



Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Departamento de Matemática



# Construções geométricas no ensino da matemática no Ensino Fundamental

**Autor:** *Guilherme Silva Braga*

**Orientadora:** *Luciene Nogueira Bertoncello*

**Disciplina:** Dissertação de Mestrado

**Curso:** Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

**Professor Coordenador:** Renato José Moura

São Carlos, 20 de março de 2020.

# Construções geométricas no ensino da matemática no Ensino Fundamental

**Autor:** *Guilherme Silva Braga*

**Orientadora:** *Luciene Nogueira Bertoncello*

**Disciplina:** Dissertação de Mestrado

**Curso:** Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

**Professor Coordenador:** Renato José Moura

**Instituição:** Universidade Federal de São Carlos

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Departamento de Matemática

São Carlos, 20 de março de 2020.



# UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS


Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

---

## Folha de Aprovação


---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Guilherme Silva Braga, realizada em 21/01/2020:




---

Prof. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello  
UFSCar



---

Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson  
USP



---

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio  
UFSCar

# Dedicatória

Dedico este trabalho a todos os alunos que já tive nestes cinco anos de profissão.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus em primeiro lugar por me abençoar, iluminar e não me deixar desanimar nos momentos de fraqueza, de cansaço ou de desânimo.

Agradeço aos meus pais, Felício e Luiza por serem meu alicerce e inspiração, e ao meu irmão Matheus pelo companherismo e auxílio sempre.

Agradeço de coração à querida Bárbara por ser tão presente, companheira, amiga e disposta a me fazer bem, em todos os momentos, e por me incentivar a não desistir.

Agradeço a todos meus professores do PROFMat, Paulo Caetano, Ivo Machado Costa, Pedro Malagutti, Roberto Paterlini, João Sampaio, Renato Moura e em especial a minha orientadora Luciene por confiar no meu potencial, me acolher no início do curso e me mostrar a forma correta de estudar.

Muito obrigado a todos que participaram desse mestrado, e que trago em meu coração.

# Resumo

Neste trabalho, faremos um estudo sobre triângulos, seus teoremas, elementos e construções voltado para o ensino da geometria desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, com objetivo de ser uma ferramenta de apoio ao professor formado em pedagogia além do professor especialista em Matemática.

No primeiro capítulo, daremos algumas definições e resultados que utilizaremos ao longo do trabalho.

No segundo capítulo demonstraremos alguns resultados e teoremas que utilizam triângulos ou mostram características interessantes nos mesmos.

No terceiro capítulo, faremos construções geométricas com régua e compasso, descrevendo cada uma delas, e justificando, quando necessário o que construímos.

No quarto capítulo será apresentado um trabalho pedagógico realizado em uma escola, com construções geométricas no ensino fundamental em uma sala de 5º ano.

Por fim, no quinto capítulo faremos algumas observações e justificaremos o trabalho com um pequeno estudo da Geometria na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no Ensino Fundamental.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Definições e Teoremas</b>	<b>12</b>
2.1	Classificação dos Triângulos . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Demonstração de alguns teoremas</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>Construções</b>	<b>23</b>
4.1	Triângulo Equilátero de lado $L$ . . . . .	23
4.2	Ponto médio de um segmento $AB$ . . . . .	23
4.3	Mediatriz . . . . .	24
4.4	Triângulo Isósceles de base $AB$ . . . . .	25
4.5	Triângulo Qualquer, dados $AB$ , $AC$ e $BC$ . . . . .	26
4.6	Bissetriz . . . . .	26
4.7	Mediana . . . . .	28
4.8	Altura . . . . .	28
4.9	Ortocentro, Baricentro e Incentro . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Trabalho pedagógico com construções geométricas</b>	<b>34</b>
5.1	Introdução . . . . .	34
5.2	Objetivos . . . . .	36
5.3	Metodologia . . . . .	36

Sumário

---

5.4 Resultados . . . . .	38
5.5 Anexos . . . . .	39
<b>6 Pensatas sobre o ensino de matemática com régua e compasso</b>	<b>49</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>52</b>



# Lista de Figuras

2.1	Tipos de triângulos quanto aos lados. . . . .	13
2.2	Tipos de triângulos quanto aos ângulos. . . . .	14
3.1	Teorema de Menelaus. . . . .	17
3.2	Alturas. . . . .	17
3.3	Primeira semelhança de triângulos. . . . .	18
3.4	Segunda semelhança de triângulos. . . . .	18
3.5	Terceira semelhança de triângulos. . . . .	19
3.6	Congruência dos triângulos $AMB$ e $AMC$ . . . . .	20
3.7	Demonstração em imagem. . . . .	20
3.8	Demonstração em imagem. . . . .	21
3.9	Teorema do Ângulo Inscrito. . . . .	22
4.1	Construção do triângulo equilátero. . . . .	24
4.2	Construção do ponto médio. . . . .	25
4.3	Justificativa. . . . .	26
4.4	Construção da Mediatriz. . . . .	27
4.5	Construção do triângulo isósceles. . . . .	28
4.6	Construção da Bissetriz. . . . .	29
4.7	Mostrando a bissetriz. . . . .	30
4.8	Construção de uma mediana. . . . .	31

## Lista de Figuras

---

4.9	Construção da Altura. . . . .	31
4.10	Construção do ortocentro. . . . .	32
4.11	Construção do baricentro. . . . .	32
4.12	Construção do Incentro. . . . .	33
5.1	Resolução de uma das alunas - (1). . . . .	41
5.2	Resolução de uma das alunas - (2). . . . .	42
5.3	Resolução de uma das alunas - (3). . . . .	43
5.4	Resolução de uma das alunas - (4). . . . .	44
5.5	Alunos do 5° ano trabalhando. . . . .	45
5.6	Alunos do 5° ano trabalhando. . . . .	46
5.7	Alunos do 5° ano trabalhando. . . . .	47
5.8	Roteiro da Oficina com o 5° Ano. . . . .	48
5.9	Tabela do Triângulo Retângulo de um dos grupos. . . . .	48

# Capítulo 1

## Introdução

As construções geométricas sempre estiveram presentes no desenvolvimento da matemática desde a antiguidade. Por volta do século 3 a.C nos Elementos de Euclides, por exemplo, há grandes construções geométricas com ferramentas e instrumentos que na época, levavam os matemáticos a entender conceitos e percepções que tinham acerca do que estudavam.

Ao longo dos anos foi se aprimorando mas ainda alguns problemas que desde a Grécia Antiga desafiavam os matemáticos, por gerações, continuavam sem solução. Ficaram conhecidos como os Três Problemas Clássicos, que são:

- A quadratura do círculo, que consiste em dada uma circunferência é possível construir um quadrado com a mesma área desta.
- A duplicação do cubo, que consiste em dado um cubo, construir um novo cubo com volume igual ao dobro do primeiro.
- A trissecção do ângulo, onde dado determinado ângulo, construir um novo ângulo com um terço de seu tamanho.

Essas construções deveriam ser feitas apenas com régua e compasso. E foi a Teoria de Galois, matemático francês do século 19, que permitiu transcrever

estes problemas geométricos, para problemas algébricos por meio de corpos, por exemplo.

A saber, régua e compasso não foram suficientes para resolução desses três problemas, levando a alguns matemáticos, com auxílio de estudos sobre origami, terem um auxílio visual nas dobraduras para depois disso, e após o Teorema de Galois, resolver estes problemas.

Com base nesses estudos, faremos um estudo de algumas propriedades dos triângulos, bem como construções geométricas com régua e compasso. Além disso, apresentaremos alguns teoremas que ao longo da história e do desenvolvimento da matemática, foram importantes e são utilizados até hoje como resultado por alunos no Ensino fundamental e Médio.

# Capítulo 2

## Definições e Teoremas

Inicialmente, admitamos que o leitor tenha familiaridade com as definições de segmento de reta, semirreta, ângulo, polígono e triângulo. Com isso, deixaremos uma coleção de enunciados e resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho.

É necessário também, uniformizar algumas notações que serão utilizadas. Sempre que nos referirmos à ângulo, a notação será  $\hat{A}$ . Quando nos referirmos ao segmento de reta que vai do ponto A ao ponto B, diremos AB.

**Definição 2.1. Congruência** *Dois polígonos são ditos congruentes quando possuem todos os lados e todos os ângulos que sobrepostos ocupam a mesma região do espaço.*

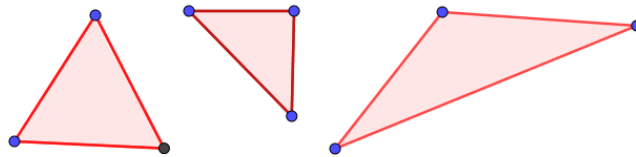
**Definição 2.2. Semelhança** *Dois polígonos são semelhantes quando possuem ângulos de mesma medida, e proporção constante entre seus lados.*

## 2.1 Classificação dos Triângulos

Quanto a seus lados, um triângulo pode ser:

- Equilátero: possui todos os lados de mesma medida.
- Isósceles: possui dois lados de mesma medida.
- Escaleno: possui os três lados de medidas diferentes.

Figura 2.1: Tipos de triângulos quanto aos lados.

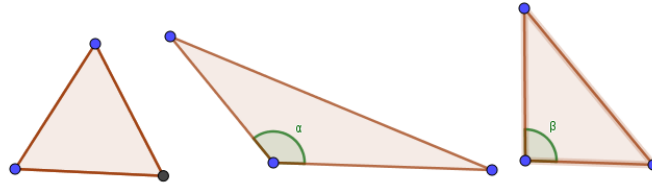


Quanto a seus ângulos, um triângulo pode ser:

- Acutângulo: possui os três ângulos agudos (menores que  $90^\circ$ ).
- Obtusângulo: possui um ângulo obtuso (maior que  $90^\circ$ ).
- Retângulo: possui um ângulo reto (igual a  $90^\circ$ ).

Os teoremas abaixo elencados, serão utilizados como resultado para as construções geométricas do capítulo seguinte. Alguns deles, serão demonstrados no próximo capítulo. Por enquanto, apenas serão mencionados e organizados para melhor leitura deste trabalho.

Figura 2.2: Tipos de triângulos quanto aos ângulos.



**Teorema 2.1.** *Casos de congruência de triângulo: Considere os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ .  $ABC$  e  $DEF$  são ditos congruentes quando sobrepostos, ocupam a mesma porção do espaço. Existem algumas condições que são suficientes, para garantir a congruência entre dois triângulos. São as seguintes:*

- *Lado - Lado - Lado (LLL): quando os três lados tem mesma medida, ou seja:  $AB = DE$ ,  $AC = DF$ ,  $BC = EF$ .*
- *Lado - Ângulo - Lado (LAL): quando dois de seus lados tem mesma medida, e o ângulo entre eles são de mesma medida. Ou seja:  $AB = DE$ ,  $BC = EF$  e  $\hat{B} = \hat{E}$*
- *Ângulo - Lado - Ângulo (ALA): quando dois de seus ângulos tem mesma medida, e o lado entre eles tem mesma medida. Ou seja,  $\hat{A} = \hat{D}$ ,  $\hat{B} = \hat{E}$  e  $AB = DE$*
- *Lado - Ângulo - Ângulo Oposto (LAAo): quando  $AB = DE$ ,  $\hat{B} = \hat{E}$  e  $\hat{C} = \hat{F}$*

*No triângulo retângulo, temos mais um caso de congruência:*

- *Lado - Lado - Ângulo oposto (LLA): quando  $AB = DE$ ,  $AC = DF$  e  $\hat{C} = \hat{F}$*

**Teorema 2.2.** *A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.*

---

**Teorema 2.3.** *A soma dos ângulos externos de todo polígono é 360 graus.*

**Teorema 2.4.** *Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base possuem a mesma medida.*

**Teorema 2.5.** *Teorema de Pitágoras: em todo triângulo retângulo com catetos de medidas  $a$  e  $b$  e hipotenusa de medida  $c$ , vale a relação  $a^2 + b^2 = c^2$ .*

**Teorema 2.6.** *A mediatriz de um segmento  $AB$  é perpendicular ao segmento.*

**Teorema 2.7.** *Teorema de Tales: Dado um feixe de retas paralelas intersectadas por segmentos transversais, formam segmentos de retas proporcionalmente correspondentes.*

**Teorema 2.8.** *Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma do comprimento dos outros dois.*

**Teorema 2.9.** *se  $ABC$  é um triângulo tal que  $\hat{B} > \hat{C}$ , então  $AC > AB$ .*



## Capítulo 3

### Demonstração de alguns teoremas

**Teorema 3.1.** *Teorema de Menelaus: seja  $ABC$  um triângulo cortado por uma secante que intersecta as três retas suportes dos lados desse triângulo em  $R$ ,  $N$  e  $M$ . Então  $NA.RB.MC = NC.RA.MB$*

Justificando a escolha desse teorema para apresentar nesse trabalho, certa vez em sala de aula um grupo de alunos de uma sala de 9º ano, se interessou por saber o que era uma demonstração matemática. Como o assunto que estávamos trabalhando era semelhança de triângulos e Teorema de Tales, resolvi apresentar e construir com os alunos, a demonstração do Teorema de Menelaus, que teve bastante interesse. Os alunos viram, que com o conhecimento que tinham das semelhanças, e um pouco de maturidade e experiência, já teriam condições de demonstrar um teorema matemático.

**Demonstração 3.1.** *Seja  $ABC$  um triângulo com  $R$ ,  $N$  e  $M$  sendo os pontos de intersecção da reta secante com as retas  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$ , respectivamente.*

*Traçando-se as alturas relativas aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  com a reta secante, obtém-se os pontos  $G$ ,  $E$  e  $H$ .*

*Sejam  $AG = H_1$ ,  $CH = H_2$  e  $BE = H_3$ . O triângulo  $AGN$  é semelhante ao triângulo  $CHN$ , pois:*

Figura 3.1: Teorema de Menelaus.

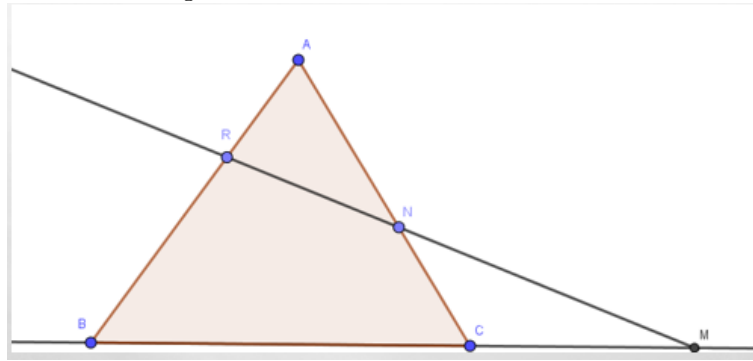
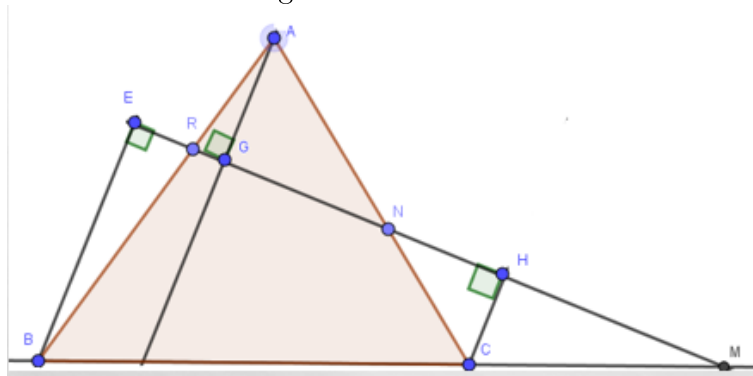


Figura 3.2: Alturas.



- $AGN = CHN = 90^\circ$
- $GNA = HNC$  (opostos pelo vértice)

Logo, pelo caso AA, os triângulos são semelhantes.

Essa semelhança nos dá:  $\frac{NA}{CN} = \frac{AG}{CH}$  e assim,  $\frac{NA}{NC} = \frac{H_1}{H_2}$ .

Os triângulos  $AGR$  e  $BER$  são semelhantes também pelo caso AA, pois:

- $AGL = BER = 90^\circ$
- $GRA = ERB$  (opostos pelo vértice)

Portanto,  $\frac{AR}{RB} = \frac{AG}{BE}$  e assim,  $\frac{AR}{BR} = \frac{H_1}{H_3}$ .

Finalmente, veja que  $HCM$  é semelhante a  $EBM$  pelo caso AA, pois

Figura 3.3: Primeira semelhança de triângulos.

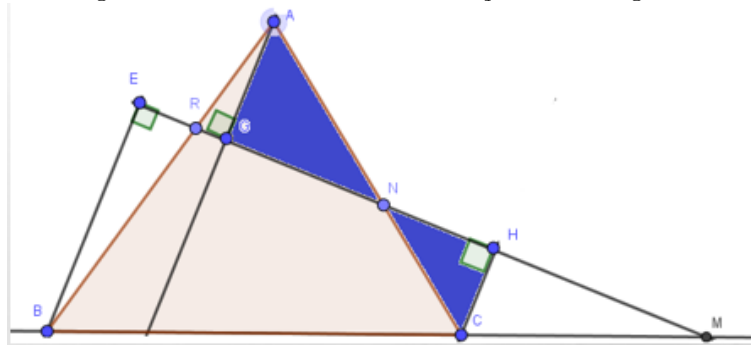
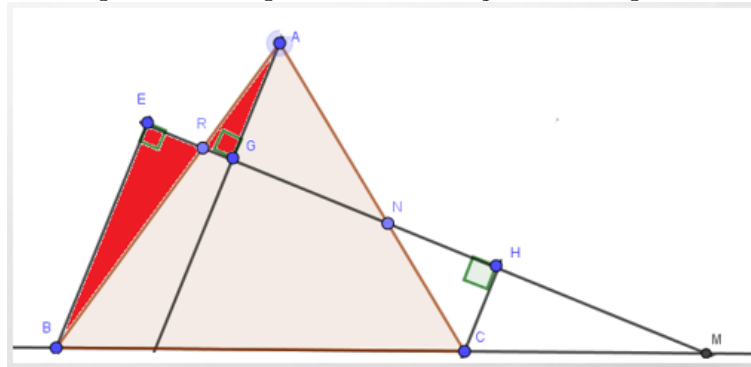


Figura 3.4: Segunda semelhança de triângulos.



- $CHM = BEM = 90^\circ$
- $CMH = BME$  (são ângulos coincidentes)

Portanto,  $\frac{CM}{BM} = \frac{HC}{EB}$  e assim,  $\frac{CM}{BM} = \frac{H_2}{H_3}$

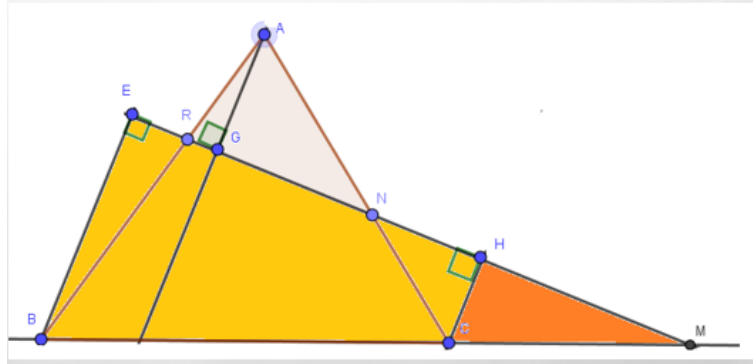
Como  $\frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{H_2}{H_3} \cdot \frac{H_3}{H_1} = 1$ , temos  $\frac{NA}{NC} \cdot \frac{RB}{RA} \cdot \frac{MC}{MB} = 1$ . Então  $NA \cdot RB \cdot NC = NC \cdot RA \cdot MB$ , como queríamos demonstrar.

**Teorema 3.2.** *Teorema de Pitágoras: Em todo triângulo retângulo com catetos de medidas  $a$  e  $b$  e hipotenusa de medida  $c$ , vale a relação  $a^2 + b^2 = c^2$ .*

**Demonstração 3.2.** *Seja  $ABC$  um triângulo retângulo, com  $BC = a$ ,  $AC = b$  e  $AB = c$  sendo catetos de medidas  $a$  e  $b$ , e hipotenusa de medida  $c$ .*

*A partir do ângulo reto  $C$ , tracemos a altura relativa a esse vértice, encontrando o ponto  $H$  pertencente à hipotenusa  $AB$ . Seja  $AH = m$ ,  $BH = n$ .*

Figura 3.5: Terceira semelhança de triângulos.



Como os triângulos  $ACH$  e  $ABC$  são semelhantes pelo caso A.A, temos:

$$\frac{b}{m} = \frac{c}{b}$$

Então:  $b^2 = c.m$

Como os triângulos  $CBH$  e  $ABC$  são semelhantes pelo caso A.A, temos:

$$\frac{a}{n} = \frac{c}{a}$$

Então:  $a^2 = c.n$

Assim, temos:

$$b^2 + a^2 = c.m + c.n = c.(m + n) = c^2.$$

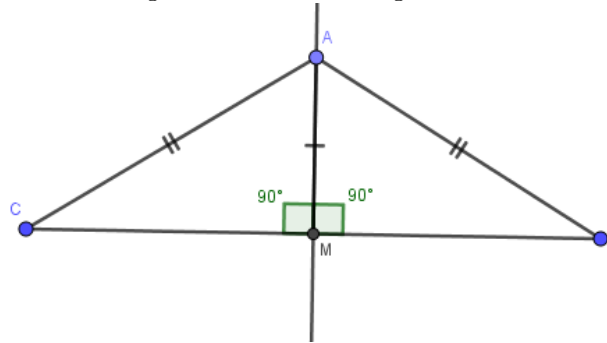
**Teorema 3.3.** Se  $ABC$  é um triângulo isósceles de base  $BC$ , então  $\hat{B} = \hat{C}$ .

**Demonstração 3.3.** Seja  $M$ , o ponto médio do lado  $BC$ . Como  $BM$  e  $CM$  são congruentes,  $AB$  é congruente a  $AC$  e  $AM$  é lado comum dos triângulos  $AMB$  e  $AMC$ , pelo caso LLL eles são congruentes. Logo,  $ABM$  é igual a  $ACM$ , como queríamos demonstrar.

**Teorema 3.4.** A Soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.

**Demonstração 3.4.** Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Sem perda de generalidade, sobre o vértice  $A$  trace uma reta paralela a  $BC$ . Marque  $X$  e  $Y$  nesta reta, de modo que  $A$  pertença ao segmento  $XY$ . Note que:

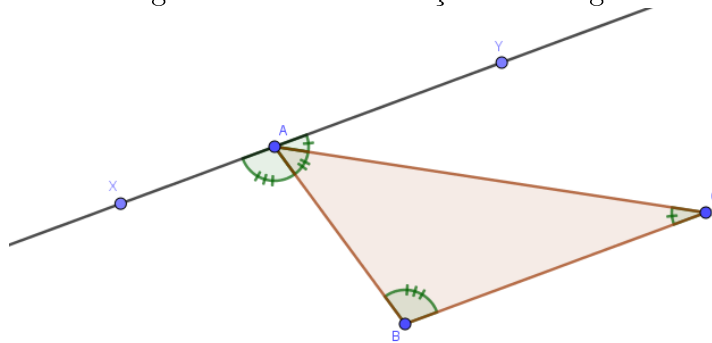
Figura 3.6: Congruência dos triângulos AMB e AMC.



- $\widehat{XAB} = \widehat{ABC}$ , pois são alternos internos;
- $\widehat{YAC} = \widehat{ACB}$ , pois também são alternos internos;

Assim,  $\widehat{XAB} + \hat{A} + \widehat{YAC} = \hat{B} + \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ , como queríamos demonstrar.

Figura 3.7: Demonstração em imagem.



**Teorema 3.5.** *Desigualdade Triangular: Em todo triângulo, a medida de um dos lados é inferior à soma das medidas dos outros dois lados.*

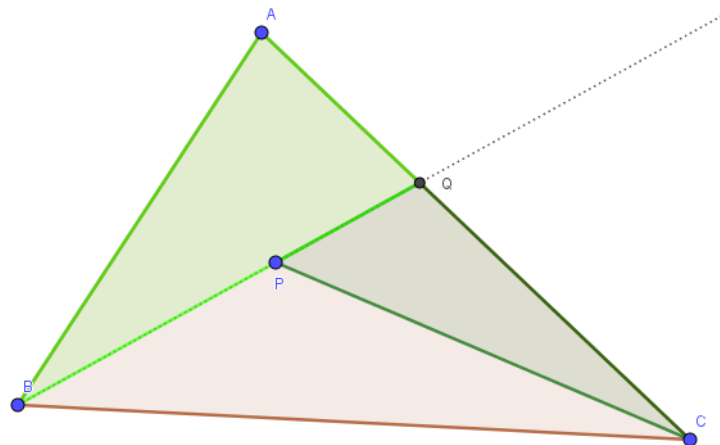
**Demonstração 3.5.** *Seja ABC um triângulo com  $AB = x$ ,  $AC = y$  e  $BC = z$ . Marque o ponto D sobre a semirreta CA, tal que A pertence a CD e  $AD = AB$ . Como  $CD = AC + AD$ , então  $CD = AC + AB = x + y$ . Agora,*

basta provar que  $BDC < DBC$ , pois se  $ABC$  é um triângulo tal que  $B > C$ , então  $AC > AB$ . Como  $BDA = DBA$ , temos  $BDC = BDA = DBA < DBA + ABC = DBC$ , como queríamos demonstrar. Portanto,  $z < x + y$ .

**Teorema 3.6.** Se  $P$  é um ponto situado no interior de um triângulo  $ABC$ , então  $PB + PC < AB + AC$ .

**Demonstração 3.6.** Prolongue a semirreta  $BP$ , de modo que  $BP \dots AC = Q$ . Aplicando a desigualdade triangular aos triângulos  $CPQ$  e  $ABQ$ , obtêm-se  $PB + PC < PB + (PQ + CQ) = BQ + CQ < (AB + AQ) + CQ = AB + AC$ .

Figura 3.8: Demonstração em imagem.



**Teorema 3.7.** Em uma circunferência, a medida do ângulo central é igual ao dobro da medida do ângulo inscrito que subtende o mesmo arco.

**Demonstração 3.7.** Considere a circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  da figura abaixo. Sejam  $OC$  e  $OB$  dois raios da mesma circunferência. Note que o triângulo  $OCB$  é isósceles. Assim, neste triângulo sejam  $\hat{O} = \alpha$ ,  $\hat{B} = \beta$  e  $\hat{C} = \beta$ .

Com isso, temos que  $\alpha + 2 \cdot \beta = 180^\circ$ .

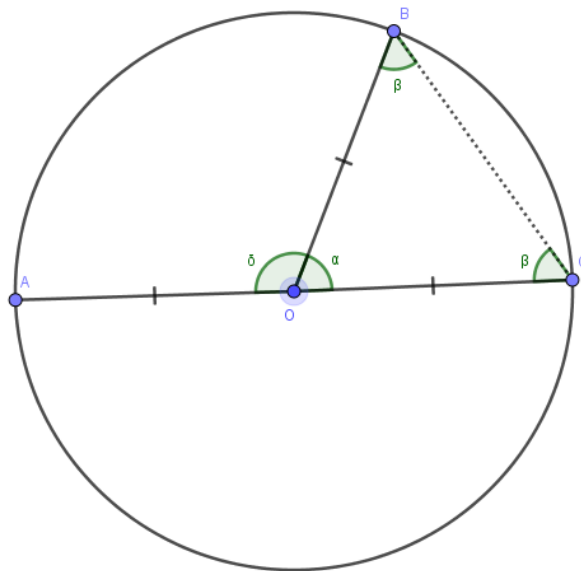
Faça agora o segmento  $AC$ , de modo que  $AC$  seja diâmetro dessa circunferência, e seja  $\widehat{AOB} = \delta$ .

Note que,  $\delta + \alpha = 180^\circ$

Igualando as duas igualdades temos:

$\alpha + 2 \cdot \beta = \delta + \alpha \Rightarrow \delta = 2 \cdot \beta$  como queremos demonstrar, pois os dois ângulos subtendem o arco que vai do ponto  $A$  ao ponto  $B$ .

Figura 3.9: Teorema do Ângulo Inscrito.



# Capítulo 4

## Construções

### 4.1 Triângulo Equilátero de lado $L$

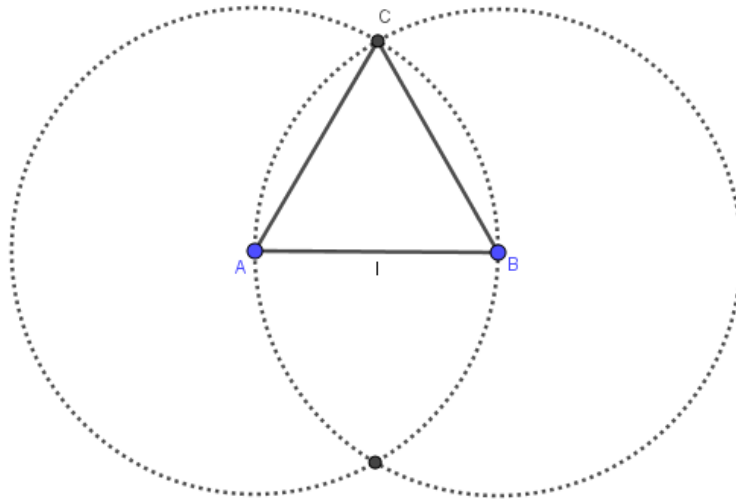
- Desenhe com régua um segmento de medida  $L$ . Chame de  $AB$  este segmento.
- Com o compasso faça um círculo de centro em  $A$  e raio  $L$ .
- Faça com o compasso faça um círculo de centro em  $B$  e mesmo raio  $L$ .
- Seja  $C$  uma das intersecções das circunferências.
- O triângulo  $ABC$  é equilátero, pois  $AB = BC = AC = L$ .

### 4.2 Ponto médio de um segmento $AB$

- Com a régua, desenhe o segmento  $AB$ .
- Com o compasso, faça o semicírculo de centro em  $A$  e raio  $AB$ .
- Com o compasso, faça o semicírculo de centro  $B$  e raio  $AB$ .



Figura 4.1: Construção do triângulo equilátero.



- Sejam P e Q as intersecções entre as duas circunferências.
- Trace o segmento PQ. A intersecção entre PQ e AB é o ponto M, que é o ponto médio do segmento AB.

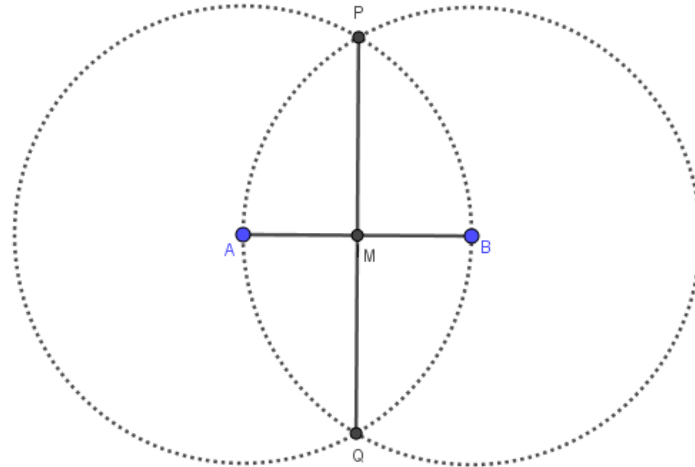
#### Justificativa

- Note que o triângulo APB é equilátero.
- Note que o triângulo  $APM = BPM$ , pois  $AP = PB$ ,  $PAM = PBM$  e PM é comum a ambos, pelo caso LLA.
- Com isso,  $AM = MB$  como queríamos.

### 4.3 Mediatriz

**Definição 4.1.** A reta M é dita mediatriz de um segmento AB, quando todos os pontos de M equidistam de A e B.

Figura 4.2: Construção do ponto médio.



- Com a régua, faça o segmento  $AB$ .
- Siga os mesmos da construção anterior.
- A reta  $PQ$  é a mediatriz do segmento  $AB$ .

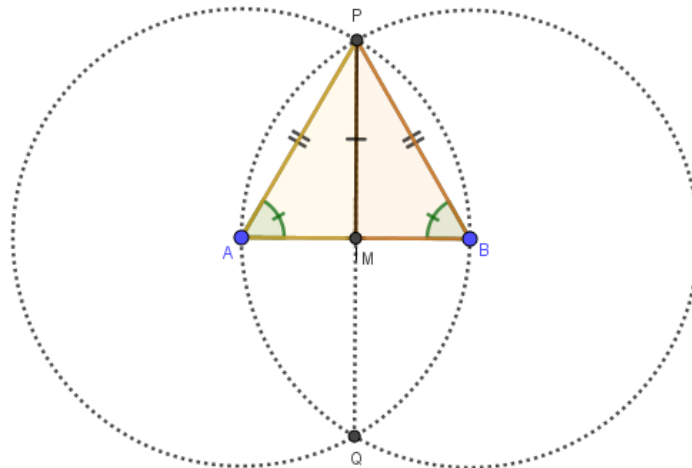
#### Justificativa

Note que dado um ponto  $L$  pertencente a mediatriz, temos  $LMB = LMA$ , pelo caso  $LAL$ , pois  $LM$  é lado comum, o ângulo  $LMB = LMA$  e  $MB = MA$ . Com isso,  $LB = LA$  como queríamos.

## 4.4 Triângulo Isósceles de base $AB$

- Com a régua, faça o segmento  $AB$ .
- Construa a mediatriz deste segmento.
- Tome um ponto  $C$  qualquer na mediatriz.

Figura 4.3: Justificativa.



- O triângulo ABC é isósceles.

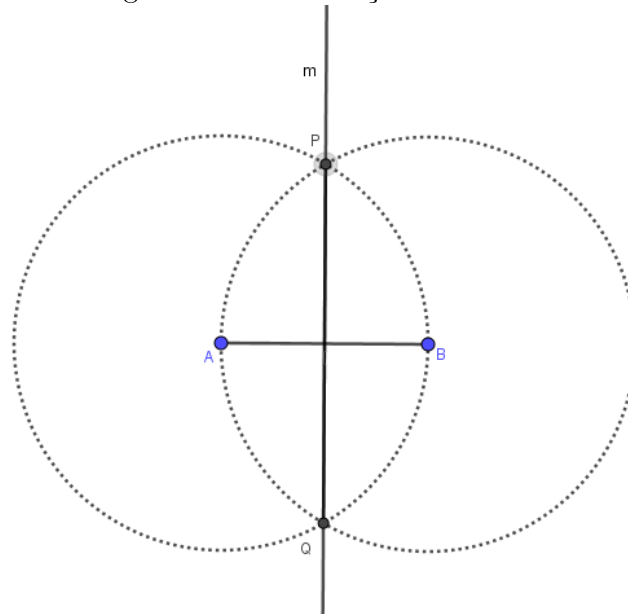
## 4.5 Triângulo Qualquer, dados AB, AC e BC

- Trace uma reta  $r$  qualquer e sobre ela marque o segmento BC.
- Trace um círculo de centro B e raio AB dado.
- Trace um círculo de centro C e raio AC dado.
- Marque o ponto A, tal que A é uma das intersecções dos círculos.
- O triângulo ABC é o triângulo que gostaríamos de construir.

## 4.6 Bissetriz

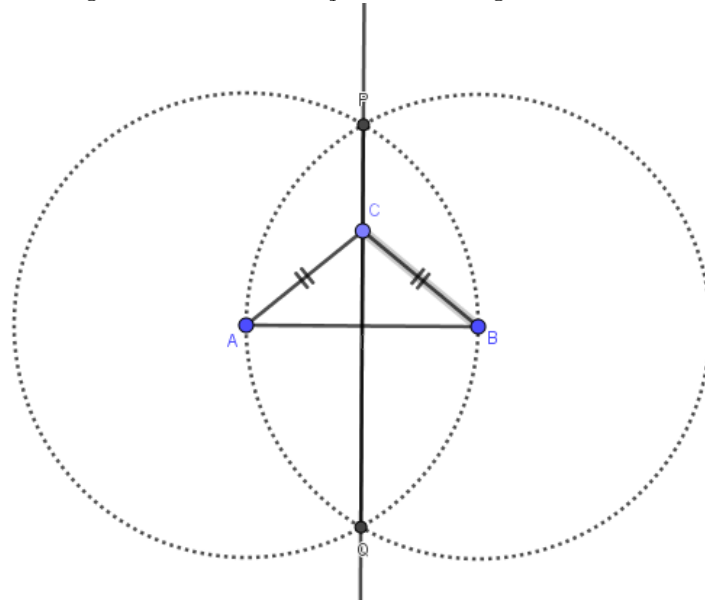
**Definição 4.2.** *A bissetriz de um ângulo é a semirreta que divide o ângulo em duas partes iguais. Também pode ser caracterizada, como o lugar geométrico dos pontos equidistantes das semirretas que formam um ângulo.*

Figura 4.4: Construção da Mediatriz.



- Seja  $APB$  um ângulo dado.
- No compasso, fixe uma abertura  $r$  qualquer.
- Com centro em  $P$ , faça o círculo de raio  $r$ .
- Sejam  $A'$  e  $B'$ , respectivamente, a intersecção do círculo com as semirretas  $PA$  e  $PB$ .
- Com centro em  $A'$  e raio  $r$ , faça um semicírculo.
- Com centro em  $B'$  e raio  $r$ , faça um semicírculo.
- Seja  $Q$ , a intersecção dos semicírculos, de modo que  $Q$  pertença ao ângulo  $APB$ .
- A semirreta  $PQ$  é a bissetriz do ângulo  $APB$ .

Figura 4.5: Construção do triângulo isósceles.



## 4.7 Mediana

**Definição 4.3.** A mediana relativa ao vértice  $A$ , de um triângulo  $ABC$ , é o segmento de reta que liga o ponto  $A$  ao ponto médio do segmento  $BC$ .

- Construa a mediatriz do segmento  $BC$  para encontrar o ponto  $Y$ , ponto médio do segmento  $BC$ .
- O segmento  $AY$  é a mediana relativa ao vértice  $A$ .

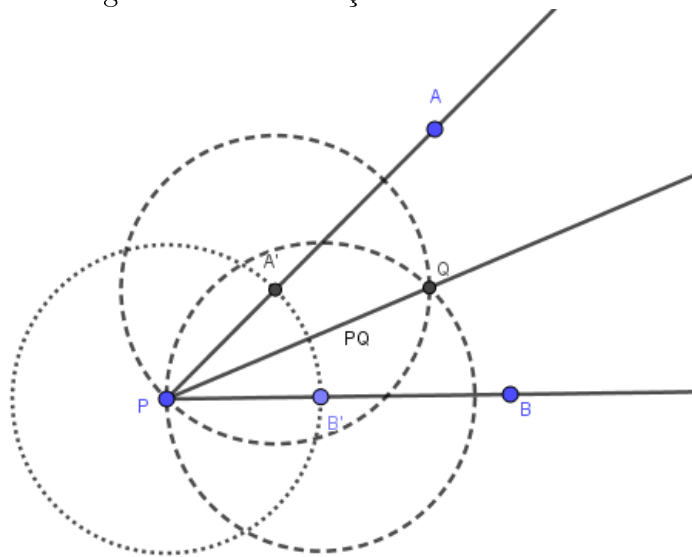
A construção das demais mediana é por processo análogo.

## 4.8 Altura

**Definição 4.4.** A altura relativa ao vértice  $A$ , de um triângulo  $ABC$ , é o segmento de reta que passa perpendicularmente ao lado oposto deste vértice.

- Construa com o compasso um arco de centro em  $A$ , de modo que ele encontre os pontos  $X$  e  $Y$ , em  $BC$ .

Figura 4.6: Construção da Bissetriz.



- Construa a mediatriz de  $XY$ .
- Note que o ponto  $A$  pertence a mediatriz.
- Marque  $M$ , ponto médio de  $XY$ , pertencente a  $BC$ .
- O segmento  $AM$  é a altura relativa ao vértice  $A$ , do triângulo  $ABC$ .

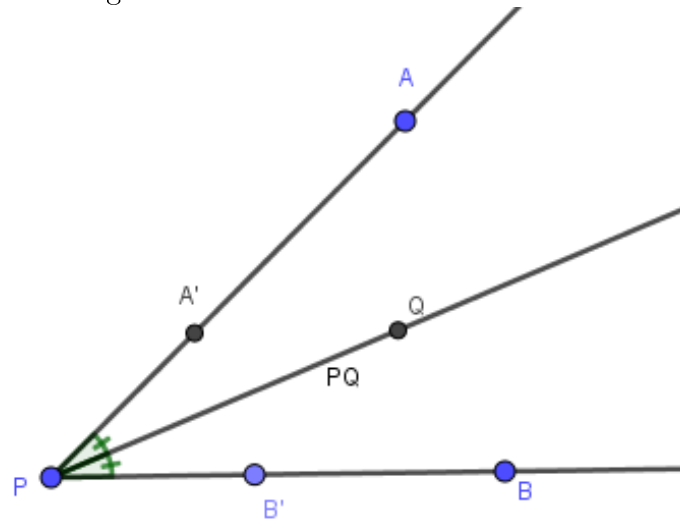
## 4.9 Ortocentro, Baricentro e Incentro

**Definição 4.5.** *Ortocentro é o ponto de intersecção das três alturas de um triângulo.*

- Para construir o ortocentro, basta construir a altura relativa a cada vértice do triângulo.

**Definição 4.6.** *Baricentro é o ponto de intersecção das medianas.*

Figura 4.7: Mostrando a bissetriz.



- Para construir o baricentro, basta construir a mediana relativa a cada vértice do triângulo.

**Definição 4.7.** *Incentro é o ponto de intersecção das três bissetrizes internas de um triângulo.*

- Para construir o incentro, basta construir a bissetriz relativa a cada ângulo do triângulo.

Note que, o ortocentro nem sempre vai ficar dentro do triângulo, vide comentário sobre triângulo obtusângulo, na construção da altura.

Figura 4.8: Construção de uma mediana.

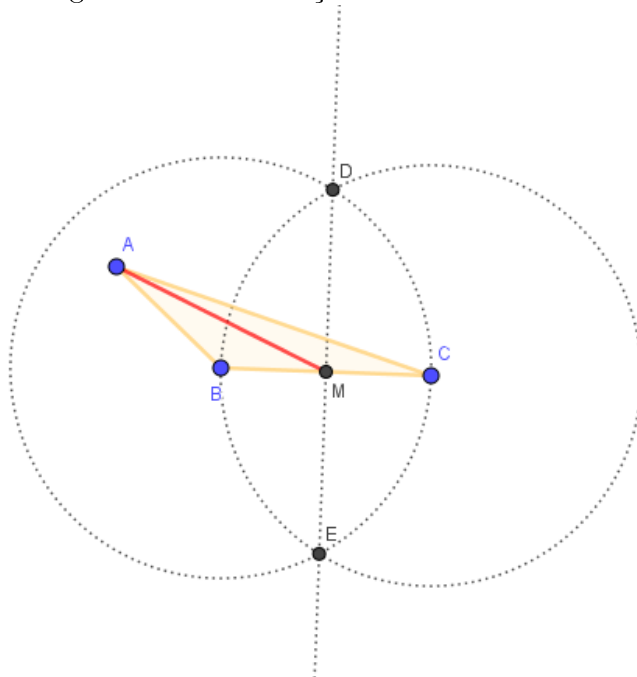


Figura 4.9: Construção da Altura.

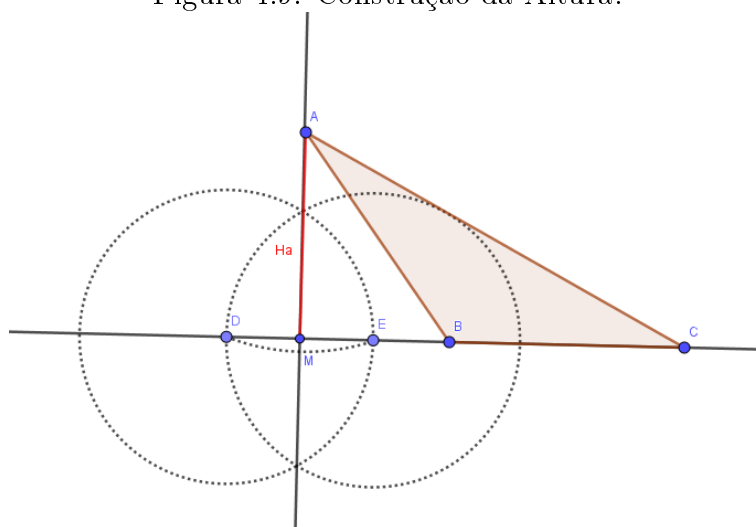




Figura 4.10: Construção do ortocentro.

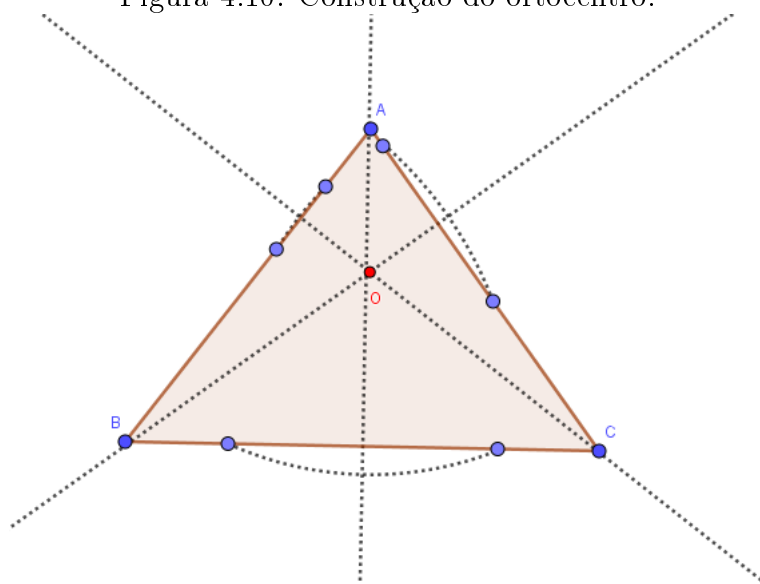


Figura 4.11: Construção do baricentro.

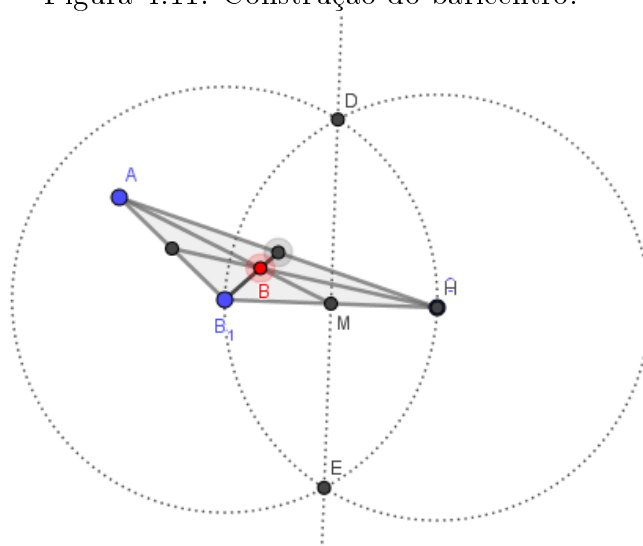
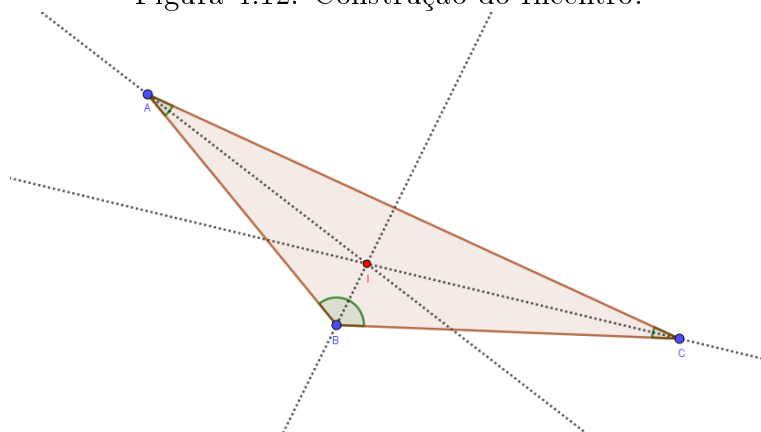


Figura 4.12: Construção do Incentro.



# Capítulo 5

## Trabalho pedagógico com construções geométricas

### 5.1 Introdução

Em uma das escolas que leciono, no planejamento antes do início do período letivo, houve uma orientação sobre uma nova caracterização para a Feira de Ciências (ou Mostra Científica) da escola. Para contextualizar, essa escola é particular, possui quatro turmas na Educação Infantil, nove turmas no Ensino Fundamental, sendo uma turma para cada ano, e três turmas no Ensino Médio, sendo uma turma para cada ano também.

A proposta da escola, após sugestões de alguns docentes, foi o trabalho dos professores como tutores ao longo do ano, de grupo de alunos menores, e que a Mostra Científica fosse a apresentação desses trabalhos, desenvolvidos ao longo do ano. Cada professor deveria orientar no máximo três grupos de trabalho, que deveriam conter de quatro a cinco alunos, de mesma sala ou não.

Os temas dos trabalhos poderiam ser propostos de duas maneiras: ou partindo dos alunos, algum tema não necessariamente relacionado a um compo-

nente curricular, mas podendo ser de forma interdisciplinar, e estes alunos escolhendo o professor para orientação; ou partindo do professor, propor um trabalho para determinado grupo de alunos, e desenvolver ao longo do ano, estudos e aprofundamentos nas áreas em que trabalham. Nessa escola, sou professor de matemática do 6° ao 9° ano. Também tem na grade curricular a disciplina de Desenho Geométrico, que até o momento, não era ministrada por mim. Um grupo de três alunas do 8° ano do Ensino Fundamental, chegou à escola neste ano, e nas escolas de onde vieram, escolas públicas municipais, não tinham a disciplina de Desenho Geométrico, tampouco contato com os instrumentos matemáticos de compasso e régua. Com isso, as alunas tiveram muita dificuldade no início e vieram me pedir auxílio, mesmo não sendo o professor da disciplina, de como usar régua e compasso corretamente, demonstrando interesse no aprendizado.

Com isso, propus as alunas um projeto, para desenvolvermos ao longo do ano, de aprofundamento nas construções geométricas com régua e compasso, concomitante ao ensino de geometria e investigações em resultados geométricos utilizados, sem conhecimento das origens.

Além disso, como produto final do estudo, realizaríamos uma oficina de construções geométricas com régua e compasso, com alunos do 5° ano da escola, pois os mesmos ainda não tem contato com os instrumentos de construção, e no ano seguinte, passarão a ter a disciplina de Desenho Geométrico, sendo essa oficina uma introdução com objetivo de instigar os alunos a aprender geometria e construções mais sofisticadas ao longo dos próximos anos.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), na unidade temática de Geometria, do 5° ano do Ensino Fundamental, têm-se no objeto de conhecimento figuras geométricas planas: características, representações e ângulos a habilidade (EF05MA17): Reconhecer, nomear e comparar polígonos,

considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.

Portanto, o produto final desse estudo é levar aos alunos do 5º ano um primeiro contato com os materiais de desenho, para construção de triângulos, equilátero, retângulo e isósceles, explorando intuitivamente alguns resultados do Teorema de Pitágoras, e algumas propriedades do lugar geométrico que contém pontos que equidistam de dois extremos de um segmento, ou seja, a mediatriz.

## 5.2 Objetivos

Aos alunos do grupo de estudos, proporcionar um maior conhecimento na área de geometria, aprofundar seus conhecimentos e fundamentar alguns conceitos e definições geométricas, difundir a importância da construção geométrica com materiais de desenho e explorar a justificativa de alguns resultados utilizados por eles até então no 8º ano do Ensino Fundamental.

Aos alunos do 5º ano, introduzir a disciplina de desenho geométrico em forma de oficina, com o primeiro contato com compasso, despertar o interesse por aprender usar os materiais de desenho geométrico, e contato com alunos de anos posteriores para conversa e auxílio no aprendizado.

## 5.3 Metodologia

No primeiro encontro, foram trabalhadas construções de triângulos segundo conhecimento prévio dos alunos do grupo de estudos. Com auxílio e orientação do professor, serão construídos triângulos retângulos, isósceles, escaleno e equilátero, com régua e compasso. Em seguida, serão justificadas por meio de casos de congruência de triângulos, alguns resultados como por exemplo, da

altura do triângulo isósceles encontrar a base em seu ponto médio.

No segundo encontro, foram trabalhadas construções de mediatriz, bissetriz e altura no triângulo, com auxílio e orientação do professor responsável. Como o grupo de estudos era composto por quatro pessoas, os alunos em determinados momentos trabalharam em duplas, e em outros, trabalharam individualmente.

Em um terceiro momento, foi entregue aos alunos uma lista de exercícios que deveriam fazer no período de férias, para que continuassem pesquisando, adquirindo maturidade e independência na utilização de régua e compasso para construções e resolução de problemas. Segue abaixo a lista, e um dos resultados apresentados por um integrante do grupo.

No quarto momento, foi feita a devolutiva aos alunos do trabalho que haviam realizado, mostrando pontos onde poderiam melhorar, e começamos juntos pensar e organizar a oficina, como realizar e o que construir. Foi decidido por trabalhar em 5 grupos, onde cada um dos quatro alunos do grupo de estudos além do professor, seriam responsáveis por desenvolver. Foi elaborado o guia abaixo, que seria o roteiro que cada grupo desenvolveria, contendo:

- Construção de triângulo equilátero.
- Construção de mediatriz.
- Construção de triângulo retângulo.
- Preenchimento de tabela, com as informações que remetem ao Teorema de Pitágoras.

Foi determinado também, que precisaria ser providenciado compasso, régua e calculadora para os grupos de trabalho. Foi utilizado um kit de compassos que o professor possuía, as régua os alunos tem do material escolar e as

calculadoras, a escola possui um kit de calculadoras, suficiente para o número de alunos da turma.

No quinto momento, foi aplicada a oficina com os alunos do 5º ano, cujos resultados serão apresentados posteriormente neste trabalho.

Infelizmente por motivo de tempo, logística e compromissos escolares, não foi possível apresentar os resultados do projeto na Mostra Científica de 2019, ficando a apresentação para a Mostra Científica 2020 do colégio.

Todos os encontros e momentos dessas tutorias, foram feitos em contra turno, voluntariamente conforme disponibilidade dos alunos, professor e espaços físicos na escola para as orientações.

## 5.4 Resultados

O empenho dos alunos durante aplicação da oficina de construções geométricas nos impressionou. Todos estiveram solícitos, e interessados durante a atividade. Mesmo em meio às dificuldades, foram persistentes. Como trabalhamos em grupos, uns ajudavam os outros após conseguirem determinada tarefa, sob supervisão de um monitor, sendo o professor e os alunos do grupo de estudos do 8º ano.

Houve bastante dificuldade inicialmente, no manejo do compasso. Realizamos a atividade em uma hora. A professora do 5º ano nos acompanhou, porém apenas dando suporte de auxílio, sem interferência.

Os grupos conseguiram terminar o roteiro proposto, encerrando a atividade com o preenchimento de uma tabela, que remete ao Teorema de Pitágoras, porém com aproximações, uso de calculadora.


Os alunos do grupo de estudos ficaram encantados com a possibilidade de ensinar. E como professor, fiquei orgulhoso pelo trabalho como um todo. Tanto com os alunos do 8º ano que ao longo do ano, se dedicaram ao estudo e

organização do projeto, quanto com os alunos do 5º ano, que se empenharam ao máximo no desenvolvimento da oficina.

No anexo, seguem algumas fotos de todo o trabalho, desde o início, até a fase final que foi a aplicação.

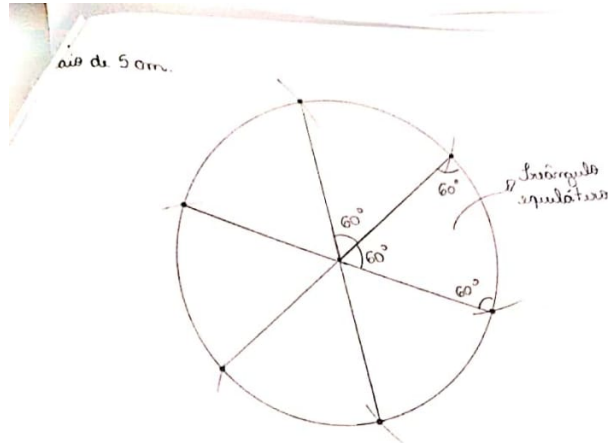
## 5.5 Anexos



	<b>ENSINO FUNDAMENTAL</b>	
	Aluno (a):	Nº
<b>Projeto – Feira Científica 2019</b>		
Prof. Guilherme	<p>Orientações: <i>Todas as construções devem ser feitas apenas com régua e compasso. Apenas no último exercício, permite-se o uso de transferidor para verificar que o ângulo é reto. Entrega: até 28/06/2019. Pode ser feito em grupo, mas cada aluno deverá entregar o seu. Usem folhas de sulfite para as construções, e as entreguem anexadas a essa folha. Bom trabalho!</i></p>	

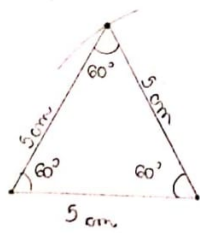
- 1.)** Mostre que uma circunferência qualquer, pode ser dividida em exatamente 6 triângulos equiláteros.
- 2.)** Conclua, argumentando a partir de sua construção, que cada ângulo interno de um triângulo equilátero é  $60^\circ$ .
- 3.)** Construa um triângulo equilátero qualquer. Justifique, pela sua construção, que ele é equilátero. (Lembrando que, para um triângulo ser equilátero é preciso mostrar que todos os seus lados e todos os seus ângulos tem mesma medida).
- 4.)** Construa um triângulo isósceles e justifique sua construção.
- 5.)** Construa um triângulo isósceles ABC, com base BC, e nele faça a altura relativa ao vértice A. (com compasso).
  - a.)** Onde é o ponto de encontro da altura, com a base BC?
  - b.)** Justifique, usando os casos de congruência estudados, que o  $\triangle BAM$  é semelhante ao  $\triangle CAM$ .
  - c.)** Com isso, argumente a seguinte propriedade: “Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base têm a mesma medida.”
- 6.)** Mostre que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é  $180^\circ$ . (Desenhe um triângulo obtusângulo, para justificar essa afirmação).
- 7.)** Mostre que a soma dos ângulos externos de qualquer triângulo é  $360^\circ$ . (Utilize um triângulo qualquer)
- 8.)** Siga os passos abaixo, para a próxima construção:
  - i.) Faça uma circunferência de diâmetro AB.
  - ii.) Escolha um ponto C, em qualquer lugar da sua circunferência (lembrando que a circunferência é o contorno).
  - iii.) Ligue os pontos, formando o  $\triangle ABC$ .
  - iv.) Classifique o triângulo ABC quanto a seus ângulos. Além disso, teste colocar o ponto C em outros lugares, e veja se a classificação se mantém.

Figura 5.1: Resolução de uma das alunas - (1).



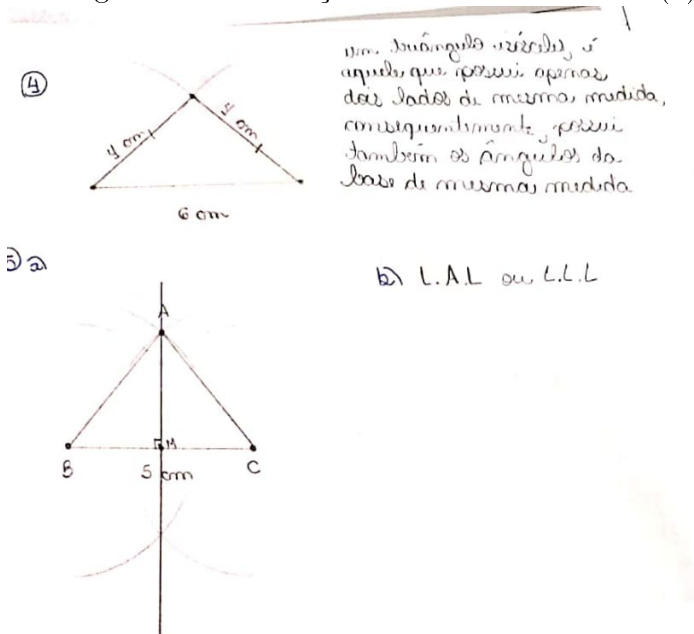
② Triângulo equilátero possui todos os ângulos internos de mesma medida. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo tem que ser igual a  $180^\circ$  consequentemente, cada ângulo de um triângulo equilátero será  $60^\circ$ .

③



Como ele possui todos os lados de mesma medida, consequentemente, seus ângulos internos serão iguais a  $60^\circ$ .

Figura 5.2: Resolução de uma das alunas - (2).



(C) Como os lados são congruentes, com isso o ângulo  $\hat{B}$  é igual ao ângulo  $\hat{C}$ , ou seja, os ângulos da base são iguais

Figura 5.3: Resolução de uma das alunas - (3).

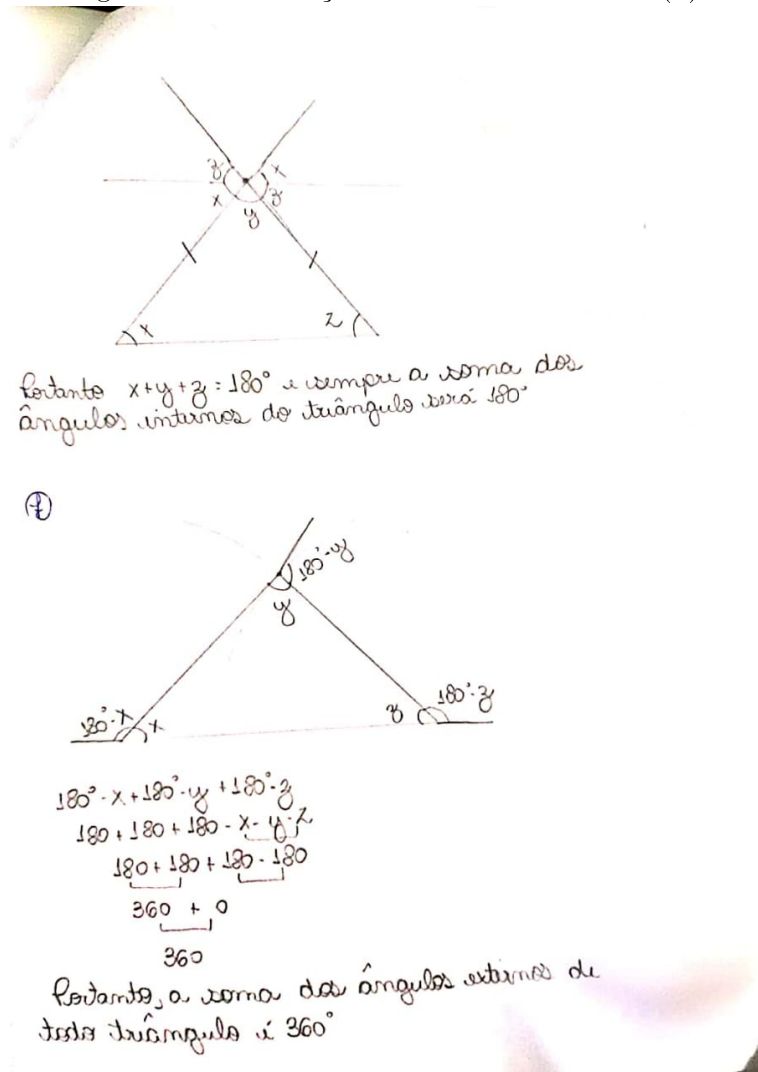


Figura 5.4: Resolução de uma das alunas - (4).

⊗

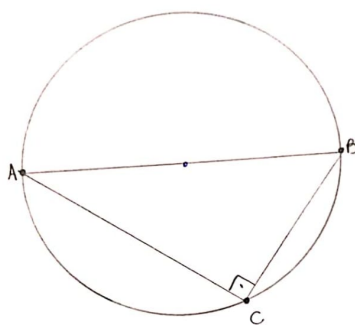


Figura 5.5: Alunos do 5º ano trabalhando.

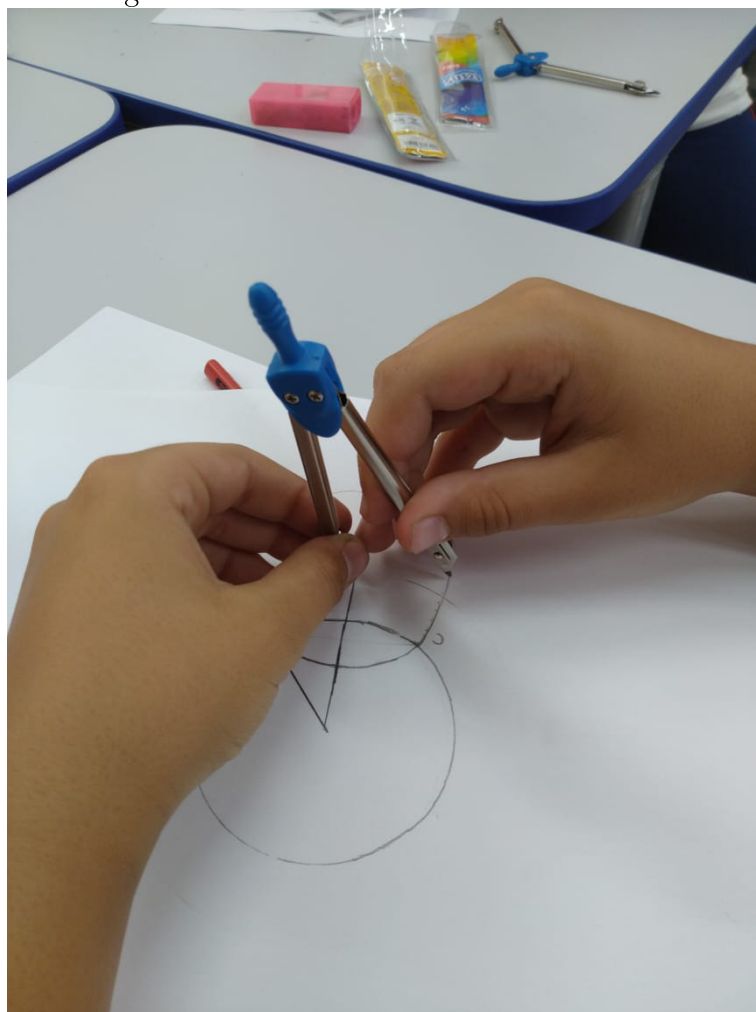


Figura 5.6: Alunos do 5º ano trabalhando.

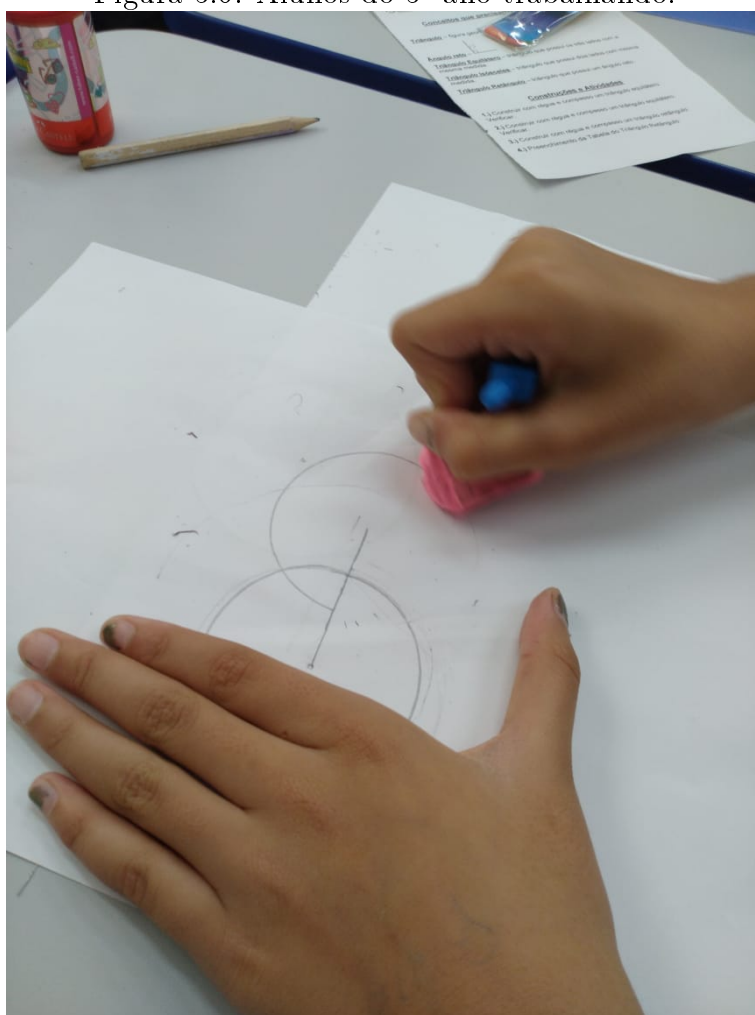


Figura 5.7: Alunos do 5º ano trabalhando.

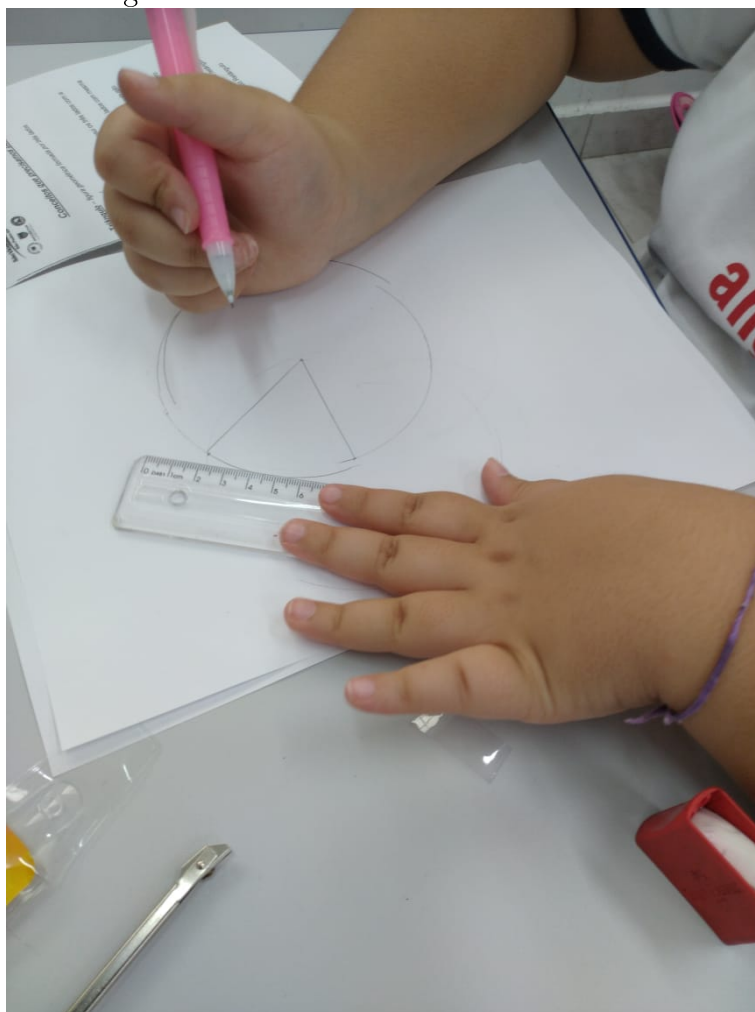





Figura 5.8: Roteiro da Oficina com o 5º Ano.


**ROTEIRO PARA OFICINA DE  
CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM  
RÉGUA E COMPASSO**

**Conceitos que precisamos para a oficina**

**Triângulo** – figura geométrica formada por três lados.



**Ângulo reto** –

**Triângulo Equilátero** – triângulo que possui os três lados com a mesma medida.

**Triângulo Isósceles** – triângulo que possui dois lados com mesma medida.

**Triângulo Retângulo** – triângulo que possui um ângulo reto.

**Construções e Atividades**

- 1.) Construir com régua e compasso um triângulo equilátero. Verificar.
- 2.) Construir com régua e compasso um triângulo equilátero. Verificar.
- 3.) Construir com régua e compasso um triângulo retângulo.
- 4.) Preenchimento da Tabela do Triângulo Retângulo

Figura 5.9: Tabela do Triângulo Retângulo de um dos grupos.

**TABELA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO**

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Medida de AB	Medida de AC	Medida de BC	$\overline{AB} \times \overline{AB}$	$\overline{AC} \times \overline{AC}$	$C4 + C5$	$\overline{BC} \times \overline{BC}$
2,5 cm	9 cm	9,3 cm	6,25	81	87,25	86,49
1,9 cm	3,8 cm	3,9 cm	3,61	14,44	18,05	15,21
2 cm	2,5 cm	3,2 cm	4	6,25	10,25	10,24
1,8 cm	2,6 cm	3,3 cm	3,24	6,76	10	10,89
2,7 cm	5 cm	4,1 cm	7,29	25	32,29	16,81

## Capítulo 6

# Pensatas sobre o ensino de matemática com régua e compasso

Um dos motivadores para este trabalho de conclusão de mestrado é poder mostrar a outros professores, que a matemática pode ser construída com régua e compasso desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Para isso, selecionamos algumas construções geométricas, descrevendo-as e mostrando em figuras de forma que o docente tenha um material de apoio, que foi escrito voltado para ele utilizar com seus alunos. Vamos resgatar na Base Nacional Comum Curricular, como o ensino de geometria é inserido no primeiro ciclo do ensino fundamental.

Na BNCC, o ensino de geometria começa no 1º ano do Ensino Fundamental, onde o aluno deve aprender, em suma, a localizar objetos e pessoas no espaço, além do reconhecimento de alguns sólidos geométricos e suas diferentes características. Já no 2º ano, ele passa a ter contato e explorar características de figuras geométricas planas, como círculo, quadrado, retângulo e triângulo, além de uma consolidação das habilidades e conceitos estudados no ano anterior. No 3º ano, onde se encerra (em partes) o ciclo de alfabetização, o aluno

deve saber diferenciar sólidos e figuras planas, e tem uma primeira ideia de figuras congruentes no espaço, identificar corpos que ocupam o mesmo espaço; inclusive, a habilidade (EF03MA14) mostra que o aluno deve conseguir descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações. A partir dessa maturidade adquirida, para conseguir relacionar e descrever sólidos com planificações, o aluno está pronto para começar conceituar a geometria, e não mais apenas vê-la, ou tocá-la em blocos lógicos, kit de sólidos geométricos que em geral, as escolas tem para auxílio nos primeiros anos, aos professores.

No 4º ano, pela primeira vez os alunos devem iniciar os estudos com ferramentas de desenho geométrico, diferentes da régua milimetrada, que o mesmo já utiliza desde os primeiros anos. A habilidade (EF04MA18) *Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria* dá um primeiro incentivo ao uso dos esquadros, e algumas dobraduras na interpretação de ângulos. Até que no 5º ano, consolida-se a primeira parte do uso e conhecimento de materiais de construção geométrica, com a habilidade (EF05MA17) *Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais*.

Precisamos aqui, fazer alguns comentários onde nos mostramos inseridos na realidade das escolas nos dias de hoje. Com base em [4] e [5], percebemos que não são todas as escolas que conseguem ter estrutura de materiais, para que os alunos tenham acesso à esquadro, compasso e transferidor no ensino. Algumas redes públicas fornecem essas materiais no kit do aluno, que ele recebe no início do período letivo. Porém, nem sempre o professor que tem 30 ou mais alunos em sala de aula, na faixa etária de 9 a 11 anos, consegue dar ao aluno dedicação para inserção dessas ferramentas no ensino. Porém, com o

avanço das escolas em período integral, pode-se sugerir oficinas com professores especialistas em matemática, com menos alunos por turma, para o ensino de geometria. Existem em algumas cidades, a disciplina de geometria separada da matemática nas redes públicas, a partir do 6º ano. Porém, nos anos iniciais isso ainda é um sonho que talvez um dia seja concretizado, com um novo olhar, para a importância do ensino de geometria, na formação da maturidade matemática das crianças.

Mesmo inseridos nesse contexto, este trabalho vem mostrar algumas construções geométricas, descritas com uma linguagem para entendimento de professores de matemática, mas também de professores formados em pedagogia, e que lecionam em especial nas séries finais do Ensino Fundamental 1, para que possam trabalhar com os alunos, se possível, algumas construções e descrições no 4º ano e no 5º ano. Em um primeiro momento, os alunos podem demonstrar dificuldade em manusear o compasso, em fixar a ponta seca do mesmo, e gira-lo sem mexer na abertura pré-determinada, ou até mesmo na habilidade em segurar o papel, organizar os materiais na carteira para que tenha espaço suficiente, paciência para errar e perseverar nas tentativas, dentre outros.

Por exemplo, a construção de um triângulo equilátero, depende apenas do aluno conseguir desenhar círculos com o compasso. Com uma linha desenhada sem a necessidade de uma medida padrão para todos, o aluno faz dois círculos e na intersecção dos mesmos, encontra o ponto que formará um triângulo equilátero. Após cada construção, é importante que com o uso da régua, haja uma verificação para que o aluno não apenas aceite que aqueles passos constroem certa figura, mas também verificar e se convencer da beleza de sua própria construção.

Neste momento, faremos uma observação sobre duas palavras que aparecem em livros didáticos, e que não possuem uma definição exata da diferenciação:

círculo e circunferência.

Em geral, a maior parte dos materiais didáticos chama de circunferência o contorno do círculo, sendo este portanto, a parte interna. É importante que o professor dos anos iniciais, converse e troque experiencias com o professor de matemática dos anos finais do ensino fundamental, para que ambos cheguem a um consenso com base nos livros didáticos adotado pela escola. Como experiência particular, costumo diferenciar aos alunos dizendo que nos anos iniciais a criança aprende ?pinte o círculo? e não ?pinte a circunferência? para dizer que o círculo é o espaço que pode ser pintado ou preenchido, sendo a circunferência a figura construída com auxilio do compasso.

Com isso, é fundamental que o professor utilize-se do máximo de ferramentas de precisão no ensino da geometria desde os primeiros anos, para que cheguem ao Ensino Fundamental 2 mais preparados para conceituar a geometria, estudar de forma mais aprofundada os triângulos, em especial o triângulo retângulo nas suas relações métricas, trigonométricas, os Teoremas de Tales e Pitágoras, ângulos internos e externos dos polígonos, os elementos da circunferência, dentre outros. O ensino da geometria, despertando o interesse e a dedicação dos alunos é responsabilidade de todos pelos quais esses alunos passaram, e trabalharam.

# Referências Bibliográficas

- [1] NETO, A. C. M. Geometria. Primeira edição, Coleção Profmat, 2013.
- [2] EUCLIDES. Os Elementos. Primeira edição, Editora UNESP, 2009
- [3] NACARATO, A. M e PASSOS, C. L. B. A Geometria nas Séries Iniciais, Editora Edufscar, 2003.
- [4] CURI, E. A formação matemática de professores dos anos iniciais do ensino fundamental face às novas demandas brasileiras. Revista Iberoamericana de Educação, Universidade Cruzeiro do Sul, Janeiro 2008.
- [5] PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. Revista Zetetiké, ano 1, número 1, 1993.
- [6] COX, A. D., Galois Theory. Wiley, 2004.
- [7] TENFEN, Danielle Nicolodelli. Editorial: Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Disponível em: < [http : //portal.mec.gov.br](http://portal.mec.gov.br) > Acesso em: 08 mar. 2020.