente das categorias anteriores, no que se refere à relação permanência-fluência é possível perceber uma recorrência sobre temas ligados à abordagem dos conceitos de Função e Variável no ensino básico e superior (SOUSA, 2004; NÚÑEZ *et al*, 2015; VALLEJO; PINEDA, 2016). Em alguma medida, isso pode ser entendido como decorrência histórica em que a Função passou a ser compreendida como conceito central para o desenvolvimento do Cálculo.

Apesar dessa centralidade, Núñez *et al* (2015) chamam a atenção para os problemas relacionados às distintas formas de definição de uma função manifestadas pelos estudantes na compreensão deste conceito. Para exemplificar, as definições recorrentes podem ser entendidas como uma associação com um par ordenado (coordenadas); como uma correspondência única entre pares de elementos (incluindo elementos de conjuntos numéricos); como representação geométrica (gráfico – sem relação com uma expressão analítica); entre outras. Aliada a essas questões, também podem ser percebidas distintas formas de entendimento sobre o termo Variável. Segundo os autores, normalmente tais dificuldades estão relacionadas às diferentes formas com que estes conceitos são trabalhados em sala de aula e distanciados de uma abordagem formal integradora.

Em alguma medida, somado aos resultados apontados por Núñez *et al* (2015) e com referência à breve descrição histórica de construção da Função⁵⁵, ressaltamos que sua apropriação conceitual perpassa pelo tratamento adequado de suas relações essenciais, entre elas a permanência-fluência.

Em síntese, tais afirmações sobre o contexto pedagógico endossam a necessidade apontada em nossa análise sobre a importância de nos atentarmos para os nexos conceituais da Continuidade. Através deles se torna possível a elaboração de propostas de ensino que visem o pleno desenvolvimento da capacidade psíquica dos estudantes.

⁵⁵ Uma vez que não se configura como foco de nossa análise, ressaltamos que a compreensão dos nexos conceituais da Função carece de uma análise lógico-histórica mais profunda e voltada para tal.

6. Considerações Finais

O contexto de surgimento e desenvolvimento desta pesquisa é marcado pela necessidade de se pensar em alternativas didático-pedagógicas para o ensino do Cálculo. Frente a essa necessidade, as mudanças ocorridas no processo de investigação se voltam para o reconhecimento do movimento lógico-histórico da Continuidade enquanto possibilidade concreta de se promover uma organização do ensino com vistas à apropriação conceitual pelos estudantes.

Nesse processo, inserimo-nos num movimento incessante de ressignificação dos conhecimentos sobre a Continuidade e, conseqüentemente, sobre sua importância na formação dos sujeitos. Advindos de uma realidade educacional que tende a suprimir as relações históricas na abordagem do conhecimento matemático, a jornada de investigação sobre o desenvolvimento deste conceito nos permitiu construir também uma nova concepção acerca do ensino e da aprendizagem.

Essa jornada teve início com a realização de uma síntese sobre as bases teórico-metodológicas que sustentam o movimento lógico-histórico e que estão assentadas no materialismo histórico-dialético. No processo de síntese, os autores utilizados nos conduziram para o entendimento de que a interação entre o lógico-histórico da Continuidade se estabelece a partir da dialética pensamento-linguagem-atividade e da compreensão sobre os modos de produção do conhecimento. O resultado deste processo foi não só a criação de condições objetivas suficientes para a sistematização da metodologia de pesquisa, como também a desconstrução da forma como concebíamos a história e sua relação com a realidade objetiva. Ao passo que avançávamos no entendimento sobre a necessidade de superação de uma visão tradicionalista, também nos apropriávamos de um modo particular de compreensão materialista da história.

Nessa perspectiva, cristaliza-se a concepção de que é somente através da compreensão da historicidade no desenvolvimento da Continuidade que se torna possível o conhecimento de suas relações essenciais, ou melhor, de seus nexos conceituais. Isso nos leva a reconhecer também a necessidade de uma organização do ensino que se estruture com base nestas relações.

Assim, é sobre esse contexto que se tornou possível a estruturação da metodologia de pesquisa, dividida em Análise Documental das pesquisas sobre ensino de Continuidade e a Análise Histórico-Epistemológica de obras historiográficas da matemática.

A realização da Análise Documental acerca das pesquisas que tem como objeto de investigação o ensino de Continuidade permitiu o entendimento sobre o modo como este conceito tem sido concebido em âmbito educacional e a identificação de relações importantes para o processo de ensino e aprendizagem. Em geral, percebemos que há a ausência de tratamentos de temas ligados à Continuidade no ensino básico e, no que compete ao ensino superior, a prevalência de abordagens com ênfase no caráter técnico e operacional, via definição de Continuidade Pontual.

Em alguma medida, essa forma de organização curricular tende a relegar o tratamento da Continuidade a um segundo plano. Vimos que uma concepção geral da Continuidade abrange não só as definições de Continuidade Pontual, Função Contínua e Descontinuidade, com referência ao estudo do comportamento das funções, como também a elaboração conceitual de Números Reais, Conjuntos Numéricos, Função, Limite, entre outros. Essa afirmação aponta para aspectos importantes sobre as dificuldades manifestadas pelos estudantes na apropriação da Continuidade, uma vez que, na atual conjuntura do ensino, se percebe a ausência de uma abordagem necessária sobre seus nexos conceituais. Além disso, sua amplitude alcança níveis tão elementares que esboça a necessidade de sua abordagem ainda no ensino básico, levando em consideração o grau de maturidade psíquica dos estudantes.

Essa percepção sobre a Continuidade só se concretiza inserida no contexto de valorização de sua historicidade. Nesse sentido, foi através da efetivação de uma Análise Histórico-Epistemológica que se tornou possível o estabelecimento das relações essenciais para o desenvolvimento e apropriação da Continuidade. Essa forma de condução da investigação histórica permitiu o reconhecimento da dialética entre o lógico e o histórico.

No âmbito do lógico, foi possível identificar as mudanças do pensamento em sua relação com a estruturação de uma linguagem lógico-formal própria da Matemática. Vimos que as soluções para uma compreensão de Número, Infinito e Movimento, no cerne do desenvolvimento da Continuidade, se concretizaram com o desenvolvimento de um aparato instrumental simbólico, capaz de elucidar entraves no âmbito da lógica. Em nossa análise, as mudanças ocorridas ao longo desse processo percorreram desde suas primeiras manifestações com a reta geométrica no pensamento grego, resultado das dificuldades de percepção da relação contínuo-discreto, até sua definição proposta por Dedekind.

Já no âmbito do histórico, as transformações do pensamento puderam ser determinadas a partir de características sobre o modo de produção em cada período histórico. A ligação

estabelecida entre as forças produtivas e as relações de produção pôde ser percebida por meio da identificação das condições objetivas na produção do pensamento que, por sua vez, se constituem a partir das necessidades advindas de um contexto social, econômico e científico, particular de cada época. Assim, as mudanças lógicas na produção da Continuidade se constituíram como resultado histórico da atividade humana frente aos anseios de uma sociedade em transformação.

Importante ressaltar que a realização desse processo só se tornou possível a partir da análise de diferentes obras historiográficas. Isso decorre da compreensão sobre os diferentes modos de produção de cada obra que tendem a valorizar características singulares na descrição histórica da Matemática. Foi sob a ótica de diferentes olhares para o desenvolvimento da Continuidade que se pôde acessar informações importantes sobre suas relações essenciais. Isso nos leva a concordar com Radford (2011) que quanto mais informações históricas advindas de diferentes fontes historiográficas, maiores são as possibilidades para o professor na elaboração de uma organização do ensino voltada para a aprendizagem conceitual dos estudantes.

Apesar disso, é preciso reconhecer os fatores limitantes desse processo que estão ligados à valorização de uma história europeizada. Em alguma medida, tais fatores podem ser entendidos, entre outros, a partir de duas situações: 1) as análises históricas se limitam ao estudo das informações presentes nas obras analisadas que, em nosso caso, tendem a valorizar o contexto europeu, e 2) a fundamentação do pensamento matemático, sobretudo como resultado do processo de aritmetização da análise, sofreu forte influência das condições objetivas advindas das mudanças sociais, culturais e econômicas dos países em ascensão capitalista na Europa.

Tais fatores apontam para a importância de se investigar o modo como relações sobre a Continuidade se desenvolveram no seio de outros contextos históricos e como isso pode ter contribuído para a determinação deste conceito. De qualquer forma, esse tipo de abordagem da Continuidade avança aos objetivos desta pesquisa, mas aponta para uma lacuna a ser preenchida por futuros trabalhos.

Outro fator importante diz respeito também às lacunas históricas presentes no desenvolvimento de nossa Análise Histórico-Epistemológica. Sobre isso, antes de tudo, é necessário retomarmos que durante esse processo não objetivamos realizar uma produção historiográfica sobre a Continuidade, apesar de efetuarmos uma descrição de episódios históricos em alguns momentos do texto. O foco da análise se configurou na identificação de

relações essenciais a partir da apresentação e reflexão sobre os elementos tensionadores. Isso exigiu que nossos olhares se atentassem aos momentos reveladores de necessidade e condições objetivas da produção do pensamento em cada historiografia, resultando na valorização de determinados contextos e na desconsideração de outros. Alguns exemplos de momentos que foram pouco abordados (ou suprimidos) podem ser entendidos como no desenvolvimento do pensamento algébrico por Viète, com influência de produções advindas de povos árabes e chineses, e na construção dos Números Reais com Georg Cantor (1845-1918).

Entendemos que a escolha pela valorização da análise de determinados episódios em detrimento de outros, foi um processo necessário para a concretização desta pesquisa. Certamente, a completude das relações no desenvolvimento da Continuidade envolve a análise acurada de todo evento histórico que contribui para sua constituição. No entanto, isso remete ao reconhecimento dos limites desta empreitada investigativa e não empobrece as reflexões aqui levantadas. Pelo contrário, tais limitações também apontam para questões a serem enfrentadas em futuros trabalhos.

A consideração dessas limitações, em geral, denota a complexidade em lidar com a investigação histórica da Continuidade. Percebemos que se debruçar sobre as etapas de desenvolvimento deste conceito implica se debruçar também sobre a própria história do Cálculo.

Portanto, para discorrermos sobre os resultados alcançados, retomamos a pergunta norteadora desta pesquisa estabelecida anteriormente: *Quais são as relações essenciais estabelecidas no movimento lógico-histórico do conceito de Continuidade que podem se configurar como nexos conceituais a partir da realização de uma Análise Documental em confluência com a Análise Histórico-Epistemológica?*

Frente ao que foi exposto ao longo deste trabalho, estabelecemos como nexos conceituais os pares dialéticos *comensurável-incomensurável*, *discreto-contínuo*, *infinito-infinitésimo*, *permanência-fluência*, *pontual-geral* e *rigor-intuição*. Estas relações se firmam como uma síntese das transformações lógicas e históricas do conhecimento ocorridas ao longo de tempo e que resultaram na formalização da Continuidade. Ressaltamos que os nexos conceituais aqui são compreendidos a partir de uma interação dialética entre conceitos, pois refletem o modo particular de produção do pensamento que ocorre nos processos de contradição, complementação e síntese.

O reconhecimento dessas relações conduz para a ressignificação do modo como a Continuidade tem sido abordada em ambiente educacional. No que tange o contexto do ensino básico, a consideração dos nexos comensurável-incomensurável, contínuo-discreto e permanência-fluência se configura a partir de sua potencialidade para o tratamento de diferentes conceitos relegados a este período da formação escolar. Resguardada a abordagem de acordo com o nível de conhecimento dos estudantes em cada etapa, a valorização destas relações possibilita que o ensino da matemática se objetive na apropriação conceitual.

Particularmente no ensino superior, com base no movimento lógico-histórico da Continuidade, o que se percebe é a necessidade de mudanças na organização curricular do Cálculo. Para aclarar esse posicionamento, retomamos que a tese que sustenta esta pesquisa se assenta na perspectiva de que *é através do movimento lógico-histórico que se efetiva a determinação dos nexos conceituais da Continuidade como aspecto fundamental para sua abordagem em sala de aula, com vistas ao desenvolvimento psíquico dos sujeitos*. Nesse sentido, defendemos que os nexos conceituais se estabeleçam como ponto de partida para a organização do ensino da Continuidade e, conseqüentemente, do próprio Cálculo.

Como mencionamos anteriormente, assentada na perspectiva de educação humanizadora, uma possibilidade concreta para a efetivação dessa mudança está numa organização do ensino pautada no conceito de Atividade Orientadora do Ensino (MOURA, 2000) e no desenvolvimento de Situações Desencadeadoras da Aprendizagem (SILVA, 2018).

Assim, as perspectivas futuras se efetivam a partir da necessidade da criação de propostas de intervenção pedagógica como o intuito de investigar o processo de apropriação dos nexos conceituais da Continuidade pelos estudantes, por meio de Situações Desencadeadoras da Aprendizagem. Estas propostas podem ser conduzidas tanto com estudantes de diferentes níveis (Básico e Superior), quanto para a formação continuada de professores. Uma alternativa para sua concretização é a realização de projetos de ensino, pesquisa e extensão a serem desenvolvidos em sala de aula, monitorias, tutorias, etc.

Por fim, a construção e o desenvolvimento desta pesquisa se constituíram também como processo de formação docente. As mudanças sobre as formas de concepção da Continuidade também ocasionaram transformações em nossa percepção sobre o ensino e aprendizagem da Matemática. Junto com a necessidade de implantação de alternativas para as aulas de Cálculo, instaura-se ao mesmo tempo a responsabilidade de conduzir as ações educacionais objetivadas na apropriação conceitual.

Referências Bibliográficas

- ABREU, R. P. D. **Investigando os Conceitos de Limite e Continuidade a partir da Perspectiva Lógico-Histórica**. 2010. 65f. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2010.
- ABREU, R. P. D.; ANDRADE, J. A. A. Investigando o Conceito de Limite e Continuidade a partir da Perspectiva Lógico-Histórica. In X Encontro Nacional de Educação Matemática. 2010, Salvador. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Salvador, 2010.
- AHN, J. **The Impact of Calculus Reform on the Teaching of Calculus in British Columbia Secondary School**. 2004. 103f. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Faculty of Education, Simon Fraser University. Burnaby, Canadá, 1993.
- ALVES, D. O. **Ensino de Funções, Limites e Continuidade em Ambientes Educacionais Informatizados: Uma proposta para cursos de Introdução ao Cálculo**. 2010. 153f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.
- AMADEI, F. L. **O Infinito: um obstáculo no estudo da Matemática**. 2005. 112f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.
- ANTUNES, C. Acerca da Indissociabilidade entre Categorias Trabalho e Educação. **Motrivivência**, Ano XXII, n. 35, p. 41-61, Dez. 2010.
- APARICIO, E.; CANTORAL, R. Sobre la noción de continuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica. **Epsilon** 56, v. 17, p. 341-347, 2003.
- APARICIO, E.; CANTORAL, R. Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**, v. 9, n. 1, p. 7-30, 2006.
- ARAUJO, E. S. **Da Formação e do Formar-se: a atividade de aprendizagem**. 2003. 183f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- ARAUJO, E. S. Contribuições da Teoria Histórico-Cultural à Pesquisa em Educação Matemática: a atividade orientadora de pesquisa. In: 35ª Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação. 2012, Recife. **Anais do 35ª Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação**. Recife, 2012.
- ARMELLA, L. E. M.; WALDEGG, G. Varyación y Representación: del número al continuo. **Educacion Matemática**. Cinvestav, México, v. 7, Abr., 1995.
- BACHA, M. D. L.; SAITO, F. Peirce e Cantor: um estudo preliminar sobre continuidade e infinitesimais. **Revista Brasileira de História da Matemática**. v. 14, n. 28, p. 01-23, 2014.
- BARUFI, M. C. B. **A Construção/Negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. 203f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BELMONTE, J. L.; MODESTO, S. Modelos Intuitivos del Infinito y Patrones de Evolución Nivelar. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**, v. 14, n. 2 Jul., 2011.

BEZERRA, W. L. **O Uso de Ferramentas Pedagógicas para o Ensino de Cálculo De uma Variável em Cursos Semipresenciais**: o caso do Instituto Federal do Ceará. 2015. 62f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

BICUDO, I. Análise Não-Standard. **Bolema**, Rio Claro, v. 7, n. 8, 1992.

BOYER, C. B. **The History of the Calculus and its Conceptual Development**. Nova York: Dover, 1949.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1974.

BRASIL, MEC. **Parecer CNE/CES nº 1.302/2001**. Brasília, 2001. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>> Acesso em 10/09/2019> Acesso em 07/11/2019.

BRASIL, MEC. **Base Nacional Comum Curricular. Ensino Fundamental**. Brasília: Secretaria de Educação, 2018.

BROLEZZI, A. C. **A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática**. 1996. 96f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1958.

CARDOSO, C. F. História e Paradigmas Rivais. In: CARDOSO, C. F.; VAINFAS, R. **Domínios da História**: ensaios de teoria e metodologia. 5ª. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 1997. p. 19-51.

CAVASOTTO, M. **Dificuldades na Aprendizagem de Cálculo: o que os erros cometidos pelos alunos podem nos informar**. 2010. 166f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

CEDRO, W. L. **O Espaço de Aprendizagem e a Atividade de Ensino: o clube de matemática**. 2004. 282f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

CEDRO, W. L. **O Motivo e a Atividade de Aprendizagem do Professor de Matemática: uma perspectiva histórico-cultural**. 2008. 242f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo. São Paulo. 2008.

CEDRO, W. L.; MOURA, M. O. Experimento didático: un camino metodológico para la investigación en la educación matemática. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. v. 22, p. 53-63, Jun., 2010.

COBIANCHI, A. S. **Estudos de continuidade e números reais: matemática, descobertas e justificativas de professores**. 2001. 433f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

D'AMBRÓSIO, U. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 97-115.

- DAVIDOV, V. **La Enseñanza Escolar y El Desarrollo Psíquico**. Moscou: Editorial Progreso, 1988.
- DIAS, A. L. M. Tendências e Perspectivas Historiográficas e Novos Desafios na História da Matemática e da Educação Matemática. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v. 14, n. 3, p. 301-321, 2012.
- DIAS, M. D. S. **Formação Conceitual da Reta Real: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica**. 2007. 253f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.
- DIAS, M. D. S.; SAITO, F. Interface entre História da Matemática e Ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. In IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. 2009. Brasília. **Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Brasília, 2009.
- DONEL, M. L. H. **Dificuldades de Aprendizagem em Cálculo e a Relação com o Raciocínio Lógico-Formal: uma análise no ensino superior**. 2015. 125f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual Paulista, Marília, 2015.
- ESCHER, M. A. **Dimensões Teórico-Metodológicas do Cálculo Diferencial e Integral: perspectivas históricas e de ensino e aprendizagem**. 2011. 222f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora Unicamp, 2004.
- FERREIRA, N. S. D. A. As Pesquisas Denominadas "Estado da Arte". **Educação & Sociedade**. Campinas, ano 23, v. 23, n. 79, p. 252-272, Ago., 2002.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percurso teóricos e metodológicos**. 3ª ed. Campinas: Autores Associados, 2009.
- GUILLEN, M. **Pontes para o infinito: o lado humano das matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1987.
- HITT, F. Teacher's difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, Framingham, v. 16, 1994.
- HITT, F. El Infinito en Matemáticas y el Aprendizaje del Cálculo: infinito potencial versus infinito real. **El Cálculo y su Enseñanza**, Cinvestav, v. 4, 2013.
- JAYAKODY, G.; ZAZKIS, R. Continuous Problem of Function Continuity. **For the Learning of Mathematics**, FLM Publishing Association, Fredericton, New Brunswick, Canada, v. 1, n. 35, 2015.
- KARLSON, P. **A magia dos números**. São Paulo: Globo, 1961.
- KOPNIN, P. V. **Fundamentos Lógicos da Ciência**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1972.
- KOPNIN, P. V. **A Dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.
- LANDA, E. A.; URIZA, R. C. The social construction of continuity: A socioepistemological approach. **Online Submission**, 2011. Disponível em:

<https://pdfs.semanticscholar.org/ff56/5f851bc8ea940eb44add7a3e379aa6b8abcc.pdf?_ga=2.156217019.1882576606.1572841886-535821581.1565962340> Acesso 04/11/2019.

LANNER DE MOURA, A. R. Movimento Conceitual em Sala de Aula. In XI Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM. 2003. Blumenau. **Anais da XI Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM**, Blumenau, 2003.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, conciencia, personalidad**. Havana: Pueblo y Educación, 1983.

LIMINI, M. R. Elementos Históricos y Psicogenéticos en la Construcción del Continuo Matemático. **Educación Matemática**, Cinvestav, v. 6, Abr., 1994.

MARX, K.; ENGELS, F. **A Ideologia Alemã I (Feuerbach)**. São Paulo: Ciências Humanas, 1979.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre História e Educação Matemática**. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Campinas, Campinas, 1993.

MORENO, L. E.; WALDEGG, G. The Conceptual Evolution of Actual Mathematic Infinity. **Educational Studies in Mathematics**. v. 22, p. 211-231, 1991.

MORETTI, V. D.; RADFORD, L. História do Conceito culturalmente significada e a Organização da Atividade de Ensino de Matemática. In: VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. 2015. Pirenópolis. **Anais do VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Pirenópolis, 2015.

MOURA, M. O. **O Educador Matemático na Coletividade de Formação: uma experiência com a escola pública**. Tese (Livre Docência em Educação) - Universidade de São Paulo. São Paulo. 2000.

MOURA, M. O. *et al.* A Atividade Orientadora de Ensino e Aprendizagem. In: MOURA, M. O. D. **A Atividade Pedagógica na Teoria Histórico-Cultural**. Brasília: Liber Livro, 2010. p. 81-109.

NOBRE, S. Leitura Crítica da História: reflexões sobre a história da matemática. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 10, n. 3, p. 531-543, 2004.

NÚÑEZ, R. P.; SUARÉZ, C. H.; LEAL, P. R. Compresión del Concepto de Función en los Primeros Cursos de Educación Superior. **El C áculo y su Enseñanza**, Cinvestav, v. 6, 2015.

OLIVEIRA, B. A Dialética do Singular-Particular-Universal. In: ABRANTES, A. A.; SILVA, N. R. D.; MARTINS, S. T. F. **Método Histórico-Social na Psicologia Social**. Petrópolis: Vozes, 2005. p. 25-51.

OLIVEIRA, D. C. D. **Indícios de Apropriação dos Nexos Conceituais da Álgebra Simbólica por Estudantes do Clube de Matemática**. 2014. 255f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

PAGANI, É. M. L.; ALLEVATO, N. S. G. Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil. **Vidya**. Santa Maria, v. 34, n. 2, p. 61-74, jul./dez. 2014.

PALANCH, W. B. D. L.; FREITAS, A. V. Estado da Arte como método de trabalho científico na área de Educação Matemática: possibilidades e limitações. **Perspectivas da Educação Matemática**. Campo Grande, v. 8, 2015.

- PANOSSIAN, M. L. **Manifestações do Pensamento e da Linguagem Algébrica de Estudantes: indicadores para a organização do ensino**. 2008. 132f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- PANOSSIAN, M. L. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para a constituição do objeto de ensino da álgebra**. 2014. 318f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.
- PASSOS, C. L. B. *et al.* Desenvolvimento profissional do professor que ensina Matemática: Uma meta-análise de estudos brasileiros. **Quadrante**, v. XV, n. 1, 2006.
- PINEDA, M. D. Un problema con la concepción de la continuidad de una función. **El Cálculo y su Enseñanza**, Cinvestav, v. 4, 2012.
- POLITO, A. M. M.; SILVA FILHO, O. L. A Filosofia da Natureza do Pré-Socráticos. **Cabernos Brasileiros de Ensino de Física**, v. 30, p. 323-361, Ago., 2013.
- RADFORD, L. Elementos de una teoría cultural de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, p. 103-129, 2006.
- RADFORD, L. **Cognição Matemática: história, antropologia e epistemologia**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- REIS, F. D. S. **A Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 2001. 302f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Campinas, Campinas, 2001.
- REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2013. 468f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- ROMANOWSKI, J. P.; ENS, R. T. As pesquisas denominadas do tipo "estado da arte" em educação. **Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 6, p. 37-50, set./dez., n. 19, 2006.
- RYBNIKOV, K. A. **Historia de las Matematicas**. Moscou: Editora Mir, 1987.
- SAITO, F. **História da Matemática e suas (Re)Construções Contextuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- SAITO, F.; DIAS, M. D. S. Interface entre História da Matemática e Ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. 2009. Brasília. In IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. **Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Brasília, 2009.
- SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico**. São Paulo: Cortez, 2007.
- SILVA, M. M. D. **A Apropriação de Aspectos Constituintes da Atividade Pedagógica por Professores de Matemática em Formação Inicial**. 2018. 302f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2018.
- SILVA, R. S. **Os Índícios de um Processo de Fomação: a organização do ensino no Clube de Matemática**. 2013. 256f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

SOUSA, M. D. C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógica-histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental**. 2004. 253f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

SOUSA, M. D. C. **Atividade de Ensino na Formação de Professores: unidade dialética entre teoria e prática**. 2017. 112f. Relatório (Pós-Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

SOUSA, M. D. C. O movimento lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino de matemática. **Obutchénie: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**. Uberlândia, v. 2, n. 1, p. 40-68, jan./abr., 2018.

SOUSA, M. D. C.; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do Movimento Lógico e Histórico à Organização do Ensino: o percurso dos conceitos algébricos**. Campinas: Mercado de Letras, 2014.

TALL, D.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**. v. 12, p. 151-169, 1981.

TRIVIÑOS, A. N. D. S. **Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 2008.

VÁSQUEZ, M. S.; ASTUDILLO, M. T. G.; ESTEBAN, C. L. Concepciones de los Alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación sobre Límit Funcional e Continuidad. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matematica Educativa**, México, v. 3, 2000.

VIANA, N. **A Consciência da História: ensaios sobre o materialismo histórico-dialético**. Rio de Janeiro: Achiamé, 2007.

VIGOTSKI, L. S. **A Formação Social da Mente**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

Apêndices

Apêndice 1: Relação de Teses e Dissertações Analisadas

Produto	Título	Autor	Instituição	Programa	Ano
Dissertação (D1)	Um Olhar sobre as Ideias Matemáticas em um Curso de Cálculo: a produção de significados para a continuidade	BARTO, Maria Cecília Arena Lopes	PUC-SP	Estudos Pós-Graduados em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2004
Dissertação (D2)	Ensino de funções, limites e continuidade em ambientes educacionais informatizados: uma proposta para cursos de introdução ao cálculo	ALVES, Davis Oliveira	UFOP	Profissionalizante em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2010
Dissertação (D3)	Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de limites e continuidade em Cálculo I.	ABREU, Osvaldo Honório de	UFOP	Profissionalizante em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2011
Dissertação (D4)	Matemática inclusiva, situações didáticas e tecnologia: um estudo de caso no ensino superior	TOSTES, Adriana Maria Balena	USS	Mestrado Profissional em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2013
Dissertação (D5)	Uma análise das provas unificadas de Cálculo I da UFRJ	CUNHA, Sandro Rene	UFRJ	Mestrado em ENSINO DE MATEMÁTICA	2013
Tese (T1)	Estudos de continuidade e números reais: matemática, descobertas e justificativas dos professores	COBIANCHI, Antônio Sérgio	Unesp	Pós- Graduação em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2001
Tese (T2)	Um tratamento para os números reais via medição de segmentos: uma proposta, uma investigação	PASQUINI, Regina Célia Guapo	Unesp	Pós- Graduação em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2007
Tese (T3)	Formação da Imagem Conceitual da Reta Real: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica	DIAS, Marisa da Silva	USP	Programa de Pós-Graduação em EDUCAÇÃO	2007
Tese (T4)	Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino	GRANDE, André Lucio	PUC-SP	Estudos Pós-Graduados em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2013
Tese (T5)	Evolução do Conceito de Função Integrável	ROCHA, IRA ASSIS	Anhanguera - SP	Doutorado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2016
Tese (T6)	Teorias Cognitivas do Pensamento Matemático Avançado e o Processo de Construção do Conhecimento: um estudo envolvendo os conceitos de limite e continuidade	MESSIAS, Maria Alice Vasconcelos Feio	UFPA	Pós-Graduação em EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	2018

Apêndice 2: Relação de Artigos Encontrados

Produto	Título	Autor	Revista	Ano
Artigo (A1)	Limits, Continuity and Discontinuity of functions from two points of view: that of the teacher and that of the students	Hitt, Fernando.; Lara-Chavez, Hector	Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics	1999
Artigo (A2)	Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de Orientação Universtária sobre limite funcional e continuidade	Vazquez, Sierra Modesto.; Astudillo, Maria T. Gonzales; Esteban, Carmem Lopes	Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa	2000
Artigo (A3)	Compleitud y continuidad revisadas através de 23 Siglos	Bergé, Analia; Sessa, Carmen	Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa	2003
Artigo (A4)	Sobre la noción de continuidad puntual: un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica	Aparicio, E.; Cantoral, R.	Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa	2003
Artigo (A5)	Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad pontual.	Aparicio, Eddie; Cantoral, Ricardo	Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa	2006
Artigo (A6)	Examining continuity, descontinuity of a function by using GeoGebra	Dikovic, Ljubica	Teaching Mathematics and Computer Science	2009
Artigo (A7)	Un problema con la concepción de la continuidad de una función	Pineda, Miguel Delgado	El Cálculo y su Enseñanza	2012
Artigo (A8)	Peirce e Cantor: um estudo preliminar sobre continuidade e infinitesimais	Bacha, Maria de Lourdes; Saito, Fumikazu	Revista Brasileira de História da Matemática	2014
Artigo (A9)	Connecting the Dots: Rediscovering Continuity	Camenga, Kristin A.; Yates, Rebekah B. Johnson	Mathematics Teacher	2014
Artigo (A10)	O conhecimento esperado sobre limites e continuidade a partir de uma análise das provas unificadas de Cálculo I na UFRJ	Cunha, Sandro Renè; Pinto, Márcia Maria Fusaro	Educação Matemática e Pesquisa	2014
Artigo (A11)	Discussões sobre a Relação entre Limite e Continuidade de uma Função: investigando Imagens Conceituais	Messias, Maria Alice de Vasconcelos Feio; Brandemberg, João Cláudio	Bolema: Boletim de Educação Matemática	2015

Artigo (A12)	Continuous Problem Of Function Continuity	Jayakody, Gaya; Zazkis, Rina	For the Learning of Mathematics	2015
Artigo (A13)	A Conceptual and Procedural Research on the Hierarchical Structure of Mathematics Emerging in the Minds of University Students: An Example of Limit-Continuity-Integral-Derivative	Dane, Arif; Çetin, Ömer Faruk; Bas, Fatih; Sagirli, Meryem Özturan	International Journal of Higher Education	2016

Apêndice 3: Ficha Catalográfica

Ficha Catalográfica		
Identificação	Título	
	Autor(a)	
	Orientador(a)	
	Ano	
	Instituição	
	Natureza (Dissertação ou Tese)	
	Palavras-Chave	
	Disponível em	
Aspectos Teórico-Metodológicos	Problemática	Principais Pontos:
		Apresentou o/a Problema/Questão de Investigação: ()Sim ()Não
		Descrição:
		Está Explícito/a? ()Sim ()Não
		Contexto de Elaboração do/da Problema/Questão: ()Pela Literatura ()Vivência pessoal ou profissional (memorial) ()A partir de resultados de avaliação ()Não explica como chegou ()Outro:
		Comentários:
		Objetivos
	Referencial teórico	Descrição:
		Estão Explícitos no trabalho: ()Sim ()Não
		Comentários:
	Contexto da Pesquisa	Principais Pontos da Justificativa/Relevância:
		Principais Teorias ou Teóricos Acionados:
		Comentários:
	Contexto da Pesquisa	O Objeto de Pesquisa Está Explícito: ()Sim ()Não
Descrição do Objeto:		

		O Contexto da Pesquisa foi definido: ()Sim ()Não	
		Os Sujeitos/Materiais da Pesquisa Foram Caracterizados: ()Sim ()Não ()Não se Aplica	
		Descrição dos Sujeitos/Materiais:	
		Apresentou Critérios de Seleção dos Sujeitos/Materiais: ()Sim ()Não ()Não se Aplica	
		Descrição dos Critérios:	
		Apresentou Cuidados com a Ética na Pesquisa: ()Sim ()Não ()Não se Aplica	
	Características da Pesquisa		Natureza: ()Teórica ()Empírica ()Outra:
			Abordagem: ()Qualitativa ()Quantitativa ()Quali-Quantitativa ()Não especificada () Outra:
			Abordagem está Explícita no Texto: ()Sim ()Não
			Tipo: ()Pesquisa da/sobre a Própria Prática ()Pesquisa Colaborativa ou com Grupos Colaborativos ()História Oral ou de Vida ()Estado da Arte, Metanálise ou Estado do Conhecimento
		()Pesquisa Bibliográfica ou Documental ()Estudo de Caso	
		()Pesquisa-Ação ()Pesquisa Participante ()Não especificado ()Outro:	
		Descrição da Organização da Pesquisa:	
		Comentários:	
Coleta/Produção de Dados		Instrumentos: ()Entrevista (estruturada, semi-estruturada ou narrativa) ()Questionário (fechado, aberto ou misto)	
		()Diário de campo ()Relato ou Narrativa (oral ou escrito) () Audiogravação ou Videogravação	
		()Observação ()Registro de Atividades, Avaliações Escritas ou Fichas de Registro Escrito	
		()Protocolos ()Documentos Oficiais ou Acadêmicos (livros, artigos, etc.)	
		()Documentos de Arquivos Pessoais ou Profissionais (Notas de Aulas, Diários, etc.) ()Não especificado ()Outros:	
		Comentários:	
Análise dos Dados		Procedimentos: ()Presença de Categorias, Eixos ou Unidades ()Análise de Conteúdo ()Análise de Discurso ()Não especificados	
		()Outros:	
		Transcrição das Categorias/Eixos/Unidades (caso existam):	
		O referencial adotado para as análises são contemplados nos demais momentos da pesquisa: ()Sim ()Não	

Apêndice 4: Organização dos Dados Coletados nas Pesquisas

Trabalho	Problemática	Objeto	Objetivo(s)	Principais Teóricos	Metodologia	Análise	Resultados
D1	Constituiu-se como tema de pesquisa a Continuidade de Funções de uma Variável Real e o problema é a investigação da Produção de Significados para a Continuidade de Funções de uma Variável Real por alunos/professores de um curso de pós-graduação em Educação Matemática.	Produção de Significados para a Continuidade de Funções de uma Variável Real por alunos de um curso de Pós Graduação em Educação Matemática (pag. 2)	O objetivo deste estudo é investigar a dinâmica da produção de significados para a Continuidade de Funções de uma Variável Real , por alunos em um curso de Pós Graduação e na disciplina de tópicos de Cálculo (Resumo).	Noção de metáfora conceitual da Teoria da Cognição Corporificada , proposta por LAKOFF e NÚÑEZ, da importância dos argumentos no discurso de sala de aula, do Modelo da Estratégia Argumentativa – MEA , proposto por FRANT e CASTRO e da definição de produção de significados proposta por LINS em seu Modelo Teórico dos Campos Semânticos – MTCS (Resumo).	Trata-se de uma pesquisa qualitativa, do tipo estudo de caso , que foi realizada numa universidade em São Paulo. As aulas do curso , envolvendo os dez alunos e a professora do curso, foram filmadas em vídeo, utilizando-se duas câmeras. [...] Ao todo foram 5 encontros de 3 horas.	Análise por meio de episódios.	Os resultados apontam que, em sala de aula, a produção de significados para Matemática pode estar apoiada em fatos não Matemáticos, por exemplo, a autoridade do professor ou de algum integrante do grupo têm um papel importante nessa produção (Resumo). Muito ainda temos para caminhar, o conceito de Continuidade pode ser abordado de outros modos e um, complementar o outro. O papel da tecnologia neste cenário deve ser mais investigado (pag. 113-114).

D2	<p>O ensino de Funções tem-se caracterizado por uma abordagem algébrica que privilegia as notações e as regras específicas de construção de gráficos sem, entretanto, explorar alguns conceitos, propriedades e aplicações importantes associadas aos diversos tipos de Funções trabalhadas nos Ensinos Médio e Superior. Como a utilização de Tecnologias Informacionais e Comunicacionais pode modificar esse cenário? [...] elaboramos a seguinte questão de investigação que irá nortear nossa dissertação de mestrado: “Como a utilização de Tecnologias Informacionais e</p>	<p>O uso das TIC's no ensino de Funções, Limite e Continuidade.</p>	<p>Apresentar e discutir a utilização de TIC's no Ensino de Cálculo como uma tendência da Educação Matemática; elaborar e implementar atividades exploratórias voltadas para o ensino de Funções, Limites e Continuidade em um laboratório de informática, na perspectiva da Educação Matemática no Ensino Superior; acompanhar e avaliar a interação dos alunos no laboratório de informática, durante o processo de ensino e aprendizagem de Funções, Limites e Continuidade (pag. 15).</p>	<p>O Uso das TIC's no ensino da matemática</p>	<p>A pesquisa teórico-bibliográfica contemplou trabalhos relacionados à Educação Matemática no Ensino Superior e à utilização de Tecnologias da Informação e Comunicação. A pesquisa de campo foi realizada com alunos do 1º período de Licenciatura em Matemática da UFOP, matriculados na disciplina de “Introdução ao Cálculo”, no 2º semestre letivo de 2009. Foram elaboradas e avaliadas 10 atividades exploratórias sobre diversos conteúdos de Funções, Limites e Continuidade, implementadas em laboratório de informática com a utilização do software GeoGebra (Resumo).</p>	<p>Não especificou.</p>	<p>As considerações apontam para a possibilidade de visualização, a abertura para conjecturas, o dinamismo do ambiente de aprendizagem e a abordagem intuitiva de conceitos como as principais contribuições da utilização de TIC's no ensino introdutório de Cálculo. Outro destaque interessante foi a mudança na postura dos alunos, tanto nas atividades no laboratório como na sala de aula e em suas concepções a respeito da utilização de TIC's no ensino de Cálculo (Resumo).</p>
----	--	---	---	--	--	-------------------------	--

	Comunicacionais pode contribuir / redirecionar o ensino de Funções, Limites e Continuidade em disciplinas de Introdução ao Cálculo?" (pag. 15).						
--	---	--	--	--	--	--	--

D3	Que relações entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual podem ser manifestadas pelos alunos nos processos de ensino e de aprendizagem de “Limites e Continuidade” em Cálculo I? (p. 19)	As manifestações dos estudantes sobre intuição e rigor e imagem e definição conceitual sobre os conceitos de limite e continuidade.	Mais geralmente, investigar os processos de ensino e de aprendizagem de “Limites e Continuidade” em Cálculo I , na perspectiva da Educação Matemática no Ensino Superior; - Mais especificamente, levantar hipóteses e categorias de análise de algumas A1:H4 estabelecidas por alunos entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual nos processos de ensino e de aprendizagem destes tópicos. (p. 19)	Pensamento matemático avançado (TALL). Relação entre Rigor e Intuição (FREUDENTHAL e REIS). Relção entre Imagem Conceitual e Definição Conceitual (TALL e VINNER).	Implementação e análise de situações em sala de aula.	faremos um levantamento quantitativo e qualitativo das respostas, tentando tanto quanto possível inferir impressões sobre as respostas dos sujeitos de pesquisa (p. 67).	Para a continuidade de uma função, a principal imagem conceitual evocada nos remete à visão clássica de Newton sobre continuidade : não haver interrupção ou salto na função, ou seja, a possibilidade de se traçar / esboçar o gráfico da função sem interrupções. Novamente, não há qualquer imagem conceitual relativa à existência de limites ou ao valor da função em pontos (p. 95). Ao associar a continuidade de uma função no ponto apenas à existência de um valor da função nesse ponto, os alunos recorrem a uma imagem conceitual bastante intuitiva, mas sem “consultar” sua definição formal (p. 96). Novamente, uma inferência emergente de nossa pesquisa é que a notação rigorosa para continuidade mais uma vez se revelou totalmente sem sentido para os alunos, os quais não conseguiram minimamente identificar, nas definições formais, elementos intuitivos no estudo da continuidade que deveriam retomar imagens conceituais evocadas no início da atividade e também na atividade de Limites (p. 97).
----	--	---	---	--	---	--	---

<p>D4</p>	<p>Como o uso das ferramentas computacionais pode viabilizar a aprendizagem matemática, no Ensino Superior, servindo-se de meio inclusivo? (p. 14)</p>	<p>o uso de ferramentas computacionais proporciona e oferece às pessoas com limitação motora novas maneiras de acesso ao conteúdo da aula e, além disso, pode minimizar o déficit de aprendizagem trazido pelo descontrole motor (p. 16).</p>	<p>Produzir conhecimento teórico sobre o tema da Tecnologia Assistiva; Apresentar um estudo de caso que retrate uma situação didática com uso da Tecnologia Assistiva na vida de um estudante com limitação motora (p. 14).</p>	<p>Através de um estudo de caso e à luz da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, serão analisados os momentos didáticos vivenciados entre os sujeitos da pesquisa. Para os procedimentos metodológicos, apoiamos-nos na Engenharia Didática de Artigue, moldando a estrutura acadêmica desse trabalho (p. 14)</p>	<p>A pesquisa de campo foi realizada com um aluno acometido de paralisia cerebral, do 1º período de Administração de Empresas de uma universidade privada, na cidade do Rio de Janeiro, matriculado na disciplina de “Matemática I”, no 2º semestre letivo de 2012. Foram elaboradas e analisadas nove atividades didáticas sobre diversos conteúdos de Funções, Limites e Continuidade, realizadas com auxílio dos softwares Winplot, Excel e GeoGebra (Resumo).</p>	<p>Não especificou o método para análise, mas a dividiu em Análises preliminares, análise à priori e análise à posteriori.</p>	<p>aluno participou de forma ativa e crítica, durante a aplicação das atividades, e demonstrou desenvolvimento no raciocínio matemático. Observamos que isso ocorreu naturalmente e foi se firmando enquanto o aluno se familiarizava com os softwares apresentados (p. 77). acreditamos que o uso das tecnologias assistivas contribuiu de forma significativa para a autonomia e a inclusão escolar da pessoa com dificuldades motoras, em particular, dos indivíduos que possuem sequelas da paralisia cerebral (p. 78).</p>
------------------	--	---	---	--	---	--	---

<p style="text-align: center;">D5</p>	<p>Que implicações podemos destacar a partir da opção de unificar o curso de cálculo I como forma de assegurar uma avaliação uniforme sobre todos os tópicos do programa da disciplina, no que diz respeito ao conhecimento matemático esperado pela Instituição?</p>	<p>Este trabalho investigou como e quais tópicos do conteúdo de Cálculo I estão sendo abordados nos enunciados e nas resoluções das questões das provas em um Sistema de Curso Unificado, revelando a importância atribuída a alguns tópicos em relação à outros, expressa na frequência com que foram cobrados em prova (p. 122).</p>	<p>investigar, por meio da análise das questões que compõem as provas unificadas de Cálculo I e das suas soluções, que tópicos do conteúdo de Cálculo I vêm merecendo destaque nos últimos anos, bem como qual a forma com que estes são abordados, avaliando ainda a importância atribuída a alguns conceitos em relação a outros, expressa nas escolhas dos temas a serem avaliados, nas estratégias para solução dos problemas propostos, na frequência com que questões enfocando determinados tópicos da ementa ocorrem nas diversas</p>	<p style="text-align: center;">Adotamos a perspectiva da Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard, pelo seu potencial de analisar a realidade matemática que emerge de práticas específicas que se relacionam com a transmissão de conteúdo (resumo).</p>	<p>Em nossa proposta de pesquisa, solicitamos acesso e permissão para analisar os arquivos de provas de Cálculo I disponíveis e a distribuição dos conteúdos de Cálculo I apresentado na seção 6 (matéria da prova) do índice de assuntos na página da disciplina. Assim sendo, faremos uma análise das tarefas presentes nessas provas e de suas resoluções propostas, a fim de obtermos uma visão da organização praxeológica, mesmo que parcial, do Curso Unificado de Cálculo I, considerado como instituição, no sentido da TAD (p. 44).</p>	<p style="text-align: center;">A pesquisa propõe uma análise documental, das questões propostas e soluções apresentadas em exames divulgados em site, técnica que “ busca identificar informações factuais nos documentos a partir de questões ou hipóteses de interesse.” (ANDRÉ; LÜDKE, 1986, p.46-47).</p>	<p>Da organização matemática observada, destacamos que o bloco técnico é altamente valorizado e, mesmo que seja possível identificarmos a tecnologia nas soluções divulgadas, não há preocupação em deixá-la mais visível, mas sim de mantê-la em um segundo nível de importância em relação à técnica (Resumo).</p>
--	---	--	---	---	---	---	--

			avaliações do curso e as relações entre elas ao longo do semestre (p. 26).				
T1							
T2	O ensino dos números reais na disciplina de análise. Em particular, estratégias via medição de seguimentos.	É importante ressaltar que, embora o objeto de estudo deste trabalho seja o Material utilizado no curso, há de se considerar todo o cenário no qual ele foi utilizado, dessa forma,	investigar a utilização dessa Proposta, buscando pelas possibilidades desse tratamento para o número real, via medição de segmentos, para cursos de Formação de Professores de Matemática em	Vários autores da educação matemática. Nenhuma linha especificada.	Observação das aulas e entrevistas com estudantes.	Não especificou.	Introduzir os números reais a partir de um processo de medição é uma oportunidade para que outras noções e conceitos possam ser explorados, em particular, noções e conceitos básicos da Análise, como convergência, continuidade, completude, etc., e mesmo que indiretamente, aqueles relacionados a outros campos da Matemática, como a Álgebra e a Geometria e,

		tenho este cenário como parte dos dados sob os quais se veste esta pesquisa (p. 59).	uma sala de aula na disciplina Análise (p. 58).				sobretudo, a História da Matemática. Os conhecimentos dos números e da sua gênese devem constituir um objeto prioritário na formação do professor de Matemática de forma a lhe dar uma capacidade mais ampla para uma abordagem mais rica sobre números na prática docente (p. 165).
--	--	--	---	--	--	--	--

T3		<p>O trabalho constitui-se na formação da imagem conceitual do professor, na inter-relação indivíduo-coletividade, a fim de compreender a relação da imagem conceitual com o desenvolvimento da reta real na perspectiva lógico-histórica desse conceito (resumo).</p>	<p>investigar a formação da imagem conceitual da reta real pelo professor de matemática na relação indivíduo-coletividade nos remeteu a um curso de formação contínua descrito acima (p. 25).</p>	<p>Os aportes teórico-metodológicos do materialismo dialético e da atividade contribuíram para a compreensão do movimento da imagem conceitual (Resumo).</p>	<p>Os procedimentos metodológicos fundamentam-se nas contribuições teóricas da pesquisa-ação, cujo problema social se configura no campo do ensino e da aprendizagem da matemática. Os sujeitos são educadores matemáticos: pesquisadora e professores do Ensino Fundamental e Médio. O desenvolvimento da imagem conceitual e aspectos de seu ensino realizou-se por meio de um curso de formação contínua para professores organizado sob os pressupostos da atividade orientadora de ensino e da perspectiva lógico-histórica do conceito. O curso abordou a transição de um campo numérico a outro, com foco na reta real, partindo da formulação do sistema de numeração posicional e a transição para o</p>	<p>A análise da imagem conceitual orientou-se pela reprodução dos principais nexos conceituais no desenvolvimento do pensamento numérico.</p>	<p>A intertextualidade, como recurso que proporciona evidenciar o movimento da imagem conceitual dos sujeitos na exposição e análise dos dados, possibilitou perceber que a dialética do pensamento numérico transita entre discreto-denso-contínuo, comensurável-incomensurável, finito-infinito, cardinalidade-ordenação. Neste movimento do pensamento revelam-se dilemas, a negação de um conhecimento, negação da negação, lógica dialética e lógica formal e as categorias dialéticas: forma e conteúdo, aparência e essência, análise e síntese, empírico e teórico, lógico e histórico, intuição e dedução. Conclui-se que o desenvolvimento da imagem conceitual individual de conceito matemático, ocorre na relação indivíduo-coletividade e, pode ser coerente com o significado científico elaborado historicamente por meio da realização de uma atividade orientadora de ensino fundamentada em pressupostos lógico-históricos do conceito (Resumo).</p>
----	--	--	---	--	---	---	---

					número natural, seguindo a fração como número racional, o irracional resultante da incomensurabilidade e o contínuo numérico – a reta real – como a captação numérica do movimento.(Resumo).		
--	--	--	--	--	---	--	--

T4	<p>no âmbito da Educação Matemática, quanto ao ensino e aprendizagem do Cálculo, pesquisas realizadas no Brasil e em outros países, tais como França, Inglaterra e Estados Unidos evidenciaram a incompreensão dos alunos no tocante à falta de ligação existente entre os conceitos de integral e derivada no estudo do TFC em um curso de Cálculo (Resumo)</p>	O TFC e o ensino de Cálculo	<p>realizar um estudo didático e epistemológico do TFC, apresentando como resultado a elaboração e análise de uma intervenção de ensino que procurou fazer emergir a relação entre as operações de integração e derivação e sob quais condições essa relação se estabelece, o que constitui a essência do teorema (Resumo).</p>	<p>Como referencial teórico foram utilizadas as ideias ligadas ao uso da intuição e do rigor na construção do conhecimento matemático, segundo Henri Poincaré (1995), bem como as categorizações da intuição e as inter-relações entre os componentes: formal, algorítmico e intuitivo nas atividades matemáticas, de acordo com Efraim Fischbein (1991) (Resumo)</p>	<p>A pesquisa é qualitativa, apresentando como procedimentos metodológicos a elaboração de uma intervenção de ensino, bem como a análise das resoluções das questões efetuadas por 14 estudantes do curso de Tecnologia de uma faculdade pública do Estado de São Paulo com o auxílio do software GeoGebra (Resumo)</p>	<p>Para análise das resoluções, além do referencial teórico citado, foram adotados os trabalhos de Tall (1991) sobre o papel da visualização no ensino do Cálculo e as inter-relações com a intuição e o rigor (Resumo).</p>	<p>Como resultados, destaca-se que explorar os conceitos de integral inicialmente por meio da ideia de acumulação, simultaneamente trabalhando-se com a questão da variação dessa acumulação, mostrou-se uma estratégia pertinente para que os estudantes compreendessem a relação mútua entre integração e derivação como operações inversas uma da outra, assim como permitiu que os estudantes interiorizassem que tal relação, como ocorreu na gênese do TFC, realizou-se posteriormente ao estudo dessas operações. Além disso, pode-se concluir que o conceito de função constituiu-se na linha condutora que norteou o entendimento dos estudantes sobre o TFC. Não obstante, as dificuldades da compreensão de continuidade de uma função, um dos pontos centrais do teorema, também foi uma questão que emergiu dos resultados da intervenção de ensino. A análise mostrou melhores resultados por parte dos estudantes nas atividades matemáticas, quando o eixo das interações entre os componentes algorítmico, formal e intuitivo é trabalhado</p>
----	--	-----------------------------	---	---	---	--	--

							<p>em conjunto com o eixo relacionado à questão da visualização no ensino e aprendizagem do Cálculo. No final das tarefas, observou-se que os estudantes começaram a mostrar indícios da preocupação de relacionar a intuição com o rigor na construção do conhecimento matemático (Resumo).</p>
--	--	--	--	--	--	--	--

T5	O ensino de Cálculo por meio da História da Matemática	A História da matemática e o conceito de funções integráveis.	descrever e analisar a evolução dos conceitos de integrais e funções integráveis por três diferentes e complementares pontos de vista: o histórico, o filosófico e o matemático (Resumo).	O referencial teórico filosófico está apoiado na Semiótica de Peirce (SANTAELLA, 1995) e no Princípio da Complementaridade aplicado à Educação Matemática (OTTE, 1993, 2012) (Resumo).	Pesquisa Bibliográfica.	Não especificado.	Ao longo deste trabalho esperamos ter dado um exemplo de que “o progresso das Ciências e da Matemática foi concebido, até certo grau, como um processo de desenvolvimento de seus objetos e de sua particular noção de realidade”. Nesse processo de desenvolvimento do conceito estudado, percebe-se claramente a mudança das intensões dos conceitos de funções integráveis, e, isso se deu sempre graças a um jogo de complementaridades entre a Aritmética e a Álgebra, entre Geometria e a Álgebra, entre o contínuo e o discreto, entre a intuição e o formalismo, sempre na perseguição incansável de generalizações do conceito de funções integráveis.
----	--	---	---	--	-------------------------	-------------------	---

Apêndice 5: Organização dos Dados Coletados nos Artigos

Trabalho	Conceitos Abordados	Principais Linhas Teóricas	Metodologia	Resultados
A1	Limite, Continuidade e Descontinuidade de funções	Aproximação Socioepistemológica de Investigação em Educação Matemática	Análise de uma lição escrita por um dos professores do experimento e as entrevistas tiradas de um aluno em sete sessões durante um tempo total de seis horas e meia.	1) Problemas na definição de limite abordada pelo professor; 2) Dificuldades dos estudantes em se apropriar so conceito de função e, consequentemente, de Continuidade e Descontinuidade; 3) Necessidade de abordagens acerca do uso da história da Matemática;
A2	Limite de uma Função e Continuidade	Análise quantitativa e qualitativa do questionário	Análise e categorização das justificações utilizadas por 145 estudantes por meio de questionário.	1) Dificuldade apresentada pelos estudantes sobre os conceitos de limite e continuidade mesmo depois de seu ensino; 2) Manifestação de sentidos atribuídos pelos estudantes diferentes da formalização dos conceitos. 3) Necessidade de abordagens acerca do uso da História da Matemática;
A3	Completeness, Continuidade e Números Reais	Análise Histórico-Epistemológica	Investigação Didática	1) Necessidade de abordagens acerca do uso da História da Matemática para o ensino de Números Reais; 2) A existência de vários níveis de noção sobre os conceitos a serem levados em consideração pelo professor.
A4	Continuidade Pontual de uma Função com Varável Real, Continuidade Global e Descontinuidade	Socioepistemologia	Desenvolvimento de atividade exploratória com 8 estudantes de Engenharia Maecatrônica, Informática e Biologia.	1) Dificuldade dos estudantes na compreensão do conceito de continuidade; 2) Abordagem do conceito de continuidade pontual mediante descontinuidade pontual e continuidade global; 3) Necessidade da recorrência aos aspectos históricos;
A5	Continuidade Pontual de uma Função com Varável Real, Continuidade Global e Descontinuidade	Socioepistemologia	Desenvolvimento de atividade exploratória com 30 estudantes de Engenharia Maecatrônica, Informática e Biologia.	1) A importância da significação de diferentes manifestações do aprendizado pelos estudantes para o ensino; 2) Dificuldade dos estudantes na compreensão do conceito de continuidade; 3) Abordagem do conceito de continuidade pontual mediante descontinuidade pontual e

				continuidade global;
A6	Continuidade e Descontinuidade de uma Função	Uso das TICs no ensino da Matemática	Estudo teórico.	1) As potencialidade de uma abordagem da Continuidade e Descontinuidade de um função mediante software GeoGebra
A7	Função Contínua, Continuidade Global, Continuidade Pontual e Descontinuidades	Não mencionada.	Estudo teórico.	1) Dificuldades dos estudantes na aprendizagem mediante formas de apresentação da Continuidade em sala de aula; 2) Problemas sobre a apropriação da Continuidade Pontual de uma Função mediante sua relação com a Continuidade Global; 2) Novas abordagens sugerem mudanças qualitativas na apropriação do conceito.
A8	Continuidade e Infinitesimais	Novas perspectivas historiográficas	Estudo teórico.	1) A recorrência à história como aspecto propositivo para mudanças qualitativas em sala de aula.
A9	Continuidade de uma Função e a Reta Real	Não mencionada.	Análise de Currículos.	1) A importância de se abordar a Continuidade de uma função nos currículos do ensin médio.
A10	Limite e Continuidade	Teoria Antropológica da Didática	Análise de instrumentos de avaliação das disciplinas de Cálculo I da UFRJ	1) Valorização da técnica e do formalismo em detrimento de uma abordagem intuitiva;
A11	Limite e Continuidade de uma Função	Imagens Conceituais e Definições Conceituais	Estudo exploratório	1) Dificuldade dos estudante evocadas mediante imagens conceituais; 2) Problemas na relação estabelecida entre Limite e Continuidade; 2) Valorização da História da Matemática;
A12	Continuidade de uma Função de uma Variável Real	Não mencionada.	Análise de materiais didáticos	1) Dificuldades dos estudantes em evocar os conceitos formais sobre a Continuidade; 2) Problemas com as definições formas presentes em difrentes fontes analisadas;

A13	Limite, Continuidade, Derivada e Integral	Não mencionada.	Estudo de caso. Aplicação de questionário com 100 estudantes.	1) Dificuldades dos estudantes em evocar as definições formais dos conceitos; 2) Dificuldade manifestada pelos estudantes sobre a apropriação de uma relação estrutural entre os conceitos; 3) Necessidade de Preservação de uma estrutura hierárquica na aprendizagem dos conceitos
-----	---	-----------------	---	--

Apêndice 6: Levantamento de Disciplinas que Abordam a Continuidade nos PPCs

Instiuição	Disciplinas	Objetivo	Ementa
UFSCar	Cálculo Diferencial e Integral A	Desenvolver os conceitos de continuidade e diferenciabilidade de funções de uma variável real. Explorar a derivada como recurso de investigação das propriedades de funções. Utilizar a interpretação de derivada como medida de movimento nas suas mais variadas aplicações. Analisar sua aplicação como taxa de variação caracterizando-a como recurso fundamental no estudo de fenômenos evolutivos. Explorar recursos computacionais algébricos, numéricos e de visualização em suas aplicações ao cálculo diferencial de funções de uma variável.	Limites de funções e de seqüências: conceituação intuitiva. Continuidade de funções reais de uma variável. Derivadas e aplicações. Máximos e mínimos. Fórmula de Taylor e aproximação de funções. Método de Newton para o cálculo de zeros de funções e suas aplicações.
	Cálculo Diferencial e Integral C	Desenvolvimento de conceitos e técnicas de seqüências e séries e de cálculo diferencial de funções de várias variáveis. Desenvolvimento de habilidade na resolução de problemas aplicados. Interação com programas computacionais e exploração de seus recursos para cálculos numéricos, simbólicos e construção de gráficos. Desenvolver a extensão natural, de conceitos do Cálculo diferencial e Integral de funções reais de uma variável, às funções de várias variáveis.	Séries numéricas e de funções. Aplicações de séries na resolução de equações diferenciais ordinárias. Funções de várias variáveis. Continuidade e diferenciabilidade. Gradiente. Máximos e mínimos. Multiplicadores de Lagrange.
	Espaços Métricos	Generalizar o conceito de distância euclidiana. Estabelecer o conceito de continuidade de funções entre espaços métricos e entre espaços topológicos. Reconhecer equivalências isométricas e topológicas entre espaços métricos. Reconhecer as propriedades de compacidade e conexidade bem como suas invariâncias por continuidade. Estabelecer propriedades dos espaços métricos completos.	Métricas e espaços métricos: definições e exemplos. Funções contínuas entre espaços métricos. Conceitos básicos da topologia dos espaços métricos. Conexidade e conexidade por caminhos. Compacidade. Espaços métricos completos: seqüências de Cauchy, convergência e propriedades gerais. Introdução à topologia dos espaços de funções.

	Análise na Reta	Dar tratamento formal à teoria do Cálculo Diferencial e Integral de funções de várias variáveis e de funções vetoriais. Complementar teoria e aplicações do Cálculo Integral de funções de várias variáveis de funções vetoriais, assunto iniciado ao final da disciplina Cálculo Diferencial e Integral D. Desenvolver o exercício da lógica, através da análise e dedução dos resultados.	Topologia do espaço R^n . Continuidade de funções reais de variáveis reais . Diferenciabilidade de funções reais de várias variáveis reais. Fórmula de Taylor. Máximos e Mínimos. Aplicações diferenciáveis de R^m em R^n . Os teoremas da função inversa e da função implícita. Noções sobre os teoremas integrais. O teorema de Gauss-Green no plano. Integrais de superfície. O teorema do divergente. O teorema de Stokes.
UFSCar - Sorocaba	Cálculo Diferencial e Integral 1	Fazer com que os alunos se familiarizem, entendam a importância e a utilidade dos conceitos e técnicas do Cálculo Diferencial e Integral, bem como desenvolvam competência técnica na utilização desses conceitos.	Limite, continuidade, derivada, integral de funções reais de uma variável real. Aplicações.
	Cálculo Diferencial e Integral 2	Compreender a importância e a utilidade dos conceitos e técnicas do Cálculo: equações diferenciais ordinárias, limites, continuidade e diferenciabilidade de funções de várias variáveis; bem como desenvolver competência técnica na utilização de tais conceitos. Ser capaz de lidar com modelagem matemática elaborada mediante equações diferenciais ordinárias.	Equações diferenciais ordinárias. Sistemas de equações diferenciais. Transformada de Laplace. Funções reais de várias variáveis reais: limite, continuidade e diferenciabilidade. Aplicações.
	Introdução à Análise	Ao final da disciplina o aluno deverá ser capaz de compreender formalmente uma construção e as propriedades topológicas do conjunto dos números reais. A partir disso, deverão ser capazes de formular rigorosamente os principais conceitos e resultados do Cálculo Diferencial e de Séries Numéricas.	Números reais. Seqüências e séries numéricas. Topologia da reta. Limite, continuidade e derivada de funções reais de uma variável real.
Unesp - Ilha Solteira	Cálculo Diferencial e Integral I .	Não tivemos acesso	Ementa: Números Reais. Funções. Limite e continuidade . A Derivada. Regras de Derivação. Aplicações da Derivada. Máximos e Mínimos. Primitivas. Integral. Técnicas de Integração. Aplicações da Integral. Fórmula de Taylor. Integra is impróprias. Na carga horária destinada à Prática como Componente Curricular serão discutidas as inter relações dos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral I com os conteúdos ensinados no Ensino Médio e discutida a utilização de materiais pedagógicos existentes na escola e a produção de novos materiais para o ensino da Matemática, a investigação e a busca de soluções para problemas práticos de Matemática e das Ciências em geral, a investigação matemática dentro e fora da sala de aula e a realização de experimentos de ciências que utilizem a matemática como instrumento de expressão, análise e discussão dos resultados.

	Cálculo Diferencial e Integral II .	Não tivemos acesso	Funções de várias variáveis (duas e três). Gráficos. Continuidade. Curvas de nível e superfícies de nível. Derivadas Parciais. Derivadas Direcionais. Plano Tangente. Regra da Cadeia. Fórmula de Taylor. Máximos e Mínimos. Multiplicadores de Lagrange. Áreas. Integr al dupla. Jacobiano. Integral Tripla e Volume. Integrais iteradas. Mudança de coordenadas.
Unesp - Rio Preto	Cálculo Diferencial e Integral I	Estudar os conceitos de limite, continuidade, derivada e integral de funções reais de uma variável real e discutir algumas aplicações desses conceitos.	1. Números reais. Operações e ordem; módulo. 2. Funções reais de uma variável real: conceito; funções afim e quadrática. Inequações envolvendo módulos.funções polinomiais,funções racionais.gráficos e exemplos .composição de funções. 3. Limites e continuidade:conceitos e principais propriedades;limites laterais; limites infinitos; limites no infinito.propriedades das funções contínuas em intervalos fechados.limites fundamentais. 4. Derivadas:conceito e interpretação geométrica;derivadas das funções elementares; regras de derivação; regra da cadeia; derivada da função inversa. Reta tangente e reta normal a um gráfico. Teoremas de Rolle, do valor médio (lagrange) e de cauchy. 5. Aplicações: estudo da variação das funções. Intervalos de crescimento e decrescimento. Pontos críticos, máximo e mínimos. Concavidade. Assíntotas. regras de L'Hopital. 6. Fórmula de Taylor: Aproximação de uma função por seu polinômio de Taylor . Aproximação linear. Diferenciais. 7. Primitiva de uma função : Relação entre funções com derivadas iguais . integral indefinida. 8. Integral definida: Soma e integral de Riemann;propriedades da integral; Teorema fundamental do cálculo; cálculo de Área; Mudança de variável na integral definida. 9. Técnicas de integração: primitivas imediatas, tabela de primitivas;integração por partes e por substituição (mudança de variável); integração de algumas funções racionais ; substituições trigonométricas. Funções dadas por uma integral. Teorema do valor médio para a integral. 10. Integrais impróprias: Convergência e divergência. Critério de comparação.
	Cálculo Diferencial e integral II	Estudar os conceitos de diferencial e integral de funções de duas ou mais variáveis e algumas aplicações desses conceitos.	1. Funções reais de duas ou mais variáveis reais 2. Limite e continuidade 3. Derivadas parciais 4. Diferenciabilidade 5. Aplicações de derivadas 6. Integrais duplas a triplas. Aplicações 7. Funções vetoriais. Curvas planas e espaciais 8. Integrais de linha 9. Teorema de Green 10. Integrais de superfície 11. Teorema de Gauss 12. Teorema de Stokes

	Análise na Reta	Não tivemos acesso	1 – Topologia da Reta 2 – Funções Reais de uma variável real: limite e continuidade 3 – Derivada 4 – Integral de Riemann.
Unesp - Bauru	Cálculo Diferencial e Integral I	Ao término da disciplina o aluno deverá ser capaz de calcular limites e derivadas e aplicar estes conceitos para resolver problemas que envolvam a variação das funções de uma variável real. Cor-relacionar os conceitos fundamentais do cálculo diferencial de funções de uma variável real com os demais tópicos da Matemática da Educação Básica, bem como com o cotidiano das pessoas e ou-tras áreas do conhecimento. Utilizar a calculadora científica e o computador e, dentro do possível, instrumentalizá-los para os Ensinos Fundamental e Médio.	1 Limites 1.1 Definição, propriedades e regras operatórias 1.2 Limites fundamentais 1.3 Continuidade 2 Derivadas 2.1 Definição; interpretação geométrica 2.2 Propriedades e regras operatórias 2.3 Derivada da função composta, da função inversa, da função implícita e de função dada por equações paramétricas 2.4 Derivadas de ordem superior 2.5 Diferencial 2.5.1 Definição e interpretação geométrica 2.5.2 Cálculo de valores aproximados 2.6 Cálculo de limites usando o teorema de L'Hospital 3 Aplicações de Derivadas 3.1 Taxa de variação 3.2 Análise do comportamento de funções 3.2.1 Máximos e mínimos 3.2.2 Teoremas de Rolle, Teorema do Valor Médio 3.2.3 Crescimento, decrescimento, concavidade, ponto de inflexão, assíntotas 3.3 Problemas geométricos, físicos e de economicos 4 Fórmula de Taylor 4.1 Fórmula de Maclaurin
	Funções de Variável Complexa	Estudar as funções de variável complexa, enfocando os aspectos geométricos por meio das transformações do plano complexo. Dar a fundamentação teórica de alguns tópicos do ensino médio; explorar as particularidades das funções de variável complexa em relação às funções reais.	1. Números complexos. 2. Funções de uma variável complexa. Limite e Continuidade. 3. Diferenciabilidade. 4. Teoria de Cauchy.
	Aplicações do Cálculo Diferencial e Integral I	O objetivo do curso é apresentar situações onde a teoria desenvolvida no curso de Cálculo Diferencial e Integral I possa ser aplicada a outras áreas da Ciência como em Biologia, Economia e outras.	1. Aplicações: funções, limites, derivadas, continuidade
	Topologia I	Ampliar a formação dos estudantes quanto à teoria dos conjuntos e familiarização com as estruturas métricas e topológicas e os conceitos decorrentes.	1. Espaços topológicos 2. Base 3. Continuidade 4. Conjuntos Conexos 5. Conjuntos Compactos 6. Espaços métricos completos

	<p>Cálculo Diferencial e Integral III</p>	<p>Que os estudantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> - desenvolvam habilidades algébricas e gráficas para representar e interpretar curvas no plano e superfícies no espaço, com ênfase naquelas definidas implicitamente. - consigam determinar o comportamento local de funções reais de várias variáveis reais através de limites e derivadas. - aprendam resolver problemas geométricos e de otimização mediante derivadas parciais de primeira e segunda ordem. 	<p>1. Funções com valores Vetoriais 1.1 Funções vetoriais. 1.2 Movimento e curvas parametrizadas. 1.3 Comprimento de arco. 1.4 Os vetores tangente unitário e normal principal. 1.5 Curvatura. 2. Espaços Euclidianos: métrica e topologia 2.1 Distância entre pontos no espaço \mathbb{R}^n. 2.2 Conjunto limitado. 2.3 Ponto interior, ponto exterior e ponto da fronteira de um conjunto. 2.4 Conjunto aberto e conjunto fechado. 2.5 Ponto de acumulação e ponto isolado. 2.6 Conjunto compacto em \mathbb{R}^n. 3. Funções reais de duas ou mais variáveis reais 3.1 Definição de função real de n variáveis reais: domínio e contradomínio. 3.2 Imagem e gráfico de uma função de n variáveis reais. 3.3 Conjuntos de nível: curvas de nível em \mathbb{R}^2 e superfícies de nível \mathbb{R}^3. 3.4 Superfícies quádricas: definição, classificação e representação gráfica. 3.5 Superfícies cilíndricas, cônicas e de revolução. 4. Limites e continuidade 4.1 Definição de limite e teorema de unicidade. 4.2 Propriedades algébricas dos limites. 4.3 Limites com restrições e limites por caminhos. 4.4 Limites infinitos. 4.5 Continuidade. 4.6 Existência de valores extremos de uma função contínua num conjunto compacto. 5. Derivadas parciais 5.1 Derivada parcial: definição e interpretação geométrica e propriedades algébricas. 5.2 Derivadas parciais de ordem superior: definição, interpretação geométrica e Teorema de Schwartz. 5.3 Derivada direcional: definição e interpretação geométrica.</p>
--	---	---	---

	Análise Real para a licenciatura	<p>Que os estudantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> - aprimorem conhecimentos e habilidades do formalismo matemático, especialmente no uso de teoremas e na realização de demonstrações de proposições, tanto por indução quanto por contra-dição. - consigam caracterizar o conjunto dos números reais como um corpo ordenado e completo, distinguindo-o de outros conjuntos numéricos. - aprofundem conhecimentos sobre o conceito de limite e saibam aplicá-lo na caracterização e distinção das funções contínuas, as uniformemente contínuas e as diferenciáveis. 	<p>1 Introdução 1.1 Números naturais e princípio de indução. 1.2 Princípio da bivalência e prova por contradição 1.3 Números inteiros. 1.4 Números racionais: estrutura de corpo ordenado, densidade e propriedade Arquimediana. 1.5 Supremo, ínfimo e incompletude dos racionais. 2 Números Reais 2.1 Estrutura de corpo ordenado completo. 2.2 Propriedades da ordem dos reais: lei da tricotomia e propriedade Arquimediana. 2.3 Intervalos de números reais. 2.4 Classificação de números reais: racionais, irracionais, algébricos e transcendentais. 2.5 Conjuntos finitos e infinitos: propriedades. 2.6 Conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis. 2.7 Teoremas de Heine-Borel e de Bolzano-Weierstrass. 3. Sequências e Séries Numéricas 3.1. Limite de uma sequência. 3.2. Limites e desigualdades. 3.3. Teoremas de Bolzano-Weierstrass. 3.4. Sequências divergentes. 3.5. Séries convergentes e absolutamente convergentes. 3.6. Séries divergentes. 3.7. Testes de convergências. 4. Noções de Topologia 4.1. Conjunto aberto. 4.2. Conjunto fechado. 4.3. Ponto de acumulação e ponto isolado. 4.4. Conjunto compacto – Teorema de Heine-Borel. 5. Limite 5.1. Definição de limite. 5.2. Limites laterais. 5.3. Teoremas de existência e unicidade do limite. 111 6. Continuidade 6.1. Definição. 6.2. Funções contínuas em intervalos. 6.3. Funções contínuas definidas em conjuntos compactos. 6.4. Continuidade uniforme. 7. Derivada 7.1. Definição de derivada e sua interpretação geométrica. 7.2. Regras operacionais da derivação. 7.3. Derivada e monotonicidade local. 7.4. Propriedades das funções deriváveis num intervalo..</p>
	Espaços Métricos	<p>reconhecer um conceito generalizado de distância dado pelas métricas; conhecer alguns conceitos básicos dos espaços métricos e topológicos; proceder um refinamento do conceito de continuidade; compreender propriedades dos espaços métricos de compacidade, conexidade e completude; reconhecer algumas propriedades topológicas de \mathbb{R}.E13</p>	<p>1. Espaços Métricos 1.1 Definição 1.2 Subespaços 1.3 Distâncias 1.4 Bolas 1.5 Métricas e normas equivalentes 2. A topologia dos espaços métricos 2.1 Noção de espaço topológico 2.2 Conceitos topológicos 3. Funções contínuas 3.1 Definição e propriedades 3.2 Funções uniformemente contínuas 3.3 Homeomorfismos 4. Espaços conexos 4.1 Definição 4.2 Conexidade por caminhos 5. Espaços métricos completos e compactos 5.1 Espaços métricos completos e compactos 5.2 Compacidade 5.3 Continuidade e compacidade</p>

	Funções de Variável Complexa	<p>Ao término da disciplina, o aluno deverá ser capaz de:</p> <ul style="list-style-type: none"> - perceber a ampliação dos conceitos abordados, em analogia aos já vistos em IR e estabelecer conexões existentes entre eles, além de obter instrumental suficiente para demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra; - analisar possibilidades pedagógicas para o conteúdo "Números Complexos" no Ensino Médio; - considerar elementos de Educação Matemática no tratamento do assunto. 	<p>1 Números Complexos 1.1 Uma breve História dos Números Complexos 1.2 Corpo dos Números Complexos 1.2.1 Corpo dos Números Complexos 1.2.2 Representação Geométrica dos Números Complexos 1.2.3 Números Complexos Conjugados 1.2.4 Módulo de um Número Complexo 1.2.5 Forma Polar 2 Funções de uma Variável Complexa 2.1 Funções de uma Variável Complexa 2.2 Decomposição de uma Função de uma Variável Complexa 2.3 Representação Gráfica de uma Função de uma Variável Complexa 2.4 Funções Elementares 2.4.1 Funções Polinomiais 2.4.2 Funções Racionais Algébricas 2.4.3 Função Exponencial 2.4.4 Funções Trigonométricas Circulares 2.4.5 Funções Hiperbólicas 2.4.6 Função Logarítmica Circular e Hiperbólica 2.4.7 Funções Trigonométricas Inversas 2.4.8 Funções Hiperbólicas Inversas 3 Limites e Continuidade de Funções de Variável Complexa 3.1 Definições e Propriedades 4 Derivada 4.1 Definição e Propriedades 4.2 Equações de Cauchy–Riemann 4.3 Funções analíticas: definição</p>
Unesp - Guaratinguetá	Cálculo Diferencial e Integral I	Não tivemos acesso	Números Reais e Funções. Limite e Continuidade. A Derivada. Aplicações da Derivada. Regra de L'hôpital. A Integral. Técnicas de Integração. Aplicações da Integral definida. Integrais Impróprias.
	Cálculo Diferencial e Integral II	Não tivemos acesso	Funções reais de duas ou mais variáveis reais. Limite e continuidade. Derivadas parciais. Diferenciabilidade. Aplicações de derivadas. Integrais duplas e triplas. Aplicações. Funções vetoriais. Curvas planas e espaciais. Integrais de linha. Teorema de Green. Integrais de superfície.
Unesp - Presidente Prudente	Cálculo Diferencial e Integral I	<p>Construir os conceitos de limite e derivada, compreendendo as inter-relações entre eles e as aplicações práticas dos mesmos na vida cotidiana; perceber, numa visão histórica, a evolução destes conceitos; esboçar gráficos, calcular limites e derivadas e resolver problemas envolvendo estes conceitos; resolver problemas práticos, dando um encaminhamento lógico às ideias, buscando soluções diferenciadas e criativas, isto é, demonstrando habilidades específicas de estratégias de ação; compreender Matemática e ter capacidade para comunicar-se matematicamente; estabelecer relações entre os conteúdos abordados e as outras áreas do conhecimento de modo a utilizar e/ou</p>	Números reais. Funções reais de uma variável real. Limite e continuidade. Derivada. Aplicações de derivadas.

		aplicar os conceitos nessas outras áreas; expressar-se com clareza, precisão e objetividade.	
	Cálculo Diferencial e Integral III	compreender curvas no plano e no espaço; construir o conceito de função de várias variáveis; calcular limites e derivadas de funções de várias variáveis; resolver problemas que envolvem máximos e mínimos de funções de mais de uma variável; compreender Matemática e ter capacidade para comunicar-se matematicamente; estabelecer relações entre os conteúdos abordados e as outras áreas do conhecimento de modo a utilizar e/ou aplicar os conceitos nessas outras áreas; expressar-se com clareza, precisão e objetividade.	Noções topológicas do \mathbb{R}^2 e do \mathbb{R}^3 . Funções vetoriais. Curvas planas e espaciais. Funções reais de duas ou mais variáveis reais. Limite e continuidade . Derivadas parciais. Diferenciabilidade. Aplicações de derivadas.
	Análise Real I	aprofundar os conhecimentos adquiridos nas disciplinas Cálculo Diferencial e Integral I e II, colocando-os de forma a dar uma visão mais construtiva da teoria; apresentar um bom domínio de conteúdos matemáticos, de modo a ter facilidade na transmissão dos conteúdos associados ao Ensino Médio; elaborar argumentações matemáticas, interpretá-las e representá-las graficamente, com clareza, precisão e objetividade; compreender sutilezas teóricas, estimular a capacidade de raciocínio, possibilitando assim, dar continuidade a estudos em nível de pós-graduação.	Conjuntos finitos, enumeráveis e não enumeráveis. Construção dos números reais. Sequências e séries numéricas. Funções: limite, continuidade e derivada
	Funções de Variável Complexa I	apresentar um bom domínio de conteúdos sobre números complexos, que fundamente sua prática docente, na transposição didática desses conteúdos no Ensino Médio; compreender e elaborar argumentações matemáticas no que se refere a funções reais e complexas; ter uma visão histórica dos números complexos; ler criticamente um texto didático sobre números complexos; reconhecer a analiticidade de uma função e utilizá-la na representação integral.	Números complexos. Funções de uma variável complexa: limite e continuidade . Diferenciabilidade. Integração.

	Espaços Métricos	apresentar um bom domínio de conteúdos matemáticos, que fundamente sua prática docente, na transposição didática de conteúdos matemáticos do Ensino Médio; elaborar argumentações matemáticas, interpretá-las e representá-las com clareza, precisão e objetividade; compreender sutilezas teóricas estimulando a capacidade de raciocínio, possibilitando assim, dar continuidade a estudos em nível de pós-graduação; utilizar os conhecimentos matemáticos da disciplina na compreensão do mundo que o cerca, como por exemplo, conceitos de interior, exterior e fronteira de um conjunto qualquer.	Espaços métricos. Conceitos topológicos básicos. Limite e continuidade . Espaços métricos conexos, completos e compactos.
Unesp - Rio Claro	ANÁLISE MATEMÁTICA I	Não tivemos acesso	Corpo dos números reais. Sequências e séries numéricas. Limite, continuidade e derivada de funções reais a valores reais. Fórmula de Taylor.
	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I	Não tivemos acesso	Funções reais de uma variável real. Limite e continuidade . Derivada. Aplicações de derivadas
	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III	Não tivemos acesso	Noções topológicas do R^2 e R^3 . Funções reais de duas ou mais variáveis reais. Limite e continuidade . Derivadas parciais. Diferenciabilidade. Aplicações de derivadas.
	ESPAÇOS MÉTRICOS	Não tivemos acesso	Espaços Métricos. Conceitos topológicos básicos. Continuidade e homeomorfismo. Espaços métricos conexos, conexos por caminhos, completos e compactos.
	FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA I	Não tivemos acesso	Números complexos e plano complexo. Sequências. Funções de uma variável complexa: visualização geométrica. Limite e continuidade . Diferenciabilidade.
Unicamp	Cálculo I	Não tivemos acesso	Intervalos e desigualdades. Funções. Limites. Continuidade . Derivada e diferencial. Integral. Técnicas de integração.
	Cálculo II	Não tivemos acesso	Funções de várias variáveis reais. Fórmula de Taylor. Máximos e mínimos. Integrais múltiplas. Integrais de linha. Teorema da divergência. Teorema de Stokes.
	Análise I	Não tivemos acesso	Conjuntos finitos e infinitos. Números reais. Sequências e séries numéricas. Funções contínuas . Funções deriváveis.

	Introdução à Análise	Não tivemos acesso	Os números reais. Sequências e séries, o número e é irracional; convergência de Cauchy; séries infinitas, testes da comparação, razão e integral; não-enumerabilidade dos números reais, Teorema de Bolzano-Weierstrass, divergência da série harmônica. Funções contínuas: limites, Teoremas de Bolzano, de Weierstrass e do Valor Intermediário, continuidade uniforme . Derivadas, extremos locais, o Teorema do Valor Médio, funções inversas. Integral. O Teorema Fundamental do Cálculo. Aplicações: funções trigonométricas, π é irracional, as funções logarítmica e exponencial, aproximação por polinômios.
USP - São Paulo	Cálculo para Funções de Uma Variável Real I	Estudo da variação de uma grandeza em relação à variação de outra grandeza: a idéia de função. O conceito de taxa de variação média e instantânea: a derivada de uma funções. Técnicas do Cálculo; estudo das aplicações clássicas do Teorema do Valor Médio.	Equações e inequações; definição de função e gráficos; funções polinomiais de primeiro e segundo grau; funções modulares; funções inversíveis; funções exponenciais e logarítmicas; funções trigonométricas e suas inversas. Taxa de variação, velocidade, coeficiente angular da reta tangente; o conceito de derivada em um ponto; a função derivada; aproximações e linearidade local; conceitos intuitivo e definições de limite, de continuidade e de diferenciabilidade; regras de derivação. O Teorema do Valor Médio e suas aplicações. O comportamento de uma função: um estudo qualitativo; o gráfico de uma funções, comportamento no infinito, regras de L'Hospital. Problemas de otimização. Aproximação de funções: fórmula de Taylor com resto de Lagrange.
	Introdução à Análise	Introduzir os conceitos básicos de análise real. Apresentar formalmente a noção de completude dos números reais e suas consequências. Desenvolver atividades de Prática como Componente Curricular. Desenvolver atividades de Prática como Componente Curricular.	Axiomas de corpo ordenado completo. Construção do conjunto dos números reais. Propriedade arquimediana. Propriedade dos intervalos encaixantes. Sequências de Cauchy. Limites de sequências de números reais. Séries numéricas: critérios de convergência. Expansão decimal. Noções de topologia da reta. Limite e continuidade de funções de uma variável real. Função exponencial. Potência de expoente real. Logaritmo. Teorema do Valor Intermediário. Teorema de Weierstrass. Teorema do Valor Médio. Integral de Riemann. Teorema Fundamental do Cálculo. Desenvolvimento de atividades que propiciem ao aluno momentos de reflexão sobre a prática profissional, buscando relações não só entre teoria e prática, mas também nuances de como conteúdos e competências estudados e/ou adquiridos na Universidade podem modificar a visão e consequentemente a vivência cotidiana de um professor da Educação Básica.

	Elementos da Teoria dos Conjuntos	<p>Discutir a questão de ser a teoria dos conjuntos fundamento para a Análise e para as teorias matemáticas em geral. Propiciar ao aluno uma vivência sistemática com o método axiomático, através do desenvolvimento de algumas teorias ZF, KM, NBG. Discutir a inadequação do ensino da teoria dos conjuntos no ensino fundamental e médio.</p>	<p>Introdução: motivação histórica e paradoxos lógicos e semânticos; a construção de \mathbb{Q} a partir de \mathbb{N}, e a de \mathbb{R} a partir de \mathbb{Q}; a dificuldade de definir número natural; várias tentativas históricas; a noção de finito e infinito; as provas da enumerabilidade de \mathbb{Q} e da não enumerabilidade de \mathbb{R}; discussão sobre os caminhos utilizados para a eliminação dos paradoxos e o surgimento de dois tipos de teorias: conjuntos e classes; rudimentos do Cálculo de Predicados. A álgebra dos conjuntos segundo alguma das teorias axiomáticas (ZF, KM ou NGB): uniões, intersecções, inclusões, complementos, par ordenado, produto cartesiano, relações e funções. As definições de naturais, ordinais e cardinais; o Teorema de Bernstein-Schroeder (ou Cantor-Bernstein) e o Teorema de Cantor; propriedades de conjuntos finitos e infinitos; indução finita; aplicações; noções de aritmética ordinal e cardinal.</p>
USP - São Carlos	Análise para Licenciatura	<p>Abordar a análise matemática e seus aspectos históricos proporcionando ao futuro professor conhecer como se estruturou o rigor na área de Matemática, particularmente no que diz respeito às contribuições para a Análise, e suas relações com a formalização de alguns resultados ensinados nos níveis Fundamental e Médio.</p>	<p>Números reais: grandezas incomensuráveis. Cortes de Dedekind e os números reais. Notas históricas: teoria de conjuntos, conjunto de Cantor, paradoxos, linguagem matemática. Seqüências: seqüências infinitas. Seqüências monótonas. O número e sua irracionalidade. Critério de convergência de Cauchy. Séries infinitas: propriedades e exemplos. Teste da comparação, razão e integral. Notas históricas: nãoenumerabilidade dos números reais, Bolzano, Teorema de Bolzano-Weierstrass, origem das séries infinitas, divergência da série harmônica. Funções, limites e continuidade: definições, propriedades. Limites Laterais e funções monótonas. Funções contínuas em intervalos fechados. Teorema do Valor Intermediário. Notas históricas: Teorema do Valor Intermediário, Teorema de Weierstrass, Gauss. O cálculo diferencial: a derivada e a diferencial. Máximos e mínimos locais. Teorema do Valor Médio. Notas históricas: a origem do cálculo, Newton e Leibniz. Teoria da integral: introdução. A integral de Riemann. Integrabilidade das funções contínuas. Teorema Fundamental do Cálculo. Notas históricas: quadratura, Arquimedes e a área do círculo, Riemann</p>

	Análise I	Familiarizar o aluno com as técnicas de Análise Matemática.	Números reais como corpo ordenado completo. Seqüências e séries de números reais: convergência, critérios para convergência. Convergência absoluta e condicional de uma série. Reordenação de uma série. Continuidade: Limites de funções reais; funções contínuas, contínuas em intervalos e em conjuntos compactos; continuidade uniforme. Descontinuidades. Diferenciabilidade: a derivada e suas propriedades. Teorema do Valor Médio e conseqüências. Fórmula de Taylor.
	Cálculo I	Fazer com que os alunos familiarizem-se com os conceitos de limite, continuidade, diferenciabilidade e integração de funções de uma variável.	Propriedades de números reais. Funções reais de uma variável real. Algumas funções elementares. Limite. Continuidade. Derivada. Teorema do valor médio. Aplicações da derivada. Antiderivada. Integral de Riemann. Teorema fundamental do cálculo. Aplicações da integral. Métodos de integração. Integrais impróprias.
	Cálculo III	Familiarizar os alunos com os resultados fundamentais relativos a: seqüências numéricas, séries numéricas, de potências e de Fourier.	Seqüências numéricas. Séries numéricas. Critérios de convergência e divergência para séries de termos positivos. Séries absolutamente convergentes. Critérios de Cauchy e de Dirichlet. Séries de potências. Continuidade, diferenciação e integração de séries de potências. Séries de MacLaurin e Taylor. Aplicação de séries de potências na resolução de equações diferenciais ordinárias. Séries de Fourier. Teoremas de convergência. Aplicação de séries de Fourier em problemas envolvendo equações diferenciais parciais.

Apêndice 7: Levantamento das Disciplinas de História da Matemática

Instituição	Disciplina	Período Sugestivo	Carga Horária	Objetivo	Conteúdo Programático	Bibliografia Básica
UFABC	Evolução dos Conceitos Matemáticos	11º Quadrimestre	48h	Não menciona	<p>Pretende-se que esse curso inspire um entendimento e uma percepção intelectual a respeito da matemática e, então, seus conceitos, seus métodos e sua realização. Estudar-se-ão alguns problemas que possibilitam destacar de modo significativo para o estudante alguns momentos conceituais importantes na história da matemática e as modificações sobre a própria concepção da natureza da matemática decorrentes. Elencamos de uma seleção de possíveis temas adequados a esse propósito: Matemática anterior e exterior à Grécia Helênica e a natureza empírica; Matemática da Grécia</p>	<p>1) BOYER, C.B. História da Matemática, 2a ed., Edgard Blücher, 1996. 2) COURANT, R. ROBBINS, H. O que é Matemática? Uma Abordagem Elementar de Métodos e Conceitos, 1a ed., Editora Ciência Moderna, 2000. 3) EVES, H. Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics, 3rd edition, Dover, 1997. 4) EVES, H. Introdução à História da Matemática, 4a ed., Editora Unicamp, 2004. 5) STEWART, I. Concepts of Modern</p>

					Clássica e Helênica; O sistema lógico, a noção de prova legítima: indução e dedução e a abstração conceitual; Os Elementos de Euclides: geometria e números e aplicação do método axiomático material e rigor; O cálculo e o sistema de números reais: a diferente caracterização dos objetos e métodos; Matemática abstrata e aplicação da matemática; Estruturas algébricas e o caráter algébrico e abstrato dos objetos; Geometria não-euclidiana; Método axiomático formal e abstração; Teoria de conjuntos e fundamentos da matemática	Mathematics, Dover, 1995
--	--	--	--	--	---	--------------------------

	História da Matemática	Disciplina Eletiva	48h	Não menciona	<p>Origens da matemática; a matemática no Egito e na Babilônia; a matemática Grega; a matemática Hindu-Chinesa; os Árabes na matemática; A matemática na idade média; a álgebra de Viete; Fermat e Descartes; origens e desenvolvimento do Cálculo; Newton e Leibniz; a era Bernoulli; Euler; Cauchy e Gauss; Abel e Galois; Geometrias não-Euclidianas; a passagem do Cálculo para a Análise; fundamentos: Boole, Cantor e Dedekind; a matemática do século 20 e a matemática contemporânea.</p>	<p>1) BOYER, C. B. História da Matemática, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo (1996). 2) EVES, H. Introdução à História da Matemática, Editora Unicamp, Campinas (2004). 3) STRUIK, Dirk J. A Concise History of Mathematics. New York: Dover, 1987.</p>
--	------------------------	--------------------	-----	--------------	---	---

UFSCar - São Carlos	História da Matemática	7º Período	60h	<p>Estudar o desenvolvimento da Matemática nas diversas civilizações e sua conexão com fatos sociais e científicos. Investigar a natureza da Matemática através de sua gênese e desenvolvimento. Compreender a evolução do ensino matemático e os processos de construção da Matemática. Capacitar-se no uso da História da Matemática como recurso metodológico, sendo importante fonte de problemas e motivações no Ensino de Matemática. Reconhecer os desafios teóricos e metodológicos</p>	<p>A civilização pré-helênica: mesopotâmica e egípcia; origens da geometria e do conceito de número. A Idade Clássica. Gênese da Matemática dedutiva na Antiga Grécia. As contribuições chinesas, hindus e árabes. O Renascimento e as raízes da Matemática atual. Gênese do Cálculo Diferencial. A Matemática nos séculos XVII a XIX. A contribuição de mulheres para a Matemática. História da Matemática no Brasil e de culturas nativas americanas. Nossa época e tópicos da história da Matemática Contemporânea.</p>	<p>1) EVES, H. W. Introdução à História da Matemática. 5. ed. Campinas: UNICAMP, 2011. 2) BOYER, C. B. História da Matemática. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012. 3) BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. São Paulo: Blücher, 2008. 4) NOBRE, S. R. et ali. History of Mathematics for trainee teachers. In: FAUVEL, J.; MAANEN, J. V. (Orgs.). History in Mathematics education. Amsterdam: Kluwer Academic</p>
---------------------	------------------------	------------	-----	---	--	--

				contemporâneos da Matemática no desenvolvimento das sociedades e das ciências através de sua história.		Publishers, 2000. cap. 4.
UFSCar - Sorocaba	História da Matemática	8º Semestre	60h	Ao final da disciplina o aluno deverá ser capaz de descobrir o como e o porquê do aparecimento e desenvolvimento das principais teorias matemáticas. Ênfase deverá ser dada sobre as teorias que melhor possam esclarecer conceitos elementares e	A civilização pré-helênica; origens da geometria e do conceito de número. A Idade Clássica. Gênese da Matemática dedutiva na Antiga Grécia. O nascimento do Cálculo Integral. O Renascimento e as raízes da Matemática atual. Gênese do Cálculo Diferencial. A época de Euler. Os séculos XIX e XX e o	1) BOYER, C. História da Matemática, Trad. Elza Gomide, S. Paulo: Edgard Blucher, 1974. 2) EVES, H. Introdução à História da Matemática. Trad. Hygino H. Domingues, Campinas: Ed. Unicamp, 1999 3) GARBI, G. G.,

				indispensáveis tanto ao professor de matemática dos Ensinos Fundamental (Ciclo Final) e Médio, quanto ao futuro pesquisador em matemática.	desenvolvimento da Matemática. A axiomatização da Matemática. Nossa época e tópicos da história da Matemática Contemporânea. História da Matemática no Brasil.	Rainha das Ciências, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006. 4) MIGUEL, A., BRITO, A.J., CARVALHO, D.L., MENDES, I.A..História da Matemática em atividades didáticas. 2ª ed., Editora Livraria da Física, 2008.
Unesp - Bauru	Não apresentou nenhuma disciplina específica					
Unesp - Guaratinguetá	História da Matemática	7º Semestre	60h	Não menciona	Noções de Contagem e Sistemas de Numeração. A Matemática no Egito Antigo e na Mesopotâmia. A Matemática Grega antes de Euclides. Os Pitagóricos. Os Elementos de Euclides. A Matemática Grega após Euclides. Arquimedes. Ptolomeu. Diofanto. Pappus. A Matemática na China e na Índia Antiga. A	Não menciona

					<p>Matemática Árabe. A Matemática na Europa de 500 a 1600d.C. Fibonacci. Viete. Cardano e Tartaglia. Alguns Desenvolvimentos do Pré- Cálculo. Logaritmos. Triângulo de Pascal. Leituras em pequenos grupos. Debates acerca dos textos lidos e produzidos. Seminários de aprofundamento dos temas estudados. Redação de síntese de textos.</p>	
Unesp - Presidente Prudente	Não apresentou nenhuma disciplina específica					

Unesp - Ilha Solteira	História da Matemática	8º Semestre	75h	Não menciona	<p>Ementa: Pré História da Matemática. Matemática Babilônica. Matemática Egípcia. Matemática Grega até Euclides. Matemática Grega depois de Euclides até Pappus. Matemática Chinesa, Hindu e Islâmica de 500 a 1400. Matemática na Europa Medieval. Os primórdios da Matemática Moderna de 1400 a 1700. Matemática Moderna 1700 a 2000. História da Matemática no Brasil. Na carga horária destinada à Prática como Componente Curricular serão propostas atividades que promovam a discussão do conhecimento matemático abordado em diferentes contextos socioculturais, a leitura e a produção de textos de matemática, ciência e tecnologia, que</p>	Não menciona
-----------------------	------------------------	-------------	-----	--------------	---	--------------

					possibilitem a representação e comunicação do conhecimento matemático e a discussão e o posicionamento crítico sobre informações obtidas em diferentes fontes e veículos de informação e sobre o papel histórico da Matemática na construção do conhecimento humano e nas transformações sociais.	
--	--	--	--	--	---	--

Unesp - Rio Claro	História da Matemática	8º Semestre	60h	<p>O objetivo de um curso de história da matemática deve ser o de contrapor-se à perversão formalista de reinterpretar logicamente, segundo a ordem das razões, a gênese real dos conceitos, segundo a ordem das ideias. Mostrar que a Matemática formalizada é precedida por uma Matemática informal e quase empírica, que não se desenvolve como uma sequência inexorável de teoremas acumulados estabelecidos além de toda a dúvida, mas por uma dialética própria, pelo jogo das conjecturas através de especulação, da crítica e da dinâmica dos</p>	<p>1. Matemática na Pré-História e em Comunidades Primitivas: pressupostos sobre atividades humanas na pré-história e em comunidades consideradas socialmente primitivas que possuem relação com a Matemática atual; Princípios históricos de contagem em diferentes meios culturais. 2. Matemática na Antiguidade: Matemática dos povos da Babilônia, Egito, Povos Orientais, Africanos e Pré-Colombianos. Introdução à Historiografia da Ciência e à Historiografia da Matemática. 3. Matemática na Grécia Antiga: Período Jônico, de Atenas, Helenístico (Alexandria) e Período</p>	<p>1) BOYER, C.B. História da Matemática, 2a ed., Edgard Blücher, 1996. 2) EVES, H. Introdução à História da Matemática. Trad. Hygino H. Domingues, Campinas: Ed. Unicamp, 1999. 3) FAUVEL, J. e GRAY, J. The History of Mathematics – A Reader, London, Macmillan Press and Open University, 1987. 4) GRATTAN-GUINNES, I. (ed). Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences. London & New York, Routledge, vol. 2, 1994.</p>
-------------------	------------------------	-------------	-----	---	--	--

			<p>interesses práticos e teóricos. Mostrar que existe uma ligação muito forte entre o desenvolvimento social e o desenvolvimento da Matemática. Discutir o papel da história da matemática em atividades de ensino na educação básica.</p>	<p>de declínio do Império Grego. 4. Matemática no Período das Conquistas Romanas: Vitruvius e seus Dez Livros de Arquitetura. 5. Matemática na China, Índia, no Mundo Árabe e na Europa Medieval. 6. Matemática na Renascença Europeia e no Período das Grandes Navegações: Arte; Astronomia; Cartografia; Construção Teórica de alguns ramos da Matemática; Simbolismo Algébrico. 7. Matemática no Período do Racionalismo Europeu: Geometria Analítica; Probabilidades. 8. revolução Científica: Construção Teórica do Cálculo Diferencial e Integral. 9. Matemática do século XVIII: início da formalização do Cálculo Diferencial e Integral; Funções;</p>	<p>5) KATZ, V. J. A History of Mathematics – An Introduction, New York, Collins College Publishers. 6) ROQUE, T. História da Matemática – Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas, Rio de Janeiro. Jorge Zahar Editora, 2012. 7) STRUIK, D. J. História Concisa das Matemáticas, ed. Em português, trad. João C. S. Guerreiro, Lisboa, Gradiva, 1989. 8) WUSSING, Hans. Lecciones de Historia de las Matemáticas, ed. Em espanhol, trad. Mariano Hormigón (resp), Madrid, Siglo XXI de España editores, S.A.</p>
--	--	--	--	--	---

					Equações Diferenciais; Séries. 10. História da Matemática em atividades de ensino da educação básica.	
--	--	--	--	--	---	--

Unesp - Rio Preto	História da Matemática	Disciplina Eletiva	60h	<p>O fato de que há um processo de interação contínua entre as teorias científicas e o contexto histórico em que se desenvolvem, faz com que a compreensão daquelas ganhe dimensões mais amplas e claras à vista deste contexto e vice-versa. No curso de matemática, com seu caráter abstrato, a perspectiva histórica é fundamental. Somese a isso um aspecto nada desprezível: o grande subsídio, em termos de motivação, que um curso de História da Matemática pode dar ao licenciando.</p>	<p>1 - A Matemática no Egito e na Mesopotâmia. 2 - A Matemática Grega. 3 - A Matemática Medieval e o Despertar Renascentista. 4 - Nascimento da Matemática Moderna no século XVII. 5 - Aspectos da Matemática no século XX.</p>	<p>1) AABOE, A.- Episódios da História Antiga da Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1984. 2) BARON, M.E.- Curso de História da Matemática. 5 unidades, Ed. UnB, 1985. 3) BOYER, C.B.- História da Matemática. Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1974, 4) EVES, M.- An Introduction to the history of Mathematics, Holt, Rinehart and Winston, New York Inc., 1964. 5) PEDROSO, H.A.- História da Matemática. Notas de Aula do Dept° de Matemática, UNESP, São José do Rio Preto, 1992.</p>
-------------------	------------------------	--------------------	-----	--	---	---

Unicamp	História da Matemática	8º semestre	60h	Não menciona	<p>Tópicos de história da matemática tendo em vista a formação de professores de matemática para a escola básica :</p> <p>Pitágoras, a Geometria grega e a teoria dos números; a Matemática grega antes de Euclides; a geometria pré-euclidiana; a Matemática grega depois de Euclides; Arquimedes, o desenvolvimento das ideias da Álgebra, números complexos e funções. A Matemática do século XVII. Matemática e Mecânica. História moderna: geometria diferencial e não-euclidiana, topologia e combinatória. Criação de texto.</p>	<p>1) J. Stillwell: Mathematics and its history. 3rd ed. Undergraduate texts in mathematics . New York, NY: Springer, c2010.2) T. M. Roque e J. B. Pitombeira de Carvalho: Tópicos de História da Matemática. Coleção PROFMAT, SBM.</p>
---------	------------------------	-------------	-----	--------------	---	---

USP - São Paulo	História da Matemática I	6º semestre (Diurno) 8º semestre (Noturno)	60h	Apresentar e propiciar aos alunos uma reflexão sobre a inserção cultural da evolução dos conceitos da Matemática Elementar na História da Humanidade, estudando a História por assunto até o surgimento do Cálculo.	<p>1. Números: Primeiros sistemas de numeração. Teoria dos números na escola pitagórica. Os numerais na Índia. A introdução dos numerais indoarábicos na Europa. Fibonacci.</p> <p>2. Geometria: Gêneses: Babilônia, Egito, China, Grécia. Os problemas clássicos. Os Elementos de Euclides: a geometria axiomática, a teoria das proporções de Eudoxo e os incomensuráveis; geometria do espaço. Apolônio e as seções cônicas. Geometria analítica. Geometrias nãoeuclidianas. 3. Álgebra: Diofante. Os árabes. Equações de terceiro e quarto graus. Bombelli e a necessidade da introdução dos números complexos. Viète. 4. Cálculo: Arquimedes. Movimentações para o cálculo no século XVII.</p>	<p>1) C.B. Boyer, História da Matemática, Edgard Blucher, 1996.</p> <p>2) A. Aaboe, Episódios da História Antiga da Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.</p> <p>3) G. Ifrah, História Universal dos Algarismos, Nova Fronteira, 1995.</p> <p>4) F. Cajori, A History of Mathematical Notations (Vol. I), The Open Court, 1928.</p> <p>5) F. SWETZ et. al. (org.), Learn From the Masters, The Mathematical Association of America, 1994.</p>
-----------------	--------------------------	---	-----	---	---	---

					Antecipações nos trabalhos de Descartes, Fermat e Pascal. Os trabalhos de Newton e Leibniz. 5. Tópicos especiais: Astronomia. Trigonometria. Teoria matemática da música. Logaritmos. Probabilidades.	
História da Matemática II	Disciplina Eletiva	60h	Apresentar e propiciar aos alunos uma reflexão sobre a evolução dos conceitos e aplicações da Matemática superior.	1. Formalização do cálculo. Os Bernoulli e Euler. O conceito de função. O trabalho com séries. As equações diferenciais. Funções analíticas. A aritmetização da análise, construções do corpo real: Cauchy, Weierstrass e Dedekind. 2. A geometria diferencial de Gauss e Riemann. 3. Os progressos na álgebra: Lagrange,	1) E.T. Bell, MEN OF MATHEMATICS, 2 vols., Penguin, Middlessex. 2) C.B. Boyer, História da Matemática, Edgard Blucher, 1996. Nova Froteira, 1995. 3) F. Cajori, A History of Mathematical Notations (Vol. II), The Open Court,	

					Ruffini, Abel, Cauchy e Galois. O desenvolvimento da abstração em álgebra na Inglaterra no século XIX. Complexos e quatérnios: o trabalho de Hamilton. Sistemas hipercomplexos; matrizes e grupos abstratos. 4. Tópicos especiais.	1928. F. SWETZ et. al. (org.), Learn From the Masters, The Mathematical Association of America, 1994. 4) A.N. KOLMOGOROV et. Al. (ed.) Mathematics of the 19 th century, Birkhauser Verlag, 1996. 5) F. SMITHIES, Cauchy and the creation of complex function theory, Cambridge, 1997.
USP - São Carlos	História da Matemática	7º Semestre	75h	A finalidade é ajudar o estudante a descobrir como e o porquê do aparecimento e desenvolvimento das principais teorias matemáticas. A ênfase será dada sobre as teorias que melhor possam esclarecer conceitos elementares e indispensáveis tanto	Considerações gerais sobre o desenvolvimento matemático sob um enfoque historicofilosófico. Período pré-Helênico. Período Helênico. Período medieval. Período moderno. Aspectos da matemática contemporânea. Obras clássicas da literatura matemática. Notação	1) BOYER, C., História da Matemática, Trad. Elza Gomide, S. Paulo: Edgard Blucher, 1974. Complementares: 2) STRUIK, D.J., História Concisa das Matemáticas, Trad. João C.S. Guerreiro, 2ed., Lisboa: Gradiva, 1992.

				ao professor secundário quanto ao futuro pesquisador.	matemática.	3) EYES, H., Introdução à História da Matemática, Trad. Hygino H. Domingues, Campinas: Ed. Unicamp, 1999.
--	--	--	--	---	-------------	--