Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Departamento de Matemática

Sobre a metrizabilidade do espaço de $\mathbb{R}$-lugares de um corpo de funções F com trdeg$_R F$=1

Melissa N. Pereira

São Carlos
Fevereiro de 2020

Sobre a metrizabilidade do espaço de $\mathbb{R}$-lugares de um corpo de funções F com $\operatorname{trdeg}_R F$=1

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Melissa N. Pereira
Orientador: Josnei Antonio Novacoski

São Carlos
Fevereiro de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Melissa Natasha Pereira, realizada em 28/02/2020:

Prof. Dr. Josnei Antonio Novacoski
UFSCar

Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo
UFSCar

Prof. Dr. Daniel Levcovitz
ICMC/USP

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar aos meus pais, Valter e Cleonice, pelo apoio incondicional e pala confiança depositada em todas as minhas decisões. Às minhas irmãs Monalisa, Lara e Laila por terem total disposição em me ajudar, por todo carinho e por tornarem essa jornada um pouco mais leve. Ao meu namorado, Luiz Guilherme, por sempre me apoiar e pela paciência em corrigir os erros do LaTeX. Aos amigos que conheci em São Carlos, especialmente Débora, Gabriel, Andrés, Victor e Matheus por terem sido companheiros tanto nas horas de estudo quanto nas horas de lazer. Ao meu orientador, Josnei por todo seu tempo dedicado em me orientar, pela confiança depositada em mim e acima de tudo, pelas oportunidades que tive durante a execução desse projeto. Também agradeço aos professores Franz-Viktor Kuhlmann e Katarzyna Kuhlmann por terem tornado possível minha visita à Polônia, assim como pelo tempo dedicado em sanar minhas dúvidas. Não menos importante, agradeço aos membros da banca, que se disponibilizaram a ler e corrigir este trabalho. Por fim, agradeço à CAPES e a FAPESP (processo 2018/ 237277-7), pelo apoio financeiro.

Sumário

Resumo

A principal proposta deste trabalho é estudar sobre a metrizabilidade do espaço dos $\mathbb{R}$-lugares do corpo de funções com grau de transcendência 1 sobre um corpo realmente fechado. Especificamente, vamos dar uma condição sobre o corpo R, necessária e suficiente para garantir a metrizabilidade de $M(R(X))$. No primeiro capítulo do trabalho, damos alguns resultados básicos sobre valorizações, ordens e lugares reais. Em seguida, no Capítulo 2, partimos para uma abordagem direta do problema. Neste capítulo, vamos estudar os espaços $\mathcal{X}(R(X))$ e $M(R(X))$ do ponto de vista topológico.

Palavras-chave: $\mathbb{R}$-lugares, Metrizabilidade, Corpo Realmente Fechado, Valorizações, Lugares, Corpo Formalmente Real, Ordens

Abstract

The main purpose of this work is to study about the metrizability of the space of $\mathbb{R}$-places of a function field, with transcendence degree 1 over a real closed field. Specifically, we are going to present a necessary and sufficient condition that guarantees the metrizability of $M(R(X))$. In the first chapter, we give some preliminaries results on the topics of valuation, orderings and real places. Then, in Chapter 2, we start with a straightforward approach to the problem. In this chapter, we will study the $\mathcal{X}(R(X))$ and $M(R(X))$ spaces from a topological point of view.

Keywords: $\mathbb{R}$- places, Metrizability, Real Closed Fields, Valuations, Places, Formally Real Fields, Orderings

Introdução

Uma das grandes perguntas acerca de um espaço topológico, é sem dúvida, se ele pode ser metrizável. A depender do caso, o Teorema da Metrização de Uryshon, é a chave para este problema. Essa foi a abordagem utilizada pelos autores F.-V. Kuhlmann, M. Machura e K. Osiak para mostrar que o espaço de $\mathbb{R}$- lugares de um corpo de funções F com $\text{trdeg}_R F{=}1$ pode ser metrizável. Esse resultado deu origem ao artigo *Metrizability of Spaces of* $\mathbb{R}$*-places of Function Fields of Transcendence Degree 1 Over Real Closed Fields*.

A proposta central deste trabalho, é apresentar os resultados que compõem o artigo mencionado (cuja referência é [13]). Frisamos que no artigo original, alguns detalhes das demonstrações são omitidos e aqui tomamos o cuidado de expandi-las. Também vamos fornecer a teoria básica sobre *valorizações* e *lugares*, tal como os tópicos de topologia necessários para a compreensão do nosso texto.

No artigo trabalhado, os autores apresentam uma condição necessária e suficiente para a metrizabilidade do espaço de $\mathbb{R}$-lugares do corpo $R(X)$, representado por $M(R(X))$. Ressaltamos que $M(R(X))$ é dotado da topologia quociente, induzida pela topologia no espaço das ordens de $R(X)$, que será denotado por $\mathcal{X}(R(X))$. O espaço topológico $\mathcal{X}(R(X))$ é compacto, Hausdorff e totalmente desconexo. Assim, o espaço $M(R(X))$ herda a compacticidade de $\mathcal{X}(R(X))$. É possível mostrar que $M(R(X))$ é Hausdorff. Portanto, estamos em condições de utilizar o Teorema da Metrização de Urysohn. Faremos isso, estudando a *celularidade* de $M(R(X))$. Esse é, resumidamente, o método utilizado para demonstrar tal condição.

Como acabamos de sugerir, o espaço das ordens de um corpo terá um papel essencial neste trabalho. Vamos nos ater a estudar a metrizabilidade de $M(R(X))$, onde R é um corpo *realmente fechado*. Isso significa que R possui apenas uma ordem, onde todo elemento positivo é um quadrado. Em contrapartida, temos que $R(X)$ pode ser ordenado de várias maneiras. Um corpo com essa característica diz-se *formalmente real*. As caracterizações fundamentais dos corpos realmente fechados e dos corpos formalmente reais se devem aos autores E.Artin e O.Scrheier e serão apresentadas nas preliminares do nosso trabalho.

A teoria das valorizações é por si só, um tópico bastante amplo. Intuitivamente, uma valorização traz informações sobre o "tamanho" ou "multiplicidade" dos elementos de um corpo. As valorizações aparecem principalmente atreladas às áreas de teoria dos números e geometria algébrica. A saber, a teoria se popularizou quando matemáticos, como Zariski, se propuseram a resolver o problema das singularidades em corpos de característica zero, usando fundamentos das valorizações. Uma valorização sempre dá origem a uma função lugar, dessa forma elas estão fortemente presente ao longo do que vamos desenvolver.

Agora façamos uma breve síntese entre os conceitos de ordem, valorização e lugares reais. Um lugar em um corpo K, nada mais é, do que um homomorfismo entre um *anel de valorização* de K e um corpo qualquer. A definição de anel de valorização aqui, não é importante. Apenas enfatizamos que como nossa intuição sugere, eles estão diretamente ligados com as valorizações. Em um corpo ordenado, existem valorizações que são *compatíveis* com a ordem. Veremos que isso implica a existência de um corpo ordenado F, cuja ordem é arquimediana. Segundo o Teorema de Holder, existe um isomorfismo entre F e $\mathbb{R}$. Sendo assim, para obter um $\mathbb{R}$-lugar, que vamos denotar por λ, basta construir um lugar que assuma valores em F e através de um isomorfismo, identificar as imagens de λ com $\mathbb{R}$.

O desenvolvimento principal do nosso trabalho está acomodado em dois capítulos. Inicialmente, no capítulo 1 damos as noções básicas sobre valorizações e lugares, ordens e corpos ordenados. Em seguida, nós apresentamos o conceito de ordens e corpos ordenados. Por fim, nos dedicamos a descrever a compatibilidade entre ordens e como isso atua na construção de lugares reais.

O capítulo 2 é um pouco mais técnico, e tem como objetivo principal responder sobre a metrizabilidade de $M(R(X))$. Como já mencionamos, os resultados deste capítulo fazem parte do artigo [13]. Também decidimos incluir um Apêndice, onde citamos alguns resultados de Topologia e fazemos destaque aos espaços topológicos $\mathcal{X}(K)$ e $M(K)$, sendo K um corpo ordenado.

Notações

Notação	Significado
ν	valorização
$\mathcal{O}_\nu$	anel de valorização associado à ν
$\mathfrak{m}_\nu$	ideal maximal de $\mathcal{O}_\nu$
K_ν	corpo de resíduos de ν
ξ_ν	lugar associado ao anel de valorização $\mathcal{O}_\nu$
$D^\times$	unidades de um anel D
$\dot{F}$	$F \setminus \{0\},$ onde F é um corpo
F^2	conjunto dos quadrados de um corpo F
$\sum F^2$	somas finitas dos elementos de F^2
$\mathcal{F}$	conjunto das ordens de F
$A(P)$	envoltório convexo de F em relação à uma ordem P
$I(P)$	ideal maximal de $A(P)$
k	corpo de resíduos da valorização natural (valorização associada ao anel $A(P)$)
$M(F)$	espaço dos lugares reais de F

1 Preliminares

Neste capítulo vamos abordar alguns conceitos que serão indispensáveis para a compreensão deste trabalho. Tais noções se enquadram nas áreas de álgebra e topologia. Na parte algébrica, o objetivo será apresentar os conceitos preliminares sobre *valorizações*, *corpos ordenados* e *lugares*.

1.1 Valorizações

Considere R um anel comutativo com unidade e Γ um grupo abeliano totalmente ordenado. Isto é, Γ possui uma relação de ordem total $\leqslant$, tal que para todos $a, b, c \in \Gamma$, se $a \leqslant b$ então $a + c \leqslant b + c$.

Lembremos que um grupo abeliano totalmente ordenado é sempre livre de torção, ou seja, se $a \in \Gamma$, sendo $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ é não nulo, então $na \neq 0$. Vamos adotar a notação Γ_∞ para o conjunto $\Gamma \cup \{\infty\}$. Neste caso, assumimos que para todo $x \in \Gamma$, $x < \infty$, $x + \infty = \infty + x = \infty + \infty = \infty$.

Definição 1.1.1. *Uma* ***valorização*** *é uma função não constante* $\nu : R \longrightarrow \Gamma_\infty$ *tal que:*

i. $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$, $\forall x,\ y \in R$.

ii. $\nu(x + y) \geqslant \min\{\nu(x), \nu(y)\}$, $\forall x,\ y \in R$.

iii. *supp*$(\nu) = \{x \in R \mid \nu(x) = \infty\}$ *é um ideal primo de* R.

O **grupo de valores de** ν é o subconjunto de Γ gerado por

$$\{\nu(x) \mid x \in R \text{ e } \nu(x) \neq \infty\}.$$

Observação 1.1.2. *Se* R *é um corpo então a condição iii. é equivalente à* $\nu(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$.

Passemos agora a verificar algumas propriedades provenientes da definição de valorização.

Proposição 1.1.3. *Seja* $\nu : R \longrightarrow \Gamma_\infty$ *uma valorização, então:*

i. $\nu(1) = \nu(-1) = 0$.

ii. $\nu(x) = \nu(-x)$.

iii. $\nu(x^{-1}) = -\nu(x)$.

iv. Se $\nu(x) \neq \nu(y)$ *então* $\nu(x+y) = \min\{\nu(x), \nu(y)\}$.

Demonstração: Segue-se direto da Definição 1.1.1 que $\nu(1) = \nu(1 \cdot 1) = \nu(1) + \nu(1)$. Portanto $\nu(1) = 0$. Mais ainda,

$$0 = \nu(1) = \nu(-1.(-1)) = \nu(-1) + \nu(-1) \tag{1.1}$$

e

$$0 = \nu(1) = \nu(x.x^{-1}) = \nu(x) + \nu(x^{-1}). \tag{1.2}$$

De (1.1) obtemos que $-2\nu(-1) = 0$. Como Γ é livre de torção, temos $\nu(-1) = 0$. O que mostra *i*. Consequentemente $\nu(-x) = \nu(-1.x) = \nu(-1) + \nu(x) = \nu(x)$, o que prova o item *ii*. Além disso, temos por (1.2) que $-\nu(x) = \nu(x^{-1})$, portanto *iii* segue. Para mostrar o item *vi*, assuma sem perda de generalidade que $\nu(x) < \nu(y)$. Suponhamos por absurdo que

$$\nu(x+y) > \min\{\nu(x), \nu(y)\} = \nu(x).$$

Assim,

$$\nu(x) = \nu(x+y-y) \geqslant \min\{\nu(x+y), \nu(y)\} > \nu(x).$$

O que é uma contradição. Portanto $\nu(x+y) = \min\{\nu(x), \nu(y)\}$. □

1.2 Valorizações em Corpos

Nessa seção vamos nos concentrar em valorizações definidas em um corpo K. Comecemos pela definição de *anel de valorização.*

Definição 1.2.1. *Um **anel de valorização** em um corpo* K *é um subanel* $\mathcal{O}$ *tal que para todo* $x \in K$*, se* $x \notin \mathcal{O}$ *então* $x^{-1} \in \mathcal{O}$*.*

Dado um anel qualquer, para entendermos melhor suas propriedades é comum estudar os seus ideais. O conjunto das unidades de um anel D será denotado por $D^{\times}$. O que podemos falar sobre os ideais de um anel de valorização $\mathcal{O}$? Lembremos que um *anel local* é um anel que possui apenas um ideal maximal. O próximo resultado mostra que essa é uma característica dos anéis de valorização.

Proposição 1.2.2. *Seja* $\mathcal{O}$ *um anel de valorização. Então* $\mathcal{O}$ *é um anel local.*

Demonstração: Vamos considerar o conjunto $\mathfrak{m} = \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^{\times}$. Temos que se $x \in \mathfrak{m}$, então x não é uma unidade. Portanto, para todo $y \in \mathcal{O}$, yx não pode ser uma unidade. Logo $yx \in \mathfrak{m}$. Resta mostrar que $(\mathfrak{m}, +)$ é um subgrupo de $(\mathcal{O}, +)$. Com efeito, sejam x, $y \in \mathfrak{m}$.

Se $x = y = 0$ então $x + y \in \mathfrak{m}$. Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, então temos que ${}^{x}/_{y} \in \mathcal{O}$ ou ${}^{y}/_{x} \in \mathcal{O}$. Vamos assumir que ${}^{x}/_{y} \in \mathcal{O}$. Daí

$$x + y = y(1 + {}^{x}/_{y}) \in \mathfrak{m},$$

pois

$$1 + {}^{x}/_{y} \in \mathcal{O} \text{ e } y \in \mathfrak{m}.$$

Segue-se que $\mathfrak{m}$ é um ideal de $\mathcal{O}$. Como $\mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}$ contém apenas unidades, qualquer ideal próprio de $\mathcal{O}$ estará contido em $\mathfrak{m}$. Portanto $\mathfrak{m}$ é o único ideal maximal de $\mathcal{O}$. $\square$

Pela demonstração da Proposição 1.2.2, temos que $\mathcal{O}^{\times} = \mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}$. Note que, a princípio, não precisamos de uma valorização para falar de anéis de valorização, ou o contrário. Isto é, ainda falta algo que conecte de forma concreta esses dois conceitos. Os próximos resultados farão justamente isso.

Lema 1.2.3. *Se $\nu : K \longrightarrow \Gamma_{\infty}$ é uma valorização, então $\mathcal{O}_{\nu} = \{x \in \mathcal{O} \mid \nu(x) \geqslant 0\}$ é um anel de valorização.*

Demonstração: Suponha que $x \notin \mathcal{O}_{\nu}$. Então $\nu(x) < 0$, assim $-\nu(x) \geqslant 0$. Pelo item *iii* da Proposição 1.1.3, segue que $\nu(x^{-1}) = -\nu(x) \geqslant 0$. Logo $x^{-1} \in \mathcal{O}_{\nu}$. Portanto $\mathcal{O}_{\nu}$ é um anel de valorização. $\square$

O anel $\mathcal{O}_{\nu}$ será denominado **anel de valorização associado à** ν, ou simplesmente **anel de valorização de** ν.

Lema 1.2.4. *Seja $\mathcal{O}_{\nu}$ o anel associado a valorização ν. Então $\mathcal{O}_{\nu}^{\times} = \{x \in \mathcal{O}_{\nu} \mid \nu(x) = 0\}$ e $\mathfrak{m}_{\nu} = \{x \in \mathcal{O}_{\nu} \mid \nu(x) > 0\}$.*

Demonstração: Sabemos que $\mathcal{O}_{\nu}^{\times} = \{x \in \mathcal{O}_{\nu} \mid x^{-1} \in \mathcal{O}_{\nu}\}$. Se $x \in \mathcal{O}_{\nu}^{\times}$, em particular temos que

$$\nu(x) \geqslant 0.$$

Como $x^{-1} \in \mathcal{O}_{\nu}$, temos que $\nu(x^{-1}) = -\nu(x) \geqslant 0$. Segue-se que $\nu(x) = 0$. Portanto

$$\mathcal{O}^{\times} \subseteq \{x \in \mathcal{O}_{\nu} \mid \nu(x) = 0\}.$$

Por outro lado, se $\nu(x) = 0$, então

$$\nu(x^{-1}) = -\nu(x) = 0.$$

Logo x e x^{-1} estão em $\mathcal{O}_{\nu}$. Assim, $\mathcal{O}_{\nu}^{\times} = \{x \in \mathcal{O}_{\nu} \mid \nu(x) = 0\}$. Neste caso, $\mathfrak{m}_{\nu} = \mathcal{O} \setminus (\mathcal{O}_{\nu}) = \{x \in \mathcal{O}_{\nu} \mid \nu(x) > 0\}$. $\square$

O corpo $K_{\nu} = \mathcal{O}_{\nu}/\mathfrak{m}_{\nu}$ será denominado **corpo de resíduos de** ν.

Proposição 1.2.5. *Dado um anel de valorização $\mathcal{O}$, existe uma valorização ν definida em K tal que $\mathcal{O}_\nu = \mathcal{O}$.*

Demonstração: Considere $K^\times = K \setminus \{0\}$, grupo multiplicativo de K. Vamos definir $\Gamma := {}^{K^\times}\!/_{\mathcal{O}^\times}$. Como Γ é abeliano em relação a multiplicação, vamos definir $x\mathcal{O}^\times + y\mathcal{O}^\times := xy\mathcal{O}^\times$. A relação

$$x\mathcal{O}^\times \geqslant y\mathcal{O}^\times \Leftrightarrow xy^{-1} \in \mathcal{O}^\times \tag{1.3}$$

determina uma ordem em Γ, ver [18], página 20. Considere

$$\begin{array}{rccl} \nu: & K & \longrightarrow & \Gamma_\infty \\ & x & \longmapsto & \nu(x) = \begin{cases} x\mathcal{O}, & \text{se } x \neq 0, \\ \infty, & \text{se } x = 0. \end{cases} \end{array} \tag{1.4}$$

Vejamos que ν é uma valorização. Por construção temos que o item *i* e *iii* da Definição 1.1.1 são satisfeitos. Vamos mostrar *ii*. Sejam x, $y \in K$. Sabemos que $xy^{-1} \in \mathcal{O}$ ou $x^{-1}y \in \mathcal{O}$. Suponhamos que $xy^{-1} \in \mathcal{O}$. De onde segue-se que $x\mathcal{O}^\times \geqslant y\mathcal{O}^\times$. Como

$$(x+y)y^{-1} = xy^{-1} + 1 \in \mathcal{O},$$

temos

$$\nu(xy) = (x+y)\mathcal{O}^\times \geqslant y\mathcal{O}^\times \geqslant \min\{\nu(x), \nu(y)\}.$$

Logo ν é uma valorização. Por fim,

$$\mathcal{O}_\nu = \{x \in K \mid x\mathcal{O}^\times \geqslant 1\mathcal{O}^\times\} = \{x \in K \mid x \in \mathcal{O}\} = \mathcal{O},$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Vejamos agora alguns exemplos de valorizações.

Exemplo 1.2.6. *Seja R um domínio de integridade. A valorização que associa a cada $x \in R$ o valor 0 se $x \neq 0$ e ∞ se $x = 0$, é chamada de valorização trivial.*

Exemplo 1.2.7. *Fixe um primo p. Seja $\frac{s}{t} \in \mathbb{Q}$. Podemos escrever $\frac{s}{t} = p^m(\frac{s'}{t'})$, tal que s', t' são coprimos com p e $m \in \mathbb{Z}$. Definimos a valorização p-ádica por:*

$$\begin{array}{rccl} \nu_p: & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_\infty \\ & \dfrac{s}{t} & \longmapsto & \nu_p\left(\dfrac{s}{t}\right) := \begin{cases} m, & se\ s \neq 0, \\ \infty, & se\ s = 0. \end{cases} \end{array}$$

Temos que $\mathcal{O}_{\nu_p} = \{\frac{s}{t} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid t\}$ e $\mathfrak{m}_{\nu_p} = p\mathcal{O}_{\nu_p}$. O corpo de resíduos é dado por $K_{\nu_p} = \mathcal{O}_{\nu_p}/p\mathcal{O}_{\nu_p}$. Pode-se mostrar que $K_{\nu_p} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exemplo 1.2.8. *Considere o corpo de funções racionais em uma variável $K(X)$. Sejam $f(X), p(X) \in K[X]$, onde $f(X)$ é qualquer polinômio e $p(X) \in K[X]$ é um polinômio irredutível. Para simplificar a notação, vamos omitir a variável X. Podemos reescrever f como $\tilde{f} = p^n \frac{f}{h}$ tal que f, g e p são coprimos e $n \in \mathbb{Z}$. Vamos definir a valorização $p(X)$-ádica, pondo $\nu_p(f) = n$, $\nu_p(0) = \infty$ e $\nu_p\left(\frac{f}{g}\right) = \nu_p(f) - \nu_p(g)$. Em especial, para $p(X) = X - a$, o polinômio f se tornaria*

$$\tilde{f}(X) = a_m(X-a)^m + a_{m+1}(X-a)^{m+1} + \cdots + a_n(X-a)^n,\ a_m \neq 0.$$

Neste caso, obtemos que o anel de valorização de ν_p consiste de todas as funções que não possuem polo em a. Pode-se mostrar que,

$$K_\nu \cong \frac{K[X]}{(X-a)K[X]} \cong K.$$

Nos exemplos, exceto a valorização trivial, temos que grupo de valores é $\mathbb{Z}$. Quando isso acontece, dizemos que a valorização é **discreta**. Enfatizamos que nem todas as valorizações tem essa propriedade. Para mais exemplos de valorizações, sugerimos o Capítulo 4 de [5] e a Seção 6.7 de [10].

O Lema 1.2.3 e a Proposição 1.2.5, sugerem que existe uma função entre o conjunto dos anéis de valorização de corpo F e conjunto das valorização de F. Porém, temos que o mesmo anel de valorização pode estar associado a diferentes valorizações. Para solucionar este problema, vamos definir **valorizações equivalentes**.

Definição 1.2.9. *Duas valorizações $\nu_1 : K \longrightarrow \Gamma^1_\infty$ e $\nu_2 : K \longrightarrow \Gamma^2_\infty$ são **equivalentes** se existe um isomorfismo $\varphi : \Gamma^1 \longrightarrow \Gamma^2$ que preserva a ordem, tal que $\varphi \circ \nu_1(a) = \nu_2(a)$ para todo $a \in K^\times$.*

Proposição 1.2.10. *Sejam ν_1 e ν_2 duas valorizações em K. Então ν_1 é equivalente a ν_2 se e somente se $\mathcal{O}_{\nu_1} = \mathcal{O}_{\nu_2}$.*

Demonstração: Primeiro suponha que ν_1 e ν_2 são equivalentes. Logo existe um isomorfismo $\varphi : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ tal que $\nu_2 = \varphi \circ \nu_1$. Para $x \in K^\times$, temos que $\nu_1(x) \geqslant 0$ se e somente se $\nu_2(x) \geqslant 0$, pois $\varphi(0) = 0$ e φ preserva a ordem. Logo $\mathcal{O}_{\nu_1} = \mathcal{O}_{\nu_2}$.
Reciprocamente, assuma que $\mathcal{O}_{\nu_1} = \mathcal{O}_{\nu_2}$. Segue-se que

$$\Gamma \simeq {K^\times}\big/{\mathcal{O}^\times_{\nu_2}} = {K^\times}\big/{\mathcal{O}^\times_{\nu_2}}$$

como grupos abelianos. Agora considere $\nu : K \longrightarrow \Gamma_\infty$ a valorização construída a partir do anel $\mathcal{O}_{\nu_1}$ (veja (1.4)). Afirmamos que ambas valorizações ν_1 e ν_2 são equivalentes a ν. Com efeito, mostremos que ν_1 é equivalente a ν, o argumento para ν_2 segue exatamente as mesmas linhas. Como $\ker(\nu_1) = \mathcal{O}^\times_{\nu_1}$, temos que $\Gamma \cong \Gamma_1$. Sabemos por (2.4), que $x\mathcal{O}_{\nu_1} \geqslant y\mathcal{O}_{\nu_1}$ se e somente se $\frac{x}{y} \in \mathcal{O}_{\nu_1}$. Logo, $\nu\left(\frac{x}{y}\right) \geqslant 0$. Daí, $\nu_1(x) - \nu_1(y) \geqslant 0$, isto é, $\nu_1(x) \geqslant \nu_1(y)$. Portanto, $\nu_1 \sim \nu$, como essa relação é transitiva temos que $\nu_1 \sim \nu_2$. □

1.3 Lugares e Anéis de Valorizações

Definição 1.3.1. *Sejam K e F corpos. Um **lugar** de K é um homomorfismo $P : \mathcal{O} \longrightarrow F$, onde $\mathcal{O}$ é um subanel de K, tais que as seguintes propriedades são satisfeitas:*

i. Se $x \notin \mathcal{O}$, então $x^{-1} \in \mathcal{O}$ e $P(x^{-1}) = 0$.

ii. $P(x) \neq 0$, para algum $x \in \mathcal{O}$.

O conjunto $KP = \{P(x) \mid x \in K\}$ é um corpo, denominado **corpo residual de** P.

Observação 1.3.2. *1. Podemos considerar $P : K \longrightarrow KP_\infty$ pondo $P(x) = \infty$ se $x \notin \mathcal{O}$. Com essa definição, temos as relações:*

a. Se $P(x) = \infty$ e $P(y) \neq \infty$ então $P(x+y) = \infty$.

b. Se $P(x) = \infty$ e $P(y) \neq 0$ então $P(xy) = \infty$.

c. Se $x \neq 0$, então $P(x) = 0$ se e somente se $P(x^{-1}) = \infty$.

2. É comum encontrar na literatura a notação aP ao invés de $P(a)$.

Proposição 1.3.3. *O anel $\mathcal{O}$ aparecendo na Definição 1.3.1 é um anel de valorização, cujo ideal maximal é $\mathfrak{m} = \{x \in K \mid P(x) = 0\}$.*

Demonstração: Que $\mathcal{O}$ é um anel de valorização segue do item i da Definição 1.3.1. Além disso, como $\mathfrak{m}$ é o núcleo de P, temos que $\mathfrak{m}$ é um ideal de $\mathcal{O}$. Mostremos que se um elemento $a \notin \mathfrak{m}$ então a é uma unidade. Com efeito, suponha que $a \in \mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}$ e $a^{-1} \notin \mathcal{O}$. Assim, temos $P(a^{-1}) = \infty$ e $P(a) \neq 0$. Segue-se que,

$$1 = P(a.a^{-1}) = P(a)P(a^{-1}) = \infty,$$

o que é uma contradição. Logo, $a \in \mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}$ implica $a^{-1} \in \mathcal{O}$. Portanto, $\mathfrak{m}$ é maximal. $\square$

Exemplo 1.3.4. *Considere K um corpo e $\mathcal{O}_\nu$ um anel de valorização de K. Temos que a projeção $\pi_\nu : \mathcal{O}_\nu \longrightarrow \mathcal{O}_\nu/\mathfrak{m}_\nu$, é um lugar, que será chamado **lugar associado à** ν.*

Exemplo 1.3.5. *Considere $K = \mathbb{Q}$. O lugar p-ádico é dado por:*

$$\begin{array}{rccl} \pi_p : & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \cup \{\infty\} \\ & \dfrac{m}{n} & \longmapsto & \begin{cases} \overline{m} \text{ se } p \nmid n, \\ \infty \text{ se } p \mid n. \end{cases} \end{array}$$

Note que esse é o lugar associado a ν_p (veja o Exemplo 1.2.7).

Exemplo 1.3.6. *Considere o corpo $K(X)$. O lugar $p(X)$-ádico, é o lugar associado a valorização $p(X)$- ádica. Vamos calculá-lo para $p(X) = X - a$. Considerando o Exemplo 1.2.8, obtemos:*

$$\begin{array}{rccc} \pi_{p(X)}: & K(X) & \longrightarrow & K \cup \{\infty\} \\ & & & \\ & \dfrac{f}{g} & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(a)}{g(a)} \text{ se } x - a \nmid g, \\ \infty \text{ se } x - a \mid g. \end{cases} \end{array}$$

A Proposição 1.3.3 e o Exemplo 1.3.4 sugerem que os anéis de valorização de um corpo estão relacionados com os lugares desse corpo. De fato existe uma aplicação bijetora entre as classes de *lugares equivalentes* e os anéis de valorização de um corpo K. O Exemplo 1.3.4 mostra que essa aplicação é sobrejetiva. Assim, precisamos apenas justificar sua injetividade. Em outras palavras, precisamos mostrar que lugares que pertencem à mesma classe, possuem o mesmo anel de valorização.

Definição 1.3.7. *Sejam P_1 e P_2 dois lugares em K, com corpos de resíduos KP_1 e KP_2, respectivamente. Dizemos que P_1 é **equivalente** a P_2, se existe um isomorfismo $\phi : KP_1 \longrightarrow KP_2$ tal que $P_2(a) = \phi \circ P_1(a)$ para todo $a \in KP_1$.*

Proposição 1.3.8. *Se P_1 e P_2 são dois lugares equivalentes em K, então $\mathcal{O}_{P_1} = \mathcal{O}_{P_2}$.*

Demonstração: Basta notar que se $P_1(x) \neq \infty$ então $\infty \neq P_2(x) = \phi(P_1(a))$, sendo ϕ o isomorfismo mencionado na 1.3.7. □

Em suma, temos que os conceitos “valorização”, “anel de valorização” e “lugares” são completamente permutáveis. Portanto, quando mencionarmos o *lugar associado a ν*, deve-se entender que é o lugar construído a partir do anel $\mathcal{O}_\nu$.

Observação 1.3.9. *Seja $\mathcal{O}$ um anel de valorização e $\nu : K \longrightarrow \Gamma_\infty$ e $P : K \longrightarrow KP \cup \{\infty\}$ a valorização e o lugar associado a $\mathcal{O}$. Temos que:*

a. $P(x) = 0$ *se e somente se* $x \in \mathfrak{m}$ *se e somente se* $\nu(x) > 0$.

b. $P(x) = \infty$ *se e somente se* $x \notin \mathcal{O}$ *se e somente se* $\nu(x) < 0$.

c. $P(x) \neq 0$ *e* $P(x) \neq \infty$ *se e somente se* $x \in \mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}$ *se e somente se* $\nu(x) = 0$.

2 Lugares Reais

Após introduzir valorizações e lugares no Capítulo 1, vamos nos dedicar ao principal tópico deste trabalho, *lugares reais*. Para tanto, precisamos introduzir as noções de *corpos reais* e *corpos realmente fechados*. Veremos como podemos obter uma valorização, e consequentemente um lugar, a partir de uma ordem.

2.1 Corpos Ordenados

Historicamente, a axiomatização de um corpo ordenado foi abstraída dos números reais. Essa teoria começou a ser desenvolvida por Artin e Schreier em 1920. Nesta seção, vamos definir o que é uma ordem e caracterizar os corpos ordenados (Teoremas de Artin-Schreier). As referências para este tópico são [11] e[14].

Definição 2.1.1. *Seja F um corpo. Uma* **ordem** *em F é uma relação $\leqslant$ satisfazendo:*

i. *$\leqslant$ é uma relação reflexiva, antissimétrica e transitiva.*

ii. $\forall x,\, y \in F,\ x \leqslant y$ *ou* $y \leqslant x$.

iii. $\forall x,\, y,\, z \in F,\ x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$.

iv. $\forall x,\, y,\, z \in F,\ x \leqslant y$ *e* $0 \leqslant z \Rightarrow xz \leqslant yz$.

Um corpo F juntamente com uma relação $\leqslant$ que verifica *i-iv* é chamado de **corpo ordenado**. O conjunto $P = \{x \in F \mid 0 \leqslant x\}$ será denominado **cone positivo de** $\leqslant$. Considere $-P = \{-x \mid x \in P\}$. Note que o conjunto P satisfaz:

1. $P + P \subset P$.

2. $P.P \subset P$.

3. $P \cup -P = F$.

4. $P \cap -P = \{0\}$.

Os quadrados de um corpo desempenham um papel considerável nos próximos resultados. É importante fixarmos algumas notações antes de prosseguir. Vamos usar F^2 para representar o conjunto dos quadrados de F e $\dot{F}^2 = F^2 \setminus \{0\}$. Enquanto que $\sum F^2$ representa as somas finitas dos elementos de F^2.

Observação 2.1.2. *Temos que* $x^2 \in P$*, para todo* $x \in F$*. De fato, se* $x \in P$*, então temos que* $x^2 = x.x \in P.P \subseteq P$*. Por outro lado, se* $-x \in P$*, então* $x^2 = (-x)^2 \in P.P \subseteq P$*. Pelo item 1 acima, segue-se que* $\sum F^2 \subset P$*, para todo cone positivo de uma ordem em* F*.*

Seja $P \subset F$ qualquer. Se P satisfaz os itens 1-4, então temos que:

$$x \underset{P}{\leqslant} y \Longleftrightarrow y - x \in P$$

define uma ordem $\underset{P}{\leqslant}$ em F. Além disso, P é o cone positivo de $\underset{P}{\leqslant}$.

Um caso especial de ordens, são aquelas que não possuem elementos infinitesimais. Este tipo de ordem recebe o nome de **arquimediana**. Explicitamente, uma ordem P em F é arquimediana se para todo $x, y \in F$, existem $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \underset{P}{<} n|y|$ e $|y| \underset{P}{<} m|x|$, sendo que $|x| = x$, se $x \underset{P}{\geqslant} 0$, $|x| = -x$ se $x \underset{P}{<} 0$.

Exemplos 2.1.3. *1.* $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{R}$ *são ordenados (com as ordens usuais).*

2. $\mathbb{R}(X)$ *possui apenas uma ordem tal que* X *é positivo e menor que todo elemento de* $\mathbb{R}$*. Considerando* $X > 0$ *e maior que todo elemento de* $\mathbb{R}$*, obtemos outra ordem para* $\mathbb{R}(X)$*.*

3. Seja $f(t) = a_n t^n + \cdots a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}[t]$*. Definimos* $f(t) > 0$ *se* $a_n > 0$*. Note que* $t > r$*, para todo* $r \in \mathbb{R}$*, nesse caso dizemos que* t *é infinitesimalmente maior sobre* $\mathbb{R}$*. Por conta disso, temos que essa ordem não é arquimediana.*

Em geral, se um corpo admite uma ordem, ele pode admitir várias, como é o caso do Exemplo 2 acima.

Um corpo F é dito **formalmente real** quando -1 não pode ser escrito como soma de quadrados de F. Isto é, $-1 \notin \sum F^2$. Com isso, fica evidente que corpos de característica positiva não são corpos formalmente reais. No entanto, ter característica 0 não define os corpos formalmente reais. Por exemplo, $\mathbb{C}$ não é formalmente real. Como veremos a seguir, a principal vantagem de trabalhar com corpos formalmente reais, reside no fato de que eles sempre podem ser ordenados.

Lema 2.1.4. *Seja* F *um corpo. O conjunto* $\sum F^2$ *é fechado para a soma e a multiplicação. Além disso, se* $a \neq 0$ *e* $a \in \sum F^2$*, então* $\frac{1}{a} \in \sum F^2$*.*

Demonstração: É imediato verificar que $\sum F^2$ é fechado para a soma e para a multiplicação. Para demonstrar a última afirmação, considere $a = \sum_{i=1}^n a_i^2$. Daí,

$$a^{-1} = a(a^{-1})^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^2} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_n}{a}\right)^2 \in \sum F^2.$$

□

Com Lema 2.1.4, vemos que $\sum F^2 \setminus 0$ é um subgrupo do grupo multiplicativo $F^\times$.

Lema 2.1.5. *Seja F um corpo formalmente real e $K = F(\sqrt{a})$ para algum $a \in F$. Então K é formalmente real se e somente se $-a \notin \sum F^2$.*

Demonstração: Suponha que $-a \in \sum F^2$. Daí temos que $\sqrt{a}^2 + (-a) = 0$. Daí,

$$-1 = -\frac{\sqrt{a}^2}{a} = \frac{\sqrt{a}^2}{-a}.$$

Note que $\frac{\sqrt{a}^2}{-a} \in \sum K^2$ pelo Lema 2.1.4. Segue-se que K não é formalmente real.
Assuma que K não é formalmente real. Assim,

$$\begin{aligned} -1 &= \sum_{i=0}^{n} (x_i + y_i(\sqrt{a}))^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n} (x_1^2 + ay_i + 2x_iy_i(\sqrt{a})). \end{aligned}$$

Logo,

$$-1 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + ay_i^2$$

e

$$-a = \frac{1 + \sum_{i=0}^{n} x_i^2}{\sum_{i=0}^{n} y_i^2}.$$

Novamente, pelo Lema 2.1.4, temos que $-a \in \sum F^2$. □

Vejamos agora como é possível construir uma ordem em F, sabendo que $-1 \notin \sum F^2$.

Teorema 2.1.6. *Seja F um corpo. São equivalentes:*

i. $-1 \neq \sum F^2$

ii. *F pode ser ordenado*

iii. *Se x_1,$x_2 \cdots x_n \in F$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$, então $x_i = 0$ para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Demonstração: Vamos mostrar que i implica ii. Considere $S \subset F$ tal que,

$$S + S \subset S,\ S.S \subset S,\ -1 \notin S,\ x^2 \in S \text{ para todo } x \in F. \tag{2.1}$$

Seja $\mathcal{F} = \{S \subset F \mid S \text{ satisfaz (2.1)}\}$, ordenado pela inclusão. Note que $\sum F^2 \in \mathcal{F}$, logo $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Considere $\mathcal{B}$ uma cadeia de $\mathcal{F}$. Pode-se mostrar que a união dos elementos de $\mathcal{B}$ é uma cota superior para $\mathcal{B}$. Pelo Lema de Zorn, temos que $\mathcal{F}$ possui elemento maximal. Seja P este elemento. Vamos mostrar que $P \cup -P = F$. Com efeito, suponha que existe $x \in F \setminus P \cup -P$. Defina $P[x] = \{a + bx \mid a, b \in P\}$. Um cálculo simples mostra que $P[x] + P[x] \subset P[x]$. Como $x^2 \in P$, para todo x, temos que $P[x].P[x] \subset P[x]$. É claro que $y^2 \in P[x]$ para todo $y \in F$. Suponha que $-1 \in P[x]$. Então existem $a, b \in P$ tal que $-1 = a + bx$. Daí,

$$x = -1(b)\frac{1}{b^2}(a+1).$$

Pelo Lema 2.1.4 $x \in P$, o que é um absurdo. Portanto, temos que $P[x] \in \mathcal{F}$ e $P \subset P[x]$. Mas isso contradiz a maximalidade de P. Logo, $P \cup -P = F$. Assim, concluímos que P é um cone positivo de F, isto é F pode ser ordenado.
Por outro lado, suponha que P é um cone positivo de F. Sabemos que $\sum F^2 \in P$. Como $1 = 1^2 \in P$ e $P \cap -P = \{0\}$, segue-se que $-1 \notin P$. Portanto, $-1 \notin \sum F^2$. Segue-se que *i*$\Leftrightarrow$ *ii*.
Mostremos agora que *iii* $\Leftrightarrow$ *i*. Suponha que *i* não é válida e que *iii* é válida. Assim, existem x_1, x_2 ..., $x_n \in K$ tal que,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = -1.$$

Daí, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 1 = 0$, o que é uma contradição. Logo, *iii* $\Rightarrow$ *i*. A implicação *i* $\Rightarrow$ *iii* é feita de maneira análoga. $\square$

Observação 2.1.7. *Um subconjunto Q que satisfaz as condições de (2.1) é chamado de **pré-ordem de** F.*

De acordo com a demonstração do Teorema 2.1.6, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.1.8. *Seja F um corpo formalmente real. Se Q é uma pré-ordem de F, então $Q = \bigcap_{Q \subset P_\alpha} P_\alpha$, onde P_α é uma ordem de F.*

Demonstração: É claro que $Q \subset \bigcap_{Q \subset P_\alpha} P_\alpha$. Por outro lado, considere $a \in \bigcap_{Q \subset P_\alpha} P_\alpha$. Seja $a \notin Q$. Pode-se mostrar que $Q[-a]$ é uma ordem (seguindo os mesmos passos usados para mostrar que $P[x]$ é uma ordem, na demonstração do Teorema 2.1.6). Logo, $a \underset{Q[a]}{<} 0$ e consequentemente $a \notin \bigcap_{Q \subset P_\alpha} P_\alpha$. $\square$

Um corpo F é dito **realmente fechado** se F é formalmente real e não admite extensão algébrica própria que é formalmente real. Temos a seguinte caracterização:

Teorema 2.1.9. *Seja F um corpo. São equivalentes:*

i. *F é realmente fechado.*

ii. *Existe uma única ordem (dada por $P = F^2$) em F e todo polinômio em $F[X]$ com grau ímpar possui uma raiz em F.*

iii. *$i = \sqrt{-1} \notin F$ e $K = F(i)$ é algebricamente fechado.*

Demonstração: Vamos mostrar que $i \Rightarrow ii$.
Suponha que $a \in F$ e $a \neq x^2$ para todo $x \in F$. Então $F[\sqrt{a}] = \frac{F[X]}{X^2-a}$ é uma extensão algébrica própria de F. Portanto, $F[\sqrt{a}]$ não é formalmente real. Pelo Lema 2.1.5, $-a \in \sum F^2$. Consequentemente, $a \in -\sum F^2$. Portanto,

$$F = \sum F^2 \cup -\sum F^2.$$

Logo, $\sum F^2$ é uma ordem em F. Mostremos que $\sum F^2 = F^2$. Note que para isso, é suficiente mostrar que $1+y^2 \in F^2$ para todo $y \in F$. Suponha que $1+y^2$ não é um quadrado. Segue-se (pelo mesmo argumento que acabamos de usar) que $-1-y^2 \in \sum F^2$. Mas assim, temos que $-1 \in \sum F^2$, o que é um absurdo. Logo, $P = F^2$ é uma ordem em F. Note que, caso exista outra ordem P' em F, como $\sum F^2 \subset P'$ segue-se que $P \subset P'$. Suponha que existe $x \in P'$ tal que $x \notin P$. Logo, $x \in P \subset -P'$. Assim, $x \in P \cap -P$, o que é uma contradição. Portanto F^2 é a única ordem de F.
Vamos mostrar que todo polinômio de grau ímpar admite raiz em F. Assuma que exista um polinômio de grau ímpar que não admite raiz e tome

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2r+1} a_i x^i$$

um polinômio de grau minimal entre todos os polinômios de grau ímpar que não admitem raiz. Afirmamos que f é irredutível. De fato, se $f(X) = \prod_{i=0}^{n} f_i(X)$, então algum dos termos $f_i(X)$ tem grau ímpar, logo admite uma raiz a. Daí, $f(a) = 0$, e temos uma contradição. Segue-se que $\frac{F[X]}{f}$ é uma extensão própria de F. Como F é realmente fechado, essa extensão não é formalmente real. Assim,

$$-1 = \sum_{i=1}^{r} h_i^2(x) + f(x)g(x), \text{ onde } \deg(h_i) < \deg(f), \text{ para todo } i, 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Note que a soma $\sum_{i=1}^{r} h_i^2(x)$ tem grau par, menor ou igual a $4n$. Como $\deg(f(x)) = 2n+1$, segue-se que $g(x)$ tem grau ímpar, sendo $\deg(g(x)) \leqslant 2n-1$. Por hipótese, g possui uma raiz. Seja α essa raiz. Assim, temos que:

$$-1 = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} h_i^2(\alpha)}_{\in F} + \underbrace{f(\alpha)g(\alpha)}_{=0}.$$

Concluímos que F não é formalmente real, o que é uma contradição. Para as outras implicações, veja o Teorema 5, página 275 de [11]. $\square$

Corolário 2.1.10. *O corpo dos números reais $\mathbb{R}$ é realmente fechado.*

Demonstração: Sabemos que $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado, portanto $\mathbb{R}$ é realmente fechado.
$\square$

Se F é um corpo realmente fechado, define-se (a, b), $[a, b]$, etc. de maneira usual.

Considere F um corpo ordenado por P. Seja $F \subset K$ uma extensão de corpos. Dizemos que K é o **fecho real de** F se:

i. K é realmente fechado.

ii. K é uma extensão algébrica de F.

iii. $F \cap P_K = P$, onde P_K é a ordem de K.

Lema 2.1.11. *Todo corpo formalmente real admite um fecho real.*

Demonstração: A demonstração é feita aplicando o lema de Zorn. Ela pode ser encontrada em [14]. □

Uma vez que temos a existência de um fecho real, é natural nos questionarmos sobre sua unicidade. Afirmamos que o fecho real de um corpo é único à menos de isomorfismo. Com o conteúdo apresentado não conseguiríamos demonstrar essa afirmação, portanto vamos omiti-la. Ela pode ser encontrada em [16].

Exemplos 2.1.12. *1. $\mathbb{R}(X)$ não é realmente fechado, pois admite várias ordens.*

2. $\mathbb{R}_{alg} = \{q \in \mathbb{R} \mid q$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}\}$ é realmente fechado.

3. O fecho real de $\mathbb{R}(X)$ é dado pelas séries de Puiseux com coeficientes em $\mathbb{R}$, que iremos denotar por $SP(\mathbb{R})$. Explicitamente,

$$SP(\mathbb{R}) = \Big\{ \sum_{i=k}^{\infty} a_i x^{\frac{i}{q}} : k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R} \Big\}.$$

A demonstração de que $SP(\mathbb{R})$ é um corpo realmente fechado é bastante trabalhosa. Ela está feita em detalhes em [1].

2.2 Cortes e Ordens

Nesta seção, vamos mostrar que as ordens de $F(X)$ estão relacionadas com os *cortes* de F, onde F é um corpo ordenado.

Definição 2.2.1. *Seja X um conjunto ordenado. Um **corte** em X é um par (I, J), $I \subset X$ e $J \subset X$. Tal que:*

i. $I \leqslant J$, isto é, se $x \in I$ e $y \in J$, então $x \leqslant y$.

ii. $I \cap J = \emptyset$.

iii. $I \cup J = X$.

Se (I, J) é um corte em um conjunto X, diremos que I é a parte inferior e que J é a parte superior do corte.

Teorema 2.2.2. *Seja F um corpo ordenado. Existe uma bijeção entre as ordens de $F(X)$ e os cortes de F.*

Demonstração: Se P é uma ordem em F então $A = \{a \in F \mid a \underset{P}{<} X\}$ e $B = \{a \in F \mid a \underset{P}{>} X\}$ é um corte em F.

$$A = \{a \in F \mid a \underset{P}{<} X\} \text{ e } B = \{a \in F \mid a \underset{P}{>} X\} \tag{2.2}$$

e

$$B = \{a \in F \mid a \underset{P}{>} X\} \tag{2.3}$$

Reciprocamente, se (A, B) é um corte em F então

$$P = \{f \in F(X) \mid \exists a \in A, \exists b \in B; \forall c \in (a, b), f(c) \in F_{>0}\} \tag{2.4}$$

é uma ordem. De fato, se $f, g \in P$, então existem a_f, b_f, a_g e b_g tais que $f((a_f, b_f)) > 0$ e $g((a_g, b_g)) > 0$. Daí, tomando $a = \max\{a_f, a_g\}$ e $b = \min\{b_f, b_g\}$, temos que $(f + g)((a, b)) > 0$ e $f.g((a, b)) > 0$. Dessa forma, $P + P \subset P$ e $P.P \subset P$. Além disso, para todo $f \in F(X)$, temos que ou $f \in P$ ou $-f \in P$, logo $F = P \cup -P$. Por fim, observemos que se $f(a) > 0$ então $-f(a) < 0$, logo $P \cap -P = \{0\}$. Portanto, P é uma ordem em F. □

O corte em (A, B), definido em (2.2)e (2.3) será denominado **corte induzido por** P. A ordem em (2.4) será chamada de **ordem associada ao corte** (A, B). Daqui em diante, estaremos sempre usando esses conceitos.
Em especial, temos que se R é um corpo realmente fechado, então cada $a \in R$ define dois cortes

$$a^- = ((-\infty, a), [a, \infty))$$

e

$$a^+ = ((-\infty, a], (a, \infty)).$$

As ordens associadas a estes cortes serão denotadas por P_a^- e P_a^+, respectivamente. Note que em relação a P_a^- temos $X - a < 0$ e em relação a P_a^+, $X - a > 0$.
O conjunto de todas as ordens de um corpo F será denotado por $\mathcal{X}(F)$. Sejam P, Q duas ordem em F, com cortes associados (A_P, B_P) e (A_Q, B_Q). A relação

$$P \preceq Q \Longleftrightarrow A_P \subset A_Q \tag{2.5}$$

define uma ordem em $\mathcal{X}(F)$.

Podemos definir intervalos em $\mathcal{X}(F)$ de forma intuitiva. Por exemplo, intervalo (P, Q) é composto pelas ordens S tais que $A_P \subset A_S \subset A_Q$, onde A_P, A_S, A_Q representam a parte inferior dos cortes associados às ordens P, S e Q respectivamente. Através dessa definição $\mathcal{X}(F)$, se torna um espaço topológico (com a topologia da ordem).

2.3 Valorizações e Ordens

Os próximos resultados conectam as noções de ordens e de valorizações.

Definição 2.3.1. *Uma valorização ν é dita **real** quando seu corpo de resíduos K_ν é formalmente real.*

Observação 2.3.2. *Seja $\nu : F \longrightarrow \Gamma_\infty$. Perceba que se F for formalmente real, então a valorização trivial em F é uma valorização real. Segue do Teorema da Representação de Baer-Krull (ver [8], Teorema 2.2.5), que a recíproca também é válida. Isto é, se K_ν admite uma ordem, então F também pode ser ordenado.*

O próximo teorema explora melhor as relações entre ordens e os conceitos inerentes da definição de valorização.

Teorema 2.3.3. *Seja P uma ordem de F e ν uma valorização em F com grupo de valores Γ, são equivalentes:*

i. $0 < a \leqslant b \Rightarrow \nu(a) \geqslant \nu(b)$ *em* Γ.

ii. $\mathcal{O}_\nu$ *é convexo em relação a* P.

iii. $\mathfrak{m}_\nu$ *é convexo em relação a* P.

iv. $1 + \mathfrak{m}_\nu \subseteq P$.

Demonstração: Vamos demonstrar *i*$\Rightarrow$ *ii*. É suficiente provar que se $0 < a < b$, onde $b \in \mathcal{O}_\nu$ então $a \in \mathcal{O}_\nu$. Como $b \in \mathcal{O}_\nu$, temos $\nu(b) \geqslant 0$. Por *i*, temos $\nu(a) \geqslant \nu(b)$, logo $a \in \mathcal{O}_\nu$.
Mostremos que *ii*$\Rightarrow$ *iii*. Se $0 < a < b$ e $b \in \mathfrak{m}_\nu$, então temos que $b^{-1} \notin \mathfrak{m}_\nu$. Como $0 < b^{-1} < a^{-1}$, segue-se por *ii* que $a^{-1} \notin \mathcal{O}_\nu$. Portanto, $a \in \mathfrak{m}_\nu$.
Para mostrar *iii* $\Rightarrow$ *iv*, suponha que $a \in \mathfrak{m}_\nu$ e $1 + a \notin P$. Daí temos que $1 + a < 0$. Assim, como $1 \in P$, temos $0 < 1 < -a$. Por *ii*, segue-se que $1 \in \mathfrak{m}_\nu$, o que é uma contradição.
Por fim, mostremos que *iv*$\Rightarrow$ *i*. Assuma que $0 < a \leqslant b$ e $\nu(a) < \nu(b)$. Então, $\nu\left(\frac{b}{a}\right) > 0$. Como $\nu\left(\frac{b}{a}\right) = \nu\left(-\left(\frac{b}{a}\right)\right)$, segue de *iv* que $1 - \frac{b}{a} > 0$. Portanto, $1 > \frac{b}{a}$, ou seja, $a > b$, o que é uma contradição. □

Se uma das condições do Teorema 2.3.3 é válida e portanto todas, dizemos que ν é **compatível com** P.

Teorema 2.3.4. *Seja $P \in \mathcal{X}(F)$. A família de $\mathcal{F}$ de anéis de valorizações de F compatível com P formam uma cadeia ordenada pela inclusão, com menor elemento dado por:*

$$A(P) = \{a \in F \mid \exists r \in \mathbb{Q}; -r \underset{P}{\leqslant} a \underset{P}{\leqslant} r\}.$$

Demonstração: Sejam $\mathcal{O}, \mathcal{O}' \in \mathcal{F}$. Assuma que $\mathcal{O} \nsubseteq \mathcal{O}'$. Daí, existe $a \in \mathcal{O}' \setminus \mathcal{O}$. Seja $b \in \mathcal{O}'$ tal que $0 < b$. Como $\mathcal{O}'$ é convexo e $a \notin \mathcal{O}'$, temos que $0 < b < a$. Por outro lado, como $\mathcal{O}$ é convexo, temos que $b \in \mathcal{O}$. Assim, $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.
Vejamos que $A(P)$ é um anel de valorização. É fácil ver que $A(P)$ é um anel. Agora, suponha que $b \notin A(P)$, $b \in F$. Devemos mostrar que $b^{-1} \in A(P)$. Como $b \notin A(P)$, em particular temos que $b > 1$ e consequentemente, $0 < b^{-1} < 1$. Portanto, $b^{-1} \in A(P)$. Logo, $A(P)$ é um anel de valorização. □

O anel $A(P)$ é chamado de **envoltório convexo de $\mathbb{Q}$ em** F.

Sabemos que o ideal maximal de $A(P)$, que será denotado por $I(P)$, é formado pelos elementos que não são unidades de $A(P)$. Isto é,

$$\begin{aligned} I(P) &= \{x \in F \mid x^{-1} \notin A(P)\} \\ &= \{x \in F \mid \nexists\, q \in \mathbb{Q}; -q \underset{P}{<} x^{-1} \underset{P}{<} q\} \\ &= \{x \in F \mid |x^{-1}| \underset{P}{>} q, \forall q \in \mathbb{Q}\} \\ &= \{x \in F \mid |x| \underset{P}{<} q, \forall\, q \in \mathbb{Q}^{+}\}. \end{aligned}$$

Assim, o corpo de resíduos ${}^{A(P)}/{}_{I(P)}$, não contém os elementos infinitesimais do anel $A(P)$. Com essa observação, provamos que:

Lema 2.3.5. *Seja $P \in \mathcal{X}(F)$. O corpo ${}^{A(P)}/{}_{I(P)}$ é arquimediano.*

Neste ponto, está claro que todo corpo ordenado admite uma valorização, cujo corpo de resíduos é arquimediano. A valorização associada ao anel $A(P)$ será chamada de **valorização natural** de (F, P). O corpo de resíduos da valorização natural será denotado por k. Isto é, $k = {}^{A(P)}/{}_{I(P)}$.
Note que se F for um corpo arquimediano, então sua valorização natural será a valorização trivial. O próximo resultado, é um corolário do Teorema da Representação de Baer-Krull. Ele nos dá informações sobre ordens não-arquimedianas e as valorizações do corpo F.

Proposição 2.3.6. *O corpo F admite uma ordem não-arquimediana se e somente se existe uma valorização não trivial em F, com corpo de resíduos formalmente real K.*

Demonstração: Ver Corolário 2.5.6 em [8]. □

Observação 2.3.7. *Um grupo Γ é divisível, se para todo $\alpha \in \Gamma$ e todo $n \in \mathbb{N}$, temos que existe $\alpha' \in \Gamma$ tal que $\alpha = n\alpha'$. Se ν é uma valorização em um corpo realmente fechado F, então Γ_ν é divisível. Dado $\delta \in \Gamma$, sempre existe $x > 0$ tal que $\nu(x) = \delta$. Sabemos neste caso que $x = y^2$ para algum y. Logo, $\nu(x) = 2\nu(y)$. Isto é, mostramos que todo elemento de Γ é divisível por 2. Vejamos agora que Γ também é divisível por $p \in \mathbb{N}$, p primo. De fato, sabemos que, $g(z) = z^p - x$ possui uma raiz (pois é um polinômio de grau ímpar). Assim, temos que $p\nu(z^p) = \nu(z^p) = \nu(x)$. Daí, escrevendo n como a multiplicação de fatores primos e tomando $z \in F$, tal que $z^n = x$, obtemos que $\nu(x) = n\nu(z)$.*

2.4 Lugares Reais

O principal objetivo dessa seção é introduzir o conceito de $\mathbb{R}$-lugares. Posteriormente vamos dar uma caracterização direta de todos os $\mathbb{R}$-lugares de um corpo ordenado. Um bom conjunto de referências para este tópico são os artigos [2], [16], [9] e o livro [15].

Definição 2.4.1. *O lugar $P : K \longrightarrow F\{\infty\}$ é dito **real** se $F \cup \{\infty\}$ é um corpo formalmente real.*

Pela Observação 2.3.2, concluímos que um corpo K é real se e somente se admite um lugar real. Também é possível mostrar esse resultado de forma direta, veja [16].
Antes de prosseguir, vamos apresentar o Teorema de Holder.

Teorema 2.4.2. *Seja Γ um grupo abeliano totalmente ordenado e arquimediano. Então Γ é isomorfo a um subgrupo de $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Considere $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$ e $m > 0$. Sejam $a, b \in \Gamma$. Diremos que $ra < b$ quando $ma < nb$. Fixemos um elemento positivo $a \in \Gamma$. Seja $b > 0$, onde $b \in \Gamma$. Considere

$$S_b = \{r \in \mathbb{Q} \mid ra \leqslant b\}.$$

Como Γ é arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b < na$. Portanto o conjunto S_b possui cota superior. Vamos definir

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \Gamma & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & b & \longmapsto & \varphi(b) = \begin{cases} \sup(S_b), & \text{se } b > 0, \\ -\sup(S_b), & \text{se } b < 0, \\ 0, & \text{se } b = 0. \end{cases} \end{array} \tag{2.6}$$

A demonstração de que φ é um isomorfismo entre Γ e um subgrupo de $\mathbb{R}$ será omitida. Ela pode ser encontrada em [10], Teorema 6.2.5. □

Seja F um corpo ordenado, digamos por P. Pelo Lema 2.3.5, sabemos que ${}^{A(P)}/_{I(P)}$ é arquimediano. Pelo Teorema de Holder existe um mergulho $\varphi : {}^{A(P)}/_{I(P)} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Considere o lugar associado ao anel $A(P)$. Isto é,

$$\begin{array}{rccl} \rho : & F & \longrightarrow & {}^{A(P)}/_{I(P)} \cup \{\infty\} \\ & x & \longmapsto & \rho(x) = \begin{cases} x + I(p), & \text{se } x \in A(P), \\ \infty, & \text{se } x \notin A(P). \end{cases} \end{array}$$

Como φ é um mergulho, temos que $\lambda_P = \rho \circ \varphi$ é um lugar que assume valores em $\mathbb{R}$. Todo lugar com imagem em $\mathbb{R}$ será chamado de **$\mathbb{R}$-lugar**.
Levando em consideração a lei de formação de φ (dada em (2.6)), temos explicitamente que:

$$\begin{array}{rccl} \lambda_P : & F & \longrightarrow & \mathbb{R}_\infty \\ & x & \longmapsto & \lambda_P(x) = \begin{cases} \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r \underset{P}{\leqslant} x\}, & \text{se } x \in A(P), \\ \infty, & \text{se } x \notin A(P). \end{cases} \end{array} \tag{2.7}$$

Temos que se $a \in P$, então $a \underset{P}{\geqslant} 0$, assim se $a \in A(P)$, então $\sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r \underset{P}{\leqslant} a\} \geqslant 0$. Caso contrário, temos $\lambda_P(a) = \infty$. Portando, $\lambda_P(a) > 0$ para $a \in P$. Temos a definição,

Definição 2.4.3. *Dizemos que uma ordem P em um corpo F é* ***associada*** *com um lugar ξ se $\xi(P) > 0$.*

O próximo Teorema nos dá uma caracterização dos $\mathbb{R}$- lugares associados a uma ordem $P \in \mathcal{X}(F)$.

Teorema 2.4.4. *Para $P \in \mathcal{X}(F)$, λ_P é o único $\mathbb{R}$-lugar de F associado a P.*

Demonstração: Já sabemos que $\lambda_P(P) > 0$. Vamos mostrar que qualquer lugar ξ associado a P é exatamente λ_P. Para isso, considere ν a valorização associada a ξ. Sabemos pela Observação 1.3.9 que $\xi(x) \neq 0$ e $\xi(x) \neq \infty$ se e somente se $x \in \mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}$. Portanto, precisamos mostrar que

$$P \cap (\mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}) = \xi^{-1}(\mathbb{R}^2). \tag{2.8}$$

Por hipótese, $\xi(P) > 0$. Assim, mostramos a inclusão "$\subseteq$" de (2.8). Seja $u \in \xi^{-1}(\mathbb{R}^2)$. Isto é, $0 < \xi(u) < \infty$. Segue-se que $u \in \mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}$. Repare que se $u \notin P$, então $-u \in P$. Logo $0 \leqslant \xi(-u) = -\xi(u)$, uma contradição. Assim, verificamos (2.8).
Para mostrar a unicidade, basta verificar que a valorização ν é equivalente a valorização natural de (F, P). Como já foi observado, existe um isomorfismo entre o corpo de resíduos ${}^{A(P)}/_{I(P)}$ e $\mathbb{R}$. Logo, $\xi = \lambda_P$. $\square$

Observação 2.4.5. *Os detalhes da demonstração da unicidade de λ_P podem ser encontrados em [15], Teorema 2.11, ou no primeiro lema do artigo em [2].*

Observemos que o Teorema 2.4.4, trata apenas de um tipo específico de $\mathbb{R}$-lugar do corpo F. Ressaltamos que na verdade, todo $\mathbb{R}$-lugar de um corpo formalmente real F é da forma λ_P para alguma ordem $P \in \mathcal{X}(F)$. Vamos adotar a notação $M(F)$ para o conjunto de todos os $\mathbb{R}$-lugares de um corpo F. Pelo que acabamos de afirmar, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.4.6. *A aplicação* $\lambda : \mathcal{X}(F) \longrightarrow M(F)$ *que associa a cada* P *o* $\mathbb{R}$*-lugar* λ_P *é sobrejetora.*

Demonstração: Ver a Proposição 9.1 em [15]. $\square$

3 Metrizabilidade de $M(R(X))$

O principal intuito deste capítulo é dar uma condição suficiente e necessária para a metrizabilidade do espaço de $\mathbb{R}$-lugares sobre o corpo de funções $R(X)$, onde R é um corpo realmente fechado. Veremos que o critério é relativamente simples. Além disso, em uma das direções, a condição dada se aplica a $M(F)$, onde F é qualquer corpo de funções com grau de transcendência 1 sobre R.

3.1 A topologia de $M(K)$

Considere um corpo ordenado K. Lembremos que $\mathcal{X}(K)$ representa o conjunto de todas as suas possíveis ordens e $M(K)$ o conjunto dos $\mathbb{R}$- lugares de K. Considere a topologia em $\mathcal{X}(K)$ que possui como sub-base os **conjuntos de Harrison**, definidos por

$$H_K(a) := \{P \in \mathcal{X}(K) \mid a \in P\}, a \in \dot{K}$$

onde $\dot{K} = K \setminus \{0\}$. Veja o Apêndice para algumas observações sobre essa topologia. Foi mostrado por Knebusch, Rosenberg e Ware em [12], que $\mathcal{X}(K)$ é um **espaço topológico Booleano**, isto é, $\mathcal{X}(K)$ é compacto, Hausdorff e totalmente desconexo. A função

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & \mathcal{X}(K) & \longrightarrow & M(K) \\ & P & \longmapsto & \lambda_P \end{array} \tag{3.1}$$

que associa a cada ordem de P de K, o $\mathbb{R}$-lugar induzido por P, é sobrejetiva. Sendo assim, é natural equipar $M(K)$ com a topologia quociente. Note que, como $\mathcal{X}(K)$ é compacto, e λ é contínua e sobrejetiva, temos que $M(K)$ é compacto. Já a propriedade de ser Hausdorff geralmente não é induzida pela topologia quociente. Porém em [15](Cor. 9.9) foi provado que de fato $M(K)$ é Hausdorff, essa demonstração também se encontra no Apêndice. Por fim, ressaltamos que $M(K)$ pode não ser totalmente desconexo. No artigo ([3]), foi mostrado que se K possui uma quantidade finita de ordens, sendo todas arquimedianas, então $M(K)$ é isomorfo à união disjunta de círculos. Por exemplo, se $K = \mathbb{R}$, temos que $M(\mathbb{R}(X))$ é isomorfo à um círculo.

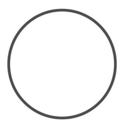
$M(\mathbb{R}(X)) \cong$ 

Figura 1 – Um exemplo onde $M(K)$ não é totalmente desconexo.

Passemos agora a considerar $K = R(X)$, onde R é um corpo realmente fechado, com única ordem R^2. A fim de estudar a metrizabilidade de $M(R(X))$, precisamos primeiro caracterizar melhor os abertos de $\mathcal{X}(R(X))$. A próxima proposição mostra que estes conjuntos podem ver vistos como "intervalos abertos", os quais provêm da relação de ordem dada em (2.5). Lembremos que, segundo esta relação, temos $T \in (P, Q) \Leftrightarrow A_P \subsetneq A_T \subsetneq A_Q$.

Proposição 3.1.1. *A topologia de Harrison e a topologia induzida pela ordem coincidem em $\mathcal{X}(R(X))$.*

Demonstração: Mostremos que $H_{R(X)}\left(\frac{f}{g}\right)$ pode ser escrito como a união de abertos do tipo (P, Q), onde P e Q são ordens. Note que valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} H_{R(X)}(\tfrac{f}{g}) &= \{P \in \mathcal{X}(R(X)) \mid \tfrac{f}{g} \in P\} \\ &= \{P \in \mathcal{X}(R(X)) \mid \tfrac{1}{g^2}.(fg) \in P\} \\ &\overset{\frac{1}{g^2} \in P}{=} H_{R(X)}(fg). \end{aligned}$$

Se $fg(x) < 0$ para todo x em R, então $H_{R(X)}(fg) = \emptyset$. Assuma o contrário e sejam a_i, b_i, $i = 1, 2, ..., n$ as raízes de fg, tais que fg é positivo em (a_i, b_i). Note que pode ocorrer $a_1 = -\infty$ e $b_n = \infty$. Temos que para qualquer $c \in (a_i, b_i)$ existem $d \in (-\infty, c)$ e $e \in [c, \infty)$ para os quais fg assume valores positivos em (d, e), em outras palavras $fg \in P_c^-$(e também $fg \in P_c^+$). Além disso, se $P \in (P_{a_i}^-, P_{b_i}^+)$, então $A_{P_{a_i}} \subset A_P \subset A_{P_{b_i}}$, logo como $f > 0$ em(a_i, b_i), existem $d' \in A_P$ e $e' \in B_Q$ tais que $f > 0$ em (e', f') (ver figura 2). Note que $fg \in P_{a_i}^+$, pois o elemento a_i na parte inferior do corte dado por $P_{a_i}^+$ e qualquer c, $a_i \geqslant c \geqslant b_i$ no corte superior de $P_{a_i}^+$, também temos que $P_{a_i}^- \prec P_{a_i}^+$. Portanto, segue-se que

$$H_{R(X)}(fg) = \bigcup_{i=1}^{n} (P_{a_i}^-, P_{b_i}^+)$$

Com isso, obtemos que $H_{R(X)}(\frac{f}{g})$ é um aberto da topologia induzida pela ordem em $\mathcal{X}(R(X))$.

Por outro lado, considere o aberto (P, Q) e seja $P' \in (P, Q)$. Devemos primeiro mostrar que existe $f \in R(X)$ tal que $P' \in H_{R(X)}(f)$. Como $P' \in (P, Q)$, temos $A_P \subset A'_P \subset A_Q$. Agora tomemos $a \in A_{P'}$, $b \in B_{P'}$ e consideremos o polinômio $f(X) = -(X - a)(X - b)$. Por construção, $P' \in H_{R(X)}(f)$. Assim, temos

$$(P, Q) \subset \bigcup_{a,b \in A_Q \cap B_P} \{H_{R(X)}(f) \mid f(X) = -(X - a)(X - b)\}$$

Para mostrar a inclusão contrária, sejam s, $t \in A_Q \cap B_P$ com $s < t$, $f_{(s,t)}(X) = -(X - s)(X - t)$ e $P' \in H(f_{(s,t)})$. Devemos mostrar que $P' \in (P, Q)$. De fato, se $P' \in H(f_{(s,t)})$ então $f_{(s,t)} \in P'$ e por definição existem $c \in A_{P'}$ e $d \in B_{P'}$ tal que $f_{(s,t)}(x) > 0$ para todo $x \in (c, d)$. Como $c > a$ temos $A_P \subset A_{P'}$, e como para qualquer $e \in A_{P'}$ temos

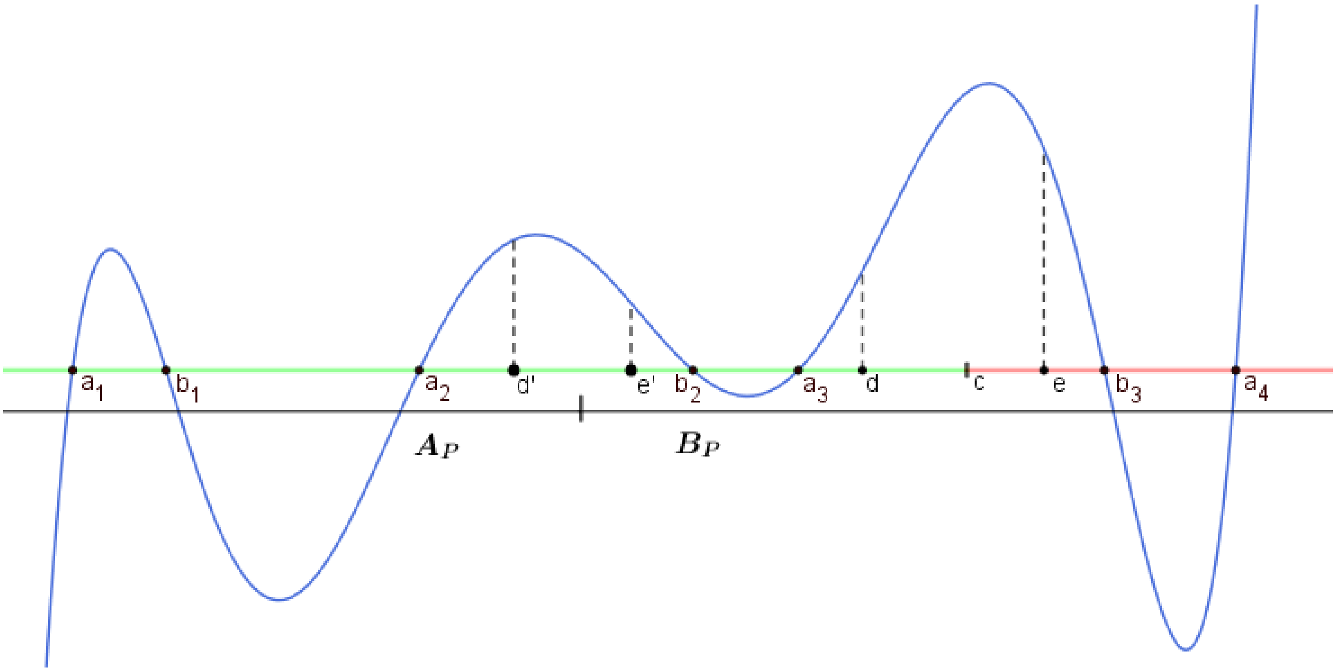


Figura 2 – Um dos casos da demonstração da proposição 3.1.1. Nessa figura temos $b_4 = \infty$. Colocamos $P \in (P^-_{a_2}, P^+_{b_2})$ e $c \in (a_3, b_3)$. A parte inferior e superior do corte em c, estão representados na cor verde e vermelho, respectivamente.

$e < b \in A_Q$, segue-se que $A_{P'} \subset A_Q$. Logo, $A_P \subset A_{P'} \subset A_Q$ e daí $P' \in (P, Q)$. Por fim, concluímos que

$$(P, Q) = \bigcup_{a,b \in A_Q \cap B_P} \{H_{R(X)}(f) \mid f(X) = -(X-a)(X-b)\}$$

como queríamos. $\square$

Mais adiante, vamos precisar saber quando duas ordens de $R(X)$ determinam o mesmo $\mathbb{R}$-lugar em $R(X)$. A resposta a esse problema vem em termos de valorizações. Vamos portanto fixar algumas notações que serão usadas nos próximos resultados. Seja ν a valorização natural de R, com grupo de valores Γ e k o corpo de resíduos de ν.

Considere P_1 e P_2 ordens de $R(X)$, com cortes induzidos (A_1, B_1) e (A_2, B_2) em R, respectivamente. Vamos assumir que $P_1 \prec P_2$. Para o que vem adiante, vamos estabelecer $D = B_1 \cap A_2$, ξ_i as imagens de P_i pela função (3.1) e $\nu_i = \nu_{\xi_i}$ a valorização induzida pelo $\mathbb{R}$-lugar ξ_i, para $i = 1, 2$.

Definição 3.1.2. *Seja $D \neq \emptyset$ um subconjunto de um corpo ordenado R e ν uma valorização em R. Dizemos que D é uma* ***bola*** *com centro em a, se para todo $b \in D$ e $c \in R$, se $\nu(b-a) \leqslant \nu(c-a)$, então $c \in D$.*

Proposição 3.1.3. *Sejam D_1 e D_2 bolas tal que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Então $D_1 \cup D_2$ não é uma bola.*

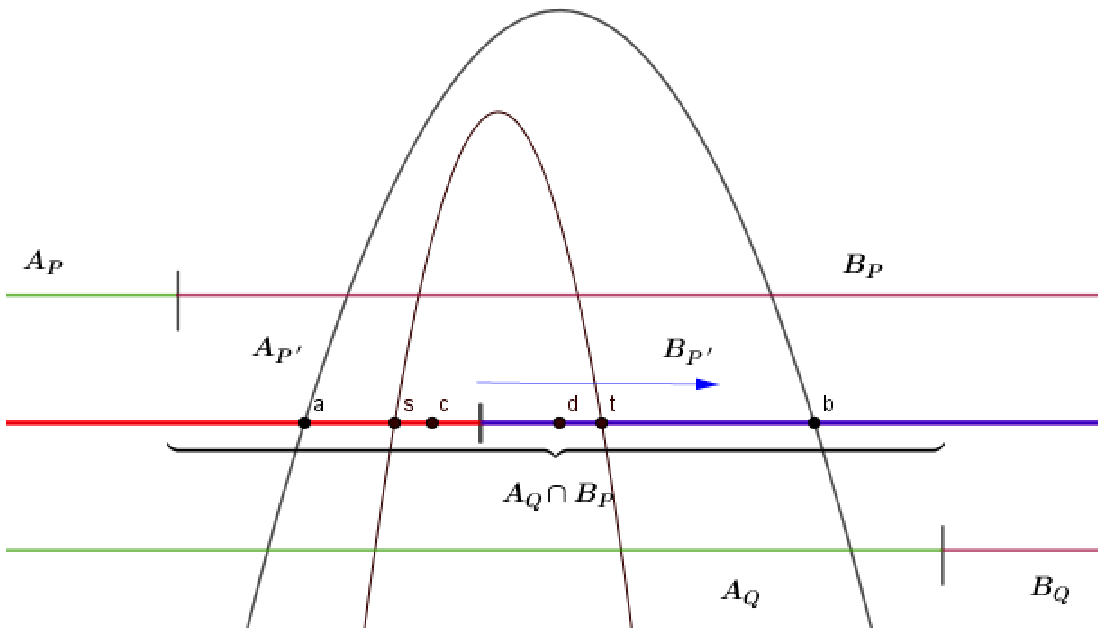


Figura 3 – Segundo caso da demonstração da proposição 3.1.1. Os cortes relacionados a P' estão em vermelho e azul. Cada polinômio na figura é usado para concluir uma das inclusões.

Demonstração: Suponha que $D_1 \cup D_2$ é uma bola. Considere $a \in D_1$ e $b \in D_2$. Como $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, temos que:

$$\nu(a-b) \leqslant \nu(a-a'),\ \forall\ a' \in D_1$$

$$\nu(a-b) \leqslant \nu(b-b'),\ \forall\ b' \in D_2$$

Defina $c = 2b - a$. Segue-se que

$$\nu(c-b) = \nu(b-a) = \nu(a-b) \leqslant \nu(b-b') \forall\ b' \in D_2.$$

Logo $c \notin D_2$. De maneira análoga, temos

$$\nu(c-a) = \nu(2(b-a)) = \nu(a-b) \leqslant \nu(a-a') \forall\ b' \in D_1.$$

Logo $c \notin D_1$. Portanto $c \notin D_1 \cup D_2$. Porém, $\nu(c-a) = \nu(b-a)$, o que contradiz o fato de $D_1 \cup D_2$ ser uma bola. $\square$

Proposição 3.1.4. *Se D não é uma bola em relação à valorização natural de R então $\xi_1 \neq \xi_2$.*

Demonstração: Considere $a, b \in D = B_1 \cap A_2$ e $c \in R \setminus D$ tal que $\nu(c-a) \overset{*}{\geq} \nu(b-a)$. Dessa forma, também temos que

$$\begin{aligned} \nu(b-c) &= \nu(b-c+a-a) \\ &= \nu(b-a+(a-c)) \\ &\geqslant \min\{\nu(b-a), \nu(a-c)\} \\ &\overset{*}{=} \nu(b-a) \end{aligned}$$

Vamos assumir que $a < b$, pois se $a = b$, pela relação acima temos $\nu(b-a) = \infty$ o que implica $b = c$. Como D é convexo devemos ter $c < a$ ou $c > b$. Vamos assumir $c > b$ (para $c < a$ o argumento é simétrico). Se $\nu_1 \neq \nu_2$ não há nada a demonstrar, assim consideremos $\nu_1 = \nu_2$. Como $a, b \in B_1$, temos $X \underset{P_1}{<} a < b$, em particular

$$\frac{X-a}{b-a} \underset{P_1}{<} 0 \tag{3.2}$$

De forma análoga, como $a, b \in A_2$ e $c \in R \setminus D$, $a < b \underset{P_2}{<} X \underset{P_2}{<} c$. Logo $0 < b-a \underset{P_2}{<} X-a \underset{P_2}{<} c-a$ e assim

$$\frac{X-a}{b-a} \underset{P_2}{>} 0 \tag{3.3}$$

Daí,

$$\nu_1(X-a) = \nu_2(X-a) \geqslant \nu_2(c-a) \geqslant \nu_2(b-a) \geqslant \nu_2(X-a)$$

Portanto,

$$\nu_1(X-a) = \nu_2(X-a) = \nu_2(c-a) = \nu_2(b-a)$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} \nu_2(X-a) - \nu_2(b-a) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \nu_2(X-a) + \nu_2(b-a)^{-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \nu_2\left(\frac{X-a}{b-a}\right) = 0 \end{aligned}$$

Por hipótese, também temos que $\nu_1\left(\frac{X-a}{b-a}\right) = 0$. Sabemos que se $\nu_i(r) = 0$, então $\xi_i(r) \neq 0$ e $\xi_i(r) \neq \infty$ (ver relação entre lugares e valorizações na Observação 1.3.9). Segue-se dessa observação que $\xi_i(\frac{X-a}{b-a}) \neq 0$ e $\xi_i(\frac{X-a}{b-a}) \neq \infty$. Além disso, pelas desigualdades (3.2) e (3.3) concluímos que

$$\xi_1\left(\frac{X-a}{b-a}\right) < 0 < \xi_2\left(\frac{X-a}{b-a}\right).$$

Logo, $\xi_1 \neq \xi_2$, como queríamos demonstrar. □

Afirmamos que a volta dessa proposição também é válida no caso em que R é um corpo realmente fechado. Para demonstrar este resultado vamos precisar de alguns lemas.

Lema 3.1.5. *Suponha que a, b e X são elementos de um corpo ordenado R, com valorização natural ν. Se $\nu(X-a) \geqslant \nu(b-a)$ então existem inteiros n_1, n_2 não nulos, tais que para $c_i = a + n_i(b-a), i = 1, 2,$*

$$c_1 < X < c_2 \qquad e \qquad \nu(c_1 - a) = \nu(c_2 - a) = \nu(b - a)$$

Demonstração: Como $\nu\left(\frac{X-a}{b-a}\right) \geqslant 0$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$-q \leq \frac{X-a}{b-a} \leq q.$$

Logo existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n < \frac{X-a}{b-a} < n+1. \tag{3.4}$$

Então,

$$n(b-a) < X - a < (n+1)(b-a).$$

Pondo $c_1 = n(b-a) + a$ e $c_2 = (n+1)(b-a) + a$, obtemos de (3.4) que $c_1 < X < c_2$ e

$$\nu(c_1 - a) = \nu(n(b-a)) = \nu(n) + \nu(b-a) = \nu(b-a)$$

e

$$\nu(c_2 - a) = \nu((n+1)(b-a)) = \nu(n+1) + \nu(b-a) = \nu(b-a)$$

Logo, $\nu(c_1 - a) = \nu(c_2 - a) = \nu(b - a)$. □

Considere $S = \{\nu(b-a) \mid a, b \in D\}$ e $T = \{\nu(c-a) \mid a \in D, c \in R \setminus D\}$ para os próximos resultados.

Lema 3.1.6. *Se D é uma bola e $a \in D$ então $S = \{\nu(b-a) \mid b \in D\}$ e $T = \{\nu(c-a) \mid c \in R \setminus D\}$.*

Demonstração: Considere $S' = \{\nu(b-a) \mid b \in D\}$, onde $a \in D$ está fixado. Devemos mostrar que $S' = S$. Note que $S' \subset S$. Portanto, basta provar que $S \subset S'$, isto é, se $b, a' \in D$ então $\nu(b - a') = \nu(d - a)$ para algum $d \in D$. Temos,

$$\nu(b-a') = \nu((b-a'+a)-a) \geqslant \min\{\nu(b-a), \nu(a-a')\} = \min\{\nu(b-a), \nu(a'-a)\} \tag{3.5}$$

Logo, $\nu((b-a'+a)-a) \geqslant \nu(b-a)$ ou $\nu((b-b'+a)-a) \geqslant \nu(a'-a)$. Como $b, b' \in D$ e D é uma bola, obtemos que $b - a' + a \in D$. Finalmente, pondo $d = b - a' + a$, vemos por (3.5) que $\nu(b-b') = \nu(d-a)$. Como $\nu(d-a) \in S'$, segue-se que $S \subset S'$. Logo $S = S'$. Agora mostremos que $T = T'$. Note que $T' \subset T$. Resta mostrar que $T \subset T'$, ou seja, para todo $a' \in D$ e $c \in R \setminus D$, existe $d \in R \setminus D$ tal que $\nu(c-a') = \nu(d-a)$. Temos que $\nu(c-a') = \nu((c-a'+a)-a)$. Considere $d = c - a' + a$, precisamos mostrar que $d \in R \setminus D$. Assuma que isso não acontece, isto é, assuma que $d \in D$. Segue-se que,

$$\nu(c-a') = \nu(d-a) = \nu(d-a+a'-a') \geqslant \min\{\nu(d-a'), \nu(a-a')\}$$

Portanto, $\nu(d-a') \leqslant \nu(c-a')$ ou $\nu(a-a') \leqslant \nu(c-a')$. De qualquer uma dessas desigualdades, como D é uma bola, obtemos que $c \in D$, o que é uma contradição. Logo, $d \in R \setminus D$ e $\nu(c-a') = \nu(d-a) \in T'$. Assim $T \subset T'$, o que completa a demonstração. □

Lema 3.1.7. *Se D é uma bola então (T,S) é um corte em Γ e para cada $a \in D$,*

$$T \underset{P_i}{<} \nu_i(X-a) \underset{P_i}{<} S \text{ para } i = 1,2.$$

Demonstração: Primeiro, mostremos que $T \cup S = \Gamma$. Tome $\delta \in \Gamma$ e $d \in R$ tal que $\nu(d) = \delta$. Então, colocando $c = d + a$, temos que $\nu(c-a) = \delta$. Assim, para mostrar que (T,S) é um corte resta mostrar que $T < S$. Tome $c \notin D$ e $b \in D$. Se a desigualdade $\nu(b-a) \leqslant \nu(c-a)$ fosse válida, então como D é uma bola, teríamos $c \in D$, o que contradiz a hipótese sobre c. Portanto, $\nu(c-a) < \nu(b-a)$, o que implica $T < S$.

Agora provemos que $T \underset{P_i}{<} \nu_i(X-a) \underset{P_i}{<} S$. Vamos demonstrar a desigualdade para ν_1. Para ν_2, a demonstração segue os mesmos passos. Suponha por contradição que $\nu_1(X-a) \not< S$. Logo, existe $\beta \in S$ tal que $\nu_1(X-a) \geqslant \beta$. Pelo Lema 3.1.6, existe $b \in D$ tal que $\beta = \nu(b-a)$. Portanto, $\nu_1(X-a) \geqslant \nu(b-a) = \nu_1(b-a)$. Por outro lado, temos que a,$b \in B_1$, daí $X \underset{P_1}{<} a$ e também $X \underset{P_1}{<} b$. Pelo Lema 3.1.5 existe $c \in R$ tal que $c \underset{P_i}{<} X \underset{P_i}{<} b$ e $\nu(c-a) = \nu(b-a) \in S$. Porém, $c \underset{P_i}{<} X$ implica que $c \in A_1$. Assim $c \notin D$ o que garante que $\nu(c-a) \in T$. Mas $T < S$ e chegamos em uma contradição.

Suponha agora que $T < \nu_1(X-a)$ não aconteça. Portanto, existe $\beta \in T$ tal que $\nu_1(X-a) \leqslant \beta$. Usando o Lema 3.1.6, existe $c \in R \setminus D$ tal que $\beta = \nu(c-a)$. Como

$$\nu_1(X-a) \leqslant \nu(c-a) = \nu_1(c-a)$$

temos $\nu_1(\frac{c-a}{X-a}) \geqslant 0$. Logo existe $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, tal que

$$\frac{|c-a|}{|X-a|} \underset{P_1}{<} n.$$

Assim,

$$|X-a| \underset{P_1}{>} \frac{1}{n}|c-a|.$$

Daí, lembrando que $X - a \underset{P_1}{<} 0$, obtemos que

$$X - a \underset{P_1}{<} -\frac{1}{n}|c-a| \underset{P_1}{<} 0.$$

Somando a em cada lado da desigualdade anterior, temos

$$X \underset{P_1}{<} a - \frac{1}{n}|c-a| \underset{P_1}{<} a.$$

Considere $d = a - \frac{1}{n}|c-a|$, assim

$$X \underset{P_1}{<} d \underset{P_1}{<} a.$$

Como $X \underset{P_1}{<} d$ então $d \in B_1$. Por outro lado, como $a \in A_2$ e $d < a$, temos que $d \in A_2$. Logo $d \in A_2 \cap B_1 = D$. Sendo assim, temos $\nu(d-a) \in S$ e

$$\nu(d-a) = \nu\left(\frac{1}{n}|c-a|\right) = \nu(c-a) \in T,$$

o que é uma contradição, pois $T < S$. $\square$

Com estes lemas já estamos em condição de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.1.8. *Seja R um corpo realmente fechado e ν sua valorização natural. Então $\lambda_{R(X)}(P_1) = \lambda_{R(X)}(P_2)$ se e somente se $B_1 \cap A_2$ é uma bola em (R, ν).*

Demonstração: A implicação "$\Rightarrow$" foi mostrada por contra positiva no Lema 3.1.4. Assim, precisamos demonstrar que se $B_1 \cap A_2$ é uma bola, então $\lambda_{R(X)}(P_1) = \lambda_{R(X)}(P_2)$. Pelo Lema 3.1.7, segue-se que $\nu_i(X - a) \notin \Gamma$, para $i = 1, 2$. Afirmamos que $n\nu_i(X - a) \notin \Gamma$, $i = 1, 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Com efeito, se $n\nu_i(X - a) = \delta \in \Gamma$, então como Γ é divisível (Observação 2.3.7), existe $\delta' \in \Gamma$ tal que $n\delta' = \delta$. Daí

$$n\nu_i(X - a) = n\delta' \Longrightarrow n(\nu_i(X - a) - \delta') = 0.$$

Assim, obtemos $\nu_i(X - a) = \delta' \in \Gamma$, o que é uma contradição. Portanto, $\nu_1(X - a)$ e $\nu_2(X - a)$ determinam as valorizações ν_1 e ν_2 de maneira única. De fato, para qualquer $p(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, existem c_i's tais que $p(X) = \sum_{j=0}^{n} c_j (X - a)^j$. Para $i = 1, 2$, segue-se que

$$\begin{aligned} \nu_i(p(X)) &\geqslant \min\{\nu_i(c_j(X - a)^j) \mid j = 0, 1, \ldots, n\} \\ &= \min\{\nu_i(c_j) + j\nu_i(X - a) \mid j = 0, 1, \ldots, n\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sabemos que a igualdade em (3.6) é válida se $\nu_i(c_j) + j\nu_i(X - a) \neq \nu_i(c_l) + l\nu_i(X - a)$ para todo $j \neq l$. Suponha que isso não ocorra, ou seja

$$\begin{aligned} \nu_i(c_j) + j\nu_i(X - a) &= \nu_i(c_l) + l\nu_i(X - a) \\ &\Rightarrow \nu_i\left(\frac{c_j}{c_l}\right) + (j - l)\nu_i(X - a) = 0 \in \Gamma \\ &\Rightarrow (j - l)\nu_i(X - a) \in \Gamma. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como $n\nu_i(X - a) \notin \Gamma$ para $n \neq 0$, em (3.7) obtemos $j = l$. Voltando em (3.6), temos

$$\nu_i(p(X)) = \min\{\nu_i(c_j) + j\nu_i(X - a) \mid j = 0, 1, \ldots, n\}. \tag{3.8}$$

Mostremos que ν_1 é equivalente a ν_2. Considere a função

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{Z}\nu_1(X - a) \bigoplus \Gamma &\longrightarrow \mathbb{Z}\nu_2(X - a) \bigoplus \Gamma \\ (n\nu_1(X - a), \delta) &\longmapsto (n\nu_2(X - a), \delta). \end{aligned}$$

Claramente temos que φ é um isomorfismo. Note ainda que $\varphi \circ \nu_1 = \nu_2$. Portanto o diagrama na Figura 4 comuta. O fato de $S < \nu_i(X - a) < T$ garante que φ preserva a ordem entre $\mathbb{Z}\nu_1(X - a) \bigoplus \Gamma$ e $\mathbb{Z}\nu_2(X - a) \bigoplus \Gamma$. Com essa observação, concluímos que as valorizações ν_1 e ν_2 são equivalentes. Como $\nu_1 \simeq \nu_2$, temos que existe um isomorfismo ψ

$$
\begin{tikzcd}
R(X)^{\times} \arrow[r, "\nu_2"] \arrow[dr, "\nu_1"'] & \mathbb{Z}\nu_1(X-a) \oplus \Gamma \arrow[d, "\varphi"] \\
& \mathbb{Z}\nu_2(X-a) \oplus \Gamma
\end{tikzcd}
$$

Figura 4 – Diagrama da equivalência de ν_1 e ν_2.

$$
\begin{tikzcd}
R(X) \arrow[r, "\xi_2"] \arrow[dr, "\xi_1"'] & R(X)\nu_1 \cup \{\infty\} \arrow[d, "\psi"] \\
& R(X)\nu_2 \cup \{\infty\}
\end{tikzcd}
$$

Figura 5 – Diagrama da equivalência dos lugares ξ_1 e ξ_2.

entre os corpos de resíduos de ξ_1 e ξ_2, que serão denotados por $R(X)\nu_1$ e $R(X)\nu_2$. Afirmamos que $R(x)\nu_1 = k$ e $R(x)\nu_2 = k$. Vamos demonstrar essa afirmação para ν_1, o mesmo argumento se aplica a ν_2. Suponha por absurdo que $f(X)\nu_1 \notin K$. Logo, existe $P(Y) = \sum_{i=0}^{n} a_i Y^i$, com $\deg(p(Y)) > 1$ tal que $P(\xi_1(f(X))) = 0$. Daí, $\xi_1(P(Y)) = 0$ e portanto $\nu_1(P(f(X))) > 0$. O que é uma contradição com (3.8). Como K é um subcorpo dos reais, segue-se que ψ é a identidade, assim obtemos que $\xi_1 = \xi_2$. Em outras palavras $\lambda_{R(X)}(P_1) = \lambda_{R(X)}(P_2)$, como queríamos. □

Observação 3.1.9. *Se ξ é um $\mathbb{R}$-lugar, temos que $\lambda^{-1}(\xi)$ consiste de no máximo duas ordens. De fato, sejam $P_1 \prec P_2 \prec P_3$ ordens em $R(X)$, com cortes correspondentes (A_1, B_1), (A_2, B_2) e (A_3, B_3). Note que se $\lambda_{P_1} = \lambda_{P_2} = \lambda_{P_3}$, então $A_3 \cap B_1$, $A_2 \cap B_1$, $A_3 \cap B_2$ são bolas. Mais ainda, $A_3 \cap B_1 = A_2 \cap B_1 \cup A_3 \cap B_2$. Temos que essa união é disjunta. Porém, pela Proposição 3.1.3 a união disjunta de bolas não é uma bola.*

3.2 $M(R(X))$ e $M(R'(X))$ são homeomorfos se R' é denso em R

Os resultados dessa seção são extremamente técnicos. Eles serão úteis na próxima seção.

Considere L/K uma extensão de corpos ordenados. Considere as aplicações

$$
\begin{array}{rccc}
\sigma: & \mathcal{X}(L) & \longrightarrow & \mathcal{X}(K) \\
& P & \longmapsto & P \cap K
\end{array}
\tag{3.9}
$$

e

$$\begin{array}{rccc} \phi: & M(L) & \longrightarrow & M(K) \\ & \xi & \longmapsto & \xi\,|_K\,. \end{array} \tag{3.10}$$

Essas funções são contínuas. Também temos que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}(L) \arrow[r, "\lambda_L"] \arrow[d, "\sigma"'] & M(L) \arrow[d, "\phi"] \\ \mathcal{X}(K) \arrow[r, "\lambda_K"'] & M(K) \end{tikzcd}$$

Figura 6 – Diagrama comutativo com as funções restrição.

Antes de demonstrar o teorema sobre o homeomorfismo entre $M(R(X))$ e $M(R'(X))$, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.2.1. *Seja $R' \subset R$ uma extensão de corpos realmente fechados. São válidas:*

i. Se $P \in \mathcal{X}(R)$ possui corte associado (A, B) então o corte $(A \cap R', B \cap R')$ corresponde a ordem $P' = P \cap R'(X)$.

ii. As funções $\sigma : \mathcal{X}(R(X)) \longrightarrow \mathcal{X}(R'(X))$ e $\phi : M(R(X)) \longrightarrow M(R'(X))$ são sobrejetivas.

Demonstração: Vamos mostrar *i.* Lembremos que a ordem P' é dada por:

$$P' = \{f \in R'(X) \mid \exists a \in A \cap R', \exists b \in B \cap R'; \forall c \in (a, b), f(c) \in R'_{>0}\}.$$

Note que $P' \subset P \cap R'(X)$. Por outro lado, se $f(X) \in P \cap R'(X)$ então deve existir $a \in A \cap R'$ e $b \in B \cap R'$ tal que $f(c) > 0$ para todo $c \in (a, b)$ em R. Como $R' \subset R$, temos que $f(c) > 0$ para todo $c \in (a, b)$ em R'. Portanto $f(X) \in P'$.
Mostremos *ii.* Seja $P' \in \mathcal{X}(R'(X))$ com corte associado (A', B') em R'. Considere $A = \{a \in R \mid a < B\}$ e $B = R \setminus A$. Afirmamos que (A, B) é um corte em R. Por construção temos que $A \cup B = R$. Vamos mostrar que $A < B$. Se $b \in B$, então $b \notin A$. Logo existe $b' \in B'$ tal que $b' < b$. Daí, tomando $a \in A$, temos que $a < B'$ e portanto $a < b' < b$. Segue-se que $A < B$. Além disso temos que $A \cap R' = A'$ e $B \cap R' = B$. Se P é a ordem associada a (A, B) temos pelo item i que $P \cap R'(X) = P'$. Portanto ϕ é sobrejetora. □

Teorema 3.2.2. *Seja $R' \subset R$ uma extensão de corpos realmente fechados. A aplicação $\phi : M(R(X)) \longrightarrow M(R'(X))$ é um homeomorfismo se e somente se R' é denso em R.*

Demonstração: A aplicação $\phi : M(R(X)) \longrightarrow M(R'(X))$ é sobrejetiva pelo Lema 3.2.1. Como o domínio e contradomínio de ϕ são compactos e Hausdorff e ϕ é contínua, ϕ é um

homeomorfismo se e somente se ϕ é injetora. Primeiro vamos assumir que R' é denso em R. Considere ξ_1, $\xi_2 \in M(R(X))$ tal que $\xi_1 \neq \xi_2$. Sejam P_1 e P_2 as ordens correspondentes a ξ_1 e ξ_2. Vamos assumir que $P_1 \prec P_2$. Considere (A_1, B_1), (A_2, B_2), os cortes associados a P_1 e P_2, respectivamente. Como $\xi_1 \neq \xi_2$ temos pelo Teorema 3.1.8 que $A_2 \cap B_1$ não é uma bola. Portanto existem $a, b \in A_2 \cap\ B_1$, $a \neq b$ e $c \in R \setminus A_2 \cap B_1$ tal que $\nu(c-a) \geqslant \nu(b-a)$. Vamos assumir que $c \in A_1$, os outros casos são análogos.
Vamos considerar $A'_i = A_i \cap R'$ e $B'_i = A_i \cap R'$, para $i = 1, 2$. Pela densidade de R' em R, existem a', b' em (a, b) e $c' \in R$ com $c' < c$, tais que:

$$\begin{aligned} \nu(a'-a) &> \nu(c-a) \\ \nu(b'-b) &> \nu(c-a) \\ \nu(c'-c) &> \nu(c-a). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\nu(c'-a') = \nu(c-a)$. Observe que,

$$\begin{aligned} \nu(c'-a') &= \nu(c'-c+c-a+a-a') \\ &\geqslant \min\{\nu(c-c'), \nu(a-a'), \nu(c-a)\} &\quad (3.11) \\ &= \nu(c-a). &\quad (3.12) \end{aligned}$$

Como $\nu(c-a) < \min\{\nu(c-c'), \nu(a-a')\}$, temos que vale a igualdade em 3.12. Analogamente para b',

$$\begin{aligned} \nu(b'-a') &= \nu(b'-b+b-a+a-a') \\ &\geqslant \min\{\nu(b-b'), \nu(a-a'), \nu(b-a)\} &\quad (3.13) \\ &= \nu(b-a). &\quad (3.14) \end{aligned}$$

E obtemos que $\nu(b'-a') = \nu(b-a)$.

Para a afirmação contrária, vamos assumir que R' não é denso em R. Então existem elementos $c < d$ tais $R' \cap (c, d) = \emptyset$. Segue-se que a restrição dos cortes c^+ e d^- à R' são os mesmos. Considere ξ_{c^+} e ξ_{d^-} os lugares correspondentes aos cortes mencionados. Sabemos o lugar determinado pelo corte c^- também é ξ_{c^+}. Como no máximo 2 ordens podem ser atribuídas ao mesmo lugar, concluímos que $\xi_{c^+} \neq \xi_{d^-}$. Assim obtemos que ϕ não é injetiva.

□

3.3 Metrizabilidade de $M(R(X))$

Esta seção se baseia totalmente em conceitos topológicos. Incluímos no Apêndice alguns resultados auxiliares que serão utilizados nas demonstrações. No Apêndice também consta uma breve síntese sobre as topologias de $M(K)$ e $\mathcal{X}(K)$, onde K é um corpo formalmente real.

O espaço topológico $M(K)$, possui como base uma família de abertos semelhantes aos conjuntos de Harrison, que dependem do anel de holomorfia de K.

Definição 3.3.1. *O* ***anel de holomorfia*** *de um corpo formalmente real K é dado por*

$$\mathcal{H}_K = \bigcap_{P \in \mathcal{X}(K)} A(P).$$

T.Y Lam mostrou no Teorema 9.11 em [15] que uma sub-base para o espaço $M(K)$ é dada pelos conjuntos

$$U(a) = \{\xi \in M(K) \mid \xi(a) > 0\}, \text{ para } a \in \mathcal{H}_K.$$

Corolário 3.3.2. *Se K é um corpo contável então $M(K)$ é metrizável.*

Demonstração: De fato, pela definição da sub-base de $M(K)$, temos que se K é contável então a sub-base de $M(K)$ é contável. Portanto sua base é contável e assim pelo Corolário 4.1.10 $M(K)$ é metrizável. $\square$

Nos próximos resultados voltaremos a estudar propriedades do espaço topológico $M(R(X))$. Usaremos as notações usuais: considere R um corpo realmente fechado, ν a valorização natural de R, com grupos de valores Γ e corpo de resíduos k.

Lema 3.3.3. *Se N é um subconjunto denso de $M(R(X))$ então $\lambda_{R(X)}^{-1}(N)$ é um subconjunto denso de $\mathcal{X}(R(X))$.*

Demonstração: Considere um aberto básico de $\mathcal{X}(R(X))$. Como sabemos, podemos identificar este aberto com o conjunto de todos os cortes cuja a parte superior (ou inferior) intersecta um intervalo $(a, b) \subset R$. Queremos mostrar que este aberto possui um elemento de $\lambda_{R(X)}^{-1}(N)$. Seja $f(X) \in R[X]$, definido por

$$f(X) = \frac{-4(X-a)(X-b)}{(b-a)^2}$$

e seja $g = \frac{f}{1+f^2}$. Note que $g > 0$ apenas no intervalo (a, b). Além disso,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \frac{-4\left(\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)}{(b-a)^2} \\ &= \frac{-(a-b)(b-a)}{(b-a)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Afirmamos que $U(g) \neq \emptyset$ (lembrando que $U(g) = \{\xi \in M(K) \mid \xi(g) > 0\}$). Com efeito, considere o corte $A^- = ((-\infty, \frac{a+b}{2}), [\frac{a+b}{2}, \infty))$. Este corte induz a ordem

$$P_{A^-} = \left\{ f \in R(X) \mid \exists\ a' \in \left(-\infty, \frac{a+b}{2}\right), b' \in \left[\frac{a+b}{2}, \infty\right), \forall c \in (a', b'), f(c) > 0 \right\}$$

Como $g > 0$ em (a, b), temos que $g \in P_A^-$. Seja ξ o lugar associado a P_A^-, isto é, construído a partir do anel de valorização

$$A(P_{A^-}) = \{f \in R(X) \mid \exists r \in \mathbb{Q}^+; -r \underset{P_{A^-}}{<} f \underset{P_{A^-}}{<} r\}.$$

Sabemos que $\xi(P_{A^-}) > 0$. De onde obtemos que $\xi(g) > 0$. Logo $\xi \in U(g)$ e assim $U(g) \neq \emptyset$, como queríamos. Pela densidade de N em $M(R(X))$, existe $\xi \in N \cap U(g)$. Agora considere $P \in \lambda_{R(X)}^{-1}(\xi)$ e seja (A, B) o corte correspondente a P. Como $\xi(g) > 0$, segue que $g \in P$. Sendo assim, existem $a' \in A$ e $b' \in B$ tal que para todo $c \in (a', b'), g(c) > 0$. Daí $(a', b') \subset (a, b)$. Segue-se que a parte inferior (ou superior) do corte (A, B) intersecta (a, b). Isto implica que $(-\infty, a] \subset A \subset (-\infty, b]$, logo $P \in (P_a^+, P_b^+)$. Portanto, $\lambda_{R(X)}^{-1}(N)$ é denso em $\mathcal{X}(R(X))$. □

A próxima proposição requer a definição de segmento inicial.

Definição 3.3.4. *Seja G um grupo ordenado, e $S \subset G$. Dizemos que S é um **segmento inicial** (final) de G se para todo $x \in S$ e $y \leqslant x$ ($y \geqslant x$) temos que $y \in S$.*

Proposição 3.3.5. *Para todo corte próprio (A, B) em R, o conjunto $\nu(B-A) = \{\nu(b-a) \mid a \in A, b \in B\}$ é um segmento inicial de Γ.*

Demonstração: Seja $y = \nu(b-a) \in \nu(B-A)$ e $z = \nu(c) \in \Gamma$ tal que $z \leqslant y$, devemos mostrar que $z \in \nu(B-A)$. Sabemos que se $\nu(c) \leqslant \nu(b-a)$ então $c \geqslant b-a$. Logo $c \in B$, e também $c + a \in B$. Portanto,

$$\nu(c) = \nu((c+a) - a) \in \nu(B-A)$$

como queríamos. □

Proposição 3.3.6. *Suponha que Γ e k são contáveis e que $M(R(X))$ é metrizável. Então R contém um subcorpo denso e contável.*

Demonstração: Seja P uma ordem com corte associado (A, B). Considere o conjunto $\nu(B-A) \subset \Gamma$. Seja γ_m o elemento maximal, caso exista, de $\nu(B-A)$. Para cada $\gamma \in \nu(B-A)$ tal que $\gamma \neq \gamma_m$, podemos escolher $a_\gamma \in A$ e $b_\gamma \in B$ tal que $\nu(b_\gamma - a_\gamma) = \gamma$. Considere $d \in \dot{R}^2$ tal que $\nu(d) = \gamma_m$ e escolha a' e $b' \in B$ tal que $\nu(a' - b') = \gamma_m$. Seja $\bar{c} \in \dot{k}^2$. Então existem $a_{\bar{c}} \in A$, $b_{\bar{c}} \in B$ tal que

$$\nu(b_{\bar{c}} - a_{\bar{c}}) = \gamma_m \text{ e } \xi\left(\frac{b_{\bar{c}} - a_{\bar{c}}}{d}\right) = \bar{c}. \tag{3.15}$$

Como (A, B) é um corte, para $a' \in A$ temos que

$$\bar{A} = \{\bar{d} \in k \mid a' + \bar{d}c_\gamma \in A\} \ , \ \bar{B} = \{\bar{e} \in k \mid a' + \bar{d}c_\gamma \in B\}$$

é um corte em K_ν. Note que $a' + \bar{0} = a' \in A$, logo $\bar{0} \in \bar{A}$. Além disso, se $a + \bar{e}c_\gamma > b$, então $\bar{e} \in \bar{B}$. Observe que se não existisse $\bar{e}$ tal que $a + \bar{e}c_\gamma > b$ teríamos que k possui um elemento máximo, o que não acontece. Segue-se que $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são não vazios. Vamos considerar,

$$\mathcal{A}_P := \{a_{\gamma,b_\gamma} \mid \gamma \in \nu(B - A) \setminus \{\gamma_m\}\} \cup \{a_{\bar{c}}, b_{\bar{c}} \mid \bar{c} \in k^2\}.$$

Como k e Γ são contáveis, também temos que $\mathcal{A}_P$ é contável. Como $M(R(X))$ é compacto, Hausdorff e metrizável, temos pelo Corolário (4.1.10) que $M(R(X))$ é segundo contável e portanto separável. Logo, existe um subconjunto N que é denso e contável em $M(R(X))$. Pelo Lema 3.3.3, temos que $\lambda_{R(X)}^{-1}(N)$ é denso em $\mathcal{X}(R(X))$. Vamos utilizar este conjunto para descrever um subcorpo denso e contável em R. Consideremos

$$\mathcal{A} := \bigcup_{P \in \lambda_{R(X)}^{-1}(N)} \mathcal{A}_P,$$

que também é contável, já que é a união contável de conjuntos contáveis. Vamos mostrar que $\mathcal{A}$ também é denso em R. Sejam $a, b \in R$ com $a < b$. Pelo Lema (3.3.3) existe uma ordem P, tal que $P_{a^+} < P < P_{b^-}$. Seja (A, B) o corte correspondente em R a P. Então $a \in A$, $b \in B$. Se $\nu(b - a) \neq \gamma_m$, então tomamos $\gamma \in \nu(B - A)$, com $\nu(b - a) > \gamma$ e colocamos $\tilde{a} = a_\gamma$ e $\tilde{b} = b_\gamma$. Então $\nu(\tilde{b} - \tilde{a}) = \gamma > \nu(b - a)$, o que implica $\tilde{b} - \tilde{a} \leqslant b - a$. Se $\nu(b - a) = \gamma_m$, escolhemos $\bar{c} < \xi_{R(X)}\left(\frac{b-a}{d}\right)$. Considere $\tilde{a} = a_{\bar{c}}$ e $\tilde{b} = b_{\bar{c}}$. Então por (3.3), vemos que $\tilde{b} - \tilde{a} \leqslant b - a$. Assim, como $a, \tilde{a} \in A$ e $b, \tilde{b} \in B$, concluímos que $\tilde{a} \in (a, b)$ ou $\tilde{b} \in (a, b)$. Portanto, $\mathcal{A}$ é denso em R.

Considere agora o corpo $\mathrm{k}(\mathcal{A}) \subset R$. Como $\mathcal{A}$ é denso em R, temos que $k(\mathcal{A})$ é denso em R. Mais ainda, como $\mathcal{A}$ é contável, também temos que $\mathrm{k}(\mathcal{A})$ é contável. Isso conclui a prova. □

Lema 3.3.7. *Considere $a \in R$ e S um segmento final em Γ que não possui menor elemento. Então o conjunto*

$$U_{a,S} = \{\xi \in M(R(X)) \mid \nu_\xi(X - a) \geqslant \gamma \text{ para algum } \gamma \in S\}$$

é aberto em $M(R(X))$.

Demonstração: Se Γ é o grupo trivial, tal S não pode existir. Vamos assumir que Γ é não trivial. Queremos mostrar que

$$\lambda_{R(X)}^{-1}(U_{a,S}) = \bigcup_{c \in \dot{R}^2, \nu(c) \in S} (P_{a-c}^-, P_{a+c}^+),$$

o que garante o resultado, pois cada (P^-_{a-c}, P^+_{a+c}) é um aberto em $\mathcal{X}(R(X))$.
Suponha que $P \in \lambda^{-1}_{R(X)}(U_{a,S})$. Então existe $\gamma \in S$ tal que $\nu_p(X-a) \geqslant \gamma$. Como S não possui menor elemento, existe $c \in \dot{R}^2$ tal que $\gamma > \nu(c) \in S$. Então $-c \underset{P}{<} X - a \underset{P}{<} c$, portanto $a - c \underset{P}{<} X \underset{P}{<} a + c$. Logo $P \in (P^-_{a-c}, P^+_{a+c})$.
Agora vamos mostrar que

$$\bigcup_{c \in \dot{R}^2, \nu(c) \in S} (P^-_{a-c}, P^+_{a+c}) \subset \lambda^{-1}_{R(X)}(U_{a,S}).$$

Suponha que $P \in (P^-_{a-c}, P^+_{a+c})$ para algum $c \in \dot{R}^2$ e $\nu(c) \in S$. Note que $a - c \underset{P}{\leqslant} X \underset{P}{\leqslant} a + c$. De fato, P define o corte $(\{a \in R \mid a \underset{P}{<} X\}, \{b \in R \mid b \underset{P}{>} X\})$ e como $P \in (P^-_{a-c}, P^+_{a+c})$ segue-se que

$$(-\infty, a-c) \subset \{a \in R) \mid a \underset{P}{<} X\} \subset (-\infty, a+c].$$

Daí $a - c \underset{P}{<} X \underset{P}{<} a + c$. Assim $-c \underset{P}{<} X - a \underset{P}{<} c$, logo $\nu_P(X-a) \leqslant \nu(c) \in S$. □

Usando o Lema 3.3.7 vamos construir duas famílias de conjuntos abertos disjuntos, que nos darão informações sobre a celularidade de $M(R(X))$. Considere os conjuntos

$$U_{a,\gamma} := U_{a,S_\gamma} = \{\xi \in M(R(X)) \mid \nu_\xi(X-a) > \gamma\},$$

onde $S_\gamma = \{\delta \in \Gamma \mid \delta > \gamma\}$. Pelo Lema 3.3.7, temos que esses conjuntos são abertos.

Lema 3.3.8. *Considere $\alpha, \beta \in \Gamma$ tal que $\gamma < \beta \leqslant \alpha$. Seja $\{d_j \mid j \in J\}$ tal que $\nu(d_j) = \beta$ e $\nu(d_j - d_l) \geqslant \alpha$ para todo $j \neq l$. Então $U_{a+d_j,\alpha} \cap U_{a+d_l,\alpha} = \emptyset$ se $j \neq l$.*

Demonstração: Explicitamente temos que

$$U_{a+d_j,\alpha} = \{\xi \in M(R(X)) \mid \nu_\xi(X - a - d_j) > \alpha\}.$$

Mostremos que esses conjuntos são não vazios. Com efeito, o corte principal $((-\infty, a + d_j), [a + d_j, \infty))$ induz a ordem

$$P = \{f \in R(X) \mid \exists a \in (-\infty, a + d_j), \exists b \in [a + d_j, \infty); f(c) \in \dot{R}^2\}.$$

Em relação a P, temos que $X - a - d_j \notin P$ e $X - a - d_j$ é infinitesimalmente próximo de 0. Daí, $X - a - d_j \underset{P}{<} \alpha_0$, sendo $\nu(\alpha_0) = \alpha$. Logo, $\nu(X - a - d_j) > \alpha$. Portanto, o lugar associado a ν pertence ao conjunto $U_{a+d_j,\alpha}$.
Se $\xi \in U_{a+d_j,\alpha}$, então

$$\nu_\xi(X - a - d_j) > \alpha \geqslant \beta \tag{3.16}$$

Lembrando que $\nu_\xi(d_j) = \nu(d_j) = \beta$, segue-se que

$$\nu_\xi(X-a) = \nu_\xi(X - a - d_j + d_j) \leqslant \min\{\nu_\xi(X - a - d_j), \nu(d_j)\} \overset{(1.10)}{=} \beta > \gamma.$$

Portanto $\xi \in U_{a,\gamma}$. Assim, temos que $U_{a+d_j,\alpha} \subset U_{a,\gamma}$.
Suponha que $\xi \in U_{a+d_j,\alpha} \cap U_{a+d_l,\alpha}$ para $j \neq l$. Então,

$$\nu_\xi \underbrace{(X-a-d_j)}_{=f_j(X)} > \alpha \text{ e } \nu_\xi \underbrace{(X-a-d_l)}_{=f_l(X)} > \alpha.$$

Daí,

$$\alpha < \min\{\nu(f_l(X), f_j(X)\} \leqslant \nu_\xi(f_l(X) - f_j(X)) = \nu(d_j - d_l) \leqslant \alpha,$$

o que é uma contradição. Portanto $U_{a+d_j,\alpha} \cap U_{a+d_l,\alpha} = \emptyset$ para $j \neq l$. $\square$

Lema 3.3.9. *Considere $\alpha > \gamma$, $\beta > \gamma$ no grupo de valores Γ. Se $\alpha \neq \beta$ então $U_{a+d_\alpha,\alpha} \cap U_{a+d_\beta,\beta} = \emptyset$.*

Demonstração: De modo análogo à demonstração do Lema 3.3.8, temos que $U_{a+d_\alpha,\alpha} \neq \emptyset$ e $U_{a+d_\alpha,\alpha} \subset U_{a,\gamma}$.
Suponha que $\xi \in U_{a+d_\alpha,\alpha} \cap U_{a+d_\beta,\beta}$ para α, $\beta \in \Gamma$. Vamos mostrar que nesse caso devemos ter $\alpha = \beta$. Sabemos que

$$\nu_\xi(X-a-d_\alpha) > \alpha \text{ e } \nu_\xi(X-a-d_\beta) > \beta.$$

Logo,

$$\nu(d_\alpha - d_\beta) = \nu_\xi(X-a-d_\alpha-(X-a-d_\beta)) \overset{*}{>} \min\{\alpha,\beta\}.$$

Pela desigualdade $*$ concluímos que $\nu(d_\alpha) = \nu(d_\beta)$, caso contrário $\nu(d_\alpha - d_\beta) = \min\{\alpha,\beta\}$.
Portanto $\alpha = \beta$. $\square$

A demonstração do próximo teorema se resume na aplicação dos resultados de topologia que esão apresentados no Apêndice. Sugerimos que antes de prosseguir, o leitor veja o esquema apresentado na Figura 7.

Teorema 3.3.10. *Se é R um corpo realmente fechado que não admite um subcorpo denso e contável, então $M(R(X))$ não é metrizável.*

Demonstração: Existem os seguintes casos a serem analisados:

1. Γ é contável e k é incontável
2. Γ é incontável e k é incontável
3. Γ é incontável e k é contável
4. Γ é contável e k é contável

Caso 1:
Seja $a \in R$ e $\gamma \in \Gamma$. Como o corpo de resíduos $k \subset R$ é incontável, basta tomar $b \in R$, tal que $\beta = \nu(b) > \gamma$. Considere o conjunto $\{d_j = jb \mid j \in k \setminus \{0\}\}$. Note que se $j \neq 0$, então j não está no ideal maximal de $A(R^2)$. Daí temos que $\nu(j) = 0$. Assim,

$$\nu(b) = \nu(j) + \nu(b) = \nu(jb).$$

Além disso,

$$\nu(j_1b - j_2b) = \nu((j_1 - j_2)b) = \beta.$$

Assim, para $\alpha = \beta$, o Lema 3.3.8 nos garante que

$$\{U_{a+d_j,\alpha} \mid j \in k \setminus \{0\}\}$$

é uma família incontável de abertos disjuntos. Pelo Corolário 4.1.11, temos que $M(R(X))$ não é metrizável.

Casos 2 e 3:

Note que como Γ é incontável, então $S_\gamma = \{\alpha \mid \alpha > \gamma\}$ também é. Assim, pelo Lema 3.3.9 a coleção $\{U_{a+d_\alpha,\alpha} \mid \gamma < \alpha\}$ é uma família incontável de abertos disjuntos. Novamente pelo Corolário 4.1.11 $M(R(X))$ não é metrizável.

Caso 4:

Basta usar a Proposição 3.3.6. □

Teorema 3.3.11. *Seja R um corpo realmente fechado. Então $M(R(X))$ é metrizável se e somente se R contém um subcorpo denso e contável.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.3.10 temos que se R não admite um subcorpo denso e contável, então $M(R(X))$ não é metrizável.

Agora suponha que R admite um subcorpo denso e contável R_c. Considere R' o fecho real de R_c em R. Então $R' \subset R$ é denso e contável em R. Pelo Corolário 3.3.2, temos que $M(R'(X))$ é metrizável. Sabemos pelo Teorema 3.2.2 que $M(R(X)) \cong M(R'(X))$, portanto $M(R(X))$ é metrizável, como queríamos mostrar. □

Seja F um corpo de funções com grau de transcendência 1 sobre R. O próximo teorema nos mostra que a condição “possuir um subcorpo denso e contável” é necessária para garantir que $M(F)$ é metrizável. Continua sendo um problema em aberto mostrar que essa condição também é suficiente.

Considere a função (restrição),

$$\begin{array}{rccc} \eta: & \mathcal{X}(F) & \longrightarrow & \mathcal{X}(R(X)) \\ & P & \longmapsto & \eta(P) = P \cap R(X). \end{array} \tag{3.17}$$

Pelo Teorema 4.9 no artigo [7], temos que η é uma aplicação aberta.

Teorema 3.3.12. *Se $M(F)$ é metrizável, onde $trdeg_R F = 1$ e R é um corpo realmente fechado, então R possui um subcorpo denso e contável.*

Demonstração: Como F é formalmente real, existe pelo menos uma ordem de $R(X)$ que se estende à F. Portanto, existe um conjunto aberto não vazio em $\mathcal{X}(F)$. Seja S

esse conjunto. Como a função (3.17) é aberta, $A = S \cap R(X)$ é novamente um conjunto aberto. Logo, A contém algum intervalo aberto I de ordens. Para cada intervalo aberto de cortes em R, podemos encontrar $b_1 < b_2$ tais que $(P_{b_1}^+, P_{b_2}^-) \subset I$. Dessa forma, para qualquer $a \in R$ tal que $b_1 < a < b_2$, temos que P_a^+ e P_a^- se estende a F. Considere, $\gamma = \max\{\nu(a - b_1), \nu(a - b_2)\}$. Vamos mostrar que $\xi = \xi_{P_a^-} \in U_{a,\gamma}$. Com efeito, suponha que $\gamma = \nu(a - b_1)$. Temos que $p(X) = X - a \underset{P_a^-}{<} 0$ e $a - b_1 \underset{P_a^-}{>} 0$. Note que,

$$-p(X) - (a - b_1) = -X + b_1 \tag{3.18}$$

Note que para qualquer X, tal que $X > a$, temos $-X + b_1 < 0$. Segue-se por (3.18) que $-p(X) - (a - b_1) \underset{P_a^-}{<} 0$. Logo,

$$0 \underset{P_a^-}{<} -p(X) \underset{P_a^-}{<} (a - b_1).$$

Portanto, $\nu_\xi(X - a) > \nu(a - b_1) = \gamma$. Isto é, $\xi \in U_{a,\gamma}$. De forma análoga, pode-se mostrar que $\xi_{P_a^-} \in U_{a,\gamma}$ para $\gamma = \nu(a - b_2)$.
Assuma que R não admite um subcorpo denso contável. Pelos casos 1, 2 e 3 da demonstração do Teorema 3.3.10, a família $\mathcal{F}$ composta pelos conjuntos $U_{a,\gamma}$ contém incontáveis conjuntos abertos disjuntos. Como η é contínua, a pré-imagem de $\mathcal{F}$ também contém incontáveis conjuntos abertos disjuntos. Isso mostra que a celularidade de $M(F)$ é incontável. Logo, $M(F)$ não é metrizável. Falta apenas considerar o caso em que Γ e K_ν são contáveis. Vejamos que neste caso também conseguimos construir os conjuntos $U_{a,\gamma}$. Para cada $a \in \Gamma$ e $\bar{a} \in K_\nu$ podemos escolher representantes em R. Considere R' o menor corpo contendo tais representantes e $\mathbb{Q}$. Seja R_0 o fecho real de R'. Note que R_0 é contável e possui Γ como grupo de valores. Vejamos como encontrar os elementos d_j usados no Lema 3.3.8. Como R_0 não é denso em R, podemos encontrar d_1, tal que $d_1 \in R_0$, mas d_1 não está no fecho de R_0. Seja $d_2 \in R$, tal que d_2 não está no fecho do corpo $R_0(d_1)$. De forma indutiva, podemos encontrar d_2, d_3, ..., d_σ para todo $\sigma < \aleph_1$. Considere o corpo $k(R_0(d_\mu|\mu < \sigma))$. Fixemos um valor γ. Seja $\beta \in \Gamma$ tal que $\beta > \gamma$. Como R_0 e R possuem o mesmo grupo de valores, podemos multiplicar cada d_μ por um elemento adequado, de forma que todos eles tenham valor β. Resta encontrar α como no Lema 3.3.8. Para isso, note que d_σ não está no fecho de $R_0(d_\mu|\mu < \sigma)$, assim existe $\alpha_\sigma \in \Gamma$ tal que $\nu(d_\sigma - c) < \alpha_\sigma$, para todo $c \in R_0(d_\mu|\mu < \sigma)$. Como Γ é contável, existe $\alpha \in \Gamma$, tal que $\alpha > \alpha_\sigma$ para incontáveis $\sigma < \aleph_1$. Excluindo todos os membros d_σ para os quais $\alpha \leqslant \alpha_\sigma$, obtemos uma sequência de elementos d_j que satisfaz as hipóteses do Lema 3.3.8. Dessa forma obtemos os conjuntos $U_{a,\gamma}$. Novamente usando η é contínua, obtemos uma família de incontáveis abertos disjuntos em $M(F)$. Portanto $M(F)$ não é metrizável. $\square$

4 Apêndice

4.1 Resultados Clássicos de Topologia

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados clássicos de topologia que foram mencionados no Capítulo 2. Como se tratam de resultados típicos de um curso básico de topologia, a grande maioria não será demonstrada. Sugerimos ao leitor o livro [17] para as demonstrações.

Topologia Quociente

Definição 4.1.1. *Seja X um espaço topológico e $p : X \longrightarrow A$ uma aplicação sobrejetiva. A coleção*

$$\tau = \{U \in A \mid p^{-1}(U) \text{ é aberto em } X\}$$

é uma topologia em Y, denominada topologia quociente induzida por p.

Proposição 4.1.2. *A topologia quociente induzida por p é a topologia mais fina sobre Y que torna p contínua.*

Observação 4.1.3.

1. *Considere X um espaço topológico qualquer, com uma relação de equivalência $\sim$. Então $X/\sim$ possui a topologia quociente induzida pela projeção $\pi : X \longrightarrow X/\sim$, $x \longmapsto \bar{x}$.*

2. *Pela Proposição 4.1.5, se X é compacto e Y possui a topologia quociente induzida por uma aplicação p, então Y é compacto.*

2. *Em geral, se Y possui a topologia quociente induzida por uma aplicação, definida em um espaço Hausdorff, Y não necessariamente é Hausdorff.*

Resultados Auxiliares

Proposição 4.1.4. *Sejam X um espaço compacto, Y um espaço Hausdorff e $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua e sobrejetora. Então f é um homeomorfismo se e somente se f é injetora.*

Proposição 4.1.5. *Se X é compacto e $f : X \longrightarrow Y$ é contínua e sobrejetiva, então Y é compacto.*

Seja Y um espaço topológico, temos as seguintes definições.

Definição 4.1.6. *A celularidade de Y é dada por*

$$C_Y = \sup\{| \mathcal{F} | \mid \mathcal{F} \textit{ é uma família de conjuntos abertos disjuntos de } Y\}.$$

Definição 4.1.7. *A densidade de Y é dada por*

$$D_Y = \inf\{| A | \mid A \textit{ é denso em } Y\}.$$

Lema 4.1.8. *Se Y é um espaço topológico então $C_Y \leqslant D_Y$.*

Demonstração: Observemos que se A é denso em Y, então cada aberto de uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos abertos disjuntos de Y, contém pelo menos um elemento de A, ou seja, $| \mathcal{F} | \leqslant | A |$. Logo $\sup\{| \mathcal{F} |\} \leqslant | A |$. Por outro lado, como essa desigualdade é válida para todo A, temos $\sup\{| \mathcal{F} |\} \leqslant \inf\{| \mathcal{A} |\}$. □

Fizemos uso do Teorema da metrização de Urysohn e portanto vamos enunciá-lo aqui. Sua demonstração será omitida, já que não contribui diretamente com o nosso objetivo. Ela pode ser encontrada em [17], página 215. Lembremos que um espaço topológico X é *segundo contável* quando possui uma base contável.

Teorema 4.1.9. ***Teorema da metrização de Urysohn**: Todo espaço regular Y, segundo contável é metrizável.*

Os espaços que são Hausdorff, compactos e metrizáveis podem ser caracterizados pela sequinte propriedade:

Corolário 4.1.10. *Seja Y um espaço compacto e Hausdorff. Então Y é metrizável se e somente se Y é segundo contável.*

Demonstração: Sabemos que todo espaço compacto e metrizável é segundo contável, o que prova uma das afirmações. Para a recíproca, pelo Teorema 32.3 em [17], todo espaço compacto e Hausdorff é normal e portanto regular. Além disso, por hipótese, Y é segundo contável, logo pelo Teorema da metrização de Urysohn, Y é metrizável. □

É imediato ver que todo espaço segundo contável é também *separável*, isto é, possui um conjunto denso contável. Uma consequência quase direta de todos os resultados citados acima é dada no próximo corolário.

Corolário 4.1.11. *Se Y é um espaço compacto e Hausdorff, tal que C_Y é incontável, então Y não é metrizável.*

Demonstração: Basta notar que se C_Y é incontável então Y não é segundo contável (pois não é separável) e pelo Corolário 4.1.10, Y não é metrizável. □

De forma prática, podemos resumir os últimos resultados no seguinte esquema:

$$\boxed{Y \text{ compacto e Hausdorff}}$$

$$\boxed{Y \text{ é metrizável}} \Rightarrow \boxed{Y \text{ é } 2^{\text{o}} \text{ contável}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} Y \text{ possui um} \\ \text{subconjunto} \\ \text{denso e contável} \end{array}}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{C_Y \text{ é incontável}} \\ \Downarrow \\ \boxed{D_Y \text{ incontável}} \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} Y \text{ NÃO possui} \\ \text{um subconjunto} \\ \text{denso e contável} \end{array}} \Rightarrow \boxed{Y \text{ não é metrizável}}$$

Figura 7 – Esquema dos resultados auxiliares.

A topologia de $\mathcal{X}(K)$

Vamos expor aqui alguns resultados sobre o espaço das ordens de um corpo F. Em primeiro lugar, ressaltamos que a topologia de *Harrison* no espaço das ordens $\mathcal{X}(F)$ está relacionada aos *anéis de Witt* de um corpo (veja [4]). Porém, vamos apresentar uma maneira mais direta de se obter essa topologia. A principal referência do que vem a seguir é a seção 6 do capítulo 8 do livro [14].

Vamos assumir que F é um corpo formalmente real. Seja $\{-1,1\}^{\dot{F}}$ o conjunto das funções $f : \dot{F} \longrightarrow \{-1,1\}$. Note que cada ordem P em $\mathcal{X}(F)$ pode ser associada à uma função $f_P \in \{-1,1\}^{\dot{F}}$, onde $f_P(a) = 1$ se $a \underset{P}{>} 0$ e $f_P(a) = -1$ se $a \underset{P}{<} 0$. Isso mostra que $\mathcal{X}(F)$ está "mergulhado" em $\{-1,1\}^{\dot{F}}$.

Vamos dar a $\{-1,1\}$ a topologia discreta. Podemos pensar em $\{-1,1\}^{\dot{F}}$ como sendo o produto

$$\prod_{a \in \dot{F}} \{-1,1\}.$$

Dessa forma, podemos considerar em $\{-1,1\}^{\dot{F}}$ a topologia produto. Segue-se que $\mathcal{X}(F)$ é um espaço topológico, cujos abertos são da forma $A \cap \mathcal{X}(F)$, onde A é um aberto de $\{-1,1\}^{\dot{F}}$ (com a topologia produto). Esta é por definição, a topologia de *Harrison* em $\mathcal{X}(F)$.

Explicitamente, temos que

$$H_{a,\varepsilon} = \{f : \dot{F} \longrightarrow \{-1,1\} \mid f(a) = \varepsilon\}, \;\; a \in \dot{F}, \;\; \varepsilon \in \{-1,1\}$$

é um aberto sub-básico de $\{-1,1\}^{\dot{F}}$. Temos que,

$$H_{-a,\varepsilon} = \{f : \dot{F} \longrightarrow \{-1,1\} \mid f(-a) = \varepsilon\} = \{-1,1\}^{\dot{F}} \setminus H_{a,\varepsilon}.$$

Isto é, o complementar de $H_{a,\varepsilon}$ também é aberto. Portanto, os abertos da sub-básicos da topologia de Harrison são ao mesmo tempo abertos e fechados. Neste ponto, vale observar que

$$H(a) = H_{a,1} \cap \mathcal{X}(F) = \{P \in \mathcal{X}(F) \mid a \in P, \forall a \in \dot{F}\},$$

formam uma sub-base para a topologia em $\mathcal{X}(F)$. Note que podemos tomar $\varepsilon = 1$, pois $H(-a) = H_{a,-1}$. É claro que $H(1) = \mathcal{X}(F)$ e $H(-1) = \emptyset$.

Algumas propriedades topológicas de $\{-1,1\}^{\dot{F}}$, aparecem de forma natural. Observe que, pelo *Teorema de Tychonoff*, $\{-1,1\}^{\dot{F}}$ é compacto. Além disso, temos que $\{-1,1\}^{\dot{F}}$ é Hausdorff. Outra característica topológica é dada pelo Teorema 6.5 em [19], onde é provado que $\{-1,1\}^{\dot{F}}$ é totalmente desconexo. Levando em consideração a topologia de Harrison em $\mathcal{X}(F)$ e as observações que acabamos de fazer, é possível provar que

Teorema 4.1.12. *O espaço $\mathcal{X}(F)$ com a topologia de Harrison é um espaço topológico Booleano.*

A demonstração é feita, mostrando que $\mathcal{X}(F)$ é um subconjunto fechado de $\{-1,1\}^{\dot{F}}$, veja o Teorema 6.3 de [14].

É natural nos perguntar sobre quais outros espaços Booleanos podem ser visto como o espaço das ordens de algum corpo. A resposta é: todos! A saber, no artigo [4] encontramos o resultado (Teorema 5),

Teorema 4.1.13. *Todo espaço Booleano X é homeomorfo ao espaço $\mathcal{X}(F)$ para algum corpo formalmente real F.*

A topologia de $M(F)$

Novamente consideremos F um corpo realmente fechado. Utilizaremos $(M(F),\tau)$ para indicar o espaço $M(K)$ com a topologia quotiente, induzida pela topologia de Harrisson em $\mathcal{X}(R)$. Nosso objetivo nessa seção, é dar uma justificativa sobre como ela surgiu. Como referência, utilizamos o Capítulo 9 em [15]. Fica implícito que as demonstrações podem ser encontradas na referência indicada.

Comecemos por estudar as funções do espaço topológico $M(F)$.

Teorema 4.1.14. *Para qualquer $a \in F$, a aplicação $e_a : M(F) \longrightarrow \mathbb{R}_\infty$, $\lambda_P \mapsto \lambda_P(a)$ é contínua em $M(F)$.*

Relembremos que o anel de holomorfia de F é dado por:

$$\mathcal{H}_F = \bigcap_{P \in \mathcal{X}(F)} A(P).$$

O próximo lema será útil na demonstração de que $(M(F), \tau)$ é Hausdorff.

Lema 4.1.15. *Sejam ξ_1, $\xi_2 \in M(F)$. Se $\xi_1 \neq \xi_2$, então existe $a \in \mathcal{H}_F$ tal que $e_a(\xi_1) \neq e_a(\xi_2)$.*

Teorema 4.1.16. *$(M(F), \tau)$ é Hausdorff.*

Demonstração: Sejam $\xi_1 \neq \xi_2$ em $M(F)$. Considere $a \in \mathcal{H}_F$ tal que $e_a(\xi_1) \neq e_a(\xi_2)$. Agora, tomemos I_1 e I_2 intervalos abertos disjuntos, que contém $e_a(\xi_1)$ e $e_a(\xi_2)$. Pelo Teorema 4.1.14, $e_a^{-1}(I_1)$ é aberto. O mesmo vale para $e_a^{-1}(I_2)$. Segue-se também que estes abertos são disjuntos. Portanto, $(M(F), \tau)$ é Hausdorff. □

Corolário 4.1.17. *A função $\lambda : \mathcal{X}(F) \longrightarrow M(F)$ é uma aplicação fechada.*

Com esses resultados pode-se mostrar que:

Teorema 4.1.18. *A topologia τ em $M(F)$ coincide com a topologia menos fina τ' na qual todas as funções $\{e_a : M(F) \longrightarrow \mathbb{R}_\infty \mid a \in \mathcal{H}_F\}$ são contínuas.*
Uma subbase para esta topologia é dado pelos conjuntos

$$U(a) = \{\xi \in M(F) \mid \xi(a) > 0\}, \text{ para } a \in \mathcal{H}_F.$$

Note que diferente dos conjuntos de Harrison $H(a)$, não temos que $U(a)$ é aberto e fechado. Com efeito, o complementar de $U(a)$ é o conjunto $\{\xi \in M(F) \mid \xi(a) \leqslant 0\}$. A princípio, esse conjunto pode inclusive não ser aberto. Como já mencionado, também não temos evidências de que $M(F)$ seja totalmente desconexo. Por exemplo, $M(\mathbb{R})$ possui apenas um ponto e $M(\mathbb{R}(X))$ é homeomorfo à um círculo, logo são espaços conexos. É claro que com a topologia quociente, $M(F)$ é compacto.

Analogamente ao Teorema 4.1.13, gostaríamos de saber quais espaços X, compactos e Hausdorff, podem ser vistos como o espaço de R-lugares para algum corpo formalmente real R. Em outras palavras, dado X compacto e Hausdorff, existe R formalmente real, tal que $M(R) \cong X$? Ainda não existe resposta para essa pergunta. Alguns resultados à respeito deste tópico podem ser encontrados em [6].

Referências

[1] Basu, S. Pollack, R. Roy. M F.: *Algorithms in Real Algebraic Geometry*, volume 2.

[2] Brown, Ron: *Real places and ordered fields*. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1(4):633–636, 1971.

[3] Brown, Ron: *Real-valued places on the function field of an algebraic curve*. Houston J. Math, páginas 227–243, 1980.

[4] Craven, Thomas C: *The Boolean space of orderings of a field*. Transactions of the American mathematical Society, 209:225–235, 1975.

[5] Efrat, Ido: *Valuations, Orderings, and Milnor K-Theory*. Número 124.

[6] Efrat, Ido e Katarzyna Osiak: *Topological spaces as spaces of R-places*. Journal of Pure and Applied Algebra, 215(5):839–846, 2011.

[7] Elman, R, TY Lam e AR Wadsworth: *Orderings under field extensions*. J. reine angew. Math, 306:7–27, 1979.

[8] Engler, Antonio J e Alexander Prestel: *Valued fields*. Springer Science & Business Media, 2005.

[9] Gondard, D.: *On R-places and related topics*. julho 2011.

[10] Huneke, Craig e Irena Swanson: *Integral closure of ideals, rings, and modules*, volume 13. Cambridge University Press, 2006.

[11] Jacobson, Nathan: *Lectures In Abstract Algebra; Volume 3: Theory Of Fields And Galois Theory*, páginas 270–316.

[12] Knebusch, Manfred, Alex Rosenberg e Roger Ware: *Structure of Wittrings, quotients of abelian grouprings, and orderings of fields*. Bulletin of the American Mathematical Society, 77(2):205–210, 1971.

[13] Kuhlmann, Franz Viktor, Michał Machura e Katarzyna Osiak: *Metrizability of Spaces of -places of Function Fields of Transcendence Degree 1 Over Real Closed Fields*. Communications in Algebra, 39(9):3166–3177, 2011.

[14] Lam, Tsit Yuen: *Introduction to Quadratic Forms Over Fields*, volume 67. American Mathematics Soc.

[15] Lam, Tsit Yuen: *Orderings, valuations and quadratic forms*, volume 52. American Mathematical Soc., 1983.

[16] Lang, Serge: *The theory of real places.* Annals of Mathematics, páginas 378–391, 1953.

[17] Munkres, James: *Topology.* Pearson Education, 2014.

[18] Novacoski, Josnei: *The structure of spaces of valuations and the local uniformization problem.* Tese de Doutoramento, University of Saskatchewan, 2013.

[19] Prestel, Alexander: *Lectures on formally real fields*, volume 1093. Springer, 2007.